

GEOVANI BRESOLIN

# Simulação do Comportamento Dúctil de Rochas Salinas

Florianópolis  
Dezembro de 2010

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica

# Simulação do Comportamento Dúctil de Rochas Salinas

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, da Universidade Federal de Santa Catarina, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia - Área de Concentração: Análise e Projeto Mecânico.

**Orientador:** Marcelo Krajnc Alves, Ph.D.

**Co-orientador:** Hazim Ali Al-Qureshi, Ph.D.

Geovani Bresolin

Florianópolis  
Dezembro de 2010

Catálogo na fonte elaborada pela Biblioteca da  
Universidade Federal de Santa Catarina

B842s Bresolin, Geovani

Simulação do comportamento dúctil de rochas salinas  
[dissertação] / Geovani Bresolin; orientador, Marcelo  
Krajnc Alves. - Florianópolis, SC, 2010.

136 p.: il., grafs., tabs.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa  
Catarina, Centro Tecnológico. Programa de Pós-Graduação em  
Engenharia Mecânica.

Inclui referências

1. Engenharia mecânica. 2. Matérias - Deformações.  
3. Método dos elementos finitos. 4. Rochas Salinas. I. Alves,  
Marcelo Krajnc. II. Universidade Federal de Santa Catarina.  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica. III. Título.

CDU 621

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica

## **Simulação do Comportamento Dúctil de Rochas Salinas**

**Geovani Bresolin**

Dissertação julgada para a obtenção do título de  
MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA.

Especialidade em ENGENHARIA MECÂNICA e aprovada em sua forma final pelo  
programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica.

---

Prof. Marcelo Krajnc Alves, Ph.D. - Orientador

---

Prof. Hazim Ali Al-Qureshi, Ph.D. - Co-orientador

---

Prof. Eduardo Alberto Fancello, D. Sc. - Coordenador do POSMEC

Comissão Examinadora:

---

Prof. José Carlos de Carvalho Pereira, Dr.

---

Prof. Clovis Raimundo Maliska, Ph.D.

---

Prof. Cláudio Roberto Ávila da Silva Júnior, Dr.

Florianópolis, Dezembro de 2010.

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, pela vida, por estar sempre no meu caminho, iluminando e guiando meus passos.

Aos meus pais, Olintho e Irene, que foram à base de tudo pra mim, apoiando-me nos momentos difíceis com força, confiança, amor, ensinando-me a persistir nos meus objetivos e ajudando a alcançá-los.

A minha irmã, Gisela, pelo companheirismo e por trazer muita alegria a nossa família com sua graciosa princesinha Gabriella Valentina.

Aos meus avós, pelo exemplo de vida e por me ensinarem muito sobre os caminhos plenos e valorosos do bem.

Aos amigos que sempre estiveram do meu lado dando força e apoio.

A todos os professores e à coordenação do Programa de Pós Graduação em Engenharia Mecânica.

Ao Professor Marcelo Krajnc Alves pela orientação, amizade, confiança, paciência e conhecimentos transmitidos no decorrer do desenvolvimento deste trabalho.

Ao CNPQ pela bolsa de mestrado.

A todos que, de alguma forma ou outra, contribuíram para a realização deste trabalho.

*“A mente que se abre a uma  
nova idéia jamais voltará ao  
seu tamanho original.”*

Albert Einstein

# Resumo

O objetivo da dissertação consiste em investigar o modelo constitutivo, proposto por Yahya *et al.* [36], para rochas salinas, propor um algoritmo implícito e desenvolver um software para a análise do comportamento dúctil de rochas salinas, o qual ocorre nas condições para o desenvolvimento de campos de petróleo em águas profundas. A rocha salina é modelada como sendo um sólido elasto-viscoplástico, sem superfície de escoamento, sujeito a pequenas deformações e deslocamentos. O modelo utiliza variáveis internas ligadas aos fenômenos de endurecimento isotrópico e cinemático. Também incorpora os fenômenos de recuperação estática e dinâmica verificados experimentalmente na resposta de rochas salinas sob carregamentos gerais. A resposta em fluência do material é descrita por uma fase transiente e uma fase estacionária, as quais obedecem a uma regra de fluxo viscoplástica, que depende da evolução das variáveis internas. Estas variáveis evoluem com o tempo descrevendo a fluência primária e saturam em um instante posterior possibilitando a descrição da fluência secundária. A evolução das variáveis internas é descrita através da especificação de leis de evolução, as quais são conduzidas por mecanismos que operam concomitantemente, tais como, endurecimento e amolecimento, sendo seus respectivos valores de saturação obtidos por equações dependentes do valor de saturação da tensão equivalente de von Mises, o qual é derivado através de uma equação seno hiperbólico, baseada em leis físicas, que representa o fluxo estacionário do material.

Para a discretização das equações de evolução foi utilizado um método incremental implícito. Para a discretização do problema incremental foi aplicado o método de Galerkin conjuntamente com o método dos elementos finitos, utilizando na discretização do domínio geométrico um elemento finito quadrático triangular de seis nós. O software foi desenvolvido em linguagem Fortran orientada a objetos e utilizado na simulação de alguns ensaios mecânicos empregados na identificação das constantes materiais necessárias para a caracterização do modelo de rochas salinas. Dentre os vários ensaios utilizados, foram considerados os ensaios: de resistência à compressão uniaxial e triaxial; de fluência à compressão uniaxial e triaxial; de relaxação e de compressão diametral.

**Palavras - chave:** rochas salinas, fluência, método dos elementos finitos.

# Abstract

The thesis objective is to investigate the constitutive model proposed by Yahya *et al.* [36], for rock salt, propose an implicit algorithm and develop software for the analysis of ductile behavior of rock salt, which occurs in conditions of deepwater oil field developments. The rock salt is modeled to be an elasto-viscoplastic solid, with no yield surface, subject to small strains and dislocations. The model uses internal variables attached to the phenomena of isotropic and kinematic hardening. It also incorporates the phenomena of static and dynamic recovery, verified experimentally in response to rock salt under general loadings. The creep response of the material is described by transient and steady state stages, which follow a viscoplastic flow rule that depends on the evolution of internal variables. These variables evolve with time, describing the primary creep, and saturate in a subsequent moment allowing the description of secondary creep. The evolution of internal variables is described by specifying evolution laws, which are driven by mechanisms that operate concurrently such as hardening or softening; their respective saturation values are obtained by equations depending on the saturation value of the von Mises equivalent stress, which is derived through a hyperbolic sine equation, based on physical laws, that represents the steady state flow of material.

An implicit incremental method was used for the discretization of evolution equations. The Galerkin method was applied for the discretization of the incremental problem in conjunction with the finite element method, using a quadratic triangular finite element of six nodes for the geometric domain discretization. The software was developed in Fortran object-oriented language and used in the simulation of some mechanical tests employed to identify material constants necessary to characterize the rock salt model. Among several tests used, the uniaxial and triaxial compressive strength tests, the uniaxial and triaxial compression creep tests, and the relaxation and the diametric compression tests were considered.

**Keywords:** rock salt, creep, finite element method.

# Lista de Figuras

1.1	Modelo de bacia de sedimentação (bacia profunda - água profunda) <sup>[13]</sup> . . . . .	3
1.2	Camadas de uma rocha salina <sup>[19]</sup> . . . . .	4
1.3	Estilos de intrusão do sal. <sup>[14]</sup> . . . . .	5
1.4	Evolução do sal <sup>[14]</sup> . . . . .	6
1.5	Principais estilos estruturais dos evaporitos, com a seta cinza indicando incremento de maturidade <sup>[4]</sup> . . . . .	6
1.6	Maiores depósitos de sal ao redor do mundo <sup>[14]</sup> . . . . .	7
1.7	Desafios na perfuração e completação de poços em seções de sal <sup>[14]</sup> . . . . .	8
2.1	Comportamento clássico da deformação por fluência do sal <sup>[30]</sup> . . . . .	10
2.2	Comportamento de fluência do sal a 25 °C e uma tensão diferencial de 25 MPa para pressões confinantes de 1, 2 e 5 MPa <sup>[16]</sup> . . . . .	11
2.3	Mapa dos mecanismos de deformação do sal. A temperatura conforme indicada na abscissa é normalizada pela temperatura de fusão do sólido (igual a 803, 89 °C para o sal) para se obter a temperatura homóloga. Da mesma forma, a tensão diferencial $\Delta\sigma$ (igual ao dobro da tensão de cisalhamento máxima) como indicado na ordenada é normalizada pelo módulo de cisalhamento $G$ <sup>[16]</sup> . . . . .	12
2.4	Comparação do comportamento de fluência (21 dias) para os sais da WIPP e dos domos da Costa do Golfo dos EUA <sup>[16]</sup> . . . . .	13
2.5	Comparação das taxas de deformação previstas com um modelo de sal utilizando as propriedades do sal de Bayou Choctaw e os resultados medidos em amostra de sal de Mad Dog <sup>[16]</sup> . . . . .	14
2.6	Tipos de discordâncias: (a) discordância em aresta e (b) discordância em hélice. . . . .	18
2.7	Esquema do movimento de uma discordância mista <sup>[7]</sup> . . . . .	18
2.8	Escorregamento transversal de uma discordância em hélice. . . . .	19
2.9	Escalagem de discordância, a difusão do átomo desbloqueia a discordância do obstáculo, permitindo seu deslizamento. . . . .	21
2.10	Comparação do mapa dos mecanismos de fratura calculado com dados experimentais do sal natural <sup>[8]</sup> . . . . .	23
2.11	O mapa dos mecanismos de fratura calculado comparado com dados experimentais do sal da WIPP e do Sal da ASSE <sup>[8]</sup> . . . . .	24
2.12	Ensaio de tração indireta brasileiro. O corpo de prova de sal é carregado diametralmente com a máquina de compressão <sup>[23]</sup> . . . . .	25
2.13	Corpos de prova do teste de tração indireta brasileiro após a falha <sup>[23]</sup> . . . . .	26
2.14	Ensaio de resistência à compressão uniaxial com taxa de carregamento constante. A amostra cilíndrica é carregada verticalmente utilizando a máquina de compressão <sup>[23]</sup> . . . . .	26
2.15	Corpo de prova com falha sob compressão não confinada <sup>[34]</sup> . . . . .	27
2.16	Curva tensão-deformação completa do ensaio não confinado. . . . .	28

2.17	Câmara para ensaios triaxiais de rochas. . . . .	28
2.18	Máquina de ensaio triaxial utilizada na Re/Spec e Sandia (EUA) <sup>[11]</sup> . . . . .	29
2.19	Representação gráfica das condições de tensão para a falha de rochas intactas. . . . .	30
2.20	Diagrama esquemático mostrando a determinação do módulo de elasticidade $E$ a partir do carregamento inicial, descarregamento e recarregamento <sup>[11]</sup> . . . . .	31
2.21	Aparato experimental do ensaio de fluência uniaxial <sup>[24]</sup> . . . . .	32
2.22	Máquina de compressão e uma câmara triaxial de Hoek <sup>[23]</sup> . . . . .	33
2.23	Testemunhos de halita (a), carnalita (b) e taquidrita (c) <sup>[4]</sup> . . . . .	35
2.24	Resultados de ensaios de fluência para halita, carnalita e taquidrita <sup>[4]</sup> . . . . .	35
3.1	Definição das configurações de referência e deformada. . . . .	37
3.2	Definição do sistema de coordenadas empregado na configuração de referência. . . . .	37
3.3	Definição da função deformação. . . . .	38
3.4	Exemplo de uma rotação pura. . . . .	40
3.5	Exemplo de uma deformação pura. . . . .	40
3.6	Definição do campo de deslocamento. . . . .	42
3.7	Definição de uma parte genérica $v$ do corpo, $v \subset \Omega$ . . . . .	43
3.8	Definição da medida de tensão. . . . .	44
3.9	Definição de um problema clássico de deformação infinitesimal. . . . .	51
4.1	Curvas básicas de fluência para diferentes cargas, $L_1, L_2, L_3$ . . . . .	58
4.2	Gráfico típico da taxa de deformação no tempo. . . . .	59
4.3	Curvas isócronas de fluência. . . . .	60
4.4	Curvas de isodeformação de fluência. . . . .	60
4.5	Gráfico típico do logaritmo da taxa de deformação mínima em relação ao logaritmo da tensão. . . . .	61
4.6	Gráfico típico do logaritmo da tensão inicial em relação ao logaritmo do tempo de ruptura. . . . .	61
4.7	Variação da taxa de fluência mínima com a temperatura. . . . .	62
4.8	Curva típica de relaxação. . . . .	63
4.9	Resposta típica de fluência para degraus de carga. . . . .	63
4.10	Efeito do descarregamento na fluência. . . . .	64
4.11	Modelos de endurecimento por tempo transcorrido e endurecimento por deformação <sup>[31]</sup> . . . . .	67
5.1	Discretização do domínio. . . . .	96
6.1	Corpo de prova - compressão uniaxial. . . . .	106
6.2	Carregamento em forma de rampa linear - compressão uniaxial. . . . .	106
6.3	Distribuição das curvas de nível das componentes do campo de deslocamento na direção $y$ e $x$ - compressão uniaxial. . . . .	107
6.4	Resposta tensão-deformação numérica - compressão uniaxial. . . . .	107
6.5	Evolução das variáveis internas versus deformação viscoplástica. . . . .	108
6.6	Corpo de prova - cisalhamento. . . . .	109
6.7	Distribuição das curvas de nível da componente do campo de deslocamento na direção $x$ - cisalhamento. . . . .	109
6.8	Resposta tensão-deformação numérica - cisalhamento. . . . .	110
6.9	Corpo de prova - fluência uniaxial. . . . .	110
6.10	Cargas constantes e tempo dos ensaios de fluência uniaxiais. . . . .	111

6.11	Distribuição das curvas de nível das componentes do campo de deslocamento na direção $y$ e $x$ - fluência uniaxial. . . . .	111
6.12	Curvas da deformação viscoplástica versus tempo para diferentes tensões axiais constantes. . . . .	112
6.13	Corpo de prova - compressão triaxial. . . . .	113
6.14	Distribuição das curvas de nível das componentes do campo de deslocamento na direção $y$ e $x$ - compressão triaxial ( $8,7 \times 10^{-6} s^{-1}$ ). . . . .	113
6.15	Distribuição das curvas de nível das componentes do campo de deslocamento na direção $y$ e $x$ - compressão triaxial ( $8,3 \times 10^{-8} s^{-1}$ ). . . . .	114
6.16	Respostas medidas e calculadas da rocha salina de Avery Island durante carregamentos com taxa de deformação constante. . . . .	114
6.17	Distribuição das curvas de nível das componentes do campo de deslocamento nas direções $x$ e $y$ - compressão triaxial ( $3,8 \times 10^{-5} s^{-1}$ ). . . . .	116
6.18	Resposta medida e calculada da rocha salina artificial, e a evolução das variáveis internas com a deformação. . . . .	116
6.19	Evolução das variáveis internas com o tempo - sal artificial. . . . .	117
6.20	Corpo de prova - fluência à compressão triaxial. . . . .	118
6.21	Cargas constantes e tempo dos ensaios de fluência à compressão triaxial. . . . .	118
6.22	Distribuição das curvas de nível das componentes do campo de deslocamento nas direções $x$ e $y$ - fluência triaxial. . . . .	119
6.23	Curvas da deformação viscoplástica versus tempo para diferentes tensões diferenciais constantes. . . . .	119
6.24	Deformações axiais constantes e tempo dos ensaios de relaxação. . . . .	120
6.25	Distribuição das curvas de nível das componentes do campo de deslocamento nas direções $x$ e $y$ - relaxação. . . . .	121
6.26	Curvas de variação das tensões diferenciais com o tempo. . . . .	121
6.27	Corpo de prova - compressão diametral. . . . .	122
6.28	Distribuição das curvas de nível das componentes do campo de deslocamento na direção $x$ - compressão diametral. . . . .	123
6.29	Distribuição das curvas de nível das componentes do campo de deslocamento na direção $y$ - compressão diametral. . . . .	123
6.30	Distribuição das curvas de nível referentes à componente $\sigma_{xx}$ do tensor tensão. . . . .	124
6.31	Distribuição das curvas de nível referentes à componente $\sigma_{yy}$ do tensor tensão. . . . .	124
6.32	Distribuição das curvas de nível referentes à componente $\sigma_{zz}$ do tensor tensão. . . . .	125
6.33	Distribuição das curvas de nível referentes à componente $\sigma_{xy}$ do tensor tensão. . . . .	125
A.1	Método de Euler implícito. . . . .	131

# Lista de Tabelas

1.1	Densidade e Fórmula Química dos Principais Minerais Evaporíticos <sup>[18]</sup> . . . . .	4
3.1	Variáveis de estado e associadas do modelo proposto. . . . .	56
4.1	Modelo constitutivo elasto-viscoplástico para os PSM (Pseudo-Standard Materials). . . . .	76
4.2	Modelo constitutivo para o comportamento dúctil de rochas salinas. . . . .	82
5.1	Regra da Quadratura até a Ordem Cúbica. . . . .	102
5.2	Procedimento para determinação do vetor de deslocamentos nodais $\vec{U}_{n+1}$ no tempo $t_{n+1}$ . . . . .	104
6.1	Parâmetros da rocha salina de Avery Island. . . . .	105
6.2	Parâmetros da rocha salina artificial. . . . .	115

# Lista de Símbolos

Nesta seção são apresentados os símbolos empregados neste trabalho. Em geral, a notação pode ser esquematizada da seguinte forma:

- **Escalares:** Letras do alfabeto português ou grego sem negrito ( $a, b, c, \dots$  ou  $A, B, C, \dots$  ou  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  ou  $\Gamma, \Delta, \Xi, \dots$ ).
- **Vetores:** Letras do alfabeto português sem negrito com uma seta acima ( $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots$  ou  $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}, \dots$ ) ou letras minúsculas do alfabeto grego sem negrito com uma seta acima ( $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}, \dots$ ).
- **Tensores ou Matrizes:** Letras maiúsculas do alfabeto português em negrito ou em “blackboard bold” ( $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \dots$  ou  $\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C}, \dots$ ) e letras minúsculas do alfabeto grego em negrito ( $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}, \dots$ ).
- **Conjuntos:** Letras maiúsculas do alfabeto português em “sans serif” ( $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \dots$ ).
- **Domínio, Parte Arbitrária do Domínio e Contorno:** Letras maiúsculas ou minúsculas do alfabeto grego ( $\Gamma, \Delta, \Xi, \dots$  ou  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ ).

## Escalares

$A$	Constante material.
$a$	Constante material.
$a_{1s}$	Constante material.
$a_{2s}$	Constante material.
$a_{1l}$	Constante material.
$a_{2l}$	Constante material.
$a_3$	Constante material.
$a_4$	Constante material.
$a_5$	Constante material.
$a_6$	Constante material.
$A_k$	$k$ -ésima variável termodinâmica associada a variável interna $V_k$ .
$A^*$	Parâmetro da estrutura.
$A'$	Parâmetro da estrutura.
$A_o$	Área inicial da seção transversal do corpo de prova.
$B$	Constante material.
$b$	Constante material.
$C_e$	Coesão.
$C$	Constante material.
$C_0$	Resistência compressiva não confinada.

$c_1$	Constante material.
$c_2$	Constante material.
$c_3$	Constante material.
$D_o$	Constante material.
$D$	Diâmetro do corpo de prova.
$E$	Módulo de Young.
$E_i$	Energia interna.
$e$	Densidade específica da energia interna por unidade de massa.
$\dot{e}_o^c$	Constante material.
$e_H^e$	Parte hidrostática do tensor deformação elástico.
$e_{vol}^e$	Traço do tensor deformação elástico.
$e_{ef}^c$	Deformação viscoplástica efetiva.
$f_d$	Termo de recuperação dinâmica.
$f_h$	Termo responsável pelos mecanismos de endurecimento.
$f_s$	Termo de recuperação estática.
$G$	Módulo de cisalhamento.
$h$	Módulo de endurecimento.
$J$	Determinante do gradiente da função deformação.
$J$	Determinante da matriz jacobiana.
$K$	Energia cinética.
$K$	Tensão de resistência escalar de normalização ou Drag stress.
$k$	Variável dual associada a $K$ .
$K^\infty$	Valor de saturação da variável interna $K$ .
$K_o$	Constante material.
$k$	Constante material.
$k_1$	Constante material.
$k_2$	Constante material.
$L$	Comprimento inicial do corpo de prova.
$m$	Constante material.
$M_o$	Massa do corpo na configuração de referência ou inicial.
$M_t$	Massa do corpo na configuração deformada ou atual.
$N$	Constante material.
$N_i$	Funções de interpolação.
$n$	Constante material.
$n_r$	Componente do vetor normal unitário na direção radial.
$n_z$	Componente do vetor normal unitário na direção axial.
$p$	Parte hidrostática do tensor tensão de Cauchy.
$p$	Constante material.
$P$	Pressão de confinamento ou confinante.
$P_f$	Carga na condição de falha.
$P_{uf}$	Carga de ruptura.
$P_c$	Carga axial.
$P_a$	Potência virtual das forças de inércia.
$P_e$	Potência virtual das forças externas.
$P_{ext}$	Potência das forças externas.
$P_i$	Potência virtual das forças internas.
$Q$	Fluxo de energia térmica que o sistema recebe ou libera para o ambiente.
$q$	Tensão efetiva de von Mises.
$\bar{q}$	Constante material.

$R$	Tensão de resistência ao escoamento isotrópico.
$r$	Densidade específica do calor gerado por unidade de massa.
$r$	Variável dual associada a variável interna $R$ .
$r$	Coordenada radial em um sistema de coordenadas cilíndricas.
$R_o$	Constante material.
$R^\infty$	Valor de saturação da interna $R$ .
$\bar{R}$	Constante universal dos gases.
$\bar{R}$	Erro residual.
$S$	Produção de entropia.
$s$	Entropia específica.
$T$	Temperatura.
$T_0$	Resistência à tração indireta brasileiro.
$t$	Tempo.
$u$	Constante material.
$u_r$	Componente de deslocamento radial.
$u_z$	Componente de deslocamento axial.
$w_k$	Pesos de integração.
$Y$	Equação diferencial genérica.
$z$	Coordenada axial em um sistema de coordenadas cilíndricas.
$\alpha$	Tensão de repouso.
$\alpha$	Constante material.
$\varkappa_k$	Constante positiva.
$\varkappa_l$	Constante positiva.
$\varkappa_r$	Constante positiva.
$\varkappa_s$	Constante positiva.
$\beta$	Constante material.
$\gamma$	Constante material.
$\gamma_{rz}$	Componente do vetor deformação na direção de $rz$ .
$\delta$	Delta de Kronecker.
$\delta A$	Elemento de área, ao redor de um ponto.
$\varepsilon_{rr}$	Componente do vetor deformação na direção radial.
$\varepsilon_{\theta\theta}$	Componente do vetor deformação na direção de $\theta$ .
$\varepsilon_{zz}$	Componente do vetor deformação na direção de $z$ .
$\varepsilon_{ax}$	Deformação axial.
$\dot{\varepsilon}_s$	Taxa de fluência em regime estacionário.
$\mathcal{F}$	Potencial de dissipação.
$\eta$	Eixo do sistema de coordenadas naturais.
$\eta_k$	Pontos de integração.
$\theta$	Coordenada angular em um sistema de coordenadas cilíndricas.
$\lambda$	Valor próprio de $\mathbf{U}$ .
$\dot{\lambda}$	Multiplicador viscoplástico.
$\bar{\lambda}$	Constante de Lamé.
$\xi$	Eixo do sistema de coordenadas naturais.
$\xi_k$	Pontos de integração.
$\rho$	Densidade do corpo na configuração deformada ou atual.
$\rho_o$	Densidade do corpo na configuração de referência ou inicial.
$\rho_c$	Coefficiente de correlação.
$\sigma_{ax}$	Tensão axial.
$\sigma_{ef}$	Tensão efetiva.

$\sigma_n$	Amplitude da tração normal prescrita.
$\sigma_o$	Constante material.
$\sigma_0$	Constante material.
$\sigma^*$	Dureza.
$\sigma_E$	Tensão de escoamento.
$\sigma_{vm}$	Tensão equivalente de von Mises.
$\sigma_{vm}^\infty$	Valor de saturação de $\sigma_{vm}$ .
$\sigma_{rr}$	Componente do vetor tensão na direção radial.
$\sigma_{rz}$	Componente do vetor tensão na direção radial.
$\sigma_{\theta\theta}$	Componente do vetor tensão na direção de $\theta$ .
$\sigma_{zz}$	Componente do vetor tensão na direção de $z$ .
$\tau$	Tensão de cisalhamento.
$\nu$	Coefficiente de Poisson.
$\phi$	Ângulo de atrito interno.
$\chi_{sef}$	Valor efetivo da tensão de repouso de curta duração.
$\chi_{lef}$	Valor efetivo da tensão de repouso de longa duração.
$\chi_{sef}^\infty$	Valor de saturação de $\chi_{sef}$ .
$\chi_{lef}^\infty$	Valor de saturação de $\chi_{lef}$ .
$\Psi$	Potencial de energia livre de Helmholtz.
$\Psi^e$	Contribuição elástica do potencial de energia livre de Helmholtz.
$\Psi^c$	Contribuição viscoplástica do potencial de energia livre de Helmholtz.
$\omega_c$	Trabalho inelástico efetivo.
$\mathcal{F}$	Potencial de dissipação.
$\Delta$	Dissipação associada com o modelo.
$\Delta t$	Variação do tempo.
$\Delta H$	Energia de ativação.
$\Delta\sigma$	Tensão diferencial.
$\in_{sjk}$	Símbolo de permutação.

## Vetores

$\vec{b}$	Vetor de forças de corpo.
$\vec{d}$	Vetor de deslocamento genérico.
$\vec{D}$	Vetor próprio de $\mathbf{U}$ .
$\vec{F}_e^b$	Vetor de forças de corpo do elemento.
$\vec{F}_e^{int}$	Vetor de forças internas do elemento.
$\vec{F}_e^t$	Vetor de forças de tração prescritas nodais do elemento.
$\vec{F}^{int}$	Vetor de forças internas global.
$\vec{F}^b$	Vetor de forças de corpo nodais global.
$\vec{F}^t$	Vetor de forças de tração prescritas nodais global.
$\vec{n}$	Vetor normal à uma superfície qualquer.
$\vec{q}$	Vetor fluxo de calor.
$\vec{q}_e$	Vetor de deslocamentos nodais.
$\vec{R}$	Vetor residuo problema local.
$\vec{t}$	Vetor de forças de superfície.
$\vec{t}_p$	Tração prescrita.
$\vec{t}_Q$	Vetor tração atuando sobre um ponto $Q$ .

$\ddot{\vec{u}}$	Vetor aceleração.
$\vec{u}$	Vetor deslocamento de uma partícula.
$\vec{u}_p$	Deslocamento prescrito.
$\vec{u}_o$	Vetor deslocamento do corpo no instante $t = 0$ .
$\vec{U}$	Vetor deslocamentos nodais.
$\vec{v}$	Vetor velocidade de uma partícula na configuração deformada ou atual.
$\vec{v}_o$	Vetor velocidade do corpo no instante $t = 0$ (vetor velocidade inicial).
$\vec{V}$	Vetor velocidade de uma partícula na configuração de referência ou inicial.
$\vec{V}$	Conjunto de variáveis internas.
$\vec{w}$	Vetor de deslocamento virtual.
$\vec{\omega}$	Vetor de incógnitas.
$\vec{x}$	Vetor posição do corpo ou partícula no instante de tempo $t$ na configuração deformada ou atual.
$\vec{X}$	Vetor posição do corpo ou partícula na configuração de referência ou inicial $\Omega_o$ .
$\ddot{\vec{x}}$	Vetor aceleração.
$\delta\vec{q}_e$	Variação do vetor de deslocamentos nodais.
$\delta\vec{F}$	Vetor força.
$\vec{\varepsilon}$	Vetor deformação.
$\vec{\sigma}$	Vetor tensão.
$\Delta\vec{q}_e$	Incremento do vetor de deslocamentos nodais.

## Matrizes e Tensores

$\mathbf{B}^u$	Matriz deslocamento-deformação.
$\mathbf{C}$	Tensor de Cauchy-Green à direita.
$\mathbf{D}$	Tensor taxa de deformação.
$\mathbb{D}$	Tensor relação constitutiva elástica de quarta ordem.
$\check{D}_T^{ep}$	Tensor equivalente de segunda ordem obtido de $\mathbb{D}_T$ .
$\mathbb{D}_T$	Módulo tangente consistente.
$\mathbf{E}$	Tensor deformação de Green Lagrange.
$\mathbf{F}$	Gradiente da função deformação.
$\mathbf{H}$	Tensor gradiente de deslocamento.
$\mathbb{K}_T$	Matriz de rigidez tangente local.
$\mathbb{K}_T^e$	Matriz de rigidez tangente consistente do elemento.
$\mathbb{K}_{TG}$	Matriz de rigidez tangente consistente global.
$\mathbf{I}$	Tensor identidade de segunda ordem.
$\mathbb{I}$	Tensor identidade de quarta ordem.
$\mathbf{J}$	Matriz Jacobiana de transformação de coordenadas.
$\mathbf{R}$	Tensor rotação.
$\mathbf{U}$	Tensor de alongamento ou encurtamento para deformação pura relacionado com o tensor de Cauchy-Green à direita.
$\mathbf{V}$	Tensor de alongamento ou encurtamento para deformação pura relacionado com o tensor de Cauchy-Green à esquerda.
$\mathbf{N}$	Tensor Fluxo.
$\mathbf{N}^u$	Matriz das funções de interpolação.
$\alpha_s$	Tensor deformação de repouso de curta duração.
$\alpha_l$	Tensor deformação de repouso de longa duração.
$\alpha_s^D$	Parte deviatórica do tensor deformação de repouso de curta duração.

$\alpha_t^D$	Parte deviatória do tensor deformação de repouso de longa duração.
$\varepsilon$	Tensor deformação infinitesimal pura.
$\varepsilon$	Tensor deformação infinitesimal pura.
$\varepsilon^e$	Tensor deformação elástico.
$\varepsilon^c$	Tensor deformação viscoplástico.
$\varepsilon^{eD}$	Parte deviatória do tensor deformação elástico.
$\sigma$	Tensor tensão de Cauchy.
$\sigma^D$	Parte deviatória do tensor tensão de Cauchy.
$\bar{\sigma}$	Parte ativa ou efetiva do tensor tensão.
$\chi$	Tensor tensão de repouso, Rest stress tensor ou Back stress tensor.
$\chi_s$	Tensor tensão de repouso de curta duração.
$\chi_l$	Tensor tensão de repouso de longa duração.
$\chi_s^D$	Parte deviatória do tensor tensão de repouso de curta duração.
$\chi_l^D$	Parte deviatória do tensor tensão de repouso de longa duração.

## Domínio, Parte Arbitrária do Domínio e Contorno

$\Omega_o$	Domínio do corpo na configuração de referência ou inicial.
$\Omega_t$	Domínio do corpo configuração deformada ou atual.
$\Omega$	Domínio do corpo.
$\Omega_e$	Domínio do elemento finito.
$\partial\Omega$	Contorno do domínio.
$\partial\Omega_e$	Contorno do domínio do elemento finito.
$v_o$	Parte arbitrária de um corpo na configuração de referência ou inicial, $v_o \subset \Omega_o$ .
$v_t$	Parte arbitrária de um corpo na configuração deformada ou atual, $v_t \subset \Omega_t$ .
$v$	Parte arbitrária de um corpo, $v \subset \Omega$ .
$\partial v_o$	Contorno da parte arbitrária do corpo na configuração de referência ou inicial.
$\partial v_t$	Contorno da parte arbitrária do corpo na configuração deformada ou atual.
$\partial v$	Contorno da parte arbitrária do corpo.
$\Gamma_u$	Região do contorno com deslocamento prescrita.
$\Gamma_t$	Região do contorno com tração prescrita.

## Conjuntos

$K$	Conjunto dos deslocamentos admissíveis.
$V_u$	Conjunto das variações dos deslocamentos admissíveis.

## Operadores

$\varphi(\cdot)$	Funções deformação.
$\nabla(\cdot)$	Gradiente de $(\cdot)$ .
$div(\cdot)$	Divergente de $(\cdot)$ .
$tr[\cdot]$	Traço de $[\cdot]$ .
$\ (\cdot)\ $	Norma de tensores e vetores.
$\langle(\cdot)\rangle$	Operador de Macauley.
$(\cdot)_n, (\cdot)_{n+1}$	Valor avaliado no instante $n$ e $n + 1$ .
$(\cdot)^{trial}$	Valor avaliado no estado teste.
$a \equiv b$	Significa que $a$ é definido como $b$ . Este símbolo é usado para enfatizar que a expressão em questão é uma definição.

- $\Delta(\cdot)$  Incremento de  $(\cdot)$ , i.e.,  $\Delta(\cdot) = (\cdot)_{n+1} - (\cdot)_n$ .
- $(\cdot)^\infty$  Valor de saturação de  $(\cdot)$ .
- $\dot{(\cdot)}$  Operador que representa a derivada de  $(\cdot)$  em relação ao tempo  $\frac{d(\cdot)}{dt}$ .
- $\check{\wedge}_e(\circ)$  Operador de montagem de vetor.
- $\hat{\wedge}_e(\circ)$  Operador de montagem de matriz.

# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>x</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>xi</b>
<b>Lista de Símbolos</b>	<b>xii</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Motivação . . . . .	1
1.2 Objetivos . . . . .	2
1.3 Apresentação do Trabalho . . . . .	2
1.4 Evaporitos (Rochas Salinas) . . . . .	3
1.4.1 Fontes de Evaporitos . . . . .	4
1.4.2 Estilos e Evolução das Intrusões de Sal . . . . .	5
1.4.3 Associações de Campos de Petróleo a Evaporitos . . . . .	6
1.5 Desafios na Perfuração e Completação de Poços Através de Seções de Sal . . . . .	7
<b>2 Mecânica de Rochas Salinas</b>	<b>9</b>
2.1 Comportamento da Deformação do Sal . . . . .	9
2.2 Mapa dos Mecanismos de Deformação do Sal . . . . .	11
2.3 Testes Laboratoriais do Sal e Avaliação de Parâmetros . . . . .	12
2.3.1 Classificação do sal . . . . .	13
2.3.2 Comportamento do Sal em Águas Profundas no Golfo do México . . . . .	13
2.4 Controles Sobre a Fluência do Sal . . . . .	14
2.5 Resumo de Alguns Fatos Básicos Sobre o Sal . . . . .	15
2.6 Micromecânica de Rochas Salinas . . . . .	17
2.6.1 Mecanismos de Deformação e Processos de Recuperação . . . . .	17
2.6.2 Mecanismos de Fratura . . . . .	22
2.7 Determinação das Propriedades de Resistência e Deformação . . . . .	24
2.7.1 Ensaio de Tração Indireta Brasileiro . . . . .	25
2.7.2 Ensaio de Resistência à Compressão . . . . .	26
2.7.3 Ensaio de Carregamento Cíclico . . . . .	30
2.7.4 Ensaio de Fluência à Compressão Uniaxial . . . . .	31
2.7.5 Ensaio de Fluência à Compressão Triaxial . . . . .	32
2.7.6 Ensaio de Fluência à Compressão Triaxial em Rochas de Halita, Carnalita e Taquidrita . . . . .	34
<b>3 Termodinâmica dos Processos Irreversíveis</b>	<b>36</b>
3.1 Introdução . . . . .	36
3.1.1 Movimento de Deformação do Corpo $\mathcal{B}$ . . . . .	37

3.1.2	Conservação de Massa . . . . .	43
3.1.3	Primeiro Princípio da Termodinâmica - Conservação de Energia . . . . .	47
3.1.4	Segundo Princípio da Termodinâmica - Entropia . . . . .	48
3.2	Teoria da Deformação Infinitesimal . . . . .	49
3.2.1	Leis de Conservação . . . . .	51
3.3	Método das Variáveis de Estado Local . . . . .	53
3.3.1	Variáveis Observáveis . . . . .	53
3.3.2	Variáveis Internas . . . . .	54
3.3.3	Potenciais Termodinâmicos . . . . .	54
3.4	Múltiplos Potenciais de Dissipação . . . . .	57
<b>4</b>	<b>Modelos Elasto-viscoplásticos para Materiais Geomecânicos</b>	<b>58</b>
4.1	Uma Descrição Fenomenológica da Fluência . . . . .	58
4.1.1	O Fenômeno da Fluência . . . . .	58
4.1.2	Relações Constitutivas Uniaxiais Propostas . . . . .	64
4.1.3	Método das Variáveis Internas . . . . .	67
4.2	Modelagem do Comportamento de Rochas Salinas . . . . .	70
4.2.1	Modelo Unificado . . . . .	71
4.3	Modelos Gerais de Viscoplasticidade (Sem Superfície de Escoamento) . . . . .	72
4.3.1	Decomposição Aditiva do Tensor Deformação . . . . .	72
4.3.2	O Potencial de Energia Livre e a Lei Elástica . . . . .	73
4.3.3	Equações de Complementaridade . . . . .	74
4.3.4	Definição da Parte Inelástica da Energia Livre $\Psi^c(r, k, \alpha_s^D, \alpha_t^D)$ . . . . .	76
4.3.5	Definição dos Múltiplos Potenciais e Multiplicadores . . . . .	77
4.3.6	Leis de Evolução . . . . .	79
4.4	Modelo Viscoplastico para o Comportamento Dúctil de Rochas Salinas . . . . .	82
4.5	Discretização do Modelo Viscoplastico de Rochas Salinas . . . . .	83
4.5.1	Algoritmo de Decomposição do Operador . . . . .	83
4.5.2	Formulação do Mapeamento de Retorno Viscoplastico . . . . .	90
4.5.3	Determinação da Matriz de Rigidez Local . . . . .	91
4.6	Formulação Fraca do Problema Geomecânico . . . . .	91
4.6.1	Formulação Incremental . . . . .	91
4.6.2	Linearização pelo Método de Newton . . . . .	92
4.7	Determinação do Módulo Tangente Consistente . . . . .	93
<b>5</b>	<b>Discretização do Modelo</b>	<b>95</b>
5.1	Introdução . . . . .	95
5.2	Problemas 2D: Problemas de Deformação Plana e Axissimétricos (Sem Torção) . . . . .	95
5.2.1	Discretização do Elemento Finito de Galerkin . . . . .	96
5.2.2	Equação de Conservação do Momento Linear . . . . .	99
5.2.3	Integração Numérica . . . . .	102
5.2.4	Montagem do Problema Não Linear Global . . . . .	103
<b>6</b>	<b>Resultados</b>	<b>105</b>
<b>7</b>	<b>Conclusões</b>	<b>126</b>
7.1	Sugestões para Trabalhos Futuros . . . . .	127

<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>128</b>
<b>A Método de Euler Implícito</b>	<b>131</b>
<b>B Espaços de Sobolev</b>	<b>133</b>
B.0.1 Notação . . . . .	133
B.0.2 Espaços de Sobolev . . . . .	133
<b>C Teorema da Localização</b>	<b>134</b>

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Motivação

No Brasil, dentre as regiões exploratórias de petróleo em alto mar, destacam-se as Bacias de Campos e de Santos (Sudeste do Brasil). A Bacia de Campos é a maior província petrolífera do Brasil, responsável por mais de 80% da produção nacional e a Bacia de Santos possui campos petrolíferos em produção e grandes reservas por serem exploradas.

Na Bacia de Santos, a Petrobras confirmou a descoberta de petróleo em 2006, encontrando um reservatório de elevada produtividade, situado abaixo de uma camada de sal de mais de dois mil metros de espessura, denominada pré-sal. Esta informação foi confirmada e divulgada em 2007 com a conclusão da análise dos testes de formação do segundo poço em uma área chamada Tupi, local no qual é estimado um volume recuperável de óleo leve de 5 a 8 bilhões de barris de petróleo e gás natural <sup>[35]</sup>. Atualmente, com as novas descobertas, estima-se que as reservas do pré-sal da Bacia de Santos podem conter de 15 a 20 bilhões de barris. Esta quantidade de óleo e gás para os reservatórios do pré-sal, caso confirmados, aumentarão de modo significativo a quantidade de óleo existente nas bacias brasileiras, inserindo o Brasil no cenário entre os países com grandes reservas de petróleo e gás do mundo.

Para atingir a camada pré-sal, entre 5000 e 7000 metros de profundidade, a Petrobras desenvolveu novos projetos de perfuração, nos quais mais de 2000 metros de sal foram atravessados. O primeiro poço demorou mais de um ano e custou US\$ 240 milhões. Hoje, a Petrobras perfura um poço equivalente em 60 dias, a um custo de US\$ 60 milhões <sup>[35]</sup>.

Entretanto, a perfuração de poços de petróleo em águas profundas através de seções espessas de sal é um problema ainda não completamente dominado. Muitos problemas operacionais têm sido registrados pela indústria do petróleo quando se está perfurando através do sal. Entre os principais problemas estão: o aprisionamento da coluna de perfuração e o colapso do revestimento.

Portanto, empresas do ramo de petróleo investem em projetos de pesquisa para avaliar as propriedades mecânicas do sal e elaborar modelos numéricos mais sofisticados com o intuito de simular seu comportamento em grandes profundidades, sendo possível desta forma, estimar o comportamento da deformação por fluência em curtos e longos períodos de tempo e evitar problemas durante a perfuração e exploração de poços.

## 1.2 Objetivos

O objetivo deste trabalho é compreender o comportamento do sal nas condições para o desenvolvimento de campos de petróleo e investigar um modelo constitutivo que descreva o comportamento dependente do tempo do sal, ou seja, que descreva a deformação por fluência tanto transiente quanto em regime estacionário nas situações de interesse. O trabalho consiste também na proposição de um algoritmo implícito e sua implantação na plataforma computacional já existente no GMAC, utilizando o método dos elementos finitos. A finalidade do software desenvolvido é simular o processo de deformação de rochas salinas submetidas a diferentes situações de carregamento. Para tal, testes como de compressão diametral, relaxação, compressão uniaxial e triaxial, fluência à compressão uniaxial e triaxial, além de um teste de cisalhamento foram realizados.

## 1.3 Apresentação do Trabalho

Nessa seção, são apresentados os assuntos discutidos em cada um dos 7 capítulos dessa dissertação.

No capítulo 1, são apresentados alguns comentários introdutórios e uma revisão bibliográfica sobre as rochas salinas, descrevendo como são formadas e de onde se originam. Também são enfatizados os estilos e evoluções de intrusões de sais e como estas intrusões afetam as formações adjacentes. Comenta-se a existência de campos gigantes de petróleo em águas profundas associados a camadas espessas de sais e a importância destas para a acumulação de petróleo. Além disso, são mencionados alguns problemas de perfuração durante a travessia de seções de sal.

No capítulo 2 é feita uma revisão sobre o comportamento mecânico das rochas salinas, sendo fornecido um mapa dos mecanismos de deformação desenvolvido para o sal nas condições estabelecidas para a exploração de poços em águas profundas. A micromecânica das rochas salinas também é apresentada com base nos mecanismos de deformação que operam em condições de exploração de campos de petróleo. Por fim, são apresentados os ensaios mecânicos realizados em rochas salinas utilizados para a obtenção das propriedades de resistência e deformação as quais são necessárias para a caracterização dos modelos constitutivos.

O capítulo 3 apresenta os conceitos básicos necessários para modelar a deformação e a falha de materiais sólidos. Estes fenômenos são descritos por teorias que são formuladas dentro do enfoque da termodinâmica dos processos irreversíveis, tornando possível a modelagem do comportamento de sólidos submetidos a carregamentos termomecânicos.

No capítulo 4 é feita uma revisão sobre o comportamento da fluência em metais. São apresentadas algumas relações constitutivas que modelam matematicamente o comportamento da deformação por fluência primária e secundária. Em seguida o modelo constitutivo de rochas salinas selecionado para o desenvolvimento do trabalho é apresentado. Posteriormente é proposta uma discretização do modelo utilizando um algoritmo implícito. Finalmente é apresentada a formulação discretizada do problema.

No capítulo 5 é aplicado o método de Galerkin conjuntamente com o método dos elementos finitos para a solução do problema discretizado. Por simplicidade foram considerados apenas problemas axissimétricos e de estado plano de deformações. A determinação da matriz de rigidez tangente e dos vetores de força nodal equivalentes são apresentados juntamente com a montagem do problema não linear global.

No sexto capítulo são apresentados os resultados das análises dos problemas propostos e as comparações com os resultados obtidos na literatura.

O último capítulo apresenta as conclusões do trabalho e as sugestões para trabalhos futuros.

## 1.4 Evaporitos (Rochas Salinas)

Os evaporitos são rochas sedimentares constituídas por camadas de minerais salinos formadas pela evaporação e precipitação de minerais a partir de uma solução salina concentrada (salmoura). Formam-se em ambientes de sedimentação de baixo aporte de terrígenos onde a perda de água por evaporação excede a taxa de influxo de águas no local de evaporação.

Os ambientes de formação de evaporitos ocorrem tanto em situações de caráter continental como marinho sendo este último normalmente de maior expressão [32]. A Fig. 1.1 mostra o acúmulo de sedimentos, a concentração de salmoura e a precipitação de sais consequentes da evaporação em um modelo de bacia de sedimentação.

Uma das principais justificativas para o acontecimento deste tipo de deposição (Fig. 1.1) é que o processo de evaporação ocorre na interface água-ar e não depende da profundidade da lâmina de água onde isto acontece [18].

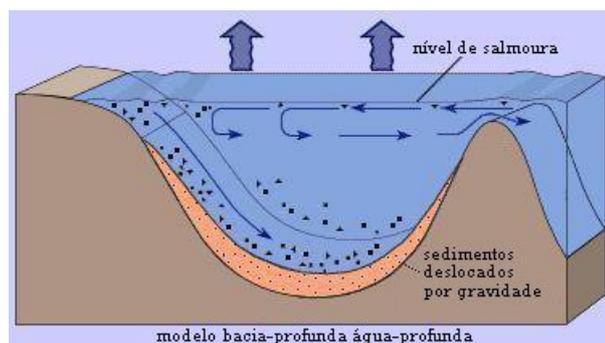


Figura 1.1: Modelo de bacia de sedimentação (bacia profunda - água profunda) [13].

A ordem de precipitação dos sais na formação de uma rocha evaporítica depende das solubilidades destes, precipitando primeiramente os sais menos solúveis seguindo-se pouco a pouco todos os outros. Por exemplo, numa rocha formada pelos principais minerais evaporíticos da Tab. 1.1, a deposição ocorreu com gipsita, anidrita e halita nas camadas inferiores, e taquidrita, carnalita e silvita nas camadas superiores. Na Fig. 1.2 é possível ver algumas camadas de evaporitos que constituem uma rocha salina.

Estas rochas são constituídas em maior quantidade por sulfato de cálcio ( $\text{CaSO}_4$ ) e cloreto de sódio ( $\text{NaCl}$ ) sendo a halita o evaporito predominante [4].



Figura 1.2: Camadas de uma rocha salina [19].

Tabela 1.1: Densidade e Fórmula Química dos Principais Minerais Evaporíticos [18].

Mineral	Fórmula Química	Densidade
Gipsita	$\text{CaSO}_4 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$	2,35
Anidrita	$\text{CaSO}_4$	2,9 a 3,0
Halita	$\text{NaCl}$	2,0
Silvinita	$\text{KCl}$	1,9
Taquidrita	$\text{CaCl}_2 \cdot 2\text{MgCl}_2 \cdot 12\text{H}_2\text{O}$	1,6
Carnalita	$\text{KMgCl}_3 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$	1,6

### 1.4.1 Fontes de Evaporitos

Conforme Gravina [21] “os oceanos são as fontes de depósitos de evaporitos”. Grande parcela dos maiores depósitos evaporíticos surgiu de precipitações de águas do mar. As espessas camadas de sal acumuladas em águas profundas, se originaram da água de fundo saturada de minerais salinos.

As salinas gigantes possuem espessuras de milhares de metros e são compostas por empilhamentos de ciclos de salinização ascendente de dezenas a centenas de metros de espessura. A espessura e a extensão, destes evaporitos antigos, ocorrem, principalmente, devido à existência de mares interiores (se encontram no interior dos continentes) em áreas de clima árido em período de baixa atividade tectônica [18]. Estes depósitos primários geralmente acabam se dissolvendo e se redepositando em um segundo ciclo como depósitos muito menores e mais finos do que os depósitos originais [21]. Os depósitos do segundo ciclo estão presentes em todos os continentes, em lagos, planícies costeiras, e lagos e lagunas em margens de mares.

Embora os depósitos evaporíticos se originem da mesma fonte, água do mar, estes apresentam grande variabilidade em suas composições, pela razão das diferentes solubilidades dos componentes da água do mar. Condições ambientais diferentes durante o processo de precipitação dos diversos componentes da água do mar auxiliam na explicação das variações encontradas na composição dos evaporitos [21]. Segundo Gravina [21] “os evaporitos são rochas de transição: continente para o mar e vice-versa”.

Atualmente vários lugares do planeta apresentam deposição de evaporitos. Porém não do tipo depositado em plataforma ou em água profunda (primeiro ciclo), os quais tiveram

grande importância no passado geológico. Nos dias atuais, os evaporitos restringem-se a ambientes deposicionais do segundo ciclo, ou seja, ambientes continentais, especialmente lagos, planícies costeiras e lagos e lagunas nas margens de mares [18].

### 1.4.2 Estilos e Evolução das Intrusões de Sal

Logo após a deposição, a geometria das rochas evaporíticas é aproximadamente tabular. Apesar de variações de espessuras, por causa de irregularidades no substrato e formato geral da bacia, os evaporitos exibem aparência estratiforme e topo horizontal. Entretanto, essa situação está raramente presente em depósitos antigos de sal. Nestes observa-se ao contrário, i.e., uma grande variedade de estruturas em razão da instabilidade gravitacional onde se encontra a camada [4].

A rocha salina apresenta baixa resistência mecânica e sofre deformação contínua. Sua movimentação está relacionada à diferenças de pressão ao longo do depósito, que podem ser causadas por subsidência de rochas próximas ao sal, deposição de sedimentos acima de parte da camada, ou por ação da gravidade sobre camadas inclinadas. Estes fatores favorecem o fluxo lateral e vertical do sal em direção a regiões que ofereçam menor resistência ao seu deslocamento (pontos de menor pressão), formando, deste modo, diferentes estruturas halocinéticas [1].

Portanto, quando sedimentos sobrejacentes oferecem pouca resistência à movimentação do sal (Fig.1.3(a)), este pode ascender e muitas vezes arrastar camadas encaixantes, criando domos característicos, almofadas e cunhas que encaixam em camadas sedimentares acima. Se a sobrecarga das rochas sobrejacentes não resistir ao encaixamento, o sal pressurizado abaixo (Fig. 1.3(b)) pode se deslocar empurrando completamente a sobrecarga, levantando-a e criando falhas radiais durante este processo. Ademais, caso as condições tectônicas sejam adequadas, pode ocorrer ainda falhamento extensional na sobrecarga rígida (Fig.1.3(c)) abrindo caminho para a ascensão do sal [14].

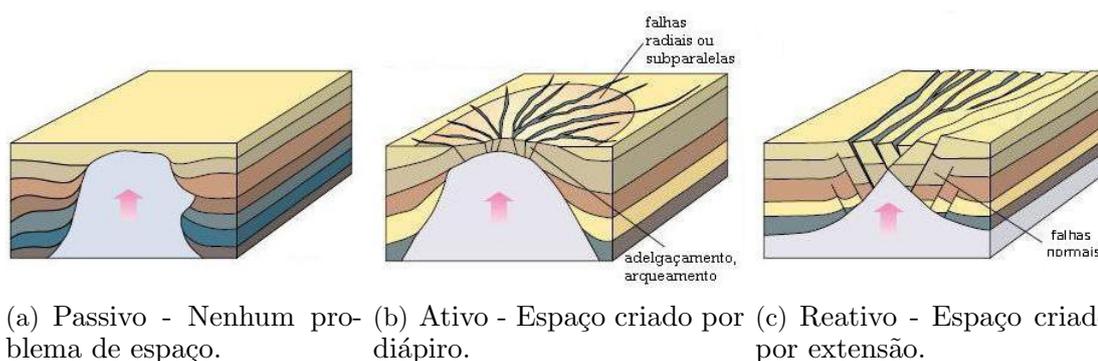


Figura 1.3: Estilos de intrusão do sal. [14]

As muralhas de sal e diápiros são iniciadas em instabilidades geológicas sobre extensas camadas de sal. Conforme o sal se eleva e então flui horizontalmente, as muralhas e diápiros mudam de forma. Eventualmente, alguns sais caracterizam-se por se tornarem completamente separados da camada de sal de origem (Fig. 1.4 número 1 e 4). Hipóteses de Geólogos dizem que estas áreas de sal alóctone (encontrado longe de sua posição deposicional original) ocorrem devido a condições que permitem ao sal, tendo alcançado equilíbrio vertical, flui horizontalmente [14].

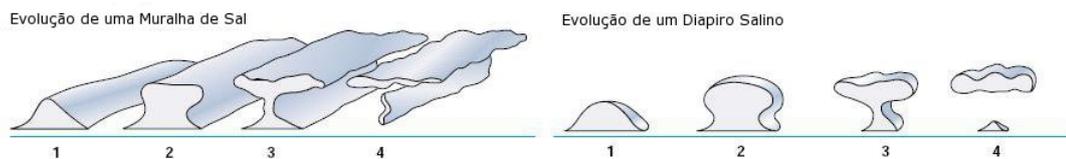


Figura 1.4: Evolução do sal [14].

A movimentação do sal produz grande variedade de estruturas halocinéticas conforme pode ser visto na (Fig. 1.5). Junto a estas, há estruturas complexas causadas pela migração e/ou dissolução do sal. Além disso, a movimentação do sal influencia profundamente na litoestratigrafia do fundo do mar, permitindo o desenvolvimento de feições como, acunhamentos, adelgaçamentos e espessamentos, que o diferencia de ambientes sem sua influência [4]. Observando novamente a (Fig. 1.5) pode-se ver além das diferentes geometrias assumidas pelo sal, algumas denominações utilizadas na geologia para diferenciá-las e o incremento de maturidade estrutural indicado pela seta cinza.

