

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO CIENTÍFICA E
TECNOLÓGICA
CURSO DE MESTRADO**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**OS PERSPECTÓGRAFOS DE DÜRER NA EDUCAÇÃO
MATEMÁTICA: HISTÓRIA, GEOMETRIA E VISUALIZAÇÃO**

THATIELIM ENEGUZZI

FLORIANÓPOLIS - SANTA CATARINA

2009

THATIELI MENEGUZZI

**OS PERSPECTÓGRAFOS DE DÜRER NA EDUCAÇÃO
MATEMÁTICA: HISTÓRIA, GEOMETRIA E VISUALIZAÇÃO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica da Universidade Federal de Santa Catarina, como parcial para a obtenção do título de mestre em Educação Científica e Tecnológica, sob orientação da professora Dr^a Cláudia Flores.

FLORIANÓPOLIS - SC

2009



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
CENTRO DE CIÊNCIAS DA EDUCAÇÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS BIOLÓGICAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
CURSO DE MESTRADO EM EDUCAÇÃO CIENTÍFICA E TECNOLÓGICA

“OS PERSPECTÓGRAFOS DE DÜRER NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: HISTÓRIA,
GEOMETRIA E VISUALIZAÇÃO”

Dissertação submetida ao Colegiado
do Curso de Mestrado em Educação
Científica e Tecnológica em
cumprimento parcial para a
obtenção do título de Mestre em
Educação Científica e Tecnológica

APROVADA PELA COMISSÃO EXAMINADORA em 24/03/2009

Dr^a. Cláudia Regina Flores (Orientadora)

Dr. Wagner Rodrigues Valente (Examinador)

Dr^a. Neri Terezinha Both de Carvalho (Examinadora)

Dr. Ademir Donizeti Caldeira (Suplente)

Dr^a. Suzani Cassiani de Souza
Coordenadora do PPGET

Thatieli Meneguzzi

Florianópolis, Santa Catarina, março de 2009.

AGREDECIMENTOS

No final desta jornada, a tanto e tantas pessoas para agradecer. Sozinhos, não somos capazes de conquistar praticamente nada. Tudo o que alcançamos, conseguimos porque somos apoiados por outras pessoas. Pessoas que estão ao nosso lado em todos os momentos, sorrindo, chorando. A todas as pessoas que, de uma forma ou outra, foram suporte nessa caminhada, o meu sincero agradecimento. Algumas pessoas precisam ser lembradas de modo especial, pelo imenso carinho e dedicação.

À Deus, por ter me permitido conquistar tantas coisas e pelo que ainda me reserva. Obrigado, por ter me dado a vida, por ter me guiado e me protegido nesta jornada e em toda minha vida.

A meu pai, Antoninho, e a minha mãe, Dina, que não mediram esforços para que eu pudesse realizar esse sonho. Que o sacrifício de vocês não tenha sido em vão. Espero que sempre se orgulhem de mim. Obrigado por ter me apoiado em todos os momentos, por ter acreditado em mim, mesmo quando eu mesmo não acreditava mais. Tudo o que sou, devo a vocês, meus primeiros educadores. Amo vocês!

Ao meu amor e amigo, Sander, por ter me apoiado com tanto carinho e atenção. Mesmo nos tantos momentos em que ficamos longe a sua compreensão e o seu apoio me fizeram continuar a minha jornada. Pelo sorriso nos momentos mais difíceis, pelas lágrimas secadas, meu agradecimento eterno. Estar ao seu lado me faz querer ser melhor. Obrigado por tudo o que suportou durante esse tempo. Obrigado, por todos os momentos vividos. A você, meu amor eterno!

A minha irmã e grande amiga Kelly, por ter me feito sorrir em momentos difíceis e me ajudar a aliviar a pressão. Você é uma grande amiga e irmã, conte sempre comigo, como sei que posso contar com você. Você é muito especial, te amo!

A todos os professores que nesta jornada me ajudaram, em especial a professora Cláudia Flores, que soube me orientar e me apoiar em momentos difíceis. Obrigada por todo o carinho, compreensão, paciência e ensinamento

durante esse tempo. Aprendi muito com você. A lembrança dos momentos compartilhados e dos ensinamentos transmitidos nunca será esquecida.

Ao professor Wagner Rodrigues Valente e a professora Neri Terezinha Both de Carvalho, pelos encaminhamentos e pelas correções sugeridas ao meu trabalho. Obrigado pela atenção destinada, pelas palavras oferecidas e pelos muitos ensinamentos.

Enfim, a todos os amigos que fiz, que vou guardar na memória e em meu coração. Vocês fizeram os momentos difíceis serem suavizados. Todos os momentos compartilhados, de sorrisos, de lágrimas, me fizeram evoluir como profissional e como ser humano. Obrigado por todos os momentos vividos, vocês sempre serão especiais para mim!

Cada um é uma pequena parte de um grande quebra-cabeça, chamado coração. Juntando cada pedaço, pude construir algo grandioso. Me tornei uma pessoa melhor! Obrigada por tudo!

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1 - *Igreja de San Lorenzo*

Fonte: CAVALCA, Antonio de Pádua Vilella. **Espaço e representação gráfica: visualização e interpretação.** Série Hipótese. São Paulo: EDUC, 1998.

Figura 2 - *Representação do método de Alberti*

Fonte: FLORES, Claudia R. **Olhar, saber, representar: sobre a representação em perspectiva.** 01. Ed. São Paulo: Musa Editora, 2007. V. 01. 198 p.

Figura 3 - *Flagelação de Cristo - Piero della Francesca*

Fonte: FLORES, Claudia R. **Olhar, saber, representar: sobre a representação em perspectiva.** 01. Ed. São Paulo: Musa Editora, 2007. V. 01. 198 p.

Figura 4 - *Triângulo e polígono em perspectiva. Dürer*

Fonte: SUÁREZ, Carlos Alberto Cardona. **La geometria de Alberto Durero: estudio y modelación de sus construcciones.** Bogotá: Fundación Universidade de Bogotá, 2006.

Figura 5 - *Representação Perspectiva Cavaleira*

Fonte: CAVALCA, Antonio de Pádua Vilella. **Espaço e representação gráfica: visualização e interpretação.** Série Hipótese. São Paulo: EDUC, 1998

Figura 6 - *Arranjo da representação em perspectiva*

Fonte: CAVALCA, Antonio de Pádua Vilella. **Espaço e representação gráfica: visualização e interpretação.** Série Hipótese. São Paulo: EDUC, 1998

Figura 7 - *Retrato de Luca Pacioli e seus discípulo, 1495 - Jacobo de'Barbari*

Fonte: FLORES, Claudia R. **Olhar, saber, representar: sobre a representação em perspectiva.** 01. ed. São Paulo: Musa Editora, 2007. v. 01. 198 p.

Figura 8 - *Melancholia I, Dürer*

Fonte: SUÁREZ, Carlos Alberto Cardona. **La geometria de Alberto Durero: estudio y modelación de sus construcciones.** Bogotá: Fundación Universidade de Bogotá, 2006.

Figura 9 - *Portinhola de Daniele Bárbaro, 1568*

Fonte: SUÁREZ, Carlos Alberto Cardona. **La geometria de Alberto Durero: estudio y modelación de sus construcciones.** Bogotá: Fundación Universidade de Bogotá, 2006.

Figura 10 - *Derivação da portinhola de Salomón de Cas, 1612*

Fonte: SUÁREZ, Carlos Alberto Cardona. **La geometria de Alberto Durero: estúdio y modelación de sus construcciones**. Bogotá: Fundación Universidade de Bogotá, 2006.

Figura 11 - *Versão da portinhola de Salvador Munóz, 1642*

Fonte: PEIFFER, Jeanne. **De la medida**. Madrid: Akal, S.A, 2000.

Figura 12 - *Máquina 1*

Fonte: PEIFFER, Jeanne. **De la medida**. Madrid: Akal, S.A, 2000.

Figura 13 - *Máquina 2*

Fonte: PEIFFER, Jeanne. **De la medida**. Madrid: Akal, S.A, 2000.

Figura 14 - *Máquina 3*

Fonte: PEIFFER, Jeanne. **De la medida**. Madrid: Akal, S.A, 2000.

Figura 15 - *Linha do horizonte*

Figura 16 - *Ponto de vista*

Figura 17 - *Ponto de fuga e linha de fuga*

Figura 18 - *Perspectiva Cavaleira*

Figura 19 - *Representação do cubo*

Figura 20 - *Perspectiva Cavaleira 45°*

Fonte: CUIBANO, João Luiz da Silva. **Perspectiva**.
[www.ufmt.br/cuiabano/3 Disciplinas/Desenho Tecnico/Perspectivas/Perspectivas.pdf](http://www.ufmt.br/cuiabano/3_Disciplinas/Desenho_Tecnico/Perspectivas/Perspectivas.pdf).
2008.

Figura 21 - *Perspectiva Cavaleira 30°*

Fonte: CUIBANO, João Luiz da Silva. **Perspectiva**.
[www.ufmt.br/cuiabano/3 Disciplinas/Desenho Tecnico/Perspectivas/Perspectivas.pdf](http://www.ufmt.br/cuiabano/3_Disciplinas/Desenho_Tecnico/Perspectivas/Perspectivas.pdf).
2008.

Figura 22 - *Perspectiva Cavaleira 60°*

Fonte: CUIBANO, João Luiz da Silva. **Perspectiva**.
[www.ufmt.br/cuiabano/3 Disciplinas/Desenho Tecnico/Perspectivas/Perspectivas.pdf](http://www.ufmt.br/cuiabano/3_Disciplinas/Desenho_Tecnico/Perspectivas/Perspectivas.pdf).
2008.

Figura 23 - *Esquema projeção central ou cônica*

Fonte: CAVALCA, Antonio de Pádua Vilella. **Espaço e representação gráfica: visualização e interpretação**. Série Hipótese. São Paulo: EDUC, 1998

Figura 24 - *Perspectiva cônica ou central*

Fonte: CAVALCA, Antonio de Pádua Vilella. **Espaço e representação gráfica: visualização e interpretação**. Série Hipótese. São Paulo: EDUC, 1998

Figura 25 – *Perspectógrafo didático*

Figura 26 - *Representação de Dürer do cubo*

Fonte: SUÁREZ, Carlos Alberto Cardona. **La geometria de Alberto Durero: estudio y modelación de sus construcciones**. Bogotá: Fundación Universidade de Bogotá, 2006.

Figura 27 - *Planificação do cubo por Dürer*

Fonte: PEIFFER, Jeanne. **De la medida**. Madrid: Akal, S.A, 2000.

Figura 28 - *Esquema pirâmide visual*

Fonte: PEIFFER, Jeanne. **De la medida**. Madrid: Akal, S.A, 2000.

Figura 29 - *Vista de frente de um cubo e linha do horizonte*

Figura 30 - *Localização do ponto de fuga*

Figura 31 - *Perspectiva central do cubo desenhado com o perspectógrafo didático*

Figura 32 - *Ponto de vista central no perspectógrafo didático*

Figura 33 - *Vista geral do objeto no perspectógrafo didático*

Figura 34 - *A realização da perspectiva*

Figura 35 - *Esquema de utilização do perspectógrafo didático, vista de frente*

Figura 36 - *Determinação do ângulo de inclinação*

Figura 37 - *Ponto de vista no perspectógrafo didático da perspectiva*

Figura 38 - *Vista geral do perspectógrafo didático na perspectiva Cavaleira*

Figura 39 - *Medindo a aresta do cubo*

Figura 40 - *Marcando a medida*

Figura 41 - *Representação do cubo em perspectiva Cavaleira*

Figura 42 - *Esquema de Dürer*

Fonte: SUÁREZ, Carlos Alberto Cardona. **La geometria de Alberto Durero: estudio y modelación de sus construcciones**. Bogotá: Fundación Universidade de Bogotá, 2006.

Figura 43 - *Tetraedro construído por Dürer*

Fonte: SUÁREZ, Carlos Alberto Cardona. **La geometria de Alberto Durero: estudio y modelación de sus construcciones**. Bogotá: Fundación Universidade de Bogotá, 2006.

Figura 44 - *Modelização do tetraedro*

Fonte: PEIFFER, Jeanne. **De la medida**. Madrid: Akal, S.A, 2000.

Figura 45 - *Esquema representação do tetraedro*

Figura 46 – *Vista geral do tetraedro*

Figura 47 – *Vista geral do tetraedro 2*

Figura 48 - *Representação do tetraedro*

Figura 49 - *Determinação aresta do cubo*

Fonte: SUÁREZ, Carlos Alberto Cardona. **La geometria de Alberto Durer: estúdio y modelación de sus construcciones**. Bogotá: Fundación Universidade de Bogotá, 2006.

Figura 50 – *Determinação aresta do cubo 2*

Fonte: SUÁREZ, Carlos Alberto Cardona. **La geometria de Alberto Durer: estúdio y modelación de sus construcciones**. Bogotá: Fundación Universidade de Bogotá, 2006.

Figura 51 – *Cubo e suas arestas*

Fonte: SUÁREZ, Carlos Alberto Cardona. **La geometria de Alberto Durer: estúdio y modelación de sus construcciones**. Bogotá: Fundación Universidade de Bogotá, 2006.

Figura 51 - *Representação da duplicação do cubo*

Figura 53- *Vista geral do perspectógrafo didático*

Figura 54 - *Vista Geral 2*

Figura 55 - *Ponto de vista*

Figura 56 - *Medindo no perspectógrafo didático*

Figura 57 - *Marcando a medida*

Figura 58 - *Representação*

SUMÁRIO

RESUMO	12
ABSTRACT	13
APRESENTAÇÃO	14
CAPÍTULO I.....	16
VISUALIZAÇÃO, GEOMETRIA, HISTÓRIA: ENTRELAÇANDO O TEMA DA PESQUISA	16
1 A VISUALIZAÇÃO NO ENSINO DA GEOMETRIA	16
1.1 A educação do olhar – uma proposta desenvolvida na Renascença	21
1.2 Os modos de representar as figuras no plano – A perspectiva	23
1.3 As máquinas de representar – os perspectógrafos de Dürer	38
1.4 A Problemática da Pesquisa.....	41
1.5 O caminho para o desenvolvimento da pesquisa – A história da matemática.....	43
CAPÍTULO II.....	46
PERSPECTÓGRAFOS DE DÜRER: HISTÓRIA, REPRESENTAÇÃO E GEOMETRIA ESPACIAL.....	46
2 Representação em Perspectiva: um estudo sobre os perspectógrafos de Dürer	46
2.1 O encontro da tradição grega, italiana e alemã	46
2.2 A geometria de Dürer e suas características	54
2.3 Dürer, suas obras e seu conhecimento matemático.....	55
2.4 Dürer sua concepção de geometria e sua teoria da arte.....	57
2.5 Sobre as máquinas de Dürer	58
2.5.1 Primeira máquina: a janela de vidro.....	61
2.5.2 A segunda máquina: A rede metálica ou janela quadriculada.....	62
2.5.3 A terceira máquina: A portinhola	63
2.6 A Teoria implicada pelas máquinas	65
2.6.1 A Perspectiva Cavaleira e suas características	69

2.6.2	A Perspectiva Central e suas características.....	73
	CAPÍTULO III	76
	A HISTÓRIA DOS PERSPECTÓGRAFOS E A UTILIZAÇÃO DO <i>PERSPECTÓGRAFO DIDÁTICO</i> : UMA INTERSEÇÃO POSSÍVEL	76
3	As máquinas de Dürer: uma adaptação – o <i>perspectógrafo didático</i>	76
3.1	História da Perspectiva e os Perspectógrafos: uma proposta possível..	79
3.2	Questão 01 - Como construir um cubo, utilizando as idéias de Dürer e o <i>perspectógrafo didático</i> ?.....	81
3.2.1	Como Dürer constrói um cubo?.....	81
3.2.2	Como construir um cubo utilizando o <i>perspectógrafo didático</i> ? ..	84
3.2.2.1	Construção do cubo utilizando perspectiva Central	84
3.2.2.2	Construção do cubo utilizando a perspectiva Paralela (cavaleira):.....	89
3.3	Questão 2 - Como construir um tetraedro, baseando-se nas concepções de Dürer e com o <i>perspectógrafo didático</i> ?.....	94
3.3.1	Como Dürer construía um tetraedro?.....	95
3.3.2	Como construir um tetraedro com o <i>perspectógrafo didático</i> ?...	100
3.4	Questão 3 - Como duplicar um cubo?.....	104
3.4.1	Como Dürer duplicou o cubo?.....	104
3.4.1.1	Duplicação de um cubo de acordo com Dürer	105
3.4.2	Como duplicar um cubo utilizando o <i>perspectógrafo didático</i> ? .	107
3.5	Questão 4 - Como construir um cubo e um paralelepípedo unidos, utilizando o <i>perspectógrafo didático</i> ?	109
4	CONSIDERAÇÕES FINAIS	114
5	BIBLIOGRAFIA	119

RESUMO

No presente trabalho, fazemos um estudo sobre os perspectógrafos de Albrecht Dürer, que durante o Renascimento alemão, desenvolveu máquinas para desenhar em perspectiva.

Nosso intento é trazer uma discussão em torno dos perspectógrafos de Dürer como ferramenta do olhar e construir imagens em perspectiva com possibilidades de aplicação em sala de aula. Acreditamos que este fato se faz importante, pois de um lado discuti-se o aspecto da história da perspectiva associada à construção de um modo de olhar e de representar e, por outro lado, as possibilidades de ensino envolvendo a história e a geometria com ênfase na visualização matemática.

Desta forma, a problemática do presente trabalho é como as máquinas de Dürer – os perspectógrafos – podem ser trazidas ao ensino atual, a fim de se trabalhar conceitos geométricos espaciais, aliando a história da perspectiva e os conhecimentos empregados em torno da técnica de desenho.

Aliando os perspectógrafos, a história, a visualização e a geometria, construímos uma máquina, que denominamos *perspectógrafo didático*, criada a partir dos perspectógrafos. Para utilizarmos o *perspectógrafo didático* recriamos questões trazidas da história, resolvidas pelo próprio Dürer e resolvemos as mesmas. Através disto, busca-se aliar a história da perspectiva com o ensino da geometria desenvolvendo aspectos conceituais da matemática, entre eles a visualização matemática.

Palavras-Chave: Perspectógrafos de Dürer, Representação Perspectiva, Ensino de Geometria, Visualização Espacial.

ABSTRACT

At this current work we study about Albrecht Dürer's perspective machines that during German reborn developed those one to draw in perspective.

The main goal is bringing up a discussion around these machines as a perspective tool and construct images in perspective with application possibilities inside a classroom. We believe that this fact is important since we discuss the perspective history associated to the construction of a way of looking and represent and also the possibilities of teaching involving history and geometry with focus in math visualization.

This way the question around the current work is how Dürer's machines can be used in nowadays education in order to develop space geometry concepts joining perspective history and knowledge around the drawing technique.

By joining the perspectographs, history, visualization and geometry, we build a machine, which we call *teaching perspectograph*, created from the *perspectographs*. To use the *teaching perspectograph* we remade question brought from history, solved by Dürer himself, and then solved them. Through that we intend to join the perspective history with the o geometry teaching developing math conceptual aspects, among them the mathematical visualization.

Palavras-Chave: Dürer's Machines, Perspective, Geometry Teaching, Space Visualization

APRESENTAÇÃO

Nas últimas décadas inúmeras pesquisas em educação matemática colocam em pauta questões sobre o ensino da geometria, tanto plana quanto espacial. Dentre estas pesquisas algumas colocam o olhar em posição de destaque. Compreender o movimento do olhar, bem como sua importância para se ensinar e aprender geometria é, pois, tido como fundamental. Logo, a atividade de visualização é indispensável tanto para quem ensina como para quem aprende.

Ao pensar na questão da visualização e no ensino da matemática nos deparamos com diferentes indagações. Logo, nos detemos aqui, particularmente, na história da perspectiva e, assim, na história do nosso olhar e representar. Representação que foi instaurada no Renascimento italiano e ainda hoje está presente, no nosso dia-a-dia e nas nossas escolas, como forma dominante de representar o mundo e as coisas do mundo.

Assim aliando história, matemática, perspectiva e visualização exploraremos os perspectógrafos de Dürer, que são máquinas para desenhar em perspectiva.

Acreditamos ser necessário compreender como utilizar as máquinas de Dürer em sala de aula, a fim de se trazer a história da perspectiva, bem como os conhecimentos empregados em torno da técnica.

Também pensamos que estas máquinas podem trazer diferentes benefícios para o ensino da geometria. Não só enquanto problematização histórica de um modo de representar e de olhar, mas também como uma possibilidade para o ensino da geometria.

Além do mais, trazem a possibilidade de discutir a construção do nosso modo de olhar. Um olhar que só consegue enxergar em uma única direção. Um olhar que é prisioneiro. Um olhar que é mantido até hoje como forma dominante de olhar e representar o mundo e que é mantido pelas máquinas para melhor ver,

tais como televisão, máquina fotográfica, sonda espacial, os próprios perspectógrafos. Assim, ao trazer a discussão sobre estas máquinas estamos trazendo também a discussão sobre a formatação do nosso modo de olhar.

Logo o nosso objetivo é verificar como a história das máquinas e o ensino de geometria podem se articular. Portanto, pretende-se criar atividades problematizadoras que permitam esta conexão, aliando esta utilização com a história das máquinas, ou melhor, como criar atividades que permitam esta conexão.

Desta forma, esta dissertação organiza-se em torno de três capítulos. No primeiro capítulo sob o título *Visualização, Geometria, História: entrelaçando o tema da pesquisa* é traçado um panorama geral do trabalho, observando-se os principais elementos que serão tratados na pesquisa.

No segundo capítulo, sob o título *Perspectógrafos de Dürer: história, representação e geometria espacial*, é investigado a história das máquinas de perspectiva – máquinas de Dürer – procurando analisar qual foi a importância destas máquinas de representar para a afirmação da técnica da perspectiva como modo de representar, assim como nas etapas conceituais que estas marcam.

Finalmente, no terceiro capítulo, sob o título *História da Perspectiva e a utilização do Perspectógrafo Didático: uma interseção possível*, trazemos a construção da nossa máquina, assim como algumas possibilidades de utilização em sala de aula. Apresentamos questões que possam ser desenvolvidas usando as máquinas, de modo que se trabalhe a visualização e os saberes matemáticos, contemplando a história das máquinas de Dürer e a “educação do olhar”.

É importante ressaltar que nossa pesquisa não está ligada ao modo como o aluno aprende, ao seu funcionamento cognitivo. Queremos, pois, trazer novas formas de se problematizar o ensino, aliando esta problematização à história da matemática.

CAPÍTULO I

VISUALIZAÇÃO, GEOMETRIA, HISTÓRIA: ENTRELACANDO O TEMA DA PESQUISA

1 A VISUALIZAÇÃO NO ENSINO DA GEOMETRIA

O ensino de geometria, em especial o de geometria espacial, requer algumas capacidades tais como autonomia, iniciativa, pensamento crítico, criatividade, percepção, visualização, construção, representação, concepção, etc. O desenvolvimento da geometria recorre à visualização, à percepção, à intuição e à representação para poder ser concretizado, desenvolvendo no indivíduo o pensamento espacial aliado ao raciocínio visual.

Segundo Machado (2002), em algumas aulas de geometria nas primeiras séries do ensino fundamental as atividades propostas envolvem somente a percepção. Quando olhamos para as séries finais do Ensino Fundamental e para o Ensino Médio, as atividades relacionadas com a geometria são direcionadas a concepção¹ de ensino. Segundo o mesmo autor (2002, p. 53) “é como se a geometria fosse organizada segundo um vetor com origem nas atividades perceptivas e extremidade na sistematização formal”.

De fato, a geometria pode e deve ser iniciada com atividades empíricas, visando à percepção, mas estas atividades devem estar diretamente relacionadas com a construção de objetos e com sua representação, através de desenhos, onde suas propriedades e características possam ser concretizadas.

¹ Segundo Maria Mendias Lauro (2007) a concepção se refere à organização conceitual, à busca do conhecimento geométrico por meio do raciocínio lógico-dedutivo. Diz respeito à sistematização do conhecimento geométrico.

Esta visualização não ocorre em um simples olhar. Ela ocorre somente quando o aluno é capaz de estabelecer intuitivamente as relações entre plano e espaço. Para que isto ocorra é necessário um “olhar matemático”, que consiste em, a partir deste, extrair informações matemáticas importantes deste objeto². Isto é válido para resolver problemas ou mesmo para trabalhar o raciocínio matemático dos alunos.

Este “olhar matemático” deve ser pensado levando-se em conta as técnicas utilizadas em sua própria criação. Este nosso modo de olhar foi criado e desenvolvido na Renascença e conhecemos como “olhar em perspectiva”.

Esta técnica trouxe um novo modo de olhar e compreender o mundo e as coisas do mundo. Quando olhamos para um anúncio publicitário, para a televisão e outros meios de comunicação, não temos dificuldades de observar e compreender a informação que os mesmos estão transmitindo. Porém, quando somos solicitados a fazer à mesma tarefa, dentro de uma sala de aula, esta visualização não é alcançada. Desenhar e/ou construir o objeto no plano é outra situação de grande dificuldade para os alunos, pois para realizar esta tarefa há a necessidade de se conseguir visualizar matematicamente o objeto em questão.

Este olhar que foi-nos transmitido não é um olhar qualquer. Este olhar se caracteriza pela vista em um ponto fixo, único, monocular, racional. O olhar que foi e é “educado” a perceber o mundo e as coisas no mundo a partir de um único ponto de vista, uma única direção (FLORES, 2007a, p. 67).

Ao pensarmos no ensino da geometria espacial nos deparamos com algumas questões que precisam ser colocadas em pauta.

Inicialmente há a necessidade de ver no espaço. Olhar para um objeto e extrair informações do mesmo. Estas podem ser matemáticas, o que viabiliza a resolução de problemas e assim o desenvolvimento matemático do aluno.

Além disso, se faz necessário que o aluno ao olhar a figura no plano consiga compreender o seu significado matemático na sua totalidade, sendo

² Estas informações dependem do objeto em questão e do objetivo da visualização. Pode ser, por exemplo, uma diagonal da face, ou até mesmo as faces deste objeto.

capaz de identificar os elementos geométricos envolvidos em ambas as situações: a real e a projetada.

Se podemos olhar as coisas do mundo de forma perspectivada, por quê, muitas vezes temos dificuldades em compreender uma figura geométrica em sala de aula, se esta é desenhada utilizando esta técnica? Muitas pesquisas na última década têm tentado responder a esta pergunta. Destas, algumas pesquisas colocam o olhar em posição de destaque. Segundo Flores (2007a, p. 79) “tem se buscado cada vez mais variados procedimentos que possam ser colocados em prática em sala de aula, dando ênfase à ligação entre a aprendizagem da geometria e o saber ver as representações das figuras geométricas”. Desta forma a habilidade de visualização³ espacial nos alunos é colocada em pauta. É fundamental compreender a percepção das informações visuais, não somente para a formação matemática dos alunos, mas também para sua formação de maneira geral, principalmente em um mundo que se vale cada vez mais de símbolos para representar o real.

É inegável que as representações e a visualização espacial estão interligadas. Podemos dizer que a geometria, de forma específica, a geometria espacial, exige a atividade do olhar, desta forma, nós não podemos deixar de lado o papel da visualização na aquisição dos conhecimentos geométricos.

Segundo Pavanello (1993), no Brasil, a Geometria é abordada na maioria das escolas como um tópico separado dos demais conteúdos e de forma tradicional. Segundo esta autora na primeira metade do século XX o ensino da geometria era marcadamente lógico-dedutivo.

