

WARODY CLAUDINEI LOMBARDI

**DESENVOLVIMENTO DE CONTROLADORES
ROBUSTOS PARA SISTEMAS DE VISÃO
ACOPLADOS EM ROBÔS MÓVEIS**

FLORIANÓPOLIS

2008

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
EM ENGENHARIA ELÉTRICA**

**DESENVOLVIMENTO DE CONTROLADORES
ROBUSTOS PARA SISTEMAS DE VISÃO
ACOPLADOS EM ROBÔS MÓVEIS**

Dissertação submetida à
Universidade Federal de Santa Catarina
como parte dos requisitos para a
obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica.

WARODY CLAUDINEI LOMBARDI

Florianópolis, abril de 2008.

DESENVOLVIMENTO DE CONTROLADORES ROBUSTOS PARA SISTEMAS DE VISÃO ACOPLADOS EM ROBÔS MÓVEIS

Warody Claudinei Lombardi

‘Esta Dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica, Área de Concentração em *Automação e Sistemas*, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Santa Catarina.’

Edson Roberto De Pieri, Dr.
Orientador

Katia Campos de Almeida, Dr.
Coordenadora do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

Banca Examinadora:

Edson Roberto De Pieri, Dr.
Presidente

Eugênio B. Castelan, Dr.
Co-orientador

Ubirajara Franco Moreno, Dr.

Hisham Abou-Kandil, Dr.

Marc Jungers, Dr.

Ao meu pai e minha mãe (Zezo e Ivone).

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, Ivone e Zezo, pelo grande apoio durante toda esta jornada.

Aos orientadores Edson Roberto De Pieri e Eugênio B. Castelan por toda a ajuda, amizade e oportunidades criadas.

Aos amigos do "Sindicato do LCMI" pelos estudos, festas, churrascos, etc, etc.

Aos membros da banca examinadora pelas sugestões e contribuições para melhoria deste trabalho.

Enfim, a todos que direta ou indiretamente contribuíram para este trabalho.

Resumo da Dissertação apresentada à UFSC como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica.

DESENVOLVIMENTO DE CONTROLADORES ROBUSTOS PARA SISTEMAS DE VISÃO ACOPLADOS EM ROBÔS MÓVEIS

Warody Claudinei Lombardi

Abril/2008

Orientador: Edson Roberto De Pieri, Dr.

Área de Concentração: Automação e Sistemas

Palavras-chave: Servo-visão, Robótica Móvel, Controle Robusto, LMI

Número de Páginas: xvi + 118

Este trabalho trata da síntese de controladores para sistemas de visão 2D, multicritérios, por posicionamento, para um alvo móvel ou fixo, de uma câmera orientada num plano horizontal, montada sobre um robô móvel não-holonômico. A qualidade das informações fornecidas pelas câmeras atuais possibilita a alimentação direta das malhas de controle com os dados visuais do ambiente. O modelo utilizado é o mesmo definido pelo formalismo de funções-tarefa, e utilizam a noção de tórsor de iteração, permitindo assim ligar o movimento da câmera à variação dos índices visuais.

O objetivo é propor leis de controle que permitam estabilizar a câmera através das informações bidimensionais vindas da imagem, levando em consideração as incertezas com relação à profundidade dos pontos do alvo, das restrições de visibilidade, e das limitações em amplitude das velocidades e acelerações da câmera. O método consiste em satisfazer uma condição de setor modificada, de tal forma que seja levada em conta a saturação da aceleração em malha fechada via um modelo politópico de incertezas. Desta forma são geradas condições construtivas sob a forma de Desigualdades Lineares Matriciais (LMIs). Deste modo, a resolução de problemas de otimização convexa permite maximizar a região de estabilidade associada, e determinar o ganho de realimentação de estados estabilizante. A técnica, primeiramente aplicada a um alvo fixo, é em seguida aplicada a um alvo móvel, considerando a velocidade desconhecida do alvo como uma perturbação limitada em energia. A seguir são apresentados vários resultados de simulação.

Abstract of Dissertation presented to UFSC as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master in Electrical Engineering.

ROBUST CONTROLLERS DESIGN FOR VISUAL-SERVOING APPLIED IN MOBILE ROBOTS

Warody Claudinei Lombardi

April/2008

Advisor: Edson Roberto De Pieri, Dr.

Area of Concentration: Automation and Systems Engineering

Key words: Visual Servoing, Mobile Robots, Robust Control, LMI

Number of Pages: xvi + 118

This paper presents an image-based 2D camera control, mounted on a nonholonomic mobile robot platform, tracking a fixed or mobile target, on an horizontal plan. Nowadays, the good quality of the information delivered by cameras which equip today's robots allows the feedback control based on environment measurements. The model considered is defined in the framework of the task function approach and is based on the concept of interaction screw, which allows linking up the movement of the camera with the variation of the visual index.

The objective is to propose control laws to stabilize the camera based on the 2D information resulting from the image, despite the uncertainties on the depth of the target points, the visibility constraints and the limits on the camera velocity and acceleration. The proposed method is based on the satisfaction of a modified sector condition to take into account the saturation of the acceleration via a polytopic model of uncertainties. This approach allows the formulation of the constructive conditions, which can be expressed in the form of Linear Matrix Inequalities (LMIs). From this, convex optimization schemes are used to maximize the size of the associated region of stability, to find the stabilizing feedback gain. Initially applied to a fixed target, the technique is extended to a moving target, by considering the target velocity as a disturbance limited in energy. Several examples of sequences of tasks are considered and simulated.

Sumário

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Introdução | 1 |
| 1.1 | Organização do Trabalho | 8 |
| 2 | Modelagem Matemática do Robô Móvel e da Câmera | 9 |
| 2.1 | Construção do Modelo Cinemático | 9 |
| 2.1.1 | Modelo cinemático da base móvel | 11 |
| 2.1.2 | Modelo cinemático da câmera montada sobre a base móvel | 12 |
| 2.2 | Modelagem da Câmera | 16 |
| 2.3 | Conclusões | 17 |
| 3 | Problema de Servovisão - Alvo fixo | 19 |
| 3.1 | Problema de Controle | 19 |
| 3.1.1 | Restrições dinâmicas dos atuadores | 19 |
| 3.1.2 | Conceitos de base | 21 |
| 3.2 | Diferentes Tarefas | 30 |
| 3.2.1 | Modelo do alvo | 31 |
| 3.2.2 | Tarefa: robô e câmera orientados pelo alvo parado | 32 |
| 3.2.3 | Tarefa: câmera orientada pelo alvo parado | 33 |
| 3.3 | Resultados: robô e câmera orientados pelo alvo parado | 35 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 3.4 | Resultados: câmera orientada pelo alvo parado | 47 |
| 3.5 | Conclusões | 55 |
| 4 | Problema de Servovisão - Alvo móvel | 57 |
| 4.1 | Diferentes Tarefas | 57 |
| 4.1.1 | Tarefa: câmera orientados pelo alvo em movimento | 58 |
| 4.1.2 | Tarefa: robô e câmera orientados pelo alvo em movimento | 61 |
| 4.2 | Resultados: câmera orientada pelo alvo em movimento | 61 |
| 4.3 | Resultados: robô e câmera orientados pelo alvo em movimento | 71 |
| 4.4 | Discussão | 84 |
| 4.5 | Conclusões | 85 |
| 5 | Resultados | 87 |
| 5.1 | Simulação | 87 |
| 5.1.1 | Resultados: robô e câmera orientados pelo alvo parado | 87 |
| 5.1.2 | Resultados: câmera orientada pelo alvo parado | 91 |
| 5.1.3 | Resultados: câmera orientada pelo alvo em movimento | 93 |
| 5.1.4 | Resultados: robô e câmera orientados pelo em movimento | 96 |
| 5.2 | Conclusões | 97 |
| 6 | Conclusão | 99 |
| 6.1 | Trabalhos Futuros | 102 |
| A | Formalismos matemáticos | 103 |
| A.1 | Tensores | 103 |
| A.1.1 | Exemplos | 104 |

| | | |
|-------|--|-----|
| A.1.2 | Definição geral de tensores | 105 |
| A.2 | Desigualdades Lineares Matriciais - LMIs | 107 |
| A.2.1 | Exemplos | 107 |
| A.2.2 | Algoritmos para resolver LMIs | 110 |
| A.3 | Lema da Majoração | 110 |

Lista de Figuras

| | | |
|------|---|----|
| 2.1 | Modelo do robô móvel com a câmera | 9 |
| 2.2 | Modelo do robô móvel | 11 |
| 2.3 | Modelo da câmera utilizada | 16 |
| 3.1 | Função saturação | 23 |
| 3.2 | Descrição da não-linearidade | 25 |
| 3.3 | Representação do conjunto | 28 |
| 3.4 | Modelo do alvo e parâmetros | 31 |
| 5.1 | Diagrama de blocos simulado | 88 |
| 5.2 | Trajetória e velocidades | 89 |
| 5.3 | Ângulos θ e θ_P | 90 |
| 5.4 | Tensor cinemático e erro | 90 |
| 5.5 | Índices visuais e sinal de controle | 90 |
| 5.6 | Diagrama de blocos simulado | 91 |
| 5.7 | Trajetória e velocidades | 92 |
| 5.8 | Ângulos θ e θ_P | 93 |
| 5.9 | Tensor cinemático e erro | 93 |
| 5.10 | Índices visuais e controle | 94 |

| | | |
|------|--|-----|
| 5.11 | Trajectoria e velocidades | 94 |
| 5.12 | Ângulos θ e θ_P | 95 |
| 5.13 | Índices visuais e controle | 95 |
| 5.14 | Tensor cinemático e erro | 95 |
| 5.15 | Trajectoria e velocidades | 96 |
| 5.16 | Ângulos θ e θ_P | 96 |
| 5.17 | Tensor cinemático e erro | 97 |
| 5.18 | Índices visuais e controle | 97 |
| 6.1 | Plataforma robótica de teste | 101 |
| 6.2 | Plataforma robótica de teste | 101 |
| A.1 | Tensões normais (à esquerda) e de cisalhamento (à direita) | 105 |

Notação

Símbolos

| | |
|-----------------------------|---|
| \approx | : aproximadamente igual |
| \ll (\gg) | : muito inferior (superior) a |
| \in | : pertence a |
| \notin | : não pertence a |
| \subset | : contido em |
| \subseteq | : contido ou igual |
| \cap | : intersecção |
| \forall | : para todo |
| \exists | : existe |
| \iff | : é equivalente a |
| \implies | : implica em |
| \times | : produto vetorial |
| \bullet | : produto de torsesores |
| \mathfrak{R}^n | : espaço dos vetores reais de dimensão n |
| $\mathfrak{R}^{n \times m}$ | : espaço das matrizes reais de dimensão $n \times m$ |
| \mathfrak{R}^+ | : espaço real positivo |
| \mathcal{C} | : conjunto dos números complexos |
| $\operatorname{Re}(z)$ | : parte real de um número complexo |
| $x_{(i)}$ | : i -ésimo elemento do vetor x |
| $A_{(i)}$ | : i -ésima linha da matriz A |
| $A_{(ij)}$ | : elemento da i -ésima linha e da j -ésima coluna da matriz A |
| A' | : transposto de A |
| A^{-1} | : matriz inversa de A (para A inversível) |

| | |
|------------------|--|
| $ A $ | : matriz composta pelos valores absolutos dos elementos de A |
| $\ A\ $ | : norma euclidiana de A |
| $A > (\geq) 0$ | : matriz A é definida (semi-definida) positiva |
| $A < (\leq) 0$ | : matriz A é definida (semi-definida) negativa |
| $A > (\geq) B$ | : matriz $A - B$ é definida (semi-definida) positiva |
| $A < (\leq) B$ | : matriz $A - B$ é definida (semi-definida) negativa |
| $x \succeq 0$ | : todos os elementos do vetor x são não-negativos |
| $x \succeq y$ | : desigualdade elemento a elemento |
| $\lambda_i(A)$ | : i -ésimo auto-valor de A |
| $Tr(A)$ | : traço da matriz A |
| $det(A)$ | : determinante da matriz A |
| $rank(A)$ | : rank da matriz A |
| $D(x)$ | : matriz diagonal obtida a partir do vetor x |
| I_n | : matriz identidade de ordem n |
| $0_{n \times m}$ | : matriz de zeros com dimensão $n \times m$ |
| 0_n | : vetor de zeros com dimensão n |

Capítulo 1

Introdução

Entende-se por robô móvel um dispositivo mecânico montado sobre uma base não fixa, que age sob o controle de um sistema computacional, equipado de sensores e atuadores que o permitem interagir com o ambiente [42].

Há diversas maneiras de classificar os robôs móveis, porém nenhuma delas é definitiva. De forma geral, costuma-se agrupar os robôs móveis de acordo com três diferentes aspectos: anatomia, tipo de controle e funcionalidade.

Quanto à utilização ou tarefa, podemos classificá-los em três tipos: aéreos, aquáticos e terrestres. Os robôs aéreos geralmente consistem em aeromodelos, equipados de câmeras e utilizados para a inspeção de grandes áreas. Os aquáticos, em geral, são plataformas equipadas com propulsores e balões de ar, de tal forma que o robô "nade" livremente, porém podem também possuir patas para inspeções de fundo. Já os robôs terrestres são os mais populares, utilizados para uma enorme gama de tarefas, e utilizam geralmente três tipos de acionamento: rodas, esteiras ou pernas. Os robôs com rodas estão entre os mais simples, pois não precisam de uma parte mecânica tão complexa quanto os robôs de esteiras e pernas. A desvantagem principal é que em terrenos irregulares o desempenho para sobrepor obstáculos pode não ser satisfatório. O acionamento por esteiras é muito utilizado em terrenos irregulares, contendo solo fofo e pedras. A principal desvantagem é a energia dissipada para acionar as esteiras, e as rodas em seu interior. Já os robôs com pernas são utilizados em ambientes completamente acidentados, com subidas e descidas íngremes, ou em ambientes específicos, tal como subir escadas. A principal desvantagem consiste em controlar as pernas, visto que estas possuem no mínimo dois graus de liberdade. Tais tipos de projeto geralmente possuem um custo maior, visto que cada grau de liberdade utiliza um motor para acionamento.

Quanto ao tipo de controle, podem ser separados em três categorias: teleoperados, semi-autônomos e autônomos. Nos teleoperados, um operador remoto realiza todos os movimentos do robô. Já nos semi-autônomos, o operador indica o macro-comando a ser executado, e o robô o faz sozinho. Os robôs autônomos realizam suas tarefas sozinhos, de forma independente, tomando suas decisões baseados nas leituras do ambiente, realizadas pelos sensores.

Quanto à funcionalidade, observa-se quatro grupos: robôs industriais, de serviço, de campo e pessoais. Os robôs industriais são os utilizados em linhas de produção, recebendo tarefas pré-determinadas a priori, de tal forma a executarem um programa pré-determinado. O ambiente é completamente estruturado e ajustado para a perfeita execução da tarefa, tendo assim conhecimento de sua posição, da posição de eventuais objetos e obstáculos. São muito utilizados para o transporte de cargas pesadas, materiais e produto final em sistemas de manufatura. Geralmente são programados para seguir linhas pintadas no chão. Os robôs de serviço são muito utilizados para serviços gerais. O ambiente é semi-estruturado, porém o robô possui certa autonomia, pois processa informações sensoriais, sendo capaz de desviar de objetos, por exemplo. São muito utilizados em tarefas de limpeza em geral, em sistemas de vigilância e transporte de materiais. Os robôs de campo trabalham em ambientes não-estruturados, pouco conhecidos e geralmente perigosos. Suas atividades consistem em exploração espacial, de cavernas, vulcões, plataformas de exploração de petróleo, fendas abissais, tarefas de mineração, limpeza de acidentes nucleares, entre outras. Os robôs pessoais não desenvolvem tarefas específicas, mas interagem com seres humanos e podem localizar-se no ambiente.

O robô móvel a ser utilizado é do tipo terrestre a rodas, com acionamento diferencial, onde duas rodas acionadas individualmente são responsáveis pelo movimento do robô, e a diferença de velocidade entre elas faz com que o robô mude sua orientação. As tarefas apresentadas durante este trabalho devem ser executadas de forma autônoma, e pode-se programar eventualmente um encadeamento de duas ou mais tarefas. Pode ser utilizado para tarefas de inspeção e vigilância, bem como para fins militares. Tal robô apresenta uma restrição de movimento chamada restrição não-holonômica.

Segundo [20], o termo não-holonômico é atribuído a Hertz, e significa "universal", "integral", "integrável"[2]. Etimologicamente falando, *holo* = todo, conjunto, enquanto que *nomia* = lei. Portanto, sistemas não-holonômicos são sistemas não-integráveis. Podem ser definidos como sistemas com dimensão finita onde algum tipo de restrição é imposta a um ou mais estados do sistema. Estas restrições podem ser provocadas basicamente pela conservação do momento angular, impossibilidade de deslocar em uma ou mais direções, como resultado de imposição de restrições durante o projeto de controle, pelo fato do sistema não possuir atuadores em todas as direções e em várias outras situações.

Existem basicamente 3 classes onde os sistemas não-holonômicos aparecem:

- Restrição de não-deslize: a condição de não-deslizamento ou de rolamento puro significa que a velocidade linear no ponto de contato é zero. Esta restrição é não-integrável, isto é, não-reduzível a uma restrição de posição, e portanto é não-holonômica.
- Conservação do momento angular.
- Sistemas mecânicos sub-atuados: sistemas nos quais a dimensão do espaço de configurações excede o espaço das entradas de controle.

Tais sistemas apresentam características especiais, pois apesar de seus movimentos serem limitados, os mesmos conseguem atingir qualquer configuração no espaço onde estão definidos. Infelizmente, as leis de controle para a sua estabilização não são tão simples de serem geradas, e há a necessidade de ferramentas matemáticas mais sofisticadas para análise e projeto, tais como geometria diferencial, controle não-linear, controle variante no tempo, entre outras.

A consideração das restrições no movimento melhora consideravelmente o controle dos sistemas não-holonômicos. Controlá-los é um desafio interessante, e tem propiciado o desenvolvimento da teoria de controle não-linear [36] e [39], preditivo [38], entre outras.

Em robótica móvel, as informações fornecidas por sensores são de um interesse fundamental para o problema de controle. Elas permitem ao robô não somente de construírem uma representação do ambiente e reconhecê-lo, mas também como regular seu deslocamento relativo a certos elementos da cena. A utilização de sensores embarcados nos fornece uma enorme gama de informações. A frequência de aquisição e a qualidade das imagens fornecidas pelas câmeras embarcadas nos permite uma realimentação direta através de malhas de controle a partir de medidas visuais do ambiente. Esta abordagem é conhecida também como *controle servo-visual*.

As informações fornecidas pelas pelo plano de imagem das câmeras são por definição 2D e podem ser usadas no controle servo-visual se inseridas na malha de controle. Segundo [21], controle servo-visual 2D consiste em definir o erro a ser regulado diretamente a partir de informações planares, tais como coordenadas de pontos dentro do plano de imagem da câmera. Já a abordagem 3D necessita de uma reconstrução tridimensional das informações visuais, obtidas através de informações 2D extraídas das imagens planares. Entre estas duas abordagens, existem outras, tais como a abordagem $2D\frac{1}{2}$ [40], ou $\frac{\partial}{\partial t}2D$ [12], [13]. Neste trabalho, consideraremos apenas o caso 2D.

A definição de uma tarefa robótica referenciada por visão 2D consiste na escolha das informações corretas e da elaboração de uma lei de controle em malha fechada. A primeira fase consiste em definir uma função de erro, e depois regular esta função de erro a zero. A função de erro a ser

definida depende da variável a ser controlada, podendo ser, por exemplo, o erro de posição do robô, o erro de posicionamento da câmera com relação a um ponto fixo ou móvel, uma combinação de ambos, entre outros. O conceito de *função de tarefa*, como em [58], nos fornece o formalismo matemático necessário para a definição destas funções de erro. Segundo [21] tais funções representam uma classe particular de funções de saída, que definem localmente um vínculo diferencial entre a saída e o vetor de coordenadas generalizadas do robô.

Esta abordagem, inicialmente utilizada em robôs manipuladores [9, 17] passou a ser utilizada também em robótica móvel [7, 56] e consiste em calcular a matriz de interação que permite ligar a variação das informações visuais da imagem ao movimento da câmera. A lei de controle visa, portanto, uma convergência exponencial da função de tarefa.

Na prática, este sistema é incerto, e o comportamento do sistema em malha fechada pode ser comprometido, acarretando em perda de estabilidade. Tais incertezas podem ser caracterizadas como restrições na visibilidade do alvo, incertezas quanto à profundidade do mesmo, bem como saturação dos atuadores, e portanto limitações quanto suas velocidades e acelerações. Para tratar tal problema utilizaremos neste trabalho a abordagem LMI, como proposto por [21], utilizando os conceitos de estabilidade absoluta.

Atualmente, os principais problemas associados à implementação de robôs móveis dizem respeito à determinação de modelos cinemáticos e dinâmicos adequados, à estimação da posição, velocidade e orientação do robô, ao controle do robô e ao planejamento de trajetórias a serem rastreadas. Entenda-se por modelo cinemático aquele em que são descritas as posições, velocidades e orientações do robô, dadas as entradas que são homogêneas à velocidade e posição. Os parâmetros necessários para este tipo de modelo dizem respeito somente à geometria do robô, e podem ser determinados facilmente e com boa precisão, através de métodos de projeto, medições em protótipo ou procedimentos de calibração [35]. Considerando-se o modelo dinâmico do robô, as forças dinâmicas podem ser levadas em conta no projeto do controle de posição, velocidade e orientação do robô. O modelo dinâmico descreve a posição, velocidade e orientação do robô em função dos torques aplicados para girar ou direcionar as suas rodas. Os parâmetros para este modelo são os mesmos do modelo cinemático complementados por um conjunto de parâmetros relacionados com a dinâmica do robô, como massa, momentos de inércia e atrito (de deslizamento ou rolamento). Ao contrário dos parâmetros geométricos, os parâmetros dinâmicos podem sofrer variações apreciáveis até mesmo durante uma única missão do robô. Estes parâmetros podem variar, por exemplo, devido a alterações na massa da carga útil, consumo de combustível, variações na distribuição espacial da carga útil, etc.

Em [1, 5, 29, 32, 34, 50], são abordados controladores cinemáticos, onde os autores descre-

vem o robô em função da velocidade e orientação das rodas, enquanto os modelos e controladores dinâmicos são formalizados em [3, 48, 51, 65, 66] onde o robô é descrito em função das forças generalizadas aplicadas pelos atuadores, por exemplo, torques nas rodas. Poucos são os trabalhos que abordam o controle de robôs móveis considerando o modelo completo, isto é, cinemática e dinâmica consideradas no modelo, tal como [8, 65].

Segundo [10], controle servo-visual é o nome dado ao uso de informações visuais para controlar e mover um robô, podendo este ser um robô manipulador ou um robô móvel. As informações visuais devem ser adquiridas através de uma câmera montada diretamente no robô ou externa a ele. No primeiro caso, a movimentação do robô leva a uma consequente movimentação da câmera, enquanto que para o segundo caso, o robô é observado a partir de uma posição estacionária. Existem também outras configurações, como a de múltiplas câmeras observando o robô, combinação entre câmeras embarcadas e externas, etc. De qualquer forma, o desenvolvimento matemático de todos estes casos é similar.

As técnicas de controle abrangem processamento de imagens, visão computacional e teoria de controle, sendo que nesta dissertação, o foco será dado à parte de teoria de controle.

Em [28], é feita uma abordagem inicial de controle servo-visual para robôs manipuladores, fornecendo conceitos básicos em termos de servo-visão, tais como transformações de coordenadas, representação cinemática, e fazendo uma revisão em termos de robótica e visão computacional. Depois são apresentados os casos de sistemas baseados em imagem e sistemas baseados em posição, incluindo métodos de rastreamento. A utilização da função de Lyapunov, definida neste trabalho como a combinação entre a energia cinemática do robô e o erro quadrático referenciado pela imagem foi proposto em [30]. Nesta abordagem é conhecido o modelo dinâmico do robô, garantindo a convergência exponencial localmente, mesmo com a presença de erros de orientação da câmera, assim como distorções na imagem. Para estender o domínio de estabilidade da lei de controle 2D, limitada por um mínimo local, uma abordagem baseada na comutação entre diferentes potenciais foi proposta por [24]. Em [59] foi proposta uma abordagem de controle robusto utilizando o conceito de coordenada 2D estendida, através das informações sobre profundidade dos pontos da imagem e do modelo estimado da câmera. Para os casos onde as configurações iniciais e finais da câmera estão distantes, [49] propôs a utilização do planejamento de trajetória juntamente com o controle baseado em imagem, garantindo a robustez mesmo com a presença de erros de modelagem. A abordagem proposta por [67] permite considerar as incertezas dos parâmetros do sistema de visão juntamente com o problema da visibilidade. O método proposto consiste em planejar uma trajetória na imagem e a adaptação *on line* do ganho de controle, garantindo a estabilidade do sistema em malha fechada, a

visibilidade do alvo, respeitando os limites de erro impostos. A estabilidade de controladores servo-visuais, considerando as incertezas de profundidade, é estudada em [41], provando que o domínio de estabilidade é severamente afetado quando a distribuição de profundidade é aproximada. Em [62] é proposta uma combinação entre os métodos de estabilização robustos quadráticos e representação de não-linearidades do tipo saturação, via inclusão diferencial. Através da resolução de LMIs é feito o projeto do controlador, onde é determinada uma região de estabilidade, bem como os limites dos atuadores e sinais de controle.

Para lidar com os atrasos devido à aquisição e processamento de imagens, [11] desenvolveu um algoritmo baseado em Filtro de Kalman chaveado. Já em [55] é desenvolvido um preditor Fuzzy, baseado em Filtros de Kalman, diminuindo o erro de rastreamento se comparado com o Filtro de Kalman clássico. Outra utilização de filtros para a estimação da localização do alvo é usado em [54], onde é projetado um novo filtro baseado em filtros já existentes, aumentando assim o poder de predição e a robustez. Uma outra maneira de tratar os atrasos devido ao processamento de imagem é abordado em [22], onde é desenvolvida uma técnica para selecionar os parâmetros da função de ponderação da lei de controle.

Um controlador adaptativo baseado em Funções de Lyapunov foi feito em [19], permitindo ao robô móvel regulação assintótica de posição e orientação, mesmo sem ter um modelo do objeto e com a falta da informação sobre a profundidade do mesmo. É usada uma matriz de transformação, chamada homográfica, que fornece os erros de posição e orientação, através da comparação dos alvos e operações geométricas, pelas informações fornecidas por duas câmeras distintas. Uma outra técnica baseada em homografia é apresentada por [18], onde a partir das informações homográficas é desenvolvido um controlador cinemático não-linear baseado em funções de Lyapunov.

Uma abordagem de controle preditivo não-linear é feita por [37], utilizando o método de Newton. Outro método de controle preditivo é apresentado por [52], onde através de uma estrutura de Preditor de Smith é feito o controle de um robô para rastreamento de trajetória. Já em [38] é feito o controle preditivo de um robô móvel levando em conta o caso da saturação nos atuadores, através de otimização quadrática.

Em [43, 44, 45, 46, 47] é feito o controle de um robô móvel via redes neurais, utilizando treinamento on-line da rede, através da teoria de Lyapunov, podendo o controlador ser ou não de estrutura variável. Em [39] foi feito o controle robusto multi-critérios do conjunto robô-câmera, levando em conta restrições dinâmicas e de visibilidade.

Na maioria dos trabalhos, o aumento da robustez é resultado da adição de informações geométricas da imagem [21]. Da mesma maneira, a escolha e obtenção da lei de controle é fundamental para

satisfazer as restrições e garantir a estabilidade. Paradoxalmente, na maioria dos trabalhos, é imposto à função de tarefa um decrescimento exponencial, onde o ganho é obtido empiricamente.

Em robótica móvel, a utilização de sensores para o reconhecimento do ambiente é imprescindível, afim de tornar a navegação possível em um ambiente não-estruturado. Permitem também corrigir eventuais imprecisões geométricas e de modelagem do robô. Assim, a principal ação dos sensores é a de fornecer informações sobre a localização do robô no ambiente. Tais sensores podem ser de natureza variada. Os sensores proximétricos, por exemplo, ultrassom, fornecem informações da distância dos objetos, e são especialmente úteis para desviar de obstáculos. Os sensores de visão ou a laser fornecem informações mais globais sobre o ambiente. São muito utilizados para localização, navegação e exploração.

O aumento da performance tanto dos sensores quanto dos processadores nos permite fazer o controle de robôs apenas integrando as informações na malha de controle. Como resultado, tem-se a utilização de câmeras embarcadas em robôs móveis. A tarefa de controle pode ser definida, então, como a localização da câmera com relação a certos objetos.

Nos problemas envolvendo visão, utiliza-se geralmente objetos simples geometricamente, de tal forma a simplificar o processamento das imagens, tais como pontos, círculos, e até mesmo formas poligonais simples. Neste trabalho foi utilizado um alvo composto por três pontos, de forma a simplificar o problema de visão e forçar no projeto do controle, visando contribuir através da síntese de controladores robustos multi-critérios, para um problema de visão 2D. Tem-se o inconveniente da imprecisão das informações sobre a profundidade dos alvos, fazendo-se necessária a utilização de controle robusto. Para limitar a complexidade do problema, conservando as características não-lineares do modelo, e das não-linearidades inerentes devido a saturação dos atuadores, limitaremos nosso estudo a uma câmera embarcada em um robô móvel com três graus de liberdade: dois de translação no plano horizontal, e um de rotação do eixo vertical. A câmera estará fixada a uma base giratória e montada sobre um robô dotado de rodas sob acionamento diferencial, tal como modelado em [56]. Através deste modelo, visar-se-á o desenvolvimento de uma lei de controle para visão 2D, de tal forma a garantir a estabilidade do sistema em malha fechada, levando em consideração as incertezas quanto à profundidade dos pontos do alvo, e tal que a visibilidade do alvo respeite os limites dinâmicos dos atuadores.

Este trabalho tem por objetivo contribuir com a síntese de controladores robustos para sistemas de visão baseados em imagens 2D, de tal forma que uma plataforma robótica móvel, com uma câmera embarcada, seja capaz de posicionar-se com relação a um alvo. Tais sistemas de controle devem ser capazes de suportar variações paramétricas (profundidade do alvo) e restrições (dinâmicas dos

atuadores e visibilidade do alvo).

1.1 Organização do Trabalho

O trabalho está organizado da seguinte maneira: O capítulo 2 apresenta os modelos do robô móvel e da câmera. No capítulo 3 está apresentado o problema de controle, e é feito um breve formalismo sobre restrições dinâmicas dos atuadores, bem como os conceitos de base utilizados durante o trabalho, tais como: sistemas sujeitos a saturação em amplitude, estabilidade no sentido de Lyapunov, estabilidade quadrática, estabilidade local e estabilidade \mathcal{L}_2 . A seguir, ainda no mesmo capítulo, é feita a modelagem do alvo, e são introduzidas duas tarefas de controle para o alvo fixo, sendo elas: "Robô e câmera orientados pelo ponto central do alvo parado" e "Câmera orientada perpendicularmente aos 3 pontos do alvo parado", e em seguida é feita a síntese dos controladores para o conjunto robô+câmera. O problema do alvo móvel está apresentado no capítulo 4, onde também são definidas duas tarefas de controle: "Câmera orientada perpendicularmente aos 3 pontos do alvo em movimento" e "Robô e câmera orientados perpendicularmente ao alvo em movimento", e em seguida é feita a síntese dos controladores para o conjunto robô+câmera. Os resultados de simulação são apresentados no capítulo 5, onde são mostrados gráficos com o comportamento do sistema para cada caso estudado durante esta dissertação. No capítulo 6, respectivamente, é feita a conclusão e fechamento do trabalho.

Há também um apêndice, contendo formalismos matemáticos sobre tensores, LMIs e lema da majoração.

Capítulo 2

Modelagem Matemática do Robô Móvel e da Câmera

Neste capítulo será mostrada a modelagem tanto do robô móvel quanto da câmera utilizados para obter os resultados teóricos e de simulação. Primeiramente será modelado o robô móvel, dividido em base móvel e conjunto completo (base móvel+câmera), em termos de tensor cinemático. Em seguida é realizada a modelagem da câmera a ser utilizada.

2.1 Construção do Modelo Cinemático

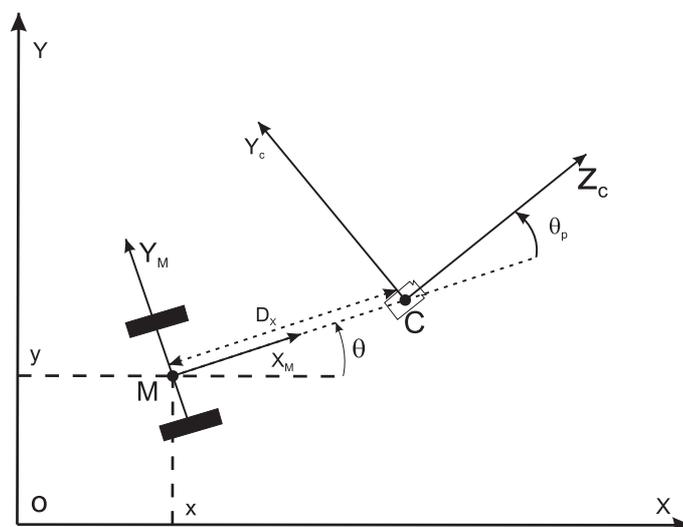


Figura 2.1: Modelo do robô móvel com a câmera

Para descrever a cinemática do robô móvel em questão, serão necessárias as seguintes notações (vide figura 2.1):

- $R(O, x, y, z)$ é um referencial vetorial ligado ao ambiente em um ponto fixo O .
- $R_C(C, x_C, y_C, z_C)$ é o referencial vetorial ligado à câmera. Sua origem C é o centro optico da câmera, z_C confunde-se com o centro optico e x_C está apontado para baixo.
- $R_M(M, x_M, y_M, z_M)$ e $R_P(P, x_P, y_P, z_P)$ são respectivamente os referenciais vetoriais ligados ao ponto de referência M da base móvel, e ao centro de rotação P da base da câmera. A distância MP é dada por D_x .
- θ_P é o ângulo de orientação do eixo x_P de R_P ligado à base da câmera com relação ao eixo x_M de R_M .
- O vetor $[x \ y \ \theta]'$ nos dá a configuração da base móvel com relação ao ambiente: as coordenadas (x, y) designam as coordenadas do ponto M com relação ao sistema R , e o ângulo θ representa a orientação do vetor x_M ligado à base móvel do robô com relação ao vetor x de R .
- $\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}'$ são as coordenadas do centro optico C com relação a R_P .

Através das relações utilizadas na cinemática obtém-se o tensor cinemático da câmera com relação ao referencial R , $R_{R_C/R}$, em função do vetor de velocidades do robô, conforme o formalismo apresentado em [56], obtendo

$$T_{R_C/R} = T_{R_C/R_M} + T_{R_M/R} + \begin{bmatrix} \Omega_{R_M/R} \times MC \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

sendo

- $T_{R_C/R_M} = \begin{bmatrix} V'_{R_C/R_M} & \Omega'_{R_C/R_M} \end{bmatrix}'$ é o tensor cinemático da câmera com relação ao referencial R_M . V_{R_C/R_M} e Ω_{R_C/R_M} representam respectivamente as velocidades de translação e rotação do referencial R_C com relação a R_M .
- $T_{R_M/R} = \begin{bmatrix} V'_{R_M/R} & \Omega'_{R_M/R} \end{bmatrix}'$ é o tensor cinemático do robô com relação ao ambiente. $V_{R_M/R}$ e $\Omega_{R_M/R}$ representam respectivamente as velocidades de translação e rotação do referencial R_M com relação a R .
- O vetor MC é definido pelas coordenadas do centro optico C dentro do referencial da base do robô R_M .

