



# UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM  
ENGENHARIA MECÂNICA**

**METODOLOGIA DE AVALIAÇÃO DE FILTROS ACÚSTICOS REATIVOS**

**KEY FONSECA DE LIMA**

**Florianópolis, outubro de 2008.**

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM  
ENGENHARIA MECÂNICA**

**METODOLOGIA DE AVALIAÇÃO DE FILTROS ACÚSTICOS REATIVOS**

**Tese submetida à**

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA**

**Para a obtenção do grau de**

**DOUTOR ENGENHARIA MECÂNICA**

**KEY FONSECA DE LIMA**

**Florianópolis, outubro de 2008.**

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM  
ENGENHARIA MECÂNICA**

**METODOLOGIA DE AVALIAÇÃO DE FILTROS ACÚSTICOS REATIVOS**

**KEY FONSECA DE LIMA**

**Esta tese foi julgada adequada para a obtenção do título de**

**DOUTOR EM ENGENHARIA  
ESPECIALIDADE ENGENHARIA MECÂNICA  
sendo aprovada em sua forma final.**

---

**Prof. Arcanjo Lenzi, Ph.D.  
Orientador**

---

**Prof. Eduardo Alberto Fancello, D. Sc.  
Coordenador do Curso**

**BANCA EXAMINADORA**

---

**Prof. Edison da Rosa, Dr. Eng. (UFSC) - Presidente**

---

**Prof. Marcus Antonio Viana Duarte, Dr. Eng. (UFU)**

---

**Prof. Moysés Zindeluk, Dr. Eng. (UFRJ)**

---

**Prof. Renato Barbieri, Dr. Eng. (PUCPR) - Coorientador**

---

**Prof. Roberto Jordan, Dr.Eng. (UFSC)**

Aos meus Pais que me amam incondicionalmente, mesmo eu sendo chato e ausente e, aos meus 37 anos, cuidam de mim como se eu fosse uma criança.

## **AGRADECIMENTOS**

A Deus, companheiro e motivador nos meus dias de solidão e angústia.

Aos meus irmãos, Newton e Brancalizi, que mesmo longe, sempre torcem e oram por mim.

Aos professores Renato Barbieri e Nilson Barbieri, pela orientação e amizade. Hoje considero-os como dois grandes irmãos.

Ao grande professor Arcanjo Lenzi que sempre me apoiou e fez de tudo para permitir a realização deste trabalho.

Aos professores Orlando Strobel, Luis Mauro Moura, Laertes Guimarães e a professora Kátia Mendonça, que me apoiaram nesta etapa da minha vida.

A todos os amigos que, diretamente e indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho, ajudando, incentivando ou simplesmente sorrindo.

## RESUMO

Nesta tese é proposta uma metodologia para obter dimensões básicas de um silenciador puramente reativo, de tal modo que a perda de transmissão sonora (TL) seja maximizada dentro da faixa de frequência onde a eficiência de suas cavidades é notadamente baixa, otimizando assim a cavidade acústica. O cálculo da perda de transmissão (TL) é realizado com o método dos elementos finitos (FEM – formulação axissimétrica e tridimensional) e com o método dos elementos de contorno (BEM – formulação tridimensional). Emprega-se, juntamente com os métodos numéricos, um algoritmo genético (GA) para resolver o problema de otimização. Neste trabalho são avaliados dois modelos de silenciadores de câmara de expansão, o primeiro com uma e o segundo com duas câmaras. Após a análise computacional foi realizada uma verificação experimental dos resultados, através método das duas fontes com a finalidade de avaliar a precisão dos resultados numéricos e a validade da metodologia proposta.

## **ABSTRACT**

A Methodology is presented to determine the reactive muffler basic dimensions in order to maximize the sound transmission loss through the reactive muffler. First, by numerical methods are used to investigate the resonances of the cavities, which are optimized by using Genetic Algorithm (GA). Then, the Finite Element Method (axysymmetric and three-dimensional formulation) and Boundary Element Method (three-dimensional formulation) are used to evaluate the acoustic muffler performance in all numerical simulations. Results in terms of muffler performance are presented using the proposed methodology for single and double expansion chamber mufflers. To conclude, an experimental verification is carried out based on the Two Source Method, showing the accuracy of this numerically based methodology.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 3.1. Silenciador reativo.	40
Figura 3.2. Silenciador reativo e dissipativos.	41
Figura 3.3. Silenciador ativo.	41
Figura 3.4. Perda de inserção.	42
Figura 3.5. Perda de transmissão.	43
Figura 3.6. Redução de ruído.	44
Figura 4.1. Sistema de coordenadas cartesianas em um tubo retangular.	50
Figura 4.2. Sistema de coordenadas cilíndricas em um duto circular.	53
Figura 4.3. Linhas nodais para a distribuição transversal de pressão em um duto retangular para $m=3$ e $n=3$ modos de ordem superior.	54
Figura 4.4 Linhas nodais para a distribuição transversal de pressão em um duto circular para $m=3$ e $n=3$ modos de ordem superior.	57
Figura 5.1. Referencial de coordenadas cilíndricas para problemas axissimétricos.	60
Figura 5.2. Subdomínio $\Omega_\varepsilon$ sobre fonte pontual $Q$ .	68
Figura 5.3. ponto $Q$ excluído do domínio acústico para um contorno suave.	70
Figura 5.4. ponto $Q$ excluído do domínio acústico para um contorno não suave.	70
Figura 6.1. Elemento quadrangular linear.	79
Figura 6.2. Elemento linear de contorno.	81
Figura 6.3. Elemento triangular quadrático.	82
Figura 6.4. Coordenadas de área $L_i(r,z)$	83
Figura 6.5. Elemento quadrático de contorno.	85
Figura 6.6. Elemento tetraédrico linear.	86
Figura 6.7. Elemento tetraédrico do contorno.	90
Figura 6.8. Elemento triangular e quadrangular linear.	92
Figura 6.9. Transformação de coordenadas polares generalizadas.	95
Figura 6.10. Elemento quadrangular dividido em dois triângulos.	98
Figura 6.11. Método dos Quatro Parâmetros.	99
Figura 6.12. Fluxograma de avaliação da perda de transmissão para aplicativos de FEM.	103
Figura 6.13. Fluxograma de avaliação da perda de transmissão para aplicativos de BEM.	104
Figura 7.1. Conjunto de indivíduos e seus códigos genéticos.	107
Figura 7.2. Esquema da transformação de um indivíduo para geração de uma criança.	108

Figura 7.3. Esquema da mutação de um bit.	108
Figura 7.4. Diagrama de blocos da otimização pelo GA.	110
Figura 8.1. Método dos Dois Microfones.	112
Figura 8.2. Posição dos microfones no Método dos Dois Microfones.	117
Figura 8.3. Método dos Três Pontos.	118
Figura 8.4. Parâmetros da matriz.	120
Figura 8.5. Método das Duas Fontes.	121
Figura 8.6. Esquema da bancada de medição.	127
Figura 8.7. Bancada de medição.	127
Figura 8.8. Analisador de sinais HP 3566/65A.	130
Figura 9.1. Modelos – dimensões em [mm].	
Figura 9.2. Modelo 1 – Malha de FemAxiT6.	
Figura 9.3 Modelo 1 – Malha de FemTetra4.	
Figura 9.4. Modelo 1 – Malha de BemTridT3Q4.	
Figura 9.5. Modelo 1 – Malha de BEM Sysnoise ®	
Figura 9.6. Protótipo do modelo 1 – Análise Experimental.	
Figura 9.7. Comparativo entre as análises de FEM para o Modelo 1.	
Figura 9.8. Comparativo FEM × BEM para o Modelo 1.	
Figura 9.9. Comparativo FEM × Experimental para o Modelo 1.	
Figura 9.10. Modelo 1 com tubos estendidos – dimensões em [mm].	
Figura 9.11. Malha de FemAxiQ4 adaptativa.	
Figura 9.12. Comportamento da função objetivo $f(x)$ – Fase I.	
Figura 9.13. Comparativo da TL – Câmara simples × Otimizado Fase I (778 Hz).	
Figura 9.14. Comparativo de $f_1(x) \times f_2(x)$ – Modelos otimizados Fase II (778 e 1570 Hz).	
Figura 9.15. Comparativo da TL – Câmara simples × Modelos otimizados Fase II (778 e 1570 Hz). As respostas dos mod. otimizados 2 e 3 estão sobrepostas a do modelo 1.	
Figura 9.16. Modelo otimizado 1 – Malha de FemAxiT6.	
Figura 9.17. Modelo otimizado 1 – Malha de FemTetra4.	
Figura 9.18. Protótipo do modelo otimizado 1 – Análise Experimental.	
Figura 9.19. Comparativo entre as análises de FEM – Validação do mod. otimizado 1.	
Figura 9.20. Modelo Otimizado 1 – Comparativo FemAxiQ4×Experimental.	
Figura 9.21. Comparativo de $f_1(x) \times f_2(x) \times f_3(x)$ – Modelos otimizados Fase III (778 e	

1570 e 2354 Hz).

Figura 9.22. Comparativo da TL – Câmara simples  $\times$  Modelos otimizado Fase III (778, 1570 e 2354 Hz).

Figura 9.23. Comparativo do modelo otimizado 1  $\times$  Teoria de onda plana. Comprimento dos tubos estendidos  $x_1 = 100,0$  mm e  $x_2 = 43,9$  mm.

Figura 9.24. Comparativo do modelo otimizado 7  $\times$  Teoria de onda plana. Comprimento dos tubos estendidos  $x_1 = 97,9$  mm e  $x_2 = 40,0$  mm.

Figura 9.25. Esquema da interpolação na superfície do tubo estendido.

Figura 9.26. Resultados da otimização de forma – região central com  $\Delta x = 100$  mm.

Figura 9.27. Resultados da otimização de forma – região central com  $\Delta x = 150$  mm.

Figura 9.28. Resultados da otimização de forma sem interpolação da superfície – região central com  $\Delta x = 100$  mm.

Figura 9.29. Comparativo do comportamento de  $f(x)$  Hermite  $\times$  Spline – região central com  $\Delta x = 100$  mm.

Figura 9.30. Comparativo da TL Hermite  $\times$  Spline – região central com  $\Delta x = 100$  mm.

Figura 9.31. Comparativo do comportamento de  $f(x)$  Hermite  $\times$  Spline – região central com  $\Delta x = 150$  mm.

Figura 9.32. Comparativo da TL Hermite  $\times$  Spline – região central com  $\Delta x = 150$  mm.

Figura 9.33. Malha de FemAxiQ4 adaptativa.

Figura 9.34. Comportamento de  $f(x)$  para o modelo otimizado 1.

Figura 9.35. Comparativo da TL – Modelo com tubo estendido liso  $\times$  tubo com perfil otimizado e ajustado com FemAxiQ4.

Figura 9.36. Ajuste do perfil do tubo estendido.

Figura 9.37. Modelo com perfil otimizado e ajustado – Malha de FemAxiT6.

Figura 9.38. Modelo com perfil otimizado e ajustado – Malha de FemTetra4.

Figura 9.39. Detalhe do perfil otimizado e ajustado – Malha de FemTetra4.

Figura 9.40. Comparativo da TL – Modelos de FEM com perfil otimizado e ajustado.

Figura 9.41. Protótipo experimental com perfil otimizado e ajustado.

Figura 9.42. Modelo com perfil otimizado e ajustado – Comparativo FemAxiT6  $\times$  Experimental.

Figura 9.43. Comparativo da TL – Análises numéricas  $\times$  Experimental.

Figura 9.44. Modelo de câmara de expansão dupla.

Figura 9.45. Modelo 2 – Malha de FemAxiT6.

Figura 9.46. Modelo 2 – Malha de FemTetra4.

Figura 9.47. Modelo 2 – Malha de BEM Sysnoise ®.

- Figura 9.48. Protótipo do modelo 2 – Análise Experimental.
- Figura 9.49. Comparativo entre as análises de FEM e BEM para o Modelo 2.
- Figura 9.50. Comparativo FEM × Experimental para o Modelo 2.
- Figura 9.51. Modelo 2 com tubos estendidos – dimensões em [mm].
- Figura 9.52. Malha de FemAxiQ4 adaptativa.
- Figura 9.53. Comportamento de  $f(x)$  conforme Tabela 9.17.
- Figura 9.54. Comparativo da TL – Câmara Dupla × Modelo otimizado 1 (168 e 778 Hz).
- Figura 9.55. Comparativo da TL – Modelo otimizado 1 (168 e 778 Hz) × Modelo otimizado 2 (778 e 1570 Hz).
- Figura 9.56. Comparativo da TL – Modelo otimizado 1 (168 e 778 Hz) × Modelo otimizado 3 (778 e 1570 e 2354 Hz).
- Figura 9.57. Modelo otimizado 1 – Malha de FemAxiT6.
- Figura 9.58. Modelo otimizado 2 – Malha de FemTetra4.
- Figura 9.59. Comparativo da TL entre os modelos numéricos para o Modelo otimizado 1. As respostas do FemAxiQ4 e do FemTetra4 estão sobrepostas.
- Figura 9.60. Protótipo do modelo otimizado 1 – Análise Experimental.
- Figura 9.61. Modelo otimizado 1 – Comparativo FemAxiT6 × Experimental.
- Figura 9.62. Malha de FemAxiQ4 adaptativa.
- Figura 9.63. Comportamento da função objetivo.
- Figura 9.64. Comparativo da TL – Modelo com tubo estendido liso × tubo com perfil otimizado e ajustado com o FemAxiQ4.
- Figura 9.65. Ajuste do perfil do tubo estendido.  $LT = 83.3$  mm para o tubo entre as câmaras e  $LT = 50.0$  mm para tubo da segunda câmara.
- Figura 9.66. Modelo com perfil otimizado e ajustado – Malha de FemAxiT6.
- Figura 9.67. Modelo com perfil otimizado e ajustado – Malha de FemTetra4.
- Figura 9.68. Detalhe do perfil otimizado e ajustado – Malha de FemTetra4.
- Figura 9.69. Comparativo da TL – Modelos de FEM com perfil otimizado e ajustado. As resposta do FemAxiQ4 e do FemTetra4 estão sobrepostas.
- Figura 9.70. Protótipo experimental com perfil otimizado e ajustado.
- Figura 9.71. Modelo com perfil otimizado e ajustado – Comparativo FemAxiT6 × Experimental.
- Figura 9.72. Comparativo da TL Análises Numéricas × Experimental.
- Figura 9.73. Malha de superfície de volumes finitos – Ansys CFX®.
- Figura 9.74. Malha de Detalhe da malha de superfície de volumes finitos do tubo de perfil otimizado – Ansys CFX®.

Figura 9.75. Modelo de câmara de expansão – linhas de corrente Ansys CFX®.

Figura 9.76. Modelo com tubo estendido liso – linhas de corrente Ansys CFX®.

Figura 9.77. Modelo com tubo de perfil otimizado – linhas de corrente Ansys CFX®.

## LISTA DE TABELAS

- Tabela 9.1. Frequências de corte para câmara de  $\varnothing 143$  mm.
- Tabela 9.2. Modelo 1 – Aspectos computacionais da Etapa I.
- Tabela 9.3. Resultados para o Modelo 1 de câmara simples.
- Tabela 9.4. Intervalos de frequência para otimização dos tubos estendidos.
- Tabela 9.5. Parâmetros da otimização com o GA para o modelo 1.
- Tabela 9.6. Características da otimização para análise em duas faixas de frequência.
- Tabela 9.7. Modelo 1 – Aspectos computacionais da Etapa II.
- Tabela 9.8. Características da otimização para análise em três faixas de frequência.
- Tabela 9.9. Comparativo de x1 e x2 para três modelos otimizados.
- Tabela 9.10. Aspectos das otimizações de forma dos tubos de 300 mm de comprimento.
- Tabela 9.11. Aspectos computacionais das análises numéricas com FemAxiQ4.
- Tabela 9.12. Razão de áreas com perfil otimizado.
- Tabela 9.13. Aspectos computacionais das malhas de FEM.
- Tabela 9.14. Frequências de corte para câmara de  $\varnothing 190$  mm.
- Tabela 9.15. Modelo 2 – Aspectos computacionais das malhas.
- Tabela 9.16. Resultados para o Modelo 2 de câmara dupla.
- Tabela 9.17. Intervalos de frequência para otimização dos tubos estendidos.
- Tabela 9.18. Características da otimização para análise em duas faixas de frequência.
- Tabela 9.19. Aspectos computacionais das malhas de FEM.
- Tabela 9.20. Aspectos computacionais das malhas de FEM.
- Tabela 9.21. Resultados das análises de escoamento – modelos de câmara simples.

## LISTA DE SÍMBOLOS

- b menor dimensão do tubo retangular;
- c velocidade do som no meio;
- f freqüência;
- $f$  forma física;
- $f_c$  freqüência de corte;
- $f_m$  freqüência de interesse;
- $f(x)$  função objetivo;
- $\{f\}$  vetor força característico do FEM;
- g vetor característico da solução fundamental;
- h maior dimensão do tubo retangular;
- h vetor característico do potencial da solução fundamental na direção normal;
- $j = \sqrt{-1}$  ;
- k número da onda;
- $l_i$  limite inferior das restrições geométricas;
- m número de bits do GA;
- (m,n) modos de propagação;
- n** vetor normal ao contorno;
- $\bar{p}$  conjugado da pressão sonora;
- p pressão sonora;
- $p_0$  pressão estática do ambiente;
- q elemento do domínio;
- r direção radial de propagação;
- s semi perímetro ou distância entre microfones;
- (s,t) coordenadas naturais;
- s indica processo isentrópico;
- t variável tempo;
- u velocidade da partícula;
- $u_i$  limite superior das restrições geométricas;
- u**<sup>\*</sup> aproximação da velocidade da partícula;
- v** vetor normal a superfície;
- x direção de propagação transversal;

y direção de propagação transversal;  
z direção de propagação axial;  
A amplitude complexa da onda incidente ou transmitida;  
 $A_{IJK}$  área do triângulo de vértices IJK;  
[A] matriz dos coeficientes desconhecidos do BEM;  
A, B, C e D quatro parâmetros convencional;  
 $A^*$ ,  $B^*$ ,  $C^*$  e  $D^*$  quatro parâmetros modificados;  
B amplitude complexa da onda refletida;  
[B] vetor dos coeficientes desconhecidos do BEM;  
C constantes;  
 $C_p$  calor específico a pressão constante;  
 $C_v$  calor específico a volume constante;  
 $G_{ij}$  densidade espectral cruzada de i em relação a j;  
 $G_{ii}$  densidade auto espectral;  
[G] matriz característica relativa ao vetor g;  
 $H_{ij}$  função de transferência de i em relação a j;  
[H] matriz característica relativa ao vetor h;  
IL Perda de inserção;  
J matriz Jacobiana;  
 $J_m$  função de Bessel de ordem m;  
[K] matriz rigidez característica do FEM;  
 $\bar{L}$  comprimento do elemento do contorno;  
 $L_c$  comprimento da câmara do silenciador;  
 $L_i$  coordenadas naturais;  
 $L_T$  comprimento liso dos tubos de perfil otimizado;  
 $L_w$  nível de potência sonora irradiada;  
[M] matriz massa característica do FEM;  
N número de intervalos do GA;  
 $N_m$  função de Newmann de ordem m;  
NR Redução de ruído;  
 $P^*$  aproximação da pressão sonora;  
Q ponto de colocação;  
 $R(f)$  coeficiente complexo de reflexão sonora;  
 $R_m$  solução da equação de Bessel;

$S$  área do tubo;  
 $S(f)$  espectro de potência sonora da fonte;  
 $\bar{S}(f)$  conjugado do espectro de potência sonora da fonte;  
TL Perda de transmissão sonora;  
 $V_{IJKQ}$  Volume do tetraedro de vértices IJKQ;  
 $W$  pesos dos pontos de Gauss;  
 $\{X\}$  vetor das variáveis desconhecidas do BEM;  
 $Z_0$  impedância característica do meio;  
 $\tilde{Z}$  impedância complexa do meio;  
 $\{X\}$  vetor das variáveis desconhecidas do BEM;  
 $\alpha$  coeficientes;  
 $\beta$  coeficientes;  
 $\gamma$  razão de calores específicos ou coeficientes;  
 $\varepsilon$  raio;  
 $\rho_0$  densidade do meio;  
 $\rho$  flutuação da densidade instantânea ou coordenada polar generalizada;  
 $\gamma$  razão de calores específicos ou coeficientes;  
 $\omega$  frequência angular;  
 $\lambda$  comprimento da onda;  
 $\theta$  direção  $\theta$  de propagação em coordenadas cilíndricas;  
 $\phi$  funções de interpolação;  
 $\nabla$  operador gradiente;  
 $\nabla^2$  operador Laplaciano;  
 $\Gamma$  contorno;  
 $\Omega$  domínio;  
 $\Psi$  solução fundamental;  
 $\Psi_L$  solução fundamental de Laplace;  
 $\Phi$  equação de Laplace;  
 $\Delta_{ij}$  determinante dos quatro parâmetros em relação aos microfones  $i$  e  $j$ ;  
 $\Delta f$  delta de frequência;  
 $\Delta P$  perda de carga;

## SUMÁRIO

### AGRADECIMENTOS

### RESUMO

### ABSTRACT

### LISTA DE FIGURAS

### LISTA DE TABELAS

### LISTA DE SÍMBOLOS

### CAPÍTULO 1. INTRODUÇÃO

1.1. Generalidades	19
1.2. Objetivos.	20
1.3. Corpo da Tese	21

### CAPÍTULO 2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 Introdução	24
2.2 Métodos numéricos	24
2.3 Matriz de transferência	30
2.4 Técnicas de Medição	32
2.5 Otimização de forma em silenciadores	36

### CAPÍTULO 3. CONCEITOS BÁSICOS

3.1 Introdução	39
3.2 Classificação dos silenciadores	40
3.3 Parâmetro de desempenho acústico	41

### CAPÍTULO 4. TEORIA DA ONDA PLANA

4.1 Introdução	45
4.2 Onda planas em meios estacionários não viscosos	45
4.3 Ondas estacionárias em meio estacionário não viscoso	48
4.4 Tubos retangulares	49
4.5 Tubos circulares	52

### CAPÍTULO 5. MÉT. DOS ELEMENTOS FINITOS E MÉT. DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

5.1 Introdução	58
5.2 Formulação de elementos finitos	58
5.2.1 Problemas axissimétricos	59
5.2.2 Problemas tridimensionais	63
5.3 Formulação de elementos de contorno	67

5.3.1 Solução fundamental para problemas tridimensionais	67
5.3.2 Equação integral de contorno para problemas tridimensionais	69
<b>CAPÍTULO 6. APLICATIVOS NUMÉRICOS</b>	
6.1 Introdução	78
6.2 Obtenção das matrizes características do FEM	78
6.2.1 Formulação axissimétrica – Elem. quadrangular linear de 4 nós	79
6.2.2 Formulação axissimétrica – Elem. triangular quadrático de 6 nós	82
6.2.3 Formulação tridimensional – Elemento tetraédrico linear de 4 nós	85
6.3 Obtenção das matrizes características do BEM	91
6.3.1 Formulação tridimensional – Elementos lineares triangular de 3 nós e quadrangular de 4 nós e triangular	91
6.4 Cálculo da perda de transmissão sonora	99
6.5 Aplicativos numéricos	101
<b>CAPÍTULO 7. ALGORITMO GENÉTICO (GA)</b>	
7.1 Introdução	105
7.2 O método dos Algoritmos Genéticos	105
7.3 Algoritmo básico do GA	109
<b>CAPÍTULO 8. TÉCNICAS DE MEDIÇÃO</b>	
8.1 Introdução	111
8.2 Método dos Dois Microfones	112
8.2.1 Perda de transmissão sonora	116
8.3 Método dos Três-pontos	118
8.3.1 Perda de transmissão sonora	119
8.4 Método das Duas Fontes	119
8.4.1 Perda de transmissão sonora	123
8.5 Erros nas medições	124
8.6 Calibração	124
8.7 Terminação Anecóica	126
8.8 Bancada de Medição	126
<b>CAPÍTULO 9. ANÁLISES E RESULTADOS</b>	
9.1 Introdução	
9.2 Etapa I – Análise das ressonâncias nas cavidades	
9.3 Etapa II – Aumento da TL do modelo com a otimização dos tubos estendidos	
9.3.1 Fase I – Otimização na frequência central de 778 Hz	
9.3.2 Fase II – Otimização nas frequências centrais de 778 e 1570 Hz	
9.3.3 Fase III – Otimização nas frequências centrais de 778, 1570 e 2354 Hz	

9.3.4 Teoria unidimensional para dutos estendidos

9.4 Etapa III – Aumento da TL do modelo com a otim. da forma dos dutos estendidos

9.4.1 – Fase IV – Escolha do método de interpolação para o perfil do tubo estendido

9.4.2 – Fase V – Otim. da cavidade onde os tubos estendidos deixam de ser eficientes

9.5 Modelo 2 – Câmara de Expansão dupla

9.5.1 Etapa I – Análise das ressonâncias das cavidades

9.5.2 Etapa II – Aumento da TL do modelo com a otimização dos tubos estendidos

9.5.3 Etapa III – Aumento da TL do modelo com a otim.de forma dos dutos estendidos

9.6 Análise adicional – Comportamento do escoamento de gases para o modelo de câmara simples.

9.5 Conclusões do capítulo

## **CAPÍTULO 10. CONCLUSÕES FINAIS**

10.1 Trabalhos Futuros

## **REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS**

131

# CAPÍTULO 1

## INTRODUÇÃO

### 1.1 GENERALIDADES.

A procura mundial por bens de consumo, nestes últimos quinze anos, vem crescendo de maneira assustadora estimulada pelo constante aumento das populações no mundo inteiro. Em consequência deste fato, as indústrias investiram em novas tecnologias, aumentaram a produção e expandiram seus parques fabris. O avanço tecnológico reduziu os custos dos bens de produção e conseqüentemente tornou os bens de consumo mais acessíveis à maioria da população. Dentro de nossas casas, indispensáveis às nossas vidas, multiplicaram-se os condicionadores de ar, refrigeradores, eletrodomésticos e eletroportáteis, que cada vez são mais compactos, eficientes e silenciosos. Entretanto, toda esta facilidade trouxe um aumento desenfreado do número de veículos automotores nas cidades, sendo estes grandes responsáveis pela poluição urbana. Nas indústrias, o aumento da produção trouxe máquinas de grande capacidade produtiva que geram elevados níveis de ruído tornando o ambiente industrial nocivo ao homem.

Nas indústrias, nas cidades ou até mesmo em nossas casas, o estudo dos efeitos dos ruídos indesejáveis (poluição sonora) sobre o homem tornou-se de grande importância. Para eliminar ou diminuir os ruídos indesejáveis para níveis aceitáveis faz-se, em certas aplicações, a necessidade de um filtro acústico chamado de silenciador. O desenvolvimento dos filtros acústicos e do projeto de silenciadores teve início da década de 50 com o estudo de modelos teóricos, mas somente a partir dos anos 80 é que surgiram grandes avanços nesta área. Os modelos teóricos inicialmente desenvolvidos eram limitados a geometrias simples e à

propagação de ondas planas. Esta teoria, apesar das simplificações, tem sido amplamente aplicada na análise unidimensional.

Atualmente, os silenciadores são fabricados com várias formas, volumes e com seções internas de grande complexidade. Pode-se exemplificar aqui o caso dos silenciadores automotivos, que podem chegar a volumes de 140 litros ou o de compressores de refrigeradores, cujos silenciadores não ultrapassam um milésimo desse volume. Como consequência da complexidade construtiva existe em seu interior algumas regiões em que a teoria unidimensional não pode ser aplicada. Isto ocorre devido ao surgimento de ondas não planas, com a propagação simultânea de ondas nas direções axiais e radiais, quando a excitação atinge a faixa de frequência em que o comprimento de onda é menor que a maior dimensão da seção transversal do silenciador. Tal efeito causa uma considerável diferença entre os resultados da teoria de onda plana e os resultados experimentais.

Os métodos analíticos desenvolvidos para o estudo da propagação de ondas no interior de silenciadores envolvem uma álgebra complexa e não aplicáveis a geometrias irregulares. Com o desenvolvimento tecnológico ocorreu o surgimento de grande variedade de técnicas computacionais que tornaram possível a solução de inúmeros problemas de engenharia. Com isto, tornou-se possível prever a eficiência de um silenciador na fase de projeto através da análise numérica computacional. Esta predição possibilitou a fabricação de silenciadores mais eficientes, compactos e de menor custo, aliados a menores tempos de desenvolvimento, o que hoje é um requisito fundamental para a indústria.

Nesta última década, o desenvolvimento de processadores mais rápidos reduziu o tempo de processamento em mais de 500 vezes, permitindo o estudo de modelos computacionais para altas frequências, onde existe a necessidade de malhas refinadas ou para caso de silenciadores de grandes volumes, onde as malhas são grandes para discretizar corretamente o domínio. Esses modelos, no início dos anos 90, eram impossíveis de serem avaliados devido à limitação dos compiladores e hardwares.

## **1.2 OBJETIVO.**

O objetivo do presente trabalho é desenvolver uma metodologia para obter as dimensões básicas de um silenciador puramente reativo, de tal modo que a perda de transmissão sonora (TL) seja maximizada dentro da faixa de frequência onde a eficiência de suas cavidades é notadamente baixa, otimizando assim a cavidade acústica. O cálculo da TL é

realizado com método dos elementos finitos (FEM – formulação axissimétrica e tridimensional) e com o método dos elementos de contorno (BEM – formulação tridimensional). Emprega-se, juntamente com os métodos numéricos um algoritmo genético (GA) para resolver o problema de otimização. Neste trabalho são avaliados dois modelos de silenciadores de câmara de expansão, o primeiro com uma e o segundo com duas câmaras. Após a análise computacional será realizado uma verificação experimental dos resultados, através do método das duas fontes, com a finalidade de avaliar a precisão dos resultados numéricos e a validade da metodologia proposta.

As análises computacionais descritas no parágrafo anterior são executadas com dois aplicativos próprios, um de elementos finitos e o outro de elementos de contorno, ambos desenvolvidos pelo autor com o compilador Fortran 90/95.

### 1.3 CORPO DA TESE.

Esta tese está estruturada da seguinte forma:

⇒ **Capítulo 2**, apresenta um breve histórico dos trabalhos que envolvem métodos computacionais e otimização de forma aplicada no estudo de silenciadores através de uma revisão bibliográfica;

⇒ **Capítulo 3**, mostra a classificação dos silenciadores e os parâmetros acústicos existentes para a avaliação de seu desempenho;

⇒ **Capítulo 4**, demonstra as equações características necessárias ao estudo da propagação de ondas planas em dutos circulares e retangulares;

⇒ **Capítulo 5**, descreve a obtenção das equações para entendimento e implementação do método dos elementos finitos (FEM) e do método dos elementos de contorno (BEM) no estudo fenômenos acústicos regidos pela equação de Helmholtz;

⇒ **Capítulo 6**, descreve a solução e a implementação computacional das matrizes características desenvolvidas no capítulo anterior, para aplicativos de FEM e BEM utilizados nas simulações numéricas;

⇒ **Capítulo 7**, descreve o algoritmo genético (GA) utilizado como ferramenta para otimizar o comprimento e a forma dos tubos estendidos nas cavidades dos modelos;

⇒ **Capítulo 8**, apresenta conceitos básicos e três técnicas de medição da perda de transmissão sonora (TL) em silenciadores. O objetivo deste capítulo é dar embasamento teórico para as análises experimentais que serão realizadas neste trabalho;

⇒ **Capítulo 9**, descreve a otimização completa dos modelos e todas as etapas resumidas no item 1.2. Neste capítulo é realizada uma comparação entre as análises numéricas e experimentais;

⇒ **Capítulo 10**, finalmente, apresenta uma conclusão geral sobre os resultados e apresenta sugestões para trabalhos futuros.

## **CAPÍTULO 2**

### **REVISÃO BIBLIOGRÁFICA**

#### **2.1 INTRODUÇÃO.**

Com o desenvolvimento das técnicas computacionais, tornou-se possível prever o desempenho acústico de silenciadores com rapidez e precisão. O desenvolvimento tecnológico trouxe também modernos sistemas eletrônicos de medição que tornaram os experimentos mais simples, rápidos e precisos.

Neste capítulo será feita uma breve revisão bibliográfica das técnicas numéricas disponíveis, das técnicas de medição e de estudos com otimização para prever o desempenho de silenciadores.

#### **2.2 MÉTODOS NUMÉRICOS.**

A análise acústica através do método de elementos finitos (FEM – *Finite Element Method*) foi primeiramente utilizado por Gladwell (1965). Entretanto, a análise de propagação de ondas em silenciadores para um meio estacionário com o FEM foi realmente iniciada por Young e Crocker (1975), na predição da perda de transmissão de uma câmara de expansão simples. Os resultados numéricos foram considerados bons quando comparados com as predições da teoria da onda plana. Seus resultados mostraram que com o aumento do número de elementos usados na discretização do modelo os resultados via FEM convergiam a valores pontuais. Mais tarde, Young e Crocker (1976) estudaram câmaras de fluxo reverso com

elementos retangulares com espessura variável e obtiveram bons resultados comparando-se os resultados numéricos com medições experimentais.

Neste mesmo ano, Craggs (1976), utilizando-se de uma formulação com elementos hexaédricos, analisou diversas configurações de silenciadores. No ano seguinte, 1977, novamente, Craggs utilizou o FEM para analisar câmaras de expansão simples com paredes internas revestidas de materiais absorventes.

A maioria dos silenciadores automotivos faz uso de elementos perfurados para melhorar seu desempenho. Ross (1981) propôs uma expressão de energia aplicada à análise de elementos finitos, baseado num sistema adjunto que ganha a energia que o sistema real perde, em componentes perfurados de silenciadores. Nesse trabalho foram analisados numericamente e experimentalmente silenciadores veiculares obtendo-se boa concordância entre os resultados.

Mais tarde, Graggs (1986) apresentou uma nova formulação para materiais absorventes, na qual a resistividade e a densidade efetiva do ar se movendo no interior dos poros do material podiam variar com a frequência. Nesse estudo foi modelada uma sala retangular, com uma das paredes recoberta com material absorvente, obtendo uma boa concordância entre os resultados numéricos e experimentais.

Cheng et al. (1990), apresentaram o método dos elementos de contorno, (*BEM – Bondary Element Method*), aplicados a multi-domínios na análise de vários silenciadores com tubos de paredes finas estendidos em seu interior. Nessa técnica o silenciador é dividido em vários subdomínios, nos quais a equação integral de Helmholtz é aplicada. A análise foi comparada ao FEM, mostrando excelente concordância.

Sahasradube et al. (1991), desenvolveram uma técnica para montagem das matrizes características de elementos finitos. Utilizaram o método da subestruturação, a técnica da matriz de transferência e a técnica da matriz rigidez condensada em uma análise tridimensional de um silenciador de câmara de expansão simples. Nesta análise foram utilizados elementos isoparamétricos hexaédricos de 20 nós e prismáticos de 15 nós, para modelar os silenciadores. Os resultados provenientes desse estudo foram comparados a uma análise experimental e apresentaram boa concordância.