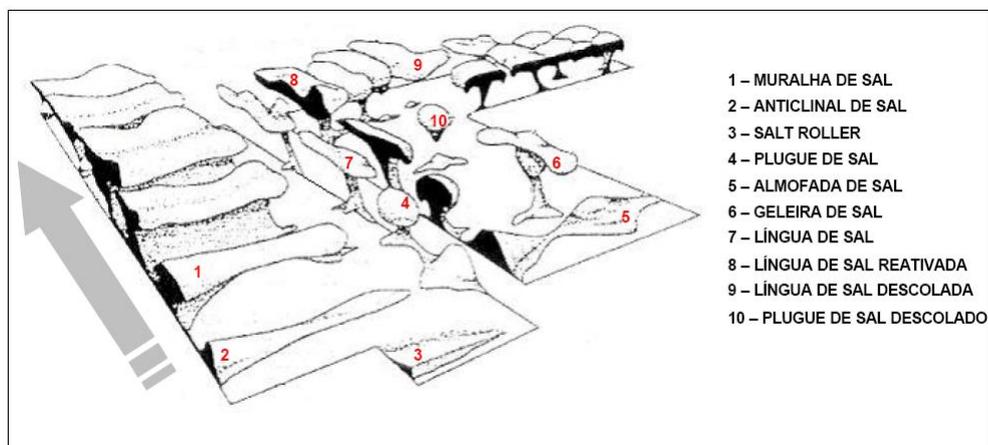


Figura 1.5: Principais estilos estruturais dos evaporitos, com a seta cinza indicando incremento de maturidade [4].

De acordo com o observado acima, as estruturas salinas podem apresentar diversas configurações geométricas que, além de serem na maioria das vezes bastante complexas para execuções de modelagem computacional, também dificultam a realização de comparações, prejudicando a avaliação da influência da utilização de vários parâmetros em um determinado modelo [5].

### 1.4.3 Associações de Campos de Petróleo a Evaporitos

Os evaporitos costumam estar associados a ambientes altamente produtivos em matéria orgânica. No registro geológico são conhecidas associações de campos gigantes de petróleo com sequências espessas de evaporitos [18]. São os agentes mais eficientes na natureza para o aprisionamento de óleo e gás. Como materiais dúcteis, podem se mover e deformar sedimentos circundantes criando armadilhas salinas. Além disso, são impermeáveis aos hidrocarbonetos e atuam como camadas selantes [14].

Encontram-se em várias bacias de hidrocarbonetos ao redor do mundo (áreas na cor branca da Fig. 1.6). Existem depósitos significativos nas águas profundas do Golfo do México e em Regiões “offshore” do oeste da África e Brasil, no Sul do Mar do Norte, Egito e Oriente Médio [4].



Figura 1.6: Maiores depósitos de sal ao redor do mundo [14].

A principal zona de ocorrência de evaporitos no Brasil situa-se na Costa Leste, desde Santos até Sergipe-Alagoas, e as maiores extensões de evaporitos se encontram sobre o Platô de São Paulo, na Bacia de Santos [3].

No entanto, conforme Bengaly [3], os depósitos evaporíticos de maior importância para a indústria do petróleo, como os do Aptiano (escala de tempo geológico) brasileiro, que atingiram espessuras da ordem de quilômetros e foram produzidos em um clima quente e seco, não se encontram similares na atualidade.

Vários novos campos de óleo e gás localizados em províncias de sal ao redor do mundo serão explorados e desenvolvidos nos próximos anos, como nas águas profundas do Golfo do México e nas regiões offshore de Angola, Nigéria (Akpo, Agbami) e Brasil (Bacias de Campos, Santos e Espírito Santo). Grande parte dos objetivos será o subsal, com camadas bastante espessas de sal a serem perfuradas [4].

## 1.5 Desafios na Perfuração e Completação de Poços Através de Seções de Sal

A mobilidade do sal sob pressões e temperaturas subsuperficiais e sua baixa permeabilidade, o fazem uma eficiente armadilha para o aprisionamento de hidrocarbonetos, proporcionando desafios únicos para operações de óleo e gás (Fig. 1.7).

A perfuração do sal é arriscada. Assim, o conhecimento da existência de hidrocarbonetos abaixo dele é insuficiente para iniciar a perfuração. Os engenheiros têm que abordar fatores que causam instabilidade no decorrer da perfuração do poço e problemas acompanhantes, incluindo paredes do poço enfraquecidas por lamas incompatíveis, restrições e furo de diâmetro abaixo do nominal causado pela fluência do sal ou alargamento devido à dissolução do mesmo (Fig.1.7(a)). Quando o sal se movimenta rapidamente, os “liners” (coluna curta de revestimento) cimentados dentro da coluna de revestimento reduzem a deformação radial na tubulação, aumentando a resistência a cargas não uniformes (Fig. 1.7(b)). Também, durante a vida de um poço, o movimento do sal pode deslocar o poço tubular, causando possivelmente falha ou restringindo o seu acesso (Fig.1.7(c)) [14].

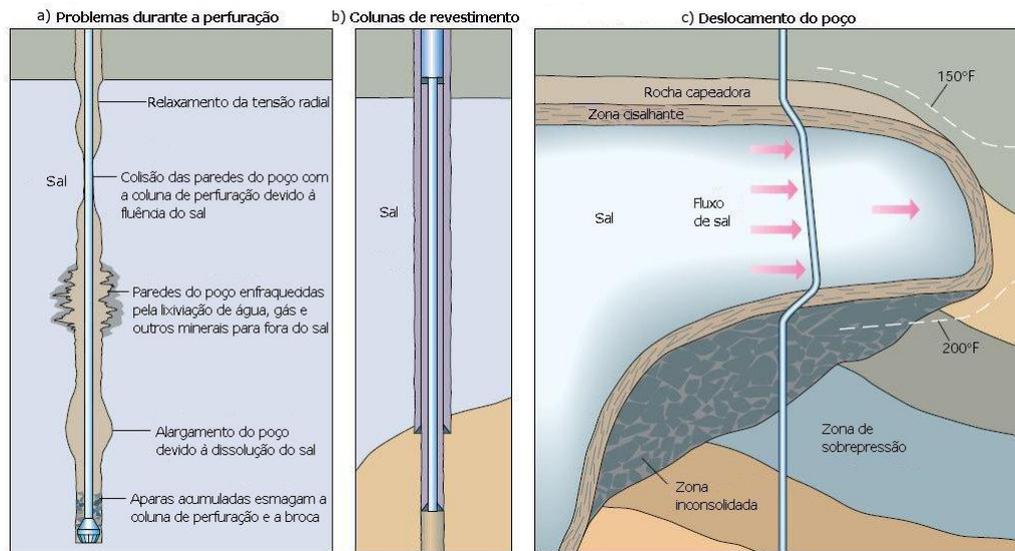


Figura 1.7: Desafios na perfuração e completação de poços em seções de sal [14].

Para produzir poços duradouros são necessárias considerações especiais na seleção de fluidos de perfuração, escolha das brocas, execução de programas de revestimento e procedimentos de cimentação. Métodos desenvolvidos na Costa do Golfo dos EUA e Golfo de Suez no Egito, têm melhorado a eficiência e a confiabilidade das operações de perfuração e completação de poços em espessas seções de sal [14].

# Capítulo 2

## Mecânica de Rochas Salinas

Neste capítulo é feita uma avaliação do estado da arte na mecânica de rochas salinas. A deformação do sal é discutida e um mapa dos mecanismos de deformação para rochas salinas apresentado. Neste mapa é ilustrada a região que representa as condições de trabalho para desenvolver campos de petróleo em águas profundas no Golfo do México. Finalizando, com base em Fossum e Fredrich <sup>[16]</sup>, Kensakoo <sup>[23]</sup> e Klayvimut <sup>[24]</sup>, são apresentados os ensaios utilizados para a determinação das propriedades de resistência e deformação das amostras de sal e as possíveis causas de discrepâncias na análise de resultados. O banco de dados citado nas análises de correlação e em alguns ensaios mecânicos, refere-se aos resultados obtidos pelo laboratório da Re/Spec, dado em Fossum e Fredrich <sup>[16]</sup>, e as amostras são de rochas salinas retiradas de domos ao longo da Costa do Golfo dos EUA.

### 2.1 Comportamento da Deformação do Sal

As rochas salinas têm estrutura policristalina e exibem um comportamento similar ao de rochas, no regime frágil, e ao de metais, no regime dúctil. O sal apresenta fluência sob qualquer tensão diferencial. Para tensões confinantes (pressões hidrostáticas) tipicamente menores do que cerca de 5-10 MPa e à temperatura ambiente, o sal dilatará com o tempo sob aplicação de uma tensão diferencial. Mas, quando sujeito à tensões confinantes acima de aproximadamente 5-10 MPa, flui à volume constante, i.e., o processo de fluência é isocórico, desde que a tensão diferencial seja menor do que cerca de 35 MPa <sup>[17]</sup>.

A falha dúctil do sal definida como a tensão de cisalhamento máxima na carga limite, é sensível à pressão hidrostática e função da história da deformação plástica (ex. critério de Mohr-Coulomb). Em regime frágil, o sal é mais resistente à compressão triaxial do que à extensão triaxial; em outras palavras a tensão limite de resistência à tração é muito menor que a tensão limite de resistência à compressão. A taxa de deformação do sal, para um determinado carregamento, depende fortemente da temperatura e aumenta com o aumento da temperatura <sup>[17]</sup>.

Dependendo da tensão confinante, a fluência do sal pode envolver dois ou três estágios de fluência. Para pressões confinantes (hidrostáticas) tipicamente menores do que 5-10 MPa conforme discutido acima, os corpos de prova de sal, submetidos a um estado de tensão constante (teste de fluência, seção 2.7.5), passarão através de três estágios, conforme mostra a Fig. 2.1. No primeiro estágio, denominado de fluência transiente ou primária, a taxa de deformação inicia com um valor muito alto e diminui com o tempo para uma taxa aproximadamente constante. O tempo durante o qual o corpo de prova se deforma em taxa aproximadamente constante é denominado de estágio de fluência em regime

estacionário ou secundário. No entanto, sob baixas pressões confinantes, quando ocorre microfissuramento frágil, o processo de deformação é volumétrico, i.e., ocorre com variação volumétrica, caracterizando assim um terceiro estágio, chamado de fluência terciária, no qual a taxa de deformação volta a aumentar devido ao crescimento acelerado de microfissuras até a ocorrência da fratura frágil do material. Para pressões confinantes tipicamente acima de 5-10 MPa somente os regimes primário e secundário são evidenciados experimentalmente para tensões diferenciais inferiores a cerca de 35 MPa [17]. A tensão diferencial (“*stress difference*”) é definida como sendo a diferença entre a tensão de compressão axial e a pressão hidrostática lateral agindo em um corpo de prova cilíndrico em testes experimentais multiaxiais.

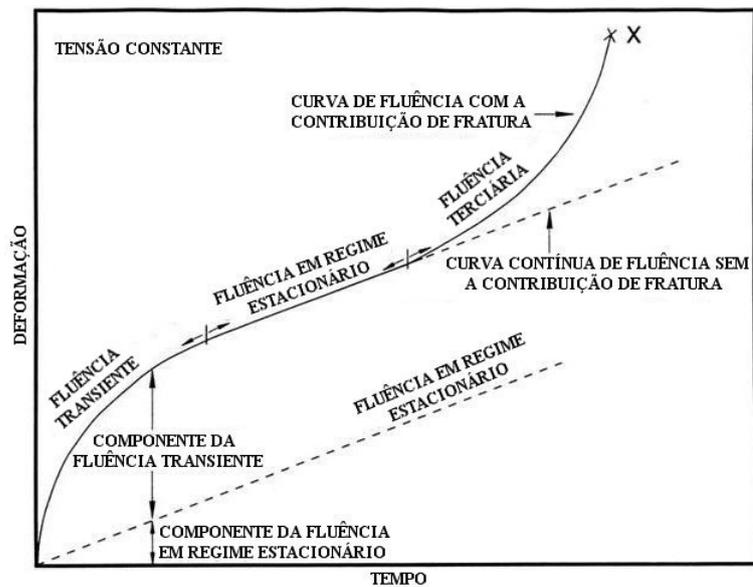


Figura 2.1: Comportamento clássico da deformação por fluência do sal [30].

A Fig. 2.2 ilustra o comportamento de fluência do sal em três diferentes níveis de pressões confinantes. As curvas deformação-tempo para pressões confinantes maiores do que 5 MPa são idênticas às conduzidas em 5 MPa.

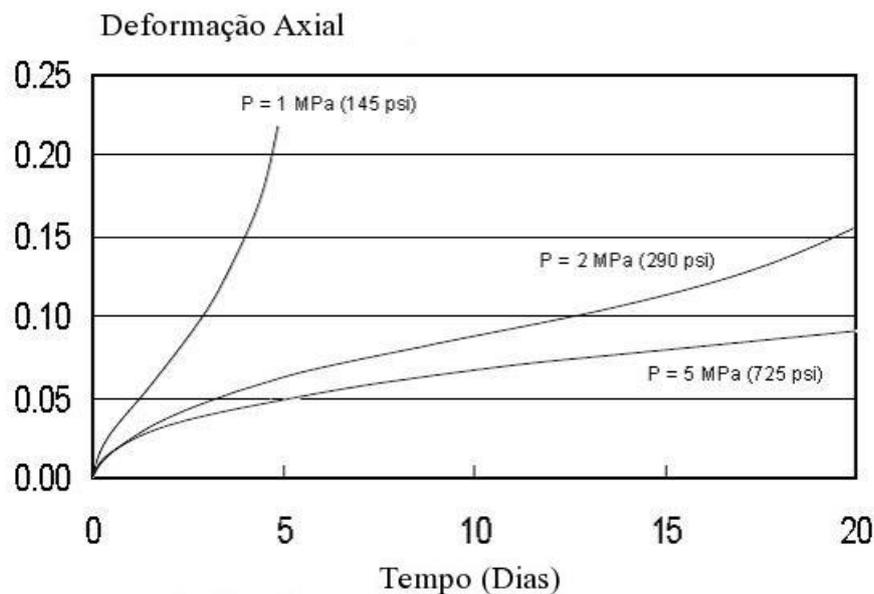


Figura 2.2: Comportamento de fluência do sal a 25 °C e uma tensão diferencial de 25 MPa para pressões confinantes de 1, 2 e 5 MPa [16].

Como nas condições para a perfuração e produção de campos petrolíferos em águas profundas, as tensões confinantes são significativamente maiores do que 5-10 MPa e as tensões diferenciais menores do que 35 MPa, o processo de fluência das rochas salinas é aproximadamente isocórico, i.e., preserva volume. Nestas circunstâncias de operação são evidenciados experimentalmente apenas os regimes de fluência primário e secundário.

Desta forma, para o modelamento do comportamento de rochas salinas, nas condições envolvidas para o desenvolvimento de campos de petróleo em águas profundas, pode-se considerar apenas processos de fluência isocóricos e restritos a regimes de fluência primário e secundário.

## 2.2 Mapa dos Mecanismos de Deformação do Sal

Para desenvolver modelos computacionais capazes de modelar o complexo comportamento do sal natural, é desejável contar com os princípios básicos ou, quando não for possível, contar com dados empíricos obtidos em laboratório como base principal para a formulação do modelo. Para este fim, é apresentado o mapa dos mecanismos de deformação do sal natural permitindo a identificação dos mecanismos de deformação do sal fornecendo subsídios ao desenvolvimento das equações constitutivas da fluência em regime estacionário. Este mapa é ilustrado na Fig. 2.3. A região hachurada sobre o mapa mostra as condições estabelecidas para o desenvolvimento de campos petrolíferos em águas profundas. Esta região engloba três mecanismos de deformação, os quais são: deslizamento de discordâncias (“*dislocation glide*”), no caso de altas tensões cisalhantes; escalagem de discordâncias (“*dislocation climb*”), no caso de altas temperaturas; e um mecanismo bem caracterizado porém indefinido, no caso de tensões cisalhantes e temperaturas mais baixas [16].

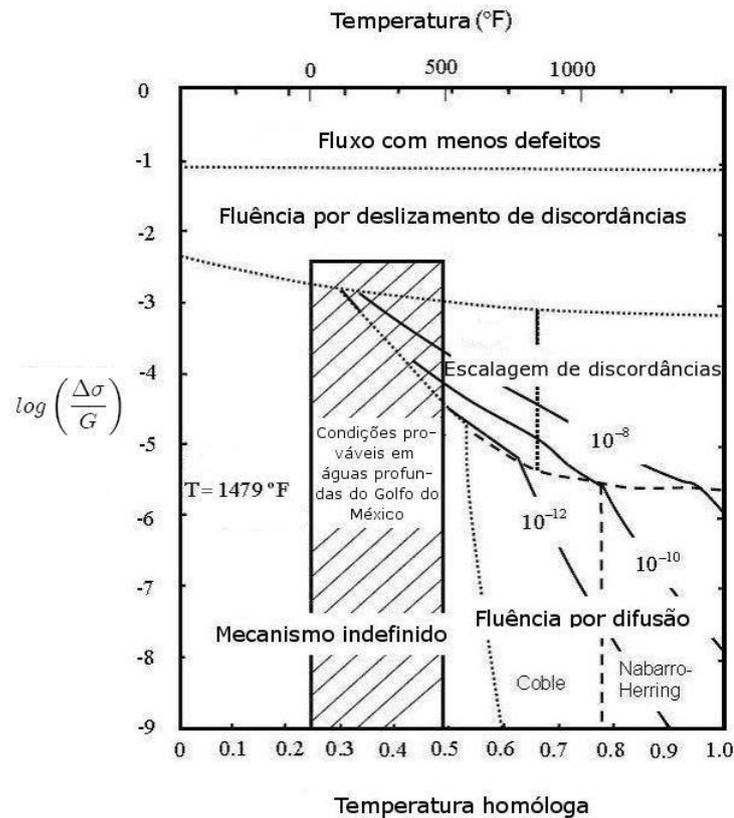


Figura 2.3: Mapa dos mecanismos de deformação do sal. A temperatura conforme indicada na abscissa é normalizada pela temperatura de fusão do sólido (igual a 803,89 °C para o sal) para se obter a temperatura homóloga. Da mesma forma, a tensão diferencial  $\Delta\sigma$  (igual ao dobro da tensão de cisalhamento máxima) como indicado na ordenada é normalizada pelo módulo de cisalhamento  $G$  [16].

## 2.3 Testes Laboratoriais do Sal e Avaliação de Parâmetros

A fluência do sal é caracterizada por três importantes tipos de comportamento que devem ser controlados apropriadamente quando na avaliação em laboratório de parâmetros materiais utilizados em modelos propostos. Estes aspectos são o dano, a taxa de deformação por fluência transiente e a taxa de deformação por fluência em regime estacionário. Alguns parâmetros de fluência em regime estacionário são determinados teoricamente, com base em mecanismos de deformação identificados, conforme discutido anteriormente. Os parâmetros remanescentes devem ser determinados experimentalmente a partir de medições macroscópicas em laboratório. Geralmente, os parâmetros de fluência em regime estacionário são avaliados primeiro, seguido pelos parâmetros de fluência transiente e então os parâmetros de dano [16].

Os ensaios mais frequentemente utilizados para avaliar parâmetros materiais são os ensaios de fluência à compressão triaxial no qual um cilindro sólido de sal é carregado hidrosticamente até um nível prescrito de pressão seguido por carga compressiva axial adicional visando induzir uma tensão diferencial no corpo de prova. As deformações no corpo de prova são então medidas com relação ao tempo enquanto a pressão confinante, tensão diferencial e temperatura são mantidas constantes [16].

A razão pela qual os parâmetros de fluência em regime estacionário são determinados

inicialmente é que as taxas de fluência transiente e o dano podem ser eliminados de forma que os parâmetros materiais associados à resposta em regime estacionário possam ser determinados independentemente dos demais. O dano é eliminado utilizando uma pressão confinante suficientemente alta. A taxa de fluência transiente é eliminada, executando o ensaio de fluência por tempo suficiente, de modo que o comportamento do termo transiente tenha decaído para zero, restando então somente a resposta em regime estacionário. Uma vez avaliados os parâmetros estacionários, estes são mantidos fixos e os parâmetros transientes são então determinados ajustando o modelo do material à resposta transiente obtida nos ensaios de fluência. Finalmente, os parâmetros de fluência transiente e em regime estacionário são mantidos fixos e os parâmetros de dano são então determinados ajustando a resposta do modelo à resposta experimental obtida nos ensaios de fluência conduzidos em pressões confinantes muito baixas [16].

### 2.3.1 Classificação do sal

Existe um banco de dados muito extenso para o sal da Planta Piloto de Isolamento de Rejeitos (“*Waste Isolation Pilot Plant*”, WIPP) devido a este sal ter sido estudado e caracterizado possivelmente mais do que qualquer outro sal no mundo. Assim, é possível comparar o comportamento do sal em diferentes domos com o sal da WIPP. Conforme ilustrado na Fig. 2.4, a deformação por fluência do sal da WIPP cai no meio da faixa de deformações exibidas, por exemplo, pelos domos da Costa do Golfo dos EUA. Pela razão de se conhecer muito sobre o sal da WIPP e por este parecer representar o comportamento nominal dos domos de sal da Costa do Golfo dos EUA é comum utilizar o sal da WIPP como base e nomear como “forte” e “fraco”, aqueles sais que apresentam taxas de fluência menor ou maior do que o sal da WIPP, respectivamente [16].

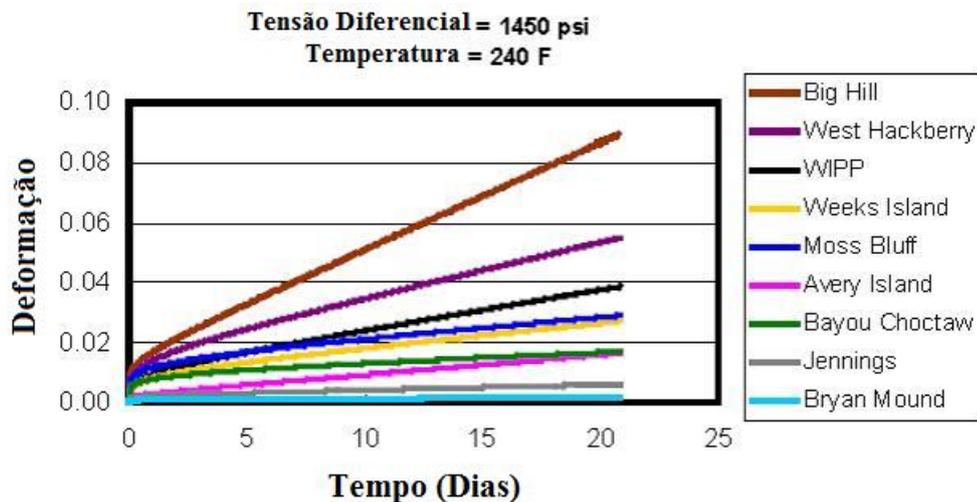


Figura 2.4: Comparação do comportamento de fluência (21 dias) para os sais da WIPP e dos domos da Costa do Golfo dos EUA [16].

### 2.3.2 Comportamento do Sal em Águas Profundas no Golfo do México

Um ensaio de fluência triaxial preliminar foi conduzido em uma amostra de sal de Mad Dog, obtida a uma profundidade geológica de 2889, 17 m. A amostra foi submetida a

uma pressão confinante de 6.9 MPa, uma tensão diferencial 13.7 MPa e uma temperatura de 104.45 °C. A Fig. 2.5 mostra que a taxa de deformação medida é muito semelhante à prevista para o sal de Bayou Choctaw utilizando as mesmas condições. Assim, parece que o sal de Mad Dog pode ser classificado como um sal “forte” de acordo com a definição estabelecida no item (2.3.1) acima [16].

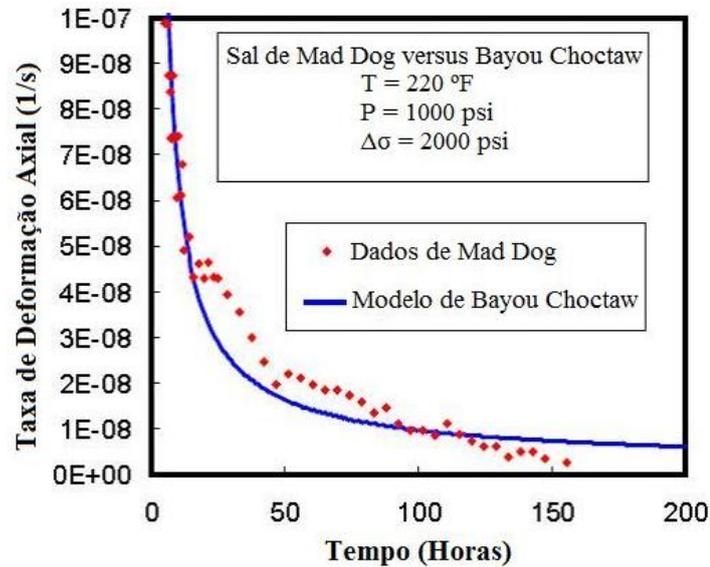


Figura 2.5: Comparação das taxas de deformação previstas com um modelo de sal utilizando as propriedades do sal de Bayou Choctaw e os resultados medidos em amostra de sal de Mad Dog [16].

## 2.4 Controles Sobre a Fluência do Sal

Conforme Fossum e Fredrich [16], as propriedades de resistência e deformação do sal são dependentes do local. Existem algumas evidências que sugerem que a variabilidade destas propriedades é causada por diferenças químicas e mineralógicas, ou diferentes características físicas como tamanho do subgrão, distribuição do tamanho de grão ou razão de aspecto do grão. Por exemplo, aumentos no teor de anidrita reduzem as taxas de fluência.

O banco de dados da Re/Spec, juntou dados experimentais de sais adquiridos a partir de 12 domos, localizados ao longo da Costa do Golfo dos EUA, os quais foram avaliados para determinar correlações entre propriedades de resistência e deformação, e características físicas, químicas e mineralógicas dos domos salinos. As análises, encontradas em Fossum e Fredrich [16], são resumidas abaixo:

- O tamanho do subgrão é um bom indicador das propriedades de resistência e deformação para domos salinos da Costa do Golfo dos EUA. A taxa de deformação estacionária e o expoente da tensão estacionária são correlacionados inversamente com o tamanho do subgrão, com coeficientes de correlação ( $\rho_c$ ) de  $-0,87$  e  $-0,92$ , respectivamente.
- A taxa de deformação estacionária determinada a uma temperatura de 99,85 °C e uma tensão diferencial 5 MPa é correlacionada com o tamanho médio do grão ( $\rho_c = 0.96$ ) e com a razão de aspecto do grão ( $\rho_c = 0.89$ ).

- Para sais impuros, a 99,85 °C, o expoente da tensão estacionária mostra uma correlação direta com ambos, sódio e cloro ( $\sim 0.90$ ). Correlações similares para este expoente foram encontradas para halita (0.92) e anidrita ( $-0.92$ ).
- Para sais impuros, o expoente da tensão estacionária mostra forte correlação com sódio ( $\rho_c = 0.9$ ), cloro ( $\rho_c = 0.9$ ), cálcio ( $\rho_c = -0.9$ ) e sulfato ( $\rho_c = -0.9$ ).
- Uma correlação inversa existe entre coesão e o ângulo de fricção interno ( $-0.64$ ).
- As taxas de deformação estacionárias e os expoentes das tensões estacionárias são diretamente correlacionados com os parâmetros de resistência, enquanto os parâmetros de energia de ativação térmica são inversamente correlacionados com parâmetros de resistência.
- Correlações direta foram encontradas para resistência à tração e compressiva sem confinamento (0.74), resistência à tração e coesão (0.66), e resistência à compressão sem confinamento e coesão (0.79).
- Para os sais impuros, o ângulo interno de fricção é correlacionado com potássio ( $\rho_c = 0.7$ ) e com substâncias insolúveis em água ( $\rho_c = -0.77$ ), enquanto a coesão é inversamente correlacionada com substâncias insolúveis em água ( $\rho_c = -0.77$ ).
- Para sais impuros, a taxa de deformação estacionária determinada a uma temperatura de 24.85 °C e uma tensão diferencial de 20.69 MPa é correlacionada com o magnésio ( $\rho_c = 0.77$ ).

## 2.5 Resumo de Alguns Fatos Básicos Sobre o Sal

Algumas das questões relacionadas à mecânica estrutural do sal, encontradas em Fossum e Fredrich <sup>[16]</sup>, nas faixas de tensão e temperatura que são experimentadas no desenvolvimento de campos petrolíferos em águas profundas, observadas no Golfo do México, são:

1. As propriedades elásticas e térmicas do sal não variam significativamente de local para local;
2. O comportamento inelástico e a falha do sal podem variar significativamente de local para local;
3. Para as faixas de temperatura que são experimentadas no desenvolvimento de campos em águas profundas do Golfo do México, o calor específico e a densidade podem ser considerados constantes;
4. O sal é um bom condutor de calor;
5. A condutividade térmica pode ser representada como uma função não linear da temperatura;
6. O coeficiente de expansão térmica linear pode ser representado como uma função quadrática da temperatura;

7. O módulo de cisalhamento é uma função linear da temperatura e o coeficiente de Poisson é constante;
8. O comportamento elástico pode ser considerado linear;
9. O aumento da temperatura, para uma dada tensão, aumenta fortemente a taxa de deformação inelástica do sal;
10. Quase toda a dilatação inelástica no sal é suprimida para uma tensão confinante acima de 5 MPa;
11. O sal se deforma sob qualquer tensão diferencial não nula;
12. É necessário menor tensão cisalhante para deformar o sal em cisalhamento puro do que em qualquer teste de compressão ou extensão triaxial;
13. A deformação inelástica transiente do sal é extremamente sensível à taxa e a taxa é uma função não linear da tensão, da temperatura e da história da deformação;
14. A taxa de fluência do sal no regime estacionário depende somente da tensão e da temperatura;
15. Aumentos significativos na taxa de deformação do sal policristalino são observados com o aumento no teor de umidade, quando ocorrem substancial microfissuração e dilatação em baixas pressões confinantes. Isto não é esperado para a faixa de tensões previstas para o desenvolvimento de campos em águas profundas, tais como a do Golfo do México;
16. A falha do sal ao cisalhamento depende não linearmente da tensão hidrostática;
17. É mais fácil o sal falhar em extensão triaxial do que em compressão triaxial para tensões hidrostáticas baixas, mas não para tensões hidrostáticas elevadas;
18. Pequenas alterações na tensão de cisalhamento causam mudanças muito grandes no tempo de falha, mas um aumento na ordem da magnitude da taxa de carregamento produz somente um modesto aumento na resistência;
19. Uma vez danificado através de microfissuração induzida por tensão, o sal curar-se-á sob pressão hidrostática;
20. A deformação transiente do sal é extremamente importante sempre que há uma perturbação no campo de tensão, como aquelas que resultam da escavação ou do carregamento térmico;
21. O tamanho do subgrão é um bom indicador das propriedades de resistência e deformação dos domos salinos.
22. A taxa de deformação no regime estacionário está fracamente correlacionada com o tamanho médio de grão e a razão de aspecto do grão;
23. Correlações altas foram observadas para a interdependência das propriedades de resistência e deformação com características químicas e mineralógicas.

## 2.6 Micromecânica de Rochas Salinas

Nesta seção, o sal é analisado na escala atomística em termos dos processos físicos básicos que governam a deformação, o endurecimento e a recuperação. Estes processos são chamados de mecanismos de deformação e são identificados a partir da microestrutura observável. Cada mecanismo de deformação tem uma taxa própria que depende da tensão e da temperatura. Assim, para qualquer tensão e temperatura, um único mecanismo de deformação é normalmente responsável pela maior parte da deformação observada. Um diagrama tensão-temperatura que define a região em que cada mecanismo de deformação predomina é chamado de mapa dos mecanismos de deformação. Estes mapas foram determinados para muitos materiais cristalinos, incluindo o sal. A Fig. 2.3 mostra um mapa dos mecanismos de deformação construído por Munson (1979) para o sal <sup>[16]</sup>. Observa-se que a área hachureada inclui a região de interesse para o desenvolvimento dos campos em águas profundas no Golfo do México. Segundo Munson (1979 *apud* Fossum e Fredrich <sup>[16]</sup>), em grande parte desta região, há algumas incertezas e debates em relação à identificação de um mecanismo de deformação específico, embora a região tenha sido bem caracterizada experimentalmente. A deformação aumenta conforme a tensão e a temperatura aumentam. Em baixas tensões, temperaturas e níveis de deformação, a primeira mudança estrutural é um aumento na densidade de discordâncias. O aumento na densidade de discordâncias acima da densidade natural ocorre em deformações muito menores do que um por cento. O agrupamento de discordâncias ao longo de planos cristalográficos preferenciais ocorre em níveis de deformação um pouco maior. Conforme a deformação aumenta, estas bandas difusas evoluem em acentuadas bandas lineares de deslizamento. Como o aumento da temperatura resulta em maior deformação, as bandas individuais se tornam ondulantes e com ligações cruzadas. Estas subestruturas às vezes aparecem como polígonos de forma alongada e em temperaturas acima de um terço da temperatura de fusão e pequenas deformações, formam polígonos equidimensionais (“*equant polygons*”). Em grandes deformações a recristalização dinâmica pode ser um importante mecanismo <sup>[16]</sup>.

Os mecanismos de controle da taxa de deformação são função da temperatura. Os mecanismos dominantes de baixa a alta temperatura ou de pequenas a grandes deformações, encontrados em Fossum e Fredrich <sup>[16]</sup>, são os seguintes:

1. Deslizamento de discordâncias (“*Dislocation glide*”);
2. Escorregamento transversal de discordâncias (“*Dislocation cross slip*”);
3. Processos difusionais (“*Diffusional processes*”).

### 2.6.1 Mecanismos de Deformação e Processos de Recuperação

#### Mecanismo 1: Deslizamento de Discordâncias - Descrição Física

A movimentação de discordâncias causa escorregamento ou deslizamento de planos cristalinos, ou seja, deformação plástica. Existem dois tipos de discordâncias. A discordância em aresta, ou cunha, que é uma porção extra de um plano de átomos, cuja aresta termina dentro do cristal. A discordância em hélice, ou espiral, o empilhamento de átomos ocorre de forma semelhante a uma espiral, produzindo distorção na rede cristalina <sup>[7]</sup>. As Fig. 2.6(a) e Fig. 2.6(b) mostram a representação esquemática destas discordâncias no interior de um cristal.

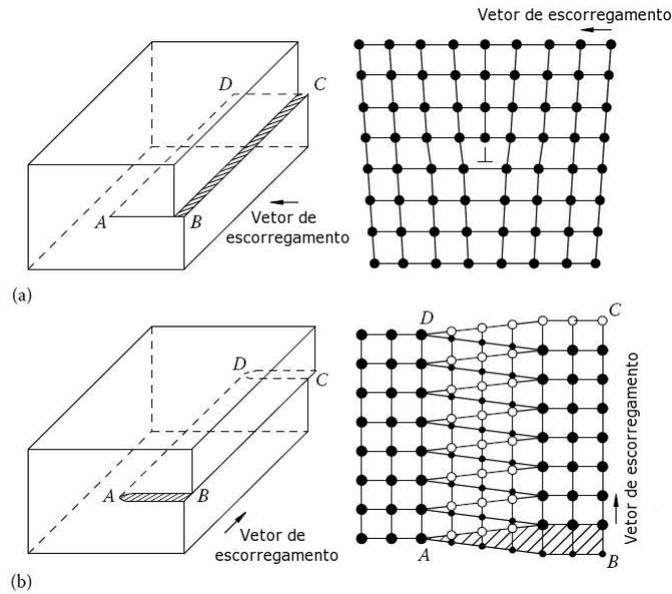


Figura 2.6: Tipos de discordâncias: (a) discordância em aresta e (b) discordância em hélice.

A maioria das discordâncias encontradas em materiais cristalinos não é puramente uma discordância em aresta nem puramente uma discordância em hélice, mas sim uma composição de ambos os tipos de discordâncias, e são conhecidas como discordâncias mistas. A Fig. 2.7 ilustra o movimento de uma discordância mista no interior de um cristal.

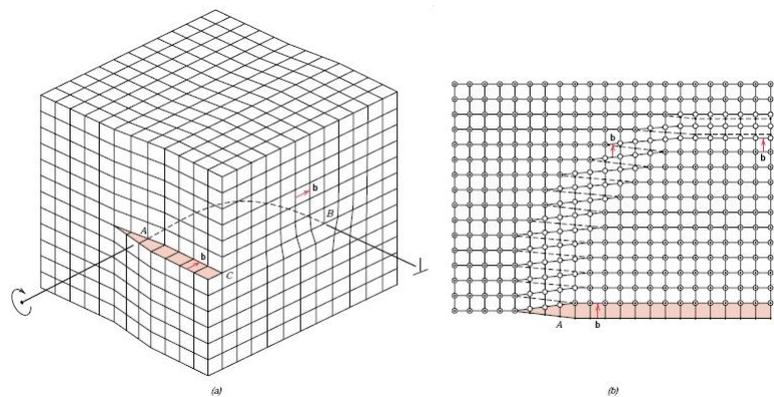


Figura 2.7: Esquema do movimento de uma discordância mista [7].

Para a estrutura do cloreto de sódio (NaCl), a deformação plástica por deslizamento resulta de movimentos de discordâncias em uma família de planos cristalográficos e o plano de deslizamento mais fácil é o que não traz íons de carga semelhante junto. Este sistema apresenta seis planos de deslizamento e direções. Ao longo de um plano e direção particular, a taxa de deslizamento aumenta com a tensão de cisalhamento aplicada [16].

### Deslizamento de Discordâncias - Observações Microscópicas

Segundo Fossum e Fredrich [16], houve numerosos corpos de prova de sal natural deformado sob as condições de interesse para o desenvolvimento de campos em águas profundas do Golfo do México que contêm bandas de deslizamento. As bandas de desliza-

mento mostram-se como efeitos fotoelásticos em pedaços finos ou seções em luz polarizada transversal.

### Deslizamento de Discordâncias - Fenomenologia

O fenômeno de endurecimento por deformação (encruamento) pode ser causado pelo deslizamento de discordâncias. Este endurecimento é o resultado do acúmulo de discordâncias em obstáculos como contornos de grãos ou por interseção de discordâncias. Uma maior probabilidade para interações existe quanto mais discordâncias são produzidas. O endurecimento decorre quando emaranhados, criados por interações, impedem outras discordâncias de se locomoverem. Similarmente, a acumulação de discordâncias em um contorno de grão causa um campo de tensão que impede o subsequente movimento das discordâncias. Se nenhum dos processos de recuperação estiver ativo, as discordâncias distorcem o retículo cúbico cristalino e produzem os efeitos fotoelásticos [16].

### Mecanismo 2: Escorregamento Transversal de Discordâncias - Descrição Física

A recuperação dinâmica alivia o aumento da energia de deformação causada pelo acúmulo de discordâncias. O primeiro dos processos de recuperação dinâmica que operam na estrutura do NaCl é o escorregamento transversal. O escorregamento transversal envolve o movimento de discordâncias em hélice fora de seu presente plano para dentro de qualquer plano que contém o mesmo vetor de Burgers (Fig. 2.8). Este processo permite à discordância deslizante mover-se em direção a outro plano de deslizamento e evitar obstáculos. Já que o escorregamento transversal não necessita de difusão, é muito importante em temperaturas relativamente baixas e não depende fortemente da temperatura [16].

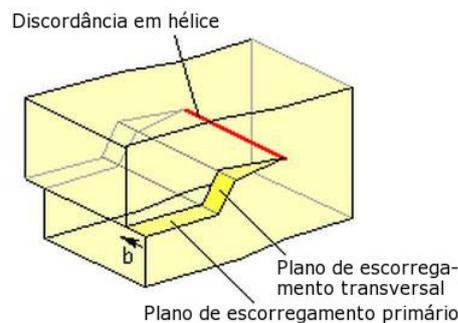


Figura 2.8: Escorregamento transversal de uma discordância em hélice.

### Escorregamento Transversal de Discordâncias - Observações Microscópicas

Conforme Fossum e Fredrich [16], fotomicrografias do sal deformado axialmente à pressões confinantes de 0.06 a 15 MPa e 75 °C, mostram diretamente bandas controladas cristalograficamente, indicativas de deslizamento conectado por entrelaçamentos de fileiras aparentemente desordenadas de sistemas de escorregamento transversal. Microestruturalmente, este fenômeno é chamado de deslizamento ondulado (“*wavy slip*”) no qual as acentuadas bandas de deslizamento são obscurecidas por uma textura ondulatória.

### Escorregamento Transversal de Discordâncias - Fenomenologia

De acordo com Fossum e Fredrich <sup>[16]</sup>, são necessários cinco sistemas de escorregamento independentes para a deformação plástica homogênea de um policristal com distribuição aleatória de grãos. Seis sistemas de escorregamento cristalograficamente distintos estão disponíveis em halogenetos, mas somente o dois e o três, respectivamente, são independentes. Entretanto, outros experimentos em rochas salinas mostraram um comportamento tensão-deformação-tempo indicativos de plasticidade geral, isto é, a completa ausência de fratura, encruamento e fluência aparente em regime estacionário. O escorregamento transversal reconcilia esta inconsistência.

O início do escorregamento transversal tem sido comparado à transição dúctil-frágil. Skrotzki e Haasen (1983 *apud* Fossum e Fredrich <sup>[16]</sup>) observaram linhas de escorregamento em vários halogenetos e correlacionaram à mudança no comportamento do escorregamento de planar para ondulado com a temperatura de transição dúctil-frágil. O escorregamento transversal então parece ser o mecanismo primário de recuperação dinâmica que opera em temperaturas de interesse relativamente baixas. Em temperaturas mais baixas, porém, muitos experimentos em sal natural não implicam em deformações grandes. Em deformação elevada, a eficácia da continuidade do escorregamento transversal não tem sido avaliada.

### Mecanismo 3: Mecanismos Controlados por Escalagem (“*Climb-controlled mechanisms*”)

O deslizamento com escalagem é freqüentemente chamado de escalagem porque o processo de escalagem realmente controla a taxa de deformação embora a deformação plástica resulte do deslizamento. Em altas temperaturas, a escalagem é um mecanismo de recuperação bem documentado que contribui significativamente na deformação. Segundo Fossum e Fredrich <sup>[16]</sup>, as energias de ativação da difusão do anion e do cátion do NaCl foram medidas em laboratório, e as temperaturas em que a difusão controla completamente a deformação não são provavelmente relevantes para aplicações de geomecânica.

### Mecanismos Controlados por Escalagem - Descrição Física

As discordâncias deslizantes encontram eventualmente obstáculos e sua mobilidade é retardada. O processo pelo qual a discordância pode mover-se perpendicularmente a seu plano de deslizamento é chamado escalagem. Os átomos são adicionados ou removidos ao longo da discordância pela difusão permitindo sua escalagem (Fig. 2.9). O processo de escalagem reduz a energia de deformação no retículo cristalino através do empilhamento sistemático de discordâncias. A escalagem é um processo lento, muito mais lento do que o deslizamento, pois depende da migração gradual de vacâncias na linha da discordância. O processo é controlado pela difusão do anion mais volumoso  $\text{Cl}^-$ , visto que é o íon de difusão mais lento. Conformidade tem sido demonstrada para os metais entre os valores deduzidos para a energia de ativação a partir de experimentos de fluência em altas temperaturas e os valores de energia de ativação de auto-difusão. A similaridade é tomada como a melhor evidência de que a difusão controla a taxa de fluência em altas temperaturas. Porém, sobre o intervalo de interesse do sal na geomecânica, as energias de ativação calculadas a partir de dados de ensaios de fluência não são constantes. Uma explicação é que energias de ativação diferentes indicam uma mudança no controle da taxa entre a difusão de  $\text{Na}^+$  e  $\text{Cl}^-$ . Outra explicação é que os mecanismos estão mudando em função da temperatura

ou de outras variáveis experimentais [16].

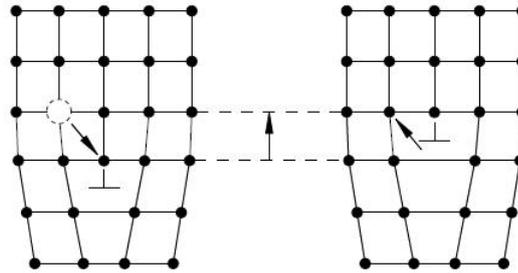


Figura 2.9: Escalagem de discordância, a difusão do átomo desbloqueia a discordância do obstáculo, permitindo seu deslizamento.

### Mecanismos Controlados por Escalagem - Observações Microscópicas

Quando acumula deformação suficiente no corpo de prova, a deformação controlada por escalagem resulta na formação de polígonos subestruturais. Estruturas de sal poligonizadas foram observadas microscopicamente e discutidas em detalhes por Carter *et al.* (1983 *apud* Fossum e Fredrich [16]). O tamanho do subgrão no regime estacionário é inversamente proporcional à tensão de cisalhamento aplicada. A 200 °C quando a escalagem é facilmente ativada termicamente, uma subestrutura poligonizada se desenvolve em deformações baixas, menores do que quatro por cento e sustenta deformações por fluência em regime estacionário maiores do que 0,30.

### Mecanismos Controlados por Escalagem - Fenomenologia

Em altas temperaturas, os mecanismos controlados por difusão são responsáveis pela fluência em regime estacionário. A difusão é necessária para a escalagem de discordâncias, um processo de recuperação que conduz a uma energia de deformação interna mais baixa. Aliviando a deformação interna, a escalagem permite a multiplicação contínua e o deslizamento das discordâncias sem um aumento na tensão de cisalhamento aplicada. A escalagem como um processo de recuperação, equilibra os processos de endurecimento e os resultados na deformação estacionária [16].

### Mecanismos Controlados por Difusão

Os mecanismos controlados por difusão, i.e., fluência de Nabarro-Herring e Coble, encontram-se fora das faixas de tensão e temperatura que estão previstas para o desenvolvimento de campos em águas profundas do Golfo do México e por isso não são consideradas.

### Recristalização Dinâmica - Descrição Física

A recristalização é um processo de recuperação dinâmica, ativado termicamente. A deformação estacionária é um equilíbrio entre os processos de endurecimento por trabalho e os processos de recuperação. A recristalização dinâmica ocorre quando processos de recuperação intercrystalinos operam muito lentamente para balancear o endurecimento induzido na deformação. Os processos envolvem a nucleação de grãos e migração dos contornos de grão em regiões de alta energia de deformação. O novo grão é inicialmente

mole e livre de deformação e passa a deformar-se em outra seqüência de endurecimento seguida pela recristalização [16].

Nos corpos cristalinos deformados, a recristalização dinâmica é uma maneira eficaz de diminuir a energia de deformação. Embora tenha sido estudada extensivamente por muitos anos na metalurgia, tem sido raramente observada no sal natural deformado sob as condições de geoenharia, provavelmente porque as amostras foram submetidas à deformação insuficiente [16].

### **Recristalização Dinâmica - Observações Microscópicas**

Fotomicrografias de subestruturas recristalizadas são comuns na literatura. Exemplos podem ser encontrados em livros textos padrão que ilustram microestruturas trabalhadas a frio e recozidas de metais. A recristalização dinâmica de monocristais de sal sob elevadas temperaturas tem sido também fotografada e publicada. Entretanto, a recristalização dinâmica de rocha salina natural, deformada sob as condições de interesse para o desenvolvimento de campos em águas profundas do Golfo do México tem sido raramente observada [16].

### **Recristalização Dinâmica - Fenomenologia**

O comportamento tensão-deformação associado à recristalização dinâmica tem sido documentado para muitos metais e alguns materiais geológicos, incluindo a halita. A recristalização dinâmica é um processo de amolecimento, e sua ocorrência modifica a aparência das curvas de fluxo. O amolecimento via recristalização pode resultar em uma queda de tensão durante ensaios à taxa de deformação constante ou a taxa de deformação aumenta em ensaios à tensão constante [16].

### **Resumo dos Mecanismos**

A baixas temperaturas e pequenas deformações, o deslizamento é um mecanismo significativo. Já que o deslizamento ondulado é visto em muitos corpos de prova deformados entre a temperatura ambiente e 100 °C, este pode ser um mecanismo muito importante. Segundo Fossum e Fredrich [16], há muitas observações documentadas sobre a recuperação por escalagem, resultando na formação de arestas poligonizadas em subgrãos. Porém, as energias de ativação inferidas a partir de experimentos laboratoriais no intervalo de temperaturas de interesse para o desenvolvimento de campos em águas profundas do Golfo do México são muito menores do que a energia de ativação para a difusão do  $\text{Cl}^-$ . Finalmente, no sal sujeito a uma deformação elevada tem sido observada a recristalização [16].

## **2.6.2 Mecanismos de Fratura**

Os mecanismos de fratura no sal natural à temperatura ambiente são clivagem e fratura por fluência. Os limites de falha de ambos, clivagem e fratura por fluência foram calculados. Os resultados são apresentados na forma de um mapa dos mecanismos de fratura na Fig. 2.10, o qual mostra os limites de falha no espaço de tensão  $-\sigma_1$  e  $-\sigma_3$ . A linha traço e ponto representa o local da tensão dentro do qual ocorre fluência a volume constante sem dano. A linha continua representa o local de fratura instável por clivagem. A região entre a linha traço e ponto e a linha continua representa os estados de tensão onde fluência

dilatacional com dano e fratura por fluência ocorrem após um certo tempo de fluência [8].

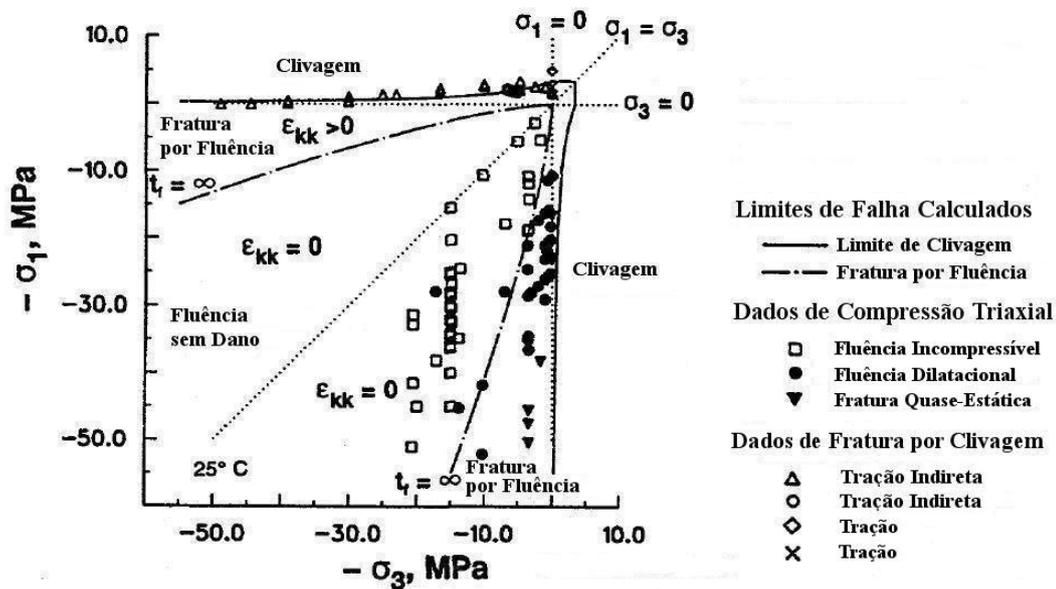


Figura 2.10: Comparação do mapa dos mecanismos de fratura calculado com dados experimentais do sal natural [8].

Um mapa dos mecanismos de fratura também foi calculado para o espaço da tensão diferencial e da pressão confinante, e o resultado é apresentado na Fig. 2.11. O mapa dos mecanismos de fratura calculado está em conformidade com os dados experimentais do sal da Planta Piloto de Isolamento de Rejeitos (WIPP), e do sal da ASSE (mina de sal de ASSE, Alemanha), conforme mostrado na Fig. 2.11. Os limites de fratura por clivagem foram calculados utilizando um modelo de trinca de asa (“*wing-crack*”) e o critério de fratura de Griffith. Os limites de falha dos mecanismos de dano por fluência são descritos em termos das curvas de falha isocronas, as quais são contornos de tensão de ruptura por fluência constante no tempo. As curvas de falhas isócronas com tempo de falha foram utilizadas para definir a fronteira entre regiões onde ocorre a fluência com e sem dano. As curvas isócronas com tempo de ruptura de uma hora foram utilizadas para representar regimes de falha onde o crescimento de trinca por fluência deverá dominar devido ao curto tempo de falha [8]. Nesta base, o mapa dos mecanismos de fratura na Fig. 2.11 está dividido em sete regimes de falhas, sendo:

1. Região A, onde ocorre fluência com volume constante sem ruptura;
2. Região C, onde ocorre fluxo dilatacional com dano por microfissura;
3. Região D, onde ocorre fratura por extensão de trinca de asa;
4. Região E, onde ocorre falha por fluência pela mistura de dano por tração e cisalhamento;
5. Região F, onde a fluência por tração domina o crescimento de trinca;
6. Região G, onde domina a fratura por clivagem por iniciação de trinca em asa;
7. Região H, onde domina a fratura por clivagem pela trinca de Griffith.

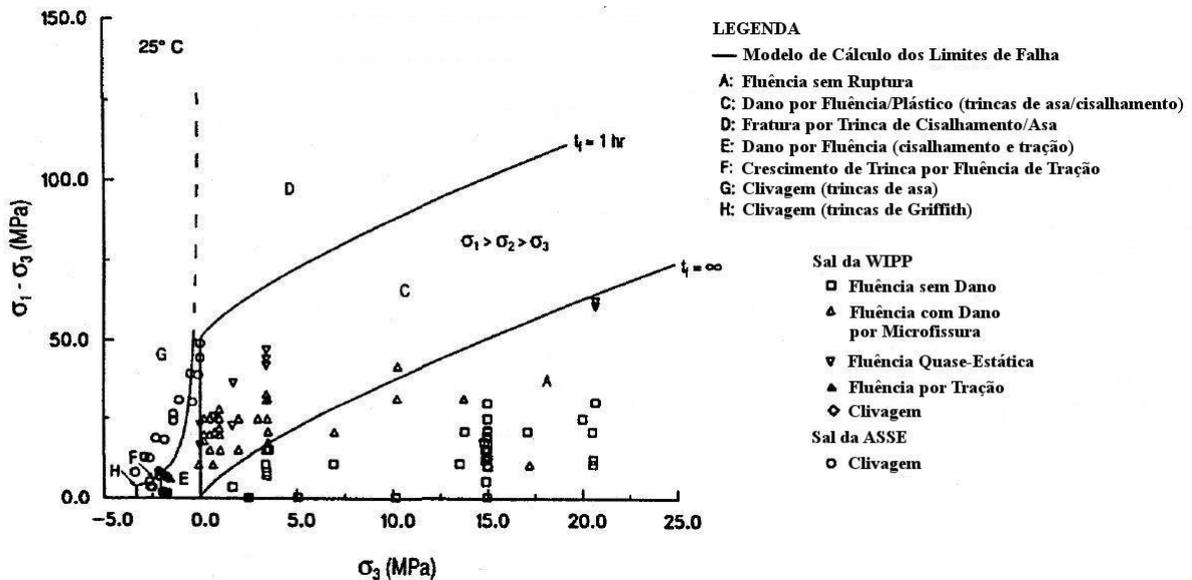


Figura 2.11: O mapa dos mecanismos de fratura calculado comparado com dados experimentais do sal da WIPP e do Sal da ASSE [8].

