

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM  
ENGENHARIA MECÂNICA**

**MODELAGEM DE UMA PLACA DE MATERIAIS COMPÓSITOS E  
PIEZELÉTRICOS PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS. APLICAÇÃO  
DE CONTROLE DE VIBRAÇÃO.**

**Dissertação submetida à**

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA**

**para a obtenção do grau de**

**MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**FERNANDA COLNAGO GOMES DA SILVA**

**Florianópolis, dezembro de 2007**



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM  
ENGENHARIA MECÂNICA**

**MODELAGEM DE UMA PLACA DE MATERIAIS COMPÓSITOS E  
PIEZELÉTRICOS PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS. APLICAÇÃO  
DE CONTROLE DE VIBRAÇÃO.**

**FERNANDA COLNAGO GOMES DA SILVA**

**Essa dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de**

**MESTRE EM ENGENHARIA**

**ESPECIALIDADE ENGENHARIA MECÂNICA**

**sendo aprovada em sua forma final.**

---

**Prof. Marcelo Krajnc Alves, Ph.D. – Orientador**

---

**Prof. Fernando Cabral, Ph.D. – Coordenador do Curso**

**BANCA EXAMINADORA**

---

**Prof. Arcanjo Lenzi, Ph.D.**

---

**Prof. Claudio Roberto Ávila da Silva Jr, Dr. Eng.**

---

**Prof. Roberto Jordan, Dr.Eng.**



*“Everything should be made as simple as possible, but not simpler.”*

*Albert Einstein*



*Dedico este trabalho  
à minha família e ao  
meu namorado por todo  
amor e compreensão.*





## **AGRADECIMENTOS**

Ao meu orientador, Prof. Marcelo Krajnc Alves, por todo apoio, capacidade de orientação e confiança que possibilitaram a realização deste trabalho.

Ao CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico) pelo aporte financeiro.

A todos os colegas do GMAC (Grupo de Mecânica Aplicada e Computacional) pela amizade durante todo o tempo de mestrado.

Aos meus amigos que, mesmo não estando diretamente ligados à este trabalho, emprestaram seus ouvidos horas à fio nos momentos de desabafo.

A minha família, por toda atenção e amor dedicados à mim em todos os momentos.

Ao meu namorado, Nicolas Palluat, por toda força, paciência e ajuda tanto nas dificuldades como nos momentos de sucesso.

Enfim, muito obrigada à todos que direta ou indiretamente contribuíram com esta dissertação.



## SUMÁRIO

<b>Lista de figuras</b> .....	v
<b>Lista de tabelas</b> .....	vii
<b>Lista de abreviaturas e siglas</b> .....	ix
<b>Lista de símbolos</b> .....	xi
<b>Resumo</b> .....	xvii
<b>Abstract</b> .....	xix
<b>1 Introdução</b> .....	1
1.1 Estado da arte .....	2
1.2 Motivação .....	3
1.3 Estrutura da dissertação .....	3
1.4 Histórico da Piezeletricidade .....	4
1.5 O fenômeno piezelétrico .....	7
1.6 Aplicações dos materiais piezelétricos .....	19
1.7 Modos de funcionamento .....	20
1.7.1 Atuador piezelétrico .....	20
1.7.2 Sensor piezelétrico .....	23
1.8 Tipos de atuadores piezelétricos .....	24
1.8.1 Atuador laminar .....	24
1.8.2 Atuador multilaminar .....	24

---

1.8.3	Atuador flexensional .....	25
1.8.4	Bimorfo piezolétrico .....	26
<b>2</b>	<b>Materiais compostos e piezolétricos laminados</b> .....	<b>29</b>
2.1	Materiais compósitos laminados .....	29
2.1.1	Regra da mistura .....	29
2.1.2	Estado plano de tensões .....	37
2.2	Piezeletricidade linear .....	40
2.2.1	Determinação da equação constitutiva no sistema global .....	42
2.2.2	Estado plano de tensões .....	43
<b>3</b>	<b>Laminado piezolétrico</b> .....	<b>53</b>
3.1	Formulações matemáticas da Piezeletricidade linear 3D .....	53
3.1.1	Formulações forte e fraca para os problemas lineares elastodinâmico piezolétrico .....	53
3.2	Hipóteses sobre os modelos mecânico e eletro-mecânico .....	56
3.2.1	Determinação da equação de equilíbrio do laminado .....	58
3.2.2	Determinação da equação constitutiva generalizada .....	61
3.2.3	Considerações sobre o campo elétrico e seu potencial .....	64
3.3	Discretização por elementos finitos .....	68
3.3.1	Partição do domínio em elementos e mudança de variáveis .....	69
3.3.2	Equação de equilíbrio mecânico .....	75
3.3.3	Equação de equilíbrio elétrico .....	82
3.3.4	Obtenção das equações do sensor e do atuador .....	89
<b>4</b>	<b>Validação do modelo</b> .....	<b>95</b>
4.1	Placa isotrópica .....	96
4.2	Placa ortotrópica .....	99

---

4.3	Placa compósita com atuadores piezelétricos acoplados à superfície .....	103
4.4	Placa com sensores e atuadores piezelétricos acoplados à superfície .....	106
<b>5</b>	<b>Aplicação e controle .....</b>	<b>111</b>
5.1	Descrição da aplicação .....	111
5.2	Controle da estrutura .....	111
5.2.1	Noções de controle .....	111
5.2.2	Controle da aplicação proposta .....	116
5.2.3	Investigação da dinâmica de malha aberta e definição dos parâmetros de controle .....	117
<b>6</b>	<b>Conclusões e perspectivas de trabalhos futuros .....</b>	<b>125</b>
	<b>Referências Bibliográficas .....</b>	<b>127</b>
	<b>Apêndice A – Mudança de base .....</b>	<b>131</b>
	<b>Apêndice B – Cálculo da matriz jacobiana e de seu determinante .....</b>	<b>137</b>
	<b>Apêndice C – Método de Newmark .....</b>	<b>141</b>
	<b>Apêndice D – Componentes do campo de deformações da teoria de Mindlin .....</b>	<b>145</b>



## LISTA DE FIGURAS

1.1	Fenômenos acoplados em um material piezolétrico .....	5
1.2	Efeitos piezolétricos direto e inverso .....	6
1.3	Estrutura cristalina de um material piezolétrico (a) não polarizada e (b) polarizada	7
1.4	Comportamento mecânico de um material piezolétrico submetido à um campo elétrico .....	8
1.5	Representação esquemática de um capacitor .....	9
1.6	Graus de liberdade de um material piezolétrico de acordo com a norma da IEEE .	14
1.7	Correlação entre coeficientes e grandezas mecânicas e elétricas em um material piezolétrico .....	15
1.8	Aplicações comuns de materiais piezolétricos .....	21
1.9	Funcionamento de sensores e atuadores piezolétricos. ....	22
1.10	Modos de funcionamento de um material piezolétrico sujeito à um campo elétrico	22
1.11	Esquema de um atuador multilaminar ( <i>stack</i> ) .....	25
1.12	Esquema de um atuador flexensional .....	26
1.13	Estrutura de um bimorfo piezolétrico .....	27
2.1	Sistema de eixos de ortotropia de uma lâmina de material composto .....	32
2.2	Lâmina de material composto sujeita à ação de esforço cisalhante .....	34
2.3	Sistema de eixos de ortotropia e de referência [35] .....	36
3.1	Estrutura proposta de placa compósita laminada com sensores e atuadores piezolétrico .....	57
3.2	Critério de identificação das lâminas de um laminado .....	58
3.3	Sistema de coordenadas do elemento padrão .....	69
3.4	Funções de forma isoparamétricas para o elemento de barra de três nós .....	80

---

4.1	Placa isotrópica .....	96
4.2	Representação esquemática da lâmina compósita .....	100
4.3	Deflexão da linha central da placa sujeita à tensão elétrica de 10V .....	105
4.4	Deflexão na linha central da placa sob ação de tensões mecânica e elétrica .....	105
4.5	Configuração da placa com sensores e atuadores .....	106
4.6	Configuração da placa com materiais piezelétrico .....	107
4.7	Deflexão da placa sob ação de tensões elétricas aplicadas aos atuadores .....	108
4.8	Deslocamento transversal nas seções longitudinal e transversal da placa .....	108
5.1	Estrutura da aplicação proposta .....	112
5.2	Esquema de funcionamento do problema proposto .....	112
5.3	Representação das respostas transitória e estacionária .....	113
5.4	Representação esquemática de um sistema de controle .....	114
5.5	Representação esquemática do sistema de controle desenvolvido .....	117
5.6	Deslocamento transversal (a) e potencial elétrico (b) do sensor em malha aberta .	118
5.7	Taxa de convergência do modelo face ao refino da malha em relação ao modelo FEM .....	119
5.8	Deslocamento transversal (a) e potencial elétrico (b) do sensor em malha fechada	120
5.9	Potencial elétrico do sensor em malha aberta e fechada .....	121
5.10	Comparação do potencial elétrico do atuador em malha fechada .....	122
5.11	Potencial elétrico do atuador em malha fechada .....	122
5.12	Deslocamento transversal no ponto de aplicação da força externa .....	123
A.1	Sistema de eixos de ortotropia e de referência .....	131
C.1	Método de Newmark .....	143



## LISTA DE TABELAS

1.1	Valores típicos de temperatura de Curie de piezocerâmicas (*: comercializada por PI (Physik Instrumente) GmbH Co) .....	8
1.2	Equivalência de índices entre a notação tensorial e matricial compacta .....	13
1.3	Comparação de propriedades entre PZT e PVDF .....	16
1.4	Matrizes piezelétricas para as classes de simetria de cristais piezelétricos .....	18
1.5	Critério de classificação de materiais piezelétricos definido pela Marinha Norte-Americana .....	20
1.6	Deflexões de bimorfos serial e paralelo .....	27
3.1	Pontos de integração e coeficientes de ponderação para a quadratura de Gauss-Legendre em um intervalo de $-1 \leq \xi \leq 1$ .....	71
3.2	Integração numérica das matrizes da equação de equilíbrio mecânico pela quadratura de Gauss-Legendre .....	82
3.3	Integração numérica das matrizes da equação de equilíbrio elétrico pela quadratura de Gauss-Legendre .....	86
4.1	Condições de contorno dos graus de liberdade mecânicos .....	95
4.2	Dados da placa isotrópica [39] .....	96
4.3	Comparação dos valores de deflexão máxima $w$ (em polegadas) para a placa isotrópica simplesmente apoiada submetida a carga concentrada .....	97
4.4	Dados da placa isotrópica [40] .....	97
4.5	Comparação dos valores de deflexão máxima $\bar{w}$ para a placa isotrópica simplesmente apoiada submetida à carga distribuída .....	98
4.6	Comparação dos valores de deflexão máxima $\bar{w}$ para a placa isotrópica engastada submetida à carga distribuída .....	99
4.7	Dados da placa ortotrópica .....	100

---

4.8	Comparação dos valores de deflexão máxima $\bar{w}$ para a placa ortotrópica engastada submetida à carga distribuída . . . . .	101
4.9	Propriedades mecânicas do laminado ortotrópico . . . . .	101
4.10	Comparação dos valores de deflexão máxima $\bar{w}$ para o laminado ortotrópico $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ simplesmente apoiado submetido à carga distribuída . . . . .	102
4.11	Comparação dos valores de deflexão máxima $\bar{w}$ para o laminado ortotrópico $[45^\circ/-45^\circ]_4$ simplesmente apoiado submetido à carga distribuída . . . . .	103
4.12	Propriedades físicas dos materiais piezelétrico e composto . . . . .	104
4.13	Comparação dos valores de deflexão no ponto $P$ . . . . .	106
4.14	Propriedades físicas dos materiais piezelétrico e isotrópico . . . . .	107
4.15	Comparação dos valores de deflexão encontrados no centro dos sensores. . . . .	109
4.16	Comparação dos valores de potenciais elétricos gerados pelos sensores piezelétricos incorporados na placa. . . . .	109
5.1	Sintonia do controlador PID pela técnica de Ziegler-Nichols . . . . .	116
5.2	Valores dos parâmetros do controlador . . . . .	119
5.3	Valores adaptados dos parâmetros do controlador . . . . .	120

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AFM	Atomic Force Microscope - Microscópio de Força Atômica,	19
CPT	Classical Plate Theory ou Teoria Clássica de Placas,	99
FEM	Finite Element Method,	2
IEEE	Institute of Electrical & Electronics Engineers,	14
MEF	Método dos Elementos Finitos ou FEM,	2
PI Gmbh Co	Germany Physik Instrumente Company,	8
PIC	Physik Instrumente Ceramic,	8
PID	Proportional Integral Derivative controller - Proporcional Integral Diferencial controlador,	4
PVDF	Polyvinylidene difluoride - Polifluoreto Vinilideno,	7
PZT	Lead Zirconate Titanate (piezoelectric ceramic material) - Titanato Zirconato de Chumbo,	7
Quad4	Elemento quadrilátero de quatro nós utilizado no MEF,	96
Quad8	Elemento quadrilátero de oito nós utilizado no MEF,	102
Quad9	Elemento quadrilátero de nove nós utilizado no MEF,	68
SI	Unidades definidas no Sistema International,	97
TRIPLT	Elemento de três nós com 15 graus de liberdade em cada um deles, utilizado no MEF,	100



## LISTA DE SÍMBOLOS

### *Símbolos romanos*

$A$	Superfície dos eletrodos de um capacitor de placas paralelas,	9
$A_e$	Área da célula de integração do elemento quadrilátero,	70
$\mathbb{B}$	Matrizes responsáveis pela discretização das deformações,	74
$C$	Capacitância,	9
$C_0$	Capacitância de um capacitor ideal,	9
$C_C$	Constante de Curie,	8
$\vec{C}_g$	Vetor carregamento generalizado,	59
$C_s$	Impedância do sensor piezelétrico,	92
$[c^E]$	Constantes elásticas do material piezelétrico,	11
$[C]$	Matriz de rigidez modificada de um material piezelétrico exposto a um estado plano de tensões que considera $\epsilon_{33} \neq 0$ no sistema de ortotropia do material,	46
$[\bar{C}]$	Matriz de rigidez modificada de um material piezelétrico exposto a um estado plano de tensões que considera $\epsilon_{33} \neq 0$ no sistema de referência de laminado,	49
$[\bar{C}_p^{(k)}]$	Parcela da matriz de rigidez de um material piezelétrico relacionada às tensões no plano da lâmina,	61
$[\bar{C}_s^{(k)}]$	Parcela da matriz de rigidez de um material piezelétrico relacionada às tensões cisalhantes transversais,	61
$d$	Distância entre as placas de um capacitor,	9
$\vec{D}$	Deslocamento elétrico de cargas,	10
$\vec{D}_g$	Vetor deformação generalizada,	59
$\vec{D}_g^p$	Vetor de deformações generalizadas no plano,	74
$\vec{D}_g^s$	Vetor de deformações cisalhantes generalizadas,	74
$e(t)$	Erro de um sistema de controle,	115
$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$	Sistema de eixos de ortotropia de um material,	29

$\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$	Sistema de eixos de referência,	36
$[e]$	Matriz de constantes piezelétricas modificada de um material piezelétrico exposto a um estado plano de tensões que considera $\epsilon_{33} \neq 0$ no sistema de ortotropia do material,	48
$[e^\epsilon]$	Constantes dielétricas do material piezelétrico,	12
$[e^E]$	Constantes piezelétricas do material piezelétrico,	12
$[\bar{e}]$	Matriz de constantes piezelétricas modificada de um material piezelétrico exposto a um estado plano de tensões que considera $\epsilon_{33} \neq 0$ no sistema de referência do laminado,	51
$[\bar{e}_p^{(k)}]$	Parcela da matriz de coeficientes piezelétricos de um material piezelétrico relacionada às tensões no plano da lâmina,	61
$[\bar{e}_s^{(k)}]$	Parcela da matriz de coeficientes piezelétricos de um material piezelétrico relacionada às tensões cisalhantes transversais,	61
$\vec{E}$	Campo elétrico,	11
$\vec{E}^a$	Vetor campo elétrico do atuador,	68
$\vec{E}^s$	Vetor campo elétrico do sensor,	68
$G$	Módulo de cisalhamento,	34
$\vec{g}$	Vetor de aceleração da gravidade,	54
$h$	Espessura da lâmina,	59
$I$	Corrente elétrica,	92
$J$	Determinante da matriz jacobiana,	70
$[\mathbf{J}]$	Matriz jacobiana,	70
$k$	Posição de uma lâmina no laminado,	64
$K_\varphi$	Conjunto de potenciais elétricos admissíveis,	54
$K_u$	Conjunto de deslocamentos admissíveis,	54
$l$	Comprimento,	23
$m$	Massa,	30
$\vec{M}$	Esforço de flexão devido à tração no contorno,	60
$\vec{M}$	Vetor de esforços generalizados de flexão,	59
$n$	Número de lâminas,	25
$\mathbb{N}_i$	Funções de forma,	70
$n_{pt}$	Número de pontos de integração,	71
$\vec{N}$	Esforço de membrana devido à tração no contorno,	60

$\vec{N}$	Vetor de esforços generalizados de membrana,	59
$P$	Polarização,	10
$P(t)$	Perturbação agindo sobre um sistema,	115
$\vec{q}_e$	Vetor de graus de liberdade do elemento,	69
$[Q_c]$	Matriz de rigidez do material composto no sistema de ortotropia,	36
$[\overline{Q}_c]$	Matriz de rigidez da lâmina de material composto no sistema de referência global do laminado,	39
$\vec{Q}$	Vetor de esforços generalizados cortantes,	59
$r(t)$	Referência de um sistema de controle,	115
$[S]$	Matriz de flexibilidade no sistema de ortotropia,	36
$t$	Tempo,	54
$T_C$	Temperatura de Curie ou Ponto de Curie,	8
$[T_\varepsilon]$	Matriz de rotação do tensor de deformações,	37
$[T_\varepsilon]_R$	Matriz de rotação do tensor de deformações adaptada ao estado plano de tensões,	39
$[T_\sigma]$	Matriz de rotação do tensor de tensões,	37
$[T_\sigma]_R$	Matriz de rotação do tensor de tensões adaptada ao estado plano de tensões,	39
$\vec{t}$	Tração prescrita no contorno,	54
$u$	Componente do deslocamento em $x$ ,	57
$u(t)$	Ação de controle,	115
$\Delta u$	Varição do deslocamento,	23
$\vec{u}$	Deslocamento prescrito no contorno,	54
$\vec{\ddot{u}}$	Vetor aceleração,	54
$\vec{\dot{u}}_o$	Velocidade inicial,	54
$\vec{u}_0^h$	Vetor deslocamento discretizado,	72
$\delta \vec{u}_0^h$	Vetor deslocamento virtual discretizado,	72
$\vec{u}_o$	Deslocamento inicial,	54
$\delta \vec{u}$	Deslocamento virtual,	54
$v$	Componente do deslocamento em $y$ ,	57
$V$	Volume,	30
$Var_\varphi$	Conjunto de variações de potenciais elétricos admissíveis,	54
$Var_u$	Conjunto de variações de deslocamentos admissíveis,	54

$w$	Componente do deslocamento em $z$ ,	57
$W_i$	Coeficientes de ponderação da quadratura de Gauss-Legendre,	71
$\vec{x}$	Vetor posição,	56
$Y$	Módulo de Young,	33
$y(t)$	Saída de um sistema,	115
$Z_s$	Impedância do sensor piezelétrico,	92

*Símbolos gregos*

$\alpha$	Constante relacionada à parcela correspondente à matriz de massa do amortecimento proporcional,	93
$\beta$	Constante relacionada à parcela correspondente à matriz de rigidez do amortecimento proporcional,	93
$\epsilon$	Permissividade absoluta de um material,	9
$\epsilon_0$	Permissividade do vácuo,	9
$\epsilon_r$	Permissividade relativa de um material,	8
$[\epsilon_D^{\mathcal{E}}]$	Matriz de constantes dielétricas modificada de um material piezelétrico exposto a um estado plano de tensões que considera $\epsilon_{33} \neq 0$ no sistema de ortotropia do material,	48
$[\overline{\epsilon_D^{\mathcal{E}}}]$	Matriz de constantes dielétricas modificada de um material piezelétrico exposto a um estado plano de tensões que considera $\epsilon_{33} \neq 0$ no sistema de referência do laminado,	51
$\vec{\epsilon}_p^o$	Deformações da secção neutra no plano da lâmina,	62
$\vec{\epsilon}_p$	Deformações do plano da lâmina,	61
$[\epsilon]$	Deformação mecânica,	11
$\vec{\gamma}_s$	Vetor de deformações cisalhantes transversais,	62
$\vec{\kappa}_p$	Curvaturas devidas às tensões que atuam no plano da lâmina,	62
$\mu$	Fração de massa,	30
$\nu$	Coeficiente de Poisson,	35
$\varphi$	Diferença de potencial ou tensão elétrica,	9
$\varphi_o$	Potencial elétrico inicial,	54
$\delta\varphi$	Potencial elétrico virtual,	54
$\bar{\varphi}$	Potencial elétrico prescrito no contorno,	54
$\overline{\varphi}$	Potencial constante aplicado à uma lâmina,	65



$\bar{\varphi}^a$	Potencial elétrico aplicado ao atuador,	68
$\bar{\varphi}^s$	Potencial elétrico aplicado ao sensor,	68
$\phi$	Ângulo entre os sistemas de ortotropia e de referência,	38
$\omega_i$	Funções de forma,	80
$\psi$	Quantidade de carga,	9
$\psi_1$	Cargas livres em um meio dielétrico,	10
$\psi_2$	Cargas na superfície de um meio dielétrico,	10
$\bar{\psi}$	Carga prescrita no contorno,	54
$\rho$	Densidade,	30
$\vec{\sigma}_p$	Tensões do plano da lâmina,	61
$\vec{\sigma}_s$	Vetor de tensões cisalhantes transversais,	62
$[\sigma]$	Tensão mecânica,	11
$\theta$	Rotação de acordo com a teoria de placas de Mindlin,	57
$\theta_x$	Rotação em torno do eixo $x$ ,	57
$\theta_y$	Rotação em torno do eixo $y$ ,	57
$\vartheta$	Fração de volume,	31
$\vec{\theta}^h$	Vetor rotação discretizado,	72
$\delta\vec{\theta}^h$	Vetor rotação virtual discretizado,	72
$a$	Fator de correção da energia de deformação associada ao cisalhamento transversal,	59
$\Omega$	Configuração inicial de um corpo definido no espaço,	54

*Outros símbolos*

$\bar{\cdot}$	Grandeza prescrita no contorno,	54
$[\cdot]$	Matriz ou Tensor,	11
$[\bar{\cdot}]$	Matriz ou Tensor no sistema de referência global do laminado,	39
$\vec{\cdot}$	Vetor,	10
$f(\cdot, \cdot)$	Função definida em função de parâmetros,	70



## RESUMO

Este trabalho visa o desenvolvimento de modelos matemáticos e numéricos a fim de simular o comportamento de materiais compostos e piezelétricos. A teoria de primeira ordem para estruturas laminadas é empregada na formulação de um modelo contínuo, sendo este discretizado utilizando o método dos elementos finitos. A validação do modelo numérico é efetuada através de comparações com soluções analíticas, com modelos computacionais elaborados no software comercial ANSYS<sup>®</sup> e com outros trabalhos. A aplicação proposta contempla o problema de uma placa compósita engastada por um de seus lados com lâminas de material piezelétrico aderidas às superfícies, agindo como sensor e atuador. Uma análise da dinâmica da estrutura sob ação de força mecânica externa concentrada é considerada e os resultados são utilizados no desenvolvimento de uma estratégia de controle que objetiva a redução dos níveis de vibração no sistema.

