

Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC.  
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas – CFM.  
Departamento de Matemática.

Trabalho de Conclusão II – TCC II.

**Problemas de transmissão e óptica geométrica**

Florianópolis, julho de 2009.

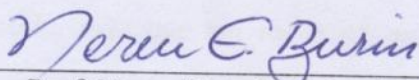
## **Problemas de transmissão e óptica geométrica**

**Acadêmico:** Diego Staub Felipe

**Matrícula:** 02133172 **Semestre:** 2009.01

**Professor Orientador:** Felix Pedro Quispe Gomez.

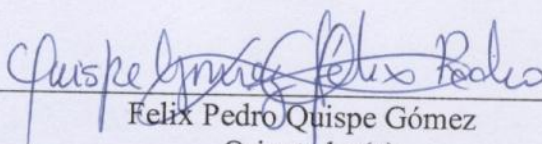
Esta monografia foi julgada como **TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO** no Curso de Matemática – Habilitação Licenciatura, e aprovada em sua forma final pela Banca Examinadora designada pela Portaria nº 19/CCM/09



---

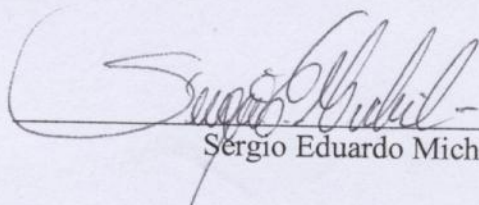
Prof. Nereu Estanisiau Burin  
Professor da disciplina

Banca Examinadora:



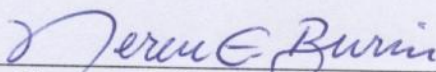
---

Felix Pedro Quispe Gómez  
Orientador(a)



---

Sergio Eduardo Michelin



---

Nereu Estanisiau Burin

*Agradecimentos:*

*Sou grato inicialmente a minha mãe que em todos os momentos do curso me incentivou a nunca desistir e a conquistar meus objetivos. A Universidade Federal de Santa Catarina que me deu a oportunidade de estudar em uma instituição gratuita e de qualidade. Aos meus colegas de faculdade do Centro Acadêmico em especial ao Luiz Fernando Nazari e a Felipe Ferronato Vargas que sempre estiveram do meu lado nesse caminho trilhado. Aos meus mestres Félix Gómez, que no momento quando não tinha para onde correr me acolheu e me ajudou, e ao professor Rubens Stark por sua transparência, amor e dedicação ao curso de matemática licenciatura, que trago hoje comigo.*

# 1. Sumário.

2. Introdução.....	05
3. Conceitos básicos de equações diferenciais.....	07
3.1 Principais equações diferenciais parciais.....	08
3.2 Solução de uma equação diferencial parcial linear.....	09
3.3 Condições de fronteira.....	10
3.4 Superposição de solução.....	11
4. A barreira de Tâmesis: um exemplo de controle ambiental.....	13
4.1 A equação da onda: As formulas de d'Alembert e D. Bernouilli.....	15
4.1.1 Cálculos e dedução das propostas das de soluções de D'Alambert e Bernoulli.....	18
5. A óptica Geométrica.....	25
5.1 Problemas de transmissão e interfases.....	27
5.2 Previsão e controle de terremotos.....	32
6. Problema inverso.....	34
7. Simulação numérica e ondas espúreas.....	37
8. Perspectivas futuras.....	46
9. Conclusão.....	50
10. Referências Bibliográficas.....	51

## 2. Introdução.

No século XVII se inicia o estudo de Equações Diferenciais Parciais com a criação do calculo diferencial e integral, a partir daí, desenvolveu-se no século XVIII varias área de aplicações das equações diferenciais parciais, uma delas foi motivada por d'Alembert e D. Bernouilli que obtiveram uma equação diferencial parcial que expressa a vibração em uma corda, a onda, assim estabelecendo os pilares fundamentais da análise matemática.

D'Bernouilli em 1753 obteve a solução de uma equação de uma corda vibrante.

$$u(x,t) = \sum_{k \geq 1} \left[ C_r \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{L}t\right) + D_r \cos\left(\frac{k\pi}{L}t\right) \right] \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$$

Deste modo se deram os primeiros passos no estabelecimento de um método clássico na resolução de uma EDP: o método de separação de variáveis de Fourier.

Cabe levantar porque este método ganha o nome de J. Fourier e não de D. Bernouilli, isso aconteceu porque J. Fourier no trabalho sobre equações do calor estabeleceu completamente os passos para sua resolução, enquanto D. Bernouilli resolveu intuitivamente, pois em seu tempo não havia claramente as noções de funções.

Sendo assim, as aplicações descobertas no século XVIII são utilizadas ate os dias atuais, umas dessas aplicações é utilizada na barreira de Tamésis em Londres que com as inundações constantes, construíram uma barreira contra as águas, sendo necessário a previsão das mares e tormentas, assim desenvolvendo o calculo das EDP's, ainda temos o crescimento na óptica geométrica que deduz a vibração de uma onda em  $\mathbf{R}^2$ , tendo como exemplo um “tambor” essa dedução é um comparativo para a previsão de terremotos.

Levantamos ainda neste trabalho a questão do desenvolvimento de simulações numéricas, hoje com o avanço nas áreas tecnológicas, obtemos uma grande potência de cálculo, e entramos no seguinte paradoxo: podemos simplesmente confiar em nosso crescente capacidade de calculo e de simulações numéricas?

Não é fácil responder essa pergunta, para responder com clareza é necessário realizar uma análise matemática rigorosa nos esquemas numéricos implantados no problema em questão. Assim veremos esta questão mais a fundo no capítulo de simulações numéricas e ainda algumas aproximações.

Por últimos observaremos as perspectivas futuras da teoria do controle, aonde esta está sendo aplicada e qual suas perspectivas, algumas das áreas aplicadas são: robótica, estruturas espaciais, sistemas energético, controle de combustão, controle de fluidos entre outros.

### 3. Conceitos Básicos

Em nossos capítulos estaremos estudando diversos tipos de equações diferenciais parciais (EDP), que são assim chamadas pois são equações que contém derivadas parciais, isto é, a variável dependente deve ser uma função de duas ou mais variáveis independentes, pois, caso contrário não haveria derivadas parciais. Por exemplo:

$$\partial_x u + 2x\partial_y u + \partial_z u = 4yu \quad (3.1)$$

$$\partial_x^2 u + \partial_y^2 u = 0 \quad (3.2)$$

onde  $x, y, z$  na equação (3.1) representam as variáveis independentes, enquanto  $u = u(x, y, z)$  a variável dependente. Já no caso (3.2),  $u$  é uma função de duas variáveis,  $u = u(x, y)$ .

Toda equação diferencial parcial possui uma ordem, que é estabelecida pela maior ordem da derivada da função dependente.

$$\partial_x^2 u + \partial_y^2 u + \partial_z^2 u = 0$$

A equação acima, mais conhecida como equação de Laplace em três variáveis, é um exemplo de equação de segunda ordem. Já a equação seguinte:

$$6y\partial_x u + x\partial_y u = u,$$

é um exemplo de equação de primeira ordem.

As equações diferenciais parciais além de serem classificadas por sua ordem, também são classificadas como não-lineares e lineares. Uma equação diferencial parcial linear é caracterizada pelo fato de que a variável dependente e suas derivadas estão no primeiro grau, e também por não ocorrer produto entre a variável dependente e suas derivadas parciais.

$$(\partial_x u)^2 + 2\partial_y u = 4yu \quad (3.3)$$



$$\partial_x^2 u + \partial_y^2 u = \frac{1}{k} \partial_t u \quad (3.4)$$

A equação (3.3) é um exemplo de uma equação não-linear, já a equação (3.4) conhecida como equação de condução ou difusão do calor é um caso de equação diferencial parcial linear.

No decorrer de nossos estudos estaremos dando ênfase a casos particulares de equações diferenciais parciais lineares que representam fenômenos físicos, deixando de lado as equações não-lineares.

Uma equação diferencial parcial linear pode ser classificada como homogênea e não-homogênea, e o que caracteriza esta equação ser homogênea é o fato de que cada termo da equação deve conter ou a variável dependente, ou uma das suas derivadas parciais.

$$\rho \partial_x^2 u = \lambda \partial_y u + 2u \quad (3.5)$$

A equação (3.5) cujo  $\rho$  e  $\lambda$  são constantes arbitrárias, representa uma equação linear homogênea. Enquanto a equação (2.6):

$$2\partial_x^2 u = \lambda \partial_y u + f(x, y) \quad (3.6)$$

onde  $f(x, y)$  é uma função dada, é uma equação linear não - homogênea .

E como no caso das equações diferenciais ordinárias lineares homogêneas, caso  $u_1, u_2, u_3 \dots, u_n$  forem  $n$  soluções de uma equação diferencial parcial linear homogênea, então uma combinação linear destas soluções

$$u = c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_3 + \dots + c_n u_n$$

onde os coeficientes  $c_1, c_2, c_3 \dots, c_n$  são constantes arbitrárias, também é solução da mesma equação diferencial. Chamamos este resultado de princípio de superposição. Mais adiante demonstraremos este princípio.

### 3.1 PRINCIPAIS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS

Muitas das equações diferenciais que estaremos estudando estarão representando fenômenos físicos, mostrando que as leis da física podem ser escritas em termos de equações diferenciais parciais.

Algumas destas equações são as seguintes:

- 1)  $-c^2 \Delta u = \partial_t^2 u$  equação da onda .
- 2)  $k \Delta u = \partial_t u$  equação de condução ou difusão do calor .
- 3)  $\Delta u = 0$  equação de Laplace .
- 4)  $\Delta u + \lambda u = 0$  equação de Helmholtz .
- 5)  $\Delta u = f(x, y, z)$  equação de Poisson .
- 6)  $p^2 \Delta^2 u = -\partial_t^2 u$  (equação bi-harmônica da onda) onde  $\Delta^2 u = \Delta(\Delta u)$ .
- 7)  $\Delta^2 u = 0$  (equação bi-harmônica)
- 8)  $\Delta u + \alpha [E - V(x, y, z)] u = 0$  (equação de Schrödinger)
- 9)  $\square u + \lambda^2 u = 0$  (equação de Klein-Gordon)

Em todas as equações  $\Delta$  é operador Laplaciano definido como:

$$\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 \quad (\text{em duas variáveis } x, y)$$

$$\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2 \quad \text{em três variáveis } x, y, z$$

dependendo do número de dimensões do espaço,  $\square$  é o operador D'Alembertiano, definido

$$\square = \Delta - \frac{1}{c^2} \partial_t^2, \quad t \text{ a variável do tempo, } e, c, k, \lambda, p, \alpha, E \text{ são constantes e } f \text{ e } V \text{ funções dadas.}$$

Lembrando que esta é uma pequena lista de equações diferenciais importantes na física matemática.

### 3.2 Solução de uma equação diferencial parcial linear.

Definimos como solução geral de uma EDP linear, uma solução da mesma que contenha funções arbitrárias, formando assim um conjunto de todas as soluções particulares da equação. Para explicar melhor consideramos o seguinte exemplo:

Seja

$$u(x, y) = f(xy) \quad (3.7)$$

onde  $f(xy)$  é uma função arbitrária de  $xy$ . Diferenciando  $u$  primeiramente em relação a  $x$  (2.9) e depois em relação a  $y$  (2.10) temos:

$$\partial_x u(x, y) = f'(xy)y \quad (3.8)$$

$$\partial_y u(x, y) = f'(xy)x \quad (3.9)$$

somando agora (3.8) com (3.9) encontramos:

$$\partial_x u(x, y) + \partial_y u(x, y) = f'(xy).(y + x)$$

sabendo que  $f'(xy) = \frac{\partial_x u}{y}$  por (3.9), tiramos a seguinte equação diferencial parcial

$$\partial_x u + \partial_y u = \frac{\partial_x u}{y} .(y + x)$$

$$\partial_x u + \partial_y u = \partial_x u + \frac{\partial_x u}{y} x$$

$$y\partial_y u = \partial_x ux \tag{3.10}$$

que tem como solução geral (3.8), pois dada qualquer função  $f(xy)$ ,  $u = f(xy)$  é solução desta equação. Por exemplo,

$$u = x.y \quad \text{e} \quad u = \text{sen}(x.y)$$

onde definimos  $u = x.y$  e  $u = \text{sen}(x.y)$  como soluções particulares.

