

GRACIELE AMORIM

A Identidade de Sherman

Florianópolis
Fevereiro de 2009

GRACIELE AMORIM

A Identidade de Sherman

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica, do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina, para obtenção do grau de Mestre em Matemática, com Área de Concentração em Física-Matemática.

Orientador:

Prof. Dr. Gustavo A. T. F. da Costa

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

Florianópolis

Fevereiro de 2009

A Identidade de Sherman

por

Graciele Amorim

Esta Dissertação foi julgada para a obtenção do Título de “Mestre” em Matemática, Área de Concentração em Física - Matemática, e aprovada em sua forma final pelo Curso de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica.

Clóvis Caesar Gonzaga

Coordenador da Pós-Graduação em Matemática

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Gustavo A. T. F. da Costa (UFSC - Orientador)

Prof. Dr. Eliezer Batista (UFSC)

Prof. Dr. Luiz Augusto Saeger (UFSC)

Prof. Dra. Sonia Pinto de Carvalho (UFMG)

Florianópolis, Fevereiro de 2009.

Agradecimentos

Aos meus pais Ilse e José, por seu apoio constante e infindável amor.

Ao meu noivo Márlon, pelo seu carinho, compreensão e palavras doces nas horas difíceis.

Ao meu orientador, professor Gustavo da Costa, pela sua exímia dedicação, paciência, humildade e constante incentivo.

A todos os meus colegas de mestrado, em especial, a Lucas e Eneilson, pelo companheirismo, amizade e incontáveis horas de estudo divididas.

Aos professores membros da banca examinadora, por gentilmente terem aceitado o convite.

Ao CNPq pelo suporte financeiro no decorrer desses dois anos.

Sumário

Lista de Figuras	iv
Lista de Tabelas	iv
Resumo	vi
Abstract	vii
Introdução	1
1 Definições e Resultados Básicos	3
1.1 Grafos	3
1.2 Sinal de um Caminho	7
1.3 A Identidade de Feynman	9
1.4 A Identidade de Sherman	10
1.5 Motivações	13
2 A Identidade de Sherman.	
Aspectos Combinatoriais	15
2.1 Contagem de Caminhos	16
2.2 Cálculo de θ_+ e θ_-	24
2.3 Prova da Identidade de Sherman	29
3 A Identidade de Witt	42
3.1 Propriedades Combinatoriais	43
3.2 Aspectos Algébricos da Identidade de Witt	49
4 A Identidade de Sherman.	
Aspectos Algébricos	55
4.1 Interpretação de θ como uma dimensão	60
4.2 A Identidade de Sherman e Álgebras de Lie	64
Apêndice A: O Modelo de Ising	69
Apêndice B: O Genus de um Grafo	72

Apêndice C: Casos $R = r = 2$ e $R = r = 3$	74
Apêndice D: Séries Formais de Potências e Alguns Lemas Combinatoriais	78
Apêndice E: Função de Möbius	84
Apêndice F : Fórmula de Faa di Bruno	86
Referências Bibliográficas	88

Lista de Figuras

1.1	Exemplos de grafos: (a) conexo e (b) desconexo	3
1.2	Exemplo de grafo não planar	4
1.3	Exemplo de grafo enumerado e orientado	4
1.4	Exemplo de grafo do tipo árvore	5
1.5	Subgrafos admissíveis de G : G_1, G_2, G_3 . O grafo G não é admissível.	6
1.6	Grafo orientado com 8 arestas e 7 vértices	7
1.7	Grafo G_R orientado com R laços	11
3.1	Colorações não periódicas	47
3.2	Coloração periódica	47
3.3	Grafo G_R	48
B.1	Família de Superfícies	72
B.2	Exemplo de grafo no toro	72

Lista de Tabelas

2.1	Valores para $\theta_+(m_{i_1}, m_{i_2})$ e $\theta_-(m_{i_1}, m_{i_2})$	29
4.1	Cálculo de $d(2, 2)$: valores de $a_1, \dots, a_8 \geq 0$	62

Resumo

Neste trabalho investiga-se os aspectos combinatoriais e algébricos da identidade de Sherman no caso genérico. Obtém-se fórmulas para o cálculo do número de classes de equivalência de caminhos fechados não periódicos sobre o grafo onde a identidade está definida e, com base nelas, uma nova prova da identidade é obtida. Ademais, as possíveis relações da identidade com as álgebras de Lie são elucidadas. Neste contexto, prova-se que a identidade de Sherman é uma consequência da identidade de Witt generalizada de uma álgebra de Lie.

Abstract

In this work the combinatorial and algebraic aspects of Sherman identity are investigated. The generic case of the identity is considered. Formulas for the calculation of the number of classes of equivalence of non periodic closed paths on the graph where the identity is defined are computed. On their basis, a new proof of the identity is obtained. Moreover, the possible relations of the identity with Lie algebras are elucidated. In this context, we prove that Sherman identity follows from the generalizad Witt identity of a Lie algebra.

Introdução

Nosso objetivo nesta dissertação será o de investigar a estrutura matemática, combinatorial e algébrica, da identidade de Sherman e propor soluções para alguns problemas ainda em aberto sobre o caso genérico desta identidade.

Na referência [22] Sherman menciona o caso não trivial mais simples da identidade. Esse caso, aparentemente mais simples, é considerado por ele para ilustrar certos aspectos do caso geral, mais complicado.

Sherman coloca a questão de se determinar o possível significado algébrico para a identidade de Feynman, isto é, sua possível ligação com Álgebras de Lie. O problema, no entanto, não foi resolvido por ele. Para tal, é necessário calcular expoentes que aparecem na igualdade e dar-lhes o devido significado algébrico. Tais expoentes têm importantes propriedades, relevantes para a existência da identidade.

Convém notar que na demonstração geral da identidade de Feynman, por Loebel [14], estas questões não são consideradas. Seus métodos são outros e visam tão somente provar formalmente a identidade para qualquer grafo.

Nossas contribuições para os problemas em aberto estudados compreendem basicamente todos os teoremas e corolários que são apresentados no decorrer dos capítulos.

Esta dissertação está organizada da seguinte forma:

No capítulo 1, serão introduzidas definições básicas da teoria dos grafos. As identidades de Feynman e Sherman, juntamente com os problemas a serem investigados, serão apresentadas.

No capítulo 2, os aspectos combinatoriais da identidade de Sherman serão investigados em detalhe. O problema de contagem das classes de equivalência de caminhos

fechados não periódicos será resolvido. Com base na solução, a identidade de Sherman será provada.

No capítulo 3, trataremos da identidade e da fórmula de Witt. Alguns resultados combinatoriais a respeito da fórmula de Witt serão demonstrados empregando os métodos do capítulo 2. Algumas definições e resultados básicos sobre álgebras, relevantes para entender o significado algébrico da identidade e fórmula de Witt, serão revisados neste capítulo.

No capítulo 4, abordaremos os aspectos algébricos da identidade de Sherman e estabeleceremos sua ligação com as álgebras de Lie. Empregaremos os resultados do capítulo 2 em conjunto com uma importante proposição, devida a S. J. Kang e M. H. Kim, [11] e [12], que generaliza a identidade de Witt.

Vários apêndices complementam os capítulos com informações adicionais relevantes.

Capítulo 1

Definições e Resultados Básicos

Neste capítulo serão introduzidos conceitos referentes à teoria de grafos e definidos elementos essenciais para enunciarmos as identidades de Feynman e Sherman. Também apresentaremos os problemas que motivaram este trabalho e sua relevância. As referências básicas consultadas foram [5 – 7], [14], [21 – 23] e [24].

1.1 Grafos

Uma definição simples e geométrica de um grafo é a seguinte:

Definição 1.1 *Um grafo G é um conjunto de pontos, chamados vértices, e linhas, chamadas arestas, ligando pares de vértices. Uma aresta com extremos no mesmo vértice é denominada laço.*

Definição 1.2 *Um grafo G é conexo quando, dado um vértice de G , é possível chegar a qualquer outro vértice percorrendo arestas do grafo. Do contrário, o grafo terá mais de uma componente e, por isso, é chamado de não-conexo (ou desconexo).*

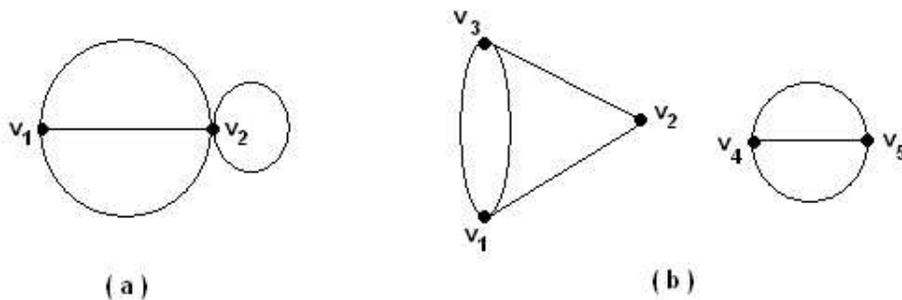


Figura 1.1: Exemplos de grafos: (a) conexo e (b) desconexo

Definição 1.3 Um grafo é chamado de planar se é possível traçá-lo no plano sem que haja cruzamento de arestas. Do contrário, é chamado de não planar. Os grafos da Figura 1.1 são planares. Um exemplo de grafo não planar é mostrado na Figura 1.2. Isto está provado na referência [21]

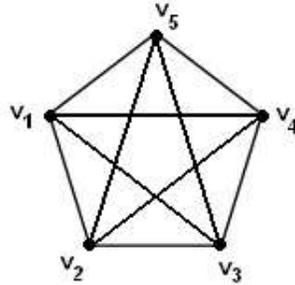


Figura 1.2: Exemplo de grafo não planar

Definição 1.4 Um grafo enumerado e orientado é um grafo cujas arestas são orientadas e estão numeradas com números $i = 1, 2, \dots, A$, distintos, onde A é o número de arestas do grafo. A numeração e a orientação das arestas são arbitrárias, mas fixadas para um grafo. A cada aresta i é também associado um parâmetro z_i , real ou complexo.

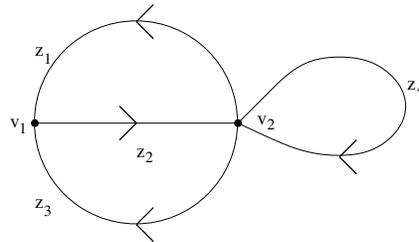


Figura 1.3: Exemplo de grafo enumerado e orientado

Definição 1.5 Um caminho fechado sobre um grafo G enumerado e orientado é uma sequência ordenada de arestas de G onde cada uma começa no vértice onde a anterior termina sendo que a última aresta da sequência termina onde a primeira começa. Serão considerados apenas caminhos fechados sem retornos imediatos. Isso significa que uma aresta, ao ser percorrida num sentido, não é percorrida logo em seguida no sentido contrário.

No texto, a expressão “aresta percorrida por p ” será empregada para referir-se a uma aresta da sequência ordenada de arestas que define p . Uma aresta não é necessariamente percorrida seguindo a orientação fixada para ela.

Definição 1.6 Um grafo é chamado de árvore se não tem faces interiores.

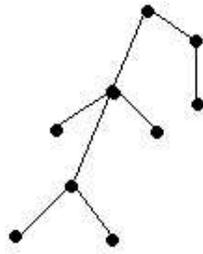


Figura 1.4: Exemplo de grafo do tipo árvore

Na sequência, grafos do tipo árvore não serão considerados, pois nesse tipo de grafo qualquer caminho fechado tem retornos imediatos.

Um caminho fechado sobre um grafo enumerado e orientado tem uma representação em termos de uma “palavra”, que definiremos em seguida.

Definição 1.7 *Seja G um grafo com A arestas e um caminho p sobre G . Representa-se p por uma “palavra” que codifica a sequência ordenada de arestas percorridas por p e sua orientação. Uma palavra tem a seguinte forma geral:*

$$D_{i_1}^{e_{i_1}} D_{i_2}^{e_{i_2}} \dots D_{i_l}^{e_{i_l}} \quad (1.1)$$

onde $i_j \in \{1, 2, \dots, A\}$, $i_j \neq i_{j+1}$ e $i_l \neq i_1$, para algum l . Os índices i_1, \dots, i_l indicam a sequência das arestas percorridas por p na ordem

$$\left(\underbrace{i_1, \dots, i_1}_{|e_{i_1}| \text{ vezes}}, \underbrace{i_2, \dots, i_2}_{|e_{i_2}| \text{ vezes}}, \dots, \underbrace{i_l, \dots, i_l}_{|e_{i_l}| \text{ vezes}} \right) \quad (1.2)$$

Um expoente e_{i_j} indica, através do seu sinal, o sentido em que a aresta i_j é percorrida e $|e_{i_j}|$ é o número de vezes que isso ocorre. Se $e_{i_j} < 0$, a aresta é percorrida no sentido contrário à sua orientação. Se $e_{i_j} > 0$, a aresta é percorrida no sentido de sua orientação. Em geral, $|e_{i_j}| \geq 1$. O caso $|e_{i_j}| > 1$ ocorre quando a aresta é um laço.

Exemplo 1.1 No grafo da Figura 1.3, um exemplo de caminho fechado é:

$$p = D_1^{+1} D_2^{+1} D_4^{-3} D_2^{-1} D_3^{-1} \quad (1.3)$$

Definição 1.8 *O número*

$$N = \sum_{j=1}^l |e_{i_j}| \quad (1.4)$$

é chamado de comprimento da palavra ou do caminho que ela representa e l é o comprimento da sequência $S_l = (i_1, \dots, i_l)$.

Definição 1.9 Um caminho p é chamado periódico quando existe um número $g \in \mathbb{N}$, $g > 1$, tal que podemos escrever

$$p = (D_{i_1}^{e_{i_1}} D_{i_2}^{e_{i_2}} \dots D_{i_\alpha}^{e_{i_\alpha}})^g \quad (1.5)$$

e

$$h = D_{i_1}^{e_{i_1}} D_{i_2}^{e_{i_2}} \dots D_{i_\alpha}^{e_{i_\alpha}} \quad (1.6)$$

não é periódico.

Exemplo 1.2 Um caminho periódico no grafo da Figura 1.3 é, por exemplo,

$$p = D_1^{+1} D_3^{-1} D_4^{-1} D_1^{+1} D_3^{-1} D_4^{-1} = (D_1^{+1} D_3^{-1} D_4^{-1})^2 \quad (1.7)$$

Definição 1.10 Dado p da forma (1.1), o inverso de p é, por definição, o caminho

$$p^{-1} = D_{i_l}^{-e_{i_l}} D_{i_{l-1}}^{-e_{i_{l-1}}} \dots D_{i_1}^{-e_{i_1}} \quad (1.8)$$

Definição 1.11 O grau de um vértice de G é o número de arestas ligadas a esse vértice. Havendo laços no vértice, conta-se duas arestas para cada laço. Um subgrafo de G que tem todos os vértices de grau par é chamado de admissível. (Ver Figura 1.5)

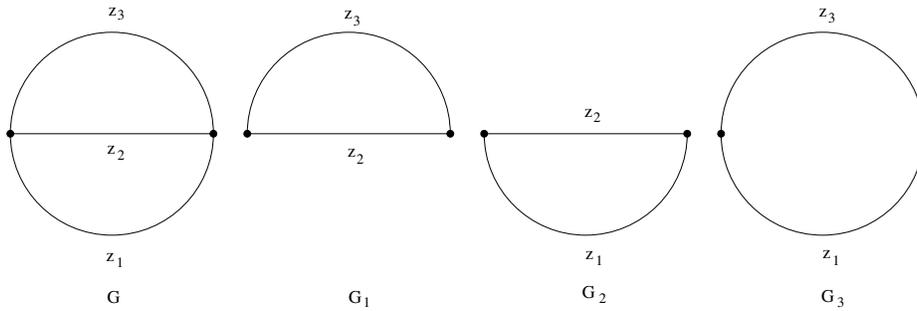


Figura 1.5: Subgrafos admissíveis de G : G_1, G_2, G_3 . O grafo G não é admissível.

Definição 1.12 Seja $G_a \subseteq G$ um subgrafo admissível. Defina

$$I(G_a) := \prod_{i \in G_a} z_i \quad (1.9)$$

onde o produtório é sobre todas as arestas de G_a e,

$$\mathcal{E}(G) := 1 + \sum_{G_a \subseteq G} I(G_a) \quad (1.10)$$

onde o somatório é sobre todos os subgrafos admissíveis $G_a \subseteq G$. A função $\mathcal{E}(G)$ é um polinômio chamado de **polinômio de Euler** de G .

Exemplo 1.3 Para o grafo G da Figura 1.5, $I(G_1) = z_2 z_3$, $I(G_2) = z_1 z_2$ e $I(G_3) = z_1 z_3$ e $\mathcal{E}(G) = 1 + z_2 z_3 + z_1 z_2 + z_1 z_3$

1.2 Sinal de um Caminho

Definição 1.13 Um caminho p tem associado a ele um sinal dado por

$$s(p) = (-1)^{V(p)} \quad (1.11)$$

onde

$$V(p) = 1 + \frac{\gamma}{2\pi} \quad (1.12)$$

e $\frac{\gamma}{2\pi}$ é o número de ângulos 2π completos que um vetor tangente a p perfaz quando a partir de qualquer aresta de p retorna a ela percorrendo p completamente uma vez. Ângulos contados no sentido horário são positivos e, no sentido anti-horário, negativos.

Exemplo 1.4 Considere o grafo da Figura 1.6:

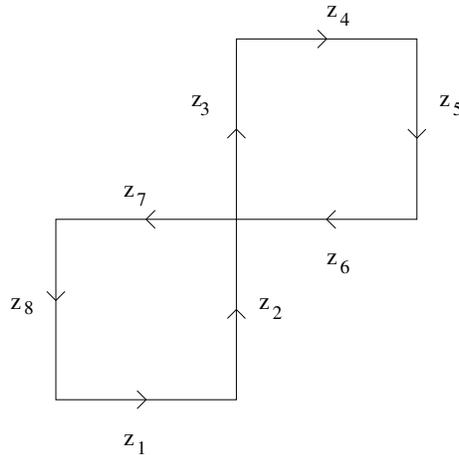


Figura 1.6: Grafo orientado com 8 arestas e 7 vértices

Seja p o caminho fechado:

$$p = D_1^1 D_2^1 D_3^1 D_4^1 D_5^1 D_6^1 D_7^1 D_8^1 \quad (1.13)$$

Nesse caso,

$$\gamma = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = 0 \quad (1.14)$$

Assim $\frac{\gamma}{2\pi} = 0$ e, portanto,

$$s(p) = (-1)^{1+0} = -1 \quad (1.15)$$

Lema 1.1 *Dado um caminho p periódico de período ímpar g , o sinal de p é igual ao da palavra não periódica associada. Se o período g de p for um número par, então o sinal de p é negativo.*

Demonstração: Seja $p = (h)^g$ um caminho periódico com período g e

$$s(h) = (-1)^{\frac{\gamma}{2\pi}+1} \quad (1.16)$$

o sinal de h . Então, o sinal de p é

$$s(p) = (-1)^{g \cdot \frac{\gamma}{2\pi} + 1} \quad (1.17)$$

Como g é ímpar:

$$\begin{aligned} s(p) &= (-1)^{g \cdot \frac{\gamma}{2\pi}} \cdot (-1)^1 \\ &= [(-1)^g]^{\frac{\gamma}{2\pi}} \cdot (-1)^1 \\ &= (-1)^{\frac{\gamma}{2\pi}} \cdot (-1)^1 \\ &= (-1)^{\frac{\gamma}{2\pi}+1} = s(h) \end{aligned} \quad (1.18)$$

Se g é par, $g \cdot \frac{\gamma}{2\pi}$ é um número par. Logo $g \cdot \frac{\gamma}{2\pi} + 1$ é ímpar e portanto $s(p) = -1$. ■

Definição 1.14 *Seja p um caminho sobre um grafo G . Defina o “peso” associado a p por*

$$W_G(p) = s(p) \cdot I(p) \quad (1.19)$$

onde $I(p)$ está dado como na equação (1.9), porém, o produtório que define $I(p)$ é sobre as arestas percorridas por p .

Definição 1.15 *Dois caminhos p_1 e p_2 são equivalentes quando são permutações circulares um do outro, como em $p_1 = D_{i_1}^{e_{i_1}} \dots D_{i_l}^{e_{i_l}}$ e $p_2 = D_{i_l}^{e_{i_l}} D_{i_1}^{e_{i_1}} \dots D_{i_{l-1}}^{e_{i_{l-1}}}$, ou inversão, tal como $p_1^{-1} = D_{i_l}^{-e_{i_l}} \dots D_{i_1}^{-e_{i_1}}$. Caminhos equivalentes têm mesmo sinal e peso W e constituem uma classe de equivalência. A classe de equivalência de um caminho p será indicada por $[p]$.*

1.3 A Identidade de Feynman

Com base nas definições anteriores, enunciaremos a seguinte proposição, que estabelece uma identidade formal (ver Apêndice D, seção D.1) relacionando o polinômio de Euler com caminhos fechados não periódicos sobre um grafo. A identidade recebe o nome de **Identidade de Feynman**.

Proposição 1.1 *Seja G um grafo plano, conexo, finito, enumerado e orientado e $\mathcal{E}(G)$ o polinômio de Euler de G . Então, tem-se a seguinte identidade formal*

$$\mathcal{E}(G) = \prod_{[p]} (1 + W_G([p])) \quad (1.20)$$

O produto é sobre as classes de equivalência de caminhos fechados não periódicos, sem retornos imediatos, sobre G .

Demonstração: Ver referências [14], [21] e [23]. ■

Segundo a referência [21], a identidade (1.20) foi primeiramente conjecturada pelo físico americano **Richard Feynman** (1918 - 1988), na década de 50. Por isso a identidade (1.20) passou a ser também chamada de **Conjectura de Feynman** ou **Identidade de Feynman**. Originalmente, a conjectura apareceu em notas de aula redigidas por Feynman, mas publicadas somente em 1972 no livro “*Statistical Mechanics. A Set of Lectures*” [7], onde Feynman já cita a referência [21] (de 1960), na qual sua conjectura foi provada.

A identidade de Feynman é parte central do formalismo combinatorial desenvolvido por Kac, Ward e Feynman para o Modelo de Ising em duas dimensões, em Mecânica Estatística. O modelo de Ising e o formalismo combinatorial desse modelo são brevemente descritos no Apêndice A e, com maior riqueza de detalhes, nas referências [5] e [7].

Em 1960, a Proposição 1.1 foi demonstrada por S. Sherman, [21] e [23], no caso em que o grafo G tem vértices de grau par, apenas, e no máximo de grau 4. Contudo, na referência [14] M. Loebel mostrou que a Proposição 1.1, válida para qualquer grafo plano, é consequência direta do resultado de Sherman.

Na referência [21] Sherman também provou uma extensão da identidade (1.20) para o caso em que G é um grafo não planar na forma de um toro. Recentemente,

em 2004, M. Loeb [14] generalizou o resultado para quaisquer grafos não planares. Porquanto não trabalharemos com grafos não planares, apresentaremos aqui o resultado de Loeb. Neste ponto, convém ler o Apêndice B antes de prosseguir.

Definição 1.16 *Seja G um grafo conexo de genus (ou gênero) $g > 0$. Denote por $R(g)$ o conjunto de todos os vetores da forma $(r_1, r_2, \dots, r_{2g})$ onde $r_n \in \{0, 1\}$. Defina*

$$W_r([p]) = (-1)^{r \cdot a(p)} W([p]) \quad (1.21)$$

onde $r \in R(g)$ e $a(p) = (k_1, \dots, k_{2g})$ é o vetor cuja componente $k_{2(i-1)+j}$ é o número de vezes que o caminho p percorre a ponte B_j^i (ver Apêndice B), $j = 1, 2, i = 1, 2, \dots, g$ e $r \cdot a(p)$ denota o produto escalar de r por $a(p)$.

Proposição 1.2 (M. Loeb) *Se G é um grafo de genus g , então*

$$\mathcal{E}(G) = 2^{-g} \sum_{r \in R(g)} (-1)^{S(I-r)} \prod_{[p]} (1 - W_r([p])) \quad (1.22)$$

onde o produtório é sobre todas as classes de equivalência de caminhos fechados não periódicos de G , I é o vetor com as $2g$ componentes iguais a 1 e $S(I-r)$ é o número de i 's tais que o vetor $I-r$ tem componentes $(I-r)_{2i-1} = (I-r)_{2i} = 1$, $i = 1, \dots, g$.

Demonstração: Ver referência [14]. ■

Exemplo 1.5 No caso $g = 1$:

$$R(1) = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$$

$$I - r = (1, 1) - r \in \{(1, 1), (1, 0), (0, 1), (0, 0)\}$$

e $S(1, 1) = 1$, $S(1, 0) = 0$, $S(0, 1) = 0$ e $S(0, 0) = 0$.

1.4 A Identidade de Sherman

Na referência [21], Sherman menciona o caso não trivial mais simples da identidade de Feynman (1.20). Nesse caso, o grafo G tem um único vértice e dois laços. Esse caso é considerado por ele para ilustrar certos aspectos do caso geral, mais complicado. O caso de um único vértice e uma única aresta é trivial, pois um único caminho não periódico é possível com $[p] = \{D^{+1}, D^{-1}\}$ e $s([p]) = +1$. O grafo tem um único

subgrafo admissível, o próprio grafo. Nesse caso, então,

$$\prod_{[p]} (1 + W_G([p])) = 1 + z \quad (1.23)$$

e

$$1 + \sum_{G_a \subseteq G} I(G_a) = 1 + z \quad (1.24)$$

Na referência [22], Sherman considera o caso em que G é um grafo com R arestas, $R > 1$, e tem um único vértice (Figura 1.7).

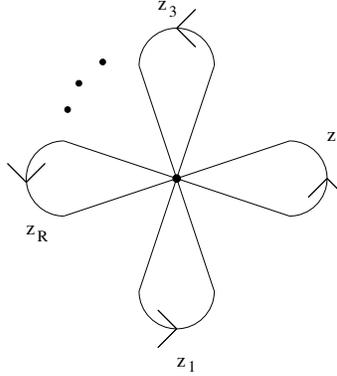


Figura 1.7: Grafo G_R orientado com R laços

Neste caso, o polinômio de Euler está dado por

$$\mathcal{E}(G_R) = 1 + \sum_{G_a \subseteq G_R} I(G_a) = 1 + \sum_{i=1}^R z_i + \sum_{i \neq j}^R z_i z_j + \dots + z_1 z_2 z_3 \dots z_R \quad (1.25)$$

pois todo subgrafo de G_R é admissível, incluindo o próprio grafo.

Não é difícil verificar que $\mathcal{E}(G_R)$ pode ser expresso da seguinte forma:

$$\mathcal{E}(G_R) = \prod_{i=1}^R (1 + z_i) \quad (1.26)$$

Para $R = 1$,

$$\mathcal{E}(G_R) = (1 + z_1) \quad (1.27)$$

e, para $R = 2$,

$$\mathcal{E}(G_R) = 1 + z_1 + z_2 + z_1 z_2 = \prod_{i=1}^2 (1 + z_i) \quad (1.28)$$

Suponha, por indução, que para $R = k$:

$$\mathcal{E}(G_k) = 1 + \sum_{i=1}^k z_i + \sum_{i \neq j}^k z_i z_j + \dots + z_1 z_2 \dots z_k = \prod_{i=1}^k (1 + z_i) \quad (1.29)$$

Para $R = k + 1$, o grafo G_R passa a ter subgrafos admissíveis adicionais que correspondem aos termos da soma

$$z_{k+1} + \sum_{i=1}^k z_i z_{k+1} + \sum_{i \neq j}^k z_i z_j z_{k+1} + \dots + z_1 z_2 \dots z_k z_{k+1} \quad (1.30)$$

que deverão ser adicionados ao polinômio de Euler em (1.29). Podemos reescrever (1.30) da seguinte forma

$$\left(1 + \sum_{i=1}^k z_i + \sum_{i \neq j}^k z_i z_j + \dots + z_1 z_2 \dots z_k \right) \times z_{k+1} \quad (1.31)$$

ou ainda, usando a hipótese de indução,

$$\left(\prod_{i=1}^k (1 + z_i) \right) \times z_{k+1} \quad (1.32)$$

Logo,

$$\mathcal{E}(G_{k+1}) = \prod_{i=1}^k (1 + z_i) + \prod_{i=1}^k (1 + z_i) z_{k+1} = \prod_{i=1}^{k+1} (1 + z_i) \quad (1.33)$$

provando (1.26).

