UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO CIENTÍFICA E TECNOLÓGICA
CURSO DE DOUTORADO

TESE DE DOUTORADO

REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS NO ENSINO: CONTRIBUIÇÕES PARA REFLEXÕES ACERCA DOS CURRÍCULOS DE MATEMÁTICA ESCOLAR

JANECLER APARECIDA AMORIN COLOMBO

FLORIANÓPOLIS – SANTA CATARINA
2008

JANECLER APARECIDA AMORIN COLOMBO

REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS NO ENSINO: CONTRIBUIÇÕES PARA REFLEXÕES ACERCA DOS CURRÍCULOS DE MATEMÁTICA ESCOLAR

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica da Universidade Federal de Santa Catarina, como exigência parcial para a obtenção do título de Doutora em Educação Científica e Tecnológica, sob orientação do Prof. Dr. Méricles Thadeu Moretti.

FLORIANÓPOLIS-SC

2008

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
CENTRO DE CIÊNCIAS DA EDUCAÇÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS BIOLÓGICAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO CIENTÍFICA E TECNOLÓGICA - CURSO DE DOUTORADO

"REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS NO ENSINO: CONTRIBUIÇÕES PARA REFLEXÕES ACERCA DOS CURRÍCULOS DE MATEMÁTICA ESCOLAR"

Tese submetida ao Colegiado do Curso de Doutorado em Educação Científica e Tecnológica em cumprimento parcial para a obtenção do título de Doutora em Educação Científica e Tecnológica

APROVADA PELA COMISSÃO EXAMINADORA em 13/03/2008

Dr. Méricles Thadeu Moretti (CED/UFSC - Orientador)
Drª. Maria Tereza Carneiro Soares (UFPR - Examinadora)
Dr. Saddo Ag Almouloud (PUC/SP - Examinador)
Drª. Cláudia Regina Flores (CED/UFSC - Examinadora)
Dr. Ademir Donizete Caldeira (CED/UFSC - Examinador)
Dr. José de Pinho Alves Filho (CFM/UFSC - Suplente)
Drª. Edel Ern (CED/UFSC - Suplente)

Dr. José André Peres Angotti
Coordenador do PPGECT

Janecler Aparecida Amorim Colombo

Florianópolis, Santa Catarina, março de 2008

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho ao meu marido, Marcio e ao nosso primeiro bebê, o Arthur. Pelo companheirismo, pela compreensão, pelo amor. E porque souberam esperar o momento certo, me dando a certeza de que sem eles, nada disso valeria a pena.

AGRADECIMENTOS

PRELÚDIO PARA UMA TESE

Ao término de um trabalho, seja de qualquer natureza, não podemos deixar de voltar os agradecimentos àqueles que, de um modo ou outro, sempre estiveram conosco.

Ao refletir sobre isso, um filme desses últimos 4 anos persiste em voltar à memória. E por isso inicio esta tese exatamente como a termino, com os versos de Lispector:

> Eu sei de muito pouco. Mas tenho a meu favor tudo o que eu não
> sei e – por ser um campo virgem – está livre de preconceitos.
> Tudo o que não sei é a minha parte maior e melhor: é minha largueza.
> É com ela que eu compreenderia tudo.

A decisão em sair para tão longe de casa e cursar o doutorado, não foi fácil, surgiu em um momento decisivo de minha vida pessoal e profissional, acompanhada de muitas incertezas, de muitos "não sei". Mas hoje, vejo que não poderia ser de outra forma, nesses 4 anos aprendi muito. E agora, sei um pouco mais do que sabia sobre várias coisas: sobre ciência e tecnologia pelas aulas e discussões com os colegas; sobre educação matemática, também pelas aulas, orientações, congressos e estudos para a tese; sobre relacionamentos, com os colegas daqui, com os professores e amigos de casa; sobre mim mesma, nos mais de 100.000 Km rodados nas viagens entre Pato Branco e Florianópolis, nos momentos de solidão nas noites enfrentadas no ônibus, nas angústias, nas tristezas, nas surpresas e nas alegrias vivenciadas e possibilitadas por esse curso de doutorado.

Sei também que ao finalizar a tese, defendê-la e publicá-la, encerro uma etapa para começar outra, com a certeza de que tenho muito ainda a aprender, mas com a ânsia e ímpeto do jovem que sai para descobrir o mundo.

E por tudo isso, pelo enriquecimento pessoal e profissional, e pelo que ainda virá, eu agradeço:

À minha família, pelo apoio incondicional e pelo carinho.

Ao professor Méricles Thadeu Moretti, pela orientação tranqüila e confiança em mim depositada, sempre com uma palavra de incentivo e um gesto de amizade.

Aos professores Saddo Ag Almouloud, Maria Tereza Carneiro Soares, Claudia Regina Flores e Ademir Donizete Caldeira, membros da banca examinadora, pela disposição, paciência e contribuições. Em especial à professora Claudia pelas discussões e crescimento proporcionado.

Aos professores e professoras do PPGECT/UFSC, pelo conhecimento compartilhado e experiências trocadas.

À Lucia e à Bethy, por nos lembrar das obrigações burocráticas envolvidas no doutorado, pelas dicas, pelas palavras de apoio.

À todos os colegas da turma 2004 do doutorado, especialmente à Cirlei, Inés, Tatiane e Márcia, pelas discussões acadêmicas, pelos sorrisos e angústias compartilhadas, pela companhia, pela amizade.

Às colegas da área de Matemática da turma de mestrado 2004 e 2005, Roberta, Josiane, Joceli e Ivone que me acolheram e com as quais aprendi muito.

Às amigas Dayse e Elisângela, colegas de trabalho em Pato Branco e companheiras de apartamento em Florianópolis, nos dois primeiros anos, e à Thatieli e Yolana pela companhia em 2006 e 2007.

À Samoara, pelo incentivo e apoio em todos os momentos dessa caminhada.

À Rosângela pela amizade e colaboração na correção gramatical e organização textual.

À Universidade Tecnológica Federal do Paraná – Campus Pato Branco, pelo afastamento concedido para a realização do doutorado.

À todos os meus amigos, pela amizade, compreensão e ausências.

À sociedade brasileira pelo apoio financeiro concedido na forma de bolsa de estudos através do CNPq.

Muito obrigada:

> Quando se diz 'obrigado' se dizem muitas coisas mais, que vêm de muito longe e de muito perto, de tão longe como a origem do indivíduo humano, de tão perto como o secreto pulsar do coração. (Pablo Neruda)

RESUMO

Este estudo realiza uma reflexão crítica e teórica sobre a questão da representação semiótica articulada aos currículos de Matemática, com o propósito de explicitar, em um exemplo de proposta curricular para o campo numérico dos Naturais, as conversões entre os diferentes registros de representação semiótica suscitadas em tarefas de diferentes naturezas. Concentra-se no campo das pesquisas sobre propostas curriculares e sobre o processo de ensino e aprendizagem da matemática. Primeiramente se busca analisar algumas propostas curriculares nacionais e internacionais, sob o ponto de vista da articulação das representações semióticas nas orientações metodológicas e seqüência de conteúdos, além de realizar o levantamento de pesquisas brasileiras que tiveram, como foco de investigação principal, a noção dos registros de representação semiótica, a fim de verificar como os pesquisadores utilizam essa noção em seus estudos. Em seguida, procura-se compreender sobre o conceito de currículo e buscar uma configuração curricular adequada à esta investigação. A partir desse cenário, empreende-se uma discussão teórica sobre a noção de Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval, sobre a noção de situação da Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud e sobre a natureza das tarefas matemáticas de João Pedro da Ponte; e a possibilidade de articular esses elementos teóricos no âmbito de organizações curriculares. Finalmente, busca-se elaborar um ensaio sobre uma proposta curricular para o campo numérico dos Naturais, no Ensino Fundamental, articulada aos referenciais teóricos estudados. Para isso, considera-se, na matemática ensinada nas escolas, além do aspecto conceitual, a relevância das representações semióticas.

ABSTRACT

This study accomplishes a critical and theoretical reflection on the subject concerning the semiotics representation articulated to the curricula of Mathematics, with the purpose of making explicit, through an example of curricular proposal for the numeric field of the Natural Numbers, the conversions among the different registrations of semiotics representation raised in tasks of different sorts. It concentrates on the field of curricular proposal research and on the teaching and learning process of mathematics. Firstly we analyze some national and international curricular proposals, under the semiotics representation articulation viewpoint in the methodological orientations and sequence of contents, besides accomplishing the rising of Brazilian research that had, as focus of main investigation, the notion of the registrations of semiotics representation, in order to verify how the researchers use that notion in their studies. Then we try to understand the curriculum concept and look for a curricular configuration proper to this investigation. This becomes the background to a theoretical discussion about the notion of Raymond Duval's Semiotics Representation Registrations, about the notion of situation of Gérard Vergnaud's Conceptual Fields Theory, and on João Pedro da Ponte's mathematical tasks nature; and the possibility to articulate those theoretical elements in the scope of curricular organizations. Finally, we elaborate a suggestion with a curricular proposal for the numeric field of the Natural Numbers, for Primary School, articulated to the theoretical references under study. For that, it was considered, in the mathematics taught at schools, besides the conceptual aspect, the relevance of the semiotics representations.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

O meu olhar é nítido como um girassol.
Tenho o costume de andar pelas estradas
Olhando para a direita e para a esquerda,
E de vez em quando olhando para trás...
E o que vejo a cada momento
É aquilo que nunca antes eu tinha visto.

PESSOA, Fernando. **Ficções do interlúdio**.
Rio de Janeiro: editora Nova Fronteira, 1980. (p. 35)

Historicamente, a Matemática é uma das ciências mais antigas da humanidade e também uma das mais antigas disciplinas escolares, tendo ocupado um lugar de importância nos currículos escolares ao longo dos tempos (D'AMBRÓSIO, 1996; PORTUGAL, 2007). Ela é essencial ao desenvolvimento da vida em sociedade, tanto para resolver problemas quanto para prever e controlar resultados. Sendo tão importante, é natural que, como professores de Matemática, nos preocupemos com o seu ensino – premissa que deu origem a este trabalho.

O poema de Fernando Pessoa, posto como epígrafe desta apresentação, por meio de seu heterônimo Alberto Caeiro, nos parece pertinente para mergulharmos, metaforicamente, nessa questão. Ao comparar a nitidez do seu olhar a um girassol, flor que acompanha a trajetória do Sol, o autor evidencia a sua natureza contemplativa, a sua atenção ao mundo que o rodeia. A comparação é uma forma de objetivação, pois coloca em confronto duas realidades, tornando visível e concreta uma realidade que é, na sua essência, abstrata. Ao conseguir a abstração, ele sente-se extasiado diante da novidade, aprendendo-a, pois o que ele vê a cada momento, é aquilo que nunca antes tinha visto.

A presente pesquisa, relacionada a Matemática Escolar, está inserida nesse contexto da busca por um aprender significativo, pois nossa preocupação volta-se para questões ligadas a aspectos que possam contribuir para o desenvolvimento de ações pedagógicas em favor da aprendizagem.

Muitos seriam os caminhos que poderiam nos levar ao alcance do nosso objetivo, mas, dentre eles, escolhemos o currículo como temática para que pudéssemos refletir sobre o ensino e a aprendizagem na Matemática Escolar. Temos, assim, como principal objetivo deste trabalho, a reflexão crítica e teórica a respeito do currículo, no que tange, especificamente, à teoria dos Registros de Representação Semiótica (RSS), para, por meio do campo numérico dos Naturais, explicitarmos como poderia ser uma proposta curricular baseada em tais idéias. Essa proposta tem o intuito de evidenciar as possibilidades didático-pedagógicas das representações na exploração de tarefas de diferentes naturezas.

Para realizarmos este estudo, nos apoiamos na noção teórica dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval e sua hipótese fundamental sobre a aprendizagem, a qual preconiza que, para aprender, um indivíduo precisa transitar entre vários registros de representação dos objetos e coordená-los. Além de Duval, outros autores nos deram o suporte teórico necessário a esta investigação. Entre eles, citamos: Gérard Vergnaud, em quem buscamos a referência e o significado dos objetos nas diferentes situações (tarefas) que se podem desenvolver na escola; e João Pedro da Ponte, que nos forneceu a base teórica para categorizar os diferentes tipos de tarefas que podem compor o planejamento didático.

Para o alcance dos objetivos propostos, a composição textual deste trabalho está estruturada em 4 capítulos, além desta introdução e das reflexões finais.

No capítulo 1, situamos o estudo, apresentando as justificativas, o caminho metodológico, as principais noções dos referenciais teóricos adotados e analisamos alguns currículos quanto à utilização explícita dos RRS. Apresentamos ainda resultados de pesquisas em Educação Matemática em relação à utilização dos RRS no ensino da matemática.

No capítulo 2, tratamos sobre aspectos relacionados ao currículo, sobre os movimentos de mudanças nas orientações curriculares de matemática. Realizamos também uma revisão bibliográfica sobre pesquisas que tiveram a temática curricular como foco, com o intuito de validar as questões colocadas e buscar uma compreensão sobre o conceito de currículo.

O capítulo 3 apresenta o referencial teórico da tese. Nele, imprimimos discussões sobre o funcionamento da representação semiótica na Matemática e na aprendizagem, abordando a questão dos signos, significados e referência dos objetos matemáticos. Exploramos a noção teórica dos RRS de Raymond Duval; as idéias a respeito da Teoria dos Campos Conceituais (TCC), destacando a noção de situações, de Gérard Vergnaud e a questão da natureza das tarefas.

Por último, no capítulo 4 apresentamos em um exemplo, a proposição curricular sobre os Números Naturais, procurando explicitar a questão das representações semióticas e articular as idéias discutidas nos capítulos anteriores.

E, por fim, imprimimos as reflexões finais da tese.

CAPÍTULO I

O ESTUDO SITUADO: MATEMÁTICA ESCOLAR E REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS NO CURRÍCULO E NAS PESQUISAS EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Em tudo o que já fomos está o que seremos
No fundo desta noite tocam-se os extremos
E se soubermos ver nos sonhos o processo
Os passos para trás não são um retrocesso
A noite é um sinal de tudo quanto fomos
Dos medos, dos mistérios, das fadas e dos gnomos
Da ignorância pura e da ciência irmã
Em que, sendo passado, já somos amanhã.

(José Mário Branco, A Noite, 1985)

1.1 O CONHECIMENTO MATEMÁTICO NO CONTEXTO ESCOLAR

Entendemos o conhecimento humano como o resultado das práticas sociais desenvolvidas pelos homens ao longo da sua história. Na interatividade social é que o homem, enquanto sujeito do conhecimento, vai se constituindo, apreendendo, pouco a pouco, os conhecimentos já produzidos, reinventando e produzindo novos conhecimentos.

O conhecimento que nos interessa nesta tese é o conhecimento matemático no contexto escolar. Nossa preocupação está centrada, portanto, no ensino e na aprendizagem deste conhecimento no âmbito da instituição escolar. Isso porque acreditamos que as razões pelas quais se produz e se ensina a matemática na escola são fundamentalmente diferentes das razões pelas quais se desenvolve o conhecimento matemático dos matemáticos.

Se, por exemplo, considerarmos as práticas escolares que envolvem o ensino da Matemática, estarão em jogo os conhecimentos produzidos no âmbito pedagógico, como as técnicas de ensino, metodologias, estratégias, materiais didáticos, que não integram a prática original dos matemáticos que produzem o conhecimento que será ensinado. Da mesma forma, a prática científica, ou seja, os objetivos, o processo de desenvolvimento do novo conhecimento, o caminho percorrido, os erros cometidos, as hipóteses também não fazem parte da prática da Matemática Escolar.

A esse respeito, Moreira e David (2005) trazem uma importante contribuição, definindo e diferenciando Matemática Escolar e Científica. Eles partem de uma análise que confronta a forma escolar do saber matemático sobre os sistemas numéricos, com a forma científica ou acadêmica, usualmente veiculada na formação matemática em cursos de licenciatura, para desenvolver uma distinção estratégica entre o que denominam Matemática Escolar e Matemática Acadêmica ou Científica.

Os autores defendem uma posição intermediária da Matemática Escolar, não a restringindo a mera adaptação da Matemática Científica ao processo de escolarização básica, como sugere Chevallard[1] (1991), com o conceito de Transposição Didática[2], trazendo à baila a questão das metodologias e estratégias específicas envolvidas na sala de aula, e não somente a produção do material didático do saber a ensinar. Nem tão pouco a restringem a uma referência restrita às práticas efetivas que se desenvolvem no interior da escola, como aponta Chervel[3] (1990), ao discutir a história das disciplinas escolares.

Compactuamos com a visão desses autores a respeito da concepção sobre Matemática Escolar como sendo "[...] o conjunto dos saberes 'validados', associados especificamente ao desenvolvimento do processo de educação escolar básica em Matemática." (MOREIRA e DAVID, 2005, p.20). Isso implica considerar métodos próprios, técnicas e processos relacionados ao ensino e aprendizagem da

---

[1] CHEVALLARD, Y. **La Transposición Didáctica:** del saber sabio al saber enseñado. Buenos Aires: Aique, 1991.

[2] ... um conteúdo de saber que é designado como saber a ensinar sofre, a partir de então, um conjunto de transformações adaptativas que vão torná-lo apto a ocupar um lugar entre os objetos de ensino. O "trabalho" que transforma um saber a ensinar em um objeto de ensino é denominado transposição didática (CHEVALLARD, 1991, p. 45).

[3] CHERVEL, A. História das disciplinas escolares: reflexões sobre um campo de pesquisa. **Teoria & Educação,** n.2, p. 177-229, 1990.

matemática por professores e/ou pesquisadores como saberes constituintes da Matemática Escolar.

De outro lado, a Matemática Científica ou Acadêmica é tomada, nesta perspectiva, como "um corpo científico de conhecimentos, segundo a produzem e a percebem os matemáticos profissionais." (idem). Ou seja, os objetos matemáticos estudados pelos matemáticos e ensinados pelos professores de matemática no processo ensino-aprendizagem podem ser considerados distintos em sua essência, ou seja, no tratamento dado a eles. Isso porque a forma de utilização desses objetos, historicamente construídos e validados como objetos do saber matemático, é substancialmente diferente, e dependente dos sistemas de práticas e dos contextos de cada um desses grupos.

Essa distinção tem lugar, uma vez que as práticas sociais do matemático profissional e do professor de matemática da escola básica ocorrem em condições muito diferentes e específicas. Ao professor, interessa definições descritivas, formas alternativas de demonstração e argumentação, estratégias diferenciadas para apresentação dos conceitos e resultados, reflexões sobre os erros dos alunos e sobre os processos cognitivos envolvidos na aprendizagem da matemática. Em contrapartida, o interesse maior para o matemático centra-se na produção de resultados originais de fronteira, nos quais a abstração e o rigor lógico são fundamentais.

Muitas pesquisas em Educação Matemática[4], principalmente aquelas que envolvem a temática sobre formação de professores e/ou currículo, apontam para a necessidade de reflexões sobre o tratamento dado aos conteúdos curriculares de matemática na escola. Isso pode indicar, mesmo que de uma forma implícita, uma preocupação voltada para a Matemática Escolar enquanto conjunto de saberes associados à questão da aprendizagem.

[4]Em pesquisa realizada para a publicação do artigo "Pesquisa em formação de professores de matemática - uma comunidade compartilhando de um mesmo coletivo de pensamento?", nos anais do IV Encontro Ibero-Americano de Coletivos Escolares e Redes de Professores que fazem Investigação na Escola (Lajeado: Univates, 2005), foram analisados os resumos de várias pesquisas sobre formação de professores e a discussão dos artigos de Ferreira (2003), **Um olhar retrospectivo sobre a pesquisa brasileira em formação de professores de matemática.** e Fiorentini et al (2002), **Formação de professores que ensinam matemática:** um balanço de 25 anos da pesquisa brasileira. Além disso, a revisão de literatura sobre as pesquisas envolvendo currículo, apresentada no capítulo seguinte, nos forneceu elementos para inferir sobre a questão da matemática escolar.

Temos, então, a questão fundamental quando se considera a Matemática Escolar – a aprendizagem. Ou seja, os elementos que importam para a Matemática Escolar são aqueles relacionados ao desenvolvimento da aprendizagem, como uma prática pedagógica que possibilita a compreensão dos objetos em estudo, a elaboração e construção de justificativas para que o aluno possa apropriar-se dos significados dos objetos e utilizá-los de maneira coerente e conveniente na sua vida escolar e extra-escolar.

Nesse sentido, tem lugar especial o tipo de situações de ensino que estarão sendo desenvolvidas na escola. Entendemos essa importância em dois aspectos: o primeiro refere-se à natureza das tarefas matemáticas e os objetivos para o ensino; e o segundo diz respeito à caracterização do próprio objeto matemático a partir da realização das tarefas.

Para dar conta do primeiro aspecto, utilizamos os conceitos de tarefa e atividade desenvolvidos por Ponte (1995, 1998, 2003, 2005). Para esse autor, a atividade pode ser física ou mental e diz respeito essencialmente ao aluno, referindo-se àquilo que ele faz num dado contexto. A tarefa representa apenas o objetivo de cada uma das ações em que a atividade se desdobra e é algo basicamente exterior ao aluno (embora possa ser decidido por ele). Em outros termos, podemos dizer que quando se está envolvido numa atividade, realiza-se certa tarefa; portanto, apesar das tarefas serem propostas na maioria das vezes pelo professor, devem ser interpretadas pelo aluno e aí podem dar origem a atividades muito diversas ou até mesmo nenhuma atividade.

Conforme Ponte (2005), uma perspectiva sobre a aprendizagem defendida por muitos autores é a de que os alunos aprendem a partir de dois fatores principais: a atividade que realizam e a reflexão que sobre ela fazem. Sendo assim, "é formulando tarefas adequadas que o professor pode suscitar a atividade do aluno" (PONTE, 2005, p. 11). Todavia, sabemos que não basta selecionar boas tarefas, é preciso considerar uma série de outros fatores, como, por exemplo, o modo de propô-las, de conduzir a realização na sala de aula, o objetivo que se quer atingir com cada tarefa, os aspectos suscitados por elas, o contexto da aula, as características da escola e especificamente da turma de alunos.

Nesse sentido, é importante levar em conta os diferentes tipos de tarefas matemáticas na organização didática das aulas, dos materiais didáticos e também nas propostas curriculares. Ponte (2005) coloca que os problemas, as investigações, os projetos, os exercícios e a modelagem são exemplos bem conhecidos da literatura especializada sobre a natureza das tarefas matemáticas.

Para uma renovação do ensino da Matemática, segundo a APM (1998), deveria existir uma alteração significativa na natureza das tarefas dominantes na sala de aula, em uma perspectiva de valorização das atividades de resolução de problemas, de investigação e de situações que envolvam os alunos em processos de pensamento matemático e comunicação. Por essa razão, acreditamos que considerar o tipo de tarefas a serem desenvolvidas na Matemática Escolar, é um elemento fundamental na caracterização de qualquer currículo, pois elas irão "determinar em grande medida as oportunidades de aprendizagem oferecidas aos alunos" (PONTE, 2005, p. 23).

O segundo aspecto sobre a importância do tipo de situações de ensino a serem desenvolvidas na escola compreende a caracterização do objeto matemático, a partir da realização de um conjunto de tarefas. Essa afirmação está fundamentada na Teoria dos Campos Conceituais (TCC) de Gérard Vergnaud[5] .

A contribuição da TCC se inscreve na medida em que amplia a noção de conceito e considera as situações matemáticas (tarefas) como a referência dos objetos matemáticos. Vergnaud (1988) descreve a TCC como uma teoria psicológica cognitivista, referente ao processo de conceitualização do real, que possibilita a localização e o estudo das continuidades e rupturas entre conhecimentos do ponto de vista de seu conteúdo conceitual.

Partindo do pressuposto de que a conceitualização e a ação sobre os conceitos são a essência do desenvolvimento cognitivo, Vergnaud (1990, p. 140) define campo conceitual como sendo "um conjunto informal e heterogêneo de problemas, situações, conceitos, relações, estrutura, conteúdos e operações de pensamento, conectados uns aos outros e, provavelmente entrelaçados durante o processo de aquisição". Uma vez que tais campos são definidos de forma abrangente e complexa, tem-se a percepção de que o domínio dos campos conceituais não acontece de uma hora para outra, mas sim, é desenvolvido durante um longo tempo, variável para cada indivíduo, e dependente das experiências,

---

[5] Gérard Vergnaud é psicólogo de formação, ex-orientando e ex-discípulo de Piaget e se dedica ao estudo da aprendizagem de conceitos em matemática.

maturidade e aprendizagem de cada um. Dessa forma, a presença de situações diversas, que se reportam a aspectos diferentes do mesmo conceito, devem ser abordadas no decorrer do desenvolvimento do currículo prescrito na escolaridade básica.

É neste contexto, da aprendizagem da Matemática Escolar, que surge o nosso interesse em discutir sobre a questão da representação semiótica enquanto forma de estruturar o saber que será ensinado e aprendido na escola. Ou seja, nos interessa evidenciar as possibilidades didático-pedagógicas das representações semióticas, utilizadas na exploração de diferentes tipos de tarefas matemáticas, realizadas no processo de ensino-aprendizagem da matemática no Ensino Fundamental.

Para isso, elegemos três pontos fundamentais para serem analisados e articulados em uma proposição curricular: a representação semiótica dos objetos matemáticos como ponto central; o conjunto de tarefas matemáticas escolares enquanto referência do saber; a natureza dessas tarefas. Cada um desses pontos demanda um desmembramento teórico que será desenvolvido nos capítulos subseqüentes.

1.2 SOBRE A QUESTÃO DAS REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS

Conforme Font, Godino e D'Amore (2004), existe uma grande diversidade de enfoques e concepções acerca da noção de representação que pode ser explicada pelo grande número de áreas do conhecimento humano interessadas sobre esse tema. Isso ocorre porque ao falarmos em representação, inevitavelmente estaremos falando de conhecimento, significado, compreensão, modelização, que são noções essenciais para a Educação Matemática, Psicologia, Epistemologia, ciências e tecnologias que se ocupam da cognição humana.

Assim, entendemos como representação "qualquer notação, signo ou conjunto de símbolos que representa (quer apresentar) algum aspecto do mundo externo ou de nossa imaginação, na ausência dela" (EYSENCK e KEANE, 1991, p.

202). Em outras palavras, a representação se caracteriza por uma correspondência entre duas entidades que são postas em algum tipo de relação referencial, uma com a outra, por um indivíduo e que permite evocar os objetos representados, ainda que eles não estejam presentes.

De um modo geral, as representações são divididas em internas e externas. As representações internas são aquelas que criamos em nossas mentes, as quais descrevem a cognição dos indivíduos e por isso são conhecidas ainda como representações mentais. Ou seja, podem ser consideradas como,

> [...] as formas em que codificamos características, propriedades, imagens, sensações, etc., de um objeto percebido (por exemplo, uma lâmpada), de um objeto imaginado (por exemplo, um extraterrestre) ou de um conceito abstrato (por exemplo, a liberdade), de maneira tal que possamos recordá-los, pensar sobre eles, etc.. Estas representações são consideradas como estados mentais particulares, que contêm em si mesmos o objeto ao qual se referem (GRECA, 2005, p. 8).

No contexto da aprendizagem escolar, as representações mentais podem ser traduzidas como as diversas respostas dos alunos frente às atividades propostas.

As representações externas ou semióticas, por sua vez, são aquelas constituídas por sistemas de signos que possuem regras próprias de significação e funcionamento, inventadas pelo homem para mediar as relações com os conhecimentos e as coisas do mundo.

Essa divisão das representações, em internas e externas, não é consensual e livre de conflitos, pois nos obriga a pensar em questões do tipo: qual representação antecede qual? Grande parte dos psicólogos cognitivistas identifica as representações mentais como sendo as mais básicas, pois consideram que para que as representações semióticas sejam verdadeiramente representações, têm de ser representadas internamente por seus usuários.

Por outro lado, alguns filósofos e mesmo psicólogos cognitivistas, dentre os quais destacamos Wittgenstein (1953)[6] e Duval (1993), citado em Font, Godino e D'Amore (2004), criticam esse ponto de vista. Para eles, as representações semióticas seriam meros instrumentos com os quais exteriorizamos nossas representações mentais para fins de comunicação, ou seja, para torná-las

[6] WITTGENSTEIN, L. **Investigaciones filosóficas**. Barcelona: Crítica, 1953.

acessíveis a outras pessoas. Mais que isso, as representações semióticas são essenciais para a atividade cognitiva do pensamento.

Sobre a importância fundamental das representações semióticas, Duval (1993, p.38) aponta três funções principais:

- no desenvolvimento das representações mentais: estas aí dependem de uma interiorização de representações semióticas, do mesmo modo que as representações mentais são uma interiorização daquilo que é percebido (Vygotsky, 1962; Piaget, 1968),
- na realização de diferentes funções cognitivas: a função de objetivação (expressão privada) que é independente daquela de comunicação (expressão para outrem), e a função de (algumas atividades de tratamento são diretamente ligadas a utilização de sistemas semióticos, por exemplo o cálculo),
- na produção de conhecimentos: as representações semióticas permitem representações radicalmente diferentes de um mesmo objeto, na medida em que elas podem revelar sistemas semióticos diferentes (Benveniste, 1979; Bresson, 1978). Assim, o desenvolvimento das ciências está ligado a um desenvolvimento de sistemas semióticos cada vez mais específicos e independentes da língua natural (Granger, 1979).

De acordo com Levy (1993), a capacidade cognitiva humana compreende três grandes faculdades elementares: a de perceber, a de imaginar e a de manipular. E é nesta última aptidão que se encontra a *representação*, ou melhor, a capacidade de *manipular representações* como sendo a mais fundamental e abrangente das capacidades cognitivas, uma vez que ela permite o acesso a todo e qualquer conhecimento, que é na verdade o motor do desenvolvimento humano.

Esta capacidade de manipular ou operar por meio das representações seria a mais especificamente humana das faculdades, uma vez que,

> [...] Este poder de manejar e de remanejar o ambiente irá mostrar-se crucial para a construção da cultura, o pensamento lógico ou abstrato sendo apenas um dos aspectos, variável e historicamente datado, desta cultura. Na verdade é porque possuímos grandes aptidões para a manipulação e bricolagem que podemos trafegar, reordenar e dispor parcelas do mundo que nos cerca de tal forma que elas acabem por representar alguma coisa. Agenciamos sistemas semióticos da mesma forma como talhamos o sílex,

> como construímos cabanas de madeira ou barcos para navegar, os sistemas semióticos para representar (LEVY, 1993, p. 158).

Isso significa que os processos cognitivos estão ligados aos processos semióticos. Corroborando com esta afirmação, Radford (2004), em sua elaboração sobre semiótica cultural, coloca que além das significações culturais proporcionadas aos indivíduos no desenvolvimento conceitual, o recurso aos signos e instrumentos altera significativamente o funcionamento cognitivo dos indivíduos.

Nesse sentido, consideramos que a representação semiótica[7] é imprescindível na formação cultural da humanidade, ou seja, na produção do conhecimento, uma vez que este é veiculado e limitado pelas representações. Limitado porque, para se ter conhecimento, é preciso que o objeto do conhecimento esteja em presença do sujeito do conhecimento - é preciso que o objeto do conhecimento seja dado a conhecer, o que ocorre por meio das representações. Estas possibilitam o acesso aos objetos do conhecimento. Por isso mesmo é que podemos dizer que "conhecer" é uma atividade essencialmente de natureza semiótica.

A produção de um corpo de conhecimentos, seja científico, empírico, formal ou informal, criado por determinada cultura ou sociedade, implicado pela elaboração e utilização de representações, leva ao estudo da semiótica enquanto "ciência dos signos e dos processos significativos (semiose[8]) na natureza e na cultura" (NOTH, 1995, p. 17). A semiótica passa a ser então, na modernidade, a ciência que explica os processos das representações no ato de conhecer. Em conseqüência disso, as representações semióticas, enquanto parte concreta que relacionam o objeto do conhecimento e o sujeito que aprende, se estabelecem como elemento importante no processo de ensino e de aprendizagem desse conhecimento.

Também no processo de produção do conhecimento matemático as representações semióticas têm um papel importante. Isso se verifica na própria história da Matemática, quando se analisa a sua origem - seja ela localizada nos primeiros esforços do homem primitivo para sistematizar os conceitos de grandeza, forma e número; ou no Oriente Antigo como uma ciência prática ligada à agricultura,

---

[7]O capítulo 3 irá tratar mais detalhadamente sobre os elementos que fazem parte de uma representação semiótica, o objeto representado, o signo utilizado na representação e a relação estabelecida entre eles.
[8] Semiose entendida aqui como os processos desenvolvidos na significação de um signo.

engenharia e comércio; ou ainda nos rituais religiosos e até mesmo na arte (EVES, 2007) - até a atualidade, sempre transcendeu os espaços do cotidiano, da escola e da universidade. Com o desenvolvimento das sociedades, amplia-se para os centros de pesquisas sendo utilizada cada vez mais como ferramenta em diversas áreas do conhecimento humano. Esse caráter de universalidade[9] foi sendo adquirido graças ao seu valor intrínseco, de natureza lógica, ao seu rigor, exatidão e precisão, mas principalmente devido ao predomínio da ciência e da tecnologia modernas, desenvolvidas a partir do século XVII na Europa, nas quais a Matemática torna-se um poderoso instrumento na solução de problemas científicos.

Em diversas culturas surgiram modelos de conhecimento matemático diferentes, consoantes com o entorno social em que foram criados. Nessa perspectiva, o modelo dominante, ou melhor, a matemática que hoje conhecemos,

> [...] se originou e desenvolveu na Europa, tendo recebido algumas contribuições das civilizações indiana e islâmica e que chegou à forma atual nos séculos XVI e XVII, e então levada e imposta a todo o mundo a partir do período colonial (D'AMBRÓSIO, 1996, p. 112).

Isso significa que a Matemática, tal como é hoje veiculada na sociedade, foi produto da criação e invenção do homem nas suas interações com o meio natural, cultural, político e social; fruto de embates e de escolhas. Desse modo, entendemos que a matemática é um dos vários elementos que compõe a cultura[10] humana e, como tal, está sujeita às influências de cada momento histórico.

Ao lado do desenvolvimento da Matemática nas diferentes culturas, houve o desenvolvimento de formas simbólicas para registrar as descobertas matemáticas, ou seja, para representar a Matemática. Houve um tempo no qual a Matemática era escrita por meio de uma mistura de geometria e retórica, o que dificultou de certo modo, o desenvolvimento de muitas de suas noções. Isso pode ser observado, por exemplo, em Boyer (1974, p. 70), quando afirma que "Foram as deficiências das notações algébricas que mais fortemente operaram para impedir que os gregos construíssem uma verdadeira geometria de coordenadas". Em Eves (2007, p. 383), também encontramos argumentos nesse sentido:

---

[9]O termo universalidade é utilizado em dois sentidos: o primeiro diz respeito às origens e desenvolvimento da matemática em diversas culturas e espaços, e o segundo é relacionado à utilização da matemática nos mais variados campos do conhecimento Brasil (1998, p. 24,25); D'Ambrósio (1996, p. 112,113).

[10] Entendida aqui como o produto acumulado do esforço da humanidade no decorrer de um tempo e espaço determinados.

> Mas a essência real desse campo da matemática (referindo-se ao nascimento da geometria analítica)[11] reside na transferência de uma investigação geométrica para uma investigação algébrica correspondente. Antes de a geometria analítica poder desempenhar plenamente esse papel, teve de esperar o desenvolvimento do simbolismo e dos processos algébricos.

Podemos dizer então que, em contrapartida, uma das principais causas para o fortalecimento, a constituição e desenvolvimento da Matemática foi a organização de uma linguagem particular para representá-la – *uma linguagem semiotizada.*

Ao se instaurar essa linguagem simbólica para representar cálculos, iniciada com Viète no fim do século XVI, Descartes no início e Leibniz no final do século XVII, torna-se possível o desenvolvimento de cálculos complexos pela linguagem algébrica, a formalização das operações aritméticas e, por fim, a abstração em matemática (EVES, 2007). Isso também deve-se ao fato de que a partir da segunda metade do século XVII, no mundo ocidental moderno, a representação, segundo Foucault (1992), passa a ocupar um lugar central na estrutura geral dos saberes.

As maneiras pelas quais as idéias matemáticas são representadas por uma determinada cultura, num momento histórico específico, são fundamentais para se entender como essas culturas compreendem e usam essas idéias. Pode-se dizer então que, em Matemática, desde Viète, Descartes e Leibniz, a representação semiótica assume papel primordial na análise do conhecimento científico. As idéias matemáticas podem ser representadas além da retórica, por uma linguagem específica, por meio do uso de signos que estabelecem a ligação entre os objetos pensados e os objetos representados.

Como foi visto, a representação semiótica tem um papel importante no desenvolvimento cognitivo e também na própria constituição dos conhecimentos, em particular do conhecimento matemático. Parece ser uma conclusão lógica, portanto, que ela assuma, no processo de aprendizagem no contexto escolar, um lugar de destaque.

Compreender, portanto, o papel das representações semióticas no desenvolvimento do pensamento humano e, especificamente, no desenvolvimento da matemática enquanto ciência, permite refletir sobre o seu ensino sob um ponto de vista diferenciado: considerar além das definições e conceitos, as representações

[11] Observação nossa.

semióticas dos objetos matemáticos como instrumento de mediação, ou seja, como forma de comunicação, de acesso, de organização e de tratamento dos conhecimentos.Trata-se então de considerar o aluno como sujeito consciente do conhecimento, que interage com o saber matemático, historicamente elaborado, a partir de suas atividades escolares e práticas, nas quais utiliza as representações semióticas para acessar, apreender e elaborar o conhecimento. Sendo assim,

> O saber adquirido pode então ser visto como o produto da elaboração da experiência com a qual o sujeito-aprendiz entra em contato; essa elaboração consiste na interação entre o indivíduo e o seu ambiente e na maneira pela qual o indivíduo interioriza o mundo exterior. Quaisquer que sejam as peculiaridades dessas “atividades”, o sujeito que aprende deve envolver-se em alguma coisa que necessariamente o leva à simbolização. Trata-se de uma necessidade tipicamente humana, uma elaboração (com características internas ou sociais ou ambas) que se organiza ao redor ou nos sistemas semióticos de representação (D’AMORE, 2005, p. 54-5).

Podemos dizer, então, que na aprendizagem matemática deve existir uma relação de dupla entrada entre sistemas cognitivos e sistemas semióticos. Dupla entrada porque não se pode privilegiar um em detrimento do outro, sob pena de dificultar a apreensão dos conhecimentos. Duval (1998b) nos chama atenção para o fato de que em todo problema da aquisição dos conhecimentos o ponto central é compreender as transformações cognitivas necessárias para que um objeto inacessível possa se tornar acessível em forma de apreensão imediata a um sujeito. Contudo, há que se levar em conta que a acessibilidade imediata dos conhecimentos à consciência do indivíduo, por assim dizer, vai variar significativamente, segundo Duval (1998b), dependendo da posição que esse sujeito ocupa, seja um professor de matemática, um matemático ou um aluno em estágio inicial de formação. Essa variação ocorre porque as “experiências” com os objetos matemáticos são consideravelmente distintas pelo fato de cada sujeito possuir uma história pessoal, particular, influenciada pelo seu entorno sociocultural.

Isso nos leva a dizer que o sujeito do conhecimento está numa relação com o objeto do conhecimento (neste caso, matemático) e tal relação é mediada semioticamente, uma vez que a mediação semiótica é “interiorizável” (Duval,1998b, p. 174), possibilitando que os objetos matemáticos se tornem acessíveis à consciência desse sujeito. Em outras palavras, como o conhecimento matemático não é imediatamente acessível à consciência, ele precisa ser representado e tornado acessível. Essa questão para a aprendizagem - na organização de orientações curriculares, programas de formação de professores e elaboração de seqüências de ensino - é um fator extremamente importante a se considerar. Isso porque, se a educação visa, em sua acepção primeira, desenvolver um funcionamento cognitivo que seja intrinsecamente consciente (de tal forma que o sujeito tenha pleno discernimento dos objetos apreendidos e possa utilizar esse conhecimento em situações diversas), são as representações semióticas que permitem ao mesmo tempo efetuar um trabalho de conhecimento científico e acessar os objetos matemáticos (aspecto cognitivo).

Refletir, sob a ótica da representação semiótica, na constituição do conhecimento matemático, no desenvolvimento cognitivo e, finalmente, na aprendizagem da matemática requer algumas inferências, tais como: a importância da representação semiótica na constituição e compreensão dos conceitos matemáticos; na comunicação que, por sua vez, se fundamenta em signos (códigos, símbolos, imagens) e seus significados; no tratamento dos conhecimentos. Nesse sentido, Steinbring (1991) postula que os signos matemáticos apresentam funções semióticas e epistemológicas. Função semiótica, no sentido do signo significar algo, sob certos aspectos, para alguma coisa ou alguém e função epistemológica na perspectiva da construção do saber e do pensamento matemático. Na concepção desse autor, os signos (matemáticos) são considerados principalmente como "instrumentos" requerendo determinados sistemas de sinais ou símbolos, a fim de registrarem e de codificarem o conhecimento matemático.

Na última década, várias pesquisas em Educação Matemática vêm sendo desenvolvidas a partir de perspectivas teóricas provenientes da Psicologia, Antropologia, Lingüística e Sociologia, tendo como base principal os estudos que envolvem a Semiótica, visando analisar e compreender os processos implicados no ensino e na aprendizagem da Matemática. Nesta pesquisa estaremos tomando, sobretudo, os estudos de Raymond Duval[12] e suas elaborações acerca dos Registros de Representação Semiótica (RRS) e a aprendizagem da matemática.

[12]Raymond Duval é psicólogo e filósofo de formação. Desenvolveu estudos em Psicologia Cognitiva, concentrando suas investigações em torno dos aspectos semióticos na aprendizagem matemática. Atualmente é professor emérito na Université du Littoral Cote d'Opale, França.

1.3 OS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA (RRS) SOB A ÓTICA DE DUVAL

A questão da representação semiótica relacionada ao desenvolvimento dos conhecimentos científicos matemáticos é tratada por muitos autores[13], desde Viète no final do século XVI. No entanto, é Duval[14] que traz a problemática da representação semiótica especificamente relacionada à questões da aprendizagem matemática em seus trabalhos. Os estudos iniciados por esse autor, em Psicologia Cognitiva, no Instituto de Pesquisa em Educação Matemática (Irem) de Estrasburgo, na década de 1980, insere a problemática do trânsito entre os diversos RRS na Educação Matemática, como uma forma sistemática de investigar o funcionamento cognitivo implicado na atividade matemática e nos problemas que envolvem essa aprendizagem.

Duval toma as considerações a respeito da representação semiótica dos objetos matemáticos e da necessária distinção entre objeto e representação, como fundamento para tecer suas idéias a respeito do problema da aprendizagem matemática no aspecto cognitivo, ou melhor, do problema das condições específicas de acesso aos objetos matemáticos.

A diversidade de representações semióticas se apresenta com um papel primordial na compreensão da matemática, nas premissas de Duval. Ele introduz um termo específico para denominar os diversos signos utilizados para representar o conhecimento matemático, os Registros de Representação Semiótica – RRS:

> [...] é essencial, na atividade matemática, seja poder mobilizar muitos registros de representação semiótica (figuras, gráficos, escrituras simbólicas, língua natural, etc...) no decorrer de um mesmo passo, seja poder escolher um registro antes que outro (DUVAL, 1993, p. 40).

De acordo com Duval (1999), a palavra *registro*, em francês, é habitualmente empregada para indicar as maneiras diferentes de utilizar a língua para se exprimir ou utilizar uma nota musical. Historicamente, segundo ele, registro foi a palavra utilizada por Descartes para distinguir a escritura algébrica *dês courbes* de sua representação figural, no seu primeiro livro *Géométrie* (1637). Sendo assim,

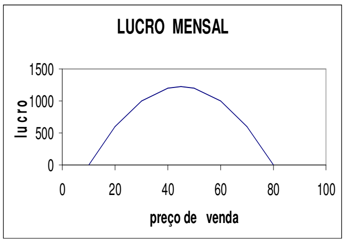
---

[13] Ver por exemplo ,Frege (1978); Ladrière 1977; Lefebvre (1983); Serfati (1997), Foucalt (1992) e Lefebvre (2001) citados em Flores (2006)
[14] Pode-se consultar por exemplo Duval (1988, 1993, 1995, 1998,2003).

parafraseando Descartes, ele utilizou a mesma palavra, registro, para designar os diferentes tipos de representação semiótica em matemática (DUVAL, 1999, 2003).

Assim, os variados tipos de escritura para os números, escrituras algébricas para expressar relações e operações, figuras geométricas, gráficos, diagramas, esquemas, por exemplo, são registros de representação semiótica, constituídos dentro de um sistema de representação com capacidades específicas para denotar ou descrever objetos, ações e relações entre objetos.

Um sistema de representação semiótica, segundo Duval (1995), pode ser definido como um conjunto de códigos (signos), organizados segundo regras de formação e convenções próprias, que apresentam relações internas que permitem identificar os objetos representados e estabelecer relações com outros objetos e sistemas matemáticos.

Assim, os signos: *1, 2, 3* são RRS para representar o objeto conceitual "número natural"; os signos *y = a + bx* são registros para representar o objeto conceitual "função afim"; o signo 

é um registro que representa uma função de segundo grau. Todos esses registros fazem parte de um Sistema Semiótico de Representações, sendo que o primeiro faz parte de um Sistema Numérico; o segundo é constituído dentro de um Sistema Algébrico; e o último é um registro do Sistema Figural.

Duval (1993, 1995, 2003) postula que é necessário mobilizar sistemas cognitivos específicos para cada atividade matemática, que é essencialmente ligada às operações semióticas. Portanto, Duval defende que a matemática se constitui num campo de estudos privilegiado para a análise de atividades cognitivas fundamentais como a conceitualização, o raciocínio, a resolução de problemas e também a compreensão de textos. Estas atividades cognitivas requerem regras de codificação próprias, uma vez que cada registro apresenta certas limitações representativas específicas. Surgindo daí a necessidade da utilização de outros sistemas de expressão e de representação, além da linguagem natural e das imagens, como sistemas de escrita para os números, notações simbólicas para os objetos, escrita algébrica, escrita lógica, figuras geométricas, representações em perspectiva, gráficos cartesianos, redes, diagramas, esquemas, etc.

Duval (1993) coloca, como operações fundamentais para a compreensão da Matemática Escolar, o tratamento (quando se trabalha com registros do mesmo sistema semiótico) e a conversão (quando se opera com registros de sistemas semióticos diferentes), sendo que o trânsito entre representações é considerado essencial em sua proposta teórica.

Desse modo, acreditamos que a utilização de múltiplas representações contribui no desenvolvimento da capacidade do aluno de interligá-las, fazendo com que possa distinguir a mesma função em RRS diferentes. Também facilita na criação de imagens mentais que permitem utilizar as características das funções em campos para além daqueles em que foram aprendidas. E se essas questões podem facilitar a aprendizagem da Matemática Escolar é preciso pensar na articulação dessas idéias no processo de escolarização básica, no qual entram em jogo condicionantes que conformam uma lógica que orienta a incorporação de diferentes saberes à Matemática Escolar. É no contexto de interação com essa lógica da prática escolar que entendemos a importância das diferentes representações semióticas dos objetos matemáticos, das situações e atividades matemáticas componentes da configuração didática de uma aula de Matemática.

Vários são os condicionantes que entram em jogo na escolarização, tais como: o entorno social de onde a escola está inserida, os professores e suas crenças, atitudes e conhecimentos, os alunos, o material didático, a proposta pedagógica da escola. Um dos principais condicionantes, no entanto, é o currículo prescrito, que se constitui no documento oficial que mostra o desenho do que se projeta para ser objeto de ensino nas escolas. É na dimensão do currículo que se manifestam muito fortemente os vínculos da Matemática Científica com a Matemática Escolar. É na dimensão do currículo que se estabelecem os primeiros contornos das relações que farão parte do processo de ensino e aprendizagem da Matemática Escolar. E é também na dimensão do currículo que pretendemos investigar as relações entre a representação semiótica e a Matemática Escolar, pois é também a partir das idéias contidas nas propostas curriculares que é possível recriar a matemática que é ensinada na escola.

Esse trabalho vem contribuir, portanto, na tônica da aprendizagem da Matemática Escolar, porque procura discutir algumas das contribuições das pesquisas em Educação Matemática, principalmente aquelas relacionadas à psicologia da aprendizagem, em propostas curriculares. Desse modo, a questão de investigação a que nos propomos é: “o conhecimento matemático, compreendido a partir da perspectiva das representações semióticas, pode se tornar uma alternativa profícua na organização de propostas curriculares articuladas às orientações teórico-metodológicas referendadas nos documentos legais que orientam a educação brasileira, em particular a educação matemática, propiciando, a partir disso, um complemento teórico para a discussão sobre a constituição da linguagem matemática e sobre o processo de ensino-aprendizagem da mesma?”

Isso implica construir uma compreensão da natureza do saber matemático ensinado nas escolas, ou seja, a Matemática Escolar, como conhecimento sociocultural produzido e validado como conhecimento de referência e associado ao desenvolvimento do processo de educação escolar básica em Matemática. Também implica em compreender o funcionamento da representação semiótica na aprendizagem da Matemática e como ela pode estar articulada nas tarefas escolares, utilizando-a de forma explícita como possibilidade teórico-metodológica no desenvolvimento de propostas curriculares para essa disciplina. Daí, podemos reorganizar a questão de investigação: como explicitar em uma proposta curricular a questão das representações semióticas articuladas às diferentes tarefas escolares?

Assim sendo, o objetivo principal desta tese é refletir, crítica e teoricamente, sobre o currículo e RRS, a fim de elaborar uma proposta curricular para o Ensino Fundamental pautada nessa noção, e evidenciar as possibilidades didático-pedagógicas dessas representações na exploração de tarefas matemáticas de diferentes naturezas. O recorte escolhido foi o campo numérico, especificamente os Números Naturais no Ensino Fundamental.

Primeiramente, pensamos em desenvolver a proposta para todo o campo numérico, ou seja, “Números e Operações” para o Ensino Fundamental. No entanto, com o desenvolvimento dos estudos e a necessidade de discutir outros elementos teóricos para complementar a proposta, entendemos que a proposição para os Números Naturais, nos daria a oportunidade de aprofundamento das idéias articuladas em torno do desenvolvimento do conceito número, necessários para a organização do conjunto dos naturais e ampliação para os demais conjuntos numéricos. Além disso, a proposição poderia se apresentar como um exemplo para ser refletido e, posteriormente, até mesmo aplicado nas escolas.

O motivo que nos levou a escolher o campo Números e Operações para a proposição curricular, está relacionado a três fatores principais. O primeiro diz respeito ao interesse em discutir sobre a aprendizagem dos números pelo fato de eles estarem relacionados incontestavelmente ao modo de vida em sociedade e, com isso, ficam estabelecidas também as conexões com outros campos da matemática, como a Geometria e a Álgebra, por exemplo. A necessidade de contar, de valorar uma propriedade, a demarcação de áreas, as transações bancárias, o processo de compra e venda num comércio, para citar apenas algumas das atividades humanas que requerem o uso dos números e que, portanto, justificam esforços no sentido de esclarecer e melhorar o processo de ensino e aprendizagem na escola.

O segundo fator relaciona-se com a importância dos números na estrutura da própria Matemática, uma vez que muitos historiadores, como Eves (2007) por exemplo, localizam a origem da matemática antiga na origem dos números:

> [...] usualmente se considera como a matemática mais antiga aquela resultante dos primeiros esforços do homem para sistematizar os conceitos de grandeza, forma e número [...]. O conceito de número e o processo de contar desenvolveram-se tão antes dos primeiros registros históricos (há evidências arqueológicas de que o homem, já há uns 50.000 anos, era capaz de contar) que a maneira como ocorreram é largamente conjectural (EVES, 2007, p. 25).

O terceiro fator se fundamenta em termos mais práticos, pois existem muitos estudos sobre a construção do Número Natural, alguns, como o de Brandt (2005), envolvendo os RRS, que podem fornecer elementos consistentes para compor a proposição curricular. Ou seja, nosso estudo dialoga com as pesquisas, está intimamente ligado ao desenvolvimento de investigações sobre a aprendizagem em Matemática.

Partindo desse recorte, ao focalizar a representação semiótica – assumindo como premissa que esta é essencial na produção dos conhecimentos, no desenvolvimento cognitivo e na aprendizagem – localizamos nosso estudo, mesmo tendo o currículo como temática, no campo da aprendizagem da Matemática

Escolar. Isso porque questionamos como a representação semiótica pode estar articulada na produção curricular da matemática que é ensinada na escola.

Os fatos e indagações aqui descritos justificam nosso interesse em realizar esta investigação. No entanto, para justificá-la plenamente e mostrar sua relevância acreditamos ser necessário problematizar ainda mais a questão da utilização da representação semiótica, tanto no âmbito de propostas curriculares da Educação Básica como no das pesquisas científicas em Educação Matemática.

1.4 AS PROPOSTAS CURRICULARES E AS REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS

Conforme Pires (2000), no decorrer dos anos 1980 e 1990, muitos países realizaram e implementaram reformas curriculares procurando adequar o ensino da matemática aos desafios impostos pela sociedade e, portanto, das novas atribuições conferidas à educação. Muitas dessas, no limiar do ano 2000 e com a entrada no novo século, passaram ou estão passando por processos de reajustamento.

A título de exemplo, e para contextualizar o nosso problema de pesquisa no contexto internacional, vamos analisar as propostas curriculares dos Estados Unidos[15] e de Portugal no que se refere à questão da presença explícita da representação semiótica. Optamos por analisar especificamente a proposta desses dois países não sem motivos, as orientações do NCTM nos EUA, por ter se constituído como referência para muitas propostas desenvolvidas em outros países desde sua primeira versão, em 1987. E Portugal, por ter passado por um reajustamento recente, em 2007, promovendo discussões com os professores e a comunidade escolar. Assim, acreditamos que, com base no estudo desses dois países, poderemos ter um indicativo sobre a direção atual do que se tem pensado para a Matemática Escolar no contexto internacional.

[15] Na verdade, os Estados Unidos da América não apresentam um currículo nacional, no entanto os Principles and Standards for School Mathematics, do NCTM – National Council of Teachers of Mathematics (2000), constituem-se em um documento não oficial (no sentido de que não tem força de lei nos EUA) extremamente desenvolvido em exemplos e justificações sendo amplamente aceitos pela comunidade internacional em Educação Matemática.

Em seguida, é preciso também olhar para as orientações curriculares dos documentos oficiais brasileiros, no sentido de buscar relações com as questões propostas nesta pesquisa: primeiro, identificar se há referência aos aspectos relacionados às representações semióticas; e segundo, pensar sobre as possíveis articulações entre o que pretendemos com o que é proposto em tais documentos.

1.4.1 A Proposta dos Estados Unidos

Em 1986, nos Estados Unidos a junta diretiva do Conselho Nacional de Professores de Matemática (NCTM) criou a Comissão em *standards* (declarações de princípios para julgar o valor de um currículo matemático ou de métodos de avaliação), com o objetivo de orientar os procedimentos de revisão do currículo matemático escolar e de construir uma visão de uma cultura matemática que possa ser aprendida por todos os estudantes.

Essa comissão elaborou um documento para orientar os currículos de matemática nas escolas americanas (a primeira versão em 1987 e revisada em 1988), os *Principles and Standards for School Mathematics*. O documento apresenta seis princípios básicos e 10 *standards* (ou normas) para guiar o processo de ensino e aprendizagem da matemática escolar.

Os princípios destacados pelo NCTM são: equidade, currículo, ensino, aprendizagem, avaliação e tecnologia. Esses princípios, de acordo com o NCTM (2000), não se referem exclusivamente ao ensino da matemática, pois podem influenciar o desenvolvimento do currículo, a seleção de materiais para a efetivação do currículo na escola, o planejamento de unidades de materiais didáticos e de avaliações, o estabelecimento de programas de desenvolvimento e formação de professores.

Já os *standards* indicam as normas ou padrões considerados necessários para o desenvolvimento de uma instrução matemática que permita aos alunos o saber e fazer, ou seja, as normas especificam as maneiras e o tipo de compreensão, conhecimento e habilidades que os alunos devem adquirir no decorrer de sua vida escolar. Para isso, são definidos 10 padrões, 5 relacionados aos conteúdos e 5 aos procedimentos e processos.

As normas para os conteúdos explicitam e descrevem os conteúdos que os estudantes devem aprender: Números e Operações, Álgebra, Geometria, Medidas e Análise de Dados e Probabilidades. As normas relacionadas aos processos destacam as maneiras consideradas relevantes para os alunos adquirirem e usarem o conhecimento: "resolução de problemas, raciocínio e prova, comunicação, conexões e representações" (NCTM, 2000, p. 29).

Esses 10 padrões aparecem nos *Principles and Standards for School Mathematics* explicitados primeiramente, num capítulo específico, o Capítulo 3, sob o título *Standards for School Mathematics* e, posteriormente, em todos os níveis de ensino aparecem explicações e indicações para cada um dos padrões.

No padrão Representação, o NCTM (2000) esclarece a importância atribuída ao uso das representações na compreensão da matemática, ao colocar que, quando os estudantes utilizam as representações matemáticas e as idéias que representam, podem dispor de um jogo de ferramentas que expandem significativamente sua capacidade de pensar matematicamente.

Os objetivos pretendidos com a utilização de representações aparecem em todos os níveis de ensino do documento (p. 135, 205, 279, 359) os quais, de forma resumida, são:

- criar e usar representações para organizar, lembrar e comunicar idéias matemáticas;
- selecionar, aplicar e traduzir entre representações matemáticas diversas para resolver problemas;
- usar representações para modelar e interpretar fenômenos físicos, sociais e matemáticos.

O documento considera ainda que as representações devem ser tratadas como elementos essenciais na compreensão dos alunos, uma vez que são uma parte essencial para aprender e fazer matemática.

O NCTM não faz referência ao termo "representações semióticas" mas sim a "representações matemáticas", termo que, acreditamos, seja utilizado na mesma perspectiva que entendemos as representações semióticas nos itens anteriores. Na verdade, em alguns momentos o documento parece utilizar o termo representação para designar o uso de representações mentais dos alunos e também das representações simbólicas, não esclarecendo a diferença entre os dois aspectos do ato de representar.

Além dessas constatações, encontramos alguns elementos explicitados que são característicos da proposta teórica de Raymond Duval, e que pretendemos usar em nossa pesquisa por considerarmos de importância para o ensino da Matemática Escolar:

- representações diferentes mostram frequentemente aspectos diferentes de um conceito;
- a importância de usar representações múltiplas deve ser enfatizada durante toda a instrução matemática dos alunos;
- enquanto os alunos se tornam sofisticados matematicamente, desenvolvem um repertório cada vez maior de representações matemáticas e melhoram o conhecimento de como usá-las produtivamente. Tal conhecimento inclui escolher e mover-se entre representações, e a aprender a fazer perguntas como, um gráfico me daria mais introspecção do que uma expressão simbólica para resolver um problema?

A partir do exposto observamos que o documento faz uma forte referência ao uso das representações relacionadas a ferramentas tecnológicas e à capacidade de comunicar as idéias matemáticas.

1.4.2 A Proposta de Portugal

Na proposta de reajustamento do Programa de Portugal observamos indicações que denotam uma intencionalidade explícita no trabalho com representações semióticas. Essa intencionalidade é denotada primeiramente nos objetivos gerais para o ensino da Matemática. Em três objetivos aparecem questões relacionadas às representações, sendo que no objetivo 3 de forma bastante explícita:

> 3. Os alunos devem ser capazes de lidar com idéias matemáticas em diversas *representações*. Isto é, devem ser capazes de:
> • ler e interpretar representações simbólicas, pictóricas, tabelas e gráficos, e apresentar adequadamente informação em qualquer destas formas de representação;
> • traduzir informação apresentada numa forma de representação para outra, em particular traduzir para termos matemáticos informação apresentada em linguagem natural;
> • elaborar e usar representações para registrar, organizar e comunicar idéias matemáticas;
> • usar representações para modelar, interpretar e refletir sobre situações matemáticas e não matemáticas, incluindo fenômenos naturais ou sociais.
> Os alunos devem conhecer e compreender os diferentes tipos de representações, ser capazes de as utilizar em diferentes situações e de selecionar a representação mais adequada à situação (PORTUGAL, 2007, p. 7).

Esse objetivo pretendido para o ensino da matemática mostra claramente a importância atribuída às representações semióticas pela proposta de Portugal, no sentido tomado por Duval. Inclusive no que se refere à questão de sua hipótese de aprendizagem, que preconiza o uso de diversas representações e a capacidade de escolher a representação mais econômica para resolver determinado problema.

Ainda os objetivos 4 e 5 apresentam elementos fortes relacionados com a questão das representações, no que diz respeito à capacidade de comunicar idéias matemáticas e raciocinar matematicamente, valorizando o uso da linguagem natural e da linguagem matemática para isso.

Em todo o documento há referências sobre o uso de representações, de trânsito entre representações e de seleção de representações mais adequadas a determinadas situações. Desde os objetivos para o ensino, passando para as orientações metodológicas até a organização dos conteúdos.

As orientações metodológicas esclarecem e explicitam como deve ser o trabalho com as representações semióticas:

> O trabalho com os conceitos matemáticos mais importantes deve envolver, sempre que possível, mais do que uma forma de representação. Os alunos necessitam, por isso, de adquirir desembaraço a lidar com diversos tipos de representação matemática – sejam os números e as operações aritméticas, os objetos geométricos, os dados estatísticos, o simbolismo algébrico e a representação cartesiana ou outros tipos de gráficos, tabelas, diagramas e esquemas. Os alunos têm de compreender que existe uma variedade de representações possíveis para as idéias matemáticas. Tão importante como saber reconhecer as convenções inerentes a cada tipo de representação e interpretar a informação apresentada é a capacidade de passar informação

> de uma forma de representação para outra. Antes das representações simbólicas, muitas vezes é apropriado usar representações icônicas. Os alunos podem começar por sentir a necessidade de representar os objetos e relações matemáticas, desenvolvendo para isso as suas próprias representações não convencionais. À medida que o trabalho prossegue, o professor tem de fazer sentir a necessidade de uma linguagem partilhada, introduzindo progressivamente as representações matemáticas convencionais (PORTUGAL, 2007, p. 12).

Na organização dos conteúdos e objetivos específicos da proposta aparecem tópicos que indicam o uso das representações semióticas, a exemplo do que pretendemos realizar nesta tese em relação aos Números Naturais.

O programa de Portugal ainda preconiza 3 grandes capacidades transversais que estariam permeando todo o processo de ensino e aprendizagem da matemática: a Resolução de Problemas, o Raciocínio matemático e a Comunicação Matemática. Ao lado dessas capacidades, as experiências curriculares em Portugal valorizam também, como transversais, as capacidades de representação e estabelecimento de conexões dentro e fora da Matemática.

A reestruturação do programa curricular de Portugal fala a favor de um trabalho pautado na questão da representação semiótica, agregando elementos dessa noção no decorrer de todo o documento. O que observamos não estar contemplado é uma explicitação do que o documento entende como representação semiótica e indicações de referências que possam denotar a concepção teórica que fundamenta o programa.

1.4.3 Os PCN e as Propostas Curriculares Brasileiras

Entendendo currículo como uma elaboração, que acontece num determinado tempo e espaço, subentende-se que as várias formas assumidas obedecem a discursos diferentes, em que habitam filosofias resultantes das intencionalidades que o produzem (BERTICELLI, 1998). Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de Matemática para o Ensino Fundamental representam um documento curricular oficial de referência para a organização de propostas curriculares das secretarias de educação estaduais do Brasil, desde sua elaboração em 1998. Neles estão presentes filosofias e intenções determinadas que passam a ser colocadas em prática quando utilizadas na elaboração das propostas específicas de um Estado, Município e, particularmente, das escolas. Em outras palavras, queremos dizer que existe uma intencionalidade subjacente à proposta apresentada nos PCN. E, justamente por se constituir em um documento utilizado na construção das propostas curriculares nas escolas do País é importante analisar se a questão das representações semióticas é considerada, em algum momento, na proposta presente nos documentos impressos dos PCN de Matemática para o Ensino Fundamental, tanto das séries iniciais quanto das séries finais. Ao mesmo tempo, buscamos olhar se há possibilidades de articulação entre as orientações já presentes no documento e a inserção da noção de representação semiótica.

Na apresentação do documento é colocada a concepção do saber matemático que se pretende desenvolver na escola, ou seja, os PCN indicam que o papel da matemática será o de instrumentar o aluno (sujeito) a exercer a sua cidadania. Para isso, a Resolução de Problemas é tomada “como ponto de partida da atividade Matemática” (BRASIL, 1998, p. 16).

Tendo a concepção do saber matemático definida, é apresentado um resgate histórico sobre as reformas curriculares na matemática que aponta a existência da busca de soluções criativas e inovadoras para o ensino. Contudo, o documento ressalta que apesar dessas tentativas serem válidas e incentivadas oficialmente, ainda ocorrem de forma isolada.

Ao traçar o panorama sobre o ensino da matemática no Brasil, o documento aponta que, em termos escolares, um dos entraves comuns é o fato dos conteúdos matemáticos serem tratados de forma isolada, apresentados exaustivamente num único momento e, quando retomados, geralmente não se estabelecem as devidas conexões. São apresentados apenas como ferramentas para a compreensão de novas noções, e muitas vezes como sendo um outro objeto matemático e não como uma outra representação de um mesmo objeto, em muitos casos. Na compreensão de como se superaria tal situação aparece o primeiro traço que relacionamos à idéia das representações semióticas: “De modo geral, parece não se levar em conta que, para o aluno consolidar e ampliar um conceito, é fundamental que ele o veja em novas extensões, representações ou conexões com outros conceitos.” (BRASIL, 1998, p. 22-23).

Essa última afirmação nos parece claramente uma alusão às idéias de Raymond Duval, quando afirma que para existir conceitualização, ou seja, a real compreensão do conceito estudado, deve também existir o trânsito e a coordenação entre os diversos registros de representação semiótica do mesmo objeto matemático em estudo. O fato de haver uma referência bibliográfica de Duval, nos PCN, corrobora nessa afirmação, mas a idéia não é desenvolvida de maneira aprofundada.

