

DIEGO PEREIRA BOTELHO

**DESENVOLVIMENTO DE UM PROCESSADOR
NUMÉRICO BASEADO NO MÉTODO
DOS ELEMENTOS FINITOS NO DOMÍNIO DO TEMPO**

**FLORIANÓPOLIS
2010**

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
EM ENGENHARIA ELÉTRICA

**DESENVOLVIMENTO DE UM PROCESSADOR
NUMÉRICO BASEADO NO MÉTODO
DOS ELEMENTOS FINITOS NO DOMÍNIO DO TEMPO**

Dissertação submetida à Universidade Federal de Santa Catarina como
parte dos requisitos para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia
Elétrica

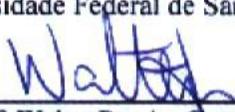
DIEGO PEREIRA BOTELHO

Florianópolis, março de 2010.

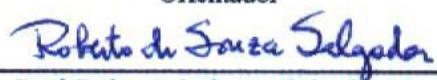
DESENVOLVIMENTO DE UM PROCESSADOR NUMÉRICO BASEADO NO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS NO DOMÍNIO DO TEMPO

Diego Pereira Botelho

'Esta Dissertação foi julgada adequada para a obtenção do Título de Mestre em Engenharia Elétrica, Área de Concentração em *Eletromagnetismo e Dispositivos Eletromagnéticos*, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Santa Catarina.'



Prof. Walter Pereira Carpes Jr., Dr.
Orientador

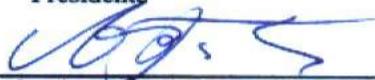


Prof. Roberto de Souza Salgado, Dr.
Coordenador do Programa de Pós-Graduação
em Engenharia Elétrica

Banca examinadora:



Prof. Walter Pereira Carpes Jr., Dr.
Presidente



Prof. João Pedro Assumpção Bastos, Dr.
Co-orientador



Prof. Patrick Kuo-Peng, Dr.



Prof. Charles Borges de Lima, Dr.



Prof. Hugo Armando Dominguez Almaguer, Dr.

AGRADECIMENTOS

Aos meus orientadores, Prof. Walter Pereira Carpes Jr. e Prof. João Pedro Assumpção Bastos, pela assistência, incentivo, confiança e amizade.

Ao professor e amigo Claudio Enrique Fernández Rodríguez, certamente o maior responsável pela escolha deste caminho que me propiciou um grande crescimento pessoal e profissional.

Ao Prof. Mauricio Valencia Ferreira da Luz por sua amizade, constante apoio, interesse e disposição em colaborar.

Aos meus amigos e colegas do GRUCAD pela ótima convivência, estímulo, contribuições, respeito e confiança que sempre demonstraram.

Aos demais amigos, fisicamente próximos ou distantes, que sempre mantiveram contato e que me fazem lembrar que além das equações de Maxwell existem outras coisas boas na vida.

Ao suporte financeiro da CAPES, ao longo destes dois anos de trabalho.

E, acima de tudo, aos meus pais, José Orlando e Ana Lucia, e ao meu irmão, Vinicius, pelo constante apoio, incentivo, preocupação, extrema confiança e principalmente pela sólida base familiar que me proporcionaram por toda vida.

Resumo da Dissertação apresentada à UFSC como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica

DESENVOLVIMENTO DE UM PROCESSADOR NUMÉRICO BASEADO NO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS NO DOMÍNIO DO TEMPO

Diego Pereira Botelho

Março/2010

Orientador: Walter Pereira Carpes Jr., Dr.

Co-orientador: João Pedro Assumpção Bastos, Dr.

Área de concentração: Eletromagnetismo e Dispositivos Eletromagnéticos

Palavras-chaves: método dos elementos finitos, domínio do tempo, cavidades ressonantes, eletromagnetismo computacional, estabilidade incondicional.

Número de páginas: 78.

RESUMO: A elaboração de um sistema para simulação computacional de problemas de eletromagnetismo em altas frequências é abordada neste trabalho. O sistema desenvolvido associa o *software* NX I-deas (pré-processamento/pós-processamento) e um processador numérico baseado no método dos elementos finitos no domínio do tempo. Os procedimentos envolvidos na obtenção, a partir das equações de Maxwell, da equação diferencial que modela o problema de propagação de ondas e o desenvolvimento desse modelo até o nível de implementação computacional são descritos. Para a discretização temporal, foi empregado o método de Newmark, que leva a um esquema incondicionalmente estável. Técnicas relacionadas ao desempenho computacional, empregadas na implementação do programa, são apresentadas e analisadas de forma sucinta. A validação do programa desenvolvido foi realizada através de simulações de problemas de cavidades ressonantes, sendo os resultados obtidos através das simulações comparados a resultados calculados analiticamente ou extraídos de outros trabalhos científicos. O sistema desenvolvido foi capaz de fornecer resultados com uma boa precisão com baixos custos computacionais.

Abstract of Dissertation presented to UFSC as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master in Electrical Engineering

**DEVELOPMENT OF A NUMERICAL PROCESSOR BASED ON
THE FINITE ELEMENTS METHOD IN TIME DOMAIN**

Diego Pereira Botelho

March/2010

Advisor: Walter Pereira Carpes Jr., Dr.

Co-advisor: João Pedro Assumpção Bastos, Dr.

Area of Concentration: Electromagnetism and Electromagnetic Devices.

Keywords: finite elements method, time domain, resonant cavities, computational electromagnetism, unconditional stability.

Number of pages: 78.

ABSTRACT: The development of a system for computational simulation of electromagnetic problems at high frequencies is discussed in this work. The developed system combines software NX I-deas (preprocessing/post-processing) and a numeric processor based on the finite element method in time domain. The procedures involved in obtaining, from Maxwell's equations, the differential equation that models the problem of wave propagation and the development of this model to the level of computational implementation are described. For the temporal discretization, the Newmark method was employed, leading to an unconditionally stable scheme. Techniques related to computational performance, used in the implementation of the program, are presented and discussed briefly. The validation of the program was accomplished through simulations of resonant cavities' problems, and the results obtained from simulations compared to results calculated analytically or taken from other scientific works. The system developed was able to provide results with good accuracy with low-cost computing.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO GERAL	1
2. CONCEITOS BÁSICOS DE ELETROMAGNETISMO	5
2.1. EQUAÇÕES DE MAXWELL	5
2.2. LEIS DE COMPORTAMENTO DOS MATERIAIS	6
2.3. CONDIÇÕES DE TRANSMISSÃO DE CAMPOS.....	7
2.3.1. Interface entre dois meios quaisquer	7
2.3.2. Interface entre dois meios dielétricos	8
2.3.3. Interface com um condutor perfeito.....	8
2.3.4. Interface com uma parede magnética	9
3. MODELAGEM E RESOLUÇÃO DO PROBLEMA	10
3.1. EQUAÇÃO DE ONDA	10
3.2. MÉTODO DOS RESÍDUOS PONDERADOS	12
3.3. MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	13
3.4. DISCRETIZAÇÃO TEMPORAL: MÉTODO DE NEWMARK	20
4. ASPECTOS COMPUTACIONAIS.....	24
4.1. MONTAGEM DO SISTEMA ALGÉBRICO GLOBAL.....	28
4.1.1. Identificação de arestas.....	28
4.1.2. Indexação dos sistemas elementares no sistema global.....	33
4.2. ARMAZENAMENTO DAS MATRIZES GLOBAIS E APLICAÇÃO DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO	35
4.2.1. Método de armazenamento das matrizes globais.....	35
4.2.2. Aplicação das condições de contorno	37
4.3. ALGORITMO DE RESOLUÇÃO DO SISTEMA LINEAR.....	39
5. VALIDAÇÃO DO PROGRAMA.....	44
5.1. CAVIDADE RESSONANTE CILÍNDRICA.....	44
5.2. CAVIDADE RESSONANTE RETANGULAR.....	56
5.3. CAVIDADE RESSONANTE RETANGULAR PARCIALMENTE PREENCHIDA.....	62
5.4. CAVIDADE RESSONANTE CILÍNDRICA PARCIALMENTE PREENCHIDA.....	67
6. CONSIDERAÇÕES FINAIS	72
7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	75

1. INTRODUÇÃO GERAL

A solução de problemas físicos em geral pode ser obtida através da resolução do equacionamento que modela o fenômeno, sujeito às condições de contorno do problema. Problemas físicos que envolvem campos elétricos e/ou magnéticos são modelados pelas Equações de Maxwell. Devido à dificuldade envolvida em se considerar fatores como o grande número de variáveis e geometrias complexas, resolver analiticamente as equações de Maxwell nem sempre é viável para situações práticas. Dependendo do problema, algumas simplificações podem ser realizadas com a definição de parâmetros que não representam a realidade física, mas sim uma aproximação razoável dessa. Porém, em problemas de eletromagnetismo, especialmente, devido à natureza de grandezas como os campos elétricos e magnéticos, que são invisíveis, simplificações do problema real são difíceis de serem definidas – e, quando definidas, nem sempre levam a representações satisfatórias da realidade.

Com a evolução dos sistemas computacionais, o uso de métodos numéricos para resolução de problemas físicos se tornou cada vez mais comum. Em geral, os métodos numéricos baseiam-se na discretização dos domínios do problema e na resolução de equações algébricas obtidas a partir das equações diferenciais que regem o fenômeno.

O Grupo de Concepção e Análise de Dispositivos Eletromagnéticos (GRUCAD) realiza pesquisa e desenvolvimento na área de cálculo computacional de campos eletromagnéticos desde sua fundação, em 1984. A grande maioria dos trabalhos realizados no laboratório é voltada ao método dos elementos finitos (*Finite Element Method* – FEM) aplicados a problemas de eletrotécnica. O método dos elementos finitos baseia-se na divisão do domínio de cálculo em subdomínios chamados *elementos* em que a incógnita do problema é calculada em função de graus de liberdade e funções de forma. A grande vantagem desse método é permitir naturalmente em sua formulação o uso de uma malha com elementos não regulares, propiciando uma discretização espacial versátil com uma boa representação de problemas com superfícies curvas e geometrias complexas.

Para a resolução de problemas de propagação de ondas eletromagnéticas – foco deste trabalho – foram desenvolvidas no GRUCAD algumas teses e dissertações abordando diferentes métodos numéricos.

FACCIONI FILHO [1,2], FIRMINO [3] e FERREIRA [4] desenvolveram trabalhos empregando o método de modelagem por linhas de transmissão (*Transmission-Line Method – TLM*). Esse método resolve problemas eletromagnéticos através da analogia com circuitos elétricos. O TLM baseia-se na equivalência entre as equações de Maxwell e as equações de tensão e corrente em uma malha de linhas de transmissão de dois fios contínua. A principal característica desse método é a formulação simples e sua facilidade de implementação para uma grande gama de aplicações [5].

I. LIMA [6] desenvolveu um trabalho utilizando o método das diferenças finitas no domínio da frequência, enquanto TRAVASSOS [7] e C. LIMA [8] desenvolveram trabalhos com o método das diferenças finitas no domínio do tempo (*Finite Difference – Time Domain – FDTD*). O método FDTD baseia-se na resolução explícita das equações de Maxwell na sua forma diferencial, sendo os campos elétricos e magnéticos calculados alternadamente no tempo. Assim como o TLM, o método FDTD é um método bastante simples em sua formulação original, com a vantagem de representar a resolução direta das equações de Maxwell – o que o torna um método bastante didático. Tanto o método TLM quanto o FDTD, por serem métodos de domínio temporal, apresentam a vantagem da possibilidade da obtenção de resultados em uma larga faixa de frequências com uma única simulação, o que pode ser obtido com a escolha adequada do sinal de alimentação do problema e com a posterior aplicação da transformada de Fourier na resposta temporal simulada. Em contrapartida, estes métodos – incluindo o método das diferenças finitas no domínio da frequência – apresentam como principal limitação o fato de se basearem na discretização do domínio de cálculo em células regulares, o que dificulta a representação de superfícies curvas e geometrias complexas [9].

Ainda tratando de problemas de propagação de ondas, FERREIRA [10] aplica o método dos elementos finitos no domínio da frequência (*Finite Element – Frequency Domain – FEFD*) para a análise de guias de onda retangulares e GRUBISIC [11] utiliza o método de traçado de raios (*Ray Tracing – RT*) para a predição de campos em ambientes interiores. Salienta-se que o método RT não é considerado um método numérico de resolução de equações diferenciais, mas sim um método assintótico em que o cálculo dos campos é obtido por meio da óptica geométrica e da teoria uniforme da difração.

De todos os trabalhos realizados na área de altas frequências no GRUCAD, percebe-se que nenhum abordou uma técnica de análise

temporal que oferecesse um bom grau de flexibilidade em termos de discretização espacial.

O objetivo principal deste trabalho é a elaboração de um processador numérico baseado em elementos finitos no domínio do tempo (*Finite Elements – Time Domain – FETD*), de forma a se associar a eficiência do método dos elementos finitos, em termos de discretização espacial, às vantagens de um método de análise temporal. A execução desse tipo de trabalho se tornou mais viável a partir do momento em que o laboratório adquiriu um *software* comercial para a geração de malhas de elementos finitos. Este *software*, chamado NX I-deas [12], é um sistema do tipo CAD (*Computer Aided Design*) que apresenta um módulo de pré-processamento numérico para elementos finitos bastante robusto (várias opções de tipos de elementos finitos, qualidade de malha, estatísticas, etc.). O NX I-deas apresenta também uma parte de processamento numérico relativo a elementos finitos aplicados à mecânica e um pós-processador com várias opções de exibição de resultados. Dessa forma, a implementação de um processador numérico FETD constitui, juntamente com o pré e pós-processamento disponibilizados pelo NX I-deas, uma ferramenta de análise de problemas eletromagnéticos de altas frequências completa, cobrindo todas as etapas envolvidas no processo de simulação computacional.

Além disso, o trabalho visa fornecer uma base para estudos futuros da aplicação da técnica dos elementos finitos no domínio do tempo na resolução de problemas eletromagnéticos de altas frequências e da utilização do NX I-deas como pré e pós-processador. Para isso serão apresentados no trabalho alguns aspectos de implementação computacional e serão também disponibilizadas as bibliotecas de funções (*scripts* de leitura de malha, gravação de resultados, resolução de sistema linear, etc.) que foram criadas para implementação do programa.

Este trabalho está dividido em seis capítulos:

O capítulo atual posiciona o trabalho no contexto do laboratório de pesquisa, delineando seus objetivos.

O capítulo dois apresenta, após um breve histórico, as equações de Maxwell e suas relações constitutivas, passando em seguida as condições de transmissão de campos na interface entre materiais distintos.

No terceiro capítulo é apresentada a modelagem proposta e o seu desenvolvimento até o nível de implementação, passando pela apresentação do método dos resíduos ponderados, do método dos elementos finitos e do método de Newmark para discretização temporal das operações diferenciais.

Alguns detalhes relevantes de implementação do *software* são mostrados no capítulo quatro. As técnicas utilizadas no armazenamento dos dados e na resolução do sistema algébrico gerado pelo método dos elementos finitos são apresentadas.

Apresenta-se, no capítulo cinco, uma série de resultados obtidos através do *software* implementado, comparando-se a referências analíticas ou numéricas e explicitando a interferência de alterações de densidade da malha de elementos finitos e do incremento temporal utilizado nos resultados obtidos.

Finalmente, no capítulo seis, são feitas as análises e discussões finais sobre o trabalho realizado e são apresentadas sugestões de estudos futuros.

2. CONCEITOS BÁSICOS DE ELETROMAGNETISMO

Todo e qualquer dispositivo elétrico e/ou magnético tem seu funcionamento fundamentado em entidades físicas como campos elétricos, campos magnéticos e cargas elétricas estáticas ou em movimento. O eletromagnetismo é a área da física responsável pelo estudo dessas entidades e de suas relações entre si [13].

2.1. Equações de Maxwell

O comportamento físico das grandezas eletromagnéticas pode ser modelado através das equações de Maxwell. Esse conjunto de equações sintetiza a teoria eletromagnética de forma concisa. O físico escocês James Clerk Maxwell (1831 - 1879) foi responsável pelo estabelecimento das relações entre equações experimentais e teóricas que haviam sido obtidas anteriormente por outros cientistas como André-Marie Ampère (1775 - 1836), Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855), Michel Faraday (1791 - 1867) e Heinrich Friedrich Emil Lenz (1804 - 1865). A contribuição de Maxwell a esse conjunto de equações foi a adição do termo relativo à corrente de deslocamento, acrescentado a equação de Ampère, que relacionava, até então, somente corrente elétrica e campo magnético. Esta contribuição de Maxwell sugeria a existência de ondas eletromagnéticas, o que só foi comprovado experimentalmente por Heinrich Rudolf Hertz (1857 - 1894), em 1888 [13].

A forma como hoje são normalmente apresentadas as equações de Maxwell não é a mesma que o próprio cientista apresentou. Foi somente após o trabalho do matemático inglês Oliver Heaviside (1850 - 1925), precursor da análise vetorial, que as equações de Maxwell passaram a ser representadas da forma a seguir (forma diferencial):

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_v \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0. \quad (2.4)$$

A equação (2.1) representa a lei de Ampère – que relaciona o campo magnético \vec{H} [A/m] e a densidade de corrente \vec{J} [A/m²] – com a adição do termo relativo à corrente de deslocamento (derivada temporal da densidade de campo elétrico \vec{D} [C/m²]). Essa equação explicita o fato de que elementos de corrente elétrica e/ou variações temporais de campo elétrico produzem campo magnético rotacional.

Na lei de Faraday, equação (2.2), tem-se a relação entre o campo elétrico \vec{E} [V/m] e a indução magnética \vec{B} [T]. Esta equação evidencia que a variação temporal de uma indução magnética produz um campo elétrico rotacional. A lei de Lenz é contemplada nessa mesma equação através do sinal negativo, que indica o fato de o campo elétrico produzido gerar uma indução magnética oposta à indução imposta.

As equações (2.3) e (2.4) representam, respectivamente, a lei de Gauss e a lei de Gauss do magnetismo. Essas leis estão associadas à inexistência de monopólos magnéticos (fluxo magnético conservativo) e ao fato de que cargas elétricas – na equação (2.3) representadas pela densidade volumétrica de carga ρ_v [C/m³] – gerarem campo elétrico divergente.

2.2. Leis de comportamento dos materiais

A modelagem completa de fenômenos relacionados ao eletromagnetismo exige, além das quatro equações de Maxwell, as leis de comportamento dos materiais (ou relações constitutivas), que estabelecem a relação entre campos elétricos e magnéticos e o meio em que estão inseridos. As relações constitutivas são dadas pelas seguintes equações [14]:

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (2.5)$$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \quad (2.6)$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}, \quad (2.7)$$

onde μ [H/m] é a permeabilidade magnética do material, tal que $\mu = \mu_r \mu_0$, em que μ_r é a sua permeabilidade relativa e μ_0 é a permeabilidade magnética do vácuo (de valor numérico $4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m); ε [F/m] é a permissividade elétrica do material, tal que $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$, em que ε_r é sua permissividade relativa e ε_0 é a permissividade elétrica do vácuo (de valor numérico aproximado $8,854 \cdot 10^{-12}$ F/m); e σ [S/m] é uma constante que representa a condutividade elétrica do meio.

É importante salientar que neste trabalho foram considerados meios lineares, isotrópicos e não dispersivos.

2.3. Condições de transmissão de campos

Em regiões de interface entre meios diferentes existem algumas condições as quais os campos elétrico e/ou magnético obedecem.

A Figura 2.1 ilustra uma situação geral de fronteira entre dois meios de características eletromagnéticas diferentes [15].

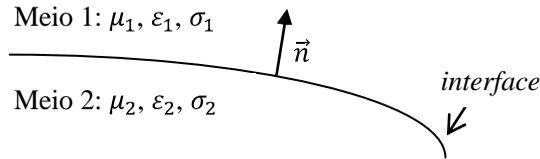


Figura 2.1: Interface entre dois meios genéricos.

A seguir são apresentadas as condições de transmissão para alguns casos particulares.