Após 1950, com o surgimento do chamado Movimento da Matemática Moderna (MMM) o ensino de geometria foi praticamente abandonado. Apesar de o objetivo deste movimento ser a unificação da Álgebra, Aritmética e Geometria, o ensino de geometria passou a ser desenvolvido de forma vetorial. Ensinava-se geometria através de transformações geométricas, a parte intuitiva foi praticamente abandonada. Aos poucos alguns conceitos deixaram de ser

³ Visualização neste trabalho se refere à habilidade de representar, transformar, gerar, comunicar, documentar e refletir sobre informação visual.

ensinados. Assim, o olhar também é posto de lado. Expressões como: “abaixo Euclides” significavam abandonar o “olhar intuitivo em geometria” e trazer a “utilização de um olhar vetorial”.

A partir dos anos 70 a educação passou a ser abordada através de exercícios padrão, o aluno era preparado para resolver mecanicamente qualquer problema que fosse parecido com o problema resolvido anteriormente. Com a Geometria não foi diferente.

Nos anos 80 foram abertas novas discussões sobre o ensino de matemática, emergindo práticas voltadas para a resolução de problemas. Todavia, a dificuldade para se ensinar e se aprender Geometria ainda é presente nas salas de aula, isto, pois, segundo Pavanello (1993) os alunos têm acentuada dificuldade para resolver problemas que envolvem conceitos geométricos. Apesar do tempo passado à situação não é diferente.

Não podemos nos esquecer que o desenvolvimento da geometria recorre à visualização, à percepção, à intuição e à representação para poder ser concretizado, desenvolvendo no indivíduo o pensamento espacial aliado ao raciocínio visual.

Porém a atividade de visualização não é algo simples como se supõe, ao contrário, é complexa. Segundo Parzysz⁴ (1989) sua complexidade está justamente no fato de cada indivíduo ver e observar detalhes diferentes de um mesmo objeto. Além disso, Parzysz destaca que os alunos não conseguem, através de um desenho, “ver” o espaço. Para Flores (2002) “representar no plano os objetos do espaço envolve uma construção do próprio olhar para ver o mundo em sua tridimensionalidade”.

Já para Duval (1995) a complexidade da visualização espacial se dá devido ao fato de ver no plano o que está no espaço. O movimento do olhar exigido para se compreender no plano o que está no espaço, é difícil para o aluno. Além disso, a relação entre o objeto real e sua representação

⁴ M. Bernard PARZYSZ (tese de doutorado) Universidade de Paris.

bidimensional, fundamentais na geometria tridimensional, exige um tratamento que articule a representação com a respectiva figura espacial.

Segundo Duval (1995), apesar desta dificuldade, é necessário visualizar uma figura do espaço no plano. Se o aluno conseguir visualizar uma figura com um olhar matemático, esta lhe servirá de auxílio na hora de resolver problemas matemáticos, em especial os de geometria.

Além de toda essa problemática envolvendo a visualização dos alunos, é comum a crença de muitos professores que estes ao observar uma figura no plano estão a observar a figura espacial, e não a sua representação plana.

Porém a dificuldade no ensino da geometria possibilitou o interesse de diferentes pesquisadores, tais como Cavalca (1998), Gobert (2001), Mesquita (1989), Padilha (1992), Flores-Bolda (1997). Estas pesquisas trazem a tona problemas quanto à aprendizagem e o ensino. De uma maneira geral, todos tratam da visualização como questão central para o ensino da geometria, sobretudo a geometria espacial.

Segundo Flores-Bolda (1997) sabemos que a visualização matemática não ocorre num simples olhar, é necessário focalizar o olhar sobre outros dados que não são vistos imediatamente. E é exatamente esse tipo de “olhar” que deve ser desenvolvido pelos alunos. Para tanto, é necessário desenvolver atividades que auxiliem os mesmos a construírem essa habilidade de visualização, para que possam olhar para qualquer figura com um olhar matemático. É na verdade trabalhar com a “educação do olhar”.

A intenção deste trabalho é destacar contribuições da história da perspectiva para a Educação Matemática, especificamente na relação entre o pólo do visto e o pólo do sabido⁵ (Colmez, Parzys, 1993), levando-as para a sala de aula.

Ao pensar que um uso da história da matemática é essencial em qualquer discussão sobre a matemática e seu ensino, focamos o Renascimento – tanto seu

⁵ Pólo do visto – Pólo do sabido: esta relação refere-se ao que o aluno vê e ao que o aluno sabe propriamente. O pólo do visto corresponde ao conteúdo de uma percepção e aos hábitos para realizar determinada atividade. O pólo do saber corresponde às imagens mentais, as concepções, as memórias. Há a necessidade de visualizar e de conhecer por dentro a técnica da preceptiva.

aspecto artístico como o seu aspecto científico – de tal forma que favoreça a percepção do espaço e o desenvolvimento de um “olhar matemático”.

1.1 A educação do olhar – uma proposta desenvolvida na Renascença

É necessário, inicialmente, distinguir o que é *olho* e o que é *olhar*. Segundo Miranda (2001), o olho é o órgão receptor externo. O movimento interno do ser que se põe em busca de informações e de significações é propriamente o “olhar”. Desta forma, fica significativamente claro que a educação do olho é diferente da educação do olhar. Por educação do olhar podemos entender a educação do movimento interno do ser que se põe em busca de informações e de significações para os objetos que estão a sua volta.

Trabalhar com a “educação do olhar” exige um cuidado especial. Isto, pois, de acordo com Miranda (2001), a valorização da produção e do consumo de imagens através de aparelhos tecnológicos intensifica a desvalorização dos sentidos e re-valoriza o pensamento “cartesiano”. O olhar é educado a ver o homem e o mundo de acordo com as possibilidades e os limites da forma de representar, gerada e desenvolvida na Renascença – a perspectiva.

Quando pensamos em trabalhar a “educação do olhar”, não podemos deixar de lado o fato de que o olhar é cultural. Logo, quando pensamos que o aluno precisa ver os objetos matemáticos de outra maneira estamos pensando que ele deve ser retirado de uma cultura que lhe ensinou um modo de olhar. É necessário que ele veja de outra maneira, perceba que existem outros modos de olhar. A história pode ser um fator importante para que o aluno perceba isto, pois nos permite retirar o aluno de seu cotidiano e inseri-lo em outra história, outra cultura, outra forma de olhar.

Além do mais, segundo Lipman (2001) nós educadores devemos possibilitar aos alunos uma forma de pensar *superior*, envolvendo o pensamento criativo e crítico. “O pensamento crítico envolve o raciocínio e o julgamento

crítico (...) O pensamento criativo envolve habilidade, talento e julgamento criativo. (...) Não há pensamento crítico sem o mínimo de julgamento criativo (...) Não há pensamento criativo sem o mínimo de julgamento crítico (...). A comunidade de investigação, especialmente quanto utiliza o diálogo, é o contexto social mais apropriado para a geração do pensamento de ordem superior”.

Logo, os modos como utilizamos a História da Matemática em sala de aula têm, não somente um objetivo narrativo, descritivo, biográfico, mas centralmente de ação problematizadora. Além disso, os “fatos” históricos são elaborados em meio a teorias filosóficas, poderes e valores constituídos, sofrendo ainda os filtros dos leitores. Portanto, quando nos debruçamos sobre um texto, ou quando somos inseridos em uma outra cultura, estes são construídos sob novos interesses, instrumentos e associações.

Assim, quando pensamos em diferentes formas de olhar podemos pensar na forma como olhamos e como representamos o nosso próprio mundo. Hoje, utilizamos muitos aparelhos para representar o mundo em que vivemos: televisão, telescópios, sondas espaciais.

A reprodução do que está a nossa volta através dos aparelhos não é apenas o produto de uma possibilidade tecnológica. Esta reprodução remonta a uma concepção de imagem gerada e desenvolvida na Renascença, segundo Flores (2007a). Acreditamos, pois, ser necessário pensar esta produção como parte de um projeto de educação do olhar mais amplo, que pode nos remeter à perspectiva Renascentista e ao “olhar” cartesiano.

É importante destacar que, segundo Miranda (2001), a busca pelo “olhar correto”, iniciada na perspectiva Renascentista, está ligada intimamente a formulação de um “pensar correto”, um pensar que é correto para esta determinada visão de mundo, uma busca para educar não apenas o olhar, mas também o olho. Segundo Flores (2007a) a partir da Renascença a perspectiva tornou-se um aparato intelectual e técnico, pensado como ciência, produzido para pensar o real, reproduzir este real e afirmar-se como única forma de representação.

Destacamos aqui a necessidade de se trabalhar com a educação do olhar no âmbito da escola. Mas como se daria este trabalho? Como nós, então, educadores matemáticos, podemos promover a educação do olhar?

Há, pois a necessidade de ver no plano o que está no espaço. Esta visualização recorre à técnica da perspectiva, um dos modos de representar figuras espaciais no plano. Esta técnica apresenta-se de diferentes maneiras e pode ser utilizada para diferentes objetivos. A seguir apresentamos a técnica e suas variações.

1.2 Os modos de representar as figuras no plano – A perspectiva

Além de toda a problemática de se trabalhar com a educação do olhar, outro ponto que se faz necessário abordar é o fato de as representações das figuras em geometria espacial, tanto nos livros didáticos como as feitas pelo professor em sala de aula, se dão num plano bidimensional.

Desde o tempo das cavernas os homens buscam formas de representar o real. O homem fez as primeiras considerações sobre o espaço muito remotamente, surgindo assim os primeiros registros e os primeiros obstáculos em representar estes.

Durante o Renascimento Italiano, os pintores queriam fazer da arte uma ciência derivada da geometria de Euclides. Buscando um método científico para representar a realidade que utilizasse as leis matemáticas, criaram a perspectiva geométrica ou linear.

O espaço pode ser construído de modo racional através de leis objetivas que se baseiam na teoria da perspectiva linear. Cria-se, de forma artificial, o espaço pictórico tridimensional, onde os objetos são rigorosamente representados sempre marcados pela proporção.

Muitos foram os artistas (alguns matemáticos) que estudaram a fundo a ciência da representação em perspectiva. Entre eles citamos **Filippo Brunellesco**⁶ (1337-1446) que era um arquiteto na sua época. Foi o primeiro a utilizar princípios geométricos e matemáticos para estabelecer leis da percepção visual na perspectiva. Seus estudos foram desenvolvidos para serem aplicados em seus planos arquitetônicos⁷. Seus esforços podem ser vistos em algumas de suas construções notáveis como a igreja do Espírito Santo⁸.

Foi Brunellesco o primeiro a aplicar a teoria euclidiana de visão aos problemas de representação gráfica. Graças as suas regras, os arquitetos puderam contar com instrumentos de representação pictórica. Além de favorecer as representações arquitetônicas, ainda podia servir para representar corpos humanos. Aliás, ele foi à inspiração para que Piero della Francesca⁹, Leonardo da Vinci¹⁰, e Dürer desenvolvessem seus trabalhos. Assim, o objeto passou a ser desenhar de maneira precisa, com régua e compasso, não só objetos matemáticos, mas também formas redondas (como o corpo humano).

⁶ Filippo Brunellesco: (Florença, 1377 — Florença, 1446) foi um arquiteto Renascentista. Começou a vida como ourives e foi, posteriormente, um arquiteto, o pioneiro desta arte na Renascença. Na primeira fase de sua carreira de arquiteto, redescobriu os princípios da perspectiva linear, que, conhecidos por gregos e romanos, ficaram esquecidos durante toda a Idade Média. Restabeleceu na prática o conceito de ponto de fuga, e a relação entre a distância e a redução no tamanho dos objetos. Seguindo os princípios ópticos e geométricos enunciados por, os artistas da época puderam reproduzir objetos tridimensionais no plano com surpreendente verossimilhança (os textos foram traduzidos do site www.wikipedia.com).

⁷ Um exemplo de plano arquitetônico é a própria igreja do Espírito Santo, a cúpula da igreja Santa Maria Del Piori, entre outros.

⁸ A construção da igreja do Espírito Santo iniciou em 1436, e fica localizada na cidade de Florença, Itália.

⁹ Piero della Francesca (1416 – 1492) foi um pintor e matemático italiano de *Quattrocento*, segunda fase do Renascimento italiano. Tal qual os grandes mestres de seu tempo, Piero primou sempre pela criatividade em relação ao passado medieval, apresentando técnicas e temáticas inovadoras como, por exemplo, o uso da tela e da pintura a óleo, o retrato, a representação da natureza, o nu, e, sobremaneira, a perspectiva e a criação do volume

¹⁰ Leonardo da Vinci – foi um pintor, escultor, arquiteto, engenheiro, químico, botânico, geólogo, cartógrafo, físico, mecânico, escritor, poeta e músico do Renascimento italiano. É considerado um dos maiores gênios da história da humanidade.

A concepção de perspectiva utilizada por Brunellesco pode ser vista em outras obras suas. Outro exemplo é a igreja de San Lorenzo cujo interior é uma expressão tridimensional da teoria da perspectiva (figura 1).



Figura 1 - Igreja de San Lorenzo

A partir do controle da técnica, com a aquisição do saber fazer, possibilitou-se o saber pensar e o saber olhar. Com o domínio sobre o pensar o espaço, Brunellesco conquistou a descoberta e aplicação prática da construção legítima de Alberti, que abordamos a seguir. A partir daí, houve uma mudança no modo de ver e no modo de representar. O espaço pode ser mensurado, construído de maneira científica e representado geometricamente.

Segundo Comar (1992), toda a história da perspectiva central tentou exibir o olho do pintor sobre o plano do próprio quadro. Paradoxalmente, na matemática, o centro de projeção (olho) é o único ponto onde a imagem não está definida sobre o plano do quadro.

Outro teórico de extrema importância, que é considerado o pai da perspectiva é **Leon Battista Alberti**¹¹, pois foi o primeiro a expor formalmente

¹¹ Leon Battista Alberti – foi um arquiteto e teórico de arte, um humanista italiano, ao estilo do ideal Renascentista e filósofo da arquitetura e do urbanismo, pintor, músico e escultor. Os interesses de Alberti viraram-se, então, para a ciência e para a arte. Leitor atento de Vitruvius, escreveu seu célebre tratado *De*

as idéias matemáticas que estavam por trás da perspectiva. Em sua obra *Della pittura* (1435), escreveu o primeiro tratado formal de uma nova técnica para representar um piso (figura 2).

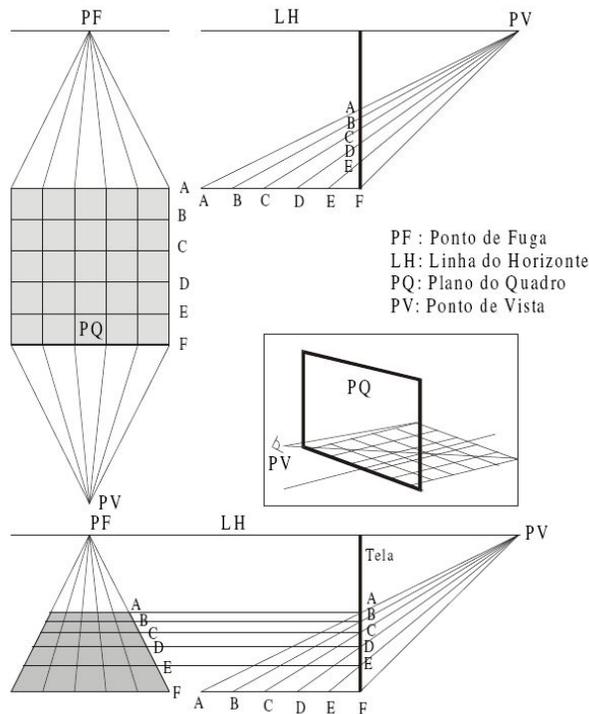


Figura 2 - Representação do método de Alberti

Sua técnica de perspectiva consiste em construir um quadro e transformá-lo em uma “janela visual”. Utilizando a dimensão humana divide a medida em três braços. A linha da base do quadrado deve ser dividida em partes iguais. Localiza-se o ponto de intercessão do raio cêntrico¹² com o quadrado, chamando-o de ponto de fuga. Traça-se linha do ponto cêntrico até as divisões feitas na base do quadrado. Segundo Alberti nenhuma coisa pintada não pode ser semelhante

re aedificatoria (impresso depois de sua morte) tomando como base de referência a arte da Antiguidade. Baseava na música dos números a harmonia das proporções e concebia o edifício como um todo, solidário em cada um de seus elementos.

¹² Raio cêntrico refere-se ao raio central do quadrado, ou o próprio centro do quadrado tomado como base.

às coisas verdadeiras se não houver uma determinada distância para vê-la. Assim, explica a determinação das linhas paralelas à base do quadrado, a partir da distância do observador. Diz Comar (1992) “O lugar a partir do qual se deve ver o quadro, não poderá jamais ser mostrado pelo próprio quadro (...)”. A figura 2 ilustra o método de Albertti.

É importante perceber que a construção ensinada por Albertti fornecia uma escala, podendo assim ser determinado o tamanho de qualquer figura no espaço se esta for desenhada em perspectiva.

O primeiro livro do tratado de Albertti se preocupa com os fundamentos matemáticos da pintura. Para ele a tarefa do pintor se resume em “representar o que pode ser visto”. Tudo o que podemos observar, é visível graças aos raios de luz que, juntamente com o olho, constituem o que ele denomina de *pirâmide visual*. Na pirâmide visual ele recomenda interpor um plano (como uma lâmina de vidro) que permitem observar como os raios trazem informação sobre o objeto (veja a figura 2).

Seus ensinamentos influenciaram Leonardo da Vinci, Albertch Dürer e Piero della Francesca. De fato, suas idéias conduziram à perfeição geométrica de *Flagelação de Cristo* (figura 3) de Piero della Francesca.



Figura 3 - Flagelação de Cristo – Piero della Francesca

Já, Piero della Francesca, escreve *De prospectiva pingendi* (por volta de 1478), onde estudou o problema mais complicado de representar, sobre o plano da pintura, um objeto em três dimensões sob um ponto de vista dado. Foi o primeiro a tentar aplicar, de forma sistemática, a perspectiva geométrica em sua pintura. Juntamente com seu discípulo *Luca Pacioli* fez uma elaboração rigorosa e científica da perspectiva.

Foi Piero della Francesca que legitimou o método de Albertti, propondo três métodos de construção. Primeiramente partiu do que Albertti havia feito e utilizou coordenadas. O segundo método de construção tinha por fundamento a dupla projeção ortogonal¹³. Já no terceiro método utilizou o que hoje chamamos de ponto de distância.

No terceiro livro de seu tratado, ele introduziu um novo método para construir imagens. Este método permitia representar figuras mais complexas, obtendo o mesmo resultado do que com os outros métodos por ele estudados.

Apesar de não trabalhar com variáveis, podemos citar que sua estratégia pedagógica era forçar o leitor a repetir inúmeras vezes o mesmo procedimento para que ficasse claro em sua aplicação, mesmo sem denominar as variáveis como fazemos hoje.

Piero não legitima este procedimento, seu interesse teria sido, antes de tudo, comprovar o método de Albertti. Apesar disto, outros autores comprovam o método de Piero, tais como Bessot e Le Goff (1993).

Temos ainda Dürer com suas máquinas de desenhar em perspectiva. Utilizando as idéias de Albertti, della Francesca e outros teóricos, Dürer criou as máquinas de desenhar em perspectiva que são objeto de estudo do presente trabalho.

O trabalho de Dürer foi fortemente influenciado pela obra de Piero della Francesca. Isto pode ser percebido no esboço presente em seu livro para desenhar um triângulo e um polígono em perspectiva. A figura a seguir (figura 4) sugere a intenção de ajustar a figura a um procedimento proposto por Piero. No entanto, a

¹³ Dupla projeção ortogonal: No método da dupla projeção são utilizados dois planos dispostos de maneira ortogonal entre si.

projeção não se realiza sobre a imagem adequada da diagonal tomada como base. Inexplicavelmente Dürer toma uma imagem equivocada da diagonal correspondente, o que gerou algumas modificações.

Os triângulos no método de Piero são perspectivados com respeito a uma linha reta e, conseqüentemente, também o são com respeito a um ponto, deixam de ser na modificação feita por Dürer (figura 4).

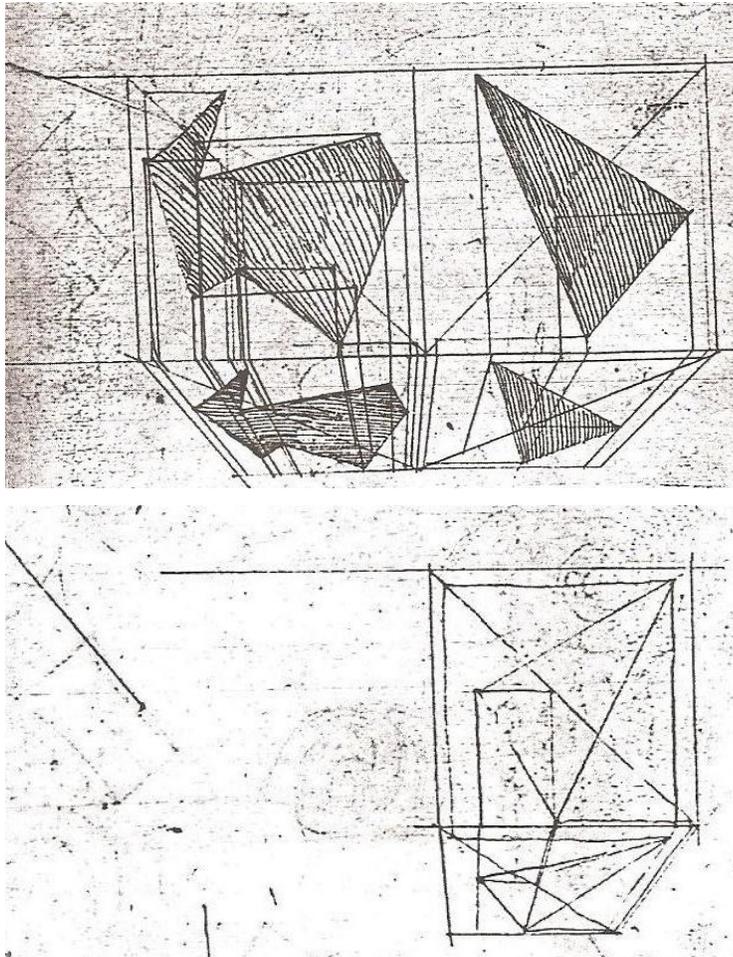


Figura 4 - Triângulo e polígono em perspectiva. Dürer

Porém o que nos interessa em particular em seu trabalho são suas máquinas, os perspectógrafos, como citado anteriormente. Dürer criou um engenhoso dispositivo para colocar em prática a técnica descrita por Piero. Estas máquinas serão descritas no capítulo posterior.

É difícil pensar que o aparelho pensado por Dürer pudesse auxiliar efetivamente os artistas. É provável que este equipamento servisse de uso

pedagógico para ensinar a técnica da perspectiva para diferentes pessoas. Não há dúvida quanto ao impacto que estas máquinas podem ter sobre os leitores para esclarecer os princípios básicos da perspectiva.

Isto, pois, elas trazem as etapas conceituais da perspectiva, o que permitiu, e acreditamos que ainda permita o ensino desta técnica para diferentes públicos. Suas máquinas inspiraram outros estudiosos a construir máquinas mais precisas para melhor ver o mundo e as coisas do mundo.

Ao analisar a história da perspectiva, é inevitável pensarmos na dificuldade de representar uma figura do espaço no plano. Assim, há de se considerar um outro problema: como desenhar figuras tridimensionais num plano bidimensional, considerando o âmbito educacional?

Vários estudos apontam que este problema é tratado há muito tempo. Dentre estas pesquisas citamos aqui a de Cavalca (1998). Em seu trabalho, Cavalca explora a questão da dificuldade de visualização espacial por parte dos alunos. O autor aplicou uma seqüência didática utilizando diferentes tipos de representação em perspectiva para que os mesmos pudessem perceber as diferentes formas de representar uma mesma figura geométrica. Além disso, valendo-se da noção acerca dos Registros de Representação Semiótica (Duval, 1995) pode-se destacar que atividades em torno da representação figural, tanto no aspecto do plano quanto do tridimensional, possibilitam aos alunos relacionar objetos do espaço à representação plana e a representação plana aos objetos do espaço. Isto, segundo o autor, leva a coordenação¹⁴ entre diferentes registros de representação.

A noção de registros de representação semiótica, norteou inúmeras dentre as primeiras pesquisas que tratavam do tema de visualização espacial. Além disso, essa noção influenciou os trabalhos de Cavalca (1998), Gobert (2001), Mesquita (1989), Padilha (1992), Flores-Bolda (1997) entre outros trabalhos.

¹⁴ Coordenação entre diferentes registros de representação semiótica, significa utilizar diferentes registros de representação de um objeto matemático e compreender que estas diferentes representações estão tratando do mesmo objeto matemático. Essa coordenação se dá no interior de um mesmo registro, recebendo o nome de *tratamento*, ou entre registros diferentes, quando é denominada *conversão*.

As pesquisas realizadas por Mesquita, Padilha e Flores-Bolda procuraram trazer a tona o papel heurístico das figuras geométricas, na resolução de problemas, apontando a necessidade de “aprender a ver e a ler” estas figuras.

Além destes trabalhos destacamos aqui trabalhos mais recentes, que trazem à tona as questões históricas em torno das representações. Destes citamos aqui o trabalho de Flores (2007a) e de Costa (2004).

Flores (2007a) explora o lado histórico e epistemológico da representação em perspectiva, mostrando que o espaço em perspectiva foi criado para reproduzir de modo real o que vemos e que a técnica da perspectiva tornou-se a forma dominante de representar o mundo. Em seu trabalho a autora procura demonstrar como se deu a instauração de um novo modo de olhar e representar o mundo, e assim um novo modo de pensar a geometria. Analisando obras de arte da Renascença, bem como este período histórico, a autora traça uma relação entre o olhar, o conhecimento, o espaço e os modos de representar este espaço.

Já Costa, trabalha sob o mesmo enfoque de Flores, porém lidando com a parte experimental. Trazendo a história da perspectiva aplica uma seqüência didática para trabalhar o “desenvolvimento da percepção visual, da formação do olhar” (2004, p. 6). Esta seqüência faz um paralelo com os acontecimentos históricos. Nosso trabalho difere do trabalho de Costa (2004) na maneira como abordaremos a história e os conhecimentos matemáticos em si. No nosso trabalho, caminhamos paralelamente com a história, trazendo o uso de um aparelho para se fazer o desenho em perspectiva. Focamos em um único aparelho e em sua construção. Já no trabalho de Costa (2004) ele aborda diferentes aparelhos e não faz um paralelo, nas atividades propostas, com a história dos mesmos.

Poderíamos citar aqui outros trabalhos referentes ao ensino de geometria, porém o mais importante a ressaltar é que todos colocam a visualização espacial como fundamental. Logo a “educação do olhar” que estamos abordando é uma preocupação antiga e que merece destaque e atenção.

Nosso trabalho investigará somente os perspectógrafos de Dürer, no que tange a sua construção e aceitação, no âmbito da história, bem como os

princípios técnicos destes aparelhos. Deste estudo, analisaremos as potencialidades do uso da história destes perspectógrafos para o ensino atual de geometria. Neste caso, procuraremos adaptar uma máquina, a partir dos perspectógrafos do Dürer e de problemáticas históricas em torno do uso dos perspectógrafos para desenhar em perspectiva, criaremos problemáticas para não só desenhar em perspectiva, mas também, para desenvolver aspectos conceituais da matemática e da visualização matemática, usando o *perspectógrafo didático*. Portanto, não se colocará o acento aqui no aspecto cognitivo desta problemática, do visual, mas no aspecto histórico e nas suas possibilidades de discussão em sala de aula.