Denotemos por m_i , $m_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, R$, o número de vezes que um caminho percorre a i -ésima aresta de G_R . Em geral, caminhos não equivalentes podem percorrer as mesmas arestas o mesmo número de vezes. Por exemplo, os caminhos $p_1 = D_1^{+1} D_2^{+1}$, $p_2 = D_1^{+1} D_2^{-1}$, $p_3 = D_1^{-1} D_2^{+1}$ e $p_4 = D_1^{-1} D_2^{-1}$ percorrem as arestas 1 e 2 o mesmo número de vezes. Todos eles têm $m_1 = m_2 = 1$. Porém estes caminhos são distintos. O caminho $D_1^{+1} D_2^{+1}$, por exemplo, percorre as arestas 1 e 2 no sentido fixado para as mesmas enquanto os demais fazem segundo outras orientações como está indicado nos expoentes das palavras. Ademais, o sinal de um caminho ou é positivo ou é negativo. Por exemplo, $s(p_1) = +1$, $s(p_2) = -1$, $s(p_3) = -1$ e $s(p_4) = +1$. Isso sugere a classificação dos caminhos de acordo com o seu sinal e o número de vezes que percorrem as arestas do grafo. Sejam $N_+(m_1, \dots, m_R)$ e $N_-(m_1, \dots, m_R)$ os números de classes de equivalência de caminhos fechados não periódicos com sinal positivo e negativo, respectivamente, que percorrem as arestas $1, 2, \dots, R$ o número de vezes m_1, m_2, \dots, m_R , $m_i \geq 0$, respectivamente.

Podemos, então, expressar o produtório formal sobre caminhos na forma:

$$\prod_{[p]} (1 + W_G([p])) = \prod_{m_1, \dots, m_R \geq 0} (1 + z_1^{m_1} \dots z_R^{m_R})^{N_+(m_1, \dots, m_R)} (1 - z_1^{m_1} \dots z_R^{m_R})^{N_-(m_1, \dots, m_R)} \quad (1.34)$$

Substituindo os resultados (1.26) e (1.34) na identidade de Feynman (1.20) obtemos a seguinte identidade, que passamos a chamar de **Identidade de Sherman**:

$$\prod_{m_1, \dots, m_R \geq 0} (1 + z_1^{m_1} \dots z_R^{m_R})^{N_+(m_1, \dots, m_R)} (1 - z_1^{m_1} \dots z_R^{m_R})^{N_-(m_1, \dots, m_R)} = \prod_{i=1}^R (1 + z_i) \quad (1.35)$$

Na referência [22], os fatores $(1 + z_i)$ aparecem com a potência 2, pois caminhos inversos são incluídos.

1.5 Motivações

Na referência [22], Sherman chamou atenção para certas semelhanças que existem entre a identidade (1.35) e outra identidade chamada de **Identidade de Witt**, oriunda da teoria das Álgebras de Lie. Esta identidade será apresentada e discutida em detalhes no Capítulo 3. Ver, por agora, as relações (3.2) a (3.6).

Sherman colocou o problema de se determinar o possível significado algébrico da identidade (1.35) e dos números N_+ e N_- sem, contudo, resolvê-lo. Os números N_+ e N_- não foram calculados explicitamente e a sua relação com álgebras não foi elucidada. Convém notar que na referência [14], onde Loebel demonstra a identidade geral de Feynman (1.22), estas questões também não foram consideradas.

Nas referências [4], e mais recentemente na [6], estes problemas foram investigados no caso não genérico da identidade de Sherman, isto é, tomando-se $z_1 = z_2 = \dots = z_R = z$.

O objetivo do presente trabalho é investigar o caso genérico da identidade de Sherman dada pela (1.35). A identidade, nesse caso, será investigada em seus aspectos combinatoriais e algébricos. No capítulo 2 os expoentes N_{\pm} serão calculados explicitamente e sua ligação com álgebras de Lie será estabelecida no Capítulo 4. Os métodos empregados na solução destes problemas, embora com bases nas referências [4] e [6], apresentam modificações e simplificações cruciais para o tratamento do caso

genérico da identidade de Sherman, combinatorialmente mais complicado.

Duas provas da identidade são fornecidas. Embora a prova da identidade de Sherman já ser contemplada pela Proposição 1.1, julgamos importante apresentar aqui provas desse caso especial, já que elas aplicam e ilustram nossos resultados. Uma delas, mais longa, a ser apresentada no capítulo 2, utiliza apenas as propriedades combinatoriais dos números N_{\pm} . A outra, a ser apresentada no capítulo 4, emprega resultados oriundos da teoria das álgebras de Lie e estabelece que a identidade de Sherman pode ser entendida algebricamente como uma consequência de uma identidade de Witt generalizada associada a uma álgebra de Lie livre.

Cabe aqui fazer a seguinte observação sobre as razões e relevância para o estudo da identidade de Feynman, em geral, e a de Sherman em especial. O objetivo original de Sherman e, mais recentemente, de Loeb, para provar a identidade de Feynman, era generalizar o formalismo combinatorial do Modelo de Ising em duas dimensões (Apêndice A) para o caso de três dimensões, um problema ainda em aberto.

Nossa motivação ao estudar um caso especial, porém não trivial, da identidade de Feynman foi, principalmente, o de elucidar o aspecto algébrico da identidade e contribuir para uma melhor compreensão da estrutura matemática da mesma. Segundo Sherman [22], o entendimento mais aprofundado deste aspecto algébrico no caso da identidade de Feynman, pode ser importante na análise do modelo de Ising em três dimensões.

Uma continuação natural das idéias e resultados apresentados nesta dissertação consistirá em estendê-los para o caso geral das identidades (1.20) e (1.22). Os resultados do capítulo 2, em suas idéias principais, foram obtidos durante o Programa Voluntário de Iniciação Científica, desenvolvido no período de agosto de 2005 a setembro de 2006, apresentados nas Jornadas de Iniciação Científica do IMPA em novembro de 2006 e na referência [1].

Capítulo 2

A Identidade de Sherman.

Aspectos Combinatoriais

O objetivo principal deste capítulo é determinar os expoentes N_{\pm} na identidade de Sherman

$$\prod_{m_1, \dots, m_R \geq 0} (1 + z_1^{m_1} \dots z_R^{m_R})^{N_+(m_1, \dots, m_R)} (1 - z_1^{m_1} \dots z_R^{m_R})^{N_-(m_1, \dots, m_R)} = \prod_{i=1}^R (1 + z_i) \quad (2.1)$$

Vamos, em primeiro lugar, expressar a identidade de outra forma. Observe que um produto igual ao do lado direito também ocorre no lado esquerdo da identidade. Os caminhos com $m_i = 1$ e $m_j = 0$ se $i \neq j$, $i = 1, 2, \dots, R$, tem sinal $+1$ e $N_+ = 1$, $N_- = 0$ e contribuem com o fator

$$\prod_{i=1}^R (1 + z_i) \quad (2.2)$$

A identidade de Sherman pode, então, ser expressa na forma equivalente seguinte:

$$\prod_{S \neq S'} (1 + z_1^{m_1} \dots z_R^{m_R})^{N_+(m_1, \dots, m_R)} (1 - z_1^{m_1} \dots z_R^{m_R})^{N_-(m_1, \dots, m_R)} = 1 \quad (2.3)$$

O produtório é sobre todas as sequências S de valores de m_1, m_2, \dots, m_R distintas daquelas em

$$S' = \{(m_1, m_2, \dots, m_R) | m_i = 1, m_{j \neq i} = 0, i, j = 1, \dots, R\} \quad (2.4)$$

Denote por G_r um subgrafo de G_R (Ver Figura 1.7, pag. 10) com r arestas, $r = 2, 3, \dots, R$. Sejam i_1, i_2, \dots, i_r as arestas de G_r em ordem crescente de sua numeração.

Podemos reescrever o produtório da equação (2.3) na forma:

$$\prod_{r=2}^R \prod_{G_r} \prod_{S(G_r)} (1 + z_{i_1}^{m_{i_1}} \dots z_{i_r}^{m_{i_r}})^{\theta_+(m_{i_1}, \dots, m_{i_r})} (1 - z_{i_1}^{m_{i_1}} \dots z_{i_r}^{m_{i_r}})^{\theta_-(m_{i_1}, \dots, m_{i_r})} = 1 \quad (2.5)$$

onde o segundo produtório é sobre todos os subgrafos G_r de G_R com r arestas, $r = 2, 3, \dots, R$, e o terceiro produtório é sobre as sequências de valores de $m_{i_1}, m_{i_2}, \dots, m_{i_r}$, em

$$S(G_r) = \{(m_{i_1}, m_{i_2}, \dots, m_{i_r}) | m_{i_k} > 0, k = 1, \dots, r\} \quad (2.6)$$

Os expoentes $\theta_{\pm}(m_{i_1}, \dots, m_{i_r})$ e $N_{\pm}(m_1, \dots, m_R)$ são essencialmente os mesmos. Adotou-se outra notação pois $N_{\pm}(m_1, \dots, m_R)$ em (2.3) é função dos R argumentos m_1, \dots, m_R , que podem ser iguais a zero, com exceção de pelo menos dois deles. Sejam $m_{i_1}, m_{i_2}, \dots, m_{i_r}$ os argumentos não nulos em $N_{\pm}(m_1, \dots, m_R)$. Considerando apenas r argumentos não nulos, chame $N_{\pm}(m_{i_1}, \dots, m_{i_r})$ de $\theta_{\pm}(m_{i_1}, \dots, m_{i_r})$, onde r é o número de arestas de G_R percorridas e que constituem um subgrafo G_r .

Para cada subgrafo $G_r \subseteq G_R$, podemos classificar todos os caminhos p sobre G_r de acordo com o seu comprimento $N = m_{i_1} + \dots + m_{i_r}$. Dessa forma, o terceiro produtório em (2.5) pode ser expresso por:

$$\prod_{N=r}^{\infty} \prod_{\substack{m_i > 0 \\ m_{i_1} + \dots + m_{i_r} = N}} (1 + z_{i_1}^{m_{i_1}} \dots z_{i_r}^{m_{i_r}})^{\theta_+(m_{i_1}, \dots, m_{i_r}, N)} (1 - z_{i_1}^{m_{i_1}} \dots z_{i_r}^{m_{i_r}})^{\theta_-(m_{i_1}, \dots, m_{i_r}, N)} \quad (2.7)$$

Na seção 2.3 mostraremos que (2.7) é igual a 1, para cada r , provando a identidade de Sherman. Na seção 2.1 derivaremos fórmulas para o cálculo dos expoentes $\theta_{\pm}(m_{i_1}, \dots, m_{i_r})$. O método de cálculo baseia-se na análise combinatorial do conjunto das palavras que representam caminhos fechados que percorrem todas as arestas do subgrafo G_r .

2.1 Contagem de Caminhos

Um caminho de comprimento N que percorre todas as arestas de um grafo G_r de G_R (Figura 1.7) será representado por uma palavra da forma

$$D_{j_1}^{e_{j_1}} D_{j_2}^{e_{j_2}} \dots D_{j_l}^{e_{j_l}} \quad (2.8)$$

onde a sequência

$$S_l = (j_1, \dots, j_l) \quad (2.9)$$

contém cada aresta de i_1, i_2, \dots, i_r de G_r pelo menos uma vez e satisfaz a condição

$$j_k \neq j_{k+1}, j_k \in \{i_1, \dots, i_r\}, j_l \neq j_1 \quad (2.10)$$

A sequência informa quais arestas são percorridas e em que ordem.

O símbolo D_j^e é chamado de bloco da palavra. O número l é chamado de comprimento da sequência S_l . O comprimento do caminho é dado pelo número $N = \sum_{k=1}^l |e_{j_k}|$, onde $|e_{j_k}|$ é o número de vezes que o caminho percorre a aresta j_k no sentido dado pelo sinal de e_{j_k} .

Fixado N , as palavras possíveis representando caminhos fechados que percorrem todas as arestas de G_r estão associadas às partições de N em r partes $m_{i_k} > 0$, $k = 1, \dots, r$, satisfazendo

$$N = m_{i_1} + \dots + m_{i_r}$$

sendo m_i o número total de vezes que um caminho percorre a i -ésima aresta de G_r e, para a partição de m_{i_k} em n_{i_k} partes, sendo n_{i_k} o número de vezes que a aresta i_k aparece em S_l e $\sum n_{i_k} = l$.

Por exemplo, no caso $r = 2$, $l = 2k$, $k = 1, 2, \dots, \min\{m_{i_1}, m_{i_2}\}$ e $n_{i_1} = n_{i_2}$. Se $r \geq 3$, $l = r, r+1, \dots, N$, pois um caminho percorre todas as arestas de G_r pelo menos uma vez. No Apêndice C, fornecemos uma lista de todas as palavras para o caso $R = 2$ e $N = 2, 3, 4$.

Em seguida, provaremos o seguinte resultado:

Lema 2.1 *Dado $G_r \subseteq G_R$, seja $K_r(l, m_{i_1}, \dots, m_{i_r})$ o número de palavras de comprimento $N = m_{i_1} + \dots + m_{i_r}$, com os valores de $l, m_{i_1}, \dots, m_{i_r}$ fixados. Esse número, que inclui palavras não periódicas e periódicas, suas inversões e permutações circulares, está dado pela fórmula*

$$\mathcal{K}_r(l; m_{i_1}, \dots, m_{i_r}) = 2^l \sum_{\{S_l\}} \prod_{k=1}^r \binom{m_{i_k} - 1}{n_{i_k} - 1} \quad (2.11)$$

onde n_{i_k} é o número de ocorrências da aresta i_k na sequência S_l . A somatória é sobre todas as sequências S_l de comprimento l . Convenciona-se que o símbolo de combinação se anula se $n_{i_k} > m_{i_k}$.

Demonstração: Seja n_{i_k} o número de vezes que a aresta i_k ocorre numa sequência $S_l = (j_1, \dots, j_l)$. O número

$$\binom{m_{i_k} - 1}{n_{i_k} - 1} \quad (2.12)$$

conta o número de partições de m_{i_k} em n_{i_k} partes positivas (Ver Apêndice D, Lema D.1) de modo que o produto destes para $k = 1, \dots, r$, multiplicado por 2^l , é o número total de palavras que se pode formar, representando caminhos que percorrem m_{i_1} vezes a aresta i_1, \dots, m_{i_r} vezes a aresta i_r de G_r , de todas as maneiras possíveis consoante a sequência S_l . O fator 2^l indica que há duas possibilidades de sinal, $+$ ou $-$, para cada expoente numa palavra. Em seguida, soma-se sobre todas as possíveis sequências S_l , com mesmo comprimento l , observando, contudo, que na lista destas sequências pode haver algumas que podem ter $n_{i_k} > m_{i_k}$ para algum i_k . Por esta razão, convencionamos que se uma sequência tem $n_{i_k} > m_{i_k}$, (2.12) é igual a zero.

■

Exemplo 2.1 Casos $N = 2, 3, 4$. Para $r = R = 2$ e $r = R = 3$ as sequências relevantes são:

$$\{S_2\} = \{(1\ 2), (2\ 1)\}$$

$$\{S_3\} = \{(1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2), (2\ 1\ 3), (2\ 3\ 1), (3\ 1\ 2), (3\ 2\ 1)\}$$

$$\{S_4\} = \{(1\ 2\ 1\ 3), (1\ 2\ 3\ 2), (1\ 3\ 1\ 2), (1\ 3\ 2\ 3), (2\ 1\ 3\ 1), (2\ 3\ 2\ 1), (2\ 1\ 2\ 3), (2\ 3\ 1\ 3), (3\ 1\ 2\ 1), (3\ 2\ 1\ 2), (3\ 2\ 3\ 1), (3\ 1\ 3\ 2)\}$$

Para o caso $r = R = 2$:

(a) $N = 2$

$$m_1 = m_2 = 1, l = 2, \{S_2\} = \{(1\ 2), (2\ 1)\}$$

$$\begin{aligned} K_2(2; 1, 1) &= 2^2 \sum_{\{S_2\}} \binom{m_1 - 1}{n_1 - 1} \binom{m_2 - 1}{n_2 - 1} \\ &= 8 \end{aligned}$$

(b) $N = 3$

$$m_1 = 1, m_2 = 2, l = 2: K_2(2; 1, 2) = 8$$

$$m_1 = 2, m_2 = 1, l = 2: K_2(2; 2, 1) = 8$$

(c) $N = 4$

$$m_1 = 1, m_2 = 3, l = 2: K_2(2; 1, 3) = 8$$

$$m_1 = 3, m_2 = 1, l = 2: K_2(2; 3, 1) = 8$$

$$m_1 = 2, m_2 = 2, l = 2, 4: K_2(2; 2, 2) = 8 \text{ e } K_2(4; 2, 2) = 32$$

Os resultados acima listados apresentam conformidade com o Apêndice C: note, por exemplo, que $K_2(4; 2, 2)$ é o número de elementos nas classes de equivalência $[D_1^{-1}D_2^{+1}D_1^{+1}D_2^{+1}]$, $[D_1^{+1}D_2^{-1}D_1^{+1}D_2^{+1}]$, $[D_1^{-1}D_2^{-1}D_1^{+1}D_2^{+1}]$, $[D_1^{+1}D_2^{+1}D_1^{+1}D_2^{+1}]$ e $[D_1^{-1}D_2^{+1}D_1^{-1}D_2^{+1}]$.

Exemplo 2.2 Caso $r = R = 3$, $N = 4$, $m_1 = m_2 = 1$ e $m_3 = 2$, $l = 3, 4$. Neste caso, temos explicitamente:

$$K_3(3; 1, 1, 2) = 2^3 \sum_{\{S_3\}} \binom{0}{n_1 - 1} \binom{0}{n_2 - 1} \binom{1}{n_3 - 1} = 48$$

e

$$K_4(4; 1, 1, 2) = 2^4 \sum_{\{S_4\}} \binom{0}{n_1 - 1} \binom{0}{n_2 - 1} \binom{1}{n_3 - 1}$$

Nesse caso, as sequências $(1\ 2\ 1\ 3)$, $(1\ 3\ 1\ 2)$, $(2\ 1\ 3\ 1)$, $(3\ 1\ 2\ 1)$ tem $n_1 = 2$ e as sequências $(1\ 2\ 3\ 2)$, $(2\ 3\ 2\ 1)$, $(2\ 1\ 2\ 3)$, $(3\ 2\ 1\ 2)$ tem $n_2 = 2$. Para estas sequências,

$$\binom{0}{1} = 0$$

Restam as sequências $(1\ 3\ 2\ 3)$, $(2\ 3\ 1\ 3)$, $(3\ 2\ 3\ 1)$, $(3\ 1\ 3\ 2)$ resultando:

$$K_4(4; 1, 1, 2) = 2^4 \cdot 4 = 64$$

Exemplo 2.3 Caso $r = R = 3$, $l = 3$, $N = 3$ e $m_1 = m_2 = m_3 = 1$.

As sequências relevantes são as $\{S_3\}$, já listadas anteriormente. Obtemos

$$K_3(3; 1, 1, 1) = 2^3 \cdot 6 = 48$$

O número $K_3(3; 1, 1, 1)$ é a quantidade de elementos nas classes $[D_1^{+1}D_2^{+1}D_3^{+1}]$, $[D_1^{-1}D_2^{+1}D_3^{+1}]$, $[D_1^{+1}D_2^{-1}D_3^{+1}]$, $[D_1^{+1}D_2^{+1}D_3^{-1}]$, $[D_1^{-1}D_2^{-1}D_3^{+1}]$, $[D_1^{-1}D_2^{+1}D_3^{-1}]$, $[D_1^{+1}D_2^{-1}D_3^{-1}]$ e $[D_1^{-1}D_2^{-1}D_3^{-1}]$.

Teorema 2.1 O número $\overline{\mathcal{K}_r(l; m_{i_1}, \dots, m_{i_r})}$ de palavras não periódicas, mais suas inversões e permutações circulares, é dado por:

$$\overline{\mathcal{K}_r(l; m_{i_1}, \dots, m_{i_r})} = \sum_{g|l, m_{i_1}, \dots, m_{i_r}} \mu(g) 2^{\frac{l}{g}} \sum_{\{S_l\}} \prod_{k=1}^r \binom{\frac{m_{i_k}}{g} - 1}{t_{i_k} - 1} \quad (2.13)$$

onde t_{i_k} é o número de ocorrências da aresta i_k em $S_{\frac{l}{g}}$ e μ é a função de Möbius (Ver Apêndice E).

Demonstração: No conjunto das $\mathcal{K}_r(l; m_{i_1}, \dots, m_{i_r})$ palavras há o subconjunto das palavras não periódicas, que inclui inversões e permutações circulares. Vamos denotar por $\overline{\mathcal{K}(l; m_{i_1}, \dots, m_{i_r})}$ o número de elementos desse subconjunto.

As demais palavras incluem aquelas que são periódicas, se houver, suas inversões e permutações circulares, tendo como possíveis períodos os divisores comuns de l e m_{i_1}, \dots, m_{i_r} . Seja g um desses períodos. As palavras com esse período são da forma

$$(D_{j_1}^{e_{j_1}} D_{j_2}^{e_{j_2}} \dots D_{j_\alpha}^{e_{j_\alpha}})^g \quad (2.14)$$

onde $\alpha = \frac{l}{g}$, sendo $D_{j_1}^{e_{j_1}} D_{j_2}^{e_{j_2}} \dots D_{j_\alpha}^{e_{j_\alpha}}$ uma palavra associada à partição $\frac{m_{i_1}}{g}, \dots, \frac{m_{i_r}}{g}$ e com comprimento $\frac{N}{g}$.

O número de palavras periódicas com período g mais suas inversões e permutações circulares é igual ao número $K_r\left(\frac{l}{g}; \frac{m_{i_1}}{g}, \dots, \frac{m_{i_r}}{g}\right)$ de palavras não periódicas, que as formam. Portanto, podemos expressar o número $\mathcal{K}(l; m_{i_1}, \dots, m_{i_r})$ como:

$$\mathcal{K}_r(l; m_{i_1}, \dots, m_{i_r}) = \sum_{g|l, m_{i_1}, \dots, m_{i_r}} \overline{\mathcal{K}_r\left(\frac{l}{g}; \frac{m_{i_1}}{g}, \dots, \frac{m_{i_r}}{g}\right)} \quad (2.15)$$

onde a soma é sobre os divisores comuns g de l e m_{i_1}, \dots, m_{i_r} .

Aplicando a Transformada Inversa de Möbius (Ver Apêndice E) à fórmula (2.15) resulta que

$$\overline{\mathcal{K}_r(l; m_{i_1}, \dots, m_{i_r})} = \sum_{g|l, m_{i_1}, \dots, m_{i_r}} \mu(g) \mathcal{K}_r\left(\frac{l}{g}; \frac{m_{i_1}}{g}, \dots, \frac{m_{i_r}}{g}\right) \quad (2.16)$$

Substituindo (2.11) na (2.16) obtemos (2.13). ■

Exemplo 2.4 Casos $r = R = 2$ e $N = 2, 3, 4$.

(a) $N = 2$

$m_1 = m_2 = 1, l = 2$

$$\begin{aligned} \overline{K_2(2; 1, 1)} &= \sum_{g|2, 1, 1} \mu(g) K_2\left(\frac{2}{g}; \frac{1}{g}, \frac{1}{g}\right) \\ &= \mu(1) K_2(2; 1, 1) = K_2(2; 1, 1) \\ &= 8 \end{aligned}$$

(b) $\mathbf{N} = 3$

$$m_1 = 1, m_2 = 2, l = 2: \overline{K_2(2; 1, 2)} = K_2(2; 1, 2) = 8$$

$$m_1 = 2, m_2 = 1, l = 2: \overline{K_2(2; 2, 1)} = K_2(2; 2, 1) = 8$$

(c) $\mathbf{N} = 4$

$$m_1 = 1, m_2 = 3, l = 2: \overline{K_2(2; 1, 3)} = K_2(2; 1, 3) = 8$$

$$m_1 = 3, m_2 = 1, l = 2: \overline{K_2(2; 3, 1)} = K_2(2; 3, 1) = 8$$

$$m_1 = 2, m_2 = 2 \text{ e } l = 2:$$

$$\begin{aligned} \overline{K_2(2; 2, 2)} &= \sum_{g|2,2,2} \mu(g) K_2\left(\frac{2}{g}; \frac{2}{g}, \frac{2}{g}\right) \\ &= K_2(2; 2, 2) - K_2(1; 1, 1) \\ &= K_2(2; 2, 2) = 8 \end{aligned}$$

onde $K_2(1; 1, 1) = 0$ pois não são possíveis palavras com $l = 1$ no caso em que $r = 2$

No caso $l = 4$:

$$\begin{aligned} \overline{K_2(4; 2, 2)} &= \sum_{g|4,2,2} \mu(g) K_2\left(\frac{4}{g}; \frac{2}{g}, \frac{2}{g}\right) \\ &= K_2(4; 2, 2) - K_2(2; 1, 1) \\ &= 32 - 8 = 24 \end{aligned}$$

pois $\mu(2) = -1$.

Em conformidade com a tabela do Apêndice C, o número $\overline{K_2(2; 1, 1)}$ é igual ao número de elementos nas classes $[D_1^{+1}D_2^{+1}]$, $[D_1^{+1}D_2^{-1}]$; $\overline{K_2(2; 1, 2)}$ e $\overline{K_2(2; 2, 1)}$ são iguais ao número de elementos em $[D_1^{+1}D_2^{+2}]$, $[D_1^{+1}D_2^{-2}]$ e $[D_1^{+2}D_2^{+1}]$, $[D_1^{+2}D_2^{-1}]$, respectivamente.

Da mesma forma, $\overline{K_2(2; 1, 3)}$ é o número de elementos nas classes $[D_1^{+1}D_2^{+3}]$ e $[D_1^{+1}D_2^{-3}]$. Analogamente, podemos interpretar $\overline{K_2(2; 2, 2)}$ como o número de elementos nas classes de equivalência $[D_1^{+2}D_2^{-2}]$ e $[D_1^{-2}D_2^{+2}]$, e $\overline{K_2(4; 2, 2)}$, o número de elementos em $[D_1^{-1}D_2^{+1}D_1^{+1}D_2^{+1}]$, $[D_1^{+1}D_2^{-1}D_1^{+1}D_2^{+1}]$ e $[D_1^{-1}D_2^{-1}D_1^{+1}D_2^{+1}]$.

Exemplo 2.5 Caso $r = R = 3$, $\mathbf{N} = 3$, $m_1 = m_2 = m_3 = 1$.

$$\overline{K_3(3; 1, 1, 1)} = K_3(3; 1, 1, 1) = 48$$

Como no Apêndice C, $\overline{K_3(3; 1, 1, 1)}$ é o número total de elementos nas classes $[D_1^{+1}D_2^{+1}D_3^{+1}]$, $[D_1^{-1}D_2^{+1}D_3^{+1}]$, $[D_1^{+1}D_2^{-1}D_3^{+1}]$, $[D_1^{+1}D_2^{+1}D_3^{-1}]$, $[D_1^{-1}D_2^{-1}D_3^{+1}]$, $[D_1^{-1}D_2^{+1}D_3^{-1}]$, $[D_1^{+1}D_2^{-1}D_3^{-1}]$ e $[D_1^{-1}D_2^{-1}D_3^{-1}]$.