2.3.1. Interface entre dois meios quaisquer

Neste caso mais geral, podem-se obter a partir das equações de Maxwell as seguintes relações:

$$\vec{n} \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0 \quad (2.8)$$

$$\vec{n} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{j}_l \quad (2.9)$$

$$\vec{n} \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \rho_s \quad (2.10)$$

$$\vec{n} \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0, \quad (2.11)$$

em que \vec{n} é o vetor normal à fronteira orientado do meio 2 para o meio 1, \vec{J}_l [A/m] é a densidade linear de corrente na interface e ρ_s [C/m²] é a densidade superficial de cargas também na interface.

2.3.2. Interface entre dois meios dielétricos

Se os meios não são condutores perfeitos, pode-se mostrar que \vec{J}_l e ρ_s são nulos para campos não estáticos [13]. Neste caso, as relações de transmissão tornam-se:

$$\vec{n} \times \vec{E}_1 = \vec{n} \times \vec{E}_2 \quad (2.12)$$

$$\vec{n} \times \vec{H}_1 = \vec{n} \times \vec{H}_2 \quad (2.13)$$

$$\vec{n} \cdot \vec{D}_1 = \vec{n} \cdot \vec{D}_2 \quad (2.14)$$

$$\vec{n} \cdot \vec{B}_1 = \vec{n} \cdot \vec{B}_2. \quad (2.15)$$

Este conjunto de equações exprime a continuidade das componentes tangenciais dos campos elétrico e magnético, bem como das componentes normais da indução magnética e da densidade de campo elétrico através da fronteira entre os meios.

2.3.3. Interface com um condutor perfeito

Se o meio 2 for um condutor perfeito, os campos \vec{E}_2 e \vec{H}_2 são nulos (pois $\sigma \rightarrow \infty$ e a profundidade de penetração é zero). Desta maneira tem-se:

$$\vec{n} \times \vec{E}_1 = 0 \quad (2.16)$$

$$\vec{n} \times \vec{H}_1 = \vec{j}_l \quad (2.17)$$

$$\vec{n} \cdot \vec{D}_1 = \rho_s \quad (2.18)$$

$$\vec{n} \cdot \vec{B}_1 = 0. \quad (2.19)$$

A equação (2.16) indica que o campo elétrico é normal a um condutor perfeito (componentes tangenciais nulas). Na prática, esta condição pode ser utilizada para descrever o comportamento do campo eletromagnético na superfície de um bom condutor, como metal, por exemplo. Além disso, pode-se utilizar esta condição para imposição de planos de simetria que permitem a redução do domínio de cálculo em certos casos.

2.3.4. Interface com uma parede magnética

As paredes magnéticas, que não possuem equivalente físico, são os duais das paredes elétricas. São também utilizadas para representar planos de simetria dos campos. As condições para o campo magnético e para a densidade de campo elétrico são dadas por:

$$\vec{n} \times \vec{H}_1 = 0 \quad (2.20)$$

$$\vec{n} \cdot \vec{D}_1 = 0. \quad (2.21)$$

Isso mostra que as componentes tangenciais do campo magnético são nulas em uma parede magnética.

3. MODELAGEM E RESOLUÇÃO DO PROBLEMA

A modelagem consiste na definição do equacionamento que permita a resolução do problema físico, neste caso, a propagação de ondas eletromagnéticas.

Uma vez definida a modelagem do problema, deve-se estabelecer o método de resolução utilizado para que se possa obter a solução da equação diferencial sujeita às condições de contorno estabelecidas. Neste trabalho, será aplicado um método numérico para a resolução do problema – o método dos elementos finitos.

A seguir será apresentado o equacionamento do problema de propagação de onda, bem como a formulação para a sua resolução através do método de elementos finitos.

3.1. Equação de onda

Para se obter uma modelagem em função somente de um dos campos (neste trabalho o campo elétrico), foi realizada uma manipulação algébrica sobre as equações de Maxwell. Primeiramente, a equação (2.2) foi rearranjada, considerando a relação dada pela equação (2.5) e que a permeabilidade magnética é constante no tempo. A equação (2.2) rearranjada é apresentada a seguir:

$$\frac{1}{\mu}(\nabla \times \vec{E}) = -\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}. \quad (3.1)$$

Aplicando-se o operador rotacional sobre a equação (3.1) e considerando o fato de que a derivação temporal e o operador rotacional são independentes, obtém-se a seguinte equação:

$$\nabla \times \left[\frac{1}{\mu}(\nabla \times \vec{E}) \right] = -\frac{\partial(\nabla \times \vec{H})}{\partial t}. \quad (3.2)$$

Observa-se que o termo $(\nabla \times \vec{H})$ corresponde ao lado esquerdo da equação (2.1). Desta forma, substituindo-se (2.1) em (3.2) obtém-se:

$$\nabla \times \left[\frac{1}{\mu} (\nabla \times \vec{E}) \right] + \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} + \frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2} = 0. \quad (3.3)$$

De maneira a permitir uma excitação através de uma densidade de corrente no domínio de cálculo, acrescentou-se um termo de *densidade de corrente imposta* \vec{J}_{imp} [A/m²] à equação de densidade de corrente dada em (2.7):

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} + \vec{J}_{imp}. \quad (3.4)$$

Substituindo-se (2.6) e (3.4) em (3.3) e considerando que a permissividade elétrica e a condutividade elétrica não apresentam nenhuma variação temporal, chega-se a forma final da equação diferencial que modela a propagação de ondas eletromagnéticas em função do campo elétrico para meios não dispersivos, lineares e isotrópicos:

$$\nabla \times \left[\frac{1}{\mu} (\nabla \times \vec{E}) \right] + \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{J}_{imp}}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (3.5)$$

A resolução desse modelo será realizada em um domínio Ω delimitado por um conjunto de fronteiras Γ de características dadas de acordo com as condições de contorno que serão detalhadas mais adiante. Esse domínio de estudo – que pode ser heterogêneo em termos de propriedades eletromagnéticas – está representado na Figura 3.1 [15].

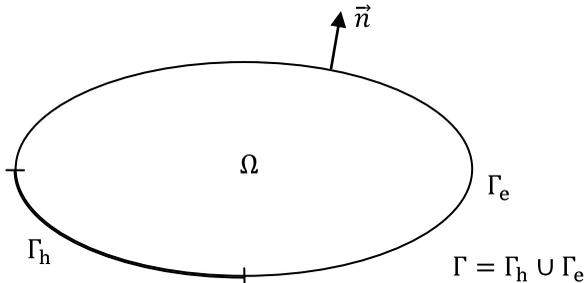


Figura 3.1: Domínio de estudo.

Os dois tipos de fronteiras do domínio de cálculo mostrados na figura anterior são relativos às condições impostas aos campos elétrico e/ou magnético para a resolução do problema. Dessa forma, tem-se:

- condição de Dirichlet (Γ_e): corresponde aos valores de campo elétrico na fronteira. Nas condições de Dirichlet aplicadas neste trabalho, ditas *homogêneas*, as componentes tangenciais do campo elétrico nas fronteiras são nulas (paredes elétricas): $\vec{n} \times \vec{E}|_{\Gamma_e} = 0$;
- condição de Neumann (Γ_h): esta condição, dita natural, é imposta implicitamente pela formulação, correspondendo às paredes magnéticas, em que as componentes tangenciais do campo magnético são nulas: $\vec{n} \times \vec{H}|_{\Gamma_h} = 0$ ou $\vec{n} \times \nabla \times \vec{E}|_{\Gamma_h} = 0$.

Por fim, é necessária a definição do espaço funcional em que será procurada a solução. Sendo definido que as componentes tangenciais do campo elétrico são contínuas, a busca da solução se dará no espaço funcional $\vec{H}(rot, \Omega)$. Esse é um espaço de Sobolev de campos vetoriais de quadrado somável cujo rotacional é igualmente somável: $\vec{H}(rot, \Omega) = \{\vec{u} \in \vec{L}^2(\Omega) : \nabla \times \vec{u} \in \vec{L}^2(\Omega)\}$ [15,16].

3.2. Método dos resíduos ponderados

A resolução da equação diferencial (3.5) não pode ser realizada diretamente pelo método dos elementos finitos, uma vez que esse método deve ser aplicado a uma equação integral relacionada ao comportamento físico do problema. Uma das formas de se obter esta equação integral é o emprego do *método dos resíduos ponderados* que consiste no estabelecimento de um procedimento numérico em que se multiplica o *resíduo* (a diferença entre o resultado exato e o resultado numérico) por uma *função peso*, integrando-se esse produto em todo o domínio de cálculo e igualando-o a zero.

Para a aplicação do método dos resíduos ponderados, considera-se um campo elétrico \vec{E}' que corresponda a uma solução aproximada da equação (3.5), de maneira que sua aplicação gere um resíduo \vec{R} .

$$\nabla \times \left[\frac{1}{\mu} (\nabla \times \vec{E}') \right] + \sigma \frac{\partial \vec{E}'}{\partial t} + \frac{\partial \vec{J}_{imp}}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}'}{\partial t^2} = \vec{R}. \quad (3.6)$$

Pelo método dos resíduos ponderados, a seguinte operação deve ser imposta:

$$\int_{\Omega} \vec{V} \cdot \vec{R} \, d\Omega = 0, \quad (3.7)$$

em que \vec{V} é a função peso.

Substituindo-se a equação (3.6) em (3.7), obtém-se a seguinte equação integral:

$$\int_{\Omega} \vec{V} \cdot \left\{ \nabla \times \left[\frac{1}{\mu} (\nabla \times \vec{E}') \right] \right\} d\Omega + \int_{\Omega} \vec{V} \cdot \left(\sigma \frac{\partial \vec{E}'}{\partial t} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \vec{V} \cdot \left(\frac{\partial \vec{J}_{imp}}{\partial t} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \vec{V} \cdot \left(\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}'}{\partial t^2} \right) d\Omega = 0. \quad (3.8)$$

A escolha da função peso define um caso particular do método dos resíduos ponderados. Como é usual no procedimento para resolução numérica através do método dos elementos finitos, neste trabalho as funções peso são definidas como sendo iguais às funções de interpolação vetorial, que serão mostradas a seguir. Essa escolha particular das funções peso define o *método de Galerkin*.

3.3. Método dos elementos finitos

Este método numérico consiste na divisão do domínio de estudo em um número finito de partes chamadas *elementos*. Dentro de cada elemento – em que as propriedades físicas são constantes – a incógnita do problema é escrita em termos de um número finito de graus de liberdade e de funções de base locais (funções de interpolação), que permitem a obtenção dos valores em qualquer ponto. As funções de interpolação são geralmente polinomiais e sua ordem está ligada à forma como a incógnita varia espacialmente. Dependendo do tipo de elemento

(nodal, de aresta, de face, etc), os graus de liberdade podem ser associados aos diferentes entes geométricos dos elementos (vértices, arestas, faces ou volume). A escolha do tipo de elemento está relacionada à natureza física da incógnita (potenciais, vetores de campo, vetores de fluxo, etc).

A aplicação do método dos elementos finitos transforma a equação diferencial que rege o problema em um sistema de equações algébricas. Este método possibilita a análise de problemas de geometria complexas contendo materiais diversos.

De maneira geral, a resolução por elementos finitos inclui as seguintes etapas:

- obtenção da equação integral do problema;
- discretização do domínio de cálculo através de uma malha de elementos finitos (gerada por um *software* de pré-processamento numérico – neste trabalho o NX I-deas), em que os campos são escritos em termos de um número finito de graus de liberdade e funções de base local;
- cálculo do sistemas algébricos de cada elemento que serão combinados em um sistema matricial global $[A][x] = [b]$, em que $[A]$ é uma matriz geralmente esparsa;
- resolução do sistema algébrico para obtenção de uma solução aproximada do problema.

Neste trabalho, devido à natureza da incógnita definida para a modelagem (vetor campo elétrico, que tem continuidade tangencial), foi escolhida a resolução por *elementos finitos de aresta*.

No método dos elementos finitos de aresta, o campo vetorial a ser calculado no problema – campo elétrico, neste caso – é escrito em termos das funções de interpolação (ou *funções de base*) associadas às arestas do elemento:

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^N \vec{W}_i e_i, \quad (3.9)$$

onde:

$\Rightarrow N$ é o número de arestas do elemento;

- $\Rightarrow e_i$ [V] é a incógnita do problema, correspondendo ao valor da integral de linha de \vec{E} ao longo da aresta i ($e_i = \int_{l_i} \vec{E} \cdot d\vec{l}$);
 $\Rightarrow \vec{W}_i$ [m⁻¹] é a função de interpolação vetorial associada à aresta i .

De uma forma mais genérica, pode-se dizer, a partir da equação (3.9), que pelo método dos elementos finitos de aresta o campo vetorial elétrico é obtido como uma combinação das funções vetoriais \vec{W}_i ponderadas pelos valores associados às arestas e_i , que são as incógnitas do sistema algébrico.

Esse método, que associa as incógnitas do problema às arestas dos elementos, apresenta algumas vantagens em relação à utilização de *elementos finitos nodais* (incógnitas associadas aos vértices) [16-20]:

- os elementos de aresta impõem a continuidade tangencial dos vetores de campo, o que é coerente às características físicas do campo elétrico. Consequentemente, as fronteiras entre meios de propriedades físicas diferentes são levadas em conta naturalmente;
- as condições de Dirichlet podem ser facilmente impostas. Para descrever um condutor elétrico perfeito, por exemplo, em que o campo elétrico tangencial é nulo, é suficiente igualar a zero as circulações de campo nas arestas pertencentes ao condutor;
- as singularidades dos campos nas vizinhanças de vértices e ângulos das geometrias são melhor modeladas devido a imposição da continuidade tangencial, o que permite variações abruptas de campos nessas regiões.

Devido às vantagens na discretização de geometrias complexas [21], utilizou-se malha tetraédrica, cuja configuração de cada elemento é dada conforme a figura a seguir:

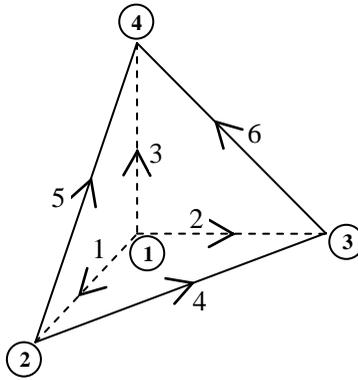


Figura 3.2: Configuração de elemento tetraédrico.

A Figura 3.2 mostra a numeração das arestas, dos vértices e a direção e sentido que cada função de base terá em sua aresta correspondente. Esse sentido foi definido como sendo do vértice de menor numeração em direção ao vértice de maior numeração, a fim de se estabelecer um padrão, simplificando o processo de montagem do sistema algébrico global [17].

Para as funções de base, adotou-se interpolação linear, em função da menor complexidade de implementação e também da possibilidade de se compensar a precisão através da densidade da malha (com prejuízo, obviamente, da geração de um sistema algébrico global de ordem mais alta). Desta forma, a função de base \vec{W}_i , dirigida do vértice a para o vértice b é dada por:

$$\vec{W}_i = \phi_a \nabla \phi_b - \phi_b \nabla \phi_a, \quad (3.10)$$

em que $\phi_{a,b}$ são funções de forma associadas aos vértices do tetraedro, valendo 1 em seu vértice correspondente e 0 nos demais vértices [17]. Em um sistema de coordenadas (u, v, p) com base ortogonal $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, considerando um elemento tetraédrico normalizado com seu vértice 1 na origem e com suas arestas – de tamanho unitário – 1, 2 e 3 sobre os eixos u , v e p , respectivamente, as funções de base $\phi_{a,b}$ referentes a este elemento podem ser escritas como [17]:

$$\Phi_1 = 1 - u - v - p \quad (3.11)$$

$$\Phi_2 = u \quad (3.12)$$

$$\Phi_3 = v \quad (3.13)$$

$$\Phi_4 = p. \quad (3.14)$$

Dessa forma, a função de interpolação vetorial \vec{W}_i fica definida de maneira a satisfazer a seguinte relação:

$$\int_{\text{aresta } j} \vec{W}_i \cdot d\vec{l} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}, \quad (3.15)$$

Uma vez que as funções de interpolação vetorial definidas neste trabalho são lineares, é necessária a adoção de uma medida para se evitarem operações de diferenciação espacial duplas, como acontece no primeiro termo da equação (3.8), em que o operador rotacional é aplicado duas vezes sobre o campo elétrico: $\nabla \times \left[\frac{1}{\mu} (\nabla \times \vec{E}') \right]$. Esta forma da equação que modela o sistema é chamada de *forma forte*.

Para obter-se a *forma fraca* do problema, utiliza-se a primeira identidade vetorial de Green:

$$\int_{\Omega} \vec{A} \cdot (\nabla \times \nabla \times \vec{B}) \, d\Omega = \int_{\Omega} (\nabla \times \vec{A}) \cdot (\nabla \times \vec{B}) \, d\Omega + \int_{\Gamma(\Omega)} \vec{A} \cdot (\vec{n} \times \nabla \times \vec{B}) \, d\Gamma. \quad (3.16)$$

Aplicando a primeira identidade vetorial de Green e considerando que as propriedades eletromagnéticas do meio são constantes dentro de um mesmo elemento (o que permite excluir a permeabilidade magnética

de operações diferenciais espaciais – o rotacional, neste caso), chega-se a:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\mu} \left[\int_{\Omega} (\nabla \times \vec{v}) \cdot (\nabla \times \vec{E}') d\Omega + \int_{\Gamma(\Omega)} \vec{v} \cdot (\vec{n} \times \nabla \times \vec{E}') d\Gamma \right] + \\ & \int_{\Omega} \vec{v} \cdot \left(\sigma \frac{\partial \vec{E}'}{\partial t} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \vec{v} \cdot \left(\frac{\partial \vec{J}_{imp}}{\partial t} \right) d\Omega + \\ & \int_{\Omega} \vec{v} \cdot \left(\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}'}{\partial t^2} \right) d\Omega = 0, \end{aligned} \quad (3.17)$$

que corresponde à forma fraca da equação (3.8).

É importante ressaltar que o termo relativo à integral de superfície é nulo, devido às condições de contorno impostas, conforme mostrado anteriormente.

Substituindo o campo \vec{E}' em (3.17) pela relação (3.9) e aplicando-se o método de Galerkin ($\vec{v} = \vec{W}_i$), chega-se a equação que modela o problema dentro de um elemento finito e que leva ao sistema algébrico elementar:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N e_i^k \int_{\Omega_k} \frac{1}{\mu_k} (\nabla \times \vec{W}_i^k) \cdot (\nabla \times \vec{W}_j^k) d\Omega_k + \\ & \sum_{i=1}^N \frac{de_i^k}{dt} \int_{\Omega_k} \sigma_k \vec{W}_i^k \cdot \vec{W}_j^k d\Omega_k + \\ & \sum_{i=1}^N \frac{d^2 e_i^k}{dt^2} \int_{\Omega_k} \varepsilon_k \vec{W}_i^k \cdot \vec{W}_j^k d\Omega_k = \\ & - \int_{\Omega_k} \vec{W}_j^k \cdot \left(\frac{\partial \vec{J}_{imp}^k}{\partial t} \right) d\Omega_k, \end{aligned} \quad (3.18)$$

em que k identifica o elemento e $j = 1, N$.

Reescrevendo (3.18) em forma matricial simplificada, tem-se:

$$\frac{d^2}{dt^2} [\mathbf{C}][\mathbf{e}] + \frac{d}{dt} [\mathbf{G}][\mathbf{e}] + [\mathbf{R}][\mathbf{e}] = \frac{d}{dt} [\mathbf{f}], \quad (3.19)$$

em que $[\mathbf{e}]$ é o vetor de incógnitas: $[\mathbf{e}] = [e_1 \ e_2 \ \dots \ e_N]^T$; $[\mathbf{f}]$ é o vetor fonte; $[\mathbf{C}]$, $[\mathbf{G}]$ e $[\mathbf{R}]$ são, respectivamente, as matrizes de *capacitâncias*, *condutâncias* e *relutâncias*.

