

HELTON FERNANDO SCHERER

**CONTROLE PREDITIVO COM OTIMIZAÇÃO
DISTRIBUÍDA APLICADO A COLUNAS DE
DESTILAÇÃO**

**FLORIANÓPOLIS
2009**

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA
CATARINA**

**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
ENGENHARIA DE AUTOMAÇÃO E SISTEMAS**

**CONTROLE PREDITIVO COM OTIMIZAÇÃO
DISTRIBUÍDA APLICADO A COLUNAS DE
DESTILAÇÃO**

Dissertação submetida à
Universidade Federal de Santa Catarina
como parte dos requisitos para a
obtenção do grau de Mestre em Engenharia
de Automação e Sistemas.

HELTON FERNANDO SCHERER

Florianópolis, Julho de 2009.

Catálogo na fonte pela Biblioteca Universitária
da
Universidade Federal de Santa Catarina

S326c Scherer, Helton Fernando
Controle preditivo com otimização distribuída aplicado
a colunas de destilação [dissertação] / Helton Fernando
Scherer ; orientador, Eduardo Camponogara. - Florianópolis,
SC, 2009.
xxii, 63 f.: il., tabs., grafs.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa
Catarina, Centro Tecnológico. Programa de Pós-Graduação
em Engenharia de Automação e Sistemas.

Inclui bibliografia

1. Engenharia de sistemas. 2. Colunas de destilação.
3. Controle preditivo baseado em modelo. 4. Otimização
distribuída. 5. Otimização convexa. 6. Método de
ponto-interior. I. Camponogara, Eduardo. II. Universidade
Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em
Engenharia de Automação e Sistemas. III. Título.

CDU 681.5

CONTROLE PREDITIVO COM OTIMIZAÇÃO DISTRIBUÍDA APLICADO A COLUNAS DE DESTILAÇÃO

Helton Fernando Scherer

‘Esta Dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de Mestre em Engenharia de Automação e Sistemas, Área de Concentração em *Controle, Automação e Sistemas*, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Automação e Sistemas da Universidade Federal de Santa Catarina.’

Eduardo Camponogara, Ph.D.
Orientador

Eugênio de Bona Castelan Neto, Dr.
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Automação e Sistemas

Banca Examinadora:

Eduardo Camponogara, Ph.D.
Presidente

Alexandre Trofino Neto, Dr.

Eugênio de Bona Castelan Neto, Dr.

Mario Cesar Mello Massa de Campos, Dr.

Dedico esta dissertação aos meus exemplos de vida, Irineu Scherer e Rosângela das Chagas Scherer, que sempre apoiaram minhas decisões, estimularam meus sonhos, encorajaram nas horas difíceis e vibraram comigo nos momentos de glória. Obrigado por serem meus pais, fonte de inspiração, apoio e ensino diário.

AGRADECIMENTOS

Especiais agradecimentos ao meu orientador Eduardo Camponogara, pela confiança em mim depositada para a realização deste trabalho. Agradeço por todo o incentivo, empenho, sabedoria, compreensão e, acima de tudo, exigência, me dando esta oportunidade de crescimento, aprendizado, realização profissional e pessoal.

À minha família, em especial aos meus irmão Ediane e Helder, de onde sempre recebi carinho e apoio.

Aos grandes amigos do “Sindicato do LCMPI”, os quais considero como família, que muito me aconselharam e incentivaram durante esta jornada.

À todos os amigos que colaboraram, direta ou indiretamente, na realização deste trabalho de alguma forma.

Agradeço ainda o apoio financeiro da Agência Nacional do Petróleo, Gás Natural e Biocombustíveis-ANP e da Financiadora de Estudos e Projetos (FINEP) por meio do Programa de Recursos Humanos da ANP para o Setor do Petróleo e Gás PRH-34 ANP/MCT.

Resumo da Dissertação apresentada à UFSC como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Mestre em Engenharia de Automação e Sistemas.

CONTROLE PREDITIVO COM OTIMIZAÇÃO DISTRIBUÍDA APLICADO A COLUNAS DE DESTILAÇÃO

Helton Fernando Scherer

julho/2009

Orientador: Eduardo Camponogara, Ph.D.

Área de Concentração: Controle, Automação e Sistemas

Palavras-chave: colunas de destilação, controle preditivo baseado em modelo, otimização distribuída, otimização convexa, método de ponto-interior

Número de Páginas: xxii + 63

O controle preditivo, desde que passou a ser utilizado na indústria, vem se mostrando uma importante técnica de controle avançado para processos, onde algumas características como a capacidade de tratar restrições e utilização de algoritmos que encontram soluções ótimas definem a grande vantagem de sua utilização. Na indústria petroquímica já existem diversas aplicações do controle preditivo, porém, devido à necessidade de troca de informações com o processo, as vezes se torna inviável devido ao esparsamento geográfico dos elementos da planta. Uma alternativa é a utilização de controles distribuídos, que são implementados localmente e trabalham em conjunto para que o desempenho final do controle seja igual ou até mesmo superior ao controle preditivo centralizado. Este trabalho propõe uma estrutura de controle preditivo distribuído, baseado no modelo de espaço de estados, para ser utilizada em redes dinâmicas lineares onde restrições de saída e entrada de controle são consideradas na formulação. Métodos de ponto-interior são utilizados para garantir que as soluções produzidas por agentes de controle distribuídos consigam convergir para a solução ótima global do problema de controle do processo. Utilizando um modelo de coluna de destilação e de uma rede de tráfego urbano, o problema de regulação é estabelecido e a abordagem distribuída é aplicada. Através de comparações com outras configurações centralizadas de controle alguns resultados teóricos e numéricos são obtidos.

Abstract of Dissertation presented to UFSC as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master in Automation and Systems Engineering.

PREDICTIVE CONTROL WITH DISTRIBUTED OPTIMIZATION APPLIED TO DISTILLATION COLUMNS

Helton Fernando Scherer

July/2009

Advisor: Eduardo Camponogara, Ph.D.

Area of Concentration: Control, Automation and Systems

Key words: distillation column, model predictive control, distributed optimization, convex optimization, interior-point method

Number of Pages: xxii + 63

Model predictive control, since its first use in industry, has proven to be an effective technique for advanced control. Its advantages stem from the capacity to handle constraints in a systematic way and the use of optimization algorithms that can find optimal solutions. Although many applications are found in the petrochemical industry, sometimes standart MPC become impractical due to the communications between the control center and the sensors, that are geographically scattered over the plant. An alternative is the use of distributed controls, which are locally implemented and work together so that the end performance is comparable to the centralized predictive control. This work proposes a distributed predictive control structure, based on the state-space model, to be used in linear dynamic networks where constraints on output and control-input are considered in the formulation. Interior-point methods are used to guarantee that the solutions produced by the agents in the distributed control can reach the global optimal solution of the control problem. Using a model of a distillation column and of an urban traffic network, the regulation problem is established and the distributed approach is applied. Through comparisons with other centralized control schemes some theoretical and numerical results are obtained.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Colunas de Destilação	2
1.2	Controle de Fluxos de Tráfego	3
1.3	Objetivos	4
1.4	Estrutura	4
2	Colunas de Destilação	5
2.1	Funcionamento de Colunas de Destilação	5
2.2	Controle de Uma Coluna de Destilação	7
2.3	Modelo da Coluna de Destilação	8
2.4	Sumário	11
3	Controle Centralizado	13
3.1	Introdução	13
3.2	Definições	13
3.3	Controle Preditivo Baseado em Modelo	14
3.4	Formulação do MPC Utilizando Variáveis de Estado	16
3.5	Método de Barreira Logarítmica	21
3.6	Sumário	25

4	Controle Distribuído	27
4.1	Introdução	27
4.2	Formulação Distribuída	28
4.3	Algoritmo Distribuído	32
4.4	Sumário	34
5	Resultados Experimentais	35
5.1	Aplicação das Formulações no Modelo	35
5.2	Resultados Numéricos	37
5.3	Sumário	41
6	Controle de Tráfego Urbano	43
6.1	Introdução	43
6.2	Modelagem de MVUs	45
6.3	Controle de Tempos de Verde	48
6.4	Resultados Numéricos	50
6.5	Resultados Simulados	51
6.6	Sumário	54
7	Conclusão	55

Lista de Abreviaturas

CARIMA	<i>Controlled Autoregressive Integrated Moving Average</i>
DMC	<i>Dynamic Matrix Control</i>
DMPC	Controle Preditivo Distribuído Baseado em Modelo (<i>Distributed Model Predictive Control</i>)
GPC	Controle Preditivo Generalizado (<i>Generalized Predictive Control</i>)
LQR	Regulador Quadrático Linear (<i>Linear-quadratic Regulator</i>)
MPC	Controle Preditivo Baseado em Modelo (<i>Model Predictive Control</i>)
MVU	Malha Viária Urbana
QDMC	<i>Quadratic Dynamic Matrix Control</i>
QP	Programação Quadrática (<i>Quadratic Programming</i>)
SMOC	<i>Shell Multivariable Optimizing Controller</i>
SUMT	<i>Sequential Unconstrained Minimization Technique</i>
TUC	<i>Traffic-responsive Urban Control</i>

Lista de Símbolos

Notação

A	letras maiúsculas denotam conjuntos.
A	letras maiúsculas em itálico denotam matrizes.
\mathbf{a}	letras minúsculas em negrito denotam vetores.
$a(k + 1 k)$	representa o valor predito de $a(k + 1)$ no instante k .
$\mathbf{0}$	números em itálico representam matrizes ou vetores de dimensão apropriada com estes elementos.

Índices

h	índice de interseções
i, j	índice auxiliar
k	índice de tempo discreto
m	índice dos sub-sistemas do controle DMPC
v, w	índice de vias

Conjuntos

F_h	conjunto de fases da interseção h
$G_{h,v}$	subconjunto de F_h indicando as fases em que a via v possui direito de passagem
H	conjunto de interseções
I_h	conjunto de vias de chegada da interseção h
$I(m)$	conjunto de vizinhos de entrada do sub-sistema m
\mathcal{M}	conjunto de sub-sistemas, da coluna de destilação e da rede de tráfego urbano
$N(m)$	vizinhança do sub-sistema m
O_h	conjunto de vias de saída da interseção h
$O(m)$	conjunto de vizinhos de saída do sub-sistema m

V conjunto de vias

Variáveis Específicas de Vias e Coluna de Destilação

y_m saída m da coluna de destilação
 y_m^{\max} capacidade máxima da saída m
 y_m^{\min} capacidade mínima da saída m
 x_v número de veículos da via v (veí)
 x_v^{\max} capacidade máxima de veículos da via v (veí)
 $t_{v,w}$ taxa de conversão da via v para a w
 S_v fluxo de saturação da via v (veí/h)
 q_v fluxo de entrada da via v (veí/h)
 p_v fluxo de saída da via v (veí/h)
 s_v fluxo de saída interno da via v (veí/h)
 d_v demanda interna da via v (veí/h)

Variáveis e Parâmetros de Controladores

u_m ação de controle do subsistema m
 μ taxa de decrescimento para métodos de ponto-interior
 T horizonte de predição para o controle preditivo
 ϵ parâmetro de ajuste do método de barreira
 γ critério de convergência do método de barreira
 τ critério de convergência do método de Newton
 e critério de convergência do algoritmo distribuído
 κ intervalo de ação de controle
 C_j tempo de ciclo da interseção j (s)
 L_j tempo perdido total da interseção j (s)
 $u_{j,i}$ tempo de verde da fase i e interseção j (s)
 u^{\min} ação de controle mínima permitida
 u^{\max} ação de controle máxima permitida

Lista de Figuras

2.1	Coluna de destilação	6
2.2	Verificação do modelo	10
2.3	Rede dinâmica linear representando a coluna de destilação	11
3.1	Rede dinâmica linear genérica	16
3.2	Caminho gerado pelo método de barreira	23
3.3	Convergência de $f(\mathbf{x}(\epsilon))$	25
4.1	Rede de agentes	28
4.2	Convergência de algoritmos distribuídos.	31
5.1	Comparação entre controles aplicados na coluna de destilação	37
5.2	Iterações do algoritmo variando T e μ , respectivamente.	40
5.3	Convergência de $f(\mathbf{x}(\epsilon))$ para $T = 15$, variando μ	41
6.1	Exemplo de uma interseção urbana.	44
6.2	Rede de tráfego urbano	45
6.3	Exemplo de via urbana	47
6.4	Tempo máximo de processamento	53
6.5	Ambiente do simulador Aimsun	54

Lista de Tabelas

2.1	Restrições de operação da coluna de destilação	9
5.1	Conjuntos de cada agente	36
5.2	Condições iniciais	37
5.3	Médias dos custos da coluna de destilação, para todos os μ	38
5.4	Tempo médio de processamento, para $\mu = 0,1$	39
5.5	Tempo médio de processamento, para $\mu = 0,3$	39
5.6	Tempo médio de processamento, para $\mu = 0,5$	40
6.1	Custos médios do controle de tráfego	50
6.2	Tempo médio de processamento, para $\mu = 0,1$	51
6.3	Tempo médio de processamento, para $\mu = 0,2$	51
6.4	Tempo médio de processamento, para $\mu = 0,4$	52
6.5	Tempo médio de processamento, para $\mu = 0,6$	52
6.6	Resultados de simulação	53

Capítulo 1

Introdução

Desde que foram introduzidas na indústria, as técnicas de controle preditivo baseado em modelo (MPC) proporcionaram muitos resultados positivos no desempenho do controle de processos [14]. Estas técnicas avançadas de controle multivariável se tornaram tecnologias importantes para a operação de sistemas dinâmicos mais complexos, com vantagens como a capacidade de tratar restrições explicitamente e o uso de algoritmos para conseguir soluções ótimas.

De forma simplificada, o MPC converte um problema de otimização dinâmica, com variáveis dependentes do tempo, em uma série de problemas de otimização estáticos, que devem ser resolvidos por algoritmos de otimização. Estas técnicas de controle utilizam modelos matemáticos que representam o processo para estabelecer comportamentos futuros e com esta predição calculam ações de controle que otimizam a resposta deste processo para algum critério de desempenho pré-estabelecido, respeitando as restrições impostas.

O desenvolvimento contínuo de instrumentação, a necessidade de melhorias nos processos, a competição de mercado e a necessidade de soluções ambientalmente conscientes têm feito com que os processos de controle se tornem ainda mais complexos. Com isto, a implementação e manutenção de algoritmos MPC centralizados têm se tornado uma questão importante e, muitas vezes, complicada de ser tratada. Alguns dos principais obstáculos encontrados quanto ao uso de técnicas de controle avançado, como o MPC, estão na dificuldade de comunicação entre sensores e unidades de processamento em sistemas geograficamente distribuídos e limitações computacionais para alguns problemas de otimização.

Uma alternativa seria a utilização de controladores preditivos com abordagem distribuída, que dividem o problema de otimização em subproblemas menores que devem ser resolvidos por uma rede de agentes, preservando, ou até mesmo melhorando, o desempenho final [11]. Cada agente desta rede seria responsável pelo cálculo das ações de controle de um dos subproblemas, utilizando para isto a troca de informações com os outros agentes

existentes. Este deve ser um processo iterativo, repetido diversas vezes antes que a ação de controle final seja enviada para os atuadores da planta, ou seja, a ação de controle de todo o processo é conseguida após uma “negociação” entre a rede de agentes.

O controle preditivo distribuído é uma tecnologia em evolução, e por causa disto existem diversas pesquisas com os mais diversos objetivos, tais como a elaboração de algoritmos para assegurar a cooperação da rede de agentes, técnicas para garantir a convergência dos problemas distribuídos e até mesmo estudos para o tratamento de restrições que acoplam os agentes. Algumas plantas petroquímicas são exemplos de grandes sistemas compostos por subsistemas distribuídos, contudo interligados por restrições de operação e saída do processo. Outros exemplos de mesma natureza são as redes de tráfego urbano e redes de energia elétrica.

1.1 Colunas de Destilação

A indústria petrolífera continua sendo uma das indústrias mais vitais para o desenvolvimento econômico dos países. Quando se refere à indústria petroquímica, ficam subentendidas todas as demais atividades envolvendo o petróleo, gás natural e seus derivados, ou seja, desde a exploração, transporte, passando pelo refino até a distribuição.

Aprofundando um pouco mais sobre o refino realizado pelas indústrias petroquímicas, este é, basicamente, um conjunto de processos físicos e químicos com o objetivo final de transformação da matéria-prima em derivados, começando sempre por um fracionamento do óleo cru nas refinarias [4]. As técnicas mais utilizadas de refino são [56]:

- **Destilação:** que é a maneira mais antiga e comum de separar os vários componentes, usando as diferenças entre as temperaturas de ebulição do petróleo. Esta operação é realizada em colunas de destilação;
- **Craqueamento térmico:** usado para quebrar cadeias longas em outras menores pela ação de temperaturas elevadas. Permitindo, por exemplo, que uma refinaria transforme gasóleos em gás de cozinha e gasolina;
- **Alquilação / Alcoilação:** processo no qual é transferido um grupo alquila de uma molécula para outra, visando obter moléculas maiores (mais complexas) específicas;
- **Craqueamento catalítico:** processo de quebra de moléculas grandes em moléculas menores através de um catalisador.

Observando mais atentamente as colunas de fracionamento, estas são os elementos mais importantes dentro de uma refinaria, recebendo investimentos relacionados à automação e controle visando garantir qualidade dos produtos e segurança do processo. Além disso, por

este ser um mercado muito competitivo, sempre se busca melhorar o desempenho operacional destes elementos, gerando novas tecnologias, incluindo melhorias no processo de refino, visando assim aumentar o lucro [19].

Mas apesar de todos os avanços obtidos na engenharia de controle e da tecnologia envolvida em refinarias, existem ainda diversas dificuldades quando se trata de controlar unidades de destilação. Os processos possuem elevados transientes quando o sistema é perturbado, gerando produtos fora da especificação, conseqüentemente de baixa qualidade, resultando em desperdício para a refinaria.

Com estas dificuldades, se tem ainda grande necessidade de estudos para aprimorar as técnicas já existentes de controle de colunas de destilação, assim como o desenvolvimento de novas técnicas para este controle. Neste ponto se insere a proposta deste trabalho, visando contribuições no controle de unidades de destilação.

1.2 Controle de Fluxos de Tráfego

O trânsito pode ser definido como a utilização de vias por pessoas, veículos e animais, conduzidos ou não, em grupos ou isolados, em circulação ou parados, este último podendo ser para estacionamento ou operação de carga ou descarga [45].

Existem diversos meios de se promover o controle do trânsito, sendo um dos mais utilizados a sinalização semafórica, onde o principal objetivo do controle é impedir que o fluxo de veículos chegue ao regime saturado, pois nesta condição são gerados os maiores problemas, tais como baixas velocidades, maior tempo de permanência dos veículos nas vias, problemas de segurança e até mesmo problemas de saúde, com o aumento de emissão de poluentes.

O número sempre crescente de veículos em circulação tem contribuído significativamente para o aumento dos congestionamentos urbanos, e os investimentos em novas malhas viárias não tem sido suficientes para reduzir estes impactos. Sendo assim, buscam-se novas técnicas de controle semafórico que consigam, principalmente, aumentar a eficiência da malha viária existente.

As malhas viárias podem ser tratadas como subsistemas acoplados, onde o controle semafórico de um cruzamento afeta diretamente os cruzamentos e vias de sua vizinhança. Este cenário, com distribuição geográfica e atualmente com controle descentralizado, é um problema interessante de ser tratado por algoritmos de controle distribuídos.

1.3 Objetivos

Este trabalho propõe um algoritmo de controle preditivo distribuído, aplicável em redes de sistemas dinâmicos lineares com restrições nas entradas de controle e acoplamento nas saídas. O problema de otimização do controle preditivo é tratado por uma rede de agentes, de forma que as informações deixem de ficar concentradas em uma única unidade de processamento e os controles passem a ser calculados em nível local.

Após o desenvolvimento destes algoritmos, resultados são obtidos através da aplicação em um modelo de coluna de destilação e em uma rede de tráfego urbano, com comparações realizadas com outras técnicas de controle.