Teorema 2.2 *O número θ de classes de equivalência de caminhos fechados não periódicos de comprimento $N \geq r$ que percorrem m_{i_1} vezes a aresta i_1, \dots, m_{i_r} vezes a aresta i_r de $G_r \subseteq G_R$, satisfazendo $m_{i_1} + \dots + m_{i_r} = N$, é dado por:*

$$\theta(m_{i_1}, \dots, m_{i_r}) = \sum_{g|m_{i_1}, \dots, m_{i_r}} \frac{\mu(g)}{g} \mathcal{F}\left(\frac{m_{i_1}}{g}, \dots, \frac{m_{i_r}}{g}\right) \quad (2.17)$$

onde

$$\mathcal{F}\left(\frac{m_{i_1}}{g}, \dots, \frac{m_{i_r}}{g}\right) = \frac{1}{2} \sum_{a=r}^{\frac{N}{g}} \frac{2^a}{a} \sum_{\{S_a\}} \prod_{k=1}^r \binom{\frac{m_{i_k}}{g} - 1}{t_{i_k} - 1} \quad (2.18)$$

se $r \geq 3$; e, se $r = 2$:

$$\mathcal{F}\left(\frac{m_{i_1}}{g}, \frac{m_{i_2}}{g}\right) = \sum_{a=1}^{M/g} \frac{2^{2a}}{2a} \binom{\frac{m_{i_1}}{g} - 1}{a - 1} \binom{\frac{m_{i_2}}{g} - 1}{a - 1} \quad (2.19)$$

onde $M = \min\{m_{i_1}, m_{i_2}\}$.

Demonstração: Pelo teorema anterior,

$$\overline{\mathcal{K}_r(l, m_{i_1}, \dots, m_{i_r})} = \sum_{g|l, m_{i_1}, \dots, m_{i_r}} \mu(g) \mathcal{K}_r\left(\frac{l}{g}, \frac{m_{i_1}}{g}, \dots, \frac{m_{i_r}}{g}\right) \quad (2.20)$$

onde \mathcal{K}_r está dado por (2.11) O número $\overline{\mathcal{K}_r}$ ainda inclui permutações circulares e inversões que precisam ser eliminadas. Para eliminar as inversões dividimos por 2. Para eliminar permutações circulares dividimos a equação (2.20) por l e somamos sobre os possíveis valores de l . Consideremos o caso $r \geq 3$. Dessa forma, somando sobre $l = r, \dots, N$, obtemos o número $\theta(m_{i_1}, \dots, m_{i_r})$ de classes de equivalência de caminhos não periódicos:

$$\theta(m_{i_1}, \dots, m_{i_r}) = \frac{1}{2} \sum_{l=r}^N \frac{\overline{\mathcal{K}_r(l, m_{i_1}, \dots, m_{i_r})}}{l} \quad (2.21)$$

Substituindo (2.20) em (2.21),

$$\theta(m_{i_1}, \dots, m_{i_r}) = \frac{1}{2} \sum_{l=r}^N \frac{1}{l} \sum_{g|l, m_{i_1}, \dots, m_{i_r}} \mu(g) 2^{\frac{l}{g}} \sum_{\{S_{\frac{l}{g}}\}} \prod_{k=1}^r \binom{\frac{m_{i_k}}{g} - 1}{\frac{l}{g} - 1} \quad (2.22)$$

Podemos reescrever a (2.22) somando, primeiro, sobre os divisores comuns de m_{i_1}, \dots, m_{i_r} . Fixado g , em seguida soma-se sobre os valores de l que são múltiplos de g . Sejam $l = ag$, e $\frac{n_{i_k}}{g} = t_{i_k}$. Como $l = r, r+1, \dots, N$, se $r \geq 3$, então $\frac{r}{g} \leq a \leq \frac{N}{g}$, mas, a menos que $g = 1$, não é admissível ter $a < r$ pois todas as arestas do grafo devem ser percorridas. Logo, devemos ter $r \leq a \leq \frac{N}{g}$. O resultado (2.17-2.18) segue.

No caso em que $r = 2$, l é par e, para cada l , apenas a sequência da forma $(i_1 i_2 i_1 i_2 \dots i_1 i_2)$ é possível com $n_{i_1} = n_{i_2} = \frac{l}{2}$. Tomando $l = 2a$, $a = 1, 2, \dots, M = \min\{m_{i_1}, m_{i_2}\}$, segue o resultado (2.19). ■

Exemplo 2.6 Casos $r = R = 2$, $N = 2, 3, 4$.

(a) $\mathbf{N} = 2$

$$\theta(1, 1) = \mathcal{F}(1, 1) = 2$$

(b) $\mathbf{N} = 3$

$$\theta(1, 2) = \mathcal{F}(1, 2) = 2$$

$$\theta(2, 1) = \mathcal{F}(2, 1) = 2$$

(c) $\mathbf{N} = 4$

$$\theta(1, 3) = \mathcal{F}(1, 3) = 2$$

$$\theta(3, 1) = \mathcal{F}(3, 1) = 2$$

$$\theta(2, 2) = \sum_{g|2,2} \frac{\mu(g)}{g} \mathcal{F}\left(\frac{2}{g}, \frac{2}{g}\right) = \mathcal{F}\left(\frac{2}{1}, \frac{2}{1}\right) - \frac{1}{2} \mathcal{F}\left(\frac{2}{2}, \frac{2}{2}\right)$$

Calculando, obtemos que $\mathcal{F}(2, 2) = 6$ e $\mathcal{F}(1, 1) = 2$, donde segue que

$$\theta(2, 2) = 5$$

Conforme está explicitado no Apêndice C, as cinco classes de equivalência que correspondem a $\theta(2, 2)$ são:

$$[D_1^{+2} D_2^{+2}], [D_1^{+2} D_2^{-2}], [D_1^{-1} D_2^{+1} D_1^{+1} D_2^{+1}], [D_1^{+1} D_2^{-1} D_1^{+1} D_2^{+1}] \text{ e } [D_1^{-1} D_2^{-1} D_1^{+1} D_2^{+1}].$$

Exemplo 2.7 Caso $r = R = 3$, $N = 3$, $m_1 = m_2 = m_3 = 1$. Aplicando as fórmulas (2.17) e (2.18) obtemos

$$\theta(1, 1, 1) = 8$$

2.2 Cálculo de θ_+ e θ_-

Nesta seção, consideraremos o sinal de um caminho e as classes de equivalência de caminhos de acordo com seu sinal. Obteremos fórmulas para o cálculo do número de classes de equivalência de caminhos fechados não periódicos com sinal positivo, θ_+ , e com sinal negativo θ_- .

Considere o conjunto de todas as palavras possíveis (isto é, incluindo as não periódicas, as periódicas se houver, permutações circulares e as inversões) de comprimento N , $N \geq r$, sobre G_r . Examinando esse conjunto, por exemplo, no caso $r = R = 2$ e $N = 2, 3, 4$ (ver tabela do Apêndice C) observa-se que para cada N , metade de todas as palavras tem sinal positivo e a outra metade tem sinal negativo.

Se fixarmos os valores de m_1 e m_2 tais que $m_1 + m_2 = N$, verifica-se o mesmo na lista das palavras que têm esses valores de m_1 e m_2 .

Vamos supor, no que segue, que essa *propriedade de equilíbrio dos sinais (PES)* é válida para todo N e para todo r quando se considera a lista completa de palavras. Em geral, no cálculo de θ_+ e θ_- o equilíbrio dos sinais se perderá quando tivermos palavras periódicas que são ou só positivas ou só negativas, já que essas deverão ser subtraídas. Por exemplo, para $N = 4$, (ver lista no Apêndice C), todas as palavras periódicas são negativas.

Examinando a tabela do Apêndice C no caso $N = 4$, há quatro palavras periódicas que são:

$$\begin{aligned} (D_1^{+1}D_2^{+1})^2 & & (D_1^{-1}D_2^{+1})^2 \\ (D_1^{-1}D_2^{-1})^2 & & (D_1^{+1}D_2^{-1})^2 \end{aligned} \quad (2.23)$$

Observe que, para contá-las basta contar as palavras não periódicas necessárias para sua formação que são, nesse caso, as quatro palavras não periódicas de comprimento $N = 2$: $D_1^{+1}D_2^{+1}$, $D_1^{-1}D_2^{+1}$, $D_1^{+1}D_2^{-1}$ e $D_1^{-1}D_2^{-1}$. Isso vale em geral.

As observações acima são importantes na prova do seguinte resultado.

Teorema 2.3 *Suponha que qualquer uma das condições abaixo é satisfeita:*

- (a) $m_{i_1} + m_{i_2} + \dots + m_{i_r} < 2r$;
- (b) $m_{i_1}, m_{i_2}, \dots, m_{i_r}$ são todos iguais a um número primo ímpar;
- (c) $m_{i_1}, m_{i_2}, \dots, m_{i_r}$ são coprimos;
- (d) $m_{i_1}, m_{i_2}, \dots, m_{i_r}$ não são todos pares;
- (e) $m_{i_1}, m_{i_2}, \dots, m_{i_r}$ são todos ímpares.

Então, os números θ_{\pm} satisfazem a seguinte relação:

$$\theta_-(m_{i_1}, m_{i_2}, \dots, m_{i_r}, N) = \theta_+(m_{i_1}, m_{i_2}, \dots, m_{i_r}, N) \quad (2.24)$$

Demonstração: Observamos que para facilitar os cálculos na demonstração, escreveremos N no argumento de θ_{\pm} , $N = m_{i_1} + \dots + m_{i_r}$.

(a) Uma palavra tem comprimento $m_{i_1} + m_{i_2} + \dots + m_{i_r} = N \geq r$. Se $N < 2r$ a palavra não pode ser periódica, pois para ser periódica, ela precisa ter um comprimento que é múltiplo de r e ter um período $g \geq 2$, ou seja, seu comprimento precisa ser $N \geq 2r$. Como não existem palavras periódicas com comprimento $N < 2r$ para serem descartadas, então no conjunto de todas as palavras de comprimento $N < 2r$, metade das palavras têm sinal positivo e metade das palavras tem sinal negativo mesmo depois de exclusão de permutações circulares e inversões. Logo $\theta_+ = \theta_-$.

(b) Se $m_{i_1}, m_{i_2}, \dots, m_{i_r}$ são todos iguais a um número primo ímpar m , então 1 e m são os seus únicos divisores comuns. Nesse caso as palavras periódicas têm período ímpar $g = m$. Pelo Lema 1.1, o sinal de uma palavra periódica com período ímpar é igual ao sinal da subpalavra não periódica associada. O número de subpalavras associadas com sinal positivo é dado por

$$\theta_+(1, \dots, 1, r) \quad (2.25)$$

que é também o número de palavras periódicas positivas. Do mesmo modo, o número de subpalavras associadas com sinal negativo é dado por

$$\theta_-(1, \dots, 1, r) \quad (2.26)$$

que é também o número de palavras periódicas negativas. Por (a) esses números são iguais, implicando no resultado.

(c) Nesse caso, $g = 1$ é o único divisor comum de $m_{i_1}, m_{i_2}, \dots, m_{i_r}$. Então não existem palavras periódicas associadas a esses números. Pela **PES**, segue que $\theta_+ = \theta_-$.

(d) Sejam $1, g_1, \dots, g_t$ os divisores comuns de $m_{i_1}, m_{i_2}, \dots, m_{i_r}$ e k_1, k_2 a quantidade dos m'_i s que são pares e ímpares, respectivamente.

Suponha que k_2 é um número par. Nesse caso $m_{i_1} + m_{i_2} + \dots + m_{i_r} = N$ é um número par. Suponha que $N \geq 2r$. Denote por $N_1 = 2r, N_2 = 2r + 2, \dots$, os números pares maiores ou iguais a $2r$ em ordem crescente. Considere as palavras periódicas com período g_j e comprimento $N = N_1$. Desde que g_j é ímpar, o sinal de uma

palavra periódica é igual ao sinal da subpalavra não periódica associada. O número de palavras periódicas com sinal \pm é dado por

$$\theta_{\pm}(\alpha_{1,j}, \dots, \alpha_{r,j}, \alpha_1) \quad (2.27)$$

onde $\alpha_1 := N_1/g_j$. Mas $\theta_+ = \theta_-$ porque $\alpha_1 < 2r$ e pelo item **(a)**. Isso implica que

$$\theta_+(m_{i_1}, \dots, m_{i_r}, N_1) = \theta_-(m_{i_1}, \dots, m_{i_r}, N_1) \quad (2.28)$$

Usando indução vamos supor que o mesmo resultado vale também para $N = N_2, \dots, N_k$. Seja $N = N_{k+1}$. Considere as palavras periódicas com período g_j e comprimento $N = N_{k+1}$. Desde que g_j é ímpar, o sinal de uma palavra periódica é igual ao sinal da subpalavra periódica associada. O número de palavras periódicas com sinal \pm é dado por

$$\theta_{\pm}(\alpha_{1,j}, \dots, \alpha_{r,j}, \alpha_{k+1}) \quad (2.29)$$

onde $\alpha_{k+1} := N_{k+1}/g_j$. Mas $\theta_+ = \theta_-$ pois ou $\alpha_{k+1} < 2r$ ou $\alpha_{k+1} = N_{\beta}$ que é par para algum $\beta = 1, 2, \dots, k$. Isso implica que

$$\theta_+(m_{i_1}, \dots, m_{i_r}, N_{k+1}) = \theta_-(m_{i_1}, \dots, m_{i_r}, N_{k+1}) \quad (2.30)$$

Suponha que k_2 é um número ímpar. Nesse caso, $m_{i_1} + m_{i_2} + \dots + m_{i_r} = N$ é um número ímpar. Denote por $N_1 = 2r + 1, N_1 = 2r + 3, \dots$, os números ímpares maiores que $2r$ em ordem crescente. Começando com $N = N_1$, considere as palavras periódicas com período g_j e comprimento $N = N_1$. Novamente, desde que g_j é ímpar, o sinal da palavra periódica é igual ao sinal da subpalavra periódica associada. O número de palavras periódicas com sinal \pm é dado por

$$\theta_{\pm}(\alpha_{1,j}, \dots, \alpha_{r,j}, \alpha_1) \quad (2.31)$$

onde $\alpha_1 = N_1/g_j$. As subpalavras não periódicas associadas têm comprimento N_1/g_j que é um número ímpar e $N_1/g_j < 2r$. Então $\theta_+ = \theta_-$ e o resultado segue. Suponha que o resultado vale para N_2, \dots, N_k . Como no caso anterior, usando indução, provamos que a igualdade (2.24) é válida para $N = N_{k+1}$.

(e) Desde que $m_{i_1}, m_{i_2}, \dots, m_{i_r}$ são todos ímpares, seus divisores comuns também o são. Vamos chamá-los de $1, g_1, \dots, g_t$. Suponha que r é ímpar. Nesse caso $m_{i_1} + m_{i_2} + \dots + m_{i_r} = N$ é um número ímpar. Denote por $N_k > 2r, k = 1, 2, \dots$ os números ímpares em ordem crescente. Como antes, aplicando indução, prova-se o resultado.

Quando r é par, N é um número par. Nesse caso deve-se aplicar indução para a sequência $N_k > 2r$, $k = 1, 2, \dots$ de números pares.

■

Interessa-nos, agora, obter uma fórmula para $\theta_+(m_{i_1}, \dots, m_{i_r})$, o número de classes de equivalência de caminhos não periódicos com sinal positivo, e $\theta_-(m_{i_1}, \dots, m_{i_r})$, no caso em que m_{i_1}, \dots, m_{i_r} são todos pares.

Teorema 2.4 *O número de classes de equivalência de caminhos fechados não periódicos de comprimento $N \geq r$ com sinal positivo que percorre m_{i_1} vezes a aresta i_1, \dots, m_{i_r} vezes a aresta i_r de $G_r \subseteq G_R$, $m_{i_1} + \dots + m_{i_r} = N$ é dado por:*

$$\theta_+(m_{i_1}, m_{i_2}, \dots, m_{i_r}) = \sum_{g_i | m_{i_1}, \dots, m_{i_r}} \frac{\mu(g)}{g} \mathcal{G}\left(\frac{m_{i_1}}{g}, \dots, \frac{m_{i_r}}{g}\right) \quad (2.32)$$

onde a soma é sobre todos os divisores comuns ímpares g_i de m_{i_1}, \dots, m_{i_r} , $\mu(g)$ é a função de Möbius definida no Apêndice E e

$$\mathcal{G} = \frac{\mathcal{F}}{2} \quad (2.33)$$

onde \mathcal{F} está dado no Teorema 2.2. Se m_{i_1}, \dots, m_{i_r} são todos números pares, então

$$\theta_-(m_{i_1}, m_{i_2}, \dots, m_{i_r}) = \theta_+(m_{i_1}, m_{i_2}, \dots, m_{i_r}) - \theta_+\left(\frac{m_{i_1}}{2}, \frac{m_{i_2}}{2}, \dots, \frac{m_{i_r}}{2}\right) \quad (2.34)$$

Demonstração: Primeiramente, suponha que todos os divisores comuns de m_{i_1}, \dots, m_{i_r} são ímpares. Nesse caso, os números m_{i_1}, \dots, m_{i_r} se enquadram nas condições do teorema anterior. Pelo Teorema 2.2,

$$\theta(m_{i_1}, \dots, m_{i_r}) = \sum_{g_i | m_{i_1}, \dots, m_{i_r}} \frac{\mu(g)}{g} \mathcal{F}\left(\frac{m_{i_1}}{g}, \dots, \frac{m_{i_r}}{g}\right) \quad (2.35)$$

onde a somatória é sobre os divisores comuns ímpares g_i de m_{i_1}, \dots, m_{i_r} .

Como $\theta = \theta_+ + \theta_-$ e $\theta_+ = \theta_-$, pelo teorema anterior segue que $\theta = 2\theta_+$. Logo:

$$\theta_+ = \frac{1}{2} \sum_{g_i | m_{i_1}, \dots, m_{i_r}} \frac{\mu(g)}{g} \mathcal{F} \quad (2.36)$$

Se os números m_{i_1}, \dots, m_{i_r} são todos pares, novamente, θ_+ é dado por (2.36). De fato, neste caso, os m_i 's têm divisores comuns que são números pares, mas pelo Lema 1.1 palavras periódicas com período par têm sinal negativo. Então, somente os divisores ímpares são relevantes para obter θ_+ .

A razão pela qual se deve ter um fator $1/2$, também nesse caso, é que quando consideramos o conjunto de todas as palavras possíveis representando caminhos, de um dado comprimento, que percorrem m_{i_1}, \dots, m_{i_r} vezes as arestas de G_r , metade tem sinal positivo e metade têm sinal negativo pela **(PES)**. Para contar a metade positiva, necessitamos do fator $1/2$.

Vamos agora calcular θ_- no caso par. Escreva:

$$\theta = \sum_{g_i | m_{i_1}, \dots, m_{i_r}} \frac{\mu(g)}{g} \mathcal{F} + \sum_{g_p | m_{i_1}, \dots, m_{i_r}} \frac{\mu(g)}{g} \mathcal{F} \quad (2.37)$$

onde a segunda somatória é sobre os divisores pares g_p comuns de m_{i_1}, \dots, m_{i_r} .

Usando (2.36) segue que:

$$\theta = 2\theta_+ + \sum_{g_p | m_{i_1}, \dots, m_{i_r}} \frac{\mu(g)}{g} \mathcal{F} \quad (2.38)$$

Agora, usando que $\theta = \theta_+ + \theta_-$, segue que

$$\theta_- = \theta_+ + \sum_{g_p | m_{i_1}, \dots, m_{i_r}} \frac{\mu(g)}{g} \mathcal{F} \quad (2.39)$$

Agora, os divisores relevantes pares são $\{2n\}$ onde n são os divisores comuns ímpares de m_{i_1}, \dots, m_{i_r} . Para os outros divisores possíveis, $\mu(2^j n) = 0$, $j \geq 2$. Usando que $\mu(2n) = -\mu(n)$, a somatória sobre os divisores pares é igual a

$$\begin{aligned} \sum_{g_p | m_{i_1}, \dots, m_{i_r}} \frac{\mu(g)}{g} \mathcal{F} &= \sum_{\{2n\} | m_{i_1}, \dots, m_{i_r}} \frac{\mu(2n)}{2n} \mathcal{F}\left(\frac{m_{i_1}}{2n}, \dots, \frac{m_{i_r}}{2n}\right) \\ &= \sum_{n \left| \frac{m_{i_1}}{2}, \dots, \frac{m_{i_r}}{2} \right.} \frac{\mu(2n)}{2n} \mathcal{F}\left(\frac{m_{i_1}}{2n}, \dots, \frac{m_{i_r}}{2n}\right) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{n \left| \frac{m_{i_1}}{2}, \dots, \frac{m_{i_r}}{2} \right.} \frac{\mu(n)}{n} \mathcal{F}\left(\frac{m_{i_1}}{2n}, \dots, \frac{m_{i_r}}{2n}\right) \\ &= -\theta_+\left(\frac{m_{i_1}}{2}, \dots, \frac{m_{i_r}}{2}\right) \end{aligned} \quad (2.40)$$

provando (2.34). ■

Exemplo 2.8 Tabela de valores para $\theta_+(m_{i_1}, m_{i_2})$ e $\theta_-(m_{i_1}, m_{i_2})$ nos casos $r = R = 2$ e $N = 2, 3, 4$.

N = 2	$\theta_+(1, 1) = 1$	$\theta_-(1, 1) = 1$
N = 3	$\theta_+(1, 2) = 1$	$\theta_-(1, 2) = 1$
	$\theta_+(2, 1) = 1$	$\theta_-(2, 1) = 1$
N = 4	$\theta_+(1, 3) = 1$	$\theta_-(1, 3) = 1$
	$\theta_+(3, 1) = 1$	$\theta_-(3, 1) = 1$
	$\theta_+(2, 2) = 3$	$\theta_-(2, 2) = 2$

Tabela 2.1: Valores para $\theta_+(m_{i_1}, m_{i_2})$ e $\theta_-(m_{i_1}, m_{i_2})$

No Apêndice C fornecemos uma lista de classes de equivalência contadas por θ_{\pm} nos casos acima.

Exemplo 2.9 No caso $r = R = 3$, $N = 3$, $m_1 = m_2 = m_3 = 1$:

$$\theta_+(1, 1, 1) = 4$$

$$\theta_-(1, 1, 1) = 4$$

2.3 Prova da Identidade de Sherman

Nesta seção a identidade de Sherman é provada através de argumentos combinatoriais. Para isso, foram essencialmente utilizadas as relações entre θ_+ e θ_- obtidas anteriormente. Para deixar a notação mais simples usaremos nesta seção a notação m_1, \dots, m_r no lugar de m_{i_1}, \dots, m_{i_r} .

Teorema 2.5 Para cada $r \in \{2, 3, \dots, R\}$,

$$\prod_{N=r}^{\infty} \prod_{\substack{m_i > 0 \\ \sum m_i = N}} (1 + z_1^{m_1} \dots z_r^{m_r})^{\theta_+(m_1, \dots, m_r, N)} (1 - z_1^{m_1} \dots z_r^{m_r})^{\theta_-(m_1, \dots, m_r, N)} = 1 \quad (2.41)$$

Demonstração: Defina

$$Q(z, r) := \prod_{N=r}^{\infty} Q(N) \quad (2.42)$$

onde z representa z_1, z_2, \dots, z_r ,

$$Q(N) = \prod_{\substack{m_i > 0 \\ \sum m_i = N}} F(m, N) \quad (2.43)$$

onde m representa m_1, \dots, m_r , e

$$F(m, N) = (1 + z_1^{m_1} \dots z_r^{m_r})^{\theta_+(m, N)} (1 - z_1^{m_1} \dots z_r^{m_r})^{\theta_-(m, N)} \quad (2.44)$$

Vamos organizar o produtório (2.42) da seguinte forma:

$$Q(z, r) = \prod_p Q(p) \prod_{N'} Q(N') \prod_{n'} Q(n') \quad (2.45)$$

O primeiro produtório é sobre todos os números primos p , o segundo é sobre todos os pares $N' \neq 2$, e o terceiro é sobre todos os números ímpares não primos. Como 2 é primo, ele é incluído no primeiro produtório. O segundo produtório pode ser organizado da seguinte forma abaixo. Lembrando que sendo N' um número par e da forma $2^j k$, com $j \in \mathbb{N}^*$ e k ímpar, então:

$$\prod_{N' \neq 2} Q(N') = \prod_{j \geq 1} \prod_p Q(2^j p) \prod_{j \geq 1} \prod_{n'} Q(2^j n') \quad (2.46)$$

com $2^j p > 2$, p primo, e n' ímpar não primo. Substituindo (2.46) na relação (2.45) obtemos

$$Q(z, r) = (Q_1)_{j \geq 0} \cdot (Q_2)_{j \geq 0} \quad (2.47)$$

onde

$$(Q_1)_{j \geq 0} := \prod_p Q(p) \prod_{j \geq 1} Q(2^j p) \quad (2.48)$$

$$(Q_2)_{j \geq 0} := \prod_{n'} Q(n') \prod_{j \geq 1} Q(2^j n') \quad (2.49)$$

Afirmamos que $(Q_1)_{j \geq 0} = (Q_2)_{j \geq 0} = 1$. Isso será provado por indução em j , aplicando os Teoremas 2.3 e 2.4.

I. $(Q_1)_{j \geq 0} = 1$

Primeiramente mostraremos que os fatores com $j = 0$ e $j = 1$ se cancelam.

As partições de um primo p em r partes são coprimas. Nesse caso, pelo Teorema 2.3,

$$\theta_+(m, p) = \theta_-(m, p) \quad (2.50)$$

de forma que

$$Q(p) = \prod_{\substack{m_i > 0 \\ \sum m_i = p}} (1 - z_1^{2m_1} \dots z_r^{2m_r})^{\theta_+(m, p)} \quad (2.51)$$

Observe que os fatores com $j = 0$ foram cancelados. Dito de outra forma, as potências z_1, \dots, z_r são $2m_1, \dots, 2m_r$ e $\sum 2m_i = 2^1 p$. Vamos, agora, mostrar que $Q(p)$, dado pela (2.51), é cancelado por fatores associados a $Q(2p)$, onde $j = 1$.

Temos que:

$$Q(2p) = \prod_{\substack{a_i > 0 \\ \sum a_i = 2p}} F(a, 2p) \quad (2.52)$$

Consideremos, primeiramente, o caso em que r é par.

Nesse caso, o conjunto dos a_i 's, cuja soma é $2p$, pode ser decomposto em três subconjuntos que são os seguintes:

- $\{a_i\}_1$ tal que os números a_i são naturais pares;
- $\{a_i\}_2$ tal que os números a_i são naturais ímpares;
- $\{a_i\}_3$ tal que os números a_i são naturais que têm paridade distinta.

Note que para o caso em que r é par, o conjunto $\{a_i\}_3$ apresenta em igual quantidade números pares e ímpares. Observe ainda que se $r = 2$, $\{a_i\}_3$ não ocorre, pois não seria possível obter uma soma par. Esse caso foi analisado na referência [6].