Palavras chave: Piezeletricidade, material composto, materiais inteligentes, placa laminada, método dos elementos finitos, controle de vibração.



## **ABSTRACT**

This work aims the development of mathematical and numerical models in order to simulate the behavior of composite and piezoelectric materials. The first order shear theory for laminate structures is employed to formulate the continuum model, which is discretized using the finite element method. The validation of numerical model is obtained through comparisons made with analytical solutions, with results generated from models developed using simulation software ANSYS<sup>®</sup> and with results related in other works. The proposed application in this study deals with the problem of a cantilever composite plate with piezoelectric layers integrated acting as sensor and actuator. An analysis of its dynamics under concentrated external mechanical force is done and its results are used in development of a control strategy with the goal of reduction of vibration levels.

Keywords: Piezoelectricity, composite material, smart material, laminate plate structure, finite element method, vibration control.



# 1 INTRODUÇÃO

No cenário tecnológico atual, o intuito é reduzir a quantidade de componentes nos sistemas, especialmente em sistemas miniaturizados e sistemas onde o peso total é um fator crítico, tais quais sistemas embarcados. Para tanto, dispositivos inteligentes capazes de realizar mais de uma função têm sido desenvolvidos. A utilização destes dispositivos se traduz em redução do peso, de espaço e de custo, dependendo da aplicação.

Neste contexto, a tendência crescente é o estudo de materiais com características físicas que possibilitem a realização de tarefas múltiplas, como as ligas com memória de forma e materiais piezelétricos. A inserção destes materiais no projeto de equipamentos permite o desenvolvimento de dispositivos mais eficientes, compactos e até mesmo mais silenciosos, com a vantagem extra da possibilidade de controle integrado ao sistema, dispensando o uso de controladores externos.

A utilização de materiais piezelétricos tem crescido consideravelmente nas indústrias aeronáutica e automobilística, sendo tais materiais requisitados em aplicações diversas. Nos aviões e veículos, materiais inteligentes são empregados na supressão de vibrações estruturais e em sistemas de posicionamento e sensoriamento, aumentando o desempenho dos equipamentos e até mesmo o conforto dos passageiros. No caso dos satélites, onde a redução de peso é um fator de grande importância, os motores e atuadores piezelétricos têm sido utilizados em sistemas de posicionamento fino, substituindo os servomotores na manipulação de pequenos mecanismos. Os materiais piezelétricos estão também presentes em manipuladores robóticos e na robótica móvel, assim como em aplicações que utilizem sistemas embarcados como submarinos, helicópteros e outros tipos de transporte.

Entretanto, não apenas as áreas de Engenharia estão empregando materiais inteligentes. Diversas aplicações estão sendo desenvolvidas para a área médica, especialmente no campo de micromecanismos. Dispositivos miniaturizados de alta precisão têm sido amplamente desenvolvidos para a utilização em cirurgias, tais quais micropinças e microtesouras, visando diminuir o espaço de trabalho para o manuseio de instrumentos cirúrgicos. Desta forma, menores cortes são feitos, se traduzindo em menor exposição de superfícies internas do corpo interagindo com o meio externo, reduzindo o risco de infecções e o tempo de recuperação do paciente.

No campo da fertilização *in vitro*, micromanipuladores têm sido empregados para o manuseio de óvulos humanos e de animais, no caso da Veterinária. Materiais piezelétricos encontram-se igualmente presentes em equipamentos médicos tais quais aparelhos de ultrasonografia para fins diagnósticos e ultra-sons para tratamento de lesões, utilizados na Fisioterapia para reabilitação.

Assim como o emprego destes materiais se expande, o número de pesquisas efetuadas sobre o tema vem aumentando significativamente com o intuito de caracterizar o mais fidedignamente possível o comportamento dos materiais piezelétricos sob diferentes condições de utilização. O uso do material na forma de transdutores, sensores, atuadores, motores, filtros, entre outras, foi investigado em diversos trabalhos nestas últimas décadas.

## 1.1 Estado da arte

Apesar da Piezeletricidade ter sido descoberta a mais de 100 anos, as aplicações utilizando materiais piezelétricos são relativamente recentes, apresentando maiores expoentes na época da Segunda Guerra Mundial. O número de pesquisas porém começou a aumentar somente a partir da década de 70, onde tais materiais começaram a ganhar espaço na construção de transdutores. No 100º aniversário da descoberta da Piezeletricidade, [Mason \[1\]](#) lançou um artigo relatando a história da Piezeletricidade e expondo suas aplicações. [Gallego-Juárez \[2\]](#) estreitou o assunto focando mais especificamente as cerâmicas piezelétricas e transdutores ultrasônicos. Contudo, a maior parte dos estudos sobre materiais piezelétricos trata de atuadores e sensores, visto a capacidade destes materiais de trabalharem como ambos os dispositivos quando funcionando no modo direto (sensor) ou modo indireto (atuador).

Diversas abordagens foram utilizadas a fim de descrever matematicamente e modelar computacionalmente o comportamento dos materiais piezelétricos em diversos tipos de aplicação. [Adriaens, Koning e Banning \[3\]](#) desenvolveram um modelo de atuador piezelétrico para mecanismos de posicionamento. A simulação numérica do comportamento dinâmico do atuador foi feita através de um modelo laplaciano com análise em frequência. [Silva \[4\]](#) desenvolveu o modelo de uma micro-pinça piezelétrica capaz de medir indiretamente a força de contato entre o atuador e o objeto manipulado utilizando um modelo laplaciano no domínio do tempo para a descrição da dinâmica do dispositivo e interação atuador-objeto. Entretanto, uma grande parte dos estudos feitos na área utilizam o Método dos Elementos Finitos (MEF) para simular numericamente o comportamento de sensores e atuadores. [Benjeddou, Trindade e Ohayon \[5\]](#) elaboraram um modelo de viga piezelétrica utilizando o MEF. O modelo considerava uma viga sanduíche (material piezelétrico + material elástico) como um atuador capaz de trabalhar em



extensão e cisalhamento. Peng, Lam e Liu [6] desenvolveram um modelo numérico (MEF) baseado na teoria de terceira ordem para simular uma viga laminada formada de material composto e material piezolétrico trabalhando como sensores e atuadores distribuídos sobre a viga. O trabalho contemplou ainda o efeito da localização dos sensores e atuadores no controle da dinâmica do sistema, simulada através de técnicas computacionais de análise modal. Reddy [7] demonstrou soluções analíticas utilizando as teorias clássicas e de terceira ordem para placas piezolétricas e elaborou um modelo de viga piezolétrica utilizando o MEF. Lam *et al.* [8] apresentaram um modelo de placa compósita com sensores e atuadores piezolétricos acoplados baseado na teoria clássica de laminados. A dinâmica do sistema foi simulada por uso de análise modal e pelo método de Newmark- $\beta$  e a performance do sistema com controle proporcional de realimentação de velocidade foi apresentada. Han e Lee [9] analisaram um modelo numérico de placas compósitas com atuadores piezolétricos distribuídos baseado na teoria de deslocamentos *layerwise*. Uma estrutura de controle semelhante à de Lam *et al.* [8] foi empregada. Trabalhos considerando modelos de materiais piezolétricos envolvendo grandes deslocamentos foram igualmente desenvolvidos e maiores detalhes sobre a formulação matemática podem ser encontrados nas referências [10, 11, 12, 13, 14, 15].

## 1.2 Motivação

O objetivo deste trabalho visa simular matematicamente e numericamente o comportamento dinâmico de materiais compostos e piezolétricos utilizando o Método dos Elementos Finitos. A teoria de Mindlin para placas laminadas é aplicada para a obtenção do modelo matemático da estrutura tipo placa formada por lâminas de material composto com sensores e atuadores piezolétricos aderidos às superfícies. O algoritmo de Newmark é empregado para a simulação da dinâmica de malha aberta do atuador e um exemplo de controle por realimentação (*feedback*) é elaborado visando a redução de vibrações do dispositivo. Este trabalho pretendeu contribuir com as pesquisas sobre materiais piezolétricos no meio acadêmico de forma interdisciplinar, unindo áreas de conhecimento tais quais mecânica, computação, controle e automação.

## 1.3 Estrutura da dissertação

Neste primeiro capítulo são apresentados um breve estudo sobre o fenômeno piezolétrico, as aplicações dos materiais piezolétricos e seu funcionamento.

O Capítulo 2 é dedicado ao estudo dos materiais compostos e piezolétricos, abordando

tópicos tais quais as equações constitutivas que regem o comportamento destes materiais, as transformações de coordenadas entre os sistemas de ortotropia e o sistema de referência global e as relações constitutivas dos materiais quando submetidos à situação de estado plano de tensão.

No Capítulo 3 é desenvolvida a formulação da placa laminada baseada na teoria de Mindlin, utilizando o princípio dos trabalhos virtuais. A discretização via Método dos Elementos Finitos é igualmente apresentada, sendo o domínio particionado em elementos quadriláteros de nove nós. Através da equação constitutiva do laminado, são derivadas as equações de funcionamento dos elementos sensores e atuadores e o método selecionado para a resolução da dinâmica do problema é exposto.

O Capítulo 4 mostra os testes impostos ao modelo numérico desenvolvido no software MATLAB<sup>®</sup> visando sua validação. Os testes selecionados apresentam diversos casos de utilização, contendo exemplos com diferentes condições de contorno e tipos de carregamento mecânico e elétrico, inclusive ambos. Os resultados obtidos são comparados com soluções analíticas, com outros trabalhos efetuados utilizando o método dos elementos finitos e com modelos concebidos no software comercial ANSYS<sup>®</sup>.

No Capítulo 5 é apresentada a aplicação proposta de placa compósita com sensores e atuadores piezelétricos aderidos às superfícies. O modo de funcionamento do dispositivo é exposto e sua dinâmica é investigada. Um controlador PID é concebido a fim de reduzir as vibrações na estrutura causadas por carregamentos externos. A comprovação da veracidade dos resultados obtidos é baseada em comparações com os resultados do modelo desenvolvido no software comercial ANSYS<sup>®</sup>.

Este trabalho encerra com o Capítulo 6, onde são apresentadas as conclusões e as perspectivas pertinentes aos assuntos estudados.

## 1.4 Histórico da Piezeletricidade

A Piezeletricidade é a capacidade que certos materiais possuem de gerar cargas elétricas uma vez que um esforço mecânico lhes é aplicado. O efeito inverso é igualmente possível, ou seja, a geração de deslocamentos quando imersos em um campo elétrico. Em 1880, Pierre e Jacques Curie descobriram o efeito piezelétrico [1]. A idéia surgiu durante o estudo de materiais piroelétricos, onde uma carga elétrica é formada em certos tipos de cristais devido à mudanças de temperatura. Coulomb havia conjecturado que a eletricidade poderia ser obtida através de pressão e, assim, os irmãos Curie investigaram esta possibilidade nos cristais piroelétricos e constataram o fenômeno. Hankel discordou que tal efeito fosse característico de materiais pi-

roelétricos (onde a temperatura teria um papel crucial) e designou um novo nome ao fenômeno – Piezeletricidade<sup>1</sup>. Ainda em 1880, Voigt fez a distinção entre piroeletricidade "real", causada somente pela variação de temperatura e a piroeletricidade "falsa", que é devida à deformação que gera uma mudança de temperatura, esta então de origem piezelétrica [16]. Apesar de serem fenômenos distintos, a Piroeletricidade e a Piezeletricidade estão intimamente relacionadas, pois ambas dependem da estrutura cristalina do material, podendo um mesmo material apresentar ambos os efeitos. Uma representação esquemática dos fenômenos acoplados existentes envolvendo grandezas mecânicas, elétricas e térmicas é apresentada na Fig. 1.1, onde é possível a visualização das interações entre domínios de ambos os efeitos. A Piezeletricidade está situada na parte esquerda do diagrama, sendo possível visualizar as interações entre grandezas, assim como os coeficientes de acoplamento associados a estes. Na prática, os acoplamentos termo-elétricos e termo-mecânicos são fracos na maior parte dos materiais piezelétricos [17]. Estes serão portanto desprezados neste trabalho.

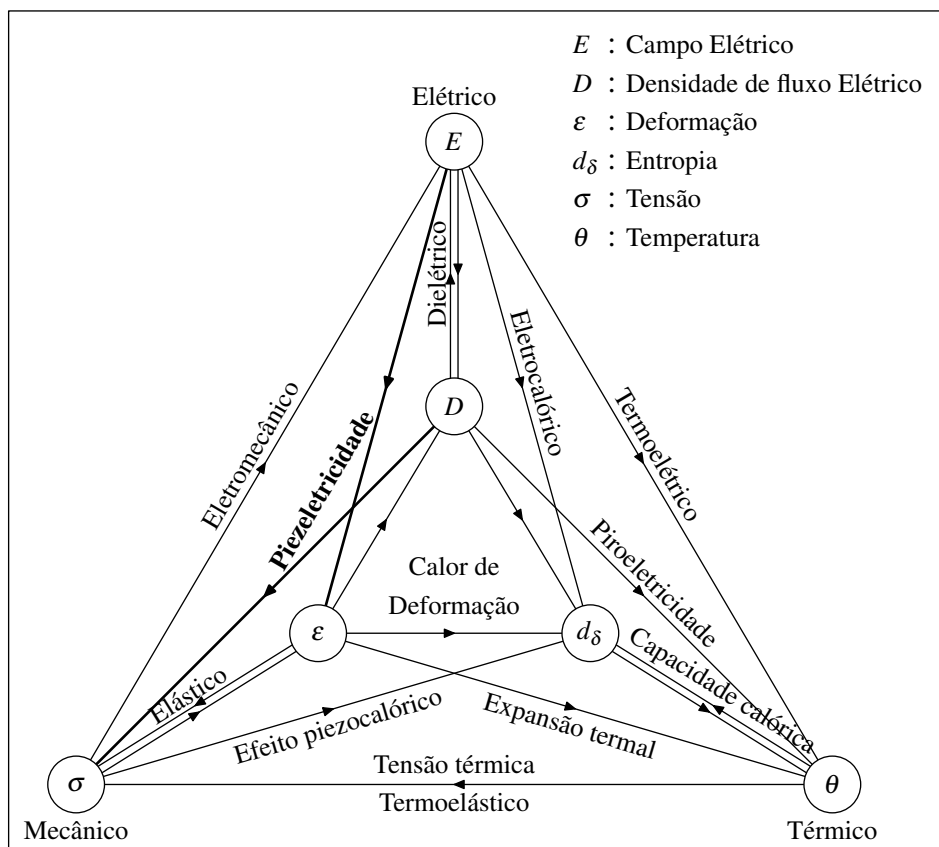


Figura 1.1: Fenômenos acoplados em um material piezelétrico

No experimento efetuado pelos irmãos Curie foi constatado que alguns materiais apresentavam uma polaridade elétrica quando submetidos a uma deformação mecânica e que esta polarização era proporcional à tensão mecânica aplicada. Este é então chamado de efeito piezelétrico

<sup>1</sup> A palavra Piezeletricidade é derivada do grego, onde o prefixo *piezo* significa pressionar.

direto.

Em 1881, Lippmann deduziu matematicamente o efeito piezelétrico inverso. Neste caso, quando estes materiais são expostos a um campo elétrico, os mesmos apresentam uma deformação. Os irmãos Curie confirmaram experimentalmente o efeito piezelétrico inverso. Na Fig. 1.2 é apresentado como o efeito piezelétrico se manifesta, quando os materiais são excitados por carga mecânica ou elétrica. Nas sessões posteriores uma explicação mais detalhada destes fenômenos será discutida.

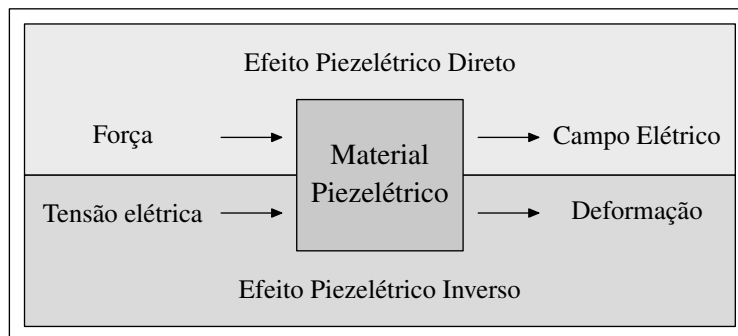


Figura 1.2: Efeitos piezelétricos direto e inverso

Os primeiros materiais a serem estudados foram os cristais, tais como quartzos e sal de Rochelle [16]. Porém, devido às pequenas deformações e fracos campos elétricos resultantes da aplicação de tensões elétricas e mecânicas, novos materiais sintéticos começaram a ser estudados a fim de intensificar as propriedades piezelétricas. Assim, no fim dos anos 40, as cerâmicas começaram a ser utilizadas para obtenção de efeitos piezelétricos. Desde então, estes materiais piezoativos artificiais foram constantemente desenvolvidos e possuem um grande campo de aplicação. Mais de 1500 tipos de cerâmicas piezelétricas são conhecidos hoje, diferindo entre si pelas propriedades e composições químicas [18]. Elas são conglomerados de microcristais com propriedades piezelétricas e são rígidas, quimicamente inertes e completamente insensíveis à umidade ou outras influências atmosféricas [19], com exceção da temperatura. Estes materiais apresentam um desempenho muito superior que o do quartzo, sendo sua capacidade de conversão de energia eletromecânica de cinco à seis vezes maior [18]. Do ponto de vista tecnológico, as piezocerâmicas possuem alguns requisitos desejáveis tais quais resposta rápida, rigidez e possibilidade de miniaturização. Em Engenharia, além dos materiais piezelétricos cerâmicos, utiliza-se também polímeros para a geração de efeitos piezelétricos. Entre as cerâmicas, pode-se apontar como material mais utilizado o PZT<sup>2</sup> e entre os polímeros o PVDF<sup>3</sup>.

<sup>2</sup>A sigla PZT é derivada da fórmula química do material  $(Pb[Zr_xTi_{1-x}]O_3)$ , sendo  $x \in \mathbb{R}^{+*}$  e  $x < 1$ , apresentando os elementos titânio, zircônio e chumbo na composição, de onde vem o nome Titanato Zirconato de Chumbo.

<sup>3</sup>Polifluoreto Vinilideno(PVDF), também conhecido como KYNAR® ou HYLAR®.

Dadas as características supracitadas, os materiais piez elétricos têm sido usados na fabricação de uma grande gama de transdutores, entre outras utilizações possíveis, em áreas diversas tais quais Medicina, Física, Química e Engenharia.

## 1.5 O fenômeno piez elétrico

A Piezeletricidade é um fenômeno dependente da estrutura cristalina dos materiais. Se a estrutura cristalina de um material possui centro de simetria, então este material não pode apresentar propriedades piez elétricas. Em um material piez elétrico, esforços de compressão, tração ou cisalhamento deslocam o baricentro da estrutura cristalina, criando um momento bipolar ou uma polaridade. Depois de polarizados, eles exibem simetria tetragonal, caracterizando uma estrutura anisotrópica. Na Fig. 1.3 é apresentada a estrutura de um material piez elétrico não polarizada (a) e polarizada (b).

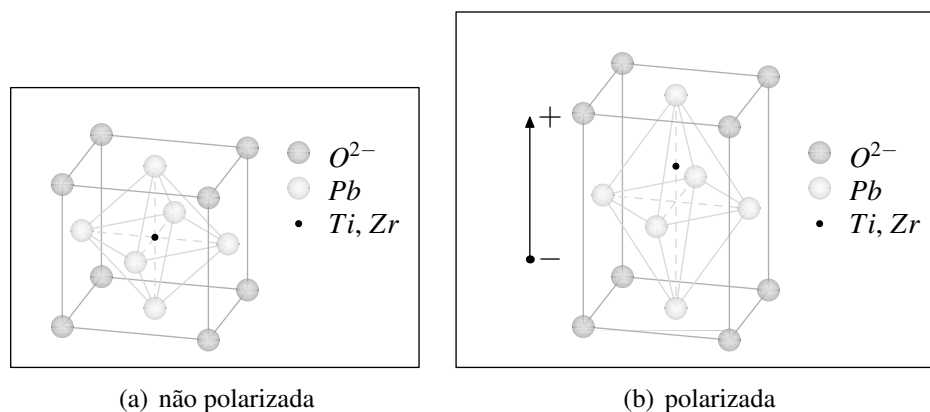


Figura 1.3: Estrutura cristalina de um material piez elétrico (a) não polarizada e (b) polarizada

É importante salientar que o sentido de polarização  $P$  de um material piez elétrico é constante (pois é uma propriedade deste), independente do estímulo elétrico ou mecânico ao qual este seja submetido. Sendo assim, se o material for comprimido, a polaridade elétrica induzida no material apresentará um sentido que se inverterá caso o material seja tracionado. Da mesma forma, é o sentido da polarização característica do material que irá definir o tipo de deformação que o material apresentará quando mergulhado em um campo elétrico. Tal exemplo está exposto na Fig. 1.4, onde  $\varphi$  é a tensão elétrica aplicada.

As propriedades piez elétricas são também dependentes da temperatura. Mais especificamente, o efeito piez elétrico só ocorre abaixo da temperatura de Curie<sup>4</sup>, quando estes cristais não possuem centro de simetria e a carga do dipólo é diferente de zero[20]. A temperatura de

<sup>4</sup>igualmente encontrada na literatura como Ponto de Curie

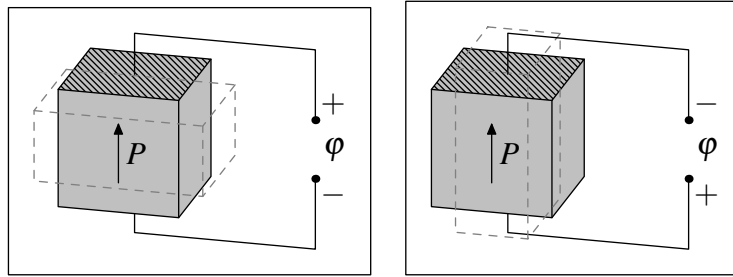


Figura 1.4: Comportamento mecânico de um material piezelétrico submetido à um campo elétrico

Curie de um material piezelétrico pode ser calculada pela lei de Curie-Weiss, dada pela (1.1),

$$\epsilon_r - 1 = \frac{C_C}{T_C - T} \quad (1.1)$$

sendo  $\epsilon_r$  a permissividade relativa do material,  $C_C$  é a constante de Curie e  $T_C$  a temperatura de Curie. Para pontos acima desta temperatura, o material perde as propriedades piezelétricas e mostra um comportamento dielétrico normal [21]. Esta perda de propriedades se dá por uma mudança de fase que altera a estrutura cristalina [20], ou seja, a estrutura do material piezelétrico muda de tetragonal para centro-cúbica, típica de um material isotrópico, e os momentos bipolares desaparecem. Esta propriedade causa limitações de uso de materiais piezelétricos à altas temperaturas, devido ao risco de dano ao mecanismo. Valores típicos de temperatura de Curie de materiais piezelétricos comercializados são apresentados na Tab. 1.1.

