UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO CIENTÍFICA E TECNOLÓGICA

JOSÉ ROQUE DAMASCO NETO

REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA E O GEOGEBRA: UM ENSAIO PARA O ENSINO DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS.

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

FLORIANÓPOLIS
2010

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO CIENTÍFICA E TECNOLÓGICA
CURSO DE MESTRADO

REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA E O GEOGEBRA: UM ENSAIO PARA O ENSINO DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS.

Dissertação apresentada ao curso de
Mestrado do Programa de Pós Graduação
em Educação Científica e Tecnológica, da
Universidade Federal de Santa Catarina,
como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em
Educação Científica e Tecnológica.

JOSÉ ROQUE DAMASCO NETO

Orientador: Prof. Dr. Méricles Thadeu Moretti

Florianópolis – SC
Março - 2010

FOLHA DE APROVAÇÃO

AGRADECIMENTOS

Pensava que esta seria a parte fácil do trabalho, mas agora vejo que é tão difícil quanto à sua produção, pois sinto a tarefa de agradecer a todos que contribuíram. Então, fico nervoso pelo perigo: Será que não ficou alguém para trás?

Se devo eleger pessoas devo logo começar. Então vou tentar lembrar de todos aqui, se esqueci de você, peço desculpas desde já e me cobre nos corredores da vida! Primeiramente preciso agradecer a Deus pois sei que "tudo posso Naquele que me fortalece"(Fl.:4,13).

Agradeço imensamente meus pais (Jair e Ivonete) que fizeram como objetivo de suas vidas a minha educação, apesar de ambos não terem as mesmas oportunidades que me deram. À Vanessa, minha futura esposa, que soube compreender e incentivar como ninguém ao longo de todo processo. Durante a realização deste trabalho, sempre me lembrava das próprias dificuldades que teve para concluir seu mestrado, procurando me mostrar sempre que o caminho é longo e difícil, mas que é muito compensador. Agradeço a eles, carinhosamente, por tudo isto.

Espero que, compensando o tempo e esforço dispendidos, algumas das idéias apresentadas aqui venham por ajudar a mim mesmo a identificar maneiras adicionais de enriquecer suas vidas.

Aos amigos (Gláucia, Jacine, Antônio, Brigite, Pequeno, Jéferson, Japa, Cris, ...) que, de uma forma ou de outra, contribuíram com seu companheirismo amizade e com sugestões efetivas para a realização deste trabalho, gostaria de expressar minha profunda gratidão. Não posso esquecer do Fábio Peres, que me incentivou muito para ingressar no programa e me auxiliou na criação do projeto de pesquisa.

Minha eleição a nível acadêmico, deve também começar do início. Ao meu orientador, o professor Méricles, que soube me acalmar diante de tanta ansiedade e tantas dúvidas. Aos professores das disciplinas, que me auxiliaram na busca de algumas respostas e na percepção de que podemos nos questionar a cerca de muito mais coisas do que já pude imaginar.

A todos: Muito Obrigado!

Dedico essa dissertação à minha noiva Vanessa Michels, pelo amor, paciência e companheirismo durante toda a trajetória da escrita. Aos meu pais por acreditarem na minha capacidade e se tornarem meus referenciais de vida.

A educação sozinha não transforma a sociedade,

sem ela tampouco a sociedade muda.

Paulo Freire

RESUMO

A presente pesquisa contempla uma proposta de seqüência didática para o estudo das Funções Trigonométricas com o uso do software GeoGebra baseada na teoria de Registros de Representação Semiótica de Duval. Tal teoria prioriza para a aprendizagem matemática as operações entre as representações semióticas de um mesmo objeto matemático, com prioridade para a operação de conversão por se tratar de uma operação que pode ser efetuada por representações entre sistemas semióticos distintos, como aqueles aqui tratados: os sistemas discursivo, simbólico e gráfico. O GeoGebra, que é um software de geometria dinâmica, permite que tais operações semióticas possam ser evidenciadas principalmente entre os sistemas simbólicos e gráficos. A proposta de seqüência didática foi elaborada na forma de oficinas oferecidas a um grupo de alunos do ensino médio.

Palavras-chaves: Funções Trigonométricas, Registros de Representação Semiótica, GeoGebra.

ABSTRACT

This study investigates a proposed teaching sequence for the study of trigonometric functions using the GeoGebra software based on the Semiotic Representation Records theory of Duval. This theory gives priority to learning math operations among semiotic representations of the same mathematical object with a priority for the conversion, having in mind the fact that it is an operation that can be done through representations of different semiotic systems, such as those covered here: the discursive, symbolic and graphic systems. GeoGebra, which is a dynamic geometry software, allows such semiotic operations to be evidenced mainly between symbolic and graphics systems. The proposed teaching sequence was developed in the form of workshops offered to a group of high school students.

Keywords: Trigonometric Functions, Semiotic Representation Records, GeoGebra

Lista de Figuras

Lista de abreviaturas

CAS – Computational Algebraic System (Sistema de Computação Algébrica)

DGS – Softwares de Geometria Dinâmica

IFSC – Instituto Federal de Santa Catarina

LTSC – Learning Technology Standards Committee

MTC – Meios Tecnológicos Comunicativos.

TIC – Tecnologias da Informação e Comunicação

SUMÁRIO

1 - Introdução

O autor do presente trabalho é Licenciado em Matemática pela UFSC desde 2003. Durante sua graduação foi pesquisador de iniciação científica junto ao Grupo de Estudos de Informática Aplicada à Aprendizagem de Matemática[1] (GEIAAM). Teve lá os primeiros contatos com o uso das novas tecnologias para o ensino de Matemática.

Neste ambiente de pesquisa pensava-se em como introduzir o computador nas aulas de Matemática de maneira a promover um ensino diferenciado daquele praticado usualmente no quadro negro e papel. Além disso pretende-se deixar um pouco de lado o papel passivo dos alunos nas aulas de Matemática, para permitir-lhes que formulassem hipóteses e testá-las em um ambiente informatizado.

Junto com outros estudantes, participou da elaboração de um software educacional para o ensino da classificação de polígonos chamado POLY 2000. Seu trabalho de conclusão de curso teve como tema a elaboração de outro protótipo de software para o ensino de Volumes de Sólidos de Revolução.

Após sua formatura, ingressou no magistério como docente de ensino fundamental, médio e superior. Desde o início, pode perceber nos alunos de graduação e naqueles que estavam concluindo o ensino médio que muito do conhecimento que possuíam sobre funções era simples memorização de fórmulas e regras das quais não tinham idéia da lógica conceitual.

Hoje trabalhando como professor do Departamento de Formação Geral do Instituto Federal de Santa Catarina (IFSC) campus Florianópolis, encontrou o mesmo tipo de dificuldade vivida pelos alunos dos cursos superiores e entre aqueles que estavam concluindo o ensino médio integrado.

No caso de funções trigonométricas, via que os alunos sabiam o formato comum dos gráficos, mas não conseguiam perceber as transformações que o gráfico sofria ao se alterar um parâmetro qualquer

[1] GEIAAM – A motivação do grupo de estudos estava na observação das dificuldades apresentadas pelos alunos das disciplinas de Matemática. Desta forma professores do Departamento de Matemática da UFSC juntamente com outros professores desenvolveram projetos de pesquisa e extensão, com o objetivo de detectar as causas e apontar ações utilizando das novas tecnologias da informação e comunicação para minimizar estas dificuldades. Mais informações disponíveis em: http://mtm.ufsc.br/geiaam/

da função, ou até mesmo a relação que havia entre o seu gráfico e o círculo trigonométrico.

Em conversa com professores de Matemática mais antigos da instituição, constatou-se que o assunto funções trigonométricas, ministrado na segunda fase dos cursos técnicos integrados ao ensino médio[2], não era mais aprofundado devido à falta de tempo. Em vista das dificuldades dos alunos e do problema de ordem cronológica nos cursos integrados, concluiu-se que seria interessante oferecer uma oficina extra-curricular que abordasse as funções trigonométricas com a utilização do software GeoGebra, que é o foco da elaboração dessa dissertação.

Desta maneira, iniciou-se a pesquisa envolvendo o ensino das funções reais seno e cosseno de forma que pudessem perceber as relações e as transformações de registros que são feitas ao estudá-las e explorá-las.

Ao perceber quantos registros de representação semiótica estão envolvidos no estudo de tais funções, chegou-se a conclusão que as idéias de Duval para o ensino de Matemática, vinham ao encontro das necessidades da pesquisa e dos seus objetivos.

Ainda, ao mirar-se o presente cenário educacional junto com os interesses dos estudos desenvolvidos durante a graduação do autor da presente pesquisa, percebeu-se que os objetivos das aulas e a forma de interagir com seu público têm mudado. Uma vez que, conforme Pretto (2002), o mundo nos últimos anos passou por grandes transformações tecnológicas, de tal modo é possível acompanhar qualquer catástrofe ou evento ao vivo por meio de um computador conectado a internet, ou até mesmo em um celular. Essas mudanças tem reflexos em diversos campos, como economia, política e na educação.

Neste quadro de transformações, a sociedade adotou novas formas de se organizar e muitos dos seus elementos básicos foram afetados e, ao mesmo tempo, afetaram os seus valores e a sua cultura. Manuel Castells traz a idéia da *Network Society*, a Sociedade em Rede, que movimenta dinheiro, real ou virtual, produtos, cultura e conhecimentos. Com base nas redes, estrutura-se, então, a denominada sociedade da informação, que potencializa essas modificações e

---

[2] São cursos voltados aos estudantes que possuem a formação no Ensino Fundamental. O termo integrado significa que o curso garante tanto a formação do Ensino Médio quanto a formação técnica profissional. Assim, ao concluir o curso o formando recebe o diploma de Técnico de Nível Médio.

estabelece uma nova ordem, com conseqüências ainda não plenamente identificadas.

Preto (2002) lembra que o governo brasileiro tem demonstrado interesse por esses assuntos e procura oferecer novos recursos, principalmente aos sistemas de comunicação e informação e aos sistemas educativos. Há grandes projetos federais, estaduais e até mesmo municipais, a fim de dotar o sistema público de ensino com um ferramental tecnológico capaz de proporcionar à escola pública as condições necessárias para o desenvolvimento de experiências inovadoras nessa área.

Para chegar a esse ponto é preciso pensar sobre metodologias que permitam a reflexão e o pensamento crítico dos envolvidos neste processo escolar. Uma ferramenta tecnológica pode representar um ganho significativo para as interações entre professores e alunos.

Considerando tudo isto, acreditou-se que o GeoGebra, por ser um ambiente que une os recurso de Geometria Dinâmica (DGS) com aqueles dos sistemas de comando algébricos (CAS) poderia ser utilizado para implementar uma seqüência didática para o ensino das funções reais seno e cosseno. A escolha do GeoGebra se deve ao fato de que tanto os DGS e os CAS foram estudados, anteriormente, pelo autor do presente trabalho. Contudo, ficava insatisfeito com a estaticidade dos gráficos apresentados nos CAS e com a ausência dos registros algébricos de muitos DGS.

Em virtude dos estudos feitos para preparação da dissertação, percebeu-se que os recursos oferecidos pelo GeoGebra poderiam ser empregados na aprendizagem das funções trigonométricas, com base na teoria de aprendizagem de matemática dos registros de representação semiótica, desenvolvida por Duval. Deste modo, elaborou-se os seguintes objetivos.

1.1 - OBJETIVO GERAL

Apresentar uma possibilidade de uso do software GeoGebra como ferramenta didática para o estudo das funções seno e cosseno tendo por base a teoria de aprendizagem matemática dos registros de representação semiótica de R. Duval.

1.1.1 - Objetivos Específicos

- Pesquisar as dificuldades que os estudantes possuem para compreensão das funções trigonométricas;
- Refletir sobre os registros de representação semiótica no ensino e aprendizagem de matemática;
- Elaborar uma seqüência didática com a utilização dos recursos disponíveis no software GeoGebra, baseada nos preceitos de Duval, para compreensão das funções seno, cosseno.

Ao debruçar-se sobre os objetivos, percebeu-se que era necessário construir um roteiro a fim de organizar tanto os trabalhos assim como a sua apresentação na dissertação.

O trabalho ficou organizado de tal forma que no segundo capítulo o leitor encontrará uma análise epistemológica do conteúdo escolhido como tema da pesquisa, assim como as principais dificuldades para o ensino das funções trigonométricas apoiando-se em um estudo sobre obstáculos didáticos e epistemológicos do ensino das funções trigonométricas.

Já no terceiro capítulo há uma explanação da teoria de registros de representação semiótica de Duval. Enquanto que no quarto capítulo, fez-se uma pesquisa sobre a utilização dos recursos e do potencial que as TIC possuem para o ensino de Matemática.

O quinto capítulo consiste na elaboração, experimentação, análises e validação da proposta de seqüência didática.

1.2 Encaminhamentos

Diante do problema de pesquisa e seus objetivos dividiu-se a pesquisa em três etapas.

A primeira delas consistiu num estudo bibliográfico a fim de conhecer as discussões já feitas em torno do tema da pesquisa:

1. obstáculos epistemológicos e didáticos do ensino das funções trigonométricas e levantamento histórico do desenvolvimento destas funções;
2. teoria de registros de representação semiótica de Duval;
3. contribuição das novas tecnologias da informação e comunicação para o ensino de Matemática e o software GeoGebra.

Inicialmente, foi importante estudar as dificuldades do ensino deste assunto e, em paralelo, o surgimento e a elaboração do conceito das funções trigonométricas, além da trigonometria que é a sua precursora. Tudo isto para perceber quantos detalhes foram desenvolvidos para se chegar à atual forma de apresentação do assunto e buscar as dificuldades dos estudantes para compreender o assunto. Esta análise também se fez necessário pelo fato de que muitas das dificuldades que os alunos enfrentam foram as mesmas que antigos pesquisadores levaram anos, ou até mesmo séculos para superar.

Ao se deparar com a complexidade que envolve o ensino da trigonometria foi possível estabelecer um panorama das concepções e dificuldades dos alunos, além da forma que se desenvolveram os conceitos envolvidos ao longo da história.

Tais dados foram de grande valia para a confirmação de que a teoria de Registros de Representação Semiótica de Duval serviria como referencial teórico para elaboração da seqüência didática com intuito de superar os desafios para o ensino. Por este motivo, dedicou-se um capítulo exclusivamente a esse referencial teórico.

Por último, em virtude do interesse particular do autor do trabalho investigou-se bibliograficamente o uso das tecnologias da informação e comunicação (TIC). Este estudo abordou a utilização dos recursos e do potencial que estas ferramentas possuem para o ensino de Matemática. Durante este ciclo, procurou-se por pesquisas que abordavam o uso das TIC, assim como a busca por um software que atendesse as expectativas e anseios observados ao longo das leituras anteriores. Depois de muita pesquisa e testes, percebeu-se que o GeoGebra possuía diversas características que iam ao encontro dos interesses e objetivos da pesquisa.

Tendo fundamentado e estudado o campo em que se pretendia atuar, deu-se início a segunda fase que consistiu na elaboração e experimentação da seqüência didática. As atividades propostas foram elaboradas a partir dos estudos feitos na primeira etapa.

Quanto à experimentação, seguiu-se a idéia de Artigue (1988) que a resume em uma fase de realizações das sessões de ensino com os alunos, dentro ou fora de sala. Além disso, foram coletados dados obtidos por meio da observação, questionários, entrevistas individuais ou em pequenos grupos realizadas a qualquer momento do ensino, e até mesmo após o seu término. No caso, entregou-se fichas com proposta de trabalho em cada uma das aulas e registrou-se todas as conclusões dos alunos nestes documentos e em arquivos do próprio

GeoGebra. Este software possui uma ferramenta que registra todos os passos da construção do usuário e possibilita revê-los depois de construídos.

Após a experimentação deu início a última etapa, que por meio dos dados levantados inicia-se o processo de validação das hipóteses iniciais com base no confronto da análise antes e após da aplicação da seqüência didática.

2 – OBSTÁCULOS E HISTÓRIAS DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Atribui-se a Brousseau o fato de que pesquisas em torno de obstáculos epistemológicos envolvam: identificação de erros comuns, busca de obstáculos na história da matemática e o confronto dos obstáculos históricos com os obstáculos de aprendizagem, com características epistemológicas. Com base nos estudos feitos por Costa (1997) e Lindger (2000), pretende-se levantar as principais dificuldades de ensino das funções trigonométricas.

Por esse motivo, nesse capítulo, primeiramente explorarou-se o conceito de obstáculos epistemológicos, em seguida a história e evolução da trigonometria e, por fim, foram elencados os principais obstáculos para o ensino das funções trigonométricas.

2.1 – OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS

Ao falar de obstáculos não há como deixar de pesquisar sobre Gastón Bachelard, uma vez que é o responsável pelo desenvolvimento desta idéia. Ele elaborou tal conceito dentro de um período de construções revolucionárias.

Em sua pesquisa Gomes (2006) percebe que o conhecimento científico não possa ser concebido como um aperfeiçoamento do conhecimento comum, na verdade a elaboração daquele se dá com a ruptura deste. Bachelard (1996) afirma que o processo de aprendizagem se dá pela desconstrução de um conhecimento anterior, muitas vezes construído empiricamente.

Ou seja, a idéia de ruptura parte da necessidade de desconstruir o senso comum de que ciência é um conjunto de conhecimentos fechados que os alunos devam incorporar. Na verdade, acredita-se que o aluno aprenderá caso surjam situações que exijam a substituição de um conhecimento estático e fechado por outro mais dinâmico e aberto.

De acordo com Bachelard (1996), os obstáculos epistemológicos podem ser acomodações ao já conhecido, que podem ser entendidos como anti-rupturas. Para compreender melhor anti-rupturas encontra-se em Gomes (2007) uma idéia que vai ao encontro disso: os obstáculos “preenchem a ruptura entre o conhecimento comum e o conhecimento científico e re-estabelece a continuidade ameaçada pelo progresso do conhecimento científico". Eles podem surgir como um contra-pensamento ou até mesmo "paragem" do pensamento. Ainda nesse mesmo sentido Costa (1997) o associa as resistências do pensamento ao próprio pensamento.Desta forma, conclui-se que o conhecimento comum pode se tornar um obstáculo ao conhecimento científico que é um pensamento mais abstrato.

O conceito bachelardiano de obstáculos epistemológicos contribui muito para forma de encarar o erro. Um equívoco cometido por um estudante era considerado como uma heresia ou anomalia que deveria ser combatida. A partir de então, o erro passa a ser considerado um "mal" necessário à Ciência, uma vez que um conceito científico pode ser reelaborado a partir dos erros ou limitações dentro de certos problemas.

Ao tratar da natureza dos obstáculos Bachelard(1996) diz que eles não são algo

> "externo, como a complexidade e a fugacidade dos fenômenos, nem de incriminar a fragilidade dos sentidos e do espírito humano: é no âmago do próprio ato de conhecer que aparecem, por uma espécie de imperativo funcional, lentidões e conflitos. É aí (...) detectaremos causas de inércia às quais daremos o nome de obstáculos epistemológicos." (Bachelard, 1996, p.17)

Acrescenta-se ainda, o fato de que muitos docentes não consideram o conhecimento adquirido pelos educandos, além de acreditarem que a aquisição de um novo conhecimento se dá por adição, isto é, a compreesão se dá através de meras repetições. Além de que alguns conhecimentos não científicos, muitas vezes, satisfazem à curiosidade.

Logo, pode-se dizer que o conhecimento científico é elaborado a partir da desconstrução de conhecimentos prévios que se mostram fragilizados diante de certos acontecimentos, ou seja, é preciso contradizer o passado. O que se pensava que era verdadeiro e correto torna-se um impedimento para conhecer o novo. Nesse sentido Bachelard aponta que a principal preocupação dos professores deveria ser transformar a cultura prévia dos estudantes, uma vez que não são compatíveis os novos conhecimentos e o saber já enraizado. Mostrar os motivos da evolução para o aluno é uma das formas de conseguir uma aprendizagem mais efetiva. Sendo assim, Gomes (2007) acredita que seja preciso possibilitar a criação de um ambiente dialético entre variáveis experimentais oportunizando a substituição dos saberes ditos estáticos e fechados, pelos conhecimentos abertos e dinâmicos.

O papel atribuído ao professor segunda a visão de Bachelard passa daquele que transmite cultura para alguém que contribui para a mudança da cultura, auxiliando na superação dos obstáculos epistemológicos formados pelo dia-a-dia.

Para Bachelard (1996). “a noção de obstáculo epistemológico pode ser estudada no desenvolvimento histórico do pensamento científico e na prática da educação”. Há um grande número de obstáculos epistemológicos que, independente de sua natureza, necessitam ser identificados e retificados. Segundo Lopes (1993)

> os obstáculos e entraves não devem ser compreendidos apenas como algo falho ou como aspectos pontuais de alunos com dificuldades; eles são importantes à aprendizagem e para que esta ocorra satisfatoriamente é necessário que haja, além de questionamentos e críticas, ruptura entre conhecimento comum e científico, construindo este e desconstruindo aquele (Lopes, 1993, apud Gomes, 2007).

Porém, Gomes (2006) afirma que Bachelard em seus estudos jamais tocou nos obstáculos epistemológicos da Matemática, por considerar uma ciência extremamente regular, que não ocorrem períodos de estagnação ou erro.

Contrariando a idéia de ausência de obstáculos nessa ciência, surge Brousseau(1983) como um pesquisador em educação Matemática que revê o conceito de obstáculos para Matemática, crendo que podem existir dificuldades comuns encontradas por diversas pessoas que possuam a mesma concepção errônea de um conceito matemático.

Na visão de Brousseau(1983), os erros são frutos de conhecimentos que anteriormente se validaram por meio da solução de certos problemas, e que neste momento, se mostram limitados, falsos e até mesmo não adaptáveis ao novo contexto.

Gomes (2007) caracteriza os obstáculos com base nas idéias de Duroux as quais foram retomadas por Brousseau. Segundo este ponto de vista, acredita-se que um obstáculo será um conhecimento, não a falta dele. O conhecimento que pode se tornar um obstáculo fora validado pelas respostas satisfatórias obtidas ao enfrentar contextos específicos, porém em outras situações ele fornecerá soluções falsas. Ao se mostrar falseado, ele oferecerá resistência a tais contradições e ao estabelecimento de um conhecimento mais elaborado. Sendo assim, é importante identificar estes saberes anteriores e incorporar o processo de rejeição ao novo saber, uma vez que a inexatidão ainda se manifesta.

Tendo em vista o conceito de obstáculos epistemológicos, tomado como referência para a elaboração da presente pesquisa, pretende-se na próxima seção explorar o desenvolvimento ao longo da história da trigonometria e do conceito de funções. Tal estudo se faz necessário uma vez que percebeu-se que Bachelard(1996) enfatizava a importância de relacionar os obstáculos epistemológicos tanto com o desenvolvimento histórico do conceito a ser ensinado, assim como na prática educacional.

Desta maneira, a próxima seção dedica-se ao estudo da história da evolução da trigonometria e do conceito de função.

2.2 – A ELABORAÇÃO DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS – UM OLHAR HISTÓRICO

Costa (2003) justifica a pesquisa na História da Matemática pelos professores da área com a crença de ser importante conhecer o surgimento de um conceito e sua se transformação ao longo do tempo. Também, crê que tal estudo contribui para evidenciar alguns obstáculos epistemológicos do processo de construção do saber matemático em questão. Ou seja, a análise dos obstáculos enfrentados pelos matemáticos, no passado auxilia na compreensão das dificuldades dos atuais estudantes. Destaca ainda, que a própria compreensão da evolução do conceito nessa ciência pode ser ampliada ao se analisar os erros dos alunos.

No caso do presente trabalho, foi necessária a compreensão do conceito de Trigonometria. Atualmente, pode-se encontrar definições desta área da Matemática em dicionários como o Aurélio:

> Trigonometria: Ramo da matemática que trata do cálculo dos elementos de um triângulo plano pelos dados numéricos, e da aplicação dessas funções ao estudo das figuras geométricas. (Dicionário Aurélio, extraído de: http://www.dicionariodoaurelio.com/dicionario.php?P=Trigonometria

Na Wikipédia, é possível encontrar uma outra definição:

> **Trigonometria:** (do grego *trigōnon* "triângulo" + *metron* "medida") é um ramo da matemática que

> estuda os triângulos, particularmente triângulos em um plano onde um dos ângulos do triângulo mede 90 graus (triângulo retângulo). Também estuda especificamente as relações entre os lados e os ângulos dos triângulos; as funções trigonométricas, e os cálculos baseados nelas. A abordagem da trigonometria penetra outros campos da geometria, como o estudo de esferas usando a trigonometria esférica.(Wikipédia: http://pt.wikipedia.org/wiki/Trigonometria)

Lindiger (2000) define trigonometria pela própria origem da palavra "('tri' = três, 'gono'=ângulo e 'metria'=medida)", ou seja, um campo da matemática que tinha relação com resolução de problemas que envolvem medidas de triângulos.

Costa (2003) a difere de três maneiras. A primeira como sendo uma ciência analítica, cuja origem está no século XVII, após o desenvolvimento do simbolismo algébrico. A segunda forma a vê como parte da geometria que colaborou inicialmente para o desenvolvimento da Astronomia, que surgiu nos trabalhos de Hiparco no século II a.C., apesar de já existirem trabalhos mais antigos que a usavam. O último foco se debruça sobre o estudo das medidas dos triângulos, cuja origem está entre o segundo e o terceiro milênio antes de cristo.

Segundo Lindeger (2000), como uma das necessidades iniciais era o estudo dentro da astronomia e como os astrônomos da época tinham noção de que a terra era esférica, então, durante muito tempo se desenvolveu a trigonometria esférica. Essa trata da resolução triângulos esféricos, enquanto que a trigonometria plana trata da resolução de triângulos no plano.