## 2.7 Determinação das Propriedades de Resistência e Deformação

Conforme Fossum e Fredrich [16], as propriedades determinadas pela Re/Spec, foram obtidas a partir de ensaios de tração indireta, ensaios de compressão uniaxial e triaxial, e ensaios de fluência realizados em temperaturas de até 199.85 °C. As propriedades incluídas nas análises foram as seguintes:

- Resistência
  - Resistência à tração indireta brasileiro,  $T_0$
  - Resistência compressiva não confinada,  $C_0$
  - Ângulo de atrito interno,  $\phi$
  - Coesão,  $C$
- Deformação Elástica
  - Módulo de Young,  $E$
  - Coeficiente de Poisson,  $\nu$
- Deformação por Fluência
  - Taxa de fluência em regime estacionário,  $\dot{\epsilon}_s$
  - Parâmetros da estrutura,  $A^*$  e  $A'$
  - Expoente dependente da tensão,  $n$
  - Parâmetro de energia de ativação,  $\Delta H$

Nas próximas seções são apresentados alguns dos ensaios mecânicos utilizados para determinar estas propriedades.

### 2.7.1 Ensaios de Tração Indireta Brasileiro

Os ensaios de tração indireta brasileiro também chamados de ensaios de compressão diametral determinam a resistência à tração indireta das amostras de sal e são conduzidos através da aplicação de carga diametral com controle de deslocamento ou de carga. Um aparato experimental deste tipo de ensaio realizado em uma amostra de sal é ilustrado na Fig. 2.12.

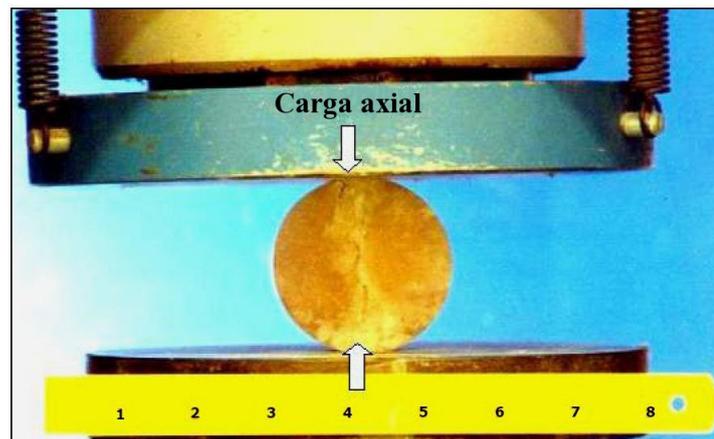


Figura 2.12: Ensaio de tração indireta brasileiro. O corpo de prova de sal é carregado diametralmente com a máquina de compressão [23].

A resistência à tração do ensaio de compressão diametral é determinado utilizando a fórmula

$$T_0 = \frac{2P_f}{\pi DL} \quad (2.1)$$

sendo  $P_f$  a carga na condição de falha,  $L$  e  $D$  são o comprimento e o diâmetro, respectivamente do cilindro.

O banco de dados da Re/Spec inclui 194 ensaios de tração indireta brasileiro em domos salinos da Costa do Golfo dos EUA realizados à temperatura ambiente (20 °C). Os corpos de prova tiveram uma razão comprimento-diâmetro ( $L:D$ ) de 0,5 e diâmetros de 50 mm ou 100 mm. Foram carregados tipicamente com controle de curso a uma taxa de  $2.5 \times 10^{-3}$  mm/s e produziram falha em  $\leq 10$  minutos [16].

A superfície de falha, das amostras conduzidas a este teste, aparece claramente ao longo do diâmetro na direção da carga, a qual reflete a iniciação da tensão de tração. Variações grandes nos resultados podem ser causadas pela distribuição não uniforme de diferentes minerais salinos ou por inclusões. Por exemplo, conforme aumenta o teor de anidrita, a resistência à tração aumenta consideravelmente. O resultado é diferente para argilas, pois conforme os teores de argilas aumentam, a resistência geralmente diminui. Além disso, os cristais de sal são relativamente grandes em comparação com o diâmetro do corpo de prova. Uma alta resistência à tração é obtida se a trinca de tração é induzida através dos cristais de sal ou se os cristais alinham na direção do carregamento. Uma baixa resistência é adquirida se as trincas são induzidas ao longo dos contornos dos cristais. Isto indica que a resistência à tração dos contornos intercristalinos é menor do que dos cristais de sal. Na Fig. 2.13 são mostrados alguns corpos de prova fraturados [23].



Figura 2.13: Corpos de prova do teste de tração indireta brasileiro após a falha [23].

### 2.7.2 Ensaios de Resistência à Compressão

Os ensaios quase-estáticos (duração de um minuto à uma hora) de compressão são conduzidos em cilindros com uma razão ( $L:D$ ) de 2. Nos ensaios não confinados, i.e., sem carregamento hidrostático lateral, o corpo de prova é carregado na direção axial, com controle da taxa de deformação ou da taxa de tensão até a ocorrência da falha, definida como a tensão máxima em uma curva tensão-deformação. O objetivo destes ensaios é determinar a tensão limite de resistência e a deformabilidade das amostras de sal sob compressão uniaxial.

Um ensaio com controle da taxa de tensão é executado aplicando tensão axial uniforme no cilindro de sal e medindo o aumento das deformações axiais em função do tempo. A taxa de tensão é mantida constante (por exemplo, 0.1 Mpa/s) pela máquina de compressão (Fig. 2.14) e os deslocamentos axiais são monitorados. O ensaio é realizado à temperatura ambiente e o corpo de prova é carregado até a falha.



Figura 2.14: Ensaio de resistência à compressão uniaxial com taxa de carregamento constante. A amostra cilíndrica é carregada verticalmente utilizando a máquina de compressão [23].

A resistência  $C_0$  é calculada a partir da carga axial aplicada supondo que o diâmetro do corpo de prova não se altere com o aumento da carga, i.e., tensão nominal. A seguinte

equação é utilizada,

$$C_0 = \frac{P_{uf}}{A_o} \quad (2.2)$$

sendo  $P_{uf}$  a carga de ruptura e  $A_o$  a área inicial da seção transversal. A deformação axial é calculada a partir da equação,

$$\varepsilon_{ax} = \frac{\Delta L}{L} \quad (2.3)$$

sendo  $\Delta L$  variação do comprimento do corpo de prova (positiva para contração) e  $L$  o comprimento inicial do mesmo.

Conforme mencionado anteriormente, as resistências de alguns sais são relativamente maiores quando comparadas com outros sais de outros locais. Isto é provavelmente devido à quantidade significativa e distribuição não uniforme de diferentes minerais salinos e inclusões, e devido ao tamanho relativamente grande dos cristais em relação ao diâmetro do corpo de prova. Ao longo do comprimento médio de algumas amostras submetidas a este ensaio, microfissuras são geradas. Isto leva a uma expansão radial e a conseqüente dilatação do corpo de prova [23].

Nos ensaios quase-estáticos de compressão não confinados, a medida de resistência calculada acima ( $C_0$ ), é chamada de Resistência Compressiva Não Confinada (“*Unconfined Compressive Strength*”, UCS), definida como a tensão máxima ou de pico observada durante o ensaio (Fig. 2.15).

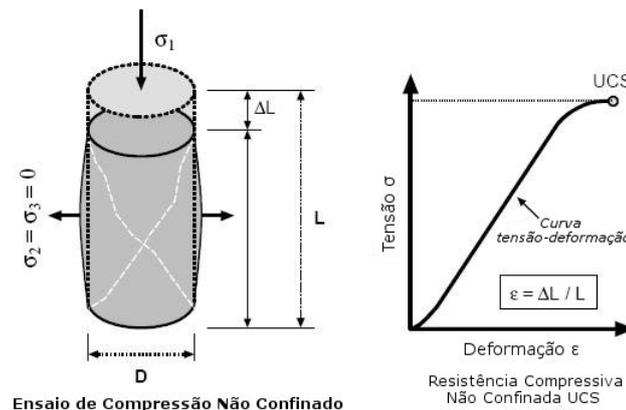


Figura 2.15: Corpo de prova com falha sob compressão não confinada [34].

A tensão limite de resistência é definida por um pico acentuado na curva tensão deformação seguida por uma queda de tensão indicativa de falha frágil, conforme demonstrado na Fig. 2.16.

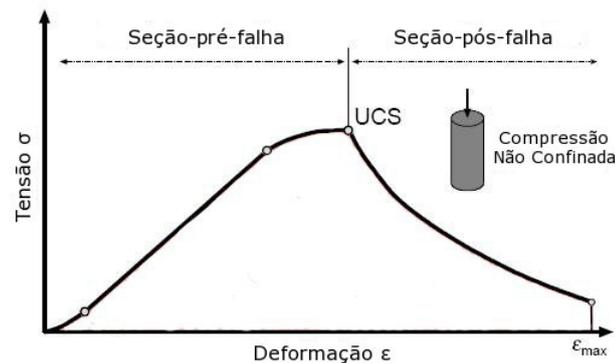


Figura 2.16: Curva tensão-deformação completa do ensaio não confinado.

Experimentos mostram que os ensaios quase-estáticos uniaxiais sobre rochas podem produzir resultados com grande dispersão pela falta de homogeneidade do material. Para remover a maior parte da dispersão é recomendado reconsolidar o corpo de prova antes do ensaio para a remoção dos danos causados pela perfuração e preparação da amostra. Isto é muito eficiente com rochas salinas, mas não funciona bem com rochas duras (frágeis).

Os ensaios confinados (i.e., ensaios de resistência à compressão triaxial) devem ser preferidos como ensaios de falha, pois a dispersão dos resultados é muito reduzida, devido ao estado natural de tensão na rocha ser um estado triaxial, possibilitando desta forma, obter uma representação muito mais completa do comportamento mecânico da rocha. Mas a técnica experimental é mais sofisticada do que a dos ensaios uniaxiais [11].

Nos ensaios confinados mais simples, o corpo de prova é colocado em uma câmara onde é aplicada uma pressão lateral ( $\sigma_3 = \sigma_2 \neq 0$ ), um fluido sob pressão exerce a pressão lateral em toda a superfície da rocha. A câmara é normalmente colocada numa prensa hidráulica, que aplica  $\sigma_1$ , enquanto a tensão de confinamento ( $\sigma_3$ ) é aplicada por equipamento auxiliar. A Fig. 2.17 ilustra uma câmara para ensaios triaxiais de rochas.

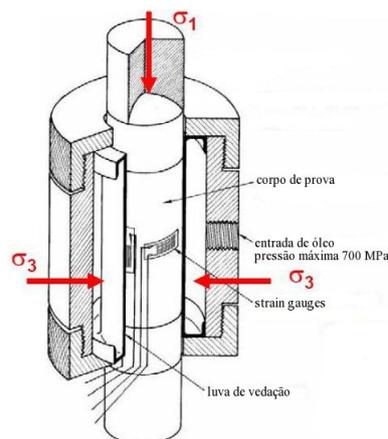


Figura 2.17: Câmara para ensaios triaxiais de rochas.

Também existem máquinas mais sofisticadas construídas especialmente para este tipo de ensaio. Na Fig. 2.18 é apresentada uma máquina de ensaio triaxial utilizada no laboratório da Re/Spec e da Sandia. Este dispositivo foi construído principalmente para realizar ensaios em rochas salinas.

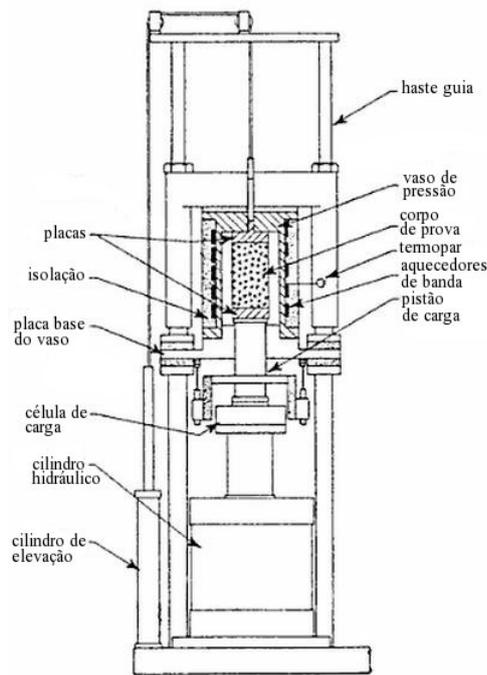


Figura 2.18: Máquina de ensaio triaxial utilizada na Re/Spec e Sandia (EUA) [11].

Nestes ensaios o corpo de prova é primeiro carregado hidrostáticamente até um nível prescrito, em seguida a carga axial é aumentada com controle da taxa de tensão ou de deformação até a ocorrência da falha.

Nos ensaios de compressão quase-estáticos confinados a resistência é definida como a tensão diferencial máxima observada no ensaio. A tensão diferencial é definida como a diferença entre a tensão axial aplicada e a pressão confinante, i.e.,  $(\sigma_1 - \sigma_3)$ . No sal submetido a pressões confinantes inferiores a cerca de 5 MPa, a resistência é geralmente caracterizada por uma pico acentuado na curva tensão deformação indicativa de falha frágil (semelhante a Fig. 2.16). Para pressões confinantes maiores, nenhum pico distinto é observado. Em vez disso, a carga aplicada alcança um valor máximo e o corpo de prova continua a se deformar sem uma queda na tensão axial. Este tipo de falha é chamado de falha dúctil.

A resistência do sal aumenta com a pressão de confinamento. A fim de caracterizar esta resistência, um critério de Mohr-Colomb é frequentemente utilizado. Para construir um critério de Mohr-Colomb cada ensaio de compressão quase-estático é plotado como um círculo de Mohr, como mostra a Fig.2.19.

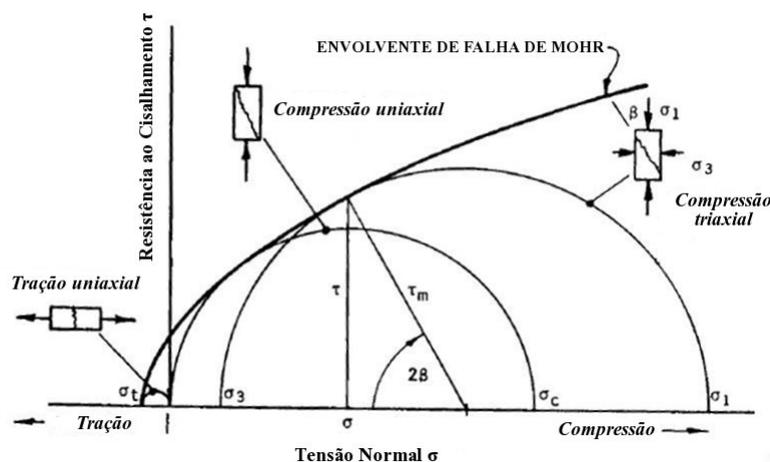


Figura 2.19: Representação gráfica das condições de tensão para a falha de rochas intactas.

A envolvente ou linha tangente a cada um destes círculos define o critério de Mohr-Coloumb e pode ser expresso como

$$\tau = C_e + \sigma \tan(\phi) \quad (2.4)$$

sendo  $\tau$  e  $\sigma$  a tensão de cisalhamento e a tensão normal, respectivamente,  $\phi$  o ângulo interno de atrito e  $C_e$  a coesão, i.e., a inclinação e a interseção da envolvente de falha respectivamente. A Eq. (2.4) é válida para uma gama limitada de tensão normal. Para valores mais elevados a envolvente de falha é não linear.

Nos testes de resistência à compressão uniaxial e triaxial realizados no estudo da Re/Spec, os corpos de prova foram carregados com controle de deformação a uma taxa de deformação de  $1 \times 10^{-4} \text{s}^{-1}$  e produziram falha entre 5 a 10 minutos [16].

O banco de dados da Re/Spec contém 55 ensaios de compressão quase-estáticos confinados mais os 239 resultados de ensaios não confinados. Os resultados foram obtidos à temperatura ambiente em corpos de prova cilíndricos com um diâmetro de 50 mm ou 100 mm e relação ( $L:D$ ) de 2 [16].

### 2.7.3 Ensaios de Carregamento Cíclico

O objetivo dos ensaios de carregamento cíclico é determinar o módulo de elasticidade de rochas salinas. Esta é uma parte da caracterização do material utilizada para a calibração das propriedades (parâmetros elásticos) do sal.

A medição prática dos módulos não é tão fácil como parece, pois os resultados do ensaio podem ser fortemente influenciados pelo comportamento dúctil do material. Isto não é um problema sério para rochas duras, mas é um para rochas moles como as de sal. Este problema pode ser superado pela realização de experimentos mais rápidos, onde a fluência não tem chance de entrar em ação [11].

Os módulos elásticos dependem da taxa de carregamento e descarregamento. Quanto maior a taxa maior a medida do módulo. O carregamento e o descarregamento são repetidos na amostra dentro de um período muito curto, e os módulos são determinados a partir da inclinação das curvas de carga e descarga [23]. O procedimento do ensaio é ilustrado esquematicamente na Fig. 2.20.

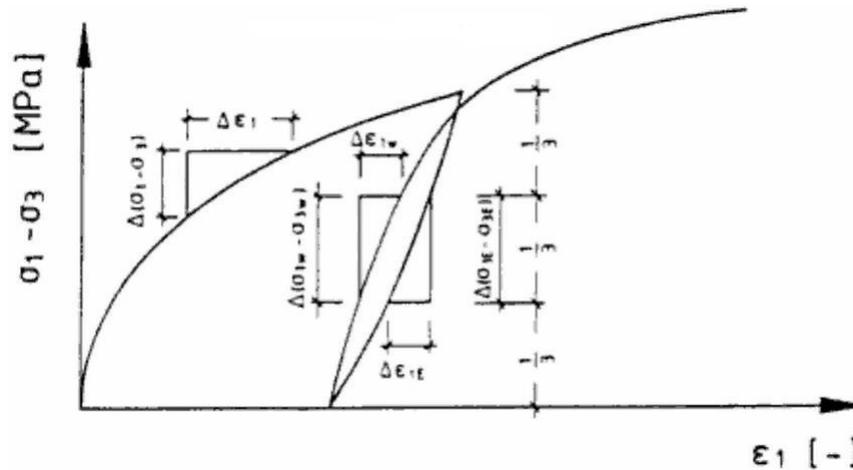


Figura 2.20: Diagrama esquemático mostrando a determinação do módulo de elasticidade  $E$  a partir do carregamento inicial, descarregamento e recarregamento <sup>[11]</sup>.

Os módulos elásticos são determinados a partir do primeiro ciclo de descarga e recarga dos ensaios de compressão quase-estáticos e são definidos por

$$E = \frac{\Delta\sigma_1}{\Delta\epsilon_1} \quad (2.5)$$

e

$$\nu = -\frac{E \Delta\epsilon_2}{\Delta\sigma_1} \quad (2.6)$$

em que  $\Delta\sigma_1$  é o incremento na tensão axial e  $\Delta\epsilon_1$  e  $\Delta\epsilon_2$  são os incrementos na deformações axial e radial, respectivamente. As Eqs. (2.5) e (2.6) são validas apenas para a parcela linear da curva tensão-deformação chamada parcela elástica em que as deformações são completamente recuperáveis após o descarregamento. Para a maioria das rochas a parte do carregamento inicial da curva tensão deformação representa o comportamento elástico e pode ser utilizada para determinar as constantes elásticas. No sal, porém, o carregamento inicial produz grandes deformações inelásticas além das deformações elásticas. Portanto, é necessário realizar um ou mais ciclos de descarga e recarga para minimizar as componentes inelásticas da deformação e isolar as componentes elásticas, lembrando que estes valores são dependentes da temperatura <sup>[16]</sup>. O módulo de elasticidade também pode depender da extensão do dano, ou seja, da quantidade de microfissuras na rocha <sup>[11]</sup>.

#### 2.7.4 Ensaios de Fluência à Compressão Uniaxial

O objetivo dos ensaios de fluência uniaxial é determinar os parâmetros viscoplásticos das amostras de sal sob condição não confinada. Os corpos de prova são carregados por tensões uniaxiais constantes. Uma máquina de compressão é utilizada para aplicar a carga uniaxial constante e os deslocamentos axiais são monitorados através de instrumentos digitais de medição (Fig. 2.21).



Figura 2.21: Aparato experimental do ensaio de fluência uniaxial [24].

Os corpos de prova são carregados de forma contínua por períodos de horas, dias ou até anos, dependendo dos resultados dos deslocamentos. Durante o ensaio, a deformação axial, o tempo e os modos de falhas são registrados. Os resultados são apresentados através de curvas deformação-tempo. Os valores de tensão axial e deformação axial são calculados por:

$$\sigma_{ax} = \frac{P_c}{A_o} \quad (2.7)$$

$$\varepsilon_{ax} = \frac{\Delta L}{L} \quad (2.8)$$

sendo  $\sigma_{ax}$  a tensão nominal axial,  $P_c$  a carga axial aplicada,  $A_o$  a área inicial da seção transversal normal à direção da carga,  $\varepsilon_{ax}$  a deformação axial de engenharia (nominal),  $\Delta L$  a variação do comprimento e  $L$  o comprimento inicial.

A curva do ensaio uniaxial de fluência das amostras de sal representa os regimes de fluência transiente, estacionária e terciária sob uma carga axial constante. Os corpos de prova são carregados rapidamente e subseqüentemente as deformações axiais aumentam. A curva instantânea representa a deformação por fluência transiente e seu valor aumenta com o aumento da tensão axial constante. Na maioria dos casos a taxa de deformação sob altas tensões axiais é maior do que sob baixas tensões axiais, mas o efeito de inclusões nas amostras pode fazer com que a taxa de deformação sob baixas tensões seja superior à sob altas tensões [23].

### 2.7.5 Ensaios de Fluência à Compressão Triaxial

Nestes ensaios o objetivo é determinar os parâmetros viscoplásticos das amostras de sal sob condição confinada. O sal exibe deformação dependente do tempo quando submetido a qualquer nível de tensão de cisalhamento. Para este tipo de material o ensaio de fluência à compressão triaxial é frequentemente realizado. O ensaio é conduzido geralmente em um cilindro de sal com uma relação ( $L:D$ ) de 2. O corpo de prova é carregado

hidrostaticamente a uma pressão prescrita selecionada para simular a pressão de sobrecarga (“*overburden pressure*”) no sal à certa profundidade. Então é aplicada rapidamente uma carga axial adicional para o corpo de prova induzir uma tensão diferencial axial ( $\sigma_1 - \sigma_3$ ). As deformações no corpo de prova são então medidas com o tempo enquanto a pressão confinante, a tensão diferencial e a temperatura são mantidas constantes durante o tempo de ensaio [16]. A Fig. 2.22 ilustra uma máquina de compressão e uma câmara triaxial de Hoek (“*triaxial Hoek cell*”) utilizada em ensaios de fluência triaxial. A máquina de compressão aplica a carga axial e a câmara a pressão de confinamento. O deslocamento axial é monitorado através de instrumentos digitais de medição. Os valores da deformação axial e tensão axial são calculados através das Eqs. (2.7) e (2.8).

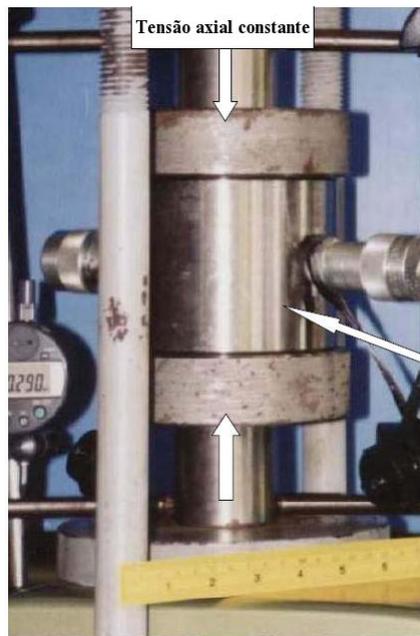


Figura 2.22: Máquina de compressão e uma câmara triaxial de Hoek [23].

Uma curva típica de fluência do sal compreende dois ou três estágios de fluência. Após a aplicação da tensão diferencial, a taxa de deformação é muito alta. Esta taxa, então, diminui monotonicamente com o tempo até uma taxa constante de deformação ser observada. Estes dois estágios são chamados de estágios de fluência transiente e em regime estacionário, respectivamente. Para uma pressão de confinamento suficientemente baixa ( $< 5$  MPa) um terceiro estágio se torna evidente chamado de estágio de fluência terciária que é caracterizado por acelerar as taxas de fluência que causam dilatação, aumentando o volume através de microfraturamento, levando à falha [16].

Nas análises de correlação da Re/Spec, somente parâmetros de fluência em regime estacionário foram investigados com respeito à influência das características químicas, mineralógicas e físicas. Conforme discutido anteriormente, a deformação estacionária do sal é controlada por mecanismos de deformação micromecânicos como difusão de massa e o movimento de discordâncias dentro do retículo cristalino do sal. Para as análises de correlação, o modelo de fluência de Norton é geralmente utilizado para caracterizar a deformação por fluência estacionária do sal, o qual é dado por

$$\dot{\epsilon}_s = A (\Delta\sigma)^n \exp\left(-\frac{\Delta H}{RT}\right) \quad (2.9)$$

sendo  $\dot{\epsilon}_s$  a taxa de fluência em regime estacionário,  $\Delta\sigma$  a tensão diferencial,  $T$  a temperatura,  $\bar{R}$  a constante universal dos gases,  $n$  um expoente,  $\Delta H$  a energia de ativação e  $A$  um parâmetro constante determinado tipicamente a partir do ajuste do modelo. Esta equação considera que a taxa de fluência em regime estacionário é fortemente influenciada pela magnitude de ambas, a tensão diferencial e a temperatura, impostas em um ensaio de fluência [16].

O método mais comum para estimar a taxa de fluência em regime estacionário é ajustar uma linha reta à porção linear da curva deformação-tempo. Uma avaliação da variabilidade de local para local das taxas em regime estacionário pode ser feita quando as condições do ensaio são idênticas para uma série de ensaios conduzidos em corpos de prova recuperados de diferentes locais [16].

O expoente sobre a tensão na Eq. (2.9) geralmente é calculado pela condução de uma série de ensaios de fluência individuais com diferentes tensões diferenciais, mas em temperaturas idênticas. Para uma temperatura constante esta equação é escrita como

$$\dot{\epsilon}_s = A^* (\Delta\sigma)^n \quad (2.10)$$

sendo  $A^*$  um parâmetro do modelo que incorpora o efeito de temperatura, assim como o parâmetro do modelo  $A$ . Uma representação gráfica da taxa de fluência em regime estacionário versus a tensão diferencial no espaço logarítmico produz uma linha reta com inclinação  $n$  e intercepta  $\log(A^*)$  [16].

A energia de ativação,  $\Delta H$ , é geralmente calculada a partir de ensaios de fluência realizados a uma tensão diferencial constante, mas em diferentes temperaturas. Estes ensaios podem ser conduzidos em corpos de prova múltiplos ou em um único corpo de prova em estágios múltiplos no qual a temperatura é alterada de um estágio para outro. Para ensaios com tensão diferencial constante, a Eq. (2.9) pode ser reescrita como

$$\dot{\epsilon}_s = A' \exp\left(-\frac{\Delta H}{\bar{R}T}\right) \quad (2.11)$$

sendo  $A'$  um parâmetro do modelo que incorpora a dependência da tensão e o parâmetro do modelo  $A$ . Assim, uma representação gráfica do logaritmo natural da taxa de deformação estacionária versus o inverso da temperatura produz uma linha reta com inclinação  $\Delta H/\bar{R}$  e intercepta  $\ln(A')$ . O  $\Delta H$  é facilmente determinado, já que  $\bar{R}$  é uma constante igual a 1.987 cal/mole K [16].

### 2.7.6 Ensaios de Fluência à Compressão Triaxial em Rochas de Halita, Carnalita e Taquidrita

A Petrobras extraiu diversos testemunhos de sal a partir de poços terrestres localizados no Campo de Sirizinho na Bacia de Sergipe/Alagoas, e realizou uma extensa campanha de ensaios de fluência à compressão triaxial no Laboratório de Mecânica e Hidráulica de Rochas do IPT. Objetivando obter propriedades mecânicas para as rochas de halita, carnalita e taquidrita (Fig.2.23) e calibrar seu modelo numérico de fluência [4].

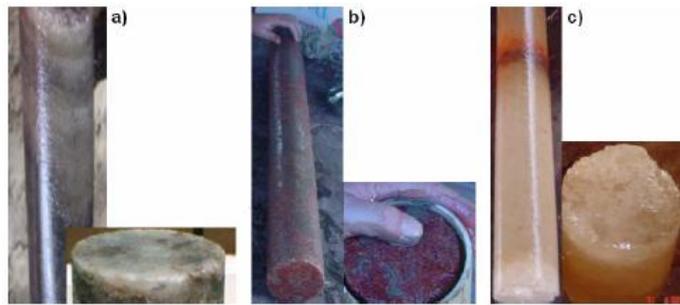


Figura 2.23: Testemunhos de halita (a), carnalita (b) e taquidrita (c) [4].

A Fig. 2.24 ilustra os resultados dos ensaios de fluência dos sais citados, quando submetidos a uma tensão deviatória de 10 MPa e temperatura de 86 °C. Com 160 horas de ensaio, as deformações axiais específicas foram de 0,0014 para a halita, 0,055 para a carnalita e 0,15 para a taquidrita, ou seja, a taxa de mobilidade da taquidrita é em torno de 107 vezes maior que a da halita e, aproximadamente, 2,7 vezes maior que a da carnalita [4].

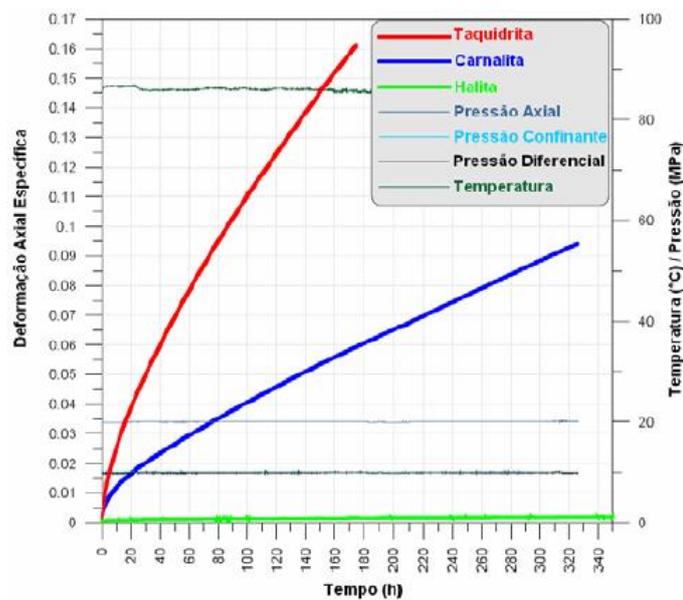


Figura 2.24: Resultados de ensaios de fluência para halita, carnalita e taquidrita [4].

# Capítulo 3

## Termodinâmica dos Processos Irreversíveis

O objetivo deste capítulo é apresentar os conceitos básicos necessários para modelar a deformação e a falha de materiais sólidos, como metais, rochas e polímeros. As teorias que descrevem estes fenômenos são formuladas dentro do contexto da termodinâmica dos processos irreversíveis, a qual torna possível a modelagem do comportamento de sólidos submetidos a carregamentos termomecânicos, resultando em um conjunto de equações diferenciais, cuja solução, é aproximada por um processo de discretização numérica.

No intuito de descrever a deformação e a falha de materiais sólidos, introduz-se um conjunto de variáveis de estado local que consiste em variáveis internas e observáveis, e definem-se potenciais termodinâmicos, denominados: potencial de energia livre e pseudo-potenciais de dissipação. As escolhas do potencial de energia livre e das variáveis de estado permitem a definição das variáveis associadas e a derivação das equações de estado. A introdução dos potenciais de dissipação fornecem as leis de complementaridade, ou leis de evolução, necessárias para a descrição dos processos irreversíveis que ocorrem na deformação e degradação do material. Para elaboração deste capítulo foram utilizadas as seguintes referências bibliográficas: Coimbra <sup>[9]</sup>, Malvern <sup>[29]</sup>, Maugin *et al.* <sup>[29]</sup>, Lemaitre e Chaboche <sup>[25]</sup>, Lemaitre <sup>[26]</sup> e Lubliner <sup>[27]</sup>.

### 3.1 Introdução

Um corpo é considerado um conjunto de partículas, o qual pode ser visualizado somente através de sua configuração, i.e., pelas regiões do espaço tridimensional ( $\mathbb{R}^3$ ) ocupadas pelo corpo em diferentes instantes.

Seja  $\mathcal{B}$  um corpo que ocupa a região do espaço  $\Omega_o$  em  $t = 0$  e  $\Omega_t$  em um instante  $t$  posterior, conforme mostrado na Fig. 3.1.

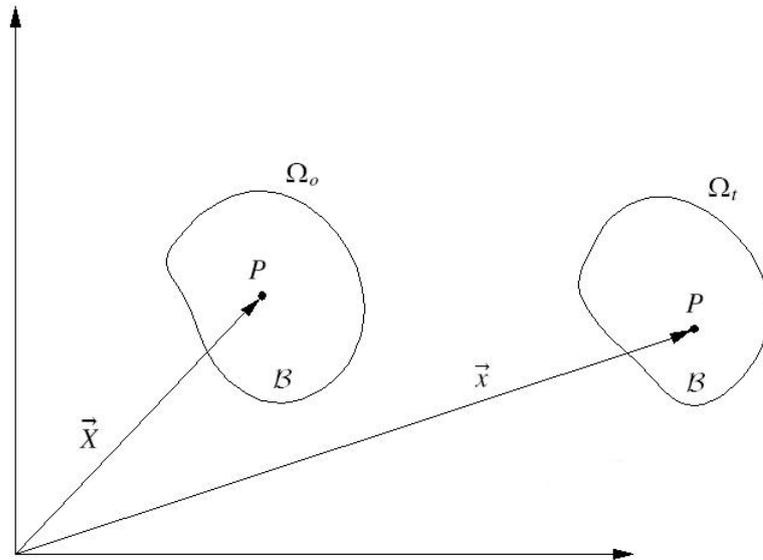


Figura 3.1: Definição das configurações de referência e deformada.

Cada ponto no espaço de uma configuração é ocupado por uma partícula. Observe que o corpo consiste sempre das mesmas partículas, sua configuração é que varia com o tempo.

Seja  $P$  uma partícula de  $\mathcal{B}$ . Para a determinação do movimento de um corpo é necessário acompanhar a trajetória de cada uma das partículas de  $\mathcal{B}$ . Com o objetivo de identificar cada partícula  $P$  de  $\mathcal{B}$ , utiliza-se uma configuração de referência a qual associa a cada partícula  $P$  a sua posição na configuração de referência <sup>[9]</sup>, conforme pode ser visto na Fig. 3.2.

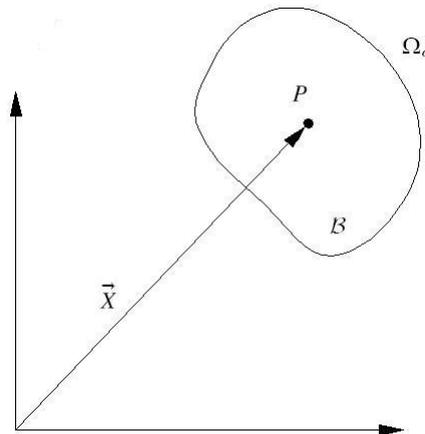


Figura 3.2: Definição do sistema de coordenadas empregado na configuração de referência.

### 3.1.1 Movimento de Deformação do Corpo $\mathcal{B}$

O movimento de um corpo  $\mathcal{B}$  é descrito pelo vetor posição  $\vec{x} = \varphi(\vec{X}, t)$  de cada partícula  $P$  de  $\mathcal{B}$ , que ocupa a posição  $\vec{X}$  em  $\Omega_o$ , em cada instante de tempo  $t$  <sup>[9]</sup>, i.e.,

$$\vec{x} = \varphi(\vec{X}, t) = \varphi_t(\vec{X}). \quad (3.1)$$

Como esta função vetorial descreve como um corpo  $\mathcal{B}$  muda ou deforma de uma configuração para outra, esta é denominada função deformação.

Considere um dado instante  $t$  fixo. Se a posição  $\vec{X}$  de uma partícula  $P$  na configuração de referência  $\Omega_o$  é especificada, então a Eq. (3.1) fornece a posição  $\vec{x}$  da partícula  $P$  na configuração atual  $\Omega_t$ . Assim,

$$\Omega_t = \varphi(\Omega_o, t) = \varphi_t(\Omega_o). \quad (3.2)$$

### Descrição Material ou Lagrangeana

A descrição do movimento/deformação no qual a posição  $\vec{X}$  de uma partícula  $P$  em  $\Omega_o$  é uma variável independente é denominada uma descrição material <sup>[9]</sup>.

Aqui, supõe-se que o mapeamento  $\vec{x} = \varphi_t(\vec{X})$ , para cada  $t$ , possui o mapeamento inverso e é indicado por  $\varphi_t^{-1}(\cdot)$ . Portanto,

$$\vec{X} = \varphi_t^{-1}(\vec{x}). \quad (3.3)$$

### Descrição Espacial ou Euleriana

É a descrição do movimento/deformação no qual o vetor posição  $\vec{x}$  de uma partícula  $P$  em  $\Omega_t$  é uma variável independente <sup>[9]</sup>. As descrições Lagrangeana e Euleriana são relacionadas pelas seguintes expressões

$$\vec{v}(\vec{x}, t) = \vec{v}(\varphi_t(\vec{X}), t) = \vec{V}(\vec{X}, t) \quad (3.4)$$

ou

$$\vec{V}(\vec{X}, t) = \vec{V}(\varphi_t^{-1}(\vec{x}), t) = \vec{v}(\vec{x}, t). \quad (3.5)$$

### Deformação Não Homogênea

Considere as partículas  $P$  e  $Q$  do corpo  $\mathcal{B}$ , e o movimento genérico, ilustrado na Fig. 3.3.

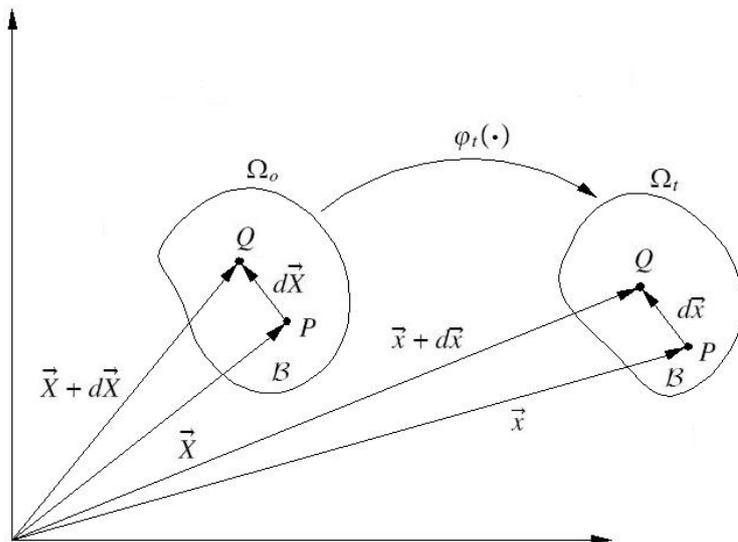


Figura 3.3: Definição da função deformação.

Sejam  $\vec{X}$  e  $\vec{X} + d\vec{X}$  os vetores posição de  $P$  e  $Q$  respectivamente, na configuração de referência. Na configuração atual  $P$  e  $Q$  ocupam a posição  $\vec{x}$  e  $\vec{x} + d\vec{x}$  respectivamente. Agora, para as partículas  $P$  e  $Q$ , tem-se

$$\vec{x} = \varphi(\vec{X}, t) \quad (3.6)$$

e

$$\vec{x} + d\vec{x} = \varphi(\vec{X} + d\vec{X}, t). \quad (3.7)$$

Considerando que, para cada  $t$ , o mapeamento  $\varphi_t(\cdot)$  é suave, pode-se expandir (3.7) em uma série de Taylor e obter

$$x_i + dx_i = \varphi_i(\vec{X}, t) + \frac{\partial \varphi_i(\vec{X}, t)}{\partial X_j} dX_j + o(dX_i^2) \quad (3.8)$$

na qual

$$\lim_{dX_i \rightarrow 0} \frac{o(dX_i^2)}{dX_i} = 0. \quad (3.9)$$

Subtraindo (3.8) de (3.6), e desconsiderando os termos de ordem superior da série, chega-se à

$$dx_i = \frac{\partial \varphi_i(X, t)}{\partial X_j} dX_j, \quad (3.10)$$

a qual pode ser escrita na forma compacta como

$$d\vec{x} = [\mathbf{F}(\vec{X}, t)] d\vec{X}, \quad (3.11)$$

em que

$$\mathbf{F}(\vec{X}, t) = \nabla_X \varphi_t(\vec{X}, t) \quad (3.12)$$

sendo  $\mathbf{F}$  denominado como o gradiente da função deformação.

### Decomposição de Uma Deformação Homogênea

Uma deformação homogênea pode ser decomposta como uma composição de uma deformação pura seguida por uma rotação pura ou pela composição de uma rotação pura seguida por uma deformação pura.

#### Rotação Pura Homogênea

Uma rotação pura ocorre quando, no movimento de um corpo, cada segmento do corpo não sofre variação em seu comprimento, sofrendo apenas uma mudança em sua orientação, como mostra a Fig. 3.4.

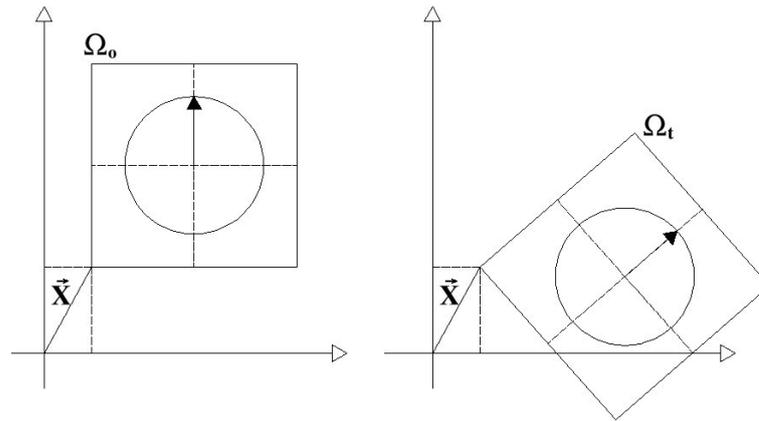


Figura 3.4: Exemplo de uma rotação pura.

Um movimento/deformação representando uma rotação pura tem a seguinte forma:

$$\vec{x} = [\mathbf{R}(t)]\vec{X}, \quad (3.13)$$

sendo  $\mathbf{R} = \mathbf{R}(t)$ , i.e.,  $\mathbf{R}$  não depende de  $\vec{X}$ , e é tal que

$$[\mathbf{R}]^T[\mathbf{R}] = [\mathbf{R}][\mathbf{R}]^T = [\mathbf{I}] \quad (3.14)$$

e

$$\det[\mathbf{R}] = 1. \quad (3.15)$$

**Observação 3.1** A partir de (3.14) pode-se observar que  $\det[\mathbf{R}] = \pm 1$ . Quando  $\det[\mathbf{R}] = 1$ , a rotação é dita ser própria. No caso em que  $\det[\mathbf{R}] = -1$  tem-se uma reflexão, isto é, a deformação não representa uma rotação pura.

### Deformação Pura Homogênea

Uma deformação pura ocorre quando, no movimento de um corpo, pelo menos três segmentos ortogonais do corpo sofrem variações em seus comprimentos, porém, sem mudança de orientação, conforme representado na Fig. 3.5.

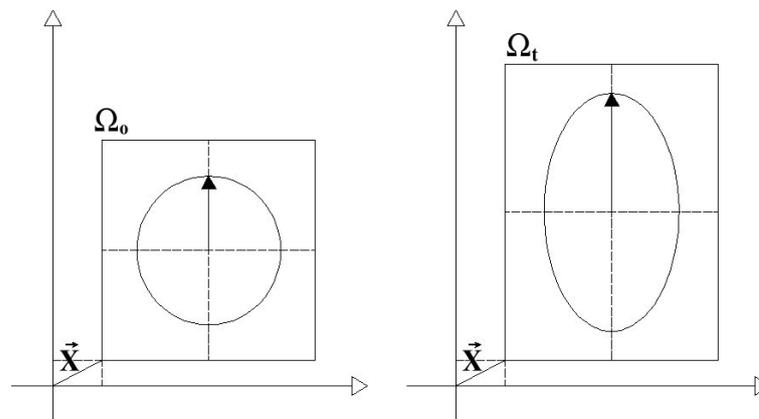


Figura 3.5: Exemplo de uma deformação pura.

Um movimento/deformação representando uma deformação pura tem a seguinte forma:

$$\vec{x} = [\mathbf{U}(t)]\vec{X}, \quad (3.16)$$

em que  $\mathbf{U}$  não depende de  $\vec{X}$ , e é tal que

$$[\mathbf{U}(t)] = [\mathbf{U}(t)]^T, \quad (3.17)$$

com  $\mathbf{U}$  sendo positivo e definido.

Note que se  $\mathbf{U}$  é simétrico,  $\mathbf{U}$  é diagonalizável e já que é positivo e definido,  $\det(\mathbf{U}) > 0$ . Além disso, como  $\mathbf{U}$  é simétrico e diagonalizável, existem três direções ortogonais  $\vec{D}$  em  $\Omega_o$ , as quais são alongadas, mas não rotacionadas, para um estado  $\vec{d}$  na configuração deformada  $\Omega_t$ , i.e.,

$$\vec{d} = [\mathbf{U}]\vec{D} = \lambda\vec{D} \quad (3.18)$$

ou,

$$[[\mathbf{U}] - \lambda\mathbf{I}]\vec{D} = \vec{0}. \quad (3.19)$$

Pode-se observar, de (3.19), que as direções  $\vec{D}$  são dadas pelos autovetores associados aos autovalores  $\lambda$  de  $\mathbf{U}$ . Portanto, os segmentos do corpo  $\mathcal{B}$ , nas direções de  $\vec{D}$  são alongados ou encurtados por  $\lambda$  e não sofrem qualquer rotação.

### Decomposição Polar do Gradiente da Deformação

O gradiente da função deformação pode ser decomposto como <sup>[28]</sup>:

b) Uma deformação pura ou alongamento seguido de uma rotação pura:

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} \quad (3.20)$$

b) Uma rotação pura seguido de um alongamento ou deformação pura:

$$\mathbf{F} = \mathbf{V}\mathbf{R} \quad (3.21)$$

sendo:

$\mathbf{R}$  - tensor rotação (uma matriz ortogonal própria);

$\mathbf{U}$  e  $\mathbf{V}$  - tensores de alongamento ou encurtamento direito e esquerdo respectivamente.

**Observação 3.2** *A consideração de uma superposição aditiva de uma deformação infinitesimal com uma rotação infinitesimal não pode ser utilizada em problemas de deformação finita.*

- *Em grandes deformações, duas deformações devem ser combinadas seqüencialmente por composição, i.e., tem-se uma decomposição multiplicativa;*
- *Em pequenas deformações, escopo do presente trabalho, as deformações são combinadas por adição, i.e., tem-se uma decomposição aditiva de uma deformação pura e uma rotação pura como será visto adiante.*

Agora, a partir de  $\mathbf{U}$  pode-se determinar o tensor de Cauchy-Green à direita,  $\mathbf{C}$ , como segue:

$$\mathbf{C} = \mathbf{U}^2 = \mathbf{F}^T\mathbf{F}. \quad (3.22)$$

### Definição do Campo de Deslocamento

O campo de deslocamento, ilustrado na Fig. 3.6, é definido como <sup>[9]</sup>:

$$\vec{u}(\vec{X}, t) = \vec{x} - \vec{X} = \varphi_t(\vec{X}) - \vec{X}. \quad (3.23)$$

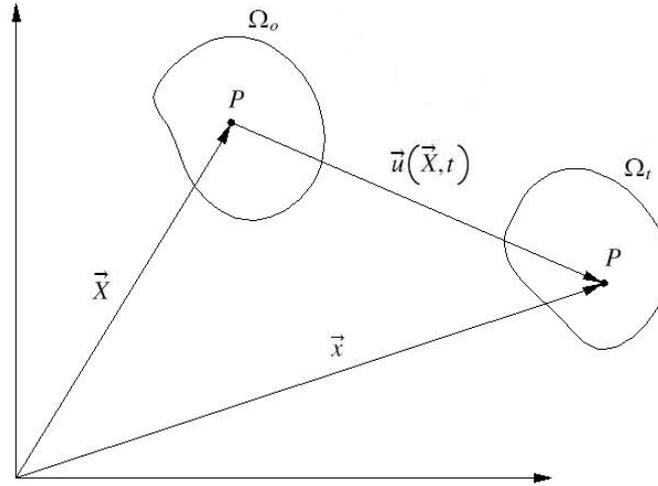


Figura 3.6: Definição do campo de deslocamento.

O gradiente do campo de deslocamento é dado por

$$\nabla_{\vec{X}} \vec{u} = \nabla_{\vec{X}} \vec{x} - \nabla_{\vec{X}} \vec{X} \quad (3.24)$$

ou

$$\mathbf{F} = \nabla_{\vec{X}} \vec{u} + \mathbf{I} \quad (3.25)$$

e o campo de velocidades e acelerações, por

$$\dot{\vec{u}}(\vec{X}, t) = \dot{\vec{x}} \quad (3.26)$$

e

$$\ddot{\vec{u}}(\vec{X}, t) = \ddot{\vec{x}}. \quad (3.27)$$

### Medida de Deformação $E(\vec{X}, t)$

A medida de deformação de Green Lagrange,  $E(\vec{X}, t)$  é definida em  $\Omega_o$  e dada por <sup>[28]</sup>:

$$ds^2 - ds_o^2 = 2 \mathbf{E}(\vec{u}) d\vec{X} \cdot d\vec{X} \quad (3.28)$$

sendo

$$ds^2 = d\vec{x} \cdot d\vec{x} \quad (3.29)$$

e

$$ds_o^2 = d\vec{X} \cdot d\vec{X} = d\vec{X} \cdot \mathbf{I} \cdot d\vec{X}. \quad (3.30)$$

Entretanto, o comprimento de arco  $ds$  é definido como:

$$ds^2 = \mathbf{F} d\vec{X} \cdot \mathbf{F} d\vec{X} = d\vec{X} \cdot \mathbf{F}^T \mathbf{F} d\vec{X} = \mathbf{C} d\vec{X} \cdot d\vec{X} \quad (3.31)$$

logo, obtém-se

$$\mathbf{E}(\vec{u}) = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}). \quad (3.32)$$

Substituindo (3.25) em (3.32) chega-se à

$$\mathbf{E}(\vec{u}) = \frac{1}{2} \left( \nabla_{\vec{X}} \vec{u} + [\nabla_{\vec{X}} \vec{u}]^T + [\nabla_{\vec{X}} \vec{u}]^T \nabla_{\vec{X}} \vec{u} \right). \quad (3.33)$$

### 3.1.2 Conservação de Massa

A massa de uma parte arbitrária de um corpo  $\mathcal{B}$ , cuja configuração é representada por  $v_o, v_o \subset \Omega_o$ , é dada por <sup>[9]</sup>:

$$M_o = \int_{v_o} \rho_o(\vec{X}) dv_o. \quad (3.34)$$

Após a deformação, em que  $v_t = \varphi_t(v_o)$ , como ilustrado na Fig. 3.7,

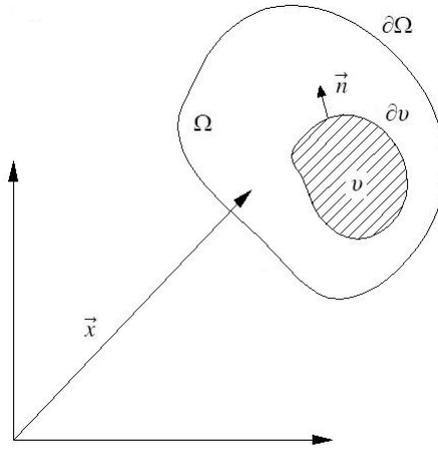


Figura 3.7: Definição de uma parte genérica  $v$  do corpo,  $v \subset \Omega$ .

tem-se

$$M_t = \int_{v_t} \rho(\vec{x}, t) dv_t. \quad (3.35)$$

Logo, se a massa é conservada então  $M_o = M_t$ , o que implica

$$\int_{v_o} \rho_o(\vec{X}) dv_o = \int_{v_t} \rho(\vec{x}, t) dv_t. \quad (3.36)$$

Porém, do cálculo integral, para uma mudança de variável da forma  $\vec{x} = \varphi_t(\vec{X})$ , tem-se

$$dv_t = \det[\mathbf{F}] dv_o \quad (3.37)$$

consequentemente

$$\int_{v_o} \left\{ \rho_o(\vec{X}) - \rho(\varphi_t(\vec{X}), t) \det[\mathbf{F}(\vec{X}, t)] \right\} dv_o = 0. \quad (3.38)$$

Utilizando o teorema da localização <sup>[22]</sup>,

$$\rho_o(\vec{X}) = \rho(\varphi_t(\vec{X}), t) J(\vec{X}, t) \quad (3.39)$$

em que

$$J(\vec{X}, t) = \det[\mathbf{F}(\vec{X}, t)]. \quad (3.40)$$

### Definição de Tensão

Sabe-se intuitivamente que forças aplicadas na superfície de um meio são transmitidas de alguma maneira através desse meio. O problema é de que maneira essas forças são transmitidas. Este objetivo pode ser conseguido definindo o vetor tração atuando sobre um ponto  $Q$  como:

$$\vec{t}_Q(\vec{x}, t, \vec{n}) = \lim_{\delta A \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{\delta F}}{\delta A} \quad (3.41)$$

em que

$$\vec{t}_Q(\vec{x}, t, \vec{n}) = \boldsymbol{\sigma}(\vec{x}, t) \vec{n}(\vec{x}, t) \quad (3.42)$$

sendo  $\delta A$  um elemento de área, ao redor de um ponto  $Q$ , sobre o qual atua a força  $\overrightarrow{\delta F}$  como representado na Fig. 3.8, e  $\boldsymbol{\sigma}(\vec{x}, t)$  o tensor tensão que representa a transformação linear que associa ao vetor  $\vec{n}(\vec{x}, t)$  a tração  $\vec{t}_Q(\vec{x}, t, \vec{n})$  atuando sobre um ponto  $Q$ .