De um modo geral, a proposta apresentada pelos PCN para o ensino da matemática é articulada em torno de discussões a respeito da área de conhecimento partindo do caráter histórico. O saber matemático é concebido como sendo “algo flexível e maleável às inter-relações entre os seus vários conceitos e entre os seus vários modos de representação, e, também, permeável aos problemas nos vários outros campos científicos.” (idem, p. 26). Aqui detectamos um segundo traço que parece apontar para a utilização dos elementos da noção teórica dos registros de representação semiótica.

Um dos objetivos gerais para o ensino da matemática no Ensino Fundamental, destacado pelos PCN é: “estabelecer conexões entre temas matemáticos de diferentes campos e entre esses temas e conhecimentos de outras áreas curriculares” (BRASIL, 1998, p. 48). Nesse objetivo, observamos também um pressuposto para o trabalho com as representações semióticas dos objetos matemáticos, pois a partir das diferentes representações do mesmo objeto, poderão estar sendo realizadas as conexões entre os campos temáticos considerados nos Parâmetros.

No que diz respeito à seleção de conteúdos para o Ensino Fundamental, o documento explicita, e não deixa dúvida, sobre a estrutura conceitual presente nas orientações. Não faz referência explícita, no entanto, a um trabalho com as diferentes representações do mesmo objeto matemático, no sentido de aprimorar o desenvolvimento do conceito. Aborda, sim, a questão de procedimentos e atitudes:

> A seleção de conteúdos [...] pode se dar numa perspectiva mais ampla [...]. Dessa forma, pode-se considerar que os conteúdos envolvem explicações, formas de raciocínio, linguagens, valores, sentimentos, interesses e condutas. Assim, nesses parâmetros os conteúdos estão dimensionados não só em conceitos, mas também em procedimentos e atitudes. Conceitos permitem interpretar fatos e dados e são generalizações úteis que permitem organizar a realidade, interpretá-la e predizê-la.[...]Os procedimentos por sua vez estão direcionados à consecução de uma meta [...]. Os

> procedimentos não devem ser encarados apenas como aproximação metodológica para aquisição de um dado conceito, mas como conteúdos que possibilitem o desenvolvimento de capacidades relacionadas com o saber fazer, aplicáveis a distintas situações. As atitudes envolvem o componente afetivo - predisposição, interesse, motivação - que é fundamental no processo de ensino e aprendizagem (BRASIL, 1998, p. 49).

No entanto, quando propõe os conteúdos para o terceiro ciclo do Ensino Fundamental, referente aos Números, fornece algumas indicações que se referem ao uso de diferentes representações. Indica, por exemplo, "O estudo dos números racionais, nas suas representações fracionária e decimal, merecem especial atenção [...]" (idem p. 66), ou ainda "[...] perceber que os números têm múltiplas representações e compreender melhor as relações entre representações fracionárias e decimais, frações equivalentes, escritas percentuais e até a notação científica." (ibidem, p. 67), em uma alusão à importância de se considerar, no ensino, as representações semióticas diversas do objeto matemático em estudo.

Mais adiante, aparecem também afirmações como "Utilizar a linguagem algébrica para representar as generalizações inferidas a partir de padrões, tabelas e gráficos em contextos numéricos e geométricos."; "Construir, ler e interpretar tabelas e gráficos e escolher o tipo de representação gráfica mais adequada para expressar dados estatísticos"; "[...] a respeito das operações aritméticas e algébricas com os irracionais quando eles aparecem em representações simbólicas ($\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, π)" (ibidem, p. 84). Isso mostra a presença de algumas idéias envolvendo os registros de representação, como por exemplo, a importância de se usar registros diferentes para representar os objetos, mas não denota uma utilização efetiva da noção teórica, uma vez que esses elementos aparecem pontualmente e não inseridos numa proposta teórico-metodológica estruturada.

Quando o documento coloca alguns pontos a serem considerados na organização dos conteúdos, é possível percebermos uma abertura para a possibilidade em se pensar na inserção da questão da representação semiótica nos programas curriculares a serem desenvolvidos.

> [...]a variedade de conexões que podem ser estabelecidas entre os diferentes blocos,[...] o professor procurará articular <u>múltiplos aspectos dos diferentes conteúdos,</u> visando a possibilitar a <u>compreensão mais ampla</u> que o aluno possa atingir a respeito dos princípios e métodos básicos do corpo de conhecimentos matemáticos. (BRASIL, 1998, p.53). Grifo nosso.

Aqui, além da integração curricular evidente, acreditamos ser cabível pensar numa abertura para a questão do trabalho com as diversas representações semióticas do mesmo objeto matemático, possibilitando uma compreensão mais ampla dos conceitos e da mesma forma encaminhando para uma organização dos conteúdos que não seja a tradicionalmente conhecida, a organização linear.

Outra consideração que leva à essa direção, é a de que

> as possibilidades de seqüenciar os conteúdos são múltiplas e decorrem mais das conexões que se estabelecem e dos conhecimentos já construídos pelos alunos do que da idéia de pré-requisito ou de uma sucessão de tópicos estabelecida *a priori*. (ibidem).

Isso sugere que a flexibilidade necessária ao trabalho com a matemática escolar, quando se considera as representações do objeto matemático, é possibilitada pelos PCN. Até mesmo a forma como a avaliação é considerada nos Parâmetros fortalece essa idéia, uma vez que orienta para o valor educativo do erro, para a valorização das justificativas, argumentações e explicações orais, ou seja, para o uso da linguagem natural como um registro, principalmente nas resoluções dos problemas.

De um modo geral, podemos inferir que os PCN de Matemática não tratam explicitamente da noção teórica dos registros de representação semiótica. A representação não aparece como um modo de pensar e produzir o saber matemático. Não há nenhuma referência às operações cognitivas de tratamento e conversão que, segundo Duval, são essenciais para a compreensão em matemática. Contudo, o documento apresenta elementos que indicam uma abertura para o trabalho com essa noção na matemática escolar, quando consideram em algumas passagens a necessidade de trabalhar com "outras representações", e principalmente ao considerar a resolução de problemas como princípio para a organização das atividades escolares.

Isso porque, ao resolver um problema, o aluno estará no mínimo realizando uma conversão, que geralmente ocorre na direção do registro da língua natural para o registro simbólico, quando da interpretação do problema, e uma atividade de tratamento, ao operar com os dados do problema para solucioná-lo. Esta se constitui, a nosso ver, em uma primeira possibilidade de utilização efetiva da noção das representações semióticas em propostas curriculares.

Consideramos a integração curricular defendida nos PCN, como uma outra possibilidade de articular um trabalho pautado nas representações semióticas aos pressupostos deste documento para o ensino da matemática. Isso acontece na medida em que se torna necessário usar registros distintos para transitar em outras áreas do conhecimento, como os gráficos estatísticos em geografia e economia, por exemplo, ou as plantas e desenhos da engenharia e da arte. O desvelamento dessas interações, por meio da utilização de representações semióticas diversas, permite também relacionar a atividade matemática associada às diversas atividades sociais nas quais o conhecimento matemático é produzido e utilizado.

Os caminhos para fazer matemática em sala de aula indicados pelos PCN – jogos, tecnologias da informação e da comunicação e história da matemática – também se constituem como possibilidades de encadeamentos com as idéias de Duval, por permitirem a flexibilidade no tratamento do objeto matemático. Os jogos e as tecnologias, em primeira instância, possibilitam as conversões entre os registros e a história da matemática; a constatação das bases em que o conhecimento matemático e as suas diversas representações se criam, se desenvolvem e se aplicam.

Partindo dessas constatações, é de se esperar que a noção de representação semiótica também não faça parte, ao menos explicitamente, dos currículos estaduais, municipais e escolares. É com o intuito de verificar essa presença que analisaremos a proposta curricular dos estados de Santa Catarina e do Paraná.

1.4.4 As Propostas Curriculares de Matemática do Estado do Paraná e do Estado de Santa Catarina e a Articulação com a Noção de Representação Semiótica

Tomamos, como exemplo, a proposta curricular do Estado do Paraná, onde a pesquisadora atua profissionalmente, e do Estado de Santa Catarina, onde a mesma realiza o Doutorado, como forma de problematizar essa idéia em construção – as representações semióticas norteando orientações curriculares para o ensino da matemática. Além disso, a opção por esses dois estados se deu porque eles mostram um interesse no trabalho colaborativo com professores, gestores e especialistas que integram a rede pública de ensino, caminhando, nos últimos anos, para uma construção coletiva da proposta curricular que norteará o ensino de suas escolas.

O processo de reformulação da proposta curricular do Estado do Paraná ocorreu em seis fases. A primeira iniciou em 2003 e a sexta e última fase teve seu início com a implementação da nova proposta em 2006. Essa última fase tem a função de avaliar e acompanhar as propostas implementadas e por esta razão é considerada permanente e contínua (ARCO-VERDE, 2006).

A proposta das Diretrizes Curriculares para o Ensino Fundamental do Estado do Paraná, elaboradas para a área de ensino da matemática, deixa claro que procurou contemplar as sugestões, críticas e demandas contidas nos relatórios escritos pelos professores depois da versão preliminar. De um modo geral, as diretrizes apontam para sugestões que incorporam questões de conteúdo e forma.

O documento é apresentado em uma linguagem acessível ao professor, distanciando-se de termos muito técnicos ou acadêmicos. Apropria-se dos resultados das pesquisas recentes em Educação Matemática, o que é facilmente destacado ao se observar as referências adotadas, procurando aproximar o que é pesquisado na academia com o que é produzido nas escolas. Nesse sentido, podemos dizer que a proposta é atual, justamente porque considera a comunidade de pesquisadores em Educação Matemática como fonte de conhecimento científico para a produção de conhecimento com os professores.

O documento destaca ainda:

> [...] a importância de considerar processos lingüísticos, de uso de diferentes tipos de representações, de considerar a história social e cultural de todos os envolvidos, educandos e professores, bem como o contexto histórico, social e cultural no qual o encontro, na sala de aula ou não, estava acontecendo (PARANÁ, 2006, p. 4).

Ao fazerem referência ao “uso de diferentes tipos de representações” nos parece que, ao menos, os responsáveis pela compilação das diretrizes tenham tido contato com a teoria dos registros de representação semiótica. No entanto, ao continuar a análise do documento nos parece que tal citação foi superficial, não havendo maior aprofundamento nessas questões nos textos de referência nem tão pouco no desenvolvimento dos eixos temáticos para inserção dos conteúdos. Em alguns momentos, percebe-se tentativas de mostrar a importância de se fixar na diferenciação entre objeto matemático e suas representações, quando, por exemplo, é citado que a cultura escolar matemática é diferente da cultura matemática, quando considerada como ciência e que, assim, as "coisas" da matemática poderiam ter significados não-matemáticos: "[...] frações podem ser pizzas, números na forma decimal podem ser dinheiro e números negativos podem indicar temperaturas abaixo de zero" (PARANÁ, 2006, p. 13).

Esses assuntos são abordados quando o documento trata das inter-relações entre educação matemática, escola, sociedade, historicidade e cultura. Chama atenção para o fato de que a matemática deve ser ensinada não por estar tradicionalmente atrelada aos currículos das escolas, mas por ter um valor educativo enquanto educação matemática, capaz de potencializar a capacidade de ação e decisão do educando na sociedade e não apenas na escola.

Outrossim, ao colocar que uma lista de conteúdos não seria capaz de caracterizar uma cultura de matemática escolar, e que no mínimo teríamos que entender por que aqueles conteúdos estão ali e de que maneira deveriam ser apresentados na sala de aula, o documento abre para a possibilidade da superação da linearidade dos currículos concebidos como uma listagem de conceitos a serem trabalhados nos diferentes níveis de escolaridade. Em busca dessa superação cita a importância da história da matemática permear a educação matemática escolar bem como a resolução de problemas. Também abre espaço para uma reflexão sobre o papel do professor, a necessidade de um processo de formação continuada e a busca de sua autonomia no planejamento de aulas, desprendido de seqüências tradicionais de conteúdos expressos em materiais didáticos. Essa última afirmação também abre a possibilidade para o desenvolvimento de um trabalho pautado nos diferentes registros de representação semiótica.

Quando tratam especificamente dos conteúdos a serem sugeridos para o trabalho em sala de aula, as diretrizes abrem um item que procura relacionar a educação matemática, os conteúdos e significados, destacando que a proposta acredita que toda formação acontece por meio de algum conteúdo. Esse conteúdo que se aprende não independe de como se aprende e por que se aprende, buscando uma interdependência entre aspectos formativos e informativos.

O documento faz, ainda, referência à possibilidade de novas formas de se compreender a organização das ações na sala de aula de Matemática, dentre as quais cita o exemplo da Escola Soviética, com o trabalho de V. V. Davydov e seus colegas, que desenvolveram um currículo para a Educação Matemática. Esse currículo foi baseado na idéia de oferecer às crianças instrumentos semióticos que potencializassem suas capacidades cognitivas, promovendo a generalidade do pensamento e levando a seu desenvolvimento intelectual.

Assim, nas diretrizes não são apontados conteúdos específicos mas, continuando na mesma linha do Currículo Básico do Paraná e dos Parâmetros Curriculares Nacionais, apontam os quatro eixos temáticos: Números e Operações, Medidas, Geometria e Tratamento da Informação para nortear e auxiliar na organização e operacionalização das ações de sala de aula. Em cada um dos eixos se fornecem indicações para o como trabalhar os conteúdos. No entanto, apesar das diretrizes ressaltarem a importância do professor realizar a devida relação de dependência entre os eixos, os apresenta de forma isolada, denotando para a questão fortemente conceitual presente na organização curricular.

Nas orientações para os eixos temáticos, algumas idéias a respeito das representações semióticas são colocadas. Por exemplo, em Geometria afirma-se "[...] olhar para depois representar"; em Números e Operações destaca-se "registros na linguagem numérica", "ampliação dos campos numéricos para os campos geométrico e algébrico"; em Tratamento da Informação aponta-se: "várias formas de representar dados". Entretanto, essas idéias não são exploradas devidamente, são apenas lançadas sem um contexto teórico mais especificado, denotando que a idéia conceitual ainda predomina nas Diretrizes Curriculares do Estado do Paraná e que a presença da noção de representação semiótica é muito tênue.

A proposta de Santa Catarina já nos parece mais estruturada quanto às orientações práticas e metodológicas ao professor, apesar de também manterem uma estrutura exclusivamente conceitual ao elencarem os conteúdos para serem trabalhados nas diferentes etapas da escolarização.

A estrutura apresentada divide-se em campos do conhecimento, a saber: Campos Numéricos, Campos Algébricos, Campos Geométricos e Estatística e Probabilidade, em uma estrutura que não deixa de ser linear, mas que, segundo o documento, tal linearidade é utilizada apenas para efeito de organização. Para fugir dela afirma que todos os conceitos devem ter uma abordagem articulada. No entanto, como na proposta do Paraná, são citados alguns poucos exemplos de como essa articulação poderia ser feita.

Uma passagem interessante e inovadora de que trata a Proposta de Matemática, diz respeito a uma forma de apresentar os conceitos que flexibiliza uma passagem de tratamentos assistemáticos para sistemáticos, não impedindo que certos conceitos sejam tratados em mais de uma série, mudando-se apenas os níveis de complexidade.

Com essa idéia, a proposta curricular de Santa Catarina quer defender a importância de tratar um conceito primeiramente enquanto noção ou significação social, sem preocupação em defini-lo simbólica ou formalmente, para depois trabalhar conceitualmente, utilizando-se, na medida do possível, a linguagem matemática simbólica tal como foi historicamente convencionada e organizada.

Nas orientações pedagógicas para cada campo do conhecimento matemático, a proposta deixa claro que é de fundamental importância que o professor de matemática conheça a natureza e os significados socioculturais e científicos das idéias matemáticas. Em algumas passagens também faz referência à necessidade do professor explorar as várias “noções” envolvendo um mesmo conceito ou então os diferentes significados desse conceito, citando como exemplo, no primeiro caso, “as noções de razão entre dois inteiros, noção de proporcionalidade, porcentagem e probabilidade” que envolveriam o conceito dos Números Racionais, ao mesmo tempo em que ressalta que “é importante também explorar as diversas formas de representação dos Números Fracionários – geométrica, concreta e simbólica – envolvendo grandezas discretas e contínuas e sua dimensão linear, plana e espacial” (SANTA CATARINA, 1998). Já no segundo caso, comenta sobre a exploração dos significados geométricos, físicos ou sociais da álgebra. Em ambos os casos, a noção dos registros de representação semiótica parece estar presente, mas de forma implícita.

A partir da análise das propostas curriculares reestruturadas destes dois estados, observamos uma tendência em descentralizar, por assim dizer, as decisões metodológicas que envolvem a concretização do currículo nas escolas. Os PCN indicam que cada estado, cada município, cada escola, em comunhão de interesses de professores, diretores, coordenadores, pais e alunos, podem e devem promover o “seu” currículo, baseado nas orientações legais e no entorno social. Em outras palavras, os PCN abrem a possibilidade para a escola pensar no que ela precisa como forma de unir estreitamente os interesses locais ao desenvolvimento e necessidades globais.

Partindo disso, acreditamos que é interesse da escola ressaltar, em uma proposta curricular, dentre outros aspectos, além dos conceitos matemáticos, as diferentes representações semióticas desses conceitos e as operações cognitivas envolvidas, uma vez que isso pode auxiliar na aprendizagem da Matemática Escolar. Além disso, essas idéias já estão sendo consideradas, em algumas propostas do cenário internacional, de forma explícita, o que fala a favor de nossas pretensões nesta tese. Já no cenário nacional, as alterações e atualizações de propostas curriculares brasileiras atuais, engajadas nos resultados de pesquisa da comunidade de Educação Matemática, mostram a presença das representações semióticas de forma implícita.

Sabemos que há uma grande diferença entre as proposições prescritas em currículos oficiais e os currículos efetivamente praticados nas escolas. Mesmo assim, com relação ao trabalho pautado nas representações semióticas, a não-explicitação do assunto nos currículos prescritos brasileiros permite conjecturar que também não fazem parte das aulas de matemática. Assim, a direção a que se encaminha o interesse desta tese é a de explicitar o trabalho com as representações semióticas nos currículos de matemática.

1.5 A PESQUISA BRASILEIRA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E A REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

Olhar para as pesquisas já realizadas sobre um tema próximo ao nosso, serve em primeira instância a dois propósitos: o de buscar iguais, e nesse caso alterar o que é possível para criar o diferente ou simplesmente mudar; e o de buscar semelhantes, para então compartilhar e complementar, produzindo o que ainda não foi realizado.

Nesta etapa, o olhar volta-se para as pesquisas já realizadas no Brasil que tiveram como foco a questão da representação semiótica. Optamos por investigar aquelas que utilizaram a noção teórica dos RRS[16] como temática central, uma vez que foi desenvolvida por Raymond Duval especificamente para tratar dos problemas de aprendizagem da matemática e também porque os seus construtos se constituem nos fios condutores para pensarmos o papel da representação semiótica na aprendizagem da matemática escolar.

Isso para entender o que acontece na sala de aula quando da utilização dessas idéias, fazer uso dos resultados positivos e investigar se pesquisas semelhantes a nossa – que procuram articular as representações semióticas às orientações curriculares – já foram realizadas.

Além disso, mapear, de um modo geral, as investigações que se detiveram sobre o uso dos RRS no ensino e na aprendizagem da matemática, serve não apenas para traçar um panorama da produção na área de Educação Matemática, mas também como ponto de partida para a busca de elementos teórico-metodológicos que auxiliem na composição da proposta curricular.

Essa noção teórica tem tomado lugar freqüentemente no cenário das investigações em Educação Matemática que tratam da aprendizagem e do ensino da Matemática e, por essa razão, entendemos fazer parte do cenário que envolve os estudos sobre currículo e propostas metodológicas de ensino.

A publicação de uma coletânea de artigos relatando resultados de pesquisas apoiadas na noção dos registros de representação semiótica Machado (2003), no Brasil, com o foco centrado na aprendizagem da matemática, corrobora na afirmação de que existe um crescente interesse em considerar essa noção teórica no estudo da complexidade dos processos de ensino/aprendizagem em matemática.

Além disso, foi realizado na França um Colóquio de Didática da Matemática, em 2002, que homenageou Raymond Duval e François Pluvinage. Muitos dos trabalhos apresentados relataram os processos de ensino/aprendizagem em matemática, destacando a importância do aspecto dos registros de representação semiótica.

[16] Os resultados dessa revisão bibliográfica estão publicados em COLOMBO e MORETTI (2007), e mais detalhadamente em COLOMBO, FLORES e MORETTI. **Registros de representação semiótica nas pesquisas brasileiras em Educação Matemática:** pontuando tendências, 2006, no prelo.

Ainda, a divulgação de artigos científicos relatando pesquisas brasileiras, que enfocam os registros de representação semiótica em congressos de Educação Matemática, tais como EBRAPEM (Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática), CIEM (Congresso Internacional de Ensino de Matemática), ENEM (Encontro Nacional de Educação Matemática), EPREM (Encontro Paranaense de Educação Matemática), SIPEM (Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática), vem crescendo consubstancialmente, apontando para novas alternativas na busca de soluções para os problemas da aprendizagem da matemática.

Esse contexto aponta para a importância dos estudos de Duval e, conseqüentemente, daqueles que utilizam seus construtos teóricos, para a realidade educacional vivenciada pelos professores de matemática, uma vez que possibilitam vislumbrar uma alternativa de trabalho teórico/metodológico que propicie um real funcionamento cognitivo do aluno e uma real interação com o objeto matemático em estudo. Ou seja, a importância dos RRS neste trabalho é também justificada pelas condições de articulação do saber e do currículo, destacadas nas contribuições apresentadas nas pesquisas ora analisadas.

Cabe-nos, ainda, sublinhar outro ponto relevante, o de que os estudos referem-se a dados obtidos com amostras de alunos, professores e livros didáticos relacionados, de alguma forma, à Matemática Escolar praticada na escola pública, principalmente. Fato esse que fala a favor da possibilidade de efetivamente empregar os resultados dessas pesquisas no sistema escolar a partir de propostas curriculares.

Isso leva a considerar que, se a noção teórica proposta por Duval tem sido cada vez mais aprofundada e tem se mostrado profícua para os estudos sobre a aprendizagem da matemática, então é possível encontrar nessas pesquisas elementos para subsidiar uma proposta curricular para o ensino da matemática. Proposta essa que considere a representação semiótica como fundamento e pressuposto para estruturar os saberes e pensar a organização dos conteúdos a serem trabalhados na matemática escolar.

As primeiras pesquisas realizadas no Brasil que utilizam a noção dos RRS, como principal referencial teórico, começaram a ser publicadas e difundidas na segunda metade da década de 1990. Assim, procuramos realizar um levantamento completo dessas pesquisas, compreendidas no período de 1990 a 2005, uma vez que são recentes e que ainda estão concentradas em poucos programas de pós-graduação no Brasil.

Para esse levantamento, utilizamos consulta *on-line* aos principais bancos de dissertações e teses, como o site da Capes, Inep e o Banco de Teses EduMat do Cempem (Círculo de Estudo, Memória e Pesquisa em Educação Matemática) da Unicamp. Contudo, observamos que muitos trabalhos, dos quais já tínhamos conhecimento, não constavam de tais bancos. Partimos então para uma nova investigação nos *sites* dos próprios programas de pós-graduação e, cruzando com os dados anteriores, obtivemos uma relação das pesquisas realizadas no Brasil, e de seus autores, que trabalham com a noção dos registros de representação semiótica, destacando seus objetivos e/ou temática, título, ano, nível, orientador e universidade onde foi produzida. Essa relação encontra-se nos Anexos 1 e 2.

Constatamos que a noção dos registros de representação semiótica na década de 1990 foi foco de pesquisa de apenas 6 trabalhos, dos quais 2 são da Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC) e 4 são da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC/SP), denotando um início discreto da utilização desse aporte teórico, mas compreensível, por ser uma noção que também estava em desenvolvimento. Já na década seguinte, provavelmente por conta dos resultados positivos encontrados pelos pesquisadores do período anterior, há um salto quantitativo bastante significativo, totalizando 24 trabalhos no período de 2001 a 2005.

Nesse período, a concentração maior de trabalhos também ocorre na PUC/SP, seguida da UFSC. Contudo aparecem trabalhos isolados no Mato Grosso do Sul, em Londrina, em Brasília, em Itajaí, na Unicamp e Feusp em São Paulo. A hipótese que temos para essa disseminação para outros Estados, ao observarmos os orientadores das pesquisas, é o fato de que alguns programas de pós-graduação são interinstitucionais, promovendo o trânsito dos orientadores que simpatizam com a noção dos registros de representação semiótica.

Esse cenário mostra um interesse crescente na utilização da noção dos registros de representação semiótica como forma de investigar os problemas de aprendizagem da matemática e apontar alternativas concretas para a sala de aula. Isso se processa pelo fato de que a grande maioria das investigações tinha como temática principal o processo de ensino/aprendizagem de conteúdos trabalhados seja no Ensino Fundamental, no Ensino Médio ou ainda em cursos de formação de professores.

Para se chegar a esses resultados foram elencadas cinco categorias de análise, a saber: delimitação dos objetos de pesquisa; tipo de pesquisa/metodologia; nível de abrangência; resultados e aspectos teóricos para auxiliar na composição da proposta curricular. O Anexo 3 apresenta um quadro-síntese das categorias analisadas.

A primeira categoria analisada, “Delimitação do objeto de pesquisa” (Quadro 1.1) mostrou um grande número de conteúdos matemáticos abordados, 27 ao todo, denotando a potencialidade e a flexibilidade dos RRS para o ensino-aprendizagem da matemática. Essa potencialidade se traduz tanto como possibilidade de pesquisa científica quanto como possibilidade de inserção dessa noção no ensino regular da matemática, e não apenas localmente em momentos determinados quando da realização das pesquisas.

QUADRO 1.1 - DELIMITAÇÃO DO OBJETO DE PESQUISA

Nº	Objetos matemáticos pesquisados	Nº total de Trabalhos	Percentual
1	Multiplicação	1	3,3
2	Papel heurístico das figuras na visualização	1	3,3
3	Demonstração em geometria	1	3,3
4	Número racional	3	10
5	Probabilidade condicional	1	3,3
6	Porcentagem	1	3,3
7	Frações	1	3,3
8	Vetores – geometria analítica	1	3,3
9	Conceito de fração na sua representação decimal	1	3,3
10	Mensuração, algarismos significativos e notação científica.	1	3,3
11	Distribuição binomial de probabilidade	1	3,,3
12	Geometria – quadriláteros	1	3,3
13	Números inteiros e noções de álgebra (pré-álgebra)	1	3,3
14	Função afim	2	6,7
15	Inequações de 1 grau	1	3,3
16	Equações	1	3,3
17	Geometria	1	3,3
18	Função linear	1	3,3
19	Área	1	3,3
20	Introdução do conceito de Função	1	3,3
21	Apreensões perceptiva e operatória em objetos geométricos tridimensionais.	1	3,3
22	Integral	1	3,3

23	Densidade dos reais	1	3,3
24	Derivada	1	3,3
25	Sistema de Numeração Decimal	1	3,3
26	Estatística	1	3,3
27	Função exponencial	1	3,3
Total		**30**	**100%**

Outro ponto que é possível inferir, da análise dessa categoria, diz respeito ao fato da noção teórica dos RRS se adequar perfeitamente à conteúdos trabalhados em vários níveis de ensino. Por outro lado, podemos dizer que ainda há muito campo para pesquisa utilizando os RRS como possibilidade teórico-metodológica para o ensino e aprendizagem da matemática.

O Quadro 1.2 apresenta um resumo dos conteúdos em 6 blocos. Procuramos organizá-los de acordo com os eixos estruturais apontados pelos Parâmetros Curriculares Nacionais, a saber: no ensino fundamental (números e operações; espaço e forma; grandezas e medidas; tratamento da informação) e no ensino médio (álgebra; números e funções; geometria e medidas; análise de dados). Entretanto, como os conteúdos abordados também se relacionavam ao ensino superior, sistematizamo-los da maneira abaixo, de tal forma que se contemplasse as características dos 3 níveis de ensino:

QUADRO 1.2 - SÍNTESE DA DELIMITAÇÃO DO OBJETO DE PESQUISA

Nº	**Eixos Objetos matemáticos pesquisados**	**Nº total de Trabalhos**	**Percentual**
1	Números e Operações	11	36,7
2	Geometria	7	23,3
3	Funções	5	16,7
4	Tratamento da Informação	3	10
5	Cálculo Diferencial e integral (derivada e integral)	2	6,7
6	Equações e inequações	2	6,7
Total		**30**	**100**

Como é possível observar no quadro, a maioria dos trabalhos estão concentrados no eixo “números e operações”, o que para nós justifica ainda mais a escolha desse eixo para desenvolvermos a proposta curricular, uma vez que poderemos encontrar experiências já testadas e validadas pelas pesquisas realizadas. Pela análise das pesquisas, isso pode ser indicativo de vários pontos, por exemplo: maior dificuldade no ensino, facilidade no trato desse eixo por parte do pesquisador, crença de que os conteúdos desse eixo são mais importantes que outros. Mas o que chama atenção é que praticamente todos os campos da matemática foram cobertos, com pelo menos um trabalho. Esse fato também aponta para a potencialidade da noção dos registros de representação semiótica como metodologia de pesquisa e como estratégia de ensino dos conteúdos da matemática escolar.

Em relação ao nível de abrangência das pesquisas, constatamos que os estudos voltam-se principalmente às séries iniciais do ensino fundamental (20%), ao ensino médio (20%) e à formação de professores (23%). Esses, juntamente com os demais (excluindo, é claro, os dois trabalhos que analisaram livros didáticos) realizaram experimentações através da aplicação de seqüências de ensino baseadas na noção teórica dos registros de representação semiótica.

QUADRO 1.3 - NÍVEL DE ABRANGÊNCIA DAS PESQUISAS

Nº	Nível de ensino	Nº total de Trabalhos	Percentual
1	Ensino Fundamental – Séries Iniciais	6	20
2	Ensino Fundamental – Séries Finais	4	13
3	Ensino Médio	6	20
4	Ensino Superior	4	13
5	Educação de Jovens e Adultos	1	3
6	Formação de Professores	7	23
7	Análise de Livros Didáticos	2	7
TOTAL		**30**	**100%**

Os trabalhos que investigaram livros didáticos (7% do total) indicaram que há uma tendência crescente em apresentar o objeto matemático representado em seus diversos registros. O estudo da representação semiótica aparece, mas nem sempre de forma explícita. É preciso destacar que essas questões parecem não ser tratadas com aprofundamento teórico nos livros didáticos, uma vez que nas orientações metodológicas destes e nas referências bibliográficas não há menção aos estudos de Duval.

Os resultados dos demais trabalhos indicam, de um modo geral, que a aprendizagem dos objetos matemáticos, trabalhados com enfoque na noção teórica dos RRS, foi otimizada. Mostram, da mesma forma, que a utilização dos RRS no ensino e aprendizagem da matemática pode estar ligada a qualquer nível de ensino. Sendo assim, considerar essa noção teórica nos cursos de formação de professores de matemática, tanto inicial quanto continuada, bem como em orientações curriculares para o ensino dessa disciplina, pode-se tornar mais uma alternativa para melhorar a educação matemática dos estudantes.

Essa última afirmação pode ser corroborada ao se observar as conclusões dos trabalhos que envolveram a formação de professores. Todos eles apontaram a mudança de atitude dos professores em relação aos objetos matemáticos ensinados com enfoque nos RRS, fazendo com que os mesmos pudessem refletir sobre suas ações didáticas frente ao ensino.

Quanto à categoria “Metodologia de pesquisa utilizada” observamos que das 30 pesquisas analisadas 27 realizaram efetivamente uma seqüência de ensino. Em um dos trabalhos, o qual não tivemos acesso ao texto completo, não foi possível identificar a metodologia utilizada, e os outros, como eram análises de livros didáticos, não houve aplicação de atividades práticas. O Quadro 4 mostra a distribuição das metodologias utilizadas nas pesquisas.

QUADRO 1.4 - METODOLOGIA DE PESQUISA UTILIZADA

Nº	Metodologia	Nº total de Trabalhos	Percentual
1	Engenharia Didática	12	40
2	Não define explicitamente mas aplica seqüência de ensino	13	32,5
3	Pesquisa-ação	3	10
4	Pesquisa qualitativa	3	10
5	Pesquisa de campo	2	7
6	Não define (Análise de livros didáticos)	2	7
7	Não foi possível verificar	1	3,3

Nessa categoria houve superposição de metodologias, por esta razão a somatória dos trabalhos excede o número de 30 (dessa forma, a leitura do percentual deve ser realizada horizontalmente, diferentemente dos quadros anteriores). Muitas pesquisas realizavam uma seqüência de ensino, e nesse caso foram categorizadas no item 2, e diziam seguir a metodologia da pesquisa-qualitativa, sendo também marcadas no item 4, por exemplo. Mas o que fica bastante evidente na análise dessa categoria é o fato da maioria das pesquisas se organizarem em torno do estudo, da elaboração, da aplicação e da análise de seqüências de atividades. Isso mostra a preocupação dos pesquisadores em validar, também de forma empírica, a utilização dos RRS no ensino e na aprendizagem da matemática.

A análise da categoria “Aspectos teóricos” mostrou que 80% das investigações se detiveram no estudo das operações de tratamento e conversão dos diversos registros que representam o objeto matemático pesquisado. Isso porque esse aspecto da proposta de Duval é o mais prático, envolvendo diretamente as atividades sobre o objeto em estudo, enquanto que os demais se encaixam mais no referencial teórico que embasa o desenvolvimento das operações cognitivas destacadas. Os principais aspectos apontados pelas pesquisas se encontram no quadro abaixo (a leitura do percentual nesse quadro também deve ser realizada horizontalmente, uma vez que mais de um aspecto teórico pode ter sido abordado no desenvolvimento das investigações).

QUADRO 1.5 - ASPECTOS TEÓRICOS ABORDADOS NAS PESQUISAS

Nº	Aspectos teóricos	Nº total de Trabalhos	Percentual
1	Operações cognitivas	24	80
2	Diversidade de RRS	22	73
3	*Semiose* e *Noesis*	5	17
4	Tipos de registros (mono e plurifuncionais)	3	10
5	Tipos de representação (mental, computacional e semiótica	3	10
6	Não foi possível identificar com precisão	4	13
7	Outros	3	10

É possível inferir, a partir dos dados apontados no quadro, que as principais considerações da noção teórica desenvolvida por Duval foram abordadas, de uma forma ou de outra, mesmo que não todas na mesma pesquisa.

1.5.1 Síntese da Análise das Categorias

Os dados coletados permitem afirmar que as pesquisas estão articuladas em torno das principais dificuldades apresentadas por alunos, sejam esses do Ensino Fundamental, Médio ou Superior, e essas pesquisas, ao utilizarem a noção de registros de representação semiótica, buscam possíveis soluções para minimizar tais dificuldades. Para isso, a grande maioria dos pesquisadores organizou seqüências didáticas dos conteúdos investigados, pautadas em atividades específicas que contemplem esse aporte teórico, aplicando-as a turmas de alunos e realizando análises das experiências.

Apenas dois trabalhos realizaram uma investigação que envolvesse análise de livros didáticos, mas, mesmo nessas, o critério de escolha dos conteúdos para análise, à luz da noção dos registros de representação semiótica, foi o da dificuldade que os alunos apresentavam na sua apreensão.

Esse fato parece mostrar que os pesquisadores em Educação Matemática, que utilizam os estudos de Duval para fundamentar suas pesquisas, são aqueles preocupados em direcionar suas investigações científicas para auxiliar diretamente os professores de sala de aula, ou seja, são aqueles preocupados em entender a complexidade da aprendizagem da matemática e apresentar soluções para os problemas colocados. Essas soluções aparecem quase sempre como seqüências de ensino, através da utilização da metodologia da Engenharia Didática aliada ao que os pesquisadores denominaram pesquisa-ação ou de campo. As outras pesquisas, apesar de utilizarem seqüências de atividades aplicadas em sala de aula (ou, no caso das duas já citadas, analisarem livros didáticos), não definem uma escolha específica de metodologia do trabalho, mas indicam os passos seguidos.

Quanto aos aspectos teóricos abordados pelas pesquisas, é possível afirmar que todas elas centraram-se na idéia da utilização de diversos registros de representação semiótica e das operações de tratamento e conversão desses registros. Algumas investiram em outros pressupostos, aprofundando um pouco mais essa noção, mas nas atividades e na análise das mesmas o que predominou foi o pressuposto de que compreender matemática significa transitar e coordenar ao menos dois registros de representação semiótica.

1.5.2 Elementos para Nortear uma Proposta Teórico-Metodológica para o Ensino da Matemática

De um modo geral, as pesquisas estudadas partem de um pressuposto de aprendizagem e de ensino pautado na necessidade de atribuir significado ao objeto matemático em estudo, por meio de suas diferentes representações. Em outras palavras, para deixar visível a estrutura conceitual de um objeto se faz necessário que se compreenda e faça uso dos diversos registros de representação desse mesmo objeto. Aqui se encontra um 1º elemento a ser considerado na organização da proposta que pretendemos desenvolver: para cada objeto matemático em estudo, na matemática ensinada na escola, considerar os diferentes registros de representação semiótica.

O fato de analisarmos as pesquisas provenientes de diferentes programas de pós-graduação e, portanto, de diferentes localidades do Brasil, e de que a grande maioria das pesquisas indica que tanto os livros didáticos, quanto o trabalho do professor que utiliza esse livro didático, carece da perspectiva de uma utilização efetiva da noção teórica dos RRS, leva a considerar sobre a importância de pesquisas que apontem caminhos para essa utilização. Outra decorrência dessa observação se refere ao fato de que os resultados das pesquisas mostram que o trabalho com RRS com alunos ou mesmo com professores em processo de formação, seja continuada ou inicial, possibilita uma melhor compreensão do objeto matemático em estudo por parte dos estudantes, o que fala a favor de nossa pesquisa. Em outras palavras, nos leva a acreditar que a inserção de propostas metodológicas pautadas nessa noção teórica em orientações metodológicas, ou mesmo na organização dos conteúdos de propostas curriculares, pode ser uma alternativa que venha a contribuir para a melhoria do processo de ensino da Matemática Escolar.

Todos esses trabalhos mostram um interesse crescente dos pesquisadores de Educação Matemática nos pensamentos de Duval acerca do ensino e da aprendizagem em matemática, apontando para novas direções. No entanto, esses estudos ainda estão centrados em experimentações pontuais com um ou outro conteúdo matemático, seja com alunos de ensino fundamental, ensino superior e até mesmo com jovens e adultos ou ainda com professores em formação inicial ou continuada. Isso conduz a refletir, portanto, que pensar o ensino da matemática a partir dos pressupostos da diversidade de representações em matemática; das operações de tratamento e conversão entre esses registros; da *semiose* e da *noesis* pode ser um caminho que nos leve, educadores matemáticos, a facilitar a compreensão da matemática para nossos alunos. Isso significa que o 2.º elemento a considerar é possibilitar tais idéias em orientações aos professores, àqueles que efetivamente irão colocar em prática os conteúdos curriculares da Matemática Escolar, tanto na organização de propostas curriculares, quanto na elaboração de livros didáticos ou seqüências de ensino.

1.6 PRINCÍPIOS METODOLÓGICOS – O CAMINHO TRILHADO

Acreditamos que as problematizações apresentadas, envolvendo a representação semiótica nas propostas curriculares e nas pesquisas em Educação Matemática, justificam a relevância de nossa pesquisa em, no mínimo, dois pontos fundamentais. O primeiro, no sentido dessa noção já estar presente em alguns programas curriculares do cenário internacional e também ter sido utilizada em reflexões e experimentações nas salas de aula por pesquisas científicas, fato esse que pode falar a favor da validade e importância do seu uso no ensino da Matemática Escolar. O segundo ponto relaciona-se com o fato de termos verificado que, nos documentos oficiais brasileiros analisados, a representação semiótica não é considerada como um elemento de relevância a ser explicitado. Por outro lado, os documentos mostram alguns elementos, mesmo que de forma implícita, sobre o uso das representações semióticas no ensino da Matemática Escolar, o que pode indicar que nossa pesquisa possa se constituir em uma contribuição para a elaboração de futuras propostas curriculares oficiais e para as propostas curriculares que são construídas no interior das escolas.

Na perspectiva do planejamento de nossa investigação, indicamos os passos que pretendemos seguir na trajetória dessa pesquisa, pois, para a efetivação do trabalho, será necessário realizar algumas escolhas, percorrer alguns caminhos específicos na busca das respostas e soluções para os problemas colocados.

O caminho metodológico em nossa pesquisa passa por quatro grandes fases: referencial teórico, revisão de literatura; análise de documentos oficiais e a elaboração de uma proposição curricular que envolva os aspectos levantados nas fases anteriores.

Na primeira fase, que na verdade permeou todo o desenvolvimento da pesquisa, realizamos os estudos teóricos com o propósito de construir elementos e instrumentos de análise para a pesquisa. Essa fase foi dividida em quatro etapas:

- **ETAPA 1:** investigação teórica a respeito da natureza semiótica do conhecimento matemático e as implicações cognitivas para a aprendizagem da matemática, ao mesmo tempo em que se procura entender a questão da referência na representação semiótica;
- **ETAPA 2:** levantamento teórico sobre a noção dos Registros de Representação Semiótica (RRS) de Raymond Duval, da Teoria dos Campos Conceituais (TCC) de Gèrard Vergnaud, e da classificação das tarefas escolares de João Pedro da Ponte;
- **ETAPA 3:** investigação acerca da orientação das principais reformas e propostas curriculares relacionadas à matemática e sobre idéias a respeito do currículo;
- **ETAPA 4:** articulação dos referenciais teóricos, destacando pontos de convergência para a estruturação da proposta curricular.

A segunda fase compreendeu a revisão de literatura e foi dividida em duas etapas:

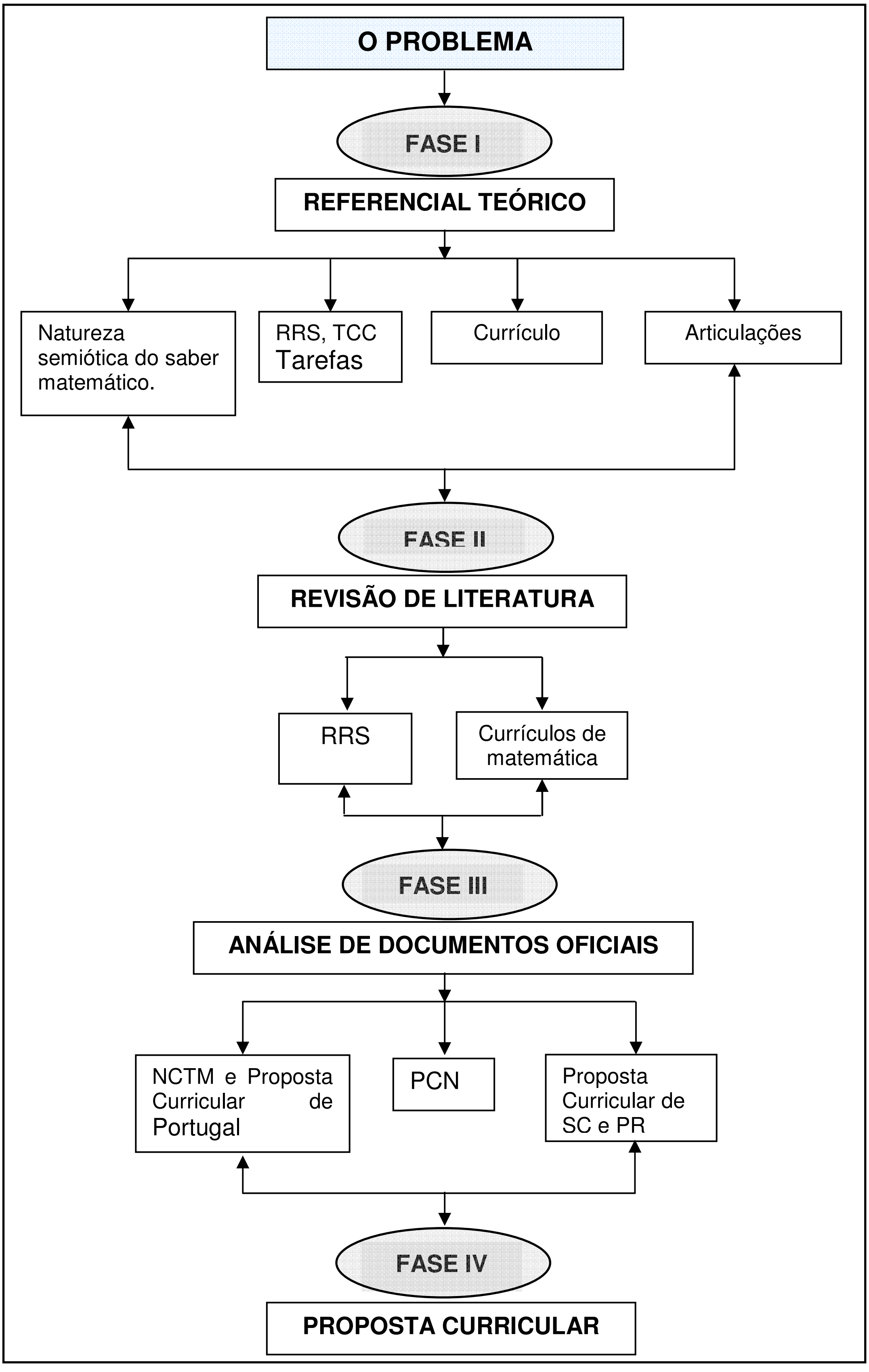
- **ETAPA 1:** levantamento das pesquisas brasileiras baseadas, principalmente, no processo de ensino-aprendizagem da matemática com foco nos RRS. O período delimitado foi de 1990 a 2005. O início, 1990, deu-se por conta que a inserção da proposta lançada por Raymond Duval, no Brasil, se deu nesta década e o ano de 2005, como limite, por conta do tempo regulamentado para a elaboração desta tese. O objetivo deste levantamento foi principalmente buscar elementos utilizados e validados nas pesquisas para a elaboração da proposta que pretendemos desenvolver na quarta fase desta investigação;
- **ETAPA 2:** revisão bibliográfica dos trabalhos relacionados com propostas curriculares, com o intuito de observar se alguma pesquisa, na mesma perspectiva que a nossa, já tinha sido desenvolvida e também observar a tendência na pesquisa nessa temática.

Na terceira fase realizamos a análise de documentos oficiais, organizada em três etapas. Isso para verificar se a representação semiótica é considerada nas propostas curriculares e como é considerada, em dois aspectos: o de justificar a realização da pesquisa e o de buscar entrelaçamentos entre o currículo e a questão da representação semiótica.

- **ETAPA 1:** investigar a presença das representações semióticas em propostas curriculares de outros países. Como exemplo do que acontece no cenário estrangeiro elencamos a proposta dos EUA traduzida nos NCTM e a proposta de Portugal;
- **ETAPA 2:** analisar nos PCN, como representante das orientações curriculares brasileiras, se a questão da representação semiótica é considerada de alguma forma, como é considerada e, finalmente, se possibilita articulações com idéias relacionadas em propostas curriculares elaboradas em nível estadual, municipal e escolar;
- **ETAPA 3:** analisar as propostas curriculares dos estados de Santa Catarina e Paraná, em relação à utilização da noção teórica de representação semiótica, como forma de exemplificar e compreender como a questão da representação semiótica é tratada nestas propostas.

Finalmente, na quarta fase da pesquisa, buscamos a articulação das fases anteriores por meio da proposição curricular pautada nas representações semióticas e nos construtos teóricos estudados. Como esta tese faz referência à aprendizagem e ao ensino da matemática, delimitamos o estudo ao Ensino Fundamental, com recorte específico no campo dos Números Naturais.

A seguir apresentamos um quadro esquemático que demonstra a síntese do caminho metodológico trilhado.



Neste capítulo, pontuamos as principais justificativas e referências teóricas que serão utilizadas neste trabalho. Todavia, elas serão detalhadas nos capítulos subseqüentes.

CAPÍTULO II
SOBRE OS CURRÍCULOS

Acreditamos saber algo das coisas mesmas, se falamos de árvores, neve e flores, e no entanto não possuímos nada mais do que metáforas das coisas, que de nenhum modo correspondem à entidade de origem.
Pensemos ainda na formação dos conceitos. Toda a palavra torna-se logo conceito quando não deve servir, como recordação, para a vivência primitiva, completamente individualizada e única à qual deve seu surgimento, mas ao mesmo tempo tem de convir a um sem-número de casos, mais ou menos semelhantes, isto é, tomados rigorosamente, nunca iguais, portanto, a casos claramente desiguais. Todo conceito nasce por igualação do não-igual.

NIETZSCHE, F. W. Sobre verdade e mentira no sentido extra-moral. In: ***Nietzche:*** *obras incompletas. Seleção de textos de Gérard Lebrun; trad. e notas de Rubens Rodrigues Torres Filho; Posfácio de Antônio Cândido de Mello e Souza. 2. ed. São Paulo: Abril Cultural, 1978. (Coleção Os Pensadores).*

2.1 INTRODUÇÃO

Acreditamos saber... Para Nietzsche, usado como epígrafe deste capítulo, as certezas que possuímos são, na verdade, ficções ou metáforas das coisas que existem. Não sabemos a partir de realidades concretas, mas de metáforas mentais que se referem às coisas. A partir disso, podemos constatar que nossas tentativas de conceitualização podem ser frágeis.

No entanto, buscar um conceito é buscar o entendimento das origens. E é o que nos propomos neste capítulo, ou seja, buscamos concepções, conceitos que nos ajudem a elucidar, não necessariamente de uma forma total, alguns aspectos a respeito do nosso objeto de estudo, o currículo.

De acordo com Pires (2004), em termos de estratégias, o currículo é um dos conceitos mais potentes para analisar como a prática docente se sustenta e se expressa de uma forma peculiar dentro de um contexto escolar. Por isso, investir em reflexões de ordem prática, referente a currículos, como idéias para compor propostas curriculares, torna-se necessário, especialmente quando se pensa na melhoria da educação matemática escolar.

Em pesquisa realizada para analisar currículos recentes de diferentes países, Pires (2000) destaca que de um modo geral as propostas defendem a concepção de "fazer matemática na sala de aula". Nessa pesquisa, a autora indica que não é mais possível pensar em receber coisas prontas para memorizar, mas sim desenvolver um trabalho em que o pensamento constrói conceitos para resolver problemas, a partir dos conhecimentos de referência já construídos pela humanidade, elaborando hipóteses, testando-as e realizando transferências.

De acordo com essa autora, essas propostas baseiam-se em investigações de caráter epistemológico e cognitivo, na medida em que buscam explicações dos processos pelos quais os conceitos matemáticos se formam e se desenvolvem. A partir dessas explicações, fornecem o quadro das características específicas do conhecimento matemático, recuperando a historicidade dos conceitos, ao mesmo tempo em que se preocupam com a compreensão dos processos gerais do pensamento, presentes na construção do conhecimento de cada indivíduo.

Então, considerar aspectos da cognição e da epistemologia da área do conhecimento a ser ensinado parece ser condizente com as idéias atuais sobre organizações curriculares. A noção de representação liga-se estreitamente a esses aspectos, ou seja, às noções de significado, compreensão e, em última instância, com o conhecimento. Conforme Godino (2003, p. 240), "a complexidade do tema e sua importância estão nos objetos matemáticos que se trata de representar, sua diversidade e natureza". Assim, falar de representação semiótica implica necessariamente falar de conhecimento, em particular de conhecimento matemático, e, conseqüentemente, da atividade matemática, suas produções e significados culturais e cognitivos, assim como das relações com o mundo que nos rodeia.

Isso é importante considerar na educação matemática, uma vez que o nosso compromisso, enquanto educadores, é o ensino e a aprendizagem da matemática escolar, ou seja, considerar a atividade matemática, os objetos e sujeitos envolvidos nesse processo.

Nesta tese, como já afirmamos, o fio condutor da trama se constitui das reflexões em torno do currículo, de uma possível articulação das representações semióticas em propostas curriculares. Assim, para que possamos explicitar melhor o tema abordaremos, neste capítulo, questões que envolvem o currículo: a sua origem; o conceito de currículo; o desenvolvimento do currículo de Matemática e as principais mudanças que ocorreram nos últimos anos; as pesquisas que tratam sobre currículo de Matemática, para situar as principais preocupações em torno da área.

2.2 O CONCEITO DE CURRÍCULO

A tarefa de conceituar o termo "currículo" tem se mostrado bastante árdua. Esta dificuldade se apresenta nas tantas e diversas conceituações que se estabeleceram para o currículo, no desenvolvimento das teorias curriculares, caracterizando-o como um campo especializado de estudo marcado por uma complexidade e diversidade de pontos de vista.

Isso porque a natureza das práticas a que se refere o currículo advém de discursividades e intencionalidades diversas, estabelecidas por comportamentos didáticos, políticos, sociais, administrativos e econômicos muito diferentes. Tais comportamentos são resultantes de pressupostos, teorias parciais, esquemas de racionalidade, crenças, valores também distintos que condicionam a teorização sobre o currículo, conferindo um conjunto de sentidos e significados diferentes a ele (SACRISTÁN, 1998).

No entanto, de uma maneira geral, os sentidos usuais que envolvem a palavra currículo se referem aos planos e programas, a objetivos educacionais, a conteúdos, ao conhecimento que a escola oferece aos estudantes e à experiência de aprendizagem. Todos esses sentidos se imbricam e se confundem e, quando se fala em currículo, salta aos olhos a idéia de um núcleo de conteúdos curriculares exigido como o mínimo a ser ensinado nas escolas.

Segundo Schmidt (2003), é possível encontrar na literatura até 50 definições de currículo. Isso pode indicar o fato de não existir uma única definição considerada correta, ou a mais reconhecida, ou a mais atual, pois ao decidir-se por uma delas, está-se definindo por uma determinada concepção, que inclui compromissos sociais e políticos. Isso pode ser observado também ao observarmos a etimologia do termo currículo, que provém da palavra latina *scurrere,* que significa correr, referindo-se a curso (ou carro de corrida). Existem ainda os substantivos *cursus* (carreira, corrida) e *curriculum* (carreira de forma figurada) que, por ser neutro, admite o plural *curricula* (BERTICELLI, 1998; GOODSON, 1995). Essa raiz etimológica pode ser um indicativo a respeito da historicidade da idéia linear envolvida quando se pensa e produz o currículo.

A utilização dos termos *cursus* e *curriculum,* no entanto, não se dá no mesmo período de tempo e espaço. Berticelli (1998) coloca que o primeiro, *cursus,* começa a ser utilizado com variedade semântica nas línguas portuguesa, francesa e inglesa a partir dos séculos XIV e XV, como linguagem universitária. Já o termo *curriculum* aparece mais tarde nessas mesmas línguas. Somente no século XX esse termo migra da Inglaterra para os Estados Unidos sendo empregado no sentido de *curriculum vitae.* O aportuguesamento da palavra se dá por volta de 1940 no Brasil (BERTICELLI, 1998).

Conforme Goodson (1995), as implicações etimológicas dessa palavra conduziram à idéia de que o currículo pode ser definido como um curso (listagem de conteúdos) a ser seguido ou apresentado para estudo. Outro fato que parece ter corroborado à disseminação dessa idéia, pode referir-se à inserção dos termos classe (no sentido de divisões graduadas por estágios ou níveis de complexidade crescente, de acordo com a idade e conhecimento exigido dos alunos) e currículo, nos assuntos educacionais, em uma época em que a escolarização passava por uma transformação de atividade de elite em atividade de massa. (HAMILTON e GIBBONS[17] apud GOODSON, 1995).

[17]HAMILTON, D.; GIBBSON, M. **Notes on the origins of the educational terms class and curriculum.** Trabalho apresentado na Convenção Annual da American Educational Research Association. Boston, 1980.

Desde então, já é possível perceber que os fins da educação estruturada e formal não atendem a objetivos puramente acadêmicos. Ao contrário, há que se considerar o entorno social onde tal estrutura é organizada, além do momento histórico e político em que se vive.

Por outro lado, também é possível compreender os motivos pelos quais a origem do conceito de currículo, como seqüência estruturada ou "disciplina", parece relacionar-se fortemente com a ascendência política do Calvinismo na Europa. O *Oxford English Dictionary* situa, como primeiro registro do termo "*curriculum*", o atestado de graduação outorgado a um mestre da Universidade de Glasgow, Escócia, em 1633, que tinha como propósito principal "formar predicadores protestantes".

Goodson (1995) também afirma que o currículo, entendido como disciplina, adequava-se à idéia de uma ordem social elitista, já que os "eleitos" recebiam um tipo diferenciado de escolarização, geralmente mais avançada que dos demais estudantes, os quais recebiam um currículo mais conservador.

Segundo Hamilton (1980)[18] apud Goodson (1995), as "pedagogias de classe" originadas em Glasgow, que no bojo de seu significado impunham a idéia da predestinação – onde o currículo desenvolvido poderia, além de determinar o que se processaria em sala de aula, diferenciar a que os estudantes teriam acesso – tiveram uma influência direta sobre as pedagogias adotadas nas escolas elementares do século XIX. Tal fato ainda pode ser sentido em nossa sociedade, uma vez que o sistema educacional de um país, estado ou município acaba por refletir suas necessidades e interesses socioeconômicos, culturais e políticos. Sendo assim, as possíveis alterações e reformas desse sistema aparecem geralmente quando as necessidades e as demandas da sociedade são alteradas. Alterações quase sempre provocadas por estudos, pesquisas, movimentos que transformam opiniões dos professores, pais, diretores de escolas, dos próprios alunos, enfim do entorno social sobre o ensino. Dessa forma, tudo isso favorece e influencia a seleção dos conteúdos e as formas de tratá-los em um currículo determinado.

A transição do sistema de classe para o de sala de aula ocorreu, segundo Goodson (1995), no período concomitante ao início da Revolução Industrial. Essa

[18] HAMILTON, D. **Adam Smith and the moral economy of the classroom system.** Journal of Curriculum Studies, vol. 12, n. 4. 1980.

mudança representou uma verdadeira transformação em termos de escolarização estatal, onde grupos maiores de crianças e adolescentes poderiam ser supervisionados e controlados, indicando a supremacia sobre as formas individualizadas de ensino e aprendizagem.

Esse fato foi tão importante na história da educação que, dois séculos depois, ainda poderíamos sentir o efeito de um sistema de ensino organizado em salas de aula, onde muitos devem aprender como poucos aprenderiam. Pires (2004, p.2) coloca que “os currículos dominantes costumam pedir a todos os alunos o que só uns poucos podem cumprir”, condicionados por uma série de horários e aulas compartimentalizadas, manifestadas nas matérias escolares. Assim, o currículo ficou atrelado aos conhecimentos considerados socialmente válidos num determinado período por determinados indivíduos, concretizados nas disciplinas escolares.

A escolarização crescente, a formação dos primeiros mestres, as discussões acerca da educação, a complexidade crescente das relações sociais advindas do progresso motivaram o aumento dos estudos sobre o currículo e, gradativamente, tais estudos foram constituindo-se sistematicamente como um campo de trabalho na educação em fins do século XIX e início do século XX. Aspectos como objetivos educacionais, seleção, organização, distribuição do conhecimento escolar, questões de gênero, problemática racial, contextualização política, econômica e social começavam a fazer parte das investigações.

Mas como em todo processo evolutivo, tais aspectos não chegaram à discussão curricular de uma forma natural. Até a década de 1970, aproximadamente, os estudos relacionados ao currículo giravam em torno de questões meramente técnicas. De acordo com Macedo e Fundão (1996), a partir dessa década, no plano internacional, inicia-se um movimento de mudança dos estudos do campo do currículo, no qual as preocupações centravam-se muito mais na compreensão do currículo do que com os procedimentos de sua elaboração. Já no Brasil, essas questões só começam fazer parte das reflexões dos educadores nos anos 1980 (SILVA, 1990, apud MACEDO e FUNDÃO, 1996).

Mas é nos anos 1990 que se observam movimentos críticos mais expressivos em relação aos estudos e pesquisas em currículo. Conforme Macedo e Fundão (1996), a produção teórica brasileira nesse campo foi determinada por um certo contexto, num cenário definido pelo que se poderia denominar de categorias, tais como: texto político, pós-moderno e pós-estruturalista, de raça e de gênero que conseguiram atingir uma certa independência da exclusiva influência dos EUA, apropriando-se também de autores europeus na construção de um pensamento autônomo. No entanto, esses mesmos autores colocam que “na prática curricular vemos acontecer o processo inverso. As políticas públicas educacionais, englobando o currículo, estão, nesta década, sendo inspiradas no modelo neoliberal internacional.” (MACEDO e FUNDÃO, 1996, p. 13).

Moreira (2001) corrobora, nesse sentido, ao afirmar que em suas pesquisas a respeito do campo do currículo no Brasil, nos anos 1990, partindo de entrevistas com pesquisadores brasileiros de expressiva produção a esse respeito, detecta que esses, ao expressarem um compreensível desencanto em relação aos efeitos das teorizações nas escolas e salas de aula, indicam a necessidade de se repensar a articulação teoria-prática no campo do currículo de modo a facilitar o desenvolvimento da capacidade prática e da experiência teórica do professorado.

Isso vem somar forças à nossa intenção em discutir sobre a questão da representação semiótica articulada em situações (tarefas) diversas, fazer parte da cultura que envolve o processo de ensino e de aprendizagem da matemática, e, portanto, das organizações curriculares, que de uma forma ou de outra regulamentam tal processo.

Conforme D’Ambrósio (1996), toda a prática educativa deve estar sempre ancorada em estratégias que permitam atingir as duas grandes metas da educação: realização plena do indivíduo e capacidade de viver em sociedade, subordinado a valores de cidadania. Essa perspectiva nos leva a uma definição muito abrangente de currículo: “*Currículo* é a estratégia para a ação educativa” (Idem, p. 68).

Sacristán (1998) define currículo de uma maneira geral:

> [...] o currículo pode ser entendido como algo que adquire forma e significado educativo à medida que sofre uma série de processos de transformação dentro das atividades práticas que o tem mais diretamente por objeto (p. 9).

Entendido dessa forma, o currículo não existe por si só. Não tem sentido se pensado apenas como “currículo”. Ele existe pela existência de outros elementos – instituição escolar, alunos, professores, regulamentos, leis, documentos regulatórios, avaliações – múltiplos sujeitos distribuídos em múltiplos espaços. É assim que também entendemos o conceito de currículo, no sentido antropológico, daquelas coisas que são pensadas, estruturadas e construídas pelo homem, na sua necessidade histórica e cultural.

Em se tratando especificamente de currículo de matemática, Kilpatrik (1999, p. 19) distingue duas visões, “como um conjunto de experiências para promover a aprendizagem da matemática ou os percursos que os alunos seguem”. Em outras palavras, para esse autor o currículo refere-se a uma experiência efetiva, pois está tratando de realidades, não de pretensões. Então, o currículo estabelecido pelos documentos oficiais não é um currículo de fato, mas sim um esquema de um currículo que se pretende realizar. Para o professor, o currículo é o plano de estudos que envolve conhecimentos e, numa acepção mais moderna, capacidades, valores e atitudes. Para o aluno, o currículo é a forma de ter acesso ao conhecimento e inserir-se na chamada cultura universal do mundo em sociedade.

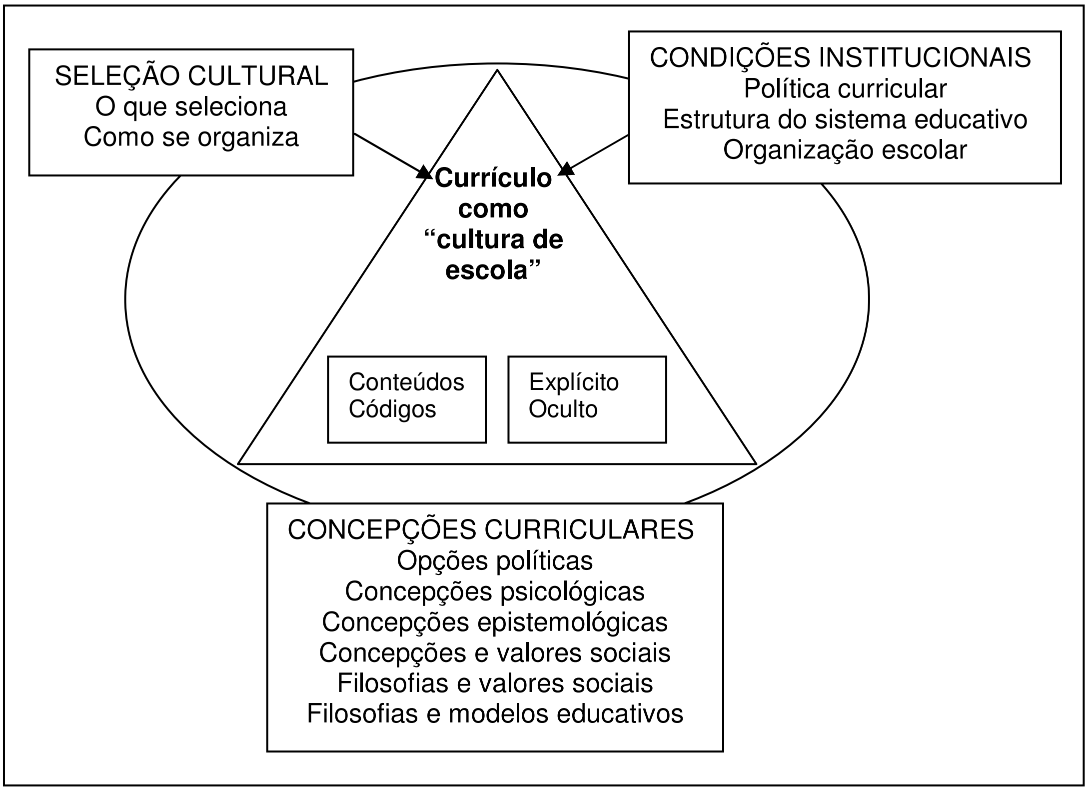
Nesse sentido, o currículo “não é um conceito mas uma construção cultural, isto é, não se trata de um conceito abstrato que tenha algum tipo de existência fora e previamente à experiência humana. É, antes, um modo de organizar uma série de práticas educativas” (GRUNDY, 1987, apud SACRISTÁN, 1998, p. 14). E se entendemos não o conceito de currículo, mas o currículo como uma elaboração cultural, estamos entendendo o currículo como *práxis*, ou seja, emergente de um sistema de ação e reflexão. Nesta perspectiva, o currículo é visto como um processo e não como um produto. E, enquanto processo, deve possibilitar um princípio de procedimento para o professor. Em outras palavras, o currículo é uma proposta que pode ser interpretada pelos professores de diferentes maneiras e, a partir disso, aplicada a contextos diferentes, sendo, portanto, uma prática constantemente em deliberação e negociação, inacabada por natureza.