Apesar de não aparecer mais nos currículos escolares, Lindegger (2000) lembra que a trigonometria esférica até hoje é fundamental para estudos em

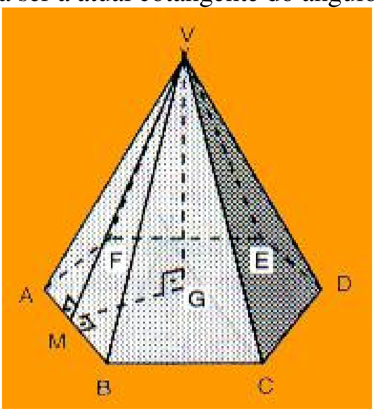
> "Astronomia Matemática, bem como para a Geodésia, a Navegação Oceânica, a Navegação Aérea, Mecânica de Satélites Artificiais, Transmissão de Rádio de Grande Alcance, o Cálculo de Trajetória de Mísseis Intercontinentais, o Cálculo do Aquecimento Solar em Arquitetura, etc..." (Lindegger, 2000, p. 42)

Apesar da importância inicial da trigonometria esférica, é importante frisar que, para desenvovê-la, foi necessário primeiro organizar a plana, apesar de seus primeiros estudiosos não usarem esta nomenclatura.

Como o foco dessa dissertação está na elaboração da seqüência didática para o ensino das funções trigonométricas definida no conjunto dos Reais, o esforço foi para explorar mais seu surgimento, com uma passada rápida pelas raízes dessa ciência, desde as tabelas de sombras (séc. XV a.C.) até a expansão das funções em séries. Segundo Costa (2003) esse estudo permite passar pela origem da álgebra e da análise onde se encontra o embrião dessas duas outras áreas na origem das funções trigonométricas.

2.2.1 Os primeiros estudos envolvendo trigonometria

Segundo Boyer (1974), a origem desse ramo da Matemática está relacionado com os estudos em astronomia, agrimensura e navegação. Essa pesquisadora traz como primeiros exploradores dessa área os egípcios e os babilônios. Esses dois povos a utilizavam de maneira rudimentar para o cálculo de raízes entre números e lados de triângulos semelhantes. Boyer (1974) afirma que vem dos egípcios o Papiro Ahmes, também conhecido como Papiro Rhind, que data de aproximadamente 1650 a.C. Nele estão presentes 84 problemas, sendo que em quatro deles mencionam o seqt de um ângulo. Ahmes não deixou claro o significado da palavra seqt, mas Costa (2003) ao analisar o contexto presente em suas notações sobre uma pirâmide regular acredita ser a atual cotangente do ângulo VMG.



$$\text{seqt} = \frac{MG}{GV} = \text{cotan}\ \alpha$$

Figura 1: Pirâmide Regular e a relação seqt

Segundo Boyer (1974) este é o problema 56 utilizava da razão entre o apótema da base desta pirâmide e a sua altura para manter a inclinação das faces, algo importantíssimo para construção de pirâmides. Para isso, os egípcios adotaram o conceito seqt que consiste na razão entre o afastamento horizontal e a elevação vertical. Veja através da figura 1.

Por volta de 1500 a.C., também surgiu no Egito a idéia de utilizar a sombra projetada por uma vara vertical associada a seqüências numéricas, que foram relacionadas com horas do dia, os famosos relógios de sol. Costa (2003) acredita que este era um esboço rudimentar para o surgimento futuro das funções tangente e cotangente.

Enquanto os egípcios se ocupavam do cálculo em torno de distâncias e alturas de pirâmides, os contemporâneos babilônios eram mais atraídos pela astronomia. Este interesse se pode estar relacionado com suas raízes religiosas. Sendo assim, Lindegger (2000) afirma que devido à influência mística o desenvolvimento da astronomia, inicialmente, também fora de responsabilidade de sacerdotes. E, para estudar os astros, desenvolveu-se um campo da matemática como ferramenta da astronomia, que mais tarde ficaria conhecida como trigonometria.

Mas tal dedicação ia além da religião, pois seus estudos nessa área contribuíam também para controle do calendário além das épocas de plantio e da colheita. Costa (2003) diz ser praticamente impossível estudar fases da lua, pontos cardeais e estações do ano sem usar triângulos, um sistema de unidades e uma escala.

Lindegger (2000) concorda com o fato de que estudar e registrar as posições dos astros permitia prever as estações do ano facilitando o plantio, colheita, estocagem, para enfim formar um calendário.

Segundo Costa (1997) Os babilônios foram grandes

> astrônomos e influenciaram os povos posteriores. Eles construíram no século 28 a.C., durante o reinado de Sargon, um calendário astrológico e elaboraram, a partir do ano 747 a.C, uma tábua de eclipses lunares. Este calendário e estas tábuas chegaram até os nossos dias (Smith, 1958, apud, Costa, 1997).

Outra contribuição importante dos babilônios trazida por Boyer(1974) é o sistema numérico sexagesimal, dando como um dos motivos da escolha a facilidade em dividir o círculo em seis partes iguais com uso de uma corda cujo comprimento é igual ao raio.

Algo que havia em comum na matemática de egípcios e babilônios eram as frações de numerador 1, o que indica que os conhecimentos elaborados desses dois povos possuíam alguma relação.

Na China antiga, no reinado de Chóu-pei Suan-king, aproximadamente 1110 a.C., na medição de distâncias, comprimentos e profundidades utilizava-se freqüentemente os triângulos retângulos. Indicando que este povo também possuía uma trigonometria rudimentar, como pode ser percebido através de pequenas evidências nas quais estão presentes algumas relações trigonométricas e o conceito de ângulo, porém não se encontra os procedimentos de cálculos e as suas devidas unidades de medida.

Costa (2003) encontra uma passagem traduzida da literatura chinesa: "O conhecimento vem da sombra, e a sombra vem do gnômon[3]". Mostrando que os chineses já conheciam um pouco sobre a trigonometria plana primitiva.

2.2.2 - A contribuição dos Gregos

No mundo Ocidental, os gregos seguiram os conhecimentos desenvolvidos pelos egípcios, e em pouco tempo evoluíram estes saberes ultrapassando seus precursores. Como na Grécia a Matemática se desenvolvera muito, esse povo passou a servir de preceptor a muitas outras nações.

Costa (2003) afirma que o historiador Heródoto atribui aos gregos a nomeação de gnômon ao relógio de sol. Esses relógios reforçam a idéia de que a trigonometria foi importantíssima para os estudos astronômicos daquelas épocas. O gnômon consiste em um vareta fincada perpendicularmente no chão, através da observação dos limites de comprimento de sua sombra ao meio dia, era possível medir a duração do ano, do dia e até mesmo das estações. Isto pode ser visto através da figura extraída do artigo de Costa (2003).

[3] Gnômon: conhecido como relógio de sol, era feito com uma simples vara que era enfencada perperdicularmente no chão, a sombra projetada servia para saber a hora e até mesmo a duração das estações.

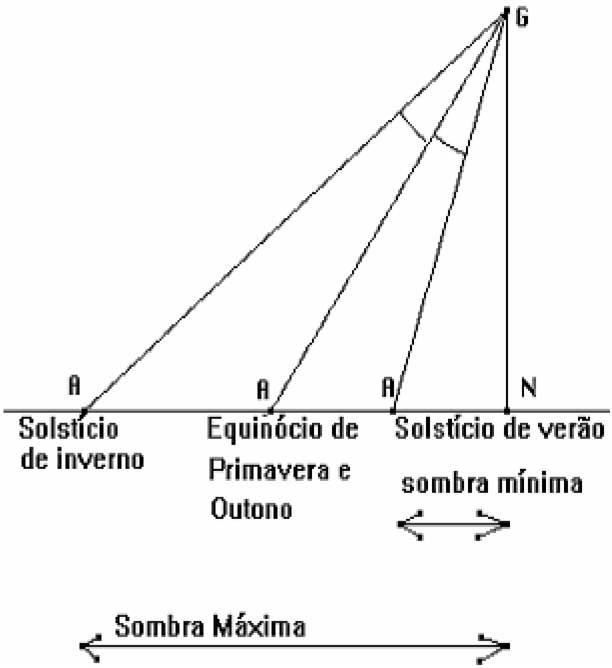


Figura 2: Representação do relógio de sol (gnômon)

A contribuição dos gregos no desenvolvimento da trigonometria se deu juntamente com o desenvolvimento de sua geometria. Dentre os geômetras gregos, pode-se destacar Thales de Mileto (625 a.C. – 546 a.C.) que estudou semelhança de triângulos que pode ter dado bases ao estudo de trigonometria, além do seu discípulo Pitágoras (570 a.C., 495 a.C.), o qual descobriu o seguinte teorema:

> "(...) em todo triângulo retângulo a área do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos."(Eves,1995, apud Lindegger, 200, p. 44)

Tal descoberta foi fundamental para mais tarde desenvolver a relação fundamental da trigonometria:

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

Além do seu teorema, Boyer(1974) afirma que a escola pitagórica se envolveu no estudo de escalas musicais com razões entre números inteiros,

> Conta-se que Pitágoras observou que quando os comprimentos de cordas vibrantes podem ser expressos como razões de números inteiros simples, como dois para três (para a quinta) ou três para quatro (para quarta), os tons harmoniosos. Em outras palavras, se um corda produz a nota dó quando tocada, então uma semalhante com o dobro do comprimento produzirá o dó uma oitava abaixo, e os tons entre essas notas são emitidos por cordas cujos comprimentos são dados por razões intermediárias: 16:9 para ré, 8:5 para mi, 3:2 para fá, 4:3 para sol, 6:5 para lá e 16:15 para si, em ordem ascendente. Aqui temos talvez as mais antigas leis quantitavas da acústica – talvez as mais antigas leis quantitavas da física (Boyer, 1974, p.38)

Pode-se pensar que isto contribui mais tarde para o desenvolvimento da lei de intervalos musicais é um prenúncio para o surgimento dos estudos das funções seno e cosseno do futuro osciloscópio para estudo sonoro.

Hipíscles, por volta de 180 a.C., apresenta uma amostra documentada da contribuição grega para a trigonometria – "De ascensionibus". Conforme Boyer(174), ele dividiu um círculo em 360 partes iguais. E mais tarde tal idéia foi generalizada para qualquer círculo por Hiparco.

Em torno de 200 a.C. Eratóstenes de Cirene (276 -196 a.C.), contemporâneo de Arquimedes (287-212 a. C.) e Aristarco de Samos (310-230 a.C.), resolveu um dos problemas mais desafiadores da época: Calcular o raio da terra e o comprimento de sua circunferência. Boyer (1974) conta que ele utilizou de semelhança de triângulos e raízes trigonométricas, além de resolver outro problema surgido ao longo desta solução: organizar e sistematizar relações entre comprimentos de cordas sobre um círculo e ângulos determinados por essas. Para calcular estas distâncias, Lindegger (2000) conta que Erastótenes observou que

> ao meio dia, no dia de solstício de verão, o Sol brilhava diretamente para dentro de um poço em Siene (hoje Assua), no Egito. Ao mesmo tempo em Alexandria, também no Egito, tomada como estando no mesmo meridiano e 5000 estádios ao norte de Siene, verificou-se que o Sol lançava

> uma sombra indicando que a distância angular do Sol ao zênite era um cinquentavos de um círculo (7 ½°). Isso forneceu um comprimento da circunferência terrestre de 250.000 estádios, correspondente a 25.000 milhas ou 37.000 quilômetros."(Lindegger, 2000, p. 47)

Foram de fundamental importância também o conhecimento de ângulo e como medi-lo. Infelizmente o seu tratado sobre a medição da terra se perdera, de maneira que atualmente pode-se encontrar informações apenas através de escritos de outros como os de Ptolomeu e Heron.

Boyer (1974) atribui a Aristarco a resolução do problema da distância relativa do Sol e da Lua, assim como seus tamanhos. Para tanto, utilizou da trigonometria disponível na época, ou seja, as mesmas relações de cordas de Erastótenes. Concluiu que a distância da Terra ao Sol está entre 18 e 20 vezes a distância da Terra à Lua. Além de que, antecipou Copérnico em mais de 1,5 milênio ao assumir o universo heliocêntrico afim de calcular estas distâncias.

Uma outra contribuição dos gregos segundo Boyer (1974) é a idéia de Hiparco de Nicéia(180 a.C. – 125 a.C.) que, influenciado pelos babilônios, dividiu a circunferência em 360 partes, e chamando cada parte de arco de 1 grau. Além disso, ele dividiu cada arco de 1 grau em 60 partes obtendo o arco de 1 minuto. Sua trigonometria era fundamentada em uma única **função trigonométrica**, onde relacionava o arco de uma circunferência de raio qualquer com sua respectiva corda (crd). Lindegger (2000) lembra que esta função já era utilizada anteriormente por outros astrônomos de forma não sistemática.

Hiparco elaborou, por interpolação linear, a primeira tabela trigonométrica com os valores das cordas para ângulos de 0° a 180°. Resolveu associar a cada corda de um arco o ângulo central correspondente, o que representou um grande avanço na Astronomia e, por isso, ele recebeu o título de Pai da Trigonometria. Também observou que "num dado círculo a razão do arco para a corda diminui quando o arco diminui de 180° para 0º" (COSTA, 2003, p. 65). Lindegger (2000) afirma que Aristarco já havia percebido essa mesma relação. O que em linguagem moderna, segundo Costa (2003), seria:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Hiparco foi responsável pela transição da astronomia babilônica para a trigonometria de Cláudio Ptolomeu (Klaudius Ptolemaios). Ptolomeu(83 d.C – 161 d.C) produziu a mais importante obra da trigonometria da Antiguidade a "Syntaxis Mathemática", também conhecida como Almagesto, que em árabe quer dizer a maior obra da época. Composta por treze volumes era considerada a Coleção Maior de Astronomia, enquanto que a junção das obras de Euclides, Autolico, Ipsicle e Aristótels formavam a Coleção Menor de Astronomia.

Boyer (1974) aponta o Almagesto como um marco no estudo de astronomia perdurando até Copérnico. Na verdade Ptolomeu na sua produção procurou organizar todos os conhecimentos difundidos no período e grande parte de sua obra esta baseado nos estudos de Hiparco, cujos livros se perderam. Com a sobrevivência do Almagesto foi possível encontrar suas tabelas trigonométricas além dos métodos de construção.

De acordo com Lindegger (2000) uma das contribuições originais de Ptolomeu foi uma teoria do movimento de cinco planetas, sendo que outros astrônomos, dentre eles Hiparco, só haviam coletado informações através de observações.

O desenvolvimento da trigonometria está presente nos capítulos dez e onze do primeiro volume, onde apresenta uma tabela de cordas e como esta fora formada. Não se encontra em seu conteúdo relações como seno ou cosseno, na verdade se encontra lá é a relação crd x, ou melhor dizendo, corda do arco x.

Boyer (1974) afirma que a função corda é definida como sendo o comprimento da corda correspondente a um arco x de uma circunferência de raio 60. Na tabela de Ptolomeu encontrava-se três colunas:

> (...) a primeira listando os arcos, a segunda, o comprimento da corda correspondente a cada arco e a terceira que dava o aumento médio de crd x correspondente a um acréscimo de um minuto em x. Esta coluna era usada para interpolações, isto é, para achar o valor de crd x se x estivesse entre duas entradas na coluna de arcos. (Costa, 2003, p.66)

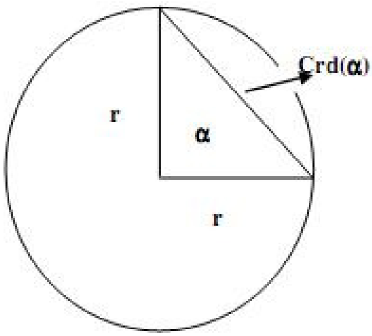


Figura 3: A função "crd (x)"

Através da figura 3 elaborada por Lindegger (2000) percebe-se que a "função corda" tem relação com a atual relação seno, uma vez que:

$$\frac{crd(\alpha)}{2r} = \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \Leftrightarrow crd(\alpha) = 2r\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

A tabela do Almagesto, segundo Boyer(1974), era mais completa que a de Hiparco, pois possuía ângulos de meio em meio grau, de 0° a 180°, utilizava da base 60, dividindo a circunferência em 360 graus. O diâmetro foi fracionado em 120 porções, e cada porção em 60 partes (frações sexagesimais), que ficou conhecida como "partes minutae" na sua primeira versão latina de 1155. Tudo isso possibilitava uma grande variedade de cálculos envolvendo medições em astronomia, uma vez que as medições topográficas, tanto gregos como romanos, recorriam à Geometria Euclidiana.

Na verdade Costa (2003) acredita que mais do que a trigonometria, o Almagesto contribuiu para possibilitar a descrição quantitativa de fenômenos, podendo fornecer predições confiáveis.

2.2.3 - Os Hindus e a relação Jiva

A queda do império romano com as invasões bárbaras levou a Europa a uma crise no século IV. Assim o centro de cultura passou a se deslocar para a Índia que lançou um conjunto de obras chamado Siddhanta, que significa sistemas de Astronomia, os quais foram responsáveis por uma revolução na trigonometria da época.

Segundo Costa (2003) o texto que chegou até os atuais pesquisadores é o Surya Siddhanta, que, segundo os hindus, fora produzido pelo Deus do Sol (Surya). Apesar de não apresentar muitas justificativas e provas, por se tratar de um texto produzido em versos em sânscrito por um Deus, nele se encontra um estudo diferente daquele feito por Ptolomeu. Boyer (1974) afirma que agora esse estudo baseava-se na relação entre a metade da corda e a metade do ângulo central correspondente, chamada por eles de jiva. Desta maneira foi possível visualizar um triângulo retângulo dentro da circunferência.

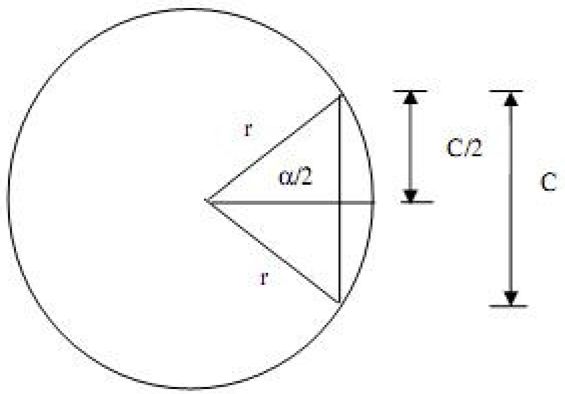


Figura 4: A relação jiva sobre a circunferência

Lindegger (2000) afirma que a adoção dessa outra relação se deve ao fato de que para aplicar a função corda era necessário dobrar o arco antes de usá-lo na tábua de cordas. Sendo assim era mais fácil criar uma tábua em que o próprio arco fosse a variável independente. Pode-se nesse caso comparar a definição de jiva com a atual relação seno baseando-se na figura 4, como já feito anteriormente para função corda, veja:

$$\theta = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow jiva\frac{\alpha}{2} = \sin\theta$$

$$\sin\theta = \frac{c/2}{r}$$

$$\sin\theta = \frac{c}{2r}$$

$$\Rightarrow \sin\theta = \frac{crd\alpha}{2r}$$

Ou seja a corda dividida pelo dobro do raio do círculo é igual ao seno da metade do ângulo central.

Costa (2003) lembra que os hindus introduziram as principais relações trigonométricas e aperfeiçoaram as tabelas, principalmente as de interpolação linear e quadrática. Ainda apresenta também Aryabhata que calculava semi cordas usando o sistema decimal em 500 d.C. Além disso, este povo demonstra algumas identidades como, por exemplo, a relação fundamental $sen^2\theta + cos^2 \theta = 1$ feita verbalmente por Varahamihira em 505 d.C.

2.2.4 - Contribuições de Árabes e Persas

Entre os séculos VIII e XI houve um grande avanço na economia, em ciências e nas artes pelo império muçulmano ou árabe. Um dos motivos de sua expansão foi devido a substituição da língua grega pela árabe como língua internacional. A utilização dessa nova língua permitiu a preservação de obras antigas que posteriormente foram traduzidas e difundidas por intelectuais mulçumanos.

Lindegger (2000) crê que a influência desse império começou pela Escola de Bagdad. Surgida no século IX teve como figura principal o príncipe sírio Mohamed-ben-Geber, conhecido como Al Battani (aproximadamente 850 a 929 d.C.), ou Albategnius, que traduzido nas línguas latinas significa Ptolomeu de Bagdad. Seus estudos basearam-se no Almagesto e na Siddhanta, o que levou a influenciar os árabes na adoação da trigonometria hindu.

Tal adoção ficou ainda mais forte quando Al Battani provou que a relação jiva era válida para qualquer triângulo retângulo independente da medida da sua hipotenusa a partir da adoção de um círculo trigonométrico de raio unitário.

Desta maneira, Costa (2003) afirma que Al Battani pode construir uma tábua de senos com ângulos partindo de ¼ de grau até 90°, variando de ¼ em ¼, isto para resolver o problema de cálculo da altitude do sol que era de seu interesse.

Após Al Battani, Costa (2003) destaca o trabalho de organização e sistematização de provas de teoremas trigonométricas em 980 por Abu`l Wêfa.

Outro destaque de Lindegger (2000) data de 1250 que é o primeiro trabalho em que surgiu a trigonometria plana o que levou a sua desvinculação da astronomia e passando a ser reconhecida como uma ciência por si própria. Isto graças ao tratado sobre quadiláteros do astrônomo persa Nasîr ed-dên al-Tûsî. Tal foco de estudo seria retomado no século XV na Europa por Regiomontanus que estabeleceu a trigonometria como um ramo da Matemática.

Após o declínio da escola de Bagdá quem se destaca é o sul da Europa, principalmente a cidade de Toledo a partir de 1085 ao ser libertada por cristãos do domínio mouro. Assim o século seguinte destacaram-se os tradutores como Platão de Tivoli, Gerardo de Cremona, Adelardo de Bath e Robert de Chester. Desta forma a matemática árabe e grega (a parte conservada) estava à disposição dos interessados dentro da Europa.

Uma interessante curiosidade destacada por Boyer(1974) é quanto a tradução da palavra "jiva", meia corda em sânscrito, para seno atribuída por alguns a Gerardo de Cremona e por outros a Robert Chester.

Na verdade o que ocorrera é que devido às mudanças dinâmicas da língua, os árabes passaram a escrever "jiba", devido a pronúnica semelhante do j e v na língua árabe. Além disso, coincidentemente a palavra sânscrita "jiba" tem as mesmas consoantes da palavra árabe "jaib", que significa baía ou enseada. Como os tradutores do árabe para o latim desconheciam o sânscrito, acreditavam que lidavam com tabelas de "jaib", traduzindo-a para tabelas de sinus, que em língua latina também significa baía ou enseada.

Como exemplo do uso dos conhecimentos árabes pode-se citar o rei Alfonso X de Castela, que de acordo com Costa(2003), solicitou em 1250 aos estudiosos de Toledo que traduzissem os livros de Astronomia e modernizassem as tábuas trigonométricas contidas neles. Tal trabalho fora concluído em 1254 e batizado como Tábuas Afonsinas e Os Libros del Saber de Astronomia. Juntos foram muito úteis para preservação da cultura astronômica na Península Ibérica além do desenvolvimento da arte de navegar pelos Lusitanos no século XV.

2.2.5 - A Trigonometria na Europa

No século XIV, Costa (2003) dá destaque ao fato de que a Escola de Filosofia Natural do Merton College de Oxford e a Escola de Paris concluem que a matemática é a principal ferramenta para o estudo de fenômenos. Neste momento pela primeira vez foram expressas as noções de quantidades variáveis através de funções.

Em paralelo ao desenvolvimento da trigonometria, desde o século XI vinha se desenvolvendo o conceito de função. Nicole Oresme (1323 -1382) é lembrado por Boyer (1974) pelo seu "Treatise on the configuration of Qualities and Motions", onde introduz a representação gráfica além da noção da funcionalidade entre variáveis utilizando um estudo sobre velocidade e tempo, contribuindo para futura consolidação do conceito de função, através da sua representação gráfica.

A invenção dos logaritmos e demonstração de teoremas por Napier (1550-1617) mostra que a Trigonometria de Regiomontanus (1436-1475) presente na sua obra "De Triangulis" não se diferencia muito do que existe hoje. O seu tratado sobre triângulos era composto de 5 livros contendo um estudo completo de trigonometria, incluindo novas tábuas trigonométricas aperfeiçoando aquela feita por George Peurbach(1423-1461), seu mestre. De acordo com Boyer (1974) Peurbach já havia dado grande contribuição ao traduzir diretamente do grego o Almagesto e corrigindo os erros acumulados pelos copistas nas traduções e cálculos.

A obra de Regiomontanus foi responsável pela introdução da tangente na trigonometria européia. Lindegger (2000) atribui também a ele uma primeira demonstração para a Lei dos Senos. Graças a seu trabalho foi possível desenvolver também a trigonometria esférica e plana.

Com a invenção da imprensa, a cultura pode-se divulgar por diversos cantos, não tendo mais apenas um povo que a dominava, como foram os babilônios, gregos e árabes. Esse difusão e o crescimento dos estudos em torno da matemática foram alavancados pelo Racionalismo do século XV.

O primeiro trabalho impresso em trigonometria foi "a 'Tabula Directionum' de Regiomontanus, publicado em Nuremberg certamente antes de 1485, pois a segunda edição data deste ano, em Veneza”(Costa, 2003, p.63).

Essa pesquisadora afirma que as seis funções trigonométricas foram subentendidas pela primeira vez como razões e funções dos ângulos por Joachim Rhaeticus (1514-1576) em Leipzig em 1551 na sua obra “Canon Doctrinae Triangulorum” apesar de não atribuir nomes para seno, cosseno ou cossecante. Rhaeticus retomou o trabalho de Regiomontanus aperfeiçoando sua tábua trigonométrica, aumentando a precisão para onze casas decimais, além de que os ângulos variavam de minuto em minuto para arcos do primeiro quadrante. Já para os arcos menor do que 1° ele fez este cálculos de 10 em 10 segundos de arco.