Portanto, no caso em que r é par e $r \neq 2$, obtemos:

$$Q(2p) = \prod_{\{a_i\}_1} F(a, 2p) \prod_{\{a_i\}_2} F(a, 2p) \prod_{\{a_i\}_3} F(a, 2p) \quad (2.53)$$

Fazendo $a_i = 2m_i$ obtemos para o primeiro produtório que:

$$\prod_{\{a_i\}_1} F(a, 2p) = \prod_{\substack{m_i > 0 \\ \sum m_i = p}} (1 + z_1^{2m_1} \dots z_r^{2m_r})^{\theta_+(2m, 2p)} (1 - z_1^{2m_1} \dots z_r^{2m_r})^{\theta_-(2m, 2p)} \quad (2.54)$$

Nesse caso, pelo Teorema 2.4:

$$\theta_-(2m, 2p) = \theta_+(2m, 2p) - \theta_+(m, p). \quad (2.55)$$

Desse modo:

$$\prod_{\{a_i\}_1} F(a, 2p) = \prod_{\substack{m_i > 0 \\ \sum m_i = p}} (1 - z_1^{2^2 m_1} \dots z_r^{2^2 m_r})^{\theta_+(2m, 2p)} (1 - z_1^{2m_1} \dots z_r^{2m_r})^{-\theta_+(m, p)} \quad (2.56)$$

Para os outros dois produtórios obtemos, também, que

$$\prod_{\{a_i\}_2} F(a, 2p) = \prod_{\{a_i\}_2} (1 - z_1^{2a_1} \dots z_r^{2a_r})^{\theta_+(a, 2p)} \quad (2.57)$$

e

$$\prod_{\{a_i\}_3} F(a, p) = \prod_{\{a_i\}_3} (1 - z_1^{2a_1} \dots z_r^{2a_r})^{\theta_+(a, 2p)}, \quad (2.58)$$

pois pelo Teorema 2.3, nesses casos,

$$\theta_+(a, 2p) = \theta_-(a, 2p). \quad (2.59)$$

Reunindo os resultados (2.58), (2.57), (2.56) e (2.51), concluímos que

$$\begin{aligned} Q(p) \cdot Q(2p) &= \prod_{\substack{m_i > 0 \\ \sum m_i = p}} (1 - z_1^{2m_1} \dots z_r^{2m_r})^{\theta_+(m, p)} \times \\ &\prod_{\substack{m_i > 0 \\ \sum m_i = p}} (1 - z_1^{2^2 m_1} \dots z_r^{2^2 m_r})^{\theta_+(2m, 2p)} (1 - z_1^{2m_1} \dots z_r^{2m_r})^{-\theta_+(m, p)} \times \end{aligned} \quad (2.60)$$

$$\prod_{\{a_i\}_2} (1 - z_1^{2a_1} \dots z_r^{2a_r})^{\theta_+(a, 2p)} \prod_{\{a_i\}_3} (1 - z_1^{2a_1} \dots z_r^{2a_r})^{\theta_+(a, 2p)}$$

Simplificando,

$$\begin{aligned} Q(p) \cdot Q(2p) &= \prod_{\substack{m_i > 0 \\ \sum m_i = p}} (1 - z_1^{2^2 m_1} \dots z_r^{2^2 m_r})^{\theta_+(2m, 2p)} \times \\ &\prod_{\{a_i\}_2} (1 - z_1^{2a_1} \dots z_r^{2a_r})^{\theta_+(a, 2p)} \prod_{\{a_i\}_3} (1 - z_1^{2a_1} \dots z_r^{2a_r})^{\theta_+(a, 2p)} \end{aligned} \quad (2.61)$$

Fazendo $2m_i = a_i$ no primeiro produtório obtemos que

$$\prod_{\substack{m_i > 0 \\ \sum m_i = p}} (1 - z_1^{2^2 m_1} \dots z_r^{2^2 m_r})^{\theta_+(2m, 2p)} = \prod_{\{a_i\}_1} (1 - z_1^{2a_1} \dots z_r^{2a_r})^{\theta_+(a, 2p)} \quad (2.62)$$

Pode-se, agora, reunir os três produtórios num só que inclui todos os casos:

$$Q(p) \cdot Q(2p) = \prod_{\substack{a_i > 0 \\ \sum a_i = 2p}} (1 - z_1^{2a_1} \dots z_r^{2a_r})^{\theta_+(a, 2p)} \quad (2.63)$$

Segue-se, então, que:

$$(Q_1)_{j \geq 0} = \prod_p \prod_{\substack{a_i > 0 \\ \sum a_i = 2p}} (1 - z_1^{2a_1} \dots z_r^{2a_r})^{\theta_+(a, 2p)} \prod_{j \geq 2} Q(2^j p) \quad (2.64)$$

Denote por $(Q_1)_{j \geq 2}$ o lado direito de (2.64). Comparando este último resultado com o lado direito da (2.48) verifica-se que todos os fatores com $j = 0$ e $j = 1$ se cancelaram, isto é, as potências de z_1, \dots, z_r são da forma $2a_1, \dots, 2a_r$, e $\sum_{2a_i} = 2^2 p$.

Por isso, indica-se

$$(Q_1)_{j \geq 0} = (Q_1)_{j \geq 2} \quad (2.65)$$

Suponha, como hipótese de indução, que

$$(Q_1)_{j \geq 2} = (Q_1)_{j \geq x} \quad (2.66)$$

onde

$$(Q_1)_{j \geq x} = \prod_p \prod_{\substack{a_i > 0 \\ \sum 2^{x-2} a_i = 2^{x-1} p}} (1 - z_1^{2^{x-1} a_1} \dots z_r^{2^{x-1} a_r})^{\theta_+(2^{x-2} a, 2^{x-1} p)} \prod_{j \geq x} Q(2^j p) \quad (2.67)$$

ou seja, todos os fatores até $j = x - 1$ se cancelam. Provaremos agora que,

$$(Q_1)_{j \geq x} = (Q_1)_{j \geq x+1} \quad (2.68)$$

Procedendo como na (2.53), fazemos a seguinte decomposição:

$$Q(2^x p) = \prod_{\{a_i\}_1} F(2^{x-1} a, 2^x p) \prod_{\{a_i\}_2} F(2^{x-1} a, 2^x p) \prod_{\{a_i\}_3} F(2^{x-1} a, 2^x p) \quad (2.69)$$

Analisemos o primeiro produtório onde

$$\prod_{\{a_i\}_1} F(2^{x-1} a, 2^x p) =$$

$$\prod_{\{a_i\}_1} (1 + z_1^{2^{x-1}a_1} \dots z_r^{2^{x-1}a_r})^{\theta_+(2^{x-1}a, 2^x p)} (1 - z_1^{2^{x-1}a_1} \dots z_r^{2^{x-1}a_r})^{\theta_-(2^{x-1}a, 2^x p)} \quad (2.70)$$

Fazendo $a_i = 2m_i$:

$$\prod_{\{a_i=2m_i\}_1} F(2^x m, 2^x p) = \prod_{\{a_i=2m_i\}_1} (1 + z_1^{2^x m_1} \dots z_r^{2^x m_r})^{\theta_+(2^x m, 2^x p)} (1 - z_1^{2^x m_1} \dots z_r^{2^x m_r})^{\theta_-(2^x m, 2^x p)} \quad (2.71)$$

Pelo Teorema 2.4:

$$\theta_-(2^x m, 2^x p) = \theta_+(2^x m, 2^x p) - \theta_+(2^{x-1} m, 2^{x-1} p) \quad (2.72)$$

Logo,

$$\prod_{\{a_i=2m_i\}_1} F(2^x m, 2^x p) = \prod_{\{a_i=2m_i\}_1} (1 - z_1^{2^{x+1}m_1} \dots z_r^{2^{x+1}m_r})^{\theta_+(2^x m, 2^x p)} (1 - z_1^{2^x m_1} \dots z_r^{2^x m_r})^{-\theta_+(2^{x-1} m, 2^{x-1} p)} \quad (2.73)$$

ou ainda,

$$\prod_{\{a_i\}_1} F(2^{x-1} a, 2^x p) = \prod_{\{a_i\}_1} (1 - z_1^{2^x a_1} \dots z_r^{2^x a_r})^{\theta_+(2^{x-1} a, 2^x p)} (1 - z_1^{2^{x-1} a_1} \dots z_r^{2^{x-1} a_r})^{-\theta_+(2^{x-2} a, 2^{x-1} p)} \quad (2.74)$$

Analogamente:

$$\prod_{\{a_i\}_2} F(2^{x-1} a, 2^x p) = \prod_{\{a_i\}_2} (1 - z_1^{2^x a_1} \dots z_r^{2^x a_r})^{\theta_+(2^{x-1} a, 2^x p)} (1 - z_1^{2^{x-1} a_1} \dots z_r^{2^{x-1} a_r})^{-\theta_+(2^{x-2} a, 2^{x-1} p)} \quad (2.75)$$

e

$$\prod_{\{a_i\}_3} F(2^{x-1} a, 2^x p) =$$

$$\prod_{\{a_i\}_3} (1 - z_1^{2^x a_1} \dots z_r^{2^x a_r})^{\theta_+(2^{x-1}a, 2^x p)} (1 - z_1^{2^{x-1} a_1} \dots z_r^{2^{x-1} a_r})^{-\theta_+(2^{x-2}a, 2^{x-1} p)} \quad (2.76)$$

Logo,

$$Q(2^x p) = \prod_{\substack{a_i > 0 \\ \sum 2^{x-2} a_i = 2^{x-1} p}} (1 - z_1^{2^x a_1} \dots z_r^{2^x a_r})^{\theta_+(2^{x-1}a, 2^x p)} (1 - z_1^{2^{x-1} a_1} \dots z_r^{2^{x-1} a_r})^{-\theta_+(2^{x-2}m, 2^{x-1} p)} \quad (2.77)$$

Desse modo,

$$(Q_1)_{j \geq x} = \prod_p \prod_{\substack{a_i > 0 \\ \sum 2^{x-2} a_i = 2^{x-1} p}} (1 - z_1^{2^{x-1} a_1} \dots z_r^{2^{x-1} a_r})^{\theta_+(2^{x-2}a, 2^{x-1} p)} \times$$

$$\prod_{\substack{a_i > 0 \\ \sum 2^{x-1} a_i = 2^x p}} (1 - z_1^{2^x a_1} \dots z_r^{2^x a_r})^{\theta_+(2^{x-1}a, 2^x p)} (1 - z_1^{2^{x-1} a_1} \dots z_r^{2^{x-1} a_r})^{-\theta_+(2^{x-2}a, 2^{x-1} p)} \prod_{j \geq x+1} Q(2^j p) \quad (2.78)$$

Simplificando,

$$(Q_1)_{j \geq x} = \prod_p \prod_{\substack{a_i > 0 \\ \sum 2^{x-1} a_i = 2^x p}} (1 - z_1^{2^x a_1} \dots z_r^{2^x a_r})^{\theta_+(2^{x-1}a, 2^x p)} \prod_{j \geq x+1} Q(2^j p) \quad (2.79)$$

completando a indução. Concluimos que $(Q_1)_{j \geq 0} = 1$.

Considere, agora, o caso em que r é ímpar. Como no caso anterior temos (2.51).

Agora analisaremos $Q(2^j p)$ para $j = 1$.

Como r é ímpar, é possível a seguinte decomposição:

- $\{a_i\}_1$ tal que os números a_i são naturais pares;
- $\{a_i\}_3$ tal que os números a_i são naturais que têm paridade distinta.

Note que em $\{a_i\}_3$ a quantidade c de números ímpares deve superar a quantidade d de números pares tal que $c - d$ seja um múltiplo de dois. No entanto, quando $d > c$ não há restrições para a quantidade d de números pares.

Assim podemos reescrever $Q(2p)$ como:

$$Q(2p) = \prod_{\{a_i\}_1} F(a, 2p) \prod_{\{a_i\}_3} F(a, 2p) \quad (2.80)$$

onde

$$\prod_{\{a_i\}_1} F(a, 2p) = \prod_{\substack{a_i > 0 \\ \sum a_i = 2p}} (1 + z_1^{a_1} \dots z_r^{a_r})^{\theta_+(a, 2p)} (1 - z_1^{a_1} \dots z_r^{a_r})^{\theta_-(a, 2p)} \quad (2.81)$$

Usando o Teorema 2.4:

$$\begin{aligned} \prod_{\{a_i=2m_i\}_1} F(a, 2p) &= \prod_{\substack{m_i > 0 \\ \sum 2m_i = 2p}} (1 - z_1^{2m_1} \dots z_r^{2m_r})^{\theta_+(2m, 2p)} (1 - z_1^{2m_1} \dots z_r^{2m_r})^{-\theta_+(m, p)} \\ &= \prod_{\{a_i\}_1} (1 - z_1^{2a_1} \dots z_r^{2a_r})^{\theta_+(a, 2p)} (1 - z_1^{a_1} \dots z_r^{a_r})^{-\theta_+(\frac{a}{2}, p)} \end{aligned} \quad (2.82)$$

e

$$\prod_{\{a_i\}_3} F(a, 2p) = \prod_{\substack{a_i > 0 \\ \sum a_i = 2p}} (1 - z_1^{2a_1} \dots z_r^{2a_r})^{\theta_+(a, 2p)} \quad (2.83)$$

Pela (2.51),

$$Q(p) = \prod_{\{a_i\}_1} (1 - z_1^{a_1} \dots z_r^{a_r})^{\theta_+(\frac{a}{2}, p)} \quad (2.84)$$

Então,

$$\begin{aligned} Q(p) \cdot Q(2p) &= \prod_{\{a_i\}_1} (1 - z_1^{2^1 a_1} \dots z_r^{2^1 a_r})^{\theta_+(a, 2p)} \prod_{\{a_i\}_3} (1 - z_1^{2^1 a_1} \dots z_r^{2^1 a_r})^{\theta_+(a, 2p)} \\ &= \prod_{\substack{a_i > 0 \\ \sum a_i = 2p}} (1 - z_1^{2a_1} \dots z_r^{2a_r})^{\theta_+(a, 2p)} \end{aligned} \quad (2.85)$$

Portanto, os fatores com $j = 0$ e $j = 1$ se cancelaram, isto é, as potências de z_1, \dots, z_r que permanecem são da forma $2a_1, \dots, 2a_r$, e $\sum 2a_i = 2^2 p$.

Suponha agora, por hipótese de indução, que todos os fatores até $j = x - 1$ são cancelados, e

$$(Q_1)_{j \geq x} = \prod_p \prod_{\substack{a_i > 0 \\ \sum 2^{x-2} a_i = 2^{x-1} p}} (1 - z_1^{2^{x-1} a_1} \dots z_r^{2^{x-1} a_r})^{\theta_+(2^{x-2}, 2^{x-1} p)} \prod_{j \geq x} Q(2^j p) \quad (2.86)$$

Provaremos em seguida que,

$$(Q_1)_{j \geq x} = (Q_1)_{j \geq x+1} \quad (2.87)$$

Procedendo como antes,

$$Q(2^x p) = \prod_{\{a_i\}_1} F(2^{x-1}a, 2^x p) \prod_{\{a_i\}_3} F(2^{x-1}a, 2^x p) \quad (2.88)$$

onde

$$\prod_{\{a_i\}_1} F(2^{x-1}a, 2^x p) = \prod_{\{a_i\}_1} (1 + z_1^{2^{x-1}a_1} \dots z_r^{2^{x-1}a_r})^{\theta_+(2^{x-1}a, 2^x p)} (1 - z_1^{2^{x-1}a_1} \dots z_r^{2^{x-1}a_r})^{\theta_-(2^{x-1}a, 2^x p)} \quad (2.89)$$

Fazendo $a_i = 2m_i$:

$$\prod_{\{a_i=2m_i\}_1} F(2^x m, 2^x p) = \prod_{\{a_i=2m_i\}_1} (1 + z_1^{2^x m_1} \dots z_r^{2^x m_r})^{\theta_+(2^x m, 2^x p)} (1 - z_1^{2^x m_1} \dots z_r^{2^x m_r})^{\theta_-(2^x m, 2^x p)} \quad (2.90)$$

Pelo Teorema 2.4,

$$\theta_-(2^x m, 2^x p) = \theta_+(2^x m, 2^x p) - \theta_+(2^{x-1}m, 2^{x-1}p) \quad (2.91)$$

Logo,

$$\begin{aligned} \prod_{\{a_i=2m_i\}_1} F(2^x m, 2^x p) &= \prod_{\{a_i=2m_i\}_1} (1 - z_1^{2^{x+1}m_1} \dots z_r^{2^{x+1}m_r})^{\theta_+(2^x m, 2^x p)} (1 - z_1^{2^x m_1} \dots z_r^{2^x m_r})^{-\theta_+(2^{x-1}m, 2^{x-1}p)} = \\ &= \prod_{\{a_i\}_1} (1 - z_1^{2^x a_1} \dots z_r^{2^x a_r})^{\theta_+(2^{x-1}a, 2^x p)} (1 - z_1^{2^{x-1}a_1} \dots z_r^{2^{x-1}a_r})^{-\theta_+(2^{x-2}a, 2^{x-1}p)} \end{aligned} \quad (2.92)$$

Analogamente,

$$\prod_{\{a_i\}_3} F(2^{x-1}a, 2^x p) =$$

$$(1 - z_1^{2^x a_1} \dots z_r^{2^x a_r})^{\theta_+(2^{x-1}a, 2^x p)} (1 - z_1^{2^{x-1} a_1} \dots z_r^{2^{x-1} a_r})^{-\theta_+(2^{x-2}a, 2^{x-1} p)} \quad (2.93)$$

Reunindo os resultados (2.93) e (2.92), obtemos,

$$Q(2^x p) = \prod_{\substack{a_i > 0 \\ \sum 2^{x-1} a_i = 2^x p}} (1 - z_1^{2^x a_1} \dots z_r^{2^x a_r})^{\theta_+(2^{x-1} a_1, 2^x p)} (1 - z_1^{2^{x-1} a_1} \dots z_r^{2^{x-1} a_r})^{-\theta_+(2^{x-2} a, 2^{x-1} p)} \quad (2.94)$$

que implica

$$(Q_1)_{j \geq x} = \prod_p \prod_{\substack{a_i > 0 \\ \sum 2^{x-2} a_i = 2^{x-1} p}} (1 - z_1^{2^{x-1} a_1} \dots z_r^{2^{x-1} a_r})^{\theta_+(2^{x-2} a, 2^{x-1} p)} \times \\ \prod_{\substack{a_i > 0 \\ \sum 2^{x-1} a_i = 2^x p}} (1 - z_1^{2^x a_1} \dots z_r^{2^x a_r})^{\theta_+(2^{x-1} a, 2^x p)} (1 - z_1^{2^{x-1} a_1} \dots z_r^{2^{x-1} a_r})^{-\theta_+(2^{x-2} a, 2^{x-1} p)} \prod_p \prod_{j \geq x+1} Q(2^j p) \quad (2.95)$$

Simplificando, obtemos:

$$(Q_1)_{j \geq x} = \prod_{\substack{a_i > 0 \\ \sum 2^{x-1} a_i = 2^x p}} (1 - z_1^{2^x a_1} \dots z_r^{2^x a_r})^{\theta_+(2^{x-1} a, 2^x p)} \prod_p \prod_{j \geq x+1} Q(2^j p) \quad (2.96)$$

Comparando o lado direito da (2.96) com a (2.86), concluímos que

$$(Q_1)_{j \geq x} = (Q_1)_{j \geq x+1} \quad (2.97)$$

II. $(Q_2)_{j \geq 0} = 1$.

Temos que

$$(Q_2)_{j \geq 0} = \prod_{n'} Q(n') \prod_{j \geq 1} Q(2^j n') \quad (2.98)$$

onde o primeiro produtório é sobre os números ímpares não primos.

Primeiro analisaremos o caso em que r é par. Da (2.43),

$$Q(n') = \prod_{\substack{a_i > 0 \\ \sum a_i = n'}} F(a, n') \quad (2.99)$$

Sendo r par e n' ímpar, $a_i \in \{a_i\}_3$, apenas, onde $\{a_i\}_3$ é conjunto dos naturais de paridade distinta, salvo que a quantidade c de números ímpares deve superar a

quantidade d de números pares e $c - d$ não pode ser um múltiplo de 2. No entanto não podemos ter $c = d$ e $d > c$, pois a soma seria par.

Logo, pelo Teorema 2.3:

$$\prod_{\{a_i\}_3} F(a, 2n') = \prod_{\{a_i\}_3} (1 - z_1^{2a_1} \dots z_r^{2a_r})^{\theta_+(a, 2n')} \quad (2.100)$$

Considere agora o produto $Q(2n')$. Como na (2.53) decompos o produto na forma:

$$Q(2n') = \prod_{\{a_i\}_1} F(a, n') \prod_{\{a_i\}_2} F(a, 2n') \prod_{\{a_i\}_3} F(a, n') \quad (2.101)$$

onde $\{a_i\}_1, \{a_i\}_2, \{a_i\}_3$ são definidas como na (2.53)

Aplicando o Teorema 2.3, procedendo de maneira análoga ao caso $(Q_1)_{j \geq 0}$,

$$Q(n')Q(2n') = \prod_{\substack{a_i > 0 \\ \sum a_i = 2n'}} (1 - z_1^{2a_1} \dots z_r^{2a_r})^{\theta_+(a, 2n')} \quad (2.102)$$

e

$$\begin{aligned} (Q_2)_{j \geq 0} &= \prod_{n'} Q(n') \cdot Q(2n') \prod_{j \geq 2} Q(2^j n') \\ &= \prod_{n'} \prod_{\substack{a_i > 0 \\ \sum a_i = 2n'}} (1 - z_1^{2a_1} \dots z_r^{2a_r})^{\theta_+(a, 2n')} \prod_{n'} \prod_{j \geq 2} Q(2^j n') \end{aligned} \quad (2.103)$$

Provamos, assim, que todos os fatores com $j = 0$ e $j = 1$ se cancelam, isto é, as potências de z_1, \dots, z_r que permanecem são da forma $2a_1, \dots, 2a_r$ com $\sum 2a_i = 2^2 n'$.

Analogamente ao caso anterior utiliza-se indução para mostrar que os demais fatores se cancelam de forma que obtemos $(Q_2)_{j \geq 0} = 1$, no caso r par. Por esta razão, não repetiremos o cálculo.

Analisaremos agora o caso em que r é ímpar. Nesse caso,

$$Q(n') = \prod_{\{a_i\}_2} F(a, n') \prod_{\{a_i\}_3} F(a, n') \quad (2.104)$$

tal que $\{a_i\}_3$ possui uma quantidade c de números ímpares e uma quantidade d de números pares com $c > d$ e de forma que $c - d$ não é múltiplo de 2. Aplicando o

Teorema 2.3, temos:

$$\begin{aligned}
Q(n') &= \prod_{\{a_i\}_2} (1 - z_1^{2a_1} \dots z_r^{2a_r})^{\theta_+(a, n')} \prod_{\{a_i\}_3} (1 - z_1^{2a_1} \dots z_r^{2a_r})^{\theta_+(a, n')} \\
&= \prod_{\substack{a_i > 0 \\ \sum a_i = 2n'}} (1 - z_1^{2a_1} \dots z_r^{2a_r})^{\theta_+(a, 2n')}
\end{aligned} \tag{2.105}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
Q(2n') &= \prod_{\{a_i\}_1} F(a, 2n') \prod_{\{a_i\}_3} F(a, 2n') \\
&= \prod_{\{a_i\}_1} (1 + z_1^{a_1} \dots z_r^{a_r})^{\theta_+(a, 2n')} (1 - z_1^{a_1} \dots z_r^{a_r})^{\theta_+(a, 2n') - \theta_+(\frac{a}{2}, n')} \\
&\times \prod_{\{a_i\}_3} (1 + z_1^{a_1} \dots z_r^{a_r})^{\theta_+(a, 2n')} (1 - z_1^{a_1} \dots z_r^{a_r})^{\theta_+(a, 2n')}
\end{aligned} \tag{2.106}$$

onde aplicamos o Teorema 2.4.

Simplificando,

$$\begin{aligned}
Q(2n') &= \prod_{\{a_i\}_1} (1 - z_1^{2a_1} \dots z_r^{2a_r})^{\theta_+(a, 2n')} (1 - z_1^{a_1} \dots z_r^{a_r})^{-\theta_+(\frac{a}{2}, n')} \\
&\times \prod_{\{a_i\}_3} (1 - z_1^{2a_1} \dots z_r^{2a_r})^{\theta_+(a, 2n')} \\
&= \prod_{\substack{a_i > 0 \\ \sum a_i = 2n'}} (1 - z_1^{2a_1} \dots z_r^{2a_r})^{\theta_+(a, 2n')} \prod_{\{a_i\}_1} (1 - z_1^{a_1} \dots z_r^{a_r})^{-\theta_+(\frac{a}{2}, n')}
\end{aligned} \tag{2.107}$$

No segundo produtório, como a_i é par, podemos substituir a_i por $2a_i$ e absorver o produtório no primeiro.

Dessa forma:

$$Q(2n') = \prod_{\substack{a_i > 0 \\ \sum a_i = 2n'}} = (1 - z_1^{2a_1} \dots z_r^{2a_r})^{\theta_+(a, 2n')} (1 - z_1^{2a_1} \dots z_r^{2a_r})^{-\theta_+(a, n')} \tag{2.108}$$

e

$$Q(n')Q(2n') = \prod_{\substack{a_i > 0 \\ \sum a_i = 2n'}} = (1 - z_1^{2a_1} \dots z_r^{2a_r})^{\theta_+(a, 2n')} \tag{2.109}$$

Portanto,

$$(Q_2)_{j \geq 0} = \prod_{n'} \prod_{\substack{a_i > 0 \\ \sum a_i = 2n'}} (1 - z_1^{2a_1} \dots z_r^{2a_r})^{\theta_+(a, 2n')} \prod_{j \geq 2} Q(2^j n') \quad (2.110)$$

Prova-se, por indução, que $(Q_2)_{j \geq 0} = 1$. Novamente, o cálculo é idêntico àquele feito para $(Q_1)_{j \geq 0} = 1$ e, por isso, não o repetiremos aqui.

Portanto $(Q_1)_{j \geq 0} = (Q_2)_{j \geq 0} = 1$, o que prova a igualdade (2.41).

■

Capítulo 3

A Identidade de Witt

Na referência [23], Sherman chama a atenção para certas semelhanças que existem entre a identidade

$$\prod_{m_1, \dots, m_R \geq 0} (1 + z_1^{m_1} \dots z_R^{m_R})^{N_+} (1 - z_1^{m_1} \dots z_R^{m_R})^{N_-} = \prod_{i=1}^R (1 + z_i) \quad (3.1)$$

e a identidade de Witt, que motivaram nosso trabalho. Por esta razão, dedicamos este capítulo ao estudo dos aspectos combinatoriais e algébricos desta identidade, descoberta por W. E. Witt no contexto das álgebras de Lie [25].

A identidade de Witt consiste na seguinte relação formal envolvendo as variáveis z_1, \dots, z_R :

$$\prod_{m_1, \dots, m_R \geq 0} (1 - z_1^{m_1} \dots z_R^{m_R})^{M(m_1, \dots, m_R)} = 1 - \sum_{i=1}^R z_i \quad (3.2)$$

onde

$$M(m_1, \dots, m_R) = \frac{1}{N} \sum_{g|m_1, \dots, m_R} \mu(g) \frac{\left(\frac{N}{g}\right)!}{\left(\frac{m_1}{g}\right)! \dots \left(\frac{m_R}{g}\right)!} \quad (3.3)$$

sendo $N = m_1 + \dots + m_R > 0$ e μ a função de Möbius, definida no Apêndice E.

Um caso especial desta identidade, também chamada de identidade de Witt, é obtido tomando-se $z_1 = \dots = z_R$ na (3.2):

$$\prod_{N=1}^{\infty} (1 - z^N)^{M(N)} = 1 - Rz \quad (3.4)$$

onde

$$M(N) = \frac{1}{N} \sum_{g|N} \mu(g) R^{\frac{N}{g}} \quad (3.5)$$

satisfaz

$$M(N) = \sum_{\substack{m_i \geq 0 \\ m_1 + \dots + m_R = N}} M(m_1, \dots, m_R) \quad (3.6)$$

De fato, o membro direito de (3.6) é igual a

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{m_i \geq 0 \\ m_1 + \dots + m_R = N}} \frac{1}{N} \sum_{g|m_1, \dots, m_R} \mu(g) \frac{\left(\frac{N}{g}\right)!}{\left(\frac{m_1}{g}\right)! \dots \left(\frac{m_R}{g}\right)!} = \\ & = \frac{1}{N} \sum_{g|N} \mu(g) \sum_{\substack{m_i \geq 0 \\ m_1 + \dots + m_R = N}} \frac{\left(\frac{N}{g}\right)!}{\left(\frac{m_1}{g}\right)! \dots \left(\frac{m_R}{g}\right)!} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Pelo Teorema Multinomial [3], a segunda somatória é igual a $R^{\frac{N}{g}}$ provando a igualdade (3.6).

As relações (3.3) e (3.5) são chamadas de **fórmulas de Witt**. As fórmulas de Witt têm inúmeras aplicações em análise combinatória e álgebra. Para um estudo recente onde estas aplicações são mencionadas ver a referência [16].