Em um estudo apresentado em 1992 e publicado em 1993, Wang et al. modelam-se um sistema acústico formado por um pequeno ressonador com um tubo perfurado em seu interior, com uso do BEM. A influência de um fluxo interno médio foi investigada sem considerar seus efeitos convectivos. Nesse mesmo ano, Zhenlin et al. (1993), mostraram a

aplicação do BEM no estudo de silenciadores utilizando modelos axissimétricos e tridimensionais incorporando somente os efeitos convectivos de um fluxo interno médio. O desempenho do silenciador foi calculado através da matriz dos quatro parâmetros, incluindo os efeitos dos modos de alta ordem.

Kimura et al. (1994) conseguiram ótimos resultados na predição da perda de transmissão no estudo de um silenciador de câmara de expansão simples, através do método dos elementos finitos, FEM e com o método dos elementos de contorno, BEM. Tais resultados foram validados experimentalmente com o método de um microfone. Novamente, Kimura (1995) analisou a perda de transmissão estudando diversas formas de silenciadores automotivos, incluindo os silenciadores com dutos internos perfurados. Tal estudo foi validado com uma análise experimental através do método de um microfone obtendo boa concordância entre os resultados.

Peat e Rathi (1995) apresentaram duas formulações para o estudo de silenciadores dissipativos. Nesse trabalho, analisaram o campo sonoro de um duto com fluxo com alta velocidade, recoberto em seu contorno com material poroso, absorvente, anisotrópico e não homogêneo. Neste mesmo ano, Ji et al. (1995), sugeriram um método através do BEM para avaliação dos quatro parâmetros na análise do desempenho de um silenciador de câmara de expansão com fluxo não uniforme e com baixo número de Mach.

Wu e Wan (1996) apresentaram a formulação *Direct Mixed-Body Boundary Element Method* que consiste em subdividir um domínio interior em diferentes subdomínios sem criar zonas distintas. Estes subdomínios são discretizados, criando-se as equações integrais de contorno para cada região e adicionando-se as integrais hipersingulares nas interfaces dos subdomínios.

Betts (1998) analisou através do FEM a influência do refino de malha, da distorção do elemento, da ordem das funções de interpolação e das condições de contorno sobre a resposta numérica em dutos circulares com elementos retangulares de 4 e 8 nós. Neste estudo concluiu-se que elementos de ordem superior e malhas mais refinadas apresentavam resultados mais precisos quando comparados a resposta analítica.

Selamet e Ji (1998), estudaram os efeitos de cavidades curtas sobre a teoria de onda plana. Neste mesmo ano, em dois trabalhos distintos, mostraram, através de um estudo analítico, experimental e computacional a influência do posicionamento assimétrico dos dutos de entrada e saída de silenciadores de câmara de expansão simples. Em todos esses trabalhos foi utilizado como ferramenta computacional o BEM. No ano seguinte, Selamet e Ji (1999),

demonstraram com o BEM as vantagens de se estenderem os dutos de entrada e de saída de um silenciador de câmara de expansão simples através da otimização de seus comprimentos com os modelos axissimétricos.

Novamente em 2000, Selamet e Ji, aplicando o BEM, estudaram a influência do posicionamento dos dutos entrada e de saída, juntamente com a informação de fase das ondas incidentes no desempenho de silenciadores com dois dutos de entrada e um de saída. Nesse mesmo ano, em outro trabalho, verificaram o desempenho de silenciadores com um duto de entrada e com dois dutos de saída.

Soenarko e Seybert (2000) demonstraram o cancelamento de ondas sonoras e o comportamento da propagação da onda no interior de um silenciador complexo formado por tubos lisos, cavidades, tubos perfurados e por um material poroso através do BEM.

Denia et al. (2000-01) estudaram com o FEM o comportamento da frequência de corte nas cavidades de silenciadores com seção transversal elíptica, considerando os efeitos do comprimento da câmara, da localização dos dutos de entrada e de saída e da excentricidade da seção transversal.

Tsuji et al. (2001) analisaram um silenciador de câmara de expansão simples com escoamento de baixo número de Mach. Nesse trabalho foi verificado que as ressonâncias da cavidade movem-se em direção às baixas frequências com o aumento do número de Mach. A análise numérica foi realizada através do FEM com modelos axissimétricos e através do BEM com modelos tridimensionais. O resultado da análise numérica foi comparado com a solução analítica, com razoável concordância.

Wang et al. (2001) verificaram um deslocamento para altas frequências nos domos da perda de transmissão sonora em silenciadores de câmara de expansão com fluxo constante e gradiente de temperatura no seu interior, comparada com a ausência dos mesmos.

Wu et al. (2002-03), em dois trabalhos, com objetivo de reduzir o ruído de banda larga, estudaram através do BEM, com a formulação *Direct Mixed-Body* apresentada em 1996, silenciadores compactos com material absorvente e com tubos perfurados. Os resultados obtidos nestes trabalhos foram validados com análises experimentais, obtendo-se ótima concordância.

Bilawchuk e Fife (2003), com o uso de uma ferramenta computacional SYSNOISE® através do BEM e com uma análise experimental, avaliaram a eficiência na determinação da perda de transmissão sonora do tradicional método dos quatro parâmetros e do método dos

três pontos. Os métodos apresentaram resultados concordantes, sendo o primeiro muito mais lento.

Selamet et al. (2003) estudaram o comportamento acústico de um silenciador de câmara dupla com dutos concêntricos estendidos e com a presença de duas cornetas montadas axialmente em seu interior. Nesse estudo verificou-se que o posicionamento das cornetas possui grande influência no surgimento do comportamento de duplo domo e de indesejáveis filtros passa-banda na perda de transmissão sonora. Tal estudo foi realizado com o FEM e experimentalmente.

Novamente, Selamet et al. (2003) investigaram analiticamente, experimentalmente e computacionalmente, com o BEM tridimensional, o comportamento acústico de silenciadores híbridos. Neste estudo verificaram que elementos reativos ou um ressonador de Helmholtz, combinados com dois elementos dissipativos de grande porosidade podem aumentar a perda de transmissão em altas frequências.

Lou et al. (2003) utilizaram a técnica de subestruturação juntamente com a método dos quatro parâmetros no estudo de silenciadores através do *direct mixed-body BEM* com a finalidade de reduzir o tempo computacional do convencional BEM em mais de duas vezes.

Xu et al. (2004) obtiveram boa concordância comparando os resultados computacionais do BEM com uma análise experimental no estudo do desempenho de um silenciador de câmara de expansão simples revestido internamente com material absorvente.

Barbieri et al. (2004), na investigação do desempenho de silenciadores de câmara de expansão, mostraram os problemas causados pelo tamanho do elemento utilizado na descritização dos modelos computacionais através do FEM, em problemas governados pela equação de Helmholtz.

Nesse mesmo ano, 2004, Selamet et al. desenvolveram uma formulação analítica bidimensional para determinar o desempenho de um silenciador com tubo perfurado concêntrico de passagem simples preenchido de material fibroso. Nesta formulação foi considerada a propagação de ondas através do tubo perfurado e do material fibroso, da impedância característica complexa, do número de onda e da impedância do furos. Os resultados desta formulação foram comparados com uma avaliação numérica, através do BEM, e com uma análise experimental, sendo obtida uma razoável concordância.

Mehdizadeh e Paraschivoiu (2005) verificaram através do FEM a perda de transmissão sonora de um silenciador com a câmara de expansão revestida de material absorvente e um

outro silenciador, cilíndrico com paredes absorventes paralelas ao fluxo, utilizando-se de elementos tetraédricos quadráticos isoparamétricos. Os resultados computacionais apresentaram uma boa concordância com os experimentos realizados. Entretanto, as análises realizadas neste trabalho foram comparadas com o trabalho de Wu et al. (2002) que se utilizaram dos mesmos modelos com o BEM. Nessa comparação, foram encontradas diferenças para altas frequências, mostrando uma pequena imprecisão dos resultados com o BEM na análise de câmaras com material absorvente.

Broatch et al. (2005) estudaram o desempenho acústico de dois silenciadores com o CFD. Neste método um pulso de ar a alta pressão atravessa o silenciador e então seu desempenho é avaliado a partir da determinação das amplitudes complexas dos pulsos de pressão incidente, refletido e transmitido. Os resultados do CFD obtiveram boa concordância para baixas e médias frequências comparadas com uma análise de elementos finitos tradicional.

Wu et al. (2006) utilizaram-se da aproximação analítica *Modal Meshing* aplicada juntamente com a teoria de onda para avaliar a perda de transmissão sonora de um silenciador de câmara de expansão simples de uma entrada e duas saídas. Foram analisadas numericamente diversas relações de comprimento e diâmetro da câmara. Ao final desse estudo, para comprovar a precisão desta formulação, foi realizada uma análise via FEM e obteve-se boa concordância entre os resultados. Esta formulação foi proposta primeiramente por Munja em 1987.

Pan et al. (2007) utilizaram a formulação *direct mixed-body BEM* para avaliar o desempenho de três modelos de câmara de expansão com paredes recobertas por material absorvente de camada fina. A finalidade do estudo era combinar a impedância de transferência dos furos com a impedância local do material absorvente. Primeiramente, foi analisado um silenciador com um tubo perfurado recoberto por espuma. O segundo modelo continha uma parede perfurada, recoberta por espuma, dividindo a câmara do silenciador em duas sub-câmaras e por último, um modelo com um tubo estendido perfurado recoberto de espuma. Os resultados numéricos foram validados por uma análise experimental.

Denia et al. (2007) estudaram a correlação da pressão acústica com a velocidade da partícula através das discontinuidades geométricas no comportamento de silenciadores dissipativos com dutos perfurados. O estudo foi realizado utilizando uma formulação bidimensional axissimétrica através do FEM. A impedância característica complexa, o número de onda e a impedância dos furos são verificados para avaliar o número de onda axial

para propagação em meio fibroso na região central de um tubo perfurado. Em uma última análise esse estudo foi validado experimentalmente.

Kang e Ji (2008) utilizaram-se de uma formulação analítica bidimensional axissimétrica e do FEM tridimensional para determinar a correção da formulação unidimensional na análise do desempenho de câmaras acústicas com dutos estendidos. Nesse estudo foi desenvolvida uma metodologia para corrigir o efeito de dutos estendidos na entrada de uma câmara cilíndrica, na extensão do pescoço de um ressonador de Helmholtz e na entrada e saída de um silenciador de câmara de expansão simples. Verificou-se que diminui a imprecisão da teoria unidimensional quando é aumentado o comprimento da extensão dos dutos ou quando é aumentada a razão entre o comprimento da extensão do duto de entrada e seu diâmetro ou ainda, quando é aumentada a razão do comprimento livre da câmara e seu diâmetro.

Wu et al. (2008) desenvolveram uma formulação para avaliar a perda de transmissão sonora de um silenciador de câmara de expansão simples de uma entrada e duas saídas, utilizando-se da aproximação *Modal Meshing* aplicada juntamente com a teoria de onda plana para um meio estacionário. Foram analisadas numericamente diversas relações de comprimento e diâmetro da câmara. Ao final desse estudo, para comprovar a precisão desta formulação, foi realizada uma análise via FEM. Comparando os resultados, mostraram que estes não apresentam concordância para altas frequências e câmaras relativamente curtas.

### **2.3 MATRIZ DE TRANSFERÊNCIA**

Ao final dos anos 50, em trabalhos publicados por Igarashi et al. (1958-60) e por Fukuda et al. (1963-70), os cálculos das propriedades de silenciadores começaram a ser feitos utilizando a analogia eletro-acústica.

Nesses estudos, a pressão sonora e a velocidade de volume são relacionadas antes e após o silenciador através de uma multiplicação de matrizes referentes a cada elemento básico formador do silenciador. Tais matrizes, conhecidas como Matrizes de Quatro Parâmetros ou Matrizes de Quatro Pólos, são compostas de quatro elementos que representam cada seção básica. A partir daí, muitos trabalhos foram publicados sobre a obtenção dessas matrizes, sendo um deles de Munjal (1987).

Na década de 90, foram publicados estudos utilizando a matriz de transferência na predição da perda de transmissão em silenciadores com a simulação numérica através do método dos elementos de contorno. Cheng et al. (1991) estudaram a predição do desempenho de silenciadores automotivos. Ji et al. (1992) modelaram silenciadores com dutos internos perfurados reativos. Novamente, Ji et al. (1994) estudaram silenciadores de câmara de expansão simples com fluxo de gases em seu interior. Wang et al. (1993) estudaram ressonadores com dutos concêntricos. Todos estes trabalhos esbarraram no fato de que o BEM necessita de duas condições de contorno diferentes nos dutos de saída, velocidade e pressão. Isto leva à necessidade de se resolver a matriz de conectividade dos elementos duas vezes, consumindo muito tempo de processamento.

Wu et al. (1998), utilizaram um método mais rápido, derivado do método dos quatro parâmetros, chamado de Método dos Quatro Parâmetros Modificado. Nesse método, a matriz de conectividade só necessita ser resolvida uma vez, em virtude de se permutarem as condições de contorno na saída, de modo que somente é utilizada a condição de velocidade no contorno. Em seu estudo, utilizaram modelos de tubos perfurados concêntricos e paralelos, obtendo excelente concordância com os resultados experimentais. Este método foi primeiramente apresentado por Kim e Soedel (1989-90).

Thieme (2000) analisou a perda de transmissão sonora em silenciadores automotivos, através de uma análise numérica, com o método da matriz de transferência e comparou seus resultados com uma análise experimental obtendo boa concordância. Nesse estudo foram desenvolvidos métodos que possibilitam uma otimização das características acústicas dos silenciadores para motores de combustão interna.

Pereira (2003) estudou a influência dos elementos construtivos em silenciadores automotivos constituídos por câmaras de expansão, dutos estendidos, ressonadores concêntricos e tubos perfurados através da teoria da matriz de transferência e da análise experimental.

Panigrahi and Munjal (2005) desenvolveram um algoritmo chamado de *Network One-Dimensional Algorithm*, com base no método da matriz de transferência, para estudar a propagação de ondas em sistemas rígidos, interconectados, de filtros acústicos. As equações de continuidade de velocidade e de equilíbrio de pressão são interconectadas, para cada elemento, usando uma matriz de conectividade. Esta matriz é resolvida para obter-se a matriz de transferência global. O algoritmo proposto foi validado através da análise de três modelos juntamente com o FEM – SYSNOISE ®. Os resultados tiveram ótima concordância.

Sohei et al. (2006) estudaram um silenciador de câmara elíptica com um tubo perfurado sem fluxo, utilizando-se de um método derivado do tradicional método dos quatro parâmetros com o objetivo de incorporar os efeitos dos modos de alta ordem. O surgimento destes modos é devido à propagação de ondas multidirecionais ocasionadas pela presença de tubos perfurados. Após a predição destes efeitos, realizaram uma análise experimental do modelo proposto, obtendo boa concordância na comparação dos resultados.

## 2.4 TÉCNICAS DE MEDIÇÃO

Um método clássico para medição das propriedades sonoras de um material é o método do tubo de impedância. Embora este seja um método muito confiável e de grande precisão, é por outro lado muito lento, devido ao fato de se avaliarem separadamente as inúmeras frequências de interesse e à necessidade de se obter a posição e magnitude de sucessivos máximos e mínimos através da movimentação de um microfone no interior do duto. Outra deficiência deste método é que, para frequências muito baixas, é necessário o emprego de dutos longos.

Seybert e Ross (1977) publicaram um novo método de medição para determinação das propriedades acústicas de um duto, considerando o efeito do escoamento de gases em seu interior, chamado de método dos dois microfones. Esta técnica consiste em usar uma fonte sonora gerando um sinal randômico de banda relativamente estreita, para medição da densidade auto-espectral e da densidade espectral-cruzada, entre os sinais de dois microfones alocados em posições estacionárias conhecidas no duto. Com isso, os valores medidos são substituídos num conjunto de equações para se obterem as funções espectrais necessárias ao cálculo das propriedades acústicas desejadas do duto. Nesse trabalho, apresentaram também a medição de um protótipo de silenciador automotivo que consistia basicamente em uma câmara de expansão simples, cuja entrada e saída estavam interligadas por um duto perfurado, sem nenhum fluxo de gases no seu interior. Seybert e Ross, neste mesmo ano, conseguiram bons resultados em comparação ao método do tubo de impedância para o mesmo silenciador.

Em um trabalho posterior, Chung e Blaser (1980) desenvolveram expressões para o coeficiente de reflexão complexo, para a impedância complexa, para o coeficiente de absorção sonoro de materiais e para a perda de transmissão em silenciadores. Isto se deu através da decomposição matemática de uma onda acústica randômica estacionária de banda larga, usando-se a função de transferência entre dois microfones junto à parede do duto.

Loung e Doige (1983), utilizaram o método das duas cargas na determinação dos quatro parâmetros da matriz de transferência de um silenciador para pequenas velocidades de fluxo. Este método consiste em duas medições da pressão sonora com diferentes impedâncias nas terminações. A medição da pressão é realizada em quatro pontos distintos, dois pontos na entrada e dois pontos na saída do silenciador. Tal método mostrou-se instável porque as impedâncias na saída não eram suficientemente diferentes na faixa de frequência analisada.

Fahy (1984) demonstrou a possibilidade de se obter a função de transferência com apenas um microfone. Mais tarde, num trabalho apresentado por Chu (1986), considerando um sinal pseudo-aleatório periódico como fonte de excitação e, aproveitando-se do fato do mesmo ser estacionário, foi proposto o uso somente de um microfone na medição da função de transferência. Desta forma, eliminou-se qualquer erro associado à diferença de fase entre os microfones e os canais de medição, e também a necessidade de calibrar os microfones para cada medição. Nessa análise feita por Chu (1986), foi proposta a inclusão da atenuação no duto, que em análises anteriores fora ignorada.

Uma investigação dos erros que podem ocorrer durante as medições com a técnica dos dois microfones foi desenvolvida por Chung e Blaser (1980), e os efeitos desses erros no cálculo das propriedades acústicas foram realizados por Bodén e Abom (1984-86). Através de uma análise numérica e experimental, estudaram, na medição da função de transferência, erros provenientes da separação dos microfones e da distância entre o microfone e o sistema a ser medido. Através deste estudo foram traçadas algumas diretrizes para minimizar a influência desses erros no método desenvolvido por Chung e Blaser (1980). A maioria das diretrizes observadas nesse estudo pode ser estendida aos outros métodos descritos anteriormente. Mais tarde, Bodén e Abom (1988), realizaram um novo estudo da influência desses erros considerando o escoamento de gases.

Uma técnica alternativa de medição das características de silenciadores foi proposta por Singh e Katra (1978). Nesta técnica, um pulso acústico de curta duração é utilizado para excitar o sistema, sendo que este sinal é capturado através de microfones em posições específicas antes e após o silenciador. Uma média de vários pulsos é feita no domínio do tempo para eliminar componentes de ruído devido ao fluxo de gases. Então, as propriedades do silenciador são calculadas no domínio da frequência, através da transformada de Fourier das partes referentes às ondas incidente e transmitida no domínio do tempo. Nesse trabalho, foi apresentado um experimento usando um silenciador de compressor, com e sem fluxo de gases, mostrando que sem escoamento a perda de transmissão é um pouco maior.

Munjal e Doige (1990) apresentaram o método das duas fontes para medição dos quatro parâmetros. Tal método consiste na medição das pressões acústicas em duas etapas em quatro pontos distintos no duto, sendo dois na entrada e dois na saída. Na primeira etapa, um sinal pseudo-aleatório é gerado pela fonte posicionada na entrada e na segunda etapa, realiza-se o mesmo procedimento com a fonte na saída. Os quatro parâmetros da matriz de transferência são calculados através das funções de transferência entre os pontos medidos.

Wan (1995) apresentou o método dos três pontos para verificar a perda de transmissão sonora em silenciadores com dutos perfurados calculada através do método dos elementos de contorno, BEM. Tal técnica consiste na medição da pressão sonora em dois pontos conhecidos na parede do duto, antes do silenciador, e um terceiro ponto no duto de saída, após o silenciador, considerando-se que este apresenta uma terminação anecóica. Wu e Wan (1996) realizaram a verificação do método comparando os resultados numéricos com experimentos realizados por Sullivan e Crocker (1978), de um pequeno ressonador concêntrico, apresentando resultados concordantes.

Selamet e Radavich (1997) realizaram um estudo analítico, computacional e experimental com o método dos dois microfones, sobre a propagação de ondas não planas em uma câmara de expansão simples. Nesse estudo, verificou-se que ondas multi-dimensionais são excitadas para todas as frequências onde existem descontinuidades de área na cavidade. Entretanto, notaram que para frequências abaixo da frequência de corte da câmara há um decaimento dessas ondas multi-dimensionais numa distância curta ocasionando pequenos efeitos sobre a perda de transmissão. Para altas frequências, os efeitos da propagação multi-dimensional começam a dominar, causando problemas na medição.

Lai (2000) analisou experimentalmente diversos modelos para os dutos de saída de silenciadores com o objetivo de determinar a influência da pulsação do gás com diferentes terminações, anecóicas ou não. Seus resultados mostram que sem uma terminação anecóica apropriada, as medições realizadas com a técnica de dois microfones e de um microfone não apresentam resultados confiáveis, devido à grande influência das ondas sonoras refletidas. Com base nesse estudo, Munjal (2001) fez uso da analogia elétrico-acústica unidimensional e mostrou que o método dos dois microfones sem uma satisfatória terminação anecóica não é confiável.

Tao e Selamet (2001) mediram a perda de transmissão sonora de dois silenciadores, com uma e duas câmaras de expansão, através da teoria da decomposição da potência sonora incidente e transmitida, juntamente com o uso da teoria de onda plana. Neste trabalho foi utilizados o método de duas fontes e o método das duas cargas, sendo que ambos não

necessitam de terminação anecóica. Os resultados foram comparados com uma análise numérica realizada com o BEM e apresentaram ótima concordância.

Tang e Li (2003), através do método dos dois microfones, mediram a perda de transmissão sonora de um sistema acústico formado por vários tubos pequenos montados lateralmente (side branches) a um duto retangular, abaixo da sua primeira frequência de corte. Os resultados obtidos tornam-se concordantes com a teoria de onda plana somente com o aumento da distância entre os tubos laterais.

Braga (2003) utilizou em sua dissertação de mestrado o método das duas fontes e o método das duas cargas para análise de silenciadores veiculares. Os resultados encontrados foram comparados com uma análise computacional realizada através do FEM – SYSNOISE®, onde se verificou que o método das duas fontes é mais confiável.

Lee e Wang (2006) desenvolveram o método EHMP (*Experimental Hybrid Multilayer Prediction*) para obter os parâmetros da matriz de transferência na determinação do coeficiente de absorção sonora e da perda de transmissão sonora de materiais acústicos de multicamada híbridos. Nesse estudo, concluíram através de análises comparativas, que o método apresentado é eficiente para medição de amostras pequenas e de materiais altamente dissipativos, onde os métodos tradicionais não apresentam boa precisão.

## 2.5 OTIMIZAÇÃO DE FORMA EM SILENCIADORES

O primeiro trabalho de otimização que se tem notícia é atribuído a Galileu que em 1638, que procurava a solução ótima de uma viga, variando sua espessura. Na seqüência vieram os trabalhos de J. Bernoulli e Newton, séc. XVII e de D. Bernoulli e Lagrange, séc. XVIII, também sobre otimização estrutural. Desde então muitos trabalhos têm sido publicados nesta área.

Os primeiros trabalhos com otimização de forma em silenciadores surgiram somente em 1986 com Bernhard, que otimizou a forma de silenciador de câmara de expansão usando um conjunto de matrizes de sensibilidade. Em 1989, Utjés et al. apresentaram um trabalho utilizando k-otimização das funções de forma do FEM para problemas acústicos bidimensionais governados pela equação diferencial de Helmholtz. Nesse trabalho foram empregados elementos triangulares de três nós e quadrangulares de quatro nós.

Desde então é muito difícil encontrar literatura disponível sobre otimização em problemas acústicos. Somente em 2002, Namgoong et al. otimizaram a forma de diferentes

aerofólios sob fluxo transônico, comparando os resultados com algoritmo genético (GA) e com um método baseado em gradiente através da ferramenta CFD. Os resultados mostraram que o GA, independentemente da forma inicial utilizada, convergiu para um mesmo resultado. Desta forma, concluíram que o resultado alcançado na otimização era um ótimo global. Entretanto os métodos que se utilizam de gradientes produziram diferentes soluções, sugerindo que estes resultados são ótimos locais. Nesse estudo foram utilizados 45 CPUs em paralelo para o GA reduzindo somente em 5 vezes o tempo computacional com relação ao método de gradiente. Neste mesmo ano, Chang et al. (2002) efetuaram a otimização da forma de um silenciador de câmara de expansão dupla de um sistema de ventilação com base na teoria de onda plana através da técnica da matriz de transferência na avaliação da perda de transmissão. A otimização foi realizada com o uso do GA, utilizando-se sete variáveis de projeto, comparando diversos números de cromossomos, populações, probabilidades de transferência e mutação.

Yeh et. al. (2003) otimizaram numericamente um silenciador formado por tubos linearmente expandidos em seis configurações diferentes construídos com 2 – 4 – 8 – 16 – 32 – 64 segmentos retos concêntricos para um ventilador na frequência de 500Hz. Neste estudo foram utilizada seis variáveis de projeto através do GA na avaliação da perda de transmissão sonora. Os resultados da otimização mostraram que quanto maior o número de segmentos menor a perda de transmissão devido à redução da queda de pressão no local. Novamente, no ano seguinte, 2004, Yeh et al. apresentaram a otimização de um conjunto de silenciadores com 2, 3 4 e 5 câmaras associada a técnica da matriz de transferência para uma única frequência.

Chang et. al. (2004) otimizaram a perda da transmissão sonora de um silenciador de câmara de expansão simples com tubos estendidos, através dos métodos da função pênalti exterior, da função pênalti interior e das direções viáveis. Inicialmente realizaram uma análise de sensibilidade variando os comprimentos dos diâmetros da câmara, dos tubos de entrada e de saída com o objetivo verificar suas influências sobre a função objetivo. Com os valores máximos dos parâmetros obtidos e através de um algoritmo de procura gráfica, verificaram o melhor ponto de início para os três métodos. Nesse trabalho os resultados teóricos e simulados apresentaram boa concordância.

Novamente, em 2005, Chang et al. aplicaram os tradicionais métodos baseados em gradientes (método da função pênalti exterior – método da função pênalti interior – o método das direções viáveis) e o algoritmo genético (GA) na simulação e otimização numérica de um

silenciador de câmara simples. A impedância acústica do absorvedor sonoro foi utilizada na avaliação do seu coeficiente de absorção sonoro simultaneamente com as técnicas numéricas. A precisão dos resultados dos métodos de gradiente foi verificada através da condição de Kuhn–Tucker, que mostrou que o método da função pênalti exterior é o mais aceitável, juntamente com o GA.

Yeh et. al. (2005), em outro trabalho, aperfeiçoaram a forma de um silenciador de câmara de expansão dupla usando o algoritmo SA (*Simulated Annealing*) e o GA. Nesse trabalho, os dois métodos apresentaram respostas distintas. O SA não convergiu para um mínimo global e o tempo de processamento devido ao SA foi duas vezes maior que para o GA.

Barbieri e Barbieri (2006) otimizaram o comprimento dos dutos estendidos de um silenciador de câmara de expansão simples com o método das direções viáveis de Zoutendijk juntamente com o FEM axissimétrico, utilizando-se elementos triangulares quadráticos na avaliação da função objetivo. Nesse estudo foi avaliada a perda de transmissão sonora.

Chiu e Chang (2008) otimizaram a forma de três silenciadores, utilizando-se do algoritmo SA, para um ventilador de nove pás. Os modelos de silenciadores avaliados possuíam em sua construção câmaras de expansão e tubos perfurados de fluxo cruzado. A função objetivo avaliada por esse trabalho foi a maximização da perda de transmissão sonora calculada pela matriz dos quatro parâmetros. Nessas otimizações foram avaliados dezessete parâmetros. Novamente, Chiu e Chang no mesmo ano, 2008, utilizaram a matriz de quatro parâmetro juntamente com o GA, para otimizar a forma de um silenciador de três câmaras e com um tubo perfurado, para sete frequências distintas (250 – 350 – 450 – 550 – 650 – 750 – 850 Hz). Nestas otimizações foram avaliados onze parâmetros.

## **CAPÍTULO 3**

### **CONCEITOS BÁSICOS**

#### **3.1 INTRODUÇÃO.**

Um dos grandes problemas enfrentados pela engenharia é reduzir o nível de ruído produzido por sistemas mecânicos, domésticos ou industriais, a níveis aceitáveis. Podem ser citados aqui como exemplos os motores de combustão interna presentes em veículos automotores, os compressores industriais que fornecem ar comprimido para ferramentas industriais, os compressores de sistemas de refrigeração que são responsáveis pelos ciclos termodinâmicos e os sistemas de ventilação e exaustão industrial, entre outros. Em todos esses casos, é necessário atenuar o nível de ruído emitido com a inserção de um filtro acústico no sistema de exaustão, chamado de silenciador ou abafador.

No projeto de um veículo, o silenciador deve reduzir o ruído emitido pelos motores e permitir que os gases desprendidos do processo de combustão escoem livremente pelo seu interior, para que não haja perda de potência do motor e não causem regiões de contrapressão que o danifiquem. Em um refrigerador ou em condicionadores de ar, o silenciador deve atenuar o ruído emitido pela pulsação dos gases devido à compressão do fluido termodinâmico, de maneira que o equipamento não se torne impróprio no ambiente em que está instalado. Outro grande exemplo são os sistemas de ventilação e exaustão industriais, que necessitam de filtros acústicos em suas saídas, para reduzir o nível de ruído provocado pela interação de seus rotores com o escoamento dos gases. Além disso, os filtros acústicos devem ser compactos, resistentes à corrosão, terem as mesmas propriedades durante sua vida e eficientes para atenderem a legislação no que se refere aos efeitos do ruído sobre o homem e o meio ambiente.

Neste capítulo serão apresentados a classificação e os principais critérios de avaliação dos silenciadores.

### 3.2 CLASSIFICAÇÃO DOS SILENCIADORES.

Os silenciadores são classificados como passivos ou ativos. Os silenciadores passivos ainda são subdivididos em reativos ou dissipativos, dependendo se a energia acústica é refletida para a fonte devido a descontinuidades de área ou se é dissipada como calor.

Os silenciadores reativos consistem em conjuntos de elementos tubulares de dimensões transversais variadas, com câmaras com volumes e formas diferentes (Figura 3.1). Tais elementos são unidos para causar, em toda junção, impedâncias distintas e, conseqüentemente, refletir parte da energia acústica incidente, de volta para a fonte.

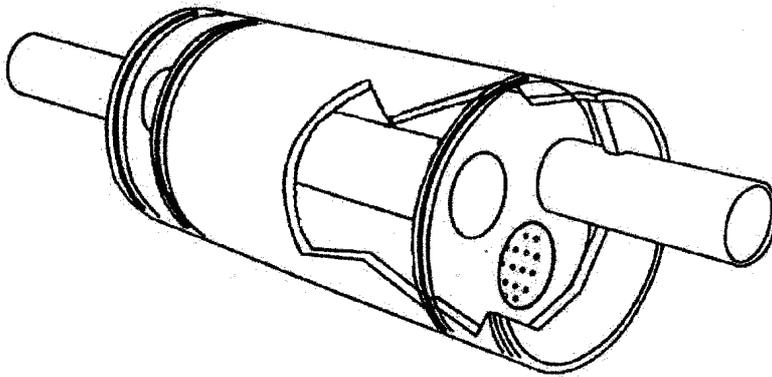


Figura 3.1. Silenciador reativo.

Os silenciadores dissipativos são fabricados com dutos internos perfurados revestidos com materiais absorventes onde a energia sonora incidente é transformada irreversivelmente em calor. Quando usados em veículos, perdem a eficiência gradualmente pela ação do craqueamento do material dissipativo. Existem ainda os silenciadores compostos pela combinação dos tipos reativo e dissipativo (Figura 3.2).

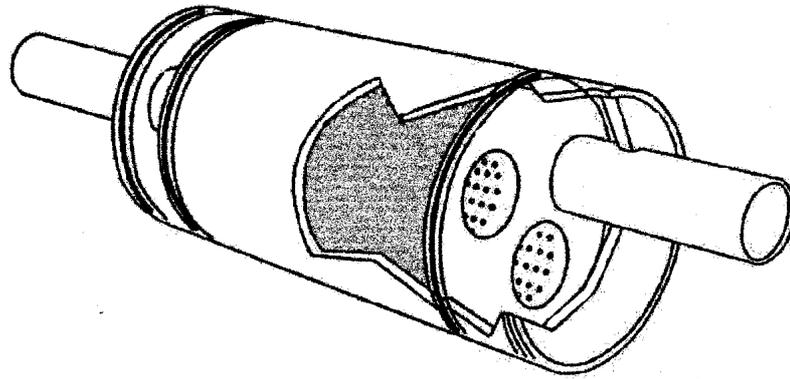


Figura 3.2. Silenciador reativo e dissipativo.

Os silenciadores ativos, Figura 3.3, utilizam-se do princípio da interferência destrutiva de ondas. Uma onda de pressão inversa é gerada através de dispositivos eletrônicos para atenuar ou até mesmo eliminar o ruído proveniente do motor. Estes silenciadores ainda estão em fase de pesquisa e possuem a grande vantagem de não causarem perda de potência pelo seu emprego.

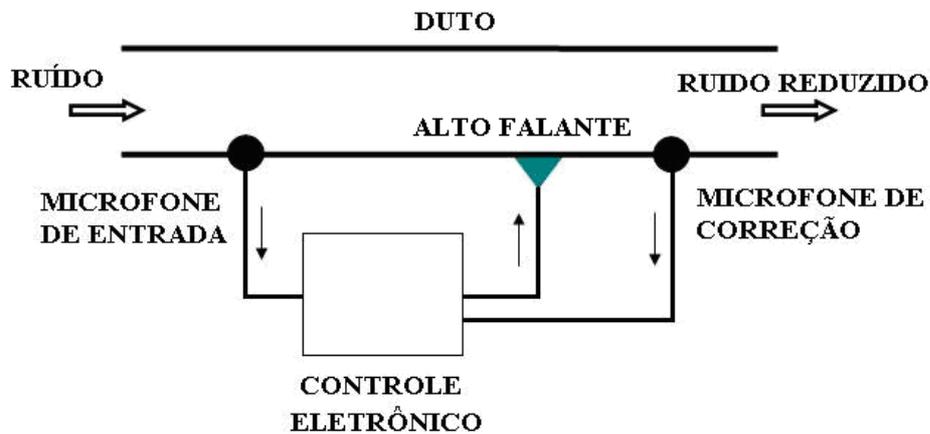


Figura 3.3. Silenciador ativo.

### 3.3 PARÂMETROS DE DESEMPENHO ACÚSTICO

O desempenho acústico de um silenciador é medido e caracterizado através da análise da Perda de Inserção – *Insertion Loss* (IL), Perda de Transmissão – *Transmission Loss* (TL) e da Redução de Ruído – *Noise Reduction* (NR).