Isso porque é na prática que se estabelece o diálogo entre a sociedade, os políticos, os técnicos, os alunos e os professores, todos agentes que modelam o currículo e que, sendo um contexto da prática, é, ao mesmo tempo, contextualizado por ela (SACRISTÁN, 1998).

Esta orientação curricular, que centra a sua perspectiva na dialética teoria-prática e define o currículo como *práxis*, deve originar propostas de maior autonomia para o sistema em relação à administração permitindo aos professores modelarem sua prática. Segundo Grundy (1987, apud Sacristán, 1998), a *práxis* conduz, por um lado, à emancipação, ocorrendo esta apenas em condições de justiça e de igualdade dos vários intervenientes no currículo e, por outro lado, à crítica da ideologia, por meio da reflexividade e da ação autônoma.

O esquema proposto por Sacristán (1998), sobre os fatores intervenientes na proposição de uma teoria curricular, pode, de certa forma, traduzir o currículo como *práxis*:

FIGURA 2.1 – ESQUEMA PARA UMA TEORIA DO CURRÍCULO (SACRISTÁN, 1998, P. 36)



O esquema mostra a confluência dos vários fatores que influenciam e produzem o currículo, articulando a ação e a reflexão, dado que contempla elementos essenciais para sua caracterização: os conteúdos que compõem o currículo, frutos de uma seleção cultural; os formatos adotados pelo currículo; as concepções teóricas que influenciam o desenvolvimento do currículo e as condições nas quais ele se desenvolve.

De acordo com Pacheco (1996), o desenvolvimento curricular encarado em uma perspectiva problemática, reforça a interdependência dos participantes no processo e reconhece a liberdade de negociar e determinar conteúdos curriculares a alunos e professores, o que pressupõe a integração dos professores em comunidades críticas e reflexivas.

Neste estudo, compactuamos com a visão de um currículo inacabado, uma proposição para ser refletida e interpretada por aqueles que são os principais protagonistas do desenvolvimento do currículo – os professores. Encaramos o currículo como um processo de ação e reflexão, como um modo de organizar as práticas educativas.

Desse modo, entendemos a articulação entre a ação e a reflexão, nesta pesquisa, na medida em que utilizamos as pesquisas científicas sobre currículo e representação semiótica como elementos práticos, e os referenciais teóricos como fundamentos para a reflexão na elaboração de uma proposta curricular para os Números Naturais no Ensino Fundamental.

2.3 SOBRE OS CURRÍCULOS DE MATEMÁTICA

De acordo com Lopes (1998), as mudanças curriculares podem ocorrer em razão de alterações políticas, desenvolvimento econômico, influências de resultados de pesquisas, novas teorias educativas, para citar os motivos mais relevantes. São nessas situações que se dão as reformas curriculares na Matemática, sendo influenciadas por elas e por condições e situações específicas.

Carvalho (2000) coloca que no Brasil, a partir do século XIX, já é possível reconstruir a trajetória histórica dos currículos de matemática sistematicamente. Como a educação de nosso país colonial ficou, sob muito tempo, influenciada pelos jesuítas, em que a ênfase dos estudos centrava-se na cultura humanística e clássica, a Matemática ficou relegada a um plano de disciplina meramente instrumental.

Ainda de acordo com esse autor, na década de 1820 houve uma organização no ensino com a divisão das escolas em pedagogias, liceus, ginásios e academias com as principais instruções do que ensinar e quando ensinar – o currículo instituído da época. A partir de 1834, depois do Ato Adicional da Lei de 15 de outubro de 1827, a instrução primária e secundária passam a ser prerrogativa das Províncias, dificultando a descrição global dos currículos de matemática da escola elementar. Todavia, de forma indireta, esses currículos podem ser estudados a partir do exame dos livros didáticos existentes na época, denotando uma grande estabilidade tanto de conteúdo quando de seu tratamento (CARVALHO, 2000).

Já para os currículos do ensino secundário a situação era outra, uma vez que o Colégio Pedro II, no Rio de Janeiro, concebido para configurar-se como estabelecimento-modelo de ensino no País, passou a controlar a fixação dos currículos de Matemática para o curso secundário, desde sua criação em 1837 até o início da década de 1950.

A portaria 966, em 1951, instituiu para os governos estaduais e dos territórios uma abertura para que pudessem apresentar seus programas de ensino, os quais passariam por uma verificação de conteúdos mínimos e instruções metodológicas e que, caso estivessem adequados, poderiam ser aprovados.

A partir da promulgação da Lei de Diretrizes e Bases de 1961, descentralizou-se oficialmente a fixação dos currículos no País. Assim, ao longo das décadas de 1970 e 1980, os programas curriculares nacionais obrigatórios foram sendo substituídos por guias, propostas, orientações de caráter não obrigatório, elaborados por secretarias estaduais ou municipais de educação. E, particularmente na Matemática, a proposta do Movimento da Matemática Moderna (MMM) começa a influenciar significativamente a organização curricular das várias secretarias.

Embasadas numa política a serviço da modernização econômica, as pretensões das reformas do MMM (democratização do ensino através de uma "pedagogia ativa e aberta") foram distorcidas na prática ao se traduzirem em um ensino formalizado ao extremo, decepado de todo suporte intuitivo, apresentado a partir de situações artificiais além de ser bastante seletivo (Pires, 2000).

Contrapondo-se ao ideário do MMM promoveram-se, de acordo com Pires (2000), as primeiras discussões sobre a resolução de problemas e a ligação da Matemática com a vida real, os debates sobre o uso de calculadoras e de outros materiais de ensino, que embasavam os estudos subseqüentes de um ensino inovador.

Assim, a partir da década de 1980, a Matemática Escolar passou a ser vista, nos currículos brasileiros e mundiais, como uma disciplina mental, com razões formativas e utilitárias, tendo seu trabalho pedagógico cada vez mais orientado para a resolução de problemas.

Nesse novo contexto, a Matemática Escolar passou a ter um objetivo maior, o de desenvolver capacidades que contribuam para a compreensão e interpretação do mundo da tecnologia, das ciências e do trabalho. Entretanto, as efetivas propostas curriculares ainda continuavam, neste período, centradas na natureza linearmente cumulativa do conhecimento matemático.

No decorrer dos anos, as reformas curriculares começaram a ser colocadas em prática em diversos países, porém sem apresentar uma base comum. As novas propostas desenvolveram-se de forma mais isolada, mas procurando incorporar os debates dos muitos encontros internacionais promovidos em torno da Educação Matemática.

No Brasil, as reformas específicas em secretarias estaduais e municipais procuraram incorporar as discussões dos encontros de Educação Matemática e, a partir de 1995, surgiram as diretrizes curriculares comuns para o ensino fundamental no Brasil – Parâmetros Curriculares Nacionais, apontando para uma superação da linearidade presente nos currículos e propiciando uma flexibilidade e abertura para os professores na organização dos temas que serão tratados em sala de aula (Pires, 2000).

O que se observa é que as mudanças ocorridas nos currículos de matemática seguiram, quase sempre, a estrutura de um currículo cartesiano, centrado no tripé: objetivos, métodos e conteúdos. Quando essas alterações, a exemplo do que aconteceu sob a influência MMM, focaram os aspectos ligados ao conteúdo, sem a devida adequação entre objetivos e métodos, ocasionou uma das principais razões para o seu fracasso. Por outro lado, quando essas mudanças são centradas em métodos, sem a atualização de conteúdos e objetivos, fatalmente se apresentam dificuldades de implementação.

D'Ambrósio (1994) afirma que o ponto crítico está exatamente na passagem de um currículo cartesiano tradicional, estruturado previamente à prática educativa, a um currículo dinâmico, que reflita o momento sociocultural e a prática educativa nele inserida, ou seja um currículo como *práxis*.

As preocupações "*do que ensinar*" redirecionadas às "*para que ensinar*", enfocadas por Carvalho (2000), denotam uma intenção de ensino voltada à tarefa de preparar cidadãos inseridos em uma sociedade marcada, cada vez mais, pelas inovações da ciência e da tecnologia, na qual os relacionamentos pessoais, profissionais e familiares se tornam cada vez mais complexos. Abaixo, a lista de objetivos para o ensino da Matemática, destacados por Carvalho:

> a) planejar ações e projetar soluções para problemas novos, que exijam iniciativa e criatividade;
> **b) compreender e transmitir idéias matemáticas, por escrito ou oralmente;**
> c) usar independentemente o raciocínio matemático, para a compreensão do mundo que nos cerca;
> d) aplicar Matemática nas situações do dia-a-dia;
> e) avaliar se resultados obtidos na solução de situações problemas são ou não são razoáveis;
> f) fazer estimativas mentais de resultados ou cálculos aproximados;
> g) saber aplicar as técnicas básicas do cálculo aritmético;
> **h) saber empregar o pensamento algébrico, incluindo o uso de gráficos, tabelas, fórmulas e equações;**
> i) saber utilizar os conceitos fundamentais de medidas em situações concretas;
> j) conhecer as propriedades das figuras geométricas planas e sólidas, relacionando-as com os objetos de uso comum, no dia-a-dia ou no trabalho;
> k) utilizar a noção de probabilidade para fazer previsões de eventos ou acontecimentos;
> **l) integrar os conhecimentos algébricos, aritméticos e geométricos para resolver problemas, passando de um desses quadros para outro, a fim de enriquecer a interpretação do problema, encarando-o sob vários pontos de vista;**
> m) **tratar a matemática como um todo orgânico, em vez de dividi-la em compartimentos estanques** (CARVALHO, 2000, p. 104-105, grigo nosso).

Percebemos nestes objetivos, principalmente nos destacados (*b, h, l* e *m*) e especialmente enunciado no penúltimo, uma relação direta com a idéia das representações semióticas no ensino da Matemática Escolar. Relações essas que envolvem a questão do que entendemos, enquanto alunos e professores, sobre o objeto matemático; a forma como compreendemos as representações dos objetos matemáticos em sua natureza como saber historicamente elaborado e disseminado; a percepção da matemática como ciência, como ferramenta, como linguagem e sua utilidade em nossa sociedade; a aprendizagem, pois implica nos processos mentais individuais que perpassam a questão semiótica e, finalmente, a questão do ensino, uma vez que engloba as idéias anteriores e o método, o como tratar o saber matemático no contexto escolar.

Como é colocado por vários educadores matemáticos na atualidade e também por Carvalho (2000), a compartimentalização é um velho vício do ensino da Matemática Escolar, uma vez que, aritmética, medida e geometria são geralmente tratadas isoladamente, com pouco contato entre elas. Essa premissa também é vista em Pires (2000), em que a autora propõe um currículo que supere a estrutura linear tradicionalmente seguida, ao defender a organização dos conteúdos centrada na idéia de rede[19]. Tais colocações apontam para mais um argumento em favor da noção das representações semióticas perpassando a estrutura curricular da matemática, uma vez que, ao se trabalhar com diversas representações do mesmo objeto matemático, se está indiscutivelmente transitando em vários eixos, por assim dizer, da matemática.

Autores que investigam o campo curricular, tais como Apple (1986), Sacristán (1998) contestam o reprodutivismo e apresentam propostas centradas em um compromisso com a criação e a produção da cultura e do conhecimento. Tendo essas idéias em perspectiva é que acreditamos ser viável a aproximação das representações semióticas, articuladas à noção de situações (Vergnaud, 1990) e à natureza das tarefas (Ponte, 2005), às orientações curriculares para a matemática, no sentido de acrescentar premissas e contribuições da psicologia cognitiva na efetivação dos trabalhos pedagógicos.

2.3.1 As Pesquisas sobre Currículos de Matemática

Desde o início da sistematização das pesquisas que envolvem a Educação Matemática, nos fins dos anos 1970, já apareciam investigações que tinham seu foco centrado no currículo. Desse período até o ano de 1990, Fiorentini (1994) realizou um levantamento detalhado das pesquisas sobre Educação Matemática, em

[19] Essa idéia centra-se na superação da tradicional justificativa dos pré-requisitos para o estudo de um ou outro conteúdo na seqüência curricular, que encara o percurso curricular como univocamente determinado, e destaca as relações múltiplas existentes entre temas da Matemática. Assim, na estrutura curricular em rede, os conteúdos matemáticos são explorados em temas trabalhados em projetos interdisciplinares e o desenho desse currículo é composto por uma pluralidade de pontos, ligados entre si por uma pluralidade de caminhos, onde nenhum ponto ou caminho seja privilegiado em relação a outro, nem univocamente subordinado a qualquer um. Os caminhos percorridos, embora lineares, não devem ser vistos como os únicos possíveis, pois um percurso pode incluir tantos pontos quantos se desejar e, em particular, todos os pontos da rede (PIRES, 2000).

sua Tese de Doutorado. Sendo assim, tomamos emprestado, aqui, os resultados da sua investigação e a categorização das pesquisas realizada por esse educador, no que diz respeito aos temas que envolvem o currículo de matemática.

Fiorentini (1994) encontrou 146 pesquisas no período de 1970 a 1990 que tratavam de currículo e organizou 7 focos específicos com esse tema. No entanto, restringir a revisão a esse período poderia prejudicar a constatação do desenvolvimento da produção na área. Desse modo, optamos por ampliar a investigação ao período de 1991 a 2005.

A partir de 1990, o levantamento das pesquisas que envolveram de alguma forma questões curriculares foi realizado tendo como base os registros da CAPES. Utilizamos a mesma categorização proposta por Fiorentini, para melhor avaliação dos trabalhos e facilidade na análise das pesquisas que poderão nortear nossas idéias sobre currículo. Para essa categorização, analisamos os resumos das pesquisas que continham como uma das palavras-chave a palavra “currículo” ou “currículo de matemática”. Esses resultados, juntamente com os dados investigados por Fiorentini, são apresentados no Quadro 2.1.

Algumas ressalvas devem ser feitas neste ponto. A primeira diz respeito ao fato de muitas instituições não enviarem regularmente as dissertações e teses defendidas em Educação Matemática para a CAPES, sendo cabível então que muitos trabalhos sobre currículo não tenham sido considerados neste levantamento. A segunda relaciona-se com a análise a partir dos resumos das pesquisas, uma vez que o acesso ao texto completo de muitas delas não foi possível.

Outro fator que julgamos importante esclarecer é o critério utilizado para escolher as pesquisas para a revisão no período de 1991 a 2005: “a palavra-chave currículo”, uma vez que muitas pesquisas que envolvem questões de aprendizagem de conteúdos específicos e, portanto, tratam do ensino e da aprendizagem de um saber inserido num “currículo”, não utilizam esta palavra como palavra-chave em suas investigações. Acreditamos que essa é uma das principais razões para o menor número de pesquisas detectado nesse período. No entanto, para os objetivos que temos aqui, essa amostra de vinte e seis pesquisas sobre currículo, observadas no período de 1991 a 2005, já retratam o panorama que das pesquisas que envolvem este foco e, principalmente, indicam que nenhum trabalho da mesma natureza que este, tenha sido desenvolvido.

QUADRO 2.1 - PESQUISAS SOBRE CURRÍCULO DE MATEMÁTICA NO PERÍODO DE 1970 A 2005, POR FOCO TEMÁTICO

N.º	Foco temático	N.º total de Trabalhos (1970-1990)	% do período	N.º total de Trabalhos (1991-2004)	% do período
1	Desenvolvimento e/ou experimentação de novas propostas curriculares.	45	31	7	27
2	Análise de propostas curriculares.	4	3	7	27
3	Análise do processo de produção/implementação de propostas curriculares.	7	5	4	15
4	O currículo presente nas práticas escolares.	17	12	2	8
5	Fundamentos histórico-filosóficos e epistemológicos para inovação curricular.	3	2	1	4
6	Ensino/aprendizagem de tópicos específicos.	65	44	4	15
7	Relação da matemática com outras disciplinas.	5	3	1	4
TOTAL		**146**	**100%**	**26**	**100%**

É possível observar que no período de 1970 a 1990 o maior número de trabalhos se concentra em torno do que envolve um conteúdo específico do programa curricular. Destacamos, ao observar os estudos desenvolvidos neste período, que a maioria, se não dizer todos eles, estiveram centrados em analisar, propor, organizar, estudar idéias curriculares que envolviam os conceitos matemáticos. Uma preocupação voltada para a superação da linearidade presente nas estruturas curriculares vigentes parece não ter havido.

Essa última consideração pode ser explicada, uma vez que a própria Educação Matemática, como área de estudo e pesquisa, se encontrava em processo de consolidação e as investigações ganhavam gradativamente um nível maior de criticidade e autenticidade.

Ao analisar os sub-temas localizados em cada foco temático nos dois períodos considerados, observamos que não é possível alocá-los sob um mesmo título. As tendências são outras, e a produção curricular dissemina-se em muitos temas e sub-temas. Os quadros contendo os sub-temas para cada foco temático no período de 1970 a 1990 e no período de 1991 a 2005 encontram-se nos Anexos 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 10.

A partir desse levantamento foi possível observar que houve muitas iniciativas interessantes e criativas no sentido de pensar sobre o currículo que vem sendo praticado nas escolas. Contudo, a estrutura principal do currículo, entendido no contexto de programas conteudistas para serem trabalhados nas escolas, foi mantida. De todos esses trabalhos, apenas um, Pires (1995), foge dessa linha linear na compreensão dos currículos para buscar uma alternativa diferenciada, trazendo uma proposta concreta e aplicável, acima de tudo – a noção do currículo em rede, que transcende a idéia de pré-requisitos e, assim, da linearidade presente nas investigações.

Outro ponto que se pode inferir a partir desses dados diz respeito ao fato de que todas essas pesquisas apresentaram uma estrutura fortemente conceitual ao considerarem os elementos constituintes do currículo. Isso significa que não houve considerações acerca de elementos que envolvessem a articulação das representações semióticas dos objetos matemáticos nas produções analisadas, nem orientações acerca da elaboração de situações que priorizassem o trânsito entre representações e a conversão entre representações. Ao menos como foco principal de estudo.

Olhando para esse cenário, parece-nos, cada vez mais, que pensar sobre elementos norteadores para propostas curriculares de matemática, que busquem um olhar diferenciado sobre o que é ensinado nas escolas e da forma como é ensinado, torna-se uma questão de relevância para pesquisas em Educação Matemática.

2.4 A ORGANIZAÇÃO DOS CONTEÚDOS NA CONFIGURAÇÃO DO CURRÍCULO

A intenção de buscar elementos que possibilitem uma organização curricular da Matemática Escolar, não apenas como uma seqüência de conceitos estruturados numa certa hierarquia de dificuldades, requer um olhar diferenciado para a configuração desse currículo. Uma configuração que contemple as expectativas conferidas hoje ao estatuto do conhecimento. Um conhecimento que por sua natureza não é linear, e que, portanto, não deve ser estruturado nas propostas curriculares desta forma.

A linearidade sempre vem acompanhada de outra idéia igualmente limitadora: a acumulação, que pressupõe o modelo de ensino no qual o aluno é concebido como um recipiente vazio, sem história e conhecimentos, que deve ser preenchido como o saber científico veiculado na escola. Entendemos a linearidade como sendo representada por uma configuração que lembra uma linha a ser seguida, com início, meio e fim bem determinados. Nos currículos de Matemática a linearidade se manifesta por uma sucessão de conteúdos que deve ser desenvolvida numa certa ordem e pela definição de pré-requisitos ou informações/habilidades vistas como necessárias para seguir o curso dos conteúdos, ou seja, o aluno precisa dominar tais informações antes de ter acesso a outras idéias ou conceitos.

As propostas curriculares analisadas no Capítulo I apresentam elementos que sugerem uma superação desta estrutura linear. De um modo geral, todas indicam, no que diz respeito à organização dos conteúdos, que é o professor que vai organizar os conteúdos científicos básicos e realizar as conexões entre os vários eixos temáticos propostos, e que nenhuma organização pode ser concebida como se fosse única e absoluta, numa hierarquia predefinida e linear.

Tanto os PCN, a proposta de Portugal e a dos Estados Unidos, como as indicações gerais apresentam os conteúdos essenciais distribuídos em Números, Geometria, Medidas e Tratamento da Informação, com algumas pequenas diferenças, a saber:

PCN (Brasil): blocos temáticos: Números e Operações; Espaço e Forma; Grandezas e Medidas; Tratamento da Informação. A álgebra aparece como uma extensão ao bloco Números e Operações;

Programa de Matemática do Ensino Básico (Portugal): temas matemáticos: Números e Operações; Álgebra; Geometria e Tratamento de Dados. O tema Álgebra não aparece no 1º. ciclo (o qual corresponde às séries iniciais do Ensino Fundamental brasileiro), embora o documento coloque que há objetivos de cunho algébrico em outros temas deste ciclo, e tanto no 1.º como no 2.º ciclo a Geometria aparece associada à Medida;

Princípios e Normas para a Matemática Escolar (Estados Unidos): o termo utilizado é *standards* (normas ou padrões) e contemplam não só os conteúdos mas também os processos envolvidos no ensino e na aprendizagem desses conteúdos:

Números e Operações; Álgebra; Geometria; Medidas; Análise de dados e Probabilidades; Resolução de Problemas; Raciocínio e Prova; Comunicação; Conexões e Representações.

Nas propostas desses três países os conteúdos são apresentados como conceitos básicos e essenciais a serem desenvolvidos no ensino da Matemática Escolar, com uma distribuição prévia por níveis (Estados Unidos) ou ciclos de aprendizagem (Brasil e Portugal), destacando a necessidade de existir a conexão entre os conteúdos dos diferentes blocos ou eixos temáticos. No entanto, apesar das propostas indicarem essa abertura para um trabalho que envolva capacidades além das estritamente desenvolvidas por meio dos conteúdos, envolvendo a resolução de problemas, o raciocínio e a comunicação de idéias, em termos de configuração não são apresentadas estruturas diferentes das já conhecidas.

Das propostas brasileiras analisadas, uma que parece distanciar-se da estrutura linear com uma configuração diferente é a de Santa Catarina, na qual a organização dos conteúdos é apresentada por um mapa conceitual e um quadro que sugere a ênfase a ser dada a cada conceito nas séries ou fases da Educação Básica. De acordo com a proposta, o mapa conceitual é:

> [...] uma apresentação sinótica dos conceitos científicos essenciais e alguns conceitos subordinados e com conexões entre eles, visualizando relações. O mapa conceitual constante em cada disciplina curricular não é um mapa ideal, final e completo. [...] Contribui para situar o professor e os alunos, em cada estágio do trabalho pedagógico, no conjunto dos conceitos da disciplina (SANTA CATARINA, 2001, p.15).

Os conceitos são considerados essenciais no sentido de permitir o trabalho com outros conceitos que possam aparecer conectados ou não à esses. Para a efetivação do trabalho pedagógico a partir do mapa conceitual, o documento sugere o quadro de ênfases dos conceitos essenciais, explicitando a ênfase ou prioridade que poderá ser desenvolvida em cada série ou fase. O mapa conceitual de Matemática e o quadro de ênfase, proposto para esta disciplina pelas diretrizes de Santa Catarina, encontram-se nos Anexos 11 e 12.

2.4.1 A Rede como Configuração para o Currículo de Matemática Escolar

Uma das propostas que se encaminha em uma direção de superação da linearidade e hierarquização dos currículos de Matemática Escolar, é a desenvolvida por Pires (2000), em sua tese de doutorado, defendendo a metáfora da rede nos currículos de Matemática. Essa idéia para a organização curricular está presente em alguns currículos do Estado de São Paulo e vem sendo estudada em várias pesquisas científicas.

A configuração de um currículo de Matemática em rede, no lugar de uma sucessão de pontos que devem ser dados numa certa ordem, pressupõe a concepção do conhecimento como uma rede de significados em um espaço de representações. Em outras palavras, "[...] uma teia de relações cuja construção não se inicia na escola" (MACHADO, 2000, p. 31).

A metáfora da rede é explicitada em uma estrutura filosófica abstrata por Serres[20] (1967 apud Pires, 2000, p. 7), que apresenta alguns dos aspectos mais característicos da idéia do conhecimento como rede:

> Imaginemos um diagrama em rede, desenhado num espaço de representações. Ele é formado, num dado instante (pois veremos que representa qualquer estado de uma situação móvel), por uma pluralidade de pontos (extremos), ligados entre si por uma pluralidade de ramificações (caminhos). Cada ponto representa uma tese ou um elemento efetivamente definível de um conjunto empírico determinado. Cada via é representativa de uma ligação ou de uma relação entre duas ou mais teses, ou de um fluxo de determinação (analogia, dedução, influência, oposição, reação...) entre dois ou mais elementos dessa situação empírica. Por definição, nenhum ponto é privilegiado em relação a um outro, nem univocamente subordinado a qualquer um; [...] o mesmo se passa com os caminhos, que transportam os fluxos de determinações diferentes e variáveis com o tempo. Existe, enfim, uma reciprocidade profunda entre as intersecções e os caminhos, ou melhor dizendo, uma dualidade. Um extremo pode ser considerado como a intersecção de duas ou mais vias (uma tese pode constituir-se da intersecção de uma multiplicidade de relações ou um elemento surgir subitamente da confluência de várias determinações); correlativamente, um caminho pode ser visto como uma determinação constituída a partir da correspondência entre duas intersecções preconcebidas (relacionamento de quaisquer duas teses, interação de duas situações etc.). Trata-se pois de uma rede, de um diagrama o mais irregular possível, onde podemos fazer variar até o máximo a diferenciação interna.

Isso significa que a configuração em rede pode representar qualquer tipo de relação que envolva qualquer área do conhecimento humano e permite uma

---
[20] SERRES, M.A. **Comunicação.** Porto, Rés, 1967.

percepção global das relações formadas entre os nós e os caminhos. Sendo assim, o percurso seguido na rede não é único; o início e o fim podem ser múltiplos, dependendo do caminho escolhido e, portanto, a idéia da rede se contrapõe diretamente à idéia de encadeamento lógico, de ordenação e de linearidade na construção do conhecimento. Conseqüentemente se contrapõe às manifestações pedagógicas relacionadas com os pré-requisitos, seriações e prescrições fechadas.

No campo cognitivo, a idéia de rede tem lugar quando se entende que compreender um determinado assunto requer construir múltiplas relações, que podem ser estabelecidas entre vários assuntos, mesmo que as fontes de relação entre esses assuntos não estejam no âmbito de uma mesma área do saber (PIRES, 2000).

Sendo assim, idéias como conexões entre conteúdos pelas diversas representações dos objetos matemáticos, eixos temáticos para elaboração de projetos, resolução de problemas, raciocínio lógico, tomada de decisões, tanto da parte dos alunos quanto dos professores, ou seja, tarefas matemáticas de diversas naturezas são coerentes com a configuração do currículo em rede.

A rede permite um desenho curricular que não seja rígido e nem inflexível, composto por uma pluralidade de pontos, ligados entre si por múltiplas ramificações/caminhos, em que nenhum ponto ou caminho é privilegiado em relação a um outro, nem univocamente subordinado a qualquer um. É por conta dessa flexibilidade que a configuração em rede possibilita a explicitação de um trabalho pautado não somente nos conceitos, mas nas representações semióticas desses conceitos a partir das diferentes tarefas matemáticas que deverão ser propostas para percorrer os caminhos da rede.

Partindo disso, é possível que o estudo dos conteúdos se torne significativo para o aluno, sendo justificado não somente pela sua qualidade de pré-requisito para o estudo de um outro conteúdo, mas também pelo seu valor no desenvolvimento de capacidades como as indicadas nos *Standards* (NCTM, 2000): resolver problemas, raciocinar dedutivamente, comunicar idéias e realizar conexões. Tais capacidades não são estritamente relacionadas com a Matemática Escolar, mas sim necessárias à vida em sociedade.

2.5 CURRÍCULOS, MATEMÁTICA ESCOLAR, REDES: PRIMEIRAS CONEXÕES

Ao longo da história, as sociedades têm organizado o currículo de diferentes maneiras, refletindo as concepções e teorizações curriculares da época e as características do sistema dominante e, assim, de certa forma, ajudando a projetar o futuro.

Segundo D'Ambrósio (2005), dos currículos modernos, o de maior influência talvez tenha sido aquele adotado nos Estados Unidos no século XIX, chamado dos *"three R's: Reading, Writing and Arithmetics"* (ler, escrever e contar), até hoje dominando muitos sistemas escolares de todo o mundo. No entanto, no mundo moderno é insuficiente ler, escrever e contar, o que leva a novas propostas. Propostas essas que não se relacionam estritamente ao acréscimo de conteúdos científicos nas propostas curriculares, mas sim, ao desenvolvimento de capacidades diversas que possibilitem o desenvolvimento do indivíduo de forma mais global possível.

Nesse sentido, conceber o currículo como um modo de organizar as práticas educativas a partir de um processo de ação e reflexão, ou seja, o currículo como *práxis*, nos parece mais adequado às exigências da sociedade atual. Esse modo de entender o currículo permite indicações, orientações e nunca prescrições, uma vez que as idéias desenvolvidas devem sempre suscitar reflexões e discussões na escola, com os agentes da efetivação do currículo, num movimento contínuo de adaptações.

A metáfora da rede para a configuração curricular nos parece coerente com essa perspectiva de currículo inacabado, pois agrega condições explícitas para a flexibilidade e movimento dos conteúdos da Matemática Escolar. Também porque permite, pela multiplicidade de nós e caminhos, a explicitação das representações semióticas dos objetos matemáticos por meio da realização de diferentes tarefas matemáticas, auxiliando no processo de compreensão dos conceitos.

Como vimos no capítulo anterior, as propostas curriculares, de maneira geral, não focam, não priorizam a criação de situações que permitam transitar entre representações semióticas. Por isso, em nosso estudo, pretendemos desenvolver uma proposta curricular, em uma configuração em rede, que considere na organização dos conteúdos curriculares, bem como nas orientações didático-metodológicas, além dos conceitos matemáticos, as suas múltiplas representações semióticas e a natureza das tarefas matemáticas. Em outras palavras, pretendemos priorizar situações que dão importância ao uso das representações semióticas e ao trânsito entre representações.

Essa proposta, longe de se constituir uma prescrição pronta e acabada, para ser seguida sem discussões e participação efetiva dos agentes de efetivação do currículo – os professores, tem o objetivo de promover reflexões sobre a articulação das representações semióticas em propostas curriculares e, com isso, discutir caminhos, agregar elementos, pensar sobre o ensino da Matemática Escolar.

CAPÍTULO III

REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA, CAMPOS CONCEITUAIS E TAREFAS: CONTRIBUIÇÕES TEÓRICAS PARA PENSAR O CURRÍCULO DE MATEMÁTICA

Uma pedra, uma figura, um signo, uma palavra que nos cheguem isolados de seu contexto são apenas aquela pedra, aquela figura, aquele signo ou palavra: podemos tentar defini-los, descrevê-los como tais, só isto; se além da face que nos apresentam possuem também uma outra face, a nós não é dado sabê-lo. A recusa em compreender mais do que aquilo que estas pedras mostram é talvez o único modo possível de demonstrar respeito por seu segredo; tentar adivinhar é presunção, traição do verdadeiro significado perdido.

...

Contudo, sabe que não poderia jamais sufocar em si a necessidade de traduzir, de passar de uma linguagem a outra, de uma figura concreta a palavras abstratas, de símbolos abstratos às experiências concretas, de tecer e tornar a tecer uma rede de analogias. Não interpretar é impossível, como é impossível abster-se de pensar.

Palomar (p. 90)
Italo Calvino

3.1 INTRODUÇÃO

Registros de Representação Semiótica, Campos Conceituais, situações e tarefas, isolados de seu contexto, são apenas como a pedra, a figura, o signo... Não vão além do que vemos. É preciso articulá-los. Assim, este capítulo é destinado a refletir sobre a possibilidade de articular essas noções teóricas em favor da aprendizagem da Matemática Escolar. Porque é possível interpretar e pensar.

3.2 PARA ENTENDER COMO FUNCIONAM AS REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS

Os objetos do conhecimento não são imediatamente acessíveis à consciência, é preciso que eles sejam dados a conhecer. Isso acontece por uma mediação semiótica, ou seja, por meio de uma representação.

Duval (1998a) ressalta que não poderá haver compreensão possível sem o recurso às representações semióticas. Então, para entender como funcionam essas representações semióticas, como via de acesso ao conhecimento matemático, é preciso compreender os elementos que a constituem: objeto, signo, referência, sentido e significado.

3.2.1 Os Objetos para Representar

Não se pode pensar em representação sem pensar no objeto representado. Não se pode ter conhecimento sem representação, pois é a representação que permite o acesso aos objetos do conhecimento e, uma vez que esses não podem estar presentes de fato, se faz necessário, uma via de acesso, uma mediação. Mas então, o que é, de fato um objeto? E, particularmente o que nos interessa aqui, o que é um objeto matemático no contexto escolar?

Peirce (1977)[21] define como objeto do signo, em sua teoria semiótica da realidade, o referente, a coisa que se encontra em uma relação parcial de correspondência. Então, para Peirce, o objeto pode ser uma coisa concreta, material do mundo, da qual é possível se ter um conhecimento perceptível, mas também pode ser algo abstrato, uma entidade puramente mental ou imaginária.

A partir disso, Peirce (1977) reconhece dois tipos de objetos, o imediato e o mediato, real ou dinâmico. O objeto imediato é interior ao signo, uma representação

---

[21] Charles Sanders Peirce (1839-1914) foi um cientista, químico, matemático, físico, astrônomo, filósofo. Realizou contribuições importantes no campo da Geodésia, Metrologia e Espectroscopia. Tinha especial interesse na Filosofia, estabelecendo um vínculo entre ela e a Lógica. (Santaella, 2003). Segundo Noth (1995), foi o mais importante dos fundadores da moderna semiótica geral.

mental de um objeto, quer exista ou não o objeto. Diz respeito ao modo como o objeto dinâmico está representado no signo, ou seja, é uma cognição produzida na mente do intérprete.

Santaella (2003) exemplifica da seguinte forma:

> Se se trata de um desenho figurativo, o objeto imediato é a aparência do desenho, no modo como ele intenta representar por semelhança a aparência do objeto (uma paisagem, por exemplo). Se se trata de uma palavra, o objeto imediato é a aparência gráfica ou acústica daquela palavra como suporte portador de uma lei geral, pacto coletivo ou convenção social que faz com que essa palavra, que não apresenta nenhuma semelhança real ou imaginária com o objeto, possa, no entanto, representá-lo (p. 59-60).

Já o objeto real (mediato ou dinâmico) é aquilo que o signo substitui, portanto exterior ao signo, e que, de certa forma, determina este. Segundo Noth (1995, p. 68), esse segmento da realidade chamado de objeto real "é mediato e dinâmico porque só pode ser indicado no processo da semiose[22]". Logo, o objeto na representação do conhecimento pode ser visto como o conteúdo da realidade que deverá ser apreendido. Em outras palavras, é algo que o signo irá representar.

Quanto ao objeto matemático, de fato, não existe consenso na comunidade de professores de matemática e nem de matemáticos a respeito de sua definição. Em diferentes posições filosóficas da matemática, como o logicismo, platonismo, formalismo e intuicionismo, por exemplo, é possível encontrar diferentes posturas sobre essa questão. O que parece, no entanto, permanecer na maioria delas, é o fato dos objetos matemáticos serem considerados como objetos ideais, como números, grupos, área, ponto, volume, conjuntos, reta, ou mesmo um feixe de relações articuladas por um objeto (objeto-estrutura). Ora, como não é possível trabalhar com objetos ideais, abstratos ou, em outras palavras, com construtos mentais, parece óbvio que não há como prescindir das representações para acessar e apreender o objeto matemático. Então, como coloca Flores (2006, p. 90) "conhecer o objeto só é possível, como já foi dito, mediante a sua materialização; é preciso que ele seja dado ao conhecimento, ou melhor, ao sujeito do conhecimento".

Uma forma de superar a visão geralmente apresentada em uma perspectiva conceitualista/formalista, na qual os objetos matemáticos são reduzidos às suas definições e relações lógicas com outros objetos para uma perspectiva de objeto

[22] Semiose é entendida por Peirce como "[...] o processo no qual o signo tem um efeito cognitivo sobre o intérprete" (apud NOTH, 1995, p. 66), ou seja é o processo de interpretação, de compreensão do signo, portanto um ato cognitivo.

matemático que permita compreender e trabalhar com o conhecimento em diferentes contextos, é a apresentada por Godino e Batanero (1994, p. 330):

> Os objetos matemáticos devem ser considerados como símbolos de v unidades culturais, emergentes de um sistema de usos ligados às atividades de resolução de problemas que realizam certos grupos de pessoas e que vão evoluindo com o tempo.

Compartilhamos as idéias de Godino e Batanero (1994), de que o objeto matemático não é uma entidade ideal absoluta, ao contrário são as entidades socioculturais, que intervém de alguma forma, na atividade matemática. Ou, como propõe Radford (2004, p. 57) na semiótica cultural, "os objetos matemáticos são formas conceituais de atividade reflexiva mediada histórica, social e culturalmente encarnada".

Sendo assim, quando consideramos que os objetos matemáticos são formas conceituais provenientes de sistemas de práticas realizadas para resolver problemas por certo grupo de pessoas, estamos nos aproximando da definição de Matemática Científica e Matemática Escolar, estabelecidas no primeiro capítulo desta tese, como ligadas essencialmente às práticas sociais do matemático e do professor que ensina matemática. Logo, podemos dizer que os objetos matemáticos emergentes da Matemática Científica e da Matemática Escolar são diferentes porque respondem a problemas de contextos distintos. Segundo Moreira e David (2003, p. 66),

> O que se quer enfatizar é que, para o matemático, lidando com a teoria na fronteira do conhecimento, não importa pensar os reais como um professor precisa pensá-los, lidando com seus alunos no processo de escolarização básica. A idéia que precisa ficar clara é a de que o conjunto dos números reais é um objeto para a matemática escolar e "outro objeto" para a matemática científica.

O objeto "número inteiro", por exemplo, será tratado de maneiras substancialmente diferentes no contexto da escola e no contexto da Matemática Científica. Na escola básica, o interesse principal é encontrar formas possíveis que proporcionem a compreensão do aluno, e isso envolve situações didáticas, tarefas matemáticas diversas e adequadas ao desenvolvimento do ensino. Ao matemático profissional interessa a estrutura de conjunto para desenvolver estudos mais complexos, o uso dos números inteiros, os contextos para explicação do sinal negativo.

De tudo isso, podemos ao menos dizer que o objeto matemático não pode ser entendido em uma única dimensão. Ao contrário, o termo objeto, conforme explica Lefebvre (2001[23], apud FLORES, 2006, p. 90), envolve três dimensões: a do objeto material (uma representação); a conceitual (o conceito); e a de uma "idealidade matemática" (a entidade). E, a partir do que vimos, no que diz respeito ao objeto matemático escolar, acrescentamos a dimensão do contexto de uso.

Partindo dessas considerações, podemos assumir dois fatos: a existência ideal dos objetos matemáticos numa dada cultura, frutos da construção humana e dotados de significados diferentes por pessoas e instituições diferentes, e a representação semiótica, como forma de acessá-los na aquisição do conhecimento, no tratamento desses objetos e na apreensão deles.

As conseqüências disso levam, então, a inferirmos que a distinção entre o objeto matemático e sua representação é um fato mais que necessário, é um fato resolvido para a produção de novos conhecimentos, bem como para a aprendizagem do conhecimento matemático, como emprega Duval (1993). Portanto, é preciso, para analisar e compreender a produção e apreensão do conhecimento matemático, compreender acerca dos signos como elementos que materializam a representação dos objetos.

3.2.2 A Materialização da Representação: os Signos

O papel fundamental atribuído ao signo na produção dos conhecimentos, ou seja, na própria gênese das idéias, delineada na modernidade, favoreceu o nascimento de teorias semióticas que abarcam várias áreas do conhecimento, além da matemática.

As pesquisas que envolvem a semiótica podem apresentar muitos começos, imbricados nas investigações sobre os signos, e remonta, segundo Noth (1995), estudos diagnósticos dos signos que representavam as doenças no século II. A semiótica enquanto ciência, inserida nas chamadas ciências humanas, teve um singular nascimento, marcado por origens praticamente simultâneas no tempo, mas

[23]LEFEBVRE, M. **Images, écritures et espace de médiation**: étude anthropologique des pratiques graphiques dans une communauté de mathématiciens. 2001. 224f. Thése (Doctorat en Sciences de l'Information et de la Communication) – Université Louis Pasteur, Strasbourg I, Strasbourg, França, 2001, p. 155.

distintas no espaço. Santaella (2003) localiza movimentos nesse sentido na Europa ocidental (Saussure), na União Soviética (Viesse-Iovski e Potiebniá) e nos EUA (Charles S. Peirce).

Esse fato parece corroborar com a hipótese da instauração do pensamento moderno pautado numa teoria de representação (Foucault, 1992), bem como da emergência de uma “consciência semiótica”, como diz Santaella (2003). Ou seja, a disseminação crescente das linguagens e códigos, dos meios de reprodução e difusão de informações e mensagens, possibilitou uma consciência geral de linguagem em sentido amplo, gerando a necessidade do aparecimento de uma ciência capaz de criar dispositivos metodológicos para pensar e representar os conhecimentos.

Essa ciência é, então, a semiótica que, segundo Santaella (2003), abrange um amplo campo de investigação, justamente porque seu objeto de indagação contempla os modos de constituição de todas as linguagens possíveis, presentes nas mais diversas áreas do conhecimento.

O signo, tomado como a parte material da representação, apresenta muitas definições dadas por lingüistas ou filósofos das ciências[24], mas, em comum, é possível dizer que todos trazem a idéia de que o signo está no lugar de algo; é uma expressão que designa, denota ou representa alguma coisa a alguém sob algum aspecto. Essa alguma coisa, segundo Ladrière (1977), pode ser um objeto ideal, um objeto concreto ou ainda um outro signo – neste estudo, o objeto matemático. Santaella (2000) generaliza essa questão ao mesmo tempo em que deixa clara a função de substituição do signo e a distinção do objeto com a coisa representada:

> Qualquer coisa de qualquer espécie, imaginada, sonhada, sentida, experimentada, pensada, desejada... pode ser um signo, desde que esta coisa seja interpretada em função de um fundamento que lhe é próprio, como estando no lugar de qualquer outra coisa (p. 90).

Fica claro, então, que o signo não é o próprio objeto ao qual quer representar, e que essa distinção é, de fato, muito importante ao se analisar a produção dos conhecimentos em matemática. Para conhecer e, portanto, para aprender, como aplica Duval (1995), é preciso ter acesso aos objetos do conhecimento. Logo, para ensinar também se faz necessário possibilitar esse

[24] Ver, por exemplo, Netto (1980), Santaella (2003), Noth (1995, 1996), Peirce (1977), Ladrière (1977).

acesso, que se dá pela via da representação. Representação que acontece por meio de um suporte material, um código, um artifício, uma simbologia, uma expressão, uma palavra, um mapa, uma figura, um gráfico – um signo.

A partir disso, podemos entender que a produção dos conhecimentos e, consequentemente, a aquisição destes por um processo de ensino, requer o uso de signos, que funcionam como elementos de mediação entre o objeto e o sujeito.

Para elucidar a esse respeito, muito contribuíram as idéias de Charles Sanders Peirce sobre a relação ternária que define o signo e envolve o objeto (a coisa representada), o símbolo (sinal utilizado para representar) e o interpretante (o conceito que o símbolo faz surgir na mente do sujeito, o significado).

Sendo assim, para Peirce (1977, p. 46), não se pode entender o signo fora de uma relação tríade genuína:

> Um signo ou *representâmen*, é aquilo que, sob certo aspecto ou modo, representa algo para alguém. Dirige-se a alguém, isto é, cria, na mente dessa pessoa, um signo equivalente, ou talvez um signo mais desenvolvido. Ao signo assim criado denomino *interpretante* do primeiro signo. O signo representa alguma coisa, seu objeto. Representa esse objeto, não em todos os seus aspectos, mas com referência a um tipo de idéia.

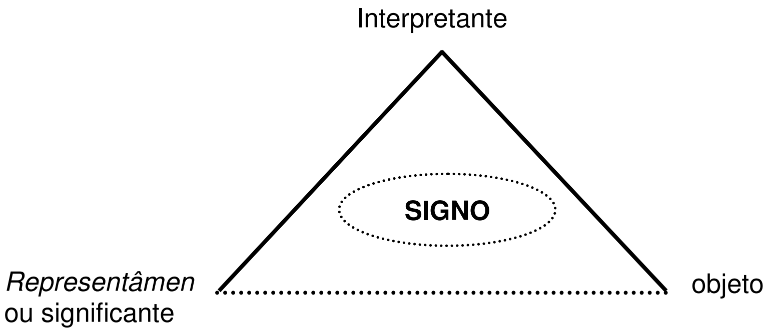
Essa estrutura tríade aparece em muitas teorias semióticas, com algumas pequenas variações. O famoso triângulo de Ogden e Richards[25] (1972, apud ECO, 1974; NETTO, 1980), por exemplo, mostra como a tríade relaciona os componentes para explicar o "significado" (ECO, 1974; GÓMEZ, 2005) enquanto Peirce a utiliza para compreender o funcionamento do signo. No entanto, para compreender um ou outro, é preciso passar pela análise tanto do signo quanto do significado, pelas relações constituídas entre os elementos da tríade. Isso se faz importante esclarecer, uma vez que o signo é o que objetiva a representação, ou seja, uma teoria geral do signo relaciona-se fundamentalmente a uma teoria geral da representação. E se estamos considerando a importância da representação semiótica para o ensino e a aprendizagem da Matemática Escolar, então é necessário que se compreenda como se dá esse processo.

A definição de signo dada por Peirce pode ser então representada pelo esquema abaixo:

---

[25] OGDEN, C.K. e RICHARDS, I.A. **O significado de significado**. Rio de Janeiro: Zahar, 1972.

FIGURA 3.1 - TRÍADE DE CHARLES SANDERS PEIRCE (ADAPTADO DO TRIÂNGULO BÁSICO DE OGDEN E RICHARDS, 1972)



Nessa relação, o signo aparece ligado aos seus três elementos – *representâmen* (ou significante), interpretante e objeto – e não pode ser pensado isoladamente. A linha pontilhada entre o significante e o objeto aparece por conta da não-existência de relações causais diretas entre eles, o que já é diferente quando se trata das relações entre significante e interpretante ou entre objeto e interpretante.

No entanto, como Peirce (1977) faz uma divisão dos signos em símbolo, ícone e índice, há que se considerar esses dois últimos casos particulares, nos quais a relação entre significante e objeto acontece de forma direta, podendo haver continuidade na linha que liga esses dois vértices. Isso porque os ícones são considerados signos que guardam uma relação com o objeto representado através de algum traço de similaridade e os índices são signos afetados diretamente pelo objeto, o girassol, por exemplo, é um índice, porque aponta para o lugar do sol no céu. Já os símbolos são, para Peirce (1977), signos arbitrários, instituídos. Um tipo geral. Em outras palavras, o símbolo está associado a um objeto por força de uma lei, uma convenção, uma idéia. E é por conta dessas disposições ou normas que o símbolo pode representar um objeto diferente dele.

O objeto que será representado, por sua vez, pode ser algo perceptível, concreto (uma coisa material) ou abstrato, uma entidade mental ou imaginária, ou ainda um objeto matemático como vimos anteriormente. Finalmente, temos o interpretante, que consiste no signo criado na mente do intérprete (o sujeito) pela mediação da relação triádica. Em outras palavras é a imagem mental ou o conceito criado quando da mediação signo-objeto. Esse processo de comunicação e interpretação dos signos na mente do sujeito do conhecimento é denominado semiose.

A funcionalidade da tríade semiótica de Peirce pode ser entendida em um exemplo: temos o signo, a palavra /borboleta/ que nos remete ao objeto real (o animal invertebrado que convencionamos chamar borboleta); essa palavra cria na mente do intérprete (o sujeito, neste caso um possível leitor desta tese) uma imagem mental, uma idéia sobre esse signo, que nada mais é do que outro signo – o interpretante; mas essa imagem mental só ocorre por conta das convenções já instituídas a respeito desse objeto. Como esse interpretante é também um signo do objeto deverá criar um novo interpretante, mais perfeito do mesmo objeto, e isto *ad infinitum* no processo da semiose.

Isso parece compreensível quando se trata de objetos perceptíveis, reais, concretos. Mas o que dizer dos objetos matemáticos? Como explicar o triângulo quando se tem objetos abstratos?

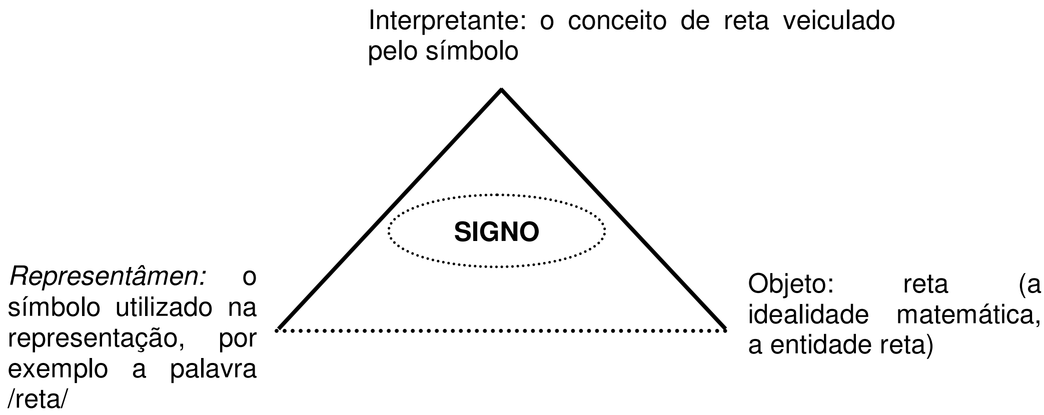
A esse respeito, Steinbring (1991, p. 85) fornece uma resposta possível:

> O signo em si mesmo não tem significado matemático, somente em sua intenção para algum contexto; e os elementos do nível objeto somente proporcionam significado matemático na intenção de mostrar uma estrutura relacional oculta na situação de referência. Os signos matemáticos e os aspectos das situações de referência devem ser dotados de significado por intenção para chegar a ser elemento do triângulo epistemológico[26].

A partir disso, é possível pensar na estrutura tríade de Peirce, para representar um objeto matemático, tomando como exemplo o objeto matemático "reta". O triângulo ficaria assim formado:

[26]Steinbring (1991) denomina de triângulo epistemológico as relações entre objeto, signo e conceito, ao tratar da complexidade da estrutura conceitual, estabelecendo, pelo triângulo, a conexão implícita e axiomática dos conceitos com as situações e as representações.

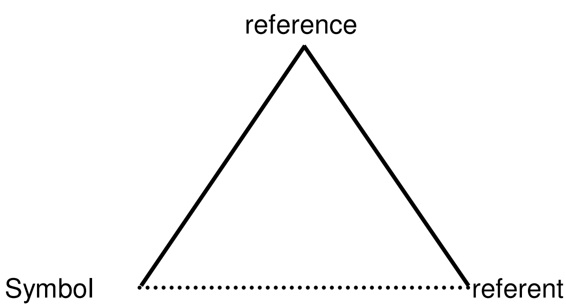
FIGURA 3.2 - TRÍADE DE CHARLES SANDERS PEIRCE PARA UM OBJETO MATEMÁTICO



Então, o objeto matemático – reta – é representado pelo signo, no caso a palavra /reta/, que por sua vez determina o interpretante, ou seja, o conceito de reta. Em outras palavras, podemos dizer que o signo /reta/ media a relação entre o seu objeto e o seu interpretante. O signo /reta/ faz referência ao objeto reta.

Nessa relação, quando se procura entender a funcionalidade da tríade semiótica em Peirce, aparece o termo referência, utilizado no triângulo proposto por Ogden e Richards e que relaciona o símbolo (signo ou significante) a uma referência (conceito) e um referente[27] (objeto):

FIGURA 3.3- TRÍADE DE OGDEN E RICHARDS



O esquema apresentado pelos autores citados acima, para entender a significação de um signo, faz retomar uma questão importante em relação ao

[27] Na Semiologia, referente é o objeto real (um dos três componentes do signo – em Semiótica); aquilo que o signo designa, contexto; o que um signo representa. Eco (2005) coloca que o referente de um signo é uma classe, uma entidade abstrata que representa uma convenção cultural.

conhecimento matemático, já iniciada por Frege[28] – a questão da referência e do sentido de uma representação.

3.2.3 Sobre a Referência e o Sentido de uma Representação Semiótica

Como vimos, o signo (símbolo, significante) tem a função de estar no lugar de um objeto (referente) para o sujeito que fará a interpretação, no processo da semiose, ou seja, cria na mente do sujeito o conceito que está referindo-se ao objeto. Como está no lugar, o signo não é o objeto, e este nunca está completamente representado naquele, apenas de um certo modo. “[...] aquilo que está representado no signo não corresponde ao todo do objeto, mas apenas a uma parte ou aspecto dele. Sempre sobram outras partes ou aspectos que o signo não pode preencher completamente” (SANTAELLA, 2000, p. 34).

Sendo assim, signos diferentes de um mesmo objeto podem revelar aspectos diferentes dele. Por exemplo, um *desenho* de uma escola, uma *figura* de uma escola, um *filme* de uma escola, a *fotografia* de uma escola, a *maquete* de uma escola, a *planta baixa* de uma escola, são todos signos do objeto escola. Não são *a* escola e nem mesmo a idéia geral que temos de escola. Apenas representam a escola, cada um deles de uma certa maneira, dependendo da natureza do signo escolhido para a representação. Para alguns poderia suscitar o sentido de “lugar de trabalho”, para outros “lugar para brincar”, “lugar para aprender”, “lugar onde se encontram crianças”.

No domínio da Matemática, também é possível encontrar numerosos exemplos que elucidam essa idéia, signos diferentes evocando aspectos diversos de um mesmo objeto matemático ou, em outros termos, sentidos diferentes. Por exemplo, nas representações de uma mesma parábola: (a) $y = x^2 - 4x + 3$; (b) $y + 1 = (x - 2)^2$; (c) $y = (x - 3)(x - 1)$ e (d) esboço da parábola no plano cartesiano, Moretti (2002, p. 347) coloca o seguinte:

[28] Gotlob Frege – 1848-1925 – lógico e matemático alemão.

> Cada uma dessas representações possui, em sua integralidade, as mesmas informações do objeto matemático referido. No entanto, do ponto de vista cognitivo, um certo tipo de informação sobressai mais em uma do que em outra forma: em (c) vemos com clareza as raízes; em (b), as coordenadas do vértice da parábola; em (d), uma representação em um sistema semiótico diferente dos anteriores e que em muitas vezes é bastante adequado à interpretação, se for o caso, do fenômeno representado. Nesta mesma forma, no entanto, não temos com precisão, por exemplo, o valor de $y(\sqrt{2})$ e devemos recorrer as outras formas para obtê-lo.

Frege (1978) foi o primeiro a elucidar a questão da diferença entre sentido e referência de um objeto, contribuindo sobremaneira para a análise do conhecimento nos aspectos epistemológicos e cognitivos. Principalmente no que se refere à natureza semântica da referência, do sentido de uma dada representação e do objeto como invariante de referência de muitas representações.

Frege admite que duas ou mais representações *distintas* podem fazer referência ao *mesmo* objeto, o que não ocorre com o sentido atribuído a essas representações: “[...] a referência e o sentido de um sinal devem ser distinguidos da representação associada a este sinal” (FREGE, 1978, p. 64).

Então, é preciso esclarecermos essa distinção entre sentido e referência de uma representação semiótica, distinção essa que pode fornecer uma forma estreita e necessária de unir os signos aos objetos no processo do conhecimento.

> É, pois plausível pensar que exista, unido a um sinal (nome, combinação de palavras, letra) – *poderíamos dizer representação* -, além daquilo por ele designado, que pode ser chamado de sua referência, ainda o que eu gostaria de chamar de o sentido do sinal, onde está contido o modo de apresentação do objeto (FREGE, 1978, p. 62, observação e grifos nossos).

Notemos que, para Frege, o signo também não pode ser entendido isoladamente, mas sim em estreita relação com sua referência e com o seu sentido.

> Certamente ‘2^4’ e ‘4.4’ têm a mesma referência, isto é, são nomes próprios do mesmo número, mas não têm o mesmo sentido. Daí terem ‘$2^4=4^2$’ e ‘$4.4=4^2$’, na verdade, a mesma referência, mas não o mesmo sentido, isto é, neste caso, não contêm o mesmo pensamento. (FREGE, 1978, p. 44)

Assim, as representações podem ter em comum a referência, mas não o sentido.

Para Frege (1978, p. 36), a referência é o “conteúdo” da representação:

> [...] uma mera expressão, a forma de um conteúdo, não pode ser a essência da coisa, mas só o pode ser o próprio conteúdo. Mas qual é o conteúdo, a referência de “2.2^3+2”? a mesma que a de “18” ou de “3.6”. A igualdade de $2.2^3+2=18$ exprime que a referência da seqüência de sinais à direita do sinal de igualdade é a mesma que a referência da seqüência de sinais à

> esquerda. Devo aqui me opor à opinião de que, por exemplo, 2+5 e 3+4 são iguais, mas não o mesmo.

Aqui, as representações $2.2^3 + 2$ e 3.6 fazem referência ao mesmo objeto matemático – o numeral 18. Ou seja, para Frege, a referência para uma dada representação é o conteúdo veiculado por ela, em última instância, o objeto. Este, por sua vez pode tomar a forma de um pensamento, um objeto sensorialmente perceptível, um nome próprio ou mesmo um valor de verdade, como é o caso do exemplo citado.

Em respeito a isso, Frege (1978, p. 65) afirma que:

> A referência de um nome próprio é o próprio objeto que por seu intermédio designamos; a representação que dele temos é inteiramente subjetiva; entre uma e outra está o sentido que, na verdade, não é tão subjetivo quanto a representação, mas que também não é o próprio objeto. [...] Comparo a própria lua à referência; ela é o objeto da observação, proporcionado pela imagem real projetada pela lente no interior do telescópio, e pela imagem retiniana do observador. A primeira, comparo-a ao sentido, a segunda, à representação ou intuição.

No exemplo citado sobre a lua, entendemos que a referência é relacionada a um objeto perceptível – a lua. Parece-nos, então, que Frege assume o próprio objeto como sendo a referência na representação. No entanto, quando analisamos a estrutura tríade em relação ao funcionamento dos três elementos constitutivos do signo – símbolo (signo ou significante), referência (interpretante, conceito) e referente (objeto) – no processo da semiose, temos que a referência não pode ser *o* objeto, mas sim uma relação que diz respeito *a* ele, que *o* explica, que *o* conceitua.

Então, a ligação entre as representações (signos) e os objetos ocorre por meio da referência. A referência da representação semiótica pode ser considerada então como a idéia, a explicação ou o conceito que faz entender, surgir e apreender o objeto.

Por outro lado, o sentido da representação semiótica de um objeto relaciona-se com o conjunto de aspectos revelados pelos signos utilizados, ou ainda, como apontam Godino, Batanero e Font (2006), pode ser entendido como um significado parcial dos objetos. Em outras palavras, o sentido de uma representação pode ser considerado como a possibilidade de interpretação produzida e inerente ao uso deste ou daquele signo num determinado contexto.

A necessária distinção entre sentido e referência se mostrou especialmente importante para o ensino da matemática, uma vez que "[...] induziu a separar com clareza a significação, que depende do registro de descrição escolhido, da referência que depende dos objetos expressos ou representados" (DUVAL, 1988, p. 7).

O exemplo a seguir, mostra como essa distinção tem lugar:

> [...] $\frac{4}{2}, (1+1), \sqrt{4}$, são formas escritas que designam um mesmo número, expressões que fazem referência a um mesmo objeto e que não possuem a mesma significação uma vez que não são reveladoras do mesmo domínio de descrição ou do mesmo ponto de vista: a primeira exprime o número em função de propriedades de divisibilidade e razão, a segunda em função da recorrência à unidade [...]. Simples mudanças na escrita permitem exibir propriedades diferentes do mesmo objeto, mas mantendo a mesma referência (DUVAL, 1988, p.8).

Percebemos, assim, que o sentido de uma representação relaciona-se diretamente ao modo como essa representação é apresentada, ou seja, com o registro de representação semiótico escolhido.

Nesses termos, seriam os sentidos diferentes revelados pelo uso de representações distintas que forneceriam a possibilidade de tratamentos diferenciados aos objetos do conhecimento. Enfim, o fato de haver diferentes representações semióticas para denotar o mesmo objeto matemático, logo tratamentos diferenciados, implica em um custo cognitivo diferente. Isso porque demanda um esforço cognitivo por parte do sujeito para reconhecer esse mesmo objeto em suas distintas representações e distintos sentidos, levando ao progresso do conhecimento e também à aprendizagem.

A preocupação sobre a natureza dos objetos matemáticos e do papel dos signos na representação desses objetos, ou seja, da funcionalidade das representações semióticas no conhecimento matemático, leva diretamente à questão sobre o significado dos objetos.

3.2.4 A Questão do Significado

O termo "significado" tem tomado diversas facetas na investigação matemática e, muitas vezes, utilizado de modo informal nos estudos didáticos. É um termo central também nas teorias sobre a linguagem, filosofia, lógica, semiótica, psicologia, pedagogia, ou seja, nas ciências interessadas na cognição humana.

Para debater esta questão, tomamos as idéias de Godino e Batanero (1994) e Godino (2006), que trabalham com a noção de significado institucional e pessoal dos objetos matemáticos. Ambas as noções são discutidas em termos de sistemas de práticas pessoais, onde prática é considerada como sendo "[...] toda atuação ou expressão (verbal, gráfica, etc) realizada por alguém para resolver problemas matemáticos, comunicar a outros a solução obtida, validá-la ou generalizá-la a outros contextos e problemas" (GODINO, 2006, p. 92).

As preocupações que envolvem a distinção entre o domínio pessoal e institucional e suas relações para entender o significado nos parece apropriado para compreender a funcionalidade da representação semiótica para a aprendizagem.

De acordo com Godino e Batanero (1994), o significado institucional de um objeto é o sistema de práticas institucionais que estão associadas ao campo de problemas de onde emergem os objetos em um determinado momento. Sendo que uma instituição é considerada, pelos autores, como um coletivo de pessoas envolvidas em uma mesma classe de situações, compartilhando de um mesmo compromisso para a realização desses problemas. Em outras palavras, o significado institucional pode ser relacionado a uma unidade cultural, como aponta Eco (2005), definida e aceita por aquela cultura. Por exemplo:

> Chamaremos instituição matemática (M) as pessoas que no seio da sociedade estão comprometidas na resolução de novos problemas matemáticos. São, portanto, os produtores do "saber matemático". Outras instituições (macro-instituições) envolvidas com "situações matemáticas" são os "utilizadores" do saber matemático (matemáticos aplicados) e os "professores" do saber matemático (a escola do saber matemático) (GODINO e BATANERO, 1994, p. 335).

Essa definição de instituição também é apropriada para interpretarmos a diferenciação entre Matemática Científica e Matemática Escolar apresentada no primeiro capítulo, já que os objetos "emergentes" da prática desses coletivos são distintos em sua essência porque provêm de instituições diferentes, interessadas na resolução de problemas específicos e relacionados ao seu sistema de práticas. No exemplo do objeto matemático *reta*, mostrado na Figura 3.2, o interpretante (conceito de reta) pode ser relacionado ao significado institucional. No caso da Matemática Científica esse significado institucional estaria mais relacionado às definições e proposições envolvendo o objeto *reta;* já para a Matemática Escolar, o significado institucional volta-se para as práticas relacionadas à compreensão e uso do objeto *reta*.

O significado institucional de um objeto, tomado no sentido de um sistema de práticas culturais institucionalizadas, permite-nos pensar em diferentes classes de práticas mais específicas utilizadas em contextos distintos. Cada contexto pode determinar ou ser determinado por representações semióticas específicas, a mais adequada, ajudando a produzir diferentes sentidos. Isso significa que o sentido pode ser entendido como um subconjunto de um sistema de práticas culturais. Daí ser possível estabelecer a idéia de sentido como significado parcial do objeto matemático.

Por isso, é importante considerar, também, no processo de ensino e aprendizagem da matemática, as diferentes representações semióticas dos objetos para evocar os diferentes sentidos com o intuito de possibilitar a realização das práticas diversas necessárias na apreensão dos significados institucionais dos objetos. A questão que se coloca, então é: como considerar estas diferentes representações? Em que tipo de tarefas elas devem ser priorizadas? As respostas a esse questionamento é objeto de reflexões das seções 3.4 e 3.5 deste capítulo.

