

Aproximação de dois modos aplicada ao estudo de condensados de Bose-Einstein em poços duplos

AUTOR¹:

THIAGO DE CACIO LUCHESE

ORIENTADOR:

FREDERICO FIRMO DE SOUZA CRUZ

Dissertação apresentada à Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Santa Catarina, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

UFSC - Florianópolis
Março de 2009

¹Este trabalho contou com o apoio financeiro do CNPq

Digno és, Jeová, sim, nosso Deus, de receber a glória, e a honra, e o poder, porque criaste todas as coisas e porque elas existiram e foram criadas por tua vontade. - Revelação (Apocalipse) 4:11

Agradecimentos

Sou grato aos meus pais, à minha irmã e ao meu irmão, que permitiram e apoiaram a realização do sonho de estudar Física de um modo mais profundo.

Sou grato à paciência de meu orientador e às úteis conversas com o meu colega Emerson Luiz Lapoli.

Finalmente, sou grato ao apoio e compreensão dados, na parte final do trabalho, pela minha querida companheira Schelka Monalisa Linden.

Resumo

Revisamos brevemente o fenômeno da condensação de Bose-Einstein em poços simples e duplos e a utilização da aproximação de dois modos para descrever os condensados duplos espaciais. Usando a aproximação de dois modos para descrever o duplo condensado espacial encontramos a hamiltoniana semiclássica que descreve o sistema seguindo dois caminhos distintos de obtenção da descrição semiclássica, campo médio e segunda quantização, e notamos a consistência entre os resultados encontrados.

Analizamos detalhadamente o comportamento da superfície hamiltoniana semiclássica ao serem variados, independentemente, as magnitudes de cada um dos três parâmetros nela presentes.

Notamos que o forçamento periódico do parâmetro de tunelamento de um corpo da hamiltoniana por um tempo determinado possibilita modificar de modo controlado o regime dinâmico em que o sistema se encontra. Isso abre as portas para o controle de população em cada um dos poços de uma armadilha de duplo poço.

Finalmente, em uma analogia com um pêndulo de pivô verticalmente forçado, apresentamos a hamiltoniana média resultante do forçamento periódico a altas frequências do termo de tunelamento de um corpo, resultado este válido somente para os regimes dinâmicos em que a diferença de população é muito pequena.

Palavras Chave: Condensação de Bose-Einstein, Junções Bose-Josephson.

Abstract

We reviewed briefly the phenomenon of Bose-Einstein Condensation in simple and double traps and the use of the two mode approximation to describe the spatial double condensates. Using the two mode approximation to describe the spatial double condensate, we deduce the semiclassical hamiltonian that describes the system by two distinct ways: mean-field and second quantization. We note the consistency between the encountered results.

We present a detailed analysis of the semiclassical hamiltonian surface's behavior when we vary, independently, the magnitudes of each one of its three parameters.

We note that the periodic forcing of the hamiltonian's tunneling parameter of one body by a predicted time is able to modify, in a controlled manner, the dynamical regime where the system is evolving. This opens the possibility to control the population in each of the wells of a double trap.

Finally, in analogy with the treatment given to a pendulum whose pivot is vertically forced, we treat this problem and encounter an effective hamiltonian resulting of the continuous periodic forcing of the hamiltonian's tunneling parameter of one body. This result is valid only to the dynamical regimes where the relative population imbalance is much less than one.

Keywords: Bose-Einstein condensation, Bose-Josephson junction.

Sumário

1	Introdução	7
2	Condensados de Bose-Einstein	10
2.1	A realização de um duplo condensado de Bose-Einstein	12
2.2	Breve comentário sobre a aproximação de dois modos	14
3	Dinâmica semiclássica de um condensado duplo	15
3.1	Hamiltoniana semiclássica e a teoria de campo-médio	15
3.2	Hamiltoniana semiclássica e a segunda quantização	17
3.3	Similaridade entre hamiltoniana semiclássica e hamiltoniana de pêndulo simples	21
4	Superfície Hamiltoniana Semiclássica	23
4.1	Estudo de $H(z, \phi)$ com $A = 0$	24
4.1.1	Subcaso 1: $B, C > 0$	24
4.1.2	Subcaso 2: $B > 0$ e $C < 0$	26
4.1.3	Subcaso 3: $B < 0$ e $C > 0$	26
4.1.4	Subcaso 4: $B, C < 0$	33
4.2	Estudo de $H(z, \phi)$ com $A > 0$	33
4.2.1	Subcaso 1: $B, C > 0$	34
4.2.2	Subcaso 2: $B > 0, C < 0$	39
4.2.3	Subcaso 3: $B < 0, C > 0$	53
4.2.4	Subcaso 4: $B, C < 0$	53
4.3	Estudo de $H(z, \phi)$ com $A < 0$	60
4.3.1	Subcaso 1: $B, C > 0$	68
4.3.2	Subcaso 2: $B > 0, C < 0$	70
4.3.3	Subcaso 3: $B < 0, C > 0$	71
4.3.4	Subcaso 4: $B, C < 0$	71
4.4	Comentários	72
5	Controle populacional via pulsos de variação temporal periódica do parâmetro de tunelamento B	73
5.1	Hamiltoniana média resultante de forçamento de alta frequência	77
5.1.1	Redução das equações dinâmicas do duplo condensado à do pêndulo com pivô verticalmente forçado	81
5.1.2	Superfície hamiltoniana semiclássica média	82
5.1.3	Equações de movimento geradas por $H(z, \psi)$	85
6	Considerações Finais	87

7	Apêndice: O pêndulo invertido	88
7.1	Tratamento analítico (seção 3 de [27])	88
7.2	Comparação de resultados analíticos com simulações numéricas (seção 4 de [27])	95

1 Introdução

O primeiro contato com a Mecânica Quântica gera uma certa resistência a esta teoria. Só a idéia de tratar fenômenos físicos usando probabilidades, depois de se ter acostumado com o completo determinismo da Mecânica Newtoniana, já é difícil de aceitar. É somente depois de ter lido a respeito das várias confirmações experimentais dela, atualmente disponíveis, que sua aceitação qual teoria bem sucedida passa a ser razoável.

Ainda não existe uma plena compreensão do significado físico da 'onda de matéria' dada pela Equação de Schrödinger. A interpretação probabilística desta onda, que afirma ser o módulo quadrado dela uma densidade de probabilidade, tem mostrado ser a mais correta. Infelizmente esta interpretação obscurece a importância da fase da amplitude de probabilidade de um sistema; no entanto isso não gera nenhuma inconsistência.

Quando dois sistemas quânticos macroscópicos² que possuem uma fase global bem definida são postos próximos um do outro, tal fase é relevante na determinação da dinâmica das partículas pertencentes aos dois sistemas. Dois supercondutores ou dois superfluidos arranjados em uma junção Josephson³ evidenciam experimentalmente que a fase relativa entre as duas diferentes amplitudes de probabilidade do sistema determina a dinâmica das partículas pertencentes a este [1, 2].

Além das junções Josephson com superfluidos e supercondutores, após 1997 o estudo de outro tipo de junção semelhante às junções Josephson, porém mais atraente do ponto de vista fundamental, passou a ganhar atenção. Estas junções são realizadas com condensados de Bose-Einstein e acabaram sendo denominadas de junções Bose-Josephson.

A semelhança entre as junções Bose-Josephson e as junções Josephson reside em ambos serem sistemas quânticos macroscópicos com fase bem definida e fracamente acoplados pela possibilidade de tunelamento de partículas entre

²Chamamos de *sistemas quânticos macroscópicos* qualquer sistema que evidencie o comportamento puramente ondulatório da matéria. Dizendo de outro modo, aqueles sistemas cujo comportamento quântico não seja obscurecido pelo comumente predominante comportamento clássico dos mesmos. Exemplos de sistemas quânticos macroscópicos são os supercondutores e os superfluidos.

³A junção Josephson foi proposta inicialmente para dois supercondutores e consistia em colocá-los em contato, um com o outro, separados apenas por uma fina camada de elemento isolante. Josephson previu que, caso não houvesse diferença de potencial aplicada entre eles haveria uma corrente contínua, sendo esta corrente um efeito quântico da fase bem definida em ambos os componentes do sistema; caso houvesse diferença de potencial então surgiria uma corrente alternada de alta frequência [1]. Este fenômeno quântico foi denominado *efeito Josephson* e sua observação experimental permite-nos estudar qual o efeito da fase sobre a dinâmica de partículas de um sistema quântico macroscópico [2].

componentes da junção. Já a diferença entre os sistemas está na conservação ou não do número de partículas da junção: enquanto nas junções Josephson o número de partículas não é conservado, nas junções Bose-Josephson há essa conservação.

Aparentemente as junções Bose-Josephson foram primeiro sugeridas por Juha Javanainen em 1986, quando este descreveu o comportamento de dois condensados bosônicos postos próximos um do outro [3]. Só a partir de 1997, com a obtenção experimental de redes de condensados, é que a junção Bose-Josephson voltou a receber atenção. Atualmente ela tem sido extensivamente estudada, conforme relatado na bela revisão sobre o assunto apresentada na referência [4].

Do mesmo modo que a hamiltoniana de uma junção Josephson pode ser escrita sob uma forma semiclássica que permite maior simplicidade de análise por ser igual à hamiltoniana de um pêndulo simples, as junções Bose-Josephson também podem ser descritas por uma hamiltoniana semiclássica de um pêndulo, facilitando a análise dos regimes dinâmicos acessíveis à junção. No entanto, ocorre que a exigência da conservação do número de partículas acaba por tornar a hamiltoniana semiclássica deste tipo de junção *quase* igual àquela de um pêndulo simples; na verdade ela é a hamiltoniana de um pêndulo que tem inércia dependente do momento angular. Tal variação de inércia permite a obtenção de regimes dinâmicos estáveis equivalentes ao que seria a oscilação de um pêndulo simples no entorno de sua posição invertida. Tais regimes dinâmicos habilitam o controle populacional das componentes da junção. Aqui está o interesse em saber como produzir e controlar estes regimes nas junções Bose-Josephson.

Para entender um pouco melhor como pode ocorrer tal controle de dinâmicas, durante o trabalho frequentemente nos remetemos à analogia apresentada acima entre a junção Bose-Josephson e o pêndulo de inércia variável. No entanto, sempre estaremos imaginando um pêndulo com pivô verticalmente forçado ao invés de um com inércia variável, já que o pêndulo de pivô verticalmente forçado já foi extensivamente estudado [17, 24] e é sabido que ele permite um regime de oscilação estável no entorno de sua posição invertida, o que vem a tornar a analogia entre os sistemas junção e pêndulo ainda mais rica.

Sendo assim, neste trabalho tivemos por objetivo observar como a introdução de um forçamento periódico no parâmetro de tunelamento da hamiltoniana semiclássica da junção Bose-Josephson pode permitir o controle de população entre as componentes da junção. O forçamento deste termo tem a forma funcional idêntica àquela presente no pivô do pêndulo, a fim de termos uma comparação direta entre as hamiltonianas e as respectivas equações de movimento geradas pelas mesmas. Também observamos o efeito que apenas

um pulso periódico de alta frequência do termo de tunelamento pode ter sobre a junção no que diz respeito ao controle populacional.

Apresentamos o trabalho no seguinte molde: breves comentários sobre a condensação de Bose-Einstein na próxima seção, sua realização experimental e a realização experimental das junções Bose-Josephson. Também apresentamos uma justificativa para o uso da aproximação de dois modos para descrever um duplo condensado de Bose-Einstein. Na terceira seção obtemos a hamiltoniana semiclássica que descreve a junção Bose-Josephson; aqui aproveitamos para mostrar a similaridade entre esta e aquela de um pêndulo simples, explicitando a variação da inércia comentada anteriormente. Na quarta seção notamos o efeito que um termo de correção à hamiltoniana semiclássica, em geral desprezado, tem sobre esta caso possa ser tornado grande em relação aos outros parâmetros. Conforme veremos na última seção deste trabalho, o termo de correção passa a ser comparável ao produto do termo de tunelamento por uma constante de ajuste, por nós introduzida para descrever o comportamento médio da dinâmica do sistema, e isso é que torna importante analisar os efeitos deste termo de correção sobre a superfície hamiltoniana. Na quinta seção discorremos sobre o possível controle populacional através do uso de pulsos de variação periódica de alta frequência do parâmetro de tunelamento. Apresenta-se ali também a hamiltoniana média, ou efetiva, caso este parâmetro seja continuamente forçado a variar periodicamente, analogamente ao tratamento que é dado para um pêndulo de pivô forçado. Por fim, apresentam-se as considerações finais na sexta e última seção.

2 Condensados de Bose-Einstein

A condensação de Bose-Einstein para um gás ideal foi prevista teoricamente em 1925 por S. N. Bose e A. Einstein. Trata-se da ocupação macroscópica do estado fundamental de um gás quando este se encontra abaixo de uma temperatura crítica⁴.

A temperatura crítica pode ser descrita qualitativamente como sendo aquela em que o comprimento de onda térmico das partículas do gás se iguala à distância média entre elas. Sendo o comprimento de onda térmico (λ_T) dado por:

$$\lambda_T = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{mk_B T}} \quad (1)$$

onde \hbar é a constante de Planck dividida por 2π , k_B é a constante de Boltzmann, m é a massa das partículas do gás e T a temperatura; e a distância média (d) podendo ser estimada por:

$$d = \sqrt[3]{\frac{V}{N}} \quad (2)$$

onde V é o volume em que o gás está distribuído e N o número de partículas do gás, então, quantitativamente, a temperatura crítica (T_c) é estimada por:

$$T_c = \left(\frac{N}{V}\right)^{2/3} \left(\frac{2\pi\hbar^2}{mk_B}\right). \quad (3)$$

A critério de exemplo, seja um gás ideal de ^{87}Rb com aproximadamente 10^{12} partículas distribuídas uniformemente em 1 cm^3 . Neste caso, a equação (3) acima fornece como temperatura crítica o valor aproximado de 36 nK que, embora seja cerca de 5 vezes menor que a temperatura em que se relatou a primeira condensação [9], já nos fornece a ordem de grandeza das temperaturas onde o fenômeno ocorre: nanokelvins.

Nas proximidades da temperatura crítica o sistema já está deixando que seu caráter quântico passe a predominar sobre o clássico. Em um gás de

⁴Entendemos que um estado está macroscopicamente ocupado quando uma fração finita de partículas do sistema se encontra naquele estado.

Sendo rigoroso, sempre temos uma fração finita de partículas em um dado estado, uma vez que o número total destas em qualquer sistema é limitado. No entanto, se o sistema possui um grande número de partículas pode-se considerar a fração de partículas em cada estado energético deste como sendo infinitesimal, não finita. Sendo assim, quando falamos de ocupação macroscópica de um estado queremos nos referir a uma ocupação da mesma ordem de grandeza que o total de partículas do sistema ocupando somente este estado; assim, a fração de partículas neste estado favorecido é da ordem da unidade enquanto que nos outros estados ainda há somente uma fração infinitesimal de partículas.

férmions o princípio de exclusão de Pauli acaba gerando, efetivamente, algo como que uma 'repulsão' entre as partículas, de modo que não mais que uma delas poderá ficar em um mesmo estado energético. Já com os bósons ocorre justamente o contrário: quando mais de uma partícula se encontra no estado fundamental então este passa a ser *atrator* de outras partículas, de modo que o máximo número possível de partículas acabarão por ocupá-lo. E quanto mais diminuimos a temperatura, maior a fração total de partículas neste único estado. Essa é a chamada condensação de Bose-Einstein, ou então, ocupação macroscópica de um único estado quântico.

Desde a previsão da condensação, o esforço pela sua obtenção experimental foi contínuo, sempre que se acreditava ter as condições experimentais suficientes para obtê-la. Uma vez que nas baixíssimas temperaturas requeridas para condensação, qualquer elemento, exceto He, tem sua estabilidade no estado sólido e não no gasoso, uma dificuldade grande enfrentada foi a de ultraresfriar o gás sem permitir que ele deixasse de ser gás para se tornar sólido.

Por ser a temperatura crítica prevista inversamente proporcional à massa das partículas componentes do gás, e por ser o hidrogênio o mais leve e mais conhecido dos átomos, o primeiro candidato a ser condensado foi um gás rarefeito de hidrogênio sob uma armadilha magnética e resfriamento criogênico. Embora esta tentativa não tenha dado certo, ela acabou originando o armadilhamento e resfriamento puramente magnéticos de um gás eletricamente neutro. Somente em 1998 é que a condensação com o hidrogênio foi obtida [6].

Simultaneamente aos trabalhos com hidrogênio realizavam-se trabalhos com átomos alcalinos. Estes átomos apresentavam-se atraentes por serem hidrogenóides, tendo uma estrutura energética bem conhecida (embora massa maior que a do hidrogênio, requerendo então temperaturas menores). Com o aprimoramento do controle de lasers obtido na década de oitenta, com o objetivo de armadilhar e resfriar sob meios óticos um gás de bósons, em 1995, antes de se ter condensado o hidrogênio, uma combinação de armadilhamento e resfriamento magneto-ótica foi capaz de condensar gases de Lítio, Sódio e Rubídio [7, 8, 9].

Essa busca da condensação gerou o aprimoramento do controle de lasers e também o desenvolvimento de técnicas de armadilhamento e resfriamento magnético e/ou ótico de gases eletricamente neutros⁵.

Uma vez obtida a condensação, alguns grupos passaram a estudar puramente a termodinâmica dos condensados, outros já se interessaram em

⁵Para maiores detalhes sobre o desenrolar histórico da busca de condensação, ver a introdução das referências [10, 11]

formar redes destes, outros em obter condensados unidimensionais (charuto) e bidimensionais (disco) e, ainda outros, se preocuparam em gerar condensados com duas componentes. Estes últimos tinham o objetivo de estudar o efeito Josephson no sistema. O estágio de desenvolvimento atual das técnicas de condensação é tão significativo que relata-se até mesmo a condensação criogênica de um gás (que está em contato com outro gás na mesma armadilha) [12].

Neste trabalho estamos interessados no estudo teórico de condensados com duas componentes. Realizam-se dois tipos de condensados duplos: os espacialmente distinguíveis, gerados em uma armadilha com forma de duplo poço e apropriados para estudar o efeito Josephson em condensados, e os distinguíveis por estarem em diferentes estados de spin em uma mesma armadilha. Como o nosso objeto de estudo é a dinâmica de troca de partículas em um duplo condensado de Bose-Einstein sob o efeito Josephson, nos preocupamos em descrever qualitativamente como é que se realiza uma junção Bose-Josephson experimentalmente (com base nas referências [4, 13]).

2.1 A realização de um duplo condensado de Bose-Einstein

Nos experimentos relatados nas referências que estamos utilizando para descrever a formação da junção Josephson com condensados de Bose-Einstein foi utilizado armadilhamento puramente ótico e resfriamento magneto-ótico de uma nuvem rarefeita de ^{87}Rb .

O gás é previamente resfriado em uma armadilha magnética (*TOP trap* - ver referência [11], capítulo 3, para detalhes de armadilhamento e resfriamento de gases neutros com o objetivo de gerar condensados). Então é adiabaticamente transferido para uma armadilha ótica sem o duplo poço formado ainda. A condensação é atingida via resfriamento evaporativo da nuvem já na armadilha ótica, sendo as temperaturas finais da ordem de 10 nK. Então a barreira que irá separar o único condensado em duas componentes é aumentada só o suficiente para haver tal separação. Se aumentar demais poderá separá-los de modo a não permitir o acoplamento fraco entre as nuvens que, por sua vez, permitirá a manifestação do efeito Josephson.

A estrutura do duplo poço em seu estado final é aproximadamente a dada na figura (1), linha sólida na cor preta. Nesta figura, a critério de exemplo, plotamos em linha sólida azul uma aproximação de segunda ordem para cada mínimo do duplo poço bem como as energias fundamental e primeira excitada de uma partícula em um poço harmônico com aquele formato em linhas tracejadas azuis; encontramos ali também, em linha pontilhada azul,

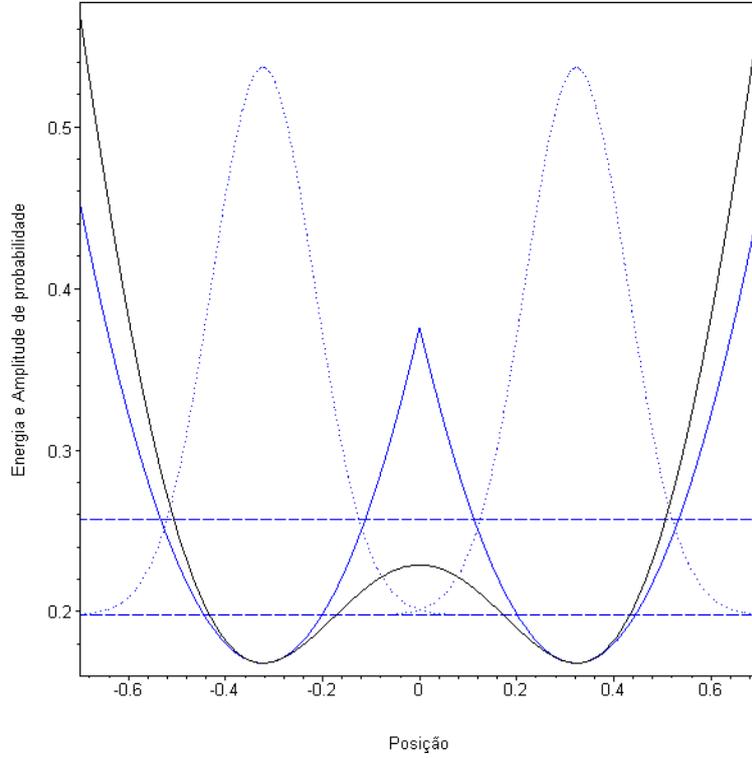


Figura 1: A linha sólida preta representa o potencial efetivo da junção Bose-Josephson gerada em [4]. A linha sólida azul representa a aproximação harmônica de cada mínimo do potencial. As linhas tracejadas azuis representam as energias fundamental e primeira excitada da aproximação harmônica de cada mínimo. Finalmente, as linhas pontilhadas azuis são apenas 9% das gaussianas do estado fundamental da aproximação harmônica de cada mínimo, plotadas a fim de mostrar a sobreposição das duas ondas dentro da barreira.

as funções de onda do estado fundamental de cada aproximação harmônica a fim de explicitar a sobreposição das funções de onda de cada poço dentro da barreira. As condições experimentais devem permitir essa sobreposição para que haja manifestação do efeito Josephson.

A estrutura energética real não difere muito da apresentada como aproximação na figura (1). Notamos que o primeiro estado excitado da aproximação possui energia maior que a da barreira. Isso não nos deve preocupar pois sempre são gerados condensados quase-puros, ou seja, com número de partículas em estados excitados muito menor, até desprezível, que o número de partículas no estado em que há condensação. Sendo assim, o sistema se comporta como se houvessem apenas o estado fundamental de cada poço

para ser populado. Tudo o que uma partícula pertencente a este sistema pode fazer se resume a tunelar de um poço para outro. Este comportamento nos permite utilizar uma aproximação muito útil para descrever o sistema, que é a aproximação de dois modos. O uso desta aproximação permitirá reescrever as equações dinâmicas de cada componente, acopladas entre si, sob uma forma semiclássica muito útil para determinar os regimes dinâmicos acessíveis ao sistema.

2.2 Breve comentário sobre a aproximação de dois modos

A equação utilizada para descrever o sistema é a Equação de Gross-Pitaevskii. Trata-se da primeira correção da equação de Schrödinger para um gás ideal e é uma equação não-linear. Sendo não-linear, qualquer solução proposta que utilizasse o princípio da superposição, princípio este válido somente para equações lineares, seria questionável. Mesmo assim a aproximação de dois modos é boa para descrever os condensados duplos (desde que o termo de interação se mantenha pequeno).

Até o momento os resultados da aproximação de dois modos têm se mostrado bastante próximos dos experimentais. É claro que estes são realizados dentro dos limites da aproximação: pequeno acoplamento entre poços e pequena interação entre partículas. O trabalho [4] mostra muitos resultados experimentais comparados com a teoria de dois modos. Já o trabalho [5] mostra, numericamente, os limites de validade desta aproximação e também estende a possibilidade de tratar o sistema com multimodos, extensão esta que, embora apresentada de modo simples, não é simples de se compreender porquê funciona; voltamos a ressaltar, a equação que descreve o sistema é não-linear e, sendo assim, não faz sentido falar de base do sistema ou então exigir independência linear das soluções, mesmo assim a aproximação de multimodos acaba por descrever melhor o comportamento da dinâmica.

Dado o comentário acima nos sentimos a vontade para também utilizar a aproximação de dois modos com o fim de estudar o possível controle populacional dos poços via variação temporal do termo de tunelamento presente na hamiltoniana semiclássica do sistema. Esta hamiltoniana semiclássica será deduzida na próxima seção.

3 Dinâmica semiclássica de um condensado duplo

A seguir deduziremos a hamiltoniana semiclássica que descreve a dinâmica de um duplo condensado de Bose-Einstein sob efeito Josephson com a aproximação de dois modos. Faremos a dedução utilizando dois caminhos distintos: um utilizando a teoria de campo-médio (a mais comum na maioria dos trabalhos sobre dupla condensação, exemplo é o trabalho [5]) e outro utilizando segunda quantização (exemplos de dedução assim são os trabalhos [16, 4]).

3.1 Hamiltoniana semiclássica e a teoria de campo-médio

A equação de Gross-Pitaevskii dependente do tempo é:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V_{ext}\psi + g|\psi|^2\psi. \quad (4)$$

onde \hbar é a constante de Planck dividida por 2π , m é a massa das partículas, V_{ext} é o potencial aprisionador e $g = \frac{4\pi\hbar^2 a_s}{m}$, com a_s o comprimento de espalhamento.

Vamos aproximar a função de onda do sistema pela superposição de apenas dois estados deste, o estado fundamental e o primeiro estado excitado:

$$\psi(\vec{r}, t) = \sqrt{N} [\psi_1(t)\phi_1(\vec{r}) + \psi_2(t)\phi_2(\vec{r})] \quad (5)$$

onde N é o número de partículas total do sistema.

Para se ter uma interpretação física onde ψ_1 e ψ_2 representem diretamente a população de cada um dos poços ao invés daquela presente em cada um dos estados, fundamental e excitado, consideramos que ϕ_1 e ϕ_2 são construídos a partir da combinação linear simétrica e antissimétrica destes dois primeiros estados do sistema:

$$\phi_{1,2}(\vec{r}) = \frac{\phi_f(\vec{r}) \pm \phi_e(\vec{r})}{\sqrt{2}}, \quad (6)$$

ao invés de serem, propriamente, aqueles dois primeiros estados. Escrevendo assim, ψ_1 e ψ_2 se tornam diretamente as frações de população em cada poço, $\sqrt{N_1/N}$ e $\sqrt{N_2/N}$, respectivamente, onde N_1 e N_2 são as populações de cada um dos poços e N é o total de partículas no sistema.