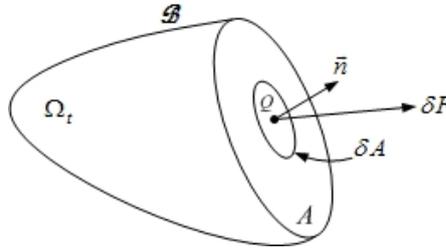


Figura 3.8: Definição da medida de tensão.

### Conservação do Momento Linear

A força resultante atuando sobre uma parte arbitrária  $v_t$  de um corpo  $\mathcal{B}$  num instante de tempo  $t$ ,  $v_t \subset \Omega_t$  como mostrado na Fig. 3.7, é igual à taxa de variação do momento linear da parte arbitrária  $v_t$  no mesmo instante  $t$ .

As forças atuando sobre um corpo são <sup>[9]</sup>:

- Forças de corpo  $\vec{b}(\vec{x}, t)$  - forças por unidade de massa

$$\int_{v_t} \rho(\vec{x}, t) \vec{b}(\vec{x}, t) dv_t \quad (3.43)$$

- Forças de superfície  $\vec{t}(\vec{x}, t, \vec{n})$  - devido as trações externas prescritas e reações de apoio

$$\vec{t}(\vec{x}, t, \vec{n}) = \boldsymbol{\sigma}(\vec{x}, t) \vec{n}(\vec{x}, t) \quad (3.44)$$

com

$$\int_{\partial v_t} \vec{t}(\vec{x}, t, \vec{n}) dA_t = \int_{\partial v_t} \boldsymbol{\sigma}(\vec{x}, t) \vec{n}(\vec{x}, t) dA_t. \quad (3.45)$$

Com as definições acima, a conservação do momento linear pode ser expressa como:

$$\int_{v_t} \rho(\vec{x}, t) \vec{b}(\vec{x}, t) dv_t + \int_{\partial v_t} \boldsymbol{\sigma}(\vec{x}, t) \vec{n}(\vec{x}, t) dA_t = \frac{d}{dt} \int_{v_t} \rho(\vec{x}, t) \vec{x}(\vec{x}, t) dv_t. \quad (3.46)$$

Contudo, a partir do teorema da divergência, obtém-se

$$\int_{\partial v_t} \boldsymbol{\sigma}(\vec{x}, t) \vec{n}(\vec{x}, t) dA_t = \int_{v_t} \text{div} [\boldsymbol{\sigma}(\vec{x}, t)] dv_t. \quad (3.47)$$

Logo, substituindo (3.47) em (3.46), chega-se à

$$\int_{v_t} \rho(\vec{x}, t) \vec{b}(\vec{x}, t) dv_t + \int_{v_t} \text{div} [\boldsymbol{\sigma}(\vec{x}, t)] dv_t = \frac{d}{dt} \int_{v_t} \rho(\vec{x}, t) \dot{\vec{x}}(\vec{x}, t) dv_t. \quad (3.48)$$

Entretanto, para qualquer deformação arbitrária, tem-se

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{v_t} \rho \dot{\vec{x}} dv_t &= \frac{d}{dt} \int_{v_o} \rho_o \dot{\vec{x}} dv_o \\ &= \int_{v_o} \rho_o \ddot{\vec{x}} dv_o \\ &= \int_{v_t} \rho \ddot{\vec{x}} dv_t. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Como consequência,

$$\int_{v_t} \left[ \rho \vec{b} + \text{div} [\boldsymbol{\sigma}] - \rho \ddot{\vec{x}} \right] dv_t = 0. \quad (3.50)$$

Porém, pelo teorema da localização, tem-se

$$\rho \vec{b}(\vec{x}, t) + \text{div} [\boldsymbol{\sigma}(\vec{x}, t)] = \rho \ddot{\vec{x}}, \text{ para } \forall \vec{x} \in \Omega_t \text{ e instante } t. \quad (3.51)$$

### Conservação do Momento Angular

O momento resultante atuando sobre uma parte de um corpo  $\mathcal{B}$  num instante  $t$ , cuja configuração é representada por  $v_t$ ,  $v_t \subset \Omega_t$ , é igual à taxa de variação do momento angular da parte arbitrária  $v_t$ , no mesmo instante  $t$ .

Os momentos atuando sobre um corpo são <sup>[9]</sup>:

- Os momentos da contribuição das forças de corpo  $\vec{b}(\vec{x}, t)$  que são

$$\int_{v_t} \vec{x} \times \rho(\vec{x}, t) \vec{b}(\vec{x}, t) dv_t \quad (3.52)$$

- Os momentos da contribuição das forças de superfície  $\vec{t}(\vec{x}, t, \vec{n})$ , devido as trações externas prescritas e reações de apoio, dadas por

$$\vec{t}(\vec{x}, t, \vec{n}) = \boldsymbol{\sigma}(\vec{x}, t) \vec{n}(\vec{x}, t) \quad (3.53)$$

os quais são

$$\int_{\partial v_t} \vec{x} \times \vec{t}(\vec{x}, t, \vec{n}) dA_t = \int_{\partial v_t} \vec{x} \times \boldsymbol{\sigma}(\vec{x}, t) \vec{n}(\vec{x}, t) dA_t. \quad (3.54)$$

Com as definições acima, a conservação do momento angular pode ser expressa como:

$$\int_{v_t} (\vec{x} \times \rho \vec{b}) dv_t + \int_{\partial v_t} (\vec{x} \times \boldsymbol{\sigma} \vec{n}) dA_t = \frac{d}{dt} \int_{v_t} (\vec{x} \times \rho \dot{\vec{x}}) dv_t. \quad (3.55)$$

Agora, tem-se, para qualquer nível de deformação, que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{v_t} (\vec{x} \times \rho \dot{\vec{x}}) dv_t &= \frac{d}{dt} \int_{v_o} (\vec{x} \times \dot{\vec{x}}) \rho_o dv_o \\ &= \int_{v_o} \left\{ \dot{\vec{x}} \times \dot{\vec{x}} + \vec{x} \times \ddot{\vec{x}} \right\} \rho_o dv_o \\ &= \int_{v_t} \vec{x} \times \rho \ddot{\vec{x}} dv_t. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Como resultado,

$$\int_{v_t} (\vec{x} \times \rho \vec{b}) dv_t + \int_{\partial v_t} (\vec{x} \times \boldsymbol{\sigma} \vec{n}) dA_t = \int_{v_t} \vec{x} \times \rho \ddot{\vec{x}} dv_t. \quad (3.57)$$

Porém,

$$\int_{\partial v_t} (\vec{x} \times \boldsymbol{\sigma} \vec{n}) dA_t = \int_{v_t} (\vec{x} \times \text{div} [\boldsymbol{\sigma}]) dv_t + \int_{v_t} \sum_{s,j,k=1}^3 (\epsilon_{sjk} \sigma_{js} \vec{e}_k) dv_t \quad (3.58)$$

Substituindo (3.58) em (3.57) e utilizando (3.51) chega-se à

$$\int_{v_t} \sum_{s,j,k=1}^3 (\epsilon_{sjk} \sigma_{js} \vec{e}_k) dv_t = 0 \quad (3.59a)$$

em que  $\epsilon_{ijk}$  é o símbolo de permutação, dado por

$$\epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = 1 \quad (3.59b)$$

$$\epsilon_{132} = \epsilon_{321} = \epsilon_{213} = -1 \quad (3.59c)$$

$$\epsilon_{ijk} = 0 \text{ para as demais combinações.} \quad (3.59d)$$

Como  $v_t$  é arbitrário, o teorema da localização fornece

$$\sum_{s,j,k=1}^3 (\epsilon_{sjk} \sigma_{js} \vec{e}_k) \quad (3.60a)$$

o que equivale à:

$$(k=1) \quad \sigma_{23} = \sigma_{32} \quad (3.60b)$$

$$(k=2) \quad \sigma_{13} = \sigma_{31} \quad (3.60c)$$

$$(k=3) \quad \sigma_{21} = \sigma_{12} \quad (3.60d)$$

ou, de forma compacta,

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T \quad (3.61)$$

afirmando que a tensão de Cauchy deve ser simétrico, para satisfazer a conservação do momento angular.

### 3.1.3 Primeiro Princípio da Termodinâmica - Conservação de Energia

Uma das leis fundamentais da termodinâmica é o princípio da conservação da energia, a qual postula que durante qualquer processo, a energia pode mudar de uma forma para outra, no entanto a quantidade de energia mantém-se constante.

A fim de formular adequadamente o princípio da conservação da energia, é importante observar que em uma parte arbitrária de um corpo  $v_t$ ,  $v_t \subset \Omega_t$  como representado na Fig. 3.7, a energia pode ser armazenada de duas formas <sup>[28]</sup>:

- Energia cinética ( $K$ ), dada por

$$K = \frac{1}{2} \int_{v_t} \rho \dot{\vec{x}} \cdot \dot{\vec{x}} dv_t \quad (3.62)$$

- Energia interna ( $E_i$ ), dada por

$$E_i = \int_{v_t} \rho e dv_t \quad (3.63)$$

em que  $e$  é a densidade específica da energia interna por unidade de massa.

Formalmente, o primeiro princípio da termodinâmica, também conhecido como princípio da conservação de energia, pode ser enunciado como: “A taxa de energia total do sistema (energia cinética e energia interna) é igual à potência das forças externas,  $P_{ext}$ , aplicada em  $v_t$ , somada pelo fluxo de energia térmica que o sistema recebe ou libera para o ambiente,  $Q$ ”.

Assim, matematicamente, o primeiro princípio da termodinâmica pode ser escrito como

$$\frac{d}{dt} (K + E_i) = P_{ext}(\dot{\vec{x}}) + Q, \quad (3.64)$$

em que

$$P_{ext}(\dot{\vec{x}}) = \int_{\Gamma_t \cap \partial v_t} \vec{t} \cdot \dot{\vec{x}} dA_t + \int_{v_t} \rho \vec{b} \cdot \dot{\vec{x}} dv_t \quad (3.65)$$

e

$$Q = \int_{v_t} \rho r dv_t - \int_{\partial v_t} \vec{q} \cdot \vec{n} dA_t, \quad (3.66)$$

na qual  $r$  é a densidade específica do calor gerado por unidade de massa,  $\vec{q}$  é o vetor fluxo de calor que atravessa a superfície, sendo o sinal negativo, o indicativo de fluxo de fora para dentro do sistema e  $\vec{n}$  é o vetor externo unitário normal à superfície  $\partial v_t$ .

Inserindo as Eqs. (3.62), (3.63), (3.65) e (3.66) em (3.64) obtém-se

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{v_t} \rho \dot{\vec{x}} \cdot \dot{\vec{x}} dv_t + \frac{d}{dt} \int_{v_t} \rho e dv_t = \int_{\Gamma_t \cap \partial v_t} \vec{t} \cdot \dot{\vec{x}} dA_t + \int_{v_t} \rho \vec{b} \cdot \dot{\vec{x}} dv_t + \int_{v_t} \rho r dv_t - \int_{\partial v_t} \vec{q} \cdot \vec{n} dA_t. \quad (3.67)$$

Porém,

$$\int_{\partial v_t} \vec{t}(\vec{x}, t, \vec{n}) \cdot \dot{\vec{x}} dA_t = \int_{\partial v_t} \boldsymbol{\sigma}(\vec{x}, t) \vec{n}(\vec{x}, t) \cdot \dot{\vec{x}} dA_t = \int_{v_t} \text{div}[\boldsymbol{\sigma}] \cdot \dot{\vec{x}} dv_t \quad (3.68a)$$

$$\int_{v_t} \operatorname{div} [\boldsymbol{\sigma}] \cdot \dot{\vec{x}} \, dv_t + \int_{v_t} \rho \vec{b} \cdot \dot{\vec{x}} \, dv_t = \int_{v_t} \rho \dot{\vec{x}} \cdot \ddot{\vec{x}} \, dv_t \, dv_t \quad (3.68b)$$

$$\int_{\partial v_t} \vec{t}(\vec{x}, t, \vec{n}) \cdot \dot{\vec{x}} \, dA_t + \int_{v_t} \rho \vec{b} \cdot \dot{\vec{x}} \, dv_t = \int_{v_t} \rho \dot{\vec{x}} \cdot \ddot{\vec{x}} \, dv_t + \int_{v_t} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \left( \dot{\vec{x}} \right) \, dv_t \quad (3.68c)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{v_t} \rho e \, dv_t = \frac{d}{dt} \int_{v_o} \rho_o e \, dv_o = \int_{v_t} \rho \dot{e} \, dv_t \quad (3.68d)$$

$$\int_{\partial v_t} \vec{q} \cdot \vec{n} \, dA_t = \int_{v_t} \operatorname{div}(\vec{q}) \, dv_t \quad (3.68e)$$

e

$$\frac{d}{dt} \int_{v_t} \rho \dot{\vec{x}} \cdot \dot{\vec{x}} \, dv_t = \frac{d}{dt} \int_{v_o} \rho_o \dot{\vec{x}} \cdot \dot{\vec{x}} \, dv_o = \int_{v_t} \rho \dot{\vec{x}} \cdot \ddot{\vec{x}} \, dv_t \quad (3.68f)$$

substituindo (3.68c), (3.68d), (3.68e), (3.68f) em (3.67), definindo  $\mathbf{D} = \boldsymbol{\varepsilon} \left( \dot{\vec{x}} \right)$  e observando que  $\dot{\vec{u}} = \dot{\vec{x}}$ , chega-se à

$$\int_{v_t} \rho \dot{e} \, dv_t = \int_{v_t} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D} \, dv_t + \int_{v_t} \rho r \, dv_t - \int_{v_t} \operatorname{div}(\vec{q}) \, dv_t \quad (3.69)$$

a qual deve ser válida para todo  $v_t$ , conseqüentemente

$$\rho \dot{e} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D} + \rho r - \operatorname{div}(\vec{q}). \quad (3.70)$$

### 3.1.4 Segundo Princípio da Termodinâmica - Entropia

Seja  $v_t, v_t \subset \Omega_t$  uma parte arbitrária do corpo, como ilustrado na Fig. 3.7, e  $S$  a produção de entropia em  $v_t$ , definida como

$$S = \int_{v_t} \rho s \, dv_t \quad (3.71)$$

na qual  $s$  representa a entropia específica e  $T$  a temperatura absoluta. Então, o segundo princípio da termodinâmica postula que, a taxa de produção de entropia em  $v_t$ ,  $\dot{S}$ , é sempre superior ou igual à taxa de aquecimento dividido pela temperatura absoluta, i.e.,

$$\frac{dS}{dt} \geq \int_{v_t} \frac{\rho r}{T} \, dv_t - \int_{\partial v_t} \frac{\vec{q}}{T} \cdot \vec{n} \, dA_t. \quad (3.72)$$

Aplicando o teorema da divergência para o segundo integrando do lado direito da desigualdade, tem-se

$$\int_{\partial v_t} \frac{\vec{q}}{T} \cdot \vec{n} \, dA_t = \int_{v_t} \operatorname{div} \left( \frac{\vec{q}}{T} \right) \, dv_t. \quad (3.73)$$

Substituindo (3.73) e (3.71) em (3.72) obtém-se

$$\int_{v_t} \left[ \rho \dot{s} - \frac{\rho r}{T} + \operatorname{div} \left( \frac{\vec{q}}{T} \right) \right] \, dv_t \geq 0.$$

Esta desigualdade deve valer para qualquer parte  $v_t$  o que implica na forma local da desigualdade de Clausius-Duhem, dada por

$$\rho \dot{s} + \operatorname{div} \left( \frac{\vec{q}}{T} \right) - \frac{\rho r}{T} \geq 0. \quad (3.74)$$

Além disso, como

$$\operatorname{div} \left( \frac{\vec{q}}{T} \right) = \frac{1}{T} \operatorname{div}(\vec{q}) - \frac{\vec{q}}{T^2} \cdot \vec{\nabla} T \quad (3.75)$$

tem-se também

$$\rho \dot{s}T - \rho r + \operatorname{div}(\vec{q}) - \frac{\vec{q}}{T} \cdot \vec{\nabla} T \geq 0. \quad (3.76)$$

Substituindo (3.70) em (3.76) deriva-se

$$\rho(\dot{s}T - \dot{e}) + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D} - \frac{\vec{q}}{T} \cdot \vec{\nabla} T \geq 0. \quad (3.77)$$

Introduzindo o potencial de energia livre de Helmholtz  $\Psi$ , definido como

$$\Psi = e - Ts, \quad (3.78)$$

derivando o potencial em relação ao tempo

$$\dot{s}T - \dot{e} = - \left( \dot{\Psi} + \dot{T}s \right) \quad (3.79)$$

e substituindo (3.79) em (3.77) chega-se à

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D} - \rho \left( \frac{d\Psi}{dt} + s \frac{dT}{dt} \right) - \frac{\vec{q}}{T} \cdot \vec{\nabla} T \geq 0 \quad (3.80)$$

a qual é uma alternativa de representação da forma local da desigualdade de Clausius-Duhem <sup>[28]</sup>.

## 3.2 Teoria da Deformação Infinitesimal

De agora em diante, restringe-se ao caso de deformações infinitesimais. Neste caso são feitas as seguintes hipóteses:

- (i)  $\Omega_t \simeq \Omega_o$ , i.e., as equações de equilíbrio são definidas em  $\Omega_o$ . Como consequência, não há distinção entre campos Lagrangeanos e Eulerianos. Portanto o tensor tensão de Cauchy, trações de superfície, etc... são todos campos presumidos e definidos em  $\Omega_o$ .
- (ii) Considera-se que  $\max_{\forall \vec{X} \in \Omega_o} \|\nabla_{\vec{X}} \vec{u}\| \ll 1$ . Logo, definindo  $\mathbf{H} = \nabla_{\vec{X}} \vec{u}$ , efetua-se uma linearização com relação à  $\mathbf{H}$  das medidas de deformação, equações constitutivas entre outras, como mostrado a seguir.
- (iii) Além disso, como consequência, não há distinção entre as coordenadas  $\vec{X}$  e  $\vec{x}$ . Portanto, por simplicidade se admite que ao longo dos capítulos restantes a configuração de referência será indicada por  $\Omega$  e o sistema de coordenadas por  $\vec{x}$ .

A partir do campo de deslocamento das partículas de  $\mathcal{B}$  relativas à configuração de referência  $\Omega$ , pode-se escrever

$$\varphi(\vec{x}, t) = \vec{x} + \vec{u}(\vec{x}, t). \quad (3.81)$$

Desta maneira, o gradiente da função deformação pode ser expresso como

$$\mathbf{F}(\vec{x}, t) = \frac{\partial \varphi(\vec{x}, t)}{\partial \vec{x}} = \mathbf{I} + \mathbf{H}(\vec{x}, t) \quad (3.82)$$

sendo

$$\mathbf{H}(\vec{x}, t) = \nabla_{\vec{x}} \vec{u}(\vec{x}, t). \quad (3.83)$$

Como  $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$  e  $\mathbf{U} = [\mathbf{C}]^{\frac{1}{2}}$  obtém-se

$$\mathbf{C} = \{\mathbf{I} + \mathbf{H}\}^T \{\mathbf{I} + \mathbf{H}\} = \mathbf{I} + \mathbf{H} + \mathbf{H}^T + \theta \{\mathbf{H}^2\} \quad (3.84)$$

e

$$\mathbf{U} = [\mathbf{I} + \mathbf{H} + \mathbf{H}^T + \theta \{\mathbf{H}^2\}]^{\frac{1}{2}}. \quad (3.85)$$

Fazendo uma analogia com a equação,  $(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \theta(|x|^2)$ ,  $|x| \ll 1$ , obtém-se

$$\mathbf{U} = \mathbf{I} + \frac{1}{2} \{\mathbf{H} + \mathbf{H}^T\} + \theta \{\mathbf{H}^2\}. \quad (3.86)$$

Novamente, uma vez que  $(1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x + \theta(|x|^2)$ , pode-se obter

$$\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{I} - \frac{1}{2} \{\mathbf{H} + \mathbf{H}^T\} + \theta \{\mathbf{H}^2\}. \quad (3.87)$$

Agora, visto que  $\mathbf{R} = \mathbf{F}\mathbf{U}^{-1}$ , chega-se à:

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} + \frac{1}{2} \{\mathbf{H} - \mathbf{H}^T\} + \theta \{\mathbf{H}^2\}. \quad (3.88)$$

Conseqüentemente, definindo os tensores  $\boldsymbol{\varepsilon}(\vec{x}, t)$  e  $\boldsymbol{\omega}(\vec{x}, t)$  como segue

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \{\mathbf{H} + \mathbf{H}^T\} \quad \text{ou} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \{\nabla_{\vec{x}} \vec{u} + \nabla_{\vec{x}} \vec{u}^T\} \quad (3.89)$$

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \{\mathbf{H} - \mathbf{H}^T\} \quad \text{ou} \quad \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \{\nabla_{\vec{x}} \vec{u} - \nabla_{\vec{x}} \vec{u}^T\} \quad (3.90)$$

sendo verificado que

$$\nabla_{\vec{x}} \vec{u}(\vec{x}, t) = \boldsymbol{\varepsilon}(\vec{x}, t) + \boldsymbol{\omega}(\vec{x}, t), \quad (3.91)$$

em que  $\boldsymbol{\varepsilon}(\vec{x}, t)$  denota o tensor deformação infinitesimal pura e  $\boldsymbol{\omega}(\vec{x}, t)$  o tensor rotação infinitesimal pura. assim obtém-se:

$$\mathbf{F}(\vec{x}, t) = \mathbf{I} + \boldsymbol{\varepsilon}(\vec{x}, t) + \boldsymbol{\omega}(\vec{x}, t) + \theta \{\mathbf{H}^2\}, \quad (3.92)$$

e

$$\mathbf{E}(\vec{x}, t) = \boldsymbol{\varepsilon}(\vec{x}, t) + \theta \{\mathbf{H}^2\}. \quad (3.93)$$

A partir deste resultado, verifica-se que a hipótese de deformação infinitesimal, leva à decomposição aditiva da deformação na soma de uma deformação infinitesimal pura com uma rotação infinitesimal pura <sup>[9]</sup>.

Agora,

$$\det[\mathbf{I} + \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\omega}] = \det[\mathbf{I}] + \frac{d}{d\boldsymbol{\varepsilon}} \left\{ \det[\mathbf{I} + \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\omega}] \right\} \Big|_{\boldsymbol{\varepsilon}=0} \in +o(\boldsymbol{\varepsilon}^2), \quad (3.94)$$

em que

$$\frac{d}{d\epsilon} \left\{ \det [\mathbf{I} + \epsilon \mathbf{H}] \right\} \Big|_{\epsilon=0} = \text{tr} [\mathbf{H}], \quad (3.95)$$

consequentemente, para  $\max_{\vec{x} \in \Omega} \|\nabla_{\vec{x}} \vec{u}\| \ll 1$ , tem-se

$$\det [\mathbf{I} + \nabla_{\vec{x}} \vec{u}] \simeq \det [\mathbf{I}] + \text{tr} [\nabla_{\vec{x}} \vec{u}] \quad (3.96)$$

ou

$$\det [\mathbf{I} + \mathbf{H}] \simeq 1 + \text{tr} [\boldsymbol{\varepsilon}(\vec{u})]. \quad (3.97)$$

### 3.2.1 Leis de Conservação

#### Conservação da Massa - Forma Linearizada

Seja  $\rho_o(\vec{x})$  a densidade inicial do corpo e seja  $\rho(\vec{x}, t)$  a densidade do material no instante  $t$ . Considerando que a massa de qualquer parte  $v$  do corpo,  $v \subset \Omega$  como mostrado na Fig. 3.7, é conservada, tem-se

$$\rho_o(\vec{x}) = (1 + \text{tr} [\boldsymbol{\varepsilon}(\vec{x}, t)]) \rho(\vec{x}, t) \quad (3.98)$$

na qual

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\vec{x}, t) = \frac{1}{2} \{ \nabla \vec{u}(\vec{x}, t) + \nabla \vec{u}^T(\vec{x}, t) \} \quad (3.99)$$

já que

$$\text{tr} [\boldsymbol{\omega}(\vec{x}, t)] = 0. \quad (3.100)$$

No caso de materiais completamente densos sob deformações infinitesimais, geralmente admite-se que

$$\rho(\vec{x}, t) \simeq \rho_o(\vec{x}) = \text{cte}. \quad (3.101)$$

#### Formulação do Problema de Deformação Infinitesimal

Considere o corpo ilustrado na Fig. 3.9 submetido a uma força de corpo prescrita  $\rho \vec{b}$  em  $\Omega$ , submetido a uma carga de tração prescrita  $\vec{t}_p$  em  $\Gamma_t$  e um deslocamento prescrito  $\vec{u}_p$  em  $\Gamma_u$  de modo que  $\partial\Omega = \Gamma_u \cup \Gamma_t$ , com  $\Gamma_u \cap \Gamma_t = \emptyset$ .

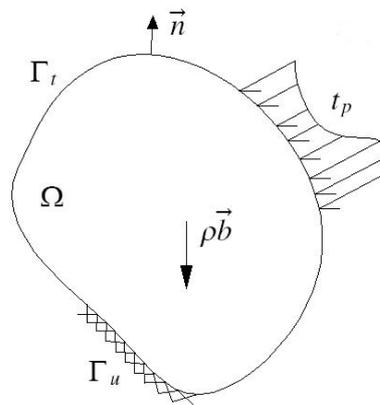


Figura 3.9: Definição de um problema clássico de deformação infinitesimal.

O problema clássico de deformação infinitesimal pode ser formulado como: Determinar  $\vec{u}(\vec{x}, t)$  de modo que

$$\begin{aligned}
 & \text{div} [\boldsymbol{\sigma}(\vec{x}, t)] + \rho \vec{b}(\vec{x}, t) = \rho \ddot{\vec{u}}(\vec{x}, t), \text{ para } \forall \vec{x} \in \Omega \text{ e instante } t \\
 & \text{sujeito às condições de contorno dadas por} \\
 & \quad \vec{u}(\vec{x}, t) = \vec{u}_p(\vec{x}), \text{ em } \Gamma_u \\
 & \quad \text{e} \\
 & \quad \boldsymbol{\sigma}(\vec{x}, t) \vec{n} = \vec{t}_p(\vec{x}, t), \text{ em } \Gamma_t \text{ no instante } t \\
 & \quad \text{e submetido às condições iniciais} \\
 & \quad \vec{u}(\vec{x}, 0) = \vec{u}_o(\vec{x}), \text{ em } \Omega \\
 & \quad \text{e} \\
 & \quad \dot{\vec{u}}(\vec{x}, 0) = \vec{v}_o(\vec{x}), \text{ em } \Omega.
 \end{aligned} \tag{3.102}$$

Para determinar a forma fraca associada ao problema, definem-se os seguintes conjuntos: para cada instante  $t$ ,

$$\mathbf{K} = \{ u_i(\cdot, t) \in H^1(\Omega) \mid \vec{u}(\cdot, t) = \vec{u}_p(\cdot, t), \text{ em } \Gamma_u \}, \tag{3.103}$$

denominado como sendo o conjunto dos deslocamentos admissíveis,

$$\mathbf{V}_u = \{ w_i \in H^1(\Omega) \mid \vec{w} = 0, \text{ em } \Gamma_u \}, \tag{3.104}$$

denominado como sendo o conjunto das variações dos deslocamentos admissíveis.

Agora

$$\int_{\Omega} \text{div} [\boldsymbol{\sigma}] \cdot \vec{w} d\Omega + \int_{\Omega} \rho \vec{b} \cdot \vec{w} d\Omega = \int_{\Omega} \rho \ddot{\vec{u}} \cdot \vec{w} d\Omega, \forall \vec{w} \in \mathbf{V}_u. \tag{3.105}$$

Entretanto,

$$\text{div} [\boldsymbol{\sigma}^T \vec{w}] = \vec{w} \cdot \text{div} [\boldsymbol{\sigma}] + \nabla \vec{w} \cdot \boldsymbol{\sigma}. \tag{3.106}$$

Adicionalmente, pelo teorema da divergência

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} \text{div} [\boldsymbol{\sigma}^T \vec{w}] d\Omega &= \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\sigma} \vec{n} \cdot \vec{w} d\Omega \\
 &= \int_{\Gamma_u} \boldsymbol{\sigma} \vec{n} \cdot \vec{w} dA + \int_{\Gamma_t} \boldsymbol{\sigma} \vec{n} \cdot \vec{w} dA.
 \end{aligned} \tag{3.107}$$

Verificando que  $\vec{w} = 0$  em  $\Gamma_u$  e  $\boldsymbol{\sigma} \vec{n} = \vec{t}_p$  em  $\Gamma_t$ , obtém-se

$$\int_{\Omega} \text{div} [\boldsymbol{\sigma}^T \vec{w}] d\Omega = \int_{\Gamma_t} \vec{t}_p \cdot \vec{w} dA. \tag{3.108}$$

Como resultado

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \vec{w} d\Omega + \int_{\Omega} \rho \ddot{\vec{u}} \cdot \vec{w} d\Omega = \int_{\Gamma_t} \vec{t}_p \cdot \vec{w} dA + \int_{\Omega} \rho \vec{b} \cdot \vec{w} d\Omega, \forall \vec{w} \in \mathbf{V}_u. \tag{3.109}$$

Porém, já que  $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T$ , determina-se

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \vec{w} &= \boldsymbol{\sigma} \cdot \frac{1}{2} \{ \nabla \vec{w} + \nabla \vec{w}^T \} \\ &= \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\vec{w})\end{aligned}\quad (3.110)$$

o que produz

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\vec{w}) d\Omega + \int_{\Omega} \rho \ddot{\vec{u}} \cdot \vec{w} d\Omega_o = \int_{\Gamma_t} \vec{t}_p \cdot \vec{w} dA + \int_{\Omega} \rho \vec{b} \cdot \vec{w} d\Omega, \quad \forall \vec{w} \in \mathbf{V}_u. \quad (3.111)$$

Definindo  $P_i$  como sendo a potência virtual das forças internas,

$$P_i(\vec{u}) = - \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\vec{u}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\vec{w}) d\Omega, \quad (3.112)$$

$P_a$  como sendo a potência virtual das forças de inércia,

$$P_a(\vec{u}) = \int_{\Omega} \rho \ddot{\vec{u}} \cdot \vec{w} d\Omega,$$

e  $P_e$  como sendo a potência virtual das forças externas,

$$P_e = \int_{\Gamma_t} \vec{t}_p \cdot \vec{w} dA + \int_{\Omega} \rho \vec{b} \cdot \vec{w} d\Omega, \quad (3.113)$$

pode ser formulado o problema fraco como: Determinar  $\vec{u}(\vec{x}, t) \in \mathbf{K}$ , para cada instante de  $t$ , solução de

$$P_a(\vec{u}) = P_i(\vec{u}) + P_e, \quad \forall \vec{w} \in \mathbf{V}_u. \quad (3.114)$$

No caso particular de problemas quase-estáticos, tem-se: Determinar  $\vec{u}(\vec{x}, t) \in \mathbf{K}$ , para cada instante de  $t$ , solução de

$$P_i(\vec{u}) + P_e = 0, \quad \forall \vec{w} \in \mathbf{V}_u. \quad (3.115)$$

### 3.3 Método das Variáveis de Estado Local

Conforme Lemaitre e Chaboche <sup>[25]</sup>, o método das variáveis de estado local considera que o estado termodinâmico de um meio contínuo em um determinado ponto e instante de tempo  $t$  é completamente definido através do conhecimento dos valores de um conjunto de variáveis naquele instante, o qual depende somente do ponto considerado. A hipótese de que as derivadas no tempo destas variáveis não estão envolvidas na definição do estado, implica que qualquer evolução pode ser considerada como uma sucessão de vários estados em equilíbrio. Estas variáveis são denominadas **variáveis de estado local**. Assim, os fenômenos físicos podem ser descritos com uma precisão que depende da escolha da natureza e do número de variáveis de estado. Os processos serão termodinamicamente admissíveis se, em qualquer instante  $t$  da evolução, a desigualdade de Clausius-Duhem for satisfeita. De acordo com Lemaitre <sup>[26]</sup>, as variáveis de estado local são classificadas em variáveis observáveis e variáveis internas.

#### 3.3.1 Variáveis Observáveis

As **variáveis observáveis** que interagem dentro dos fenômenos de elasticidade, viscoelasticidade, plasticidade, viscoplasticidade, dano e ruptura são a temperatura  $T$  e a deformação total  $\boldsymbol{\varepsilon}$ . Os fenômenos reversíveis ou elásticos são completamente definidos pelas variáveis observáveis <sup>[26]</sup>.

### 3.3.2 Variáveis Internas

Para fenômenos dissipativos, o estado atual também depende da história a qual é representada, no método do estado local, por valores a cada instante das variáveis adicionais chamadas variáveis internas.

A plasticidade e viscoplasticidade requerem a introdução da deformação plástica (ou viscoplástica) como uma variável interna. Para pequenas deformações, a deformação viscoplástica  $\boldsymbol{\varepsilon}^c$  é a deformação resultante, permanente, que ocorre após a remoção do carregamento externo. Desta forma, no contexto de pequenas deformações, a deformação total pode ser decomposta de forma aditiva como:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^c. \quad (3.116)$$

Outros fenômenos, como o encruamento, o dano e a fratura, exigem a introdução de variáveis internas adicionais, de natureza menos óbvia. Estas variáveis representam o estado interno da matéria (densidade de discordâncias, característica da microestrutura cristalina, configuração das microtrincas e cavidades, entre outras) e não existem meios de medi-las por observação direta [26].

Não há maneira objetiva de escolher a natureza das variáveis internas mais adequadas para o estudo de um determinado fenômeno. A escolha é ditada por experiência, percepção física e muitas vezes pelo tipo de aplicação. Aqui, as variáveis internas serão denotadas por  $\{V_i, i = 1 \dots k\}$  representando um escalar, ou uma variável tensorial.

Segundo a definição de Cauchy, um corpo elástico é aquele na qual a deformação em qualquer ponto do corpo é completamente determinada, pela tensão atual e o estado de temperatura. Então uma definição óbvia de um corpo *inelástico* é aquela em que há algo mais, além da tensão atual e a temperatura, que determinam o estado de deformação de um corpo. Este “algo mais” pode ser pensado, por exemplo, como a *história* da tensão e da temperatura no ponto. Um modo alternativo de representar o “algo mais” é considerar que o estado de deformação de um corpo depende não só da deformação total e da temperatura, mas também de um conjunto de variáveis, dadas por  $\{V_i, i = 1 \dots k\}$ . Estas variáveis são chamadas **variáveis internas**, e podem representar campos escalares ou tensoriais [26].

A presença de variáveis adicionais nas relações constitutivas requer equações constitutivas adicionais. Estas equações complementares são normalmente dadas na forma de taxas, i.e., através de equações de evolução para as variáveis internas  $V_k$ , do tipo:

$$\dot{V}_k = g_k(\boldsymbol{\varepsilon}, T, \vec{V}). \quad (3.117)$$

Como uma regra geral, as variáveis internas podem ser de dois tipos. Por um lado podem ser variáveis “físicas” descrevendo o aspecto físico-químico local da estrutura a qual pode mudar espontaneamente. Por outro lado, as variáveis internas podem ser construídas matematicamente, sendo então chamadas de variáveis *fenomenológicas* [27].

Assim, a fim de descrever os processos irreversíveis (dissipativos), pode-se introduzir um conjunto de variáveis internas cujo objetivo é incorporar a evolução da microestrutura do material e a dependência da história na resposta final do material.

### 3.3.3 Potenciais Termodinâmicos

#### Potencial de Energia Livre de Helmholtz

Neste ponto, no contexto da classe dos PSM (“Pseudo-Standard Materials”) [29], considera-se a existência de um potencial termodinâmico a partir do qual são derivadas as

equações de estado. No caso do potencial de energia livre de Helmholtz,  $\Psi$ , este é côncavo com relação à temperatura  $T$  e convexo com relação às demais variáveis de estado.

O potencial de energia livre de Helmholtz,  $\Psi$ , é um potencial termodinâmico que mede o trabalho “útil” disponível de um sistema termodinâmico fechado à uma temperatura constante. Para tal sistema, o valor negativo da diferença na energia de Helmholtz é igual à quantidade máxima de trabalho extraível de um processo termodinâmico em que a temperatura é mantida constante. São chamados de “potenciais”, porque de certo modo, descrevem a quantidade de energia potencial em um sistema termodinâmico quando este é submetido a certas restrições. Matematicamente, o potencial de energia livre de Helmholtz é definido como  $\Psi = e - Ts$ , e pode ser considerado inicialmente dependente das seguintes variáveis de estado  $(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^c, T, V_k)$ , ou seja,

$$\Psi = \Psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^c, T, V_k), \quad (3.118)$$

em que  $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^c$ .

Costuma-se considerar, no caso de materiais elasto-viscoplásticos sujeitos a processos isotérmicos, que

$$\Psi = \Psi(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^c, V_k) = \Psi(\boldsymbol{\varepsilon}^e, V_k). \quad (3.119)$$

Agora, todos os processos físicos admissíveis devem satisfazer a desigualdade de Clausius-Duhem, i.e.

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D} - \rho \dot{\Psi} \geq 0. \quad (3.120)$$

Porém, como pode ser visto em (3.119),  $\Psi$  é função das variáveis de estado  $\boldsymbol{\varepsilon}^e$  e  $V_k$ , as quais são função do tempo,  $t$ . Assim, de acordo com a regra da cadeia, pode-se escrever  $\dot{\Psi}$  como

$$\dot{\Psi} = \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \frac{\partial \Psi}{\partial V_k} \dot{V}_k. \quad (3.121)$$

Substituindo (3.121) em (3.120), chega-se à

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D} - \rho \left( \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \frac{\partial \Psi}{\partial V_k} \dot{V}_k \right) \geq 0. \quad (3.122)$$

Por outro lado,  $\mathbf{D} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ , o que implica

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \rho \left( \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \frac{\partial \Psi}{\partial V_k} \dot{V}_k \right) \geq 0. \quad (3.123)$$

Contudo,  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^c$ , portanto

$$\left( \boldsymbol{\sigma} - \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} \right) \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^c - \rho \frac{\partial \Psi}{\partial V_k} \dot{V}_k \geq 0. \quad (3.124)$$

Supondo que para deformações extremamente pequenas e arbitrárias a resposta do material possa ser aproximada como sendo elástica assim, como resultado  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e$  é independente de  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^c$  e  $\dot{V}_k$  permitindo derivar

$$\left( \boldsymbol{\sigma} - \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} \right) \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e \geq 0$$

o que acarreta

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e}. \quad (3.125)$$

Consequentemente, a dissipação neste modelo viscoplástico é determinada por

$$\Delta = \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^c - \rho \frac{\partial \Psi}{\partial V_k} \dot{V}_k \geq 0. \quad (3.126)$$

Definindo

$$A_k = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial V_k}, \quad (3.127)$$

pode-se reescrever a dissipação associada ao modelo como

$$\Delta = \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^c - A_k \dot{V}_k \geq 0. \quad (3.128)$$

Aqui, podem ser resumidas as equações de estado como segue

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} \quad (3.129a)$$

e

$$A_k = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial V_k}. \quad (3.129b)$$

Agora,

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e = \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^c \quad (3.130)$$

em que  $\boldsymbol{\varepsilon}^e$  é independente de  $\boldsymbol{\varepsilon}^c$ . Portanto, pode-se derivar

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} \frac{\partial (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^c)}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} \quad (3.131)$$

e

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^c} = \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} \frac{\partial (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^c)}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^c} = -\frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} \quad (3.132)$$

o que implica em

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}. \quad (3.133)$$

As variáveis dependentes com relação às equações de estado, dadas por  $\boldsymbol{\sigma}$  e  $A_k$ , são denominadas de variáveis duais ou associadas ao modelo material proposto.

A partir do modelo proposto, é possível obter a seguinte tabela:

Tabela 3.1: Variáveis de estado e associadas do modelo proposto.

Variáveis de estado		Variáveis associadas
Variáveis observáveis	Variáveis internas	
$\boldsymbol{\varepsilon}$		$\boldsymbol{\sigma}$
$T$		$s$
	$V_k$	$A_k$
	$\boldsymbol{\varepsilon}^e$	$\boldsymbol{\sigma}$
	$\boldsymbol{\varepsilon}^c$	$-\boldsymbol{\sigma}$

### 3.4 Múltiplos Potenciais de Dissipação

Seguindo o contexto do método dos PSM (“Pseudo-Standard Materials”) [29], considera-se a existência de múltiplos potenciais independentes correspondendo, cada um, a diferentes processos físicos. Desta forma, é definido a existência de múltiplos potenciais independentes os quais são função das variáveis duais:

$$F^i = F^i(\boldsymbol{\sigma}, A_k). \quad (3.134)$$

Considera-se também que, cada potencial,  $F^i(\boldsymbol{\sigma}, A_k)$ , pode eventualmente depender das variáveis de estado como parâmetros, i.e.,

$$F^i = F^i(\boldsymbol{\sigma}, A_k; \boldsymbol{\varepsilon}^e, V_k) \quad (3.135)$$

de modo que as equações de evolução sejam dadas por

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^c = \sum_{i=1}^s \dot{\lambda}_i \frac{\partial F^i}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (3.136)$$

e

$$\dot{V}_k = \sum_{i=1}^s \dot{\lambda}_i \frac{\partial F^i}{\partial A_k}. \quad (3.137)$$

em que os multiplicadores  $\dot{\lambda}_i$  possam ser definidos através de equações de evolução e/ou como multiplicadores de Lagrange. Admite-se que os potenciais  $F^i(\boldsymbol{\sigma}, A_k; \boldsymbol{\varepsilon}^e, V_k)$  são funções contínuas, escalares, convexas, positivas e nulas na origem com relação às variáveis duais,  $(\boldsymbol{\sigma}, A_k)$ , e que os multiplicadores satisfazem às condições,  $\dot{\lambda}_i \geq 0$ .

Como resultado, pode ser visto, então, que no contexto dos PSM (“Pseudo-Standard Materials”), para descrever um modelo material é necessário a definição dos seguintes potenciais e equações:

1. O potencial de energia livre,  $\Psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^{vp}, V_k)$ ;
2. Os potenciais de dissipação  $F^i(\boldsymbol{\sigma}, A_k; \boldsymbol{\varepsilon}^e, V_k)$ ;
3. As equações de evolução dos multiplicadores  $\dot{\lambda}_i$  e/ou as equações e condições de complementaridade caso os multiplicadores sejam vistos como multiplicadores de Lagrange.

# Capítulo 4

## Modelos Elasto-viscoplásticos para Materiais Geomecânicos

### 4.1 Uma Descrição Fenomenológica da Fluência

Nessa seção é descrito o fenômeno da fluência e ilustrado a resposta típica de um material em alguns ensaios experimentais simples, conforme visto em Boyle e Spence [6].

#### 4.1.1 O Fenômeno da Fluência

Inicia-se considerando o que ocorre quando se carrega um corpo de prova à tração uniaxial, com uma carga constante, por um período de tempo, à uma temperatura constante suficientemente elevada de modo a causar fluência. A resposta típica da deformação com o tempo é mostrada na Fig. 4.1.

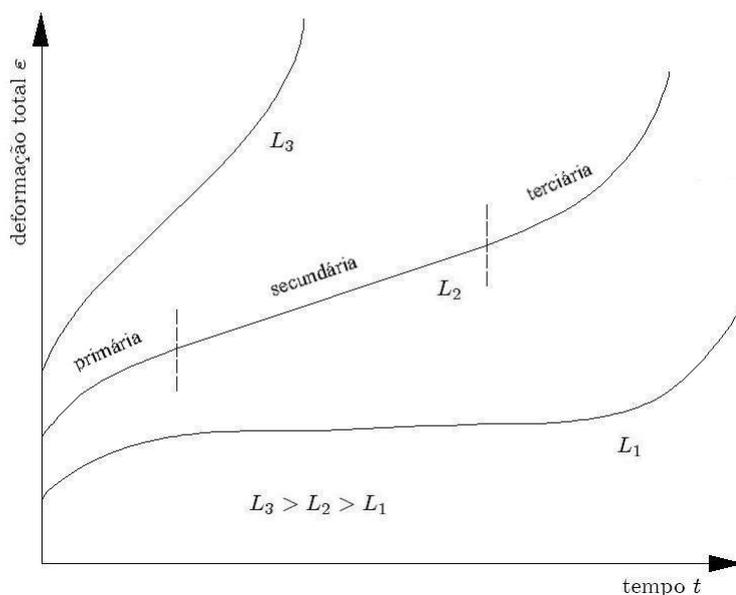


Figura 4.1: Curvas básicas de fluência para diferentes cargas,  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$ .

Na figura acima é possível verificar a variação da resposta do material para diferentes níveis de carga, i.e., para os níveis de cargas ( $L_1 < L_2 < L_3$ ). Convencionalmente, a resposta do material é dividida em três fases que são:

- (i) Fluência primária, em que ocorre uma diminuição da taxa inicial de deformação do material;
- (ii) Fluência secundária, em que o material apresenta uma taxa de deformação aproximadamente constante. Esta fase é também denominada de fluência em regime estacionário;
- (iii) Fluência terciária. Nesta fase ocorre novamente um aumento da taxa de deformação do material. O aumento da taxa de deformação nesta etapa, decorre da nucleação e propagação de microtrincas e/ou microvazios (fase de cavitação) levando o material à ruptura. Para modelar o comportamento do material nesta fase, em geral, é utilizada uma variável de dano a qual é responsável pela incorporação do efeito de nucleação e propagação das microtrincas e/ou microvazios.

**Observação 4.1** *No caso de rochas salinas, sujeitas à altas pressões de confinamento, caso típico de condição de carga da rocha salina para a perfuração e exploração do poço de petróleo, não é verificada a ocorrência de fluência terciária. Desta forma, modelos utilizados para a análise do comportamento de rochas salinas no decorrer do processo de perfuração e exploração do poço de petróleo consideram apenas a fluência primária e secundária.*

As diferentes fases do comportamento dos materiais sob fluência tornam-se mais perceptíveis quando é ilustrada a variação da taxa de deformação do material ao longo do tempo, como ilustrada na Fig. 4.2.

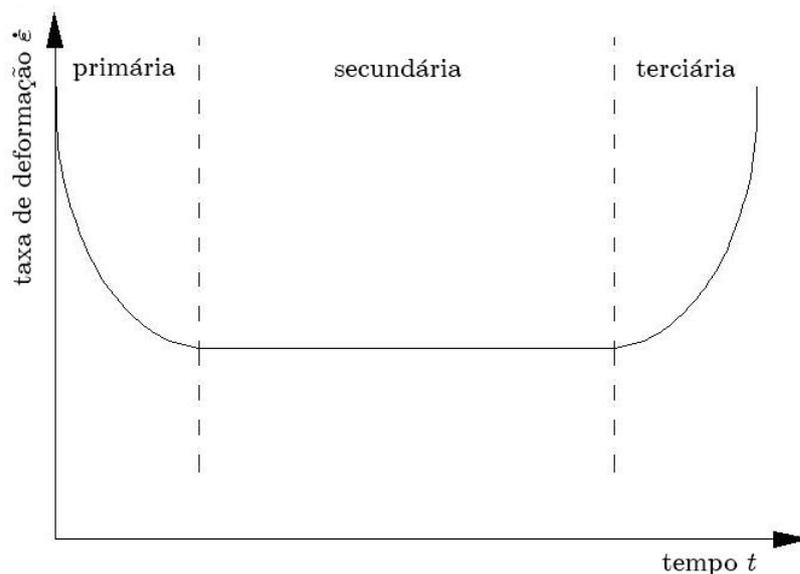


Figura 4.2: Gráfico típico da taxa de deformação no tempo.

As informações provenientes destas curvas básicas de fluência podem ser apresentadas em diferentes formas, as quais são mais esclarecedoras para diferentes situações. As duas formas alternativas mais úteis são as curvas isócronas, conforme mostra a Fig. 4.3,

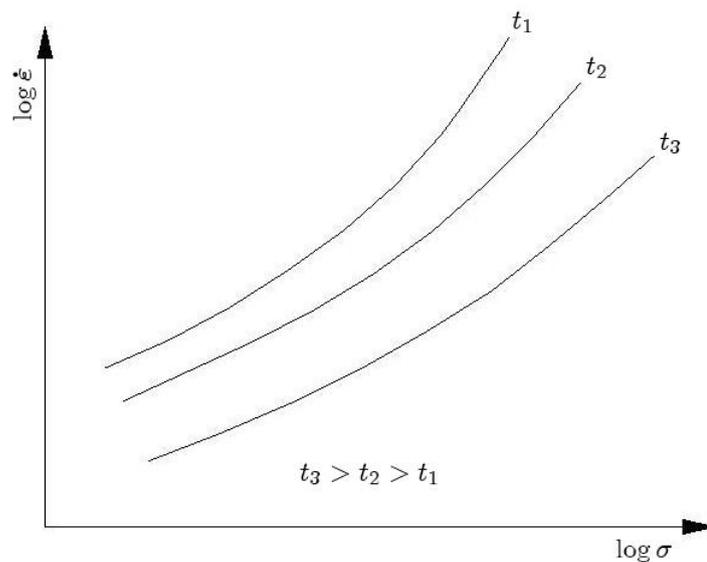


Figura 4.3: Curvas isócronas de fluência.

e as curvas de isodeformação, apresentadas na Fig. 4.4.

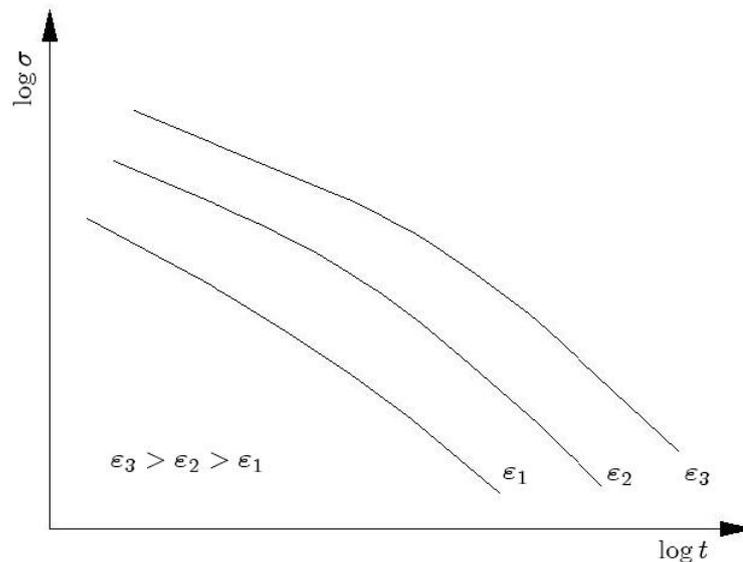


Figura 4.4: Curvas de isodeformação de fluência.

No primeiro caso, os contornos de tempo constante são plotados em um gráfico do logaritmo da taxa de deformação versus o logaritmo da tensão. Este tipo de gráfico é útil na determinação do comportamento tensão-deformação do material. No segundo caso, os contornos da deformação constante são plotados em um gráfico do logaritmo da tensão versus o logaritmo do tempo. Para um determinado nível de tensão, este tipo de gráfico informa o tempo em que uma determinada deformação foi atingida. Dois outros gráficos são particularmente úteis, o da taxa de fluência mínima (a qual ocorre durante a fluência secundária) em relação à tensão, como ilustrado na Fig. 4.5,

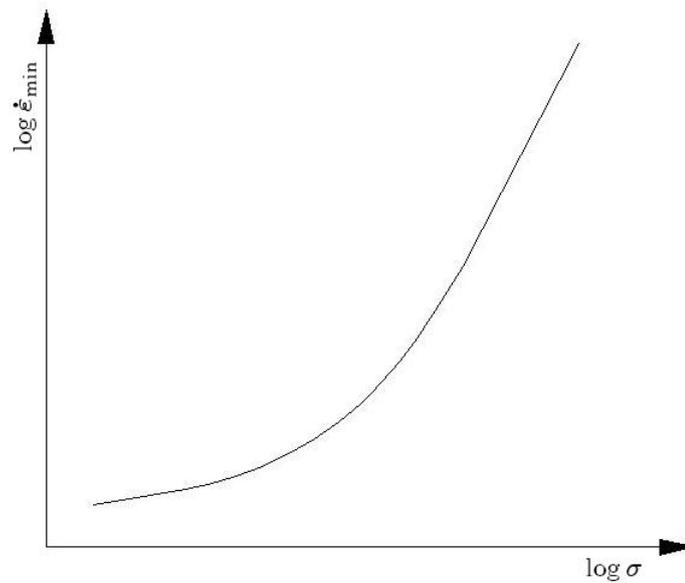


Figura 4.5: Gráfico típico do logaritmo da taxa de deformação mínima em relação ao logaritmo da tensão.

e o do tempo de ruptura em relação à tensão inicial, ilustrado na Fig. 4.6.

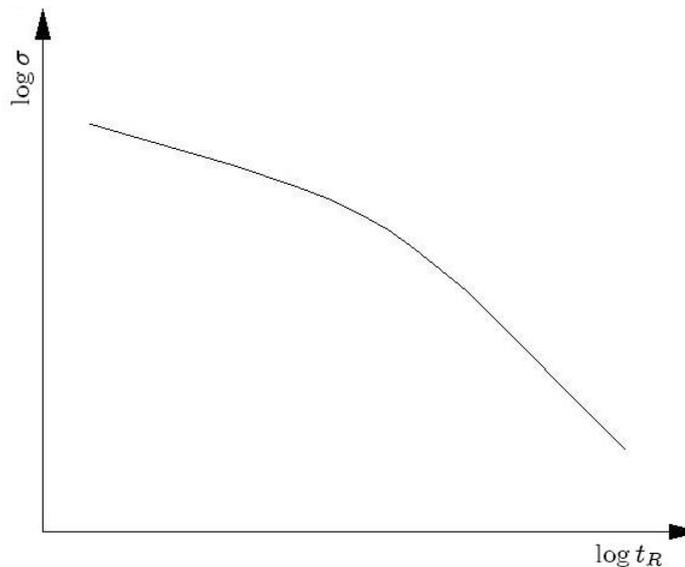


Figura 4.6: Gráfico típico do logaritmo da tensão inicial em relação ao logaritmo do tempo de ruptura.

O gráfico da taxa de deformação mínima em relação à tensão é em geral aproximado por uma reta, o que caracterizaria uma relação funcional do tipo taxa de deformação proporcional a alguma potência da tensão. Porém, para ensaios com baixas cargas há geralmente uma transição para uma reta de inclinação mais baixa. O gráfico da tensão em relação ao tempo de ruptura sugere que o tempo de ruptura é inversamente proporcional a alguma potência da tensão. Mas, novamente em ensaios de longa duração, há uma transição para uma reta de inclinação diferente.