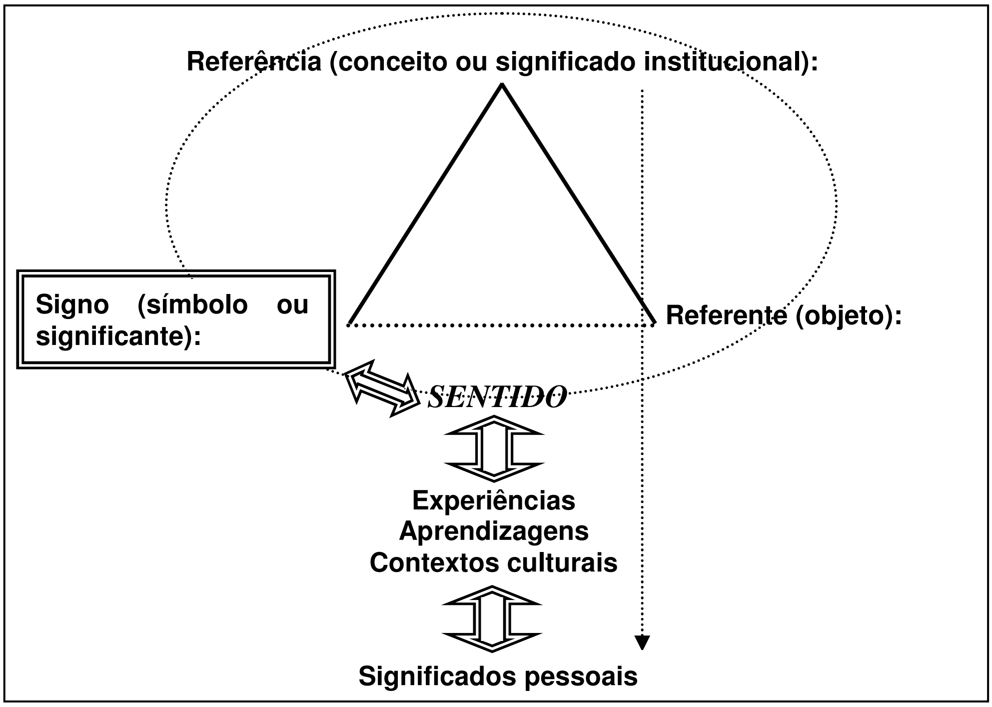
Em relação ao significado pessoal, este é definido por Godino e Batanero (1994) como um sistema de práticas pessoais, utilizado por um sujeito para resolver um campo de problemas do qual emerge o objeto em um momento determinado. O significado pessoal dos objetos matemáticos é, então, uma conseqüência direta da história do sujeito, de suas experiências e aprendizagens relacionadas àquele objeto, incluindo os seus construtos cognitivos como concepções, esquemas, representações internas. Um dos objetivos do ensino, nesta perspectiva, é aproximar e adequar o máximo possível os significados pessoais dos objetos aos significados institucionais requeridos e implementados na instituição escolar.

Nas duas definições apresentadas e defendidas, o significado dos objetos (para alguém) é relacionado ao uso desses objetos. Gómez (2005) aponta ainda que o significado pode ser dado pela explicação que damos desse objeto. Assim, a explicação de um objeto pode evocar ou expressar o conceito que temos do objeto dado. Em outras palavras, podemos dizer que o significado institucional e pessoal do objeto matemático apresenta duas dimensões: o uso e a explicação do objeto.

Entretanto, o uso de um objeto matemático não está, como poderia parecer, implícito no conceito que se tem do objeto. A esse respeito, Gómez (2005) comenta que "Explicar, por exemplo, a idéia de limite de uma função, não significa que pode ser usada com êxito por essa pessoa para calcular o limite de certas funções (sempre que exista), ou de determinar se existe ou não o limite sob certas condições" (p. 146).

Partindo dessas considerações, como síntese do que foi exposto até agora para refletir sobre o uso desses construtos teóricos para o ensino e aprendizagem da matemática, propomos a ampliação da clássica tríade semiótica (Frege, Peirce, Ogden e Richards) ou triângulo epistemológico (Steinbring) para o esquema abaixo:

FIGURA 3.4 - ESQUEMA DE UMA REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA



Os vértices do triângulo são mantidos no esquema, mas o vértice da referência é acrescido da noção de significado institucional. O sentido aparece na primeira linha pontilhada que permeia o triângulo, indicando que é determinado nas relações estabelecidas entre signo, referente e referência, especificamente quando da escolha do signo para representar um determinado objeto. O significado pessoal, atribuído ao objeto representado, é influenciado pelos significados institucionalizados do objeto e pelas experiências, aprendizagens e contextos a que o sujeito é submetido.

Entender a estrutura, por assim dizer, da representação semiótica de um objeto matemático e as relações que podem ser estabelecidas entre os elementos que compõem a tríade semiótica é relevante quando se pensa no ensino e na aprendizagem desses objetos. Isso não significa que no desenvolvimento de uma aula de matemática, por exemplo, a todo o momento, o professor deverá estar remetendo-se à tríade semiótica, mas deve ter consciência das diferenças entre os signos utilizados para representar o saber matemático e o próprio saber. Essa consciência pode, a nosso ver, auxiliar na escolha de tarefas matemáticas que contribuam para a explicitação dessas diferenças.

A esse respeito, D'Amore (2007) afirma que, para muitos professores do primeiro ciclo da Escola Fundamental, existe identidade entre o conceito que ensina, o signo que o representa e as referências algorítmicas envolvidas, sendo por isso importante demandar esforços (na formação de professores, na elaboração de materiais didáticos e na organização de propostas curriculares) no sentido de alterar essa situação.

Assim, no contexto da escola, quando se tem a intenção explícita de ensinar os objetos da Matemática Escolar, é relevante que se leve em conta as situações de referência dos objetos matemáticos, ou seja, as tarefas escolares que irão permitir e facilitar a atividade do aluno na aprendizagem de determinados objetos.

3.3 A COMPREENSÃO EM MATEMÁTICA SOB O PONTO DE VISTA DE RAYMOND DUVAL E AS OPERAÇÕES COGNITIVAS ENVOLVIDAS

A noção de representação semiótica e, portanto, dos elementos que a constituem (signo, referência, objeto), bem como das relações de sentido e significado estabelecidas entre e por esses elementos, é primordial para entendermos como os conceitos matemáticos são compreendidos pelos sujeitos. Duval (1998) considera que todo conhecimento é inseparável de uma atividade de representação.

Para esse autor, a abordagem cognitiva na aprendizagem da matemática tem importância na medida em que procura descrever inicialmente o funcionamento cognitivo que possibilita um aluno "[...] compreender, efetuar e controlar ele próprio a diversidade dos processos matemáticos que lhe são propostos em situação de ensino" (DUVAL, 2003, p. 12).

Assim, as representações semióticas (ou externas) de um objeto apresentam uma relação intrínseca com as representações mentais (ou internas) do sujeito. Para Duval (1993), as representações mentais recobrem o conjunto de conceitualizações que o indivíduo pode ter sobre um objeto ou sobre uma situação e as representações semióticas têm a função de comunicação dessas representações mentais, de produção de conhecimentos e de realização de funções cognitivas específicas (objetivação e tratamento). É também por meio das representações semióticas que atribuímos significados às estruturas matemáticas. Sendo assim, as representações, tanto mentais quanto semióticas, são parte integrante do processo de aprendizagem, pois relacionam objetos mentais aos objetos matemáticos.

No processo de aprendizagem da matemática, os sinais, símbolos e elementos icônicos, enfim, as representações semióticas, além de servir para fins de comunicação, implicam em operações essenciais para o funcionamento do pensamento. Isso porque, para Duval (2003), a atividade cognitiva requerida na aprendizagem da matemática assenta-se principalmente em duas características: a importância das representações semióticas para a acessibilidade aos objetos e para o tratamento matemático deles e a grande variedade de representações existentes e utilizadas em Matemática.

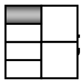
Então, para Duval (1988, 1995), a utilização das representações semióticas é necessária para entender como se processa a compreensão em matemática. Neste caso, a compreensão de um objeto do conhecimento é essencialmente construir/apreender o conceito ao qual ele se refere e o utilizar na atividade matemática. Ou seja, construir um significado pessoal para o objeto a partir do trânsito entre as várias representações do mesmo objeto.

Dessa forma, a compreensão em matemática para Duval, passaria necessariamente pela distinção entre o objeto matemático e sua representação. Sendo essa distinção considerada como ponto estratégico a fim de cumprir 3 condições essenciais: apreensão do objeto; não confusão entre o objeto representado com sua representação; coordenação entre os diversos registros de representação semiótica.

Aqui aparecem duas questões essenciais para o funcionamento cognitivo, que, segundo os estudos de Duval (1988, 1993, 1995, 2003), colocam em pauta as peculiaridades das atividades matemáticas.

A primeira diz respeito à coordenação das várias representações semióticas de um mesmo objeto matemático. Essa coordenação relaciona-se com o uso consciente de um registro de representação semiótica que possibilite a resolução de algum problema matemático de forma mais simples e rápida, ou seja, cognitivamente mais econômica.

Na concepção de Duval (1993), o fato do acesso direto aos objetos matemáticos ser impossível fora de um sistema de representação semiótica faz surgir um importante paradoxo cognitivo do pensamento matemático. Ora, se por um lado a apreensão dos objetos matemáticos só pode ser uma apreensão conceitual (pelo processo de conceitualização), por outro, essa apreensão através de atividades sobre o objeto matemático, só se torna possível por meio das representações semióticas. A tomada de consciência desse paradoxo para a aprendizagem matemática e, portanto, para a orientação mais adequada ao processo de compreensão nessa disciplina pode ser um caminho para se encontrar a chave para a aprendizagem matemática e, consequentemente, para o seu ensino.

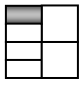
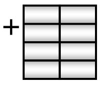
Um exemplo citado em Colombo, Flores e Moretti (2005) pode auxiliar no esclarecimento disso ; $\frac{1}{8}$; $0{,}125$; são registros de representações semióticas distintos do mesmo objeto matemático produzidos segundo um sistema semiótico, munido de regras, convenções e códigos próprios.

A partir desses registros de representação semiótica, é possibilitado que se realize tratamentos operatórios específicos que guardam propriedades ou os aspectos diferentes de um mesmo objeto.

E isso nos leva à segunda questão, considerada de extrema relevância para se pensar sobre o processo de compreensão em matemática: a necessária diferenciação entre o objeto matemático e suas múltiplas representações. Conforme Duval (1993, p. 40), “[...] o recurso a muitos registros parece mesmo uma condição necessária para que os objetos matemáticos não sejam confundidos com suas representações e que possam, também, ser reconhecidos em cada uma de suas representações.”

A compreensão a esse respeito pode ser encontrada quando se analisa que, apesar dessa diversidade, cada uma das representações semióticas para um mesmo objeto fornece um determinado ponto de vista, um sentido diverso, já destacado por Frege (1978), como visto anteriormente.

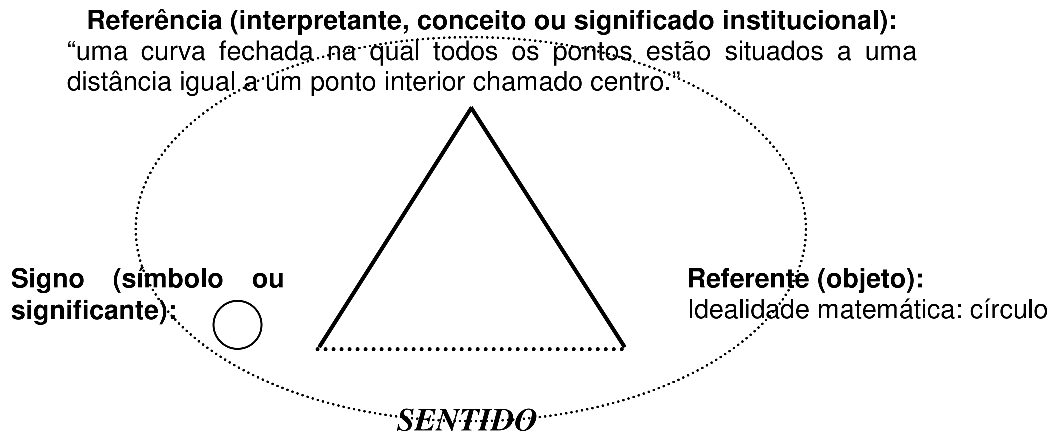
Quando se opera, por exemplo, $\frac{1}{8}$ + 1, é possível pensar rapidamente em no mínimo três formas distintas para efetuar tal adição recorrendo às representações exemplificadas anteriormente, no entanto mantendo-se a mesma referência, ou seja, o mesmo objeto matemático está evidenciado:

1. $\frac{1}{8}+\frac{8}{8}$;
2. 0,125 + 1;
3.  +  ;

Cada um desses exemplos demarca um sistema semiótico de representação distinta, onde a referência é a mesma, mas não o significado, o *sentido,* e muito menos o custo cognitivo envolvido. Frege (1978), ao assinalar sobre a diferença entre sentido e referência, exemplificando que “A referência (o planeta Vênus)[29] de ‘Estrela da Tarde’ e ‘Estrela da Manhã’ seria a mesma, mas não o sentido”, coloca em evidência o quanto é importante distinguir o sentido de referência para a total compreensão das sentenças, como já foi dito anteriormente. A partir disso, podemos dizer que a estrutura tríade detalhada na seção anterior está no fundamento dos estudos de Duval sobre a aprendizagem matemática.

A figura a seguir (Figura 3.5) fornece uma compreensão do funcionamento do signo em matemática, segundo as idéias de Duval acerca da representação semiótica para aprendizagem matemática:

FIGURA 3.5 - ESQUEMA DA ESTRUTURA TRÍADE EM MATEMÁTICA



No exemplo destacado no triângulo, a representação figural, ou seja, o desenho da circunferência, apresenta um determinado ponto de vista do conceito (significado cultural) do que vem a ser circunferência, exibindo propriedades do objeto “circunferência” relacionadas à geometria descritiva, à imagem. Se, por outro lado, utilizássemos o registro sob a forma de uma equação $\{(x,y) \in \Re^2 / x^2+y^2=1\}$, a referência continuaria sendo a mesma, o conceito de circunferência. O referente da mesma forma, é a idealidade matemática circunferência, mas o sentido é outro. O sentido veiculado por este registro estaria mais relacionado à geometria analítica e as relações que podem ser estabelecidas a partir da equação que determina a

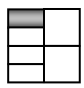
[29] Observação nossa.

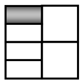
circunferência. Por exemplo, tal equação permite observar que a circunferência tem raio um (R=1) e centro na origem. Por isso, o sentido está representado pela linha pontilhada que circunda a tríade.

Um determinado registro de representação semiótica (o desenho do círculo) refere-se ao objeto matemático (a entidade círculo) e produz um sentido que vai depender das propriedades explicativas e características reveladas pelo registro utilizado. Logo, um registro de representação semiótica nunca é completo, ele apenas revela uma das facetas do objeto matemático a que está se referindo.

E é por conta disso que Duval (1988, 1993, 1995) defende que não há aprendizagem em matemática sem distinção entre o objeto matemático e sua representação. Essa distinção, por sua vez, se dá mediante o trânsito e a coordenação entre vários registros de representação que se referem ao mesmo objeto.

Essa questão, sobre como não confundir um objeto matemático com a representação que permite o seu acesso, se constitui como o problema central da aprendizagem da matemática, segundo Duval (1999). Suas premissas desenvolvem-se, então, no sentido de resolver essa problemática.

Tomando por base tais constatações, podemos estabelecer a seguinte transposição: o registro simbólico fracionário $\frac{1}{8}$ exprime o número em função das propriedades de divisibilidade e razão; o registro simbólico decimal 0,125, em função das propriedades relativas ao sistema posicional decimal e o último, guarda as relações que envolvem a idéia de parte/todo no registro figural contínuo: . Logo, apresentam sentidos muito diferentes.

No funcionamento da tríade semiótica todos esses registros têm como referente o numeral $\frac{1}{8}$, o que significa o objeto matemático, a idealidade abstrata e aceita culturalmente como indicativa do número racional $\frac{1}{8}$. Este objeto (o numeral $\frac{1}{8}$) refere-se ao número racional $\frac{1}{8}$, ou seja, ao conceito de número racional que corresponde a uma quantidade contínua, grandeza, intensidade, portanto à referência da representação 0,125 ou  , e também da própria representação $\frac{1}{8}$.

De acordo com Flores (2006, p. 96), "[...] se há, então, no referente um substrato da referência, há também um sentido." Entretanto, não será o mesmo sentido para as representações colocadas, como foi assinalado, pois este vai depender da representação utilizada.

O importante nisso é ver que a abstração requerida no ato cognitivo, necessário para compreender que todas essas representações têm como referência a mesma idéia e como referente o mesmo objeto matemático (número racional $\frac{1}{8}$), e que cada uma delas guarda um sentido diferente capaz de mobilizar tratamentos diferenciados, vai permitir apreender o objeto, independentemente da representação que é utilizada.

Tal situação, segundo Duval (1993, p. 37), pode ser um caminho para solucionar um importante "paradoxo cognitivo do pensamento matemático". Ora, de um lado, a apreensão dos objetos matemáticos só pode ser uma apreensão conceitual e, de outro, a atividade sobre os objetos só é possível por meio de representações semióticas: como não confundi-los? Esse paradoxo cognitivo e as dificuldades que resultam para a aprendizagem da matemática, dão-se, geralmente, pelo fato de que não há *noesis* sem *semiosis* (DUVAL, 1993). Essas operações cognitivas são ligadas, ora à representação do objeto matemático, ora, ao próprio objeto matemático.

Sendo as representações semióticas relacionadas mais diretamente com a efetivação das funções cognitivas essenciais do pensamento humano, Duval (1993) denomina de *semiosis* a apreensão – ou a produção de uma representação semiótica, e *noesis* a apreensão conceitual de um objeto. Salienta, ainda, que a *noesis* é inseparável da *semiosis.*

Nesse sentido, a aprendizagem da matemática é um campo privilegiado de estudo da ligação entre *semiosis* e *noesis*, ou seja, para que ocorra a apreensão de um objeto matemático é necessário que a *noesis* (conceitualização) ocorra através de significativas *semioses* (representações). Assim, quanto maior a coordenação de registros de representação diferentes do mesmo objeto matemático, maior será a possibilidade de apreensão deste objeto.

3.3.1 *Semiose* e Registros de Representação Semiótica para a Aprendizagem da Matemática

DUVAL (1993) assinala que, no processo da *semiose*, aparecem atividades cognitivas essenciais que validam um sistema semiótico em um registro de representação. São elas: a formação de uma representação identificável; o tratamento e a conversão.

3.3.1.1 A formação de uma representação identificável como uma representação de um registro dado

Essa atividade cognitiva diz respeito à identificação de uma representação, ou seja, a partir de um RRS identificar ou saber qual é o objeto matemático que está sendo referenciado. Duval (1993, p. 41) afirma que:

> Essa formação implica em uma seleção de traços e de dados do conteúdo a ser representado. Essa seleção se faz em função de unidades e regras de formação que são próprias do registro semiótico em que a representação é produzida.

Para que um sistema semiótico possa funcionar como um registro de representação ele deve cumprir, segundo Duval (1999), duas funções além daquela de comunicação. Estas duas funções são referentes ao domínio cognitivo: objetivação e tratamentos.

A formação de uma representação deve respeitar, portanto, regras específicas (gramaticais para as línguas naturais, regras de formação num sistema formal...) para assegurar, primeiramente, as condições de identificação e de reconhecimento da representação (objetivação). E, em segundo lugar, a possibilidade da utilização das representações para tratamentos (DUVAL, 1993). São regras já estabelecidas, utilizadas, não criadas pelo sujeito.

Assim, não é qualquer signo que pode funcionar como um registro de representação. Lembrando o que foi dito no primeiro capítulo deste estudo, o signo "*-1*" pode ser reconhecido como um RRS porque pertence a um sistema semiótico, organizado segundo leis e convenções que apresentam relações internas, e que permitem identificar o objeto "número inteiro", estabelecendo, inclusive, relações com outros objetos, por exemplo, "inequações".

De acordo com Duval (2003), existem quatro tipos de registros de representação que guardam características muito diferentes, sob um ponto de vista operacional:

QUADRO 3.1 – CLASSIFICAÇÃO DOS DIFERENTES REGISTROS MOBILIZÁVEIS NO FUNCIONAMENTO MATEMÁTICO (FAZER MATEMÁTICO, ATIVIDADE MATEMÁTICA)

	REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA	REPRESENTAÇÃO NÃO-DISCURSIVA
REGISTROS MULTIFUNCIONAIS: os tratamentos não são algoritmizáveis.	Língua natural. Associações verbais (conceituais). Forma de raciocinar: - argumentação a partir de observações, de crenças ...; - dedução válida a partir de definição ou de teoremas.	Figuras geométricas planas ou em perspectivas (configurações em dimensão 0, 1, 2 ou 3); -apreensão operatória e não somente perceptiva; -construção com instrumentos.
REGISTROS MONOFUNCIONAIS: os tratamentos são principalmente algoritmos.	Sistemas de escritas: -numéricas (binária, decimal, fracionária...); -algébricas; -simbólicas (línguas formais). Cálculo	Gráficos cartesianos: -mudanças de sistema de coordenadas; - interpolação, extrapolação.

FONTE: Duval (2003, p.14).

De um modo geral, os processos matemáticos envolvem, no mínimo, dois desses registros, como é possível ser observado em qualquer resolução de problema matemático. Duval (1999) coloca que o entendimento em matemática requer a coordenação de pelo menos dois registros, dos quais um é multifuncional e o outro é monofuncional.

Os registros discursivos são aqueles que utilizam uma língua e possibilitam formular as proposições ou transformar expressões. Ou seja, eles se manifestam através de associações verbais entre conceitos, isto é, por meio de raciocínios, que podem ser dedutivos ou argumentativos. Estas representações apresentam duas características específicas: elas podem ser verdadeiras ou falsas, ou ainda deriváveis umas das outras. Por outro lado, os registros não-discursivos mostram as formas ou as configurações de formas. Em síntese, "[...] os registros discursivos permitem descrever, inferir, raciocinar, calcular, enquanto os registros não-discursivos permitem visualizar" (DUVAL, 1999, p. 28).

Em se tratando de funções de tratamento, Duval (1999, 2003) distingue os registros plurifuncionais ou multifuncionais, que permitem uma variedade de tratamentos, e os monofuncionais, que respondem a um único tipo de tratamento.

Os registros multifuncionais são utilizados em "[...] todos os domínios da vida cultural e social" (DUVAL, 1999, p. 28), visto que atendem tanto a finalidades de tratamento quando de comunicação. A língua natural, por exemplo, é um registro multifuncional utilizado na vida diária e em Matemática, no entanto, não da mesma maneira. Esse tipo de registro não pode ser modificado de modo algorítmico.

Já os registros monofuncionais foram desenvolvidos para um tipo de tratamento muito específico, para ter desempenhos mais poderosos e menos custosos do que os registros multifuncionais. Em outras palavras, apresentam algoritmos próprios em sua estrutura. Daí, terem um caráter "técnico" ou "formal": "[...] as regras determinantes do emprego dos signos e dos símbolos se fazem exclusivamente em função de sua forma" (DUVAL, 1999, p. 28).

De um modo geral, podemos dizer que os matemáticos e os professores de matemática privilegiam os registros monofuncionais ou técnicos em detrimento dos plurifuncionais. A razão disso, segundo Duval (1999), não repousa apenas no fato dos registros monofuncionais serem mais poderosos, mas sim porque também possibilitam desenvolver algoritmos, ou seja, uma seqüência de regras operatórias ou de procedimentos:

> [...] por exemplo os algoritmos para as operações aritméticas com a escritura decimal, aqueles para a escrita fracionária, aqueles para a resolução de uma equação (de primeiro ou segundo grau) ou de um sistema de equações, aqueles para o cálculo das derivadas [...] estes são os tratamentos do tipo algorítmico, com sua aplicação aos problemas não-matemáticos (físicos, econômicos, arquitetônicos...) que o ensino da matemática tende a privilegiar (DUVAL, 1999, p. 29).

Em nossa pesquisa, os registros multifuncionais se manifestam nas representações discursivas (língua natural, associações verbais, formas argumentativas e dedutivas), visto que a proposta curricular desenvolve-se no campo dos números.

Como registros monofuncionais, temos as representações não-discursivas e discursivas. A reta numérica e as representações figurais constituem-se em não-discursivas e os sistemas numéricos (representações numéricas dos naturais) são as discursivas.

Como existem diferentes tipos de registros, é natural que existam diferentes tipos de tratamentos. Cada registro é indissociável de um determinado tipo de tratamento, ou, em outros termos, um tratamento que seja eficaz e econômico não pode ser realizado em certos tipos de registros.

3.3.1.2 A Operação de Tratamento

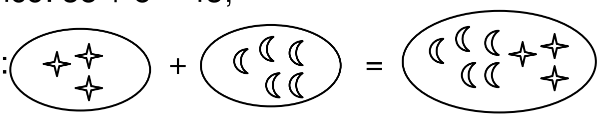
O tratamento é a transformação de uma representação em outra representação de um mesmo registro, por isso é considerado como uma modificação estritamente interna a um determinado registro. Assim, cada registro possui um conjunto de regras específicas de tratamento e funcionamento que não são necessariamente válidas a um outro, ou seja, cada registro favorece um tipo específico de tratamento (DUVAL, 1999). Por ser o tratamento uma operação interna ao registro, facilita os procedimentos de justificação ou prova.

Os tratamentos são ligados mais à forma do que ao conteúdo, no sentido de que um mesmo objeto matemático pode ter mais de uma representação diferente e, neste caso, apresenta tratamentos também diferenciados com graus de dificuldade diversos. Isso pode ser observado, por exemplo, no tratamento do registro de representação numérico decimal dos racionais e irracionais que, segundo Damm (1999, p. 145) “exige a compreensão das regras do sistema posicional e da base dez. Sem a compreensão destas regras, a representação algorítmica não tem sentido, ou seja, não existe tratamento significativo”.

Sendo assim, torna-se evidente que a pluralidade de registros em matemática determina, de certa forma, uma diversidade de tipos de tratamentos:

> A *paráfrase* e a *inferência* são formas de tratamento em língua natural. O *cálculo* é uma forma de tratamento próprio das expressões simbólicas (cálculo numérico, cálculo algébrico, cálculo proposicional ...). A *reconfiguração* é um tipo de tratamento particular para as figuras geométricas: é uma das numerosas operações que dão lugar ao registro das figuras, seu papel heurístico. A *anamorfose* é uma forma de tratamento que se aplica a toda representação figural (DUVAL, 1993, p. 42).

Exemplos ligados ao contexto de nosso estudo, sobre o tratamento, podem ser identificados, tais como:

- tratamento no registro numérico: 38 + 5 = 43;
- tratamento no registro figural: 

3.3.1.3 A operação de conversão

As conversões são transformações que ocorrem entre registros diferentes. A representação de um objeto em um registro específico é convertida em uma representação de outro registro, que conserva a referência, mas não conserva a explicitação das mesmas propriedades deste objeto. Por essa razão, a operação de conversão possibilita compreender diferentes aspectos de um mesmo objeto, conduzindo aos mecanismos subjacentes à compreensão. Assim, o sentido da representação do objeto em um registro de partida não será o mesmo do registro de chegada.

Esta troca de conteúdo ou de aspectos do objeto vai depender, como já dissemos anteriormente da natureza do registro. Duval (1993) coloca, como exemplos de conversão, a ilustração, a tradução e a descrição:

> A *ilustração* é a conversão de uma representação lingüística em uma representação figural. A *tradução* é a conversão de uma representação lingüística numa língua dada em uma representação lingüística de uma outra língua ou em outro tipo de língua. A *descrição* é a conversão de uma representação não verbal (esquema, figura, gráfico) em uma representação lingüística (p. 42).

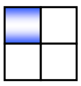
A conversão é, portanto, uma operação que requer a percepção das diferenças entre sentido e referência dos signos, como foi explicado no início deste capítulo. Duval (1993, p. 43) esclarece que,

> Para a expressão de um número é preciso, de fato, distinguir a significação operatória ligada ao significante em virtude das regras do sistema de expressão escrita (esta significação operatória não é a mesma para $0{,}25; \frac{1}{4}\ e\ 25.10^{-2}$: não são os mesmos tratamentos que devem ser considerados para efetuar as adições $0{,}25 + 0{,}25 = 0{,}5; \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\ e\ 25.10^{-2} + 25.10^{-2} = 50.10^{-2}$ e o número representado que não é nem o significante 0,25, nem o significante $\frac{1}{4}$, e nem o significante 25.10^{-2}. Cada uma destas três expressões tem uma significação operatória, mas que representa o mesmo número.

As três expressões mostram o cálculo numérico em diferentes registros: a primeira no registro decimal, a segunda no registro fracionário e a última no registro de notação científica. Ou seja, mostram um tratamento. Se necessário for, para efetuar o cálculo com maior facilidade, uma mudança de registro, aí sim teríamos uma conversão, por exemplo: $0{,}25 + \frac{1}{4} = 0{,}5$.

Observemos outros exemplos de conversões:

- do registro numérico de porcentagem para o fracionário e deste para o decimal: $30\% = \frac{30}{100} = 0{,}3$;

- do registro figural para o registro decimal:  = $\frac{1}{4}$;

- do registro da língua natural para o registro algébrico: qual é o conjunto solução que satisfaz a condição: o triplo de um número menos 1 é maior que cinco? = $3x - 1 > 5$.

Ainda é preciso destacarmos que a conversão é uma operação diferente e independente da operação de tratamento. Isso acontece porque, segundo Duval (2003), a conversão intervém, do ponto de vista matemático, na escolha do registro no qual os tratamentos realizados possam ser mais econômicos ou mais potentes. E também, no sentido de obter um segundo registro que servirá de suporte ou orientação aos tratamentos que se efetuam em um outro registro, não servindo, desta forma, aos processos matemáticos de justificação ou de prova.

Talvez, por isso, a conversão, como operação cognitiva ligada à semiose, não seja privilegiada no ensino, visto que não chama tanto a atenção, “[...] como se se tratasse somente de uma atividade lateral, evidente e prévia à ‘verdadeira’ atividade matemática” (Duval, 2003, p. 16). Não obstante, do ponto de vista cognitivo, a conversão é uma operação que desempenha papel decisivo na conceitualização, não sendo simplesmente a troca de um registro por outro, e envolve dois fenômenos específicos que veremos mais adiante: as variações de congruência e de não-congruência e a heterogeneidade dos dois sentidos de conversão.

Desse modo, a operação de conversão deve ser considerada e até mesmo privilegiada, uma vez que ela não é cognitivamente neutra ou trivial, e coloca em pauta o papel da semiose no funcionamento do pensamento e as condições necessárias para uma diferenciação entre o objeto e a sua representação.

É por conta disso que explicitar, nos currículos, nos livros didáticos, enfim, no ensino da matemática, as atividades cognitivas ligadas à semiose, pode auxiliar na construção de uma aprendizagem mais significativa para o aluno.

3.3.2 *Noesis* e a Conceitualização em Matemática

A diversidade de tipos de registros de representação em matemática apresenta vantagens para o processo de apreensão conceitual do objeto (*noesis*), em três pontos fundamentais: economia de tratamento, complementaridade de registros e a própria conceitualização.

Duval (1993) coloca que há uma necessidade para a existência de muitos registros de representação para o funcionamento do pensamento humano, ligada essencialmente aos custos de tratamento de cada registro e às limitações representativas específicas a cada um.

O fato de existirem muitos registros para um mesmo objeto matemático permite a mudança de registro, de modo a realizar tratamentos mais econômicos. Isso possibilita a superação dos limites de uma representação, bem como a rapidez na representação das relações entre objetos, visto que, tendo mais registros, há um aumento potencial de possibilidades de trocas; logo, um aumento na escolha mais econômica.

Como cada sistema semiótico possui suas próprias regras e características, determinam, do mesmo modo, registros que representam diferentes aspectos do mesmo objeto:

> As representações diferentes de um mesmo objeto, não têm evidentemente o mesmo conteúdo. Cada conteúdo é comandado por um sistema pelo qual a representação foi produzida. Daí a conseqüência de que cada representação não apresenta as mesmas propriedades ou as mesmas características do objeto. Nenhum sistema de representação pode produzir uma representação cujo conteúdo seja completo e adequando ao objeto representado (DUVAL, 1999, p. 18).

A complementaridade de registros compreende, dessa forma, os elementos informativos e comunicacionais possibilitados pela representação escolhida. As informações que a representação da reta numérica fornecem a respeito dos números inteiros, por exemplo, referem-se aos aspectos de simetria, valor absoluto, oposto de um número. Já o registro numérico permite a realização de cálculos específicos que só podem ser realizados por se tratar de uma representação discursiva (sistemas de escritas numéricas, algébricas, simbólicas).

Assim, de um ponto de vista cognitivo, uma representação não é completa em relação ao objeto que representa e, portanto, de um registro a outro não são os mesmos conteúdos de uma situação que são representados.

Partindo dessas considerações Duval explicita a necessidade de existir uma ligação entre a *semiosis* e a *noesis* para que ocorra a conceitualização em matemática, ou seja, para que haja aprendizagem dos conceitos matemáticos. Para ele, "[...] a compreensão em matemática implica na capacidade de mudar de registro" (Duval, 2003, p. 21), isso porque mudar de registro não significa apenas mudar de tratamento, mas sim explicar as propriedades ou os aspectos do objeto.

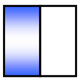
Enfim, para Duval a compreensão em matemática implica no trânsito em diversos registros e na coordenação de ao menos dois registros de representação que se referem ao mesmo objeto matemático, manifestada pela rapidez e pela espontaneidade da atividade cognitiva de conversão. Não obstante, Duval (1993) salienta que uma ausência de coordenação não vai impedir toda compreensão em matemática. O que ocorre é que a compreensão, limitada ao contexto semiótico de um só registro, não vai favorecer as transferências e aprendizagens ulteriores.

3.3.3 As Implicações da Congruência Semântica no Processo de Aprendizagem da Matemática

Como vimos, para a coordenação de registros de representação, logo para a compreensão em matemática, é preciso que ocorra a operação cognitiva de conversão. Essa operação enfrenta fenômenos de congruência e não-congruência entre as diversas representações do mesmo objeto, e os fenômenos relativos aos dois sentidos da conversão. São esses fenômenos, segundo Duval (1995), que podem explicar os sucessos e insucessos dos alunos frente aos problemas que implicam uma mudança de registros de representação.

Para analisar cognitivamente as possibilidades de uma operação de conversão, basta compararmos a representação no registro de partida com a representação terminal no registro de chegada (DUVAL, 2003). Se a representação de chegada transparecer na representação de saída, a conversão se aproxima de uma simples codificação e, neste caso, há uma congruência. E se, ao contrário, a representação não transparecer, então existirá um caso de não-congruência. Podemos exemplificar estas situações nos exemplos a seguir:

- $0,5 \rightarrow \frac{1}{2}$: não há congruência nessa conversão, ela não é natural e espontânea, as unidades pertinentes ao significado (unidades significativas) não são correspondentes. No registro de partida, essas unidades referem-se à regras do sistema decimal posicional e no registro de chegada visualizam-se as unidades significativas referentes à divisibilidade e parte/todo. Da mesma forma, a conversão em sentido contrário também é incongruente: $\frac{1}{2} \rightarrow 0,5$;

- $\frac{1}{2} \rightarrow$  :aqui observamos o fenômeno da congruência, visto que nos dois registros, de partida e de chegada, as unidades significativas de divisibilidade e parte/todo são mantidas.

Duval (1993) apresenta um exemplo de não-congruência entre a reta numérica e o conjunto de números reais, muito interessante:

> A reta é interpretada como "um conjunto infinito de pontos" (conjunto infinito tendo a potência do contínuo) e este conjunto está em bijeção com os conjuntos de números reais: a cada ponto corresponde um número real. Ora, é justamente esta noção de ponto que causa problema: um conjunto de pontos sobre um registro figurativo é discreto, não pode ser contínuo (DUVAL, 1988, p. 13).

A passagem, no ensino, do registro simbólico de escrita, registro por excelência de manipulação de números, ao registro figurativo da reta se efetua geralmente pela noção de ponto. A conseqüência disso é a não-congruência da representação geométrica com a representação simbólica decimal para o caso dos números reais. Já a representação dos números racionais, na reta numérica, apresenta um alto grau de congruência.

Não obstante, ignorar, no ensino, o trabalho com o registro figurativo da reta numérica não é uma boa alternativa quando se quer desenvolver o aspecto cognitivo da aprendizagem da matemática. Na verdade, priorizar tarefas onde haja conversões não-congruentes entre si, é uma forma de otimizar os resultados da aprendizagem, apesar das dificuldades que certamente serão geradas. O importante nisso, é que o professor esteja consciente da ocorrência desse fenômeno para tomar as decisões necessárias ao bom desenvolvimento do ensino.

Para o caso de conversões congruentes, Duval (1995) coloca a existência de três condições que devem ser satisfeitas:

- correspondência semântica entre unidades significantes que as constituem;

- mesma ordem possível de apreensão destas unidades nas duas representações;

- conversão de uma unidade significante da representação de partida a uma só unidade significante na representação de chegada.

A não-ocorrência dessas condições determina, então, uma conversão não-congruente, lembrando que uma conversão pode ser congruente num sentido e não ser em outro. Sendo assim, os RRS exercem um papel fundamental nas atividades cognitivas, preenchendo ao mesmo tempo 3 funções essenciais: a de comunicação, a de tratamento intencional e a de objetivação (tomar consciência). Essas funções se dão mediante à existência de fenômenos necessários à aprendizagem da matemática, que devem, por conseguinte, ser explicitados no ensino:

- diversidade de RRS pertencentes a sistemas semióticos distintos, com características específicas e que, portanto, geram questões particulares para a aprendizagem da matemática escolar;

- diferenciação entre objeto representado com o registro que o representa, e entre sentido da representação (forma) com a referência (conteúdo);

- coordenação entre os diversos RRS existentes para a matemática escolar.

Desse modo, é preciso nos preocuparmos com um ensino que leve em conta as condições explicitadas nestas seções, ou seja, que considere explicitamente tarefas que proporcionem uma ligação profunda da *semiosis* com a *noesis*. Isso porque, partindo das premissas desenvolvidas por Duval, podemos dizer que há maior possibilidade de mobilizar conhecimentos dos alunos na aprendizagem da matemática escolar quando existirem nas tarefas matemáticas, além de tratamentos, conversões. Mas, conversões que sejam realizadas nos dois sentidos e, ao mesmo tempo, que não sejam privilegiadas conversões somente congruentes (naturais ou diretas).

No entanto, acreditar que a aprendizagem da matemática escolar se dê baseada apenas nos jogos de conversões e tratamentos sobre os objetos matemáticos é, no mínimo, uma posição ingênua. Por essa razão, pensamos que as idéias de Vergnaud (1990, 1991, 1996) sobre Campo Conceitual, no tocante às situações que se fazem como referência para os objetos matemáticos, e as de Ponte (2005), em relação à natureza das tarefas matemáticas, podem ser articuladas com as condições para a compreensão em matemática desenvolvidas por Duval (1988, 1993, 1995, 2003).

Assim, não pretendemos comparar as noções teóricas desses autores, mas sim as utilizarmos como forma de complementar as questões colocadas por Duval, para refletirmos sobre o ensino da matemática escolar, sobre a aprendizagem e sobre a organização dos currículos de matemática.

3.4 AS SITUAÇÕES COMO REFERÊNCIA NA APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA ESCOLAR, SEGUNDO A POSIÇÃO DE GÉRARD VERGNAUD

De acordo com Vergnaud (1996), sua Teoria dos Campos Conceituais (TCC) teve início com a busca de explicações sobre o processo de conceitualização progressiva das estruturas aditivas, das estruturas multiplicativas, das relações número-espaço e da álgebra, não se restringindo, no entanto, para a matemática. A TCC procura possibilitar a localização e o estudo das continuidades e rupturas entre conhecimentos do ponto de vista de seu conteúdo conceitual.

A preocupação da TCC centra-se, então, no estudo do desenvolvimento cognitivo e da aprendizagem de competências complexas, constituindo-se em uma poderosa ferramenta para descrever, analisar e interpretar o que se passa em sala de aula, principalmente no tocante à aprendizagem de Matemática e Ciências (MOREIRA, 2002). Além disso, o fato de Vergnaud atribuir ao sujeito um papel decisivo no processo de ensino e de aprendizagem faz sua teoria assumir um caráter de pragmatismo, visto que pressupõe que a aquisição do conhecimento é moldada por situações, problemas e as ações desse sujeito nessas situações (VERGNAUD, 1996).

Por conta disso, ele afirma que, se estamos preocupados com o ensino e com a aprendizagem de algum conceito, não devemos nos ater apenas na definição desse conceito, mas sim centralizarmos os esforços sobre a construção deles, que é realizada mediante o enfrentamento de um grande número de situações distintas. Isso porque Vergnaud (1990, p. 167) considera que “Um conceito não toma sua significação em um só tipo de situações e uma situação não se analisa com ajuda de um só conceito”. Esta consideração o leva a propor a noção de Campo Conceitual para organizar o conhecimento, ou seja, grandes sistemas de situações cuja análise e tratamento requerem vários tipos de conceitos, procedimentos e representações semióticas que estão conectados entre si.

Nosso interesse principal centra-se neste ponto da TCC: através das várias situações postas para o desenvolvimento do ensino da matemática escolar, distintas representações semióticas podem ser suscitadas e mais de um conceito pode estar envolvido. Deste modo, nesta seção (3.4), apresentaremos as principais noções que envolvem a compreensão da TCC, nos atendo àquela que mais nos interessa neste estudo – a noção de situação como referência para os objetos matemáticos – e, na próxima seção (3.5), procuraremos articular as idéias concernentes aos RRS de Duval e CC de Vergnaud, por meio das tarefas de resolução de problemas, exercícios, projetos, investigações e modelagem, destacadas por Ponte (2005).

3.4.1 Conceitos, Representações, Esquemas e Situações: Elementos dos Campos Conceituais

A TCC é considerada uma teoria cognitiva que tem a intenção de fornecer um quadro coerente com alguns princípios básicos para o estudo do desenvolvimento e da aprendizagem de competências complexas, principalmente as que estão ligadas às ciências e às técnicas (VERGNAUD, 1990).

Na TCC, a noção de conceito é um dos principais elementos. Vergnaud (1996, p. 156) destaca que "É através das situações e dos problemas a resolver que um conceito adquire sentido para a criança". Desse modo, esse autor acrescenta na noção de conceito um componente construtivo, pois atribui à ação do sujeito, frente às formas adaptativas do conhecimento, um lugar central.

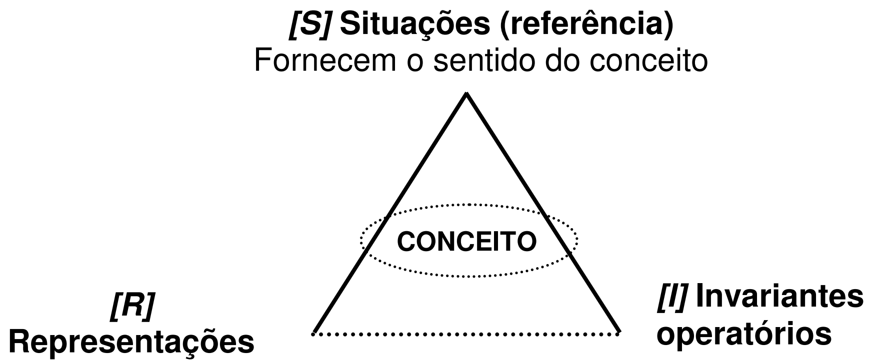
Para compreender o que significa um conceito do ponto de vista cognitivo, Vergnaud (1996) coloca que deve ser considerada a operacionalidade desse conceito através de variadas situações. Por exemplo, o conceito de número, para ser compreendido pelos sujeitos, deve ser relacionado a vários campos de problemas práticos e teóricos, que suscitem propriedades e características que lhes são inerentes. Tal abordagem sobre os conceitos faz apelo a uma definição pragmática, que considere tanto os esquemas utilizados pelos sujeitos na ação, quanto às representações simbólicas utilizadas para designar esses conceitos.

Desse modo, Vergnaud (1990, 1996) entende o conceito como um tripé de três conjuntos: situações, invariantes operatórios e representações simbólicas – C=(S, I,R).

Nesse tripé, o conjunto S representa a realidade nas situações que dão sentido ao conceito; o conjunto I relaciona-se ao conjunto de invariantes operatórios utilizados e reconhecidos pelos sujeitos para analisar e dominar as situações, garantindo a operacionalidade dos esquemas, isto é, o significado do conceito. Já o terceiro conjunto, *R,* é formado pelas representações simbólicas – formas pertencentes ou não à linguagem – que o sujeito disponibiliza e faz uso para entender e trabalhar com as situações, ou seja, é o significante do conceito (VERGNAUD, 1996).

É possível, portanto, encontrarmos também em Vergnaud uma tríade na definição que esse autor proporciona para conceito:

FIGURA 3.6 - ESQUEMA DA ESTRUTURA TRÍADE EM VERGNAUD



Para a compreensão de um conceito científico desse modo, há de considerarmos o relacionamento dos três conjuntos citados. Ou seja, os conceitos, representados por meio de símbolos, tomam sentido para um indivíduo em aprendizagem na medida em que este mobiliza os esquemas invariantes evocados pelas diferentes situações que o referenciam.

Aparece, então, uma nova organização invariante do comportamento para uma dada classe de situações, gerando ações e contendo regras. Isso significa que para Vergnaud não é possível reduzirmos o significado de um conceito nem aos significantes (as representações), nem às situações (tarefas). É preciso, sim, considerarmos simultaneamente os três conjuntos *(S, I, R)* no decurso da aprendizagem da matemática escolar.

Enquanto Duval centra-se na questão das múltiplas representações dos objetos matemáticos e na coordenação entre essas representações, Vergnaud centra-se nas relações advindas e ocasionadas pelos conceitos. Duval não chega a tratar explicitamente sobre a noção de conceito, enquanto que para Vergnaud essa definição é extremamente importante, como ponto de análise para sua teoria a respeito do processo de conceitualização.

3.4.1.1 A noção de esquema e os invariantes operatórios

O conceito de esquema tem um papel central no funcionamento da representação dos conceitos, pois proporciona o vínculo entre a conduta do sujeito e a representação e, conseqüentemente, a conceitualização. Para Vergnaud (1996, p.157) um esquema é "[...] a organização invariante da conduta para uma dada classe de situações". É nos esquemas que, segundo este autor, se devem buscar os elementos cognitivos que irão permitir a operacionalidade da ação do sujeito.

Vergnaud (1996, p. 159) relaciona os esquemas às características das situações para as quais eles serão utilizados, ou seja, são universais, "frequentemente eficazes, nem sempre efetivos" para um conjunto de situações. Em outros termos, um esquema pode ser considerado como uma totalidade dinâmica organizada; uma aplicação (no sentido matemático) que apresenta entradas (informações) e saídas (ações, comandos). Os esquemas são, então, objetos do mesmo tipo lógico que os algoritmos, sendo que nem todos os esquemas são algoritmos, pois são organizadores de conduta. Podemos constatar essa afirmação no seguinte exemplo, fornecido por Vergnaud (1996, p. 157):

> O esquema da enumeração de uma pequena coleção por uma criança de 5 anos pode variar nas suas formas quando se trata de contar bombons, pratos sobre uma mesa, ou as pessoas sentadas de maneira esparsa num jardim, mas nem por isso deixa de comportar uma organização invariante, essencial ao funcionamento do esquema: coordenação dos movimentos dos olhos e dos gestos do dedo e da mão relativamente à posição dos objetos, enunciado coordenado da seqüência numérica, cardinalização do conjunto numerado por sublinhado tônico ou pela repetição da última palavra-número pronunciada: um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete... sete!

Assim, o conceito de esquema, conforme Vergnaud (1990, 1996), pode ser aplicado a duas categorias de situações: aquelas para as quais o sujeito já dispõe, no seu repertório, num dado momento do seu desenvolvimento, das competências necessárias ao tratamento relativamente imediato dessas situações e, com menor intensidade nas situações para as quais o sujeito não dispõe de todas as competências necessárias. Nesta segunda categoria, é necessário um tempo maior de reflexão e exploração, hesitações, tentativas, erros que podem conduzir ao sucesso ou ao fracasso, mas, da mesma forma, essas condutas são estruturadas por esquemas.

Assim, há sempre componentes implícitos e explícitos em um esquema, que é constituído basicamente por quatro categorias, conforme Vergnaud (1990, p.159):

> [...] invariantes operatórios (conceitos e teoremas em ação) que pilotam o reconhecimento pelo sujeito dos elementos pertinentes da situação, e a recolha de informação sobre a situação a tratar;
>
> - antecipações do objetivo a alcançar, dos efeitos a considerar e das etapas intermediárias eventuais;
>
> - regras de ação do tipo “se... então”, que permitem gerar a seqüência de ações do sujeito;
>
> - inferências, que permitem calcular as regras e as antecipações a partir das informações e do sistema de invariantes operatórios de que dispõe o sujeito.

Vergnaud (1996) sublinha que as regras de ações e antecipações são geralmente e facilmente reconhecidas como constituintes dos esquemas, visto que geram seqüências de ações no sentido de atingir um objetivo específico. Por outro lado, as categorias “invariantes operatórios” e “inferências”, nem sempre são reconhecidas como componentes dos esquemas, apesar de serem indispensáveis no processo da conceitualização.

A importância dos invariantes operatórios é destacada, visto que são reconhecidos por esse autor como os conhecimentos contidos nos esquemas, ou seja, eles são a parte “conceitual” dos esquemas, independentemente de serem implícitos ou explícitos, conscientes ou inconscientes. Esses invariantes são os conceitos-em-ato (proposições tidas como verdadeiras sobre o real) e os teoremas-em-ato (categorias de pensamento consideradas pertinentes) (VERGNAUD, 1996).

São os invariantes operatórios os responsáveis pela articulação entre a teoria e a prática. Essa articulação se dá essencialmente porque a percepção, busca e seleção das informações baseiam-se no conjunto de conceitos-em-ato disponíveis no sujeito (objetos, atributos, relações, condições, circustâncias, ...) e no conjunto de teoremas-em-ato subjacentes a sua conduta (VERGNAUD, 1996).

De acordo com Vergnaud (1990) os conceitos são ingredientes de teoremas e teoremas são proposições que dão aos conceitos seu conteúdo. Por isso não podemos confundi-los, há sim, e deve existir, uma relação dialógica entre conceitos-em-ato e teoremas-em-ato. Para a evolução dessa relação, o ensino pode apresentar uma importante contribuição e, nesse sentido, as representações semióticas tomam lugar. Não no aspecto ressaltado por Duval, mas sim, de acordo com Vergnaud (1998), em relação ao papel mediador que as representações simbólicas têm no sentido de prover situações frutíferas para aumentar o repertório de esquemas dos alunos e, assim, auxiliar em seu desenvolvimento cognitivo.

3.4.1.2 A noção de situações como referência aos objetos matemáticos

Para Vergnaud (1998), o ensino deve proporcionar um conjunto de situações adequadas que possibilitem ao sujeito agir sobre elas, com os esquemas que já possui e que já estão automatizados, ou, dependendo do tipo de situação, desencadear novos esquemas.

É importante ressaltar que Vergnaud (1990. 1996) não toma o conceito de situação, num sentido amplo, como em Guy Brousseau, limitando-se ao sentido que esse conceito tem habitualmente em psicologia: os processos cognitivos e as respostas do sujeito são função das situações com as quais se defronta.

Assim, para Vergnaud (1990), o sentido do termo situação está muito mais próximo ao de tarefa, do que ao de situação didática, sendo que toda situação complexa pode ser analisada em termos de combinação de tarefas, para as quais é importante conhecer as dificuldades e características que lhe são próprias. Neste sentido, ele destaca que a dificuldade em realizar uma tarefa não é nem a soma nem o produto das dificuldades às diferentes subtarefas envolvidas; no entanto, é evidente que o desempenho em cada subtarefa afeta o desempenho global.

Franchi (1999, p. 158), esclarece que é possível se pensar a situação como "[...] um dado complexo de objetos, propriedades e relações num espaço de tempo determinado, envolvendo o sujeito e suas ações" (p. 158).

Além disso, Vergnaud (1996) ressalta duas idéias principais que estão relacionadas ao sentido das situações: variedade e história. A idéia da variedade relaciona-se com a existência de uma grande variedade de situações num certo Campo Conceitual. Já a idéia de história, diz respeito ao fato dos conhecimentos dos alunos serem construídos pelas situações que encontram e aprendem a dominar, principalmente pelas primeiras situações suscetíveis de dar sentido aos conceitos e procedimentos que queremos lhes ensinar.

Então, para o autor, o sentido de um conceito é o conjunto de interpretações possíveis e ações evocadas pelos sujeitos para o tratamento das situações. Em outros termos, são as situações que conferem a referência dos objetos matemáticos.

> São as situações que dão sentido aos conceitos matemáticos, porém o sentido não está nas situações nem nas representações simbólicas. É uma relação do sujeito com as situações e os significados. Mais precisamente, são os esquemas evocados no sujeito individual por uma situação ou um significante o que constitui o sentido desta situação ou deste significante para o indivíduo (VERGNAUD, 1990, p. 158).

Vergnaud (1990) exemplifica esta consideração tomando como exemplo o caso da adição, e esclarece que o sentido desta operação, para um determinado indivíduo, é o conjunto de esquemas que ele coloca em prática para tratar as situações com as quais é confrontado, e que implicam a idéia de adição. É também, o conjunto de esquemas que o sujeito pode mobilizar para operar sobre os símbolos numéricos, algébricos, gráficos e lingüísticos que representam a adição. O importante nisso é observar que as situações particulares ou representações semióticas específicas não evocam no sujeito todos os esquemas disponíveis. Isso significa que o sentido de uma situação particular que envolva a adição não é o sentido de adição para esse sujeito, assim como não o é o sentido de um símbolo particular.

Também compactuamos com a visão desse autor, sobre o significado dos objetos matemáticos estar localizado na ação (interiorizada ou não) realizada por um sujeito em relação a esses objetos. Neste ponto observamos uma diferença fundamental nos escritos de Duval em relação aos de Vergnaud. O primeiro não está preocupado nem com as situações sobre o conceito nem com as relações que o sujeito estabelece a partir dessas situações, enquanto que, para o segundo, tais relações são fundamentais para a conceitualização, ou seja, para a compreensão em matemática. Sendo assim, Vergnaud propõe estudar os Campos Conceituais, uma vez que numa situação problema qualquer, nunca um conceito aparece isolado.

3.4.2 Campos Conceituais

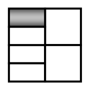
Conforme a TCC, os campos conceituais são organizados e construídos a partir de três argumentos primordiais. O primeiro argumento é a idéia de que um conceito não se forma dentro de um só tipo de situação; o segundo, refere-se ao fato de que uma situação não pode ser analisada a partir de um só conceito. E, finalmente, o terceiro argumento baseia-se na premissa de que a construção e apropriação de todas as propriedades de um conceito ou todos os aspectos de uma situação é um processo longo, que requer analogias, rupturas, incompreensões entre situações, entre concepções, procedimentos e significantes.

Para Vergnaud, um Campo Conceitual (CC) é, em primeiro lugar, um conjunto de situações. As características seguintes, extraídas de Vergnaud (1985, 1990, 1996), evidenciam mais precisamente a definição de CC:

- o estudo do desenvolvimento e do funcionamento de um conceito, no decurso da aprendizagem ou quando de sua utilização, deve considerar, ao mesmo tempo: o plano das situações, o dos invariantes operatórios e o das representações simbólicas;
- não há em geral bijeção entre significantes e significados, nem entre (esquemas) invariantes e situações;
- um conceito se constitui através de uma variedade de situações, e diferentes invariantes estão envolvidos em diferentes situações;
- ao mesmo tempo, uma situação não pode ser analisada pela via de um único conceito, pois sua resolução mobiliza, como já vimos, vários esquemas.

Partindo dessas idéias, Vergnaud (1996) define a Teoria dos Campos Conceituais como uma psicologia dos conceitos, assentada num princípio de elaboração pragmática dos conhecimentos. A TCC possui, como primeira entrada, as situações e, como segunda, os conceitos e teoremas. Vemos, então, a importância dada ao conjunto de situações na teoria de Vergnaud. A definição de campo conceitual das estruturas aditivas auxilia-nos a dimensionar tal importância:

> O campo conceitual das estruturas aditivas é, ao mesmo tempo, o conjunto das situações cujo tratamento implica uma ou várias adições ou subtrações, e o conjunto dos conceitos e teoremas que permitem analisar essas situações como tarefas matemáticas. São assim constitutivos das estruturas aditivas os conceitos de cardinal e de medida, de transformação temporal por aumento ou diminuição (perder ou gastar 5 escudos), de relação de comparação quantificada (ter mais 3 bombons ou mais 3 anos que), de composição binária de medidas (quantos são ao todo?), de composição binária de medidas (quantos são ao todo?), de composição de transformações e de relações, de operação unária, de inversão, de número natural e de número relativo, de abcissa, de deslocação orientada e quantificada (VERGNAUD, 1996, p. 168).

Sendo assim, os exemplos colocados na seção 3.3 podem ser relacionados com um campo conceitual. Os registros de representação semiótica $\frac{1}{8}$,  e 0,125 formariam o conjunto *R,* das representações simbólicas, do qual falamos anteriormente, ou seja os significantes do conceito; os invariantes operatórios nesse caso seriam as propriedades e teoremas envolvidos no campo conceitual das estruturas multiplicativas e formariam, então, o conjunto *I* , como as propriedades do isomorfismo da função linear:

$$f(nx) = nf(x)$$
$$f(n_1x_1 + n_2x_2) = n_1f(x_1) - n_2f(x_2)$$

e a sua generalização à relações não inteiras às propriedades relativas ao coeficiente constante entre duas variáveis linearmente ligadas:

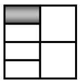
$$f(x) = a(x)$$
$$x = \frac{1}{a}f(x)$$

(VERGNAUD, 1996, p. 168-169).

O conjunto *S*, nesse caso, seria as situações que forneceriam algum sentido ao conceito, por exemplo, problemas que se relacionam à idéia de parte/todo, porcentagem.

Vergnaud (1996, p.168) define o campo conceitual das estruturas multiplicativas como sendo

> o conjunto das situações cujo tratamento implica uma ou várias multiplicações ou divisões e o conjunto dos conceitos e teoremas que permitem analisar estas situações: proporção simples e proporção múltipla, função linear e n-linear, relação escalar direta e inversa, quociente e produção de dimensões, combinação linear e aplicação linear, fração, relação, número racional, múltiplo e divisor, etc.

Assim, Vergnaud não analisa isoladamente, como o faz Duval, as representações $\frac{1}{8}$, 0,125 e  , mas sim em termos de situações onde tais registros são as representações do conceito envolvido, e que possibilitam o acesso ao significado dessas situações e à operacionalidade. Então, esses registros estariam relacionados ao campo conceitual multiplicativo, já que representam números racionais. Nesse campo conceitual, o aspecto caracterizador central seria uma estrutura quaternária, uma vez que os problemas que envolvem a multiplicação e a divisão "[...] implicam em uma proporção simples de duas variáveis, uma relativamente à outra" (VERGNAUD, 1996, p. 174).

Segundo Franchi (1999, p. 164), "[...] a teoria dos campos conceituais visa à construção de princípios que permitam articular competências e concepções constituídas em situação, e os problemas práticos e teóricos em que essas competências e concepções se constituem".

Vergnaud (1990, 1996) sublinha a importância da ação do sujeito em aprendizagem, nas situações, ou seja, nos domínios da experiência, nos quais o conceito faz referência como fonte e critério no processo de conceitualização em matemática. Nesse processo, um ponto decisivo seria a passagem dos conceitos como instrumento aos conceitos como objetos em uma apropriação consciente. Esta transformação significa, entre outras coisas, que as funções proposicionais (que não são suscetíveis de serem verdadeiras ou falsas, como os conceitos de cardinal e de coleção, os de estado inicial, de transformação e de relação quantificada, indispensáveis à conceitualização das estruturas aditivas) podem ser transformadas em argumentos. Nesta transformação, a nominalização é uma operação lingüística fundamental (VERGNAUD, 1996).

O CC é considerado por Vergnaud como uma unidade de estudo para dar sentido às dificuldades dos alunos no processo de conceitualização do real. Isso porque supõe que a conceitualização é a essência do desenvolvimento cognitivo.

Vergnaud (1990) não compreende sua proposta sobre os campos conceituais como uma teoria didática. No entanto, a considera de extremo interesse para esse campo porque possibilita a análise da relação dialética presente na educação, entre a ação na situação e a verbalização teórica. É também neste sentido que compreendemos sua utilidade para nossa pesquisa: na dimensão da ação do sujeito no tratamento das situações que referenciam os objetos matemáticos na aprendizagem da matemática escolar.

3.5 A NATUREZA DAS TAREFAS MATEMÁTICAS COMO PONTO DE ARTICULAÇÃO ENTRE AS SITUAÇÕES DA TCC E DOS RRS NA MATEMÁTICA ESCOLAR

Como já dissemos antes, Duval não trata dos aspectos relacionados ao tipo de situações colocadas aos alunos, preocupando-se pontualmente com as representações semióticas dos objetos matemáticos. Na sua proposta teórica, sugere, principalmente, que sejam privilegiadas atividades que propiciem a operação de conversão entre RRS, conduzindo à coordenação destes RRS, sem ater-se ao tipo de tarefas que envolvem essas operações.

Já para Vergnaud, as operações cognitivas que envolvem o trânsito entre diversas representações semióticas do mesmo objeto matemático não têm esse papel tão essencial. Essas representações são essenciais sim, mas na medida em que se constituem em um dos elementos que compõe a tríade que define o conceito. Ele dimensiona a importância da linguagem e de outros signos ao destacar a função deles em três aspectos:

> ajuda à designação, e portanto à identificação, das invariantes: objetos, propriedades, relações, teoremas;
>
> ajuda ao raciocínio e à inferência;

> ajuda à antecipação dos efeitos e dos objetivos, à planificação e ao controle da ação (VERGNAUD, 1996, p. 180).

Podemos observar, assim, que, como em Duval, para Vergnaud (1990, 1996) as representações semióticas, representadas pela linguagem verbal e outros signos, apresentam funções para além daquela representacional. Elas na verdade funcionam para a comunicação e para auxiliar o pensamento, como instrumentos de organização das experiências, ou seja, funcionam como instrumentos de conceitualização do real.

Em se tratando das representações semióticas em matemática, Vergnaud (1996, p. 188) esclarece o seguinte:

> O simbolismo matemático não é, rigorosamente falando, nem uma condição necessária nem uma condição suficiente para a conceitualização, mas contribui utilmente para ela, nomeadamente através da transformação das categorias de pensamento matemáticas em objetos matemáticos. A linguagem natural é o meio essencial de representação e de identificação das categorias matemáticas, mas não possui, tal como os diagramas, as fórmulas e as equações, o laconismo indispensável à seleção e ao tratamento das informações e das relações pertinentes.

Entretanto, apesar de atribuir uma grande importância ao simbolismo, Vergnaud (1996) concede à ação do sujeito no enfrentamento de uma situação, a fonte e o critério da conceitualização. Essa é uma das principais diferenças, entre Vergnaud e Duval, sobre o papel das representações semióticas na aprendizagem da matemática.

Essas diferenças não impedem, porém, que façamos uso de elementos de suas propostas teóricas para pensarmos uma proposta curricular. Assim, de Duval, utilizamos as contribuições referentes às operações cognitivas de tratamento e conversões, incluindo a noção de congruência semântica, e, de Vergnaud, a noção de situações (tarefas) para compreender a referência dos objetos matemáticos e suscitar o uso das diferentes representações semióticas.

Acreditamos, pelas considerações colocadas até aqui, que os diferentes tipos de tarefas (investigações, exercícios, problemas, modelagem, projetos, problemas, para citar as que consideramos principais), que serão desenvolvidas na escola, poderão ser consideradas como ponto articulador entre os elementos das teorias de Duval e Vergnaud para a proposta curricular que pretendemos elaborar. Esta articulação se dá na medida em que, ao ser confrontado por um grande número de tarefas, diferentes em sua natureza e relacionadas ao mesmo objeto matemático, o sujeito em aprendizagem estará mobilizando diferentes RRS para o seu tratamento e ampliando as possibilidades de compreensão do significado desses objetos.

Essa compreensão poderá ser ampliada, seja porque esses objetos estão referenciados por diferentes situações, seja porque são utilizadas diferentes operações cognitivas na sua resolução, ou, ainda, pela mobilização de diferentes representações semióticas.

3.5.1 Situações, Atividades ou Tarefas Matemáticas?

Como vimos na seção 3.4, tomamos aqui o sentido de situação, dado por Vergnaud (1988, 1990, 1996), que envolve todo o tipo de ação com as quais o sujeito possa ser confrontado, seja do seu cotidiano ou não, e que irá demandar um tratamento, ou seja, irá evocar processos cognitivos e respostas desse sujeito no enfrentamento desta situação. Essa definição faz lembrar o conceito de tarefa. Fica claro, então, que as situações poderão tomar a conotação de situações escolares ou tarefas escolares.

Ponte (1995, p. 36) fornece uma definição de tarefa e atividade que demonstra a necessária ligação entre esses conceitos, apesar de serem distintos em sua essência:

> [...] a atividade, que pode ser física ou mental, diz respeito essencialmente ao aluno, referindo-se àquilo que ele faz num dado contexto. A tarefa representa apenas o objetivo de cada uma das ações em que a atividade se desdobra e é algo basicamente exterior ao aluno (embora possa ser decidido por ele). Na verdade, as tarefas são muitas vezes propostas pelo professor. Mas, uma vez propostas, têm de ser interpretadas pelo aluno e podem dar origem a atividades muito diversas (ou a nenhuma atividade).

Fica claro, portanto, que se se pretende um ensino da Matemática Escolar assentado na atividade do aluno, isso depende muito das tarefas apresentadas pelo currículo, pelo material didático e, em última instância, pelo professor. Ponte (2003) exemplifica com o caso da aprendizagem da escrita, que antigamente tinha como principais tarefas a cópia, o ditado e a redação. No entanto, a Didática da Língua, segundo este autor, mostrou que estes tipos de tarefa foram insuficientes, fazendo surgir outras, tais como o texto orientado e o texto livre.

Muitos autores, tais como Bishop e Goffree (1986)[30] e Christiansen e Walther (1986)[31], citados em Ponte (2005), defendem uma perspectiva de aprendizagem baseada em dois fatores principais: a atividade que os alunos realizam e a reflexão que sobre ela fazem. Nessa direção, Vergnaud (1996) considera que a chave para se pensar na aprendizagem da matemática é levar em conta a ação do sujeito em situação, e a organização da sua conduta.

Podemos entender dessa forma, que a ação do sujeito em situação possa significar que ele está em atividade. E, para estar em atividade, necessariamente estará realizando uma tarefa, ou seja, a tarefa é o objetivo da atividade (Ponte, 1995). Neste sentido, as definições dadas por Ponte (2005) e por Vergnaud (1996) se aproximam.

Assim, no contexto da Matemática Escolar, é possível considerar que a tarefa, ou seja, a situação planejada e proposta pelo professor, com a intenção de promover a aprendizagem no aluno, se torna o objetivo da atividade do aluno. O intuito do professor é, portanto, promover a ação dos alunos em relação à situação proposta, no sentido de desenvolverem uma verdadeira atividade de aprendizagem.