2.1.1 Modelo cinemático da base móvel

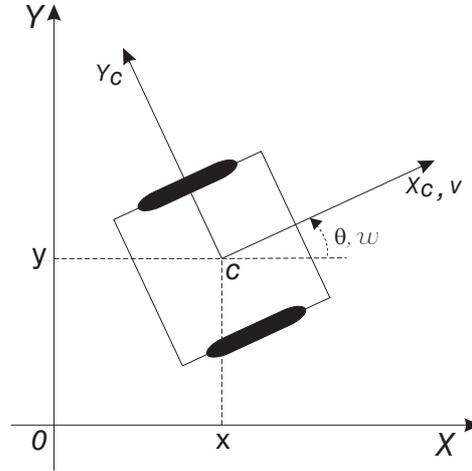


Figura 2.2: Modelo do robô móvel

Considerando a configuração da base móvel $[a \ b \ c]'$ com relação ao referencial R , o modelo cinemático de um robô móvel é classicamente definido pelo seguinte sistema diferencial (figura 2.2):

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

onde v e $\dot{\theta}$ são respectivamente as velocidades linear e angular da base móvel com relação a R .

O tensor cinemático da base móvel

$$T_{R_M/R}^R = \begin{bmatrix} V_{R_M/R}^R & \Omega_{R_M/R}^R \end{bmatrix}'$$

é dado por

$$\begin{cases} V_{R_M/R}^R = \begin{bmatrix} \dot{x} & \dot{y} & 0 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} v \cos \theta & v \sin \theta & 0 \end{bmatrix}' \\ \Omega_{R_M/R}^R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{\theta} \end{bmatrix}' \end{cases} \quad (2.3)$$

onde pode-se expressar as velocidades em termos dos referenciais.

2.1.2 Modelo cinemático da câmera montada sobre a base móvel

O tensor cinemático da câmera T_{R_C/R_M} é dado pela relação

$$T_{R_C/R_M} = \begin{bmatrix} V_{R_C/R_M} \\ \Omega_{R_C/R_M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{R_C/R_P} + V_{R_P/R_M} + \Omega_{R_P/R_M} \times PC \\ \Omega_{R_C/R_P} + \Omega_{R_P/R_M} \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Como os pontos C e P estão fixos com relação a R_P e a R_M , as velocidades $V_{R_C/R_P} = \frac{dPC}{dt}$ e $V_{R_P/R_M} = \frac{dMP}{dt}$ são nulas. Além disso, R_C é rigidamente ligado a R_P . Sendo assim, $\Omega_{R_C/R_P} = 0$, a equação (2.4) é reduzida a

$$T_{R_C/R_M} = \begin{bmatrix} \Omega_{R_P/R_M} \times PC \\ \Omega_{R_P/R_M} \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Com relação ao referencial R_P , as componentes do vetor PC são $[a \ b \ c]'$. A equação (2.5) será agora projetada no referencial R , antes de ser escrita em R_C . As matrizes $C_{R_MR_P}$ e C_{RR_M} , que descrevem respectivamente as relações entre R e R_P e entre R e R_M são dadas por

$$C_{R_MR_P} = \begin{bmatrix} \cos \theta_P & -\sin \theta_P & 0 \\ \sin \theta_P & \cos \theta_P & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } C_{RR_M} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Com relação a R , as componentes do vetor PC são

$$PC^R = C_{RR_M} C_{R_MR_P} PC^{R_P} = \begin{bmatrix} a \cos(\theta + \theta_P) - b \sin(\theta + \theta_P) \\ a \cos(\theta + \theta_P) + b \sin(\theta + \theta_P) \\ c \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Levando em conta a geometria do robô apresentado na figura 2.1, a velocidade de rotação entre R_P e R_M pode ser diretamente definida como $\Omega_{R_P/R_M} = [0 \ 0 \ \dot{\theta}_P]'$. Através das relações (2.5) e (2.7) pode-se deduzir as componentes do tensor cinemático da câmera com relação ao referencial R_M , expressados em relação ao referencial R

$$T_{RC/RM}^R = \begin{bmatrix} -a \sin(\theta + \theta_P) - b \cos(\theta + \theta_P) \\ a \cos(\theta + \theta_P) - b \sin(\theta + \theta_P) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \dot{\theta}_P \quad (2.8)$$

Produto vetorial $\Omega_{RM/R} \times MC$

Para calcular o produto vetorial $\Omega_{RM/R} \times MC$ que aparece na relação (2.1) é necessário determinar o vetor de velocidade de rotação da base móvel e o vetor MC no referencial R . Como $\Omega_{RM/R}^R$ já foi definido em (2.3), só resta determinar a expressão para MC .

Projetando a relação $MC = MP + PC$, o referencial R fica como $MC^R = MP^R + PC^R$. A expressão PC^R está definida em (2.7), e a de MP^R pode ser deduzida a partir da relação $MP^R = C_{RRM} MP^{RM}$, onde C_{RRM} é dada por (2.6). Tem-se então $MP^{RM} = [D_x \ 0 \ h]^T$. Obtem-se

$$MC^R = \begin{bmatrix} D_x \cos \theta + a \cos(\theta + \theta_P) - b \sin(\theta + \theta_P) \\ D_x \sin \theta + a \sin(\theta + \theta_P) + b \cos(\theta + \theta_P) \\ h + c \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

Finalmente o produto vetorial $\Omega_{RM/R} \times MC$ pode ser calculado por

$$\Omega_{RM/R} \times MC = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} D_x \cos \theta + a \cos(\theta + \theta_P) - b \sin(\theta + \theta_P) \\ D_x \sin \theta + a \sin(\theta + \theta_P) + b \cos(\theta + \theta_P) \\ h + c \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

$$= \begin{bmatrix} D_x \sin \theta - a \sin(\theta + \theta_P) - b \cos(\theta + \theta_P) \\ D_x \cos \theta + a \cos(\theta + \theta_P) - b \sin(\theta + \theta_P) \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\theta} \quad (2.11)$$

Desta forma, tem-se reunidos todos os elementos necessários para a construção do tensor cinemático da câmera com relação ao referencial R . Substituindo (2.3), (2.8) e (2.11) em (2.1), obtemos

$$T_{R_C/R}^R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -D_x \sin \theta - a \sin(\theta + \theta_P) - b \cos(\theta + \theta_P) & -a \sin(\theta + \theta_P) - b \cos(\theta + \theta_P) \\ 0 & 1 & D_x \cos \theta + a \cos(\theta + \theta_P) - b \sin(\theta + \theta_P) & a \cos(\theta + \theta_P) - b \sin(\theta + \theta_P) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\theta}_P \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Visto que o controle servo-visual utilizado neste trabalho é baseado na regulação das informações visuais contidas no plano de imagem da câmera, faz-se necessário encontrar o tensor $T_{R_C/R}$ no referencial R_C . A matriz de transformação entre R_C e R é definida por

$$C_{R_C R} = C_{R_C R_P} C_{R_P R_M} C_{R M R} \quad (2.13)$$

onde $C_{R M R}$ e $C_{R_P R_M}$ são respectivamente as inversas das matrizes $C_{R R M}$ e $C_{R M R_P}$ dadas por (2.6).

A matrix $C_{R_C R_P}$ denota a mudança de base entre R_C e R_P através da relação

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Finalmente o tensor cinemático da câmera é dado por

$$T_{R_C R_M}^{R_C} = \begin{bmatrix} C_{R_C R} & 0 \\ 0 & C_{R_C R} \end{bmatrix} T_{R_C/R}^R \quad (2.15)$$

Obtemos assim

$$T_{R_C/R}^{R_C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin(\theta + \theta_P) & \cos(\theta + \theta_P) & D_x \cos \theta_P + a & a \\ \cos(\theta + \theta_P) & \sin(\theta + \theta_P) & D_x \sin \theta_P - b & -b \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\theta}_P \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

Nesta relação, a matrix jacobiana que relaciona o tensor cinemático ao vetor de velocidades do robô possui vários zeros, que correspondem aos movimentos impossíveis da câmera. Na estrutura mecânica considerada, não são possíveis os movimentos de translação no eixo x_C nem os movimentos de rotação em torno dos eixos y_C e z_C . Introduzindo o vetor de coordenadas generalizadas $q = [s_C \ \theta \ \theta_P]'$ onde s_C designa a abscissa curvilínea do ponto M com relação a R , e substituindo o vetor $[\dot{x} \ \dot{y} \ \dot{\theta}]$ na relação (2.2), a equação (2.16) pode ser reescrita

$$T_{RC/R}^{RC} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\sin\theta_P & D_x \cos\theta_P + a & a \\ \cos\theta_P & D_x \sin\theta_P - b & -b \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{q} \quad (2.17)$$

com $\dot{q} = [v \ \dot{\theta} \ \dot{\theta}_P]'$. Suprimindo as linhas de zeros que correspondem aos movimentos impossíveis de serem realizados pela câmera, pode-se compactar ainda mais a expressão, introduzindo um tensor cinemático reduzido T_{red}^{RC} , contendo apenas os três graus de liberdade realmente controláveis da câmera. A equação (2.17) fica

$$T_{red}^{RC} = J_{red} \dot{q} \quad (2.18)$$

onde a matrix jacobiana reduzida é dada por

$$J_{red} = \begin{bmatrix} -\sin\theta_P & D_x \cos\theta_P + a & a \\ \cos\theta_P & D_x \sin\theta_P - b & -b \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

Através de um cálculo simples, pode-se mostrar que o determinante de J_{red} é igual à distância fixa $D_x > 0$ entre os pontos P e M do robô, conforme mostra a figura 2.1. Visto isto, conclui-se que a matrix é regular, e que existe um difeomorfismo local entre o vetor de velocidades do robô e o tensor cinemático da câmera. Esta relação prova que graças à introdução de mais um grau de liberdade, o de rotação da base da câmera, as velocidades instantâneas da câmera não são mais limitadas pela restrição não-holonômica da base do robô móvel.

2.2 Modelagem da Câmera

A câmera utilizada é a do tipo "pinhole", tal como representada na figura 2.3, onde o plano-imagem da câmera está situado a 1 m do centro optico. O referencial R_C está acoplado à câmera. Sua origem é o centro optico da câmera, sendo que o eixo Cz_C confunde-se com o eixo optico, e eixo Cx_C é vertical e apontado para baixo. Um ponto $p \in \mathfrak{R}^3$ do ambiente é projetado no plano imagem através do ponto P através de uma projeção perspectiva. Sendo assim, $x_p = [x \ y \ z]'$ representa as coordenadas do ponto p com relação ao referencial R_C , sendo que z representa a profundidade do ponto p com relação a R_C e sua projeção P no plano-imagem é descrita pelas seguintes coordenadas

$$\begin{bmatrix} X & Y & 1 \end{bmatrix} \text{ com } X = \frac{x}{z} \text{ e } Y = \frac{y}{z} \quad (2.20)$$

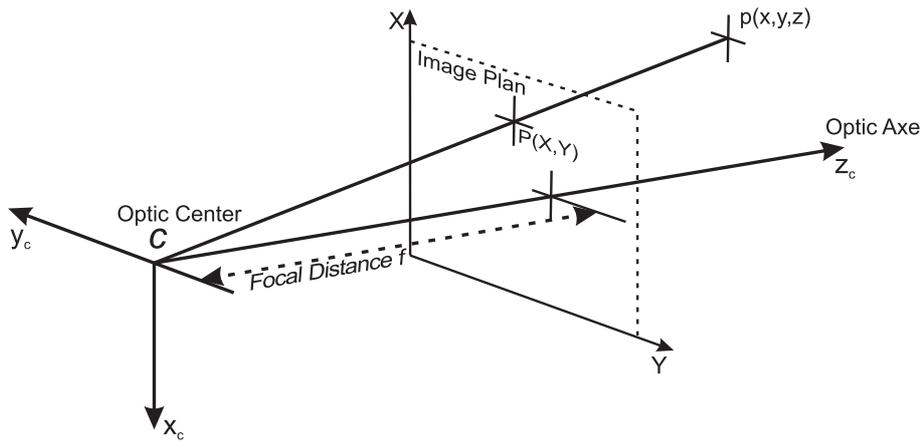


Figura 2.3: Modelo da câmera utilizada

Na prática, as medidas no plano-imagem são dadas em "pixel", e a distância focal f da câmera é menos que 1 m. A matriz de parâmetros intrínsecos da câmera permite fazer a ligação entre as coordenadas em "pixels" $\begin{bmatrix} m & n & 1 \end{bmatrix}'$ e as coordenadas métricas homogêneas $\begin{bmatrix} X & Y & 1 \end{bmatrix}'$ da seguinte maneira

$$\begin{bmatrix} m \\ n \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_m & 0 & m_0 \\ 0 & \alpha_n & n_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

Nesta relação, m_0 e n_0 são as coordenadas em "pixels" da projeção ortogonal do centro optico C da câmera sobre o plano-imagem, sendo que os escalares α_m e α_n são definidos por

$$\alpha_m = \frac{f}{d_x} \text{ e } \alpha_n = \frac{f}{d_y} \quad (2.22)$$

sendo f a distância focal do objeto, e d_x e d_y designam respectivamente as dimensões de um "pixel" em termos de linha e coluna. Este modelo, amplamente utilizado em controle servo-visual será utilizado ao longo do trabalho. Para explorá-lo, deve-se conhecer os parâmetros internos da câmera m_0 , n_0 , α_m e α_n . Estes parâmetros podem ser determinados a partir dos métodos de calibração, como por exemplo [64], [4] e [63].

2.3 Conclusões

Neste capítulo foi introduzido o modelo matemático a ser utilizado no decorrer do trabalho. Primeiramente, a modelagem cinemática tanto do robô móvel, quanto para o conjunto robô-câmera. Em seguida foi feita a modelagem matemática da câmera. Tais conceitos serão necessários para a formulação das tarefas de controle, bem como no projeto e simulação do sistema.

Capítulo 3

Problema de Servovisão - Alvo fixo

Neste capítulo será abordado o problema de controle propriamente dito. Primeiramente, é apresentado um breve formalismo sobre as restrições dinâmicas dos atuadores, e alguns conceitos de base para o restante do trabalho, tais como o formalismo necessário para tratar sistemas sujeitos a saturação em amplitude, teoria de Lyapunov, estabilidade quadrática, estabilidade local e estabilidade \mathcal{L}_2 . A seguir são definidas as tarefas propriamente ditas: primeiro o robô e a câmera devem ser orientados pelo ponto central do alvo, e segundo a câmera deve ser orientada perpendicularmente ao ponto central do alvo. Por fim é feito o projeto de controle para cada um dos casos.

3.1 Problema de Controle

As técnicas aqui apresentadas foram desenvolvidas por [21], e seus resultados foram devidamente reproduzidos. No capítulo 4 é feita uma contribuição à técnica desenvolvida em [21], conforme é mostrado em [39], onde é feita uma generalização da técnica.

3.1.1 Restrições dinâmicas dos atuadores

O tensor cinemático definido em (2.18) pode ser considerado como a entrada de controle do sistema. Com o objetivo de considerar as restrições dinâmicas dos atuadores em termos de velocidade e aceleração do robô, foi colocado um integrador no sistema, de forma a considerar como entrada de controle o tensor de aceleração da câmera \dot{T}_{red}^{RC} , ao invés do tensor cinemático. De forma a levar em consideração tais restrições dos atuadores, deve-se impor limites aos tensores T_{red}^{RC} e \dot{T}_{red}^{RC} da câmera.

Utilizando a relação (2.18), pode-se escrever:

$$\begin{bmatrix} T_{red}^{RC} \\ \dot{T}_{red}^{RC} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{red} & 0 \\ \dot{J}_{red} & J_{red} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \ddot{q} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

onde $\ddot{q} = [\dot{v} \quad \ddot{\theta} \quad \ddot{\theta}_P]'$ é a aceleração generalizada do robô, enquanto J_{red} representa a derivada da matrix jacobiana reduzida, representada por

$$J_{red} = \begin{bmatrix} -\dot{\theta}_P \cos \theta & -\dot{\theta}_P D_x \sin \theta_P & 0 \\ -\dot{\theta}_P \sin \theta & \dot{\theta}_P D_x \cos \theta_P & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Os limites dinâmicos dos atuadores são definidos através da relação

$$- \begin{bmatrix} \dot{q}_{max} \\ \ddot{q}_{max} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \ddot{q} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \dot{q}_{max} \\ \ddot{q}_{max} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Utilizando as propriedades de desigualdades vetoriais [60], obtemos

$$- \begin{bmatrix} |J_{red}| & 0 \\ |\dot{J}_{red}| & |J_{red}| \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_{max} \\ \ddot{q}_{max} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} J_{red} & 0 \\ \dot{J}_{red} & J_{red} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \ddot{q} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} |J_{red}| & 0 \\ |\dot{J}_{red}| & |J_{red}| \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_{max} \\ \ddot{q}_{max} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

onde $|J_{red}|$ é a matriz composta pelos valores absolutos dos elementos de J_{red} . Utilizando a relação (3.1), pode-se reescrever a relação acima em termos de T_{red}^{RC} e \dot{T}_{red}^{RC}

$$- \begin{bmatrix} |J_{red}| & 0 \\ |\dot{J}_{red}| & |J_{red}| \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_{max} \\ \ddot{q}_{max} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} T_{red}^{RC} \\ \dot{T}_{red}^{RC} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} |J_{red}| & 0 \\ |\dot{J}_{red}| & |J_{red}| \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_{max} \\ \ddot{q}_{max} \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Assim, para garantir a satisfação das restrições dinâmicas do robô, deve-se impor aos tensores T_{red}^{RC} e \dot{T}_{red}^{RC} , duas restrições vetoriais u_1 e u_0 , satisfazendo

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_0 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} |J_{red}| & 0 \\ |\dot{J}_{red}| & |J_{red}| \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_{max} \\ \ddot{q}_{max} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Para o robô considerado, conforme a figura 2.1, utilizaremos os valores paramétricos

$$a = b = 0, D_x = 0.15m, \theta_P \in [-\pi \text{ rad}, \pi \text{ rad}]$$

onde a e b são as coordenadas do centro optico C com relação a R_P , D é a distância do centro da base móvel com relação ao centro da câmera, ou seja, denota o posicionamento da câmera com relação à base móvel do robô, e por fim θ_P é o ângulo da câmera com relação à base móvel. Como pode-se ver, a câmera possui um limite angular, devido à presença de cabos elétricos.

Assim, podem ser formulados os limites dinâmicos do sistema, presente nas equações acima

$$\begin{aligned} \dot{q}_{max} &= [1m/s \quad 1rad/s \quad 1rad/s]' \\ \ddot{q}_{max} &= [5m/s^2 \quad 1rad/s^2 \quad 4rad/s^2]' \end{aligned}$$

Tais limites dependem do tipo do robô e dos atuadores. A partir da equação (3.6) e com os valores acima, tem-se com u_1 e u_0 as saturações limites:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_0 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 1m/s \\ 1m/s \\ 0.5rad/s \\ 4m/s^2 \\ 4m/s^2 \\ 5rad/s^2 \end{bmatrix} \leq \min_{\theta_P} \begin{bmatrix} |J_{red}| & 0 \\ |\dot{J}_{red}| & |J_{red}| \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_{max} \\ \ddot{q}_{max} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

3.1.2 Conceitos de base

Apresentaremos a seguir alguns conceitos utilizados durante o trabalho. Abordaremos a questão da estabilidade destes sistemas, bem como a representação matemática da saturação. Veremos também os conceitos fundamentais relacionados à estabilidade de sistemas dinâmicos em tempo contínuo baseando-nos na estabilidade no sentido de Lyapunov, estabilidade local, estabilidade quadrática e estabilidade \mathcal{L}_2 .

Sistemas sujeitos à saturação em amplitude

Considere um sistema linear invariante no tempo (LTI), contínuo, descrito pela equação

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (3.8)$$

onde $x \in \mathfrak{R}^n$ é o vetor de estados, $u \in \mathfrak{R}^m$ é a entrada de controle, $A \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ e $B \in \mathfrak{R}^{n \times m}$. Tem-se então a seguinte realimentação de estados

$$u(t) = Kx(t) \quad (3.9)$$

com $K \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ e $u(t)$ é o sinal de controle.

Se não há restrições no sinal de controle do sistema (3.8), a realimentação se dá pela equação clássica

$$\dot{x}(t) = (A + BK)x(t) \quad (3.10)$$

A estabilidade é então caracterizada pelos autovalores de $(A + BK)$. Se o sistema (A, B) é estabilizável, a matriz K deve ser escolhida de tal forma que todos os autovalores de $(A + BK)$ estejam no semi-plano complexo esquerdo. A estabilidade do sistema (3.10) é então dita global.

Imagine agora que o sinal de controle seja submetido à restrições de amplitude, ou seja, cada componente $u_{(i)}(t)$, $i = 1, \dots, m$ do vetor de controle está compreendida entre um valor máximo e mínimo. Ou seja, a cada instante, o sinal de controle $u(t)$ deverá pertencer a um conjunto poliedral Ω , definido como

$$\Omega = \{u \in \mathfrak{R}^m; -u_{min} \preceq u \preceq u_{max}\} \quad (3.11)$$

com $u_{min(i)} > 0$ e $u_{max(i)} > 0$, para $i = 1, \dots, m$. Suponhamos, para simplificação, que $u_{min(i)}$ e $u_{max(i)}$ são iguais, ou seja, $u_{max(i)} = u_{min(i)} = u_{0(i)}$, com $u_{0(i)} > 0$, para $i = 1, \dots, m$. Assim, considerando a realimentação de estados (3.9), se o valor de $K_{(i)}x(t)$ é superior a $u_{0(i)}$, o sinal ficará restrito ao valor de $u_{0(i)}$. Pode-se dizer, assim, que há a **saturação no sinal de controle**. A lei de controle efetivamente aplicada no sistema é então

$$u(t) = sat_{u_0}(Kx(t)) \quad (3.12)$$

com cada componente $u_{(i)}(t)$ definida por

$$u_{(i)}(t) = (\text{sat}_{u_0}(Kx(t)))_{(i)} = \begin{cases} u_{0(i)} & \text{se } K_{(i)}x(t) > u_{0(i)} \\ K_{(i)}x(t) & \text{se } |K_{(i)}x(t)| \leq u_{0(i)} \\ -u_{0(i)} & \text{se } K_{(i)}x(t) < -u_{0(i)} \end{cases} \quad (3.13)$$

A lei de controle (3.12) é chamada de **realimentação de estados saturante ou saturada**. A função de saturação considerada é mostrada na figura 3.1

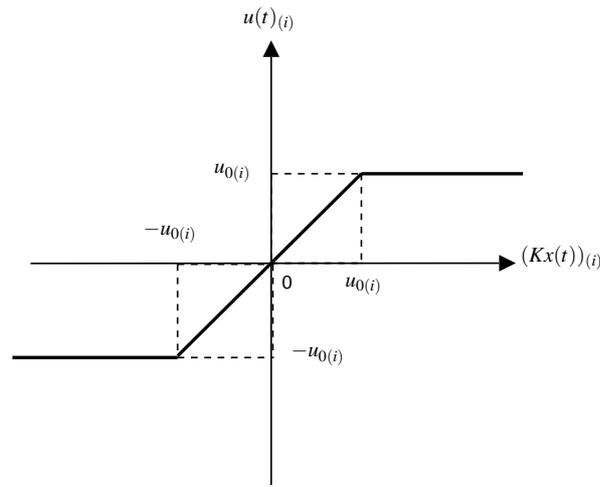


Figura 3.1: Função saturação

Do sistema em malha fechada obtido é o seguinte sistema não-linear

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B\text{sat}_{u_0}(Kx(t)) \quad (3.14)$$

Tal sistema é conhecido como **sistema em malha fechada com saturação no controle**, ou, mais simplesmente, **sistema saturado**. É importante ressaltar que a escolha de K tal que a matriz $(A + BK)$ seja Hurwitz não é suficiente para garantir a estabilidade global do sistema (3.14) [57]. A estabilidade do sistema (3.14) está ligada à escolha das condições iniciais do sistema, e assim pode-se estudar os conceitos de estabilidade global, semi-global ou local. Como serão consideradas as exigências de performance e robustez, consideraremos apenas a estabilidade local. Ou seja, deseja-se aumentar a região de atração do sistema em malha fechada.

Para obter as condições de estabilidade assintótica do sistema (3.14), necessita-se de uma representação matemática de um sistema saturado. Existem diferentes maneiras de representar o comportamento não-linear de tal classe de sistemas:

1. A partir de inclusões diferenciais que levam à descrição de um modelo politópico [27], [26],

[14].

2. A partir de uma descrição de regiões de saturação [23].
3. A partir da definição de uma não-linearidade do tipo zona-morta e de uma condição de setor [25], [53].

A abordagem 1 é a mais recente, e nos permite elaborar as condições de estabilidade do tipo LMI, tanto para análise quanto para síntese. Devido à sua complexidade numérica, este modelo pode apresentar custo computacional elevado em função do número de estados.

A abordagem 2 é mais utilizada no contexto de análise, pois é complexa para tratar a síntese do controle.

Já a terceira abordagem tem o problema de gerar as condições do tipo BMI (Bilinear Matrix Inequalities). Algoritmos que as transformem iterativamente em LMI podem ser utilizados, porém são muito sensíveis à inicialização.

Mais recentemente, uma condição de setor modificada foi proposta em [15], permitindo, no mesmo contexto da abordagem 3, desenvolver o problema sob a forma de LMI, garantindo assim a convergência. Neste trabalho, utilizaremos tal método de projeto.

Considere a não-linearidade

$$\phi(Kx) = \text{sat}_{u_0}(Kx) - Kx \quad (3.15)$$

e cada componente de $\phi(Kx)$ é definida por

$$\phi(K_{(i)}x) = \begin{cases} u_{0(i)} - K_{(i)}x & \text{se } K_{(i)}x > u_{0(i)} \\ 0 & \text{se } |K_{(i)}x| \leq u_{0(i)} \\ -u_{0(i)} - K_{(i)}x & \text{se } K_{(i)}x < -u_{0(i)} \end{cases} \quad (3.16)$$

A não-linearidade $\phi(Kx)$, conforme a figura 3.2 é do tipo zona-morta, sem memória e descentralizada, e satisfaz uma condição de setor modificado, conforme o lemma apresentado a seguir.

Lema 3.1.1 *Seja uma matriz $\mathbb{G} \in \mathfrak{R}^{m \times n}$. Se $x \in S(u_0)$, definido por*

$$S(u_0) = \{x \in \mathfrak{R}^m; -u_0 \preceq (K - \mathbb{G})x \preceq u_0\} \quad (3.17)$$

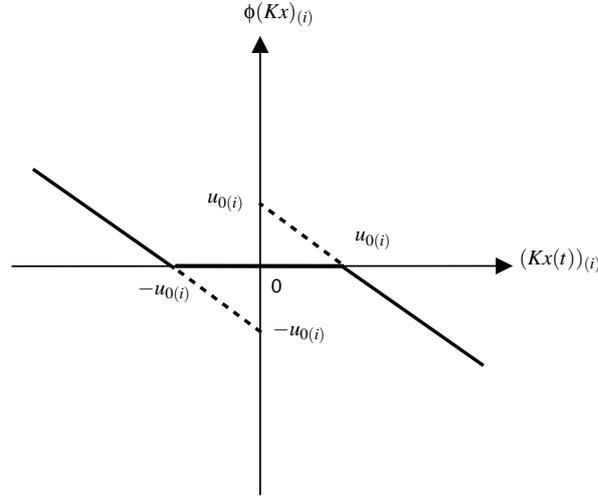


Figura 3.2: Descrição da não-linearidade

então a não-linearidade $\phi(Kx)$ satisfaz a seguinte condição de setor

$$\phi(Kx)'M(\phi(Kx) + \mathbb{G}x) \leq 0 \quad (3.18)$$

para toda matriz diagonal definida positiva $M \in \mathfrak{R}^{m \times n}$. \square

A demonstração de tal lema é apresentada em [15]. A partir da definição da não-linearidade (3.15), o sistema saturado (3.14) pode ser escrito como

$$\dot{x}(t) = (A + BK)x(t) + B\phi(Kx(t)) \quad (3.19)$$

Utilizando as condições de setor modificadas apresentadas no Lemma 3.1.1, pode-se resolver o problema da síntese do ganho K estabilizante do sistema (3.14) escrito na forma (3.19). Antes de tratar o problema da síntese do controlador, o problema de estabilidade associado a (3.19) deve ser estudado.

Estabilidade no sentido de Lyapunov - O segundo método de Lyapunov

O conceito de estabilidade no sentido de Lyapunov, e principalmente o segundo método de Lyapunov, nos permite caracterizar a região de estabilidade de sistemas dinâmicos, inclusive os não-lineares. Este conceito está intimamente ligado à função de Lyapunov, apresentado a seguir

Definição 3.1.1 A função $V : D \subseteq \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^+$ é uma função de Lyapunov, se ela satisfaz as seguintes condições:

- D é a região de \mathfrak{R}^n que contém o ponto de equilíbrio do sistema, neste caso representado pela origem.
- $V(x)$ é contínua e suas derivadas parciais $\dot{V}_i(X) = \frac{\partial V}{\partial x_i}$, existem, e são contínuas para todo i, \dots, n .
- $V(x) > 0$ para todo $x \neq 0$ e $V(0) = 0$.

A existência de uma função de Lyapunov contrativa ao longo das trajetórias de um sistema permite garantir a estabilidade do sistemas, de acordo com o seguinte teorema

Teorema 3.1.1 Em uma vizinhança $D \subset \mathfrak{R}^n$, o equilíbrio $x = 0$, $x \in D$, é

- localmente estável se existe uma função de Lyapunov, $V(x)$ tal que $\dot{V}(x) \leq 0$, para todo $x \in D$
- localmente assintoticamente estável se existe uma função de Lyapunov $V : D \rightarrow \mathfrak{R}^+$ tal que $\dot{V}(x) < 0$, para todo $x \in D$, $x \neq 0$.

□

Estabilidade Quadrática

O conceito de estabilidade quadrática está associado à noção de estabilidade no sentido de Lyapunov, considerando sistemas incertos, e em funções de Lyapunov quadráticas [31].

Consideremos o sistema incerto

$$\dot{x}(t) = (A_0 + \Delta A_0)x(t) = A_0(t)x(t) \quad (3.20)$$

onde $A_0(t) = A_0 + \Delta A_0$ é uma matriz incerta. O tipo de função de Lyapunov que utilizaremos ao longo deste trabalho é da forma

$$V(x) = x'Px \quad (3.21)$$

função esta que é definida positiva se a matriz P é uma matriz definida positiva, $P = P' > 0$. Este tipo de função pode ser colocada na forma de Lyapunov se for satisfeita a condição apresentada no teorema 3.1.1. Neste caso, o sistema (3.20) é dito quadraticamente estável se existe uma matriz $P = P' > 0$, tal que a derivada da função quadrática de Lyapunov

$$\dot{V}(x) = x'(A'(t)P + PA(t))x < 0 \quad \forall A(t) \in \mathcal{A} \quad (3.22)$$

Assim, uma condição necessária e suficiente de estabilidade quadrática para o sistema (3.20) [31]

- Incertezas limitadas em norma com

$$\mathcal{A} = \{A_0 + DF(t)E, \|F(t)\|_2 \leq 1\}$$

tal que exista uma matrix $P = P' > 0$ tal que a desigualdade matricial

$$A_0'P + PA_0 + PDD'P + E'E < 0 \quad (3.23)$$

seja satisfeita.

- Com incertezas politópicas com

$$\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_{n_A}\}$$

tal que exista uma matrix $P = P' > 0$ tal que a desigualdade matricial

$$A_i'P + PA_i < 0 \quad \forall i = 1, \dots, n_A \quad (3.24)$$

seja satisfeita. Onde n_A denota o número de vértices de A_i

Estabilidade Local

Os sistemas considerados neste trabalho estão sujeitos a limitação do controle em amplitude. Sabe-se, neste contexto, que nem sempre a estabilidade global pode ser garantida. Assim, deseja-se determinar uma região do espaço de estados tal que a estabilidade assintótica do sistema em malha fechada é garantida. Esta região representa assim uma aproximação da região de atração da origem. Neste trabalho, serão utilizadas funções quadráticas de Lyapunov, e assim garantir-se-á a estabilidade local assintótica em uma região do tipo elipsoidal.

Se tomarmos por \mathcal{S} o conjunto do espaço de estados que a representação matemática do sistema saturado é válida, pode-se definir nosso objetivo, dentro de um contexto de estabilidade local, como a determinação de um conjunto

$$\varepsilon(\gamma) = \{x \in \mathfrak{R}^n; V(x) \leq \gamma^{-1}, \gamma > 0\}$$

de estabilidade assintótica com relação ao sistema saturado em malha fechada tal que

$$\varepsilon(\gamma) \subseteq \mathcal{S}$$

onde $V(x)$ é uma função de Lyapunov.

Se consideramos, por exemplo, uma função quadrática de Lyapunov $V(x) = x'Px$, o sistema saturado em malha fechada é **localmente assintoticamente estável** no conjunto

$$\varepsilon(\gamma) = \{x \in \mathfrak{R}; x'Px \leq \gamma^{-1}, \gamma > 0, P = P' > 0\}$$

se a matriz de Lyapunov $P = P' > 0$ é tal que

$$\dot{V}(x) = \dot{x}'Px + x'P\dot{x} < 0, \forall x \in \varepsilon(\gamma)$$

ao longo das trajetórias do sistema em malha fechada (vide figura 3.3)

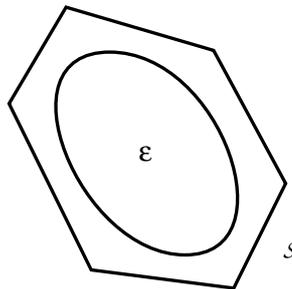


Figura 3.3: Representação do conjunto

Estabilidade \mathcal{L}_2

Apresentaremos aqui elementos sobre a estabilidade \mathcal{L}_2 , que corresponde à estabilidade de sistemas incertos sujeitos à perturbações limitadas pela norma \mathcal{L}_2 . Para tal, consideremos um sistema

incerto descrito como

$$\dot{x}(t) = (A + \Delta A)x(t) + (B + \Delta B)\omega(t) = A(t)x(t) + B(t)\omega(t) \quad (3.25)$$

onde as matrizes A e B são as matrizes incertas que fazem parte dos conjuntos \mathcal{A} e \mathcal{B} , $\omega \in \mathfrak{R}^q$ é um vetor que tem a energia limitada da seguinte maneira

$$\|\omega(t)\|_2^2 = \int_0^\infty \omega'(\tau)\omega(\tau)d\tau \leq \frac{1}{\delta} \quad \forall \delta > 0 \quad e \quad 0 < \frac{1}{\delta} < \infty \quad (3.26)$$

Consideremos agora a função quadrática de Lyapunov (3.21). O sistema (3.25) é dito \mathcal{L}_2 estável se existe uma matriz $P = P' > 0$ tal que a derivada com relação ao tempo da função quadrática de Lyapunov verifica a seguinte relação

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) - \omega'\omega &= x'(A'P + PA)x + \omega'B'Px + x'PB\omega - \omega'\omega \\ &= \begin{bmatrix} x' & \omega' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A'P + PA & PB \\ B'P & -I_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \omega \end{bmatrix} \leq 0 \end{aligned} \quad (3.27)$$

para toda perturbação ω satisfazendo (3.26).