Boyer (1974) afirma que Rhaeticus foi o primeiro a organizar a tábua trigonométrica em semiquadrantes, dando o cosseno, seno e tangente de arcos até 45° e o restante utilizava da igualdade sen x $= \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

A Viète (1540 – 1603) é atribuído, de acordo com Boyer (1974), a adição do tratamento analítico à trigonometria em 1580. Utilizando pioneiramente letras para representar coeficientes gerais, contribuindo também para o progresso da Álgebra. Também lhe é atribuída a idéia de decompor triângulos oblíquos em triângulos retângulos a fim de calcular todos os seus lados, conforme está na sua obra “Canon Mathematicus”.

Um outro notável no desenvolvimento da trigonometria foi Oughtred que em 1657 elaborou um trabalho que desenvolvia este ramo simbolicamente. Porém como a álgebra estava pouco desenvolvida, não houve grande aceite pela comunidade científica, até que Euler exercesse sua influência neste sentido no século XVIII.

John Wallis (1616-1703) dá um importante passo ao definir fórmulas por meio de equações ao invés das usuais proporções e por passar a estudar também séries infinitas. Desta forma Sir Isaac Newton (1642-1727) pode também contribuir com a trigonometria através de seus trabalhos com séries infinitas. Expandido arcsen x em séries e, por reversão pode deduzir a série para sen x. Então mais tarde Kastner, em

1759, foi o primeiro matemático a definir as funções trigonométricas de números puros[4].

Lindegger (2000) reforça o fato de que neste momento a investigação em torno de funções trigonométricas se tornou mais enfática do que aquelas feitas para solução de triângulos, uma vez que ela se revelou mais ampla e útil do que inicialmente imaginava-se.

Por último, vale destacar Thomas-Fanten de Lagny que em 1710 evidenciou pela primeira vez a periodicidade das funções trigonométricas, em 1710.

2.2.6 - Trigonometria e Análise Matemática

Finalmente em 1748 a trigonometria toma a sua forma atual com Euler (1707-1783). Ele usa de um círculo com raio unitário para definir as funções aplicadas a um número qualquer, e não mais para um ângulo. Sendo assim

> A transição das razões trigonométricas para as funções periódicas começou com Viéte no século XVI, teve novo impulso com o aparecimento do Cálculo Infinitesimal no século XVII e culminou com a figura de Euler. (Costa, 2003, p. 64)

Boyer (1974) destaca como uma importante idéia de Euler foi a criação da função E, conhecida também como função de Euler. Tal função associa cada ponto de uma circunferência de raio unitário com centro na origem dos sistema cartesiano a um número x.

Assim dado x ϵ $\Re$, a ele se associa um ponto P, da circunferência:

$$P = E(x) = (a, b) \ / \ a^2 + b^2 = 1$$

Costa(2003) lembra que pode-se associar:

---

[4] Na análise dimensional , uma **quantidade adimensional** é uma quantidade sem uma unidade física e, portanto, um número puro. Esse número é normalmente definido como um produto ou a razão de quantidades que possam ter as unidades individualmente, mas estes anulam na combinação. Grandezas adimensionais são amplamente utilizados nos campos de matemática , física , engenharia e economia , mas também na vida cotidiana (fonte: wikipedia).

$$a = \cos x \quad e \quad b = \text{sen } x$$

E assim definir:

$$f : R \rightarrow R \;/\; f(x) = \text{sen }(x)$$
$$g : R \rightarrow R \;/\; g(x) = \cos(x)$$

Segundo Boyer (1974), Euler possibilitou encontrar seno e cosseno de qualquer valor de x, abrindo as portas para que a Análise Matemática passasse a estudá-las mais profundamente e aplicar estas funções a outros campos das ciências físicas.

Em 1748, surge a obra chave da Análise Matemática - “Introduction in Analysin Infinitorum” – onde o seno deixou de ser uma grandeza e adquiriu o status de número obtido pela ordenada de um ponto de um círculo unitário, ou o número definido pela série:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{3!} + ...$$

Ou ainda que:

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2} \text{ e } \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

Onde i é a unidade imaginária, inserindo também as funções seno e cosseno no campo dos números complexos.

2.3 – AS DIFICULDADES DO ENSINO DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Inicialmente, neste capítulo fez-se um levantamento do conceito de obstáculo epistemológico em busca de detectar as dificuldades do ensino das funções trigonométricas. Dada a necessidade, fez-se também uma pesquisa da evolução das funções trigonométricas. Para concluir o capítulo, apresenta-se agora as principais dificuldades para o ensino das funções trigonométricas com base no trabalho de Costa (1997).

2.3.1 Obstáculos Epistemológicos das Funções Trigonométricas

Devido ao foco da pesquisa estar nas funções trigonométricas, refletir-se-á primeiro sobre o conceito de função. Segundo Costa (1997), tal conceito ao longo do tempo teve transformações na forma, no conteúdo e até mesmo em sua definição.

As primeiras idéias de funcionalidade foram encontradas na Antiguidade, em tabelas sexagesimais de quadrados e raízes quadradas. Usando a descrição do sentido de variação (diretamente proporcional ou inversamente proporcional) fez-se um estudo qualitativo do movimento durante a Idade Média, pois não havia até então uma descrição ou análise quantitativa de tal fenômeno.

A noção de variável dependente e independente surgiu graças às representações gráficas, de Galileu (1564-1642) que introduziu os números para as representações gráficas e a Descartes (1596-1650) que as definiu a noção de variável dependente.

Costa (1997) considera como um dos obstáculos epistemológicos da evolução do conceito de função a separação que era feita entre grandezas e números, desde Euclides. Isto provocava obstáculos quanto à homogeneidade, proporção e incomensurabilidade.

Desde os gregos até a idade média que a relação entre grandezas ou quantidades era expressa por proporções, que mascara a relação funcionalidade que havia entre duas “variáveis”. Isto ocorre devido ao axioma de Eudoxo que, segundo Costa (1997), trazia o princípio da homogeneidade o qual dizia que era possível apenas se comparar elementos de mesma natureza. Ou seja, era impossível estabelecer uma relação entre um diâmetro e uma área uma vez que pertencem a dimensões e naturezas diferentes.

A escola Pitagórica levou a numerização do mundo e futuramente ao desenvolvimento do conceito de funções. Porém seus seguidores encontraram um obstáculo ao descobrir a incomensurabilidade, pois quando tentavam expressar razões entre grandezas descobriam que algumas delas não podiam ser comparadas com uma unidade de medida (incomensurável). No estudo das funções reais trigonométricas, Costa (1997) aponta um obstáculo semelhante, que é o π.

A separação entre números e grandezas, que caracterizava a forma de pensar na antiguidade levava a teorias separadas para números e grandezas, uma vez que

> as relações de grandezas não pudesse ser necessariamente expressas por relações de números, devendo-se, portanto, tratá-los diferentemente. Tanto é verdade que, nos 'Elementos' existem livros reservados às proporções entre números e outras às entre grandezas, com os teoremas demonstrados para cada caso.(Costa, 1997, p. 70)

A unificação entre grandezas e números se faz necessário para que se possa estabelecer relações entre duas variáveis para o desenvolvimento do conceito de função. Uma vez que este conceito exige saber como um elemento se comporta de acordo com a variação do outro.

Outros dois pontos importantes apontados por Costa (1997) tanto para o desenvolvimento do conceito de funções quanto das funções trigonométricas é a conceituação de dependência e de variação. Historicamente percebe-se que primeiro expressou-se a dependência entre um arco e a corda correspondente e depois a que há entre um ângulo e o seno.

Costa (1997) acredita que um estudante terá facilidade para compreender dependências, variações e periodicidades das funções seno e cosseno, mas dificilmente relacionará tudo isto com o conceito de funções.

Esta pesquisadora afirma que a idéia difundida por muitos professores e livros sobre função ser um caso particular de relações não seja tão importante quanto à idéia de como estas podem ser importantes para formar modelos matemáticos de situações as quais necessitam expressar a dependência entre diferentes variáveis. Para o aluno compreender melhor o conceito de função é possível, segundo esta autora, explorar a variação e a dependência dentro do estudo das funções trigonométricas.

Estes são alguns dos obstáculos inerentes ao estudo das funções, Costa (1997) traz também alguns específicos da Trigonometria.

O primeiro deles é quanto ao surgimento do estudo da Trigomentria na vida dos estudantes está atrelado a Geometria, mais especificamente ao problemas envolvendo triângulos retângulos não tendo características funcionais. Para chegar até o estudo das funções trigonométricas é necessário primeiro estender as definições das relações trigonométricas do triângulo retângulo para o ciclo trigométrico, introduzir o conceito de arco e ângulo orientado, relacionar isto com o sistema de coordenadas cartesianas e estabelecer a correspondência entre cada ponto da reta real com os respectivos seno e cosseno.

Indo ao encontro da idéia de Brousseau, para iniciar o estudo das funções trigonométricas o aluno precisa inicialmente desconstruir o fato de que seno e cosseno eram relações úteis para solucionar problemas envolvendo triângulos e seus ângulos internos medidos em graus. A partir de agora seno e cosseno podem ser desassociados dos triângulos e existem para qualquer número real, ou seja, passasse a medir o argumento(ângulo) em radianos.

Ao definir funções seno e cosseno Costa (1997) lembra que sai do quadro geométrico e parte-se para o quadro funcional através da introdução de diversos registros de representação, ou seja, a forma em que a trigonometria havia sido estabelecida para os alunos precisa ser mudada para que se possa desenvolver este novo estudo.

Um outro obstáculo encontrado é quanto a origem e orientação dos arcos sobre o círculo trigonométrico. Se compará-lo ao funcionamento de um relógio, algumas de suas regras vão de encontro com aquelas aprendidas há muito mais tempo pelos estudantes e que historicamente também surgira primeiro. Primeiro pode-se pensar quanto a origem do arco, que no ciclo fica no ponto (1, 0) já nos relógios eles se encontram no (0, 1). Também pode-se falar quanto a orientação dos arcos, uma vez que o sentido positivo do ciclo é oposto do relógio. Como o relógio e o seu funcionamento é um conhecimento antigo, já que se encontra o tempo todo em seu cotidiano, sendo estudado muitas vezes desde as séries iniciais, até mesmo para o estudo da tabuada do cinco, o conhecimento de seu funcionamento pode vir a afetar a compreensão pelo aluno do ciclo trigonométrico.

Junto com o ciclo trigonométrico, soma-se o fato de que como se viu historicamente é muito mais simples marcar um ângulo central qualquer e trabalhar com um triângulo isósceles e a corda determinada por este. O triângulo retângulo dentro de um círculo de raio 1 foi uma evolução que levou muitos anos para se chegar, talvez este também seja um das dificuldades encontradas por alguns alunos.

Já quanto a conceituação de ângulo, que na vida escolar é definido primeiramente através da geometria precisa também ser modificado. É preciso que o estudante visualize o ângulo sempre em uma circunferência, ou seja, o ângulo central além da necessidade deste ser orientado e ter a possibilidade de incluir voltas.

Desta maneira o conceito de ângulo que o aluno possui e a forma com que o utilizava na solução de problemas com triângulos retângulos pode-se tornar um obstáculo ao aprendizado dos ângulos trigonométricos.

2.3.2 – Obstáculos Didáticos das Funções Trigonométricas

Segundo Costa (1997), os obstáculos de ordem didática, no caso do ensino de funções trigonométricas podem estar relacionados com o conceito que o aluno possui sobre função pois, muitas vezes, fora estudado apenas de maneira quantitativa, sem fazer análises qualitativas ou estabelecendo relações com a geometria analítica.

Para minimizar os efeitos deste obstáculo, Costa (1997) aconselha os professores a relembrar o assunto funções retomando alguns conceitos importantes para o desenvolvimento do novo estudo, como por exemplo a simbologia, a definição dos conjuntos Domínio e Imagem além das formas que uma função pode ser representada.

Também é necessário pensar sobre os registros de representação semiótica envolvidos no estudo destas funções, na forma de definir e medir ângulos. Isto se deve ao fato que um mesmo objeto matemático pode ser representado através de diferentes registros de representação, o que segundo Costa (1997) pode vir a se tornar um obstáculo para compreensão destas funções. Um exemplo dos diversos registros de representação pode ser observado através da figura abaixo.

1. Registro Algébrico

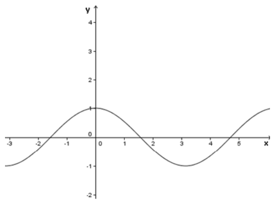
$$f : \Re \rightarrow \Re$$

$$f(x) = \cos(x)$$

2. Registro por meio de tabela de correspondência

x	f(x)=cos(x)
π/6	0,866
π/4	0,707
π/3	0,5
π/2	0
2π/3	-0,5
π	-1
5π/4	-0,707
3π/2	0
11π/6	0,866
2π	1

3. Registro Gráfico



4. Por meio do ciclo trigonométrico

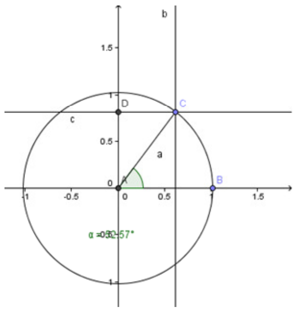


Figura 5: Alguns registros da Função f(x)=cos (x)

Comparando o estudo das funções trigonométricas com o de outras funções percebe-se que aquele apresenta um registro suplementar em relação aos outros que é o círculo trigonométrico. Segundo Costa (1997) aponta a fundamental importância deste registro para observar a ligação existente entre os números reais (domínio da função) e os pontos do ciclo.

Como se verá no próximo capítulo, a relação e a conversão entre estes múltiplos registros de representação semiótica é de fundamental importância para a compreensão do conceito das funções trigonométricas. Caso o aluno não domine estes diferentes registros e consiga fazer a passagem de um para o outro, conforme os ideais de Duval, pode-se dizer que o aluno não compreendeu o conceito de função trigonométrica.

Um outro obstáculo de ordem didática envolve o conceito de ângulo, o qual muitas vezes é visto de uma única maneira, o que pode impedir uma melhor compreensão da definição de arco e ângulo trigonométrico.

No caso o estudante precisa desenvolver uma visão dinâmica de ângulo, além de incluir ângulos negativos e maiores que 360°.

Quanto as unidades de medida, Costa(1997) acredita que os diferentes sistemas de medidas, decimal para arco, raio e comprimento e o sexagesimal para o ângulo central pode se tornar um obstáculo também, uma vez que, historicamente o sistema sexagesimal fora adotado primeiro para medir todos esses elementos.

Além de que, tradicionalmente o currículo brasileiro trabalha inicialmente apenas ângulos medidos em graus e suas subunidades (minutos e segundos). O estudante ao iniciar seu estudo em torno do círculo trigonométrico se depara com diversas novidades em torno de ângulo: o radiano, o irracional π, a conversão do comprimento da circunferência para determinar quantos radianos tem o ângulo de uma volta além da transformação de graus para radianos e vice-versa. Tudo isso muitas vezes constitui-se em outros obstáculos a serem enfrentadas por professores e estudantes.

3 - Registros de Representação Semiótica

Neste capítulo apresentar-se-á parte da teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval, uma vez que ela será utilizada na busca por respostas para o problema dessa dissertação. Aqui serão mostrados alguns elementos dessa teoria que servem para compreender um pouco mais a maneira que se dá a apreensão de um conceito matemático segundo Duval, além de quais registros estão envolvidos no estudo das funções trigonométricas seno e cosseno.

Procurando atender ao objetivo principal desse trabalho, verificou-se que para oportunizar o ensino de um conceito através de uma atividade em matemática é necessário observar alguns componentes desse processo. Dentre eles Godoy (2004) destaca dois, sendo o primeiro o próprio conteúdo que possui estratégias próprias de como alcançar seus resultados e de validá-los. Nesse caso procurou-se apresentar no capítulo anterior algumas dificuldades do ensino das funções trigonométricas seno e cosseno.

A segunda componente é de âmbito cognitivo nesta procura-se observar a forma com que o indivíduo tem acesso a um dado conhecimento de matemática. Assim toma-se como referência a teoria de registros de representação semiótica de Raymond Duval a qual será apresentada neste capítulo.

Godoy (2004) enfatiza as duas formas de aquisição do conhecimento matemático defendidas por Duval (1993)[5]

> (...) as aquisições funcionais relativas aos sistemas orgânicos, disponíveis ao indivíduo desde seu nascimento, como a audição, a visão, o tato e a memória; e as aquisições funcionais relativas aos sistemas semióticos, estes últimos não usados somente para se comunicar, mas também para organizar e tratar as informações. (Godoy, 2004, p.3)

A teoria de registros de representação semiótica de Duval contribui muito para a Educação Matemática, pois reflete sobre a aquisição de conhecimentos pelos estudantes de Matemática.

Portanto é preciso perceber se a atividade proposta oferece os recursos para que o estudante entre em contato com as diferentes representações semióticas do conceito das funções trigonométricas e suas conseqüentes conversões. Também é interessante levantar quais os elementos destas representações são necessários considerar no processo de ensino-aprendizagem.

É importante frisar que é próprio da atividade matemática mobilizar simultânea ou alternadamente vários registros de representação semiótica. As mudanças de registros de representação, assim como um tratamento, são de grande importância para o ensino e a aprendizagem das funções trigonométricas seno e cosseno.

É perceptível nos textos de Duval e de outros pesquisadores que usam sua teoria como referência a grande importância atribuída ao uso dos registros de representação semiótica através do fato de que a Matemática utiliza de diversas formas de representação. Uma vez que não é possível acessar diretamente os objetos matemáticos, diferentemente de outras Ciências, eles não são tocáveis ou observáveis através de instrumentos.

Sendo assim Duval (2003) afirma que um objeto matemático necessita de diversas representações devido ao fato de que não possuem existência física e não são perceptíveis diretamente. Essa

[5] DUVAL, R. **Registres de representation sémiotique et fonctionnements cognitif de la pensée**. Annales de didactique et Sciences Congnitves, vol. 5. IREM-ULP, Strasbourg, 1993, pp. 37-65.

questão está intimamente ligada ao funcionamento cognitivo do pensamento, uma vez que diversos registros precisam ser mobilizados para que os objetos matemáticos não sejam confundidos com suas representações, e talvez sendo reconhecidos em cada uma delas.

Dada a necessidade de pesquisar sobre a teoria de Duval, talvez seja interessante buscar uma definição para representação. Godoy (2004) referencia na mesma definição tomada por Duval (1999)[6]: "alguma coisa que se tem, (para alguém), no lugar de alguma outra coisa". Tal definição para Duval (1999) é suficiente para diferenciar representação do objeto que ela representa.

Buscando ainda no dicionário Michaelis encontra-se:

> **(...) 2** Descrever, pintar, reproduzir a imagem de; retratar: (...)**4** Significar, simbolizar: (...)**5** Aparecer numa outra forma; figurar como emblema, imagem ou símbolo de alguma coisa(...)

A utilização de símbolos, gráficos, tabelas e até mesmo língua natural é apontado por Duval (2003) como maneiras de representar um objeto matemático. Ele lembra ainda que as representações distintas trazem consigo conteúdos diferenciados. Quando um estudante consegue efetuar tratamentos e conversões de uma representação, acredita-se que ele tenha compreendido um conceito e as características de cada uma das suas representações.

Segundo Duval (2004) utilizou-se o termo representação em três ocasiões distintas: Em um primeiro momento por Piaget, por volta de 1924 a 1926, que significava "evocação de objetos ausentes". De 1955 a 1960, tratado como "codificação de uma informação" por Broadbent. E por último, ressurgiu acompanhado de outra palavra: semiótica. Isto aconteceu em torno de 1985 em trabalhos que tratam da aquisição de conhecimentos matemáticos e problemas suscitados durante o processo de aprendizagem matemática.

Para compreender melhor Duval é preciso apresentar também o conceito de sistema semiótico. Na sua obra de 2004 ele afirma que um sistema semiótico é composto de signos que possuem convenções e regras próprias de formação. Já os signos estão no lugar de algo; é algo que designa, denota ou representa alguma coisa a alguém sob algum aspecto.

---

[6] DUVAL, R. **Registros de Representação e Educação Matemática.** Curso na PUC-SP. São Paulo, 1999**.**

Dentre os muitos sistemas de representação semiótica, Duval (2004) aponta que os sistemas semióticos de representação cumprem as três atividades cognitivas inerentes a toda representação:

1. Formar uma marca ou um conjunto delas que se identifiquem como uma representação de alguma coisa;
2. Transformar representações com uso das regras próprias do sistema, a fim de obter outras representações que possam ter vantagens, em comparação com as representações iniciais, quanto ao ganho de conhecimento;
3. Conversão de representações entre os diversos sistemas de representação, de forma que as outras representações permitam explicitar outras significações relativas àquilo que é representado.

Como exemplos de sistemas semióticos podem ser citados a linguagem natural, as linguagens simbólicas, as representações gráficas e as figuras geométricas. Observe que todas cumprem a função de representação, pois, além de comunicarem, os registros destes sistemas permitem as operações cognitivas de tratamento e conversão. A partir deste momento procurar-se-á compreender melhor essas operações propostas por Duval.

Moretti (2002) lembra que a variedade e a possibilidade de transformação apresentam algumas vantagens: economia de tratamento, a complementaridade de registros e a conceitualização que implica a coordenação dos registros de representação".

Com relação à economia de tratamento percebe-se que muitos limites de uma representação podem ser superados quando se utiliza outras representações para solucionar um dado problema, ou ampliação da compreensão de um dado conceito.

Retomando o objetivo do presente trabalho percebe-se que a intenção de Godoy (2004) quanto à necessidade de diferenciar a noção científica e as suas representações semiótica (representação "versus" representado) se faz necessário aqui.

Sendo assim a definição de Duval (1993) da palavra representação é bastante importante dentro de matemática, porém acaba ficando marginalizada dentro dessa ciência. De maneira geral é mais utilizada através do verbo representar

> Uma escritura, uma notação, um símbolo representam um objeto matemático: um número,

> uma função, um vetor,... Do mesmo modo os traços e as figuras representam objetos matemáticos: um segmento, um ponto, um círculo... Isto quer dizer que os objetos matemáticos não devem ser jamais confundidos com a representação que se faz dele. De fato, toda confusão acarreta, em mais ou menos longo termo, uma perda de compreensão e os conhecimentos adquiridos tornam-se rapidamente inutilizáveis ao longo de seu contexto de aprendizagem: seja por não lembrar ou porque permanecem como representações "inertes" que não sugerem nenhum tratamento. A distinção entre um objeto e sua representação é, portanto, um ponto estratégico para a compreensão da matemática (Duval, 1993)

Duval (2003) afirma que "não se deve jamais confundir um objeto e a sua representação". Desta maneira acredita que seja fundamental se ater nessa diferença e então procurar compreender como os estudantes compreendem os objetos matemáticos e suas possíveis respectivas representações. O conhecimento das diferentes representações é útil para que possam escolher qual a mais adequada para resolução de problemas.

Além disto lembra também sobre o fato de que os aprendizes frente a atividades em Matemática lidam somente com representações semióticas dos objetos matemáticos, contribuindo para gerar a confusão entre os objetos matemáticos e suas representações:

> "Para os sujeitos, uma representação pode apenas funcionar como representação, isto é, lhes dar acesso ao objeto representado, quando duas condições forem preenchidas: que eles disponham ao menos de dois sistemas semióticos diferentes para produzir a representação de um objeto, de uma situação ou de um processo e que eles possam converter "espontaneamente" um sistema semiótico em outro" (DUVAL, 1995 apud BRANDT, 2005, p 74.)[7].

A escolha de um registro de representação depende, segundo Duval (2003) da natureza do sistema semiótico, uma vez que

---

[7] DUVAL, R. **Sémiósis et pensée humaine :registres sémiotiques et apprentissages intellectuels**. Suisse: Peter Lang, 1995.

ela deva permitir a formação indentificável de uma representação, a conversão e o tratamento. Além de que a formação desta representação pode utilizar da língua materna, desenhos, figuras ou fórmulas com a simbologia da própria da ciência.

Em busca de compreender a confusão existente entre objeto e representação Duval(2004) evoca duas operações cognitivas exploradas por Duval. A primeira delas a "semióse" que significa produção e a apreensão de uma representação. A segunda a "noésis" que é a apreensão conceitual do objeto. Acredita-se que as duas são constituídas por atividades cognitivas diferentes, sendo possível tanto examiná-las como relacioná-las entre si.

Dentre das três atividades cognitivas ligadas a semióse, Duval (2003) constata que somente duas são privilegiadas no ensino. São elas a formação e o tratamento, deixando de lado a conversão de um sistema de representação a outro ou a utilização simultânea de vários registros de representação, como se isto fosse claro para a maior parte dos alunos. Na verdade o que se tem observado é que os sujeitos comumente não reconhecem o mesmo objeto através de diferentes sistemas semióticos de representação.

Porém chegar a um ponto onde possa se converter e tratar as diversas representações não é algo tão simples, na verdade um ponto de bloqueio da aprendizagem, conforme Duval (1993) consiste na incapacidade de fazer conversões entre os diferentes registros de um mesmo objeto.

Desta forma, a operação de conversão também dever ser privilegiada visto que ela não é nem trivial nem cognitivamente neutra colocando tanto a questão do papel da semiósis no funcionamento do pensamento quanto o das condições de uma diferenciação entre representante e representado. A complexidade da conversão de representações só pode ser compreendida desde que os sistemas semióticos sejam vistos por relação às representações ou, mais exatamente ao par (conhecimento, representação).

Pecebe-se então a importância das operações de conversão e tratatamento, então explorar-se-á um pouco mais a seguir estes dois

3.1 - TRATAMENTO DE REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

Antes de discutir esta operação é importante lembrar que os estudos de Duval apontam a importância de se prever quando pretende-se elaborar uma seqüência didática: a diversidade de sistemas de representação, a utilização e traduções mútuas de um no outro sistema de representação; a análise de desenvolvimento de conhecimentos e os obstáculos encontrados nas aprendizagens fundamentais relativas ao raciocínio. Este último já fora feito no capítulo anterior.