Referência do material	Temperatura de Curie [°C]
Crystal de quartzo ( $SiO_2$ )	573
Niobato de lítio ( $LiNbO_3$ )	1210
PIC 155 (*)	345
PIC 153 (*)	185
PIC 110 (*)	150
PZT puro	360
Titanato de bário ( $BaTiO_3$ )	135

Tabela 1.1: Valores típicos de temperatura de Curie de piezocerâmicas (\*: comercializada por PI (Physik Instrumente) GmbH Co)

Um material piezelétrico imerso em um circuito elétrico funciona como um capacitor. Um capacitor é um componente que armazena energia, ou seja, este acumula um desequilíbrio interno de carga elétrica. A estrutura básica de um capacitor consiste de duas placas separadas por um meio dielétrico, de acordo com a representação esquemática ilustrada na Fig. 1.5. No caso de um material piezelétrico, estas placas são as superfícies que recebem a tensão elétrica externa via eletrodo e o dielétrico, o interior do material.

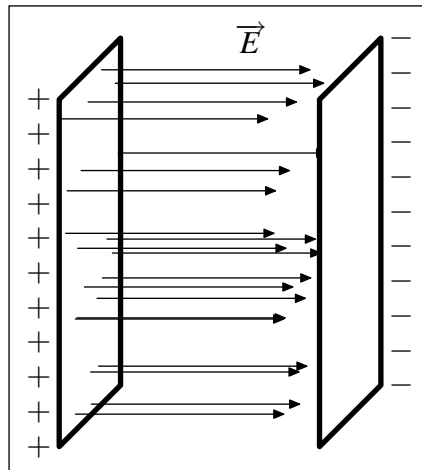


Figura 1.5: Representação esquemática de um capacitor

A propriedade que um capacitor possui de armazenar energia elétrica sob a forma de um campo eletrostático é chamada de capacitância ( $C$ ) e é medida pelo quociente da quantidade de carga ( $\psi$ ) armazenada pela diferença de potencial ou tensão elétrica ( $\phi$ ) que existe entre as placas (Eq. (1.2)).

$$C = \frac{\psi}{\phi} \quad (1.2)$$

Em um capacitor de placas paralelas ideal, constituído de dois eletrodos planos idênticos de superfície  $A$  separados à distância constante  $d$ , a capacitância pode ser expressa de acordo com a Eq. (1.3),

$$C_0 = \epsilon_0 \frac{A}{d} \quad (1.3)$$

sendo que  $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} F.m^{-1}$  é a permissividade do vácuo. Entretanto, o dielétrico existente entre as placas não pode ser considerado desprezível, influenciando na relação da capacitância como descrito na Eq. (1.4),

$$C = \epsilon \frac{A}{d} \quad (1.4)$$

sendo  $\epsilon$  a permissividade absoluta do material, dada pela relação descrita abaixo,

$$\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r \quad (1.5)$$

Dentro de um capacitor de placas paralelas, o campo elétrico é uniforme, pois as cargas que

se acumulam nas superfícies possuem o mesmo módulo, porém sinais opostos, de acordo com a Fig. 1.5. A aplicação de uma tensão elétrica  $\varphi$  induz um campo elétrico uniforme  $E$  e de uma carga  $\psi$  definida pela Eq. (1.6),

$$\pm \psi = \pm DA \quad (1.6)$$

sendo que  $D$  é o deslocamento elétrico das cargas. Na presença de um campo eletrostático, o dielétrico se polariza (polarização induzida), levando ao aparecimento de dois tipos de carga: cargas livres ( $\psi_1$ ) e cargas na superfície ( $\psi_2$ ). As cargas de superfície são compensadas pela própria polarização do dielétrico, contribuindo então apenas as cargas livres na diferença de potencial gerada no meio piezelétrico,

$$\varphi = \frac{\psi}{C} = \frac{\psi}{\epsilon_r C_0} = \frac{\psi_1}{C_0} \quad (1.7)$$

Entretanto, as cargas de superfície não podem ser desconsideradas como cargas do conjunto, portanto a expressão da carga total é dada por,

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 = \frac{\psi}{\epsilon_r} + \psi \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right) \quad (1.8)$$

Por analogia, o deslocamento de cargas é expresso por,

$$D = \frac{D}{\epsilon_r} + D \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right) \quad (1.9)$$

sendo que o primeiro termo é o deslocamento de cargas livres e o segundo, é a polarização  $P$  induzida no material piezelétrico,

$$P = D \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right) \quad (1.10)$$

A polarização pode ser também definida em função do campo elétrico  $E$ , através da relação,

$$E = \frac{\varphi}{d} = \frac{\psi}{\epsilon_r C_0 d} = \frac{D}{\epsilon_r \epsilon_0} = \frac{D}{\epsilon} \quad (1.11)$$

logo,

$$D = \epsilon E = \epsilon_0 E + P \quad (1.12)$$



portanto,

$$P = (\epsilon - \epsilon_0) E \quad (1.13)$$

As relações acima definem o comportamento elétrico de um material piez elétrico. Entretanto, como ilustrado na Fig. 1.1, a Piezeletricidade é um fenômeno acoplado, que envolve as variáveis elétricas campo elétrico e deslocamento de carga e as variáveis mecânicas tensão e deformação. Uma característica importante em materiais piez elétricos é a validade de relações lineares entre o campo elétrico aplicado e a tensão mecânica ou deformação mecânica produzida [22].

Dadas as seguintes grandezas,

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma(\epsilon, E) \\ D &= D(\epsilon, E) \end{aligned} \quad (1.14)$$

sendo  $\sigma$  a tensão e  $D$  o deslocamento elétrico, ambos funções de  $\epsilon$  e  $E$ , deformação e campo elétrico, respectivamente. Expandindo em série de Taylor e utilizando apenas os primeiros termos (desprezando efeitos térmicos, magnéticos e termos não lineares) obtém-se,

$$\begin{aligned} \sigma &= \left( \frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \right) \Big|_{E=0} \epsilon + \left( \frac{\partial \sigma}{\partial E} \right) \Big|_{\epsilon=0} E \\ D &= \left( \frac{\partial D}{\partial \epsilon} \right) \Big|_{E=0} \epsilon + \left( \frac{\partial D}{\partial E} \right) \Big|_{\epsilon=0} E \end{aligned} \quad (1.15)$$

Definem-se as constantes elástica, piez elétricas e dielétrica abaixo, respectivamente

$$c^E = \left( \frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \right) \Big|_E \quad (1.16)$$

$$e^E = \left( \frac{\partial D}{\partial \epsilon} \right) \Big|_E \quad (1.17)$$

$$e^\epsilon = \left( \frac{\partial \sigma}{\partial E} \right) \Big|_\epsilon \quad (1.18)$$

e

$$\epsilon_D^\epsilon = \left( \frac{\partial D}{\partial E} \right) \Big|_\epsilon \quad (1.19)$$

sendo que o sobrescrito  $E$  significa sob campo elétrico constante e  $\varepsilon$  sob deformação constante. Como o efeito piezelétrico inverso  $e^\varepsilon$  é uma consequência do efeito piezelétrico direto  $e^E$ , define-se,

$$(-e^\varepsilon)^T = e^E = e \quad (1.20)$$

logo,

$$\begin{aligned} \sigma &= c^E \varepsilon - e^T E \\ D &= e \varepsilon + \epsilon_D^E E \end{aligned} \quad (1.21)$$

Devido à natureza anisotrópica dos cristais, suas propriedades são apresentadas na forma tensorial, introduzida primeiramente por Voigt para descrever o comportamento elétrico e elástico destes materiais [23]. Desta forma, é possível a visualização clara da ordem dos tensores envolvidos nas equações constitutivas que regem o comportamento dos materiais piezelétricos.

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= c_{ijkl}^E \varepsilon_{kl} - e_{kij} E_k \\ D_i &= e_{ikl} \varepsilon_{kl} + \epsilon_{ik}^E E_k \end{aligned} \quad (1.22)$$

Estas equações são conhecidas como a forma tensão – fluxo elétrico ( $\sigma - D$ ) das equações piezelétricas, onde:

$c_{ijkl}$  é o tensor de rigidez,

$e_{ikl}$  é o tensor de coeficientes piezelétricos e

$\epsilon_{ik}$  é a matriz de permissividade.

Analisando cada equação constitutiva, pode-se verificar que a relação que apresenta a tensão mecânica  $\sigma$  é então composta de uma parcela puramente mecânica, representada pelo tensor de rigidez  $c$  e pela deformação mecânica  $\varepsilon$ , e uma parcela acoplada, formada pela interação entre o tensor de coeficientes piezelétricos  $e$  e pelo campo elétrico  $E$ . A segunda equação constitutiva apresenta uma parcela puramente elétrica, expressa pela relação entre a matriz de permissividade ou dielétrica  $\epsilon$  e o campo elétrico  $E$ , e uma parte acoplada composta pelo tensor de coeficientes piezelétricos  $e$  e pela deformação  $\varepsilon$ . Caso as parcelas de acoplamento sejam retiradas das equações acima, obtém-se a lei de Hooke da primeira, e da segunda a relação existente entre campo e deslocamento elétrico no interior de um capacitor, descrita na Eq. (1.11).

A segunda forma das equações constitutivas é chamada deformação - deslocamento elétrico

$(\varepsilon - D)$ , representadas na Eq. (1.23), onde  $\sigma$  é a tensão mecânica,  $\varepsilon$  é a deformação,  $E$  o campo elétrico e  $D$  o deslocamento de cargas. As matrizes de coeficientes relativas à forma  $(\varepsilon - D)$  são de flexibilidade  $s_{ijkl}$ , coeficientes piezométricos de carga  $d_{ikl}$  e permissividade  $\epsilon_{ik}$ .

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ij} &= s_{ijkl}^E \sigma_{kl} + d_{kij} E_k \\ D_i &= d_{ikl} \sigma_{kl} + \epsilon_{ik}^E E_k\end{aligned}\quad (1.23)$$

Estas equações não são diretamente deduzidas a partir do princípio de conservação da energia, elas são obtidas quando algumas hipóteses relativas às configurações geométricas são aplicadas [20], assim como as formas tensão-campo elétrico  $(\sigma - E)$  e deformação-campo elétrico  $(\varepsilon - E)$  descritas pelas relações abaixo.

Forma  $(\sigma - E)$ :

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= c_{ijkl}^D \varepsilon_{kl} - h_{ijk} D_k \\ E_i &= -h_{ikl} \varepsilon_{kl} + \beta_{ik}^E D_k\end{aligned}\quad (1.24)$$

Forma  $(\varepsilon - E)$ :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ij} &= s_{ijkl}^D \sigma_{kl} + g_{ijk} D_k \\ E_i &= -g_{ikl} \sigma_{kl} + \beta_{ik}^D D_k\end{aligned}\quad (1.25)$$

Nas formas  $(\sigma - E)$  e  $(\varepsilon - E)$  os coeficientes piezométricos são  $h$  e  $g$  e a matriz dielétrica é representada por  $\beta$ .

<b>ij ou kl</b>	<b>p ou q</b>
11	1
22	2
33	3
23 ou 32	4
13 ou 31	5
12 ou 21	6

Tabela 1.2: Equivalência de índices entre a notação tensorial e matricial compacta

Uma notação matricial compacta é introduzida para substituir a notação tensorial utilizada para representar os tensores de terceira e quarta ordem. A maneira como os índices foram rearranjados é indicada na Tab. 1.2. De acordo com a norma IEEE - Standard of Piezoelectricity [24], o eixo 3 deve coincidir com a direção de polarização do material piezométrico para os modos de funcionamento transversal e paralelo que serão explicados posteriormente. Um esquema ilustrativo dos graus de liberdade de um material piezométrico é mostrado na Fig. 1.6, conforme

a notação matricial estabelecida.

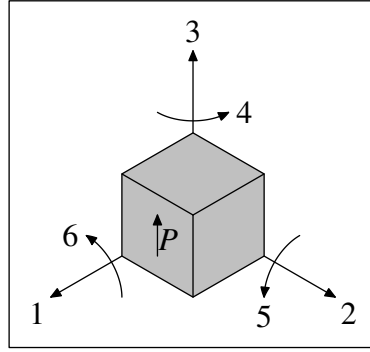


Figura 1.6: Graus de liberdade de um material piezoeletrico de acordo com a norma da IEEE

Assim,

$$\begin{aligned} c_{ijkl} &\equiv c_{pq} \\ e_{ikl} &\equiv e_{iq} \\ \epsilon_{ik} &\equiv \epsilon_{ik} \end{aligned} \quad (1.26)$$

A mudança de notação para os coeficientes da matriz de flexibilidade  $s_{ijkl}$  se dá da mesma forma que para a matriz de rigidez  $c_{ijkl}$ , assim como as mudanças das matrizes de coeficientes piezoeletricos  $d_{ikl}$ ,  $h_{ikl}$  e  $g_{ikl}$  seguem o modelo de transformação de  $e_{ikl}$ . Entretanto, a matriz de coeficientes dielétricos  $\epsilon_{ik}$  se mantém inalterada, assim como  $\beta_{ik}$ . É igualmente possível se efetuar a mudança de uma forma de equação constitutiva para outra através de transformações pelos coeficientes piezoeletricos, relacionados entre si pelos coeficientes eletromecânicos, conforme descrito nas relações abaixo.

$$\begin{aligned} d_{kp} &= \epsilon_{lm}^{\sigma} g_{li} = e_{kj} s_{ji}^E \\ g_{kp} &= \beta_{lm}^{\sigma} d_{li} = h_{kj} s_{ji}^D \\ e_{kp} &= \epsilon_{lm}^{\epsilon} h_{li} = d_{kj} c_{ji}^E \\ h_{mi} &= \beta_{lm}^{\epsilon} e_{li} = g_{kj} c_{ji}^D \end{aligned} \quad (1.27)$$

Na Fig. 1.7 é ilustrado esquematicamente a relação entre os coeficientes eletromecânicos e as variáveis presentes nas equações piezoeletricas.

As equações abaixo representam a forma matricial das equações constitutivas piezoeletricas para piezocerâmicas utilizadas na formulação matemática de sensores (forma  $\sigma - D$ ) e atuadores (forma  $\epsilon - D$ ), representadas no sistema de ortotropia do material de acordo com a norma da IEEE.

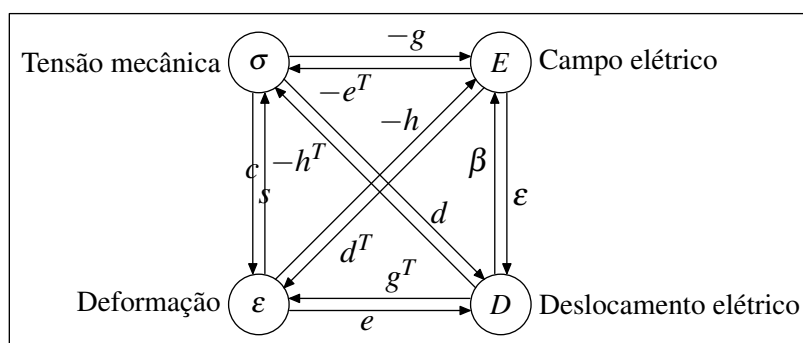


Figura 1.7: Correlação entre coeficientes e grandezas mecânicas e elétricas em um material piezoeétrico

Forma  $\sigma - D$ :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}^E & c_{12}^E & c_{13}^E & 0 & 0 & 0 \\ c_{21}^E & c_{22}^E & c_{23}^E & 0 & 0 & 0 \\ c_{31}^E & c_{32}^E & c_{33}^E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44}^E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55}^E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66}^E \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & e_{31} \\ 0 & 0 & e_{32} \\ 0 & 0 & e_{33} \\ 0 & e_{24} & 0 \\ e_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} \quad (1.28)$$

$$\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{24} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_{11}^E & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{22}^E & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33}^E \end{bmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} \quad (1.29)$$

Forma  $\epsilon - D$ :

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & 0 & 0 & 0 \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} & 0 & 0 & 0 \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & d_{31} \\ 0 & 0 & d_{32} \\ 0 & 0 & d_{33} \\ 0 & d_{24} & 0 \\ d_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} \quad (1.30)$$

$$\begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{24} & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_{11}^{\epsilon} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{22}^{\epsilon} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33}^{\epsilon} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{Bmatrix} \quad (1.31)$$

Neste trabalho o material piezolétrico simulado será a piezocerâmica tipo PZT devido ao fato desta apresentar um comportamento mais linear, maior deformação piezolétrica e melhor acoplamento eletromecânico em relação aos polímeros piezolétricos [20]. Além disso, o PZT é piezo-isotrópico no plano normal ao eixo de polarização enquanto os polímeros piezolétricos podem ser altamente anisotrópicos [25]. A Tab. 1.3 apresenta características típicas de polímeros piezolétricos (PVDF) comparadas a características de piezocerâmicas (PZT)[26].

Propriedades do material	PZT	PVDF		
		Uni-axial	-	Bi-axial
Constantes Piezolétricas				
$d_{33}(10^{-12}Cb/N$ ou $m/V$ )	300	-25	-	-25
$d_{31}(10^{-12}Cb/N$ ou $m/V$ )	-150	15	-	3
$d_{32}(10^{-12}Cb/N$ ou $m/V$ )	-150	3	-	3
Permissividade relativa ( $\epsilon/\epsilon_0$ )	1800	12	-	12
Módulo de Young ( $GPa$ )				
$Y_1$	50	3	-	3
$Y_2$	50	1	-	3
$Y_3$	50	10	-	10
Tensão máxima de tração ( $MPa$ )				
Direção 1	80	200	-	200
Direção 2	80	40	-	200
Temperatura máxima de operação ( $^{\circ}C$ )				
	140	90	-	90
Campo elétrico máximo ( $V/m$ )				
	$1.10^6$	$500.10^6$	-	$500.10^6$
Densidade ( $kg/m^3$ )				
	7600	1800	-	1800

Tabela 1.3: Comparação de propriedades entre PZT e PVDF

Dentre as diversas classes de simetria existentes para materiais piezolétricos, a escolha neste trabalho foi utilizar a classe  $6mm$ , que apresenta um tipo de simetria hexagonal, dado o grande número de informações sobre as propriedades físicas deste PZT existentes em literatura e catálogos de fabricantes ([20, 18, 19]). A classe de simetria de um PZT tem uma influência direta

no formato do tensor de constantes piezométricas  $e$ , como pode ser observado na Tab. 1.4.

LEGENDA

- elemento nulo
- elemento não nulo
- elementos idênticos
- elementos simétricos
- ⊙ elemento duas vezes menor e de sinal contrário ao seu par.

TRICLÍNICO

Classe 1

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \quad (18)$$

MONOCLÍNICO

<p>Classe 2</p> <p><math>2 \parallel x_2</math> (orientação padrão)</p> $\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \quad (8)$	<p>Classe 2</p> <p><math>2 \parallel x_3</math></p> $\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \quad (8)$
<p>Classe <math>m</math></p> <p><math>m \parallel x_2</math> (orientação padrão)</p> $\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \quad (10)$	<p>Classe <math>m</math></p> <p><math>m \parallel x_3</math></p> $\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \quad (10)$

ORTORRÔMBICO

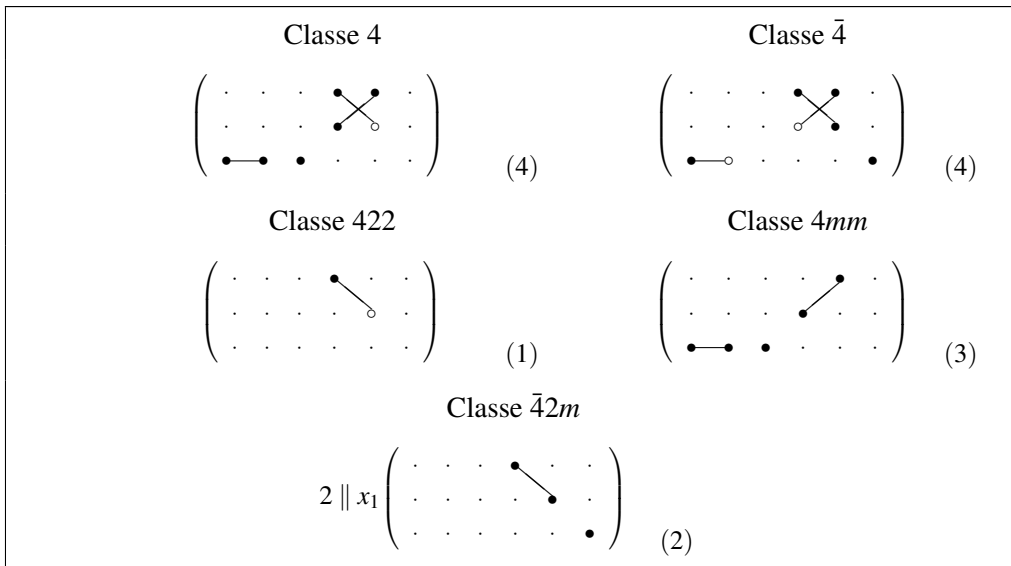
<p>Classe 222</p> $\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \quad (3)$	<p>Classe <math>mm2</math></p> $\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \quad (5)$
---	--

ROMBOÉDRICO OU TRIGONAL

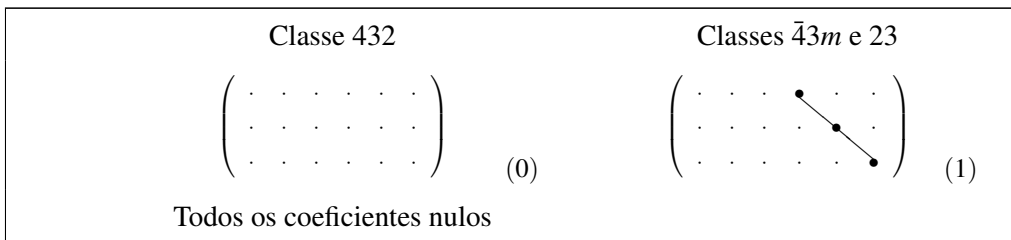
<p>Classe 3</p> $\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \quad (6)$	<p>Classe 32</p> $\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \quad (2)$
<p>Classe <math>3m</math></p> <p><math>m \perp x_1</math> (orientação padrão)</p> $\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \quad (4)$	<p>Classe <math>3m</math></p> <p><math>m \perp x_2</math></p> $\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \quad (4)$

Tabela 1.4: Matrizes piezométricas para as classes de simetria de cristais piezométricos [27, Chap.7] (continua ...)