As funções ϕ_f e ϕ_e , apresentadas na equação (6), deverão satisfazer:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\phi_i + V_{ext}\phi_i + Ng|\phi_i|^2\phi_i = \epsilon_i\phi_i \quad (7)$$

e:

$$\int \phi_i \phi_j d^3 \vec{r} \cong \delta_{ij}. \quad (8)$$

com $i, j = f, e$, sendo f para fundamental e e para excitado.

Nos interessa somente a dinâmica do sistema e , desse modo, deixaremos de lado a obtenção das soluções espaciais ϕ_f e ϕ_e ; apenas admitiremos sua existência e vamos impor, sem perda de generalidade, que elas sejam reais.

Para obter a evolução temporal das funções $\psi_1(t)$ e $\psi_2(t)$ manipulamos apropriadamente as equações (4) a (8) e obtemos (fizemos $\hbar = 1$):

$$\begin{aligned} i \frac{d\psi_1}{dt} &= \left(\frac{\epsilon_f + \epsilon_e}{2} - \gamma_{fe} + \frac{10\gamma_{fe} - \gamma_{ff} - \gamma_{ee}}{4} |\psi_1|^2 - \frac{\gamma_{ee} - \gamma_{ff}}{4} \psi_1 \psi_2^* \right) \psi_1 \\ &\quad - \left(\frac{\epsilon_e - \epsilon_f}{2} - \frac{\gamma_{ee} - \gamma_{ff}}{4} |\psi_2|^2 - \frac{\gamma_{ee} + \gamma_{ff} - 2\gamma_{fe}}{4} \psi_1^* \psi_2 \right) \psi_2 \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} i \frac{d\psi_2}{dt} &= \left(\frac{\epsilon_f + \epsilon_e}{2} - \gamma_{fe} + \frac{10\gamma_{fe} - \gamma_{ff} - \gamma_{ee}}{4} |\psi_2|^2 - \frac{\gamma_{ee} - \gamma_{ff}}{4} \psi_2 \psi_1^* \right) \psi_2 \\ &\quad - \left(\frac{\epsilon_e - \epsilon_f}{2} - \frac{\gamma_{ee} - \gamma_{ff}}{4} |\psi_1|^2 - \frac{\gamma_{ee} + \gamma_{ff} - 2\gamma_{fe}}{4} \psi_2^* \psi_1 \right) \psi_1 \end{aligned} \quad (10)$$

onde as constantes γ_{ij} foram definidas como:

$$\gamma_{ij} \equiv gN \int \phi_i^2 \phi_j^2 d^3 \vec{r} \text{ com } i, j = f, e. \quad (11)$$

Escrevendo

$$\psi_i(t) = |\psi_i(t)| e^{i\theta_i(t)} \text{ com } i = 1, 2 \quad (12)$$

(não confundir o i índice com o $i = \sqrt{-1}$ complexo!) e substituindo em (9) e (10), obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{dt} &= \frac{10\gamma_{fe} - \gamma_{ff} - \gamma_{ee}}{4} z + \left(\epsilon_e - \epsilon_f + \frac{\gamma_{ff} - \gamma_{ee}}{2} \right) \frac{z}{\sqrt{1 - z^2}} \cos \phi \\ &\quad - \frac{\gamma_{ee} + \gamma_{ff} - 2\gamma_{fe}}{4} z \cos 2\phi \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= -\left(\epsilon_e - \epsilon_f + \frac{\gamma_{ff} - \gamma_{ee}}{2} \right) \sqrt{1 - z^2} \sin \phi \\ &\quad + \frac{\gamma_{ee} + \gamma_{ff} - 2\gamma_{fe}}{4} (1 - z^2) \sin 2\phi. \end{aligned} \quad (14)$$

onde definimos:

$$z(t) \equiv |\psi_1(t)|^2 - |\psi_2(t)|^2 \quad (15)$$

$$\phi(t) \equiv \theta_2(t) - \theta_1(t) \quad (16)$$

Com a mudança de variáveis dada pelas equações (15) e (16) a dinâmica descrita pelas equações (13) e (14) pode ser reobtida a partir da hamiltoniana semiclássica:

$$H(z, \phi) = \frac{1}{2}Az^2 - B\sqrt{1-z^2}\cos\phi + \frac{1}{2}C(1-z^2)\cos 2\phi, \quad (17)$$

com as definições:

$$A \equiv \frac{10\gamma_{fe} - \gamma_{ff} - \gamma_{ee}}{4} \quad (18)$$

$$B \equiv \epsilon_e - \epsilon_f + \frac{\gamma_{ff} - \gamma_{ee}}{2} \quad (19)$$

$$C \equiv \frac{\gamma_{ee} + \gamma_{ff} - 2\gamma_{fe}}{4}, \quad (20)$$

bastando para isso o uso das relações:

$$\dot{z} = -\frac{\partial H}{\partial \phi} \quad (21)$$

$$\dot{\phi} = \frac{\partial H}{\partial z}. \quad (22)$$

Temos assim um resultado interessante explicitando que a diferença de fase e a diferença do número de partículas entre poços se comportam como variáveis canonicamente conjugadas, isto é, a variação da diferença de número de partículas é geradora das variações das diferenças de fase e vice-versa.

Vejamos outro método de obtenção da mesma forma funcional para a hamiltoniana semiclássica.

3.2 Hamiltoniana semiclássica e a segunda quantização

Com o fim de verificar a consistência do resultado apresentado na subseção anterior, daremos a seguir um segundo tratamento para o mesmo problema, somente usando um formalismo diferente, o de segunda quantização.

Seja o operador hamiltoniano do sistema dado por:

$$\hat{H} = \int \hat{\Psi}^\dagger \hat{\mathcal{H}} \hat{\Psi} d^3\vec{r} \quad (23)$$

onde $\hat{\Psi}$ e $\hat{\Psi}^\dagger$ são os operadores de campo do sistema, e $\hat{\mathcal{H}}$ é o operador densidade hamiltoniana dado por:

$$\hat{\mathcal{H}} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V_{ext} + gN\hat{\Psi}^\dagger\hat{\Psi}. \quad (24)$$

onde V_{ext} , g , m e N têm o mesmo significado que na dedução anterior.

Seja também a aproximação de dois modos para o sistema:

$$\hat{\Psi} \approx \hat{c}_f \phi_f + \hat{c}_e \phi_e \quad (25)$$

onde as funções ϕ_i dadas aqui são as mesmas da subseção anterior, satisfazendo as mesmas propriedades (equações (7),(8)).

Sob a argumentação de que é melhor descrever o sistema em termos de populações em cada um dos poços ao invés daquela em cada um dos estados do duplo poço, introduzimos novamente a mudança da base $\{\phi_f, \phi_e\}$ para a base local $\{\phi_1, \phi_2\}$ ditada pela equação (6). Com isso obtemos os novos operadores de criação e aniquilação, agora *locais*, \hat{a} e \hat{b} :

$$\hat{a} = \frac{\hat{c}_f + \hat{c}_e}{\sqrt{2}} \quad (26)$$

$$\hat{b} = \frac{\hat{c}_f - \hat{c}_e}{\sqrt{2}}. \quad (27)$$

Substituindo a aproximação de dois modos dada na equação (25) no operador hamiltoniano (23) e realizando as integrações, obtemos:

$$\begin{aligned} \hat{H} = & [\epsilon_f + \epsilon_e - (\gamma_{ff} + \gamma_{ee})] \frac{\hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{b}^\dagger \hat{b}}{2} + [\epsilon_f - \epsilon_e - (\gamma_{ff} - \gamma_{ee})] \frac{\hat{a}^\dagger \hat{b} + \hat{b}^\dagger \hat{a}}{2} \\ & + \frac{\gamma_{ff} + \gamma_{ee} + 6\gamma_{fe}}{4} (\hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a} + \hat{b}^\dagger \hat{b}^\dagger \hat{b} \hat{b}) \\ & + \frac{\gamma_{ff} + \gamma_{ee} - 2\gamma_{fe}}{4} (\hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{b} \hat{b} + 4\hat{a}^\dagger \hat{b}^\dagger \hat{a} \hat{b} + \hat{b}^\dagger \hat{b}^\dagger \hat{a} \hat{a}) \end{aligned} \quad (28)$$

com γ_{ij} sendo as mesmas constantes dadas em (11) e onde, na dedução, omitimos o termo de interação dado por:

$$\frac{\gamma_{ff} - \gamma_{ee}}{2} (\hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{b} + \hat{a}^\dagger \hat{b}^\dagger \hat{a} \hat{a} + \hat{a}^\dagger \hat{b}^\dagger \hat{b} \hat{b} + \hat{b}^\dagger \hat{b}^\dagger \hat{a} \hat{b}) \quad (29)$$

por se tratarem de interações diretas entre partículas de poços distintos, o que não ocorre no duplo condensado espacial. Se estivéssemos tratando de condensados duplos de spin distintos este termo deveria então ser levado em conta.

Sejam agora os operadores de quasi-spin dados por:

$$\hat{J}_+ = \hat{b}^\dagger \hat{a} \quad (30)$$

$$\hat{J}_- = \hat{a}^\dagger \hat{b} \quad (31)$$

$$\hat{J}_z = \frac{1}{2} (\hat{b}^\dagger \hat{b} - \hat{a}^\dagger \hat{a}) \quad (32)$$

$$\hat{j} = \frac{1}{2} (\hat{b}^\dagger \hat{b} + \hat{a}^\dagger \hat{a}). \quad (33)$$

Obtemos imediatamente, a partir deles, que:

$$\hat{a}^\dagger \hat{a} = \hat{j} - \hat{J}_z \quad (34)$$

$$\hat{b}^\dagger \hat{b} = \hat{j} + \hat{J}_z. \quad (35)$$

Ainda, usando as regras de comutação bosônicas para os operadores \hat{a} e \hat{b} :

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1 = [\hat{b}, \hat{b}^\dagger] \quad (36)$$

$$[\hat{a}, \hat{b}] = 0 = [\hat{a}, \hat{b}^\dagger] = [\hat{b}, \hat{a}^\dagger] \quad (37)$$

podemos facilmente obter as seguintes regras de comutação para os operadores de quasi-spin:

$$[\hat{J}_+, \hat{J}_-] = 2\hat{J}_z \quad (38)$$

$$[\hat{J}_z, \hat{J}_\pm] = \pm \hat{J}_\pm \quad (39)$$

$$[\hat{J}_i, \hat{j}] = 0, \text{ para } i = +, -, z. \quad (40)$$

Assim, fica claro que os operadores de quasi-spin satisfazem uma álgebra de SU(2) do mesmo modo que o momento angular e o spin o fazem (por isso o nome de operadores de quasi-spin).

Vamos agora reescrever o operador hamiltoniano do sistema em termos destes novos operadores. Obtemos:

$$\begin{aligned} \hat{H} = & [\epsilon_f + \epsilon_e - (\gamma_{ff} + \gamma_{ee})] \hat{j} \\ & + \frac{\gamma_{ff} + \gamma_{ee} + 6\gamma_{fe}}{4} (\hat{j} - \hat{J}_z)(\hat{j} - \hat{J}_z - 1) \\ & + \frac{\gamma_{ff} + \gamma_{ee} + 6\gamma_{fe}}{4} (\hat{j} + \hat{J}_z)(\hat{j} + \hat{J}_z - 1) \\ & + (\gamma_{ff} - 2\gamma_{fe} + \gamma_{ee})(\hat{j}^2 - \hat{J}_z^2) \\ & + \left[\frac{\epsilon_f - \epsilon_e}{2} - \frac{\gamma_{ff} - \gamma_{ee}}{2} \right] (\hat{J}_+ + \hat{J}_-) \\ & + \frac{\gamma_{ff} - 2\gamma_{fe} + \gamma_{ee}}{4} (\hat{J}_+^2 + \hat{J}_-^2) \end{aligned} \quad (41)$$

Estamos finalmente aptos a obter a hamiltoniana semiclássica equivalente à de campo-médio usando estados coerentes.

Sejam os estados coerentes definidos por:

$$|\mu\rangle = e^{\xi \hat{J}_+ - \xi^* \hat{J}_-} |0\rangle \quad (42)$$

com o vácuo sendo dado por:

$$|0\rangle = |j, -j\rangle \quad (43)$$

e os estados $|j, m_j\rangle$ obedecendo:

$$\hat{j}|j, m_j\rangle = j|j, m_j\rangle \quad (44)$$

$$\hat{J}_z|j, m_j\rangle = m_j|j, m_j\rangle \quad (45)$$

$$\hat{J}_\pm|j, m_j\rangle = \sqrt{j(j+1) - m_j(m_j \pm 1)}|j, m_j \pm 1\rangle \quad (46)$$

onde $-j \leq m_j \leq j$, e onde:

$$\xi = \frac{\theta}{2}e^{-i\phi}. \quad (47)$$

Neste caso o valor esperado de qualquer operador $\hat{\Omega}$ será dado por:

$$\begin{aligned} \langle \mu | \hat{\Omega} | \mu \rangle &= \langle 0 | e^{-(\xi \hat{J}_+ - \xi^* \hat{J}_-)} \hat{\Omega} e^{\xi \hat{J}_+ - \xi^* \hat{J}_-} | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | \hat{\Omega} + [\hat{\Omega}, \hat{Y}] + \frac{1}{2!} [[\hat{\Omega}, \hat{Y}], \hat{Y}] + \dots | 0 \rangle \end{aligned} \quad (48)$$

onde fizemos:

$$\hat{Y} = \xi \hat{J}_+ - \xi^* \hat{J}_-. \quad (49)$$

Para o cálculo da hamiltoniana média precisamos dos seguintes valores esperados:

$$\langle \mu | \hat{j}^2 | \mu \rangle = j^2 \quad (50)$$

$$\langle \mu | \hat{j} | \mu \rangle = j \quad (51)$$

$$\langle \mu | \hat{J}_z^2 | \mu \rangle = \frac{j}{2} + (1 - \frac{1}{2j})(j \cos \theta)^2 \quad (52)$$

$$\langle \mu | \hat{J}_+ | \mu \rangle = j \sin \theta e^{i\phi} \quad (53)$$

$$\langle \mu | \hat{J}_- | \mu \rangle = j \sin \theta e^{-i\phi} \quad (54)$$

$$\langle \mu | \hat{J}_+^2 | \mu \rangle = (1 - \frac{1}{2j})(j \sin \theta e^{i\phi})^2 \quad (55)$$

$$\langle \mu | \hat{J}_-^2 | \mu \rangle = (1 - \frac{1}{2j})(j \sin \theta e^{-i\phi})^2. \quad (56)$$

Substituindo-os em $\langle \mu | \hat{H} | \mu \rangle$ obtemos:

$$\begin{aligned} \langle \mu | \hat{H} | \mu \rangle &= \frac{3\gamma_{ff} + 2\gamma_{fe} + 3\gamma_{ee}}{2} j^2 + (\epsilon_f + \epsilon_e - \frac{7\gamma_{ff} + 2\gamma_{fe} + 7\gamma_{ee}}{4}) j \\ &+ \frac{1}{2}(10\gamma_{fe} - \gamma_{ff} - \gamma_{ee})(1 - \frac{1}{2j})j^2 z^2 \\ &- (\epsilon_e - \epsilon_f + \gamma_{ff} - \gamma_{ee})j\sqrt{1-z^2} \cos \phi \\ &+ \frac{1}{2}(\gamma_{ff} + \gamma_{ee} - 2\gamma_{fe})(1 - \frac{1}{2j})j^2(1-z^2) \cos 2\phi \end{aligned} \quad (57)$$

onde, desta vez, definimos:

$$j_z \equiv j \cos \theta \quad (58)$$

$$z \equiv \frac{j_z}{j} \Rightarrow \sin \theta = \sqrt{1 - z^2}, \quad (59)$$

em uma analogia com o momento angular, sendo o *momento angular* total dado por j e sua projeção no eixo z dado por j_z (o que justifica tomarmos somente a parte positiva de $\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta}$, pois o domínio de θ , neste caso, é $[0, \pi]$).

A hamiltoniana acima pode ser reescrita em termos dos parâmetros A , B e C definidos anteriormente. Anulando o termo constante (dependente apenas de j e das integrais γ_{ij}), o que equivale a uma redefinição da origem da energia, ficamos com:

$$\begin{aligned} \langle \mu | \hat{H} | \mu \rangle &= \frac{1}{2}(2j)(2j-1)Az^2 - \left(B - \frac{\epsilon_e - \epsilon_f}{2}\right)(2j)\sqrt{1-z^2} \cos \phi \\ &+ \frac{1}{2}(2j)(2j-1)C(1-z^2) \cos 2\phi \end{aligned} \quad (60)$$

que é semelhante à hamiltoniana semiclássica obtida via teoria de campo-médio. A diferença entre ambas reside nos termos em j , termos estes que surgem de se levar um pouco mais em conta os efeitos quânticos do sistema.

Nesta dedução, ao observarmos cuidadosamente a origem de cada uma das constantes, concluímos que a constante A está ligada a interação das partículas em cada poço individual, a constante B relaciona-se com a energia de tunelamento de uma partícula e C representa a energia de troca de duas partículas de poços.

Uma vez que possuímos a forma geral da Hamiltoniana semiclássica, podemos fazer uma análise do comportamento da superfície ao variarmos os parâmetros de armadilhamento A , B e C , e observarmos as dinâmicas possíveis ao sistema. Antes, porém, daremos uma breve olhada na semelhança entre a hamiltoniana aqui apresentada e a hamiltoniana de um pêndulo simples.

3.3 Similaridade entre hamiltoniana semiclássica e hamiltoniana de pêndulo simples

O trabalho [5] acaba por mostrar que a constante C é muito menor que os outros dois parâmetros, A e B , sempre que a aproximação de dois modos é válida, chegando a ser de 3 a 4 ordens de grandeza menor que estes. Sendo assim, é totalmente razoável desprezá-lo. Este parâmetro descreve a troca de

duas partículas de um poço para outro, conforme visto na subseção anterior, e isso explica porquê o seu módulo é pequeno frente aos outros dois parâmetros.

Por ora, desprezemos os efeitos deste termo e fiquemos com a hamiltoniana dada por:

$$H(z, \phi) = \frac{1}{2}Az^2 - B\sqrt{1 - z^2} \cos \phi. \quad (61)$$

A hamiltoniana de um pêndulo simples é:

$$H(L, \theta) = \frac{1}{2I}L^2 - mgl \cos \theta, \quad (62)$$

onde L é o momento angular, θ a deflexão da vertical, m a massa, g a aceleração gravitacional, l a distância do centro de massa do pêndulo até o pivô de oscilação e, finalmente, I o momento de inércia do pêndulo.

A similaridade entre (61) e (62) é que nos deixa a vontade para descrever as dinâmicas possíveis das partículas do duplo condensado usando o conhecimento que temos sobre as dinâmicas acessíveis ao pêndulo. A diferença evidente entre as equações é que, para o condensado, a *inércia* varia com o *momento angular*⁶. Tal semelhança fornece grande ganho de intuitividade sobre o comportamento dinâmico do duplo condensado e é utilizada em trabalhos como [14, 15], para analisar a evolução temporal da ocupação dos poços.

Demos agora uma olhada mais detida na superfície hamiltoniana semi-clássica que deduzimos e no efeito que cada parâmetro presente nela exerce sobre os regimes dinâmicos acessíveis ao sistema.

⁶As palavras em itálico são apenas para evidenciar que no condensado duplo estes termos não fazem sentido

4 Superfície Hamiltoniana Semiclássica

Com esta seção tivemos por objetivo ganhar intuitividade sobre o comportamento da superfície hamiltoniana semiclássica, uma vez que, como veremos mais tarde, a variação temporal periódica do termo de tunelamento B sob altas frequências de forçamento acaba tornando-o, de modo efetivo, muito pequeno (da ordem de C , que, por sua vez, é muito menor que A). Desse modo, se faz muito útil explicitar o papel do termo de correção, dado por C , sobre os regimes dinâmicos.

Para se ter uma idéia de quão grandes são umas constantes em relação as outras, notamos que nos experimentos relatados em [4] as constantes A e B assumem valores da ordem de 10^4 Hz e 10^3 Hz, respectivamente, e a constante C fica muito menor que estas duas, assumindo as razões $C/A \approx 10^{-3}$ e $C/B \approx 10^{-2}$.

O estudo da superfície dada por

$$H(z, \phi) = \frac{1}{2}Az^2 - B\sqrt{1-z^2}\cos\phi + \frac{1}{2}C(1-z^2)\cos 2\phi \quad (63)$$

será efetuado em 3 etapas:

1. Estudo da superfície $H(z, \phi)$ com o parâmetro A nulo. Significa que desligamos a interação entre partículas em cada poço, ou seja, cada poço possui um condensado de bósons ideal;
2. Estudo de $H(z, \phi)$ com o parâmetro $A > 0$. Significa interação repulsiva entre partículas em cada um dos poços, individualmente;
3. Estudo de $H(z, \phi)$ com o parâmetro $A < 0$. Significa interação atrativa entre partículas em cada um dos poços.

Antes de iniciar o estudo de cada etapa individual é proveitoso notar que:

- A superfície $H(z, \phi)$ é periódica em ϕ , com período 2π , independentemente dos parâmetros escolhidos (exceto quando B, C simultaneamente nulos. Caso B nulo e C não-nulo o período reduz-se à metade);
- A superfície obedece $H(z, \phi) = H(-z, \phi) = H(z, -\phi) = H(-z, -\phi)$. Isso indica que, pelo estudo de apenas um quadrante das curvas de nível desta superfície (espaço de fases) seria possível construir todo o restante do espaço de fases;
- O domínio da variável z é $|z| \leq 1$, enquanto a variável ϕ pode obter qualquer valor real.

Dadas as observações acima todos os gráficos a serem apresentados nesta seção poderiam ter domínio $0 < z < 1$ e $0 < \phi < \pi$. No entanto, para facilitar a visualização dos possíveis regimes dinâmicos, os apresentaremos com domínio $|z| \leq 1$ e $|\phi| \leq \pi$ (o eixo da fase está em escala ϕ/π).

Apenas a critério de exemplo, apresentamos na figura (2) um desenho tridimensional desta superfície com suas correspondentes curvas de nível (espaço de fases do sistema). Fora este exemplo, todas as outras representações da superfície serão dadas apenas pelas suas curvas de nível, em gradiente de azul (vales da superfície) a branco (picos da superfície), a fim de explicitar os regimes dinâmicos possíveis para um dado conjunto de parâmetros.

4.1 Estudo de $H(z, \phi)$ com $A = 0$

Neste caso, teremos a hamiltoniana do sistema reduzida a:

$$F(z, \phi) \equiv H(z, \phi)|_{A=0} = -B\sqrt{1-z^2} \cos \phi + \frac{1}{2}C(1-z^2) \cos 2\phi. \quad (64)$$

Para facilitar, dividiremos o estudo de $F(z, \phi)$ em quatro subcasos:

1. Subcaso 1: $B, C > 0$
2. Subcaso 2: $B > 0$ e $C < 0$
3. Subcaso 3: $B < 0$ e $C > 0$
4. Subcaso 4: $B, C < 0$.

4.1.1 Subcaso 1: $B, C > 0$

Quando $C \ll B$ a superfície $F(z, \phi)$ possuirá vales absolutos no entorno de $\phi = 2n\pi$ e picos absolutos no entorno de $\phi = (2n+1)\pi$, para n inteiro. (Ver figura (3))

A medida que C é acrescido vê-se a formação de uma sela em $\phi = 2n\pi$, sela esta que divide o mínimo que lá estava localizado em dois outros mínimos, agora em $\phi = \arccos(B/2C)$. (Ver figura (4))

Aumentando ainda mais o valor de C , a sela em $\phi = 2n\pi$ passa a ser um máximo local. (Ver figura (5))

Os resultados analíticos são que:

- se $C < \frac{B}{2}$ a superfície terá máximos e mínimos globais alternados em $\phi = n\pi$ (figura (3));
- se $\frac{B}{2} < C < B$ a superfície terá máximos em $\phi = (2n+1)\pi$, selas em $\phi = 2n\pi$ e mínimos em $\phi = \arccos(B/2C)$ (figura (4));

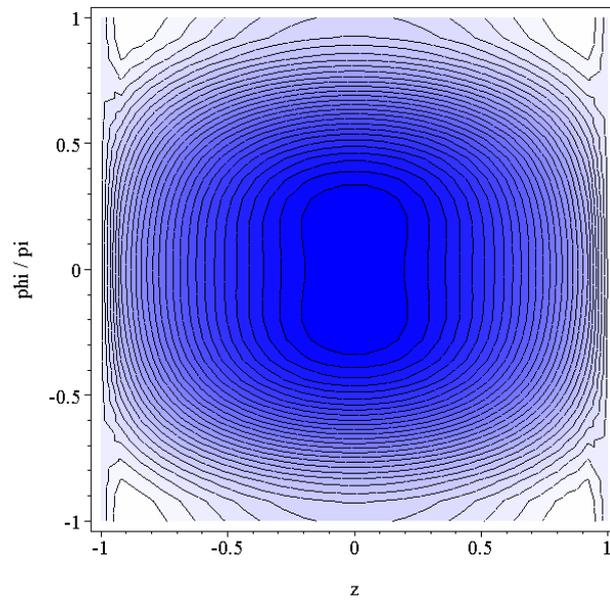
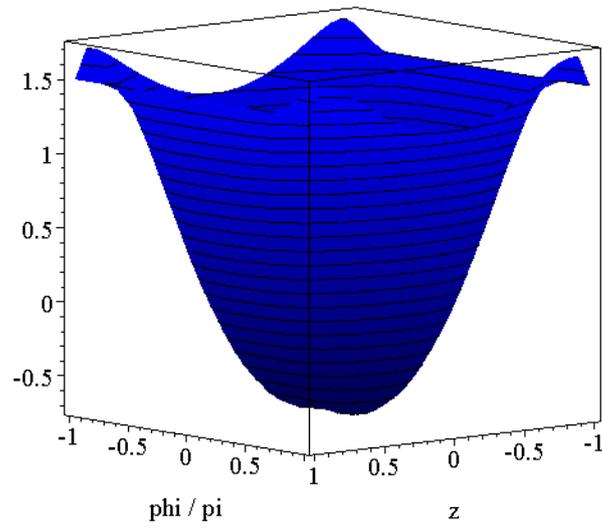


Figura 2: Superfície $H(z, \phi)$ em sua representação tridimensional e suas correspondentes curvas de nível (espaço de fases). Os parâmetros utilizados para este exemplo foram $A=3$, $B=1$, $C=0.6$.

- se $C > B$ a superfície terá máximos em $\phi = n\pi$ e mínimos em $\phi = \arccos(B/2C)$ (figura (5)).

Notar que, em qualquer das situações apresentadas, existe, em essência, apenas um regime dinâmico: oscilação das partículas de um poço para outro.

4.1.2 Subcaso 2: $B > 0$ e $C < 0$

Neste subcaso vemos os máximos localizados em $(2n + 1)\pi$ serem gradualmente divididos em 2 outros máximos localizados em $\phi = \arccos(B/2C)$.