Brandt (2005) acredita que todo esse trabalho seja fundamental devido a três fenômenos:

> a) da diversidade de registros de representação semiótica que pertencem a sistemas de representação muito distintos entre si e como conseqüência, possuem questões específicas de aprendizagem; b) da diferenciação entre representante e representado e também da diferenciação entre forma e conteúdo de uma representação semiótica; c) da coordenação entre os diferentes registros de representação semióticas disponíveis(p.73).

Focando inicialmente na operação de tratamento, procura-se em Duval (2003) o significado desta e encontra-se que "os tratamentos são transformações de representações dentro de um mesmo sistema semiótico". (p.16). Sendo assim aponta-se exemplo de operações de tratamento, a resolução de uma expressão numérica sem mudar o registro de referência em que estão representados os números, ou ainda alterações na equação de uma parábola usando a técnica de completar quadrados para encontrar suas coordenadas do vértice. Veja abaixo.

a) Resolver a expressão numérica $23-3.4+9:3-2^5$

$$23-3.4+9:3-2^5=$$

$$23-3.4+9:3-32=$$

$$23-12+3-32=$$

$$26-44=-18$$

b)

$$f(x) = 3x^2 + 12x + 11$$

$$f(x) = 3(x^2 + 4x) + 11$$

$$f(x) = 3[(x+2)^2 - 4] + 11$$

$$f(x) = 3(x+2)^2 - 12 + 11$$

$$f(x) = 3(x+2)^2 - 1$$

$$\Rightarrow V = (-2,-1)$$

Nos exemplos anteriores conforme Moretti (2002) ocorreram modificações no interior do mesmo registro que pertence ao sistema semiótico envolvendo um único registro de representação, o que caracteriza a aplicação da operação de **tratamento** de registro de representação semiótica.

Assim pode-se dizer que o ato de transformar uma representação no interior do próprio registro em que está formada de acordo com as próprias regras, segundo Duval (2003), consiste o fenômeno de **tratamento** de uma representação.

Para atentar sobre a diferença que existe entre o tratamento e a conversão apresenta-se um exemplo de conversão da seqüência didática em que diante do registro algébrico de uma função trigonométrica é possível indicar a imagem e o período das funções seno e cosseno de maneira simbólica a partir da sua notação algébrica. Veja no exemplo:

$$y = 1 + 2\cos\left(\frac{x}{2}\right) \Leftrightarrow \begin{matrix} \mathrm{Im} = [-1,3] \\ P = 4\pi \end{matrix}$$

Figura 6: Função Trigonometrica: Imagem e Período

3.2 - Conversão de Registros de Representação Semiótica

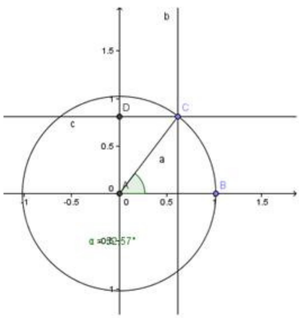
Além do tratamento de registros, Duval (2003) indica também outro tipo de operação cognitiva que acompanha o processo de aprendizagem matemática intitulado por ele como **conversão**:

> "As conversões são transformações de representações que consistem em mudar de registro conservando os mesmos objetos denotados: por exemplo, passar da escrita algébrica de uma equação à sua representação gráfica". (p.16)

Duval (2003) afirma que a conversão é necessária para a compreensão de um conceito e pode enfrentar o fenômeno de congruência ou de não-congruência entre as representações de um mesmo objeto que se originam de sistemas semióticos diferentes. Tendo em vista este fato, a seguir são apresentados alguns exemplos de conversão, voltadas especificamente ao estudo da trigonometria e que estarão presentes na seqüência didática:

a) Círculo Trigonométrico e Tabela de Senos e cossenos.

Neste caso faz-se a conversão do registro geométrico (círculo trigonométrico) para um registro algébrico organizado sobre tabela de seno e cosseno.



x	cos(x)	sen(x)
π/6	0,866	0,5
π/4	0,707	0,707
π/3	0,5	0,866
π/2	0	1
2π/3	-0,5	0,866
π	-1	0
5π/4	-0,707	-0,707
3π/2	0	-1
11π/6	0,866	0,5
2π	1	0

Figura 7: Conversão entre os valores de seno e cosseno do círculo trigonométrico e uma tabela

b) Círculo Trigonométrico e gráfico das funções seno e cosseno.

Aqui o aluno deverá fazer uma conversão do registro geométrico (círculo trigonométrico) para um registro gráfico, o qual neste caso será auxiliado pelos recursos do software GeoGebra.

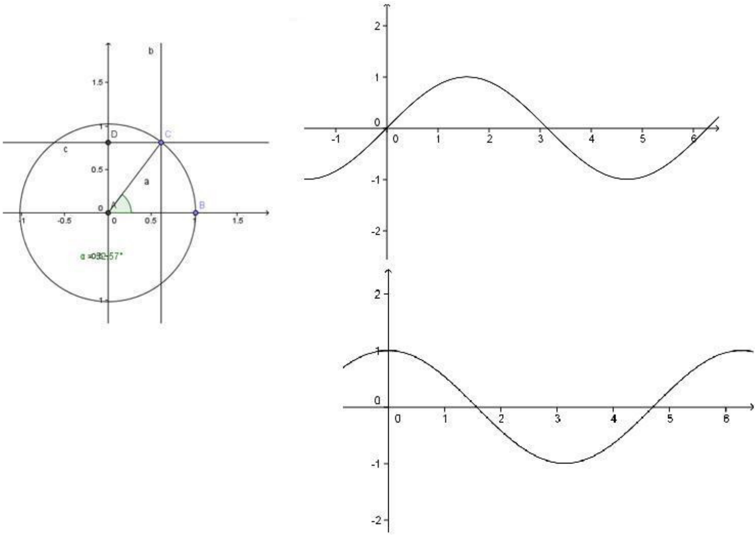


Figura 8: Círculo trigonométrico e o gráfico das funções seno e cosseno

c) Utilizando a tabela de senos e cossenos elaborada a partir do círculo trigonométrico o estudante, em algum momento, terá uma atividade de conversão. Nesta, ele tomará os valores como coordenadas de pontos (x, sen(x)) ou (x, cos(x)) e representá-lo-as graficamente para observar a forma das funções seno e cosseno.

d) Uma outra conversão que será feita pelos estudantes durante a seqüência didática é aquela que toma a forma algébrica de uma função seno e a representa graficamente, como pode ser visto na ilustração abaixo.

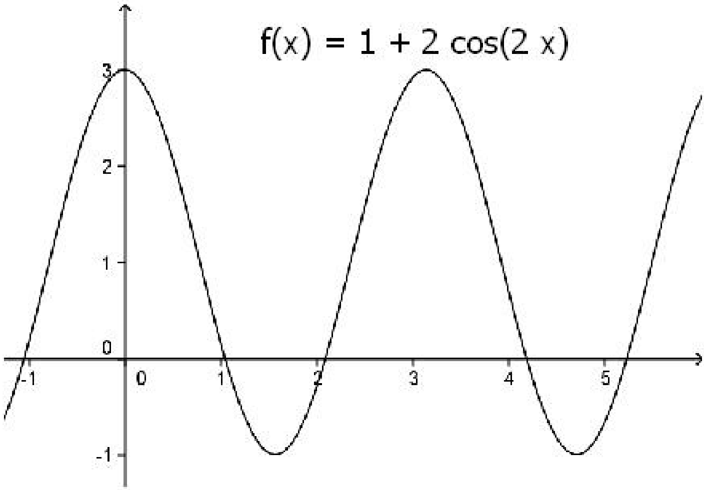


Figura 9: Registro gráfico e algébrico da função

Tendo apresentado os exemplos, observe agora que em todos há mudança de registro, pois cada uma das formas de representação (escrita algébrica, representação gráfica e geométrica) possui regras próprias de transformação, internas ao sistema semiótico. Entretanto, em cada um dos exemplos o objeto matemático é conservado mesmo havendo a mudança de registro.

Concordando com este fato, Moretti (2002) acrescenta que o termo conversão é associado por Duval com o ato de transformar um objeto matemático representado em um sistema semiótico em outro sistema semiótico, coordenando-os pelo sujeito que a faz. Lembra também que é possível manter parte, ou até mesmo, toda a representação inicial. Duval (2003) alerta que a conversão não é um processo simples ou puramente conceitual, na verdade ele pode ser congruente ou não congruente.

Para Duval (2003) o ato de converter não se resume a simples codificação. Na verdade ela exige uma apreensão global e qualitativa a qual não é possibilitada pela codificação. Brandt (2005) atribui a esta habilidade algumas ações como, por exemplo, associar na representação os coeficientes (positivos ou negativos, maior, menor ou igual a 1) de uma função com os pontos de interseção com eixos ou com a inclinação. Desta maneira ela acredita que ao se estabelecer estas relações as variáveis cognitivas específicas do funcionamento de cada um dos registros estão sendo articuladas. Ou seja, consegue-se manipular ambos os registros de representação no que diz respeito às unidades de significado.

3.2.1 Congruência semântica

Segundo Silva (2008) as variações de congruência e não-congruência são fenômenos que se manifestam mais intensamente nas operações de conversão.

Duval (2003) afirma que esse fenômeno possa explicar os sucessos ou os insucessos dos alunos frente a problemas que necessitem mudanças de sistema semiótico de representação. Uma vez que os alunos têm mais sucesso em problemas que envolvam conversões congruentes.

Ao se efetuar uma passagem de um registro de representação (de partida) para outro de forma natural, isto é, a representação do inicial é transparente à final, diz-se que na conversão ocorreu o fenômeno de congruência. Porém quando o registro de partida impõe maior dificuldade de pensar ou visualizar a representação do registro de chegada, diz-se, então, que na conversão ocorreu um fenômeno de não congruência.

O fenômeno de congruência ou não congruência é explicada por Duval (2003) ao afirma que quando diante de dois registros de representação em que houve uma conversão duas situações podem ocorrer:

> Ou a representação terminal transparece na representação de saída e a conversão está próxima de uma situação de simples codificação – diz-se então que há congruência –, ou ela não transparece absolutamente e se dirá que ocorre a não-congruência. (p.19)

Duas representações semioticamente diferentes representam, ao menos parcialmente, o mesmo conteúdo, quando obedecem a três critérios de congruência:

(1°) Possibilidade de uma correspondência "semântica" entre os elementos significantes: A cada unidade significante simples de uma das representações, se pode associar uma unidade significante elementar. (2°) Univocidade semântica terminal: a cada unidade significante elementar da representação de partida, corresponde uma única unidade significante elementar no registro de representação de chegada. (3°) Organização de unidades significantes: As organizações respectivas das unidades significantes das duas representações comparadas, conduz a apreender as unidades em correspondência semântica segundo à mesma ordem nas duas representações (desde que tenham o mesmo número de dimensões). (DUVAL, 2004, p.53)

Duval (1993) busca detalhar mais tal fato através de três condições necessárias para que duas representações sejam congruentes:

a) correspondência semântica entre unidades significantes que as constituem;
b) mesma ordem possível de apreensão destas unidades nas duas representações;
c) conversão de uma unidade significante da representação de partida a uma só unidade significante na representação de chegada.

No ensino e aprendizagem da matemática, os fenômenos de não congruência são mais comuns nas conversões entre os registros que os de congruência. Apesar das dificuldades encontradas, é imprescindível que ocorram as conversões nos dois sentidos, pois a aprendizagem requer uma coordenação dos distintos registros de representação que um domínio de conhecimento mobiliza, uma vez que:

> "Na matemática a especificidade das representações consiste em que elas são relativas a um sistema particular de signos, à linguagem, à escrita algébrica ou aos gráficos cartesianos e elas podem ser convertidas em representações equivalentes num outro sistema semiótico, podendo tomar significações diferentes pelo sujeito que as utiliza" (Brandt, 2005, apud Duval, 1995, pág 68).

A congruência ou não congruência entre dois registros de representação pode tornar a atividade de conversão mais ou menos complexa. Além do mais, os registros de representação podem ser congruentes num sentido e não o serem no sentido inverso. É o caso, por exemplo, das funções: pode-se ter congruência na passagem da linguagem algébrica para o gráfico cartesiano e não ter congruência na passagem inversa.

3.3 APRENDIZAGEM MATEMÁTICA SEGUNDO DUVAL

Conforme visto um objeto matemático é acessível somente através de suas representações, porém, o objeto não pode ser confundido com sua representação. Procurando compreender como se dá a apreensão de um objeto matemático pelos sentidos humanos, é interessante observarmos a hipótese de Duval onde a compreensão (integral) de um conteúdo conceitual repousa sobre a coordenação de ao menos dois registros de representação e esta coordenação manifesta-se pela rapidez e espontaneidade da atividade cognitiva de conversão.

Cada registro de representação utilizado para representar um objeto deixará evidente alguma característica ou propriedade do objeto, as quais não estarão tão evidentes em um outro registro. Como diz Moretti (2002): "... de um ponto de vista cognitivo uma representação é parcial em relação aquilo que ela quer representar, de um registro a outro não são os mesmos conteúdos de uma situação que são representados". (p.347)

Tendo explorado a teoria que fundamenta a elaboração da seqüência didática proposta nessa dissertação, passar-se-á no próximo capítulo a registrar o estudo feito em torno das TIC e a busca por um software que fosse adequado a proposta de ensino aqui desejada.

4 - INSERÇÃO DAS NOVAS TECNOLOGIAS DA INFORMAÇÃO E COMUNICAÇÃO NO ENSINO

De acordo com Cotta (2002) a contínua transformação tecnológica do mundo tem levado, cada vez mais, o computador para os diferentes espaços e meios em que as pessoas exercem atividades. Talvez assim o ambiente escolar também possa se tornar um lugar no qual seu público tenha contato, manuseie e se aproprie de conhecimentos utilizando ambientes gerados pelas novas tecnologias. Surgem assim novos paradigmas educacionais que propõem mudanças razoáveis sobre este ponto de vista até mesmo nas aulas de matemática. Sugerindo atividades e metodologias que possibilitam a construção e a apropriação de conhecimentos por parte dos alunos.

Cotta (2002) afirma que se tem adotado a utilização da informática como alternativa a metodologia tradicional como um recurso para a melhoria dos resultados do ensino da Matemática nas escolas. Por outro lado, o mesmo autor lembra que é utópica a idéia de abandonar por completo a metodologia tradicional por outras baseadas no uso de novas tecnologias de uma hora para outra, na verdade isto pode vir a ocorrer de maneira lenta gradual afim de que os professores se adaptem aos poucos a nova ferramenta e compreendam as novas metodologias a serem adotadas. Talvez isso aconteça assim uma vez que a metodologia dita tradicional esteja impregnada na formação dos professores e permeia grande parte da sua atuação em sala durante toda sua carreira docente.

Segundo Gil & Menezes (2004) ao se falar dos novos meios tecnológicos comunicativos (MTC) tinha-se a impressão de estar se referenciando a um conjunto de materiais e/ou máquinas que ao serem aproveitadas no ensino podem promover maior motivação além de ser um facilitador da aprendizagem pelos alunos.

Observa-se também assim que uma nova tecnologia passa a pertencer ao rol de ferramentas disponíveis ao uso dos professores e alunos criando esperanças e expectativas por ambas as classes. Isto pode ser percebido quando a televisão passou a ser oferecida como recurso áudio-visual para complementação das informações na sala de aula. O mesmo aconteceu com a introdução dos computadores nas escolas, porém o que se observou em seguida, em ambos os casos é que não ocorreu uma

> (...)utilização sistemática, organizada e enriquecedora no processo de ensino e de

> aprendizagem. Na grande maioria dos casos muitos professores entusiastas as experimentaram mas depois parece ter ocorrido algum desânimo ou apatia que os fez retornar aos meios tradicionais. (Gil & Menezes, 2004, p.141)

Gravina e Santarosa (1998) lembram ainda que o processo de apropriação dos MTC no ensino procura se desvincular das características das práticas que valorizam a transmissão do conhecimento e na capacidade de reproduzi-lo, sem que demonstrem um verdadeiro entendimento.

Cotta (2002) concordando com ambos os pesquisadores anteriores também percebeu que a adaptação e a introdução de novas metodologias que utilizam as novas ferramentas se fazem necessárias. Isto pelo fato de que a simples introdução do computador nas escolas, como já ocorrera em muitas delas não é sinônimo de mudança na atuação docente.

Sendo assim analisando tais pesquisas observa-se que a simples introdução dos MTC no ambiente escolar provoca inicialmente um entusiasmo, mas em pouco tempo os professores acabam voltando à velha prática. Tal ocorrência se deve ao fato, segundo Gil & Menezes (2004), de que muitos dos materiais adotados não possuam em sua gênese preocupações educativas. De acordo com estes pesquisadores é necessário criar aplicativos e metodologias com fins educacionais.

Assim em busca dessa mudança surgiram nos últimos anos vários softwares educacionais que possibilitam aos alunos o trabalho com diversos conceitos da própria Matemática sem a necessidade de conhecimentos da linguagem de programação. Estes, sem dúvida, se compõem possivelmente em um ambiente de aprendizagem, no qual é possível trabalhar com uma perspectiva que incorpora a produção e re-elaboração de conhecimentos relacionados a conteúdos específicos da Educação Matemática.

Busca-se, por meio de tais ambientes informatizados, permitir aos sujeitos envolvidos assumir papéis menos passivos na busca por novos conhecimentos com o saber matemático.

Gravina & Santarosa(1998) afirmam que nessa nova situação o ensino de Matemática busca inserir o estudante em situações semelhantes ao ‘fazer Matemática’: experimentar, interpretar, visualizar, induzir, conjeturar, abstrair, generalizar e enfim demonstrar.

Os alunos, nesse caso, podem agir de maneira diferente da tradicional apresentação do conhecimento, baseada na transmissão de 'fatos' ordenados, através de definições e propriedades. Assim eles raramente se engajam em ações que desafiem suas capacidades cognitivas, sendo-lhes exigido no máximo a memorização e repetição, e conseqüentemente não são autores do sentido dado ao conhecimento.

Gil & Menezes (2004) lembram que a idéia não se trata de substituir meios que já provaram serem capazes de promover o ensino pelo uso de software educativo. Na verdade consiste em aproveitar o melhor possível as características destes meios que podem se tornar num dado momento mais adequado que outros meios mais "convencionais".

Ao se comparar a prática de ensino tradicional com a prática do profissional de pesquisa dessa área do conhecimento fica claro o quão inadequada é tal abordagem. O conhecimento dentro das pesquisas em Matemática é elaborado a partir de muita investigação e exploração. A etapa final desse trabalho é a escrita formal e organizada dos resultados obtidos.

Porém Cotta (2002) afirma que para chegar a tal mudança na prática dos professores é preciso pensar inicialmente sobre as transformações que a informática acarreta no processo ensino-aprendizagem e conseqüentemente a reorganização das estratégias pertinentes ao uso dessa tecnologia. Assim, esta pesquisa enfatiza a utilização do ambiente dinâmico e interativo na construção de conhecimento, visando aplicações no campo da Educação Matemática.

Vilarreal (1999) destaca também a visualização e a possibilidade de experimentação que os meios computacionais permitem. Segundo essa pesquisadora, os conceitos centrais de Cálculo estão presentes em muitas idéias intuitivas desenvolvidas desde a infância relacionadas com problemas de movimento, ou seja, seu estudo poderia ser feito através de uma abordagem experimental. Mas também é importante a visualização para construção de conceitos importantes, como da própria derivada. Assim, a experimentação e a visualização são fundamentais para o estudo desta área do conhecimento, e é algo possível dentro dos ambientes computacionais.

Ainda é destacada a importância da utilização dessas ferramentas como uma forma de mediar e reorganizar "os processos de criação, de busca e armazenamento de informação e o estabelecimento de relações humanas". O computador neste caso pode se tornar mais do que uma ferramenta de auxílio na atividade, mas em uma ferramenta que transforma essa atividade.

Desta forma o computador não está no foco do estudo, mas é uma "janela" através da qual os estudantes poderão olhar as atividades e ao mesmo tempo serem mediados por esta ferramenta.

Somou-se a esse fato, a vontade pessoal de diferenciar as aulas por meio de outras formas de lecionar conteúdos de funções, sendo o computador e os softwares de geometria dinâmica entendidos como meios pelos quais se podem impulsionar formas diferenciadas de exercer a prática docente.

Baseando-se nos preceitos de Duval para compreensão de um conceito em Matemática iniciou-se uma pesquisa por um aplicativo que corroborava com esta teoria e que colaborasse para o ensino das funções trigonométricas. Sendo assim, no próximo tópico buscar-se-á apresentar alguns dos tipos de softwares hoje disponíveis e suas principais características, além de procurar justificar a escolha dos softwares de Geometria Dinâmica e em particular o GeoGebra.

4.1 OS SOFTWARES PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA

Inicialmente é interessante trazer uma definição para software educativo, Gil & Menezes (2004) afirmam que dentre as diversas definições que se depararam todas possuíam algo em comum:

> programas informáticos concebidos para a finalidade (específica) de serem utilizados como meio didáctico de forma a facilitarem o processo de ensino e de aprendizagem. (p.142)

Cota (2002) concorda com esta definição ao afirma que softwares educativos são programas que apóiam funções educativas.

Em busca de alcançar os objetivos pretendidos, Gil & Menezes (2004) acreditam que o uso destes programas deve ser condicionado às características do software, adequando-o ao contexto e integrando-o as outras atividades envolvidas no ensino. Conciliado a utilização do software educativo com o ambiente de aprendizagem de acordo com alguns critérios:

- tipo do software (a escolha de um programa deve ser de acordo com um dado objetivo uma vez que outro aplicativo possibilitará diferentes situações de contexto educativo);
- conciliar atividades que utilizem o computador com outras sem a sua intervenção;

- considerar a ação do aluno como o elemento central do ambiente de aprendizagem;
- pensar como será a intervenção do professor;
- deixar claro os objetivos que se pretende atingir.

Ao ler a opinião de De Campos (2008) sobre o uso das TIC para o ensino de Matemática percebe-se que sua idéia é consonante a de Cota (2002). Pois ele também acredita que o uso do computador possa gerar benefícios ao ensino de Matemática desde que seja feita uma seleção de programas e metodologias adequadas a fim de tirar um melhor proveito das TIC.

Como fora visto anteriormente, a utilização destes novos meios para o ensino da Matemática permite que o aluno aproveite um ambiente onde se faz algo semelhante à pesquisa na área de matemática, onde

> o conhecimento é construído a partir de muita investigação e exploração, e a formalização é simplesmente o coroamento deste trabalho, que culmina na escrita formal e organizada dos resultados obtidos (Gravina & Santarosa, 1998, p. 2)

Aprofundando-se um pouco mais sobre como se podem desenvolver as pesquisas em Matemática e comparando-a com o seu ensino Cotta (2002) percebe que historicamente o desenvolvimento dessa ciência partiu de ações sobre objetos concretos, que se generalizam em esquemas. Já em uma etapa mais avançada do seu desenvolvimento começou a se dar a partir de ações sobre objetos abstratos que se generalizam em conceitos ou teoremas.

Esta “evolução” da ciência é comparada então com a elaboração de conhecimentos matemáticos pelas crianças, que em um dado momento de suas vidas podem utilizar-se de palitos e organizá-los de diferentes formas (tamanhos, espessuras, cores, texturas). Porém ao contarem tais palitos se deparam com uma situação, a quantidade independe da forma em que estão dispostos. Através das ações concretas de ordenar e contar constrói o conceito de número natural.

Um pesquisador de Matemática, em um estágio avançado de pensamento formal, também usa de objetos de investigação para identificar particularidades ou regularidades que podem ser generalizadas. Testando em seguida suas conjeturas em novos casos, e finalmente aventura-se na tentativa de demonstração.

Um das diferenças entre a forma de desenvolvimento de um conceito por uma criança e um matemático profissional consiste na natureza dos objetos: de físicos passam a abstratos. Gravina & Santarosa(1998) crêem nessa diferenciação, mas reforçam o fato de que ambos possuem uma "concretude", que é dada pela representação mental, figural ou simbólica, a eles associada, e é sobre estes objetos que são aplicadas as ações mentais.

Está claro que Lira (2008) concorda com esta idéia ao afirmar que no ensino de muitos conceitos em Matemática exista

> "um grande abismo entre a maneira como as idéias envolvidas em matemática avançada são construídas cognitivamente e apresentadas em uma ordem dedutiva. Isto nos adverte que simplesmente apresentar uma teoria matemática como uma seqüência de definições, teoremas e provas (....) pode mostrar a estrutura lógica da matemática, mas falha no objetivo de permitir o funcionamento psicológico da mente humana em desenvolvimento". (Tall, 1991, apud Lira 2008)[8].

Levando em consideração a série de dificuldades que foram apresentadas nos capítulos anteriores para compreensão das funções trigonométricas (seno e cosseno), parece que um curso deste tipo pode não ser tão lógico e dedutivo para os alunos. Aquilo que parece, às vezes, tão claro e simples para os professores, e pode ser deduzido e demonstrado de maneira lógica, é algo muito mais complexo do que se podia imaginar.

Alguns dos problemas neste caso envolvem a manipulação e utilização de abstrações para compreender o comportamento das funções trigonométricas, como por exemplo, a associação dos pontos do círculo trigonométrico com os pontos do plano cartesiano.

De acordo com Gravina & Santarosa(1998) no ensino de Matemática, é fundamental a transição da natureza dos objetos pelos alunos nos quais eles aplicam as ações. O mundo que os cerca é cheio de objetos concretos para iniciarem sua aprendizagem, de maneira mais espontânea, nessa área do conhecimento. Porém ao se defrontarem com a necessidade de elaborar conceitos mais complexos e abstratos necessitam da "concretização mental", que nem sempre é simples,

---

[8] TALL, David(Ed.), **Advanced Mathematical Thinking**. Kluwers Academic Publishers. Netherlands. 1991.

mesmo para o matemático profissional. Nesse nível de aprendizagem muito pouco tem caráter intuitivo e muitas vezes é preciso elaborar conceitos que dependem muito da ação mental por parte do aluno.