1.4 Estrutura

O trabalho começa com a apresentação das características de funcionamento de uma coluna de destilação, assim como a apresentação de um modelo para estudos, dispostos no capítulo 2. No capítulo seguinte está o desenvolvimento de um controlador preditivo baseado em modelo, com toda sua formulação voltada para aplicação no modelo da coluna de destilação. Nesta parte, o cálculo das ações de controle é centralizado em uma única unidade de processamento.

No capítulo 4, o mesmo problema de controle preditivo é tratado, porém com uma abordagem distribuída, onde se tem a formulação dos subproblemas que serão atribuídos a agentes responsáveis por calcular as ações de controle. No capítulo seguinte estão os resultados obtidos após a aplicação dos controladores preditivos na coluna de destilação, comparando os resultados obtidos através das abordagens centralizada e distribuída.

O capítulo 6 estende o tema tratado neste trabalho, onde a formulação sugerida do controle preditivo distribuído é aplicada em uma rede de tráfego urbano, estabelecendo comparações de desempenho com outras técnicas utilizadas. Neste capítulo também são apresentados os resultados utilizando um simulador de tráfego urbano.

Por fim, o capítulo 7 retoma os pontos importantes do trabalho, ressaltando as principais contribuições observadas e definindo sugestões de trabalhos futuros.

Capítulo 2

Colunas de Destilação

No capítulo anterior foram apresentadas de forma geral as plantas petroquímicas e alguns de seus principais elementos, assim como sua importância na economia. Agora o trabalho foca-se nas colunas de destilação, que são elementos de grande importância na indústria petroquímica. A separação das frações de petróleo via destilação é a principal operação que ocorre em uma refinaria de petróleo [23].

A proposta deste capítulo é apresentar algumas das características básicas de uma coluna de destilação referentes ao seu princípio de funcionamento, as principais restrições operacionais e a realização do controle sobre a mesma. Um modelo linear de coluna de destilação será apresentado e transformado convenientemente para que nos capítulos seguintes seja utilizado junto com a teoria de controle a ser desenvolvida.

2.1 Funcionamento de Colunas de Destilação

A palavra *destilação* é originária do latim *distillare*, que significa *gotejar* e descreve o estágio final do processo, quando do gotejamento de um líquido de um condensador para um recipiente de coleta [20].

Descrevendo em termos práticos, a destilação é o processo no qual substâncias que formam uma mistura líquida são separadas através de processos de aquecimento, sendo necessário que os elementos da mistura tenham pontos de ebulição diferentes [29]. Hoje, a destilação é a tecnologia de separação mais importante na indústria química e petroquímica [27, 41].

Uma coluna de destilação pode ser descrita como um complexo sistema de escoamento, cuja finalidade é realizar a separação das misturas que são inseridas na mesma. Existem diversos tipos de colunas de destilação, determinadas de acordo com o tipo de operação,

ou refervedor, onde o produto de partes inferiores da coluna de destilação é enviado por meio de dutos para pratos mais altos.

Algumas características inerentes ao processo de destilação são: elevados gradientes de temperatura, tempo morto e um alto grau de acoplamento entre as variáveis manipuladas e controladas [41]. Associado a estas características têm-se um consumo elevado de energia, devido ao grande consumo de vapor de aquecimento juntamente com a baixa eficiência termodinâmica do processo [46]. Estas características indesejáveis atraem pesquisadores e empresas da área a buscarem soluções para minimizar custos e otimizar os processos.

Por ter grande versatilidade, as colunas são amplamente utilizadas nas indústrias. No entanto, uma operação adequada é primordial para que a qualidade dos produtos seja satisfatória e se minimize os efeitos das características citadas anteriormente e, por isto, uma atenção especial ao controle aplicado se faz necessária. A seção seguinte trata do sistema de controle em colunas de destilação.

2.2 Controle de Uma Coluna de Destilação

O controle de uma coluna de destilação deve garantir a segurança do processo, a especificação dos produtos e respeitar as restrições de operação e regulamentação ambiental, tudo isto visando a economia no processo [55]. Em uma unidade de destilação, três requisitos básicos devem ser atendidos [36]:

- **balanço de massa:** onde se busca manter os níveis na base e nos acumuladores de maneira que não ocorra inundação nem esvaziamento da coluna de destilação;
- **especificação do produto:** garantindo a qualidade dos produtos gerados, pois qualquer violação neste quesito conduz ao reprocessamento ou a degradação da mistura;
- **restrições de operação:** que devem ser respeitadas, podendo estas ser relativas às pressões e temperaturas ao longo da coluna.

Quando estes requisitos estão sendo atendidos, diz-se que a coluna de destilação está em operação normal. Os fatores que afetam a operação normal de uma coluna de destilação são dos mais variados tipos, desde as condições de alimentação e refluxo, condições do vapor de aquecimento e até mesmo as condições do tempo.

Nas indústrias petroquímicas, quando a produção sai da operação normal, têm-se transientes muito elevados. Sendo assim, o controle deve ser projetado de tal forma que rejeite ou minimize os efeitos das variações não controladas, fazendo a coluna voltar à operação normal e, preferencialmente, minimizando a duração destes transientes [54].

As variáveis que devem ser controladas durante a operação de uma coluna de destilação são geralmente relacionadas aos níveis, às composições dos produtos e às pressões e temperaturas ao longo da coluna. Algumas das variáveis que podem ser manipuladas para atingir os objetivos do controle são aberturas de válvulas e ligamento de bombas, que regulam vazões de entrada/saída e refluxo [32]. Normalmente estes elementos estão conectados ao topo e à base da coluna.

O controle da coluna de destilação para estas variáveis controladas e manipuladas é de certa forma simples, porém ainda é amplamente estudado para que se possam utilizar algoritmos e sistemas de controle cada vez mais avançados. Isto ocorre devido aos custos envolvidos no processo de destilação, onde melhorias no desempenho representam ganhos acumulados elevados. Esta busca por melhorias de desempenho pode ser colocada como uma justificativa para a elaboração deste trabalho.

2.3 Modelo da Coluna de Destilação

Para a aplicação das teorias seguintes foi utilizado o modelo de uma coluna fracionadora de óleo pesado, conhecido como *Shell heavy oil fractionator* [7, 48]. Sua escolha foi devido à este ser um modelo bem difundido no meio acadêmico e, apesar de não representar um processo real, possuir uma dinâmica que pode ser utilizada de forma didática para estudos de controle para fracionadores reais, representando um processo multivariável com algumas restrições físicas e operacionais.

Neste modelo, as variáveis controladas são a composição do produto no topo, composição do produto na lateral e a temperatura da base, sendo representadas como y_1 , y_2 e y_3 respectivamente. As variáveis que podem ser manipuladas são a vazão de saída no topo (u_1), vazão de saída lateral (u_2), e o refluxo da base da coluna (u_3).

A representação do sistema pode ser dada por um conjunto de funções de transferência que relacionam cada entrada com cada saída. A matriz de funções de transferência do sistema esta colocada na equação (2.1).

$$\begin{bmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \\ y_3(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4,05e^{-27s}}{1+50s} & \frac{1,77e^{-28s}}{1+60s} & \frac{5,88e^{-27s}}{1+50s} \\ \frac{5,39e^{-18s}}{1+50s} & \frac{5,72e^{-14s}}{1+60s} & \frac{6,9e^{-15s}}{1+40s} \\ \frac{4,38e^{-20s}}{1+33s} & \frac{4,42e^{-22s}}{1+44s} & \frac{7,2}{1+19s} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \\ u_3(s) \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Algumas restrições são impostas para que o sistema trabalhe dentro de pontos economicamente viáveis de operação. A Tabela 2.1 contém estas restrições:

Neste trabalho é necessário o modelo em tempo discreto da planta, para isto foi utilizado um amostrador e um segurador de ordem zero para a discretização do modelo da coluna de

Restrições:	Variação:
refluxo da base (u_3)	de -0,5 a 0,5
vazão do produto do topo (u_1)	de -0,5 a 0,5
vazão do produto lateral (u_2)	de -0,5 a 0,5

Tabela 2.1: Restrições de operação da coluna de destilação

destilação [24]. Com um período de amostragem T_s definido como sendo de quatro minutos, chega-se a uma matriz de funções de transferências discretas como a que é mostrada na equação (2.2).

$$\begin{bmatrix} y_1(z) \\ y_2(z) \\ y_3(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{0,08(z^{-1}+2,88z^{-2})}{1-0,923z^{-1}} z^{-6} & \frac{0,114z^{-1}}{1-0,936z^{-1}} z^{-7} & \frac{0,116(z^{-1}+2,883z^{-2})}{1-0,923z^{-1}} z^{-6} \\ \frac{0,211(z^{-1}+0,96z^{-2})}{1-0,923z^{-1}} z^{-4} & \frac{0,187(z^{-1}+0,967z^{-2})}{1-0,936z^{-1}} z^{-3} & \frac{0,17(z^{-1}+2,854z^{-2})}{1-0,905z^{-1}} z^{-3} \\ \frac{0,5z^{-1}}{1-0,886z^{-1}} z^{-5} & \frac{0,196z^{-1}+0,955z^{-2}}{1-0,913z^{-1}} z^{-5} & \frac{1,367z^{-1}}{1-0,81z^{-1}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1(z) \\ u_2(z) \\ u_3(z) \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Os atrasos foram considerados como pólos em $z = 0$ para que, depois da transformação em variáveis de estados, cada atraso corresponda a um estado do modelo, não sendo perdida esta informação durante a conversão [24]. As equações (2.3) e (2.4) representam uma parcela do modelo discreto em variáveis de estado, onde cada grupo \mathbf{x}_{ij} , A_{ij} , B_{ij} e C_{ij} contém a informação do acoplamento entre as saídas e controles da função de transferência localizada na linha i e coluna j da matriz de funções de transferência (2.1) e θ possui dimensões apropriadas.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_{11}(k+1) \\ \mathbf{x}_{21}(k+1) \\ \mathbf{x}_{31}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & \theta & \theta \\ \theta & A_{21} & \theta \\ \theta & \theta & A_{31} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{11}(k) \\ \mathbf{x}_{21}(k) \\ \mathbf{x}_{31}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & \theta & \theta \\ B_{21} & \theta & \theta \\ B_{31} & \theta & \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \\ u_3(k) \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

$$[y_1(k+1)] = \begin{bmatrix} C_{11} & \theta & \theta & C_{12} & \theta & \theta & C_{13} & \theta & \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{11}(k) \\ \mathbf{x}_{21}(k) \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{33}(k) \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Para exemplificar o resultado da transformação do modelo para variáveis de estado, um conjunto de matrizes obtidas neste processo referentes à entrada u_3 e saída y_2 é apresentado na sequência.

$$\frac{A_{23} \mid B_{23}}{C_{23} \mid D_{23}} = \left[\begin{array}{ccccc|c} 0,905 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0,170 & 0,486 & 0 \end{array} \right] \quad (2.5)$$

Uma comparação entre as respostas à um degrau de entrada é realizada entre os modelos

contínuo e espaço de estados discreto somente com a finalidade de verificar que o modelo adquirido está correto e contém informações como o atraso de transporte. A Figura 2.2 mostra a resposta obtida para a saída y_3 quando é aplicado um degrau na entrada u_2 .

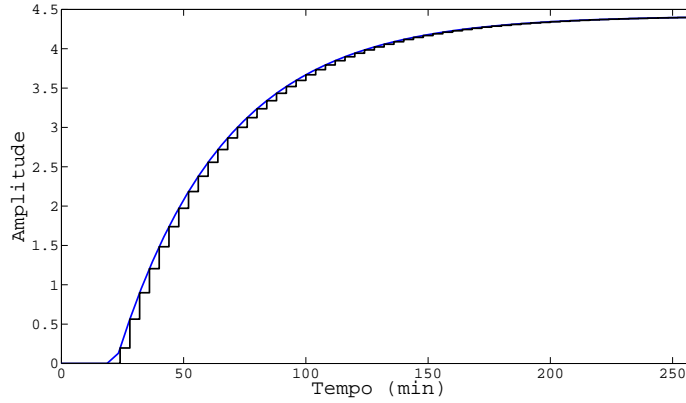


Figura 2.2: Verificação do modelo

Seguindo com o desenvolvimento do modelo, agrupam-se alguns termos semelhantes da seguinte forma:

$$\mathbf{x}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{1i} \\ \mathbf{x}_{2i} \\ \mathbf{x}_{3i} \end{bmatrix}, \quad A_i = \begin{bmatrix} A_{1i} & 0 & 0 \\ 0 & A_{2i} & 0 \\ 0 & 0 & A_{3i} \end{bmatrix}, \quad C_i = \begin{bmatrix} C_{1i} & 0 & 0 \\ 0 & C_{2i} & 0 \\ 0 & 0 & C_{3i} \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} B_{11} & 0 & 0 \\ B_{21} & 0 & 0 \\ B_{31} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & B_{12} & 0 \\ 0 & B_{22} & 0 \\ 0 & B_{32} & 0 \end{bmatrix}, \quad B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & B_{13} \\ 0 & 0 & B_{23} \\ 0 & 0 & B_{33} \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

assim, um modelo com o formato da equação (2.8) pode ser obtido.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(k+1) \\ \mathbf{x}_2(k+1) \\ \mathbf{x}_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(k) \\ \mathbf{x}_2(k) \\ \mathbf{x}_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & B_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \\ u_3(k) \end{bmatrix} \quad (2.8a)$$

$$\begin{bmatrix} y_1(k+1) \\ y_2(k+1) \\ y_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(k) \\ \mathbf{x}_2(k) \\ \mathbf{x}_3(k) \end{bmatrix} \quad (2.8b)$$

O formato utilizado para representar o modelo possui a característica de facilitar a decomposição do modelo obtido em uma rede dinâmica linear, tratando o sistema como um conjunto de subsistemas interligados, como apresentado na Figura 3.1.

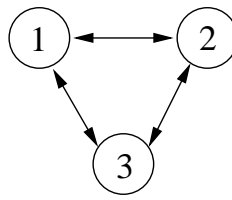


Figura 2.3: Rede dinâmica linear representando a coluna de destilação

2.4 Sumário

Foram apresentados conceitos sobre colunas de destilação e seu controle, assim como um modelo linear para ser utilizado nos capítulos seguintes no desenvolvimento dos algoritmos de controle. No próximo capítulo serão apresentados conceitos sobre controle preditivo baseado em modelo utilizando uma formulação centralizada.

Capítulo 3

Controle Centralizado

No capítulo anterior foi apresentado um modelo linear usado para representar as dinâmicas de uma coluna de destilação [48]. Aprofundando o estudo, será apresentada agora uma base teórica para a formulação de um controlador preditivo baseado em modelos no espaço de estados, passando pela função custo, restrições, até a obtenção da lei de controle. Um método de ponto interior será descrito e com ele será desenvolvido um algoritmo para ser aplicado na busca da solução do problema de controle da coluna de destilação.

3.1 Introdução

O controle preditivo baseado em modelo (MPC) refere-se aos métodos de controle que utilizam um modelo matemático para realizar uma predição da resposta futura de um dado processo e com isto calcular a lei de controle [49]. O MPC integra uma extensa classe de aplicações de controle tais como controle ótimo, controle estocástico, controle de processos multivariáveis e com tempo morto [7].

Desenvolvido originalmente para as necessidades específicas do controle de usinas geradoras de energia elétrica e refinarias de petróleo, a tecnologia do MPC pode ser encontrada hoje em uma ampla variedade de aplicações, incluindo áreas químicas, indústria de alimentos, indústria automotiva, entre outras [49].

3.2 Definições

Visando facilitar o entendimento do que é proposto neste capítulo, serão descritos a seguir alguns dos elementos inerentes ao controlador [7] antes de formular o algoritmo MPC que será aplicado ao problema da coluna de destilação.

Função Objetivo: Define o critério de desempenho que será utilizado para otimização no algoritmo de controle, podendo utilizar quaisquer variáveis, relacionando-as das mais diversas formas. O tipo mais comum possui formato quadrático, como na equação (3.1), visando minimizar erros futuros de saída e o esforço de controle.

$$J = \sum_{j=1}^p [\hat{y}(t+j|t) - w(t+j)]^2 + \sum_{j=1}^m [u(t+j-1)]^2 \quad (3.1)$$

Nesta equação, p é o horizonte de predição, m é o horizonte de controle, \hat{y} refere-se à predição da saída da planta, w é a referência a ser seguida e u é o vetor de ações de controle. Estas formulações podem ainda incluir ponderações em quaisquer dos elementos utilizados.

Modelo de Predição: É o elemento principal do MPC podendo, em princípio, assumir qualquer forma matemática. Existem diversos tipos de modelos que representam a relação entrada/saída de processos, podendo ser a resposta ao impulso, resposta ao degrau, modelo no espaço de estados, entre outros, e dependendo do modelo que se dispõe escolhe-se o tipo de MPC mais apropriado.

Restrições: São elementos utilizados para representar as limitações do processo, mas não necessariamente aparecem na formulação do problema. Podem ser de igualdade e desigualdade e relacionam quaisquer elementos do problema, tais como entrada, saída e controle. São adicionadas à minimização e é comum serem colocadas em uma matriz de desigualdades envolvendo o vetor de entrada, assim o problema toma a forma padrão de um problema de programação quadrática (QP).

Algoritmo de Controle: Define como funcionará o MPC, recebendo a predição do comportamento futuro de um processo e suas restrições para um dado horizonte e calculando o melhor sinal de controle para este horizonte. A estratégia é então aplicar no processo apenas a primeira ação de controle do horizonte, devido às imprecisões de predição, e atualizar os parâmetros do problema para que um novo problema de otimização seja formado. Este processo funciona para um horizonte deslizante, ou seja, é repetido a cada iteração. Outra razão para evitar a aplicação de toda a sequência é que a referência pode ser alterada nos próximos intervalos.

3.3 Controle Preditivo Baseado em Modelo

O MPC é um método baseado em controle ótimo, isto é, que calcula as entradas de controle visando minimizar uma função objetivo, utilizando tanto valores atuais de saídas do processo quanto valores preditos por um modelo explícito do mesmo [5].

Uma série de vantagens fez com que o uso do MPC na indústria crescesse nos últimos anos [7]. Uma delas é que o MPC apresenta conceitos intuitivos, podendo ser usado desde o controle de processos com dinâmicas relativamente simples até as mais complicadas, incluindo sistemas com grande tempo morto e não lineares. A formulação pode incluir referências futuras, quando estas são conhecidas, e pode ser estendida para problemas multivariáveis. Tem-se que o MPC é uma técnica de controle totalmente aberta que desenvolveu-se tanto na indústria quanto no meio acadêmico [14, 30, 51] e é baseada em certos princípios básicos que permitem ainda muita pesquisa e futuras extensões. Desde sua primeira formulação, muitos tipos de algoritmos MPC foram desenvolvidos, alguns destes algoritmos são apresentados na sequência.

IDCOM: A primeira vez que aplicações de controle foram descritas com o MPC foi em 1976 [50], onde foi referido como IDCOM, um acrônimo para identificação e comando. Este controlador utilizava a resposta ao impulso da planta como modelo de predição, sua função objetivo era quadrática, podia incluir restrições de entrada e saída e especificava um seguimento de referência como comportamento futuro da planta.

DMC: Engenheiros da Shell desenvolveram seu MPC no início da década de 70 ao qual deram o nome de *Dynamic Matrix Control* (DMC), cujo algoritmo vem sendo utilizado com sucesso na indústria há várias décadas [30] e dentre suas principais características estão a utilização de um modelo baseado na resposta ao degrau da planta e função objetivo quadrática para um horizonte finito de predição. Em versões subsequentes, o DMC passou a tratar restrições como um problema de programação quadrática, e foi chamado de QDMC [13].

GPC: O GPC foi proposto em 1987 [12] e desde então tem se tornado um dos métodos mais populares no âmbito do controle preditivo, podendo tratar plantas instáveis e de fase não mínima. Este algoritmo utiliza o modelo CARIMA (*Controlled Autoregressive Integrated Moving Average*) para representar a planta e perturbações e as predições de saída são feitas utilizando preditores ótimos.