De acordo com Sacristán (1998), as tarefas possuem uma ordem interna, e cada uma possui um padrão específico que pode ser traduzido num plano relativamente preciso, isto é, num esquema de atuação prática que desencadeará uma atividade nos alunos. É por conta disso que as tarefas têm um importante papel na regulação da atividade desenvolvida.

Entretanto, não podemos deixar de levar em conta os fatores externos à natureza da tarefa, que podem influenciar significativamente o nível de atividade dos alunos quando da sua realização. Tais fatores passam desde as expectativas dos professores, frente à conduta dos alunos e os contextos de realização da tarefa, até situações inusitadas, como a proposição de tarefas de níveis similares a turmas

---

[30] BISHOP, A., & GOFFREE, F. (1986). Classroom organization and dynamics. In B. CHRISTIANSEN, A. G. HOWSON, & M. OTTE (Eds.), **Perspectives on mathematics education** (pp. 309-365). Dordrecht: Reidel.
[31]CHRISTIANSEN, B., & WALTHER, G. (1986). Task and activity. In B. Christiansen, A. G. Howson, & M. Otte (Eds.), **Perspectives on mathematics education** (pp. 243-307). Dordrecht: Reidel.

diferentes, mas em contextos e ambientes semelhantes, com resultados bastante distintos.

Mas, para além disso, há que se considerar o fato de que um ensino pautado em tarefas potencialmente fortes, em termos de desenvolvimento de capacidades e competências, e de mobilização de distintos RRS, já apresentam indicativos de terem mais sucesso do que tarefas rotineiras.

Desse modo, desenvolvendo diferentes tipos de atividades, o aluno poderá ter acesso a conhecimentos que envolvam fatos específicos da Matemática, procedimentos e aplicabilidades, abrangendo um campo de relações entre diferentes áreas do conhecimento. Essa atividade do sujeito, ou seja, a ação do sujeito, será desenvolvida na medida em que são propostas, na Matemática Escolar, tarefas que permitam o desenvolvimento e uso de estratégias cognitivas diversas, tais como: investigação, pesquisa, exploração, argumentação, modelagem de situações.

Tarefas que suscitem ações do aluno no sentido da resolução de problemas, explorações, generalizações, descrições, raciocínio e aplicação do conhecimento estão relacionadas diretamente ao estabelecimento de esquemas para o desenvolvimento e consolidação da aprendizagem. Essa premissa é defendida por Ponte (2005). Entendemos, desta forma, que tarefas de diferentes naturezas permitem que sejam acessadas representações semióticas distintas do conceito matemático e, com isso, é possível fornecer o sentido aos conceitos.

3.5.2 As Tarefas Matemáticas e o Currículo

A existência de um currículo é justificada pela potencialidade dos efeitos educativos que provoca. Estes, por sua vez, são condicionados pelas experiências com as quais os alunos são confrontados no contexto da escola e, mais precisamente, no contexto de uma aula de matemática. Essas experiências serão mais ou menos produtivas, também, dependendo dos ambientes de aprendizagem formados, que são influenciados grandemente pelo tipo de tarefas realizadas no processo de aprendizagem.

Outros fatores, tais como, recursos materiais, condições físicas e organizacionais da escola e, muito fortemente, os professores, com seus saberes, experiências, crenças e tradições metodológicas também influenciam os ambientes de aprendizagem. Não ignoramos este fato, concordamos com a idéia de que o currículo será aquilo que a prática permitir que ele seja e, deste modo, só vai adquirir um significado definitivo para os alunos e para os professores na medida em que estes realizam as atividades escolares. E, justamente por isso, acreditamos que considerar explicitamente, nas propostas curriculares de matemática, tarefas de diferentes naturezas que contemplem um grande espectro de situações e de representações semióticas possa contribuir para a aprendizagem da matemática.

A diversificação de tarefas, nos diferentes momentos das aulas de Matemática, é necessária, visto que cada tarefa apresenta uma potencialidade diferente, desempenhando um papel importante no sentido de alcançar os objetivos curriculares pretendidos. Ponte (2005, p. 25-27) dimensiona algumas características de tarefas de diferentes naturezas em relação aos contextos de sua aplicação e de sua complexidade:

> - As tarefas de natureza mais *fechada* (exercícios, problemas) são importantes para o desenvolvimento do raciocínio matemático nos alunos, uma vez que este raciocínio se baseia numa relação estreita e rigorosa entre dados e resultados.
>
> - As tarefas de natureza mais *acessível* (explorações, exercícios), pelo seu lado, possibilitam a todos os alunos um elevado grau de sucesso, contribuindo para o desenvolvimento da sua auto-confiança.
>
> - As tarefas de natureza mais *desafiante* (investigações, problemas), pela sua parte, são indispensáveis para que os alunos tenham uma efetiva experiência matemática.
>
> - As tarefas de cunho mais *aberto* são essenciais para o desenvolvimento de certas capacidades nos alunos, como a autonomia, a capacidade de lidar com situações complexas, etc.
>
> - Para que os alunos se apercebam do modo como a Matemática é usada em muitos contextos e para tirar partido do seu conhecimento desses contextos é fundamental que lhes seja proposta a realização de tarefas enquadradas em *contextos da realidade* (tarefas de aplicação e de modelação).
>
> - No entanto, os alunos podem também sentir-se desafiados por tarefas formuladas em *contextos matemáticos* (investigações, problemas, explorações) e a sua realização permite-lhes perceber como se desenvolve a atividade matemática dos matemáticos profissionais.
>
> - E, finalmente, pelas suas características muito próprias, as tarefas de *longa duração* (os projetos) têm um papel insubstituível no desenvolvimento

> de diversos objetivos curriculares e devem ser, por isso, contemplados pelo menos no planejamento anual do trabalho do professor.

Parâmetros como o conteúdo e o grau de dificuldade, o grau de rotina, nível de complexidade, valor cognitivo ou possibilidades de abertura de uma tarefa são características importantes a considerar na seleção de boas tarefas para desenvolver a aprendizagem da Matemática Escolar. Esses parâmetros não são estanques e, na verdade, existem cruzamentos e interseções diversos, conforme a utilização dessas tarefas na organização dos ambientes de aprendizagem.

Conforme aplica Ponte (2003, 2005), uma tarefa possui quatro dimensões básicas: grau de dificuldade, a estrutura (fechada – se diz claramente o que é dado e o que é pedido; aberta – comporta um grau de indeterminação significativo no que é dado e/ou no que é pedido), o contexto referencial (interno ou externo à matemática) e o tempo necessário para resolução.

Assim, se durante o processo educativo for possibilitado aos alunos o contato com tarefas que envolvam a exploração, a construção, a investigação e a resolução de problemas, a Matemática Escolar estará permitindo a esses alunos um envolvimento maior e desenvolvendo muito mais a atividade pessoal do que habitualmente se tem praticado. Ponte (2003) ainda ressalta que as características de uma tarefa não são absolutas em relação à pessoa que a realiza; desse modo, uma mesma questão pode ser para uma pessoa um problema e não o ser para outra.

Assim, pensar em propostas curriculares, materiais didáticos e planejamentos de aula que contemplem tarefas de diferentes naturezas, significa considerar, de forma explícita, essas características no ensino da Matemática Escolar. Baseando-nos nas considerações de Ponte (2005, 1995), sobre o tipo de tarefas a ensinar, explicitaremos, a seguir, os principais aspectos e possibilidades de trabalho.

3.5.2.1 Os exercícios

De acordo com Ponte (2005), não é o fato de uma questão ser ou não colocada num contexto extra-matemático que determinará se ela é um exercício ou um problema. Para este autor, o que caracteriza um exercício é o fato de o aluno dispor, ou não, de processos de resolução imediatos. Ou seja, os exercícios são tarefas nas quais está perfeitamente indicado o que é dado e o que é pedido, e caracterizam-se por apresentarem um grau elevado de rotina, formulação mais fechada e menor grau de dificuldade e de exigência cognitiva. São tarefas mais curtas, menos abrangentes e mais localizadas num conceito ou situação.

As tarefas do tipo exercício têm uma forte tradição nas aulas de Matemática, seja porque servem para o aluno pôr em prática os conhecimentos já anteriormente adquiridos, relacionando-se a um ensino baseado na exposição e repetição, seja pelo fato dos materiais didáticos fornecerem, em maior número, tarefas dessa natureza. O fato é que os exercícios servem essencialmente a um propósito de consolidação de conhecimentos, e por essa razão devem ter um lugar específico nas aulas de Matemática. No entanto, qual deve ser o espaço efetivo que essas tarefas devem ter no ensino da Matemática Escolar?

Para a maioria dos alunos, fazer exercícios em série não é uma atividade muito interessante, apesar de seu valor no sentido de "dissecar" os problemas, possibilitando observar as pequenas variações e as suas conseqüências. Deste modo, "reduzir o ensino da Matemática à resolução de exercícios comporta grandes riscos de empobrecimento nos desafios propostos e de desmotivação dos alunos" (PONTE, 2005, p. 13). Por isso, os exercícios devem ser bem escolhidos e utilizados no sentido de compreender as idéias matemáticas, sob vários aspectos e para conhecer e potencializar a utilização das ferramentas matemáticas.

Os exercícios podem servir também como tarefas a serem elaboradas para mobilizar diversos RRS, envolvendo a operação de conversão e de congruência semântica, não ficando, assim, restritos a simples tarefas rotineiras. Isso porque apenas memorizar fatos ou procedimentos sem a devida compreensão, faz com que os alunos não fiquem seguros de quando e como usar o que sabem, e tal aprendizagem pode se tornar bastante frágil (NCTM, 2000).

Em relação ao lugar que os exercícios têm nas propostas curriculares, analisadas nesta pesquisa (Proposta de Portugal, EUA e os PCN), observamos que esse tipo de tarefa não é incentivada. Todas, de um modo geral, centram suas orientações para um trabalho da Matemática Escolar voltado para a Resolução de Problemas, ou seja, distanciam-se de tarefas rotineiras. Dessas propostas, a de

Portugal coloca explicitamente esta questão, ao indicar que os alunos devem ter contato com diferentes tipos de tarefas escolares, inclusive resolvendo exercícios:

> A aprendizagem da Matemática decorre do trabalho realizado pelo aluno e este é estruturado, em grande medida, pelas tarefas propostas pelo professor. Como indica o *Currículo nacional*, o aluno deve ter diversos tipos de experiências matemáticas, nomeadamente resolvendo problemas, realizando atividades de investigação, desenvolvendo projetos, participando em jogos e ainda *resolvendo exercícios que proporcionem uma prática compreensiva de procedimentos*. Por isso, o professor deve propor aos alunos a realização de diferentes tipos de tarefas, dando-lhes uma indicação clara das suas expectativas em relação ao que espera do seu trabalho, e apoiando-os na sua realização (PORTUGAL, 2007, p. 9, grifo nosso).

As orientações indicam que os exercícios não devem ser aqueles repetitivos, mas sim os que permitem o desenvolvimento de idéias e conexões, uma vez que a repetição de exercícios rotineiros, além de consumir um tempo precioso, pode acabar por desqualificar os conceitos que se pretende consolidar. Por isso, o importante não é fazer listas e listas de exercícios, mas sim fazer exercícios selecionados criteriosamente que testem a compreensão dos conceitos fundamentais.

3.5.2.2 Os problemas

Não é de hoje que os problemas são conhecidos nos textos matemáticos, mas são os trabalhos de George Pólya (1995) que trouxeram as primeiras contribuições da resolução de problemas para o contexto educativo. Para esse autor, o professor deve propor problemas aos seus alunos para que estes experimentem o gosto pela descoberta matemática, sendo desafiados nas suas capacidades. Essa condição é considerada como fundamental para que os alunos possam perceber a verdadeira natureza da matemática.

As idéias de Pólya influenciaram de forma marcante os currículos atuais em todos os níveis de ensino, desde o ensino fundamental até o ensino superior. Isso pode ser notado pelo fato das orientações metodológicas de propostas curriculares de vários países, inclusive o Brasil, apresentarem a resolução de problemas como eixo articulador do trabalho pedagógico com a matemática (PONTE, 2005; PIRES, 2000; COLOMBO e LAGOS, 2005).

Assim, fala-se muito em resolução de problemas no ensino da Matemática, mas questiona-se o que seja realmente um problema. A propósito deste conceito, muitos autores, assim como Pólya (1995), colocam em pauta a idéia da falta de um caminho óbvio para atingir o objetivo. Colombo e Lagos (2005, p. 18) apresentam duas situações para exemplificar e pensar sobre o que seja um problema:

> A violência urbana presente em nosso cotidiano é um problema a ser solucionado nas grandes cidades?
>
> Alcançar um objeto em cima de um armário pode ser um grande desafio para uma criança que está aprendendo a subir pequenos degraus?
>
> Nestas duas questões, o termo "problema" faz referência a situações em função do contexto no qual ocorrem, das características e expectativas das pessoas que nelas se encontram envolvidas. A primeira situação requer todo um cuidado ao ser analisada, pois envolve toda uma sociedade, podendo surgir outros problemas oriundos da solução dada, enquanto a segunda situação é individual, envolvendo uma criança e um objeto. Nas duas situações seriam necessárias a pesquisa e a organização dos conhecimentos já existentes, e, se preciso fosse, buscar novos conhecimentos tendo em vista a resolução dos problemas apresentados.

O que podemos afirmar, a partir desses exemplos, é o fato de que, o que para alguns pode ser um problema relevante e significativo, para outros pode resultar em trivial ou carecer de sentido. Em outros termos, há um problema quando existem objetivos perfeitamente definidos e claramente formulados, mas para chegar a solução de tal problema não se conhece um caminho de antemão ou um método específico. Nestes termos, resolver um problema implica em encontrar um caminho onde nenhum outro é conhecido; encontrar um caminho a partir de uma dificuldade; encontrar um caminho que contorne um obstáculo, para alcançar um fim desejado, mas não alcançável imediatamente (POLYA, 1995).

Compreendemos, assim, que a existência de algo desconhecido para ser descoberto, associada à dificuldade neste processo, caracteriza um problema. Portanto, proporcionamos problemas nas tarefas escolares é possibilitarmos que os alunos pensem, raciocinem, testem hipóteses e não simplesmente apliquem fórmulas diretamente, sem compreensão.

É preciso notarmos, porém, que esse grau de dificuldade não deverá ser exagerado, pois pode levar à desistência e desmotivação dos alunos e, por outro lado, não poderá ser demasiado fácil, pois aí não será mais um problema, mas sim um exercício.

Essa perspectiva aparece também nos PCN:

> Um problema matemático é uma situação que demanda a realização de uma seqüência de ações ou operações para obter um resultado. Ou seja, a solução não está disponível de início, mas é possível construí-la. Em muitos casos, os problemas usualmente apresentados aos alunos não constituem verdadeiros problemas, porque, via de regra, não existe um real desafio nem a necessidade de verificação para validar o processo de solução. O que é problema para um aluno pode não ser para outro, em função dos conhecimentos de que dispõe (BRASIL, 1998, p. 41).

Os PCN apresentam a resolução de problemas como um traço imprescindível para compor a atividade escolar matemática, porque defendem um ensino baseado na busca de estratégias, na construção de idéias e no desenvolvimento do raciocínio.

As idéias relacionadas ao fato de que resolver um problema pressupõe a elaboração de procedimentos de resolução (tais como realizar simulações, fazer tentativas, formular e testar hipóteses); comparar os resultados encontrados com os dos colegas e validar procedimentos, estão presentes nas propostas curriculares de Portugal, EUA e também do Brasil.

A proposta de Portugal (2007, p. 9) aplica que:

> Desenvolver a capacidade de resolução de problemas e promover o raciocínio e a comunicação matemáticos, para além de constituírem objetivos de aprendizagem centrais neste programa, constituem também importantes orientações metodológicas para estruturar as atividades a realizar em aula. Isso significa que o professor deve proporcionar situações freqüentes em que os alunos possam resolver problemas, analisar e refletir sobre as suas resoluções e as resoluções dos colegas. Significa, igualmente, que o professor deve dar atenção aos raciocínios dos alunos, valorizando-os, procurando que eles os explicitem com clareza, que analisem e reajam aos raciocínios dos colegas.

Nessa mesma direção, o NCTM (2000), dos EUA, aponta a resolução de problemas como um dos *standards* (normas) para o ensino da Matemática Escolar, que deverá permear todos os níveis de ensino. Em linhas gerais, este *standard* pretende que os alunos possam desenvolver uma aprendizagem matemática através da resolução de problemas; resolver problemas originados na própria matemática e em outros contextos; aplicar e adaptar uma variedade de estratégias apropriadas para resolver os problemas; monitorar e refletir sobre os processos matemáticos na resolução de problemas.

O valor da resolução de problemas para o ensino da Matemática Escolar também pode ser dimensionado por ser esta uma tarefa que apresenta um grande potencial para o trabalho centrado no trânsito entre RRS. Numa primeira instância, por necessitar de uma conversão básica para a interpretação dos problemas e conseqüente resolução, que é a transformação do enunciado do problema em língua natural para a representação simbólica. E em outro plano por se tratar de uma tarefa aberta e não rotineira.

Para o trabalho com a tarefa de resolução de problemas, não basta guardar algumas aulas no final de cada capítulo como forma de aplicar os conceitos ou incluir experiências de forma isolada. Ao contrário, para adquirir eficiência, o ensino pautado na resolução de problemas leva tempo, ou seja, deverá se constituir em uma experiência regular e ser parte integrante do currículo.

3.5.2.3 As tarefas de investigação e exploração

Antes de explanar sobre as principais características das tarefas de investigação e exploração, vale ressaltamos que, no Brasil, não temos uma tradição de pesquisas científicas em tarefas com essa classificação. Por conseguinte, não temos notícias do uso dessa nomenclatura em sala de aula, o que não ocorre com os outros tipos de tarefas mencionadas nesta seção. Tanto é verdade que nos PCN, e mesmo nos Princípios e Normas para a Matemática Escolar, não se têm referência explícita de tarefas dessa natureza, embora existam indicações de trabalhos muito semelhantes ao que Ponte (2003, 2005, 2006) está denominando de tarefas de investigação e de exploração.

Para Ponte (2003), investigar, no contexto do ensino e da aprendizagem, não é mais que procurar conhecer, compreender e buscar soluções para os problemas com os quais nos deparamos. Ou seja, as tarefas de investigação têm em comum com as tarefas de resolução de problemas, o fato de ser necessário encontrar caminhos próprios de resolução, sendo que o ponto de diferenciação se dá pelo grau de formulação.

Outro ponto que pode diferenciar um problema ou um exercício de uma investigação, segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2006) é o fato de que no enunciado dos exercícios e problemas indica-se claramente o que é dado e o que é pedido, sem margens para ambigüidades. No caso das investigações, isso não acontece, pois são de natureza mais aberta. Isso possibilita que se traga para a sala de aula o espírito da atividade matemática genuína.

Os principais argumentos em favor da importância do trabalho com tarefas de investigações na sala de aula, segundo Ponte (2005), são semelhantes aos utilizados para justificar a relevância do trabalho com problemas: desenvolvimento de raciocínio, participação efetiva na construção do conhecimento, mobilização de estratégias e hipóteses. Acrescenta-se a isso o fato de que as investigações promovem maior envolvimento dos alunos em relação aos problemas, por requererem a sua participação ativa desde a fase de formulação de questões e conjecturas, realização de provas e refutações, até os procedimentos de avaliação, discussão, argumentação e apresentação dos resultados (PONTE, BROCARDO e OLIVEIRA, 2006).

Em relação à diferenciação entre tarefas de investigação e exploração, Ponte (2003) coloca que é tênue a linha que as demarca. Uma investigação é, segundo esse autor, uma tarefa de estrutura aberta com um grau elevado de dificuldade, e as explorações são tarefas também de estrutura aberta, porém de pouca dificuldade. Por esta razão, muitas vezes se torna difícil distinguir entre estes dois tipos.

O exemplo abaixo, extraído de Ponte (2003, p. 29), mostra uma seqüência de exercícios que, pela sua estruturação e seqüência, se constitui em uma tarefa de exploração, com conteúdos puros da matemática:

1. Observa que $2^2 = 4$ e que $2\times2 = 4$.

- Será sempre verdade que $a^n = a\times n$?

- Experimenta nos seguintes casos e noutros por ti escolhidos, usando, se necessário, a calculadora.

$0^2 =$	$0 \times 2 =$	$10^2 =$	$10 \times 2 =$
$4^2 =$	$4 \times 2 =$	$\left(\frac{1}{2}\right)^3 =$	$\left(\frac{1}{2}\right) x3 =$
$3^3 =$	$3 \times 3 =$	$\left(\frac{5}{3}\right)^4 =$	$\left(\frac{5}{4}\right) x4 =$

2. Determina cada uma das seguintes potências

10^3 1^4 0.45^2

10^5 1^8 0.45^4

10^6 1^{18} 0.45^7

- Se calculasses 10^7, seria maior ou menor que 10^6?

- E se calculasses 0.45^9 seria maior ou menor que 0.45^7?

- O que se passa com as potências de base 1?

- De todo o estudo que fizeste, podes tirar alguma conclusão?

3. Observe que $4^2 = 16$ e $2^4 = 16$. Será sempre verdade que $a^n = n^a$?

- Experimenta noutros casos!

4. Sabendo que $3^6 = 729$, és capaz de calcular imediatamente 3^7? e 3^8? e 3^{12}?

A tarefa, embora num primeiro momento pareça tratar-se apenas de uma listagem de exercícios, mostra uma ordem interna que possibilita o aluno ir desenvolvendo conjecturas. As duas primeiras questões apresentam uma estrutura mais fechada e as duas últimas são abertas, fornecendo ao conjunto de tarefas a característica exploratória.

Outro aspecto que podemos observar nessa tarefa, é que ela apresenta várias representações semióticas que envolvem o conceito de potência, o que favorece e amplia o trabalho cognitivo envolvido na sua resolução.

No mesmo campo do cálculo aritmético puro com potências, apresentamos um exemplo de tarefa de investigação, citado em Ponte, Brocardo e Oliveira (2006, p. 70):

1. Vamos explorar algumas idéias que foram desenvolvidas pelo matemático Nicómano de Gerasa, no século I da nossa era[3]. Repare que o quadro seguinte foi preenchido parcialmente, segundo determinadas regras, tendo como ponto de partida as potências de 2. Observe-o, com atenção, para perceber como foram efetuados os cálculos e, em seguida, complete-o.

1	2	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6
	$2+\frac{2}{2}=3$	$4+\frac{4}{2}=6$	$8+\frac{8}{2}=12$			

		$6+\frac{6}{2}=9$	$12+\frac{12}{2}=18$			
			$18+\frac{18}{2}=27$			

- Tente encontrar algumas regularidades entre os números que figuram: em cada linha; em cada coluna; nas diagonais.

- Na coluna que começa em 2^{10}, qual será o último número? E na coluna de 2^{20}?

2. Que conjecturas poderá fazer sobre um quadrado semelhante ao anterior que comece com as potências de 3? E sobre um quadro começando com as potências de 4? E sobre outros quadrados?

[3] Nicómano de Gerasa (cidade perto de Jerusalém) nasceu cerca do ano de 100 dC. Os alunos interessados poderão pesquisar informações sobre esse matemático na Internet.

O método subjacente à construção do quadro permite-nos obter as potências de *n* (número natural) a partir das potências de *n* -1, ou seja, observando as regularidades do quadro, o aluno poderá ter contato com o método usado por um matemático para escrever as potências de um número natural (PONTE, BROCARDO e OLIVEIRA, 2006).

Essa tarefa permite, além das atividades investigativas, a mobilização de diversos RRS e também o contato com aspectos da História da Matemática, ampliando os esquemas cognitivos que deverão ser mobilizados na resolução da mesma. É uma investigação, portanto, apresentar um grau de dificuldade maior que o do primeiro exemplo.

Muitas tarefas de investigação surgem num contexto da vida real, no entanto, também é possível formular exercícios, problemas, explorações e investigações em termos puramente matemáticos, como os exemplos colocados.

3.5.2.4 As tarefas de modelagem

As tarefas de modelagem, conforme Ponte (2003, 2005), são tarefas de natureza problemática e desafiante, num contexto de realidade, ou seja, podem ser problemas ou investigações que envolvem questões reais, conforme o grau de estruturação do respectivo enunciado.

No Brasil, existe uma forte tradição em pesquisa sobre esse tipo de tarefa, denominadas de modelagem matemática. Autores como Burak (1992, 2007), Bienbenguth e Hein (2003), Bassanezi (2002) têm se dedicado a essa linha de pesquisa como uma forma de quebrar a dicotomia existente entre a Matemática Científica, a Matemática Escolar e a sua utilidade na vida real.

A propósito do conceito de modelagem matemática, Burak (1992, p. 62) ressalta que esta

> [...] constitui-se em um conjunto de procedimentos cujo objetivo é estabelecer um paralelo para tentar explicar, matematicamente, os fenômenos presentes no cotidiano do ser humano, ajudando-o a fazer predições e a tomar decisões.

Assim, a modelagem pode ser vista como um instrumento da matemática aplicada que entra nas salas de aula. Para Bassanezi (2002), fazer modelagem matemática é transformar situações reais em problemas matemáticos, que possam ser resolvidos e suas respostas serem interpretadas não apenas como resultados matemáticos, mas também na linguagem do senso comum.

Por sua característica de aplicação, o ensino baseado na modelagem proporciona uma aprendizagem contextualizada que procura ligar o real à necessidade de experimentação matemática. Tal aprendizagem permite a conexão entre várias ferramentas e conteúdos matemáticos fazendo com que tenha sentido para o aluno.

O potencial de aplicação das tarefas de modelagem pode levar à diferentes situações e contribuir significativamente para a formação dos conceitos em matemática. Assim, liga-se diretamente à noção de campo conceitual de Vergnaud (1988, 1996), vista na seção anterior. Além disso, acreditamos que a modelagem pode mobilizar regras de raciocínio, procedimentos de investigação, validação das estratégias e uso de diferentes RRS, ampliando a possibilidade de compreensão dos conceitos envolvidos, permitindo com isso sua utilização em outros contextos.

O trabalho interdisciplinar é favorecido pela modelagem, como coloca Burak (2007), entre os vários campos da própria matemática (Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas e o Tratamento da Informação) e com outras áreas do conhecimento. Isso também favorece as conexões com as múltiplas representações. O uso de diversas RRS ajuda a desenvolver nos alunos a capacidade de as interligar, distinguindo a mesma função, o mesmo objeto matemático, em representações diferentes, permitindo, com isso, utilizar as características desses objetos e funções em outras áreas que não sejam aquelas que foram aprendidas.

A importância da integração das tarefas de modelagem nos currículos e da sua efetiva utilização em sala de aula se deve ao fato dela contribuir na superação do tratamento estanque e compartimentalizado, usualmente destinado ao ensino da Matemática, e ainda contribuir para o "[...] desenvolvimento de competências complexas tais como: observar, explorar e investigar; estabelecer relações, classificar e generalizar; argumentar, tomar decisões e criticar, conjecturar e provar, utilizar a imaginação e a criatividade, dentre outras" (BURAK, 2007, p. 11).

Os PCN para o Ensino Fundamental não tratam da modelagem matemática explicitamente. No entanto esta tarefa encontra respaldo no documento quando privilegia o trabalho com a resolução de problemas como ponto de partida para a atividade matemática, apontando a necessidade da contextualização e preconizando como um dos objetivos gerais para o ensino da matemática, "[...] estabelecer conexões entre temas matemáticos de diferentes campos e entre esses temas e conhecimentos de outras áreas curriculares" (BRASIL, 1998, p. 48).

Os *Standards* (NCTM, 2000), da mesma forma, apontam para um trabalho educativo que envolva a modelagem matemática ao defenderem que a compreensão dos alunos é muito mais profunda e duradoura quando conseguem interligar idéias matemáticas:

> [...] Eles (os alunos) podem ver conexões matemáticas no rico intercâmbio entre tópicos matemáticos, em contextos que relacionam matemática com outros assuntos, e nos seus próprios interesses e experiência. Mediante instrução que realça a inter-relação de idéias matemáticas, os alunos não aprendem apenas Matemática, eles também aprendem acerca da utilidade da Matemática (NCTM, 2000, p. 64).

As tecnologias são apontadas pelas Normas como facilitadoras para o desenvolvimento da modelagem matemática, por permitirem o trabalho com tarefas mais contextualizadas e interdisciplinares. Além disso, muitos capítulos das Normas, tais como Álgebra, Geometria, Trigonometria e Funções fazem referência às aplicações ao mundo real e a atividades de modelagem e como as conexões entre as situações problemáticas, os respectivos modelos e possíveis representações podem ser estabelecidas.

No programa de Matemática para o ensino básico de Portugal são salientadas tarefas que envolvam contextos puramente matemáticos e não matemáticos, apontando para a modelagem matemática:

> As situações a propor aos alunos, tanto numa fase de exploração de um conceito como na fase de consolidação e aprofundamento, devem envolver contextos não matemáticos diversos, incluindo outras áreas do saber e situações próximas do cotidiano dos alunos. (PORTUGAL, 2007, p.9)

Também nos objetivos gerais para o ensino da matemática o programa mostra indicações favoráveis à modelagem matemática:

> Os alunos devem ser capazes de *estabelecer conexões* entre diferentes conceitos e relações matemáticas e também entre estes e situações não matemáticas. Isto é, devem ser capazes de:
>
> - identificar e usar conexões entre idéias matemáticas;
>
> - compreender como as idéias matemáticas se inter-relacionam e se apóiam umas nas outras constituindo um todo coerente;
>
> - reconhecer e aplicar idéias matemáticas em contextos não matemáticos, construindo modelos matemáticos simples.
>
> Os alunos devem reconhecer a Matemática como um todo integrado, estabelecendo conexões entre aquilo que já aprenderam e aquilo que estão a aprender em cada momento, mas também ser capazes de a usar em contextos não matemáticos. O estabelecimento de conexões é essencial para a compreensão significativa da Matemática e para o desenvolvimento da capacidade de a utilizar e apreciar (PORTUGAL, 2007, p. 6).

3.5.2.5 Os projetos

O termo projeto pode ser utilizado em muitas acepções, desde um plano de organização para nossa vida, ou em termos materiais, como projetos de construção civil. Como tarefa de ensino, conforme a categorização proposta por Ponte (2003), é uma tarefa de investigação com um caráter mais prolongado.

Conforme Ponte (2005), as tarefas de longa duração podem ser mais ricas, permitindo aprendizagens profundas e interessantes. No entanto, apresentam um alto risco de dispersão dos alunos, seja ao entrarem em conflito no grupo de realização, seja num impasse frustrante, ou por perderem tempo com coisas irrelevantes ou mesmo por abandonarem totalmente a tarefa.

O envolvimento num projeto implica em lidar com situações complexas, planejar e escolher estratégias para atingir os objetivos previstos. Esta tarefa apresenta uma estrutura aberta, com um grau de dificuldade considerável na procura da metodologia, uma vez que, definida a idéia central, a concretização do objetivo requer ainda muito trabalho.

No desenvolvimento de um projeto poderão constar outras tarefas, como problemas ou modelagens, suscitando a mobilização de múltiplas representações para a solução. Além disso, os projetos favorecem a interdisciplinaridade, já que demandam de um tempo relativamente longo e, de um modo geral, assentam-se sobre uma temática ampla e contextualizada.

Em relação à presença dos projetos como tarefas nas propostas curriculares, podemos dizer que há indicações, nesse sentido, nos programas analisados, justamente pelo destaque dado ao trabalho contextualizado e interdisciplinar. Embora não haja referências explícitas sobre o desenvolvimento de projetos.

Para além das tarefas apresentadas nesta seção, há que se considerar ainda outras que aparecem no universo da Matemática Escolar, tais como jogos, tarefas que envolvem a construção e/ou utilização de materiais concretos e dobraduras, por exemplo. Mas, de alguma forma, estas atividades podem assumir uma natureza exploratória ou se constituirem em problemas, dependendo do nível de estrutura (abertas ou fechadas), do tempo, do grau de dificuldade e dos aspectos matemáticos que podem evocar.

Certamente, diversificar tarefas de diferentes naturezas no ensino da Matemática Escolar não será a solução que vai resolver de uma vez por todas os problemas da educação matemática. Não obstante, articular tarefas de modelagem, investigação, exploração, projetos, exercícios e problemas, pode contribuir para o desenvolvimento de uma aprendizagem com compreensão e sentido.

Cada tarefa tem suas potencialidades, mas também tem seus limites, exatamente como as múltiplas representações semióticas dos objetos matemáticos, evocam propriedades específicas do conceito e atendem a objetivos particulares.

Por isso, é importante considerar um conjunto de tarefas diferentes, no ensino de um mesmo conceito, como forma de possibilitar seu tratamento por diversos aspectos e potencializar a aprendizagem.

Entretanto, como destaca Ponte (2005), o problema da seleção e articulação das tarefas não se esgota na sua diversificação. Para além disso, é necessário que as tarefas, no seu conjunto, possibilitem um percurso de aprendizagem coerente, que permita aos alunos a construção dos conceitos fundamentais, a compreensão dos procedimentos matemáticos envolvidos nas tarefas, o domínio das notações e múltiplas representações, bem como das conexões internas e externas à Matemática.

3.5.3 Algumas Considerações

As tarefas podem ser consideradas como elementos de fundamental importância para a caracterização dos currículos, pois elas determinam em grande medida, as oportunidades de aprendizagem oferecidas aos alunos. Conforme os NCTM (2000), é cada vez mais consensual aceitar o fato de que a compreensão na aprendizagem da matemática é fundamental para habilitar os alunos a utilizarem o que aprendem na resolução dos problemas que surgirem, seja em suas experiências escolares ou na vida cotidiana. O tipo de experiência proporcionada pelo desenvolvimento da Matemática Escolar tem um papel essencial na extensão e qualidade da aprendizagem dos alunos. As boas conexões, as idéias conceitualmente fundamentadas estarão mais prontamente acessíveis para serem usadas em novas situações.

Nessa direção, Ponte (2005) defende que o modo de construção do conhecimento está intimamente ligado ao papel que o aluno desempenha, e à atividade por ele desencadeada. Assim, ao estabelecer uma estratégia adequada que contemple diversos tipos de tarefas, com momentos de exploração, reflexão, discussão, argumentação e sistematização, acreditamos que se está caminhando para a criação de oportunidades que possam favorecer a aprendizagem dos alunos. Em outros termos, podemos dizer que os alunos vão construindo, ao longo da escolaridade, a compreensão das idéias matemáticas se eles estiverem efetivamente e ativamente envolvidos nas tarefas e experiências proporcionadas

Na confluência dos três referenciais teóricos abordados neste capítulo, podemos dizer que pensar o problema da aprendizagem dos conceitos matemáticos, ao nível do funcionamento cognitivo, requer a sua formulação em termos de condições de compreensão.

Por um lado, estas condições, conforme Duval (1996, 2003), não devem ser apenas ligadas a um conteúdo particular, mas sim à natureza das atividades e modos de proceder exigidos por conta dos diferentes conteúdos ensinados, e, portanto, ligados às diferentes representações semióticas dos objetos matemáticos que ser quer ensinar. Por outro, estão assentadas nas situações diversificadas que fornecem o sentido do conceito estudado pela mobilização de esquemas, quando da ação do sujeito no tratamento dessas situações (VERGNAUD, 1990, 1996).

Isto nos leva a pensar que fornecer situações diversas, ou seja, tarefas de naturezas diferentes, como aplica Ponte (2003, 2005), nas quais o uso dos conceitos possa evocar esquemas comunicáveis por meio das representações semióticas, pode ser um caminho para se entender como se dá a conceitualização em matemática. Com isso, permite-se que o sujeito se aproprie dos significados institucionais dos objetos matemáticos e seja conduzido à aprendizagem com compreensão. Isso porque o uso do conceito em determinada situação tem a capacidade de mobilizar a melhor representação, um sistema de simbolização próprio, revelado por um sistema semiótico que guarda em seu interior as suas significações e propriedades.

Outros são os fatores que intervêm no processo de ensino e aprendizagem da Matemática, além dos aspectos levantados pela utilização de tarefas de natureza diferentes e utilização de múltiplas representações para um dado conceito matemático. No entanto, parece-nos indiscutível que a inclusão, no ensino da Matemática Escolar, de tarefas diferenciadas que contemplem vários RRS potencializa a compreensão em matemática e, consequentemente, a aprendizagem.

CAPÍTULO IV

NÚMEROS NATURAIS E REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS, SITUAÇÕES E TAREFAS: ARTICULAÇÕES EM UM ENSAIO SOBRE O CURRÍCULO

Um galo sozinho não tece uma manhã:
ele precisará sempre de outros galos.
De um que apanhe esse grito que ele
e o lance a outro; de um outro galo
que apanhe o grito de um galo antes
e o lance a outro; e de outros galos
que com muitos outros galos se cruzem
os fios de sol de seus gritos de galo,
para que a manhã, desde uma teia tênue,
se vá tecendo, entre todos os galos.

MELO NETO, João Cabral de. **Poesias completas**.
3. ed. Rio de Janeiro: J. Olympio, 1979. p.19-20.

4.1 INTRODUÇÃO

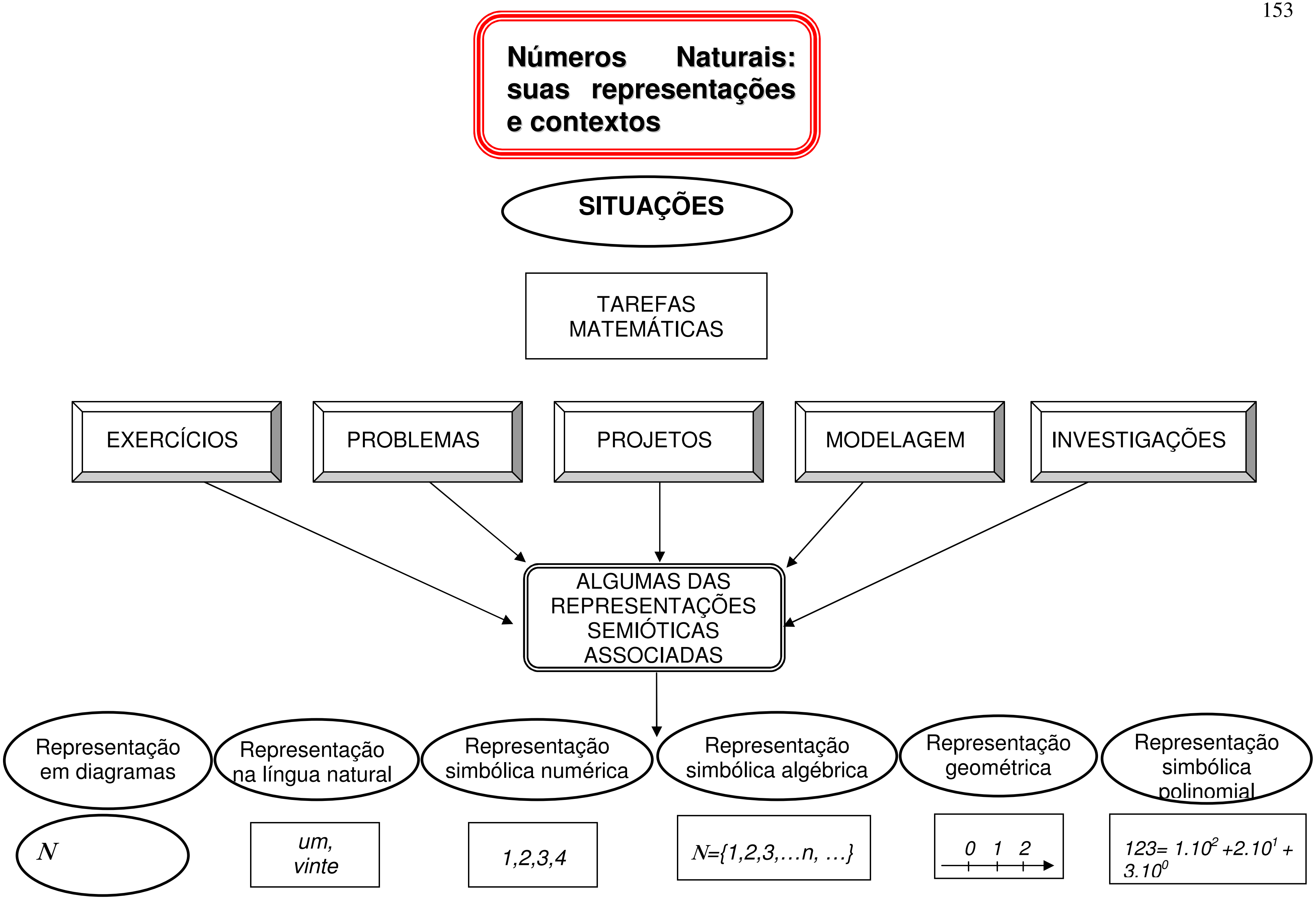
Todo processo de transformação passa necessariamente pelo processo de produção. No poema, *Tecendo a manhã,* este objeto que está sendo construído é a própria manhã que, num primeiro momento, é posse de quem a produz (o galo), mas que, logo em seguida, liberta-se de seu criador, existindo por si mesma. No entanto, tal qual nas construções curriculares, o processo deixa marcas e estas estarão imbricadas no produto, fazendo e sendo parte dele.

O significado do currículo para os alunos e para os professores vai sendo constituído nas atividades realizadas no contexto escolar. Como no poema de Melo Neto, em que se nega a individualidade (“*um galo sozinho não tece uma manhã”*) e afirma-se a coletividade (*“ele precisará sempre de outros galos”*), o currículo será aquilo que a prática permitir que ele seja, lembrando que o ato criador é um constante fazer. Entretanto, esse movimento é iniciado nas orientações expressas nas propostas curriculares e transformado quando da sua utilização para o planejamento didático.

Vimos, no entanto, nos capítulos anteriores, pelo estudo das propostas curriculares brasileiras e pela análise de pesquisas, que orientações no sentido de valorizar as conversões entre registros de representação nas tarefas matemáticas elaboradas e propostas são escassas. Ou seja, de um modo geral, esses currículos não apontam, de forma explícita, a importância de um trabalho pedagógico voltado para as representações semióticas e para situações que possibilitem ao aluno transitar entre os registros.

Assim, este capítulo trata da efetivação das idéias discutidas e refletidas até aqui, por meio da elaboração de um ensaio tendo como tema norteador os Números Naturais. Em outros termos, podemos dizer que buscamos articular e explicitar as representações semióticas dos objetos e a necessidade de propor tarefas de diferentes naturezas – para promover a compreensão do campo conceitual que envolve o estudo dos Números Naturais.

O esquema a seguir apresenta uma síntese do que buscamos articular neste ensaio.


Números Naturais: suas representações e contextos
SITUAÇÕES
TAREFAS MATEMÁTICAS
EXERCÍCIOS
PROBLEMAS
PROJETOS
MODELAGEM
INVESTIGAÇÕES
ALGUMAS DAS REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS ASSOCIADAS
Representação em diagramas
Representação na língua natural
Representação simbólica numérica
Representação simbólica algébrica
Representação geométrica
Representação simbólica polinomial
N
um, vinte
1,2,3,4
N={1,2,3,…n, …}
0 1 2
123= 1.10² +2.10¹ + 3.10⁰

4.2 O LUGAR DOS NÚMEROS NO CURRÍCULO

O estudo dos Números sempre teve um lugar relevante nos currículos da Matemática Escolar, pois, "[...] historicamente, o número tem sido a pedra angular de todo o currículo de matemática internacional" (NCTM, 2000, p. 32).

Na maioria dos países, o tema Números é fundamental no currículo da Matemática Escolar, apresentando um papel decisivo nas aprendizagens nos primeiros anos de escolaridade. A capacidade de trabalhar com números e suas operações é básica e necessária para as opções escolares e profissionais do indivíduo e, principalmente, para o exercício consciente da cidadania democrática.

Para o NCTM (2000), por exemplo, o trabalho com os números em todo o ensino básico é essencial. O documento aponta que toda a matemática desenvolvida desde o jardim de infância (*Pré-K*) até o 12.º ano deverá estar fortemente baseada nos números. Essa orientação é defendida a partir do argumento de que "[...] os princípios que governam a resolução de equações em Álgebra são os mesmos que as propriedades estruturais dos números; em Geometria e Medida, os atributos são descritos com números; e toda a área de análise de dados envolve o sentido do número" (NCTM, 2000, p. 32).

Nos PCN e no Programa Curricular de Portugal, a orientação para o trabalho com os Números aparece também no decorrer de todo o ensino fundamental. Entretanto, a ênfase é dividida com outros temas, como Geometria, Medidas e Tratamento da Informação, de uma forma mais homogênea.

No Brasil, muitas pesquisas que envolvem os Números e suas operações vêm sendo desenvolvidas. Particularmente ao tema norteador desta tese, a questão da representação semiótica dos objetos matemáticos ensinados na escola, os Números e Operações foram foco de 37% das pesquisas em Educação Matemática realizadas no período de 1996 a 2005 (COLOMBO e MORETTI, 2007). Os demais temas matemáticos abordados nas investigações desse mesmo período ficaram distribuídos em Geometria (23%), Funções (17%), Tratamento da Informação (10%), Cálculo Diferencial e Integral (7%) e Equações e Inequações (7%).

Esses resultados mostram uma tendência das pesquisas em concentrar suas investigações em torno do campo numérico, o que, de um modo geral, justifica a escolha da temática pelas dificuldades encontradas pelos alunos neste campo. Além disso, segundo Colombo e Moretti (2007), os resultados indicam uma preocupação em atribuir significado ao objeto matemático em estudo, por meio de suas diferentes representações e, principalmente, buscar meios e estratégias diferenciadas que possam contribuir para a compreensão das dificuldades encontradas pelos alunos na aprendizagem desses conceitos.

Por conta dessa importância, considerarmos alguns aspectos de natureza histórica e epistemológica, que podem contribuir para a compreensão das questões que se colocam relativamente ao papel dos Números como tema da Matemática Escolar no Ensino Fundamental.

De acordo com Dantzig (1970), desde as mais baixas etapas do desenvolvimento do homem, a faculdade de "senso numérico" esteve presente, permitindo-lhe reconhecer que "[...] alguma coisa mudou em uma pequena coleção quando, sem seu conhecimento direto, um objeto foi retirado ou adicionado à coleção" (Idem, 1970, p. 15).

Mas, apesar disso, os matemáticos levaram muitos séculos para compreender os números de uma forma "completa". Considerando, desde a sua origem até o desenvolvimento das teorias que explicam os conceitos numéricos mais elaborados. Conforme Dantzig (1970, p. 18),

> A gênese do número está oculta por trás do impenetrável véu de incontáveis eras pré-históricas. O conceito nasceu da experiência, ou a experiência simplesmente serviu para tornar explícito o que já estava latente na mente primitiva?

Isso significa que precisar como e quando o conceito de número surgiu em sua completude é uma tarefa difícil, se não impossível. No entanto, o que os historiadores concordam é que idéias como agrupar e contar, auxiliaram a percepção numérica do homem facilitando o desenvolvimento do conceito de número. E, então, podemos dizer que o surgimento da contagem, dos sistemas de numeração e, consequentemente, do conjunto dos números naturais, estão relacionados a necessidades práticas de contagem: o homem precisa controlar os seus pertences e esse controle começa quando ele conta o que possui. Iniciam então os processos de correspondência biunívoca, a prática de entalhes e marcas, a utilização de partes do corpo para contagens por agrupamentos e o registro dessas contagens.

De acordo com Boyer (1974), o sistema de numeração romano era utilizado ainda na alta Idade Média, na Europa, sendo necessários mais de 400 anos até que os europeus reconhecessem as suas limitações e aceitassem as vantagens do sistema de numeração decimal posicional indo-arábico. No entanto, apesar da superioridade da numeração posicional, a compacidade de sua notação, a facilidade e elegância que introduziu nos cálculos, a sua aceitação, longe de ser imediata, perdurou por muitos séculos: “[...] a luta entre *os abacistas,* que defendiam as velhas tradições, e os *algoristas,* que defendiam a reforma, durou do século XI ao XV, atravessando as etapas usuais de obscurantismo e reação” (DANTZIG, 1970, p. 41).

Esse processo de idas e vindas, de descobertas e desconfianças ocorreu em todo o desenvolvimento posterior dos conjuntos numéricos racionais, inteiros, irracionais, reais e complexos, como uma ampliação do que poderíamos chamar de campo conceitual do número, a exemplo do que afirma Nacarato (1995).

Sobre os números racionais, dentre os muitos processos desenvolvidos até a sua plena utilização tal qual a conhecemos atualmente, podemos tomar como exemplo a utilização da vírgula, que separa as partes inteiras e fracionárias do número. Essa representação das frações decimais foi criada, segundo Ifrah (2001), somente no século XVII, apesar de algumas proposições nesse sentido terem sido criadas muito antes disso.

Dantzig (1970) apresenta um quadro que sintetiza esse período, mostrando a época de utilização e a notação criada:

QUADRO 4.1 – EVOLUÇÃO DA UTILIZAÇÃO DA VÍRGULA COMO SEPARADOR DECIMAL

AUTOR	ÉPOCA	NOTAÇÃO
Antes de Simon Stevin		$24\frac{375}{1000}$
Simon Stevin	1585	$24\ 3^{(1)}7^{(2)}5^{(3)}$
Franciscus Vieta	1600	$24\vert_{375}$
John Kepler	1616	$24(375$
John Napier	1617	$24:3\ \overset{\vert\vert}{7}\ \overset{\vert\vert\vert}{5}$
Henry Briggs	1624	24^{375}
William Oughtred	1631	$24\vert\underline{375}$
Balam	1653	$24:375$
Ozanam	1691	$24.\overset{(1)}{3}\ \overset{(2)}{7}\ \overset{(3)}{5}$
Moderna		$24{,}375$

FONTE: DANTZIG, T. **Número:** a linguagem da ciência. Rio de Janeiro: Zahar editores, 1970. p. 223.

Muitos matemáticos do século XVI e XVII, dentre estes Descartes, consideravam os números inteiros negativos, que apareciam nos cálculos, como falsos ou impossíveis.

Os gregos, por exemplo, eram excelentes com a Geometria. No entanto, não conseguiram estruturar uma maneira adequada para tratar os números irracionais e, desta forma, não resolveram satisfatoriamente o problema da determinação do comprimento da diagonal do quadrado de lado 1. A descoberta da irracionalidade de $\sqrt{2}$ provocou até mesmo consternações nos meios pitagóricos, chegando a se fazer esforços no sentido de manter esse "escândalo lógico" em segredo (EVES, 2007).

Ainda segundo Eves (2007) em relação aos números complexos, em pleno século XVI, o matemático Cardano procurava descrever artifícios de cálculo que evitassem o uso de raízes quadradas de números negativos. A própria designação de "números imaginários", que ainda hoje perdura, é reveladora dos problemas com que se debateram os matemáticos até a aceitação destes objetos como verdadeiros.

Ponte (2007), afirma que muitas vezes presumimos que os conceitos numéricos constituem um assunto fácil, quando, na verdade, se trata de construções intelectuais extremamente complexas e engenhosas. É natural, pois, supor que toda essa trajetória histórica tenha produzido objetos para a Matemática Escolar, uma vez que o universo numérico é parte constituinte da vida do homem, por exemplo, as operações de medir e contar, realizadas com freqüência no cotidiano das pessoas, foram geradoras de dois importantes conjuntos numéricos: os números naturais e os racionais.

Os números naturais permitem a realização de atividades elementares da vida individual e social através da operação de contagem. Entretanto, com o surgimento de novos problemas, como o de determinar comprimentos, áreas, volume e tempo, ou seja, medir grandezas de natureza contínua, os naturais não são mais suficientes. Tal situação demanda a introdução de um novo conjunto de números, que permita exprimir sempre uma determinada medida (a comparação de um segmento arbitrário com outro fixado como unidade) por um número – princípio da extensão. Esse novo conjunto numérico é o dos números racionais (absolutos).

Já para descrever o conjunto de grandezas do mundo físico e social, que podem variar em sentidos opostos e que indicam, por exemplo, deslocamento entre dois pontos, orientação (origem), falta e diferença, são necessários os números (inteiros ou racionais) relativos.

Por necessidades teóricas internas à própria Matemática, para se obter coerência e se conseguir resolver alguns problemas (como o problema da razão entre o perímetro e o raio da circunferência ou encontrar a solução geral da equação de 3.º grau), chega-se, mais tarde, à conclusão de que os números naturais, racionais e relativos, necessitam de ser complementados com novas classes de números, os números reais e os complexos (CARAÇA, 1998; PONTE, 2007).

Temos, então, o universo numérico completo, que deve fazer parte do repertório de habilidades de um indivíduo para que ele possa viver em sociedade, exercendo sua cidadania, e avançar para estudos mais complexos, caso assim o desejar.

Conforme Ponte (2007), o universo numérico representado pelos modelos intuitivos utilizados, as representações escolhidas e os outros aspectos do conceito de número a que se dá destaque são pontos fortes que estão presentes em qualquer abordagem curricular da Matemática Escolar. Alguns aspectos se apresentam com maior visibilidade e importância do que outros, mas sempre estão e estiveram presentes: “Um currículo consistente e coerente tem de dar atenção a todos eles e definir uma linha de rumo que seja produtiva para o trabalho dos professores e a aprendizagem dos alunos” (PONTE, 2007, p.4).

Os currículos tendem a centrar os objetivos na área dos números para obterem a compreensão do sentido de número. Nessa perspectiva, o Currículo Nacional de Portugal apresenta 6 objetivos amplos de aprendizagem na área dos Números, que incluem os aspectos essenciais da compreensão destes e das operações e suas formas de representação, fluência de cálculo, compreensão das ordens de grandeza e as capacidades de estimação, exploração, investigação e resolução de problemas (PONTE, 2007).

No Brasil, os PCN do Ensino Fundamental centram os objetivos de aprendizagem para a área dos Números em dois aspectos principais: 1) compreender e ampliar o sentido numérico; 2) compreensão do significado e uso das operações (BRASIL, 1998). Ou seja, eles pretendem que o aluno possa estabelecer e reconhecer relações entre os diferentes tipos de números e entre as diferentes operações, conseguindo utilizar esse conhecimento para resolver situações-problema.

Já os *Principles and Standards* (NCTM, 2000) dos EUA, apresentam os objetivos de aprendizagem para os números em três pontos fundamentais: 1) compreender números, formas de representar números, relações entre números e sistemas numéricos; 2) compreender significados de operações e como elas se relacionam umas com as outras; 3) calcular fluentemente e fazer estimativas razoáveis.

O que podemos inferir sobre os objetivos colocados por esses três países, para a aprendizagem dos Números, é que eles sintetizam o que os alunos do Ensino Fundamental devem aprender como conteúdos essenciais deste campo da Matemática. Portanto, compreender os números, operações e sistemas numéricos; utilizar as diferentes representações semióticas para os números; perceber as idéias e os significados que eles podem assumir; entender o modo de utilizar os conceitos numéricos e desenvolver a capacidade de cálculo, usando os modos e instrumentos mais adequados a cada situação; parecem ser os objetivos fundamentais para a aprendizagem dos alunos na área dos Números e Operações.

4.3 PROPOSIÇÃO CURRICULAR: UM ENSAIO COM OS NÚMEROS NATURAIS

A orientação dos currículos de Matemática do Brasil, notadamente pelas orientações dos PCN, indica que a escola deve proporcionar aos alunos um trabalho com diversos universos numéricos no decorrer de sua escolaridade[32].

A construção do conceito de número, com os números naturais e as noções que envolvem as principais operações, surgem já na educação infantil e tem continuidade por todo o Ensino Fundamental, constituindo a base para o trabalho com os números que será desenvolvido até o ensino universitário. Os números racionais absolutos, por sua vez, começam a ser abordados nos primeiros anos do

[32] A análise que se segue tem por base os documentos curriculares presentemente em vigor no Brasil para os diversos níveis de ensino (PCN do Ensino Fundamental e Médio, Diretrizes para a Educação Básica e Currículos do Estado do Paraná e Santa Catarina).

Ensino Fundamental, com as noções de metade, terça parte, contagens de meios, quartos, ampliando gradativamente para a representação decimal e exploração de situações-problema que indicam relação parte/todo, quociente, razão ou operador. A localização na reta numérica dos números racionais absolutos e o estudo, com toda a generalidade e as respectivas operações aritméticas, é feito, geralmente, apenas nos últimos anos do Ensino Fundamental (do 6.º ao 9.º ano). O reconhecimento dos inteiros relativos nos diferentes contextos históricos e cotidianos e as respectivas operações começam a ser estudados, de um modo geral, no 6.º ou 7.º ano, estendendo-se gradativamente ao estudo dos racionais relativos. Os números irracionais e ampliação para os reais surgem no 8.º ano, geralmente como uma constatação de que existem problemas, especialmente aqueles relacionados à Geometria e Medidas, cuja solução não pode ser dada por números racionais (caso do $\sqrt{2};\sqrt{3};\pi$). E, por fim, os números complexos são estudados no Ensino Médio.

O NCTM (2000) preconiza alguns pontos fundamentais para a aprendizagem dos números, sintetizados no Quadro 4.2. Esses pontos representam as principais preocupações encontradas nos currículos de Portugal e do Brasil e serviram de base para a organização da proposta curricular apresentada nesta tese, uma vez que os objetivos para o ensino dos Números desses países e o apresentado pelos EUA em torno dessas 3 idéias-chave: compreensão dos números e suas operações, desenvolvimento do sentido dos números e capacidade de calcular.

QUADRO 4.2 - PONTOS FUNDAMENTAIS DESTACADOS PELOS *PRINCIPLES AND STANDARDS* PARA A APRENDIZAGEM DOS NÚMEROS

Compreender os números	**Desenvolver o sentido do número**	**Desenvolver a fluência computacional**
O que são	Decomposição de números naturalmente	Conhecer as tabuadas (adição, subtração, multiplicação e divisão)
Quais são as suas características, como por exemplo, que os números podem ser ímpares, pares, compostos, primos, quadrados...	Utilizar números particulares como referência, como 100 ou ½	Usar métodos eficientes e rigorosos para calcular (eventualmente, combinações de estratégias mentais e de papel e lápis)
Representação dos números com objetos, símbolos, retas numéricas dentre outras formas	Utilizar as relações entre as operações aritméticas para resolver problemas	saber fazer escolhas sobre quais instrumentos utilizar e quando utilizar para realizar cálculos
Relações entre os números	Compreensão do sistema decimal posicional	Ser capaz de explicar os seus métodos, compreender que existe sempre uma diversidade de métodos

Como fazem parte de sistemas que têm estruturas e propriedades	Estimação	Ser capaz de estimar e de julgar a razoabilidade dos resultados
Maneiras de utilização dos números e operações para resolver problemas	Compreender os números *(Make sense of numbers)*	
	Reconhecer números relativos e absolutos	

FONTE: NCTM, 2000, p.32-35.

De um modo geral, na escola, o trabalho com o universo numérico inicia com as atividades para a compreensão do conceito de número. Para essa aquisição, Nacarato (1995) coloca que é necessário não somente o trabalho com os conceitos lógicos de conservação, classificação, inclusão e seriação, mas também procedimentos de contagem. A contagem é reveladora dos aspectos cardinais e ordinais do número e, portanto, fornece um modelo intuitivo para a compreensão dos números naturais, tornando-se a base da estrutura do conhecimento numérico (FUSON e KWON, 1991; NACARATO, 1995; PONTE, 2007).

Ponte (2007) refere-se a 9 aspectos que envolvem o conceito de número e que devem ser considerados no desenvolvimento curricular da Matemática Escolar: modelos e interpretações dos conceitos numéricos; formas de representação dos números; operações; cálculo, algoritmos; estimação; propriedades das operações com números; estrutura interna dos diversos universos numéricos; relações entre diversos universos e estruturas numéricas. Acrescentamos a estes aspectos aqueles relacionados aos significados que o número pode assumir, ou seja, o número pode ser entendido como medida, resultado de uma operação, como um código, como ordenação e ainda localização espacial.

Em todos esses aspectos, importa considerar as diferentes representações do número: com palavras (linguagem natural); com diagramas (figural); com os algarismos indo-arábicos (simbólico numérico); com a linguagem simbólica algébrica; em notação científica; na forma polinomial, para citar as representações mais utilizadas.

Além disso, com os números se fazem as diversas operações (adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação). Algumas delas apresentam propriedades importantes (por exemplo, elemento neutro, comutativa, associativa, existência de inverso para cada número). Os números e essas operações formam conjuntos dotados de uma certa estrutura algébrica, na qual se pode estabelecer relações (como a relação de ordem) e estudar propriedades (como a densidade). E assim, nos conjuntos numéricos usuais é possível encontrar exemplos de grupóides, semi-grupos, grupos, anéis, corpos (PONTE, 2007).

A compreensão dos números naturais, das ordens de grandeza e do significado das operações constitui a base do que se designa muitas vezes por "sentido do número". Essa compreensão se dá conceitualmente, após o aluno ter contato com o campo conceitual dos números, que compreende os conceitos lógicos, as contagens, a organização do conjunto numérico dos naturais, e que só vai se completar depois das ampliações para os demais conjuntos numéricos (NACARATO, 1995; DROZ, 1991).

Sendo assim, estruturamos nossa proposta em 3 aspectos que irão originar cada um, uma rede conceitual de representações: conceitos lógicos e contagens; contagens com agrupamentos; sistemas de numeração e operações. Essas redes menores, juntas, formam a proposição de uma rede curricular para o Campo Conceitual dos Números.

4.3.1 Um Currículo em Rede Combinando Diferentes Tipos de Tarefas e Explicitando as Representações Semióticas

Como já foi dito em capítulos anteriores, buscamos articular os estudos teóricos desenvolvidos sobre representação semiótica em uma proposição curricular, utilizando algumas noções complementares como a de situações, da Teoria dos Campos Conceituais e a de tarefas de diferentes natureza. Optamos, para este ensaio, desenvolver a proposta curricular sobre os Números Naturais, por entender que todo o desenvolvimento posterior dos objetos numéricos da Matemática Escolar está sustentado sob as bases da construção do conceito de número e da compreensão de número natural. Desta forma, acreditamos que a partir deste ensaio possam se desenvolver outros, como extensões aos demais campos numéricos e também aos outros temas da Matemática Escolar.

Defendemos que o indivíduo deva ser confrontado com uma diversidade de situações para construir uma rede de conceitos que lhe permita ancorar os fatos novos que surgirão e utilizar o que já conhece no seu cotidiano escolar e social. Essa diversidade deve ser propiciada principalmente no ambiente escolar e explicitada nos currículos e livros didáticos utilizados pelo professor na escola, pois apostamos no papel fundamental do ensino para a formação e ampliação dos conceitos. Essa idéia se aproxima muito da teoria de Vergnaud sobre campos conceituais, como já vimos, e traduz, em parte, o nosso pensamento. Em parte porque, ao lado da diversidade de situações, acrescentamos a diversidade de representações semióticas dos objetos matemáticos, e as necessárias conversões entre registros, como fundamentais para a aprendizagem.

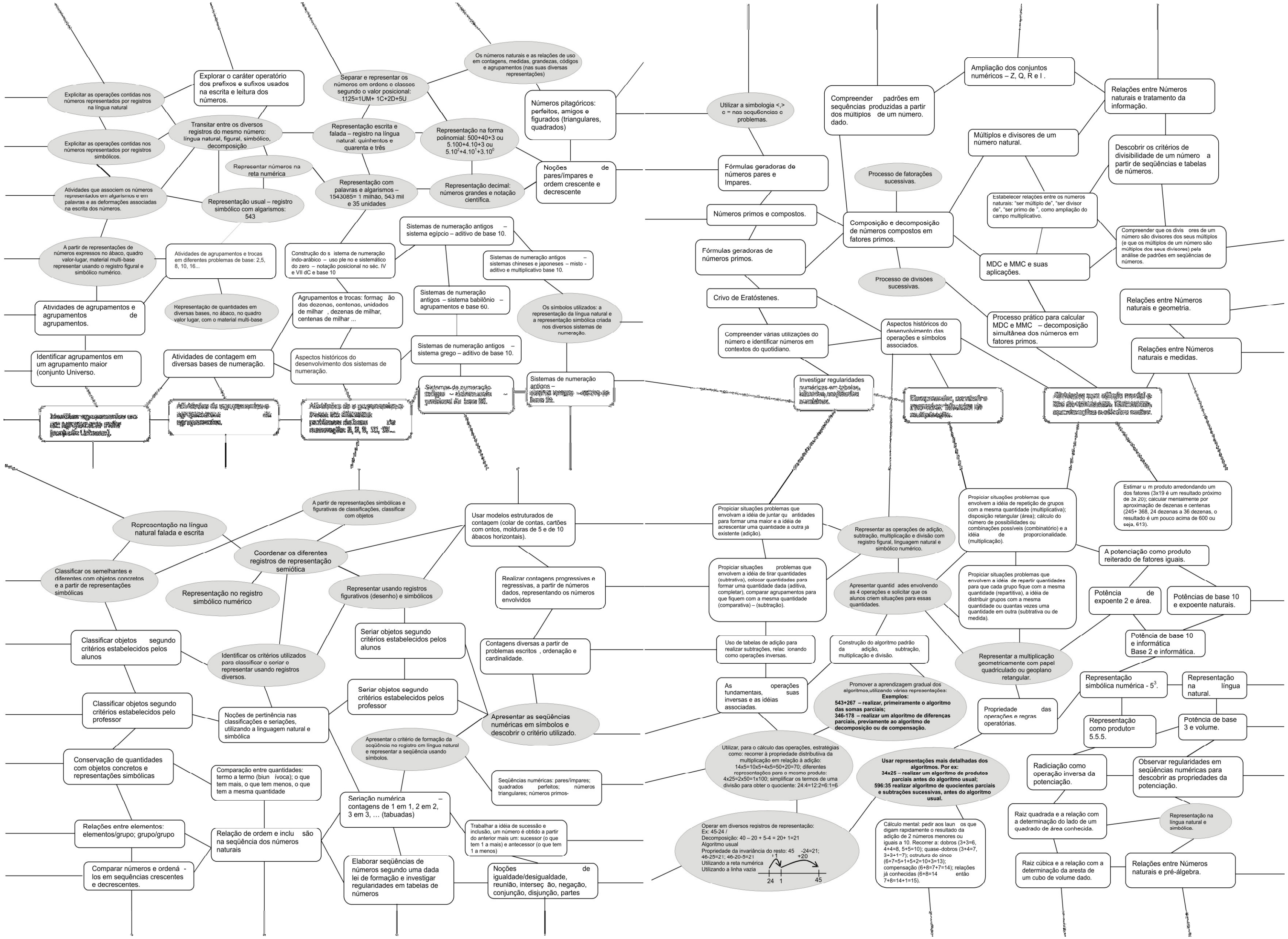
Assim, acreditamos no fato de que os objetos matemáticos, neste caso especificamente o conceito de Número, se formam a partir de campos conceituais, em que todos os conceitos envolvidos se desenvolvem simultaneamente, nos quais importa considerar a natureza e a multiplicidade de situações (tarefas escolares) e a coordenação entre as diversas representações semióticas.