Quando analisamos os trabalhos de pesquisa relatados anteriormente nos deparamos com a técnica da perspectiva. A utilização desta técnica, para representar o mundo real, se dá há muito tempo. Mais precisamente podemos localizar o Renascimento como um marco para esta técnica, pois foi nessa época que toda sua teoria foi desenvolvida. Além disso, esta foi desenvolvida e aprimorada exatamente pela necessidade de representar o espaço tridimensional no bidimensional. Isto, pois se pretendia representar as coisas tal como se viam. A partir daí, o modo como olhamos é o modo como representamos.

O nosso olhar passa a ser formatado sob um único ponto de vista. Um olhar cujas características são: fixo, monocular, infinito.

Por que o enfoque na perspectiva? Não existem diferentes formas de representar? Como previamente citado por nós, a perspectiva é a técnica de representação mais utilizada na escola. Fora isto, esta técnica foi criada como um método capaz de reproduzir de modo real o que vemos. Além do mais, ela é “Oriunda de problemas de representação do espaço tridimensional, inserida num campo de conhecimento específico, pautada por um novo modo de olhar (...)” (FLORES, 2007a, p. 77), o que reflete o modo como construímos os nossos conhecimentos, ensinamos e sabemos e o modo como olhamos tudo a nossa volta.

Além disso, Piaget e Inhelder (1973) afirmam que os conhecimentos dividem-se entre o realismo e a representação do objeto, e que o uso da

perspectiva se faz, afastando-se da observação, e aproximando-se da representação mais elaborada e tida como adequada, a partir de um determinado ponto de vista. Também afirmam que o conhecimento em duas ou três dimensões não é inato. Logo, não há como o sujeito apreender o espaço e compreendê-lo geometricamente sem um olhar específico, um olhar matemático. Também afirmam que a aprendizagem específica da perspectiva necessita de noções de representações gráficas do espaço projetivo. Rosa (1998) afirma que “somente com o uso da geometria é possível identificar o quanto será menor o objeto que está mais longe, ou em que proporção os intervalos se reduzem, ou para que ponto devem convergir as linhas”. Assim, geometria e perspectivas são ciências que devem ser trabalhadas em conjunto. Compreender figuras espaciais significa saber olhar, representar e compreender os processos pelos quais os saberes se organizam e dão possibilidade ao olhar de compreender uma representação.

Desta forma, acreditamos que percorrer a história da perspectiva, mais propriamente o Renascimento italiano, podemos localizar elementos que preparem o aluno para a representação do espaço tridimensional, contribuindo na mediação do conflito visto-sabido¹⁵.

Segundo Bordarel, Cosmez e Parzysz (1987), existem diferentes tipos de perspectiva. Valemos-nos das figuras objetivas através desta técnica para ensinar os conceitos geométricos em sala de aula. Esta ainda é utilizada nos livros didáticos (principalmente de Ensino Médio). Entre estes diferentes tipos de perspectiva destacamos a perspectiva exata que se enquadra no grupo de projeções ditas cônicas ou centrais, e a perspectiva paralela. A diferença entre a perspectiva cônica e a paralela é a localização do ponto de fuga (convergência das retas projetantes) que na cônica está a uma distância finita e na paralela, no infinito.

A perspectiva utilizada no ensino da geometria espacial, segundo Parzysz (1989) é a perspectiva Paralela, e dentre este tipo de perspectiva, nos valemos da perspectiva Cavaleira. Neste tipo de representação o centro de representação é

¹⁵ O conflito visto-sabido refere-se a relação entre o pólo do visto e o pólo do sabido. Aquilo que vemos e aquilo que sabemos. Muitas vezes o visto, não corresponde ao que se sabe. Está posto o conflito.

focado no infinito e as retas permanecem paralelas, onde os objetos projetados não sofrem variação nas suas medidas. Daí a grande utilização deste tipo de representação na escola, pois ela conserva a medida do objeto em cada direção do espaço, o que permite fazer uma descrição racional, não retirando da imagem suas qualidades figurativas.

Na perspectiva Cavaleira usamos a projeção cilíndrica oblíqua¹⁶. Ela recebe este nome porque os desenhos das praças militares eram, geralmente, executados em projeção cilíndrica e o aspecto obtido dava a impressão de que o desenho havia sido colhido da cavaleira, obra alta de fortificação sobre a qual assentam baterias. É também conhecida como axonometria oblíqua, pois é uma projeção que pressupõe o observador no infinito e, em conseqüência, utiliza os raios paralelos e oblíquos ao plano do quadro. Esta perspectiva toma uma das três faces do triedro como plano do quadro. Na perspectiva Cavaleira a face da frente conserva a sua forma e as suas dimensões, a face de fuga é a única a ser reduzida.

Numa definição matemática, a imagem de um ponto P do espaço é a interseção entre o plano de projeção π e a reta projetante que passa por P e é paralela a uma dada direção r , que é oblíqua em relação à π . Se analisarmos a representação de um paralelepípedo observamos que duas de suas faces devem ficar paralelas ao plano π (figura 5):

¹⁶ Projeção cilíndrica oblíqua: A projeção cilíndrica, também chamada de projeção paralela, é o tipo de projeção, cujos raios projetantes que incidem no objeto e no plano de projeção são todos paralelos entre si, como as geratrizes do cilindro. A projeção cilíndrica pode ser ortogonal ou oblíqua. Nas projeções cilíndricas oblíquas as retas projetantes partem do infinito e têm direção oblíqua em relação ao plano de projeção, isto é, formam ângulos diferentes de 90°.

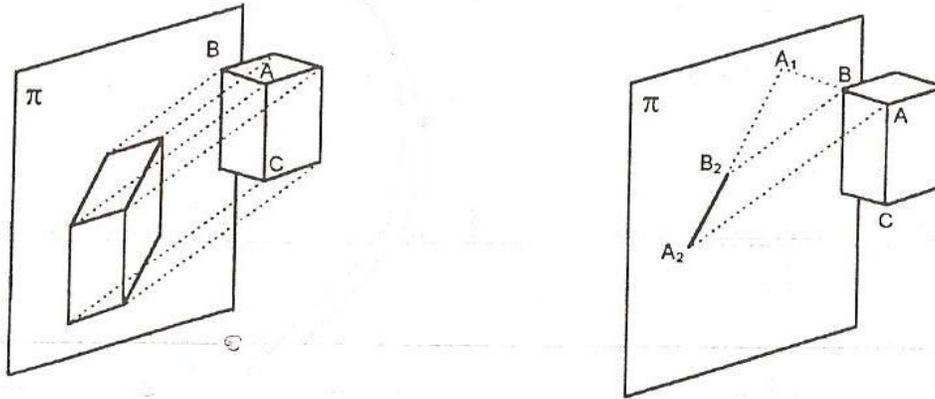


Figura 5 - Representação perspectiva Cavaleira

Desta forma, conseguimos arestas perpendiculares (veja AB) ou paralelas (veja AC) ao plano de projeção. Além disso, percebemos que a razão entre a medida da projeção e o próprio segmento é constante. Logo, podemos escolher qualquer direção para a figura ser representada.

Esta perspectiva conserva certas propriedades dos objetos que são fundamentais para a visualização espacial, tais como o paralelismo.

A perspectiva considera o ponto de vista próprio (real) que gera o feixe de projeções cônicas. Em princípio, o plano de projeção se posiciona entre o objeto e o ponto de vista. A figura 6 representa este arranjo.

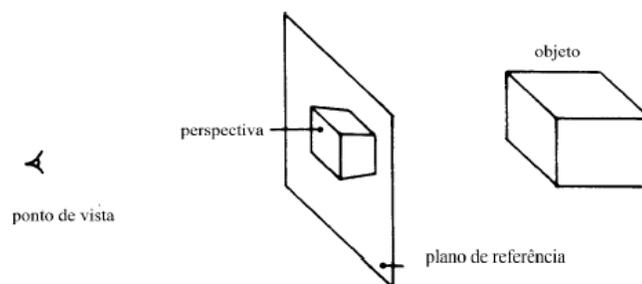


Figura 6 - Arranjo da representação em perspectiva

Esse tipo de arranjo reproduz as características geométricas do processo visual. Logo, a projeção com um ponto de vista único – a perspectiva – permite

identificação da configuração da forma, da mesma maneira que a fotografia. Porém, a perspectiva, assim como a foto, faz com que as formas sejam submetidas a deformações.

Assim, a perspectiva, que representa a vista única e reproduz o sistema perceptivo humano, é de fácil leitura (apoiado na reprodução do mecanismo da percepção visual). Isto pode facilitar aos alunos a compreensão da representação de um objeto. Porém, quando pensamos nesta técnica devemos lembrar que para representar em perspectiva é necessário conhecer regras geométricas complexas. Logo, visualizar um objeto no espaço depende de se entender a perspectiva, que envolve regras complexas.

Acreditamos que, ao colocarmos o aluno frente a situações que envolvam a perspectiva e apresentando-lhe esta técnica, podemos favorecer a leitura de uma figura matematicamente. Porém, faz-se necessário lembrar que não somos ensinados, e nem tão pouco ensinamos, em sala de aula, como utilizar esta técnica. Como então, podemos exigir que nossos alunos utilizem esta técnica? Mais ainda, que sejam capazes de utilizá-la para visualizar matematicamente uma figura?

É importante ressaltar que o desenho está no plano e o seu sentido no espaço. Todas as figuras representadas graficamente estão no plano bidimensional enquanto o objeto em si é tridimensional. Como relacionar os dois então? Não obstante, como o aluno faz esta relação entre a representação plana e o objeto real¹⁷? É neste ponto que reside a grande dificuldade da maioria dos alunos, segundo Cavalca (1998), pois ler um desenho de um objeto em perspectiva é diferente de observar o objeto em si.

É necessário, pois, trabalhar o olhar no tridimensional e no bidimensional. A relação está em ver no plano aquilo que está no espaço. Desta forma, precisamos pensar o processo ensino-aprendizagem de modo a levar em conta o sentido das representações gráficas (figuras tridimensionais) e não apenas a sua forma. É, então, necessário que o aluno observe a figura no espaço e a relacione

¹⁷ Ao referimo-nos a objeto real estamos falando do objeto que está no espaço.

com a sua representação no plano, assim como a representação dos elementos desta figura.

Não é tão simples, como se supõe trabalhar com essa relação. Cada indivíduo vê de uma forma. Segundo Berger (1999) aquilo que sabemos ou que pensamos saber afeta o modo como vemos as coisas. Desta forma, ao observarmos uma mesma figura, extraímos as mais variadas informações. Quando olho uma figura no espaço posso retirar informações diferentes daquelas que meus alunos iriam retirar. Como focar o olho do aluno sobre os pontos fundamentais desta figura? Como fazer o aluno compreender esta figura do espaço no plano?

Não podemos nos esquecer que o nosso modo de olhar as imagens é construído, criado, fabricado. Ele não é neutro, tão pouco natural, é carregado de cultura, de elementos culturais, ou melhor, de tantos elementos quanto nossa cultura é capaz de criar. “A maneira como vemos as coisas é afetada pelo que sabemos ou pelo que acreditamos” (...) “Nunca olhamos as coisas apenas; estamos sempre olhando para a relação entre as coisas e nós mesmos”. (p.10 e 11). As representações do mundo e do que vemos no mundo tem muito mais a ver com a forma como olhamos, percebemos e conhecemos o mundo do que pelo que o próprio mundo é.

Trabalhar com uma nova “construção” do olhar do sujeito é complicado. Apesar de estarmos inseridos em uma mesma cultura cada um de nós vê de uma maneira diferente. Porém é inegável a necessidade de desenvolver o olhar para possibilitar o aprendizado da geometria espacial. Sem a visualização a geometria espacial fica comprometida. Citamos anteriormente que a aprendizagem em geometria não pode ser dissociada da necessidade de visualizar os objetos tridimensionais e interpretá-los de maneira bidimensional.

Segundo Parzysz (1989) faz-se importante trazer a tona à própria dinâmica do saber que envolve a questão do ver. Devemos nos desvincular da idéia que o aluno consegue visualizar um objeto espacial desenhado no plano. Esta não é a realidade. Ignoramos que o fato de representar os objetos tridimensionais num plano bidimensional envolver construir o próprio olhar e a

forma de representar a tridimensionalidade. Assim, esta visualização não se dá imediatamente. É preciso focar o olhar sobre outros pontos que não estão visíveis aos nossos olhos inicialmente.

A geometria nos foi ensinado utilizando, entre outras técnicas, a perspectiva. Porém não nos ensinaram à perspectiva e nem como utilizá-la, e muito menos sua história. O roteiro se repete. Continua-se a ensinar geometria espacial por meio de representações em perspectiva, mas não ensinamos aos nossos alunos como trabalhar com essa técnica. Nem tão pouco como trabalhar com outra qualquer.

Podemos então nos perguntar como desenvolver a habilidade de visualização? É necessário primeiro lembrar que “educar o olhar” envolve muito mais que ensinar a ver com olhar matemático os objetivos. É preciso perceber que as próprias representações foram construídas por sujeitos, dentro de uma cultura, sendo resultado de uma escolha mediante uma dificuldade para construir um saber.

Além disso, é importante ressaltar que muitos fatores influenciam na visualização espacial do sujeito. Entre elas podemos citar a forma como cada indivíduo observa uma figura, o funcionamento cognitivo de cada sujeito, as diferentes formas de se representar uma figura espacial no plano, enfim a relação entre os objetos em si e sua representação.

Para fazer a representação de um objeto espacial no plano, sem conhecer necessariamente todas as regras da matemática, buscou-se um aparelho que reproduzisse o ambiente da ação projetiva. Esta busca não é nova. Encontramos na história diferentes aparelhos para desenhar em perspectiva. Neste trabalho trazemos a tona os perspectógrafos de Dürer.

1.3 As máquinas de representar – os perspectógrafos de Dürer

Ao analisar a história da perspectiva nos deparamos com instrumentos para desenhar que utilizavam a técnica da perspectiva como meio de representação. Dentre estes instrumentos para representar trazemos, aqui, particularmente os perspectógrafos de Dürer.

Segundo Flacon e Taton (1994) o novo modo racional de representar o espaço, ou seja, por meio da perspectiva, levou Dürer a se empenhar, não tão necessariamente num estudo teórico sobre esta técnica, mas na construção de máquinas, que nada mais eram do que instrumentos para representar em perspectiva. O uso da técnica da perspectiva, por meio de perspectógrafos, teve grande aceitação e divulgação, e se constituíram na grande contribuição de Dürer para a teoria da perspectiva. É sobre estas máquinas que pretendemos apoiar nossa pesquisa.

A partir dos novos conhecimentos e das novas idéias em torno do modo de representação, instaurado no Renascimento italiano, Dürer criou subterfúgios mecânicos que eram destinados a fabricar desenhos em perspectiva. Por que estamos interessados nestes instrumentos? Estas máquinas trazem as etapas conceituais da perspectiva, isto, pois, direcionam o olhar a um ponto fixo, único, monocular e racional. Há, pois uma mobilização do olhar. Temos, a partir delas, uma nova forma de olhar as imagens e o mundo a nossa volta. Nosso olhar é ensinado a ver através da perspectiva, que é instaurada como modo de representar o espaço tridimensional no plano bidimensional. Isso significa problematizar o desenho em perspectiva.

Trazer à tona os perspectógrafos criados por Dürer significa empenhar-se num estudo histórico dos modos de se colocar em prática a técnica e o desenho em perspectiva. Estudar as máquinas de desenhar permite conhecer os saberes técnicos, bem como os conhecimentos matemáticos empregados na representação em perspectiva. Por outro lado, estas máquinas denunciam a formatação do olhar que, ao ser fixado num único ponto de vista, constitui-se como monocular, racional, perspectivado.

Compreender, portanto, como estas máquinas foram criadas, a partir de quais fundamentos e para quais fins, pode nos auxiliar a compreender a

instauração de um modo de olhar, de saber e de representar que são, ainda hoje, os nossos modos de olhar e saber para representar figuras em geometria.

Estes aparelhos visam favorecer a percepção dos primeiros elementos da perspectiva como linhas convergentes a um mesmo ponto, ponto de fuga, entre outros elementos desta técnica. Acreditamos que estes instrumentos podem mediar o processo entre o que é visto, o que é representado e o que é conhecido sobre a técnica da perspectiva, possibilitando o trabalho com a visualização do espaço e das coisas representadas no plano.

É inegável que a fascinação pelos instrumentos para melhor ver e representar levou a uma educação do nosso olhar. A forma educada, treinada é, até hoje, o nosso modo de olhar, de representar e de pensar. Isto não só no ensino da geometria, quando olharmos uma figura desenhada no plano, mas, também, em todas as imagens ao nosso redor. “Achamos sempre, ou quase sempre, que só há uma via de olhar e, portanto, de representar, de conceber, de aprender, de analisar, de ensinar...” (FLORES, 2007a, p. 92).

Porém somos capazes de visualizar de outras maneiras. Estas outras formas de visualização podem não ter sido exploradas por nossa cultura atual, mas foram exploradas por outros povos, outras culturas. Neste ponto, pensamos que a história torna-se um elemento fundamental. Afinal, olhar é cultural. Quando transitamos por diferentes contextos, por diferentes histórias estamos transitando por outras culturas, por outros olhares. Viajar pela história é viajar por outras culturas. Não podemos nos esquecer que qualquer conhecimento resulta de um contexto social e a análise histórico-crítica da sociedade (ou de uma cultura), em um período, indica idéias que levaram à gênese do que se definiu como perspectiva. O campo histórico é requisitado e deve ser exposto aos alunos estimulando a reflexão sobre o que é sabido, conhecido e visto.

O que podemos afirmar é que estas máquinas criadas por Dürer tiveram grande importância na formatação de um modo de olhar, através de um único ponto de vista. Além do mais, a história destes equipamentos confirmam a dificuldade que tiveram os homens de representar, de maneira racional, sobre o plano o espaço tridimensional. Acreditamos que, estas máquinas que, a princípio,

tenham o objetivo de fornecer uma ajuda mecânica aos desenhistas, é uma fonte profícua de investigação para se compreender como se deu a captura da nossa forma de olhar. Permitem, assim, conceitualizar sobre as etapas do desenvolvimento da teoria da perspectiva. Mas, também, nos dão uma fonte para pensar o ensino e a visualização em matemática.

Pensamos ser importante o olhar através dos aparelhos, pois permite representar a realidade tal como está posta. Acreditamos ser necessário pensar esta produção como parte integrante de um projeto de educação visual mais amplo, que nos remete a perspectiva Renascentista e ao “olhar” cartesiano. É neste programa de educação visual que precisamos nos deter.

Ressaltamos ainda, que uma das grandes mudanças em relação à percepção do olhar é o *olhar através dos aparelhos*. É necessário chamar a atenção para as mudanças nas formas de visibilidade do real que o olhar dos aparelhos provoca. Hoje olhamos através dos aparelhos, as máquinas fotográficas, as sondas espaciais... Mas isso já vem de antes. A primeira câmera preta, o primeiro telescópio. Antes ainda, as primeiras máquinas de desenhar em perspectiva, as máquinas de Dürer.

1.4 A Problemática da Pesquisa

Podemos dizer que o desenvolvimento da visualização pode se dar através da representação das figuras geométricas em perspectiva. Isto implica não só a atividade do olhar, mas o emprego e a apreensão de saberes. **A problemática é, pois, como as máquinas de Dürer – os perspectógrafos – podem ser trazidos ao ensino atual, a fim de se trabalhar conceitos geométricos espaciais, aliando a história da perspectiva e os conhecimentos empregados em torno da técnica de desenho?**

Acreditamos que as máquinas de Dürer são instrumentos valiosos para o trabalho em sala de aula. De um lado, enquanto problematização histórica do modo de representar e de olhar, de outro como uma possibilidade de ensino de conceitos da geometria. Pensamos ser importante olhar na prática através dos aparelhos, pois, desta forma, é possível vivenciar a representação em perspectiva por meio de instrumentos criados há séculos atrás.

A partir da problemática exposta, o nosso objetivo será verificar quais são as possibilidades de utilização da máquina de Dürer em sala de aula, aliando esta utilização com a história das máquinas. Pensar no uso destes aparelhos significa pensar tanto no sentido da compreensão de conceitos matemáticos envolvidos na técnica da perspectiva, quanto de questões históricas de construção de um modo de olhar.

Por fim, é pensar na relação do ensino com a história da matemática, com a aprendizagem do próprio conhecimento matemático e com a educação do olhar do sujeito. No caso desta pesquisa, significa investigar como Dürer se apropriou dos conhecimentos de perspectiva e matemáticos para resolver seus problemas de representação dos objetos do espaço no plano, utilizando máquinas e como esta história pode ser aplicada em sala de aula.

Assim é pensar o contexto da história no ensino da matemática. Mas, por que trazer a história da matemática no ensino é importante? E mais, por que trazer os perspectógrafos de Dürer para o ensino? Nosso desafio é justamente pensar em como, na prática, podemos utilizar esses aparelhos; como explorar os conceitos geométricos a partir deles. Compreender que o seu modo de olhar é apenas um modo de olhar e não “o” modo de olhar de todos. É preciso, pois, educar o olhar dos alunos num olhar capaz de capturar elementos matemáticos de uma figura espacial. Enfim, é pensar quais são as possibilidades em sala de aula da utilização dos aparelhos de desenhar em perspectiva.

É necessário educar o olhar matematicamente. Por isso, a atividade do olhar implica na atividade do saber. A visualização é, portanto, um conhecimento matemático. Olhar e representar envolve conceitos matemáticos.

1.5 O caminho para o desenvolvimento da pesquisa – A história da matemática

Um dos caminhos para compreender o momento histórico e podermos construir a nossa dissertação se dará através da utilização da história da matemática. Mas não qualquer história. Ressaltamos que não estamos entendendo a história, neste trabalho, como um espelho do que se passou, algo pronto, linear, hierárquico, acabado. Entendemos a história como uma negociação social de significados, não-linear e nem tão pouco acabada, ou melhor, como uma fonte de experiências humanas, possibilitando a re-criação ou a re-descoberta de um conceito. Assim, ao analisar a história das máquinas de Dürer, não queremos simplesmente desenhar o trajeto de sua construção. Queremos sim, compreender os fundamentos teóricos que foram capazes de dar lugar de destaque a estas máquinas, enquanto instrumentos capazes de capturar o olhar, para assim “ajudar a promover uma interlocução entre as diferentes culturas em diferentes épocas” (MOTTA e BROLEZZI, 2006, p 12). Queremos, pois, trazer a interlocução entre diferentes olhares para a sala de aula.

Segundo Miorim e Miguel (2004) a história da matemática pode contribuir para a própria divulgação cultural da matemática. Isto significa que esta história pode conduzir a compreensão de que cada povo, com suas culturas diferenciadas, é capaz de desenvolver a matemática. Ainda, afirmam que a história da matemática é uma fonte de métodos adequados para abordar pedagogicamente determinados tópicos da matemática. A história pode, então, ser um elemento na elaboração de atividades para a sala de aula, através de situações problemas.

Segundo Miorim e Miguel (2004), na Proposta Curricular para o Ensino de Matemática – 1º grau do estado de São Paulo, a história da matemática é identificada sob três formas de participação diferenciada: “como elemento orientador da seqüência de trabalho com um tema específico, (...); na

apresentação de diferentes métodos históricos; na discussão de problemas de natureza histórica”(p. 45).

Na primeira forma¹⁸ de participação da história da matemática no cotidiano escolar, os elaboradores da proposta curricular justificam que a história pode ser uma fonte para se buscar a compreensão e a significação de conceitos. Seria através de um ensino baseado nestes fatos que se realizaria a função pedagógica da história da matemática.

Outra forma de participação da história da matemática, de acordo com a proposta mencionada acima, diz respeito à utilização de problemas históricos.

Segundo Miorim e Miguel (2004), a partir de 1990 houve uma ampliação dos trabalhos com elementos históricos, tanto em propostas curriculares como em livros didáticos e paradidáticos. Isto resultou em diferentes formas de se abordar a história.

Apesar destas diferentes formas, os autores acreditam que a história pode e deve se constituir como ponto de referência tanto para a problematização pedagógica, como para a transformação da cultura escolar e da própria educação escolar¹⁹.

Assim, acreditamos que a história da matemática é uma fonte problematizadora e de novas atividades, que possibilitam aos alunos criar e recriar ativamente conceitos e significados. Acreditamos que a história das máquinas de Dürer é um produto humano, carregado de valores culturais. Trabalhar esta história com os alunos significa reviver este produto humano, entendendo suas dificuldades para quem sabe, compreender a nosso.

Afinal, acreditamos que estudar a história destas máquinas “como uma das múltiplas manifestações culturais da humanidade torna o conhecimento matemático significativo e facilita o entendimento entre este conhecimento e o homem, em um dado contexto cultural” (MOTTA e BROLEZZI, 2006, p. 11).

Segundo Flores (2005) trazer a história da perspectiva para o espaço da educação é, pois, fundamental. Isto tanto para oportunizar o conhecimento do

¹⁸ Esta forma é: a história como elemento orientador na sequência de trabalho com um tema específico.

¹⁹ Esta inclui a cultura matemática que circula e da educação matemática que se promove.

próprio processo da representação em perspectiva como, também, para se estabelecer relações com o próprio conhecimento matemático criado. Acreditamos que uma abordagem histórica no ensino de geometria significa trabalhar o objeto matemático e os diferentes aspectos que levaram a construção deste mesmo objeto.

Além do mais, segundo Bkouche (1991) a história pode ser uma excelente fonte de problematização do ensino. Problematização esta que estamos buscando ao adentrar na história das máquinas de Dürer. É, pois, trazer a história para o ensino não somente para inseri-la neste espaço, mas, sobretudo para refletirmos sobre ela a partir de problematizações. Buscamos, desta forma, trazer à tona a história da Perspectiva para problematizarmos o desenho utilizando esta técnica. Acreditamos que um dos meios para se pensar esta problematização do desenho em Perspectiva seja, justamente, as máquinas que foram criadas para se desenhar, utilizando a Perspectiva. Entre estas máquinas temos os perspectógrafos.

Para Bkouche (1997) é fundamental para se pensar o ensino de um conteúdo, a questão da problematização que traga consigo a história. Uma história que nos permita analisar os problemas que levaram determinados sujeitos a construir um conhecimento para resolver estes mesmos problemas. Logo, não podemos estar pensando na história como um ponto de partida, nem tão pouco como contínua e linear. Precisamos considerar a história como possibilidade de problematização. Assim, é pensar o saber como oriundo de um campo de problemas e também como possibilidade de reflexão sobre questões atuais.

Desta forma, ao pensar nesta problematização nos deparamos com os perspectógrafos de Dürer, que podem ser importantes fontes para se pensar o saber, o olhar, o representar, assim como as questões atuais de ensino.

CAPÍTULO II

PERSPECTÓGRAFOS DE DÜRER: HISTÓRIA, REPRESENTAÇÃO E GEOMETRIA ESPACIAL

2 Representação em Perspectiva: um estudo sobre os perspectógrafos de Dürer

2.1 O encontro da tradição grega, italiana e alemã



Figura 7 - Retrato de Luca Pacioli e seu discípulo, 1495 - Jacopo de'Barbari

Esta pintura pode retratar um dos encontros mais importantes da história. Segundo Suárez (2006) uma das possíveis interpretações para este retrato é que o discípulo, ao fundo, seria Albertch Dürer.

