

# Monopolos magnéticos $\mathbb{Z}_2$ em teorias de Yang-Mills-Higgs com simetria de gauge $SU(n)$

Paulo Juliano Liebgott<sup>1</sup>

Dissertação apresentada ao Departamento de Física da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do título de Mestre em Física

Programa: Pós Graduação em Física  
Orientador: Prof. Dr. Marco Aurélio Cattacin Kneipp

Florianópolis, março de 2009

---

<sup>1</sup>Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro do CNPq

# Monopolos magnéticos $\mathbb{Z}_2$ em teorias de Yang-Mills-Higgs com simetria de gauge $SU(n)$

Banca Examinadora:

- Prof. Dr. Marco Aurélio Cattacin Kneipp (orientador) - FSC/UFSC.
- Prof. Dr. Luiz Agostinho Ferreira - IF/USP-SC.
- Prof. Dr. Frederico Firmo de Souza Cruz - FSC/UFSC.
- Prof. Dr. José Carlos Brunelli - FSC/UFSC.

## Agradecimentos

Algumas pessoas e instituições contribuíram de maneira direta ou indireta para a concretização deste trabalho. Gostaria de agradecer especialmente:

Ao meu orientador, Prof. Dr. Marco Aurélio Cattacin Kneipp, que confiou em mim ao me aceitar como aluno e dividir comigo seu tempo e sua pesquisa, por ter me apresentado esta área de trabalho e sempre ter se colocado a disposição para atender-me.

Àqueles professores que contribuíram para a minha formação e aos membros da banca que se disponibilizaram a avaliar este trabalho.

À minha família, em especial meus pais, Edgar (*in memoriam*) e Delmina, a quem dedico essa dissertação, que sempre colocaram a educação de seus filhos em primeiro plano. À minha namorada, Silvia, que foi compreensiva e paciente nos momentos mais complicados da elaboração deste trabalho. Aos colegas e amigos com os quais troquei experiências úteis para a vida acadêmica.

Ao conselho nacional de pesquisa - CNPq - que me forneceu auxílio financeiro durante os vinte e quatro meses da realização deste projeto e ao dpto. de física da Universidade Federal de Santa Catarina pela infra-estrutura cedida.

A todas essas pessoas e instituições, meus sinceros agradecimentos.

## Resumo

Monopolos magnéticos têm sido objetos de grande interesse nos últimos anos, principalmente por serem previstos em algumas teorias de grande unificação e por, possivelmente, serem relevantes no fenômeno do confinamento em QCD. Consideramos uma teoria de Yang-Mills-Higgs com simetria de gauge  $SU(n)$  quebrada espontaneamente em  $SO(n)$  que apresenta condições topológicas necessárias para a existência de monopolos  $\mathbb{Z}_2$ . Construímos as formas assintóticas desses monopolos, considerando duas quebras distintas do  $SU(n)$  em  $SO(n)$ , e verificamos que os monopolos fundamentais estão associados aos pesos da representação definidora da álgebra  $\mathfrak{so}(n)^\vee$ .

**Palavras-chave:** Monopolos magnéticos, teorias de Yang-Mills, dualidades, grupos e álgebras de Lie.

## Abstract

Magnetic monopoles has been of great interest in recent years, mainly because they are predicted in some grand unification theories and, possibly, are relevant in the phenomenon of confinement in QCD. We consider a Yang-Mills-Higgs theory with gauge symmetry  $SU(n)$  spontaneously broken in  $SO(n)$  that has the topological conditions for the existence of  $\mathbb{Z}_2$  monopoles. We build the asymptotic form for these magnetic monopoles for two different breaks  $SU(n) \rightarrow SO(n)$  and found that the fundamental monopoles are associated to the defining representation of  $\mathfrak{so}(n)^\vee$ .

**Keywords:** Magnetic monopoles, Yang-Mills theories, dualities, Lie groups and Lie algebras.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Monopolos Magnéticos em Teorias de Yang-Mills-Higgs</b>	<b>4</b>
2.1	Convenções de Álgebras de Lie . . . . .	4
2.2	Condições Necessárias para a Solução de Monopolo Magnético . . . . .	7
2.3	Forma Assintótica para a Solução de Monopolo Magnético . . . . .	13
<b>3</b>	<b>Dualidades Eletromagnéticas</b>	<b>16</b>
3.1	Dualidade no Eletromagnetismo de Maxwell . . . . .	16
3.2	Limite BPS para o Monopolo Magnético . . . . .	17
3.3	Monopolo de 't Hooft-Polyakov . . . . .	20
3.4	Dualidade de Montonen-Olive . . . . .	22
3.5	Dualidade de Montonen-Olive para Grupos Arbitrários . . . . .	23
<b>4</b>	<b>Monopolos <math>\mathbb{Z}_2</math></b>	<b>26</b>
4.1	Quebra $\mathfrak{su}(n)$ em $\mathfrak{so}(n)$ invariante por automorfismo de Cartan . . . . .	26
4.2	Quebra $\mathfrak{su}(2m + 1)$ em $\mathfrak{so}(2m + 1)$ invariante por automorfismo externo . . . . .	32
4.3	Forma Assintótica do Monopolo $\mathbb{Z}_2$ . . . . .	37
4.3.1	$\mathfrak{so}(n)$ invariante por automorfismo de Cartan . . . . .	37
4.3.2	$\mathfrak{so}(2m + 1)$ invariante por automorfismo de externo . . . . .	42
<b>5</b>	<b>Conclusões</b>	<b>45</b>
<b>A</b>	<b>Casos Especiais</b>	<b>46</b>
<b>B</b>	<b>Tabelas</b>	<b>51</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>56</b>

# Capítulo 1

## Introdução

Apesar de nunca terem sido observados experimentalmente, os monopolos magnéticos têm tido ao longo dos anos uma grande atenção por parte de físicos teóricos. Essa atenção começou, possivelmente logo após a formalização de Maxwell para o eletromagnetismo, quando notou-se a assimetria que a falta de uma carga magnética provoca nas equações que regem a eletrodinâmica clássica. Em 1931, Dirac [1] formalizou as propriedades que o monopolo no eletromagnetismo deveria satisfazer para ser consistente com a teoria quântica.

Nos anos 70 as pesquisas acerca dos monopolos magnéticos foram renovadas e se tornaram fortemente impulsionadas após as descobertas de 't Hooft [2] e Polyakov [3] de um novo tipo de carga magnética. Esse monopolo, posteriormente chamado de monopolo de 't Hooft-Polyakov, é, diferentemente da solução *ad hoc* de Dirac, uma solução prevista por uma teoria. O melhor conhecimento, por parte dos físicos teóricos, de teorias de grupos e álgebras de Lie e suas representações, que se iniciava mais ou menos naquela época, também possibilitou um maior aprofundamento nessa área de pesquisa.

As soluções de 't Hooft-Polyakov foram obtidas na teoria de Georgi-Glashow [4], uma teoria de gauge não-abeliana com quebra espontânea de simetria  $SU(2) \rightarrow U(1)$  e campo de Higgs na representação adjunta. A busca por soluções de monopolo magnético em teorias com grupos de simetria arbitrários iniciou-se em [5]. Ao mesmo tempo intensificavam-se as pesquisas em GUT's, teorias de grande unificação. Algumas delas apresentam soluções de monopolos de 't Hooft-Polyakov, como o modelo  $\mathfrak{su}(5) \rightarrow \mathfrak{su}(3) \oplus \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{u}(1)$  de Georgi e Glashow [6]. Em geral, os monopolos presentes em teorias de grande unificação são ultra-pesados, com massas da ordem de  $10^{16} - 10^{17}$  GeV <sup>1</sup> e abundantes,  $\rho_M \sim 10^{-18}$  gcm<sup>-3</sup> <sup>2</sup>. Esse é o chamado problema do monopolo, que pode ser resolvido com um modelo de universo inflacionário [7]. Com a proximidade entre a cosmologia e a física de partículas, o estudo fenomenológico desta e de outras soluções topológicas, como cordas cósmicas e paredes de domínio se tornou intenso na astrofísica e cosmologia atuais.

Experimentalmente, a busca por monopolos magnéticos vem acontecendo desde a hipótese do monopolo de Dirac. O *status* dessa busca pode ser visto em [8].

Com o ressurgimento dos estudo dos monopolos magnéticos, também ressurgiu o estudo de dualidades eletromagnéticas, dessa vez em teorias de Yang-Mills. Em 1977, Goddard, Nuyts e Olive

---

<sup>1</sup>A ordem de energia atingida no LHC é de  $10^4$  GeV.

<sup>2</sup>A densidade crítica do universo é de apenas  $\rho_c \sim 10^{-29}$  gcm<sup>-3</sup>.

[9] tentaram encontrar uma dualidade para uma teoria de gauge com grupo de simetria arbitrário. No mesmo ano, Montonen e Olive [10] conjecturaram uma dualidade entre monopolos de 't Hooft-Polyakov e partículas de gauge no modelo  $SU(2) \rightarrow U(1)$  de Georgi-Glashow. A generalização dessa conjectura para grupos de gauge arbitrários foi proposta, logo após, por Bais [11]. As dualidades eletromagnéticas em teorias de Yang-Mills mapeiam teorias com acoplamento forte em teorias com acoplamento fraco, sendo, portanto, útil para o estudo de teorias no regime de acoplamento forte. O interesse nessas dualidades foi renovado na década de 90 com os trabalhos de Sen [12], Seiberg e Witten [13], [14] e Witten e Vafa [15], nos quais foram realizados novos testes consistentes com a conjectura da dualidade eletromagnética.

Os monopolos obtidos a partir de uma quebra espontânea de simetria, realizada por um campo escalar na representação adjunta, estão associados a elementos do grupo cíclico  $\mathbb{Z}$  e cada um desses elementos está associado a um setor topológico na variedade de vácuo da teoria [16]. Estes monopolos, os quais chamaremos de monopolos  $\mathbb{Z}$ , e que têm o monopolo de 't Hooft-Polyakov como caso particular, já foram bem estudados e possuem uma vasta literatura. Entretanto, existem os chamados monopolos  $\mathbb{Z}_n$ , os quais estão associados a elementos do grupo cíclico de ordem  $n$  e surgem quando a representação do campo de Higgs não é a adjunta, que ainda não possuem uma boa literatura [7], [17]. Estes monopolos  $\mathbb{Z}_n$  existem em algumas teorias de grande unificação, como, por exemplo, o modelo de grande unificação  $\mathfrak{so}(10) \rightarrow \mathfrak{so}(6) \oplus \mathfrak{so}(4) \rightarrow \mathfrak{su}(3) \oplus \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{u}(1) \oplus \mathfrak{u}(1)$ , onde surgem monopolos  $\mathbb{Z}_2$  na primeira quebra espontânea de simetria e monopolos  $\mathbb{Z}$  na segunda.

Outra motivação para o estudo de monopolos magnéticos é sua possível aplicação no problema, ainda em aberto, do confinamento dos quarks em QCD. Atualmente uma das idéias mais aceitas para explicar o confinamento é a idéia de 't Hooft [18] e Mandelstam [19]. Eles propuseram que se colocássemos um monopolo e um anti-monopolo de Dirac dentro de um supercondutor, as linhas de campo não poderiam se espalhar pelo material, devido ao efeito Meissner, mas seriam confinadas no formato de tubos ligando as cargas magnéticas. Esses tubos armazenariam uma certa quantidade de energia por unidade de comprimento, chamada tensão da corda, e a energia total do sistema aumentaria conforme afastássemos os monopolos. As cargas magnéticas estariam então permanentemente confinadas dentro desse supercondutor. Esse fato levou 't Hooft e Mandelstam a conjecturarem que o confinamento dos quarks em mésons e bárions seria um fenômeno dual ao confinamento de cargas magnéticas em supercondutores. No modelo deles, o campo escalar descreve um condensado com carga magnética, havendo formação de tubos de fluxo elétrico e confinamento de cargas elétricas. A possível explicação para o confinamento dos quarks seria uma generalização dessas idéias para o caso não-abeliano, contudo, como fazer essa generalização ainda não é claro. Por exemplo, não se sabe se esse condensado é composto por monopolos  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Z}_2$  ou até mesmo monopolos de Dirac.

Nos últimos anos, estas idéias de 't Hooft e Mandelstam estão sendo generalizadas para teorias não Abelianas, em geral, supersimétricas, que satisfazem a dualidade eletromagnética. Em particular, em [20] e [21], foi analisado em detalhe o confinamento de monopolos  $\mathbb{Z}$  através da formação de tubos de fluxo em teorias de Yang-Mills-Higgs com grupo de gauge arbitrário. Este confina-



mento de monopolos  $\mathbb{Z}$ , que ocorre com constante de acoplamento fraca, implica no confinamento de partículas de gauge na teoria dual com constante de acoplamento forte. Em [22] foi conjecturado que os monopolos  $\mathbb{Z}_2$  em uma teoria com grupo  $SU(n)$  seria dual a partículas espinoriais na representação  $n$ -dimensional, mas ainda falta um estudo mais detalhado dessa conjectura. A fim de compreendermos melhor o confinamento de quarks, seria interessante obtermos uma dualidade entre monopolos e espinores na representação  $n$ -dimensional do grupo  $SU(n)$ .

Nessa dissertação, além de uma breve revisão sobre monopolos magnéticos de natureza topológica e dualidades eletromagnéticas, construímos explicitamente a forma assintótica dos monopolos  $\mathbb{Z}_2$  em uma teoria de Yang-Mills-Higgs com simetria de gauge  $\mathfrak{su}(n)$  quebrada espontaneamente em  $\mathfrak{so}(n)$ . Com essa construção, esperamos poder analisar várias de suas propriedades, como, por exemplo, verificar se o monopolo  $\mathbb{Z}_2$  é mapeado em alguma partícula, em uma representação particular, sob uma transformação de dualidade.

Apesar do confinamento dos quarks e glúons ocorrerem em QCD, cujo grupo de gauge é o  $SU(3)$ , grande parte dos estudos de confinamento em QCD na rede é feito considerando outros grupos de gauge, obtendo assim uma compreensão mais profunda do fenômeno. Por essa razão consideraremos o grupo  $SU(n)$ , com  $n$  arbitrário. Os resultados obtidos também podem vir a ser úteis para o estudo dos monopolos  $\mathbb{Z}_n$  em GUT's.

O desenvolvimento do nosso trabalho se divide em três capítulos, sendo os dois primeiros de revisão e o terceiro correspondendo às nossas contribuições [23].

O capítulo 2 está dividido em três seções. Na seção 2.1 damos as convenções de álgebras de Lie adotadas no decorrer do trabalho, em 2.2 demonstramos três condições necessárias para a existência de monopolos magnéticos e na seção 2.3 mostramos como construir a solução assintótica do monopolo.

O capítulo 3 foi dedicado às dualidades eletromagnéticas. Iniciamos, 3.1, definindo dualidade eletromagnética no contexto inicial do eletromagnetismo de Maxwell e antes de prosseguirmos com dualidades em teorias de Yang-Mills, obtemos na seção 3.2 o limite BPS para cargas magnéticas e introduzimos em 3.3 o monopolo de 't Hooft-Polyakov. Apresentamos a dualidade de Montonen-Olive na seção 3.4 e sua generalização para grupos arbitrários na seção 3.5.

No capítulo 4 consideramos uma teoria de Yang-Mills-Higgs com simetria de gauge  $\mathfrak{su}(n)$ . Com o campo escalar na parte simétrica da representação  $n \times n$  do  $\mathfrak{su}(n)$ , conseguimos duas quebras  $\mathfrak{su}(n) \rightarrow \mathfrak{so}(n)$ , uma, seção 4.1, com a álgebra  $\mathfrak{so}(n)$  invariante por automorfismo de Cartan e a outra, seção 4.2, com  $\mathfrak{so}(n)$  invariante por automorfismo externo. Verificamos as condições necessárias para a existência das soluções de monopolos magnéticos  $\mathbb{Z}_2$  em ambos os casos. Finalmente, na seção 4.3, construímos explicitamente as formas assintóticas dessas soluções.

Em anexos constam: a verificação da validade dos resultados obtidos no capítulo 4, no apêndice A; tabelas contendo matrizes de Cartan, formas quadráticas, grupos de recobrimento universal e seus centros e diagramas de Dynkin das álgebras simples e grupos de homotopias de grupos de Lie, no apêndice B.

## Capítulo 2

# Monopolos Magnéticos em Teorias de Yang-Mills-Higgs

### 2.1 Convenções de Álgebras de Lie

Nesta seção daremos as definições e convenções sobre álgebras de Lie simples e suas representações, ambas de dimensões finitas, adotadas. Um estudo sobre o assunto pode ser encontrado em [24], [25] e [26].

Os  $d$  geradores de uma álgebra de Lie  $d$ -dimensional satisfazem

$$[T_a, T_b] = if_{abc}T_c, \quad (2.1)$$

onde  $f_{abc}$ , as chamadas constantes de estrutura da álgebra, são constantes reais e os geradores  $T_a$  são hermitianos. Estes geradores possuem a relação de ortogonalidade

$$\text{Tr}(T_a T_b) = l(\Gamma)\delta_{ab}, \quad (2.2)$$

com a constante  $l(\Gamma)$  dependendo da representação  $\Gamma$  da álgebra. É conveniente adotarmos a chamada base de Cartan-Weyl para a álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ . Essa base consiste em dois conjuntos de geradores. Um desses conjuntos é a chamada subálgebra de Cartan, que abreviaremos por CSA e denotaremos por  $\mathfrak{h}$ . A CSA de  $\mathfrak{g}$  é formada pela maior subálgebra abeliana de  $\mathfrak{g}$ , ou seja, o maior número de geradores  $H_a \in T_b$ , tais que

$$[H_i, H_j] = 0. \quad (2.3)$$

A dimensão da CSA de  $\mathfrak{g}$ , ou seja, o número de geradores de  $\mathfrak{h}$  define o chamado rank de  $\mathfrak{g}$

$$\text{rank}(\mathfrak{g}) = r = \dim(\mathfrak{h}). \quad (2.4)$$

O outro conjunto de geradores é formado pelos  $(d - r)$  operadores degrau  $E_\alpha$  que satisfazem

$$[H_i, E_\alpha] = \alpha(H_i)E_\alpha = \alpha^i E_\alpha, \quad (2.5)$$

onde os  $(d - r)$  vetores  $r$ -dimensionais  $\alpha$  são chamadas raízes da álgebra. Denotamos o conjunto

desses vetores  $\Phi(\mathfrak{g})$ . Os operadores degrau satisfazem

$$[E_\alpha, E_\beta] = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha + \beta \notin \Phi(\mathfrak{g}) \\ N_{\alpha\beta} E_{\alpha+\beta} & \text{se } \alpha + \beta \in \Phi(\mathfrak{g}) \\ \frac{2\alpha}{\alpha^2} \cdot H & \text{se } \beta = -\alpha \end{cases} \quad (2.6)$$

onde  $\alpha \cdot H = \alpha_i H_i$  e  $N_{\alpha\beta}$  é uma constante determinada a partir de  $\alpha$  e  $\beta$ .

Todas as raízes em  $\Phi(\mathfrak{g})$  são decompostas no conjunto das raízes positivas e no conjunto das raízes negativas,  $\Phi^+(\mathfrak{g})$  e  $\Phi^-(\mathfrak{g})$ , respectivamente. Estes conjuntos são definidos por

$$\Phi^+(\mathfrak{g}) = \{\beta = n_i \alpha_i \mid n_i \in \mathbb{N}\}, \quad (2.7)$$

e

$$\Phi^-(\mathfrak{g}) = \{\beta = n_i \alpha_i \mid n_i \in \mathbb{Z}_-\}, \quad (2.8)$$

onde  $\mathbb{N}$  e  $\mathbb{Z}_-$  são o conjunto dos naturais e o conjunto dos inteiros não positivos, respectivamente.