### 3.3 Condições de Fronteira

As equações diferenciais parciais devem usualmente satisfazer certas exigências, como nas equações diferenciais ordinárias. Denominamos essas exigências de condições de fronteira.

Podemos dizer que uma equação diferencial parcial e um conjunto de condições de fronteiras podem representar um fenômeno físico, se esta tiver solução única, pois apresentando um conjunto de dados em um fenômeno físico estes nos levam à um único resultado, e também quando dada uma pequena mudança nas condições de fronteira conhecidas como: condições de contorno, resultam em apenas pequenos desvios na solução, pois as condições de fronteira são obtidas através de experiências que ocasionam pequenos erros, e esses erros não devem ocasionar grandes desvios nas soluções.

$$y\partial_y u = \partial_x ux$$

Procuramos agora uma solução que satisfaça as seguintes condições de fronteira

$$u(x, 0) = 1$$

$$u(0, y) = 1$$

$$\partial_x u(0, y) = y$$

podemos verificar facilmente que  $u(x, y) = \cos x.y$  satisfaz a equação e as condições de fronteira.

Não é fácil de se obter tipos de condições de fronteira que conduzam as equações diferenciais parciais lineares à soluções únicas e estáveis; este estudo é um pouco difícil, mas existem três tipos principais de condições que aparecem freqüentemente em estudos de fenômenos físicos:

Condições de Dirichlet, que é utilizada quando o fenômeno físico atua sobre toda a região de um corpo, onde são conhecidos os valores da função  $u$  em cada ponto da fronteira da região.

Condições de Neumann, que utilizada quando o fenômeno físico está atuando nas fronteiras de uma região, onde são conhecidos os valores da derivada normal  $\partial_\nu u$  da função na fronteira.

Condições de Cauchy, neste caso uma das variáveis independentes é a variável  $t$  (tempo) e são conhecidos os valores de  $u$  e de  $\partial_t u$  para  $t = 0$ .

Um exemplo de EDP sujeita as condições de fronteiras seria a seguinte

$$\partial_x^2 u = \frac{1}{c^2} \partial_t^2 u$$

$$u(x, 0) = \text{tg}(x)$$

$$\partial_t u(x, 0) = x$$

onde  $u = u(x, t)$  e como podemos notar as condições são do tipo de Cauchy.

### 3.4 Superposições de soluções

Definimos anteriormente o princípio da superposição, que diz que se  $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$  são  $n$  funções que satisfazem uma equação diferencial linear homogênea, então uma combinação linear destas funções

$$u = c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_3 + \dots + c_n u_n$$

onde  $c_i, (i = 1, 2, 3, \dots, n)$  são constantes, também será uma solução da equação.

Podemos verificar este princípio facilmente, pois se  $u_1, u_2$  são duas funções de um conjunto de funções e  $L$  um operador que tem as seguintes propriedades:

$$L(u_1 + u_2) = Lu_1 + Lu_2$$

$$L(c_1 u_1) = c_1 Lu_1$$

onde  $c_1$  é uma constante, denominamos  $L$  como sendo um operador linear e do mesmo modo podemos mostrar que se  $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$  são  $n$  funções de um mesmo conjunto e  $L$  um operador linear, então

$$L\left(\sum_{i=1}^n c_i u_i\right) = \sum_{i=1}^n c_i Lu_i$$

onde  $c_i$  são constantes. Se analisarmos agora  $L = \frac{d}{dx}$ , verificaremos que  $L$  é um operador linear sobre o conjunto de todas as funções de uma variável, diferenciável pelo menos uma vez. Denominamos este operador de operador diferencial linear. O mesmo acontece se  $L = \partial_x$ ,  $L$  será novamente um operador diferencial linear, mas agora do conjunto de todas as funções de duas ou mais variáveis independentes, que são diferenciáveis pelo menos uma vez em relação a qualquer variável. Então toda equação diferencial parcial linear homogênea pode ser escrita da seguinte forma

$$Lu = 0$$

onde  $L$  é um operador linear e  $u$  é variável independente. Um exemplo seria a equação a seguir

$$4\partial_x^2 u - \partial_t^2 u = 0$$

$$4\partial_x^2 - \partial_t^2 \quad u = 0$$

$$Lu = 0$$

onde  $L = 4\partial_x^2 - \partial_t^2$  é o operador diferencial linear da equação.

Agora se  $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$  forem soluções de uma EDP linear homogênea então

$$Lu_i = 0$$

e como  $L$  é um operador linear temos

$$c_i Lu_i = 0 \Rightarrow Lc_i u_i = 0$$

com  $i = 1, 2, 3, \dots, n$  e  $c_i$  uma constante, então:

$$\sum_{i=1}^n c_i Lu_i = L\left(\sum_{i=1}^n c_i u_i\right) = 0$$

Isto mostra que uma combinação linear arbitrária de soluções de uma EDP linear homogênea também é solução da equação, e, este é o princípio de superposição.

Este princípio é de grande utilidade, pois caso seja possível encontrar certo conjunto de soluções de uma equação diferencial parcial linear homogênea, talvez possamos encontrar uma combinação linear destas soluções que satisfaçam todas as condições de fronteiras impostas.

## **4.A barreira de Tâmesis: um exemplo de controle ambiental**

Para os que vivem e trabalham no litoral é importante a capacidade de prever os estados do mar. É relevante estar capacitado para as previsões não somente para os que navegam mas também para aqueles que habitam as costas, com o objetivo de proteger de possíveis de inundações. Estas se produzem através de complexas interações entre mareas, ondas e tormentas. Os ventos e as variações na previsão atmosférica devido a uma tormenta podem produzir elevações e depreciações de vários metros no nível do mar em um período de tempo que podem ir de varias horas a dois ou três dias. Os ventos também geram ondas em períodos de tempo de ate vinte segundos e longitudes de ate dezenas de metros. Os efeitos combinados dos fatores podem ocasionar um alto risco de destruição e inundações.

A amplitude do desastre depende frequentemente de um possível efeito de acumulação com as mares. Quando estas elevações e ondas são altas, o risco de inundação é evidentemente muito maior.

Este problema a chega a ser considerado como uma verdadeira prioridade em muitos lugares do nosso planeta. Sem ir muito longe, em Londres que tem constantes inundações regulares, algumas delas muito relevantes, devida a inundação inesperada do nível do Tamésis desde a idade média. As elevações das águas pode inclusive superar os dois metros do nível médio esperado.

Por outra parte, o nível médio da água na ponte de Londres se eleva 75 centímetros a cada século, por causa do derretimento das calotas polares, e esse problema se agrava cada vez mais.

O processo de como ocorrem essas inundações é o seguinte: Com as baixa pressão atmosférica na costa do Canadá, o mar se eleva uns 30 centímetros numa zona de 1600 kilometros de diâmetro. Esta elevação da água se move através do atlântico com uma velocidade de 80-90 kilometros por hora ate chegar ao norte da Inglaterra. Ocasionalmente, os ventos do norte podem empurrar esta elevação ao longo do mar do Norte enviando milhões de toneladas de água adicional ao rio acima no Tâmesis.

Em 1953 houve uma inundação desastrosa que afetou 300 pessoas e que cobriu de água 64.000 hectares. Neste momento, o governo britânico colocou a trabalhar um comitê

dirigido por Lord Waverley, que então manifestou a necessidade de algum tipo de mecanismo de defesa. Mas não havia um consenso sobre qual era a melhor solução. Finalmente em 1970 se tomou a decisão de construir uma barreira que se fecha quando a previsão indicam um grande aumento do nível médio da água.

Após 8 anos com mais de 4000 pessoas trabalhando inaugurou-se em 1984 a barreira contra as águas. A barreira esta constituída por 10 enormes barreiras de acessos construídas sobre uma estrutura cravada no fundo do rio e dotadas de maquinário que permite o tráfico com normalidade quando a barreira esta aberta, e é fechada somente em caso de necessidade. Desde que foi construída, a barreira foi fechada em três ocasiões.

Obviamente, a barreira é fechada o mínimo de vezes possível pois quando fechada interfere diretamente na navegação, causando perdas econômicas e transtornos importantes e, uma vez fechada, não pode ser aberta enquanto o nível do mar não se igualar em ambos os lados da barreira, esse tempo dura em média 8 horas. Por outro lado, se necessita de duas horas para fechá-la, assim, sendo, não se pode esperar pelo contato visual do aumento do nível das águas, sendo então, necessário trabalhar com base nas previsões.

As comportas são fechadas somente quando é imprescindível, baseado nos métodos de previsão sumamente viáveis.

Na atualidade, as previsões se realizam mediante modelos matemáticos que combinam um modelo para as mares em torno da ilha Britânica e um modelo de previsão meteorológica. Deste modo se obtém previsões com 30 horas de antecedência, recebendo assim em cada hora informações de pontos selecionados em torno da costa.

Este modelo é simulado em supercomputadores da Oficina Meteorológica Britânica e os resultados se transferem ao operador da barreira de Támesis. Estes dados se transladam a outro modelo, este último em maior escala, que intervém no Mar do Norte, e no estuário do Tamésis e na parte baixa do rio Tamésis que tem contato com as mares.

Os resultados obtidos se exibem e se comparam com as previsões médias e, em vista do resultado, as autoridades das barreiras estão habilitadas a tomar as decisões cabíveis.

Os modelos que são usados na atualidade são sistemas de EDP que se resolvem mediante métodos numéricos em diferenças finitas. Desde os anos sessenta, tanto os modelos como os métodos numéricos vêm evoluindo. Este, junto com a maior capacidade de cálculo dos computadores que se dispõe, permitindo cálculos sumamente viáveis.



Apesar de a barreira responder as necessidades de hoje, o problema não esta resolvidas a longo prazo. Uma vez que o nível médio do rio sobe 75 centímetros a cada século. Assim, com o tempo, este método deixará de ser eficiente.

Por fim, embora este fenômeno não seja freqüente, tem-se que com o tempo as baixas no nível da água possam ocasionar encalhamento de navios.

#### 4.1 A equação da onda: As formulas de D'Alembert e D. Bernoulli

A equação da onda é sem duvida um dos exemplos mais clássicos e relevantes ao que se recorre nos estudos de equações em derivadas parciais (EDP). Não sendo um exemplo meramente acadêmico, nem muito menos. Os primeiros estudos sobre as equações aos que nos referimos mais adiante, se realizaram no século XVIII, época que estavam se estabelecendo os pilares fundamentais da análise matemática, tal como é entendida nos dias de hoje. Os desenvolvimentos posteriores foram associados a avanços importantes na Análise de Fourier, Óptica Geométrica, Analise numéricas, etc. de modo que, pode-se dizer que a equação da onda tem sido um dos protagonistas, mas destacados da matemática nos últimos séculos.

Em uma dimensão espacial, a equação da onda é um modelo simples para a descrição das vibrações de uma corda, enquanto que em varias dimensões espaciais descreve vibrações de um tambor e a propagação das ondas acústicas.

Comecemos considerando a equação da onda:

$$\left. \begin{array}{l} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0 \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 \\ u(x,0) = u_0(x), u_t(x,0) = u_1(x) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 0 < x < l, \quad t > 0 \\ t > 0 \\ 0 < x < l \end{array} \quad (4.1)$$

O sistema (4.1) acima é um modelo simples para a análise das vibrações de uma corda de longitude  $l$  (que ocupa o intervalo espacial  $x$  em  $]0, l[$ ) e seus extremos  $x = 0$  e  $x = l$ . A incógnita  $u = u(x,t)$ , que depende do espaço  $x$  e do tempo  $t$ , denota a altura a que se encontra o ponto  $x$  da corda (no intervalo  $]0, l[$ ), num instante de tempo  $t$ . Se trata de uma equação diferencial em derivadas parciais de ordem dois, complementada por duas condições de contorno que refletem que a corda esta fixada em seus extremos.

Na última equação de (4.1) se colocam as condições iniciais que a solução deve satisfazer no instante  $t$ . Tratar-se de uma equação diferencial de segunda ordem no tempo e impomos tanto a configuração inicial de  $u$ ,  $u_0$ , como a velocidade inicial  $u_1$

**Notação.** Utilizamos o símbolo  $\partial$  para denotar o operador de derivação parcial com relação as variáveis  $t$  e  $x$ .

Este é um dos modelos mais clássico que se analisa sistematicamente em todos os textos básicos de Equações em Derivadas Parciais.