Neste retrato ainda podemos perceber outros elementos, que demonstram a ligação da tradição italiana com a tradição grega. Vejamos, por exemplo, na lousa apoiada na mesa. Nesta lousa aparece um modelo geométrico que faz alusão a construção que permitiu a Euclides demonstrar a proposição 12 do livro XIII dos *Elementos*. É o professor ensinando a seu discípulo esta demonstração. Assim é a reunião de três tradições: a grega, a italiana e a alemã.

Nosso interesse está em pensar que esta cena descreve o encontro entre os personagens e suas tradições. A tradição grega, representada nos *Elementos* de Euclides, a construção do dodecaedro mesclado com a tradição italiana e os métodos projetivos idealizados por Dürer.

Mas como este artista alemão entra em contato com a arte italiana? Primeiramente precisamos mencionar que Dürer foi um artista alemão que viveu na época do Renascimento, durante os anos de 1471 e 1528. Estudou com o seu pai, um ourives húngaro que emigrou para a Alemanha, e em 1486 começou a pintar. Apesar de não ser de uma família nobre, Dürer teve contato com a elite social, artística e intelectual de sua cidade. É através deste contato, que surge seu interesse pelas artes e também pela matemática.

Dürer inspirou-se nos trabalhos dos pintores dos dois maiores centros artísticos europeus (Itália e Holanda), porém sempre foi muito mais inovador. A partir de 1490 Dürer viajou bastante para estudar, passando nomeadamente pela Itália, onde entrou em contato com a teoria da Perspectiva²⁰. É nestas viagens que seu interesse pelo fundamento dessa teoria – a Matemática – é desenvolvido. Ele ficou fascinado pela cultura dos pintores desta região que “sabiam latim, tocavam música e sabiam dançar” (FLORES, 2007a p. 1). O contato com uma cultura diferente despertou nele à vontade de assimilar as principais estruturas da Perspectiva, tentando assim levar consigo e transmitir para outras pessoas a cultura que tanto lhe encantou. Segundo Peiffer (2000), o

²⁰ Quando falamos na teoria da perspectiva estamos nos referindo ao fato de Dürer ter acesso a escritos como os de Leon Batista Alberti, Piero della Francesca, Leonardo da Vinci e Luca Pacioli.

provável professor de Dürer foi Luca Pacioli, que seria o professor da gravura mencionada no início deste capítulo.

Inspirado pela cultura italiana, e influenciado pela idéias do humanismo, segundo Peiffer (2000), Dürer acreditava que os conhecimentos teóricos deveriam ser subordinados a fins civis e políticos, devendo culminar na evolução e no benefício da sociedade. Assim, para ele, suas máquinas poderiam beneficiar a sociedade, pois, favoreciam o aprendizado da Perspectiva para diferentes pessoas, inseridas em diferentes classes sociais, assim pertencentes a diferentes meios culturais.

Segundo Hamou (1995), Dürer foi o primeiro artista do Norte Europeu que sucumbiu à fascinação da teoria da Perspectiva desenvolvida na Itália, empregando a definição da Perspectiva como visão transparente e atribuindo à arte a função de representar a natureza com a fidelidade, a verdade, com que o olhar apreende.

Dürer era considerado o melhor matemático dentre todos os artistas do Renascimento. Dürer escreveu três obras: um sobre fortificações, outro um tratado sobre proporções e a terceira um tratado sobre medidas. Estas obras se dividem em diferentes tratados ou livros. A última obra é a mais conhecida e a que nos interessa, pois trata do ensino da Perspectiva.

O trabalho de Dürer mostra idéias originais que, de certa forma, antecipam resultados importantes da geometria projetiva. Para compreender suas idéias é necessário conhecer sua obra.

Seu Tratado, intitulado *Underweysung der messung / mit dem zirckel und richtscheyt/ in Linien ebnen unnd gantzen corporen/ durch Albercht Dürer zu samem getzogen/ und zu nutz aller kunstliebhabenden mit zu gehörigen figure/ in truck gebracht/ im jar M. D. XXV.*²¹, é, segundo a edição de Jeanne Peiffer (2000), uma das mais belas obras impressas no Renascimento alemão, consta de

²¹ A tradução do título é: Instruções para a medida/ com régua e compasso/ das linhas, planos e corpos sólidos/ reunidas por Albrecht Dürer/ e impressas com as figuras correspondentes/ para o uso de todos os amadores da arte/ no ano de 1525.

quatro livros. O primeiro livro apresenta as definições que são os pontos de partida para descrever os objetos matemáticos.

O segundo livro se ocupa das figuras bidimensionais. Este livro é profícuo em recomendações de métodos para construção de polígonos regulares. O terceiro livro ilustra a aplicação da geometria aos fazeres arquitetônicos. Também tenta familiarizar o leitor alemão da construção geométrica das letras romanas. O quarto livro, e o que nos interessa mais, se ocupa dos corpos tridimensionais. Traz, por exemplo, o clássico problema da duplicação do cubo e dos métodos projetivos idealizados pelos italianos, em especial por Piero della Francesca.

Sem dúvida, segundo Suárez (2006), o trabalho de Dürer foi fortemente influenciado pelos italianos e sua nova forma de representar o espaço tridimensional. Porém, ele conseguiu estabelecer relações entre os trabalhos italianos e os trabalhos alemães.

Observa-se que Dürer seguiu as pegadas de Piero e se valeu destas, sempre preocupado em melhorar o uso das projeções verticais e horizontais. Além da obra de Piero, outra influência marcante em sua obra é de Leon Alberti. Em seus retratos mais famosos, *São Jerônimo em seu estúdio* e *Melancolia I* (Fig. 8), percebe-se a utilização das regras da Perspectiva.



Figura 8 - Melancholia I, Dürer

Como já citamos, na obra de Dürer nos interessa particularmente aquela que trata sobre medidas. Este trabalho é dirigido para todos aqueles que não conheceram a geometria Euclidiana, assim como artesões, pintores e outros interessados. Nesta obra ele pretendia estabelecer uma relação entre a matemática e a prática dos artesãos. Segundo Flores (2007b) ele designa a geometria como uma geometria construtiva. Em toda sua obra esta preocupação é evidente. Toda construção teórica é acompanhada de uma aplicação para quem interessar.

Além disso, o seu principal objetivo era ensinar os fundamentos geométricos e a matemática para o exercício da arte do pintor e do artesão. Assim, Dürer engenhou um dispositivo para colocar em prática a Perspectiva. Esta técnica é especialmente importante quando se trata de representar

pictoricamente objetos mais complexos que as formas geométricas simples. É difícil pensar que o aparato construído por Dürer pudesse auxiliar efetivamente os artistas. É mais fácil supor que os interesses nestas máquinas estavam em utilizá-la como instrumento pedagógico. Isto, pois, o projeto inicial de Dürer era o de fazer da pintura uma arte liberal fundada na geometria. Este projeto era exatamente para tratar da educação matemática dos artistas e artesãos alemães, sua principal preocupação.

Logo, notadamente, o grande objetivo deste artista, era ensinar matemática para os artesãos e pintores de sua época, para levá-los a assimilação e capacitá-los ao uso dos conceitos matemáticos, para assim poderem criar novas estratégias de uso desta ciência.

Para atingir tal objetivo, Dürer valeu-se de diferentes estratégias pedagógicas. Entre elas, segundo Flores (2007b), foi a não utilização de termos latinos transpostos para o alemão, das nomenclaturas matemáticas. Ao invés disso, ele designou os objetos matemáticos por palavras que os lembrassem, criando palavras novas para designá-los.

Desta forma, a comunicação entre os envolvidos era facilitada, o que poderia favorecer a compreensão dos conceitos matemáticos. Além deste fato, para ensinar, Dürer acreditava que, os textos seriam melhores assimilados se apoiados em figuras. Textos e figuras passaram, assim, a se organizar no corpo do texto, no meio da página, diferentemente dos demais textos desta época, onde as figuras apareciam nas margens. Com isso, ele acreditava que o leitor poderia interagir a imagem e o escrito.

Assim, para poder ensinar aos artesãos e artistas ele criou estas máquinas, que são então, instrumentos pedagógicos. Segundo Suárez (2006) Dürer é o primeiro artista do Renascimento a construir e documentar um aparato para desenhar em Perspectiva, que era baseado na materialização das retas visuais com fios, concretizando alguns dos princípios da Perspectiva central.

Mas o que Dürer entendia por Perspectiva? O que se entendia por Perspectiva na Renascença? Podemos entender o que se pensava ser Perspectiva, nos reportando para sua origem. Do latim, Perspectiva significa *avistar através*

de alguma coisa e ver claramente. A esta visão transparente pertencem cinco coisas: a primeira é o olho que vê; segundo é objeto visto; terceiro é à distância entre o olho e o objeto; quarto: vê-se qualquer coisa por meio de linhas diretas, a saber, às linhas mais curtas; quinto: o plano que está entre o olho e o objeto.

Vale notar que um dos grandes teóricos que desenvolveu a teoria da Perspectiva no Renascimento italiano foi Alberti, estabelecendo as primeiras formulações sobre um novo modo de representação do espaço e das coisas no espaço. Um modo racional, medido, calculado, e centralizado, na medida em que a técnica da Perspectiva central pretendia ser o meio de representação que possibilitava o desenho fiel da realidade. Neste caso, o olhar passava a se desenvolver em profundidade, para o infinito. “A Perspectiva central, fazendo convergir às retas paralelas ao infinito em um ponto do quadro, confere ao espaço um estatuto de tridimensionalidade, portanto infinito” (FLORES, 2007a, p. 78)

Com o surgimento desta técnica no Renascimento italiano, com o homem moderno que pensa, planeja, analisa, que é o centro do mundo, o espaço passa a ser racionalizado, bem como os objetos deste espaço. Agora eles têm a forma do objeto real. O espaço representado é o próprio espaço em que este homem se encontra. Está posto uma nova forma de ver e de se relacionar com o mundo.

Porém para representar os objetos, o espaço e tudo o mais de forma real era preciso técnicas menos rudimentares daquelas usadas na Idade Média. Muitas vezes, utilizavam o chão ladrilhado, um teto quadriculado para atingir esse intento. Surge então, outras idéias, outras características. O ponto de fuga, a “propriedade segundo a qual as perpendiculares ao plano do quadro convergem para um ponto” passa a ser admitido.

Fora o chão ladrilhado, ou o teto quadriculado temos outros modos de representar tais como a regra dos dois terços, o método de Alberti, a justa proporção de Piero della Francesca, que serão tratados no capítulo seguinte. O importante nisto tudo é perceber que existem, e existiram diferentes tipos de representação. Mesmo a Perspectiva tem suas variantes. Foram preciso erros,

acertos, tentativas, descartes, escolhas para se chegar ao método de representação que hoje utilizamos. É fundamental nos colocarmos a par das dificuldades, das escolhas dos artistas para conseguir representar de forma real o espaço num plano bidimensional. Isso pode ser possível através da história, pois ela nos permite investigar as dificuldades, as construções dos artistas e dos matemáticos. Investigando a história podemos trazer à tona elementos matemáticos importantes e interessantes para os alunos.

Esse modo de olhar que se instaura no Renascimento possui as características dadas pela vista em um ponto fixo, único, monocular, racional. O olhar é “educado” a perceber o mundo e as coisas no mundo a partir de um único ponto de vista, uma única direção.

Pensando nestes novos conhecimentos e nas novas idéias em torno do modo de representação, instaurado no Renascimento italiano, podemos compreender como Dürer foi capaz de criar subterfúgios mecânicos destinados a fabricar desenhos em Perspectiva. Por que estes instrumentos nos interessam? Podemos dizer que estes instrumentos marcam as etapas conceituais da Perspectiva, sobretudo porque mostram os principais princípios da Perspectiva central. Desta forma, pode ser de grande valia para o trabalho com a Perspectiva. Além do mais, ele utilizou suas máquinas para ensinar Perspectiva para jovens artesãos e pintores. Jovens que não entendiam a matemática. Dürer foi, por que não, o professor de matemática destes jovens. Se naquela época ele conseguiu ensinar a Perspectiva utilizando os perspectógrafos, acreditamos que isto seja possível hoje.

Fora tudo isso ainda podemos inserir os alunos em uma cultura diferente, proporcionar-lhes a oportunidade de perceber o mundo sob um outro ponto de vista. É trazer uma reflexão sobre as transformações sofridas pelos modos de representar o mundo e as coisas do mundo. É mostrar-lhes as dificuldades e incertezas daqueles que foram responsáveis pela criação do método que hoje utilizamos para representar. Trazer a reflexão que a matemática é uma ciência que foi construída por homens.

A menção a estas máquinas data de 1525, quando da reedição de *De la medida*, livro de Dürer. Vemos assim o nascimento de um instrumento óptico que torna possível a conexão entre o mundo da representação e o mundo real.

Porém é interessante ressaltarmos que esta não foi a primeira máquina construída para melhor ver. Durante séculos, antes disso, o homem observou com atenção o céu, o mar e construiu aparelhos para observá-lo melhor. Galileu construiu o primeiro telescópio e ensinou seus discípulos a fazê-lo e a observar o céu. Ficava cada vez mais evidente a necessidade de construir máquinas cada vez mais precisas que tivessem um fundamento matemático. Segundo Suárez (2006) as máquinas de Dürer foram construções que possibilitavam ao homem melhor representar a realidade. Ao materializar em uma máquina para desenhar as leis da Perspectiva, Dürer serviu de mediador entre a tradição artística da Perspectiva e as novas formas de compreender o mundo.

Os primeiros anos do Renascimento marcaram o começo da produção conjunta entre arte, técnica e ciência, com a finalidade de alcançar um ideal de progresso intelectual e técnico, sem precedentes, na história do pensamento ocidental. Através do uso contínuo destes aparelhos de Perspectiva, o homem moderno estabeleceu as bases para um novo modelo de explicação do universo e também, lhe permitiram representar a realidade de um modo cada vez mais preciso.

2.2 A geometria de Dürer e suas características

Podemos dizer que Dürer compreendia a geometria diferentemente de outros estudiosos de sua época. Ao contrário dos matemáticos, sua geometria não era demasiadamente esquemática, e podemos afirmar isto por duas razões. Preocupado com a educação dos jovens artistas e artesãos, coloca a sua geometria a serviço destes, inspirado pela idéias do Renascimento italiano. Além

do mais, os objetos sobre os quais Dürer exercita seu talento e sua intuição geométrica, são clássicos e os métodos que utiliza são construtivos, muito próximos daqueles utilizados nos ateliês.

Segundo Suárez (2006) a geometria de Dürer não é, em nenhum momento, demonstrativa, nem dedutiva e a ordem de exposição nem sempre parece coerente para os matemáticos, por uma razão que já foi levantada por nós anteriormente: sua preocupação com a educação dos artistas e artesãos. Ao contrário dos manuais práticos em alemão que centravam seus problemas em medidas e medições, Dürer buscava soluções gráficas para problemas de construção geométrica, problemas estes provenientes das artes e dos ofícios.

Quando pensamos que Dürer buscava uma construção regradada, exata ou aproximada das formas naturais, podemos dizer que sua geometria é construtiva e exata. Ele coloca a disposição dos artistas e artesãos um catálogo de formas e suas variações.

A concepção de espaço de Dürer tem uma direção privilegiada: a vertical. Logo ele não é nem homogêneo e nem isotrópico. Todas as demais direções são definidas a partir de uma vertical considerada absoluta.

Além disto, também podemos considerar a geometria de Dürer como discreta. Isto, devido ao fato de suas construções se realizarem ponto a ponto. Ele elege uma quantidade de pontos e para cada um deles repete uma mesma operação, com régua e compasso, de fácil entendimento para os artistas e artesãos. Ainda faz-se importante ressaltar que, o texto é marcado pela utilidade da geometria. Isto para que cada um possa descobrir a utilidade prática das construções explicadas neste.

2.3 Dürer, suas obras e seu conhecimento matemático.

A obra de Dürer é tida, na Alemanha, como uma enciclopédia matemática para uso dos artistas e artesãos, escrita por um deles. Mas afinal, Dürer pode ser considerado um geômetra? Ou ele era um artista? Podemos, definitivamente, responder esta questão apontando suas contribuições originais para o desenvolvimento da matemática. Além do mais, encontramos em sua obra a primeira exposição ao norte dos Alpes das regras da Perspectiva central.

Ainda, para tentarmos responder a esta questão, podemos evocar o prazer pela forma, que, segundo Peiffer (2000), caracteriza um geômetra autêntico. Este prazer está evidente em todo o texto de Dürer e é, definitivamente, o motor essencial de suas investigações.

Contudo, precisamos pensar ainda no status da matemática no Renascimento. Um matemático no Renascimento era um sábio que se dedicava às artes do *quadrivium* (aritmética, geometria, astronomia e música) ou, um homem do mundo prático que exercia uma profissão que dependia dos saberes matemáticos, tal como arquitetura.

Em se tratando de Dürer, ou seja, em sua obra, podemos dizer que seu objetivo era além de ensinar artesãos e artistas à técnica da Perspectiva com também elevar a profissão do artesão ao status de arte liberal e conduzindo a atividades matemáticas numa cultura científica dos humanistas, pode-se dizer que a obra de Dürer é escrita por um sábio.

Dürer se apoiava nas tradições matemáticas, tanto sábias como práticas e as inovava. Isto porque estava em constante contato com filósofos e humanistas que favoreceram a elaboração de seus conhecimentos matemáticos. Ele não somente teve contato com as tradições das artes sábias, como as colocou a favor de seu trabalho e as aprofundou.

Somente no século XVII suas contribuições para a matemática, principalmente nas idéias da Perspectiva e na teoria das proporções do corpo humano foram citadas, reconhecidas ou criticadas. Como cita Peiffer (2000), dizendo que Leibniz prefere Dürer aos italianos, Lambert adora sua precisão geométrica, e Chasles o coloca entre os geômetras de sua época.

2.4 Dürer sua concepção de geometria e sua teoria da arte

Analisemos agora, a própria concepção de geometria de Dürer. Igual a numerosos artistas do Renascimento, ele fundamenta sua filosofia da beleza na harmonia das partes entre si e como um todo. Dürer designa esta harmonia com o termo *Vergleichung*, que defini como: o mesmo modo que cada parte em si deve ser desenhada, também a reunião de cada parte deve ser harmoniosa, pois os elementos harmoniosos são tidos como belos (SUÁREZ, 2006). A idéia subjacente a esta concepção de harmonia é a de homogeneidade, que ele traduz com o mesmo termo.

Mas como chegar a uma boa proporção e assim imprimir beleza em uma obra? Para Dürer esta resposta é complexa e evoluiu no decorrer do tempo. Inicialmente Dürer parece não saber o que é beleza. Em 1514 pinta *Melancolia I*, gravura apresentada no início deste capítulo (figura 8), que representa a impotência dos artistas-geometras em desenhar a beleza. Em 1528 escreve que é praticamente impossível chegar à perfeição de desenhar uma figura humana (PEIFFER, 2000).

Porém, para ele, a geometria é aquela cuja verdade é bem definida e cujo encaminhamento das proporções é necessário. Logo não se pode fugir da busca da beleza da proporção humana. No entanto, as limitações e a inadequação da geometria euclidiana para um projeto como o de Dürer, de desenhar com perfeição as formas humanas, ficam expostas. Ele sente a necessidade de aprender uma geometria mais completa, entrando em contato com as idéias da teoria da técnica da Perspectiva do Renascimento.

Suárez (2006) afirma ainda que a arte está ligada à natureza, pois tudo o que se pretende desenhar já está posto justamente por esta natureza. Assim como, a arte está ligada à geometria. Não se pode fazer arte sem conhecer geometria. Graças à geometria um artista pode mostrar a natureza com fidelidade. Para o artista faz-se necessário conhecer a geometria, porem não é necessário estar

constantemente medindo suas figuras, pois a arte é dotada de um sentido do olho, que vê em profundidade, com exatidão, que já tem o sentido da medida. Esta é a chave para a concepção de geometria proposta por Dürer.

Assim, ficam repartidos os papéis da geometria demonstrativa e a arte da medida. E fica claro também a importância do aprendizado matemático para os artistas. A arte da medida, unida a uma sólida experiência, deve permitir captar a justa medida, levando em conta os dados da natureza. A união da arte e da geometria tem um valor pedagógico, pois permite ensinar conceitos geométricos para se fazer arte.

Ao se deparar com estas idéias podemos analisar a importância de se trazer elementos da arte, e desta concepção de geometria, para o ensino de Perspectiva na atual educação. Logo, para ensinarmos a Perspectiva podemos trazer elementos desta arte, elementos históricos, de culturas diferentes. As máquinas de Dürer permitem trazer todos estes elementos para a sala de aula bem como permitem inserir os alunos em culturas diferentes, modos diferentes de pensar, perceber o momento em que a visão foi privilegiada em detrimento dos outros sentidos. Esta inserção possibilita a reflexão sobre o nosso modo de olhar, o nosso modo de compreender o mundo e as coisas do mundo. É, portanto fazer uma reflexão sobre a nossa própria cultura, através de uma cultura diferente, possibilitando assim uma nova visão de mundo e conseqüentemente da própria matemática. Isto pode ampliar os horizontes dos alunos.

2.5 Sobre as máquinas de Dürer

Durante o Renascimento italiano houve uma mudança na forma de pensar. Esta mudança está relacionada com a predominância do sentido da visão em detrimento dos outros sentidos. Foi este sentido que conduziu os homens à Perspectiva, que moldou nosso olhar.

No Renascimento, com o surgimento da Perspectiva, temos um espaço que é pensado, medido, construído sistematicamente. O plano que em que os objetos passam a ser representados é sem limite, infinito, construído de maneira geométrica. O espaço se torna um espaço geométrico, definido por um sistema de coordenadas cartesianas. Nas palavras de Panofsky (1998) “foi possível passar de um espaço psicofisiológico para um espaço matemático”.

As máquinas de Dürer surgem num cenário em que a representação em Perspectiva era complexa. Representar um objeto, para um leigo, em Perspectiva era uma tarefa muito complicada. De fácil utilização, as máquinas propostas por ele permitiam desenhar um objeto em Perspectiva corretamente, mesmo não conhecendo a técnica. Os modelos propostos por Dürer consistiam em situar pontos de vistas em diferentes posições.

Em seu tratado sobre medidas, como introdução, Dürer recorda alguns princípios da óptica e como traçar, com a ajuda da dupla projeção, a sombra de um cubo colocado sobre uma superfície. Seu livro termina com dois dispositivos (que veremos abaixo) mecânicos de Perspectiva ilustrados por gravuras celebres: O pintor (máquina 1) e a Portinhola (máquina 3). Em uma edição posterior aparecem dispositivos suplementares, tais como o desenho da mulher nua (máquina 2).

Dürer, conforme já citamos, criou artefatos mecânicos para desenhar em Perspectiva. Segundo Comar (1992) os diferentes procedimentos imaginados por Dürer consistem em imobilizar o olho do desenhista, depois determinar a interseção de um raio visual com o plano do quadro, sendo este materializado por uma janela de vidro (figura 12), ou uma janela de quadriculados (figura 13), ou por um instrumento equipado de uma porta móvel (figura 14). Estas máquinas trazem componentes básicos da Perspectiva, como o ponto de fuga e a linha horizontal.

O objetivo de Dürer com as máquinas era tornar úteis as técnicas da Perspectiva para os artesões da época, assim suas máquinas constituíram-se em um meio para se compreender as idéias da Perspectiva.

Estes artefatos obtiveram êxito imenso: de um lado, sua proposta foi difundida através de gravuras que reproduziam o original; por outro lado encontramos instruções praticas nas obras de outros autores sobre as máquinas.

A partir das máquinas de Dürer, os modelos tridimensionais criados por outros que derivavam deste, se constituíram em um meio didático eficaz para explicar os princípios básicos das leis da Perspectiva, isso, pois permitiam exhibir de forma prática e com muita clareza os teoremas geométricos sobre os quais a Perspectiva se fundamenta. As figuras 9, 10 e 11 são derivações das máquinas de Dürer.

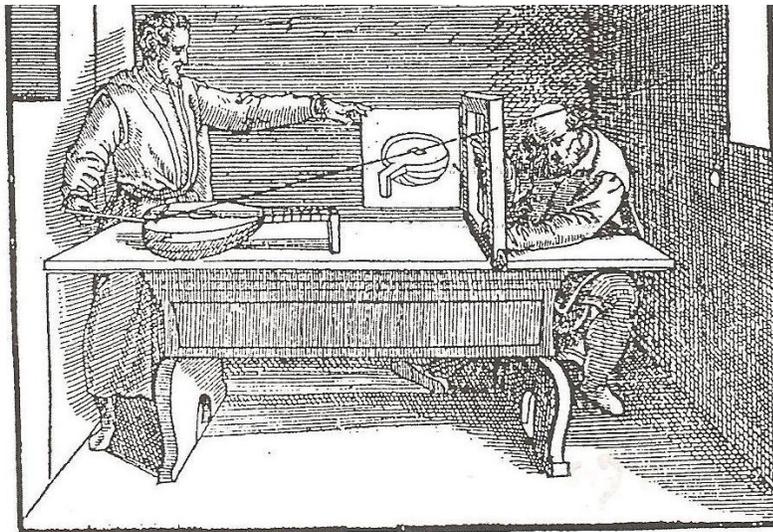


Figura 9 - Portinhola de Daniele Bárbaro, 1568

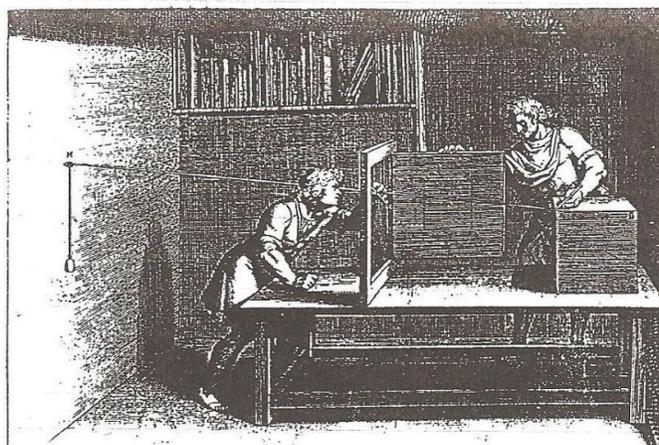


Figura 10 - Derivação da Portinhola de Salomón de Caus, 1612

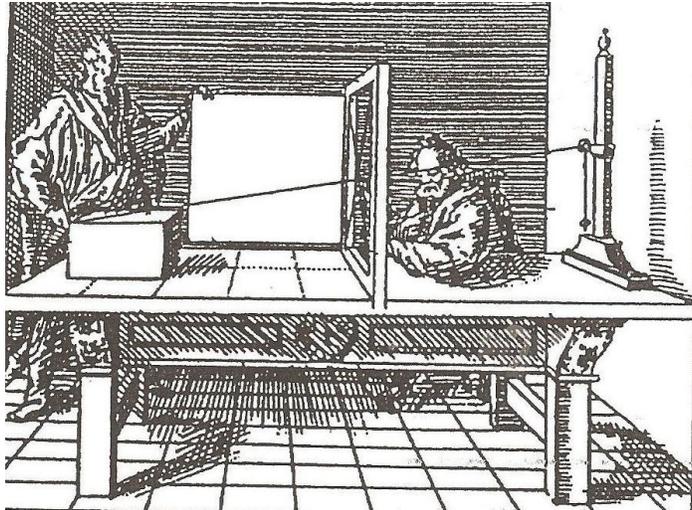


Figura 11 - Versão da portinhola de Salvador Muñoz, 1642

Acreditamos que a utilização das máquinas podem reportar os alunos a diferentes culturas, a diferentes tempos, a diferentes acontecimentos da história. Assim, há a possibilidade de transitar entre diferentes culturas, favorecendo a compreensão do modo de olhar e de conceber o mundo. Ao utilizarem as máquinas estarão aprendendo a Perspectiva e também a cultura de diferentes povos.