Uma raiz positiva é dita simples se ela não pode ser escrita como a combinação linear de duas ou mais raízes positivas. As raízes simples formam uma base para  $\Phi(\mathfrak{g})$ . Denotamos essa base por  $\Delta(\mathfrak{g})$  e seu número de elementos é  $r = \text{rank}(\mathfrak{g})$ . As raízes simples satisfazem  $\alpha_i \cdot \alpha_j \leq 0$ . Normalmente usamos  $\alpha_i$  para indicarmos essas raízes.

As raízes da álgebra são combinações inteiras das raízes simples e portanto estão contidas em uma rede gerada por  $\Delta(\mathfrak{g})$ . Chamamos essa rede de rede das raízes de  $\mathfrak{g}$

$$\Lambda_r(\mathfrak{g}) = \{\beta = n_i \alpha_i \mid n_i \in \mathbb{Z}\}. \quad (2.9)$$

As raízes simples de uma álgebra de Lie a definem completamente e uma maneira de fazer isso é através da chamada matriz de Cartan. Os elementos dessa matriz  $r \times r$  são

$$K_{ij}(\mathfrak{g}) = \frac{2\alpha_i \cdot \alpha_j}{\alpha_j^2}, \quad \alpha_i \in \Delta(\mathfrak{g}). \quad (2.10)$$

Todas as entradas dessa matriz possuem a propriedade de serem números inteiros e a partir dela podemos construir o diagrama de Dynkin da álgebra.

Como os elementos de Cartan,  $H_i \in \mathfrak{h}$ , comutam entre si, eles podem ser simultaneamente diagonalizados. Os  $n$  vetores de estado,  $|\lambda\rangle$ , de uma representação  $\Gamma(\mathfrak{g})$ ,  $n$ -dimensional, satisfazem as equações de autovalores e autovetores

$$H_i |\lambda\rangle = \lambda^i |\lambda\rangle, \quad H_i \in \mathfrak{h}. \quad (2.11)$$

Para um dado vetor de estado,  $|\lambda\rangle$ , os  $r$  números  $\lambda^i$ , obtidos a partir dos elementos de Cartan, formam um vetor  $\lambda$  chamado peso da representação. Os  $n$  pesos definem a representação<sup>1</sup>  $n$ -

<sup>1</sup>Uma representação (linear) de uma álgebra é um mapeamento entre elementos da álgebra e as transformações lineares em um dado espaço vetorial  $V$ , chamado módulo. Um submódulo invariante é um subespaço vetorial de  $V$  e

dimensional. Esses pesos satisfazem

$$\frac{2\lambda \cdot \beta}{\beta^2} \in \mathbb{Z}, \quad \beta \in \Phi(\mathfrak{g}). \quad (2.12)$$

Para uma representação irredutível,<sup>2</sup> todos os vetores de estado ou, equivalentemente, seus pesos, podem ser obtidos a partir de um vetor de estado arbitrário  $|\lambda\rangle$  pela aplicação dos operadores degrau. Se o estado  $|\lambda\rangle$  possui peso  $\lambda$ , então o estado  $E_\beta|\lambda\rangle$  possui peso  $\lambda + \beta$ . Existe um estado, a partir do qual todos os demais estados da representação irredutível são obtidos por aplicação dos operadores degrau associados às raízes negativas. Esse estado é chamado estado de peso mais alto. O peso mais alto é definido como  $\Lambda$  um peso da representação, tal que  $\Lambda + \beta$  não é um peso,  $\forall \beta \in \Phi^+(\mathfrak{g})$ . Usamos  $\Lambda$  para rotular a representação irredutível. Em uma representação redutível, há um peso mais alto para cada componente da soma direta.

As raízes da álgebra são os pesos da representação adjunta.<sup>3</sup> Assim como há uma base para o espaço  $r$ -dimensional das raízes, há uma base para o espaço, também  $r$ -dimensional, dos pesos. Os elementos dessa base são chamados pesos fundamentais e denotados por  $\lambda_i$ . Os pesos fundamentais satisfazem

$$\frac{2\lambda_i \cdot \alpha_j}{\alpha_j^2} = \delta_{ij}, \quad \alpha_j \in \Delta(\mathfrak{g}). \quad (2.13)$$

Os pesos de uma representação também são escritos como combinações inteiras dos pesos fundamentais e estes últimos também definem uma rede, a rede dos pesos de  $\mathfrak{g}$

$$\Lambda_w(\tilde{G}) = \{\lambda = n_i \lambda_i \mid n_i \in \mathbb{Z}\}, \quad (2.14)$$

onde  $\tilde{G}$  é o grupo de recobrimento universal associado a álgebra  $\mathfrak{g}$ .

As co-raízes simples,  $\beta_i^\vee$ , de uma álgebra  $\mathfrak{g}$  são definidas por

$$\beta_i^\vee = \frac{2\beta_i}{\beta_i^2}, \quad \beta_i \in \Delta(\mathfrak{g}) \quad (2.15)$$

e os co-pesos fundamentais,  $\lambda_i^\vee$ , por

$$\lambda_i^\vee = \frac{2\lambda_i}{\beta_i^2}, \quad (2.16)$$

onde  $\lambda_i$  é um peso fundamental. De (2.13), (2.15) e (2.16) obtemos

$$\lambda_i^\vee \cdot \alpha_j = \lambda_i \cdot \alpha_j^\vee = \delta_{ij}. \quad (2.17)$$

---

um submódulo invariante não-trivial é um submódulo invariante, outro que o elemento neutro e o próprio módulo.

<sup>2</sup>Uma representação irredutível é uma tal que não possui submódulos invariantes. Uma representação redutível é uma representação escrita como soma direta de representações irredutíveis. Usaremos a abreviação irrep. para representações irredutíveis.

<sup>3</sup>Representação adjunta é a representação na qual o módulo da representação é a própria álgebra de Lie, visto que essa, por definição, é um espaço vetorial. Como consequência imediata, a dimensão da representação é igual a dimensão da álgebra.

O espaço gerado pelas raízes simples, pesos fundamentais, co-raízes simples e co-pesos fundamentais possui a mesma dimensão. A partir de (2.10), (2.15), (2.16) e (2.17), podemos obter

$$\alpha_i = K_{ij}\lambda_j, \quad (2.18)$$

$$\lambda_i = K_{ij}^{-1}\alpha_j, \quad (2.19)$$

$$\alpha_i^\vee = \lambda_j^\vee K_{ji}, \quad (2.20)$$

$$\lambda_i^\vee = \alpha_j^\vee K_{ji}^{-1}. \quad (2.21)$$

Podemos definir as redes das co-raízes e dos co-pesos,

$$\Lambda_r^\vee(G) = \Lambda_r(G^\vee) = \{\beta^\vee = n_i\alpha_i^\vee \mid n_i \in \mathbb{Z}\}, \quad (2.22)$$

$$\Lambda_w^\vee(\tilde{G}) = \Lambda_w(\tilde{G}^\vee) = \{\lambda^\vee = n_i\lambda_i^\vee \mid n_i \in \mathbb{Z}\}, \quad (2.23)$$

respectivamente<sup>4</sup>.

Da mesma forma que  $\Delta(\mathfrak{g})$  define completamente, a menos de isomorfismos,  $\mathfrak{g}$ , o conjunto das co-raízes simples de  $\mathfrak{g}$  define completamente a álgebra dual  $\mathfrak{g}^\vee$ . As álgebras de Lie, cujas raízes são todas de mesmo comprimento, são ditas auto-duais, pois raízes simples e co-raízes simples são iguais. Nos demais casos, a álgebra dual de  $\mathfrak{g}$  pode ser obtida invertendo a seta no diagrama de Dynkin de  $\mathfrak{g}$ .

Quando um peso de uma representação é escrito em termos dos pesos fundamentais, ele é dito estar na base de Dynkin. Nesta base, o produto escalar entre dois pesos quaisquer de uma mesma representação é dado por

$$\mu \cdot \lambda = \mu^T M(\mathfrak{g})\lambda, \quad (2.24)$$

onde  $Q(\mathfrak{g})$  é a forma quadrática, definida por (sem soma nos índices)

$$M_{ij}(\mathfrak{g}) = (K^{-1})_{ij}(\mathfrak{g})\frac{\alpha_i^2}{2}. \quad (2.25)$$

## 2.2 Condições Necessárias para a Solução de Monopolo Magnético

Consideremos uma teoria de Yang-Mills-Higgs com grupo de gauge  $G$ , compacto e simples e a densidade lagrangeana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}G_{a\mu\nu}G_a^{\mu\nu} + (\mathcal{D}_\mu\phi)^\dagger(\mathcal{D}^\mu\phi) - V(\phi, \phi^\dagger), \quad (2.26)$$

onde  $\phi$  é o campo de Higgs, que está em uma representação arbitrária, responsável pela quebra espontânea de simetria  $G \rightarrow G_0$ ,  $W^\mu = W_a^\mu T_a$  são os campos de gauge,

$$G^{\mu\nu} = G_a^{\mu\nu} T_a = \partial^\mu W^\nu - \partial^\nu W^\mu + ie[W^\mu, W^\nu]$$

---

<sup>4</sup>Em geral,  $\Lambda_w^\vee(G) \neq \Lambda_w(G^\vee)$  quando  $G$  não é o grupo de recobrimento universal.

é o tensor intensidade de campo, e

$$\mathcal{D}^\mu \phi = \partial^\mu \phi + ieW^\mu \phi$$

é a derivada covariante de gauge. Sob uma transformação de gauge os campos se transformam como

$$\begin{aligned} \phi &\rightarrow g\phi, \\ \mathcal{D}^\mu \phi &\rightarrow g\mathcal{D}^\mu \phi, \\ W^\mu &\rightarrow gW^\mu g^{-1} + \frac{i}{e}(\partial^\mu g)g^{-1} = -\frac{i}{e}g\mathcal{D}^\mu g^{-1}, \\ G^{\mu\nu} &\rightarrow gG^{\mu\nu}g^{-1}, \end{aligned}$$

onde  $g \in G$ .

Desejamos obter uma solução topológica com o comportamento de um monopolo magnético. Um sólito topológico é uma solução para as equações de movimento para campos clássicos, de energia finita e confinada em uma região finita do espaço. Em um ponto afastado desta solução,  $\mathbf{r} \rightarrow \infty$ , os campos devem estar no chamado vácuo de Higgs, ou seja, satisfazem

$$V(\phi) = 0, \tag{2.27}$$

$$\mathcal{D}_\mu \phi = 0, \tag{2.28}$$

para que assim a energia desta configuração seja finita.

O conjunto de todas as configurações do campo de Higgs, tais que satisfazem a equação (2.27) formam a chamada variedade de vácuo da teoria

$$\mathcal{M}_0 = \{\phi \mid V(\phi) = 0\}. \tag{2.29}$$

O grupo não quebrado é definido por

$$G_0 = \{g \in G \mid g\phi_0 = \phi_0, \phi_0 \in \mathcal{M}_0\}. \tag{2.30}$$

Na prática é difícil encontrar o grupo não quebrado diretamente a partir de sua definição. Torna-se mais fácil encontrar a álgebra de Lie correspondente e posteriormente obter o grupo a partir dessa álgebra e de sua representação. Escrevendo um elemento  $h \in G_0$  em termos dos geradores da álgebra e aplicando em  $\phi_0 \in \mathcal{M}_0$  obtemos

$$h\phi_0 = \exp(i\omega_a T_a)\phi = \left[ 1 + i\omega_a T_a + \frac{(i\omega_a T_a)^2}{2!} + \dots \right] \phi_0 = \phi_0$$

implicando que  $T_a \phi_0 = 0$ . Se  $\mathfrak{g}_0$  é a álgebra de Lie do grupo não quebrado, então seus geradores são dados por  $\{T_a \in \mathfrak{g} \mid T_a \phi_0 = 0, \phi_0 \in \mathcal{M}_0\}$ .

Para haver quebra de simetria é necessário que  $\mathcal{M}_0$  seja degenerado, pois caso contrário todo  $g \in G$  levaria  $\phi_0 \in \mathcal{M}_0$  em  $\phi_0$ . Assumimos que  $G$  age transitivamente sobre  $\mathcal{M}_0$ , ou seja, dado  $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{M}_0$ , existe  $g_{12} \in G$  tal que  $\phi_1 = g_{12}\phi_2$ . Isso é desejável para que a partir de um estado qualquer de vácuo possamos atingir qualquer outro por meio de uma transformação de gauge. Com essa hipótese satisfeita, podemos escrever dois elementos  $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{M}_0$  como  $\phi_1 = g_1\phi_0$  e  $\phi_2 = g_2\phi_0$  para um dado  $\phi_0 \in \mathcal{M}_0$  e  $g_1, g_2 \in G$ . Se  $\phi_1 = \phi_2$  então  $g_2 = g_1h$ ,  $h \in G_0$ . Dois elementos  $g_1, g_2 \in G$  estão associados a uma mesma configuração de vácuo se e somente se eles pertencem a mesma classe de  $G_0$  em  $G$ . Dado um elemento  $g \in G$ , conjunto de todos os elementos da forma  $gh$ ,  $\forall h \in G_0$ , possuem uma relação de equivalência entre si e portanto formam uma classe de equivalência. O conjunto de todas estas classes de equivalências forma o chamado espaço quociente  $G/G_0$ .

Existe uma relação um para um entre estas classes de equivalência e os elementos de  $\mathcal{M}_0$

$$\mathcal{M}_0 \cong G/G_0. \quad (2.31)$$

Os valores assintóticos de  $\phi$  dão um mapeamento contínuo da esfera  $S^2$  em  $\mathcal{M}_0$ . Estas possíveis configurações assintóticas de  $\phi$  se divide em setores topológicos de acordo com suas classes de homotopia. Como veremos, uma condição necessária para a existência de monopolos estáveis de origem topológica é  $\pi_2(\mathcal{M}_0) = \pi_2(G/G_0)$  não trivial, onde  $\pi_2(\mathcal{M}_0)$  é o segundo grupo de homotopia de  $\mathcal{M}_0$ .

Da equação (2.28) e a definição de tensor intensidade de campo, obtemos

$$G_{\mu\nu}\phi = 0, \quad (2.32)$$

ou seja, no vácuo de Higgs, as únicas componentes não nulas de  $G_{\mu\nu}$  são aquelas que pertencem a  $\mathfrak{g}_0$ .

Definimos a solução de monopolo magnético como sendo uma solução estática, de energia finita e com a seguinte forma assintótica,  $r \rightarrow \infty$ , para o campo magnético

$$B_i(\theta, \varphi) = -\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}G_{jk}(\theta, \phi) = \frac{r_i}{4\pi r^3}G(\hat{r}(\theta, \varphi)), \quad (2.33)$$

onde  $G(\hat{r})$  é uma carga magnética não-abeliana que assumimos ser covariantemente constante

$$\mathcal{D}_i G(\hat{r}) = 0. \quad (2.34)$$

Esta carga magnética está associada a um elemento de  $\pi_2(G/G_0)$ . Parametrizamos a esfera  $S^2$  por  $\hat{r} : I \times I \rightarrow S^2$ , com  $I = [0, 1]$ . Há uma correspondência um para um entre este quadrado unitário e a esfera, exceto que todo o perímetro de  $I \times I$  é mapeado em um único ponto  $\hat{r}_0 \in S^2$ . Seja

$$\phi_0 = \phi(\hat{r}_0) = \phi(s, 0), \quad (2.35)$$

com  $s \in [0, 1]$  e

$$\mathcal{D}_t = \frac{\partial r^i}{\partial t} \mathcal{D}_i.$$

Impondo  $\mathcal{D}_t \phi = 0$ , obtemos

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = ie W^i \phi \frac{\partial r^i}{\partial t}.$$

Esta equação tem a forma da equação de Schroedinger e para resolve-la introduzimos o análogo ao operador de evolução temporal, na forma de um elemento de grupo satisfazendo

$$\mathcal{D}_t g(s, t) = 0$$

$$g(s, 0) = \mathbb{I}$$

Onde  $\mathbb{I}$  é a identidade do grupo. A solução é dada pela fórmula de Dyson

$$g(s, t) = \mathcal{T} \left[ \exp \left( ie \int_0^t W_i \frac{\partial r^i}{\partial t} dt \right) \right],$$

onde  $\mathcal{T}$  indica que a exponencial deve ser expandida e os fatores de  $W_i$  ordenados temporalmente antes da integração ser efetuada. Esta solução é única e bem definida sobre o quadrado unitário. Para ser bem definida sobre a esfera  $S^2$  ela deve ser unívoca sobre todo o perímetro de  $I \times I$ . Da condição de contorno e de  $\frac{\partial r^i}{\partial t} = 0$  em  $s = 0$  e  $s = 1$  obtemos

$$g(0, t) = g(1, t) = g(s, 0) = \mathbb{I}. \quad (2.36)$$

Definimos

$$h(s) = g(s, 1). \quad (2.37)$$

Em geral,  $h(s) = g(s, 1) \neq \mathbb{I}$ . Vemos que  $h(s)$  descreve um caminho fechado no grupo, fixo na identidade e de

$$\phi(s, t) = g(s, t) \phi_0 \quad (2.38)$$

obtemos que  $h(s) \in G_0$ , pois  $\phi(s, 1) = \phi_0$  e o caminho fechado descrito por  $h(s)$  é antes de tudo sobre o grupo não quebrado. Este caminho fechado define um elemento de  $\pi_1(G_0)$ , o qual é identificado com o elemento de  $\pi_2(G/G_0)$  e conseqüentemente define o setor topológico de  $\phi$ . Duas configurações de vácuo,  $\phi_1(s, t)$  e  $\phi_2(s, t)$ , pertencem à mesma classe de homotopia se e somente se  $h_1(s)$  e  $h_2(s)$  são homotópicas.

Para encontrarmos a forma explícita de  $h(s)$  seguimos Christ [27] e Goldstone [28]. Temos que

$$\mathcal{D}_t g = g \partial_t$$

e portanto

$$g^{-1} \mathcal{D}_t = \partial_t g^{-1},$$



$$\begin{aligned}
 \partial_t(g^{-1}\mathcal{D}_s g) &= g^{-1}\mathcal{D}_t\mathcal{D}_s g \\
 &= g^{-1}[\mathcal{D}_t, \mathcal{D}_s]g \\
 &= ie g^{-1}G_{ij}g \frac{\partial r^i}{\partial t} \frac{\partial r^j}{\partial s},
 \end{aligned}$$

onde usamos  $\mathcal{D}_t g = 0$ . Integrando em  $t$  de 0 a 1 obtemos

$$h^{-1} \frac{dh}{ds} = ie \int_0^1 g^{-1} G_{ij} g \frac{\partial r^i}{\partial t} \frac{\partial r^j}{\partial s} dt, \quad (2.39)$$

pois  $g^{-1}\mathcal{D}_s g = 0$  em  $t = 0$  e  $g^{-1}\mathcal{D}_s g = h^{-1} \frac{dh}{ds}$  em  $t = 1$ .