Em 1747 D'Alembert em [20] e [21] propôs a seguinte expressão para a solução geral de uma equação da onda sem condições de contorno

$$u(x,t) = f(x+t) + g(x-t) \quad (4.2)$$

Convém observar que a expressão da solução  $u$  que (4.2) proporciona não é mais que a superposição de duas ondas de *transporte*:  $f(x+t)$  que se desloca sem deformar a velocidade um na direção negativa no eixo  $x$ , enquanto que  $g(x-t)$  desloca-se a direita. Não é difícil chegar a conclusão de que (4.2) proporciona a expressão de uma solução geral da equação da onda.

Em efeito, basta observar que o operador diferencial  $\partial_t^2 - \partial_x^2$  envolvido em uma equação de onda se pode fatorar como:

$$\partial_t^2 - \partial_x^2 = (\partial_t + \partial_x)(\partial_t - \partial_x) \quad (4.3)$$

Vemos então que as duas ondas de transporte se decompõem em duas soluções, que são as seguintes:

$$(\partial_t + \partial_x)\tilde{u} = 0; \quad (\partial_t - \partial_x)\tilde{u} = 0 \quad (4.4)$$

respectivamente. Em efeito, a solução da primeira equação é da forma  $u = g(x-t)$  enquanto que a da segunda é  $u = f(x+t)$ .

Posteriormente, D. Bernoulli em 1753 em [2] obteve a solução da equação de uma corda vibrante da seguinte forma:

$$u(x,t) = \sum_{k \geq 1} \left[ C_r \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{l}t\right) + D_r \cos\left(\frac{k\pi}{l}t\right) \right] \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{l}x\right) \quad (4.5)$$

Deste modo se deram os primeiros passos no estabelecimento de um dos métodos clássicos na resolução de uma EDP: o método de separação de variáveis de Fourier.

Cabe questionar por que este método leva o nome de J. Fourier se D. Bernoulli não é utilizado. Isto é porque somente no trabalho de 1822 de J. Fourier sobre a equação do calor [9], ficou completamente estabelecido o programa a seguir na hora de resolver uma EDP através deste método que envolve varias etapas:

- 1) Decomposição dos dados do problema em series de Fourier.
- 2) Obtenção da evolução de cada coeficiente de Fourier em função da EDP e dos dados.
- 3) Reconstrução da solução como superposição de cada uma das componentes de Fourier (Série de Fourier).

Quando D. Bernoulli obteve efetivamente uma expressão do tipo (4.5), em seu tempo, não estavam bem claras as noções de função e de representação analítica de uma função.

Somente J. Fourier indicou com clareza como, dada uma função, se pode calcular os coeficientes de Fourier. Deste modo estabeleceu as bases de uma das heranças mais importantes da matemática: A análise de Fourier ou Análise Harmônica.

Uma primeira questão importante que se levantou de maneira natural é a coincidência das expressões do tipo (4.2) e (4.5). Na verdade, na medida em que para dados iniciais fixados (proposição e velocidade inicial de uma corda) a solução de (4.1) é única, e se as representações (4.2) e (4.5) são validas, ambas tem de coincidir.

A afirmação anterior é verdadeira. Considerando um dos termos envolvidos em (4.5). Por exemplo  $\cos\left(\frac{k\pi}{l}t\right)\text{sen}\left(\frac{k\pi}{l}x\right)$ . Utilizados nas formulas trigonométricas habituais vemos que

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{k\pi}{l}t\right)\text{sen}\left(\frac{k\pi}{l}x\right) &= \frac{1}{2}\left[\text{sen}\left(\frac{k\pi}{l}(x+t)\right) + \text{sen}\left(\frac{k\pi}{l}(x-t)\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[f_k(x+t) + f_k(x-t)\right] \end{aligned}$$

De onde:

$$f_k(z) = \text{sen}\left(\frac{k\pi}{l}z\right)$$

Tratando de modo análogo os demais termos de (4.5) vemos que na verdade, a função desenvolvida em series de Fourier (4.5) pode ser escrita na forma de (4.2) como superposições de duas ondas de transporte.

Esta simples observação ilustra o modo em que num desenvolvimento em séries de Fourier pode detectar-se a velocidade a que se propaga a função representada por aquela série. Efetivamente, como mencionamos anteriormente, como se desprende da fórmula de d'Alembert (4.2), a velocidade de propagação no modelo (4.1) é um.

Isto pode observar-se também no desenvolvimento das series de Fourier (4.5) por um simples fato de que a uma oscilação espacial  $\text{sen}\left(\frac{k\pi x}{l}\right)$  corresponde uma resposta temporal

$$\text{na forma } C_r \text{sen}\left(\frac{\pi t}{l}\right) \pm D_r \cos\left(\frac{\pi t}{l}\right).$$

Neste caso, o dado inicial é na forma:

$$u(x,0) = \sum_{k \geq 1} a_k e^{ik\pi x} \quad (4.6)$$

A solução correspondente é:

$$u(x,t) = \sum a_k e^{ek^3 \pi^3 t} e^{ik\pi x} \quad (4.7)$$

Observe então que as diferentes componentes de Fourier da solução são da forma

$$e^{ik^3 \pi^3 t} e^{ik\pi x} = f_k(2\pi^2 t + x) \text{ cos } f_k(z) = e^{ik\pi z}$$

Portanto, cada componente de Fourier se propaga numa velocidade distinta  $-k^2 \pi^2$ .

#### 4.1 Cálculos e dedução das propostas das soluções de D’Alambert e Bernoulli

Vamos utilizar agora o método de Fourier para achar a solução da equação diferencial parcial linear

$$\partial_x^2 u = \partial_t^2 u \quad (4.8)$$

mais conhecida como equação da onda unidimensional, com as seguintes condições de fronteiras de Dirichlet

$$\begin{aligned} u(0,t) = u(l,t) &= 0, & t \geq 0, \\ u(x,0) &= f(x), & 0 \leq x \leq l, \\ \partial_t u(x,0) &= g(x), & 0 \leq x \leq l, \end{aligned}$$

onde  $f$  e  $g$  são funções dadas, e  $l$  uma constante dada.

*Solução:* Para aplicar o método de Fourier vamos admitir uma solução que seja separável da forma:

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

onde  $X$  é uma função de  $x$  e  $T$  uma função somente de  $t$ . Assim a equação (4.8) ficaria da seguinte forma:

$$\partial_x^2 X.T = \partial_t^2 T.X$$

vamos agora multiplicar ambos os lados por  $\frac{1}{X.T}$ , com  $X.T \neq 0$  então teremos o seguinte:

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2}$$

Se analisarmos, veremos que do lado esquerdo da igualdade teremos uma função somente de  $x$  e do lado direito uma função que só depende de  $t$ , então podemos afirmar que para a igualdade ser verdadeira é necessário que

$$\begin{aligned} \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} &= k, \\ \frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2} &= k, \end{aligned}$$

onde  $k$  é uma constante de separação. Podemos notar agora que tanto a primeira equação como a segunda são equações diferenciais ordinárias

$$\frac{d^2X}{dx^2} = kX, \quad (4.9)$$

$$\frac{d^2T}{dt^2} = kT, \quad (4.10)$$

podemos descobrir as funções  $X$  e  $T$  resolvendo cada uma destas equações diferenciais ordinárias, mas não podemos esquecer que a equação  $u(x,t) = X(x)T(t)$  deve satisfazer as condições de fronteira então

$$\begin{aligned} u(0,t) &= X(0)T(t) = 0, & \forall t, \\ u(l,t) &= X(l)T(t) = 0, & \forall t, \end{aligned}$$

tomando  $T \neq 0$ , pois caso contrário iríamos nos deparar com a solução trivial  $u(x,t) = 0$ , temos

$$X(0) = X(l) = 0, \quad (4.11)$$

caso  $k$  seja zero, temos como solução da equação

$$X(x) = Ax + B,$$

como  $X(0) = X(l) = 0$ , concluímos que  $A = B = 0$  e assim caímos novamente na solução trivial.

Caso  $k$  seja positivo ( $k = w^2$ ), como falamos vamos nos deparar com uma equação diferencial ordinária linear de segunda ordem (4.9), que tem o seguinte polinômio característico

$$\begin{aligned} r^2 + 0.r - w^2 &= 0 \\ r^2 - w^2 &= 0 \end{aligned}$$

onde as raízes deste polinômio são  $w$ , e  $-w$  que são raízes reais, então duas soluções particulares da equação (4.9) são

$$\begin{aligned} X(x) &= e^{wx} \\ X(x) &= e^{-wx} \end{aligned}$$

e pelo princípio da superposição temos que

$$X(x) = Ae^{wx} + Be^{-wx},$$

também é solução da equação (4.9), e neste caso é a solução geral, pois  $e^{wx}$ ,  $e^{-wx}$  são linearmente independentes, para confirmar isto basta calcular o Wronskiano e verificar que

ele resulta em um número diferente de zero implicando que as duas funções são linearmente independentes.

$$\text{Wronskiano}(f, g) = \det \begin{bmatrix} f & g \\ f' & g' \end{bmatrix}$$

e retomando temos novamente por (4.11) que  $A = B = 0$  e novamente nos deparamos com a solução  $u(x, t) = 0$ .

Caso  $k$  seja negativo ( $k = -w^2$ ), neste caso o polinômio característico da equação (4.9) é o seguinte

$$r^2 + 0.r + w^2 = 0$$

$$r^2 + w^2 = 0$$

onde as raízes deste polinômio são  $wi$ , e  $-wi$  que são raízes complexas, então duas soluções particulares da equação (4.9) são

$$X(x) = \cos wx$$

$$X(x) = \text{sen } wx$$

resolvendo novamente o Wronskiano das funções acima, veremos que elas são linearmente independentes e então encontramos como solução geral da equação (4.9)

$$X(x) = A \cos wx + B \text{sen } wx,$$

e que pelas condições de fronteira, temos

$$X(0) = A \cos w0 + B \text{sen } w0$$

$$0 = A \cos 0 + B \text{sen } 0$$

$$0 = A$$

$$X(l) = A \cos wl + B \text{sen } wl$$

$$0 = A \cos wl + B \text{sen } wl$$

$$0 = B \text{sen } wl$$

Como não queremos  $B = 0$ , pois senão teremos novamente a solução trivial, tiramos que

$$\text{sen } wl = 0$$

Esta igualdade implica que

$$w = \frac{r\pi}{l}, \quad r = 1, 2, 3... \quad (4.12)$$

excluimos o caso  $r = 0$ , que nos dá  $w = 0$  e resultaria novamente na solução trivial.

Resolvendo agora a equação (4.10), com  $k = -w^2$ , novamente o polinômio característico teria duas raízes complexas,  $wci, -wci$ , e fazendo os devidos passos, encontramos a seguinte equação geral.

$$T(t) = C \cos wct + D \sen wct$$

onde  $C$  e  $D$  são constantes de integração. Usando agora nossa idéia inicial que  $u(x, t) = X(x)T(t)$  temos

$$u(x, t) = \sen wx.(C \cos wct + D \sen wct) \quad (4.13)$$

note que a constante arbitrária  $B$  foi igualada a 1, para facilitar os cálculos.

Mas olhando novamente para (4.12), notamos que  $w$  assume uma infinidade de valores, e pra cada valor de  $w$  formamos uma solução particular que tem a forma (4.13)

$$\begin{aligned} w_1 = \frac{\pi}{l}, \quad u_1(x, t) &= \sen \frac{\pi x}{l} .(C_1 \cos \frac{\pi ct}{l} + D_1 \sen \frac{\pi ct}{l}), \\ w_2 = \frac{2\pi}{l}, \quad u_2(x, t) &= \sen \frac{2\pi x}{l} .(C_2 \cos \frac{2\pi ct}{l} + D_2 \sen \frac{2\pi ct}{l}), \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ w_r = \frac{r\pi}{l}, \quad u_r(x, t) &= \sen \frac{r\pi x}{l} .(C_r \cos \frac{r\pi ct}{l} + D_r \sen \frac{r\pi ct}{l}), \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned} \quad (4.14)$$

onde  $C_1, C_2, C_3, \dots, C_r, \dots, D_1, D_2, \dots, D_r, \dots$  são constantes arbitrárias. Cada uma destas expressões de  $u(x, t)$  acima são soluções da EDP linear (4.8), e estas satisfazem a condição de fronteira  $u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad t \geq 0$ . Agora pelo princípio da superposição podemos afirmar que qualquer combinação linear destas soluções também é solução da equação da onda (3.1), ou seja, a seguinte combinação linear também é solução

$$u(x, t) = \sum_{r=1}^{\infty} \left( C_r \cos \frac{r\pi ct}{l} + D_r \sen \frac{r\pi ct}{l} \right) \sen \frac{r\pi x}{l} \quad (4.15)$$

e esta é a solução geral, satisfazendo como dito antes, apenas a seguinte condição de fronteira  $u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad t \geq 0$ . Agora vamos satisfazer as condições



$$\begin{aligned} u(x,0) &= f(x), & 0 \leq x \leq l, \\ \partial_t u(x,0) &= g(x), & 0 \leq x \leq l, \end{aligned}$$

e estas condições como veremos determinaram a constantes arbitrárias  $C_r$  e  $D_r$ .