Além do mais, colocam em prática a teoria da Perspectiva, que muitas vezes é de difícil compreensão para os alunos. Observemos as três máquinas propostas por Dürer.

2.5.1 Primeira máquina: a janela de vidro

O primeiro aparelho (Figura 12) é construído utilizando-se um painel de vidro enquadrado e fixado num quadro de madeira. Coloca-se o objeto a ser representado na distância desejada e tiram-se os traços que se pretende desenhar sobre o painel de vidro.



Figura 12 - Máquina 1

O olhar é mantido fixo, num único ponto de vista. A racionalidade está, justamente, nesta visão monocular mantida pelo desenhista. O ponto de fuga e a linha horizontal são garantidos.

A dificuldade percebida é a necessidade de apoiar na mão à parte da máquina que dá o ponto de vista fixo. Muitas vezes este ponto de vista podia ser deslocado prejudicando a representação do artesão ou artista.

2.5.2 A segunda máquina: A rede metálica ou janela quadriculada

O segundo aparelho (Figura 13) é a janela quadriculada que, na verdade, é uma variação do primeiro instrumento, porém mais preciso. Deve-se construir um visor ajustável à altura do olho do pintor e uma janela quadriculada. Coloca-se o objeto a ser representado a uma distância desejada e, olhando através do visor que dá um único ponto de vista, desenha-se o objeto na folha quadriculada.

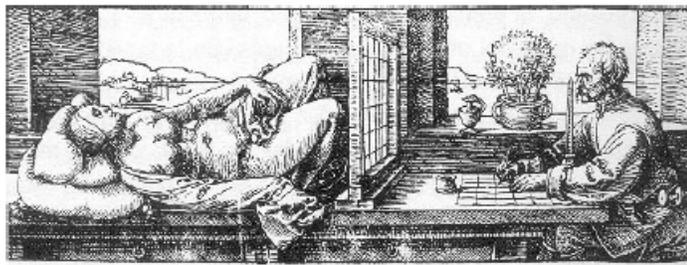


Figura 13 - Máquina 2

Neste procedimento, pode-se aumentar ou diminuir o objeto representado de acordo com a necessidade do desenhista. Tudo através do quadriculado que deve ser feito sob a mesa, na folha de papel, que deve seguir o quadriculado da rede metálica.

Aqui o ponto de vista continua sendo fixo, único. Há, portanto, o ponto de fuga e a linha horizontal. A mudança está, justamente, em poder aumentar ou diminuir o objeto a ser representado. Além do mais, a dificuldade encontrada na primeira máquina, onde o ponto de vista único poderia ser deslocado, não acontece nesta máquina. Logo, ela se torna mais eficiente para ensinar os conceitos da Perspectiva.

Pensando historicamente, esta máquina demonstra a quantificação do espaço. Tudo passa a ser reduzido a uma unidade mínima. A representação é pensada através desta unidade, que nada mais é que o quadriculado. Segundo Suárez (2006) a função desta janela quadriculada era didática, pois os desenhos deveriam ser copiados de maneira fiel. Esta máquina permitia cumprir esta tarefa. Assim, tudo poderia ser reduzido a uma unidade mínima. É necessário lembrar que a totalidade jamais é perdida de vista, pois é possível visualizar a totalidade sobre a folha (utilizando a malha quadriculada ou não).

A máquina apresenta na figura 13 servia para passar um modelo natural na terceira dimensão para a segunda dimensão de maneira real. A partir destes usos a geometria passa a ser aceita como fundamento para construção de uma ciência da representação.

2.5.3 A terceira máquina: A portinhola

O terceiro aparelho (figura 14) é a portinhola. Neste equipamento o raio visual é concretizado por um fio estendido entre o ponto de vista e o objeto a ser representado, permitindo desenhar o objeto a uma dada distância.

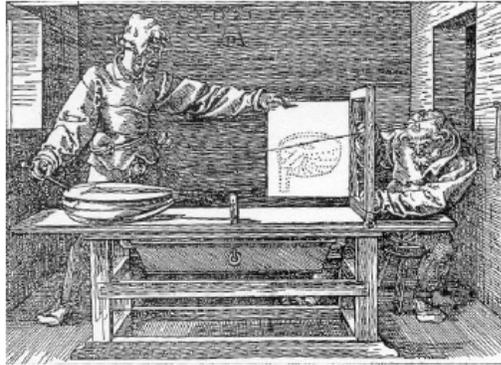


Figura 14 - Máquina 3

Neste procedimento, o olhar é fixado pelo fio, pois este representa o olho. Assim, o ponto de fuga é fixado. Temos a linha horizontal também fixada. Este é o ponto fixo da Perspectiva. Aqui também, a direção que se quer olhar o objeto é determinada pelo desenhista.

Observa-se no aparelho apresentado (figura 14), que a interseção do fio com o quadro é dada por coordenadas, a serem transferidas para o esboço pictórico. Na imagem representada estaria sendo determinada, ponto a ponto, a Perspectiva da curva de um instrumento musical da época.

A descrição que propõem Dürer e o procedimento para usar a máquina acima (figura 14) são os seguintes:

Com três fios é possível transladar uma pintura e registrar em uma tábua qualquer objeto que se possa alcançar com os olhos. Para o qual se faz o seguinte:

Se estiver em uma sala, prega em uma parede uma agulha grande que servirá como olho humano. Passa por essa agulha um fio forte e coloque em seu extremo um peso de chumbo. Coloque uma mesa e uma tábua à distância que você quer do olho e da agulha em que está o fio. Por cima, transversal ao olho e a agulha, uma moldura vertical de alto a baixo, no lado que quiseres, tendo uma portinhola que se possa abrir e fechar. Esta pequena portinhola será a tábua onde você irá pintar. A seguir coloque dois fios cujo comprimento seja igual à altura e largura da moldura, um no centro do lado superior e outro no centro de uma lateral, deixe-os pendurados. A seguir prepare um prego de ferro largo com um anel na ponta, e passa ele pelo fio largo que está na agulha da parede. Pega o outro fio e leva ao lado da moldura e dá o outro para que segure em uma mão

enquanto você se ocupa dos fios que estão na moldura. Utiliza-os da seguinte maneira: coloque um alaúde a distância que queira da moldura, sem movê-lo enquanto não for necessário, e faz teu companheiro esticar a agulha com o fio nos pontos essenciais do alaúde. Cada vez que pare no um e estique o fio comprido, prenda na moldura os dois fios para que se cruzem no comprimento. Fixe suas extremidades com cera e peça ao teu companheiro que solte o fio comprido. Fecha a portinhola e desenha na tábua o ponto em que se cruzam os fios. Vota a abrir a portinhola e faça o mesmo com o outro ponto, até que tenha pontuado todo o alaúde na tábua. Una com linhas todos os pontos que tenha desenha na tábua e terás o resultado. Também se pode copiar outro objeto. (DÜRER, 1981, p. 329).

As três máquinas construídas por Dürer trazem os conceitos da Perspectiva, tais como ponto de fuga, linha do horizonte, plano de observação, plano geométrico, ponto de distância. Estes conceitos trazem consigo imbricadas idéias matemáticas fundamentais, como proporcionalidade, paralelismo, perpendicularismo, entre outros. Elas são, na verdade, variações uma da outra. Conforme a necessidade pode-se utilizar uma ou outra. Além destas máquinas, surgiram outras, baseadas nestas, que também eram destinadas a desenhar em Perspectiva e ensinar a outras pessoas o desenho em Perspectiva.

As máquinas construídas por Dürer tiveram grande aceitação e serviram de base para a construção de outras máquinas que também eram destinadas a desenhar em Perspectiva. Como já foi citado, a partir delas, foram construídos outros modelos e, segundo Suárez (2006) se converteram em modelos didáticos eficazes para explicar os princípios básicos da Perspectiva, pois permitia exibir de maneira prática os teoremas geométricos sobre os quais estão fundamentadas estas técnicas.

2.6 A Teoria implicada pelas máquinas

Quando desenhamos em Perspectiva lança-me mão de conceitos geométricos e da própria Perspectiva que são importantes saber e dominar.

A idéia básica de um sistema de projeção é a de que existem, como conjunto de elementos que possibilitam a projeção, um observador, um objeto observado e um plano de projeção. A projeção do objeto ocorrerá quando todos os seus pontos estiverem projetados em uma superfície (chamado de plano do quadro ou PQ) situado em uma posição qualquer. As linhas que ligam os pontos no objeto até seus respectivos pontos projetados no quadro (chamadas de raios projetantes, ou simplesmente projetantes) possuem uma origem que se encontra no observador (simplificado como sendo apenas um ponto localizado no espaço). Para um ponto qualquer, a forma de se projetá-lo segundo a visão de um observador em um determinado plano é ligando o observador até o ponto com uma linha reta e estendendo-a até o quadro.

As máquinas de Dürer mantêm e confirmam os teoremas da Perspectiva mais importantes, tais como ponto de fuga, linha do horizonte, etc. Tais conceitos fundamentam toda a teoria da Perspectiva. Logo, compreendê-los é fundamental para entendermos o funcionamento dos perspectógrafos.

Observe a figura 15, nela podemos perceber um dos conceitos fundamentais: a linha do horizonte.

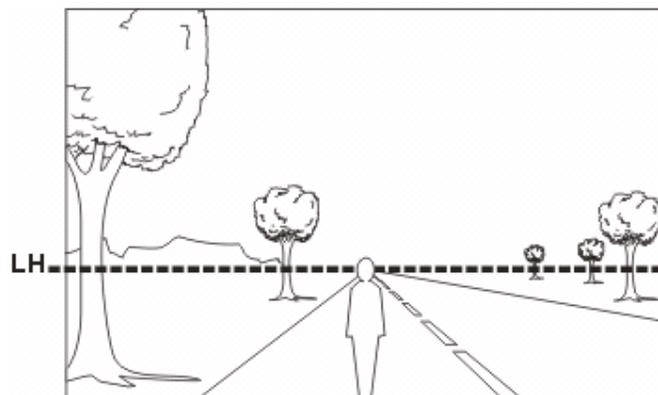


Figura 15 - Linha do horizonte

A linha do horizonte deve estar presente em todo desenho em Perspectiva. É esta linha que vai definir o ponto de vista do observador (altura dos olhos). A linha do horizonte, não tem dimensão, sendo apenas delimitada pelo nosso campo de visão. Outra característica reside no fato de se encontrar sempre à altura dos olhos do Observador. Poderíamos assim definir, embora empiricamente, que a Linha do Horizonte é uma reta horizontal que passa pelos nossos olhos e que delimita o espaço de visão a linha do horizonte é o primeiro elemento da linguagem projetiva.

Temos ainda o ponto de vista. Na representação da Perspectiva é comum o ponto de vista ser representado como uma linha vertical perpendicular à linha do horizonte. O ponto de vista revela-se justamente da interseção entre estas duas linhas, conforme mostrado na figura 16 (o ponto PV localiza-se na cabeça do homem desenhado).

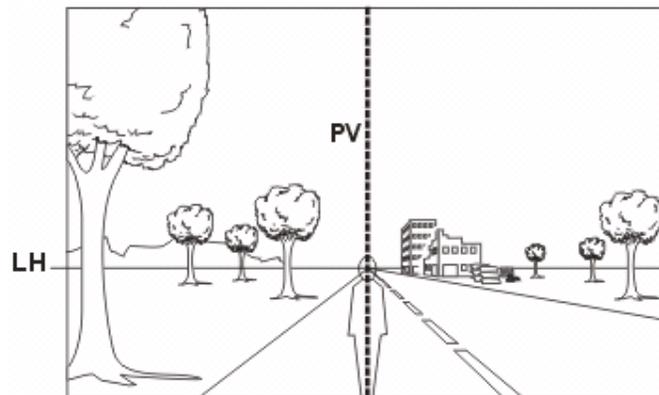


Figura 16 - Ponto de vista

O ponto de fuga, na maioria das vezes, se situa sobre a linha do horizonte. O princípio básico é que as linhas paralelas do mundo real devem sempre concorrer para um mesmo ponto de fuga na Perspectiva. Estas linhas que concorrem para o ponto de fuga são chamadas de linhas de fuga, e descrevem o efeito da Perspectiva na figura (figura 17). É o afunilamento destas linhas que geram a sensação de profundidade na Perspectiva.

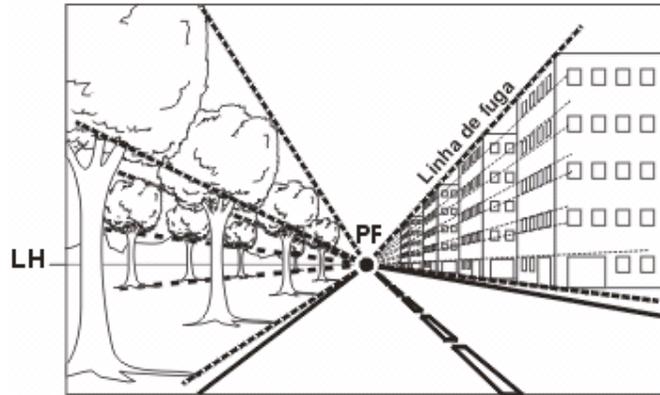


Figura 17 - Ponto de fuga e linha de fuga

Ainda, faz-se necessário destacar o conceito de plano de referência. Conforme o nome indica, é o espaço onde vai ser representada a forma pretendida. O plano de referência está sempre situado entre a forma a representar e o Observador. A interseção dos raios projetados com o plano de referência é que produz a representação da figura.

Existem ainda outros elementos que poderíamos citar aqui. Porém, acreditamos que com estes três elementos, ou seja, a linha do horizonte, a linha de fuga e o ponto de fuga, é possível desenhar em Perspectiva.

Se pensarmos nas máquinas de Dürer, podemos analisar a presença destes três elementos. Inicialmente a linha do horizonte pode ser determinada. Utilizando-se o visor dos equipamentos é possível determinar a linha de fuga, e em conseqüência o ponto de fuga. Assim, são determinadas, também, as linhas de fuga, o que nos permite desenhar qualquer objeto em Perspectiva.

Porém, somente os conceitos da Perspectiva não bastam para se desenhar utilizando esta técnica. Inclusive, estes conceitos são obtidos utilizando-se conceitos matemáticos, geométricos. É de fundamental importância compreender que conceitos são esses.

Inicialmente, podemos lembrar que, para obter, por exemplo, o ponto de vista, é necessário desenharmos duas retas perpendiculares. Para desenhá-las é necessário compreender o que são. Além disso, precisamos desenhar utilizando proporção. Um dos aspectos essenciais no desenho é saber observar as

proporções daquilo que se desenha. Um cubo, por exemplo, tem a proporção de 1;1;1. Ou seja, ao desenhar o cubo, ele deveria parecer ter as faces iguais, respeitando logicamente a ilusão da profundidade, que faz com que arestas mais afastadas parecerem menores do que as que estão mais perto.

Ainda podemos citar aqui, que há a possibilidade de se trabalhar o conceito de ponto médio de arestas. Também há a possibilidade de investigar conceitos geométricos como, no exemplo do cubo, o baricentro. Podemos ainda citar a possibilidade de trabalhar conceitos como área total de figuras espaciais e volume destas mesmas figuras.

Logo, podemos perceber que as máquinas para desenhar em Perspectiva trazem as etapas conceituais da Perspectiva e também conceitos geométricos, matemáticos.

Porém, não podemos esquecer que existem diferentes tipos de Perspectiva. Estes diferentes tipos implicam em diferentes formas de representar um objeto matemático. Nas questões propostas no capítulo III utilizamos dois tipos de Perspectiva em especial, a saber, a Perspectiva Cavaleira e a Perspectiva Central. É sobre elas que teceremos algumas considerações a seguir. Assim, faremos uma breve explicação acerca de conceitos teóricos da Perspectiva central e cavaleira, inspirados em Cavalca (1998) e Cuiabano (2008).

2.6.1 A Perspectiva Cavaleira e suas características

A Perspectiva cavaleira é uma projeção cilíndrica oblíqua sobre um plano paralelo a uma das faces principais do objeto. Na figura 18 pode-se compreender como se forma a Perspectiva cavaleira de um cubo, por exemplo, representado pelas suas vistas (frente e planta). C'' e C' , quadrados sombreados a cinzento, são a vista de frente e a planta do cubo.

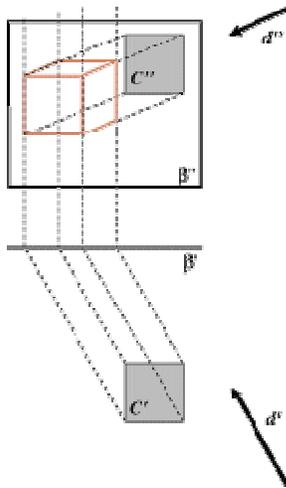


Figura 18 - Perspectiva cavaleira

O plano π , de projeção, paralelo a duas faces do cubo, está também representado pelas suas vista de frente e plana. As setas d'' e d' são as vistas que definem a direção da projeção oblíqua de que resulta a Perspectiva cavaleira.

Na Perspectiva cavaleira o que varia é a direção da projeção. A posição do cubo em relação ao plano de projeção está fixa, dado que o plano de projeção é paralelo a uma das faces do cubo, e adota-se ainda a convenção de colocar sempre a representação de algumas arestas do cubo - AB , etc, (figura 19) paralelas ao bordo inferior do desenho. Daqui resulta que um segundo grupo de arestas - AE , etc, fica paralelo aos bordos laterais da folha de desenho e o terceiro grupo de arestas - BC , etc, é, no espaço, perpendicular ao plano de projeção. Os parâmetros que definem a Perspectiva cavaleira são o ângulo α , entre a direção das arestas do terceiro grupo e a direção das arestas paralelas ao bordo inferior da folha de desenho, e a redução k , em percentagem, que as arestas deste terceiro grupo, por exemplo, FG , têm na representação. Naturalmente, a redução e o ângulo dependem da direção da projeção.

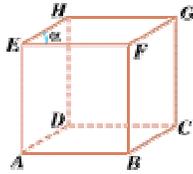


Figura 19 - Representação do cubo

Temos três representações mais usais na Perspectiva cavaleira. A primeira, a Perspectiva cavaleira 45° . Neste caso, temos as medidas do eixo de profundidade com 45° e redução das arestas de $1/2$. Este caso tem a desvantagem de as representações das arestas FG e AD ficarem no prolongamento uma da outra e, por vezes, isso tornar os desenhos confusos quando se colocam cubos ao lado uns dos outros (figura 20).

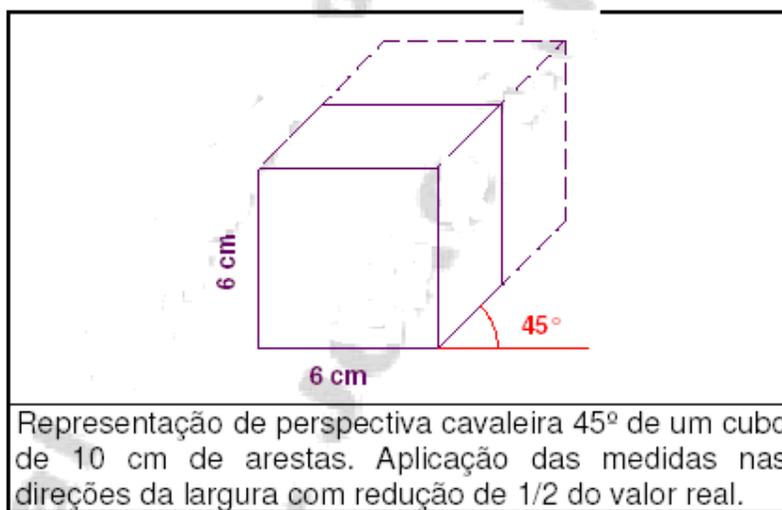


Figura 20 - Perspectiva cavaleira 45°

No segundo caso temos a representação da Perspectiva cavaleira onde as medidas do eixo de profundidade são de 30° e redução das arestas de $1/3$ (figura 21).

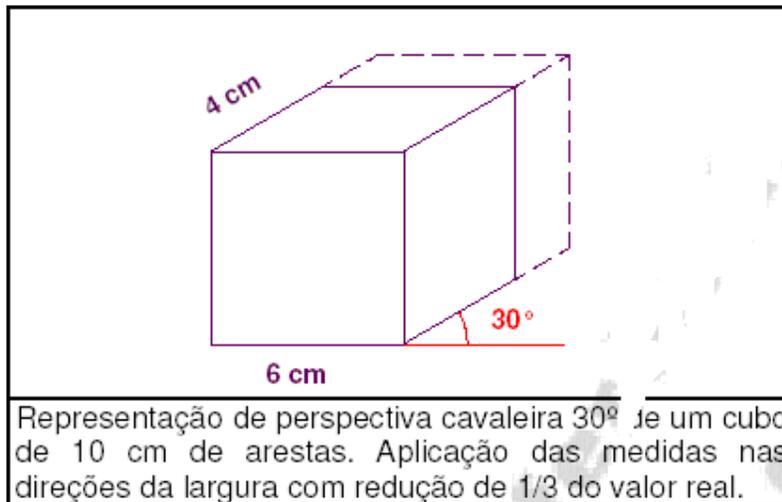


Figura 21 - Perspectiva cavaleira 30°

No terceiro caso mais usual, temos a representação da Perspectiva cavaleira onde as medidas do eixo de profundidade são de 60° e a redução de 2/3(figura 22).

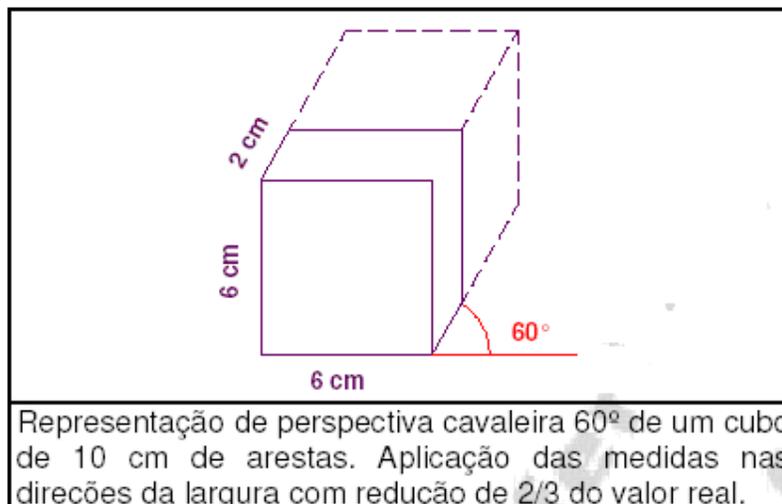


Figura 22 - Perspectiva cavaleira 60°

Na Perspectiva cavaleira verificam-se as seguintes propriedades:

- Segmentos e figuras paralelos ao plano de projeção (plano do papel) são representados em verdadeira grandeza; figuras congruentes, situadas em planos diferentes, mas paralelos ao plano do papel, têm representações congruentes - isto é contrário à visão, mas está conforme com a realidade dos objetos;
- Segmentos perpendiculares ao plano do papel são representados por segmentos oblíquos, e têm o seu comprimento reduzido;
- Segmentos e retas paralelos são representados por segmentos e retas paralelos (trata-se de uma projeção cilíndrica);
- Conservam-se os pontos médios dos segmentos e os baricentros²² das figuras.

O desenho em Perspectiva cavaleira é um auxiliar essencial na visualização e resolução de problemas de geometria no espaço, tendo em consequência uma grande importância no ensino da geometria.

2.6.2 A Perspectiva Central e suas características

A projeção central ou cônica pertence ao grande grupo de projeções para as quais o observador se situa a uma distância finita do plano de projeção e é por esta mesma razão a situação em que a representação obtida mais se aproxima do modo como "se vê a realidade". É, com efeito, o tipo de representação que se obtém através da fotografia. É, no entanto, o tipo de representação mais "perfeita" de um objeto ou conjunto de objetos e por isso mais facilmente legível por um maior conjunto de pessoas principalmente não familiarizadas com este assunto. Não deixa de ser interessante referir que embora sendo uma

²² Baricentro do cubo: é o encontro entre as medianas dos lados deste cubo. Lembrando que as medianas são as retas que passam pelo ponto médio dos lados. Então, quando afirmamos que é mantido o baricentro do cubo, significa que o centro geométrico do cubo é mantido.

representação mais deformada que qualquer outra (referimo-nos ao grupo das Projeções Paralelas ou Cilíndricas) é, no entanto, a mais legível. É uma deformação semelhante, à da representação por projeção central ou cônica que o olho humano capta e que, no entanto, sabemos corrigir intuitivamente. O clássico exemplo da via férrea - duas linhas paralelas que de fato não se vêem paralelas, não se apresentam paralelas (em projeção central), porém sabemos "corrigir" e afirmar que o são.

No caso da projeção cônica ou central a imagem de um ponto P do espaço é a interseção entre o plano de projeção e a reta que passa pelo ponto P e por um outro ponto fixo C , que não pertence ao plano de projeção. Este ponto C é o centro de projeção.

Na figura 23 temos a representação deste esquema.

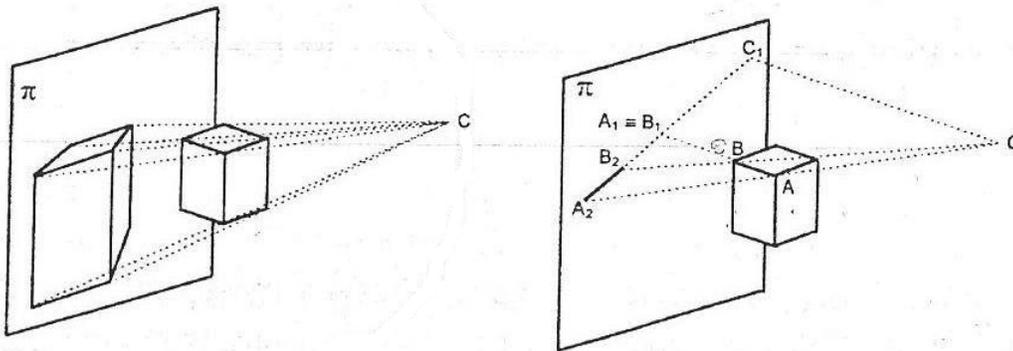


Figura 23 - Esquema projeção central ou cônica

Analisando a figura 23 pode-se perceber que, na projeção cônica, os segmentos não são paralelos. Desta forma, não é constante a razão entre as medidas das imagens de segmentos perpendiculares ao plano de projeção e as medidas dos próprios segmentos. Para traçar a Perspectiva cônica, deve-se escolher a posição dos vértices e também o ponto de fuga. A partir daí, pode-se traçar as arestas, que devem convergir para o ponto de fuga, conforme figura 24.

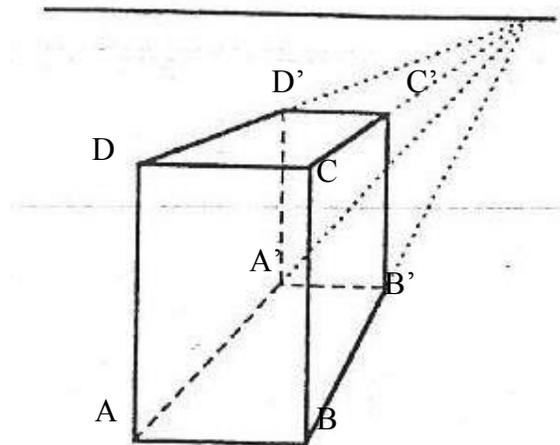


Figura 24 - Perspectiva cônica ou central

Aliando os diferentes tipos de Perspectiva e a história, podemos pensar estes aparelhos didaticamente. Assim, podemos nos perguntar: como podemos utilizá-los em sala de aula, a fim de trazer a técnica, a história e os conhecimentos matemáticos envolvidos na representação?