Usando nossa definição para solução de monopolo magnético, equações (2.33) e (2.34), podemos resolver o lado direito de (2.39). De (2.34) e (2.38) obtemos

$$g^{-1}G(\hat{r}(s, t))g = G(\hat{r}_0)$$

e usando

$$\int_0^1 \frac{r_k \epsilon_{ijk}}{r^3} \frac{dr^i}{dt} \frac{dr^j}{dt} dt = \frac{\partial \Omega}{\partial s}$$

com  $\Omega(s)$  sendo o ângulo sólido definido pelo caminho  $t \in [0, 1]$  com  $s$  fixo em  $S^2$  na origem, chegamos a

$$\begin{aligned}
 h^{-1} \frac{dh}{ds} &= \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial s} ie G(\hat{r}_0) \Omega(s), \\
 h(s) &= \exp \left( ie G(\hat{r}_0) \frac{\Omega}{4\pi} \right).
 \end{aligned} \quad (2.40)$$

Quando  $s$  vai de 0 a 1,  $\Omega$  vai de 0 a  $4\pi$  e como  $h(1) = \mathbb{I}$  obtemos

$$\exp (ieG(\hat{r}_0)) = \mathbb{I}. \quad (2.41)$$

Para chegarmos nesta equação, usamos a nossa definição de monopolo magnético ao resolver (2.39), ou seja, se há uma solução de monopolo, a equação (2.41) é satisfeita. Podemos afirmar então que (2.41) é uma condição necessária para que existam os monopolos magnéticos. Chamamos esta condição de condição de quantização.

Da equação (2.32) chegamos em

$$B_i \phi = 0$$

e portanto  $G(\hat{r}_0) \in \mathfrak{g}_0$ , onde  $\mathfrak{g}_0$  é a álgebra de Lie do grupo não quebrado. Além disso, podemos achar [9] uma transformação de gauge que roda  $G(\hat{r}_0)$  na subálgebra de Cartan de  $\mathfrak{g}_0$

$$G(\hat{r}_0) = \omega_i h_i = \omega \cdot h,$$

onde  $h = (h_1, h_2, \dots, h_l)$  é a base da subálgebra de Cartan de  $\mathfrak{g}_0$ .

É mais conveniente trabalhar com a condição de quantização em  $\tilde{G}_0$ , o grupo de recobrimento

universal de  $G_0$ . Dado um grupo de Lie, existe, a menos de isomorfismos, uma única álgebra de Lie correspondente. Já para uma dada álgebra de Lie, existe uma classe de grupos de Lie associados. Isso pode ser bem visualizado se soubermos que a álgebra de Lie é o espaço tangente à identidade do grupo de Lie, que é uma variedade diferenciável. Um ponto nesta variedade define um único espaço tangente, assim como um ponto em uma curva define uma única reta tangente, e para um mesmo espaço tangente podemos associar diferentes variedades, assim como para uma mesma reta tangente podemos associar diferentes curvas. O grupo de recobrimento universal é o único, dentro desta classe, com a propriedade de ser simplesmente conexo, ou seja, qualquer caminho fechado pode ser continuamente deformado até um ponto. Os dois grupos são relacionados por

$$G_0 \cong \frac{\tilde{G}_0}{\text{Ker}(\rho)}, \quad (2.42)$$

onde  $\rho : \tilde{G}_0 \rightarrow G_0$  é um homomorfismo de grupo e  $\text{Ker}(\rho)$  é o núcleo de  $\rho$ . Sabemos que  $\text{Ker}(\rho) \subseteq \mathcal{Z}(\tilde{G}_0) \subset \mathbb{Z}_N$  com  $\mathcal{Z}(\tilde{G}_0)$  sendo o centro de  $\tilde{G}_0$  e  $\mathbb{Z}_N$  o grupo cíclico de  $N$  elementos.

Seja  $T = eG(\hat{r}_0) = e\omega \cdot h$  um elemento da álgebra. Então

$$\begin{aligned} g &= \exp(iT), \quad g \in G_0, \\ \tilde{g} &= \widetilde{\exp}(iT), \quad \tilde{g} \in \tilde{G}_0 \end{aligned}$$

e  $\widetilde{\exp}$  a exponenciação em  $\tilde{G}_0$ . O núcleo de  $\rho$  é  $\text{Ker}(\rho) = \{\tilde{g} \in \tilde{G}_0 \mid \rho(\tilde{g}) = \mathbb{I}\}$ . Temos que

$$\rho(\tilde{g}) = g,$$

pois ambos,  $g$  e  $\tilde{g}$ , são obtidos a partir do mesmo elemento da álgebra. Assim, a condição de quantização em  $\tilde{G}_0$  fica

$$\widetilde{\exp}(i\omega \cdot h) \in \text{Ker}(\rho) \subseteq \mathcal{Z}(\tilde{G}_0). \quad (2.43)$$

Como um elemento do centro, por definição, comuta com qualquer outro elemento da álgebra, temos que

$$\begin{aligned} E_\alpha &= \widetilde{\exp}(i\omega \cdot h) E_\alpha \widetilde{\exp}(-i\omega \cdot h) \\ &= E_\alpha + [i\omega \cdot h, E_\alpha] + \frac{1}{2!} [i\omega \cdot h, [i\omega \cdot h, E_\alpha]] + \dots \\ &= E_\alpha + i\omega \cdot \alpha E_\alpha + \frac{1}{2!} (i\omega \cdot \alpha E_\alpha) + \dots \\ &= E_\alpha \widetilde{\exp}(i\omega \cdot \alpha), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\exp(i\omega \cdot \alpha) = \mathbb{I}, \quad \alpha \in \Phi(\tilde{G}_0). \quad (2.44)$$

A solução para esta equação é

$$\frac{e\omega \cdot \alpha}{2\pi} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{e\omega}{2\pi} \in \Lambda_w^\vee(\tilde{G}_0). \quad (2.45)$$

Na verdade (2.44) ou (2.45) não são equivalentes a condição de quantização, pois nem todo elemento do centro de  $\tilde{G}_0$  está no núcleo de  $\rho$ . A equação (2.45) é, portanto, uma condição apenas necessária para chegarmos na condição de quantização.

Definindo

$$T_3^\omega = \frac{e\omega \cdot h}{4\pi} = \frac{eG(\hat{r}_0)}{4\pi}, \quad (2.46)$$

a condição de quantização em  $\tilde{G}_0$  fica

$$\widetilde{\exp}(4\pi iT_3^\omega) \in \text{Ker}(\rho) \subseteq \mathcal{Z}(\tilde{G}_0). \quad (2.47)$$

### 2.3 Forma Assintótica para a Solução de Monopolo Magnético

Na seção anterior usamos os parâmetros  $(s, t)$  variando em  $I \times I$  para parametrizarmos a esfera  $S^2$ . Este intervalo foi conveniente porque estávamos interessados em relações de homotopia. Nesta seção vamos obter a forma assintótica de  $\phi$  e portanto torna-se mais conveniente parametrizarmos a esfera  $S^2$  pelos ângulos  $(\theta, \varphi)$  das usuais coordenadas esféricas. As equações (2.35), (2.36) e (2.37) ficam, respectivamente

$$\begin{aligned} \phi_0 &= \phi(\hat{r}_0) = \phi(0, \varphi), \\ g(\theta, 0) &= g(\theta, 2\pi) = g(0, \varphi) = \mathbb{I}, \\ h(\varphi) &= g(\pi, \varphi). \end{aligned}$$

Como  $g(\pi, 0) = \mathbb{I}$ , podemos escrever

$$g(\pi, \varphi) = g(\pi, 0)h(\varphi)$$

ou então

$$h(\varphi) = g(\pi, 0)^{-1}g(\pi, \varphi) = g(\pi, \varphi)g(\pi, 0)^{-1}. \quad (2.48)$$

Seguiremos o procedimento de [7] para construirmos as soluções assintóticas dos campos.

Suponha que possamos encontrar dois outros geradores  $T_1^\omega, T_2^\omega \in \mathfrak{g}$  tais que  $T_1^\omega, T_2^\omega \notin \mathfrak{g}_0$  e junto com  $T_3^\omega$ , definido em (2.46), formem uma álgebra  $\mathfrak{su}(2)$ , ou seja

$$[T_i^\omega, T_j^\omega] = i\epsilon_{ijk}T_k^\omega. \quad (2.49)$$

Agora defina

$$g(\theta, \varphi) = \exp(i\varphi T_3^\omega) \exp(i\theta T_2^\omega) \exp(-i\varphi T_3^\omega). \quad (2.50)$$

Pela equação (2.48) temos

$$\begin{aligned} h(\varphi) &= g(\pi, \varphi)g(\pi, 0)^{-1} \\ &= \exp(i\varphi T_3^\omega) \exp(i\pi T_2^\omega) \exp(-i\varphi T_3^\omega) \exp(-i\pi T_2^\omega). \end{aligned}$$

Para resolvermos  $\exp(i\pi T_2^\omega) \exp(-i\varphi T_3^\omega) \exp(-i\pi T_2^\omega)$ , notamos que

$$g \exp(i\pi T_2^\omega) g^{-1} = g \mathbb{I} g^{-1} + g i\pi T_2^\omega g^{-1} + \frac{1}{2!} g i\pi T_2^\omega g^{-1} g i\pi T_2^\omega g^{-1} + \dots$$

e pela fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff

$$\exp(iaT_j)T_i \exp(-iaT_j) = \cos(a)T_i + \sin(a)\epsilon_{ijk}T_k, \quad i \neq j, \quad [T_i, T_j] = \epsilon_{ijk}T_k.$$

Assim

$$\begin{aligned} h(\varphi) &= \exp(i\varphi T_3^\omega) \exp(i\varphi T_3^\omega) \\ &= \exp(2i\varphi T_3^\omega). \end{aligned}$$

Vemos que quando  $\varphi$  vai de 0 a  $2\pi$ ,  $h(\varphi)$  vai de  $\mathbb{I}$ , a identidade de  $G_0$ , a  $\exp(4\pi i T_3^\omega)$ . Em  $G_0$  isso deve significar um caminho fechado, fixo na identidade e portanto o elemento  $\exp(4\pi i T_3^\omega) \in \mathcal{Z}(\tilde{G}_0)$  é identificado com  $\mathbb{I}$ . Já em  $\tilde{G}_0$ , o caminho descrito por  $h(\varphi)$  vai de  $\mathbb{I}$ , a identidade de  $\tilde{G}_0$ , a  $\widetilde{\exp}(4\pi i T_3^\omega)$ , pertencendo a um elemento de  $\pi_1(G_0)$ . A forma assintótica do campo de Higgs é

$$\phi(\theta, \varphi) = g(\theta, \varphi)\phi_0. \quad (2.51)$$

Aqui podemos ver o porque de exigirmos que  $T_1^\omega, T_2^\omega \notin \mathfrak{g}_0$ . Se toda subálgebra  $\mathfrak{su}(2)$  estivesse em  $\mathfrak{g}_0$ , o elemento  $g(\theta, \varphi)$  estaria em  $G_0$  e levaria  $\phi_0$  em  $\phi_0$ . Para os campos de gauge, tomamos o *ansataz*

$$W^i(\theta, \varphi) = g(\theta, \varphi)W_{\text{corda}}^i g(\theta, \varphi)^{-1} + \frac{i}{e}(\partial^i g(\theta, \varphi))g(\theta, \varphi)^{-1}, \quad (2.52)$$

com

$$\begin{aligned} W_{\text{corda}}^r &= W_{\text{corda}}^\theta = 0, \\ W_{\text{corda}}^\varphi &= \frac{G(\hat{r}_0)}{4\pi r} \frac{(1 - \cos \theta)}{\sin \theta} = \frac{T_3^\omega}{er} \frac{(1 - \cos \theta)}{\sin \theta} \end{aligned}$$

sendo o potencial vetor na extremidade de um solenóide vindo do infinito. É deste potencial vetor

que temos o campo magnético do monopolo de Dirac. O campo magnético resultante de (2.52) é

$$\begin{aligned}
 B^i(\theta, \varphi) &= \frac{r^i}{er^3} g(\theta, \varphi) T_3^\omega g(\theta, \varphi)^{-1} \\
 &= \frac{r^i}{4\pi r^3} g(\theta, \varphi) G(\hat{r}_0) g(\theta, \varphi)^{-1} \\
 &= \frac{r^i}{4\pi r^3} G(\theta, \varphi),
 \end{aligned} \tag{2.53}$$

que é consistente com a solução esperada, equação (2.33). As soluções de monopolos  $\mathbb{Z}_n$  estão separadas em diferentes setores topológicos da variedade de vácuo. Em [7], os autores usam números inteiros, módulo  $n$ , para identificar esses setores. No capítulo 4 iremos associar os vetores  $\frac{e\omega}{2\pi}$  a elementos de  $\mathcal{Z}(\tilde{G}_0)$ , que por sua vez, estarão associados a setores topológicos de  $\mathcal{M}_0$ . Portanto, em um dado setor topológico, pode haver uma infinidade de vetores  $\omega$  e, conseqüentemente, uma infinidade de cargas magnéticas. Essa relação entre os setores topológicos e classes de equivalências é semelhante ao que ocorre com as soluções de cordas  $\mathbb{Z}_n$  [21].

## Capítulo 3

# Dualidades Eletromagnéticas

### 3.1 Dualidade no Eletromagnetismo de Maxwell

As equações de Maxwell no vácuo são escritas como

$$\begin{aligned}\nabla \cdot E &= 0, & \nabla \times E + \frac{\partial B}{\partial t} &= 0, \\ \nabla \cdot B &= 0, & \nabla \times B - \frac{\partial E}{\partial t} &= 0.\end{aligned}$$

Observamos uma simetria entre os pares de equações ao fazermos a seguinte transformação

$$E \mapsto -B, \quad B \mapsto E. \quad (3.1)$$

Esta invariância que surge após o mapeamento entre campos elétricos e magnéticos é chamada dualidade eletromagnética.

Quando estamos fora do vácuo, as equações de Maxwell ficam

$$\begin{aligned}\nabla \cdot E &= \rho_e, & \nabla \times E + \frac{\partial B}{\partial t} &= 0, \\ \nabla \cdot B &= 0, & \nabla \times B - \frac{\partial E}{\partial t} &= j_e\end{aligned}$$

e perdemos a simetria sob a transformação (3.1). No entanto, podemos recuperá-la se introduzirmos cargas magnéticas, na forma

$$\begin{aligned}\nabla \cdot E &= \rho_e, & \nabla \times E + \frac{\partial B}{\partial t} &= -j_m, \\ \nabla \cdot B &= \rho_m, & \nabla \times B - \frac{\partial E}{\partial t} &= j_e\end{aligned}$$

e, além dos campos, mapearmos as cargas elétricas e magnéticas

$$\begin{aligned}\rho_e &\mapsto -\rho_m, & \rho_m &\mapsto \rho_e, \\ j_e &\mapsto -j_m, & j_m &\mapsto j_e.\end{aligned}$$

Monopolos magnéticos foram estudados mais profundamente, pela primeira vez, por Paul Dirac [1]. Ele demonstrou que um único monopolo magnético no universo garantiria a quantização da carga elétrica. Estes monopolos propostos por Dirac, chamados monopolos de Dirac, são soluções *ad hoc*. Da mesma forma, Zwanziger [29] e Schwinger [30] propuseram a existência de partículas, chamadas dyons, possuindo tanto carga elétrica quanto magnética. Os campos, cargas e correntes podem ser combinados da forma

$$\mathcal{E} = E + iB,$$

$$\rho = \rho_e + i\rho_m,$$

$$j = j_e + ij_m$$

e assim ficamos com apenas um par de equações de Maxwell

$$\nabla \cdot \mathcal{E} = \rho, \quad \nabla \times \mathcal{E} = i \left( \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + j \right)$$

que é invariante por

$$\mathcal{E} \mapsto -i\mathcal{E},$$

$$\rho \mapsto -i\rho,$$

$$j \mapsto -ij.$$

Na verdade, essa transformação é um caso particular da transformação de dualidade

$$\begin{pmatrix} E' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \xi & \sin \xi \\ -\sin \xi & \cos \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E \\ B \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \rho'_e \\ \rho'_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \xi & \sin \xi \\ -\sin \xi & \cos \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_e \\ \rho_m \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} j'_e \\ j'_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \xi & \sin \xi \\ -\sin \xi & \cos \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_e \\ j_m \end{pmatrix}.$$

Se, por um lado, os monopolos de Dirac foram propostos apenas por razões de simetria e estética das equações de Maxwell, monopolos magnéticos e dyons de origens topológicas aparecem como solução das equações de movimento em teorias de Yang-Mills-Higgs.

### 3.2 Limite BPS para o Monopolo Magnético

Um monopolo magnético em uma teoria de Yang-Mills-Higgs possui a seguinte massa (energia) no referencial de repouso

$$\begin{aligned}
 M &= \int d^3x T_{00} \\
 &= \int \frac{1}{2} [(E_a^i)^2 + (B_a^i)^2 + (\mathcal{D}^0\phi)_a^2 + (\mathcal{D}^i\phi)_a^2 + V(\phi^a)] d^3x,
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

proveniente da lagrangeana de Yang-Mills

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} G_{a\mu\nu} G_a^{\mu\nu} + \frac{1}{2} (\mathcal{D}_\mu\phi)_a (\mathcal{D}^\mu\phi)_a - V(\phi).$$

$$V(\phi) = \frac{1}{4} \lambda (\phi^2 - |v|^2)^2.$$

Uma configuração de vácuo satisfaz  $\phi^2 = |v|^2$  e produz a quebra espontânea da simetria de gauge. Na representação adjunta, podemos escrever a solução de vácuo como estando na CSA de  $\mathfrak{g}$  [9], ou seja,

$$\Phi = v_i H_i. \tag{3.3}$$

Os elementos matriciais dos geradores da álgebra na representação adjunta são dados por

$$(T_a)_{ij} = i f_{iaj}.$$

Se  $\phi$  é uma configuração de vácuo, então, independentemente da representação

$$T\phi = 0 \Leftrightarrow T \in \mathfrak{g}_0,$$

onde  $T = \theta_i T_i$  é um gerador de  $\mathfrak{g}$ . Na representação adjunta temos

$$\begin{aligned}
 T\Phi &= \theta_i T_i v_j T_j \\
 &= \theta_i i f_{jik} v_k T_j \\
 &= \theta_i v_k i f_{ikj} T_j \\
 &= \theta_i v_k [T_i, T_k] \\
 &= [T, \Phi]
 \end{aligned}$$

e, portanto, vale

$$[T, \Phi] = 0 \Leftrightarrow T \in \mathfrak{g}_0. \tag{3.4}$$

De (3.3) e (3.4), vemos que o  $\text{rank}(\mathfrak{g}_0) = \text{rank}(\mathfrak{g})$ . Como o gerador  $v \cdot H$  satisfaz (3.4), temos que o próprio  $\phi$  é um gerador de  $\mathfrak{g}_0$  e (3.3) torna-se

$$\Phi = v_i h_i, \tag{3.5}$$

onde os  $h_i$  são agora os geradores de  $\mathfrak{h}_0$ .