Consideramos primeiramente  $u(x,0) = f(x)$ ,  $0 \leq x \leq l$ , então temos (4.15) em  $t = 0$

$$\begin{aligned} u(x,0) &= \sum_{r=1}^{\infty} \left( C_r \cos \frac{r\pi c \cdot 0}{l} + D_r \operatorname{sen} \frac{r\pi c \cdot 0}{l} \right) \operatorname{sen} \frac{r\pi x}{l} \\ u(x,0) &= \sum_{r=1}^{\infty} C_r \cos 0 + D_r \operatorname{sen} 0 \operatorname{sen} \frac{r\pi x}{l} \\ u(x,0) &= \sum_{r=1}^{\infty} C_r \operatorname{sen} \frac{r\pi x}{l} \end{aligned}$$

e substituindo  $u(x,0) = f(x)$  temos

$$f(x) = \sum_{r=1}^{\infty} C_r \operatorname{sen} \frac{r\pi x}{l} \quad (4.16)$$

Agora utilizando a última condição de fronteira  $\partial_t u(x,0) = g(x)$ ,  $0 \leq x \leq l$ , para descobrir  $D_r$  vamos derivar (4.15) em relação a  $t$  e aplicar em  $t = 0$ . Assim teremos

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{r=1}^{\infty} \left( C_r \cos \frac{r\pi ct}{l} + D_r \operatorname{sen} \frac{r\pi ct}{l} \right) \operatorname{sen} \frac{r\pi x}{l} \\ \partial_t u(x,t) &= \sum_{r=1}^{\infty} \left( C_r \cdot \left( -\operatorname{sen} \frac{r\pi ct}{l} \right) \cdot \frac{r\pi c}{l} + D_r \cdot \left( \cos \frac{r\pi ct}{l} \right) \cdot \frac{r\pi c}{l} \right) \operatorname{sen} \frac{r\pi x}{l} \\ \partial_t u(x,0) &= \sum_{r=1}^{\infty} \left( C_r \cdot \left( -\operatorname{sen} \frac{r\pi c \cdot 0}{l} \right) \cdot \frac{r\pi c}{l} + D_r \cdot \left( \cos \frac{r\pi c \cdot 0}{l} \right) \cdot \frac{r\pi c}{l} \right) \operatorname{sen} \frac{r\pi x}{l} \\ \partial_t u(x,0) &= \sum_{r=1}^{\infty} \left( C_r \cdot \left( -\operatorname{sen} 0 \right) \cdot \frac{r\pi c}{l} + D_r \cdot \left( \cos 0 \right) \cdot \frac{r\pi c}{l} \right) \operatorname{sen} \frac{r\pi x}{l} \\ \partial_t u(x,0) &= \sum_{r=1}^{\infty} D_r \cdot \frac{r\pi c}{l} \operatorname{sen} \frac{r\pi x}{l} \\ \partial_t u(x,0) &= \frac{\pi c}{l} \sum_{r=1}^{\infty} D_r \cdot r \operatorname{sen} \frac{r\pi x}{l} \end{aligned}$$

e como  $\partial_t u(x,0) = g(x)$ ,  $0 \leq x \leq l$ , então

$$g(x) = \frac{\pi c}{l} \sum_{r=1}^{\infty} D_r \cdot r \operatorname{sen} \frac{r\pi x}{l}. \quad (4.17)$$

Agora os coeficientes  $C_r$  e  $D_r$  podem ser determinados através de (4.16) e (4.1.10) respectivamente, para isso utilizaremos uma técnica de séries de Fourier (que será comentada no próximo tópico) e assim teremos,

$$C_r = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \operatorname{sen} \frac{r\pi x}{l} dx \quad (4.18)$$

$$D_r = \frac{2}{r\pi c} \int_0^l g(x) \operatorname{sen} \frac{r\pi x}{l} dx \quad (4.19)$$

onde  $r = 1, 2, 3, \dots$ .

Agora substituindo em (4.15) as constantes  $C_r$  e  $D_r$  temos

$$u(x, t) = \sum_{r=1}^{\infty} \left\{ \left[ \frac{2}{l} \int_0^l f(x') \operatorname{sen} \frac{r\pi x'}{l} dx' \right] \cos \frac{r\pi ct}{l} \cdot \operatorname{sen} \frac{r\pi x}{l} + \left[ \frac{2}{r\pi c} \int_0^l g(x') \operatorname{sen} \frac{r\pi x'}{l} dx' \right] \operatorname{sen} \frac{r\pi ct}{l} \cdot \operatorname{sen} \frac{r\pi x}{l} \right\}$$

onde  $x'$  é a variável de integração e denotamos assim para não confundirmos com  $x$  que é a variável independente. Esta função é solução geral da equação da onda (4.8) com as seguintes condições de fronteira

$$\begin{aligned} u(0, t) = u(l, t) &= 0, & t \geq 0, \\ u(x, 0) &= f(x), & 0 \leq x \leq l, \\ \partial_t u(x, 0) &= g(x), & 0 \leq x \leq l. \end{aligned}$$

Se observa assim mesmo que na equação da onda considerada existe uma ausência de *dispersão*, entendendo por *dispersão* o fenômeno segundo o qual os diferentes componentes de Fourier se propagam a velocidades distintas, tal como ocorre no clássico modelo de Korteweg-de Vries para o avanço das ondas ou na equação de Schrodinger.

Evidentemente, os efeitos dispersivos fazem que a forma da solução mude completamente no tempo.

## 5.A óptica Geométrica

A expressão (4.2) da solução da equação da onda como superposição de duas ondas de transporte sinaliza que no modelo (4.1) a informação se propaga ao longo das curvas características. As curvas características são poligonais por seções no espaço-tempo constituídas por segmentos pendentes  $\pm 1$  que se refletem na fronteira da corda (tanto no extremo  $x = 0$  e  $x = L$ ). (veja na fig. 1)

A mesma filosofia é válida em várias dimensões espaciais. Consideramos por exemplo as vibrações de uma membrana ou tambor que ocupa um aberto  $\Omega$  de  $\mathbf{R}^2$ . Neste caso, se  $u = u(x, y, t)$  representa a deformação da membrana, isto é, a altura a que se encontra o ponto  $(x, y)$  da membrana no instante  $t$ , o sistema que descreve a evolução de  $u$  vem dado pela equação da onda bidimensional:

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t^2 u - \Delta u = 0 \\ u = 0 \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y) \quad \partial_t u(x, y, 0) = u_1(x, y) \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} (x, y) \in \Omega, \quad t > 0 \\ (x, y) \in \partial\Omega, \quad t > 0 \\ (x, y) \in \Omega \end{array} \right\} \quad (5.1)$$

Em (5.1) o símbolo  $\Delta$  denota o *operador* de Laplace

$$\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 \quad (5.2)$$

A primeira equação de (5.1) é a equação da onda bidimensional. A segunda equação de (5.1) proporciona uma *condição de contorno* que neste caso representa que a membrana está fixada na sua borda (como no caso de um tambor). As duas últimas condições estabelecem os dados iniciais que proporcionam a configuração e velocidade inicial da membrana no instante  $t = 0$  e que permite determinar de maneira única a solução  $u$ .

Também no caso da equação da onda bidimensional ou inclusive em mais de uma dimensões espaciais a evolução subjacente no modelo (5.1) pode estender-se através de uma propagação ao longo das curvas ou raios característicos. Embora, com o objetivo de definir com clareza o que é um raio devemos utilizar nas noções básicas da *Óptica Geométrica*. Um raio é uma poligonal por seções que no interior da membrana  $\Omega$  se propaga no espaço tempo em uma direção constante e a velocidade um. Porém, ao alcançar

a fronteira o raio reflete segundo as leis da óptica geométrica: ângulo de incidência igual ao ângulo de reflexão.

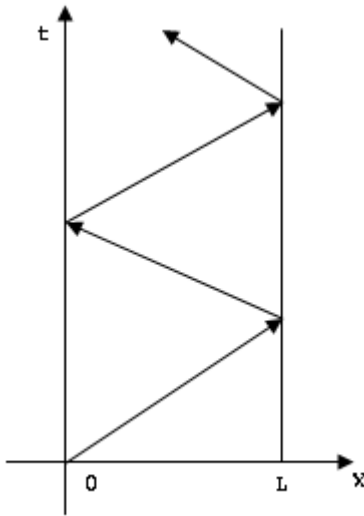


Figura 1

Convêm observar que esta lei de propagação e reflexão está bem definida sempre e quando o raio não seja tangente a fronteira de  $\Omega$  em cujo caso podem duas coisas acontecer. O raio não se modifica ao tocar a fronteira (raios rasantes) ou o raio entra na fronteira e adapta sua forma curva ate sair novamente em um ponto de inflexão da fronteira.

Deste modo temos definido os raios. Porém, o análise da solução do modelo (5.1) ao longo dos raios esta longe de ser tão simples como em uma dimensão espacial se manifestou através da formula de d'Alembert (4.2). Na realidade essa análise exige desenvolvimentos assintóticos sofisticados. Pode-se consultar [9], [10] e [11].

Mas, até agora temos falado mais da propagação de ondas em um médio homogêneo, constituído por um único material distribuído com uma densidade constante sobre um domínio  $\Omega$ . Como descrevemos seguidamente, no âmbito dos *médios heterogêneos*, parte do dito ate agora deixa de ser válido e surgem novos fenômenos devido ao comportamento das ondas nas *interfaces*, isto é, nos lugares onde os materiais ou sua densidade mudam.

## 5.1 Problemas de transmissão e interfaces

Com o objetivo de ilustrar estes novos fenômenos consideremos o exemplo de um tambor  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^2$  constituído por dois materiais. O interno que ocupa a região central  $\Omega_i$  e o externo que ocupa a coroa  $\Omega_e$ .

Suponha que em  $\Omega_i$  a velocidade de propagação das ondas seja  $a_i$ , enquanto que em  $\Omega_e$  a velocidade é  $a_e$ , com  $a_i > 0$ ,  $a_e > 0$  e  $a_i \neq a_e$ . Para descobrir as vibrações deste tambor convém introduzir as funções  $u_i = u_i(\mathbf{x}, y, t)$  e  $u_e = u_e(\mathbf{x}, y, t)$ , definidas em  $\Omega_i$  e  $\Omega_e$  respectivamente. Essas funções vão resolver as equações:

$$\partial_t^2 u_i - a_i^2 \Delta u_i = 0, \quad (\mathbf{x}, y) \in \Omega_i, \quad t > 0 \quad (5.3)$$

$$\partial_t^2 u_e - a_e^2 \Delta u_e = 0, \quad (\mathbf{x}, y) \in \Omega_e, \quad t > 0 \quad (5.4)$$

Alem disso, se supormos que o tambor esta fixado em sua borda externa  $\Gamma$  devemos impor condições de contorno

$$u_e = 0, \quad (\mathbf{x}, y) \in \Gamma, \quad t > 0 \quad (5.5)$$

Mas o sistema não estará completo, pois devemos introduzir também as *condições de interface ou de transmissão* na fronteira comum  $\gamma$ . Com o objetivo de ambas as partes do tambor permaneçam unidas ao longo das vibrações devemos impor as “condições de continuidade dos deslocamentos:”

$$u_i = u_e, \quad (\mathbf{x}, y) \in \gamma, \quad t > 0 \quad (5.6)$$

Também devemos ter as mesmas tensões no tambor em ambos os lados  $\gamma$ . Obtemos assim a condição:

$$a_i \partial_n u_i = a_e \partial_n u_e, \quad (\mathbf{x}, y) \in \gamma, \quad t > 0 \quad (5.7)$$

sendo  $n$  o vetor normal unitário a  $\gamma$  que aponta ao exterior de  $\Omega_e$ , de modo que  $\partial / \partial n$  denota a derivada normal em essa direção, isto é,

$$\partial_n f = \nabla f \cdot n \quad (5.8)$$

sendo ‘.’ o produto escalar Euclidiano.