Se a condição (3.27) é verificada, pode-se integrá-la

$$V(x(t)) - V(x(0)) \leq \int_0^t \omega'(\tau)\omega(\tau)d\tau, \quad \forall t > 0 \quad (3.28)$$

sendo ainda possível

$$V(x(t)) \leq V(x(0)) + \int_0^t \omega'(\tau)\omega(\tau)d\tau \quad (3.29)$$

Assim, uma condição suficiente para que o sistema (3.25) seja \mathcal{L}_2 estável consiste em

- Para o caso onde as incertezas sejam limitados em norma com

$$\mathcal{A} = \{A_0 + DF(t)E_1, \|F(t)\|_2 \leq 1\}$$

$$\mathcal{B} = \{B_0 + DF(t)E_2, \|F(t)\|_2 \leq 1\}$$

tal que exista uma matriz $P = P' > 0$ e um escalar positivo λ tal que a desigualdade matricial seja satisfeita

$$\begin{bmatrix} A'_0P + PA_0 + \lambda PDD'P & PB_0 & E'_1 \\ B'_0P & -I_q & E'_2 \\ E_1 & E_2 & -\lambda I_r \end{bmatrix} < 0 \quad (3.30)$$

- Para o caso das incertezas politópicas com

$$\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_{n_A}\}$$

$$\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_{n_B}\}$$

tal que exista uma matriz $P = P' > 0$ tal que a desigualdade matricial seja satisfeita

$$\begin{bmatrix} A'_iP + PA_i & PB_j \\ B'_jP & -I_q \end{bmatrix} < 0 \quad (3.31)$$

para todo $i = 1, \dots, n_A$ e $j = 1, \dots, n_B$, onde n_A e n_B denotam os números de vértices de A_i e B_j .

A grande vantagem da formulação apresentada em (3.30) e (3.31) é que na forma de desigualdades lineares matriciais, estes problemas são convexos, e existem algoritmos para sua solução numérica. O apêndice A.2 apresenta uma breve revisão sobre desigualdades lineares matriciais (LMIs).

3.2 Diferentes Tarefas

Para o controle multi-critérios oriundo do problema de controle robô-câmera, levando em conta o objetivo de estabilização da câmera, deve-se levar em conta as incertezas sobre a profundidade dos pontos do alvo, as restrições de visibilidade e as restrições dinâmicas do sistema. Estas condições podem ser colocadas da seguinte maneira:

- O alvo é constituído de pontos, podendo eles ser fixos ou móveis. A profundidade dos pontos com relação ao referencial R_C da câmera é desconhecida, mas limitada.
- Ao longo do movimento, a visibilidade do alvo deve ser garantida.
- Os tensores de velocidade e de aceleração da câmera devem permanecer limitados, de tal forma que as restrições dinâmicas dos atuadores sejam satisfeitas.

A seguir serão descritas as diferentes tarefas a serem realizadas pelo conjunto robô+câmera. Dois casos serão abordados: alvo fixo e alvo móvel, sendo que para este capítulo, será abordado apenas o caso do alvo fixo, deixando o alvo móvel para o capítulo seguinte. Para simplificar as notações utilizadas, foi definido o referencial R_C como sendo R , o tensor reduzido $T_{red}^{R_C}$ como sendo T e a matriz jacobiana reduzida J_{red} como sendo J .

3.2.1 Modelo do alvo

O robô considerado neste trabalho possui vários sensores que fornecem as informações necessárias para a tarefa de controle: hodômetro para fornecer medidas de deslocamento das rodas, câmera para fornecer as informações visuais, ultrassom para as informações proximétricas e bússola, para ajudar com as informações sobre orientação. A câmera fica a uma altura constante, e o alvo estará disposto na mesma altura, permitindo a execução da tarefa.

O alvo está representado na figura 3.4. É constituído por 3 pontos alinhados e equidistantes E_i , com $i = 1, 2, 3$, pertencentes ao mesmo plano horizontal que o centro óptico da câmera. A variável $l > 0$ denota a distância entre dois pontos consecutivos do alvo, α denota o ângulo entre a direita da reta (E_1E_3) do alvo e o centro óptico z_C , e η é o ângulo entre o eixo óptico z_C e a direita (CE_2) . Para definir os limites de profundidade dos pontos do alvo com relação ao direcionamento da câmera, é estabelecida a seguinte relação como sendo a distância $d_2 = CE_2$ entre a câmera e o alvo

$$d_2 \in [d_{2min}, d_{2max}] \quad (3.32)$$

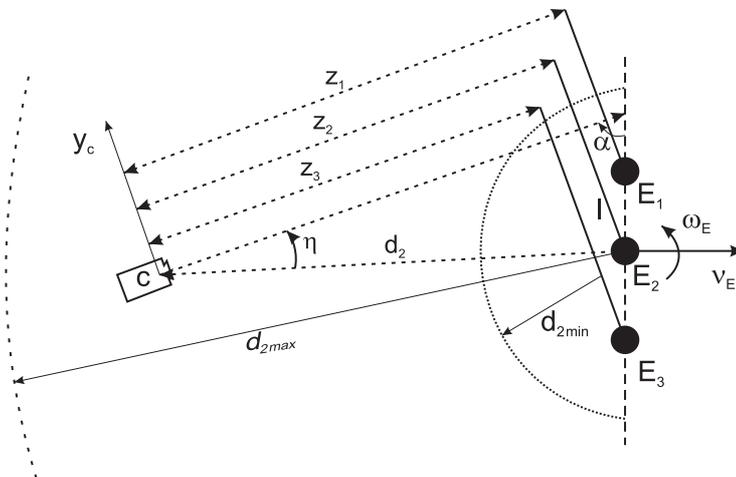


Figura 3.4: Modelo do alvo e parâmetros

Para evitar configurações singulares, onde os pontos do alvo projetam-se em um mesmo ponto sobre o plano-imagem da câmera, impõe-se igualmente a condição

$$\alpha \in [-\pi + \alpha_{min}, -\alpha_{min}] \quad (3.33)$$

onde α_{min} é um ângulo pequeno. Supõe-se, então, que a câmera é capaz de deslocar-se pelo setor definido pelas relações (3.32) e (3.33).

3.2.2 Tarefa: robô e câmera orientados pelo ponto central do alvo parado

Para esta tarefa o robô deve ser capaz de orientar-se pelo ponto central do alvo parado, parando a uma distância de referência deste, de forma a deslocar-se a uma velocidade de referência. O hodômetro é utilizado para controlar a velocidade angular da base móvel v , ao passo que o ultrassom e a bússola digital são utilizados para controlar o deslocamento angular da base móvel, $\dot{\theta}$, que é a derivada com relação ao tempo do ângulo de orientação da base móvel, e a câmera é controlada através do ângulo $\dot{\theta}_p$, que pode ser fornecido tanto pelas informações visuais quanto pelo encoder na base da câmera. Através destes 3 dados, pode-se então controlar as velocidades do robô, leia-se $\dot{q} = [v \quad \dot{\theta} \quad \dot{\theta}_p]'$, juntamente com o tensor cinemático T e utilizando a relação (2.18). A função de tarefa pode ser definida como

$$e(t) = \begin{bmatrix} e(1) \\ e(2) \\ e(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{y_C} \\ s_{z_C} - v_{z_C}^* t \\ Y_2 - Y_2^* \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

onde s_{y_C} e s_{z_C} são respectivamente as abscissas curvilíneas do ponto C , no eixo y_C e z_C (na verdade, são os resultados da integração de $T_{(1)}$ e $T_{(2)}$), $v_{z_C}^*$ é a velocidade constante de referência da câmera na direção do eixo z_C , Y_2 representa a coordenada do ponto central E_2 do alvo no plano-imagem da câmera dada pela relação (2.20), e Y_2^* sua coordenada de referência. Neste caso, a coordenada de referência Y_2^* será zero, ou seja, o centro do alvo deverá estar sempre projetado no centro do plano-imagem da câmera. A regulação a zero da função (3.34) é então nosso objetivo de controle. Calculando a derivada de $e(t)$ com relação ao tempo, de acordo com o procedimento realizado em [9]

$$\dot{e}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{z_2} & \frac{e_{(3)}}{z_2} & 1 + e_{(3)}^2 \end{bmatrix}}_{\tilde{B}_1(z_2, e_{(3)})} T(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B_2} v_{z_C}^* \quad (3.35)$$

onde z_2 é a profundidade do ponto central do alvo com relação a R_C .

Para garantir a visibilidade da câmera, o seguinte limite é imposto

$$|e_{(3)}| \leq \beta \quad (3.36)$$

onde $\beta > 0$ é um escalar positivo. Em consequência, o ângulo η é limitado por

$$|\eta| \leq \eta_{max} = \arctan(\beta) < \frac{\pi}{2} \quad (3.37)$$

A profundidade z_2 do ponto central E_2 é definida por

$$z_2 = d_2 \cos(\eta) \quad (3.38)$$

que é limitada pela seguinte relação

$$z_2 \in [d_{2min} \cos(\eta_{max}), d_{2max}] \quad (3.39)$$

Visto que a matriz $\tilde{B}_1(z_2, e_{(3)})$ é sempre inversível, existe um difeomorfismo local entre os espaços de coordenadas das informações sensoriais e o espaço da tarefa $e(t)$. Na dinâmica da tarefa (3.35), considerar-se-á que a velocidade constante de referência $v_{z_C}^*$ é uma perturbação externa.

3.2.3 Tarefa: câmera orientada perpendicularmente aos 3 pontos do alvo parado

Para esta tarefa o robô deve ser capaz de orientar-se pelos 3 pontos do alvo parado, deslocando-se a uma velocidade de referência e parando a uma distância de referência do alvo. A câmera deve ficar perpendicular ao alvo, alinhada a partir do ponto central E_2 .

Para tal utilizaremos apenas as informações visuais, através do vetor $s = [Y_1 \ Y_2 \ Y_3]$, onde Y_i é a coordenada do ponto E_i , com $i = 1, 2, 3$, dados pela relação (2.20). Considerando um vetor de referência $s^* = [Y_1^* \ Y_2^* \ Y_3^*]'$, que corresponde à imagem projetada na configuração robô-alvo desejada, obtemos a expressão, a partir de

$$e(r(t), t) = \begin{bmatrix} e_{(1)}(r(t), t) \\ e_{(2)}(r(t), t) \\ e_{(3)}(r(t), t) \end{bmatrix} = s(r(t), t) - s^* = \begin{bmatrix} Y_1(t) - Y_1^* \\ Y_2(t) - Y_2^* \\ Y_3(t) - Y_3^* \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

Para obter um posicionamento da câmera centrado em relação ao alvo, as componentes do vetor s^* devem ser definidas como $Y_2^* = 0$ e $Y_3^* = -Y_1^*$.

Para garantir a visibilidade do alvo, caracterizam-se os limites

$$|e_{(i)}| \leq \beta \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.41)$$

onde $\beta > 0$ é um escalar positivo. Em consequência, o ângulo η é limitado pela mesma relação (3.37)

$$|\eta| \leq \eta_{max} = \arctan(\beta) < \frac{\pi}{2} \quad (3.42)$$

A profundidade z_2 do ponto central E_2 do alvo é a mesma que a apresentada na relação (3.38)

$$z_2 = d_2 \cos(\eta) \quad (3.43)$$

que é limitado pela seguinte relação

$$z_2 \in [d_{2min} \cos(\eta_{max}), d_{2max}] \quad (3.44)$$

Para calcular a derivada de $e(t)$ com relação ao tempo, será utilizado o formalismo apresentado em [9]

$$\dot{e}(r(t), t) = \dot{s}(r(t), t) = \frac{\partial s}{\partial r} \frac{dr}{dt} + \frac{\partial s}{\partial t} = \begin{bmatrix} \dot{Y}_1(t) \\ \dot{Y}_2(t) \\ \dot{Y}_3(t) \end{bmatrix} + \frac{\partial s}{\partial t} = L_{red}(z, e)T(t) + \frac{\partial s}{\partial t} \quad (3.45)$$

onde $L_{red}(z, e)$ representa o tensor reduzido de interação, tendo como expressão

$$L_{red}(z, e) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{z_1} & \frac{(e_{(1)}+Y_1^*)}{z_1} & 1 + (e_{(1)} + Y_1^*)^2 \\ -\frac{1}{z_2} & \frac{(e_{(2)}+Y_2^*)}{z_2} & 1 + (e_{(2)} + Y_2^*)^2 \\ -\frac{1}{z_3} & \frac{(e_{(3)}+Y_3^*)}{z_3} & 1 + (e_{(3)} + Y_3^*)^2 \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

A matriz $L_{red}(z, e)$ é uma matriz de rank pleno, e é função dos 3 pontos de profundidade do alvo $z = [z_1 \ z_2 \ z_3]'$ e dos erros da função-tarefa $e_{(i)}$, com $i = 1, 2, 3$. Por simplificação, a partir de agora o termo $L_{red}(z, e)$ será $L(z, e)$. O termo $\frac{\partial s}{\partial t}$ está associado ao movimento do alvo [9]. Portanto, para este caso, $\frac{\partial s}{\partial t} = 0$.

3.3 Resultados preliminares: robô e câmera orientados pelo ponto central do alvo parado

O objetivo é de determinar uma lei de controle e uma região de estabilidade associada à tarefa de controle do robô, de tal forma que as seguintes condições sejam satisfeitas:

- C1** A profundidade do ponto central E_2 do alvo é limitada porém desconhecida.
- C2** O erro $e_{(3)}$ entre o índice visual Y_2 e Y_2^* deve ficar limitado durante a realização da tarefa de forma que a visibilidade do alvo seja assegurada.
- C3** O tensor cinemático da câmera com relação ao ambiente T e sua aceleração \dot{T} devem ficar limitados para satisfazerem as restrições dinâmicas dos acionadores.

Considerando a relação 3.35, as condições **C1** e **C2** sobre a profundidade z_2 e o erro $e_{(3)}$ são descritas pelas relações (3.36) e (3.39). A condição **C3** corresponde às restrições dinâmicas dos atuadores, e pode ser descrita em termos do tensor cinemático T e sua derivada com relação ao tempo \dot{T}

$$\begin{aligned} -u_1 &\preceq T \preceq u_1 \\ -u_0 &\preceq \dot{T} \preceq u_0 \end{aligned} \quad (3.47)$$

Para abordar as 3 restrições acima, considera-se o seguinte estado aumentado

$$x(t) = \begin{bmatrix} e^{(3)}(t) \\ T(t) \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

e o sistema completo torna-se

$$\dot{x}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \tilde{B}_1(z_2, e^{(3)}) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbb{A}(z_2, x)} x(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}}_{\mathbb{B}} \dot{T}(t) + \begin{bmatrix} \tilde{B}_2 \\ 0 \end{bmatrix} v_{zC}^* \quad (3.49)$$

onde \dot{T} é o vetor de controle. A matriz \mathbb{A} é uma matriz incerta, e a matriz \mathbb{B} é uma matriz constante.

Deve ser lembrado que o objetivo da tarefa de controle é de conduir o robô em direção ao alvo com uma velocidade de referência v_{zC}^* , controlando a câmera de tal forma que ela fique apontada para o alvo. Isto significa que, dentro do sistema aumentado (3.49), para satisfazer este objetivo, a velocidade da câmera $T_{(2)}$ deve atingir a velocidade de referência v_{zC}^* . Pode-se definir o erro de rastreamento ε como

$$\varepsilon(t) = x(t) - r = \begin{bmatrix} s_{yC} \\ s_{zC} - v_{zC}^* \\ e^{(3)} \\ T_{(1)} \\ T_{(2)} - v_{zC}^* \\ T_{(3)} \end{bmatrix}$$

onde $r = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ v_{zC}^* \ 0]'$ é um vetor constante de referência. A partir do sistema (3.49), a derivada do erro ε com relação ao tempo é obtida, resultando no seguinte sistema

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}(t) &= \mathbb{A}(z_2, \varepsilon)\varepsilon(t) + \mathbb{B}\dot{T}(t) + \mathbb{A}(z_2, \varepsilon)r + \begin{bmatrix} \tilde{B}_2 \\ 0 \end{bmatrix} v_{zC}^* \\ &= \mathbb{A}(z_2, \varepsilon)\varepsilon(t) + \mathbb{B}\dot{T}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{e^{(2)}}{z_2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} v_{zC}^* \end{aligned} \quad (3.50)$$

Duas matrizes constantes são então definidas

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &= \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbb{C} &= \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.51)$$

Pode-se então simplificar a equação (3.50) em substituindo o termo $\mathbb{A}(z_2, \varepsilon)$ por

$$\mathbb{A}(z_2, \varepsilon)\varepsilon(t) = \left[\mathbb{R}'\bar{\mathbb{B}}_1(z_2)\mathbb{C} + \mathbb{R}'T_{(2)}\bar{\mathbb{B}}_2(z_2)\mathbb{R} + \mathbb{R}T_{(3)}D_{(e_{(3)})}\mathbb{R} \right] \varepsilon(t) - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{e_{(3)}}{z_2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} v_{z_C}^* \quad (3.52)$$

onde as matrizes $\bar{\mathbb{B}}_1(z_2)$, $\bar{\mathbb{B}}_2(z_2)$ e $D_{(e_{(3)})}$ são definidas como

$$\bar{\mathbb{B}}_1(z_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{z_2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbb{B}}_2(z_2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{z_2} \end{bmatrix} \quad D_{(e_{(3)})} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_{(3)} \end{bmatrix}$$

Pode-se então reescrever o sistema (3.50) na forma seguinte

$$\dot{\varepsilon}(t) = \left[\mathbb{R}'\bar{\mathbb{B}}_1(z_2)\mathbb{C} + \mathbb{R}'T_{(2)}\bar{\mathbb{B}}_2(z_2)\mathbb{R} + \mathbb{R}T_{(3)}D_{(e_{(3)})}\mathbb{R} \right] \varepsilon(t) + \mathbb{B}\dot{T}(t) \quad (3.53)$$

O objetivo de controle para o sistema (3.53) é de determinar uma lei de controle $\dot{T}(t)$ levando em conta a incerteza em z_2 , o erro do índice visual $e_{(3)}$ e os limites de velocidade e aceleração da câmera, T e \dot{T} . Mais precisamente, nosso objetivo consiste em obter uma lei de controle saturante por realimentação de estados para que a velocidade da câmera na direção do eixo z_C , $T_{(2)}$, possa atingir seu valor de referência $v_{z_C}^*$

$$\dot{T}(t) = \text{sat}_{u_0}(\mathbb{K}\varepsilon(t)) \quad (3.54)$$

O sistema (3.53), utilizando o controle (3.54) pode ser escrito

$$\dot{\varepsilon}(t) = \left[\mathbb{R}'\bar{\mathbf{B}}_1(z_2)\mathbb{C} + \mathbb{R}'T_{(2)}\bar{\mathbf{B}}_2(z_2)\mathbb{R} + \mathbb{R}T_{(3)}D_{(e_{(3)})}\mathbb{R} \right] \varepsilon(t) + \mathbb{B}sat_{u_0}(\mathbb{K}\varepsilon(t)) \quad (3.55)$$

As restrições (3.36) e (3.39) podem ser escritas com relação ao estado ε do sistema em malha fechada (3.55). Assim, o estado ε deve pertencer ao poliedro $\Omega(\varepsilon)$

$$\Omega(\varepsilon) = \left\{ - \begin{bmatrix} \beta \\ u_{1(1)} \\ u_{1(2)} - v_{zC}^* \\ u_{1(3)} \end{bmatrix} \preceq \begin{bmatrix} \varepsilon_{(3)} \\ \varepsilon_{(4)} \\ \varepsilon_{(5)} \\ \varepsilon_{(6)} \end{bmatrix} \preceq \begin{bmatrix} \beta \\ u_{1(1)} \\ u_{1(2)} - v_{zC}^* \\ u_{1(3)} \end{bmatrix} \right\} \quad (3.56)$$

O problema que deseja-se resolver resume-se como

Problema 3.3.1 *Determinar um ganho \mathbb{K} e uma região ε maior possível, tal que*

- *A estabilidade assintótica do sistema em malha fechada (3.55) é garantida mesmo sob a presença da incerteza sobre a profundidade do ponto central do alvo.*
- *As restrições sobre o erro do índice visual e velocidade da câmera sejam satisfeitas.*

Considera-se a não-linearidade

$$\phi(\mathbb{K}\varepsilon) = sat_{u_0}(\mathbb{K}\varepsilon) - \mathbb{K}\varepsilon \quad (3.57)$$

que satisfaz o lemma 3.1.1. A partir da definição da não-linearidade $\phi(\mathbb{K}\varepsilon)$, o sistema em malha fechada pode ser escrito como

$$\dot{\varepsilon}(t) = \left[\mathbb{R}'\bar{\mathbf{B}}_1(z_2)\mathbb{C} + \mathbb{R}'T_{(2)}\bar{\mathbf{B}}_2(z_2)\mathbb{R} + \mathbb{R}T_{(3)}D_{(e_{(3)})}\mathbb{R} \right] \varepsilon(t) + \mathbb{B}\phi(\mathbb{K}\varepsilon(t)) \quad (3.58)$$

É sabido que a profundidade z_2 , definida por (3.38) é limitada pela relação (3.39). Pode-se então definir um parâmetro incerto p_1

$$\frac{1}{z_2} = p_1 \quad (3.59)$$

onde p_1 satisfaz $p_{1min} \leq p_1 \leq p_{1max}$, com

$$\begin{aligned} p_{1max} &= \frac{1}{d_{1min} \cos(\eta_{max})} \\ p_{1min} &= \frac{1}{d_{1max}} \end{aligned} \quad (3.60)$$

As matrizes $\bar{B}_1(z_2)$ e $\bar{B}_2(z_2)$ que intervêm no sistema (3.55) dependem de apenas um parâmetro incerto p_1 . A partir da definição de p_1 , e de seus limites p_{1max} e p_{1min} , conclui-se que as matrizes $\bar{B}_1(z_2)$ e $\bar{B}_2(z_2)$ satisfazem

$$\begin{aligned} \bar{B}_1(z_2) &\in \{\bar{B}_{1j}, j = 1, 2\} \\ \bar{B}_2(z_2) &\in \{\bar{B}_{2j}, j = 1, 2\} \end{aligned} \quad (3.61)$$

O sistema em malha fechada (3.58) pode ser colocado em termos de uma representação politépica

$$\dot{\varepsilon}(t) = \left(\sum_{j=1}^2 \lambda_j (\mathbb{R}' \bar{B}_{1j} \mathbb{C} + \mathbb{R}' T_{(2)} \bar{B}_{2j} \mathbb{R}) + \mathbb{R}' T_{(3)} D(e_{(3)}) \mathbb{R} + \mathbb{B} \mathbb{K} \right) \varepsilon(t) + \mathbb{B} \phi(\mathbb{K} \varepsilon) \quad (3.62)$$

com $\sum_{j=1}^2 \lambda_j = 1, \lambda_j \geq 0$

Condições teóricas

Para resolver o problema 3.3.1, será utilizada a teoria de Lyapunov [31]. Propõe-se, assim, o seguinte teorema

Teorema 3.3.1 *Se existe uma função definida positiva $V(\varepsilon)$, ($V(\varepsilon) > 0, \forall \varepsilon \neq 0$ e $V(0) = 0$), um ganho \mathbb{K} , uma matriz diagonal definida positiva M , uma matriz \mathbb{G} e um escalar positivo γ satisfazendo, para todos os valores admissíveis da profundidade z_2*

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \varepsilon} \left[(\mathbb{R}' \bar{B}_1(z_2) \mathbb{C} + \mathbb{R}' (T_{(2)} \bar{B}_2(z_2) + T_{(3)} D(e_{(3)})) \mathbb{R} + \mathbb{B} \mathbb{K}) \varepsilon + \mathbb{B} \phi(\mathbb{K} \varepsilon) \right] \\ - 2\phi(\mathbb{K} \varepsilon)' M (\phi(\mathbb{K} \varepsilon) + \mathbb{G} \varepsilon) < 0 \end{aligned} \quad (3.63)$$

$$\mathcal{W}(\varepsilon) - \varepsilon' (\mathbb{K}_{(i)} - \mathbb{G}_{(i)})' \frac{1}{u_{0(i)}^2} (\mathbb{K}_{(i)} - \mathbb{G}_{(i)}) \varepsilon \geq 0 \quad \forall i = 1, 2, 3 \quad (3.64)$$

$$\gamma V(\boldsymbol{\varepsilon}) - \boldsymbol{\varepsilon}' \mathbb{R}'_{(3)} \frac{1}{\beta^2} \mathbb{R}_{(3)} \boldsymbol{\varepsilon} \geq 0 \quad (3.65)$$

$$\gamma V(\boldsymbol{\varepsilon}) - \boldsymbol{\varepsilon}' \mathbb{C}'_{(i)} \frac{1}{u_{1(i)}^2} \mathbb{C}_{(2)} \boldsymbol{\varepsilon} \geq 0 \quad \forall i = 1, 3 \quad (3.66)$$

$$\gamma V(\boldsymbol{\varepsilon}) - \boldsymbol{\varepsilon}' \mathbb{C}_{(2)} \frac{1}{(u_{1(2)} - v_{z_c}^*)} \mathbb{C}_{(2)} \boldsymbol{\varepsilon} \geq 0 \quad (3.67)$$

então o ganho \mathbb{K} e a região de estabilidade

$$\boldsymbol{\varepsilon}(V, \gamma) = \{V(\boldsymbol{\varepsilon}) \leq \gamma^{-1}\} \quad (3.68)$$

são as soluções para o problema 3.3.1.

□

A seguir o teorema 3.3.1 será demonstrado. Tal teorema já foi demonstrado em [21], porém para que o leitor melhor compreenda o método e a linha de raciocínio utilizados, a demonstração será refeita. Nos próximos casos estudados ela será omitida, com exceção do teorema 4.3.1, por tratar-se da contribuição desta dissertação.

Demonstração. Considera-se uma função definida positiva $V(\boldsymbol{\varepsilon})$, ($V(\boldsymbol{\varepsilon}) > 0$, $\forall \boldsymbol{\varepsilon} \neq 0$ e $V(0) = 0$). Deseja-se demonstrar que a derivada desta função com relação ao tempo $\dot{V}(\boldsymbol{\varepsilon})$ é estritamente negativa ao longo das trajetórias do sistema em malha fechada (3.58) para todos os valores admissíveis da profundidade z_2 . Para que a condição de setor (3.18) do Lema 3.1.1 seja satisfeita, deve-se demonstrar que a região $\boldsymbol{\varepsilon}(V, \gamma)$ está contida dentro do domínio S_0 definido em (3.17): $\boldsymbol{\varepsilon}(V, \gamma) \subset S(u_0)$. Nota-se que se $\boldsymbol{\varepsilon} \in S(u_0)$, pode-se escrever [6]

$$\boldsymbol{\varepsilon}' (\mathbb{K}_{(i)} - \mathbb{G}_{(i)})' (\mathbb{K}_{(i)} - \mathbb{G}_{(i)}) \boldsymbol{\varepsilon} \leq u_{0(i)}^2 \quad \forall i = 1, 2, 3 \quad (3.69)$$

ou ainda

$$\boldsymbol{\varepsilon}' (\mathbb{K}_{(i)} - \mathbb{G}_{(i)})' \frac{1}{u_{0(i)}^2} (\mathbb{K}_{(i)} - \mathbb{G}_{(i)}) \boldsymbol{\varepsilon} \leq 1 \quad \forall i = 1, 2, 3 \quad (3.70)$$

A inclusão de $\varepsilon(V, \gamma)$ dentro de $S(u_0)$ deve satisfazer a seguinte desigualdade

$$\varepsilon'(\mathbb{K}_{(i)} - \mathbb{G}_{(i)})' \frac{1}{u_{0(i)}^2} (\mathbb{K}_{(i)} - \mathbb{G}_{(i)}) \varepsilon \leq \gamma \mathcal{W}(\varepsilon) \leq 1 \quad \forall i = 1, 2, 3 \quad (3.71)$$

Então, a satisfação da equação (3.64) garante a inclusão de $\varepsilon(V, \gamma)$ dentro de $S(u_0)$. Assim a não-linearidade $\phi(\mathbb{K}\varepsilon)$ satisfaz a equação (3.18). Tem-se

$$\dot{V}(\varepsilon) \leq \dot{V}(\varepsilon) - 2\phi(\mathbb{K}\varepsilon)'M(\phi(\mathbb{K}\varepsilon) + \mathbb{G}\varepsilon)$$

Por definição, tem-se que

$$\dot{V}(\varepsilon) = \frac{\partial V}{\partial \varepsilon} \left[(\mathbb{R}'\bar{\mathbb{B}}_1(z_2)\mathbb{C} + \mathbb{R}'(T_2)\bar{\mathbb{B}}_2(z_2) + T_3)D(e_{(3)}) \mathbb{R} + \mathbb{B}\mathbb{K} \right] \varepsilon + \mathbb{B}\phi(\mathbb{K}\varepsilon)$$

Pode-se então concluir que para todo $\varepsilon \in \varepsilon(V, \gamma)$, a satisfação da relação (3.63) implica

$$\dot{V}(\varepsilon) \leq \dot{V}(\varepsilon) - 2\phi(\mathbb{K}\varepsilon)'M(\phi(\mathbb{K}\varepsilon) + \mathbb{G}\varepsilon) < 0$$

Então pode-se verificar que para todo $\varepsilon \in \varepsilon(V, \gamma)$, $\varepsilon \neq 0$, $\dot{V}(\varepsilon) < 0$ ao longo das trajetórias do sistema em malha fechada (3.58).

A satisfação das relações (3.65), (3.66) e (3.67) significa que o conjunto $\varepsilon(V, \gamma)$ está incluído dentro do poliedro $\Omega(\varepsilon)$ definido em (3.56).

Concluimos, assim, que o conjunto $\varepsilon(V, \gamma)$ é uma região de estabilidade assintótica para o sistema (3.58). Visto isto, o ganho \mathbb{K} e a região $\varepsilon(V, \gamma)$ são as soluções do problema 3.3.1. \square

O teorema 3.3.1 fornece uma condição suficiente para resolver o problema 3.3.1. Porém, tais condições não são construtivas, e não permitem obter um ganho \mathbb{K} estabilizante. Uma das dificuldades em aplicar este teorema está na escolha de uma função de Lyapunov $V(\varepsilon)$, afim de obter as condições construtivas. Uma escolha adequada é a função quadrática

$$V(\varepsilon) = \varepsilon'P\varepsilon \quad (3.72)$$

com $P = P' > 0$.

Considerando o teorema 3.3.1, a função $V(\varepsilon)$ definida em (3.72) e o sistema politópico (3.62), pode-se escrever a seguinte proposição

Proposição 3.3.1 *Se existem duas matrizes simétricas definidas positivas $W \in \mathfrak{R}^{6 \times 6}$, $R_1 \in \mathfrak{R}^{3 \times 3}$, uma matriz diagonal definida positiva $S \in \mathfrak{R}^{3 \times 3}$, duas matrizes $Y \in \mathfrak{R}^{3 \times 6}$ e $Z \in \mathfrak{R}^{3 \times 3}$, dois escalares γ e η satisfazendo*

$$\begin{bmatrix} WC' \bar{B}'_{1j} \mathbb{R} + \mathbb{R}' \bar{B}_{1j} CW + \mathbb{B}Y + Y' \mathbb{B}' + \mathbb{R}'(R_1 + \eta u_{1(3)}^2 \beta^2 U) \mathbb{R} & \star & \star & \star \\ & u_{1(2)} \bar{B}_{2j} \mathbb{R} W & -R_1 & \star \\ & \mathbb{R} W & 0 & -\eta I \\ & S \mathbb{B}' - Z & 0 & 0 & -2S \end{bmatrix} < 0 \quad (3.73)$$

$$\begin{bmatrix} W & \star \\ Y_{(i)} - Z_{(i)} & \gamma u_{0(i)}^2 \end{bmatrix} \geq 0 \quad \forall i = 1, 2, 3 \quad (3.74)$$

$$\begin{bmatrix} W & \star \\ \mathbb{R}_{(3)} W & \gamma \beta^2 \end{bmatrix} \geq 0 \quad (3.75)$$

$$\begin{bmatrix} W & \star \\ \mathbb{C}_{(i)} W & \gamma u_{1(i)}^2 \end{bmatrix} \geq 0 \quad \forall i = 1, 3 \quad (3.76)$$

$$\begin{bmatrix} W & \star \\ \mathbb{C}_{(2)} W & \gamma (u_{1(2)} - v_{z_c}^*)^2 \end{bmatrix} \geq 0 \quad (3.77)$$

com a matriz $U = \text{Diag}(0, 0, 1)$, então o ganho $\mathbb{K} = YW^{-1}$ e o conjunto

$$\varepsilon(W, \gamma) = \{\varepsilon' W^{-1} \varepsilon \leq \gamma^{-1}\} \quad (3.78)$$

são soluções do problema 3.3.1.

A seguir a proposição 3.3.1 será demonstrada. Assim como o teorema 3.3.1 tal proposição já foi demonstrada em [21], porém para que o leitor melhor compreenda o método e a linha de raciocínio

utilizados, a demonstração será refeita. Nos próximos casos estudados ela será omitida, com exceção da proposição 4.3.1, por tratar-se da contribuição desta dissertação.

Demonstração. A satisfação da relação (3.74) garante que o elipsóide $\varepsilon(W, \gamma)$ definido em (3.78) está incluído no conjunto $S(u_0)$. Pode-se então reescrever a relação (3.64) do teorema 3.3.1, com $V(\varepsilon) = \varepsilon' P \varepsilon$

$$\varepsilon' \gamma P \varepsilon - \varepsilon' (\mathbb{K}_{(i)} - \mathbb{G}_{(i)})' \frac{1}{u_{0(i)}^2} (\mathbb{K}_{(i)} - \mathbb{G}_{(i)}) \varepsilon \geq 0 \quad \forall i = 1, 2, 3 \quad (3.79)$$

Fazendo $P = W^{-1}$, $\mathbb{G} = ZW^{-1}$ e $\mathbb{K} = YW^{-1}$, depois de utilizar o complemento de Schur [6] na relação (3.79), tem-se

$$\begin{bmatrix} W^{-1} & \star \\ Y_{(i)}W^{-1} - Z_{(i)}W^{-1} & \gamma u_{0(i)}^2 \end{bmatrix} \geq 0 \quad \forall i = 1, 2, 3 \quad (3.80)$$

Multiplicando a relação acima à esquerda e à direita por $\begin{bmatrix} W & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, obtemos diretamente a condição (3.74). Assim, para todo $\varepsilon \in \varepsilon(W, \gamma)$, a não-linearidade $\phi(\mathbb{K}\varepsilon)$ satisfaz a condição de setor (3.18). Utilizando o mesmo formalismo, com as relações (3.65), (3.66) e (3.67) do teorema 3.3.1, pode-se mostrar que a satisfação das condições (3.75), (3.76) e (3.77) assegura a inclusão do elipsóide $\varepsilon(W, \gamma)$ dentro do conjunto poliedral $\Omega(\varepsilon)$ definido em (3.56).