SMOC: No final dos anos 80, foi desenvolvido o *Shell Multivariable Optimizing Controller* (SMOC) [37], o qual uniu o espaço de estados com os algoritmos do MPC. O algoritmo SMOC incluiu diversos aspectos que são considerados essenciais para uma formulação “moderna” do MPC [49], dentre as novas características estão os modelos de espaço de estados, que podem representar uma grande variedade de dinâmicas lineares.

Aplicações de controle preditivo em colunas de destilação são amplamente estudadas devido a sua facilidade de implementação e tratamento de restrições de processo [2, 7, 21, 33, 43, 53, 61]. Existem estudos nesta área que utilizam tanto o algoritmo DMC [3, 35] bem como o GPC [28]. Neste trabalho o estudo do controle sobre a coluna de destilação usa

o MPC baseado em modelos descritos por variáveis de estado. Na seção seguinte têm-se o desenvolvimento do algoritmo de controle.

3.4 Formulação do MPC Utilizando Variáveis de Estado

A formulação será realizada considerando um modelo genérico, como o representado na Figura 3.1, representando sistemas dinâmicos lineares obtidos pela interligação de subsistemas desacoplados onde as dinâmicas e os controles são locais e o acoplamento entre os subsistemas é dado por restrições na saída do processo. O modelo da coluna de destilação se encontra dentro do conjunto abrangido por esta formulação.

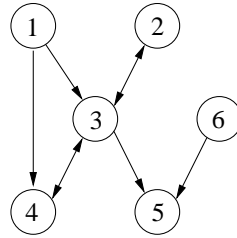


Figura 3.1: Rede dinâmica linear genérica

Primeiramente denomina-se $\mathcal{M} = \{1, \dots, M\}$ como o conjunto dos M subsistemas desacoplados. Cada um destes subsistemas m possui uma dinâmica que pode ser descrita pela equação:

$$\mathbf{x}_m(k+1) = A_m \mathbf{x}_m(k) + B_m \mathbf{u}_m(k) \quad (3.2)$$

onde $\mathbf{x}_m \in \mathbb{R}^{n_m}$ representa o vetor de estados, $\mathbf{u}_m \in \mathbb{R}^{p_m}$ representa a entrada de controle e A_m e B_m são matrizes de dimensões apropriadas. A saída de um dado subsistema m depende dos estados de subsistemas pertencentes ao conjunto $I(m) \subseteq \mathcal{M}$, que inclui os estados do subsistema m , por exemplo para o subsistema 4, o conjunto é dado por $I(4) = \{1, 3, 4\}$. A equação de saída dos subsistemas podem ser escritas como:

$$\mathbf{y}_m(k) = \sum_{i \in I(m)} C_{m,i} \mathbf{x}_i(k) \quad (3.3)$$

onde $C_{m,i}$ são matrizes de dimensões adequadas que relacionam os estados do conjunto $I(m)$. Restrições na saída são impostas, pois serão utilizadas mais adiante na aplicação da coluna de destilação. Estas restrições de saída podem ser colocadas como na equação:

$$\mathbf{y}_m^{\min} \leq \mathbf{y}_m(k) \leq \mathbf{y}_m^{\max} \quad (3.4)$$

Optou-se por uma referência de entrada sempre em zero, a fim de facilitar a formulação do

problema. Para o sistema, considerando restrições na entrada de controle e saídas do sistema, o problema de regulação pode ser descrito da seguinte forma:

$$\min \frac{1}{2} \sum_{m=1}^M \sum_{k=0}^{\infty} [\mathbf{y}_m(k+1)' Q_m \mathbf{y}_m(k+1) + \mathbf{u}_m(k)' R_m \mathbf{u}_m(k)] \quad (3.5a)$$

S.a: de $m = 1, \dots, M$, $k = 0, \dots, \infty$:

$$\mathbf{x}_m(k+1) = A_m \mathbf{x}_m(k) + B_m \mathbf{u}_m(k) \quad (3.5b)$$

$$\mathbf{y}_m(k+1) = \sum_{i \in I(m)} C_{m,i} \mathbf{x}_i(k+1) \quad (3.5c)$$

$$\mathbf{u}_m^{\min} \leq \mathbf{u}_m(k) \leq \mathbf{u}_m^{\max} \quad (3.5d)$$

$$\mathbf{y}_m^{\min} \leq \mathbf{y}_m(k+1) \leq \mathbf{y}_m^{\max} \quad (3.5e)$$

Onde Q_m são matrizes simétricas positivas semi-definidas, R_m são matrizes simétricas positivas definidas e a função custo relaciona tanto a saída quanto o esforço de controle. O próximo passo é aproximar este problema de tempo infinito para um horizonte finito para a aplicação do MPC.

Dado o vetor $\mathbf{x}(k) = (\mathbf{x}_1(k), \dots, \mathbf{x}_M(k))$ para representar os estados do sistema no tempo k , o problema pode ser definido como na equação:

$$P : \min f = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^M \sum_{j=0}^{T-1} [\hat{\mathbf{y}}_m(k+j+1|k)' Q_m \hat{\mathbf{y}}_m(k+j+1|k) + \hat{\mathbf{u}}_m(k+j|k)' R_m \hat{\mathbf{u}}_m(k+j|k)] \quad (3.6a)$$

S.a : De $m = 1, \dots, M$, $j = 0, \dots, T-1$:

$$\hat{\mathbf{x}}_m(k+j+1|k) = A_m \hat{\mathbf{x}}_m(k+j|k) + B_m \hat{\mathbf{u}}_m(k+j|k) \quad (3.6b)$$

$$\hat{\mathbf{y}}_m(k+j+1|k) = \sum_{i \in I(m)} C_{m,i} \hat{\mathbf{x}}_i(k+j+1|k) \quad (3.6c)$$

$$\mathbf{u}_m^{\min} \leq \hat{\mathbf{u}}_m(k+j|k) \leq \mathbf{u}_m^{\max} \quad (3.6d)$$

$$\mathbf{y}_m^{\min} \leq \hat{\mathbf{y}}_m(k+j+1|k) \leq \mathbf{y}_m^{\max} \quad (3.6e)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_m(k|k) = \mathbf{x}_m(k) \quad (3.6f)$$

Onde $\hat{\mathbf{u}}_m(k+j|k)$ representa a predição da entrada de controle do subsistema m para o tempo $(k+j)$ com as informações obtidas até o tempo k , e da mesma forma $\hat{\mathbf{y}}_m$ e $\hat{\mathbf{x}}_m$ são saídas e estados preditos respectivamente. A variável T foi utilizada para definir tanto o horizonte de predição quanto o horizonte de controle a fim de tornar o desenvolvimento seguinte mais simples.

A partir deste ponto a notação " $|k$ " é retirada de todas as variáveis para simplificar a visualização das equações. Visando simplificar variáveis algumas substituições serão realizadas. Primeiramente têm-se a possibilidade de obter o estado do subsistema m no tempo k

usando apenas o estado inicial e os controles passados como verificado na equação (3.7), uma vez que trata-se de um sistema dinâmico linear.

$$\mathbf{x}_m(1) = A_m \mathbf{x}_m(0) + B_m \mathbf{u}_m(0) \quad (3.7a)$$

$$\mathbf{x}_m(2) = A_m^2 \mathbf{x}_m(0) + A_m B_m \mathbf{u}_m(0) + B_m \mathbf{u}_m(1) \quad (3.7b)$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{x}_m(k) = A_m^k \mathbf{x}_m(0) + \sum_{j=1}^k A_m^{k-j} B_m \mathbf{u}_m(j) \quad (3.7c)$$

Para as predições pode-se usar o mesmo artifício, podendo então representar os estados preditos e saídas futuras no tempo $(k+t)$ de uma forma compacta como:

$$\hat{\mathbf{x}}_m(k+j) = A_m^j \mathbf{x}_m(k) + \sum_{l=1}^j A_m^{j-l} B_m \hat{\mathbf{u}}_m(k+l-1) \quad (3.8a)$$

$$\hat{\mathbf{y}}_m(k+l) = \sum_{i \in I(m)} C_{m,i} \left(A_i^j \mathbf{x}_i(k) + \sum_{l=1}^j A_i^{l-1} B_i \hat{\mathbf{u}}_i(k+l-1) \right) \quad (3.8b)$$

Agrupando agora os termos com a ajuda dos vetores $\hat{\mathbf{x}}_m$, $\hat{\mathbf{u}}_m$ e $\hat{\mathbf{y}}_m$ para representar as predições dos estados, controles e saídas respectivamente para todo o horizonte de predição, e as matrizes $\overline{CA}_{m,i}$ e $\overline{CB}_{m,i}$ para agrupar as matrizes que definem as dinâmicas, têm-se agora o seguinte conjunto de vetores e matrizes:

$$\hat{\mathbf{x}}_m = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_m(k+1) \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{x}}_m(k+T) \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{u}}_m = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_m(k) \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{u}}_m(k+T-1) \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{y}}_m = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{y}}_m(k+1) \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{y}}_m(k+T) \end{bmatrix}, \quad \overline{CA}_{m,i} = \begin{bmatrix} C_{m,i} A_i \\ C_{m,i} A_i^2 \\ \vdots \\ C_{m,i} A_i^T \end{bmatrix}$$

$$\overline{CB}_{m,i} = \begin{bmatrix} C_{m,i} B_i & 0 & \cdots & 0 \\ C_{m,i} A_i B_i & C_{m,i} B_i & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ C_{m,i} A_i^{T-1} B_i & C_{m,i} A_i^{T-2} B_i & \cdots & C_{m,i} B_i \end{bmatrix}$$

Utilizando os vetores e matrizes desenvolvidas pode-se escrever a equação da predição das

saídas para todo o horizonte conforme a equação:

$$\hat{\mathbf{y}}_m = \sum_{i \in I(m)} (\overline{CA}_{m,i} \mathbf{x}_i(k) + \overline{CB}_{m,i} \hat{\mathbf{u}}_i) \quad (3.9)$$

Define-se agora matrizes \bar{Q}_m e \bar{R}_m com dimensões apropriadas e vetores $\hat{\mathbf{u}}_m^{\min}$, $\hat{\mathbf{u}}_m^{\max}$, $\hat{\mathbf{y}}_m^{\min}$, e $\hat{\mathbf{y}}_m^{\max}$ como na sequência:

$$\bar{Q}_m = \begin{bmatrix} Q_m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Q_m & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_m \end{bmatrix}, \quad \bar{R}_m = \begin{bmatrix} R_m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & R_m & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_m \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{u}}_m^{\min} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_m^{\min} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_m^{\min} \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{u}}_m^{\max} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_m^{\max} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_m^{\max} \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{y}}_m^{\min} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_m^{\min} \\ \vdots \\ \mathbf{y}_m^{\min} \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{y}}_m^{\max} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_m^{\max} \\ \vdots \\ \mathbf{y}_m^{\max} \end{bmatrix}$$

O problema P pode ser representado por uma forma compacta conforme segue:

$$P : \min f = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^M [\hat{\mathbf{y}}_m' \bar{Q}_m \hat{\mathbf{y}}_m + \hat{\mathbf{u}}_m' \bar{R}_m \hat{\mathbf{u}}_m] \quad (3.10a)$$

S.a : De $m = 1, \dots, M$:

$$\hat{\mathbf{y}}_m = \sum_{i \in I(m)} (\overline{CA}_{m,i} \mathbf{x}_i(k) + \overline{CB}_{m,i} \hat{\mathbf{u}}_i) \quad (3.10b)$$

$$\hat{\mathbf{u}}_m^{\min} \leq \hat{\mathbf{u}}_m \leq \hat{\mathbf{u}}_m^{\max} \quad (3.10c)$$

$$\hat{\mathbf{y}}_m^{\min} \leq \hat{\mathbf{y}}_m \leq \hat{\mathbf{y}}_m^{\max} \quad (3.10d)$$

Para esta formulação, têm-se o seguinte [9]:

Observação 3.1. *O problema de otimização P é um problema quadrático convexo.*

Desenvolvendo em P a relação da equação (3.9), pode-se representar o problema utilizando apenas o estado atual e os controles. Primeiramente define-se f_m como uma parte do

problema P para um m específico para realizar esta substituição:

$$\begin{aligned}
f_m &= \frac{1}{2} \left(\sum_{i \in I(m)} (\overline{CA}_{m,i} \mathbf{x}_i(k) + \overline{CB}_{m,i} \hat{\mathbf{u}}_i) \right)' \bar{Q}_m \\
&\quad \cdot \left(\sum_{i \in I(m)} (\overline{CA}_{m,i} \mathbf{x}_i(k) + \overline{CB}_{m,i} \hat{\mathbf{u}}_i) \right) + \frac{1}{2} \hat{\mathbf{u}}_m' \bar{R}_m \hat{\mathbf{u}}_m \\
&= \frac{1}{2} \left(\sum_{i \in I(m)} \overline{CA}_{m,i} \mathbf{x}_i(k) \right)' \bar{Q}_m \left(\sum_{i \in I(m)} \overline{CA}_{m,i} \mathbf{x}_i(k) \right) \\
&\quad + \left(\sum_{i \in I(m)} \overline{CA}_{m,i} \mathbf{x}_i(k) \right)' \bar{Q}_m \left(\sum_{i \in I(m)} \overline{CB}_{m,i} \hat{\mathbf{u}}_i \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \left(\sum_{i \in I(m)} \overline{CB}_{m,i} \hat{\mathbf{u}}_i \right)' \bar{Q}_m \left(\sum_{i \in I(m)} \overline{CB}_{m,i} \hat{\mathbf{u}}_i \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \hat{\mathbf{u}}_m' \bar{R}_m \hat{\mathbf{u}}_m \tag{3.11a}
\end{aligned}$$

Novamente realiza-se um agrupamento de termos definindo os vetores $\mathbf{g}_{m,i,j}$ para os termos que dependem do estado atual e dos controles, as matrizes $H_{m,i,j}$ para agrupar termos que dependem somente do controle e c_m para agrupar os termos constante de f_m como segue:

$$\mathbf{g}_{m,i,j} = \overline{CB}_{m,i}' \bar{Q}_m \overline{CA}_{m,j} \mathbf{x}_j(k) \text{ for } i, j \in I(m) \tag{3.12a}$$

$$H_{m,m,m} = \overline{CB}_{m,m}' \bar{Q}_m \overline{CB}_{m,m} + \bar{R}_m \tag{3.12b}$$

$$H_{m,i,j} = \overline{CB}_{m,i}' \bar{Q}_m \overline{CB}_{m,j} \tag{3.12c}$$

for $i, j \in I(m), i \neq m$ or $j \neq m$

$$c_m = \frac{1}{2} \sum_{i \in I(m)} \sum_{j \in I(m)} \mathbf{x}_i(k)' \overline{CA}_{m,i}' \bar{Q}_m \overline{CA}_{m,j} \mathbf{x}_j(k) \tag{3.12d}$$

É possível assim redefinir o problema P como na formulação (3.13), onde agora a representação fica somente em função dos controles.

$$P : \min f(\hat{\mathbf{u}}) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^M \sum_{i \in I(m)} \sum_{j \in I(m)} [\hat{\mathbf{u}}_i' H_{m,i,j} \hat{\mathbf{u}}_j + \mathbf{g}'_{m,i,j} \hat{\mathbf{u}}_i] + \sum_{m=1}^M c_m \tag{3.13a}$$

S.a : De $m = 1, \dots, M$:

$$\hat{\mathbf{u}}_m^{\min} \leq \hat{\mathbf{u}}_m \leq \hat{\mathbf{u}}_m^{\max} \tag{3.13b}$$

$$\hat{\mathbf{y}}_m^{\min} \leq \sum_{i \in I(m)} (\overline{CA}_{m,i} \mathbf{x}_i(k) + \overline{CB}_{m,i} \hat{\mathbf{u}}_i) \leq \hat{\mathbf{y}}_m^{\max} \tag{3.13c}$$

Na formulação atual, pode-se dizer o seguinte [9]:

Proposição 3.1. *f é uma função estritamente convexa.*

A convexidade estrita é uma propriedade que será de grande ajuda no desenvolvimento dos algoritmos na sequência deste trabalho. Foram definidos todos os elementos necessários para realizar a parte de experimentos usando a abordagem centralizada, porém existem alguns aspectos que serão tratados de forma diferente, como por exemplo, as restrições da planta.

Existem diversos algoritmos que resolvem os problemas de controle preditivo com a formulação quadrática atual, porém neste trabalho o objetivo é tratar as restrições para que P deixe de ser um problema de *programação quadrática* com restrições e passe a ser um problema de *minimização irrestrita*, onde algoritmos mais simples podem ser utilizados [9]. Esta alteração será importante quando a formulação distribuída for utilizada, pois a resolução de subproblemas de *programação quadrática* com restrições pode não convergir para o ponto ótimo global, dificuldade superada com a formulação de problemas de *minimização irrestrita*. Visando este objetivo, será apresentado e aplicado em P o método de barreira logarítmica.

3.5 Método de Barreira Logarítmica

O método de barreira foi proposto por Fiacco e McCormick nos anos sessenta [58], quando foi chamado de técnica de minimização sequencial irrestrita (SUMT). A idéia principal do método é transformar a busca da solução de um problema de otimização convexa com restrições em uma sequência de minimizações irrestritas de subproblemas, onde a solução de um subproblema na iteração atual será considerada como o ponto inicial para o subproblema da próxima iteração [22, 25].

Nestes subproblemas, as restrições do problema original são incorporadas na função objetivo através de alguma função matemática específica, fazendo com que pontos próximos às fronteiras das restrições tenham *pesos* elevados. Assim a solução do problema tende a se afastar das fronteiras dadas por estas restrições.

O problema P pode ser representado de uma forma simplificada como:

$$P : \min f(\mathbf{x}) \tag{3.14a}$$

$$S. a: A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \tag{3.14b}$$

onde $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ pode representar o conjunto de todas as restrições, tanto do controle quanto da saída. Assume-se que o problema é resolvível, ou seja, um \mathbf{x}^* ótimo existe, e as restrições delimitam um *conjunto fechado*¹. O método de barreira requer um ponto inicial estritamente

¹Um conjunto S é dito fechado se todo ponto fora de S possui uma vizinhança disjunta de S [59].

factível e o domínio da função é o conjunto de pontos que satisfazem as restrições de desigualdade do problema (3.14) de forma estrita. Assim, uma *função de barreira* é qualquer função $B(\mathbf{x}) : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ que satisfaz:

- $B(\mathbf{x}) \geq 0$ para todo \mathbf{x} que satisfaz $A\mathbf{x} < \mathbf{b}$, e
- $B(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$ quando \mathbf{x} se aproxima da fronteira de $\{\mathbf{x} | A\mathbf{x} < \mathbf{b}\}$

O método da barreira logarítmica é um dos tipos de métodos de barreira utilizados para resolver problemas de otimização convexos com restrições de desigualdade [6]. Sendo \mathbf{a}'_i a i -ésima linha de A , a idéia do método é tratar as restrições usando a função de barreira logarítmica como a seguir:

$$\phi(\mathbf{x}) = - \sum_{i=1}^p \log(b_i - \mathbf{a}'_i \mathbf{x}), \quad \text{dom } \phi = \{\mathbf{x} | A\mathbf{x} < \mathbf{b}\} \quad (3.15)$$

onde p é o número de restrições de P , ou seja, o número de linhas da matriz A . Aplicando o método de barreira em P , dado por (3.14), obtém-se um problema de centralização dado por:

$$P(\epsilon) : \min g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \epsilon\phi(\mathbf{x}) \quad (3.16)$$

onde $\epsilon > 0$ é um parâmetro que ajusta a exatidão da aproximação. Quanto menor ϵ , mais precisa a aproximação $P(\epsilon)$ se torna. A solução ótima \mathbf{x}^* é alcançada resolvendo (3.16) para uma sequência decrescente de $\epsilon \rightarrow 0^+$, ou seja, $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \mathbf{x}(\epsilon) = \mathbf{x}^*$. O algoritmo 1 possui um pseudo-código com a estrutura utilizada no método de barreira e a Figura 3.2 ilustra o resultado da utilização do método para um problema fictício.