Devido a sua própria natureza, dados de ensaios de fluência requerem um longo tempo de espera para o experimento. É natural portanto o desejo de extrapolar os dados obtidos em um ensaio de curto prazo para tempos mais longos, ou para outros níveis de

carga. Porém, devido aos fatos acima mencionados, ilustrando mudanças na tendência de resposta do material ao longo do tempo, como mostrado nas Fig. 4.5 e 4.6, efetuar extrapolações dos dados obtidos é um processo bastante complexo.

É possível enfrentar facilmente as complexidades que podem surgir quando variações de carga ou temperaturas são consideradas. O efeito de diferentes temperaturas pode ser rapidamente estimado, plotando a taxa de deformação por fluência em relação à temperatura, como ilustrado na Fig. 4.7.

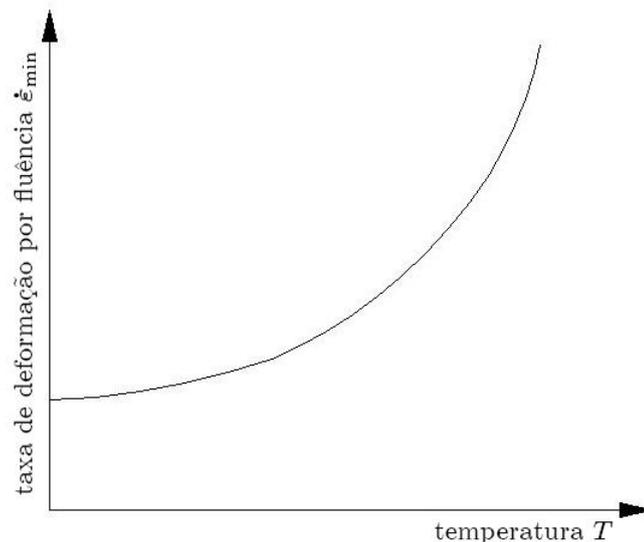


Figura 4.7: Variação da taxa de fluência mínima com a temperatura.

Pode ser visto que a taxa de deformação por fluência aumenta exponencialmente com a temperatura. Assim é possível com um pequeno aumento na temperatura dobrar a taxa de fluência. Esta dependência exponencial é um exemplo do que é conhecido como lei de Arrhenius, a qual tem ampla generalidade, não se aplicando somente à fluência dos metais, mas também a outros processos físicos e biológicos.

O exemplo mais simples de cargas não constantes é o chamado ensaio de relaxação em que a deformação de um corpo de prova é mantida constante, resultando em uma relaxação da tensão resultante, como mostrado na Fig. 4.8.

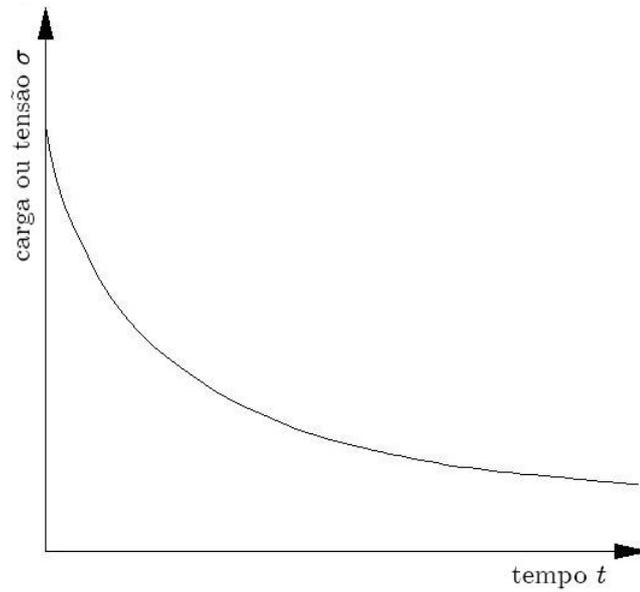


Figura 4.8: Curva típica de relaxação.

Pode-se ter alguma idéia da complexidade da resposta da fluência do material à variação de cargas examinando os resultados dos ensaios em que são aplicados degraus de carga, conforme ilustrado Fig. 4.9,

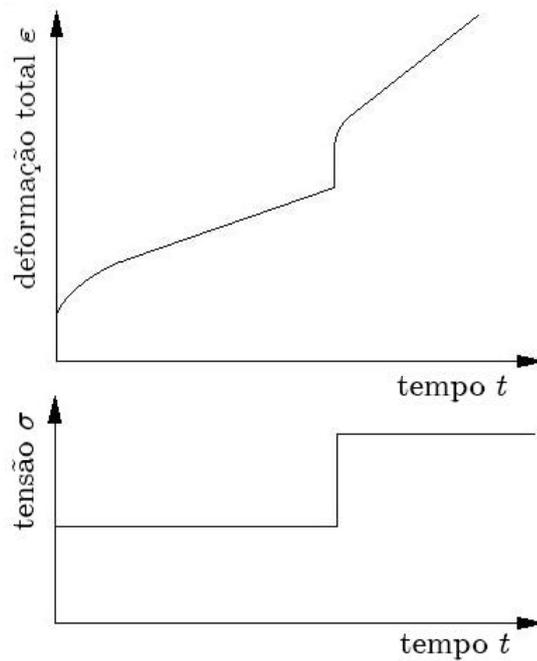


Figura 4.9: Resposta típica de fluência para degraus de carga.

e dos ensaios de descarga, mostrados na Fig. 4.10,

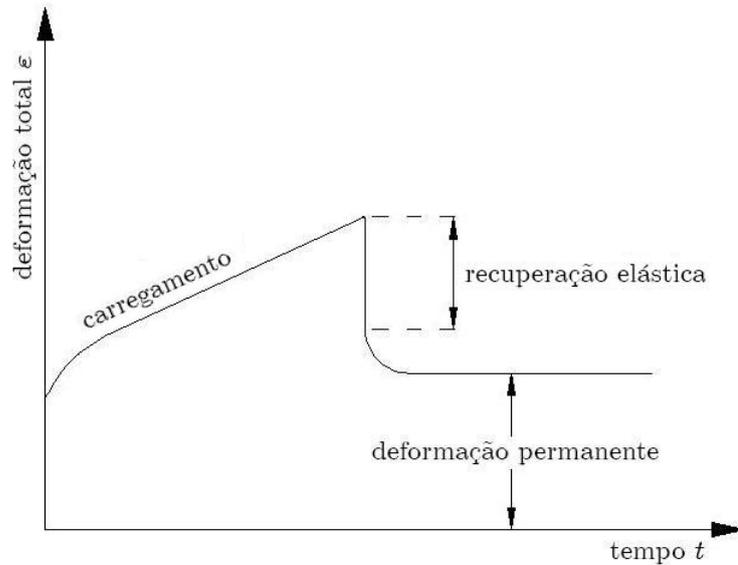


Figura 4.10: Efeito do descarregamento na fluência.

os quais descrevem o fenômeno de recuperação da fluência.

Note que estes ensaios acima descritos são monotônicos, i.e., o carregamento é não crescente ou não decrescente. Carregamentos não monotônicos, tais como carregamentos cíclicos, proporcionais ou não, são mais complexos de se modelar como será visto nas próximas seções.

### 4.1.2 Relações Constitutivas Uniaxiais Propostas

Diferentes relações constitutivas foram propostas para descrever as curvas padrão de fluência. Aqui, por simplicidade, se restringe apenas à descrição da fluência primária e secundária, ignorando a fase terciária da fluência.

A primeira etapa comum em quase todas as abordagens consiste na decomposição da deformação em uma parte elástica,  $\epsilon^e$ , e em uma parte inelástica,  $\epsilon^c$ , i.e.,

$$\epsilon = \epsilon^e + \epsilon^c. \quad (4.1)$$

Em um ensaio de fluência, em que é aplicada uma tensão constante, a deformação inelástica,  $\epsilon^c$ , dita de fluência, pode ser expressa como uma função da tensão  $\sigma$ , do tempo  $t$  e da temperatura  $T$ , como segue

$$\epsilon^c = f(\sigma, t, T), \quad (4.2)$$

a qual é geralmente admitida como sendo separável, i.e.

$$\epsilon^c = f_1(\sigma) f_2(t) f_3(T). \quad (4.3)$$

Algumas das propostas encontradas na literatura, para descrever o comportamento da fluência secundária, são:

- lei de Norton

$$f_1(\sigma) = B\sigma^n \quad (4.4)$$

em que  $B$  e  $n$  são constantes materiais;

- lei de Prandtl

$$f_1(\sigma) = C \sinh(\alpha\sigma), \quad (4.5)$$

em que  $C$  e  $\alpha$  são constantes materiais;

- lei de Dorn

$$f_1(\sigma) = D_o \exp(\beta\sigma), \quad (4.6)$$

em que  $D_o$  e  $\beta$  são constantes materiais;

- lei de Garafalo

$$f_1(\sigma) = A [\sinh(\gamma\sigma)]^n, \quad (4.7)$$

em que  $A$ ,  $\gamma$  e  $n$  são constantes materiais;

- lei da “Tensão de Atrito”

$$f_1(\sigma) = B [\sigma - \sigma_0]^n, \quad (4.8)$$

em que  $B$ ,  $\sigma_0$  e  $n$  são constantes materiais.

A lei de Garafalo contém as relações de Norton, Prandtl e Dorn como casos especiais e prevê a mudança da inclinação no gráfico da taxa de deformação versus tensão, ilustrada na Fig. 4.5. Porém, a lei de potência de Norton é prevista a partir de argumentos físicos e é particularmente útil na análise de tensões.

As propostas encontradas na literatura para a dependência do tempo são:

- lei de fluência Secundária

$$f_2(t) = t; \quad (4.9)$$

- lei de Bailey

$$f_2(t) = bt^m; \quad (4.10)$$

em que  $b$  e  $m$  são constantes materiais;

- lei de Andrade

$$f_2(t) = \left(1 + bt^{\frac{1}{3}}\right) \exp(kt); \quad (4.11)$$

em que  $b$  e  $k$  são constantes materiais;

- lei de Graham e Walles

$$f_2(t) = \sum_j a_j t^{m_j}; \quad (4.12)$$

em que  $a_j$  e  $m_j$  são constantes materiais.

Para a dependência da temperatura utiliza-se a lei de Arrhenius. Neste caso, a dependência da temperatura é determinada como

$$f_3(T) = A \exp\left(-\frac{\Delta H}{RT}\right), \quad (4.13)$$

sendo  $\Delta H$  a energia de ativação,  $\bar{R}$  a constante universal dos gases,  $T$  a temperatura absoluta e  $A$  uma constante material.

A forma mais simples para a relação acima é dada por

$$\varepsilon^c = C \sigma^n t^m \exp\left(-\frac{\Delta H}{RT}\right), \quad (4.14)$$

e para processos isotérmicos

$$\varepsilon^c = B \sigma^n t^m \quad (4.15)$$

que é muito comum na análise de fluência.

Os modelos anteriores são adequados para descrever o comportamento do material para cargas de tensão constante e representam simplesmente uma tentativa de modelar o comportamento básico das curvas de fluência, ou seja, a fluência primária e secundária.

Para carregamentos com tensões variáveis, emprega-se modelos na forma de taxa de deformação. Neste caso existem basicamente duas classes de modelos:

- Modelos baseados no endurecimento por tempo transcorrido (“*Time hardening*”)

Aqui, para a relação (4.15), considera-se a seguinte equação de evolução para a deformação por fluência

$$\dot{\varepsilon}^c = mB \sigma^n t^{m-1}. \quad (4.16)$$

- Modelos baseados no endurecimento por deformação (“*Strain hardening*”)

A equação acima pode ser escrita de uma forma independente do tempo se for eliminado  $t$  entre (4.15) e (4.16). Note que, de (4.15), pode-se obter

$$t = \left[ \frac{\varepsilon^c}{B \sigma^n} \right]^{\frac{1}{m}} \quad (4.17)$$

assim, substituindo (4.17) em (4.16) obtém-se

$$\dot{\varepsilon}^c = \frac{mB \left(\frac{1}{m}\right) \sigma \left(\frac{n}{m}\right)}{(\varepsilon^c)^{\frac{1-m}{m}}}. \quad (4.18)$$

A escolha da forma de taxa possibilita a modelagem da fase de fluência primária, sendo capaz de descrever o decréscimo da taxa de deformação por fluência; este processo é frequentemente chamado de endurecimento. A relação (4.16) é geralmente chamada de endurecimento por tempo transcorrido já que a fase de endurecimento é parametrizada pela variável tempo. A relação (4.18) é similarmente chamada de modelo de endurecimento por deformação visto que, neste caso, se usa a deformação por fluência como parâmetro de modelagem.

Estes dois resultados são obviamente os mesmos para uma tensão constante. Porém, para condições de carga de tensão variável, particularmente para o caso de carregamentos descontínuos tais como degraus de carga, as respostas obtidas pelas duas classes de modelos são diferentes.

Os modelos baseados na proposta de endurecimento por deformação e endurecimento por tempo transcorrido podem ser comparados, por exemplo, considerando um carregamento na forma de degrau, como ilustrado na Fig. 4.11. Os pontos mostrados na Fig. 4.11 representam dados experimentais típicos demonstrando que a classe de modelos baseada na proposta de endurecimento por deformação é mais adequada para a modelagem da resposta de materiais sob fluência.

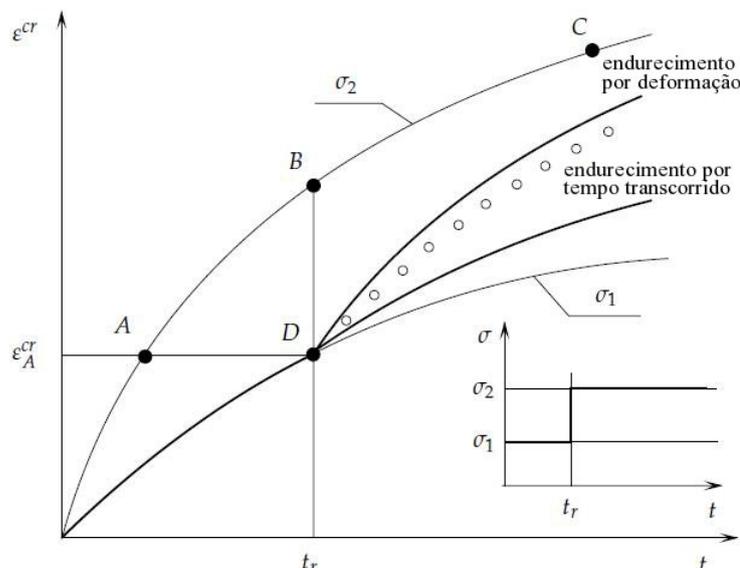


Figura 4.11: Modelos de endurecimento por tempo transcorrido e endurecimento por deformação [31].

Note que na Eq. (4.16) a taxa de deformação em qualquer momento depende do tempo transcorrido enquanto que na Eq. (4.18), a taxa de deformação depende da deformação por fluência acumulada. Isto pode ser compreendido melhor graficamente na Fig. 4.11, a qual ilustra a resposta de fluência uniaxial após o recarregamento, quando o nível de tensão salta de  $\sigma_1$  para  $\sigma_2$  em  $t = t_r$ . Com base no modelo de endurecimento por tempo transcorrido, a taxa de deformação em  $t \geq t_r$  é determinada somente pela tensão  $\sigma_2$  e o tempo  $t_r$ . Assim a curva de fluência para  $t = t_r$  pode ser obtida transladando a curva BC para o ponto D. No caso do modelo de endurecimento por deformação, a taxa de deformação depende da tensão e da deformação acumulada. Logo, a curva de fluência após o salto da tensão pode ser determinada pela translação da curva AC, que representa a curva de fluência para  $\sigma_2$  a partir da deformação por fluência acumulada  $\epsilon_A^{cr}$  no instante  $t_r$ , ao longo do eixo de tempo [31].

Os modelos de endurecimento por tempo transcorrido e endurecimento por deformação fornecem descrições empíricas simples da curva de fluência uniaxial dentro do intervalo da fluência primária e ainda são populares em caracterizar o comportamento do material. A previsão do endurecimento por tempo transcorrido é claramente mais pobre. Apesar da simplicidade, ambos os modelos sofrem de limitações significativas, mesmo se a tensão e a temperatura aplicada são constantes. Esta inadequação pode ser vista ao modelar a resposta de fluência transiente sob mudanças rápidas de carregamento e particularmente no caso de reversões da tensão. Portanto, a representação do comportamento de fluência do material descrito acima não considera toda a deformação por fluência observada, e não representa bem o importante fenômeno de recuperação na descarga. Uma forma mais complexa é requerida para a descarga, carregamento cíclico e outras condições de carregamento não proporcionais.

### 4.1.3 Método das Variáveis Internas

Diferentes propostas foram apresentadas na literatura visando a descrição da resposta de rochas salinas sujeitas a carregamentos não proporcionais. Porém, existe algum consenso de que uma modificação dos modelos acima descritos, através da introdução de

variáveis internas, seja suficiente para descrever tanto a fluência primária quanto a secundária quando sujeitas a carregamentos gerais não proporcionais. Tais formulações têm duas vantagens particulares: Estas são capazes de representar uma ampla gama de comportamento de materiais incluindo plasticidade convencional e fluência, e são particularmente úteis na análise de tensões.

Há uma série de modelos utilizando o conceito de variáveis internas. Mas, a maioria pode ser expressa através de uma teoria unificada. Estas variáveis permitem a introdução da história da deformação na resposta do material.

Dentre as diferentes variáveis internas utilizadas na literatura, para a descrição do comportamento de rochas salinas sujeitas a carregamentos não proporcionais, pode ser citado as variáveis internas:  $\chi$  denominada tensão de repouso, “rest stress” ou “back stress”; e  $R$ , denominada tensão de resistência ou “drag stress”. Desta forma, as equações na forma de taxa podem ser expressas como

$$\dot{\varepsilon}^c = f(\sigma, \chi, R). \quad (4.19)$$

Como condição inicial, i.e., em  $t = 0$ , tem-se:

$$\varepsilon^c = 0$$

$$\chi = 0 \text{ (tensão de repouso)}$$

e

$$R = 0 \text{ (tensão de resistência)}.$$

Neste caso, estes modelos são definidos de maneira que se as tensões de repouso e de resistência não se alterarem no tempo, o material exibirá apenas fluência secundária, quando sujeito a uma carga de tensão constante. Portanto, para modelar tanto a fluência primária quanto a secundária, ambas as variáveis,  $\chi$  e  $R$ , devem evoluir com o tempo, descrevendo assim a fluência primária, e saturar em algum instante, não necessariamente o mesmo, descrevendo deste modo a fluência secundária.

Para descrever a evolução das variáveis internas é necessário a especificação de leis de evolução. Em geral, estas leis de evoluções são governadas por dois mecanismos concorrentes, os quais são:

- (a) O mecanismo de endurecimento;
- (b) O mecanismo de recuperação/amolecimento.

Assim,

$$\dot{\chi} = f_1(\sigma, \chi, R) \dot{\varepsilon}^c - f_2(\sigma, \chi, R) \chi \quad (4.20)$$

e

$$\dot{R} = g_1(\sigma, \chi, R) |\dot{\varepsilon}^c| - g_2(\sigma, \chi, R) (R - R_0). \quad (4.21)$$

O primeiro termo em cada expressão descreve o processo de endurecimento, denotado também como endurecimento dinâmico. O segundo termo descreve o processo de amolecimento, também chamado de recuperação estática, quando não depende da taxa de deformação. Supõe-se que quando na fase de fluência secundária, sob uma carga de tensão constante, i.e.,  $\sigma(t) = \sigma_o$ , os dois mecanismos se cancelam fazendo com que as taxas de evolução das variáveis internas fiquem nulas. Como resultado, obtém-se a fluência em regime estacionário, i.e.,

$$\dot{\varepsilon}^c = f(\sigma_o, \chi, R) = \alpha_o = cte. \quad (4.22)$$

As condições de saturação para  $\chi$  e  $R$  ocorrem quando  $\dot{\chi} = 0$  e  $\dot{R} = 0$  respectivamente e são denotadas por  $\chi^\infty$  e  $R^\infty$ .

Na classe de modelos descritos por (4.19), as funções  $f_1(\cdot)$ ,  $f_2(\cdot)$ ,  $g_1(\cdot)$  e  $g_2(\cdot)$  podem ter diferentes formas, dependendo da teoria considerada. Como exemplo, se pode citar:

(i) Modelo de Bailey-Orowan

Neste modelo, a tensão de repouso é idêntica a zero e as Eqs. (4.19) e (4.21) são descritas por

$$\dot{\varepsilon}^c = \text{sign}(\sigma) f(|\sigma| - R) \quad (4.23)$$

e

$$\dot{R} = h(R) |\dot{\varepsilon}^c| - r(R) \quad (4.24)$$

em que a função  $f$  é definida como

$$f \geq 0, \text{ para } |\sigma| = R \quad (4.25)$$

e

$$f = 0, \text{ para } |\sigma| < R. \quad (4.26)$$

As funções  $h(R)$  e  $r(R)$  são dadas por

$$r(R) = k_1 |R|^{n-m} \quad (4.27)$$

e

$$\frac{1}{h(R)} = k_2 |R|^m. \quad (4.28)$$

Este modelo, na condição de fluência estacionária, reproduz a lei de potência de Norton.

(ii) Modelo de Hart

Neste caso, uma nova variável interna é introduzida,  $\sigma^*$ , a dureza, no lugar da tensão de resistência. As Eqs. (4.19) e (4.21) tornam-se

$$\dot{\varepsilon}^c = c_1 (\sigma - \alpha)^m \quad (4.29)$$

e

$$\dot{\alpha} = c_2 [\dot{\varepsilon}^c - f_2(\alpha, \sigma^*) \alpha] \quad (4.30)$$

sendo

$$f_2(\alpha, \sigma^*) = \frac{\dot{\varepsilon}^*}{\alpha} \left[ \ln \left( \frac{\sigma^*}{\alpha} \right) \right]^{-\frac{1}{\lambda}} \quad (4.31)$$

e

$$\dot{\varepsilon}^* = c_3 (\sigma^*)^n \exp \left( -\frac{\Delta H}{RT} \right). \quad (4.32)$$

A equação de evolução para  $\sigma^*$  é dada por

$$\dot{\sigma}^* = f_2(\chi, \sigma^*) \chi \sigma^* \Gamma(\chi, \sigma^*) \quad (4.33)$$

em que a função,  $\Gamma(\chi, \sigma^*)$ , possui diferentes formas para diferentes materiais. Este modelo requer pelo menos seis constantes materiais  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $m$ ,  $n$ ,  $\lambda$ , e  $c_3$ .

Portanto, a abordagem comum na descrição dos efeitos de fluência transiente, sob carregamentos complexos, é a introdução de variáveis internas e equações de evolução adequadas (as chamadas regras de endurecimento). As variáveis internas de valor escalar, tais como a tensão de resistência,  $R$ , são aplicadas para caracterizar o endurecimento isotrópico e processos de envelhecimento.

Vários efeitos “não clássicos” observados em ensaios sob carregamento não proporcional têm motivado a utilização de variáveis de valor tensorial, tais como a tensão de repouso,  $\chi$  (caso multiaxial). Dentre estes efeitos é possível incluir o “endurecimento cinemático”. Nos mecanismos de fluência o “endurecimento cinemático” foi introduzido por Malinin e Khadjinsky <sup>[31]</sup>, os quais consideraram a decomposição aditiva do tensor tensão, sob carregamentos multiaxiais, na forma:

$$\sigma = \bar{\sigma} + \chi. \quad (4.34)$$

Na visão de Malinin e Khadjinsky, a tensão  $\bar{\sigma}$  representa a parte ativa ou efetiva do tensor tensão, responsável pelo processo de deformação por fluência, e  $\chi$  denota a parte adicional ou de translação do tensor tensão representando a parte inativa do tensor tensão.

## 4.2 Modelagem do Comportamento de Rochas Salinas

O comportamento das rochas salinas é bastante similar ao de muitos outros materiais policristalinos. Isto representa um grande grupo de cristais iônicos com estrutura das rochas salinas conhecidos como halogenetos alcalinos, que também incluem LiF (fluoreto de lítio), KCl (cloreto de potássio), AgCl (cloreto de prata). As rochas salinas, assim como muitos outros geomateriais, exibem deformação retardada quando submetidas a carregamentos sustentados. De fato, os efeitos do tempo são provavelmente mais pronunciados em rochas salinas do que em todas as outras rochas de baixa porosidade. Por isso, estes efeitos não podem ser desconsiderados nos modelos constitutivos utilizados na maioria dos cálculos práticos <sup>[36]</sup>.

O comportamento mecânico de uma rocha salina é dominado por processos de deformação inelástica, pelo menos em um estado virgem, pois seu limite elástico é geralmente muito baixo, mesmo a temperatura ambiente. Quando carregada sob compressão uniaxial ou triaxial, exibe uma resposta mais dúctil que a maioria das outras rochas. Neste contexto, tem sido observado, tanto em laboratório quanto em campo, que uma tensão confinante suficientemente alta combinada com uma tensão diferencial menor que sua resistência máxima resulta em uma resposta dúctil sem a ocorrência de microfissuramento <sup>[2]</sup>. No regime dúctil, a deformação inelástica é isovolumétrica e decorre da geração e do movimento de discordâncias levando ao endurecimento do material. Assim, o comportamento dúctil das rochas salinas é bastante similar ao de vários metais para os quais os mecanismos de deformação envolvam deslizamento de discordâncias, escorregamento transversal de discordâncias e escalagem de discordâncias. Não é surpresa, portanto, que no contexto do modelamento constitutivo baseado em variáveis internas, utilizado para metais, se possam obter bons resultados para o fluxo inelástico dúctil de rochas de sal <sup>[36]</sup>.

Observações experimentais indicam que as rochas salinas tem uma resistência ao escoamento muito baixa ( $\sigma_E < 1$  MPa) e uma tendência apreciável ao endurecimento. Em nível microscópico, o endurecimento durante a deformação é devido ao aumento do número de discordâncias e ao desenvolvimento de interações entre elas assim como com vários

obstáculos microestruturais. As observações experimentais têm também demonstrado uma sensibilidade da resposta do material a sua história mecânica [2].

Durante um ensaio com taxa de deformação constante, a curva tensão-deformação é não linear e o módulo de endurecimento,  $h$ ,  $h = \frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon^c}$ , dado pela inclinação da curva tensão-deformação inelástica, diminui com o crescimento da deformação. Eventualmente uma tensão de saturação  $\sigma^\infty$  é atingida quando  $h$  tende para zero, na condição de fluência estacionária. Esta tensão de saturação depende sistematicamente da taxa de deformação, mas pode ser considerada independente da história do carregamento, pois efeitos de memória têm pouca ou nenhuma influência sobre o fluxo estacionário [36].

Em nível microestrutural, os processos de endurecimento e recuperação ocorrem simultaneamente e dependem da história do carregamento termomecânico. A recuperação é considerada dinâmica quando induzida diretamente pela energia de deformação e estática quando induzida pelo tempo ou ativação térmica. O fenômeno de recuperação neutraliza o endurecimento e leva progressivamente a microestrutura a retornar a um estado virgem, equivalente ao recozido ou não temperado. Este fenômeno tende a reduzir a resistência de fluxo em um ensaio com taxa de deformação constante e aumentar a taxa de deformação durante um ensaio de fluência. Estas características são a fonte de efeitos de memória que tendem a se dissipar ao longo do tempo. Os efeitos de memória desaparecem quando um equilíbrio dinâmico é estabelecido entre os processos de endurecimento e recuperação, ou seja, quando um estado estacionário é alcançado [36].

Nesta dissertação será utilizado o modelo proposto por Yahya O.M.L, Aubertin M, e Julien M.R. [36], o qual é capaz de descrever o comportamento do fluxo inelástico de rochas salinas tanto em curtos quanto em longos períodos de tempo sob uma variedade de carregamentos, incluindo: taxa de deformação constante com descarregamento, carregamento reverso; taxa constante de tensão; tensão constante com saltos, simulando carregamentos em degrau entre outros. Como contribuição desta dissertação, será proposto e implementado um algoritmo implícito para a análise do comportamento de rochas salinas utilizando o modelo proposto por Yahya *et al.* [36].

### 4.2.1 Modelo Unificado

O modelo com variáveis internas empregado nesta dissertação, proposto por Yahya *et al.* [36], é um modelo desenvolvido para o comportamento das rochas salinas no contexto da viscoplasticidade. O modelo viscoplástico apresentado depende da história da taxa de deformação e utiliza quatro tipos de variáveis internas para descrever o endurecimento misto, cinemático e isotrópico, as quais são: uma tensão de repouso ou “back stress”,  $\chi_s$ , para descrever a resposta em curto prazo, uma tensão de repouso ou “back stress”,  $\chi_l$ , para descrever a resposta em longo prazo, uma tensão de resistência ao escoamento isotrópico,  $R$ , e uma tensão de resistência escalar de normalização ou “drag stress”,  $K$ . Considera-se também que durante o fluxo inelástico transiente, as variáveis internas evoluem e alcançam a saturação antes ou no regime estacionário, quando então as variáveis internas tornam-se constantes.

As variáveis  $R$  e  $K$  são responsáveis por descrever o endurecimento isotrópico enquanto que as variáveis  $\chi_s$  e  $\chi_l$  são responsáveis por descrever o endurecimento cinemático, incorporando um fluxo anisotrópico induzido de deformações inelásticas. Cada uma das quatro variáveis internas evolui de acordo com expressões fenomenológicas competitivas para o endurecimento por deformação, recuperação dinâmica induzida por deformação (“*strain induced dynamic recovery*”) e recuperação estática induzida por tempo/termicamente ati-

vada.

O modelo a ser utilizado incorpora os fenômenos de endurecimento e recuperação verificados experimentalmente na resposta destas rochas sob condições de carregamento gerais, como carregamentos cíclicos e não proporcionais. Aqui, por simplicidade, o processo de deformação é suposto como sendo isotérmico e submetido a pequenos deslocamentos e deformações. Dentro da hipótese de pequenas deformações e deslocamentos, as variáveis de estado na mesoescala são divididas da seguinte forma:

1. Variáveis observáveis:

- $\varepsilon$ : Deformação total;

2. Variáveis internas:

- $\varepsilon^e$ : Parte elástica da deformação;
- $\varepsilon^c$ : Parte viscoplástica da deformação;
- $r$ ,  $k$ ,  $\alpha_s$  e  $\alpha_l$ :  $r$  é a variável dual associada a  $R$ ,  $k$  é a variável dual associada a  $K$ ,  $\alpha_s$  e  $\alpha_l$  são as variáveis duais associadas às tensões de repouso  $\chi_s$  e  $\chi_l$  respectivamente. Estas variáveis estão relacionadas ao comportamento de amolecimento e endurecimento de rochas salinas.

### 4.3 Modelos Gerais de Viscoplasticidade (Sem Superfície de Escoamento)

Os componentes básicos de um modelo geral elasto-viscoplástico para pequenas deformações, sem superfície de escoamento, são:

- Decomposição da deformação elasto-viscoplástica;
- Definição da equação constitutiva elástica;
- Definição da regra de fluxo viscoplástica, definindo a evolução da deformação inelástica;
- Definição das equações de evolução para os multiplicadores viscoplásticos;
- Definição de um conjunto de equações de evolução que leva em consideração a descrição do processo de endurecimento/recuperação sob carregamento arbitrário.

#### 4.3.1 Decomposição Aditiva do Tensor Deformação

Aqui, supõe-se que o tensor deformação é decomposto em uma parte elástica  $\varepsilon^e$  e uma parte viscoplástica  $\varepsilon^c$  como

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^c. \quad (4.35)$$

Os tensores  $\varepsilon^e$  e  $\varepsilon^c$  são conhecidos, respectivamente, como tensores deformação elástico e viscoplástico.

### 4.3.2 O Potencial de Energia Livre e a Lei Elástica

A formulação dos modelos dissipativos envolvendo os PSM (“Pseudo-Standard Materials”), no contexto da termodinâmica dos processos irreversíveis, foi abordado no capítulo 2. Aqui, admite-se que a função de energia livre  $\Psi$  é uma função da deformação total, da deformação viscoplástica e das variáveis internas,  $r$ ,  $k$ ,  $\alpha_s$  e  $\alpha_l$ , i.e.,

$$\Psi = \Psi(\varepsilon, \varepsilon^c, r, k, \alpha_s^D, \alpha_l^D) \quad (4.36)$$

em que  $\alpha_s^D$  e  $\alpha_l^D$  representam a parte deviatórica dos tensores deformação (“back strain tensors”)  $\alpha_s$  e  $\alpha_l$  respectivamente.

Considera-se, adicionalmente, que a energia livre é decomposta como a soma de uma contribuição elástica  $\Psi^e(\varepsilon^e)$  e de uma contribuição viscoplástica  $\Psi^c(r, k, \alpha_s^D, \alpha_l^D)$ , como

$$\begin{aligned} \Psi(\varepsilon, \varepsilon^c, r, k, \alpha_s^D, \alpha_l^D) &= \Psi^e(\varepsilon - \varepsilon^c) + \Psi^c(r, k, \alpha_s^D, \alpha_l^D) \\ &= \Psi^e(\varepsilon^e) + \Psi^c(r, k, \alpha_s^D, \alpha_l^D). \end{aligned} \quad (4.37)$$

Substituindo a expressão acima na desigualdade de Clausius-Duhem (3.120), restrita à processos isotérmicos, obtém-se

$$\left(\sigma - \rho \frac{\partial \Psi^e}{\partial \varepsilon^e}\right) \cdot \dot{\varepsilon}^e + \sigma \cdot \dot{\varepsilon}^c - \rho \frac{\partial \Psi^c}{\partial r} \dot{r} - \rho \frac{\partial \Psi^c}{\partial k} \dot{k} - \rho \frac{\partial \Psi^c}{\partial \alpha_s^D} \cdot \dot{\alpha}_s^D - \rho \frac{\partial \Psi^c}{\partial \alpha_l^D} \cdot \dot{\alpha}_l^D \geq 0. \quad (4.38)$$

A partir da desigualdade acima, admitindo uma independência de  $\dot{\varepsilon}^e$  com relação a  $\dot{\varepsilon}^c$  e  $(\dot{r}, \dot{k}, \dot{\alpha}_s^D, \dot{\alpha}_l^D)$ , chega-se à

$$\sigma = \rho \frac{\partial \Psi^e}{\partial \varepsilon^e}. \quad (4.39)$$

Considera-se acima que existe uma região em que o material se deforma apenas elasticamente, mas que a tensão limite de escoamento seja muito baixa. De fato, para o sal  $\sigma_E < 1$  MPa. Desta forma, supõe-se que a relação constitutiva (4.39) seja válida e que o modelo viscoplástico seja aproximado como sendo descrito por uma formulação sem critério de escoamento.

Definindo

$$R = \rho \frac{\partial \Psi^c}{\partial r} \quad (4.40a)$$

$$K = \rho \frac{\partial \Psi^c}{\partial k} \quad (4.40b)$$

$$\chi_s^D = \rho \frac{\partial \Psi^c}{\partial \alpha_s^D} \quad (4.40c)$$

e

$$\chi_l^D = \rho \frac{\partial \Psi^c}{\partial \alpha_l^D}, \quad (4.40d)$$

pode-se reescrever a desigualdade de Clausius-Duhem como

$$\Delta(\sigma, R, K, \chi_s^D, \chi_l^D; \dot{\varepsilon}^c, \dot{r}, \dot{k}, \dot{\alpha}_s^D, \dot{\alpha}_l^D) = \sigma \cdot \dot{\varepsilon}^c - R \dot{r} - K \dot{k} - \chi_s^D \cdot \dot{\alpha}_s^D - \chi_l^D \cdot \dot{\alpha}_l^D \geq 0, \quad (4.41)$$

em que  $\Delta(\cdot)$  representa a dissipação do processo.

Neste ponto, é proposta a seguinte expressão particular para a densidade do potencial de energia livre

$$\rho \Psi = \rho \Psi^e(\varepsilon^e) + \rho \Psi^c(r, k, \alpha_s^D, \alpha_l^D) \quad (4.42)$$

na qual

$$\rho\Psi^e(\boldsymbol{\varepsilon}^e) = \frac{1}{2}\mathbb{D}\boldsymbol{\varepsilon}^e \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^e \quad (4.43)$$

em que

$$\mathbb{D} = 2G\mathbb{I} + \bar{\lambda}(\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}) \quad (4.44a)$$

$$\mathbb{I}_{ijrs} = \frac{1}{2}(\delta_{ir}\delta_{js} + \delta_{is}\delta_{jr}) \quad (4.44b)$$

$$(\mathbf{I} \otimes \mathbf{I})_{ijrs} = \delta_{ij}\delta_{rs} \quad (4.44c)$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (4.44d)$$

e

$$\bar{\lambda} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}. \quad (4.44e)$$

Em (4.44),  $G$  e  $\bar{\lambda}$  são as constantes de Lamé,  $\nu$  é o coeficiente de Poisson e  $E$  o módulo de Young. O potencial viscoplástico  $\Psi^e$  será definido implicitamente mais adiante.

Como consequência, a lei da elasticidade, para este modelo, é dada por

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} = \mathbb{D}\boldsymbol{\varepsilon}^e. \quad (4.45)$$

Considerando, por simplicidade que  $\rho \simeq cte$ , a qual é uma suposição válida para as condições de perfuração e operação de campos de petróleo [16].

Neste ponto, podem ser definidas as seguintes decomposições:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^D + p\mathbf{I} \quad (4.46)$$

sendo

$$p = \frac{1}{3}tr(\boldsymbol{\sigma}) \quad (4.47)$$

e

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e = \boldsymbol{\varepsilon}^{eD} + e_H^e \mathbf{I} \quad (4.48)$$

em que

$$e_H^e = \frac{1}{3}tr(\boldsymbol{\varepsilon}^e) = \frac{1}{3}e_{vol}^e. \quad (4.49)$$

O tensor  $\boldsymbol{\sigma}^D$  representa a parte deviatórica e  $p$  a parte hidrostática do tensor tensão.

A partir da equação constitutiva elástica, deriva-se

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{eD} = \frac{1+\nu}{E}\boldsymbol{\sigma}^D = \frac{\boldsymbol{\sigma}^D}{2G} \quad (4.50)$$

e

$$e_H^e = \frac{(1-2\nu)}{E}p \quad (4.51)$$

em que

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad (4.52)$$

denota o módulo de cisalhamento.

### 4.3.3 Equações de Complementaridade

A caracterização completa de um modelo viscoplástico geral requer a definição das leis de evolução das variáveis internas associadas aos fenômenos dissipativos.

### Regras de Fluxo Derivadas de Um Potencial de Fluxo

Na formulação dos modelos de viscoplasticidade multi-dimensional, muitas vezes é conveniente definir a regra de fluxo e possivelmente a lei de endurecimento em termos de múltiplos potenciais independentes. O ponto de partida da abordagem dos PSM (“Pseudo-Standard Materials”) é postular a existência de múltiplos potenciais independentes, múltiplos multiplicadores e uma regra generalizada de fluxo. Cada potencial é considerado como sendo uma função escalar contínua e convexa com relação à  $(\boldsymbol{\sigma}, R, K, \boldsymbol{\chi}_s^D, \boldsymbol{\chi}_l^D)$  e nula na origem, podendo depender das variáveis internas  $(\boldsymbol{\varepsilon}^e, r, k, \boldsymbol{\alpha}_s^D, \boldsymbol{\alpha}_l^D)$  como parâmetros, da forma

$$\mathcal{F}_i = \mathcal{F}_i(\boldsymbol{\sigma}, R, K, \boldsymbol{\chi}_s^D, \boldsymbol{\chi}_l^D; \boldsymbol{\varepsilon}^e, r, k, \boldsymbol{\alpha}_s^D, \boldsymbol{\alpha}_l^D) \quad (4.53)$$

a partir dos quais determina-se as equações de evolução dadas por

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^c = \sum_{i=1}^h \dot{\lambda}_i \frac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (4.54a)$$

$$\dot{r} = \sum_{i=1}^h \dot{\lambda}_i \frac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial R} \quad (4.54b)$$

$$\dot{k} = \sum_{i=1}^h \dot{\lambda}_i \frac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial K} \quad (4.54c)$$

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}}_s^D = \sum_{i=1}^h \dot{\lambda}_i \frac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial \boldsymbol{\chi}_s^D} \quad (4.54d)$$

e

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}}_l^D = \sum_{i=1}^h \dot{\lambda}_i \frac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial \boldsymbol{\chi}_l^D}. \quad (4.54e)$$

As equações de evolução (4.54) são complementadas pelas relações

$$\dot{\lambda}_i \geq 0 \quad \text{e} \quad \dot{\lambda}_i = \mathfrak{S}_i(\boldsymbol{\sigma}, R, K, \boldsymbol{\chi}_s^D, \boldsymbol{\chi}_l^D). \quad (4.55)$$

Logo, para a completa caracterização do modelo geomecânico é necessário propor adicionalmente equações de evolução para os multiplicadores  $\dot{\lambda}_i$ .

### Descrição Geral de um Modelo Geomecânico Viscoplastico

Um modelo constitutivo elasto-vicoplástico geral, sem superfície de escoamento, restrito a deformações infinitesimais, pode ser resumido na seguinte tabela abaixo:

Tabela 4.1: Modelo constitutivo elasto-viscoplástico para os PSM (Pseudo-Standard Materials).

1. Decomposição aditiva do tensor deformação
$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^c$
2. Definição da função de energia livre
$\Psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^c, r, k, \boldsymbol{\alpha}_s^D, \boldsymbol{\alpha}_l^D) = \Psi^e(\boldsymbol{\varepsilon}^e) + \Psi^c(r, k, \boldsymbol{\alpha}_s^D, \boldsymbol{\alpha}_l^D)$
sendo $r$ , $k$ , $\boldsymbol{\alpha}_s$ e $\boldsymbol{\alpha}_l$ as variáveis internas
3. Derivação das equações de estado para as variáveis duais
$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{D}\boldsymbol{\varepsilon}^e, \quad R = -\rho \frac{\partial \Psi^c}{\partial r}, \quad K = -\rho \frac{\partial \Psi^c}{\partial k}$
$\boldsymbol{\chi}_s^D = -\rho \frac{\partial \Psi^c}{\partial \boldsymbol{\alpha}_s^D} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\chi}_l^D = -\rho \frac{\partial \Psi^c}{\partial \boldsymbol{\alpha}_l^D}$
4. Definição dos múltiplos potenciais independentes
$\mathcal{F}_i = \mathcal{F}_i(\boldsymbol{\sigma}, R, K, \boldsymbol{\chi}_s^D, \boldsymbol{\chi}_l^D), \quad i = 1, h$
5. Derivação das equações de evolução das variáveis internas (hipótese de dissipação normal generalizada)
$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^c = \sum_{i=1}^h \dot{\lambda}_i \frac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad \dot{r} = \sum_{i=1}^h \dot{\lambda}_i \frac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial R}$
$\dot{k} = \sum_{i=1}^h \dot{\lambda}_i \frac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial K}, \quad \dot{\boldsymbol{\alpha}}_s^D = \sum_{i=1}^h \dot{\lambda}_i \frac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial \boldsymbol{\alpha}_s^D}$
e
$\dot{\boldsymbol{\alpha}}_l^D = \sum_{i=1}^h \dot{\lambda}_i \frac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial \boldsymbol{\alpha}_l^D}$
6. Definição das equações de evolução dos multiplicadores
$\dot{\lambda}_i = \mathfrak{S}_i(\boldsymbol{\sigma}, R, K, \boldsymbol{\chi}_s^D, \boldsymbol{\chi}_l^D)$
satisfazendo a condição $\dot{\lambda}_i \geq 0, \quad i = 1, h$ .

#### 4.3.4 Definição da Parte Inelástica da Energia Livre $\Psi^c(r, k, \boldsymbol{\alpha}_s^D, \boldsymbol{\alpha}_l^D)$

Considera-se que  $\rho\Psi^c$  é uma forma quadrática convexa do tipo

$$\rho\Psi^c(r, k, \boldsymbol{\alpha}_s^D, \boldsymbol{\alpha}_l^D) = \frac{1}{2}\varkappa_r r^2 + \frac{1}{2}\varkappa_k k^2 + \frac{1}{2}\varkappa_s \boldsymbol{\alpha}_s^D \cdot \boldsymbol{\alpha}_s^D + \frac{1}{2}\varkappa_l \boldsymbol{\alpha}_l^D \cdot \boldsymbol{\alpha}_l^D \quad (4.56)$$

em que  $\varkappa_r$ ,  $\varkappa_k$ ,  $\varkappa_s$  e  $\varkappa_l$  são constantes positivas, de modo que as equações de estado são dadas por

$$R = -\rho \frac{\partial \Psi^c}{\partial r} = -\varkappa_r r \quad (4.57a)$$

$$K = -\rho \frac{\partial \Psi^c}{\partial k} = -\varkappa_k k \quad (4.57b)$$

$$\boldsymbol{\chi}_s^D = -\rho \frac{\partial \Psi^c}{\partial \boldsymbol{\alpha}_s^D} = -\varkappa_s \boldsymbol{\alpha}_s^D \quad (4.57c)$$

e

$$\boldsymbol{\chi}_l^D = -\rho \frac{\partial \Psi^c}{\partial \boldsymbol{\alpha}_l^D} = -\varkappa_l \boldsymbol{\alpha}_l^D. \quad (4.57d)$$

### 4.3.5 Definição dos Múltiplos Potenciais e Multiplicadores

Nesta seção supõem-se, que o potencial  $\mathcal{F}_1$  é dado por

$$\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_1(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\chi}_s^D, \boldsymbol{\chi}_l^D) = q \quad (4.58a)$$

em que

$$q = \left[ \frac{3}{2} (\boldsymbol{\sigma}^D - \boldsymbol{\chi}^D) \cdot (\boldsymbol{\sigma}^D - \boldsymbol{\chi}^D) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.58b)$$

com

$$\boldsymbol{\chi}^D = \boldsymbol{\chi}_s^D + \boldsymbol{\chi}_l^D, \quad (4.58c)$$

e que os potenciais  $\mathcal{F}_i = \mathcal{F}_i(\boldsymbol{\sigma}, R, K, \boldsymbol{\chi}_s^D, \boldsymbol{\chi}_l^D)$ , para  $i = 2, h$ , ( $h = 9$ ) são da forma

para definição da evolução da variável  $\boldsymbol{\chi}_s^D$

$$\mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_2(\boldsymbol{\sigma}, R, K, \boldsymbol{\chi}_s^D, \boldsymbol{\chi}_l^D) \quad \text{e} \quad \mathcal{F}_6 = \mathcal{F}_6(\boldsymbol{\sigma}, R, K, \boldsymbol{\chi}_s^D, \boldsymbol{\chi}_l^D) \quad (4.59a)$$

para definição da evolução da variável  $\boldsymbol{\chi}_l^D$

$$\mathcal{F}_3 = \mathcal{F}_3(\boldsymbol{\sigma}, R, K, \boldsymbol{\chi}_s^D, \boldsymbol{\chi}_l^D) \quad \text{e} \quad \mathcal{F}_7 = \mathcal{F}_7(\boldsymbol{\sigma}, R, K, \boldsymbol{\chi}_s^D, \boldsymbol{\chi}_l^D) \quad (4.59b)$$

para definição da evolução da variável  $R$

$$\mathcal{F}_4 = \mathcal{F}_4(\boldsymbol{\sigma}, R, K, \boldsymbol{\chi}_s^D, \boldsymbol{\chi}_l^D) \quad \text{e} \quad \mathcal{F}_8 = \mathcal{F}_8(\boldsymbol{\sigma}, R, K, \boldsymbol{\chi}_s^D, \boldsymbol{\chi}_l^D) \quad (4.59c)$$

para definição da evolução da variável  $K$

$$\mathcal{F}_5 = \mathcal{F}_5(\boldsymbol{\sigma}, R, K, \boldsymbol{\chi}_s^D, \boldsymbol{\chi}_l^D) \quad \text{e} \quad \mathcal{F}_9 = \mathcal{F}_9(\boldsymbol{\sigma}, R, K, \boldsymbol{\chi}_s^D, \boldsymbol{\chi}_l^D) \quad (4.59d)$$

e especificados de forma implícita através da proposição de equações de evolução para as variáveis internas  $(R, K, \boldsymbol{\chi}_s^D, \boldsymbol{\chi}_l^D)$  e que os multiplicadores são da forma

para definição da evolução da variável  $\boldsymbol{\chi}_s^D$

$$\dot{\lambda}_2 = \dot{\lambda} \quad \text{e} \quad \dot{\lambda}_6 = 1 \quad (4.60a)$$

para definição da evolução da variável  $\boldsymbol{\chi}_l^D$

$$\dot{\lambda}_3 = \dot{\lambda} \quad \text{e} \quad \dot{\lambda}_7 = 1 \quad (4.60b)$$

para definição da evolução da variável  $R$

$$\dot{\lambda}_4 = \dot{\lambda} \quad \text{e} \quad \dot{\lambda}_8 = 1 \quad (4.60c)$$

para definição da evolução da variável  $K$

$$\dot{\lambda}_5 = \dot{\lambda} \quad \text{e} \quad \dot{\lambda}_9 = 1 \quad (4.60d)$$

em que  $\dot{\lambda}$  é definido como

$$\dot{\lambda} = \dot{\lambda}_1. \quad (4.60e)$$

Como resultado, são obtidas as seguintes equações de evolução

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^c = \sum_{i=1}^5 \dot{\lambda}_i \frac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \sum_{i=6}^9 \frac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (4.61a)$$

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}}_s^D = \sum_{i=1}^5 \dot{\lambda}_i \frac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial \boldsymbol{\chi}_s^D} + \sum_{i=6}^9 \frac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial \boldsymbol{\chi}_s^D} \quad (4.61b)$$

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}}_l^D = \sum_{i=1}^5 \dot{\lambda}_i \frac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial \boldsymbol{\chi}_l^D} + \sum_{i=6}^9 \frac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial \boldsymbol{\chi}_l^D} \quad (4.61c)$$

$$\dot{r} = \sum_{i=1}^5 \dot{\lambda}_i \frac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial R} + \sum_{i=6}^9 \frac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial R} \quad (4.61d)$$

e

$$\dot{k} = \sum_{i=1}^5 \dot{\lambda}_i \frac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial K} + \sum_{i=6}^9 \frac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial K} \quad (4.61e)$$

Substituindo (4.58a) em (4.54) obtém-se

$$\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{N} = \frac{3}{2} \frac{(\boldsymbol{\sigma}^D - \boldsymbol{\chi}^D)}{q} \quad (4.62a)$$

e

$$\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial \boldsymbol{\chi}_s^D} = \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial \boldsymbol{\chi}_l^D} = -\mathbf{N}. \quad (4.62b)$$

A evolução do multiplicador viscoplástico,  $\dot{\lambda}$ , será obtida através da equação de evolução de uma medida de deformação viscoplástica efetiva. Isto se deve ao fato da deformação viscoplástica efetiva ser uma variável física tornando o processo de proposição de uma equação de evolução mais simples e intuitiva.

Visando definir a deformação viscoplástica efetiva,  $e_{ef}^c$ , é introduzida uma medida de tensão efetiva,  $\sigma_{ef}$ , a qual neste trabalho é dada por

$$\sigma_{ef} = q. \quad (4.63)$$

Seguindo as idéias de Goldberg *et al* [20], a determinação da taxa de deformação inelástica efetiva,  $\dot{e}_{ef}^c$ , é feita pela aplicação do princípio da equivalência da taxa de trabalho inelástico. A taxa de trabalho inelástico efetivo,  $\dot{\omega}^c$ , é

$$\dot{\omega}^c = (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\chi}) \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^c = \sigma_{ef} \dot{e}_{ef}^c. \quad (4.64)$$

Consequentemente

$$\dot{\lambda} \sigma_{ef} = \sigma_{ef} \dot{e}_{ef}^c \quad (4.65)$$

a qual permite concluir que

$$\dot{\lambda} = \dot{e}_{ef}^c. \quad (4.66)$$

Para que o modelo empírico proposto seja consistente com a classe PSM (“Pseudo-Standard Materials”), supõe-se que,

$$\frac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = 0, \text{ para } i = 2, 9 \quad (4.67)$$

o que acarreta em

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^c = \dot{\lambda} \mathbf{N}. \quad (4.68)$$

Desta forma,

$$\dot{\lambda} = \dot{e}_{ef}^c = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^c \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^c} = \sqrt{\frac{2}{3}} \|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^c\| \quad (4.69a)$$

em que

$$\|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^c\| = \{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^c \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^c\}^{\frac{1}{2}}. \quad (4.69b)$$

### 4.3.6 Leis de Evolução

Nos modelos de endurecimento por deformação a serem apresentados, a evolução das variáveis internas,  $R$ ,  $K$ ,  $\boldsymbol{\chi}_s$  e  $\boldsymbol{\chi}_l$ , é dada em termos da evolução da deformação viscoplástica efetiva,  $e_{ef}^c$ , a qual é definida por uma equação constitutiva, na forma de taxa, do tipo

$$\dot{e}_{ef}^c = \dot{\lambda} = \mathfrak{S}(\boldsymbol{\sigma}, R, K, \boldsymbol{\chi}_s^D, \boldsymbol{\chi}_l^D), \quad (4.70a)$$

em que

$$\dot{\lambda} \geq 0. \quad (4.70b)$$

Para a simplificação das equações de evolução a serem propostas, é introduzida uma variável auxiliar  $\boldsymbol{\chi}$ , a qual é definida como

$$\boldsymbol{\chi} = \boldsymbol{\chi}_s + \boldsymbol{\chi}_l, \quad (4.71)$$

em que  $\boldsymbol{\chi}_s$  é o tensor tensão de “repouso” de curta duração e  $\boldsymbol{\chi}_l$  é o tensor tensão de “repouso” de longa duração. Desta forma, a parte ativa ou efetiva do tensor tensão,  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ , pode ser expressa como

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\chi}. \quad (4.72)$$

Considera-se que  $\boldsymbol{\chi}_s$ , cresce muito mais rápido e satura muito mais cedo que sua contraparte  $\boldsymbol{\chi}_l$ .

Fenomenologicamente, é suposto que cada variável interna evolui através de processos competitivos do tipo que se segue abaixo, determinado por uma equação diferencial genérica para  $Y \in (\boldsymbol{\chi}_s^D, \boldsymbol{\chi}_l^D, R, K)$  da forma,

$$\dot{Y} = f_h - f_d - f_s \quad (4.73)$$

em que  $f_h$  é o termo responsável pelos mecanismos de endurecimento (aumento da resistência),  $f_d$  é o termo de recuperação dinâmica e  $f_s$  é o termo de recuperação estática. Os termos  $f_d$  e  $f_s$  são responsáveis pelos mecanismos de amolecimento (recuperação).