Será estudada agora a derivada com relação ao tempo da função quadrática $V(\varepsilon) = \varepsilon' W^{-1} \varepsilon$, ao longo das trajetórias do sistema (3.62), onde $\dot{V}(\varepsilon)$ é escrito como

$$\begin{aligned} \dot{V}(\varepsilon) = & \varepsilon' W^{-1} \left[\sum_{j=1}^2 \lambda (\mathbb{R}' \bar{B}_{1j} C + \mathbb{R}' T_{(2)} \bar{B}_{2j} \mathbb{R}) + \mathbb{R}' T_{(3)} D(e_{(3)}) \mathbb{R} + \mathbb{B} Y W^{-1} \right] \varepsilon \\ & + \varepsilon' \left[\sum_{j=1}^2 \lambda (C' \bar{B}'_{1j} \mathbb{R} + \mathbb{R} T_{(2)} \bar{B}'_{2j} \mathbb{R}) + \mathbb{R}' T_{(3)} D(e_{(3)}) \mathbb{R} + W^{-1} Y' \mathbb{B}' \right] W^{-1} \varepsilon \\ & + 2\varepsilon' W^{-1} \mathbb{B} \phi(\mathbb{K}\varepsilon) \end{aligned} \quad (3.81)$$

Fazendo $M = S^{-1}$ e utilizando a relação (3.18), tem-se

$$\begin{aligned} \dot{V}(\boldsymbol{\varepsilon}) \leq & 2\boldsymbol{\varepsilon}'W^{-1} \left[\sum_{j=1}^2 \lambda \left(\mathbb{R}'\bar{B}_{1j}\mathbb{C} + \mathbb{R}'T_{(2)}\bar{B}_{2j}\mathbb{R} \right) + \mathbb{R}'T_{(3)}D(e_{(3)})\mathbb{R} + \mathbb{B}YW^{-1} \right] \boldsymbol{\varepsilon} \\ & + 2\boldsymbol{\varepsilon}'W^{-1}\mathbb{B}\phi(\mathbb{K}\boldsymbol{\varepsilon}) - 2\phi(\mathbb{K}\boldsymbol{\varepsilon})'S^{-1} \left(\phi(\mathbb{K}\boldsymbol{\varepsilon}) + ZW^{-1}\boldsymbol{\varepsilon} \right) \end{aligned} \quad (3.82)$$

ou de maneira equivalente

$$\dot{V}(\boldsymbol{\varepsilon}) \leq \sum_{j=1}^2 \lambda_j \mathcal{L}_j(\boldsymbol{\varepsilon}) \quad (3.83)$$

onde $\mathcal{L}_j(\boldsymbol{\varepsilon})$ é

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_j(\boldsymbol{\varepsilon}) = & 2\boldsymbol{\varepsilon}'W^{-1} \left(\mathbb{R}'\bar{B}_{1j}\mathbb{C} + \mathbb{R}'T_{(2)}\bar{B}_{2j}\mathbb{R} + \mathbb{R}'T_{(3)}D(e_{(3)})\mathbb{R} + \mathbb{B}YW^{-1} \right) \boldsymbol{\varepsilon} \\ & + 2\boldsymbol{\varepsilon}'W^{-1}\mathbb{B}\phi(\mathbb{K}\boldsymbol{\varepsilon}) - 2\phi(\mathbb{K}\boldsymbol{\varepsilon})'S^{-1} \left(\phi(\mathbb{K}\boldsymbol{\varepsilon}) + ZW^{-1}\boldsymbol{\varepsilon} \right) \end{aligned}$$

Utilizando argumentos de convexidade, pode-se mostrar que a parte à direita da desigualdade (3.82) ou (3.83) é definida positiva se verificamos que $\mathcal{L}(\boldsymbol{\varepsilon}) < 0$, seja

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_j(\boldsymbol{\varepsilon}) = & 2\boldsymbol{\varepsilon}'W^{-1} \left(\mathbb{R}'\bar{B}_{1j}\mathbb{C} + \mathbb{R}'T_{(2)}\bar{B}_{2j}\mathbb{R} + \mathbb{R}'T_{(3)}D(e_{(3)})\mathbb{R} + \mathbb{B}YW^{-1} \right) \boldsymbol{\varepsilon} \\ & + 2\boldsymbol{\varepsilon}'W^{-1}\mathbb{B}\phi(\mathbb{K}\boldsymbol{\varepsilon}) - 2\phi(\mathbb{K}\boldsymbol{\varepsilon})'S^{-1} \left(\phi(\mathbb{K}\boldsymbol{\varepsilon}) + ZW^{-1}\boldsymbol{\varepsilon} \right) < 0 \end{aligned} \quad (3.84)$$

Serão estudados agora os termos $2\boldsymbol{\varepsilon}'W^{-1}\mathbb{R}'T_{(2)}\bar{B}_{2j}\mathbb{R}\boldsymbol{\varepsilon}$ e $2\boldsymbol{\varepsilon}'W^{-1}\mathbb{R}'T_{(3)}D(e_{(3)})\mathbb{R}\boldsymbol{\varepsilon}$. Deve-se lembrar que das relações (3.36) e (3.47) tem-se

$$\begin{aligned} T_{(2)}^2 & \preceq u_{1(2)}^2 \\ T_{(3)}^2 & \preceq u_{1(3)}^2 \\ e_{(3)}^2 & \preceq \beta^2 \end{aligned}$$

O termo $2\boldsymbol{\varepsilon}'W^{-1}\mathbb{R}'T_{(2)}\bar{B}_{2j}\mathbb{R}\boldsymbol{\varepsilon}$ pode ser majorado da seguinte maneira (vide anexo A.3)

$$\begin{aligned} 2\boldsymbol{\varepsilon}'W^{-1}\mathbb{R}'T_{(2)}\bar{B}_{2j}\mathbb{R}\boldsymbol{\varepsilon} & \leq \boldsymbol{\varepsilon}' \left(W^{-1}\mathbb{R}'R_1\mathbb{R}W^{-1} \right) \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon}' \left(\mathbb{R}'\bar{B}'_{2j}T_{(2)}^2R_1^{-1}\bar{B}_{2j}\mathbb{R} \right) \boldsymbol{\varepsilon} \\ & \leq \boldsymbol{\varepsilon}' \left(W^{-1}\mathbb{R}'R_1\mathbb{R}W^{-1} + u_{1(2)}^2\mathbb{R}'\bar{B}'_{2j}R_1^{-1}\bar{B}_{2j}\mathbb{R} \right) \boldsymbol{\varepsilon} \end{aligned} \quad (3.85)$$

onde $R_1 = R_1' > 0$.

Nota-se que $D(e_{(3)}) = e_{(3)}U$, com $U = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Então, o termo $2\varepsilon'W^{-1}\mathbb{R}'T_{(3)}D(e_{(3)})\mathbb{R}\varepsilon$

pode ser majorado como

$$\begin{aligned} 2\varepsilon'W^{-1}\mathbb{R}'T_{(3)}e_{(3)}U\mathbb{R}\varepsilon &\leq \varepsilon W^{-1}\mathbb{R}'T_{(3)}e_{(3)}U\eta e_{(3)}U'T_{(3)}\mathbb{R}W^{-1}\varepsilon + \varepsilon'\mathbb{R}'\eta^{-1}\mathbb{R}\varepsilon \\ &\leq \varepsilon W^{-1}\mathbb{R}'\eta T_{(3)}^2 e_{(3)}^2 U U'\mathbb{R}W^{-1}\varepsilon + \eta^{-1}\varepsilon'\mathbb{R}'\mathbb{R}\varepsilon \\ &\leq \varepsilon W^{-1}\mathbb{R}'\eta u_{1(3)}^2 \beta^2 U\mathbb{R}W^{-1}\varepsilon + \eta^{-1}\varepsilon'\mathbb{R}'\mathbb{R}\varepsilon \end{aligned} \quad (3.86)$$

com $\eta > 0$ e $UU' = U$.

A partir das majorações (3.85) e (3.86) pode-se reescrever $\mathcal{L}_j(\varepsilon)$ com

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_j(\varepsilon) \leq & \varepsilon'(W^{-1}\mathbb{R}'\bar{B}_{1j}C + C\bar{B}'_{1j}\mathbb{R}W^{-1} + W^{-1}\mathbb{B}YW^{-1} + W^{-1}Y'\mathbb{B}W^{-1} \\ & + u_{1(2)}^2\mathbb{R}'\bar{B}'_{2j}R_1^{-1}\bar{B}_{2j}\mathbb{R} + W^{-1}\mathbb{R}'R_1\mathbb{R}W^{-1} + W^{-1}\mathbb{R}'\eta u_{1(3)}^2 \beta U\mathbb{R}W^{-1} + \eta^{-1}\mathbb{R}'\mathbb{R})\varepsilon \\ & + 2\varepsilon'W^{-1}\mathbb{B}\phi(\mathbb{K}\varepsilon) - 2\phi(\mathbb{K}\varepsilon)'S^{-1}(\phi(\mathbb{K}\varepsilon) + ZW^{-1}\varepsilon) \end{aligned} \quad (3.87)$$

e a parte à direita da desigualdade (3.87) pode ser escrita como

$$\begin{bmatrix} \varepsilon'W^{-1} & \phi(\mathbb{K}\varepsilon)'S^{-1} \end{bmatrix} \mathcal{M} \begin{bmatrix} W^{-1}\varepsilon \\ S^{-1}\phi(\mathbb{K}\varepsilon) \end{bmatrix} \quad (3.88)$$

com

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} \mathbb{R}'\bar{B}_{1j}\mathbb{R} + \mathbb{R}'\bar{B}_{1j}CW + \mathbb{B}Y + Y'\mathbb{B} + \mathbb{R}'(R_1 + \eta u_{1(3)}^2 \beta^2 U)\mathbb{R} & \star & \star & \star \\ u_{1(2)}\bar{B}_{2j}\mathbb{R}W & -R_1 & \star & \star \\ \mathbb{R}W & 0 & -\eta I & \star \\ S\mathbb{B}' - Z & 0 & 0 & -2S \end{bmatrix} < 0 \quad (3.89)$$

que corresponde à condição (3.73). A satisfação da condição (3.73) permite verificar que $\dot{V}(\varepsilon) < 0$ ao longo das trajetórias do sistema (3.62). Conclui-se então que $\dot{V}(\varepsilon)$ é negativa ao longo das trajetórias do sistema (3.62), $\forall \varepsilon \in \varepsilon(W, \gamma)$, $\varepsilon \neq 0$. O elipsóide $\varepsilon(W, \gamma)$ é então uma região de estabilidade

assintótica para o sistema (3.62), e por consequência, o mesmo para o sistema (3.58), para todos os valores admissíveis de z_2 .

Problema de otimização

Baseado nos resultados da seção anterior, será apresentado um método de otimização convexa para obter o ganho de realimentação de estados que assegure a estabilidade local do sistema em malha fechada (3.58). Deve-se enfatizar que as relações (3.73), (3.74), (3.75), (3.76) e (3.77) da proposição 3.3.1 estão sob a forma de desigualdades lineares matriciais (LMIs). O objetivo é obter uma lei de controle por realimentação de estados de tal forma que a base de atração da origem associada ao sistema (3.58) seja maximizada, ou seja, encontrar um ganho \mathbb{K} tal que a região de estabilidade assintótica $\varepsilon(W, \gamma)$ seja a maior possível, levando em conta todos os critérios apresentados. Propõe-se, então, o seguinte problema de otimização convexa

$$\begin{aligned} & \min_{W, R_1, Y, Z, S, \gamma, \eta} \gamma + \delta + \sigma \\ & \text{sujeito às condições (3.73), (3.74), (3.75), (3.76) e (3.77)} \\ & \begin{bmatrix} \sigma I & * \\ Y & I \end{bmatrix} \geq 0 \\ & \begin{bmatrix} \delta I & * \\ I & W \end{bmatrix} \geq 0 \end{aligned} \tag{3.90}$$

As duas últimas condições foram adicionadas para minimizar o traço de W^{-1}

$$Tr(W^{-1}) \leq \delta$$

e a norma de Y

$$Y'Y \leq \sigma I$$

para melhorar o condicionamento numérico das soluções de \mathbb{K} e W .

Resultados numéricos

As coordenadas do alvo com relação ao ambiente, para este caso, são

$$E_1(2.65, 0.5); \quad E_2(2.65, 0) \quad E_3(2.65, -0.5)$$

sendo os valores em metros.

A distância entre o robô e a câmera deve pertencer ao intervalo $d_1 \in [5, 20]$, em metros. O índice visual de referência do ponto central E_2 é igual a zero ($Y_2^* = 0$). Para garantir a visibilidade do alvo, considerou-se $\beta = 0.4$, e o ângulo entre a direita (E_1E_3) e o eixo óptico da câmera z_C : $\alpha \in [-\pi + \frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}]$. A partir das relações (3.59) e (3.60), as matrizes $\bar{B}_1(z_2)$ e $\bar{B}_2(z_2)$ pertencem a dois polítopos de matrizes

$$\begin{aligned} \bar{B}_1 &= \left\{ \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0.05 & 0 & 1 \end{array} \right], \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0.2154 & 0 & 1 \end{array} \right] \right\} \\ \bar{B}_2 &= \left\{ \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.05 \end{array} \right], \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2154 \end{array} \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.91)$$

Definindo as restrições dinâmicas do tensor cinemático do robô em questão $u_1 = [1 \quad 1 \quad 0.5]'$, assim como a do controle $u_0 = [4 \quad 4 \quad 5]'$. Utilizando o pacote **lmitool** do **SciLab**, o seguinte ganho \mathbb{K} foi obtido

$$\mathbb{K} = \begin{bmatrix} -0.2899035 & 0 & 0.1025523 & -0.6717995 & 0 & 0.0717303 \\ 0 & -0.5236935 & 0 & 0 & -2.1137568 & 0 \\ -0.0459998 & 0 & -2.2831189 & 0.2441096 & 0 & -2.5820958 \end{bmatrix} \quad (3.92)$$

3.4 Resultados preliminares: câmera orientada perpendicularmente aos 3 pontos do alvo parado

Considerar-se-á agora um caso particular, onde o alvo é fixo, ou seja, $v_E = 0$ e $\omega_E = 0$. O objetivo de controle é muito parecido com o do caso anterior, ou seja, determinar uma lei de controle e uma região de estabilidade associada à tarefa de controle do robô, de tal forma que as seguintes condições sejam satisfeitas:

- C1** O vetor de profundidades dos pontos do alvo E_1, E_2 e E_3, z_1, z_2 e z_3 é desconhecido porém limitado.
- C2** Os erros $e_{(i)}$ entre o índice visual Y_i e a referência Y_i^* devem ficar limitados durante a realização da tarefa de forma que a visibilidade do alvo seja assegurada.
- C3** O tensor cinemático da câmara com relação ao ambiente T e sua aceleração \dot{T} devem ficar limitados para satisfazerem as restrições dinâmicas dos acionadores.

A relação (3.45) pode ser simplificada como

$$\dot{e} = \dot{s} = L(z, e)T \quad (3.93)$$

Na verdade, o termo $\frac{\partial s}{\partial t} = 0$, visto que $v_E = 0$ e $\omega_E = 0$.

Para assegurar o objetivo definido acima, considera-se o estado aumentado

$$\xi(t) = \begin{bmatrix} e(t) \\ T(t) \end{bmatrix} \quad (3.94)$$

e o sistema completo torna-se

$$\dot{\xi} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & L(z, e) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbb{A}(z, \xi)} \xi(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}}_{\mathbb{B}} \dot{T}(t) \quad (3.95)$$

onde \dot{T} é o vetor de controle. Para satisfazer às restrições (3.47), pode-se definir uma lei de controle de realimentação de estados saturante

$$\dot{T}(t) = \text{sat}_{u_r}(\mathbb{K}\xi(t)) \quad (3.96)$$

Assim, tem-se o sistema em malha fechada

$$\dot{\xi}(t) = \mathbb{A}(z, \xi)\xi(t) + \mathbb{B}\text{sat}_{u_0}(\mathbb{K}\xi(t)) \quad (3.97)$$

O estado ξ deve estar incluído no poliedro $\Omega(\xi)$ de tal forma a respeitar as restrições (3.47) e (3.41)

$$\Omega(\xi) = \left\{ - \begin{bmatrix} \beta_{13} \\ u_1 \end{bmatrix} \preceq_{\xi} \preceq \begin{bmatrix} \beta_{13} \\ u_1 \end{bmatrix} \right\} \quad (3.98)$$

O problema que deseja-se resolver diz respeito ao sistema (3.97), e pode ser descrito como:

Problema 3.4.1 *Determinar um ganho \mathbb{K} e uma região de estabilidade maior o possível, tal que*

- *A estabilidade assintótica do sistema em malha fechada (3.97) é garantida mesmo sob a presença da incerteza sobre as profundidades.*
- *As restrições sobre o erro do índice visual e velocidade da câmera sejam satisfeitas.*

Condições teóricas

Utilizando a mesma não-linearidade $\phi(\mathbb{K}\xi(t))$ definida em (3.57), o sistema (3.97) pode ser escrito como

$$\dot{\xi} = (\mathbb{A}(z, \xi) + \mathbb{B}\mathbb{K}\xi(t) + \mathbb{B}\phi(\mathbb{K}\xi(t))) \quad (3.99)$$

Teorema 3.4.1 *Se existe uma função definida positiva $V(\xi)$, ($V(\xi) > 0$, $\forall \xi \neq 0$ e $V(0) = 0$), um ganho \mathbb{K} , uma matriz \mathbb{G} e um escalar positivo γ satisfazendo, para todos os valores admissíveis da profundidade z*

$$\frac{\partial V}{\partial \xi} [(\mathbb{A}(z, \xi) + \mathbb{B}\mathbb{K})\xi + \mathbb{B}\phi(\mathbb{K}\xi)] - 2\phi(\mathbb{K}\xi)' M (\phi(\mathbb{K}\xi) + \mathbb{G}\xi) < 0 \quad (3.100)$$

$$\gamma V(\xi) - \xi' (\mathbb{K}_{(i)} - \mathbb{G}_{(i)})' \frac{1}{u_{0(i)}^2} (\mathbb{K}_{(i)} - \mathbb{G}_{(i)}) \xi \geq 0 \quad \forall i = 1, 2, 3 \quad (3.101)$$

$$\gamma V(\xi) - \xi' \mathbb{R}'_{(i)} \frac{1}{\beta^2} \mathbb{R}_{(i)} \xi \geq 0 \quad \forall i = 1, 2, 3 \quad (3.102)$$

$$\gamma V(\xi) - \xi' C'_{(i)} \frac{1}{u_{1(i)}^2} C_{(i)} \xi \geq 0 \quad \forall i = 1, 2, 3 \quad (3.103)$$

então o ganho \mathbb{K} e a região de estabilidade

$$\varepsilon(V, \gamma) = \{V(\xi) \leq \gamma^{-1}\} \quad (3.104)$$

são as soluções para o problema 3.4.1. \square

Assim como para o caso estudado na seção anterior, o teorema 3.4.1 não apresenta condições construtivas que permitam encontrar simplesmente o ganho \mathbb{K} e a região de estabilidade $\varepsilon(V, \gamma)$, soluções do problema 3.4.1. Para simplificar, utiliza-se a função quadrática

$$V(\xi) = \xi' P \xi \quad (3.105)$$

com $P = P' > 0$.

Necessita-se agora reescrever a matriz $\mathbb{A}(z, \xi)$ do sistema (3.99), para que ela seja mais facilmente utilizada. Assim, pode-se reescrever o sistema (3.99) como

$$\dot{\xi}(t) = (\mathbb{R}B_1(z)\mathbb{C} + \mathbb{R}'T_{(2)}B_2(z)\mathbb{R} + \mathbb{R}'T_{(3)}(B_3 + D(e))\mathbb{R} + \mathbb{B}\mathbb{K})\xi(t) + \mathbb{B}\phi(\mathbb{K}\xi(t)) \quad (3.106)$$

onde as matrizes \mathbb{R} e \mathbb{C} são definidas em (3.51), e as matrizes $B_1(z)$, $B_2(z)$, B_3 e $D(e)$ são definidas como

$$\begin{aligned}
B_1(z) &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{z_1} & \frac{Y_1^*}{z_1} & 1 + (Y_1^*)^2 \\ -\frac{1}{z_2} & \frac{Y_2^*}{z_2} & 1 + (Y_2^*)^2 \\ -\frac{1}{z_3} & \frac{Y_3^*}{z_3} & 1 + (Y_3^*)^2 \end{bmatrix} \\
B_2(z) &= \begin{bmatrix} \frac{1}{z_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{z_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{z_3} \end{bmatrix} \\
B_3 &= \begin{bmatrix} 2Y_1^* & 0 & 0 \\ 0 & 2Y_2^* & 0 \\ 0 & 0 & 2Y_3^* \end{bmatrix} \\
D(e) &= \begin{bmatrix} e_{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & e_{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & e_{(3)} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

A partir das relações (3.33), (3.37), (3.32) e (3.39), pode-se mostrar que a profundidade dos pontos E_1 e E_3 são determinados pela profundidade do ponto central do alvo E_2 . O vetor z é definido então da seguinte maneira

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_2 + l \cos(\alpha) \\ z_2 \\ z_2 - l \cos(\alpha) \end{bmatrix} \quad (3.107)$$

Das relações (3.107) e (3.59) tem-se

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z_1} &= \frac{1}{z_2 + l \cos \alpha} = \frac{1}{z_2 \left(1 + \frac{l \cos \alpha}{z_2}\right)} \\
\frac{1}{z_2} &= p_1 \\
\frac{1}{z_3} &= \frac{1}{z_2 - l \cos \alpha} = \frac{1}{z_2 \left(1 - \frac{l \cos \alpha}{z_2}\right)}
\end{aligned} \quad (3.108)$$

Visto que $l \ll z_2$ pode-se fazer as aproximações seguintes

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z_1} &\approx \frac{1}{z_2} \left(1 - \frac{l \cos \alpha}{z_2}\right) = p_1 - p_2 \\
\frac{1}{z_3} &\approx \frac{1}{z_2} \left(1 + \frac{l \cos \alpha}{z_2}\right) = p_1 + p_2
\end{aligned} \quad (3.109)$$

Considerando os intervalos admissíveis, dados por (3.33) e (3.39) sobre z_2 e α , os parâmetros p_1 e p_2 satisfazem

$$p_{jmin} \leq p_j \leq p_{jmax}, \quad j = 1, 2 \quad (3.110)$$

com as seguintes extremidades

$$\begin{aligned} p_{1min} &= \frac{1}{d_{2max}} & p_{1max} &= \frac{1}{d_{2min} \cos(\eta_{max})} \\ p_{2min} &= \frac{l \cos(-\pi + \alpha_{min})}{(d_{2min} \cos(\eta_{max}))^2} & p_{2max} &= \frac{l \cos(-\alpha_{min})}{(d_{2min} \cos(\eta_{max}))^2} \end{aligned} \quad (3.111)$$

Como as matrizes $B_1(z)$ e $B_2(z)$ do sistema em malha fechada (3.106) dependem do parâmetro incerto z , elas pertencem a dois polítopos de 4 vértices, definidos a partir das extremidades definidas por

$$\begin{aligned} B_1 &= \{B_{1j}, j = 1, \dots, 4\} \\ B_2 &= \{B_{2j}, j = 1, \dots, 4\} \end{aligned} \quad (3.112)$$

E o sistema pode ser escrito, assim, em forma de sistema politópico

$$\dot{\xi}(t) = \left(\sum_{j=1}^4 \lambda_j (\mathbb{A}_{1j} + \mathbb{R}'T_{(2)}B_{2j}\mathbb{R}) + \mathbb{R}'T_{(3)}(B_3 + D(e))\mathbb{R} + \mathbb{B}\mathbb{K} \right) \xi + \mathbb{B}\phi(\mathbb{K}\xi) \quad (3.113)$$

com

$$\sum_{j=1}^4 \lambda_j = 1, \lambda_j \geq 0 \quad \text{e} \quad \mathbb{A}_{1j} = \mathbb{R}'B_{1j}\mathbb{C} = \begin{bmatrix} 0 & B_{1j} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.114)$$

Aplicando o teorema 3.4.1 no sistema (3.114), com uma função $V(\xi)$ quadrática, a seguinte proposição é obtida

Proposição 3.4.1 *Se existem duas matrizes simétricas definidas positivas $W \in \mathfrak{R}^{6 \times 6}$, $R_1 \in \mathfrak{R}^{3 \times 3}$, uma matriz diagonal definida positiva $S \in \mathfrak{R}^{3 \times 3}$, duas matrizes $Y \in \mathfrak{R}^{3 \times 6}$ e $Z \in \mathfrak{R}^{3 \times 3}$, dois escalares ε e γ satisfazendo*

$$\begin{bmatrix} W\mathbb{A}'_{1j} + \mathbb{A}_{1j}W + \mathbb{B}Y + Y'\mathbb{B}' + \mathbb{R}'(R_1 + \varepsilon u_{1(3)}^2 I)\mathbb{R} & \star & \star & \star \\ & u_{1(2)}\mathbb{B}_{2j}\mathbb{R}W & -R_1 & \star & \star \\ & \begin{bmatrix} B_3 \\ I \end{bmatrix} \mathbb{R}W & 0 & -\varepsilon I & \star \\ & S\mathbb{B}' - Z & 0 & 0 & -2S \end{bmatrix} < 0 \quad (3.115)$$

$$\begin{bmatrix} W & \star \\ Y_{(i)} - Z_{(i)} & \gamma u_{0(i)}^2 \end{bmatrix} \geq 0 \quad \forall i = 1, 2, 3 \quad (3.116)$$

$$\begin{bmatrix} W & \star \\ \mathbb{R}_{(i)}W & \gamma\beta^2 \end{bmatrix} \geq 0 \quad \forall i = 1, 2, 3 \quad (3.117)$$

$$\begin{bmatrix} W & \star \\ \mathbb{C}_{(i)}W & \gamma u_{1(i)}^2 \end{bmatrix} \geq 0 \quad \forall i = 1, 2, 3 \quad (3.118)$$

então o ganho $\mathbb{K} = YW^{-1}$ e o conjunto

$$\varepsilon(W, \gamma) = \{\xi'W^{-1}\xi \leq \gamma^{-1}\} \quad (3.119)$$

são soluções do problema 3.4.1.

Problema de otimização

Baseado nos resultados obtidos, assim como na seção anterior, será apresentado um método de otimização convexa para obter o ganho de realimentação de estados que assegure a estabilidade local do sistema em malha fechada (3.106). As condições da proposição 3.4.1 estão sob a forma de LMI, e os valores de β , u_0 e u_1 são conhecidos a priori. O objetivo é obter uma lei de controle por realimentação de estados de tal forma que a base de atração da origem associada ao sistema (3.106) seja maximizada, ou seja, encontrar um ganho \mathbb{K} tal que a região de estabilidade assintótica $\varepsilon(W, \gamma)$ seja a maior possível, levando em conta todos os critérios apresentados. Propõe-se, então, o seguinte problema de otimização convexa

$$\begin{aligned}
& \min_{W, R_1, Y, Z, S, \gamma, \epsilon} \gamma + \delta + \sigma \\
& \text{sujeito às condições (3.115), (3.119), (3.117) e (3.118)} \\
& \begin{bmatrix} \sigma I & \star \\ Y & I \end{bmatrix} \geq 0 \\
& \begin{bmatrix} \delta I & \star \\ I & W \end{bmatrix} \geq 0
\end{aligned} \tag{3.120}$$

As duas últimas condições foram adicionadas para minimizar o traço de W^{-1}

$$\text{Tr}(W^{-1}) \leq \delta$$

e a norma de Y

$$Y'Y \leq \sigma I$$

para melhorar o condicionamento numérico das soluções de \mathbb{K} e W .

Resultados numéricos

Assim como no caso anterior, as coordenadas do alvo com relação ao ambiente são

$$E_1(2.65, 0.5); \quad E_2(2.65, 0) \quad E_3(2.65, -0.5)$$

sendo os valores em metros.

A distância entre o robô e a câmara deve pertencer ao intervalo $d_1 \in [2.26, 5]$, em metros. O índices visuais de referência são definidos por

$$Y_1^* = 0.2 \quad Y_2^* = 0 \quad Y_3^* = -0.2$$

Como os índices visuais Y_i , $i = 1, 2, 3$ devem atingir seus valores de referência, a câmara deve ser estabilizada ficando perpendicular ao alvo, alinhada ao seu ponto central E_2 , e ficando a uma

distância de referência $z^* = [2.5m \ 2.5m \ 2.5]'$, que pode ser calculada pela técnica de projeção. Para garantir a visibilidade do alvo, consideramos $\beta = 0.4$, e o ângulo entre a direita (E_1E_3) e o eixo óptico da câmera z_C : $\alpha \in [-\pi + \frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}]$. A partir das relações (3.59) e (3.60), as matrizes $B_1(z)$ e $B_2(z)$ pertencem a dois politopos de matrizes

$$B_1(z) = \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{ccc} -0.0653 & 0.0131 & 1.0400 \\ -0.1667 & 0 & 1.0000 \\ -0.2680 & -0.0536 & 1.0400 \end{array} \right], \left[\begin{array}{ccc} -0.2680 & 0.0563 & 1.0400 \\ -0.1667 & 0 & 1.0000 \\ -0.0653 & -0.0131 & 1.0400 \end{array} \right], \\ \left[\begin{array}{ccc} -0.3825 & 0.0765 & 1.0400 \\ -0.4838 & 0 & 1.0000 \\ -0.5852 & -0.1170 & 1.0400 \end{array} \right], \left[\begin{array}{ccc} -0.5852 & 0.1170 & 1.0400 \\ -0.4838 & 0 & 1.0000 \\ -0.3825 & -0.0765 & 1.0400 \end{array} \right] \end{array} \right\}$$

$$B_2(z) = \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{ccc} 0.0653 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1667 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2680 \end{array} \right], \left[\begin{array}{ccc} 0.2680 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1667 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0653 \end{array} \right], \\ \left[\begin{array}{ccc} 0.3825 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1667 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2680 \end{array} \right], \left[\begin{array}{ccc} 0.5852 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4838 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3825 \end{array} \right] \end{array} \right\}$$

Definindo as restrições dinâmicas do tensor cinemático do robô em questão $u_1 = [1 \ 1 \ 0.5]'$, assim como a do controle $u_0 = [4 \ 4 \ 5]'$. Utilizando o pacote **lmitool** do **SciLab**, o seguinte ganho \mathbb{K} é obtido

$$\mathbb{K} = \begin{bmatrix} -17746.108 & 38495.2 & -19040.905 & -123.625 & 9.6203 & -0.6736 \\ -28993.557 & -2243.8322 & 31140.958 & 5.4828 & -440.2141 & 0.1060 \\ -7487.2014 & -11692.158 & -6844.5572 & 23.4843 & -4.6803 & -58.3954 \end{bmatrix} \quad (3.121)$$

3.5 Conclusões

Neste capítulo foram executadas 2 tarefas de controle presentes em [21], baseadas nas informações sensoriais e visuais dos 3 pontos alinhados do alvo em questão. Moustrou-se assim que as técnicas avançadas de controle permitem levar em consideração uma série de restrições na síntese do controle: incertezas na profundidade do alvo, visibilidade e restrições dinâmicas nos atuadores.

Foram abordados apenas os dois casos do alvo fixo: o primeiro permitindo posicionar o robô e a câmera, e o segundo permitindo apenas posicionar a câmera. Para tal escreveu-se o sistema em forma de representação politópica das incertezas, e utilizamos uma condição de setor original para modelar a saturação. Esta formulação permitiu a escrita das diferentes condições sob a forma de LMIs, onde lançou-se mão de métodos de otimização para encontrar os ganhos do controlador, de tal forma que a região de estabilidade do sistema fosse a maior possível.

Neste capítulo os resultados apenas foram reproduzidos. Porém, em [21], a parte de otimização foi feita através do **Matlab**, enquanto neste trabalho foi feita através do **Scilab**, e resultados numéricos diferentes foram encontrados, porém a estabilidade não foi afetada, visto que o problema convergiu.

As duas tarefas definidas permitem controlar localmente o movimento do robô. Para grandes deslocamentos, é necessário o encadeamento dinâmico de várias tarefas básicas. Este problema é abordado em [21].

Capítulo 4

Problema de Servovisão - Alvo móvel

Neste capítulo será abordada a outra parte do problema de controle. Primeiramente são definidas as tarefas propriamente ditas: primeiro a câmera devem ser orientada perpendicularmente ao ponto central do alvo em movimento, e segundo o robô e a câmera devem ser orientados perpendicularmente ao ponto central do alvo em movimento. Em seguida é feito o projeto de controle para cada um dos casos, seguindo a mesma metodologia proposta no capítulo 3.

O primeiro caso abordado neste capítulo também está presente em [21], porém o segundo caso trata justamente da contribuição desta dissertação, e está presente em [39].

4.1 Diferentes Tarefas

Para o controle multi-critérios em questão, como já citado no capítulo anterior, levando em conta o objetivo de estabilização da câmera, deve-se levar em conta as incertezas sobre a profundidade dos pontos do alvo, as restrições de visibilidade e as restrições dinâmicas do sistema. Estas condições podem ser colocadas da seguinte maneira:

- O alvo é constituído de pontos, podendo eles ser fixos ou móveis. A profundidade dos pontos com relação ao referencial R_C da câmera é desconhecida, mas limitada.
- Ao longo do movimento, a visibilidade do alvo deve ser garantida.
- Os tensores de velocidade e de aceleração da câmera devem permanecer limitados, de tal forma que as restrições dinâmicas dos atuadores sejam satisfeitas.

A seguir serão descritas as diferentes tarefas a serem realizadas pelo conjunto robô+câmera. Para este capítulo, será abordado apenas o caso do alvo móvel. Para simplificar as notações utilizadas, definimos o referencial como R_C como sendo R , o tensor reduzido T_{red}^{RC} como sendo T e a matriz jacobiana reduzida J_{red} como J .

4.1.1 Tarefa: câmera orientada perpendicularmente aos 3 pontos do alvo em movimento

Nesta seção, será tratado um caso um pouco mais generalizado. A tarefa é a mesma da seção anterior, porém com o alvo em movimento. Será usada a mesma função-tarefa que a seção 3.2.2, (3.40), e sua derivada fica

$$\dot{e}(r(t), t) = \dot{s}(r(t), t) = \frac{\partial s}{\partial r} + \frac{\partial s}{\partial t} = \begin{bmatrix} \dot{Y}_1 \\ \dot{Y}_2 \\ \dot{Y}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{Y}_{E_1} \\ \dot{Y}_{E_2} \\ \dot{Y}_{E_3} \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

Deve-se lembrar que o termo $\frac{\partial s}{\partial t}$ está associado ao movimento do alvo. Tal termo pode ser descrito como

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \begin{bmatrix} \dot{Y}_{E_1} & \dot{Y}_{E_2} & \dot{Y}_{E_3} \end{bmatrix}'$$

Para determinar este termo através de uma relação matemática, deve-se considerar inicialmente o tensor cinemático T_{E_2} do ponto E_2 do alvo, com relação ao referencial R .