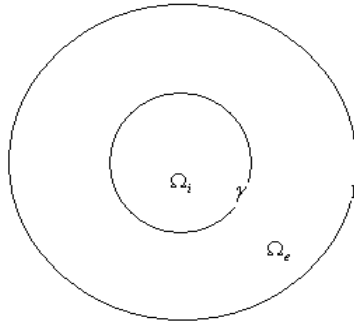


Figura 2

A noção de raio ou de curva característica deve ser modificada de acordo com as condições de transmissão (5.6) - (5.7). Consideremos por exemplo um raio que sai de um ponto de  $\Omega_i$  em uma determinada direção. Enquanto o raio permanece em  $\Omega_i$  se trata de um segmento retilíneo que se translada a uma velocidade  $a_i$ . Ao fim de um certo tempo o raio alcança a interface  $\gamma$ . Neste momento ficam essencialmente três possibilidades:

- (a) O raio se reflete segundo as leis da óptica geométrica em  $\Omega_i$
- (b) O raio se refrata passando a  $\Omega_e$
- (c) O raio se divide em dois. Um raio refratado que passa a  $\Omega_e$  e outro refletido em  $\Omega_i$ .

Convêm recordar que o ângulo  $\theta_e$  de refração em função do ângulo de incidência  $\theta_i$  vem dado por uma formula

$$a_i |\text{sen} \theta_e| = a_e |\text{sen} \theta_i| \quad (5.9)$$

Denominada lei de “Snell” e que Fermat justificou através de um princípio variacional (as ondas recorrem o caminho em que o tempo invertido é mínimo possível). A fórmula (5.9) se desprende em particular quando

$$a_e > a_i \quad (5.10)$$

se o raio proveniente de  $\Omega_i$  incide sobre a interface  $\gamma$  de maneira quase tangente de modo que  $|\text{sen}\theta_i|$  seja muito próximo da unidade, então

$$a_e |\text{sen}\theta_i| > a_i > a_i |\text{sen}\theta_e| \quad (5.11)$$

Quando (5.11) ocorre, a equação (5.9) evidentemente não admite solução  $\theta_e$ . Por tanto não existe direção de refração e o raio é completamente refletido em  $\Omega_i$ . Este fato, em geometrias adequadas ( $\Omega_i$  convexo, por exemplo), pode dar lugar a raios que permaneçam eternamente capturados no meio  $\Omega_i$ .

Isto pode ser interpretado de duas maneiras distintas, se bem equivalentes. Como dizemos anteriormente, há raios e, portanto vibrações do tambor que permanecem capturadas em  $\Omega_i$ . Visto de outro modo, há vibrações que são invisíveis ou imperceptíveis desde o médio exterior  $\Omega_e$ .

Este fato tem conseqüências evidentes em muitos problemas inversos ou de controle que se colocam no marco das vibrações em “médios heterogêneos”.

Na seguinte seção descobriremos algumas conseqüências importantes na propagação de sinais sísmicos.

Convêm, contudo fazer uma explanação. As vibrações que se localizam em  $\Omega_i$  não estão 100% nela. Isto é, estas vibrações dão também lugar a uma pequena vibração da membrana exterior  $\Omega_e$ . O que ocorre é que a razão entre a energia de vibração em  $\Omega_e$  e a vibração em  $\Omega_i$  pode fazer-se mais e mais pequeno a medida que a vibração se concentra

ao longo do raio capturado em  $\Omega_i$ . O ínfimo dessa razão é portanto zero, o qual não garante que há vibrações que deixam imóvel  $\Omega_e$ . De fato este tipo de vibrações (aquelas nas que a coroa exterior na membrana  $\Omega_e$  permanece imóvel) não pode existir como se deduz facilmente do Teorema de unicidade de Holmgren. Ver [12].

O teorema de Unicidade de Holmgren é uma conseqüência do celebre Teorema de Cauchy-Kowaleskaya. Nesse teorema Sonia Kowalesvskaya, na segunda metade do século XIX, terminou com êxito o programa de resolução de equações diferenciais ordinárias (EDO) iniciado por Cauchy mediante desenvolvimento em solução de EDO's por séries de potências. A idéia de Cauchy, que descrevemos brevemente, hoje em dia para nós pode resultar muito natural se bem que no seu momento significava uma autêntica revolução.

Consideremos uma EDO linear onde os coeficientes como os dados são funções analíticas reais. Isto nos permite desenvolvê-la em séries de potências. Busquemos então soluções do problema de valores iniciais em esta mesma classe de funções analíticas. Para encontrá-las basta determinar os sucessivos coeficientes do desenvolvimento em séries de potências da solução. Isto pode fazer-se de forma recorrente a partir do desenvolvimento dos coeficientes da equação e dos dados. Portanto, não é difícil convencer-se que a expressão dos coeficientes se complica a medida que avançamos na recorrência. O interessante deste método é que, graças ao critério  $M$  de Weierstrass, se pode provar sem demasiada dificuldade a convergência local da nova série de solução. Deste modo se produziu um avanço notável na teoria das EDOs: O problema de valores iniciais para uma equação linear com coeficientes analíticos admite uma única solução local analítica. O método proposto por Cauchy proporciona assim mesmo um verdadeiro método de cálculo efetivo da solução.

Era sumamente natural pensar em estender este método ao marco da resolução do problema de Cauchy para EDP. Mas nessa nova extensão surgia uma nova dificuldade de descrevermos a continuação. No marco das EDPs, os dados de Cauchy estão dados de uma hipersuperfície que também deve de ser analítica. Porém a analiticidade da hipersuperfície pode não ser suficiente, pois há casos em que o método de Cauchy parece não funcionar, pois a regra de recorrência antes descrita não permite obter de maneira biunívoca os



coeficientes da solução. O leitor pode se convencer facilmente disso, analisado o problema de Cauchy para a equação do calor em hipersuperfície  $t = 0$ .

$$\partial_t u - \Delta u = 0; \quad u|_{t=0} = u_0(x); \quad \partial_t u(x,0) = u_1(x)$$

A equação do calor é de ordem dois e portando fornecemos dados de Cauchy tanto para  $u$  como para sua derivada parcial  $u_t$  com respeito ao tempo. Mas o sistema resultante esta sobre determinado, pois isto que a condição de compatibilidade seguinte que se deriva da equação, é condição necessária para a existência da solução:

$$\Delta u_0 = u_1$$

Precisamente o problema de valores iniciais para a equação do calor é um dos exemplos mais clássicos de EDP que todos os livros recolhem onde a solução pode ser obtida explicitamente por convolução com o núcleo de Gauss, mas para isso somente se impõe uma dado inicial  $u|_{t=0}$ .

Com efeito, a solução é então,  $u(x,t) = G * u_0$  sendo  $G$  o núcleo de Gauss,

$$G(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \exp\left(\frac{-|x|^2}{4t}\right)$$

e denotando mediante  $*$  a convolução nas variáveis espaciais, e é a única solução “razoável” de

$$u_t - \Delta u = 0; \quad u(x,0) = u_0(x)$$

sendo  $n$  o número de variáveis espaciais envolvidas.

Kowalevskaya explicou de maneira definitiva esta diferença que se apresenta ao abordar as EDO e as EDP mediante o método de Cauchy. Para que o teorema de Cauchy seja válido no marco das EDPs é necessário que a hipersuperfície sobre a que se impõe dos dados de Cauchy seja *não característica*. As hipersuperfícies características são então as ruins, aquelas em que o método de Cauchy não funciona, como é a hipersuperfície  $t = 0$ , para a equação do calor.

O teorema de Holmgren garante que quando os coeficientes de uma equação são analíticos e os dados são iguais a zero em uma hipersuperfície não característica analítica, a única solução é nula. Isto pode parecer uma consequência trivial do Teorema de Cauchy-Kowalevskaya, mas não é, pois que a unicidade se garante para qualquer tipo de solução (inclusive as soluções distribucionais) e não somente para as analíticas.

Mas pode parecer surpreendente que pretendamos aplicar este teorema no caso em que nos abordamos uma equação de ondas com coeficiente constantes por seções que apresentam um salto ao longo de uma interfase. Isto se pode fazer em dois tempos. Primeiro se aplica no domínio exterior  $\Omega_e$ , de modo que se supomos que a vibração deixa imóvel uma parte aberta não vazia de  $\Omega_e$  durante um tempo suficientemente grande, pelo teorema de Holmgren, acaba deixando imóvel todo  $\Omega_e$ . Na interface se detecta então a ausência de deslocamento e tensão. Isto permite agora aplicar novamente o teorema de Holmgren em  $\Omega_i$  (posto que a hipersuperfície interface vertical no espaço-tempo não é característica) e deduzir que todo  $\Omega_i$  permanece também imóvel.

Deste modo vemos, como anteriormente, que não pode haver vibrações concentradas 100% no domínio interior  $\Omega_i$ .

## 5.2 Previsão e controle de terremotos

Um recente artigo aparecido em Mundo Científico [3] de quatro geólogos franceses ilustra muito claramente a importância das ondas localizadas que acabamos de descobrir.

O problema, que preocupa a este grupo de geólogos é a grande intensidade com que se percebem na cidade Grenoble (França) abalos sísmicos de escala de grande amplitude, que na zonas não muito distante, apenas são observadas. Tal e como os autores do artigo explicam que se trata de um fenómeno local. Em efeito, “a cidade esta construída em um centro de um vale escavado pelos glaciais e repleto de sedimentos muito mas flexíveis que a rochas subjacentes” tal e como eles indicam.

O que ocorre então é que, reproduzindo literalmente parte do texto de [3],

“As ondas se propagam mais depressa em um meio rígido que em um meio macio, e o contraste de velocidade no limite entre os dois, só deixa passar bem na energia sísmica do

rígido ao macio. A consequência é que uma vez na bacia as ondas quase não pode escapar. Se refletem então na superfície e nas paredes rochosas. Estas reflexões sucessivas, conduzem a fenômenos de ressonância e a determinadas frequências que se traduzem na superfície em fortes amplificações dos movimentos do solo e em um aumento de sua duração. Se compreende facilmente que as consequências podem ser dramáticas, quando estas frequências amplificadas correspondem a frequência de ressonância dos edifícios”.

Esta passagem deste artigo divulgado ilustra com clareza como os fenômenos de localização de ondas descrito no trecho anterior pode observar-se na natureza no contexto das ondas sísmicas e até que ponto pode ser importantes na nossa vida cotidiana.

O fenômeno que se descreve neste artigo e que é coerente com a análise da sessão anterior é o seguinte. O meio macio  $\Omega_i$  esta rodeado por o meio mais rígido  $\Omega_e$ . Uma onda proveniente de  $\Omega_e$  entra em  $\Omega_i$  mas é capturado em seu interior indefinidamente pois a energia não se transmite desde  $\Omega_i$  a  $\Omega_e$ . A medida que aumente o raio entre a velocidade de propagação e o médio rígido e o médio macio este fenômeno se acentua. Este efeito, com a notação da sessão anterior, quando mais grande é o coeficiente  $a_e/a_i$ , maior é o conjunto de ângulos de incidência  $\theta_i$  que dão lugar a ondas que permanecem capturadas em  $\Omega_i$  sem refratar-se em absoluto. Isto faz possível que a onda, uma vez em  $\Omega_i$  pode incidir na interface com um ângulo de  $45^\circ$  sem que exista transmissão de energia a  $\Omega_e$ . Basta para isso que  $a_e/a_i > \sqrt{2}$ .

O artigo antes citado conclui sublinhando a importância dos estudos teóricos e numéricos que se estão desenvolvendo neste terreno. Efetivamente, tal e como eles explicam, o desafio na atualidade consiste em prevenir se as normas postas nas empresas de construções de edifícios tradicionais são suficientes ou não para garantir a robustez dos edifícios em caso de abalos sísmicos de uma magnitude 5,5 que não se podem excluir.

A prevenção do comportamento das construções humanas, durante os abalos sísmicos e seu controle, constituem uma dos grandes desafios da engenharia em nossos dias e que a matemática e a simulação numérica necessariamente desempenham e possuem um

papel central, ver por exemplo [1] e [7]. Tal e como ficou exposto nesta seção o “ingênuo protagonista”, é uma vez mais, a equação de uma onda.