TETRAGONAL



CÚBICO



HEXAGONAL

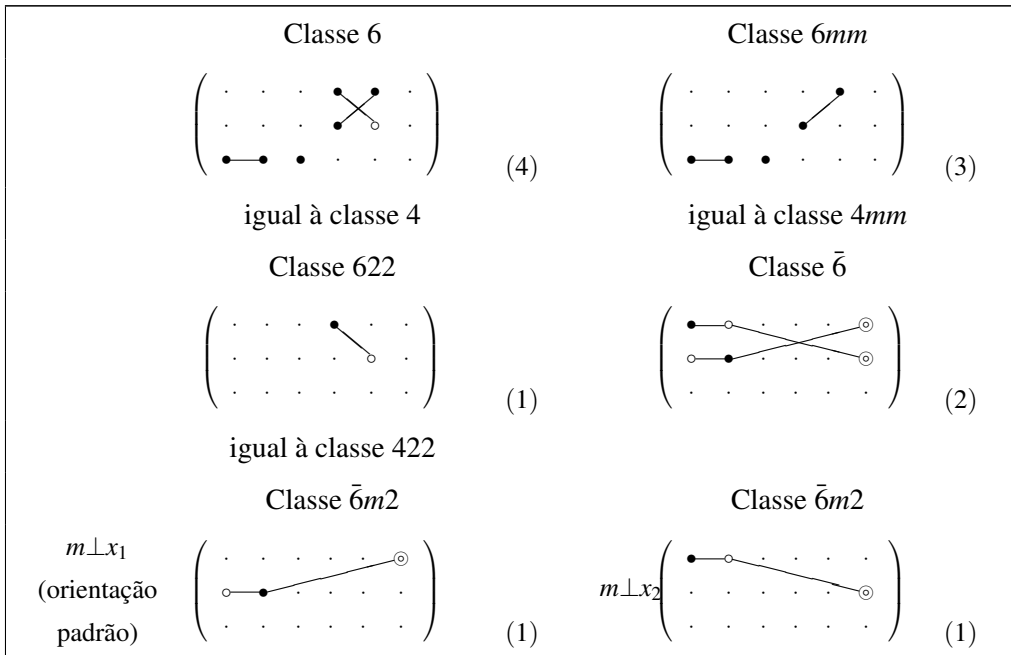


Tabela 1.4: Matrizes piezelétricas para as classes de simetria de cristais piezelétricos [27, Chap.7]



Dadas as diferenças na matriz piezelétrica, cada classe de simetria apresentará um comportamento único. Apesar deste trabalho utilizar um formato de matriz piezelétrica referente à classe  $6mm$ , uma simples alteração do formato da matriz  $[e]$  torna o modelo capaz de representar qualquer outro tipo de classe.

## 1.6 Aplicações dos materiais piezelétricos

A primeira aplicação desenvolvida usando materiais piezelétricos foi durante a Primeira Guerra Mundial. Devido ao alto índice de naufrágio de navios alemães, a necessidade de localizar submarinos inimigos se tornou alarmante. Um sistema de sonar foi desenvolvido por Paul Langevin utilizando cristais de quartzo piezelétricos para gerar as ondas acústicas [1]. Atualmente, os materiais piezelétricos podem ser usados em estruturas inteligentes como sensores e/ou atuadores em aplicações como controle de forma, amortecimento ativo e supressão de vibração em estruturas [28]. De acordo com Mukherjee e Chaudhuri [14], o conceito de materiais piezelétricos inteligentes e sistemas estruturais com sensores e atuadores integrados tem conduzido à uma revolução no controle de estruturas flexíveis complexas. Entretanto, estas não são as únicas utilizações de tais materiais. No início dos anos 70, estes materiais foram integrados na construção de fonógrafos, filtros de onda, transdutores de atraso de linha, fontes de alta voltagem, instrumentos ultrasônicos, entre outras aplicações. Gallego-Juárez [2] fornece uma lista das utilizações mais comuns de piezocerâmicas. Pohanka e Smith [29] apresentaram uma lista completa de aplicações de piezocerâmicas de acordo com o critério da Marinha Norte-Americana. Este critério estabelece seis tipos de cerâmicas adequados a seis diferentes campos de aplicação e é exposto na Tab. 1.5.

Esta classificação de piezocerâmicas continua sendo utilizada, porém não considera aspectos tais quais tipo de excitação (elétrica ou mecânica) e tipo de aplicação (em frequência ou quasi-estática). Ruschmeyer [30] propôs uma classificação mais precisa das aplicações e condições de trabalho, resumida sucintamente na Fig. 1.8.

Os piezoatuadores e piezosensores, objetos de estudo deste trabalho, são mostrados na parte esquerda da Fig. 1.8, cada qual associados com seus estímulos e respectivas respostas. Para os atuadores, valores típicos de excitação encontram-se em uma faixa de dezenas de Volts até alguns kiloVolts. O deslocamento resultante varia de micrometros à milímetros e é dependente não só da tensão elétrica aplicada, como também do modo de funcionamento, do tipo de atuador e das características físicas do material piezelétrico. No caso dos sensores, as forças mecânicas impostas variam de miliNewtons até algumas centenas de Newtons. A tensão elétrica gerada

Tipo de material	Campo de Aplicação	Exemplos
I	Fontes sonoras e ultrasônicas	Projetor sonoro e ultrasônico, usinagem e soldagem ultrasônica, umidificadores
II	Fontes sonoras de baixa intensidade	Transdutores de atraso de linha, avaliação não-destrutiva, instrumentação e instrumentação médica
III	Geradores de pulsação de alta voltagem	Ignitores de vários tipos
IV	Sensores	Hidrofones, microfones, fonógrafos e acelerômetros
V	Dispositivos não-transdutores	Filtros eletromecânicos e transformadores
VI	Dispositivos de posicionamento	Controladores de movimento, sistemas de escaneamento e cantilever de microscópio de força atômica (AFM)

Tabela 1.5: Critério de classificação de materiais piezelétricos definido pela Marinha Norte-Americana

em resposta encontra-se na faixa de 1 à algumas centenas de Volts. As características de saída do sensor dependem igualmente do valor do estímulo, da geometria do sensor, assim como de seu modo de funcionamento e de suas propriedades físicas.

## 1.7 Modos de funcionamento

As cerâmicas piezelétricas possuem três modos distintos de funcionamento, sendo estes transversal, paralelo e cisalhante. Dependendo da aplicação do material piezelétrico: sensor ou atuador, o modo de funcionamento é analisado de forma diferenciada, considerando a natureza do estímulo recebido, conforme mostrado na Fig. 1.9.

### 1.7.1 Atuador piezelétrico

No caso do elemento atuador, os modos de funcionamento estão associados ao sentido da polarização e da tensão elétrica recebida. Uma representação esquemática é fornecida na Fig. 1.10.

A deformação resultante em qualquer um dos modos de funcionamento é dependente da

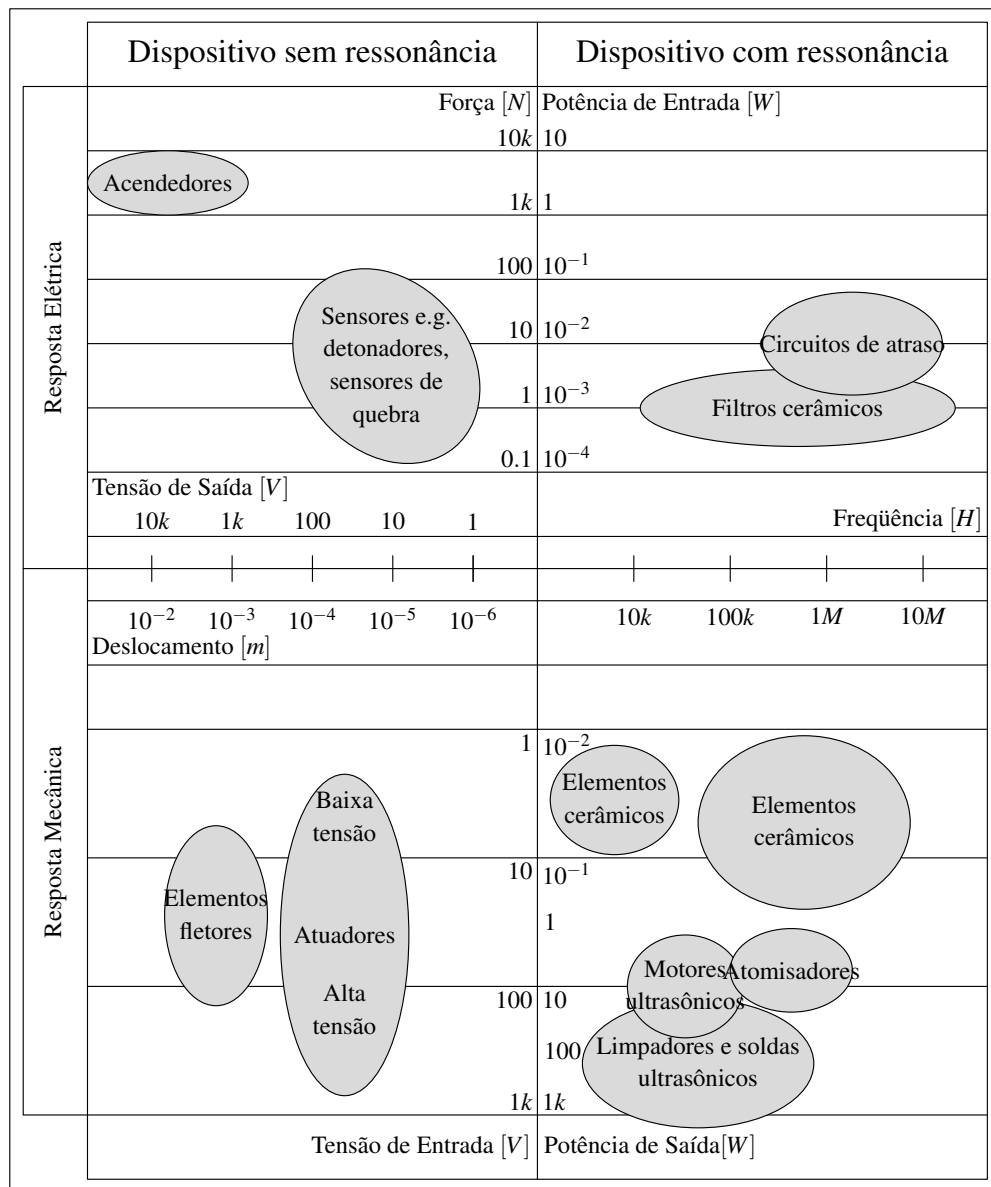


Figura 1.8: Aplicações comuns de materiais piezelétricos

tensão elétrica e dos coeficientes piezelétricos de carga, de acordo com a forma  $(\epsilon - D)$  das equações constitutivas, descrita na Eq. (1.30). No caso do atuador, onde nenhuma força externa é aplicada, então a deformação  $\epsilon$  é apenas função do coeficiente piezelétrico  $d$  e do campo elétrico  $E$ , que é uma função do potencial elétrico aplicado  $\phi$ , apresentando ambos a mesma direção e sentido. Em todos os casos, o deslocamento piezelétrico é uma função linear da tensão elétrica e dos coeficientes piezelétricos de carga.

No modo de funcionamento transversal, apresentado na Fig. 1.10(b), o campo elétrico e a polarização  $P$  do material encontram-se na mesma direção porém em sentidos contrários, gerando uma compressão do material. O coeficiente piezelétrico dominante deste modo de funcionamento é o  $d_{31}$ . A relação encontrada entre o deslocamento  $u$  e a tensão elétrica aplicada

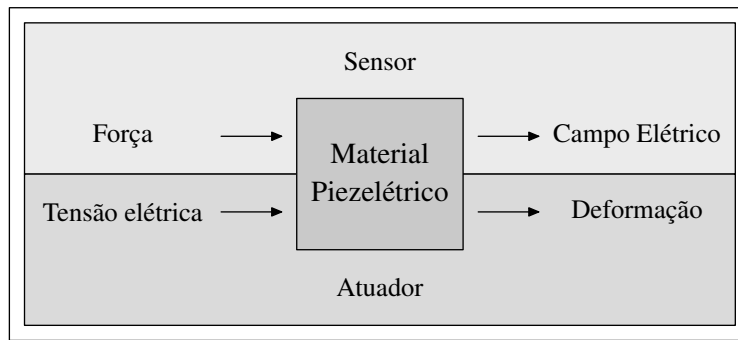
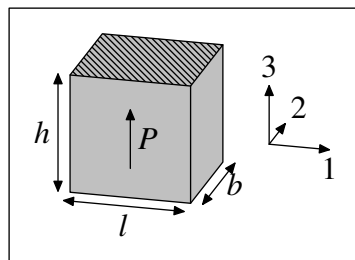
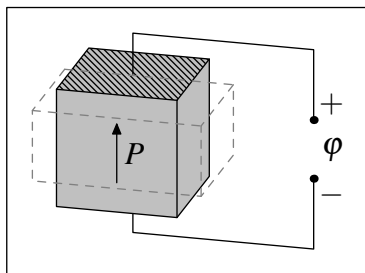


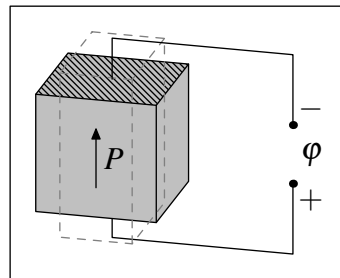
Figura 1.9: Funcionamento de sensores e atuadores piezelétricos.



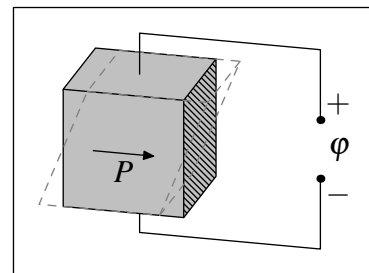
(a) Representação de um piezoatuador



(b) Modo 1: Transversal



(c) Modo 2: Paralelo



(d) Modo 3: Cisalhante

Figura 1.10: Modos de funcionamento de um material piezelétrico sujeito à um campo elétrico

$\varphi$  é dada pela Eq. (1.32),

$$u = d_{31} \frac{\varphi}{h} \quad (1.32)$$

sendo que  $h$  é a espessura do material, representada na Fig. 1.10(a).

No modo de funcionamento paralelo, mostrado na Fig. 1.10(c), o campo elétrico  $E$  e a polarização do material apresentam mesma direção e sentido. Como resultado, o atuador apresenta um alongamento que coincide com a direção do campo elétrico imposto. O coeficiente piezelétrico dominante deste modo de funcionamento é o  $d_{33}$ . Quando não é aplicada uma carga mecânica externa, encontra-se uma relação de deslocamento aproximada expressa pela Eq. (1.33),

$$u = d_{33} \varphi \quad (1.33)$$

Esta configuração é utilizada principalmente em aplicações de controle preciso de posição [25], sendo a base de funcionamento de atuadores multilaminados, apresentados posteriormente neste capítulo.

No modo de funcionamento cisalhante, ilustrado na Fig. 1.10(d), as direções do campo elétrico e da polarização do material são perpendiculares, gerando uma deformação do tipo cisalhante no material. O coeficiente piezolétrico dominante deste modo de funcionamento é o  $d_{15}$ . A relação entre deslocamento e tensão elétrica é dada pela Eq. (1.34),

$$u = l d_{15} \frac{\varphi}{h} \quad (1.34)$$

sendo que  $l$  é o comprimento do material, conforme exposto na Fig. 1.10(a).

É com base nos modos de funcionamento que diferentes configurações de atuadores são projetadas, de modo a amplificar os deslocamentos gerados por tais materiais em função das direções e sentidos do potencial elétrico de acionamento e da polarização característica do material piezolétrico.

### 1.7.2 Sensor piezolétrico

No caso de utilização de materiais piezolétricos como sensores, o estímulo recebido pelo material é mecânico, e o material, por consequência, retorna como resposta ao estímulo o campo elétrico induzido no seu interior, de acordo com a Fig. 1.9. Se uma tensão mecânica é aplicada ao longo do eixo de polarização, o campo elétrico desenvolvido no material tende a se opor à força que age sobre este. Tensões compressivas geram campos elétricos com o mesmo sentido da polarização do material, induzindo o material a se alongar na direção oposta à direção das forças aplicadas. Neste caso, o material se comporta conforme o modo de funcionamento paralelo. Dada a ausência de potencial elétrico aplicado ao sensor, a geração de cargas elétricas no interior do PZT se dá exclusivamente pelas deformações mecânicas ao qual este é submetido. Uma relação aproximada do potencial elétrico desenvolvido no sensor é mostrada na equação abaixo,

$$\varphi = \frac{e_{33} u}{Z_s} \quad (1.35)$$

sendo  $Z_s$  a impedância do sensor, estabelecida de acordo com a Eq. (1.4). As tensões de tração geram campos elétricos com sentido oposto à polarização original, conforme ilustrado na Fig. 1.10(b)[31], que apresenta o modo de funcionamento transversal. A tensão elétrica induzida no sensor é aproximada pela relação seguinte,

$$\varphi = \frac{e_{31}u}{Z_s} \quad (1.36)$$

No caso do atuador, a seleção do modo de funcionamento do PZT é um parâmetro de projeto, dado o conhecimento prévio dos valores de entrada (alimentação) do dispositivo. Para os sensores, a deformação mecânica de entrada pode ser estimada, entretanto, esta jamais será conhecida até ser medida pelo sensor. Logo, é praticamente impossível se afirmar que um sensor trabalhará unicamente em um modo de funcionamento.

## 1.8 Tipos de atuadores piezelétricos

### 1.8.1 Atuador laminar

A configuração mais simples de atuador piezelétrico é o tipo laminar, onde uma lâmina de material piezelétrico é excitada por uma tensão elétrica externa, gerando deformações na estrutura do atuador. As relações entre entrada e saída são obtidas diretamente das equações constitutivas do material e, dado que este atuador é composto por um único tipo de material, é relativamente simples a caracterização de seu comportamento. Apesar do grau de simplicidade, este tipo de atuador é utilizado em inúmeras aplicações, especialmente no controle de deformações e vibrações de estruturas, acoplados tanto externamente (na superfície) quanto internamente, no caso de laminados.

Entretanto, o deslocamento gerado por um material piezelétrico sozinho não é muito apreciável (na faixa de centenas de nanômetros). A fim de melhorar o desempenho, costuma-se empilhar lâminas de PZT buscando amplificar mecânicamente o deslocamento total. Diferentes tipos de atuadores podem ser concebidos fazendo-se uso deste artifício, porém apenas os mais conhecidos serão apresentados neste trabalho.

### 1.8.2 Atuador multilaminar

Os atuadores multilaminares (*stacks*) usam o princípio de funcionamento paralelo, de maneira que o deslocamento de uma lâmina seja somado ao deslocamento da próxima lâmina, de

acordo com o representado na Fig. 1.11. Para um acionador com um número  $n$  de lâminas, o deslocamento final  $u$  será  $n$  vezes maior que o produzido por uma única camada, de acordo com a Eq. (1.37),

$$u = nd_{33}\varphi \quad (1.37)$$

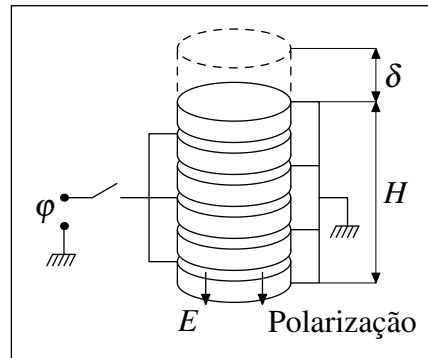


Figura 1.11: Esquema de um atuador multilaminar (*stack*)

A grande vantagem deste atuador é que este consegue gerar um deslocamento apreciável (até 2% do seu comprimento inicial) sendo alimentado por baixas tensões elétricas (na ordem de 10V) [32]. O deslocamento resultante desta configuração é unicamente axial, influenciado somente pelo coeficiente piezelétrico  $d_{33}$ . Este atuador é bastante robusto, sendo capaz de movimentar objetos relativamente pesados, pois a força gerada por esta configuração pode alcançar valores na faixa de 1000N possuindo dimensões bastante reduzidas (na ordem de alguns milímetros).

### 1.8.3 Atuador flextensional

Atuadores flextensionais são estruturas formadas por material piezelétrico (elemento ativo) colado à uma estrutura metálica flexível. Seu princípio de funcionamento é tal que um deslocamento extensional do material piezelétrico gera uma flexão na estrutura metálica (de onde deriva o nome flextensional), conforme ilustrado na Fig. 1.12. Desta forma, a estrutura metálica amplifica e muda a direção do deslocamento causado pelo material piezelétrico. O coeficiente piezelétrico predominante neste tipo de atuador é o  $d_{31}$ , caracterizando um modo de funcionamento tipicamente transversal. O elemento piezoativo é um atuador multilaminar incorporado à estrutura, portanto este atuador apresenta valores de deslocamentos superiores aos encontrados em um atuador tipo *stack* sozinho. A rigidez/flexibilidade da estrutura metálica acoplada ao material piezelétrico é que definem a taxa de amplificação de deslocamento resultante do atuador [32].

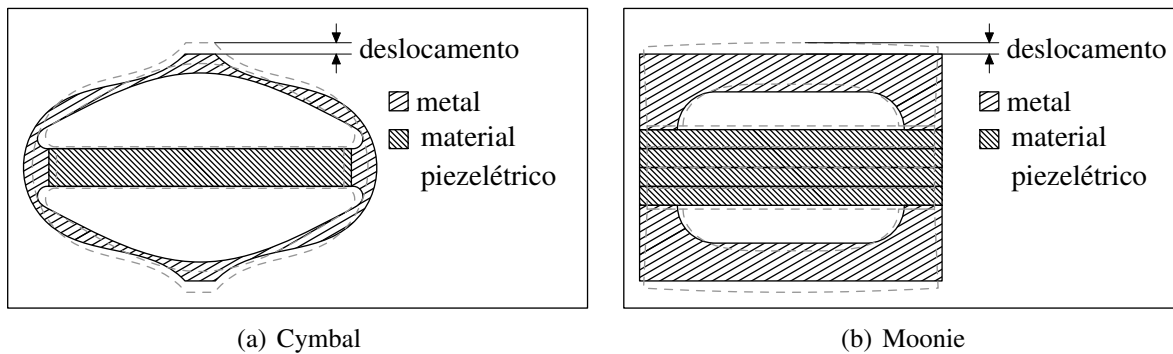


Figura 1.12: Esquema de um atuador flexensional

Este atuador é concebido para utilizações estáticas (alimentados por tensão elétrica constante) ou semi-estáticas (tensão elétrica contínua alternada de baixa frequência, na ordem de, no máximo, 10 kHz [32]). As utilizações mais comuns destes atuadores são em sistemas de nanoposicionamento, motores piezelétricos, hidrofones e sonares [20].

Os atuadores flexensionais mais conhecidos são o *cymbal* e o *moonie*, sendo a diferença básica entre eles o tipo de estrutura metálica que se encontra fixada ao material piezoativo, conforme ilustrado nas Figs. 1.12(a) e 1.12(b), respectivamente. Estruturalmente, os *moonies* são mais robustos e são capazes de gerar forças de atuação maiores que os *cymbals*, entretanto, suas dimensões podem ser um fator limitante de sua utilização em um microssistema.