Determinando o ângulo ρ entre o eixo óptico da camera, z_C , e direção da velocidade linear do alvo, v_E , tem-se $\rho = -\frac{\pi}{2} - \alpha$. Pode-se então escrever o tensor cinemático como a relação

$$T_{E_2} = \begin{bmatrix} v_{x_C} \\ v_{y_C} \\ v_{z_C} \\ \Omega_{x_C} \\ \Omega_{y_C} \\ \Omega_{z_C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ v_E \sin\left(-\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \\ v_E \cos\left(-\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \\ \omega_E \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -v_E \cos \alpha \\ -v_E \sin \alpha \\ \omega_E \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Pode-se definir então $T_{E_2} = \begin{bmatrix} v'_{E_2} & \Omega'_{E_2} \end{bmatrix}'$, onde v_{E_2} é a velocidade linear do ponto E_2 do alvo com relação ao referencial R em termos de R_C , e é escrita como $v_{E_2} = \begin{bmatrix} 0 & -v_E \cos \alpha & -v_E \sin \alpha \end{bmatrix}'$, sendo Ω_{E_2} a velocidade de rotação do ponto E_2 com relação a R em termos de R_C , escrita como $\Omega_{E_2} = \begin{bmatrix} \omega_E & 0 & 0 \end{bmatrix}'$.

Tem-se como variação dos índices visuais Y_{E_i} , $i = 1, 2, 3$ com relação ao movimento do alvo

$$\begin{aligned} \dot{Y}_{E_1} &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{z_1} & -\frac{y_1}{z_1^2} \end{bmatrix} v_{E_1} \\ \dot{Y}_{E_2} &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{z_2} & -\frac{y_2}{z_2^2} \end{bmatrix} v_{E_2} \\ \dot{Y}_{E_3} &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{z_3} & -\frac{y_3}{z_3^2} \end{bmatrix} v_{E_3} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Utilizando a relação (2.20), pode-se substituir y_i por Y_i , $i = 1, 2, 3$. A relação (4.3) fica

$$\begin{aligned} \dot{Y}_{E_1} &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{z_1} & -\frac{Y_1}{z_1} \end{bmatrix} v_{E_1} \\ \dot{Y}_{E_2} &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{z_2} & -\frac{Y_2}{z_2} \end{bmatrix} v_{E_2} \\ \dot{Y}_{E_3} &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{z_3} & -\frac{Y_3}{z_3} \end{bmatrix} v_{E_3} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Utilizando a equação fundamental da cinemática, obtemos as velocidades lineares v_{E_1} , v_{E_2} e v_{E_3} em função do tensor cinemático T_{E_2} do ponto E_2 com relação ao ambiente, tal como

$$\begin{aligned} v_{E_1} &= v_{E_2} + \Omega_{E_2} \times \overrightarrow{E_2 E_1} = v_{E_2} - S_k(\overrightarrow{E_2 E_1}) \Omega_{E_2} = \begin{bmatrix} I_3 & -S_k(\overrightarrow{E_2 E_1}) T_{E_2} \end{bmatrix} \\ v_{E_2} &= \begin{bmatrix} I_3 & 0 \end{bmatrix} T_{E_2} \\ v_{E_3} &= v_{E_2} + \Omega_{E_2} \times \overrightarrow{E_2 E_3} = v_{E_2} - S_k(\overrightarrow{E_2 E_3}) \Omega_{E_2} = \begin{bmatrix} I_3 & -S_k(\overrightarrow{E_2 E_3}) T_{E_2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.5)$$

onde $S_k(\overrightarrow{E_2 E_1})$ e $S_k(\overrightarrow{E_2 E_3})$ são as matrizes anti-simétricas associadas aos vetores $\overrightarrow{E_2 E_1}$ e $\overrightarrow{E_2 E_3}$. Podem ser respectivamente escritas como

$$S_k(\overrightarrow{E_2 E_1}) = \begin{bmatrix} 0 & -l \cos \alpha & -l \sin \alpha \\ l \cos \alpha & 0 & 0 \\ l \sin \alpha & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad S_k(\overrightarrow{E_2 E_3}) = \begin{bmatrix} 0 & l \cos \alpha & l \sin \alpha \\ -l \cos \alpha & 0 & 0 \\ -l \sin \alpha & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Finalmente, utilizando as relações (4.5) e (4.6) nas equações (4.4), obtemos a expressão matemática do termo $\frac{\partial s}{\partial t}$

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \begin{bmatrix} \dot{Y}_{E_1} \\ \dot{Y}_{E_2} \\ \dot{Y}_{E_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{z_1} & -\frac{Y_1}{z_1} & \frac{-l \cos \alpha + l Y_1 \sin \alpha}{z_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{z_2} & -\frac{Y_2}{z_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{z_3} & -\frac{Y_3}{z_3} & \frac{l \cos \alpha - l Y_3 \sin \alpha}{z_3} & 0 & 0 \end{bmatrix} T_{E_2} \quad (4.7)$$

Suprimindo as colunas de zeros (que na verdade são os movimentos impossíveis do alvo com relação à câmera), obtém-se a relação

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \begin{bmatrix} \dot{Y}_{E_1} \\ \dot{Y}_{E_2} \\ \dot{Y}_{E_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{z_1} & -\frac{Y_1}{z_1} & \frac{-l \cos \alpha + l Y_1 \sin \alpha}{z_1} \\ \frac{1}{z_2} & -\frac{Y_2}{z_2} & 0 \\ \frac{1}{z_3} & -\frac{Y_3}{z_3} & \frac{l \cos \alpha - l Y_3 \sin \alpha}{z_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -v_E \cos \alpha \\ -v_E \sin \alpha \\ \omega_E \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

sendo ainda

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \begin{bmatrix} \dot{Y}_{E_1} \\ \dot{Y}_{E_2} \\ \dot{Y}_{E_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{z_1} & -\frac{Y_1}{z_1} & \frac{1}{z_1} & -\frac{Y_1}{z_1} \\ \frac{1}{z_2} & -\frac{Y_2}{z_2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{z_3} & -\frac{Y_3}{z_3} & -\frac{1}{z_3} & \frac{Y_3}{z_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -v_E \cos \alpha \\ -v_E \sin \alpha \\ -l \cos(\alpha) \\ -l \sin(\alpha) \omega_E \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Pode-se ainda escrever a relação (4.9) como

$$\frac{\partial s}{\partial t} = B(z, e) \omega(t) \quad (4.10)$$

onde $B(z, e)$ é definida por

$$B(z, e) = \begin{bmatrix} \frac{1}{z_1} & \frac{-(e_{(1)} + Y_1^*)}{z_1} & \frac{1}{z_1} & \frac{-(e_{(1)} + Y_1^*)}{z_1} \\ \frac{1}{z_2} & \frac{-(e_{(2)} + Y_2^*)}{z_2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{z_3} & \frac{-(e_{(3)} + Y_3^*)}{z_3} & \frac{1}{z_3} & \frac{-(e_{(3)} + Y_3^*)}{z_3} \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

e o vetor $\omega(t)$ é definido como

$$\omega(t) = \begin{bmatrix} -v_E \cos \alpha \\ -v_E \sin \alpha \\ -l \omega \cos \alpha \\ -l \omega \sin \alpha \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

Este vetor $\omega(t)$ pode ser considerado como um vetor de perturbação. Quando elevado ao quadrado é suposto integrável, mas desconhecido, que corresponde a dizer que $\omega(t) \in \mathcal{L}_2^q$, que existe um escalar positivo δ_1 , $0 < \frac{1}{\delta_1} < \infty$, tal que

$$\|\omega\|_2^2 = \int_0^\infty \omega'(\tau)\omega(\tau)d\tau = \int_0^\infty (v_E^2(\tau) + l^2\omega_E^2(\tau))d\tau \leq \frac{1}{\delta_1} \quad (4.13)$$

E finalmente, a dinâmica da função de tarefa apresentada nesta seção pode ser dada como

$$\dot{e}(t) = L(z, e)T(t) + B(z, e)\omega(t) \quad (4.14)$$

com ω satisfazendo (4.13).

4.1.2 Tarefa: robô e câmera orientados perpendicularmente aos 3 pontos do alvo em movimento

Para esta seção, o conjunto robô-câmera deve orientar-se pelos 3 pontos do alvo em movimento, permanecendo perpendicular ao ponto central do alvo durante todo o trajeto. Em suma, é uma junção do caso 3.2.2 e do caso 4.1.1. Este caso é abordado em [39].

$$e(t) = \begin{bmatrix} e_{(1)} \\ e_{(2)} \\ e_{(3)} \\ e_{(4)} \\ e_{(5)} \\ e_{(6)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{yc} \\ S_{zc} - v^*t \\ Y_2 - Y_2^* \\ Y_1 - Y_1^* \\ Y_2 - Y_2^* \\ Y_3 - Y_3^* \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

4.2 Resultados preliminares: câmera orientada perpendicularmente aos 3 pontos do alvo em movimento

Considera-se aqui um caso mais geral, onde a câmera deve ser posicionada perpendicularmente a um alvo em movimento. Como foi mencionado anteriormente, o vetor de velocidades do alvo $\begin{bmatrix} v_E & \omega_E \end{bmatrix}'$ é desconhecido, mas seus quadrados v_E^2 e ω_E^2 são supostos integráveis.

Deseja-se determinar uma lei de controle que estabilize a câmara com relação ao alvo, satisfazendo as condições **C1**, **C2** e **C3**, definidas anteriormente, no capítulo 3, mais a nova condição **C4**:

C4 O vetor de velocidades do alvo é suposto integrável no quadrado porém desconhecido.

Deve-se lembrar que em (3.45), o termo $\frac{\partial s}{\partial t}$ representa a variação consecutiva de s ao movimento do alvo com relação ao ambiente, e pode ser descrita como

$$\frac{\partial s}{\partial t} = [\dot{Y}_{E_1} \quad \dot{Y}_{E_2} \quad \dot{Y}_{E_3}]' \quad (4.16)$$

Para obter este termo através de uma relação matemática, deve-se considerar o tensor cinemático T_{E_2} do ponto E_2 do alvo com relação ao referencial R , determinado com relação ao referencial R_C da câmara. Ao determinar o ângulo ρ , entre o eixo óptico da câmara z_C e a direção da velocidade linear do alvo v_E por $\rho = -\frac{\pi}{2} - \alpha$, pode-se descrever o tensor cinemático T_{E_2} como na relação

$$T_{E_2} = \begin{bmatrix} v_{x_c} \\ v_{y_c} \\ v_{z_c} \\ \Omega_{x_c} \\ \Omega_{y_c} \\ \Omega_{z_c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ v_E \sin(-\frac{\pi}{2} - \alpha) \\ v_E \cos(-\frac{\pi}{2} - \alpha) \\ \omega_E \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ v_E \sin \alpha \\ v_E \cos \alpha \\ \omega_E \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Neste caso, define-se

$$T_{E_2} = [v'_{E_2} \quad \Omega'_{E_2}]' \quad (4.17)$$

onde v_{E_2} é a velocidade linear do ponto E_2 do alvo com relação a R , determinada dentro do referencial R_C , e é escrita como $v_{E_2} = [0 \quad -v_E \cos \alpha \quad -v_E \sin \alpha]'$, onde Ω_{E_2} é a velocidade de rotação do ponto E_e com relação a R , determinada dentro do referencial R_C , e é escrita como $\Omega = [\omega_E \quad 0 \quad 0]'$.

Seguindo o formalismo proposto por [9], pode-se determinar as variações dos índices visuais Y_{E_i} , $i = 1, 2, 3$, ao movimento do alvo

$$\begin{aligned} \dot{Y}_{E_1} &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{z_1} & -\frac{y_1}{z_1^2} \end{bmatrix} v_{E_1} \\ \dot{Y}_{E_2} &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{z_2} & -\frac{y_2}{z_2^2} \end{bmatrix} v_{E_2} \\ \dot{Y}_{E_3} &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{z_3} & -\frac{y_3}{z_3^2} \end{bmatrix} v_{E_3} \end{aligned} \quad (4.18)$$

Através da relação (2.20), pode-se obter as variações dos índices visuais Y_{E_i} , $i = 1, 2, 3$. As relações de (4.18)

$$\begin{aligned} \dot{Y}_{E_1} &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{z_1} & -\frac{Y_1}{z_1} \end{bmatrix} v_{E_1} \\ \dot{Y}_{E_2} &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{z_2} & -\frac{Y_2}{z_2} \end{bmatrix} v_{E_2} \\ \dot{Y}_{E_3} &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{z_3} & -\frac{Y_3}{z_3} \end{bmatrix} v_{E_3} \end{aligned} \quad (4.19)$$

Utilizando a equação fundamental da cinemática, pode-se determinar as velocidades lineares v_{E_1} , v_{E_2} e v_{E_3} em função do tensor cinemático T_{E_2} do ponto E_2 com relação ao ambiente pelas equações

$$\begin{aligned} v_{E_1} &= v_{E_2} + \mathbf{\Omega}_{E_2} \times \overrightarrow{E_2 E_1} = v_{E_2} - Sk(\overrightarrow{E_2 E_1}) \mathbf{\Omega}_{E_2} = \begin{bmatrix} I & -Sk(\overrightarrow{E_2 E_1}) \end{bmatrix} T_{E_2} \\ v_{E_2} &= \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} T_{E_2} \\ v_{E_3} &= v_{E_2} + \mathbf{\Omega}_{E_2} \times \overrightarrow{E_2 E_3} = v_{E_2} - Sk(\overrightarrow{E_2 E_3}) \mathbf{\Omega}_{E_2} = \begin{bmatrix} I & -Sk(\overrightarrow{E_2 E_3}) \end{bmatrix} T_{E_2} \end{aligned} \quad (4.20)$$

onde $Sk(\overrightarrow{E_2 E_1})$ e $Sk(\overrightarrow{E_2 E_3})$ representam, respectivamente, as matrizes anti-simétricas de pré-produto vetorial, associadas aos vetores $\overrightarrow{E_2 E_1}$ e $\overrightarrow{E_2 E_3}$. São definidas como

$$Sk(\overrightarrow{E_2 E_1}) = \begin{bmatrix} 0 & -l \cos \alpha & -l \sin \alpha \\ l \cos \alpha & 0 & 0 \\ l \sin \alpha & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad Sk(\overrightarrow{E_2 E_3}) = \begin{bmatrix} 0 & l \cos \alpha & l \sin \alpha \\ -l \cos \alpha & 0 & 0 \\ -l \sin \alpha & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

Utilizando as relações (4.20) e (4.21) nas equações (4.19), obtém-se a expressão matemática do termo $\frac{\partial s}{\partial t}$

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \begin{bmatrix} \dot{Y}_{E_1} \\ \dot{Y}_{E_2} \\ \dot{Y}_{E_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{z_1} & -\frac{Y_1}{z_1} & \frac{-l \cos \alpha + Y_1 \sin \alpha}{z_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{z_1} & -\frac{Y_1}{z_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{z_3} & -\frac{Y_3}{z_3} & \frac{l \cos \alpha + Y_3 \sin \alpha}{z_3} & 0 & 0 \end{bmatrix} T_{E_2} \quad (4.22)$$

Na equação acima, as colunas contendo zeros significam os movimentos impossíveis do alvo com relação ao referencial da câmara. Tais termos podem ser suprimidos, restando

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \begin{bmatrix} \dot{Y}_{E_1} \\ \dot{Y}_{E_2} \\ \dot{Y}_{E_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{z_1} & -\frac{Y_1}{z_1} & \frac{-l \cos \alpha + Y_1 \sin \alpha}{z_1} \\ \frac{1}{z_1} & -\frac{Y_1}{z_1} & 0 \\ \frac{1}{z_3} & -\frac{Y_3}{z_3} & \frac{l \cos \alpha + Y_3 \sin \alpha}{z_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -v_E \cos \alpha \\ -v_E \sin \alpha \\ \omega_E \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

ainda

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \begin{bmatrix} \dot{Y}_{E_1} \\ \dot{Y}_{E_2} \\ \dot{Y}_{E_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{z_1} & -\frac{Y_1}{z_1} & \frac{1}{z_1} & -\frac{Y_1}{z_1} \\ \frac{1}{z_1} & -\frac{Y_1}{z_1} & 0 & 0 \\ \frac{1}{z_3} & -\frac{Y_3}{z_3} & -\frac{1}{z_3} & \frac{Y_3}{z_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -v_E \cos \alpha \\ -v_E \sin \alpha \\ -l \cos(\alpha) \omega_E \\ -l \sin(\alpha) \omega_E \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

Pode-se então, a partir da relação acima, definir

$$\frac{\partial s}{\partial t} = B(z, e) \omega(t) \quad (4.25)$$

onde a matriz $B(z, e)$ é definida por

$$B(z, e) = \begin{bmatrix} \frac{1}{z_1} & -\frac{Y_1}{z_1} & \frac{1}{z_1} & -\frac{Y_1}{z_1} \\ \frac{1}{z_1} & -\frac{Y_1}{z_1} & 0 & 0 \\ \frac{1}{z_3} & -\frac{Y_3}{z_3} & -\frac{1}{z_3} & \frac{Y_3}{z_3} \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

e o vetor $\omega(t)$ é

$$\omega(t) = \begin{bmatrix} -v_E \cos \alpha \\ -v_E \sin \alpha \\ -l \cos(\alpha) \omega_E \\ -l \sin(\alpha) \omega_E \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

Este vetor $\omega(t)$ pode ser considerado como um vetor de perturbação. Através desta notação, a condição **C4** corresponde a supor que $\omega(t) \in \mathcal{L}_2^q$ e existe um escalar positivo δ_1 , $0 < \frac{1}{\delta_1} < \infty$ tal que

$$\|\omega(t)\|_2^2 = \int_0^\infty \omega'(\tau) \omega(\tau) d\tau = \int_0^\infty (v_E^2(\tau) + l^2 \omega_E^2) d\tau \leq \frac{1}{\delta_1} \quad (4.28)$$

Finalmente, a dinâmica da tarefa pode ser definida como o seguinte

$$\dot{e}(t) = L(z, e)T(t) + B(z, e)\omega(t) \quad (4.29)$$

com $\omega(t)$ satisfazendo (4.28).

Considerar-se-á o estado aumentado

$$\xi(t) = \begin{bmatrix} e(t) \\ T(t) \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

e as matrizes seguintes

$$\begin{aligned} \mathbb{A}(z, \xi) &= \begin{bmatrix} 0 & L(z, e) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbb{B}_1 &= \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \\ \mathbb{B}_2(z, \xi) &= \begin{bmatrix} B(z, e) \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.31)$$

E assim, pode-se escrever o sistema como

$$\dot{\xi}(t) = \mathbb{A}(z, \xi)\xi(t) + \mathbb{B}_1\dot{T}(t) + \mathbb{B}_2(z, \xi)\omega(t) \quad (4.32)$$

onde o vetor \dot{T} de aceleração da câmera faz papel de vetor de controle. Para satisfazer à restrição (3.47) em **C3**, uma lei de controle saturante por realimentação de estados pode ser definida com

$$\dot{T}(t) = \text{sat}_{u_0}(u(t)) = \text{sat}_{u_0}(\mathbb{K}\xi(t)) \quad (4.33)$$

O sistema em malha fechada fica

$$\dot{\xi}(t) = \mathbb{A}(z, \xi)\xi(t) + \mathbb{B}_1\text{sat}_{u_0}(\mathbb{K}\xi(t)) + \mathbb{B}_2(z, \xi)\omega(t) \quad (4.34)$$

O estado $\xi(t)$ deve estar incluído no poliedro $\Omega(\xi)$, de tal forma a respeitar as restrições (3.47) e (3.41). O problema que deseja-se resolver, com relação ao sistema em malha fechada (4.34) é

Problema 4.2.1 *Determinar um ganho \mathbb{K} e duas regiões S_0 e S_1 tal que as propriedades seguintes sejam verificadas*

1. *Estabilidade interna: quando $\omega = 0$, para todo $\xi(0) \in S_0$ o sistema (4.34) converge assintoticamente à origem.*
2. *Trajétórias limitadas: quando $\omega \neq 0$ as trajetórias do sistema (4.34) permaneçam limitadas dentro de S_1 para todo $\xi(0) \in S_0$ e $\omega(t)$ satisfazendo (4.28).*

A resolução do ponto 1 corresponde à solução do problema 3.4.1. Basta então utilizar a lei de controle obtida anteriormente. Neste caso, a região S_0 corresponde à região de estabilidade do sistema (4.34). Para todo $\xi(0) \in S_0$, o sistema em malha fechada (4.34) pode ser estabilizado mesmo com a presença das incertezas na medida da profundidade dos pontos do alvo (**C1**), garantindo a visibilidade do alvo (**C2**) e a satisfação das restrições dinâmicas dos acionadores (**C3**). O ponto 2 consiste em estudar a tolerância do sistema à perturbação $\omega(t)$.

Condições teóricas

Utilizando a não-linearidade (3.57) para o sistema (4.34), tem-se

$$\dot{\xi}(t) = \mathbb{A}(z, \xi)\xi(t) + \mathbb{B}_1\phi(\mathbb{K}\xi(t)) + \mathbb{B}_2(z, \xi)\omega(t) \quad (4.35)$$

Da mesma forma que os teoremas 3.3.1 e 3.4.1, pode-se propor uma solução para o problema (4.2.1) através do teorema 4.2.1.

Teorema 4.2.1 *Se existe uma função definida positiva $V(\xi)$, ($V(\xi) > 0, \forall \xi \neq 0$ e $V(0) = 0$), um ganho \mathbb{K} , uma matriz diagonal definida positiva M , uma matriz \mathbb{G} e dois escalares positivos ζ e δ_1 satisfazendo, para todos os valores admissíveis da profundidade z*

$$\frac{\partial V}{\partial \xi} [(\mathbb{A}(z, \xi) + \mathbb{B}_1\mathbb{K})\xi + \mathbb{B}_1\phi(\mathbb{K}\xi)] - 2\phi(\mathbb{K}\xi)' M (\phi(\mathbb{K}\xi) + \mathbb{G}\xi) - \omega'\omega < 0 \quad (4.36)$$

$$V(\xi) - \xi' (\mathbb{K}_{(i)} - \mathbb{G}_{(i)})' \frac{\frac{1}{\zeta} + \frac{1}{\delta_1}}{u_{0(i)}^2} (\mathbb{K}_{(i)} - \mathbb{G}_{(i)}) \xi \geq 0 \quad \forall i = 1, 2, 3 \quad (4.37)$$

$$V(\xi) - \xi' \mathbb{R}'_{(i)} \frac{\frac{1}{\zeta} + \frac{1}{\delta_1}}{\beta^2} \mathbb{R}_{(i)} \xi \geq 0 \quad \forall i = 1, 2, 3 \quad (4.38)$$

$$V(\xi) - \xi' \mathbb{C}'_{(i)} \frac{\frac{1}{\zeta} + \frac{1}{\delta_1}}{u_{1(i)}^2} \mathbb{C}_{(i)} \xi \geq 0 \quad \forall i = 1, 2, 3 \quad (4.39)$$

então o ganho \mathbb{K} e os conjuntos

$$\begin{aligned} S_1(V, \zeta, \delta_1) &= \left\{ V(\xi) \leq \frac{1}{\zeta} + \frac{1}{\delta_1} \right\} \\ S_0(V, \zeta) &= \left\{ V(\xi) \leq \zeta^{-1} \right\} \end{aligned} \quad (4.40)$$

são as soluções para o problema 4.2.1.

□

Assim como para os casos estudados no capítulo anterior, o teorema 4.2.1 não apresenta condições construtivas. O objetivo agora é de colocar as condições sob a forma de LMI. Para simplificar, será utilizada a função quadrática

$$V(\xi) = \xi' P \xi \quad (4.41)$$

com $P = P' > 0$.

Como nos casos anteriores, pode-se reescrever o sistema (4.35) para uma forma de mais fácil manipulação. A partir das matrizes \mathbb{R} , \mathbb{C} , $B_1(z)$, $B_2(z)$, B_3 e $D(e)$, definidas na seção 3.2.3, pode-se reescrever o sistema (4.35) como

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= (\mathbb{R}B_1(z)\mathbb{C} + \mathbb{R}'T_{(2)}B_2(z)\mathbb{R} + \mathbb{R}'T_{(3)}(B_3 + D(e))\mathbb{R} + \mathbb{B}\mathbb{K}) \xi(t) \\ &\quad + \mathbb{B}\phi(\mathbb{K}\xi(t)) + \mathbb{R}'(B_4(z) + D(e)B_5(z)) \omega(t) \end{aligned} \quad (4.42)$$

onde as matrizes \mathbb{R} e \mathbb{C} são definidas em (3.51), e as matrizes $B_4(z)$ e $B_5(z)$ são definidas como

$$B_4(z) = \begin{bmatrix} \frac{1}{z_1} & -\frac{Y_1^*}{z_1} & \frac{1}{z_1} & -\frac{Y_1^*}{z_1} \\ \frac{1}{z_2} & -\frac{Y_2^*}{z_2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{z_3} & -\frac{Y_3^*}{z_3} & -\frac{1}{z_3} & \frac{Y_3^*}{z_3} \end{bmatrix}$$

$$B_5(z) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{z_1} & 0 & -\frac{1}{z_1} \\ 0 & -\frac{1}{z_2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{z_3} & 0 & \frac{1}{z_3} \end{bmatrix}$$

Considerando os parâmetros incertos definidos em (3.109), pode-se deduzir que as matrizes $B_k(z) \in k = 1, 2, 4, 5$ pertencem a um polítopo de 4 vértices

$$B_k = \{B_{kj}, j = 1, \dots, 4\} \quad k = 1, 2, 4, 5 \quad (4.43)$$

Assim, pode-se manipular o sistema (4.42) e obter

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) = & \sum_{j=1}^4 \{ [\mathbb{A}_{1j} + \mathbb{R}'T_{(2)}B_{2j}\mathbb{R} + \mathbb{R}'T_{(3)}(B_3 + D(e))\mathbb{R} + \mathbb{B}_1\mathbb{K}] \xi \\ & + \mathbb{R}'(B_{4j} + D(e)B_{5j})\omega(t) \} + \mathbb{B}_1\phi(\mathbb{K}\xi(t)) \end{aligned} \quad (4.44)$$

com

$$\sum_{j=1}^4 \lambda_j = 1, \lambda_j \geq 0 \quad \text{e} \quad \mathbb{A}_{1j} = \mathbb{R}'B_{1j}\mathbb{C} \quad (4.45)$$

Aplicando o teorema 4.2.1 no sistema (4.45), com uma função $V(\xi)$ quadrática, obtém-se a seguinte proposição

Proposição 4.2.1 *Se existem duas matrizes simétricas definida positivas $W \in \mathfrak{R}^{6 \times 6}$, $R_1 \in \mathfrak{R}^{3 \times 3}$, uma matriz diagonal definida positiva $S \in \mathfrak{R}^{3 \times 3}$, duas matrizes $Y \in \mathfrak{R}^{3 \times 6}$ e $Z \in \mathfrak{R}^{3 \times 3}$, três escalares ε , ζ e δ_1 satisfazendo*

$$\begin{bmatrix} W\mathbb{A}'_{1j} + \mathbb{A}_{1j}W + \mathbb{B}_1Y + Y'\mathbb{B}'_1 + \mathbb{R}'R_1\mathbb{R} + \varepsilon(u_{1(3)}^2(1 + \beta^2) + \beta^2)\mathbb{R}'\mathbb{R} & * & * & * & * & * \\ & u_{1(2)}B_{2j}\mathbb{R}W & -R_1 & * & * & * \\ & \begin{bmatrix} B_3 \\ I \end{bmatrix} \mathbb{R}W & 0 & -\varepsilon I & * & * \\ & S\mathbb{B}'_1 - Z & 0 & 0 & -2S & * \\ & B'_{4j}\mathbb{R} & 0 & 0 & 0 & -I \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & B_{5j} - \varepsilon I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.46)$$

$$\begin{bmatrix} W & * & * \\ Y_{(i)} - Z_{(i)} & \zeta u_{0(i)}^2 & * \\ Y_{(i)} - Z_{(i)} & 0 & \delta_1 u_{0(i)}^2 \end{bmatrix} \geq 0 \quad \forall i = 1, 2, 3 \quad (4.47)$$

$$\begin{bmatrix} W & * & * \\ \mathbb{R}_{(i)}W & \zeta \beta^2 & * \\ \mathbb{R}_{(i)}W & 0 & \delta_1 \beta^2 \end{bmatrix} \geq 0 \quad \forall i = 1, 2, 3 \quad (4.48)$$

$$\begin{bmatrix} W & * & * \\ \mathbb{C}_{(i)}W & \zeta u_{1(i)}^2 & * \\ \mathbb{C}_{(i)}W & 0 & \delta_1 u_{1(i)} \end{bmatrix} \geq 0 \quad \forall i = 1, 2, 3 \quad (4.49)$$

então o ganho dado por $\mathbb{K} = YW^{-1}$, tal que

1. quando $\omega \neq 0$, as trajetórias do sistema em malha fechada (4.42) ficam dentro do conjunto

$$\varepsilon_1(W, \zeta, \delta_1) = \left\{ \xi'W^{-1}\xi \leq \frac{1}{\zeta} + \frac{1}{\delta_1} \right\} \quad (4.50)$$

para todo $\xi(0) \in \varepsilon_0$

$$\varepsilon_0(W, \zeta) = \left\{ \xi'W^{-1}\xi \leq \frac{1}{\zeta} \right\} \quad (4.51)$$

e toda perturbação $\omega(t)$ satisfazendo (4.28)

2. quando $\omega = 0$, o conjunto $\varepsilon_0(W, \zeta) = \varepsilon_1(W, \zeta, \delta_1)$ está incluído dentro da base de atração do sistema em malha fechada (4.42), e assim é uma região de estabilidade assintótica para o sistema em malha fechada.

Problema de otimização

Assim como nas seções 3.3 e 3.4, apresentar-se-á um método de otimização convexa para obter o ganho de realimentação de estados que assegure a estabilidade local do sistema em malha fechada (4.42), maximizando o tamanho dos conjuntos ε_0 e ε_1 . Conseqüentemente, seguindo se o limite da energia de perturbação, δ_1 , é dado ou não, os problemas de otimização seguintes podem ser considerados

- δ_1 é conhecido. Deseja-se otimizar o tamanho dos conjuntos ε_0 e ε_1 . Assim, o problema é proposto como

$$\begin{aligned} & \min_{W, R_1, Y, Z, S, \zeta, \varepsilon} \gamma + \delta + \sigma \\ & \text{sujeito às condições (4.46), (4.47), (4.48) e (4.49)} \\ & \begin{bmatrix} \sigma I & * \\ Y & I \end{bmatrix} \geq 0 \\ & \begin{bmatrix} \delta I & * \\ I & W \end{bmatrix} \geq 0 \end{aligned} \quad (4.52)$$

- Se δ_1 é desconhecido, deseja-se minimizá-lo. Este problema pode ser interpretado como determinar o maior limite para a perturbação, e assim, quantificar a tolerância à perturbação do sistema. Basta então adicionar δ_1 ao critério anterior. Pode-se também adicionar pesos nas variáveis, juntamente com a adição de δ_1 . Tal problema de otimização implica no compromisso entre a tolerância à perturbação δ_1 e o tamanho do domínio de estabilidade ζ .

Resultados numéricos

Assim como no caso anterior, as coordenadas do alvo com relação ao ambiente são

$$E_1(10, 0.5); \quad E_2(10, 0) \quad E_3(10, -0.5)$$

sendo os valores em metros.

A distância entre o robô e a câmera deve pertencer ao intervalo $d_1 \in [2.26, 5]$, em metros. O índices visuais de referência são definidos por

$$Y_1^* = 0.2 \quad Y_2^* = 0 \quad Y_3^* = -0.2$$

Como os índices visuais Y_i , $i = 1, 2, 3$ devem atingir seus valores de referência, a câmera deve ser estabilizada ficando perpendicular ao alvo, alinhada ao seu ponto central E_2 , e ficando a uma distância de referência $z^* = [2.5m \quad 2.5m \quad 2.5]^T$, que pode ser calculada pela técnica de projeção. Para garantir a visibilidade do alvo, consideramos $\beta = 0.4$, e o ângulo entre a direita (E_1E_3) e o eixo óptico da câmera z_C : $\alpha \in [-\pi + \frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}]$. A partir das relações p_1 e p_2 , conforme (3.59) e (3.60), as matrizes $B_1(z)$ e $B_2(z)$ pertencem a dois politopos de matrizes, como pode-se ver pelas relações (3.4). As matrizes, $B_4(z)$ e $B_5(z)$, da mesma forma, pertencem a dois politopos de matrizes

$$B_4(z) = \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{cccc} 0.0491 & -0.0098 & 0.0491 & -0.0098 \\ 0.1667 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2842 & 0.0568 & -0.2842 & -0.0568 \\ 0.4035 & -0.0807 & 0.4035 & -0.0807 \end{array} \right], \left[\begin{array}{cccc} 0.2842 & -0.0568 & 0.2842 & -0.0568 \\ 0.1667 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0491 & 0.0098 & -0.0491 & -0.0098 \\ 0.6386 & -0.1277 & 0.6386 & -0.1277 \end{array} \right], \\ \left[\begin{array}{cccc} 0.5211 & 0 & 0 & 0 \\ 0.6386 & 0.1277 & -0.6386 & -0.1277 \end{array} \right], \left[\begin{array}{cccc} 0.5211 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4035 & 0.0807 & -0.4035 & -0.0807 \end{array} \right] \end{array} \right\}$$

$$B_5(z) = \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{cccc} 0 & -0.0491 & 0 & -0.0491 \\ 0 & -0.1667 & 0 & 0 \\ 0 & -0.2842 & 0 & 0.2842 \\ 0 & -0.4035 & 0 & -0.4035 \end{array} \right], \left[\begin{array}{cccc} 0 & -0.2842 & 0 & -0.2842 \\ 0 & -0.1667 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0491 & 0 & 0.0491 \\ 0 & -0.6386 & 0 & -0.6386 \end{array} \right], \\ \left[\begin{array}{cccc} 0 & -0.5211 & 0 & 0 \\ 0 & -0.6386 & 0 & 0.6386 \end{array} \right], \left[\begin{array}{cccc} 0 & -0.5211 & 0 & 0 \\ 0 & -0.4035 & 0 & 0.4035 \end{array} \right] \end{array} \right\}$$

Assim como nos casos anteriores, pode-se definir as restrições dinâmicas do tensor cinemático do robô em questão como $u_1 = [1 \ 1 \ 0.5]'$, assim como a do controle $u_0 = [4 \ 4 \ 5]'$. Utilizando o pacote **lmitool** do **SciLab**, obtemos o seguinte ganho \mathbb{K}

$$\mathbb{K} = \begin{bmatrix} 505.2174 & -977.2850 & 450.5510 & 7.1793 & 1.8747 & 2.9985 \\ -391.7700 & -235.3926 & 619.3959 & 2.4751 & -34.3626 & 0.7277 \\ 106.8915 & -309.9725 & 69.2234 & 5.6065 & 1.3626 & -6.6466 \end{bmatrix} \quad (4.53)$$

4.3 Resultados preliminares: robô e câmera orientados perpendicularmente aos 3 pontos do alvo em movimento

Para esta seção seguiu-se o mesmo formalismo de [39].