Os outros possíveis geradores de  $\mathfrak{g}_0$  devem estar entre os operadores degrau de  $\mathfrak{g}$ . Para o vácuo



na forma (3.3) temos

$$\begin{aligned} [E_\alpha, \Phi] &= -(\alpha \cdot \phi)E_\alpha, \quad \alpha \in \Phi^+(\mathfrak{g}) \\ &= -(n_a \alpha_a \cdot \phi)E_\alpha, \quad n_a \in \mathbb{N}, \alpha_a \in \Delta(\mathfrak{g}). \end{aligned}$$

Como  $\phi$  está em um espaço vetorial de mesma dimensão que o espaço gerado pelas raízes simples, podemos escreve-lo em termos dessas raízes e cada termo  $\alpha_a \cdot \phi$  é maior ou igual a zero. Sendo assim,

$$E_\alpha \in \mathfrak{g}_0 \Leftrightarrow n_a \alpha_a \cdot \phi = 0, \quad \forall a = 1, \dots, r. \quad (3.6)$$

Se, por exemplo,  $\alpha_a \cdot \phi > 0, \forall a$ , então por (3.6) devemos ter  $n_a = 0, \forall a$ , e portanto não há  $E_\alpha$  em  $\mathfrak{g}_0$ . O mesmo resultado é obtido, por procedimento análogo, para  $E_{-\alpha}$ . Deste modo,  $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{u}(1)^r = \mathfrak{u}(1) \times \mathfrak{u}(1) \times \dots \times \mathfrak{u}(1)$ ,  $r$  vezes, um desses fatores  $\mathfrak{u}(1)$  sendo gerado por  $\Phi$ . Se para apenas um  $a = b$  tivermos  $\alpha_b \cdot \phi = 0$ , então  $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{su}(2) \times \mathfrak{u}(1)^{r-1}$ , com o fator  $\mathfrak{su}(2)$  correspondendo à raiz  $\alpha_b$  ou, equivalentemente, ao ponto do diagrama de Dynkin associado a  $\alpha_b$ . Em geral, para  $k$   $\alpha_a \cdot \phi = 0$ , temos  $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k} \times \mathfrak{u}(1)^{r-k}$ . O fator  $\mathfrak{k}$  será semi-simples, se e somente se, para um único  $a = b$  tivermos  $\alpha_b \cdot \phi > 0$ . Dessa forma,  $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k} \times \mathfrak{u}(1)$  e  $\mathfrak{k}$  é semi-simples, pois não contém nenhum fator  $\mathfrak{u}(1)$ . A álgebra  $\mathfrak{k}$  tem como diagrama de Dynkin o diagrama de  $\mathfrak{g}$  com o ponto  $b$  deletado. Nesse último caso, onde  $\mathfrak{k}$  é semi-simples, a quebra, vista no grupo, fica

$$G \rightarrow \frac{K \times U(1)}{Z}, \quad (3.7)$$

onde  $Z$  é um subgrupo cíclico do centro de  $K$  [31].

Para campos na representação adjunta, podemos calcular o limite inferior da massa deste monopolo [32]. Como  $(E_a^i)^2$  e  $(\mathcal{D}^0 \phi)_a^2$  são termos positivos, temos

$$\begin{aligned} M &\geq \frac{1}{2} \int [(B_a^i)^2 + (\mathcal{D}^i \phi)_a^2 + V(\phi)] d^3x \\ &= \frac{1}{2} \int \left\{ [B_a^i \mp (\mathcal{D}^i \phi)_a]^2 \pm 2B_a^i (\mathcal{D}^i \phi)_a + V(\phi) \right\} d^3x \\ &\geq \pm \int [B_a^i (\mathcal{D}^i \phi)_a + V(\phi)] d^3x \\ &= \pm \int [\partial_i (B_a^i \phi^a) - \phi^a \mathcal{D}_i B_a^i + V(\phi)] d^3x. \end{aligned}$$

Da identidade de Bianchi,  $\mathcal{D}_\nu \tilde{F}_a^{\mu\nu} = 0$ , temos  $\mathcal{D}_i B_a^i = 0$ . Além disso, se  $V(\phi) = 0$ , obtemos

$$M \geq \pm \int \partial_i (B_a^i \phi_a) d^3x.$$

Usando o teorema da divergência chegamos a

$$M \geq \pm \int_{S_\infty^2} (B_a^i \phi_a) d^2 S_i = \pm \int_{S_\infty^2} \frac{1}{l(\Gamma)} \text{Tr}(B^i \Phi) d^2 S_i, \quad (3.8)$$

onde  $S_\infty^2$  denota a esfera no infinito. Vamos definir

$$F^{\mu\nu} = \frac{1}{|v|} G_a^{\mu\nu} \phi_a. \quad (3.9)$$

Este tensor possui a importante propriedade de satisfazer, assintoticamente, as equações de Maxwell homogêneas, associadas ao grupo  $U(1)$  na equação (3.7). Portanto,  $F^{\mu\nu}$  é chamado tensor intensidade eletromagnética. Podemos, então, escrever a equação (3.8) como

$$M \geq |v| |\mathcal{G}|, \quad (3.10)$$

onde

$$\mathcal{G} = \int_{S_\infty^2} \tilde{F}^{i0} d^2 S_i = \frac{1}{|v|} \int_{S_\infty^2} \tilde{G}_a^{i0} \phi_a d^2 S_i = \frac{1}{|v|} \int_{S_\infty^2} (B_a^i \phi_a) d^2 S_i \quad (3.11)$$

é a carga magnética associada ao fator  $U(1)$  em (3.7).

Quando todos os termos positivos que desprezamos são identicamente nulos

$$E^i = 0, \quad (3.12)$$

$$(\mathcal{D}^0 \phi)_a = 0, \quad (3.13)$$

$$B_a^i = (\mathcal{D}^i \phi)_a, \quad (3.14)$$

$$V(\phi) = 0, \quad (3.15)$$

obtemos o chamado limite BPS para a massa do monopolo

$$M = |v| |\mathcal{G}|. \quad (3.16)$$

As equações (3.12)-(3.15) são as chamadas condições BPS.

### 3.3 Monopolo de 't Hooft-Polyakov

O estudo sobre monopolos magnéticos ressurgiu em 1974 quando 't Hooft [2] e Polyakov [3] descobriram monopolos magnéticos de caráter topológico. Eles consideraram a teoria de Georgi-Glashow, cuja densidade lagrangeana é

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} G_{a\mu\nu} G_a^{\mu\nu} + \frac{1}{2} (\mathcal{D}_\mu \phi)(\mathcal{D}^\mu \phi) - \frac{1}{4} \lambda (\phi^2 - |v|^2)^2, \quad (3.17)$$

com campo escalar na representação adjunta e quebra  $SO(3) \rightarrow SO(2)$ .

O vácuo da teoria é uma configuração de campos que satisfaz

$$\phi_a \phi_a = |v|^2,$$

$$D^\mu \phi_a = 0,$$

$$G_a^{\mu\nu} = 0.$$

Se a configuração de vácuo que quebra a simetria for constante no espaço-tempo, por exemplo

$$\phi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ |v| \end{pmatrix}$$

temos como grupo não quebrado o grupo U(1), recaindo no eletromagnetismo de Maxwell. Os campos  $A_3^\mu$  e  $F_3^{\mu\nu}$ , que correspondem ao gerador não quebrado, são, respectivamente, o campo do fóton e o tensor campo eletromagnético. Temos ainda dois bósons massivos,  $A_1^\mu$  e  $A_2^\mu$ , e a partícula de Higgs.

No entanto, estamos interessados em soluções não triviais. Essas soluções, apresentadas por 't Hooft e Polyakov, são sólitons com as propriedades de monopolos magnéticos.

A mais simples solução, não trivial, de energia finita, é

$$\phi^a \rightarrow |v| \frac{r^a}{r}, \quad r \rightarrow \infty$$

$$D_\mu \phi^a \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty$$

O comportamento assintótico de  $A_a^\mu$  e  $F_a^{\mu\nu}$  são obtidos do seguinte modo

$$D_\mu \phi^a = 0 = \partial_\mu \phi^a - e \epsilon^{abc} A_\mu^b \phi^c.$$

Substituindo a forma assintótica de  $\phi$

$$\frac{\delta_\mu^a}{r} - \frac{r^a r_j}{r^2} \delta_\mu^j = e \frac{r^c}{r} \epsilon^{abc} A_\mu^b.$$

Considerando  $A_0^a = 0$  e multiplicando a equação acima por  $r^j \epsilon_{jab}$  obtemos

$$A_i^b \sim \frac{1}{r^2 e} \epsilon_{jib} r^j, \quad r \rightarrow \infty.$$

A carga magnética do monopolo de 't Hooft-Polyakov é

$$\mathcal{G} = \frac{4\pi}{e} \tag{3.18}$$

e a forma assintótica do campo magnético é

$$B_i(\theta, \phi) = g(\theta, \varphi) \frac{G_0 r_i}{4\pi r^3} g(\theta, \varphi)^{-1}. \tag{3.19}$$

### 3.4 Dualidade de Montonen-Olive

A dualidade eletromagnética na teoria de Maxwell é uma dualidade em uma teoria abeliana, pois o grupo de simetria da eletrodinâmica de Maxwell é o  $U(1)$ . Podemos nos questionar então se há uma dualidade equivalente para teorias de gauge com grupos não-abelianos. Essa pergunta foi respondida por Montonen e Olive [10] ao considerarem o modelo de Georgi-Glashow. Neste modelo temos o bóson de Higgs com massa

$$M_H = \sqrt{2\lambda}|v|,$$

o fóton  $A_\mu$  não massivo e os bóson de gauge massivos  $W_\mu^\pm$  com cargas elétricas

$$Q = \pm e \tag{3.20}$$

e massas

$$M_{W^\pm} = |Q||v| = e|v|. \tag{3.21}$$

Para esta quebra de simetria temos

$$\begin{aligned} \pi_2(G/G_0) &= \pi_2(SO(3)/SO(2)) \\ &= \pi_2(S^2) \\ &= \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

satisfazendo a condição necessária para a existência de monopolos magnéticos classificados de acordo com setores topológicos. De fato, 't Hooft e Polyakov mostraram que tal teoria admite dois monopolos de cargas magnéticas

$$\mathcal{G} = \pm \frac{4\pi}{e} \tag{3.22}$$

e massas, no limite BPS, iguais a

$$M_{M^\pm} = |\mathcal{G}||v| = \frac{4\pi}{e}|v|. \tag{3.23}$$

Agora, se considerarmos outra teoria de gauge, idêntica ao modelo de Georgi-Glashow, exceto por usarmos a constante de acoplamento  $e^*$  ao invés de  $e$ , obtemos monopolos magnéticos com cargas

$$\mathcal{G}^* = \pm \frac{4\pi}{e^*} \tag{3.24}$$

e massas no limite BPS

$$M_{M^\pm}^* = |\mathcal{G}^*||v| = \frac{4\pi}{e^*}|v| \tag{3.25}$$

e bósons massivos com cargas elétricas<sup>1</sup>

$$Q^* = \pm e^* \tag{3.26}$$

---

<sup>1</sup>Estamos usando  $\hbar = 1$ .

e massas

$$M_{W\pm}^* = |Q^*||v| = e^*|v|. \quad (3.27)$$

Se nesta teoria, que chamamos de dual, tivermos

$$e^* = \frac{4\pi}{e}, \quad (3.28)$$

obtemos para o monopolo

$$\mathcal{G}^* = \pm e, \quad (3.29)$$

$$M_{M\pm}^* = e|v| \quad (3.30)$$

e para os bósons massivos

$$Q^* = \pm \frac{4\pi}{e}, \quad (3.31)$$

$$M_{W\pm}^* = \frac{4\pi}{e}|v|. \quad (3.32)$$

Vemos que na teoria dual os monopolos possuem cargas e massas iguais às dos bósons massivos na teoria original e os bósons massivos possuem as cargas e massas dos monopolos na teoria inicial. Além disso, em ambas as teorias, o fóton e o bóson de Higgs mantém-se idênticos. Esses fatos levaram Montonen e Olive a conjecturar que temos um mapeamento de uma teoria com constante de acoplamento forte em outra com constante de acoplamento fraco. Nesse mapeamento, monopolos de uma teoria se comportariam como partículas de gauge da teoria dual e vice-versa. Essa invariância é uma generalização não-abeliana da dualidade entre cargas elétricas e magnéticas na eletrodinâmica U(1). Até o presente momento não há uma prova para esta conjectura, mas alguns testes indicam sua validade. Um deles, proposto no próprio artigo em que é apresentada a conjectura diz respeito à força entre os monopolos. Manton [33] mostrou que a força entre um par de monopolos de mesma carga é nula. Por outro lado calcula-se [10] que a força entre dois bósons massivos de mesma carga também é nula, a força proveniente da troca de fótons sendo cancelada pela força proveniente da troca de partículas de Higgs.

Para que estas teorias sejam de fato equivalentes, é necessário que a dualidade também seja mantida a nível quântico. Correções quânticas levam a termos extras na constante de acoplamento o que destroem a simetria entre as massas dos monopolos e das partículas de gauge. Entretanto, Osborn [34] mostrou que em uma teoria supersimétrica com  $\mathcal{N} = 4$  não há correções quânticas e, portanto, os resultados clássicos continuam valendo.

### 3.5 Dualidade de Montonen-Olive para Grupos Arbitrários

Montonen e Olive obtiveram uma dualidade eletromagnética na teoria não-abeliana mais simples possível, a com simetria  $\mathfrak{su}(2)$ . Na sequência, Bais [11] generalizou esse resultado para um grupo de gauge arbitrário, desde que compacto e simples, com o campo de Higgs ainda na representação adjunta.

Como vimos na seção 2.2, para haver monopolos devemos satisfazer a condição de quantização

$$\exp(i\epsilon G) = \mathbb{I}, \quad G = \omega \cdot h$$

que se aplica a um monopolo regular ou ponto-singular [5]<sup>2</sup>. Essa condição deve valer independentemente da representação utilizada. Portanto, aplicando  $\exp(i\epsilon G) = \mathbb{I}$  em um vetor de estado de uma representação arbitrária, obtemos

$$\begin{aligned} \exp(i\epsilon G)|\lambda\rangle &= \left[ \mathbb{I} + i\epsilon\omega \cdot h + \frac{(i\epsilon\omega \cdot h)^2}{2!} + \dots \right] |\lambda\rangle \\ &= \left[ \mathbb{I} + i\epsilon\omega \cdot \lambda + \frac{(i\epsilon\omega \cdot \lambda)^2}{2!} + \dots \right] |\lambda\rangle \\ &= \exp(i\epsilon\omega \cdot \lambda)|\lambda\rangle \\ &= |\lambda\rangle, \end{aligned}$$

implicando em  $\epsilon\omega \cdot \lambda = 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . A solução para essa equação é

$$\frac{\epsilon\omega}{2\pi} \in \Lambda_r^\vee(\tilde{G}). \quad (3.33)$$

Devemos observar que aqui usamos a equação (2.41) que é mais fundamental que a equação (2.44). Os monopolos estariam associados a rede das co-raízes, particularlar para as co-raízes tais que

$$\alpha \cdot v \neq 0. \quad (3.34)$$

Esses monopolos podem ser construídos a partir de (2.49) e (2.50) com os geradores da subálgebra  $\mathfrak{su}(2)$  dados por [11]

$$\begin{aligned} T_1^\alpha &= \frac{E_\alpha + E_{-\alpha}}{2}, \\ T_2^\alpha &= \frac{E_\alpha - E_{-\alpha}}{2i}, \\ T_3^\alpha &= \frac{\alpha}{\alpha^2} \cdot H. \end{aligned}$$

Sabendo que

$$B^i = \frac{r^i}{4\pi r^3} g G g^{-1} = \frac{r^i}{4\pi r^3} g \frac{2\pi}{e} \alpha^\vee \cdot H g^{-1}$$

e

$$\phi = g\phi_0 g^{-1} = gv \cdot H g^{-1},$$

---

<sup>2</sup>Em [5], a condição de quantização é obtida ao remover o solenóide de um monopolo singular. Esse monopolo passa a ser ponto-singular e posteriormente pode ser tornado regular.

podemos calcular a carga magnética. De (3.11),

$$\begin{aligned}
 \mathcal{G} &= \frac{1}{|v|} \int_{S_\infty^2} \frac{1}{l(\Gamma)} \text{Tr}(B^i \Phi) d^2 S_i \\
 &= \frac{1}{|v|} \int_{S_\infty^2} \frac{r^i}{4\pi r^3} \frac{1}{l(\Gamma)} \frac{2\pi}{e} \text{Tr}[(\alpha^\vee \cdot h)(v \cdot h)] d^2 S_i \\
 &= \frac{2\pi}{e|v|} \alpha^\vee \cdot v \int_{S_\infty^2} \frac{r^i}{4\pi r^3} d^2 S_i \\
 &= \frac{2\pi}{e|v|} \alpha^\vee \cdot v
 \end{aligned} \tag{3.35}$$

e substituindo em (3.16) obtemos o limite BPS para a massa dos monopolos

$$M_{M\alpha} = |v| |\mathcal{G}| = \frac{2\pi}{e} |v \cdot \alpha^\vee|. \tag{3.36}$$

Já as massas das partículas de gauge massivas são

$$M_{W\pm\alpha} = e|v \cdot \alpha|. \tag{3.37}$$

Na teoria dual essas massas ficam

$$M_{M\beta}^* = \frac{2\pi}{e^*} |v \cdot \beta^\vee|, \tag{3.38}$$

$$M_{W\pm\beta}^* = e^* |v \cdot \beta|. \tag{3.39}$$

Os monopolos fundamentais são aqueles com as menores cargas magnéticas e massas.

Como  $\alpha^\vee$  são raízes associadas ao grupo dual  $G^\vee$ , podemos verificar que o espectro de massas e cargas magnéticas dos monopolos de uma teoria com grupo de gauge  $G$  e constante de acoplamento  $e$  coincidem com o espectro de massas e cargas elétricas das partículas de gauge com grupo de gauge  $G^\vee$  e constante de acoplamento  $e^* = \frac{2\pi}{e}$ , o que indica uma possível dualidade entre essas teorias.

## Capítulo 4

# Monopolos $\mathbb{Z}_2$

### 4.1 Quebra $\mathfrak{su}(n)$ em $\mathfrak{so}(n)$ invariante por automorfismo de Cartan

Vamos analisar soluções de monopolos  $\mathbb{Z}_2$  em uma teoria de Yang-Mills-Higgs com simetria de gauge  $\mathfrak{su}(n)$  e um campo escalar na parte simétrica da representação  $n \times n$ , ou seja na irrep. com  $\Lambda = 2\lambda_1$  do  $\mathfrak{su}(n)$ . Queremos uma quebra  $G \rightarrow G_0$ , tal que  $\pi_2(G/G_0) = \mathbb{Z}_2$  e vamos considerar álgebras  $\mathfrak{so}(n)$  que são invariantes por automorfismos.

Um automorfismo de uma álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  é uma bijeção  $\omega : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  que preserva a estrutura da álgebra, ou seja

$$\omega([x, y]) = [\omega(x), \omega(y)], \quad x, y \in \mathfrak{g}.$$

O conjunto de todos os automorfismos de  $\mathfrak{g}$  é denotado por  $\text{Aut}(\mathfrak{g})$ . Este conjunto é um grupo, pois possui um produto, dado pela composição de mapas, o qual é associativo, um elemento identidade, dado pelo mapa trivial  $\text{id}$  e um elemento inverso para cada  $\omega \in \text{Aut}(\mathfrak{g})$ .

O automorfismo  $\omega$  é dito de ordem  $N$  se existe  $N \in \mathbb{N}$ , tal que

$$\omega^N = \underbrace{\omega \circ \omega \circ \dots \circ \omega}_{N \text{ vezes}} = \text{id}.$$

Quando não existe tal  $N$ , o automorfismo é dito de ordem infinita.

Sob um automorfismo  $\omega$  de ordem  $N$ , a álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  se decompõe na soma direta

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{i=0}^{N-1} \mathfrak{g}_{(i)}, \quad (4.1)$$

onde

$$\mathfrak{g}_{(j)} = \left\{ x \in \mathfrak{g} \mid \omega(x) = \exp\left(\frac{2\pi i j}{N}\right) x \right\} \quad (4.2)$$

são autoespaços de  $\omega$ . Somente  $\mathfrak{g}_{(0)}$  é uma subálgebra de  $\mathfrak{g}$ .

O automorfismo de Cartan é definido por

$$\sigma(H_a) = -H_a, \quad (4.3)$$

$$\sigma(E_\alpha) = -E_{-\alpha}, \quad (4.4)$$



onde  $H_a$  e  $E_{\pm\alpha}$  são os geradores da CSA e os operadores degrau de  $\mathfrak{g}$ , respectivamente. Esse automorfismo possui ordem 2 e os geradores dos autoespaços  $\mathfrak{g}_{(0)}$  e  $\mathfrak{g}_{(1)}$  são

$$\mathfrak{g}_{(0)} = \{E_\alpha - E_{-\alpha}, \alpha \in \Phi^+(\mathfrak{g})\}, \quad (4.5)$$

$$\mathfrak{g}_{(1)} = \{H_a, a = 1, \dots, r, E_\alpha - E_{-\alpha}, \alpha \in \Phi^+(\mathfrak{g})\}, \quad (4.6)$$

onde  $r = \text{rank}(\mathfrak{g})$ .