Os termos de endurecimento e recuperação dinâmica ambos evoluem com a deformação inelástica. O termo de recuperação estática, por outro lado, evolui com o tempo e o valor acumulado de  $Y$  (associado à energia de ativação). A forma funcional de cada termo, em particular, das equações de evolução depende do tipo das variáveis internas e do material a ser considerado.

Neste ponto, é considerado que as equações de evolução das tensões de repouso, de curta e longa duração,  $\chi_s^D$  e  $\chi_l^D$ , sejam dadas por:

$$\dot{\chi}_s^D = a_{1s} \left\{ \frac{2}{3} \dot{\epsilon}^c - \chi_s^D \frac{\dot{\epsilon}_{ef}^c}{\chi_{sef}^\infty} \right\} - \frac{a_{2s}}{\chi_{sef}} \left\langle \frac{\chi_{sef} - \chi_{sef}^\infty}{C} \right\rangle^{\bar{q}} \chi_s^D \quad (4.74a)$$

e

$$\dot{\chi}_l^D = a_{1l} \left\{ \frac{2}{3} \dot{\epsilon}^c - \chi_l^D \frac{\dot{\epsilon}_{ef}^c}{\chi_{lef}^\infty} \right\} - \frac{a_{2l}}{\chi_{lef}} \left\langle \frac{\chi_{lef} - \chi_{lef}^\infty}{C} \right\rangle^{\bar{q}} \chi_l^D \quad (4.74b)$$

com

$$\chi_{sef} = \left[ \frac{3}{2} \chi_s^D \cdot \chi_s^D \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.74c)$$

$$\chi_{lef} = \left[ \frac{3}{2} \chi_l^D \cdot \chi_l^D \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.74d)$$

em que  $a_{1s}$ ,  $a_{2s}$ ,  $a_{1l}$ ,  $a_{2l}$ ,  $\bar{q}$  e  $C$  são constantes materiais.

Considera-se também que as equações de evolução para a tensão de resistência ao escoamento isotrópico,  $R$ , e tensão de resistência escalar de normalização,  $K$ , sejam dadas por

$$\dot{R} = a_3 \left( 1 - \frac{R}{R^\infty} \right) \dot{\epsilon}_{ef}^c - a_4 \left\langle \frac{R - R^\infty}{C} \right\rangle^p \quad (4.74e)$$

e

$$\dot{K} = a_5 \left( 1 - \frac{K}{K^\infty} \right) \dot{\epsilon}_{ef}^c - a_6 \left\langle \frac{K - K^\infty}{C} \right\rangle^u \quad (4.74f)$$

em que  $a_3$ ,  $a_4$ ,  $a_5$ ,  $a_6$ ,  $p$  e  $u$  são constantes materiais.

Nas equações acima,  $\chi_{sef}^\infty$  e  $\chi_{lef}^\infty$  representam os valores de saturação para os valores efetivos das tensões de repouso de curta e longa duração,  $\chi_{sef}$  e  $\chi_{lef}$ .  $R^\infty$  e  $K^\infty$  representam os valores de saturação das variáveis internas  $R$  e  $K$ . Estes valores de saturação também são utilizados para representar limites críticos, tais como valores de ativação a serem ultrapassados pelas variáveis de estado para a ocorrência do processo de recuperação estática.

A equação de evolução da deformação viscoplástica efetiva é considerada como sendo

$$\dot{\epsilon}_{ef}^c = \mathfrak{S}(\sigma, R, K, \chi_s^D, \chi_l^D), \quad (4.75a)$$

$$= a \left\langle \frac{q - R}{K} \right\rangle^N, \quad (4.75b)$$

em que  $a$  e  $N$  são constantes materiais, e  $\langle \cdot \rangle$  são os parênteses de MacCauley, definidos como

$$\langle x \rangle = \frac{1}{2} (x + |x|), \quad (4.76)$$

representando a parte positiva de  $x$ .

Como foi referido, o fluxo estacionário é considerado independente de eventos mecânicos antecedentes ou de efeitos de memória. Portanto, pode ser formulado utilizando somente variáveis externas. Foi observado, Yahya *et al* [31], que quando o fluxo estacionário é controlado por mecanismos de escalagem de discordâncias, deslizamento de discordâncias e/ou escorregamento transversal de discordâncias, a relação entre  $\dot{\epsilon}_{ef}^c$  e  $\sigma_{vm}^\infty$  é bem representada pela seguinte relação funcional:

$$\dot{\epsilon}_{ef}^c = \dot{\epsilon}_o^c \left[ \sinh \left( \frac{\sigma_{vm}^\infty}{\sigma_o} \right) \right]^n, \quad (4.77a)$$

ou, por inversão,

$$\sigma_{vm}^\infty = \sigma_o \sinh^{-1} \left[ \left( \frac{\dot{\epsilon}_{ef}^c}{\dot{\epsilon}_o^c} \right)^{\frac{1}{n}} \right], \quad (4.77b)$$

em que  $\sigma_o$ ,  $\dot{\epsilon}_o^c$  e  $n$  são constantes materiais,  $\sigma_{vm}$  denota a tensão equivalente de von Mises definida como

$$\sigma_{vm} = \left[ \frac{3}{2} \boldsymbol{\sigma}^D \cdot \boldsymbol{\sigma}^D \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (4.78)$$

e  $\sigma_{vm}^\infty$  representa o valor de saturação da tensão equivalente de von Mises para uma dada taxa de deformação viscoplástica efetiva. A validação da relação proposta em (4.77a) foi obtida, por Yahya *et al* [31], utilizando valores experimentais, de amostras de sal de Avery Island sujeitas a ensaios de fluência, à taxa de deformação e temperaturas constantes.

Neste trabalho é considerado que os valores de saturação para os valores efetivos das tensões de repouso de curta e longa duração,  $\chi_{sef}^\infty$  e  $\chi_{lef}^\infty$ , são dados por

$$\chi_{sef}^\infty = b_{os} \left( \frac{\sigma_{vm}^\infty}{\sigma_o} \right)^m, \quad (4.79a)$$

e

$$\chi_{lef}^\infty = b_{ol} \left( \frac{\sigma_{vm}^\infty}{\sigma_o} \right)^m, \quad (4.79b)$$

em que  $b_{os}$ ,  $b_{ol}$  e  $m$  são constantes materiais.

No caso da variável interna  $R$  (“drag stress”), considera-se que o valor de saturação,  $R^\infty$ , é dado por

$$R^\infty = R_o \left( \frac{\sigma_{vm}^\infty}{\sigma_o} \right)^m, \quad (4.79c)$$

em que  $R_o$  é uma constante material.

Adicionalmente, para a variável interna  $K$ , considera-se que

$$K^\infty = \frac{\langle \sigma_{vm}^\infty - (\chi^\infty + R^\infty) \rangle}{\left( \frac{\dot{\epsilon}_{ef}^c}{a} \right)^{\frac{1}{N}}}, \quad (4.79d)$$

em que  $\langle (\cdot) \rangle$  representa a parte positiva de  $(\cdot)$  e  $\chi^\infty = \chi_{sef}^\infty + \chi_{lef}^\infty$ .

Note que os valores de saturação são determinados em experimentos realizados à taxas de deformação efetivas constantes. Estes valores são utilizados para representar limites abaixo dos quais não ocorre a recuperação estática. Como no caso de carregamentos multiaxiais arbitrários a taxa de deformação efetiva muda com o tempo, o mesmo ocorre com os valores de saturação, denotados por  $\sigma_{vm}^\infty$ ,  $\chi_{sef}^\infty$ ,  $\chi_{lef}^\infty$ ,  $K^\infty$  e  $R^\infty$ .

## 4.4 Modelo Viscoplastico para o Comportamento Dúctil de Rochas Salinas

Neste ponto, se podem resumir na Tab. 4.2, as equações do modelo apresentado para a análise da resposta dúctil de rochas salinas.

Tabela 4.2: Modelo constitutivo para o comportamento dúctil de rochas salinas.

<p>(i) Resposta tensão-deformação elástica</p> $\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{D}\boldsymbol{\varepsilon}^e \quad \text{com} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^c$ <p>(ii) Regra de fluxo</p> $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^c = \dot{\lambda}\mathbf{N}, \quad \text{com} \quad \mathbf{N} = \frac{3}{2} \frac{(\boldsymbol{\sigma}^D - \boldsymbol{\chi}^D)}{q},$ <p>sendo <math>q = \sqrt{\frac{3}{2} (\boldsymbol{\sigma}^D - \boldsymbol{\chi}^D) \cdot (\boldsymbol{\sigma}^D - \boldsymbol{\chi}^D)}</math> e <math>\dot{\lambda} = \dot{\varepsilon}_{ef}^c = a \left\langle \frac{q-R}{K} \right\rangle^N</math></p> <p>(iii) Leis de evolução do endurecimento</p> $\dot{\boldsymbol{\chi}}_s^D = a_{1s} \left\{ \frac{2}{3} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^c - \boldsymbol{\chi}_s^D \frac{\dot{\varepsilon}_{ef}^c}{\chi_{s_{ef}}^\infty} \right\} - \frac{a_{2s}}{\chi_{s_{ef}}} \left\langle \frac{\chi_{s_{ef}} - \chi_{s_{ef}}^\infty}{C} \right\rangle^{\bar{q}} \boldsymbol{\chi}_s^D,$ $\dot{\boldsymbol{\chi}}_l^D = a_{1l} \left\{ \frac{2}{3} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^c - \boldsymbol{\chi}_l^D \frac{\dot{\varepsilon}_{ef}^c}{\chi_{l_{ef}}^\infty} \right\} - \frac{a_{2l}}{\chi_{l_{ef}}} \left\langle \frac{\chi_{l_{ef}} - \chi_{l_{ef}}^\infty}{C} \right\rangle^{\bar{q}} \boldsymbol{\chi}_l^D,$ <p>sendo <math>\chi_{l_{ef}} = \left[ \frac{3}{2} \boldsymbol{\chi}_l^D \cdot \boldsymbol{\chi}_l^D \right]^{\frac{1}{2}}</math> e <math>\chi_{s_{ef}} = \left[ \frac{3}{2} \boldsymbol{\chi}_s^D \cdot \boldsymbol{\chi}_s^D \right]^{\frac{1}{2}}</math></p> $\dot{R} = a_3 \left( 1 - \frac{R}{R^\infty} \right) \dot{\varepsilon}_{ef}^c - a_4 \left\langle \frac{R-R^\infty}{C} \right\rangle^p$ <p>e</p> $\dot{K} = a_5 \left( 1 - \frac{K}{K^\infty} \right) \dot{\varepsilon}_{ef}^c - a_6 \left\langle \frac{K-K^\infty}{C} \right\rangle^u$ <p>em que os valores de saturação/limites <math>\left\{ \sigma_{vm}^\infty, \chi_{s_{ef}}^\infty, \chi_{l_{ef}}^\infty, R^\infty, K^\infty \right\}</math> são dados por:</p> $\sigma_{vm}^\infty = \sigma_o \sinh^{-1} \left[ \left( \frac{\dot{\varepsilon}_{ef}^c}{\dot{\varepsilon}_o^c} \right)^{\frac{1}{n}} \right]$ $\chi_{s_{ef}}^\infty = b_{os} \left( \frac{\sigma_{vm}^\infty}{\sigma_o} \right)^m$ $\chi_{l_{ef}}^\infty = b_{ol} \left( \frac{\sigma_{vm}^\infty}{\sigma_o} \right)^m$ $R^\infty = R_o \left( \frac{\sigma_{vm}^\infty}{\sigma_o} \right)^m$ <p>e</p> $K^\infty = \frac{\langle \sigma_{vm}^\infty - (\chi^\infty + R^\infty) \rangle}{\left( \frac{\dot{\varepsilon}_{ef}^c}{a} \right)^{\frac{1}{N}}}$
--

## 4.5 Discretização do Modelo Viscoplastico de Rochas Salinas

Aqui, para a proposição de um algoritmo implícito, considera-se a solução como sendo conhecida no intervalo  $[0, t_n]$  e impõe-se a condição de equilíbrio em  $t_{n+1}$ . Como resultado, tem-se

$$\operatorname{div} [\boldsymbol{\sigma}_{n+1}] + \rho \vec{b}_{n+1} = 0 \quad (4.80)$$

submetidas às condições de contorno

$$\begin{aligned} \vec{u}_{n+1} &= \vec{u}_{n+1} \text{ em } \Gamma_u \\ \text{e} \\ \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \vec{n} &= \vec{t}_{n+1} \text{ em } \Gamma_t. \end{aligned} \quad (4.81)$$

Neste ponto, para a determinação da formulação fraca do problema, observa-se que

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} [\boldsymbol{\sigma}_{n+1}] \cdot \vec{w} \, d\Omega + \int_{\Omega} \rho \vec{b}_{n+1} \cdot \vec{w} \, d\Omega = 0. \quad (4.82)$$

Porém, como  $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^T = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}$  e  $\boldsymbol{\varepsilon}(\vec{w}) = \frac{1}{2} (\nabla \vec{w} + \nabla \vec{w}^T)$ , obtém-se

$$\operatorname{div} [\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^T \vec{w}] = \operatorname{div} [\boldsymbol{\sigma}_{n+1}] \cdot \vec{w} + \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\vec{w}). \quad (4.83)$$

Pela aplicação do teorema da divergência, deriva-se

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \operatorname{div} [\boldsymbol{\sigma}_{n+1} \vec{w}] \, d\Omega &= \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \vec{n} \cdot \vec{w} \, d\Gamma \\ &= \int_{\Gamma_t} \vec{t}_{n+1} \cdot \vec{w} \, d\Gamma. \end{aligned} \quad (4.84)$$

Substituindo (4.83) e (4.84) em (4.82) pode-se finalmente determinar a formulação fraca do problema, a qual é dada por: Determinar  $\vec{u}_{n+1} \in \mathbf{K}$  tal que

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\vec{w}) \, d\Omega = \int_{\Gamma_t} \vec{t}_{n+1} \cdot \vec{w} \, d\Gamma + \int_{\Omega} \rho \vec{b}_{n+1} \cdot \vec{w} \, d\Omega, \quad \forall \vec{w} \in \mathbf{V}_u, \quad (4.85)$$

$\mathbf{K}$  representa o conjunto dos deslocamentos admissíveis e  $\mathbf{V}_u$  o conjunto das variações dos deslocamentos admissíveis.

### 4.5.1 Algoritmo de Decomposição do Operador

Afim de manter a mesma estrutura que a obtida para os modelos viscoplasticos com superfície de escoamento, permitindo o uso de uma estrutura de programa já existente e visando melhorar a taxa de convergência, aplica-se o algoritmo geral de decomposição do operador <sup>[33]</sup>, descrito da seguinte forma:

- Problema do passo elástico

Dado a história da deformação  $\{\boldsymbol{\varepsilon}(t)\} \in [t_n, t_{n+1}]$ , achar  $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e \text{ trial}}$  e  $\boldsymbol{\omega}_{n+1}^{trial}$ , com  $\boldsymbol{\omega}_{n+1}^{trial} \equiv (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{c \text{ trial}}, R_{n+1}^{trial}, K_{n+1}^{trial}, e_{ef_{n+1}}^{c \text{ trial}}, \boldsymbol{\chi}_{s_{n+1}}^{D \text{ trial}}, \boldsymbol{\chi}_{l_{n+1}}^{D \text{ trial}})$ , de modo que

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{e \text{ trial}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (4.86a)$$

e

$$\dot{\omega}^{trial} = 0 \quad (4.86b)$$

No problema do passo elástico, supõe-se que a resposta do material no incremento de  $t_n$  a  $t_{n+1}$  é elástica. A condição inicial, para este problema constitutivo de valor inicial é determinada pelo estado em  $t_n$ , que é,

$$\epsilon^{e\ trial}(t_n) = \epsilon_n^e \quad (4.87a)$$

e

$$\omega^{trial}(t_n) = \omega_n. \quad (4.87b)$$

Desta forma,

$$\begin{aligned} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \dot{\epsilon}^{e\ trial} dt &= \int_{t_n}^{t_{n+1}} \dot{\epsilon} dt \\ &= \epsilon_{n+1} - \epsilon_n. \end{aligned} \quad (4.88)$$

Mas

$$\begin{aligned} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \dot{\epsilon}^{e\ trial} dt &= \epsilon_{n+1}^{e\ trial} - \epsilon_n^{e\ trial} \\ &= \epsilon_{n+1}^{e\ trial} - \epsilon_n^e \end{aligned} \quad (4.89)$$

então igualando ambos os resultados obtém-se

$$\epsilon_{n+1}^{e\ trial} - \epsilon_n^e = \epsilon_{n+1} - \epsilon_n \quad (4.90)$$

consequentemente

$$\epsilon_{n+1}^{e\ trial} = \epsilon_{n+1} - \epsilon_n^c. \quad (4.91)$$

Uma vez determinada a deformação elástica teste,  $\epsilon_{n+1}^{e\ trial}$ , pode ser calculado

$$e_{H_{n+1}}^{e\ trial} = \frac{1}{3} tr \left[ \epsilon_{n+1}^{e\ trial} \right] \quad (4.92)$$

e

$$\epsilon_{n+1}^{e\ D\ trial} = \epsilon_{n+1}^{e\ trial} - e_{H_{n+1}}^{e\ trial} \mathbf{I}. \quad (4.93)$$

Utilizando a relação constitutiva em (4.51) obtém-se

$$p_{n+1}^{trial} = \frac{E}{(1 - 2\nu)} e_{H_{n+1}}^{e\ trial} \quad (4.94)$$

e

$$\sigma_{n+1}^{D\ trial} = 2G \epsilon_{n+1}^{e\ D\ trial}. \quad (4.95)$$

Além disso,

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \dot{\omega}^{trial} dt = 0 \quad (4.96)$$

isto é

$$\omega_{n+1}^{trial} = \omega_n \quad (4.97)$$

assim

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{c\,trial} = \boldsymbol{\varepsilon}_n^c \quad (4.98a)$$

$$e_{ef_{n+1}}^{c\,trial} = e_{ef_n}^c \quad (4.98b)$$

$$R_{n+1}^{trial} = R_n \quad (4.98c)$$

$$K_{n+1}^{trial} = K_n \quad (4.98d)$$

$$\boldsymbol{\chi}_{s_{n+1}}^D\,trial = \boldsymbol{\chi}_{s_n}^D \quad (4.98e)$$

e

$$\boldsymbol{\chi}_{l_{n+1}}^D\,trial = \boldsymbol{\chi}_{l_n}^D \quad (4.98f)$$

- Problema do mapeamento de retorno viscoplastico

Para resolver o problema elasto-viscoplastico acoplado aplica-se o esquema de Euler implícito apresentado no apêndice A e utiliza-se como condição inicial a solução obtida no passo elástico.

Apesar do método do ponto médio (apêndice A) ser uma aproximação de segunda ordem e o método implícito ser uma aproximação de primeira ordem, será utilizado o método de Euler implícito. Esta escolha se deve ao fato do método de Euler implícito admitir soluções estáveis para incrementos de passos bem maiores que os verificados para o método do ponto médio.

O algoritmo de retorno viscoplastico pode ser formulado como: Dado  $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}$ , determinar as variáveis de estado em  $t_{n+1}$  que satisfazem as seguintes equações:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e &= \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^c \\ &= (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_n^c) - (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^c - \boldsymbol{\varepsilon}_n^c) \\ &= \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\,trial} - \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^c \end{aligned} \quad (4.99)$$

consequentemente

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\,trial} - \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^c \quad (4.100a)$$

em que

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^c = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^c - \boldsymbol{\varepsilon}_n^c. \quad (4.100b)$$

Agora, a partir da regra de fluxo viscoplastica tem-se

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^c = \dot{\lambda}\mathbf{N} \quad (4.101a)$$

com

$$\mathbf{N} = \frac{3}{2} \frac{(\boldsymbol{\sigma}^D - \boldsymbol{\chi}^D)}{q}, \quad (4.101b)$$

$$q = \sqrt{\frac{3}{2} (\boldsymbol{\sigma}^D - \boldsymbol{\chi}^D) \cdot (\boldsymbol{\sigma}^D - \boldsymbol{\chi}^D)}, \quad (4.101c)$$

e

$$\boldsymbol{\chi}^D = \boldsymbol{\chi}_s^D + \boldsymbol{\chi}_l^D. \quad (4.101d)$$

Desta forma,

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^c = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^c dt. \quad (4.102)$$

Aplicando o método de Euler implícito obtém-se

$$\begin{aligned} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^c &\simeq \left[ \frac{3}{2} \frac{(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^D - \boldsymbol{\chi}_{n+1}^D)}{q_{n+1}} \right] \int_{t_n}^{t_{n+1}} \dot{\lambda} dt \\ &= \Delta \lambda \left[ \frac{3}{2} \frac{(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^D - \boldsymbol{\chi}_{n+1}^D)}{q_{n+1}} \right] \end{aligned} \quad (4.103)$$

o que implica em

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\,trial} - \Delta \lambda \left[ \frac{3}{2} \frac{(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^D - \boldsymbol{\chi}_{n+1}^D)}{q_{n+1}} \right]. \quad (4.104)$$

Calculando o traço da equação acima e multiplicando por  $(\frac{1}{3})$  obtém-se

$$\frac{1}{3} tr [\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e] = \frac{1}{3} tr [\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\,trial}] - \frac{1}{3} \Delta \lambda \frac{3}{2q_{n+1}} tr [\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^D - \boldsymbol{\chi}_{n+1}^D].$$

Porém

$$tr [\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^D - \boldsymbol{\chi}_{n+1}^D] = 0 \quad (4.105)$$

consequentemente

$$e_{H_{n+1}}^e = e_{H_{n+1}}^{e\,trial}. \quad (4.106)$$

Agora,

$$p_{n+1} = \frac{E}{(1-2\nu)} e_{H_{n+1}}^e, \quad (4.107)$$

portanto, multiplicando (4.106) por  $\frac{E}{(1-2\nu)}$  determina-se

$$\frac{E}{(1-2\nu)} e_{H_{n+1}}^e = \frac{E}{(1-2\nu)} e_{H_{n+1}}^{e\,trial}$$

considerando (4.107) chega-se à seguinte equação para a determinação de  $p_{n+1}$ , dada por

$$p_{n+1} = p_{n+1}^{trial}, \quad (4.108a)$$

com

$$p_{n+1}^{trial} = \frac{E}{(1-2\nu)} e_{H_{n+1}}^{e\,trial}. \quad (4.108b)$$

Além do mais,

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\,D} = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e - e_{H_{n+1}}^e \mathbf{I}, \quad (4.109)$$

assim

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\,D} &= \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e - e_{H_{n+1}}^e \mathbf{I} \\ &= \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\,trial} - \Delta \lambda \left[ \frac{3}{2} \frac{(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^D - \boldsymbol{\chi}_{n+1}^D)}{q_{n+1}} \right] - e_{H_{n+1}}^{e\,trial} \mathbf{I} \\ &= \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\,D\,trial} - \Delta \lambda \left[ \frac{3}{2} \frac{(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^D - \boldsymbol{\chi}_{n+1}^D)}{q_{n+1}} \right] \end{aligned} \quad (4.110)$$

consequentemente

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e D} = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e D \text{ trial}} - \Delta\lambda \left[ \frac{3}{2} \frac{(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^D - \boldsymbol{\chi}_{n+1}^D)}{q_{n+1}} \right]. \quad (4.111)$$

Agora,

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^D = 2G \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e D} \quad (4.112a)$$

e

$$q_{n+1} = \left[ \frac{3}{2} (\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^D - \boldsymbol{\chi}_{n+1}^D) \cdot (\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^D - \boldsymbol{\chi}_{n+1}^D) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.112b)$$

portanto, multiplicando (4.111) por  $2G$  e considerando as equações em (4.112) e (4.95) obtém-se

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^D + \frac{3G \Delta\lambda}{q_{n+1}} (\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^D - \boldsymbol{\chi}_{n+1}^D) = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{D \text{ trial}} \quad (4.113a)$$

em que

$$q_{n+1} = \left[ \frac{3}{2} (\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^D - \boldsymbol{\chi}_{n+1}^D) \cdot (\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^D - \boldsymbol{\chi}_{n+1}^D) \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (4.113b)$$

Com relação à deformação viscoplastica efetiva tem-se

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \dot{\lambda} dt = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \dot{e}_{ef}^c dt. \quad (4.114)$$

Logo, aplicando o método de Euler implícito determina-se

$$\Delta e_{ef_{n+1}}^c = \Delta\lambda \quad (4.115)$$

o que implica

$$e_{ef_{n+1}}^c = e_{ef_n}^c + \Delta\lambda. \quad (4.116)$$

Por outro lado,

$$\dot{\lambda} = \dot{e}_{ef}^c = a \left\langle \frac{q - R}{K} \right\rangle^N \quad (4.117)$$

a qual, após a aplicação do método de Euler implícito produz

$$\Delta e_{ef_{n+1}}^c = \Delta\lambda = a \left\langle \frac{q_{n+1} - R_{n+1}}{K_{n+1}} \right\rangle^N \Delta t \quad (4.118a)$$

sendo

$$q_{n+1} = \left[ \frac{3}{2} (\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^D - \boldsymbol{\chi}_{n+1}^D) \cdot (\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^D - \boldsymbol{\chi}_{n+1}^D) \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (4.118b)$$

Com relação à variável interna,  $R$ , tem-se

$$\dot{R} = a_3 \left( 1 - \frac{R}{R^\infty} \right) \dot{e}_{ef}^c - a_4 \left\langle \frac{R - R^\infty}{C} \right\rangle^p. \quad (4.119)$$

Assim, com a aplicação o método de Euler implícito deriva-se

$$R_{n+1} = R_n + a_3 \left( 1 - \frac{R_{n+1}}{R^\infty} \right) \Delta e_{ef_{n+1}}^c - a_4 \left\langle \frac{R_{n+1} - R^\infty}{C} \right\rangle^p \Delta t. \quad (4.120)$$

No caso da variável interna,  $K$ , tem-se

$$\dot{K} = a_5 \left( 1 - \frac{K}{K^\infty} \right) \dot{e}_{ef}^c - a_6 \left\langle \frac{K - K^\infty}{C} \right\rangle^u. \quad (4.121)$$

Assim, com a aplicação do o método de Euler implícito deriva-se

$$K_{n+1} = K_n + a_5 \left( 1 - \frac{K_{n+1}}{K_{n+1}^\infty} \right) \Delta e_{ef_{n+1}}^c - a_6 \left\langle \frac{K_{n+1} - K_{n+1}^\infty}{C} \right\rangle^u \Delta t. \quad (4.122)$$

No caso das tensões de repouso de curta e longa duração, tem-se

$$\dot{\chi}_s^D = a_{1s} \left\{ \frac{2}{3} \dot{\epsilon}^c - \chi_s^D \frac{\dot{e}_{ef}^c}{\chi_{sef}^\infty} \right\} - \frac{a_{2s}}{\chi_{sef}} \left\langle \frac{\chi_{sef} - \chi_{sef}^\infty}{C} \right\rangle^q \chi_s^D, \quad (4.123a)$$

e

$$\dot{\chi}_l^D = a_{1l} \left\{ \frac{2}{3} \dot{\epsilon}^c - \chi_l^D \frac{\dot{e}_{ef}^c}{\chi_{lef}^\infty} \right\} - \frac{a_{2l}}{\chi_{lef}} \left\langle \frac{\chi_{lef} - \chi_{lef}^\infty}{C} \right\rangle^q \chi_l^D, \quad (4.123b)$$

com

$$\chi_{lef} = \left[ \frac{3}{2} \chi_l^D \cdot \chi_l^D \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.123c)$$

e

$$\chi_{sef} = \left[ \frac{3}{2} \chi_s^D \cdot \chi_s^D \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (4.123d)$$

Assim, com a aplicação o método de Euler implícito deriva-se

$$\begin{aligned} \chi_{s_{n+1}}^D &= \chi_{s_n}^D + a_{1s} \left\{ \frac{2}{3} \Delta \epsilon_{n+1}^c - \chi_{s_{n+1}}^D \frac{\Delta e_{ef_{n+1}}^c}{\chi_{sef_{n+1}}^\infty} \right\} \\ &\quad - \frac{a_{2s} \Delta t}{\chi_{sef_{n+1}}} \left\langle \frac{\chi_{sef_{n+1}} - \chi_{sef_{n+1}}^\infty}{C} \right\rangle^q \chi_{s_{n+1}}^D \end{aligned} \quad (4.124a)$$

e

$$\begin{aligned} \chi_{l_{n+1}}^D &= \chi_{l_n}^D + a_{1l} \left\{ \frac{2}{3} \Delta \epsilon_{n+1}^c - \chi_{l_{n+1}}^D \frac{\Delta e_{ef_{n+1}}^c}{\chi_{lef_{n+1}}^\infty} \right\} \\ &\quad - \frac{a_{2l} \Delta t}{\chi_{lef_{n+1}}} \left\langle \frac{\chi_{lef_{n+1}} - \chi_{lef_{n+1}}^\infty}{C} \right\rangle^q \chi_{l_{n+1}}^D \end{aligned} \quad (4.124b)$$

em que

$$\Delta \epsilon_{n+1}^c = \Delta e_{ef_{n+1}}^c \left[ \frac{3 (\sigma_{n+1}^D - \chi_{n+1}^D)}{2 q_{n+1}} \right] \quad (4.124c)$$

e

$$\Delta e_{ef_{n+1}}^c = a \left\langle \frac{q_{n+1} - R_{n+1}}{K_{n+1}} \right\rangle^N \Delta t. \quad (4.124d)$$

Para calcular  $\chi_{sef_{n+1}}^\infty$ ,  $\chi_{lef_{n+1}}^\infty$ ,  $K_{n+1}^\infty$  e  $R_{n+1}^\infty$  emprega-se as seguintes relações

$$\dot{e}_{ef}^c = \dot{e}_o \left[ \sinh \left( \frac{\sigma_{vm}^\infty}{\sigma_o} \right) \right]^n \quad (4.125a)$$

em que

$$\sigma_{vm} = \left[ \frac{3}{2} \boldsymbol{\sigma}^D \cdot \boldsymbol{\sigma}^D \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (4.125b)$$

$$\chi_{sef}^{\infty} = b_{os} \left( \frac{\sigma_{vm}^{\infty}}{\sigma_o} \right)^m, \quad (4.125c)$$

$$\chi_{lef}^{\infty} = b_{ol} \left( \frac{\sigma_{vm}^{\infty}}{\sigma_o} \right)^m, \quad (4.125d)$$

$$R^{\infty} = R_o \left( \frac{\sigma_{vm}^{\infty}}{\sigma_o} \right)^m, \quad (4.125e)$$

e

$$K^{\infty} = \frac{\langle \sigma_{vm}^{\infty} - (\chi^{\infty} + R^{\infty}) \rangle}{\left( \frac{\dot{e}_{ef}^c}{a} \right)^{\frac{1}{N}}} \quad (4.125f)$$

assim

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \dot{e}_{ef}^c dt = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left\{ \dot{e}_o^c \left[ \sinh \left( \frac{\sigma_{vm}^{\infty}}{\sigma_o} \right) \right]^n \right\} dt. \quad (4.126)$$

Portanto, após a aplicação do método de Euler implícito,

$$\Delta e_{efn+1}^c = \dot{e}_o^c \left[ \sinh \left( \frac{\sigma_{vmn+1}^{\infty}}{\sigma_o} \right) \right]^n \Delta t \quad (4.127)$$

que fornece, por inversão

$$\sigma_{vmn+1}^{\infty} = \sigma_o \sinh^{-1} \left[ \left( \frac{\Delta e_{efn+1}^c}{\dot{e}_o^c \Delta t} \right)^{\frac{1}{n}} \right]. \quad (4.128)$$

Como resultado,

$$\chi_{sefn+1}^{\infty} = b_{os} \left( \frac{\sigma_{vmn+1}^{\infty}}{\sigma_o} \right)^m \quad (4.129a)$$

$$\chi_{lefn+1}^{\infty} = b_{ol} \left( \frac{\sigma_{vmn+1}^{\infty}}{\sigma_o} \right)^m \quad (4.129b)$$

e

$$R_{n+1}^{\infty} = R_o \left( \frac{\sigma_{vmn+1}^{\infty}}{\sigma_o} \right)^m. \quad (4.129c)$$

Além disso

$$\dot{e}_{ef}^c = a \left\langle \frac{\sigma_{vm}^{\infty} - (\chi^{\infty} + R^{\infty})}{K^{\infty}} \right\rangle^N \quad (4.130)$$

então

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \dot{e}_{ef}^c dt = a \left\langle \frac{\sigma_{vmn+1}^{\infty} - (\chi_{n+1}^{\infty} + R_{n+1}^{\infty})}{K_{n+1}^{\infty}} \right\rangle^N \Delta t \quad (4.131)$$

isto é

$$\left( \frac{\Delta e_{efn+1}^c}{a \Delta t} \right)^{\frac{1}{N}} = \frac{1}{K_{n+1}^{\infty}} \langle \sigma_{vmn+1}^{\infty} - (\chi_{n+1}^{\infty} + R_{n+1}^{\infty}) \rangle \quad (4.132)$$

assim

$$K_{n+1}^{\infty} = \frac{\langle \sigma_{vmn+1}^{\infty} - (\chi_{n+1}^{\infty} + R_{n+1}^{\infty}) \rangle}{\left( \frac{\Delta e_{efn+1}^c}{a\Delta t} \right)^{\frac{1}{N}}} \quad (4.133a)$$

sendo

$$\chi_{n+1}^{\infty} = \chi_{sefn+1}^{\infty} + \chi_{lefn+1}^{\infty}. \quad (4.133b)$$

## 4.5.2 Formulação do Mapeamento de Retorno Viscoplastico

O algoritmo de retorno viscoplastico pode ser formulado como: Dado  $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}$ , determinar  $\boldsymbol{\varpi} = (R_{n+1}, K_{n+1}, \boldsymbol{\chi}_{s_{n+1}}^D, \boldsymbol{\chi}_{l_{n+1}}^D, \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^D)$  que seja solução de:

$$\begin{aligned} R_1(\boldsymbol{\varpi}) = R_{n+1} - R_n - a_3 \left( 1 - \frac{R_{n+1}}{R_{n+1}^{\infty}} \right) \Delta e_{efn+1}^c \\ + a_4 \left\langle \frac{R_{n+1} - R_{n+1}^{\infty}}{C} \right\rangle^p \Delta t = 0 \end{aligned} \quad (4.134a)$$

$$\begin{aligned} R_2(\boldsymbol{\varpi}) = K_{n+1} - K_n - a_5 \left( 1 - \frac{K_{n+1}}{K_{n+1}^{\infty}} \right) \Delta e_{efn+1}^c \\ + a_6 \left\langle \frac{K_{n+1} - K_{n+1}^{\infty}}{C} \right\rangle^u \Delta t = 0 \end{aligned} \quad (4.134b)$$

$$R_3(\boldsymbol{\varpi}) = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^D + \frac{3G \Delta e_{efn+1}^c}{q_{n+1}} (\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^D - \boldsymbol{\chi}_{n+1}^D) - \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{D \text{ trial}} = 0 \quad (4.134c)$$

$$\begin{aligned} R_4(\boldsymbol{\varpi}) = \boldsymbol{\chi}_{s_{n+1}}^D - \boldsymbol{\chi}_{s_n}^D - a_{1s} \left\{ \frac{2}{3} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^c - \boldsymbol{\chi}_{s_{n+1}}^D \frac{\Delta e_{efn+1}^c}{\chi_{sefn+1}^{\infty}} \right\} \\ + \frac{a_{2s} \Delta t}{\chi_{sefn+1}} \left\langle \frac{\chi_{sefn+1} - \chi_{sefn+1}^{\infty}}{C} \right\rangle^q \boldsymbol{\chi}_{s_{n+1}}^D = 0 \end{aligned} \quad (4.134d)$$

$$\begin{aligned} R_5(\boldsymbol{\varpi}) = \boldsymbol{\chi}_{l_{n+1}}^D - \boldsymbol{\chi}_{l_n}^D - a_{1l} \left\{ \frac{2}{3} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^c - \boldsymbol{\chi}_{l_{n+1}}^D \frac{\Delta e_{efn+1}^c}{\chi_{lefn+1}^{\infty}} \right\} \\ + \frac{a_{2l} \Delta t}{\chi_{lefn+1}} \left\langle \frac{\chi_{lefn+1} - \chi_{lefn+1}^{\infty}}{C} \right\rangle^q \boldsymbol{\chi}_{l_{n+1}}^D = 0 \end{aligned} \quad (4.134e)$$

sendo

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^c = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^c - \boldsymbol{\varepsilon}_n^c \quad (4.134f)$$

$$\boldsymbol{\chi}_{n+1}^D = \boldsymbol{\chi}_{s_{n+1}}^D + \boldsymbol{\chi}_{l_{n+1}}^D \quad (4.134g)$$

$$\Delta e_{efn+1}^c = a \left\langle \frac{q_{n+1} - R_{n+1}}{K_{n+1}} \right\rangle^N \Delta t \quad (4.134h)$$

com

$$q_{n+1} = \left[ \frac{3}{2} (\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^D - \boldsymbol{\chi}_{n+1}^D) \cdot (\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^D - \boldsymbol{\chi}_{n+1}^D) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.134i)$$

e

$$\Delta t = t_{n+1} - t_n. \quad (4.134j)$$

Uma vez determinado  $\boldsymbol{\varpi} = (R_{n+1}, K_{n+1}, \boldsymbol{\chi}_{s_{n+1}}^D, \boldsymbol{\chi}_{l_{n+1}}^D, \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^D)$ , é possível calcular a tensão de Cauchy por

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^D + p_{n+1} \mathbf{I} \quad (4.135a)$$

sendo

$$p_{n+1} = \frac{E}{(1-2\nu)} e_{H_{n+1}}^{e \text{ trial}} \quad (4.135b)$$

com

$$e_{H_{n+1}}^{e \text{ trial}} = \frac{1}{3} \text{tr} (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e \text{ trial}}) \quad (4.135c)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e \text{ trial}} = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_n. \quad (4.135d)$$

### 4.5.3 Determinação da Matriz de Rigidez Local

Para a solução do sistema de equações não lineares acima, aplica-se o método de Newton. Este procedimento requer a determinação da matriz de rigidez tangente local, a qual é dada por:

$$[\mathbb{K}_T(\boldsymbol{\varpi})]_{ij} = \frac{\partial R_i(\boldsymbol{\varpi})}{\partial \varpi_j}, \quad (4.136a)$$

em que

$$\boldsymbol{\varpi} = (R_{n+1}, K_{n+1}, \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^D, \boldsymbol{\chi}_{s_{n+1}}^D, \boldsymbol{\chi}_{l_{n+1}}^D). \quad (4.136b)$$

## 4.6 Formulação Fraca do Problema Geomecânico

Uma vez definido o modelo constitutivo e a estratégia empregada no procedimento de integração, os quais definem o problema local, pode-se resolver o problema de valor de contorno global em termos do campo de deslocamento  $\vec{u}$  em  $t_{n+1}$ .

### 4.6.1 Formulação Incremental

A formulação incremental entre  $t_n$  e  $t_{n+1}$  considera que:

$$\vec{u}_{n+1} = \vec{u}_n + \Delta \vec{u}_n, \quad (4.137)$$

de forma que, em  $t_{n+1}$ , a formulação fraca pode ser escrita como: Determinar  $\vec{u}_{n+1} \in \mathbf{K}$  tal que

$$F_1(\vec{u}_{n+1}; \vec{w}) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\vec{w}) \, d\Omega - \int_{\Omega} \rho \vec{b}_{n+1} \cdot \vec{w} \, d\Omega - \int_{\Gamma_t} \vec{t}_{n+1} \cdot \vec{w} \, dA = 0, \quad \forall \vec{w} \in \mathbf{V}_u. \quad (4.138)$$

Como o problema acima é não linear, aplica-se o método de Newton.

### 4.6.2 Linearização pelo Método de Newton

Seja  $\vec{u}_{n+1}^k$  a estimativa da solução do problema (4.138) na  $k$ -ésima iteração e considerando que

$$\vec{u}_{n+1}^k = \vec{u}_n, \text{ em } k = 0, \quad (4.139)$$

i.e., que a estimativa inicial seja dada por  $\vec{u}_n$ , sendo  $\vec{u}_n$  a solução no instante  $t_n$ . Para a  $k$ -ésima iteração, do procedimento de solução para  $\vec{u}_{n+1}$ , tem-se

$$\vec{u}_{n+1}^{k+1} = \vec{u}_{n+1}^k + \Delta \vec{u}_{n+1}^k. \quad (4.140)$$

A determinação de  $\Delta \vec{u}_{n+1}^k$  é obtida impondo que

$$F_1(\vec{u}_{n+1}^{k+1}; \vec{w}) = 0, \quad \forall \vec{w} \in \mathbf{V}_u \quad (4.141)$$

isto é

$$F_1(\vec{u}_{n+1}^k + \Delta \vec{u}_{n+1}^k; \vec{w}) = 0, \quad \forall \vec{w} \in \mathbf{V}_u. \quad (4.142)$$

Considerando  $F_1(\cdot)$  como sendo Gâteaux diferenciável, deriva-se

$$F_1(\vec{u}_{n+1}^k + \Delta \vec{u}_{n+1}^k; \vec{w}) \simeq F_1(\vec{u}_{n+1}^k; \vec{w}) + DF_1(\vec{u}_{n+1}^k; \vec{w}) [\Delta \vec{u}_{n+1}^k]. \quad (4.143)$$

A partir de (4.142) e (4.143) é possível escrever

$$DF_1(\vec{u}_{n+1}^k; \vec{w}) [\Delta \vec{u}_{n+1}^k] = -F_1(\vec{u}_{n+1}^k; \vec{w}). \quad (4.144)$$

#### Determinação de $DF_1(\vec{u}_{n+1}^k; \vec{w}) [\Delta \vec{u}_{n+1}^k]$

Pela definição da diferenciabilidade de Gâteaux de  $F_1(\cdot)$ , obtém-se

$$\begin{aligned} DF_1(\vec{u}_{n+1}^k; \vec{w}) [\Delta \vec{u}_{n+1}^k] &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F_1(\vec{u}_{n+1}^k + \epsilon \Delta \vec{u}_{n+1}^k; \vec{w}) - F_1(\vec{u}_{n+1}^k; \vec{w})}{\epsilon} \\ &= \frac{d}{d\epsilon} [F_1(\vec{u}_{n+1}^k + \epsilon \Delta \vec{u}_{n+1}^k; \vec{w})]_{\epsilon=0}. \end{aligned} \quad (4.145)$$

Já que  $\Omega$  é fixo e supondo que a tração prescrita  $\vec{t}_{n+1}$  e a força de corpo prescrita  $\vec{b}_{n+1}$  são ambas independentes de  $\vec{u}$ , deriva-se

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\epsilon} [F_1(\vec{u}_{n+1}^k + \epsilon \Delta \vec{u}_{n+1}^k; \vec{w})]_{\epsilon=0} &= \frac{d}{d\epsilon} \left[ \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_{n+1}(\vec{u}_{n+1}^k + \epsilon \Delta \vec{u}_{n+1}^k) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\vec{w}) \, d\Omega \right]_{\epsilon=0} \\ &= \int_{\Omega} \frac{d}{d\epsilon} [\boldsymbol{\sigma}_{n+1}(\vec{u}_{n+1}^k + \epsilon \Delta \vec{u}_{n+1}^k)]_{\epsilon=0} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\vec{w}) \, d\Omega. \end{aligned} \quad (4.146)$$

Agora, como  $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}(\vec{u}_{n+1}^k + \epsilon \Delta \vec{u}_{n+1}^k))$ , pode-se aplicar a regra da cadeia e obter

$$\frac{d}{d\epsilon} \left\{ \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}(\vec{u}_{n+1}^k + \epsilon \Delta \vec{u}_{n+1}^k)) \right\} \Big|_{\epsilon=0} = \left[ \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}(\vec{u}_{n+1}^k) \right] \frac{d}{d\epsilon} \left\{ \boldsymbol{\varepsilon}(\vec{u}_{n+1}^k + \epsilon \Delta \vec{u}_{n+1}^k) \right\} \Big|_{\epsilon=0}. \quad (4.147)$$

Porém

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\vec{u}_{n+1}^k + \epsilon \Delta \vec{u}_{n+1}^k) = \frac{1}{2} \left[ \nabla(\vec{u}_{n+1}^k + \epsilon \Delta \vec{u}_{n+1}^k) + \nabla(\vec{u}_{n+1}^k + \epsilon \Delta \vec{u}_{n+1}^k)^T \right] \quad (4.148)$$

consequentemente

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{d\epsilon} \left\{ \boldsymbol{\varepsilon} \left( \vec{u}_{n+1}^k + \epsilon \Delta \vec{u}_{n+1}^k \right) \right\} \right|_{\epsilon=0} &= \frac{1}{2} \left[ \nabla \left( \Delta \vec{u}_{n+1}^k \right) + \nabla \left( \Delta \vec{u}_{n+1}^k \right)^T \right] \\ &= \boldsymbol{\varepsilon} \left( \Delta \vec{u}_{n+1}^k \right) \end{aligned} \quad (4.149)$$

o que finalmente implica em

$$\left. \frac{d}{d\epsilon} \left\{ \boldsymbol{\sigma} \left( \boldsymbol{\varepsilon} \left( \vec{u}_{n+1}^k + \epsilon \Delta \vec{u}_{n+1}^k \right) \right) \right\} \right|_{\epsilon=0} = \left[ \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} \left( \vec{u}_{n+1}^k \right) \right] \varepsilon_{kl} \left( \Delta \vec{u}_{n+1}^k \right) \quad (4.150)$$

portanto

$$DF_1 \left( \vec{u}_{n+1}^k; \vec{w} \right) \left[ \Delta \vec{u}_{n+1}^k \right] = \int_{\Omega} \left[ \mathbb{D}_T \left( \vec{u}_{n+1}^k \right) \right]_{ijkl} \varepsilon_{kl} \left( \Delta \vec{u}_{n+1}^k \right) \cdot \varepsilon_{ij} \left( \vec{w} \right) d\Omega \quad (4.151a)$$

sendo

$$\left[ \mathbb{D}_T \left( \vec{u}_{n+1}^k \right) \right]_{ijkl} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} \left( \vec{u}_{n+1}^k \right). \quad (4.151b)$$

## 4.7 Determinação do Módulo Tangente Consistente

O módulo tangente consistente,  $[\mathbb{D}_T]$ , é definido em  $t_{n+1}$  por

$$\left[ \mathbb{D}_T \right]_{ijkl} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}^{e\,trial}}. \quad (4.152)$$

Agora,

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^D + p \delta_{ij}. \quad (4.153)$$

portanto

$$\left[ \mathbb{D}_T \right]_{ijkl} = \frac{\partial \sigma_{ij}^D}{\partial \varepsilon_{kl}^{e\,trial}} + \frac{\partial p}{\partial \varepsilon_{kl}^{e\,trial}} \delta_{ij}. \quad (4.154)$$

Entretanto,

$$p_{n+1} = p_{n+1}^{trial}, \quad (4.155a)$$

com

$$p_{n+1}^{trial} = \frac{E}{(1-2\nu)} e_{H_{n+1}}^{e\,trial}, \quad (4.155b)$$

sendo

$$e_{H_{n+1}}^{e\,trial} = \frac{1}{3} tr \left( \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\,trial} \right) = \frac{1}{3} \varepsilon_{ss}^{e\,trial}, \quad (4.155c)$$

consequentemente

$$\frac{\partial p}{\partial \varepsilon_{kl}^{e\,trial}} = \frac{E}{3(1-2\nu)} \delta_{kl}. \quad (4.156)$$

Para calcular  $\frac{\partial \sigma_{ij}^D}{\partial \varepsilon_{kl}^{e^{trial}}}$  pode-se notar que a solução de (4.134), dada por  $\varpi = (R_{n+1}, K_{n+1}, \chi_{s_{n+1}}^D, \chi_{l_{n+1}}^D, \sigma_{n+1}^D)$  é obtida para um dado valor de  $\varepsilon_{n+1}$ . Como  $\varepsilon_{n+1}^{e^{trial}} = \varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n^c$  e  $\varepsilon_n^c$  é uma constante, pode-se concluir que  $\varpi = \varpi(\varepsilon_{n+1}^{e^{trial}})$ , i.e.,

$$R_{n+1} = R_{n+1}(\varepsilon_{n+1}^{e^{trial}}) \quad (4.157a)$$

$$K_{n+1} = K_{n+1}(\varepsilon_{n+1}^{e^{trial}}) \quad (4.157b)$$

$$\sigma_{n+1}^D = \sigma_{n+1}^D(\varepsilon_{n+1}^{e^{trial}}) \quad (4.157c)$$

$$\chi_{s_{n+1}}^D = \chi_{s_{n+1}}^D(\varepsilon_{n+1}^{e^{trial}}) \quad (4.157d)$$

e

$$\chi_{l_{n+1}}^D = \chi_{l_{n+1}}^D(\varepsilon_{n+1}^{e^{trial}}). \quad (4.157e)$$

Desta forma, derivando as equações em (4.134) com relação a  $\varepsilon_{n+1}^{e^{trial}}$  obtém-se um sistema de equações lineares o qual pode então ser resolvido para  $\frac{\partial \sigma_{n+1}^D}{\partial \varepsilon_{kl}^{e^{trial}}}$ .

# Capítulo 5

## Discretização do Modelo

### 5.1 Introdução

Neste capítulo é apresentado a discretização espacial do modelo matemático pelo método dos elementos finitos, para problemas de deformação plana e axissimétricos, com base em Cook *et al.* [10], Dhatt e Touzot [12] e Zienkiewicz e Taylor [37]. O elemento finito utilizado foi o triangular de seis nós – tri6, visando evitar o problema de origem numérica denominado por travamento volumétrico ou “locking” volumétrico, o qual pode ocorrer em materiais incompressíveis ou aproximadamente incompressíveis. Para a determinação das integrais elementares utilizou-se o método de integração de Gauss-Radau. Finalmente é apresentada a montagem do problema não linear global associado ao problema incremental global.

### 5.2 Problemas 2D: Problemas de Deformação Plana e Axissimétricos (Sem Torção)

No caso de axissimetria, admite-se que as propriedades do material, carregamentos e condições de contorno sejam independentes de  $\theta$ , num sistema de coordenadas cilíndricas  $(r, \theta, z)$ .

Aqui, considera-se o caso de problemas axissimétricos. As expressões associadas ao caso de deformação plana seguirão posteriormente, através de particularizações apropriadas dos resultados já obtidos.

#### Sólidos de Revolução:

No caso de axissimetria, o campo de deslocamentos é dado por [10]:

$$\vec{u} = u_r \vec{e}_r + u_\theta \vec{e}_\theta + u_z \vec{e}_z \quad (5.1)$$

sendo

$$u_r = u_r(r, z) \quad (5.2a)$$

$$u_\theta = 0 \quad (5.2b)$$

e

$$u_z = u_z(r, z). \quad (5.2c)$$

As componentes do tensor de deformação são dadas consequentemente por:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r} & \gamma_{r\theta} &= 0 \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{u_r}{r} & \gamma_{z\theta} &= 0 \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z} & \gamma_{rz} &= \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \end{aligned} \quad (5.3)$$

**Exemplo 5.1 (i)** No caso de estado plano de deformação considera-se

$$(r \leftrightarrow x), \quad (z \leftrightarrow y), \quad (\theta \leftrightarrow z)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = 0 \quad e \quad \sigma_{\theta\theta} \neq 0.$$

A partir destas considerações, a formulação fraca do problema, dada por

$$G(\vec{u}, \vec{w}) = \int_{\Omega} \sigma(\vec{u}) \cdot \varepsilon(\vec{w}) \, d\Omega - \int_{\Omega} \rho \vec{b} \cdot \vec{w} \, d\Omega - \int_{\Gamma_t} \vec{t} \cdot \vec{w} \, d\Gamma \quad (5.4)$$

pode ser reescrita utilizando-se

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sigma(\vec{u}) \cdot \varepsilon(\vec{w}) \, d\Omega &= \int_{\Omega} \{ \sigma_{rr}(\vec{u}) \cdot \varepsilon_{rr}(\vec{w}) + \sigma_{zz}(\vec{u}) \cdot \varepsilon_{zz}(\vec{w}) + \sigma_{\theta\theta}(\vec{u}) \cdot \varepsilon_{\theta\theta}(\vec{w}) + \sigma_{rz}(\vec{u}) \cdot \gamma_{rz}(\vec{w}) \} \, d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \vec{\sigma}(\vec{u}) \cdot \vec{\varepsilon}(\vec{w}) \, d\Omega \end{aligned} \quad (5.5)$$

em que

$$\vec{\sigma} = \{ \sigma_{rr}, \sigma_{zz}, \sigma_{rz}, \sigma_{\theta\theta} \} \quad (5.6)$$

e

$$\vec{\varepsilon} = \{ \varepsilon_{rr}, \varepsilon_{zz}, \gamma_{rz}, \varepsilon_{\theta\theta} \}. \quad (5.7)$$

### 5.2.1 Discretização do Elemento Finito de Galerkin

A fim de aplicar o método dos elementos finitos, é feita uma partição do domínio  $\Omega$ , em elementos finitos  $\Omega_e$ , como representado na Fig. 5.1.

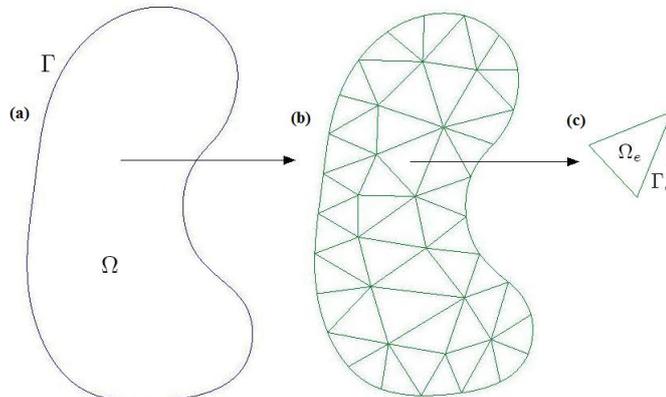


Figura 5.1: Discretização do domínio.