O vetor fonte e as matrizes de capacitâncias, condutâncias e relutâncias para um elemento k tetraédrico ($N = 6$), ficam na seguinte forma:

$$[\mathbf{f}]^k = - \int_{\Omega_k} [\vec{W}_1^k \cdot \vec{j}_{imp}^k \ \dots \ \vec{W}_6^k \cdot \vec{j}_{imp}^k]^T d\Omega_k \quad (3.20)$$

$$[\mathbf{C}]^k = \varepsilon_k \int_{\Omega_k} \begin{bmatrix} \vec{W}_1^k \cdot \vec{W}_1^k & \dots & \vec{W}_1^k \cdot \vec{W}_6^k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \vec{W}_6^k \cdot \vec{W}_1^k & \dots & \vec{W}_6^k \cdot \vec{W}_6^k \end{bmatrix} d\Omega_k \quad (3.21)$$

$$[\mathbf{G}]^k = \sigma_k \int_{\Omega_k} \begin{bmatrix} \vec{W}_1^k \cdot \vec{W}_1^k & \dots & \vec{W}_1^k \cdot \vec{W}_6^k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \vec{W}_6^k \cdot \vec{W}_1^k & \dots & \vec{W}_6^k \cdot \vec{W}_6^k \end{bmatrix} d\Omega_k \quad (3.22)$$

$$[\mathbf{R}]^k = \frac{1}{\mu_k} \int_{\Omega_k} \begin{bmatrix} (\nabla \times \vec{W}_1^k) \cdot (\nabla \times \vec{W}_1^k) & \dots & (\nabla \times \vec{W}_1^k) \cdot (\nabla \times \vec{W}_6^k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\nabla \times \vec{W}_6^k) \cdot (\nabla \times \vec{W}_1^k) & \dots & (\nabla \times \vec{W}_6^k) \cdot (\nabla \times \vec{W}_6^k) \end{bmatrix} d\Omega_k. \quad (3.23)$$

É importante ressaltar que:

- a resolução das integrais presentes nas parcelas das matrizes elementares pode ser feita com relativa simplicidade utilizando integração numérica ou mesmo integração analítica, uma vez que foram utilizadas funções de base lineares. Neste trabalho optou-se pela

resolução utilizando o conceito de coordenadas locais (elementos de referência) e integração analítica [17];

- as matrizes $[\mathbf{C}]$, $[\mathbf{G}]$ e $[\mathbf{R}]$ são invariáveis no tempo, sendo simétricas, definido-positivas e bem condicionadas [17];
- a combinação das matrizes elementares em um sistema matricial global gera matrizes esparsas com as mesmas propriedades das matrizes elementares e de dimensão igual ao número de arestas do problema;
- o termo $[\mathbf{b}]$ do sistema matricial global $[\mathbf{A}][\mathbf{x}] = [\mathbf{b}]$, é composto pelo vetor fonte combinado às condições de contorno do problema eletromagnético e aos termos relativos ao método de discretização temporal.

3.4. Discretização temporal: Método de Newmark

Existem alguns métodos que podem ser utilizados para a resolução da equação (3.19) passo a passo no tempo, todos baseados na aproximação das derivadas temporais por diferenças finitas. Dentre os métodos mais utilizados, pode-se citar o método das diferenças centrais, o algoritmo θ [22,23] e o método de Newmark [24,25]. A vantagem deste último é a possibilidade de se obter um esquema incondicionalmente estável (independência entre discretização espacial e temporal) com uma precisão de ordem dois [15].

O método de Newmark utiliza as seguintes aproximações:

$$e_{(n+1)\Delta t} = e_{n\Delta t} + \Delta t \frac{de_{n\Delta t}}{dt} + \Delta t^2 \frac{1 - 2\beta}{2} \frac{d^2e_{n\Delta t}}{dt^2} + \Delta t^2 \beta \frac{d^2e_{(n+1)\Delta t}}{dt^2} \quad (3.24)$$

$$\frac{de_{(n+1)\Delta t}}{dt} = \frac{de_{n\Delta t}}{dt} + \Delta t(1 - \gamma) \frac{d^2e_{n\Delta t}}{dt^2} + \Delta t\gamma \frac{d^2e_{(n+1)\Delta t}}{dt^2}, \quad (3.25)$$

em que Δt é o incremento de discretização temporal e n é o número da amostra temporal, tal que o tempo seja $t = n\Delta t$; β e γ são parâmetros que controlam a estabilidade e a precisão do esquema.

O rearranjo e a combinação das equações (3.24) e (3.25) permite chegar às seguintes equações:

$$\frac{de_{n\Delta t}}{dt} = \frac{\gamma e_{(n+1)\Delta t} + (1 - 2\gamma)e_{n\Delta t} + (\gamma - 1)e_{(n-1)\Delta t}}{\Delta t} \quad (3.26)$$

$$e_{n\Delta t} = \beta e_{(n+1)\Delta t} + \left(\frac{1}{2} + \gamma - 2\beta\right)e_{n\Delta t} + \left(\frac{1}{2} - \gamma + \beta\right)e_{(n-1)\Delta t}. \quad (3.27)$$

Em conjunto a estas relações é usada ainda a aproximação de primeira ordem por diferenças centrais da derivada temporal de segunda ordem:

$$\frac{d^2e_{n\Delta t}}{dt^2} = \frac{e_{(n+1)\Delta t} + 2e_{n\Delta t} + e_{(n-1)\Delta t}}{\Delta t^2}. \quad (3.28)$$

A aplicação de (3.26), (3.27) e (3.28) em (3.19) produz a equação que deve ser implementada e resolvida computacionalmente:

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{[\mathbf{C}]}{\Delta t^2} + \frac{\gamma[\mathbf{G}]}{\Delta t} + \beta[\mathbf{R}] \right\} [\mathbf{e}]_{(n+1)\Delta t} = \\ & \left\{ \frac{2[\mathbf{C}]}{\Delta t^2} + \frac{(2\gamma - 1)[\mathbf{G}]}{\Delta t} + (2\beta - \gamma - 1/2)[\mathbf{R}] \right\} [\mathbf{e}]_{(n)\Delta t} + \\ & \left\{ \frac{-[\mathbf{C}]}{\Delta t^2} + \frac{(1 - 2\gamma)[\mathbf{G}]}{\Delta t} + (\gamma - \beta - 1/2)[\mathbf{R}] \right\} [\mathbf{e}]_{(n-1)\Delta t} + \\ & \frac{\gamma[\mathbf{f}]_{(n+1)\Delta t} + (1 - 2\gamma)[\mathbf{f}]_{n\Delta t} + (\gamma - 1)[\mathbf{f}]_{(n-1)\Delta t}}{\Delta t}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Com a utilização de $\gamma = 0,5$ e $\beta \geq 0,25$, a resolução de (3.29) passo a passo no tempo gera um esquema incondicionalmente estável [26]. No entanto, verificou-se que a utilização desta forma de aplicação do método causa o aparecimento de respostas espúrias em baixas frequências.

A figura a seguir mostra de forma qualitativa o efeito da aplicação deste método.

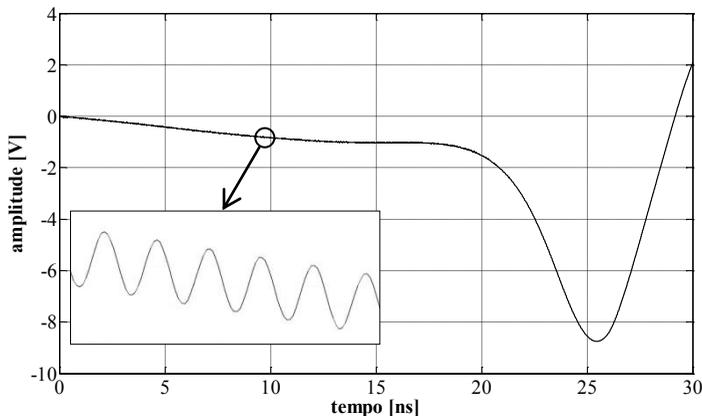


Figura 3.3: Resposta temporal de uma cavidade ressonante com componente de baixa frequência não física.

A Figura 3.3 mostra a monitoração de um sinal sinusoidal modulado por um pulso gaussiano que foi injetado no interior de uma cavidade ressonante. Percebe-se que o sistema entra em regime permanente para uma das componentes do espectro do pulso (parte detalhada no gráfico) ao mesmo tempo em que sofre a ação de uma componente de frequência bastante baixa (representada pela variação do valor médio do sinal sinusoidal ao longo do tempo). Essa componente não foi excitada no interior da cavidade sendo, portanto, um erro numérico.

Entretanto, verificou-se que, com a filtragem do sinal de baixa frequência, obtém-se um resultado bastante preciso do problema.

Em [27] é apresentada uma nova maneira de aplicação do método de Newmark que resolve o problema das respostas espúrias de baixas frequências. Primeiramente é realizada uma integração temporal da equação (3.19), de maneira a se obter:

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{C}][e] + [\mathbf{G}][e] + \int_{-\infty}^t [\mathbf{R}][e]dt = [\mathbf{f}]. \quad (3.30)$$

A resolução de (3.30) em lugar de (3.19) evita o aparecimento de respostas espúrias de baixas frequências [27].

Para aplicação do método de Newmark em (3.30), é realizada uma troca de variáveis, em que $w = \int_{-\infty}^t e dt$, de forma a se obter:

$$\frac{d^2}{dt^2}[\mathbf{C}][\mathbf{w}] + \frac{d}{dt}[\mathbf{G}][\mathbf{w}] + [\mathbf{R}][\mathbf{w}] = [\mathbf{f}]. \quad (3.31)$$

Com a criação de uma nova variável $u = \frac{de}{dt}$ e a aplicação de (3.26), (3.27) e (3.28) com $\gamma = 0,5$ e $\beta = 0,25$ [27], chega-se, após alguma manipulação algébrica, a seguinte sequência de equações recursivas que devem ser resolvidas computacionalmente:

$$\left\{ [\mathbf{C}] + \frac{\Delta t[\mathbf{G}]}{2} + \frac{\Delta t^2[\mathbf{R}]}{4} \right\} [\mathbf{u}]_{n\Delta t} =$$

$$[\mathbf{f}] - [\mathbf{G}][\mathbf{e}]_{(n-1/2)\Delta t} - [\mathbf{R}][\mathbf{w}]_{n\Delta t} \quad (3.32)$$

$$[\mathbf{e}]_{(n+1/2)\Delta t} = [\mathbf{e}]_{(n-1/2)\Delta t} + \Delta t[\mathbf{u}]_{n\Delta t} \quad (3.33)$$

$$[\mathbf{w}]_{(n+1)\Delta t} = [\mathbf{w}]_{n\Delta t} + \Delta t[\mathbf{e}]_{(n+1/2)\Delta t}. \quad (3.34)$$

A resolução do conjunto de equações (3.32) – (3.34) leva a resultados satisfatórios, com a supressão de respostas espúrias sem a necessidade de filtragem. Os problemas eletromagnéticos resolvidos neste trabalho, cujos resultados aparecem no capítulo 5, utilizaram este último método de discretização temporal.

4. ASPECTOS COMPUTACIONAIS

Neste capítulo são apresentadas, em linhas gerais, algumas informações concernentes à implementação do *software* desenvolvido.

A Figura 4.1 ilustra o funcionamento do sistema de simulação computacional composto pelos módulos de pré e pós-processamento do NX I-deas e o processador numérico FETD.

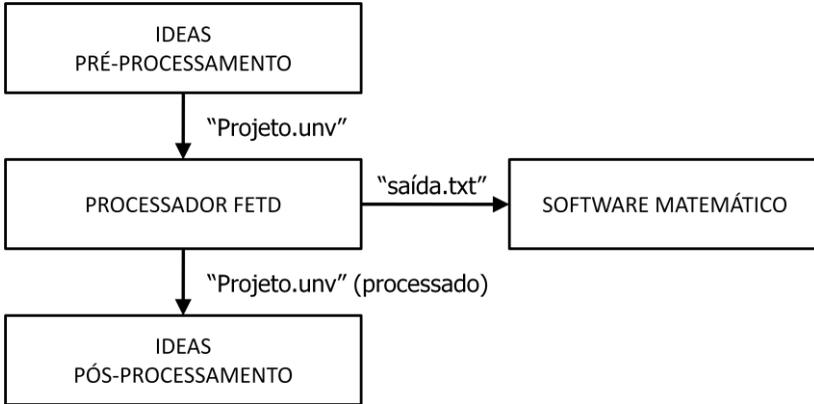


Figura 4.1: Sistema de simulação desenvolvido.

A integração entre o NX I-deas e o processador numérico se dá através de arquivos de extensão "unv" (*universal files*). Estes arquivos armazenam informações da malha de elementos finitos em um formato universal, codificadas em ASCII. Este padrão de arquivos é utilizado como interface entre programas ou para transferência de informações entre diferentes tipos de computadores [28].

Uma vez que as análises realizadas neste trabalho baseiam-se na monitoração de apenas alguns pontos do domínio de estudo ao longo do tempo, foi criada uma segunda opção de saída de dados. Nesta opção, os valores de campo elétrico em pontos de interesse são gravados em um arquivo texto. Este arquivo pode facilmente ser analisado em aplicativos matemáticos. De outra forma, a análise temporal feita sobre arquivos "unv" pode se tornar inviável, uma vez que a gravação de cada passo de tempo nesse tipo de saída tende a gerar arquivos extremamente grandes (são acrescentados ao arquivo "unv" de entrada os valores de campo no baricentro de cada elemento da malha).

O fluxograma mostrado na Figura 4.2 representa o funcionamento simplificado do módulo de processamento FETD desenvolvido.

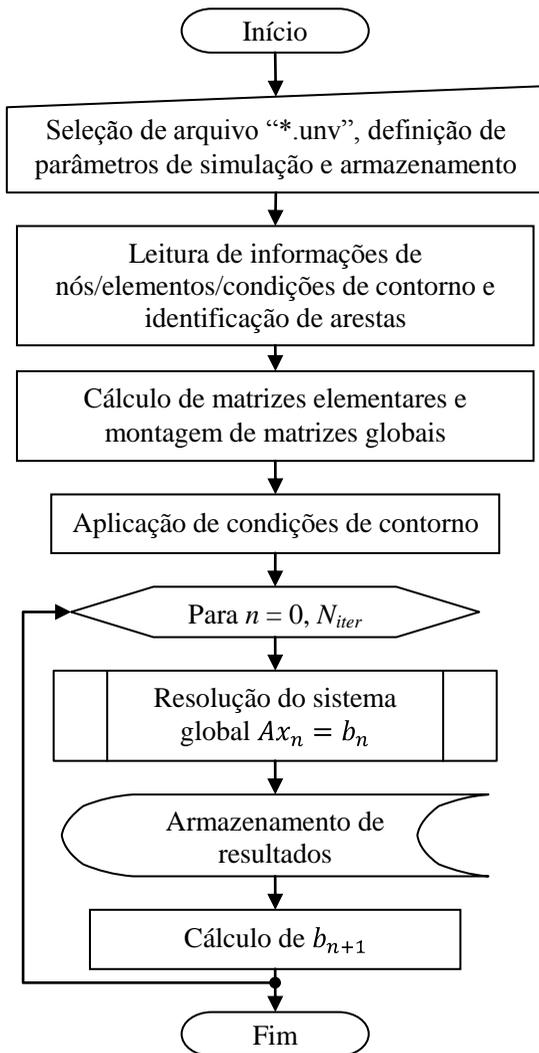


Figura 4.2: Funcionamento do processador numérico implementado.

O *software* foi desenvolvido em linguagem C, apresentando interface com usuário em modo texto.

Utilizou-se o aplicativo *freeware wxDev-C++* [29] para compilação do código em ambiente Microsoft, e o aplicativo *GCC* [30], também *freeware*, para compilação em ambiente Linux.

Ao ser executado, o programa solicita ao usuário a inserção do nome do arquivo “unv”, dos parâmetros de simulação (incremento temporal, número de iterações temporais, função de excitação, etc.) e de armazenamento (nome dos arquivos de texto com resultados e estatísticas da simulação).

Após a inserção das informações de entrada, o *software* passa à verificação da consistência dos dados recebidos e transfere o conteúdo referente às unidades de medida do projeto, nós, elementos e condições de contorno para a memória.

Cabe ressaltar que as informações sobre as propriedades eletromagnéticas dos materiais ficam armazenadas em um arquivo auxiliar. A associação entre os materiais definidos no processo de geração da malha na etapa de pré-processamento e as propriedades descritas no arquivo auxiliar é feita através do “número do material” (*material number*). O *material number* é um dos atributos determinados pelo usuário na criação da lista de materiais utilizados, na etapa de pré-processamento.

Ainda nesse estágio de aquisição de dados relativos à malha, é feita a atribuição de rótulos às arestas dos elementos (identificação de cada aresta e associação ao par de nós que a define). O processo de atribuição destes rótulos envolve a verificação de cada elemento, em que se numeram novas arestas encontradas. A sequência de numeração das arestas é estabelecida pela numeração dos nós, conforme o padrão adotado (Figura 3.2).

A quantidade de arestas rotuladas (N_{ar}) define a ordem do sistema matricial global, não correspondendo necessariamente ao número final de incógnitas (N_{inc}) desse sistema. Dependendo das condições de contorno impostas, o valor de integral de linha do campo elétrico nas arestas pertencentes aos limites do domínio podem ser impostos como um dado de entrada do problema (condição de contorno de Dirichlet).

Acrescenta-se também que de acordo com a forma como as condições de contorno de Dirichlet são aplicadas ao equacionamento, é possível reduzir-se a ordem do sistema matricial global de N_{ar} para N_{inc} [17]. Apesar de proporcionar uma pequena redução em termos de alocação de memória e tempo de manipulação do sistema matricial, esse procedimento não foi implementado no sistema aqui desenvolvido, em que se priorizou a funcionalidade ao desempenho.

Realizada a identificação das arestas passa-se ao processo de cálculo de matrizes elementares, através do equacionamento desenvolvido no capítulo 3. Os valores das matrizes elementares são acrescentados ao sistema matricial global nas posições endereçadas pela numeração atribuída às arestas da malha. Esse procedimento e o esquema de identificação das arestas serão ilustrados na seção 4.1.

A técnica utilizada para o armazenamento das matrizes globais será apresentada na seção 4.2.1.

Depois de concluída a montagem do sistema global, aplicam-se as condições de contorno. A forma como as condições de contorno foram aplicadas neste trabalho é mostrada na seção 4.2.2.

O cálculo das incógnitas do sistema foi feito através de um método iterativo de resolução de sistemas lineares. Neste trabalho foi implementado o método dos gradientes conjugados com o uso de pré-condicionamento. A seção 4.3 apresenta o algoritmo implementado.

Os resultados obtidos através da execução da rotina de resolução do sistema linear são armazenados de acordo com o esquema definido pelo usuário. Para a saída em arquivo texto, o usuário escolhe pontos do domínio de estudo onde os valores de campo elétrico serão monitorados. Na configuração da gravação dos resultados no arquivo “unv”, o usuário escolhe os passos de tempo em que deseja armazenar os valores de campo.

Além dos resultados relacionados à solução do problema eletromagnético, o programa gera ainda um relatório em um arquivo texto com algumas informações sobre o processo de simulação em geral. O relatório inclui informações como, por exemplo, quantidade de nós, elementos, arestas, comprimento médio das arestas, volume médio dos elementos, materiais, tempo de execução, etc.

A etapa final de cada iteração temporal consiste na atualização do lado direito do sistema global. Essa atualização baseia-se no cálculo do vetor $[b]$ de acordo com as operações descritas nas equações (3.32), (3.33) e (3.34).

Todas as simulações apresentadas no capítulo seguinte foram executadas em um computador pessoal equipado com processador Pentium Dual-Core de 2,5 GHz de *clock* e com 3 GB de memória RAM. Apesar do processador utilizado apresentar dois núcleos, o programa foi desenvolvido para processamento simples.

O tempo de execução de cada simulação é calculado automaticamente pelo processador numérico, correspondendo ao tempo demandado para a execução do número de iterações temporais definido pelo usuário (tempo correspondente ao laço temporal do programa).