Como dissemos no Capítulo 2, entendemos o currículo como uma proposição para ser refletida e reelaborada por aqueles que a colocarão em prática, ou seja, defendemos uma perspectiva de ação e reflexão para organizar as práticas educativas. É por isso que chamamos nossa proposta de ensaio, por entender que, a partir dela, reflexões e discussões podem e devem ser geradas. É também por isso que escolhemos a rede como configuração para o currículo, pois ela se mostra como uma extensão de conexões que pode ter inumeráveis inícios e caminhos, mas que todos levam a uma única saída: a aprendizagem. A escolha de qual início e qual caminho seguir, é uma decisão que cabe a quem fará uso da proposição.

Nesse sentido, a rede permite a flexibilidade do currículo, na medida em que o caminho a seguir é uma escolha individual (do professor) ou coletiva (decisão pedagógica do grupo escolar). Permite, além disso, a interdisciplinaridade através da possibilidade de acrescentar nós e caminhos, ampliando-a. Ao mesmo tempo, a configuração em rede exige uma tomada de decisão, uma reflexão, pois o caminho não é dado, ele é construído durante o processo de ensino e de aprendizagem.

Sabemos que na matemática estão presentes em todos os momentos, como condição essencial, representações simbólicas – os registros de representação semiótica – que permitem a substituição de uma forma de representação à outra. Todavia, o que observamos é que nem sempre estas representações múltiplas são consideradas de forma explícita na prática escolar, a começar pelos livros didáticos, propostas curriculares e a terminar na formação dos professores que ensinam Matemática. Essa foi uma das motivações que nos levou a pensar sobre uma proposição curricular que considere explicitamente a importância das múltiplas representações semióticas dos objetos e a possibilidade de coordenação entre eles.

A seguir apresentamos um exemplo de rede para o Campo Conceitual dos Números, especificamente para a construção do conceito de número até a formação do conjunto dos Números Naturais. Tal proposição, como já foi dito, pretende explicitar a utilização das conversões entre registros nas tarefas de diferentes naturezas. Utilizamos elipses e redes para representar os nós da rede, sendo que as elipses explicitam o trabalho com as representações semióticas.


Explicitar as operações contidas nos números representados por registros na língua natural
Explicitar as operações contidas nos números representados por registros simbólicos.
Atividades que associem os números representados em algarismos e em palavras e as deformações associadas na escrita dos números.
A partir de representações de números expressos no ábaco, quadro valor-lugar, material multi-base representar usando o registro figural e simbólico numérico.
Atividades de agrupamentos e agrupamentos de agrupamentos.
Identificar agrupamentos em um agrupamento maior (conjunto Universo).
Explorar o caráter operatório dos prefixos e sufixos usados na escrita e leitura dos números.
Transitar entre os diversos registros do mesmo número: língua natural, figural, simbólico, decomposição
Representar números na reta numérica
Representação usual – registro simbólico com algarismos: 543
Atividades de agrupamentos e trocas em diferentes problemas de base: 2,5, 8, 10, 16...
Representação de quantidades em diversas bases, no ábaco, no quadro valor lugar, com o material multi-base
Atividades de contagem em diversas bases de numeração.
Separar e representar os números em ordens e classes segundo o valor posicional: 1125=1UM+ 1C+2D+5U
Representação escrita e falada – registro na língua natural: quinhentos e quarenta e três
Representação com palavras e algarismos – 1543085= 1 milhão, 543 mil e 35 unidades
Construção do sistema de numeração indo-arábico – uso pleno e sistemático do zero – notação posicional no séc. IV e VII dC e base 10
Agrupamentos e trocas: formação das dezenas, centenas, unidades de milhar, dezenas de milhar, centenas de milhar ...
Aspectos históricos do desenvolvimento dos sistemas de numeração.
Os números naturais e as relações de uso em contagens, medidas, grandezas, códigos e agrupamentos (nas suas diversas representações)
Representação na forma polinomial: 500+40+3 ou 5.100+4.10+3 ou 5.10²+4.10¹+3.10⁰
Representação decimal: números grandes e notação científica.
Números pitagóricos: perfeitos, amigos e figurados (triangulares, quadrados)
Noções de pares/ímpares e ordem crescente e decrescente
Sistemas de numeração antigos – sistema egípcio – aditivo de base 10.
Sistemas de numeração antigos – sistemas chineses e japoneses – misto - aditivo e multiplicativo base 10.
Sistemas de numeração antigos – sistema babilônio – agrupamentos e base 60.
Os símbolos utilizados: a representação da língua natural e a representação simbólica criada nos diversos sistemas de numeração.
Sistemas de numeração antigos – sistema grego – aditivo de base 10.
Sistemas de numeração antigos –
Utilizar a simbologia <,> e = nas seqüências e problemas.
Fórmulas geradoras de números pares e ímpares.
Números primos e compostos.
Fórmulas geradoras de números primos.
Crivo de Eratóstenes.
Compreender várias utilizações do número e identificar números em contextos do quotidiano.
Investigar regularidades numéricas em tabelas,
Compreender padrões em seqüências produzidas a partir dos múltiplos de um número. dado.
Processo de fatorações sucessivas.
Composição e decomposição de números compostos em fatores primos.
Processo de divisões sucessivas.
Aspectos históricos do desenvolvimento das operações e símbolos associados.
Ampliação dos conjuntos numéricos – Z, Q, R e I .
Múltiplos e divisores de um número natural.
Estabelecer relações entre os números naturais: "ser múltiplo de", "ser divisor de", "ser primo de ", como ampliação do campo multiplicativo.
MDC e MMC e suas aplicações.
Processo prático para calcular MDC e MMC – decomposição simultânea dos números em fatores primos.
Relações entre Números naturais e tratamento da informação.
Descobrir os critérios de divisibilidade de um número a partir de seqüências e tabelas de números.
Compreender que os divisores de um número são divisores dos seus múltiplos (e que os múltiplos de um número são múltiplos dos seus divisores) pela análise de padrões em seqüências de números.
Relações entre Números naturais e geometria.
Relações entre Números naturais e medidas.
Estimar um produto arredondando um dos fatores (3x19 é um resultado próximo de 3x 20); calcular mentalmente por aproximação de dezenas e centenas (245+ 368, 24 dezenas a 36 dezenas, o resultado é um pouco acima de 600 ou seja, 613).
Representação na língua natural falada e escrita
A partir de representações simbólicas e figurativas de classificações, classificar com objetos
Classificar os semelhantes e diferentes com objetos concretos e a partir de representações simbólicas
Coordenar os diferentes registros de representação semiótica
Representação no registro simbólico numérico
Representar usando registros figurativos (desenho) e simbólicos
Usar modelos estruturados de contagem (colar de contas, cartões com ontos, molduras de 5 e de 10 ábacos horizontais).
Realizar contagens progressivas e regressivas, a partir de números dados, representando os números envolvidos
Contagens diversas a partir de problemas escritos , ordenação e cardinalidade.
Classificar objetos segundo critérios estabelecidos pelos alunos
Identificar os critérios utilizados para classificar o seriar o representar usando registros diversos.
Seriar objetos segundo critérios estabelecidos pelos alunos
Seriar objetos segundo critérios estabelecidos pelo professor
Classificar objetos segundo critérios estabelecidos pelo professor
Noções de pertinência nas classificações e seriações, utilizando a linguagem natural e simbólica
Apresentar as seqüências numéricas em símbolos e descobrir o critério utilizado.
Apresentar o critério de formação da seqüência no registro em língua natural e representar a seqüência usando símbolos.
Conservação de quantidades com objetos concretos e representações simbólicas
Comparação entre quantidades: termo a termo (biunívoca); o que tem mais, o que tem menos, o que tem a mesma quantidade
Seqüências numéricas: pares/ímpares; quadrados perfeitos; números triangulares; números primos-
Seriação numérica – contagens de 1 em 1, 2 em 2, 3 em 3, … (tabuadas)
Trabalhar a idéia de sucessão e inclusão, um número é obtido a partir do anterior mais um: sucessor (o que tem 1 a mais) e antecessor (o que tem 1 a menos)
Relações entre elementos: elementos/grupo; grupo/grupo
Relação de ordem e inclusão na seqüência dos números naturais
Comparar números e ordená-los em sequências crescentes e decrescentes.
Elaborar seqüências de números segundo uma dada lei de formação e investigar regularidades em tabelas de números
Noções de igualdade/desigualdade, reunião, interseção, negação, conjunção, disjunção, partes
Propiciar situações problemas que envolvam a idéia de juntar quantidades para formar uma maior e a idéia de acrescentar uma quantidade a outra já existente (adição).
Representar as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão com registro figural, linguagem natural e simbólico numérico.
Propiciar situações problemas que envolvam a idéia de tirar quantidades (subtrativa), colocar quantidades para formar uma quantidade dada (aditiva, completar), comparar agrupamentos para que fiquem com a mesma quantidade (comparativa) – (subtração).
Apresentar quantidades envolvendo as 4 operações e solicitar que os alunos criem situações para essas quantidades.
Propiciar situações problemas que envolvem a idéia de repetição de grupos com a mesma quantidade (multiplicativa); disposição retangular (área); cálculo do número de possibilidades ou combinações possíveis (combinatório) e a idéia de proporcionalidade. (multiplicação).
Propiciar situações problemas que envolvem a idéia de repartir quantidades para que cada grupo fique com a mesma quantidade (repartitiva), a idéia de distribuir grupos com a mesma quantidade ou quantas vezes uma quantidade em outra (subtrativa ou de medida).
A potenciação como produto reiterado de fatores iguais.
Potência de expoente 2 e área.
Potências de base 10 e expoente naturais.
Potência de base 10 e informática Base 2 e informática.
Uso de tabelas de adição para realizar subtrações, relacionando como operações inversas.
Construção do algoritmo padrão da adição, subtração, multiplicação e divisão.
Representar a multiplicação geometricamente com papel quadriculado ou geoplano retangular.
As operações fundamentais, suas inversas e as idéias associadas.
Promover a aprendizagem gradual dos algoritmos,utilizando várias representações: Exemplos:
543+267 – realizar, primeiramente o algoritmo das somas parciais;
346-178 – realizar um algoritmo de diferenças parciais, previamente ao algoritmo de decomposição ou de compensação.
Propriedade das operações e regras operatórias.
Representação simbólica numérica - 5³.
Representação na língua natural.
Representação como produto= 5.5.5.
Potência de base 3 e volume.
Utilizar, para o cálculo das operações, estratégias como: recorrer à propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição: 14x5=10x5+4x5=50+20=70; diferentes representações para o mesmo produto: 4x25=2x50=1x100; simplificar os termos de uma divisão para obter o quociente: 24:4=12:2=6:1=6
Usar representações mais detalhadas dos algoritmos. Por ex:
34x25 – realizar um algoritmo de produtos parciais antes do algoritmo usual;
596:35 realizar algoritmo de quocientes parciais e subtrações sucessivas, antes do algoritmo usual.
Radiciação como operação inversa da potenciação.
Observar regularidades em seqüências numéricas para descobrir as propriedades da potenciação.
Operar em diversos registros de representação: Ex: 45-24 / Decomposição: 40 – 20 + 5-4 = 20+ 1=21 Algoritmo usual Propriedade da invariância do resto: 45 -24=21; 46-25=21; 46-20-5=21 Utilizando a reta numérica Utilizando a linha vazia
24 1 45
+1 +20
Cálculo mental: pedir aos alunos que digam rapidamente o resultado da adição de 2 números menores ou iguais a 10. Recorrer a: dobros (3+3=6, 4+4=8, 5+5=10); quase-dobros (3+4=7, 3+3+1=7); estrutura do cinco (6+7=5+1+5+2=10+3=13); compensação (6+8=7+7=14); relações já conhecidas (6+8=14 então 7+8=14+1=15).
Raiz quadrada e a relação com a determinação do lado de um quadrado de área conhecida.
Representação na língua natural e simbólica.
Raiz cúbica e a relação com a determinação da aresta de um cubo de volume dado.
Relações entre Números naturais e pré-álgebra.

Passaremos agora, a tratar mais especificamente cada uma das redes menores que compõem a proposição curricular.

4.3.2 A Rede dos Conceitos Lógicos e Contagens

Todo o processo de compreensão do número não é nem um pouco simples e rápido, pois exige compreender o que é de fato um número como objeto da Matemática Escolar. Questão essa que, a exemplo do exposto no capítulo anterior sobre o objeto matemático, leva apenas a uma conclusão parcial: que os números não existem, não são entidades concretas, somente os signos que os representam é que são (DROZ, 1991). Da mesma forma que as idéias sobre a origem do número são confusas, a questão sobre a natureza dos números naturais também são.

Muitas perspectivas teóricas a respeito da natureza do número natural foram desenvolvidas. De acordo com Droz (1991), um número não será definido sempre como um cardinal, um ordinal e uma relação de grandeza. No entanto, nós podemos nos servir dessas perspectivas sobre os números para entender e atuar sobre a realidade de uma forma independente e, deste modo, torna-se possível compreendermos "[...] um dos aspectos da idéia de número: o número é múltiplo" (DROZ, 1991, p. 291).

Partindo dessa afirmação, Droz (1991) apresenta um esquema que mostra a multiplicidade de perspectivas teóricas sobre a natureza do número, relacionada às atividades cognitivas lógico-matemáticas por elas evocadas:

QUADRO 4.3 - PERSPECTIVAS TEÓRICAS SOBRE A NATUREZA DO NÚMERO E AS ATIVIDADES COGNITIVAS ENVOLVIDAS

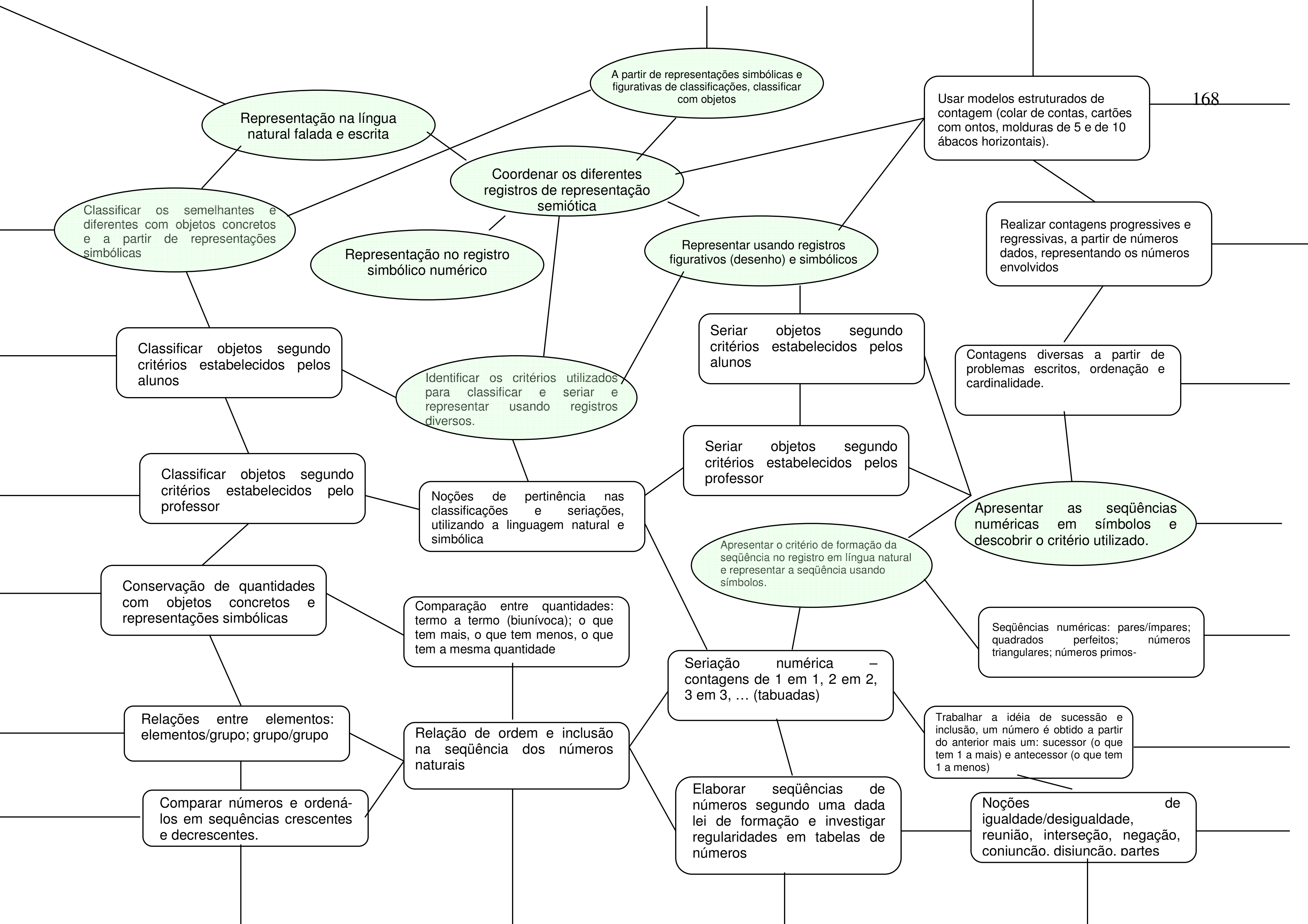
Atividade do sujeito	**O número é**	**Perspectiva teórica**
Classificar	Cardinal	Cantor, Frege, Russel
Comparar, seriar	Ordinal	Peano, V. Neumann, Weyl
Marcar e compor	Algébrico	Hilbert
Marcar e calcular	Construtivo	Lorenzen
Transformar	Operador/analogia	Euclide, Euler, Herbart
Contar	Produto de contagem	E. Cassirer

Fonte: DROZ, R. Les multiples racines des nombres naturels et leurs multiples interprétations. In: BIDEAU, J. MELJAC, C.; FISCHER, J.P. **Les chemins du nombre.** França: Presses Universitaires de Lille, 1991, p. 292.

Essas atividades cognitivas geradas nas diferentes perspectivas teóricas que surgiram sobre o número, podem ser relacionadas com os conceitos "lógico-matemáticos" de Piaget, considerados em seu programa de pesquisa como pré-noções para a construção do conceito de número. Entretanto, independentemente desses conceitos (classificação, conservação, inclusão e seriação) serem anteriores ou não às habilidades quantitativas, o que parece ser fato resolvido nas teorias que perspectivam sobre a construção do conceito do número, é que são necessários tanto os conceitos lógicos como também os procedimentos de contagem (aspecto ordinal e cardinal do número). Essa idéia é corroborada por Fuson (1991); Fuson e Kwon (1991); Droz (1991); Piaget e Szeminska (1981)[33] e Bergerson & Hercovics (1990)[34] citados em Nacarato (1995).

Partindo dessas considerações, elaboramos a rede dos conceitos lógicos e contagens a seguir:

[33] PIAGET, J.; SZEMINSKA, A. **A gênese do número na criança.** Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1981.
[34]BERGERSON, J.C.; HERCOVICS, N. **Psychological aspects on learning early arithmetic**. Mathematics and Cognition – ICMI. Study Series Edited by Pearla Nesher e Jeremy Kilpatrick, 1990.


Representação na língua natural falada e escrita
A partir de representações simbólicas e figurativas de classificações, classificar com objetos
Usar modelos estruturados de contagem (colar de contas, cartões com ontos, molduras de 5 e de 10 ábacos horizontais).
Coordenar os diferentes registros de representação semiótica
Classificar os semelhantes e diferentes com objetos concretos e a partir de representações simbólicas
Representação no registro simbólico numérico
Representar usando registros figurativos (desenho) e simbólicos
Realizar contagens progressivas e regressivas, a partir de números dados, representando os números envolvidos
Seriar objetos segundo critérios estabelecidos pelos alunos
Classificar objetos segundo critérios estabelecidos pelos alunos
Identificar os critérios utilizados para classificar e seriar e representar usando registros diversos.
Contagens diversas a partir de problemas escritos, ordenação e cardinalidade.
Seriar objetos segundo critérios estabelecidos pelos professor
Classificar objetos segundo critérios estabelecidos pelo professor
Noções de pertinência nas classificações e seriações, utilizando a linguagem natural e simbólica
Apresentar as seqüências numéricas em símbolos e descobrir o critério utilizado.
Apresentar o critério de formação da seqüência no registro em língua natural e representar a seqüência usando símbolos.
Conservação de quantidades com objetos concretos e representações simbólicas
Comparação entre quantidades: termo a termo (biunívoca); o que tem mais, o que tem menos, o que tem a mesma quantidade
Seqüências numéricas: pares/ímpares; quadrados perfeitos; números triangulares; números primos-
Seriação numérica – contagens de 1 em 1, 2 em 2, 3 em 3, … (tabuadas)
Relações entre elementos: elementos/grupo; grupo/grupo
Relação de ordem e inclusão na seqüência dos números naturais
Trabalhar a idéia de sucessão e inclusão, um número é obtido a partir do anterior mais um: sucessor (o que tem 1 a mais) e antecessor (o que tem 1 a menos)
Comparar números e ordená-los em sequências crescentes e decrescentes.
Elaborar seqüências de números segundo uma dada lei de formação e investigar regularidades em tabelas de números
Noções de igualdade/desigualdade, reunião, interseção, negação, conjunção, disjunção, partes

As tarefas de classificação (agrupar por semelhança e separar por diferença) são fundamentais para o desenvolvimento conceitual em qualquer área do conhecimento. Na matemática, favorecem o estabelecimento das relações lógicas e, especificamente para os números, possibilitam a construção da inclusão hierárquica de número: o quatro contém o três, o dois e o um, ou seja possibilita o trabalho com o aspecto cardinal do número.

A classificação exige compreensão e extensão, pois, segundo Vergnaud (1991), uma classe pode ser definida por uma dessas duas propriedades. A compreensão relaciona-se à determinação das características que permitem que alguns elementos pertençam a uma mesma classe e outros não, isto é, ao aspecto qualitativo da classe. E a extensão diz respeito aos aspectos quantitativos, pois apenas alguns elementos são agrupados dentre os muitos existentes.

É necessário desenvolver na escola tarefas de classificação com objetos do cotidiano e objetos complexos como blocos lógicos, animais, vegetais, roupas, números, entre outros, conduzindo os alunos a uma análise rigorosa das propriedades dos objetos e à distinção entre a simples semelhança e a verdadeira equivalência.

Um ponto fundamental é o relacionado às diversas representações de classes e classificações, as quais, segundo nossa proposta, devem ser explicitadas e tratadas com detalhes nas suas características.

A representação cruzada ou em tabela é também denominada de dupla entrada ou diagrama de Carroll (utilização relativamente simples para dois descritores); a representação em trama (baseada na relação de inclusão, considera muitos descritores ao mesmo tempo); representação em árvore (relações privilegiadas de combinatória); representação de Euler-Venn (considerada geralmente como a representação natural dos conjuntos); além, é claro, das representações na língua natural e em desenhos (figural). Vejamos alguns exemplos, citados em Vergnaud (1991).

FIGURA 4.1 – REPRESENTAÇÃO DE CLASSIFICAÇÕES EM DUPLA ENTRADA

		Tamanho	
		Pequeno	Grande
Forma Geométrica	Quadrado		
	Triângulo		
	Círculo		
	Retângulo		
	Trapézio		
	Outros...		

FIGURA 4.2 – REPRESENTAÇÀO DE CLASSIFICAÇÕES EM TRAMA

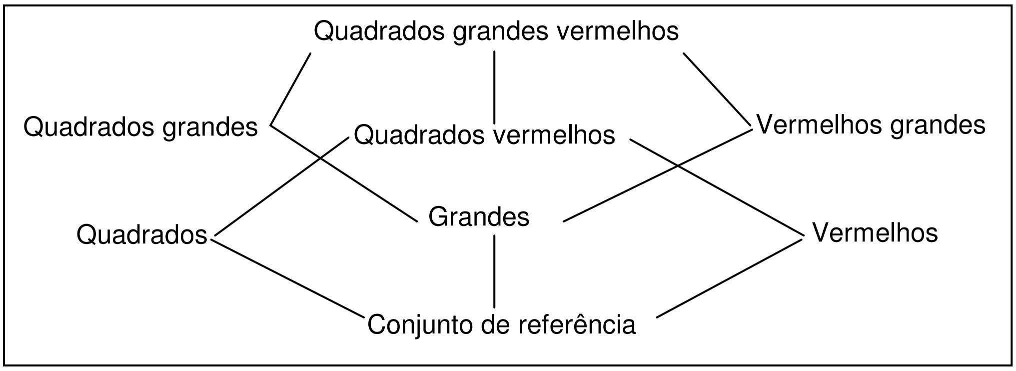


FIGURA 4.3 – REPRESENTAÇÃO DE CLASSIFICAÇÕES EM ÁRVORE

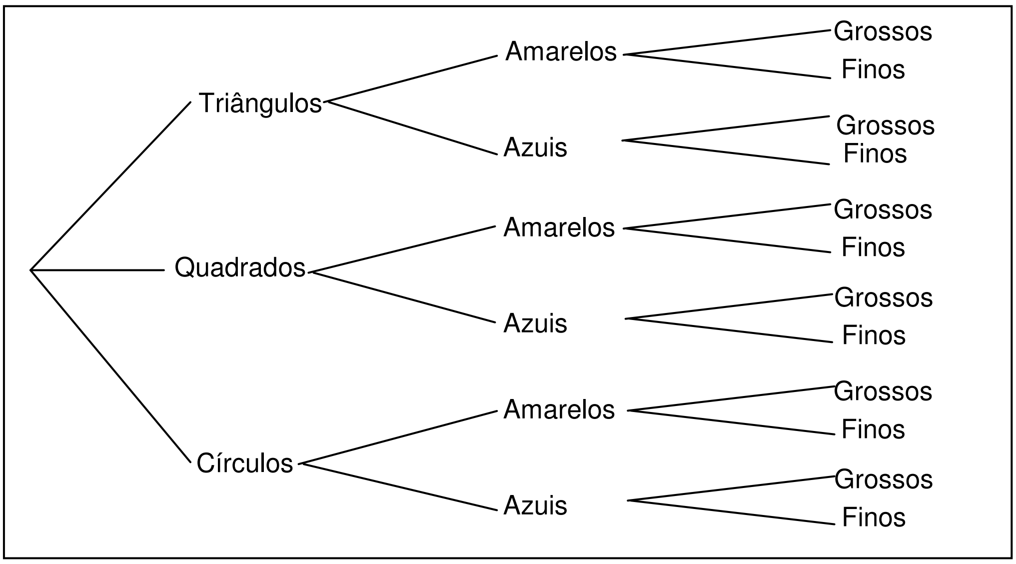
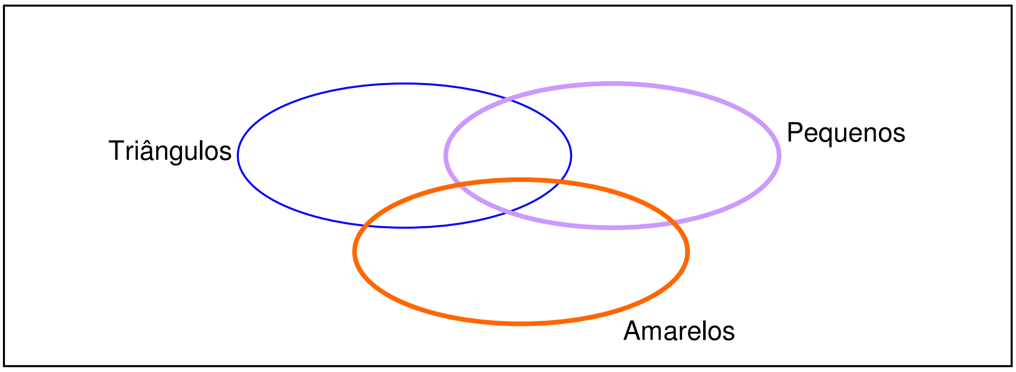


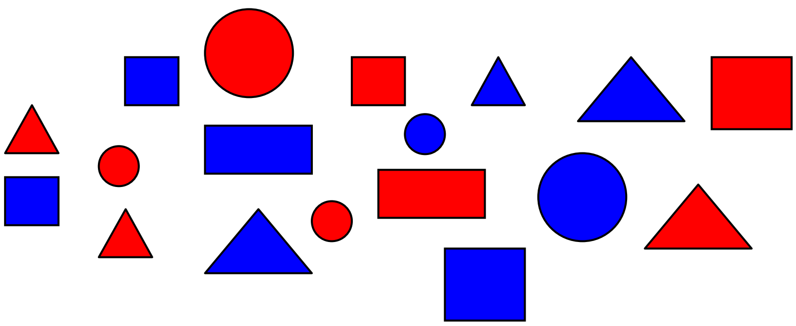
FIGURA 4.4 – REPRESENTAÇÃO DE CLASSIFICAÇÕES DE TRIÂNGULOS EM DIAGRAMA DE EULER-VENN



Estas figuras apresentam registros de representação diversos para o trabalho com classificações. Nos exemplos mostramos classificações que envolvem critérios de cor, tamanho e forma geométrica. Poderiam ser outros critérios trabalhados com outros objetos. Pensamos ser importante privilegiar tarefas que permitam a passagem de uma representação a outra, ou seja, conversões entre registros, para usar os termos de Duval.

Tarefa 1: Classificações **Natureza: Problema**

1.1 Observar as figuras abaixo e separar de acordo com:



a) a cor das figuras;

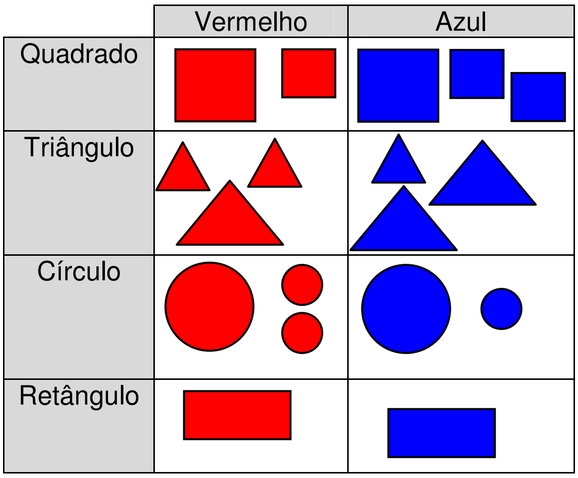
b) o tamanho das figuras;

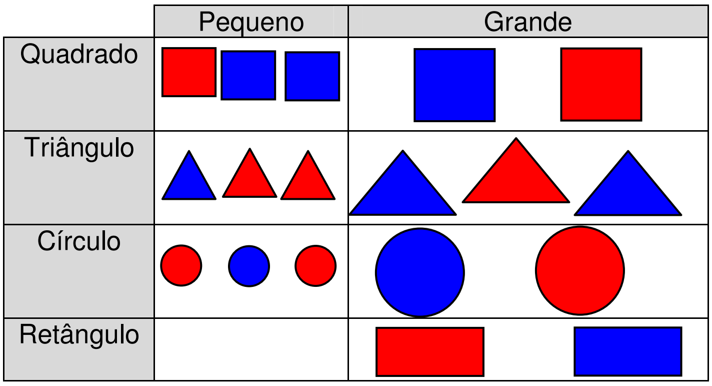
c) a forma das figuras;

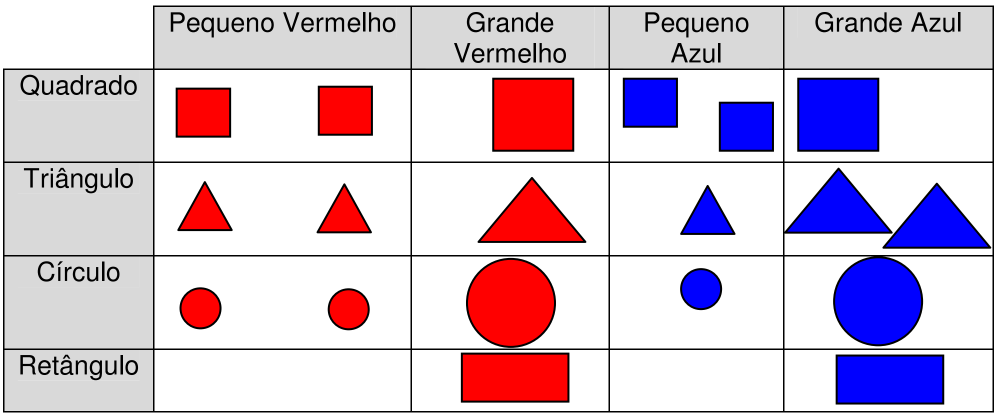
d) observar os grupos formados e separar os que apresentam a mesma quantidade de figuras;

e) identificar os grupos que têm mais figuras e os que têm menos.

1.2 Utilizar a representação de tabela de dupla entrada para classificar as figuras:







1.3 Pensar em todas as maneiras de representar a classificação das figuras acima.

A Tarefa 1 foi classificada como problema se considerarmos alunos em início de escolarização, pois, neste caso, apresenta um nível maior de dificuldade já que exige a coordenação de 3 registros de representação diferentes.

Um conceito extremamente importante para a compreensão do número e da estrutura do sistema decimal é a noção de inclusão, que constitui-se em uma relação binária entre classes, porém, quase não é possível considerá-la como uma operação. A inclusão, de acordo com Vergnaud (1991), liga, de forma simultânea, duas classes sem que apareça nenhuma transformação temporal: $A \subset B$, a classe A está incluída na classe B, ou seja, todos os elementos da classe A são também elementos da classe B. Alguns tipos de tarefas que podem ser desenvolvidas são: tarefas que envolvam exercícios de reconhecimento de classes inclusas em outras classes; identificação de que o 1, 2, 3, 4 e 5 estão inclusos no 6, investigações relacionadas ao sistema monetário, onde se procura observar valores inclusos em outros valores relacionando as unidades centavos e reais, para citar.

Assim, só a ordenação não garante o número, pois não se pode quantificar uma coleção apenas com seus elementos organizados, se considerados apenas um de cada vez. É necessário que cada elemento a ser contado seja incluído na coleção anterior, já ordenada e contada. Deste modo, o "1" será incluído no "2", o "2" em "3",... numa estrutura hierárquica (NACARATO, 1995 p. 29).

As tarefas de seriação ou seqüências são aquelas onde se procura estabelecer relações entre elementos diferentes em certos aspectos e em ordenar essas diferenças. Em uma seqüência, cada elemento possui um lugar definido e está dado em uma relação com o anterior e o posterior.

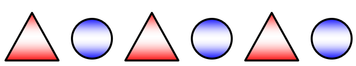
Tarefa 2: Seqüências **Natureza:Investigação**

2.1 Continuar as seqüências:

a) 1 2 1 2 ...

b) | □ || □ □ ||| □ □ □

2.2 Apresentar seqüências com uso de materiais concretos, por exemplo:



e solicitar aos alunos que a representem utilizando desenhos, palavras e símbolos arbitrários.

2.3 Construir[35] a tabuada do 3. O que encontra de curioso nesta tabuada? Prolongue-a calculando 11x3, 12x3, 13x3 ... e formular algumas conjecturas.

Investigar agora o que acontece na tabuada do 9 e do 11.

A tarefa 2 apresenta exemplos de seqüências que podem ser realizadas em diferentes níveis de escolaridade, ou seja, os itens 2.1 e 2.2 referem-se à Educação Infantil e aos primeiros anos do Ensino Fundamental e o item 2.3 refere-se aos anos subseqüentes.

As seqüências podem ser repetitivas ou recursivas. As seqüências repetitivas são formadas por um padrão ou motivo que se repete numa série cíclica e as seqüências recursivas são formadas mediante uma aplicação não-repetitiva, na qual o termo sucessor é formado a partir do antecessor (Nacarato, 1995). Na tarefa 2.1 o item a) representa uma seqüência repetitiva e o item b) representa uma seqüência recursiva.

As seqüências repetitivas devem iniciar o trabalho escolar e são fundamentais para compreender as séries que são recursivas. Além disso, as séries podem ser não-numéricas e numéricas. As primeiras podem ser formadas com objetos concretos ou em desenhos, em níveis de dificuldades crescentes. Neste caso, a ordem dos elementos é estabelecida por aspectos qualitativos (cor, forma, tamanho, espessura, etc.) e quantitativos (quantidade de elementos). Nas seqüências numéricas, que são recursivas, a ordem é estabelecida pelo aspecto quantitativo, num nível ascendente.

Tarefas que envolvam "descobrir o segredo", para encontrar o padrão de formação, e também com números, iniciando o processo de contagem e, posteriormente, evoluindo para seqüências de números pares, ímpares, dobros, triplos, tabuadas, etc. devem ter destaque no trabalho escolar.

A representação semiótica das seqüências se dá geralmente por 3 registros: língua natural, por desenhos e simbólicos (numéricos). Propostas de tarefas em que

[35] Retirado de Ponte, Brocardo e Oliveira (2006, p. 64).

é solicitado ao aluno que continue uma seqüência já iniciada com objetos e utilizando representações semióticas, ou que crie uma seqüência para ser continuada, que represente seqüências de maneiras diversas, devem ser estimuladas, como as apresentadas no exemplo da Tarefa 2.

As tarefas de seriação favorecem a compreensão dos conceitos de antecessor e sucessor. Estes conceitos são operatórios, uma vez que para se obter o sucessor de um número, basta acrescentar um objeto à coleção que tem esse número como cardinal ou retirar um objeto para obter o antecessor. São também assimétricos, pois se *a* é sucessor de *b* então *b* não é sucessor de *a*.

O item 2.3 da Tarefa 2 auxilia os alunos na compreensão de regularidades envolvendo números e operações elementares e estimula o desenvolvimento de questionamentos e conjecturas. Além disso, como colocam Ponte, Brocardo e Oliveira (2006), a investigação pode fornecer um contexto para o estudo dos múltiplos e dos critérios de divisibilidade.

Tarefa 3: Correspondências **Natureza: Exercício**

3.1 Solicitar aos alunos para que façam a correspondência entre carteiras e alunos. Questionar se há mais cadeiras ou alunos, ou se há a mesma quantidade. Solicitar que representem a tarefa.

3.2 Solicitar a um dos alunos para que entregue aos demais uma folha de sulfite para cada um. Realizar os seguintes questionamentos:

a) Cada aluno recebeu quantas folhas?

b) Sobraram folhas de sulfite?

c) O que é preciso para que não sobrem e nem faltem folhas de sulfite?

3.3 Pense em algumas tarefas do seu dia-a-dia, onde utiliza o mesmo princípio de correspondência das tarefas anteriores. Represente essas tarefas de diferentes formas.

A Tarefa 3 apresenta uma estrutura fechada com o objetivo explícito de fazer corresponder a cada aluno um objeto e uma cadeira, com um baixo nível de dificuldade, por essa razão foi categorizada como exercício. O objeto conceitual visível na tarefa é a correspondência biunívoca (um-a-um), processo pelo qual é possível chegar a um conceito numérico lógico, sem a necessidade de recorrer aos artifícios da contagem (DANTZIG, 1970). Além disso a tarefa desenvolve situações de comparação que envolvem os signos <,> e =.

Esse processo consiste em designar para cada objeto de uma coleção um objeto da outra, continuando o processo até que uma das coleções, ou ambas, estejam esgotadas. Assim, Dantzig (1970) coloca que o princípio da correspondência embasa o número cardinal, o que não implica necessariamente em uma contagem. Por exemplo, o número cinco é uma propriedade comum a todos os conjuntos que possuem cinco elementos.

De um modo geral, a tarefa privilegia tratamentos, sendo que, no item 3.3, é estimulada a utilização da operação de conversão e o trânsito entre vários registros, que no caso referem-se à representação na língua natural, figural (desenho) e simbólica (utilização de símbolos arbitrários).

A contagem é um conceito mais refinado, mas que também está envolvido no campo conceitual do número natural. O seu desenvolvimento propicia a aquisição de outros conceitos desse campo, assim como é favorecido pelo desenvolvimento desses outros conceitos, num movimento dinâmico e dialético (NACARATO, 1995).

Dantizg (1970, p. 19) faz a seguinte afirmação:

> Foi a contagem que consolidou o concreto e portanto as noções heterogêneas de pluralidade, tão características do homem primitivo, no *conceito numérico homogêneo abstrato*, o que tornou possível a Matemática.

O processo de contagem é, então, fundamental para a construção do conceito de número, já que para se desenvolver necessita de uma organização em uma seqüência ordenada, que progrida no sentido da magnitude crescente, da seqüência natural: um, dois, três... ou seja, um sistema numérico. Com esse sistema numérico criado, podemos dizer que contar uma coleção é designar a cada número um termo na seqüência natural em sucessão ordenada até que a coleção esteja esgotada.

Desse modo, a contagem representa uma ação concreta, uma vez que exige um conjunto de elementos definidos, existentes no tempo e no espaço. Ou seja, após a fase da simples recitação de palavras-número sem ligação a nenhuma contagem, a palavra passa a ter um referente – o elemento contável da coleção; cada elemento contável está em correspondência com um, e somente um, termo da seqüência verbal (NACARATO, 1995).

No processo da contagem, aparecem dois aspectos do número que, para Dantzig (1970), são considerados como fundamentais para o progresso na Matemática: o aspecto cardinal e ordinal. O aspecto ordinal está ligado ao pressuposto de que é possível sempre passar de um número cardinal para seu sucessor; em outros termos, é preciso comparar e ordenar os objetos de uma coleção para se chegar ao ordinal. Já o aspecto cardinal está relacionado estritamente à comparação, pois fornece a numerosidade (quantidade de elementos) de uma coleção.

Nesse fato, pode residir um elemento de confusão, pois ao se fazer uma contagem é preciso passar de um cardinal ao seu sucessor (ordinal). Assim, o aspecto ordinal prevalece, não havendo mais necessidade de um conjunto modelo para realizar a correspondência. Então, num conjunto de 6 elementos, o sexto elemento, numa contagem seqüencial, corresponde ao cardinal 6, ou seja, o último elemento da seqüência, além de ser considerado o *número ordinal da coleção* (Dantizg, 1970), é também o que fornece a cardinalidade da coleção.

Por conta dessas considerações é que são fundamentais as diversas tarefas de contagem nas atividades de ensino da Matemática Escolar.

Tarefa 4: Contagens **Natureza: Problema**

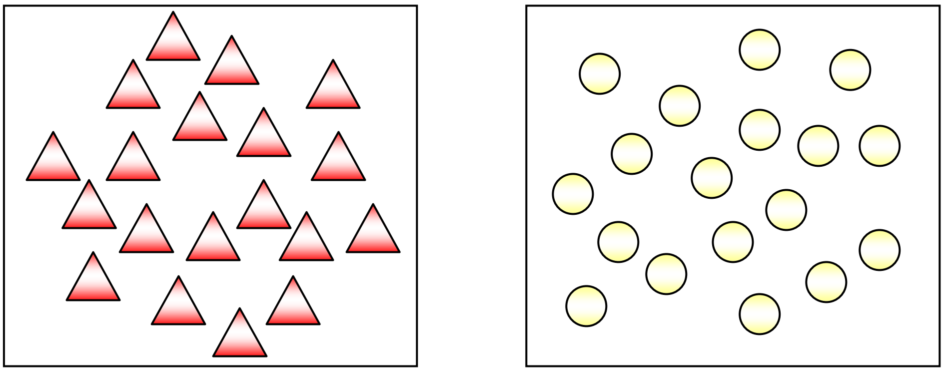
4.1 Solicitar aos alunos que realizem contagens diversas em voz alta; de 1 em 1, de 2 em 2, etc.

4.2 Apresentar várias figuras distribuídas de diferentes formas e solicitar aos alunos que realizem contagens.

4.3[36] Dona Ana vai fazer palhacinhos para enfeitar a mesa de aniversário de sua filha Carla. Ela desenhou os círculos, para fazer as caras, e os triângulos para os chapéus. Ela vai recortar as figuras e montar os palhacinhos mas não quer que

[36] Adaptado de Nacarato (1996, p. 293).

sobre nem cara nem chapéu. Para isso, pediu à Carla que verificasse se há mais caras, mais chapéus ou a mesma quantidade.



Explicar qual o procedimento utilizado para resolver o problema e se houver mais caras ou chapéus indicar quantos a mais.

O item 4.1 da tarefa é o mais elementar; o item 4.2 envolve o reconhecimento de uma representação; e o item 4.3, mais complexo, envolve a coordenação de 3 registros: figural, língua natural e o numérico no registro da quantidade de palhaços e caras. O item 4.3, ainda, poderia ser solucionado apenas com o auxílio da correspondência biunívoca, sem recorrer ao princípio da contagem.

Tarefa 5[37] Conservação **Natureza: Exercício**

5.1 Apresentar uma fila de fichas para o aluno e solicitar que eles formem uma fila igual. Confirmar com os alunos se as filas são iguais.

5.2 Solicitar que os alunos representem a fila de fichas com desenhos em uma folha de papel. Confirmar se as filas de fichas e os desenhos são iguais.

5.3 Alterar a disposição espacial nas fichas de uma fila e perguntar aos alunos se uma fila fica ou não maior que a outra (fazer várias alterações).

A conservação ou invariância numérica é outra operação lógica importante para a realização das contagens e, consequentemente para a compreensão do

[37] Adaptada de Nacarato (1996, p. 128).

número natural. A invariância ou conservação é a capacidade de reconhecer o mesmo número ou a mesma quantidade, seja qual for a disposição das unidades que o compõe. O trabalho com a conservação na escola pode compreender quantidades discretas e contínuas.

A Tarefa 5 apresenta um exemplo com quantidades discretas, envolvendo uma representação concreta e uma representação figural.

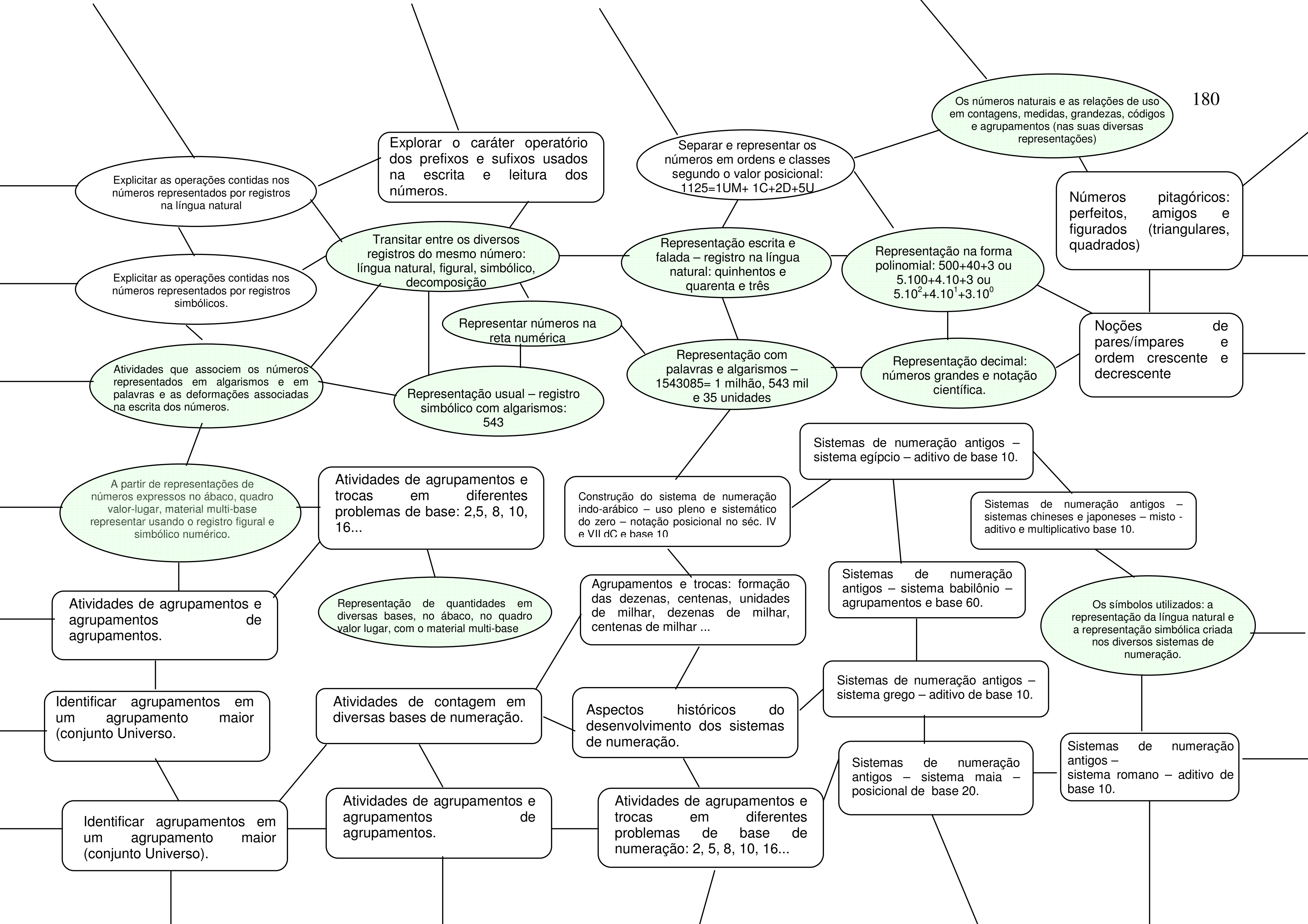
4.3.3 A Rede das Contagens com Agrupamentos e dos Sistemas de Numeração

As contagens por agrupamentos são originadas da necessidade de contar e controlar quantidades cada vez maiores. Historicamente, como vimos no início deste capítulo, outras bases de numeração foram utilizadas, como a base cinco, base doze, vinte, sessenta, por exemplo, antes da plena utilização da base decimal e do Sistema de Numeração Decimal.

Os PCN e a proposta curricular do Paraná, por exemplo, representada pelo Currículo Básico do Estado do Paraná, já incentivam o trabalho com agrupamentos em bases não-decimais como forma de auxiliar na compreensão da praticidade da base decimal e das várias maneiras de representar o número.

De acordo com Vergnaud (1991), o sistema de numeração é um suporte da conceitualização, sendo impossível falar e tratar grandes números sem o recurso de sua representação escrita no sistema posicional. Além disso, a numeração posicional em base dez se constitui em uma das possíveis representações semióticas para o número.

A seguir apresentamos a proposição de uma rede que busca a explicitação das representações semióticas e das conversões entre registros, pela utilização de tarefas de diferentes naturezas, para os agrupamentos e sistemas de numeração:


Explicitar as operações contidas nos números representados por registros na língua natural
Explorar o caráter operatório dos prefixos e sufixos usados na escrita e leitura dos números.
Separar e representar os números em ordens e classes segundo o valor posicional: 1125=1UM+ 1C+2D+5U
Os números naturais e as relações de uso em contagens, medidas, grandezas, códigos e agrupamentos (nas suas diversas representações)
Números pitagóricos: perfeitos, amigos e figurados (triangulares, quadrados)
Explicitar as operações contidas nos números representados por registros simbólicos.
Transitar entre os diversos registros do mesmo número: língua natural, figural, simbólico, decomposição
Representação escrita e falada – registro na língua natural: quinhentos e quarenta e três
Representação na forma polinomial: 500+40+3 ou 5.100+4.10+3 ou 5.10²+4.10¹+3.10⁰
Representar números na reta numérica
Noções de pares/ímpares e ordem crescente e decrescente
Atividades que associem os números representados em algarismos e em palavras e as deformações associadas na escrita dos números.
Representação usual – registro simbólico com algarismos: 543
Representação com palavras e algarismos – 1543085= 1 milhão, 543 mil e 35 unidades
Representação decimal: números grandes e notação científica.
Sistemas de numeração antigos – sistema egípcio – aditivo de base 10.
A partir de representações de números expressos no ábaco, quadro valor-lugar, material multi-base representar usando o registro figural e simbólico numérico.
Atividades de agrupamentos e trocas em diferentes problemas de base: 2,5, 8, 10, 16...
Construção do sistema de numeração indo-arábico – uso pleno e sistemático do zero – notação posicional no séc. IV e VII dC e base 10
Sistemas de numeração antigos – sistemas chineses e japoneses – misto - aditivo e multiplicativo base 10.
Atividades de agrupamentos e agrupamentos de agrupamentos.
Representação de quantidades em diversas bases, no ábaco, no quadro valor lugar, com o material multi-base
Agrupamentos e trocas: formação das dezenas, centenas, unidades de milhar, dezenas de milhar, centenas de milhar ...
Sistemas de numeração antigos – sistema babilônio – agrupamentos e base 60.
Os símbolos utilizados: a representação da língua natural e a representação simbólica criada nos diversos sistemas de numeração.
Identificar agrupamentos em um agrupamento maior (conjunto Universo.
Atividades de contagem em diversas bases de numeração.
Aspectos históricos do desenvolvimento dos sistemas de numeração.
Sistemas de numeração antigos – sistema grego – aditivo de base 10.
Sistemas de numeração antigos – sistema maia – posicional de base 20.
Sistemas de numeração antigos – sistema romano – aditivo de base 10.
Identificar agrupamentos em um agrupamento maior (conjunto Universo).
Atividades de agrupamentos e agrupamentos de agrupamentos.
Atividades de agrupamentos e trocas em diferentes problemas de base de numeração: 2, 5, 8, 10, 16...

Partindo dessa configuração, apresentamos alguns exemplos de tarefas de diferentes naturezas que podem ser desenvolvidas a partir dela. As tarefas 6 a 9 são retiradas integralmente ou adaptadas de Brandt (2005), visto que a autora tratou, em sua tese de doutoramento, da importância dos registros de representação semiótica para a conceitualização do sistema de numeração decimal. Ela apresenta uma análise bastante ampla das contribuições das representações em situações de ensino aplicadas para alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental. A tarefa 10 foi elaborada partindo das considerações teóricas e de pesquisas, a respeito da construção do conceito de número, e da análise das propostas curriculares abordadas nesta tese.

Tarefa 6: Comparações **Natureza: Exercícios**

6.1 Comparar os seguintes valores, dizendo qual é o maior:

12 e 15	112 e 121
17 e 19	107 e 109
22 e 32	232 e 222
29 e 45	240 e 340
120 e 67	1147 e 147

Para cada par comparado, solicitar justificativa.

6.2 Realizar os questionamentos abaixo:

a) Uma outra criança me disse que um número é maior se tiver mais algarismos. Isto é válido sempre?

b) O que acontece se acrescentarmos um zero à esquerda de um número? E se acrescentarmos um zero à direita?

c) Quando dois números apresentam diferenças em um ou dois algarismos da representação quem determina a maioridade? Teste a conclusão com os seguintes numerais: 425 e 325, 53 e 43, 57 e 59, 432 e 422, 432 e 423.

d) Quantos grupos de cem tem cada um dos numerais: 342, 567, 254 e 109.

e) Quantos grupos de 10 tem cada um dos numerais: 45, 39, 98, 100, 109, 117, 142, 200, 207, 215 e 234.

Podemos dizer que a tarefa 6 se constitui num exercício apenas na sua primeira parte (6.1). Com a inserção dos questionamentos, na segunda parte, entendemos que a tarefa se reconfigura e se torna um problema, por adicionar elementos que requerem a análise da estrutura do sistema de numeração. Esses elementos estão relacionados ao número de algarismos do numeral e sua associação com os agrupamentos (de cem, de dez, etc.), ou seja, uma das leis que regem a estrutura do sistema de numeração decimal: a posição do algarismo no numeral.

Tarefa[38] 7 Produções **Natureza: Problema**

7.1 Solicitar que as crianças formem com os algarismos 1, 2 e 3, todos os números com 2 e 3 algarismos possíveis. Em seguida solicitar que os números formados sejam colocados em ordem apresentando argumentos a respeito.

7.2 Realizar os seguintes questionamentos:

a) o que determina a ordem da seqüência desses números?

b) por que 321 é maior que 312?

c) qual dos algarismos permite identificar que 321 é maior que 312?

d) que tipos de grupos definem o algarismo 3 do numeral?

e) que tipos de grupos definem o algarismo 2 do 321?

f) quantos grupos de 10 são determinados pelo algarismo 2 do 321? E pelo algarismo 1 do 312?

[38]Esta tarefa foi retirada e adaptada de Brandt (2005, p. 163) que por sua vez a selecionou de LERNER, D.; SADOVSKY, P. O sistema de numeração: um problema didático. In: SAIZ, I.; PARRA, C. **Didática da matemática:** reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artmed, 1996, p. 122. No entanto é uma tarefa que pode ser encontrada, também, em alguns livros didáticos dos anos iniciais do Ensino Fundamental.

g) qual dos algarismos dos numerais 231 e 213 permite determinar que 231 é maior que 213: o algarismo da esquerda, o algarismo do meio ou o algarismo da direita?

h) o que significa o 3 do 231? Que tipos de grupos ele define?

Realizar questionamentos semelhantes para os outros números com 3 algarismos e com 2 algarismos.

Essa tarefa está relacionada com a produção de um significante e no tratamento que compreenderá uma atividade dentro de um único sistema de representação. Foi categorizada como um problema, por apresentar um objetivo definido e uma formulação clara, mas um nível elevado de reflexão para se chegar às respostas. Constitui-se num problema, é bom lembrar, para aqueles que estão ingressando seu caminho na compreensão da estrutura do sistema de numeração. Explora os agrupamentos de agrupamentos, o valor posicional do algarismo e, portanto, permite trabalhar com as regras de formação dos registros utilizados em um sistema de numeração decimal.

Conforme Duval (1993), a formação de registros de representação requer o cumprimento de regras de conformidade que têm a função de assegurar as condições de identificação e de reconhecimento da representação (pela determinação das unidades elementares) e também de possibilitar a sua utilização para tratamentos.

A realização dessa tarefa caminha nessa direção, pois exige que os alunos produzam numerais representativos de números, com utilização de algarismos. A esse respeito, Brandt (2005, p.197) coloca que o registro simbólico numérico (a escrita arábica),

> [...]vai requisitar que esses algarismos estejam articulados entre si de forma que, a sua posição no numeral colocará em jogo uma das combinações possíveis das unidades elementares. Essa combinação, nesse caso, diz respeito ao caráter operatório da representação arábica. Assim, ao utilizar algarismos 1, 2, e 3 pode-se formar o numeral 231 e, nesse caso, as unidades elementares estarão combinadas da seguinte forma: $2x10^2 + 3x10 + 1$. Se, os mesmos algarismos forem utilizados para formar o numeral 321, outra combinação surge: $3x10^2 + 2x10 + 1$.

Logo, além de confrontar a questão da formação de registros, a tarefa-problema permite-nos explorar várias formas de tratamento que levam à compreensão da estrutura subjacente ao sistema de numeração posicional.

Tarefa[39] 8: Caráter operatório da escrita verbal e numérica **Natureza: Investigação**

8.1 Solicitar que as crianças identifiquem sufixos do tipo "enta" e "centos" ou "entos" no 6275 e no 4444. Solicitar que as crianças indiquem em que posição se encontra o algarismo com o sufixo "enta" com o sufixo "centos" ou "entos". Solicitar que as crianças indiquem quantos grupos de dez podem-se formar com as palavras com sufixo "enta" e com sufixo "centos" ou "entos".

8.2 Solicitar que as palavras a seguir, com sufixos "enta", sejam expressas por algarismos arábicos: sessenta e um; noventa e sete; quarenta e dois. Solicitar que seja elaborada uma conclusão a respeito dos prefixos que precedem os sufixos "enta" em termos de operação matemática. Solicitar que uma conclusão seja estabelecida para o conectivo "e", em termos de operação matemática.

8.3 Associar as operações contidas nas palavras que representam os números com as operações contidas nos numerais que os representam, explicitando os prefixos que estão associados aos algarismos do numeral e os sufixos que indicam a posição dos algarismos no numeral:

Duzentos e noventa e seis	trezentos e sete
296	307
Trinta e oito	cinco mil quinhentos e cinqüenta e cinco
38	5 555

8.4 Solicitar que as crianças produzam, em duplas, números que contenham somente zeros e uns. Analisar a função do um no número em relação às operações de adição e multiplicação. Confrontar os pontos de vista das duplas. A seguir, apresentar a síntese abaixo.

[39] Esta tarefa se constitui em uma adaptação das tarefas 11, 12 15 e 16 de Brandt (2005, p.164-166).

O estudo do 1 (um) e suas funções de adição e multiplicação na formação dos números

1 um

11 on + ze = 1+ 10 onze

100 cem = 1 x 100 cem

101 cento + um = 100 + 1 cento e um

110 cento + dez = 100 + 10 cento e dez

1000 mil = 1 x 1000 mil

1001 mil + um = 1000 + 1 mil e um

1011 mil + on + ze = 1000 + 1 + 10 mil e onze

1111 mil + cem + on + ze = 1000 + 100 + 1+ 10 mil cento e onze

Realizar o mesmo para outros numerais que contenham três e zeros, dois e zeros, etc.

Esse conjunto de tarefas foi designado por nós como sendo de natureza investigativa, uma vez que o caminho para se obter as respostas não é imediato, deve ser refletido. Uma tarefa leva a descobertas que podem ser utilizadas como ferramentas para resolver as outras.

Para o tratamento dessas tarefas, conversões são necessárias, ou seja, um registro de representação A (língua natural) será substituído por um outro registro de representação B (linguagem simbólica numérica). Isso é garantido desde que ambas as representações façam referência ao mesmo objeto conceitual.

As tarefas 8.1 e 8.2, de acordo com Brandt (1995), foram organizadas para confrontar os problemas de congruência semântica. Como foi visto no capítulo anterior, Duval (1988) nos aponta que a mudança de um registro de representação a outro sempre está ligada a uma atividade e a um custo cognitivo. A intensidade desse custo irá depender substancialmente dos registros escolhidos, uma vez que, para duas representações serem congruentes, elas devem satisfazer 3 critérios: a possibilidade de uma correspondência semântica das unidades de significado (informação); a univocidade semântica terminal e a mesma ordem das unidades componentes de cada um dos registros de representação.

Brandt (2005) coloca que as unidades de informação, cognitivamente pertinentes aos registros de representação do número na língua natural (palavra) e na linguagem simbólica numérica (numeral arábico), são respectivamente os prefixos e sufixos utilizados nas palavras que designam os números e o valor posicional e o valor absoluto no caso do registro simbólico numérico.

Assim, na tarefa 8.1, temos uma conversão no sentido da linguagem simbólica numérica para a linguagem natural (6275 ⟶ seis mil duzentos e setenta e cinco) e, em 8.2, no sentido contrário (307 ⟵ trezentos e sete). Partindo da análise realizada por Brandt (1995), sobre a congruência ou não congruência entre o numeral arábico e a palavra para alguns números, podemos inferir que no caso das tarefas 8.1 e 8.2 não há congruência semântica, visto que uma das condições não foi satisfeita, conforme o Quadro 4.4:

QUADRO 4.4 ANÁLISE DE CONGRUÊNCIA DAS CONVERSÕES NAS TAREFAS 8.1 E 8.2

Representações analisadas	**Critérios para determinação da congruência entre duas representações**		
Número expresso por meio do registro na língua natural (palavra) e na linguagem simbólica numérica	**Correspondência semântica das unidades de significado**	**Univocidade semântica terminal**	**Mesma ordem das unidades de significado**
6275 Seis mil duzentos e setenta e cinco	Não, pois são 4 algarismos para serem associados a 7 palavras, além disso os conectivos “e”, que indicam adição, não são explicitados como operação na escrita simbólica numérica.	Não, pois é um algarismo (6) associado a duas palavras (seis mil), e também porque o prefixo “duz” é uma deformação da palavra “dois” e o sufixo “entos” uma deformação da palavra “cem”, o que ocorre também com o 70 (“set” é uma deformação da palavra sete e o sufixo “te” da palavra dez, que estão escondidos atrás do 5.	Sim, pois o 6 representa 6x1000 e na palavra 6(seis)x1000; o 2 representa 2x100 e na palavra 2(duz)x 100(entos); o 7 corresponde a 7x10 e na palavra 7(set)x 10(enta) somados ao 5.
307 Trezentos e sete	Não, pois as três palavras não são	Não, pois são três algarismos (300)	Sim, pois a palavra trezentos significa

	associadas aos três algarismos, pois o conectivo "e" será associado a uma adição.	associados a duas sílabas, escondidos atrás do 7. Além disso, o prefixo "trez" é uma deformação da palavra "três" e o sufixo "entos" uma deformação da palavra "cem".	3(trez)x100(entos) e o algarismo 3 da esquerda significa 3x100, sendo ambos somados com 7.

A tarefa 8.3 objetiva, da mesma forma, explicitar uma conversão no sentido da língua natural para o registro simbólico numérico, onde há poucos elementos de congruência. No entanto, o encaminhamento da tarefa permite a explicitação do caráter operatório da escrita, possibilitando a análise desta e facilitando a compreensão da estrutura do sistema de numeração decimal:

Duzentos e noventa e seis =

296= 2 x 100 + 9 x 10 + 6

Na tarefa 8.4, que completa o conjunto de investigações, é possibilitado ao aluno a exploração das funções dos algarismos em diferentes números, mas, para isso, é preciso realizar tratamentos e conversões. Além disso, a tarefa exige que o aluno reflita e escreva números usando os registros da linguagem simbólica numérica, sintetizando a seqüência de tarefas e auxiliando a explicitação do nível de compreensão da estrutura do sistema de numeração decimal.

Observamos que esta é uma tarefa que tem um alto custo cognitivo, visto que apresenta um alto grau de não-congruência semântica e níveis crescentes de dificuldades na realização. No entanto, a forma com que a tarefa é proposta permite o contato dos alunos com as dificuldades geradas pela não-congruência semântica, favorecendo a realização das conversões entre registros e possibilitando a compreensão.