### Problemas Axissimétricos

Como o problema é independente de  $\theta$ , tem-se <sup>[10]</sup>:

$$d\Omega = 2\pi r dr dz = 2\pi dA \quad (5.8)$$

$$dA = r dr dz \quad (5.9)$$

### Problemas de Deformação Plana

No caso de deformações planas, em que uma dimensão é suprimida, obtém-se:

$$d\Omega = dx dy. \quad (5.10)$$

Como consequência da partição do domínio, tem-se:

- Equação de conservação do momento linear

$$\int_{\Omega} \vec{\sigma}(\vec{u}) \cdot \vec{\varepsilon}(\vec{w}) d\Omega = \sum_e \int_{\Omega_e} \vec{\sigma}(\vec{u}) \cdot \vec{\varepsilon}(\vec{w}) d\Omega; \quad (5.11a)$$

$$\int_{\Omega} \rho \vec{b} \cdot \vec{w} d\Omega = \sum_e \int_{\Omega_e} \rho \vec{b} \cdot \vec{w} d\Omega; \quad (5.11b)$$

$$\int_{\Gamma_t} \vec{t} \cdot \vec{w} d\Gamma = \sum_e \int_{\partial\Omega_e \cap \Gamma_t} \vec{t} \cdot \vec{w} d\Gamma; \quad (5.11c)$$

com as seguintes matrizes tangentes

$$\int_{\Omega} [\mathbb{D}_T]_{ijkl} \varepsilon_{kl} (\Delta \vec{u}_{n+1}^k) \varepsilon_{ij}(\vec{w}) d\Omega = \sum_e \int_{\Omega_e} [\check{D}_{T_{n+1}}^{ep(i)}] \vec{\varepsilon}(\Delta u_{n+1}^{(i)}) \cdot \vec{\varepsilon}(\vec{w}) d\Omega \quad (5.11d)$$

sendo

$$[\mathbb{D}_T]_{ijkl} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} \quad \text{e} \quad [\check{D}_{T_{n+1}}^{ep(i)}] \quad \text{o tensor equivalente de 2º ordem.} \quad (5.11e)$$

O tensor equivalente de 2º ordem  $[\check{D}_{T_{n+1}}^{ep(i)}]$ , é obtido do tensor de quarta ordem  $[\mathbb{D}_T]$ , por

$$[\check{D}_T^{ep}] = \begin{bmatrix} [\mathbb{D}_T]_{1111} & [\mathbb{D}_T]_{1122} & \frac{([\mathbb{D}_T]_{1112} + [\mathbb{D}_T]_{1121})}{2} & [\mathbb{D}_T]_{1133} \\ [\mathbb{D}_T]_{2211} & [\mathbb{D}_T]_{2222} & \frac{([\mathbb{D}_T]_{2212} + [\mathbb{D}_T]_{2221})}{2} & [\mathbb{D}_T]_{2233} \\ [\mathbb{D}_T]_{1211} & [\mathbb{D}_T]_{1222} & \frac{([\mathbb{D}_T]_{1212} + [\mathbb{D}_T]_{1221})}{2} & [\mathbb{D}_T]_{1233} \\ [\mathbb{D}_T]_{3311} & [\mathbb{D}_T]_{3322} & \frac{([\mathbb{D}_T]_{3312} + [\mathbb{D}_T]_{3321})}{2} & [\mathbb{D}_T]_{3333} \end{bmatrix}. \quad (5.12)$$

Assim, basicamente, é necessário determinar as contribuições dos elementos, dado no lado direito de (5.11).

Para realizar as integrações acima, na partição do elemento  $\Omega_e$ , emprega-se uma mudança de variáveis, dada por

$$r = r(\xi, \eta) = r_i N_i(\xi, \eta), \quad (5.13a)$$

e

$$z = z(\xi, \eta) = z_i N_i(\xi, \eta), \quad (5.13b)$$

em que  $N_i(\xi, \eta)$  são as funções de interpolação clássicas utilizadas no método dos elementos finitos <sup>[15]</sup>.

As componentes do campo de deslocamento são interpoladas no interior de  $\Omega_e$ , para o caso isoparamétrico, como <sup>[37]</sup>:

$$u_r(\xi, \eta) = u_{r_i} N_i(\xi, \eta), \quad (5.14a)$$

e

$$u_z(\xi, \eta) = u_{z_i} N_i(\xi, \eta). \quad (5.14b)$$

Denotando  $\vec{q}_e = \{u_{r_1}, u_{z_1}, u_{r_2}, u_{z_2}, \dots\}$ , na qual  $(u_{r_i}, u_{z_i})$  são as *i-ésimas* componentes do deslocamento nodal, pode-se expressar as componentes do campo de deslocamento,  $(u_r, u_z)$ , na forma matricial como:

$$\begin{Bmatrix} u_r \\ u_z \end{Bmatrix} = [\mathbf{N}^u] \vec{q}_e = [[\mathbf{N}_a^u \mid a = 1, \dots, n \text{ ós}]] \vec{q}_e \quad (5.15a)$$

sendo

$$\vec{w} = [\mathbf{N}^u] \delta \vec{q}_e \quad (5.15b)$$

em que,

$$[\mathbf{N}_a^u] = \begin{bmatrix} N_a(\xi, \eta) & 0 \\ 0 & N_a(\xi, \eta) \end{bmatrix}. \quad (5.15c)$$

As componentes do tensor deformação podem ser expressas na forma matricial como:

$$\vec{\varepsilon}(\vec{u}) = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{rz} \\ \dots \\ \varepsilon_{\theta\theta} \end{Bmatrix} = [\mathbf{B}^u] \vec{q}_e \quad (5.16a)$$

$$= [[\mathbf{B}_a^u \mid a = 1, \dots, n \text{ ós}]] \vec{q}_e \quad (5.16b)$$

sendo

$$\bar{\varepsilon}(\vec{w}) = [\mathbf{B}^u] \delta \vec{q}_e, \quad (5.16c)$$

com

$$[\mathbf{B}_a^u] = \begin{bmatrix} N_{a,r} & 0 \\ 0 & N_{a,z} \\ N_{a,z} & N_{a,r} \\ \dots & \dots \\ \frac{N_a}{r} & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.16d)$$

na qual

$$\langle N_{a,r} | N_{a,z} \rangle = \frac{1}{J} \langle N_{a,\xi} | N_{a,\eta} \rangle \begin{bmatrix} z_{,\eta} & -r_{,\eta} \\ -z_{,\xi} & r_{,\xi} \end{bmatrix} \quad (5.17a)$$

ou

$$\begin{Bmatrix} N_{a,r} \\ N_{a,z} \end{Bmatrix} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} z_{,\eta} & -z_{,\xi} \\ -r_{,\eta} & r_{,\xi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_{a,\xi} \\ N_{a,\eta} \end{Bmatrix} \quad (5.17b)$$

com

$$J = \det [\mathbf{J}] = r_{,\xi} z_{,\eta} - r_{,\eta} z_{,\xi}. \quad (5.17c)$$

Também, a partir da mudança de variáveis tem-se, para uma função genérica  $f(r, z)$  definida em um elemento triangular  $\Omega_e$ , que <sup>[12]</sup>:

- Caso axissimétrico

$$\int_{\Omega_e} f(r, z) d\Omega = 2\pi \int_{\xi=0}^1 \int_{\eta=0}^{1-\xi} f(r(\xi, \eta), z(\xi, \eta)) J(\xi, \eta) r(\xi, \eta) d\xi d\eta; \quad (5.18)$$

- Caso de deformação plana

$$\int_{\Omega_e} f(x, y) d\Omega = \int_{\xi=0}^1 \int_{\eta=0}^{1-\xi} f(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) J(\xi, \eta) d\xi d\eta. \quad (5.19)$$

Neste ponto, pode-se avaliar a contribuição de cada elemento como segue:

### 5.2.2 Equação de Conservação do Momento Linear

- A determinação da matriz de rigidez tangente consistente, no caso axissimétrico, no cálculo da contribuição do termo

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega_e} \left[ \check{D}_T^{ep(i)} \right] \varepsilon(\Delta u_{n+1}^{(i)}) : \varepsilon(\vec{w}) d\Omega &= \int_{\Omega_e} \left[ \check{D}_T^{ep} \right] \bar{\varepsilon}(\Delta u_{n+1}^{(i)}) \cdot \bar{\varepsilon}(\vec{w}) d\Omega \\
 &= \int_{\Omega_e} \left[ \check{D}_T^{ep} \right] [\mathbf{B}^u(\xi, \eta)] \Delta \vec{q}_e^{(i)} \cdot [\mathbf{B}^u(\xi, \eta)] \delta \vec{q}_e d\Omega \\
 &= \left\{ \int_{\Omega_e} [\mathbf{B}^u(\xi, \eta)]^T \left[ \check{D}_T^{ep} \right] [\mathbf{B}^u(\xi, \eta)] d\Omega \right\} \Delta \vec{q}_e^{(i)} \cdot \delta \vec{q}_e \\
 &= \left[ \mathbb{K}_T^{e(i)} \right] \Delta \vec{q}_e^{(i)} \cdot \delta \vec{q}_e
 \end{aligned} \tag{5.20}$$

sendo

$$\left[ \mathbb{K}_T^{e(i)} \right] = 2\pi \int_{\xi=0}^1 \int_{\eta=0}^{1-\xi} [\mathbf{B}^u(\xi, \eta)]^T \left[ \check{D}_T^{ep}(\xi, \eta) \right] [\mathbf{B}^u(\xi, \eta)] J(\xi, \eta) r(\xi, \eta) d\xi d\eta. \tag{5.21}$$

No caso de deformação plana pode-se derivar por analogia que,

$$\left[ \mathbb{K}_T^{e(i)} \right] = \int_{\xi=0}^1 \int_{\eta=0}^{1-\xi} [\mathbf{B}^u(\xi, \eta)]^T \left[ \check{D}_T^{ep}(\xi, \eta) \right] [\mathbf{B}^u(\xi, \eta)] J(\xi, \eta) d\xi d\eta. \tag{5.22}$$

- A determinação do vetor de forças internas nodais, no caso axissimétrico, é dada por

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega_e} \bar{\sigma}^{(i)} \cdot \bar{\varepsilon}(\vec{w}) d\Omega &= \int_{\Omega_e} \bar{\sigma}^{(i)} \cdot [\mathbf{B}^u(\xi, \eta)] \delta \vec{q}_e d\Omega \\
 &= \left\{ \int_{\Omega_e} [\mathbf{B}^u(\xi, \eta)]^T \bar{\sigma}^{(i)} d\Omega \right\} \cdot \delta \vec{q}_e \\
 &= \vec{F}_e^{int} \cdot \delta \vec{q}_e
 \end{aligned} \tag{5.23}$$

sendo

$$\vec{F}_e^{int} = 2\pi \int_0^1 \int_0^{1-\xi} [\mathbf{B}^u(\xi, \eta)]^T \bar{\sigma}^{(i)} J(\xi, \eta) r(\xi, \eta) d\xi d\eta. \tag{5.24}$$

No caso de deformação plana pode-se derivar por analogia que,

$$\vec{F}_e^{int} = \int_0^1 \int_0^{1-\xi} [\mathbf{B}^u(\xi, \eta)]^T \bar{\sigma}^{(i)} J(\xi, \eta) d\xi d\eta. \tag{5.25}$$

- A determinação da contribuição das forças de corpo, no caso axissimétrico, é dada por:

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega_e} \rho \vec{b} \cdot \vec{w} d\Omega &= \int_{\Omega_e} \rho \vec{b} \cdot [\mathbf{N}^u(\xi, \eta)] \delta \vec{q}_e d\Omega \\
 &= \left\{ \int_{\Omega_e} [\mathbf{N}^u(\xi, \eta)]^T \rho \vec{b} d\Omega \right\} \cdot \delta \vec{q}_e \\
 &= \vec{F}_e^b \cdot \delta \vec{q}_e
 \end{aligned} \tag{5.26}$$

sendo

$$\vec{F}_e^b = 2\pi \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \rho [\mathbf{N}^u(\xi, \eta)]^T \vec{b} J(\xi, \eta) r(\xi, \eta) d\xi d\eta. \tag{5.27}$$

No caso de deformação plana pode-se derivar por analogia que,

$$\vec{F}_e^b = \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \rho [\mathbf{N}^u(\xi, \eta)]^T \vec{b} J(\xi, \eta) d\xi d\eta. \quad (5.28)$$

- A determinação da contribuição das trações prescritas é dada por:

$$\int_{\partial\Omega_e \cap \Gamma_t} \vec{t} \cdot \vec{w} \, d\Gamma. \quad (5.29)$$

Aqui, realiza-se uma parametrização do contorno da fronteira pelo parâmetro  $\tau$  definido no intervalo  $[-1, 1]$ . Assim, no caso axissimétrico:

$$\begin{aligned} &= \int_{-1}^1 \vec{t} \cdot [\mathbf{N}^u(\tau)] \delta \vec{q}_e J(\tau) \, d\tau \\ &= \left\{ \int_{-1}^1 [\mathbf{N}^u(\tau)]^T \vec{t} J(\tau) \, d\tau \right\} \cdot \delta \vec{q}_e \\ &= \vec{F}_e^t \cdot \delta \vec{q}_e \end{aligned} \quad (5.30)$$

sendo

$$\vec{F}_e^t = 2\pi \int_{-1}^1 [\mathbf{N}^u(\tau)]^T \vec{t} J(\tau) r(\tau) \, d\tau. \quad (5.31)$$

No caso de deformação plana pode-se derivar por analogia que,

$$\vec{F}_e^t = \int_{-1}^1 [\mathbf{N}^u(\tau)]^T \vec{t} J(\tau) \, d\tau. \quad (5.32)$$

No caso de deformação plana, supondo uma descrição paramétrica da fronteira através do parâmetro  $\tau$ , dada por

$$\vec{r}(\tau) = x(\tau) \vec{e}_x + y(\tau) \vec{e}_y \quad (5.33)$$

obtem-se

$$J(\tau) = \sqrt{\left(\frac{dx(\tau)}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dy(\tau)}{d\tau}\right)^2} \quad (5.34)$$

e no caso axisimétrico, supondo uma descrição paramétrica da fronteira através do parâmetro  $\tau$ , dada por

$$\vec{r}(\tau) = r(\tau) \vec{e}_r + z(\tau) \vec{e}_z, \quad (5.35)$$

obtem-se

$$J(\tau) = \sqrt{\left(\frac{dr(\tau)}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dz(\tau)}{d\tau}\right)^2}. \quad (5.36)$$

No caso particular de cargas de tração normal prescritas em parte do contorno, tem-se

$$\vec{t} = \sigma_n \vec{n} \quad (5.37)$$

sendo  $\vec{n}$  o vetor unitário normal ao contorno considerado e  $\sigma_n$  a amplitude da tração normal prescrita.

**Observação 5.1**  $\sigma_n < 0$  representa uma carga de compressão normal prescrita e  $\sigma_n \geq 0$  representa uma carga de tração normal prescrita.

Neste caso axisimétrico, obtém-se

$$\vec{F}_e^t = 2\pi \int_{-1}^1 \sigma_n [\mathbf{N}^u(\tau)]^T \vec{n} J(\tau) r(\tau) d\tau. \quad (5.38a)$$

em que

$$\vec{n} = n_r \vec{e}_r + n_z \vec{e}_z \quad (5.38b)$$

sendo

$$n_r = \frac{z'(\tau)}{\sqrt{(r'(\tau))^2 + (z'(\tau))^2}} \quad (5.38c)$$

e

$$n_z = -\frac{r'(\tau)}{\sqrt{(r'(\tau))^2 + (z'(\tau))^2}}. \quad (5.38d)$$

### 5.2.3 Integração Numérica

A fim de determinar as integrais acima, emprega-se a Quadratura de Gauss.

#### Método de Gauss-Radau

Seja  $g(\xi, \eta)$  uma função genérica definida em um elemento triangular. Então

$$\int_0^1 \int_0^{1-\xi} g(\xi, \eta) d\xi d\eta = \frac{1}{2} \sum_k g(\xi_k, \eta_k) w_k \quad (5.39)$$

em que conjunto de pontos  $(\xi_k, \eta_k)$  representam os pontos de integração e  $w_k$  os pesos de integração. A regra da quadratura até a ordem cúbica é dada na Tab. 5.1, como pode ser visto em [12] e [37].

Tabela 5.1: Regra da Quadratura até a Ordem Cúbica.

$(\xi_1, \eta_1) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	e	$w_1 = \frac{1}{3}$
$(\xi_2, \eta_2) = (\frac{1}{2}, 0)$	e	$w_2 = \frac{1}{3}$
$(\xi_3, \eta_3) = (0, \frac{1}{2})$	e	$w_3 = \frac{1}{3}$

Neste caso, por exemplo, a rigidez tangente e o vetor de forças internas nodais podem ser calculados como:

- Rigidez tangente

Caso axisimétrico

$$\left[ \mathbb{K}_T^e \right]^{(i)} \simeq 2\pi \sum_k [\mathbf{B}(\xi_k, \eta_k)]^T \left[ \check{D}_T^{ep}(\xi_k, \eta_k) \right] [\mathbf{B}(\xi_k, \eta_k)] J(\xi_k, \eta_k) r(\xi_k, \eta_k) w_k. \quad (5.40)$$

Caso de deformação plana

$$\left[ \mathbb{K}_T^{e(i)} \right] = \sum_k [\mathbf{B}^u(\xi_k, \eta_k)]^T \left[ \check{D}_T^{ep}(\xi_k, \eta_k) \right] [\mathbf{B}^u(\xi_k, \eta_k)] J(\xi_k, \eta_k) w_k. \quad (5.41)$$

- Vetor de forças internas nodais

Caso axissimétrico

$$\vec{F}_e^{int} \simeq 2\pi \sum_k [\mathbf{B}(\xi_k, \eta_k)]^T \vec{\sigma}^{(i)}(\xi_k, \eta_k) J(\xi_k, \eta_k) r(\xi_k, \eta_k) w_k. \quad (5.42)$$

Caso de deformação plana

$$\vec{F}_e^{int} = \sum_k [\mathbf{B}^u(\xi_k, \eta_k)]^T \vec{\sigma}^{(i)} J(\xi_k, \eta_k) w_k. \quad (5.43)$$

#### 5.2.4 Montagem do Problema Não Linear Global

Seja  $\vec{U}^{(i)}$  o vetor obtido pela união de todos os deslocamentos nodais na  $i$ -ésima iteração do método de Newton, i.e.

$$\vec{U}^{(i)} = \cup_{e=1}^n \{ \vec{q}_e^{(i)} \}. \quad (5.44)$$

Então, pela montagem global das contribuições dos elementos, obtém-se

$$\vec{F}_e^{int}(\vec{U}^{(i)}) = \check{\lambda}_e \left\{ \vec{F}_e^{int} \right\} \quad (5.45)$$

$$\vec{F}_e^b = \check{\lambda}_e \left\{ \vec{F}_e^b \right\} \quad (5.46)$$

$$\vec{F}_e^t = \check{\lambda}_e \left\{ \vec{F}_e^t \right\} \quad (5.47)$$

$$\left[ \mathbb{K}_{TG}(\vec{U}^{(i)}) \right] = \wedge_e \left[ \mathbb{K}_T^{e(i)} \right] \quad (5.48)$$

em que  $\check{\lambda}_e(\circ)$  representa o operador montagem de vetor,  $\wedge_e(\circ)$  o operador montagem de matriz,  $\vec{F}_e^{int}$  representa o vetor de forças internas global,  $\vec{F}_e^b$  vetor de forças de corpo nodais global,  $\vec{F}_e^t$  vetor de forças de tração prescritas nodais global e a matriz de rigidez tangente consistente global  $\left[ \mathbb{K}_{TG}(\vec{U}^{(i)}) \right]$ .

#### Formulação Discreta do Problema Não Linear Global

O problema discreto não linear global consiste em supor que  $\vec{U}_n$  é conhecido e determinar o vetor de deslocamentos nodais  $\vec{U}_{n+1}$  no tempo  $t_{n+1}$  através do procedimento descrito na seguinte tabela:

Tabela 5.2: Procedimento para determinação do vetor de deslocamentos nodais  $\vec{U}_{n+1}$  no tempo  $t_{n+1}$ .

<p>Seja <math>\vec{U}_{n+1}^{(i)} = \vec{U}_n</math>, <math>i = 0</math>, <math>erro = 1</math>, <math>tol = 10^{-4}</math></p> <p>enquanto (<math>erro &gt; tol</math>) faça</p> <p>determinar <math>\Delta \vec{U}_{n+1}^{(i)}</math> solução de:</p> $\left[ \mathbb{K}_{TG}(\vec{U}_{n+1}^{(i)}) \right] \Delta \vec{U}_{n+1}^{(i)} = -\bar{R}(\vec{U}_{n+1}^{(i)})$ <p>determinar nova estimativa de solução <math>\vec{U}_{n+1}^{(i+1)}</math></p> $\vec{U}_{n+1}^{(i+1)} = \vec{U}_{n+1}^{(i)} + \Delta \vec{U}_{n+1}^{(i)}$ <p>determinar o novo resíduo para <math>\vec{U}_{n+1}^{(i+1)}</math></p> $\bar{R}(\vec{U}_{n+1}^{(i+1)}) = \vec{F}^{int}(\vec{U}_{n+1}^{(i+1)}) - \vec{F}_{n+1}^b - \vec{F}_{n+1}^t$ <p>determinar erro para a nova estimativa</p> $erro = \left\  \bar{R}(\vec{U}_{n+1}^{(i+1)}) \right\ $ <p>atualizar iteração</p> $i = i + 1$ $\vec{U}_{n+1}^{(i)} \leftarrow \vec{U}_{n+1}^{(i+1)}$ <p>fim de enquanto</p>
---

# Capítulo 6

## Resultados

Neste capítulo são apresentados alguns resultados numéricos para a avaliação da performance da implementação do modelo constitutivo de rocha salina apresentado no capítulo 3. O modelo foi implementado em uma estrutura baseada em Fortran orientado a objeto, no qual alguns módulos já se encontravam desenvolvidos, e o pós-processamento foi realizado com o uso do software GiD 9.0.

Nas análises, os exemplos são tratados sob as hipóteses de estado plano de deformação e axissimetria e o elemento finito empregado foi o quadrático triangular de 6 nós (tri6). Para a discretização da geometria dos corpos de prova, optou-se por dois elementos finitos devido ao fato da deformação ser homogênea, exceto no caso da compressão diametral, apresentado no exemplo (6.8). Quanto à integração numérica, foram usados seis pontos de integração por elemento.

Utilizou-se no modelo para as simulações mostradas abaixo, com exceção do exemplo (6.5), os valores dos parâmetros do sal de Avery Island (Tab. 6.1), retirados do trabalho de Yahya *et al.* [36]. Os resultados numéricos das análises foram obtidos com uma tolerância de convergência global de  $10^{-6}$ .

Tabela 6.1: Parâmetros da rocha salina de Avery Island.

$E =$	31 GPa	$b_{o_i} =$	3,37 MPa
$\nu =$	0,38	$R_o =$	3,04 MPa
$a =$	$0,176 \times 10^{-05} \text{ s}^{-1}$	$\sigma_o =$	9,15 MPa
$a_{1_s} =$	20,395 GPa	$\dot{\epsilon}_o =$	$0,135 \times 10^{-10} \text{ s}^{-1}$
$a_{1_i} =$	1218 MPa	$N =$	4
$a_{2_s} =$	$0,104 \times 10^{-2} \text{ MPa s}^{-1}$	$n =$	3
$a_{2_i} =$	$0,458 \times 10^{-15} \text{ MPa s}^{-1}$	$m =$	1
$a_3 =$	95 MPa	$C =$	1 MPa
$a_4 =$	$0,456 \times 10^{-8} \text{ MPa s}^{-1}$	$p =$	2 ou 3
$a_5 =$	27 MPa	$\bar{q} =$	2 ou 3
$a_6 =$	$0,543 \times 10^{-13} \text{ MPa s}^{-1}$	$u =$	2 ou 3
$b_{o_s} =$	1,47 MPa	$K_o =$	1 MPa

Nos testes de compressão, os valores dos deslocamentos prescritos, tensões e pressões confinantes aplicados nas amostras, são considerados positivos, assim como as medidas de tensão e deformação ilustradas nos gráficos uniaxiais obtidos pela resposta do código

desenvolvido neste trabalho.

## Exemplo 6.1 - Compressão Uniaxial

Uma análise de compressão uniaxial é realizada a fim de verificar a resposta do material a este tipo de carregamento monotônico. Neste problema, o corpo de prova é fixo na face inferior na direção  $y$ , com a face superior sujeita a um carregamento prescrito na forma de deslocamento prescrito, com amplitude final de  $\bar{u} = 9,9$  mm, sendo as demais condições de contorno de tensão livre. A Fig. 6.1 mostra as dimensões do corpo de prova as condições de contorno utilizadas no modelo axissimétrico analisado.

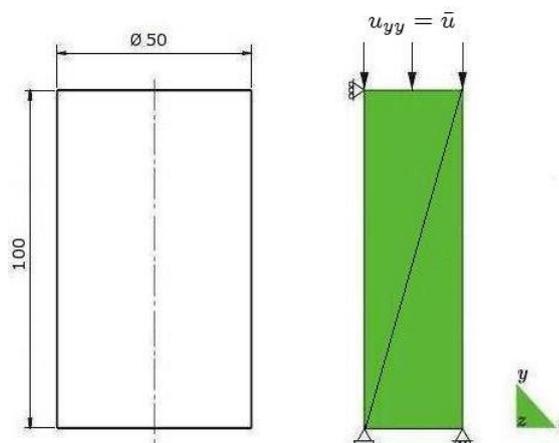


Figura 6.1: Corpo de prova - compressão uniaxial.

O carregamento implementado é em forma de uma rampa de carregamento linear na qual foram considerados 1000 incrementos, como ilustrado na Fig. 6.2.

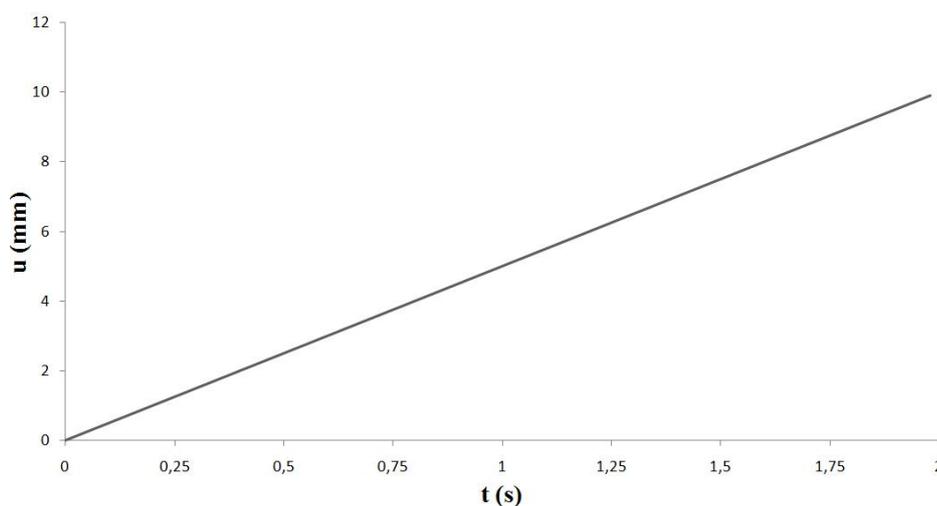


Figura 6.2: Carregamento em forma de rampa linear - compressão uniaxial.

A Fig. 6.3 mostra a distribuição das curvas de nível referentes às componentes do campo de deslocamento nas direções  $y$  e  $x$  respectivamente, no instante final da análise, em que é verificado um deslocamento máximo de  $-9,9$  mm na superfície superior do corpo de prova e um deslocamento máximo de  $1,232$  mm na superfície lateral do mesmo.

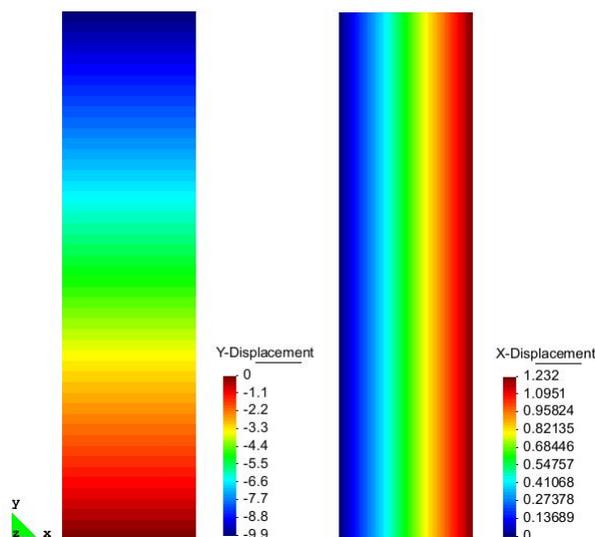


Figura 6.3: Distribuição das curvas de nível das componentes do campo de deslocamento na direção  $y$  e  $x$  - compressão uniaxial.

O diagrama tensão-deformação referente ao teste de compressão uniaxial realizado, considerando a tensão de compressão como uma medida positiva no gráfico, é apresentado na Fig. 6.4.

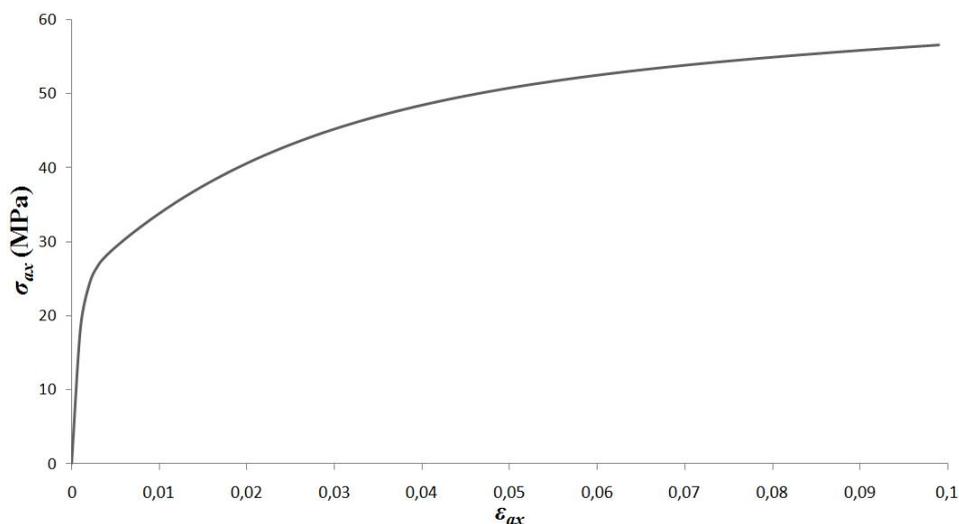


Figura 6.4: Resposta tensão-deformação numérica - compressão uniaxial.

Na Fig. 6.4 é possível verificar a evolução da tensão axial,  $\sigma_{ax}$ , com a deformação axial,  $\varepsilon_{ax}$ , onde pode ser visto o efeito de endurecimento do sal e a tendência à estabilização de  $\sigma_{ax}$ , com o prosseguimento da deformação. Nesta simulação, o sal foi deformado a um valor máximo de 9,9% visando verificar a robustez do algoritmo implementado.

A Fig. 6.5 mostra a evolução das variáveis internas  $R$ ,  $K$ ,  $\chi_s^D$  e  $\chi_t^D$ , com relação a deformação vicoplástica.

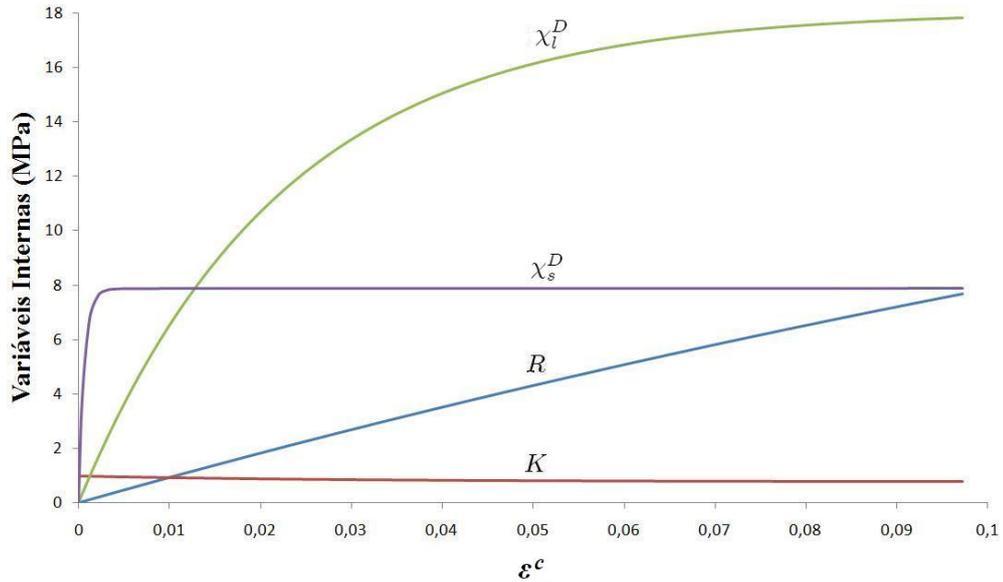


Figura 6.5: Evolução das variáveis internas versus deformação viscoplástica.

Observa-se, na Fig. 6.5, que a tensão de resistência,  $R$ , responsável pela descrição do endurecimento isotrópico, evolui de forma aproximadamente linear com a deformação viscoplástica. Já a tensão de resistência de normalização,  $K$ , inicia com valor de 1 MPa, evoluindo de forma decrescente até o instante final da análise.

Nota-se ainda, na Fig. 6.5, que a parte deviatória da tensão de repouso de curta duração,  $\chi_s^D$ , evolui e satura muito mais rapidamente que a parte deviatória da tensão de repouso de longa duração,  $\chi_t^D$ . A variável  $\chi_t^D$  requer um tempo maior de evolução para alcançar seu valor de saturação, demonstrando desta forma seu efeito de longa duração.

## Exemplo 6.2 - Cisalhamento Sob Estado Plano de Deformação

Este exemplo foi proposto visando verificar a resposta do material quando sujeito à cisalhamento sob estado plano de deformação. A amostra é engastada na parte inferior e as componentes do deslocamento na direção  $y$  são suprimidas. A parte superior é submetida a um deslocamento prescrito na direção  $x$ , com amplitude máxima de  $\bar{u} = 9,9$  mm, conforme mostra a Fig. 6.6. O deslocamento prescrito é aplicado de forma linear onde foram utilizados 1000 incrementos de carga.

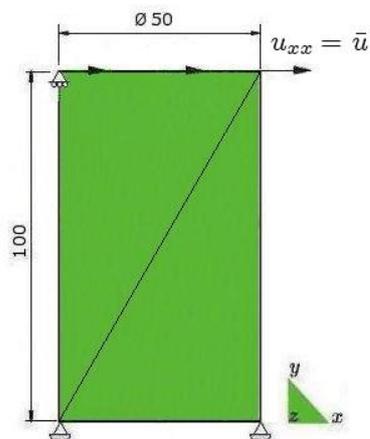


Figura 6.6: Corpo de prova - cisalhamento.

Pode-ser visto, na Fig. 6.7, a distribuição das curvas de nível referentes à componente do campo de deslocamento na direção  $x$ .

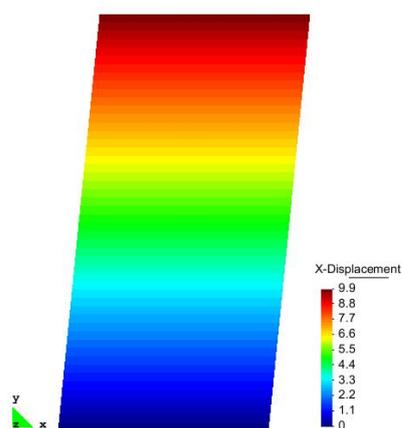


Figura 6.7: Distribuição das curvas de nível da componente do campo de deslocamento na direção  $x$  - cisalhamento.

Na Fig. 6.8 é ilustrada a relação tensão cisalhante versus distorção,  $\sigma_{xy}-\gamma_{xy}$ , a qual exibe um comportamento qualitativo similar ao observado na Fig. 6.4. Observa-se que, para um deslocamento prescrito de  $\bar{u} = 9,9$  mm, foi obtido uma distorção de 0,098 rad.

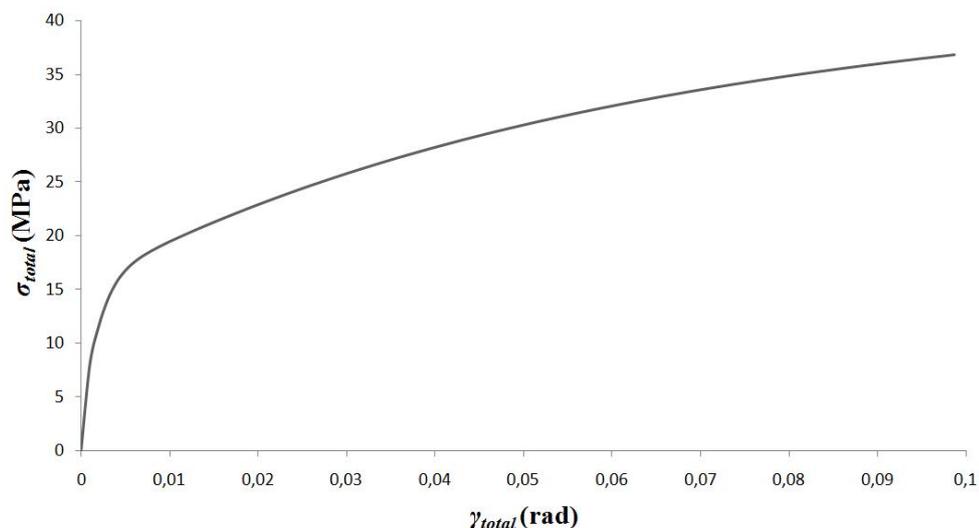


Figura 6.8: Resposta tensão-deformação numérica - cisalhamento.

Neste teste, pode ser observado, que o sal começa a sofrer deformações viscoplásticas relevantes a um nível de tensão mais baixo que o do ensaio de compressão uniaxial. Isto demonstra a baixa resistência do sal ao ser submetido a tensões de cisalhamento, quando comparado com sua resposta em um ensaio de compressão uniaxial.

### Exemplo 6.3 - Fluência à Compressão Uniaxial

O ensaio de fluência uniaxial é realizado com o intuito de verificar se o modelo descreve corretamente as curvas de fluência primária e secundária do material, e também para avaliar sua resposta sob aplicação de diferentes tensões axiais. As dimensões do corpo de prova e as condições de contorno, para este teste, são ilustradas na Fig. 6.9. Na face superior do corpo de prova é aplicado um carregamento na forma de degrau, i.e., um carregamento de tensão axial constante, o qual é mantido ao longo de um determinado período de tempo.

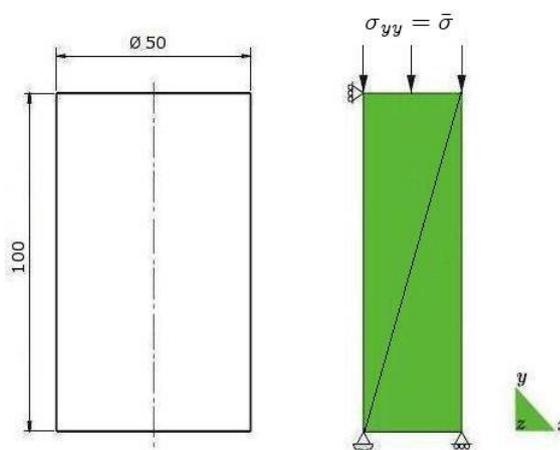


Figura 6.9: Corpo de prova - fluência uniaxial.

Foram realizadas três análises axissimétricas, com uma tensão axial constante diferente para cada ensaio, ou seja, com 11 MPa, 9 MPa e 6 MPa, por um período de 24 horas, como

ilustrado na Fig. 6.10.

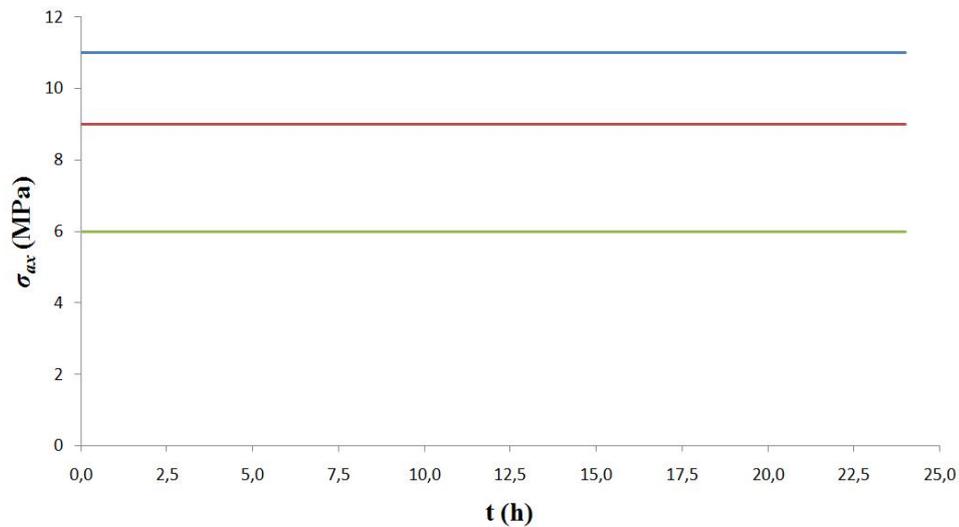


Figura 6.10: Cargas constantes e tempo dos ensaios de fluência uniaxiais.

A Fig. 6.11 ilustra a distribuição das curvas de nível referentes às componentes do campo de deslocamento nas direções  $y$  e  $x$  respectivamente, no final da análise, para um carregamento com tensão axial constante de 11 MPa, durante 24 horas. Este exemplo apresentou mais definidamente às curvas de fluência devido à maior tensão constante aplicada na simulação, conforme mostra a Fig. 6.10.

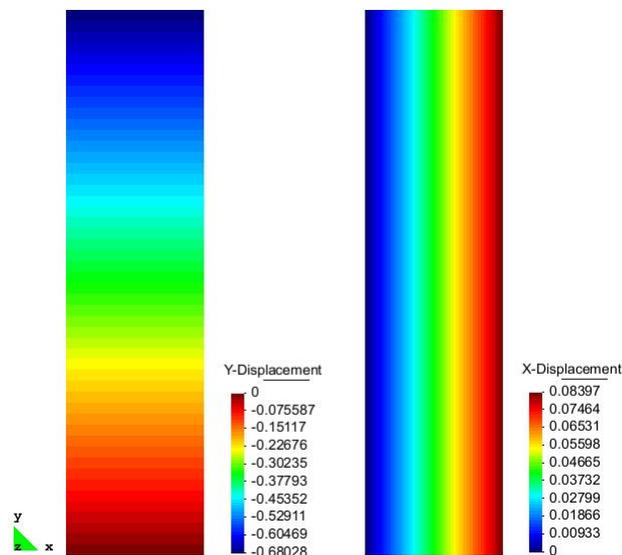


Figura 6.11: Distribuição das curvas de nível das componentes do campo de deslocamento na direção  $y$  e  $x$  - fluência uniaxial.

A Fig. 6.12 ilustra a evolução da deformação viscoplástica com relação ao tempo,  $\varepsilon^c-t$ , para os testes de fluência realizados à tensão constante de 11 MPa, 9 MPa e 6 MPa em um período 24 horas. Neste exemplo se constata a influência do nível de carga na resposta em fluência da rocha salina. Pode-se também identificar, para cada nível de carga, as regiões de fluência primária e secundária. Nota-se que, quanto maior o nível de carga maior a deformação por fluência (transiente e em regime estacionário) e que à medida que o nível de carga é diminuído a fluência primária é menos perceptível.

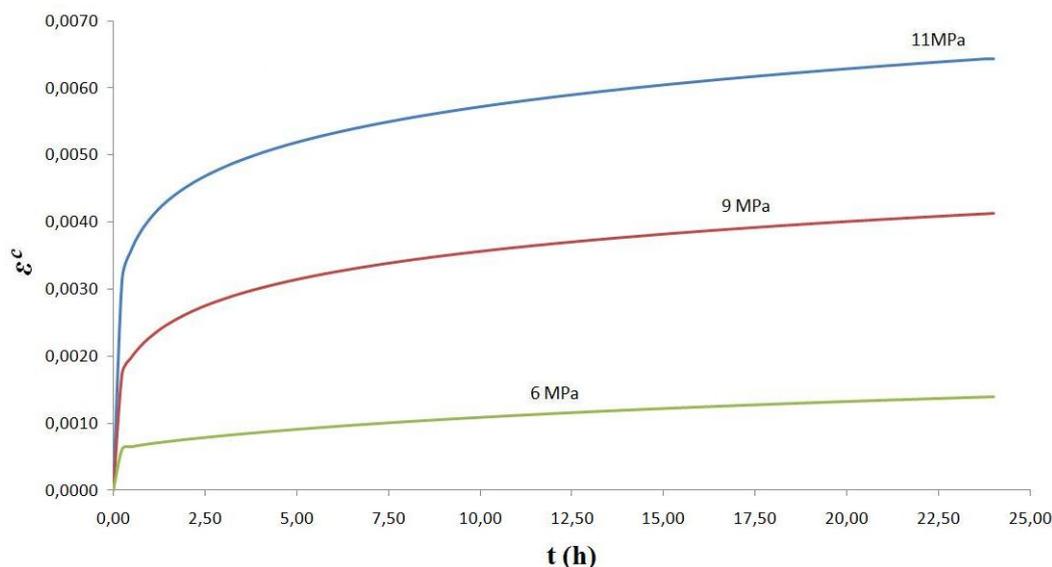


Figura 6.12: Curvas da deformação viscoplástica versus tempo para diferentes tensões axiais constantes.

As curvas uniaxiais de fluência produzidas pelo código desenvolvido neste trabalho, estão de acordo com as curvas descritas por Boyle e Spence <sup>[6]</sup> no capítulo 4 e com as curvas descritas para o sal, por Fredrich *et al.* <sup>[17]</sup>, no capítulo 2, negligenciando a fase de fluência terciária.

## Exemplo 6.4 - Compressão Triaxial

Neste exemplo foram realizados dois ensaios com o objetivo de validar o algoritmo proposto, comparando os resultados obtidos neste trabalho com os resultados experimentais e do modelo estudado, utilizando as propriedades do sal de Avery Island.

Na primeira simulação, a amostra é submetida a um deslocamento prescrito, através de uma rampa de carga linear, à uma taxa de deformação de  $8,7 \times 10^{-6} \text{s}^{-1}$ , até um valor total de  $\bar{u} = 2,12 \text{ mm}$  e sujeita a uma pressão de confinamento lateral de 15 MPa.

Na segunda simulação utilizou-se o mesmo tipo de carregamento, porém com um deslocamento prescrito total de  $\bar{u} = 2 \text{ mm}$ , realizado à uma taxa de deformação de  $8,3 \times 10^{-8} \text{s}^{-1}$ , mantendo-se a mesma pressão de confinamento lateral. O problema é tratado como axissimétrico e suas dimensões e condições de contorno são ilustradas na Fig. 6.13. Os carregamentos axiais em forma de deslocamentos prescritos foram aplicados em 1000 e 7000 incrementos respectivamente.

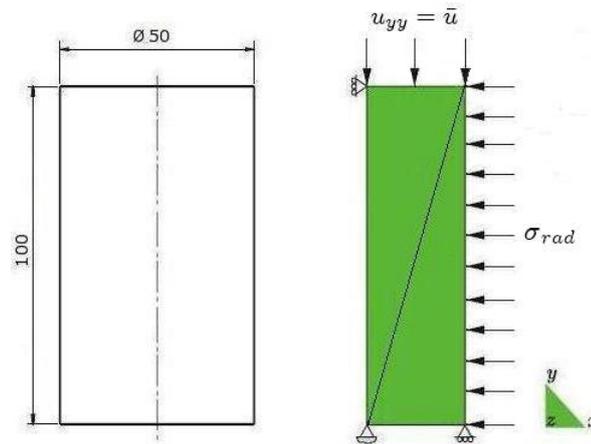


Figura 6.13: Corpo de prova - compressão triaxial.

Na Fig. 6.14 são ilustradas as curvas de nível referentes às componentes do campo de deslocamento nas direções  $y$  e  $x$  respectivamente, obtidas no final da análise, i.e.,  $t \simeq 41$  min, para o ensaio à taxa de deformação constante, de valor  $8,7 \times 10^{-6} s^{-1}$ .

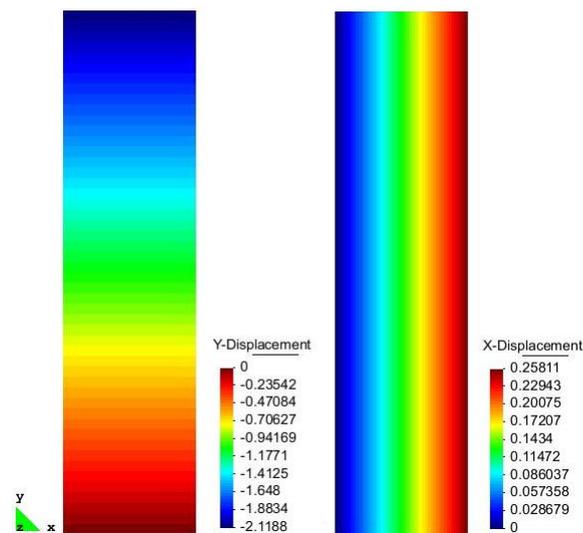


Figura 6.14: Distribuição das curvas de nível das componentes do campo de deslocamento na direção  $y$  e  $x$  - compressão triaxial ( $8,7 \times 10^{-6} s^{-1}$ ).

Na Fig. 6.15 são ilustradas as curvas de nível referentes às componentes do campo de deslocamento nas direções  $y$  e  $x$  respectivamente, obtidas no final da análise, i.e.,  $t \simeq 67$  horas, para o ensaio à taxa de deformação constante, de valor  $8,3 \times 10^{-8} s^{-1}$ .

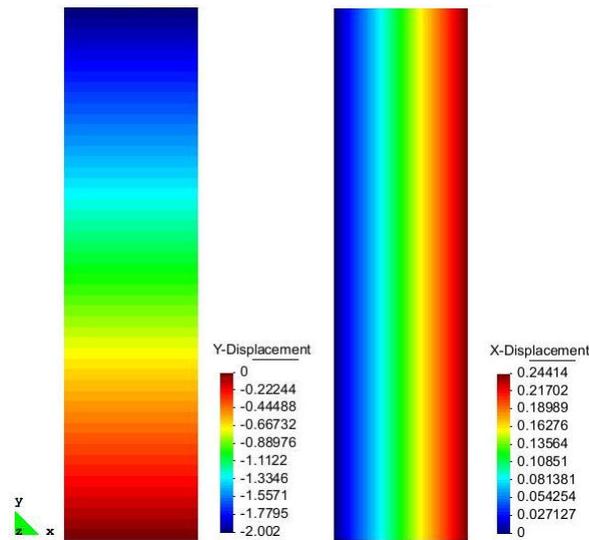


Figura 6.15: Distribuição das curvas de nível das componentes do campo de deslocamento na direção  $y$  e  $x$  - compressão triaxial ( $8,3 \times 10^{-8} s^{-1}$ ).

As curvas tensão-deformação obtidas numericamente e os valores experimentais encontrados em Yahya *et al.* [36], para as taxas de  $8,3 \times 10^{-8} s^{-1}$  e  $8,7 \times 10^{-6} s^{-1}$ , são apresentados na Fig. 6.16. Observa-se que o endurecimento do material devido ao efeito da taxa de deformação é bem reproduzido pelo modelo. Isto demonstra que o comportamento transiente em curto prazo da rocha salina é bem representado pelas leis de evolução das variáveis internas.

Para este tipo de ensaio, a medida de tensão representada no gráfico tensão-deformação é denominada tensão diferencial (“stress difference”), sendo esta a diferença entre a tensão axial e a pressão de confinamento lateral aplicadas na amostra, isto é,  $\Delta\sigma = \sigma_{ax} - \sigma_{rad}$ .

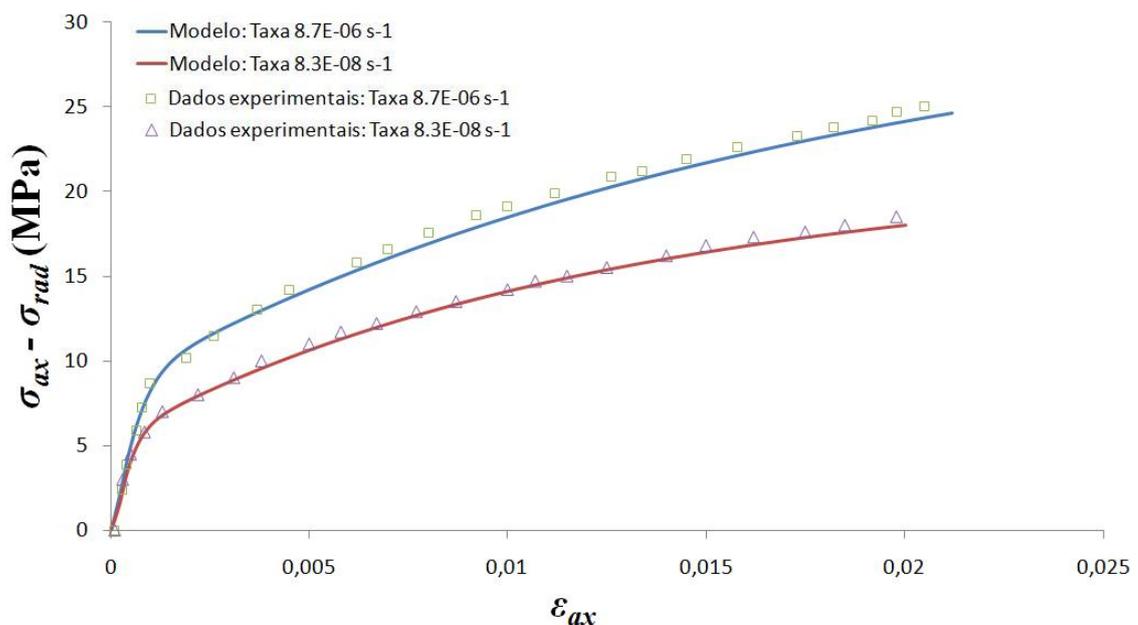


Figura 6.16: Respostas medidas e calculadas da rocha salina de Avery Island durante carregamentos com taxa de deformação constante.

Através das simulações realizadas neste exemplo, verificou-se que a resposta pro-

duzida pelo código desenvolvido neste trabalho, apresenta boa concordância com os valores numéricos e experimentais encontrados em Yahya *et al.* [36], para a rocha salina de Avery Island.

## Exemplo 6.5 - Compressão Triaxial - Sal Artificial

Este exemplo foi executado com o intuito de validar o algoritmo proposto, comparando os resultados numéricos obtidos neste trabalho com dados experimentais e resultados numéricos encontrados em Yahya *et al.* [36]. Para este caso, utilizou-se as propriedades de uma rocha salina artificial produzida em laboratório, encontradas em Yahya *et al.* [36] e dadas na Tab. 6.2.

Tabela 6.2: Parâmetros da rocha salina artificial.