Novamente temos os resultados:

- se $|C| < \frac{B}{2}$ a superfície terá máximos e mínimos globais alternados em $\phi = n\pi$ (figura (6));
- se $\frac{B}{2} < |C| < B$ a superfície terá mínimos em $\phi = 2n\pi$, selas em $\phi = (2n + 1)\pi$ e máximos em $\phi = \arccos(B/2C)$ (figura (7));
- se $|C| > B$ a superfície terá mínimos em $\phi = n\pi$ e máximos em $\phi = \arccos(B/2C)$ (figura (8)).

4.1.3 Subcaso 3: $B < 0$ e $C > 0$

A superfície é a mesma do subcaso 1 analisado acima, só que deslocada de π na variável ϕ . Podemos ver isso facilmente se extrairmos o sinal de B explicitamente em $F(z, \phi)$:

$$\begin{aligned}
F(z, \phi) &= |B|\sqrt{1 - z^2} \cos \phi + \frac{1}{2}C(1 - z^2) \cos 2\phi \\
&= -|B|\sqrt{1 - z^2} \cos \phi \cos \pi + \frac{1}{2}C(1 - z^2) \cos 2\phi \cos 2\pi \\
&= -|B|\sqrt{1 - z^2} \cos(\phi + \pi) + \frac{1}{2}C(1 - z^2) \cos 2(\phi + \pi)
\end{aligned}$$

como queríamos mostrar. Sendo assim, neste caso teremos os resultados:

- se $C < \frac{|B|}{2}$ a superfície terá máximos e mínimos globais alternados em $\phi = n\pi$;
- se $\frac{|B|}{2} < C < |B|$ a superfície terá máximos em $\phi = 2n\pi$, selas em $\phi = (2n + 1)\pi$ e mínimos em $\phi = \arccos(B/2C)$;
- se $C > |B|$ a superfície terá máximos em $\phi = n\pi$ e mínimos em $\phi = \arccos(B/2C)$.

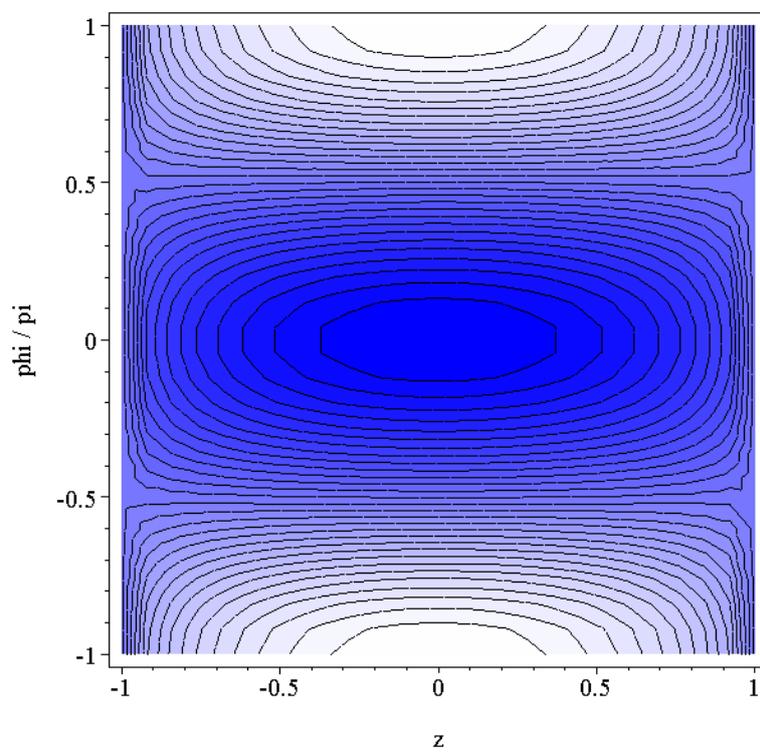


Figura 3: Espaço de fases para $A=0$, $B=1$ e $C=0.1$.

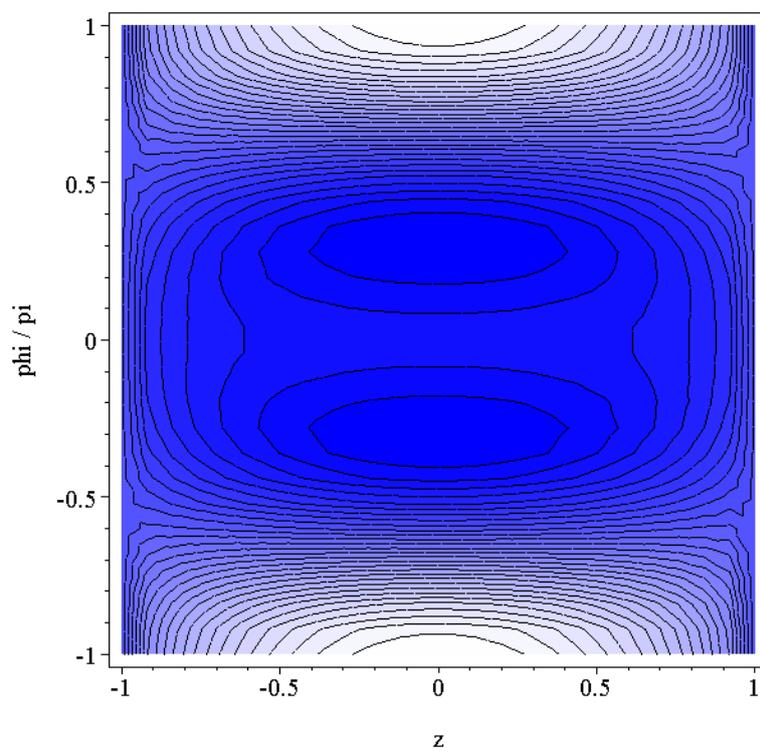


Figura 4: Espaço de fases para $A=0$, $B=1$ e $C=0.9$.

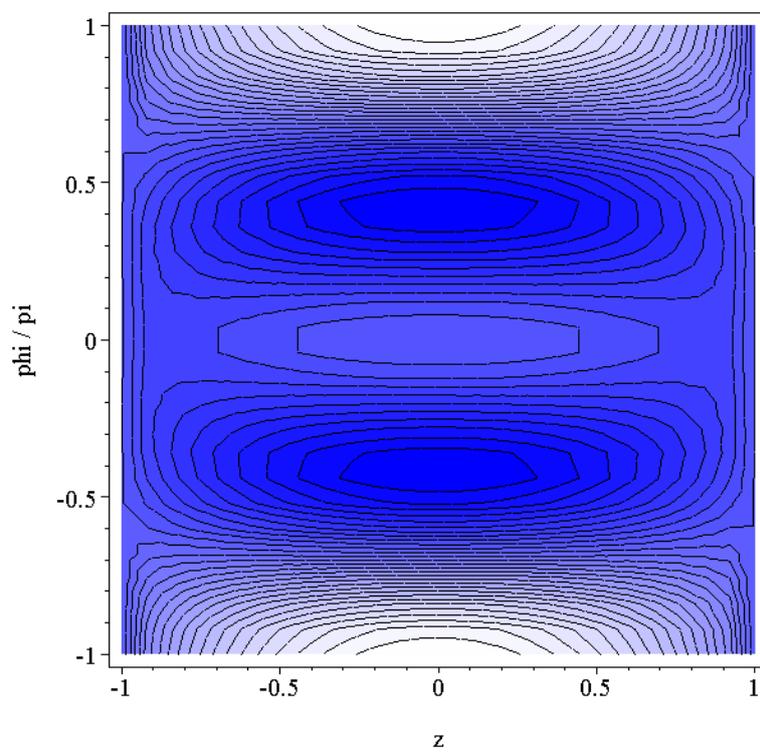


Figura 5: Espaço de fases para $A=0$, $B=1$ e $C=2$.

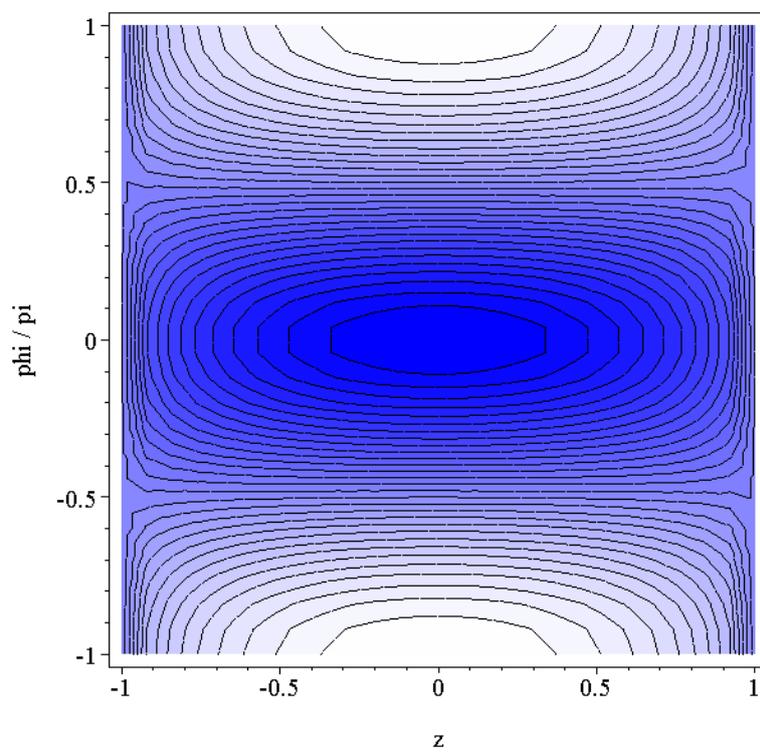


Figura 6: Espaço de fases para $A=0$, $B=1$ e $C=-0.1$.

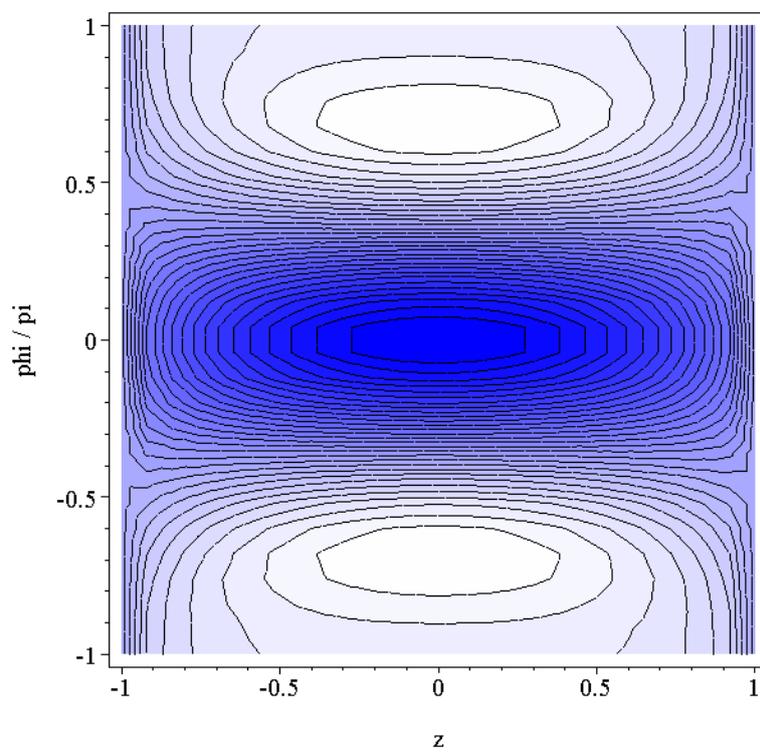


Figura 7: Espaço de fases para $A=0$, $B=1$ e $C=-0.9$.

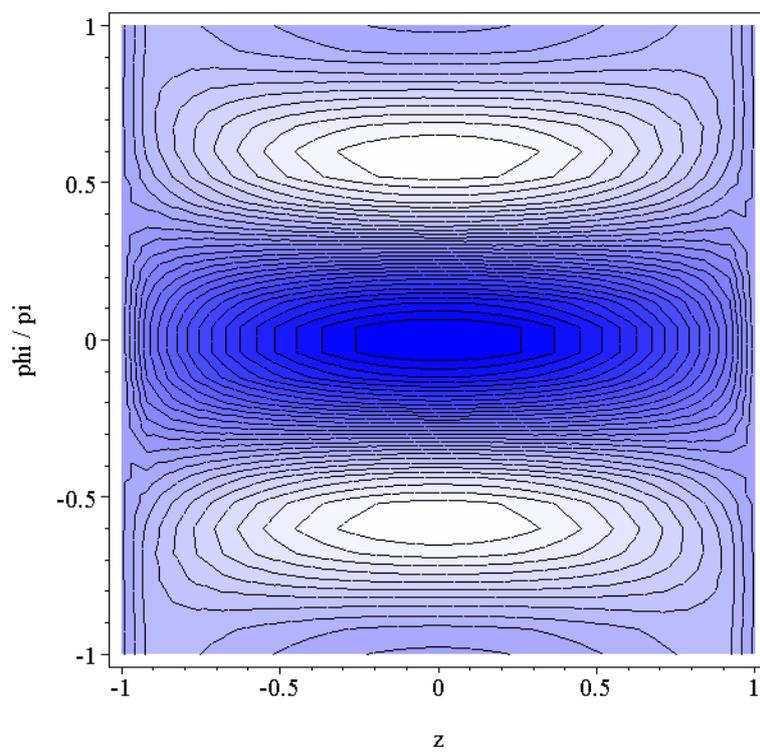


Figura 8: Espaço de fases para $A=0$, $B=1$ e $C=-2$.

4.1.4 Subcaso 4: $B, C < 0$

Se ambos os parâmetros de $F(z, \phi)$ são negativos temos um sinal global na superfície, de modo que ela se inverte por completo. Os máximos se tornam mínimos e vice-versa. Assim, os resultados deste subcaso são:

- se $|C| < \frac{|B|}{2}$ a superfície terá máximos e mínimos globais alternados em $\phi = n\pi$;
- se $\frac{|B|}{2} < |C| < |B|$ a superfície terá mínimos em $\phi = (2n + 1)\pi$, selas em $\phi = 2n\pi$ e máximos em $\phi = \arccos(B/2C)$;
- se $|C| > |B|$ a superfície terá mínimos em $\phi = n\pi$ e máximos em $\phi = \arccos(B/2C)$.

Aqui encerramos o estudo do caso $A = 0$. Notamos que quando desligamos o parâmetro que dá a interação entre as partículas de cada poço individual e deixamos a dinâmica do sistema ser governada exclusivamente pelos parâmetros de troca de uma (B) ou duas (C) partículas, não há a formação de trajetórias cuja diferença de população média se mantenha diferente de zero. Tais trajetórias representam o fenômeno físico denominado auto-armadilhamento quântico macroscópico. Elas são importantes por representarem uma quebra de simetria no sistema por privilegiar com maior número de partículas um dos dois poços no decorrer da dinâmica de troca de partículas entre ambos. Essa quebra de simetria possibilita o controle de população no duplo poço e por isso é importante saber sua origem e também determinar sob quais condições ela é gerada. Com essa observação notamos o que já era de se esperar: o auto-armadilhamento é gerado exclusivamente pela interação não-linear entre as partículas presentes em cada nuvem individual do duplo condensado.

4.2 Estudo de $H(z, \phi)$ com $A > 0$

O parâmetro $\frac{1}{2}Az^2$ corresponde a uma parábola com concavidade voltada para valores positivos de $H(z, \phi)$, neste caso. Sendo assim, concluímos de imediato que as regiões de $H(z, \phi)$ onde a função $F(z, \phi)$ possui a mesma concavidade que o termo acrescentado a ela, não serão alteradas significativamente. As modificações nestas regiões irão se restringir a diminuir a amplitude de oscilação em z das trajetórias fechadas ali presentes.

Já nas regiões com concavidade invertida observa-se a concorrência entre o termo em A e a superfície $F(z, \phi)$, concorrência esta que será responsável pela produção do auto-armadilhamento quântico macroscópico.

Também teremos de subdividir o estudo desta etapa em quatro subcasos, os mesmos subcasos da etapa anterior, correspondentes às combinações de sinais entre B e C . Além disso, será conveniente dividir cada um dos subcasos em 3 outras partes: uma para $C < B/2$, outra para $B/2 < C < B$ e uma terceira para $C > B$. Voltamos a ressaltar que os casos $B/2 < C < B$ e $C > B$ não existem experimentalmente. Os estamos considerando apenas para compreender plenamente se o parâmetro C é capaz ou não de gerar modificações significativas nos regimes dinâmicos acessíveis ao sistema.

4.2.1 Subcaso 1: $B, C > 0$

Subsubcaso 1: $C < B/2$

Sob estas circunstâncias a condição para produzir autoarmadilhamento é fazer a curva $f(z) \equiv H(z, \phi = (2n + 1)\pi)$ possuir um mínimo em $z = 0$ (ver figura (3)). De modo equivalente, deve-se requerer que a derivada de $f(z)$ possua três raízes reais que a igualam a zero. Quando isso acontece obtemos uma sela em $(z = 0, \phi = (2n + 1)\pi)$, sendo esta a condição requerida no trabalho [16] para obtenção de auto-armadilhamento. Vejamos agora o efeito do termo em C , inexistente no trabalho citado, sobre a produção de sela.

Devemos ter:

$$\frac{df}{dz} = 0 \Rightarrow \left(A - \frac{B}{\sqrt{1-z^2}} - C \right) z = 0$$

o que fornece como raízes:

$$z = 0 \quad \text{e} \quad |z| = \sqrt{1 - \left(\frac{B}{A-C} \right)^2}. \quad (65)$$

Notamos que as outras duas raízes serão reais caso

$$\left| \frac{B}{A-C} \right| < 1, \quad (66)$$

ou seja, lembrando que $B > 0$:

$$B < |A - C|. \quad (67)$$

Fica evidente então que o efeito do parâmetro C sobre os regimes dinâmicos será o de enfraquecer a possibilidade de gerar auto-armadilhamento. Isso é razoável, uma vez que este é o termo de troca de dois corpos. Esse efeito é observado em todos os casos seguintes. Convém lembrarmos que este enfraquecimento, do ponto de vista experimental, é muito pequeno.

Lembrando que $A > 0$ e que $0 < C < B/2$, concluímos que a desigualdade (67) jamais será satisfeita se $A < B$. Sendo assim, devemos considerar apenas o caso $A > C$, o que implica em $|A - C| = A - C$, o que facilita a análise da desigualdade. Desse modo, se os parâmetros obedecerem:

$$B < A - C \quad (68)$$

teremos auto-armadilhamento.

Estamos na seguinte posição: A admite valores maiores que zero e vai crescendo, até chegar ao valor em que $A - C$ se iguala a B . Até aí a superfície $H(z, \phi)$ tem exatamente o mesmo comportamento que a superfície $F(z, \phi)$, subcaso 1 (figura (9)). Aumentando um pouco mais o valor de A gera-se uma sela em $(z = 0, \phi = (2n+1)\pi)$ e também começam a existir regimes dinâmicos auto-armadilhados com fase limitada (figura (10)). Então, aumentando ainda mais o valor de A , o valor da energia em $(|z| = 1, \phi)$ também vai aumentando, até superar a energia da sela em $(z = 0, \phi = (2n + 1)\pi)$. Quando isso acontece temos a formação de outros regimes dinâmicos de auto-armadilhamento denominados 'fase-corrída', uma vez que, embora o valor médio de z seja diferente de zero, o valor da fase cresce indefinidamente (figura (11)). Em uma analogia com um pêndulo esse modo seria equivalente ao pêndulo girar indefinidamente.

O valor de A que permite a formação dos regimes de 'fase-corrída' é:

$$A = 2B + C, \quad (69)$$

obtido a partir da igualdade entre as energias no ponto de sela, em $(z = 0, \phi = (2n + 1)\pi)$, e nos extremos do domínio de z , $(|z| = 1, \phi)$. A partir daqui o valor de A pode aumentar indefinidamente que a estrutura do espaço de fases sempre permanece a mesma.

Subsubcaso 2: $B/2 < C < B$

Seguindo a mesma linha de raciocínio que no subsubcaso anterior, partiremos de valores pequenos de A e iremos aumentando-o, observando se há ou não a formação de autoarmadilhamento.

Deveremos observar a formação de dois outros extremos na curva $f(z) \equiv H(z, \phi = (2n + 1)\pi)$ definida anteriormente, além daquele em $z = 0$. Por se tratar exatamente da mesma análise feita para chegar na equação (68), as condições para formação de dois outros extremos também serão as mesmas. O autoarmadilhamento também se dará quando $A - C > B$, conforme notado anteriormente.

Ainda, conforme ocorreu no subsubcaso anterior a este, teremos ou não a formação de modos 'fase-corrída' caso a energia da sela seja menor ou maior

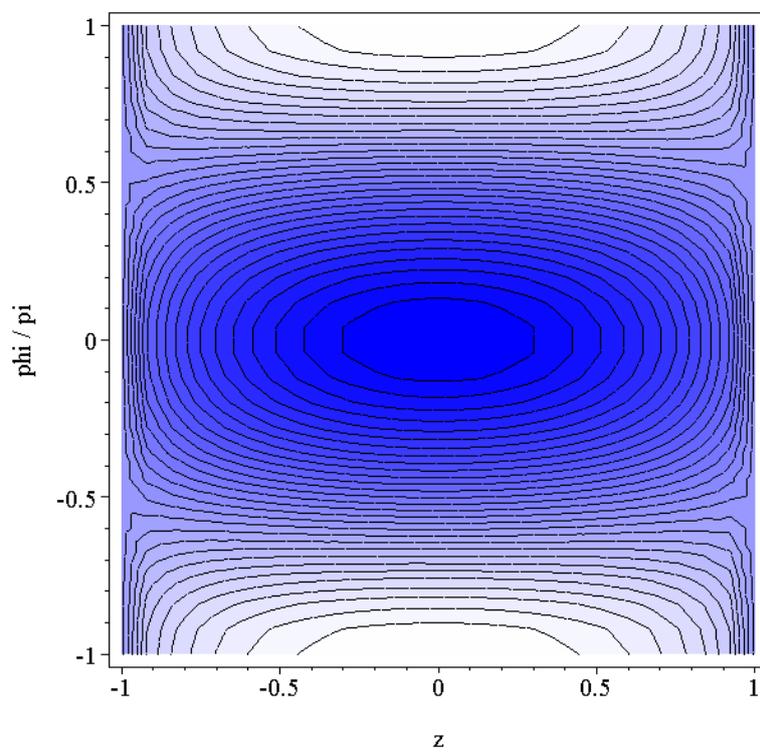


Figura 9: Espaço de fases para $A=0.5$, $B=1$ e $C=0.1$.

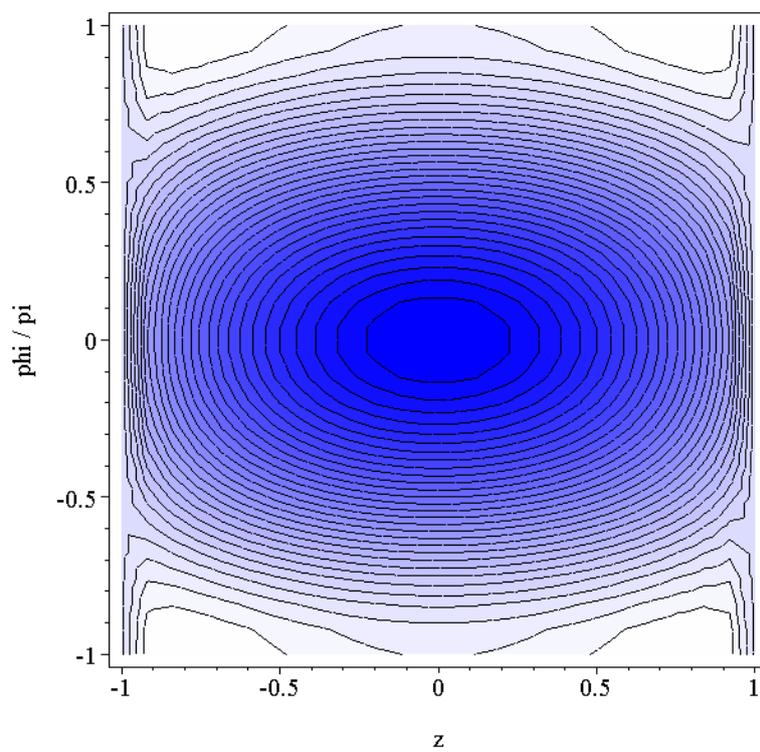


Figura 10: Espaço de fases para $A=1.8$, $B=1$ e $C=0.1$.

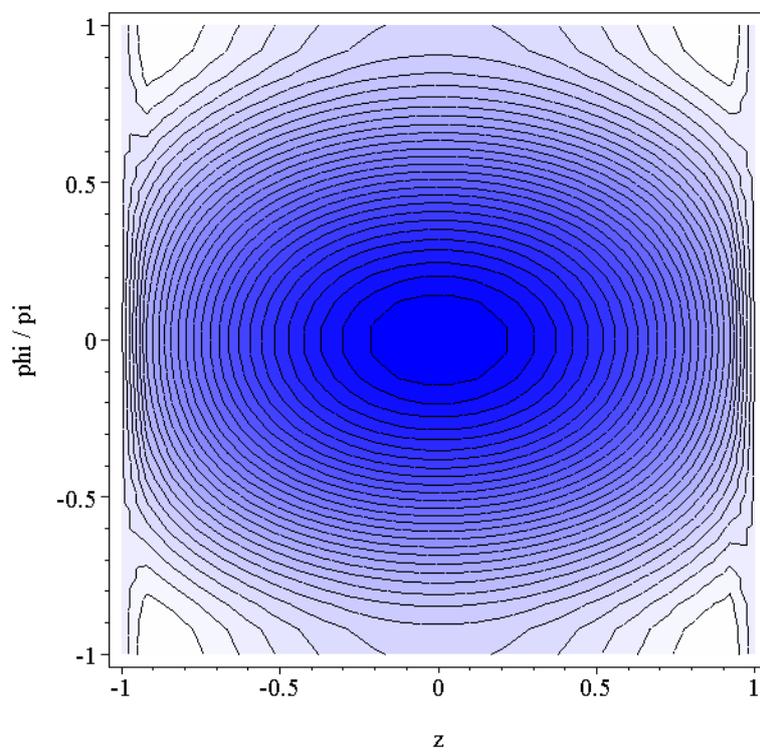


Figura 11: Espaço de fases para $A=2.5$, $B=1$ e $C=0.1$.

que a energia em $H(|z| = 1, \phi)$, respectivamente. A divisão entre ter ou não 'fase-corrida' ocorrerá para o valor $A = 2B + C$, conforme notado na equação (69). (As figuras (12)-(14) mostram o comportamento da superfície neste subsubcaso. Notar a região $\pm\pi$.)