3.1 Propriedades Combinatoriais

A fórmula (3.5) também recebe o nome de **Polinômio do Colar**, de acordo com a referência [16]. A razão para este nome é dada pela seguinte proposição:

Proposição 3.1 *Considere um colar com N contas pintadas com cores escolhidas de um conjunto de R cores distintas, com $N \geq R$. Seja $m_{i_1}, m_{i_2}, \dots, m_{i_R}$ uma partição de N , ou seja, $m_{i_1} + m_{i_2} + \dots + m_{i_R} = N$ e $m_i \geq 0$, onde m_i é o número de contas pintadas com a i -ésima cor $i = 1, \dots, R$. O número de colorações não periódicas possíveis das N contas associadas à partição acima é dado pela fórmula (3.3). Levando-se em conta todas as partições, o número total é dado pela (3.5).*

Demonstração: Empregaremos os métodos de contagem do capítulo anterior. Seja $r \leq R$ o número de cores distintas com as quais o colar será pintado. Vamos indicá-las por i_1, i_2, \dots, i_r e respectivamente, por $m_{i_1} > 0, \dots, m_{i_r} > 0$ o número total de contas pintadas com cada cor. Vamos representar uma coloração do colar por uma “palavra” da forma

$$D_{j_1}^{e_{j_1}} D_{j_2}^{e_{j_2}} \dots D_{j_l}^{e_{j_l}} \quad (3.8)$$

onde $S_l = (j_1, j_2, \dots, j_l)$, com $j_k \neq j_{k+1}$, $j_l \neq j_1$, $j_k \in \{i_1, i_2, \dots, i_r\}$, é a sequência arbitrária das r cores na coloração. Cada cor aparece pelo menos uma vez numa sequência. O expoente e_j é o número de contas adjacentes pintadas com a mesma cor j . Portanto, $e_j > 0$.

Numa sequência, uma cor i aparece $n_i \geq 1$ vezes. Os expoentes respectivos formam uma partição de m_i . Além disso, a soma de todos os expoentes é igual a N . Denote por $\theta_c(m_{i_1}, \dots, m_{i_r})$ o número de colorações não periódicas associadas a m_{i_1}, \dots, m_{i_r} . O cálculo de θ_c é análogo ao de θ no Teorema 2.2 e, por isso, não o repetiremos aqui. O resultado é o seguinte:

$$\theta_c(m_{i_1}, \dots, m_{i_r}) = \sum_{g|m_{i_1}, \dots, m_{i_r}} \frac{\mu(g)}{g} \mathcal{F}\left(\frac{m_{i_1}}{g}, \dots, \frac{m_{i_r}}{g}\right) \quad (3.9)$$

Se $r = 2$,

$$\mathcal{F}\left(\frac{m_{i_1}}{g}, \frac{m_{i_2}}{g}\right) = \sum_{a=1}^{M/g} \frac{1}{a} \binom{\frac{m_{i_1}}{g} - 1}{a-1} \binom{\frac{m_{i_2}}{g} - 1}{a-1} \quad (3.10)$$

onde $M = \min\{m_{i_1}, m_{i_2}\}$.

Se $r \geq 3$,

$$\mathcal{F}\left(\frac{m_{i_1}}{g}, \dots, \frac{m_{i_r}}{g}\right) = \sum_{a=r}^{\frac{N}{g}} \frac{1}{a} \sum_{\{S_a\}} \prod_{k=1}^r \binom{\frac{m_{i_k}}{g} - 1}{n_{i_k} - 1} \quad (3.11)$$

Comparando estes resultados com as fórmulas (2.18) e (2.19) do capítulo 2, nota-se que (3.10) e (3.11) diferem daquelas pela ausência dos fatores $\frac{2^{2a}}{2}$ e $\frac{2^a}{2}$, respectivamente. Isso se deve ao fato de que todos os expoentes numa palavra (3.8) serem positivos. Além do mais, o sentido fixado (anti-horário) das sequências evita inversões.

Consideramos, em primeiro lugar, o caso $r = 2$.

Sem perda de generalidade, suponha $m_{i_1} \leq m_{i_2}$.

Chame $\frac{m_{i_1}}{g} = A$ e $\frac{m_{i_2}}{g} = B$. Temos que

$$\sum_{a=1}^A \frac{1}{a} \binom{A-1}{a-1} \binom{B-1}{a-1} = \frac{1}{AB} \sum_{a=1}^A a \binom{A}{a} \binom{B}{a} \quad (3.12)$$

Aplicando a identidade obtida na referência [3],

$$\sum_{a=1}^A a \binom{A}{a} \binom{B}{a} = A \binom{A+B-1}{A} \quad (3.13)$$

obtemos

$$\mathcal{F}(A, B) = \frac{1}{AB} A \binom{A+B-1}{A} = \frac{(A+B-1)!}{A!B!} \quad (3.14)$$

Portanto, no caso $r = 2$, e lembrando que $A + B = \frac{N}{g}$,

$$\begin{aligned} \theta_c(m_{i_1}, m_{i_2}) &= \sum_{g|m_{i_1}, m_{i_2}} \frac{\mu(g)}{g} \frac{\left(\frac{N}{g} - 1\right)!}{\left(\frac{m_{i_1}}{g}\right)! \left(\frac{m_{i_2}}{g}\right)!} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{g|m_{i_1}, m_{i_2}} \mu(g) \frac{\left(\frac{N}{g}\right)!}{\left(\frac{m_{i_1}}{g}\right)! \left(\frac{m_{i_2}}{g}\right)!} \end{aligned} \quad (3.15)$$

No caso $r \geq 3$, é conveniente definir $\frac{m_{i_1}}{g} = A_1, \dots, \frac{m_{i_r}}{g} = A_r, \frac{N}{g} = M$ e

$$I = \sum_{\substack{A_i > 0 \\ A_1 + \dots + A_r = M}} \mathcal{F}(A_1, \dots, A_r) \quad (3.16)$$

Em seguida, substitua (3.11) em (3.16):

$$I = \sum_{a=r}^M \frac{1}{a} \sum_{\{S_a\}} \sum_{\substack{A_i > 0 \\ A_1 + \dots + A_r = M}} \prod_{i=1}^r \binom{A_i - 1}{n_i - 1} \quad (3.17)$$

Aplicando o Lema D.2 do Apêndice D, obtemos

$$\begin{aligned} I &= \sum_{a=r}^M \frac{1}{a} \sum_{\{S_a\}} \binom{M-1}{a-1} \\ &= \sum_{a=r}^M \frac{1}{a} \binom{M-1}{a-1} r w_r(a) \end{aligned} \quad (3.18)$$

onde

$$r w_r(a) = \sum_{j=1}^r (-1)^{r+j} \binom{r}{j} (j-1)^a + (-1)^{a+r} \quad (3.19)$$

é o número de seqüências em $\{S_a\}$. Este último resultado foi derivado na ref. [6].

Nesse caso, podemos escrever

$$I = \sum_{j=1}^r (-1)^{r+j} \binom{r}{j} \sum_{a=1}^M \frac{1}{a} \binom{M-1}{a-1} (j-1)^a + \sum_{a=1}^M \frac{1}{a} \binom{M-1}{a-1} (-1)^{a+r} \quad (3.20)$$

onde

$$\sum_{a=1}^M \frac{1}{a} \binom{M-1}{a-1} (j-1)^a = \frac{1}{M} \sum_{a=1}^M \binom{M}{a} (j-1)^a = \frac{j^M - 1}{M} \quad (3.21)$$

e

$$\sum_{a=1}^M \frac{1}{a} \binom{M-1}{a-1} (-1)^{a+r} = \frac{1}{M} \sum_{a=1}^M \binom{M}{a} (-1)^{a+r} = \frac{(-1)^{r+1}}{M} \quad (3.22)$$

do que resulta

$$I = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^r (-1)^{r+j} \binom{r}{j} j^M \quad (3.23)$$

Pela referência [3], sabemos que os números de Stirling do segundo tipo $S(M, r)$ estão definidos pela fórmula

$$S(M, r) = \frac{1}{r!} \sum_{k=0}^r (-1)^k \binom{r}{k} (r-k)^M \quad (3.24)$$

Fazendo $r - k = j$, nessa fórmula, obtemos:

$$S(M, r) = \frac{1}{r!} \sum_{j=0}^r (-1)^{r+j} \binom{r}{j} (j)^M \quad (3.25)$$

Dessa forma,

$$I = \frac{r!}{M} S(M, r) \quad (3.26)$$

Os números de Stirling do segundo tipo satisfazem a seguinte relação (ref. [3]):

$$\sum_{\substack{A_i > 0 \\ A_1 + \dots + A_r = M}} \frac{M!}{A_1! \dots A_r!} = r! S(M, r) \quad (3.27)$$

Comparando (3.26), (3.27) e (3.16) concluimos que:

$$\mathcal{F}(A_1, \dots, A_r) = \frac{1}{M} \sum_{\substack{A_i > 0 \\ A_1 + \dots + A_r = M}} \frac{M!}{A_1! \dots A_r!} \quad (3.28)$$

Retornando à notação anterior, então:

$$\begin{aligned} \theta_c(m_{i_1}, \dots, m_{i_r}) &= \sum_{g|m_{i_1}, \dots, m_{i_r}} \frac{\mu(g)}{g} \frac{1}{\frac{N}{g}} \frac{\left(\frac{N}{g}\right)!}{\left(\frac{m_{i_1}}{g}\right)! \dots \left(\frac{m_{i_r}}{g}\right)!} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{g|m_{i_1}, \dots, m_{i_r}} \mu(g) \frac{\left(\frac{N}{g}\right)!}{\left(\frac{m_{i_1}}{g}\right)! \dots \left(\frac{m_{i_r}}{g}\right)!} \end{aligned} \quad (3.29)$$

Logo, $\theta_c(m_{i_1}, \dots, m_{i_r}) = M(m_{i_1}, \dots, m_{i_r})$.

Podemos estender os resultados (3.15) e (3.29) de modo a incluir as R cores, pois as cores ausentes no conjunto $\{i_1, \dots, i_r\}$ tem $m_i = 0$ e nesse caso $0! = 1$. Em seguida, somamos sobre todas as partições possíveis de N para obter a (3.5) de acordo com a (3.6).

■

Exemplo 3.1 Caso $N = 4$, $R = 2$, com m_1 igual ao número de contas brancas e m_2 o número de contas pretas. Pela fórmula (3.3) temos $M(1, 3) = 1$, $M(2, 2) = 1$ e $M(3, 1) = 1$. As colorações não periódicas possíveis são mostradas na Figura 3.1. Uma coloração periódica é mostrada na Figura 3.2.

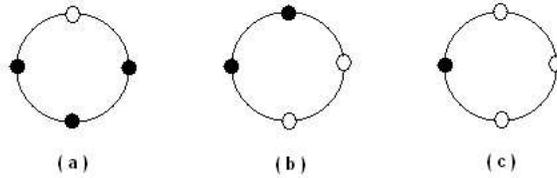


Figura 3.1: Colorações não periódicas



Figura 3.2: Coloração periódica

O número total de colorações não periódicas, portanto, é 3. Esse número também está dado pela fórmula (3.5), como pode ser verificado.

Outra interpretação combinatorial para as fórmulas de Witt, é estabelecida pela seguinte proposição:

Proposição 3.2 *Seja G_R o grafo orientado com R arestas e um único vértice, como mostrado na Figura 3.3. O número de caminhos fechados não periódicos distintos de comprimento N que percorrem $m_i \geq 0$ vezes a aresta i , $i = 1, 2, \dots, R$, é dado pela fórmula (3.3).*

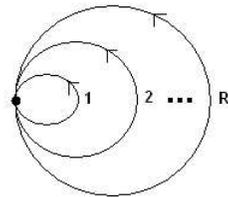


Figura 3.3: Grafo G_R

Demonstração: Seja r , $r \leq R$, o número de arestas efetivamente percorridas por um caminho. Sejam elas i_1, i_2, \dots, i_r , e $m_{i_1} > 0, \dots, m_{i_r} > 0$ o número total de vezes que cada uma delas é percorrida. Vamos representar um caminho por uma palavra da forma (3.8) onde $S_l = (j_1, \dots, j_l)$, com $j_k \neq j_{k+1}$, $j_l \neq j_1$, $j_k \in \{i_1, \dots, i_r\}$, é a sequência das arestas percorridas pelo caminho no sentido anti-horário indicado pela orientação das arestas. O expoente e_j , $e_j > 0$, $\forall j$, é o número de vezes que a aresta j , na sequência, é percorrida. Numa sequência, uma aresta $i \in \{i_1, \dots, i_r\}$ aparece $n_i \geq 1$ vezes. Os expoentes com $j = i$ formam uma partição de m_i e $\sum_{k=1}^l e_{j_k} = N$. A partir daqui a contagem das palavras não periódicas é exatamente a mesma da proposição anterior, fornecendo os mesmos resultados. Por isso, não a repetiremos aqui. ■

Analogias com a identidade de Sherman: Esta última proposição permite estabelecer um estreito paralelo da identidade de Sherman com a identidade de Witt. Em primeiro lugar, note que as duas identidades referem-se ao mesmo grafo. Segundo, os expoentes N_{\pm} na identidade de Sherman e M na identidade de Witt contam caminhos fechados não periódicos que percorrem o grafo. Podemos considerar a identidade de Sherman mais geral no sentido de que leva em conta caminhos não periódicos que percorrem as arestas do grafo em todos os sentidos, e não apenas o anti-horário como faz a fórmula de Witt, e seus respectivos sinais.

3.2 Aspectos Algébricos da Identidade de Witt

A identidade de Witt foi descoberta por W. E. Witt em 1937 , na referência [25], no contexto das álgebras de Lie livres. Esta identidade é geralmente citada nos tratados sobre álgebras de Lie. Ver, por exemplo, as referências [8], [9], [10] e o artigo [22].

Em especial, seguiremos de perto a exposição das seções iniciais da referência [2]. Para entendermos a ligação da identidade de Witt com álgebras introduziremos, em primeiro lugar, algumas definições básicas.

Definição 3.1 *Sejam V_1 e V_2 espaços vetoriais no mesmo corpo \mathbb{K} , com mesma adição e multiplicação por escalar. A soma direta de V_1 e V_2 , indicada por $V_1 \oplus V_2$, é o conjunto dos elementos da forma $v_1 \oplus v_2$, satisfazendo as seguintes condições:*

- (i) $a(v_1 \oplus v_2) = (av_1) \oplus (av_2), \quad \forall a \in \mathbb{K}$
- (ii) $(v_1 + w_1) \oplus (v_2 + w_2) = (v_1 \oplus v_2) + (w_1 \oplus w_2), \quad \forall v_1, w_1 \in V_1, \quad \forall v_2, w_2 \in V_2$

A soma direta $V_1 \oplus V_2$ é um espaço vetorial com respeito às operações de adição e multiplicação por escalar definidas em V_1 e V_2 e $\dim(V_1 \oplus V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$. O elemento neutro em $V_1 \oplus V_2$ é o elemento $0_1 \oplus 0_2$ onde 0_1 e 0_2 são os elementos neutros de V_1 e V_2 , respectivamente.

Definição 3.2 *Seja I um conjunto enumerável qualquer. Um espaço vetorial V I -graduado é um espaço vetorial que pode ser escrito como a soma direta de subespaços vetoriais indexados pelos elementos de I :*

$$V = \bigoplus_{i \in I} V_i \tag{3.30}$$

Definição 3.3 *Uma álgebra A no corpo \mathbb{K} é um espaço vetorial onde está definida uma multiplicação entre os elementos:*

$$\begin{aligned} * : (A, A) &\longrightarrow A \\ (x, y) &\longrightarrow x * y \end{aligned} \tag{3.31}$$

A álgebra é chamada de associativa se

$$(l * h) * w = l * (h * w) \quad , \quad \forall l, h, w \in A \tag{3.32}$$

Do contrário, a álgebra é dita não associativa.

A álgebra é chamada de comutativa se

$$h * w = w * h, \quad \forall h, w \in A \quad (3.33)$$

Do contrário, é não comutativa.

Definição 3.4 Uma álgebra \mathbb{N} -graduada é uma álgebra que tem uma decomposição como soma direta

$$A = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} A_n \quad (3.34)$$

tal que

$$A_n * A_m \subseteq A_{n+m} \quad (3.35)$$

Os subespaços A_n são ditos homogêneos de grau n . Dado $v \in A$, o grau de v é indicado por $gr(v)$ e $gr(v) = n$ se $v \in A_n$. Os subespaços A_n não são fechados em relação à multiplicação. Portanto, os A_n não são sub-álgebras, mas subespaços vetoriais.

Definição 3.5 (Álgebras de Lie) Uma álgebra de Lie sobre o corpo \mathbb{K} é um espaço vetorial \mathcal{L} com um produto

$$\begin{aligned} [\cdot, \cdot] : \mathcal{L} \times \mathcal{L} &\longrightarrow \mathcal{L} \\ (x, y) &\longrightarrow [x, y] \end{aligned} \quad (3.36)$$

satisfazendo as seguintes condições:

1. $[x, y] = -[y, x], \quad \forall x, y \in \mathcal{L}$

2. *Identidade de Jacobi*

$$[x, [y, z]] + [z, [x, y]] + [y, [z, x]] = 0, \quad \forall x, y, z \in \mathcal{L}$$

3. *Bilinearidade*

$$[ax + by, z] = a[x, z] + b[y, z]$$

$$[z, ax + by] = a[z, x] + b[z, y], \quad \forall x, y, z \in \mathcal{L}, \quad a, b \in \mathbb{K}$$

Em geral, $[\cdot, \cdot]$ não é associativo, isto é, $[x, [y, z]] \neq [[x, y], z]$.

Definição 3.6 Seja $X = \{a_i | i \in I \subseteq \mathbb{N}\}$ um conjunto não vazio. Defina:

$$X^1 := X$$

$$X^n := \{a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_n}, a_i \in X\} \quad (3.37)$$

onde os elementos de X^n são construídos por justaposição associativa dos elementos de X . Se $X = \{a_1, \dots, a_r\}$, então X^n tem r^n elementos.

Definição 3.7 *Seja*

$$X^* = \bigcup_{n \geq 1} X^n \quad (3.38)$$

e \mathcal{A} o espaço vetorial sobre o corpo \mathbb{K} (\mathbb{R} ou \mathbb{C}) gerado linearmente por X^* , ou seja, X^* é base de \mathcal{A} . Defina em \mathcal{A} a multiplicação $*$ da seguinte forma:

$$\left(\sum_{i \in I} \alpha_i v_i \right) * \left(\sum_{j \in J} \beta_j w_j \right) := \sum_{\substack{i \in I \\ j \in J}} \alpha_i \beta_j v_i w_j \quad (3.39)$$

onde $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{K}$, $v_i, w_j \in X^*$ e $I, J \subseteq \mathbb{N}$. A álgebra \mathcal{A} , assim construída, é chamada de uma **álgebra associativa livre sobre o corpo \mathbb{K} gerada livremente por X** .

Denote por \mathcal{A}_n o subespaço de \mathcal{A} gerado linearmente pelo elementos de X^n . A álgebra \mathcal{A} é uma álgebra graduada com respeito à soma direta dada pela adição usual de vetores:

$$\mathcal{A} = \bigoplus_{n \geq 1} \mathcal{A}_n, \quad \mathcal{A}_n * \mathcal{A}_m \subseteq \mathcal{A}_{n+m} \quad (3.40)$$

Proposição 3.3 *A partir de qualquer álgebra associativa \mathcal{A} com multiplicação $*$ pode-se sempre obter uma álgebra de Lie definindo-se em \mathcal{A} outra multiplicação pela qual o produto de dois elementos $x, y \in \mathcal{A}$ é indicado por $[x, y]$ e definido por:*

$$[x, y] := x * y - y * x, \quad \forall x, y \in \mathcal{A} \quad (3.41)$$

Demonstração: Ver referência [15]. ■

Na álgebra \mathcal{A} gerada pelo conjunto X defina a relação (3.41). Com esta operação, \mathcal{A} torna-se uma álgebra de Lie, que denotamos \mathcal{A}^- . De acordo com a teoria básica das álgebras de Lie, \mathcal{A}^- tem uma subálgebra de Lie L que é isomórfica à álgebra de Lie gerada por X da seguinte forma. Defina:

$$Y_1 := X$$

$$Y_n := \{[[\dots [a_{i_1}, a_{i_2}], a_{i_3} \dots] a_{i_{n-1}}] a_{i_n}]\}$$

e

$$Y := \bigcup_{n \geq 1} Y_n \quad (3.42)$$

Seja L o espaço vetorial sobre o corpo \mathbb{K} (\mathbb{R} ou \mathbb{C}) gerado por Y . Defina em L o comutador $[\cdot, \cdot]$ como segue:

$$\left[\sum_{i \in I} \alpha_i v_i, \sum_{j \in J} \beta_j w_j \right] = \sum_{\substack{i \in I \\ j \in J}} \alpha_i \beta_j [v_i, w_j] \quad (3.43)$$

onde $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{K}$, $v_i, w_j \in Y$. A álgebra de Lie L é chamada de **álgebra de Lie livre gerada por X** . Elementos de L são chamados de polinômios de Lie.

Seja L_n o subespaço vetorial de L gerado por Y_n . A álgebra de Lie L é também uma álgebra graduada com respeito à soma direta dada pela adição usual de vetores:

$$L = \bigoplus_{n \geq 1} L_n \quad (3.44)$$

satisfazendo $[L_n, L_m] \subseteq L_{n+m}$, no sentido de (3.43).

Defina o grau de a_i como sendo $gr(a_i) = 1$ e, se $v \in Y_n$, $gr(v) = n$. Polinômios de Lie em L_n são combinações lineares de elementos com mesmo grau n , por isso são chamados de polinômios homogêneos e os subespaços L_n de subespaços homogêneos.

Proposição 3.4 (Witt) *Seja L uma álgebra gerada pelo conjunto finito X com r geradores. Denote por $\dim L_n$ a dimensão de L_n . Então*

$$\dim L_n = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \mu(d) r^{\frac{n}{d}} \quad (3.45)$$

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^n)^{\dim L_n} = 1 - rx \quad (3.46)$$

Demonstração: Em cada L_n , seja

$$\{f_{n1}, f_{n2}, \dots, f_{nl_n}\} \quad (3.47)$$

uma base ordenada onde $l_n = \dim L_n$. Uma base para L é

$$\{f_{11}, f_{12}, \dots, f_{1l_1}, f_{21}, f_{22}, \dots, f_{2l_2}, \dots, f_{n1}, f_{n2}, \dots, f_{nl_n}, \dots\} \quad (3.48)$$

Vamos renomear e denotar os elementos dessa base por

$$g_1, g_2, \dots, g_i \dots \quad (3.49)$$

Um teorema fundamental da teoria das álgebras de Lie, o **Teorema de PBW** (Poincaré, Birkoff e Witt), afirma que o conjunto de todas as palavras da forma

$$g_{i_1} g_{i_2} \dots g_{i_q} \quad (3.50)$$

onde $i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_q$, formam uma base para a álgebra associativa \mathcal{A} gerada por

$$X = \{a_1, \dots, a_r\}.$$

Há l_d elementos g_i de mesmo grau d . Cada g_i contribui com d para o grau total da palavra (3.50). Cada g_i pode ocorrer $k \geq 0$ vezes em (3.50). Se g_i ocorre k_i vezes na palavra, então contribuirá com grau $k_i d$ para o grau da palavra. A função geradora para a contribuição destes k_i elementos de grau d para o grau total de (3.50) é

$$1 + x^d + x^{2d} + \dots = \frac{1}{1 - x^d} \quad (3.51)$$

Portanto, a função geradora para a contribuição dos l_d elementos de grau d é

$$\left(\sum_{k_1=0}^{\infty} x^{k_1 d} \right) \cdot \left(\sum_{k_2=0}^{\infty} x^{k_2 d} \right) \dots \left(\sum_{k_{l_d}=0}^{\infty} x^{k_{l_d} d} \right) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} x^{kd} \right)^{l_d} = \left(\frac{1}{1 - x^d} \right)^{l_d} \quad (3.52)$$

Considerando a contribuição de todos os subespaços l_d , obtemos

$$\prod_{d \geq 1} \left(\frac{1}{1 - x^d} \right)^{l_d} \quad (3.53)$$

Segundo o Teorema de PBW, esta função geradora deve ser igual à função geradora para as dimensões dos subespaços \mathcal{A}_n . Portanto,

$$\prod_{d \geq 1} \left(\frac{1}{1 - x^d} \right)^{l_d} = \sum_{n \geq 0} r^n x^n \quad (3.54)$$

Assim,

$$\prod_{d \geq 1} \left(\frac{1}{1 - x^d} \right)^{l_d} = \frac{1}{1 - rx} \quad (3.55)$$

Desta última relação segue a identidade

$$\prod_{d \geq 1} (1 - x^d)^{l_d} = 1 - rx \quad (3.56)$$

que é conhecida como **Identidade de Witt**.

Aplicando-se logaritmo para isolar l_d :

$$\log \left(\prod_{d \geq 1} (1 - x^d)^{l_d} \right) = \log(1 - rx) \quad (3.57)$$

$$\sum_{d \geq 1} \log(1 - x^d)^{l_d} = \sum_{d \geq 1} l_d \log(1 - x^d) = \log(1 - rx) \quad (3.58)$$

Substituindo as relações

$$\log(1 - rx) = - \sum_{n \geq 1} \frac{r^n x^n}{n} \quad (3.59)$$

$$\log(1 - x^d) = - \sum_{k \geq 1} \frac{x^{dk}}{k} \quad (3.60)$$

em (3.58) obtém-se:

$$\sum_{d \geq 1} l_d \sum_{k \geq 1} \frac{x^{dk}}{k} = \sum_{n \geq 1} \frac{r^n x^n}{n} \quad (3.61)$$

Fazendo $dk = n$ o lado esquerdo de (3.61) fica igual a :

$$\sum_{k \geq 1} \sum_{d \geq 1} l_d \frac{x^{dk}}{k} = \sum_n \sum_{d|n} \frac{l_d}{\frac{n}{d}} x^n \quad (3.62)$$

Então,

$$\sum_n \sum_{d|n} \frac{l_d}{\frac{n}{d}} x^n = \sum_n \frac{r^n x^n}{n}, \quad (3.63)$$

e obtemos, no sentido das séries formais de potências,

$$r^n = \sum_{d|n} d.l_d \quad (3.64)$$

Equivalentemente,

$$r^n = \sum_{d|n} \frac{n}{d} l_{\frac{n}{d}} \quad (3.65)$$

ou seja,

$$\frac{r^n}{n} = \sum_{d|n} \frac{1}{d} l_{\frac{n}{d}} \quad (3.66)$$

Pelo Lema E.1 do Apêndice E, resulta na fórmula:

$$l_n = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \mu(d) r_{\frac{n}{d}} \quad (3.67)$$

denominada **Fórmula de Witt**.

Capítulo 4

A Identidade de Sherman.

Aspectos Algébricos

No capítulo anterior estudamos os aspectos combinatoriais da identidade de Witt. Vimos que esta identidade tem vários elementos em comum com a identidade de Sherman.

Algebricamente, a fórmula de Witt (3.5) fornece as dimensões dos subespaços homogêneos de uma álgebra de Lie livre gerada por R geradores, ou ainda, por um espaço vetorial de dimensão R , no sentido da Proposição 4.1, adiante. Uma interpretação algébrica para a fórmula (3.3) também é possível. É natural, então, perguntar se é possível uma interpretação análoga para os expoentes na identidade de Sherman.

A solução baseia-se na proposição seguinte, devida a S. J. Kang e M. H. Kim nas referências [11] e [12] que generaliza a fórmula da dimensão e a identidade de Witt para o caso de álgebras de Lie livres geradas por espaços vetoriais graduados.