A álgebra  $\mathfrak{su}(n)$ , ou  $A_{n-1}$ , possui  $(n^2 - 1)$  geradores, sendo que  $(n - 1)$  destes são geradores da subálgebra de Cartan. Portanto,  $\text{rank}(\mathfrak{g}) = r = (n - 1)$ . Na representação  $n$ -dimensional, um elemento da CSA pode ser escrito como

$$(A)_{ij} = a_i \delta_{ij}, \quad \sum a_i = 0 \quad (4.7)$$

e os  $(n^2 - n)$  operadores degrau da forma

$$(E_{ij})_{kl} = \delta_{ik} \delta_{jl}, \quad i \neq j. \quad (4.8)$$

Os operadores degrau  $E_{ij}$  e  $E_{ji}$  correspondem aos operadores para duas raízes opostas. A raiz de  $E_{ij}$  é  $e_i - e_j$ , onde  $e_i$  são vetores ortonormais no espaço vetorial  $n$ -dimensional, ou seja,  $(e_i)_j = \delta_{ij}$ . A raiz  $e_i - e_j$  é positiva se  $i < j$ , negativa se  $i > j$  e simples se  $j = i + 1$ . Podemos então escrever os geradores de  $\mathfrak{g}_{(0)}$  como sendo

$$M_{ij} = -i(E_{ij} - E_{ji}), \quad (4.9)$$

que são  $n(n - 1)$  matrizes antissimétricas  $n \times n$  que geram a subálgebra  $\mathfrak{so}(n) \subset \mathfrak{su}(n)$ . Inserimos a constante  $-i$  para garantirmos que  $M_{ij}$  seja hermitiana. Por exemplo, para o  $\mathfrak{su}(3)$  temos as matrizes de Gell-Mann

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= -i(E_{12} - E_{21}) = \frac{\sqrt{2}}{2i}(E_{\alpha_1} - E_{-\alpha_1}), \\ \lambda_5 &= -i(E_{13} - E_{31}) = \frac{\sqrt{2}}{2i}(E_{\alpha_1 + \alpha_2} - E_{-\alpha_1 - \alpha_2}), \\ \lambda_7 &= -i(E_{23} - E_{32}) = \frac{\sqrt{2}}{2i}(E_{\alpha_2} - E_{-\alpha_2}) \end{aligned}$$

gerando uma subálgebra  $\mathfrak{so}(3)$ .

Precisamos, agora, encontrar uma configuração de vácuo para o campo de Higgs que produza a quebra  $\mathfrak{su}(n) \rightarrow \mathfrak{so}(n)$ . Os  $n$  pesos da representação  $n$ -dimensional do  $\mathfrak{su}(n)$  podem ser escritos em termos dos vetores ortonormais  $e_i$  como

$$\lambda = e_i - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n e_j, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.10)$$

Iremos representar por  $|e_i\rangle$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  os auto-estados associados aos pesos (4.10). Cada auto-estado  $|e_i\rangle$  pode ser representado por uma matriz coluna com apenas um 1 na  $i$ -ésima linha. Portanto, a ação dos operadores (4.8) nos vetores de estado é

$$E_{ij}|e_k\rangle = \delta_{jk}|e_i\rangle. \quad (4.11)$$

Consideramos a configuração de vácuo dada por

$$\phi_0 = v \sum_{i=1}^n |e_i\rangle \otimes |e_i\rangle, \quad (4.12)$$

onde  $v$  é uma constante positiva. Usando o fato que em uma representação que é o produto tensorial de duas representações um gerador  $T$  da álgebra atua como  $T \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes T$ , podemos obter

$$M_{ij}\phi_0 = 0,$$

$$H_\alpha\phi_0 \neq 0,$$

$$(E_\alpha + E_{-\alpha})\phi_0 \neq 0$$

e portanto temos a quebra desejada. Pode-se verificar que os geradores

$$h_k = \frac{E_{\alpha_{2k-1}} - E_{-\alpha_{2k-1}}}{i}, \quad k = 1, 2, \dots, \text{rank}(\mathfrak{so}(n)) \quad (4.13)$$

formam uma base ortogonal da CSA da subálgebra  $\mathfrak{so}(n)$ .

Precisamos calcular  $\pi_2(G/G_0) \cong \pi_2(\mathcal{M}_0)$  e verificar se o grupo resultante é não trivial, podendo assim a teoria apresentar soluções de monopolo magnético. A sequência exata de homotopia é uma sequência [16]

$$\begin{aligned} \pi_n(G_0) \rightarrow \pi_n(G) \rightarrow \pi_n(G/G_0) \rightarrow \pi_{n-1}(G_0) \rightarrow \pi_{n-1}(G) \rightarrow \dots \\ \dots \rightarrow \pi_2(G) \rightarrow \pi_2(G/G_0) \rightarrow \pi_1(G_0) \rightarrow \pi_1(G) \rightarrow \pi_1(G/G_0) \rightarrow \pi_0(G_0) \rightarrow \pi_0(G), \end{aligned} \quad (4.14)$$

onde  $\pi_n$  é o  $n$ -ésimo grupo de homotopia,  $G_0 \subset G$  são espaços topológicos, no nosso caso grupos de Lie, e cada mapa da sequência é um homomorfismo, cujo núcleo é igual a imagem do mapa anterior. Para um grupo de Lie compacto  $G$ , Cartan demonstrou que

$$\pi_2(G) = \{\mathbb{I}\}. \quad (4.15)$$

Além disso,

$$\pi_1(G) = \{\mathbb{I}\} \Leftrightarrow G \text{ simplesmente conexo} \quad (4.16)$$

e

$$\pi_0(G) = \{\mathbb{I}\} \Leftrightarrow G \text{ conexo.} \quad (4.17)$$

Suponhamos que  $G$  seja simplesmente conexo. Então, de (4.14), (4.15) e (4.16) temos

$$\{\mathbb{I}\} \rightarrow \pi_2(G/G_0) \rightarrow \pi_1(G_0) \rightarrow \{\mathbb{I}\}. \quad (4.18)$$

Seja os homomorfismos  $f : \{\mathbb{I}\} \rightarrow \pi_2(G/G_0)$ ,  $i : \pi_2(G/G_0) \rightarrow \pi_1(G_0)$  e  $k : \pi_1(G_0) \rightarrow \{\mathbb{I}\}$  e  $\text{Im}(f)$  a imagem de  $f$ . Temos que  $\text{Ker}(i) = \text{Im}(f) = \mathbb{I}$  e  $\text{Im}(i) = \text{Ker}(k) = \pi_1(G_0)$ . Isso significa, respectivamente, que  $i(\mathbb{I}) = \mathbb{I}$  e  $i$  é sobrejetor. Concluimos que  $i$  é um isomorfismo, ou seja, um homomorfismo bijetor. Sendo assim

$$\pi_2(G/G_0) \cong \pi_1(G_0) \quad (4.19)$$

se  $G$  é simplesmente conexo. Se  $G$  não é simplesmente conexo, então

$$\pi_2(G/G_0) = \text{Ker} \{ \pi_1(G_0) \rightarrow \pi_1(G) \}. \quad (4.20)$$

A equação (4.20) é, em geral, difícil de ser resolvida diretamente e para obtermos  $\pi_2(G/G_0)$  quando  $G$  não é simplesmente conexo, usamos [16], [35]

$$\pi_2(G/G_0) = \pi_2(\tilde{G}/\hat{G}_0) \cong \pi_1(\hat{G}_0), \quad (4.21)$$

onde  $\hat{G}_0$  é o subgrupo não quebrado obtido de  $\tilde{G}$ , o grupo de recobrimento universal de  $G$ .

O grupo de gauge  $G$  e o grupo não quebrado  $G_0$  são dados por

$$G \cong \frac{\tilde{G}}{\text{Ker}(\rho)},$$

$$G_0 \cong \frac{\tilde{G}_0}{\text{Ker}(\rho_0)}$$

e no nosso caso  $\tilde{G} = \text{SU}(n)$  e  $\tilde{G}_0 = \text{Spin}(n)$  são os grupos de recobrimento universal associado as álgebras  $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(n)$  e  $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{so}(n)$ , respectivamente. Para obtermos  $\hat{G}_0$  a partir de  $\tilde{G}$  usamos o seguinte teorema [36]: Sejam  $G' \subset G$  grupos de Lie semi-simples com álgebras de Lie  $\mathfrak{g}' \subset \mathfrak{g}$ , grupos de recobrimento universal  $\tilde{G}'$  e  $\tilde{G}$  com representações  $\Gamma_{\Lambda'}(\tilde{G}')$  e  $\Gamma_{\Lambda}(\tilde{G})$ . Se

$$G \cong \frac{\tilde{G}}{\text{Ker}(\Gamma_{\Lambda}(\tilde{G}))}, \quad (4.22)$$

então

$$G' \cong \frac{\tilde{G}'}{\text{Ker}(\Gamma_{\Lambda'}(\tilde{G}'))}. \quad (4.23)$$

A representação de  $G'$  com peso mais alto  $\Lambda'$  é a representação obtida a partir da representação irreduzível de  $G$  com peso mais alto  $\Lambda$  quando vemos  $\mathfrak{g}_0$  como uma imersão em  $\mathfrak{g}$ . Para  $G \cong \tilde{G}$

precisamos

$$\text{Ker}(\Gamma_\Lambda(\tilde{G})) = \mathbb{I}, \quad (4.24)$$

o que é obtido com  $\Lambda = \lambda_1$  para  $G = \text{SU}(n)$ . Vamos mostrar isso agora. Em geral, o centro de grupo de Lie  $\tilde{G}$  é um grupo cíclico e pode ser escrito como isomorfo às seguintes classes [37], [38]

$$\mathcal{Z}(\tilde{G}) \cong \left\{ \widetilde{\exp}(2\pi i \gamma^\vee \cdot H), \widetilde{\exp} \left[ 2\pi i (\lambda_{\tau(0)}^\vee + \gamma^\vee) \cdot H \right], \widetilde{\exp} \left[ 2\pi i (\lambda_{\tau_2(0)}^\vee + \gamma^\vee) \cdot H \right], \dots \right\}, \quad (4.25)$$

onde  $\gamma^\vee \in \Lambda_r^\vee(\tilde{G})$ ,  $\tau(0)$  é o ponto do diagrama de Dynkin estendido, relacionado ao ponto zero por uma transformação de simetria e marcados como pontos pretos na tabela B.1 e  $H = (H_1, H_2, \dots, H_r)$  são os geradores de  $\mathfrak{h}$ . Para  $\tilde{G} = \text{SU}(n)$  temos

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(\text{SU}(n)) = \mathbb{Z}_n \cong \{ & \exp(2\pi i \gamma^\vee \cdot H), \exp \left[ 2\pi i (\lambda_1^\vee + \gamma^\vee) \cdot H \right], \\ & \exp \left[ 2\pi i (\lambda_2^\vee + \gamma^\vee) \cdot H \right], \dots, \exp \left[ 2\pi i (\lambda_{n-1}^\vee + \gamma^\vee) \cdot H \right] \} \end{aligned} \quad (4.26)$$

O núcleo da representação  $\Gamma_\Lambda(\tilde{G})$  consiste nos elementos  $g \in \tilde{G}$ , tais que

$$g|\Lambda - \beta\rangle = |\Lambda - \beta\rangle$$

para todos os estados  $|\Lambda - \beta\rangle$  da representação, onde  $\Lambda$  é o peso mais alto da representação e  $\beta$  é uma raiz positiva. Como queremos  $\text{Ker}(\Gamma_\Lambda(\tilde{G})) = \text{Ker}(\rho)$  e  $\text{Ker}(\rho) \in \mathcal{Z}(\tilde{G})$ , então basta atuarmos nos elementos de (4.26) nos vetores da representação. Para  $\Lambda = \lambda_1$  temos

$$\begin{aligned} \exp(2\pi i \gamma^\vee \cdot H) |\lambda_1 - \beta\rangle &= \exp \left[ 2\pi i \gamma^\vee \cdot (\lambda_1 - \beta) \right] |\lambda_1 - \beta\rangle \\ &= |\lambda_1 - \beta\rangle \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \exp \left[ 2\pi i (\gamma^\vee + \lambda_k^\vee) \cdot H \right] |\lambda_1 - \beta\rangle &= \exp \left[ 2\pi i (\gamma^\vee + \lambda_k^\vee) \cdot (\lambda_1 - \beta) \right] |\lambda_1 - \beta\rangle \\ &\neq |\lambda_1 - \beta\rangle, \quad \forall k = 1, \dots, 2l + 1 \end{aligned}$$

onde usamos (2.10), (2.16), (2.17) e (2.24). Portanto

$$\text{Ker}(\Gamma_{\lambda_1}(\text{SU}(n))) = \{\mathbb{I}\}$$

e

$$G \cong \tilde{G} = \text{SU}(n). \quad (4.27)$$

Para obtermos  $\hat{G}_0$  de  $\tilde{G}$ ,

$$\hat{G}_0 \cong \frac{\tilde{G}_0}{\text{Ker}(\Gamma_\Lambda(\tilde{G}_0))}$$

precisamos saber como a representação  $\Gamma_{\lambda_1}(\mathfrak{su}(n))$  se decompõe quando vamos para a subálgebra  $\mathfrak{so}(n)$ . As regras de decomposição das irrep. com  $\Lambda = \lambda_1$  e  $\Lambda = 2\lambda_1$  do  $\mathfrak{su}(n)$  no  $\mathfrak{so}(n)$  são [17], respectivamente

$$(1\ 0\ 0\ \dots\ 0) \simeq (1\ 0\ 0\ \dots\ 0), \quad (4.28)$$

$$(2\ 0\ 0\ \dots\ 0) \simeq (2\ 0\ 0\ \dots\ 0) \oplus (0\ 0\ 0\ \dots\ 0), \quad (4.29)$$

onde esses vetores estão na base de Dynkin, ou seja, na base dos pesos fundamentais. O lado esquerdo dá o peso mais alto da irrep.. do  $\mathfrak{su}(n)$  e o lado direito o(s) peso(s) mais alto(s) da representação do  $\mathfrak{so}(n)$ . Como as álgebras  $\mathfrak{so}(3)$ ,  $\mathfrak{so}(4)$  e  $\mathfrak{so}(6)$  são isomorfas às álgebras  $\mathfrak{su}(2)$ ,  $\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$  e  $\mathfrak{su}(4)$ , respectivamente, vamos considerar agora apenas os casos  $n \geq 7$  e  $n = 5$ , deixando para o apêndice A a análise particular de cada caso não considerado na dedução geral. Além disso, temos que analisar separadamente os casos  $\mathfrak{so}(n) = \mathfrak{so}(2m+1) = B_m$  e  $\mathfrak{so}(n) = \mathfrak{so}(2m) = D_m$ .

Pela simetria do diagrama de Dynkin estendido do  $\mathfrak{so}(2m+1)$  vemos que o centro do  $\text{Spin}(2m+1)$  é

$$\mathcal{Z}(\text{Spin}(2m+1)) = \mathbb{Z}_2 \cong \{ \exp(2\pi i \gamma^\vee \cdot h), \exp[2\pi i(\lambda_1^\vee + \gamma^\vee) \cdot h] \}.$$

Agindo esses elementos nos vetores de estado da irrep.. com  $\Lambda = \lambda_1$  do  $\mathfrak{so}(2m+1)$  obtemos

$$\exp[2\pi i(\gamma^\vee) \cdot h] |\lambda_1 - \beta\rangle = |\lambda_1 - \beta\rangle,$$

$$\exp[2\pi i(\gamma^\vee + \lambda_1^\vee) \cdot h] |\lambda_1 - \beta\rangle = |\lambda_1 - \beta\rangle.$$

Desse modo,

$$\text{Ker}(\Gamma_{\lambda_1}(\text{Spin}(2m+1))) = \mathbb{Z}_2 \quad (4.30)$$

e

$$\widehat{G}_0 = \frac{\text{Spin}(2m+1)}{\mathbb{Z}_2} \cong \text{SO}(2m+1). \quad (4.31)$$

Para o  $\text{Spin}(2m)$  temos

$$\mathcal{Z}(\text{Spin}(2m)) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 & \text{se } 2m = 4k \\ \mathbb{Z}_4 & \text{se } 2m = 4k + 2, \end{cases}$$

onde  $k \in \mathbb{N}$ . Em ambos os casos

$$\mathcal{Z}(\text{Spin}(2m)) \cong \{ \exp(2\pi i \gamma^\vee \cdot h), \exp[2\pi i(\lambda_1^\vee + \gamma^\vee) \cdot h], \\ [2\pi i(\lambda_{m-1}^\vee + \gamma^\vee) \cdot h] \exp[2\pi i(\lambda_m^\vee + \gamma^\vee) \cdot h] \}$$

Aplicando esses elementos na irrep.. com  $\Lambda = \lambda_1$  do  $\mathfrak{so}(2m)$  de (4.28) obtemos

$$\exp(2\pi i \gamma^\vee \cdot h) |\lambda_1 - \beta\rangle = |\lambda_1 - \beta\rangle,$$

$$\begin{aligned} \exp [2\pi i(\gamma^\vee + \lambda_1^\vee) \cdot h] |\lambda_1 - \beta\rangle &= |\lambda_1 - \beta\rangle, \\ \exp [2\pi i(\gamma^\vee + \lambda_l^\vee) \cdot h] |\lambda_1 - \beta\rangle &= -|\lambda_1 - \beta\rangle, \\ \exp [2\pi i(\gamma^\vee + \lambda_{l+1}^\vee) \cdot h] |\lambda_1 - \beta\rangle &= -|\lambda_1 - \beta\rangle \end{aligned}$$

e o núcleo da representação fica

$$\text{Ker}(\Gamma_{\lambda_1}(\text{Spin}(2m))) = \mathbb{Z}_2 \cong \{ \exp(2\pi i\gamma^\vee \cdot h), \exp [2\pi i(\lambda_1^\vee + \gamma^\vee) \cdot h] \} \quad (4.32)$$

e

$$\widehat{G}_0 = \frac{\text{Spin}(2m)}{\mathbb{Z}_2} \cong \text{SO}(2m). \quad (4.33)$$

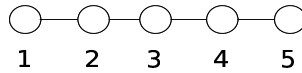
Substituindo em (4.27), (4.31) e (4.33) em (4.21), chegamos a

$$\begin{aligned} \pi_2(\mathcal{M}_0) &\cong \pi_2(G/G_0) \\ &\cong \pi_1(\text{SO}(n)) \\ &= \mathbb{Z}_2 \cong \{ \exp(2\pi i\gamma^\vee \cdot h), \exp [2\pi i(\lambda_1^\vee + \gamma^\vee) \cdot h] \} \end{aligned} \quad (4.34)$$

e obtemos assim a condição necessária para termos monopolos  $\mathbb{Z}_2$ .