Para determinar a dinâmica do erro $e(t)$, tem-se a derivada

$$e(r(t), t) = s(r(t), t) - s^* \quad (4.54)$$

onde $s(t)$ é o vetor contendo a informação visual, e $r(t)$ é uma função que liga a câmera ao referencial R . A derivada fica

$$\dot{e}(r(t), t) = \dot{s}(r(t), t) = \frac{\partial s}{\partial r} + \frac{\partial s}{\partial t} = \begin{bmatrix} \dot{Y}_1 \\ \dot{Y}_2 \\ \dot{Y}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{Y}_{E_1} \\ \dot{Y}_{E_2} \\ \dot{Y}_{E_3} \end{bmatrix} \quad (4.55)$$

Conforme [39], as derivadas $\frac{\partial s}{\partial r}$ e $\frac{\partial s}{\partial t}$ são

$$\frac{\partial s}{\partial r} = \tilde{B}_1 T + \tilde{B}_2 v^*; \quad \frac{\partial s}{\partial t} = \tilde{B}_3 \omega \quad (4.56)$$

onde $\omega(t)$ é definido em (4.27).

$$\tilde{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{z_2} & \frac{(e_{(3)}+Y_2^*)}{z_2} & 1 + (e_{(3)} + Y_2^*)^2 \\ -\frac{1}{z_1} & \frac{(e_{(4)}+Y_1^*)}{z_2} & 1 + (e_{(4)} + Y_1^*)^2 \\ -\frac{1}{z_2} & \frac{(e_{(5)}+Y_2^*)}{z_2} & 1 + (e_{(5)} + Y_2^*)^2 \\ -\frac{1}{z_3} & \frac{(e_{(6)}+Y_3^*)}{z_2} & 1 + (e_{(6)} + Y_3^*)^2 \end{bmatrix}; \quad \tilde{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \tilde{B}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{z_1} & -\frac{(e_{(4)}+Y_1^*)}{z_1} & \frac{1}{z_1} & -\frac{(e_{(4)}+Y_1^*)}{z_1} \\ \frac{1}{z_2} & -\frac{(e_{(5)}+Y_2^*)}{z_2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{z_3} & -\frac{(e_{(6)}+Y_3^*)}{z_3} & -\frac{1}{z_3} & \frac{(e_{(6)}+Y_3^*)}{z_3} \end{bmatrix} \quad (4.57)$$

As condições **C1**, **C2**, **C3** e **C4** são as mesmas que as utilizadas na seção anterior.

Considera-se assim o estado aumentado

$$x(t) = \begin{bmatrix} e(t)' & T(t)' \end{bmatrix}' \quad (4.58)$$

e sua derivada

$$\dot{x}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \tilde{B}_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbb{A}} x(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ I_3 \end{bmatrix}}_{\mathbb{B}_1} \dot{T}(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{B}_3 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbb{B}_2} \omega + \begin{bmatrix} \tilde{B}_2 \\ 0 \end{bmatrix} v^* \quad (4.59)$$

Definindo um erro de rastreamento $\varepsilon(t) = x(t) - r$, onde $r = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ v^* \ 0]'$, o sistema completo fica

$$\dot{\varepsilon}(t) = \mathbb{A}\varepsilon(t) + \mathbb{B}_1\dot{T}(t) + \mathbb{B}_2\omega + \mathbb{A}r + \begin{bmatrix} \tilde{B}_2 \\ 0 \end{bmatrix} v^* \quad (4.60)$$

e

$$\dot{\varepsilon}(t) = \mathbb{A}\varepsilon(t) + \mathbb{B}_1\dot{T}(t) + \mathbb{B}_2\omega + \mathbb{B}_3v^* \quad (4.61)$$

A parte $\mathbb{A}\varepsilon$ pode ser escrita como

$$\mathbb{A}\varepsilon = [\mathbb{R}'\mathbb{B}_1\mathbb{C} + \mathbb{R}'T_{(2)}\mathbb{B}_2\mathbb{R} + \mathbb{B}T_{(3)}(\mathbb{B}_3 + D)\mathbb{R}] \varepsilon - \mathbb{B}_3v_{zc}^* \quad (4.62)$$

onde $\mathbb{R} = \begin{bmatrix} I_6 & 0 \end{bmatrix}$ e $\mathbb{C} = \begin{bmatrix} 0 & I_6 \end{bmatrix}$, e \mathbb{B}_3 é

$$\mathbb{B}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{(e_{(3)}+Y_2^*)}{z_2} & \frac{(e_{(4)}+Y_1^*)}{z_1} & \frac{(e_{(5)}+Y_2^*)}{z_2} & \frac{(e_{(6)}+Y_3^*)}{z_3} & 0_{1 \times 6} \end{bmatrix}' v^* \quad (4.63)$$

$$B_1(z) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/z_2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1/z_1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1/z_2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1/z_3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B_2(z) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/z_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/z_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/z_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/z_3 \end{bmatrix} \quad (4.64)$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_{(3)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{(4)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_{(5)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{(6)} \end{bmatrix} \quad B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Y_2^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Y_1^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Y_2^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Y_3^* \end{bmatrix} \quad (4.65)$$

o sistema pode ser reescrito como

$$\dot{\varepsilon}(t) = [\mathbb{R}'\mathbb{B}_1\mathbb{C} + \mathbb{R}'T_{(2)}\mathbb{B}_2\mathbb{R} + \mathbb{B}T_{(3)}(\mathbb{B}_3 + D)\mathbb{R}] \varepsilon + \mathbb{B}_1\dot{T} + \mathbb{B}_2\omega \quad (4.66)$$

O problema que deseja-se resolver, trata-se da malha fechada de (4.66).

Problema 4.3.1 *Determinar um ganho \mathbb{K} e duas regiões S_1 e S_0 tal que as propriedades sejam verificadas*

1. *Estabilidade interna: quando $\omega = 0$, para todo $\xi(0) \in S_0$ o sistema (4.34) converge assintoticamente à origem.*
2. *Trajétórias limitadas: quando $\omega \neq 0$ as trajetórias do sistema (4.34) permaneçam limitadas dentro de S_1 para todo $\xi(0) \in S_0$ e $\omega(t)$ satisfazendo (4.28).*

Condições teóricas

Utilizando a não-linearidade (3.57) para o sistema (4.67), tem-se

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) = & \left[\mathbb{R}'\mathbb{B}_1\mathbb{C} + \mathbb{R}'\mathbb{T}_{(2)}\mathbb{B}_2\mathbb{R} + \mathbb{B}\mathbb{T}_{(3)}(\mathbb{B}_3 + \mathbb{D})\mathbb{R} + \mathbb{B}_1\mathbb{K} \right] \varepsilon + \\ & + \mathbb{B}_1\phi(\mathbb{K}\varepsilon) + \mathbb{B}_2\omega \end{aligned} \quad (4.67)$$

Da mesma forma que os teoremas 3.3.1, 3.4.1 e 4.2.1, pode-se propor uma solução para o problema (4.3.1) através do teorema 4.3.1.

Teorema 4.3.1 *Se existe uma função definida positiva $V(\xi)$, ($V(\xi) > 0, \forall \xi \neq 0$ e $V(0) = 0$), um ganho \mathbb{K} , uma matriz diagonal definida positiva M , uma matriz \mathbb{G} e dois escalares positivos ζ e δ_1 satisfazendo, para todos os valores admissíveis da profundidade z*

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \varepsilon} \left[(\mathbb{R}'\mathbb{B}_1\mathbb{C} + \mathbb{R}'\mathbb{T}_{(2)}\mathbb{B}_2\mathbb{R} + \mathbb{R}'\mathbb{T}_{(3)}(\mathbb{B}_3 + \mathbb{D})\mathbb{R} + \mathbb{B}_1\mathbb{K}) \varepsilon + \mathbb{B}_1\phi(\mathbb{K}\varepsilon) \right] \\ - 2\phi(\mathbb{K}\varepsilon)'M(\phi(\mathbb{K}\varepsilon) + \mathbb{G}) - \omega'\omega < 0 \end{aligned} \quad (4.68)$$

$$V(\varepsilon) - \varepsilon'(\mathbb{K}_{(i)} - \mathbb{G}_{(i)})' \frac{\frac{1}{\zeta} + \frac{1}{\delta_1}}{u_{0(i)}^2} (\mathbb{K}_{(i)} - \mathbb{G}_{(i)}) \varepsilon \geq 0 \quad (4.69)$$

$$V(\varepsilon) - \varepsilon'\mathbb{R}'_{(i)} \frac{\frac{1}{\zeta} + \frac{1}{\delta_1}}{\beta^2} \mathbb{R}_{(i)} \varepsilon \geq 0 \quad (4.70)$$

$$V(\varepsilon) - \varepsilon' C'_{(i)} \frac{\frac{1}{\zeta} + \frac{1}{\delta_1}}{u_{1(i)}^2} C_{(i)} \varepsilon \geq 0 \quad (4.71)$$

$$V(\varepsilon) - \varepsilon' C'_{(2)} \frac{\frac{1}{\zeta} + \frac{1}{\delta_1}}{u_{1(2)}^2 - v^*} C_{(2)} \varepsilon \geq 0 \quad (4.72)$$

então o ganho \mathbb{K} e os conjuntos

$$\begin{aligned} S_1(V, \zeta, \delta_1) &= \left\{ V(\varepsilon) \leq \frac{1}{\zeta} + \frac{1}{\delta_1} \right\} \\ S_0(V, \zeta) &= \left\{ V(\varepsilon) \leq \frac{1}{\zeta} \right\} \end{aligned} \quad (4.73)$$

são as soluções para o problema 4.3.1.

□

Demonstração. A demonstração deste teorema segue o mesmo formalismo utilizado para os teoremas (3.3.1) e (3.4.1) e (4.2.1). A satisfação da restrição (4.69) significa que o conjunto $S_1(V, \zeta, \delta_1)$ está incluído no conjunto $S(u_0)$, definido em (3.17). Por consequência, pode-se concluir que, para todo $\xi \in \varepsilon(V, \varepsilon)$, a não-linearidade $\phi(\mathbb{K}\xi(t))$ satisfaz a condição de setor (3.18). A satisfação das relações (4.70), (4.71) e (4.72) garante a inclusão do conjunto $S_1(V, \zeta, \delta_1)$ em $\Omega(\varepsilon)$, definido por (3.98), garantindo também que para todo $\xi \in \varepsilon(V, \gamma)$ as restrições **C2** e **C3** são respeitadas.

Considerando uma função definida positiva $V(\xi)$ ($V(\xi) > 0, \forall \xi \neq 0$), verificamos que para todo $\xi \in \varepsilon(V, \gamma)$ a satisfação de (4.68) significa que a derivada com relação ao tempo, $\dot{V}(\xi)$, desta função, ao longo das trajetórias do sistema (4.67) verifica

$$\begin{aligned} \dot{V}(\varepsilon) - \omega' \omega &= \frac{\partial V}{\partial \varepsilon} \left[(\mathbb{R}' B_1 C + \mathbb{R}' T_{(2)} B_2 \mathbb{R} + \mathbb{R}' T_{(3)} (B_3 + D) \mathbb{R} + \mathbb{B}_1 \mathbb{K} \right] \varepsilon + \\ &+ \mathbb{B}_1 \phi(\mathbb{K}\varepsilon) + \mathbb{B}_2 \omega \end{aligned}$$

ficando com

$$\dot{V}(\varepsilon) - \omega' \omega \leq \dot{V}(\varepsilon) - 2\phi(\mathbb{K}\varepsilon)' (\phi(\mathbb{K}\varepsilon) + \mathbb{G}\varepsilon) - \omega' \omega \quad (4.74)$$

Integrando a condição $\dot{V}(\xi) - \omega' \omega < 0$ tem-se

$$V(\varepsilon(t)) - V(\varepsilon(0)) \leq \int_0^t \omega(\tau)' \omega(\tau) d\tau \quad \forall t > 0 \quad (4.75)$$

seja ainda

$$V(\xi(t)) \leq V(\xi(0)) + \int_0^t \omega(\tau)' \omega(\tau) d\tau \quad (4.76)$$

Assim, para $\xi(0) \in S_0(V, \zeta)$ e $\omega(t)$ satisfazendo (4.28), tem-se que $V(\varepsilon(t)) \leq \zeta^{-1} + \delta_1^{-1}$. Então as trajetórias do sistema (4.67) não saem do conjunto $S_1(V, \zeta, \delta_1^{-1})$.

Pode-se concluir que $S_1(V, \zeta, \delta_1^{-1})$ e $S_0(V, \zeta)$ são soluções do problema (4.67). \square

Assim como para os casos estudados anteriormente, o teorema 4.3.1 não apresenta condições construtivas. Tem-se agora o objetivo de colocar as condições sob a forma de LMI. Para simplificar, a seguinte função quadrática será utilizada

$$V(\xi) = \xi' P \xi \quad (4.77)$$

com $P = P' > 0$.

Considerando os parâmetros incertos definidos em (3.109), pode-se deduzir que as matrizes $B_k(z) \in k = 1, 2, 4, 5$ pertencem a um politopo de 4 vértices

$$B_k = \{B_{kj}, j = 1, \dots, 4\} \quad k = 1, 2, 4, 5 \quad (4.78)$$

Assim, o seguinte sistema politópico pode ser definido

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}(t) = \sum_{j=1}^4 \lambda_j [& (\mathbb{R}' B_{1j} C + \mathbb{R}' T_{(2)} B_{2j} \mathbb{R} + \mathbb{R} T_{(3)} (\bar{B}_3 + D) \mathbb{R} + \mathbb{B}_1 \mathbb{K}) \varepsilon + \\ & + \mathbb{B}_1 \phi(\mathbb{K} \varepsilon) + \mathbb{B}_2 \omega] \end{aligned} \quad (4.79)$$

Aplicando o teorema 4.3.1 no sistema (4.79), com uma função $V(\xi)$ quadrática, a seguinte proposição pode ser obtida

Proposição 4.3.1 *Se existem duas matrizes simétricas definidas positivas $W \in \mathfrak{R}^{9 \times 9}$, $R_1 \in \mathfrak{R}^{6 \times 6}$, uma matriz diagonal definida positiva $S \in \mathfrak{R}^{3 \times 3}$, duas matrizes $Y \in \mathfrak{R}^{3 \times 9}$ e $Z \in \mathfrak{R}^{3 \times 9}$, três escalares ε , ζ e δ_1 satisfazendo*

$$\begin{bmatrix} W(\mathbb{R}B_{1j}C)' + (\mathbb{R}B_{1j}C)W + \\ \mathbb{B}_1Y + Y'\mathbb{B}_1' + \mathbb{R}'R_1\mathbb{R} + & * & * & * & * & * \\ \varepsilon(u_{1(3)}^2(1 + \beta^2 + \beta^2))\mathbb{R}'\mathbb{R} & & & & & \\ u_{1(2)}B_{2j}\mathbb{R}W & -R_1 & * & * & * & * \\ [B_3[IO]']\mathbb{R}W & 0 & -\varepsilon I & * & * & * \\ S\mathbb{B}_1' - Z & 0 & 0 & -2S & * & * \\ B_{4j}'\mathbb{R} & 0 & 0 & 0 & -I & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & B_{5j} & -\varepsilon I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.80)$$

$$\begin{bmatrix} W & * & * \\ Y_{(i)} - Z_{(i)} & \zeta u_{0(i)}^2 & * \\ Y_{(i)} - Z_{(i)} & 0 & \delta_1 u_{0(i)}^2 \end{bmatrix} \geq 0 \quad \forall i = 1, 2, 3 \quad (4.81)$$

$$\begin{bmatrix} W & * & * \\ \mathbb{R}_{(i)}W & \zeta\beta^2 & * \\ \mathbb{R}_{(i)}W & 0 & \delta_1\beta^2 \end{bmatrix} \geq 0 \quad \forall i = 1, 2, 3 \quad (4.82)$$

$$\begin{bmatrix} W & * & * \\ C_{(i)}W & \zeta u_{1(i)}^2 & * \\ C_{(i)}W & 0 & \delta_1 u_{1(i)}^2 \end{bmatrix} \geq 0 \quad \forall i = 1, 3 \quad (4.83)$$

$$\begin{bmatrix} W & * & * \\ C_{(2)}W & \zeta u_{1(2)}^2 & * \\ C_{(2)}W & 0 & \delta_1(u_{1(2)} - v^*)^2 \end{bmatrix} \geq 0 \quad (4.84)$$

então o ganho $\mathbb{K} = YW^{-1}$ é

1. quando $\omega \neq 0$, as trajetórias do sistema em malha fechada ficam dentro do conjunto

$$\varepsilon_1(W, \zeta, \delta_1) = \left\{ \xi'W^{-1}\varepsilon \leq \frac{1}{\zeta} + \frac{1}{\delta_1} \right\} \quad (4.85)$$

para todo $\xi(0) \in \varepsilon_0$

$$\varepsilon_0(W, \zeta) = \left\{ \xi' W^{-1} \varepsilon \leq \frac{1}{\zeta} \right\} \quad (4.86)$$

e toda perturbação $\omega(t)$ satisfazendo (4.28)

2. quando $\omega = 0$, o conjunto $\varepsilon_0(W, \zeta) = \varepsilon_1(W, \zeta, \delta_1)$ está incluído dentro da base de atração do sistema em malha fechada, e assim é uma região de estabilidade assintótica.

Demonstração. A demonstração deste teorema segue o mesmo formalismo utilizado para os teoremas (3.3.1), (3.4.1) e (4.2.1). A satisfação da restrição (4.69) significa que o conjunto $S_1(V, \zeta, \delta_1)$ está incluído no conjunto $S(u_0)$, definido em (3.17). Por consequência, pode-se concluir que, para todo $\varepsilon \in \varepsilon(V, \gamma)$, a não-linearidade $\phi(\mathbb{K}\xi(t))$ satisfaz a condição de setor (3.18). A satisfação das relações (4.70), (4.71) e (4.72) garante a inclusão do conjunto $S_1(V, \zeta, \delta_1)$ em $\Omega(\xi)$, definido por (3.98), garantindo também que para todo $\xi \in \varepsilon(V, \gamma)$ as restrições **C2** e **C3** são respeitadas.

Considerando uma função definida positiva $V(\varepsilon)$ ($V(\varepsilon) > 0, \forall \varepsilon \neq 0$), verifica-se, assim, que para todo $\xi \in \varepsilon(V, \gamma)$ a satisfação de (4.68) significa que a derivada com relação ao tempo, $\dot{V}(\varepsilon)$, desta função, ao longo das trajetórias do sistema (4.67) verifica

$$\begin{aligned} \dot{V}(\varepsilon) \leq & 2\varepsilon' W^{-1} \sum_{j=1}^4 \lambda_j \left[\left(\mathbb{R}' B_{1j} \mathbb{R} + \mathbb{R}' T_{(2)} B_{2j} \mathbb{R} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \mathbb{R} T_{(3)} (B_3 + D) \mathbb{R} + \mathbb{B}_1 Y W^{-1} \right) \varepsilon + \mathbb{R} [B_{4j} + D B_{5j}] \omega \right] + \\ & 2\varepsilon' W^{-1} \mathbb{B}_1 \phi(\mathbb{K}\varepsilon) - 2\phi(\mathbb{K}\varepsilon)' S^{-1} \left(\phi(\mathbb{K}\varepsilon) + Z W^{-1} \varepsilon \right) - \omega' \omega \end{aligned}$$

com

$$B_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/z_1 & -Y_1^*/z_1 & 1/z_1 & -Y_1^*/z_1 \\ 1/z_2 & -Y_2^*/z_2 & 0 & 0 \\ 1/z_3 & -Y_3^*/z_3 & -1/z_3 & -Y_3^*/z_3 \end{bmatrix} \quad B_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/z_1 & 0 & -1/z_1 \\ 0 & -1/z_2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/z_3 & 0 & 1/z_3 \end{bmatrix} \quad (4.87)$$

Como para o caso 4.2.1, pode-se majorar o termo contendo $T_{(2)}$, utilizando a relação (3.17)

$$\begin{aligned}
& 2\varepsilon'W^{-1}\left[\mathbb{R}'B_{1j}\mathbb{R} + \mathbb{R}'T_{(2)}B_{2j}\mathbb{R} + \mathbb{R}T_{(3)}(B_3 + D)\mathbb{R} + \mathbb{B}_1YW^{-1}\right]\varepsilon + \\
& + 2\varepsilon'W^{-1}\mathbb{B}_1\phi(\mathbb{K}\varepsilon) + 2\varepsilon'\mathbb{R}'\left(B_{4j} + DB_{5j}\right)\omega + \\
& - 2\phi(\mathbb{K}\varepsilon)'S^{-1}\left(\phi(\mathbb{K}\varepsilon) + ZW^{-1}\varepsilon\right)\omega'\omega < 0
\end{aligned} \tag{4.88}$$

onde $R_1 = R_1' > 0$.

O termo contendo $T_{(2)}$ é majorado como

$$\begin{aligned}
2\varepsilon'W^{-1}\mathbb{R}'T_{(2)}B_{(2j)}\mathbb{R}\varepsilon & \leq \varepsilon'(W^{-1}\mathbb{R}'R_1\mathbb{R}W^{-1} + \\
& + \mathbb{R}'B_{2j}'T_{(2)}R_1^{-1}T_{(2)}B_{2j}\mathbb{R})\varepsilon \\
\leq & \varepsilon'(W^{-1}\mathbb{R}'R_1\mathbb{R}W^{-1} + \\
& u_{1(2)}^2\mathbb{R}'B_{2j}'R_1^{-1}\mathbb{R})\varepsilon
\end{aligned} \tag{4.89}$$

Através do mesmo método, agora os termos contendo $T_{(3)}$ e $D(e)$ devem ser manipulados

$$\begin{aligned}
& 2\varepsilon'W^{-1}\mathbb{R}'\left(T_{(3)}(B_3 + D)\mathbb{R}\varepsilon + DB_{5j}\omega\right) = \\
& 2\varepsilon'W^{-1}\mathbb{R}'\begin{bmatrix} T_{(3)}I & T_{(3)}D & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_3\mathbb{R} & 0 \\ \mathbb{R} & 0 \\ 0 & B_{5j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \omega \end{bmatrix} \leq \\
& \varepsilon\left(u_{1(3)}^2(1 + \beta^2) + \beta^2\varepsilon'W^{-1}\mathbb{R}'\mathbb{R}W^{-1}\varepsilon\right) + \\
& + \varepsilon^{-1}\begin{bmatrix} \varepsilon' & \omega' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_3\mathbb{R} & 0 \\ \mathbb{R} & 0 \\ 0 & B_{5j} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} B_3\mathbb{R} & 0 \\ \mathbb{R} & 0 \\ 0 & B_{5j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \omega \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.90}$$

sendo que sua parte direita pode ser escrita como (4.90)

$$\begin{bmatrix} \varepsilon W^{-1} & \phi'(\mathbb{K}\varepsilon)S^{-1} & \omega' \end{bmatrix} \mathcal{M} \begin{bmatrix} W^{-1}\varepsilon \\ S^{-1}\phi(\mathbb{K}\varepsilon) \\ \omega \end{bmatrix} < 0 \tag{4.91}$$

com

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} W(\mathbb{R}'B_{1j}C)' + \mathbb{R}B_{1j}CW + \\ + \mathbb{B}_1Y + Y'\mathbb{B}_1 + \\ + \mathbb{R}'(\varepsilon u_{1(3)}^2(1 + \beta^2) + \beta^2)I + R_1) \mathbb{R} + & * & * \\ + u_{1(2)}^2 W \mathbb{R}' B_{2j} R_1^{-1} B_{2j} \mathbb{R} W + & & \\ + \varepsilon^{-1} W \mathbb{R}' \begin{bmatrix} B_3 \\ I \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} B_3 \\ I \end{bmatrix} \mathbb{R} W & & \\ S \mathbb{B}_1' - Z & -2S & * \\ B_{4j} \mathbb{R} & 0 & -I + \varepsilon^{-1} B_{5j}' B_{5j} \end{bmatrix} < 0 \quad (4.92)$$

Aplicando o complemento de Schur, a relação (4.80) é obtida. Se a relação (4.80) é satisfeita, verifica-se que

1. quando $\omega(t) \neq 0$, $V(\xi(t)) \leq V(\xi(0)) + \int_0^t \omega(\tau)' \omega(\tau) d\tau \leq \zeta^{-1} + \delta_1^{-1}$ para todo $\xi \in \varepsilon_0(W, \zeta)$.
Então, para todo $\xi(0) \in \varepsilon_0(W, \zeta)$ e toda perturbação $\omega(t)$ satisfazendo (4.28), as trajetórias do sistema (4.45) ficam dentro do conjunto $\varepsilon_1(W, \zeta, \delta_1)$.
2. quando $\omega(t) = 0$, tem-se $\dot{V}(\xi) < 0$ para todo $\xi(0) \in \varepsilon_0(W, \zeta)$.

□

Problema de otimização

Assim como nas seções anteriores, será apresentado um método de otimização convexa para obter o ganho de realimentação de estados que assegure a estabilidade local do sistema em malha fechada (4.34), maximizando o tamanho dos conjuntos ε_0 e ε_1 . Consequentemente, se o limite da energia de perturbação δ_1 é dado ou não, os problemas de otimização seguintes podem ser considerados

- δ_1 é conhecido. Deseja-se otimizar o tamanho dos conjuntos ε_0 e ε_1 . Assim, o problema é

proposto como

$$\begin{aligned} & \min_{W, R_1, Y, Z, S, \zeta, \varepsilon} \zeta + \delta_1 + \delta + \sigma \\ & \text{sujeito às condições (4.80), (4.81), (4.82), (4.83) e (4.84)} \\ & \begin{bmatrix} \sigma I & \star \\ Y & I \end{bmatrix} \geq 0 \\ & \begin{bmatrix} \delta I & \star \\ I & W \end{bmatrix} \geq 0 \end{aligned} \quad (4.93)$$

- Se δ_1 é desconhecido, deseja-se minimizá-lo. Este problema pode ser interpretado como determinar o maior limite para a perturbação, e assim, quantificar a tolerância à perturbação do sistema. Basta então adicionar δ_1 ao critério anterior. Pode-se também adicionar pesos nas variáveis, juntamente com a adição de δ_1 . Tal problema de otimização implica no compromisso entre a tolerância à perturbação δ_1 e o tamanho do domínio de estabilidade ζ .

Resultados numéricos

Assim como no caso anterior, as coordenadas do alvo com relação ao ambiente são

$$E_1(9.2929, 20.7071) \quad E_2(10, 20) \quad E_3(10.7071, 19.2929)$$

sendo os valores em metros. A distância entre o robô e a câmera deve pertencer ao intervalo $d_1 \in [2.26, 5]$, em metros. O índices visuais de referência são definidos por

$$Y_1^* = 0.2 \quad Y_2^* = 0 \quad Y_3^* = -0.2$$

Como os índices visuais Y_i , $i = 1, 2, 3$ devem atingir seus valores de referência, a câmera deve ser estabilizada ficando perpendicular ao alvo, alinhada ao seu ponto central E_2 . Para garantir a visibilidade do alvo, consideramos $\beta = 0.4$, e o ângulo entre a direita (E_1E_3) e o eixo óptico da câmera z_C : $\alpha \in [-\pi + \frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}]$. A partir das relações p_1 e p_2 , conforme (3.59) e (3.60), as matrizes $B_1(z)$ e $B_2(z)$ pertencem a dois politopos de matrizes, como pode-se ver pelas relações (3.4). As matrizes, $B_4(z)$ e $B_5(z)$, da mesma forma, pertencem a dois politopos de matrizes.

$$\bar{B}_1 \in \left(\left[\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.1667 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -0.0653 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -0.1667 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -0.2681 & 0 & 1 \end{array} \right], \left[\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.1667 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -0.2681 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -0.1667 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -0.0653 & 0 & 1 \end{array} \right], \right.$$

$$\left. \left[\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.4838 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -0.3824 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -0.4838 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -0.5852 & 0 & 1 \end{array} \right], \left[\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.4838 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -0.5852 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -0.4838 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -0.3824 & 0 & 1 \end{array} \right] \right)$$

$$\bar{B}_2 \in \left(\left[\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1667 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0653 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1667 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2681 \end{array} \right], \left[\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1667 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2681 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1667 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0653 \end{array} \right], \right.$$

$$\left. \left[\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4838 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.3824 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4838 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5852 \end{array} \right], \left[\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4838 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5852 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4838 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3824 \end{array} \right] \right)$$

$$B_4 \in \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0653 & -3.0628 & 0.0653 & -3.0628 \\ 0.1667 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2681 & 0.7460 & -0.2681 & -0.7460 \end{array} \right], \left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5852 & -0.3418 & 0.5852 & -0.3418 \\ 0.4838 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3824 & 0.5230 & -0.3824 & -0.5238 \end{array} \right], \\ \left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2681 & -0.7460 & 0.2681 & -0.7460 \\ 0.1667 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0653 & 3.0628 & -0.0653 & -3.0628 \end{array} \right], \left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3824 & -0.5230 & 0.3824 & -0.5230 \\ 0.4838 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5852 & 0.3418 & -0.5852 & -0.3418 \end{array} \right] \end{array} \right\}$$

$$B_5 \in \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0653 & 0 & -0.0653 \\ 0 & -0.1667 & 0 & -0.1667 \\ 0 & -0.2681 & 0 & 0.2681 \end{array} \right], \left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5852 & 0 & -0.5852 \\ 0 & -0.4838 & 0 & 0 \\ 0 & -0.3824 & 0 & 0.3824 \end{array} \right], \\ \left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.2681 & 0 & -0.2681 \\ 0 & -0.1667 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0653 & 0 & 0.0653 \end{array} \right], \left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.3824 & 0 & -0.3824 \\ 0 & -0.4838 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5852 & 0 & -0.5852 \end{array} \right] \end{array} \right\}$$

Assim como nos casos anteriores, pode-se definir as restrições dinâmicas do tensor cinemático do robô em questão como $u_1 = [1 \ 1 \ 0.5]'$, assim como a do controle $u_0 = [4 \ 4 \ 5]'$. Utilizando o pacote **lmitool** do **SciLab**, o seguinte ganho \mathbb{K} foi obtido:

$$\mathbb{K} = \begin{bmatrix} -19.64 & -0.06 & 1.00 & -2.44 & -0.65 & 4.29 & -5.42 & 0 & 0.18 \\ 0.06 & -31.71 & 0.21 & 0.38 & 0.12 & -0.63 & 0 & -3.73 & 0 \\ -4.84 & 0.16 & -15.86 & -5.20 & 2.65 & -7.41 & 0.50 & 0 & -4.34 \end{bmatrix} \quad (4.94)$$

Neste caso, δ_1 foi encontrado via otimização.

4.4 Discussão

Neste capítulo foram abordadas 4 diferentes tarefas de controle para um robô móvel com uma câmera acoplada. Nos três últimos casos, a velocidade do alvo é considerada uma perturbação limitada em energia:

$$\int_0^{\infty} \omega'(\tau)\omega(\tau)d\tau \leq \frac{1}{\delta_1}$$

Foram propostas condições LMI para tratar os problemas de estabilidade interna e de trajetórias limitadas. A partir deste resultado, pode-se estudar também o ganho \mathcal{L}_2 do sistema em malha fechada. Esta abordagem consiste em determinar um ganho \mathbb{K} tal que, para todo $\xi(0) \in \varepsilon(W, \zeta)$ e toda perturbação $\omega(t)$ satisfazendo (4.28), existem dois escalares finitos $\eta > 0$ e $b \geq 0$ satisfazendo

$$\|z_{reg}(t)\|_2^2 \leq \frac{1}{\eta} \|\omega(t)\|_2^2 + b, \quad \forall t > 0 \quad (4.95)$$

O escalar b depende da condição inicial não-nula $\xi(0) \neq 0$. z_{reg} é o vetor de saída de controle do sistema

$$z_{reg}(t) = C_z \xi(t) \quad (4.96)$$

onde C_z é uma matriz de dimensão apropriada. Considerando a função quadrática de Lyapunov $V(\xi) = \xi' P \xi > 0$, com $P = P' > 0$, as condições LMI podem ser obtidas para satisfazer as trajetórias do sistema em malha fechada

$$\dot{V}(\xi) + z'z - \frac{1}{\eta} \omega' \omega \leq 0 \quad (4.97)$$

A velocidade do alvo, $\omega(t)$, considerada como uma perturbação externa ao sistema é limitada em energia. Pode-se considerar também que tal perturbação é limitada em amplitude

$$\omega'(t)\omega(t) = v_E^2(t) + l^2 \omega_E^2(t) \leq \delta_2, \quad \forall t > 0 \quad (4.98)$$

onde δ_2 é um escalar positivo, $0 < \delta_2 < \infty$.

O caso abordado na seção 4.1.2 tem uma vantagem com relação aos apresentados em 3.2.3 e 4.1.1, que é a possibilidade de controlar a orientação também do robô, e não apenas a da câmera.

4.5 Conclusões

Neste capítulo foram modeladas 2 tarefas de controle, baseadas nas informações sensoriais e visuais dos 3 pontos alinhados do alvo em questão. A primeira está presente em [21], e a segunda em [39]. A principal vantagem deste último é a introdução de mais um grau de liberdade no controle, ou seja, passou-se a controlar também o posicionamento do robô, e não apenas o da câmera. Outra diferença foi a utilização do **Scilab** como ferramenta de otimização, enquanto em [21] é utilizado o **Matlab**. Resultados numéricos diferentes foram encontrados, porém a estabilidade não foi afetada, visto que o problema convergiu.

Mostrou-se assim que as técnicas avançadas de controle permitem levar em consideração uma série de restrições na síntese do controle: incertezas na profundidade do alvo, visibilidade e restrições dinâmicas nos atuadores.

Para este capítulo, foram abordados os dois casos do alvo móvel: para tal, foi utilizado a mesma abordagem de representação politópica das incertezas, modelando o sistema de tal forma a considerar a velocidade ao alvo como um vetor de perturbação limitado em energia. Definiu-se assim um conjunto compacto, contendo o original, dentro do qual é assegurada a convergência do sistema em malha fechada. Caso o alvo esteja parado, a estabilidade assintótica é garantida, assegurando o correto posicionamento da câmera na posição desejada de referência.

As duas tarefas definidas permitem controlar localmente o movimento do robô.

Capítulo 5

Resultados

Neste capítulo serão apresentados os resultados de simulação referentes aos casos de estudo apresentados anteriormente neste trabalho. Serão apresentados os gráficos de trajetória do conjunto robô+câmera, as velocidades, o tensor cinemático, a "task function", o índice visual, o sinal de controle e a evolução dos ângulos do robô e da câmera. Serão mostrados também os diagramas de blocos utilizados para as simulações. Para cada caso será apresentada uma breve discussão dos resultados gráficos.

Como já mencionado anteriormente, o ganho de realimentação K foi obtido com o **Scilab**, porém as simulações foram executadas com o **Matlab/Simulink**.