$E =$	22,5 GPa	$b_{o_l} =$	5 MPa
$\nu =$	0,25	$R_o =$	4,51 MPa
$a =$	$1 \times 10^{-7} \text{ s}^{-1}$	$\sigma_o =$	11,85 MPa
$a_{1_s} =$	19,5 GPa	$\dot{\epsilon}_o =$	$0,81 \times 10^{-13} \text{ s}^{-1}$
$a_{1_l} =$	272 MPa	$N =$	4
$a_{2_s} =$	-	$n =$	3
$a_{2_l} =$	-	$m =$	1
$a_3 =$	936 MPa	$C =$	1 MPa
$a_4 =$	-	$p =$	2 ou 3
$a_5 =$	728 MPa	$\bar{q} =$	2 ou 3
$a_6 =$	-	$u =$	2 ou 3
$b_{o_s} =$	1,012 MPa	$K_o =$	1 MPa

Nesta análise axissimétrica, a amostra é submetida a um deslocamento prescrito, através de uma rampa de carga linear, à uma taxa de deformação de  $3,8 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ , até um valor total de  $\bar{u} = 5,88 \text{ mm}$  e sujeita a uma pressão de confinamento lateral de 6,9 MPa. O carregamento axial em forma de deslocamento prescrito foi aplicado em 1175 incrementos. As dimensões da amostra e as condições de contorno aplicadas são as mesmas ilustradas na Fig. 6.13.

A Fig. 6.17 ilustra a distribuição das curvas de nível referentes às componentes do campo de deslocamento nas direções  $y$  e  $x$  respectivamente, obtidas no instante final da análise em  $t \simeq 26 \text{ min}$ .

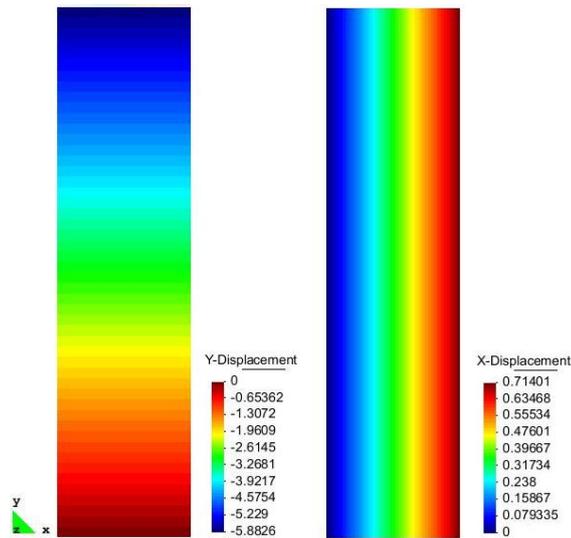


Figura 6.17: Distribuição das curvas de nível das componentes do campo de deslocamento nas direções  $x$  e  $y$  - compressão triaxial ( $3,8 \times 10^{-5} \text{s}^{-1}$ ).

A curva tensão-deformação obtida numericamente e os valores experimentais encontrados em Yahia *et al.* [36], à taxa de  $3,8 \times 10^{-5} \text{s}^{-1}$ , são apresentados na Fig. 6.18. São ilustradas também as curvas  $R$ - $\varepsilon_{ax}$ ,  $K$ - $\varepsilon_{ax}$ ,  $\chi_s^D$ - $\varepsilon_{ax}$  e  $\chi_l^D$ - $\varepsilon_{ax}$ .

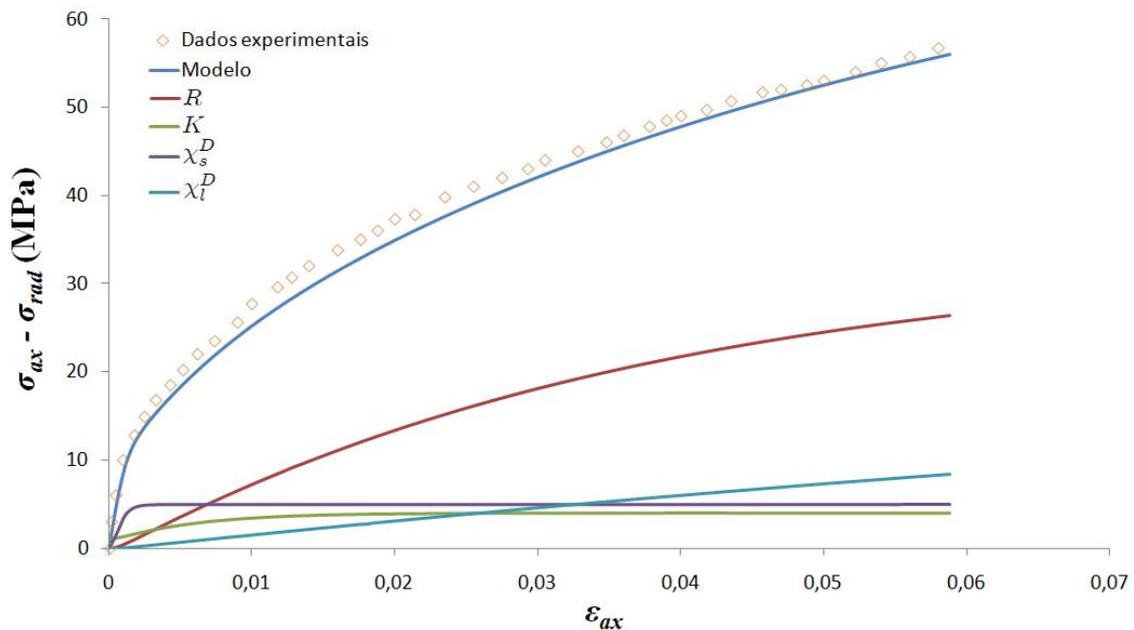


Figura 6.18: Resposta medida e calculada da rocha salina artificial, e a evolução das variáveis internas com a deformação.

Na Fig. 6.19 é mostrada a evolução com relação ao tempo das variáveis internas  $R$ ,  $K$ ,  $\chi_s^D$  e  $\chi_l^D$ . Observa-se que a tensão de resistência,  $R$ , evolui não linearmente, sendo a variável que atinge o maior valor no instante final da análise. A tensão de resistência de normalização,  $K$ , apresenta uma evolução crescente até determinado valor e começa a decrescer.

Pode-se ver na Fig. 6.19, que a tensão de repouso de curta duração,  $\chi_s^D$ , evolui e satura mais rapidamente, enquanto que a tensão de repouso de longa duração,  $\chi_l^D$ , evolui

de forma lenta e demora mais para saturar.

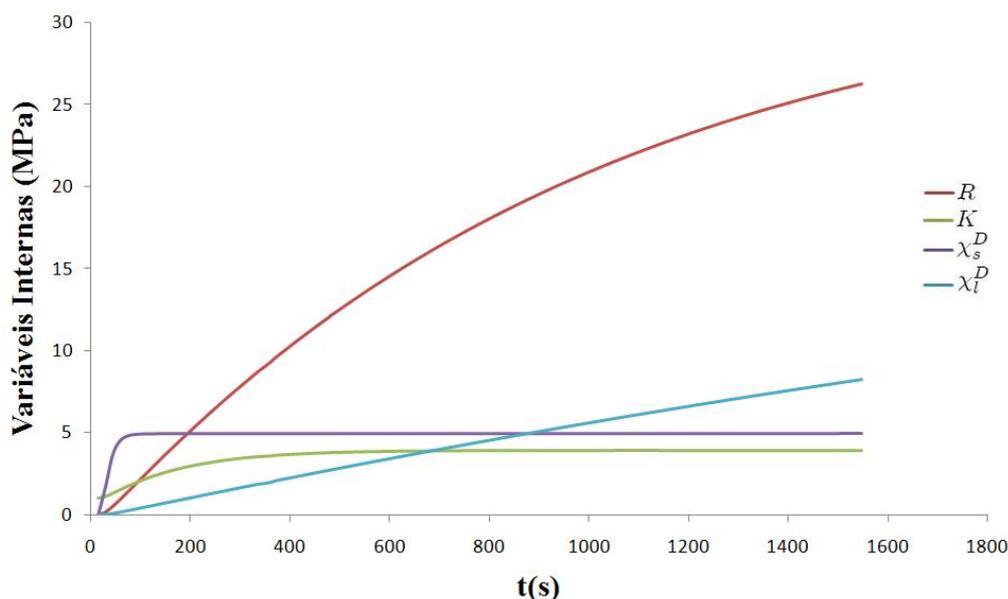


Figura 6.19: Evolução das variáveis internas com o tempo - sal artificial.

Com esta simulação, verificou-se que os valores obtidos numericamente e experimentalmente por Yahya *et al.* [36] para a rocha salina artificial desenvolvida em laboratório, apresentam boa concordância com a resposta produzida pelo código desenvolvido neste trabalho.

## Exemplo 6.6 - Fluência à Compressão Triaxial

O ensaio de fluência à compressão triaxial é realizado a fim de verificar a resposta do material sob a aplicação de diferentes níveis de tensão diferencial constante. Lembrando que este teste é de extrema importância para averiguar o regime dúctil e frágil de rochas salinas submetidas a carregamentos constante, conforme discutido no seção (2.1). Nesta simulação, a parte superior do corpo de prova é submetida a um carregamento na forma de degrau, i.e., um carregamento de tensão axial constante, o qual é mantido ao longo de um determinado período de tempo, e a face lateral do corpo é sujeita a uma pressão confinante lateral. As dimensões do corpo de prova e as condições de contorno são ilustradas na Fig. 6.20.

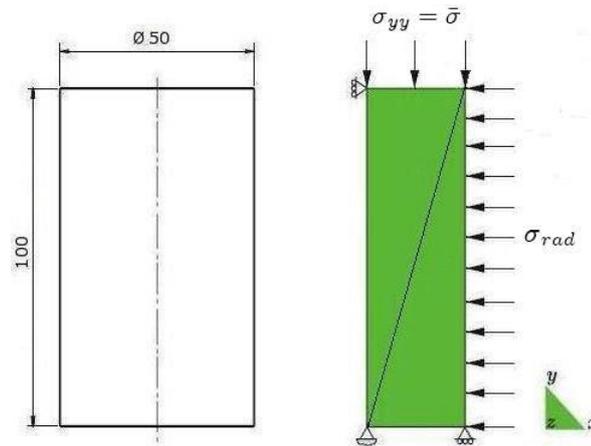


Figura 6.20: Corpo de prova - fluência à compressão triaxial.

Foram efetuadas três análises axissimétricas com duração de 48 horas, em cada uma o corpo de prova foi submetido a uma tensão diferencial constante de valor diferente, isto é, 5 MPa, 10 MPa e 15 MPa, conforme mostra a Fig. 6.21. Estas tensões diferenciais foram determinadas pela aplicação das seguintes tensões axiais e pressões confinantes laterais:

1.  $\sigma_{ax} = 10$  MPa e  $\sigma_{rad} = 5$  MPa;
2.  $\sigma_{ax} = 20$  MPa e  $\sigma_{rad} = 10$  MPa;
3.  $\sigma_{ax} = 20$  MPa e  $\sigma_{rad} = 5$  MPa.

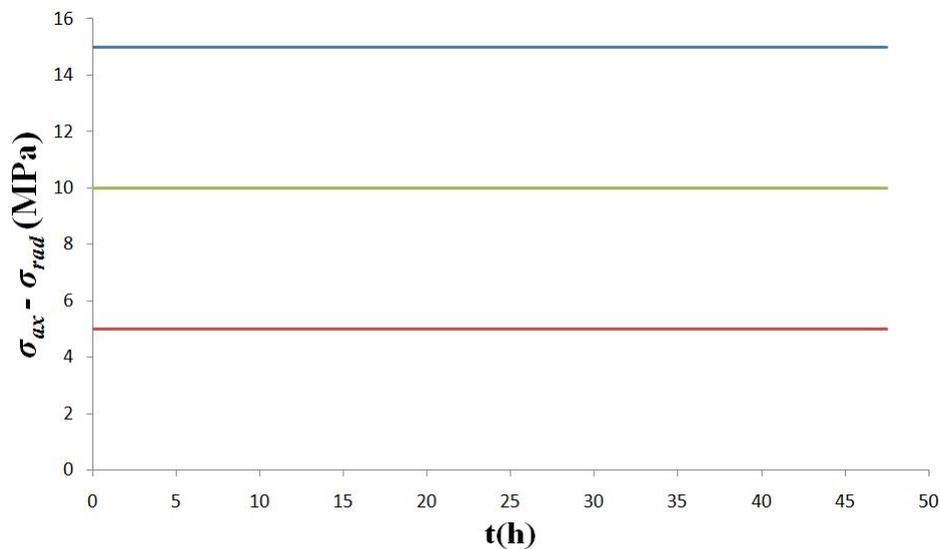


Figura 6.21: Cargas constantes e tempo dos ensaios de fluência à compressão triaxial.

A Fig. 6.22 ilustra a distribuição das curvas de nível referentes às componentes do campo de deslocamento nas direções  $y$  e  $x$  respectivamente, obtidas no instante final da análise, para o corpo de prova submetido a uma tensão diferencial constante de 15 MPa.

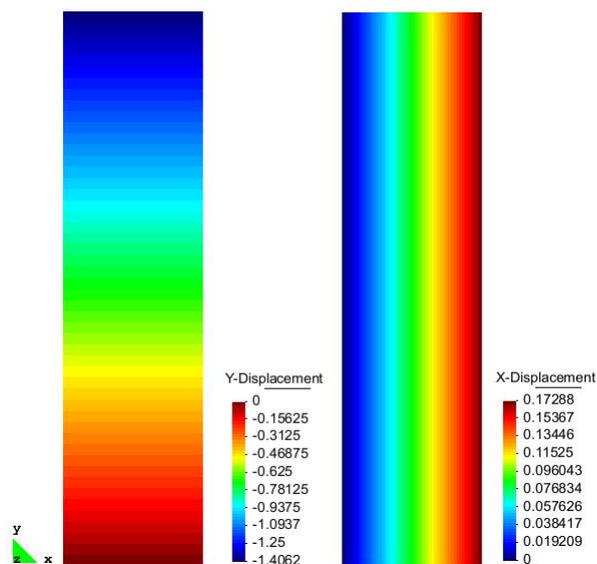


Figura 6.22: Distribuição das curvas de nível das componentes do campo de deslocamento nas direções  $x$  e  $y$  - fluência triaxial.

A Fig. 6.23 mostra a evolução da deformação viscoplástica com relação ao tempo,  $\varepsilon^c$ - $t$ , para os testes de fluência triaxiais realizados à tensão diferencial constante de 5 MPa, 10 MPa e 15 MPa por um período de 48 horas. Neste exemplo é possível identificar, para cada nível de carga, as regiões de fluência primária e secundária, conforme visto no exemplo (6.3). Também se verifica a influência do nível de carga na resposta em fluência da rocha salina, isto é, quanto maior a tensão diferencial,  $\Delta\sigma$ , maior a deformação por fluência transiente e em regime estacionário.

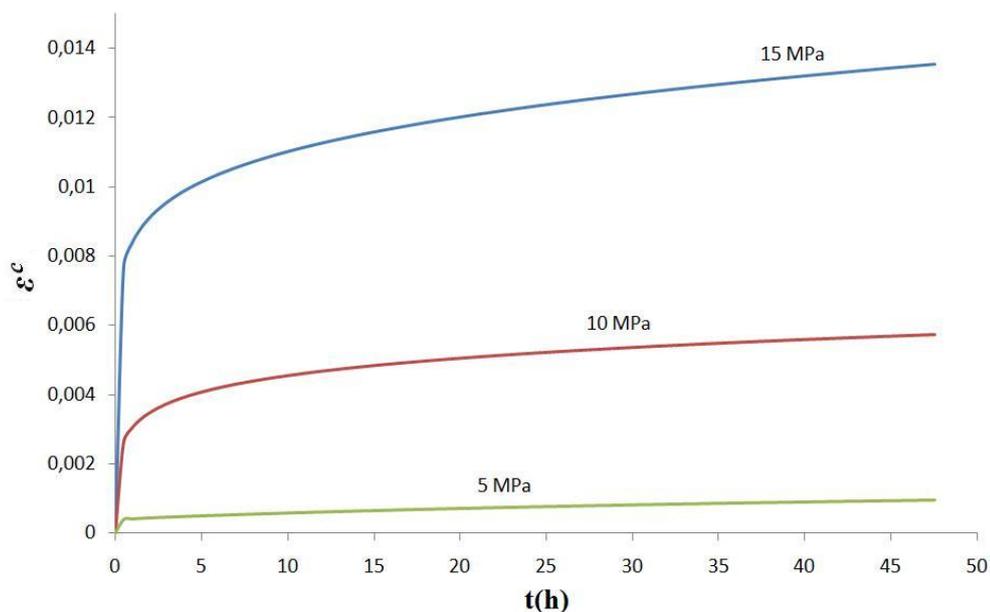


Figura 6.23: Curvas da deformação viscoplástica versus tempo para diferentes tensões diferenciais constantes.

As curvas uniaxiais dos ensaios de fluência à compressão triaxial produzidas pelo código desenvolvido neste trabalho, estão de acordo com as curvas descritas para o sal, por Fossum e Fredrich <sup>[16]</sup>, no capítulo 2, desconsiderando a fase de fluência terciária e

exibem um comportamento qualitativo similar às curvas obtidas nos testes encontrados em Yahya *et al.* [36].

## Exemplo 6.7 - Relaxação

O objetivo deste teste é verificar se o modelo descreve corretamente as curvas de relaxação. Este ensaio consiste basicamente em manter um nível de deformação constante no corpo de prova ao longo de um determinado período de tempo e medir a variação da tensão ao longo do tempo. Nesta simulação, a extremidade superior do corpo de prova é submetida a uma carga na forma de degrau, isto é, um carregamento de deslocamento prescrito que produz uma deformação axial constante durante um determinado tempo e a face lateral sujeita a uma pressão confinante lateral. As dimensões e as condições de contorno do modelo axissimétrico são idênticas às ilustradas na Fig. 6.13.

Foram efetuadas três simulações com um carregamento de deslocamento prescrito diferente para cada ensaio, ou seja, 0,4 mm, 0,3 mm e 0,2 mm, os quais produziram as deformações axiais constantes demonstradas na Fig. 6.24. A pressão de confinamento lateral, 5 MPa, e o tempo de duração do teste, 24 horas, foram os mesmos para todas as simulações.

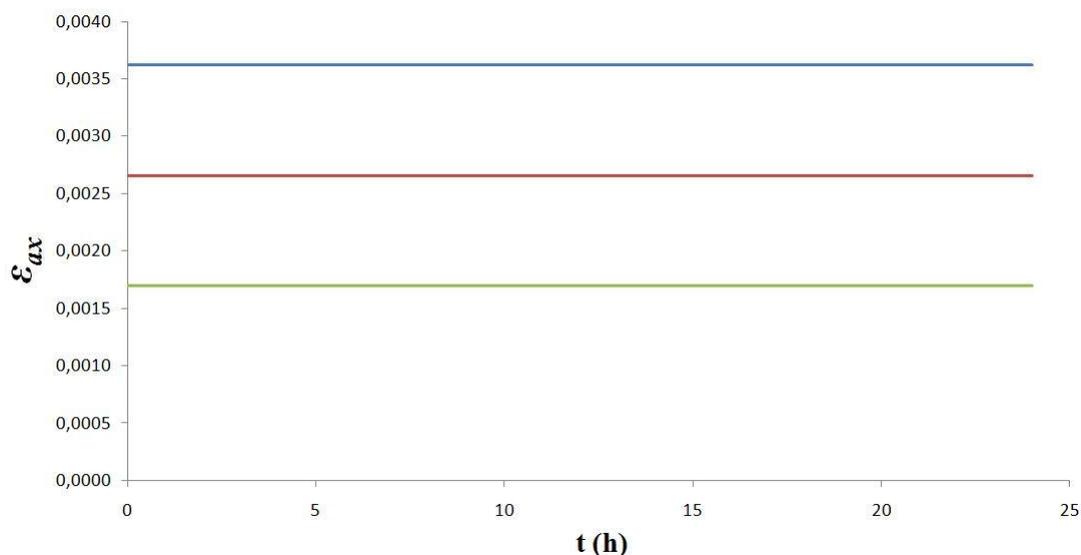


Figura 6.24: Deformações axiais constantes e tempo dos ensaios de relaxação.

Na Fig. 6.25 são apresentadas as curvas de nível referentes às componentes do campo de deslocamento nas direções  $y$  e  $x$  no instante final da análise, para o teste com 0,4 mm. O deslocamento máximo na direção  $y$  foi de  $-0,4$  mm conforme imposto no carregamento, e na direção  $x$  foi de 0,047 mm.

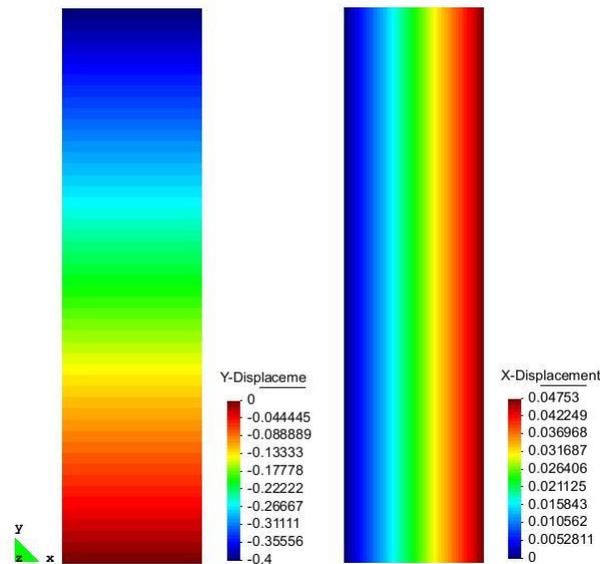


Figura 6.25: Distribuição das curvas de nível das componentes do campo de deslocamento nas direções  $x$  e  $y$  - relaxação.

A Fig. 6.26 ilustra as curvas de variação das tensões diferenciais ao longo do tempo para os diferentes níveis de deformação constante aplicados durante 24 horas.

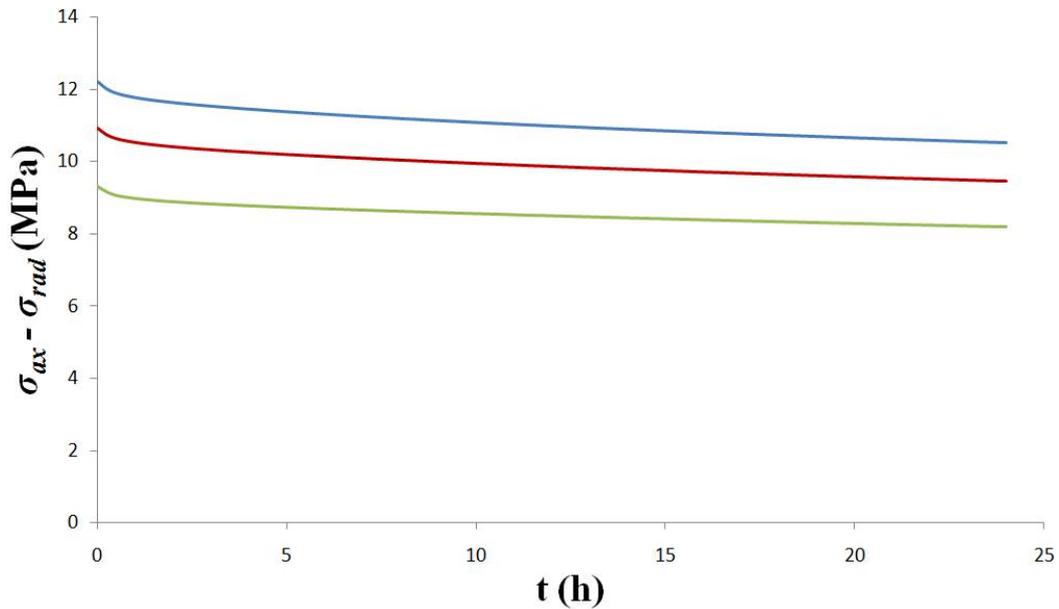


Figura 6.26: Curvas de variação das tensões diferenciais com o tempo.

Observando as curvas da Fig. 6.26, verifica-se que estas exibem um comportamento qualitativo similar às curvas observadas em Yahya *et al.* [36], ou seja, a resposta produzida pelo código desenvolvido neste trabalho, representa adequadamente a relaxação das tensões diferenciais, para diferentes níveis de deformação axial constante.

## Exemplo 6.8 - Compressão Diametral

Este ensaio consiste na aplicação de uma carga de compressão diametral visando obter o limite de resistência à tração do material, conforme já discutido no capítulo (1). Neste exemplo é feito uma simulação simplificada do ensaio de compressão diametral, com a intenção de avaliar indiretamente a resistência à tração da rocha salina. Devido às condições de simetria, a discretização foi realizada no quadrante superior da seção transversal cilíndrica, considerando um estado plano de deformações.

A parte superior do cilindro foi cortada para a aplicação da carga em uma área maior e assim poder simular de forma mais realística o teste. Esta opção foi adotada, já que o programa não permite a imposição da condição de contato unilateral com atrito, o qual seria ideal para simulação deste ensaio a fim de evitar a ascensão localizada do sal. Note que as regiões próximas ao local em que se aplica o carregamento, não são de interesse nesta simulação. A carga aplicada é um deslocamento prescrito em forma de rampa linear que, no tempo máximo da análise, atinge  $\bar{u} = 2$  mm, utilizando 20000 incrementos de carregamento, similar ao carregamento do exemplo (6.1). As dimensões do corpo de prova, as condições de contorno e a malha sobre a geometria inicial são mostradas na Fig. 6.27 abaixo.

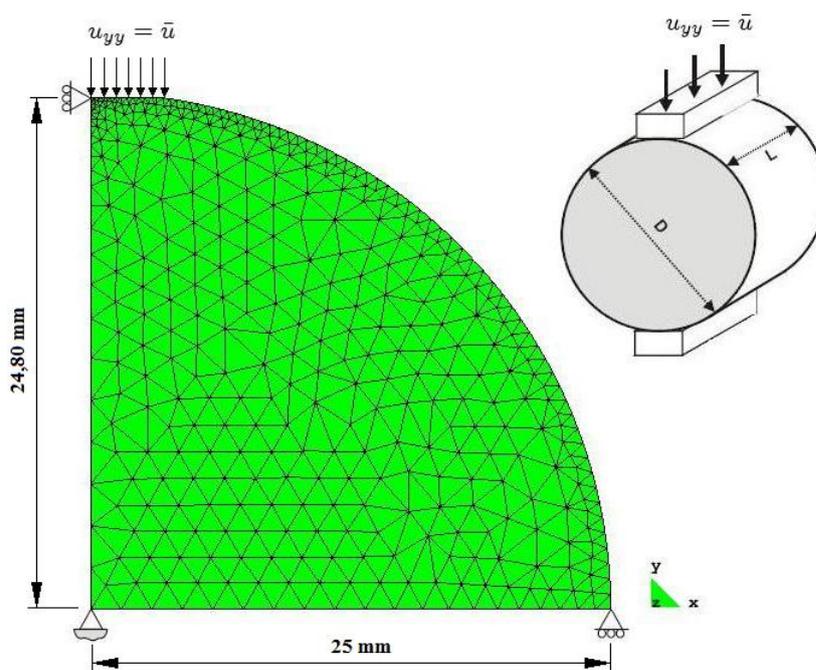


Figura 6.27: Corpo de prova - compressão diametral.

Nesta análise utilizou-se uma malha não estruturada para melhor se adaptar à geometria do corpo de prova, composta por 742 elementos, totalizando 1603 nós.

A Fig. 6.28 ilustra a distribuição das curvas de nível referentes às componentes do campo de deslocamento na direção  $x$ , obtida no instante final da análise.

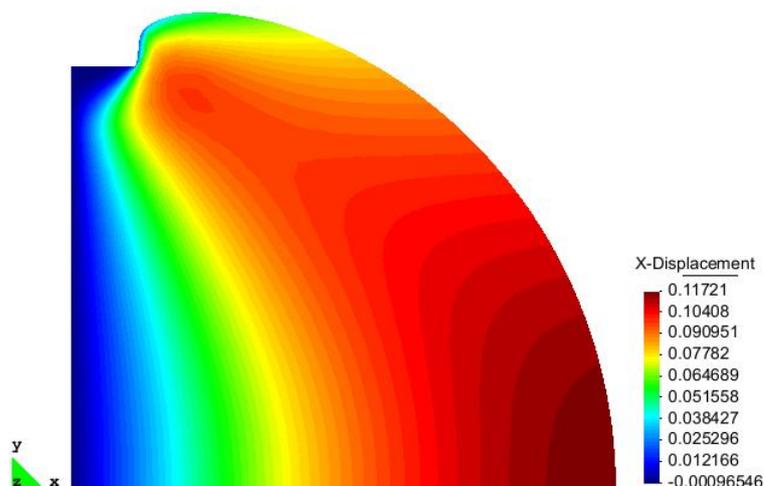


Figura 6.28: Distribuição das curvas de nível das componentes do campo de deslocamento na direção  $x$  - compressão diametral.

A Fig. 6.29 mostra a distribuição das curvas de nível referentes às componentes do campo de deslocamento na direção  $y$ , obtida no instante final da análise.

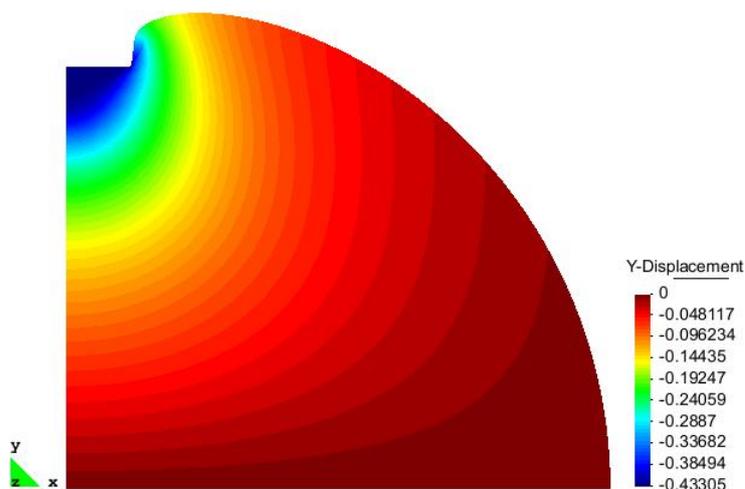


Figura 6.29: Distribuição das curvas de nível das componentes do campo de deslocamento na direção  $y$  - compressão diametral.

O deslocamento máximo atingido na direção  $y$  foi de  $-0,43$  mm, ou seja, aproximadamente 21,65% do valor inicialmente prescrito. Isto se deve a problemas de condicionamento numérico decorrente dos valores utilizados para os parâmetros materiais e de distorções excessivas da malha na vizinhança da extremidade de aplicação do deslocamento prescrito.

A Fig. 6.30 ilustra a distribuição das curvas de nível referentes à componente  $\sigma_{xx}$  do tensor tensão, obtida no instante final da análise.

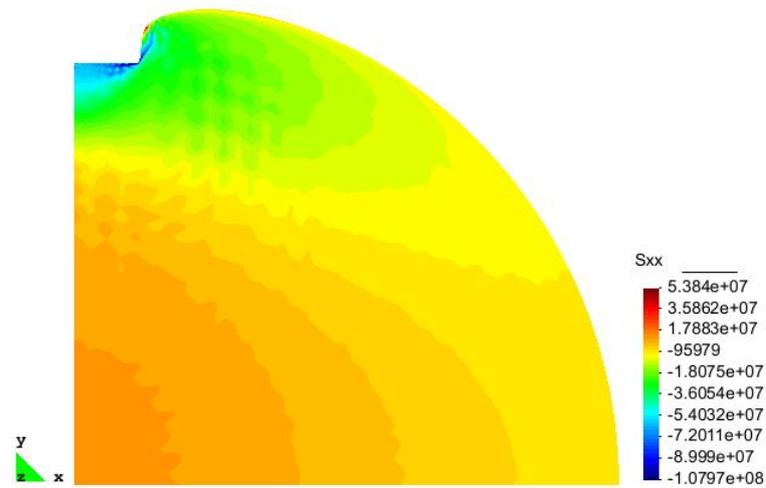


Figura 6.30: Distribuição das curvas de nível referentes à componente  $\sigma_{xx}$  do tensor tensão.

A Fig. 6.31 ilustra a distribuição das curvas de nível referentes à componente  $\sigma_{yy}$  do tensor tensão, obtida no instante final da análise.

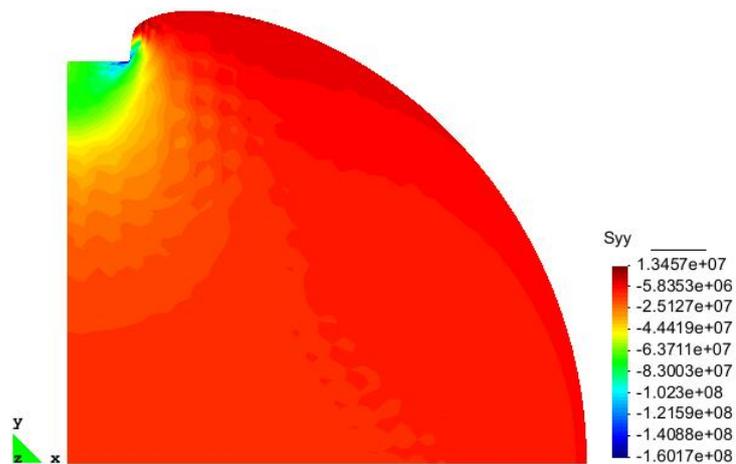


Figura 6.31: Distribuição das curvas de nível referentes à componente  $\sigma_{yy}$  do tensor tensão.

A Fig. 6.32 ilustra a distribuição das curvas de nível referentes à componente  $\sigma_{zz}$  do tensor tensão, obtida no instante final da análise.

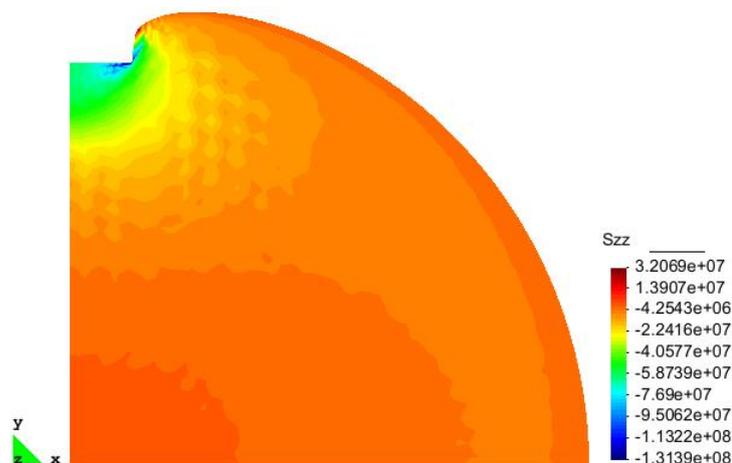


Figura 6.32: Distribuição das curvas de nível referentes à componente  $\sigma_{zz}$  do tensor tensão.

A Fig. 6.33 ilustra a distribuição das curvas de nível referentes à componente  $\sigma_{xy}$  do tensor tensão, obtida no instante final da análise.

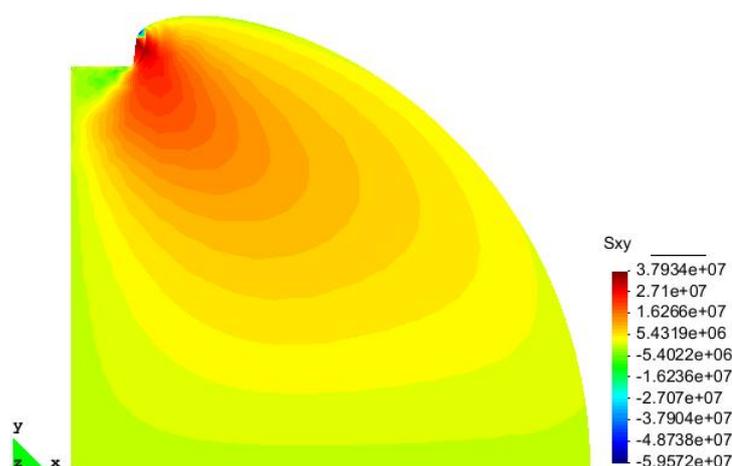


Figura 6.33: Distribuição das curvas de nível referentes à componente  $\sigma_{xy}$  do tensor tensão.

Nas Figs. 6.30-6.33 observa-se que a região de maior concentração de tensão está no canto direito do corte realizado para distribuir o carregamento aplicado. Esta região conforme já mencionado não é de interesse nessa simulação. A região de interesse é o centro do cilindro onde a rocha salina geralmente rompe por tração (conforme visto na Fig. 2.13). A Fig. 6.30 mostra a tensão de Cauchy na direção  $x$  ( $\sigma_{xx}$ ) no instante final da análise, em que pode-se ver que a região sob maior esforço de tração, desconsiderando regiões próximas ao corte, é a do centro do cilindro, o que está de acordo com as observações experimentais. Na Fig. 6.31, a região sob maior tensão ( $\sigma_{yy}$ ) está localizada na parte superior da circunferência. Isso caracteriza a ascensão do sal devido à pequena área de aplicação da carga e a baixa resistência do material à deformação. Caso fosse considerada uma condição de contato unilateral na região de prescrição de deslocamento, a área de contato resultante da deformação seria maior reduzindo assim a distorção da malha, pela deformação localizada excessiva, e evitaria uma ascensão exagerada do sal, perto da extremidade de aplicação do deslocamento prescrito.

# Capítulo 7

## Conclusões

Nesta dissertação, realiza-se um estudo sobre as rochas salinas, enfatizando o comportamento destas nas condições para o desenvolvimento de campos petrolíferos. Assim, foi verificado o mapa dos mecanismos de deformação do sal na subsuperfície e os mecanismos de deformação e processos de recuperação que atuam nestas circunstâncias. Fatores relevantes que influenciam no comportamento destas rochas também foram brevemente abordados, como, temperatura, umidade e pressão de confinamento, além de suas características físicas, químicas e mineralógicas. Os ensaios mecânicos utilizados na identificação das propriedades de resistência e deformação do sal foram descritos e simulados numericamente empregando o modelo considerado.

A fase seguinte do trabalho consistiu no estudo dos conceitos básicos necessários para modelagem do comportamento de sólidos por teorias formuladas dentro do contexto da termodinâmica dos processos irreversíveis e no estudo do comportamento da fluência dos metais, devido à similaridade com o comportamento das rochas salinas. Após, explorou-se o modelo elaborado por Yahya *et al.* [36], o qual foi utilizado no desenvolvimento deste trabalho por representar o comportamento dúctil de rochas salinas na faixa de interesse, sendo em seguida efetuado seu desenvolvimento numérico para a posterior implementação computacional.

Na discretização temporal do modelo foi proposta a utilização de um algoritmo denominado método de euler implícito. Através do qual se chega a um sistema de equações algébricas não lineares as quais são resolvidas pelo método de Newton. Apesar das dificuldades do método, devido à complexidade para solução do sistema de equações não lineares resultantes, este proporciona maior estabilidade na solução quando comparado com os métodos explícitos.

O algoritmo proposto mostrou-se bastante robusto dentro do contexto de pequenas deformações. Isto foi conferido pela simulação dos exemplos (6.1) e (6.2) em que foram aplicados nos corpos de prova deformações de aproximadamente 10% e o algoritmo manteve sua estabilidade ao longo das simulações. Exceto para teste de compressão diametral, no qual o corpo de prova foi submetido a uma deformação de 8%, mas devido à distorção excessiva na malha e a problemas de condicionamento numérico, a deformação máxima atingida foi de 1,7%.

Com a simulação dos ensaios à compressão triaxial (exemplo 6.4 e 6.5), foi possível validar o algoritmo proposto comparando os resultados numéricos obtidos aqui com os resultados numéricos e experimentais encontrados em Yahya *et al.* [36], os quais apresentaram boa concordância. Já com a simulação dos ensaios de fluência e relaxação pode-se verificar que as curvas  $\varepsilon^c-t$  e  $\Delta\sigma-t$  apresentaram um comportamento qualitativo similar

ao observado na literatura.

Finalizando, conclui-se que o código desenvolvido neste trabalho, representa adequadamente o comportamento da deformação por fluência (transiente e em regime estacionário) e da relaxação das tensões diferencias, tanto para curtos quanto para longos períodos de tempo. Mostrando, deste modo, que pode ser empregado na simulação de uma ampla gama de testes mecânicos associados à ductilidade de rochas salinas.

## 7.1 Sugestões para Trabalhos Futuros

Desenvolvimento e implementação de um modelo para termo-viscoplasticidade.

Incorporação de uma teoria de dano ao modelo para a aplicação do modelo em cavernas de depósitos de rejeitos radioativos, armazenamento de gás e petróleo entre outras aplicações.

Implementação do modelo em software comercial de análise para simulação de poços verticais, horizontais e direcionais em seções salinas juntamente com outras formações geológicas.

# Referências Bibliográficas

- [1] AMORIN J., O. *Caracterização Geológica do Fundo Marinho em Área Afetada por Diapirismo Salino em Águas Ultraprofundas da Bacia de Campos* Dissertação de M.Sc., UFPE, Recife, PE, Brasil, 2008.
- [2] AUBERTIN, M., YAHYA O. M. L., & JULIEN, M. Modeling mixed hardening of alkali halides with a modified version of an internal state variables model *International Journal of Plasticity* 15 (1999), 1067-1088.
- [3] BENGALY A., P. *Modelagem Geométrica e Termal Tridimensional de Corpos Salíferos em Bacias Sedimentares* Dissertação de M.Sc., UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2003.
- [4] BORGES, G. R. *Avaliação Numérica de Perturbações de Tensões Associadas a Estruturas Salíferas e suas Influências na Estabilidade de Poços*. Dissertação de M.Sc., UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2008.
- [5] BOTELHO F., V., C. *Análise Numérica do Comportamento Mecânico do Sal em Poços de Petróleo* Dissertação de M.Sc., PUC, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2008.
- [6] BOYLE, J. T., & SPENCE, J. *Stress Analysis for Creep*, 1<sup>st</sup> ed., Butterwoth, 1983.
- [7] CALLISTER W.D. *Materials science and engineering: an introduction*, 5<sup>th</sup> ed. New York: J. Wiley, 1999.
- [8] CHAN, K. S., MUNSON, D. E., FOSSUM, A. F., & BODNER, S. R. A constitutive model for representing coupled creep, fracture, and healing in rock salt. *Conference on the mechanical behavior of salt* Montreal, Canada, 1996.
- [9] COIMBRA, A. L., *Novas Lições de Mecânica do Contínuo*, 2<sup>nd</sup> ed., Editora Edgard Blücher Ltda, São Paulo, 1981.
- [10] COOK, R. D., MALKUS, D.,S., PLESHA, M.,E., & WITT, R.,J. *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, 4<sup>th</sup> ed., New York, John Wiley and Sons, 2002.
- [11] CRISTESCU, N. D., & GIODA, G. *Visco-plastic behaviour of geomaterials*. Springer Verlag Wien, New York, 1994.
- [12] DHATT, G., & TOUZOT, G. *The Finite Element Method Displayed*, John Wiley and Sons, 1984.

- [13] ENCYCLOPEDIA BRITANNICA. *evaporite: marine sedimentation models*. Disponível em: <<http://www.britannica.com/EBchecked/topic/197000/evaporite>> Acesso em 27 Jun. 2009.
- [14] FARMER, P., MILLER, D., PIEPRZAK, A., RUTLEDGE, J., & WOODS, R. Exploring the Subsalt. *Oilfield Review* (1996), 50-64.
- [15] FISH, J., & BELYTSCHKO, T. *A First Course in Finite Elements*. New York, John Wiley and Sons, 2007.
- [16] FOSSUM, A. F., & FREDRICH J. T. *Salt Mechanics Primer for Near-Salt and Sub-Salt Deepwater Gulf of Mexico*. Field Developments. Sandia National Laboratories Report 2063, 2002.
- [17] FREDRICH, J. T., FOSSUM, A. F., & HICKMAN, R.J. Mineralogy of deepwater Gulf of Mexico salt formations and implications for constitutive behavior. *Journal of Petroleum Science and Engineering* 57 (2007), 354-374.
- [18] FREITAS, J. T. R. *Ciclos Depositionais Evaporíticos da Bacia de Santos: Uma Análise Cicloestratigráfica a Partir de Dados de 2 Poços e de Traços de Sísmica*. Dissertação de M.Sc., UFRGS, Rio Grande do Sul, RS, Brasil, 2006.
- [19] GLOSSÁRIO GEOLÓGICO ILUSTRADO. *camadas evaporíticas*. Disponível em: <<http://www.earthscienceworld.org/imagebank/search/lightbox2.html?ID=ho7ebe>> Acesso em 28 Jun. 2009.
- [20] GOLDBERG R. K., ROBERTS G. D., GILAT, A. *Implementation of an Associative Flow Rule Including Hydrostatic Stress Effect Into the High Strain Rate Deformation Analysis of Polymer Matrix Composites*. NASA Center for Aerospace Information. Report Number 2003-212382, 2003.
- [21] GRAVINA, C. C. *Simulação Numérica do Comportamento Mecânico do Sal em Poços de Petróleo*. Dissertação de M.Sc., UNICAMP, São Paulo, SP, Brasil, 1997.
- [22] GURTIN, N. E. *An introduction to continuum mechanics*. Mathematics in Science and Engineering. Academic Press, New York, 1981.
- [23] KENSAKOO T., *Relationship Between Mineralogy and Engineering Properties of Rock Salt*. Dissertação de M.Sc., Suranaree University of Technology, Tailândia, 2006.
- [24] KLAYVIMUT K., *Mechanical Performance of Underground Excavation in Rock Salt Formation for Nuclear Waste Repository in Northeastern Thailand* Dissertação de M.Sc., Suranaree University of Technology, Tailândia, 2003.
- [25] LEMAITRE J., & CHABOCHE J. L. *Mechanics of Solid Materials*. Cambridge University Press, 1990.
- [26] LEMAITRE, J. A. *Course on Damage Mechanics*. Springer, Berlin, Germany, 1996.
- [27] LUBLINER, J., *Plasticity Theory*. Macmillan Publishing Company, New York, NY, USA, 1990.
- [28] MALVERN, L. E., *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*. New Jersey, Prentice-Hall, 1969.

- [29] MAUGIN, G. A., DROUOT R., & SIDOROFF F. *Continuum Thermomechanics: The Art and Science of Modelling Material Behaviour*, Ontario, Canada, Bluer Academic Publishers, 2002, pp-87-100.
- [30] NATIONAL RESEARCH COUNCIL. *The Waste Isolation Pilot Plant: A Potential Solution for the Disposal of Transuranic Waste*, Washington, National Academy of Sciences, 1996.
- [31] NAUMENKO, K., & ALTENBACH, H. *Modeling of creep for structural analysis*, Springer Berlin Heidelberg, New York, 2007.
- [32] SILVA, M. A. M., SCHREIBER, B. C., & SANTOS, C. L. Evaporitos como Recursos Minerais. *Brazilian Journal of Geophysics* 18, 3 (2000), 337-350.
- [33] SOUZA NETO, E. A., PERIC, D., & OWEN, D. *Computational methods for plasticity: theory and applications*, John Wiley & Sons Ltd., 2008.
- [34] THURO, K., PLINNINGER, R. J., ZÄH, S., & SCHÜTZ, S. Scale effects in rock strength properties. *Rock Mechanics - a Challenge for Society* (2001), 169-174.
- [35] WIKIPÉDIA. *Campo petrolífero de Tupi*. Disponível em: <[http://pt.wikipedia.org/wiki/Campo\\_petroliífero\\_de\\_Tupi](http://pt.wikipedia.org/wiki/Campo_petroliífero_de_Tupi)> Acesso em 10 Mar. 2010.
- [36] YAHYA, O. M. L., AUBERTIN, M., & JULIEN, M. R. A unified representation of the plasticity, creep and relaxation behavior of rocksalt. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences* 37 (2000), 787-800.
- [37] ZIENKIEWICZ, O. C., & TAYLOR, R. L. *The Finite Element Method*, 4<sup>th</sup> ed., vol. 1 e 2, McGraw-Hill Book Company, 1989.

# Apêndice A

## Método de Euler Implícito

A idéia básica aqui é aproximar uma equação de evolução do tipo

$$\dot{\beta} = f(\beta(t)) \dot{\lambda}(t) \quad (\text{A.1})$$

ilustrada na Fig. A.1.

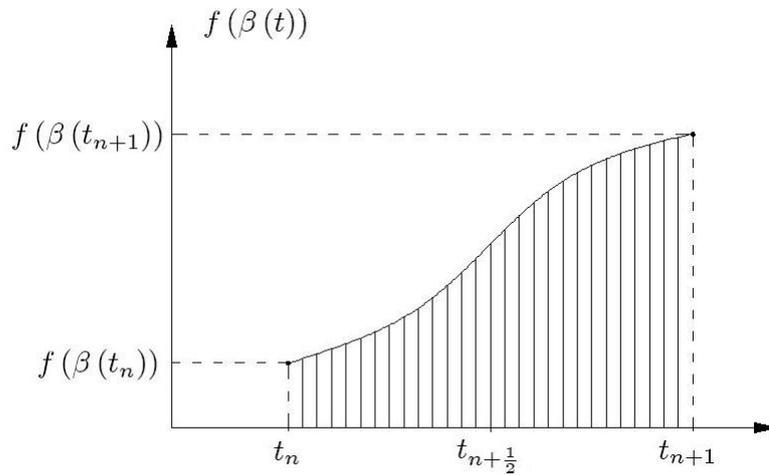


Figura A.1: Método de Euler implícito.

A integração desta equação de evolução no intervalo  $[t_n, t_{n+1}]$  fornece

$$\beta_{n+1} = \beta_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(\beta(t)) \dot{\lambda}(t) dt \quad (\text{A.2})$$

Diferentes aproximações podem ser propostas, as quais são <sup>[33]</sup>:

(1) Regra do ponto médio (“*Mid point rule*”):

Neste caso considera-se

$$\beta_{n+1} \simeq \beta_n + f\left(\beta\left(t_{n+\frac{1}{2}}\right)\right) \int_{t_n}^{t_{n+1}} \dot{\lambda}(t) dt \quad (\text{A.3a})$$

$$= \beta_n + f\left(\beta\left(t_{n+\frac{1}{2}}\right)\right) \Delta \lambda \quad (\text{A.3b})$$

em que  $\beta\left(t_{n+\frac{1}{2}}\right)$  pode ser aproximado por

$$\beta\left(t_{n+\frac{1}{2}}\right) \simeq \frac{1}{2}\beta(t_n) + \frac{1}{2}\beta(t_{n+1}); \quad (\text{A.3c})$$

(2) Método de Euler explícito (“*Euler’s forward method*”)

Neste caso considera-se

$$\beta_{n+1} \simeq \beta_n + f(\beta(t_n)) \int_{t_n}^{t_{n+1}} \dot{\lambda}(t) dt \quad (\text{A.4a})$$

$$= \beta_n + f(\beta(t_n)) \Delta \lambda; \quad (\text{A.4b})$$

(3) Método de Euler implícito (“*Euler’s backward method*”)

Neste caso considera-se

$$\beta_{n+1} \simeq \beta_n + f(\beta(t_{n+1})) \int_{t_n}^{t_{n+1}} \dot{\lambda}(t) dt \quad (\text{A.5a})$$

$$= \beta_n + f(\beta(t_{n+1})) \Delta \lambda. \quad (\text{A.5b})$$

# Apêndice B

## Espaços de Sobolev

### B.0.1 Notação

Seja  $\Omega$  um conjunto aberto em  $\mathbb{R}^n$  com contorno  $\Gamma$ .

Seja o operador diferencial

$$\frac{\partial(\cdot)}{\partial x} = D_i, \quad (1 \leq i \leq n) \quad (\text{B.1})$$

e se  $j = (j_1, \dots, j_n)$  é um multi-índice, escreve-se o operador diferencial como

$$D^j = D_1^{j_1} \dots D_n^{j_n} = \frac{\partial^{[j]}}{\partial x_1^{j_1} \dots \partial x_n^{j_n}},$$

onde  $[j] = (j_1, \dots, j_n)$ .

### B.0.2 Espaços de Sobolev

Seja  $\Omega$  um conjunto aberto em  $\mathbb{R}^n$ . Denota-se  $L^p(\Omega)$ ,  $1 < p < \infty$ , ( $L^\infty(\Omega)$ ), o espaço de funções reais  $p$ -ésima absolutamente integráveis definidas em  $\Omega$ , para a medida de Lebesgue  $dx = dx_1, \dots, dx_n$ . Este é o espaço de Banach com a norma

$$\|\mathbf{u}\|_{L^p(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |\mathbf{u}(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{ou} \quad \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(\Omega)} = \text{ess.sup}_{\Omega} |\mathbf{u}(x)| \quad (\text{B.2})$$

No caso de  $p = 2$ ,  $L^2(\Omega)$  é um espaço de Hilbert com o produto escalar

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} u(x) v(x) dx. \quad (\text{B.3})$$

O espaço de Sobolev  $W^{m,p}(\Omega)$  é o espaço de funções em  $L^p(\Omega)$  com derivadas de ordem superior ou igual à  $m$  em  $L^p(\Omega)$ , sendo  $m$  um número inteiro e  $1 < p < \infty$ . Este é um espaço de Banach com a norma

$$\|\mathbf{u}\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left( \sum_{[j] \leq m} \|D^j \mathbf{u}\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (\text{B.4})$$

No caso de  $p = 2$ ,  $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$  é um espaço de Hilbert com o produto escalar

$$((\mathbf{u}, \mathbf{v}))_{H^m(\Omega)} = \sum_{[j] \leq m} (D^j \mathbf{u} D^j \mathbf{v}). \quad (\text{B.5})$$

# Apêndice C

## Teorema da Localização

**Teorema C.1** *Seja  $\psi$  um campo escalar, ou vetorial, contínuo e definido em um domínio aberto  $\Omega$  de  $\mathbb{E}$ . Então para qualquer  $x_0 \in \Omega$ ,*

$$\psi(x_0) = \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{1}{\text{vol}(\Omega_\varphi)} \int_{\Omega_\varphi} \psi d\Omega \quad (\text{C.1})$$

em que  $\Omega_\varphi$  ( $\varphi > 0$ ) é o círculo fechado de raio  $\varphi$  com centro em  $x_0$ . Portanto, se

$$\int_{\Omega} \psi d\Omega = 0 \quad (\text{C.2})$$

para cada círculo fechado  $\Omega_\varphi \subset \Omega$ , então:

$$\psi = 0. \quad (\text{C.3})$$