## 4.2 Quebra $\mathfrak{su}(2m+1)$ em $\mathfrak{so}(2m+1)$ invariante por automorfismo externo

Considere, por exemplo, o diagrama de Dynkin da álgebra  $A_5$



Podemos observar que as permutações dos pontos 1 por 5, 2 por 4 e 3 por 3 constituem uma simetria do diagrama. Sempre que isso acontece temos um autormorfismo, chamado externo [37]. Mais precisamente, se  $i$  representa os pontos do diagrama de Dynkin, então  $i \rightarrow \tau(i)$  constitui um automorfismo externo, desde que a matriz de Cartan da álgebra satisfaça.

$$K_{\tau(i)\tau(j)} = K_{ij}. \quad (4.35)$$

Sob  $\tau$ , os geradores da álgebra são mapeados da seguinte forma <sup>1</sup>

$$\begin{aligned}\tau(H_i) &= H_{\tau(i)}, \\ \tau(E_{\pm i}) &= E_{\pm\tau(i)},\end{aligned}\tag{4.36}$$

ou seja, operadores de Cartan são mapeados em operadores de Cartan e operadores degrau associados a raízes simples são mapeados em operadores degrau associados a simples. O conjunto dos automorfismos desse tipo, para uma dada álgebra de Lie, forma um grupo finito dentro do conjunto dos automorfismos externos dessa álgebra. Vamos denotar esse grupo por  $\text{Aut } \Delta(\mathfrak{g})$ . As únicas álgebras de Lie simples com  $\text{Aut } \Delta(\mathfrak{g})$  não trivial são as álgebras  $A_r$ ,  $D_r$  e  $E_6$ .

Chamamos de órbita o conjunto de pontos do diagrama de Dynkin identificados por  $\tau$ . Por exemplo, no caso  $A_5$  os pontos 1 e 5 formam a órbita  $\langle 1 \rangle$ , os pontos 2 e 4 a órbita  $\langle 2 \rangle$  e o ponto 3 a órbita  $\langle 3 \rangle$ . Se, para cada órbita, nenhum de seus pontos estão ligados, então o automorfismo é dito direto. Caso contrário é não direto. O caso direto se aplica às álgebras  $A_{2l-1}$ ,  $D_l$  e  $E_6$ , enquanto o caso não direto se aplica apenas às álgebras  $A_{2l}$ .

Para um automorfismo  $\tau \in \text{Aut } \Delta(\mathfrak{g})$  direto, os geradores da álgebra  $\mathfrak{g}_{(0)}$  de (4.2) são

$$\begin{aligned}H_{\langle i \rangle} &= \sum_{j \in \langle i \rangle} H_j, \\ E_{\pm \langle i \rangle} &= \sum_{j \in \langle i \rangle} E_{\pm j}.\end{aligned}\tag{4.37}$$

Uma vez que pontos na mesma órbita não estão ligados, temos  $K_{kl} = 0$  para  $k, l \in \langle i \rangle$ ,  $k \neq l$  e  $\omega$  direto. Usando esse fato obtemos

$$\begin{aligned}[H_{\langle i \rangle}, E_{\pm \langle i \rangle}] &= 2E_{\pm \langle i \rangle}, \\ [E_{\langle i \rangle}, E_{-\langle j \rangle}] &= \delta_{ij} H_{\langle i \rangle},\end{aligned}\tag{4.38}$$

significando que  $H_{\langle i \rangle}$  e  $E_{\langle i \rangle}$  estão com a normalização correta. Com a verificação de (4.38), podemos escrever

$$[H_{\langle j \rangle}, E_{\langle i \rangle}] = K_{\langle i \rangle \langle j \rangle} E_{\langle i \rangle},\tag{4.39}$$

onde

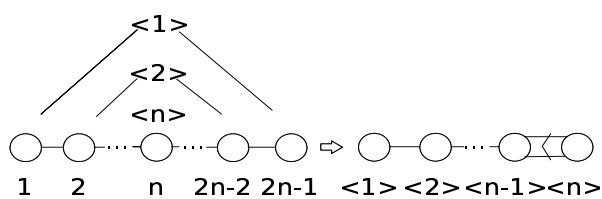
$$K_{\langle i \rangle \langle j \rangle} = \sum_{j \in \langle j \rangle} K_{ij} = \frac{1}{|\langle i \rangle|} \sum_{i \in \langle i \rangle, j \in \langle j \rangle} K_{ij},\tag{4.40}$$

com  $|\langle i \rangle|$  sendo o número de elementos na órbita  $\langle i \rangle$ . É possível mostrar que os geradores  $H_{\langle i \rangle}$  formam a base da CSA de  $\mathfrak{g}_0$  e, portanto,  $K_{\langle i \rangle \langle j \rangle}$  é a matriz de Cartan de  $\mathfrak{g}_0$ . Sendo assim, para estas subálgebras invariantes por automorfismo externo, os elementos da CSA de  $\mathfrak{g}_0$  são uma combinação dos elementos da CSA de  $\mathfrak{g}$ , diferentemente do caso onde obtemos a subálgebra por

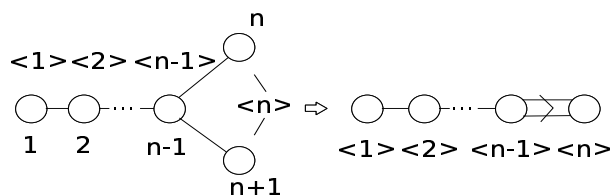
<sup>1</sup>Nessa seção usaremos seguinte a notação:  $H_j \equiv H_{\alpha_j} = \frac{2\alpha_j}{\alpha_j^2} \cdot H$  e  $E_{\pm j} \equiv E_{\pm\alpha_j}$ .

automorfismo de Cartan e os elementos de  $\mathfrak{h}_0$  eram dados por (4.13). O correspondente diagrama de Dynkin é obtido por uma dobradura do diagrama original. Temos as seguintes dobraduras para o caso direto:

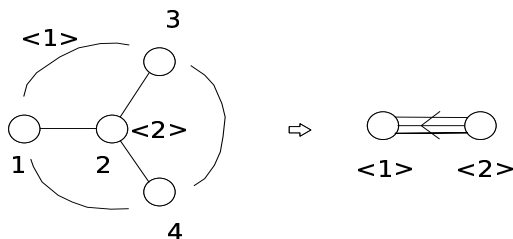
- $A_{2n-1} \mapsto C_n$



- $D_{n+1} \mapsto B_n$

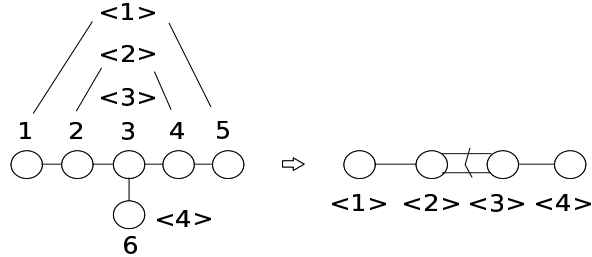


- $D_4 \mapsto G_2$



- $E_6 \mapsto F_4$





Podemos observar que todas as álgebras simples que possuem laços múltiplos entre pontos de seus diagramas, podem ser obtidas por dobradura.

As raízes simples de  $\mathfrak{g}_0$  para o automorfismo direto são

$$\alpha_{\langle i \rangle} = \frac{1}{|\langle i \rangle|} \sum_{j \in \langle i \rangle} \alpha_j, \tag{4.41}$$

Podemos verificar que

$$\alpha_{\langle i \rangle}^2 = \frac{\alpha_i^2}{|\langle i \rangle|} = \frac{2}{|\langle i \rangle|} \tag{4.42}$$

e assim temos as co-raízes simples

$$\alpha_{\langle i \rangle}^\vee = \frac{2\alpha_{\langle i \rangle}}{\alpha_{\langle i \rangle}^2} = \sum_{j \in \langle i \rangle} \alpha_j. \tag{4.43}$$

Por satisfazerem as condições de ortonormalidade com as raízes simples, temos que os co-pesos fundamentais de  $\mathfrak{g}_0$  são dados por

$$\lambda_{\langle i \rangle}^\vee = \sum_{j \in \langle i \rangle} \lambda_j. \tag{4.44}$$

A partir de (4.44) e da definição de co-peso fundamental, obtemos os pesos fundamentais

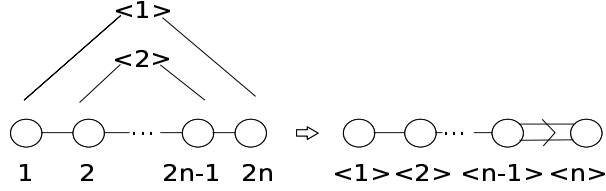
$$\lambda_{\langle i \rangle} = \frac{1}{|\langle i \rangle|} \sum_{j \in \langle i \rangle} \lambda_j \tag{4.45}$$

Para o automorfismo não direto, o único caso é o

- $A_{2n} \mapsto B_n$  <sup>2</sup>

---

<sup>2</sup>Para  $l \geq 2$ . Quando  $l = 1$  temos  $A_2 \mapsto A_1$



Para ficarmos com as relações de comutação corretas, equações (4.38), os geradores de  $\mathfrak{g}_0 = B_l$  devem possuir as seguintes normalizações

$$\begin{aligned}
 H_{\langle i \rangle} &= \sum_{j \in \langle i \rangle} H_j = H_{\alpha_i} + H_{\alpha_{2l+1-i}}, \\
 H_{\langle l \rangle} &= 2 \sum_{j \in \langle l \rangle} H_j = 2(H_{\alpha_l} + H_{\alpha_{l+1}}), \\
 E_{\pm \langle i \rangle} &= \sum_{j \in \langle i \rangle} E_{\pm j} = E_{\alpha_i} + E_{\alpha_{2l+1-i}}, \\
 E_{\pm \langle l \rangle} &= \sqrt{2} \sum_{j \in \langle l \rangle} E_{\pm j} = \sqrt{2}(E_{\alpha_l} + E_{\alpha_{l+1}}).
 \end{aligned} \tag{4.46}$$

Raízes simples, co-raízes simples, pesos e co-pesos fundamentais são dados por

$$\begin{aligned}
 \alpha_{\langle i \rangle} &= \frac{1}{2}(\alpha_i + \alpha_{l+1-i}), \\
 \alpha_{\langle i \rangle}^{\vee} &= \frac{2\alpha_{\langle i \rangle}}{\alpha_{\langle l \rangle}^2} = 2\alpha_{\langle i \rangle} = \alpha_i + \alpha_{l+1-i}, \quad i \neq l, \\
 \alpha_{\langle l \rangle}^{\vee} &= \frac{2\alpha_{\langle l \rangle}}{\alpha_{\langle l \rangle}^2} = 4\alpha_{\langle l \rangle} = 2(\alpha_l + \alpha_{l+1}), \\
 \lambda_{\langle i \rangle} &= \frac{1}{2}(\lambda_i + \lambda_{l+1-i}), \quad i \neq l, \\
 \lambda_{\langle l \rangle} &= \frac{1}{4}(\lambda_l + \lambda_{l+1}), \\
 \lambda_{\langle i \rangle}^{\vee} &= \lambda_i + \lambda_{l+1-i},
 \end{aligned} \tag{4.47}$$

satisfazendo as condições de ortonormalidade (2.17).

Vemos, portanto, que sob um automorfismo externo, podemos obter as álgebras  $\mathfrak{so}(2m+1)$  e  $\mathfrak{sp}(2m)$  como subálgebras de  $\mathfrak{su}(2m+1)$  e  $\mathfrak{su}(2m)$ , respectivamente. Precisamos então encontrar uma configuração de vácuo que seja aniquilada apenas pelos geradores (4.37) e (4.46) e assim teremos

as quebras  $\mathfrak{su}(2m+1) \rightarrow \mathfrak{so}(2m+1)$  e  $\mathfrak{su}(2m) \rightarrow \mathfrak{sp}(2m)$ . Conseguimos isso com a configuração

$$\phi_0 = v \sum_{l=1}^n (-1)^{l+1} |e_l\rangle \otimes |e_{n-l+1}\rangle, \quad (4.48)$$

e usando o fato de que  $\alpha_i + \alpha_{2l+1-i} = e_i - e_{i+1} + e_{2l+1-i} - e_{2l+2-i}$  e  $E_{\alpha_j} = E_{j,j+1}$ . Procedendo da mesma maneira que na seção 4.1 encontramos  $\pi_2(G/G_0) = \mathbb{Z}_2 \cong \{\exp(2\pi i \gamma^\vee \cdot h), \exp[2\pi i(\gamma^\vee + \lambda_1^\vee) \cdot h]\}$  para a quebra  $\mathfrak{su}(2m+1) \rightarrow \mathfrak{so}(2m+1)$  e  $\pi_2(G/G_0) = \{\mathbb{I}\}$  para a quebra  $\mathfrak{su}(2m) \rightarrow \mathfrak{sp}(2m)$ , o que significa que somente a primeira quebra apresenta soluções de monopolos magnéticos. Portanto, vamos apenas considerar a quebra  $\mathfrak{su}(2m+1) \rightarrow \mathfrak{so}(2m+1)$ . Também podemos notar que para o caso  $\mathfrak{su}(2m)$  o vácuo (4.48) está na parte anti-simétrica da representação  $n \times n$  do  $\mathfrak{su}(n)$  e não na parte simétrica como nos outros casos.

### 4.3 Forma Assintótica do Monopolo $\mathbb{Z}_2$

Na seção 2.3 vimos como construir a solução assintótica do monopolo magnético. Nesta seção vamos aplicar aquele método para obtermos a forma assintótica do monopolo  $\mathbb{Z}_2$  em nossa teoria. Vimos que

$$T_3^\omega = \frac{e\omega \cdot h}{4\pi} = \frac{eG(\hat{r}_0)}{4\pi}, \quad \frac{e\omega}{2\pi} \in \Lambda_w^\vee(\tilde{G}_0). \quad (4.49)$$

A condição  $\frac{e\omega}{2\pi} \in \Lambda_w(\text{Spin}(n)^\vee)$  é necessária, mas não suficiente para satisfazermos a condição de quantização (2.47). Já na seção anterior, vimos que somente se

$$\frac{e\omega}{2\pi} \in \Lambda_r(\text{Spin}(n)^\vee), \quad \lambda_1^\vee + \Lambda_r(\text{Spin}(n)^\vee), \quad (4.50)$$

teremos

$$\widetilde{\exp}(4\pi i T_3^\omega) \in \text{Ker}(\rho). \quad (4.51)$$

Os pesos da representação definidora do grupo dual  $\tilde{G}_0^\vee$  pertencem à classe  $\lambda_1^\vee + \Lambda_r(\text{Spin}(n)^\vee)$ , pois são todos construídos subtraindo raízes positivas de  $\tilde{G}_0^\vee$  (co-raízes positivas de  $\tilde{G}_0$ ) do peso fundamental  $\lambda_1$  de  $\tilde{G}_0^\vee$  (co-peso fundamental de  $\tilde{G}_0$ ). Temos  $\mathfrak{so}(2m+1)^\vee = \mathfrak{sp}(2m)$  e  $\mathfrak{so}(2m)^\vee = \mathfrak{so}(2m)$ .

#### 4.3.1 $\mathfrak{so}(n)$ invariante por automorfismo de Cartan

Inicialmente vamos construir as soluções assintóticas para a quebra em  $\mathfrak{so}(n)$  invariante por automorfismo de Cartan. Para encontrarmos os pesos de uma representação irredutível, escrevemos  $\Lambda$  na base de Dynkin e para cada algarismo  $x$ , maior que zero, na  $y$ -ésima componente subtraímos  $x$  vezes a  $y$ -ésima raiz simples, também na base de Dynkin, as quais são dadas pelas linhas da matriz de Cartan correspondente. A cada subtração obtemos um peso da irrep. e continuamos enquanto houverem algarismos maiores que zero. Para o  $\mathfrak{sp}(2m)$  ou  $C_m$ , os  $2m$  pesos da representação

definidora são

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= ( 1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 ), \\
\lambda_1 - \alpha_1 &= ( -1 \ 1 \ 0 \ \dots \ 0 ), \\
\lambda_1 - \alpha_1 - \alpha_2 &= ( 0 \ -1 \ 1 \ 0 \ \dots \ 0 ), \\
&\vdots \\
\lambda_1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \dots - \alpha_m &= ( 0 \ 0 \ \dots \ 1 \ -1 ), \\
\lambda_1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \dots - 2\alpha_{m-1} - \alpha_m &= ( 0 \ 0 \ \dots \ 1 \ -1 \ 0 ), \\
\lambda_1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \dots - 2\alpha_{m-2} - 2\alpha_{m-1} - \alpha_m &= ( 0 \ \dots \ 1 \ -1 \ 0 \ 0 ), \\
&\vdots \\
\lambda_1 - 2\alpha_1 - 2\alpha_2 - \dots - 2\alpha_{m-1} - \alpha_m &= ( -1 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0 ).
\end{aligned} \tag{4.52}$$

As raízes simples e pesos fundamentais de uma irrep. podem ser escritos em termos dos vetores ortonormais  $e_i$ . Para a álgebra  $C_m$  temos

$$\begin{aligned}
\alpha_i &= e_i - e_{i+1}, \quad i = 1, \dots, m-1, \\
\alpha_m &= 2e_m, \\
\lambda_1 &= e_1.
\end{aligned}$$

Substituindo no conjunto de pesos acima, obtemos que os pesos da representação definidora do  $\mathfrak{sp}(2m)$ , em termos dos vetores ortonormais, são

$$\lambda = \pm e_i, \quad i = 1, \dots, m.$$

Para a álgebra  $\mathfrak{so}(2m)$  ou  $D_m$  temos os pesos da representação definidora

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 &= ( 1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 ), \\
 \lambda_1 - \alpha_1 &= ( -1 \ 1 \ 0 \ \dots \ 0 ), \\
 \lambda_1 - \alpha_1 - \alpha_2 &= ( 0 \ -1 \ 1 \ 0 \ \dots \ 0 ), \\
 &\vdots \\
 \lambda_1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \dots - \alpha_{m-3} &= ( 0 \ \dots \ 0 \ -1 \ 1 \ 0 \ 0 ), \\
 \lambda_1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \dots - \alpha_{m-2} &= ( 0 \ \dots \ 0 \ -1 \ 1 \ 1 ), \\
 \lambda_1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \dots - \alpha_{m-1} &= ( 0 \ \dots \ 0 \ 0 \ -1 \ 1 ), \\
 \lambda_1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \dots - \alpha_m &= ( 0 \ \dots \ 0 \ 1 \ -1 \ -1 ), \\
 \lambda_1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \dots - 2\alpha_{m-1} - \alpha_m &= ( 0 \ 0 \ \dots \ 1 \ -1 \ 0 ), \\
 \lambda_1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \dots - \alpha_{m-3} - 2\alpha_{m-2} - 2\alpha_{m-1} - \alpha_m &= ( 0 \ \dots \ 0 \ 1 \ -1 \ 0 \ 0 ), \\
 \lambda_1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \dots - 2\alpha_{m-3} - 2\alpha_{m-2} - \alpha_{m-1} - \alpha_m &= ( 0 \ \dots \ 1 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0 ), \\
 &\vdots \\
 \lambda_1 - \alpha_1 - 2\alpha_2 - \dots - 2\alpha_{m-2} - \alpha_{m-1} - \alpha_m &= ( 1 \ -1 \ 0 \ \dots \ 0 ), \\
 \lambda_1 - 2\alpha_1 - \dots - 2\alpha_{m-2} - \alpha_{m-1} - \alpha_m &= ( -1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 ).
 \end{aligned}$$