Para que os tempos de execução de cada simulação pudessem ser comparados, ou seja, para que houvesse um nível de precisão razoável nesse parâmetro, a execução do *software* foi feita com uma quantidade reduzida de processos concorrentes (somente processos básicos do sistema operacional), acrescentando-se ainda que o sistema desenvolvido foi executado com o nível mais alto de *prioridade de processamento* (parâmetro que indica ao sistema operacional qual a preferência de ocupação do processador para determinado processo em relação aos demais).

A quantidade de memória alocada para as simulações com cada malha gerada é citada ao longo dos resultados. No entanto, ressalta-se que estes valores servem somente para uma análise qualitativa, já que não foram definidos métodos precisos de avaliação deste parâmetro. Além disso, acrescenta-se que a ocupação da memória varia a cada fase da execução do programa, sendo os valores citados a seguir referentes à alocação de memória durante a execução do laço temporal.

4.1. Montagem do sistema algébrico global

4.1.1. Identificação de arestas

A composição do sistema matricial global está diretamente ligada ao esquema de identificação das arestas da malha.

Devido à adoção de um padrão de numeração e definição do sentido das arestas é possível gerar as matrizes e vetores globais simplesmente pela soma dos termos das matrizes e vetores elementares.

O processo de identificação das arestas será exemplificado para um elemento fictício, mostrado na Figura 4.3.

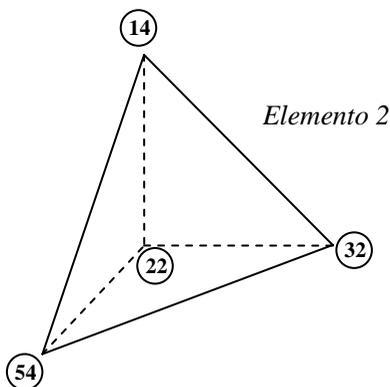


Figura 4.3: Exemplo de elemento tetraédrico com identificação dos nós.

A Figura 4.3 mostra um elemento tetraédrico com a numeração de seus nós. Supondo-se que esse elemento faça parte de uma malha de elementos finitos gerada pelo *software* de pré-processamento, seus dados de identificação estariam armazenados em um arquivo “unv”. O arquivo com as informações dessa malha fictícia, cujo elemento mostrado na Figura 4.3 fosse o segundo elemento da malha, por exemplo, traria as seguintes informações (simplificadas) relativas aos primeiros dois elementos:

elemento (<i>label</i>)	nós (<i>labels</i>)			
1	56	22	16	54
2	22	54	32	14

Figura 4.4: Fragmento de um arquivo “unv” (simplificado) relativo aos dados de elementos.

Os *labels* são os identificadores numéricos atribuídos pelo *software* pré-processador a elementos, nós, etc. As informações mostradas na Figura 4.4 são somente parte do conteúdo deste segmento do arquivo, pois as informações de elementos incluem materiais, número de nós, cor, etc [28].

A identificação das arestas começa então pelo primeiro elemento, com a organização de seus respectivos nós em ordem crescente:

Tabela 4.1-1: Nós do elemento 1 ordenados.

elemento	nó 1	nó 2	nó 3	nó 4
1	16	22	54	56

Após a ordenação dos nós, define-se também a ordem das arestas do elemento, baseada na associação entre os nós de acordo com o padrão adotado, da seguinte forma:

- 1^a aresta: nó 1 – nó 2;
- 2^a aresta: nó 1 – nó 3;
- 3^a aresta: nó 1 – nó 4;
- 4^a aresta: nó 2 – nó 3;
- 5^a aresta: nó 2 – nó 4;
- 6^a aresta: nó 3 – nó 4.

Com base na ordem das arestas, atribuem-se, então, seus rótulos.

A identificação das arestas é armazenada computacionalmente através de uma matriz *arestas*, com N_{ar} linhas e duas colunas. Cada linha desta matriz corresponde a uma aresta e cada coluna aos nós que definem a aresta. O sentido das funções de base em suas arestas correspondentes é definido do nó a para o nó b (coluna 1 e 2, respectivamente).

Como o número de arestas não é conhecido de antemão, a alocação de memória para esta matriz é feita de forma dinâmica, sob demanda (para cada nova aresta é alocada uma nova posição de memória).

A figura abaixo representa a matriz *arestas* gerada a partir da análise do elemento 1:

aresta	nó a	nó b
1	16	22
2	16	54
3	16	56
4	22	54
5	22	56
6	54	56

Figura 4.5: Matriz *arestas* gerada para o primeiro elemento (a coluna “aresta” é mostrada somente para fins didáticos, pois computacionalmente o número da aresta está vinculado à sua posição na matriz).

O procedimento realizado para a identificação das arestas do primeiro elemento repete-se para os demais elementos da malha. A diferença é que a partir do segundo elemento cada associação entre os nós para a numeração da aresta deve ser comparada com as arestas identificadas até o momento. Por exemplo, para o elemento 2, caso fossem seguidos exatamente os mesmo procedimentos do elemento 1, a seguinte configuração da matriz *arestas* seria obtida:

aresta	nó a	nó b
7	14	22
8	14	32
9	14	54
10	22	32
11	22	54
12	32	54

Figura 4.6: Matriz *arestas* (a partir da sétima linha) gerada até o segundo elemento (sem verificação de duplicatas).

Percebe-se que a linha destacada, na Figura 4.6, representa uma aresta definida pelos nós 22 e 54 que é compartilhada pelos dois primeiros elementos (aresta 4 do elemento 1). Sendo assim, uma vez que tal aresta já foi identificada, continua-se a numeração na nova aresta seguinte.

A identificação das arestas até o segundo elemento, com a exclusão da aresta compartilhada pelos elementos 1 e 2, gera a seguinte matriz *arestas*:

aresta	nó a	nó b
1	16	22
2	16	54
3	16	56
4	22	54
5	22	56
6	54	56
7	14	22
8	14	32
9	14	54
10	22	32
11	32	54

Figura 4.7: Matriz *arestas* gerada até o segundo elemento.

Por fim, o elemento 2 com suas arestas definidas conforme procedimento acima é mostrado na Figura 4.8.

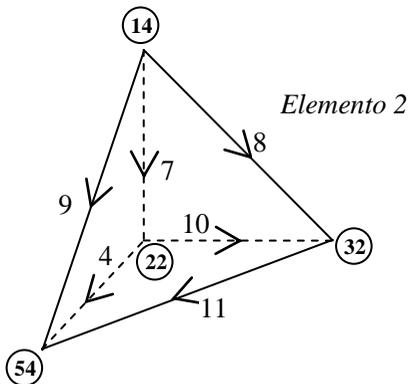


Figura 4.8: Elemento tetraédrico com as arestas numeradas e com ilustração do sentido das funções de base vetoriais segundo padrão adotado.

Neste trabalho foram criadas ainda matrizes de arestas por elemento e de arestas por nó, que facilitam a implementação de algumas rotinas no decorrer do programa, incluindo a montagem do sistema matricial global.

A seguir está representada a matriz de arestas por elemento (*aresta_el*, com N_{el} linhas e 6 colunas) para os dois elementos utilizados como exemplo anteriormente.

elemento	1 ^a	2 ^a	3 ^a	4 ^a	5 ^a	6 ^a
	aresta	aresta	aresta	aresta	aresta	aresta
1	1	2	3	4	5	6
2	7	8	9	10	4	11

Figura 4.9: Matriz *aresta_el* gerada para os dois primeiros elementos (a coluna “elemento” é mostrada para fins didáticos, pois computacionalmente o *label* do elemento está relacionado a sua posição na matriz).

4.1.2. Indexação dos sistemas elementares no sistema global

A identificação (numeração) das arestas torna possível o processo de indexação dos termos dos sistemas matriciais de cada elemento da malha no sistema matricial global.

Tomando como exemplo a matriz de relutâncias $[R]$ (equação (3.23)) de um elemento tetraédrico, tal que

$$[R] = \begin{bmatrix} r_{1,1} & \cdots & r_{1,6} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{6,1} & \cdots & r_{6,6} \end{bmatrix},$$

e a matriz de relutâncias global $[R_g]$ – parte do sistema matricial global que por sua vez representa a combinação de todas matrizes de relutâncias elementares – tal que

$$[R_g] = \begin{bmatrix} r_{g_{1,1}} & \cdots & r_{g_{1,N_{ar}}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{g_{N_{ar},1}} & \cdots & r_{g_{N_{ar},N_{ar}}} \end{bmatrix},$$

deve-se estabelecer uma lógica de mapeamento dos elementos de $[R]$ em $[R_g]$. Para isso, atribui-se aos índices locais a numeração global das arestas, através da matriz de arestas por elemento (*aresta_el*), mostrada anteriormente.

Para o elemento 2, por exemplo, os termos das duas primeiras linhas da matriz de relutância local seriam relacionados da seguinte forma aos termos da matriz de relutâncias global:

- $r_{1,1} \Rightarrow (\text{aresta_el}(2,1) = 7, \text{aresta_el}(2,1) = 7) \Rightarrow r_{g_{7,7}}$
- $r_{1,2} \Rightarrow (\text{aresta_el}(2,1) = 7, \text{aresta_el}(2,2) = 8) \Rightarrow r_{g_{7,8}}$
- $r_{1,3} \Rightarrow (\text{aresta_el}(2,1) = 7, \text{aresta_el}(2,3) = 9) \Rightarrow r_{g_{7,9}}$
- $r_{1,4} \Rightarrow (\text{aresta_el}(2,1) = 7, \text{aresta_el}(2,4) = 10) \Rightarrow r_{g_{7,10}}$
- $r_{1,5} \Rightarrow (\text{aresta_el}(2,1) = 7, \text{aresta_el}(2,5) = 4) \Rightarrow r_{g_{7,4}}$
- $r_{1,6} \Rightarrow (\text{aresta_el}(2,1) = 7, \text{aresta_el}(2,6) = 11) \Rightarrow r_{g_{7,11}}$
- $r_{2,1} \Rightarrow (\text{aresta_el}(2,2) = 8, \text{aresta_el}(2,1) = 7) \Rightarrow r_{g_{8,7}}$
- $r_{2,2} \Rightarrow (\text{aresta_el}(2,2) = 8, \text{aresta_el}(2,2) = 8) \Rightarrow r_{g_{8,8}}$
- $r_{2,3} \Rightarrow (\text{aresta_el}(2,2) = 8, \text{aresta_el}(2,3) = 9) \Rightarrow r_{g_{8,9}}$
- $r_{2,4} \Rightarrow (\text{aresta_el}(2,2) = 8, \text{aresta_el}(2,4) = 10) \Rightarrow r_{g_{8,10}}$
- $r_{2,5} \Rightarrow (\text{aresta_el}(2,2) = 8, \text{aresta_el}(2,5) = 4) \Rightarrow r_{g_{8,4}}$
- $r_{2,6} \Rightarrow (\text{aresta_el}(2,2) = 8, \text{aresta_el}(2,6) = 11) \Rightarrow r_{g_{8,11}}$

em que $\text{aresta_el}(m,n)$ indica o endereçamento, em notação de programação, da linha m (correspondente ao elemento) e da coluna n (correspondente à aresta do elemento) da matriz de arestas por elemento.

Por fim, é necessário salientar que, para garantir que a composição do sistema global seja feita simplesmente pela soma dos termos dos sistemas locais indexados como descrito, foi necessário também que a matriz jacobiana – utilizada nas transformações do sistema de coordenadas local para o sistema de coordenadas real [17] – fosse calculada com base na ordem crescente dos rótulos dos nós (conforme exemplo da Tabela 4.1-1). No entanto, devido à adoção deste padrão, o determinante desta matriz nem sempre apresenta valor positivo. Esse fato deve ser levado em consideração no cálculo dos termos dos sistemas matriciais locais, visto que, nestes casos, o determinante da jacobiana está relacionado ao volume do elemento. Dessa maneira, na implementação deste *software* foi utilizado sempre o módulo do determinante da jacobiana.

4.2. Armazenamento das matrizes globais e aplicação das condições de contorno

4.2.1. Método de armazenamento das matrizes globais

O armazenamento das matrizes globais foi realizado de forma a explorar-se suas propriedades de simetria e esparsidade, reduzindo assim os requisitos de memória RAM.

O método implementado consiste na divisão da matriz em duas partes: uma contendo os índices dos elementos não nulos e outra contendo estes elementos.

A diferença entre o método implementado e o apresentado em [17] é que neste trabalho empregou-se o conceito de alocação dinâmica de memória. Desta forma, cada linha de ambas as “matrizes” utilizadas no armazenamento de uma matriz global $[A]$ possui exatamente o comprimento necessário para armazenar os dados. De fato, seria mais correto afirmar que são criados dois arranjos de vetores do que duas matrizes.

A seguir é apresentado o exemplo de uma matriz $[A]$, esparsa e simétrica de ordem sete.

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & a_{1,3} & 0 & 0 & a_{1,6} & 0 \\ 0 & a_{2,2} & 0 & a_{2,4} & a_{2,5} & 0 & a_{2,7} \\ a_{3,1} & 0 & a_{3,3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{4,2} & 0 & a_{4,4} & 0 & 0 & a_{4,7} \\ 0 & a_{5,2} & 0 & 0 & a_{5,5} & 0 & 0 \\ a_{6,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{6,6} & a_{6,7} \\ 0 & a_{7,2} & 0 & a_{7,4} & 0 & a_{7,6} & a_{7,7} \end{bmatrix}$$

Figura 4.10: Matriz $[A]$ esparsa e simétrica (ordem 7).

Pelo método implementado a matriz mostrada na Figura 4.10 é então representada por dois arranjos de vetores. O primeiro arranjo de vetores armazena os índices, sendo chamado aqui de *ind_A*. Como a matriz é simétrica, somente os endereços dos termos não nulos da porção triangular superior da matriz original são armazenados.

Em *ind_A*, a indexação dos termos da matriz $[A]$ segue o seguinte princípio: as linhas tem correspondência direta, ou seja, a linha m de *ind_A* corresponde à linha m de $[A]$; já os valores armazenados ao

longo das posições da linha m indicam a coluna em que existe um termo não nulo na matriz original.

Como os termos diagonais sempre estarão presentes, utilizou-se a primeira posição de cada linha de *ind_A* para armazenar o seu respectivo comprimento.

A Figura 4.11 ilustra o arranjo *ind_A* gerado para o armazenamento da matriz $[A]$.

linha	<i>L</i>	coluna		
1	3	3	6	
2	4	4	5	7
3	1			
4	2	7		
5	1			
6	2	7		
7	1			

Figura 4.11: Arranjo *ind_A* (porção destacada) para matriz $[A]$ (*L* é o comprimento da linha).

O segundo arranjo de vetores armazena os valores dos termos da matriz original, seguindo o mesmo formato do arranjo de vetores de índices.

A figura a seguir mostra esse arranjo (chamado aqui de *val_A*) para a matriz $[A]$.

linha	termos não nulos			
1	$a_{1,1}$	$a_{1,3}$	$a_{1,6}$	
2	$a_{2,2}$	$a_{2,4}$	$a_{2,5}$	$a_{2,7}$
3	$a_{3,3}$			
4	$a_{4,4}$	$a_{4,7}$		
5	$a_{5,5}$			
6	$a_{6,6}$	$a_{6,7}$		
7	$a_{7,7}$			

Figura 4.12: Arranjo *val_A* (parte destacada) para a matriz $[A]$.

Ressalta-se que o comprimento das linhas de *val_A* é o exatamente o mesmo das linhas de *ind_A*.

A implementação desse método mostrou-se bastante eficaz em termos de economia de memória RAM. Verificou-se que a parcela de elementos não nulos das matrizes geradas é extremamente pequena em relação ao total de termos, estando diretamente relacionada à densidade da malha: quanto maior a densidade da malha menor é a taxa de preenchimento das matrizes globais. Este efeito se dá devido ao fato de somente os termos relativos a pares de arestas que pertencem a um mesmo elemento terem possibilidade de apresentar valores não nulos. Termos relativos a arestas de elementos diferentes são necessariamente nulos. Portanto, em malhas com uma grande quantidade de elementos existe uma grande quantidade de arestas sem conexão e, conseqüentemente, um número grande termos nulos nas matrizes globais.

As matrizes globais citadas neste item são as matrizes de relutâncias e condutâncias – necessárias para a formação e atualização a cada passo de tempo do lado direito da equação (3.32) – e o termo temporalmente independente, correspondente à soma de matrizes do lado esquerdo da equação (3.32).

4.2.2. Aplicação das condições de contorno

A aplicação de contorno segue um dos métodos apresentados em [17]. O método escolhido consiste em atribuir-se “1” ao termo diagonal referente ao elemento do vetor $[x]$ que terá seu valor definido e “0” à coluna e à linha que passam por essa diagonal.

Os termos zerados da coluna devem ser adicionados ao lado direito da equação, de maneira a manter o sistema inalterado.

Este processo apresenta a vantagem de não alterar a simetria da matriz.

A Figura 4.13 ilustra a aplicação das condições de contorno em um sistema linear composto pela matriz $[A]$ utilizada como exemplo seção anterior. Os valores definidos pela condição de contorno neste exemplo são $x_2 = X_2$ e $x_3 = X_3$.

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{1,6} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{4,4} & 0 & 0 & a_{4,7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{5,5} & 0 & 0 \\ a_{6,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{6,6} & a_{6,7} \\ 0 & 0 & 0 & a_{7,4} & 0 & a_{7,6} & a_{7,7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b'_1 - (a_{1,3}X_3) \\ X_2 \\ X_3 \\ b'_4 - (a_{4,2}X_2) \\ b'_5 - (a_{5,2}X_2) \\ b_6 \\ b'_7 - (a_{7,2}X_2) \end{bmatrix}$$

Figura 4.13: Exemplo de aplicação de condição de contorno em sistema linear.

Na Figura 4.13 os termos “ b' ” são relativos às demais parcelas que formam o lado direito do sistema, incluindo termos relativos a fontes e termos variantes no tempo, de acordo com o método de discretização temporal empregado.

Aplicando o método de armazenamento de matrizes esparsas utilizado neste trabalho, a matriz $[A]$ seria representada conforme mostrado na Figura 4.14 e na Figura 4.15, após a aplicação das condições de contorno.

linha	L	coluna		
1	2	6		
2	1			
3	1			
4	2	7		
5	1			
6	2	7		
7	1			

Figura 4.14: ind_A após aplicação das condições de contorno.

linha	termos não nulos		
1	$a_{1,1}$	$a_{1,6}$	
2	1		
3	1		
4	$a_{4,4}$	$a_{4,7}$	
5	$a_{5,5}$		
6	$a_{6,6}$	$a_{6,7}$	
7	$a_{7,7}$		

Figura 4.15: *val_A* após aplicação das condições de contorno.

Os dados dos problemas apresentados no próximo capítulo incluem a informação da parcela das matrizes globais que é armazenada após a aplicação das condições de contorno. O caso de maior taxa de preenchimento das matrizes globais apresentou pouco mais de 2% de fator de armazenamento (parâmetro que representa a parcela da matriz que é armazenada) e ocorreu em uma malha de densidade bastante baixa, com 71 elementos. Para os demais casos, este fator se manteve abaixo de 1% com alguns casos chegando a 0,012%, o que indica o alto grau de esparsidade das matrizes geradas pelo método.

4.3. Algoritmo de resolução do sistema linear

A técnica implementada para resolução iterativa do sistema linear gerado pelo método dos elementos finitos foi o método dos gradientes conjugados [17].

Este método é bastante utilizado na resolução de problemas associados a elementos finitos, sendo considerado um dos métodos mais eficientes [17].

O número de iterações necessário para a convergência do método está diretamente relacionado ao condicionamento da matriz $[A]$. Por esse motivo é comum o uso de alguma técnica de pré-condicionamento associada ao CG de maneira a diminuir o número de iterações exigido para resolução do problema.