Os ambientes informatizados possuem potencial frente aos obstáculos inerentes ao processo de aprendizagem. É a possibilidade de "mudar os limites entre o concreto e o formal" (Papert, 1988 apud Gravina & Santarosa,1998)[9]. Também pode-se pensar que o computador permite

> "(...) criar um novo tipo de objeto - os objetos 'concreto-abstratos'. Concretos porque existem na tela do computador e podem ser manipulados; abstratos por se tratarem de realizações feitas a partir de construções mentais." (Hebenstreint 1987, apud Gravina & Santarosa,1998, p. 3)[10]:

Caso exista a possibilidade de manipulação de objetos físicos, Gravina & Santarosa(1998) mostram que a sua transposição para ambientes informatizados apresenta algumas vantagens como por exemplo o fato de poder realizar vários experimentos em pouco tempo, diferentemente da manipulação concreta. Assim a ação pode favorecer ainda mais o processo de investigação e abstração, com a conseqüente construção de conceitos e relações.

Porém em sua pesquisa Gravina & Santarosa(1998) pereceberam que durante muito tempo um dos poucos ambientes computacionais que permitiam que o aluno aprendesse da maneira até aqui pensada foi aquele baseado na linguagem LOGO, onde o estudante podia aprender fazendo algo, explorando e investigando. Enquanto que a grande maioria das ferramentas disponíveis era do tipo "instrução programada por computador", os quais ainda hoje podem ser encontradas, que apesar de poderem usufruir de

> uma boa interface e explorar os recursos de hipermídia (som, imagem, animação, texto não linear) nada mais que oferecem aos estudantes a leitura de definições e propriedades e aplicação destes em exercícios práticos (tipo tutorial) ou testar e fixar 'conhecimentos' através da realização de exercícios protótipos e repetitivos, que no máximo avançam em grau de dificuldade

[9] PAPERT, S. **Logo: computadores e educação.** Editora Brasiliense, 1988.
[10] HEBENSTREINT, J. **Simulation e Pédagogie, une recontre du troisème type.** Giv Sur Yvett: École Superieure d'Eletricité, 1987.

> (tipo prática de exercícios). (Gravina & Santarosa,1998,p. 2)

Essas autoras lembram que tais recursos muitas vezes acabam por atrair uma boa parte das classes docente e discente, porém apenas o computador, como já também fora afirmado por Cotta(2002), não é garantia de mudança. Uma vez que o visual atraente dos recursos tecnológicos podem apenas colaborar com o modelo de escola que privilegia a transmissão do conhecimento.

Gravina & Santarosa (1998) mostram que historicamente o conhecimento matemático tem sua representação feita através de sistemas estáticos, como pode-se perceber nos livros, ou em uma clássica aula de quadro e giz. Essas autoras crêem que esta característica de estaticidade pode dificultar a compreensão de um conceito, uma vez que ele se resume, para muitos, em um conjunto de símbolos e palavras ou desenho a ser memorizado.

Dessa maneira, não se surpreendem com o fato de que os alunos não consigam aplicar aquele conceito, ou teorema, em uma situação diferente das apresentadas pelo livro ou pelo professor.

Lira (2008) em sua pesquisa busca também justificar o uso das TIC no ensino através dos chamados objetos digitais de aprendizagem. Procurando por uma definição para eles encontra-se o Learning Technology Standards Committee (LTSC) que acredita ser qualquer entidade, digital ou não-digital, que pode ser utilizado e re-utilizado, ou até mesmo referenciado e que apóie a aprendizagem amparada por uma tecnologia. Ele cita alguns exemplos de aprendizagem apoiada como os ambientes de aprendizagem interativa, sistemas de instrução inteligentes computacionais e os ambientes de aprendizagem à distância.

Quanto aos objetos de aprendizagem o LTSC(2005) apontam alguns como os recursos multimídias, aqueles com conteúdo instrucional, os softwares instrucionais, recursos de alguns softwares ou até mesmo pessoas, organizações, ou eventos que são referenciados durante a aprendizagem apoiada por tecnologia.

Sendo assim Lira(2008) acredita que um estudo com elementos geométricos pode ser feito utilizando-se material concreto a partir de diversos materiais, porém as abstrações necessárias, passando a um nível mais complexo, seriam apenas empíricas sendo limitadas pela textura, peso e maleabilidade do material utilizado. Enquanto que no computador

> (...) as abstrações sobre objetos representados na tela são, ao menos, pseudo-empíricas, pois atuam sobre representações dos objetos. Os objetos digitais permitem verificar facilmente as antecipações referentes aos conceitos em foco, se elas estão corretas bem como o retorno caso não estejam, ou seja, existe mais facilidade para a construção do pensamento operatório. O sujeito faz hipóteses sobre a configuração espacial das figuras geométricas e tem a possibilidade de verificar rapidamente a hipótese criada. (Lira,2008, p. 58)

Percebe-se que sua idéia está de acordo com o fato de a tela do computador ser um facilitador da abstração para o estudante. Lira (2008) reforça esta idéia ao citar a pesquisa de Fagundes (1986)[11] baseada na utilização da linguagem LOGO. Nesta pesquisa a pesquisadora observa que ao utilizar tais objetos de aprendizagem a elaboração do conhecimento está baseada na ação de representar aquele objeto.

Em busca de elaborar uma seqüência didática que possibilite ao aluno ter contato com o "fazer matemática" e que também possa manipular estes objetos abstratos que muitas vezes são vistos através de representações estáticas pesquisou-se sobre os diferentes tipos de aplicativos oferecidos pelas TIC, as quais são apresentadas adiante.

Tal pesquisa é justificada por Cotta (2002) ao afirmar que para alcançar resultados positivos com o uso das TIC no ensino da Matemática é necessário observar de antemão o tipo de software que se pretende utilizar. Uma vez que a seleção de qual software é o mais adequado depende da forma como este se insere nas práticas de ensino, das dificuldades dos alunos identificadas pelo professor e por uma análise das situações realizadas com alunos para os quais o software é destinado. É o professor quem vai propor o uso de ferramentas informatizadas capazes de criar as situações favoráveis à aprendizagem dos conceitos e à superação das dificuldades dos alunos.

Sendo assim a partir das leituras e pesquisas feitas, e observando o referencial teórico percebeu-se que o mais interessante

[11] FAGUNDES, Léa da Cruz. **Psicogênese das Condutas Cognitivas da Criança em Interação com o Mundo do Computador**. Tese de Doutorado. Universidade de São Paulo. 1986. São Paulo.

seria buscar um software que unisse características dos softwares algébricos e de geometria dinâmica. Sendo assim encontrou-se o software GeoGebra, que mais adiante será explicado de maneira mais detalhada.

Nos próximos tópicos vamos observar o que são estes softwares algébricos simbólicos e de geometria dinâmica.

4.1.1 Os Softwares de Computação Algébrica e Simbólica (CAS)

De acordo Kozakevich (2009) um sistema de computação algébrica e simbólica CAS (Computer Algebra System) é um software capaz de manipular simbolicamente expressões matemáticas e realizar cálculos numéricos. A tarefa, em geral considerada tediosa ou difícil, de manipulação e remanejamento algébrico sobre equações é feita automaticamente por estes softwares. É importante frisar que o tratamento simbólico sobre expressões Matemáticas feitas por um CAS é muito superior quando comparado com uma calculadora. Cada um dos diferentes sistemas deste tipo tem suas próprias especificidades e capacidades, embora o principal propósito seja o mesmo: a manipulação simbólica. Outras ferramentas computacionais como geração de gráficos, programação são disponibilizados por tais aplicativos. Entre os softwares mais populares são mencionados por Kozakevich (2009): Maxima, Maple, Mathematica, Matlab e MathCAD.

Eles podem ser utilizados para simplificar funções racionais, fatorar polinômios, achar soluções de equações, integrar e diferenciar em forma simbólica e até *plotar* gráficos de funções. Um exemplo da grande capacidade de realizar cálculos extensos e tediosos é apontado por Kozakevich (2009) ao mostrar que a função

$$f = \frac{\sin\left(\dfrac{nz\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\sqrt{y^2+z^2}}\right)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

É solução da seguinte equação diferencial

$$\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4}\right)+\left(\frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2}\right)+\left(\frac{\partial^4}{\partial z^2 \partial x^2}\right)+n^2\left(\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}f\right)+\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}f\right)\right)=0$$

Pensando na teoria de registros de representação semiótica de Duval, no caso dos CAS, o usuário apenas pode utilizar dos seus recursos dando entrada através de expressões algébricas. As devidas transformações em outras expressões, ou no caso em gráficos que é um dos interesses da presente pesquisa, são apresentados como resultado final. Desta maneira a conversão se dá através do software em um sentido só. Uma vez que não é possível manipular gráficos ou desenhos e observar as conseqüentes mudanças que há nas suas representações algébricas.

4.1.2 Os Softwares de Geometria Dinâmica (DGS)

Pesquisando um pouco mais se encontra um outro recurso das TIC que são os chamados Softwares de Geometria Dinâmica (DGS) que antes fora citado rapidamente. Esses ambientes de aprendizagem permitem que instâncias físicas assumam um caráter dinâmico. O que pode influir sobre os processos cognitivos de acordo com Gravina & Santarosa(1998), em particular com respeito às chamadas concretizações mentais.

Nesse ambiente informático os objetos matemáticos passam a ter representações mutáveis, diferente dos tradicionais ambientes "lápis e papel" ou "giz e quadro-negro". Tal dinamismo é permitido através da manipulação direta sobre os objetos presentes na tela do computador. Por exemplo: em geometria os elementos de um desenho são manipuláveis (o centro e o raio de uma circunferência, a reta e os pontos pelos quais ela fora definida); no estudo de funções de primeiro grau as suas respectivas representações gráficas são objetos manipuláveis permitindo descrever a relação de crescimento/decrescimento entre os coeficientes e suas respectivas representações algébricas.

Como exemplo destes, Gravina & Santarosa (1998) citam o CabirGeométre e o Sketchpad os quais foram desenvolvidos especificamente para se fazer construções em Geometria. As construções podem ser feitas utilizando-se “régua e compasso eletrônicos”, oferecendo também uma interface de menus de construção em linguagem clássica da Geometria. O usuário faz seus desenhos a partir de propriedades geométricas que definem os objetos. Arrastando-se os elementos que os compõem, estes se transformam, mantendo as relações geométricas que caracterizam a situação. Logo para um conceito é possível se associar diversos desenhos que se movimentam sem perder as propriedades em estudo.

Dessa maneira o estudante pode agir em um contexto abstrato sobre objetos matemáticos, porém com o suporte da representação na tela do computador. Além de que, Gravina & Santarosa (1998) afirmam que a diversidade de desenhos favorece a concretização mental, "não existindo mais as situações prototípicas responsáveis pelo entendimento inadequado".

Segundo Kokol-Voljc(2007) o DGS é um tipo de programa para fazer "geometria dinâmica", que do ponto de vista didático é uma ferramenta bastante apropriada para o desenvolvimento de conceitos geométricos, em particular, conceitos de Geometria Euclidiana. Suas principais características são:

- um modelo dinâmico diferente da estaticidade do tradicional ambiente lápis e papel (quadro e giz),
- possui uma opção de gravar uma seqüência de comandos na forma de um "novo comando";
- possibilita a visualização do movimento do objeto matemático.

O uso dos DGS foi alvo de diversas pesquisas ao longo da última década focadas no seu uso e nas mudanças promovidas no ensino e aprendizagem de geometria, dentre estas Kokol-Voljc(2007) cita Hoyles & Jones (1998)[12], Kokol-Voljc (1999)[13] e Laborde (2003)[14] dando suporte ao uso positivo destes aplicativos.

Pode-se trazer dois DGS para exemplificar, um deles é o Geometer's Sketchpad (http://www.dynamicgeometry.com) e o Cabri Geometry, que já oferece uma versão tridimensional – Cabri3D.

Cruz (2006) acrescenta que este é um tipo de ambiente computacional que permite aos alunos construírem figuras, realizarem investigações sobre propriedades e conceitos matemáticos, manipulando o objeto e seus elementos dinamicamente na tela do computador, além de identificarem especialmente as características das figuras geométricas.

---

[12] HOYLES C. & JONES K. **Proof in dynamic geometry contexts.** In: Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st century – An ICMI, C. Mammana & Villani (eds.) (cap. 4, seção II, p. 121-128), Kluwer Academic Publisher, 1998.

[13] KOKOL-VOLJC, V. **Ndynamische Geometrie-Software und mathematische Begriffsbildung**. In: Neubrand, Michael (ur.) 1999.

[14] LABORDE C. **The design of curiculum with technology: lessons from projects based on dynamic geometry enviroments.** Artigo, Came Symposium, Reims, 2003.

Estes aplicativos permitem trabalhar com a geometria de maneira interativa, onde o usuário pode explorar movimentando e manipulando de acordo com sua própria vontade a figura construída. Desta maneira, muitos usuários podem se sentir livres e estimulados a explorar a representação geométrica de um elemento Matemático ali representado, “não como uma coleção de regras formais prontas e acabadas em si mesmas, mas como uma ciência dinâmica e passível de manipulação”(Cruz, 2003).

Porém neste caso, a maioria dos software faz manipulação única sobre o desenho, ou seja há apenas tratamento de registros semióticos, enquanto a conversão é algo raro neste tipo de software.

Ao considerar os CAS e os DGS chegou-se a conclusão que um software ideal para proposta de ensino deste trabalho precisaria unir características destes dois sistemas. Pesquisando por algo assim encontrou-se o GeoGebra, o qual será apresentado no tópico seguinte.

4.2 - Geogebra

Pensando sobre algumas das considerações feitas neste capítulo Markus Hohenwarter cria o GeoGebra durante suas pesquisas ao longo do seu mestrado. Ele é um software gratuito de matemática dinâmica que reúne recursos de geometria, álgebra e cálculo. Segundo seu criador, muitas pesquisas demonstram os benefícios da introdução das tecnologias da informação e comunicação (TIC) para a aprendizagem de matemática, porém o processo de sua introdução nas salas de aula é um processo lento. É necessário mais do que o fornecimento destas novas tecnologias para as escolas e seus professores, é preciso que sejam feitas experiências substanciais com o uso destas ferramentas.

O Geogebra é um software livre *opensource* que pode ser utilizado inteiramente pela internet. Markus Hohenwarter em 2002 o apresentou como tema da sua dissertação de mestrado na universidade de Salzburg, Áustria. Sua idéia ao desenvolvê-lo era unir as facilidades dos softwares de geometria dinâmica (DGS) e o poder e os recursos dos softwares computacionais algébricos (CAS), ou seja, juntar as principais características de outros pacotes que tratam de geometria, cálculo e álgebra separadamente, veja na figura.

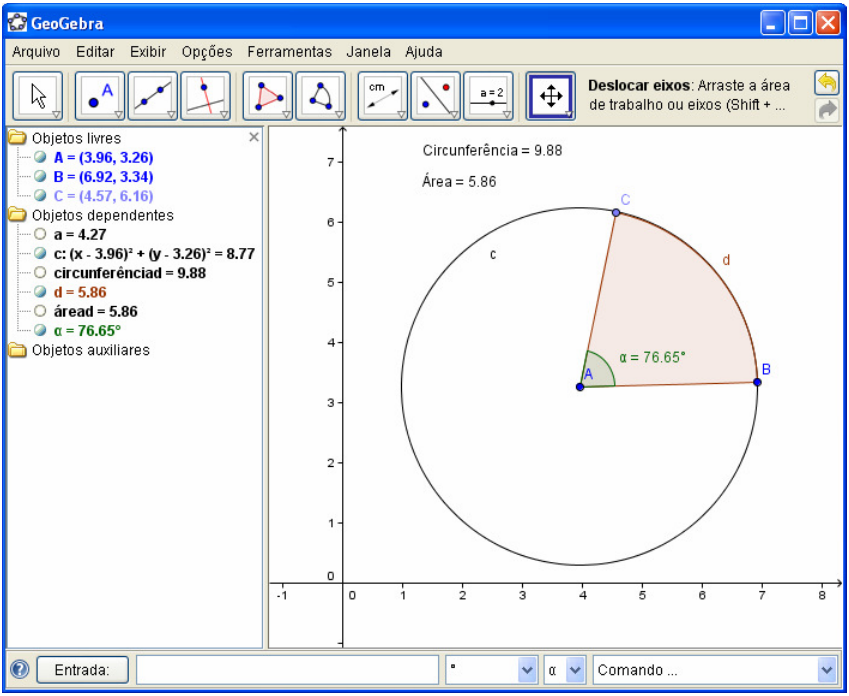


Figura 10: Janela algébrica e geométrica do GeoGebra

No mesmo ano da conclusão de seu mestrado o GeoGebra foi publicado na internet e rapidamente vários professores da Áustria e Alemanha o usaram e imediatamente entraram em contato com Hohenwarter para compartilhar da empolgação que sentiam ao utilizá-lo em sala de aula.

Naquele ano de 2002 seu criador recebeu em Roneby, Suécia, o prêmio da European Academic Software Award. Inspirado pelas experiências relatadas, ele sente-se encorajado a continuar o desenvolvimento do GeoGebra então conclui seu Phd abordando aplicações pedagógicas do seu software nas escolas Austríacas. Em 2006 Hohenwarter se torna professor visitante da Florida Atlantic University (FAU) e inicia seu trabalho com treinamento de professores em um projeto da National Science Foundation's Math and Science Partnership.

Após sua publicação na internet, o criador da ferramenta foi convidado por universidades Européias e Norte-Americanas a participar de conferências acadêmicas para dar palestras e oferecer workshops no

GeoGebra. Assim muitos pesquisadores interessados passaram a utilizar o Geogebra em seus projetos e indicá-lo no suplemento de seus livros textos.

Com a ajuda de voluntários, o GeoGebra atualmente já está traduzido em 35 línguas diferentes. Segundo Hohenwearter (2007) o www.geogebra.org recebe 300 mil visitas mensalmente de 188 países diferentes e estima que mais de 100 mil professores ao redor do mundo o utilizam.

Segundo seu criador ele (www.geogebra.org) é um software que está rapidamente ganhando popularidade pelo mundo, principalmente pela Europa e América do Norte.

A manutenção de sua popularidade não poderia ser sustentada por uma única pessoa, assim Hohenwarter estabeleceu o fórum online dos usuários de Geogebra (http://www.geogebra.org/forum/viewforum.php?f=19) e também um local para guardar materiais livres e sugestões de uso do software, batizado como GeoGebraWiki (http://www.geogebra.org/en/wiki/index.php/Main_Page).

Devido ao grande número de possibilidades que o software permite, já se pode observar que algumas universidades o estão inserindo em seus programas de formação de professores.

De acordo com Hohenwarter(2007) antecipadamente ao sucesso da sua criação demonstrou-se que os pacotes de softwares não comerciais potencialmente impactavam sobre o ensino/aprendizagem da matemática, seus professores e suas aulas.

Esse sucesso é ainda mais ampliado devido ao seu auto-suporte oferecido através do fórum de usuários além da biblioteca online com materiais de ensino interativo utilizando o próprio software.

Hoje já traduzido para diversas línguas, ele é um aplicativo JAVA que pode ser baixado gratuitamente ou rodar diretamente pela internet através do seu "WebStart" independente de sistema operacional, podendo rodar até mesmo virtualmente, podendo ser usado sem limites de licenças comerciais. Neste casso basta acessar o site http://www.geogebra.org e clicar em "web start".

Ao conhecer o GeoGebra muitos se perguntam como uma ferramenta desta é gratuita. Preiner (2008) trás uma provável resposta a esta questão apresentada em um artigo dos próprios desenvolvedores:

> "GeoGebra é um software livre porque eu acredito que a educação deveria ser gratuita. Esta filosofia ajuda a convencer professores a tentar

> usar esta ferramenta em suas aulas, mesmo que nunca tenha antes utilizado das TIC como recurso. Além disso faz com que alguns deles traduziram o software para outras línguas, disponiblizam seus próprios materiais na internet (...) e respondem a perguntas dos usuários do fórum (...) – de graça, é claro" (Edwards e Jones 2006 apud Preiner, 2008, , pág. 36)[15]

Uma outra importante vantagem desse aplicativo é a possibilidade de se criar ambientes de aprendizagem interativos e poder salvá-los como páginas da internet, possibilitando ambientes experimentais que podem ser compartilhados por professores e estudante através do GeoGebraWiki.

A utilização desse tipo de software nas atividades de ensino permite que novos métodos sejam introduzidos. Muitos tópicos podem ser explorados de maneira diferente da forma tradicional. Em particular destaca-se a simultaneidade da presença do registro gráfico e do algébrico que esta ferramenta permite manipular, possibilitando uma melhor visualização de diversos conceitos pelo estudante. Assim professores e alunos deixam de se preocupar apenas com as técnicas podendo também observar mais o significados envolvido nos diversos conceitos, além de sua conversão em diferentes registros de representação semiótica.

Porém é importante lembrar que para sua utilização é necessário formular propostas de seqüências didáticas, as quais podem ser encontradas em discussão em cursos de especialização, como oferecido pela PUC-SP em um curso de extensão denominado Matemática Dinâmica[16]. Segundo a página de divulgação o curso tem como objetivo desenvolver habilidades para ensinar conteúdos de Geometria e Álgebra incorporando novos recursos tecnológicos, no caso do presente curso o software adotado também é o GeoGebra, por ser opensource e de livre acesso.

---

[15] Edwards,J.-A.andJones,K..**Linkinggeometryand algebrawithGeoGebra**. MathematicsTeaching,194:28—30, 2006

[16] Matemática Dinâmica é um curso de extensão oferecido pela Faculdade de Matemática, Física e Tecnologia da PUC-SP na modalidade online. A proposta do curso é permitir que os professores tenham contato com estratégias de ensino e aprendizagem com o uso de programas computacionais específicos e também a teorias e pesquisas que dão suporte a essas estratégias e servem de base para a prática docente. As inscrições e informações do curso foram extraídas da página: http://cogeae.pucsp.br/curso.php?cod=280509&uni=D&tip=RE&le=E&ID=6

Preiner (2008) afirma que se por um lado o Geogebra permite visualizar conceitos matemáticos tão bem quanto à criação de um material instrucional, por outro ele permite elaborar atividades centradas na aprendizagem ativa através da experimentação, exploração assim como a descoberta de um conceito matemático.

4.2.1 Design do Geogebra

Normalmente há dois tipos de softwares educacionais matemáticos concentrados em dois campos diferentes – geometria e álgebra. Por um lado há os DGS que permite o usuário criar e dinamicamente modificar construções Euclidianas. Propriedades geométricas e relações entre objetos usadas dentro de uma construção são mantidas de acordo com as manipulações feitas entre os objetos. Alguns destes programas mesmo que providos das características algébricas aparecendo as equações das linhas e cônicas, raramente o usuário pode modificar diretamente sobre estas equações.

Já os CAS que especializam-se na performance sobre álgebra, geometria analítica e cálculo. Usando as equações dos objetos geométricos, um CAS pode decidir sobre a posição relativa entre eles, e apresentar suas representações gráficas. Muitos destes sistemas permite esta representação a partir de equações explícitas e implícitas, porém em geral as representações geométricas não podem ser diretamente modificadas pelos usuários.

Preiner (2008) aponta o GeoGebra como uma tentativa para aproveitar as características destes dois tipos de softwares, oferecendo as duas formas de representação de um objeto: os componentes numéricos algébricos são apresentados através de coordenadas, de equações explicitas, implícitas ou a sua forma paramétrica, enquanto que mostra-se os componentes geométricos correspondentes a solução.

No GeoGebra ambas representações podem ser modificadas pelo usuário. De uma forma pode-se modificar a representação geométrica manipulando-a diretamente com o mouse, concomitantemente a representação algébrica é transformada dinamicamente. Já de outra maneira, a representação algébrica pode ser alterada usando-se o teclado, assim automaticamente o software automaticamente ajusta a representação geométrica.

Por um lado, o GeoGebra possui todas as ferramentas tradicionais de um software de geometria dinâmica: pontos, segmentos, retas e seções cônicas. Por outro lado, equações e coordenadas podem ser inseridas diretamente. Assim, o GeoGebra tem a vantagem didática de apresentar, ao mesmo tempo, duas representações diferentes de um mesmo objeto que interagem entre si: sua representação geométrica e sua representação algébrica.

Segundo Sangwin (2007) o GeoGebra foi desenvolvido focando o uso nas escolas secundárias, e no nível superior para demonstrações, leitura e exploração entre funções e respectivos gráficos.

Um recurso diferente deste software é a possibilidade de gravar a construção feita pelo usuário e depois ver todos os passos feitos por ele. Tal recurso proporcionará uma análise a partir de todas as construções feitas pelos alunos. Sendo que é possível observar cada um dos passos da sua construção, não somente o seu fim.

Considerando todo o estudo feito ao longo dessa dissertação passa-se para fase final que é a elaboração, experimentação e análise da seqüência didática proposta que segue no próximo capítulo.

5 – PROPOSTA DE OFICINA PARA O ESTUDO DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Continuando o trabalho neste capítulo apresentar-se-á a proposta de seqüência didática a qual foi elaborada a partir de uma análise bibliográfica específica para formar a fundamentação teórica a qual foi feita nos capítulos anteriores. Tudo isto para solidificar os objetivos do trabalho.

Será apresentada a seqüência didática e as condições de experimentação: o perfil dos sujeitos da pesquisa, o número de encontros e outros elementos. Além disso, será apresentada uma pré-análise e uma pós-análise em torno das atividades propostas e aplicadas além da conclusão do trabalho.

5.1 PANAROMA GERAL DA SEQÜÊNCIA DIDÁTICA

A proposta de seqüência didática procura proporcionar aos alunos condições de compreender e aprofundar o entendimento das funções reais seno e cosseno.

Os encontros foram feitos em horários extra, uma vez que o curso tinha formato de oficina extra-curricular. As atividades foram feitas em dupla, com registros feitos pela dupla nas fichas e no software GeoGebra.