## 6. Problemas Inversos

Os problemas que aparecem no contexto das aplicações tecnológicas, envolvendo EDO's ou EDP's não podem ser formuladas no contexto clássico dos problemas de Cauchy ou de contorno onde se supõem conhecidos os parâmetros e dados e se trata de calcular (analiticamente ou numericamente) a solução (ou provar sua existência e unicidade), se tratam de problemas inversos nos que temos que identificar os parâmetros da equação através de informações parciais ou globais sobre as soluções que é possível medir e observar de forma experimental.

Muitos são os problemas da vida real nos quais encontramos problemas inversos. Cabe mencionar por exemplo a prospecção petrolífera, exploração do subsolo e muitas aplicações medicas com a tomografia computadorizada, entre outros.

Do ponto de vista matemático, de maneira precisa, temos que introduzir o espectro do Laplaciano com condições de fronteira de Dirichlet num domínio limitado  $\Omega$  de  $\mathbf{R}^2$ . Se trata dos números  $\lambda$ , chamados de auto valores, para os quais a equação elíptica

$$\begin{cases} -\Delta e = \lambda e & (x, y) \in \Omega \\ e = 0 & (x, y) \in \Gamma \end{cases} \quad (6.1)$$

admite uma solução não nula  $e = e(x, y) \neq 0$ . Obviamente podem-se considerar outras condições de contorno, em função do problema físico considerado.

É bom lembrar que esse problema espectral aparece de maneira natural quando se desenvolvem em séries de Fourier as soluções da “equação da onda e o calor”. Portanto a sua importância vai além dos problemas inversos.

A teoria de decomposição de operadores autoadjuntos compactos permite mostrar a existência, de uma seqüência de autovalores reais positivos de multiplicidade finita  $\lambda_j$ ,  $j \geq 1$ , que se aproximam para o infinito e de maneira que a seqüência de “autofunções” correspondentes forme uma base ortogonal em  $L^2(\Omega)$  (é o espaço de Hilbert das funções quadrado integráveis definidas em  $\Omega$ ). A cada domínio  $\Omega$  associamos uma seqüência não decrescente de números positivos  $\lambda_j$ ,  $j \geq 1$  que tendem ao infinito.

O problema inverso consiste em determinar a forma do domínio  $\Omega$  a través do espectro. A outra ferramenta importante para estudar problemas inversos é o Teorema da função Inversa (TFI). Com efeito, os problemas inversos que normalmente aparecem são de tipo não linear, isto é, a transformação envolvida no problema e que temos de inverter é não linear. Em nosso caso a transformação a inverter é aquela que associa a um domínio  $\Omega$  seu espectro  $\lambda_j$   $_{j \geq 1}$ . Trata-se de uma transformação não linear.

Portanto o TFI é uma ferramenta apropriada para abordar problemas inversos, pois garante a “invertibilidade local” de uma aplicação sempre e quando esta seja regular (diferenciável) e seu diferencial possua inversa. Assim a resolução do problema inverso passa por um estudo detalhado do problema direto, pois temos que comprovar se a transformação a inverter, dado pelo problema direto, é regular e sua tensão linearizada invertível. Por isso a análise de um problema inverso é quase sempre precedido pelo estudo detalhado do problema direto correspondente.

Devemos lembrar que o TFI fornece resultados de caráter local e resultados globais precisam de desenvolvimentos adicionais, pois raramente se podem aplicar diretamente versões globais do TFI. Para ilustrar este fato vamos a considerar dois exemplos, que garantem que a aplicação não linear é globalmente inversível. Consideramos a função real de uma variável real  $f(x) = e^x$ . Sua derivada é  $f'(x) = e^x$  que é distinta de zero em todo ponto. Em cada ponto  $x_0$  a diferencial  $f'(x) = e^{x_0}$  atua como uma aplicação linear:  $L_{x_0} y = \langle f'(x_0), y \rangle = e^{x_0} y$  que é inversível, sendo sua inversa  $L_{x_0}^{-1} y = e^{-x_0} y$ . Por tanto se deduz a TFI que a função  $e^x$  é localmente invertível ( $e^x$  estabelece uma bijeção de um entorno de cada ponto  $x_0$  em um entorno de sua imagem  $e^{x_0}$ ). Mas, obviamente, não é globalmente inversível pois  $e^x$  é um número real positivo para cada real  $x$ , e por tanto os números negativos caem fora da imagem de  $e^x$ . Isto é devido a inversa e da diferencial,  $e^{-x_0}$ , não está inferiormente acotada quando  $x_0$  tende a “ $-\infty$ ”. Por outro lado a função  $g(x) = 2x + \text{sen}(x)$  é globalmente inversível porque sua diferencial  $g'(x) = 2x + \cos(x)$  é invertível em cada ponto com inversa  $\frac{1}{2x + \cos(x)}$  uniformemente acotada entre 1/3 e 1.

Para concluir esta seção apresentamos um problema inverso relacionado com a equação de ondas que nós ocupa e que podemos resolver completamente.

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0 \quad 0 < x < l, \quad t > 0 \\ u(0, t) = u(l, t) = 0 \quad t > 0 \end{array} \right\} \quad (6.2)$$

esta fixa em seus extremos  $x = 0$  e  $L$ .

Supomos que, através de um sensor, podemos medir a tensão que a vibração da corda produzam no extremo  $x = 0$ . Obviamente, a desconhecemos a longitude total da corda  $L$  desconhecemos a localização do outro extremo  $x = L$ . O que sabemos é que a corda esta fixa também em outro extremo.

Podemos identificar a longitude  $L$  através das medições que o sensor proporciona da tensão no extremo conhecido  $x = 0$ ?

A resposta é, como vamos ver, afirmativa.

Como indicamos anteriormente as soluções de (6.2) podem desenvolver-se em series de Fourier do seguinte modo:

$$u(x, t) = \sum_{k \geq 1} \left[ C_r \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{l} t\right) + D_r \cos\left(\frac{k\pi}{l} t\right) \right] \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{l} x\right) \quad (6.3)$$

A tensão no extremo  $x = 0$  vem dada por

$$\partial_x u(0, t) = \sum_{k \geq 1} \frac{k\pi}{l} \left[ C_r \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{l} t\right) + D_r \cos\left(\frac{k\pi}{l} t\right) \right] \quad (6.4)$$

Se observa que a tensão é sempre uma função periódica de período  $2L$ . Portanto, a periodicidade da tensão ( $2L$ ) esta relacionada de maneira unívoca (e neste caso linear) com a longitude  $l$  da corda. Isto responde afirmativamente o problema inverso observado.

Mas cabe observar uma questão a mais. Quantas medições temos de fazer em  $x = 0$  para determinar completamente a longitude? Deixamos esta questão para o leitor interessado.

Como temos mencionado na introdução, são muitos os contextos que se propõem problemas inversos. Entre eles cabe destacar a prospecção petrolífera, as numerosas aplicações na medicina (tomografia computadorizada, etc) radares, etc. Na realidade, como temos visto, cada vez que a TFI se aplica estamos, essencialmente, resolvendo um problema inverso. Se reflexionamos um pouco sobre este aspecto nos daremos conta de como habitual é enfrentar-se com problemas inversos na vida diária, contudo, resolvemos frequentemente, sem apelar a TFI.

## 7. Simulação numérica e ondas espúreas

Tal como foi mencionamos anteriormente e colocado em evidência no artigo sobre ondas sísmicas e que temos feito referência na seção anterior, em muitos problemas da vida real é necessário um análise rigorosa de fenômenos de ondas que são acompanhados de simulações numéricas.

A grande potência de cálculo dos computadores de hoje nos permite realizar em nosso computador pessoal e ou notebook cálculos muitos sofisticados que há uns anos atrás exigia trabalhar com computadores maiores. Esta potência de cálculo não vai parar de aumentar nos próximos anos. Cabe então fazer a seguinte pergunta: É necessário continuar com uma análise matemática rigorosa das ondas ou podemos simplesmente confiar em nosso crescente capacidade de cálculo e de simulação numérica?

Não é fácil responder essa pergunta. Se refletirmos com rigor sobre a mesma questão se dará conta que, para responder com total certeza esta questão é necessário realizar uma análise matemática rigorosa viabilidade dos esquemas numéricos colocados no problema em questão. Mas então, implicitamente, estamos respondendo negativamente a pergunta proposta.

Encontramos-nos perante paradoxo da necessidade de responder negativamente a questão para poder refletir seriamente sobre a mesma.

A pesar deste aparente paradoxo são muitos o que crêem que a matemática, no sentido que temos entendido nesse século, tem seus dias contados, a menos que o contexto dos problemas abordados neste trabalho, e que todos e cada um dos problemas podem ser resolvidos a base de calcular mais e mais com nossos computadores que melhora em eficiência a cada dia.

Nesta seção vamos mediante métodos numéricos adequados, se pode simular a realidade do modelo contínuo de maneira satisfatória. Mas, o desenvolvimento de métodos numéricos adequados exige uma análise matemática previa muito fina.

Ao final do caminho nos encontraremos com uma resposta necessariamente importante e evidentemente que combinando um estudo teórico rigoroso com métodos numéricos se pode avançar nossos objetivos.

Retornamos por tanto as equações da vibração de uma corda de longitude  $L$  fixa em seus extremos  $x = 0$ ,  $x = L$ ,



$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0 & 0 < x < L, t > 0 \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, & t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x), \quad \partial_t u(x,0) = u_1(x), & 0 < x < L \end{cases} \quad (7.1)$$

Como já havíamos indicado as soluções de (7.1) podem ser desenvolvidas em séries de Fourier:

$$u(x,t) = \sum_{k \geq 1} \left[ a_k \operatorname{sen} \frac{k\pi t}{L} + b_k \cos \frac{k\pi t}{L} \right] \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{L} \quad (7.2)$$

com coeficientes  $\{a_k, b_k\}_{k \geq 1}$  que vem determinados univocamente pelos dados iniciais  $u_0(x), u_1(x)$  de modo que

$$u_0(x) = \sum_{k \geq 1} b_k \operatorname{sen} \left( \frac{k\pi x}{L} \right); \quad u_1(x) = \frac{\pi}{L} \sum_{k \geq 1} k a_k \operatorname{sen} \left( \frac{k\pi x}{L} \right) \quad (7.3)$$

Convêm também observar que (7.1) é um modelo puramente “conservativo” em que não se tem em conta nenhum fenômeno de atrito ou dissipação. Este fato é perfeitamente de manifesto na “lei de conservação de energia”.

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L \left[ |u_x(x,t)|^2 + |u_t(x,t)|^2 \right] dx = Cte. \quad (7.4)$$

justificativa

$$\begin{aligned} \partial_x [\partial_x u \partial_t u] &= \partial_x^2 u \partial_t u + \partial_x u \partial_{xt}^2 u \\ \partial_x [\partial_x u \partial_t u] - \partial_x^2 u \partial_t u &= \partial_x u \partial_{xt}^2 u \end{aligned}$$

Em efeito, se tem

$$\frac{dE}{dt} = 0 \quad (7.5)$$

Pois que

$$\frac{dE}{dt} = \int_0^L u_x u_{xt} + u_t u_{tt} dx =$$

$$= \int_0^L -u_{xx} + u_{tt} - u_t \, dx + u_x \Big|_{x=0}^{x=L} - u_t \Big|_{t=0}^{t=L} = 0 \quad (7.6)$$

graças a equação da onda e as condições de contorno.

Na hora de aproximar numericamente as soluções de (7.1) a primeira idéia que surge de maneira natural é de introduzir uma semi-discretização no espaço para aproximar (7.1) mediante um sistema linear de equações diferenciais ordinárias.

Para isso, dado um número natural  $N$  decompondo o intervalo  $[0, L]$  que ocupa a corda em repouso em  $N$  subintervalos iguais.

$$x_0 = 0, \quad x_j = jh, \quad j = 1, \dots, N+1 \quad (7.7)$$

onde

$$h = \frac{L}{N+1} \quad (7.8)$$

Aproximamos a função  $u(x, t)$  mediante  $N+2$  funções que dependem exclusivamente do tempo  $t$

$$u_0(t), \dots, u_{N+1}(t). \quad (7.9)$$

Cada função  $u_j(t)$  proporciona uma aproximação de  $u(x, t)$  no ponto  $x_j = jh$  da participação do intervalo.