Algoritmo 1: Método de Barreira

entrada: um \mathbf{x} estritamente factível, ϵ inicial, taxa de decrescimento $\mu < 1$, e tolerância γ
iniciar: $k = -1$ e $\epsilon^{(0)} = \epsilon$
repeat
 $k = k + 1$
 calcular passo: obter \mathbf{x}^k resolvendo $P(\epsilon^k)$ com a solução inicial \mathbf{x}
 if $\epsilon^k > \gamma/p$ **then**
 $\mathbf{x} = \mathbf{x}^k$ e $\epsilon^{k+1} = \mu\epsilon^k$
until $\epsilon^{(k)} \leq \gamma/p$;

O método de Newton pode ser utilizado dentro do algoritmo 1 para se alcançar a solução ótima de $\mathbf{x}(\epsilon)$ para cada ϵ utilizado, usando para este fim o gradiente e a Hessiana de $\phi(\mathbf{x})$ e

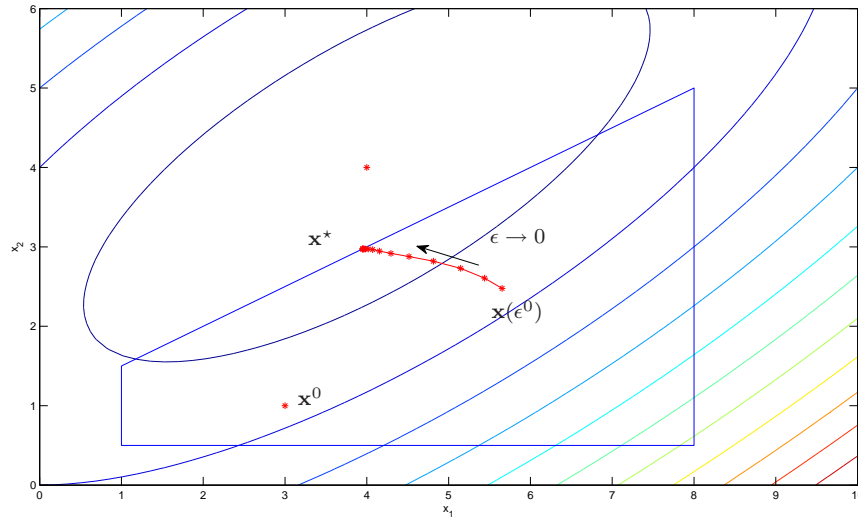


Figura 3.2: Caminho gerado pelo método de barreira

$f(\mathbf{x})$. O algoritmo 2 mostra como utilizar o método de Newton com *backtracking line search* [6] para a escolha do tamanho do passo para cada iteração. Este método é dependente de dois parâmetros, $0 < \alpha < 0.5$ e $0 < \beta < 1$, lembrando que o ajuste destes afeta fortemente o número de passos de Newton necessários para a convergência [6], porém esta discussão não será abordada neste trabalho. O gradiente e a Hessiana das restrições, agrupadas em ϕ , são dados por:

$$\nabla\phi(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^p \frac{1}{(b_i - \mathbf{a}'_i \mathbf{x})} \mathbf{a}_i, \quad \nabla^2\phi(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^p \frac{1}{(b_i - \mathbf{a}'_i \mathbf{x})^2} \mathbf{a}_i \mathbf{a}'_i \quad (3.17)$$

$P(\epsilon)$ possui uma solução única $\mathbf{x}^*(\epsilon)$ para qualquer $\epsilon > 0$ pois $g(\mathbf{x})$ é estritamente convexa. O *caminho central* $\mathcal{P} = \{\mathbf{x}^*(\epsilon) : \epsilon > 0\}$ é o conjunto de todos os pontos $\mathbf{x}^*(\epsilon)$, $\epsilon > 0$, que são chamados de *pontos centrais*. As seguintes condições de otimalidade de primeira ordem caracterizam um ponto central porque são condições necessárias e suficientes:

$$\nabla g(\mathbf{x}^*(\epsilon)) = \nabla f(\mathbf{x}^*(\epsilon)) + \epsilon \sum_{i=1}^p \frac{1}{(b_i - \mathbf{a}'_i \mathbf{x}^*)} \mathbf{a}_i = \mathbf{0} \quad (3.18)$$

Com a formulação desenvolvida se tem todos os elementos necessários para então resolver o problema P com a abordagem centralizada.

Algumas observações podem ser feitas neste momento em relação ao Lagrangeano de P , $\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^p \lambda_i (\mathbf{a}'_i \mathbf{x} - b_i)$, onde $\boldsymbol{\lambda}$ é um vetor de multiplicadores de Lagrange. É válido dizer que $\min_{\mathbf{x}} \mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})$, dados valores arbitrários de $\boldsymbol{\lambda} \geq 0$, fornece um limite inferior para o valor objetivo ótimo f^* do problema original [38].

Algoritmo 2: Método de Newton para $P(\epsilon)$

entrada: um ponto inicial \mathbf{x} na iteração k , parâmetro de barreira ϵ , parâmetros do backtracking $\alpha \in (0, 1/2)$ e $\beta \in (0, 1)$, e tolerância τ

while $\|\nabla g(\mathbf{x})\| > \tau$ **do**

 obter o passo de Newton $\Delta \mathbf{x} = -\nabla^2 g(\mathbf{x})^{-1} \nabla g(\mathbf{x})$

 definir $s = 1$

while $g(\mathbf{x} + s\Delta \mathbf{x}) > g(\mathbf{x}) + \alpha s \nabla g(\mathbf{x})' \Delta \mathbf{x}$ **do**

$s = \beta s$

$\mathbf{x} = \mathbf{x} + s\Delta \mathbf{x}$

saída: \mathbf{x}

As condições (3.18) podem ser usadas para mostrar que todo ponto central fornece um ponto dual factível [9]. Dado $\mathbf{x}(\epsilon)$, os multiplicadores de Lagrange são dados por:

$$\lambda_i(\epsilon) = -\frac{\epsilon}{(\mathbf{a}'_i \mathbf{x}(\epsilon) - b_i)}, \quad i = 1, \dots, p$$

onde $\lambda_i(\epsilon) > 0$, pois $(\mathbf{a}'_i \mathbf{x}(\epsilon) - b_i) < 0$ para todo i . Pode-se mostrar que $(\lambda_i(\epsilon), \mathbf{x}(\epsilon))$ é um par dual factível, e assim:

$$\min\{\mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda(\epsilon)) : \mathbf{x}\} = f(\mathbf{x}(\epsilon)) + \sum_{i=1}^p \lambda_i(\epsilon)(\mathbf{a}'_i \mathbf{x}(\epsilon) - b_i) = f(\mathbf{x}(\epsilon)) - \epsilon p \quad (3.19)$$

e por meio disto, pode-se fornecer uma barreira inferior para o custo ótimo de P da seguinte forma:

$$f(\mathbf{x}(\epsilon)) - f^* \leq \epsilon p \quad (3.20)$$

Para ilustrar o que foi dito, considere o seguinte problema:

$$\min f = 0,5u_1^2 - u_1u_2 + u_2^2 - 4u_2 \quad (3.21a)$$

S.a :

$$-u_1 + 2u_2 \leq 2 \quad (3.21b)$$

$$-u_1 \leq -1 \quad (3.21c)$$

$$u_1 \leq 8 \quad (3.21d)$$

$$-u_2 \leq 0,5 \quad (3.21e)$$

Este problema de minimização foi resolvido utilizando o método de barreira logarítmica, com ponto inicial em $x_1 = 1$ e $x_2 = 3$. Os parâmetros do algoritmo foram definidos como $\epsilon^{(0)} = 20$, tolerância $\gamma = 10^{-3}$ e taxa de decrescimento $\mu = 0,5$. A Figura 3.3 ilustra a aproximação do resultado ótimo, tanto pelo método de barreira quanto pelo limite inferior dado pelo Lagrangeano, mostrando como $\mathbf{x}(\epsilon)$ converge para \mathbf{x}^* quando $\epsilon \rightarrow 0$.

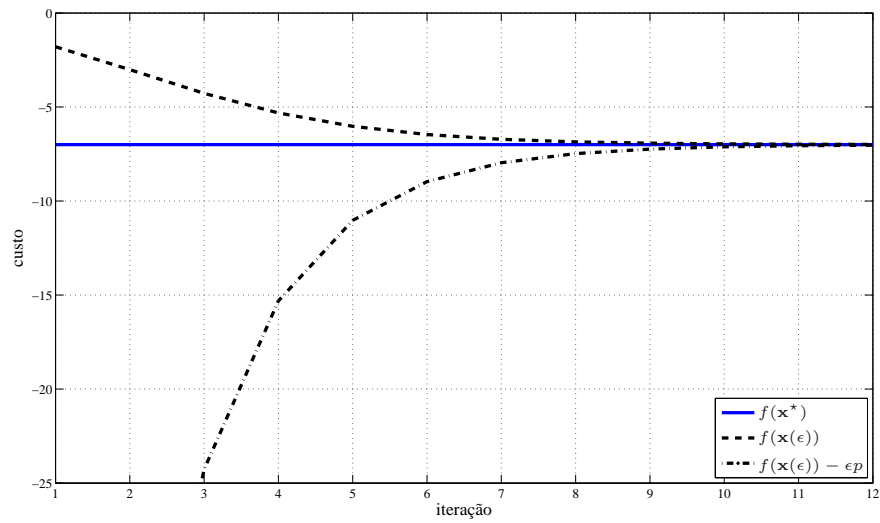


Figura 3.3: Convergência de $f(\mathbf{x}(\epsilon))$

3.6 Sumário

Nesse capítulo abordou-se o controle preditivo baseado em modelo, mais especificadamente usando modelos em variáveis de estado, onde se desenvolveu uma formulação que será aplicada no modelo da coluna de destilação. Além disto, foi aplicado o método de barreira logarítmica para tratar as restrições do processo. Na sequência, uma formulação distribuída será elaborada para o mesmo problema, sendo esta abordagem um dos focos principais do trabalho.

Capítulo 4

Controle Distribuído

No capítulo anterior foi elaborado um controlador preditivo baseado em modelos em variáveis de estado para que possa ser aplicado no modelo da coluna de destilação. No entanto a abordagem utilizada foi centralizada, onde todas as informações dos sensores da planta são levadas a uma única unidade de processamento e esta é quem vai fornecer valores-alvo para todos os controladores do processo.

Este capítulo trata do mesmo problema de controle preditivo baseado em modelos em variáveis de estado, porém com uma abordagem distribuída, onde agentes são responsáveis por controles locais e trocam informações apenas com agentes vizinhos. Esta abordagem pode ser uma maneira de resolver o problema da centralização de informações/processamento do processo.

Também será apresentado um algoritmo iterativo para ser aplicado na formulação distribuída a fim de garantir a qualidade dos resultados do cálculo de controle para o resultado ótimo global.

4.1 Introdução

O controle preditivo distribuído (DMPC) é uma tecnologia atual e ainda em evolução cujas características e objetivos são similares ao MPC, utilizando-se de modelos de predição, tratando restrições e usando algoritmos de otimização [11]. Porém agora a tarefa do cálculo da ação de controle deixa de ser realizada por apenas uma unidade de processamento e passa a ser distribuída ao longo do processo.

A idéia do controle distribuído é *dividir* o problema de otimização estático em subproblemas menores e mais simples, quando comparados ao problema original, para serem resolvidos por uma rede de agentes. Cada subproblema seria referente a um controle local e

cada agente seria responsável em resolver um destes subproblemas, trocando as informações sobre valores de saída e ações de controle com outros agentes. O controle resultante em toda a planta seria obtido após uma negociação entre os agentes, visando um desempenho igual ao MPC centralizado.

Uma abordagem deste tipo pode trazer diversas vantagens, como por exemplo, durante alguma modificação da planta, onde ao invés de modificar todo o algoritmo centralizado seria suficiente adicionar novos agentes e modificar apenas os agentes que possuem relação com estes novos agentes, ou então durante alguma manutenção, devido aos algoritmos mais simples dos agentes distribuídos.

Os estudos do DMPC possuem duas frentes principais, uma mais focada na resposta da aplicação do controle [34, 40, 57], tratando aspectos como estabilidade e desempenho, e outra que estuda os algoritmos de otimização [8, 10, 18, 31, 42], tratando maneiras de se decompor o problema original e projetando algoritmos para que a solução ótima dos subproblemas distribuídos seja alcançada. As próximas seções se encaixam no segundo grupo, onde se têm a formulação distribuída do controlador preditivo e a elaboração de um algoritmo distribuído para garantir o funcionamento deste controlador.

4.2 Formulação Distribuída

Esta seção trata o problema da formulação distribuída de P , dado pelo sistema de equações (3.13), realizando a decomposição do problema em uma rede de subproblemas acoplados $\{P_m\}$ [11]. Nesta formulação cada controle local terá um agente m , responsável por computar um vetor de controle \hat{u}_m . Considerando a rede de subsistemas da Figura 3.1, será atribuído um agente para cada subsistema, como ilustrado na Figura 4.1.

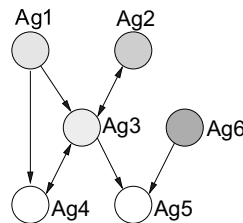


Figura 4.1: Rede de agentes

Para uma perfeita decomposição, cada agente m deve possuir toda a informação do problema P que depende de \hat{u}_m , inclusive as restrições. Antes da formulação da decomposição de P deve-se definir alguns conjuntos especiais:

- $O(m) = \{i : m \in I(i), i \neq m\}$ para representar o conjunto de *vizinhos* de saída de m ;

- $C(m) = \{(i, j) \in I(m) \times I(m) : i = m \text{ or } j = m\}$ para os pares de subsistemas cujos termos quadráticos estão presentes na função custo do subsistema m e utilizam $\hat{\mathbf{u}}_m$.
- $O(m, l) = \{(i, j) \in I(l) \times I(l) : i = m \text{ or } j = m\}$ para os pares de subsistemas cujos termos quadráticos estão presentes na função custo do subsistema l , $l \in O(m)$ e utilizam $\hat{\mathbf{u}}_m$;
- $N(m) = (I(m) \cup O(m) \cup \{(i, j) \in O(m, l), l \in O(m)\}) - \{m\}$, define a *vizinhança* do agente m , incluindo os vizinhos de entrada e saída;
- $\hat{\mathbf{w}}_m = (\hat{\mathbf{u}}_i : i \in N(m))$, para o conjunto de sinais de controle dos vizinhos do agente m ;
- $\hat{\mathbf{z}}_m = (\hat{\mathbf{u}}_i : i \in \mathcal{M} - N(m) \cup \{m\})$, para o conjunto de todos os sinais de controle que não estão em $\hat{\mathbf{w}}_m$ ou $\hat{\mathbf{u}}_m$.

Para exemplificar a construção destes conjuntos foi utilizado como referência o agente 3 da rede representada na Figura 4.1. Os conjuntos do agente 3, neste caso, são dados por:

- $I(3) = \{1, 2, 3, 4\}$;
- $O(3) = \{2, 4, 5\}$;
- $C(3) = \{(1, 3), (3, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 3)\}$;
- $O(3, 2) = \{(2, 3), (3, 2), (3, 3)\}$;
- $O(3, 4) = \{(1, 3), (3, 1), (3, 3), (3, 4), (4, 3)\}$;
- $O(3, 5) = \{(3, 3), (3, 5), (5, 3), (3, 6), (6, 3)\}$;
- $N(3) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Continuando a formulação distribuída, define-se um problema P_m para representar P para um m qualquer, deixando o problema da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 P_m : \\
 \min f_m(\hat{\mathbf{u}}) &= \frac{1}{2} \sum_{(i,j) \in C(m)} \hat{\mathbf{u}}_i' H_{m,i,j} \hat{\mathbf{u}}_j + \sum_{i \in I(m)} \mathbf{g}_{m,m,i} \hat{\mathbf{u}}_m + c_m \\
 &+ \frac{1}{2} \sum_{l \in O(m)} \sum_{(i,j) \in O(m,l)} \hat{\mathbf{u}}_i' H_{l,i,j} \hat{\mathbf{u}}_j + \sum_{l \in O(m)} \sum_{(m,j) \in O(m,l)} \mathbf{g}_{l,m,j} \hat{\mathbf{u}}_m \quad (4.1a)
 \end{aligned}$$

S.a :

$$\hat{\mathbf{u}}_m^{\min} \leq \hat{\mathbf{u}}_m \leq \hat{\mathbf{u}}_m^{\max} \quad (4.1b)$$

$$\hat{\mathbf{y}}_i^{\min} \leq \sum_{j \in I(i)} (\overline{CA}_{i,j} \mathbf{x}_j(k) + \overline{CB}_{i,j} \hat{\mathbf{u}}_j) \leq \hat{\mathbf{y}}_i^{\max}, \quad i \in O(m) \cup \{m\} \quad (4.1c)$$

com $H_{m,i,j}$, $g_{m,i,j}$ e c_m definidos pelas equações (3.12a) a (3.12d). Neste problema existem diversos termos que são relacionados às mesmas variáveis, por isto é possível simplificar a representação do problema agrupando estes termos como a seguir:

$$H_m = H_{m,m,m} + \sum_{l \in O(m)} H_{l,m,m} \quad (4.2a)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_m &= \frac{1}{2} \sum_{(i,m) \in C(m): i \neq m} (H'_{m,i,m} + H_{m,m,i}) \hat{\mathbf{u}}_i + \sum_{i \in I(m)} \mathbf{g}_{m,m,i} \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{l \in O(m)} \sum_{(i,m) \in O(m,l): i \neq m} (H'_{l,i,m} + H_{l,m,i}) \hat{\mathbf{u}}_i \\ &+ \sum_{l \in O(m)} \sum_{(m,j) \in O(m,l)} \mathbf{g}_{l,m,j} \end{aligned} \quad (4.2b)$$

Com isto, o problema P_m pode ser reescrito como:

$P_m(\hat{\mathbf{w}}_m)$:

$$\min f_m(\hat{\mathbf{u}}_m, \hat{\mathbf{w}}_m) = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{u}}_m' H_m \hat{\mathbf{u}}_m + \mathbf{g}_m' \hat{\mathbf{u}}_m + c_m \quad (4.3a)$$

S.a :

$$\hat{\mathbf{u}}_m^{\min} \leq \hat{\mathbf{u}}_m \leq \hat{\mathbf{u}}_m^{\max} \quad (4.3b)$$

$$\hat{\mathbf{y}}_i^{\min} \leq \sum_{j \in I(i)} (\overline{CA}_{i,j} \mathbf{x}_j(k) + \overline{CB}_{i,j} \hat{\mathbf{u}}_j) \leq \hat{\mathbf{y}}_i^{\max}, \quad i \in O(m) \cup \{m\} \quad (4.3c)$$

Esta formulação é aplicada em cada controle local $\hat{\mathbf{u}}_m$ do processo e é atribuída a cada agente m . Para este caso, o termo c_m é constante e poderia ser retirado do problema de otimização sem afetar o resultado.

Algumas propriedades e definições importantes da decomposição do problema são enunciadas a seguir. As demonstrações são encontradas em [8]:

Corolário 4.1. $f_m(\hat{\mathbf{u}}_m, \hat{\mathbf{w}}_m)$ é uma função de $\hat{\mathbf{u}}_m$ estritamente convexa.

Demonstração. f_m é convexo pois suas parcelas $\hat{\mathbf{y}}_m' \bar{Q}_m \hat{\mathbf{y}}_m$ e $\hat{\mathbf{u}}_m' \bar{R}_m \hat{\mathbf{u}}_m$ são convexas, dado que \bar{Q}_m são matrizes positivas semi-definidas e \bar{R}_m matrizes positivas definidas. \square

Definição 4.1 (Espaços factíveis). *Os espaços factíveis definidos pelas restrições de P_m são dados por:*

- U_m é o espaço factível dado pelas restrições de $P_m(\hat{\mathbf{w}}_m)$;
- $U = U_1 \times \cdots \times U_M$ é o espaço factível para P ;
- $W_m = \times_{i \in N(m)} U_i$ é o espaço factível das variáveis na vizinhança do agente m .