Foram cinco encontros que iniciavam por volta de 12h e terminavam as 13h e 20min. Tal horário fora proposto por se tratar de um entre-turno, muitos alunos passam o dia todo na escola e ficam no horário do almoço na escola, outros vem apenas para aulas da tarde ou da manhã. Então este horário já é bastante comum para oficinas extra-curriculares no IFSC ou horários de atendimentos pois atende os alunos dos dois turnos. Em todas as aulas os estudantes tiveram como material de trabalho as fichas de atividades, lápis, caneta, o software GeoGebra e um computador para cada equipe. Antes de iniciar a atividade de cada dia era feita uma breve discussão entre o professor e os alunos a fim de verificar as estratégias tomadas para solucionar as atividades do dia anterior. Ao todo foram cinco encontros.

O aplicador da seqüência é o próprio professor pesquisador que também é professor da turma.

5.1.2 Os sujeitos participantes

Os sujeitos que participaram da oficina são nove alunos da 5ª fase do curso técnico integrado ao ensino médio de eletrônica do IFSC campus Florianópolis. Eram cinco meninos e quatro meninas com idades entre 16 e 18 anos Todos eles já haviam estudado o conteúdo da oficina na 2ª fase do curso e o estavam aplicando agora nesta fase no estudo da disciplina de Eletricidade.

A seguir há um quadro do roteiro geral de atividades e dos respectivos assuntos contemplados:

Encontro	Assunto	Tipo de Atividade	Objetivo	Duração
1-a	Funções Trigonométricas	Pré Avaliação	Verificar a compreensão e quantos os alunos lembram dos estudos anteriores em torno do assunto.	30 min
1-b	Funções	Atividades no Geogebra	Revisar alguns conceitos envolvendo o conteúdo de funções: Definição, Domínio, Imagem, Período. Compreender os comandos do GeoGebra a partir do estudo das funções de primeiro e segundo grau.	50min
2	Círculo Trigonométrico	Conversão de Ângulos Para graus e Radianos. Construção de um círculo Trigonométrico. Determinação de Seno e Cosseno de vários ângulos.	Compreensão do círculo trigonométrico, da medida de arcos em graus e radianos.	1h 20min

3	Função Seno e Cosseno - Domínio e Período	Construção de um gráfico ponto a ponto das funções y=sen(x) e y=cos(x). Comparando com estas funções. Verificar relação entre o parâmetro a, b e m das funções y=a+bsen(mx) e y=a+bcos(mx) e seus períodos, domínios e imagens.	Compreensão do período, domínio e da imagem das funções reais seno e cosseno.	1h 20min
4	Função Seno e Cosseno - Imagem	Comparando com estas funções. Verificar relação entre o parâmetro a, b e m das funções y=a+bsen(mx) e y=a+bcos(mx) e seus períodos, domínios e imagens.	Compreensão do período, domínio e da imagem das funções reais seno e cosseno.	1h 20min
5	Pós-Avaliação	Comparando com estas funções. Verificar relação entre o parâmetro a, b e m das funções y=a+bsen(mx) e y=a+bcos(mx) e seus períodos, domínios e imagens	Verificação da compreensão do assunto abordado na oficina e quanto cada aluno aprofundou seus conhecimentos	1h 20min

Figura 11: Cronograma das Ativadades da Oficina

5.2 ANÁLISE PRELIMINAR DAS ATIVIDADES PROPOSTAS

A seqüência aplicada acompanhada da análise a pré-elminar será apresentada neste momento. Essa examinação é feita a partir da teoria de registros de representação semiótica de Duval e das possíveis dificuldades que os alunos possam encontrar e que foram levantadas no capítulo sobre obstáculos do ensino das funções trigonométricas.

É notável que se buscou em todos os encontros mobilizar simultaneamente ou alternadamente vários registros de representação semiótica como prediz a teoria de Duval. Logo pode-se dizer que foi dado grande importância as mudanças (tratamentos e conversões) de registros afim de promover o ensino e a aprendizagem das funções trigonométricas seno e cosseno.

5.2.1 Encontro 1 – Pré-Avaliação e Estudo do GeoGebra

No primeiro momento far-se-á uma avaliação inicial onde se buscará verificar o conhecimento dos alunos em relação às funções trigonométricas.

Nesta como se pode ver no anexo 1 há questões com estudo de gráficos (identificando domínio, imagem, período) assim como sua construção e identificação dos mesmos elementos a partir da representação algébrica das referidas funções.

Observando minuciosamente, percebe-se que a primeira questão desta, como se vê no Anexo 1, pede para representar graficamente as funções dadas algebricamente. Neste caso, segundo a teoria de registros de representação semiótica, há conversões do registro algébrico para o registro gráfico. Também na mesma questão solicita-se para determinar o domínio, o período e a imagem das funções. Desta forma o aluno poderá fazer de duas maneiras:

- A primeira delas é a mesma forma que ele deverá resolver a questão 2, só observando a expressão algébrica determinar estas características;
- A segunda forma seria determiná-las a partir do esboço do gráfico.

É interessante notar que na questão três e quatro são questões semelhantes às duas primeiras, porém há uma conversão de registros no sentido oposto, atendendo aos preceitos de Duval quanto a apreensão de um objeto Matemático.

Finalizada a pré-avaliação nesse mesmo encontro se oportunizará o primeiro contato com o ambiente do GeoGebra na oficina, onde os estudantes terão a possibilidade de conhecer suas ferramentas e como utilizá-las. Para isso será utilizada a ficha B que está no anexo 1 e outras atividades que serão propostas no quadro. Nesse momento serão tratado de maneira dialogada os conceitos de função, domínio, imagem, contra-domínio e período.

Tal retomada de conteúdo é de fundamental importância. Uma vez que uma das dificuldades que os alunos apresentam para compreender este assunto é o fato de não recordarem muitas desses conceitos como foi visto no capítulo sobre os obstáculos para o ensino das funções trigonométricas

Para isto far-se-á um estudo em torno das funções de 1º e 2º grau, onde se analisará domínio, imagem, pontos de intersecção a partir de um gráfico dado e também através da sua representação algébrica. Portanto o aluno fará conversões dos registros algébricos para gráficos e simbólicos, gráficos para simbólicos e algébricos, simbólicos para algébricos e gráficos, da mesma maneira que se procurou verificar na pré-avaliação. Também será dado o conceito de periodicidade através da análise gráfica de algumas funções esboçadas no quadro.

5.2.2 Encontro 2 – Círculo Trigonométrico

O segundo encontro consiste na idéia de Brousseau vista no capítulo sobre obstáculos. Ela consiste em iniciar o estudo das funções trigonométricas através da descontrução da crença que os alunos possuem de que as relações trigonométricas servem apenas para solucionar problemas envolvendo triângulos retângulos. Acredita-se que ao definir e construir o círculo trigonométrico no ambiente lápis e papel e em seguida no GeoGebra, possa-se ampliar a visão dos alunos para esse tema, ao observarem de onde vem as funções periódicas.

Assim como se pode ver na primeira ficha da 2ª aula que consta no anexo 2, primeiramente se explorará o conceito do círculo trigonométrico no ambiente lápis e papel. No final desta ficha há uma proposta de discussão em torno da afirmação:

O ponto P tem coordenadas (cos α, sen α).

Tal discussão tem como objetivo auxiliar os alunos a perceberem a conversão de registro do ponto P inicialmente representado graficamente sobre o círculo trigonométrico para um registro algébrico que indica suas coordenadas.

Na segunda ficha desta mesma aula passa-se para o ambiente informatizado com uso do GeoGebra para construção de um círculo trigonométrico dinâmico. Como se pode observar na ficha há uma série de instruções afim de auxiliar o estudante nessa construção.

Da mesma forma que será feito no ambiente lápis e papel, buscar-se-á fazer com que o aluno compreenda que o ponto P pertencente ao círculo trigonométrico tem coordenadas (cos α, sen α), sendo α a medida do arco. Ou seja, procurar-se-á fazer com que o aluno faça novamente uma conversão do registro gráfico para a linguagem natural, já que se pede para ele transcrever sua compreensão quanto às coordenadas do ponto P.

Ainda na mesma ficha, pede-se para que o aluno preencha uma tabela que indica arcos com medidas em radianos e seus respectivos seno e cosseno utilizando o círculo trigonométrico do GeoGebra. Aqui haverá uma manipulação, que no ambiente lápis e papel é impossível de ser feita, do círculo trigonométrico afim de se descobrir o valor de seno e cosseno dados diversas medidas de arcos. Tal manipulação promoverá algumas mudanças de registros veja a seguir

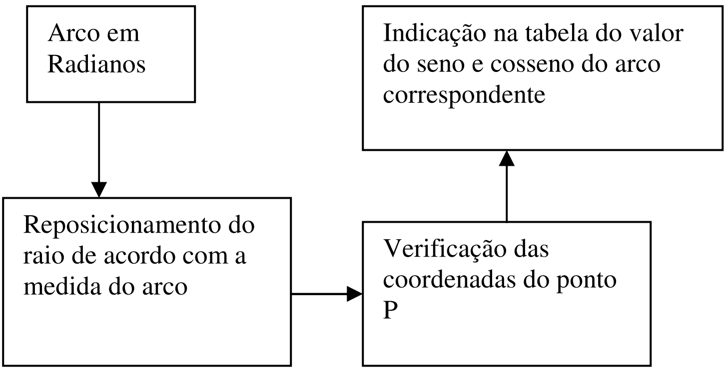


Figura 12: Mudanças de registro no círculo trigonométrico

A medida de ângulo e suas devidas conversões para graus e radianos, como fora apresentado anteriormente é uma das dificuldades para o estudo das funções trigonométricas por esse motivo se dedicou esta tabela com medidas em radianos enquanto que o software indica a medida do arco em graus.

Ainda neste encontro os estudantes terão a oportunidade de construir um gráfico ponto a ponto dos pontos de coordenadas representadas na tabela. Com isto eles poderão observar a forma que o gráfico tem (senóide e cossenóide). Mas como fora visto no capítulo sobre as dificuldades do ensino deste assunto, a construção de um gráfico ponto a ponto não é suficiente para o aluno compreender a dependência que existe entre a medida do arco em radianos indicado sobre o círculo trigonométrico, o valor do seno (ou cosseno) e o formato do gráfico desta função.

Para "driblar" então este obstáculo, propõe-se fazer algo no GeoGebra que também seria impossível no ambiente lápis e papel. Criar um ponto A de coordenadas medida do arco α e y do ponto P do círculo trigonométrico, ou seja, valor do seno do respectivo arco. E então pede-se para movimentar o ponto P sobre o círculo trigonomérico.

Neste caso o aluno poderá observar através do registro algébrico na aba de objetos do GeoGebra que o ponto P tem as coordenadas x e y dadas em função da medida do arco sobre o círculo trigonométrico, assim primeiramente há uma conversão de registros do gráfico para o algébrico.

Além disto ele poderá observar que o ponto A se movimenta sobre o plano cartesiano, passando sobre todos aqueles pontos já marcado por ele anteriormente. Ou seja em um único movimento o aluno está coordenando três registros da função trigonométrica: círculo trigonométrico, a medida numérica do arco e do respectivo seno e cosseno, e a representação gráfica desta função. Talvez assim possa-se extrapolar a dificuldade de perceber a dependência existente entre medida do arco, valor do seno e cosseno e o formato do gráfico.

5.2.3 Encontro 3 e 4 – Funções Trigonométricas e suas principais características

Estes dois encontros foram preparados para se estudar o período, a imagem e o domínio (aqui chamado características) das funções do tipo $y = a + bsen(mx)$ e $y = a + b\cos(mx)$. Neste caso os alunos serão incentivados a observar as transformações que ocorrem entre os coeficientes *a, b* e *m* destas funções, o formato dos gráficos e suas respectivas características. Ou seja, haverá nessas aulas uma manipulação de vários registros de representação desse objeto Matemático.

Como se pode observar nas fichas dos anexos 3 e 4 os alunos analisarão gráficos destas funções e registrarão simbolicamente suas respectivas imagens. Também construirão gráficos a partir de suas representações algébricas e perceberão qual sua imagem. Utilizando o modo de arrasto sobre o gráfico, poderão perceber as devidas alterações que há sobre o registro algébrico dessas funções, assim como o registro simbólico de sua imagem.

É importante lembrar que foram deixadas duas aulas para este estudo afim de se respeitar o ritmo de cada grupo, acredita-se que alguns levarão mais tempo para resolver algumas das tarefas, deixando-se assim uma aula extra para terminarem tudo e na última todos juntos fazerem a pós avaliação cuja análise segue abaixo.

5.2.4 Encontro 5 – Pós-Avaliação

Nessa pós avaliação, a qual pode ser lida no anexo 7, buscou-se avaliar a contribuição da oficina para uma melhor compreensão do aluno quanto as funções trigonométricas. Para isto elaborou-se uma avaliação bastante semelhante a pré-avaliação, afim de observar a evolução do aluno com esta oficina. É importante frisar que as fichas de cada aula também servirão de apoio para observar tal evolução.

Desta maneira quanta a análise da pós-avaliação pode-se repetir a feita na pré-avaliação, onde buscou-se articular diferentes registros de representação semiótica das funções reais trigonométricas seno e cosseno.

5.3 Pós-análise das atividades propostas

A partir de agora será descrito o processo de aplicação da oficina de funções trigonométricas. Pretende-se analisar os resultados coletados, especialmente, durante a o trabalho realizado junto à turma de alunos de 5ª fase do curso técnico integrado ao ensino médio de eletrônica do IFSC campus Florianópolis. Tal análise será baseada tanto pelos principais avanços quanto pelos entraves encontrados com o desenvolvimento das atividades.

A escola referida está localizada na região central da cidade e envolve um público bastante variado de alunos, oriundos de diferentes partes da cidade, tanto do centro quanto da periferia da cidade.

Seu cenário é um pouco diferente da maioria das outras escolas públicas: professores com boa qualificação, com carga horária determinada para planejamentos e atendimento a alunos, o ingresso dos alunos é feito através de um teste de seleção que. No semestre 2010-1 o curso de eletrônica que esta turma cursa teve um índice de 15 candidatos por vaga. Sua estrutura física, possui uma grande diversidade de laboratórios ligado ao curso e outros como de informática, física, química e biologia, matemática e outros.

O contato com a escola se deu de maneira direta, uma vez que, o autor dessa dissertação é professor da referida instituição. A proposta de oficina e seus objetivos foi apresentada junta a reunião do grupo da Matemática e levada à chefe de Departamento. Ambos a apoiaram, uma vez que estava se implantando a idéia de oferecer cursos extra-curriculares de Matemática avançada e básica para os alunos da instituição. Em todos eles a procura é grande, superando as expectativas do grupo.

A proposta de oficina fora oferecida a esta turma de alunos pelo próprio professor de Matemática, que é o autor dessa dissertação. Ela foi apresentada como parte da dissertação de mestrado onde os objetivos e a metodologia de desenvolvimento das atividades foram deixados desde o primeiro contato. Dos doze alunos da turma, nove se prontificaram de imediato a participarem da mesma, os outros alegaram que já possuíam atividades marcadas para o horário em aconteceria a oficina.

A aplicação da oficina totalizou, como previsto, cinco encontros realizados durante uma única semana, todos os dias começando às 12h e terminando às 13h e 20 min. Esse grupo era formado por nove alunos adolescentes, com idade média de dezesseis anos.

A análise dos resultados será feita a partir de cada atividade, destacando as dificuldades encontradas, os avanços e as contribuições verificadas com o seu desenvolvimento.

5.3.1 Primeiro dia – Pré-Avaliação e apresentação do GeoGebra

Os alunos compareceram ao primeiro encontro entusiasmados e ansiosos para conhecerem o software que iriam utilizar. Um pouco deste entusiasmo pareceu diminuir quando viram que a primeira atividade a ser desenvolvida era uma pré-avaliação, talvez por a encararem como uma prova. Mas mudaram logo de idéia a partir do momento em que fora dito que esta pré-avaliação serviria apenas para saber o quanto eles lembravam de funções trigonométricas e depois perceber se a oficina contribui para uma melhor compreensão delas.

Sendo assim se iniciará a análise de cada uma das questões da pré-avaliação. Na primeira questão que consistia em converter o registro algébrico das funções para seus registros gráficos, três alunos a deixaram em branco. Outros quatro apenas desenharam no máximo dois gráficos mostrando apenas o formato da curva, sem destacar pontos de máximo ou mínimo, período, imagem e domínio. Outros dois também desenharam no máximo dois gráficos e indicaram de maneira incompleta, ou errônea, suas características. A figura abaixo é um exemplo desta incompletude, e a partir dela ainda é importante lembrar o fato de que todos que desenharam o gráfico apenas esboçaram um ciclo dele, ou seja, um só período.

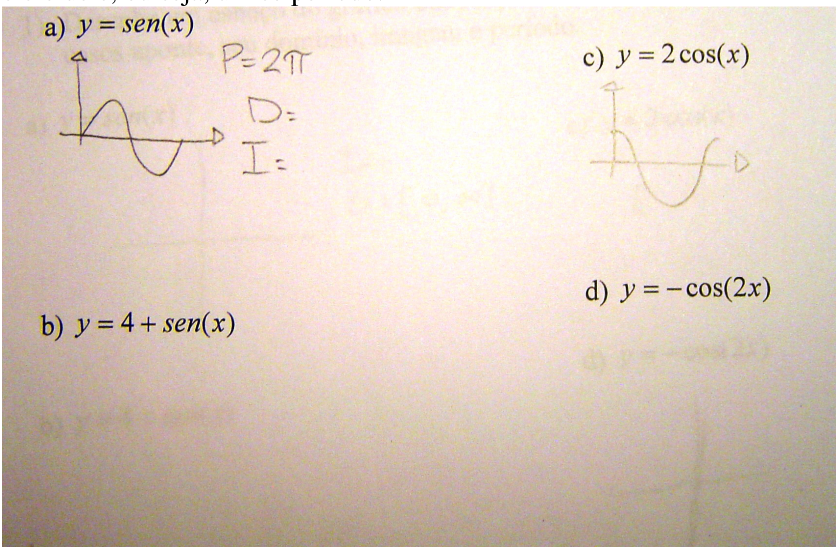


Figura 13: Questão 1 da Pré-Avaliação

Na segunda questão em que a partir do registro algébrico da função o participante deveria identificar todas as características das funções todos os alunos a deixaram em branco ou responderam que não eram capazes de resolvê-la.

Na terceira questão onde o estudante deveria a partir do registro gráfico de uma função identificar as suas características constata-se que três alunos a deixaram em branco, quatro acertaram apenas a imagem, um acertou a imagem e o domínio e um acertou a imagem e o período.

Na última questão em que pedia-se para esboçar um gráfico com todas as características informadas simbolicamente observa-se que quatro pessoas a deixaram em branco, um deles desenhou algo parecido com uma parábola que não atendia a nenhuma das características solicitadas e quatro desenharam um gráfico de uma função periódica em que o domínio e a imagem estavam de acordo com o solicitado.

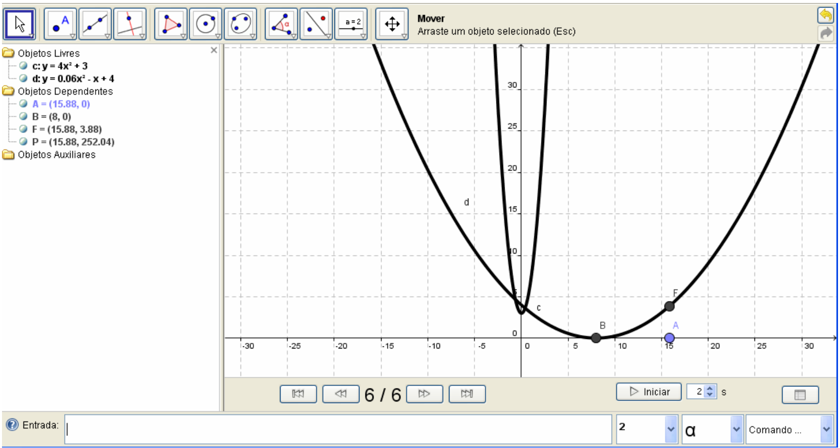
Assim concluiu-se que a turma naquele momento não lembrava mais do assunto funções trigonométricas, apesar deles mesmo afirmarem que estavam utilizando na disciplina de eletricidade. Um deles até gritou na hora que viu os gráficos – "Um fasor!". Assim, de acordo com a teoria de Duval, os envolvidos neste estudo ainda não compreenderam o objeto Matemático por completo, uma vez que reconhecem alguns de seus registros, mas possuem grande dificuldade na passagem de um para outro registro, acabando por confundir a própria representação com o objeto matemático.

Após a entrega de todas as pré-avaliações, foi feita uma explanação apresentando inicialmente um retorno da atividade feita, mostrando-lhes as respostas e discutindo o que haviam pensado.

Em seguida de posse da ficha que segue no anexo 2, iniciou-se a revisão de alguns conceitos considerados importantes para um melhor entendimento do assunto da oficina: Domínio, Imagem, Período de funções, definição de função. Também se retomou o assunto funções de primeiro grau e seu coeficiente angular e linear com apoio do GeoGebra. Os estudantes entenderam rapidamente os comandos e logo estavam respondendo as perguntas desta ficha. Quanto as resposta pode-se dizer que na pergunta c, das quatro equipes formadas, três equipes responderam corretamente informando que o gráfico era uma reta e que o coeficiente **a** alterava a inclinação desta reta, que ele era chamado de coeficiente angular da reta. Uma dupla apenas escreveu que era sempre uma reta e não percebeu a relação entre este coeficiente e a inclinação da reta.

Já na pergunta d) que se referia ao parâmetro **b** daquela função as mesmas três equipes afirmaram ser o coeficiente linear, o qual faz um "deslocamento linear" no gráfico, indicando o ponto de corte no eixo y. A mesma equipe que não havia percebido a relação do coeficiente a e a inclinação da reta, não percebera a relação entre o parâmetro b, o deslocamento linear e a coordenada de ponto de corte do eixo y.

Na terceira pergunta que tinha por objetivo compreender a função arraste do GeoGebra, todas as equipes conseguiram completa-la com êxito. É notável a facilidade que compreenderam os comandos e construções do GeoGebra, neste exercício específico eles marcaram um ponto A sobre o eixo x que possuía ordenada (y) fixa igual a zero. Ou



seja, este ponto A poderia ser transladado para direita e para esquerda sobre este eixo, alterando somente o valor da abscissa.

Figura 14: Parábola dinâmica no GeoGebra - Função Arraste

Desta maneira eles construíram um segundo ponto B que possuía sempre a mesma abscissa de A e a ordenada era resultado do valor numérico de um polinômio de 2º grau dado o valor da abscissa do ponto A. Ao mexer o ponto A sobre o eixo x, este ponto B percorria uma trajetória no formato de uma parábola, os quais os estudantes puderam comparar esta trajetória com o gráfico das mesmas funções ao inseri-las algebricamente e pedir para traçar o respectivo gráfico.

Este é um exercício interessante, pois o aluno pode manipular diretamente a representação gráfica de um ponto, algo impossível no ambiente lápis e papel, observar as transformações instantaneamente no registro algébrico tanto do ponto que percorre a trajetória parabólica quanto do ponto A. Na figura 14 é possível observar uma das construções do aluno. Facilmente responderam as perguntas solicitadas.

Todos ficaram um tanto empolgados com a facilidade de uso do software e com os seus recursos.

5.3.2 Segundo dia – Círculo Trigonométrico e o Gráfico

Como foi visto no capítulo sobre as dificuldades de ensino deste assunto, um dos problemas encontrados é quanto à compreensão de alguns elementos importantes que envolvem o estudo do círculo trigonométrico e a conversão das coordenadas de seus pontos para o gráfico e vice-versa. O primeiro deles consiste na orientação do ângulo e a medida do arco em radianos. Então antes de começar a preencher as fichas foi relembrado de maneira dialógica no quadro branco essas questões iniciais. Os alunos não apresentaram dificuldade em relembrar e auxiliar os colegas a tirar algumas dúvidas sobre esta representação das funções trigonométricas.

Após esta discussão foi entregue a primeira ficha do segundo encontro, que segue no anexo 3. Ela consistiu numa atividade em que o participante deveria compreender a interpretação matemática que pode ser feita sobre os pontos sobre o círculo trigonométrico. Desta maneira, como solicitado, todos os alunos fizeram o desenho de um raio até o ponto P marcado, e calcularam as suas coordenadas. Em todos os casos, utilizaram a escala para marcar 0,5 para abscissa do ponto P. Já para determinar a ordenada deste ponto três equipes usaram do teorema de Pitágoras, como mostra a digitalização da ficha de um grupo na figura 14. Enquanto que uma única dupla utilizou a relação tangente de 60°, que mediram utilizando um transferidor.

Em seguida fora dada a ficha B deste dia que consta no Anexo 2, onde os alunos tiveram a tarefa de construir um círculo trigonométrico dinâmico no GeoGebra. Lá estavam todas as orientações necessárias para esta construção. Todas as equipes as seguiram e concluíram o círculo trigonométrico facilmente.