CAPÍTULO III

A HISTÓRIA DOS PERSPECTÓGRAFOS E A UTILIZAÇÃO DO *PERSPECTÓGRAFO DIDÁTICO: UMA INTERSEÇÃO POSSÍVEL*

3 As máquinas de Dürer: uma adaptação – o *perspectógrafo didático*

Ao pensar em como colocar em prática, em ambiente escolar, a história da Perspectiva, particularmente, os perspectógrafos de Dürer a fim de se promover uma educação do olhar, do representar e dos saberes implicados pela representação geométrica, tão usual no ensino de geometria, adaptamos as máquinas de Dürer e construímos uma máquina, que denominamos de *perspectógrafo didático*.

A partir do estudo das máquinas do Dürer, da sua concepção material e teórica, do que elas implicam em teoria da Perspectiva, este trabalho construiu materialmente uma máquina. Esta máquina, inspirada no modelo de Dürer teve, por necessidades atuais e de confecção, algumas alterações, que serão explicadas na seqüência deste texto.

O nosso objetivo com este fato é colocar a teoria do desenho em Perspectiva em prática, a partir da concepção teórica ditada por elas. A máquina por nós construída é uma variação das três máquinas construídas por Dürer. Tomamos a máquina um (figura 12). Desta máquina utilizamos o vidro transparente. Da máquina 2 (figura 13), utilizamos a fixação do ponto de vista. Da máquina 3 (figura 14) trouxemos a idéia do deslocamento do ponto de vista. Reunindo as três máquinas adaptamos a nossa, que traz o vidro transparente, um ponto de vista fixo (representado por um anel) e a possibilidade de observar um objeto de diferentes pontos de vistas.

Acreditamos que, assim como Dürer fez com os artesãos em sua época, também podemos ensinar a desenhar em Perspectiva utilizando uma máquina. Esta permite que o aluno vivencie o processo de construção de imagens, mesmo sem conhecer a técnica é possível, com a máquina, desenhar em Perspectiva.

Além disso, possibilitaremos ao aluno aprender conceitos geométricos e a Perspectiva viajando pela história. Estamos inserindo-os em uma época diferente, em uma cultura diferente. Acreditamos que, desta forma, estamos ampliando a possibilidade de compreensão de diferentes formas de olhar e compreender o mundo e as coisas do mundo.

Quando pensamos no ensino de geometria e na questão da visualização espacial, o argumento que podemos utilizar quando fazemos a Perspectiva de um objeto, é como se ele estivesse atrás de uma janela de vidro e o aluno estivesse desenhando no vidro aquilo que está vendo. Pensando nisto adotamos um plano transparente no lugar do “quadro” (plano de referência²³), que Dürer adotava para estabelecer as coordenadas da Perspectiva do ponto. Isto torna possível desenhar um elemento em Perspectiva diretamente sobre o quadro ou sobre uma folha, dependendo da situação. Ainda, possibilita que façamos medidas sobre o vidro, o que também pode facilitar o processo de construção de um objeto em Perspectiva.

A forma como o observador era definido também foi alterada com relação à máquina de Dürer. Na terceira máquina, o observador era um ponto fixo onde os fios, que representam as linhas visadas, eram amarrados. Acreditamos que, pedagogicamente, seja importante que o próprio sujeito represente o observador. Assim, imobilizamos a posição do olhar enquanto a Perspectiva é realizada. Para tanto, colocamos um anel, que serve de referência para observar os objetos a serem representados.

Quando modificamos os arranjos - observador, quadro e objeto, determinamos efeitos diferentes na Perspectiva, a figura pode ficar maior, com uma inclinação diferente, em uma posição diferente. Para modificar estes

²³ Veja no capítulo II o conceito de plano de referência.

arranjos elaboramos mecanismos de regulagem, na posição entre o observador e o quadro, e também com relação à altura do objeto observado. Assim, pode-se observar um objeto de diferentes alturas e de diferentes pontos de vistas.

Enfim, a máquina adaptada foi intitulada de *perspectógrafo didático*. Isso porque se uniu a idéia do perspectógrafo histórico, e suas bases conceituais da perspectiva, com a possibilidade didática para o desenvolvimento da atividade matemática e da visualização matemática. Vale destacar que, o *perspectógrafo didático* torna real o conceito do plano de referência, pois é substituído por um retângulo de vidro que ocupa a posição vertical diante do observador (aluno).

A seguir, na figura 25, apresentamos uma imagem do *perspectógrafo didático*. Este aparelho - assim como as demais máquinas para desenhar em perspectiva - permite desenhar utilizando a perspectiva sem a menor necessidade de conhecimento sobre as regras da perspectiva. Mas será esta utilização e esta atividade que possibilitará a compreensão das etapas conceituais da perspectiva, bem como a elaboração de conceitos matemáticos e geométricos.

1. quadro de vidro;
2. ponto de observação;
3. barra para regular a distância;
4. barra para regular a altura;
5. objeto observado.

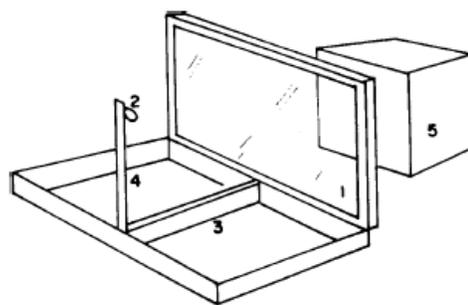


Figura 25 – *Perspectógrafo didático*

Utilizando o *perspectógrafo didático* podemos aplicar conceitos da perspectiva e também conceitos geométricos. Quanto aos conceitos da perspectiva, a utilização de um anel como ponto de vista favorece a localização do ponto de fuga, fixando o olhar do observador (aluno), tornando-o assim monocular. Ainda conseguimos localizar com facilidade a linha do horizonte,

assim como, o plano de referência. Mantidos o plano de referência, linha do horizonte e ponto de fuga é possível desenharmos um objeto em perspectiva.

Além dos conceitos da perspectiva, ainda conseguimos trazer conceitos matemáticos importantes. A idéia de perpendicularismo, paralelismo e, principalmente de proporcionalidade tornam-se de fácil compreensão e aplicação na máquina. Isto, pois, é possível sobre o plano de referência (vidro), medir e desenhar.

3.1 História da Perspectiva e os Perspectógrafos: uma proposta possível

Neste momento trataremos do cerne desta pesquisa. O principal objetivo é analisar o uso dos perspectógrafos para a realização de atividades matemáticas, problematizando a história da perspectiva, que agregue teoria perspectiva e conceitos matemáticos, promovendo a educação do olhar, dos conceitos matemáticos, do desenhar em perspectiva e da história da representação em perspectiva.

Para atingir tal objetivo as questões a seguir foram pensadas e desenvolvidas para que se possa trabalhar o ensino de conceitos geométricos espaciais, a história da perspectiva e os perspectógrafos. É necessário ressaltar que no desenvolvimento das questões foi utilizado o *perspectógrafo didático* e não os perspectógrafos de Dürer. Partimos da história dos perspectógrafos para desenvolver questões para serem trabalhadas com o *perspectógrafo didático*. Desta forma, as questões foram desenvolvidas levando-se em conta inicialmente sua história, ou seja, sua problemática e resolução no âmbito da história. Quer dizer, buscamos a forma que Dürer desenvolveu matematicamente a problemática de representação do espaço por meio dos perspectógrafos. As questões criadas a partir desta história são, então, resolvidas por meio do

perspectógrafo didático, desenvolvendo-as e simulando-as no âmbito didático, ou seja, de sala de aula.

Assim, todas as questões propostas foram pensadas para a utilização do *perspectógrafo didático* levando-se em conta as diferentes formas de representar um mesmo objeto matemático. Estas formas de representação são tratadas com as técnicas da perspectiva, em específico a perspectiva Cavaleira e a perspectiva Central, citados no capítulo II.

As problemáticas de representação do espaço, oriundas da própria história e resolvidas pelo próprio Dürer serviram como base e fonte de inspiração. Este trabalho se apóia, portanto, na obra de Suárez (2006) e de Peiffer (2000), que tratam do Tratado *De la Medida* de Dürer. Em seus trabalhos eles apresentam como Dürer construiu determinadas figuras utilizando a perspectiva. Assim, analisando estas construções pensamos em utilizá-las e, partindo delas, mostrar a construção destes mesmos objetos utilizando o *perspectógrafo didático*. Logo, estas questões foram adaptadas da obra destes dois autores. Vale ressaltar que, em nenhum momento estes autores desenvolvem as questões matemáticas oriundas da história utilizando aparelhos para melhor ver. Este é o nosso diferencial. Vamos desenhar os objetos em perspectiva utilizando o *perspectógrafo didático*, com o objetivo futuro de atingir a educação do olhar, a formação dos professores e o ensino em sala de aula.

Acreditamos que, ao promover estas questões, estamos colocando os alunos frente a situações de experimentação e percepção da técnica da perspectiva através do uso do *perspectógrafo didático*, adaptação do aparelho de Dürer.

Logo, as questões propostas visam propiciar a apropriação do espaço pelo olhar, levando-se em consideração conceitos matemáticos. Além disso, propõem-se situações que favoreçam a visualização espacial de elementos geométricos, matemáticos, considerando a história da matemática como elemento fundamental para o desenvolvimento das situações. Ou seja, a partir das problemáticas levantadas por Dürer, acerca da representação do espaço e dos objetos no espaço,

criamos problemáticas de representação em perspectiva, didaticamente aplicáveis e utilizando o *perspectógrafo didático*.

Em todas as questões pode-se utilizar régua, compasso e outros instrumentos para desenhar. Ainda, há a possibilidade de se desenhar sobre o vidro da máquina. Neste caso, deve-se utilizar uma transparência e uma caneta especial para desenhar sobre a transparência.

Antes de apresentarmos as questões, acreditamos ser necessário destacar que, segundo Suárez (2006), Dürer adverte que quem se ocupou da representação dos corpos regulares foi Euclides. Porém, as representações propostas por Dürer, são muito interessantes. Suas representações de cada sólido são feitas através de uma rede que se encarrega de realizar as conexões estruturais entre vértices e arestas. Na verdade, Dürer trabalhou muito com a planificação dos sólidos e sua própria construção através desta planificação.

A seguir apresentamos cinco questões que unem a problemática da representação espacial, oriunda da história, e em particular, oriunda de Dürer, e a situação didática. A proposta que segue tem no *perspectógrafo didático* a ferramenta didática para resolução e desenvolvimento da atividade matemática.

3.2 Questão 01 - Como construir um cubo, utilizando as idéias de Dürer e o *perspectógrafo didático*?

3.2.1 Como Dürer constrói um cubo?

A seguir apresentamos a forma como Dürer pensou e desenvolveu a construção de um cubo. A construção está apresentada passo-a-passo, da forma como entendemos que a mesma foi proposta por Dürer.

1. Inicialmente ele constrói uma circunferência de diâmetro AB.

2. A seguir, divide o diâmetro, de tal forma que, ao marcarmos um ponto C, este divida o segmento sendo o segmento AC duas vezes maior que o segmento CB.
3. Traça-se a perpendicular ao diâmetro, passando pelo ponto C. A interseção entre a perpendicular e a circunferência é o ponto D.
4. Unem-se os ponto B e D formando o segmento DB.
5. Constrói-se um quadrado cujo lado tem a mesma medida do segmento DB. Este quadrado foi denominado EFGH.
6. A partir dos vértices deste quadrado, traçam-se perpendiculares ao plano que se estendem até os pontos, K, L, M, N.
7. A seguir traça-se, em um novo plano, o quadrado KLMN.
8. Finalmente, traçam-se as diagonais EG e KG. KG é o diâmetro da esfera que contêm o cubo e EG é o diâmetro da circunferência que circunscreve o quadrado EFGH, conforme figura 26.

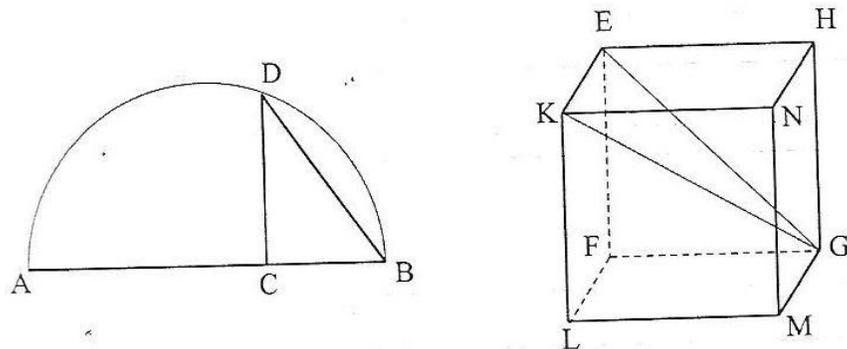


Figura 26 - Representação de Dürer do cubo

Algumas conclusões a que é possível chegar utilizando este método

1. O diâmetro da circunferência que circunscreve o quadrado ao quadrado (d), é igual a três vezes o lado do quadrado (L) ao quadrado.

$$d^2 = 3L_c^2$$

Podemos demonstrar tal fato, pensando no mesmo esquema demonstrado para o tetraedro. Tomamos o quadrado EFGH (observe na figura 26) cujo lado é igual ao segmento DB. Depois da construção do cubo, podemos observar então KG, que é o diâmetro da esfera que contém o cubo e EG que é o diâmetro da circunferência que circunscreve o quadrado EFGH. Assim, ordenando estas idéias, chegamos a conclusão que:

$$d^2 = 3L_c^2$$

2. O diâmetro da esfera inscrita ($d_{inscrito}$) deve ser igual ao lado do cubo(L_c).

$$d_{inscrito} = L_c$$

$$d_{inscrito} = \frac{d_{circunscrito}}{\sqrt{3}} \approx 0.577d_{circunscrito}$$

Podemos demonstrar este fato, levando em consideração que o diâmetro da esfera inscrita deve ser igual ao lado do cubo:

$$d_{inscrita} = L_c$$

$$d_{inscrita} = \frac{d_{circunscrita}}{\sqrt{3}} \approx 0,577d_{circunscrita}$$

A seguir, na figura 27, temos o esquema proposto por Dürer para a representação plana e a vista de frente de um cubo. Segundo Suárez (2006), utilizando esta planificação e esta vista de frente é possível “montar” um cubo.

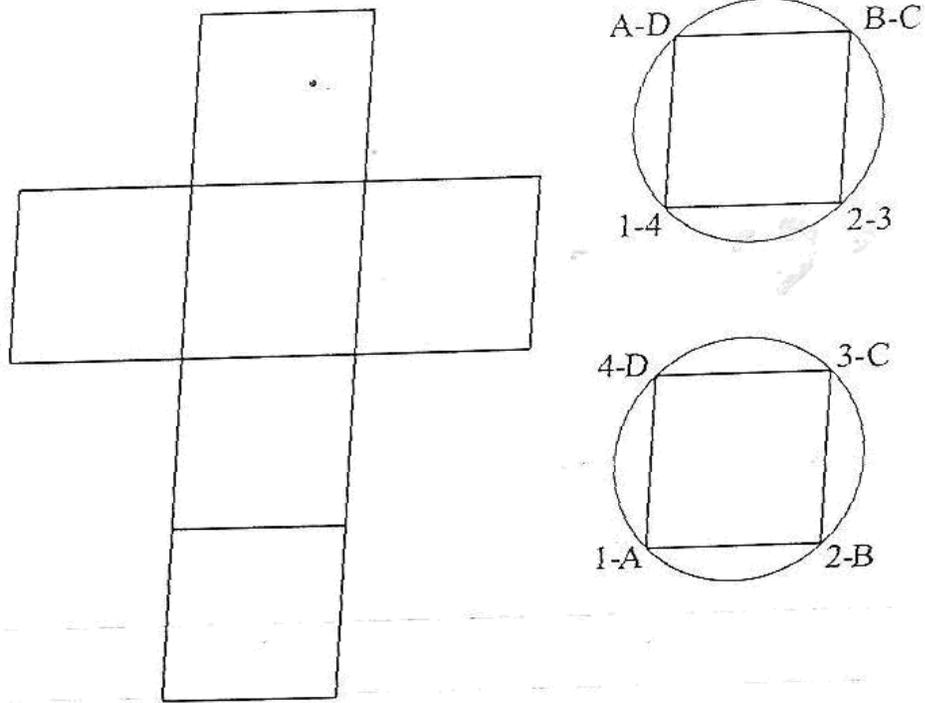


Figura 27 - Planificação do cubo por Dürer.

3.2.2 Como construir um cubo utilizando o *perspectógrafo didático*?

3.2.2.1 Construção do cubo utilizando perspectiva Central

Inicialmente precisamos tomar um cubo qualquer como referência. Em uma folha de papel²⁴ vamos construir este cubo utilizando a perspectiva central. A representação em perspectiva central supõe a presença de um observador onde o olho é simbolizado por um ponto. Os raios que partem deste ponto são dirigidos para o contorno do objeto, o que constitui a pirâmide visual. A representação se dá através da interseção da pirâmide visual como plano de

²⁴ Esta folha pode ser quadriculada ou não, depende do objetivo ou da necessidade do professor.

representação. As linhas convergem para um ponto no infinito, neste caso. A seguir, na figura 28, temos uma representação desta interseção.

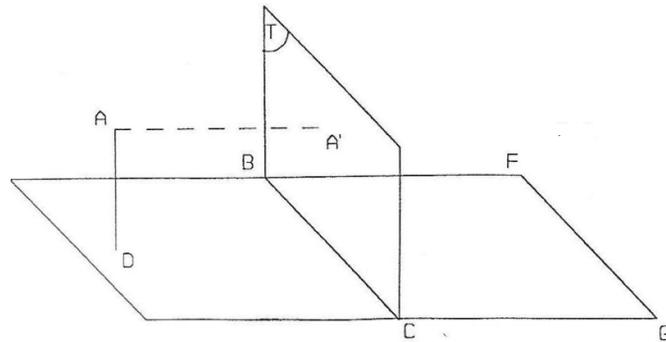


Figura 28 - Esquema pirâmide visual

Vejamos os passos para construção de um cubo utilizando a perspectiva central:

1. Inicialmente desenhemos a face frontal do cubo que está sob o *perspectógrafo didático*, que resultará no quadrado ABCD (figura 29) e desenhemos uma linha logo acima.

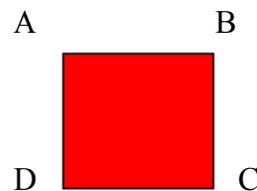


Figura 29 - Vista de frente de um cubo e linha do horizonte

2. Na linha desenhada, localizamos o ponto de fuga, que pode ser em qualquer lugar sobre a linha. Neste caso será no centro do objeto²⁵, que chamamos de F (figura 30).

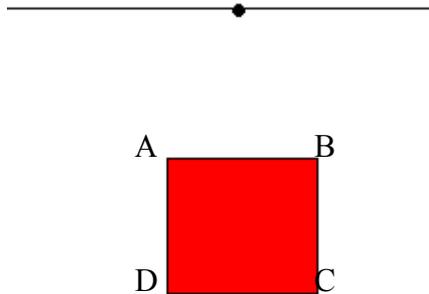


Figura 30 - Localização do ponto de fuga

3. Construimos semi-retas que partem dos vértices do quadrado até o ponto de fuga.
4. Medimos sobre o vidro o comprimento das arestas que partem do vértice da face frontal. A seguir, com o auxílio de um compasso marcamos sobre as semi-retas os respectivos comprimentos, que originam os pontos A', B', C' e D'.
5. A seguir construimos o quadrado A'B'C'D'. Assim temos o cubo representado em perspectiva central (figura 31).

²⁵ Está no centro, pois o olho é fixado no centro do aparelho. Caso estivesse fixado em outro ponto, a perspectiva seria diferente.

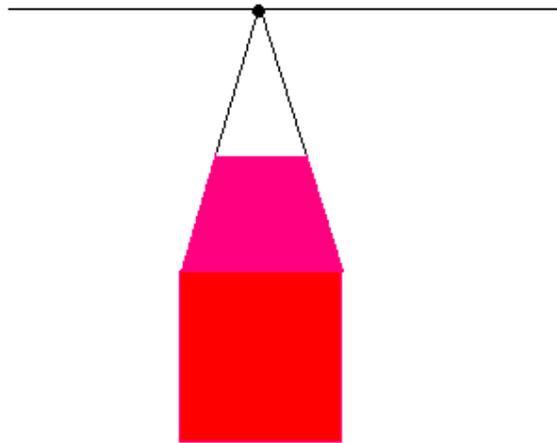


Figura 31 - Perspectiva central do cubo desenhada com o *perspectógrafo didático*

Veja, nas figuras 32 e 33, a utilização do *perspectógrafo didático*.



Figura 32 – Ponto de vista central no *perspectógrafo didático*

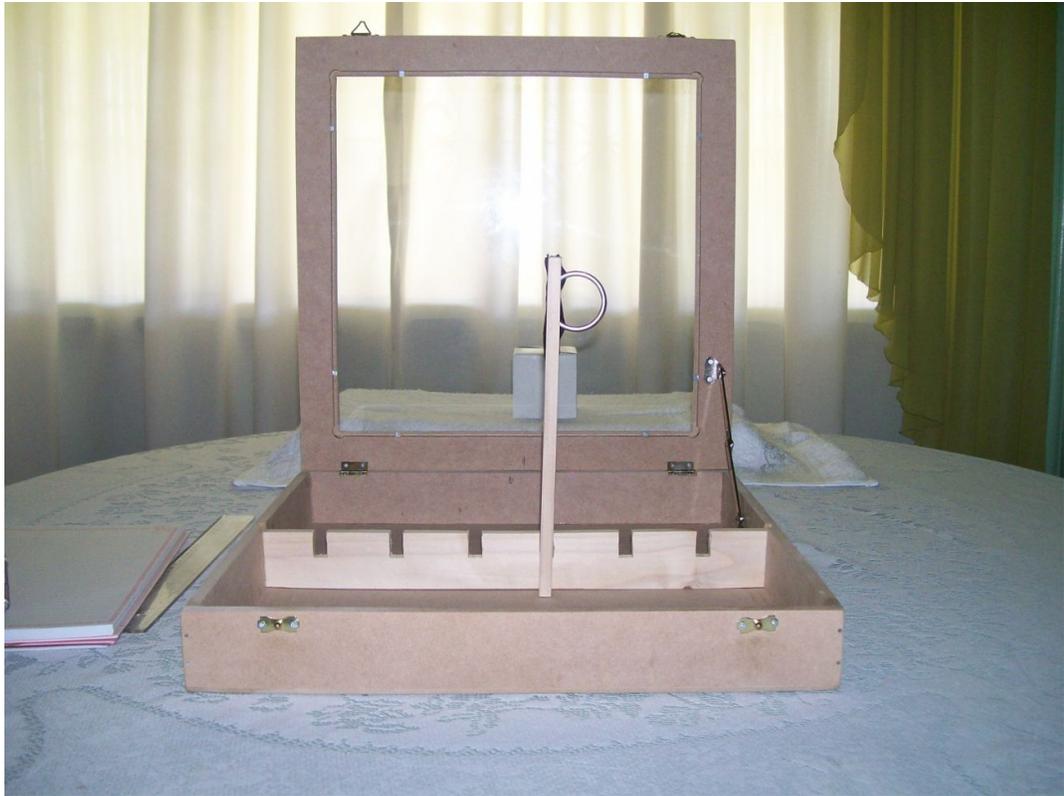


Figura 33 – Vista geral do objeto no *perspectógrafo didático*

Na figura 34 temos o objeto desenhado em perspectiva através do *perspectógrafo didático*.

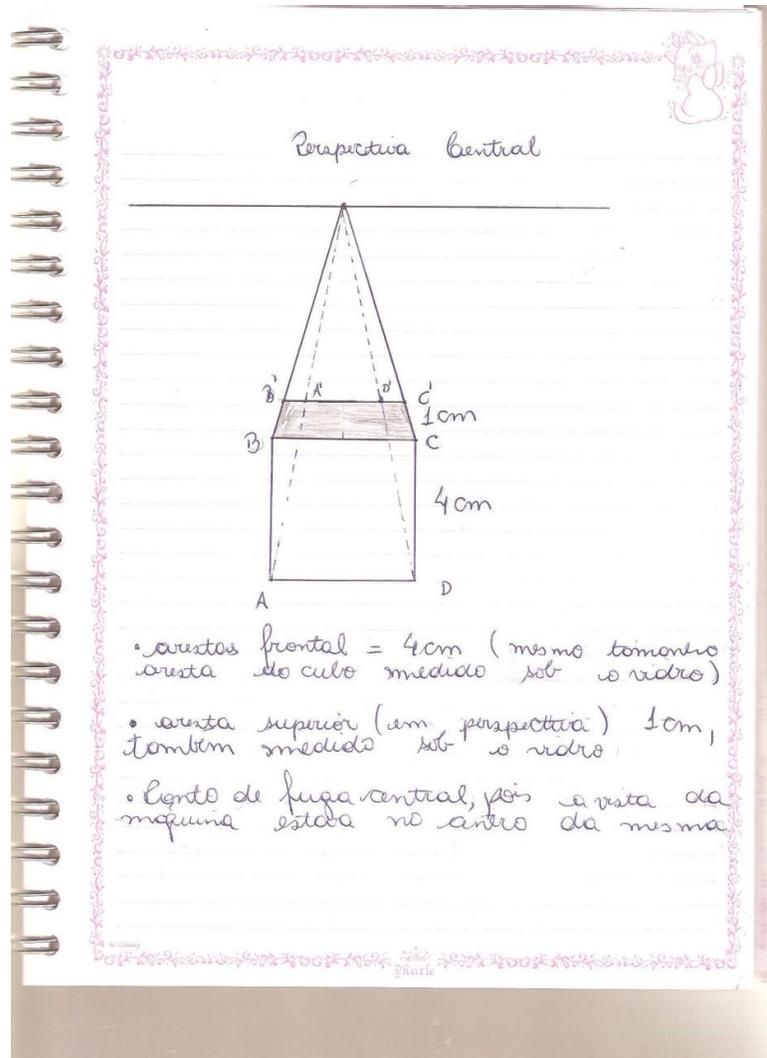


Figura 34 - A realização da perspectiva

3.2.2.2 Construção do cubo utilizando a perspectiva Paralela (cavaleira):

Quando utilizamos a perspectiva cavaleira, devemos lembrar que as linhas permanecem paralelas, não se cruzando no infinito, ao contrário da perspectiva Central. Dürer utilizou a perspectiva cavaleira de 45 graus, que está explicada no capítulo II. Neste caso, as arestas projetadas sofrem uma redução de 50%.

Para construirmos o cubo vamos realizar os seguintes passos:

1. Inicialmente vamos desenhar o quadrado que observamos de frente, quando olhamos pela máquina. Vamos chamá-lo de ABCD.

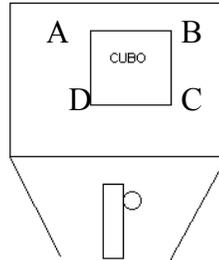


Figura 35 - Esquema de utilização do *perspectógrafo didático*, vista de frente do cubo.

2. A seguir vamos determinar a inclinação das retas perpendiculares que partem de cada vértice. Para fazer esta determinação vamos utilizar compasso e transferidor. No próprio *perspectógrafo didático* vamos observar o objeto e medir sobre o vidro o ângulo formado (figura 36). A seguir, sobre os vértices do quadrado ABCD, vamos construir semi-retas com a inclinação obtida.