Substituindo as raízes simples e  $\lambda_1$  em termos dos vetores ortonormais

$$\begin{aligned}
 \alpha_i &= e_i - e_{i+1}, \quad i = 1, \dots, m-1, \\
 \alpha_m &= e_{m-1} + e_m, \\
 \lambda_1 &= e_1
 \end{aligned}$$

também chegamos em

$$\lambda = \pm e_i, \quad i = 1, \dots, m \tag{4.53}$$

para os pesos da representação definidora do  $D_m$ . Dessa forma, para cada peso  $\pm e_k$ ,  $k = 1, \dots, m$ , das álgebras  $C_m$  ou  $D_m$ , o gerador

$$T_3^{\pm e_k} = \pm \frac{1}{2} e_k \cdot h = \pm \frac{1}{2} h_k = \pm \frac{E_{\alpha_{2k-1}} - E_{-\alpha_{2k-1}}}{2i}$$

satisfaz a condição de quantização (4.51). Além disso,

$$T_3^{\pm e_k} \in \mathfrak{g}_0$$

e basta encontrarmos dois outros geradores de  $\mathfrak{g}$ , que não estão em  $\mathfrak{g}_0$  e que formem uma subálgebra

$\mathfrak{su}(2)$  e assim poderemos realizar a construção da seção 2.3. Esses geradores são

$$\begin{aligned}
 T_3^{\pm e_k} &= \pm \frac{1}{2} e_k \cdot h = \pm \frac{1}{2} h_k = \pm \frac{E_{\alpha_{2k-1}} - E_{-\alpha_{2k-1}}}{2i} \\
 T_1^{\pm e_k} &= \frac{\alpha_{2k-1} \cdot H}{\alpha_{2k-1}^2} \\
 T_2^{\pm e_k} &= \pm \frac{E_{\alpha_{2k-1}} + E_{-\alpha_{2k-1}}}{2}.
 \end{aligned} \tag{4.54}$$

Podemos verificar que, de fato, temos uma subálgebra  $\mathfrak{su}(2)$

$$\begin{aligned}
 [T_1^{\pm e_k}, T_2^{\pm e_k}] &= \pm \frac{\alpha_{2k-1}}{\alpha_{2k-1}^2} \cdot \frac{[H, E_{\alpha_{2k-1}}] + [H, E_{-\alpha_{2k-1}}]}{2} \\
 &= \pm \frac{\alpha_{2k-1}^2}{\alpha_{2k-1}^2} \frac{E_{\alpha_{2k-1}} - E_{-\alpha_{2k-1}}}{2} \\
 &= iT_3^{\pm e_k},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [T_1^{\pm e_k}, T_3^{\pm e_k}] &= \pm \frac{\alpha_{2k-1}}{\alpha_{2k-1}^2} \cdot \frac{[H, E_{\alpha_{2k-1}}] - [H, E_{-\alpha_{2k-1}}]}{2i} \\
 &= \pm \frac{\alpha_{2k-1}^2}{\alpha_{2k-1}^2} \frac{E_{\alpha_{2k-1}} + E_{-\alpha_{2k-1}}}{2i} \\
 &= -iT_2^{\pm e_k},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [T_2^{\pm e_k}, T_3^{\pm e_k}] &= \frac{-[E_{\alpha_{2k-1}}, E_{-\alpha_{2k-1}}] + [E_{-\alpha_{2k-1}}, E_{\alpha_{2k-1}}]}{4i} \\
 &= \frac{-2\alpha_{2k-1} \cdot H - 2\alpha_{2k-1} \cdot H}{4i\alpha_{2k-1}^2} \\
 &= -\frac{\alpha_{2k-1} \cdot H}{i\alpha_{2k-1}^2} \\
 &= iT_1^{\pm e_k},
 \end{aligned}$$

onde usamos (2.5) e (2.6). Portanto

$$[T_i^{\pm e_k}, T_j^{\pm e_k}] = i\epsilon_{ijk} T_k^{\pm e_k}.$$

Podemos construir formas assintóticas de monopolos com cargas magnéticas associadas a outros elementos das classes (4.50). Os geradores associados a esses novos monopolos são uma combinação dos geradores (4.54) e fisicamente esses monopolos seriam uma superposição daqueles discutidos anteriormente. A solução assintótica desses monopolos é da forma discutida na seção 2.3 com os

geradores da subálgebra  $\mathfrak{su}(2)$  dados por

$$\begin{aligned}
 T_3^{\pm\theta_k e_k} &= \pm \sum_{k=1}^m \theta_k e_k \cdot h = \pm \sum_{k=1}^m \theta_k h_k = \pm \sum_{k=1}^m \theta_k \frac{E_{\alpha_{2k-1}} - E_{-\alpha_{2k-1}}}{2i} \\
 T_1^{\pm\theta_k e_k} &= \sum_{k=1}^m \theta_k \frac{\alpha_{2k-1} \cdot H}{\alpha_{2k-1}^2} \\
 T_2^{\pm\theta_k e_k} &= \pm \sum_{k=1}^m \theta_k \frac{E_{\alpha_{2k-1}} + E_{-\alpha_{2k-1}}}{2},
 \end{aligned} \tag{4.55}$$

onde  $\theta_k = 0, 1$  define quais os geradores que estamos usando nas combinações. A comutação entre esses geradores é

$$\begin{aligned}
 [T_1^{\pm\theta_k e_k}, T_2^{\pm\theta_k e_k}] &= \pm \sum_{k,j=1}^m \theta_k \theta_j \frac{\alpha_{2j-1}}{\alpha_{2j-1}^2} \cdot \frac{[H, E_{\alpha_{2k-1}}] + [H, E_{-\alpha_{2k-1}}]}{2} \\
 &= \pm \sum_{k,j=1}^m \theta_k \theta_j \frac{K_{2k-1,2j-1}}{2} \frac{E_{\alpha_{2k-1}} - E_{-\alpha_{2k-1}}}{2} \\
 &= \pm \sum_{k,j=1}^m \theta_k \theta_j \frac{2\delta_{kj}}{2} \frac{E_{\alpha_{2k-1}} - E_{-\alpha_{2k-1}}}{2} \\
 &= \pm \sum_{j=1}^m \theta_j \frac{E_{\alpha_{2k-1}} - E_{-\alpha_{2k-1}}}{2} \\
 &= iT_3^{\pm\theta_k e_k},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [T_1^{\pm\theta_k e_k}, T_3^{\pm\theta_k e_k}] &= \pm \sum_{k,j=1}^m \theta_k \theta_j \frac{\alpha_{2j-1}}{\alpha_{2j-1}^2} \cdot \frac{[H, E_{\alpha_{2k-1}}] - [H, E_{-\alpha_{2k-1}}]}{2i} \\
 &= \pm \sum_{k,j=1}^m \theta_k \theta_j \frac{K_{2k-1,2j-1}}{2} \frac{E_{\alpha_{2k-1}} + E_{-\alpha_{2k-1}}}{2i} \\
 &= \pm \sum_{k,j=1}^m \theta_k \theta_j \frac{2\delta_{kj}}{2} \frac{E_{\alpha_{2k-1}} + E_{-\alpha_{2k-1}}}{2i} \\
 &= \pm \sum_{j=1}^m \theta_j \frac{E_{\alpha_{2k-1}} + E_{-\alpha_{2k-1}}}{2i} \\
 &= -iT_2^{\pm\theta_k e_k},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [T_2^{\pm\theta_k e_k}, T_3^{\pm\theta_k e_k}] &= \sum_{k,j=1}^m \theta_j \theta_k \frac{-[E_{\alpha_{2j-1}}, E_{-\alpha_{2k-1}}] + [E_{-\alpha_{2j-1}}, E_{\alpha_{2k-1}}]}{4i} \\
 &= \sum_{k,j=1}^m \theta_j \theta_k \delta_{jk} \left( \frac{-2\alpha_{2j-1} \cdot H}{4i\alpha_{2j-1}^2} - \frac{2\alpha_{2k-1} \cdot H}{4i\alpha_{2k-1}^2} \right) \\
 &= -\sum_{j=1}^m \theta_j \frac{\alpha_{2j-1} \cdot H}{i\alpha_{2j-1}^2} \\
 &= iT_1^{\pm\theta_k e_k},
 \end{aligned}$$

onde  $K_{jk}$  é a matriz de Cartan da álgebra  $A_n$ .

A solução assintótica correspondente a superposição dos monopolos (4.54), os quais chamaremos de monopolos fundamentais, é então construída a partir dos geradores (4.55). Através dessa superposição podemos compreender o que significa a natureza  $\mathbb{Z}_2$  desses monopolos. Para isso, nos perguntamos: o que acontece quando superpomos dois monopolos fundamentais  $\mathbb{Z}_2$ ? Usando (2.19) podemos sempre escrever qualquer peso de uma irrep. em termos das raízes simples da álgebra. Para a álgebra  $C_m$ , o peso fundamental  $\lambda_1$  pode ser escrito como

$$\lambda_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{m-1} + \frac{1}{2}\alpha_m$$

e para a álgebra  $D_m$

$$\lambda_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{m-2} + \frac{1}{2}(\alpha_{m-1} + \alpha_m).$$

Em ambos os casos vemos que  $2\lambda_1 \in \Lambda_r(\text{Spin}(n)^\vee)$  e portanto uma combinação de um número par de monopolos fundamentais  $\mathbb{Z}_2$  está na classe  $\Lambda_r(\text{Spin}(n)^\vee)$ , associada ao elemento trivial  $\mathbb{I}$  do grupo cíclico  $\mathbb{Z}_2$ , enquanto que uma combinação de um número ímpar desses monopolos está na classe  $\lambda_1 + \Lambda_r(\text{Spin}(n)^\vee)$ , associada ao elemento não trivial  $-\mathbb{I}$  de  $\mathbb{Z}_2$ . Devemos notar ainda que duas configurações pertencentes a mesma classe não possuem, necessariamente, mesma carga magnética  $G$ , conforme discutido no final da seção 2.3.

### 4.3.2 $\mathfrak{so}(2m+1)$ invariante por automorfismo de externo

Para a quebra na subálgebra  $\mathfrak{so}(2m+1)$  invariante por automorfismo externo, procedemos da seguinte maneira: como vimos, os monopolos associados ao setor topológico não trivial estão associados a subálgebras  $\mathfrak{su}(2) \subset \mathfrak{su}(2m+1)$ , onde, pela equação (4.49), devemos ter

$$T_3^\beta = \frac{\beta \cdot H}{2},$$

com

$$\beta = \frac{e\omega}{2\pi} = \lambda_{(1)}^\vee + \sum_{i=1}^m c_{(i)} \alpha_{(i)}^\vee, \quad (4.56)$$



onde  $c_{\langle i \rangle} \in \mathbb{N}$ ,  $\lambda_{\langle 1 \rangle}^\vee$  e  $\alpha_{\langle i \rangle}^\vee$  são, respectivamente, co-pesos e co-raízes de  $B_m$ , dados pelas equações (4.47). Usando essas equações e o fato que

$$\lambda_{\langle 1 \rangle}^\vee = \lambda_1 + \lambda_{2m} = \psi = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{2m},$$

onde  $\psi$  é a raiz mais alta de  $A_{2m}$ , podemos concluir que

$$\beta = \sum_{i=1}^m n_i (\alpha_i + \alpha_{2m+2-i}), \quad n_i \in \mathbb{N}. \quad (4.57)$$

Portanto,  $\beta$  pertence a um subespaço de  $\Lambda_r(\mathfrak{su}(2m+1))$  invariante pela transformação  $\tau$  de dobradura da álgebra  $\mathfrak{su}(2m+1)$ . O fato de, ao mesmo tempo,  $\beta \in \Lambda_w(\text{Spin}(2m+1)^\vee)$  e  $\beta \in \Lambda_r(\text{SU}(2m+1))$  está consistente com a propriedade de que as cargas magnéticas não-abelianas estão associadas a elementos não triviais de  $\pi_1(\text{Spin}(n)/\mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$  que correspondem ao elemento identidade de  $\pi_1(\text{SU}(n)) = \{\mathbb{I}\}$ . A fim de formarmos uma álgebra  $\mathfrak{su}(2)$  com  $T_1^\beta, T_2^\beta \in A_{2m}$ ,  $T_1^\beta, T_2^\beta \notin B_m$ , podemos considerar

$$\begin{aligned} T_3^\beta &= \frac{\beta \cdot H}{2} = \frac{\beta \cdot H}{\beta^2}, \\ T_1^\beta &= \frac{E_\beta + E_{-\beta}}{2}, \\ T_2^\beta &= \frac{E_\beta - E_{-\beta}}{2i}, \end{aligned} \quad (4.58)$$

onde  $\beta$  deve ser uma raiz de  $A_{2m}$ , e portanto,  $\beta^2 = 2$ . Lembrando que as raízes de  $A_{2m}$  são da forma

$$\alpha_p + \alpha_{p+1} + \alpha_{p+2} + \dots + \alpha_{p+q},$$

onde  $0 \leq q \leq 2m-p$  e que  $\beta$  deve satisfazer a equação (4.57), chegamos a conclusão que para uma subálgebra  $\mathfrak{su}(2)$  com  $T_1^\beta$  e  $T_2^\beta$  dados por (4.58),  $\beta$  deverá ser algum elemento do conjunto

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{2m} &= \lambda_1 + \lambda_{2m} = \psi = \lambda_{\langle 1 \rangle}^\vee, \\ \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_{2m-1} &= \lambda_{\langle 1 \rangle}^\vee - \alpha_{\langle 1 \rangle}^\vee, \\ &\vdots \\ \alpha_m + \alpha_{m+1} &= \lambda_{\langle 1 \rangle}^\vee - \alpha_{\langle 1 \rangle}^\vee - \dots - \alpha_{\langle m-1 \rangle}^\vee, \\ -(\alpha_m + \alpha_{m+1}) &= \lambda_{\langle 1 \rangle}^\vee - \alpha_{\langle 1 \rangle}^\vee - \dots - \alpha_{\langle m \rangle}^\vee, \\ -(\alpha_{m-1} + \alpha_m + \alpha_{m+1} + \alpha_{m+2}) &= \lambda_{\langle 1 \rangle}^\vee - \alpha_{\langle 1 \rangle}^\vee - \dots - 2\alpha_{\langle m-1 \rangle}^\vee - \alpha_{\langle m \rangle}^\vee, \\ &\vdots \\ -(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{2m}) &= \lambda_{\langle 1 \rangle}^\vee - 2\alpha_{\langle 1 \rangle}^\vee - \dots - 2\alpha_{\langle m-1 \rangle}^\vee - \alpha_{\langle m \rangle}^\vee. \end{aligned} \quad (4.59)$$

Como os co-pesos e co-raízes de  $B_m$  são, respectivamente, pesos e raízes de  $C_m$ , comparando (4.59) com (4.52), podemos ver que  $\beta$  é um peso da representação definidora de  $C_m$ , além de ser uma raiz

de  $A_{2m}$ . Resta mostrarmos que  $T_1^\beta, T_2^\beta \notin B_m$ . A fim de fazermos isso, vamos escrever as raízes listadas em (4.59) em termos dos vetores unitários  $e_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 2m + 1$ . Como as raízes simples de  $A_{2m}$  são escritas como  $\alpha_i = e_i - e_{i+1}$ , temos que as raízes em (4.59) são da forma

$$e_p - e_{2m+2-p}, \quad p = 1, 2, \dots, m. \quad (4.60)$$

O operador degrau associado à raiz (4.60) é igual, a menos de uma constante, a matriz  $E_{p,2m+2-p}$ . Escrevendo  $T_1^\beta$  e  $T_2^\beta$  em termos dessas matrizes e aplicando no vácuo (4.48) obtemos

$$\begin{aligned} T_1^{e_p - e_{2m+2-p}} \phi_0 &\propto (E_{p,2m+2-p} - E_{2m+2-p,p}) v \sum_{l=1}^{2m+1} (-1)^{l+1} |e_l\rangle \otimes |e_{n-l+1}\rangle \\ &= 2(-1)^{p+1} v (|e_p\rangle \otimes |e_p\rangle + |e_{2m+2-p}\rangle \otimes |e_{2m+2-p}\rangle) \\ &\neq 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_2^{e_p - e_{2m+2-p}} \phi_0 &\propto (E_{p,2m+2-p} + E_{2m+2-p,p}) v \sum_{l=1}^{2m+1} (-1)^{l+1} |e_l\rangle \otimes |e_{n-l+1}\rangle \\ &= 2(-1)^{p+1} v (|e_p\rangle \otimes |e_p\rangle - |e_{2m+2-p}\rangle \otimes |e_{2m+2-p}\rangle) \\ &\neq 0, \end{aligned}$$

pois  $p = 2m + 2 - p$  implica em  $p = m + 1$ , que nunca ocorre. Portanto  $T_1^\beta, T_2^\beta \notin \mathfrak{g}_0$ . A partir dessas subálgebras  $\mathfrak{su}(2)$ , podemos construir as soluções assintóticas como indicado na seção 2.3 e novamente temos um monopolo associado a cada peso da representação definidora da álgebra  $\mathfrak{so}(2m+1)^\vee = \mathfrak{sp}(2m)$ . Da mesma forma que na quebra com automorfismo de Cartan, podemos construir soluções a partir da combinação dos geradores de (4.58). Estas soluções provém da subálgebra  $\mathfrak{su}(2)$  gerada por

$$\begin{aligned} T_3^{\theta_p(e_p - e_{2m+2-p})} &= \sum_{p=1}^m \theta_p \frac{(e_p - e_{2m+2-p}) \cdot H}{2} = \sum_{p=1}^m \theta_p \frac{(e_p - e_{2m+2-p}) \cdot H}{(e_p - e_{2m+2-p})^2}, \\ T_1^{\theta_p(e_p - e_{2m+2-p})} &= \sum_{p=1}^m \theta_p \frac{E_{(e_p - e_{2m+2-p})} + E_{-(e_p - e_{2m+2-p})}}{2}, \\ T_2^{\theta_p(e_p - e_{2m+2-p})} &= \sum_{p=1}^m \theta_p \frac{E_{(e_p - e_{2m+2-p})} - E_{-(e_p - e_{2m+2-p})}}{2i}, \end{aligned} \quad (4.61)$$

onde  $\theta_p = 0, 1$  e  $p = 1, \dots, m$ .

## Capítulo 5

### Conclusões

Nessa dissertação, inicialmente, revisamos soluções de monopolos magnéticos, em geral, e dualidades eletromagnéticas em teorias sem supersimetria. Como resultados novos, conseguimos construir, explicitamente, a forma assintótica das soluções de monopolos  $\mathbb{Z}_2$  em uma teoria de Yang-Mills-Higgs com simetria de gauge  $SU(n)$  quebrada espontaneamente em  $Spin(n)/\mathbb{Z}_2$  por automorfismo de Cartan e automorfismo externo. Essas soluções de monopolo obtidas estão associadas a subálgebras  $\mathfrak{su}(2) \subset \mathfrak{su}(n)$  que, por sua vez, estão associadas de maneira um para um com os pesos da representação definidora do  $\mathfrak{so}(n)^\vee$ . Chamamos os monopolos construídos a partir dessas subálgebras de monopolos fundamentais. Também conseguimos criar superposições dos geradores associados a esses monopolos, gerando novamente subálgebras  $\mathfrak{su}(2)$ , associadas a monopolos que acreditamos corresponder à superposições dos monopolos fundamentais.

Temos como possíveis continuidades do nosso trabalho:

- Verificar se o monopolo  $\mathbb{Z}_2$  é mapeado, sob transformação de dualidade, em alguma partícula em uma teoria dual. Para tanto, devemos obter as propriedades do monopolo  $\mathbb{Z}_2$  no caso BPS. Em [17] foram apresentadas condições BPS para um monopolo  $\mathbb{Z}_n$ , contudo, essas condições possuem uma forma um tanto mais complicada que as das condições BPS para outros sólitons.
- Analisar o confinamento do monopolo  $\mathbb{Z}_2$  por formação de tubos de fluxo. Nesse modelo o confinamento se dá após duas quebras espontâneas de simetria [21]. A primeira etapa, que é onde surgem os monopolos, chamada de fase de Coulomb, foi estudada nessa dissertação. Na segunda etapa da quebra, devemos ter o  $Spin(n)$  quebrado em algum subgrupo de seu centro. Nessa etapa, chamada fase de Higgs, surgem os tubos de fluxo que ligariam e confinariam as cargas magnéticas.
- Generalizar os resultados obtidos para soluções de monopolo  $\mathbb{Z}_n$  em teorias de Yang-Mills-Higgs com outros grupos de gauge.