Hipótese 4.1 (Compacidade). *O espaço factível U é um conjunto compacto.*

Hipótese 4.2 (Factibilidade estrita). *Existe um $\hat{\mathbf{u}} \in U$ tal que as restrições de desigualdade sejam atendidas de forma estrita para todo $m \in \mathcal{M}$.*

Proposição 4.1 (Condições de Otimalidade). *Como f é uma função convexa e U é um conjunto convexo, $\hat{\mathbf{u}}^*$ é um mínimo local em U se e somente se:*

$$\nabla f(\hat{\mathbf{u}}^*)'(\hat{\mathbf{u}} - \hat{\mathbf{u}}^*) \geq 0, \forall \hat{\mathbf{u}} \in U \quad (4.4)$$

Um ponto $\hat{\mathbf{u}}^*$ que satisfaz a condição (4.4) é chamado de ponto estacionário.

Na ausência de restrições de acoplamento entre os subsistemas, uma solução ótima $\hat{\mathbf{u}}^*$ para o conjunto de subproblemas $\{P_m\}$ seria uma solução ótima global, pois P é convexo [8]. No entanto, esta relação não é válida para este trabalho, pois as restrições dos subsistemas acoplam as saídas do processo.

O problema 3.21 pode ser utilizado para ilustrar esta afirmação. Se simplesmente for aplicada a teoria da decomposição estabelecida e for utilizada uma resolução sequencial, alternando na busca da solução de u_1 e u_2 através de problemas estabelecidos P_1 e P_2 , têm-se um resultado como a trajetória em linha contínua encontrada na Figura 4.2. É possível ver que o resultado obtido através desta abordagem não atinge o valor ótimo, ficando limitada devido às restrições existentes.

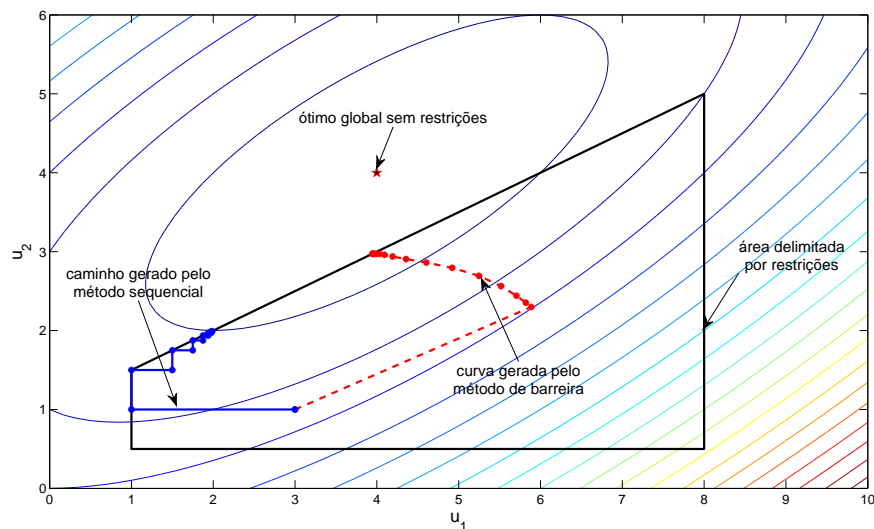


Figura 4.2: Convergência de algoritmos distribuídos.

Uma alternativa para contornar este problema é a utilização de algoritmos de ponto-interior, produzindo um *caminho central* até a solução ótima do problema [9]. Assim, as restrições dos subproblemas serão tratadas como no capítulo anterior, aplicando o método de

barreira logarítmica, e será desenvolvido um algoritmo específico para coordenar os agentes e garantir a convergência do cálculo de controle para o resultado ótimo global. O caminho central até a solução ótima do problema obtida desta forma pode ser visto na trajetória tracejada na Figura 4.2.

4.3 Algoritmo Distribuído

Esta seção descreve o algoritmo distribuído que será utilizado para que cada agente chegue à solução ótima quando estes forem usados para calcular as ações de controle do processo. Trata-se de um algoritmo iterativo, com a geração de uma sequência de soluções que tende à solução ótima global. Primeiramente define-se o problema $P_m(\hat{\mathbf{w}}_m)$ para um ϵ específico como $P_m(\epsilon)$:

$$P_m(\epsilon) = \min g_m(\hat{\mathbf{u}}_m) = f_m(\hat{\mathbf{u}}_m) + \epsilon\phi_m(\hat{\mathbf{u}}_m) \quad (4.5)$$

onde $\phi_m(\hat{\mathbf{u}}_m)$ é a função barreira logarítmica das restrições do processo que dependem diretamente de $\hat{\mathbf{u}}_m$, como visto na seção anterior, ou seja, as desigualdades dadas pelas equações (4.3b) e (4.3c).

A seguir define-se um vetor $\hat{\mathbf{u}}^k = (\hat{\mathbf{u}}_1^k, \dots, \hat{\mathbf{u}}_M^k)$ para o conjunto de todas as decisões de controle do problema P na iteração k . O agente m produz a nova iteração $\hat{\mathbf{u}}_m^{k+1}$ da seguinte forma:

$$\hat{\mathbf{u}}_m^{k+1} = \hat{\mathbf{u}}_m^k - s_m^k \nabla g_m(\hat{\mathbf{u}}_m^k) \quad (4.6)$$

onde s_m^k é o passo na direção $-\nabla g_m(\hat{\mathbf{u}}_m^k)$, que é a direção de máximo descenso. Uma maneira de se calcular este passo é através do método de *backtracking line search* [6], citado no capítulo anterior e exposto na sequência no Algoritmo 3:

Algoritmo 3: Método de *backtracking*

input: um $\hat{\mathbf{u}}_m^k$ estritamente factível, uma direção de descenso $-\nabla g_m(\hat{\mathbf{u}}_m^k)$ e os parâmetros do *backtracking* $\alpha \in (0, 1/2)$ e $\beta \in (0, 1)$

$s_m^k = 1$

while $g_m(\hat{\mathbf{u}}_m^k - s_m^k \nabla g_m(\hat{\mathbf{u}}_m^k)) > g(\hat{\mathbf{u}}_m^k) - \alpha s_m^k \|\nabla g_m(\hat{\mathbf{u}}_m^k)\|^2$ **do**
 $\lfloor s_m^k = \beta s_m^k$

output: $\hat{\mathbf{u}}_m^{k+1} = \hat{\mathbf{u}}_m^k - s_m^k \nabla g_m(\hat{\mathbf{u}}_m^k)$

Uma outra alternativa seria a utilização da direção de Newton, dada pela expressão $-\nabla^2 g_m(\hat{\mathbf{u}}_m^k)^{-1} \nabla g_m(\hat{\mathbf{u}}_m^k)$ que, para o caso de uma função g_m convexa, também induz uma direção de descenso. Neste caso $\nabla g_m'(-\nabla^2 g_m(\hat{\mathbf{u}}_m^k)^{-1} \nabla g_m(\hat{\mathbf{u}}_m^k)) < 0$.

Para garantir a convergência da rede até uma solução estacionária do problema de caminho central $P(\epsilon)$, algumas suposições devem ser respeitadas ao resolver os problemas

$P_m(\epsilon)$:

Hipótese 4.3 (Trabalho Síncrono). *Se o agente m está revendo sua decisão na iteração k , então:*

- (a) *o agente m usa $\hat{\mathbf{w}}_m^k$ para produzir uma aproximação da solução $\hat{\mathbf{u}}_m^{k+1}$ para $P_m(\epsilon)$, utilizando o passo na direção de descenso;*
- (b) *$\hat{\mathbf{u}}_m^k$ não é uma solução ótima para $P_m(\epsilon)$;*
- (c) *todos os agentes na vizinhança do agente m devem manter suas decisões na iteração k :*

$$\hat{\mathbf{u}}_i^{k+1} = \hat{\mathbf{u}}_i^k \forall i \in N(m).$$

Hipótese 4.4 (Trabalho Máximo e Contínuo). *Se $\hat{\mathbf{u}}^k$ não é um ponto estacionário para $P(\epsilon)$, então o agente $m(k) = \arg \max_{i \in \mathcal{M}} \{\|\nabla g_i(\hat{\mathbf{u}}_i^k)\|\}$ produz a nova iteração $\hat{\mathbf{u}}_{m(k)}^{k+1}$.*

Com a perfeita decomposição do problema, onde cada problema $P_m(\hat{\mathbf{w}}_m)$ e cada problema de barreira $P_m(\epsilon)$ abrangem todos os termos e restrições do problema P original que dependem de $\hat{\mathbf{u}}_m$, pode-se dizer o seguinte:

Proposição 4.2. *$\hat{\mathbf{u}}$ é um ponto estacionário de $P(\epsilon)$ se, e somente se, o par $(\hat{\mathbf{u}}_m, \hat{\mathbf{w}}_m)$ for um ponto estacionário para $P_m(\epsilon)$ para todo $m \in \mathcal{M}$.*

Um pseudo-código é dado no Algoritmo 4, representando o método de barreira distribuído aplicado em uma rede. Neste código pode-se observar dois ciclos que devem ser executados na busca das soluções, sendo um deles para cada iteração k e o outro para a sequência decrescente de ϵ . Começando com uma ação de controle factível, os agentes trocam informações localmente sobre suas decisões, sincronizam seus cálculos para que não trabalhem em paralelo e iteram até atingirem a convergência.

Ressaltando o problema $P(\epsilon)$ tratado com o algoritmo distribuído, este pode ser observado no laço de repetição interior do Algoritmo 4. Neste ciclo, a cada iteração k os agentes devem seguir a estrutura de comunicação estabelecida, fazendo com que o agente m com maior direção de descenso itere, assim como os agentes, não-vizinhos entre si, que não estão na vizinhança de m , repetindo este processo até chegar à solução $\hat{\mathbf{u}}(\epsilon)$ de $P(\epsilon)$. Mediante o que foi exposto até agora, juntamente com as análises de convergência encontradas em [9], pode-se definir o seguinte:

Teorema 4.1. *Através das Hipóteses 4.3 e 4.4, o algoritmo distribuído com passo de descenso por gradiente fornece uma sequência de iterandos $\hat{\mathbf{u}}^k$ convergente para a solução $\hat{\mathbf{u}}(\epsilon)$ do problema de centralização $P(\epsilon)$.*

Assim, com tudo que foi exposto até agora, se têm toda a teoria para a aplicação dos controles centralizado e distribuído na coluna de destilação, podendo então começar a parte de aplicação e análise de resultados deste trabalho.

Algoritmo 4: Método de barreira distribuído

entrada: $(\hat{\mathbf{u}}_1^0 \cdots \hat{\mathbf{u}}_M^0)$ estritamente factíveis, $\epsilon = \epsilon^0 > 0$, $0 < \mu < 1$, tolerância $e > 0$ e teste de parada $\delta = false$.

repeat

repeat: (*Solução do problema de centralização*, $P(\epsilon)$)

 calculam-se os passos de descenso, $-\nabla g_i(\hat{\mathbf{u}}_i^k)$, $\forall i \in \mathcal{M}$;

 o agente m que tiver a maior taxa de decrescimento recebe $\hat{\mathbf{w}}_m^k$ e calcula $\hat{\mathbf{u}}_m^{k+1}$ para o ϵ atual usando o método de descenso com *backtracking*;

 os agentes i não vizinhos entre si e que não estão na vizinhança do agente m calculam $\hat{\mathbf{u}}_i^{k+1}$ para o ϵ atual;

 os demais agentes, j , mantém $\hat{\mathbf{u}}_j^{k+1} = \mathbf{u}_j^k$;

$\hat{\mathbf{u}}^{k+1} := \{\hat{\mathbf{u}}_1^{k+1} \cdots \hat{\mathbf{u}}_M^{k+1}\}$;

if $\hat{\mathbf{u}}^k$ for um ponto estacionário para $P(\epsilon)$ **then**

 | $\delta := true$;

else

 | $k := k + 1$;

until $\delta = true$;

$\epsilon := \mu\epsilon$;

until $\epsilon < e$;

4.4 Sumário

Neste capítulo foi apresentada uma formulação distribuída para o problema de controle preditivo baseado em modelos no espaço de estados, juntamente com um algoritmo distribuído para garantir bons resultados. Esta formulação será aplicada mais adiante, a fim de comparar a abordagem centralizada com a distribuída.

No próximo capítulo serão aplicadas as formulações no modelo da coluna de destilação e serão expostos os resultados, comparando tempo de processamento, desempenho, entre outros aspectos.

Capítulo 5

Resultados Experimentais

Com o conteúdo descrito nos capítulos anteriores ficaram definidos todos os elementos teóricos do trabalho sobre os controles centralizado e distribuído. Parte-se agora para a aplicação das formulações dos controladores preditivos no modelo da coluna de destilação.

O objetivo principal do capítulo é verificar o funcionamento do DMPC comparado ao algoritmo centralizado, observando os cálculos de controle, saída do processo, tempo de processamento, entre outros aspectos.

5.1 Aplicação das Formulações no Modelo

Retomando alguns aspectos do modelo da coluna de destilação, este é composto por três entradas (u_1 , u_2 e u_3) e três saídas (y_1 , y_2 e y_3). O modelo no espaço de estados destaca os grupos de matrizes que indicam os acoplamentos entre as entradas e saídas do processo. Para este modelo, devido ao acoplamento direto entre todas as variáveis, o conjunto de vizinhos de entrada $I(m)$ é igual à $\{1, 2, 3\}$ para qualquer m .

As matrizes de ponderações dos controladores, referentes às ações de controle e erro de seguimento, foram definidas com valores unitários, pois este ajuste não é o foco deste trabalho. As restrições utilizadas demarcam valores máximo e mínimo de ação de controle e saída do processo, e estão no formato de programação quadrática, sendo expandidas conforme o horizonte de predição.

Serão comparados os resultados de três algoritmos distintos, sendo dois deles com abordagem centralizada e o outro sendo o distribuído. O primeiro algoritmo centralizado utiliza a formulação de programação quadrática convencional, onde a solução de P é obtida com a ajuda do *solver* *QUADPROG*, específico do Matlab[®] para problemas na forma quadrática com restrições. Este método será denominado como cent_{QP} .

O segundo algoritmo centralizado é baseado na teoria discutida no Capítulo 3, onde a solução de P é encontrada com a aplicação do método de barreira logarítmica para tratar as restrições do problema. Este método será chamado de cent_{Br} .

O terceiro algoritmo, dist_{Br} , trata da abordagem distribuída usando o método de barreira. Para esta abordagem primeiramente se deve estabelecer quais são os elementos dos conjuntos utilizados na formulação.

Além de $I(m) = \{1, 2, 3\}$ para qualquer m , a *vizinhança* é igual ao conjunto de *saída* para cada agente m . Outros conjuntos são dados na Tabela 5.1.

Tabela 5.1: Conjuntos de cada agente

m	$O(m)$	$C(m)$	$O(m, k)$	$\hat{\mathbf{w}}_m$
1	$\{2, 3\}$	$\{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1)\}$	$O(1, 2) = O(1, 3) = C(1)$	$\{\hat{\mathbf{u}}_2, \hat{\mathbf{u}}_3\}$
2	$\{1, 3\}$	$\{(1, 2), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 2)\}$	$O(2, 1) = O(2, 3) = C(2)$	$\{\hat{\mathbf{u}}_1, \hat{\mathbf{u}}_3\}$
3	$\{1, 2\}$	$\{(1, 3), (3, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\}$	$O(3, 1) = O(3, 2) = C(3)$	$\{\hat{\mathbf{u}}_1, \hat{\mathbf{u}}_2\}$

Os vetores $\hat{\mathbf{z}}_m$ são de dimensão nula para todos os m . Com estes vetores estabelecidos, pode-se montar cada um dos problemas P_m do algoritmo distribuído. Outros elementos, referentes às variáveis e critérios de convergência dos algoritmos, foram definidos como a seguir:

- O critério de convergência do método de Newton, utilizado no cent_{Br} e dist_{Br} , foi adotado como $\tau \leq 10^{-5}$;
- A tolerância do método de barreira foi escolhida como $\gamma \leq 10^{-4}$;
- O critério de convergência adotado no algoritmo distribuído foi $e \leq 10^{-4}$;
- Dez pontos iniciais aleatórios foram utilizados nos experimentos, deixando-os primeiramente factíveis. Estes pontos se encontram na Tabela 5.2;
- O valor inicial de ϵ , usado no método de barreira, foi de 10^3 ;
- Os horizontes de predição analisados foram $T = \{1, 2, 5, 10, 15, 20, 25, 30\}$;
- As taxas de decaimento para os métodos de ponto-interior foram $\mu \in \{0, 05; 0, 1; 0, 3; 0, 5\}$.

As soluções passadas sobre o controle poderiam ser utilizadas como uma aproximação inicial do problema de otimização (*hot start*), porém isto não foi feito para enfatizar o que seria o pior caso possível. Os experimentos foram realizados variando os tipos de algoritmos, horizonte de predição e taxa de decaimento. Na próxima seção estão os resultados obtidos.

Tabela 5.2: Condições iniciais

Saída	$C.I._1$	$C.I._2$	$C.I._3$	$C.I._4$	$C.I._5$	$C.I._6$	$C.I._7$	$C.I._8$	$C.I._9$	$C.I._{10}$
y_1	0,500	-0,500	-0,201	-0,379	0,171	-0,082	-0,265	0,178	-0,044	0,334
y_2	0,212	0,121	0,297	0,015	0,338	0,273	-0,010	0,149	-0,014	0,028
y_3	-0,241	-0,079	-0,500	-0,212	-0,438	0,353	-0,500	-0,492	0,500	0,412

5.2 Resultados Numéricos

Em etapas iniciais do estudo foram obtidos resultados com o DMPC sem o uso de restrições, apenas averiguando o funcionamento da distribuição do problema P . Apesar de a aplicação ser muito semelhante à teoria estabelecida, existem algumas diferenças que devem ser expostas.

Além de se omitirem as restrições, a formulação do controle preditivo utilizada é baseada na resposta ao degrau da coluna de destilação (DMC) [30] e o controle tem como objetivo o seguimento de uma referência, diferente da formulação estabelecida neste trabalho. Mais detalhes sobre esta formulação podem ser encontradas em [47].

Os resultados obtidos das saídas e ações de controle das abordagens centralizada e distribuída estão na Figura 5.1.

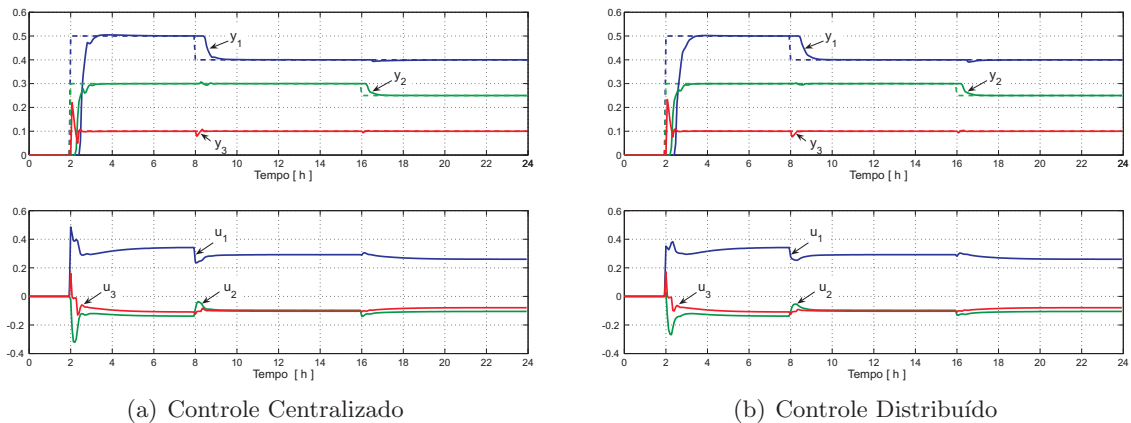


Figura 5.1: Comparação entre controles aplicados na coluna de destilação

O comportamento observado com a abordagem distribuída foi semelhante ao resultado obtido com o controle centralizado, sendo este um indício de que a formulação distribuída funciona tão bem quanto à centralizada.

Os próximos resultados são referentes à teoria demonstrada neste trabalho, onde o objetivo agora é levar as saídas para zero. A função objetivo dada em (3.10) é usada para comparações nos experimentos computacionais, sendo referenciada como custo. A Tabela

5.3 possui a média dos resultados dos custos obtidos com os dez pontos iniciais e os quatro valores diferentes de μ para cada horizonte de predição considerado.