A perda de inserção (IL) é definida como sendo a diferença entre o nível de potência acústica irradiada num mesmo ponto do sistema de exaustão sem silenciador e com silenciador, Figura 3.4. A perda de inserção pode ser calculada por (Munjal, 1987):

$$IL = L_{W_1} - L_{W_2} \quad (3.1)$$

ou

$$IL = 10 \log \left( \frac{W_1}{W_2} \right) \text{ [dB]} \quad (3.2)$$

onde

$L_{W_1}$  é o nível de potência sonora irradiada sem silenciador [dB];

$L_{W_2}$  é a nível de potência sonora irradiada com silenciador [dB];

$W_1$  é a potência sonora sem silenciador [W];

$W_2$  é a potência sonora com silenciador [W];

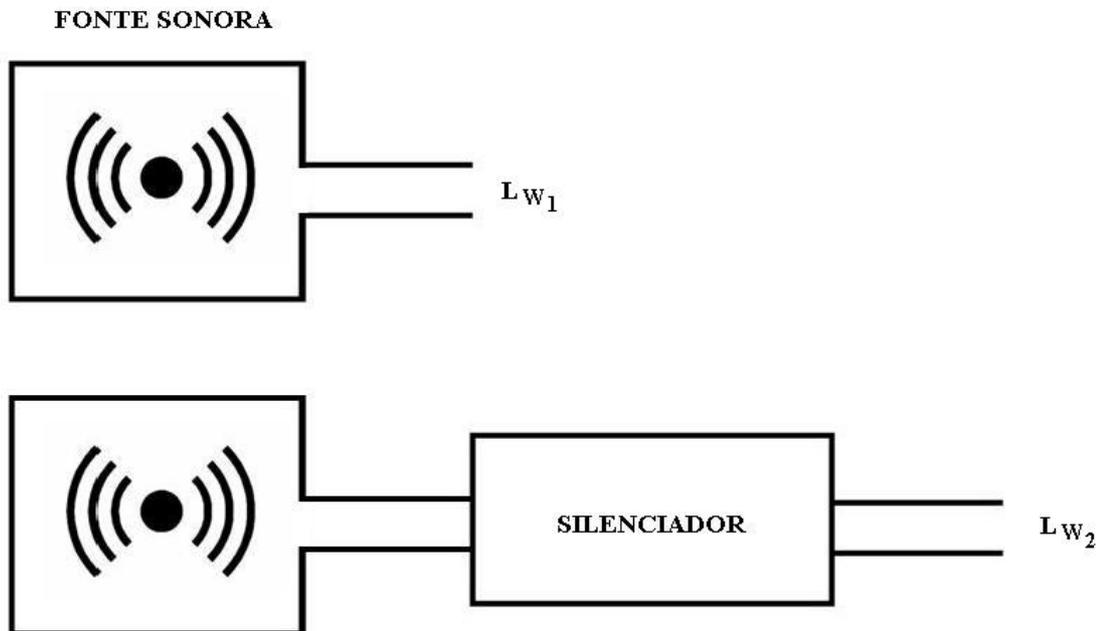


Figura 3.4. Perda de inserção.

A perda de transmissão (TL) é dada pela diferença entre o nível de potência sonora incidente no silenciador e o nível de potência sonora transmitida após o silenciador. Neste

critério, presume-se que a terminação da saída seja anecóica, ou seja, não haja reflexão no duto de saída, Figura. 3.5. A perda de transmissão pode ser calculada por (Munjal, 1987):

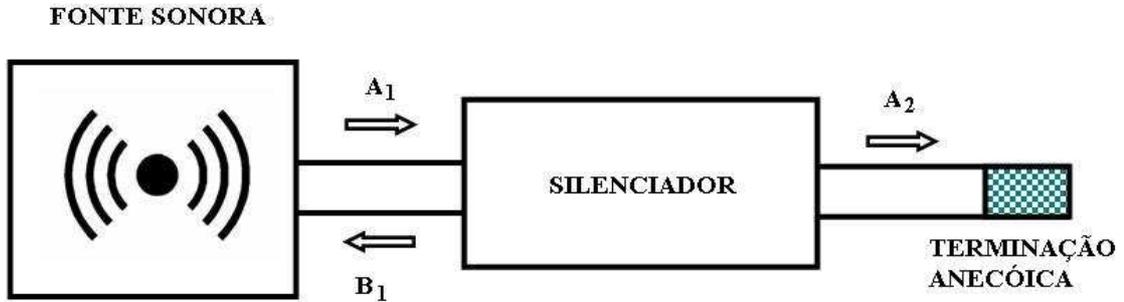


Figura 3.5. Perda de transmissão.

$$TL = L_{W_i} - L_{W_t} \quad (3.3)$$

ou

$$TL = 10 \log \left| \frac{S_1 A_1^2}{S_2 A_2^2} \right| \quad [\text{dB}] \quad (3.4)$$

onde

$L_{W_i}$  é o nível de potência sonora incidente na entrada do silenciador [W];

$L_{W_t}$  é o nível de potência sonora transmitida após o silenciador [W];

$|A_1|^2$  é a amplitude da onda complexa na entrada do silenciador em  $[\text{Pa}^2]$ ;

$|A_2|^2$  é a amplitude da onda complexa na saída do silenciador em  $[\text{Pa}^2]$ ;

$B_1$  é a amplitude da onda complexa refletida na entrada do silenciador em [Pa], Figura 3.5;

$S_1$  é a área do duto de entrada  $[\text{m}^2]$ ;

$S_2$  é a área do duto de saída  $[\text{m}^2]$ .

A redução de ruído (NR) é a diferença entre os níveis de pressão sonora medidos em dois pontos arbitrários, um ponto antes do silenciador,  $p_1$  e outro após  $p_2$ , Figura 3.6. A redução de ruído pode ser obtida por (Munjal, 1987):

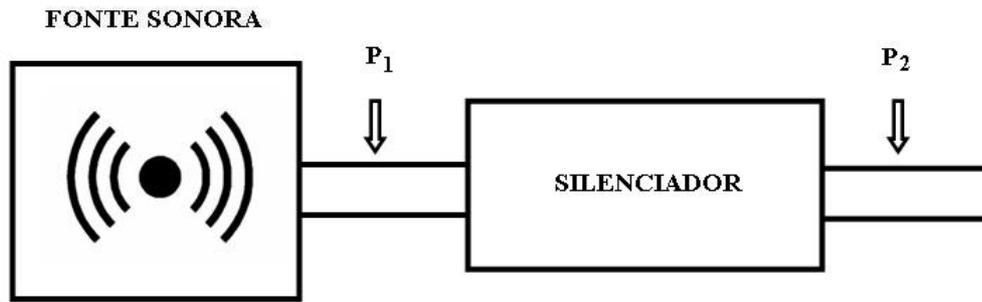


Figura 3.6. Redução de ruído.

$$NR = 20 \log \left| \frac{p_1}{p_2} \right| = L_{P_1} - L_{P_2} \quad [\text{dB}] \quad (3.5)$$

onde

$p_1$  é a pressão sonora antes do silenciador em [Pa];

$p_2$  é a pressão sonora após o silenciador em [Pa];

$L_{P_1}$  é o nível de pressão sonora antes do silenciador [dB];

$L_{P_2}$  é o nível de pressão sonora depois do silenciador [dB].

## CAPÍTULO 4

### TEORIA DA ONDA PLANA

#### 4.1 INTRODUÇÃO.

Os tubos são os elementos básicos e essenciais no projeto de silenciadores. Portanto, a análise da propagação de ondas em seu interior é de grande importância.

Neste capítulo, apresentam-se as características da propagação de ondas planas em condições ideais, ou seja, ondas se propagando em tubos, circulares e retangulares, de paredes rígidas, de dimensões transversais relativamente pequenas, em um meio estacionário não-viscoso e também as limitações desta teoria para o estudo da propagação de ondas no meio tridimensional. Inicialmente será analisada a propagação de ondas planas unidimensionais e depois o caso geral de propagação de ondas tridimensionais.

#### 4.2 ONDAS PLANAS EM MEIO ESTACIONÁRIO NÃO-VISCOSO.

Considerando um tubo de paredes rígidas e de pequenas dimensões transversais preenchido com um fluido estacionário não-viscoso, ondas de pequena amplitude viajam como ondas planas. Conseqüentemente, a pressão sonora,  $p$  e a velocidade de partícula,  $u$ , em todos os pontos de uma determinada seção transversal, no plano normal à direção de propagação, têm a mesma amplitude e fase. Este plano é denominado de superfície de fase ou *wave front*. No caso de um tubo, a direção de propagação é o eixo longitudinal representado pela direção  $z$ . Com estas hipóteses, as equações linearizadas básicas para o caso são (Munjaj, 1987; Sahasrabudhe et al., 1991; Brewer, 1992 e Bets, 1998):

Equação da Continuidade – conservação de massa

$$\rho_0 \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (4.1)$$

Equação de Euler – conservação da quantidade de movimento

$$\rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad (4.2)$$

Equação de Estado – propagação de ondas sonoras é considerando um processo isoentrópico

$$\left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s = \frac{\gamma(p_0 + p)}{\rho_0 + \rho} \cong \frac{\gamma p_0}{\rho_0} = c^2 \quad (4.3)$$

onde

$\gamma = \frac{C_p}{C_v}$  é a razão entre calores específicos;

$C_p$  é o calor específico a pressão constante;

$C_v$  é o calor específico a volume constante;

$c$  é a velocidade do som no meio;

$z$  é a direção de propagação axial ou longitudinal;

$p$  é a flutuação instantânea da pressão;

$p_0$  é a pressão estática do ambiente;

$\rho$  é a flutuação instantânea da densidade;

$\rho_0$  é a densidade do meio;

$p/p_0 \ll 1$  para pequenas perturbações

$\rho/\rho_0 \ll 1$  para um meio estacionário;

sub-índice  $s$  indica processo isentrópico.

As equações (4.1), (4.2) e (4.3), após manipulações algébricas, resultam em apenas uma única equação em função da pressão. Esta equação é obtida através da substituição da eq. (4.3) na eq. (4.1) e pela eliminação da velocidade de partícula  $u$  através da diferenciação da eq. (4.1) em relação ao tempo e da eq. (4.2) em relação a  $z$ . Subtraindo as equações resultantes, obtém-se a equação unidimensional da onda, (Munjal, 1987; Sahasrabudhe et al., 1991; Brewer, 1992 e Bets, 1998):

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] p = 0 \quad . \quad (4.4)$$

A eq. (4.4) é uma equação diferencial linear, unidimensional, homogênea com coeficientes constantes, onde  $c$  é independente de  $z$  e  $t$ . Usando a técnica de separação de variáveis e considerando uma função harmônica, a solução da eq. (4.4) é da forma:

$$p(z, t) = (C_1 e^{-ikz} + C_2 e^{+ikz}) e^{j\omega t} \quad (4.5)$$

onde,

$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{é o número de onda ou constante de propagação;}$$

$\omega$  é a frequência angular [rad/s];

$\lambda$  é o comprimento de onda [m].

A eq. (4.5) representa a superposição de duas ondas progressivas com amplitudes  $C_1$  e  $C_2$  movendo-se em direções opostas. A velocidade de partícula  $u$  que satisfaz a eq. (4.4) é:

$$u(z, t) = (C_3 e^{-jkz} + C_4 e^{+jkz}) e^{j\omega t} \quad (4.6)$$

Substituindo as equações (4.5) e (4.6) na equação da conservação da quantidade de movimento (4.2), obtêm-se:

$$C_3 = \frac{C_1}{\rho_0 c}, \quad (4.7a)$$

$$C_4 = -\frac{C_2}{\rho_0 c}, \quad (4.7b)$$

e conseqüentemente

$$u(z, t) = \frac{1}{Z_0} (C_1 e^{-jkz} - C_2 e^{+jkz}) e^{j\omega t} \quad (4.8)$$

onde  $Z_0 = \rho_0 c$  é a impedância característica do meio, sendo definida como a razão entre a pressão sonora e a velocidade da partícula para uma onda plana progressiva. Para ondas não planas a impedância característica é uma grandeza complexa e pode-se escrita como:

$$\tilde{Z} = \frac{u}{p} \quad (4.9)$$

As constantes  $C_1$  e  $C_2$  das equações (4.5) e (4.8) podem ser determinadas através da implementação das condições de contorno para o problema em estudo conforme será descrito nos itens (4.4) e (4.5) a seguir.

### 4.3 ONDAS TRIDIMENSIONAIS EM MEIO ESTACIONÁRIO NÃO-VISCOSO.

Para estudar as limitações da teoria de onda plana é necessário considerar a propagação de ondas tridimensionais. Para um sistema tridimensional as equações linearizadas correspondente às equações (4.1) e (4.2) para um meio estacionário não viscoso são:

Equação da Continuidade – equação da conservação de massa

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 (\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0 \quad (4.10)$$

Equação de Euler – equação da conservação da quantidade de movimento

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla p = 0. \quad (4.11)$$

Substituindo a Equação de Estado (4.3) na eq. (4.10) e diferenciando em relação ao tempo tem-se:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0. \quad (4.12)$$

Aplicando o operador  $\nabla$  na eq. (4.11) e subtraindo este resultado da eq. (4.12), resulta na conhecida equação tridimensional da onda, (Munjal, 1987; Sahasrabudhe et al., 1991; Brewer, 1992 e Bets, 1998):

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad (4.13)$$

onde, o Laplaciano  $\nabla^2$  é dado em coordenadas cartesianas por:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (4.14a)$$

e em coordenadas cilíndricas por:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (4.14b)$$

#### 4.4 TUBOS RETANGULARES.

Usando a técnica de separação de variáveis e considerando  $p$  uma função harmônica para um duto retangular de paredes rígidas, Figura 4.1, a eq. (4.13) admite a solução (Munjaj, 1987):

$$p(x, y, z, t) = (C_1 e^{-jk_z z} + C_2 e^{+jk_z z})(e^{-jk_x x} + C_3 e^{+jk_x x})(e^{-jk_y y} + C_4 e^{+jk_y y}) e^{j\omega t} \quad (4.15)$$

com a condição de compatibilidade

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k_0^2 \quad (4.16)$$

onde

$k_0$  é o número da onda ou constante de propagação para meios não viscosos;

$k_x$  é o número da onda que se propaga na direção transversal  $x$ ;

$k_y$  é o número da onda que se propaga na direção transversal  $y$ ;

$k_z$  é o número da onda que se propaga na direção axial  $z$ ;

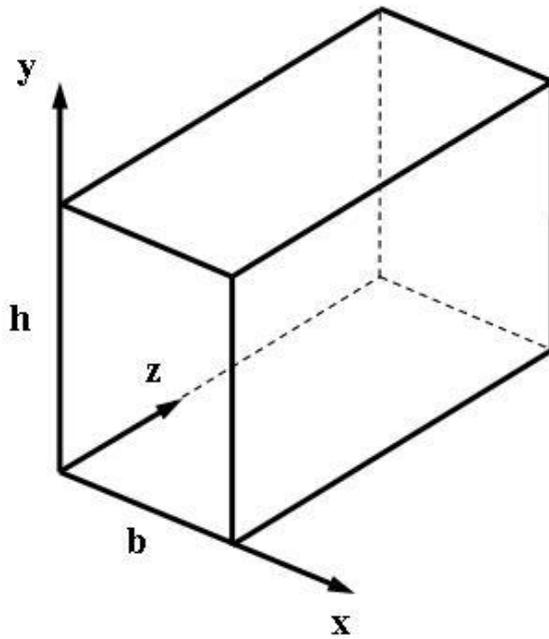


Figura 4.1. Sistema de coordenadas cartesianas em um tubo retangular.

As condições de contorno para um duto de paredes rígidas são:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad \text{para} \quad x = 0 \quad \text{e} \quad x = b \quad (4.17a)$$

e

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad \text{para} \quad y = 0 \quad \text{e} \quad y = h \quad . \quad (4.17b)$$

Pela substituição das condições de contorno na eq. (4.15) tem-se que:

$$C_3 = 1 \quad \Rightarrow \quad k_x = \frac{m\pi}{b} \quad \text{com} \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (4.18a)$$

e

$$C_4 = 1 \quad \Rightarrow \quad k_y = \frac{n\pi}{h} \quad \text{com} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.18b)$$

Portanto, a eq. (4.15) pode ser escrita como:

$$p(x, y, z, t) = \sum_n \sum_m \left[ (C_{1,m,n} e^{-jk_{z,m,n}z} + C_{2,m,n} e^{+jk_{z,m,n}z}) \cos \frac{m\pi x}{b} \cos \frac{n\pi y}{h} \right] e^{j\omega t} \quad (4.19)$$

onde

$$k_{z,m,n}^2 = k_0^2 - \left[ \frac{m\pi}{b} \right]^2 - \left[ \frac{n\pi}{h} \right]^2 \quad (4.20)$$

$k_{z,m,n}$  é o número da onda que se propaga na direção z para o modo (m,n).

A velocidade da partícula correspondente ao modo (m,n) pode ser determinada usando a equação da conservação da quantidade de movimento (4.11).

$$u_{z,m,n} = \frac{k_{z,m,n}}{k_0 \rho_0 c} (C_1 e^{-jk_{z,m,n}z} - C_2 e^{+jk_{z,m,n}z}) \cos \frac{m\pi x}{b} \cos \frac{n\pi y}{h} e^{j\omega t} . \quad (4.21)$$

A eq. (4.21) mostra que, para uma mesma pressão, a amplitude da velocidade de uma partícula para o modo (m,n) é  $k_{z,m,n}/k_0$  vezes a onda plana. Para o modo (0,0),  $k_{z,m,n} = k_0$  e a eq. (4.19) reduz-se à eq. (4.5). Qualquer modo (m,n) deverá se propagar sem atenuação, se (Eriksson, 1980 e Munjal, 1987):

$$k_0^2 - \left[ \frac{m\pi}{b} \right]^2 - \left[ \frac{n\pi}{h} \right]^2 > 0. \quad (4.22)$$

Sendo o comprimento da onda definido como  $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$ , pode-se reescrever a inequação (4.22) como:

$$\frac{4}{\lambda^2} - \left(\frac{m}{b}\right)^2 - \left(\frac{n}{h}\right)^2 > 0 \quad (4.23a)$$

ou

$$\lambda < \frac{2}{\left[\left(\frac{m}{b}\right)^2 - \left(\frac{n}{h}\right)^2\right]^{1/2}}. \quad (4.23b)$$

Conseqüentemente, qualquer onda plana propaga-se sem atenuação, enquanto modos de maior ordem podem se propagar somente se as inequações (4.22) e (4.23) forem satisfeitas. Portanto, quando  $h > b$ , o primeiro modo (0,1) propagará se a frequência de excitação for maior que a frequência de corte,  $f_c$ , ou seja:

$$\lambda > 2h \quad \text{ou} \quad f_c > \frac{c}{2h}. \quad (4.24a,b)$$

Os modos de maior ordem, mesmo se presentes serão atenuados exponencialmente, (Eriksson, 1980 e Munjal, 1987). Então, somente a onda plana se propagará para frequências menores que:

$$\lambda < 2h \quad \text{ou} \quad f_c < \frac{c}{2h} \quad (4.25a,b)$$

onde  $h$ , é a maior dimensão transversal do tubo retangular.

#### 4.5 TUBOS CIRCULARES.

A equação da onda (4.13) com o Laplaciano dado pela eq. (4.14b), governa a propagação em tubos circulares, Figura 4.2. Utilizando a técnica da separação de variáveis e considerando  $p$  uma função harmônica no tempo e na coordenada  $\theta$ , tem-se:

$$p(r, \theta, z, t) = \sum_m R_m(r) e^{jm\theta} Z(z) e^{j\omega t} . \quad (4.26)$$

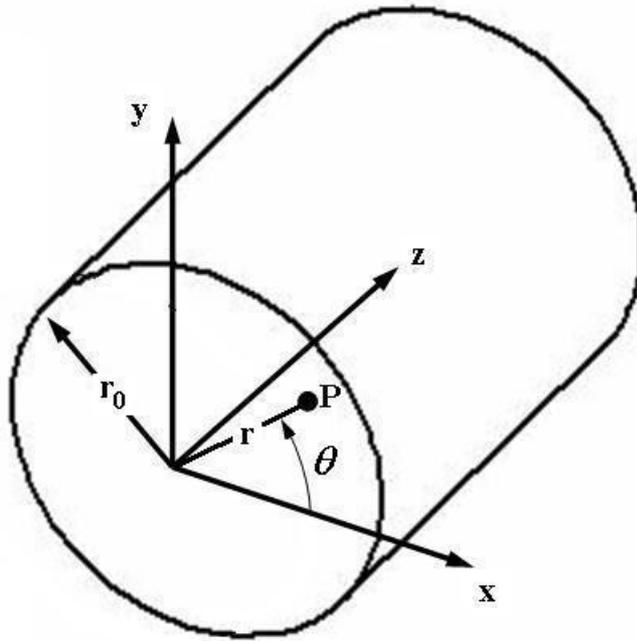


Figura 4.2. Sistema de coordenadas cilíndricas em um duto circular.

A função  $Z(z)$  é assumida semelhante à eq. (4.15):

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} = -k_z^2 Z . \quad (4.27)$$

Substituindo as equações (4.26) e (4.27) na equação da onda (4.13), resulta a equação de Bessel para  $R(r)$ :

$$\frac{d^2 R_m}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR_m}{dr} + \left[ k_0^2 - k_z^2 - \frac{m^2}{r^2} \right] R_m = 0 . \quad (4.28)$$

A eq. (4.28) tem como solução geral (Munjaj 1987):

$$R_m = C_3 J_m(k_r r) + C_4 N_m(k_r r) \quad (4.29)$$

e

$$k_r^2 = k_0^2 - k_z^2 \quad (4.30)$$

onde

$k_r$  é o número da onda que se propaga na direção radial;

$J_m$  é a função de Bessel de ordem  $m$ ;

$N_m$  é a função de Newmann de ordem  $m$ .

Quando  $r = 0$ ,  $N_m(k_r r)$  tende para o infinito (Munjaj, 1987, Jeffrey 2000 e Kreyszig, 2000), mas a pressão sonora em qualquer ponto do plano transversal ao tubo considerado tende para um número finito. Nestas condições, conclui-se que a constante  $C_4$  deve ser zero. Novamente, a velocidade radial na parede do duto quando  $r = r_0$  deve ser zero, portanto:

$$\frac{dJ_m(k_r r)}{dr} = 0 \quad \text{para} \quad r = r_0 \quad (4.31)$$

Conseqüentemente,  $k_r$  assume somente os valores discretos que satisfazem a equação abaixo:

$$J'_m(k_r r_0) = 0 \quad (4.32)$$

Reescrevendo o valor de  $k_r$  correspondente a  $n$ -ésima raiz da equação acima como  $k_{r,m,n}$  tem-se:

$$p(r, \theta, z, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} J_m(k_{r,m,n} r) e^{jm\theta} e^{j\omega t} (C_{1,m,n} e^{-jk_{z,m,n} z} + C_{2,m,n} e^{+jk_{z,m,n} z}) \quad (4.33)$$

onde o número da onda é dado por:

$$k_{z,m,n}^2 = k_0^2 - k_{r,m,n}^2 \quad (4.34)$$

O primeiro “zero” de  $J'_m$  (ou  $J_1$ ) é zero,  $k_{r,0,1} = 0$  e  $k_{z,0,1} = k_0$ , para o modo (0,1), portanto a eq. (4.33) reduz-se à eq. (4.5), que é a equação de propagação da onda plana. Conseqüentemente, o modo (0,1) corresponde à onda plana que se propaga sem atenuação.

Nos dutos circulares, n representa o número de zeros da derivada  $J'_m$ . Enquanto que para dutos retangulares, m e n representam o número de nós da distribuição da pressão sonora nas direções transversais x e y, respectivamente (Figura 4.3). A Figura 4.4, mostra a distribuição de pressão transversal para dutos circulares onde n corresponde ao número de nós circulares. Nas Figuras 4.3 e 4.4 a propagação de ondas planas é representada pelo modo (0,0) e os índices m e n representam o número de nós da distribuição transversal de pressão nas suas respectivas direções.

Os modos (1,0) e (0,1) possuem frequências de corte se  $k_{z,1,0}$  e  $k_{z,0,1}$  assumirem valores reais, isto é, se  $k_0$  for maior que  $k_{r,1,0}$  e que  $k_{r,0,1}$ . Assim, o primeiro zero de  $J'_1$  ocorre para 1,84 e o segundo zero de  $J'_0$  ocorre para 3,83. Conseqüentemente, os números da onda para as frequências de corte serão  $1,84/r_0$  e  $3,83/r_0$ , respectivamente. Desta forma, conclui-se que o primeiro modo diametral começará a se propagar quando  $k_0 r_0 = 1,84$  e o primeiro modo axissimétrico radial para  $k_0 r_0 = 3,83$ . Então, se a frequência de excitação for suficientemente pequena, somente ondas planas poderão se propagar, isto é, somente quando respeitadas as inequações (Eriksson, 1980 e Munjal, 1987):

$$k_0 r_0 < 1,84 \quad (4.35a)$$

ou

$$\lambda > \frac{\pi}{1,84} d \quad (4.35b)$$

ou

$$f_c < \frac{1,84}{\pi d} c \quad (4.35c)$$

onde  $d$  é o diâmetro do duto e vale  $2r_0$ .

A velocidade de partícula é encontrada através da substituição da eq. (4.33), na equação da conservação da quantidade de movimento (4.2) para direção axial, isto é:

$$u_{z,m,n} = J_m(k_{r,m,n}r) e^{jm\theta} e^{j\omega t} \frac{k_{z,m,n}}{k_0\rho_0c} (C_{1,m,n} e^{-jk_{z,m,n}z} - C_{2,m,n} e^{+jk_{z,m,n}z}). \quad (4.36)$$

Portanto, para onda plana a velocidade de partícula para o modo  $(m,n)$  difere  $k_{z,m,n}/k_0$  vezes, para a mesma pressão sonora.

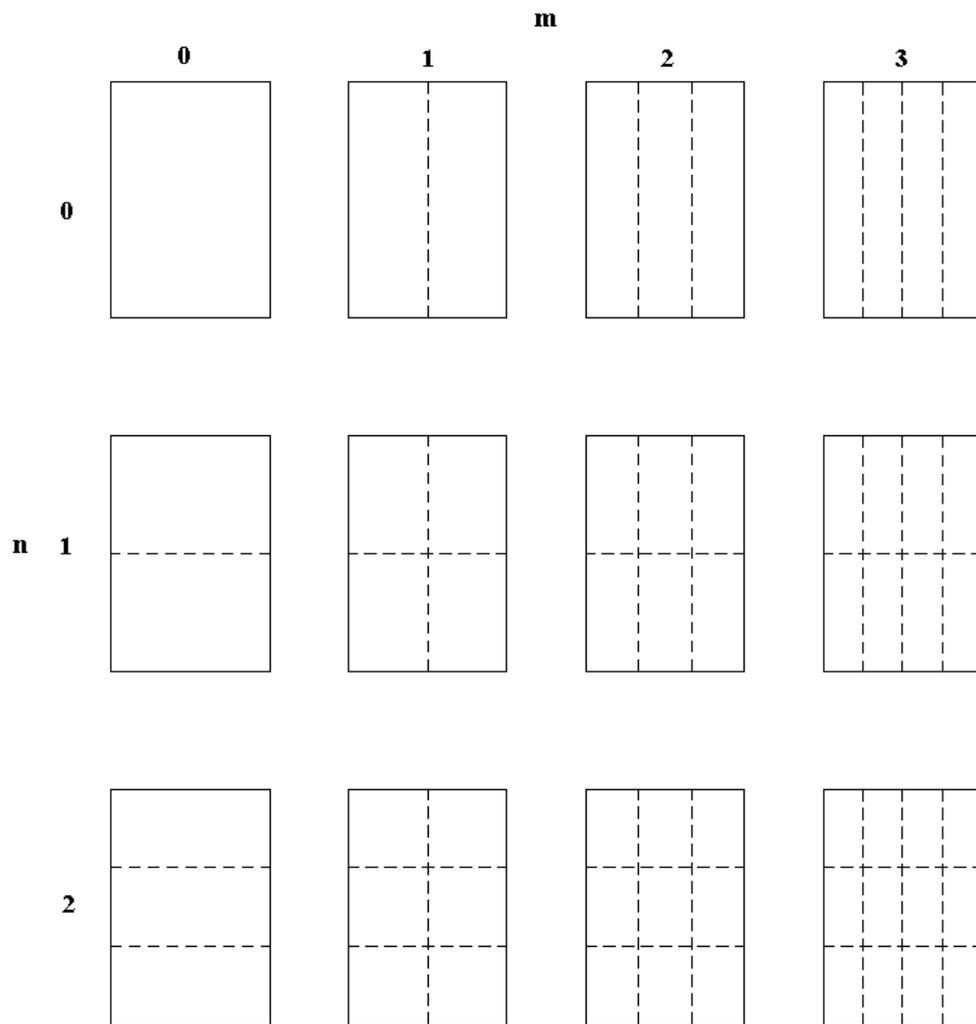


Figura 4.3. Linhas nodais para a distribuição transversal de pressão num duto retangular para  $m = 3$  e  $n = 2$  modos de ordem superior, (Eriksson 1980).

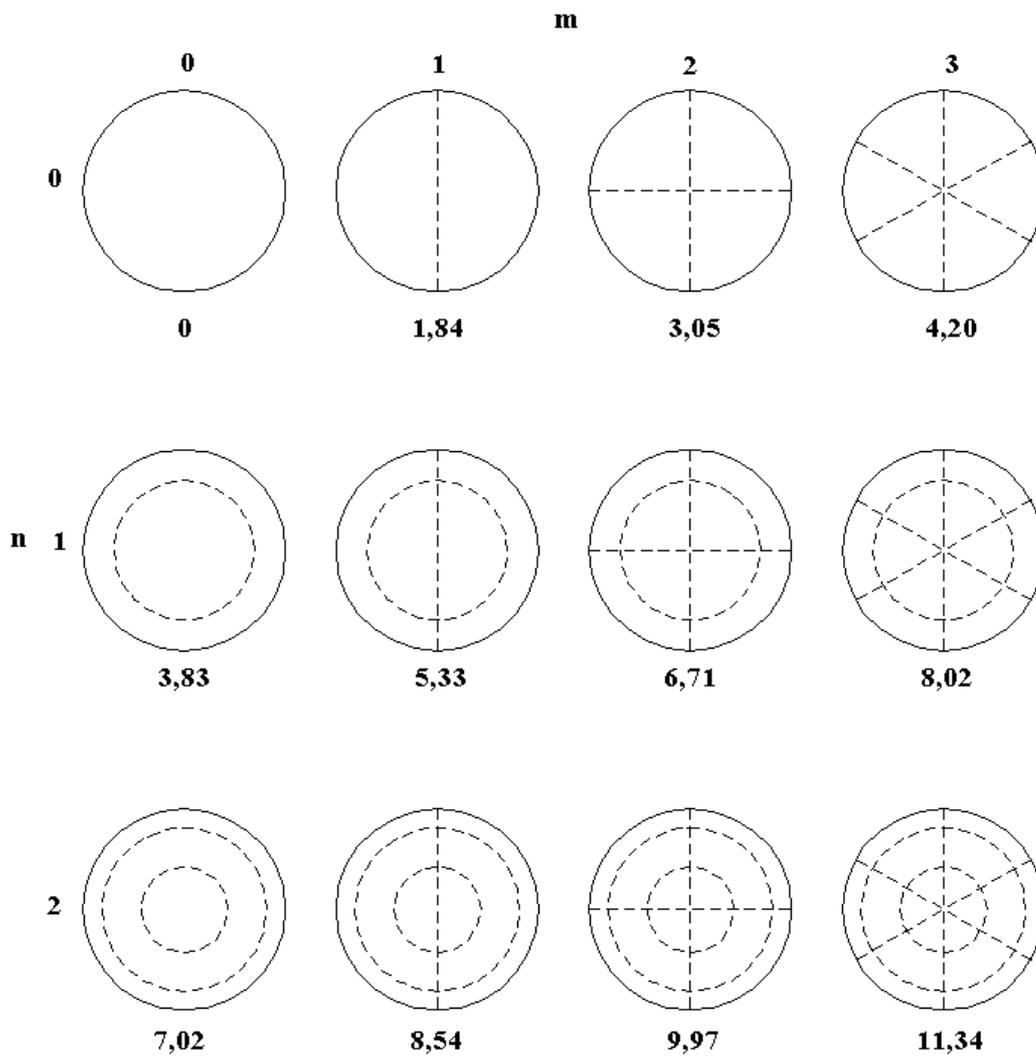


Figura 4.4. Linhas nodais para distribuição transversal de pressão num duto circular para  $m = 3$  e  $n = 2$  modos de ordem superior, (Eriksson 1980).

## **CAPÍTULO 5**

# **MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS E MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO**

### **5.1 INTRODUÇÃO.**

O Método dos Elementos Finitos (FEM) e o Método dos Elementos de Contorno (BEM) estão sendo utilizados nos diversos campos da engenharia. O FEM foi desenvolvido primeiramente para análise estrutural em aviões na década de 50 e somente em 1975 iniciaram-se os estudos da propagação de ondas em silenciadores com Young e Crocker. O BEM em análises computacionais foi primeiramente utilizado no início da década de 60 na solução da equação de Laplace no estudo do fluxo de calor em corpos e em 1990 foi apresentado por Cheng, Seybert e Wu na análise de desempenho em silenciadores.

Mostram-se neste capítulo as etapas necessárias para a implementação do método dos elementos finitos (para análise axissimétrica e tridimensional) e do método dos elementos de contorno (para análise tridimensional), bem como a estruturação dos aplicativos utilizados nas simulações numéricas desta tese.

### **5.2 FORMULAÇÃO DE ELEMENTOS FINITOS.**

As equações de elementos finitos podem ser derivadas diretamente das equações diferenciais que governam o problema. Estas equações são derivadas utilizando o conhecido Método de Galerkin aplicado ao elemento finito, Galerkin-FEM. Devido ao fato de que existe extensa bibliografia a respeito deste assunto, nos livros clássicos de elementos finitos, este detalhamento não será feito neste texto. Se necessário, o leitor pode consultar algumas das

seguintes referências: Brebbia e Ferrante, (1975); Segerlind (1984); Grandin (1986); Cook, Malkus e Plesha (1989); Huebner (1995); Bathe (1996); Zienkiewicz e Taylor (2000).

Uma outra maneira de se obterem estas mesmas equações é com o uso do Princípio de Hamilton. Detalhes deste procedimento para aplicações em silenciadores podem ser encontrados nas referências: Gladwell (1965-71); Desai, (1972); Young e Crocker, (1975); Chung (1978), Ross, (1981) e Munjal, (1987).

A equação que rege a propagação tridimensional de ondas acústicas em meios estacionários não viscosos é a conhecida equação da onda, (4.15):

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad (5.1)$$

onde  $t$  é o tempo,  $c$  é a velocidade de propagação da onda no meio em estudo,  $\nabla^2$  é o operador Laplaciano e  $p$  é a pressão sonora.