Nesse sentido, Duval (1988) aponta que a existência da não-congruência semântica é uma fonte de dificuldade para a Matemática Escolar, independentemente do conteúdo matemático. Isso significa que uma mesma tarefa pode ter custos cognitivos diferentes, dependendo do quanto exigirem ou não de transformações entre as expressões de formulação.

Os problemas colocados pela existência ou não da congruência semântica, entre duas representações, se tornam essenciais para a aprendizagem sempre que a atividade cognitiva envolvida exija um mínimo de tratamento. Por essa razão, o conjunto de atividades que compõe a tarefa 8 confronta justamente esses problemas de congruência (BRANDT, 2005).

Tarefa 9: Bases não decimais **Natureza: Modelagem**

9.1 Solicitar que os alunos, organizados em grupos de 3, pesquisem em 3 videolocadoras diferentes o número total de fitas de vídeo e o número de fitas de desenho animado que possuem em estoque e quantas fitas desta modalidade adquirem semanalmente.

a) Calcular o número de fitas adquiridas após 3 semanas, 8 semanas e 10 semanas.

b) Organizar os dados obtidos.

c) Observar se há alguma regularidade nos pedidos das 3 locadoras.

d) Comparar o número de fitas de desenho animado em relação ao número total de fitas de vídeo em cada locadora.

e) Comparar com os resultados dos colegas.

9.2 Propor uma situação hipotética e comparar com a situação real e observar se há regularidades: solicitar que os alunos calculem o número de fitas adquiridas por uma vIdeolocadora que tinha inicialmente 13 fitas e que passa a adquirir 10 fitas por semana:

a) ao final de 3 semanas;

b) ao final de 5 semanas,

c) ao final de 8 semanas;

d) ao final de 10 semanas.

Solicitar que argumentem sobre os procedimentos adotados para encontrar o resultado.

Essa tarefa foi considerada uma modelagem por se tratar de um problema oriundo do cotidiano. Também por seu encaminhamento conduzir o aluno a observar que o acréscimo de grupos de 10 pode ser realizado diretamente às dezenas no resultado final. Ou seja, que 10 fitas por semana são equivalentes a dizer 1 dezena por semana, e após 2 semanas serão 20 fitas ou 2 dezenas, e assim por diante, até que o aluno perceba o padrão de regularidade, no qual o número de semanas vai representar o algarismo das dezenas. Isso porque o acréscimo de dezenas ou centenas exatas só faz alterar um dos algarismos do numeral e este algarismo passa a ser identificado pelo tipo de grupo que representa, de acordo com a sua posição no numeral.

Lembramos que o limite entre a natureza das tarefas é muito tênue, e muitas vezes, a categorização vai depender, além do nível de escolaridade, do próprio repertório de esquemas e aprendizagens já elaborados pelos alunos.

Em relação aos registros de representação semiótica, Brandt (2005) coloca que a tarefa privilegiou a transformação intra-registro, ou seja, um tratamento, ao se obter o preço pago pela locadora no prazo de 3, 5, 8 ou 10 semanas. Esta transformação evidenciou a estrutura do sistema de numeração decimal pela identificação do padrão de regularidade: ao adquirir 10 fitas por semana a locadora terá adquirido, ao final de 5 semanas (5x10), 50 fitas ficando com 63 fitas no total, após adicionar as 13 iniciais. As transformações ocorridas foram: 13= 10+3 e 50 em 5x10, depois 13=10+3=1d(dezena)+3u(unidades) e 50=5x10=5d. Assim, ao final de 5 semanas se tem 6d+3u e novamente a transformação 60+3.

Os tratamentos são imprescindíveis na matemática e dependem das possibilidades de funcionamento representacional do registro, ou seja, cada registro permite a realização de um tratamento específico, que terá custos cognitivos diferentes e abrangerá aspectos distintos do mesmo objeto.

No caso dos números, a escrita arábica se constitui no registro simbólico numérico, de natureza monofuncional que admite um tratamento algoritmizável (Duval, 2003) e que, portanto, favorece a realização de cálculos. Já o registro da língua natural se constitui num registro multifuncional, que não admite tratamentos algoritmizáveis. Outro aspecto que emerge dessa distinção é o fato de que os tratamentos efetuados em um registro monofuncional são perfeitamente controláveis, o que não é sempre o caso dos registros multifuncionais.

Tarefa 10: Evolução dos Sistemas de Numeração **Natureza: Projeto**

Organizar com os professores de História e Geografia tarefas para serem desenvolvidas durante um longo período, um bimestre, um semestre ou mesmo o ano todo e que envolvam os seguintes aspectos:

a) pesquisar sobre os diferentes sistemas de numeração em diferentes culturas (o sistema romano; o sistema egípcio; o sistema grego; o sistema chinês; o sistema japonês; o sistema numérico dos incas, maias e astecas; o sistema romano; o sistema indo-arábico);

b) identificar em mapas geográficos as regiões onde se desenvolveram os sistemas de numeração;

c) investigar sobre o panorama cultural e aspectos socioeconômicos dos povos onde se desenvolveram tais sistemas;

d) investigar sobre a utilização (aspecto prático e utilitário) dos números em cada sistema;

e) investigar sobre os símbolos utilizados pelas diferentes culturas para representar os números;

f) investigar sobre as regras dos sistemas (como formavam os números, como realizavam as operações, etc.);

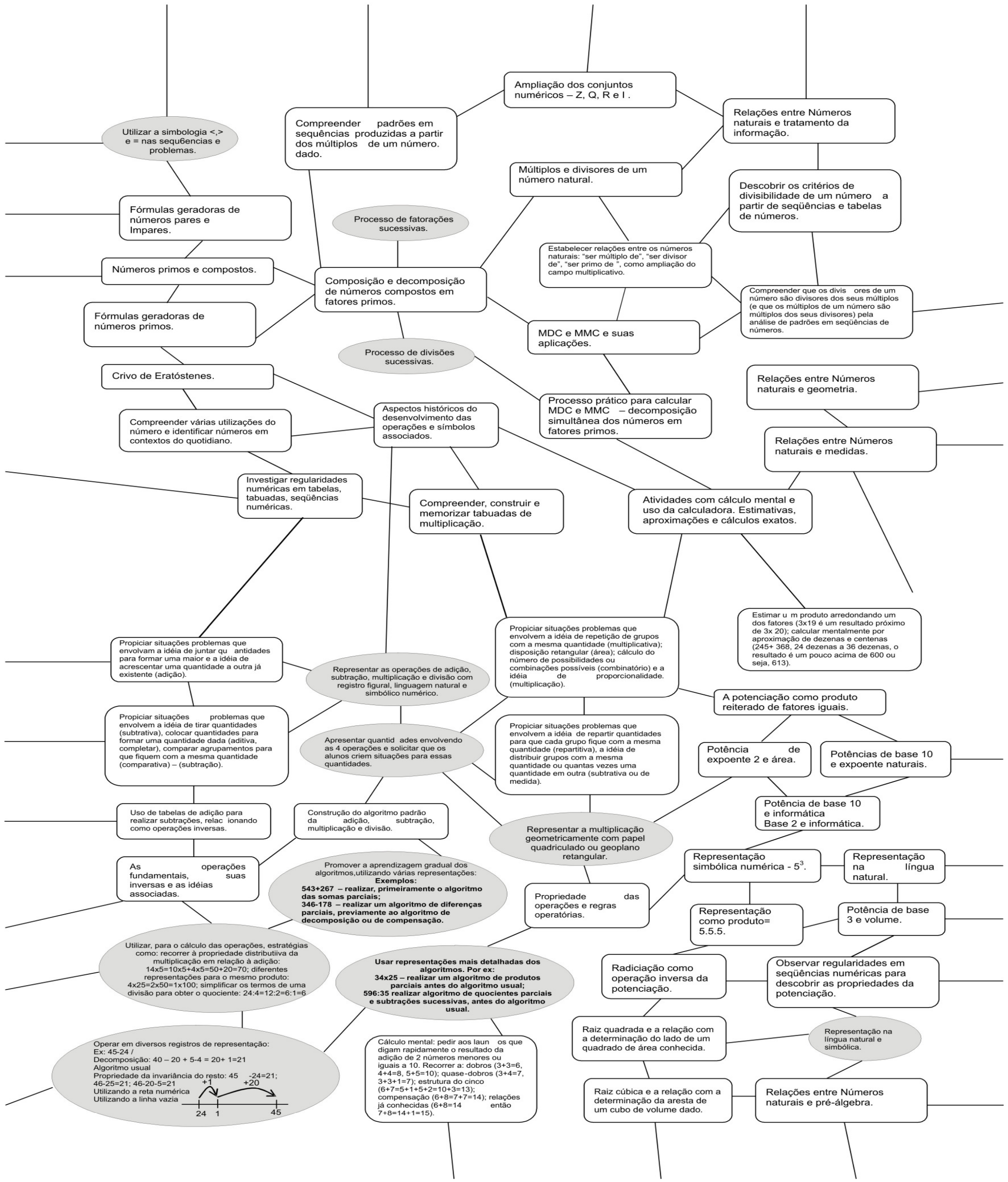
g) investigar sobre a evolução dos algarismos (0,1,2,3,4,5,6,7,8,9) utilizados no nosso sistema atualmente.

A realização desse conjunto de tarefas pode favorecer a compreensão da praticidade da estrutura do sistema de numeração decimal, em relação aos demais, ao investigar sobre o desenvolvimento de outros sistemas ao longo da história. Além disso, possibilita o contato com outros registros numéricos e as particularidades inerentes a cada tipo de registro. É uma tarefa que evidencia a importância de se utilizar registros de representação semiótica que sejam econômicos cognitivamente e que possibilitam tratamentos diferenciados para a Matemática.

4.3.4 A Rede das Operações

Quanto à questão do cálculo e das operações numéricas, as propostas curriculares analisadas nesta tese orientam para um trabalho no sentido de compreensão do significado das operações, habilidade em calcular mentalmente, com papel e instrumentos tecnológicos, bem como estimar resultados. Ou seja, é preciso compreender o que se faz e para que se faz, por meio de vários procedimentos e representações, uma vez que eles relacionam-se e complementam-se. Isso para que o aluno possa relacionar os problemas que se apresentam com as operações que permitem obter as respostas e, a partir disso, analisar se o cálculo está correto ou não.

Assim, acreditamos que em tarefas de diferentes naturezas possam ser reveladas diferentes representações semióticas e, portanto, diferentes aspectos das operações numéricas. A seguir temos a proposição da rede curricular para as operações numéricas:



Utilizar a simbologia <,> e = nas sequ6encias e problemas.
Fórmulas geradoras de números pares e Impares.
Números primos e compostos.
Fórmulas geradoras de números primos.
Crivo de Eratóstenes.
Compreender várias utilizações do número e identificar números em contextos do quotidiano.
Investigar regularidades numéricas em tabelas, tabuadas, seqüências numéricas.
Compreender padrões em sequências produzidas a partir dos múltiplos de um número. dado.
Processo de fatorações sucessivas.
Composição e decomposição de números compostos em fatores primos.
Processo de divisões sucessivas.
Aspectos históricos do desenvolvimento das operações e símbolos associados.
Compreender, construir e memorizar tabuadas de multiplicação.
Ampliação dos conjuntos numéricos – Z, Q, R e I .
Múltiplos e divisores de um número natural.
Relações entre Números naturais e tratamento da informação.
Descobrir os critérios de divisibilidade de um número a partir de seqüências e tabelas de números.
Estabelecer relações entre os números naturais: “ser múltiplo de”, “ser divisor de”, “ser primo de ”, como ampliação do campo multiplicativo.
Compreender que os divis ores de um número são divisores dos seus múltiplos (e que os múltiplos de um número são múltiplos dos seus divisores) pela análise de padrões em seqüências de números.
MDC e MMC e suas aplicações.
Processo prático para calcular MDC e MMC – decomposição simultânea dos números em fatores primos.
Relações entre Números naturais e geometria.
Relações entre Números naturais e medidas.
Atividades com cálculo mental e uso da calculadora. Estimativas, aproximações e cálculos exatos.
Estimar u m produto arredondando um dos fatores (3x19 é um resultado próximo de 3x 20); calcular mentalmente por aproximação de dezenas e centenas (245+ 368, 24 dezenas a 36 dezenas, o resultado é um pouco acima de 600 ou seja, 613).
Propiciar situações problemas que envolvam a idéia de juntar qu antidades para formar uma maior e a idéia de acrescentar uma quantidade a outra já existente (adição).
Representar as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão com registro figural, linguagem natural e simbólico numérico.
Propiciar situações problemas que envolvem a idéia de repetição de grupos com a mesma quantidade (multiplicativa); disposição retangular (área); cálculo do número de possibilidades ou combinações possíveis (combinatório) e a idéia de proporcionalidade. (multiplicação).
A potenciação como produto reiterado de fatores iguais.
Propiciar situações problemas que envolvem a idéia de tirar quantidades (subtrativa), colocar quantidades para formar uma quantidade dada (aditiva, completar), comparar agrupamentos para que fiquem com a mesma quantidade (comparativa) – (subtração).
Apresentar quantid ades envolvendo as 4 operações e solicitar que os alunos criem situações para essas quantidades.
Propiciar situações problemas que envolvem a idéia de repartir quantidades para que cada grupo fique com a mesma quantidade (repartitiva), a idéia de distribuir grupos com a mesma quantidade ou quantas vezes uma quantidade em outra (subtrativa ou de medida).
Potência de expoente 2 e área.
Potências de base 10 e expoente naturais.
Potência de base 10 e informática Base 2 e informática.
Uso de tabelas de adição para realizar subtrações, relac ionando como operações inversas.
Construção do algoritmo padrão da adição, subtração, multiplicação e divisão.
Representar a multiplicação geometricamente com papel quadriculado ou geoplano retangular.
As operações fundamentais, suas inversas e as idéias associadas.
Promover a aprendizagem gradual dos algoritmos,utilizando várias representações:
Exemplos:
543+267 – realizar, primeiramente o algoritmo das somas parciais;
346-178 – realizar um algoritmo de diferenças parciais, previamente ao algoritmo de decomposição ou de compensação.
Propriedade das operações e regras operatórias.
Representação simbólica numérica - 5^3.
Representação na língua natural.
Representação como produto= 5.5.5.
Potência de base 3 e volume.
Utilizar, para o cálculo das operações, estratégias como: recorrer à propriedade distributiiva da multiplicação em relação à adição: 14x5=10x5+4x5=50+20=70; diferentes representações para o mesmo produto: 4x25=2x50=1x100; simplificar os termos de uma divisão para obter o quociente: 24:4=12:2=6:1=6
Usar representações mais detalhadas dos algoritmos. Por ex:
34x25 – realizar um algoritmo de produtos parciais antes do algoritmo usual;
596:35 realizar algoritmo de quocientes parciais e subtrações sucessivas, antes do algoritmo usual.
Radiciação como operação inversa da potenciação.
Observar regularidades em seqüências numéricas para descobrir as propriedades da potenciação.
Raiz quadrada e a relação com a determinação do lado de um quadrado de área conhecida.
Representação na língua natural e simbólica.
Operar em diversos registros de representação:
Ex: 45-24 /
Decomposição: 40 – 20 + 5-4 = 20+ 1=21
Algoritmo usual
Propriedade da invariância do resto: 45 -24=21; 46-25=21; 46-20-5=21
Utilizando a reta numérica
Utilizando a linha vazia
+1
+20
24
1
45
Cálculo mental: pedir aos laun os que digam rapidamente o resultado da adição de 2 números menores ou iguais a 10. Recorrer a: dobros (3+3=6, 4+4=8, 5+5=10); quase-dobros (3+4=7, 3+3+1=7); estrutura do cinco (6+7=5+1+5+2=10+3=13); compensação (6+8=7+7=14); relações já conhecidas (6+8=14 então 7+8=14+1=15).
Raiz cúbica e a relação com a determinação da aresta de um cubo de volume dado.
Relações entre Números naturais e pré-álgebra.

Os problemas que exigem as operações de adição ou de subtração, para sua resolução, são considerados por Vergnaud (1991) como problemas do tipo aditivo[40]. Estas duas operações apresentam relações muito estreitas e, por conta disso, muitas orientações curriculares (PCN, NCTM, por exemplo) e outras tantas pesquisas, além dos estudos de Vergnaud, sugerem que elas se desenvolvam paralelamente, por meio de tarefas que possibilitem a exploração dos diferentes significados da adição e da subtração.

As tarefas de 11 a 14 mostram alguns exemplos de como articular esses significados às múltiplas representações semióticas.

De um modo geral, o raciocínio aditivo compreende situações que podem ser analisadas a partir de uma relação parte-todo, considerada como invariante conceitual desse tipo de raciocínio, ou seja:

> Se queremos saber qual o valor do todo, somamos as partes; se queremos saber o valor de uma parte, subtraímos a outra parte do todo; se queremos comparar duas quantidades, analisamos que parte da maior quantidade sobra se retiramos dela uma quantia equivalente à outra parte (NUNES et al, 2005, p. 84-85).

Tarefa 11: Ação de juntar **Natureza: Exercícios**

Luana estuda no 5.º ano do Ensino Fundamental. Na sua turma há 18 meninas e 13 meninos. Qual é o total de alunos da turma de Luana?

Essa tarefa apresenta o objetivo de forma clara, o que é dado e o que é pedido está perfeitamente indicado, o grau de dificuldade é relativamente baixo e por isso, de um modo geral, podemos categorizá-la como um exercício.

[40] Sobre os problemas do tipo aditivo pode-se encontrar mais detalhes, além de Vergnaud (1991) em: DAMM, R. F. **Apprentissage dês problèmes additifs et compréhension de texte.** Tese de doutorado. Estrasburgo:ULP, 1992;
DAMM, R. F. Representação, compreensão e resolução de problemas aditivos. In: MACHADO, S. D.A. (Org.). **Aprendizagem em matemática:** registros de representação semiótica. Campinas: Papirus, 2003, p.35-47;
PASSONI, J.C.;CAMPOS, T. M.M. Revisitando os problemas aditivos de Vergnaud de 1976. In: MACHADO, S. D.A. (Org.). **Aprendizagem em matemática:** registros de representação semiótica. Campinas: Papirus, 2003, p.49-56.

A tarefa revela a idéia de juntar, ou seja, têm-se dois estados e pretende-se chegar a um outro. Os números, nesse caso, representam cardinais. Para se chegar a resolução desse problema há que se fazer uma operação de conversão e depois de tratamento.

Primeiro, a conversão do enunciado do problema dado no registro da língua natural (registro de partida) para a linguagem simbólica numérica (registro de chegada). Essa transformação, que a princípio pode parecer muito simples, é fundamental, pois é a partir dela que se pode extrair o critério para fazer corresponder as representações de partida e de chegada e, com isso, permitir a seleção e a organização dos dados pertinentes ao problema. Nessa passagem, a escolha da operação a realizar é um passo importante, e vai depender substancialmente do nível de congruência da transformação a ser efetuada.

No caso da tarefa 11, consideramos como congruente uma vez que satisfaz as 3 condições de congruência, conforme Duval (1995, 1999):

1) correspondência semântica entre as unidades significantes: existe uma correspondência direta e espontânea entre o sentido do verbo "há" e o conectivo "e" da tarefa, com a operação de adição "+";

2) mesma ordem das unidades significantes: não existe necessidade de inverter (em relação ao dado final) os valores operatórios – há 18 e há 13 $\Rightarrow$ (18+ 13);

3) univocidade semântica: não há verbos antônimos no enunciado e cada unidade significante do registro de partida é convertido em apenas uma unidade significante no registro de chegada: (...) Na sua turma há 18 meninas e 13 meninos $\Rightarrow$ 18 + 13.

O fato da tarefa ser altamente congruente também corrobora para sua classificação como exercício, visto que conversões congruentes apresentam um nível de dificuldade mais baixo que tarefas não-congruentes.

Após a conversão, se dá o "tratamento aditivo" (DAMM, 2003) da tarefa, ou seja, a sua resolução aritmética para o caso da utilização do registro simbólico numérico. Entretanto, com esta mesma tarefa poderiam ser realizadas conversões diferentes, solicitando, por exemplo, que os alunos a resolvam utilizando a representação em diagramas, representação figural, ou outra que se queira desenvolver. Nesse caso, a análise de congruência seria outra. Além disso, para a resolução da tarefa, ou seja, para o tratamento é possível utilizar o algoritmo padrão que envolve a representação usual $\begin{array}{r} 18 \\ +13 \\ \hline 31 \end{array}$ ou o algoritmo da decomposição, por exemplo, que envolve outra representação: $\begin{array}{l} 18 \rightarrow 10+8 \\ 13 \rightarrow \underline{10+3} \\ \quad\;\; 20+11 \\ \quad\;\; 30+\;\;1 \\ \qquad\;\; \Downarrow \\ \qquad\;\; 31 \end{array}$, e, dessa forma, se revelam aspectos diferentes do mesmo objeto. A primeira representação, do algoritmo usual, explicita a utilização do valor posicional e a segunda mostra a estrutura do sistema de numeração decimal.

De um modo geral, Damm (2003) coloca que um problema do tipo aditivo (que envolve adição ou subtração, portanto) é estritamente congruente quando, de um lado, existir a correspondência direta e espontânea entre o sentido do verbo utilizado no enunciado do problema e a operação utilizada. E, do outro, não exigir a inversão dos dados e não existir a presença de verbos antônimos no enunciado, logo, satisfazendo, as condições de congruência explicitadas por Duval (1995).

A tarefa 12, a seguir, também se refere à idéia de combinar estados para obter um outro, mas no sentido de tirar ou separar:

Tarefa 12 : Ação de retirar **Natureza: Exercício**

Manoela tem R$ 300,00 e vai comprar um livro para as aulas de Matemática. O livro custa R$ 63,00. Depois de pagar o livro, com quando ela ainda vai ficar?

As análises para essa tarefa são semelhantes as da tarefa anterior, com a diferença de que agora a ação que está sendo evidenciada é a de tirar, ou seja, o sentido da subtração que está envolvido é a idéia subtrativa.

A Tarefa 12 também é congruente para a conversão da linguagem natural para a simbólica numérica, pois cumpre as 3 condições: correspondência semântica, "paga" $\Rightarrow$ com a operação "-"; ordem, tem 300 paga 63 $\Rightarrow$ 300 – 63 e a univocidade, pois não há verbos antônimos.

Temos também problemas associados à idéia de transformação, ou seja, à alteração de um estado inicial, que pode ser positiva ou negativa, e envolver o sentido de acréscimo para o caso da adição ou o sentido aditivo (idéia de completar, colocar quantidades para formar uma quantidade dada) para o caso da subtração. A Tarefa 13, na sequência, mostra exemplos desse tipo:

Tarefa 13 : Ação de acrescentar **Natureza: Problema**

13.1 Há um ano atrás Joana tinha R$ 569,00 na poupança. Neste último ano ela depositou Rr$ 383,00. Quanto ela tem agora de saldo na poupança?

13.2 Há um ano atrás Lucia, a irmã de Joana, tinha R$ 469,00 na poupança e hoje ela tem R$ 938,00. Quanto ela depositou neste último ano para ficar com esse saldo?

As duas partes da Tarefa 13 foram categorizadas como problemas por apresentarem os objetivos definidos de forma clara, mas demandarem de análise do aluno para encontrar o caminho que o leve a resposta, visto que as operações a efetuar não são visíveis de forma imediata.

Os registros de representação semiótica envolvidos são a língua natural (multifuncional) e a linguagem simbólica numérica (monofuncional), ambas representações discursivas. As operações cognitivas necessárias são: primeiro a conversão e depois o tratamento aditivo. No caso da tarefa 13.1, temos um caso de congruência e para a tarefa 13.2 um caso de não-congruência.

A tarefa 13.1 é congruente para a conversão da linguagem natural para a simbólica numérica, pois cumpre as 3 condições: correspondência semântica, “depositou” ⇒ com a operação “+”; ordem - “tinha 569”, “depositou 383” ⇒ 569 + 383 e a univocidade, pois não há verbos antônimos.

A tarefa 13.2, ao contrário, não cumpre todas as condições: não há correspondência semântica, “depositou” ⇒ com a operação “-”; a ordem não é mantida, pois existe uma inversão das unidades significantes para resolver o problema – “tinha 469”, “tem 938” ⇒ 938 – 469; a univocidade existe, pois não há verbos antônimos.

Ainda há a idéia comparativa associada à subtração, que ocorre quando se compara agrupamentos para que fiquem com a mesma quantidade, o que ocorre na Tarefa 14, a seguir:

Tarefa 14: Ação de comparar **Natureza: Exploração/investigação**

14.1 Observar os preços de quatro modelos de carros da Marca XY, em 2 anos consecutivos:

Modelo	Popular	Médio	Luxo	Utilitário
Ano 2005	12 000+ 356	16 550	2DM+8UM+5C	$2x10^4+1x10^3+3x10^2+8x10^1+5x10^0$
Ano 2006	13 050	16 mil	20 000+9 000+300+80+5	Vinte mil novecentos e setenta

Os preços estão registrados de diferentes formas. Escreva todos os números formados utilizando todos os registros de representação semiótica explicitados na tabela. Por exemplo: 13050 = 13 mil e cinqüenta = 13000+50=treze mil e cinqüenta=$1x10^4+3x10^3+0x10^2+5x10^1+0x10^0$=1DM+3UM+5D=13000+50.

Em seguida escolher o registro de representação mais adequado para responder as questões abaixo.

14.2 Qual a diferença de preço do modelo popular entre os anos de 2005 e 2006?

14.3 Qual a diferença de preço do modelo utilitário entre os anos de 2005 e 2006?

14.4 O modelo médio custou em 2005 quanto a mais que no ano de 2006? Explique a opção da operação utilizada para resolver esta questão.

14.5 O modelo luxo custou em 2005 quanto a menos que no ano de 2006?

14.6 O modelo popular em 2007 custa R$ 158,00 a menos que em 2006. Qual é o preço do modelo popular em 2007?

14.7 Quais operações foram utilizadas para resolver os itens 14.2 a 14.6? Qual o sentido dessasoperações nas questões? Argumentar em favor da resposta.

Quanto à natureza da Tarefa 14, podemos dizer que se trata de uma exploração (ou investigação dependendo do nível da turma), pelo fato da seqüência de exercícios apresentar uma estrutura interna que possibilita o aluno construir hipóteses e observar um sentido diferente do usual (ação de tirar) para a operação de subtração.

Quanto à questão das representações semióticas utilizadas, observamos que a tarefa procura explicitar uma das atividades cognitivas presentes no processo da *semiosis*, referente à formação de representações identificáveis como registros. Isso porque conduz o aluno a observar as regras de conformidade, relativas a cada registro utilizado, e à possibilidade de tratamentos a efetuar em cada um deles, visto que, por exemplo, a língua natural não permite um tratamento algoritmizável, por se tratar de um registro multifuncional (DUVAL, 2003).

A realização da tarefa exige também várias transformações inter-registro (tratamento) e intra-registro (conversões), apresentando diferentes níveis de congruência e não-congruência semântica. Esses fatos levam a dizer que a tarefa apresenta um custo cognitivo elevado, pois a passagem de um registro a outro não é simples nem evidente.

Em relação aos conceitos de multiplicação e divisão, Nunes et al (2005) colocam que ambos têm origem em esquemas de ação de correspondência um-a-muitos e de distribuir, o que vem ao encontro da premissa de Vergnaud (1991), que distingue as relações que comportam uma multiplicação ou uma divisão como categorias das relações multiplicativas. Sendo assim, a Matemática Escolar deve privilegiar situações onde tais relações possam ser favorecidas, uma vez que, de um modo geral, ao resolver problemas de raciocínio multiplicativo, “[...] estamos buscando um valor numa variável que corresponda a um valor dado na outra variável” (NUNES et al, 2005, p. 85). Em outras palavras, podemos dizer que o invariante conceitual do raciocínio multiplicativo é a existência de uma relação fixa e constante entre duas variáveis, o que permite o raciocínio dedutivo na resolução de problemas multiplicativos.

A tradição curricular e a prática pedagógica, em muitos países, basearam-se por muito tempo no pressuposto de que o conceito de multiplicação originou-se na idéia de adição repetida de parcelas iguais. Entretanto, do ponto de vista conceitual, há uma diferença significativa entre o raciocínio aditivo e o multiplicativo, partindo, como vimos de seus invariantes conceituais.

Nas propostas curriculares analisadas nesta tese, observamos orientações diferentes, que encaminham para o desenvolvimento dos vários aspectos da multiplicação e divisão. Por conta disso, as tarefas de 15 a 23, além de estarem sustentadas na base teórica desta investigação, basearam-se em alguns encaminhamentos sugeridos principalmente nos PCN e nos *Principles and Standards for School Mathematics.*

Nehring (1996) estudou em sua dissertação de mestrado os registros de representação, associados à compreensão da multiplicação, e propôs que, para isso, é necessário levar em conta 3 aspectos: o sentido da operação que vai envolver os diferentes significados da multiplicação, gerando registros de representação específicos; o significado operatório dos algoritmos que se refere à significação do signo, diretamente ligado ao seu uso, e, portanto, aos tratamentos a efetuar; e a utilização da operação em uma situação extra-matemática, para fins de modelização. Essas mesmas considerações podem ser estendidas para o caso da operação de divisão, salientando que outros serão os registros de representação utilizados.

Tarefa 15 : Possibilidade de ocorrência **Natureza: Modelagem**

15.1 Solicitar aos alunos que em grupos de 2 ou 3 façam uma pesquisa sobre todos os tipos de comida e bebida que a cantina da escola possui para fazer a merenda escolar.

15.2 Solicitar que organizem os dados obtidos e montem um modelo que explique todas as possibilidades de cardápio para o lanche dessa escola. Para isso poderão utilizar diversas representações, desenhos, esquemas, relatórios.

15.3 Comparar as representações dos alunos e introduzir o registro de representação por possibilidade de ocorrência (a árvore de possibilidades).

15.4 Solicitar que determinem quantos dias será possível a merendeira preparar merenda diferente, sabendo que ela deve usar um tipo de bebida e uma qualidade de comida, sem repetir a combinação.

15. 5 Após a realização de todos os itens da tarefa apresentar o problema[41]:

"Seu Antonio comprou duas calças uma azul e outra preta. Além das calças comprou quatro camisas de cor diferente: uma branca, uma amarela, uma vermelha e uma cinza.

a) Como podemos mostrar todas as maneiras diferentes que Seu Antonio tem de se vestir, usando sempre uma calça e uma camisa?

b) Quantas cores de calça?

c) Quantas cores de camisa?

d) Quantas maneiras diferentes de se vestir?

e) Cálculo matemático:"

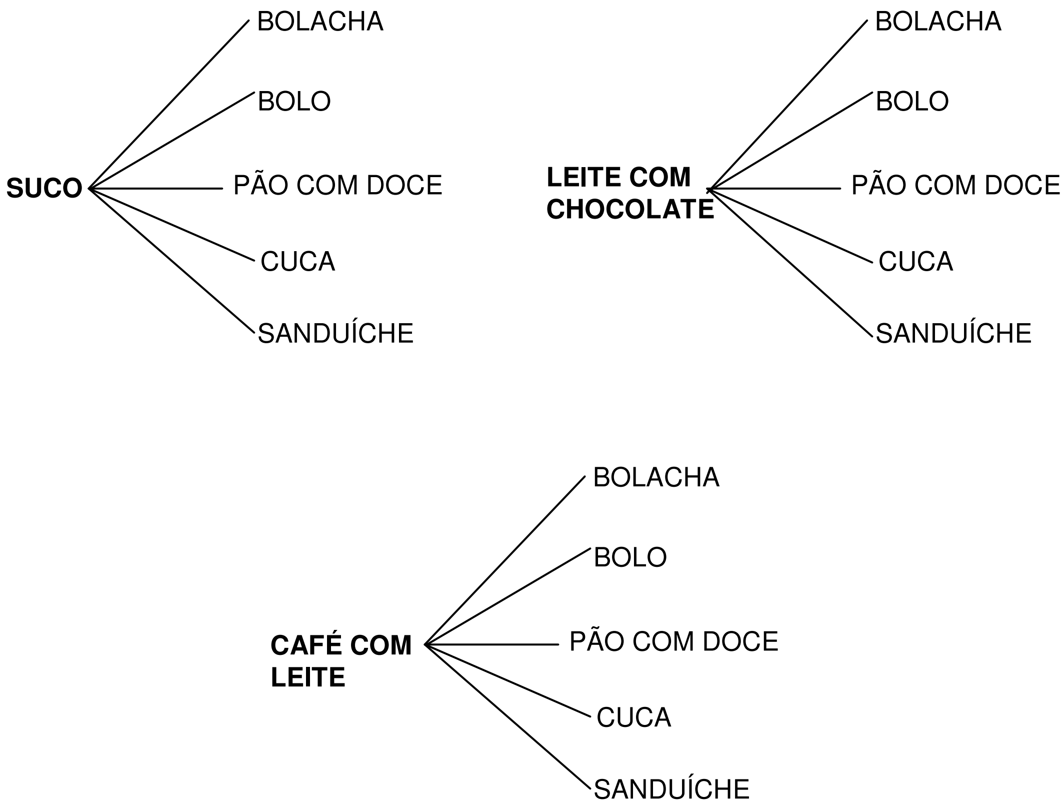
A Tarefa 15 foi categorizada como modelagem por se tratar de um problema relacionado diretamente ao cotidiano dos alunos e demandar de estratégias não visíveis de forma espontânea, ao mesmo tempo em que os resultados encontrados poderão servir de modelo para outros problemas semelhantes.

[41] Retirado integralmente de NEHRING (1996, p. 212).

O registro de representação envolvido nessa tarefa é o de possibilidade de ocorrência que, conforme Nehring (1996), está relacionado ao sentido combinatório da multiplicação, ou seja, envolve a idéia do cálculo de possibilidades ou combinações possíveis.

Os PCN colocam que o sentido combinatório também pode ser encontrado em situações que envolvem a divisão, citando o seguinte exemplo: “No decorrer de uma festa, foi possível formar 12 casais diferentes para dançar. Se havia 3 moças e todas elas dançaram com todos os rapazes, quantos eram os rapazes?” (BRASIL, 1998, p. 111). Nesse caso, é preciso determinar a quantidade de elementos de uma coleção finita, organizada como uma contagem de casos possíveis.

Na Tarefa 15, se fossem encontradas, por exemplo, as seguintes qualidades de comida: bolacha, pão com doce, sanduíche, bolo, cuca; e de bebida: suco, leite com chocolate, café com leite, poderiam ser construídas as seguintes árvores de possibilidades, relacionadas à operação 3x5:



A mesma tarefa poderia ser representada pelo registro de representação por matriz de dupla entrada:

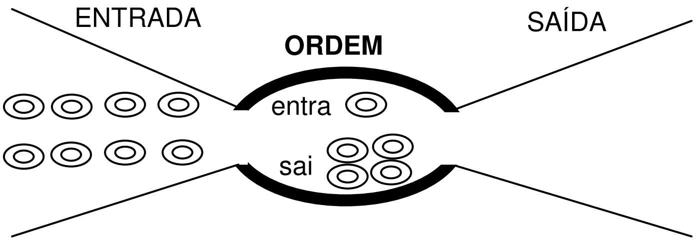
	SUCO	LEITE COM CHOCOLATE	CAFÉ COM LEITE
BOLACHA	Bolacha-suco	Bolacha-leite com chocolate	Bolacha-café com leite
BOLO	Bolo-suco	Bolo-leite com chocolate	Bolo-café com leite
PÃO COM DOCE	Pão-suco	Pão-leite com chocolate	Pão-café com leite
CUCA	Cuca-suco	Cuca-leite com chocolate	Cuca-café com leite
SANDUÍCHE	Sanduíche-suco	Sanduíche-leite com chocolate	Sanduíche-café com leite

Segundo Nehring (1996), esse registro, por utilizar uma disposição espacial (figural) para representar o cruzamento de informações, utiliza a idéia da bidimensionalidade. Isso permite o trabalho com aspectos referentes à: organização espacial; percepção de diferentes atributos em um objeto em relação a outros; classificação concomitante segundo duas ou mais classificações aditivas (cruzamento de classes); relação entre dois critérios de um mesmo objeto e reconhecimento do quadro matricial com dupla entrada n por m (n= número de colunas e m=número de linhas).

Todavia, Nehring (1996) observou em sua pesquisa que esse registro não auxilia a compreensão da operação de multiplicação, em relação ao sentido da operação, e é gerador de grandes dificuldades por parte dos alunos. Por conta disso, acrescenta que é necessário trabalhar tarefas em que o registro de representação de matriz por dupla entrada apareça, para favorecer o entendimento de classes e relações entre classes.

Tarefa 16 :Repetições **Natureza: Problema**

O desenho abaixo representa uma máquina que transforma quantidade de peças. Observe a ordem desta máquina e desenhe o que deverá sair no resultado.



A Tarefa 16 envolve um tratamento figural que poderá ser convertido em seguida para um registro simbólico numérico, permitindo então um tratamento algorítmico. O sentido da operação multiplicação enfatizado nessa tarefa é o da repetição de grupos com a mesma quantidade (idéia multiplicativa). A classificação da tarefa como problema se deve ao fato da mesma, apesar de indicar perfeitamente o que é pedido, apresentar um nível de dificuldade elevado quando se tratar de iniciantes no estudo da multiplicação, caso contrário pode ser pensada como um exercício. Além disso, a tarefa apresenta um grau elevado de não-congruência semântica.

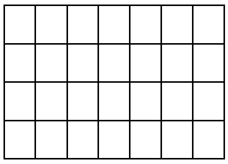
Tarefa 17: Área **Natureza: Exercício**

17.1 Observar a sala de aula abaixo. Qual é o total de carteiras[42]?

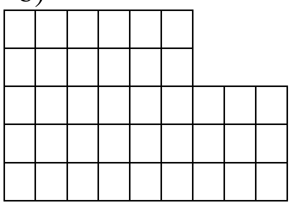
[42]Tarefa retirada de DANTE, L.R. **Tudo é matemática:** ensino fundamental. São Paulo: Ática, 2005.

17.2 Escrever como é possível determinar, e determinar o número de quadradinhos que possui as figuras abaixo:

a)



b)



A Tarefa 17 foi categorizada como exercício por apresentar os dados e objetivos de forma clara e apresentar uma estrutura fechada. Quanto ao sentido da operação de multiplicação trabalhado, refere-se à disposição espacial retangular, necessitando da contagem dos grupos de elementos, dispostos em colunas e linhas. Com esse registro, é possibilitado o reconhecimento das posições verticais e horizontais, da multiplicação como determinação de uma superfície (área) e a diferenciação espacial da multiplicação de 1xc e cx1 (propriedade comutativa) (NEHRING, 1996).

O objetivo da tarefa (itens 17.1 e 17.2a) é trabalhar com o princípio multiplicativo, que fornece a idéia do todo da figura, sem recorrer à decomposição em partes (princípio aditivo). Em outras palavras, se pretende que o aluno realize uma conversão do registro de representação por área, que não permite um tratamento algoritmizável por se tratar de uma representação multifuncional não-discursiva, para um registro simbólico numérico no qual é possível realizar um tratamento algorítmico.

O item 17.2b apresenta a mesma característica quanto à questão das representações semióticas, acrescentado ao fato de que duas operações serão necessárias para a resolução desta questão, o que eleva o seu grau de dificuldade.

Assim, é preciso efetuar primeiro um tratamento figural, com a decomposição da figura em duas partes, para então realizar a conversão para o registro simbólico numérico determinando a quantidade de quadradinhos em cada parte da figura, e, então, agrupá-la novamente para determinar o todo, ou seja, somar os resultados determinando o todo da figura.

Tarefa 18: Proporcionalidade **Natureza: Problema**

18.1 Se um pacote com 6 canetas custa R$ 12,00, quanto Joana vai gastar para comprar 18 canetas? Resolva o problema usando desenhos e uma operação algorítmica.

18.2 E 20 canetas? E 35 canetas? E 42 canetas? Explique os procedimentos utilizados para encontrar o preço das canetas em cada caso.

A idéia envolvida nos itens 18.1 e 18.2 é a de proporcionalidade na multiplicação. No primeiro item, temos uma situação em que o aluno deve perceber que comprará o triplo de canetas e que deverá pagar, se não houver desconto, o triplo do valor inicial, sem precisar encontrar o preço de uma caneta para depois calcular o preço de 18. Isso não ocorre nas duas primeiras perguntas do item 18.2, no qual é necessário descobrir o valor de uma caneta para depois calcular o preço de 20 e de 35.

O desenvolvimento de tarefas que envolvam o sentido da proporcionalidade direta na operação de multiplicação, em que o quociente entre as quantidades que se correspondem é constante, permite que os alunos construam procedimentos não-convencionais (outras representações) para resolver problemas desse tipo antes mesmo de compreender e utilizar os procedimentos convencionais como a regra de três (BRASIL, 1998).

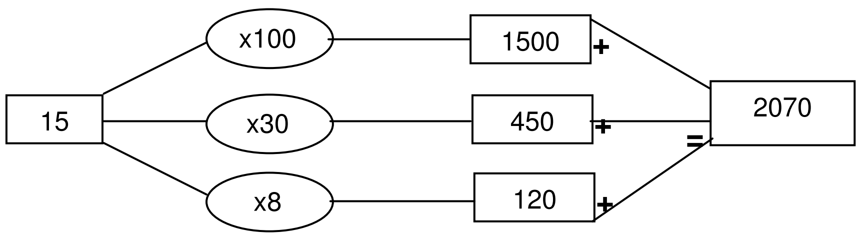
Os registros de representação envolvidos nessa tarefa são: a língua natural, o simbólico numérico e o figural.

Em relação ao significado operatório dos registros algorítmicos Nehring (1996) apresenta 3 tipos: a representação algorítmica por matriz, por operadores e por cálculo.

A representação por matriz (ou por decomposição) leva em consideração a propriedade distributiva da multiplicação, o sistema de numeração posicional e a base 10. Para a multiplicação 15x138, temos:

	100	**30**	**8**	
10	1000	300	80	
5	500	150	40	
	+	+	+	
	1500	450	120	= 2070

A representação por operadores é uma representação espacial, tratada como uma transformação determinada pelo segundo fator da multiplicação, que na verdade, é o que determina a quantidade de elementos em cada grupo:



E por fim, a representação por cálculo, o algoritmo formal da multiplicação, isto é, a operação representada num registro mais simplificado, que exige o reconhecimento do sistema de numeração posicional na base 10 e a propriedade distributiva da multiplicação:

$$\begin{array}{r} 138 \\ \underline{x15} \\ 690 \\ \underline{1380} + \\ 2070 \end{array}$$

Nehring (1996), apoiada em Duval, afirma que após o aluno conhecer e compreender os tratamentos característicos para cada registro de representação, torna-se importante a coordenação entre eles para existir a real compreensão do conceito de multiplicação. Isso porque, conforme Duval (1995), por melhor que seja um determinado registro de representação, ele nunca será completo, pois representa apenas em parte o objeto em estudo e, por essa razão, torna-se necessária a utilização dos vários registros no ensino da Matemática Escolar.

Tarefa 19: Idéias envolvendo a divisão **Natureza: Exercício**

19.1 A mãe de Luiz quer repartir igualmente R$ 57,00 reais entre seus 3 filhos, Ana, Roberto e André. Quantos reais cada um irá receber?

19.2 Numa[43] granja os ovos são colocados em caixas de 1 dúzia. Quantas caixas são necessárias para embalar 192 ovos?

A Tarefa 19 apresenta, nos dois itens, uma estrutura fechada e os dados de forma clara, com um caminho visível a ser seguido e, por isso, foi classificada como exercício, apesar do primeiro item apresentar um nível de dificuldade menor que o segundo. No entanto, apresentam duas idéias fundamentais da operação de divisão, que devem ser tratadas na escola para atribuir sentido à operação: a idéia repartitiva e a idéia subtrativa ou de medida. O item 19.1 envolve a idéia de repartir quantidades para que cada grupo fique com a mesma quantidade, ou seja, o sentido repartitivo da divisão, comumente mais usual. O item 19.2 trata da distribuição de grupos com a mesma quantidade ou quantas vezes uma quantidade "cabe" em outra, o que caracteriza o sentido subtrativo ou de medida.

Quanto à análise semiótica, as tarefas explicitam casos de congruência e não-congruência nas conversões inter-registros. A tarefa 19.1 cumpre as condições de congruência semântica: há correspondência semântica, "repartiu" $\Rightarrow$ com a operação "$\div$"; a ordem é mantida – "repartiu 57", "entre 3 filhos" $\Rightarrow$ $57 \div 3$; a univocidade existe, pois para cada unidade significante do registro a converter há apenas uma unidade significante possível no registro de chegada.

[43]Adaptado de DANTE, L.R. **Tudo é matemática:** ensino fundamental. São Paulo: Ática, 2005.

Em relação ao item 19.2, observamos um caso de não-congruência, visto que as unidades significantes elementares do registro de partida “são colocados” e “quantas são” não correspondem semanticamente às unidades elementares do registro de chegada “÷”. Além disso, há uma inversão na organização das unidades significantes na resolução do problema: “são colocados [...] 1 dúzia” e “quantas são [...] 192” ⇒ 192 ÷ 12, lembrando ainda que nesse caso há a necessidade da conversão dúzia ⇒ 12.

Tarefa 20:Potenciação **Natureza: Investigação**

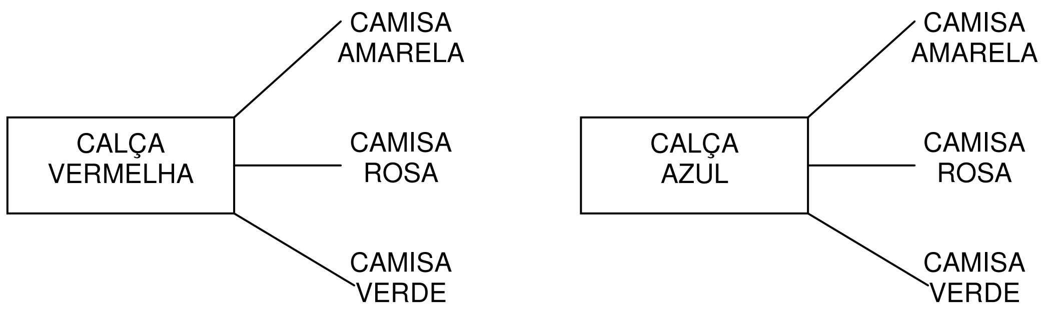
Na escola onde Julia, Amanda e Lucia estudam há uma horta. As três amigas tiveram a idéia de construir um espantalho para colocar nela. Julia fez um desenho de como seria o espantalho e Amanda e Lúcia deram algumas sugestões: calça: vermelha, azul ou cinza e camisa: amarela, rosa ou verde

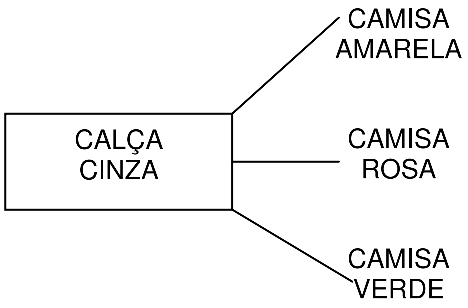
As amigas ficaram na dúvida em relação à cor da calça e da camisa. Resolveram então fazer a combinação entre as cores da calça e da camisa para saber qual seria a preferida. Cada uma delas usou um método diferente.

Representação de Julia:

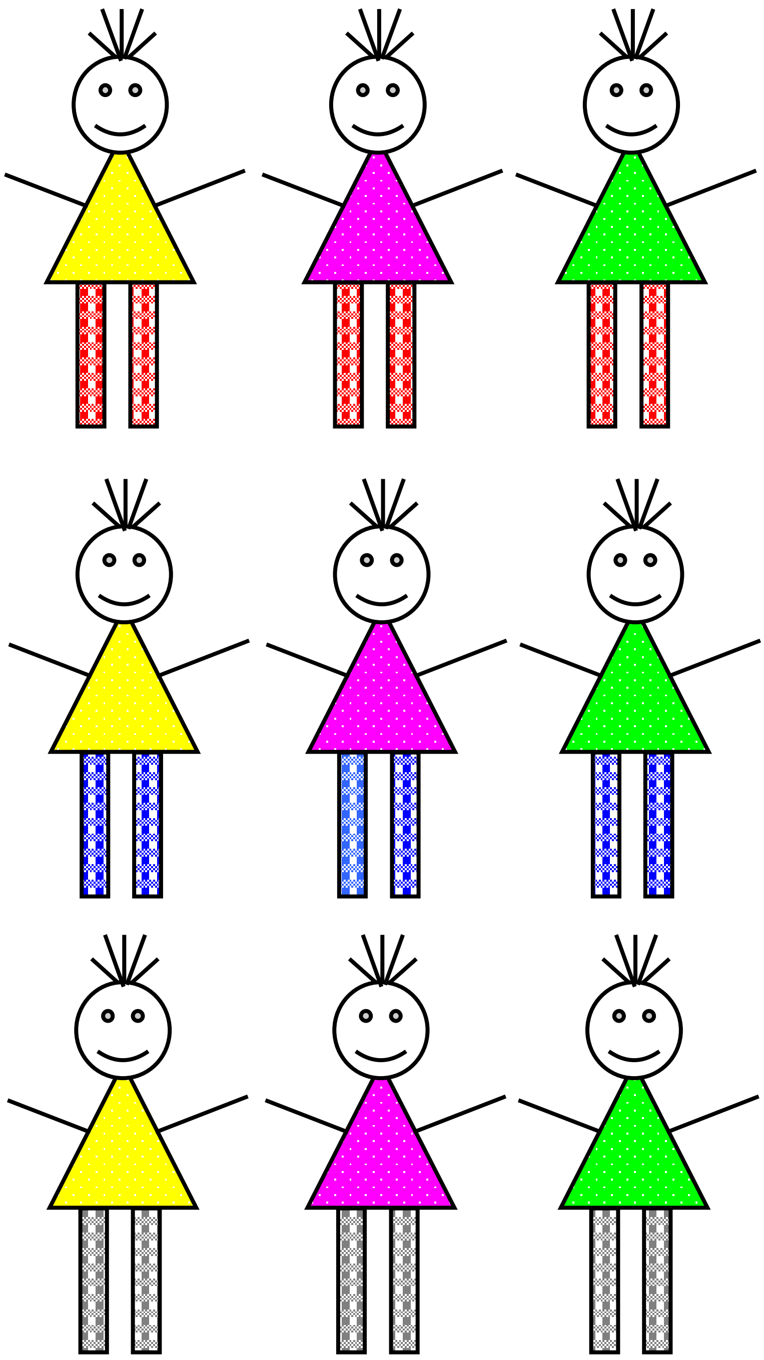
	CAMISA AMARELA	CAMISA ROSA	CAMISA VERDE
CALÇA VERMELHA	Calça vermelha/camisa amarela	Calça vermelha/camisa rosa	Calça vermelha/camisa verde
CALÇA AZUL	Calça azul/camisa amarela	Calça azul/camisa rosa	Calça azul/camisa verde
CALÇA CINZA	Calça cinza/camisa amarela	Calça cinza/camisa rosa	Calça cinza/camisa verde

Representação de Amanda:





Representação de Lúcia:



a) Quantas combinações de cores podem ser feitas?

b) Por meio de uma multiplicação, registre a quantidade de combinações diferentes de cores que podem ser feitas.

* Nessa multiplicação, os fatores são iguais?

* Quantas vezes esses fatores foram repetidos?

c) É possível representar o resultado encontrado usando outra operação matemática? Como?

Essa tarefa apresenta várias representações da multiplicação e objetiva desenvolver o conceito de potenciação com os números naturais relacionado ao sentido de multiplicações sucessivas de fatores iguais. Esse tipo de situação é freqüente em problemas de contagem e favorece a explicitação da presença da potenciação no Sistema de Numeração Decimal, por exemplo:

21 385=20 000+1 000+300+80+5;

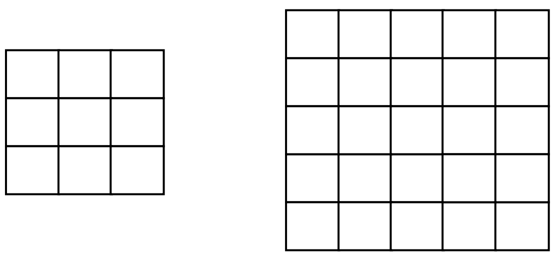
21 385=2x10000+1x1000+3x100+8x10+5;

21 385= $2x10^4+1x10^3+3x10^2+8x10^1+5x10.^0$

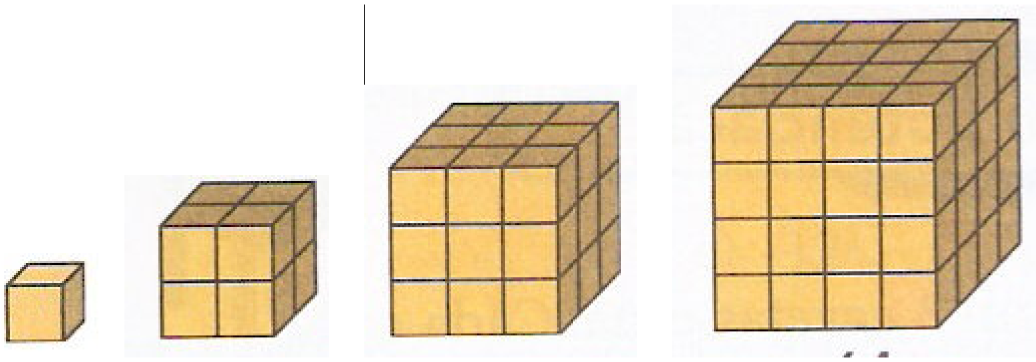
Tarefa 21: Potenciação **Natureza: Problema**

Represente por meio de, no mínimo duas operações matemáticas:

a) A quantidade de quadradinhos que forma cada figura:



b) A quantidade de cubinhos que formam cada figura;



A Tarefa 21 explicita uma representação figural ou geométrica e procura forçar a realização da operação de potenciação ao solicitar duas operações matemáticas que representem as figuras. Para isso, é preciso converter a representação figural para a representação numérica.

Uma outra tarefa de investigação, já citada neste estudo, na página 63 do Capítulo 3, mostra algumas regularidades encontradas na potenciação, a partir de seqüências apresentadas em tabelas.

Tarefa 22: Excursão **Natureza: Projeto**

As turmas de formandos do Ensino Fundamental da Escola Juvenal Cardoso querem fazer uma excursão para a qual estão programando: visita a um parque temático (primeiro dia), visita ao zoológico (segundo dia) e sessão de teatro (último dia). Para isso, essas turmas irão realizar um trabalho de pesquisa, durante o primeiro semestre do ano, e apresentar propostas de roteiros que viabilizem a programação escolhida, para seus colegas e para a orientação da escola, com o objetivo de escolher a proposta mais viável economicamente e que agrade a todos os formandos. Para isso, deverão organizar-se em grupos para realizar as seguintes tarefas:

a) descobrir quantos participantes serão;

b) pesquisar quantos ônibus serão necessários para levar o número de participantes;

c) pesquisar roteiros que ofereçam as programações escolhidas pela turma;

d) pesquisar conhecimentos;

e) pesquisar o preço dos ônibus em no mínimo duas empresas diferentes para realizar o roteiro;

f) pesquisar o preço das refeições e hotéis;

g) pesquisar o preço do ingresso do parque, da peça de teatro e do zoológico, observando possíveis descontos para blocos de 10 ingressos ou mais;

h) propor um determinado valor para despesas extras, de acordo com o roteiro sugerido;

i) organizar a proposta em planilhas e apresentar na escola no final da pesquisa, observando o valor cultural dos roteiros.

O desenvolvimento dessa tarefa pode possibilitar a utilização de diversas representações semióticas e exigir tratamentos e conversões, nem sempre congruentes, elevando o custo cognitivo da mesma. Dependendo dos resultados encontrados por cada grupo, várias operações estarão sendo realizadas, e as idéias envolvendo o sentido de cada uma delas provavelmente serão suscitadas. O projeto, como tarefa escolar, também permite aos alunos irem além das expectativas projetadas, participando de forma ativa de atividades que ocorrem dentro e fora do contexto da escola.

A apresentação do conjunto destas tarefas constitui-se numa tentativa de aproximação dos estudos teóricos desenvolvidos nesta tese à proposição curricular elaborada. São exemplos que podem ser articulados na efetivação da proposta e encarados como orientações metodológicas.

Este capítulo procurou mostrar, através da proposição curricular elaborada para os Números Naturais, a articulação de nossas reflexões em torno das representações semióticas e do currículo. Como já dissemos, não pretendemos que este ensaio tenha um caráter de prescrição, mas sim que possa indicar elementos para orientação do trabalho com a Matemática Escolar.

REFLEXÕES FINAIS

Eu sei de muito pouco. Mas tenho a meu favor tudo o que eu não
sei e – por ser um campo virgem – está livre de preconceitos.
Tudo o que não sei é a minha parte maior e melhor: é minha largueza.
É com ela que eu compreenderia tudo.
Clarice Lispector. A descoberta do mundo

Ao chegarmos a estas reflexões finais, podemos afirmar que sabemos um pouco mais daquilo que nos propomos a investigar, mas que há, ainda, muito o que saber. Isso nos dá a certeza de que o caminho construído até aqui serve como um início para novas caminhadas, pois são esses percursos, que vão surgindo e ampliando-se, que nos possibilitam compreender o mundo e atuar sobre ele.

Não chegamos a conclusões finais nesta tese, no estrito significado do termo. Como dissemos no primeiro capítulo, este estudo está sustentado em pesquisas. E pesquisas caracterizam-se pelo movimento dialético: servem de base para outras, podem ser complementadas ou substituídas e, deste modo, o que propomos são reflexões finais, e não conclusões definitivas. Reflexões estas que procuram sintetizar o que discutimos nos 4 capítulos que compuseram nossa tese, além de destacar os desmembramentos que podem surgir a partir desta investigação.

A problemática desta pesquisa envolveu a questão da importância das representações semióticas para a aprendizagem da matemática. E, partindo dessa premissa, a importância de considerar nos currículos de matemática, tarefas escolares que suscitem representações semióticas diversas dos objetos em estudo.

Para isso investigamos sobre a importância das representações semióticas para o desenvolvimento da Matemática Escolar, especificamente sobre a contribuição dos estudos de Duval. Também realizamos uma investigação baseada nas pesquisas que se fundamentaram na teoria dos RRS desenvolvida por esse autor, as quais apontaram, de um modo geral, para a proficuidade desta teoria para o processo de ensino e aprendizagem da matemática. Muitos dos estudos, inclusive, analisaram e sugeriram a incorporação de tais idéias, de forma sistematizada, na formação de professores e nos currículos.

Duval (1995, 2003) defende que só há uma efetiva compreensão dos objetos matemáticos quando o aluno consegue transitar entre os diversos registros de representação semiótica de forma espontânea, e consegue escolher o registro mais econômico para a resolução de uma determinada tarefa. Há que se considerar, no entanto, que o fato de um aluno utilizar o registro mais econômico na resolução de uma tarefa, não significa que ele realmente coordenou os demais registros e compreendeu o objeto matemático em estudo.

Para saber se essa compreensão realmente existiu, necessário se faz apurar a análise e observar a conduta do sujeito em outras tarefas, ou, utilizando Vergnaud (1996), em várias situações constituintes do Campo Conceitual estudado. Ao estudarmos as teorias de Duval, percebemos que ele não aborda sobre questões referentes a atividades diversificadas em sala de aula ou relacionadas ao contexto das tarefas escolares. É nesse ponto que buscamos a utilização da noção de situação da TCC de Vergnaud (1990), para buscar a referência dos objetos nas diferentes situações e atribuir significado a eles.

Outra questão que se impõe é o fato de que acreditamos que as várias representações semióticas dos objetos são reveladas por e nas diferentes situações (tarefas escolares), e isso é essencial à aprendizagem, mesmo que não se pretenda que o aluno venha escolher o registro mais econômico. E nesse ponto se coloca a busca pela categorização das diferentes situações, no sentido de Vergnaud (1990) com o aporte teórico de Ponte (2005). Estes estudos teóricos fortaleceram nossa hipótese de pesquisa e propiciaram o necessário embasamento para a elaboração da proposta curricular.

Além disso, buscamos articular duas propostas teóricas, em princípio sem possibilidades de conexões, como as de Duval e Vergnaud, destacando elementos que poderiam complementar-se na realização das tarefas escolares. Assim, as situações diversas que fornecem o sentido dos conceitos matemáticos (Vergnaud) viabiliza o trabalho com as múltiplas representações semióticas dos objetos matemáticos (Duval). E isso, pode contribuir para a melhoria da aprendizagem matemática, pois vários aspectos do mesmo conceito estarão em jogo.

Essas idéias forma pensadas para compor uma proposição curricular configurada em rede, por acreditarmos que esta se aproxima do conceito de currículo dinâmico e inacabado que vai se constituindo conforme as escolhas, do caminho a seguir, vão sendo realizadas. Nos nós da rede, representados pelos conteúdos e temas matemáticos, foram explicitados e evidenciados, sempre que possível, as representações semióticas envolvidas. E nos exemplos de tarefas de diferentes tipos, se fez a análise envolvendo as representações semióticas, como orientações metodológicas que podem acompanhar a proposição curricular.

Acreditamos que a construção de currículos, inspirados na idéia de rede, pode fornecer ao planejamento de uma aula de Matemática Escolar um novo significado, o que pressupõe novas formas de elaboração.

O caminho metodológico trilhado até a elaboração da proposta apresentada no último capítulo foi fundamental, pois envolveu pesquisa teórica e empírica, sustentando nossas idéias acerca da articulação das representações semióticas e das situações nos currículos. Os estudos teóricos permearam todo o trabalho e os dados empíricos foram representados pela análise dos currículos e pelas pesquisas de dissertações e teses referentes à temática desta tese: representações semióticas e currículos de matemática.

Os resultados dessas pesquisas nos mostraram que no estudo, no ensino, na aprendizagem da matemática não há como prescindir das representações semióticas. O que buscamos mostrar nesta tese, no entanto, é que não se dá a devida importância às múltiplas representações e às conversões entre elas, e que isso é importante considerar, desde as propostas curriculares até sua concretização na sala de aula.

Observamos que propostas curriculares recentemente revisadas, como a de Portugal (2007), já se encaminham a essa direção e procuram explicitar o trabalho com as múltiplas representações semióticas dos objetos matemáticos. O NCTM (2000), dos EUA, também já orienta nesse sentido, mas não de forma tão específica. No Brasil, esse movimento parece ainda ser inexpressivo em propostas oficiais, mas com o desenvolvimento crescente de pesquisas nessa área, apostamos em reformulações que venham considerar o valor do trabalho que envolva tais noções.

A partir dos resultados dos nossos estudos, inferimos ainda que tratar os objetos matemáticos escolares por meio de seus múltiplos registros de representação, realizar conversões entre os registros, considerar o nível de congruência semântica das tarefas e considerar diferentes tipos de tarefas são ações que podem contribuir significativamente para a melhoria do processo de ensino-aprendizagem da matemática. afinal, está-se tratando de aspectos cognitivos relacionados às especificidades da matemática. Sendo assim, a inclusão dessas ações em propostas curriculares é viável e possível, como foi mostrado no capítulo 4.

No entanto, os resultados das pesquisas analisadas e dos referenciais teóricos estudados apontam que não bastam apenas atividades bem elaboradas, seqüências de ensino bem estruturadas, pois elas, por si mesmas, não garantem o acesso ao saber. Ou seja, não se pode reduzir o complexo processo de aprendizagem da matemática ao jogo de trânsito e conversões de registros de representação semiótica. Essas operações são importantes, mas devem ser consideradas em concordância com outros componentes da aprendizagem, tais como a natureza das tarefas escolares, aspectos afetivos envolvendo a aprendizagem da matemática, condições socioeconômicas dos alunos, dentre outros.

Com a proposição curricular sendo elaborada sobre os Números Naturais, foi possível verificar também que a explicitação das várias representações dos números e dos conteúdos, que envolvem esse tema, amplia o universo de tarefas que podem ser desenvolvidas, ao mesmo tempo em que, na organização de alguns exemplos de tarefas de diferentes naturezas, pode proporcionar e evidenciar a utilização de representações variadas.

Também refletimos que, a partir desse exemplo, possam estar sendo desenvolvidos outros, com outros campos da Matemática. Assim, acreditamos que é importante repensar a abordagem curricular sobre os Números Naturais, reconsiderando o papel das representações semióticas e das diferentes tarefas no desenvolvimento delas.

Reiteramos o fato de não termos encontrado nenhuma pesquisa que articulasse questões relativas à importância de considerar as representações semióticas nas propostas curriculares. Assim, acreditamos que este estudo vem contribuir para que se coloque tais idéias em discussão. Com isso, não pretendemos, de forma alguma, invalidar os trabalhos de orientação e reorientação curricular que foram e vêm sendo desenvolvidos. Nossa intenção é, ao contrário, contribuir no sentido de agregar elementos para a construção dos currículos e, assim, provocar reflexões sobre o ensino da Matemática Escolar. Isso porque a elaboração de um currículo para um curso ou disciplina é uma tarefa complexa, que possui implicações interdisciplinares e que não pode ser trabalho para uma única pessoa ou um grupo restrito. Conforme Pires (2000), é uma tarefa com implicações cada vez mais complexas, que requer o concurso de especialistas de áreas diversas, num trabalho interdisciplinar.

O que queremos levantar nesta tese são possibilidades, pois não se tem a intenção de responder questões definitivamente, mas de suscitá-las, provocando reflexões, tanto do ponto de vista da prática pedagógica, como de novas pesquisas sobre o assunto.

De um modo geral, podemos dizer que discutir a inserção da representação semiótica, no âmbito da organização de propostas curriculares voltadas para o ensino fundamental, proporciona ao professor, em primeira instância, a utilização dos resultados dessas reflexões, dos elementos teóricos e práticos para estruturar os saberes ensinados na escola em uma perspectiva cognitiva e epistemológica. Isso porque permite refletir sobre os fundamentos da Matemática e da aprendizagem da Matemática, podendo contribuir consubstancialmente ao desenvolvimento de uma educação matemática mais próxima daquela que pensamos ser, se não a ideal, a melhor possível.