5.1 Simulação

5.1.1 Resultados: robô e câmera orientados pelo ponto central do alvo parado

A figura 5.1 ilustra o diagrama de blocos utilizado para a simulação. O sistema robótico é realimentado pela lei de controle saturante (3.54), que pode ser construída utilizando a matriz \mathbb{K} como

$$\dot{T}(t) = sat_{u_0}(\mathbb{K}\epsilon) = sat_{u_0}(\mathbb{K}(x(t) - r)) \quad (5.1)$$

onde $x(t) = [e'(t) \quad T'(t)]'$. O erro $e(t)$ pode ser obtido através das medidas dos sensores de ultrassom e da câmera, e o tensor cinemático $T(t)$ é diretamente dado pela integração da saída de controle

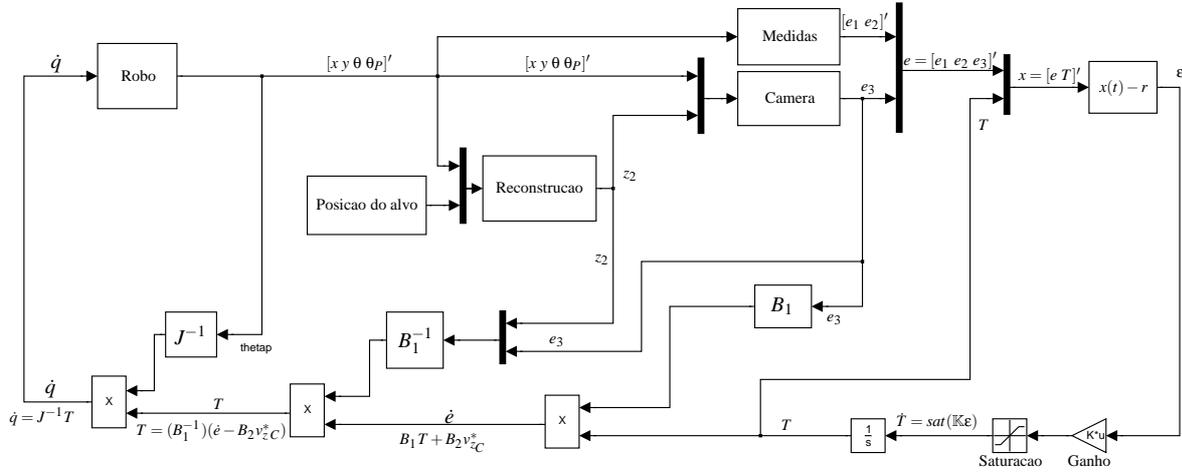


Figura 5.1: Diagrama de blocos simulado

$$T(t) = \int_0^t \dot{T}(\tau) d\tau = \int_0^t \text{sat}_{u_0}(\mathbb{K}\varepsilon(\tau)) d\tau \quad (5.2)$$

Através das relações (3.35) e (5.2), a dinâmica da tarefa pode ser reescrita como

$$\dot{e}(t) = \tilde{B}_1(z_2, e_{(3)})T(t) + \tilde{B}_2 v_{z_C}^* = \tilde{B}_1(z_2, e_{(3)}) \int_0^t \text{sat}_{u_0}(\mathbb{K}\varepsilon(\tau)) d\tau + \tilde{B}_2 v_{z_C}^* \quad (5.3)$$

Na prática, o parâmetro incerto z_2 na matriz $\tilde{B}_1(z_2, e_{(3)})$ pode ser fixado em seu valor de referência z_2^* , obtido pelo cálculo de projeção considerando a posição de referência da câmera com relação ao alvo. Deve-se para efeitos de controle dos acionadores do robô construir um sinal de controle \dot{q} . Pode-se obtê-lo a partir da relação (2.18), ficando

$$\dot{q}(t) = J^{-1}(\theta_P)T(t) \quad (5.4)$$

onde θ_P denota a orientação da câmera com relação à base móvel, e pode ser medida por um encoder. O tensor cinemático $T(t)$ pode ser calculado através da relação (3.35), sendo

$$T(t) = \tilde{B}_1^{-1}(z_2, e_{(3)})(\dot{e}(t) - \tilde{B}_2 v_{z_C}^*) \quad (5.5)$$

Neste caso, a profundidade z_2 é estimada por um bloco de reconstrução da profundidade ([64] e [16]).

Considerando as relações (5.3), (5.4) e (5.5) pode-se obter o vetor de controle \dot{q} para os acionadores do robô

$$\dot{q}(t) = J^{-1}(\theta_P) \tilde{B}_1^{-1}(z_2, e_{(3)}) \tilde{B}_1(z_2^*, e_{(3)}) \int_0^t sat_{u_0} \quad (5.6)$$

As relações descritas acima pode ser percebidas através da figura 5.1.

A configuração inicial do robô é dada por

$$x = -7.35\text{m} \quad y = -8\text{m} \quad \theta = 0.3\text{rad} \quad \theta_P = 0.3\text{rad} \quad (5.7)$$

Para as simulações em **MatLab/Simulink**, foi utilizada uma velocidade de referência de $v_{z_c}^* = 0.8\text{m/s}$. A figura 5.2, à esquerda, representa a trajetória do robô. Pode-se reparar que a tarefa é executada com perfeição, e o robô é conduzido em direção ao ponto central do alvo com a câmera apontada para este, como pode-se verificar pelos ângulos fornecidos pela figura 5.3. As velocidades do robô estão apresentadas na figura 5.2, à direita. Na figura 5.3 percebe-se que o sistema segue uma trajetória suave em direção ao alvo, pois os ângulos do robô e da câmera não apresentam comportamento oscilatório.

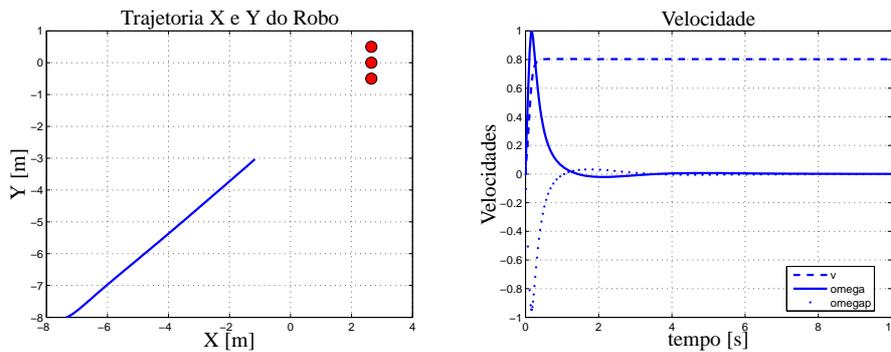


Figura 5.2: Trajetoria do robô com relação ao referencial R (à esquerda) e velocidades do robô (à direita)

A evolução do tensor cinemático da câmera está apresentado à esquerda da figura 5.4. Repare que o elemento $T_{(2)}$ do tensor converge para sua velocidade de referência $v_{z_c}^*$. Os elementos $T_{(1)}$ e $T_{(3)}$ convergem a zero, como era esperado. Os erros $e_{(i)}$, $i = 1, 2, 3$, estão apresentados na figura 5.4, à direita, e convergem à zero. Através desta figura verificamos a estabilidade assintótica do sistema.

À direita da figura 5.5 mostra a evolução do índice visual Y_2 convergendo para Y_2^* (para este caso, $Y_2^* = 0$). A imagem da direita da figura 5.5 mostra a evolução dos sinais de controle $\dot{T} =$

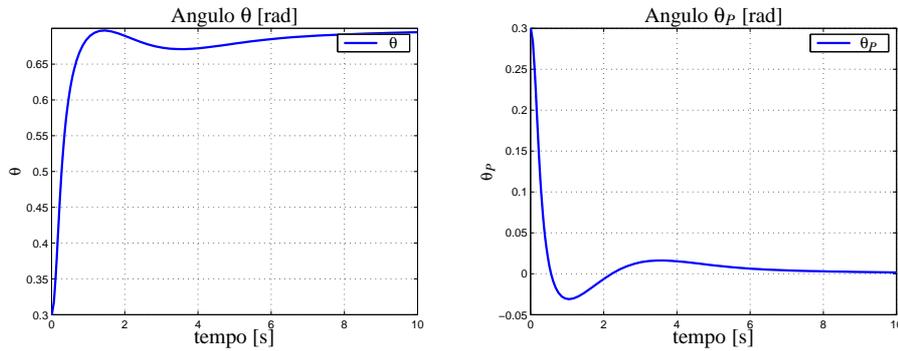


Figura 5.3: Evolução dos ângulos θ (à esquerda), da base móvel, e θ_P da câmera com relação à base móvel (à direita)

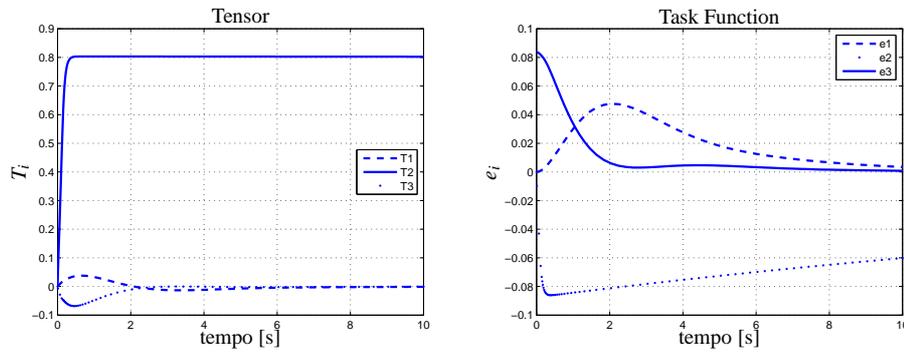


Figura 5.4: Tensor cinemático da câmera com relação a R (à esquerda) e erro da função-tarefa (à direita)

$sat_{u_0}(\mathbb{K}\epsilon)$. Pode-se perceber a saturação da componente u_2 satura por um instante. Como era previsto durante o projeto do controle, a estabilidade é garantida mesmo com a presença desta saturação.

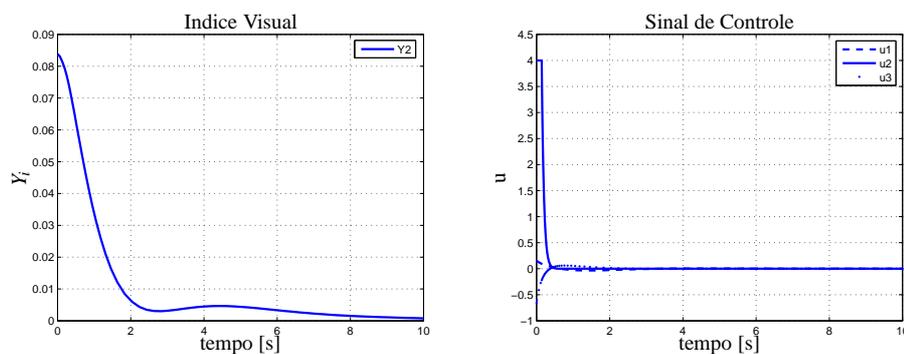


Figura 5.5: Evolução dos índices visuais (à esquerda) e sinal de controle (à direita)

5.1.2 Resultados: câmera orientada perpendicularmente aos 3 pontos do alvo parado

O diagrama de blocos simulado é ilustrado na figura 5.6. O procedimento de reconstrução de \dot{q} é o mesmo utilizado anteriormente.

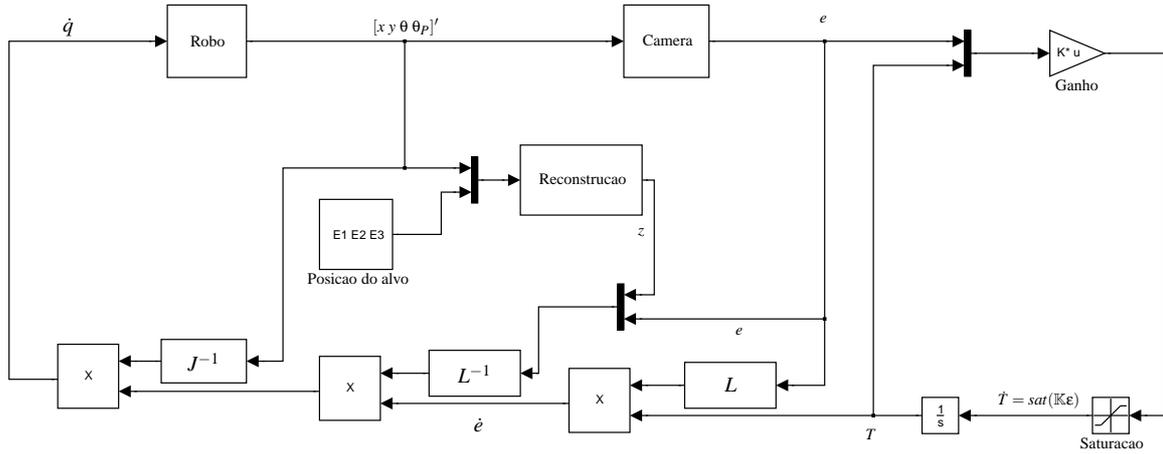


Figura 5.6: Diagrama de blocos simulado

Neste caso, o sistema robótico é realimentado pelo controle saturante (3.96), que pode ser reconstruída por

$$\hat{T}(t) = sat_{u_0}(u(t)) = sat_{u_0}(\mathbb{K}\xi(t)) = sat_{u_0}(K_1 e(t) + K_2 T(t)) \quad (5.8)$$

onde $e(t)$ é o erro dos índices visuais e pode ser dado pela saída da câmera e $T(t)$ é o tensor cinemático, dado pela integração da saída de controle

$$T(t) = \int_0^t \hat{T}(\tau) d\tau = \int_0^t sat_{u_0}(K_1 e(\tau) + K_2 T(\tau)) d\tau \quad (5.9)$$

Das relações (5.9) e (3.93) pode-se obter a dinâmica da tarefa em malha fechada

$$\dot{e}(t) = L(z, e)T(t) = L(z^*, e) \int_0^t sat_{u_0}(K_1 e(\tau) + K_2 T(\tau)) d\tau \quad (5.10)$$

Neste caso, o parâmetro incerto z na matrix $L(z, e)$ pode ser substituído por seu valor de referência, que pode ser calculado pela técnica da projecção geométrica.

Para controlar devidamente o robô, deve-se reconstruir $\dot{q}(t)$. Através da relação (2.18), temos

$$\dot{q}(t) = J^{-1}(\theta_P)T(t) \quad (5.11)$$

onde o tensor cinemático $T(t)$ pode ser calculado pela inversa da tarefa de visão

$$T(t) = L^{-1}(z, e)\dot{e}(t) \quad (5.12)$$

A profundidade pode ser estimada através de um bloco de reconstrução utilizando a técnica descrita em [64] e [16]. Considerando as relações (5.10), (5.11) e (5.12), pode-se obter o controle dinâmico do robô $\dot{q}(t)$ para os acionadores do robô

$$\dot{q}(t) = J^{-1}(\theta_P)L^{-1}(z, e)L(z^*, e) \int_0^t \text{sat}_{u_0}(K_1 e(t) + K_2 T(t)) dt \quad (5.13)$$

As relações descritas acima pode ser percebidas através da figura 5.6.

A configuração inicial do robô é dada por

$$x = -3\text{m} \quad y = -2\text{m} \quad \theta = 0.2\text{rad} \quad \theta_P = 0.1\text{rad} \quad (5.14)$$

Para as simulações em **MatLab/Simulink**, foi utilizada uma velocidade de referência de $v_{z_C}^* = 0.8\text{m/s}$. A figura 5.7, à esquerda, representa a trajetória do robô. As velocidades do robô estão apresentadas na figura 5.7, à direita.

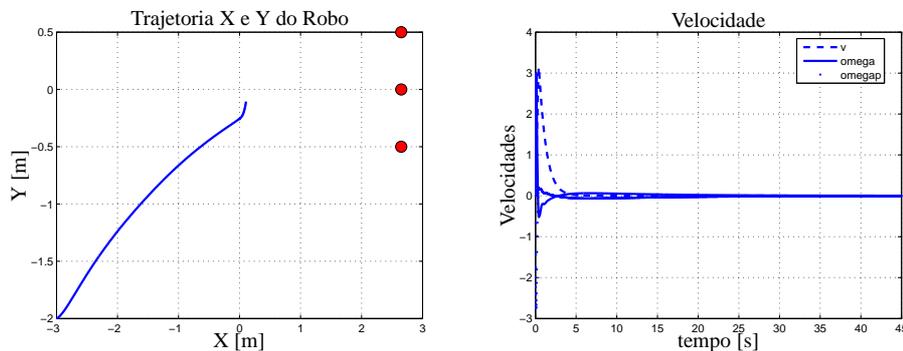


Figura 5.7: Trajetoria do robô com relação ao referencial R (à esquerda) e velocidades do robô (à direita)

Pode-se reparar que a tarefa é executada com perfeição, e câmera é apontada ao ponto central do alvo e fica perpendicular a este, como pode-se verificar pelos dados fornecidos pela figura 5.8. Pode-se reparar que o sistema é bem comportado devido à ausência de oscilações.

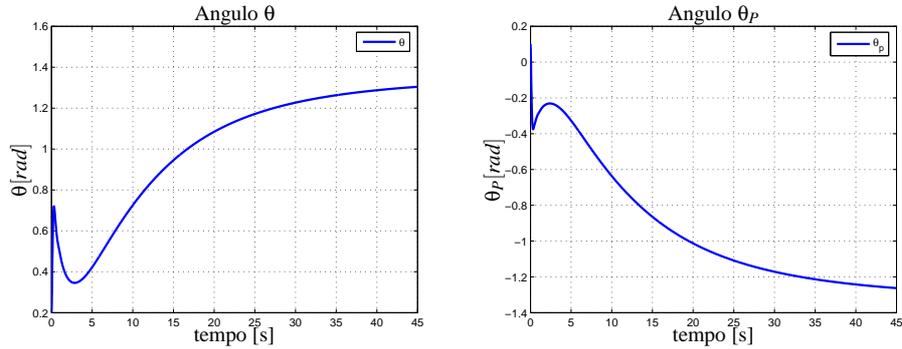


Figura 5.8: Evolução dos ângulos θ (à esquerda), da base móvel, e θ_P da câmera com relação à base móvel (à direita)

A evolução do tensor cinemático da câmera está apresentado à esquerda da figura 5.9. Os erros $e_{(i)} = Y_i - Y_i^*$, $i = 1, 2, 3$, estão apresentados na figura 5.9, à direita, e convergem à zero. Através desta figura verificamos a estabilidade assintótica do sistema.

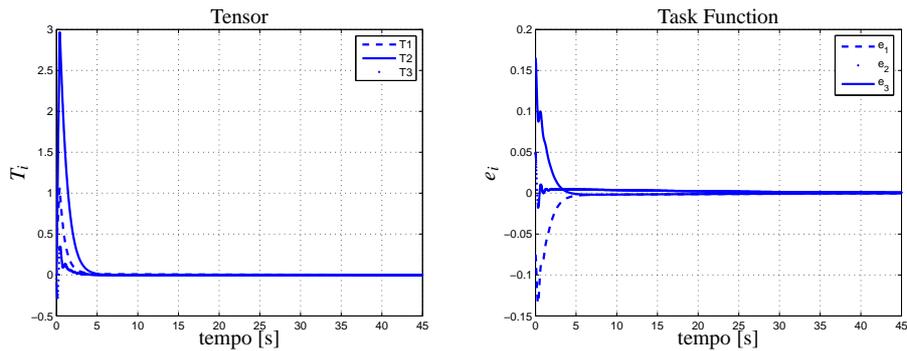


Figura 5.9: Tensor cinemático da câmera com relação a R (à esquerda) e erro da função-tarefa (à direita)

À direita da figura 5.10 mostra a evolução do índice visual Y_i convergendo para Y_i^* . A imagem da direita da figura 5.10 mostra a evolução dos sinais de controle $\dot{T} = sat_{u_0}(\mathbb{K}\xi)$. Pode-se ver a saturação do sinal de controle, porém sem acarretar em perda de estabilidade, devido às técnicas de controle avançadas aqui utilizadas.

5.1.3 Resultados: câmera orientada perpendicularmente aos 3 pontos do alvo em movimento

A configuração inicial do robô é dada por

$$x = -3\text{m} \quad y = -2\text{m} \quad \theta = 0.2\text{rad} \quad \theta_P = 0.1\text{rad} \quad (5.15)$$

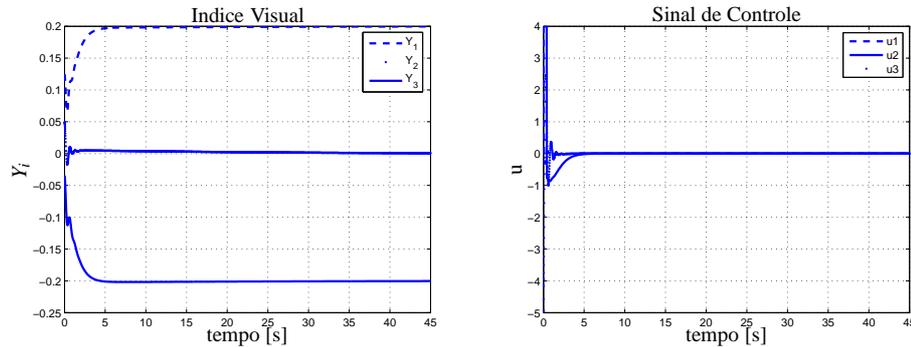


Figura 5.10: Evolução dos índices visuais (à esquerda) e sinal de controle (à direita)

Para este caso utilizou-se o mesmo diagrama de blocos que a seção anterior (vide figura 5.6), com os mesmos parâmetros

A figura 5.11, à esquerda, representa a trajetória do robô. As linhas grossas representam a trajetória dos 3 pontos do alvo móvel no eixo XY , enquanto a linha fina representa a trajetória do robô. Pode-se reparar que a tarefa é executada com perfeição, e câmera é apontada ao ponto central do alvo e tende a ficar perpendicular a este, mesmo com o movimento do alvo, como pode-se verificar pelos dados fornecidos pela figura 5.12. As velocidades do robô estão apresentadas na figura 5.11, à direita. Aparentemente o sistema não possui um bom comportamento, pois a velocidade, possui caráter oscilatório. Porém deve ser lembrado que o alvo agora é móvel, e o comportamento do robô o acompanha.

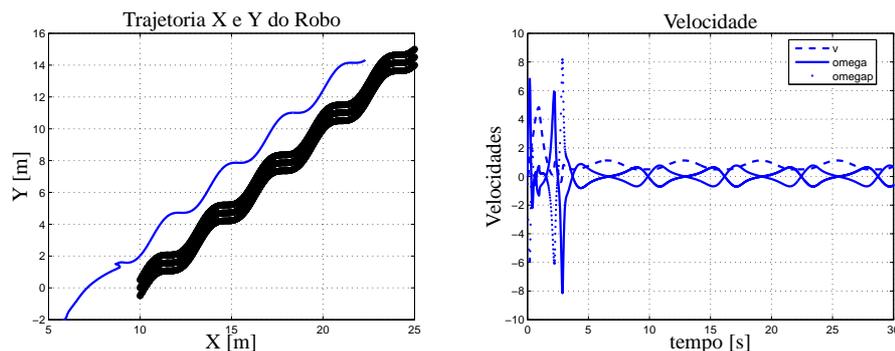


Figura 5.11: Trajetoria do robô com relação ao referencial R (à esquerda) e velocidades do robô (à direita)

À direita da figura 5.13 mostra a evolução do índice visual Y_i convergindo para Y_i^* . A imagem da direita da figura 5.13 mostra a evolução dos sinais de controle $\dot{T} = sat_{u_0}(\mathbb{K}\xi)$. Neste caso pode-se observar que o sinal de controle satura por alguns instantes, tanto no sentido negativo quanto no positivo. Porém, mesmo assim, devido às técnicas aqui utilizadas, a estabilidade do sistema é garantida.

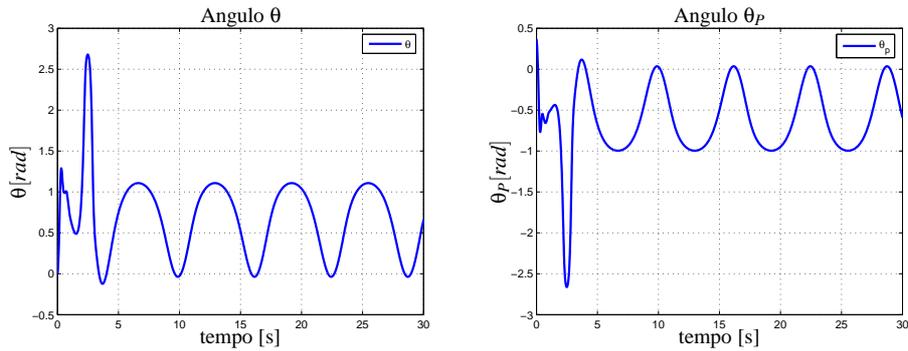


Figura 5.12: Evolução dos ângulos θ (à esquerda), da base móvel, e θ_p da câmera com relação à base móvel (à direita)

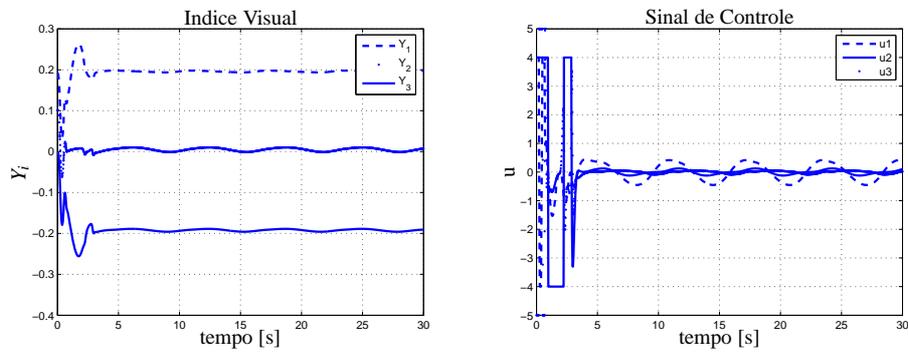


Figura 5.13: Evolução dos índices visuais (à esquerda) e sinal de controle (à direita)

A evolução do tensor cinemático da câmera está apresentado à esquerda da figura 5.14. Os erros $e_{(i)} = Y_i - Y_i^*$, $i = 1, 2, 3$, estão apresentados na figura 5.14, à direita, ficam em torno de zero, mesmo com o aparente comportamento oscilatório.

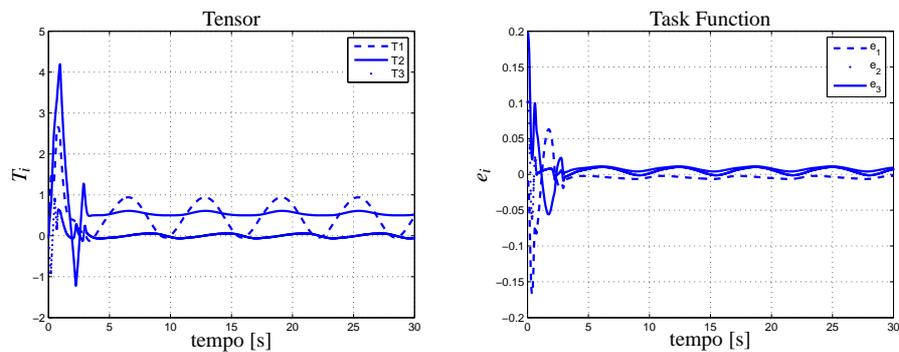


Figura 5.14: Tensor cinemático da câmera com relação a R (à esquerda) e erro da função-tarefa (à direita)

5.1.4 Resultados: robô e câmera orientados perpendicularmente aos 3 pontos do alvo em movimento

A configuração inicial do robô é dada por

$$x = -5\text{m} \quad y = 15\text{m} \quad \theta = 0\text{rad} \quad \theta_P = 0.5\text{rad} \quad (5.16)$$

Para este caso utilizou-se o mesmo diagrama de blocos seção 5.1.1 (vide figura 5.1), com os mesmos parâmetros. A figura 5.15, à esquerda, representa a trajetória do robô. Pode-se reparar que a tarefa é executada com perfeição, e câmera é apontada ao ponto central do alvo e tende a ficar perpendicular a este, mesmo com o movimento do alvo, como pode-se verificar pelos dados fornecidos pela figura 5.16. As velocidades do robô estão apresentadas na figura 5.15, à direita.

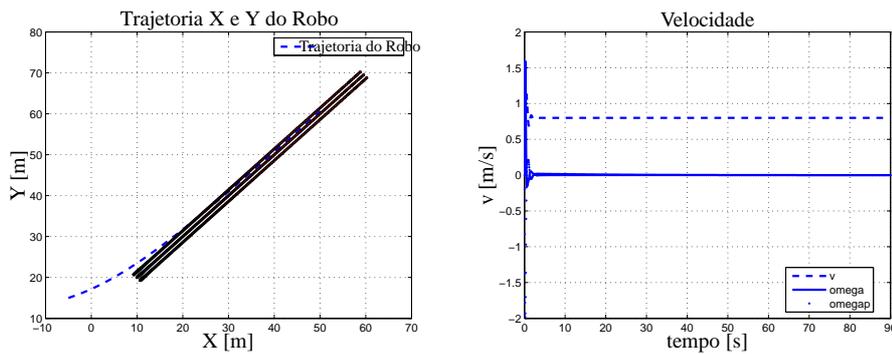


Figura 5.15: Trajetoria do robô com relação ao referencial R (à esquerda) e velocidades do robô (à direita)

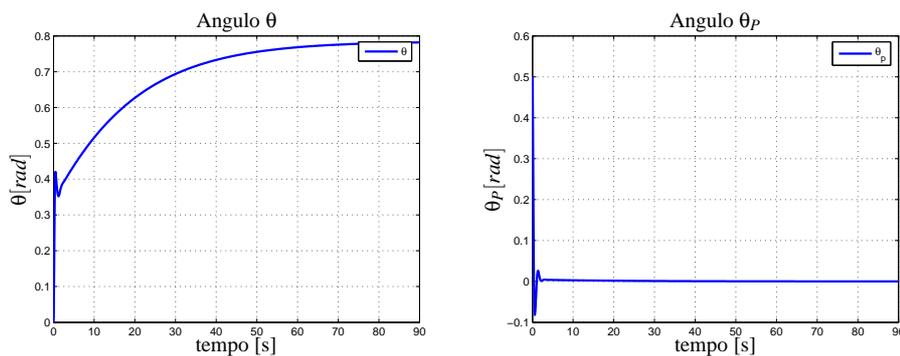


Figura 5.16: Evolução dos ângulos θ (à esquerda), da base móvel, e θ_P da câmera com relação à base móvel (à direita)

A evolução do tensor cinemático da câmera está apresentado à esquerda da figura 5.17. Os erros $e_{(i)} = Y_i - Y_i^*$, $i = 1, 2, 3$, estão apresentados na figura 5.17, à direita, tendem à convergir à zero.

À direita da figura 5.13 mostra a evolução do índice visual Y_i convergendo para Y_i^* . A imagem

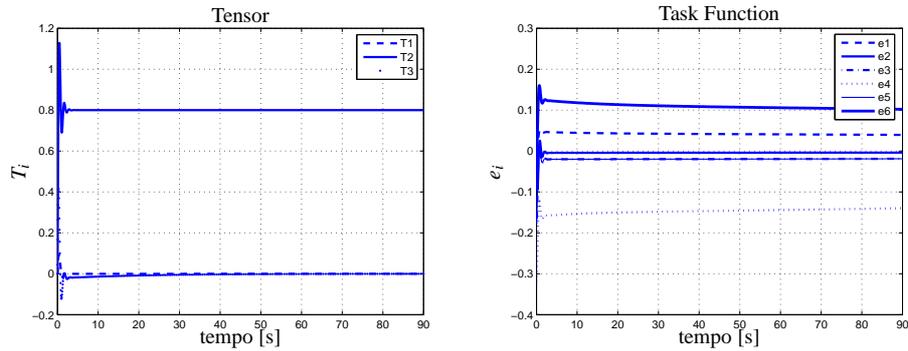


Figura 5.17: Tensor cinemático da câmera com relação a R (à esquerda) e erro da função-tarefa (à direita)

da direita da figura 5.13 mostra a evolução dos sinais de controle $\dot{T} = \text{sat}_{u_0}(\mathbb{K}\xi)$.

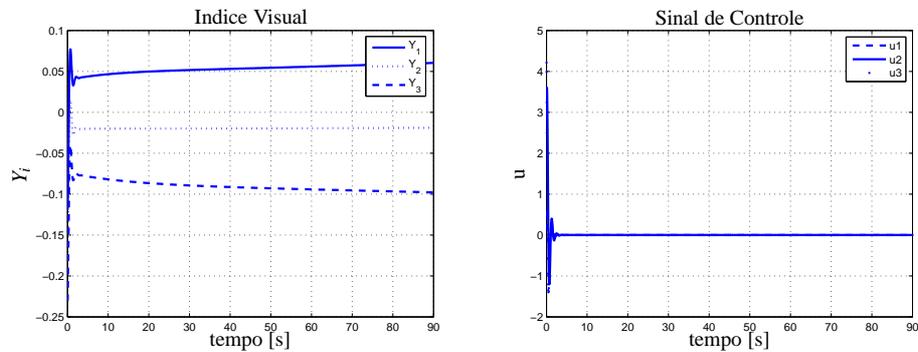


Figura 5.18: Evolução dos índices visuais (à esquerda) e sinal de controle (à direita)

5.2 Conclusões

Neste capítulo foram apresentados os resultados de simulação para as quadro tarefas executadas. Como pode-se ver, as tarefas foram corretamente executadas, respeitando as restrições. Em alguns casos, fica mais evidente a restrição dos sinais de controle. Como este fenômeno foi devidamente previsto e modelado, a estabilidade do sistema é garantida.

Primeiramente, considerou-se o caso do alvo fixo. Para este, abordaram-se dois casos: o primeiro permitindo posicionar o robô e a câmera, e o segundo permitindo apenas posicionar a câmera. Em seguida foi abordado o problema do alvo móvel. Para este, abordaram-se também dois casos: o primeiro permitindo apenas posicionar a câmera com relação ao alvo, e o segundo permitindo posicionar o robô e a câmera.

Todas as simulações foram feita em **Matlab/Simulink**. Visto que todas as simulações correram bem, abre-se a possibilidade de implementação prática das técnicas desenvolvidas. Durante a

execução deste trabalho, em paralelo, está sendo preparada uma plataforma robótica de teste, constituída por um robô móvel e uma câmera acoplada. Porém infelizmente não houve tempo hábil para a realização dos testes. Recomenda-se como trabalho futuro.

Os resultados de simulação foram satisfatórios, e corroboram com o desenvolvimento teórico proposto no capítulo anterior.

Capítulo 6

Conclusão

Neste trabalho foi apresetada a síntese de leis de controle referenciada em 2D, multi-critérios, para o posicionamento de uma câmera com relação a um alvo fixo ou móvel.

O formalismo da função-tarefa, ou "task-function", permite a definição de um difeomorfismo local entre o espaço de coordenadas generalizadas do robô e o espaço de dados do sensor, de mesma dimensão. Assim, no capítulo 1, foi feita uma varredura das técnicas de controle utilizadas em robótica móvel baseadas em informações 2D, usualmente definidas pelo decaimento exponencial da função-tarefa. No mesmo capítulo foi feita uma introdução sobre as restrições não-holonômicas, bem como o problema servo-visual e de controle. A câmera, montada sobre possui dois graus de liberdade no eixo horizontal, e um grau de liberdade com relação ao eixo vertical. Para a câmera foi utilizado o modelo "pinhole", e para o robô foi utilizado o modelo dotado de rodas por acionamento diferencial. Tais modelos apresentam-se no capítulo 2.

Na prática, a informação de profundidade fornecida pela câmera não é precisa. Como consequência, as técnicas tradicionais de controle não garantem a estabilidade do sistema em malha fechada. Da mesma forma não é possível assegurar a visibilidade do alvo e respeitar as restrições dinâmicas dos atuadores.

Assim, tomou-se a decisão de abordar neste trabalho a utilização de técnicas de controle avançadas, desenvolvidas recentemente. O objetivo era de obter uma lei de controle que permite garantir a estabilidade do sistema em malha fechada, levando em conta todas as incertezas inerentes, tais como as já citadas. Tal formalismo está apresentado no capítulo 3. Em uma primeira etapa, definiu-se uma série de hipóteses baseadas na geometria do problema, de tal forma a enxergar as diferentes restrições e parâmetros presentes no sistema. Da mesma maneira propôs-se diferentes desenvolvimentos sobre as dinâmicas presentes, de tal forma a respeitar os objetivos de controle.