Subsubcaso 3: $C > B$

Em se tratando da formação ou não de auto-armadilhamento, temos ainda a mesma análise que nos dois subsubcasos antecedentes a este, exceto pelo fato de que o primeiro item a ser citado abaixo não existia naqueles:

- Caso $A < C - B$, não há auto-armadilhamento, temos máximos em $(z = 0, \phi = n\pi)$ e mínimos em $(z = 0, \phi = \arccos(B/2C))$ (figura (15));
- Caso $C - B < A < B + C$, não há auto-armadilhamento, os máximos em $(z = 0, \phi = 2n\pi)$ se tornam selas enquanto o restante da superfície continua igual (figura (16));
- Caso $B + C < A < 2B + C$, há auto-armadilhamento sem formação de modos de 'fase-corrida', todos os máximos se tornam selas (figura (17));
- Caso $A > 2B + C$, existirão todos os regimes dinâmicos: regimes não auto-armadilhados e regimes auto-armadilhamento com e sem 'fase-corrida' (figura (18)).

Notar que, neste subsubcaso, a formação ou não de máximo local em $(z = 0, \phi = 2n\pi)$ depende do valor de A . Embora essa formação de máximos dependa de A , notamos que os ângulos em que ocorrem os dois mínimos globais que foram gerados pelo acréscimo do parâmetro C não se alteram com o acréscimo de A . Isso está de acordo com o previsto pela equação que fornece os valores destes ângulos: $\phi = \arccos(B/2C)$ e também ocorre nos dois subsubcasos precedentes.

Assim se encerra o estudo do subcaso $B, C > 0$.

4.2.2 Subcaso 2: $B > 0, C < 0$

Neste subcaso, assim como no anterior, o comportamento das regiões onde a concavidade das curvas em z está voltada para valores positivos de $H(z, \phi)$ também não será alterado pelo acréscimo do termo dependente do parâmetro A .

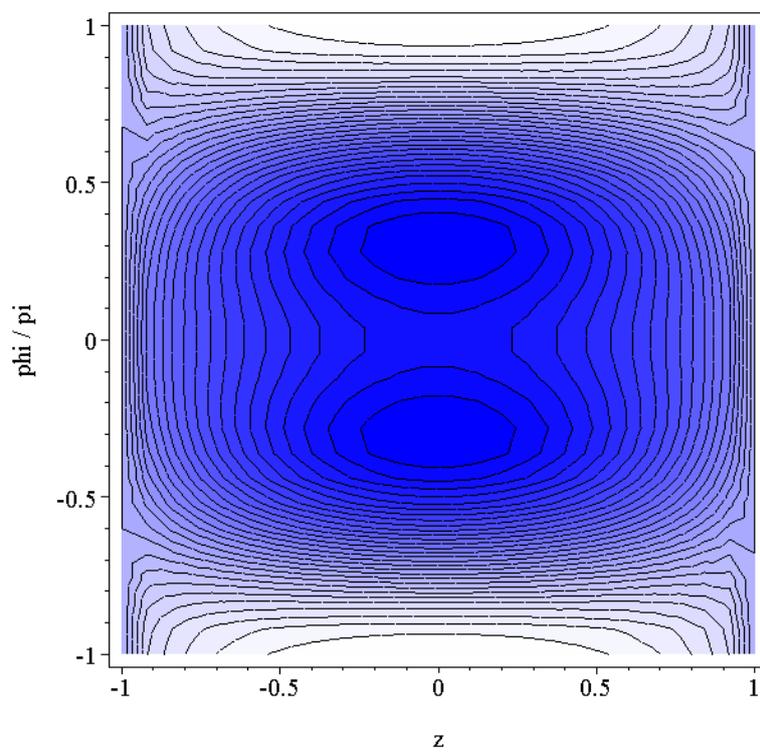


Figura 12: Espaço de fases para $A=1.5$, $B=1$ e $C=0.9$.

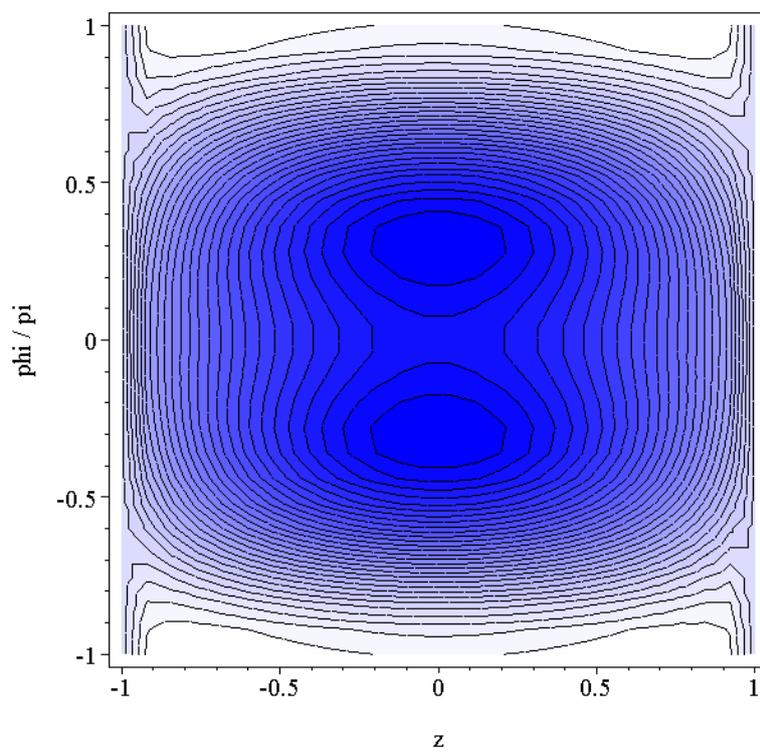


Figura 13: Espaço de fases para $A=2.4$, $B=1$ e $C=0.9$.

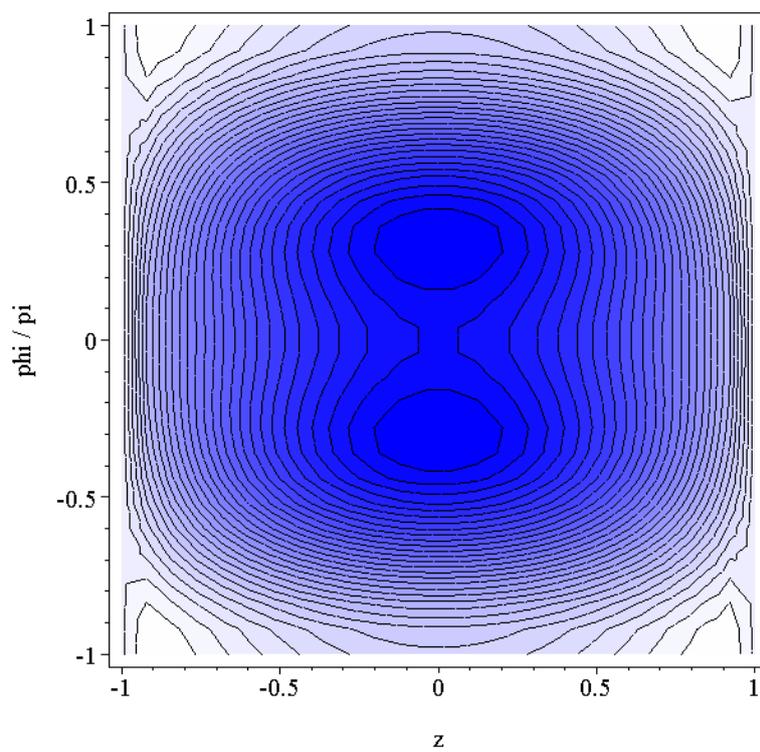


Figura 14: Espaço de fases para $A=3.5$, $B=1$ e $C=0.9$.

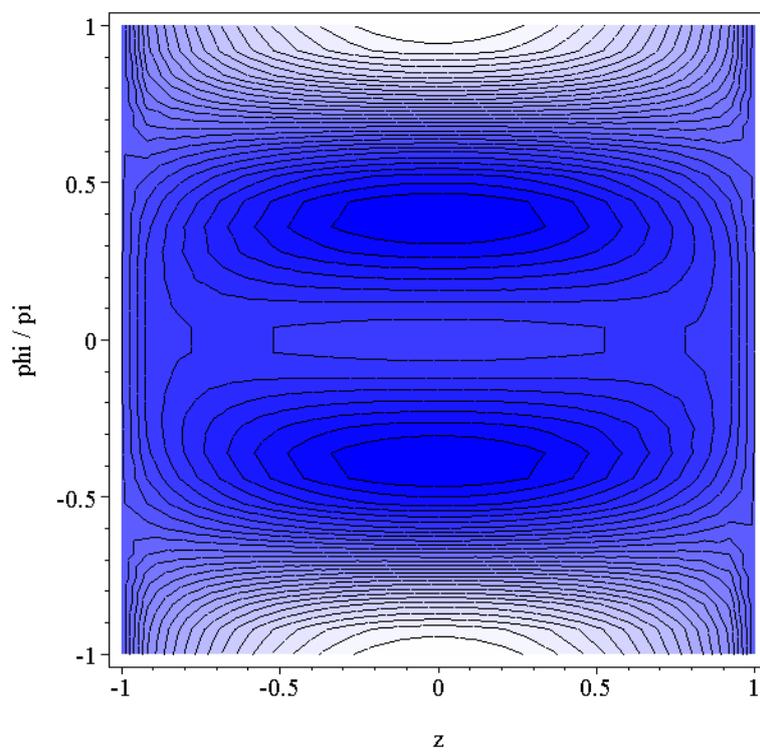


Figura 15: Espaço de fases para $A=0.1$, $B=1$ e $C=1.5$.

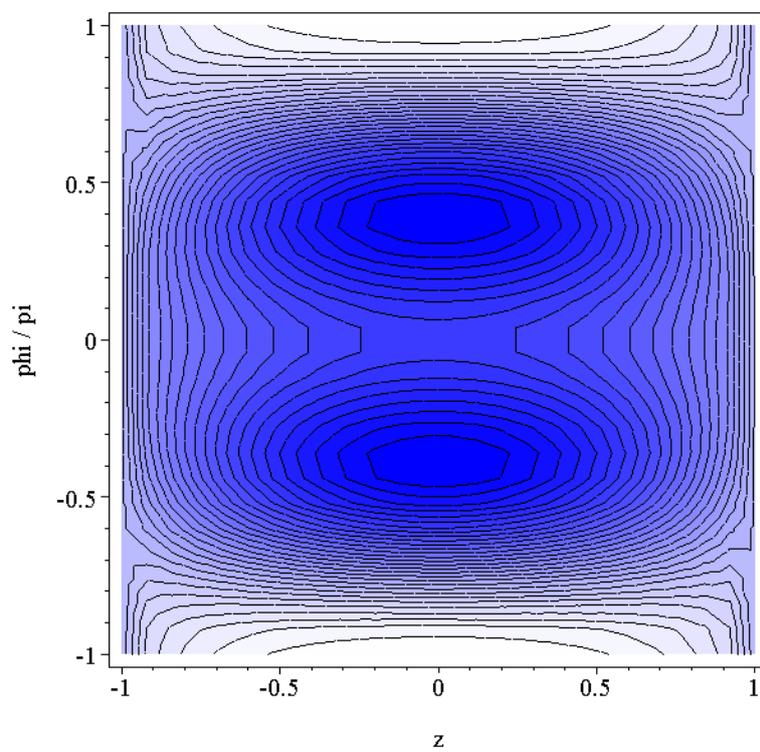


Figura 16: Espaço de fases para $A=2$, $B=1$ e $C=1.5$.

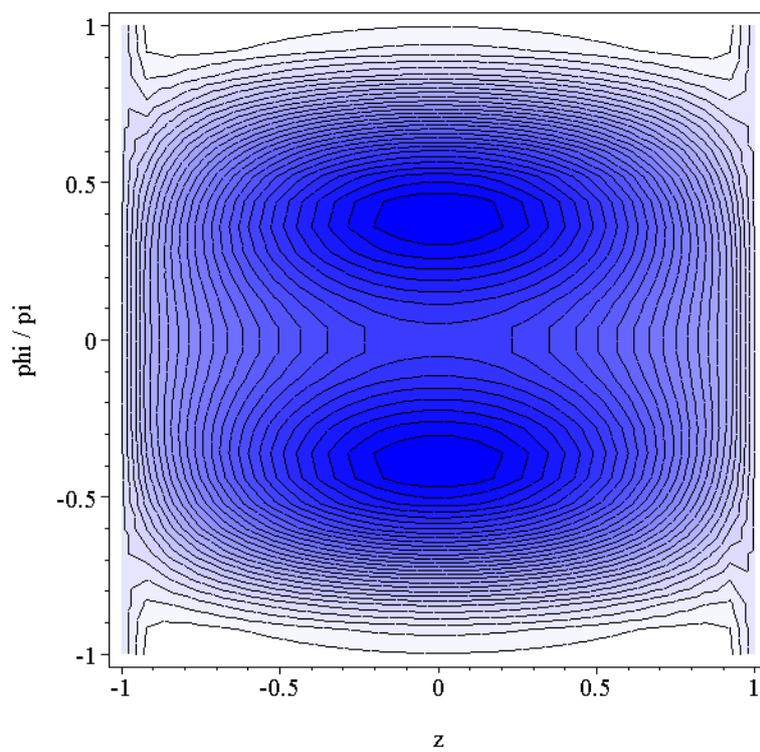


Figura 17: Espaço de fases para $A=3$, $B=1$ e $C=1.5$.

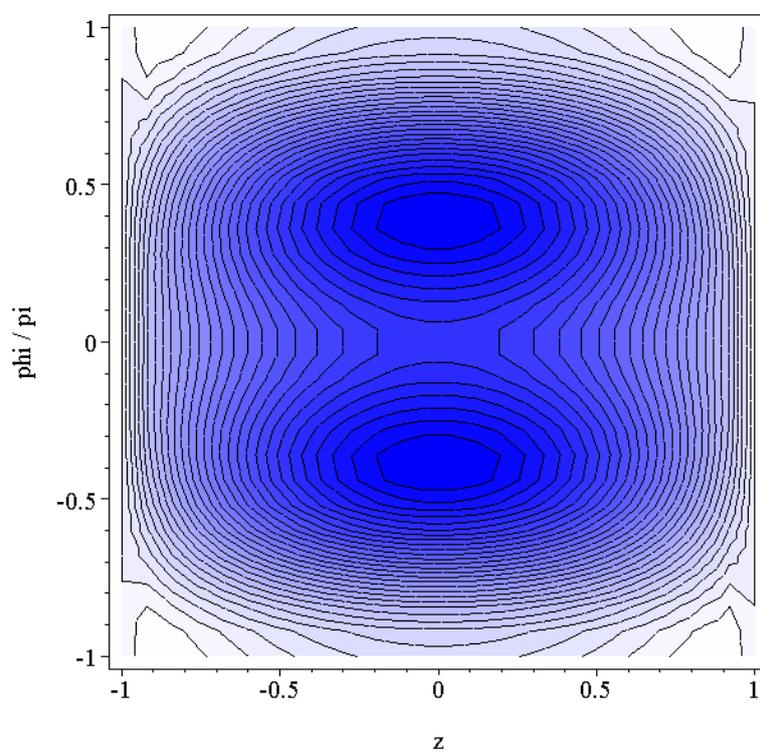


Figura 18: Espaço de fases para $A=4$, $B=1$ e $C=1.5$.

Subsubcaso 1: $|C| < B/2$

Nesta situação a superfície $F(z, \phi)$ ainda não teve seu máximo localizado em $(z = 0, \phi = (2n + 1)\pi)$ dividido em dois outros máximos, de modo que o comportamento para produção de autoarmadilhamento permanece o mesmo que no subsubcaso 1 do subcaso anterior a este (figuras (9)-(11)). Lembrando que a condição que obtivemos sobre os parâmetros A, B, C para produção de dois outros extremos na curva $f(z) \equiv H(z, \phi = (2n+1)\pi)$, a saber $|\frac{B}{A-C}| < 1$, independe do sinal destes parâmetros, e levando em conta que $A, B > 0$ e $C < 0$, obtemos:

- Se $A < B + C$, não há auto-armadilhamento (figura (9));
- Se $B + C < A < 2B + C$, há auto-armadilhamento sem formação de modos de 'fase-corrída' (figura (10));
- Se $A > 2B + C$, existirão todos os regimes dinâmicos: regimes não auto-armadilhados e regimes auto-armadilhados com e sem 'fase-corrída' (figura (11)).

Subsubcaso 2: $B/2 < |C| < B$

Neste caso a superfície $F(z, \phi)$ já possui dois máximos simetricamente localizados no entorno de $(z = 0, \phi = (2n + 1)\pi)$, enquanto que neste ponto propriamente dito há uma sela (figura (7)).

Quando o parâmetro A for crescendo, a superfície $H(z, \phi)$ presenciara uma concorrência entre o termo em A e a superfície $F(z, \phi)$ e, eventualmente, esta concorrência acabará por destruir os máximos de $F(z, \phi)$, tornando-os pontos de sela. Além disso, a sela localizada em $(z = 0, \phi = (2n + 1)\pi)$ virá a se tornar um mínimo local (figuras (19)-(22)).

A curva em z nos ângulos $\phi = (2n + 1)\pi$ permitirá a formação de dois extremos não nulos antes que as curvas em z localizadas nos dois outros ângulos onde existem máximos locais o façam. Imediatamente quando estes novos extremos se formam, e isso se dá a partir de $A > B + C$, vê-se a formação de um mínimo local em $\phi = (2n + 1)\pi$, onde antes havia uma sela (figura (20)). Os outros máximos locais em $\phi = \arccos(B/2C)$ continuam existindo até que o acréscimo de A os destrói, tornando-os selas, e, simultaneamente, cria dois outros máximos em $(|z| = \sqrt{1 - (\frac{B}{A-C})^2}, \phi = (2n + 1)\pi)$ (figura (21)). Isto ocorre quando $A = |C|$. A partir daí temos auto-armadilhamento com fase limitada.

Novamente, se a energia das duas selas formadas for maior que a energia em $(|z| = 1, \phi)$, não teremos a dinâmica de 'fase-corrída'. Caso contrário teremos (figura (22)).

O formato das trajetórias auto-armadilhadas de fase limitada é bastante diferente daquele onde temos $|C| < B/2$. Isso acarretaria em uma possível mudança no período de oscilação de população.

Em resumo temos:

- Se $A < B + C$, então temos uma sela em $(z = 0, \phi = (2n + 1)\pi)$ e dois máximos em $(z = 0, \phi = \arccos(B/2C))$, e mínimos em $(z = 0, \phi = 2n\pi)$ (figura (19));
- Se $B + C < A < |C|$ teremos mínimos em $(z = 0, \phi = n\pi)$ e dois máximos em $(z = 0, \phi = \arccos(B/2C))$ (figura (20));
- Se $|C| < A < \frac{B^2}{2|C|} + |C|$ temos auto-armadilhamento sem 'fase-corrida', com mínimos em $(z = 0, \phi = n\pi)$ (figura (21));
- Se $A > \frac{B^2}{2|C|} + |C|$ temos todos os regimes dinâmicos possíveis, com mínimos em $(z = 0, \phi = n\pi)$ (figura (22)).

Passemos para o próximo subsubcaso.

Subsubcaso 3: $|C| > B$

Neste subsubcaso teremos concorrência entre o termo em A e a superfície $F(z, \phi)$ nos dois máximos já existentes nos ângulos $\phi = \arccos(B/2C)$. Haverá um comportamento totalmente análogo ao do subsubcaso anterior a este, exceto pelo fato de que o incremento de A irá apenas reforçar o mínimo já existente em $\phi = 2n\pi$, ao invés de criá-lo, como aconteceu antes (figuras (23)-(25)).

Inicialmente, com A saindo de zero, temos máximos em $(z = 0, \phi = \arccos(B/2C))$ (figura (23)). A medida que A vai aumentando temos a produção de sela nestes pontos, que indicará o aparecimento de autoarmadilhamento sem 'fase-corrida' (figura (24)). Acrescentando ainda mais A , até que a energia da sela seja menor que a energia em $(|z| = 1, \phi)$, conseguimos também os regimes auto-armadilhados de 'fase-corrida' (figura (25)).

Em resumo:

- Se $A < |C|$ temos mínimos em $\phi = n\pi$, máximos em $\phi = \arccos(B/2C)$ e não aparece autoarmadilhamento (figura (23));
- Se $|C| < A < \frac{B^2}{2|C|} + |C|$ temos mínimos em $(z = 0, \phi = n\pi)$, selas em $(z = 0, \phi = \arccos(B/2C))$ e máximos em $(|z| = \sqrt{1 - (\frac{B}{A-C})^2}, \phi = (2n + 1)\pi)$, máximos estes responsáveis pelas trajetórias autoarmadilhadas (figura (24));

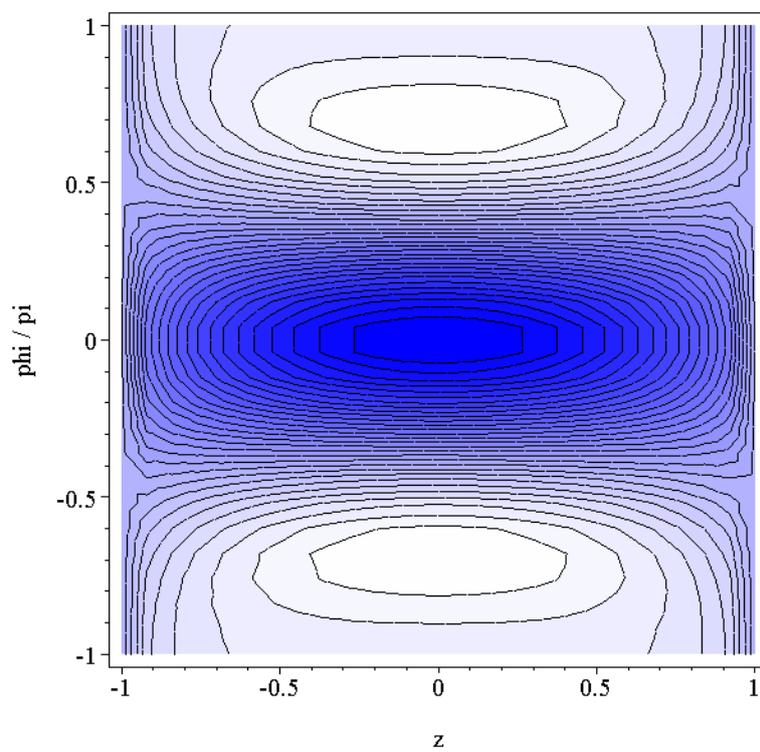


Figura 19: Espaço de fases para $A=0.1$, $B=1$ e $C=-0.9$

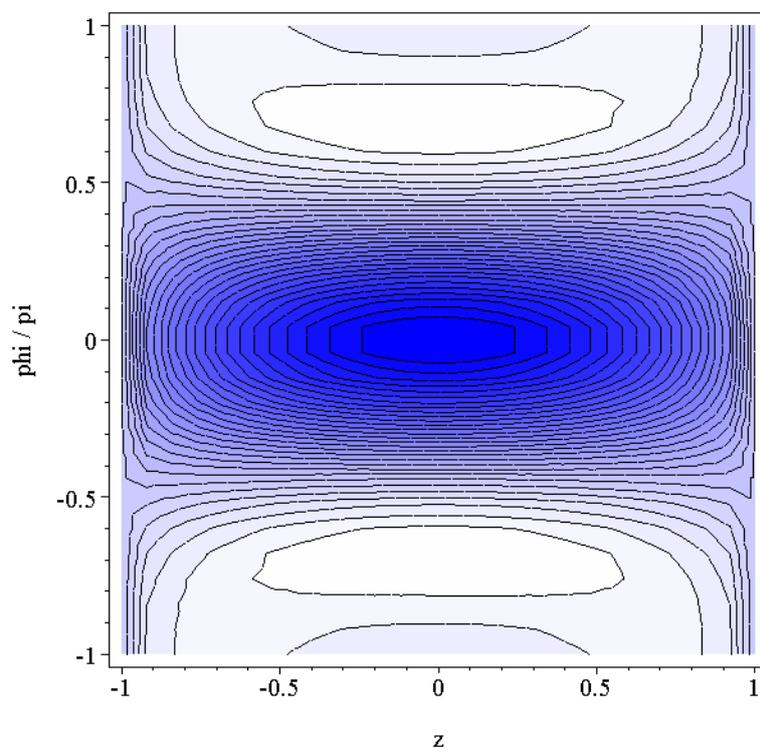


Figura 20: Espaço de fases para $A=0.5$, $B=1$ e $C=-0.9$

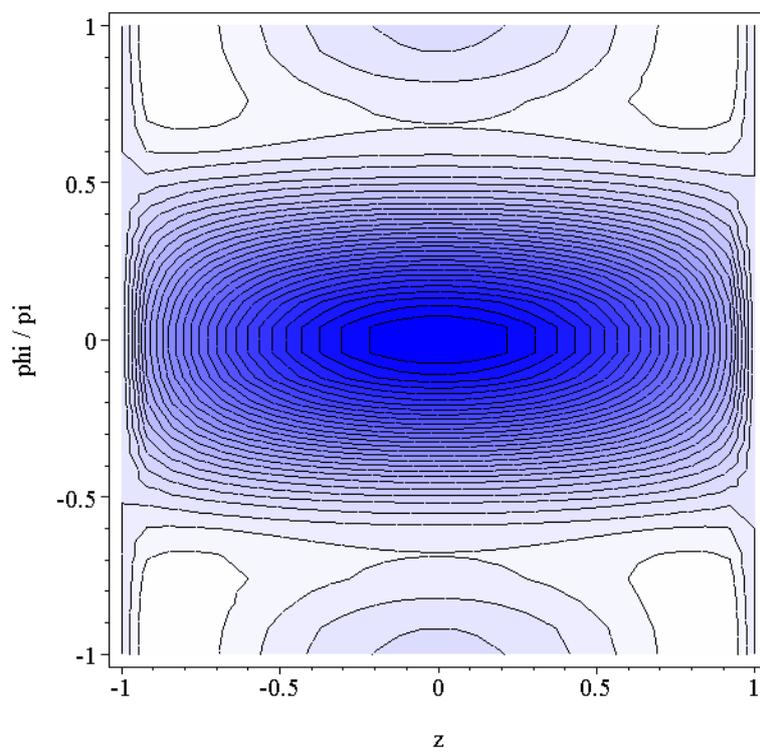


Figura 21: Espaço de fases para $A=1.3$, $B=1$ e $C=-0.9$

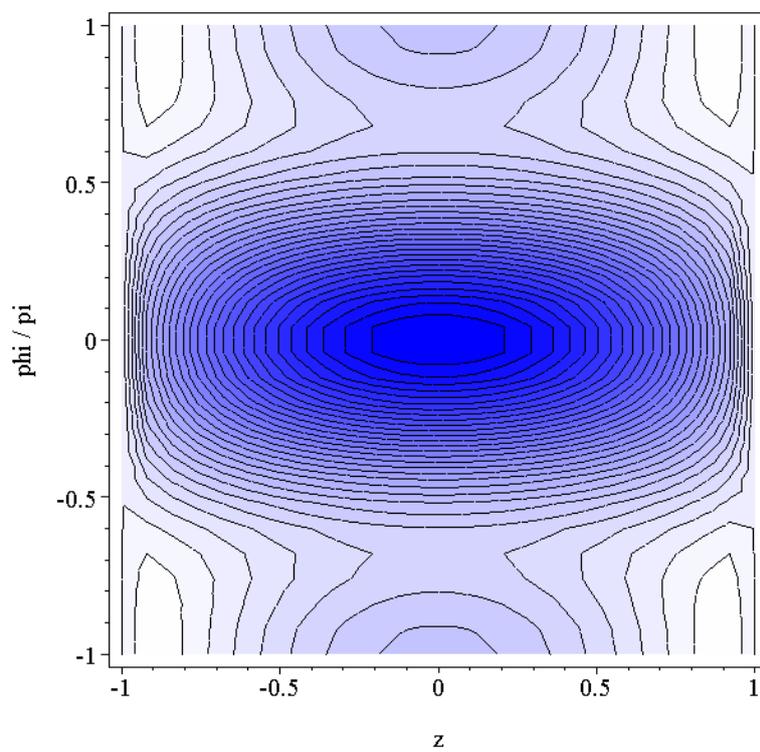


Figura 22: Espaço de fases para $A=2$, $B=1$ e $C=-0.9$

- Se $A > \frac{B^2}{2|C|} + |C|$ temos todos os regimes dinâmicos possíveis, autoarmadilhados, com e sem 'fase-corrída', e não autoarmadilhados (figura (25)).