### 5.2.1 PROBLEMAS AXISSIMÉTRICOS.

Em coordenadas cilíndricas, utilizando-se do operador Laplaciano  $\nabla^2$  dado pela eq. (4.14b), a equação da onda pode ser escrita na seguinte forma:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} = 0 \quad (5.2)$$

Para problemas axissimétricos, Figura 5.1, assume-se que a pressão sonora não depende da coordenada  $\theta$ . Assim, a eq. (5.2) se reduz a:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} = 0 \quad (5.3a)$$

ou

$$\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} \left( r \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0. \quad (5.3b)$$

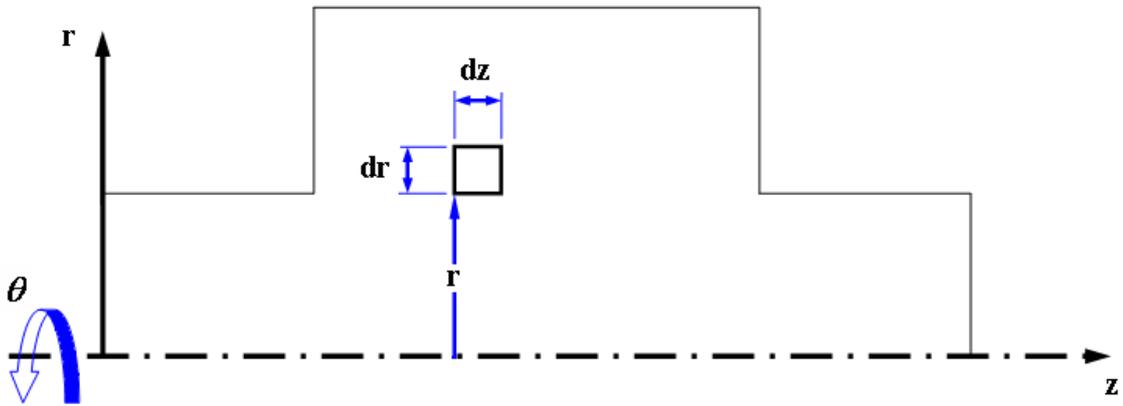


Figura 5.1. Referencial de coordenadas cilíndricas para problemas axissimétricos.

Utilizando a técnica de separação de variáveis, assume-se que a pressão sonora pode ser expressa como sendo:

$$p(r, z, t) = P^*(r, z)e^{j\omega t} \quad (5.4)$$

onde

$\omega$  é a frequência angular da onda de pressão;

$P^*(r, z)$  é uma função que só depende das coordenadas espaciais  $(r, z)$ .

Substituindo esta aproximação de  $p(r, z, t)$  na eq. (4.13) resulta:

$$\left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial^2 P^*}{\partial r^2} \right) + \frac{\partial^2 P^*}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2} P^* \right] e^{j\omega t} = 0 \quad (5.5)$$

que será sempre satisfeita quando

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial^2 P^*}{\partial r^2} \right) + \frac{\partial^2 P^*}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2} P^* = 0. \quad (\text{Equação de Helmholtz}) \quad (5.6)$$

Com uso do conjunto das funções de interpolação de elementos finitos,  $[\phi]$  e os valores nodais de  $P^*(r, z)$ ,  $\{p\}$ , para aproximar  $P^*(r, z)$  por  $P^* \cong [\phi]\{p\} = \phi_i p_i$ , e utilizando o

Método de Galerkin para minimizar o resíduo gerado na eq. (5.6) devido a esta aproximação, obtém-se:

$$\int_{\Omega} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial^2 P^*}{\partial r^2} \right) + \frac{\partial^2 P^*}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2} P^* \right] \phi_j \, d\Omega = 0 . \quad (5.7)$$

Como  $d\Omega$  pode ser escrito como sendo igual a  $2\pi r dr dz$ , então a eq. (5.7) pode ser reescrita como:

$$\left[ \int_{\Omega^*} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial^2 P^*}{\partial r^2} \right) \phi_j r dr dz + \int_{\Omega^*} \frac{\partial^2 P^*}{\partial z^2} \phi_j r dr dz + \int_{\Omega^*} \frac{\omega^2}{c^2} P^* \phi_j r dr dz \right] 2\pi = 0 \quad (5.8)$$

onde  $d\Omega^* = r dr dz$ .

Integrando por partes os dois primeiros termos da eq. (5.9) tem-se:

$$\int_{\Omega^*} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial^2 P^*}{\partial r^2} \right) \phi_j r dr dz = \int_{\Gamma} \frac{\partial P^*}{\partial r} \phi_j n_r r d\Gamma - \int_{\Omega^*} \frac{\partial P^*}{\partial r} \frac{\partial \phi_j}{\partial r} r dr dz \quad (5.9a)$$

e

$$\int_{\Omega^*} \frac{\partial^2 P^*}{\partial z^2} \phi_j r dr dz = \int_{\Gamma} \frac{\partial P^*}{\partial z} \phi_j n_z r d\Gamma - \int_{\Omega^*} \frac{\partial P^*}{\partial z} \frac{\partial \phi_j}{\partial z} r dr dz \quad (5.9b)$$

onde  $(n_r, n_z)$  são as componentes do vetor normal  $\mathbf{n}$  ao contorno  $\Gamma$ . Substituindo estes dois resultados na eq. (5.8) e reagrupando os termos comuns, resulta:

$$\int_{\Gamma} \left[ \frac{\partial P^*}{\partial r} n_r + \frac{\partial P^*}{\partial z} n_z \right] \phi_j r d\Gamma - \int_{\Omega^*} \frac{\partial P^*}{\partial r} \frac{\partial \phi_j}{\partial r} r dr dz - \int_{\Omega^*} \frac{\partial P^*}{\partial z} \frac{\partial \phi_j}{\partial z} r dr dz + \frac{\omega^2}{c^2} \int_{\Omega^*} P^* \phi_j r dr dz = 0 . \quad (5.10)$$

Admitindo que a velocidade da partícula possa ser expressa como sendo o produto de uma parcela que depende da posição e outra do tempo da mesma forma que a eq. (5.5), escreve-se:

$$\mathbf{u}(r, z, t) = \mathbf{u}^*(r, z)e^{j\omega t}. \quad (5.11)$$

Com uso da eq. (5.11), pode-se reescrever a equação da conservação da quantidade de movimento (4.11) como sendo:

$$\left[ j\rho_0\omega\mathbf{u}^* + \nabla P^* \right] e^{j\omega t} = 0, \quad (5.12)$$

que será sempre satisfeita quando

$$j\rho_0\omega\mathbf{u}^* + \nabla P^* = 0. \quad (5.13)$$

Nota-se que na primeira parcela da eq. (5.10) aparecem as derivadas de  $P^*$  no contorno. Então, fazendo a projeção da eq. (5.13) na direção normal ao contorno,  $\mathbf{n} = (n_r, n_z)$ , calcula-se esta derivada da seguinte forma:

$$\left[ j\rho_0\omega\mathbf{u}^* + \nabla P^* \right] \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (5.14a)$$

ou

$$j\rho_0\omega u_n + \frac{\partial P^*}{\partial n} = 0 \quad (5.14b)$$

onde  $u_n$  é a velocidade normal ao contorno. Substituindo este resultado na eq. (5.10) tem-se:

$$-j\rho_0\omega \int_{\Gamma} u_n \phi_j r d\Gamma - \int_{\Omega^*} \left[ \frac{\partial P^*}{\partial r} \frac{\partial \phi_j}{\partial r} + \frac{\partial P^*}{\partial z} \frac{\partial \phi_j}{\partial z} \right] r dr dz + \frac{\omega^2}{c^2} \int_{\Omega^*} P^* \phi_j r dr dz = 0. \quad (5.15)$$

A eq. (5.15) é a equação básica para o cálculo das matrizes características de elementos finitos para os problemas governados pela equação de Helmholtz (5.6). Ainda, substituindo nesta expressão a aproximação de elementos finitos para  $P^*$  resulta:

$$-j\rho_0\omega \int_{\Gamma} u_n \phi_j r d\Gamma - \int_{\Omega^*} \left[ \frac{\partial \phi_i}{\partial r} \frac{\partial \phi_j}{\partial r} + \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \frac{\partial \phi_j}{\partial z} \right] r dr dz p_i + \frac{\omega^2}{c^2} \int_{\Omega^*} \phi_i \phi_j r dr dz p_i = 0, \quad (5.16)$$

que pode ser convenientemente reescrita na forma matricial como:

$$\left[ [\mathbf{K}] - k_0^2 [\mathbf{M}] \right] \{p\} = \{f\} . \quad (5.17)$$

onde  $k_0 = \omega/c$ ;  $[\mathbf{K}]$ ,  $[\mathbf{M}]$  e  $\{f\}$  são as matrizes e vetor força característicos de elementos finitos. Explicitamente, tem-se:

$$[\mathbf{K}] = \int_{\Omega^*} \left[ \frac{\partial \phi_i}{\partial r} \frac{\partial \phi_j}{\partial r} + \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \frac{\partial \phi_j}{\partial z} \right] r dr dz , \quad (5.18)$$

$$[\mathbf{M}] = \int_{\Omega^*} \phi_i \phi_j r dr dz \quad (5.19)$$

e

$$\{f\} = -j\rho_0\omega \int_{\Gamma} u_n \phi_j r d\Gamma . \quad (5.20)$$

### 5.2.2 PROBLEMAS TRIDIMENSIONAIS.

As expressões das matrizes características de elementos finitos para problemas tridimensionais são obtidas com procedimento análogo ao descritos para a formulação axissimétrica. A equação da onda para estes problemas pode ser escrita como:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0. \quad (5.21)$$

Utilizando a técnica de separação de variáveis, a pressão sonora pode ser expressa como:

$$p(x, y, z, t) = P^*(x, y, z) e^{j\omega t} \quad (5.22)$$

onde  $P^*$  só depende das coordenadas espaciais. Substituindo esta expressão na eq. (5.21) resulta:

$$\left[ \frac{\partial^2 P^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P^*}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P^*}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2} P^* \right] e^{j\omega t} = 0, \quad (5.23)$$

que será sempre satisfeita se

$$\frac{\partial^2 P^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P^*}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P^*}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2} P^* = 0. \quad (\text{Equação de Helmholtz}) \quad (5.24)$$

Novamente, aplicando o Galerkin-FEM ao resíduo gerado na eq. (5.24) devido às aproximações de elementos finitos, tem-se:

$$\int_{\Omega} \left[ \frac{\partial^2 P^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P^*}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P^*}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2} P^* \right] \phi_j \, d\Omega = 0. \quad (5.25)$$

Integrando por partes os três primeiros termos da eq. (5.25) e aplicando o Teorema de Gauss, tem-se:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial^2 P^*}{\partial x^2} \phi_j \, dx \, dy \, dz = \int_{\Gamma} \frac{\partial P^*}{\partial x} n_x \phi_j \, dy \, dz - \int_{\Omega} \frac{\partial P^*}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \, dx \, dy \, dz, \quad (5.26a)$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial^2 P^*}{\partial y^2} \phi_j \, dx \, dy \, dz = \int_{\Gamma} \frac{\partial P^*}{\partial y} n_y \phi_j \, dy \, dz - \int_{\Omega} \frac{\partial P^*}{\partial y} \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \, dx \, dy \, dz \quad (5.26b)$$

e

$$\int_{\Omega} \frac{\partial^2 P^*}{\partial z^2} \phi_j \, dx \, dy \, dz = \int_{\Gamma} \frac{\partial P^*}{\partial z} n_z \phi_j \, dy \, dz - \int_{\Omega} \frac{\partial P^*}{\partial z} \frac{\partial \phi_j}{\partial z} \, dx \, dy \, dz \quad (5.26c)$$

onde  $(n_x, n_y, n_z)$  são as componentes do vetor unitários normal ao contorno  $\mathbf{n}$ . Substituindo estas integrais na eq.(5.25) e reagrupando os termos, obtém-se:

$$\int_{\Gamma} [\nabla P^* \cdot \mathbf{n}] \phi_j d\Gamma - \int_{\Omega} \nabla P^* \cdot \nabla \phi_j d\Omega + \frac{\omega^2}{c^2} \int_{\Omega} P^* \phi_j d\Omega = 0 \quad (5.27a)$$

ou

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial P^*}{\partial n} \phi_j d\Gamma - \int_{\Omega} \nabla P^* \cdot \nabla \phi_j d\Omega + \frac{\omega^2}{c^2} \int_{\Omega} P^* \phi_j d\Omega = 0. \quad (5.27b)$$

Utilizando a equação da conservação da quantidade de movimento (4.12) e o resultado mostrado na eq. (5.27b), esta equação também pode ser reescrita na forma:

$$-j\rho_0\omega \int_{\Gamma} u_n \phi_j d\Gamma - \int_{\Omega} \nabla P^* \cdot \nabla \phi_j d\Omega + \frac{\omega^2}{c^2} \int_{\Omega} P^* \phi_j d\Omega = 0. \quad (5.28)$$

Novamente, usando a aproximação de elementos finitos para  $P^*(x, y, z)$  esta equação pode ser reescrita como:

$$-j\rho_0\omega \int_{\Gamma} u_n \phi_j d\Gamma - \int_{\Omega} \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j d\Omega p_i + \frac{\omega^2}{c^2} \int_{\Omega} \phi_i \phi_j d\Omega p_i = 0. \quad (5.29)$$

Matricialmente esta equação pode ser expressa como sendo:

$$[[\mathbf{K}] - k_0^2 [\mathbf{M}]] \{p\} = \{f\} \quad (5.30)$$

onde

$$[\mathbf{K}] = \int_{\Omega} \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j d\Omega, \quad (5.31)$$

$$[\mathbf{M}] = j\rho_0 \int_{\Omega} \phi_i \phi_j d\Omega \quad (5.32)$$

e

$$\{f\} = -j\rho_0\omega \int_{\Gamma} \phi_j u_n d\Gamma. \quad (5.33)$$

### 5.3 FORMULAÇÃO DE ELEMENTOS DE CONTORNO.

O método dos elementos de contorno (BEM) também é conhecido como o método da integral de contorno. Atualmente, existem dois tipos deste método disponíveis para análises acústicas. Primeiro, o tradicional método dos elementos de contorno direto ou do inglês *Direct Boundary Element Method* (DBEM), que tem como base a clássica equação integral de Helmholtz. O DBEM pode ser aplicado para resolver a equação de Helmholtz em domínios interiores limitados ou em domínios exteriores ilimitados. A principal variável utilizada no estudo dos domínios com o DBEM é a pressão sonora. Este método será detalhadamente descrito a seguir.

O segundo tipo é chamado de método dos elementos de contorno indireto ou do inglês *Indirect Boundary Element Method* (IBEM), que resolve a integral de contorno de Helmholtz para o domínio interior e exterior simultaneamente, mesmo que um dos domínios não seja necessário na análise em estudo. A principal variável tratada por este método é a flutuação da pressão sonora no contorno denominado *pressure jump*. Não será descrito o IBEM neste capítulo, se necessário o leitor pode consultar algumas das seguintes referências sobre o tema: Wu, Pierce e Ginsberg, (1987); Hamdi e Mariem, (1987–91); Kirkup, (1998); Wu (2000).

#### 5.3.1 SOLUÇÃO FUNDAMENTAL PARA PROBLEMAS TRIDIMENSIONAIS.

A primeira etapa para se obter a formulação integral de contorno é encontrar a solução fundamental  $\Psi$ , que satisfaça a equação de Helmholtz e que represente o campo gerado por uma fonte de carga unitária concentrada em um ponto  $Q$ . O efeito desta carga se propaga do ponto  $Q$  para o infinito sem qualquer relação com as condições de contorno do problema. Portanto, a eq. (5.24) pode ser reescrita de forma mais conveniente como (Brebbia e Domingues, 1989; Wu, 2000; Katsikadelis, 2002):

$$\nabla^2 \psi - k_0^2 \psi = -\delta(Q) \quad (5.34)$$

onde  $\delta$  representa a função delta de Dirac, que tende para o infinito no ponto Q e zero para qualquer outro ponto do espaço.

Para resolver a eq. (5.34) será adotado um sistema de coordenadas esféricas,  $(r, \theta, \phi)$ , centrado em Q. Portanto, o operador Laplaciano  $\nabla^2$  pode ser escrito como:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\cot \phi}{r^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (5.35)$$

e a equação de Helmholtz (5.24) torna-se:

$$\frac{\partial^2 P^*}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial P^*}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 P^*}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 P^*}{\partial \phi^2} + \frac{\cot \phi}{r^2} \frac{\partial P^*}{\partial \phi} + k_0^2 P^* = 0 \quad (5.36)$$

Entretanto, pode-se escrever a solução fundamental somente dependente de r devido à simetria da propagação de ondas originadas por uma fonte pontual, ou seja, a equação acima se reduz a:

$$\frac{\partial^2 P^*}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial P^*}{\partial r} + k_0^2 P^* = 0 \quad (5.37)$$

A solução fundamental que satisfaz as equações (5.34) e (5.37) é dada por:

$$\psi = C_1 \frac{e^{-jkr}}{r} + C_2 \frac{e^{+jkr}}{r} \quad (5.38)$$

onde  $C_1$  e  $C_2$  são constantes a serem determinadas. Considerando que a fonte pontual Q seja uma esfera, então, o expoente  $-jkr$  representa a onda que deixa a fonte e se propaga para fora e  $+jkr$  representa onda que se propaga no sentido oposto, para dentro da fonte. Portanto, devido a este fato, conclui-se que  $C_2 = 0$ . O coeficiente  $C_1$  pode ser determinado integrando a eq. (5.34) sobre uma pequena esfera de volume  $\Omega_\epsilon$  contendo Q (Figura 5.2), ou seja:

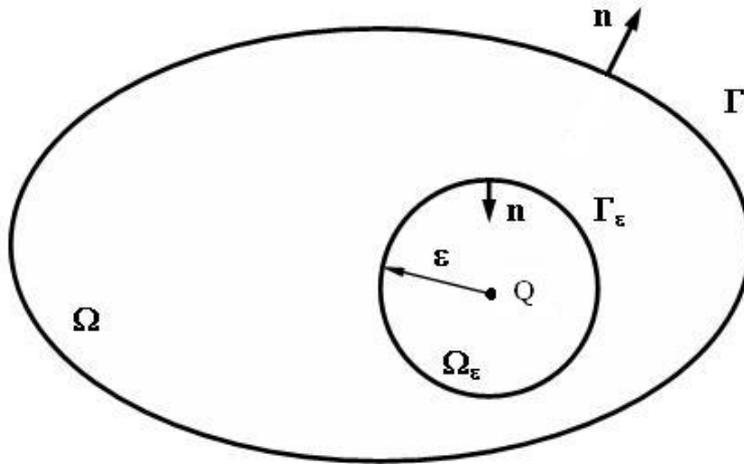


Figura 5.2. Subdomínio  $\Omega_\epsilon$  sobre a fonte pontual Q (Wu, 2000).

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\epsilon} (\nabla^2 \Psi - k_0^2 \Psi) d\Omega = - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\epsilon} \delta(Q) d\Omega \quad (5.39a)$$

ou

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{\Omega_\epsilon} (\nabla \cdot \nabla \Psi) d\Omega - \int_{\Omega_\epsilon} k_0^2 \Psi d\Omega \right] = -1 \quad (5.39b)$$

onde a integral da função delta de Dirac é igual a um.

O segundo termo da equação acima decai a zero, desde que  $d\Omega$  tenda a zero mais rápido do que  $\Psi$  tenda ao infinito quando  $\epsilon \rightarrow 0$ , e aplicando o teorema de Gauss ao primeiro termo com o objetivo de transformar a integral de volume em uma integral de superfície, tem-se:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon} \frac{\partial \Psi}{\partial n} d\Gamma = -1 \quad (5.40)$$

onde  $\Gamma_\epsilon$  é o contorno da superfície da pequena esfera de volume  $\Omega_\epsilon$  e  $n$  é a direção normal ao contorno  $\Gamma_\epsilon$ . Resolvendo esta integral com  $d\Gamma = r^2 \cos\theta d\theta d\phi$  para uma superfície esférica e neste caso, sendo a direção de  $n$  a mesma de  $r$ , aplica-se a regra da cadeia para  $\partial \Psi / \partial n$ . O

resultado da integração fornece que  $C_1 = 1/(4\pi)$ . Finalmente, a solução fundamental para p espaço tridimensional é:

$$\psi = \frac{e^{-jkr}}{4\pi r}. \quad (5.41)$$

### 5.3.2 EQUAÇÃO INTEGRAL DE CONTORNO PARA PROBLEMAS TRIDIMENSIONAIS.

Para problemas interiores é necessário resolver a equação de Helmholtz em uma cavidade  $\Omega$  de dimensões finitas. As condições de contorno (pressão sonora, velocidade normal da partícula ou impedância) na superfície  $\Gamma$  da parede desta cavidade podem ser representadas pela expressão:

$$\alpha p + \beta u_n = \gamma \quad (5.42)$$

onde  $u_n$  é a velocidade normal da partícula, e  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  são coeficientes a serem especificados.

A equação integral de contorno para problemas acústicos interiores pode ser derivada a partir do método dos resíduos ponderados aplicado à equação de Helmholtz. Devido ao fato de que existe extensa bibliografia a respeito deste assunto nos livros clássicos de elementos contorno, este detalhamento não será feito neste texto. Se necessário o leitor pode consultar algumas das seguintes referências: Brebbia e Domingues (1989), Wu (2000), Katsikadelis (2002). Então a equação de Helmholtz tem seu resíduo ponderado definido por:

$$\int_{\Omega} \left[ \nabla^2 P^* + k_0^2 P^* \right] \psi d\Omega = - \int_{\Gamma} \psi \frac{\partial p}{\partial n} d\Gamma + \int_{\Gamma} P^* \frac{\partial \psi}{\partial n} d\Gamma. \quad (5.43)$$

Primeiramente assume-se que um ponto  $Q$  associado à solução fundamental  $\psi$  está localizado no domínio acústico  $\Omega$ . Sendo  $\psi$  é uma função singular em  $Q$ , faz-se necessário excluir  $Q$  do domínio  $\Omega$  através de uma pequena esfera de volume  $\Omega_\epsilon$  fechando sobre  $Q$ , como mostra a Figura 5.2. Integrando duas vezes por partes a primeira parte da eq. (4.43), tem-se:

$$\int_{\Omega+\Omega_\varepsilon} [\nabla^2 \psi + k_0^2 \psi] P^* d\Omega = \int_{\Gamma+\Gamma_\varepsilon} \psi \frac{\partial p}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma+\Gamma_\varepsilon} P^* \frac{\partial \psi}{\partial n} d\Gamma \quad (5.44)$$

onde o vetor normal  $\mathbf{n}$  a superfície  $\Gamma$  aponta para fora do domínio acústico  $\Omega$ , enquanto que o vetor normal  $\mathbf{n}$  a superfície  $\Gamma_\varepsilon$ , da esfera volume  $\Omega_\varepsilon$ , aponta para o ponto singular  $Q$ .

Sabe-se que  $\psi$  é solução fundamental do problema, então, a parte a esquerda da eq. (5.44) vale zero, ou seja:

$$0 = \int_{\Gamma+\Gamma_\varepsilon} \psi \frac{\partial p}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma+\Gamma_\varepsilon} P^* \frac{\partial \psi}{\partial n} d\Gamma. \quad (5.45)$$

A parte da direita da eq. (5.45) é uma integral avaliada em duas superfícies do contorno:  $\Gamma$  na parede cavidade  $\Omega$  e  $\Gamma_\varepsilon$  na parede da esfera de volume  $\Omega_\varepsilon$ . Portanto, esta equação pode ser escrita de forma explicita como:

$$0 = \int_{\Gamma} \psi \frac{\partial P^*}{\partial n} d\Gamma + \int_{\Gamma_\varepsilon} \psi \frac{\partial P^*}{\partial n} d\Gamma - \left[ \int_{\Gamma} P^* \frac{\partial \psi}{\partial n} d\Gamma + \int_{\Gamma_\varepsilon} P^* \frac{\partial \psi}{\partial n} d\Gamma \right] \quad (5.46)$$

onde

$$I = \int_{\Gamma_\varepsilon} \psi \frac{\partial P^*}{\partial n} d\Gamma \quad \text{e} \quad \Pi = \int_{\Gamma_\varepsilon} P^* \frac{\partial \psi}{\partial n} d\Gamma. \quad (5.47a,b)$$

Quando a esfera de volume  $\Omega_\varepsilon$  fecha sobre o ponto singular  $Q$ , conseqüentemente  $\Gamma_\varepsilon$  tende a zero e se  $d\Gamma = r^2 \cos\theta d\theta d\phi$  e o valor da integral  $I$  vale:

$$I = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \psi \frac{\partial P^*}{\partial n} d\Gamma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \frac{\partial P^*}{\partial n} r^2 \cos\theta d\theta d\phi = 0. \quad (5.48)$$

Nestas mesmas condições, aplicando a regra da cadeia e integrando  $\Pi$  com relação às coordenadas esféricas tem-se que:

$$\Pi = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} P^* \frac{\partial \psi}{\partial n} d\Gamma = P^*(Q) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n} d\Gamma \quad (5.49a)$$

ou

$$\Pi = P^*(Q) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} [1 + jkr] \frac{e^{-jkr}}{4\pi r^2} r^2 \cos \theta d\theta d\phi = P^*(Q) \quad (5.49b)$$

onde  $\frac{\partial r}{\partial n} = -1$ . Substituindo estes resultados juntamente com a equação da quantidade de movimento na forma apresentada pela equação (5.14b) pode-se reescrever a eq. (5.46) como:

$$P^*(Q) = - \int_{\Gamma} \left[ i\rho\omega u_n \psi + P^* \frac{\partial \psi}{\partial n} \right] d\Gamma. \quad (5.50)$$

Esta equação é a equação integral de contorno para problemas acústicos governados pela equação de Helmholtz. A pressão sonora  $P^*$  em qualquer ponto Q dentro do domínio pode ser obtida pela integração desta equação sobre o contorno. Esta é a idéia principal do BEM, onde somente são necessárias informações sobre o contorno para se obter a solução em um determinado ponto Q. Agora precisa-se saber o comportamento da equação integral de contorno quando o ponto Q está localizado sobre um contorno suave ou não, Figuras 5.3 e 5.4.

Quando Q está localizado sobre um contorno suave, seu domínio é dado por uma pequena semi-esfera de volume  $\Omega_\varepsilon$  de raio  $\varepsilon$  (Figura 5.3). Assim, quando o raio  $\varepsilon$  da semi-esfera tender a zero o contorno  $\Gamma_\varepsilon$  também tenderá a zero. De maneira análoga às integrações das equações (5.48) e (5.49), tem-se:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \psi \frac{\partial P^*}{\partial n} d\Gamma = 0 \quad (5.51)$$

e

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} P^*(Q) \frac{\partial \psi}{\partial n} d\Gamma = \frac{1}{2} P^*(Q), \quad (5.52)$$

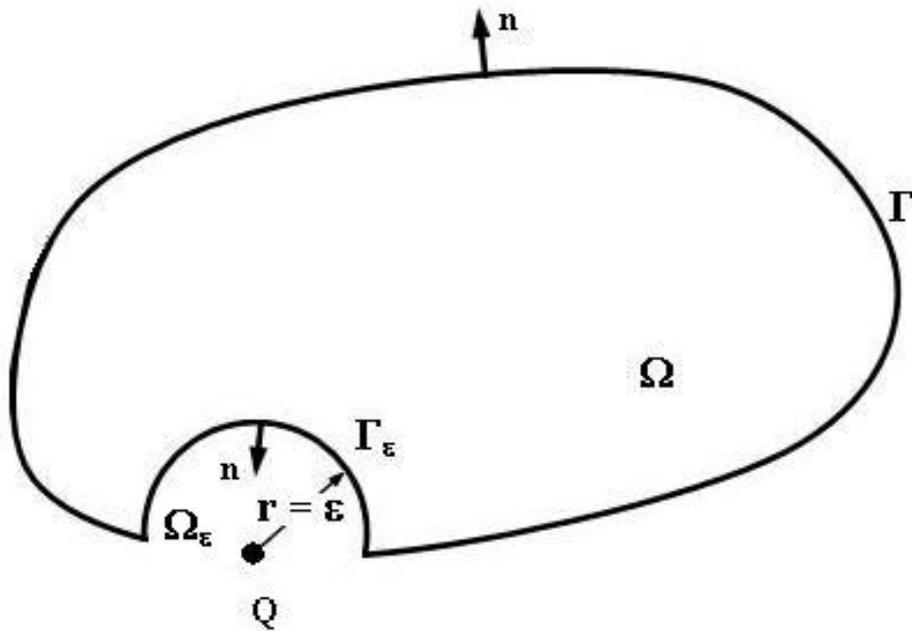


Figura 5.3. Ponto Q excluído do domínio acústico para um contorno suave (Wu, 2000).

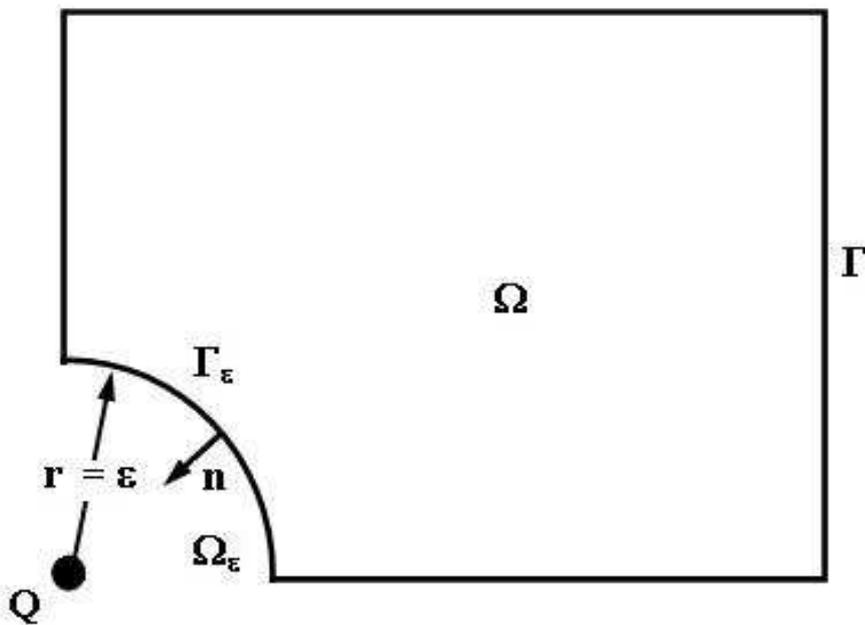


Figura 5.4. Ponto Q excluído do domínio acústico para um contorno não suave (Wu, 2000).

Conseqüentemente, a eq. (5.46) torna-se:

$$\frac{1}{2}P^*(Q) = -\int_{\Gamma} \left[ i\rho\omega u_n \psi + P^* \frac{\partial \psi}{\partial n} \right] d\Gamma \quad \text{com } Q \in \text{contorno suave} \quad (5.53)$$

onde  $1/2$  é o ângulo do volume  $\Omega_\epsilon$  em  $Q$  chamado de coeficiente de ligação ou do inglês *leading coefficient*, (Breebia e Domingues, 1989; Wu, 2000).

Para  $Q$  localizado sobre um contorno não suave, como uma ponta ou uma quina, seu coeficiente de ligação, que será representado a partir deste ponto por  $C^0$ , é diferente de  $1/2$ . Então a equação integral de contorno, para este caso pode ser escrita como:

$$C^0 P^*(Q) = - \int_{\Gamma} \left[ i\rho\omega u_n \psi + P^* \frac{\partial \psi}{\partial n} \right] d\Gamma \quad (5.54)$$

onde o coeficiente de ligação, de acordo com a eq. (5.52), é definido como:

$$C^0 P^*(Q) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon} \frac{\partial \psi}{\partial n} d\Gamma. \quad (5.55)$$

Esta equação é impossível de ser avaliada para uma superfície infinitesimal sob um contorno não suave, porque o ângulo do volume  $\Omega_\epsilon$  não é constante. Entretanto, há necessidade de transformá-la em algo que possa ser numericamente avaliado, então:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \psi = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi r} = \lim_{r \rightarrow 0} \psi_L \quad (5.56)$$

onde  $\psi_L = 1/(4\pi r)$  é a solução fundamental da equação de Laplace. Aplicando a  $\frac{\partial \psi}{\partial n}$  o mesmo artifício utilizado na solução fundamental  $\psi$ , tem-se:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial \psi}{\partial n} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n} = \lim_{r \rightarrow 0} (-1 - jkr) \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} = \lim_{r \rightarrow 0} \left[ -\frac{1}{4\pi r} \right] = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial \psi_L}{\partial n}. \quad (5.57)$$

O coeficiente de ligação também pode ser escrito com este mesmo artifício matemático:

$$C^0 P^*(Q) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial \psi_L}{\partial n} d\Gamma. \quad (5.58)$$

Esta é uma integral avaliada sob uma superfície infinitesimal. Aplicando duas vezes a integração por partes a um problema imaginário, regido pela equação de Laplace,  $\nabla^2 \Phi = 0$ , ocupando o mesmo domínio acústico  $\Omega$ , pode-se derivar a equação integral de contorno similar a eq. (5.45), ou seja:

$$0 = \int_{\Gamma + \Gamma_\varepsilon} \psi_L \frac{\partial \Phi}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma + \Gamma_\varepsilon} \Phi \frac{\partial \psi_L}{\partial n} d\Gamma. \quad (5.59)$$

Uma solução particular da equação de Laplace é quando  $\Phi = 1$ , então pode-se escrever que:

$$0 = \int_{\Gamma + \Gamma_\varepsilon} \Phi \frac{\partial \psi_L}{\partial n} d\Gamma \quad (5.60a)$$

ou

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial \psi_L}{\partial n} d\Gamma = - \int_{\Gamma} \frac{\partial \psi_L}{\partial n} d\Gamma. \quad (5.60b)$$

De posse destes resultados o coeficiente de ligação  $C^0$  torna-se:

$$C^0 P^*(Q) = - \int_{\Gamma} \frac{\partial \psi_L}{\partial n} d\Gamma \quad (5.61)$$

onde a integral de  $C^0$  agora pode ser avaliada numericamente sobre todo o contorno.

Resumindo, a equação integral de contorno ou equação integral de Helmholtz para problemas acústicos aplicados a domínios interiores é dada pela eq. (5.54). O coeficiente de ligação  $C^0$  é igual a 1 para um ponto  $Q \in \Omega$  e igual 1/2 para  $Q \in \Gamma$  suave. Neste dois casos não há necessidade de se usar a eq. (5.61). A última etapa é discretizar a equação integral de contorno em todo o contorno  $\Gamma$ , onde a velocidade normal da partícula ( $\mathbf{u}_n$ ) e a pressão sonora

( $P^*$ ), podem ser especificadas. Dividindo o contorno  $\Gamma$  em  $N$  segmentos, pode-se escrever a integral de contorno como um conjunto de equações:

$$C^0 P^*(Q) = - \left[ \sum_q^N \int_{\Gamma_q} i\rho\omega u_n \psi d\Gamma + \sum_q^N \int_{\Gamma_q} P^* \frac{\partial \psi}{\partial n} d\Gamma \right] \quad (5.62a)$$

ou na sua forma mais tradicional

$$C^0 P^*(Q) + \sum_q^N \left[ \int_{\Gamma_q} P^* \frac{\partial \psi}{\partial n} d\Gamma \right] = - \sum_q^N \left[ \int_{\Gamma_q} i\rho\omega \psi u_n d\Gamma \right] \quad (5.62b)$$

onde  $q = 1, 2, \dots, N$  segmentos que, a partir daqui, serão chamados de elementos.