#### 1.8.4 Bimorfo piezelétrico

Bimorfos piezelétricos ou atuadores bilaminares são estruturas formadas por uma ou duas lâminas de material piezelétrico, dependendo do tipo de bimorfo. São também conhecidos pelo termo *cantilever* piezelétrico devido à sua configuração de viga engastada-livre. Um atuador bilaminar é um dispositivo com alto grau de flexão pois as lâminas são conectadas ao longo de uma superfície, de maneira que quando uma camada contrai e a outra expande, o movimento entre estas é restringido. Quando a estrutura é exposta a um campo elétrico, as deformações de cada lâmina geram forças e momentos resultando na curvatura do conjunto[4]. Estes dispositivos são utilizados em aplicações que necessitam grandes deslocamentos, que não poderiam ser realizados com atuadores que trabalham exclusivamente nos modos transversal ( $d_{31}$ ) ou paralelo ( $d_{33}$ ), como por exemplo o atuador multilaminar, devido às altas tensões elétricas de alimentação necessárias para a obtenção de tal deslocamento, limitadas devido ao risco de despolarizar o material piezelétrico.

Os bimorfos podem ser classificados como heterogêneos ou homogêneos, dependendo dos materiais pelos quais são compostos. Os bimorfos heterogêneos são formados por PZT ou



PVDF e outra camada de material diferente. Normalmente este material é um metal, porém um dielétrico pode também ser utilizado, como vidro [33]. Já o bimorfo homogêneo possui apenas lâminas de material piezelétrico.

Os atuadores bilaminares podem ainda ser caracterizados pelo sentido de polaridade das lâminas que o constituem. Caso cada lâmina apresentar um sentido de polarização diferente, este é dito anti-paralelo ou serial (Fig. 1.13(a)). Os bimorfos que apresentam o mesmo sentido de polarização em ambas as camadas são ditos paralelos (Fig. 1.13(b)).

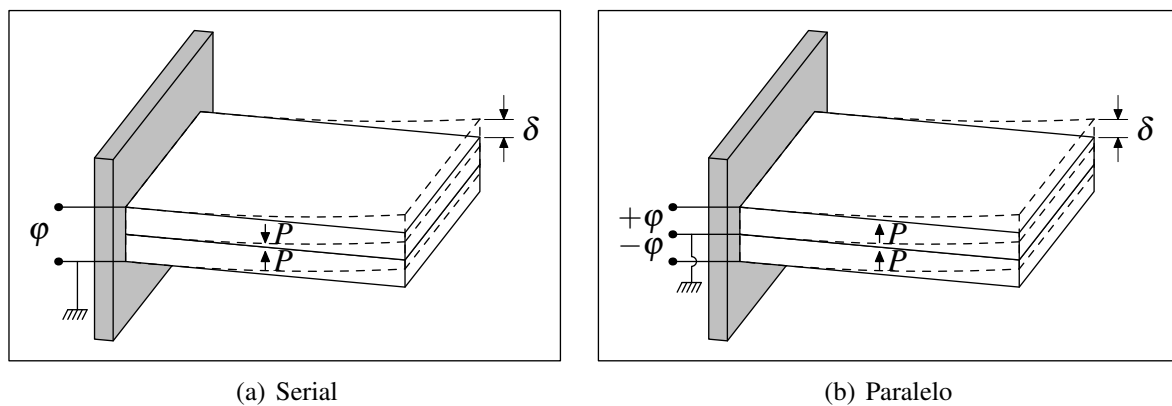


Figura 1.13: Estrutura de um bimorfo piezelétrico

Dependendo do arranjo de polarizações das lâminas, a forma de acionamento dos dispositivos é diferenciada. Para o atuador serial, o potencial elétrico é aplicado sempre no mesmo sentido e no atuador paralelo a aplicação se dá em sentidos opostos. Nos dois casos uma lâmina trabalha no modo paralelo e a outra no modo transversal, gerando a flexão típica do atuador. Entretanto, a deflexão final alcançada pelo atuador do tipo paralelo é o dobro da gerada pelo atuador serial devido à configuração elétrica. Isto pode ser observado pelas soluções analíticas para a deflexão apresentadas na Tab. 1.6,

Tipo de bimorfo	Deflexão
Serial	$w = \frac{3l^2 d_{31} \varphi}{8h^2}$
Paralelo	$w = \frac{3l^2 d_{31} \varphi}{4h^2}$

Tabela 1.6: Deflexões de bimorfos serial e paralelo

Do ponto de vista prático, esta diferença afeta a forma como o bimorfo é visto pelo resto do circuito elétrico no qual está imerso (em termos de impedância), de onde provém os nomes serial e paralelo. É importante salientar que a polaridade das lâminas sempre possui a mesma direção, ao longo de sua espessura, dado que esta é uma característica própria do material. Um

estudo sobre as equações constitutivas de atuadores bilaminares foi efetuado por [Smits, Dalke e Cooney \[33\]](#).

Os bimorfos piezelétricos são estruturas frágeis devido à sua espessura e tamanho, visto que estes precisam apresentar uma relação tamanho-espessura grande para conseguir um bom desempenho. Por esta razão, os atuadores bilaminares normalmente são vigas finas e longas, impondo a relação de compromisso entre o grande deslocamento final e a pequena rigidez. Bimorfos comerciais padrão chegam a alcançar deslocamentos de algumas centenas de micrometros.

Dentre as vantagens tecnológicas dos materiais piezelétricos citadas anteriormente, a de maior destaque é o fato deste elemento ser capaz de trabalhar tanto quanto atuador como sensor. Esta capacidade rendeu aos materiais piezelétricos um papel de destaque no controle de estruturas inteligentes na indústria moderna, além de outras características interessantes tais quais tamanho reduzido, resposta rápida e possibilidade de realizar deslocamentos significantes em relação ao seu tamanho.

## 2 MATERIAIS COMPOSTOS E PIEZELÉTRICOS LAMINADOS

### 2.1 Materiais compósitos laminados

O objetivo desta seção é o estudo de estruturas laminadas. Tais estruturas consistem na sobreposição de várias lâminas formadas por fibras unidirecionais envolvidas por uma matriz (resina). Adicionalmente às lâminas de materiais compósitos, são consideradas lâminas de materiais piezelétricos cujos objetivos são atuarem como sensores e atuadores. Como os materiais piezelétricos analisados são ortotrópicos, é necessária a especificação dos eixos de ortotropia. Neste caso, define-se  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$  como sendo os eixos de ortotropia e  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$  os eixos do plano da lâmina.

O mesmo ocorre com relação às lâminas de materiais compósitos, em que as fibras são orientadas de forma a oferecer resistência mecânica em direções preferenciais. A possibilidade do componente possuir resistência mecânica distinta, em diferentes direções, é uma das principais vantagens que os materiais compostos laminados possuem quando comparados aos materiais isotrópicos. Assim, pode-se projetar um componente com resistência elevada somente nas direções das solicitações. Neste caso, torna-se igualmente necessária a introdução dos eixos de ortotropia do compósito, dados por  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$  como sendo os eixos de ortotropia e o plano da lâmina sendo definido pelos eixos  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ . Considerando que o material composto é formado por elementos distintos, as propriedades equivalentes de cada lâmina são determinadas a partir das propriedades elásticas de seus constituintes. Esse modelo considera o material composto laminar como sendo um material homogêneo, porém anisotrópico. Por causa das diferentes propriedades materiais das lâminas, o laminado resultante é modelado através da teoria da lâmina equivalente, que considera uma adesão perfeita na interface das lâminas, isto é, considera os deslocamentos e as deformações contínuos através da espessura do laminado.

#### 2.1.1 Regra da mistura

A fim de determinar as propriedades elásticas do material composto, a regra da mistura foi considerada. Esta permite tratar o material como homogêneo, uma vez conhecida as proporções

de fibras e matriz que o compõem. Com a regra da mistura, é possível expressar estas proporções em função das frações de volume ou massa de cada constituinte [34].

Sejam  $V$ ,  $m$  e  $\rho$  o volume, massa e a densidade, atribuídos à cada componente do material através dos subscritos  $c$ ,  $f$  e  $m$ , que designam o material composto, as fibras e a matriz na qual as fibras estão submersas, respectivamente. Pode-se exprimir a massa total de material composto através da soma da massa de cada componente,

$$m_c = m_f + m_m \quad (2.1)$$

assim como o seu volume,

$$V_c = V_f + V_m \quad (2.2)$$

As Eqs. 2.1 e 2.2 podem ser re-arranjadas de forma a apresentar a massa e volume total do material composto em função das frações de fibra e matriz que o compõem,

$$1 = \frac{m_f}{m_c} + \frac{m_m}{m_c} \quad (2.3)$$

$$1 = \frac{V_f}{V_c} + \frac{V_m}{V_c} \quad (2.4)$$

Assim, pode-se definir a fração de massa de cada parte como,

$$\mu_f = \frac{m_f}{m_c} \quad (2.5)$$

$$\mu_m = \frac{m_m}{m_c} \quad (2.6)$$

e as frações de volume como,

$$\vartheta_f = \frac{V_f}{V_c} \quad (2.7)$$

$$\vartheta_m = \frac{V_m}{V_c} \quad (2.8)$$

Sendo conhecidos a massa e o volume, pode-se determinar a densidade do composto, con-

forme descrito na equação abaixo,

$$\rho_c = \frac{m_c}{V_c} = \frac{m_f + m_m}{V_c} \quad (2.9)$$

que pode ainda, ser representada em termos das densidades das partes,

$$\rho_c = \frac{\rho_f V_f + \rho_m V_m}{V_c} \quad (2.10)$$

Substituindo as relações 2.7 e 2.8 na equação acima, resulta-se em,

$$\rho_c = \rho_f \vartheta_f + \rho_m \vartheta_m \quad (2.11)$$

A relação entre a fração de volume e de massa para cada constituinte é descrita nas equações abaixo,

$$\vartheta_f = \frac{V_f}{V_c} = \frac{\rho_f m_f}{\rho_c m_c} = \frac{\rho_f}{\rho_c} \mu_f \quad (2.12)$$

$$\vartheta_m = \frac{V_m}{V_c} = \frac{\rho_m m_m}{\rho_c m_c} = \frac{\rho_m}{\rho_c} \mu_m \quad (2.13)$$

Uma vez conhecidas as propriedades mecânicas de cada componente, pode-se determinar as propriedades da lâmina em função das frações de volume e das relações de resistência dos materiais [34].

No caso de materiais compósitos, formados por lâminas unidirecionais tais quais a ilustrada na Fig. 2.1, define-se um sistema de coordenadas ortogonal que coincide com o sistema de eixos de ortotropia da lâmina, onde a direção 1 é longitudinal às fibras, a direção 2 é transversal às fibras, porém no plano da lâmina, e a direção 3 é transversal em relação às fibras e ortogonal ao plano da lâmina.

Com base neste sistema de eixos, definem-se as propriedades mecânicas elásticas da lâmina. Considerando o estado plano de tensão e a propriedade de isotropia transversa, isto é, as propriedades mecânicas na direção 3 são iguais às da direção 2, as constantes necessárias para descrever o comportamento do material são:

- $Y_1$  – módulo de elasticidade na direção 1;
- $Y_2 = Y_3$  – módulo de elasticidade na direção 2 ou 3;

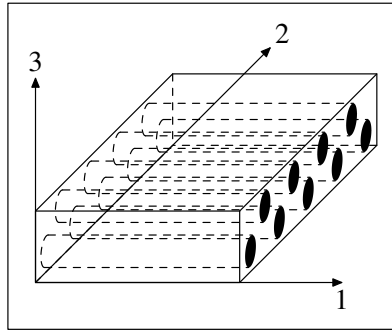


Figura 2.1: Sistema de eixos de ortotropia de uma lâmina de material composto [35]

- $G_1 = G_{13} = G_{12}$  – módulo de cisalhamento no plano 1-2 ou 1-3;
- $G_2 = G_{23}$  – módulo de cisalhamento no plano 2-3;
- $\nu_{12} = \nu_{13}$  – coeficiente de Poisson referente à deformação na direção 2 ou 3 causada por uma solitação na direção 1;
- $\nu_{21} = \nu_{31}$  – coeficiente de Poisson referente à deformação na direção 1 causada por uma solitação na direção 2 ou 3;
- $\nu_2 = \nu_{23} = \nu_{32}$  – coeficiente de Poisson referente à deformação na direção 2 causada por uma solitação na direção 3, ou uma deformação na direção 3 causada por uma solitação na direção 2.

Tais propriedades são medidas através da aplicação de testes de carregamento na lâmina, que, pela relação entre a tensão e deformação mecânica decorrente, determinam as propriedades do material.

Seja  $\epsilon_{11}$  uma deformação na direção 1 causada por uma tensão  $\sigma_{11}$  nesta mesma direção. A deformação do material composto é transmitida de forma igual para a matriz e para as fibras. Logo,

$$\epsilon_{11} = \epsilon_c = \epsilon_f = \epsilon_m \quad (2.14)$$

A tensão aplicada ao material composto é distribuída ao longo da lâmina de modo proporcional, portanto,

$$\sigma_{11} = \sigma_f \nu_f + \sigma_m \nu_m \quad (2.15)$$

Aplicando a relação entre tensão e deformação definida pela lei de Hook,

$$\sigma = Y \varepsilon \quad (2.16)$$

O módulo de elasticidade na direção 1 é determinado como sendo,

$$Y_1 = Y_f \vartheta_f + Y_m \vartheta_m \quad (2.17)$$

As fibras utilizadas no material composto possuem um módulo de elasticidade muito maior (até 100 vezes) que o módulo de elasticidade da matriz ao longo de seu comprimento e, de uma maneira geral, um composto apresenta uma fração volumétrica de fibras da ordem de 60%. Logo, o módulo de elasticidade na direção 1 é definido predominantemente pelo módulo de elasticidade das fibras.

Os módulos de elasticidade nas direções 2 e 3 são determinados através da aplicação de um carregamento transversal às fibras, sendo que a tensão imposta ao material composto é a mesma para as fibras e para a matriz. Logo,

$$\varepsilon_f = \frac{\sigma_{22}}{Y_f} = \frac{\sigma_{33}}{Y_f} = \frac{\sigma_f}{Y_f} \quad (2.18)$$

$$\varepsilon_m = \frac{\sigma_{22}}{Y_m} = \frac{\sigma_{33}}{Y_m} = \frac{\sigma_m}{Y_m} \quad (2.19)$$

e assumindo que o deslocamento transversal total do material  $w_c$  é a soma dos deslocamentos das fibras e da matriz,

$$w_{22} = w_{33} = w_c = w_f + w_m \quad (2.20)$$

Estendendo este conceito às deformações, pode-se escrever que,

$$\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = \varepsilon_c = \varepsilon_f \vartheta_f + \varepsilon_m \vartheta_m \quad (2.21)$$

Substituindo as Eqs. 2.16, 2.20 e 2.21 nas Eqs. 2.18 e 2.19, obtém-se os módulos de elasticidade nas direções 2 e 3, conforme abaixo,

$$Y_2 = Y_3 = \frac{Y_f Y_m}{Y_f \vartheta_m + Y_m \vartheta_f} \quad (2.22)$$

Apesar das fibras possuírem um módulo de elasticidade elevado na direção longitudinal, esta característica não é válida para as direções transversais. Considerando ainda a proporção aproximada de fibras e matriz em uma lâmina de material composto, pode-se afirmar que o módulo de elasticidade do material composto em direções transversais às fibras depende primordialmente da matriz.

Para a determinação do módulo de cisalhamento, assume-se que tanto a matriz quanto as fibras estejam submetidas à mesma tensão cisalhante. Desta forma, pode-se dizer que o deslocamento total do material composto  $u_c$  é dado pela soma dos deslocamentos de cada constituinte, conforme exemplificado na Fig. 2.2.

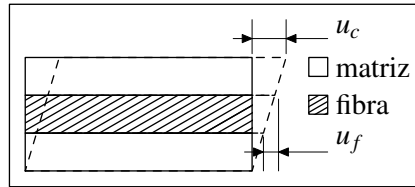


Figura 2.2: Lâmina de material composto sujeita à ação de esforço cisalhante

Logo,

$$u_c = u_f + u_m \quad (2.23)$$

Re-formulando a equação acima em função das deformações,

$$\gamma_{12} = \gamma_{13} = \gamma_f \vartheta_f + \gamma_m \vartheta_m \quad (2.24)$$

Aplicando a relação entre tensão e deformação cisalhantes,

$$\sigma = G\gamma \quad (2.25)$$

e substituindo as Eqs. 2.23 e 2.24, obtém-se,

$$G_{12} = G_{13} = \frac{G_f G_m}{G_f \vartheta_m + G_m \vartheta_f} \quad (2.26)$$

Sendo  $G_f \gg G_m$ , pode-se considerar que os módulos de cisalhamento do material composto são definidos pela matriz. O módulo de cisalhamento  $G_{23}$  é obtido da mesma forma descrita acima, mesmo este não apresentando igualdade com  $G_{12}$  e  $G_{13}$ .



O coeficiente de Poisson é definido pelas relações entre deformações observadas nos eixos  $i$  e  $j$ , gerada por um carregamento aplicado na direção  $i$ , conforme descrito na equação abaixo,

$$\nu_{ij} = -\frac{\varepsilon_{jj}}{\varepsilon_{ii}} \quad (2.27)$$

A contração transversal (direção  $j$ ) criada em consequência de uma tração na direção  $i$  é dada por,

$$\delta_{jj} = \delta_f + \delta_m \quad (2.28)$$

ou ainda, em função da deformação,

$$\varepsilon_{jj} = \varepsilon_{jjf} \vartheta_f + \varepsilon_{jjm} \vartheta_m \quad (2.29)$$

Substituindo as Eqs. 2.14 e 2.29, a Eq. (2.27), obtém-se,

$$\nu_{ij} = \nu_f \vartheta_f + \nu_m \vartheta_m \quad (2.30)$$

sendo que  $\nu_f$  e  $\nu_m$  são os coeficientes de Poisson das fibras e da matriz, respectivamente. Os coeficientes de Poisson apresentam uma dependência com os módulos de elasticidade do material, e a relação entre eles é expressa na equação abaixo,

$$\frac{\nu_{ij}}{\nu_{ji}} = \frac{Y_i}{Y_j} \quad (2.31)$$

Uma vez determinadas as constantes mecânicas do material composto em função dos seus constituintes, pode-se definir a relação entre deformação e tensão dada pela matriz de flexibilidade da lâmina, de acordo com a Eq. (2.32).

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{Y_1} & -\frac{\nu_{21}}{Y_2} & -\frac{\nu_{31}}{Y_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{Y_1} & \frac{1}{Y_2} & -\frac{\nu_{32}}{Y_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{Y_1} & -\frac{\nu_{23}}{Y_2} & \frac{1}{Y_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

Com as informações acima, conclui-se que uma lâmina tem seu comportamento mecânico

descrito pelas 6 constantes materiais  $\{Y_1, Y_2, Y_3, G_{12}, G_{23}, G_{13}\} > 0$  definidas anteriormente. A relação 2.32 pode ser escrita na forma matricial compacta, como mostra a Eq. (2.33),

$$\vec{\epsilon}^L = [S]^L \vec{\sigma}^L \quad (2.33)$$

em que o índice  $L$  indica que são valores no sistema de eixos de ortotropia. Invertendo a matriz de flexibilidade  $[S]$ , obtém-se a matriz de rigidez  $[Q_c]$ .

$$[Q_c]^L = ([S]^L)^{-1} \quad (2.34)$$

Com a matriz de rigidez, pode-se escrever a relação constitutiva que expressa a relação entre a tensão e a deformação de uma lâmina de material composto, como mostra a Eq. (2.35),

$$\vec{\sigma}^L = [Q_c]^L \vec{\epsilon}^L \quad (2.35)$$

Como um laminado é composto de diversas lâminas com orientações diferentes, é necessário adotar um sistema de coordenadas de referência para todas as lâminas, de modo que se possam sobrepor as propriedades particulares de cada lâmina e obter a propriedade do laminado. A Fig. 2.3 mostra os dois sistemas de coordenadas: o sistema de ortotropia da lâmina, representado pela base  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$  e o sistema de referência do laminado, representado pela base  $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ .

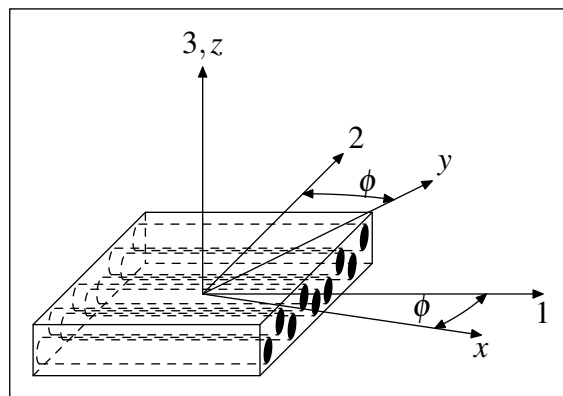


Figura 2.3: Sistema de eixos de ortotropia e de referência [35]

Para determinar o comportamento (tensão, deformação e matriz de rigidez) da lâmina no sistema de referência, é necessário rotacionar os valores obtidos no sistema de ortotropia para o sistema de referência. As Eqs. 2.36 e 2.37 indicam as operações de rotação, de acordo com as equações descritas no apêndice A.

$$\begin{aligned}\vec{\sigma} &= [T_{\sigma}] \vec{\sigma}^L \\ \vec{\varepsilon} &= [T_{\varepsilon}] \vec{\varepsilon}^L\end{aligned}\quad (2.36)$$

ou, de forma equivalente,

$$\begin{aligned}\vec{\sigma}^L &= [T_{\sigma}]^{-1} \vec{\sigma} \\ \vec{\varepsilon}^L &= [T_{\varepsilon}]^{-1} \vec{\varepsilon}\end{aligned}\quad (2.37)$$

Assim, as matrizes  $[T_{\sigma}]$  e  $[T_{\varepsilon}]$  são definidas como,

$$[T_{\sigma}] = \begin{bmatrix} \cos^2(\phi) & \sin^2(\phi) & 0 & 0 & 0 & -\sin(2\phi) \\ \sin^2(\phi) & \cos^2(\phi) & 0 & 0 & 0 & \sin(2\phi) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\phi) & \sin(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ \sin(\phi)\cos(\phi) & -\sin(\phi)\cos(\phi) & 0 & 0 & 0 & \cos(2\phi) \end{bmatrix}\quad (2.38)$$

e

$$[T_{\varepsilon}] = \begin{bmatrix} \cos^2(\phi) & \sin^2(\phi) & 0 & 0 & 0 & -\sin(\phi)\cos(\phi) \\ \sin^2(\phi) & \cos^2(\phi) & 0 & 0 & 0 & \sin(\phi)\cos(\phi) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\phi) & \sin(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ \sin(2\phi) & -\sin(2\phi) & 0 & 0 & 0 & \cos(2\phi) \end{bmatrix}\quad (2.39)$$

### 2.1.2 Estado plano de tensões

Como a maioria dos laminados são tipicamente finos e são sujeitos à tensões planas, considera-se que  $\sigma_{33} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$ . Isto implica em,

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{c11} & Q_{c12} & 0 \\ Q_{c12} & Q_{c22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{c33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.40)$$

Adicionando agora a contribuição das tensões e deformações cisalhantes transversais, as quais são consideradas no modelo de placa fina e semi-espessa de Mindlin utilizado neste trabalho,

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{c44} & 0 \\ 0 & Q_{c55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \end{Bmatrix} \quad (2.41)$$

e combinando as equações acima, obtém-se a equação constitutiva no sistema de eixos de ortotropia para o material composto,

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{c11} & Q_{c12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{c12} & Q_{c22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{c33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{c44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{c55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \end{Bmatrix} \quad (2.42)$$

Uma vez estabelecidas as equações acima, a mudança para o sistema de referência global do laminado deve ser efetuada. Entretanto, com a suposição do estado plano de tensões, o vetor de tensões foi alterado. Portanto, a matriz de rotação deve ser adaptada, ou seja, as linhas e colunas da matriz relacionadas com as tensões consideradas nulas devem ser retiradas para que esta mantenha a mesma dimensão dos vetores de tensão. Logo,

$$[T_{\sigma}]_R = \begin{bmatrix} \cos^2(\phi) & \sin^2(\phi) & -\sin(2\phi) & 0 & 0 \\ \sin^2(\phi) & \cos^2(\phi) & \sin(2\phi) & 0 & 0 \\ \sin(\phi)\cos(\phi) & -\sin(\phi)\cos(\phi) & \cos(2\phi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ 0 & 0 & 0 & -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

e no caso das deformações,

$$[T_\varepsilon]_R = \begin{bmatrix} \cos^2(\phi) & \sin^2(\phi) & -\sin(\phi)\cos(\phi) & 0 & 0 \\ \sin^2(\phi) & \cos^2(\phi) & \sin(\phi)\cos(\phi) & 0 & 0 \\ \sin(2\phi) & -\sin(2\phi) & \cos(2\phi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ 0 & 0 & 0 & -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

Portanto, aplicando as relações de rotação estabelecidas nas Eqs. 2.36 e 2.37, reformuladas abaixo,

$$\begin{aligned} \vec{\sigma} &= [T_\sigma]_R \vec{\sigma}^L \\ \vec{\varepsilon}^L &= [T_\varepsilon]_R^{-1} \vec{\varepsilon} \end{aligned} \quad (2.45)$$

e as inserindo na equação constitutiva do material composto, definida na Eq. (2.35), obtém-se,

$$\vec{\sigma} = [\overline{Q}_c] \vec{\varepsilon} \quad (2.46)$$

sendo  $[\overline{Q}_c]$  a matriz de rigidez da lâmina de material composto no sistema de referência global do laminado, descrita por,

$$[\overline{Q}_c] = [T_\sigma]_R [Q_c] [T_\varepsilon]_R^{-1} \quad (2.47)$$

onde as seguintes relações entre componentes podem ser observadas,

$$\begin{aligned} \overline{Q}_{c11} &= Q_{c11} \cos^4 \phi + 2(Q_{c12} + 2Q_{c33}) \sin^2 \phi \cos^2 \phi + Q_{c22} \sin^4 \phi \\ \overline{Q}_{c12} &= Q_{c12} (\sin^4 \phi + \cos^4 \phi) + (Q_{c11} + Q_{c22} - 4Q_{c33}) \sin^2 \phi \cos^2 \phi \\ \overline{Q}_{c13} &= (Q_{c11} - Q_{c12} - 2Q_{c33}) \cos^3 \phi \sin \phi + (Q_{c12} - Q_{c22} + 2Q_{c33}) \cos \phi \sin^3 \phi \\ \overline{Q}_{c22} &= Q_{c22} \cos^4 \phi + 2(Q_{c12} + 2Q_{c33}) \sin^2 \phi \cos^2 \phi + Q_{c11} \sin^4 \phi \\ \overline{Q}_{c23} &= (Q_{c12} - Q_{c22} + 2Q_{c33}) \cos^3 \phi \sin \phi + (Q_{c11} - Q_{c12} - 2Q_{c33}) \cos \phi \sin^3 \phi \\ \overline{Q}_{c33} &= Q_{c33} (\cos^4 \phi + \sin^4 \phi) + (Q_{c11} - 2Q_{c12} + Q_{c22} - 2Q_{c33}) \sin^2 \phi \cos^2 \phi \\ \overline{Q}_{c44} &= Q_{c44} \cos^2(\phi) + Q_{c55} \sin^2(\phi) \\ \overline{Q}_{c45} &= (Q_{c55} - Q_{c44}) \sin(\phi) \cos(\phi) \\ \overline{Q}_{c55} &= Q_{c44} \sin^2(\phi) + Q_{c55} \cos^2(\phi) \end{aligned} \quad (2.48)$$

e as seguintes igualdades entre coeficientes podem ser verificadas,

$$\begin{aligned}
\overline{Q}_{c12} &= \overline{Q}_{c21} \\
\overline{Q}_{c13} &= \overline{Q}_{c31} \\
\overline{Q}_{c23} &= \overline{Q}_{c32} \\
\overline{Q}_{c54} &= \overline{Q}_{c45}
\end{aligned} \tag{2.49}$$

e  $\overline{Q}_{c14}$ ,  $\overline{Q}_{c15}$ ,  $\overline{Q}_{c24}$ ,  $\overline{Q}_{c25}$ ,  $\overline{Q}_{c34}$ ,  $\overline{Q}_{c35}$ ,  $\overline{Q}_{c41}$ ,  $\overline{Q}_{c42}$ ,  $\overline{Q}_{c43}$ ,  $\overline{Q}_{c51}$ ,  $\overline{Q}_{c52}$  e  $\overline{Q}_{c53}$  são termos nulos. Portanto, a equação pode ser re-escrita como,

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{Q}_{c11} & \overline{Q}_{c12} & \overline{Q}_{c13} & 0 & 0 \\ \overline{Q}_{c12} & \overline{Q}_{c22} & \overline{Q}_{c23} & 0 & 0 \\ \overline{Q}_{c13} & \overline{Q}_{c23} & \overline{Q}_{c33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \overline{Q}_{c44} & \overline{Q}_{c45} \\ 0 & 0 & 0 & \overline{Q}_{c45} & \overline{Q}_{c55} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{pmatrix} \tag{2.50}$$

Uma vez encontrada a equação constitutiva que rege o comportamento das lâminas de material composto, deve-se deduzir tais equações para o material piezelétrico.

## 2.2 Piezeletricidade linear

Uma característica importante dos materiais piezelétricos em comparação com outros materiais inteligentes é o seu comportamento linear dentro de um limite de excitação, sendo este variável para cada tipo de material piezelétrico. A teoria linear da eletroelasticidade estuda a dependência mútua de campos eletromecânicos acoplados no interior de um meio piezelétrico capaz de deformações reversíveis [18]. Os campos eletromecânicos acoplados que podem existir em um material piezelétrico são de natureza mecânica e elétrica externas e internas. As propriedades de elasticidade, piezelelasticidade e dieletricidade estão associadas com o tipo de material.

As equações constitutivas dos materiais piezelétricos, relativas aos eixos de ortotropia,  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ , em notação indicial, são dadas pelo conjunto de equações abaixo,

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij}^L &= (c^E_{ijkl})^L \epsilon_{kl}^L - (e^L_{ijk})^T E_k^L \\
D_i^L &= e^L_{ijk} \epsilon_{jk}^L + \epsilon_{Dij}^L E_j^L
\end{aligned} \tag{2.51}$$

Considerando a simetria dos tensores mecânicos, elétricos e eletro-mecânicos, uma notação

compacta pode substituir a notação tensorial. Face a estas definições, a equação constitutiva da lâmina piezolétrica pode ser expressa como,

$$\begin{aligned}\vec{\sigma}^L &= [c^E]^L \vec{\epsilon}^L - ([e]^L)^T \vec{E}^L \\ \vec{D}^L &= [e]^L \vec{\epsilon}^L + [\epsilon_D]^L \vec{E}^L\end{aligned}\quad (2.52)$$

Devido à ortotropia do material piezolétrico, as matrizes  $[c^E]^L$ ,  $[e]^L$  e  $[\epsilon_D]^L$  apresentam a forma abaixo,

$$[c^E]^L = \begin{bmatrix} c_{11}^E & c_{12}^E & c_{13}^E & 0 & 0 & 0 \\ c_{12}^E & c_{22}^E & c_{23}^E & 0 & 0 & 0 \\ c_{13}^E & c_{23}^E & c_{33}^E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44}^E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55}^E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66}^E \end{bmatrix}\quad (2.53)$$

em que

$$c_{66}^E = \frac{1}{2} (c_{11}^E - c_{12}^E)\quad (2.54)$$

e

$$[e]^L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{24} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\quad (2.55)$$

e

$$[\epsilon_D]^L = \begin{bmatrix} \epsilon_{D11}^L & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{D22}^L & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{D33}^L \end{bmatrix}\quad (2.56)$$

A maior parte das classes de materiais piezolétricos apresentam uma relação de igualdade entre os coeficientes piezolétricos  $e_{31} = e_{32}$  e  $e_{24} = e_{15}$ , devido à simetria da estrutura cristalina. Entretanto, estas simplificações não serão consideradas na análise.

### 2.2.1 Determinação da equação constitutiva no sistema global

A fim de adicionar o elemento piezelétrico ao conjunto de lâminas de material composto, a mudança de equações do eixo de ortotropia para o sistema de referência do laminado é igualmente necessária. Dadas as equações constitutivas do material piezelétrico definidas na Eq. (2.52) e aplicando as relações de mudança de sistemas de coordenadas demonstradas anteriormente na primeira equação constitutiva, pode-se escrever,

$$\begin{aligned}\vec{\sigma} &= [T_{\sigma}] \vec{\sigma}^L \\ &= [\bar{c}] \vec{\epsilon} + [\bar{e}]^T \vec{E}\end{aligned}\quad (2.57)$$

em que  $[\bar{c}]$  é a matriz de rigidez no sistema de referência do laminado, definida como,

$$\begin{aligned}[\bar{c}] &= [T_{\sigma}] [c^E]^L [T_{\epsilon}]^{-1} \\ &= [T_{\sigma}] [c^E]^L [T_{\sigma}]^T\end{aligned}\quad (2.58)$$

e  $[\bar{e}]$  é a matriz de constantes piezelétricas no sistema de referência do laminado, dada por,

$$\begin{aligned}[\bar{e}] &= [R] [e]^L [T_{\epsilon}]^{-1} \\ &= [R] [e]^L [T_{\sigma}]^T\end{aligned}\quad (2.59)$$

O mesmo procedimento deve ser efetuado na segunda equação constitutiva,

$$\begin{aligned}\vec{D} &= [R] \vec{D}^L \\ &= [\bar{e}] \vec{\epsilon} + [\bar{\epsilon}_D] \vec{E}\end{aligned}\quad (2.60)$$

sendo  $[\bar{\epsilon}_D]$  a matriz de constantes dielétricas no sistema global, definida abaixo,

$$[\bar{\epsilon}_D] = [R] [\epsilon_D]^L [R]^T\quad (2.61)$$

Estas equações constitutivas representam uma lâmina piezelétrica, expressa com relação a



um sistema de coordenadas global, representando um material ortotrópico 3D. A forma geral das matrizes  $[\bar{c}]$ ,  $[\bar{e}]$  e  $[\bar{\epsilon}_D]$  é dada pelas Eqs. 2.62, 2.63 e 2.64,

$$[\bar{c}] = \begin{bmatrix} \bar{c}_{11} & \bar{c}_{12} & \bar{c}_{13} & 0 & 0 & \bar{c}_{16} \\ \bar{c}_{21} & \bar{c}_{22} & \bar{c}_{23} & 0 & 0 & \bar{c}_{26} \\ \bar{c}_{31} & \bar{c}_{32} & \bar{c}_{33} & 0 & 0 & \bar{c}_{36} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{c}_{44} & \bar{c}_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{c}_{54} & \bar{c}_{55} & 0 \\ \bar{c}_{61} & \bar{c}_{62} & \bar{c}_{63} & 0 & 0 & \bar{c}_{66} \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

$$[\bar{e}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \bar{e}_{14} & \bar{e}_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{e}_{24} & \bar{e}_{25} & 0 \\ \bar{e}_{31} & \bar{e}_{32} & \bar{e}_{33} & 0 & 0 & \bar{e}_{36} \end{bmatrix} \quad (2.63)$$

e

$$[\bar{\epsilon}_D] = \begin{bmatrix} \bar{\epsilon}_{D11} & \bar{\epsilon}_{D12} & 0 \\ \bar{\epsilon}_{D21} & \bar{\epsilon}_{D22} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\epsilon}_{D33} \end{bmatrix} \quad (2.64)$$

## 2.2.2 Estado plano de tensões

No caso de materiais piezelétricos, a equação constitutiva para o caso 3D é expressa como,

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}^E & c_{12}^E & c_{13}^E & 0 & 0 & 0 \\ c_{12}^E & c_{22}^E & c_{23}^E & 0 & 0 & 0 \\ c_{13}^E & c_{23}^E & c_{33}^E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44}^E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55}^E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66}^E \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & e_{31} \\ 0 & 0 & e_{32} \\ 0 & 0 & e_{33} \\ 0 & e_{24} & 0 \\ e_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} \quad (2.65)$$

e

$$\begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{24} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_{D_{11}}^L & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{D_{22}}^L & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{D_{33}}^L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{Bmatrix} \quad (2.66)$$

Para a utilização no elemento de placa de Mindlin, é necessária a condição de tensão plana, no plano da placa, descrita pelos eixos  $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y\}$ . Logo, impondo a condição de estado plano de tensões, onde  $\sigma_{33} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$ , obtém-se,

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}^E & c_{12}^E & c_{13}^E & 0 & 0 & 0 \\ c_{12}^E & c_{22}^E & c_{23}^E & 0 & 0 & 0 \\ c_{13}^E & c_{23}^E & c_{33}^E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44}^E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55}^E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66}^E \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & e_{31} \\ 0 & 0 & e_{32} \\ 0 & 0 & e_{33} \\ 0 & e_{24} & 0 \\ e_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{Bmatrix} \quad (2.67)$$

Analisando a linha correspondente à tensão mecânica  $\sigma_{33}$ , pode-se observar a relação descrita na equação seguinte,

$$c_{13}^E \varepsilon_{11} + c_{23}^E \varepsilon_{22} + c_{33}^E \varepsilon_{33} - e_{33} E_3 = 0 \quad (2.68)$$

Então, apesar da tensão  $\sigma_{33}$  ser considerada nula, a deformação associada a tal tensão,  $\varepsilon_{33}$  é diferente de zero. Isto é devido à influência que esforços nas direções 1 e 2 exercem nesta direção através dos acoplamentos existentes na placa piezelétrica e esta deformação não será desprezada nesta análise. Isolando  $\varepsilon_{33}$  na Eq. (2.68), obtém-se,

$$\varepsilon_{33} = -\frac{1}{c_{33}^E} (c_{13}^E \varepsilon_{11} + c_{23}^E \varepsilon_{22}) + \frac{e_{33}}{c_{33}^E} E_3 \quad (2.69)$$

Substituindo o resultado acima na equação constitutiva, de forma a não desprezar tais termos, resulta em,

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}^E & c_{12}^E \\ c_{12}^E & c_{22}^E \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{13}^E \\ c_{23}^E \end{bmatrix} \epsilon_{33} - \begin{Bmatrix} e_{31} \\ e_{32} \end{Bmatrix} E_3 \quad (2.70)$$

Assim obtém-se,

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} c_{11}^E & c_{12}^E \\ c_{12}^E & c_{22}^E \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \end{Bmatrix} - \frac{1}{c_{33}^E} \left[ \begin{Bmatrix} c_{13}^E \\ c_{23}^E \end{Bmatrix} \otimes \begin{Bmatrix} c_{13}^E \\ c_{23}^E \end{Bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \end{Bmatrix} \\ &\quad - \left( \begin{Bmatrix} e_{31} \\ e_{32} \end{Bmatrix} - \frac{e_{33}}{c_{33}^E} \begin{Bmatrix} c_{13}^E \\ c_{23}^E \end{Bmatrix} \right) E_3 \\ &= \left[ \begin{bmatrix} c_{11}^E & c_{12}^E \\ c_{12}^E & c_{22}^E \end{bmatrix} - \frac{1}{c_{33}^E} \left[ \begin{Bmatrix} c_{13}^E \\ c_{23}^E \end{Bmatrix} \otimes \begin{Bmatrix} c_{13}^E \\ c_{23}^E \end{Bmatrix} \right] \right] \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \end{Bmatrix} \\ &\quad - \left( \begin{Bmatrix} e_{31} \\ e_{32} \end{Bmatrix} - \frac{e_{33}}{c_{33}^E} \begin{Bmatrix} c_{13}^E \\ c_{23}^E \end{Bmatrix} \right) E_3 \end{aligned} \quad (2.71)$$

Combinando este resultado com a tensão cisalhante  $\sigma_{12}$ ,

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} e_{31} - e_{33} \frac{c_{13}^E}{c_{33}^E} \\ e_{32} - e_{33} \frac{c_{23}^E}{c_{33}^E} \\ 0 \end{Bmatrix} E_3 \quad (2.72)$$

sendo,

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{12} & C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}^E & c_{12}^E \\ c_{12}^E & c_{22}^E \end{bmatrix} - \frac{1}{c_{33}^E} \left[ \begin{Bmatrix} c_{13}^E \\ c_{23}^E \end{Bmatrix} \otimes \begin{Bmatrix} c_{13}^E \\ c_{23}^E \end{Bmatrix} \right] \quad (2.73)$$

e

$$C_{33} = c_{66}^E \quad (2.74)$$

Adicionando agora a contribuição das tensões e deformações cisalhantes transversais, as quais são consideradas no modelo de placa semi-espessa de Mindlin,

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{44}^E & 0 \\ 0 & c_{55}^E \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & e_{24} & 0 \\ e_{15} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{Bmatrix} \quad (2.75)$$

o que possibilita a obtenção da seguinte equação constitutiva, adequada para o modelo de placa de Mindlin,

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44}^E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55}^E \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & e_{31} - e_{33} \frac{c_{13}^E}{c_{33}^E} \\ 0 & 0 & e_{32} - e_{33} \frac{c_{23}^E}{c_{33}^E} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_{24} & 0 \\ e_{15} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{Bmatrix} \quad (2.76)$$

Em notação matricial, a equação acima resulta em,

$$\vec{\sigma}^L = [C]^L \vec{\epsilon}^L - ([e]^L)^T \vec{E}^L \quad (2.77)$$

sendo esta conhecida como lei de Hooke generalizada para materiais piezelétricos. Aplicando as considerações de estado plano de tensão feitas anteriormente à segunda equação constitutiva descrita abaixo,

$$\begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{24} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_{D11}^L & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{D22}^L & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{D33}^L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{Bmatrix} \quad (2.78)$$

Porém,

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{24} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & e_{24} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{32} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ e_{33} \end{bmatrix} \varepsilon_{33}$$

Por outro lado,  $\varepsilon_{33}$  é expressa pela Eq. (2.69), o que implica em

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ e_{33} \end{bmatrix} \varepsilon_{33} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ e_{33} \end{bmatrix} \left( -\frac{1}{c_{33}^E} (c_{13}^E \varepsilon_{11} + c_{23}^E \varepsilon_{22}) + \frac{e_{33}}{c_{33}^E} E_3 \right) \\
 &= -\frac{c_{13}^E}{c_{33}^E} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ e_{33} \end{bmatrix} \varepsilon_{11} - \frac{c_{23}^E}{c_{33}^E} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ e_{33} \end{bmatrix} \varepsilon_{22} + \frac{e_{33}}{c_{33}^E} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ e_{33} \end{bmatrix} E_3 \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{c_{13}^E}{c_{33}^E} e_{33} & -\frac{c_{23}^E}{c_{33}^E} e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +\frac{e_{33}^2}{c_{33}^E} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{Bmatrix}
 \end{aligned}$$

Substituindo este resultado na expressão acima e reorganizando a equação para validar um vetor deformação no mesmo formato da primeira equação constitutiva, obtém-se,

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} \\ 0 & 0 & 0 & e_{24} & 0 \\ e_{31} - \frac{c_{13}^E}{c_{33}^E} e_{33} & e_{32} - \frac{c_{23}^E}{c_{33}^E} e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \end{Bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} \epsilon_{D11}^L & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{D22}^L & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{D33}^L + \frac{e_{33}^2}{c_{33}^E} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{2.79}$$

em notação matricial, a segunda equação constitutiva é representada por,

$$\vec{D}^L = [e]^L \vec{\varepsilon}^L + [\epsilon_D^E]^L \vec{E}^L \tag{2.80}$$

Analisando as Eqs. 2.76 e 2.79 é possível verificar que as matrizes piezelétricas responsáveis pelo acoplamento eletro-mecânico da estrutura continuam apresentando a relação de transposição após a condição de estado plano de tensão, relação esta característica da equação constitutiva do material.