4.2.3 Subcaso 3: $B < 0, C > 0$

Como vimos no subcaso 3 da subseção (4.1), trocar o sinal de B é equivalente a deslocar toda a superfície de uma fase π . Sendo assim, o comportamento deste subcaso é o mesmo descrito no subcaso 1 desta subseção, apenas deslocado de uma fase π . Por isso sua descrição será eximida.

4.2.4 Subcaso 4: $B, C < 0$

Embora a princípio pareça que este caso é análogo ao subcaso 1 desta subseção com a superfície invertida, uma olhada mais atenta mostra que a inversão do sinal de B e de C não produz tal resultado, uma vez que o sinal de A fica inalterado. Na verdade, o comportamento da superfície neste subcaso irá se assemelhar ao comportamento do subcaso 2 desta subseção, lendo-se $|B|$ onde aparece B . Além disso, os auto-armadilhamentos com fase limitada são formados nos ângulos $\phi = 2n\pi$. Apenas vou repetir os resultados principais daquela subseção com as devidas correções para este caso:

Subsubcaso 1: $|C| < |B|/2$

Os resultados são:

- Se $A < |B| + C$, não há auto-armadilhamento (figura (26));
- Se $|B| + C < A < 2|B| + C$, há auto-armadilhamento sem formação de modos de 'fase-corrída' (figura (27));
- Se $A > 2|B| + C$, existirão todos os regimes dinâmicos: regimes não auto-armadilhados e regimes auto-armadilhados, com e sem 'fase-corrída' (figura (28)).

Subsubcaso 2: $|B|/2 < |C| < |B|$

Os resultados são:

- Se $A < |B| + C$, então temos mínimos em $(z = 0, \phi = (2n + 1)\pi)$, selas em $(z = 0, \phi = 2n\pi)$ e máximos em $(z = 0, \phi = \arccos(B/2C))$. Não há auto-armadilhamento (figura (29));

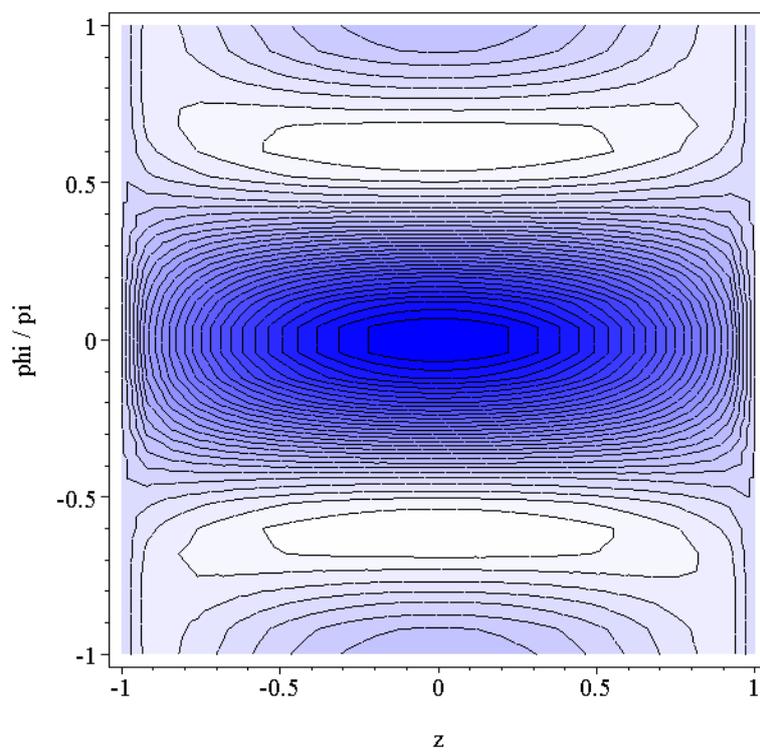


Figura 23: Espaço de fases para $A=1$, $B=1$, $C=-1.5$

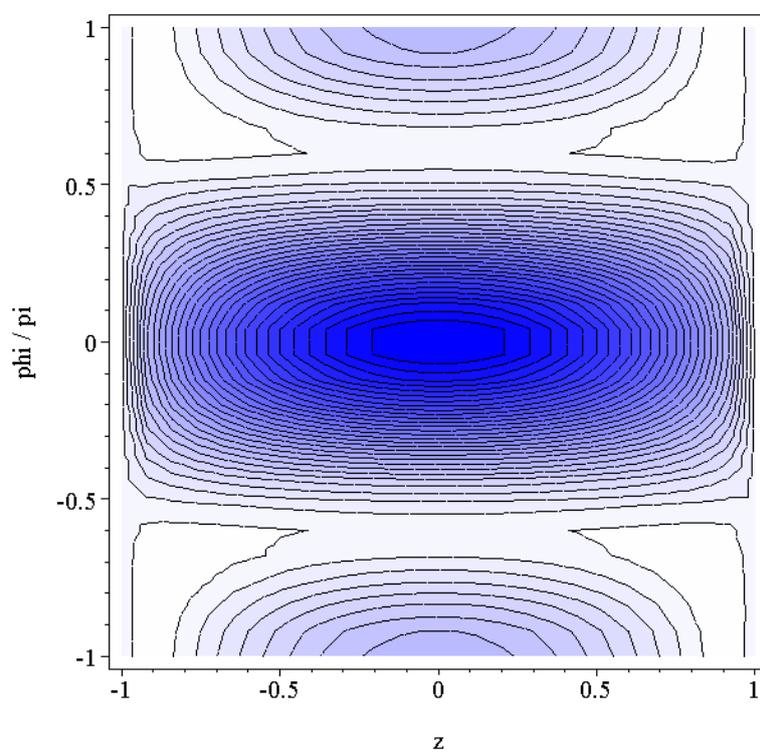


Figura 24: Espaço de fases para $A=1.75$, $B=1$, $C=-1.5$

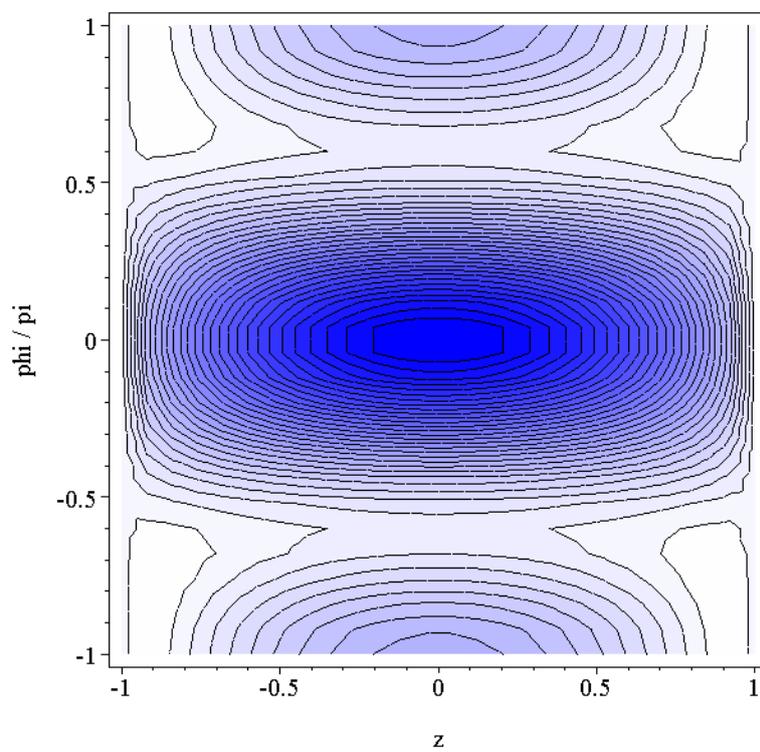


Figura 25: Espaço de fases para $A=2$, $B=1$, $C=-1.5$

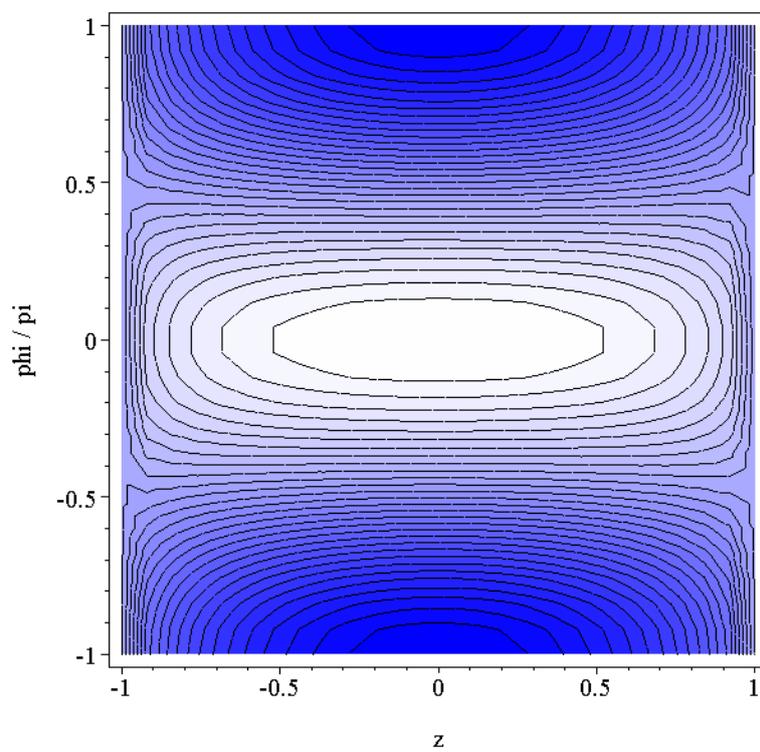


Figura 26: Espaço de fases para $A=0.5$, $B=-1$, $C=-0.1$.

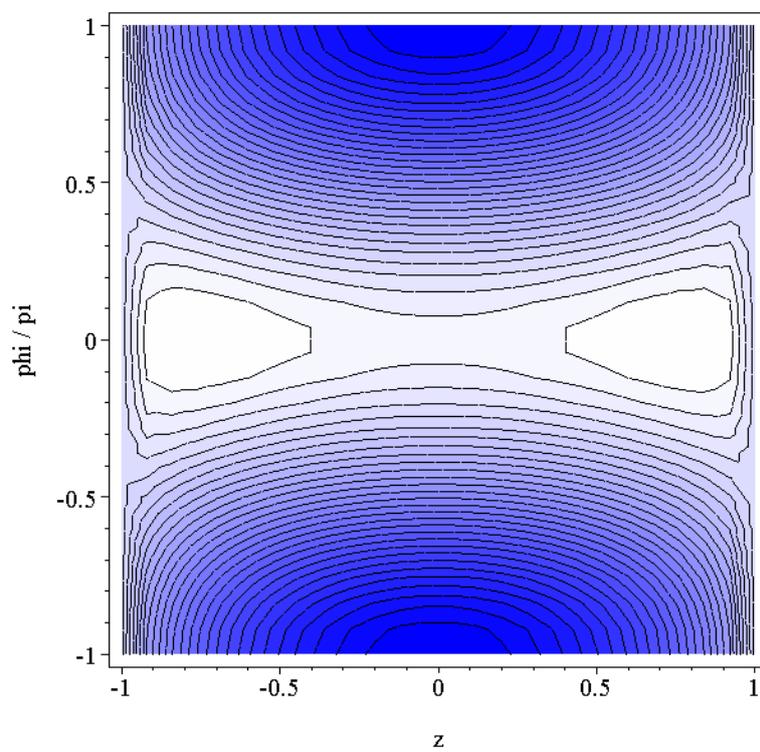


Figura 27: Espaço de fases para $A=1.5$, $B=-1$, $C=-0.1$.

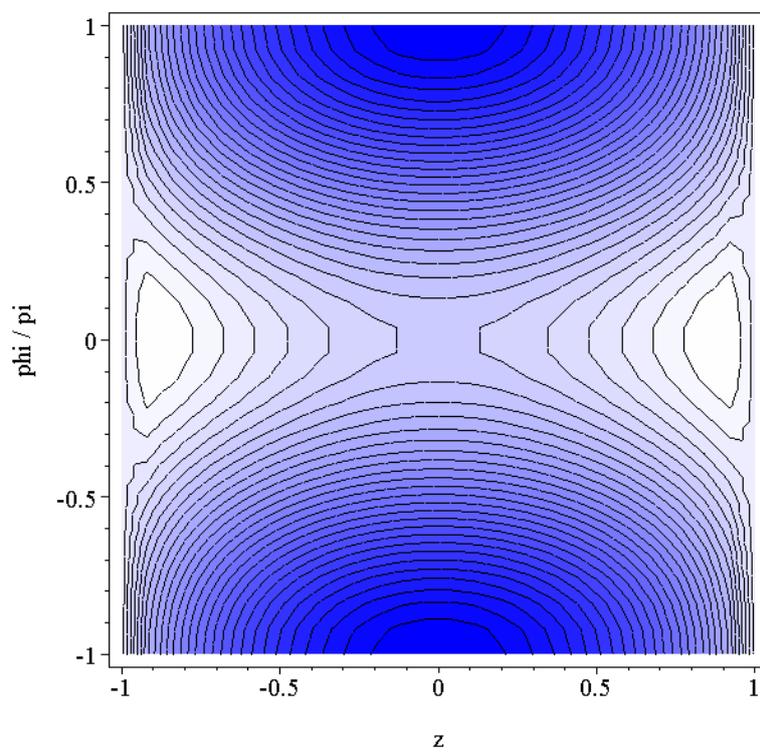


Figura 28: Espaço de fases para $A=2.5$, $B=-1$, $C=-0.1$.

- Se $|B| + C < A < |C|$ temos mínimos em $(z = 0, \phi = n\pi)$ e máximos em $(z = 0, \phi = \arccos(B/2C))$. Também não há auto-armadilhamento (figura (30));
- Se $|C| < A < \frac{B^2}{2|C|} + |C|$ temos auto-armadilhamento sem 'fase-corrída' (figura (31));
- Se $A > \frac{B^2}{2|C|} + |C|$ temos todos os regimes dinâmicos possíveis (figura (32)).

Subsubcaso 3: $|C| > |B|$

Temos os resultados:

- Se $A < |C|$ temos mínimos em $(z = 0, \phi = n\pi)$, máximos em $(z = 0, \phi = \arccos(B/2C))$ e não aparece autoarmadilhamento (figura (33));
- Se $|C| < A < \frac{B^2}{2|C|} + |C|$ temos mínimos em $(z = 0, \phi = n\pi)$, selas em $(z = 0, \phi = \arccos(B/2C))$ e máximos em $(|z| = \sqrt{1 - (\frac{B}{A-C})^2}, \phi = 2n\pi)$, máximos estes no entorno dos quais estão as trajetórias autoarmadilhadas (figura (34));
- Se $A > \frac{B^2}{2|C|} + |C|$ temos todos os regimes dinâmicos possíveis, autoarmadilhados, com e sem 'fase-corrída', e não autoarmadilhados (figura (35)).

Encerra-se o caso $A > 0$.

4.3 Estudo de $H(z, \phi)$ com $A < 0$

Por último, analisaremos agora as alterações que o termo $\frac{1}{2}Az^2$ introduz na superfície $F(z, \phi)$ quando A é negativo, ou seja, quando a interação não-linear entre partículas de poços distintos é atrativa.

Enquanto que no caso $A > 0$, analisado na seção anterior, tínhamos o reforço dos mínimos da superfície $F(z, \phi)$ e geração de autoarmadilhamentos nos locais de máximo da mesma, agora teremos exatamente o contrário: reforço dos máximos e geração de autoarmadilhamentos nos mínimos de $F(z, \phi)$ (lembrar que agora a concavidade do termo em A é concorrente com os mínimos de $F(z, \phi)$). Desse modo, enquanto que os regimes de autoarmadilhamento produzidos na subseção anterior eram meta-estáveis, nesta

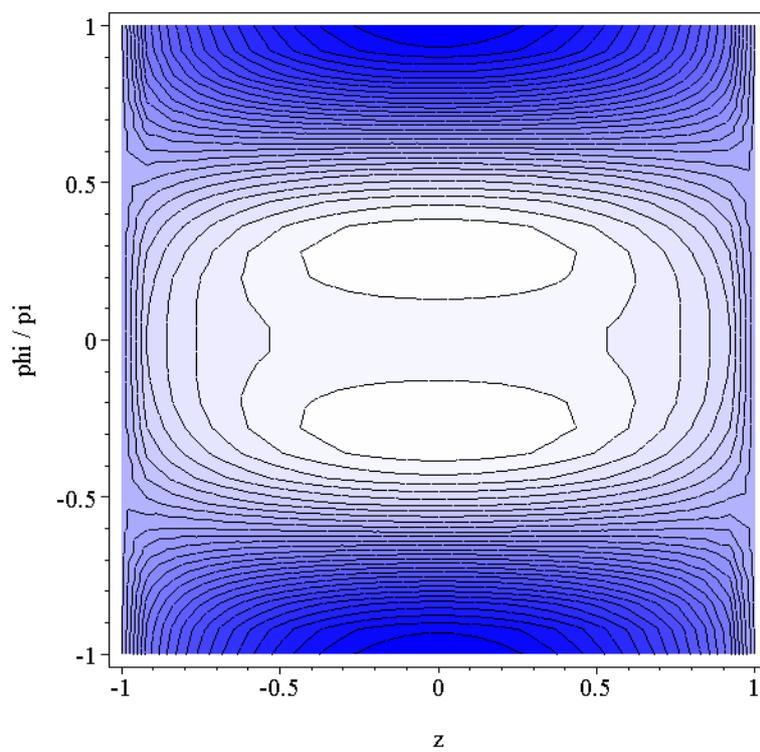


Figura 29: Espaço de fases para $A=0.1$, $B=-1$, $C=-0.8$

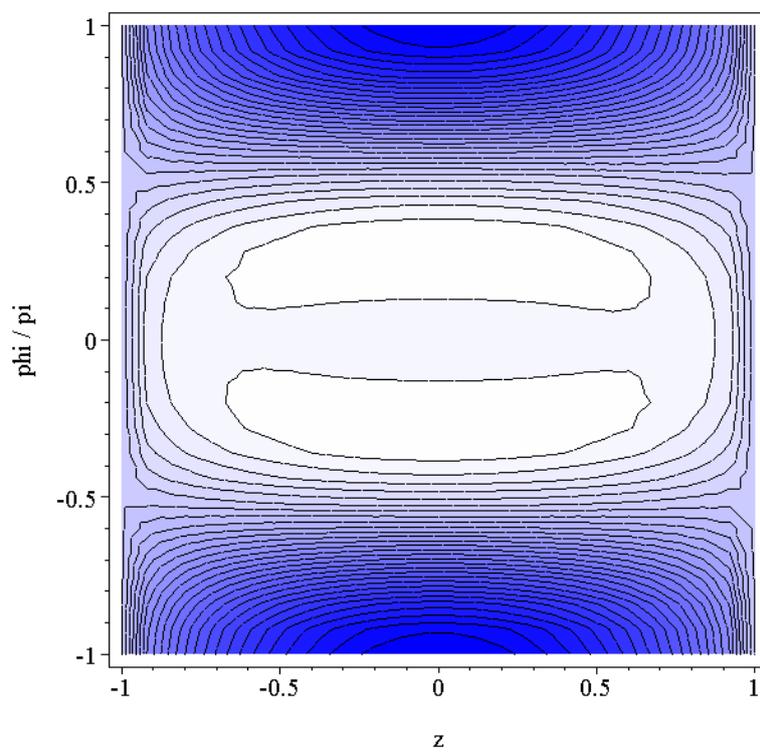


Figura 30: Espaço de fases para $A=0.5$, $B=-1$, $C=-0.8$

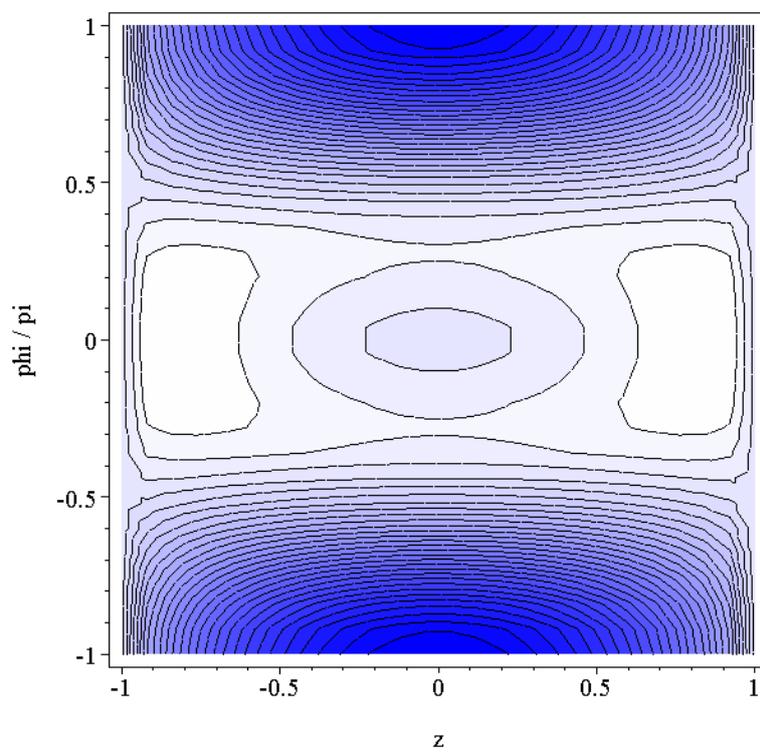


Figura 31: Espaço de fases para $A=1.2$, $B=-1$, $C=-0.8$

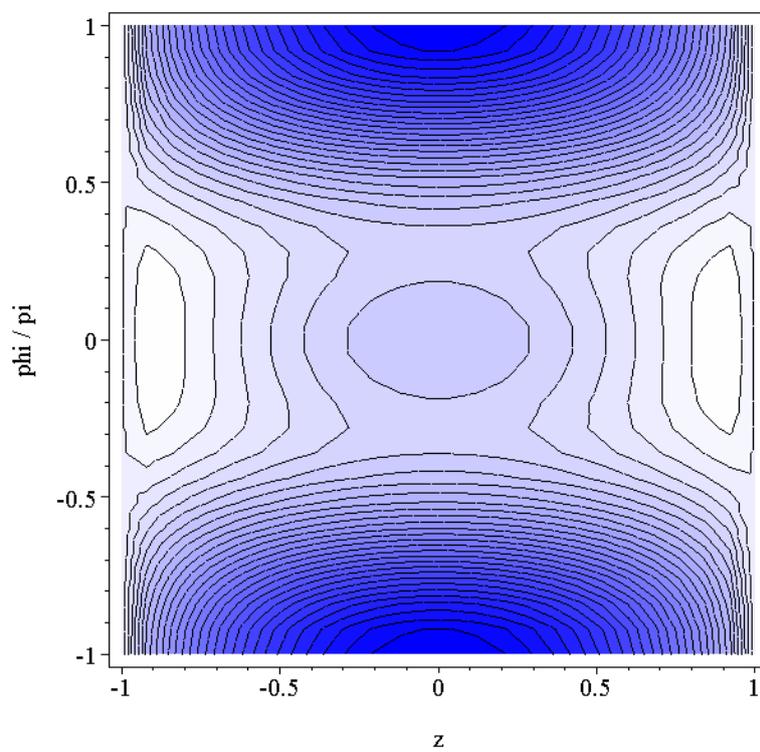


Figura 32: Espaço de fases para $A=2$, $B=-1$, $C=-0.8$

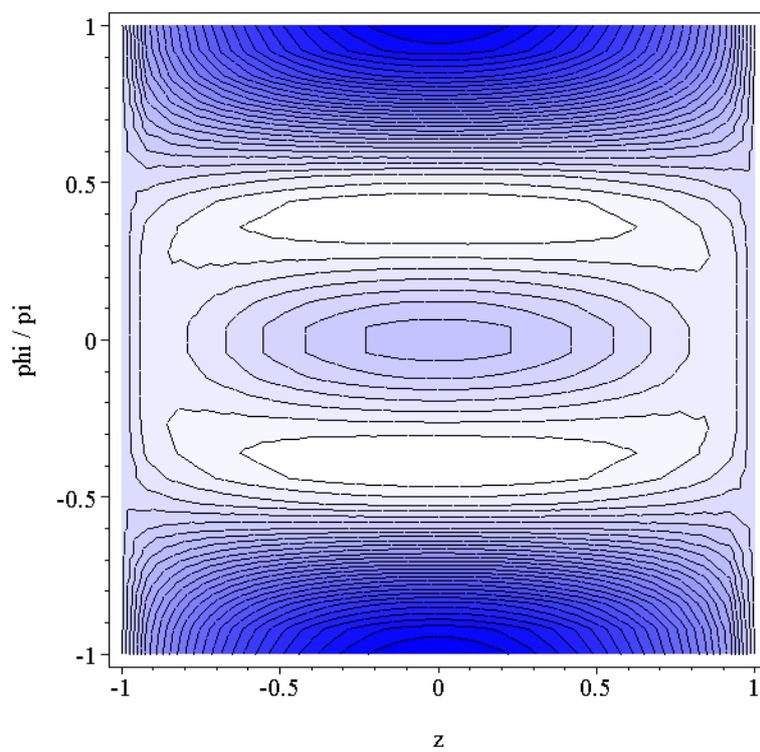


Figura 33: Espaço de fases para $A=1$, $B=-1$, $C=-1.5$.