Tabela 5.3: Médias dos custos da coluna de destilação, para todos os μ

T	$cent_{QP}$	$cent_{Br}$	$dist_{Br}$
1	0,1405	0,1405	0,1405
2	0,2892	0,2892	0,2892
5	1,0140	1,0140	1,0140
10	1,8297	1,8297	1,8297
15	2,1495	2,1495	2,1495
20	2,2807	2,2807	2,2807
25	2,3428	2,3428	2,3428
30	2,3766	2,3766	2,3766

A comparação entre os custos dos algoritmos centralizados serve para comprovar que o método de barreira funciona adequadamente para calcular as ações de controle, pois a diferença existente é somente devido aos critérios de convergência adotados.

A diferença entre o custo do $dist_{Br}$ e dos algoritmos centralizados é menor que 3×10^{-3} , assim como a diferença entre os valores de controle calculados, o que significa que resolver o conjunto de problemas distribuídos $\{P_m\}$ é equivalente a resolver o problema P , demonstrando a funcionalidade do algoritmo distribuído estabelecido.

As Tabelas 5.4 à 5.6 contém os resultados relacionados ao tempo gasto nos experimentos, comparando $cent_{QP}$, $cent_{Br}$ e $dist_{Br}$. Um computador com um processador AMD Turion™ 64x2 1.60 GHz e 2048 MB de memória foi usado para a realização destes experimentos. O tempo é dado em segundos e representa o tempo médio, juntamente com o desvio padrão, necessário no cálculo das ações de controle de grupos de experimentos, compostos por dez condições iniciais e variações da taxa de decaimento. Estes resultados incluem o tempo de *negociação* entre os agentes na abordagem distribuída.

Comparando os tempos dos algoritmos centralizados, percebe-se que o algoritmo de barreira é mais lento, porém esta diferença não é de tal forma que inviabilizaria a utilização deste algoritmo. É importante notar que o $cent_{QP}$ resolve o problema com um algoritmo específico, que não se têm acesso para modificações tão facilmente, enquanto que $cent_{Br}$ é de fácil implementação, podendo este ser um dos motivos da adoção do método de barreira, sacrificando um pouco o tempo de processamento.

Comparando os resultados do $dist_{Br}$ com os demais, pode-se perceber, como esperado, que quanto maior o valor do horizonte de predição, mais tempo é necessário para atingir a solução. Porém o tempo necessário sempre foi menor que um segundo, o que é um resultado promissor, visando aplicações reais. Neste ponto é válido lembrar que, devido ao modelo

Tabela 5.4: Tempo médio de processamento, para $\mu = 0,1$

T	cent_{QP}	cent_{Br}	dist_{Br}
1	$0,0065 \pm 0,0047$	$0,0072 \pm 0,0027$	$0,0173 \pm 0,0024$
2	$0,0068 \pm 0,0051$	$0,0136 \pm 0,0172$	$0,0244 \pm 0,0047$
5	$0,0045 \pm 0,0009$	$0,0256 \pm 0,0208$	$0,0412 \pm 0,0126$
10	$0,0244 \pm 0,0306$	$0,0376 \pm 0,0332$	$0,1224 \pm 0,0321$
15	$0,0147 \pm 0,0221$	$0,0621 \pm 0,0316$	$0,2220 \pm 0,0854$
20	$0,0515 \pm 0,0219$	$0,0875 \pm 0,0510$	$0,2726 \pm 0,1206$
25	$0,0635 \pm 0,0169$	$0,1487 \pm 0,0412$	$0,4029 \pm 0,0857$
30	$0,0716 \pm 0,0109$	$0,2423 \pm 0,0409$	$0,5388 \pm 0,0593$

Tabela 5.5: Tempo médio de processamento, para $\mu = 0,3$

T	cent_{QP}	cent_{Br}	dist_{Br}
1	$0,0051 \pm 0,0005$	$0,0077 \pm 0,0006$	$0,0247 \pm 0,0035$
2	$0,0057 \pm 0,0015$	$0,0148 \pm 0,0127$	$0,0364 \pm 0,0096$
5	$0,0052 \pm 0,0001$	$0,0152 \pm 0,0010$	$0,0626 \pm 0,0065$
10	$0,0152 \pm 0,0190$	$0,0414 \pm 0,0234$	$0,1483 \pm 0,0528$
15	$0,0171 \pm 0,0206$	$0,0753 \pm 0,0100$	$0,2623 \pm 0,0801$
20	$0,0483 \pm 0,0030$	$0,1128 \pm 0,0517$	$0,3453 \pm 0,0608$
25	$0,0723 \pm 0,0405$	$0,2954 \pm 0,1748$	$0,6940 \pm 0,2504$
30	$0,1159 \pm 0,0741$	$0,4346 \pm 0,1531$	$0,7320 \pm 0,1552$

utilizado da coluna de destilação, não houve paralelismo no cálculo das ações de controle, o que seria um ponto favorável na utilização do algoritmo distribuído.

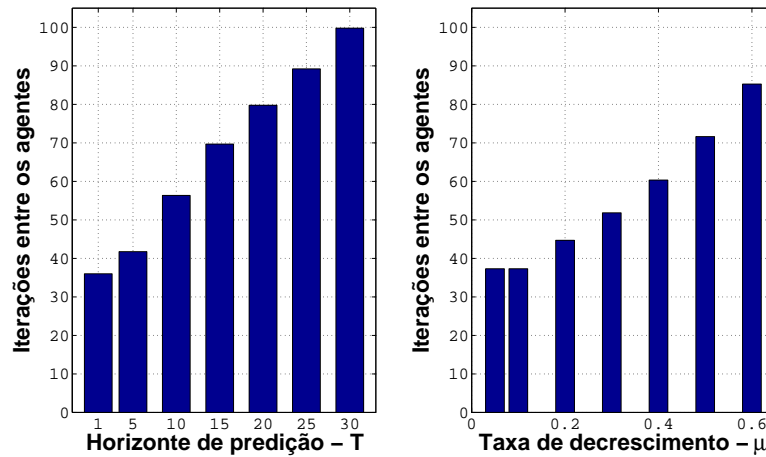
Um ponto a ser discutido é a utilização de horizontes de predição menores que o atraso. Em situações reais isto não deveria acontecer, porém como o objetivo era demonstrar que a formulação distribuída atua da mesma maneira que a centralizada, então estes experimentos podem ser considerados válidos.

O número de iterações entre os agentes para troca de informações também foi contabilizado. A Figura 5.2 representa os valores médios obtidos nos experimentos, para variações no horizonte de predição e taxa de decaimento do método de barreira, onde em cada gráfico variou-se um dos parâmetros enquanto se usavam todas as possibilidades do outro parâmetro. Pode-se notar que a escolha de μ é mais crítica para o número total de iterações, que é um fator extremamente importante para objetivos de aplicações práticas.

A Figura 5.3 pode ser usada para reforçar as conclusões a respeito do parâmetro μ . Cada curva nesta Figura representa a curva média da convergência do algoritmo para um horizonte de predição fixo em $T = 15$ e para as dez condições iniciais estabelecidas. As variações de μ utilizadas ilustram a importância do ajuste deste parâmetro como critério de

Tabela 5.6: Tempo médio de processamento, para $\mu = 0,5$

T	cent_{QP}	cent_{Br}	dist_{Br}
1	$0,0074 \pm 0,0090$	$0,0108 \pm 0,0007$	$0,0465 \pm 0,0082$
2	$0,0063 \pm 0,0052$	$0,0289 \pm 0,0302$	$0,0636 \pm 0,0245$
5	$0,0195 \pm 0,0253$	$0,0264 \pm 0,0109$	$0,1112 \pm 0,0545$
10	$0,0063 \pm 0,0004$	$0,0570 \pm 0,0034$	$0,3003 \pm 0,2854$
15	$0,0272 \pm 0,0254$	$0,1076 \pm 0,0226$	$0,2807 \pm 0,0376$
20	$0,0479 \pm 0,0026$	$0,1672 \pm 0,0447$	$0,4924 \pm 0,0604$
25	$0,0773 \pm 0,0247$	$0,5150 \pm 0,1976$	$0,8130 \pm 0,1939$
30	$0,0794 \pm 0,0332$	$0,6295 \pm 0,1524$	$0,9078 \pm 0,1459$

**Figura 5.2:** Iterações do algoritmo variando T e μ , respectivamente.

convergência do algoritmo.

Outra abordagem poderia ser a de utilizar um número máximo de iterações entre agentes juntamente com os critérios de convergência, a fim de garantir o cumprimento dos prazos entre os intervalos de amostragem, mas toda a modificação estabelece um compromisso entre velocidade e qualidade.

O modelo se mostrou um pouco inadequado para os objetivos do estudo, devido ao forte acoplamento entre as variáveis. Modelos mais esparsos devem ser utilizados, onde a abordagem distribuída pode mostrar resultados mais competitivos comparados aos algoritmos centralizados.

Finalizando as análises, pode-se dizer que o MPC centralizado pode ser modificado em uma rede de agentes, calculando as ações de controle de forma distribuída, sem grandes perdas de desempenho e até mesmo fornecendo vantagens, uma vez que o esforço computacional necessário na resolução de cada problema distribuído é menor.

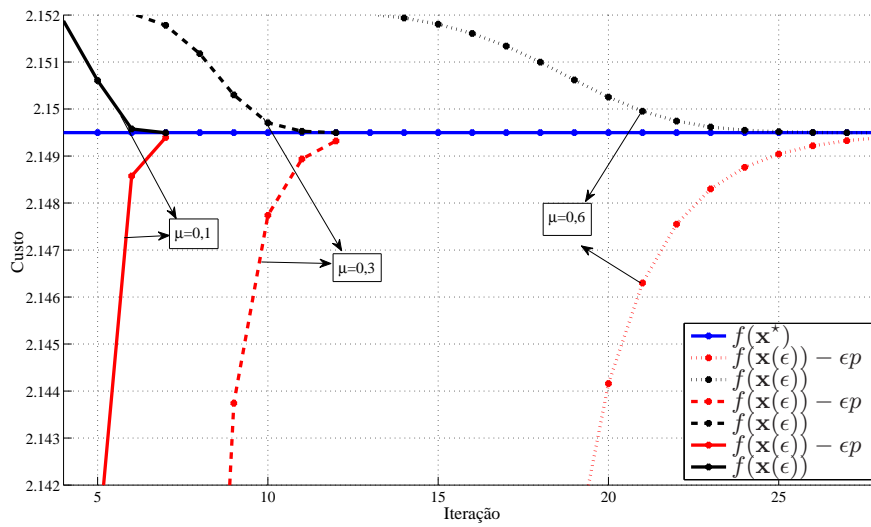


Figura 5.3: Convergência de $f(\mathbf{x}(\epsilon))$ para $T = 15$, variando μ

5.3 Sumário

Neste capítulo foram aplicados e comparados os controles MPC e DMPC no modelo da coluna de destilação, os resultados obtidos foram de experimentos numéricos, observando as diferenças entre os controles, tempo de processamento, entre outros aspectos.

No próximo capítulo será apresentada uma aplicação do DMPC em malhas viárias urbanas. Os resultados a serem comparados foram obtidos com a ajuda de um simulador profissional de tráfego veicular, a fim de validar o funcionamento do controle preditivo distribuído.

Capítulo 6

Controle de Tráfego Urbano

Este capítulo trata da aplicação do controle preditivo distribuído em uma malha viária urbana (MVU), visando o controle de tráfego veicular. Estes foram estudos realizados paralelamente ao estudo na coluna de destilação, podendo ser colocado como uma extensão de outra pesquisa de mestrado sobre aplicação de controle preditivo distribuído aplicado em redes veiculares [15].

Para o trabalho atual, a MVU foi estendida e a técnica utilizada para o cálculo das ações de controle foi modificada. Os resultados foram promissores, por isto optou-se por incorporar este capítulo nesta dissertação.

No capítulo estão tópicos relacionados à modelagem de redes de tráfego urbano, formulação do controle preditivo baseado em modelo e a análise dos resultados numéricos e simulados obtidos.

6.1 Introdução

O número crescente de veículos faz com que os sistemas de tráfego funcionem perto dos seus limites, invariavelmente aumentando o congestionamento, ocasionando atrasos, aumentando o nível de emissões de poluentes, e reduzindo a segurança e o conforto de motoristas e viajantes habituais [44].

Alterar fisicamente as MVUs pode resolver estes problemas, porém esta nem sempre é uma solução possível ou economicamente viável. Uma alternativa são os estudos de estratégias que aperfeiçoam o desempenho da infra-estrutura existente, principalmente através do controle dos tempos de verde de semáforos [17].

Uma rede de tráfego urbana é formada por várias vias interligadas por cruzamentos onde os sinais luminosos podem ser instalados para coordenar correntes de tráfego conflitantes.

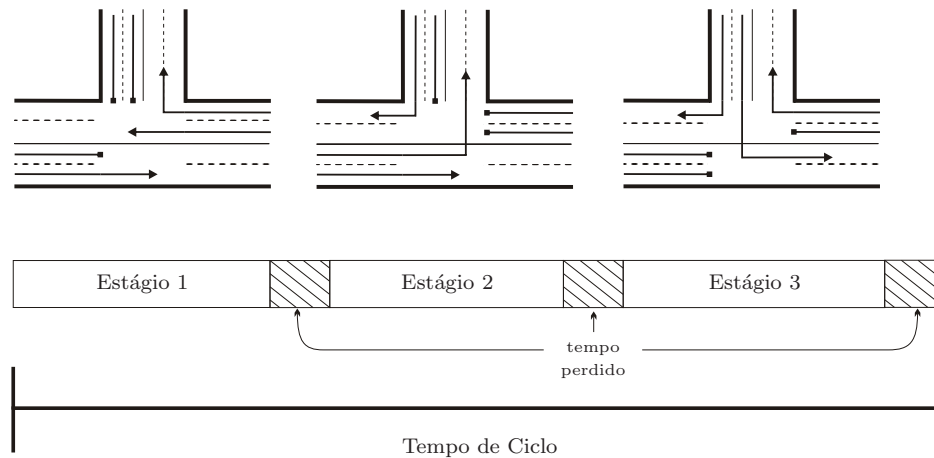


Figura 6.1: Exemplo de uma interseção urbana.

tes. Cada via pode ser subdividida em *aproximações*, onde cada aproximação define quais partes dessa via podem atravessar o cruzamento ao mesmo tempo. Esta divisão é feita porque é possível que existam partes de uma mesma via com direito de passagem em momentos diferentes. O conceito de fluxo, utilizado quando se tratam problemas de tráfego veicular, se refere à quantidade total de veículos que passam pelo cruzamento partindo de uma mesma aproximação. Estes fluxos podem ser *compatíveis* ou *incompatíveis*, devido à possibilidade de atravessarem o cruzamento simultaneamente.

Considerando a Figura 6.1, que representa um cruzamento de duas vias de quatro pistas cada uma, pode-se ilustrar o conceito de aproximação. Analisando por exemplo a via horizontal no sentido leste-oeste, existem duas aproximações nesta via, uma onde os veículos permanecem na via horizontal e outra onde os veículos realizam a conversão para a via vertical. As setas podem ser entendidas como os fluxos.

Alguns conceitos básicos quando se trata de tráfego urbano estão listado a seguir e também estão representados na Figura 6.1.

- **Capacidade do cruzamento:** é o número de veículos por unidade de tempo que podem atravessar o cruzamento;
- **Fluxo de saturação:** é definido como o fluxo médio que atravessa a faixa de parada de um cruzamento, quando este possui o direito de passagem (*r.o.w.*);
- **Ciclo:** define a repetição da sequência de indicações do semáforo em um cruzamento;
- **Estágio:** é dado por uma porção do ciclo em que as indicações semaforicas permanecem constantes;
- **Tempo perdido:** é o tempo adicionado entre cada estágio para evitar interferências entre fluxos incompatíveis.

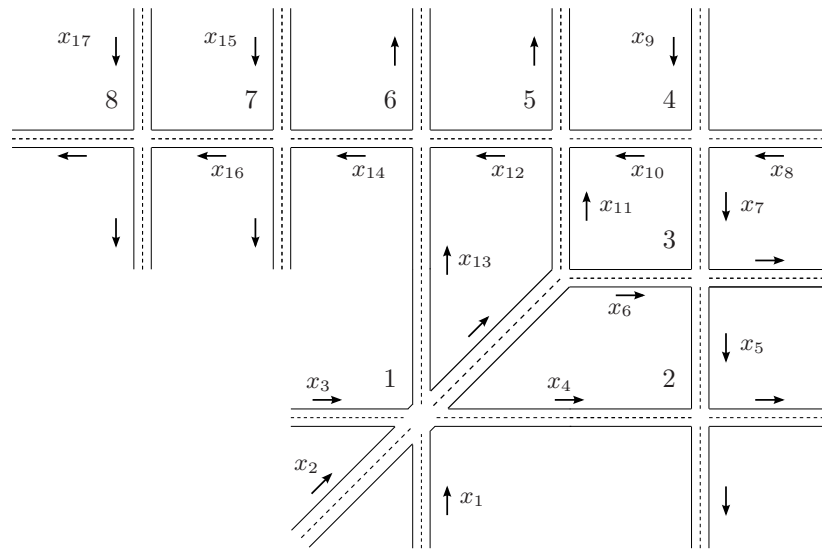


Figura 6.2: Rede de tráfego urbano

Retornando à discussão sobre os semáforos, estes influenciam o fluxo veicular através de quatro características principais [17]:

- **Especificação dos estágios:** Definindo quais vias terão direito de passagem em cada estágio. Para cruzamentos mais complexos esta pode não ser uma tarefa trivial;
- **Tempo de ciclo:** É o tempo total somando as frações de verde e os tempos perdidos entre as transições de estágios;
- **Porcentagens de verde:** Define o tempo efetivo que será atribuído a cada estágio. É o elemento principal do problema de otimização dos estudos realizados;
- **Offset:** Define a diferença temporal entre ciclos de junções consecutivas. Quando bem ajustado este elemento pode ocasionar *ondas verdes*.

A rede apresentada na Figura 6.2 ilustra uma MVU e será utilizada para os estudos seguintes, sendo que esta rede possui semáforos em todos os cruzamentos.

6.2 Modelagem de MVUs

A modelagem utilizada é conhecida como *store-and-forward* [26], onde o modelo matemático descreve como as filas em cada via evoluem no tempo, de acordo com a fila inicial e as características físicas da MVU. Se o tráfego urbano for modelado como um sistema binário, que assume o valor do fluxo de saturação quando possui direito de passagem e zero quando for

o contrário, pode-se dizer que a modelagem *store-and-forward* simplifica este modelo binário como um fluxo médio ao longo do ciclo de um cruzamento.

Primeiramente representa-se a MVU como um grafo direcionado, estabelecendo o conjunto de vias $v \in V$ e cruzamentos $h \in H$. Conjuntos I_h e O_h são utilizados para representar as vias de chegada e saída da interseção h , respectivamente. São estabelecidos os seguintes parâmetros:

- C_h , para o tempo de ciclo de cada cruzamento h (s);
- L_h , para tempo total perdido em cada cruzamento (s);
- $S_v, v \in I_h$, para os fluxos de saturação, que são modelados como constantes e conhecidos (veí/h);
- $t_{v,w}, v \in I_h, w \in O_h$, para as taxas de conversão dos veículos que saem da via v e se dirigem a via w ;
- O controle da interseção h possui um número fixo de estágios, dados pelo conjunto F_h , cujo subconjunto $G_{h,v} \subseteq F_h$ representa os estágios em que a via v possui direito de passagem;
- $u_{h,i}$ denota o tempo de verde alocado ao estágio i do cruzamento h (s).

Duas restrições serão impostas de modo que a sincronização entre os cruzamentos seja preservada, fazendo com que o controle de frações de verde não modifique os ciclos nominais da rede. Estas restrições são:

Restrição 1: A soma dos tempos de verde e dos tempos perdidos deve ser igual ao ciclo do cruzamento ao qual pertencem, $\sum_{i \in F_h} u_{h,i} + L_h = C_h$;

Restrição 2: $u_{h,i} \in [u_{h,i}^{\min}, u_{h,i}^{\max}]$, onde $u_{h,i}^{\min}$ e $u_{h,i}^{\max}$ representam os tempos mínimo e máximo de verde de cada estágio.