Uma vez estabelecidas as equações constitutivas com a condição de estado plano de tensões incorporada, deve-se efetuar a mudança de sistemas de coordenadas dos eixos de ortotropia para o sistema de referência global do laminado. Portanto, aplicando as relações de rotação descritas nas Eqs. 2.43 e 2.44,

$$\begin{aligned}
\vec{\sigma} &= [T_\sigma]_R \vec{\sigma}^L \\
\vec{\varepsilon}^L &= [T_\varepsilon]_R^{-1} \vec{\varepsilon}
\end{aligned} \tag{2.81}$$

e a relação de rotação de vetor descrita na Eq. (A.6), aplicada ao vetor campo elétrico,

$$\vec{E}^L = [R]^{-1} \vec{E} \tag{2.82}$$

na primeira equação constitutiva do material piezelétrico, pode-se re-escrever,

$$\vec{\sigma} = [T_\sigma]_R [C]^L [T_\varepsilon]_R^{-1} \vec{\varepsilon} - [T_\sigma]_R \left( [e]^L \right)^T [R]^{-1} \vec{E} \tag{2.83}$$

compactando a notação acima resulta-se em,

$$\vec{\sigma} = [\bar{C}] \vec{\varepsilon} - ([\bar{e}])^T \vec{E} \quad (2.84)$$

As entradas da matriz de rigidez  $[\bar{C}]$  apresentados abaixo,

$$\begin{aligned} \bar{C}_{11} &= C_{11} \cos^4 \phi + 2(C_{12} + 2C_{33}) \sin^2 \phi \cos^2 \phi + C_{22} \sin^4 \phi \\ \bar{C}_{12} &= C_{12} (\sin^4 \phi + \cos^4 \phi) + (C_{11} + C_{22} - 4C_{33}) \sin^2 \phi \cos^2 \phi \\ \bar{C}_{13} &= (C_{11} - C_{12} - 2C_{33}) \cos^3 \phi \sin \phi + (C_{12} - C_{22} + 2C_{33}) \cos \phi \sin^3 \phi \\ \bar{C}_{22} &= C_{22} \cos^4 \phi + 2(C_{12} + 2C_{33}) \sin^2 \phi \cos^2 \phi + C_{11} \sin^4 \phi \\ \bar{C}_{23} &= (C_{12} - C_{22} + 2C_{33}) \cos^3 \phi \sin \phi + (C_{11} - C_{12} - 2C_{33}) \cos \phi \sin^3 \phi \\ \bar{C}_{33} &= C_{33} (\cos^4 \phi + \sin^4 \phi) + (C_{11} - 2C_{12} + C_{22} - 2C_{33}) \sin^2 \phi \cos^2 \phi \\ \bar{c}_{44} &= c_{44}^E \cos^2(\phi) + c_{55}^E \sin^2(\phi) \\ \bar{c}_{45} &= (c_{55}^E - c_{44}^E) \sin(\phi) \cos(\phi) \\ \bar{c}_{55} &= c_{44}^E \sin^2(\phi) + c_{55}^E \cos^2(\phi) \end{aligned} \quad (2.85)$$

sendo que as seguintes igualdades entre coeficientes podem ser verificadas,

$$\begin{aligned} \bar{C}_{12} &= \bar{C}_{21} \\ \bar{C}_{13} &= \bar{C}_{31} \\ \bar{C}_{23} &= \bar{C}_{32} \\ \bar{c}_{54} &= \bar{c}_{45} \end{aligned} \quad (2.86)$$

e os termos  $\bar{c}_{14}$ ,  $\bar{c}_{15}$ ,  $\bar{c}_{24}$ ,  $\bar{c}_{25}$ ,  $\bar{c}_{34}$ ,  $\bar{c}_{35}$ ,  $\bar{c}_{41}$ ,  $\bar{c}_{42}$ ,  $\bar{c}_{43}$ ,  $\bar{c}_{51}$ ,  $\bar{c}_{52}$  e  $\bar{c}_{53}$  nulos. Para a matriz de coeficientes piezelétricos  $[\bar{e}]$ , as seguintes relações são identificadas,

$$\begin{aligned} \bar{e}_{13} &= \left( e_{31} - e_{33} \frac{c_{13}^E}{c_{33}^E} \right) \cos^2 \phi + \left( e_{32} - e_{33} \frac{c_{23}^E}{c_{33}^E} \right) \sin^2 \phi \\ \bar{e}_{23} &= \left( e_{32} - e_{33} \frac{c_{23}^E}{c_{33}^E} \right) \cos^2 \phi + \left( e_{31} - e_{33} \frac{c_{13}^E}{c_{33}^E} \right) \sin^2 \phi \\ \bar{e}_{33} &= \left[ \left( e_{31} - e_{33} \frac{c_{13}^E}{c_{33}^E} \right) - \left( e_{32} - e_{33} \frac{c_{23}^E}{c_{33}^E} \right) \right] \sin \phi \cos \phi \\ \bar{e}_{41} &= [e_{15} - e_{24}] \cos \phi \sin \phi \\ \bar{e}_{42} &= e_{24} \cos^2 \phi + e_{15} \sin^2 \phi \\ \bar{e}_{51} &= e_{15} \cos^2 \phi + e_{24} \sin^2 \phi \\ \bar{e}_{52} &= [e_{15} - e_{24}] \cos \phi \sin \phi \end{aligned} \quad (2.87)$$

sendo  $\bar{e}_{11}$ ,  $\bar{e}_{12}$ ,  $\bar{e}_{21}$ ,  $\bar{e}_{22}$ ,  $\bar{e}_{31}$ ,  $\bar{e}_{32}$ ,  $\bar{e}_{43}$  e  $\bar{e}_{53}$  termos nulos. Portanto, a equação pode ser re-escrita

como,

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{13} & 0 & 0 \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{23} & 0 & 0 \\ \bar{C}_{13} & \bar{C}_{23} & \bar{C}_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{c}_{44} & \bar{c}_{45} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{c}_{45} & \bar{c}_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & \bar{e}_{13} \\ 0 & 0 & \bar{e}_{23} \\ 0 & 0 & \bar{e}_{33} \\ \bar{e}_{41} & \bar{e}_{42} & 0 \\ \bar{e}_{51} & \bar{e}_{52} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{Bmatrix} \quad (2.88)$$

O mesmo procedimento de mudança de sistema de referência deve ser efetuado com a segunda equação constitutiva. Aplicando as relações de rotação descritas nas Eqs. A.6 e 2.44,

$$\begin{aligned} \vec{D} &= [R] \vec{D}^L \\ \vec{\epsilon}^L &= [T_\epsilon]_R^{-1} \vec{\epsilon} \end{aligned} \quad (2.89)$$

e a relação de rotação de vetor descrita na Eq. (A.6), aplicada ao vetor campo elétrico,

$$\vec{E}^L = [R]^{-1} \vec{E} \quad (2.90)$$

na segunda equação constitutiva do material piezeletrico, pode-se re-escrever,

$$\vec{D} = [R] [e]^L [T_\epsilon]_R^{-1} \vec{\epsilon} + [R] [\epsilon_D^\epsilon]^L [R]^{-1} \vec{E} \quad (2.91)$$

ou ainda,

$$\vec{D} = [\bar{e}] \vec{\epsilon} + [\bar{\epsilon}_D^\epsilon] \vec{E} \quad (2.92)$$

As relações para os coeficientes da matriz de coeficientes piezelétricos encontram-se definidos na Eq. (2.87). Para a matriz de coeficientes dielétricos  $[\bar{\epsilon}_D^\epsilon]$ , as seguintes relações são estabelecidas,

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}_{D11}^\epsilon &= \epsilon_{D11}^L \cos^2 \phi + \epsilon_{D22}^L \sin^2 \phi \\ \bar{\epsilon}_{D12}^\epsilon &= \epsilon_{D22}^L \cos \phi \sin \phi + \epsilon_{D11}^L \cos \phi \sin \phi \\ \bar{\epsilon}_{D21}^\epsilon &= \epsilon_{D22}^L \cos \phi \sin \phi + \epsilon_{D11}^L \cos \phi \sin \phi \\ \bar{\epsilon}_{D22}^\epsilon &= \epsilon_{D22}^L \cos^2 \phi + \epsilon_{D11}^L \sin^2 \phi \\ \bar{\epsilon}_{D33}^\epsilon &= \frac{e_{33}^2}{c_{33}} + \epsilon_{D33}^L \end{aligned} \quad (2.93)$$



em que  $\bar{\epsilon}_{D13}^{\epsilon}$ ,  $\bar{\epsilon}_{D23}^{\epsilon}$ ,  $\bar{\epsilon}_{D31}^{\epsilon}$  e  $\bar{\epsilon}_{D32}^{\epsilon}$  são termos nulos. Logo, a segunda equação constitutiva pode ser expressa por,

$$\begin{Bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \bar{e}_{14} & \bar{e}_{15} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{e}_{24} & \bar{e}_{25} \\ \bar{e}_{31} & \bar{e}_{32} & \bar{e}_{33} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\epsilon}_{D11}^{\epsilon} & \bar{\epsilon}_{D12}^{\epsilon} & 0 \\ \bar{\epsilon}_{D21}^{\epsilon} & \bar{\epsilon}_{D22}^{\epsilon} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\epsilon}_{D33}^{\epsilon} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{Bmatrix} \quad (2.94)$$

Neste capítulo foram apresentadas as equações constitutivas das lâminas de material composto e de material piezelétrico no sistema de eixos de ortotropia, a reformulação destas para o caso de estado plano de tensão e a mudança para o sistema de referência do laminado, gerando a base para a formulação de placa baseada na teoria de Mindlin, visando modelar matematicamente o laminado. Sendo similares o comportamento puramente mecânico do material piezelétrico e do material composto, o que pode ser comprovado observando as matrizes de rigidez de ambos os materiais, descritos nas Eqs. 2.50 e 2.88, a formulação de placa será conduzida considerando as equações constitutivas do material piezelétrico, dado estas serem mais genéricas, e a obtenção da formulação de placa para o material composto é deduzida da mesma forma, desprezando-se a característica elétrica associada ao material piezelétrico. Tal formulação é descrita no próximo capítulo deste trabalho.



## 3 LAMINADO PIEZELÉTRICO

### 3.1 Formulações matemáticas da Piezeletricidade linear 3D

No nível fenomenológico, a Piezeletricidade é um acoplamento constitutivo linear entre comportamentos mecânicos e elétricos em um corpo dielétrico que se deforma constantemente [36]. Este capítulo é dedicado à apresentar um modelo matemático 3D para a piezeletricidade linear utilizando as equações constitutivas gerais deduzidas no capítulo anterior.

#### 3.1.1 Formulações forte e fraca para os problemas lineares elastodinâmico piezolétrico

Considera-se um corpo piezolétrico identificado através de sua configuração de referência  $\Omega$ . As equações que ditam a piezeletricidade linear são estabelecidas supondo que  $\Omega$  é um dielétrico deformável. O fenômeno elétrico ocorre em regime semi-estático, ou seja, a corrente elétrica gerada por indução magnética é desprezível, caracterizando o aspecto linear assumido. O estado cinemático instantâneo de um ponto genérico  $\vec{x} \in \Omega$  é determinado pelo deslocamento  $\vec{u}(\vec{x}, t)$  em relação à configuração de referência. O campo elétrico  $\varphi(\vec{x}, t)$  é determinado em relação ao terra (potencial elétrico nulo). Na teoria da eletroelasticidade linear assume-se que as deformações são pequenas e que as relações entre as forças internas e as deformações são lineares. Desta forma, o comportamento elástico ser expresso utilizando relações matemáticas lineares entre os componentes de tensão e deformação. As deformações generalizadas associadas são a deformação infinitesimal  $\varepsilon$  e o campo elétrico  $\vec{E}$ , que são expressos em função do deslocamento  $\vec{u}$  e do potencial elétrico  $\varphi$  através das seguintes equações,

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{1}{2} \left( \nabla \vec{u} + [\nabla \vec{u}]^T \right) \\ \vec{E} &= -\nabla \varphi \end{aligned} \quad (3.1)$$

A formulação forte associada ao problema de acoplamento mecânico-piezolétrico é dada por: Encontre  $\vec{u}(\vec{x}, t)$  e  $\varphi(\vec{x}, t)$  que resolve o seguinte problema:

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) + \rho \vec{g} &= \rho \vec{u} \\ \operatorname{div}(\vec{D}) &= 0\end{aligned}\quad (3.2)$$

sujeito às seguintes condições de contorno:

$$\begin{aligned}\vec{u} &= \vec{u} \text{ em } \partial_u \Omega \\ \boldsymbol{\sigma} \vec{n} &= \vec{t} \text{ em } \partial_t \Omega\end{aligned}\quad (3.3)$$

com  $\vec{u}$  e  $\vec{t}$  o deslocamento e a tração prescritos no contorno e,

$$\begin{aligned}\varphi &= \bar{\varphi} \text{ em } \partial_\varphi \Omega \\ \vec{D} \cdot \vec{n} &= \bar{\psi} \text{ em } \partial_q \Omega\end{aligned}\quad (3.4)$$

sendo  $\bar{\psi}$  e  $\bar{\varphi}$  a carga e o potencial prescritos no contorno, no qual  $\partial \Omega = \partial_u \Omega \cup \partial_t \Omega$ , com  $\partial_u \Omega \cap \partial_t \Omega = \emptyset$  e  $\partial \Omega = \partial_\varphi \Omega \cup \partial_\psi \Omega$ , com  $\partial_\varphi \Omega \cap \partial_\psi \Omega = \emptyset$ , e as seguintes condições iniciais:

$$\begin{aligned}\vec{u}(\vec{x}, 0) &= \vec{u}_o(\vec{x}) \\ \vec{u}(\vec{x}, 0) &= \vec{v}_o(\vec{x}) \\ \varphi(\vec{x}, 0) &= \varphi_o(\vec{x})\end{aligned}\quad (3.5)$$

A formulação fraca associada ao problema de acoplamento mecânico-piezolétrico pode ser escrita como: Para cada  $t \in [0, t_f]$ , encontre  $\vec{u}(\vec{x}, t) \in K_u$  e  $\varphi(\vec{x}, t) \in K_\varphi$  de modo que:

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) \cdot \delta \vec{u} \, d\Omega + \int_{\Omega} \rho \vec{g} \cdot \delta \vec{u} \, d\Omega &= \int_{\Omega} \rho \vec{u} \cdot \delta \vec{u} \, d\Omega, \forall \delta \vec{u} \in \operatorname{Var}_u \\ \int_{\Omega} \operatorname{div}(\vec{D}) \delta \varphi \, d\Omega &= 0, \forall \delta \varphi \in \operatorname{Var}_\varphi\end{aligned}\quad (3.6)$$

sendo que  $K_u$  e  $K_\varphi$  representam o conjunto de deslocamentos admissíveis e potenciais elétricos admissíveis, respectivamente, e  $\operatorname{Var}_u$  e  $\operatorname{Var}_\varphi$  o conjunto de variações de deslocamentos admissíveis e potenciais elétricos, respectivamente. Observando que,

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}^T \delta \vec{u}) &= \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) \cdot \delta \vec{u} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \delta \vec{u} \\ \operatorname{div}(\vec{D} \delta \varphi) &= \delta \varphi \operatorname{div}(\vec{D}) + \vec{D} \cdot \nabla \delta \varphi\end{aligned}\quad (3.7)$$

e substituindo as relações acima na Eq. (3.6),

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) \cdot \delta \vec{u} \, d\Omega &= \int_{\Omega} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}^T \delta \vec{u}) \, d\Omega - \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \delta \vec{u} \, d\Omega \\ \int_{\Omega} \operatorname{div}(\vec{D}) \delta \varphi \, d\Omega &= \int_{\Omega} \operatorname{div}(\vec{D} \delta \varphi) \, d\Omega - \int_{\Omega} \vec{D} \cdot \nabla \delta \varphi \, d\Omega \end{aligned} \quad (3.8)$$

Entretanto, uma vez que  $\delta \vec{u} = 0$  em  $\partial_u \Omega$  e  $\delta \varphi = 0$  em  $\partial_\varphi \Omega$ , e aplicando o teorema do divergente, obtém-se

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}^T \delta \vec{u}) \, d\Omega &= \int_{\partial_t \Omega} \boldsymbol{\sigma} \vec{n} \cdot \delta \vec{u} \, d\partial_t \Omega \\ &= \int_{\partial_t \Omega} \boldsymbol{\sigma} \vec{n} \cdot \delta \vec{u} \, d\partial_t \Omega \\ \int_{\Omega} \operatorname{div}(\vec{D} \delta \varphi) \, d\Omega &= \int_{\partial_\psi \Omega} \vec{D} \cdot \vec{n} \delta \varphi \, d\partial_\psi \Omega \\ &= \int_{\partial_\psi \Omega} \vec{D} \cdot \vec{n} \delta \varphi \, d\partial_\psi \Omega \end{aligned} \quad (3.9)$$

Portanto, introduzindo as condições de contorno estabelecidas nas Eqs. 3.3 e 3.4 nas Eqs. 3.9 pode-se re-escrever,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}^T \delta \vec{u}) \, d\Omega &= \int_{\partial_t \Omega} \vec{t} \cdot \delta \vec{u} \, d\partial_t \Omega \\ \int_{\Omega} \operatorname{div}(\vec{D} \delta \varphi) \, d\Omega &= \int_{\partial_\psi \Omega} \vec{\psi} \delta \varphi \, d\partial_\psi \Omega \end{aligned} \quad (3.10)$$

sendo  $\vec{t}$  e  $\vec{\psi}$  a tração e a carga prescritas no contorno, respectivamente. Substituindo a Eq. (3.10) na Eq. (3.8),

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) \cdot \delta \vec{u} \, d\Omega &= \int_{\partial_t \Omega} \vec{t} \cdot \delta \vec{u} \, d\partial_t \Omega - \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \delta \vec{u} \, d\Omega \\ \int_{\Omega} \operatorname{div}(\vec{D}) \delta \varphi \, d\Omega &= \int_{\partial_\psi \Omega} \vec{\psi} \delta \varphi \, d\partial_\psi \Omega - \int_{\Omega} \vec{D} \cdot \nabla \delta \varphi \, d\Omega \end{aligned} \quad (3.11)$$

De acordo com [37], o divergente do deslocamento elétrico é nulo, ou seja,

$$\operatorname{div}(\vec{D}) = \nabla \cdot D = 0 \quad (3.12)$$

Portanto, a parcela elétrica da Eq. (3.11) resume-se à,

$$\int_{\Omega} \vec{D} \cdot \nabla \delta \varphi \, d\Omega = \int_{\partial_\psi \Omega} \vec{\psi} \delta \varphi \, d\partial_\psi \Omega \quad (3.13)$$

Introduzindo a parcela mecânica da Eq. (3.11) na formulação fraca definida na Eq. (3.6), resulta em,

$$\int_{\partial_t \Omega} \vec{t} \cdot \delta \vec{u} \, d\partial_t \Omega - \int_{\Omega} \sigma \cdot \nabla \delta \vec{u} \, d\Omega + \int_{\Omega} \rho \vec{g} \cdot \delta \vec{u} \, d\Omega = \int_{\Omega} \rho \vec{u} \cdot \delta \vec{u} \, d\Omega, \forall \delta \vec{u} \in Var_u \quad (3.14)$$

Uma vez que  $\sigma = \sigma^T$ , define-se que  $\sigma \cdot \nabla \delta \vec{u} = \sigma \cdot \varepsilon(\delta \vec{u})$ , podendo-se então formular a forma fraca do problema de acoplamento mecânico-piezolétrico como: Para cada  $t \in [0, t_f]$ , encontre  $\vec{u}(\vec{x}, t) \in K_u$  e  $\varphi(\vec{x}, t) \in K_\varphi$  tal que,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sigma \cdot \varepsilon(\delta \vec{u}) \, d\Omega + \int_{\Omega} \rho \vec{u} \cdot \delta \vec{u} \, d\Omega &= \int_{\Omega} \rho \vec{g} \cdot \delta \vec{u} \, d\Omega + \int_{\partial_t \Omega} \vec{t} \cdot \delta \vec{u} \, d\partial_t \Omega, \forall \delta \vec{u} \in Var_u \\ \int_{\Omega} \vec{D} \cdot \nabla \delta \varphi \, d\Omega &= \int_{\partial_\psi \Omega} \vec{\psi} \delta \varphi \, d\partial_\psi \Omega, \forall \delta \varphi \in Var_\varphi \end{aligned} \quad (3.15)$$

sendo que a forma fraca das condições iniciais é dada por:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \vec{u}(\vec{x}, 0) \cdot \delta \vec{u} \, d\Omega &= \int_{\Omega} \vec{u}_o(\vec{x}) \cdot \delta \vec{u} \, d\Omega \\ \int_{\Omega} \vec{u}(\vec{x}, 0) \cdot \delta \vec{u} \, d\Omega &= \int_{\Omega} \vec{v}_o(\vec{x}) \cdot \delta \vec{u} \, d\Omega, \forall \delta \vec{u} \in Var_u \\ \int_{\Omega} \varphi(\vec{x}, 0) \delta \varphi \, d\Omega &= \int_{\Omega} \varphi_o(\vec{x}) \delta \varphi \, d\Omega, \forall \delta \varphi \in Var_\varphi \end{aligned} \quad (3.16)$$

## 3.2 Hipóteses sobre os modelos mecânico e eletro-mecânico

Ainda hoje, uma solução exata para formas arbitrárias de corpos piezolétricos não foi obtida. Portanto, a análise neste trabalho é restrita ao problema de placas laminadas e considera-se a teoria de placas de Mindlin na modelagem do corpo. A placa é constituída por diversas lâminas de material composto e, em alguns locais, existem lâminas de material piezolétrico agindo como sensores e atuadores. Dado que a teoria de placas de Mindlin não se limita a placas finas, em contraposição à teoria de Kirchhoff, o número de lâminas a serem empilhadas não é tão restrito. A estrutura proposta é ilustrada na Fig. 3.1,

Considera-se o corpo  $\Omega$  representando uma placa fina onde o efeito da tensão transversal cisalhante é considerado, de acordo com a teoria de placas semi-espessas.

### Hipóteses:

(i) A teoria de Mindlin considera o campo de deslocamento dado por:

$$\vec{u}(x, y, z) = \vec{u}_0(x, y) - z \vec{\theta}(x, y) \quad (3.17)$$

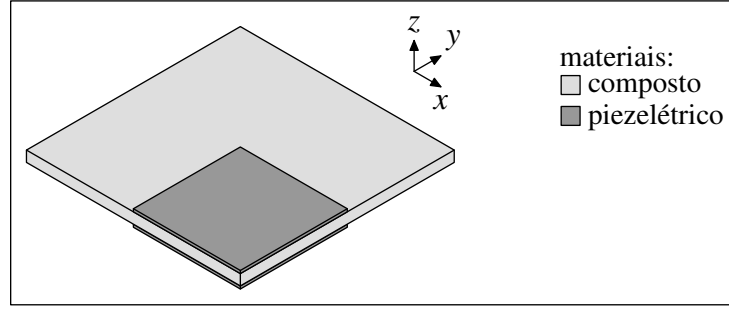


Figura 3.1: Estrutura proposta de placa compósita laminada com sensores e atuadores piezelétrico

com,

$$\begin{aligned}\vec{u}_0(x,y) &= u(x,y)\vec{e}_x + v(x,y)\vec{e}_y + w(x,y)\vec{e}_z \\ \vec{\theta}(x,y) &= -\theta_y(x,y)\vec{e}_x + \theta_x(x,y)\vec{e}_y\end{aligned}\quad (3.18)$$

Associando-se as Eqs. 3.17 e 3.18, pode-se escrever o campo de deslocamentos como,

$$\vec{u}(x,y,z) = [u(x,y) + z\theta_y(x,y)]\vec{e}_x + [v(x,y) - z\theta_x(x,y)]\vec{e}_y + w(x,y)\vec{e}_z \quad (3.19)$$

sendo,

$$u(x,y,z) = U(x,y)\vec{e}_x + V(x,y)\vec{e}_y + W(x,y)\vec{e}_z \quad (3.20)$$

logo,

$$\begin{aligned}U(x,y) &= u(x,y) + z\theta_y(x,y) \\ V(x,y) &= v(x,y) - z\theta_x(x,y) \\ W(x,y) &= w(x,y)\end{aligned}\quad (3.21)$$

- (ii) Considera-se que a tensão normal  $\sigma_{zz} \simeq 0$  e que as lâminas estão sujeitas a um estado plano de tensão.
- (iii) Considera-se que o campo elétrico seja uniforme ao longo da espessura e alinhado ao longo da normal à superfície média da placa, direção  $\vec{e}_z$ . O vetor campo elétrico apresenta então

a seguinte forma,

$$\vec{E} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ E_z \end{Bmatrix} \quad (3.22)$$

onde  $E_x = E_y = 0$ .

As equações referentes ao campo de deformações associado à teoria de Mindlin encontram-se expostas no Anexo D.

### 3.2.1 Determinação da equação de equilíbrio do laminado

Seja o laminado ilustrado na Fig. 3.2(a), formado por duas lâminas finas de cerâmica piezolétrica (atuador e sensor), coladas em cima e em baixo de uma estrutura elástica formada pelo empilhamento de lâminas de material composto. As fibras do material composto encontram-se alinhadas ao longo do eixo  $x$  e o material piezolétrico apresenta sua polarização ao longo do eixo  $z$ . Uma representação esquemática da sequência de empilhamento das lâminas é apresentada na Fig. 3.2(b).