## Apêndice A

### Casos Especiais

Os resultados obtidos no capítulo 2, certamente, valem para as quebras

$$A_{2m} \rightarrow B_m, \quad m \geq 3,$$

$$A_{2m-1} \rightarrow D_m, \quad m \geq 4,$$

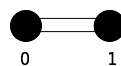
pois não há nenhuma peculiaridade com as álgebras  $B_m$ ,  $m \geq 3$  e  $D_m$ ,  $m \geq 4$ . Já para as demais álgebras  $\mathfrak{g}_0$ , correspondendo a  $\mathfrak{so}(3)$ ,  $\mathfrak{so}(4)$ ,  $\mathfrak{so}(5)$  e  $\mathfrak{so}(6)$ , devemos analisar caso a caso, pois podem haver problemas associadas aos seus diagramas de Dynkin.

- $\mathfrak{su}(3) \rightarrow \mathfrak{so}(3) \cong A_2 \rightarrow A_1$

A álgebra  $A_1$  possui o seguinte diagrama de Dynkin



e o diagrama de Dynkin estendido



Assim temos o centro

$$\mathcal{Z}(\mathrm{SU}(2)) \cong \{ \exp(2\pi i \gamma^\vee \cdot h), \exp [2\pi i (\gamma^\vee + \lambda_1^\vee) \cdot h] \}.$$

A decomposição da irrep. com  $\Lambda = \lambda_1$  do  $A_2$  no  $A_1$  é [39]

$$(1 \ 0) \simeq (2).$$

Aplicando os elementos de  $\mathcal{Z}(\mathrm{SU}(2))$  nos vetores da irrep. com  $\Lambda = 2\lambda_1$  do  $A_1$  obtemos<sup>1</sup>

$$\exp(2\pi i \gamma^\vee \cdot h) |2\lambda_1 - \beta\rangle = |2\lambda_1 - \beta\rangle,$$

$$\exp [2\pi i (\gamma^\vee + \lambda_1^\vee) \cdot h] |2\lambda_1 - \beta\rangle = |2\lambda_1 - \beta\rangle$$

e assim,

$$\widehat{G}_0 \cong \frac{\mathrm{SU}(2)}{\mathbb{Z}_2} \cong \mathrm{SO}(3).$$

Como

$$\pi_1(\mathrm{SO}(3)) = \mathbb{Z}_2$$

temos que o resultado da seção 4.1 também se aplica a esse caso, em particular.

- $\mathfrak{su}(4) \rightarrow \mathfrak{so}(4) \cong A_3 \rightarrow A_1 \oplus A_1$

O diagrama de Dynkin da álgebra semi-simples  $A_1 \oplus A_1$  é



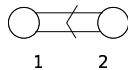
de onde podemos ver que a álgebra  $A_1 \oplus A_1$  não é simples. Iremos portanto desconsiderar este caso.

- $\mathfrak{su}(5) \rightarrow \mathfrak{so}(5) \cong A_4 \rightarrow (B_2 \cong C_2)$

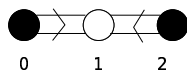
Para a álgebra  $B_2 \cong C_2$  temos o diagrama

---

<sup>1</sup>Lembrando que as álgebras  $A_n$  são auto-duais e, assim,  $\gamma^\vee = \gamma$  e  $\lambda_i^\vee = \lambda_i$ .



O diagrama estendido correspondente é



e, portanto, temos o centro

$$\mathcal{Z}(\mathrm{Sp}(4)) = \mathbb{Z}_2 \cong \{ \exp(2\pi i \gamma^\vee \cdot h), \exp [2\pi i (\gamma^\vee + \lambda_2^\vee) \cdot h] \}.$$

A decomposição da representação  $\Gamma_{\lambda_1}$  do  $A_4$  no  $C_2$  é

$$(1 \ 0 \ 0 \ 0) \simeq (0 \ 1).$$

A ação dos elementos de  $\mathcal{Z}(\mathrm{Sp}(4))$  nos vetores da irrep. com  $\Lambda = \lambda_2$  da álgebra  $C_2$  é

$$\exp(2\pi i (\gamma^\vee \cdot h) | \lambda_2 - \beta \rangle = | \lambda_2 - \beta \rangle,$$

$$\exp [2\pi i (\gamma^\vee + \lambda_2^\vee) \cdot h] | \lambda_2 - \beta \rangle = | \lambda_2 - \beta \rangle$$

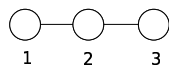
e obtemos

$$\widehat{G}_0 \cong \frac{\mathrm{Spin}(5)}{\mathbb{Z}_2} \cong \mathrm{SO}(5),$$

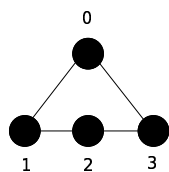
$$\pi_1(\mathrm{SO}(5)) = \mathbb{Z}_2.$$

- $\mathfrak{su}(6) \rightarrow \mathfrak{so}(6) \cong A_5 \rightarrow A_3$

O diagrama de Dynkin da álgebra  $A_3$  é



O diagrama estendido da álgebra  $A_3$  é



e

$$\mathcal{Z}(SU(4)) \cong \left\{ \exp(2\pi i \gamma^\vee \cdot h), \exp [2\pi i (\gamma^\vee + \lambda_1^\vee) \cdot h], \right. \\ \left. \exp [2\pi i (\gamma^\vee + \lambda_2^\vee) \cdot h], \exp [2\pi i (\gamma^\vee + \lambda_3^\vee) \cdot h] \right\}.$$

A ação desses elementos nos estados da representação correspondente a decomposição

$$(1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0) \simeq (0 \ 1 \ 0)$$

é

$$\begin{aligned} \exp [2\pi i (\gamma^\vee) \cdot h] |\lambda_2 - \beta\rangle &= |\lambda_2 - \beta\rangle, \\ \exp [2\pi i (\gamma^\vee + \lambda_1^\vee) \cdot h] |\lambda_2 - \beta\rangle &\neq |\lambda_2 - \beta\rangle, \\ \exp [2\pi i (\gamma^\vee + \lambda_2^\vee) \cdot h] |\lambda_2 - \beta\rangle &= |\lambda_2 - \beta\rangle, \\ \exp [2\pi i (\gamma^\vee + \lambda_3^\vee) \cdot h] |\lambda_2 - \beta\rangle &\neq |\lambda_2 - \beta\rangle. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\widehat{G}_0 \cong \frac{SU(4)}{\mathbb{Z}_2}$$

e

$$\pi_1 \left( \frac{SU(4)}{\mathbb{Z}_2} \right) = \mathbb{Z}_2.$$

Podemos, portanto, afirmar que o resultado

$$\pi_2(G/G_0) = \pi_2(\tilde{G}/\hat{G}_0) = \mathbb{Z}_2$$

para a quebra

$$\mathfrak{su}(n) \rightarrow \mathfrak{so}(n),$$

vale para todo  $n \geq 3$  com  $\mathfrak{g}_0$  simples.



## Apêndice B

### Tabelas

Tabela B.1: Álgebras de Lie simples

$\mathfrak{g}$	Diagrama de Dynkin estendido	$\tilde{G}$	$Z(\mathfrak{g})$
$\mathfrak{su}(n+1) = A_n$		$SU(n+1)$	$\mathbb{Z}_{n+1}$
$\mathfrak{so}(2n+1) = B_n$		$Spin(2n+1)$	$\mathbb{Z}_2$
$\mathfrak{sp}(2n) = C_n$		$Sp(2n)$	$\mathbb{Z}_2$
$\mathfrak{so}(4n) = D_{2n}$		$Spin(4n)$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
$\mathfrak{so}(4n+2) = D_{2n+1}$		$Spin(4n+2)$	$\mathbb{Z}_4$
$E_6$		$E_6$	$\mathbb{Z}_3$
$E_7$		$E_7$	$\mathbb{Z}_2$
$E_8$		$E_8$	$\mathbb{I}$
$F_4$		$F_4$	$\mathbb{I}$
$G_2$		$G_2$	$\mathbb{I}$

Tabela B.2: Matrizes de Cartan

$$K(A_m) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$K(B_m) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$K(C_m) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$K(D_m) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$K(E_6) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$K(E_7) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$K(E_8) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$K(F_4) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$K(G_2) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Tabela B.3: Formas quadráticas

$$M(A_n) = \frac{1}{n+1} \begin{pmatrix} 1 \cdot n & 1 \cdot (n-1) & 1 \cdot (n-2) & \dots & 1 \cdot 2 & 1 \cdot 2 \\ 1 \cdot (n-1) & 2 \cdot (n-1) & 2 \cdot (n-2) & \dots & 2 \cdot 2 & 2 \cdot 1 \\ 1 \cdot (n-2) & 2 \cdot (n-2) & 3 \cdot (n-2) & \dots & 3 \cdot 2 & 3 \cdot 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 1 \cdot 2 & 2 \cdot 2 & (n-1) \cdot 2 & \dots & (n-1) \cdot 2 & (n-1) \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 & 2 \cdot 1 & (n-1) \cdot 1 & \dots & (n-1) \cdot 1 & n \cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$M(B_n) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & \dots & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & \dots & 6 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 2 & 4 & 6 & \dots & 2 \cdot (n-1) & n-1 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & \frac{n}{2} \end{pmatrix}$$

$$M(C_m) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n-1 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \end{pmatrix}$$

$$M(D_m) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & \dots & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & \dots & 6 & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2 & 4 & 6 & \dots & 2 \cdot (n-2) & n-2 & n-2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & \frac{n}{2} & \frac{n-2}{2} \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & \frac{n-2}{2} & \frac{n}{2} \end{pmatrix}$$

$$M(E_6) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 4 & 2 & 3 \\ 5 & 10 & 12 & 8 & 4 & 6 \\ 6 & 12 & 18 & 12 & 6 & 9 \\ 4 & 8 & 12 & 10 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 5 & 4 & 3 \\ 3 & 6 & 9 & 6 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$M(E_7) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 & 6 & 4 & 2 & 4 \\ 6 & 12 & 16 & 12 & 8 & 4 & 8 \\ 8 & 16 & 24 & 18 & 12 & 6 & 12 \\ 6 & 12 & 18 & 15 & 10 & 5 & 9 \\ 4 & 8 & 12 & 10 & 8 & 4 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 5 & 4 & 3 & 3 \\ 4 & 8 & 12 & 9 & 6 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

$$M(E_8) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 8 & 10 & 12 & 8 & 4 & 6 \\ 4 & 8 & 12 & 15 & 18 & 12 & 6 & 9 \\ 5 & 10 & 15 & 20 & 24 & 16 & 8 & 12 \\ 6 & 12 & 18 & 24 & 30 & 20 & 10 & 15 \\ 4 & 8 & 12 & 16 & 20 & 14 & 7 & 10 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 7 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 9 & 12 & 15 & 10 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

$$M(F_4) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & \frac{3}{2} \\ 1 & 2 & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$M(G_2) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Tabela B.4: Grupos de homotopia

$G$	$\pi_1(G)$	$\pi_2(G)$	$\pi_3(G)$
$SU(n)$	$\{\mathbb{I}\}$	$\{\mathbb{I}\}$	$\mathbb{Z}$
$SO(n), n \neq 4$	$\mathbb{Z}_2$	$\{\mathbb{I}\}$	$\mathbb{Z}$
$Spin(n), n \neq 4$	$\{\mathbb{I}\}$	$\{\mathbb{I}\}$	$\mathbb{Z}$
$Sp(n)$	$\{\mathbb{I}\}$	$\{\mathbb{I}\}$	$\mathbb{Z}$
$E_6$	$\{\mathbb{I}\}$	$\{\mathbb{I}\}$	$\mathbb{Z}$
$E_7$	$\{\mathbb{I}\}$	$\{\mathbb{I}\}$	$\mathbb{Z}$
$E_8$	$\{\mathbb{I}\}$	$\{\mathbb{I}\}$	$\mathbb{Z}$
$F_4$	$\{\mathbb{I}\}$	$\{\mathbb{I}\}$	$\mathbb{Z}$
$G_2$	$\{\mathbb{I}\}$	$\{\mathbb{I}\}$	$\mathbb{Z}$
$SO(4)$	$\mathbb{Z}_2$	$\{\mathbb{I}\}$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
$Spin(4)$	$\{\mathbb{I}\}$	$\{\mathbb{I}\}$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
$U(1)$	$\mathbb{Z}$	$\{\mathbb{I}\}$	$\{\mathbb{I}\}$
$\pi_n(G_1 \times G_2) \cong \pi_n(G_1) \times \pi_n(G_2)$			

## Referências Bibliográficas

- [1] DIRAC, P. Quantised singularities in the electromagnetic field. *Proc. Roy. Soc. Lond.*, v. A133, p. 60, 1931. [1](#), [17](#)
- [2] 'T HOOFT, G. Magnetic monopoles in unified gauge theories. *Nucl. Phys.*, v. B79, p. 276, 1974. [1](#), [20](#)
- [3] POLYAKOV, A. Particle spectrum in quantum field theory. *JETP Lett.*, v. 20, p. 194, 1974. [1](#), [20](#)
- [4] GEORGI, H.; GLASHOW, S. L. Unified weak and electromagnetic interactions without neutral currents. *Phys. Rev. Lett.*, v. 28, p. 1494, 1972. [1](#)
- [5] ENGLERT, F.; WINDEY, P. Quantization condition for 't Hooft monopoles in compact simple Lie groups. *Phys. Rev.*, v. D14, p. 2728, 1976. [1](#), [24](#)
- [6] GEORGI, H.; GLASHOW, S. L. Unity of all elementary-particle forces. *Phys. Rev. Lett.*, v. 32, p. 438, 1974. [1](#)
- [7] WEINBERG, E.; LONDON, D.; ROSNER, L. Magnetic monopoles with  $\mathbb{Z}_n$  charges. *Nucl. Phys.*, v. B236, p. 90, 1984. [1](#), [2](#), [13](#), [15](#)
- [8] GIACOMELLI, G.; PATRIZII, L. Magnetic monopoles searches. *arXiv:hep-ex/0302011v2*, 2003. [1](#)
- [9] GODDARD, P.; NUYTS, J.; OLIVE, D. Gauge theories and magnetic charges. *Nucl. Phys.*, v. B125, p. 1, 1977. [2](#), [11](#), [18](#)
- [10] MONTONEN, C.; OLIVE, D. Magnetic monopoles as gauge particles? *Phys. Lett.*, v. B72, p. 117, 1977. [2](#), [22](#), [23](#)
- [11] BAIS, A. Charge-monopole duality in spontaneously broken gauge theories. *Phys. Rev. D*, v. 18, p. 1206, 1978. [2](#), [23](#), [24](#)
- [12] SEN, A. Dyon-monopole bound states, self-dual harmonic forms on the multi-monopole moduli space, and  $sl(2, \mathbb{Z})$  invariance in string theory. *Phys. Lett.*, v. B329, p. 217, 1994. [2](#)
- [13] SEIBERG, N.; WITTEN, E. Monopole condensation and confinement in  $N = 2$  supersymmetric Yang-Mills theory. *Nucl. Phys.*, v. B426, p. 19, 1994. [2](#)
- [14] SEIBERG, N.; WITTEN, E. Monopoles, duality and chiral symmetry breaking in  $N = 2$  supersymmetric QCD. *Nucl. Phys.*, v. B431, p. 484, 1994. [2](#)
- [15] VAFA, C.; WITTEN, E. A strong coupling test of S duality. *Nucl. Phys.*, v. B431, p. 3, 1994. [2](#)

- [16] GODDARD, P.; OLIVE, D. Magnetic monopoles in gauge field theories. *Rep. Prog. Phys.*, v. 41, p. 1357, 1978. [2](#), [28](#), [29](#)
- [17] BAIS, F.; LATERVEER, R. Exact regular  $\mathbb{Z}_N$  monopoles solutions in gauge theories with non-adjoint Higgs representation. *Nucl. Phys.*, v. B307, p. 487, 1988. [2](#), [31](#), [45](#)
- [18] 'T HOOFT, G. in *Proceed. of Euro. Phys. Soc.*, 1975. [2](#)
- [19] MANDELSTAM, S. Vortices and quark confinement in nonabelian gauge theories. *Phys. Rep. C*, v. 23, p. 245, 1976. [2](#)
- [20] KNEIPP, M. A. C.  $Z(k)$  string fluxes and monopole confinement in non-Abelian theories. *Phys. Rev.*, v. D68, p. 045009, 2003. [2](#)
- [21] KNEIPP, M. A. C. Color superconductivity,  $Z(N)$  flux tubes and monopole confinement in deformed  $N = 2^*$  super Yang-Mills theories. *Phys. Rev.*, v. D69, p. 045007, 2004. [2](#), [15](#), [45](#)
- [22] STRASSLER, M. J. Duality, phases, spinors and monopoles in  $SO(N)$  and  $Spin(N)$  gauge theories. *JHEP*, v. 09, p. 017, 1998. [3](#)
- [23] KNEIPP, M.; LIEBGOTT, P. *em preparação*. [3](#)
- [24] HUMPHREYS, J. *Introduction to Lie algebras and representation theory*. Springer, 1994. [4](#)
- [25] FUCHS, J.; SCHWEIGERT, C. *Symmetries, Lie algebras and representations: A graduate course for physicists*. Cambridge University Press, 2003. [4](#)
- [26] CAHN, R. *Semi-Simple Lie algebras and their representations*. Dover Publications, 2006. [4](#)
- [27] CHRIST, N. H. Theory of magnetic monopoles with non-abelian gauge symmetry. *Phys. Rev. Lett.*, v. 34, p. 355, 1975. [10](#)
- [28] GOLDSTONE, J. Lectures in cambridge university. *unpublished*, 1976. [10](#)
- [29] ZWANZIGER, D. Quantum field theory of particles with both electric and magnetic charges. *Phys. Rev.*, v. 176, p. 1489, 1968. [17](#)
- [30] SCHWINGER, J. A magnetic model of matter. *Science*, Washington, v. 165, p. 757, 1969. [17](#)
- [31] GODDARD, P.; OLIVE, D. Charge quantization in theories with an adjoint representation Higgs mechanism. *Nucl. Phys. B*, v. 191, p. 511, 1981. [19](#)
- [32] BOGOMOLNY, E. Stability of classical solutions. *Sov. J. Nucl. Phys.*, v. 24, p. 449, 1976. [19](#)
- [33] MANTON, N. The force between 't Hooft-Polyakov monopoles. *Nucl. Phys.*, v. B126, p. 525, 1977. [23](#)
- [34] OSBORN, H. Topological charges for  $N = 4$  supersymmetric gauge theories and monopoles of spin 1. *Phys. Lett.*, v. 83B, p. 321, 1979. [23](#)
- [35] WEINBERG, S. *Quantum field theory*. Cambridge University Press, 1996. [29](#)
- [36] CORNWELL, J. *Group theory in physics*. Academic Press, 1984. [29](#)
- [37] OLIVE, D.; TUROK, N. The symmetries of Dynkin diagrams and the reduction of Toda field equations. *Nucl. Phys.*, v. B215, p. 470, 1983. [30](#), [32](#)

- [38] OLIVE, D.; TUROK, N.; UNDERWOOD, J. Affine Toda solitons and vertex operators. *Nucl. Phys.*, v. B409, p. 509, 1993. [30](#)
- [39] SLANSKY, R. Group theory for unified model building. *Phys. Rept.*, v. 79, p. 1, 1981. [47](#)