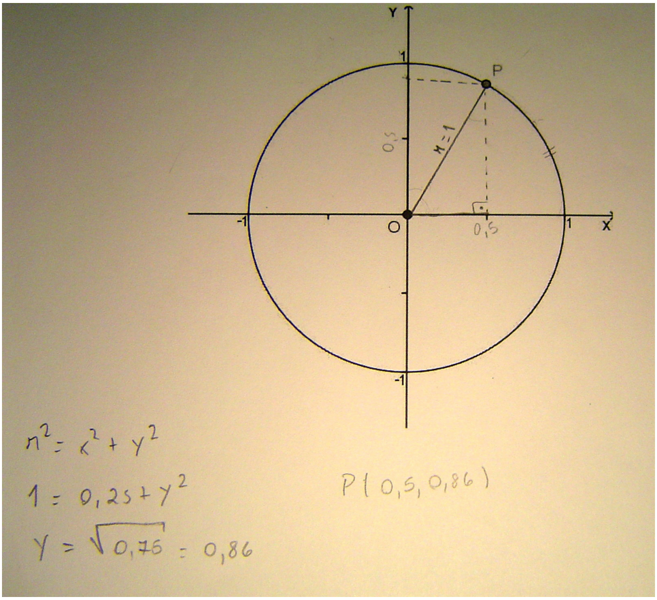


Figura 15: Círculo Trigonométrico - Segundo Encontro

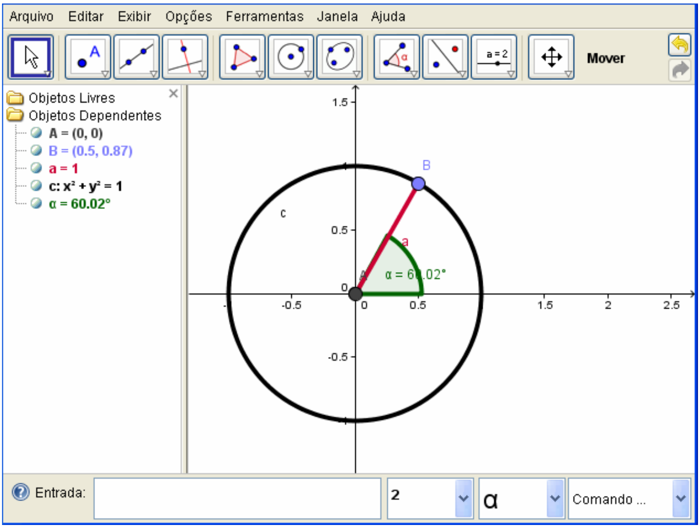


Figura 16: Círculo Trigonométrico no GeoGebra

Na figura 16 há um círculo trigonométrico onde se pode observar o registro gráfico dinâmico do mesmo com a mensuração do arco em graus. Na aba à esquerda todos os registros algébricos e simbólicos dos objetos presentes ali. Assim desta maneira o aluno pode coordenar diferentes representações semióticas de um mesmo elemento matemático: no círculo trigonométrico (representação algébrica e gráfica), as coordenadas do ponto B (algebricamente e graficamente), o valor de seno e cosseno do arco representado (simbolicamente, algebricamente e graficamente).

Esse software possibilitou que os alunos movimentassem o ponto B dinamicamente, podendo observar os valores de seno e cosseno alterando a medida que se move o ponto B sobre o círculo, ou ainda inserir algebricamente uma medida de arco desejada para descobrir os valores de seno e cosseno deste. Algo que no ambiente lápis e papel, como na ficha 1 dessa mesma aula, era impossível de se fazer.

Os estudantes ficaram admirados da facilidade foi construir este círculo e como é interessante observar toda a transformação de uma maneira dinâmica, olhando para o registro gráfico e o algébrico e as mudanças que ocorre em cada um ao mesmo tempo.

Quanto as perguntas da ficha 2 da 2ª aula, pode-se dizer que todos os alunos preencheram a tabela trigonométrica corretamente, da mesma forma que todos também responderam que a abscissa do ponto P é o cosseno do arco marcado, assim como a sua ordenada é o seno do mesmo arco.

Quanto a construção do gráfico ponto a ponto viu-se nos arquivos salvos no GeoGebra de cada equipe que ocorreu de maneira simples e que observaram facilmente o formato do gráfico que se pretendia chegar. Onde o valor do seno ou cosseno era dado em função do arco. É possível observar esta construção na figura 17 onde está a construção de uma das equipes.

Quanto as respostas da pergunta 8 quanto a trajetória do ponto A(α,"x de P") ao girar o ponto P no círculo trigonométrico pode-se destacar a resposta de uma equipe: "Ele passará por todos os pontos formados por (α,cos α) formando uma cossenóide". Duas equipes responderam algo semelhante, enquanto que duas equipes cometeram um pequeno equívoco ao afirmar que formará uma senóide.

Acredita-se que tal confusão é dada devido a disciplina de eletricidade onde todas as curvas com este formato são chamadas de senóides. Uma das equipes escreveu ainda que assumia o formato de um fasor, evidenciando assim a comparação que eles fazem com a disciplina de eletricidade.

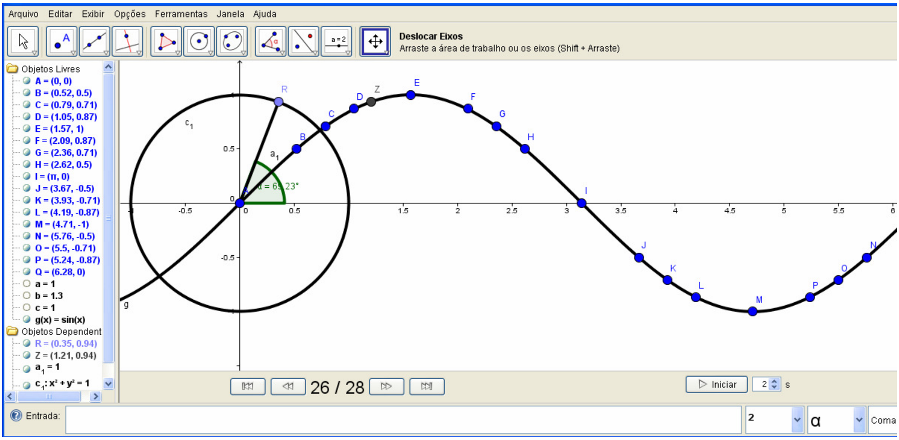


Figura 17: Círculo Trigonométrico

Sendo assim para responder a pergunta 8 há a coordenação de vários registros de representação da função y=cos(x):

- coordenada algébrica de cada um dos pontos,
- a representação sobre o círculo trigonométrico,
- a representação gráfica do caminho percorrido pelo ponto de coordenada A(α,"x de P")
- a representação gráfica inserida através de comando algébrico da função y=cos(x).
- a representação algébrica inserida através de comando algébrico da função y=cos(x).

Na pergunta 9 obteve-se o mesmo tipo de resposta da pergunta 8, porém referindo-se a função seno, da mesma forma que existe uma coordenação de diferentes registros de representação semiótica envolvido.

Na questão 10 todos estudantes fizeram o esboço dos gráficos corretamente. Na figura 18 há um exemplo de um esboço de gráfico feito por uma das equipes. Apenas uma das equipes não fez nos gráficos a indicação dos valores máximos e mínimos.

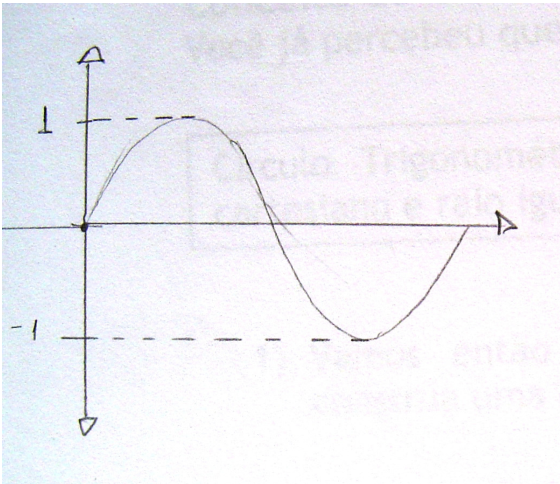


Figura 18: Esboço do Gráfico das Funções Seno e Cosseno

5.3.3 Terceiro e Quarto dia – Função Real seno e cosseno

Como fora planejado, três equipes precisaram do terceiro e quarto encontro para fechar todas as atividades e apenas uma terminou tudo no terceiro dia. Apesar de terem sido dispensados do quarto encontro esta dupla veio nesse dia para auxiliar os colegas a terminar aquilo que faltava concluir.

As fichas preparadas para estes dois encontros, como fora dito anteriormente, tinham por objetivo aprofundar a compreensão quanto as características (domínio, período e imagem) das funções reais seno e cosseno.

Como o estudo proposto nas duas fichas são bastante semelhantes, pretende-se fazer uma análise simultânea dos resultados registrados nas duas fichas.

Quanto as respostas dadas pelas equipes na pergunta 1 da primeira ficha deste dia (Anexo 3) pode-se dizer que quanto ao formato do gráfico as equipes disseram que ele tem formato de uma “senóide”. Tal resposta já fora comentada anteriormente, acredita-se que há uma grande influência da disciplina de eletricidade.

Na mesma ficha, ainda na pergunta 1 notou-se que quanto ao domínio e a imagem da função seno, todos responderam corretamente o domínio (conjunto dos reais) e a imagem da função três equipes responderam corretamente – [-1,1]. Uma equipe indicou como imagem da função seno [-1,0]. Em relação ao período desta função, duas equipes responderam 6,28, uma respondeu 2π e uma respondeu 6.

É interessante notar que para responder estas perguntas as equipes precisaram observar o objeto Matemático representado em diferentes registros na tela do computador e responder no papel as características solicitadas. Como por exemplo, para o período e imagem, eles observavam na representação gráfica os pontos que indicavam isto e procuravam descobrir os valores através da representação algébrica dos objetos presente na aba esquerda do GeoGebra. Todo estes registros pode ser observado na figura 17.

A mesma coordenação de registros foi necessária para responder aos itens 1.5, 1.6 e 1.7 da primeira ficha e1.2, 1.3 e 1.4 da segunda ficha (Anexo 6).

Nesse caso para melhor compreender modificação provocada pelas alterações dos coeficientes **a**, **b** e **c** das funções da forma **y=a+bsen(cx)** e **y=a+bcos(cx)** utilizou-se o recurso de criar parâmetros (**a**, **b** e **c**) do GeoGebra gerando funções genéricas com estes parâmetros. Desta maneira o aluno ao alterar o parâmetro **b**, arrastando apenas o seu cursor, coordenava ao mesmo tempo a representação gráfica de maneira dinâmica observando a transformação sobre a amplitude de onda, além de alterar dinamicamente também a representação algébrica da mesma curva presente na aba esquerda.

Ao alterar o parâmetro **a** eles faziam a mesma coordenação de registros, porém observavam o deslocamento linear do gráfico. E da mesma forma ao modificar o parâmetro c, podiam coordenar estes registros e observar a mudança dinâmica no período da função.

Desta maneira analisando as respostas do item 1.5 da ficha 1 viu-se que todas as equipes indicaram as imagens das funções corretamente. Porém uma equipe deixou em branco o questionamento c, e as outras três equipes indicaram que a imagem era proporcional ao coeficiente b. Da mesma maneira que todas as equipes marcaram corretamente a imagem das funções cosseno do item 1.2 da ficha 2.

Quanto a questão 1.6, referente ainda a imagem da função, todas as equipes responderam corretamente aos itens a, b e c. No item d que perguntava quanto a imagem das funções da forma y=a+sen(x) obteve-se as seguintes respostas:

- [-1,a]
- [a+1,a-1]
- [a-1,a+1]

Sendo assim pode-se dizer que três equipes conseguiram criar um esquema genérico para determinar a imagem a partir do registro algébrico destas funções. Apesar da primeira equipe indicar de maneira incorreta este esquema, ela acertou, assim como todas as outras três, as imagens das funções solicitadas no item e. Inclusive da função y=a+bsen(x), onde todas as equipes indicaram Im=[a-b,a+b].

Na letra c do exercício 1.2 da segunda ficha que perguntava que tipo de alteração provocava o parâmetro **b**, vale destacar a seguinte resposta:

"As imagens se tornam o próprio valor que foi multiplicado por cos(x)".

Acredita-se que assim como as outras equipes, eles compreenderam que as funções do tipo y=bcos(x), terão como imagem [-b,b], pois como esta equipe falou, a imagem "se torna o valor que se multiplicou".

Ainda no item 1.3 da segunda ficha todas as equipes concluíram que a imagem das funções da forma y=a+bcos(x) tem imagem:

$$\text{Im(f)}=[a-b, a+b]$$

Já no exercício 1.7 da primeira ficha e 1.4 da segunda ficha, que exploravam o período dessas funções, todas as equipes afirmaram no que tais funções são periódicas. Também indicaram corretamente o período de cada uma das funções nestes exercício.

Na pergunta c do 1.7, obteve-se as seguintes respostas:

- "O período é metade do valor multiplicado"
- "O período será $\frac{2\pi}{c}$"
- "O período foi divido por tal número"
- "Diminui de acordo com o número que foi multiplicado"

Assim no item d, três equipes indicaram como período da função y=sen(kx), k$\in R^*$, P=$\frac{2\pi}{k}$, e uma única deixou indicado $2\pi.X$. Da mesma maneira fora indicada no item d do exercício 1.4 da segunda ficha, por todos, que o período das funções y=cos(kx), k$\in R^*$, tem período igual a P=$\frac{2\pi}{k}$.

E por último todas as equipes indicaram que o domínio dessas funções é o conjunto dos números Reais.

Assim percebeu-se então que as equipes obtiveram sucesso quanto a compreensão das características das funções reais seno.

5.3.4 Quinto dia – Pós-Avaliação

Comparando a ficha da Pós-Avaliação (Anexo 7) com a de pré-avaliação (Anexo 1) percebe-se que os quatro primeiros exercícios são idênticos, envolvendo as mesmas passagens de registros de representação semiótica. Isto para poder realmente comparar o aluno com ele mesmo, antes e depois da participação da oficina.

Sendo assim no primeiro exercício já foi notável a diferença quanto a compreensão dessas funções. Todos os alunos esboçaram gráficos, antes a maioria os deixou em branco. Analisando mais afundo, percebe-se que um dos alunos que teve problema de freqüência, não teve êxito na indicação das características das funções, apesar de saber o formato dos gráficos. O seu companheiro de trabalho ao longo da oficina também apresentou dificuldades para indicar a imagem daquelas funções. Enquanto todos os outros estudantes acertaram por inteiro a questão, indicando tanto a imagem como o período corretamente assim como seus gráficos.

Já na questão 2 que pedia apenas para indicar o período e a imagem das funções indicadas algebricamente de forma direta, ou seja, fazendo a conversão da função indicada algebricamente para suas características na forma simbólica observou-se que os mesmo dois alunos possuíram grandes dificuldades para resolvê-la, indicando incorretamente todas as respostas. E da mesma forma que na anterior, todos os outros 7 alunos acertaram por completo esta questão.

Na questão 3 onde a partir do registro gráfico de um função periódica o aluno precisava indicar algebricamente a sua imagem e período verificou-se que todos alunos acertaram a imagem da função e apenas um deles cometeu um equívoco ao indicar o seu período.

Na última questão em que a partir das características dadas de uma função periódica pedia-se para desenhar seu gráfico, percebe-se que o mais difícil para os alunos foi acertar o seu período, já que o período era 6,28 e o domínio de [-6,4]. Como neste intervalo não cabia uma quantidade exata de períodos, cinco alunos acabaram deixando de lado essa informação e desenharam gráficos como os indicados na figura

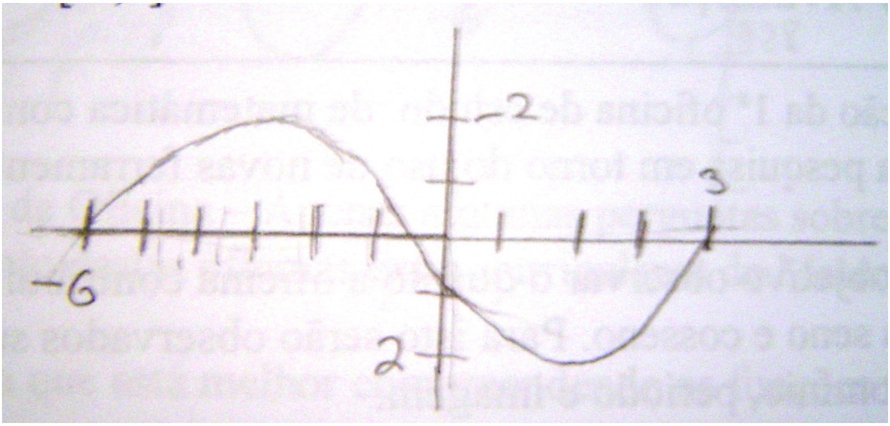


Figura 19: Gráfico da Função

Já os outros quatro conseguiram fazer este gráfico que atendesse a todas as características solicitadas. Um gráfico interessante foi construído por uma aluna, que é de uma onda periódica, mas devido aos traços horizontais não poderia ser considerado uma função. Este pode ser visto na figura 20. Acredita-se novamente que tal formado de onda seja influencia das disciplinas do curso de eletrônica.

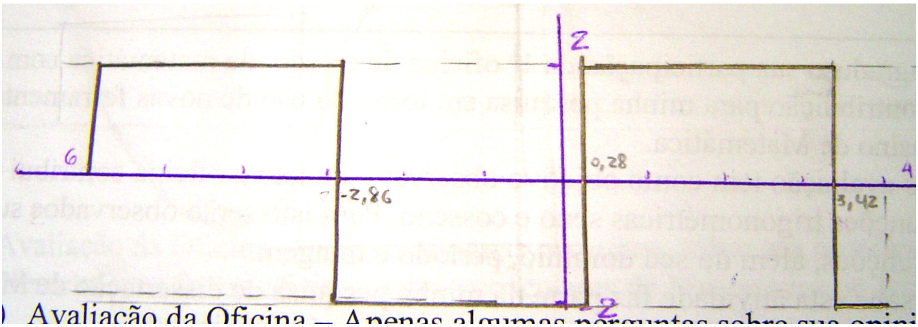


Figura 20: Gráfico da Função 2

A questão 5, que era a questão que vinha além da pré-avaliação feita, consistia em uma avaliação da oficina sobre o olhar dos participantes. Primeiramente o item 5.1 perguntava se os alunos achavam que agora estavam melhor compreendendo as funções trigonométricas seno e cosseno. Todos os nove alunos responderam que sim.

No item 5.2 o qual questionava quanto ao uso do computador no ensino de Matemática todos os alunos escreveram que sim e justificaram usando as seguintes expressões:

- “há maior dinamicidade”
- “agiliza e facilita a compreensão”
- “facilita o entendimento de gráficos (...) mais prático e dinâmico”
- “fica dinâmico e de fácil compreensão”
- “entender de outra maneira (...) despertar mais interesse”
- “este programa(...) dá resultados visíveis”

Ou seja, todos os alunos gostaram de ter participado da oficina com o uso do software e notam que esta ferramenta pode auxiliá-los na compreensão de conteúdos.

Já na pergunta 5.3 quanto a necessidade de oferecer oficinas extra-curriculares de Matemática no IFSC mais uma vez todos responderam que sim, dentre os assuntos solicitados surgiram: Análise combinatória, Estatística, Derivadas e Integrais, Conteúdos dos vestibulares e Matemática Financeira.

Esta resposta é interessante uma vez que pela primeira vez, depois de alguns anos, ofereceu-se três oficinas ditas de Matemática Avançada – Matemática Financeira, Oficina de Demonstrações e Problemas Olímpicos e esta de Trigonometria. Todas foram oferecidas para todos alunos do IFSC e a procura foi altíssima, logo as turmas foram fechadas. O número de inscrição foi tão alto, que daria para formar quatro ou cinco turmas. Tal dado foi levado até a direção de campus, e acredita-se que será dado continuidade ao projeto das oficinas extra-curriculares.

6 – CONSIDERAÇÕES FINAIS

Na oficina realizada algumas coisas ficaram claras, as quais podem ser bons indicativos para realização de outras, ou até mesmo criação de novas.

Primeiramente ficou evidente a aplicação de uma ferramenta computacional deve ser aliada a uma metodologia proposta; uma vez que a ferramenta por si só, não garante a eficácia no processo de ensino. Confirmando a idéia de Gil & Menezes (2004) a escolha de um software educacionais deve ser condicionado se suas característica adequam-se ao contexto procurando integrar seu uso as outras atividades envolvidas no ensino. Tal procura deve focar nos objetivos que se pretende alcançar uma vez que outro aplicativo possibilitará diferentes situações de contexto educativo.

No caso do Geogebra foi percepetível que ele tornou-se um laboratório que possibilitou aos estudantes participarem de uma situação de ensino de Matemática semelhante ao 'fazer Matemática': experimentaram, interpretaram, visualizaram, induziram, conjeturaram, abstrairam, e generalizaram.

Desta forma os alunos puderam agir de maneira diferente da tradicional apresentação do conhecimento, baseada na transmissão de 'fatos' ordenados, através de definições e propriedades. Muitos se encontraram em ações que desafiaram suas capacidades cognitivas, indo além da memorização e repetição, tornando-se autores do sentido dado ao conhecimento.

O ambiente em que os estudantes ingressaram permitiu a manipulação de objetos abstratos. Concordando com Gravina & Santarosa(1998) eles puderam perceber que tais abstrações possuem uma "concretude", que pode ser manipulada através das suas diferentes representações.

Desta forma acredita-se que pode-se contornar a dificuldade que existe quanto a manipulação e utilização de abstrações para compreender o comportamento das funções trigonométricas, como por exemplo, a associação dos pontos do círculo trigonométrico com os pontos do plano cartesiano.

E no caso do ambiente informatizado, conforme Gravina & Santarosa(1998) as vantagens desta manipulação ficaram evidentes como por exemplo o fato de poder realizar várias manipulações em pouco tempo, diferentemente de um gráfico construído no ambiente lápis e papel.

Um outro ponto importante é o fato do GeoGebra, por ser um ambiente que une os recurso de Geometria Dinâmica (DGS) com aqueles dos sistemas de comando algébricos (CAS) possibilitou a manipulação dinâmica dos diferentes registros de representação semiótica.

É importante frisar que a idéia aqui não é levantar agora uma bandeira para substituição dos meios que já provaram serem capazes de promover o ensino pelo uso de software educativo. Na verdade consiste em aproveitar o melhor possível as características destes meios que podem se tornar num dado momento mais adequado que outros meios mais "convencionais", ou um ofercer suporte ao outro.

Um outro ponto evidente é o fato de que o aluno precisa se envolver ao máximo com as atividades propostas, caso contrário ele responde qualquer coisa, e não observa todos os detalhes disponíveis na tela, não explora os diversos recursos disponíveis. Acredita-se que problemas envolvendo construções dinâmicas no GeoGebra despertou bastante o interesse dos alunos.

O suporte técnico é algo fundamental também. É preciso ter um laboratório com um número de computadores coerente com o número de alunos. No caso do IFSC, o laboratório de Matemática está com máquinas bastante desatualizadas e muitas não tinham o software instalado corretamente. O que muitas vezes deixou os alunos desanimados, pois houve dias em que seus computadores não ligavam para iniciar as atividades.

Quanto ao uso em duplas (ideal) ou trio (devido ao número reduzido de computadores) é bastante interessante pois, como Zuchi (2005) também percebeu, os alunos podem discutir os problemas, organizar os dados, procurar estratégias de resoluções e ambos conseguem interagir com o Geogebra.

A seqüência didática em um ambiente computacional obteve um bom índice de aprovação entre os alunos participantes. Era perceptível o quanto gostavam de interagir com o software, mostraram grande motivação e interesse na resolução das atividades propostas. Isso pode ser obsevado através da avaliação feita no último registrada na ficha de pós-avaliação.

Na observação realizada em classe evidenciou-se várias dificuldades daquelas já estudadas no capítulo de obstáculos no ensino e aprendizagem das funções trigonométricas. Alguns desses obstáculos já tinham sido observados: a indicação de um triângulo retângulo dentro do círculo trigonométrico, a orientação dos arcos e a interpretação das relações trigonométricas como uma função cujo domínio é a medida do arco em radianos.

A metodologia baseada na teoria de Registros de Representação Semiótica de Duval aliada ao uso do GeoGebra auxiliou muito para que os alunos superassem tais obstáculos, isto pode ser concluído a partir da comparação dos resultados obtidos na pré-avaliação com todas as atividades desenvolvidas naquela semana junto ao Geogebra e o ambiente lápis e papel e até mesmo com a pós avaliação.

Acredita-se então que este trabalho possa servir de apoio a elaboração de novas seqüências didáticas com apoio computacional afim de ultrapassar outros obstáculos de conteúdos específicos da Matemática. Uma vez que o software GeoGebra é uma excelente ferramenta que oferece o recurso de manipular os diferentes registros de representação semiótica de um mesmo objeto matemático.

Fonte das figuras

Fig.1 : http://www.geocities.com/geoespacial/pir5.gif

Fig.2 : LOBO DA COSTA, N. M. ou COSTA, N.M.L. . A História da Trigonometria. Educação Matemática em Revista - Revista da SBEM (Sociedade Brasileira de Educação Matemática) - Ano 10, São Paulo, p. 63, 01 mar. 2003.

Fig 3.: LINDEGGER, LUIZ R. DE M. – **Construindo os conceitos básicos da trigonometria no triângulo retângulo: uma proposta a partir da manipulação de modelos** – Dissertação de Mestrado, PUCSP, São Paulo 2000, p. 48

Fig. 4: LINDEGGER, LUIZ R. DE M. – **Construindo os conceitos básicos da trigonometria no triângulo retângulo: uma proposta a partir da manipulação de modelos** – Dissertação de Mestrado, PUCSP, São Paulo 2000, p. 52

BIBLIOGRAFIA

Artigue, Michele. **Ingénire didactique**. RDM, V9, n3, p231-308, 1988.

BACHELARD, Gaston. **A formação do espírito científico**. Rio de Janeiro: Contraponto, 1996

BRANDT, Célia F. – **Contribuições dos Registros de Representação Semiótica na Conceituação do Sistema de Numeração** – Tese de Doutorado, PPGECT, UFSC, 2005.

CASTELLS, Manuel - **A sociedade em rede (A era da informação: economia, sociedade e cultura).** Volume 1, São Paulo: Editora Paz e Terra, 2a. ed., 1999.

BROSSEAU, G. **Lês obstacles épistémologiques et lês problèmes em mathématiques**. RDM, v. 4, n. 2, p. 165-198, 1983.

COSTA, Nielce M. L. – **Funções Seno e Cosseno – Uma sequencia de ensino a partir dos contextos do "Mundo Experimental" e do computador**. Dissertação de Mestrado, PUC-SP, 1997.