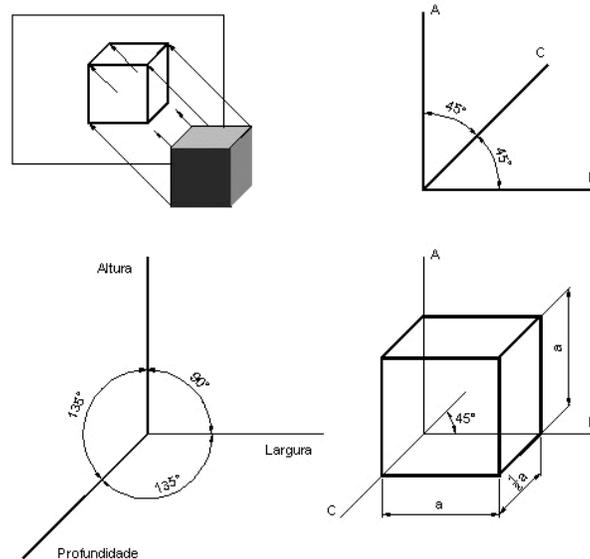


Figura 36 - Determinação do ângulo de inclinação

$$\text{aresta} = a \quad \text{projecção} = \frac{a}{2} \text{ e ângulo de inclinação } 45^\circ$$

3. Precisamos, então, determinar a medida dos segmentos. Pode-se fazer isto medindo com régua e compasso o tamanho do segmento sobre o vidro do *perspectógrafo didático*. A seguir marcamos com compasso os pontos A', B', C' e D'. Assim obtemos o segundo quadrado A'B'C'D'.
4. Ligando todos os pontos temos então o cubo desenhado em perspectiva paralela (especificamente a perspectiva cavaleira).

Quando fazemos este processo podemos chegar a algumas conclusões. Inicialmente, confirmamos o fato de a projeção cavaleira de 45 graus reduzir as arestas projetadas pela metade. Isto está expresso na figura 27. Ainda conseguimos observar o paralelismo mantido pelas retas projetadas.

A seguir, nas figuras 37, 38, 39 e 40 as imagens da utilização do *perspectógrafo didático*.



Figura 37 – Ponto de vista no *perspectógrafo didático* da perspectiva cavaleira



Figura 38 – Vista geral do *perspectógrafo didático* na perspectiva cavaleira

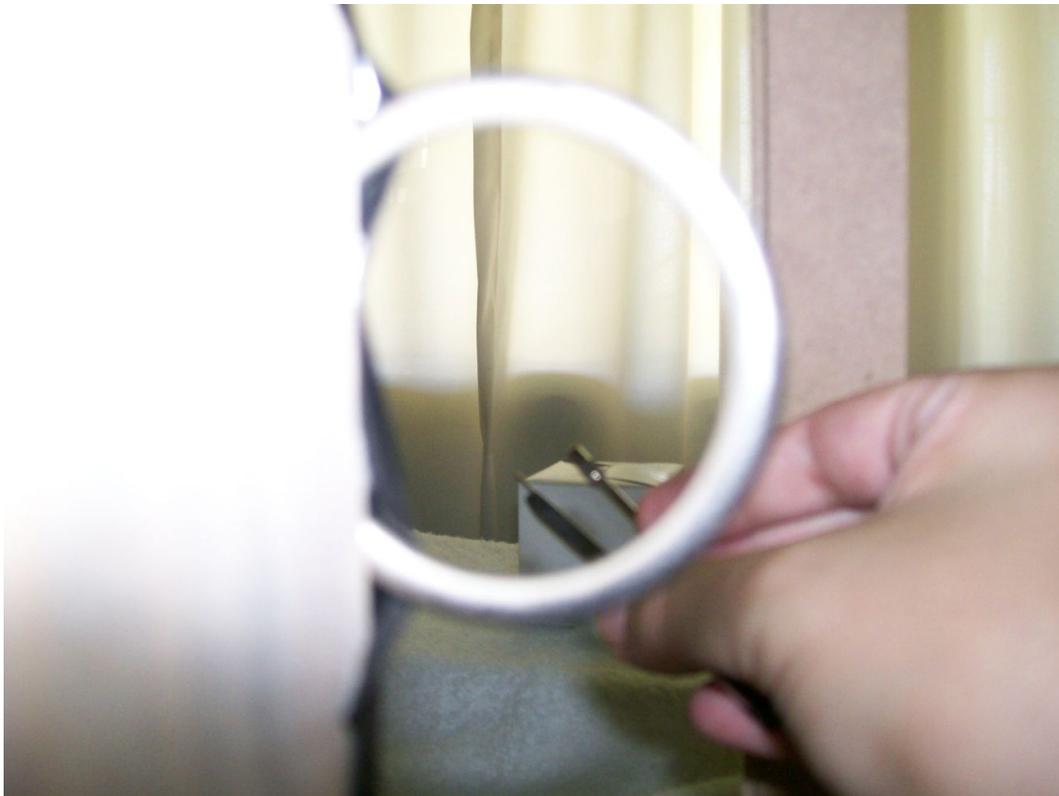


Figura 39 – Medindo a aresta do cubo

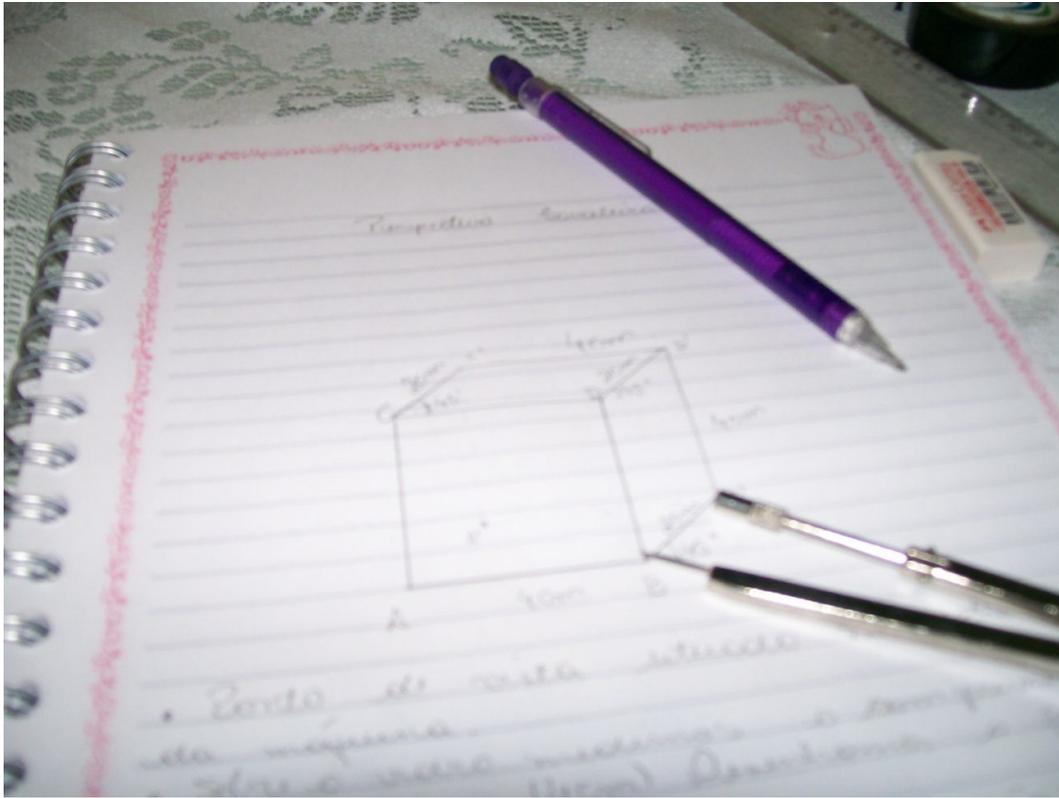


Figura 40 – Marcando a medida

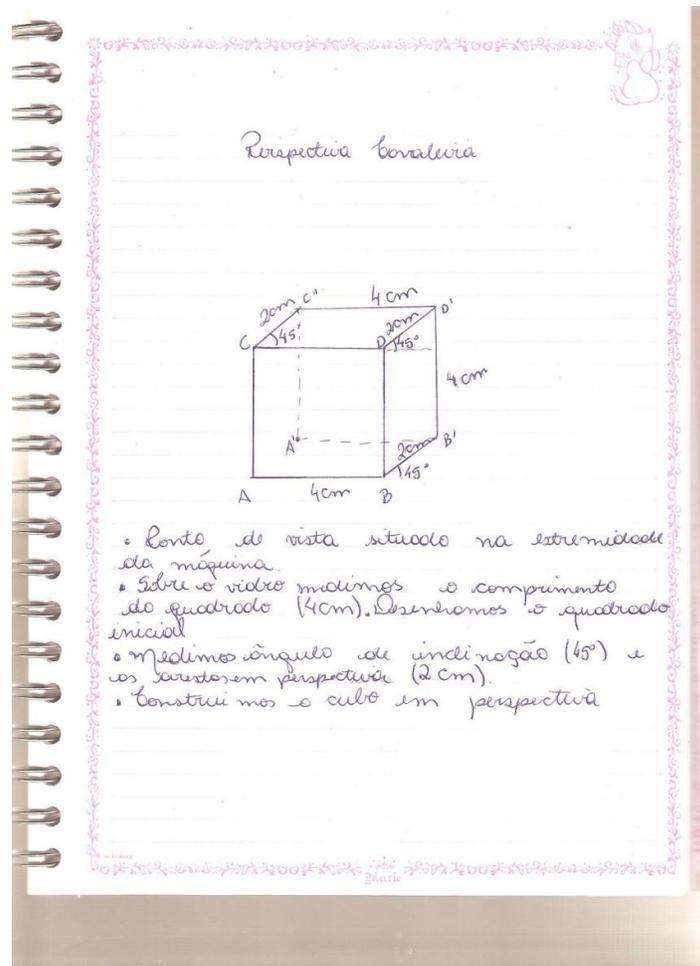


Figura 41 - Representação do cubo em perspectiva cavaleira

Ao construirmos o cubo utilizando a perspectiva cavaleira e o *perspectógrafo didático*, conseguimos perceber que realmente as retas projetadas permanecem no infinito. O ângulo de inclinação é de 45 graus e as arestas projetadas ficam reduzidas pela metade. Assim, podemos perceber a proporcionalidade na figura desenhada em perspectiva, bem como as retas perpendiculares e paralelas.

3.3 Questão 2 - Como construir um tetraedro, baseando-se nas concepções de Dürer e com o *perspectógrafo didático*?

3.3.1 Como Dürer construía um tetraedro?

Neste tópico vamos apresentar a forma como Dürer construiu o tetraedro. Vamos analisar a sua construção e apresentá-la passo-a-passo.

Inicialmente, Dürer mostra o tetraedro desenhado sobre uma folha, planificado, sem preocupação com sua consolidação no espaço tridimensional. Este esquema representa a vista superior e a vista de frente deste sólido. A seguir, a figura 42 apresenta o primeiro esquema proposto por Dürer para a construção do tetraedro.

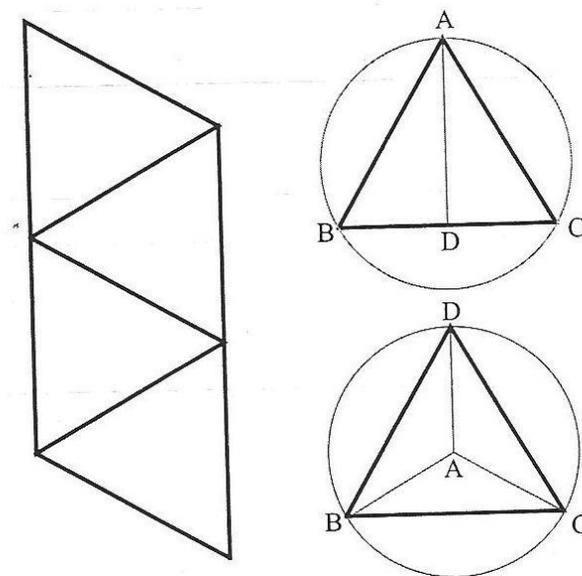


Figura 42 - Esquema de Dürer 1

Veja a seguir os passos necessários para a construção do tetraedro, segundo Dürer:

1. Traçar um segmento AB e o dividir em um ponto C, de tal forma que AC seja duas vezes maior que CB.
2. A seguir, construir uma semicircunferência de diâmetro AB.
3. Traçar uma perpendicular ao diâmetro AB passando pelo ponto C. Da interseção da reta perpendicular com a semicircunferência temos o ponto D.

4. Em outra figura, construir uma circunferência de centro H e raio igual ao comprimento do segmento CD.
5. Nesta circunferência desenhar um triângulo equilátero EFG.
6. Pelo ponto H traçar uma perpendicular ao plano que contém a circunferência e fixamos sobre ela os pontos K e L, de tal forma que KH e HL sejam idênticos a AC e CB, respectivamente.
7. Unem-se os pontos e o tetraedro está construído.

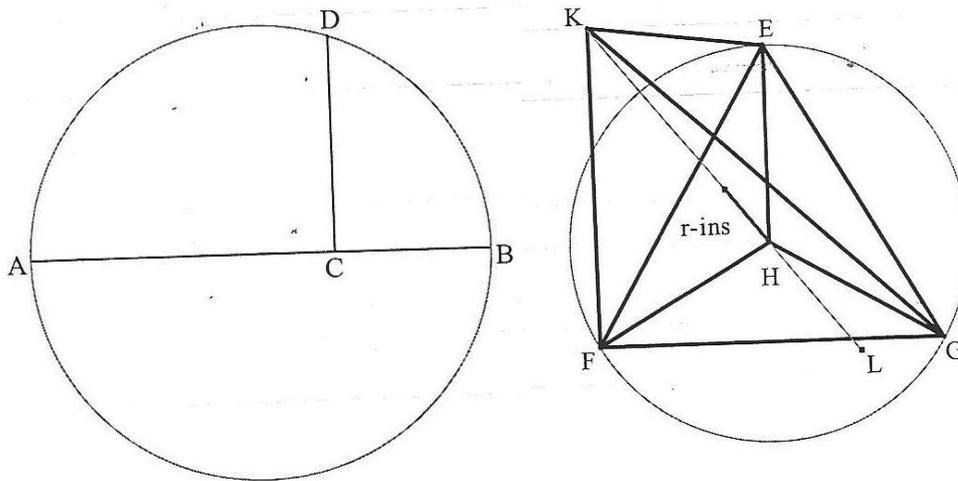


Figura 43 - Tetraedro construído por Dürer

Desta construção também é possível chegarmos a algumas conclusões importantes:

1. O diâmetro da circunferência (d) ao quadrado é igual a $\frac{3}{2}$ do lado do tetraedro (L_T) ao quadrado

$$d^2 = \frac{3L_T^2}{2}$$

Este fato pode ser demonstrado matematicamente. Na figura 43, dados os triângulos ADB e DCB, os mesmos são semelhantes. Assim, podemos estabelecer as seguintes proporções:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{DB}{DC}$$

e

$$\frac{BC}{DC} = \frac{DB}{AD}$$

Destas duas proporções podemos concluir:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD^2}{DC^2} \quad (1)$$

Se $\frac{AB}{BC} = 3^{26}$, deve ocorrer que $AD^2 = 3DC^2$. Temos ainda que KH é perpendicular a HE, HF e HG, de onde podemos concluir que:

$$KE^2 = KH^2 + HE^2$$

Como KH e HE são construídas com tamanho idêntico a AC e CD, respectivamente, podemos afirmar que $KE = AD$. O mesmo vale para KF e KG. Por outro lado, como EFG é um triângulo equilátero inscrito na circunferência de raio EH, podemos afirmar, em virtude do que demonstramos acima, que $FE^2 = 3EH^2$. Como $DC = EH$, fazemos uso da conclusão (1) para inferir que $FE=AD$. Mostramos assim que, os triângulos EFG, EFK, FGK e GEK são equiláteros e congruentes entre si. Assim, EFGK é um tetraedro.

Para trabalharmos a relação entre o lado do tetraedro (L_T) e o diâmetro (d) da esfera que o contém, devemos levar em conta que o segmento KL é idêntico em comprimento ao segmento AB; em consequência, a circunferência que passa por K e E, e que depois passa em KL, passa também por K e G, de um lado, e K e F de outro lado. Deve, então, ter o mesmo raio da semicircunferência ADB.

²⁶ Veja passo 1 da construção. O segmento foi dividido em 3 partes.

Dado que EH é a média proporcional entre KH e HL , e dado também que KH equivale a $\frac{2}{3}d$, e que HL equivale a $\frac{1}{3}d$, devo ocorrer que

$$KH \cdot HL = EH^2$$

$$\frac{2}{3}d \cdot \frac{1}{3}d = EH^2$$

$$\frac{2}{9}d^2 = EH^2$$

Como EH^2 é a terceira parte de EF^2 , que é o lado do tetraedro, temos:

$$\frac{2}{9}d^2 = \frac{L_T^2}{3}$$

$$d^2 = \frac{3L_T^2}{2}$$

Fica demonstrada a proposição.

2. O diâmetro da circunferência inscrita ($d_{inscrita}$) é igual ao diâmetro da circunferência circunscrita dividido por 3 ($\frac{d_{circunscrita}}{3}$).

$$d_{inscrita} = \frac{d_{circunscrita}}{3} \approx 0,333d_{circunscrita}$$

Para demonstrar este fato, devemos levar em consideração os seguintes fatos: o ponto de tangência da esfera com uma das faces do tetraedro deve ser, em virtude da simetria existente nesta figura, o centro da circunferência que circunscribe o triângulo equilátero que constitui a face em questão; por outro lado, o centro da esfera inscrita, em virtude da mesma simetria, é também o

centro da esfera circunscrita. Assim, o raio da circunferência inscrita $r_{inscrita}$ será a diferença entre KH (que é $\frac{2}{3}d$) e $\frac{d}{2}$. Temos assim:

$$r_{inscrita} = \frac{d_{inscrita}}{2} = \frac{2}{3}d_{circunscrita} - \frac{d_{circunscrita}}{2} = \frac{d_{circunscrita}}{6}$$

$$d_{inscrita} = \frac{d_{circunscrita}}{3} \approx 0,333d_{circunscrita}$$

Fica demonstrado o fato.

A seguir, na figura 44, a representação deste método:

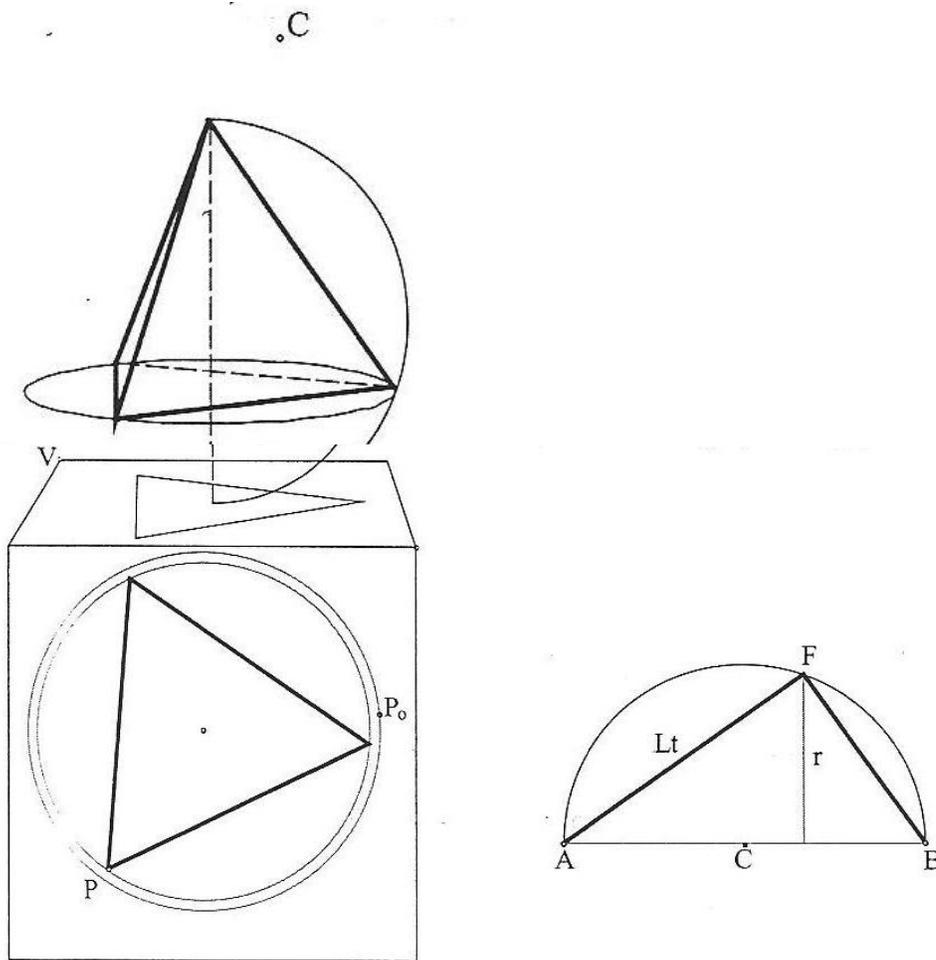
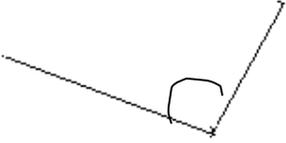
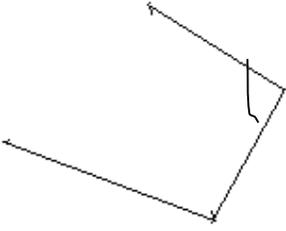
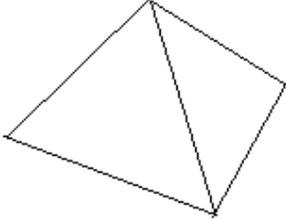


Figura 44 – Representação do tetraedro

3.3.2 Como construir um tetraedro com o *perspectógrafo didático*?

Para construirmos um tetraedro utilizando a máquina, vamos seguir os seguintes passos:

Procedimento	Desenho
1. Construimos uma aresta da base, a que está na vista de frente, medindo sobre o vidro o tamanho (3cm);	

2. Marcamos o ângulo alfa, medido com o compasso.	
3. Medimos, sobre o vidro, a outra aresta da base (2cm).	
4. Marcamos o ângulo beta com o compasso.	
5. Desenhamos a outra aresta, medindo-a sobre o vidro (3cm).	
6. A seguir, construímos a face frontal cujas arestas tem 4cm.	

Observe na figura 45 o esquema da representação do tetraedro feita por nós.

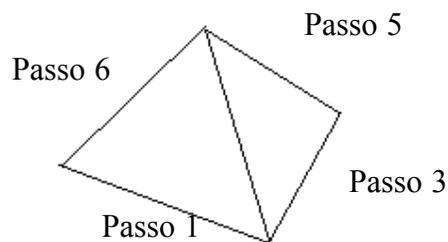


Figura 45 - Esquema representação tetraedro

Na figura 46 e 47 é apresentada a utilização do *perspectógrafo didático* para representar o tetraedro:



Figura 46 - Vista geral do tetraedro



Figura 47 - Vista geral do tetraedro 2

A seguir, na figura 48, temos a representação feita do objeto.

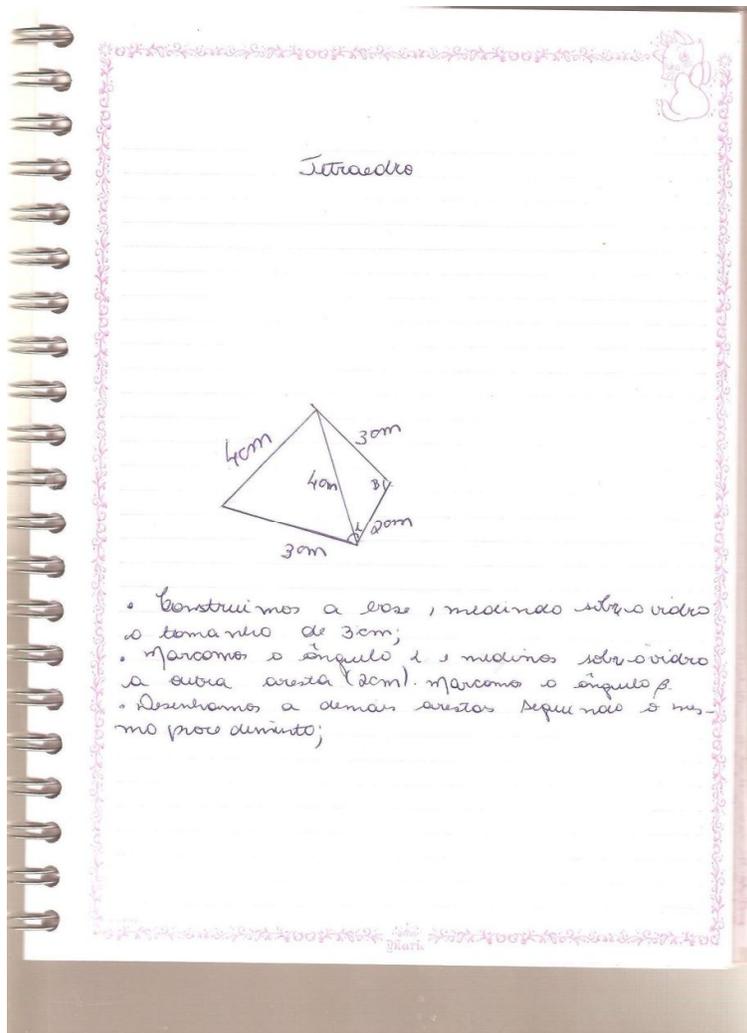


Figura 48 - Representação do tetraedro

3.4 Questão 3 - Como duplicar um cubo?

3.4.1 Como Dürer duplicou o cubo?

No seu livro IV, depois da representação de vários sólidos construídos com régua e compasso, Dürer demonstra alguns métodos para Duplicar um cubo. Seu interesse nesta duplicação está na possibilidade de aumentar certo número de

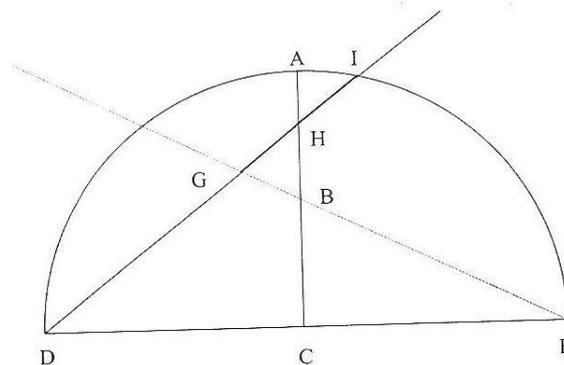
vezes, sem alterar a forma, o tamanho de alguns objetos, tais como quadros, habitações e outros.

Vamos, a seguir, mostrar um dos métodos demonstrados por ele.

3.4.1.1 Duplicação de um cubo de acordo com Dürer

Descrevemos a seguir a proposta de Dürer para o primeiro procedimento²⁷:

1. Traçam-se duas retas perpendiculares, uma vertical e outra horizontal. Na vertical, marcam-se dois extremos A e C (C é a interseção das duas retas) de um segmento com comprimento igual ao dobro do lado do cubo inicial.
2. Com centro em C e raio AC, constrói-se uma semicircunferência que corta a reta horizontal em dois pontos, D e E.
3. Traça-se uma semi-reta de origem E que passa pelo ponto médio B do segmento AC.
4. Desenha-se uma semi-reta de origem D tal que, ao cortar a vertical AC no ponto H, o faça de tal modo que a distância desse ponto a interseção I desta semi-reta com a circunferência seja igual à distância de H até a interseção G das duas semi-retas.