Sabemos que, qualquer que seja o seu papel, mais inovador ou mais conservador, o professor é o principal protagonista do desenvolvimento do currículo. Essa relação está longe de ser uniforme, pois são as escolhas, o empenho, a inserção e aceitação de novas idéias que vão determinar os resultados de qualquer mudança curricular.

Sacristán (1998) coloca que do currículo prescrito nos documentos oficiais ao currículo realizado na sala de aula há uma grande distância. Cada professor, inserido no seu contexto profissional e capitalizando a sua experiência, modela o currículo que põe em prática, em relação ao qual sente graus de liberdade muito variáveis. Sabemos e concordamos com tal fato, por isso reiteramos que nosso trabalho não pretende prescrever um currículo, mas pretende, sim, suscitar reflexões.

Assim, o valor de um currículo ou de uma proposta de mudança curricular apenas se comprova quando se concretiza. Nesse ponto, acreditamos que nosso estudo apresenta uma limitação, pois não testou as reflexões discutidas. Por essa razão, é que entendemos que nosso trabalho não termina nos limites destas páginas. Como desdobramentos, vislumbramos a continuidade das investigações, agora no sentido da formação de professores, fazendo uso dos referenciais teóricos e do exemplo da proposição curricular, no sentido de colocar em prática os resultados desta pesquisa.

Além disso, entendemos, como um outro possível desdobramento, a extensão das redes elaboradas para outras áreas do conhecimento, possibilitada pelas diferentes tarefas. E também a elaboração de outras redes com as demais áreas da Matemática, explorando os diferentes tipos de tarefas e representações semióticas associadas.

Tudo isso nos faz refletir, portanto, que pensar o ensino da matemática, a partir dos pressupostos da diversidade de representações em matemática, das operações de tratamento e conversão entre esses registros e das diferentes tarefas escolares, pode ser um caminho que nos leve, professores de Matemática, a facilitar a compreensão desta disciplina pelos alunos.

Queremos dizer, enfim, que sabemos de muito pouco, mas, a nosso favor, temos tudo o que ainda não sabemos. Isso tudo é um campo virgem, passível de investigações futuras. E tudo o que não sabemos, nos dá a possibilidade de saber mais e nos deixa maiores, nos permite buscar respostas e compreender tudo...

****

REFERÊNCIAS

ABRANTES, P. **Intervenções em Educação Matemática.** Lisboa: Associação de Professores de Matemática – APM, 2005.

APM. **A renovação do currículo de Matemática.** Lisboa: Associação de Professores de Matemática – APM, 1988.

APM. **Matemática 2001**: diagnóstico e recomendações para o ensino e aprendizagem da Matemática. Lisboa: Associação de Professores de Matemática - APM, 1998.

APPLE, M. W.; WEIS, L. Vendo a educação de forma relacional: classe e cultura na sociologia do conhecimento escolar. **Educação e Realidade,** Porto Alegre, n.11, p.19-36, 1986.

ARCO-VERDE, Y. F. de Souza. **Reformulação curricular nas escolas públicas do Paraná.** Disponível em <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br> Acesso em 26 jan. 2006.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**. São Paulo: Contexto, 2002.

BECKER, F. **Epistemologia do professor***:* o cotidiano da escola. Petrópolis: Vozes, 1993.

BERTICELLI, I. A. Currículo: tendências e filosofia. In: COSTA, M. V. (Org.) **O currículo nos limiares do contemporâneo**. Rio de Janeiro: DP&A, 1998. (p. 159-176).

BIENBENGUTH, M. S.; HEIN, N. **Modelagem matemática no ensino.** São Paulo: Contexto, 2003.

BISHOP, A. J. **Enculturación matemática:** la educación matemática desde una perspectiva cultural. Barcelona: Paidós, 1991.

BITTENCOURT, J. Obstáculos epistemológicos e a pesquisa em Didática da Matemática. **Educação Matemática em Revista**, São Paulo, n. 6, p. 13-17, maio, 1998.

BITTENCOURT, J. Sentidos da integração curricular e o ensino de matemática nos Parâmetros Curriculares Nacionais**. Zetetiké**, São Paulo. v. 12, n. 22, jul./dez. 2004.

BOYER, C.B. **História da Matemática.** 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

BRANDT, C. F. Desenvolvimento histórico do sistema de numeração decimal e do processo de aprendizagem a partir das recentes concepções matemático-didáticas: erro e o obstáculo epistemológico. **Contrapontos – Revista de Educação da Universidade do Vale do Itajaí**, Itajaí, n. 6, p. 389-409, 2002.

BRANDT, C. F. **Contribuições dos registros de representação semiótica na conceituação do sistema de numeração.** Florianópolis, 2005. 241 f. Tese (Doutorado em Educação Científica e Tecnológica) – Centro de Educação, Ciências Físicas, Biológicas e Matemáticas, Universidade Federal de Santa Catarina.

BRASIL, **Lei n. 9.394,** de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as Diretrizes e Bases da Educação Nacional. Diário Oficial [da] República Federativa do Brasil. Poder Executivo, Brasília, DF, v. 134, n. 248, 24p. 23 de dezembro de 1996. Seção 1, Lei Darcy Ribeiro.

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: **Matemática – Ensino Fundamental de 1.ª a 4.ª séries.** 142 p. Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: **Matemática – Ensino Fundamental de 5.ª a 8.ª séries.** 148 p. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BROUSSEAU, G. Problémes de didactiques des décimaux. In: **Recherches em Didactique des Mathématiques**, v. 2, n. 3, p. 37-127. Grenoble, 1981.

BURAK, D. **Modelagem matemática:** ações e interações no processo de ensino-aprendizagem. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1992.

BURAK, D. Critérios norteadores para a adoção da Modelagem Matemática no Ensino Fundamental e Secundário. **Zetetiké**, v. 2, n. 2, 1994. p. 47-60.

BURAK, D. **A modelagem matemática e a sala de aula:** perspectivas para o ensino de matemática na educação básica. In: Anais do IX Encontro Nacional de Educação Matemática – ENEM. Belo Horizonte, 2007. 1 CD-ROM.

CARAÇA, B. **Conceitos fundamentais de Matemática.** 2. ed. Lisboa, Portugal: Gráfica Manuel Barbosa e Filhos, 1998.

CARDOSO, T. M. **Os significados da docência e a cultura da escola**. Disponível em: <http://www.anped.org.br/início.html> Acesso em 10 de outubro de 2004.

CARDOSO, T. M. **Cultura da escola e profissão docente:** inter-relações. Belo Horizonte: UFMG, 2001. Tese de Doutorado. p. 249-319.

CARVALHO, J. B. P. As propostas curriculares de matemática. In: BARRETTO, E. S. de Sá (Org.). **Os currículos do ensino fundamental para as escolas brasileiras.** 2. ed. Campinas: Autores Associados, 2000. p. 91-125.

COLOMBO, J. A. A.; LAGOS, M. L. (Orgs). **Problemas, quem não tem?** coletânea problemas matemáticos. Pato Branco: Imprepel, 2005.

COLOMBO, J. A. A.; FLORES, C. R.; MORETTI, M. T. Representações do número racional na formação de professores que ensinam matemática. In: **Anais do III Congresso Internacional de Ensino da Matemática – CIEM.** Canoas, 2005. 1 CD-ROM.

COLOMBO, J. A. A.; MORETTI, M.T. Registros de representação semiótica e o tema “Números e Operações” nas pesquisas brasileiras em Educação Matemática. In: **Anais do IV Congresso Internacional de Ensino da Matemática – CIEM.** Canoas, 2007. 1 CD-ROM.

CORNU, B. **Apprentissage de la notion de limite:** conceptions et obstacles. Thése de 3ÈME Cycle, Université de Grenoble 1, 1983.

CORRY, L. David Hilbert y su Filosofía Empiricista de la Geometría**. Boletín de la Asociación Matemática Venezolana**, v. ix, n. 1, p. 27-43, 2002.

DAMÁZIO, V. J. **O papel das representações semióticas na produção do conhecimento matemático e suas implicações na educação.** Florianópolis, 2006. Trabalho de Conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática.

D’ AMBRÓSIO, U. A pesquisa em educação matemática: da teoria à prática – da prática à teoria. In: **Actas do ProfMat 94.** Lisboa: APM, 1994, p. 17-23.

D’AMBRÓSIO, U. **Educação Matemática:** da teoria à prática. Campinas: Papirus, 1996.

DAMM, R. F. Registros de Representação. In: MACHADO, S. D. A. **Educação Matemática:** uma introdução. São Paulo: EDUC, 1999. p. 135-153.

DAMM, R. F. Representação, compreensão e resolução de problemas aditivos. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). **Aprendizagem em matemática:** registros de representação semiótica. Campinas: Papirus, 2003. p. 35-47.

D'AMORE, B. **Epistemologia e didática da Matemática.** Tradução de: Maria Cristina Bonomi Barufi. São Paulo: Escrituras, 2005.

D'AMORE, B. **Elementos de Didática da Matemática.** Tradução de Maria Cristina Bonomi. São Paulo: Livraria da Física, 2007.

DANTZIG, T. **Número:** a linguagem da ciência. Tradução de Sergio Góes De Paula. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1970.

DEMO, P. **Avaliação sob olhar propedêutico**. Campinas: Papirus, 1996.

DROZ, R. Les multiples racines des nombres naturels et leurs multiples interprétations. In: BIDEAU, J.; MELJAC, C.; FISCHER, J. P. **Les chemins du nombre.** França: Presses Universitaires de Lille, 1991.

DUVAL, R. Écarts sémantiques et cohérence mathématique: introduction aux problémes de congruence. In: **Annales de didactique et de Sciences Cognitives**, v.1, p. 7-25. Irem de Strasbourg, 1988.

DUVAL, R. Registre de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. **Annales de Didactique et Sciences Cognitives**. Strasbourg: IREM – ULP, v. 5, p. 37-65. 1993.

DUVAL, R. **Sémiosis et pensée humaine:** Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels. Berna: Peter Lang, 1995.

DUVAL, R. Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques? **RDM - Recherches em Didactique des Mathématiques**, v. 16, n. 3, p. 349-382. 1996.

DUVAL, R. Signe et objeto (I): Trois grandes étapes dans la problématique des rapports entre représentation et objet. In **Annales de Didactique et de Sciences Cognitives**, v. 6, p. 139-163. Irem de Strasbourg, 1998a.

DUVAL, R. Signe et objeto (II): Questions relatives à l'anayse de la connaissance. In **Annales de Didactique et de Sciences Cognitives**, vol. 6, p. 165-196. Irem de Strasbourg, 1998b.

DUVAL, R. **L'analyse cognitive du fonctionnement de la pensée et de l'acitivité mathématique.** Cours sur les apprentissages intellectuels PUC. SÃO Paulo: Février, 1999. Documento datilografado.

DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). **Aprendizagem em matemática:** registros de representação semiótica. Campinas: Papirus, 2003, p.11-33.

ECO, H. **As formas do conteúdo.** São Paulo: Perspectiva, 1974.

ECO, H. **Tratado geral de semiótica.** São Paulo: Perspectiva, 2005.

EYSENCK, M. & KEANE, M. **Cognitive Psychology:** a student's handbook. London: Erlbaum, 1991.

EVES, H. **Introdução à história da matemática.** Tradução de Hygino H. Domingues. 2. ed. Campinas: Unicamp, 2007.

FIORENTINI, D. **Rumos da pesquisa brasileira em educação matemática***:* o caso da produção científica em cursos de pós-graduação. Tese de doutorado em Educação. Campinas, FE/Unicamp, 1994.

FLORES, C. R. Registros de representação semiótica em matemática: história, epistemologia, aprendizagem. **Bolema**, Rio Claro, ano 19, n. 26, p. 77-102, 2006.

FONT, V.; GODINO, J. D.; D'AMORE, B. **Enfoque ontosemiótico de las representaciones en Educación Matemática.** Disponível em <http://www.ugr.es/local/jgodino > Acesso em 10 jan. 2007.

FOUCAULT, M. **As palavras e as coisas:** uma arqueologia das ciências humanas. 6. ed. São Paulo: Martins Fontes, 1992.

FRANCHI, A. Considerações sobre a teoria dos Campos Conceituais. In: MACHADO, S. D. A. **Educação Matemática:** uma introdução**.** São Paulo: EDUC, 1999. p.155-196.

FREGE, G. **Lógica e Filosofia da Linguagem.** Tradução de Paulo Alcoforado. São Paulo: Editora Cultrix, 1978.

FUSON, K. C. Relations entre comptage et cardinalité chez les enfants de 2 à 8 ans. In: BIDEAU, J.; MELJAC, C.; FISCHER, J.P. **Les chemins du nombre.** França: Presses Universitaires de Lille, 1991.

FUSON, K.C.; KWON, Y. Systèmes de mots-nombres et outres outils culturels: effets sur les premiers calculs de l'enfant. In: BIDEAU, J.; MELJAC, C.; FISCHER, J. P. **Les chemins du nombre.** França: Presses Universitaires de Lille, 1991.

GLAESER, G. Epistemologie dês nombres relatifs. **Recherches en Didactique des Mathématiques - RDM**, v. 2, n. 3, p. 303-346, 1981.

GODINO, J. D. Um enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. **Recherches en Didactique des Mathématiques - RDM**, v. 22, n. 2, p. 237-284. 2002.

GODINO, J. D. **Perspectiva semiótica de la competencia y comprensión matemática.** XVI Convengo Nazionale: Incontri con la Matemática. Bologna, 2002. Disponível em <http://www.ugr.es/local/jgodino> Acesso em 10 fev. 2007.

GODINO, J. D. **Teoría de las funciones semióticas: un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática.** Granada, 2003. Trabajo de investigación presentado para optar a la Cátedra de Universidad de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. Disponível em <http://www.ugr.es/local/jgodino> Acesso em 15 jan. 2007.

GODINO, J. D.; BATANERO, C. Significado Institucional e pessoal dos objetos matemáticos. **Recherches en Didactique des Mathématiques – RDM**. v. 14, n. 3, p. 325-355. 1994.

GODINO, J. D.; BATANERO, C.; FONT, V. **Um enfoque onto-semiótico do conhecimento e a instrução matemática.** Granada, 2006. Disponível em <http://www.ugr.es/local/jgodino > Acesso em 10 fev 2007.

GÓMEZ, W. S. **El significado de objetos en el aula de matemáticas.** Revista de Pedagogia, Vol. XXVI, N° 75. Escuela de Educación, Universidade Central de Venezuela. Caracas, enero-abril, 2005.

GOODSON, I. F. **Currículo:** teoria e história. Petrópolis: Vozes, 1995.

GRANGER, G. G. **Langage et epistémologie**. Paris: Klinksieck, 1979.

GRECA, I. M. Representaciones Mentais. In MOREIRA, M.A. **Representações mentais, modelos mentais e representações mentais:** Textos de apoio para pesquisadores em educação em ciências. Porto Alegre: UFRGS, Instituto de Física, 2005. p. 7-45.

HESSEN, J. **Teoria do conhecimento.** 2. ed. São Paulo: Martins Fontes, 2003.

KILPATRICK, J. Investigação em educação matemática e desenvolvimento curricular em Portugal: 1986-1996. In: PIRES et al. **Caminhos para a investigação em Educação matemática em Portugal.** Bragança: SPCE, 1999. p. 9-25.

IFRAH, G. **Os números:** a história de uma grande invenção. 10. ed. São Paulo: Globo, 2001.

LADRIÈRE, J. **A articulação do sentido.** Tradução de Salma Tannus Muchail. São Paulo: EPU/EDUSP, 1977.

LEFEBVRE, H. **La presencia y la ausencia:** contribución a la teoría de las representaciones. México: Fondo de Cultura Económica, 1983.

LEFEBVRE, M. **Images, écritures et espace de médiation**: étude anthropologique des pratiques graphiques dans une communauté de mathématiciens. 2001. 224f. Thése (Doctorat en Sciences de l'Information et de la Communication) – Université Louis Pasteur, Strasbourg I, Strasbourg, França, 2001.

LÉVY, P. **As tecnologias da inteligência.** Rio de Janeiro: Editora 34, 1993.

LOPES, C. A. E. **A probabilidade e a estatística no ensino fundamental:** uma análise curricular. Campinas, SP, 1998. 130p. Dissertação de Mestrado (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação – Grupo de Pesquisa CEMPEM – Prática Pedagógica em Matemática, Universidade Estadual de Campinas.

MACEDO, E. F.; FUNDÃO, A. P. M. A produção do GT de Currículo da ANPEd nos anos 90. In: **Anais da XIX Reunião Anual da ANPEd**, Caxambu, 1996. p. 1-12.

MACHADO, N. J. **Epistemologia e didática:** A alegoria como norma e o conhecimento como rede. Tese de Livre docência. Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo. São Paulo: USP, 1994.

MACHADO, N. J. **Epistemologia e didática:** as concepções de conhecimento e inteligência e a prática docente. 4. ed. São Paulo: Cortez, 2000.

MACHADO, S. D. A. (Org.) **Aprendizagem em matemática:** registros de representação semiótica. Campinas: Papirus, 2003.

MENEGHETTI, R. C. G. O Conhecimento Matemático em Kant. In: BICUDO, M. A. (Org.) **Filosofia da Educação Matemática**: concepções e movimento. Brasília: Plano, 2003.

MOREIRA, M. A. **A teoria dos campos conceituais de Vergnaud, o ensino de ciências e a pesquisa na área**. Investigações em Ensino de Ciências. Porto Alegre, IFUFRGS. v. 7, n. 1, 2002. <Disponível em www.if.ufrgs.br/public/ensino> Acesso em 15 nov 2006.

MOREIRA, A. F. B. Didática e currículo: questionando fronteiras. In: OLIVEIRA, M. Rita N.S. (Org.) **Confluências e divergências entre didática e currículo**. Campinas: Papirus. p. 33-52, 1998.

MOREIRA, A. F. B. O campo do currículo no Brasil: os anos noventa. **Currículos sem fronteiras,** v. 1, n.1, p. 35-49, jan/jun 2001. Disponível em <www.curriculosemfronteiras.org> Acesso em 25 jun. 2005.

MOREIRA, P. C.; DAVID, M.M.M.S. Matemática escolar, matemática científica, saber docente e formação de professores. **Zetetiké**, v. 11, n. 19, jan./jun., p.57-79, Campinas, 2003.

MOREIRA, P. C.; DAVID, M.M.M.S. **A formação matemática do professor:** licenciatura e prática docente escolar. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

MORETTI, M. T. **O papel dos registros de representação na aprendizagem da Matemática.** Contrapontos – Revista de Educação da Universidade do Vale do Itajaí, Itajaí, n. 6, p. 343-363, 2002.

NCTM. **Normas profissionais para o ensino da Matemática.** Lisboa: APM/IIE, 1994.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS - NCTM. **Principles and standards for school mathematics.** Estados Unidos da América: Print Edition, 2000. 1 CD-ROM.

NEHRING, C. M. **A multiplicação e seus registros de representação nas séries iniciais.** Florianópolis, 1996. 237 f. Dissertação (Mestrado em Educação: Educação e ciências) – Setor de Educação, Universidade Federal de Santa Catarina.

NACARATO, A. M. **A construção do conceito de número na educação escolarizada.** Campinas, 1995. 325 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas.

NETTO, J. T. C. **Semiótica.** 5 ed. São Paulo: Editora Perspectiva, 2001.

NETTO, J. T. C. **Semiótica, informação e comunicação:** Diagrama da Teoria do signo. 5 ed. São Paulo: Editora Perspectiva, 1980.

NOTH, W. **Panorama da Semiótica:** de Platão a Peirce. São Paulo: Annablume, 1995.

NOTH, W. **A semiótica no século XX.** São Paulo: Annablume, 1996.

NUNES, T. et al. **Educação Matemática:** números e operações aritméticas, 2005.

OLIVEIRA, R. **Uma análise comparativa da aprendizagem do conceito de frações em alunos submetidos a dois métodos diferentes de ensino.** São Paulo, 1996. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, UNICAMP.

OLIVEIRA, T. F. M. **O fracasso escolar e a "cultura do ideal" em uma escola da rede estadual sob o regime de progressão continuada.** São Paulo, 2002. Dissertação (Mestrado em Educação), Faculdade de Educação, PUC-SP.

PACHECO, J. A.**Currículo:** teoria e práxis. Porto: Porto, 1996.

PAIS, L. C. Questões metodológicas e a engenharia didática. In: PAIS, L. C. **Didática da Matemática:** uma análise da influência francesa. Belo Horizonte: Autêntica, 2001. p. 99-108.

PAULUK, M. **Um novo olhar sobre a escrita:** a contribuição das ciências cognitivas e da semiótica para o desenvolvimento de uma ciência da escrita. Ciências & Cognição. 2004; v. 2, p. 02-10. Disponível em <http://geocities.yahoo.com.br/cienciasecognicao/>. Acesso em 10 dez 2006.

PARANÁ. Departamento de Ensino Fundamental. **Diretrizes curriculares para o Ensino Fundamental:** Matemática. 39p. Disponível em <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br> Acesso em 26 jan. 2006.

PEIRCE, C. S. **Semiótica.** São Paulo: Perspectiva, 1977.

PIRES, C. M. C. **Currículos de Matemática:** da organização linear à idéia de rede. São Paulo: FTD, 2000.

PIRES, C. M. C. Orientações Curriculares para a educação básica: Qual o caminho? In: **Anais VIII Encontro Nacional de Educação Matemática - ENEM**. Pernambuco, 2004.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas.** Tradução de Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1994.

PONTE, J. P. Do Tangran ao cálculo das áreas: procurando por em prática os novos programas. In: MOURÃO, A. P. et al. **Atas do V Seminário de Investigação em Educação Matemática**. Lisboa: APM, 1995. p. 35-50.

PONTE, J. P. et al. Projectos Educativos. Lisboa: DES, 1998.

PONTE, J. P. Investigar, ensinar e aprender. In: **Actas do ProfMat**. Lisboa: AP, 2003. p. 25-39. 1 CD-ROM.

PONTE, J. P. Gestão curricular em Matemática. In: GTI (Ed.). **O professor e o desenvolvimento curricular**. Lisboa: APM, 2005. p. 11-34.

PONTE, J. P. **Números e álgebra no currículo escolar.** Disponível em <www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/DA/DA-TEXTOS/Ponte(Caminha).rtf> Acesso em 05 mar 2007.

PORTUGAL, Ministério da Educação. Direcção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular. **Programa de Matemática do Ensino Básico:** Reajustamento do Programa de Matemática – documento para discussão. 79 p. Lisboa, 2007.

RADFORD, L. On the epistemological limits of lenguaje. Mathematical Knowledge and social pratice during the Renaissance. **Educational Studies in Mathematics.** v. 52, n. 2, p. 123-150, 2003. Disponível em <http://laurentian.ca/educ/lradford//limitslg.pdf> Acesso em 04 jan 2007.

RADFORD, L. **Semiótica Cultural Y Cognição.** In: Decimoctava Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, 2004, Tuxtla Gutiérrez. Disponível em <http://laurentian.ca/educ/lradford/Tuxtla3.pdf> Acesso em 04 jan 2007.

SACRISTÁN, J. G. **O currículo:** uma reflexão sobre a prática. Porto Alegre: ArtMed, 1998.

SAMPAIO, M. M. F. **Um gosto amargo de escola:** relações entre currículo, ensino e fracasso escolar. São Paulo: EDUC, 1998.

SAMPAIO, M. M. F. **A escola no centro da pesquisa:** caminhos e problemas. Disponível em <http://www.anped.org.br/início.html> Acesso em 12 de outubro de 2004.

SANTAELLA, L. **A teoria geral dos signos:** como as linguagens significam as coisas. São Paulo: Pioneira, 2000.

SANTAELLA, L. **O que é semiótica?** São Paulo: Brasiliense, 2003.

SANTA CATARINA. Secretaria de Estado da Educação, Ciência e Tecnologia. **Proposta Curricular de Santa Catarina**: Matemática. p. 105-113. Florianópolis: IOESC, 1998.

SANTA CATARINA. Secretaria de Estado da Educação e do Desporto. **Diretrizes 3: organização da prática escolar na educação básica:** conceitos científicos essenciais, competências e habilidades. Florianópolis: Diretoria de Ensino Fundamental/Diretoria de Ensino Médio, 2001. 130p.

SANTA CATARINA. Secretaria de Estado da Educação, Ciência e Tecnologia. **Proposta Curricular de Santa Catarina:** estudos temáticos. Florianópolis: IOESC, 2005. 192p.

SANTOS, L. L. C. P.; OLIVEIRA, M. R. N. S. Currículo e didática. In: OLIVEIRA, M. R. N. S. (org.) **Confluências e divergências entre didática e currículo.** Campinas: Papirus, 1998. p.9-32.

SCHOENFELD, A. Porquê toda esta agitação acerca da resolução de problemas?. In: ABRANTES, P.; LEAL, L. C. & PONTE, J. P. **Investigar para aprender Matemática.** APM/MPT, 1996.

SIERPINSKA, A. **Sur um programme de recherche lié à la notion de obstacle épistemologique.** In: Colloque Intenational Construction des savoirs – Obstacles et conflits, Montreal: Ed.

STEFFE, L. P. Stades d'apprentissage dans la construction de la suite des nombres. In: BIDEAU, J. MELJAC, C.; FISCHER, J.P. **Les chemins du nombre.** França: Presses Universitaires de Lille, 1991.

STEINBRING, H. Mathematics in teaching processes: the disparity between teacher and student knowledge. **Recherches en Didactique des Mathématiques – RDM**. v. 11, n.1, p. 65-108. 1991.

TEIXEIRA, L.R.M. As representações da escrita numérica: questões para pensar o ensino e a aprendizagem. In: MORO, M. L. F; SOARES, M.T.C. (Orgs.) **Desenhos, palavras e números:** as marcas da matemática na escola. Curitiba: Editora da UFPR, 2005. p.19-40.

VERGNAUD, G. Conceitos e esquemas numa teoria operatória da representação. Tradução Ana Franchi e Dione Luchesi de Carvalho. **Revista Psychologie Française**, n.30, nov. 1985.

VERGNAUD, G. **Difficultés conceptualles, erreurs didactiques et vraies obstacles épistemologiques dans l'apprentissage des mathématiques.** In: Colloque International: Construction des savoirs – Obstacles et conflits, Montreal: Ed. Ce d'ARC inc., 1988.

VERGNAUD, G. La théorie des champs conceptuels. **Recherches en Didactique des Matematiques - RDM**, v. 10, n. 23, p. 133-169. 1990.

VERGNAUD, G. **El niño, las matemáticas y la realidad:** problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria. México: Trillas, 1991.

VERGNAUD, G. Signifiants et signifiés dans une approche psychologique de la représentation. **Les Sciences de l'Éducation**, v.1. n.3, p. 9-16, 1993.

VERGNAUD, G. **A Teoria dos Campos Conceituais.** In BRUN, J. Didáctica das Matemáticas. Lisboa: Horizontes Pedagógicos, 1996. p. 155-191.

VERGNAUD, G. A comprehensive theory of representation for mathematics education. **Journal of Mathematical Behavior**, v. 17, n. 2, p. 167-181,1998.

ANEXOS

ANEXO 1 – TRABALHOS SOBRE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA PRODUZIDOS NO BRASIL NA DÉCADA DE 1990

Ano	Nível	Autor	Temática/objetivos	Título	Universidade/ Orientador
1996	Mest.	Nehring, Cátia M.	Elaboração, aplicação e análise de uma seqüência didática a alunos do Ensino Fundamental (2 série), de duas escolas em Ijuí –RS, sobre a operação de multiplicação com números naturais, baseadas na noção de registros de representação semiótica com o objetivo de facilitar a compreensão desse objeto matemático pelos alunos.	A multiplicação e seus Registros de Representação nas séries iniciais.	UFSC Damm, Regina Flemming
1997	Mest.	Flores-Bolda, Claudia Regina	Estudo do papel heurístico das figuras na resolução de problemas, com o intuito de levantar aspectos ligados à visualização pela elaboração, aplicação e análise de uma seqüência didática à alunos de 5 série do Ensino Fundamental,com exercícios que envolvem problemas com figuras e que permitem a realização da operação de reconfiguração.	Geometria e Visualização: desenvolvendo a competência heurística através da reconfiguração.	UFSC Damm, Regina Flemming
1999	Mest.	Mello, Elizabeth Gervazoni Silva de	Elaboração, aplicação e análise de uma seqüência didática para introduzir a técnica da demonstração em geometria à alunos de 8 série, como alternativa metodológica para o ensino desse conceito.	Demonstração: uma seqüência didática para a introdução de seu aprendizado no ensino da Geometria.	PUC-SP Almouloud, Saddo Ag
2000	Mest.	Catto, Glória Garrido	Análise de livros didáticos do ensino fundamental em relação ao número racional, avaliando em que medida os diversos registros de representação semiótica dos racionais (simbólico, figural e língua natural) são apresentados e trabalhados segundo as operações de tratamento e conversão.	Registros de Representação e o Número Racional: uma abordagem em livros didáticos.	PUC-SP Igliori, Sonia Barbosa Camargo
2000	Mest.	Figueiredo, Auriluci de Carvalho	Elaboração, aplicação e análise de uma seqüência de ensino de Probabilidade Condicional pautada nos registros de representação semiótica, no caso, linguagem natural, simbólica, diagrama de árvore e tabela de contingência, a alunos dos cursos de Licenciatura em Matemática e Ciências da computação.	Probabilidade Condicional: um enfoque do seu ensino.	PUC-SP Da Silva, Benedito Antonio

ANEXO 2 – TRABALHOS SOBRE REPRESENTAÇÀO SEMIÓTICA PRODUZIDOS NO BRASIL NO PERÍODO DE 2000-2005

Ano	Nível	Autor	Temática/objetivos	Título	Universidade/ Orientador
2001	Mest.	Vizolli, Idemir	Elaboração, aplicação e análise de uma seqüência didática a alunos de 6 série do Ensino Fundamental, sobre o conceito de porcentagem considerando o sentido e o significado operatório através da utilização de diferentes registros de representação semiótica o tratamento e a conversão entre esses registros.	Registros de Representação Semiótica no estudo de porcentagem	UFSC Damm, Regina Flemming
2001	Mest.	Biffi, Darcy de Liz	Elaboração, aplicação e análise de uma seqüência didática sobre o conceito de fração, a alunos do Curso de Pedagogia Séries Iniciais da Uniplac de Lages-SC com o intuito de estudar a aquisição do conceito de frações mediante a utilização de diferentes registros de representações semióticas e a conversão entre esses registros.	Conceito de Frações através do estudo dos Registros de Representação	UFSC Damm, Regina Flemming
2001	Mest.	Castro, Samira Choukri de	Concepção, realização, observação e análise de uma seqüência didática sobre Geometria Analítica, especificamente do conceito de vetor, a alunos do curso de Engenharia de três instituições diferentes.	Os vetores do plano e do espaço e os registros de representação	PUC-SP Igliori, Sonia Barbosa Camargo
2001	Dout.	Bianchini, Bárbara Lutaif	Estudo das questões que envolvem a aquisição do conceito de fração na sua representação decimal por alunos da 3 série do Ensino Fundamental através da elaboração, aplicação e análise de uma seqüência didática. A aplicação não foi realizada pela pesquisadora, mas pela professora da turma e observada por aquela. Trabalhou com a noção de contrato didático e registros de representação semiótica.	Estudo sobre a Aplicação de uma Seqüência Didática para o Ensino dos Números Decimais	PUC-SP Gatti, Bernardete Angelina
2002	Mest.	Dos Santos, Ailton Martins	Estudo de como se processa o ensino-aprendizagem do objeto matemático “mensuração, algarismos significativos e notação científica” por alunos da 3 série do Ensino Médio, partindo do suporte teórico apontado por Raymond Duval e das orientações relativas à transversalidade e à interdisciplinaridade propostos pelos PCNs. Propôs uma seqüência didática a ser aplicada com os alunos.	Mensuração, algarismos significativos e Notação Científica: um estudo diagnóstico do processo ensino-aprendizagem, considerando o cálculo e a precisão de medidas.	PUC-SP Almouloud, Saddo Ag
2002	Mest.	Souza, Cibele de Almeida	A partir das ideais sobre dialética ferramenta-objeto de Régine Douady e do uso de mais de um registro de representação semiótica no ensino da matemática de Raymond Duval, elabora, aplica e analisa uma seqüência didática sobre distribuição binomial com alunos do curso de Administração de empresas.	A distribuição binomial no ensino superior	PUC-SP Almouloud, Saddo Ag

Ano	Nível	Autor	Temática/objetivos	Título	Univ./Orientador
2002	Mest.	Maioli, Marcia	Partindo da teoria das situações de Brousseau e da noção de registros de representação semiótica de Duval, investiga estratégias para o trabalho didático de cotneúdos da geometria a partir do desenvolvimento de oficinas para formação de professores do ensino fundamental e médio, com enfoque no estudo dos quadriláteros.	Uma oficina para formação de Professores com enfoque em quadriláteros"	PUC-SP Almouloud, Saddo Ag
2002	Mest.	Passoni, João Carlos	Elaboração, aplicação e análise de uma seqüência didática pautada nos registros de representação semiótica, à crianças de nove anos, de atividades de pré-álgebra (com utilização dos inteiros e manipulação algébrica).	(Pré-)Álgebra: introduzindo os números inteiros negativos	PUC-SP Campos, Tania Maria Mendonça
2002	Mest.	Santos, Edivaldo Pinto dos	Elaboração, aplicação e análise de uma seqüência didática à alunos da 2 série do Ensino Médio, pautada em elementos da teoria de Raymond Duval e em princípios da Informática na Educação. Procura estudar a aquisição dos saberes relacionados aos coeficientes da equação y=ax+b pela articulação dos registros gráfico e algébrico da função afim, com o auxílio de software.	Função Afim y = ax + b: a articulação entre os registros gráfico e algébrico com o auxílio de um software educativo	PUC-SP Da Silva, Benedito Antonio
2002	Mest.	Traldi, Armando Junior	Elaboração, aplicação e análise de uma seqüência didática, enfocando o tratamento, conversão e coordenação dos RRS de inequações de 1 grau à alunos de 3 ano do Ensino Médio, com vistas a construção do conceito e aplicação na resolução de problemas de programação linear.	Sistema de Inequações do 1 grau: uma abordagem do processo ensino-aprendizagem focando os registros de representações.	PUC-SP Almouloud, Saddo Ag
2002	Mest.	Azevedo, Patricia Maria Almeida Sader	Análise do processo de ensino/aprendizagem de equações à luz da teoria dos registros de representação semiótica, em um trabalho de campo numa classe composta por alunos jovens e adultos estudando equações.	Um processo de ensino/aprendizagem de equações vivido por alunos jovens e adultos em sala de aula: transitando por registros de representação	UNICAMP Carvalho, Dione Lucchesi de
2003	Mest.	Sakate, Maria Massae	Descreve a concepção de professores sobre a possibilidade de ocorrer alterações didáticas no ensino da geometria a partir da utilização da informática no Ensino Fundamental. Parte da teoria das situações didáticas e a-didáticas de Brousseau e dos registros de representação semiótica de Duval.	Concepções de professores sobre possibilidades didáticas no ensino da geometria decorrentes do uso da informática.	FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL Pais, Luiz Carlos
2003	Mest.	Facco, Sonia Regina	Estudo dos fenômenos que interferem no ensino-aprendizagem do conceito de área no Ensino Fundamental para elaborar, aplicar e analisar uma seqüência didática sobre esse conceito e a partir disso apresentar uma proposta de ensino de área com base na composição e decomposição de figuras planas.	Conceito de área: uma proposta de ensino-aprendizagem	PUC-SP Almouloud, Saddo Ag

Ano	Nível	Autor	Temática/objetivos	Título	Universidade/ Orientador
2003	Dout.	Cunha, Maria Carolina Cascino da	Estudo que promoveu um trabalho de reflexão em e sobre a ação docente em torno das representações gráficas estatísticas através da discussão das experiências pessoais de professores das séries iniciais do Ensino Fundamental.	Estatística nas Séries Iniciais do Ensino Fundamental: Buscando Caminhos	FEUSP Domite, Maria do Carmo Santos
2003	Mest.	Souza, Roberta Nara Sodré	Elaboração, aplicação e análise de uma seqüência didática para o conceito de função linear. Procura investigar se o desenvolvimento da capacidade de tratar e fazer conversão entre registros, por meio de uma seqüência didática, colabora na utilização dessa capacidade como ferramenta na resolução de problemas que envolvam esse tipo de função.	A Construção da Noção de Função Linear: transitando em diferentes registros de representação semióticos	UNIVERSIDADE DO VALE DO ITAJAÍ Cordeiro, Maria Helena Baptista Vilares
2003	Mest.	Lopes, Wagner Sanches	Elaboração, aplicação e análise de uma seqüência didática à alunos de 8 série, com o intuito de introduzir o conceito de função, particularmente função afim e avaliar os fenômenos didáticos ocorridos na resolução de problemas envolvendo a conversão do registro gráfico da função afim para o algébrico e vice-versa.	A importância da utilização de múltiplas representações no desenvolvimento do conceito de função: uma proposta de ensino.	PUC-SP Franchi, Anna
2003	Mest.	Pelho, Edeweiss Benez Brandão	Elaboração, aplicação e análise de uma seqüência didática do conceito de função com utilização do software Cabri-Géomètre, por meio da compreensão das variáveis dependentes e independentes, e do relacionamento entre elas, a alunos do segundo ano do Ensino Médio.	Introdução ao conceito de função: a importância da compreensão das variáveis	PUC-SP Da Silva, Benedito Antonio
2004	Mest.	Moreira, Denise Trindade.	Alia elementos da didática francesa utilizando as noções de obstáculo epistemológico, situações didáticas e registros de representação semiótica para investigar como são feitos os registros de representação de objetos tridimensionais, focalizando as apreensões perceptivas e operatórias em um ambiente de geometria dinâmica no Cabri-Géomètre II. Através de uma seqüência didática aplicada a alunos do segundo ano de Licenciatura em Matemática, discute que essa ferramenta possibilita os tratamentos e conversões.	Representações gráficas: investigando apreensões perceptivas e operatórias em alunos do curso de licenciatura em Matemática	Universidade Estadual de Londrina Póla, Marie-Claire Ribeiro
2004	Mest.	Pires, Enam Lima	Análise dos registros de representações semióticas produzidas por crianças de 3 série do ensino fundamental da rede pública de Brasília, no processo de conceitualização do número racional não-negativo, através de pesquisa-ação.	Meus registros para frações e decimais: entre o que eu penso e o que eu escrevo; entre o que eu escrevo e o que você lê	Universidade de Brasília Muniz, Cristiano Alberto
2004	Mest.	Da Silva, Carlos Antônio	Análise de dois livros didáticos, geralmente utilizados nas universidades, especificamente do tema integral, à luz da teoria dos registros de representação semiótica de Raymond Duval.	A noção de integral em livros Didáticos e os registros de representação semiótica	PUC-SP Da Silva, Benedito Antonio

Ano	Nível	Autor	Temática/objetivos	Título	Universidade/ Orientador
2004	Mest.	Penteado, Cristina Berndt	Elaboração, aplicação e análise de uma seqüência de ensino apoiada na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval a um grupo de professores do Ensino Médio, para investigar a concepção e reação desses professores frente aos diferentes registros de representação dos números quando analisada a propriedade da densidade do conjunto dos números racionais no conjunto dos números reais quanto a dos irracionais nos reais.	Concepções do Professor do Ensino Médio relativas à densidade do conjunto dos números reais e suas reações frente a procedimentos para a abordagem desta propriedade	PUC-SP Silva, Benedito Antonio
2004	Mest.	Godoy, Luiz Felipe Simões de	Investiga o conhecimento de alunos que já passaram por um curso de Cálculo Diferencial e Integral sobre a noção de derivada, procurando saber quais registros os alunos reconhecem como derivada e suas competências nos tratamentos e conversões.	Registros de representação da noção de derivada e o processo de aprendizagem.	PUC-SP Igliori, Sonia Barbosa Camargo
2005	Dout.	Brandt, Célia Finck	Investiga sobre as formas de organizar e propor, no processo de ensino, situações que permitam aos alunos compreender o SND enquanto forma de comunicação e de registro da medida de um conjunto expressa por um número, através da aplicação de seqüências de ensino busca atribuir sentido e significação aos registros de representação do número: escrita e numeral arábico que veiculam a estrutura do SND.	Contribuições dos registros de representação semiótica na conceituação do sistema de Numeração	UFSC Moretti, Méricles Thadeu

ANEXO 03 - QUADRO GERAL DAS PESQUISAS SOBRE RRS ANALISADAS

Tipo de Pesquisa/ Metodologia	**Objeto matemático bem delimitado**	**Nível de abrangência**					**Resultados**	**Aspectos abordados da noção de RRS**
		EF		**EM**	**ES**	**FP**		
		SI	**SF**					
Pesquisa-ação/engenharia didática	Multiplicação	X					Para haver compreensão do sentido da operação e o significado operatório o aluno deve dominar os diferentes RRS e estabelecer as relações entre eles.	Operações; diversidade de registros
Não define especificamente, aborda os passos a seguir (seqüência didática)	Papel heurístico das figuras na visualização		X				Conclui que atividades que considerem as operações de reconfiguração podem auxiliar na apreensão visual.	Operação de Reconfiguração
Engenharia didática	Demonstração em geometria		X				A abordagem a partir dos RRS favoreceu o aprendizado da técnica da demonstração em geometria.	-
Pesquisa de abordagem qualitativa/ seqüência didática	Números racionais positivos	x					-	Operações; diversidade de registros; semiose e noesis.
Não define especificamente, aborda os passos a seguir (análise de livros didáticos)	Número racional	X	X				Os LD abordam todos os registros, mas carecem de atividades de mobilização nos dois sentidos da conversão.	Operações; diversidade de registros
Engenharia didática	Probabilidade condicional				x		Conclui que a aplicação da seqüência didática auxiliou os alunos a minimizar as dificuldades sobre o conceito de probabilidade condicional.	Operações; diversidade de registros

Tipo de Pesquisa/ Metodologia	Objeto matemático bem delimitado	Nível de Abrangência					Resultados	Aspectos abordados da noção de RRS
		EF		EM	ES	FP		
		SI	SF					
Pesquisa de campo/engenharia didática	Porcentagem		X				A articulação dos diferentes RRS possibilita ao aluno a compreensão do sentido e a atribuição do significado operatório da porcentagem	Operações; diversidade de registros
Pesquisa-ação (seqüência didática)	Frações					x-C	A compreensão e a aquisição do conceito de fração, através dos diferentes RRS, possibilitaram a identificação da grandeza e o significado da fração dada, principalmente pelo uso de desenhos ou gráficos.	Operações; diversidade de registros
Engenharia didática	Vetores – geometria analítica				x		Os alunos evoluíram na aquisição do conceito de vetor após a aplicação da seqüência didática.	Operações; diversidade de registros
Define como uma pesquisa de sala de aula com abordagem qualitativa - Seqüência didática	Conceito de fração na sua representação decimal	X					Conclui que os alunos perceberam a necessidade de novos números para exprimir medidas menores do que uma unidade predeterminada, e se apropriaram da adição e subtração a partir de atividades com diversos registros de representação.	–
Não define especificamente, aborda os passos a seguir (seqüência didática).	Mensuração, algarismos significativos e notação científica.			X			Conclui que a metodologia aplicada, diversificando os registros do objeto e explorando as conversões e transformações dadas pelas regras de tratamento de cada registro, possibilitou a apreensão do objeto pelo aluno. Utiliza estatística descritiva para validar suas conclusões.	Operações; diversidade de registros (superficial)
Não define especificamente, aborda os passos a seguir (sequência didática)	Distribuição binomial de probabilidade				x		Conclui que os alunos apresentam dificuldades na conversão entre ling. natural e simbólica e que seria necessário mais sessões de um trabalho centrado nessas operações e na idéia da dialética ferramenta-objeto para que todos os alunos apreendessem o conceito trabalhado.	Diversidade de registros e conversão (superficial) – utiliza a idéia de mudança de quadros (Douady) e contrato didático (Brousseau)
Não define especificamente, aborda os passos a seguir (seqüência de atividades – oficina)	Geometria – quadriláteros					x-C	O trabalho com os diferentes RRS proporcionou reflexão e conhecimentos didáticos.	Operações; diversidade de registros
Não define especificamente, aborda os passos a seguir (seqüência didática)	Números inteiros e noções de álgebra (pré-álgebra)	X					Conclui que a seqüência didática aplicada, considerando os estudos de Duval, proporcionou aprendizagem aos alunos, e que é possível ensinar noções de pré-algébra a partir de problemas verbais aditivos, utilizando números inteiros a alunos das séries iniciais do EF.	Operações; noesis e semiose; congruência semântica; sentido e referência; diversidade de registros – plurifuncionais e monofuncionais.

Tipo de Pesquisa/ Metodologia	**Objeto matemático bem delimitado**	**Nível de Abrangência**					**Resultados**	**Aspectos abordados da noção de RRS**
		EF		**EM**	**ES**	**FP**		
		SI	**SF**					
Não define especificamente, aborda os passos a seguir (seqüência didática)	Função afim			X			A articulação de ambiente informático com os estudos de Duval na elaboração da seqüência didática foi positiva, pois os alunos evoluíram na compreensão do conceito e na construção de significados dos coeficientes da representação algébrica da função afim associados a sua representação gráfica - reta correspondente.	Operações; tratamentos heterogêneos das representações gráficas; variáveis visuais pertinentes
Engenharia Didática	Inequações de 1 grau			X			O trabalho com tratamentos, conversão e coordenação dos RRS do objeto matemático sistema de inequações contribui para a formação do conceito e a aplicação deste na resolução de problemas de programação linear.	Operações; diversidade de registros,
Não define – dilui os passos no corpo do texto, refere-se a trabalho de campo, mas parece ser um estudo de caso. (seqüência didática)	Equações		x**	X**			Aplicação da seqüência didática favorecendo o trânsito entre registros de representação semiótica favoreceu a aprendizagem de equações em relação ao sinal de igual enquanto relacional, contudo não foi suficiente para superar o sentido de incógnita como valor numérico desconhecido.	Tipos de representações; diversidade de registros, operações; noesis e semiose;
-	Geometria					x-c	-	-
-	-						-	-
Engenharia didática	Função linear			x			Conclui que os alunos ampliaram a significação do conceito de função linear, adotando diferentes estratégias na resolução de problemas e aumentando a utilização de conversões e tratamentos dos vários registros de funções.	Tipos de representações; operações; diversidade de registros;
Engenharia didática	Área		x			x-C	Conclui que a aplicação da seqüência didática baseada em composição e decomposição de figuras auxilia na aprendizagem do conceito de área.	Diversidade de registros, apreensões seqüencial, perceptiva, discursiva e operatória; reconfiguração de figuras.
Pesquisa qualitativa – (seqüência didática)	Função afim		x				Conclui que as múltiplas representações para conceitualizar funções, favoreceu a coordenação entre as variáveis visuais pertinentes, no registro gráfico, e os correspondentes valores categoriais no registro algébrico.	Diversidade de registros - plurifuncionais e monofuncionais, tipos de representação; semiose e noesis; operações.
Engenharia didática	Introdução do conceito de Função			x			Conclui que os alunos evoluíram na apreensão do conceito de função, propiciado pela compreensão e relacionamento entre as variáveis e pelas devidas articulações entre os diferentes registros de representação da função - do gráfico para o numérico e deste para o algébrico.	Diversidade de registros; operações;

Tipo de Pesquisa/ Metodologia	Objeto matemático bem delimitado	Nível de abrangência					Resultados	Aspectos abordados da noção de RRS
		EF		EM	ES	FP		
		SI	SF					
Engenharia Didática	Apreensões perceptiva e operatória em objetos geométricos tridimensionais.					x-I	Conclui que o ambiente Cabri-Géomètre II contribui para as apreensões perceptiva e operatória de objetos tridimensionais por meio da seqüência didática baseada em tratamentos e conversões de registros.	Operações; diversidade de registros
Pesquisa-ação	Número Racional	x					Conclui que a mediação no processo de conceitualização do número racional pode ser mais produtiva se conhecermos os significados que as crianças atribuem aos registros que produzem ou que têm acesso.	-
Não define especificamente, aborda os passos a seguir.	Integral				X* **		Conclui que os LD analisados utilizam os mesmos registros da integral: simbólico (algébrico e numérico), língua natural, gráfico e tabela. São valorizados tanto os tratamentos quanto as conversões.	Operações; diversidade de registros.
Engenharia Didática	Densidade dos reais					x-C	Houve resultados positivos na apropriação da propriedade da densidade dos números reais e aceitação da teoria de Duval por parte dos professores, porém algumas dúvidas persistiram, como por exemplo a associação da representação infinita com irracionalidade e a identificação de um número racional com sendo somente aquele que tem representação finita.	Diversidade de registros - plurifuncionais e monofuncionais; semiose e noesis; operações
Não define especificamente, aborda os passos a seguir (aplica testes diagnósticos)	Derivada				X		A articulação dos RRS constitui uma condição de acesso à compreensão de um conceito matemático e que as dificuldades no processo de ensino-aprendizagem da derivada podem estar ligadas ao fato de no ensino privilegiarem-se apenas alguns RRS, sem haver a devida articulação entre os mesmos.	Operações; diversidade de registros
Não define especificamente, aborda os passos a seguir (seqüência de ensino)	Sistema de Numeração Decimal	x					Conclui que uma abordagem voltada para o trânsito entre as duas formas de RRS do número, a escrita e o numeral arábico, visto que eles explicitam de modos diferenciados a estrutura do SND, é essencial para haver real compreensão desse objeto.	Operações, diversidade de registros, metodologia de pesquisa
Engenharia Didática	Função Exponencial			x			Conclui que uma abordagem voltada para o tratamento, conversão e coordenação dos registros de representação semiótica da função exponencial contribuíram para a aprendizagem desse conceito.	Operações,

Onde:

* - Trata-se de análise de livros didáticos utilizados no Ensino Fundamental;

** - Trata-se de conteúdos do Ensino Fundamental em classes de alunos Jovens e Adultos;

*** - Trata-se de análise de livros didáticos utilizados no Ensino Superior;

EF- Ensino Fundamental – (SI - séries iniciais e SF – séries finais);

EM – Ensino Médio;

ES – Ensino Superior;

FP – Formação de Professores (C-continuada; I-inicial);

Operações – tratamento, conversão, coordenação entre os registros.

ANEXO 4 – SUB-TEMAS LOCALIZADOS NO FOCO TEMÁTICO 1 "DESENVOLVIMENTO E/OU EXPERIMENTAÇÃO DE NOVAS PROPOSTAS CURRICULARES"

SUB-TEMAS LOCALIZADOS NO FOCO TEMÁTICO 1 NO PERÍODO DE 1970 A 1990

Nº	**Sub-tema do** **Foco 1 - Desenvolvimento e/ou experimentação de novas propostas curriculares**	Nº de Trabalhos	Percentual
1	Desenvolvimento de propostas metodológicas ou curriculares inovadoras - algumas elaboradas após estudo exploratório inicial sem, contudo, aplicá-las ou testá-las na prática.	10	22
2	Elaboração de propostas e relato/descrição/avaliação da aplicação ou testagem.	23	51
3	Fundamentar e articular de modo sistemático, o estudo, a implementação e a análise de propostas metodológicas ou curriculares.	9	20
4	Relatos de experiências pedagógicas inovadoras realizadas em sala de aula.	3	7
	Total	**45**	**100**

SUB-TEMAS LOCALIZADOS NO FOCO TEMÁTICO 1 NO PERÍODO DE 1991 A 2005

Nº	**Sub-tema do** **Foco 1 - Desenvolvimento e/ou experimentação de novas propostas curriculares**	Nº de Trabalhos	Percentual
1	Desenvolvimento de propostas curriculares e metodológica específicas de um curso ou disciplina.	4	57
2	Elaboração de proposta de organização dos currículos de matemática explorando a idéia de rede.	1	14
3	Proposta de um cenário curricular com as características baseadas para um trabalho com a Resolução de Problemas.	1	14
4	Realização e análise de uma proposta de currículo construído junto com os professores.	1	14
	Total	**7**	**100**

ANEXO 5 – SUB-TEMAS LOCALIZADOS NO FOCO TEMÁTICO 2 "ANÁLISE DE PROPOSTAS CURRICULARES

SUB-TEMAS LOCALIZADOS NO FOCO TEMÁTICO 2 NO PERÍODO DE 1970 A 1990

Nº	Sub-tema do Foco 2- Análise de propostas curriculares	Nº de Trabalhos	Percentual
1	Análise de propostas curriculares para o ensino da matemática produzidas pelos órgãos oficiais.	2	50
2	Análise de propostas metodológicas traduzidas em dissertação/tese acadêmica.	1	25
3	Análise de propostas de ensino de Geometria Analítica sob os enfoques clássico e vetorial sugeridas pela literatura.	1	25
Total		**4**	**100**

SUB-TEMAS LOCALIZADOS NO FOCO TEMÁTICO 2 NO PERÍODO DE 1991 A 2005

Nº	Sub-tema do Foco 2- Análise de propostas curriculares	Nº de Trabalhos	Percentual
1	Análise de propostas curriculares de diversos cursos, desde o Ensino de Jovens e Adultos até cursos de Ensino Superior.	7	100
Total		**7**	**100**

ANEXO 6 – SUB-TEMAS LOCALIZADOS NO FOCO TEMÁTICO 3 "- ANÁLISE DO PROCESSO DE PRODUÇÃO/IMPLEMENTAÇÃO DE PROPOSTAS CURRICULARES"

SUB-TEMAS LOCALIZADOS NO FOCO TEMÁTICO 3 NO PERÍODO DE 1970 A 1990

Nº	Sub-tema do Foco 3 - Análise do processo de produção/implementação de propostas curriculares	Nº de Trabalhos	Percentual
1	Relato/análise de projetos de inovação curricular em ciências e matemática.	2	29
2	Relato/análise do processo de produção conjunta (uma forma de pesquisa-ação envolvendo pesquisador e professores do ensino de 1o grau) de currículos de matemática.	3	43
3	Investigação das possibilidades e condições, em matemática, para implantação da Proposta Curricular do Ciclo Básico do Estado do Paraná.	1	14
4	Análise e descrição da adoção e implementação de um programa inovador em escola da rede pública do Rio de Janeiro.	1	14
Total		**7**	**100**

SUB-TEMAS LOCALIZADOS NO FOCO TEMÁTICO 3 NO PERÍODO DE 1991 A 2005

Nº	Sub-tema do Foco 3 - Análise do processo de produção/implementação de propostas curriculares	Nº de Trabalhos	Percentual
1	Análise do processo de produção/implementação de propostas curriculares	4	100
Total		**4**	**100**

ANEXO 7 - SUB-TEMAS LOCALIZADOS NO FOCO TEMÁTICO 4 "**O CURRÍCULO PRESENTE NAS PRÁTICAS ESCOLARES**"

SUB-TEMAS LOCALIZADOS NO FOCO TEMÁTICO 4 NO PERÍODO DE 1970 A 1990

Nº	**Sub-tema do** **Foco 4 - O currículo presente nas práticas escolares**	**Nº de Trabalhos**	**Percentual**
1	Métodos, estratégias e/ou programas de ensino empregados no currículo presente nas práticas escolares.	2	12
2	Objetivos de ensino previstos e atingidos.	2	12
3	Nível de integração existente entre os conteúdos de ciências e matemática no ensino de 1o grau.	1	6
4	Organização curricular versus rendimento escolar	1	6
5	Influências cognitivas e afetivas de um currículo organizado por estruturas.	1	6
6	Dimensões técnicas, humanas e políticas da prática pedagógica relativa ao ensino de cálculo.	1	6
7	Atividades curriculares das disciplinas do Departamento de Matemática da UFSM	1	6
8	Atividades curriculares da disciplina de Geometria Analítica numa Faculdade de Arquitetura do Rio de Janeiro e as dificuldade para seu desenvolvimento, segundo professores e alunos	1	6
9	Estudo de caso ou estudos exploratórios sobre o currículo que vem sendo realizado/produzido na prática cotidiana escolar e sobre o cotidiano do processo ensino/aprendizagem em sala de aula.	7	41
	Total	**17**	**100**

SUB-TEMAS LOCALIZADOS NO FOCO TEMÁTICO 4 NO PERÍODO DE 1991 A 2005

Nº	**Sub-tema do** **Foco 4 - O currículo presente nas práticas escolares**	**Nº de Trabalhos**	**Percentual**
1	O currículo presente nas práticas escolares	2	100
	Total	**2**	**100**

ANEXO 8 - SUB-TEMAS LOCALIZADOS NO FOCO TEMÁTICO 5 "**FUNDAMENTOS HISTÓRICO-FILOSÓFICOS E EPISTEMOLÓGICOS PARA INOVAÇÃO CURRICULAR"**

SUB-TEMAS LOCALIZADOS NO FOCO TEMÁTICO 5 NO PERÍODO DE 1970 A 1990

N°	**Sub-tema do Foco 5 - Fundamentos histórico-filosóficos e epistemológicos para inovação curricular**	**N° de Trabalhos**	**Percentual**
1	Compreensão das mudanças curriculares no ensino da matemática a partir de fundamentos histórico-epistemológicos.	3	100%
Total		**3**	**100**

SUB-TEMAS LOCALIZADOS NO FOCO TEMÁTICO 5 NO PERÍODO DE 1991 A 2005

N°	**Sub-temas do Foco 5 - Fundamentos histórico-filosóficos e epistemológicos para inovação curricular**	**N° de Trabalhos**	**Percentual**
1	Análise da construção formal do currículo no Brasil e sua filosofia no período dos jesuítas aos anos 80.	1	100%
Total		**1**	**100**

ANEXO 9 - SUB-TEMAS LOCALIZADOS NO FOCO TEMÁTICO 6 "**ENSINO/APRENDIZAGEM DE TÓPICOS ESPECÍFICOS**"

SUB-TEMAS LOCALIZADOS NO FOCO TEMÁTICO 6 NO PERÍODO DE 1970 A 1990

Nº	Sub-tema do Foco 6 - Ensino/aprendizagem de tópicos específicos	Nº de Trabalhos	Percentual
1	Alfabetização Matemática ou construção do número	11	17
2	Aritmética, envolvendo operações com Naturais, Racionais ou Inteiros.	13	20
3	Ensino da Geometria, sendo dois relacionados especificamente ao Desenho Geométrico e seis à Linguagem LOGO.	18	28
4	Conceito de proporcionalidade	4	6
5	Ensino da álgebra (dois sobre funções e um sobre sistemas lineares)	3	5
6	Geometria analítica	1	2
7	Ensino de disciplinas do Ensino Superior: 10 envolvendo direta ou indiretamente o ensino de Cálculo Diferencial, dois envolvendo a Geometria Descritiva, um sobre ensino de Lógica, um sobre Cálculo Numérico e um sobre Economia Matemática.	15	23
Total		**65**	**100**

SUB-TEMAS LOCALIZADOS NO FOCO TEMÁTICO 6 NO PERÍODO DE 1991 A 2005

Nº	Sub-tema do Foco 6 - Ensino/aprendizagem de tópicos específicos	Nº de Trabalhos	Percentual
1	Conteúdos específicos da matemática.	4	100
Total		**4**	**100**

ANEXO 10 - SUB-TEMAS LOCALIZADOS NO FOCO TEMÁTICO 7 "**RELAÇÃO DA MATEMÁTICA COM OUTRAS DISCIPLINAS**"

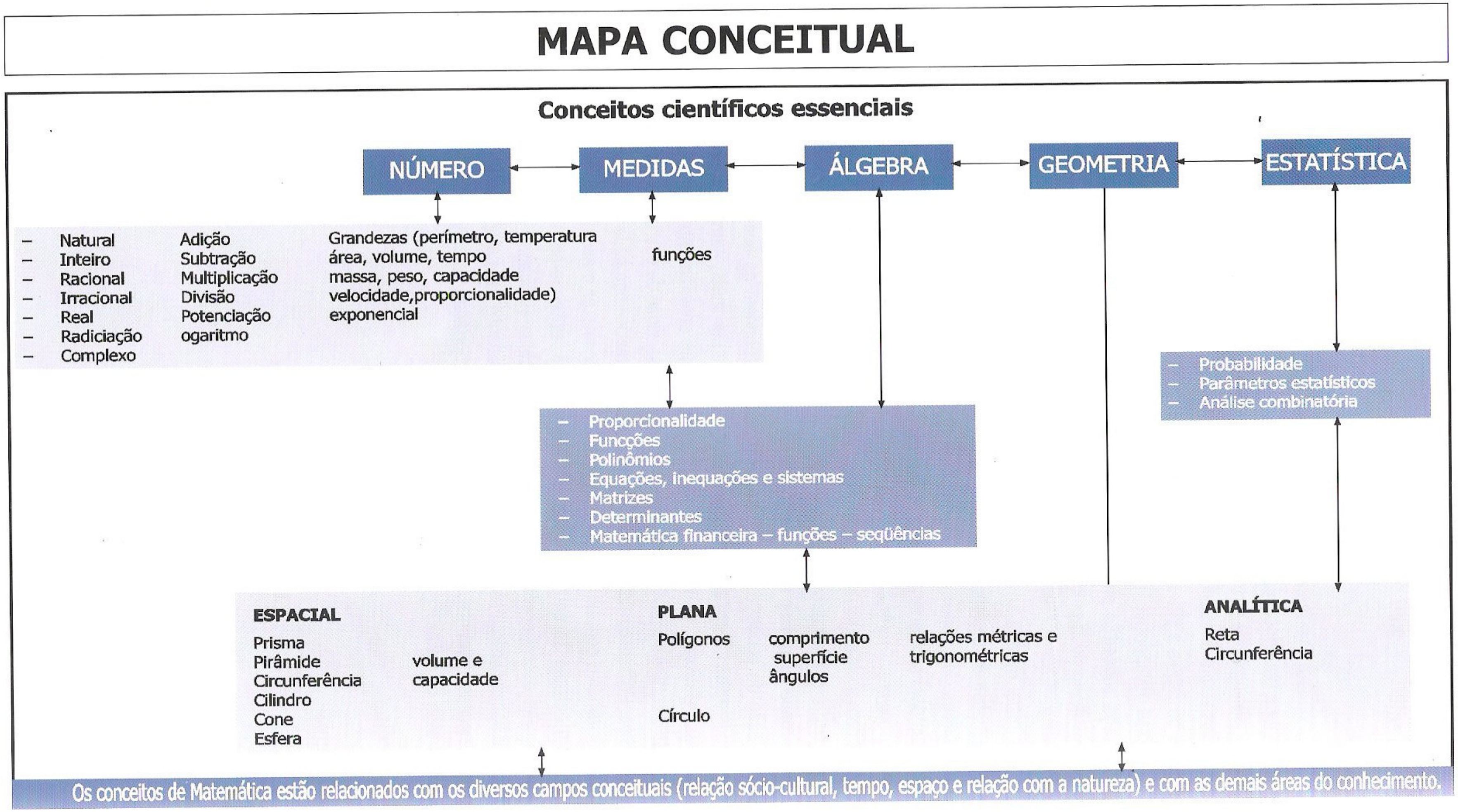
SUB-TEMAS LOCALIZADOS NO FOCO TEMÁTICO 7 NO PERÍODO DE 1970 A 1990

Nº	Sub-tema do Foco 7 - relação da matemática com outras disciplinas	Nº de Trabalhos	Percentual
1	Investigação das influências/implicações do domínio/uso da matemática no desempenho em outras ciências como a Química e a Física.	2	40
2	Integração dos currículos de ciências e matemática.	3	60
	Total	**5**	**100**

SUB-TEMAS LOCALIZADOS NO FOCO TEMÁTICO 7 NO PERÍODO DE 1991 A 2005

Nº	Sub-tema do Foco 7 - relação da matemática com outras disciplinas	Nº de Trabalhos	Percentual
1	Aborda a interdisciplinaridade entre a biologia e matemática.	1	100
	Total	**1**	**100**

ANEXO 11 – MAPA CONCEITUAL PARA A DISCIPLINA DE MATEMÁTICA APRENSENTADO NAS DIRETRIZES PARA O ENSINO FUNDAMENTAL DE SANTA CATARINA



ANEXO 12 – QUADRO DE ÊNFASE DOS CONCEITOS CIENTÍFICOS ESSENCIAIS PARA A DISCIPLINA DE MATEMÁTICA APRESENTADO NAS DIRETRIZES PARA O ENSINO FUNDAMENTAL DE SANTA CATARINA

QUADRO DE ÊNFASE DOS CONCEITOS CIENTÍFICOS ESSENCIAIS

NÚMERO	E.I.	ENSINO FUNDAMENTAL								ENSINO MÉDIO					
	PRÉ	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª	8ª	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª
■ **NÚMEROS NATURAIS**															
– Produção histórico-cultural															
– Sistema de numeração decimal															
– Operações															
■ **NÚMEROS INTEIROS**															
– Produção histórico-cultural															
– Operações															
■ **NÚMEROS RACIONAIS**															
– Produção histórico-cultural															
– Operações															
– Proporcionalidade e Matemática Comercial/Financeira (Razão/Proporção)															
– Porcentagem															
– Sistema Monetário															
– Câmbio															
■ **Números. IRRACIONAIS E REAIS**															
– Produção histórico-cultural															
– Operações															
■ **NÚMEROS COMPLEXOS**															
– Produção histórico-cultural															

■ ***Legenda*** Menor intensidade Média intensidade Maior intensidade

ÁLGEBRA	E.I.	ENSINO FUNDAMENTAL								ENSINO MÉDIO					
	PRÉ	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª	8ª	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª
– Produção histórico-cultural															
– Seqüências															
– Operações com expressões algébricas (cálculo algébrico, produtos notáveis e fatoração)															
■ RELAÇÕES E FUNÇÕES															
■ EQUAÇÕES, INEQUAÇÕES E SISTEMAS															
■ MATRIZES E DETERMINANTES															

GEOMETRIA	E.I.	ENSINO FUNDAMENTAL								ENSINO MÉDIO					
	PRÉ	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª	8ª	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª
– Produção histórico-cultural															
– Exploração do espaço tridimensional															
– Elementos do desenho geométrico															
– Estudo das representações geométricas no plano															
■ **GEOMETRIA ANALÍTICA**															
■ **TRIGONOMETRIA**															
– Produção histórico-cultural															
– Relações métricas e trigonométricas															
– Funções trigonométricas															

■ ***Legenda***

Menor intensidade

Média intensidade

Maior intensidade