Proposição 4.1 (*S. J. Kang e M. H. Kim*) *Seja*

$$\mathbb{Z}_{>0}^r = \{(i_1, \dots, i_r) \mid i_1, \dots, i_r = 1, 2, 3, \dots\} \quad (4.1)$$

e

$$V = \bigoplus_{(k_1, \dots, k_r) \in \mathbb{Z}_{>0}^r} V_{(k_1, \dots, k_r)} \quad (4.2)$$

um espaço vetorial $\mathbb{Z}_{>0}^r$ -graduado sobre o corpo \mathbb{K} , com subespaços $V_{(k_1, \dots, k_r)}$, cuja dimensão é dada por

$$\dim V_{(k_1, \dots, k_r)} = d(k_1, \dots, k_r) < \infty \quad (4.3)$$

para todo $(k_1, \dots, k_r) \in \mathbb{Z}_{>0}^r$. Seja

$$L = \bigoplus_{(k_1, \dots, k_r) \in \mathbb{Z}_{>0}^r} L_{(k_1, \dots, k_r)} \quad (4.4)$$

a álgebra de Lie livre gerada por V . Então, as dimensões dos subespaços $L_{(k_1, \dots, k_r)}$ são dadas pela **fórmula generalizada de Witt**

$$\dim L_{(k_1, \dots, k_r)} = \sum_{g|(k_1, \dots, k_r)} \frac{\mu(g)}{g} W\left(\frac{k_1}{g}, \dots, \frac{k_r}{g}\right) \quad (4.5)$$

A somatória é sobre todos os divisores comuns de k_1, \dots, k_r e μ é a função de Möbius. A função W , chamada de **função de partição de Witt**, é dada por:

$$W(k_1, \dots, k_r) = \sum_{s \in T(k_1, \dots, k_r)} \frac{(|s| - 1)!}{s!} \prod_{i_1, \dots, i_r=1}^{\infty} d(i_1, \dots, i_r)^{s_{i_1, \dots, i_r}} \quad (4.6)$$

onde os expoentes $s_{i_1 \dots i_r}$ são as componentes de $s \in T$ e

$$T(k_1, \dots, k_r) = \{s = (s_{i_1, \dots, i_r}) \mid s_{i_1, \dots, i_r} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \sum_{i_1, \dots, i_r=1}^{\infty} s_{i_1, \dots, i_r} (i_1, \dots, i_r) = (k_1, \dots, k_r)\}, \quad (4.7)$$

$$|s| = \sum_{i_1, \dots, i_r=1}^{\infty} s_{i_1, \dots, i_r} \quad (4.8)$$

e

$$s! = \prod_{i_1, \dots, i_r=1}^{\infty} s_{i_1, \dots, i_r}! \quad (4.9)$$

Além disso, a fórmula generalizada de Witt satisfaz a seguinte identidade, chamada de **identidade generalizada de Witt** :

$$\prod_{(k_1, \dots, k_r) \in \mathbb{Z}_{>0}^r} (1 - z_1^{k_1} \dots z_r^{k_r})^{\dim L_{(k_1, \dots, k_r)}} = 1 - f(z_1, \dots, z_r) \quad (4.10)$$

onde

$$f(z_1, \dots, z_r) := \sum_{(k_1, \dots, k_r) \in \mathbb{Z}_{>0}^r} d(k_1, \dots, k_r) z_1^{k_1} \dots z_r^{k_r} \quad (4.11)$$

Defina a função

$$g(z_1, \dots, z_r) := \sum_{(k_1, \dots, k_r) \in \mathbb{Z}_{>0}^r} W(k_1, \dots, k_r) z_1^{k_1} \dots z_r^{k_r} \quad (4.12)$$

Então,

$$e^{-g(z_1, \dots, z_r)} = 1 - f(z_1, \dots, z_r) \quad (4.13)$$

Demonstração: Ver referência [11] para o caso $r = 1$ e [12] para o caso geral. ■

Observação: Na equação (4.7), a igualdade

$$\sum_{i_1, \dots, i_r=1}^{\infty} s_{i_1 \dots i_r}(i_1, \dots, i_r) = (k_1, \dots, k_r) \quad (4.14)$$

deve ser entendida no sentido de que

$$\sum_{i_1, \dots, i_r=1}^{\infty} s_{i_1 \dots i_r} i_1 = k_1, \dots, \sum_{i_1, \dots, i_r=1}^{\infty} s_{i_1 \dots i_r} i_r = k_r \quad (4.15)$$

Exemplo 4.1 Consideremos o caso $r = 2$ e $k_1 = 2, k_2 = 3$.

Explicitamente temos

$$\left(\sum_{i_2=1}^{\infty} s_{1i_2} \right) 1 + \left(\sum_{i_2=1}^{\infty} s_{2i_2} \right) 2 + \dots = 2 \quad (4.16)$$

e

$$\left(\sum_{i_1=1}^{\infty} s_{i_11} \right) 1 + \left(\sum_{i_1=1}^{\infty} s_{i_12} \right) 2 + \dots = 3 \quad (4.17)$$

Em seguida precisamos determinar os vários $s_{i_1 i_2}$ que simultaneamente satisfazem (4.16) e (4.17). As soluções possíveis são

$$s_1 = (s_{11} = 1, s_{12} = 1, 0, 0, \dots)$$

$$s_2 = (0, 0, \dots, 0, s_{23} = 1, 0, \dots)$$

e

$$T(2, 3) = \{s_1, s_2\}$$

Nesse caso,

$$W(2, 3) = \frac{(|s_1| - 1)!}{s_1!} d(1, 1)^{s_{11}} d(1, 2)^{s_{12}} + \frac{(|s_2| - 1)!}{s_2!} d(2, 3)^{s_{23}}$$

Por (4.8) e (4.9), $|s_1| = 2, s_1! = 1$ e $|s_2| = 1, s_2! = 1$. Logo,

$$W(2, 3) = d(1, 1)d(1, 2) + d(2, 3)$$

O cálculo da função de partição de Witt via relação (4.6) pode ser longo e tedioso. Em alguns casos, uma fórmula geral para W pode ser obtida através das funções geradoras f e g .

Exemplo 4.2 Na proposição, consideremos o caso $r = 2$ e seja V tal que os subespaços $V_{(k_1, k_2)}$ têm dimensão

$$d(k_1, k_2) = 1 \quad \forall k_1, k_2 \geq 1$$

Nesse caso,

$$\begin{aligned} f(z_1, z_2) &= \sum_{k_1, k_2=1}^{\infty} z_1^{k_1} z_2^{k_2} \\ &= z_1 z_2 \sum_{k_1, k_2=1}^{\infty} z_1^{k_1-1} z_2^{k_2-1} \\ &= z_1 z_2 \sum_{a_1, a_2=0}^{\infty} z_1^{a_1} z_2^{a_2} \\ &= z_1 z_2 \left(\sum_{a_1=0}^{\infty} z_1^{a_1} \right) \left(\sum_{a_2=0}^{\infty} z_2^{a_2} \right) \\ &= \frac{z_1 z_2}{(1-z_1)(1-z_2)} \end{aligned} \tag{4.18}$$

onde usamos que $\sum_{a=0}^{\infty} z^a = (1-z)^{-1}$.

Pela fórmula (4.13)

$$e^{-g(z_1, z_2)} = 1 - f(z_1, z_2) \tag{4.19}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} e^{-g(z_1, z_2)} &= 1 - \frac{z_1 z_2}{(1-z_1)(1-z_2)} \\ &= \frac{1 - z_1 - z_2}{(1-z_1)(1-z_2)} \end{aligned} \tag{4.20}$$

e então,

$$-g(z_1, z_2) = \ln \left(\frac{1 - z_1 - z_2}{(1-z_1)(1-z_2)} \right) \tag{4.21}$$

Em seguida, determinaremos a função de partição de Witt. Temos que

$$-g(z_1, z_2) = \ln(1 - z_1 - z_2) - \ln(1 - z_1) - \ln(1 - z_2) \quad (4.22)$$

onde

$$\begin{aligned} \ln(1 - z_1 - z_2) &= - \sum_{N=1}^{\infty} \frac{(z_1 + z_2)^N}{N} \\ &= - \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N} \sum_{\substack{k_1 \geq 0 \\ 0 < k_1 + k_2 = N}} \frac{(k_1 + k_2)!}{k_1! k_2!} z_1^{k_1} z_2^{k_2} \\ &= - \sum_{\substack{k_1, k_2=0 \\ k_1 + k_2 \geq 1}}^{\infty} \frac{(k_1 + k_2)!}{(k_1 + k_2)k_1! k_2!} z_1^{k_1} z_2^{k_2} \end{aligned} \quad (4.23)$$

Convém, agora, expressarmos este último resultado como:

$$\begin{aligned} \ln(1 - z_1 - z_2) &= - \sum_{k_1=1}^{\infty} \frac{z_1^{k_1}}{k_1} - \sum_{k_2=1}^{\infty} \frac{z_2^{k_2}}{k_2} - \sum_{k_1, k_2=1}^{\infty} \frac{(k_1 + k_2)!}{(k_1 + k_2)k_1! k_2!} z_1^{k_1} z_2^{k_2} \\ &= \ln(1 - z_1) + \ln(1 - z_2) - \sum_{k_1, k_2=1}^{\infty} \frac{(k_1 + k_2)!}{(k_1 + k_2)k_1! k_2!} z_1^{k_1} z_2^{k_2} \end{aligned} \quad (4.24)$$

Logo,

$$g(z_1, z_2) = \sum_{k_1, k_2=1}^{\infty} \frac{(k_1 + k_2)!}{(k_1 + k_2)k_1! k_2!} z_1^{k_1} z_2^{k_2} \quad (4.25)$$

Comparando com a (4.12), obtemos

$$W(k_1, k_2) = \frac{(k_1 + k_2)!}{(k_1 + k_2)k_1! k_2!} \quad (4.26)$$

Pela Proposição 4.1 segue que

$$\prod_{k_1, k_2=1}^{\infty} (1 - z_1^{k_1} z_2^{k_2})^{M(k_1, k_2)} = 1 - \sum_{k_1, k_2=1}^{\infty} z_1^{k_1} z_2^{k_2} \quad (4.27)$$

Definimos

$$M(k_1, k_2) = \frac{1}{N} \sum_{d|k_1, k_2} \mu(d) \frac{\left(\frac{N}{d}\right)!}{\left(\frac{k_1}{d}\right)! \left(\frac{k_2}{d}\right)!} \quad (4.28)$$

onde $N = k_1 + k_2$.

Por (4.18),

$$\prod_{k_1, k_2=1}^{\infty} (1 - z_1^{k_1} z_2^{k_2})^{M(k_1, k_2)} = \frac{1 - z_1 - z_2}{(1 - z_1)(1 - z_2)} \quad (4.29)$$

Por último resulta que

$$(1 - z_1)(1 - z_2) \prod_{k_1, k_2=1}^{\infty} (1 - z_1^{k_1} z_2^{k_2})^{M(k_1, k_2)} = 1 - z_1 - z_2 \quad (4.30)$$

ou ainda,

$$\prod_{\substack{k_1, k_2 \geq 0 \\ k_1 + k_2 \geq 1}} (1 - z_1^{k_1} z_2^{k_2})^{M(k_1, k_2)} = 1 - z_1 - z_2 \quad (4.31)$$

Um cálculo similar permite estender este resultado para o caso de r variáveis z_1, \dots, z_r .

Um dado importante que este exemplo mostra é que a identidade de Witt (4.31) é uma consequência da identidade generalizada de Witt (4.27). Algo semelhante ocorre com a identidade de Sherman, como provaremos adiante.

4.1 Interpretação de θ como uma dimensão

Nesta seção aplicaremos a Proposição 4.1 aos resultados combinatoriais obtidos no capítulo 2.

Comparando a fórmula (4.5) com a fórmula (2.17), é imediata a semelhança entre ambas. Vamos, portanto, interpretar a (2.17) como sendo uma fórmula que fornece as dimensões dos subespaços homogêneos de uma álgebra de Lie L da forma (4.4). Nesse caso, a função de partição de Witt é conhecida explicitamente e dada pelas fórmulas (2.18) ou (2.19).

A próxima etapa consiste em determinar as dimensões (4.3) dos subespaços vetoriais que geram L . Estas podem ser obtidas por inversão das relações que advém da fórmula (4.6). Contudo, é possível calcular uma fórmula geral para estas dimensões. Vamos derivá-la a seguir.

No que segue, empregaremos a seguinte notação:

$$\lambda = 1, \dots, q, \quad k = (k_1, \dots, k_r), \quad |k| = \sum_{i=1}^r k_i \quad (4.32)$$

onde:

$$q = -1 + \prod_{i=1}^r (k_i + 1) \quad (4.33)$$

Ademais, $p(\lambda, k)$ denotará o conjunto de todos os $a_i \in \{0, 1, 2, \dots\}$, $i = 1, \dots, q$, e vetores $l_i = (l_{i1}, l_{i2}, \dots, l_{ir})$ cujas componentes satisfazem

$$0 \leq l_{ij} \leq k_j, \quad \forall j = 1, \dots, r, \quad \forall i = 1, \dots, q \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^r l_{ij} > 0 \quad (4.34)$$

Convencionamos que $W(l_i) = 0$ se $l_{ij} = 0$ para algum j . Nos demais casos, W é a função de partição de Witt.

Teorema 4.1

$$d(k_1, \dots, k_r) = \sum_{\lambda=1}^{|k|} (-1)^{\lambda+1} \sum_{p(\lambda, k)} \prod_{j=1}^q \frac{[W(l_j)]^{a_j}}{a_j!} \quad (4.35)$$

Demonstração: Pela (4.11) temos que

$$d(k_1, \dots, k_r) = \frac{1}{k_1! \dots k_r!} \frac{\partial^{k_1 + \dots + k_r}}{\partial z_1^{k_1} \dots \partial z_r^{k_r}} f(z_1, \dots, z_r) \Big|_{z_1 = \dots = z_r = 0} \quad (4.36)$$

e pela (4.13),

$$d(k_1, \dots, k_r) = -\frac{1}{k_1! \dots k_r!} \frac{\partial^{k_1 + \dots + k_r}}{\partial z_1^{k_1} \dots \partial z_r^{k_r}} e^{-g(z_1, \dots, z_r)} \Big|_{z_1 = \dots = z_r = 0} \quad (4.37)$$

O resultado segue aplicando-se a fórmula de Faa di Bruno generalizada obtida por G. M. Constantine e T. H. Savits em [19] e [20] (ver Apêndice F), que fornece a derivada múltipla de uma função composta. ■

Exemplo 4.3 Cálculo de $d(2, 2)$, no caso $r = R = 2$. Nesse caso, $k_1 = k_2 = 2$, $|k| = 4$, $q = 8$. Para aplicar a fórmula do Teorema 4.1, precisamos determinar o conjunto $p(\lambda, (2, 2))$ para todo $\lambda = 1, 2, 3, 4$. A lista completa de todos os vetores $l \leq (2, 2)$ é $l_1 = (0, 1)$, $l_2 = (1, 0)$, $l_3 = (1, 1)$, $l_4 = (0, 2)$, $l_5 = (2, 0)$, $l_6 = (2, 1)$, $l_7 = (1, 2)$ e $l_8 = (2, 2)$. Em seguida, determinamos os valores de $a_1, \dots, a_8 \geq 0$ que satisfazem

$$\sum_{i=1}^8 a_i = \lambda \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^8 a_i l_i = (2, 2)$$

A lista de valores é dada na tabela seguinte:

λ	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
1	0	0	0	0	0	0	0	1
2	0	1	0	0	0	0	1	0
	0	0	2	0	0	0	0	0
	0	0	0	1	1	0	0	0
3	1	0	0	0	0	1	0	0
	0	2	0	1	0	0	0	0
	2	0	0	0	1	0	0	0
4	1	1	1	0	0	0	0	0
	2	2	0	0	0	0	0	0

Tabela 4.1: Cálculo de $d(2, 2)$: valores de $a_1, \dots, a_8 \geq 0$

Usando a convenção adotada para W , obtemos

$$d(2, 2) = W(2, 2) - \frac{1}{2}W(1, 1)^2$$

De modo análogo, podemos calcular as seguintes expressões:

$$\begin{aligned}
N = 2 & \quad d(1, 1) = W(1, 1) \\
N = 3 & \quad d(1, 2) = W(1, 2) \\
& \quad d(2, 1) = W(2, 1) \\
N = 4 & \quad d(1, 3) = W(1, 3) \\
& \quad d(3, 1) = W(3, 1) \\
& \quad d(2, 2) = W(2, 2) - \frac{1}{2}W(1, 1)^2 \\
N = 5 & \quad d(1, 4) = W(1, 4) \\
& \quad d(4, 1) = W(4, 1) \\
& \quad d(2, 3) = W(2, 3) - W(1, 1)W(1, 2) \\
& \quad d(3, 2) = W(3, 2) - W(1, 1)W(2, 1) \\
N = 6 & \quad d(1, 5) = W(1, 5) \\
& \quad d(5, 1) = W(5, 1) \\
& \quad d(2, 4) = W(2, 4) - W(1, 1)W(1, 3) - \frac{1}{2}W(1, 2)^2 \\
& \quad d(4, 2) = W(4, 2) - W(1, 1)W(3, 1) - \frac{1}{2}W(2, 1)^2 \\
& \quad d(3, 3) = W(3, 3) - W(1, 1)W(2, 2) - W(1, 2)W(2, 1) + \frac{1}{6}W(1, 1)^3
\end{aligned}$$

Exemplo 4.4 Vamos considerar explicitamente o caso $r = R = 2$. Nesse caso, pelo Teorema 2.2,

$$\dim L_{(m_1, m_2)} = \theta(m_1, m_2) = \sum_{g|m_1, m_2} \frac{\mu(g)}{g} W\left(\frac{m_1}{g}, \frac{m_2}{g}\right) \quad (4.38)$$

e

$$W\left(\frac{m_1}{g}, \frac{m_2}{g}\right) = \mathcal{F}\left(\frac{m_{i_1}}{g}, \dots, \frac{m_{i_r}}{g}\right) = \sum_{a=1}^{\frac{M}{g}} \frac{4^a}{2a} \binom{\frac{m_{i_1}}{g} - 1}{a-1} \binom{\frac{m_{i_2}}{g} - 1}{a-1} \quad (4.39)$$

Desta última relação obtemos os seguintes valores:

$$W(1, 1) = W(1, 2) = W(2, 1) = W(1, 3) = W(3, 1) = 2$$

$$W(2, 2) = 6, \quad W(1, 4) = W(4, 1) = 2, \quad W(2, 3) = W(3, 2) = 10$$

$$W(1, 5) = W(5, 1) = 2, \quad W(2, 4) = 14, \quad W(3, 3) = \frac{86}{3}$$

$$\theta(1, 1) = \theta(1, 2) = \theta(2, 1) = \theta(1, 3) = \theta(3, 1) = 2, \quad \theta(2, 2) = 5$$

$$\theta(1, 4) = \theta(4, 1) = 2 \quad \theta(2, 3) = \theta(3, 2) = 10$$

$$\theta(3, 3) = 28$$

$$d(1, 1) = d(1, 2) = d(2, 1) = d(1, 3) = d(3, 1) = 2$$

$$d(2, 2) = d(1, 4) = d(4, 1) = 2$$

$$d(2, 3) = d(3, 2) = 6$$

$$d(1, 5) = d(5, 1) = 2$$

$$d(2, 4) = d(4, 2) = 8$$

$$d(3, 3) = 14$$

Pela Proposição 4.1, θ satisfaz a identidade generalizada de Witt:

$$\prod_{m_1, m_2=1}^{\infty} (1 - z_1^{m_1} z_2^{m_2})^{\theta(m_1, m_2)} = 1 - \sum_{m_1, m_2=1}^{\infty} d(m_1, m_2) z_1^{m_1} z_2^{m_2} \quad (4.40)$$

onde $d(m_1, m_2)$ é dado, em geral, pela fórmula (4.35) com W definido com em (4.39). Os primeiros coeficientes são listados acima.

À luz da proposição 4.1, associamos aos caminhos que percorrem o grafo da Figura 1.7, com duas arestas, uma álgebra de Lie graduada. Seus subespaços homogêneos da forma (4.4), com $r = 2$, têm suas dimensões dadas pelos números θ . Esta álgebra é gerada por um espaço vetorial da forma (4.2), com $r = 2$, sendo as dimensões dos

subespaços $V_{(k_1, k_2)}$ dadas por (4.35) onde os W 's são dados pela (4.39). Analogamente, para o caso $r \geq 3$.

4.2 A Identidade de Sherman e Álgebras de Lie

Definição 4.1 *Sejam a_1, \dots, a_r números pares e s_1, \dots, s_r inteiros positivos quaisquer. Defina os números*

$$\mathcal{P}(a_1, \dots, a_r) = \sum_{g_p | a_1, \dots, a_r} \frac{\mu(g_p)}{g_p} \mathcal{F}\left(\frac{a_1}{g_p}, \dots, \frac{a_r}{g_p}\right) \quad (4.41)$$

onde a somatória é sobre todos os divisores comuns pares de a_1, \dots, a_r e \mathcal{F} é dado pela fórmula (2.18) e pela (2.19). Defina também:

$$W(s_1, \dots, s_r) = \begin{cases} \mathcal{F}(s_1, \dots, s_r) & \text{se os } s_i \text{ não são todos pares} \\ \mathcal{F}(s_1, \dots, s_r) - \sum_{k | s_1, \dots, s_r} \frac{1}{k} \mathcal{P}\left(\frac{s_1}{k}, \dots, \frac{s_r}{k}\right) & \text{se os } s_i \text{ são todos pares} \end{cases} \quad (4.42)$$

Se os a_i 's não forem todos pares, $\mathcal{P} = 0$.

A ligação entre os resultados do capítulo anterior com o teorema acima é estabelecida pelo seguinte resultado:

Teorema 4.2 *Os números $\theta_+(m_{i_1}, \dots, m_{i_r})$ estão dados pela fórmula generalizada de Witt*

$$\theta_+(m_{i_1}, \dots, m_{i_r}) = \sum_{g | m_{i_1}, \dots, m_{i_r}} \frac{\mu(g)}{g} W\left(\frac{m_{i_1}}{g}, \dots, \frac{m_{i_r}}{g}\right) \quad (4.43)$$

onde a função de partição de Witt W está dada pela (4.42). A somatória é sobre todos os divisores comuns g de m_{i_1}, \dots, m_{i_r} .

Demonstração: No capítulo 2, obtivemos a fórmula, reproduzida a seguir, por conveniência, para o número $\theta_+(m_{i_1}, \dots, m_{i_r})$ de classes de equivalência de caminhos fechados não periódicos, positivos, que percorrem m_{i_1}, \dots, m_{i_r} vezes as arestas i_1, \dots, i_r de G_r , respectivamente. Esta fórmula tem a seguinte forma geral:

$$\theta_+(m_{i_1}, \dots, m_{i_r}) = \sum_{g_i | m_{i_1}, \dots, m_{i_r}} \frac{\mu(g_i)}{g_i} \mathcal{F}\left(\frac{m_{i_1}}{g_i}, \dots, \frac{m_{i_r}}{g_i}\right) \quad (4.44)$$

onde a somatória é feita sobre todos os divisores ímpares comuns g_i de m_{i_1}, \dots, m_{i_r} .

Se os números m_{i_1}, \dots, m_{i_r} não são todos pares, seus divisores comuns ímpares são todos os divisores possíveis. Nesse caso, definimos:

$$W(m_{i_1}, \dots, m_{i_r}) = \mathcal{F}(m_{i_1}, \dots, m_{i_r}) \quad (4.45)$$

No caso em que m_{i_1}, \dots, m_{i_r} são todos pares, vamos reescrever o lado direito da relação (4.44) na forma:

$$\sum_{g|m_{i_1}, \dots, m_{i_r}} \frac{\mu(g)}{g} \mathcal{F}\left(\frac{m_{i_1}}{g}, \dots, \frac{m_{i_r}}{g}\right) - \sum_{g_p|m_{i_1}, \dots, m_{i_r}} \frac{\mu(g_p)}{g_p} \mathcal{F}\left(\frac{m_{i_1}}{g_p}, \dots, \frac{m_{i_r}}{g_p}\right) \quad (4.46)$$

onde a primeira somatória é sobre todos os divisores g comuns de m_{i_1}, \dots, m_{i_r} e a segunda é sobre todos os divisores pares g_p comuns de m_{i_1}, \dots, m_{i_r} .

No caso em que m_{i_1}, \dots, m_{i_r} são todos pares, queremos determinar W tal que:

$$\theta_+(m_{i_1}, \dots, m_{i_r}, N) = \sum_{g|m_{i_1}, \dots, m_{i_r}} \frac{\mu(g)}{g} W\left(\frac{m_{i_1}}{g}, \dots, \frac{m_{i_r}}{g}\right) \quad (4.47)$$

Impondo que o lado direito de (4.47) seja igual a (4.46) segue que:

$$\sum_{g|m_{i_1}, \dots, m_{i_r}} \frac{\mu(g)}{g} \left[\mathcal{F}\left(\frac{m_{i_1}}{g}, \dots, \frac{m_{i_r}}{g}\right) - W\left(\frac{m_{i_1}}{g}, \dots, \frac{m_{i_r}}{g}\right) \right] = \mathcal{P}(m_{i_1}, \dots, m_{i_r}) \quad (4.48)$$

onde \mathcal{P} está dado pela (4.41)

Aplicando a fórmula inversa de Möbius (ver Apêndice E) em (4.48) obtemos:

$$\mathcal{F}(m_{i_1}, \dots, m_{i_r}) - W(m_{i_1}, \dots, m_{i_r}) = \sum_{g|m_{i_1}, \dots, m_{i_r}} \frac{1}{g} \mathcal{P}\left(\frac{m_{i_1}}{g}, \dots, \frac{m_{i_r}}{g}\right) \quad (4.49)$$

Portanto,

$$W(m_{i_1}, \dots, m_{i_r}) = \mathcal{F}(m_{i_1}, \dots, m_{i_r}) - \sum_{g|m_{i_1}, \dots, m_{i_r}} \frac{1}{g} \mathcal{P}\left(\frac{m_{i_1}}{g}, \dots, \frac{m_{i_r}}{g}\right) \quad (4.50)$$

Finalmente, defina $W(m_{i_1}, \dots, m_{i_r})$ como na (4.42), reunindo os resultados (4.45) e (4.50), obtemos (4.43). ■

Tendo em vista o resultado (4.43) e sua semelhança com (4.5) da Proposição 4.1, vamos, na sequência, interpretar θ_+ como sendo a dimensão de uma álgebra de Lie L da forma (4.4). As dimensões dos subespaços $V_{(k_1, \dots, k_r)}$ do espaço V que gera L estão

dadas pela fórmula (4.35) tomando-se W como na (4.42).

Exemplo 4.5 A seguir estão listados os valores de W e d , para o caso $R = r = 2$ com $N = 2, 3, 4, 5, 6$.

$$W(1, 1) = W(1, 2) = W(2, 1) = W(1, 3) = W(3, 1) = W(1, 4) = W(1, 5) = W(5, 1) = 2$$

$$W(2, 2) = 7, \quad W(2, 4) = W(4, 2) = 15, \quad W(2, 3) = W(3, 2) = 10, \quad W(3, 3) = \frac{86}{3}$$

$$d(1, 1) = d(1, 2) = d(2, 1) = d(1, 3) = d(3, 1) = d(1, 4) = d(1, 5) = d(5, 1) = 2$$

$$d(2, 2) = 5, \quad d(2, 4) = d(4, 2) = 9, \quad d(2, 3) = d(3, 2) = 6, \quad d(3, 3) = 12$$

Com base na Proposição 4.1, obtemos a seguinte identidade:

Teorema 4.3 Os números $\theta_+(m_{i_1}, \dots, m_{i_r})$ dados por (4.43) satisfazem a seguinte identidade generalizada de Witt :

$$\prod_{m_{i_1}, \dots, m_{i_r}=1}^{\infty} (1 - z_1^{m_{i_1}} \dots z_r^{m_{i_r}})^{\theta_+(m_{i_1}, \dots, m_{i_r})} = 1 - f(z_1, \dots, z_r) \quad (4.51)$$

onde

$$f(z_1, \dots, z_r) = \sum_{m_{i_1}, \dots, m_{i_r}=1}^{\infty} d(m_{i_1}, \dots, m_{i_r}) z_1^{m_{i_1}} \dots z_r^{m_{i_r}} \quad (4.52)$$

e os coeficientes são dados pela fórmula (4.35) com W dado pela (4.42).

A identidade de Sherman é uma consequência da identidade generalizada de Witt (4.51). É o que provaremos em seguida.