Considere a rede ilustrativa da Figura 6.3. Nesta rede, uma via v interliga dois cruzamentos A e B. Uma expressão no tempo discreto para representar a dinâmica da via v é dada por:

$$x_v(k+1) = x_v(k) + \kappa[q_v(k) + d_v(k) - p_v(k) - s_v(k)], \quad (6.1)$$

onde x_v representa o número de veículos na via v , os elementos q_v e p_v são os fluxos de entrada e saída da via v durante o período $[k\kappa, (k+1)\kappa]$, k é um índice de tempo discreto, κ é o intervalo de controle, e d_v e s_v representam as demandas de entrada e saída, respectivamente.

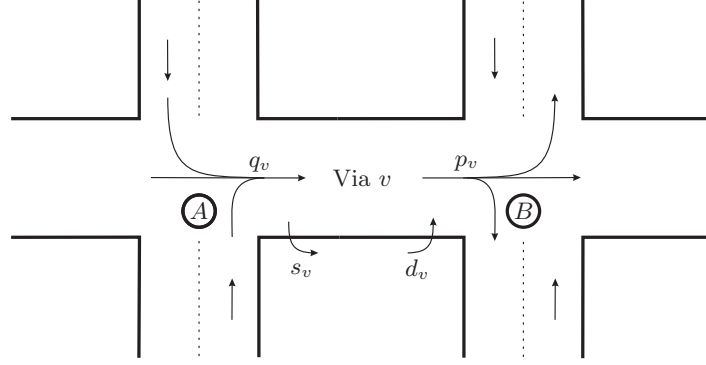


Figura 6.3: Exemplo de via urbana

As taxas de saída podem ser substituídas pela igualdade $s_v(k) = t_{v,0}q_v(k)$, desde que estas taxas sejam consideradas conhecidas. Pode-se também definir o fluxo de entrada da via v como $q_v(k) = \sum_{w \in I_A} t_{w,v}p_w(k)$, onde $t_{w,v}$, define as taxas de conversão da via v partindo das vias w encontradas em I_A .

Assumindo que os fluxos de saída das vias são iguais ao fluxo de saturação ponderados pela razão entre o tempo de ciclo e o tempo de verde no qual estas possuem direito de passagem, isto é :

$$p_v(k) = S_v \frac{\sum_{i \in G_{h,v}} u_{h,i}(k)}{C_h},$$

para toda a interseção h para qual v pertença a I_h e assumindo que $C_h = C$ para todas as interseções $h \in H$, chega-se em uma nova representação da equação (6.1), dada pela seguinte equação de estado:

$$x_v(k+1) = x_v(k) + \kappa \left[d_v(k) - \frac{S_v}{C} \sum_{i \in G_{B,v}} u_{B,i}(k) + (1 - t_{v,0}) \sum_{w \in I_A} \frac{t_{w,v}S_w}{C} \sum_{i \in G_{A,w}} u_{A,i}(k) \right], \quad (6.2)$$

onde $x_v(k)$ representa o número de veículos na via v no instante k e os termos $u_{B,i}(k)$ e $u_{A,i}(k)$ representam os sinais de controle no instante k .

Generalizando a equação (6.2) para todas as vias $v \in V$, pode-se formar uma notação matricial para a rede do tipo:

$$\mathbf{x}(k+1) = A\mathbf{x}(k) + B\mathbf{u}(k) + T\mathbf{d}(k), \quad (6.3)$$

onde $\mathbf{x}(k)$ é o vetor com as quantidades de veículos de todas as vias, $\mathbf{u}(k)$ é o vetor contendo os sinais de controle $u_{h,i}$, para todo $h \in H$, para todo $i \in F_h$, $\mathbf{d}(k)$ é o vetor contendo as demandas de entrada d_v , para todo $v \in V$ e $A = I$, B e T são respectivamente as matrizes de estado, entrada e perturbação do sistema.

Outra abordagem seria calcular tempos-fixos de verde previamente, e defini-los como *verdes nominais*, permitindo a utilização de uma formulação incremental, onde apenas variações no valor nominal de verde seriam fornecidos ao semáforo. É importante notar que, independentemente da formulação utilizada, as matrizes do sistema permanecem iguais, pois dependem unicamente de características físicas como a topologia da rede, especificação dos estágios, tempos de ciclo, fluxos de saturação e taxas de conversão.

Desprezando as perturbações e estendendo a modelagem para toda a rede da Figura 6.2 chega-se ao modelo que será utilizado pelos controladores, onde $\mathbf{x}(k) = (x_1, \dots, x_{17})(k)$ e $\mathbf{u}(k) = (u_1, \dots, u_{17})(k)$.

Este trabalho leva em consideração restrições de limitações dos estados, que são traduzidas como restrições inferiores e superiores de capacidade das vias, $x_v \geq 0$ e $x_v \leq x_v^{\max}$ respectivamente. Porém, a utilização destas restrições pode gerar pontos infactíveis, devido às restrições já existentes no modelo *store-and-forward* utilizado.

Para evitar este problema, a restrição do somatório dos tempos de verde ser igual ao tempo de ciclo em cada cruzamento será relaxada, permitindo que esta soma resulte em valores menores que o tempo de ciclo. A estratégia utilizada será de distribuir de forma proporcional, ao final do cálculo do controle, os tempos de verde restantes para que o tempo de ciclo fique com o valor nominal.

6.3 Controle de Tempos de Verde

O controle de tempos de verde geralmente é feito por estratégias de tempo-fixo, com os valores calculados previamente e colocados em planos nos semáforos [17]. No entanto, este trabalho trata de estratégias que respondem às variações do tráfego e calculam os tempos de verde a cada tempo de ciclo, visando otimizar algum critério de desempenho.

Uma estratégia que será utilizada como base para comparações é a *traffic-responsive urban control* (TUC), que resolve um problema linear quadrático de regulação (LQR) para obter os valores de tempos de verde [17]. Esta estratégia não leva em consideração as restrições da rede. Por isto, ao final de cada cálculo de ação de controle, deve-se resolver um problema de otimização para achar um ponto factível que seja o mais próximo do valor LQR calculado.

As demais estratégias são baseadas em métodos de controle de horizonte deslizante [1, 16], aplicando o controle preditivo para calcular as frações de verde de cada estágio em cada cruzamento.

O controle de frações de verde pode ser aproximado como um problema de regulação, pois o objetivo principal é esvaziar as vias. Considerando o modelo obtido na seção anterior, o problema de otimização P que será usado no MPC é formulado como:

$$\min f = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^M \psi_m \quad (6.4a)$$

onde o objetivo local do subsistema m é dado por:

$$\psi_m = \sum_{l=0}^{T-1} [\hat{\mathbf{x}}_m(k+l+1|k)' Q_m \hat{\mathbf{x}}_m(k+l+1|k) + \hat{\mathbf{u}}_m(k+l|k)' R_m \hat{\mathbf{u}}_m(k+l|k)] \quad (6.4b)$$

Sujeito a:

$$\hat{\mathbf{x}}_m(k+l+1|k) = A_m \hat{\mathbf{x}}_m(k+l|k) + \sum_{i \in I(m)} B_{mi} \hat{\mathbf{u}}_i(k+l|k) \quad (6.4c)$$

$$\mathbf{u}_m^{\min} \leq \hat{\mathbf{u}}_m(k+l|k) \leq \mathbf{u}_m^{\max} \quad (6.4d)$$

$$\mathbf{x}_m^{\min} \leq \hat{\mathbf{x}}_m(k+l+1|k) \leq \mathbf{x}_m^{\max} \quad (6.4e)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_m(k|k) = \mathbf{x}_m(k) \quad (6.4f)$$

$$\mathbf{d}'_m \hat{\mathbf{u}}_m(k+l|k) \leq C_m - L_m \quad (6.4g)$$

para $m = 1, \dots, M$, $l = 0, \dots, T-1$, onde $\hat{\mathbf{u}}_m(k+l|k)$ é a predição da entrada de controle calculada no tempo k para o subsistema m , e da mesma forma, $\hat{\mathbf{x}}_m$ é a predição dos estados. T é o horizonte de predição e de controle, Q_m e R_m são matrizes simétricas positivas semi-definidas e simétricas positivas definidas, respectivamente. A restrição 6.4g indica a relaxação em relação aos tempos de verde que foi utilizada, onde sua soma pode ser menor que o valor efetivo de ciclo.

As formulações dos controladores preditivos, centralizado e distribuído, seguem da mesma forma que àquela realizada nos capítulos anteriores para o modelo da coluna de destilação. Devido a esta semelhança, optou-se por omitir esta parte do desenvolvimento, porém mais detalhes sobre esta formulação podem ser encontrados em [9].

Nas seções seguintes estão os resultados da aplicação dos algoritmos em redes de tráfego urbano. O cenário utilizado é a MVU de oito junções apresentada na Figura 6.2. Usando o modelo *store-and-forward* desta rede chega-se em uma rede de sistemas dinâmicos lineares, com subsistemas em cada junção.

Primeiramente serão apresentados alguns resultados numéricos, comparando o desempenho do algoritmo distribuído com outros centralizados. Após, serão fornecidos alguns resultados obtidos com a ajuda de um simulador específico para tráfego urbano.

6.4 Resultados Numéricos

Da mesma forma que foi feito com o modelo da coluna de destilação, serão comparados os resultados dos três algoritmos desenvolvidos nos capítulos anteriores, cent_{QP} , cent_{Br} e dist_{Br} .

Para os resultados numéricos, a implementação do modelo e dos algoritmos foi feita com a ajuda do Matlab. Um conjunto de experimentos foram realizados, com variações no horizonte de predição T , taxa de decrescimento μ do método de barreira e condições iniciais da rede.

A Tabela 6.1 apresenta a média dos custos dos resultados obtidos nestes experimentos, onde para cada horizonte de predição estão atribuídos 40 experimentos obtidos com as variações de dez condições iniciais e para as taxas de decrescimento $\mu \in \{0, 1; 0, 2; 0, 4; 0, 6\}$. O custo representa a soma das funções objetivo para todos os experimentos.

Tabela 6.1: Custos médios do controle de tráfego

T	cent_{QP}	cent_{Br}	dist_{Br}
1	8,4224e6	8,4224e6	8,4225e6
2	8,6068e6	8,6068e6	8,6068e6
3	8,6586e6	8,6586e6	8,6586e6
4	8,6922e6	8,6922e6	8,6923e6
5	8,7292e6	8,7291e6	8,7292e6
6	8,7666e6	8,7666e6	8,7666e6
7	8,7700e6	8,7700e6	8,7700e6
10	8,7407e6	8,7407e6	8,7407e6
12	8,7232e6	8,7231e6	8,7232e6
15	8,6982e6	8,6979e6	8,6982e6

Os resultados numéricos demonstram que, em função dos custos, todas as estratégias conseguem calcular os pontos ótimos, onde a diferença no resultado está somente nos critérios de convergência.

As Tabelas 6.2 à 6.5 possuem os resultados dos tempos necessários no cômputo dos tempos de verde. O tempo é dado em segundos e define o tempo total que cada algoritmo utilizou para calcular as ações de controle. Cada resultado indica a média de um grupo de experimentos considerando dez condições iniciais aleatórias, onde foram consideradas variações na taxa de decrescimento do método de barreira e horizonte de predição.

Em relação ao tempo medido, percebe-se com os resultados comportamentos interessantes. Para pequenos horizontes de predição, o algoritmo dist_{Br} sempre foi mais lento que os demais, porém esta característica se inverte quando este horizonte é aumentado. Isto

Tabela 6.2: Tempo médio de processamento, para $\mu = 0,1$

T	cent_{QP}	cent_{Br}	dist_{Br}
1	$0,0833 \pm 0,1611$	$0,0661 \pm 0,1048$	$0,2581 \pm 0,0888$
2	$0,0566 \pm 0,0092$	$0,0387 \pm 0,0054$	$0,3415 \pm 0,0192$
3	$0,0895 \pm 0,0182$	$0,0956 \pm 0,0111$	$0,4776 \pm 0,0575$
4	$0,2547 \pm 0,1032$	$0,2618 \pm 0,0893$	$0,7995 \pm 0,2240$
5	$0,3243 \pm 0,1225$	$0,3104 \pm 0,0518$	$0,8973 \pm 0,2053$
6	$0,3591 \pm 0,0333$	$0,4624 \pm 0,0786$	$1,1566 \pm 0,1164$
7	$0,5117 \pm 0,0371$	$0,9213 \pm 0,0845$	$1,1201 \pm 0,0706$
10	$1,8808 \pm 0,1075$	$1,8535 \pm 0,1252$	$1,0090 \pm 0,1470$
12	$2,2297 \pm 0,3581$	$3,1207 \pm 0,1772$	$1,1294 \pm 0,0876$
15	$4,1764 \pm 0,0584$	$6,4727 \pm 0,9292$	$1,6990 \pm 0,1446$

Tabela 6.3: Tempo médio de processamento, para $\mu = 0,2$

T	cent_{QP}	cent_{Br}	dist_{Br}
1	$0,0249 \pm 0,0064$	$0,0371 \pm 0,0067$	$0,2884 \pm 0,0165$
2	$0,0541 \pm 0,0049$	$0,0473 \pm 0,0035$	$0,4250 \pm 0,0301$
3	$0,1228 \pm 0,0373$	$0,1572 \pm 0,0400$	$0,7060 \pm 0,1070$
4	$0,2427 \pm 0,0427$	$0,2701 \pm 0,0519$	$0,9563 \pm 0,1481$
5	$0,2255 \pm 0,0165$	$0,4010 \pm 0,0756$	$1,2238 \pm 0,1869$
6	$0,3354 \pm 0,0149$	$0,6059 \pm 0,0408$	$1,4385 \pm 0,0799$
7	$0,5056 \pm 0,0240$	$1,2490 \pm 0,1149$	$1,1704 \pm 0,0796$
10	$1,8403 \pm 0,2306$	$2,5181 \pm 0,3434$	$1,2653 \pm 0,3636$
12	$2,1131 \pm 0,0282$	$3,8939 \pm 0,5058$	$1,4522 \pm 0,2158$
15	$4,1775 \pm 0,0525$	$6,7514 \pm 0,8459$	$2,0013 \pm 0,2382$

pode significar competitividade do algoritmo distribuído em redes maiores, comparado aos algoritmos centralizados.

A Figura 6.4 possui os resultados dos tempos máximos que ocorreram em cada grupo de experimentos, evidenciando as conclusões obtidas com os resultados numéricos.

6.5 Resultados Simulados

Apesar de importantes, somente os resultados numéricos não garantem que o algoritmo tenha um bom desempenho, pois o modelo não representa tão bem o comportamento do tráfego em uma MVU. Visando comparar a abordagem TUC-LQR com o DMPC, os respectivos algoritmos foram implementados para calcular as frações de verde de uma rede construída no simulador de tráfego urbano Aimsun[©], que dispõe de um ambiente usado para

Tabela 6.4: Tempo médio de processamento, para $\mu = 0,4$

T	cent_{QP}	cent_{Br}	dist_{Br}
1	$0,0245 \pm 0,0062$	$0,0426 \pm 0,0057$	$0,4111 \pm 0,0306$
2	$0,0543 \pm 0,0053$	$0,0543 \pm 0,0033$	$0,6157 \pm 0,0404$
3	$0,1428 \pm 0,0133$	$0,2103 \pm 0,0206$	$1,0544 \pm 0,0870$
4	$0,2035 \pm 0,0742$	$0,2440 \pm 0,0165$	$1,3101 \pm 0,1449$
5	$0,2280 \pm 0,0308$	$0,4204 \pm 0,0174$	$1,6290 \pm 0,1337$
6	$0,3357 \pm 0,0137$	$0,6575 \pm 0,0518$	$1,7998 \pm 0,1067$
7	$0,5292 \pm 0,0405$	$1,4479 \pm 0,0916$	$1,4592 \pm 0,1161$
10	$1,8871 \pm 0,0911$	$2,7078 \pm 0,1019$	$1,5915 \pm 0,1061$
12	$2,1120 \pm 0,0218$	$4,6417 \pm 0,4029$	$1,9515 \pm 0,4326$
15	$4,1656 \pm 0,0232$	$9,4817 \pm 0,2324$	$2,7432 \pm 0,5022$

Tabela 6.5: Tempo médio de processamento, para $\mu = 0,6$

T	cent_{QP}	cent_{Br}	dist_{Br}
1	$0,0225 \pm 0,0059$	$0,0621 \pm 0,0244$	$0,6620 \pm 0,0430$
2	$0,0670 \pm 0,0154$	$0,1361 \pm 0,0268$	$1,1609 \pm 0,1326$
3	$0,1434 \pm 0,0194$	$0,2919 \pm 0,0391$	$1,4813 \pm 0,0927$
4	$0,1481 \pm 0,0388$	$0,4230 \pm 0,0202$	$2,0881 \pm 0,1033$
5	$0,2199 \pm 0,0121$	$0,7150 \pm 0,0232$	$2,2846 \pm 0,1448$
6	$0,3522 \pm 0,0349$	$1,3318 \pm 0,0787$	$2,1408 \pm 0,1516$
7	$0,5105 \pm 0,0422$	$2,2740 \pm 0,0680$	$1,9411 \pm 0,1605$
10	$1,9245 \pm 0,1331$	$4,4160 \pm 0,1049$	$2,4764 \pm 0,3057$
12	$2,1250 \pm 0,0279$	$7,3633 \pm 0,1283$	$2,7986 \pm 0,2860$
15	$4,1611 \pm 0,0391$	$15,4932 \pm 0,5861$	$4,1292 \pm 0,7811$

modelar e simular redes de trânsito com as mais diversas características e complexidade. A Figura 6.5 apresenta a implementação do cenário no simulador Aimsun[®].

Como os resultados numéricos demonstraram que os algoritmos cent_{Br} , dist_{Br} e cent_{QP} produziram ações de controle praticamente idênticas, então serão implementados no simulador e comparados apenas o método dist_{Br} com a estratégia TUC-LQR [17].

Os parâmetros das simulações foram definidos como a seguir:

- Tempo de ciclo fixo em 120 segundos;
- Período de amostragem igual ao tempo de ciclo;
- Taxa de decrescimento do método de barreira $\mu = 0,1$;
- Tempo perdido entre estágios fixo em 6 segundos;

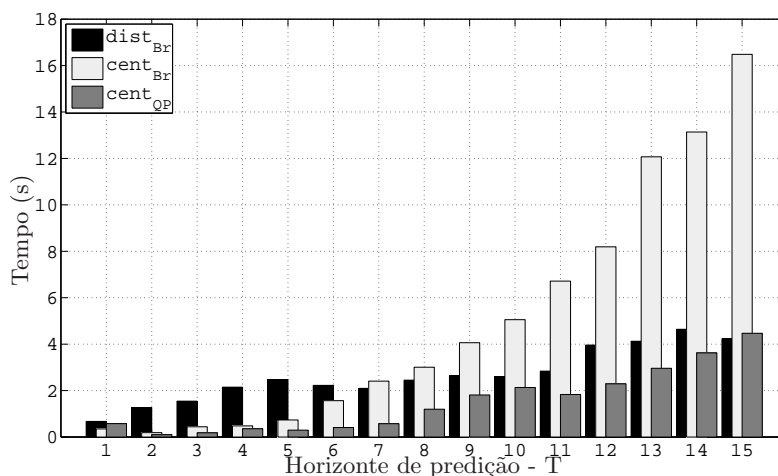


Figura 6.4: Tempo máximo de processamento

- Horizonte de previsão de um passo;
- Pesos do controle e saída unitários, tanto para o controle LQR quanto para o DMPC.

O horizonte foi definido como sendo de um passo apenas pois o modelo *store-and-forward* usado para previsão se mostrou um pouco inconsistente com o modelo do simulador. Isto acontece devido algumas de suas limitações, como por exemplo o fato de um veículo não passar por duas junções consecutivas em um mesmo intervalo de tempo.