As variáveis  $P^*$  e  $u_n$  sobre o contorno são representadas pelas mesmas funções de interpolação,  $[\phi]$ , utilizadas em elementos finitos. Portanto, os valores nodais de  $P^*(x, y, z)$ ,  $\{p\}$ , para aproximar  $P^*(x, y, z)$  e os valores nodais de  $u_n(x, y, z)$ ,  $\{u_n\}$ , para aproximar  $u_n(x, y, z)$  são:

$$P^* \cong [\phi]\{p\} = \phi_i p_i \quad (5.63)$$

e

$$u_n \cong [\phi]\{u_n\} = \phi_i u_{n_i} \quad (5.64)$$

Utilizando o método dos resíduos ponderados para minimizar o resíduo gerado por estas aproximações, tem-se:

$$C^0 P^*(Q) + \sum_q^N \left[ \int_{\Gamma_q} (\phi_i p_i^q) \frac{\partial \psi}{\partial n} d\Gamma \right]_Q = - \sum_q^N \left[ \int_{\Gamma_q} j\rho_0 \omega (\phi_i u_{n_i}^q) \psi d\Gamma \right]_Q \quad (5.65)$$

onde índice Q representa a posição da fonte unitária no contorno  $\Gamma$ . Os valores de  $p_i^q$  e  $u_{n_i}^q$  nas integrais são constantes em todos os nós para cada elemento q. Sendo  $P^*(Q)$  um valor nodal então pode ser simplesmente substituído  $p_Q$ . A partir destas simplificações esta equação pode ser reescrita como:

$$C^0 p_Q + \sum_q \left[ \int_{\Gamma_q} [\phi_i^{Qq}] \frac{\partial \psi}{\partial n} d\Gamma \right]_Q \{p_i^q\} = - \sum_q \left[ \int_{\Gamma_q} j\rho_0\omega [\phi_i^{Qq}] \psi d\Gamma \right]_Q \{u_{n_i}^q\}. \quad (5.66)$$

A partir deste ponto, coloca-se Q sucessivamente sobre cada ponto nodal i do contorno. O produto da combinação de cada ponto de colocação Q com cada elemento do contorno  $\Gamma_q$  produz dois vetores de coeficientes para os elementos, ou seja:

$$h_i^{Qq} = \int_{\Gamma_q} [\phi_i^{Qq}] \frac{\partial \psi}{\partial n} d\Gamma \quad (5.67)$$

e

$$g_i^{Qq} = -j\rho_0\omega \int_{\Gamma_q} [\phi_i^{Qq}] \psi d\Gamma. \quad (5.68)$$

Este procedimento é chamado de **colocação**. Nas expressões acima i é o número de nós por elemento. Substituindo estes coeficientes na equação (5.66) pode-se escrever que:

$$C^0 p_Q + \sum_q h_i^{Qq} \{p_i^q\} = \sum_q g_i^{Qq} \{u_{n_i}^q\}. \quad (5.69)$$

A partir da colocação de Q sobre todos os pontos nodais do contorno  $\Gamma$ , monta-se  $h_i^{Qq}$  como uma matriz global  $[H^*]$  e  $g_i^{Qq}$  como uma matriz  $[G]$ , então pode-se escrever a eq. (5.69) na forma matricial:

$$[C]\{p\} + [H^*]\{p\} = [G]\{u_n\} \quad (5.70)$$

onde  $[C]$  é uma matriz diagonal com os coeficientes de ligação. Combinando  $[C]$  e  $[H^*]$  em uma única matriz  $[H]$ , tem-se:

$$[H]\{p\} = [G]\{u_n\} . \quad (5.71)$$

Para problemas acústicos somente metade das variáveis são especificadas sobre o contorno e a outra metade é desconhecida. Portanto, pode-se montar um vetor  $\mathbf{X}$  formado por todas variáveis desconhecidas de  $p$  e  $u_n$ , e um vetor  $\mathbf{B}$  com as variáveis conhecidas formado pelas condições de contorno do problema. Assim, após esta manipulação a eq. (5.71) torna-se:

$$[A]\{X\} = \{B\} . \quad (5.72)$$

onde a  $[A]$  é a matriz dos coeficientes das variáveis desconhecidas  $p$  e  $u_n$ .

## **CAPÍTULO 6**

### **APLICATIVOS NUMÉRICOS**

#### **6.1 INTRODUÇÃO.**

Neste capítulo são apresentadas as matrizes características para implementação computacional dos aplicativos de elementos finitos e de elementos de contorno, necessárias às simulações numéricas desta tese. A teoria base para geração das matrizes características já foi amplamente discutida no capítulo anterior.

A grandeza a ser avaliada em todas as simulações numéricas é a perda de transmissão sonora, TL. Os aplicativos numéricos, já mencionados, foram implementados e desenvolvidos pelo próprio autor utilizando compilador Fortran 90/95. Estes aplicativos calculam automaticamente a perda de transmissão e podem ser utilizados para análises axissimétricas e tridimensionais.

O processo de análise, desde a criação do modelo até o resultado final, é descrito com detalhes nos próximos ítems.

#### **6.2 AS MATRIZES CARACTERÍSTICAS DO FEM.**

Neste item serão desenvolvidas as equações para implementação das matrizes características de elementos finitos para análises assimétricas com elementos quadrangulares lineares de 4 nós e triangulares de quadráticos de 6 nós.

### 6.2.1 FORMULAÇÃO AXISSIMÉTRICA – ELEMENTO QUADRANGULAR LINEAR DE 4 NÓS.

Usando as coordenadas locais (s,t), naturais, a aproximação de  $P^*(r,z)$  para solução da equação de Helmholtz em cada elemento é feita utilizando a aproximação linear, Figura 4.1:

$$P^* \equiv [\phi]\{p\} = \sum_{i=1}^4 \phi_i(s,t)p_i \quad (6.1)$$

onde

$\{p\}$  é o vetor com os valores nodais de  $P^*$ ;

$\phi$  é o conjunto de funções de interpolação sobre o elemento.

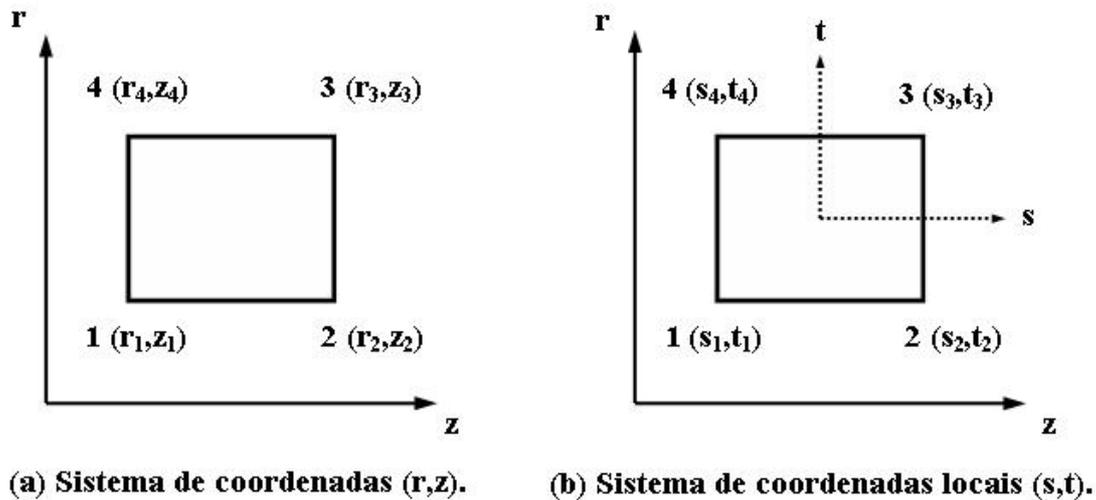


Figura (6.1). Elemento quadrangular linear.

Para este elemento as funções de interpolação valem:

$$\phi_1(s,t) = \frac{1}{4}(1-s)(1-t) \quad (6.2a)$$

$$\phi_2(s,t) = \frac{1}{4}(1+s)(1-t) \quad (6.2b)$$

$$\phi_3(s,t) = \frac{1}{4}(1+s)(1+t) \quad (6.2c)$$

$$\phi_4(s,t) = \frac{1}{4}(1-s)(1+t) \quad (6.2d)$$

As matrizes  $[K]$  e  $[M]$  e o vetor força  $\{f\}$  característicos para problemas axissimétricos são dados pelas equações (5.18), (5.19) e (5.20), ou seja:

$$[K] = \int_{\Omega^*} \left[ \frac{\partial \phi_i}{\partial r} \frac{\partial \phi_j}{\partial r} + \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \frac{\partial \phi_j}{\partial z} \right] r dr dz, \quad (6.3)$$

$$[M] = \int_{\Omega^*} \phi_i \phi_j r dr dz \quad (6.4)$$

e

$$\{f\} = j\rho_0\omega \int_{\Gamma} u_n \phi_j r d\Gamma. \quad (6.5)$$

Os valores de  $[K]$  e  $[M]$  são avaliados numericamente e podem ser calculados com a conhecida regra da integração de Gauss (Zienkiewicz e Taylor, 2000):

$$\iint f(r,z) dr dz = \iint f(s,t) |J(s,t)| ds dt = \sum_{n=1}^{NG} \sum_{m=1}^{NG} W_n W_m f(s_n, t_m) |J(s_n, t_m)| \quad (6.6)$$

onde

$(s_n, t_n)$  são os conhecidos pontos de Gauss;

$W_n$  é o peso de integração associado ao n-ésimo ponto de Gauss;

$|J(s_n, t_m)|$  é o valor do Jacobiano da transformação calculado no ponto de Gauss com coordenadas  $(s_n, t_m)$ . A expressão explícita para o cálculo do Jacobiano da transformação de coordenadas  $(r,z)$  para  $(s,t)$ , é:

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial s} \\ \frac{\partial r}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^4 \frac{\partial \phi_i}{\partial s} r_i & \sum_{i=1}^4 \frac{\partial \phi_i}{\partial s} z_i \\ \sum_{i=1}^4 \frac{\partial \phi_i}{\partial t} r_i & \sum_{i=1}^4 \frac{\partial \phi_i}{\partial t} z_i \end{bmatrix} \quad (6.7)$$

O vetor força, eq. (6.5), é calculado explicitamente para  $u_n$  constante no contorno, ou seja:

$$\{f\} = j\rho_o\omega u_n \int_{\Gamma} \phi_j r d\Gamma. \quad (6.8)$$

Para o cálculo do vetor força, as funções de interpolação devem ser avaliadas sobre o contorno. As expressões para estas funções no contorno, Figura 6.2, são dadas por:

$$\phi_1(r^*) = 1 - \frac{r^*}{\bar{L}} \quad (6.9a)$$

e

$$\phi_2(r^*) = \frac{r^*}{\bar{L}} \quad (6.9b)$$

onde  $\bar{L}$  é o comprimento do elemento do contorno e  $r^*$  é a coordenada local definida na Figura 6.2.

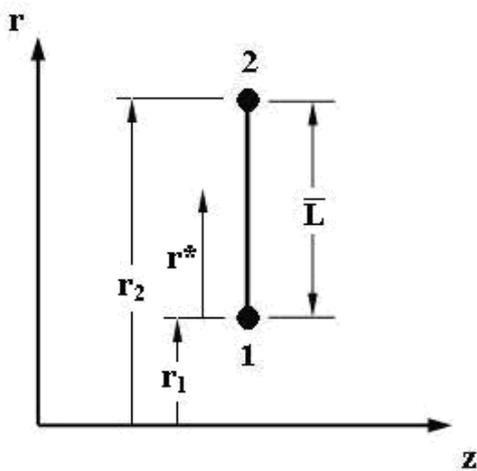


Figura 6.2. Elemento linear do contorno.

Integrando o vetor força, após a substituição das funções interpolação, em relação à coordenada  $r^*$ , tem-se:

$$\{f\} = j\rho_o\omega u_n \frac{\bar{L}}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{Bmatrix}. \quad (6.10)$$

### 6.2.2 FORMULAÇÃO AXISSIMÉTRICA – ELEMENTO TRIANGULAR QUADRÁTICO DE 6 NÓS.

A variável de interesse  $P^*(r,z)$  em cada elemento é representada utilizando-se a aproximação linear quadrática (Figura 6.3):

$$P^* \cong [\phi]\{p\} = \sum_{i=1}^6 \phi_i(L_1, L_2, L_3) p_i \quad (6.11)$$

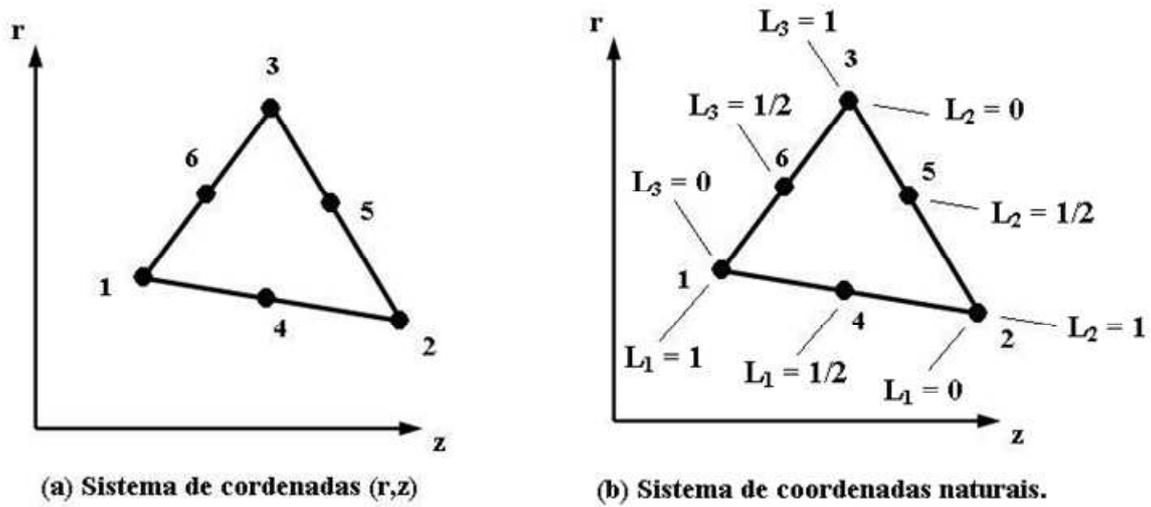


Figura 6.3. Elemento triangular quadrático.

Para este elemento as funções de interpolação valem:

$$\phi_1(r, z) = L_1(2L_1 - 1) \quad (6.12a)$$

$$\phi_2(r, z) = L_2(L_2 - 1) \quad (6.12b)$$

$$\phi_3(r, z) = L_3(L_3 - 1) \quad (6.12c)$$

$$\phi_4(r, z) = 4L_1L_2 \quad (6.12d)$$

$$\phi_5(r, z) = 4L_2L_3 \quad (6.12e)$$

$$\phi_6(r, z) = 4L_1L_3 \quad (6.12f)$$

onde  $L_1$ ,  $L_2$  e  $L_3$  são as coordenadas naturais para o elemento triangular quadrático. A  $i$ -ésima coordenada natural para triângulos de lados retos é definida como sendo:

$$L_i(r, z) = \frac{A_{Qjk}}{A_{ijk}} \quad (6.13)$$

Na expressão acima  $A_{QJK}$  é a área do triângulo com vértices em Q, J, K, enquanto  $A_{JK}$  é a área total do triângulo de vértices 1, 2 e 3, (Figura 6.4). Portanto, pode ser escrita explicitamente como:

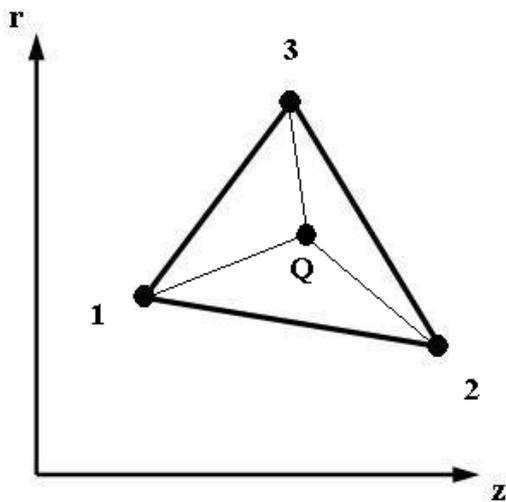


Figura 6.4. Coordenadas de área  $L_i(r,z)$ .

$$L_1(r, z) = \frac{A_{Q23}}{A_{123}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & r & z \\ 1 & r_2 & z_2 \\ 1 & r_3 & z_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & r_1 & z_1 \\ 1 & r_2 & z_2 \\ 1 & r_3 & z_3 \end{vmatrix}} = a_1 + b_1r + c_1z \quad (6.14a)$$

$$L_2(r, z) = \frac{A_{1Q3}}{A_{123}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & r_1 & z_1 \\ 1 & r & z \\ 1 & r_3 & z_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & r_1 & z_1 \\ 1 & r_2 & z_2 \\ 1 & r_3 & z_3 \end{vmatrix}} = a_2 + b_2r + c_2z \quad (6.14b)$$

$$L_3(r, z) = \frac{A_{12Q}}{A_{123}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & r_1 & z_1 \\ 1 & r_2 & z_2 \\ 1 & r & z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & r_1 & z_1 \\ 1 & r_2 & z_2 \\ 1 & r_3 & z_3 \end{vmatrix}} = a_3 + b_3r + c_3z \quad (6.14c)$$

Conseqüentemente, as constantes  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$  podem ser facilmente calculadas desenvolvendo-se os determinantes das matrizes  $A_{QJK}$  e  $A_{IJK}$ , ou seja:

$$a_1 = \frac{r_2z_3 - r_3z_2}{2A_{123}} \quad a_2 = \frac{r_1z_3 - r_3z_1}{2A_{123}} \quad a_3 = \frac{r_1z_2 - r_2z_1}{2A_{123}} \quad (6.15a,b,c)$$

$$b_1 = \frac{(z_2 - z_3)}{2A_{123}} \quad b_2 = \frac{(z_1 - z_3)}{2A_{123}} \quad b_3 = \frac{(z_1 - z_2)}{2A_{123}} \quad (6.16a,b,c)$$

$$c_1 = \frac{(r_3 - r_2)}{2A_{123}} \quad c_2 = \frac{(r_3 - r_1)}{2A_{123}} \quad c_3 = \frac{(r_2 - r_1)}{2A_{123}} \quad (6.17a,b,c)$$

De posse dessas constantes, as matrizes  $[K]$  e  $[M]$ , fornecidas pelas equações (6.3) e (6.4), são avaliadas numericamente e podem ser calculados com a conhecida regra da integração de Gauss para domínios triangulares (Cook, Malkus e Plesha, 2002):

$$\iint f(r, z) dA = \frac{1}{2} \iint f(L_1, L_2, L_3) |J(L_1, L_2, L_3)| dA = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{NG} W_n f(L_{1n}, L_{2n}, L_{3n}) |J(L_{1n}, L_{2n}, L_{3n})| \quad (6.18)$$

onde a matriz Jacobiana para triângulos de lados retos com nós intermediários no centro de seus lados é expresso por:

$$[J] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 & z_1 \\ r_2 & z_2 \\ r_3 & z_3 \end{bmatrix}. \quad (6.19)$$

O vetor força, eq. (6.8), pode ser obtido através da integração das funções de interpolação para o elemento quadrático do contorno no sistema local  $r^*$  (Figura 6.5). As funções de interpolação valem:

$$\phi_1 = \left[ 1 - 2 \frac{r^*}{\bar{L}} \right] \left[ 1 - \frac{r^*}{\bar{L}} \right] \quad (6.20a)$$

$$\phi_2 = 4 \frac{r^*}{\bar{L}} \left[ 1 - \frac{r^*}{\bar{L}} \right] \quad (6.20b)$$

$$\phi_3 = -\frac{r^*}{\bar{L}} \left[ 1 - 2 \frac{r^*}{\bar{L}} \right] \quad (6.20c)$$

onde  $\bar{L}$  é o comprimento do elemento do contorno.

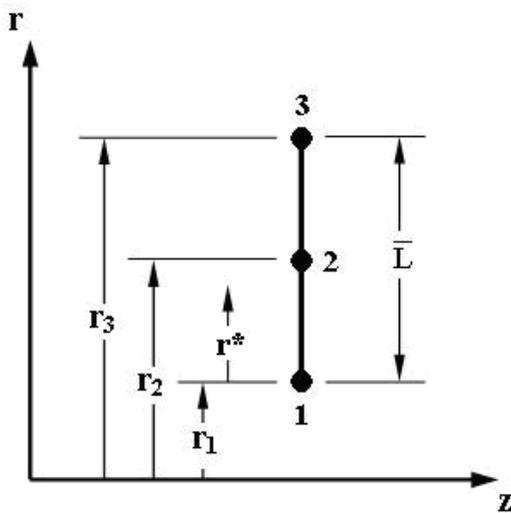


Figura 6.5. Elemento quadrático do contorno.

Integrado a eq. (6.8), após a substituição das funções de interpolação, em relação à coordenada  $r^*$ , tem-se:

$$\{f\} = j\rho_0\omega u_n \frac{\bar{L}}{30} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{Bmatrix} . \quad (6.21)$$

### 6.2.3 FORMULAÇÃO TRIDIMENSIONAL - ELEMENTO TETRAÉDRICO LINEAR DE 4 NÓS.

As funções de interpolação dos elementos tetraédricos lineares são definidas com uso das coordenadas naturais do elemento. Seja  $Q$  um ponto com coordenadas  $(x,y,z) \in \Omega_{\text{elemento}}$  (Figura 6.6(b)). As coordenadas naturais para este elemento são definidas utilizando o volume formado pelo tetraedro de lados retos definido pelo ponto  $Q$  e outros três vértices do elemento, isto é:

$$L_i(x, y, z) = \frac{V_{Qjkl}}{V_{ijkl}}, \quad (6.22)$$

onde  $V_{ijkl}$  é o volume do elemento e  $V_{Qjkl}$  é o volume do tetraedro definido pelo ponto  $Q$  e pela aresta oposta ao nó  $i$ , isto é, a aresta definida pelos pontos  $jkl$ .

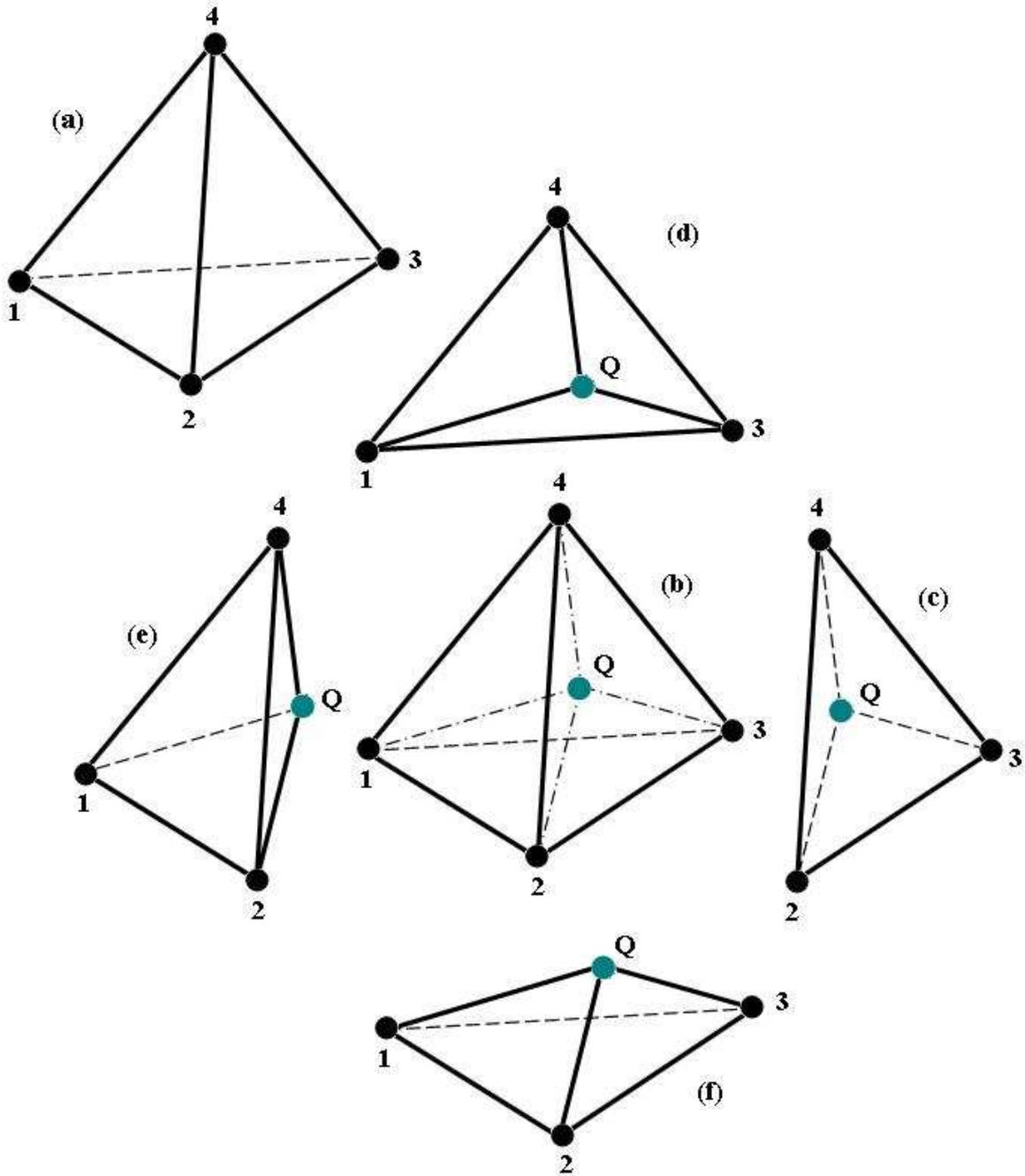


Figura 6.6. Elemento tetraédrico linear.

A expressão matemática para o cálculo do volume do elemento é dada por

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \quad (6.23)$$

e as coordenadas naturais,  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$  e  $L_4$ , são dadas por:

$$L_1(x, y, z) = \frac{V_{Q234}}{V_{1234}} = \frac{1}{6V} \begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} = a_1x + b_1y + c_1z + d_1 \quad (6.24a)$$

$$L_2(x, y, z) = \frac{V_{1Q34}}{V_{1234}} = \frac{1}{6V} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x & y & z \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} = a_2x + b_2y + c_2z + d_2 \quad (6.24b)$$

$$L_3(x, y, z) = \frac{V_{12Q4}}{V_{1234}} = \frac{1}{6V} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x & y & z \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} = a_3x + b_3y + c_3z + d_3 \quad (6.24c)$$

$$L_4(x, y, z) = \frac{V_{123Q}}{V_{1234}} = \frac{1}{6V} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x & y & z \end{vmatrix} = a_4x + b_4y + c_4z + d_4 \quad (6.24d)$$

onde

$$a_1 = -\frac{1}{6V} \begin{vmatrix} 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_3 & z_3 \\ 1 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \quad b_1 = \frac{1}{6V} \begin{vmatrix} 1 & x_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & z_4 \end{vmatrix} \quad c_1 = -\frac{1}{6V} \begin{vmatrix} 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 \end{vmatrix} \quad d_1 = \frac{1}{6V} \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \quad (6.25a,b,c,d)$$

$$a_2 = \frac{1}{6V} \begin{vmatrix} 1 & y_1 & z_1 \\ 1 & y_3 & z_3 \\ 1 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \quad b_2 = -\frac{1}{6V} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & z_1 \\ 1 & x_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & z_4 \end{vmatrix} \quad c_2 = \frac{1}{6V} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_3 & y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 \end{vmatrix} \quad d_2 = -\frac{1}{6V} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \quad (6.25d,e,f,g)$$

$$a_3 = -\frac{1}{6V} \begin{vmatrix} 1 & y_1 & z_1 \\ 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \quad b_3 = \frac{1}{6V} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & z_2 \\ 1 & x_4 & z_4 \end{vmatrix} \quad c_3 = \frac{1}{6V} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_4 & y_4 \end{vmatrix} \quad d_3 = -\frac{1}{6V} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \quad (6.25h,i,j,k)$$

$$a_4 = \frac{1}{6V} \begin{vmatrix} 1 & y_1 & z_1 \\ 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \quad b_4 = -\frac{1}{6V} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & z_3 \end{vmatrix} \quad c_4 = \frac{1}{6V} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \quad d_4 = -\frac{1}{6V} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \quad (6.25l,m,c,n)$$

Neste elemento a aproximação de  $P^*(r,z)$  em cada elemento é feita utilizando a aproximação linear:

$$P^* \equiv [\phi][p] = \sum_{i=1}^4 \phi_i(x, y, z) p_i . \quad (6.26)$$

Para o elemento tetraédrico linear o conjunto de funções de interpolação,  $\phi_i$ , valem:

$$\phi_i(x, y, z) = L_i(x, y, z) \text{ onde } i = 1, 2, 3, 4; \quad (6.27)$$

e é fácil de verificar que:

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial x} = a_i, \quad \frac{\partial \phi_i}{\partial y} = b_i \text{ e } \frac{\partial \phi_i}{\partial z} = c_i . \quad (6.28a,b,c)$$

Como estas derivadas são constantes, a matriz  $[K]$  característica, eq. (5.30), para o elemento tetraédrico linear fica sendo:

$$[K] = \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} + \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_j}{\partial y} + \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \frac{\partial \phi_j}{\partial z} \right] d\Omega \quad (6.29a)$$

ou

$$[\mathbf{K}] = \int_{\Omega} [a_i a_j + b_i b_j + c_i c_j] d\Omega = [a_i a_j + b_i b_j + c_i c_j] V \quad (6.29b)$$

Consequentemente, a expressão matricial para a matriz  $[\mathbf{K}]$  do elemento é:

$$[\mathbf{K}] = V \begin{bmatrix} (a_1^2 + b_1^2 + c_1^2) & (a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2) & (a_1 a_3 + b_1 b_3 + c_1 c_3) & (a_1 a_4 + b_1 b_4 + c_1 c_4) \\ & (a_2^2 + b_2^2 + c_2^2) & (a_2 a_3 + b_2 b_3 + c_2 c_3) & (a_2 a_4 + b_2 b_4 + c_2 c_4) \\ & & (a_3^2 + b_3^2 + c_3^2) & (a_3 a_4 + b_3 b_4 + c_3 c_4) \\ \text{sim} & & & (a_4^2 + b_4^2 + c_4^2) \end{bmatrix} \quad (6.30)$$

A matriz  $[\mathbf{M}]$  para domínios tridimensionais pode ser calculada utilizando a regra clássica de integração para domínios tetraédricos (Cook, Malkus e Plesha, 2002):

$$\int_V L_1^k L_2^l L_3^m L_4^n dV = 6V \frac{k!l!m!n!}{(3+k+l+m+n)} \quad (6.31)$$

Portanto, a expressão da matriz  $[\mathbf{M}]$  fica sendo definida por:

$$[\mathbf{M}] = j\rho_0 \int_{\Omega} \phi_i \phi_j d\Omega \quad (6.32a)$$

ou de forma explícita por:

$$[\mathbf{M}] = j\rho_0 \frac{V}{20} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (6.32b)$$

Com a regra de integração para domínios triangulares, (Cook, Malkus e Plesha, 2002), pode-se obter as expressões explícitas para o vetor força  $\{f\}$  integrando a eq. (5.32) no contorno, Figura 6.7.

$$\int_A L_1^k L_2^l L_3^m dV = 2A \frac{k!l!m!}{(k+l+m+2)} \quad (6.33)$$

onde A é a área da face do tetraedro no contorno. Portanto, o vetor força pode ser escrito como:

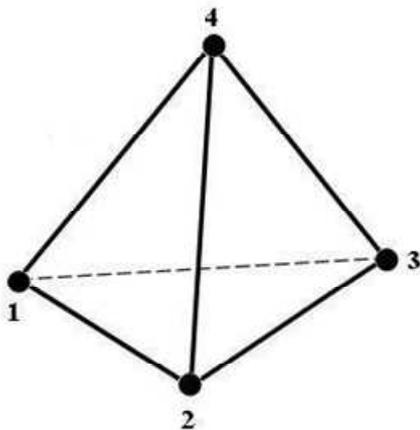
$$\{f\} = j\rho_0\omega \int_{\Gamma} \phi_j u_n d\Gamma \quad (6.34a)$$

ou de forma explícita por

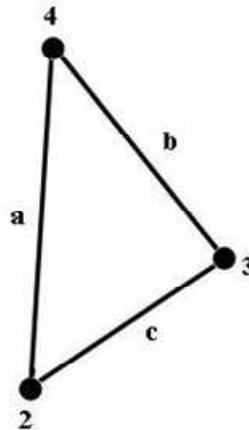
$$\{f\} = j\rho_0\omega u_n \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{A}{3} \quad (6.34b)$$

onde A é área da face do elemento, determinada através do comprimento de suas faces a, b e c, ou seja:

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad \text{com} \quad s = \frac{a+b+c}{2}. \quad (6.35a,b)$$



(a) Elemento com face no contorno.



(b) Face no contorno.

Figura 6.7. Elemento tetraédrico do contorno.

### 6.3 OBTENÇÃO DAS MATRIZES CARACTERÍSTICAS DO BEM.

Neste item serão mostradas as equações para implementação das matrizes características de elementos de contorno para análises tridimensionais com elementos triangulares lineares com 3 nós e quadrangulares lineares com 4 nós.

### 6.3.1 FORMULAÇÃO TRIDIMENSIONAL – ELEMENTOS LINEARES TRIANGULAR DE 3 NÓS E QUADRANGULAR DE 4 NÓS.

Usando as coordenadas locais (s,t), a aproximação de  $P^*(x,y,z)$  e  $u_n(x, y, z)$  em cada elemento é feita utilizando as aproximações lineares fornecidas pelas equações (6.63) e (6.64), ou seja:

$$P^* \cong [\phi]\{p\} = \sum_{i=1}^n \phi_i(s, t)p_i \quad (6.36)$$

e

$$u_n \cong [\phi]\{u_n\} = \sum_{i=1}^n \phi_i(s, t)u_{ni} \quad (6.37)$$

onde

$n$  é o número de nós do elemento;

$\{p\}$  é o vetor com os valores nodais de  $P^*$ ;

$\{u_n\}$  é o vetor com os valores nodais de  $u_n$ ;

$\phi$  é o conjunto de funções de interpolação para o elemento.