²⁷ Este procedimento é o que nos interessa, devido ao método de construção.

Figura 49

5. Os segmentos BC e CH se transladam sobre outra reta de tal forma que um seja a continuação do outro. Forma-se, então, o segmento BH. Marcamos o ponto médio M deste segmento. Traça-se a circunferência com centro em M e raio MH. Traçamos uma perpendicular a reta BH pelo ponto C. A interseção da circunferência com esta perpendicular, chamamos de K. Temos o segmento CK, que é o lado do cubo cujo volume é o dobro do volume do cubo inicial, de lado BC.

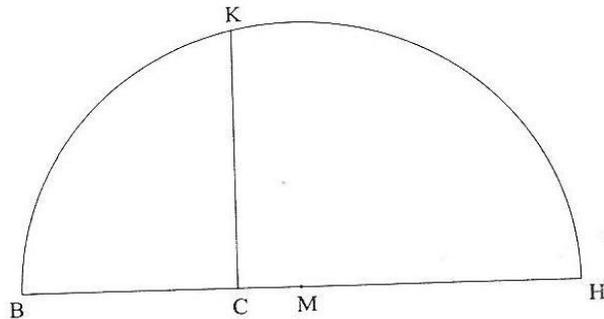


Figura 50

6. A partir deste passo repetimos a construção de um cubo como especificado na questão 1.

A seguir, na figura 51 estão demonstrados os tamanhos dos cubos e o esquema proposto por Dürer.

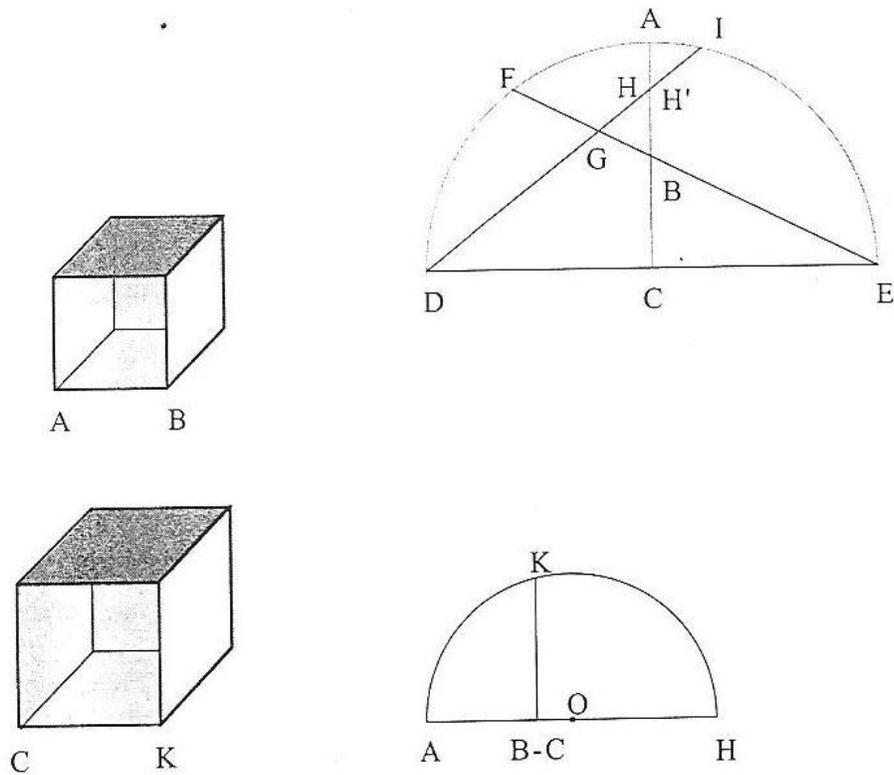


Figura 51

3.4.2 Como duplicar um cubo utilizando o *perspectógrafo didático*²⁸?

Para determinarmos um cubo com volume duplicado precisamos, inicialmente, determinar a medida das arestas deste cubo. Para tanto, podemos seguir dois caminhos diferentes. Primeiramente, podemos utilizar o mesmo método proposto por Dürer, especificado acima. Podemos, ainda, determinar a aresta do cubo duplicado utilizando as regras matemáticas que conhecemos²⁹. O

²⁸ O problema apresentado a seguir não é um problema apresentado na forma geométrica. A resolução de Dürer se dá via algébrica. Logo, nem todo problema resolvido ou proposto por Dürer utiliza o perspectógrafo.

²⁹ Estas relações são as relações de volume $V = a^3$, como queremos duplicar o volume do cubo então fazemos o volume ser $2V$. Assim temos que $a^3 = 2V$, da onde chegamos em $a = \sqrt[3]{2V}$.

método de Dürer é mais geométrico e de interessante aplicação nas aulas de matemática para se trabalhar conceitos como retas perpendiculares, intersecção de duas retas, circunferência, semicircunferência, ponto médio, entre outros.

Após a determinação da aresta do cubo seguimos o mesmo procedimento especificado na questão 1, proposta no início deste capítulo.

A aresta do cubo duplicado sempre será $a_1 = a\sqrt{2}$. Este fato pode ser demonstrado matematicamente.

Na figura 52, temos o esquema de duplicação do cubo.

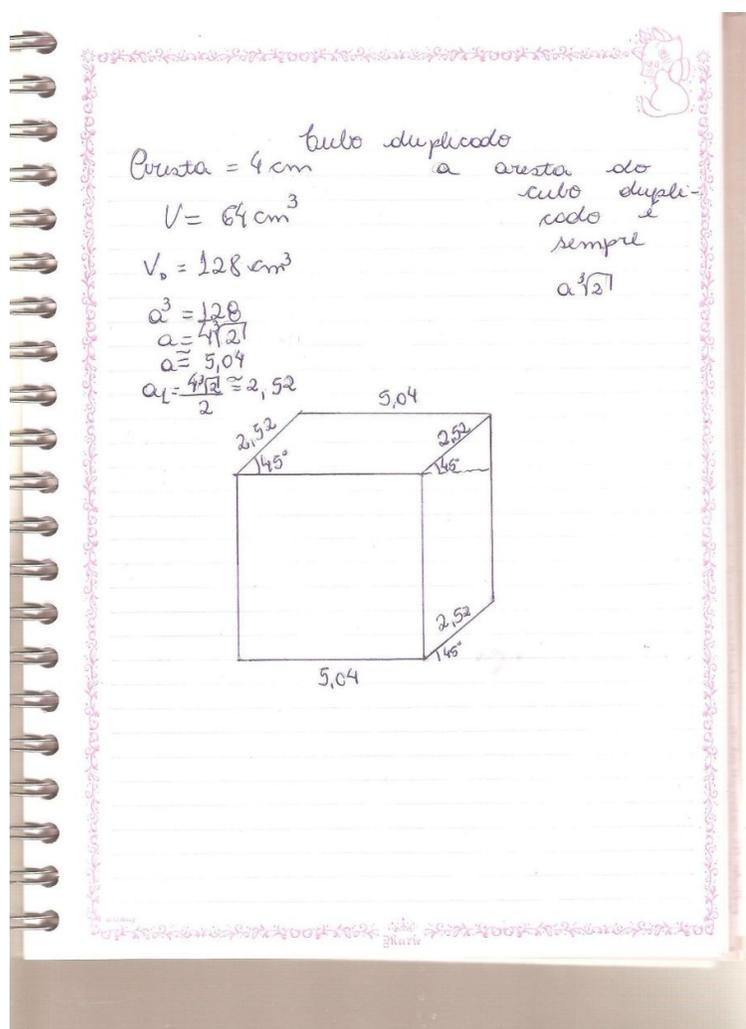


Figura 52 - Representação da duplicação do cubo

3.5 Questão 4 - Como construir um cubo e um paralelepípedo unidos, utilizando o *perspectógrafo didático*?

Inicialmente, precisamos explicar que esta questão não consta em nenhum registro como sendo uma representação de Dürer. Esta questão procura integrar construções de objetos diferentes em um mesmo momento. Nosso intento com a mesma, é demonstrar outra possibilidade de desenhar com o *perspectógrafo didático*.

Tomamos dois objetos um cubo e um paralelepípedo unidos por uma de suas arestas. Vamos construir estes dois objetos juntos.

Veja a seguir os passos para construção destes objetos:

1. Inicialmente posicionamos os dois objetos de tal forma que fiquem unidos;
2. Vamos utilizar a vista central da máquina (figura 53);
3. Desenhamos, então, a vista frontal dos dois objetos, mantendo suas dimensões originais. Estas medidas podem ser obtidas medindo-se sobre o vidro as mesmas;
4. A seguir marcamos o ponto de fuga no centro dos dois objetos;
5. Então, traçamos linhas pontilhadas que partem dos vértices da representação frontal dos objetos em perspectivas até o ponto de fuga;
6. Medimos sobre a máquina a medida das arestas laterais do cubo e marcamos esta medida sobre a reta pontilhada. Unimos os pontos e formamos o cubo em perspectiva. Em seguida, fazemos o mesmo procedimento para o paralelepípedo.
7. Temos então a representação dos dois objetos unidos.

Veja, nas figuras 53, 54, 55, 56 e 57 as imagens da utilização *perspectógrafo didático*.



Figura 53 – Vista geral do *perspectógrafo didático*



Figura 54 – Vista geral 2



Figura 55 – Ponto de vista

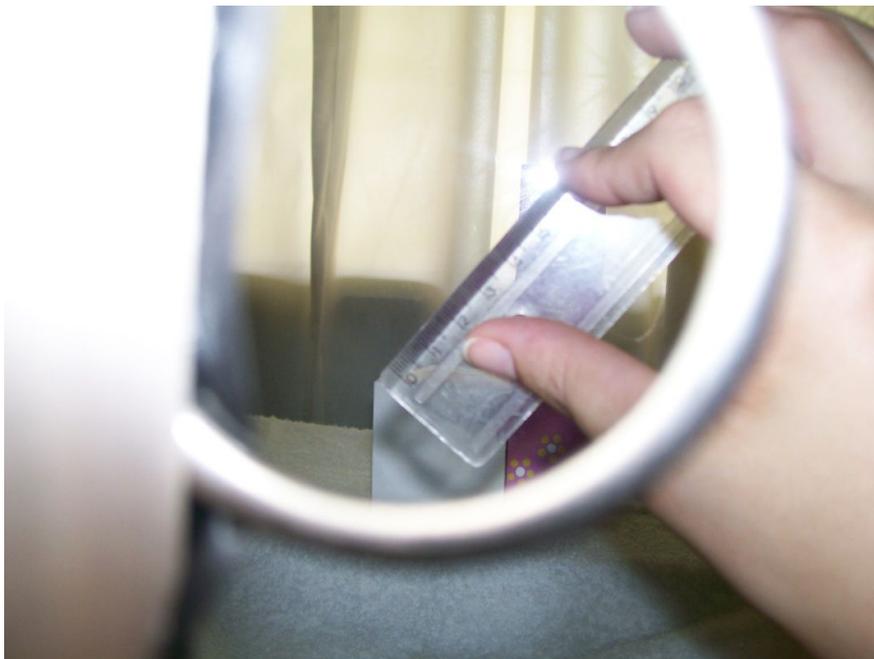


Figura 56 – Medindo no *perspectógrafo didático*



Figura 57 – Marcando a medida

A seguir, na figura 56, temos a representação do objeto.

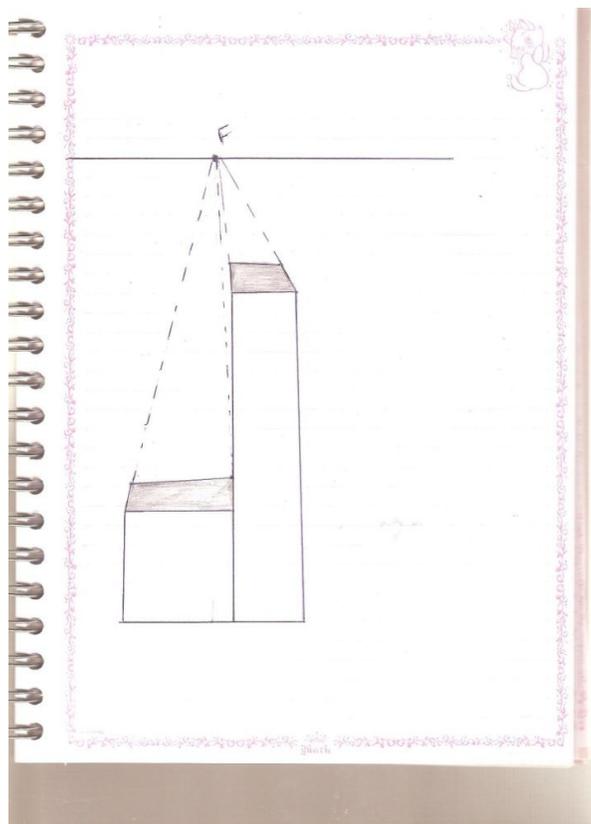


Figura 58 - Representação

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Quando pensamos nossa pesquisa a intenção era trabalhar com a aquisição do espaço tridimensional, pelo olhar, em aulas de geometria espacial. No decorrer de nossa pesquisa nos deparamos com os perspectógrafos de Dürer, ou melhor, com a história destas máquinas que implicam a diversidade e as complexidades do visual na elaboração e aquisição de saberes.

Estes instrumentos, os perspectógrafos, desenvolvidos na Renascença, trazem as etapas conceituais da teoria da perspectiva, ou seja, da técnica considerada racional para representar no papel o que se vê no espaço. Assim, pensamos que sua utilização em sala de aula poderá auxiliar os alunos a observarem tanto teoricamente como matematicamente uma figura espacial, extraindo dela informações importantes para resolver problemas.

Mas, sabemos que os aparelhos por si só, não têm sentido. Desta forma, buscamos a história da matemática, quer dizer, a história dos perspectógrafos de Dürer como campo fundamental na nossa investigação, pois foi através dela que podemos e tomamos contato com os perspectógrafos possibilitando, assim, problematizar esta história e o ensino de geometria.

Desde Alberti até Dürer a geometria projetiva se desenvolveu, trazendo consigo tratados próprios, instrumentos de pesquisa e manuais didáticos, como as gravuras, por exemplo, de Dürer. Tudo isso, se constitui com material rico de investigação, principalmente, e por nós educadores matemáticos, por possibilitarem a discussão da história e do ensino de matemática.

Nesta pesquisa, nos propomos em problematizar o uso da história para trabalhar geometria e visualização. Assim, utilizamos um instrumento perspectivo, baseado nos perspectógrafos de Dürer, e denominado *perspectógrafo didático*. A partir deste instrumento, propõe-se um processo mediador entre o que é visto e o que é conhecido, possibilitando o trabalho com a

capacidade de percepção do espaço. Ao “encaixar” uma representação bidimensional em um espaço tridimensional, tentamos equilibrar as mesmas, aquilo que é olhado com aquilo que é representado.

Para visualizar uma figura espacial se faz necessário observar a profundidade. Isto é possível ao se lidar com a idéia de perspectiva geométrica. Para compreender as etapas conceituais do traçado em perspectiva buscamos os perspectógrafos de Dürer.

Os perspectógrafos de Dürer são fontes profícuas para se trabalhar determinados conteúdos matemáticos, especialmente os geométricos, tanto na formação de professores, quanto na sua própria utilização em sala de aula. Quando nos deparamos com situações de sala de aula, onde os alunos não conseguem visualizar matematicamente uma figura espacial, compreendermos a necessidade de trabalharmos a visualização implicada não só pelo simples ato de ver, mas do movimento do olhar e do saber. É fato que, para atender a esta hipótese, haveria a necessidade de se adiantar na pesquisa verificando tal condição.

Este trabalho se fixou, portanto, na análise e na elaboração de atividades que trazem à tona a teoria da perspectiva, em sua faceta histórica. Ao realizarmos este trabalho, a historicidade das máquinas foi, então, considerada, ainda que não tenha sido o foco central desta pesquisa. Desta forma, tentamos colocar a história destas máquinas como fator norteador do trabalho e fonte de potencialidade para criar problemáticas didáticas para a atividade matemática.

Destaca-se que compreender a história das máquinas de desenhar, desde sua criação até sua utilização é fundamental para compreender nossos processos de olhar e de representar. Isto, pois, na educação matemática, leva a inserção em uma cultura, a elaboração de conceitos matemáticos criados e desenvolvidos historicamente, que encontra um modo de olhar e compreender o mundo e que funda nossos processos de representação e de saberes.

Compreender que existe uma forma de olhar no mundo que foi criada, inventada, construída, colonizada, pode possibilitar a abertura para trabalharmos

a visualização espacial em sala de aula, pois isso implica na compreensão tanto da teoria como da prática do olhar.

Ao analisar esta história podemos afirmar que os aparelhos para melhor ver, desenvolvidos por Dürer, se converteram em meio de compreensão e difusão de um fundamento científico da pintura, a perspectiva. A obra de Dürer *De la medida* foi à porta de entrada para a perspectiva nos países do Norte, analisando e expondo a geometria com elaboração matemática. Não é gratuitamente que podemos afirmar que a “Portinhola de Dürer”, por exemplo, é considerada como a janela através da qual se instaurou a possibilidade da exatidão de olhar nosso mundo real.

A partir das atividades que foram desenvolvidas nesta pesquisa, podemos dizer que os perspectógrafos podem ser utilizados em sala de aula, logo o *perspectógrafo didático*. Supõe-se que quando o aluno manuseia a máquina ele terá a oportunidade de entrar em contato com a técnica do desenho em perspectiva, com a história desta perspectiva, bem como, com as complexidades implicadas pelo ato de olhar. Portanto, o aparelho perspectivo coloca o aluno frente à possibilidade de representar corretamente um objeto matemático, mesmo não conhecendo os conceitos matemáticos envolvidos.

Podemos criar várias problemáticas de trabalho em sala de aula com estas máquinas, os perspectógrafos. Inicialmente, pode-se trabalhar o olhar matemático do sujeito, fazendo com que ele observe, através da máquina, os objetos matemáticos. Assim, pode-se identificar com mais facilidade entes dessa figura, tais como, vértice, arestas, diagonal, faces, etc. Depois, pode-se criar condições para se trabalhar elementos matemáticos, como, o paralelismo, as proporcionalidades, proporção entre outros.

O desenho em perspectiva fica, portanto, facilitado. Aliás, a representação em perspectiva torna-se um lugar conhecido, dominado pelo aluno, contribuindo tanto como aspecto a ser olhado como sabido.

Trazer estas máquinas para a formação de professores, para a aprendizagem dos alunos em sala de aula significa trazer para a educação matemática uma reflexão sobre a criação e o desenvolvimento de idéias

matemáticas e de formas de visualização, além de riqueza cultural, acrescentando muito em experiência para o processo de aprender e ensinar.

O uso do *perspectógrafo didático* pode contribuir para a problematização do nosso modo de olhar em perspectiva, dos saberes matemáticos, assim como, da teoria da técnica para representar em perspectiva. Olhando pelo anel da máquina, por exemplo, fixa-se o olhar, mas também faz ver como o olhar foi e é educado a ver as coisas do mundo de forma matematizada, racionalizada, geometrizada, esquadrinhada. Além disso, conceitos matemáticos tais como, ortogonalidade, proporcionalidade, paralelismo, entre outros, são tratados e desenvolvidos por meio do uso do *perspectógrafo didático*.

Olhar através da máquina é também olhar para outras culturas, outras formas de representar. É observar o mundo sob diferentes pontos de vistas. Logo, é possibilitar aos alunos olhar objetos matemáticos sob diferentes pontos de vista, extraindo diferentes informações matemáticas.

Os perspectógrafos possibilitam a reconstrução do ambiente projetivo, de maneira a poder desenhar as perspectivas, estudando os efeitos das deformações que diferentes tipos de perspectiva geram na forma original.

A máquina construída nesta pesquisa pode ajudar, portanto, a compreender na prática, materializando os processo do desenho em perspectiva e os movimentos necessários ao olhar para ver em perspectiva. Afinal, todos os elementos geométricos que integram a perspectiva estão presentes no aparelho. Assim, desenhar utilizando estes aparelhos pode ser uma tarefa menos árdua para os alunos.

Por fim, ressaltamos que foi desenvolvido nesta pesquisa foi uma análise das potencialidades da história na educação matemática, usando-se de um artefato, o *perspectógrafo didático*. Criaram-se, portanto, atividades que interliguem a história dos perspectógrafos, a teoria da perspectiva implicada pelo desenho espacial, os conceitos matemáticos e geométricos, assim como, a complexidade do olhar, para possibilitar uma reflexão do uso da história da matemática em ambiente de ensino na educação atual. Ora, trazer esta reflexão significa retomar aspectos importantes ligados à educação matemática, tais como

os processos de ensino, de aprendizagem e dos modos pelos quais procuramos estabelecer este processo.

Em continuidade a esta pesquisa entende-se que uma experiência com alunos, ou mesmo com professores, desenvolvendo na prática estas atividades criadas aqui, poderá contribuir para as reflexões iniciadas nesta pesquisa, apontando para novos caminhos para a educação matemática.

5 BIBLIOGRAFIA

BERGER, John. **Modos de Ver**. Tradução de Ana Maria Alves. Lisboa: Edições 70, 1999.

BESSOT, D., LE GOFF, J.P. **Mais où est donc passée la troisième dimension?**. In: Histoire des problèmes, histoire des mathématiques. Paris, Ellipses, 1993.

BKOCHE, Rudolf. **Epistémologie**. Histoire et enseignement des mathématiques. The Learning of Mathematics, vol. 17, n. 1, 1997.

BKOUICHE, Rudolf. **La Naissance du projectif: de la perspective à la géométrie projective**. In Mathématiques et philosophie dans l'Antiquité à l'Âge Classique. Paris: CNRS, 1991.

BORDAREL, J. COLMEZ, F. PARZYSZ, B. **Representation Plane des Figures de l'espace**. 1987. Cahier de didacique des mathématiques n° 48. I.R.E.M.

CAVALCA, Antonio de Pádua Vilella. **Espaço e representação gráfica: visualização e interpretação**. Série Hipótese. São Paulo: EDUC, 1998.

COMAR, P. **La perspective em jeu**. Les dessous de l'image. Découvertes Gallimard-Sciences. Paris: Gallimard, 1992.

COSTA, Cristiano Othon de Amorim. **A perspectiva no olhar – Ciência e arte do Renascimento**. 2004. 199p. Dissertação de Mestrado em Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, PUC/SP, São Paulo, São Paulo.

CUIBANO, João Luiz da Silva. **Perspectiva**. [www.ufmt.br/cuiabano/3 Disciplinas/Desenho Tecnico/Perspectivas/Perspectivas.pdf](http://www.ufmt.br/cuiabano/3_Disciplinas/Desenho_Tecnico/Perspectivas/Perspectivas.pdf). 2008.

DÜRER, Albert. **The complete woodcuts of Albrecht Dürer**. New York, Dover Publications, Inc., 1963.

DÜRER, A. **Underweysund der messung**. Nurembergue, 1525. Alberto Durero, De la Medida.. Edição de Jeanne Peiffer. Tradução do texto original alemão por Jesús Espino Nuno. Ediciones Akal, S. A.: Madrid, Espanha, 2000.

- DUVAL, Raymond. **Sémiosis et pensée humaine**. Suisse: Peter Lang, 1995.
- Escher, M.C. **M. C. Escher, gravuras e desenhos**. Alemanha: Taschen, 1989.
- FIORENTINI, Dario. LORENZATO, Sergio. **Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos**. Campinas, SP: Autores Associados, 2006.
- FLACON, A. e TATON, R. **La perspective**. Que sais-je? 6ª ed. Paris:PUF, 1994.
- FLORES, Claudia R. Olhar, saber, representar: sobre a representação em perspectiva. 01. ed. São Paulo: Musa Editora, 2007a. v. 01. 198 p.
- FLORES, Claudia R. Teoria e representação geométrica na obra de Albrecht Dürer: um ensino de matemática para pintores e artesãos.. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, v. 3, p. 01-10, 2007b.
- FLORES, Cláudia R. **Olhar, Saber, Representar: Ensaio sobre a representação em perspectiva**. 2003. 186 p. Tese (Doutorado em Educação) – Centro de Ciências da Educação, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis.
- FLORES, Cláudia Regina. **Como representar o espaço um piso quadriculado: história da perspectiva e ensino de geometria**. Bolema, Rio Claro, ano 18, n. 24, p. 79-93.
- FLORES-BOLDA, Cláudia R. **Geometria e Visualização: Desenvolvendo a competência heurística através da reconfiguração**. 1997. 152 p. Dissertação (Mestrado em Educação) - Centro de Ciências da Educação, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis.
- GOBERT, J. **Introduction to model-based teaching and learning in science education**. 2000.
- HAMOU, P. **La vision perspective**. 1995. Edition Pgot e Revags.
- KALEFF, Ana Maria M. R. **Vendo e entendendo poliedros: do desenho ao cálculo do volume através de quebra-cabeças e outros materiais concretos**. Niterói: EdUFF, 1998.
- LAURO, M. M. **Construindo os poliedros regulares com dobraduras**. In: Semana da Educação 2007: Formação de Professores para a Educação Básica -

Teoria e Prática, 2007, São Paulo. Semana da Educação 2007: Formação de Professores para a Educação Básica - Teoria e Prática, 2007.

LIPMAN, M. **O pensar na educação**. São Paulo: Vozes, 2001.

MACHADO, N.J. **Epistemologia e Didática. As concepções de conhecimento e inteligência e a prática docente**. São Paulo: Cortez, 2002.

MIORIM, M. A. MIGUEL, A. **História na Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

MESQUITA, A.L. **L'influence des aspects figuratis dans l'argumentation des élèves en géométrie**. 1989. 177p. Thèse de doctorat. Université Louis Pasteur, Strasbourg.

MIRANDA, Carlos Eduardo Albuquerque. **Uma educação do olho: as imagens na sociedade urbana, industrial e de mercado**. 2001. Caderno Cedes, ano XXI, nº 54, agosto/2001.

MOTTA, C. D. Van B. e BROLEZZI, A. C. **História da matemática na educação matemática: espelho ou pintura?**. 2006. III Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática.

PADILHA SANCHEZ, Virginia. **L'influence d' une acquisition des traitements purement figuraux pour l'apprentissage des mathématiques**. Tese de doutorado (Didática da Matemática). Université Louis Pasteur, Estrasburgo, 1992. 230p.

PANOFSKY, Erwin. **El significado de las artes visuales**. Madrid, Alianza Editorial, 1998.

PARZYSZ, M Bernard. **Représentations planes et enseignement de la géométrie de l'espace au lycée. Contribution à l'étude de la relation *voir/savoir***. 1989. 490p. Diplôme de Doctorat (Didactique des mathématiques) – Université Paris VIII, Paris.

PASSOS, Carmem Lúcia Brancaglion. **Representações, interpretações e prática pedagógica: a geometria na sala de aula**. 2000. 349p. Tese de Doutorado em Educação Matemática, Faculdade de Educação, UNICAMP, Campinas, São Paulo.

PAVANELLO, R. M. **O abandono do ensino da Geometria no Brasil: causas e conseqüências.** Revista Zetetiké. Campinas: Unicamp, Ano 1, n.1, 1993.

PEIFFER, Jeanne. **De la medida.** Madrid: Akal, S.A, 2000.

PIAGET, J. INHELDER, B. **A psicologia da criança.** São Paulo: Difusão Européia do livro, 1973.

SICARD, Monique. **La fabrique du regard.** Paris: Odile Jacob, 1998.

SUÁREZ, Carlos Alberto Cardona. **La geometria de Alberto Durer: estudio y modelación de sus construcciones.** Bogotá: Fundación Universidade de Bogotá, 2006.