O pré-condicionamento consiste em multiplicar ambos os lados do sistema pelo inverso de uma matriz que seja o mais próxima possível de $[A]$, conforme [31]:

$$[\mathbf{M}]^{-1}[\mathbf{A}][\mathbf{x}] = [\mathbf{M}]^{-1}[\mathbf{b}] \quad (4.1)$$

Se $[\mathbf{M}]$ fosse igual a $[\mathbf{A}]$, naturalmente o problema estaria resolvido. Contudo, o esforço computacional para calcular a inversa de $[\mathbf{A}]$ é bastante maior do que a resolução do sistema em si.

Em virtude do baixo custo computacional exigido, foi implementado o algoritmo de pré-condicionamento pela diagonal (ou pré-condicionamento de Jacobi), que consiste em utilizar $[\mathbf{M}] = \text{diag}[\mathbf{A}]$.

A seguir está representado o algoritmo do método dos gradientes conjugados com pré-condicionamento de Jacobi (JCG) [31]:

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{r}_0] &= [\mathbf{b}] - [\mathbf{A}][\mathbf{x}_0] \\
 [\mathbf{z}_0] &= [\mathbf{M}]^{-1}[\mathbf{r}_0] \\
 [\mathbf{d}_0] &= [\mathbf{z}_0] \\
 \gamma_0 &= [\mathbf{r}_0]^T[\mathbf{z}_0] \\
 k &= 0
 \end{aligned}$$

Enquanto $k < N_{CG\acute{m}ax}$, repetir:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 q_k = [\mathbf{A}][\mathbf{d}_k] \\
 \lambda_k = \frac{[\mathbf{r}_k]^T[\mathbf{z}_k]}{[\mathbf{d}_k]^T[\mathbf{q}_k]} \\
 [\mathbf{x}_{k+1}] = [\mathbf{x}_k] + \lambda_k[\mathbf{d}_k] \\
 [\mathbf{r}_{k+1}] = [\mathbf{r}_k] - \lambda_k[\mathbf{q}_k] \\
 \text{se } \|\mathbf{r}_k\|_2 < \delta, \text{ sai do la\c{c}o} \\
 [\mathbf{z}_{k+1}] = [\mathbf{M}]^{-1}[\mathbf{r}_{k+1}] \\
 \gamma_{k+1} = [\mathbf{r}_{k+1}]^T[\mathbf{z}_{k+1}] \\
 \beta_{k+1} = \frac{\gamma_{k+1}}{\gamma_k} \\
 [\mathbf{d}_{k+1}] = [\mathbf{z}_{k+1}] + \beta_{k+1}[\mathbf{d}_k] \\
 k = k + 1
 \end{array} \right.$$

Figura 4.16: Algoritmo do gradiente conjugado com pré-condicionamento de Jacobi (JCG).

No algoritmo apresentado na Figura 4.16, δ representa a tolerância do resíduo, que por sua vez indica a diferença entre a resposta exata e a resposta obtida a cada iteração do algoritmo (o princípio do

algoritmo é minimizar o resíduo). A variável $N_{CGm\acute{a}x}$ é o número limite de iterações que o método pode realizar. Os valores empregados para estes dois parâmetros no decorrer do trabalho serão citados ao longo do capítulo 5.

Um terceiro aspecto de configuração do algoritmo apresentado na Figura 4.16 é a escolha dos valores iniciais das incógnitas $[\mathbf{x}_0]$. As duas opções mais práticas são $[\mathbf{x}_0] = [0]$ e $[\mathbf{x}_0] = [\mathbf{x}_{n-1}]$, em que $[\mathbf{x}_{n-1}]$ indica os valores encontrados no passo de tempo anterior para o vetor incógnita. Estas duas opções foram testadas, não sendo encontradas diferenças substanciais em termos de tempo de execução entre uma e outra.

No entanto, percebeu-se que a escolha de $[\mathbf{x}_0] = [\mathbf{x}_{n-1}]$ se mostrou ligeiramente mais eficaz, particularmente nos casos em que as diferenças entre os valores das incógnitas não são muito acentuadas entre um passo de tempo e outro.

As figuras a seguir mostram a comparação entre as duas opções de definição de $[\mathbf{x}_0]$ para dois casos simulados na resolução do primeiro problema do capítulo 5.

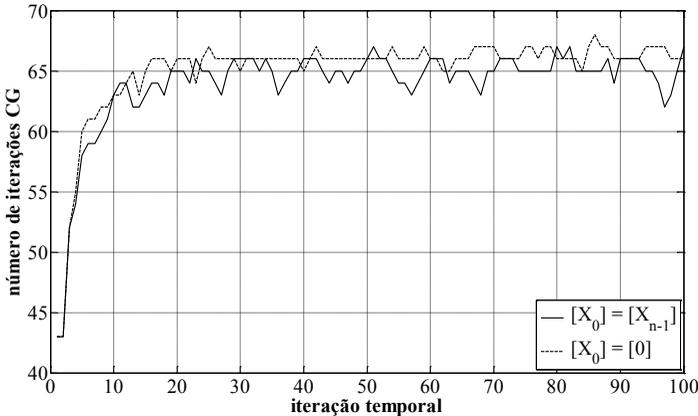


Figura 4.17: Número de iterações CG para problema 1 com malha C e $\Delta t = 3,125$ ps (linha contínua para $[\mathbf{x}_0] = [\mathbf{x}_{n-1}]$ e linha tracejada para $[\mathbf{x}_0] = [0]$).

A Figura 4.17 mostra que, neste caso, em que o incremento temporal é 20 vezes menor que o período relativo à maior frequência presente no domínio simulado, a escolha de $[\mathbf{x}_0] = [0]$ exige um número um pouco maior de iterações CG por passo de tempo do que a

escolha $[\mathbf{x}_0] = [\mathbf{x}_{n-1}]$. A média para estas 100 primeiras iterações é $M_{CG} = 63$ para $[\mathbf{x}_0] = [\mathbf{x}_{n-1}]$ e $M_{CG} = 65$ para $[\mathbf{x}_0] = [0]$.

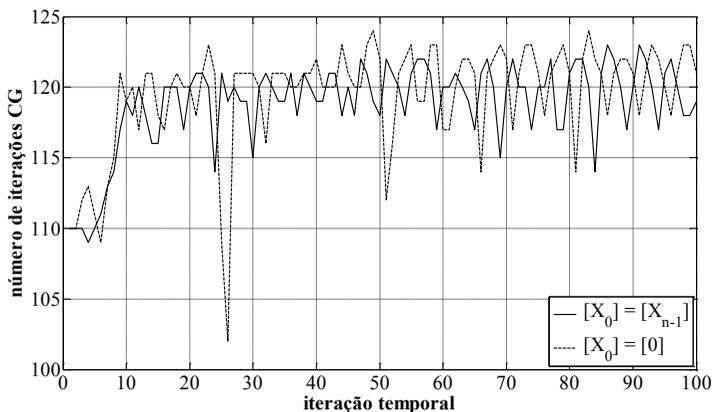


Figura 4.18: Número de iterações CG para problema 1 com malha C e $\Delta t = 6,25$ ps (linha contínua para $[\mathbf{x}_0] = [\mathbf{x}_{n-1}]$ e linha tracejada para $[\mathbf{x}_0] = [0]$).

Na Figura 4.18 percebe-se que o comportamento do algoritmo CG, neste caso, em que Δt é um décimo do período do sinal de mais alta frequência na estrutura analisada, é bastante parecido para as duas opções de valor inicial das incógnitas. A média para as 100 primeiras iterações é $M_{CG} = 118$ para $[\mathbf{x}_0] = [\mathbf{x}_{n-1}]$ e $M_{CG} = 119$ para $[\mathbf{x}_0] = [0]$.

Essa tendência explicitada pelos exemplos se confirma para os demais casos analisados. De forma geral, observou-se que para incrementos temporais menores que um quinto do período relativo à maior frequência imposta no sistema, a escolha de $[\mathbf{x}_0] = [0]$ leva a um valor de M_{CG} menor.

Neste trabalho, uma vez que a maioria dos casos simulados envolvia incrementos temporais relativamente pequenos, todas as simulações foram realizadas com $[\mathbf{x}_0] = [\mathbf{x}_{n-1}]$.

Com relação ao desempenho computacional, o algoritmo JCG apresentou-se bastante eficiente. Nos problemas analisados foi possível obter-se resultados satisfatórios com de poucos minutos de simulação.

5. VALIDAÇÃO DO PROGRAMA

Para a validação do *software* desenvolvido, foram simulados alguns problemas de cavidades ressonantes com diferentes valores de incremento temporal e/ou diferentes densidades de malha de discretização espacial.

Os resultados obtidos através das simulações realizadas foram comparados a resultados de referência calculados analiticamente ou extraídos de outros trabalhos científicos.

5.1. Cavidade ressonante cilíndrica

O primeiro caso simulado foi de uma cavidade cilíndrica preenchida com ar (aproximaram-se as propriedades eletromagnéticas do ar como $\mu = \mu_0$, $\varepsilon = \varepsilon_0$ e $\sigma = 0$ S/m).

A resolução deste problema demonstra a versatilidade do método dos elementos finitos em representar estruturas curvas.

As dimensões cavidade estão representadas na figura a seguir.

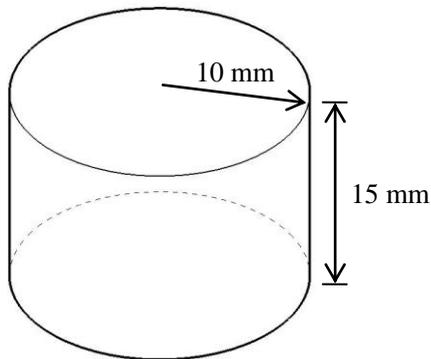


Figura 5.1: Cavidade ressonante cilíndrica.

O sinal de excitação foi aplicado na forma de corrente elétrica em uma das arestas de cada caso simulado. Dessa forma, a aresta excitada funcionaria como um elemento de corrente de comprimento igual ao comprimento da aresta e de seção infinitesimal. Para a execução desse procedimento, o vetor fonte $[f]$ dado pela equação (3.20) foi modificado para a seguinte forma:

$$[f]^k = - \int_{l_i} [\vec{W}_i^k \cdot I(t)]^T dl,$$

em que o subíndice i indica a aresta onde a corrente está sendo aplicada, l é o comprimento desta aresta e $I(t)$ é o valor da corrente que varia no tempo.

A corrente de excitação foi aplicada numa aresta arbitrária no interior da malha de elementos finitos e monitorada em algumas arestas em posições distintas, escolhidas aleatoriamente. Essa metodologia foi definida de maneira a se obter uma leitura espectral mais homogênea dos modos, uma vez que somente um ponto de análise pode favorecer determinado modo – um modo que apresenta seu máximo nas proximidades desse ponto – e desfavorecer outros. Assim o resultado final em frequência analisado é obtido a partir do ponto que apresentar melhor leitura de todas as frequências de ressonância encontradas, ou, caso nenhum ponto apresente tal condição, da soma das respostas obtidas em cada um dos pontos de análise.

O tipo de sinal aplicado como excitação foi uma corrente na forma de uma função sinc no domínio temporal. A alimentação através desse tipo de sinal permite a definição, com uma boa precisão, da faixa de frequências em que a energia eletromagnética estará presente. Além disso, com o uso de uma função sinc, obtém-se um nível de excitação bastante homogêneo para cada frequência do espectro de interesse.

A função sinc é definida conforme a equação:

$$I(t) = \begin{cases} \frac{\sin(2\pi f_{lim}(t-d))}{2\pi f_{lim}(t-d)} & se \ (t-d) \neq 0 \\ 1 & se \ (t-d) = 0 \end{cases}, \quad (5.1)$$

em que f_{lim} é a frequência limite da faixa que será excitada (começando em zero), t é o tempo e d é o deslocamento do ponto central da sinc ($I(t) = 1$) em relação ao tempo inicial ($t = 0$).

Neste problema o deslocamento foi definido como $d = 10$ ns e a frequência limite $f_{lim} = 16$ GHz, de maneira a se excitar os primeiros três modos de ressonância da cavidade, calculados analiticamente como 11,474 GHz, 13,306 GHz e 15,216 GHz [32].

O sinal imposto como alimentação do problema, no domínio do tempo, é mostrado na Figura 5.2.

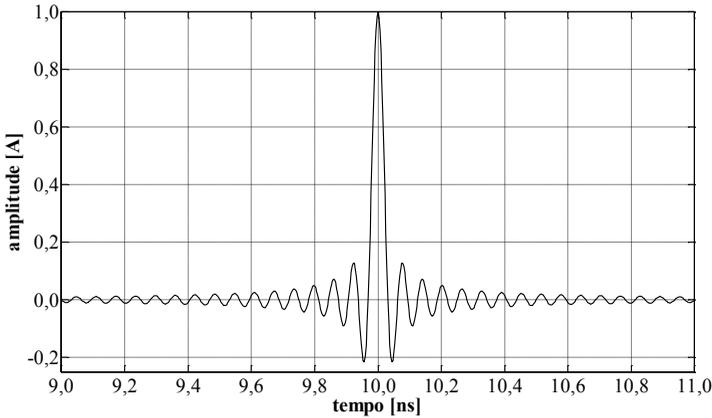


Figura 5.2: Função de excitação no domínio tempo.

O espectro deste sinal, obtido através da transformada rápida de Fourier (*Fast Fourier Transform* – FFT), é mostrado na Figura 5.3, no qual se percebe a boa precisão na definição do espectro excitado e a forma com que todas as frequências são excitadas com aproximadamente o mesmo nível, formando uma aproximação de um pulso retangular no domínio da frequência.

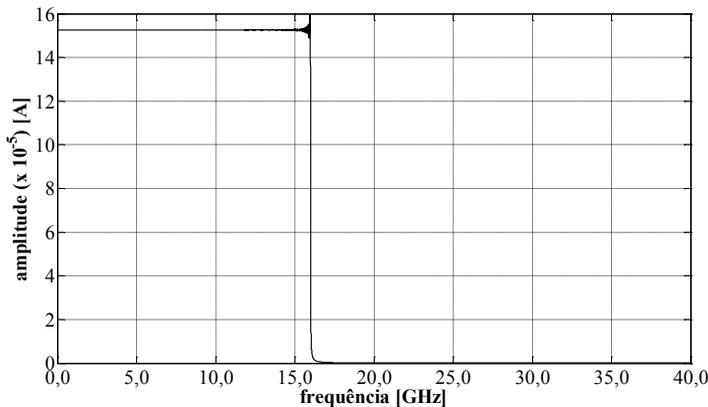


Figura 5.3: Função de excitação no domínio da frequência.

As malhas de elementos finitos geradas para as simulações do problema foram definidas de maneira a verificar-se a influência da densidade da discretização espacial na qualidade da resposta. Assim, foram geradas malhas com diferentes comprimentos médios de arestas, geralmente estabelecendo-se uma relação entre esse comprimento médio e o comprimento de onda mínimo de interesse.

Um critério de discretização espacial que pode ser colocado como referência é o utilizado como padrão no método das diferenças finitas no domínio do tempo [9], que, adaptando-se ao método abordado neste trabalho, resulta [33]:

$$L_{méd_máx} = \frac{1}{10f_{máx}\sqrt{\mu\varepsilon}}, \quad (5.2)$$

em que $L_{méd_máx}$ é o comprimento médio máximo das arestas dos tetraedros e $f_{máx}$ é a frequência máxima de interesse (correspondente a um comprimento de onda mínimo $\lambda_{mín}$). Neste exemplo, a frequência máxima de interesse é a frequência limite definida para a excitação através da função sinc, ou seja, 16 GHz. Dessa forma, tem-se que o comprimento médio das arestas da malha deve ser de aproximadamente $L_{méd_máx} = 1,8$ mm.

A fim de verificar a aplicabilidade desse critério no método dos elementos finitos no domínio do tempo foram geradas três malhas: a primeira com $L_{méd} \cong 3,6$ mm (que foi o limite inferior de densidade de malha imposto pelo módulo de pré-processamento do *software* NX I-deas para este problema, especificamente), a segunda com $L_{méd} \cong 1,8$ mm e a terceira com $L_{méd} \cong 0,9$ mm.

A Tabela 5.1-1 resume as características das malhas geradas para o problema em questão e alguns dados do sistema de simulação que estão vinculados às características da malha.

Tabela 5.1-1: Parâmetros das malhas usadas na resolução do problema.

malha	$N_{nós}$	N_{el}	N_{ar}	N_{inc}	$V_{méd}$ [mm ³]	$L_{méd}$ [mm]	F_{arm} (%)
A	283	1100	1547	1052	4,222	3,509	0,347
B	1406	6459	8441	6710	0,727	1,944	0,077
C	10010	52401	64625	57980	0,090	0,969	0,012

Os parâmetros representados na Tabela 5.1-1 são os seguintes:

- $N_{nós}$ – número de vértices da malha;
- N_{el} – número de tetraedros;
- N_{ar} – número de arestas e, conseqüentemente, a ordem do sistema matricial global;
- N_{inc} – número de incógnitas do sistema algébrico global, correspondente ao número de arestas total subtraído do número de arestas pertencentes às condições de contorno de Dirichlet (valores impostos);
- $V_{méd}$ – volume médio dos tetraedros;
- $L_{méd}$ – comprimento médio das arestas;
- F_{arm} – fator de armazenamento que indica a parcela do total de elementos da matriz global que são efetivamente armazenados na memória.

A condição de contorno imposta foi de campo elétrico tangencial igual à zero (parede elétrica – condição de Dirichlet) em todo limite do domínio de cálculo – o que representa satisfatoriamente a realidade física para problemas de cavidades ressonantes.

A figura a seguir ilustra diferença de densidade entre as três malhas geradas para o problema em questão.

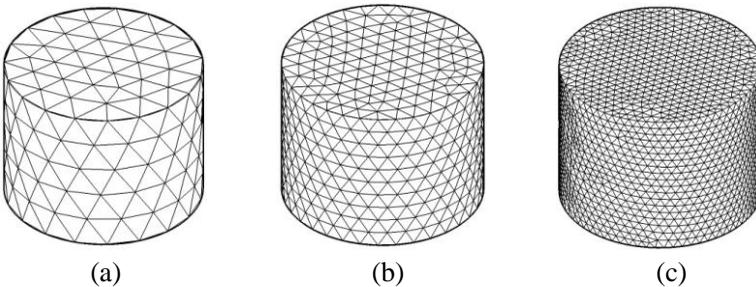


Figura 5.4: Ilustração das diferentes malhas geradas para a resolução do problema:

- (a) “malha A”, com $L_{méd} \cong 3,6$ mm; (b) “malha B”, com $L_{méd} \cong 1,8$ mm; (c) “malha C”, com $L_{méd} \cong 0,9$ mm.

De forma a obter-se uma referência para a análise da estabilidade do método de discretização temporal, utilizou-se também o critério

estabelecido para o método FDTD (em sua versão condicionalmente estável) [9]. Este critério, adaptado para FETD, é o seguinte [27]:

$$\Delta t_{m\acute{a}x} = L_{m\acute{i}n} \sqrt{\mu\epsilon}, \quad (5.3)$$

em que $\Delta t_{m\acute{a}x}$ representa o maior passo de tempo para que o sistema mantenha estabilidade e $L_{m\acute{i}n}$ corresponde ao comprimento da menor aresta presente na malha de discretização espacial.

De acordo com esse critério, o incremento temporal máximo seria para a malha A $\Delta t_{m\acute{a}x} \cong 4$ ps, para a malha B $\Delta t_{m\acute{a}x} \cong 2$ ps e para a malha C $\Delta t_{m\acute{a}x} \cong 1$ ps.

Para a verificação da influência do incremento temporal na resposta obtida, definiu-se quatro valores padrão de Δt para todas as malhas geradas. Os valores foram $\Delta t = 3,125$ ps, $\Delta t = 6,25$ ps, $\Delta t = 12,5$ ps e $\Delta t = 25$ ps. É importante salientar que o maior passo de tempo definido ($\Delta t = 25$ ps), aproxima-se bastante do limite de Nyquist, que determina que amostragem deve ser feita em uma frequência de, no mínimo, duas vezes a máxima frequência do sinal [34]. O período de amostragem máximo baseado no teorema de Nyquist fica em torno de 30 ps neste exemplo.