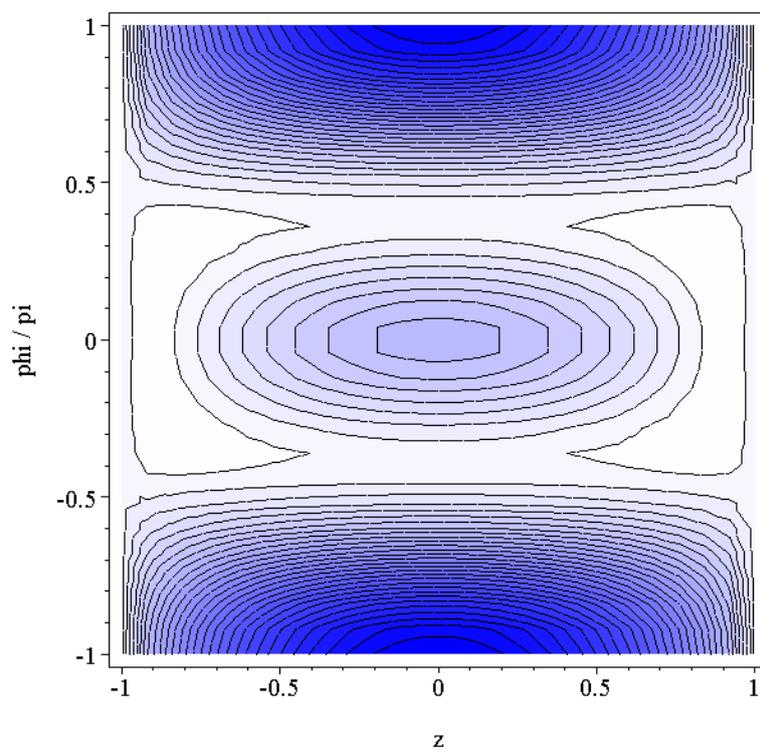


Figura 34: Espaço de fases para $A=1.75$, $B=-1$, $C=-1.5$.

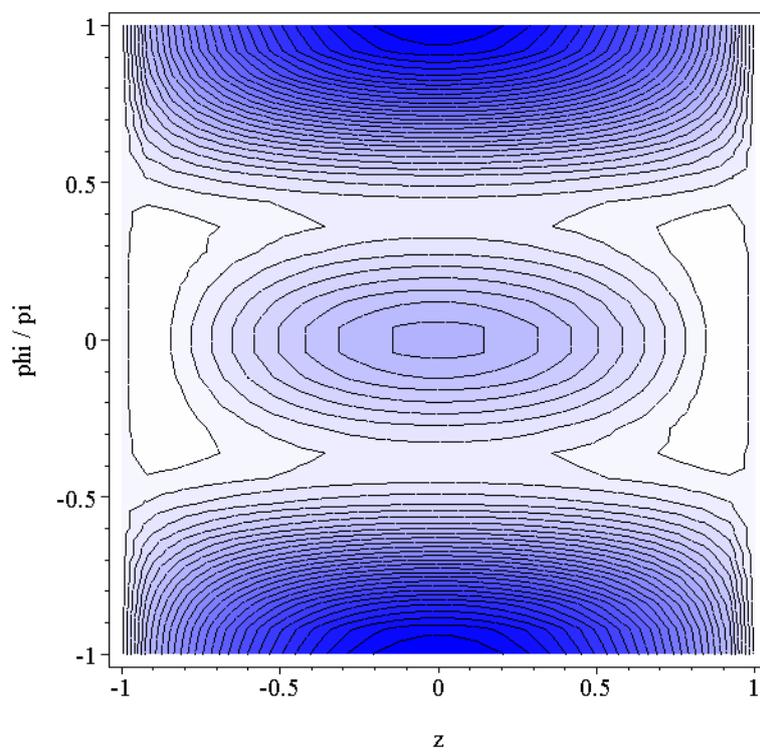


Figura 35: Espaço de fases para $A=2$, $B=-1$, $C=-1.5$.

subseção, devido à interação atrativa representada pelo parâmetro A negativo, os regimes de autoarmadilhamento serão estáveis. Isso significa que quando a não linearidade atrativa é grande, todo o sistema tem menor energia quando está em um único poço, favorecendo o autoarmadilhamento⁷ - o que está completamente de acordo com a intuição sobre o comportamento do sistema.

Dado o acima, ocorre que as figuras desta subseção têm sempre uma análoga presente na subseção anterior, apenas com troca de cores: as regiões azuis ficam brancas e vice-versa. Desse modo, apenas citaremos os resultados sem apresentar mais figuras.

Além disso, como todos os resultados quantitativos foram obtidos de modo análogo àqueles da seção com $A > 0$, omitimos nesta subseção todas as argumentações e as poucas contas que devem ser feitas, restringindo-nos apenas a apresentar tais resultados.

4.3.1 Subcaso 1: $B, C > 0$

Subsubcaso 1: $C < B/2$

Neste subsubcaso não há divisão do mínimo de $F(z, \phi)$ em dois outros mínimos, localizados em $(z = 0, \phi = \arccos(B/2C))$, visto que o parâmetro C ainda é pequeno. No entanto, a produção de auto-armadilhamento será facilitada pela presença deste termo em C .

A energia das selas geradas no entorno dos mínimos de $F(z, \phi)$ sempre estará intimamente relacionada com a produção ou não dos regimes de autoarmadilhamento, do mesmo modo que ocorria quando $A > 0$. Além disso, elas ditarão se há ou não o modo 'fase-corrída'.

Em particular, temos para este subsubcaso:

- Se $|A| < B - C$ então não há auto armadilhamento e o comportamento da superfície $H(z, \phi)$ é idêntico ao da superfície $F(z, \phi)$, tendo máximos e mínimos alternados em $(z = 0, \phi = n\pi)$;
- Se $B - C < |A| < 2B - C$ há auto-armadilhamento no entorno dos ângulos $\phi = 2n\pi$, sem o modo 'fase-corrída';
- Se $|A| > 2B - C$ há todos os regimes dinâmicos possíveis.

⁷Na prática isso é um problema porque a interação atrativa faz o condensado colapsar

Subsubcaso 2: $B/2 < C < B$

Neste subsubcaso o acréscimo do $|A|$ terá os seguintes efeitos sobre $H(z, \phi)$: transformar a sela, presente em $(z = 0, \phi = 2n\pi)$, em um máximo local; destruir os dois mínimos presentes em $(z = 0, \phi = \arccos(B/2C))$ e transformá-los em selas; gerar mínimos em $(|z| = \sqrt{1 - (\frac{B}{C-A})^2}, \phi = 2n\pi)$, mínimos estes em torno dos quais haverá trajetórias de auto-armadilhamento. Tudo ocorre de acordo com:

- Se $|A| < B - C$, temos dois mínimos em $(z = 0, \phi = \arccos(B/2C))$, sela em $(z = 0, \phi = 2n\pi)$, máximos em $(z = 0, \phi = (2n + 1)\pi)$. Sem auto-armadilhamento.
- Se $B - C < |A| < C$ temos máximos em $(z = 0, \phi = n\pi)$ e mínimos em $(z = 0, \phi = \arccos(B/2C))$. Ainda não há auto-armadilhamento.
- Se $C < |A| < \frac{B^2}{2C} + C$ temos máximos em $(z = 0, \phi = n\pi)$ e mínimos em $(|z| = \sqrt{1 - (\frac{B}{C-A})^2}, \phi = 2n\pi)$. Estes mínimos surgem no lugar dos outros mínimos citados no item anterior. Nos mínimos atuais há auto-armadilhamento. O modo 'fase-corrída' ainda não foi estabelecido.
- Se $|A| > \frac{B^2}{2C} + C$ temos também o modo 'fase-corrída' estabelecido, além das características da superfície dadas no item precedente a este.

Subsubcaso 3: $C > B$

Neste subsubcaso já temos um máximo formado em $(z = 0, \phi = 2n\pi)$ quando $A = 0$. O aumento de $|A|$ fará apenas com que os mínimos presentes em $(z = 0, \phi = \arccos(B/2C))$ se tornem selas. Quando isso ocorre temos o aparecimento do auto-armadilhamento. Assim, os resultados são:

- Se $|A| < C$ temos máximos em $(z = 0, \phi = n\pi)$ e mínimos em $(z = 0, \phi = \arccos(B/2C))$. Não há auto-armadilhamento.
- Se $C < |A| < \frac{B^2}{2C} + C$ temos máximos em $(z = 0, \phi = n\pi)$ e mínimos em $(|z| = \sqrt{1 - (\frac{B}{C-A})^2}, \phi = 2n\pi)$. Nos mínimos há auto-armadilhamento. O modo 'fase-corrída' ainda não foi estabelecido.
- Se $|A| > \frac{B^2}{2C} + C$ temos também o modo 'fase-corrída' estabelecido, além das características da superfície dadas no item precedente.

Vamos ao próximo subcaso.

4.3.2 Subcaso 2: $B > 0, C < 0$

Apenas lembrando, quando $B > 0$ e $C < 0$, o comportamento da superfície $F(z, \phi)$ é: partindo de valores pequenos de $|C|$ e aumentando, ao invés de vermos a destruição do mínimo em $(z = 0, \phi = 2n\pi)$ e a subsequente formação de dois outros mínimos em $(z = 0, \phi = \arccos(B/2C))$ e uma sela onde antes estava o único mínimo, o que vemos é a divisão do máximo em $(z = 0, \phi = (2n+1)\pi)$ em dois outros máximos em $(z = 0, \phi = \arccos(B/2C))$ e a formação de uma sela onde antes estava o único máximo. Posteriormente esta sela se torna um outro mínimo com o aumento de $|C|$.

Com isso em mente, podemos agora lembrar que o parâmetro A é negativo. Isso significa que ele irá reforçar os máximos e destruir os mínimos. Nos arredores dos mínimos é que irão se formar trajetórias autoarmadilhadas.

Vejam os resultados de cada subsubcaso.

Subsubcaso 1: $|C| < B/2$

Neste caso o máximo presente em $(z = 0, \phi = (2n + 1)\pi)$ ainda não foi subdividido em dois outros máximos, de modo que o acréscimo do módulo do parâmetro A irá introduzir modificações apenas no comportamento dos mínimos.

Temos os resultados:

- Se $|A| < B - C$ não há auto-armadilhamento.
- Se $B - C < |A| < 2B - C$ há auto-armadilhamento sem 'fase-corrída'.
- Se $|A| > 2B - C$ há todos os regimes dinâmicos.

Subsubcaso 2: $B/2 < |C| < B$

Neste subsubcaso, como o aumento do $|A|$ só altera o comportamento da superfície $F(z, \phi)$ em torno de seus mínimos, enquanto que os máximos têm seu efeito incrementado, conclui-se que o comportamento de $H(z, \phi)$ será o mesmo que no subcaso anterior. Poderia-se pensar que a sela formada em $(z = 0, \phi = (2n + 1)\pi)$ iria ser destruída com o incremento do $|A|$, no entanto isso não acontece. O que acontece é a transformação do mínimo em $(z = 0, \phi = 2n\pi)$ em uma sela.

Temos o comportamento geral de $H(z, \phi)$ neste subsubcaso dado por:

- Se $|A| < B - C$ não há auto-armadilhamento;
- Se $B - C < |A| < 2B - C$ há auto-armadilhamento sem 'fase-corrída' (o mínimo em $(z = 0, \phi = 2n\pi)$ vira sela);

- Se $|A| > 2B - C$ há todos os regimes dinâmicos (a energia da nova sela se torna maior que a energia em $(|z| = 1, \phi)$).

Subsubcaso 3: $|C| > B$

Nesta situação, temos mínimos em $(z = 0, \phi = n\pi)$ e máximos em $(z = 0, \phi = \arccos(B/2C))$. Como o incremento de $|A|$ gera alterações no comportamento da superfície $H(z, \phi)$ somente nos arredores dos mínimos, o que acontece com estes é que são tornados selas gradualmente.

Os resultados analíticos são:

- Se $|A| < |C| - B$ existem mínimos em $(z = 0, \phi = n\pi)$ e máximos em $(z = 0, \phi = \arccos(B/2C))$. Além disso, não há auto-armadilhamento. (É o mesmo comportamento da superfície $F(z, \phi)$).
- Se $|C| - B < |A| < |C| + B$ o mínimo em $(z = 0, \phi = (2n + 1)\pi)$ é tornado sela, enquanto os outros mínimos continuam existindo. No entanto ainda não há auto armadilhamento.
- Se $|C| + B < |A| < |C| + 2B$ todos os mínimos são destruídos e tornados selas. Há formação de trajetórias auto-armadilhadas sem 'fase-corrída'.
- Se $|A| > |C| + 2B$ há todos os regimes dinâmicos.

4.3.3 Subcaso 3: $B < 0, C > 0$

Neste subcaso temos o mesmo comportamento do subcaso 1 desta subseção, com toda a superfície deslocada de π , conforme demonstrado no subcaso 3 da subseção 4.1. Apenas nos resultados, onde encontrarmos B devemos ler $|B|$.

4.3.4 Subcaso 4: $B, C < 0$

Neste caso temos finalmente uma inversão total da superfície $H(z, \phi)$ dada no primeiro subcaso do caso $A > 0$. Sendo assim, os resultados serão os mesmos lá apresentados, exceto pelo fato de que devemos ler $|A|$, $|B|$ e $|C|$ onde houver A , B ou C , respectivamente, e, onde se lia 'mínimos' ou 'máximos', dever-se-á ler 'máximos' e 'mínimos', respectivamente.

Aqui encerramos a análise da superfície $H(z, \phi)$ para qualquer valor dos parâmetros A , B e C .

4.4 Comentários

Insistimos em lembrar que, em geral, o parâmetro C é muito menor que os outros dois, A ou B . Quando ele começa a ser relevante em relação aos outros dois então a aproximação de dois modos já está no seu limite de validade [5].

Pela análise que fizemos, notamos que C e A sempre são concorrentes. Isso ocorre porque o parâmetro A está ligado a interação entre partículas de um mesmo poço e o parâmetro C , estando ligado a troca de duas partículas, acaba por diminuir o número de partículas no poço, reduzindo o valor efetivo de A . Isso explica, qualitativamente, a concorrência de ambos.

Notamos também que a interação não linear (A) é o fator responsável pela produção de auto-armadilhamento.

Finalmente, ficou explícito que a dinâmica de partículas só se dá por meio dos termos B e C , correspondentes aos termos de troca de uma ou duas partículas de poço.

5 Controle populacional via pulsos de variação temporal periódica do parâmetro de tunelamento B

Na seção anterior nos preocupamos em explicitar os regimes dinâmicos possíveis habilitados pela hamiltoniana semiclássica dada pela equação (63) conforme as razões entre os parâmetros A , B e C eram variadas. Tal explicação foi realizada com o objetivo de sentirmo-nos a vontade para falar de transição entre regimes dinâmicos, além de dar boa intuitividade sobre o comportamento daquela superfície.

Conforme será mostrado no que segue, se o parâmetro de tunelamento B admitir, por um intervalo de tempo determinado, ser variado temporalmente, pode-se conseguir uma transição entre regimes dinâmicos. Saber como transitar entre regimes dinâmicos é o passo inicial para se ter um controle de população em uma junção Bose-Josephson.

No decorrer desta seção serão apresentados muitos resultados numéricos de simulações de evolução temporal do sistema a partir das relações dadas em (21) e (22). A escala de frequências que utilizamos nestas simulações foi a frequência de plasma, aquela obtida via linearização das equações de movimento para \dot{z} e $\dot{\phi}$ no entorno da origem. Analiticamente tal frequência é dada por:

$$\omega_p = \sqrt{(B - 2C)(A + B - C)} \quad (70)$$

e, conseqüentemente, obtemos como escala de tempo o período de plasma $\tau_p (\equiv 2\pi/\omega_p)$.

Um grande número de simulações do sistema durante 1000 períodos de oscilações plasma permitiu-nos entender que a energia média do sistema com forçamento do parâmetro B sob a forma

$$B(t) = B_0 \cos \omega t, \quad (71)$$

onde variamos ω desde zero a $10\omega_p$ e mantivemos os outros parâmetros fixos, tende ao valor $Az_0^2/2$ se a razão ω/ω_p atingir valores grandes. Um gráfico da energia média em função da frequência, para diversas condições iniciais, está na figura (36). Sendo assim, o efeito médio da oscilação periódica de alta frequência do parâmetro B é torná-lo nulo.

Após esta observação, resolvemos fixar a frequência em $\omega \gg \omega_p$ e variar a amplitude do forçamento de $B(t)$. Notamos que tal variação não muda a energia final, mesmo nos casos $B_0 \gg A$ ou $B_0 \ll A$.

A representação da dinâmica do sistema no espaço de fases para $\omega \gg \omega_p$ é a de uma pequena mancha no entorno da população inicial, com fase

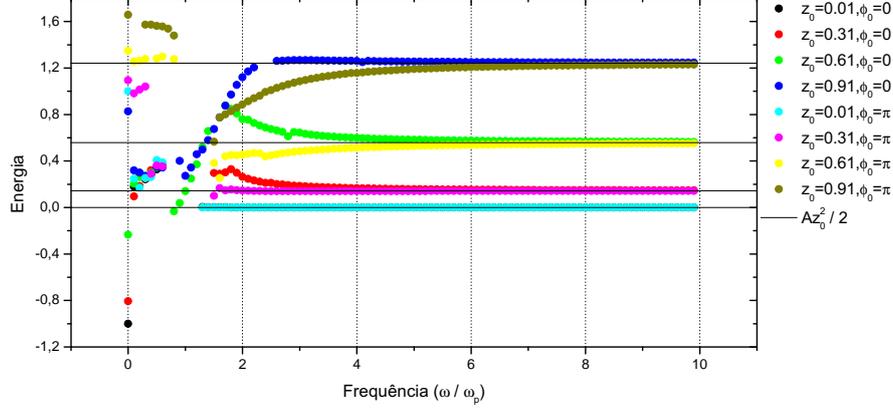


Figura 36: Embora a energia média não tenha comportamento previsível para valores pequenos da frequência, ela o tem para valores grandes. Quando a frequência atinge valores superiores a $3\omega_p$, então a energia passa a convergir para o valor dado pela Hamiltoniana semiclássica, equação (63).

corrente (ver figura (37), que produzimos com $\omega = 10\omega_p$ e diferentes condições iniciais). Quanto mais alta a frequência, menor a amplitude da mancha.

A partir daí é que resolvemos usar um forçamento do parâmetro B de alta frequência, por um tempo determinado, para transitar de um modo dinâmico para outro. [Sempre estaremos considerando apenas 3 modos dinâmicos possíveis: modo não-auto-armadilhado (NAA), modo auto-armadilhado de fase-corrente (AAFC) e modo auto-armadilhado de fase-limitada (AAFL) - ver figura (38)]. Tal tempo determinado dependia da *velocidade* com que a fase corria para cada conjunto de parâmetros e/ou condições iniciais.

A determinação desta *velocidade* foi obtida usando-se um *ansatz* numérico-empírico para a solução de altas frequências de forçamento. Tal *ansatz* foi:

$$z(t) \approx z_0 \rightarrow \text{população no início do pulso,} \quad (72)$$

$$\phi(t) \approx \phi_0 + Az_0 t \rightarrow \phi_0 = \text{fase no início do pulso.} \quad (73)$$

Nas unidades que estamos trabalhando, a equação (73) pode ser reescrita como:

$$\frac{\phi(t)}{\pi} = \frac{\phi_0}{\pi} + \frac{2Az_0}{\sqrt{B(A+B)}} \left(\frac{t}{\tau_p} \right) \quad (74)$$

de modo que a velocidade com que a fase corre no tempo é $\frac{2Az_0}{\sqrt{B(A+B)}}$, que é

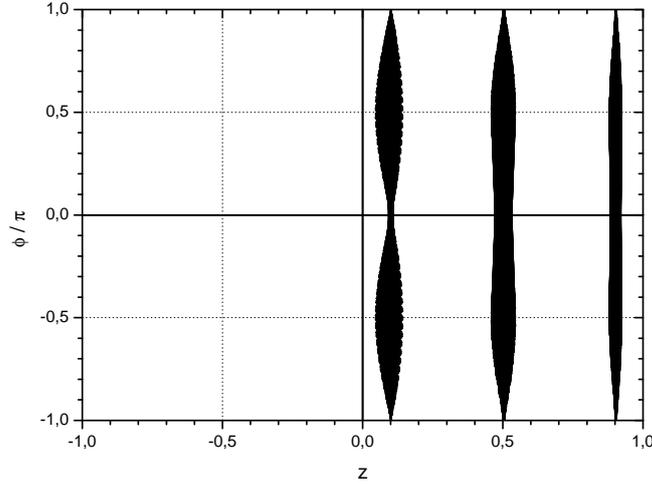


Figura 37: Espaço de fases para altas frequências de forçamento e três diferentes condições iniciais. Notar que a mancha é gerada por termos uma trajetória com baixa amplitude de variação na diferença de população enquanto que a fase varre todo o seu domínio em regime de fase corrente (rebatemos as fases para que elas sempre estivessem entre -1 e 1). Como as trajetórias não são periódicas o sistema acaba varrendo toda uma região do espaço de fases no entorno da população inicial, para cada uma das diferentes condições iniciais.

de fácil comparação com os gráficos apresentados, a critério de exemplo, no cálculo da inclinação da curva $\phi(t)$ - figuras (39)-(41).

Sabendo a taxa com que a fase varia no tempo quando o sistema está submetido a uma variação temporal do parâmetro B de alta frequência, podemos então introduzir um pulso, de duração determinada, de tal modo que o sistema saia de um regime dinâmico e pare em outro. Por exemplo, digamos que o sistema esteja em um regime de oscilações de baixa amplitude na diferença de população e na diferença de fase, NAA, e desejemos transitar para um novo regime, do tipo AAFL. Para fazer isso basta que, em um dado tempo t_0 , um pulso do tipo $B = B_0 \cos \omega t$, com $\omega \gg \omega_p$, seja dado, e que deixemos o sistema evoluir, sob o pulso, para um ponto no espaço de fases que pertença a um regime AAFC e, então, desliguemos o pulso. Em seguida, deixamos novamente que o sistema evolua com o pulso desligado até que atinja uma diferença de população comum com um regime AAFL. Aí ligamos novamente o pulso para levar o sistema do regime AAFC para o regime final AAFL. Este

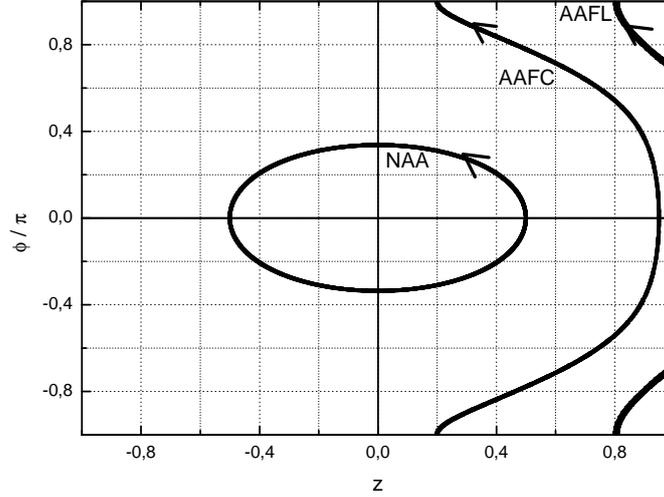


Figura 38: Espaço de fases sem forçamento. Notar que temos apenas três regimes dinâmicos caracterizando o sistema: oscilação simples de fase e de população (NAA), auto-armadilhamento com fase corrente (AAFC), auto-armadilhamento com fase limitada (AAFL).

tipo de transição está exemplificado nas figuras (42) a (45).

Mesmo para frequências de forçamento da ordem de $5\omega_p$ o cálculo dos tempos de duração dos pulsos funciona bem. A dificuldade no cálculo desses tempos é que eles dependem da diferença de população no instante em que se inicia o pulso, como podemos ver na equação (73). Tal diferença de população não pode ser obtida analiticamente, uma vez que não sabemos $z(t)$ para o caso sem forçamento.

Sendo assim, para produzir as figuras exemplo procedemos da seguinte forma: fizemos a simulação sem forçamento, para uma dada condição inicial, então escolhemos o instante em que poderíamos aplicar o pulso de modo a conduzir o sistema para o novo regime dinâmico desejado e notamos a diferença de população neste instante, em seguida, calculamos o tempo de duração do pulso para a transição entre os modos e, finalmente, executamos o programa que permite ter pulsos em B de duração determinada. Não houve erro algum nos cálculos dos tempos de transição entre modos, o que gerou confiança no método.

Notamos que esse método seria eficiente para o controle populacional. No entanto, ainda precisamos melhorá-lo no que diz respeito ao cálculo dos tempos de duração dos pulsos, por serem estes dependentes da diferença de

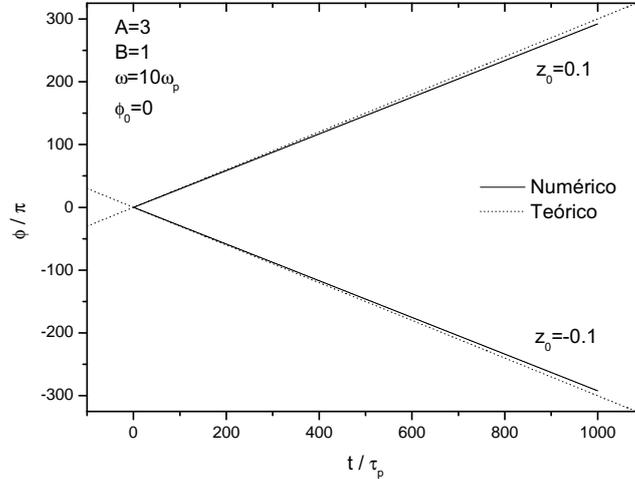


Figura 39: $\phi(t)$ variando z_0 e mantendo os parâmetros A e B fixos. A linha sólida representa a solução exata das equações para \dot{z} e $\dot{\phi}$ enquanto que a pontilhada é o anzats numérico-empírico proposto nas equações 72 e 73.

população no início do pulso. Também seria útil realizar simulações quânticas completas, não apenas semiclássicas, para ver se estas transições são realmente possíveis.

Passaremos agora a tratar do comportamento médio da Hamiltoniana sob forçamento a altas frequências e em pequenas diferenças de população.

5.1 Hamiltoniana média resultante de forçamento de alta frequência

Em trabalho anterior desenvolvemos estudos a respeito de um pêndulo com pivô excitado periodicamente na direção vertical[27]. Tal excitação do pivô a frequências muito maiores que a frequência natural do pêndulo fazia com que a oscilação deste, quando o movimento era oscilatório, se desse sob uma decomposição de uma oscilação rápida e outra lenta. A oscilação rápida sempre tinha amplitude bem menor que a amplitude da oscilação lenta. As seções 3 e 4 do trabalho [27] estão no apêndice, seção 7, com o fim de esclarecer como o estudo do pêndulo foi realizado.