As funções de interpolação, em coordenadas locais (Figura 6.8), para o elemento triangular linear de três nós podem ser escritas como:

$$\phi_1(s, t) = s \quad (6.38a)$$

$$\phi_2(s, t) = t \quad (6.38b)$$

$$\phi_3(s, t) = 1 - s - t \quad (6.38c)$$

e para o elemento quadrangular linear de 4 nós como:

$$\phi_1(s, t) = \frac{1}{4}(1-s)(1-t) \quad (6.39a)$$

$$\phi_2(s, t) = \frac{1}{4}(1+s)(1-t) \quad (6.39b)$$

$$\phi_3(s, t) = \frac{1}{4}(1+s)(1+t) \quad (6.39c)$$

$$\phi_4(s, t) = \frac{1}{4}(1-s)(1+t) \quad (6.39d)$$

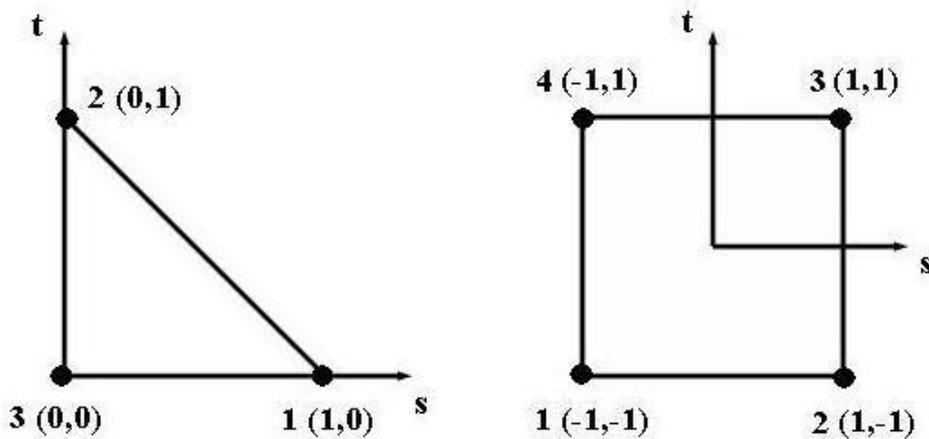


Figura 6.8. Elementos triangular e quadrangular linear.

As funções  $h_i$  e  $g_i$  para resolução da equação integral de contorno de Helmholtz, de acordo com as equações (5.67) e (5.68) valem:

$$h_i^{Qq} = \int_{\Gamma_q} [\phi_i^{Qq}] \frac{\partial \psi}{\partial n} d\Gamma \quad (6.40)$$

e

$$g_i^{Qq} = -j\rho_0\omega \int_{\Gamma_q} [\phi_i^{Qq}] \psi d\Gamma. \quad (6.41)$$

Com a geometria do contorno representada por um conjunto de funções de interpolação, a área de uma superfície infinitesimal sobre o contorno pode ser avaliada como:

$$d\Gamma = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \right| ds dt = |J| ds dt \quad (6.42)$$

onde  $|\mathbf{J}|$  é o módulo do Jacobiano e  $\mathbf{r}(x,y,z)$  é o vetor posição para qualquer ponto  $q$  sobre o elemento do contorno.

Note que  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}$  e  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}$  representam dois vetores tangenciais ao ponto  $q$  nas direções  $s$  e  $t$ , respectivamente. O produto vetorial entre os dois vetores tangenciais produz um vetor normal  $\mathbf{v}$ . O módulo de  $\mathbf{v}$  vale  $|\mathbf{J}|$ . O produto vetorial na eq. (6.42) vale (Wu, 2000):

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{bmatrix} = v_1 \mathbf{i} + v_2 \mathbf{j} + v_3 \mathbf{k} \quad (6.43)$$

onde

$$v_1 = \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial z}{\partial t} - \frac{\partial z}{\partial s} \frac{\partial y}{\partial t}, \quad (6.44a)$$

$$v_2 = \frac{\partial z}{\partial s} \frac{\partial x}{\partial t} - \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial z}{\partial t} \quad (6.44b)$$

e

$$v_3 = \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial x}{\partial t} . \quad (6.44c)$$

Portanto,  $|\mathbf{J}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$  e o vetor normal à superfície é:

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{J}|} . \quad (6.45)$$

Se a geometria de cada elemento é representada utilizando-se as funções de interpolação entre os pontos nodais, tem-se:

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \phi_i(s,t) \mathbf{x}_i, \quad (6.46a)$$

$$y = \sum_{i=1}^n \phi_i(s, t) y_i, \quad (6.46b)$$

e

$$z = \sum_{i=1}^n \phi_i(s, t) z_i \quad (6.46c)$$

onde  $x_i$ ,  $y_i$  e  $z_i$  são as coordenadas dos pontos nodais do elemento de  $n$  nós. Desta forma, as derivadas parciais do vetor  $\mathbf{v}$  podem ser facilmente obtidas.

O vetor normal  $\mathbf{n}$ , para problemas interiores deve estar apontado para fora do domínio. Para que isto ocorra a conectividade do elemento é determinada pela regra da mão direita, conforme mostrado pela Figura 6.8.

Os valores de  $h_i$ , para um elemento quadrangular não singular são avaliadas numericamente e são calculados com a conhecida regra da integração de Gauss (Zienkiewicz e Taylor, 2000):

$$h_i = \int_{\Gamma_q} \left[ \phi_i^{Qq} \right] \frac{\partial \Psi}{\partial n} d\Gamma = \iint f(s, t) |J(s, t)| ds dt = \sum_{n=1}^{NG} \sum_{m=1}^{NG} W_n W_m f(s_n, t_m) |J(s_n, t_m)|. \quad (6.47)$$

Para o elemento triangular não singular, primeiramente faz-se necessária a transformação de suas coordenadas locais para um sistema de coordenadas polar generalizado, cujo objetivo é transformá-lo em um quadrado unitário mostrado na Figura 6.9.

A transformação para o sistema de coordenadas polares generalizadas é determinada pelas seguintes relações (Wu 2000):

$$s = s_3 + \rho[s_1 - s_3 + \theta(s_2 - s_1)] \quad (6.48a)$$

e

$$t = t_3 + \rho[t_1 - t_3 + \theta(t_2 - t_1)]. \quad (6.48b)$$

onde os subíndices 1,2 e 3 junto às coordenadas  $s$  e  $t$  indicam os nós locais do elemento,  $\rho$  e  $\theta$  variam entre zero e um, e o nó 3 é a origem do sistema de coordenadas. A coordenada radial  $\rho$

vale zero na origem e igual a um em qualquer outro ponto sobre a hipotenusa. A partir destas transformações as equações (6.48) podem ser escritas como:

$$s = \rho(1 - \theta) \quad (6.49a)$$

$$t = \rho\theta \quad (6.49b)$$

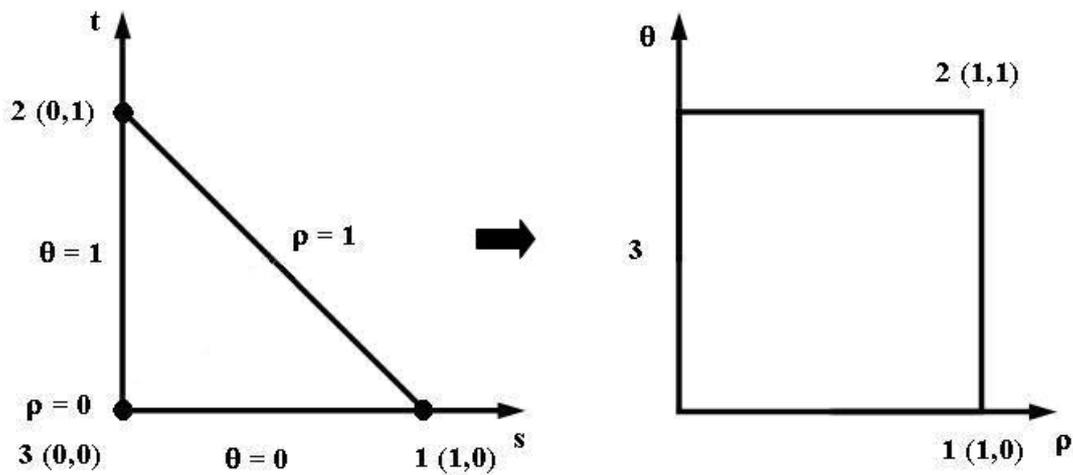


Figura 6.9. Transformação para coordenadas polares generalizadas.

Matriz Jacobiana ( $J_P$ ) para a transformação de coordenadas locais para o sistema polar generalizado é dado por:

$$J_P = \begin{bmatrix} \frac{\partial s}{\partial \rho} & \frac{\partial t}{\partial \rho} \\ \frac{\partial s}{\partial \theta} & \frac{\partial t}{\partial \theta} \end{bmatrix} \quad (6.50a)$$

ou

$$J_P = \begin{bmatrix} 1 - \theta & \theta \\ -\rho & \rho \end{bmatrix} \quad (6.50b)$$

onde  $|J_P| = \rho$

De posse das coordenadas polares generalizadas a integração  $h_i$  ou  $g_i$  sobre um elemento triangular pode ser feita utilizando a regra clássica da integração de Gauss (Zienkiewicz e Taylor, 2000):

$$\begin{aligned}
 h_i &= \int_{\Gamma_q} \left[ \phi_i^{Qq} \right] \frac{\partial \psi}{\partial n} d\Gamma = \int_0^1 \int_0^{1-t} f(s,t) |J(s,t)| ds dt = \int_0^1 \int_0^1 f(\rho,\theta) |J(\rho,\theta)| \rho d\rho d\theta = \\
 &= \frac{1}{4} \int_0^1 \int_0^1 f(\eta_1,\eta_2) |J(\rho,\theta)| \rho d\eta_1 d\eta_2 \quad (6.51)
 \end{aligned}$$

onde esta última transformação das coordenadas  $(\rho,\theta)$  para  $(\eta_1,\eta_2)$  tem o objetivo de transformar o quadrado unitário em um quadrado de lado  $2 \times 2$  onde a regra da integração de Gauss pode ser diretamente aplicada (Wu, 2000). Sendo assim, na equação acima,  $\rho$  e  $\theta$  valem:

$$\rho = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \eta_1 \quad (6.52a)$$

$$\theta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \eta_2 \quad (6.52b)$$

onde a matriz Jacobiana,  $J_\eta$ , e seu determinante para esta última transformação valem, respectivamente:

$$J_\eta = \begin{bmatrix} \frac{\partial \rho}{\partial \eta_1} & \frac{\partial \theta}{\partial \eta_1} \\ \frac{\partial \rho}{\partial \eta_2} & \frac{\partial \theta}{\partial \eta_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (6.53a)$$

e

$$|J_\eta| = \frac{1}{4}. \quad (6.53b)$$

Quando o ponto de colocação  $Q$  está localizado sobre o elemento  $\Gamma_q$ , as integrais de  $h_i$  e  $g_i$  tornam-se singulares porque  $\psi$  e  $\frac{\partial\psi}{\partial n}$  são da ordem  $\frac{1}{r}$  e neste caso  $r$  tende a zero. Como conseqüência deste fato, a singularidade é fraca nas duas integrais.

Para um elemento triangular singular, basta aplicar a transformação para as coordenadas polares generalizadas, descritas, nos parágrafos anteriores, com a diferença que a origem deste novo sistema precisa ser ajustada no ponto singular  $Q$ . Se  $Q$  estiver localizado sobre o primeiro nó do elemento, a transformação deverá ser:

$$s = s_1 + \rho[s_2 - s_1 + \theta(s_3 - s_2)] \quad (6.54a)$$

e

$$t = t_1 + \rho[t_2 - t_1 + \theta(t_3 - t_2)] . \quad (6.54b)$$

A matriz Jacobiana ( $J_p$ ) para esta transformação é fornecida pela eq. (6.50a), desde que as coordenadas de cada nó do elemento sejam corretamente substituídas. O determinante do Jacobiano desta transformação vale  $\rho$ . Esta transformação eliminará a singularidade  $\frac{1}{r}$  de  $\psi$  e

$$\frac{\partial\psi}{\partial n} .$$

Para o ponto  $Q$  posicionado nos outros dois nós, a transformação é similar e somente o índice local do nó precisa ser trocado nas equações (6.54a) e (6.54b). O valor do determinante do Jacobiano, para  $Q$  posicionado em qualquer nó do elemento, sempre será igual a  $\rho$ . Em conseqüência disto a integração numérica de  $h_i$  ou  $g_i$  sobre um elemento triangular singular é fornecida pela eq. (6.51).

Para um elemento quadrilateral singular, o ponto de colocação  $Q$  é posicionado na origem do elemento dividindo-o em dois triângulos, Figura 6.10.

Para o triângulo (I) utiliza-se a transformação para coordenadas polares generalizadas exatamente com as equações (6.54). Para o triângulo II, a transformação é determinada por:

$$s = s_1 + \rho[s_3 - s_1 + \theta(s_4 - s_3)] \quad (6.55a)$$

e

$$t = t_1 + \rho[t_3 - t_1 + \theta(t_4 - t_3)] . \quad (6.55b)$$

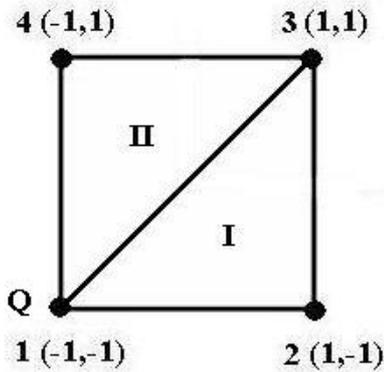


Figura 6.10. Elemento quadrangular dividido em dois triângulos.

A matriz Jacobiana ( $J_P$ ) para estas transformações é novamente fornecida pela eq. (6.50a), desde que a coordenada de cada nó do elemento seja corretamente substituída, tendo-se:

$$\text{para o triângulo (I)} \Rightarrow J_{PI} = \begin{bmatrix} \frac{\partial s}{\partial \rho} & \frac{\partial t}{\partial \rho} \\ \frac{\partial s}{\partial \theta} & \frac{\partial t}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+2\theta & 2\theta \\ 2\rho & 2\rho \end{bmatrix} \quad (6.51a)$$

e

$$\text{para o triângulo (II)} \Rightarrow J_{PII} = \begin{bmatrix} \frac{\partial s}{\partial \rho} & \frac{\partial t}{\partial \rho} \\ \frac{\partial s}{\partial \theta} & \frac{\partial t}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-2\theta & 2 \\ -2\rho & 0 \end{bmatrix}, \quad (6.51b)$$

onde  $|J_{PI}| = |J_{PII}| = 4\rho$ . Novamente, estas transformações eliminarão a singularidade  $\frac{1}{r}$  de  $\psi$  e

$\frac{\partial \psi}{\partial n}$ . Finalmente, a integração numérica de  $h_i$  sobre os triângulos vale:

$$\begin{aligned} h_i &= \int_{\Gamma_q} \left[ \phi_{i}^{Qq} \right] \frac{\partial \psi}{\partial n} d\Gamma = \int_0^1 \int_0^{1-t} f(s,t) |J(s,t)| ds dt = \int_0^1 \int_0^1 f(\rho,\theta) |J(\rho,\theta)| 4\rho d\rho d\theta = \\ &= \int_0^1 \int_0^1 f(\eta_1,\eta_2) |J(\rho,\theta)| \rho d\eta_1 d\eta_2. \end{aligned} \quad (6.52)$$

#### 6.4 CÁLCULO DA PERDA DE TRANSMISSÃO SONORA.

A perda de transmissão sonora (TL) é o parâmetro a ser avaliado em todas as simulações numéricas mostradas neste trabalho.

A TL de um silenciador tem sido avaliada através do **Método dos Quatro Parâmetros** (Igarashi e Toyama, 1958-60 e Munjal, 1987). A pressão sonora e velocidade da partícula podem ser relacionadas entre a entrada e a saída com o uso dos quatro parâmetros da seguinte maneira (Figura.6.11):

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ u_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_2 \\ -u_2 \end{bmatrix} \quad (6.53)$$

onde os pares  $(p_1, u_1)$  e  $(p_2, u_2)$  representam a pressão sonora e a velocidade da partícula na entrada e na saída, respectivamente. A, B, C e D são os quatro parâmetros e sua determinação é feita conforme segue.

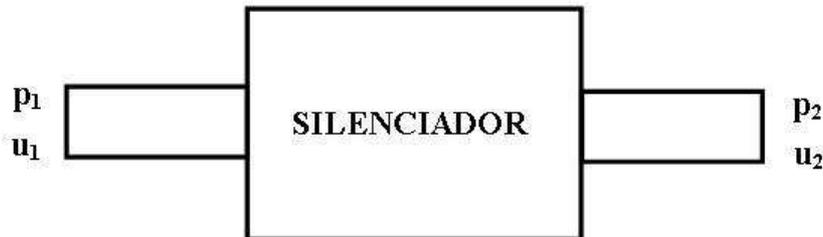


Figura 6.11. Método dos Quatro Parâmetros.

Os parâmetros A e C são calculados resolvendo a equação da onda com condições de contorno dadas por:  $u_2=0$  e  $u_1=1$ . Seus valores numéricos são calculados com os valores da pressão sonora na entrada e saída, assim podem ser expressos como:

$$A = \frac{p_1}{p_2} \Big|_{u_2=0, u_1=1} \quad \text{e} \quad C = \frac{u_1}{p_2} \Big|_{u_2=0, u_1=1} \quad (6.54a,b)$$

Os parâmetros B e D são calculados de maneira análoga, apenas trocando as condições de contorno para o problema. Desta forma, tem-se:

$$B = \frac{p_1}{-u_2} \Big|_{p_2=0, u_1=1} \quad \text{e} \quad D = \frac{u_1}{-u_2} \Big|_{p_2=0, u_1=1} \quad . \quad (6.54c,d)$$

Após o cálculo desses quatro parâmetros a perda de transmissão pode ser determinada por (Igarashi e Toyama, 1958-60 e Munjal, 1987):

$$TL = 20 \log \left\{ \frac{1}{2} \left| A + B \frac{1}{\rho c} + C \rho c + D \right| \right\} + 10 \log \left( \frac{S_i}{S_o} \right) \quad (6.55)$$

onde  $S_i$  e  $S_o$  são os valores da área da seção transversal do duto de entrada e de saída, respectivamente.

Uma outra importante propriedade reside no fato de que esses quatro parâmetros obedecem ao princípio da reciprocidade, portanto, eles estão relacionados por (Sullivan e Crocker, 1978):

$$AD - BC = 1 \quad . \quad (6.56)$$

Para implementar este método são necessárias duas condições de contorno diferentes. Portanto, o problema deve ser resolvido duas vezes. Para efetuar análises em regiões de alta frequência, onde o número de elementos deve ser muito grande, este procedimento é quase impraticável, pois o tempo de processamento torna-se excessivo.

Além disso, na avaliação de B e D é necessário o cálculo das velocidades. Esses cálculos são realizados com a avaliação do gradiente da pressão sonora e esta é uma característica falha do FEM: a imprecisão nos cálculos de derivadas a partir de resultados obtidos com elementos de baixa ordem.

Wu et al. (1998), utilizaram um método alternativo para obter a TL, chamado de **Método dos Quatro Parâmetros Modificados**, sendo que este método foi primeiramente proposto por Kim e Soedel (1989-90). Este método foi derivado do Método dos Quatro Parâmetros tradicional e implementado para a solução da equação da onda com o BEM.

As pressões e velocidades na entrada e saída do silenciador também podem ser relacionadas com a seguinte equação:

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^* & B^* \\ C^* & D^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ -u_2 \end{bmatrix} \quad (6.57)$$

onde  $A^*$ ,  $B^*$ ,  $C^*$  e  $D^*$  são os quatro parâmetros modificados.

O cálculo destes quatro parâmetros modificados também é feito resolvendo a equação da onda com condições de contorno diferentes e fornece:

$$A^* = p_1|_{u_1=1, u_2=0}, \quad B^* = p_1|_{u_1=0, u_2=-1}, \quad (6.58a,b)$$

e

$$C^* = p_2|_{u_1=1, u_2=0}, \quad D^* = p_2|_{u_1=0, u_2=-1}. \quad (6.58c,d)$$

Nota-se que as condições de contorno são diferentes, porém só afetam o vetor força. Assim, os cálculos com elementos finitos são realizados uma vez apenas com dois vetores força diferentes. Conseqüentemente, o tempo de processamento fica bastante reduzido com relação ao método dos quatro parâmetros convencional.

Ainda, nota-se que os cálculos de  $A^*$ ,  $B^*$ ,  $C^*$  e  $D^*$  não envolvem derivadas da pressão sonora e, portanto, a precisão destes cálculos com o FEM é bem melhor.

Finalmente, de posse destes quatro parâmetros modificados, podem-se determinar os parâmetros  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  necessários para o cálculo da TL apenas manipulando as equações (6.54) e (6.58). Explicitamente, tem-se:

$$A = \frac{A^*}{C^*}, \quad (6.58a)$$

$$B = B^* - \frac{A^* D^*}{C^*}, \quad (6.58b)$$

$$C = \frac{1}{C^*} \quad (6.58c)$$

e

$$D = \frac{-D^*}{C^*}. \quad (6.58d)$$

## 6.5 APLICATIVOS NUMÉRICOS.

As simulações numéricas desta tese foram realizadas com uso de quatro aplicativos, desenvolvidos pelo autor com a implementação computacional das matrizes características já descritas nos itens anteriores. Os aplicativos são:

- ⇒ FEM com formulação axissimétrica com elementos quadrangulares lineares de 4 nós com malha adaptativa;
- ⇒ FEM com formulação axissimétrica com elementos triangulares quadráticos de 6 nós;
- ⇒ FEM com formulação tridimensional com elementos tetraédricos lineares de 4 nós;
- ⇒ BEM com formulação tridimensional com elementos lineares triangulares de 3 nós e quadrangulares de 4 nós com malha adaptativa ou não.

Nos três aplicativos de FEM a TL é calculada através do Método dos Quatro Parâmetros Modificado, discutidos no item 6.4. Entretanto, o aplicativo de BEM utiliza-se do Método dos Três Pontos para o cálculo da TL (Wan 1995). Este método será mostrado no Capítulo 8 referente às Técnicas de Medição.

As simulações numéricas para alcançar os objetivos deste trabalho são detalhadamente descritas no Capítulo 9 e realizadas de acordo com os fluxogramas mostrados nas Figuras 6.12 e 6.13 (ver páginas 84 e 85).

## APLICATIVOS DE ELEMENTOS FINITOS

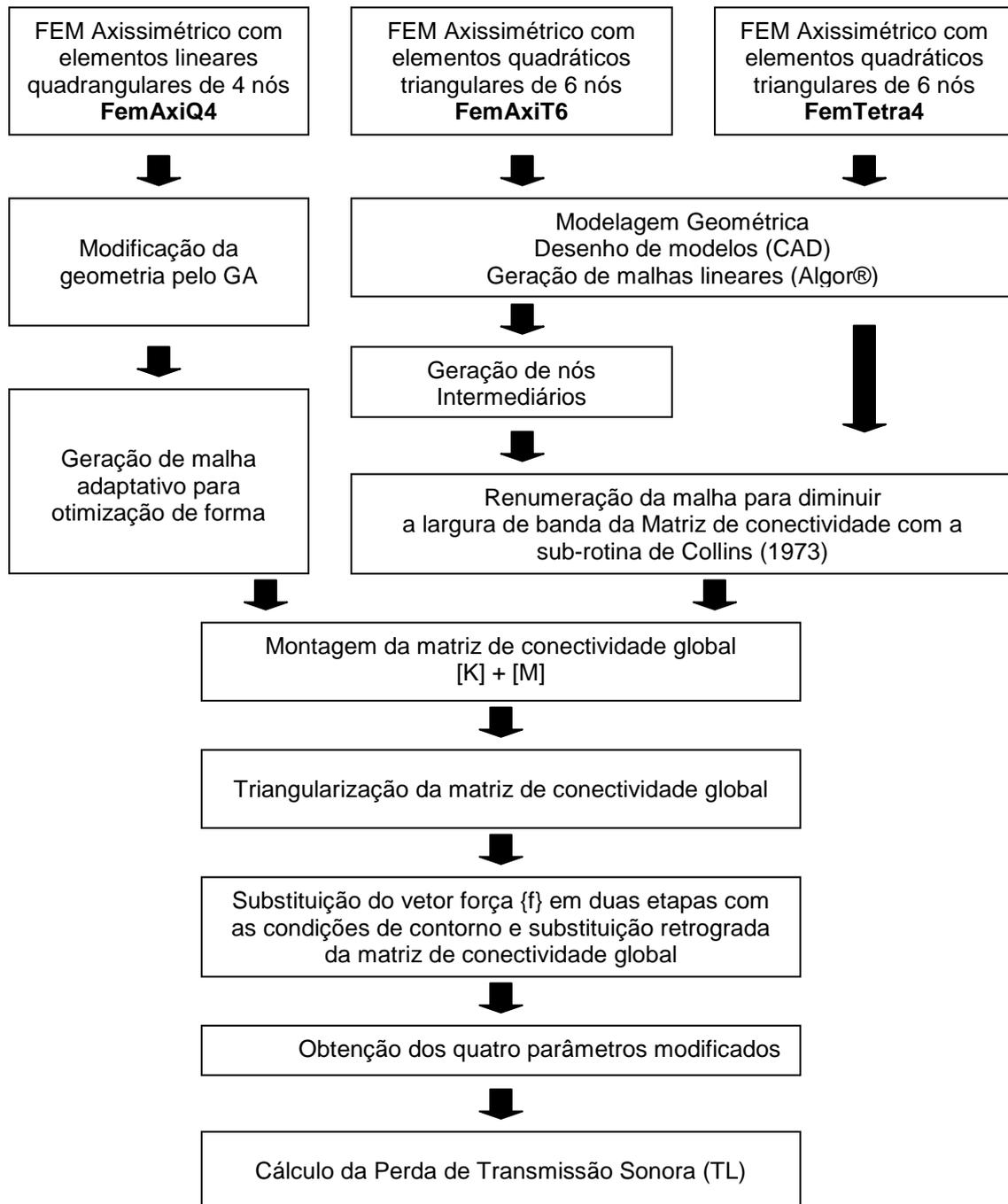


Figura 6.12. Fluxograma de avaliação da Perda de Transmissão (TL) para os aplicativos de FEM

### APLICATIVO DE ELEMENTOS DE CONTORNO

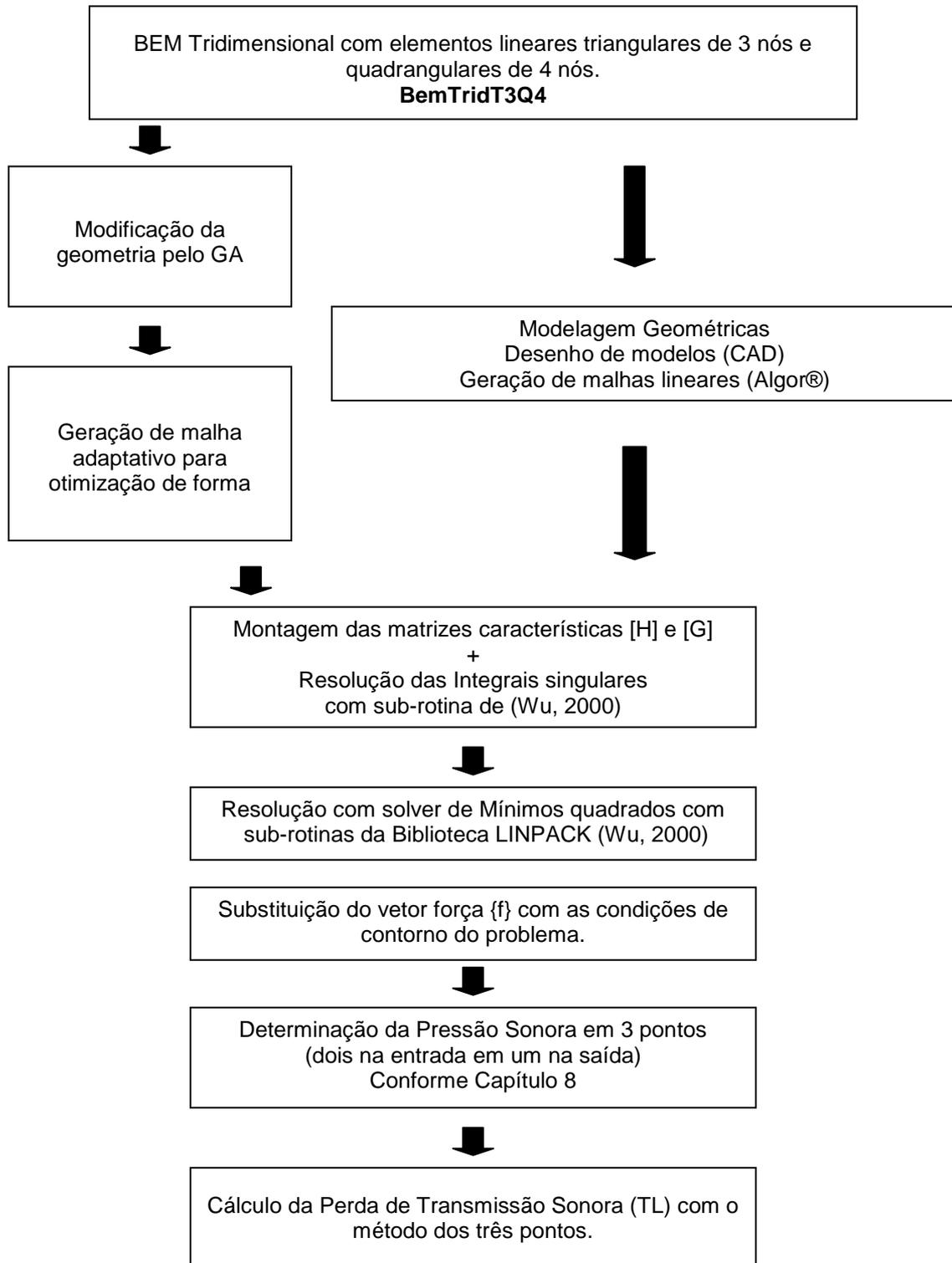


Figura 6.13. Fluxograma de avaliação da Perda de Transmissão (TL) para os aplicativos de BEM.

## CAPÍTULO 7

### ALGORITMO GENÉTICO (GA)

#### 7.1 INTRODUÇÃO.

Os métodos que não envolvem gradientes e informações Hessianas, ou utilizam somente avaliações de funções são chamados de *métodos diretos*. Estes métodos são encontrados na literatura como *métodos de ordem zero* ou *métodos de minimização sem derivadas*. Os métodos diretos são ferramentas valiosas quando informações de gradiente não estiverem prontamente disponíveis ou quando avaliações do gradiente são dispendiosas e propensas a erros. Os métodos que se encaixam nesta definição são: Coordenadas Cíclicas, Método de Hook and Jeeves, Método de Rosenbrock, Método Simplex de Nelder e Maede, Método das direções conjugadas de Powell, o Método de Complex Box, SA (*Simulated Annealing*) e o Algoritmo Genético (GA). Neste trabalho será abordado apenas o Algoritmo Genético (GA), os demais métodos podem ser encontrados em Bazaraa et al. (1993), Luenberger (1989), Fiacco-McCormick (1990), Sidall (1982), Goldberg (1989), Belegundu e Chandrupatla (1999) entre outros.

#### 7.2 O MÉTODO DOS ALGORITMOS GENÉTICOS (GA).

O GA tem sido utilizado em problemas de otimização para muitas aplicações na engenharia. Baseado no conceito da seleção e evolução natural de Darwin, foi primeiramente proposto por Holland em 1975 e estendido à otimização de funções por Jong nesse mesmo

ano. Eles desenvolveram técnicas computacionais que simulavam o processo de evolução na natureza aplicado à programação matemática.

O desempenho da otimização através do GA envolve a tarefa de fazer que as populações de melhor aptidão (*best fitness*) evoluam e sobrevivam por muitas gerações. Durante a otimização, um conjunto de soluções é escolhido para que “evolua” em direção da solução ótima do problema. O GA possui a habilidade de procurar ótimos globais em espaços descontínuos e multimodais sem requerer um bom ponto inicial, Goldberg (1989) e Belegundu e Chandrupatla (1999).

O GA permite atingir o máximo de uma função  $f(x)$ . O problema pode ser posto da seguinte forma:

$$\begin{aligned} &\text{maximize } f(\mathbf{x}) && (7.1) \\ &\text{sujeito a } l_i \leq x_i \leq u_i \Rightarrow i = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

onde  $l_i$  e  $u_i$  são os limites inferior e superior da variável  $x_i$ , respectivamente.

O GA representa as variáveis de projeto como conjuntos de números binários de  $m$  bits que são denominados cromossomos. Desta forma, o intervalo viável da variável  $x_i$  está dividido em  $N$  intervalos, sendo:

$$N = 2^m - 1 \quad (7.2)$$

Então cada variável  $x_i$  pode ser representada por qualquer representação discreta, como por exemplo:

$$000000, 011001, 000010, 0011001, \dots, 111111 \quad (7.3)$$

O número binário 011001, do exemplo anterior, pode ser decodificado da seguinte forma:

$$x_i = x_1 + s_i (0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0) = x_1 + 25s_i \quad (7.4)$$

onde

$$x_1 = l_i ;$$

$$s_i \text{ é o intervalo da variável } x_i, \text{ definido por: } s_i = \frac{u_i - l_i}{25}. \quad (7.5)$$

Este procedimento define o processo de codificação e decodificação das variáveis do GA.

A primeira etapa no desenvolvimento do GA é a criação de uma população inicial. Cada indivíduo da população é um conjunto de tamanho  $n \times m$  bits. O conjunto de variáveis,  $x_n$ , na forma binária forma o código genético de cada indivíduo, como mostra a Figura 7.1. A população inicial de tamanho  $z$  é criada aleatoriamente.

Populações	$x_1$	$x_2$	$x_3$	...	$x_n$
Indivíduo 1	1 0 1 1 0 1	0 1 0 0 0 1	0 0 1 0 1 0	...	1 0 1 1 0 1
Indivíduo 2	1 1 1 0 0 0	1 0 0 0 0 1	0 0 1 1 1 0	...	1 1 1 0 0 0
Indivíduo 3	0 0 0 1 1 1	1 1 0 0 1 1	1 0 0 0 0 0	...	0 0 0 1 1 1
⋮	⋮	⋮	⋮		⋮
Indivíduo $z$	1 0 1 0 0 1	1 1 1 1 1 1	0 1 0 1 0 1	...	1 0 1 0 0 1

Figura 7.1. Conjunto de indivíduos e seus códigos genéticos.

A segunda etapa é decodificar o código genético de cada indivíduo utilizando a eq. (7.3) e verificar o valor correspondente de suas respectivas aptidões (*fitness*), dadas por  $f_1, f_2, \dots, f_n$ . Os indivíduos mais aptos (*best fitness*) são considerados os mais “ótimos”. O valor de sua aptidão deve refletir o projeto e as restrições impostas ao problema em estudo.

A terceira etapa engloba a fase seleção e transformação (*crossover*). Aqui os indivíduos mais fracos são substituídos pelos mais fortes. A seleção permite através do cálculo da aptidão que os melhores indivíduos sobrevivam e sirvam como pais da próxima geração do projeto. Nesta fase os indivíduos são embaralhados mudando sua ordem. Após embaralhamento escolhem-se dois indivíduos, chamados de pais, e o de melhor aptidão originará uma criança que terá seus cromossomos mudados por um processo aleatório, Figura

7.2. Este procedimento é realizado  $z$  vezes consecutivamente gerando o número de  $z$  crianças. A transferência faz com que porções de cromossomos dos pais formem a próxima geração do projeto combinando características de forma a gerar indivíduos melhores na média, mas não sempre.