Temos de introduzir um sistema de EDO que determine as funções  $\{u_j(t)\}_{j=0, \dots, N+1}$  de maneira única e que proporcione uma boa aproximação de  $u$ . Mediante o desenvolvimento de Taylor observamos que:

$$\partial_x^2 u(x_j, t) \sim \frac{u(x_{j+1}, t) + u(x_{j-1}, t) - 2u(x_j, t)}{h^2}$$

Parece natural substituir a equação da onda pelas equações diferenciais

$$\partial_x^2 u(x_j, t) - \frac{u(x_{j+1}, t) + u(x_{j-1}, t) - 2u(x_j, t)}{h^2} = 0 \quad t > 0$$

para os pontos interiores da partição do intervalo correspondentes aos índices  $j = 1, \dots, N$ .

Por outro lado, as condições de que a corda esta fixa em seus extremos reflete em que

$$u_0(t) = u_{N+1}(t) = 0, \quad t > 0.$$

Obtemos assim o sistema de equações diferenciais

$$u'' + \frac{1}{n^2} Au = 0 \quad t > 0 \quad (7.10)$$

onde o vetor  $\vec{u} = (u_1, \dots, u_N)^t$  (excluimos os valores extremos  $u_0$  e  $u_{N+1}$  posto que  $u_0 \equiv u_{N+1} \equiv 0$ ) sendo A a matriz tridiagonal  $N \times N$  com valor constante 2 na diagonal principal e com valor constante -1 nas diagonais superior e inferior. No caso  $N = 5$  esta matriz é na forma

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (7.11)$$

Se trata de uma matriz tridiagonal, simétrica e definida positiva.

Os autovalores e autovetores de A se conhecem explicitamente. Recordemos que o número  $\lambda$  é um autovalor da matriz A se existe um vetor X tal que  $AX = \lambda X$ . Em efeito, o caso que nos ocupa,

$$\frac{1}{h^2} A \bar{\phi}^k = \lambda^k \bar{\phi}^k \quad (7.12)$$

se e somente se

$$\lambda_h^k = \frac{4}{h^2} \text{sen}^2 \left( \frac{k\pi h}{2L} \right) \quad (7.13)$$

e (módulo uma constante multiplicativa)

$$\vec{\phi}_h^k = \begin{pmatrix} \text{sen } k\pi h/L \\ \text{sen } 2k\pi h/L \\ \dots\dots\dots \\ \text{sen } Nk\pi h/L \end{pmatrix} \quad (7.14)$$

para  $k = 1, \dots, N$ .

Convêm observar que os autovetores e autovalores dependem de  $h = L/(N+1)$ , ou que é o mesmo, de  $N$ , posto que a matriz  $A$  têm dimensão  $N \times N$ .

Conhecendo o espectro de  $A$  se pode dar a expressão da solução geral da semi-discretização (7.10). Em efeito, temos,

$$\vec{u}(t) = \sum_{k=1}^N \left[ b_k \text{sen}(\sqrt{\lambda_h^k} t) + c_k \cos(\sqrt{\lambda_h^k} t) \right] \vec{\phi}_h^k \quad (7.15)$$

A expressão (7.15) é análoga à obtida em (7.2) para a solução geral da equação de onda mediante séries de Fourier. Convêm observar que:

- Em (7.15) temos uma soma finita para  $k = 1, \dots, N$ . Porém  $N \rightarrow \infty$  quando  $h \rightarrow 0$ , ou seja, a soma finita (7.15) se converte a uma série da forma (7.2) quando o peso  $h$  da partição se afina;
- para cada  $k$  fixo, os autovalores

$$\lambda_h^k \rightarrow \frac{k^2 \pi^2}{L^2} \quad (7.16)$$

quando  $h \rightarrow 0$  que são autovalores que surgem na decomposição em séries de Fourier (7.2) da solução do problema contínuo;

- Os autovetores  $\vec{\phi}_h^k$  não são mais que a avaliação dos autovalores  $\sin(\frac{\pi kh}{L})$  do problema contínuo dos pontos da partição.

Por tudo isso, (7.10) é, mas convincentemente, uma boa aproximação da equação de ondas (7.1). Na realidade, não é difícil comprovar que, conhecidos os dados iniciais  $u_0, u_1$ , se resolvemos (7.10) com os dados iniciais naturais,

$$\begin{cases} u_j(0) = u_{0,j} = u_0(x_j), & j = 1, \dots, N. \\ u_j'(0) = u_{1,j} = u_1(x_j), & j = 1, \dots, N. \end{cases} \quad (7.17)$$

as soluções de (7.10) quando  $h \rightarrow 0$  converge as de (7.1).

Uma análise um pouco mais rigorosa da aproximação entre (7.15) e (7.2) coloca de maneira natural como de uniforme é a convergência dos autovalores  $\lambda_h^k$  com respeito a  $k$ .

Não é difícil comprovar que a curva das raízes quadradas e os autovalores do problema discreto se separa de maneira importante da curva (reta) correspondente aos autovalores do problema contínuo em quanto  $k$  aumenta.

Que repercussão tem este fato?

Voltamos ao problema inverso analisando na seção anterior e que se trabalha na identificação a longitude  $L$  da corda através das medições da tensão de suas vibrações no extremo  $x=0$ . Obtivemos uma resposta satisfatória observando que as soluções da equação de onda no intervalo de longitude  $L$  são periódicas de período  $2L$ .

Calculemos agora a tensão em  $x=0$  associada ao sistema semi-discreto. Tendo a conta que

$$\partial_x u(0,t) \sim \frac{u(x_1,t) - u(0,t)}{h} \quad (7.18)$$

parece natural definir a *tensão discreta* do seguinte modo

$$\tau(t) = \frac{u_1(t)}{h} \quad (7.19)$$

Em virtude de (7.15) a tensão  $\tau t$  associada a uma solução do sistema semi-discreto (7.10) vem dado por

$$\tau(t) = \frac{1}{h} \sum_{k=1}^N \left[ a_k \text{sen} \sqrt{\lambda_h^k t} + b_k \text{cos} \sqrt{\lambda_h^k t} \right] \text{sen} \left( \frac{k\pi h}{L} \right) \quad (7.20)$$

Comparamos o comportamento das tensões discretas (7.20) em relação as da corda vibrante real (que, sabemos, são funções periódicas de período  $2L$ ).

Para fazê-lo, consideremos soluções particulares de (7.10) as mais simples possíveis. Para isso tomamos coeficientes

$$b_k = 0, \quad \forall k = 1, \dots, N \quad (7.21)$$

e

$$a_k = 0, \quad k = 1, \dots, N-2; \quad a_{N-1} = \frac{h}{\text{sen} \frac{N-1}{N} \pi h / L}; \quad a_N = \frac{-h}{\text{sen} \frac{N}{N} \pi h / L} \quad (7.22)$$

De modo que a solução correspondente de (7.10) seja

$$\vec{u}(t) = h \left[ \frac{\text{sen} \left( \sqrt{\lambda_h^{N-1} t} \right)}{\text{sen} \left( \frac{N-1}{N} \pi h / L \right)} - \frac{\text{sen} \left( \sqrt{\lambda_h^N t} \right)}{\text{sen} \left( \frac{N}{N} \pi h / L \right)} \right] \quad (7.23)$$

e a tensão discreta correspondente

$$\tau(t) = \text{sen} \left( \sqrt{\lambda_h^{N-1} t} \right) - \text{sen} \left( \sqrt{\lambda_h^N t} \right) \quad (7.24)$$

É fácil comprovar que os coeficientes  $a_{N-1}$  e  $a_N$  são de ordem de  $L/2\pi$  e  $-L/2\pi$  respectivamente quando  $h \rightarrow 0$ . Por tanto a energia da solução (7.23) do problema semi-discreto (7.23) é da ordem de uma unidade.

Porém, o que ocorre com a tensão semi-discreta  $\tau(t)$  de (7.24)?

Convêm observar que

$$\begin{aligned}
\sqrt{\lambda_h^N} &= \frac{2}{h} \operatorname{sen}\left(\frac{N\pi h}{2L}\right) = \frac{2}{h} \operatorname{sen}\left(\frac{(N-1)\pi h}{2L} + \frac{\pi h}{2L}\right) \\
&= \frac{2}{h} \left[ \operatorname{sen}\left(\frac{(N-1)\pi h}{2L}\right) \cos\left(\frac{\pi h}{2L}\right) + \cos\left(\frac{(N-1)\pi h}{2L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi h}{2L}\right) \right] \\
&= \cos\left(\frac{\pi h}{2L}\right) \sqrt{\lambda_h^{N-1}} + \frac{2}{h} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi h}{2L}\right) \cos\left(\frac{(N-1)\pi h}{2L}\right) \\
&= \cos\left(\frac{\pi h}{2L}\right) \sqrt{\lambda_h^{N-1}} + \frac{2}{h} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi h}{2L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi h}{L}\right)
\end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned}
\sqrt{\lambda_h^N} - \sqrt{\lambda_h^{N-1}} &= \sqrt{\lambda_h^{N-1}} \left[ 1 - \cos\left(\frac{\pi h}{2L}\right) \right] + \frac{2}{h} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi h}{2L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi h}{L}\right) \\
&= O(\sqrt{\lambda_h^{N-1}}) + O(h) = O(h)
\end{aligned}$$

Utilizando então o desenvolvimento de Taylor vemos que

$$|\tau(t)| = O(h) |t| \quad (7.25)$$

Que quer dizer ou significa (7.25)?

Esta cota significa que, para detectar que a solução do problema semi-discreto tem uma energia total de ordem um, devemos medir sua tensão durante um intervalo temporal de ordem de  $1/h$ . Evidentemente, este fenômeno não faz mais que agravar-se quando  $h \rightarrow 0$ , pois as medições devem ser feitas em intervalos temporais que tendem ao infinito.

Deste modo se põe de manifesto a inadequação do esquema semi-discreto (7.10) maneira correta de se abordar o problema inverso da determinação da longitude da corda e através de tensão.

E, assim temos, tal como havíamos mencionado, (7.10) é um esquema satisfatório na hora de obter uma boa aproximação das soluções de (7.1) para dados iniciais fixos.

Que esta ocorrendo então? Em um problema inverso desconhecemos absolutamente a forma em que a energia das soluções pode distribuir-se sobre as diferentes componentes

de Fourier. Para isso, uma convergência pontual do espectro como em (7.17), para cada  $k$  fixo, é insuficiente e precisamos convergências uniformes com respeito a  $k$ .

Mas, no caso presente, a rapidez de convergência se deteriora muito rapidamente quando  $k$  aumenta.

Que podemos fazer então? Há alguma forma de “consertar” o esquema numérico de (7.10) para garantir seu bom comportamento no problema inverso? Curiosamente este pode fazer-se mais a base desprezar parte das informações que o esquema numérico proporciona.

Retornemos a solução (7.15) que o esquema numérico proporciona. A proximidade do espectro contínuo e numérico melhora quando nós limitamos a considerar autovalores correspondentes a índices  $k \leq \delta N$  com  $\delta > 0$  pequeno.

Que acontece quando truncamos a soma (7.15) para considerar

$$\vec{u}_\delta(t) = \sum_{k=1}^{\delta N} \left[ a_k \sin(\sqrt{\lambda_h^k t}) + b_k \cos(\sqrt{\lambda_h^k t}) \right] \vec{\phi}^k \quad (7.26)$$

com  $0 < \delta < 1$ ?

Evidentemente, ao fazê-lo, estamos desprezando parte das informações que o esquema numérico proporciona. Mas estamos precisamente desprezando aquele que corresponde as altas frequências que produzem as patologias que acabamos de descrever.

Se pode efetivamente provar que a *solução filtrada* tem um melhor comportamento que a solução completa. Em efeito, por uma parte, para dados iniciais fixos e  $0 < \delta < 1$  também fixado, a solução truncada (7.26) do problema semi-discreto converge quando  $h \rightarrow 0$  ao do problema contínuo. Por outro lado, utilizando resultados clássicos de séries de Fourier não harmônicas (veja [6]), se pode provar que, no contexto do problema inverso, as soluções numéricas filtradas (7.26) têm um bom comportamento, pois a medição da tensão ao longo de um intervalo temporal de ordem  $2\sigma(\delta)L$  proporciona uma informação completa sobre a solução.

De acordo com o sentido comum se observa que o parâmetro  $\sigma(\delta)$  satisfaz:

- $\sigma(\delta) \rightarrow 1, \quad \delta \rightarrow 0;$
- $\sigma(\delta) \rightarrow \infty, \quad \delta \rightarrow 1;$



Que quer dizer isso?