COTTA, Alceu J. – **Novas Tecnologias Educacionais no Ensino de Matemática: Estudo de Caso – LOGO e do Cabri-Géomètre**. Dissertação de Mestrado, UFSC, Programa de Pós-graduação em Engenharia de Produção, 2002.

CRUZ, Donizete G. **A utilização de ambiente dinâmico e interativo na construção de conhecimento distribuído**. Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática *"Conhecimento e Inclusão Social "*, 2006. Disponível em http://www.fae.ufmg.br:8080/ebrapem/completos/06-11.pdf.

DALL'ANESE, Cláudio - **Conceito de Derivada: Uma proposta para seu ensino e aprendizagem**. Dissertação de Mestrado, PUC-SP, Mestrado Acadêmico em Educação Matemática, 2000.

DE CAMPOS, Lídio M. L. – **Uso de Ferramentas Educacionais em Calculo Diferencial e Integral I** – Revista Tecnologias na Educação, Rio de Janeiro, v. 1, p. art.13, 2008. Diponível em: http://tecnologiasnaeducacao.pro.br/revista/a1n1/art14.pdf. Acessado em 10/06/2009.

DUVAL, R. **Registros de representation sémiotique et fonctionnements cognitif de la pensée**. Annales de didactique et Sciences Cognitives, vol. 5. IREM – ULP, Strasbourg, 1993, Sessões 1 e 2.

DUVAL, R. – **Registros de representação semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática.** In:

Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica. (Organizadora Sílvia Dias Alcântara Machado). Campinas, SP: Papirus, 2003

DUVAL, R. - **Semiosis y Pensamento Humano – Registros Semióticos y Aprendizajes Intelectuales**. Universidad del Valle. Instituto de Educación e Pedagogía. Ciudad Universitaria Meléndez. 2004.

GODOY, L. F. S. **Registro de representação da noção de derivadas e o processo de aprendizagem**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)- Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. Centro de Educação. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo/SP: PUC-SP, 2004.

Gomes, H. J. P. e Oliveira, O. B. (2007). **Obstáculos epistemológicos no ensino de ciências: um estudo sobre suas influências nas concepções de átomo**. Ciências & Cognição; Ano 04, Vol 12. Disponível em www.cienciasecognicao.org

Gomes, Maristela G. – **Obstáculos na Aprendizagem Matemática: Identificação e busca de superação nos cursos de formação de professores das séries iniciais**. Tese de Doutorado, Programa de Pós Graduação em Educação Científica e Tecnológica, UFSC, 2006.

GRAVINA, Maria Lúcia; SANTAROSA, Lucila Maria. **A aprendizagem da matemática em ambientes informatizados**. In: IV Congresso RIBIE, Anais. Brasília, 1998.

Gil, H. & Menezes, M. H. - **SOFTWARE EDUCATIVO E A IMPORTÂNCIA DE UMA "MÉTRICA"**. In J. M. Sánchez Pérez et al. (Eds.), Avances en informática educativa: Nuevos retos. Artículos seleccionados del VI Simposio Internacional de Informática Educativa (SIIE 2004) (p. 125 – versão completa no CD Informática Educativa – Nuevos Retos, 145.pdf). Cáceres: Universidad de Extremadura.

HOHENWARTER, Markus e Lavicza, Zsolt. **Mathematics Teacher Development with ICT: Towards an International GeoGebra Institute**. Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics, 2007. Disponível em http://www.geogebra.org/publications/2007-BSRLM-IGI-Paper-Nov.pdf

KOZAKEVICH, Daniel R. – **CAS: Sistema de Computação Algébrica**. Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC). Disponível em http://www.mtm.ufsc.br/~daniel/amcom/CAS/pambis.html. Acessado em 05/04/2009.

KOKOL-VOLJC, Vlasta. **Use of Mathematical Software in Preservice Teacher training: The Case of DGS**. Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics, 2007. Disponível em http://www.bsrlm.org.uk/IPs/ip27-3/BSRLM-IP-27-3-10.pdf

LIRA , Antonio da F. de – **O processo da construção do conceito matemático de limite pelo aprendiz com utilização de objetos digitais**. Tese de Doutorado, Progama de Pós-Graduação em Informática na Educação, UFRGS, Porto Alegre, RS, 2008.

LINDEGGER, LUIZ R. DE M. – **Construindo os conceitos básicos da trigonometria no triângulo retângulo: uma proposta a partir da manipulação de modelos**. Dissertação de Mestrado, PUCSP, São Paulo 2000.

LOBO DA COSTA, N. M. ou COSTA, N.M.L. **A História da Trigonometria. Educação Matemática em Revista** - Revista da SBEM (Sociedade Brasileira de Educação Matemática) - Ano 10, São Paulo, p. 60 - 69, 01 mar. 2003.

MORETTI, Méricles T. **O papel dos Registros de Representação na Aprendizagem de Matemática**. Contra Pontos - Revista de Educação da Universidade do Vale do Itajaí, Itajaí, n.6, set/dez 2002.

PREINER, Judith. **Introducing Dynamic Mathematics Software to Mathematics Teachers: the Case of GeoGebra**. Dissertação em Educação Matemática, Faculdade de Ciências Naturais, University of Salzburg, abril de 2008. Disponível em http://www.geogebra.org/publications/jpreiner-dissertation.pdf

PRETTO , Nelson L. ; Andrades, Simony A. - **A Internet e os desafios para os professores**. Revista Acesso, São Paulo, v. 16, n. 16, p. 31-38, 2002.

PUC-SP – **Curso Online: Matemática Dinâmica**. Coordenadoria Gerla de Especialização, Aperfeiçoamente e Extensão (COGEAE), São Paulo, Julho de 2009, disponível em http://cogeae.pucsp.br/curso.php?cod=280509&uni=D&tip=RE&le=E&ID=6

SANGWIN, Chris. **A brief review of GeoGebra: dynamic mathematics**. MSOR Connections Vol 7 No 2, Maio – Julho 2007. Disponível em http://mathstore.gla.ac.uk/headocs/doc.php?doc=Sangwin_C.pdf

SILVA, Madeline O. **Esboço de Curvas: Uma análise sob a perspectiva dos registros de representação semiótica**. Dissertação de Mestrado, PPGECT-UFSC, Florianópolis,2008.

SOUZA, Fernando E.; SILVA, Benedito A. **Conhecimentos de Estudantes Universitários sobre o Conceito de Integral**. 2007. Artigo – IX ENEM, Belo Horizonte/MG.
VILARREAL, M. E. – **O Pensamento Matemático de Estudantes Universitários de Cálculo e Tecnologias Informáticas**. Tese de Doutorado – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1999.
WIKIPÉDIA – **Trigonometria.** Acessado em janeiro de 2009, disponível no endereço: http://pt.wikipedia.org/wiki/Trigonometria

ANEXOS

ANEXO 1 - Encontro I

Ficha A - Ficha de Pré-Avaliação

Pré-Avaliação

Inicialmente agradeço sua pré-disposição para participar da 1ª oficina de estudo de matemática com o GeoGebra.

A presente pré-avaliação tem como objetivo observar o quanto você já conhece das funções reais trigonométricas seno e cosseno. Para isto serão observados sua compreensão quanto ao gráfico destas funções, além do seu domínio, período e imagem. Pedimos para registrar ao máximo suas idéias, mesmo que não tenha certeza quanto à precisão do resultado.

Esta atividade faz parte da pesquisa de dissertação de Mestrado de José Roque Damasco Neto (Prof. Zé Roque) e poderá ser útil para criação de outras oficinas como esta que você está participando.

1) Desenhe um esboço do gráfico das funções reais dadas abaixo.
   Em cada um dos casos aponte, seu domínio, imagem e período.

a) $y = sen(x)$

b) $y = 4 + sen(x)$

c) $y = 2\cos(x)$

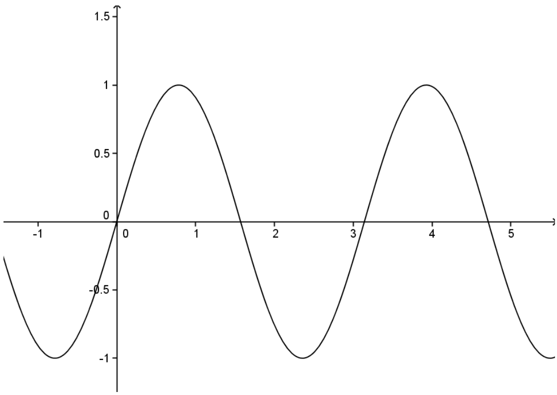
d) $y = -\cos(2x)$

2) Sem fazer um esboço do gráfico, você é capaz de determinar o domínio (D(f)), o período (P) e a imagem (Im(f)) das funções abaixo? Em caso afirmativo indique-os.

a) $y = \cos(x)$

b) $y = -3 + \cos(x)$

3) Indique o período, a imagem, e o domínio das funções representadas graficamente.



4) Desenho o gráfico de uma função cujo período seja 4, seu conjunto imagem Im(f)=[-2,3] e seu conjunto domínio D(f)=[-6,6].

Ficha B: Revisão de conceitos com o Geogebra

OFICINA DE TRIGONOMETRIA

OBJETIVO:

Nesta aula retomaremos o estudo de funções (definição, gráficos, imagem, domínio, periodicidade) a partir da pré-avaliação feita no primeiro encontro.

1º Momento

Retorno da pré-avaliação.

2º Momento

1) Função – Definições

1.1) Definição de Função

1.2) Definição de Domínio

1.3) Definição de Conjunto Imagem

1.4) Definição de Periodicidade

ATIVIDADES

1) Vamos compreender alguns comandos do GeoGebra e relembrar conceitos de funções com o GeoGebra. Construa o que se pede.

a) Crie as variáveis a e b, com valores mínimo -10 e máximo +10.

b) Crie a função y=ax+b

c) Verifique o que acontece com a função ao alterar o parâmetro a. Como é o gráfico desta função? O que você pode dizer sobre o parâmetro a?

d) Agora altere apenas o parâmetro b, o que ocorre com o gráfico da função? O que você pode dizer sobre este parâmetro?

2) Conhecendo a função arraste.

Crie um ponto A sobre o eixo x. Depois crie um ponto P que tenha a mesma abscissa de A e a ordenada $y=x^2$, onde x também é a abscissa de A.

Faça alterações sobre a coordenada y, e observe o gráfico ao alterar a posição de A.

ANEXO 2 – Encontro 2
OFICINA DE TRIGONOMETRIA

Ficha 1

OBJETIVO:

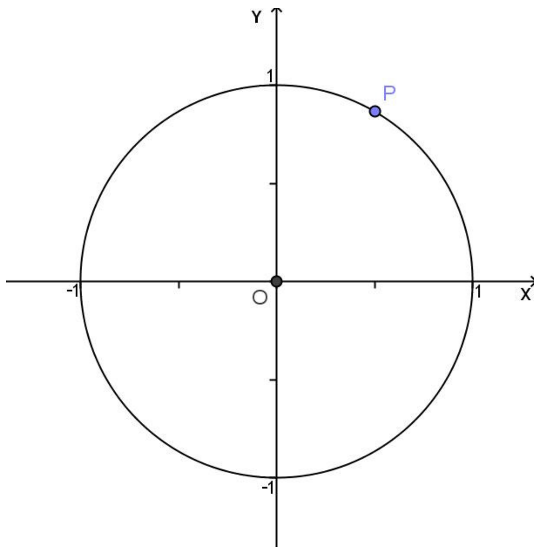
Nesta aula buscaremos relembrar o conceito de círculo trigonométrico e as funções trigonométricas associada a ele.

Conceito de Círculo Trigonométrico no papel.

Para tal você precisa inicialmente lembrar o conceito de círculo trigonométrico. Veja a seguir:

Círculo Trigonométrico é um círculo de centro na origem do plano cartesiano e raio igual a uma unidade.

1) Considerando o ponto P pertencente a circunferência abaixo, marque no plano cartesiano suas projeções (coordenadas x e y) e trace o raio da circunferência até o ponto P.



2) Observe que ao fazer esta marcação você formou um triângulo retângulo, onde um dos catetos está sobre o eixo x, e o ângulo formado com eixo x e o raio desenhado por você. Utilizando o desenho acima, calcule, usando os conhecimentos seus de trigonometria do triângulo retângulo, as coordenadas x e y do ponto P. (DEIXE OS CÁLCULOS AQUI REGISTRADOS)

Tendo feito seus cálculos verifique se a seguinte afirmativa é verdadeira e discuta com os colegas e o professor orientador da turma suas conclusões.

O ponto P tem coordenadas (cosα, senα).

Ficha 2

OBJETIVO:

Nesta aula buscaremos relembrar o conceito de círculo trigonométrico e as funções trigonométricas associada a ele.

OBS: Não esqueça de salvar toda construção que você fez no GeoGebra identificando o nome do arquivo com o nome da dupla.

Conceito de Círculo Trigonométrico no GeoGebra.
Você já percebeu que:

Círculo Trigonométrico é um círculo de centro na origem do plano cartesiano e raio igual a uma unidade.

2) Vamos então construir este círculo no GeoGebra. Primeiramente construa uma circunferência de centro na origem e raio 1.

3) Marque um ponto P sobre a circunferência.

4) Trace o raio (segmento de reta) até o ponto P.

5) Peça para medir o ângulo formado pelo eixo x e o segmento marcado no sentido anti-horário.

6) Observe na aba dos objetos as coordenadas do ponto P, e responda as seguintes perguntas:

- O que representa a abscissa x do ponto P dado o ângulo formado pelo segmento $\overline{OP}$ e o eixo no sentido anti-horário.

- O que representa a ordenada y do ponto P dado o ângulo formado pelo segmento $\overline{OP}$ e o eixo no sentido anti-horário.

____
____
____
____
____

7) Utilizando o seu círculo trigonométrico do GeoGebra, e considerando o ângulo em radianos, preencha a tabela abaixo.

Ângulo α em Radianos	sen(α)	cos(α)
0		
$\pi/6$		
$\pi/4$		
$\pi/3$		
$\pi/2$		
$2\pi/3$		
$3\pi/4$		
$5\pi/6$		
π		
$7\pi/6$		
$5\pi/4$		
$4\pi/3$		
$3\pi/2$		
$11\pi/6$		
$7\pi/4$		
$5\pi/3$		
2π		

8) Com o auxílio da tabela acima podemos formar pares ordenados da forma (α , sen α) assim como (α , cos α). Desta maneira marque todos os pontos formados no plano cartesiano do GeoGebra. Dica – Utilize a entrada algébrica indicada e utilize uma cor para todos os pontos cujo y é sen α e outra cor para aqueles em que y é cos α . Faça um arquivo para os pontos (α , sen α) e outro para os pontos (α , cos α).

9) Agora crie no GeoGebra um ponto genéricos de coordenadas A(α, “x de P”) onde você colocou as coordenadas (α, cosα). Gire o ponto P sobre o plano cartesiano e veja o que acontece com o ponto A. Habilite o rastro do ponto A.

____

____

____

10) Analogamente ao anterior, crie um ponto B(α, “y de P”) onde você colocou as coordenadas (α, senα). Gire o ponto P sobre o plano cartesiano e veja o que acontece com o ponto B. Habilite o rastro do ponto B.

____

____

____

____

11) Se você ligasse estes pontos, como seria o formato do gráfico em cada um dos casos, faça um esboço destes gráficos no espaço abaixo, indicando os valores máximos e mínimos que cada um dos gráficos atingem.

ANEXO 3 – Encontro III

OFICINA DE TRIGONOMETRIA

OBJETIVO:

Nesta aula buscaremos compreender melhor o domínio, a imagem e o período das funções trigonométricas (seno e cosseno).

1) Função f(x)=sen(x)

1.1) Para iniciar pegue o arquivo com os pontos de coordendas (α , sen α) da tabela da aula anterior e no próprio GeoGebra peça para traçar o gráfico da função y = sen(x) (não esqueça, no GeoGebra y = **sin** (x)). O que você percebeu?

____

____

____

____

____

1.2) Qual a imagem e o domínio da função f(x) = sen(x)

____

____

____

____

____

1.3) Qual o período da função?

____

____

____

____

1.4) Agora vamos compreender melhor as funções f(x)=a+b.sen(cx), e as transformações que a função f(x)=sen(x) sofre com alteração dos valores dos coeficientes a, b c. Para isto crie no GeoGebra os seletores **a**, **b** e **c**.

1.5) Alterando o valor do seletor b, apresente na tela o gráfico das seguintes funções

$$y = \sin(x)$$
$$y = 2\sin(x)$$
$$y = 3\sin(x)$$
$$y = 4\sin(x)$$
$$y = 10\sin(x)$$

$$y = \sin(x)$$
$$y = \frac{1}{2}\sin(x)$$
$$y = \frac{1}{3}\sin(x)$$
$$y = \frac{1}{4}\sin(x)$$
$$y = \frac{1}{8}\sin(x)$$

Observando os gráficos, pense e responda:

a) Qual a imagem da função y = sen (x)

b) Indique ao lado de cada função acima, a sua imagem.

c) Comparando com a função y = sen (x), o que aconteceu com a imagem das funções cosseno ao serem multiplicadas por um número?

1.6) Alterando o valor do seletor a, observe na tela o gráfico das seguintes funções:

$y = \sin(x)$

$y = 2 + \sin(x)$

$y = 3 + \sin(x)$

$y = 4 + \sin(x)$

$y = 10 + \sin(x)$

$y = \sin(x)$

$y = -2 + \sin(x)$

$y = -3 + \sin(x)$

$y = -4 + \sin(x)$

$y = -10 + \sin(x)$

Observando os gráficos, pense e responda:

a) Qual a imagem da função y = sen (x)

b) Indique ao lado de cada função acima, a sua imagem.

c) Comparando com a função y = sen (x), o que aconteceu com a imagem das funções cosseno ao serem adicionadas a um número?

d) Qual a imagem da função y = a+sen(x)?

e) Sem construir o gráfico, você é capaz de indicar a imagem das seguintes funções:

$y = 3sen(x)$

$y = 2 + 3sen(x)$

$y = -4 + 10sen(x)$

$y = a + bsen(x)$

f) Confira suas respostas anteriores usando o GeoGebra.

1.7) Alterando agora o valor do seletor c, observe na tela o gráfico das seguintes funções:

	$y = \sin(x)$
$y = \sin(x)$	$y = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$
$y = \sin(2x)$	
$y = \sin(4x)$	$y = \sin\left(\frac{x}{4}\right)$
$y = \sin(8x)$	
$y = \sin(16x)$	$y = \sin\left(\frac{x}{8}\right)$
	$y = \sin\left(\frac{x}{16}\right)$

Observando os gráficos, pense e responda:

a) As funções trigonométricas do tipo seno são periódicas?

b) Caso seja periódica, qual o período da função y = sen (x)? Considere $\pi = 3{,}14$. Neste, caso indique também ao lado de cada um das funções acima o seu período T.

c) Ao multiplicarmos o argumento x (ângulo) por um número, o que aconteceu com o período da função?

d) Caso seja periódica, qual o período da função y = sen (kx), sendo k$\in R^*$

e) Qual o domínio das funções seno?

ANEXO 4: Encontro IV
OFICINA DE TRIGONOMETRIA

OBJETIVO:

Nesta aula buscaremos compreender melhor o domínio, a imagem e o período das funções trigonométricas (seno e cosseno).

1.8) Por último vamos compreender melhor as funções f(x)=a+b.cos(cx), e as transformações que a função f(x) = cos(x) sofre com alteração dos valores dos coeficientes a, b c. Para isto crie no GeoGebra os seletores **a**, **b** e **c**.

1.9) Alterando o valor do seletor b, apresente na tela o gráfico das seguintes funções

$$y = \cos(x)$$
$$y = 2\cos(x)$$
$$y = 3\cos(x)$$
$$y = 4\cos(x)$$
$$y = 10\cos(x)$$

$$y = \cos(x)$$
$$y = \frac{1}{2}\cos(x)$$
$$y = \frac{1}{3}\cos(x)$$
$$y = \frac{1}{4}\cos(x)$$
$$y = \frac{1}{8}\cos(x)$$

Observando os gráficos, pense e responda:

a) Qual a imagem da função y = cos (x)

b) Indique ao lado de cada função acima, a sua imagem.

c) Comparando com a função y = cos (x), o que aconteceu com a imagem das funções cosseno ao serem multiplicadas por um número?

1.10) Alterando o valor do seletor a, observe na tela o gráfico das seguintes funções:

$y = \cos(x)$

$y = 2 + \cos(x)$

$y = 3 + \cos(x)$

$y = 4 + \cos(x)$

$y = 10 + \cos(x)$

$y = \cos(x)$

$y = -2 + \cos(x)$

$y = -3 + \cos(x)$

$y = -4 + \cos(x)$

$y = -10 + \cos(x)$

Observando os gráficos, pense e responda:

a) Qual a imagem da função y = cos (x)

b) Indique ao lado de cada função acima, a sua imagem.

c) Comparando com a função y = cos (x), o que aconteceu com a imagem das funções cosseno ao serem adicionadas a um número?

d) Qual a imagem da função y = a+ cos (x)?

e) Sem construir o gráfico, você é capaz de indicar a imagem das seguintes funções:

$$y = 3\cos(x)$$
$$y = 2 + 3\cos(x)$$
$$y = -4 + 10\cos(x)$$
$$y = a + b\cos(x)$$

f) Confira suas respostas anteriores usando o GeoGebra.

1.11) Alterando agora o valor do seletor c, observe na tela o gráfico das seguintes funções:

$$y = \cos(x)$$
$$y = \cos(2x)$$
$$y = \cos(4x)$$
$$y = \cos(8x)$$
$$y = \cos(16x)$$

$$y = \cos(x)$$
$$y = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$$
$$y = \cos\left(\frac{x}{4}\right)$$
$$y = \cos\left(\frac{x}{8}\right)$$
$$y = \cos\left(\frac{x}{16}\right)$$

Observando os gráficos, pense e responda:

a) As funções trigonométricas do tipo cosseno são periódicas?

b) Caso seja periódica, qual o período da função y = cos (x)? Considere $\pi = 3{,}14$ - Neste, caso indique também ao lado de cada um das funções acima o seu período T.

c) Ao multiplicarmos o argumento x (ângulo) por um número, o que aconteceu com o período da função?

d) Caso seja periódica, qual o período da função y = cos (kx), sendo k$\in R^*$

e) Qual o domínio das funções cosseno?

ANEXO 5: Encontro V
Pós-Avaliação

Inicialmente agradeço sua participação da 1ª oficina de estudo de matemática com o GeoGebra, além de sua importante contribuição para minha pesquisa em torno do uso de novas ferramentas computacionais para o ensino de Matemática.

A presente pós-avaliação tem como objetivo observar o quanto a oficina contribui para você compreender melhor as funções trigonométricas seno e cosseno. Para isto serão observados sua compreensão quanto ao gráfico destas funções, além do seu domínio, período e imagem.

Como você já sabe esta atividade faz parte da minha pesquisa de dissertação de Mestrado e poderá ser útil para criação de outras oficinas como esta que você está participando.

1) Desenhe um esboço do gráfico das funções reais dadas abaixo. Em cada um dos casos aponte, seu domínio, imagem e período.

a) $y = sen(x)$

b) $y = 4 + sen(x)$

c) $y = 2\cos(x)$

d) $y = -\cos(2x)$

2) Sem fazer um esboço do gráfico, você é capaz de determinar o domínio (D(f)), o período (P) e a imagem (Im(f)) das funções abaixo? Em caso afirmativo indique-os.

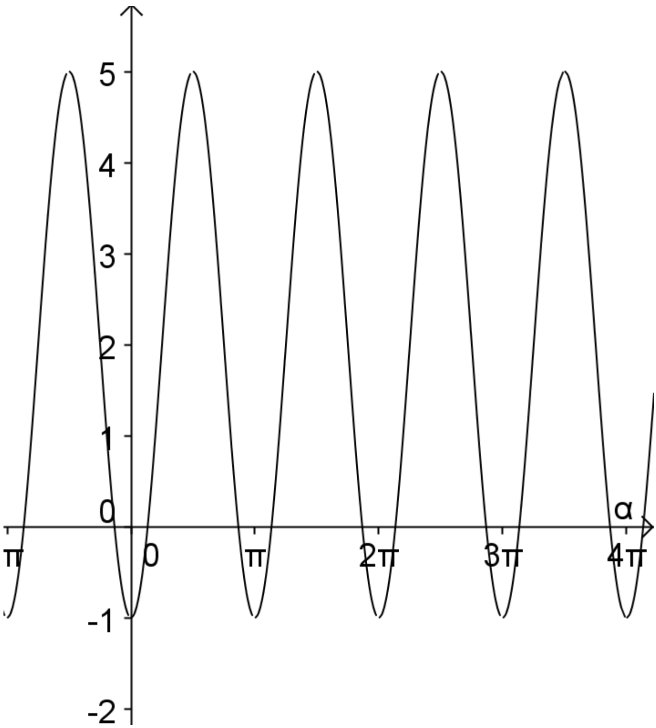
a) $y = \cos(x)$

b) $y = -3 + \cos(x)$

c) $y = 2sen\left(\dfrac{x}{2}\right)$

d) $y = -3 + 2sen\left(\dfrac{x}{2}\right)$

3) Indique o período, a imagem, e o domínio das seguintes funções.



4) Desenho de gráficos dados período, imagem e domínio e pontos de máximo.

5) Avaliação da Oficina – Apenas algumas perguntas sobre sua opinião quanto ao oferecimento destas oficinas extra-curriculares de Matemática no IFSC.

5.1) Você acha que está melhor compreendendo as funções trigonométricas?

a) Sim
b) Não

5.2) Você que o computador deve ser usado no ensino de Matemática? Por quê?

____
____
____
____
____

5.3) Você pensa que o IFSC deva oferecer outras oficinas extra-curriculares de Matemática? Caso afirmativo, quais assuntos você deveriam abordar?

____
____
____
____
____