A quarta etapa pode mudar um bit de um cromossomo do indivíduo para seu valor oposto (ex.: 0 para 1). Esta etapa é denominada de mutação e tem como finalidade introduzir uma característica benéfica que não existe na atual população, Figura 5.3. A mudança faz com que o valor de sua aptidão sofra uma alteração. A finalidade deste procedimento é evitar ótimos locais em espaços de busca provocada pela mudança aleatória da aptidão do indivíduo. A probabilidade que um bit de um membro sofra mutação deve variar entre 0,005 e 0,1 o que demonstra que raramente acontecerá como na natureza, Belegundu e Chandruplatla (1999). Se a característica introduzida não é benéfica ao indivíduo que sofreu tal mutação provavelmente não sobreviverá na etapa de transformação futura.

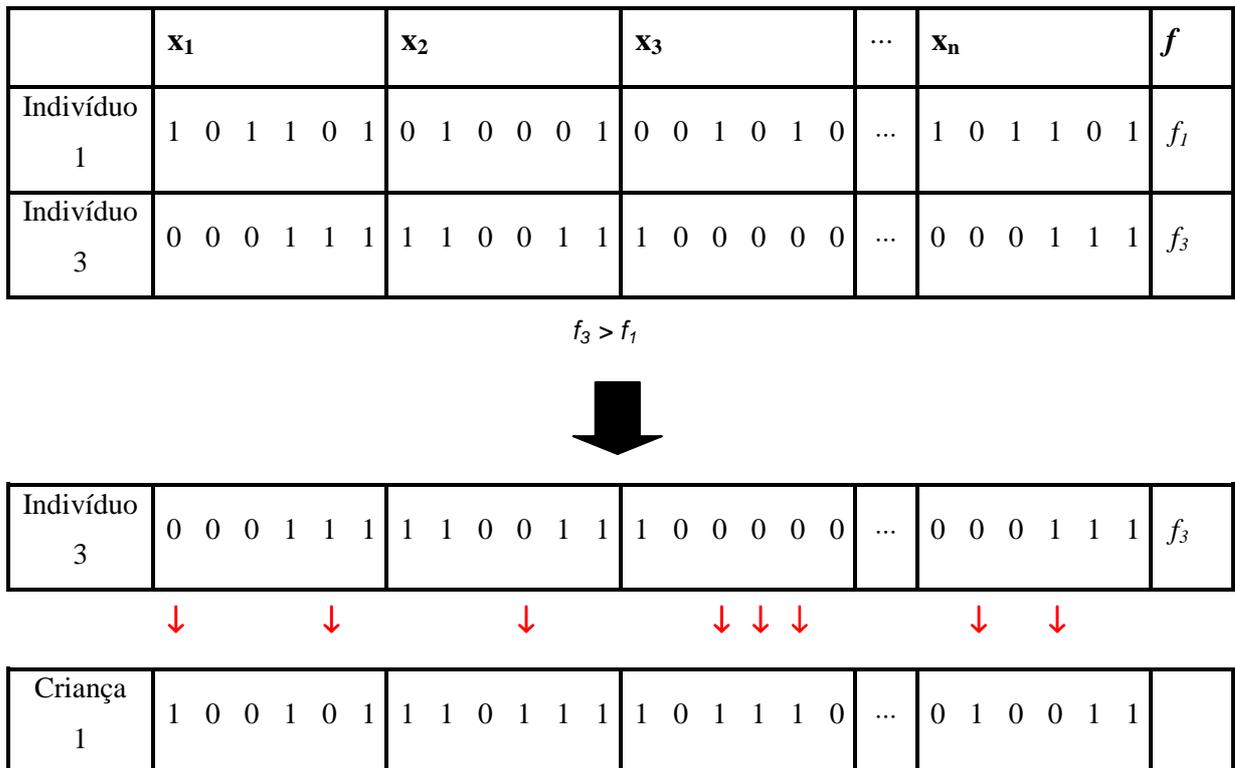


Figura 7.2. Esquema da transformação de um indivíduo para geração de uma criança.

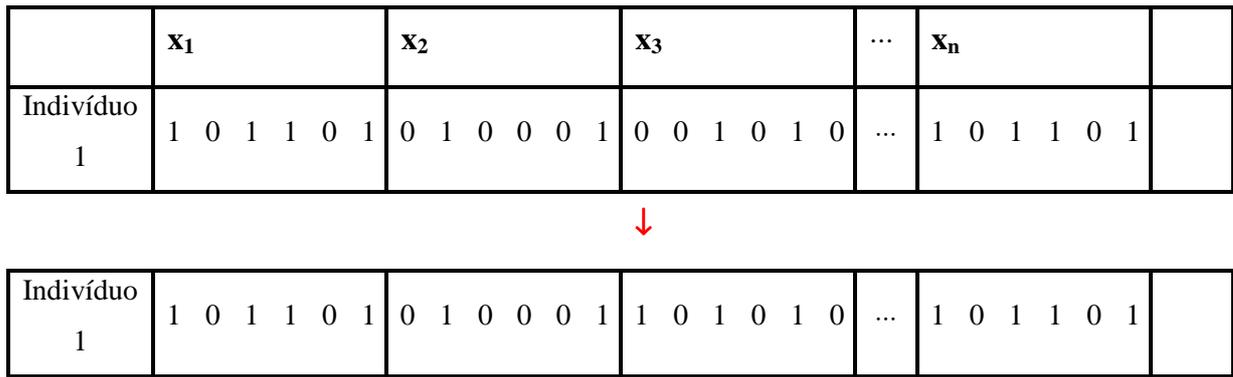


Figura 7.3. Esquema da mutação de um bit.

A quinta e última etapa verifica se o código genético do indivíduo de melhor aptidão foi replicado em alguma criança criada. Caso isto não ocorra, uma criança é retirada aleatoriamente e o indivíduo de melhor aptidão é adicionado. Esta etapa tem a finalidade melhorar a precisão da otimização. Esta operação é chamada de reprodução elitista (*elitist reproduction*).

Para completar esta geração os valores de  $f_{max}$  e  $x_{max}$  são armazenados. Se o número de gerações requerido neste projeto foi alcançado a evolução estará completa, caso contrário, será iniciada uma nova etapa de decodificação e assim sucessivamente.

Todo o processo descrito transforma uma população inicial escolhida aleatoriamente em uma população adaptada para seu meio ambiente tornando-os mais ótimos.

### 7.3 ALGORITMO BÁSICO DO GA.

O algoritmo básico do GA procura armazenar valores de  $f_{max}$  e  $x_{max}$  até que o número de gerações requerido no projeto seja alcançado. O processo de criação de uma nova geração é chamado de reprodução e compreende as etapas de seleção, transformação, mutação e reprodução elitista. Sempre que uma nova geração é formada, a geração que a originou é substituída. O diagrama de blocos do GA é apresentado na Figura 7.4.

Os parâmetros do GA e a implementação destas sub-rotinas seguem as diretrizes de Goldberg (1989), Carroll (1996) e (Cheng 2004-05).

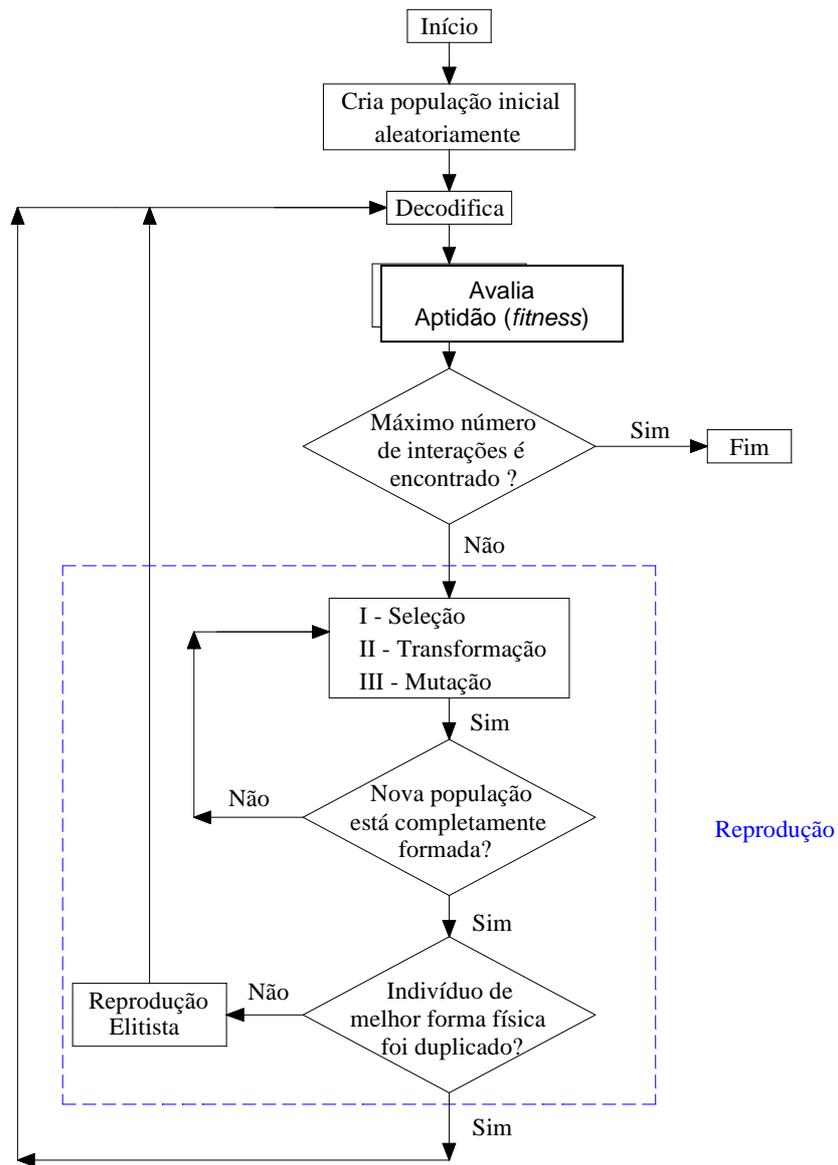


Figura 7.4. Diagrama de blocos da otimização pelo GA.

# CAPÍTULO 8

## TÉCNICAS DE MEDIÇÃO

### 8.1 INTRODUÇÃO.

Neste capítulo apresentam-se as técnicas de medição utilizadas para avaliar os resultados obtidos pela análise numérica descrita no Cap. 5. Somente a partir da comparação entre os resultados numéricos e experimentais podem-se avaliar a precisão e a eficiência da metodologia apresentada.

Os critérios mais utilizados para avaliar o desempenho acústico de silenciadores são a perda de inserção (IL), redução de ruído (NR) e a perda de transmissão (TL), descritos no Capítulo 3. Neste trabalho foi adotado o parâmetro da perda de transmissão, uma vez que este é o critério mais objetivo, porque depende somente das características do silenciador, apesar do mesmo ser o mais difícil de ser determinado. Neste capítulo serão apresentadas três técnicas experimentais de medição utilizadas na predição da Perda de Transmissão Sonora de silenciadores, são elas:

- ⇒ O Método dos Dois Microfones (Seybert e Ross, 1977);
- ⇒ O Método dos Três-Pontos (Wan, 1995);
- ⇒ O Método das Duas Fontes (Lung e Doige, 1983);

Estes métodos utilizam os fundamentos da propagação de ondas planas em dutos.

## 8.2 MÉTODO DOS DOIS MICROFONES.

Para ondas planas em propagação define-se o campo sonoro atuante, de acordo com a Fig. (8.1), como:

$$p(z, f) = p_i(f)e^{+jkz} + p_r(f)e^{-jkz} \quad (8.1)$$

onde,

$$j = \sqrt{-1}$$

$p(z, f)$  é a transformada de Fourier da pressão sonora;

$p_i$  é a onda sonora incidente;

$p_r$  é a onda sonora refletida;

$f$  é a frequência de excitação;

$k$  é o número da onda.

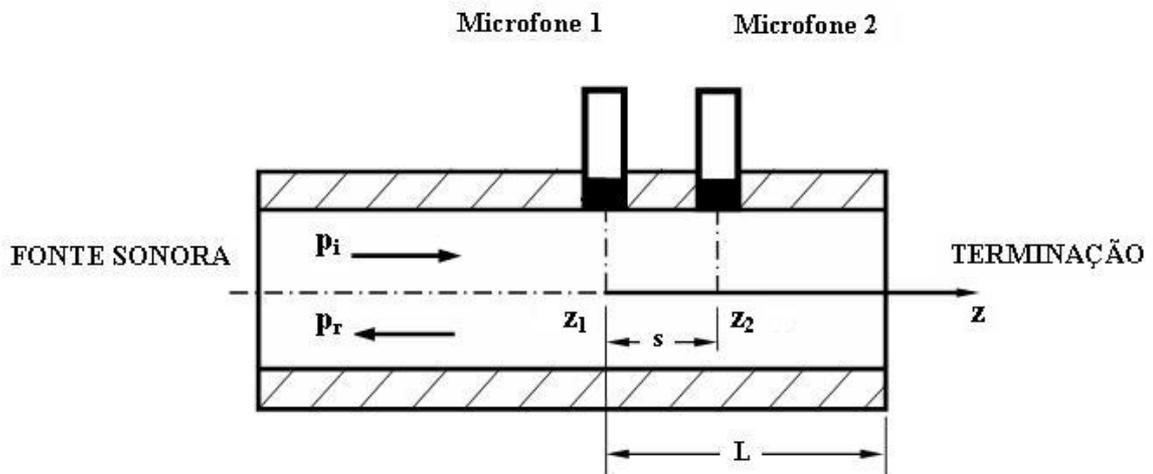


Figura 8.1. Método dos dois microfones.

A eq. (7.1) considera que não há fluxo de gases e nem atenuação das ondas devido à rugosidade das paredes. Portanto, as pressões sonoras no microfone 1 e no microfone 2 estão relacionadas pelas seguintes equações:

$$p_1(f) = p_i(f)e^{+jkz_1} + p_r(f)e^{-jkz_1} \quad (8.2)$$

e

$$p_2(f) = p_i(f)e^{+jkz_2} + p_r(f)e^{-jkz_2} . \quad (8.3)$$

Resolvendo-se estas equações para a parcela incidente e refletida, tem-se:

$$p_i = \frac{1}{2j\text{sen}[k(z_1 - z_2)]} (p_1e^{-jkz_2} - p_2e^{-jkz_1}) \quad (8.4)$$

e

$$p_r = \frac{1}{2j\text{sen}[k(z_1 - z_2)]} (p_2e^{+jkz_1} - p_1e^{+jkz_2}) . \quad (8.5)$$

A função de transferência do microfone 1 em relação ao microfone 2,  $H_{12}$ , pode-se ser obtida através de:

$$H_{12} = \frac{p_2(f)}{p_1(f)} = \frac{p_i(f)e^{+jkz_1} + p_r(f)e^{-jkz_1}}{p_i(f)e^{+jkz_2} + p_r(f)e^{-jkz_2}} . \quad (8.6)$$

Dividindo todos os termos por  $p_i$  neste resultado:

$$H_{12} = \frac{p_2}{p_1} = \frac{e^{+jkz_1} + \frac{p_r(f)}{p_i(f)}e^{-jkz_1}}{e^{+jkz_2} + \frac{p_r(f)}{p_i(f)}e^{-jkz_2}} . \quad (8.7)$$

Se o duto é reto, pode-se assumir que o sistema acústico passivo é linear e então, existe uma relação linear entre  $p_i$  e  $p_r$ . Assumindo que a direção do eixo  $z$  é positiva na direção passiva do duto, define-se  $\frac{p_r}{p_i}$  como coeficiente de reflexão complexo para a pressão

sonora, ou seja:

$$R(f) = \frac{p_r}{p_i} , \quad (8.8)$$

e

$$H_{12} = \frac{p_2(f)}{p_1(f)} = \frac{e^{+jkz_1} + R(f)e^{-jkz_1}}{e^{+jkz_2} + R(f)e^{-jkz_2}} \quad (8.9)$$

onde

$$|R| \leq 1 \quad (8.10)$$

O coeficiente de reflexão complexo,  $R$ , pode ser determinado em função da função de transferência,  $H_{12}$ , explicitamente através das eq. (8.9) como:

$$R(f) = \left[ \frac{H_{12}(f) - e^{+jk(z_2 - z_1)}}{e^{-jk(z_2 - z_1)} - H_{12}(f)} \right] e^{2jkz_1}. \quad (8.11)$$

A função de transferência,  $H_{12}$ , pode ser obtida através do analisador sinais por:

$$H_{12}(f) = \frac{p_2(f)}{p_1(f)} = \frac{G_{12}(f)}{G_{11}(f)} \quad (8.12)$$

onde

$(z_2 - z_1) = s$  é a distância entre os dois microfones;

$H_{12}(f)$  é a função de transferência do microfone 1 em relação ao 2;

$G_{12}(f)$  é densidade espectral cruzada de  $p_1$  em relação a  $p_2$ ;

$G_{11}(f)$  é a densidade auto-espectral de  $p_1$ .

Desta forma:

$$G_{12}(f) = \frac{1}{2} [p_2(f)\bar{p}_1(f)] \quad (8.13)$$

e

$$G_{11}(f) = \frac{1}{2} [p_1(f)\bar{p}_1(f)] \quad (8.14)$$

onde  $\bar{p}_1$  é o conjugado da pressão sonora  $p_1$ .

A eq. (8.11) é o resultado dos estudos de Chung e Blaser (1980) e serve como base para o cálculo da perda de transmissão sonora de um silenciador. A condição singular para esta equação é:

$$e^{-jk(z_2 - z_1)} - H_{12}(f) = 0. \quad (8.15)$$

A condição acima mostra que o coeficiente de reflexão  $R$  torna-se indeterminado quando o espaçamento entre os microfones é um múltiplo inteiro de meio comprimento de onda do som, ou seja:

$$k(z_2 - z_1) = m\pi \quad \text{para} \quad m = 1, 2, 3... \quad (8.16)$$

Portanto, a fim de evitar estes pontos durante as medições, para uma determinada frequência de interesse ( $f_m$ ), a distância  $s$  entre microfones deve ser escolhida de maneira que:

$$(z_2 - z_1) < \frac{c}{2f_m} \quad \text{ou} \quad s < \frac{c}{2f_m}. \quad (8.17)$$

Em virtude desta limitação, as escolhas da distância entre microfones,  $s$ , e da distância do primeiro microfone à terminação,  $L$ , são de grande importância na precisão das medições. Seybert e Soenarko (1981), mostraram analiticamente que, com o uso de valores de  $s$  pequenos, erros aleatórios podem ser minimizados em virtude da alta coerência entre os sinais captados pelos dois microfones. Entretanto, uma pequena distância entre microfones pode diminuir a precisão das medições para as baixas frequências, porque a magnitude do valor da função de transferência se aproxima da unidade, quando o comprimento de onda é muito maior que  $s$ .

Em análises experimentais, Seybert e Soenarko verificaram que quando um microfone está localizado num ponto nodal do campo sonoro a coerência pode não ser atingida.

Uma modificação do método dos dois microfones foi apresentada primeiramente por Fahy (1984) e Chu (1986), que demonstraram a possibilidade de se usar um único microfone na medição da função de transferência. A eq. (7.7) pode ser reescrita como:

$$H_{12}(f) = \frac{p_2(f)\bar{p}_1(f)S(f)\bar{S}(f)}{|p_1(f)|^2|S(f)|^2} \quad (8.18)$$

ou

$$H_{12}(f) = \frac{G_{1S}(f)G_{S2}(f)}{G_{11}(f)G_{SS}(f)} \quad (8.19)$$

onde

- $S(f)$  é o espectro de potência da fonte sonora;
- $\bar{S}(f)$  é o conjugado do espectro de potência sonora da fonte;
- $G_{1S}$  é a densidade espectral cruzada de  $p_1$  em relação à fonte sonora;
- $G_{S2}$  é a densidade espectral cruzada da fonte sonora em relação a  $p_2$ ;
- $G_{SS}$  é a densidade auto-espectral da fonte sonora.

Conseqüentemente, para processos estacionários,  $G_{1S}(f)$  e  $G_{S2}(f)$  não precisam ser determinados simultaneamente. Assim, um único microfone pode ser utilizado para medir a pressão nos dois pontos. Portanto, qualquer erro sistemático devido à mudança de fase entre os dois microfones pode ser minimizado ou eliminado. Entretanto, é necessário o uso de um sinal determinístico para excitar o sistema. O sinal mais recomendado é o sinal pseudo-randômico periódico, Seybert e Soenarko (1981).

### 8.2.1 PERDA DE TRANSMISSÃO SONORA.

A perda de transmissão de um silenciador pode ser determinada através do coeficiente de reflexão complexo, medido em duas diferentes posições nos dutos de entrada e de saída. Então, as potências sonoras incidente ( $W_i$ ) e transmitida ( $W_o$ ) podem ser escritas como (Chung e Blaser, 1980):

$$W_i = \frac{G_{ii}S_i}{\rho_0 c |1 + R_i|^2} \quad (8.20a)$$

e

$$W_o = \frac{G_{oo}S_o}{\rho_0c|1 + R_o|^2} \quad (8.20b)$$

onde

$G_{ii} = G_{11}$  é a densidade auto-espectral de potência antes do silenciador;

$G_{oo} = G_{33}$  é a densidade auto-espectral de potência após o silenciador;

$R_i$  é o coeficiente de reflexão complexo antes do silenciador;

$R_o$  é o coeficiente de reflexão complexo após o silenciador;

$S_i$  é a área do duto antes do silenciador;

$S_o$  é a área do duto após o silenciador;

$\rho_0$  é a densidade do meio.

Por definição, a perda de transmissão sonora (TL) de um silenciador pode ser obtida por (Seybert e Ross, 1977; Chung e Blaser, 1980 e Munjal, 1987):

$$TL = 10\log_{10} \left[ \frac{W_i}{W_o} \right]. \quad (8.21)$$

Pela substituição das equações (8.11) e (8.20) na eq. (8.21), tem-se:

$$TL = 20\log_{10} \left| \frac{e^{jks} - H_{12}}{e^{jks} - H_{34}} \right| + 20\log_{10} \left| \frac{G_{11}}{G_{33}} \right|^{\frac{1}{2}} + 10\log_{10} \left[ \frac{S_i}{S_o} \right] \quad (8.22)$$

onde  $H_{12}$  e  $H_{34}$  são as funções de transferência antes e depois do silenciador, respectivamente (Figura 8.2).

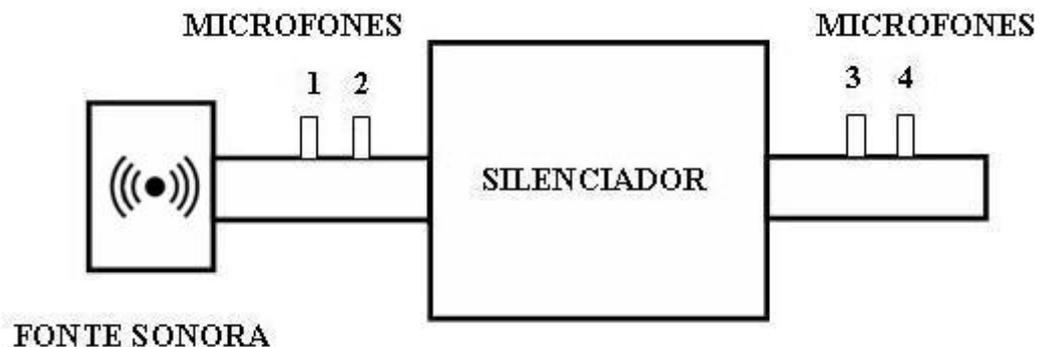


Figura 8.2. Posição dos microfones para o método dos dois microfones.

### 8.3 MÉTODO DOS TRÊS PONTOS.

Este método foi proposto primeiramente por Wan (1995) para avaliar a perda de transmissão sonora, TL, em silenciadores através do BEM. Mais tarde, Wu e Wan (1996), obtiveram ótimos resultados na análise numérica de silenciadores. Este método, por sua simplicidade, pode ser facilmente utilizado para análise experimental.

Desde que a terminação seja anecóica na saída,  $Z = \rho_0 c$ , a onda acústica somente terá a parcela transmitida,  $p_3$ , no duto de saída, Figura. 8.3. A onda na entrada possui uma parcela incidente,  $p_i$ , e outra refletida,  $p_r$ . Nesta técnica, escolhem-se arbitrariamente dois pontos na entrada (ponto 1 e 2) e um na saída (ponto 3).

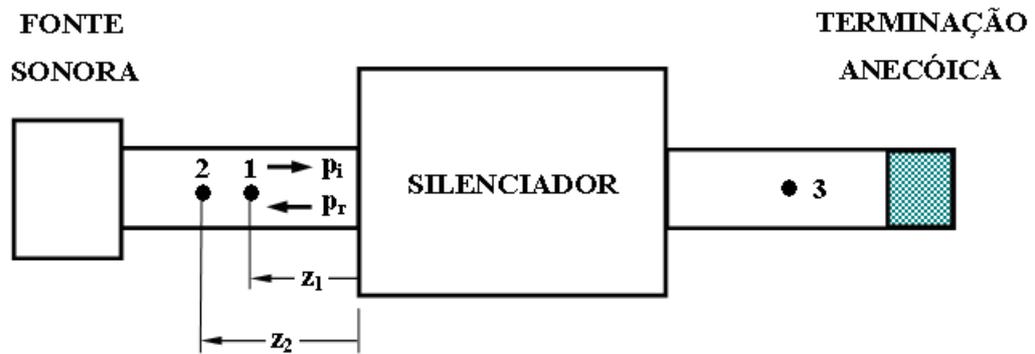


Figura 8.3. Método dos três pontos.

As pressões sonoras nos pontos 1 e 2 e as parcelas incidente e refletida podem ser escritas através das equações (8.2) a (8.5), já mostradas no item 8.2, ou seja:

$$p_1(f) = p_i(f)e^{+jkz_1} + p_r(f)e^{-jkz_1}, \quad (8.24)$$

$$p_2(f) = p_i(f)e^{+jkz_2} + p_r(f)e^{-jkz_2}, \quad (8.25)$$

$$p_i = \frac{1}{2j\text{sen}[k(z_1 - z_2)]} \left( p_1 e^{-jkz_2} - p_2 e^{-jkz_1} \right) \quad (8.26)$$

e

$$p_r = \frac{1}{2j\text{sen}[k(z_1 - z_2)]} (p_2 e^{+jkz_1} - p_1 e^{+jkz_2}) \quad (8.27)$$

Pode-se aplicar este método desde que seja obedecida a condição dada pela eq. (8.16).

### 8.3.1 PERDA DE TRANSMISSÃO SONORA.

A perda de transmissão (TL) é definida pela eq. (8.16) com a correta substituição das equações (8.20). Pode-se dizer que a potência sonora na entrada e na saída valem (Munjal, 1987):

$$W_i = \frac{p_i^2 S_i}{\rho_0 c} \quad (8.28a)$$

e

$$W_i = \frac{p_3^2 S_o}{\rho_0 c} \quad (8.28b)$$

Com a substituição destas equações na eq. (8.20), resulta:

$$TL = 20 \log_{10} \frac{|p_i|}{|p_3|} + 10 \log_{10} \frac{S_i}{S_o} \quad (8.29)$$

onde  $p_3$  é a amplitude da onda sonora num ponto qualquer localizado na saída do silenciador.

### 8.4 MÉTODO DAS DUAS FONTES.

O Método das Duas Fontes (Two Source Method) é utilizado para determinação experimental dos quatro parâmetros da matriz de transferência de um silenciador, (Munjal e Doige, 1990; Tao e Selamet, 2001). Estes parâmetros são relacionados com a pressão sonora e com a velocidade da partícula antes e depois do silenciador, Figura 8.4. A matriz de transferência pode ser expressa como:

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ u_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_2 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (8.30)$$

onde

$p_1$  e  $p_2$  são as amplitudes da pressão sonora antes e depois do silenciador;

$u_1$  e  $u_2$  são as amplitudes da velocidade da partícula antes e depois do silenciador;

A, B, C, D são os quatro parâmetros do sistema.



Figura 8.4. Parâmetros da matriz.

Nesta técnica a fonte deve ser colocada em duas posições como mostra a Figura 8.5. A configuração I é avaliada por primeiro. Utilizando o método da matriz de transferência pode-se obter os quatro parâmetros para o silenciador entre os microfones 1-2 e 3-4, localizados nos tubos de entrada e de saída, respectivamente, ou seja:

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ u_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{12} & B_{12} \\ C_{12} & D_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_2 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (8.31a)$$

e

$$\begin{bmatrix} p_3 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{34} & B_{34} \\ C_{34} & D_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_2 \\ u_2 \end{bmatrix} . \quad (8.31b)$$

Os quatro parâmetros entre os microfones 2-3 podem ser expressos por:

$$\begin{bmatrix} p_{2I} \\ u_{2I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{23} & B_{23} \\ C_{23} & D_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{3I} \\ u_{3I} \end{bmatrix} \quad (8.32)$$

onde

- I é o sub índice referente a configuração I na Figura 8.5;
- $A_{ij}$ ,  $B_{ij}$ ,  $C_{ij}$  e  $D_{ij}$  são os quatro parâmetros para os elementos i-j;
- $p_{iI}$  é a pressão sonora para o ponto i referente a configuração I;
- $u_{iII}$  é a velocidade da partícula para o ponto i referente a configuração I.

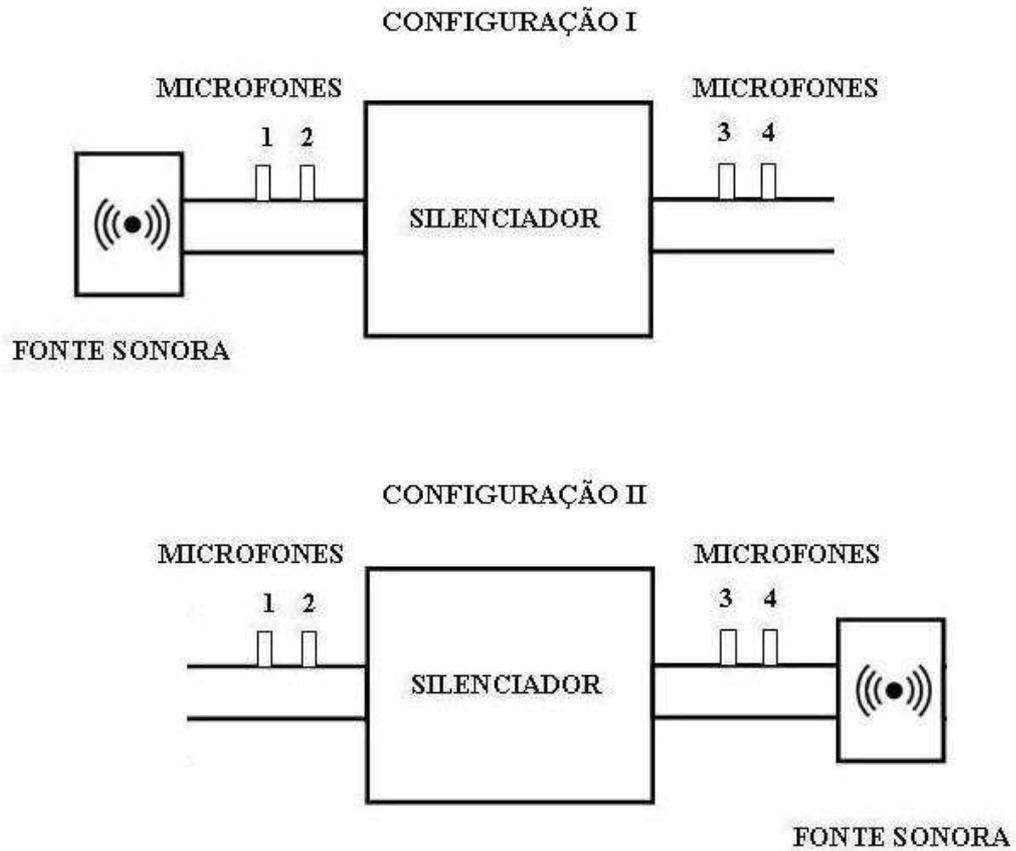


Figura 8.5. Método das duas fontes.

Combinando as equações (8.27), (8.28) e (8.29), tem-se:

$$\begin{bmatrix} p_{2I} \\ \frac{1}{B_{12}}(p_{1I} - A_{12}p_{2I}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{23} & B_{23} \\ C_{23} & D_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{3I} \\ \frac{D_{34}}{B_{34}}p_{3I} + \left( C_{34} - \frac{D_{34}A_{34}}{B_{34}} \right) p_{4I} \end{bmatrix} \quad (8.30)$$

Na eq. (8.30) pode-se notar que existem quatro constantes desconhecidas,  $A_{23}$ ,  $B_{23}$ ,  $C_{23}$  e  $D_{23}$ , para duas equações. Movendo-se a fonte sonora para a outra terminação, configuração II na Figura 7.4, mais duas equações podem ser obtidas e os quatro parâmetros dos elementos 3-2 podem ser avaliados. Portanto, para a configuração II pode-se escrever:

$$\begin{bmatrix} p_{3II} \\ u_{3II} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{23} & -B_{23} \\ -C_{23} & D_{23} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} p_{2II} \\ u_{2II} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} D_{23} & B_{23} \\ C_{23} & A_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{2II} \\ u_{2II} \end{bmatrix} \quad (8.31)$$

onde  $\Delta = \det \begin{bmatrix} A_{23} & -B_{23} \\ -C_{23} & D_{23} \end{bmatrix}$  e o sinal de (-) é devido a troca na direção da velocidade da partícula na configuração II. Combinando, novamente, as equações (8.27), (8.28) e (8.31), tem-se:

$$\begin{bmatrix} p_{3II} \\ \frac{-1}{B_{34}} (\Delta_{34} p_{4II} - D_{34} p_{4II}) \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} D_{23} & B_{23} \\ C_{23} & A_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{3I} \\ \left( \frac{C_{12}}{\Delta_{12}} - \frac{A_{12} D_{12}}{\Delta_{12} B_{12}} \right) p_{1II} - \frac{A_{12} p_{2II}}{B_{12}} \end{bmatrix} \quad (8.32)$$

onde

$$\Delta_{12} = \det \begin{bmatrix} A_{12} & B_{12} \\ C_{12} & D_{12} \end{bmatrix} \text{ e } \Delta_{34} = \det \begin{bmatrix} A_{34} & B_{34} \\ C_{34} & D_{34} \end{bmatrix};$$

$p_{iII}$  é a pressão sonora para o ponto i referente a configuração II;

$u_{iII}$  é a velocidade da partícula para o ponto i referente a configuração II.

Os quatro parâmetros para o silenciador podem ser obtidos pela manipulação das equações (8.30) e (8.32), ou seja:

$$A_{23} = \frac{\Delta_{34}(H_{32I} - H_{34II} - H_{32II}H_{34I}) + D_{34}(H_{32II} - H_{32I})}{\Delta_{34}(H_{34II} - H_{34I})}, \quad (8.34)$$

$$B_{23} = \frac{B_{34}(H_{32I} - H_{32II})}{\Delta_{34}(H_{34II} - H_{34I})}, \quad (8.35)$$

$$C_{23} = \frac{(H_{34I} - A_{12}H_{32I})(\Delta_{34}H_{34II} - D_{34}) - (H_{34II} - A_{12}H_{32II})(\Delta_{34}H_{34I} - D_{34})}{B_{12}\Delta_{34}(H_{34II} - H_{34I})} \quad (8.36)$$

e

$$D_{34} = \frac{B_{34}(H_{34I} - H_{34II}) + A_{12}(H_{32II} - H_{32I})}{B_{12}\Delta_{34}(H_{34II} - H_{34I})} \quad (8.37)$$

onde  $H_{ij} = \frac{p_j}{p_i}$  é a função de transferência de j em relação a i e pode ser facilmente medida.