Corolário 4.1

$$\prod_{m_{i_1}, \dots, m_{i_r}=1}^{\infty} (1 + z_1^{m_{i_1}} \dots z_r^{m_{i_r}})^{\theta_+} (1 - z_1^{m_{i_1}} \dots z_r^{m_{i_r}})^{\theta_-} = 1 \quad (4.53)$$

Demonstração: Defina

$$\mathcal{Z}_+(z_1, \dots, z_r) = (1 + z_1^{m_{i_1}} \dots z_r^{m_{i_r}})^{\theta_+(m_{i_1}, \dots, m_{i_r})} \quad (4.54)$$

$$\mathcal{Z}_-(z_1, \dots, z_r) = (1 - z_1^{m_{i_1}} \dots z_r^{m_{i_r}})^{\theta_+(m_{i_1}, \dots, m_{i_r})} \quad (4.55)$$

$$\mathcal{Z}^-(z_1, \dots, z_r) = (1 - z_1^{m_{i_1}} \dots z_r^{m_{i_r}})^{\theta_-(m_{i_1}, \dots, m_{i_r})} \quad (4.56)$$

Segue que

$$\mathcal{Z}_+ = \frac{\mathcal{Z}_+ \mathcal{Z}_-}{\mathcal{Z}_-} = \frac{\mathcal{Z}_-(z_1^2, \dots, z_r^2)}{\mathcal{Z}_-(z_1, \dots, z_r)} \quad (4.57)$$

e usando, (4.51) e (4.52),

$$\prod_{m_{i_1}, \dots, m_{i_r}=1}^{\infty} \mathcal{Z}_+(z_1, \dots, z_r) = \frac{1 - f(z_1^2 \dots z_r^2)}{1 - f(z_1 \dots z_r)} \quad (4.58)$$

Por outro lado,

$$\prod_{m_{i_1}, \dots, m_{i_r}=1}^{\infty} \mathcal{Z}^-(z_1, \dots, z_r) = \prod_{(1)} \mathcal{Z}^- \prod_{(2)} \mathcal{Z}^- \prod_{(3)} \mathcal{Z}^- \prod_{(4)} \mathcal{Z}^- \quad (4.59)$$

onde (1), (2), (3) e (4) indicam produtórios em que (1) $\sum m_i < 2r$, (2) m_{i_1}, \dots, m_{i_r} são todos ímpares, (3) m_{i_1}, \dots, m_{i_r} são de paridade distinta e (4) m_{i_1}, \dots, m_{i_r} são todos pares. Pelo teorema 2.3, nos casos (1), (2) e (3),

$$\theta_+(m_{i_1}, \dots, m_{i_r}) = \theta_-(m_{i_1}, \dots, m_{i_r})$$

e, portanto, $\mathcal{Z}^- = \mathcal{Z}_-$ nos casos (1), (2) e (3). No caso (4), pelo teorema 2.4,

$$\theta_-(m_{i_1}, \dots, m_{i_r}) = \theta_+(m_{i_1}, \dots, m_{i_r}) - \theta_+\left(\frac{m_{i_1}}{2}, \dots, \frac{m_{i_r}}{2}\right)$$

Nesse caso,

$$\begin{aligned} \prod_{(4)} \mathcal{Z}^- &= \prod_{(4)} \mathcal{Z}_- \prod_{(4)} (1 - z_1^{m_1} \dots z_r^{m_r})^{-\theta_+(\frac{m_1}{2}, \dots, \frac{m_r}{2})} \\ &= \prod_{(4)} \mathcal{Z}_- \prod_{k_i > 0} (1 - z_1^{2k_1} \dots z_r^{2k_r})^{-\theta_+(k_1, \dots, k_r)} \\ &= \prod_{(4)} \mathcal{Z}_- (1 - f(z_1^2, \dots, z_r^2))^{-1} \end{aligned} \quad (4.60)$$

onde usamos a relação (4.51). Da mesma forma, então,

$$\begin{aligned} \prod_{m_{i_1}, \dots, m_{i_r}=1}^{\infty} \mathcal{Z}^- &= \prod_{m_{i_1}, \dots, m_{i_r}=1}^{\infty} \mathcal{Z}_- (1 - f(z_1^2, \dots, z_r^2))^{-1} \\ &= \frac{1 - f(z_1, \dots, z_r)}{1 - f(z_1^2, \dots, z_r^2)} \end{aligned} \quad (4.61)$$

Multiplicando (4.58) por (4.61) prova-se a identidade (4.53), seguido-se a identidade de Sherman.



Apêndice A: O Modelo de Ising

O modelo de Ising, proposto em 1920 por Wilhelm Lenz ao seu aluno de doutorado Ernest Ising, tinha como objetivo estudar um dos fenômenos mais importantes em matéria condensada, as transições de fase em materiais ferromagnéticos.

O modelo de Ising em duas dimensões é definido sobre um grafo planar quadrado Λ , com $N \times N$ vértices, imitando átomos regularmente arranjados como num cristal em duas dimensões. Para cada vértice i de Λ são atribuídos dois possíveis estados (chamados de spins) σ_i onde $\sigma_i = +1$ ou $\sigma_i = -1$.

No modelo de Ising, a energia de interação entre duas partículas, localizadas no i -ésimo e j -ésimo vértice é dada por:

$$E_{ij} = \begin{cases} -J\sigma_i\sigma_j & \text{se } i, j \text{ são vizinhos próximos (v.p.)} \\ 0 & \text{se isso não ocorre} \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

onde J é uma constante que dá a medida da força da interação entre as partículas do sistema.

Portanto, no modelo de Ising a energia depende somente do curto alcance das interações.

Como Λ tem N^2 vértices, existem 2^{N^2} configurações distintas para os spins e logo, 2^{N^2} configurações $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_{N^2})$. A energia de cada configuração σ é dada por:

$$E_\sigma = -J \sum_{v.p. \in \sigma} \sigma_i \sigma_j \quad (\text{A.2})$$

onde a somatória é sobre os vizinhos próximos na configuração.

De acordo com a mecânica estatística, todas as grandezas físicas relevantes para descrever o sistema e sua dependência com a temperatura é dada pela função de partição $\mathcal{Z}(\beta)$:

$$\mathcal{Z}(\beta) = \sum_{\sigma} e^{-\beta E_\sigma} \quad (\text{A.3})$$

onde $\beta = \frac{1}{kT}$, k é a constante de Boltzmann e T é a temperatura do sistema. A somatória é sobre todas as configurações σ dos spins.

Informações sobre o comportamento global do sistema, como as transições de fase, ocorrem como singularidades naquelas grandezas físicas. Quantidades importantes que são relevantes para entender a física do sistema de muitas partículas são definidas em termos de $\frac{\ln \mathcal{Z}}{N^2}$ ou suas derivadas no limite $N \rightarrow \infty$, chamado limite termodinâmico.

Um problema básico é encontrar uma fórmula fechada, ou seja, uma expressão analítica para $\frac{\ln \mathcal{Z}}{N^2}$. Isso foi feito com sucesso por Lars Onsager em 1943 para o modelo de Ising em duas dimensões. O problema permanece em aberto em três dimensões. A técnica por ele empregada é conhecida como formalismo algébrico, que consiste em expressar a função de partição em termos de matrizes. Em seguida, analisa-se sua diagonalização. O cálculo é demasiado complicado, porém mostrou a existência de uma transição de fase no sistema, a uma temperatura crítica chamada de temperatura de Curie.

Na década de 50, Kac e Ward desenvolveram uma formulação combinatorial para o modelo de Ising em duas dimensões e, pretendiam chegar ao mesmo resultado de Onsager mediante essa formulação. Suas idéias foram complementadas por Feynman, pela introdução no formalismo da identidade que recebe o seu nome.

Vamos reescrever a função de partição como:

$$\mathcal{Z}_N(K) = \sum_{\sigma_1=\pm 1} \dots \sum_{\sigma_N=\pm 1} \prod_{v.p.} e^{K\sigma_i\sigma_j} \quad (\text{A.4})$$

com $K = +\frac{J}{kT}$. Notando que $\sigma_i\sigma_j = \pm 1$, segue que

$$e^{K\sigma_i\sigma_j} = e^{\pm K} = \cosh K \pm \sinh K \quad (\text{A.5})$$

onde $\cosh K$ e $\sinh K$ são as funções cosseno e seno hiperbólicos, e

$$\prod_{v.p.} e^{K\sigma_i\sigma_j} = (1 - u^2)^{-\frac{x}{2}} \prod_{v.p.} (1 + \sigma_i\sigma_j u) \quad (\text{A.6})$$

onde $u = \tanh K$ e $x = 2N(N - 1)$.

Teorema A.1 *Seja \mathcal{A} o conjunto de todos os grafos admissíveis G de Λ . Então:*

$$\mathcal{Z}_N(u) = 2^{N^2} (1 - u^2)^{-N(N-1)} \left(1 + \sum_{G \in \mathcal{A}} I_G(u) \right) \quad (\text{A.7})$$

Demonstração: Referência [5]. ■

Aplicando a identidade de Feynman a (A.7), obtemos

$$\mathcal{Z}_N(u) = 2^{N^2} (1 - u^2)^{-N(N-1)} \prod_{[p]} [1 + W_p(u)] \quad (\text{A.8})$$

O passo seguinte no formalismo combinatorial consiste em provar a seguinte fórmula. A demonstração é bastante longa e por isso será omitida. Veja, por exemplo, as referências [5] e [7].

Teorema A.2

$$F(K) := \ln \prod_p [1 + W_p(u(K))] = \frac{1}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} dx dy \ln f(x, y; K) \quad (\text{A.9})$$

onde

$$f(x, y; K) = \frac{(\cosh 2K)^2 - (\sinh 2K)(\cos x + \cos y)}{\cosh^4 2K} \quad (\text{A.10})$$

Deste resultado segue que

$$\frac{\ln \mathcal{Z}_N(K)}{N^2} = \ln 2 + 2 \left(1 - \frac{1}{N}\right) \ln(\cosh k) + F(K) \quad (\text{A.11})$$

Apêndice B : O Genus de um Grafo

Consideramos a família de superfícies mostradas na Figura B.1, indicadas por S_g , $g = 0, 1, 2, \dots$

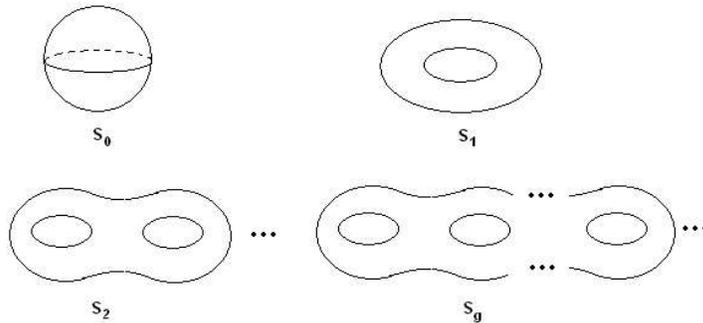


Figura B.1: Família de Superfícies

onde S_0 é a esfera, S_1 é o toro, S_2 é o 2-toro, ..., S_g é o g -toro. O número g é chamado de genus ou gênero da superfície que indica o número de “buracos” em S_g .

Definição B.1 *O genus de um grafo é a primeira superfície na sequência S_0, S_1, \dots, S_g , sobre a qual o grafo pode ser desenhado sem que haja cruzamento de arestas.*

Proposição B.1 *Todo grafo tem um genus.*

Demonstração: [24]. ■

Proposição B.2 *Se um grafo G tem genus g então G pode ser desenhado sem cruzamento de arestas sobre toda superfície S_n com genus $n \geq g$.*

Demonstração: [24]. ■

Exemplo B.1: O grafo da Figura B.2 é um grafo não planar de genus $g = 1$. Este resultado está provado na referência [24] Isso significa que ele pode ser desenhado sobre um toro sem cruzamento de arestas, como mostra a figura abaixo:

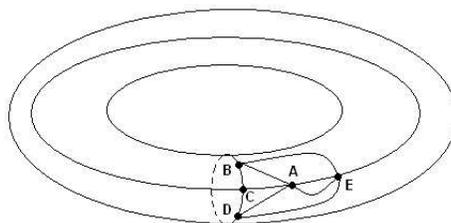


Figura B.2: Exemplo de grafo no toro

Um resultado importante da topologia algébrica afirma que uma superfície S_g pode, em geral, ser construída a partir de polígonos. Por exemplo, o toro S_1 pode ser obtido a partir de um retângulo colando-se duas laterais para formar um cilindro, em primeiro lugar, e, em seguida, colando-se a bordas do cilindro. Outras considerações são possíveis.

Na referência [14] M. Loebbl dá a seguinte prescrição. Uma superfície S_g é constituída a partir de um polígono B_0 com $4g$ lados e polígonos adicionais chamados de “pontes” indicados por B_j^i , $i = 1, \dots, g$, $j = 1, 2$. Colando-se os lados desses polígonos, seguindo um determinado esquema definido em [14], obtém-se S_g .

De acordo com o esquema desenvolvido por Loebbl, um grafo de genus g terá seus vértices em B_0 e arestas nas pontes B_j^i .

Apêndice C: Casos $R = r = 2$ e $R = r = 3$

C.1 Caso $r = R = 2$

No caso $r = R = 2$, o conjunto de todas as palavras de comprimento $N = 2, 3, 4$ é dado pela tabela abaixo. Nesse caso, o sinal de uma palavra e do caminho por ela representado está dado pela fórmula

$$(-1)^{N+s+k+1} \quad (\text{C.1})$$

onde N é o comprimento da palavra, s é o número de expoentes negativos e k é o número de pares (12) na sequência $S_{2k} = (12\dots 12)$. Esta fórmula foi obtida na referência [1].

N = 2,	$D_1^{+1}D_2^{+1}(+)$	$D_2^{+1}D_1^{+1}(+)$		
	$D_1^{+1}D_2^{-1}(-)$	$D_2^{+1}D_1^{-1}(-)$		
	$D_1^{-1}D_2^{+1}(-)$	$D_2^{-1}D_1^{+1}(-)$		
	$D_1^{-1}D_2^{-1}(+)$	$D_2^{-1}D_1^{-1}(+)$		
N = 3,	$D_1^{+1}D_2^{+2}(-)$	$D_1^{+2}D_2^{+1}(-)$	$D_2^{+1}D_1^{+2}(-)$	$D_2^{+2}D_1^{+1}(-)$
	$D_1^{+1}D_2^{-2}(+)$	$D_1^{+2}D_2^{-1}(+)$	$D_2^{+1}D_1^{-2}(+)$	$D_2^{+2}D_1^{-1}(+)$
	$D_1^{-1}D_2^{+2}(+)$	$D_1^{-2}D_2^{+1}(+)$	$D_2^{-1}D_1^{+2}(+)$	$D_2^{+2}D_1^{+1}(+)$
	$D_1^{-1}D_2^{-2}(-)$	$D_1^{-2}D_2^{-1}(-)$	$D_2^{-1}D_1^{-2}(-)$	$D_2^{+2}D_1^{-1}(-)$
N = 4,	$D_1^{+1}D_2^{+3}(+)$	$D_1^{+3}D_2^{+1}(+)$	$D_1^{+2}D_2^{+2}(+)$	
	$D_1^{+1}D_2^{-3}(-)$	$D_1^{+3}D_2^{-1}(-)$	$D_1^{+2}D_2^{-2}(-)$	
	$D_1^{-1}D_2^{+3}(-)$	$D_1^{-3}D_2^{+1}(-)$	$D_1^{-2}D_2^{+2}(-)$	
	$D_1^{-1}D_2^{-3}(+)$	$D_1^{-3}D_2^{-1}(+)$	$D_1^{-2}D_2^{-2}(+)$	
	$D_2^{+3}D_1^{+1}(+)$	$D_2^{+1}D_1^{+3}(+)$	$D_2^{+2}D_1^{+2}(+)$	
	$D_2^{-3}D_1^{+1}(-)$	$D_2^{-1}D_1^{+3}(-)$	$D_2^{-2}D_1^{+2}(-)$	
	$D_2^{+3}D_1^{-1}(-)$	$D_2^{+1}D_1^{-3}(-)$	$D_2^{+2}D_1^{-2}(-)$	
	$D_2^{-3}D_1^{-1}(+)$	$D_2^{-1}D_1^{-3}(+)$	$D_2^{-2}D_1^{-2}(+)$	

$$\begin{array}{lll}
D_1^{+1}D_2^{+1}D_1^{+1}D_2^{+1}(-) & D_1^{-1}D_2^{-1}D_1^{+1}D_2^{+1}(-) & D_1^{-1}D_2^{-1}D_1^{-1}D_2^{+1}(+) \\
D_1^{-1}D_2^{+1}D_1^{+1}D_2^{+1}(+) & D_1^{-1}D_2^{+1}D_1^{-1}D_2^{+1}(-) & D_1^{-1}D_2^{-1}D_1^{+1}D_2^{-1}(+) \\
D_1^{+1}D_2^{-1}D_1^{+1}D_2^{+1}(+) & D_1^{-1}D_2^{+1}D_1^{+1}D_2^{-1}(-) & D_1^{-1}D_2^{+1}D_1^{-1}D_2^{-1}(+) \\
D_1^{+1}D_2^{+1}D_1^{-1}D_2^{+1}(+) & D_1^{+1}D_2^{-1}D_1^{-1}D_2^{+1}(-) & D_1^{+1}D_2^{+1}D_1^{-1}D_2^{-1}(-) \\
D_1^{+1}D_2^{+1}D_1^{+1}D_2^{-1}(+) & D_1^{+1}D_2^{-1}D_1^{+1}D_2^{-1}(-) & D_1^{+1}D_2^{-1}D_1^{-1}D_2^{-1}(+) \\
D_1^{-1}D_2^{-1}D_1^{-1}D_2^{-1}(-) & & \\
D_2^{+1}D_1^{+1}D_2^{+1}D_1^{+1}(-) & D_2^{+1}D_1^{-1}D_2^{-1}D_1^{+1}(-) & D_2^{+1}D_1^{-1}D_2^{-1}D_1^{-1}(+) \\
D_2^{+1}D_1^{-1}D_2^{+1}D_1^{+1}(+) & D_2^{+1}D_1^{-1}D_2^{+1}D_1^{-1}(-) & D_2^{-1}D_1^{-1}D_2^{-1}D_1^{+1}(+) \\
D_2^{+1}D_1^{+1}D_2^{-1}D_1^{+1}(+) & D_2^{-1}D_1^{-1}D_2^{+1}D_1^{+1}(-) & D_2^{-1}D_1^{-1}D_2^{+1}D_1^{-1}(+) \\
D_2^{+1}D_1^{+1}D_2^{+1}D_1^{-1}(+) & D_2^{+1}D_1^{+1}D_2^{-1}D_1^{-1}(-) & D_2^{-1}D_1^{+1}D_2^{+1}D_1^{-1}(-) \\
D_2^{-1}D_1^{+1}D_2^{+1}D_1^{+1}(+) & D_2^{-1}D_1^{+1}D_2^{-1}D_1^{+1}(-) & D_2^{-1}D_1^{+1}D_2^{-1}D_1^{-1}(+) \\
D_2^{-1}D_1^{-1}D_2^{-1}D_1^{-1}(-) & &
\end{array}$$

No que segue, listamos as classes de equivalência. Os índices p , $+$ e $-$ em $[\]_p$, $[\]_+$ e $[\]_-$ indicam uma classe de caminhos periódicos, positivos e negativos, respectivamente.

Para $\mathbf{N} = 2$:

$$\begin{aligned}
[D_1^{+1}D_2^{+1}]_+ &= \{D_1^{+1}D_2^{+1}, D_2^{+1}D_1^{+1}, D_2^{-1}D_1^{-1}, D_1^{-1}D_2^{-1}\} \\
[D_1^{+1}D_2^{-1}]_- &= \{D_1^{+1}D_2^{-1}, D_2^{-1}D_1^{+1}, D_2^{+1}D_1^{-1}, D_1^{-1}D_2^{+1}\}
\end{aligned}$$

Para $\mathbf{N} = 3$:

$$\begin{aligned}
[D_1^{+1}D_2^{+2}]_- &= \{D_1^{+1}D_2^{+2}, D_2^{+2}D_1^{+1}, D_2^{-2}D_1^{-1}, D_1^{-1}D_2^{-2}\} \\
[D_1^{+1}D_2^{-2}]_+ &= \{D_1^{+1}D_2^{-2}, D_2^{-2}D_1^{+1}, D_2^{+2}D_1^{-1}, D_1^{-1}D_2^{+2}\} \\
[D_1^{+2}D_2^{+1}]_- &= \{D_1^{+2}D_2^{+1}, D_2^{+1}D_1^{+2}, D_2^{-1}D_1^{-2}, D_1^{-2}D_2^{-1}\} \\
[D_1^{+2}D_2^{-1}]_+ &= \{D_1^{+2}D_2^{-1}, D_2^{-1}D_1^{+2}, D_2^{+1}D_1^{-2}, D_1^{-2}D_2^{+1}\}
\end{aligned}$$

Para $\mathbf{N} = 4$:

$$\begin{aligned}
[D_1^{+1}D_2^{+3}]_+ &= \{D_1^{+1}D_2^{+3}, D_2^{+3}D_1^{+1}, D_2^{-3}D_1^{-1}, D_1^{-1}D_2^{-3}\} \\
[D_1^{+1}D_2^{-3}]_- &= \{D_1^{+1}D_2^{-3}, D_2^{-3}D_1^{+1}, D_2^{+3}D_1^{-1}, D_1^{-1}D_2^{+3}\} \\
[D_1^{+2}D_2^{+2}]_+ &= \{D_1^{+2}D_2^{+2}, D_2^{+2}D_1^{+2}, D_2^{-2}D_1^{-2}, D_1^{-2}D_2^{-2}\} \\
[D_1^{+2}D_2^{-2}]_- &= \{D_1^{+2}D_2^{-2}, D_2^{-2}D_1^{+2}, D_2^{+2}D_1^{-2}, D_1^{-2}D_2^{+2}\} \\
[D_1^{+3}D_2^{+1}]_+ &= \{D_1^{+3}D_2^{+1}, D_2^{+1}D_1^{+3}, D_2^{-1}D_1^{-3}, D_1^{-3}D_2^{-1}\} \\
[D_1^{+3}D_2^{-1}]_- &= \{D_1^{+3}D_2^{-1}, D_2^{-1}D_1^{+3}, D_2^{+1}D_1^{-3}, D_1^{-3}D_2^{+1}\} \\
[D_1^{+1}D_2^{+1}D_1^{+1}D_2^{+1}]_{p-} &= \{D_1^{+1}D_2^{+1}D_1^{+1}D_2^{+1}, D_2^{+1}D_1^{+1}D_2^{+1}D_1^{+1}, D_2^{-1}D_1^{-1}D_2^{-1}D_1^{-1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& D_1^{-1} D_2^{-1} D_1^{-1} D_2^{-1} \} \\
[D_1^{-1} D_2^{+1} D_1^{+1} D_2^{+1}]_+ &= \{ D_1^{-1} D_2^{+1} D_1^{+1} D_2^{+1}, D_2^{+1} D_1^{-1} D_2^{+1} D_1^{+1}, D_1^{+1} D_2^{+1} D_1^{-1} D_2^{+1}, \\
& D_2^{+1} D_1^{+1} D_2^{+1} D_1^{-1}, D_2^{-1} D_1^{-1} D_2^{-1} D_1^{+1}, D_1^{+1} D_2^{-1} D_1^{-1} D_2^{-1} \\
& D_2^{-1} D_1^{+1} D_2^{-1} D_1^{-1}, D_1^{-1} D_2^{-1} D_1^{+1} D_2^{-1} \} \\
[D_1^{+1} D_2^{-1} D_1^{+1} D_2^{+1}]_+ &= \{ D_1^{+1} D_2^{-1} D_1^{+1} D_2^{+1}, D_2^{+1} D_1^{+1} D_2^{-1} D_1^{+1}, D_1^{+1} D_2^{+1} D_1^{+1} D_2^{-1}, \\
& D_2^{-1} D_1^{+1} D_2^{+1} D_1^{+1}, D_2^{-1} D_1^{-1} D_2^{+1} D_1^{-1}, D_1^{-1} D_2^{-1} D_1^{-1} D_2^{+1}, \\
& D_2^{+1} D_1^{-1} D_2^{-1} D_1^{-1}, D_1^{-1} D_2^{+1} D_1^{-1} D_2^{-1} \} \\
[D_1^{-1} D_2^{-1} D_1^{+1} D_2^{+1}]_- &= \{ D_1^{-1} D_2^{-1} D_1^{+1} D_2^{+1}, D_2^{+1} D_1^{-1} D_2^{-1} D_1^{+1}, D_1^{+1} D_2^{+1} D_1^{-1} D_2^{-1}, \\
& D_2^{-1} D_1^{+1} D_2^{+1} D_1^{-1}, D_2^{-1} D_1^{-1} D_2^{+1} D_1^{+1}, D_1^{+1} D_2^{-1} D_1^{-1} D_2^{+1}, \\
& D_2^{+1} D_1^{+1} D_2^{-1} D_1^{-1}, D_1^{-1} D_2^{+1} D_1^{+1} D_2^{-1} \} \\
[D_1^{-1} D_2^{+1} D_1^{-1} D_2^{+1}]_{p-} &= \{ D_1^{-1} D_2^{+1} D_1^{-1} D_2^{+1}, D_2^{+1} D_1^{-1} D_2^{+1} D_1^{-1}, D_2^{-1} D_1^{+1} D_2^{-1} D_1^{+1}, \\
& D_1^{+1} D_2^{-1} D_1^{+1} D_2^{-1} \}
\end{aligned}$$

C.2 Caso $r = R = 3$ e $N = 3$

Nesse caso (e para $r \geq 3$), a fórmula do sinal de um caminho, derivada na referência [6], é dada por

$$(-1)^{N+l+s+T+1} \quad (\text{C.2})$$

onde N é o comprimento da palavra, s é o número de expoentes negativos, T é o número de subsequências da forma $(123\dots r)$ na sequência $S_l = (j_1, j_2, \dots, j_l)$ e $l = r, r+1, \dots, N$.

Por exemplo, a sequência

$$(1\ 2\ 1\ 2\ 3\ 2\ 1\ 3\ 2\ 3\ 2\ 3\ 1\ 2)$$

pode ser decomposta como

$$(1\ 2)\ (1\ 2\ 3)\ (2)\ (1\ 3)\ (2\ 3)\ (2\ 3)\ (1\ 2)$$

Então, nesse caso, $T = 7$.