Dez simulações de uma hora de duração com condições iniciais diferentes foram realizadas. As médias das estatísticas de tráfego dos resultados da simulação estão na Tabela 6.6. Pode-se perceber uma pequena melhoria que o DMPC fornece em relação à estratégia TUC-LQR, mas mais importante que isto é a verificação de que o algoritmo distribuído com método de barreira funciona de maneira satisfatória em ambientes simulados.

Tabela 6.6: Resultados de simulação

Característica	Estratégia	
	LQR	DMPC
Média do Atraso (s/km)	144,59	142,92
Média de Densidade (veh/km)	20,31	20,18
Média de Fluxo (veh/h)	6210,67	6216,00
Média de Velocidade (km/h)	22,24	22,25
Média do Tempo Total de Viagem (h)	164,30	163,60

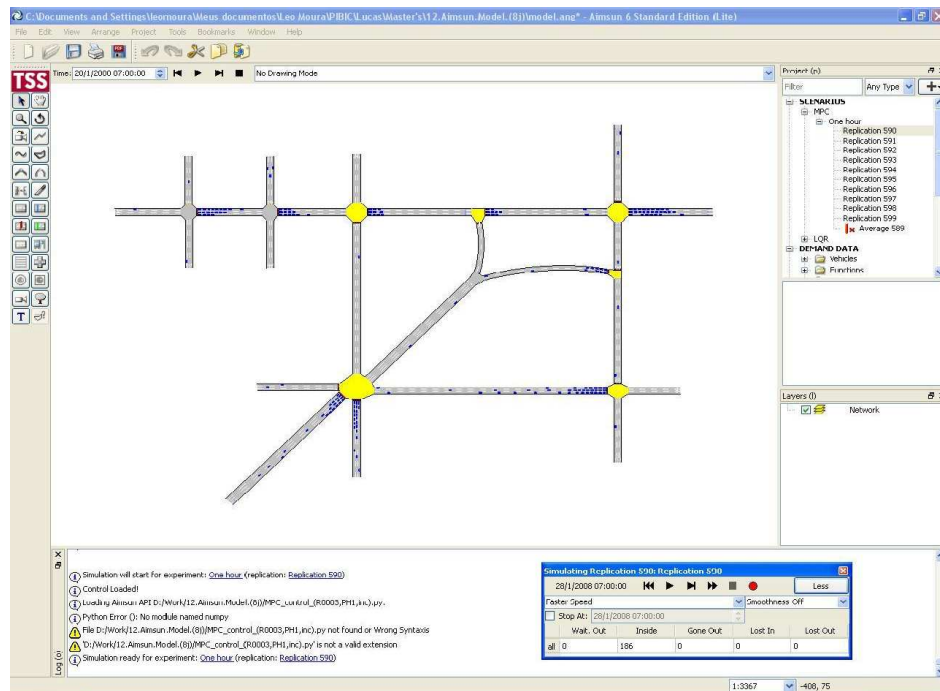


Figura 6.5: Ambiente do simulador Aimsun

6.6 Sumário

Este capítulo abordou o trabalho realizado com controle de tráfego urbano. As seções deram uma breve descrição sobre redes de tráfego urbano, sua modelagem e controle. No final foram realizados experimentos numéricos e com a ajuda de um simulador.

Somando este conteúdo ao que foi exposto nos capítulos anteriores, têm-se todos os resultados teóricos e práticos obtidos. A seguir estão as conclusões finais deste trabalho.

Capítulo 7

Conclusão

Devido à importância do setor de refinarias de petróleo, o controle de colunas de destilação continua sendo um foco de muitas pesquisas e investimentos, pois além de fatores como segurança e garantia de qualidade, quaisquer melhorias no processo representam maior lucratividade para o setor. Visando contribuir nos aspectos de controle e otimização, neste trabalho foram desenvolvidos algoritmos para serem utilizados em controladores preditivos, que foram aplicados em um modelo de coluna de destilação visando resolver o problema de regulação.

Uma metodologia de decomposição de problemas foi descrita e aplicada, gerando uma estrutura para a implementação do controle preditivo distribuído em redes dinâmicas lineares. No desenvolvimento do trabalho, foram adotadas algumas restrições operacionais com o objetivo de criar ambientes um pouco mais próximos dos encontrados em situações reais. Com a distribuição do problema, vários subproblemas menores foram gerados, onde para cada um destes foi atribuído um agente, responsável por trocar informações com os agentes vizinhos e calcular as ações de controle do subsistema ao qual foi designado.

As restrições foram tratadas através de métodos de ponto-interior, de tal forma que o conjunto de subsistemas trabalhasse em conjunto e conseguisse encontrar a ação de controle ótima para todo o sistema, e não somente a solução ótima de cada subsistema. Neste tratamento das restrições, o método de barreira foi utilizado de tal forma que a minimização com restrições que devia ser resolvida por cada agente, passou a ser uma sequência de resoluções de problemas de minimização irrestrita, que podem ser resolvidos por métodos mais simples, como o método de Newton por exemplo.

Uma estrutura de coordenação entre os agentes foi proposta a fim de garantir que a solução iterativa da rede de subproblemas consiga convergir para ações de controle ótimas para o processo. Esta estrutura indica alguns dos procedimentos que devem ser respeitados, como por exemplo, evitar o trabalho paralelo de um agente com outro que esteja em sua vizinhança.

Como resultados obtidos, primeiramente se podem avaliar as aplicações dos controladores preditivos distribuído e centralizado ao cenário da coluna de destilação. Desta análise verificam-se desempenhos similares entre as abordagens, confirmando que resolver o problema distribuído é equivalente a resolver o problema inicial centralizado e que o método utilizado para o tratamento de restrições funcionou adequadamente, onde as diferenças observadas foram somente devido aos critérios de convergência utilizados.

Uma constatação importante foi em relação ao custo computacional necessário para o cálculo das ações de controle. Resolver o subproblema de cada agente é mais simples que resolver o problema do caso centralizado, pois cada subproblema contém apenas as informações de sua vizinhança, o que geralmente corresponde a uma diminuição do tamanho do problema original. Esta vantagem poderia, por exemplo, permitir a utilização de máquinas com menores recursos computacionais ao longo do processo, realizando a mesma tarefa que uma unidade de processamento mais poderosa que centraliza as informações do processo.

Deve-se enfatizar que o controle preditivo distribuído é mais apropriado para sistemas multivariáveis onde os acoplamentos são mais esparsos, justamente para se beneficiar de simplificações nos subproblemas. Este fato acabou não acontecendo com o modelo da coluna de destilação escolhido, onde o sistema possui um forte acoplamento entre todas as variáveis. Entretanto, o estudo continua sendo válido, considerando que a maioria dos problemas multivariáveis não possui uma interação completa entre as variáveis de controle e saída, o que favorece a utilização da abordagem distribuída desenvolvida.

Outros resultados importantes foram colocados no capítulo 6, onde uma abordagem semelhante do controle preditivo distribuído foi utilizada no controle de tráfego urbano. Novamente foram comparados os resultados das abordagens distribuída e centralizada, porém, neste caso foi possível observar melhor as vantagens do controle distribuído. A rede utilizada era mais esparsa, e os subproblemas não precisavam de toda a informação do problema original. Isto foi traduzido em velocidade no cálculo das ações de controle, assim como agentes que puderam trabalhar paralelamente sem afetar o desempenho final do controle. Resultados foram obtidos com a ajuda de um simulador de tráfego urbano, validando o funcionamento do algoritmo desenvolvido.

Além das vantagens expostas, um grande benefício com a utilização de sistemas distribuídos de controle seria em relação à manutenção, pois ao invés de rever todo o algoritmo centralizado do controle preditivo aplicado ao processo, bastariam adicionar novos agentes e revisar os controles apenas dos agentes na vizinhança destes novos agentes.

Como direções para trabalhos futuros indicam-se os seguintes aspectos:

- Inclusão de observadores de estado, visando aproximar mais a teoria desenvolvida ao controle utilizado em situações reais, onde nem sempre se tem acesso fácil a todos os estados do sistema;

- Controle de seguimento de referência, que é um objetivo comum na aplicação de controle, porém analisando atentamente como seria esta implementação de uma forma distribuída;
- Outros cenários maiores e mais esparsos poderiam ser analisados, onde a abordagem distribuída ficaria mais evidenciada;
- Utilização de simuladores de colunas de destilação. Resultados preliminares já estão sendo obtidos, porém ainda necessitam de amadurecimento antes de fornecerem alguma contribuição significativa ao tema de estudo;
- Outros métodos de tratamento de restrições poderiam ser estudados e comparados ao método de barreira utilizado;
- A robustez do algoritmo a eventuais falhas de agentes ou de comunicação também poderia ser estudada mais profundamente, sendo este um ponto importante visando aplicações reais onde estes problemas provavelmente ocorreriam;
- Para implementações no simulador, seria interessante a elaboração de módulos mais consistentes para o sincronismo entre os agentes, evitando quaisquer conflitos na troca de informações;
- Por último, seria interessante estabelecer análises mais criteriosas em relação à comunicação entre os agentes, visando sempre reduzir a quantidade de troca de mensagens realizada na rede.

Estudos aprofundados e a implementação destes tópicos certamente gerariam resultados inovadores, que agregariam muito conhecimento ao tema discutido neste trabalho.

Referências Bibliográficas

- [1] K. Aboudolas, M. Papageorgiou, and E. Kosmatopoulos. Control and optimization methods for traffic signal control in large-scale congested urban road networks. In *Proceedings of the American Control Conference*, pages 3132–3138, Nova York, EUA, jul 2007.
- [2] R. A. Abour-Jeyab, Y. P. Gupta, J. R. Gervais, P. A. Branchi, and S. S. Woo. Constrained multivariable control of a distillation column using a simplified model predictive control algorithm. *Journal of Process Control*, 11:509–517, 2001.
- [3] M. Alpbaz, S. Karacan, Y. Cabbar, and H. Hapoglu. Application of model predictive control and dynamic analysis to a pilot distillation column and experimental investigation. *Chemical Engineering Journal*, 88:1–3, 2002.
- [4] ANP. Agência nacional do petróleo, gás natural e biocombustíveis, 2009. URL http://www.anp.gov.br/petro/refino_editorial.asp.
- [5] O. Q. F. Araujo. *MPC - Model Predictive Control*, 01 2008. URL http://www.eq.ufrj.br/links/h2cin/eqe768/AULA_7/MPC.doc.
- [6] S. Boyd and L. Vandenberghe. *Convex Optimization*. Cambridge University Press, mar 2004. ISBN 0521833787.
- [7] E. F. Camacho and C. Bordons. *Model Predictive Control*. Springer-Verlag, London, 2004.
- [8] E. Camponogara and L. B. de Oliveira. Distributed optimization for model predictive control of linear dynamic networks. *Accepted by IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics - Part A*, 2009.
- [9] E. Camponogara and H. F. Scherer. Distributed optimization for model predictive control of linear dynamic networks with control-input and output constraints. draft, 2009. URL <http://www.das.ufsc.br/~scherer/workingpaper/dmpc-oip.pdf>.
- [10] E. Camponogara and S. N. Talukdar. Distributed model predictive control: synchronous and asynchronous computation. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics - Part A*, 37(5):732–745, September 2007.

-
- [11] E. Camponogara, D. Jia, B. H. Krogh, and S. N. Talukdar. Distributed model predictive control. *IEEE Control Systems Magazine*, 22(1):44–52, fev 2002.
- [12] D. W. Clarke, C. Mohtadi, and P. S. Tuffs. Generalized predictive control-part i. the basic algorithm. *Automatica*, 23(2):137–148, mar 1987.
- [13] C. Cutler, A. Morshedi, and J. Haydel. An industrial perspective on advanced control. *AICHE annual meeting*, oct 1983.
- [14] C. R. Cutler and B. L. Ramaker. Dynamic matrix control - a computer control algorithm. *AICHe 86th National Meeting*, 1979.
- [15] L. B. de Oliveira. Otimização e controle distribuído de frações de verde em malhas viárias urbanas. Master's thesis, Programa de Pós Graduação em Engenharia Elétrica, UFSC, Florianópolis, 2008.
- [16] L. B. de Oliveira and E. Camponogara. Predictive control for urban traffic networks: initial evaluation. In *Proceedings of the 3rd IFAC Symposium on System, Structure and Control*, Foz do Iguaçu, Brasil, October 2007.
- [17] C. Diakaki. *Integrated control of traffic flow in corridor networks*. PhD thesis, Departamento de Engenharia de Produção e Gerenciamento, Universidade Técnica de Creta, 1999.
- [18] W. B. Dunbar. Distributed receding horizon control of dynamically coupled nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 57(7):1249–1263, 2007.
- [19] M. Fairbanks. Investimentos ajustam refino para usar mais óleo nacional. *Química e Derivados*, 37(407):12, 2006.
- [20] A. A. Ferreira and F. R. A. Neto. Simulated distillation in the petroleum industry. *Revista Química Nova*, 28(3), may/jun 2005.
- [21] A. M. F. Fileti, S. L. Cruz, and J. A. F. R. Pereira. Control strategies analysis for a batch distillation column with experimental testing. *Chemical Engineering and Processing*, 39: 121–128, 2000.
- [22] R. Fletcher. *Practical Methods of Optimization*. John Wiley & Sons, 2nd edition, 1987.
- [23] A. S. Foust, L. Wenzel, C. Clump, C. W. Maus, and L. B. Andersen. *Princípios das Operações Unitárias*. LTC, Rio de Janeiro, 1982.
- [24] G. F. Franklin, J. D. Powell, and M. Workman. *Digital Control of Dynamic Systems*. Prentice Hall, 3rd edition, 1997.
- [25] K. R. Frisch. The logarithmic potential method for convex programming. Unpublished manuscript, Institute of Economics, University of Oslo, Oslo, Norway, may 1955.

- [26] D. C. Gazis and R. B. Potts. The oversaturated intersection. In *Proceedings of the Second International Symposium on Traffic Theory*, pages 221–237, Londres, Inglaterra, 1963.
- [27] Ivar J. Halvorsen and Sigurd Skogestad. Distillation theory. *Encyclopedia of Separation Science*, pages 1117–1134, 2000.
- [28] H. Hapoglu, S. Karacan, Z. S. E. Koca, and M. Alpbaz. Parametric and nonparametric model based control of a packed distillation column. *Chemical Engineering Process*, 40: 537–544, 2001.
- [29] E. J. Henley and J. D. Seader. *Equilibrium-Stage Separation Operation in Chemical Engineering*. John Wiley & Sons, Canada, 1981.
- [30] E. Ikonen and K. Najim. *Advanced Process Identification and Control*. CRC Press, 2002.
- [31] T. Keviczky, F. Borrelli, and G. J. Balas. Decentralized receding horizon control for large scale dynamically decoupled systems. *Automatica*, 42:2105–2115, 2006.
- [32] H. Z. Kister. *Distillation Operation*. Mc-Graw-Hill, USA, 1990.
- [33] M. Lee and S. Park. New scheme combining neural feedforward control with model-predictive control. *AIChE Journal*, 38(2):193–220, 1992.
- [34] S. Li, Y. Zhang, and Q. Zhu. Nash-optimization enhanced distributed model predictive control applied to the shell benchmark problem. *Information Sciences*, 170:259–349, 2005.
- [35] S. N. Maiti and D. N. Saraf. Start-up and control of a distillation column using adaptive dynamic matrix control: an experimental study. *Process Control Quality*, 7(3-4):143–156, 1995.
- [36] C. Marangoni. *Implementação de uma estratégia de controle com ação distribuída em uma coluna de destilação*. PhD thesis, Departamento de Engenharia Química, UFSC, Florianópolis, 2005.
- [37] P. Marquis and J. P. Broustail. Smoc, a bridge between state space and model predictive controllers: Application to the automation of a hydrotreating unit. In *Proceedings of the 1988 IFAC Workshop on Model Based Predictive Control*, pages 37–43, Oxford, Inglaterra, 1988.
- [38] F. L. Marshall. An application oriented guide to lagrangian relaxation. *Interfaces*, 15 (2):10–21, 1985.
- [39] W. McCabe, J. Smith, and P. Harriott. *Unit Operations of Chemical Engineering*. McGraw-Hill Inc., N.Y., 7th edition, 2005.

- [40] Mehmet Mercangöz and Francis J. Doyle III. Distributed model predictive control of an experimental four-tank system. *Journal of Process Control*, 17(3):297–308, mar 2007.
- [41] L. G. Moura. Modelagem empírica de colunas de destilação utilizando redes neurais de wavelets para otimização e controle de processos. Master's thesis, Departamento de Engenharia Química, UFSC, Florianópolis, 2003.
- [42] R. R. Negenborn, B. De Schutter, and J. Hellendoorn. Multi-agent model predictive control for transportation networks: serial versus parallel schemes. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 21(3):353–366, 2007.
- [43] J. E. Normey-Rico and E. F. Camacho. *Control Of Dead-time Processes*. Springer-Verlag, 2007.
- [44] M. Papageorgiou. Overview of road traffic control strategies. In *Information and Communication Technologies: From Theory to Applications*, pages LIX–LLX, 2004.
- [45] A. L. Pereira and K. C. P. Guedelha. Definição dos fluxos de equilíbrio no caso de ocorrência de um incidente numa rodovia urbana. *XII Congresso Nacional de Pesquisa e Ensino em Transportes*, I:119–127, 1998.
- [46] L. T. Pinto. Aplicação de colunas de múltiplo-efeito na destilação do sistema etanol-água. economia de energia. Master's thesis, Departamento de Engenharia de Produção e Sistemas, UFSC, Florianópolis, 1987.
- [47] A. Plucenio, D. J. Pagano, E. Camponogara, H. F. Scherer, and M. Lima. A simple distributed mpc algorithm. *Congresso Brasileiro de Automática*, 2008.
- [48] D. M. Prett and M. Morari. *Shell Process Control Workshop*. Butterworths, Boston, 1987.
- [49] S. J. Qin and T. A. Badgwell. A survey of industrial model predictive control technology. *Control Engineering Practice*, 11(7):733–764, 2003.
- [50] J. Richalet, A. Rault, J. L. Testud, and J. Papon. Algorithmic control of industrial processes. *Proceedings of the 4th IFAC symposium on identification and system parameter estimation*, pages 1119–1167, 1976.
- [51] J. Richalet, A. Rault, J. L. Testud, and J. Papon. Model predictive heuristic control: Applications to industrial processes. *Automatica*, 14(5):413–428, 1978.
- [52] L. M. Rose. *Distillation Design in Practice*. Elsevier, 1985.
- [53] A. T. Schwarm and M. Nikolaou. Chance-constrained model predictive control. *AIChE Journal*, 45:1743–1752, 1999.

- [54] D. E. Seborg, T. F. Edgar, and D. A. Mellichamp. *Process Dynamics and Control*. John Wiley & Sons, Singapore, 1989.
- [55] S. Skogestad. Dynamics control of distillation columns a tutorial introduction. *Trans. IChemE - Distillation and Absorbtion*, 75(A), sep 1997.
- [56] Unicamp. Cepetro - centro de estudos de petróleo, 2009. URL http://www.cepetro.unicamp.br/petroleo/index_petroleo.html.
- [57] A. N. Venkat, I. A. Hiskens, J. B. Rawlings, and S. J. Wright. Distributed mpc strategies with application to power system automatic generation control. *Control Systems Technology, IEEE Transactions on*, 16(6):1192–1206, 2008.
- [58] A. V. Fiacco and G. P. McCormick. *Nonlinear Programming: Sequential Unconstrained Minimization Techniques*. John Wiley & Sons, New York, 1968.
- [59] E. W. Weisstein. Closed set, 2009. URL <http://mathworld.wolfram.com/ClosedSet.html>.
- [60] L. O. Werle. Minimização dos transientes através do aquecimento distribuído em uma coluna de destilação. Master's thesis, Departamento de Engenharia Química, UFSC, Florianópolis, 2007.
- [61] M. J. Willis, G. A. Montague, C. Di Massimo, M. T. Tham, and A. J. Morris. Nonlinear predictive control using optimization techniques. In *Proceedings of the American Control Conference*, pages 2788–2793, Boston, EUA, 1991.