Que a medida que  $\sigma$  decresce, a solução “numérica filtrada” reproduz um comportamento mais próximo da solução real do sistema contínuo (7.1).

Nós encontramos assim ante um fato aparentemente paradoxal. Filtrando mais e mais as altas frequências numéricas, isto é, usando cada vez menos informações de todo que o esquema numérico proporciona, nos encontraremos mais perto da realidade.

Talvez isto contribua para que todos reflitam um pouco sobre se a crescente capacidade do cálculo que os computadores proporcionam, é em si mesma uma garantia de progresso.

## 8. Perspectivas futuras

São muitos os campos da ciência e tecnologia onde se apresentam desafios para a Teoria do Controle. Em alguns casos se confia em ser capaz de resolvê-los mediante avanços tecnológicos que permitam a implementação de controles mais eficientes. É o caso, por exemplo, do controle molecular mediante tecnologia laser. Mas tanto nesse, assim como em muitas outras aplicações se necessitam de importantes avanços teóricos. Nesta seção mencionamos brevemente alguns destes temas e os problemas que se apresentam:

- 1) **Grandes estruturas espaciais:** É freqüente escutar que a implantação de uma antena ou telescópio no espaço tem ocasionado alguns problemas técnicos, alguns deles sumamente custosos, incluso que tenham inutilizado completamente a estrutura. Estas estruturas se caracterizam por conter componentes flexíveis de grande tamanho, as interconexões de numerosos componentes e o acoplamento de componentes rígidas e flexíveis. O problema de estabilizar estas estruturas de modo que se mantenham orientadas na direção adequada, sem se deformar em excesso, é, portanto complexo. O projeto de técnicas de controle robustas para estas estruturas é um problema importante em que se necessita em particular de importantes avanços matemáticos. Apesar de os importantes avanços que se produziram na segunda metade do século XX no controle tanto de sistemas de dimensão finita como de infinita, ainda a muito a ser feito para abordar estes sistemas complexos.
- 2) **Robótica:** A robótica é uma das áreas da Tecnologia que apresentam os desafios mais estimulantes para os próximos anos. Ninguém pode escapar a importância de desenvolver métodos eficientes de visão artificial, por exemplo. Mas a Teoria do Controle esta também no centro de gravidade deste campo. O desenvolvimento da robótica depende da maneira fundamental de eficiência e robustez dos algoritmos computacionais para o controle de robôs. Não é difícil imaginar a complexidade do processo de controle que faz um robô caminhar e que o faça de maneira estável e ainda ser capaz de pegar algo com as “mãos”.

- 3) **Sistemas energéticos e redes informáticas:** É evidente que o planeta apresenta uma tendência irreversível a globalização. Isto é válido em muitos âmbitos, no tráfego aéreo, nos sistemas de geração e distribuição de energia, ou nas redes de informática. Isto faz que muitas vezes que tomar decisões em âmbitos muito concretos (geograficamente falando, por exemplo), com pouca informação do que ocorre em outros, mas sendo consciente que esses podem influenciar. Vem daí a necessidade de criar métodos e técnicas de controle para grandes sistemas interconectados.
- 4) **Controle da combustão:** Se trata de um tema relevante na indústria aeronáutica e aeroespacial, onde se faz imprescindível controlar as instabilidades na combustão, que, normalmente, vem acompanhada de perturbações acústicas consideráveis. No passado se tinha realizado a ênfase nos aspectos do desenho, modificado a geometria do sistema para interferir na interação combustão-acústica ou incorporado elementos dissipativos. O controle ativo da combustão mediante mecanismos térmicos ou acústicos é um tema em que quase tudo está por explorar.
- 5) **Controle de fluidos:** A interação entre o controle e a dinâmica de fluidos neste momento é muito intensa. Trata-se de um problema relevante em aeronáutica posto que a dinâmica estrutural do avião (em suas asas, por exemplo) está acoplada com um fluxo de ar em seu entorno. Se bem que certo que nos aviões convencionais se pode em grande medida ignorar este acoplamento, é muito provável que os aviões do futuro tenham que incorporar mecanismos de controle para evitar as aparições de turbulências em torno das asas. Desde um ponto de vista matemático quase tudo está por se fazer, tanto em respeito a modelagem, ao controle e aos aspectos computacionais.
- 6) **Controle de plasma:** A obtenção de reações de fusão controlada é um dos maiores desafios para resolver os problemas energéticos do planeta.  
Na atualidade, uma das vias mais prometedoras é a dos tokamaks: máquinas nas que se confina o plasma mediante mecanismos eletromagnéticos. O problema fundamental é manter o plasma, de alta densidade, a uma temperatura muito alta na configuração desejada durante intervalos de tempo prolongados a pesar de suas instabilidades. Isto se realiza através de sensores mediante os quais se obtém a

informação necessária para efetuar as mudanças rápidas e precisas das correntes que compensarão as perturbações do plasma. Ainda existe muita coisa a fazer desde ponto de vista matemático. Existem também problemas de identificação importantes nos tokomaks a causa da dificuldade para realizar as medições. Trata-se, pois de um campo que apresenta grandes desafios para a Teoria Matemática do controle e dos problemas inversos.

- 7) **Processo de solidificação e indústria do aço:** É importante que o avanço das ciências de materiais que tenha produzido estudos intensivos nos processos de solidificação. A forma e a estabilidade da interface sólido-líquido é neste âmbito um tema crucial, pois uma interface irregular pode causar a obtenção de um produto não desejado. As fontes de instabilidade são diversas: convecção, tensão superficial,... Têm se produzido avanços importantes na compreensão matemática das interfaces no campo denominado dos Problemas de Fronteira livre. Desde o ponto de vista do controle se colocam dois problemas importantes. Um, do caráter inverso, consistente em reconstruir a interface através de medições indiretas e, outro, o de seu controle através de mecanismos de aquecimento, de aplicações de campos magnéticos ou elétricos ou de rotações da liga no forno. A teoria matemática correspondente pode dizer-se que não existe.

Com o objetivo de obter aço de boa qualidade é preciso controlar de maneira precisa a temperatura na fase de esfriamento. Mas a banda mais quente, sumamente fina, se move a uma grande velocidade. O projeto de mecanismos de controle que tenham em conta, tanto velocidade da banda, como do processo de resfriamento, e outro grande desafio.

- 8) **Investigação biomédica:** O desenho de terapias médicas adequadas depende em grande medida de uma compreensão adequada da dinâmica fisiológica. Se trata de um campo sumamente ativo neste momento aonde quase todo esta por ser fazer desde um ponto de vista matemático. A Teoria do Controle terá de jogar também neste terreno um papel importante. Como por exemplo, cabe mencionar o desenho de mecanismos de fornecimento de insulina equipados de “chips” de controle.
- 9) **Hidrologia:** O problema de gerenciamento dos recursos híbridos é sem duvida sumamente relevante em nossos dias, umas vezes porque estes são escassos, outras

porque se encontram contaminados ou simplesmente pela complexidade da rede de fornecimento e usuários tanto domésticos como agrícolas e industriais. Os problemas de controle que se apresentam são diversos. Podemos mencionar pelo menos dois. Problemas de identificação de parâmetros que se trata de determinar a localização dos sensores que proporcionam informação suficiente para uma eficiente extração e fornecimento, por um lado, e, por outro, o desenho de estratégias de gerenciamento eficiente.

- 10) **Extração de recursos naturais:** Estão fazendo importantes esforços modelagem e de índole matemática na área de simulação das reservas subterrâneas tanto hídricas como minerais ou petrolíferas. O objetivo é otimizar as estratégias de extração. Novamente se colocam problemas inversos, de análises e, por exemplo, de controle da interfase entre o fluido injetado e o extraído.
- 11) **Economia:** A matemáticas estão jogando hoje em dia um papel ativo no mundo financeiro. Com efeito, na utilização de modelos matemáticos para prever as flutuações dos mercados financeiros é algo comum. Trata-se frequentemente de modelos estocásticos em que a Teoria do Controle existente pode ser de grande utilidade na hora de desenhar projetos estratégicos melhores de investimento e consumo.
- 12) **Sistemas de fabricação:** Os grandes sistemas de fabricação automatizados estão desenhados como sistemas flexíveis para permitir câmbios no planejamento da produção em atenção a demanda. Mas esta flexibilidade crescente se obtém a base de sistemas cada vez mais complexos. A teoria matemática do controle se encontra em este terreno com desafios importantes para o desenho de mecanismos de controle computadorizados eficientes.
- 13) **Avaliação da eficiência de sistemas computadorizados:** Os pacotes de “software” que existem na atualidade para avaliar a eficiência dos sistemas computacionais estão baseados em sua representação através da Teoria de redes. O desenvolvimento do sistema computação em paralelo e sincronizado fazem que estes modelos sejam hoje insuficientes. É necessário desenvolver novos modelos, coisa que a teoria estocástica do controle de sistemas discretos pode ser de grande utilidade.

14) **Controle de sistemas monitorados por computador:** Tal e como mencionamos, os problemas de controle aos que nos enfrentamos na atualidade são de uma grande complexidade. É impensável a obtenção de estratégias eficientes de controle sem que nestes processos se conte com a assistência dos computadores. É por isso que é importante o desenho de sistemas de controle que já incorporem este aspecto. Se trata de um campo de investigação multidisciplinar em que intervém em particular a teoria do controle, as ciências computacionais, a análise numérica e a otimização.

## **9. Conclusão.**

Vimos a importância das equações tipo onda no momento de simular e prever a propagação de ondas sísmicas e seus efeitos em nossas construções. Essa observação mostra com clareza que as equações de ondas não são simplesmente um belo exemplo de EDP's é também um instrumento muito útil para entender o mundo que nos rodeia. Também colocamos de manifesto neste trabalho até que ponto é importante ter uma boa compreensão dos modelos matemáticos que governam os fenômenos da natureza que afetam a nossas vidas com o objetivo de controlá-los apropriadamente.

Também deixamos de manifesto que mesmo sendo grande o avanço do potencial do cálculo dos computadores resulta impossível um progresso seguro e sustentável no que tange a Teoria de Controle sem uma análise matemática sólida e rigorosa.

Finalmente citamos alguns âmbitos da sociedade, ciência e tecnologia nos que a teoria de controle deveria desempenhar um papel importante nos próximos anos

## 10.Referências Bibliográficas

[1] A. Baratta e J. Rodellar eds., *Proceeding of the First European Convergence on Structural Control*, Series on Stability, Vibration and Control of Systems, 13, World Scientific, 1996

[2] D. Bernoulli, *Réflexions et éclaircissements sur les nouvelles vibrations des cordes exposées dans les mémoires de l'Académie de 1747 a 1748*, Hist. De l'Acad. Roy. De Berlin, 9 (1753) 147-172 e 173-195

[3] F. Cotton, P-Y Bard, C. Berger e D. Hatzfeld, *Qué es lo que hace vibrar Grenoble?* Mundo Científico, 203 (1999), 21-23.

[4] J.R d'Alembert *Recherches sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibration*, Hist. De l'Acad. Roy. De Berlin, 3 (1747), 214-219 e Suite des recherches, 3 (1747) 220-249.

[5] J.R d'Alembert, *Addition au mémoire sur la courbe que forme une corde tendue, mise en vibration*, Hist. de l'Acad. Roy de Berlin, 6 (1750), 355-360

[6] J.A. Infante and E. Zuazua, *Boundary observability for the space semi-discretizations of the 1 – d Wave equation*, *M<sup>2</sup> AN*, 33 (2) (1999), 407-438

[7] SIAM, *Future Directions in Control Theory*, Report of the Panel of Future Directions in Control Theory, SIAM Report on Issues in Mathematical Sciences, Philadelphia, 1988.

[8] J. Fourier, *Théorie analytique de la chaleur*, Jacques Gabay, Paris, 1988 (reedición del trabajo inicialmente editado por Firmim Didot, Père et Fils, em Paris em 1822)

[9] V.M. Babich, “The Higher-Dimensional WKB Method or Ray Method”, en *Encyclopedia of Mathematical Sciences*, **34**, Springer- Verlag, Berlin 1997.

[10] S.J. Chapman, J.M.H. Lawry, J.R. Cockendon y R.H. Tew, On the theory of complex rays, *SIAM Review*, **41** (3) (1999), 417-509.

[11] J.B. Keller, *Semiclassical mechanics*, *SIAM Rev.*, **27** (1985), 485-504

[12] F. John, *Partial Differential Equation*, 4. ed., Springer Verlag, Nueva York, 1982