Além dos parâmetros de simulação citados anteriormente, para os casos apresentados a seguir foram configurados também:

- o período de tempo simulado (T_{sim}): representa o tempo físico em que o sinal é analisado no problema eletromagnético. Em todos os casos foi definido $T_{sim} = 0,2$ μ s, pois se considerou tempo suficiente para que o sistema entrasse em regime permanente e oferecesse uma boa resolução espectral [34];
- o número total de iterações temporais (N_{iter}): foi definido de acordo com o caso. O critério escolhido para sua definição foi $N_{iter} \cong T_{sim}/\Delta t$ (para possibilitar a aplicação direta da transformada rápida de Fourier, o número iterações temporais foi definido sempre como uma potência de base dois – por exemplo: 2^{12} , 2^{13} , etc. [34]);
- a precisão do método dos gradientes conjugados (δ): todos casos foram simulados com $\delta \leq 10^{-8}$;

- o número máximo de iterações do gradiente conjugado ($N_{CGmáx}$): todos casos foram simulados com $N_{CGmáx} = 200$.

A figura a seguir mostra o sinal no domínio do tempo já em regime permanente em uma das arestas analisadas (valor da integral de linha e do campo elétrico na aresta, portanto) para um dos casos analisados.

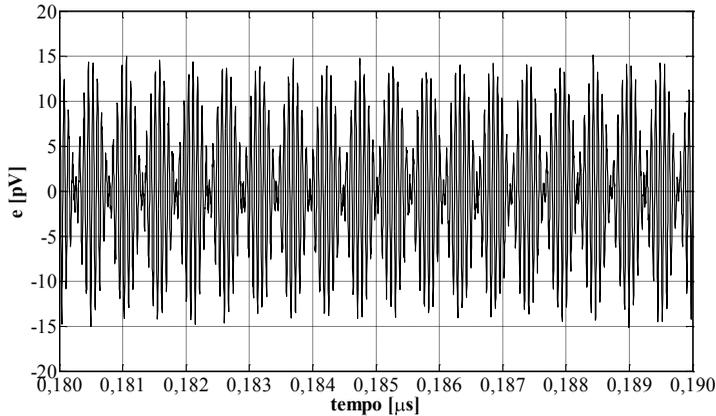


Figura 5.5: Integral de linha do campo elétrico no domínio do tempo no interior da cavidade cilíndrica.

Percebe-se que a resposta obtida é composta por algumas componentes de altas frequências, não apresentando os efeitos de distorções de baixas frequências. Isso demonstra que o segundo método de discretização temporal apresentado elimina o problema de respostas espúrias em baixas frequências.

A seguir é apresentada a resposta espectral obtida para o problema em questão. Foram encontradas três frequências de ressonância, as quais estão identificadas no gráfico.

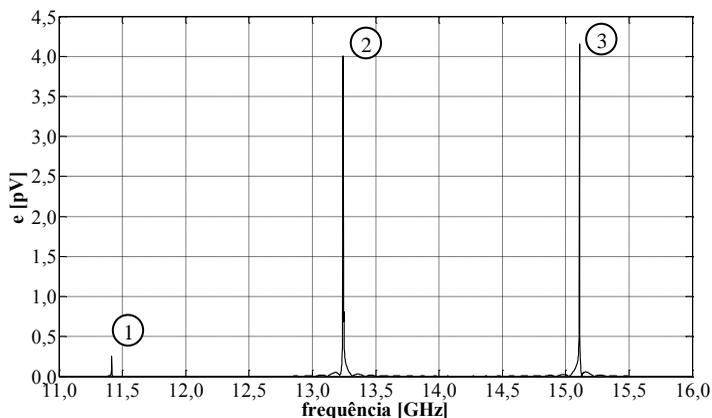


Figura 5.6: Resposta em frequência para a integral de linha do campo elétrico no interior da cavidade cilíndrica.

De forma qualitativa, pode-se afirmar que as frequências de ressonância encontradas coincidem com as frequências naturais de oscilação da cavidade analisada, calculadas de forma analítica e já apresentadas anteriormente.

Uma comparação quantitativa para cada caso simulado é detalhada nas tabelas a seguir. Cada tabela apresenta os resultados obtidos para os diferentes modos de ressonância e para os diferentes valores de incremento temporal empregados em uma dada densidade de malha de elementos finitos.

Os parâmetros apresentados nas tabelas comparativas e que ainda não foram citados são os seguintes:

- M_{CG} – número médio de iterações do algoritmo dos gradientes conjugados por iteração temporal;
- F_r – frequência de ressonância de referência;
- F_n – frequência de ressonância calculada numericamente através do *software* desenvolvido;
- E – diferença percentual entre os valores de frequência encontrados e os de referência para cada modo;
- E_m – média dos erros de todos os modos.

A tabela seguinte apresenta os dados e a comparação entre os resultados analíticos e os simulados para a malha com a menor densidade de elementos (malha A).

Tabela 5.1-2: Dados das simulações realizadas com a malha A.

malha A						
Δt [ps]	N_{iter}	M_{CG}	F_r [GHz]	F_n [GHz]	E (%)	E_m (%)
3,125	2^{16}	16	11,474	11,348	1,098	0,468
			13,306	13,296	0,075	
			15,216	15,181	0,230	
6,25	2^{15}	25	11,474	11,212	2,283	2,117
			13,306	13,077	1,721	
			15,216	14,859	2,346	
12,5	2^{14}	48	11,474	10,714	6,624	7,855
			13,306	12,311	7,478	
			15,216	13,776	9,464	
25	2^{13}	88	11,474	9,299	18,956	22,686
			13,306	10,315	22,479	
			15,216	11,165	26,623	

Neste conjunto de simulações com a malha A, notou-se um efeito de “deslocamento em frequência” com o aumento do incremento temporal. Para valores maiores que 12,5 ps, começam a aparecer picos de ressonância de modos que teoricamente não deveriam ter sido excitados na faixa de frequência observada.

No caso de $\Delta t = 12,5$ ps, por exemplo, surgem no espectro duas frequências de ressonância bastante próximas entre si, que correspondem aos próximos dois modos de ressonância da cavidade, que são em 17,670 GHz e 18,283 GHz.

Esse efeito fica bastante agravado para a simulação com o maior passo de tempo (25 ps), para o qual surge uma grande quantidade de picos de ressonância, tornando a resposta em frequência bastante poluída nas proximidades do extremo da faixa excitada (16 GHz).

Para ilustrar este efeito, a figura a seguir mostra o espectro do sinal para $\Delta t = 25$ ps, de onde se percebe o aparecimento dos dois modos de ressonância adicionais na faixa de frequências de interesse.

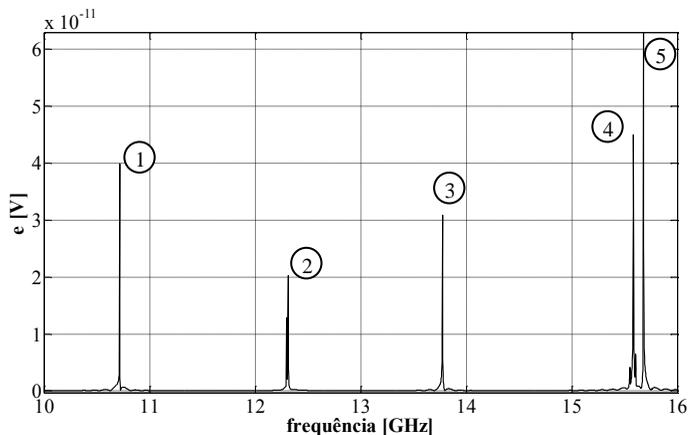


Figura 5.7: Modos de ressonância de frequências superiores (picos 4 e 5) surgindo no espectro analisado (simulação com $\Delta t = 25$ ps).

Para a malha de discretização espacial B, foram obtidos os resultados que estão resumidos na tabela seguinte.

Tabela 5.1-3: Dados das simulações realizadas com a malha B.

malha B						
Δt [ps]	N_{iter}	M_{CG}	F_r [GHz]	F_n [GHz]	E (%)	E_m (%)
3,125	2^{16}	23	11,474	11,416	0,506	0,553
			13,306	13,247	0,443	
			15,216	15,108	0,710	
6,25	2^{15}	43	11,474	11,275	1,734	2,206
			13,306	13,028	2,089	
			15,216	14,791	2,793	
12,5	2^{14}	87	11,474	10,773	6,110	7,887
			13,306	12,277	7,733	
			15,216	13,722	9,819	
25	2^{13}	167	11,474	9,333	18,660	22,711
			13,306	10,291	22,659	
			15,216	11,136	26,814	

O mesmo efeito de translação de frequência foi percebido para a malha B, com o aparecimento de frequências de ressonância de modos superiores ao da frequência de interesse para valores de Δt maiores que 12,5 ps.

Os resultados obtidos para a terceira malha gerada estão descritos na tabela seguinte.

Tabela 5.1-4: Dados das simulações realizadas com a malha C.

malha C						
Δt [ps]	N_{iter}	M_{CG}	F_r [GHz]	F_n [GHz]	E (%)	E_m (%)
3,125	2^{16}	64	11,474	11,426	0,418	0,553
			13,306	13,237	0,519	
			15,216	15,106	0,723	
6,25	2^{15}	122	11,474	11,284	1,656	2,110
			13,306	13,020	2,149	
			15,216	14,791	2,793	
12,5	2^{14}	200	11,474	10,780	6,049	7,910
			13,306	12,264	7,831	
			15,216	13,717	9,856	
25	2^{13}	200	11,474	9,339	18,607	22,717
			13,306	10,285	22,704	
			15,216	11,132	26,840	

Os resultados mostram que, para este problema, o fator determinante na qualidade da resposta obtida foi a definição do passo de tempo. A utilização dos dois menores incrementos temporais ($\Delta t = 3,125$ ps e $\Delta t = 12,5$ ps) garantiram um erro menor do que 5% para todas as densidades de malha testadas. Já os dois maiores valores de passo de tempo, $\Delta t = 12,5$ ps e $\Delta t = 25$ ps, geraram erros em torno de 7% e 22%, respectivamente, causando o surgimento de frequências de ressonância de modos superiores (teoricamente não excitadas) na faixa de espectro analisada.

Como foi usado o método de Newmark, o esquema obtido é incondicionalmente estável. Assim, o critério definido pela equação (5.3) não representa uma restrição ao método implementado. De fato, verificou-se que mesmo com o maior passo de tempo empregado (cerca de vinte e cinco vezes o valor sugerido pelo critério citado, no caso da malha mais densa), o sistema demonstrou-se estável. Com relação à precisão, mesmo com $\Delta t = 6,25$ ps (cerca de 6 vezes superior ao recomendado pelo critério utilizado em [9]), o método foi capaz de fornecer uma resposta satisfatória, com um erro em torno de 2,2%. Isso também mostra que, neste caso, a escolha de Δt não está vinculada às características da malha (pois os erros mantiveram-se praticamente constantes para um mesmo passo de tempo em malhas

diferentes). Ao que tudo indica, neste caso o erro depende mais do número de amostras por período dos sinais presentes no domínio de estudo. Dessa forma, baseado nos resultados obtidos para este problema, a utilização de $\Delta t = 1/(10f_{m\acute{a}x})$, que é exatamente o caso de $\Delta t = 6,25$ ps, indica uma escolha razoável.

É importante mencionar que, ainda que o esquema seja incondicionalmente estável, a escolha do passo de tempo influenciou no condicionamento do sistema algébrico a ser resolvido a cada iteração temporal. Com efeito, verificou-se que maiores valores Δt levam a sistemas mais mal condicionados, requerendo mais iterações de gradiente conjugado para sua resolução. Por exemplo, para os dois maiores valores de Δt utilizados, o algoritmo CG não obteve convergência antes de chegar ao limite de iterações imposto para a malha mais densa.

A análise dos erros para as três densidades de malhas geradas mostra que, neste exemplo, a quantidade de elementos (ou, mais adequadamente, o comprimento médio das arestas da malha) não causou grande impacto nos resultados obtidos. Paradoxalmente, o refinamento da malha acarretou em um pequeno aumento no erro médio para todas as opções de Δt testadas. Uma possível razão para esse efeito pode ser a ocorrência de elementos de “má qualidade” (com ângulos muito fechados e volumes extremamente pequenos) na malha, o que não foi analisado neste trabalho.

De acordo com a análise da influência da densidade da malha nas soluções obtidas, pode-se estabelecer-se como um bom critério a definição de $L_{méd} = \lambda_{mín}/5$ neste caso.

Considerando como tolerável um erro abaixo de 5 % e adotando-se como critério de escolha o tempo de execução, a melhor configuração de parâmetros do *software* foi a definição de $\Delta t = 6,25$ ps com a malha A. Esta configuração demandou cerca de 5 minutos com uma média de 9,71 ms por iteração temporal.

É importante citar que, de acordo com o verificado neste exemplo, para uma mesma malha, a diferença de tempo de execução entre uma configuração com um passo temporal Δt e uma configuração com $2\Delta t$ não é muito acentuada. Por exemplo, para a malha A, a simulação com $\Delta t = 6,25$ ps demanda cerca de 70% do tempo de execução da simulação com $\Delta t = 3,125$ ps. Porém, observou-se que, para um mesmo incremento temporal, o aumento da densidade da malha implica num aumento considerável no tempo de execução. Para o problema em questão, para todos os valores de Δt , o tempo de execução

aumentou em mais de 15 vezes para uma redução de $L_{méd}$ por um fator dois.

Os resultados obtidos para este problema sugerem que o uso de uma discretização fina (malha densa), tomando como referência o menor comprimento de onda de interesse, não melhorou muito os resultados obtidos. Além disso, o uso de malhas densas torna o processo de resolução do problema muito mais lento, como já foi citado. Por exemplo, a resolução do problema com o menor passo de tempo na malha C resultou em um tempo de execução de aproximadamente 60 horas.

Os requisitos de memória na resolução deste problema ficaram em torno de 1,5 MB para a malha A, 5 MB para a malha B e de 34 MB para a malha C.

5.2. Cavidade ressonante retangular

Este problema consiste na análise de uma cavidade ressonante retangular preenchida com ar ($\mu = \mu_0$, $\varepsilon = \varepsilon_0$ e $\sigma = 0$ S/m).

A alimentação da cavidade foi feita na forma de uma sonda posicionada no centro de uma das paredes quadradas. As dimensões da cavidade ressonante simulada e da sonda de excitação são mostradas na Figura 5.8.

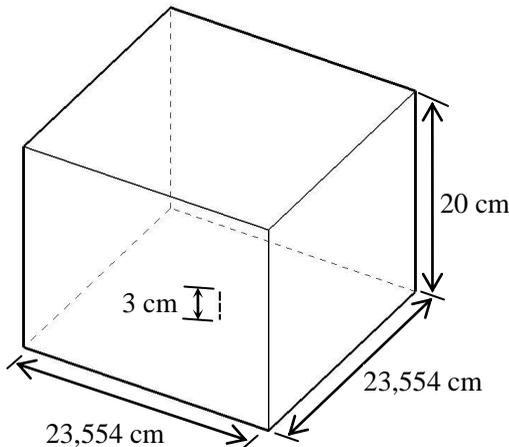


Figura 5.8: Cavidade ressonante retangular.

Para estudar a influência da densidade da malha no problema, buscou-se usar uma distribuição de elementos homogênea no interior da cavidade. Por essa razão, a sonda de excitação foi representada como um segmento de fio de seção infinitesimal, ou seja, por uma aresta. Uma representação mais realista da sonda, através de um pequeno volume cilíndrico, exigiria a geração de elementos extremamente pequenos em relação às dimensões da cavidade, conduzindo a malhas extremamente densas e com custo computacional muito elevado.

O posicionamento da sonda foi definido de maneira a excitar o primeiro modo de ressonância da cavidade. Este tem campo elétrico máximo justamente no centro das faces de lados iguais e com sua única componente normal a estas faces [35].

A escolha do comprimento da sonda foi arbitrária, uma vez que para a análise objetivada esse parâmetro é irrelevante (o comprimento da sonda na prática está relacionado à impedância de entrada da cavidade ressonante).

A corrente imposta foi escolhida novamente como uma função sinc, desta vez com $d = 150$ ns e a frequência limite $f_{lim} = 1,1$ GHz, de forma a cobrir a banda de frequências capaz de excitar o modo dominante (900,006 MHz) e os dois modos seguintes, ambos ressoando na mesma frequência (modos degenerados) de 983,229 MHz [35].

Para a simulação deste problema, foram testados quatro valores de incremento temporal: $\Delta t = 25$ ps, $\Delta t = 50$ ps, $\Delta t = 100$ ps e $\Delta t = 200$ ps. Os demais parâmetros de simulação utilizados foram: $T_{sim} \cong 3,3$ μ s, $N_{CGm\acute{a}x} = 200$ e $\delta \leq 10^{-8}$ (o número de iterações temporais N_{iter} foi ajustado de acordo com o Δt utilizado de maneira a obter sempre o mesmo tempo físico simulado).

Como condição de contorno, foi imposto o campo tangencial nulo em todo limite do domínio de cálculo (condição de Dirichlet homogênea).

Novamente, foram geradas três malhas com densidades diferentes. As características dessas malhas estão descritas na tabela a seguir.

Tabela 5.2-1: Parâmetros das malhas usadas na resolução do problema.

malha	$N_{n\acute{o}s}$	N_{el}	N_{ar}	N_{inc}	$V_{m\acute{e}d}$ [cm ³]	$L_{m\acute{e}d}$ [cm]	F_{arm} (%)
A	32	71	127	52	156,278	12,210	2,282
B	127	424	636	372	26,170	6,589	0,703
C	750	3229	4337	3260	3,436	3,286	0,140

A figura a seguir mostra as três malhas geradas para o problema em questão.

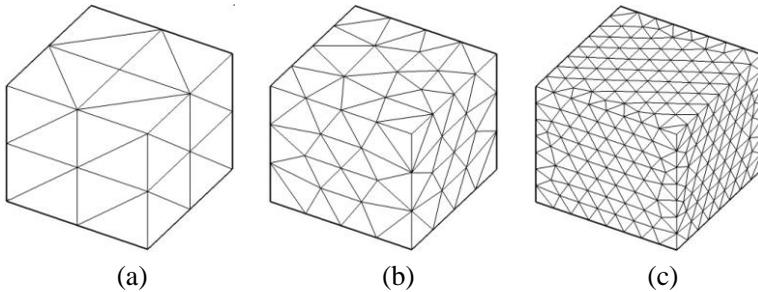


Figura 5.9: Ilustração das diferentes densidades de malhas geradas para a resolução do problema: (a) “malha A”, com $L_{méd} \cong 12$ cm; (b) “malha B”, com $L_{méd} \cong 6$ cm; (c) “malha C”, com $L_{méd} \cong 3$ cm.

A figura a seguir mostra o sinal extraído (em regime permanente) de uma aresta arbitrária, em uma das simulações com a malha C.

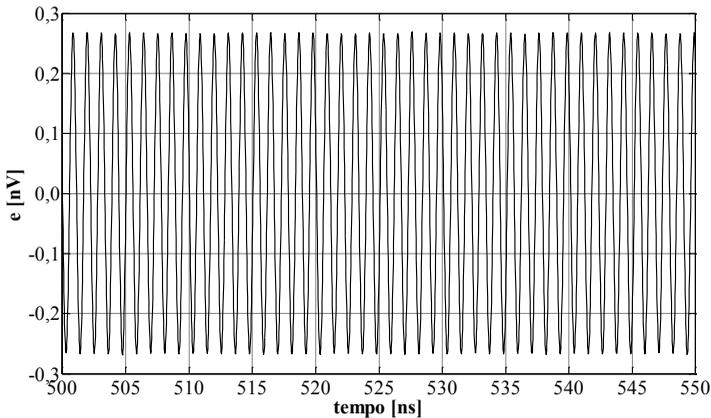


Figura 5.10: Integral de linha do campo elétrico em aresta no interior da cavidade ressonante retangular.