$\mathbf{r} = \mathbf{R} = 3$

$\mathbf{N} = 3,$	$D_1^{+1}D_2^{+1}D_3^{+1}(+)$	$D_1^{+1}D_3^{+1}D_2^{+1}(-)$	$D_3^{+1}D_1^{+1}D_2^{+1}(+)$
	$D_1^{-1}D_2^{+1}D_3^{+1}(-)$	$D_1^{-1}D_3^{+1}D_2^{+1}(+)$	$D_3^{-1}D_1^{+1}D_2^{+1}(-)$
	$D_1^{+1}D_2^{-1}D_3^{+1}(-)$	$D_1^{+1}D_3^{-1}D_2^{+1}(+)$	$D_3^{+1}D_1^{-1}D_2^{+1}(-)$
	$D_1^{+1}D_2^{+1}D_3^{-1}(-)$	$D_1^{+1}D_3^{+1}D_2^{-1}(+)$	$D_3^{+1}D_1^{+1}D_2^{-1}(-)$
	$D_1^{-1}D_2^{-1}D_3^{+1}(+)$	$D_1^{-1}D_3^{-1}D_2^{+1}(-)$	$D_3^{-1}D_1^{-1}D_2^{+1}(+)$
	$D_1^{-1}D_2^{+1}D_3^{-1}(+)$	$D_1^{-1}D_3^{+1}D_2^{-1}(-)$	$D_3^{-1}D_1^{+1}D_2^{-1}(+)$
	$D_1^{+1}D_2^{-1}D_3^{-1}(+)$	$D_1^{+1}D_3^{-1}D_2^{-1}(-)$	$D_3^{+1}D_1^{-1}D_2^{-1}(+)$
	$D_1^{-1}D_2^{-1}D_3^{-1}(-)$	$D_1^{-1}D_3^{-1}D_2^{-1}(+)$	$D_3^{-1}D_1^{-1}D_2^{-1}(-)$
	$D_2^{+1}D_1^{+1}D_3^{+1}(-)$	$D_2^{+1}D_3^{+1}D_1^{+1}(+)$	$D_3^{+1}D_2^{+1}D_1^{+1}(-)$
	$D_2^{-1}D_1^{+1}D_3^{+1}(+)$	$D_2^{-1}D_3^{+1}D_1^{+1}(-)$	$D_3^{-1}D_2^{+1}D_1^{+1}(+)$
	$D_2^{+1}D_1^{-1}D_3^{+1}(+)$	$D_2^{+1}D_3^{-1}D_1^{+1}(-)$	$D_3^{+1}D_2^{-1}D_1^{+1}(+)$
	$D_2^{+1}D_1^{+1}D_3^{-1}(+)$	$D_2^{+1}D_3^{+1}D_1^{-1}(-)$	$D_3^{+1}D_2^{+1}D_1^{-1}(+)$
	$D_2^{-1}D_1^{-1}D_3^{+1}(-)$	$D_2^{-1}D_3^{-1}D_1^{+1}(+)$	$D_3^{-1}D_2^{-1}D_1^{+1}(-)$
	$D_2^{-1}D_1^{+1}D_3^{-1}(-)$	$D_2^{-1}D_3^{+1}D_1^{-1}(+)$	$D_3^{-1}D_2^{+1}D_1^{-1}(-)$
	$D_2^{+1}D_1^{-1}D_3^{-1}(-)$	$D_2^{+1}D_3^{-1}D_1^{-1}(+)$	$D_3^{+1}D_2^{-1}D_1^{-1}(-)$
	$D_2^{-1}D_1^{-1}D_3^{-1}(+)$	$D_2^{-1}D_3^{-1}D_1^{-1}(-)$	$D_3^{-1}D_2^{-1}D_1^{-1}(+)$

Classes de equivalência:

$$\begin{aligned}
[D_1^{+1}D_2^{+1}D_3^{+1}]_+ &= \{D_3^{+1}D_1^{+1}D_2^{+1}, D_3^{-1}D_2^{-1}D_1^{-1}, D_1^{-1}D_3^{-1}D_2^{-1}, D_2^{+1}D_3^{+1}D_1^{+1}, \\
&\quad D_2^{-1}D_1^{-1}D_3^{-1}, D_1^{+1}D_2^{+1}D_3^{+1}\} \\
[D_1^{-1}D_2^{+1}D_3^{+1}]_- &= \{D_3^{+1}D_1^{-1}D_2^{+1}, D_3^{-1}D_2^{-1}D_1^{+1}, D_1^{+1}D_3^{-1}D_2^{-1}, D_2^{+1}D_3^{+1}D_1^{-1}, \\
&\quad D_2^{-1}D_1^{+1}D_3^{-1}, D_1^{-1}D_2^{+1}D_3^{+1}\} \\
[D_1^{+1}D_2^{-1}D_3^{+1}]_- &= \{D_3^{+1}D_1^{+1}D_2^{-1}, D_3^{-1}D_2^{+1}D_1^{-1}, D_1^{-1}D_3^{-1}D_2^{+1}, D_2^{-1}D_3^{+1}D_1^{+1}, \\
&\quad D_2^{+1}D_1^{-1}D_3^{-1}, D_1^{+1}D_2^{-1}D_3^{+1}\} \\
[D_1^{+1}D_2^{+1}D_3^{-1}]_- &= \{D_3^{-1}D_1^{+1}D_2^{+1}, D_3^{+1}D_2^{-1}D_1^{-1}, D_1^{-1}D_3^{+1}D_2^{-1}, D_2^{+1}D_3^{-1}D_1^{+1}, \\
&\quad D_2^{-1}D_1^{-1}D_3^{+1}, D_1^{+1}D_2^{+1}D_3^{-1}\} \\
[D_1^{-1}D_2^{-1}D_3^{+1}]_+ &= \{D_3^{+1}D_1^{-1}D_2^{-1}, D_3^{-1}D_2^{+1}D_1^{+1}, D_1^{+1}D_3^{-1}D_2^{+1}, D_2^{-1}D_3^{+1}D_1^{-1}, \\
&\quad D_2^{+1}D_1^{+1}D_3^{-1}, D_1^{-1}D_2^{-1}D_3^{+1}\} \\
[D_1^{-1}D_2^{+1}D_3^{-1}]_+ &= \{D_3^{-1}D_1^{-1}D_2^{+1}, D_3^{+1}D_2^{-1}D_1^{+1}, D_1^{+1}D_3^{+1}D_2^{-1}, D_2^{+1}D_3^{-1}D_1^{-1}, \\
&\quad D_2^{-1}D_1^{+1}D_3^{+1}, D_1^{-1}D_2^{+1}D_3^{-1}\} \\
[D_1^{+1}D_2^{-1}D_3^{-1}]_+ &= \{D_3^{-1}D_1^{+1}D_2^{-1}, D_3^{+1}D_2^{+1}D_1^{-1}, D_1^{-1}D_3^{+1}D_2^{+1}, D_2^{-1}D_3^{-1}D_1^{+1}, \\
&\quad D_2^{+1}D_1^{-1}D_3^{+1}, D_1^{+1}D_2^{-1}D_3^{-1}\} \\
[D_1^{-1}D_2^{-1}D_3^{-1}]_- &= \{D_3^{-1}D_1^{-1}D_2^{-1}, D_3^{+1}D_2^{+1}D_1^{+1}, D_1^{+1}D_3^{+1}D_2^{+1}, D_2^{-1}D_3^{-1}D_1^{-1}, \\
&\quad D_2^{+1}D_1^{+1}D_3^{+1}, D_1^{-1}D_2^{-1}D_3^{-1}\}
\end{aligned}$$

Apêndice D: Séries Formais de Potências e Alguns Lemas Combinatoriais

D.1 Séries Formais de Potência

As séries formais de potências constituem uma das ferramentas mais empregadas em combinatória algébrica enumerativa onde, de modo geral, seus coeficientes enumeram elementos de um conjunto como, por exemplo, as partições de um número ou as dimensões dos espaços vetoriais como nos capítulos 3 e 4. Informações mais detalhadas sobre séries formais e suas aplicações podem ser obtidas nas referências [17] e [18].

Definição D.1 *Seja $(b_n)_{n \geq 0}$ uma sequência de números reais. Uma série formal de potências é uma expressão da forma*

$$\sum_{n \geq 0} b_n x^n := b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_n x^n + \dots \quad (\text{D.1})$$

definida pela sequência dada. A série também é chamada de função geradora da sequência.

No contexto das séries formais de potência, interessam apenas os coeficientes, não sendo relevantes os valores da variável x . Nesse contexto, elas podem ser derivadas, integradas, somadas termo a termo e multiplicadas como se fossem polinômios.

Duas séries formais são iguais se e somente se para todo n , o coeficiente de x^n é o mesmo em ambas as séries.

Um polinômio pode ser representado por uma série formal de potências. Por exemplo:

$$1 + x + 3x^3 = \sum_{n \geq 0} b_n x^n$$

onde $b_0 = 1$, $b_1 = 1$, $b_2 = 0$, $b_3 = 3$ e $b_n = 0$, $\forall n \geq 4$.

Em muitos casos de interesse é possível representar explicitamente uma série formal de potências por uma função. Nesse caso, a série formal associada é, por definição, aquela definida pelos coeficientes de Taylor da função. Por exemplo, se escrevemos

$$F(x) = \sum_{n \geq 0} b_n x^n \quad (\text{D.2})$$

então $b_n = \frac{1}{n!} F^{(n)}(0)$ onde $F^{(n)}(0)$ é a n -ésima derivada de $F(x)$ calculada em $x = 0$.

Por exemplo, a série formal definida pela sequência $\left(\frac{1}{n!}\right)_{n \geq 0}$ é gerada pela função e^x .

Produtórios infinitos de potências são definidos em termos de séries formais. Por exemplo, o produtório $\prod_{n \geq 0} (1 + x^n)$ é, por definição, a série formal $\sum_{n \geq 0} b_n x^n$ definida pelos coeficientes b_n obtidos multiplicando-se os fatores no produtório e somando-se os coeficientes com a mesma potência x^n .

As identidades de Witt, Sherman e Feynman, discutidas nessa dissertação, devem ser entendidas de acordo com as séries formais de potência. Por exemplo, considere-mos a identidade de Witt

$$\sum_{N=1}^{\infty} (1 - z^N)^{M(N)} = 1 - Rz \quad (\text{D.3})$$

onde

$$M(N) = \frac{1}{N} \sum_{g|N} \mu(g) R^{\frac{N}{g}} \quad (\text{D.4})$$

No lado direito temos um polinômio que é uma série formal definida pelos coeficientes $b_0 = 1$, $b_1 = R$, $b_n = 0$, $\forall n \geq 2$. A identidade estabelece que a série formal de potências em z , a que corresponde o produtório no lado esquerdo, está definida pelos mesmos coeficientes.

Séries formais de potências da forma geral

$$\sum_{n_1, \dots, n_k \geq 0} b(n_1, \dots, n_k) x_1^{n_1} \dots x_k^{n_k} \quad (\text{D.5})$$

são definidas da mesma forma.

D.2 Alguns Lemas Combinatoriais

Nesta seção serão provados alguns lemas combinatoriais usando séries formais de potências.

Lema D.1 *O número de partições possíveis de um número $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$, em α partes $a_1, a_2, \dots, a_\alpha$, não nulas e positivas, tal que*

$$N = a_1 + a_2 + \dots + a_\alpha \quad (\text{D.6})$$

é

$$c_N(\alpha) = \binom{N-1}{\alpha-1} \quad (\text{D.7})$$

Demonstração: Para provar este resultado, observe, primeiramente, o seguinte:

$$(q^1 + q^2)^2 = q^{1+1} + q^{1+2} + q^{2+1} + q^{2+2} \quad (\text{D.8})$$

$$\begin{aligned} (q^1 + q^2)^3 = & q^{1+1+1} + q^{1+1+2} + q^{1+2+1} + q^{2+1+1} \\ & + q^{1+2+2} + q^{2+1+2} + q^{2+2+1} \\ & + q^{2+2+2} \end{aligned} \quad (\text{D.9})$$

Em (D.8), os expoentes de q indicam partições de $N = 2, 3, 4$ em duas partes não nulas e positivas que são: $1 + 1$, para $N = 2$, $1 + 2$ e $2 + 1$ para $N = 3$ e, $2 + 2$ para $N = 4$.

Da mesma forma, em (D.9), os expoentes de q indicam partições de $N = 3, 4, 5, 6$ em três partes não nulas positivas que são $1 + 1 + 1$ para $N = 3$; $1 + 1 + 2$, $1 + 2 + 1$, $2 + 1 + 1$ para $N = 4$; $1 + 2 + 2$, $2 + 1 + 2$, $2 + 2 + 1$ para $N = 5$; e $2 + 2 + 2$ para $N = 6$. Para que todas as partições possíveis de N em α partes ocorram, é preciso incluir todas as potências de q no lado esquerdo de (D.8) e (D.9).

Os exemplos acima sugerem, então, que consideremos a função

$$G(\alpha) = (q^1 + q^2 + q^3 + \dots)^\alpha \quad (\text{D.10})$$

como função geradora das partições de $N = 2, 3, \dots$ em α partes não nulas.

Formalmente,

$$\frac{1}{1-q} = \sum_{t=0}^{\infty} q^t \quad (\text{D.11})$$

Portanto,

$$\sum_{N=1}^{\infty} q^N = \frac{1}{1-q} - 1 = \frac{q}{1-q} \quad (\text{D.12})$$

Logo,

$$G(\alpha) = \frac{q^\alpha}{(1-q)^\alpha} = \sum_{N=\alpha}^{\infty} c_N(\alpha) \cdot q^N \quad (\text{D.13})$$

onde $c_N(\alpha)$ é o número de partições de N em α partes não nulas positivas. Para calcular $c_N(\alpha)$, precisamos da série binomial de Newton: dado $k \in \mathbb{R}$,

$$(1+x)^k = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(k) \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} \cdot x^n \quad (\text{D.14})$$

onde

$$a_n(k) = 1, \text{ se } n = 0 \quad (\text{D.15})$$

e, se $1 \leq n \leq k$,

$$a_n(k) = \frac{k(k-1) \cdots (k-(n-1))}{n!} \quad (\text{D.16})$$

Substituindo $k = -\alpha$ e $x = -q$ em (D.14) obtém-se:

$$\frac{1}{(1-q)^\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(-\alpha) \cdot (-q)^n \quad (\text{D.17})$$

Mas, de acordo com (D.16)

$$a_n(-\alpha) = \frac{(-\alpha)(-\alpha-1) \cdots (-\alpha-n+1)}{n!} = (-1)^n \cdot \frac{\alpha(\alpha+1) \cdots (\alpha+n-1)}{n!} \quad (\text{D.18})$$

De forma compacta,

$$\begin{aligned} \frac{\alpha(\alpha+1) \cdots (\alpha+n-1)}{n!} &= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (\alpha-1) \cdot \alpha \cdot (\alpha+1) \cdots (\alpha+n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (\alpha-1) \cdot n!} \\ &= \frac{(\alpha+n-1)!}{(\alpha-1)! n!} \\ &=: \binom{n+\alpha-1}{\alpha-1} \end{aligned} \quad (\text{D.19})$$

Assim escreve-se (D.17) como:

$$\frac{1}{(1-q)^\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \binom{n+\alpha-1}{\alpha-1} \cdot (-q)^n = \sum_{N=\alpha}^{\infty} \binom{N-1}{\alpha-1} \cdot q^{N-\alpha} \quad (\text{D.20})$$

onde fizemos $n + \alpha = N$

Multiplicando (D.20) por q^α :

$$\frac{q^\alpha}{(1-q)^\alpha} = \sum_{N=\alpha}^{\infty} \binom{N-1}{\alpha-1} \cdot q^N \quad (\text{D.21})$$

Portanto,

$$G(\alpha) = \sum_{N=\alpha}^{\infty} \binom{N-1}{\alpha-1} \cdot q^N \quad (\text{D.22})$$

Conclui-se, desse modo, que o número de partições de N em α partes não nulas é

$$c_N(\alpha) = \binom{N-1}{\alpha-1} \quad (\text{D.23})$$

■

Lema D.2 *Seja $N \geq \alpha$ e $n_1, \dots, n_l, n_i > 0$, uma partição de α . Então,*

$$\sum_{\substack{m_i \geq n_i \\ \sum m_i = N}} \prod_{i=1}^l \binom{m_i-1}{n_i-1} = \binom{N-1}{\alpha-1} \quad (\text{D.24})$$

Demonstração: Na prova do lema anterior, derivamos o seguinte resultado:

$$\frac{q^\alpha}{(1-q)^\alpha} = \sum_{N=\alpha}^{\infty} \binom{N-1}{\alpha-1} \cdot q^N \quad (\text{D.25})$$

Tome $\alpha = n_1 + n_2 + \dots + n_l, n_i > 0$. Então,

$$\frac{q^\alpha}{(1-q)^\alpha} = \frac{q^{n_1}}{(1-q)^{n_1}} \cdot \frac{q^{n_2}}{(1-q)^{n_2}} \cdots \frac{q^{n_l}}{(1-q)^{n_l}} \quad (\text{D.26})$$

Usando (D.25), em cada fator, resulta

$$\sum_{m_1=n_1}^{\infty} \binom{m_1-1}{n_1-1} q^{m_1} \cdots \sum_{m_l=n_l}^{\infty} \binom{m_l-1}{n_l-1} q^{m_l}$$

$$= \sum_{N=\alpha}^{\infty} \sum_{\substack{m_i \geq n_i \\ \sum m_i = N}} \prod_{i=1}^l \binom{m_i - 1}{n_i - 1} q^N \quad (\text{D.27})$$

Comparando (D.27) com (D.25), termo a termo, obtemos o resultado. Observamos que no texto a fórmula (D.24) será usada impondo-se uma convenção que permite ter (D.24) com $m_i > 0$. ■

Apêndice E: Função de Möbius

No que segue, o símbolo $a|b$ indicará que a é divisor de b .

Definição E.1 A função aritmética indicada por $\mu(n)$, denominada *Função de Möbius*, é definida por:

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1, \\ 0 & \text{se } p^2|n, \text{ sendo } p \text{ um número primo} \\ (-1)^r & \text{se } n = p_1 p_2 \dots p_r, \text{ onde } p_i \text{ são primos} \end{cases} \quad (\text{E.1})$$

Definição E.2 Sejam f e g duas funções aritméticas de uma variável relacionadas da seguinte forma:

$$f(n) = \sum_{d|n} g(d) \quad (\text{E.2})$$

onde a somatória é sobre todos os divisores d de n . A relação (E.2) pode também ser expressa na forma

$$f(n) = \sum_{d|n} g\left(\frac{n}{d}\right) \quad (\text{E.3})$$

A função f é chamada de *Transformada de Möbius* da função g .

Teorema E.1 (*Fórmula Inversa de Möbius*) Sejam f e g duas funções aritméticas, sendo que f é a **transformada de Möbius** de g . Então:

$$g(n) = \sum_{d|n} \mu(d) f\left(\frac{n}{d}\right) \quad (\text{E.4})$$

Reciprocamente, a inversa de (E.4) é a (E.2). A relação (E.4) é denominada **Fórmula ou Transformada Inversa de Möbius**.

Demonstração: Ver referência [13]. ■

Os resultados acima podem ser estendidos naturalmente para funções aritméticas de k variáveis. Nesse caso, se

$$f(n_1, \dots, n_k) = \sum_{d|n_1, \dots, n_k} g\left(\frac{n_1}{d}, \dots, \frac{n_k}{d}\right) \quad (\text{E.5})$$

temos

$$g(n_1, \dots, n_k) = \sum_{d|n_1, \dots, n_k} \mu(d) f\left(\frac{n_1}{d}, \dots, \frac{n_k}{d}\right) \quad (\text{E.6})$$

onde as somatórias são sobre todos os divisores comuns de n_1, \dots, n_k .

Lema E.1 *Suponha que f e g estão relacionadas como:*

$$g(n_1, \dots, n_k) = \sum_{d|n_1, \dots, n_k} \frac{\mu(d)}{d} f\left(\frac{n_1}{d}, \dots, \frac{n_k}{d}\right) \quad (\text{E.7})$$

Então

$$f(n_1, \dots, n_k) = \sum_{d|n_1, \dots, n_k} \frac{1}{d} g\left(\frac{n_1}{d}, \dots, \frac{n_k}{d}\right) \quad (\text{E.8})$$

A recíproca é verdadeira.

Demonstração: Reescreva a relação (E.7) na forma

$$G(n_1, \dots, n_k) = \sum_{d|n_1, \dots, n_k} \mu(g) F\left(\frac{n_1}{d}, \dots, \frac{n_k}{d}\right) \quad (\text{E.9})$$

onde

$$G(n_1, \dots, n_k) = (n_1 + \dots + n_k)g(n_1, \dots, n_k) \quad (\text{E.10})$$

e

$$F\left(\frac{n_1}{d}, \dots, \frac{n_k}{d}\right) = \left(\frac{n_1}{d} + \dots + \frac{n_k}{d}\right) f\left(\frac{n_1}{d}, \dots, \frac{n_k}{d}\right) \quad (\text{E.11})$$

Portanto, usando (E.5):

$$F(n_1, \dots, n_k) = \sum_{d|n_1, \dots, n_k} G\left(\frac{n_1}{d}, \dots, \frac{n_k}{d}\right) \quad (\text{E.12})$$

ou seja,

$$(n_1 + \dots + n_k)f(n_1, \dots, n_k) = \sum_{d|n_1, \dots, n_k} \left(\frac{n_1}{d} + \dots + \frac{n_k}{d}\right) g\left(\frac{n_1}{d}, \dots, \frac{n_k}{d}\right) \quad (\text{E.13})$$

Logo,

$$f(n_1, \dots, n_k) = \sum_{d|n_1, \dots, n_k} \frac{1}{d} g\left(\frac{n_1}{d}, \dots, \frac{n_k}{d}\right) \quad (\text{E.14})$$

Seguindo o caminho inverso, prova-se a recíproca.

■

Apêndice F: Fórmula de Faa di Bruno

A fórmula de Faa di Bruno fornece a derivada múltipla de uma função composta, sendo o caso $m = 1$ e $r = 1$ o mais conhecido. Em trabalhos recentes ([19] e [20]), esta fórmula foi generalizada para m e r quaisquer.

Seja $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_r)$, $l = (l_1, \dots, l_r)$ e $z = (z_1, \dots, z_r)$. Defina

$$|\nu| = \sum_{i=1}^r \nu_i \quad (\text{F.1})$$

$$\nu! = \prod_{i=1}^r \nu_i! \quad (\text{F.2})$$

$$D_z^\nu = \frac{\partial^{|\nu|}}{\partial z_1^{\nu_1} \dots \partial z_r^{\nu_r}} \quad (\text{F.3})$$

e

$$l \leq \nu \text{ se } l_i \leq \nu_i, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (\text{F.4})$$

Sejam $F(y_1, \dots, y_m)$ e $G^{(1)}(z_1, \dots, z_r), \dots, G^{(m)}(z_1, \dots, z_r)$ funções reais e

$$H(z) = F(G^{(1)}(z), \dots, G^{(m)}(z)) \quad (\text{F.5})$$

Proposição F.1 (*Fórmula de Faa di Bruno Generalizada*)

$$D_z^\nu H(z) = \sum_{1 \leq |\lambda| \leq |\nu|} F_\lambda(G(z)) \sum_{p(\nu, \lambda)} (\nu!) \prod_{j=1}^q \frac{[G_{l_j}(z)]^{a_j}}{(a_j!) [l_j!]^{a_j}} \quad (\text{F.6})$$

onde

$$p(\nu, \lambda) = \{(a_1, \dots, a_q; l_1, \dots, l_q) : |a_i| \geq 0, \sum_{i=1}^q a_i = \lambda, \sum_{i=1}^q |a_i| l_i = \nu\} \quad (\text{F.7})$$

Neste conjunto l_1, \dots, l_q é a lista de todos os vetores que satisfazem $l \leq \nu$ com $|l| > 0$,

e

$$q = -1 + \prod_{s=1}^r (\nu_s + 1), \quad (\text{F.8})$$

Além disso $a_i = (a_{i1}, \dots, a_{im})$ e

$$F_\lambda(y) = D_y^\lambda F(y), \quad G_u^{(i)}(z) = D_z^u G^{(i)}(z) \text{ e } G_u(z) = (G_u^{(1)}(z), \dots, G_u^{(m)}(z))$$

Demonstração: Ver referências [19] e [20]. ■

Interessa-nos o caso especial da fórmula em que $m = 1$, $G^{(1)}(z) = -g(z)$,

$$g(z) = \sum_{k_1, \dots, k_r=0}^{\infty} W(k_1, \dots, k_r) z_1^{k_1} \dots z_r^{k_r} \quad (\text{F.9})$$

Convencionamos que $W(k_1, \dots, k_r) = 0$, se algum $k_i = 0$, e

$$H(z) = e^{-g(z)} \quad (\text{F.10})$$

No caso especial em que $m = 1$, a_1, \dots, a_q são números naturais. Para esse caso, interessa-nos obter uma fórmula para

$$D_z^\nu H(0) = D_z^\nu = \frac{\partial^{|\nu|}}{\partial z_1^{\nu_1} \dots \partial z_r^{\nu_r}} e^{-g(z)} \Big|_{z_1=\dots=z_r=0} \quad (\text{F.11})$$

Temos que em $z = 0$,

$$F_\lambda = 1 \quad e \quad G_{l_j}(0) = -l_j! W(l_j) \quad (\text{F.12})$$

Substituindo esse resultado na fórmula de Faa di Bruno (F.6) e dividindo o resultado por $\nu! = \nu_1! \dots \nu_r!$, resulta em :

$$\frac{1}{\nu_1! \dots \nu_r!} \frac{\partial^{|\nu|}}{\partial z_1^{\nu_1} \dots \partial z_r^{\nu_r}} e^{-g(z)} \Big|_{z_1=\dots=z_r=0} = \sum_{\lambda=1}^{|\nu|} (-1)^\lambda \sum_{p(\nu, \lambda)} \prod_{j=1}^q \frac{[W(l_j)]^{a_j}}{a_j!} \quad (\text{F.13})$$

Referências Bibliográficas

- [1] AMORIM, G.; DA COSTA, G. A. T. F. *Generic case of Sherman Identity. Combinatorics*. Workshop on Advances on Graph Theory and Applications, 2006.
- [2] BREMNER, M. R.; HENTZEL I. R., PERESI, L. A. *Dimension formulas for the nonassociative algebra*. Resenhas IME-USP 2004, vol 6, nº 2/3, 141-151.
- [3] CHUANG - CHONG C.; KHEE-MENG, K. *Principles and Techniques in combinatorics*. World Scientific, 1992.
- [4] DA COSTA, G. A. T. F. *Feynman identity: a special case*. J. Math. Phys. **38** (1997), 1014-1034.
- [5] DA COSTA, G. A. T. F.; MACIEL, A. L. *Combinatorial Formulation of Ising Model Revisited*. Revista Brasileira de Ensino de Física. **25**, n.1, 2003.
- [6] DA COSTA, G. A. T. F.; VARIANE, J. *Feynman identity: a special case revisited*. Letters in Math.Phys. **73** (2005), 221-235.
- [7] FEYNMAN, R. P. *Statistical Mechanics. A Set of Lectures*. Benjamin/Cummings, New York, 1972.
- [8] FUCHS, J.; SCHWEIGERT, C. *Symmetries, Lie Algebras and Representations*. Cambridge University Press, Cambridge, 2003.
- [9] HALL, M. *The theory of groups*. Macmillan, New York, 1959.
- [10] JACOBSON, N. *Lie Algebras*. Dover, 1979.
- [11] KANG, S. J.; KIM, M. H. *Free Lie Algebras, Generalized Witt Formula, and the Denominator Identity*. J. Algebra, **183** (1996), 560-594.
- [12] KANG, S. J.; KIM, M. H. *Dimension formula graded Lie Algebra and its applications* Transactions of the American Mathematical Society, **351**, n.11, (1999) 4281-4336.

- [13] LANDAU, Edmund. *Teoria Elementar dos Números*. 4. ed. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2002. v. 2, p. 38 - 61.
- [14] LOEBL, M. *A discrete non-pfaffian approach to the Ising problem*, in “*Graphs, morphisms and statistical physics*”. 145-154, DIMACS Ser., Discrete Math. Theoret. Comput. Sci., **63**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004.
- [15] MARTIN, L. A. B. S. *Álgebras de Lie*. São Paulo, Editora da Unicamp, 1999.
- [16] MOREE, P. *The formal series Witt transform*. Discrete Math. **295** (2005) 143-160.
- [17] NIVEN, I. M. *Formal Power Series*. Amer. Math. Monthly. **76** (1969), 871 - 889.
- [18] SANTOS, J. P. O.; MELLO, M. P.; MURARI, I. T. C., *Introdução à análise combinatória*, Ed. Unicamp, 1996.
- [19] SAVITS, T. H.; CONSTANTINE, G. M. *A Multivariate Faa di Bruno Formula with applications*. Amer. Math. Soc., **348**, n.2, (1996), 503-520.
- [20] SAVITS, T. H. *Some statistical applications of Faa di Bruno*. Journal of Multivariate Analysis, **97** (2006), 2131-2140.
- [21] SHERMAN, S. *Combinatorial aspects of the Ising model for ferromagnetism. I. A conjecture of Feynman on paths and graphs*. J. Math. Phys. **1** (1960), 202-217.
- [22] SHERMAN, S. *Combinatorial aspects of the Ising model for ferromagnetism. II. An analogue to the Witt identity*. Bull. Am. Math. Soc. **68** (1962), 225-229.
- [23] SHERMAN, S. *Addendum: Combinatorial aspects of the Ising model for ferromagnetism. I. A conjecture of Feynman on paths and graphs*. J. Math. Phys. **4** (1963), 1213-1214.
- [24] TRUDEAU, R. J. *Introduction to Graph Theory*. Dover Publications, INC, New York, 1993.
- [25] WITT, W. E. *Treue Darstellung Lie scher Ringe*. J. Reine Angew. Math. **177** (1937), 152-160.