Primeiramente, no capítulo 3, foi abordado o caso de um alvo fixo. Para tal, foram desenvolvidas duas leis de controle. A primeira visa posicionar tanto o robô quanto a câmera, ambos apontados para o ponto central do alvo, sendo que a segunda visa posicionar apenas a câmera para o ponto central do alvo, ficando perpendicular a este. Para tal, modelou-se o problema em termos de um sistema politópico, representando assim as incertezas paramétricas. Utilizou-se assim uma condição de setor modificada para modelar a saturação. Através destes elementos pode-se escrever as diferentes condições sob a forma de LMIs, onde utilizou-se de métodos de otimização para calcular os ganhos da realimentação de estados.

A seguir, no capítulo 4 foi tratado o problema do alvo móvel. Neste caso, para representar as incertezas foi utilizado o mesmo formalismo que o anterior, porém agora a velocidade do alvo é considerada uma perturbação limitada em energia. Assim, pode-se definir um conjunto compacto, contendo a origem, dentro do qual é assegurada a convergência das trajetórias do sistema em malha fechada.

Os ganhos de realimentação foram obtidos através do **Scilab/Lmitool**, e as leis de controle simuladas utilizando o **MatLab/Simulink**. Para a resolução das LMIs foi escolhido o **Scilab/Lmitool** devido à facilidade de implementação do problema, mais intuitivo, pois utiliza uma lógica mais direta, em que o usuário fornece as funções convexas que serão utilizadas pelo algoritmo. O algoritmo utilizado é o método do ponto interior (vide A.2.2), que é considerado robusto, de rápida convergência e de boa precisão. Outra vantagem é que o **Scilab** é Open Source.

O **Matlab** utiliza o algoritmo projetivo de Gahinet. Embora seja mais preciso que os métodos de ponto interior, é menos robusto e mais lento. Para problemas numericamente ruins, pode não convergir. Existe porém o toolbox **Yalmip**, que oferece vários pacotes para a solução de problemas de otimização, inclusive LMIs, que possuem uma interface mais intuitiva que a original do **Matlab**.

A evolução dos índices visuais e as respostas de velocidade e aceleração do robô mostraram que as restrições dinâmicas dos atuadores foram respeitadas. A ocorrência de saturação no sinal de controle é tolerada graças ao método proposto, onde a utilização da condição de setor garante que o robô seja estabilizado.

No capítulo 5 pode-se verificar o comportamento de cada caso via os resultados de simulação.

De início desejava-se aplicar tais técnicas em uma plataforma robótica real, porém não houve tempo hábil, visto que a plataforma de teste ainda está em elaboração. Houveram atrasos, pois a maioria das peças são importadas.

O processador utilizado é um LCP2148, da NXP. Haverá a possibilidade de comunicação wi-

reless (placa 802.11g), e assim poderá ser efetuado o controle via rede da plataforma. A UART será via USB. O acionamento será através de 2 motores de corrente contínua com encoder. Possuirá 6 sensores de infra-vermelho, um sonar e uma bússola digital, possibilitando assim a navegação. Existirá também a interface para SD card, como forma de armazenamento de dados em memória. A câmera utilizada será a CMU3, conectada serialmente ao processador central. Esta câmera possui 2 servo-motores e dois processadores ARM7, sendo um para o processamento de imagens e o outro para as demais tarefas. A placa-mãe possui conector JTAB para gravação e depuração do software embarcado. Fisicamente a plataforma será inteiramente de alumínio.

O projeto 3D da plataforma robótica está nas figuras abaixo.

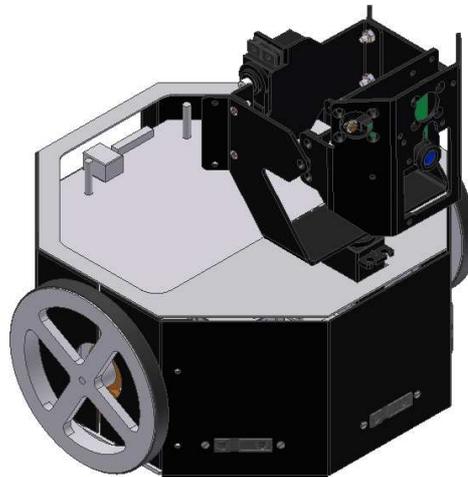


Figura 6.1: *Plataforma robótica de teste*

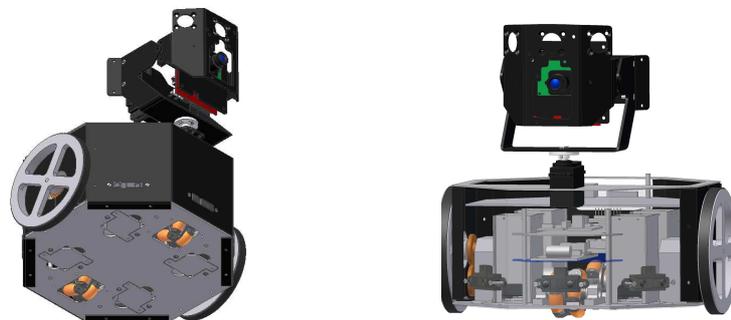


Figura 6.2: *Plataforma robótica de teste*

O controle desta plataforma, tanto embarcado quando via rede é uma proposta para trabalho futuro.

6.1 Trabalhos Futuros

Com a finalidade de verificar os resultados teóricos e de simulação, é importante fazer a aplicação das técnicas aqui desenvolvidas em uma plataforma robótica real. Tal trabalho teria caráter multi-disciplinar, visto que utilizaria conhecimentos de eletrônica, sistemas em tempo real, redes de comunicação, entre outros. O controle poderia ser executado de duas formas. Na primeira, poderia-se fazer o controle embarcado, sendo que na segunda, o controle poderia ser via rede sem-fio, e assim o problema tornar-se-ia mais interessante e complexo, visto que novas restrições seriam adicionadas. Poderão ser verificadas todas as técnicas propostas pelo autor, bem como qualquer outra proposta adicional de interesse. Outra aplicação seria a junção de um manipulador robótico à base móvel do robô, aumentando os graus de liberdade do sistema e multiplicando as possibilidades de tarefas a serem executadas.

Apêndice A

Formalismos matemáticos

A.1 Tensores

O termo tensor pode ter várias conotações, dependendo se utilizado em matemática, física ou engenharia.

Sabe-se que vetores podem ser multiplicados por escalares para produzir novos vetores, de mesmo sentido e direção. Pode-se, por exemplo, determinar um vetor unitário u , de localização, direção e sentido arbitrários. Pode-se obter um outro vetor a partir do vetor u , multiplicando por um escalar, no caso λ , obtendo λu . O novo vetor possui, agora, magnitude λ e mesma direção e sentido de u .

Nota-se que o efeito de multiplicar um escalar por um vetor altera apenas a magnitude, a partir da unidade, deixando a direção e sentido inalterados. Supõe-se, então, que deseja-se alterar também a magnitude e a direção de um determinado vetor. O produto cruzado, para este caso, é também ineficiente, visto que desejamos apenas alterar o ângulo do vetor com relação ao sistema de coordenadas XY . Para tal tipo de operação utilizam-se os tensores.

Conforme definido em [33] os tensores podem ser classificados como:

- **Escalar:** Tensor de rank 0, ou seja, apenas magnitude (1 componente).
- **Vetor:** Tensor de rank 1, ou seja, magnitude e uma direção (3 componentes).
- **Díade:** Tensor de rank 2, ou seja, magnitude e duas direções ($3^2 = 9$ componentes).
- **Tríade:** Tensor de rank 3, ou seja, magnitude e três direções ($3^3 = 27$ componentes).

- E assim por diante.

A.1.1 Exemplos

O fluxo magnético B , em $\text{volt} - \text{s}/\text{m}^2$ e a magnetização H , em A/m estão relacionadas pela permeabilidade μ , em H/m é dado pela seguinte expressão

$$B = \mu H$$

Para o vácuo, μ é um escalar, e vale $\mu = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H}/\text{m}$. Por μ ser um escalar, a densidade de fluxo magnético e a magnetização diferem em magnitude, porém não em direção. Porém, em alguns materiais exóticos, os átomos que os compõem possuem algumas propriedades de dipolo, quem fazem com que estes termos sejam diferentes em magnitude e direção. Em tais materiais, a permeabilidade escalar pode ser substituída pelo tensor de permeabilidade $\underline{\mu}$, e pode-se escrever

$$B = \underline{\mu} H$$

O tensor de permeabilidade $\underline{\mu}$ é um tensor de rank 2.

Outro exemplo clássico do uso de tensores em física e engenharia é o da tensão em um material. Tensão tem a unidade de "força por unidade de área", ou no Sistema Internacional de Unidades, N/m^2 . Claramente, tem-se que tensão \times área deve ser igual a força, ou seja, o produto tensão-força deve ser associado com as forças aplicadas que produzem a tensão. Sabe-se que força é um vetor. Sabe-se também que área pode ser representada como um vetor, associando uma direção, ou seja, o diferencial de área dS é um vetor de magnitude dS e direção normal ao elemento de área, apontado para fora do lado convexo.

Assim, a tensão deve ser tanto um escalar quanto um vetor. Sendo um escalar, um número basta para determinar a tensão sobre algum determinado ponto. Porém, cria-se um problema imediato, pois existem dois tipos de tensão: a tensão normal e a tensão de cisalhamento. Como pode um simples número determinar as duas tensões? Além do mais, a tensão tem propriedades de vetor \times vetor. Conclui-se, assim, que a tensão na verdade é um tensor. De fato, é um tensor de rank 2.

É sabido que a aplicação de uma tensão normal leva ao aparecimento de uma tensão de cisalhamento nos materiais, devido aos fenômenos acima, e conforme mostra a figura A.1, para um dado elemento infinitesimal do material.

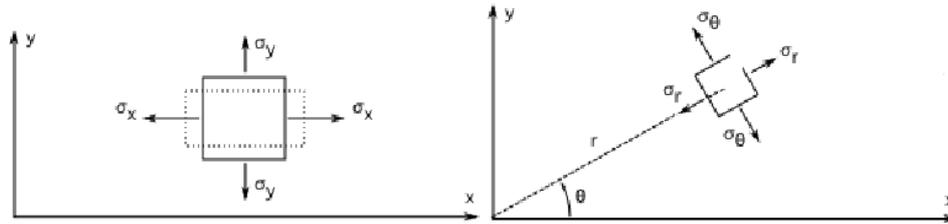


Figura A.1: Tensões normais (à esquerda) e de cisalhamento (à direita)

Tem-se então que a força dF devido ao esforço de tração T agindo sobre um elemento de área infinitesimal dS é dada por

$$dF = \underline{T}dS$$

A relação acima pode ser integrada sobre qualquer material, como é feito, por exemplo, na análise de tensão em vigas. O tensor de tensões \underline{T} foi o primeiro a ser descrito e utilizado por cientistas e engenheiros. É daí que foi derivado o termo "tensor".

A.1.2 Definição geral de tensores

Conforme o formalismo apresentado em [61], vetores, co-vetores, operadores lineares e formas bilineares são exemplos de tensores. A representação numérica é específica para cada um dos casos: vetores e co-vetores são representados por vetores unidimensionais, enquanto que os operadores lineares e formas bilineares são representados por vetores bi-dimensionais. Além do número de índices, a posição também importa. As coordenadas de um vetor são numeradas por um índice superior, cujo nome é índice contravariante. As coordenadas de um co-vetor são numeradas por um índice inferior, cujo nome é índice co-variante. Em uma matrix bi-linear são utilizados dois índices inferiores. Portanto, as formas bi-lineares são chamadas tensor co-variante duplo. Operadores lineares são tensores de tipo mixto, ou seja, seus componentes são numerados tanto por índices inferiores quanto por superiores. O número de índices e suas posições determinam as regras de transformação, ou seja, como cada componente comporta-se quando sujeito à mudança de base.

No caso mais geral, um tensor representa um vetor multidimensional com um número definido de índices superiores e inferiores. Sejam estes números r e s . Temos então um tensor do tipo (r,s) . Às vezes o termo *valência* é usado. Assim, um tensor de tipo (r,s) , ou valência (r,s) é chamado de **tensor contravariante de tamanho r** e **tensor co-variante de tamanho s** . A definição é baseada nas formas gerais de transformação

$$X_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = \sum_{\substack{h_1 \\ k_1}}^3 S_{h_1}^{i_1} \dots S_{h_r}^{i_r} T_{j_1}^{k_1} \dots T_{j_s}^{k_s} \tilde{X}_{k_1 \dots k_s}^{h_1 \dots h_r} \quad (\text{A.1})$$

$$\tilde{X}_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = \sum_{\substack{h_1 \\ k_1}}^3 T_{h_1}^{i_1} \dots T_{h_r}^{i_r} S_{j_1}^{k_1} \dots S_{j_s}^{k_s} X_{k_1 \dots k_s}^{h_1 \dots h_r} \quad (\text{A.2})$$

Definição A.1.1 *Seja um objeto geométrico X , representado em cada base pelo vetor $X_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}$ de dimensão $(r+s)$ de números reais, tal que suas componentes obedeça as regras de formulação (A.1) e (A.2), sujeita à uma mudança de base do tipo (r,s) .*

A relação (A.2) é obtida a partir de (A.1), assim trabalhar-se-á apenas com uma delas, no caso, a (A.1).

Os índices $i = i_1 \dots i_r$ e $j = j_1 \dots j_s$ são índices livres. No lado direito da igualdade (A.1), eles estão distribuídos em $S-s$ e $T-s$, cada um tendo uma entrada e mantendo sua posição, ou seja, os índices superiores $i = i_1 \dots i_r$ permanecem superiores, e os índices inferiores $j = j_1 \dots j_s$ permanecem inferiores.

Outros índices, tais como $h = h_1 \dots h_r$ e $k = k_1 \dots k_s$ são índices de soma. Entram do lado direito de (A.1) aos pares: uma vez como índice superior e outra como índice inferior; uma vez como $S-s$ ou $T-s$ e outra como vetor $\tilde{X}_{k_1 \dots k_s}^{h_1 \dots h_r}$.

Ao expressar $X_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}$ através de $\tilde{X}_{k_1 \dots k_s}^{h_1 \dots h_r}$, cada índice superior é servido pela direta matriz de transição S , e produz um somatório em (A.1)

$$X_{\dots j_\alpha \dots}^{i_\alpha \dots} = \sum \dots \sum_{h_\alpha=1}^3 \dots \sum \dots S_{h_\alpha}^{i_\alpha} \dots \tilde{X}_{\dots k_\alpha \dots}^{h_\alpha \dots} \quad (\text{A.3})$$

De maneira análoga, cada índice inferior é servido pela matriz de transição T e também produz uma somatória em (A.1)

$$X_{\dots j_\alpha \dots}^{i_\alpha \dots} = \sum \dots \sum_{k_\alpha=1}^3 \dots \sum \dots T_{j_\alpha}^{k_\alpha} \dots \tilde{X}_{\dots k_\alpha \dots}^{i_\alpha \dots} \quad (\text{A.4})$$

Assim, temos a definição generalizada de tensor. As equações (A.3) e (A.4) são as mesmas que (A.1).

A.2 Desigualdades Lineares Matriciais - LMIs

A grande vantagem de trabalhar com as LMIs, é que pode-se resolver problemas convexos de forma eficiente. Conforme [6], uma desigualdade linear matricial possui a forma

$$F(x) \triangleq F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i > 0 \quad (\text{A.5})$$

onde $x \in \mathfrak{R}^m$ é a variável, e as matrizes assimétricas $F_i = F_i' \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $i = 0, \dots, m$ são dadas. O símbolo da desigualdade em (A.5) significa que $F(x)$ é definida positiva. Isto implica que $u'F(x) > 0$ para todo $u \neq 0 \in \mathfrak{R}^n$. É claro que a LMI (A.5) é equivalente a um conjunto de n desigualdades em x . Portanto, quando existe uma solução para $F(x) > 0$, dizemos que a LMI é factível.

A LMI (A.5) é uma restrição convexa em x , isto é, o conjunto $\{x | F(x) > 0\}$ é convexo. Embora tal LMI pareça pertencer a uma classe especializada de LMIs, ela pode representar um grande número de restrições em x . Em particular, desigualdades lineares, desigualdades quadráticas (convexas), restrições em teoria de controle, tais como Lyapunov, etc, podem ser colocados na forma de LMI.

A.2.1 Exemplos

Existem casos clássicos, tal como o problema dos autovalores, onde deseja-se minimizar o maior autovalor dependente afim de uma variável, sujeito a restrições LMI, tal como

$$\begin{aligned} & \min \lambda \\ & \text{sujeito a } \lambda I - A(x) > 0, B(x) > 0 \end{aligned}$$

onde A e B são matrizes simétricas que dependem de maneira afim da variável de otimização x .

Outro caso clássico que pode ser utilizado como exemplo é a desigualdade de Lyapunov, conhecida também como estabilidade quadrática.

$$A'P + PA < 0$$

onde $A \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ é dada, e $P = P'$ é a variável.

Pode-se determinar a norma H_2 de um sistema via LMIs, através da resolução do problema de otimização convexa:

$$\|H(s)\|_2^2 = \min_P \{tr(B'PB) : P > 0, A'P + PA + C'C < 0\}$$

Assim como a norma H_∞ :

$$\min_P \gamma^2 : \begin{cases} P > 0 \\ \begin{bmatrix} A'P + PA + C'C & PB + C'D \\ B'P + D'C & -\gamma^2 I + D'D \end{bmatrix} < 0 \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

sendo considerado o sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned}$$

Pode-se também projetar controle a custo garantido. Considere o sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_u u \\ z &= C_z + D_{uz} u \\ u &= Kx \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Suponha que as matrizes $Q = Q'$ e Y têm dimensões apropriadas. Tem-se assim o seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned} &\min \lambda \text{ sujeito a} \\ &\begin{bmatrix} \lambda & x'_0 \\ x_0 & Q \end{bmatrix} > 0 \\ &\begin{bmatrix} QA' + AQ + Y'B' + BY & QC' + Y'D' \\ CQ + DY & i \end{bmatrix} < 0 \end{aligned}$$

Então o sistema A.7 com $K = YQ^{-1}$ é assintoticamente estável.

Pode-se projetar também, a partir de LMIs, controle H_2 . Considere agora o sistema

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= Ax + B_u u + B_w w \\
z &= C_z + D_{uz} u \\
u &= Kx
\end{aligned} \tag{A.8}$$

onde w corresponde aos sinais de perturbação e B_w é uma matriz constante com dimensões apropriadas. Suponha $Q = Q'$, $N = N'$ e Y de dimensões apropriadas. Tem-se então o seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned}
&\min \operatorname{tr}\{N\} \text{ sujeito a} \\
&\begin{bmatrix} N & C_z Q + D_{uz} Y \\ QC'_z + Y' D'_{uz} & Q \end{bmatrix} > 0 \\
&QA' + AQ + Y' B'_u + B_u Y + B_w B'_w < 0
\end{aligned}$$

Então o sistema A.8 com $K = YQ^{-1}$ é assintoticamente estável e a norma H_2 do sistema em malha fechada satisfaz $\|H\|_2^2 \leq \operatorname{tr}\{N\}$.

Considere agora o sistema:

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= Ax + B_u u + B_w w \\
z &= C_z + D_{uz} u + D_{wz} w \\
u &= Kx
\end{aligned} \tag{A.9}$$

onde D_{wz} é uma matriz constante de dimensões apropriadas.

Suponha $Q = Q'$ e Y de dimensões apropriadas. Tem-se então o seguinte problema de otimização:

$$\min_{Q, Y} \gamma : \begin{cases} Q > 0 \\ \begin{bmatrix} AQ + Q'A' + B_u Y + Y' B'_u & B_w & QC'_z + Y' D'_{uz} \\ B'_w & -\gamma I & D'_{wz} \\ C_z Q + D_{uz} Y & D_{wz} & -\gamma & I \end{bmatrix} < 0 \end{cases}$$

Então $K = YQ^{-1}$ é assintoticamente estável e a norma H_∞ do sistema em malha fechada satisfaz $\|H_\infty\| \leq \sqrt{\gamma}$.

Tais estratégias de controle são muito utilizadas em sistemas que necessitam de bom desempenho em termos de resposta frequencial, onde deseja-se, por exemplo, atuar sobre os principais modos

de vibração. São usados também para sistemas incertos, onde incertezas paramétricas inerentes ao sistema podem ser consideradas, e resolvidas múltiplas LMIs. Outra utilização frequente é em sistemas sujeitos à perturbações.

A.2.2 Algoritmos para resolver LMIs

Para resolver tal tipo de problema, são utilizadas técnicas de otimização convexas, principalmente as duas técnicas:

Algoritmo elipsóide : A idéia é começar com uma elipsóide $\epsilon^{(0)}$ que contém um ponto ótimo. Então cria-se *plano cortante*, que passa entre o centro $x^{(0)}$ de $\epsilon^{(0)}$. Isto significa que encontramos um vetor não-nulo $g^{(0)}$ tal que existe um ponto ótimo no meio-espaço $\{z | g^{(0)'}(z - x^{(0)}) \leq 0\}$. Sabemos então, que a meia-elipsóide cortada $\epsilon^{(0)} \cap \{z | g^{(0)'}(z - x^{(0)}) \leq 0\}$ contém um ponto ótimo. Agora calculamos a elipsóide $\epsilon^{(1)}$ de volume mínimo que contém esta meia-elipsóide cortada, de tal forma a garantir que $\epsilon^{(1)}$ contenha o ponto ótimo. Este procedimento é repetido iterativamente.

Método do ponto interior : é calculada a direção de Newton como solução de um problema de mínimos quadrados ponderado, do mesmo tamanho do problema original, e resolvido iterativamente, até encontrar a solução ótima.

A.3 Lema da Majoração

Será apresentado um lema frequentemente utilizado para a majoração de termos quadráticos, onde o termo a ser majorado é incerto e limitado em norma.

Lema A.3.1 Para todo $x \in \mathfrak{R}^n$ e $y \in \mathfrak{R}^n$ temos

$$2x'y < x'Rx + y'R^{-1}y \quad (\text{A.10})$$

onde $R \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ é uma matriz simétrica semi-definida positiva.

A desigualdade A.10, na verdade, é equivalente à seguinte desigualdade:

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & I \\ I & R^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \geq 0 \quad (\text{A.11})$$

Se tem-se um termo $2x'Fy$ que contém a matriz incerta $F \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, satisfazendo $F'F \leq I$, pode-se majorar este termo utilizando o lema A.3.1 da seguinte maneira

$$2x'Fy \leq x'\varepsilon x + y'F'\varepsilon^{-1}Fy \leq \varepsilon x'x + \varepsilon^{-1}y'y$$

onde ε é um escalar positivo.

Referências Bibliográficas

- [1] Aicardi, M., Casalino, G., Bicchi, A., e Balestrino, A. (1995). Closed loop steering of unicycle like vehicles via Lyapunov techniques. *IEEE Robotics and Automation Magazine*, Vol. 2, No. 1, pp. 27–35.
- [2] Arnold, V. e Novikov, S. E. (1994). *Dynamical systems VII – Integrable systems and nonholonomic dynamic systems*. Springer Verlag.
- [3] Astolfi, A. (1996). Discontinuous control of nonholonomic systems. *System and Control Letters*, Vol. 27, No. 1, pp. 37–45.
- [4] Beyer, H. A. (1994). Accurate calibration of ccd-cameras. Proc. *Proceedings of the IEEE International Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR'94)*.
- [5] Bloch, A. M., Reyhanoglu, M., e McClamroch, N. H. (1992). Control and stabilization of nonholonomic dynamic systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 37, No. 11, pp. 1746–1757.
- [6] Boyd, S., Ghaoui, L. E., Feron, E., e Balakrishnan, V. (1994). *Linear matrix inequalities in system and control theory*. SIAM Books.
- [7] Cadenat, V. (1999). *Commande référencée multi-capteurs pour la navigation d'un robot mobile*. Thèse (doctorat), Université Paul Sabatier de Toulouse, Toulouse, France.
- [8] Champion, G., Bastin, G., e D'Andréa-Novel, B. (1996). Structural properties and classification of kinematic and dynamical models of wheeled mobile robots. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol. 12, No. 1, pp. 47–62.
- [9] Chaumette, F. (1990). *La relation vision-commande: théorie et application à des tâches robotiques*. Thèse (doctorat), Université de Rennes I, IRISA.
- [10] Chaumette, F. e Hutchinson, S. (2006). Visual servo control part I: basic approaches. *IEEE Robotics and Automation Magazine*, Vol. 13, No. 4, pp. 82–90.

- [11] Chroust, S. e Vincze, M. (2003). Improvement of the prediction quality for visual servoing with a switching Kalman Filter. *The International Journal of Robotics Research*, Vol. 22, No. 10–11, pp. 905–922.
- [12] Crétual, A. (1998). *Asservissement visuel à partir d'informations de mouvement dans l'image*. Thèse (doctorat), Université de Rennes I, Rennes, France.
- [13] Crétual, A. e Chaumette, F. (1998). Image-based visual servoing by integration of dynamic measurements. *Proc. IEEE Proceedings on International Conference on Robotics and Automation*, Leuven, Belgium.
- [14] da Silva Jr., J. M. G. e Tarbouriech, S. (2000). Local stabilization of linear systems under amplitude and rate saturating actuators. *Proc. IEEE Transactions on Automatic Control*, Sydney, Australia.
- [15] da Silva Jr., J. M. G. e Tarbouriech, S. (2004). Anti-windup design with guaranteed regions of stability for discrete-time linear systems. *Proc. American Control Conference*.
- [16] DeMenthon, D. F. e Davis, L. S. (1995). Model-based object pose in 25 lines of code. *International Journal of Computer Vision*, Vol. 15, No. 1-2, pp. 123–141.
- [17] Espiau, B., Chaumette, F., e Rives, P. (1992). A new approach to visual servoing in robotics. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol. 8, No. 3, pp. 313–326.
- [18] Fang, Y., Dawson, D. M., Dixon, W. E., e Queiroz, M. S. (2002). Homography-based visual servoing of wheeled mobile robots. *Proc. IEEE Conference on Decision and Control*, Las Vegas, USA.
- [19] Fang, Y., Dixon, W. E., Dawson, D. M., e Chawda, P. (2005). Homography-based visual servo regulation of mobile robots. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics – Part B: Cybernetics*, Vol. 35, No. 5, pp. 1401–1050.
- [20] Figueiredo, L. C. e Jota, F. G. (2004). Introdução ao controle de sistemas não-holonômicos. *Sba Controle & Automação*, Vol. 15, No. 3, pp. 243–268.
- [21] Gao, B. (2006). *Contribution à la synthèse de commandes référencées vision 2D multi-critères*. Thèse (doctorat), Université Paul Sabatier de Toulouse, Toulouse, France.
- [22] Garcia-Aracil, N., Reinoso, O., Malis, E., e Aracil, R. (2005). Parameters selection and stability analysis of invariant visual servoing with weighted features. *Proc. IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Barcelona, Spain.

- [23] Hashimoto, K., Kimoto, T., Ebine, T., e Kimura, H. (1991). Manipulator control with image-based visual servo. Proc. *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Sacramento, USA.
- [24] Hashimoto, K. e Noritsugu, T. (2000). Enlargement of stable region in visual servo. *IEEE Transactions on Decision and Control*, Vol. pp. 3927–3932.
- [25] Hindi, H. e Boyd, S. (1998). Analysis of linear systems with saturation using convex optimization. Proc. *IEEE Conference on Decision and Control*, Tampa, USA.
- [26] Hu, T. e Lin, Z. (2000). An analysis and design method for linear systems subject to actuator saturation and disturbance. *Automatica*, Vol. 38, No. 2, pp. 351–359.
- [27] Hu, T. e Lin, Z. (2001). *Control Systems with Actuator Saturation: Analysis and Design*. Birkhauser Boston.
- [28] Hutchinson, S., Hager, G. D., e Corke, P. I. (1996). A tutorial on visual servo control. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol. 12, No. 5, pp. 651–670.
- [29] Jiang, Z.-P. e Nijmeijer, H. (1997). Tracking control of mobile robots: a case study in backstepping. *Automatica*, Vol. 33, No. 7, pp. 1393–1399.
- [30] Kelly, R. (1996). Robust asymptotically stable visual servoing of planar robots. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol. 12, No. 5, pp. 759–766.
- [31] Khalil, H. K. (2002). *Nonlinear systems*. Prentice Hall.
- [32] Kim, D.-H. e Oh, J. (1999). Tracking control of a two-wheeled mobile robot using input-output linearization. *Control Engineering Practice*, Vol. 7, No. 3, pp. 369–373.
- [33] Kolecki, J. C. (2002). *An introduction to tensors for students of physics and engineering*. National Aeronautics and Space Administration.
- [34] Kolmanovsky, I. e McClamroch, N. H. (1995). Developments in nonholonomic control problems. *IEEE Control Systems Magazine*, Vol. 15, No. 6, pp. 20–36.
- [35] Lages, W. F. (1998). *Controle e estimação de posição e orientação de robôs móveis*. Tese de doutorado em engenharia eletrônica e computação na área de sistemas e controle, Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos.
- [36] Liu, K., Zhao, P., Sun, M., e Dong, Z. (2002). An affine nonlinear control approach to mobile robot with non-holonomic orthogonal-wheels. Proc. *IEEE Proceedings of the 4th World Congress on Intelligent Control and Automation*, Shanghai, China.

- [37] Lizarralde, F., Nunes, E. V. L., Hsu, L., e Wen, J. T. (2003). Mobile robot navigation using sensor fusion. Proc. *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Taipei, Taiwan.
- [38] Lombardi, W. C., Martins, N. A., Bertol, D. W., e Pieri, E. R. D. (2007). Controle preditivo de um robô móvel não-holonômico: Uma solução para o problema de saturação dos atuadores. Proc. *Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente*, Florianópolis, Brasil.
- [39] Lombardi, W. C., Martins, N. A., Bertol, D. W., Pieri, E. R. D., e Castelan, E. B. (2008). Image-based camera-robot target-tracking. Proc. *IFAC WC 2008*, Seoul, Korea.
- [40] Malis, E., Chaumette, F., e Boudet, S. (1999). 2–1/2–D visual servoing. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol. 15, No. 2, pp. 238–250.
- [41] Malis, E. e Rives, P. (2003). Robustness of image-based visual servoing with respect to depth distribution errors. Proc. *IEEE Proceedings on International Conference on Robotics and Automation*, Taipei, Taiwan.
- [42] Marchi, J. (2001). Navegação de robôs móveis autônomos: estudo e implementação de abordagens. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica), Centro Tecnológico, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis.
- [43] Martins, N. A., Bertol, D. W., Lombardi, W. C., e Pieri, E. R. D. (2008a). Trajectory tracking of a nonholonomic mobile robot: A suggested neural torque controller based on the sliding mode theory. Proc. *VSS'2008 – The 10th International Workshop on Variable Structure Systems*, Turkey.
- [44] Martins, N. A., Bertol, D. W., Lombardi, W. C., Pieri, E. R. D., e Castelan, E. B. (2008b). *International Scientific Book Emerging Technologies, Robotics and Control Systems*.
- [45] Martins, N. A., Bertol, D. W., Lombardi, W. C., Pieri, E. R. D., e Castelan, E. B. (2008c). Neurocontrollers for trajectory tracking problem of a nonholonomic mobile robot. Proc. *IFAC WC 2008*, Seoul, Korea.
- [46] Martins, N. A., Bertol, D. W., Lombardi, W. C., Pieri, E. R. D., e Castelan, E. B. (2008d). Trajectory tracking of a nonholonomic mobile robot with parameter and nonparametric uncertainties: A proposed neural control. Proc. *MED'2008 – 16th Mediterranean Conference on Control and Automation*, Corse, France.
- [47] Martins, N. A., Bertol, D. W., Lombardi, W. C., Pieri, E. R. D., e Castelan, E. B. (2008e). Trajectory tracking of a nonholonomic mobile robot with parametric and nonparametric uncertainties: A proposed neural control. *International Journal of Factory Automation, Robotics and Soft Computing*, Vol. .

- [48] M'Closkey, R. T. e Murray, R. M. (1997). Exponential stabilization of driftless nonlinear control systems using homogeneous feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 42, No. 5, pp. 614–628.
- [49] Mezouar, Y. e Chaumette, F. (2002). Path planning for robust image-based control. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol. 18, No. 4, pp. 534–549.
- [50] Murata, S. e Hirose, T. (1993). On board locating system using real-time image processing for a self-navigating vehicle. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, Vol. 40, No. 1, pp. 145–154.
- [51] Murray, R. M. e Sastry, S. S. (1993). Nonholonomic motion planning: steering using sinusoids. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 38, No. 5, pp. 700–715.
- [52] Normey-Rico, J. E., Ortega, J. G., e Camacho, E. F. (1999). A Smith-predictor-based generalised predictive controller for mobile robot path-tracking. *Control Engineering Practice*, Vol. 7pp. 729–740.
- [53] Paim, C., Tarbouriech, S., da Silva Jr., J. G., e Castelan, E. (2002). Control design for linear systems with saturating actuators and L_2 -bounded disturbances. Proc. *IEEE Conference on Decision and Control*, Las Vegas, USA.
- [54] Perez, C., Garcia, N., Reinoso, O., Sabater, J. M., e Azorín, J. M. (2007a). Object trajectory prediction application to visual servoing. Proc. *Proceedings of the European Control Conference*, Kos, Greece.
- [55] Perez, C., Garcia, N., Sabater, J. M., Azorín, J. M., Reinoso, O., e Garcia, L. (2007b). Improvement of the visual servoing task with a new trajectory predictor – the Kalman Filter. Proc. *Proceedings of the Fourth International Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics*, Angers, France.
- [56] Pissard-Gibollet, R. (1993). *Conception et commande par asservissement visuel d'un robot mobile*. Thèse (doctorat), Ecole Nationale de Mines de Paris, Paris, France.
- [57] Saberi, A., Lin, Z., e Teel, A. R. (1996). Control of linear systems with saturating actuators. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 41, No. 3, pp. 368–378.
- [58] Samson, C., Borgne, M. L., e Espiau, B. (1991). *Robot control: The task function approach*. Oxford University Press.
- [59] Schramm, F., Morel, G., Micaelli, A., e Lottin, A. (2004). Extended-2d visual servoing. Proc. *IEEE Proceedings on International Conference on Robotics and Automation*, New Orleans, USA.

-
- [60] Schrijver, A. (1986). *Theory of linear and integer programming*. John Wiley & Sons.
- [61] Sharipov, R. (2004). *Quick introduction to tensor analysis*.
- [62] Tarbouriech, S. e Souères, P. (2000). Advanced control strategy for the visual servoing scheme. Proc. *IFAC International Symposium on Robot Control*, Vienna, Austria.
- [63] Tarel, J. P. e Gagalowicz, A. (1994). *Calibration de caméra fondée sur les ellipses*. Rapport de recherche, INRIA.
- [64] Tsai, R. Y. (1987). A versatile camera calibration technique for high-accuracy 3D machine vision metrology using off-the-shelf TV cameras and lenses. *IEEE Journal of Robotics and Automation*, Vol. RA-3, No. 4, pp. 323–344.
- [65] Yamamoto, Y. e Yun, X. (1994). Coordinating locomotion and manipulation of a mobile manipulator. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 39, No. 6, pp. 1326–1332.
- [66] Yang, J.-M. e Kim, J.-H. (1997). Sliding mode control for trajectory tracking of nonholonomic wheeled mobile robots. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol. 5, No. 3, pp. 578–587.
- [67] Zane, P. (2003). *Contributions à l’asservissement visuel robuste*. Thèse (doctorat), Université Louis Pasteur, Strasbourg, France.