Desde que o fluxo no interior do silenciador possa ser desconsiderado os quatro parâmetros para os elementos 1-2 e 3-4 podem ser expressos como:

$$\begin{bmatrix} A_{12} & B_{12} \\ C_{12} & D_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(k_0 z_{12}) & j\rho_0 c \sin(k_0 z_{12}) \\ \frac{j\sin(k_0 z_{12})}{\rho_0 c} & \cos(k_0 z_{12}) \end{bmatrix} \quad (8.38)$$

e

$$\begin{bmatrix} A_{34} & B_{34} \\ C_{34} & D_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(k_0 z_{34}) & j\rho_0 c \sin(k_0 z_{34}) \\ \frac{j\sin(k_0 z_{34})}{\rho_0 c} & \cos(k_0 z_{34}) \end{bmatrix} \quad (8.39)$$

onde  $z_{12}$  e  $z_{34}$  são as distâncias entre os microfones 1-2 e 3-4, respectivamente.

Uma importante propriedade reside no fato que os quatro parâmetros ( $A_{ij}$ ,  $B_{ij}$ ,  $C_{ij}$  e  $D_{ij}$ ) obedecem o princípio da reciprocidade, portanto, eles estão relacionados por (Sullivan e Crocker, 1978):

$$\Delta_{12} = 1 \quad (8.40a)$$

e

$$\Delta_{34} = 1. \quad (8.40b)$$

#### 8.4.1 PERDA DE TRANSMISSÃO SONORA.

Após a determinação experimental dos quatro parâmetros através do método das duas fontes a perda de transmissão (TL) pode ser facilmente determinada por (Igarashi e Toyama, 1958-60 e Munjal, 1987):

$$TL = 20 \log \left\{ \frac{1}{2} \left| A_{23} + B_{23} \frac{1}{\rho_0 c} + C_{23} \rho_0 c + D_{23} \right| \right\} + 10 \log \left( \frac{S_i}{S_o} \right). \quad (8.41)$$

#### 8.5 ERROS NAS MEDIÇÕES.

Com base em estudos feitos por Chung e Blaser (1980), Seybert e Soenarko (1981), Bodén e Abom (1984-88) e confirmado por Kimura (1995) em sua dissertação de mestrado, devem-se tomar alguns cuidados com o objetivo de minimizar os erros durante as medições:

- a) o comprimento do duto na entrada e na saída deve ser mantido em torno de 5 a 10 vezes o diâmetro interno do duto;
- b) os microfones devem ser posicionados o mais próximo possível da terminação;
- c) nas frequências onde um ponto nodal coincide com o posicionamento de um dos microfones a coerência diminuirá, ocasionando grandes erros. A melhor maneira de se evitar tal situação é fazer novas medições em pontos diferentes.
- d) com a finalidade de evitar a sensibilidade a erros associados aos dados de entrada, as medições podem dar melhores resultados na faixa de frequências,  $f_m$ , entre:

$$\frac{0,1c}{2s} < f_m < \frac{0,8c}{2s} \quad (8.42)$$

- e) com o uso de dois microfones, pode-se utilizar um par casado (como o par de intensimetria), ou comparar diferentes distâncias entre microfones (s), fases e amplitudes para as medições.

## 8.6 CALIBRAÇÃO.

Chung e Blaser (1980), desenvolveram um método de calibração para eliminar os problemas provenientes da diferença de fase entre os microfones durante as medições. Neste procedimento a medição da função de transferência é realizada numa configuração inicial, e uma segunda medição é feita, trocando-se a posição dos dois microfones nesta mesma configuração. O resultado final desta medição é obtida pela média dos resultados medidos.

Seybert e Ross (1977), na medição das propriedades acústicas de um tubo, mostraram a necessidade da calibração do sistema de medição para eliminar erros relativos provenientes da diferença de sensibilidade entre os microfones e dos amplificadores utilizados. Neste procedimento os microfones devem ser montados numa mesma posição e portanto, fornecerão a mesma amplitude de pressão com uma diferença de fase igual a zero. Sabendo-se que a função de transferência entre os microfones pode ser obtida pela eq. (8.12):

$$H_{12}(f) = \frac{G_{12}(f)}{G_{11}(f)} . \quad (8.43)$$

Sendo que  $G_{12}$  é uma quantidade complexa, então  $H_{12}(f)$  é o ganho complexo e  $|H_{12}(f)|$  é o ganho em amplitude entre os microfones. A diferença de fase entre os dois microfones,  $\varphi_{12}(f)$ , é dada por:

$$\varphi_{12}(f) = \tan^{-1} \frac{\text{Im}[H_{12}(f)]}{\text{Re}[H_{12}(f)]} \quad (8.44)$$

onde Im e Re referem-se a parte real e a parte imaginária de  $H_{12}(f)$ .

O espectro do microfone será corrigido pela resposta em frequência do microfone de calibração, de acordo com as equações abaixo:

$$G_{11}(f) = [G_{11}(f)]_{\tilde{n}} , \quad (8.45)$$

$$G_{22}(f) = \frac{[G_{22}(f)]_{\tilde{n}}}{|H_{12}(f)|^2}, \quad (8.46)$$

e

$$G_{12}(f) = \frac{[G_{12}(f)]_{\tilde{n}}}{H_{12}(f)}, \quad (8.47)$$

onde o índice  $\tilde{n}$ , refere-se às densidades auto-espectral e espectral cruzada dos microfones não corrigidos. Desde que o microfone 1 seja selecionado arbitrariamente como microfone de referência,  $[G_{11}(f)]_{\tilde{n}}$  não necessita ser corrigido.

### 8.7 TERMINAÇÃO ANECÓICA.

É reconhecida a necessidade de uma terminação anecóica para eliminar as ondas sonoras refletidas durante as medições acústicas. Entretanto, isto não é usual e nem viável em aplicações práticas na indústria. Lai (2000), analisou experimentalmente diversos modelos para os dutos de saída de silenciadores com o objetivo de determinar a influência da pulsação dos gases com diferentes terminações (não-anecóicas e anecóicas). Seus resultados mostram que sem uma terminação anecóica apropriada as medições realizadas com a técnica de dois microfones e de um microfone não apresentam resultados confiáveis, devido à grande influência das ondas sonoras refletidas. Essas conclusões que também são descritas por Tao e Seybert (2003) no seu trabalho sobre técnicas de medição da perda de transmissão em silenciadores e por Thime (2000) na análise de silenciadores automotivos em sua dissertação de mestrado.

Munjal (2001), com base nos estudos de Lai, fez uso da analogia elétrico-acústica unidimensional e também verificou que o método dos dois microfones sem uma terminação anecóica satisfatória não apresenta bons resultados.

### 8.8 BANCADA DE MEDIÇÃO.

As análises experimentais deste trabalho são realizadas com o Método das Duas Fontes. A TL é calculada através da eq. (8.41) pela obtenção experimental das funções de

transferência entre os microfones da entrada e saída dos silenciadores (Figuras 8.1 e 8.5), seguindo os cuidados apresentados nos itens 8.5 e 8.6. As Figuras 8.6 a 8.8 mostram a bancada de medição e seus detalhes.

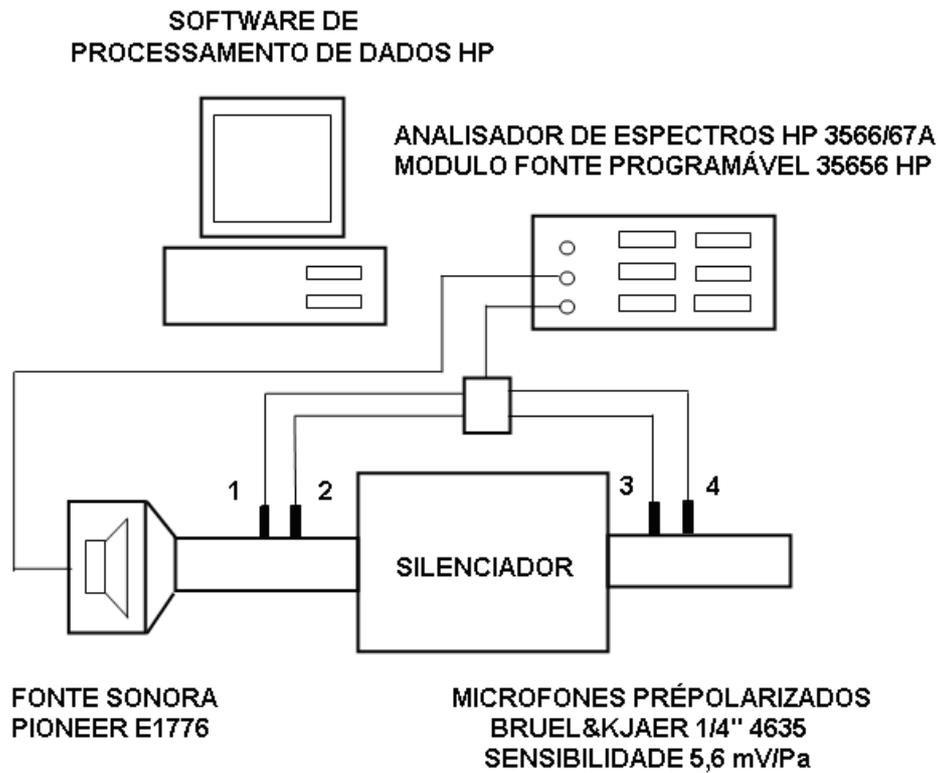


Figura 8.6. Esquema da bancada de Medição

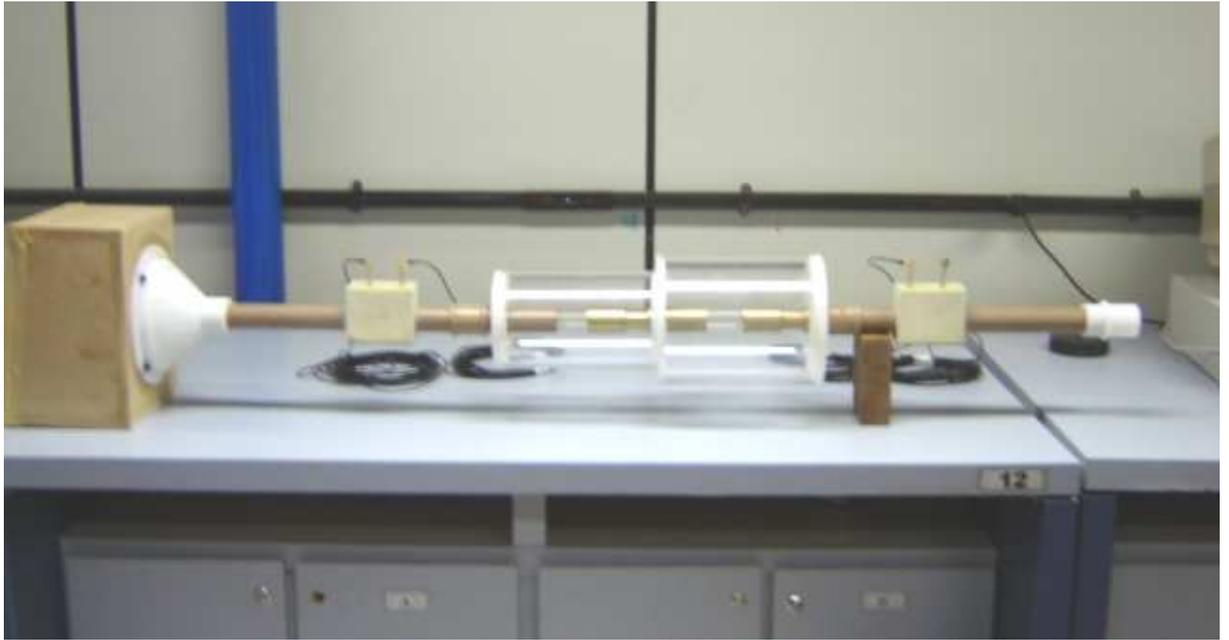


Figura 8.7. Bancada de Medição.



Figura 8.8. Analisador de sinais HP3566/65A.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ABOM, M. and Bodén, H., “**Error Analysis of Two-microphone Measurements in Ducts with Flow**”, Journal of the Acoustical Society of America, vol. 83, n.º 6, pp. 2429-2438, (1988).
- BARBIERI, R., Barbieri, N. and Lima, K. F., “**Application of the Galerkin-FEM and the Improved Four-Pole Parameters Method to Predicting Acoustic Performance of Expansion Chambers**”, Journal of Sound and Vibration, vol. 276, n.º 5, pp. 1101-1107, (2004).
- BARBIERI, R. and Barbieri, N., “**Finite element acoustic simulation based shape optimization of a muffler**”, Applied Acoustics, vol. 67, pp. 346-357, (2006).
- BAZARAA, M. S., Sherali, H. D. and Shetty, C. M., “**Nonlinear Programming**”, 2.ed., New York, John Wiley, (1993).
- BELEGANDU, A. D. and Chandrupatla, T. R., “**Optimization Concepts and Applications in Engineering**”, Prentice Hall, New Jersey, (1999).
- BETTS, J. F., “**Finite element study of plane wave acoustic phenomena in ducts**”, Thesis submitted to the Faculty of the Virginia Polytechnic Institute and State University, 69 p. April, (1998).
- BILAWCHUK, S. and FYFE, K. R., “**Comparison and implementation of various numerical methods for calculating transmission loss in silencer systems**”, Applied Acoustics, vol. 64, pp. 903-916, (2003)
- BODÉN, H. and Abom, M., “**Two-microphone measurements in the plane wave region of ducts**”, Report TRITAK-TAK n.º 8401, Department of Technical Acoustics, Royal Institute of Technology, Stockholm, (1984).

- BODÉN, H. and Abom, M., “**Influence of errors on the two-microphone method for measuring acoustic properties in ducts**”, Journal of the Acoustical Society of America, vol. 79, n.º 2, pp. 541-549, (1986).
- BODÉN, H. and Abom, M., “**Error analysis of two microphone measurements in ducts with flow**”, Journal of the Acoustical Society of America, vol. 93, n.º 6, pp. 2429-2438, (1988).
- BRAGA, M. S. “**Modelagem numérica e ensaio experimental do silenciador de um veículo**”, Florianópolis, 87 p, Dissertação de Mestrado em Engenharia Mecânica, UFSC, dezembro, (2003).
- CHANG, Y. C., Yeh, L. J., Chiu, M. C. and Lai, G. J., “**Computer aided Design on Single expansion Muffler with extended tube under space constraints**”, Tamkang Journal of Science and Engineering, vol. 7, n.º 3, pp. 171-181, (2004).
- CHANG, Y. C., Yeh, L. J., Chiu, M. C. and Lai, G. J., “**GA optimization on multi-segments mufflers under space constraints**”, Applied Acoustics, vol. 65, pp. 521-543, (2004).
- CHANG, Y. C., Yeh, L. J. and Chiu, M. C., “**Shape optimization on double-chamber mufflers using a genetic algorithm**”, Proceedings ImechE – Journal Mechanical Engineering Sciences, vol. 219-C, pp. 31-43, (2005).
- CHENG, C. Y. R., Seybert, A. F. and Wu, T. W., “**A multidomain boundary element solution for silencer and muffler performance prediction**”, Journal of Sound and Vibration, vol. 151, pp. 119-129, (1991).
- CHIU, M. C. and Chang. Y. C., “**Shape optimization of multi-chamber cross-flow mufflers by SA optimization**”, Journal of Sound and Vibration, vol. 312, pp. 526-550, (2008).
- CHIU, M. C. and Chang. Y. C., “**Numerical studies on venting system with multi-chamber perforated mufflers by GA optimization**”, Journal of Sound and Vibration, vol. in press, (2008).

- CHU, W. T., “**Transfer Function technique for Impedance and Absorption Measurements in an Impedance Tube Using a Single Microphone**”, Journal of the Acoustical Society of America, vol. 80, n.º 2, pp. 555-560, (1986).
- CHUNG, T. J., “**Finite element analysis in fluid dynamics**”, Ed. McGraw-Hill, 1.º ed., New York, USA, 378 p., (1978).
- CHUNG, J. Y. and Blaser, D. A., “**Transfer function method of measuring in-duct acoustic properties. I-Theory**”, Journal of the Acoustical Society of America, vol. 68, n.º 3, pp. 907-913, (1980).
- CHUNG, J. Y. and Blaser, D. A., “**Transfer function method of measuring in-duct acoustic properties. II-Experiment**”, Journal of the Acoustical Society of America, vol. 68, n.º 3, pp. 914-921, (1980).
- CRAGGS, A., “**A finite element method for damped acoustic systems: An application to evaluate the performance of reactive mufflers**”, Journal of Sound and Vibration, vol. 48, n.º 3, pp. 377-392, (1976).
- CRAGGS, A., “**A finite element method for modeling dissipative mufflers with a locally reactive lining**”, Journal of Sound and Vibration, vol. 54, n.º 2, pp. 285-296, (1977).
- CRAGGS, A., “**A finite element method for acoustically lined small rooms**”, Journal of Sound and Vibration, vol. 108, n.º 2, pp. 327-337, (1986).
- DENIA, F. D., Albelba, J. and Fuenmayor, F. J. “**Acoustic behavior of elliptical chamber mufflers**”, Journal of Sound and Vibration, vol. 241, n.º 3, pp. 401-421, (2001).
- DENIA, F. D., Selamet, A., Fuenmayor, F. J. and Kirby R. “**Acoustic attenuation performance of Perforated dissipative mufflers with empty inlet/outlet extensions**”, Journal of Sound and Vibration, vol. 302, pp. 1000-1017, (2007).

- DESAI, C. S. and J. F. Abel, “**Introduction to the finite element method: A numerical method for engineering analysis**”, Affiliated East-West Press, New Delhi (1972).
- FAHY, F. J., “**Rapid method for the measurement of sample acoustic impedance in a standard wave tube**”, Journal of Sound and Vibration, vol. 147, n.º 3, pp. 371-394, (1984).
- FIACCO, A. V. and McCormick, G. P. “**Nonlinear Programming**”. Philadelphia, SIAM, 1990.
- FRITZSCHE, H., “**Programação não linear**”, São Paulo, Ed. Blücher, (1978).
- FUKUDA, M. “**A study on the exhaust muffler of internal combustion engines**”, Bulletin of JSME, vol. 6, n.º 22, pp. 255-269, (1963).
- FUKUDA, M. “**A study on characteristics of cavity-type mufflers**”, Bulletin of JSME, vol. 12, n.º 50, pp. 333-349, (1969).
- FUKUDA, M. and Okuda, J., “**A study on characteristics of cavity-type mufflers**”, Bulletin of JSME, vol. 13, n.º 55, pp. 96-104, (1970).
- GLADWELL, G. M. L., “**A Finite element method for acoustic**”, Proceedings Fifth International Congress Acoustic Liege,(1965).
- GLADWELL, G. M. L., “**A variational formulation of damped acoustic-structural vibration problems**”, Journal of Sound and Vibration, vol. 4, n.º 2, pp. 177-186, (1966).
- GLADWELL, G. M. L. and Mason, V., “**Variational finite element calculation of the acoustic response of a rectangular panel**”, Journal of Sound and Vibration, vol. 14, n.º 1, pp. 115-1135, (1971).
- GOLDBERG, D. E., “**Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning**”, Addison-Willey, New York, 1989.

- HOLLAND J., “**Adaptation in Natural and Artificial Systems**”, Unversidade of Michigan Press, Ann Arbor, MI, 1975.
- HOWOONG, N., Crossley, W. A., Lyrintzis., A. S., “**Global optimization issues for transonic airfoil design**” , Manuscript to School of Aerounautics and Astronautics Purdue University West Lafayette – Indiana, (2002)
- IGARASHI, J. and Toyama, M., “**Fundamentals of acoustic silencers (I)**”, Aeronautical Research Institute, University of Tokyo, Report, pp. 223-241, (1958).
- IGARASHI, J. and Arai, M., “**Fundamentals of acoustic silencers (III)**”, Aeronatical Research Institute, University of Tokyo, Report n.º 351, pp. 17-31, (1960).
- JI, Z. H., Mohanty, A. R. and Seybert, A. F. “**Numerical modeling of reactive perforated mufflers**”, Proceedings of the Second International Congress on Recent Developments in Air and Structure Borne Sound Vibration, pp 957-964, (1992).
- JI, Z. H. and Zhang, Z., “**Application of the boundary element method to predicting acoustic performance of expansion chamber mufflers with mean flow**”, Journal of Sound and Vibration, vol. 173, pp. 57-71, (1994).
- JI, Z. L., Ma, Q., and Zhang, Z. H., “**A boundary element scheme for evaluation of four-pole parameters of ducts and mufflers with low mach number non-uniform flow**”, Journal of Sound and Vibration, vol. 185, nº 1, pp. 107-117, (1995).
- JONG D., “**Analysis of the behavior of a class of a genetic adaptative systems**”, Ph.D. Dissertation, The University of Michigan Press, (1975).
- KANG, Z. and Ji, Z., “**Acoustic length correction of duct extension into a cylindrical chamber**”, Journal of Sound and Vibration, vol. 310, pp. 782-791, (2008).
- KAR, T. and Munjal., M. L., “**Generalized analysis of a muffler with any number of interacting ducts**”, Journal Sound of Vibration, vol. 285, pp. 585-596, (2005)

- KIM, J. and Soedel, W., “**General formulation of pole parameters for three dimensional cavities utilizing modal expansion with special attention to annular cylinder**”, Journal of Sound and Vibration, vol. 129, pp. 237- 254, (1989).
- KIM, J. and Soedel, W., “**Analysis of gas pulsation in multiply connected three dimensional acoustic cavity with special attention to nature mode or wave cancellation effects**”, Journal of Sound and Vibration, vol. 131, pp. 103-114, (1989).
- KIM, J. and Soedel, W., “**Development of general procedure to formulate four pole parameters by modal expansion and its application to three dimensional cavities**”, ASME Transaction, Journal of Vibration and Acoustic, vol. 112, pp. 452-459, (1990).
- KIMURA, M. R. M., Gerges, S. N. Y. e Valber, C., “**Ensaio e simulação acústica de escapamento veicular simples**”, Revista de Vibrações e Acústica, n.º 14, pp. 37-40, (1994).
- KIMURA, M. R. M., 1995,. “**Medição e simulação acústica de silenciadores veiculares**”, Florianópolis, 110 p, Dissertação de Mestrado em Engenharia Mecânica, UFSC, dezembro, (1995).
- LEE, C. M. and Wang, Y. S., “**A prediction method of the acoustical proparties of multilayered noise control materials in standing wave-duct systems**”, Journal of Sound and Vibration, vol. 298, pp. 350-365, (2006).
- LAI, P. C. C., “**A study of the acoustical termination on practical gas pulsation measurement**”, Journal of Sound and Vibration, vol. 233, n.º 4, pp. 617-641, (2000).
- LOU, G., Wu, T. W. and Cheng, C. Y. R., “**Boundary element analysis of packed silencers with a substructuring technique**”, Engineering Analysis with Boundary Elements, vol. 27, pp. 643-653, (2003).

- LOU, G. and Wu, T. W., “**Impedance matrix synthesis for multiply connected exhaust network systems using the direct mixed-body BEM**”, Journal of Sound and Vibration, vol. 238, n.º 2, pp. 351-362, (2000).
- LOUNG, T. Y. and Doige, A. G. “**A time-averaging transient testing method for acoustic properties of piping systems and mufflers**”, Journal of the Acoustical Society of America, vol. 73, pp. 867-876, (1983).
- LUENBERGER, D. G., “**Linear and Nonlinear Programming**”, 2. ed. Reading: Addison-Wesley, (1989).
- MEHDIZADEH, O. Z. and Paraschivoiu, M., “**A three-dimensional finite element approach for predicting the transmission loss in mufflers and silencers with no mean flow**”, Applied Acoustics, vol. 66, pp. 902-918, (2005)
- MIWA, T. and Igarashi, J., “**Fundamentals of acoustical silencers (II)**”, Aeronautical Research Institute, University of Tokyo, Report n.º 344, pp. 67-85, (1959).
- MUNJAL, M. L., “**Acoustics of ducts and mufflers**”, Ed. John Wiley, 1º. ed. New York, USA, 328 p., (1987).
- MUNJAL, M. L. and Doige, A. G., “**Theory of a two source location method for direct experimental evaluation of the four-pole parameters of an aeroacoustics element**”, Journal of Sound and Vibration, vol. 141, n.º 2, pp. 323-333, (1990).
- MUNJAL, M. L., “**An error inherent in the use of the two-microphone method for gas pulsation measurement in a reflective environment**”, Journal of Sound and Vibration, vol. 242, n.º 3, pp. 539-541, (2001).
- PAN, K. L., Chu, C. I. and Wu, T. W., “**A direct mixed-body boundary elements method for mufflers with internal thin components covered by lining and perforated panel**”, Journal of Computational Acoustics, Vol. 15, nº 1, pp. 145-157, (2007)

- PANIGRAHI, S. N. and Munjal, M. L., “**Plane wave propagation in generalized multiply connected acoustic filters**”, Journal Acoustical Society of America, vol. 118, n° 5, pp. 2860-2868, (2005)
- PEAT, K. S. and Rathi, K. L., “**A finite element analysis of the convected acoustic wave motion in dissipative silencers**”, Journal of Sound and Vibration, vol. 184, n.° 3, pp. 529-545, (1995).
- PEREIRA, A. R. S., “**Determinação da perda de transmissão sonora em silenciadores automotivos por matrizes de transferência**”, Florianópolis, 108 p, Dissertação de Mestrado em Engenharia Mecânica, UFSC, dezembro, (2003).
- RAO, S. S. “**Engineering Optimization**”, 3. ed. New York: Wiley, (1996).
- ROSS, D. F., “**A finite element method of perforated component acoustic systems**”, Journal of Sound and Vibration, vol. 79, n.° 1, pp. 133-143, (1981).
- SADEK, E. A. “**Minimum weight design of structures under frequency and frequency response constrains**”. Computers & Structures, vol. 60, n° 1, pp. 73–77, (1996).
- SAHASRABUDHE, A. D., Ramu, S. A. and Munjal, M. L., “**Matrix condensation and transfer matrix techniques in the 3-D analysis of expansion chamber mufflers**”, Journal of Sound and Vibration, vol. 147, n.° 3, pp. 371-394, (1991).
- SELAMET, A. and Radavich, P. M., “**The effect of length on the acoustic attenuation performance of concentric expansion chambers: An analytical, computational and experimental investigation**”, Journal of Sound and Vibration, vol. 201, n.° 4, pp. 407-426, (1997).
- SELAMET, A. and Ji, Z. L., “**Diametral plane-wave analysis for short circular chambers with end offset inlet/outlet and side extended inlet/outlet**”, Journal of Sound and Vibration, Vol. 214, n° 3, pp. 580-587, (1998).

- SELAMET, A. and Ji, Z. L., “**Acoustic attenuation performance of circular expansion chambers with offset inlet/outlet: I. Analytical approach**”, Journal of Sound and Vibration, vol. 213, n.º 4, pp. 601-617, (1998).
- SELAMET, A., Ji, Z. L. and Radavich, P. M., “**Acoustic attenuation performance of circular expansion chambers with offset inlet/outlet: II. Comparison with experimental and computational studies**”, Journal of Sound and Vibration, Vol. 213, n.º 4, pp. 619-641, (1998).
- SELAMET, A. and Ji, Z. L., “**Acoustic attenuation performance of circular expansion chambers with extended inlet/outlet**”, Journal of Sound and Vibration, vol. 223, n.º 2, pp. 197-212, (1999).
- SELAMET, A. and Ji, Z. L., “**Acoustic attenuation performance of circular expansion chambers with single-inlet and double-outlet**”, Journal of Sound and Vibration, vol. 229, n.º 1, pp. 3-19, (2000).
- SELAMET, A. and Ji, Z. L., “**Acoustic attenuation performance of expansion chambers with two end-inlet/one side-outlet**”, Journal of Sound and Vibration, vol. 231, n.º 4, pp. 1159-1167, (2000).
- SELAMET, A. and Denia, F. D., “**Acoustic behavior of short elliptical chambers with end central inlet and end central inlet and end offset or side outlet**”, Journal of Sound and Vibration, vol. 245, n.º 5, pp. 953-959, (2001).
- SELAMET, A., Lee, I. J. and Huff, N. T., “**Acoustic attenuation of hybrid silencers**”, Journal of Sound and Vibration, vol. 262, pp. 509-527, (2003).
- SELAMET, A., Denia, F. D. and Besa, A. J. “**Acoustic behavior of circular dual-chamber mufflers**”, Journal of Sound and Vibration, vol. 265, pp. 967-985, (2003).

- SELAMET, A. and Xu, M. B., Lee, I. J. and Huff, N. T., “**Analytical Approach for sound attenuation in perforated dissipative silencers**”, Journal of the Acoustical Society of America, vol. 115, n.º 5, pp. 2091-2099, (2004).
- SEYBERT, A. F. and Ross, D. F., “**Experimental determination of acoustic properties using a two-microphone random-excitation technique**”, Journal of the Acoustical Society of America, vol. 61, n.º 5, pp. 1362-1370, (1977).
- SEYBERT, A. F. and Soenarko, B., “**Error analysis of spectral estimates with application to the measurement of acoustic parameters using random sound fields in ducts**”, Journal of the Acoustical Society of America, vol. 69, n.º 4, pp. 1190-1199, (1981).
- SIDALL, J. N., “**Optimal engineering design – Principles and Applications**”, New York, Ed. Dekker, (1982).
- SINGH, R. and Katra, T., “**Development of an impulse technique for measurements of muffler characteristics**”, Journal of Sound and Vibration, vol. 56, n.º 2, pp.279-298, (1978).
- SOENARKO, B. and Seybert, A. F., “**Visualization of Wave Propagation in Muffler**”, Journal of Visualization, vol. 3, n.º 3, (2000).
- SOHEI, N., Tsuyoshi N. and Takashi Y., “**Acoustic Analysis of Elliptical Muffler Chamber Having a Perforated Pipe**”, Journal of Sound and Vibration, vol. 297, pp. 761-773, (2006).
- SULLIVAN, J. W. and Crocker, “**Analysis of concentric-tube resonators having unpartitioned cavities**”. Journal of the Acoustical Society of America, vol. 64, pp. 207-215, (1978).
- TAO, Z. and Seybert, A. F., “**A review of current Techniques for measuring mufflers transmission loss**”, Society of Automotive Engineers, vol. 03NVC, nº 38, (2001)

- TANG, S. K. and Li, F. Y. C., “**On low frequency sound transmission loss of double sidebranches: A comparison between theory and experiment**”, Journal of the Acoustical Society of America, vol. 113, n.º 6, pp. 3215-3225, (2003).
- THIEME, F. A., “**Atenuação de ruído em silenciadores automotivos: análise numérica pelo método das matrizes de transferência e verificação experimental**”, Florianópolis, 151 p., Dissertação de Mestrado em Engenharia Mecânica, UFSC, (2000).
- TSUJI, T., TSUCHIYA, T. and KAGAWA, Y., “**Finite element and boundary element modeling for the acoustic wave transmission in mean flow medium**”, Journal of Sound and Vibration, vol. 255, n.º 5, pp. 849-866, (2002).
- UTJÉS, J. C., Sarmiento, G. S., Sanzi, H. C. and Laura, A. A., “**Non-linear optimization of the shape function when solving the 2-D Helmholtz equation by means of the finite element method**”, Journal of Sound and Vibration, Vol. 135, n.º 1, pp. 21-35, (1989).
- XU, M. B., Selamat, A., Lee, I. J. and Huff, N. T. “**Sound attenuation in dissipative expansion chambers**”, Journal of Sound and Vibration, vol. 272, n.º 5, pp. 1125-1133, (2004).
- WAN, G. C., “**Prediction and measurement of the acoustic performance of mufflers**”, Proceedings of Inter-Noise 95, Newport Beach, CA., (1995)
- WANG, C. N., Tse, C. C. and Chen, Y. N., “**A boundary element analysis of a concentric tube resonator**”, Engineering Analysis with Boundary Elements, vol. 12, pp. 21-27, (1993).
- WANG, C. N., Chen, Y. N. and Tsai, J. Y., “**The application of boundary element evaluation on a silencer in the presence of a linear temperature gradient**”, Applied Acoustics, vol. 62, pp. 707-716, (2001).

- WU, C. J., and Wang X. J., “Transmission loss prediction on a single-inlet/double-inlet cylindrical expansion-chamber muffler by using the modal meshing approach”, *Applied Acoustics*, vol. 69, pp. 173-178, (2008).
- WU, T. W., and Wan G. C., “**Mufflers performance studies using a direct mixed-body boundary element method and a three-point method for evaluating transmission loss**”, *Transactions of The ASME - Journal of Vibration and Acoustics*, vol. 118, pp. 479-484, (1996).
- WU, T. W., Zhang, P. and Cheng, C. Y. R., “**Boundary element analysis of mufflers with an improved method for deriving the four-pole parameters**”, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 217, n.º 4, pp. 767-779, (1998).
- WU, T. W., Cheng, C. Y. R. and Tao, Z., “**Boundary element analysis of packed silencers with protective cloth and embedded thin surfaces**”, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 261, pp. 1-15, (2003).
- WU, T. W. and Cheng, C. Y. R., “**Boundary element analysis of reactive mufflers and packed silencers with catalyst Converters**”, *Electronic Journal of Boundary Elements*, vol. 1, n.º 2, pp. 218-235, (2003).
- YEH, L. J., Chang Y. C. and Chiu, M. C., “**Shape optimization on constrained linearly expanded tubes by using genetic algorithm**”, *Electronic Journal – Technical Acoustics*, nº 18, 11 p., (2003).
- YEH, L. J., Chang Y. C. and Chiu, M. C., “**Shape optimization on double-chamber muffler on constrained venting system by GA method**”, *Electronic Journal – Technical Acoustics*, nº 9, 16 p., (2004).
- YEH, L. J., Chang Y. C. and Chiu, M. C., “**Shape optimization on double-chamber muffler using simulated annealing and genetic algorithm**”, *Turkish Journal Engineering Environment Science*, vol. 29, pp. 207-224, (2005).

YOUNG, C. I. J. and Croker, M. J., “**Prediction of transmission loss in mufflers by the finite element method**”, Journal of the Acoustical Society of America, vol. 57, n.º 1, pp. 144-148, (1975).

YOUNG, C. I. J. and Croker, M. J., “**Acoustical analysis, testing, and design of flow-reversing muffler chambers**”, Prediction of transmission loss in mufflers by the finite element method”, Journal of the Acoustical Society of America, vol. 60, n.º 5, pp. 1111-1118, (1976).

ZHENLIN, J., Qiang, M. and Zhihua, Z., “**Appication of the Boundary Element Method to predicting Acoustic performance of expansions chamber muffler with mean flow**”, Journal of Sound and Vibration, vol. 173, n.º 1, pp. 57-71, (1994).