Tendo em vista que as equações de movimento semiclássicas que ditam a dinâmica de um duplo condensado de Bose-Einstein podem ser reduzidas às de um pêndulo com pivô periodicamente forçado, decidimos trabalhar uma

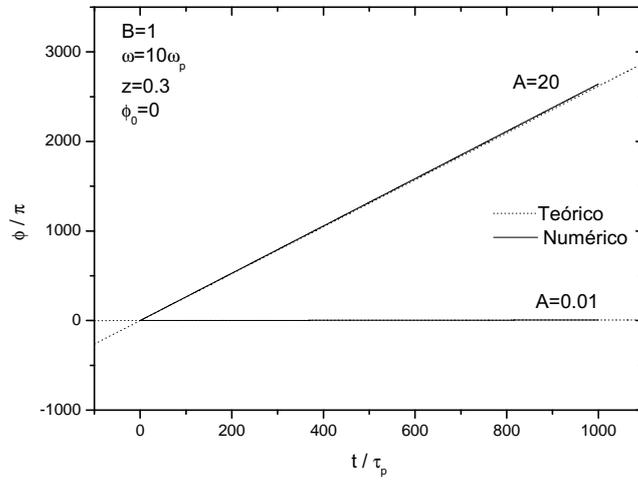


Figura 40: $\phi(t)$ variando A e mantendo os parâmetros B e z_0 fixos. A linha sólida representa a solução exata das equações para \dot{z} e $\dot{\phi}$ enquanto que a pontilhada é o anzats numérico-empírico proposto nas equações 72 e 73.

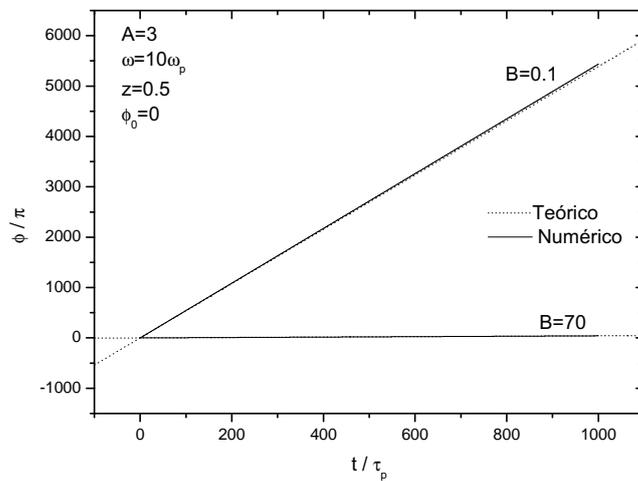


Figura 41: $\phi(t)$ variando B e mantendo os parâmetros A e z_0 fixos. A linha sólida representa a solução exata das equações para \dot{z} e $\dot{\phi}$ enquanto que a pontilhada é o anzats numérico-empírico proposto nas equações 72 e 73.

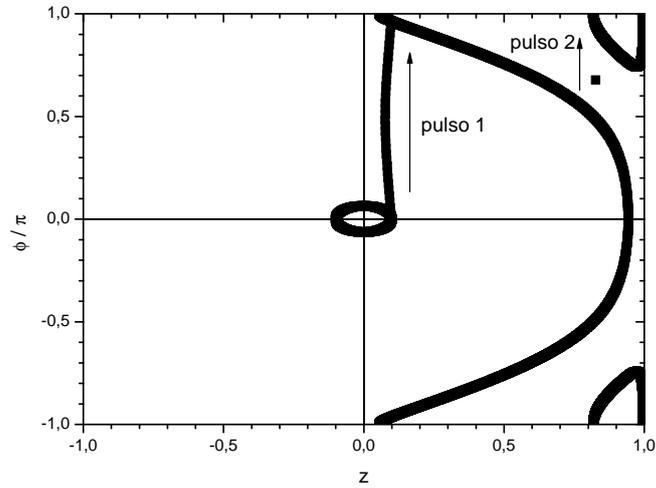


Figura 42: Representação de transição entre modos dinâmicos no espaço de fases pela introdução de 2 pulsos de alta frequência no parâmetro de tunelamento B .

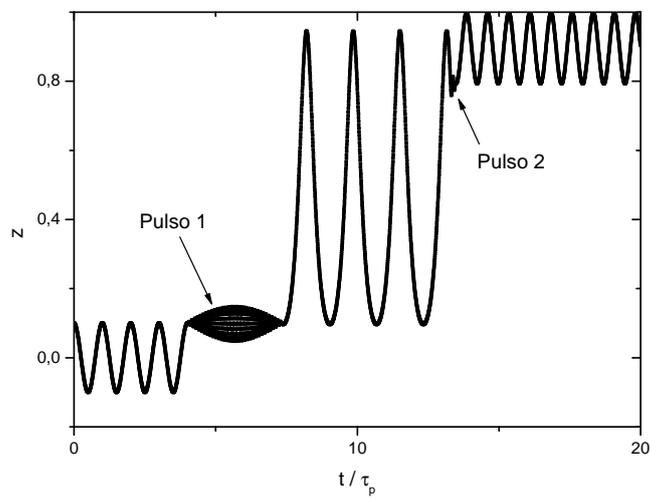


Figura 43: Evolução temporal da população na transição entre modos dada na figura 42.

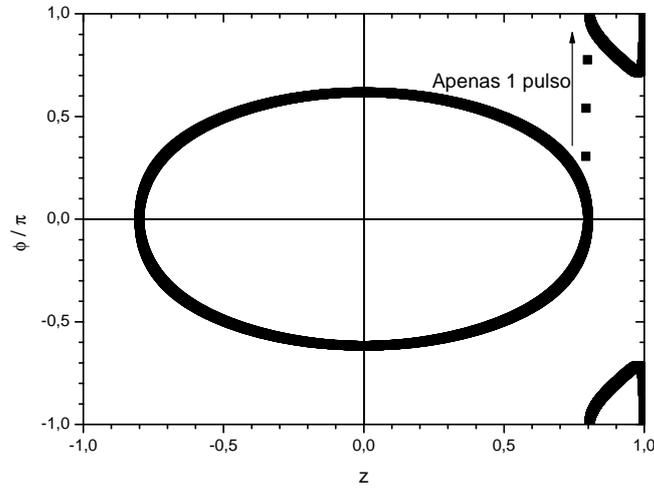


Figura 44: Outro exemplo de transição entre modos dinâmicos, no espaço de fases, pela introdução apenas um pulso de alta frequência no parâmetro de tunelamento B .

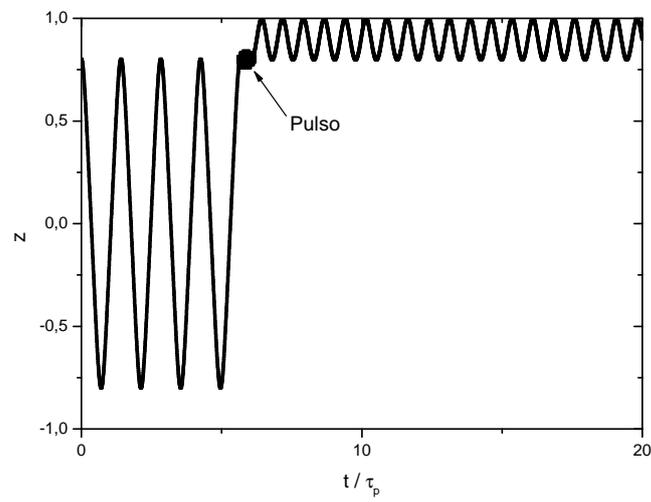


Figura 45: Evolução temporal da população na transição entre modos dinâmicos dada na figura 44.

analogia entre as soluções daquele problema e as deste. É importante manter em mente que a redução das equações dinâmicas do duplo condensado à do pêndulo com pivô excitado se dá sob a restrição de pequenas oscilações na diferença de população.

5.1.1 Redução das equações dinâmicas do duplo condensado à do pêndulo com pivô verticalmente forçado

Inicialmente temos:

$$\dot{z} = -B\sqrt{1-z^2}\sin\phi + C(1-z^2)\sin 2\phi \quad (75)$$

$$\dot{\phi} = Az + B\frac{z}{\sqrt{1-z^2}}\cos\phi - Cz\cos 2\phi. \quad (76)$$

Linearizando as equações (75) e (76) em z obtemos:

$$\dot{z} \approx -B\sin\phi + C\sin 2\phi \quad (77)$$

$$\dot{\phi} \approx (A + B\cos\phi - C\cos 2\phi)z. \quad (78)$$

Agora, derivando a eq. (78) em relação ao tempo (já levando em conta a dependência temporal de B a ser introduzida posteriormente):

$$\ddot{\phi} = -(B\sin\phi - 2C\sin 2\phi)\dot{\phi}z + (A + B\cos\phi - C\cos 2\phi)\dot{z} + \dot{B}z\cos\phi \quad (79)$$

e substituindo (77) e (78) na equação (79), já desprezando os termos de ordem 2 em z , obtemos:

$$\ddot{\phi} + AB\sin\phi + \left(\frac{B^2}{2} - AC\right)\sin 2\phi - BC\sin 3\phi + \frac{C^2}{2}\sin 4\phi = \dot{B}z\cos\phi \quad (80)$$

que já está quase com a cara de um pêndulo forçado (sem limitações sobre as deflexões da vertical) e, quando linearizada em ϕ , se torna um oscilador harmônico forçado. Fazendo tal linearização ficamos com:

$$\ddot{\phi} + [B^2 + (A - 3C)B - 2(A - C)C]\phi = \dot{B}z. \quad (81)$$

Especificamente, vamos supor que $B(t)$ tenha a forma já utilizada:

$$B(t) = B_0 \cos \omega t. \quad (82)$$

Com isso a equação linearizada para ϕ fica:

$$\ddot{\phi} + \left[\frac{B_0^2}{2} - 2(A - C)C + (A - 3C)B_0 \cos \omega t + \frac{B_0^2}{2} \cos 2\omega t \right] \phi = -B_0\omega \sin \omega t \quad (83)$$

que tem uma analogia direta com a equação para o pêndulo com pivô verticalmente forçado:

$$\ddot{\theta} + (\omega_0^2 - \frac{ml^2 a}{I} \omega^2 \cos \omega t) \theta = 0, \quad (84)$$

como desejávamos ter. As diferenças residem na forma da função periódica que excita o *pivô* do duplo condensado e, no duplo condensado, há também um forçamento sobre o pivô, também periódico, que tem a direção horizontal (termo do lado direito da igualdade da equação (83)).

5.1.2 Superfície hamiltoniana semiclássica média

Uma vez estabelecida formalmente a analogia com o pêndulo forçado, nos sentimos mais seguros para arriscar um tratamento médio da energia do duplo condensado da mesma forma que o fizemos para o pêndulo.

Vamos aproximar a solução da equação de movimento para a diferença de fase por uma deflexão global $\psi(t)$ acrescida de pequenas correções $\delta(t)$. Tal aproximação é válida, uma vez que as simulações nos regimes de oscilações de plasma do duplo condensado nos mostram que acontece assim mesmo (ver figura (46)). Vemos uma grande deflexão ψ , governando o movimento como um todo, e, pequenas oscilações secundárias com o mesmo período de forçamento e de amplitude bem pequena. A estas pequenas oscilações denominamos δ . Isso é exatamente o que acontecia com o pêndulo.

Tivemos por objetivo, nesta análise, demonstrar que o forçamento em B tem o efeito de criar um vale em $(z = 0, \phi = \pi)$, onde antes havia uma sela (caso A, B e C positivos). Numericamente este resultado é observado (ver figura (47)). Ou seja, mostramos que há uma estrutura do tipo $\cos 2\phi$ no entorno de pequenas diferenças de população. Este objetivo de demonstração surgiu da observação de simulações, sendo portanto numérico-empírico.

Seja então a diferença de fase aproximada por:

$$\phi \approx \psi + \delta \quad (85)$$

onde iremos escrever δ como:

$$\delta(t) = \delta_0 \cos \omega t \sin \psi \quad (86)$$

com o δ_0 sendo um novo parâmetro livre dependente dos parâmetros originais do problema (tal dependência não pôde ser determinada neste trabalho). Por agora trata-se apenas de um parâmetro de ajuste. Já a proporcionalidade da amplitude de $\delta(t)$ com $\sin \psi$ é obtida via observação de simulações numéricas da evolução temporal da fase.

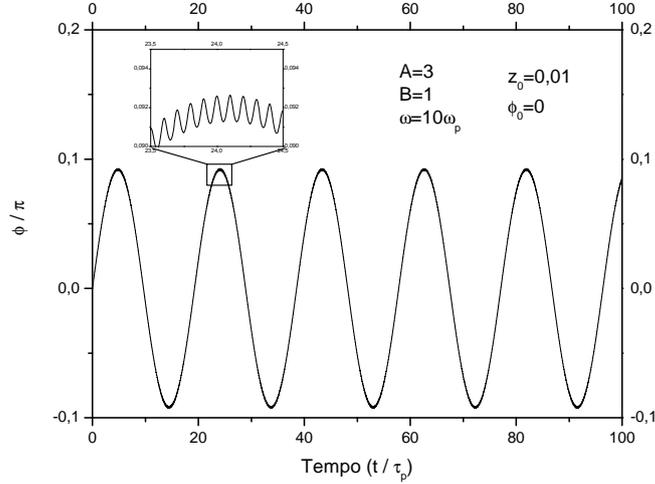


Figura 46: Exemplo de evolução temporal da fase para mostrar um movimento global ψ sendo perturbado por pequenas deflexões δ cujo período é o mesmo que o do forçamento do parâmetro B .

A superfície hamiltoniana semiclássica $H(z, \phi, t)$, agora dependente do tempo, é dada por:

$$H(z, \phi, t) = \frac{1}{2}Az^2 - B(t)\sqrt{1 - z^2} \cos \phi + \frac{1}{2}C(1 - z^2) \cos 2\phi. \quad (87)$$

As equações de movimento deverão ser lineares em z , no máximo. Sendo assim, deveremos levar em conta até termos de segunda ordem em z na expressão (87). Isso fornece:

$$H(z, \phi) \approx \frac{1}{2}Az^2 - B(t)\left(1 - \frac{z^2}{2}\right) \cos \phi + \frac{1}{2}C(1 - z^2) \cos 2\phi. \quad (88)$$

Substituindo agora a aproximação que fizemos para ϕ e δ , equações (85) e (86), em (88), e levando em conta somente termos até ordem 2 em z e ordem 1 em δ , que é suposto muito pequeno, ficamos com:

$$H(z, \psi, t) \approx \frac{1}{2}Az^2 - B_0 \cos \omega t \left(1 - \frac{z^2}{2}\right) (\cos \psi - \delta_0 \cos \omega t \sin^2 \psi) \\ + \frac{1}{2}C(1 - z^2) (\cos 2\psi - 2\delta_0 \cos \omega t \sin \psi \sin 2\psi).$$

Por fim, supondo que z e ψ permaneçam constantes durante uma oscilação do termo de forçamento (o que é razoável, uma vez que a frequência de forçamento é muito maior que a frequência característica do sistema), podemos

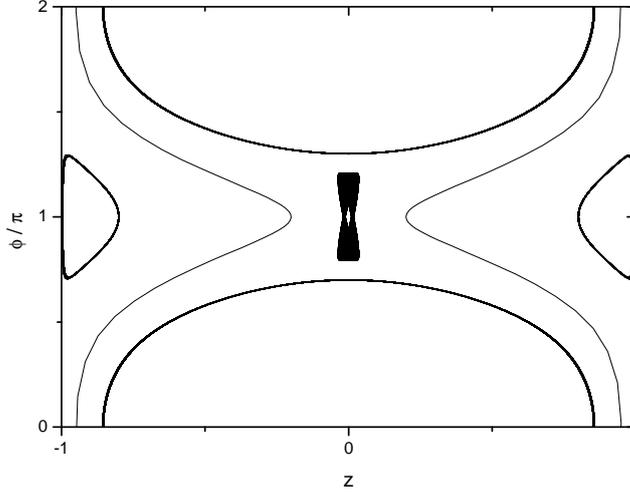


Figura 47: A área hachurada no centro da figura corresponde a uma simulação que explicita a estabilidade gerada em $(z = 0, \phi = \pi)$ pelo forçamento no parâmetro B . As linhas correspondem a simulações efetuadas sem o forçamento. Elas evidenciam que a sela, antes ali existente, é destruída pelo forçamento.

tomar a média da hamiltoniana acima sobre um período de oscilação de forçamento, obtendo:

$$\begin{aligned}
 H(z, \psi) &= \langle H(z, \psi, t) \rangle = \frac{\omega}{2\pi} \int_t^{t+\frac{2\pi}{\omega}} H(z, \psi, t') dt' \\
 &= \frac{B_0 \delta_0}{4} + \frac{1}{2} \left(A - \frac{B_0 \delta_0}{4} \right) z^2 \\
 &\quad - \left(\frac{B_0 \delta_0}{4} - C \right) \left(1 - \frac{z^2}{2} \right) \cos 2\psi - \frac{1}{2} C \cos 2\psi.
 \end{aligned}$$

Notar que, nesta última expressão, ainda temos termos do tipo $\delta_0 z^2$, termos estes que seriam de ordem superior àquelas que consideramos até agora (ordem 2 em z e ordem 1 em δ_0). Sendo assim, iremos retirar estes termos a fim de comparar resultados com simulações. Ficamos então com:

$$H(z, \psi) = \frac{B_0 \delta_0}{4} + \frac{1}{2} A z^2 - \left(\frac{B_0 \delta_0}{4} - \frac{C}{2} \right) \cos 2\psi - \frac{1}{2} C z^2 \cos 2\psi \quad (89)$$

onde, mais uma vez, o último termo, com o produto $C z^2$, pode também ser desprezado por ser de ordem superior a 2, pois $C \ll A, B_0$. E finalmente

obtemos:

$$H(z, \psi) = \frac{B_0 \delta_0}{4} + \frac{1}{2} A z^2 - \left(\frac{B_0 \delta_0}{4} - \frac{C}{2} \right) \cos 2\psi \quad (90)$$

Notamos então a média de H dependente de $\cos 2\psi$, como desejávamos obter a fim de entender parte dos resultados numéricos.

É bastante notável que, dado termos $\delta_0 \ll 1$, o termo C passa a ser relevante em comparação com o produto $B_0 \delta_0$ e, portanto, não pode simplesmente ser desprezado da mesma maneira que trabalhos com B constante o fazem (na maioria das simulações tivemos δ_0 da ordem de 10^{-3} e, experimentalmente, temos $C/B \approx 10^{-2}$, conforme notado no início da seção 4).

5.1.3 Equações de movimento geradas por $H(z, \psi)$

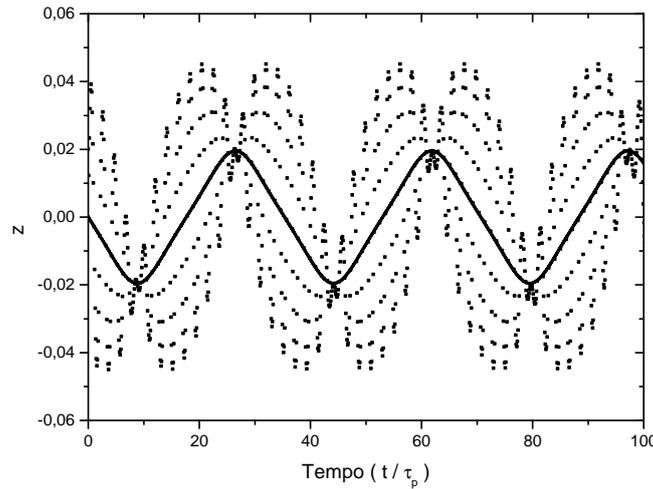


Figura 48: Evolução temporal média da população (linha sólida) - notar escala pequena $z \ll 1$, conforme predito pelas equações (91) e (92), em comparação com a evolução temporal exata (pontos) dada pelas equações (75) e (76).

Temos:

$$\dot{z} = -\frac{\partial H}{\partial \psi} = -\left(\frac{B_0 \delta_0}{2} - C \right) \sin 2\psi \quad (91)$$

$$\dot{\psi} = \frac{\partial H}{\partial z} = Az. \quad (92)$$

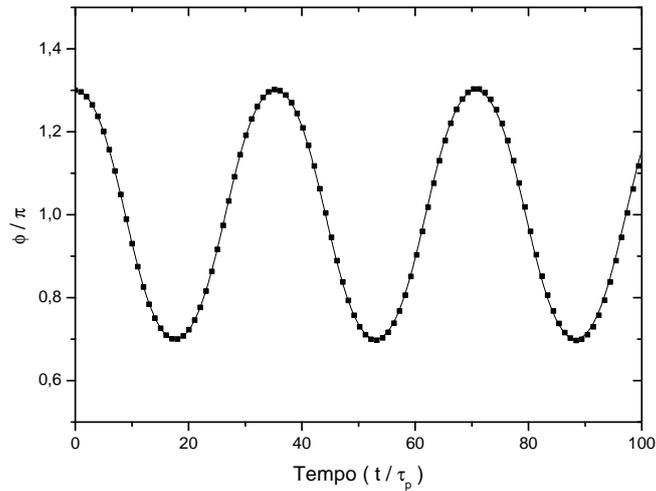


Figura 49: Evolução temporal média da fase (linha sólida), conforme previsto pelas equações (91) e (92), em comparação com a evolução temporal exata (pontos) dada pelas equações (75) e (76).

As figuras (48) e (49) mostram uma comparação entre a dinâmica média dada pelas equações (91) e (92) e a dinâmica exata dada pelas equações (75) e (76). Os parâmetros utilizados para produzir as figuras foram: $A = 3$, $B_0 = 1$, $C = 10^{-3}$, $\omega = 10\omega_p$, $\delta_0 = 3.75 \cdot 10^{-3}$. O parâmetro δ_0 foi obtido a partir de ajuste da curva sobre os pontos dados pelas simulações. As condições iniciais foram $(z_0 = 0, \phi_0 = 1.3\pi)$.

Vemos que o comportamento médio previsto consegue se ajustar bem à dinâmica exata. No entanto ainda não temos uma forma analítica para o parâmetro δ_0 em termos das constantes fundamentais do problema. Ele foi encontrado em várias simulações por ajustar a curva média aos pontos numéricos e sempre esteve no domínio $\delta_0 \ll 1$, conforme era a nossa hipótese.

6 Considerações Finais

Fizemos uma breve revisão sobre a condensação de Bose-Einstein, dando enfoque principal no estudo de junções Bose-Josephson e o possível controle populacional.

Observamos o efeito que um termo de correção, correspondente à troca de dois corpos entre poços, tem sobre a superfície hamiltoniana semiclássica ao variarmos livremente a magnitude dos parâmetros desta. A variação livre da magnitude dos parâmetros foi justificada pelo peso que o termo de correção pode obter quando variamos temporalmente o termo de tunelamento.

Obtivemos o importante resultado que, sob altas frequências de forçamento do parâmetro de tunelamento, podemos obter o controle da população, fixando-a em um determinado valor, enquanto a fase fica a variar em todo o seu domínio. Com isso, pudemos obter a taxa de variação temporal da fase e determinar o tempo de pulso necessário para fazer o sistema migrar de um modo dinâmico sem forçamento para outro. Esse resultado possibilita o uso de pulsos de variação do termo de tunelamento com o objetivo de ter um controle populacional. Para termos mais confiança nestes resultados restamos fazer testes com algoritmos que simulem a equação de Gross-Pitaevskii dependente do tempo com auto-consistência.

Por fim, vimos que a energia média do sistema se conserva sob forçamento periódico de alta frequência do parâmetro de tunelamento e que isso possibilita a descrição da dinâmica média do sistema. Este resultado foi obtido de modo semelhante ao utilizado no tratamento de um pêndulo de pivô verticalmente forçado.

7 Apêndice: O pêndulo invertido

Por não ter sido publicado, apresentamos abaixo um recorte das seções 3 e 4 do trabalho [27].

7.1 Tratamento analítico (seção 3 de [27])

Todo o estudo desenvolvido neste trabalho com respeito ao pêndulo invertido teve por base os trabalhos [24],[17]. Outros trabalhos foram de ajuda para visualizar a grande variedade de meios para explicar o fenômeno da inversão do pêndulo e também para mostrar que tal modelo não linear tem aplicabilidade para outros sistemas físicos bem diferentes dos condensados de bósons ([18] - [23]), o que motivou ainda mais seu estudo cabal.

Sobre o pêndulo verticalmente forçado: Tratamos de um pêndulo que consiste de uma barra de comprimento L e massa m , presa em sua extremidade a um pivô que se desloca na direção vertical (y) segundo alguma função $y(t)$. A oscilação a pequenas amplitudes a e a altas frequências ω do pivô produz um equilíbrio estável do pêndulo na sua posição invertida, onde antes ele era instável. Reproduzimos neste as condições sobre os parâmetros a e ω que produzem tal estabilidade. Os testes a respeito dos resultados analíticos encontrados foram realizados com simulações numéricas com a equação de movimento exata do pêndulo invertido, a princípio com o método de integração Runge-Kutta de quarta ordem (passo simples) e posteriormente com o Runge-Kutta-Fehlberg (passo auto-ajustável), conforme apresentado em [26].

A equação de movimento do pêndulo para um caso de deslocamento bidimensional qualquer do pivô nas direções horizontal (x) e vertical (y), segundo as funções $x(t)$ e $y(t)$ respectivamente, é obtida abaixo. A coordenada θ expressa o único grau de liberdade do sistema, sendo este ângulo medido a partir da posição invertida.

A energia cinética do sistema é dada por:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}I_0\dot{\theta}^2 \quad (93)$$

onde $\frac{1}{2}I_0\dot{\theta}^2$ está representando a energia rotacional da barra, com I_0 o momento de inércia em relação ao centro de massa.

As coordenadas (x, y) do centro de massa da barra são dadas por:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + l \sin \theta \\ y &= y_0 + l \cos \theta \end{aligned} \quad (94)$$

onde l é a distância do centro de massa da barra ao pivô e (x_0, y_0) são as coordenadas do pivô. Desse modo:

$$\begin{aligned}\dot{x}^2 &= \dot{x}_0^2 + l^2 \dot{\theta}^2 \cos^2 \theta + 2l\dot{x}_0\dot{\theta} \cos \theta \\ \dot{y}^2 &= \dot{y}_0^2 + l^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta - 2l\dot{y}_0\dot{\theta} \sin \theta\end{aligned}\quad (95)$$

e substituindo as equações (95) na equação (93):

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2) + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + ml\dot{\theta}(\dot{x}_0 \cos \theta - \dot{y}_0 \sin \theta) \quad (96)$$

onde $I = ml^2 + I_0$ é o momento de inércia total do pêndulo com relação ao pivô.

Por sua vez, a energia potencial será dada por meio de:

$$V = mgy = mgy_0 + mgl \cos \theta. \quad (97)$$

Assim, a Lagrangiana, $L = T - V$, do sistema, será:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2) + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + ml\dot{\theta}(\dot{x}_0 \cos \theta - \dot{y}_0 \sin \theta) - mgy_0 - mgl \cos \theta \quad (98)$$

e pode-se finalmente obter a equação de movimento em θ por meio da relação de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

que gera:

$$\left(\frac{I}{ml} \right) \ddot{\theta} + \ddot{x}_0 \cos \theta - (\ddot{y}_0 + g) \sin \theta = 0 \quad (99)$$

No caso em questão neste, o pivô oscila somente na direção vertical. Sendo assim, as funções $x_0(t)$ e $y_0(t)$ que fornecem o deslocamento do pivô em função do tempo podem ser escritas como:

$$\begin{aligned}x_0 &= 0 \\ y_0 &= a \cos \omega t\end{aligned}\quad (100)$$

e, desse modo, os valores de \ddot{x}_0 e \ddot{y}_0 são:

$$\begin{aligned}\ddot{x}_0 &= 0 \\ \ddot{y}_0 &= -a\omega^2 \cos \omega t\end{aligned}\quad (101)$$

Agora, substituindo (101) na equação geral de movimento (99), resulta em:

$$\ddot{\theta} + \left(-\omega_0^2 + \frac{alm\omega^2}{I} \cos \omega t \right) \sin \theta = 0 \quad (102)$$

com $\omega_0^2 = (mgl)/I$, correspondendo à frequência natural do pêndulo.