Percebe-se que o sinal obtido apresenta uma única frequência preponderante, com valor médio nulo (sem efeito de componentes espúrias de baixas frequências).

A Figura 5.11 mostra o espectro do sinal da figura anterior, obtido através da Transformada de Fourier.

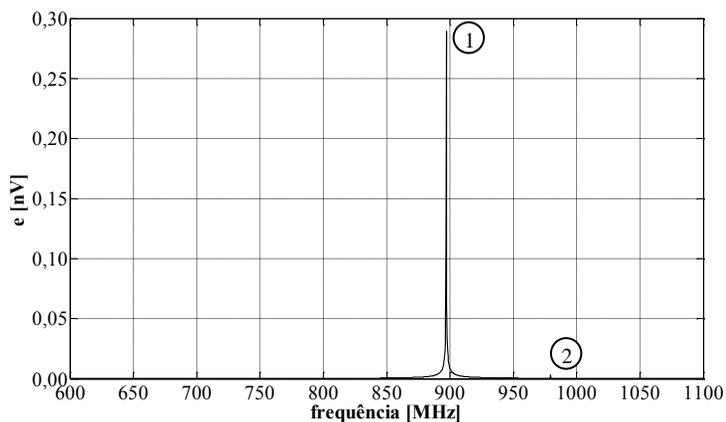


Figura 5.11: Resposta em frequência da integral de linha do campo elétrico no interior da cavidade ressonante retangular.

Nota-se que o pico indicado pelo “1” na Figura 5.11 corresponde exatamente ao modo de ressonância que se objetivou excitar. Conforme previsto, a energia acoplada aos modos seguintes foi praticamente nula, apresentando um ínfimo pico de ressonância indicado por “2”.

Os resultados para a malha A (mais grosseira) estão na Figura 5.12.

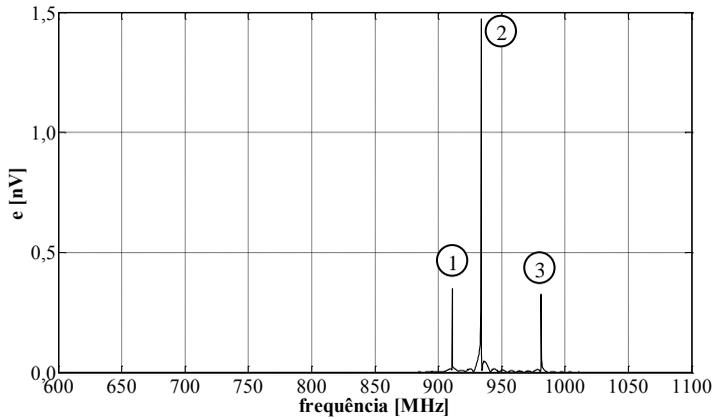


Figura 5.12: Espectro de resposta obtida para cavidade ressonante retangular com malha de baixa densidade (malha A).

Neste caso, observa-se a ocorrência de três picos de ressonância na faixa de frequências analisada, o que é incoerente. Isso porque, apesar da existência de três modos de ressonância nesta faixa, dois deles apresentam exatamente a mesma frequência de ressonância. Os resultados não foram satisfatórios para este caso, por conta da discretização espacial insuficiente, e foram descartados.

Os resultados obtidos nas simulações com as malhas B e C são apresentados nas tabelas a seguir.

Tabela 5.2-2: Dados das simulações realizadas com a malha B.

malha B					
Δt [ps]	N_{iter}	M_{CG}	F_r [MHz]	F_n [MHz]	E (%)
25	2^{17}	14	900,006	888,380	1,292
50	2^{16}	14	900,006	884,120	1,765
100	2^{15}	21	900,006	867,970	3,560
200	2^{14}	38	900,006	811,560	9,827

Tabela 5.2-3: Dados das simulações realizadas com a malha C.

malha C					
Δt [ps]	N_{iter}	M_{CG}	F_r [MHz]	F_n [MHz]	E (%)
25	2^{17}	15	900,006	896,930	0,342
50	2^{16}	22	900,006	892,670	0,815
100	2^{15}	40	900,006	875,910	2,677
200	2^{14}	80	900,006	817,970	9,115

Diferentemente do que ocorreu no problema anterior, nota-se que a densidade da malha neste caso apresentou uma grande influência na qualidade dos resultados. Para uma malha A, com $L_{méd} \cong 12$ cm (aproximadamente metade do comprimento de onda na maior frequência de interesse), não se atingiu resultado coerente. No entanto, para a malha B, com $L_{méd} \cong 6$ cm, foram encontradas soluções bastante satisfatórias, com erros menores que 5%. Já o emprego da malha C, mais densa, com $L_{méd} \cong 3$ cm, foi capaz de gerar erros menores que 1% para os dois menores valores de Δt utilizados.

Do ponto de vista da discretização temporal, foram atingidos bons resultados para todos os passos de tempo utilizados, com exceção do maior ($\Delta t = 200$ ps), que apresentou erros na faixa de 9% até 10% para as malhas B e C.

Com $\Delta t = 100$ ps, que corresponde a uma quantidade de nove amostras por período para a maior frequência de interesse, obteve-se um erro abaixo de 5% tanto para a malha B quanto para a C. Esta escolha do passo temporal mostrou-se a melhor opção em termos da relação entre tempo de execução e qualidade de resultados.

O menor tempo demandado para a resolução do problema dentro de uma tolerância de 5% de erro foi obtido com $\Delta t = 100$ ps para a malha B: cerca de 1 minuto e meio (2,81 ms por iteração temporal).

O tempo de execução para a combinação que apresentou menor erro (igual a 0,342%, para $\Delta t = 25$ ps, malha C) foi de aproximadamente 55 minutos, com 25 ms por iteração temporal.

Acrescenta-se que as mesmas considerações sobre o impacto do aumento da densidade da malha e/ou a diminuição do incremento temporal sobre o tempo de execução se mostraram cabíveis neste problema. Por exemplo, para $\Delta t = 100$ ps na simulação com a malha C, o tempo de execução foi de 25,7 minutos. Isso representa cerca de 17 vezes o tempo de execução com o mesmo passo temporal na malha B.

A quantidade de memória alocada foi de aproximadamente 0,5 MB para a malha A, 0,7 MB para a malha B e 3 MB para a malha C.

5.3. Cavidade ressonante retangular parcialmente preenchida

O objeto de estudo consiste em uma cavidade ressonante retangular preenchida parcialmente por um material dielétrico. Este problema foi escolhido de forma a se comparar os resultados obtidos através do programa aqui desenvolvido com os resultados apresentados em [36]. A geometria e as dimensões do problema estão descritas na Figura 5.13.

A escolha dos parâmetros de simulação utilizados foi baseada em [37], visando uma comparação qualitativa de resultados.

A validação do *software* para este tipo de problema é de extrema importância, uma vez que as cavidades ressonantes, na prática, podem conter um dielétrico em seu interior (por exemplo, quando usadas para a caracterização de materiais).

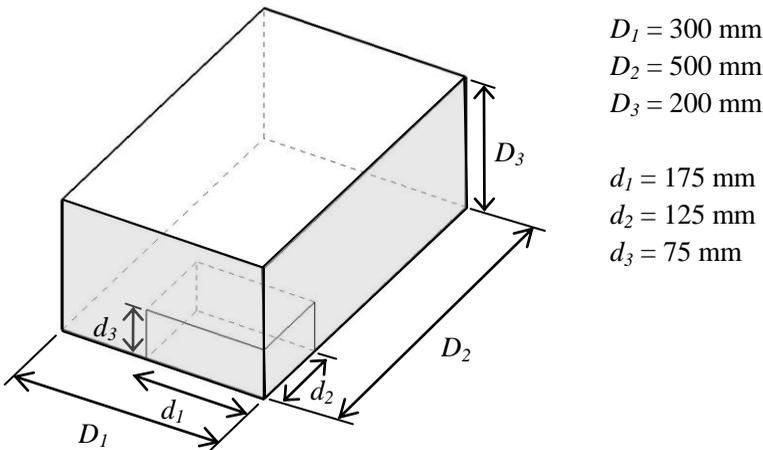


Figura 5.13: Geometria do terceiro problema simulado (correspondente a um quarto da estrutura completa da cavidade ressonante).

O volume delimitado pelas dimensões d_1 , d_2 e d_3 , na Figura 5.13, corresponde à porção de material dielétrico no interior da cavidade. A permissividade relativa desse dielétrico é $\epsilon_r = 16$.

Foram usadas duas condições de contorno para a resolução deste problema: nas faces destacadas foram aplicadas condições de campo

magnético tangencial zero (condição de Neumann – parede magnética) e nas demais faces foram aplicadas as condições de campo elétrico tangencial zero (condição de Dirichlet homogênea – parede elétrica). O uso das condições de Neumann neste problema se deve ao fato de somente a quarta parte da estrutura ser simulada (condições de simetria).

A excitação do modelo foi feita novamente na forma de corrente elétrica aplicada em uma aresta escolhida arbitrariamente no interior da cavidade.

A corrente de excitação foi escolhida como sendo um seno modulado por um pulso gaussiano, dada por:

$$I(t) = e^{-(\alpha t - 2)^2} \sin(2\pi f t), \quad (5.4)$$

em que α [s^{-1}] está ligado ao deslocamento temporal do sinal e f [Hz] é a frequência do seno.

Para a resolução do problema em questão, os parâmetros de excitação foram definidos como $\alpha = 4 \times 10^8 s^{-1}$ e $f = 420$ MHz.

O sinal de excitação gerado para essa combinação de parâmetros é mostrado na Figura 5.14.

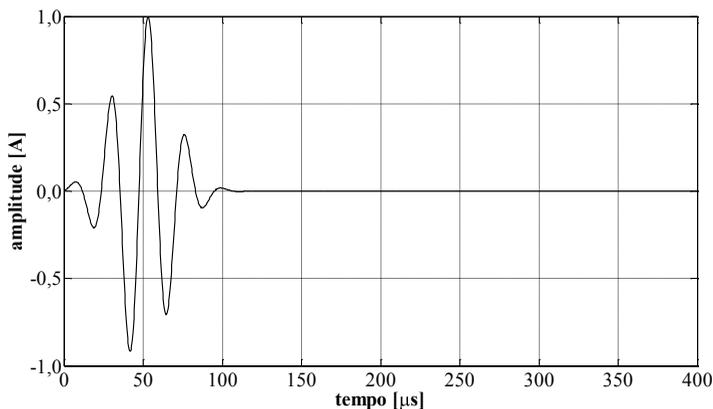


Figura 5.14: Sinal de excitação – seno de 420 MHz modulado por pulso gaussiano.

O conteúdo espectral do sinal de excitação empregado neste problema é mostrado na Figura 5.15.

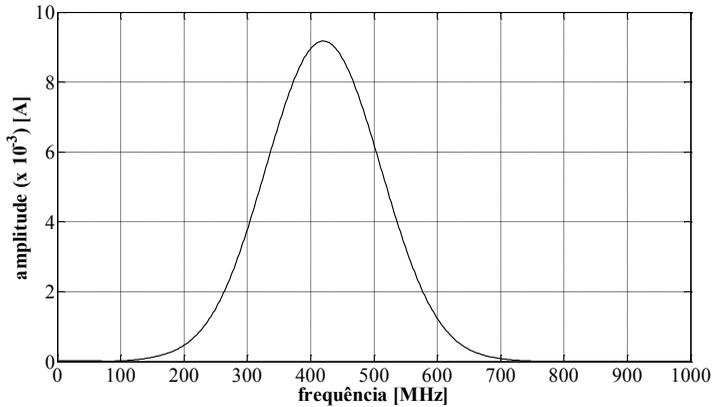


Figura 5.15: Função de excitação no domínio da frequência.

Novamente, foram geradas três malhas com densidades diferentes para a resolução do problema. As características das malhas geradas são mostradas na tabela a seguir.

Tabela 5.3-1: Parâmetros das malhas usadas na resolução do problema.

malha	$N_{nós}$	N_{el}	N_{ar}	N_{inc}	$V_{méd}$ [cm ³]	$L_{méd}$ [mm]	F_{arm} (%)
A	222	706	1103	727	42,493	74,131	0,443
B	812	3112	4452	3380	9,640	44,931	0,133
C	2482	10811	14576	11979	2,775	29,828	0,045

A figura a seguir ilustra as malhas geradas para a resolução deste problema.

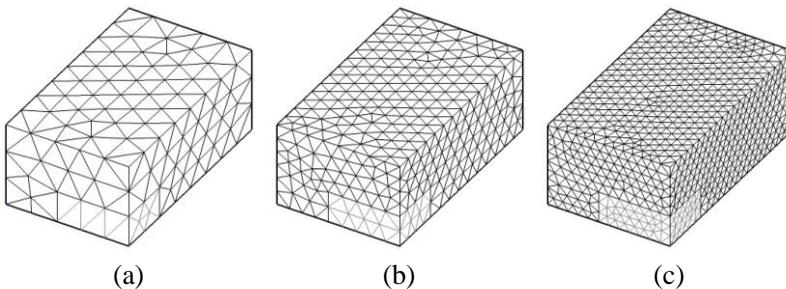


Figura 5.16: (a) “malha A”, com $L_{méd} \cong 74$ mm; (b) “malha B”, com $L_{méd} \cong 45$ mm; (c) “malha C”, com $L_{méd} \cong 30$ mm.

Os demais parâmetros de simulação foram: $N_{iter} = 2^{14}$, $N_{CGm\acute{a}x} = 200$, $\delta \leq 10^{-8}$ e $\Delta t = 30$ ps. O passo temporal escolhido corresponde a mais de 50 amostras por período da maior frequência de interesse, garantindo com boa folga uma representação temporal precisa do sinal.

O sinal de integral de linha do campo elétrico obtido em uma aresta arbitrária no interior da cavidade, para uma das simulações realizadas, é mostrado na Figura 5.17.

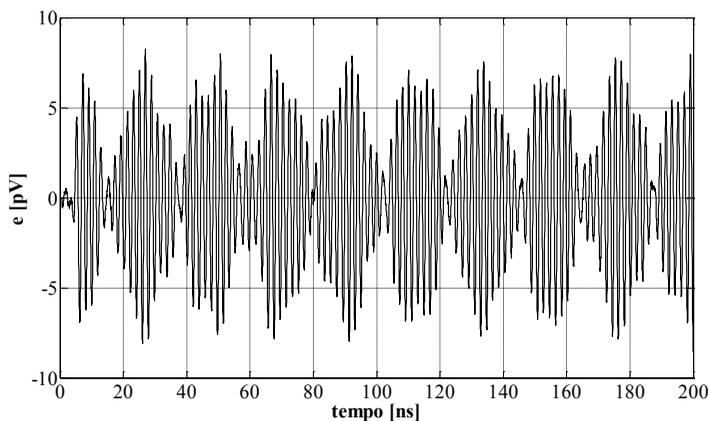


Figura 5.17: Integral de linha do campo elétrico em aresta no interior da cavidade ressonante retangular parcialmente preenchida.

A Figura 5.18 mostra o espectro do sinal obtido, indicando os picos de amplitude correspondentes às frequências de ressonância encontradas para o problema simulado.

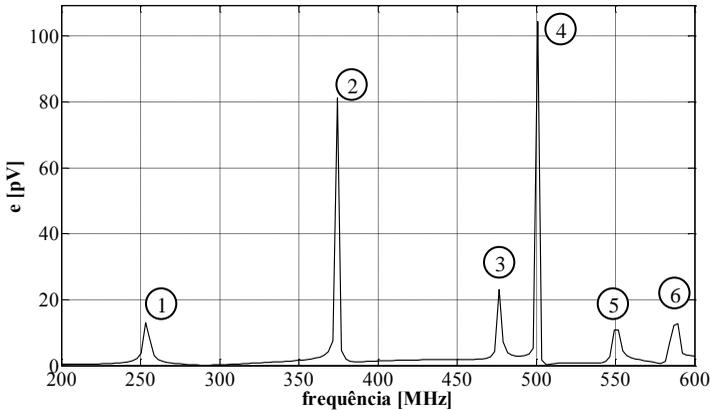


Figura 5.18: Resposta em frequência da integral de linha do campo elétrico no interior da cavidade ressonante retangular parcialmente preenchida.

É importante ressaltar que as frequências encontradas não correspondem exatamente aos seis primeiros modos de ressonância da cavidade. Existem outros modos que não foram obtidos devido às condições de simetria impostas no cálculo. A obtenção dos demais modos exigiria a simulação da estrutura inteira ou a utilização de outras condições de simetria [32].

A tabela a seguir mostra os resultados obtidos através do programa aqui desenvolvido e os resultados apresentados em [36], obtidos pela resolução de um problema de valores próprios com uma formulação frequencial de elementos finitos.

Tabela 5.3-2: Resultados obtidos para as simulações realizadas.

modo	Bardi <i>et al.</i>	malha A	malha B	malha C
	F_r [MHz]	F_n [MHz]	F_n [MHz]	F_n [MHz]
1	257,608	250,270	253,340	254,340
2	372,885	370,330	374,390	372,360
3	473,179	451,720	476,130	470,030
4	507,486	488,340	500,550	506,650
5	553,577	522,930	550,390	551,420
6	592,130	547,350	586,010	588,040

O número médio de iterações CG na resolução do sistema linear foi $M_{CG} = 17$ para as malhas A e B, e $M_{CG} = 18$ para a malha C.

Os resultados obtidos através da simulação com a malha A (com $L_{méd} \cong \lambda_{mín}/7$) apresentam, em geral, diferenças em torno de 2% para a frequência mais baixa e até 8% para a frequência mais alta. Foi observado que esta diferença apresenta um comportamento de aumento quase linear em relação à frequência. A diferença média foi em torno de 4% para a malha A.

As malhas B (com $L_{méd} \cong \lambda_{mín}/11$) e C (com $L_{méd} \cong \lambda_{mín}/17$) geraram diferenças médias menores que 1%, não ultrapassando 2% de diferença em nenhuma das frequências de ressonância.

Com relação aos resultados apresentados em [37], houve uma boa concordância. Entretanto, o método aqui desenvolvido apresentou resultados mais discrepantes para as frequências mais altas na simulação com a malha menos densa. Essa discordância pode estar ligada à metodologia de discretização temporal, que em [37] corresponde ao primeiro método aqui apresentado, referente a equação (3.29).

A análise deste problema explicita novamente uma sensível mudança na qualidade dos resultados em função da densidade da malha de elementos finitos gerada.

Os tempos aproximados de execução para cada simulação foram de 1 minuto e meio para a malha A (4,82 ms por iteração temporal), 8 minutos para a malha B (28,44 ms por iteração temporal) e 1 hora para a malha C (0,23 segundos por iteração temporal). Isso evidencia novamente a grande influência da densidade da malha no tempo de cálculo.

A memória ocupada durante a execução das simulações foi cerca de 1 MB para a malha A, 3 MB para malha B e 8 MB para a malha C.

5.4. Cavidade ressonante cilíndrica parcialmente preenchida

Neste problema, será simulado um caso de cavidade ressonante com geometria cilíndrica. Desta vez, a cavidade cilíndrica está parcialmente preenchida com um dielétrico de permissividade relativa $\varepsilon_r = 37,6$.

Os valores de frequências de ressonância de referência e as configurações dos parâmetros de simulação utilizados foram extraídos de [37].

A figura a seguir mostra a geometria e as dimensões do problema.

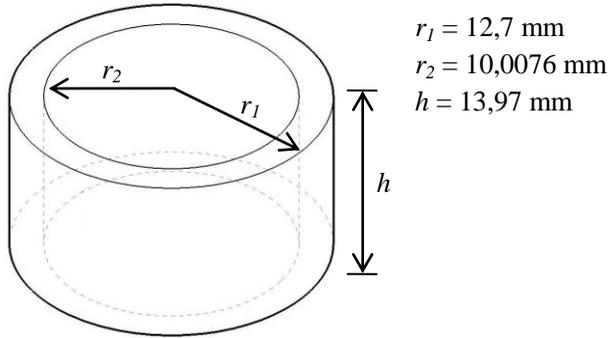


Figura 5.19: Cavidade cilíndrica parcialmente preenchida.

Para a Figura 5.19, ressalta-se que o volume delimitado por r_2 e h corresponde ao material dielétrico que preenche parcialmente a cavidade.

Como nos demais problemas apresentados, foram geradas três malhas de elementos finitos de densidades diferentes. A tabela a seguir resume as características das malhas geradas.

Tabela 5.4-1: Parâmetros das malhas usadas na resolução do problema.

Malha	$N_{nós}$	N_{el}	N_{ar}	N_{inc}	$V_{méd} [\text{mm}^3]$	$L_{méd} [\text{mm}]$	$F_{arm} (\%)$
A	607	2418	3387	2298	2,913	3,047	0,159
B	1234	5120	7054	4951	1,378	2,370	0,080
C	2208	10044	13256	10241	0,703	1,900	0,048

A Figura 5.20 ilustra as malhas geradas para a resolução do problema.

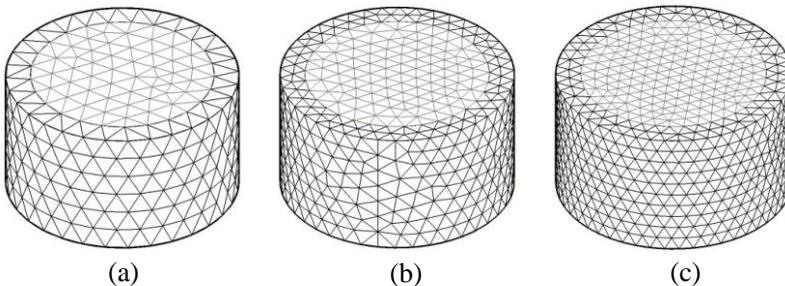


Figura 5.20: (a) “malha A”, com $L_{méd} = 3\text{mm}$; (b) “malha B”, com $L_{méd} = 2,4 \text{ mm}$; (c) “malha C”, com $L_{méd} = 1,9 \text{ mm}$.

Para a resolução do problema em questão, os parâmetros de excitação (cuja função é a mesma do problema anterior) foram definidos como $\alpha = 3,5 \times 10^9 \text{ s}^{-1}$ e $f = 2,8 \text{ GHz}$.

Como condição de contorno, foi imposto o campo elétrico tangencial nulo em todo limite do domínio de cálculo.

Os demais parâmetros definidos foram: $N_{iter} = 2^{14}$, $N_{CGm\acute{a}x} = 200$ e $\delta \leq 10^{-8}$ e $\Delta t = 5 \text{ ps}$, que corresponde a 50 amostras por período da maior frequência de interesse, assegurando uma boa precisão em relação à discretização temporal.

A integral de linha do campo em uma aresta arbitrária no interior da cavidade é mostrada na Figura 5.21.

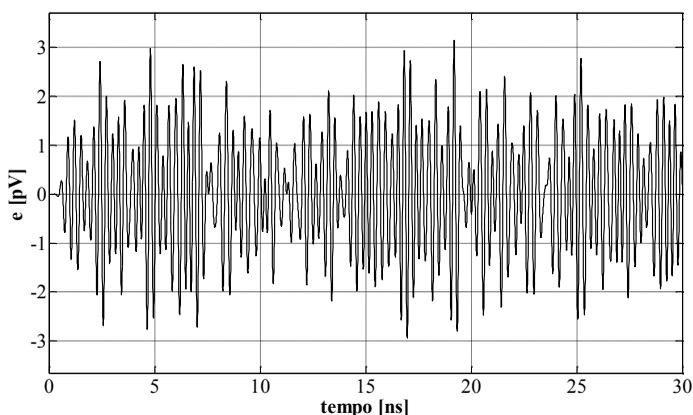


Figura 5.21: Integral de linha do campo elétrico em aresta no interior da cavidade ressonante cilíndrica parcialmente preenchida.

A Figura 5.22 mostra a resposta espectral obtida através da transformada de Fourier dos sinais temporais extraídos no interior da cavidade ressonante.

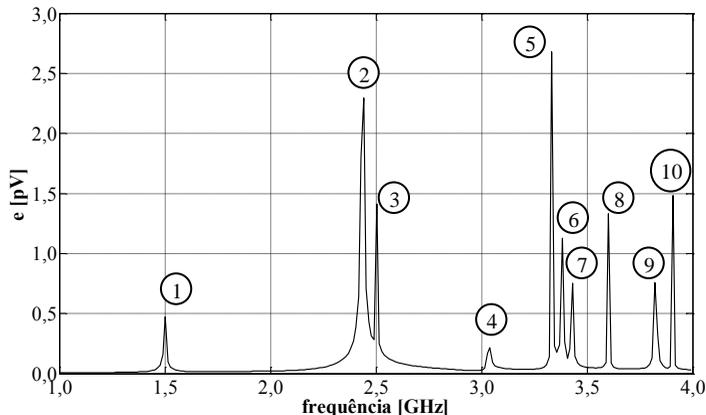


Figura 5.22: Resposta em frequência da integral de linha do campo elétrico no interior da cavidade ressonante cilíndrica parcialmente preenchida.

A tabela a seguir apresenta a comparação entre os resultados obtidos analiticamente e os resultados numéricos obtidos através das simulações realizadas.

Tabela 5.4-2: Tabela comparativa – resultados analíticos e numéricos.

modo	analítico	malha A		malha B		malha C	
	F_r [GHz]	F_n [GHz]	E (%)	F_n [GHz]	E (%)	F_n [GHz]	E (%)
1	1,498	1,502	0,267	1,502	0,267	1,502	0,267
2	2,435	2,442	0,288	2,442	0,288	2,442	0,288
3	2,504	2,503	0,040	2,503	0,040	2,503	0,040
4	3,029	3,052	0,759	3,040	0,363	3,040	0,363
5	3,331	3,333	0,060	3,345	0,420	3,333	0,060
6	3,339	3,370	0,928	3,382	1,288	3,382	1,288
7	3,429	3,443	0,408	3,431	0,058	3,431	0,058
8	3,596	3,602	0,167	3,602	0,167	3,602	0,167
9	3,822	3,858	0,942	3,834	0,314	3,821	0,026
10	3,919	3,895	0,612	3,907	0,306	3,907	0,306

O número médio de iterações CG para a resolução do sistema linear foi $M_{CG} = 18$ para a malha A, $M_{CG} = 25$ para a malha B e $M_{CG} = 26$ para a malha C.

Percebe-se que a malha A (com $L_{méd} \cong \lambda_{min}/25$) foi capaz de gerar resultados com erros abaixo de 1% em toda faixa de frequências

de interesse, apresentando um erro médio de 0,447%. As malhas B (com $L_{méd} \cong \lambda_{mín}/32$) e C (com $L_{méd} \cong \lambda_{mín}/39$) forneceram resultados com erros também abaixo de 1%, com exceção do sexto modo de ressonância, com erro de 1,29% para as duas malhas. O erro médio calculado para a malha B foi de 0,351% e para a malha C foi de 0,286%.

Em comparação aos resultados apresentados em [37], obteve-se, através do *software* aqui implementado, um erro médio menor em todos os casos.

É importante salientar que os valores de erros calculados em todas as três malhas simuladas ficaram na mesma ordem de grandeza do erro que pode ser atribuído à resolução da resposta espectral. Para este problema, especificamente, esta fonte de erro é significativa. Os valores máximos de erro, devido à resolução espectral, variam de 0,6% para a frequência mais baixa analisada até 0,15% para a frequência mais alta.

Neste problema, os resultados demonstraram que as variações na densidade de malha testadas não surtiram grandes diferenças na precisão atingida pelo *software*. No entanto, ressalta-se que todas as malhas geradas asseguravam uma boa discretização espacial. A malha mais grosseira, por exemplo, apresenta a relação de aproximadamente vinte e cinco arestas por comprimento de onda (para a máxima frequência de interesse).

Os tempos aproximados de execução foram de 6 minutos para a malha A (22,217 ms por iteração temporal), 22 minutos para a malha B (80,444 ms por iteração temporal) e 1 hora e 10 minutos para a malha C (258,728 ms por iteração temporal).

Os requisitos de memória RAM ficaram em torno de 2,3 MB para a malha A, 4,3 MB para a malha B e 8,6 MB para a malha C.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A ferramenta de simulação computacional formada pela associação entre o *software* NX I-deas e o processador numérico FETD desenvolvido demonstrou ser eficiente na resolução de problemas relativos a cavidades ressonantes. Em geral, foi possível obter um bom nível de precisão, com erros abaixo de 5% em todos os problemas simulados.

Verificou-se que as malhas geradas pelo NX I-deas foram capazes de descrever com boa fidelidade as estruturas curvas simuladas mesmo com baixas quantidades de elementos. Isso comprova a versatilidade das malhas de elementos tetraédricos e a qualidade do módulo pré-processador do *software*.

Uma análise das relações entre as densidades de malhas e os resultados obtidos sugere que um bom critério de discretização espacial seria $L_{méd_máx} = \lambda_{mín}/5$. Esta diferença entre o critério adotado para o método implementado e o critério clássico FDTD, de 10 células por comprimento de onda, se dá devido ao fato de o método dos elementos finitos permitirem a variação da incógnita dentro do elemento, o que não acontece no método FDTD. Um critério ainda menos rigoroso de discretização espacial poderia ser obtido com o uso de funções de interpolação de segunda ordem, por exemplo, que permitiria a variação da incógnita de forma parabólica dentro do elemento, melhorando assim a representação de sua variação espacial. A possibilidade do uso de funções de interpolação de ordem superior para redução dos requisitos de discretização espacial se mostra como uma possibilidade interessante, uma vez que os resultados analisados demonstraram que o parâmetro de maior impacto no tempo de execução do programa é justamente a densidade da malha.

Com relação à técnica de discretização temporal utilizada, verificou-se que o sistema manteve-se estável mesmo para incrementos temporais próximos ao limite estabelecido pelo critério de Nyquist. Contudo, em termos de precisão, percebe-se que a qualidade dos resultados obtidos fica comprometida nas proximidades deste limite.

Tomando por base as soluções numéricas encontradas neste trabalho, pode-se definir como um critério razoável para obtenção de uma boa precisão a escolha de $\Delta t_{máx} = 1/(10f_{máx})$.

Ainda com relação as discretizações espacial e temporal, notou-se também que o efeito causado pelo aumento do passo temporal ou a diminuição da densidade da malha se traduz, em termos de resposta

espectral, em um deslocamento da solução numérica em relação à solução física. Esse efeito fez com que os modos de ressonância das cavidades estudadas fossem encontrados em frequências cada vez menores à medida que se aumentava o Δt ou o $L_{méd}$.

Uma definição mais precisa para os critérios de discretização espacial e temporal para o sistema implementado exigiria a simulação de uma quantidade maior de casos, cobrindo outras combinações de estruturas, materiais, faixa de frequências, etc. Entretanto, tal análise não foi objeto de estudo neste trabalho.

O desempenho computacional do *software* mostrou-se bastante satisfatório, exigindo uma quantidade de memória e um tempo de execução relativamente pequenos para obtenção de resultados precisos.

Como uma ferramenta de simulação de problemas eletromagnéticos de altas frequências, o sistema de cálculo desenvolvido “NX I-deas – processador FETD” apresenta como principal limitação a impossibilidade de simulação de problemas de radiação em espaço aberto. Isso porque não foram implementadas técnicas de absorção de ondas eletromagnéticas que chegam às fronteiras do domínio.

Métodos eficientes de simulação de propagação eletromagnética em espaço aberto em FETD ainda são alvos de pesquisas, sendo um campo em desenvolvimento.

Existe a possibilidade de simularem-se problemas de propagação em espaço aberto através da criação de domínios de estudo suficientemente grandes para que as ondas refletidas nas fronteiras não interfiram na análise objetivada. Contudo, a aplicação dessa metodologia tende a criação de domínios de cálculo grandes em relação às dimensões do objeto de análise. Isso exigiria malhas com uma grande quantidade de elementos, resultando em simulações com alto custo computacional.

Sugestões para trabalhos futuros

Como sugestão para estudos futuros, citam-se alguns tópicos cujo estudo e implementação propiciariam o aperfeiçoamento do sistema de simulação computacional desenvolvido:

- Um estudo mais focado aos efeitos da qualidade das discretizações espacial e temporal tornaria possível a obtenção de critérios mais genéricos para estes aspectos;
- O desenvolvimento e a aplicação de técnicas para simulação de domínios abertos (PML [33] ou condições absorventes de contorno [15]) aumentaria consideravelmente a gama de aplicação da ferramenta de cálculo;
- A implementação de uma formulação com suporte para diferentes tipos de elementos (hexaedros, prismas, etc.) propiciaria um melhor aproveitamento da capacidade do módulo pré-processador do NX I-deas;
- A utilização de funções de base de ordem superior permitiria a redução dos requisitos de densidade de malha;
- O emprego de técnicas de paralelização da resolução do sistema linear poderia reduzir os tempos de simulação;
- A integração ou comunicabilidade com *softwares* de otimização possibilitaria a escolha de parâmetros de projeto de forma automática.

Por fim, ainda nesta linha de aperfeiçoamento do sistema, porém mais voltada à parte de computação, poderia ser feita a implementação de uma interface gráfica com o usuário, de forma a tornar a operação do *software* mais intuitiva.

7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] FACCIONI FILHO, M. *O Método da Modelagem Por Linhas de Transmissão (TLM) e Aplicações Em Compatibilidade Eletromagnética*. Florianópolis, 1997. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) – Centro Tecnológico, Universidade Federal de Santa Catarina.
- [2] FACCIONI FILHO, M. *Estudo de Modelagem Eletromagnética com o Método das Linhas de Transmissão (TLM)*. Florianópolis, 2001. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) – Centro Tecnológico, Universidade Federal de Santa Catarina.
- [3] FIRMINO, A. C. *Contribuição Ao Estudo de Métodos Numéricos Em Eletromagnetismo: O Método TLM Em Duas Dimensões*. Florianópolis, 1998. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) – Centro Tecnológico, Universidade Federal de Santa Catarina.
- [4] FERREIRA, G. S. *Modelamento Numérico de Problemas de Compatibilidade Eletromagnética Utilizando TLM (Transmission Line Modelling Method)*. Florianópolis, 1999. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) – Centro Tecnológico, Universidade Federal de Santa Catarina.
- [5] SADIKU, M. N. O.; AGBA, L. C. A simple introduction to the transmission-line modeling. *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, v. 37, n. 8, aug. 1990.
- [6] LIMA, I. C. *Modelagem de Campos Eletromagnéticos Estáticos e Dinâmicos Usando A Técnica das Diferenças Finitas*. Florianópolis, 1997. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) – Centro Tecnológico, Universidade Federal de Santa Catarina.
- [7] TRAVASSOS, X. L. Jr. *Estudo de antenas de Microfita Retangulares Utilizando o Método FDTD*. Florianópolis, 2004. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) – Centro Tecnológico, Universidade Federal de Santa Catarina.

- [8] LIMA, C. B. *Análise de Dispositivos Eletromagnéticos Para Hipertermia Usando o Método FDTD*. Florianópolis, 2006. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) – Centro Tecnológico, Universidade Federal de Santa Catarina.
- [9] TAFLOVE, A. *Computational electrodynamics: the finite-difference time-domain method*. Boston : Artech House, 1995.
- [10] FERREIRA, G. S. *Estudo de Campos Eletromagnéticos Em Altas Frequências Com Aplicação Em Guias de Onda Retangulares*. Florianópolis, 1994. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) – Centro Tecnológico, Universidade Federal de Santa Catarina.
- [11] GRUBISIC, S. *Predição de Campos em ambientes Interiores Utilizando a Técnica de Traçado de Raios*. Florianópolis, UFSC, 2005. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) – Centro Tecnológico, Universidade Federal de Santa Catarina.
- [12] *NX I-deas*. Versão 5.0.0.87.
http://www.plm.automation.siemens.com/en_us/products/nx/ideas/
(acesso em março de 2010)
- [13] KRAUS, J. D. *Electromagnetics*. 3. ed. McGraw-Hill, 1984.
- [14] BASTOS, J. P. A. *Eletromagnetismo para engenharia: Estática e quase-estática*. 2. ed. Florianópolis : Editora da UFSC, 2008.
- [15] CARPES, W. P. JR. *Modélisation tridimensionnelle par éléments finis destinée aux analyses de propagation d'ondes et de compatibilité électromagnétique*. Paris, 2000. These (Doctorat en Génie Électrique) – Université Paris XI.
- [16] BOSSAVIT, A. *Computational electromagnetic: variational formulations, complementarity, edge elements*. San Diego : Academic Press, 1998.
- [17] IDA, N.; BASTOS, J. P. A. *Electromagnetics and calculation of fields*. 2. ed. New York : Springer-Verlag, 1997.
- [18] WEBB, J. P. Edge elements and what they can do for you. *IEEE Trans. on Magnetics*, v. 29, n. 2, p. 1460-1465, mar. 1993.

- [19] MUR, G. Edge elements, their advantages and their disadvantages. *IEEE Trans. on Magnetics*, v. 30, n. 5, p. 3552-3557, sep. 1994.
- [20] MUR, G. The fallacy of edge elements. *IEEE Trans. on Magnetics*, v. 34, n. 5, p. 3244-3247, sep. 1998.
- [21] WU, J. Y.; LEE R. The advantages of triangular and tetrahedral edge element for electromagnetic modeling with finite element method. *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, v. 45, n. 9, p. 1431-1437, sep. 1997.
- [22] YUAN, H.; YANG, H.; CHEN, R. et al. Numerical dispersion analysis of FETD method. *IEEE*.
- [23] LEE, J. F.; BURIS, N. Solving Maxwell's equations by edge element time domain methods. *IEEE*, 1994.
- [24] GEDNEY, S. D.; NAVSARIWALA, U. An unconditionally stable finite element time-domain solution of the vector wave equation. *IEEE Microwave and Guided Wave Letters*, v. 5, n. 10, p. 332-335, oct. 1995.
- [25] LEE, J. F.; SACKS, Z. Whitney elements time domain (WETD) methods. *IEEE Trans. on Magnetics*, v. 31, n.3, p. 1325-1329, may 1995.
- [26] LEE, J. F. WETD – a finite element time-domain approach for solving Maxwell's equations. *IEEE Microwave and Guided Wave Letters*, v. 4, n. 4, p. 11-13, jan. 1994.
- [27] ARTUZI, W. A. JR. Improving the Newmark time integration scheme in finite element time domain methods. *IEEE Trans. on Microwave and Wireless Components Letters*, v. 15, n. 12, p. 898-900, dec. 2005.
- [28] UGS Corp. NX I-deas 5 help library. *Software documentation*.
- [29] wxDev-C++. Versão 6.10.2.
Disponível em: <http://wxdsn.sourceforge.net/> (acesso em janeiro de 2009).

[30] GCC. Versão 4.4.3.

Disponível em: <http://gcc.gnu.org/> (acesso em janeiro de 2010).

[31] THIBES, H. V. *Um estudo da fatoração incompleta LU e Cholesky como pré-condicionadores nos métodos iterativos*. Porto Alegre, 2002. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul

[32] COLLIN, R. E. *Foundations for microwave engineering*. 2. ed. New York : McGraw-Hill, 1992.

[33] ARTUZI, W. A. JR. Modelagem do UPML no método dos elementos finitos. *MOMAG (SBMO/SBMag)*, sep. 2008.

[34] HAYKIN, S.; VEEN, B. V. *Signals and systems*. New York : John Wiley & Sons, 1999.

[35] SADIKU, M. N. O. *Elements of electromagnetics*. 2. ed. New York : Oxford University Press, 1995.

[36] BARDI, I.; BIRO, O.; PREIS, K. Finite element scheme for 3D cavities without spurious modes. *IEEE Trans. on Magnetics*, v. 27, n. 5, p. 4036-4039, nov. 1991.

[37] CARPES, W. P. JR.; PICHON, L.; RAZEK, A. Efficient analysis of resonant cavities by finite element method in time domain. *IEE Proc.- Microwave Antennas Propagation*, v. 147, n. 1, p. 53-57, feb. 2000.