Notar que esta equação de movimento não se reduz ao caso do pêndulo simples quando a amplitude de oscilação do pivô é tomada igual a zero, que era de se esperar. Isso ocorre porque o ângulo de deflexão da direção vertical foi tomado a partir da posição invertida do pêndulo.

Tendo-se obtido esta equação de movimento, passa-se à sua análise para obtenção das condições de estabilidade invertida. Tal análise será efetuada de dois modos: um restrito à pequenas oscilações em torno da vertical, semelhantemente ao desenvolvido em [24] e, outro cuja abordagem não restringe a oscilação à pequenos ângulos de desvio, baseado em [17], mas que, em contrapartida, não dá limites superiores aos parâmetros amplitude e frequência de oscilação do pivô, limites estes obtidos com o primeiro método.

Primeiro método: fazendo $\theta \ll 1$ pode-se aproximar $\sin \theta \approx \theta$ e então a equação de movimento (102) torna-se:

$$\ddot{\theta} + \left(-\omega_0^2 + \frac{alm\omega^2}{I} \cos \omega t \right) \theta = 0 \quad (103)$$

Se for definido um tempo adimensional τ do seguinte modo:

$$\tau = \frac{\omega}{2} t$$

e as constantes também adimensionais θ_0 e θ_1 :

$$\begin{aligned} \theta_0 &= -4 \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \\ \theta_1 &= \frac{2alm}{I} \end{aligned}$$

e substituindo estas definições na equação (103), então ficamos com a equação de movimento na forma padrão da equação de Mathieu:

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} + (\theta_0 + 2\theta_1 \cos 2\tau) \theta = 0 \quad (104)$$

cuja solução já é conhecida e bem estudada [25].

A solução da equação de Mathieu pode ser escrita como a seguinte série:

$$\theta = e^{i\lambda\tau} \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{2in\tau} \quad (105)$$

onde o λ e os b_n são constantes cujos valores analíticos são obtidos após um belíssimo trabalho matemático presente em [24] e reproduzidos em detalhes durante a vigência deste e correspondem a:

$$\operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{2} \lambda = \frac{\pi^2}{4} \left[\frac{2a^2 l^2 m^2}{I^2} - 4 \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right] \quad (106)$$

$$b_n = - \frac{\theta_1 b_{n-1}}{C_n - \frac{\theta_1^2}{C_{n+1} - \frac{\theta_1^2}{C_{n+2} - \dots}}}; n > 0 \quad (107)$$

$$b_n = - \frac{\theta_1 b_{n+1}}{C_n - \frac{\theta_1^2}{C_{n-1} - \frac{\theta_1^2}{C_{n-2} - \dots}}}; n < 0 \quad (108)$$

$$b_0 = a \quad (109)$$

onde foi usado $C_n = \theta_0 - (2n + \lambda)^2$.

Nota-se em especial que a equação (105) pode resultar em uma solução oscilatória, desde que λ seja real. Caso isso ocorra, o que fisicamente corresponderia a estabilização invertida do pêndulo, ter-se-á uma parte da solução que oscila lentamente modulando uma outra parte que oscila mais rapidamente. A parte lenta é representada pelo termo $e^{i\lambda\tau}$ e a parte rápida corresponde ao somatório.

Segundo método: imagine um instante onde o pêndulo forma um ângulo θ com a vertical e com o pivô sendo acelerado no sentido do eixo y negativo. É fácil ver que tal aceleração irá provocar um decréscimo no módulo do ângulo θ . Caso a aceleração do pivô seja no sentido oposto, haverá um acréscimo do módulo deste ângulo. Se a amplitude a de oscilação do pivô for pequena ($a \ll l$), é completamente razoável esperar que os desvios ocasionados no ângulo θ , devido a essas acelerações harmônicas do pivô, sejam bem pequenos. Assim, o ângulo θ do pêndulo pode ser decomposto em duas componentes da seguinte maneira:

$$\theta = \psi + \delta$$

onde a componente ψ representa a oscilação lenta do pêndulo (lembrando o termo $e^{i\lambda\tau}$ do método anterior) e a componente δ gerando pequenos desvios em torno deste ψ (lembrando o somatório).

A respeito das deflexões δ em torno do ângulo ψ , ainda pode ser observado que $\delta \propto \operatorname{sen} \psi$. Com essas informações a respeito do desvio δ em ψ (pequeno e proporcional a $\operatorname{sen} \psi$) e ainda sabendo que ele é gerado exclusivamente pela oscilação do pivô, sua dependência temporal pode ser escrita como:

$$\delta = - \frac{y}{l} \operatorname{sen} \psi = - \frac{a}{l} \operatorname{sen} \psi \cos \omega t \quad (110)$$

Como dito anteriormente, este desvio δ é gerado pelo torque advindo da força que faz o pivô oscilar. Este torque será denominado torque inercial (τ_i). Ele pode ser obtido por meio da seguinte equação:

$$\tau_i = -F_y l \sin \theta$$

Mas $F_y = m\ddot{y}_0 = m(-a\omega^2 \cos \omega t)$, então:

$$\tau_i = mal\omega^2 \sin \theta \cos \omega t. \quad (111)$$

O valor de $\sin \theta$ é obtido por meio de:

$$\sin \theta = \sin(\psi + \delta) = \sin \psi \cos \delta + \sin \delta \cos \psi$$

Como $\delta \propto \frac{a}{l}$ e está sendo considerado o caso onde $a \ll l$, então $\delta \ll 1$ e o $\sin \theta$ pode ser aproximado por:

$$\sin \theta \approx \sin \psi + \delta \cos \psi. \quad (112)$$

Com este valor para $\sin \theta$ sendo substituído na equação para o torque inercial, equação (111), é obtida a expressão final para este torque em função do tempo:

$$\tau_i = mal\omega^2 \sin \psi \cos \omega t \left[1 - \frac{a}{l} \cos \psi \cos \omega t \right] \quad (113)$$

Observa-se nesta expressão para o torque inercial que ele se comporta ora como torque restaurador (quando $\cos \omega t < 0$), ora como um que não o é (quando $\cos \omega t > 0$). No entanto, na média sobre um período de oscilação do pivô é de se esperar que ele seja restaurador (caso contrário as exposições acima estariam erradas, pois não haveria nenhum torque em oposição ao gravitacional e o equilíbrio do pêndulo invertido não seria obtido, o que contraria as evidências experimentais). Assumindo que $\omega \gg \omega_0$, de modo que durante um período de oscilação do pivô o ângulo ψ possa ser considerado constante, obtêm-se a seguinte expressão para o torque inercial médio neste período:

$$\langle \tau_i \rangle = -\frac{ma^2 l \omega^2}{2l} \sin \psi \cos \psi \quad (114)$$

ou

$$\langle \tau_i \rangle = -\frac{ma^2 l \omega^2}{4l} \sin 2\psi \quad (115)$$

que é um torque restaurador, como esperado.

Em contrapartida, o torque gravitacional (τ_g) é dado por:

$$\begin{aligned}\tau_g &= mgl \sin \theta \\ \tau_g &\approx mgl \sin \psi - \frac{mga}{2} \sin 2\psi \cos \omega t\end{aligned}\quad (116)$$

onde foi usada a expressão (112), obtida anteriormente para o valor aproximado do $\sin \theta$.

O valor médio deste torque em um período de oscilação do pivô é dado por:

$$\langle \tau_g \rangle = mgl \sin \psi \quad (117)$$

Desse modo fica evidente que o equilíbrio invertido do pêndulo só ocorrerá quando a inequação:

$$\langle \tau_i \rangle > \langle \tau_g \rangle \quad (118)$$

for satisfeita. Sendo assim, a partir daqui são obtidas as condições sobre ω e a para que haja a estabilização invertida. Notar que agora não há a restrição à pequenos ângulos θ , pois nenhuma hipótese foi feita sobre ele.

Outro dado valioso que pode ser retirado da comparação dos torques inercial e gravitacional é o ângulo limite de deflexão a partir do qual o pêndulo invertido cai para sua posição ordinária. Este é obtido a partir de:

$$\langle \tau_i \rangle = \langle \tau_g \rangle \quad (119)$$

A análise dos potenciais médios que geram tais torques médios é também altamente instrutiva, por isso serão brevemente apresentados aqui. Ambos os potenciais são obtidos por integração direta dos respectivos torques médios.

O potencial gravitacional médio é:

$$\langle U_g \rangle = mgl \cos \psi \quad (120)$$

com o nível posto na equipotencial que passa pelo pivô ($\langle U_g(0) \rangle = mgl$).

Por sua vez, o potencial inercial médio é:

$$\langle U_i \rangle = -\frac{ma^2l\omega^2}{8l} \cos 2\psi \quad (121)$$

onde, desta vez, o potencial de referência $\langle U_i(0) \rangle$ foi tomado igual a $-\frac{ma^2l\omega^2}{8l}$.

Os gráficos de $\langle U_g \rangle$, $\langle U_i \rangle$ e $\langle U_g \rangle + \langle U_i \rangle$ em função de ψ estão plotados na figura (50).

É explícito que a estabilidade gerada no poço com centro em $\psi = 0$ é devida a presença do potencial inercial médio. Além disso, o poço profundo presente em $\psi = \pi$ mostra que a posição ordinária do pêndulo foi tornada

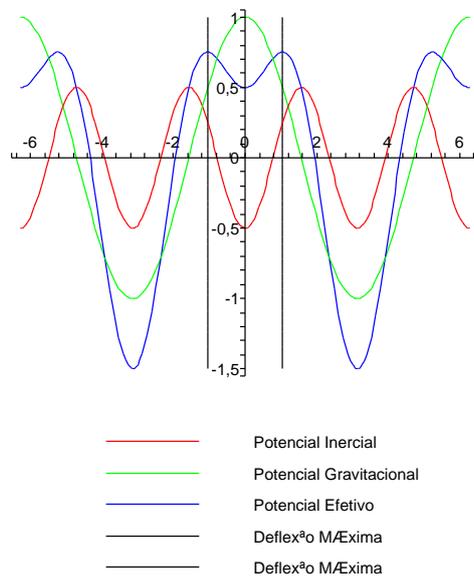


Figura 50: Potenciais inercial (linha vermelha), gravitacional (linha verde) e efetivo (linha azul). As linhas pretas são as deflexões máximas previstas (a partir da posição invertida) para que o pêndulo ainda oscile em sua posição invertida.

ainda mais estável. Os ângulos ψ_M (deflexões máximas da vertical a partir da posição invertida) são equivalentes do equilíbrio instável do pêndulo simples.

As simulações para testar ambas as abordagens dadas acima a respeito das condições sobre a frequência de forçamento ω e amplitude de forçamento a para haver estabilidade foram numericamente realizadas com a equação de movimento exata para o pêndulo com pivô oscilante, utilizando o algoritmo Runge-Kutta de quarta ordem e passo simples, em uma primeira análise, e posteriormente o Runge-Kutta-Fehlberg.

Algumas das simulações apresentadas em [17] a respeito do pêndulo para-

metricamente excitado, ou seja, com pivô oscilando em uma frequência múltipla da sua frequência natural, não conseguimos reproduzir. Todo cuidado a respeito de possíveis erros numéricos nossos foram tomados e nem assim chegamos aos resultados lá apresentados. Na próxima seção apresentaremos algumas respostas dadas pelos nossos simuladores para trajetórias fechadas no espaço de fase.

Estudos superficiais a respeito dos CBE foram realizados por meio da leitura de artigos correlatos e da participação em seminários de nosso grupo de pesquisa.

7.2 Comparação de resultados analíticos com simulações numéricas (seção 4 de [27])

Como observado na seção (7.1), foram utilizados dois meios para obter as condições de estabilização do pêndulo invertido: um deles restrito a pequenos ângulos de oscilação do pêndulo e que fornece limites superiores e inferiores sobre os parâmetros a e ω baseado em [24], e outro que não impõe a restrição a pequenos ângulos de oscilação do pêndulo e fornece apenas limites inferiores aos valores dos parâmetros em questão, baseado em [17].

O primeiro dos métodos fornecia a seguinte solução geral para o pêndulo:

$$\theta = e^{i\lambda\tau} \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{2in\tau}$$

advinda da equação de Mathieu, com λ e b_n sendo dados pelas expressões (106)-(109).

Essa solução para θ só será oscilatória se λ for real, e isso impõe que:

$$0 < \text{sen}^2 \frac{\pi}{2} \lambda < 1$$

ou, de acordo com (106):

$$0 < \frac{\pi^2}{4} \left[\frac{2a^2 l^2 m^2}{I^2} - 4 \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right] < 1$$

Trabalhando um pouco as desigualdades acima, são obtidos os seguintes limites para a amplitude de oscilação a (dada uma frequência ω):

$$\sqrt{2} \frac{I}{ml} \frac{\omega_0}{\omega} < a < \sqrt{2} \frac{I}{ml} \frac{\sqrt{\omega^2 + \pi^2 \omega_0^2}}{\pi \omega} \quad (122)$$

Já no segundo método, a condição para estabilidade era:

$$\langle \tau_i \rangle > \langle \tau_g \rangle$$

que gera o seguinte resultado, também para um dado ω :

$$a > \sqrt{2}l \frac{\omega_0}{\omega} \quad (123)$$

É interessante notar que, embora a análise provida por [17] não seja tão rigorosa quanto aquela dada por [24], o mesmo resultado para o limite inferior de a é obtido (isso se I for feito igual a ml^2 na equação (122)).

Ainda pelo segundo método desenvolvido na análise do pêndulo era possível obter o ângulo de deflexão limite ψ_M para o qual o pêndulo cairia caso este fosse ultrapassado. Tal ângulo corresponde à condição:

$$\langle \tau_i \rangle = \langle \tau_g \rangle$$

que, quando substituídas as expressões respectivas para $\langle \tau_i \rangle$ e $\langle \tau_g \rangle$, fornecem o seguinte resultado:

$$\psi_M = \arccos \left[2 \left(\frac{l \omega_0}{a \omega} \right)^2 \right]$$

As simulações apresentadas nas figuras (51)-(53) verificam os resultados sobre as condições de estabilidade e ângulo limite.

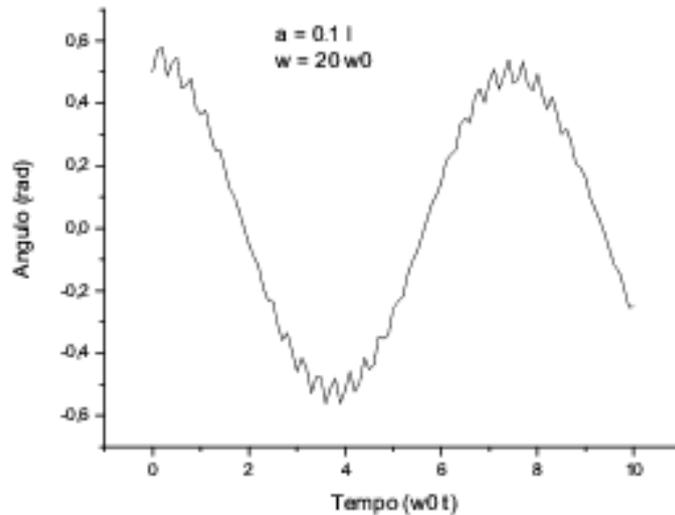


Figura 51: Simulação para mostrar que o pêndulo está estável em sua posição invertida para os parâmetros indicados na figura, conforme previsto.

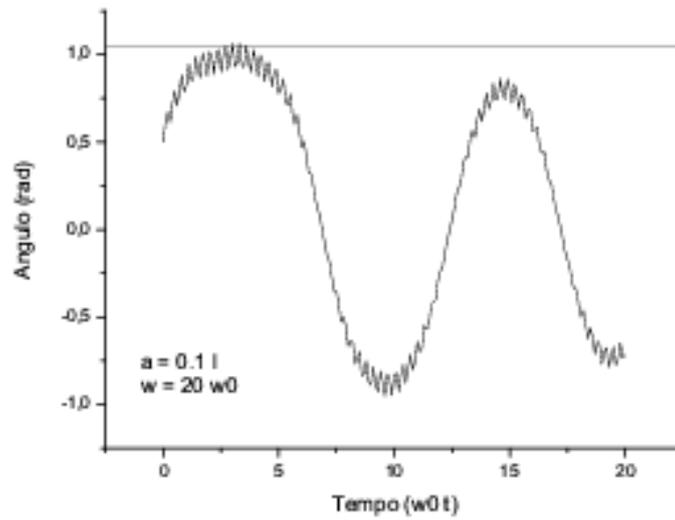


Figura 52: Simulação para teste de ângulo limite. A linha paralela ao eixo do tempo é o ângulo limite previsto teoricamente.

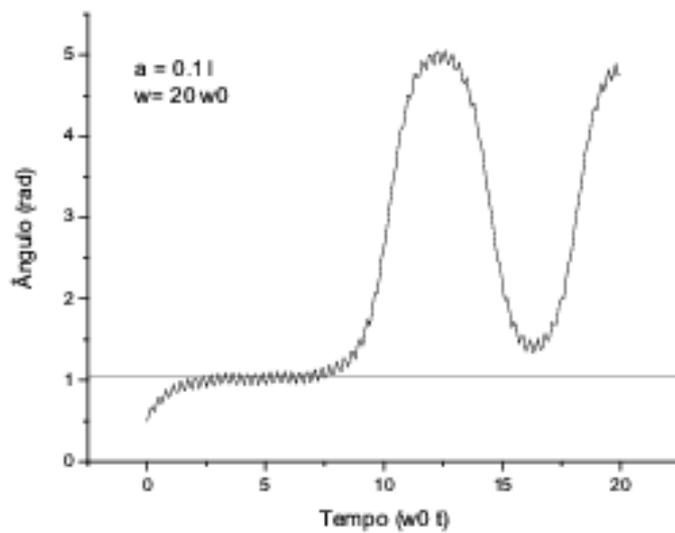


Figura 53: Outra simulação para teste de ângulo limite. Note-se a boa previsão teórica para o ângulo limite, representada pela linha sólida paralela ao eixo temporal.

Nas figuras (52) e (53) a linha horizontal representa o ângulo de deflexão limite previsto pela teoria desenvolvida no segundo método. Pode-se notar a concordância razoável existente entre as simulações e o valor previsto, deixando claro que uma abordagem simples pode produzir excelentes resultados.

Já nas figuras (54) e (55) vemos exemplos de simulações que produziram trajetórias fechadas no espaço de fases.

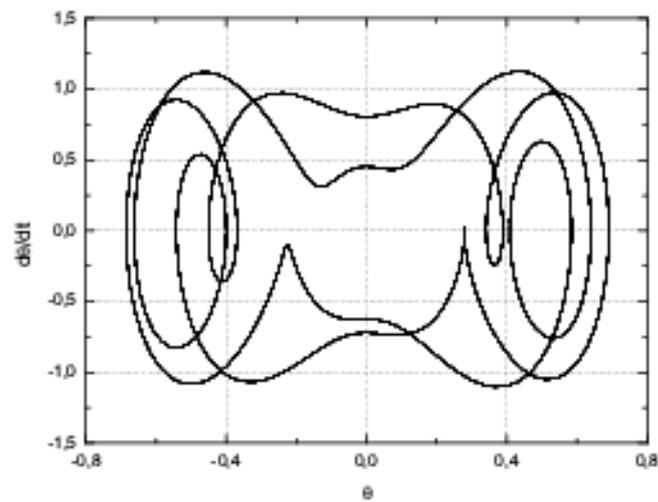


Figura 54: Exemplo de trajetória fechada no espaço de fases.

Como dito na seção precedente, não conseguimos obter as trajetórias apresentadas em [17] e também não detectamos o porquê dessa impossibilidade.

Embora nosso estudo analítico tenha se desenvolvido para um caso sem amortecimento as simulações acima apresentadas, todas elas, tinham um amortecimento fraco. Isso não altera as conclusões a respeito de ângulos limites e região de parâmetros que produzem estabilidade invertida até então apresentados.

Além do caso de estabilização invertida do pêndulo por meio de oscilação vertical de seu pivô segundo uma função senoidal, foram também estudadas as condições de estabilização para os casos de oscilação horizontal do pivô segundo uma função senoidal (cujas exigências para estabilização se restringem apenas às condições iniciais do sistema, ver [20]), movimento oscilatório vertical do pivô segundo um dente de serra (de acordo com [18]) e também um caso de amortecimento linear de um pêndulo com pivô parcialmente solto,

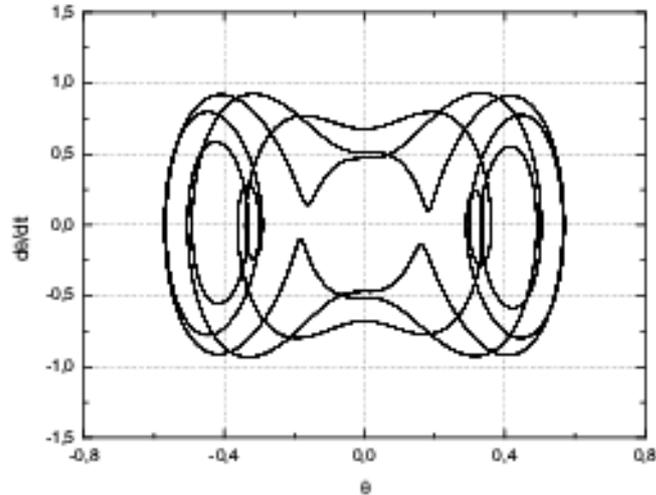


Figura 55: Exemplo de trajetória fechada no espaço de fases.

denominado *flip-flop pendulum*, segundo [19]. Os resultados deste último são interessantes por quebrarem o paradigma de amortecimento exponencial ao qual estamos tão acostumados que esquecemos de ver se é realmente assim que acontece.

As únicas atividades independentes de outras publicações realizadas foram uma tentativa de obter as condições para a estabilização invertida no caso onde o pivô era excitado bidimensionalmente, formando figuras de Lissajous, e outra com o pivô preso à extremidade de um círculo girando a velocidade constante, que é um caso particular da primeira. A análise do pivô formando figuras de Lissajous foi feita de modo análogo àquela apresentada em [17], onde foram introduzidos desvios δ_x e δ_y do ângulo θ com a vertical, que corresponderiam às respectivas pequenas deflexões causadas pelas forças harmônicas nas direções x e y . As simulações para testar as condições obtidas sobre as amplitudes e frequências do pivô que produziriam a estabilidade invertida mostraram a ineficácia da aplicação de tal método neste caso (ou então explicitaram um possível erro em nosso cálculo, afinal isso pode ocorrer). O mesmo aconteceu com a análise do pivô preso à extremidade de uma circunferência girando com velocidade constante, como era de se esperar, dado este se tratar de um caso particular do primeiro.

Durante os testes para obtenção de trajetórias fechadas no espaço de fases ficou explícito que outros regimes dinâmicos podem ser estabelecidos. Entre

estes podem estar regimes caóticos, de rotação pura e mistura de rotação com oscilação. Tudo isso estando de acordo com o dito na introdução do artigo do Butikov [17], quando ele estava motivando o estudo do pêndulo.

Referências

- [1] B. D. Josephson, *Physics Letters* **1**, 251 (1962)
- [2] P. W. Anderson e J. M. Rowell, *Physical Review Letters* **10**, 230 (1967)
- [3] J. Javanainen, *Physical Review Letters* **57**, 3164 (1986)
- [4] R. Gati, M. K. Oberthaler, *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics* **40**, R61 (2007)
- [5] D. Ananikian e T. Bergeman, *Physical Review A* **73**, 013604 (2006)
- [6] D. G. Fried, T. C. Killian, L. Willmann, D. Landhuis, S. C. Moss, D. Kleppner, T. J. Greytak, *Physical Review Letters* **81**, 3811 (1998)
- [7] C. C. Bradley, C. A. Sackett, J. J. Tollett, T. G. Hulet, *Physical Review Letters* **75**, 1687 (1995)
- [8] K. B. Davis, M. -O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. van Druten, D. S. Durfee, D. M. Kurn, W. Ketterle, *Physical Review Letters* **75**, 3969 (1995)
- [9] M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman, E. A. Cornell, *Science* **269**, 198 (1995)
- [10] F. Dalfovo, S. Giorgini, L. P. Pitaevskii, S. Stringari, *Reviews of Modern Physics* **71**, 463 (1999)
- [11] C. J. Pethick, H. Smith, *Bose-Einstein Condensation in Dilute Gases*, Cambridge University Press, 2002
- [12] C. J. Myatt, E. A. Burt, R. W. Ghrist, E. A. Cornell, C. E. Wieman, *Physical Review Letters* **78**, 586 (1997)
- [13] M. Albiez, R. Gati, J. Fölling, S. Hunsmann, M. Cristiani, M. K. Oberthaler, *Physical Review Letters* **95**, 010402 (2005)
- [14] A. Smerzi, S. Fantoni, S. Giovannazi and S. R. Shenoy, *Physical Review Letters* **79**, 4950 (1997)
- [15] S. Raghavan, A. Smerzi, S. Fantoni, S. R. Shenoy, *Physical Review A* **59**, 620 (1999)
- [16] Dissertação de mestrado de Emerson Luiz Lapolli sob orientação do Prof. Dr. Frederico Firmo de Souza Cruz, UFSC, 2005

- [17] E. I. Butikov, American Journal of Physics **69**, 755 (2001)
- [18] H.P.Kalmus, American Journal of Physics **38**, 874 (1970)
- [19] R.D.Peters and Tim Pritchett, American Journal of Physics **65**, 1067 (1997)
- [20] L.Blitzer, American Journal of Physics **33**, 1076 (1965)
- [21] E.D.Yorke, American Journal of Physics **46**, 285 (1978)
- [22] D.J.Ness, American Journal of Physics **35**, 964 (1967)
- [23] M.H.Friedman, J.E.Campana, L.Kelner, E.H.Seeliger and A.L.Yergey, American Journal of Physics **50**, 924 (1982)
- [24] F.M.Phelps III and J.H.Hunter Jr., American Journal of Physics **33**, 285 (1965)
- [25] N. W. McLachlan, *Theory and application of Mathieu functions*, Dover Publications, Inc., 1964.
- [26] P. L. DeVries, *A first course in Computational Physics*, John Wiley & Sons, Inc., 1994.
- [27] Thiago de Cacio Luchese, Frederico Firmo de Souza Cruz; *Dinâmica de um pêndulo invertido e o tunelamento de Condensados de Bose-Einstein sob o projeto Teoria de muitos corpos aplicada a sistemas fermiônicos e bosônicos*. Relatório Final de atividades de Iniciação Científica apresentado ao CNPq, período: Agosto 2005 a Julho de 2006.