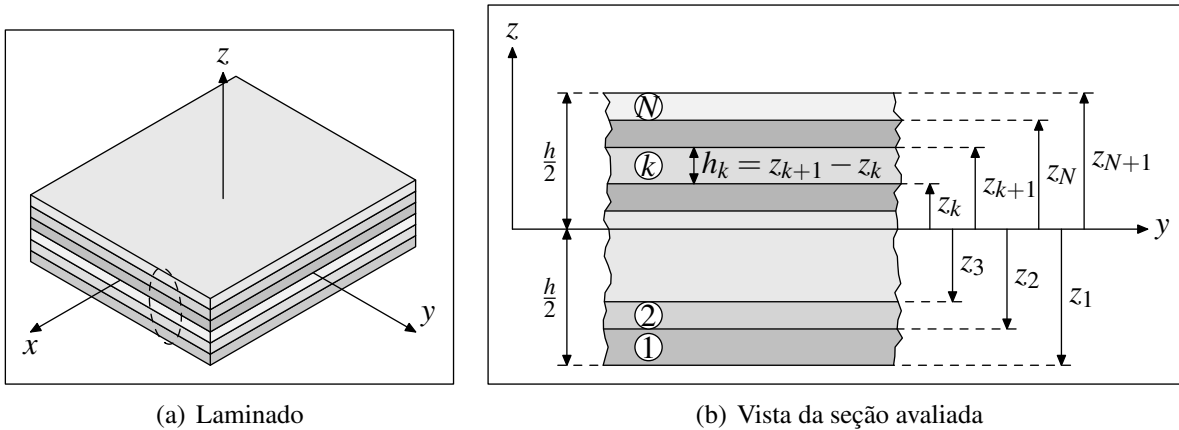


Figura 3.2: Critério de identificação das lâminas de um laminado

Considere a equação de equilíbrio mecânico definida na forma fraca do problema (Eq. (3.15)),

$$\int_{\Omega} \sigma \cdot \varepsilon(\delta \vec{u}) \, d\Omega + \int_{\Omega} \rho \, \vec{u} \cdot \delta \vec{u} \, d\Omega = \int_{\Omega} \rho \, \vec{g} \cdot \delta \vec{u} \, d\Omega + \int_{\partial_t \Omega} \vec{t} \cdot \delta \vec{u} \, d\partial_t \Omega \quad (3.23)$$

Re-escrevendo o primeiro termo em função de seus componentes e aplicando as relações definidas na Eq. (D.2), obtém-se,



$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(u) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\delta \vec{u}) d\Omega = \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left\{ \sigma_{xx} [\delta \varepsilon_{xx}^o + z \delta \kappa_{xx}] + \sigma_{yy} [\delta \varepsilon_{yy}^o + z \delta \kappa_{yy}] \right. \\ \left. + \sigma_{xy} [\delta \gamma_{xy}^o + z \delta \kappa_{xy}] + a (\sigma_{yz} \delta \gamma_{yz} + \sigma_{xz} \delta \gamma_{xz}) \right\} dz dA \quad (3.24)$$

na qual  $h$  é a espessura da lâmina e  $a = \frac{5}{6}$  corresponde ao fator de correção da energia de deformação associada ao cisalhamento transversal para uma secção retangular. Os esforços generalizados de membrana ( $\vec{N}$ ), de flexão ( $\vec{M}$ ) e cortante ( $\vec{Q}$ ) são dados por,

$$N_{xx} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xx} dz, \quad N_{yy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{yy} dz, \quad N_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xy} dz \\ M_{xx} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \sigma_{xx} dz, \quad M_{yy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \sigma_{yy} dz, \quad M_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \sigma_{xy} dz \\ Q_{yz} = a \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{yz} dz, \quad Q_{xz} = a \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xz} dz \quad (3.25)$$

Definindo os vetores carregamento generalizado  $\vec{C}_g$  e deformação generalizada  $\vec{D}_g$ ,

$$\vec{C}_g^T = \{N_{xx}, N_{yy}, N_{xy}, M_{xx}, M_{yy}, M_{xy}, Q_{yz}, Q_{xz}\} \quad (3.26)$$

$$\vec{D}_g = \{\varepsilon_{xx}^o, \varepsilon_{yy}^o, \gamma_{xy}^o, \kappa_{xx}, \kappa_{yy}, \kappa_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}\} \quad (3.27)$$

e substituindo na Eq. (3.24) pode-se reescrever o primeiro termo da equação de equilíbrio como,

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(u) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\delta \vec{u}) d\Omega = \int_A \vec{C}_g \cdot \delta \vec{D}_g dA \quad (3.28)$$

O segundo termo da Eq. (3.23) pode ser expresso para a  $k$ -ésima lâmina, onde  $z \in [z_k, z_{k+1}]$  como,

$$\int_{\Omega} \rho \vec{u} \cdot \delta \vec{u} d\Omega = \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho \vec{u} \cdot \delta \vec{u} dz dA \quad (3.29)$$

Aplicando as relações definidas na Eq. (D.2) e realizando-se a integração na espessura da lâmina, a Eq. (3.29) resulta em,

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \rho \vec{u} \cdot \delta \vec{u} d\Omega &= \int_A \sum_{k=1}^n \left\{ \rho^k h_{k,1} \right\} \vec{u}_0 \cdot \delta \vec{u}_0 dA \\
&- \int_A \sum_{k=1}^n \left\{ \rho^k h_{k,2} \right\} \left( \vec{u}_0 \cdot \delta \vec{\theta} + \vec{\theta} \cdot \delta \vec{u}_0 \right) dA \\
&+ \int_A \sum_{k=1}^n \left\{ \rho^k h_{k,3} \right\} \vec{\theta} \cdot \delta \vec{\theta} dA
\end{aligned} \tag{3.30}$$

sendo as constantes  $h_{k,1}$ ,  $h_{k,2}$  e  $h_{k,3}$  definidas na equação abaixo,

$$\begin{aligned}
h_{k,1} &= z_{k+1} - z_k \\
h_{k,2} &= \frac{(z_{k+1}^2 - z_k^2)}{2} \\
h_{k,3} &= \frac{(z_{k+1}^3 - z_k^3)}{3}
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Efetuando o mesmo procedimento ao terceiro termo da Eq. (3.23) obtém-se,

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \rho \vec{g} \cdot \delta \vec{u} d\Omega &= \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho \vec{g} \cdot \delta \vec{u} dz dA \\
&= \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho \vec{g} \cdot \left[ \delta \vec{u}_0 - z \delta \vec{\theta} \right] dz dA \\
&= \int_A \sum_{k=1}^n \left\{ \rho^k h_{k,1} \right\} \vec{g} \cdot \delta \vec{u}_0 dA - \int_A \sum_{k=1}^n \left\{ \rho^k h_{k,2} \right\} \vec{g} \cdot \delta \vec{\theta} dA
\end{aligned} \tag{3.32}$$

O último termo da Eq. (3.23) corresponde à ação de um carregamento prescrito no contorno,

$$\begin{aligned}
\int_{\partial_t \Omega} \vec{t} \cdot \delta \vec{u} dS &= \int_{\Gamma_t} \vec{t} \cdot \delta \vec{u} dS \\
&= \int_{\partial A_t} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \vec{t} \cdot \delta \vec{u} dz dA
\end{aligned} \tag{3.33}$$

introduzindo neste o campo de deformações e definindo as relações abaixo,

$$\vec{N} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \vec{t} dz \quad \text{e} \quad \vec{M} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \vec{t} dz \tag{3.34}$$

pode-se re-organizar a Eq. (3.33) segundo a Eq. (3.35),

$$\int_{\partial_t \Omega} \vec{t} \cdot \delta \vec{u} d\Omega = \int_{\partial A_t} \left\{ \vec{N} \cdot \delta \vec{u}_0 - \vec{M} \cdot \delta \vec{\theta} \right\} dA \tag{3.35}$$

Agrupando todos os termos, a equação de equilíbrio após ser integrada na espessura resulta

em,

$$\begin{aligned}
& \int_A \vec{C}_g \cdot \delta \vec{D}_g dA + \int_A \sum_{k=1}^n \{ \rho^k h_{k,1} \} \vec{u}_0 \cdot \delta \vec{u}_0 dA + \int_A \sum_{k=1}^n \{ \rho^k h_{k,3} \} \vec{\theta} \cdot \delta \vec{\theta} dA \\
& - \int_A \sum_{k=1}^n \{ \rho^k h_{k,2} \} \left( \vec{u}_0 \cdot \delta \vec{\theta} + \vec{\theta} \cdot \delta \vec{u}_0 \right) dA = \int_{\partial A_t} \left\{ \vec{N} \cdot \delta \vec{u}_0 - \vec{M} \cdot \delta \vec{\theta} \right\} dA \\
& + \int_A \sum_{k=1}^n \{ \rho^k h_{k,1} \} \vec{g} \cdot \vec{u}_0 dA - \int_A \sum_{k=1}^n \{ \rho^k h_{k,2} \} \vec{g} \cdot \delta \vec{\theta} dA
\end{aligned} \quad (3.36)$$

### 3.2.2 Determinação da equação constitutiva generalizada

A equação constitutiva, para a  $k$ -ésima lâmina, onde  $z \in [z_k, z_{k+1}]$ , é dada por,

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{13} & 0 & 0 \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{23} & 0 & 0 \\ \bar{C}_{13} & \bar{C}_{23} & \bar{C}_{33} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \bar{c}_{44} & \bar{c}_{45} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{c}_{45} & \bar{c}_{55} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}^{(k)} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \bar{e}_{13} \\ 0 & 0 & \bar{e}_{23} \\ 0 & 0 & \bar{e}_{33} \\ \hline \bar{e}_{41} & \bar{e}_{42} & 0 \\ \bar{e}_{51} & \bar{e}_{52} & 0 \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} -E_x \\ -E_y \\ -E_z \end{Bmatrix}^{(k)} \quad (3.37)$$

Agrupando a equação constitutiva em blocos que representam os esforços no plano da lâmina e os esforços cisalhantes, pode-se definir de forma compacta,

$$\vec{\sigma}^{(k)} = \begin{bmatrix} [\bar{C}_p^{(k)}] & [0] \\ [0] & [\bar{C}_s^{(k)}] \end{bmatrix} \vec{\epsilon}^{(k)} + \begin{bmatrix} [\bar{e}_p^{(k)}] \\ [\bar{e}_s^{(k)}] \end{bmatrix} \vec{E}^{(k)} \quad (3.38)$$

Definindo-se as tensões e deformações que ocorrem no plano da lâmina  $k$  como,

$$\vec{\sigma}_p^{(k)} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} \quad \text{e} \quad \vec{\epsilon}_p^{(k)} = \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} \quad (3.39)$$

Das Eqs. 3.37 e 3.39 pode-se relacionar as tensões mecânicas com as deformações e o campo elétrico atuante de acordo com a seguinte equação,

$$\vec{\sigma}_p^{(k)} = [\bar{C}_p^{(k)}] \vec{\epsilon}_p^{(k)} + [\bar{e}_p^{(k)}] \vec{E}^{(k)} \quad (3.40)$$

Aplicando o campo de deformações relatado na Eq. (D.2), obtém-se,

$$\vec{\sigma}_p^{(k)} = [\bar{C}_p^{(k)}] \vec{\epsilon}_p^{o(k)} + z [\bar{C}_p^{(k)}] \vec{\kappa}_p^{(k)} + [\bar{e}_p^{(k)}] \vec{E}^{(k)} \quad (3.41)$$

sendo que  $\vec{\epsilon}_p^{o(k)}$  e  $\vec{\kappa}_p^{(k)}$  são definidos como,

$$\vec{\epsilon}_p^{o(k)} = \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx}^o \\ \epsilon_{yy}^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix}^{(k)} \quad \text{e} \quad \vec{\kappa}_p^{(k)} = \begin{Bmatrix} \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} \quad (3.42)$$

Os esforços generalizados de membrana, definidos na Eq. (3.25), podem ser re-escritos de acordo com a equação abaixo,

$$\vec{N} = \sum_{k=1}^n [\bar{C}_p^{(k)}] h_{k,1} \vec{\epsilon}_p^{o(k)} + \sum_{k=1}^n [\bar{C}_p^{(k)}] h_{k,2} \vec{\kappa}_p^{(k)} + \sum_{k=1}^n [\bar{e}_p^{(k)}] h_{k,1} \vec{E}^{(k)} \quad (3.43)$$

Em relação aos esforços de flexão, definidos na Eq. (3.25), obtém-se,

$$\vec{M} = \sum_{k=1}^n [\bar{C}_p^{(k)}] h_{k,2} \vec{\epsilon}_p^{o(k)} + \sum_{k=1}^n [\bar{C}_p^{(k)}] h_{k,3} \vec{\kappa}_p^{(k)} + \sum_{k=1}^n [\bar{e}_p^{(k)}] h_{k,2} \vec{E}^{(k)} \quad (3.44)$$

Finalmente, pode-se calcular a equação constitutiva generalizada que fornece as forças cortantes. Para tanto, define-se os vetores de tensões e deformações cisalhantes transversais conforme abaixo,

$$\vec{\sigma}_s^{(k)} = \begin{Bmatrix} \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix}^{(k)} \quad \text{e} \quad \vec{\gamma}_s^{(k)} = \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}^{(k)} \quad (3.45)$$

Logo,

$$\vec{\sigma}_s^{(k)} = [\bar{C}_s^{(k)}] \vec{\gamma}_s^{(k)} + [\bar{e}_s^{(k)}] \vec{E}^{(k)} \quad (3.46)$$

sendo  $a = \frac{5}{6}$ . Resolvendo-se a integral na espessura, a equação que define os esforços cisalhantes pode ser descrita como,

$$\vec{Q} = a \sum_{k=1}^n [\bar{C}_s^{(k)}] h_{k,1} \vec{\gamma}_s^{(k)} + \sum_{k=1}^n a [\bar{e}_s^{(k)}] h_{k,1} \vec{E}^{(k)} \quad (3.47)$$

Consequentemente, definindo as matrizes abaixo,

$$\begin{aligned}
 [\hat{A}^{(k)}] &= \sum_{k=1}^n [\bar{C}_p^{(k)}] h_{k,1}, & [\hat{B}^{(k)}] &= \sum_{k=1}^n [\bar{C}_p^{(k)}] h_{k,2} \\
 [\hat{D}^{(k)}] &= \sum_{k=1}^n [\bar{C}_p^{(k)}] h_{k,3}, & [\hat{F}^{(k)}] &= \sum_{k=1}^n a [\bar{C}_s^{(k)}] h_{k,1} \\
 [\hat{G}^{(k)}] &= [\bar{e}_p^{(k)}] h_{k,1}, & [\hat{H}^{(k)}] &= [\bar{e}_p^{(k)}] h_{k,2} \\
 & & [\hat{I}^{(k)}] &= a [\bar{e}_s^{(k)}] h_{k,1}
 \end{aligned} \tag{3.48}$$

sendo que as matrizes  $[\hat{A}]$  e  $[\hat{G}]$  são relacionadas aos esforços de membrana, sendo a primeira puramente mecânica e a segunda eletromecânica. As matrizes  $[\hat{D}]$  e  $[\hat{H}]$  relacionadas aos esforços de flexão, sendo matrizes puramente mecânica e acoplada, respectivamente; a matriz  $[\hat{B}]$  é a matriz que acopla os esforços de membrana e flexão mecânicos e finalmente, as matrizes  $[\hat{F}]$  e  $[\hat{I}]$  relacionadas aos esforços cortantes, igualmente mecânica e eletromecânica, respectivamente. Assim, pode-se escrever a seguinte equação constitutiva, em termos de esforços e deformações generalizados,

$$\begin{Bmatrix} \vec{N} \\ \vec{M} \\ \vec{Q} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{A} & \hat{B} & \hat{0} \\ \hat{B} & \hat{D} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{F} \end{bmatrix} \vec{D}_g + \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} \hat{G} \\ \hat{H} \\ \hat{I} \end{bmatrix} \vec{E} \tag{3.49}$$

sendo

$$[\mathbb{D}_P] = \begin{bmatrix} \hat{A} & \hat{B} \\ \hat{B} & \hat{D} \end{bmatrix}, \quad [\mathbb{D}_S] = [\hat{F}] \quad \text{e} \quad [\mathbb{E}_{PS}] = \begin{bmatrix} \hat{G} \\ \hat{H} \\ \hat{I} \end{bmatrix} \tag{3.50}$$

Portanto, a Eq. (3.49) pode ser compactada na forma apresentada na equação abaixo,

$$\vec{C}_g = \begin{bmatrix} \mathbb{D}_P & 0 \\ 0 & \mathbb{D}_S \end{bmatrix} \vec{D}_g + \sum_{k=1}^n [\mathbb{E}_{PS}] \vec{E} \tag{3.51}$$

Para a dedução da equação constitutiva generalizada elétrica, deve-se estabelecer as relações que regem o potencial elétrico nas lâminas piezelétricas e o campo elétrico associado.

### 3.2.3 Considerações sobre o campo elétrico e seu potencial

A fim de modelar a distribuição do potencial elétrico através da espessura das lâminas piezelétricas, as seguintes hipóteses são consideradas, de acordo com [Bhattacharya \[38\]](#):

- (i) A distribuição do potencial através da espessura é linear;
- (ii) As superfícies da lâmina piezolétrica em contato com o substrato são aterradas de forma que o potencial elétrico na interface entre materiais é nulo;
- (iii) Existe uma adesão perfeita entre a lâmina piezolétrica, o eletrodo e o material composto.

Por simplicidade, considera-se que:

- (i) As lâminas de material piezolétrico são aplicadas apenas nas faces superiores e inferiores da placa laminada e que entre elas existem lâminas de materiais compósitos não dielétricas.
- (ii) Sempre que for aplicada uma lâmina na superfície superior, existirá uma lâmina de mesmo tamanho na face inferior.
- (iii) A aplicação do potencial elétrico em cada lâmina é feita de forma homogênea, ao longo do plano desta.

Dadas tais considerações resulta-se que, em cada lâmina piezolétrica  $k$ , seja esta a primeira ( $k = 1$ ) ou a última ( $k = n$ ), a seguinte representação do potencial elétrico é considerada:

$$\varphi^{(k)}(x, y, z) = \bar{\varphi}^{(k)}(x, y) \frac{(z - z_k)}{(z_{k+1} - z_k)} \quad (3.52)$$

e que em cada lâmina, tem-se,

$$\bar{\varphi}^{(k)}(x, y) \Big|_{lam} = cte \quad (3.53)$$

logo,  $\bar{\varphi}^{(k)}(x, y)$  em cada uma das lâminas é uma função contínua por partes. Isto significa que, em cada lâmina,  $\bar{\varphi}^{(k)}(x, y) \Big|_{lam}$  é constante, podendo este valor variar de lâmina para lâmina. Pode-se observar que, como consequência, para cada lâmina  $k$ , neste caso  $k = 1$  ou  $k = n$ , tem-se,

$$\begin{aligned}\vec{E}^{(k)}(x,y,z) &= -\nabla\varphi^{(k)}(x,y,z) \\ &= -\frac{\overline{\varphi}^{(k)}(x,y)}{h_{k,1}}\vec{e}_z\end{aligned}\quad (3.54)$$

e, em cada lâmina,

$$\vec{E}^{(k)}(x,y,z)\Big|_{lam} = -\frac{\overline{\varphi}^{(k)}(x,y)\Big|_{lam}}{h_{k,1}}\vec{e}_z = -\frac{\overline{\varphi}^{(k)}\Big|_{lam}}{h_{k,1}}\vec{e}_z = cte \quad (3.55)$$

Portanto, conhecendo o funcionamento das entidades elétricas na lâmina, pode-se obter a equação integrada associada ao problema elétrico, dada por

$$\int_{\Omega} \vec{D} \cdot \nabla \delta \varphi \, d\Omega = \int_{\partial_{\psi}\Omega} \overline{\psi} \delta \varphi \, d\partial_{\psi}\Omega \quad (3.56)$$

em que, na lâmina  $k$ , para  $z \in [z_k, z_{k+1}]$ , possui a seguinte equação constitutiva associada,

$$\vec{D}^{(k)} = [\overline{\epsilon}^{(k)}] \vec{\epsilon}^{(k)} + [\overline{\epsilon}_D^{(k)}] \vec{E}^{(k)} \quad (3.57)$$

Dada a relação  $\vec{E} = -\nabla\varphi$  existente entre o campo elétrico e o potencial, faz-se a substituição desta no primeiro termo da equação de equilíbrio elétrico,

$$-\int_{\Omega} \vec{D} \cdot \delta \vec{E} \, d\Omega = \int_{\partial_{\psi}\Omega} \overline{\psi} \delta \varphi \, d\partial_{\psi}\Omega \quad (3.58)$$

Substituir a equação constitutiva definida na Eq. (3.57) no primeiro termo da Eq. (3.58) resulta em,

$$\int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \vec{D} \cdot \delta \vec{E} \, dz dA = \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\overline{\epsilon}^{(k)}] \vec{\epsilon}^{(k)} \cdot \delta \vec{E}^{(k)} \, dz dA + \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\overline{\epsilon}_D^{(k)}] \vec{E}^{(k)} \cdot \delta \vec{E}^{(k)} \, dz dA \quad (3.59)$$

Utilizando a separação da equação constitutiva em blocos definida anteriormente para primeira equação constitutiva, de acordo com as Eqs. 3.37 e 3.38, pode-se re-escrever a segunda equação constitutiva na forma compacta conforme abaixo,

$$\vec{D}^{(k)} = \left[ \begin{array}{cc} ([\overline{\epsilon}_p]^{(k)})^T & ([\overline{\epsilon}_s]^{(k)})^T \end{array} \right] \vec{\epsilon}^{(k)} + [\overline{\epsilon}_D^{(k)}] \vec{E}^{(k)} \quad (3.60)$$

inserindo as relações do campo de deformação na equação constitutiva, aplicando a mesma no primeiro termo da Eq. (3.59) e resolvendo as integrais na espessura, pode-se escrever,

$$\begin{aligned} \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\bar{\epsilon}] \vec{\epsilon} \cdot \delta \vec{E} \, dz dA &= \int_A \sum_{k=1}^n \left[ \hat{G} \quad \hat{H} \quad \hat{I} \right]^{(k)} \vec{D}_g \cdot \delta \vec{E}^{(k)} dA \\ &= \int_A \sum_{k=1}^n [\mathbb{E}_{PS}]^T \vec{D}_g \cdot \delta \vec{E}^{(k)} dA \end{aligned} \quad (3.61)$$

O segundo termo da Eq. (3.59) quando integrado na espessura é expresso como,

$$\int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\bar{\epsilon}_D^{\mathcal{E}}] \vec{E} \cdot \delta \vec{E} \, dz dA = \int_A \left\{ \sum_{k=1}^n [\bar{\epsilon}_D^{\mathcal{E}(k)}] h_{k,1} \vec{E}^{(k)} \cdot \delta \vec{E}^{(k)} \right\} dA \quad (3.62)$$

O termo localizado no lado direito da equação de equilíbrio elétrico corresponde à ação de uma carga prescrita no contorno,

$$\begin{aligned} \int_{\partial\psi\Omega} \bar{\psi} \delta \varphi d\Omega &= \int_{\Gamma_\psi} \bar{\psi} \cdot \delta \varphi d\Gamma \\ &= \int_{\partial A_\psi} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{\psi} \cdot \delta \varphi dz dA \end{aligned} \quad (3.63)$$

Dada a relação descrita na Eq. (3.52), pode-se assumir por analogia a relação para a variação do potencial elétrico segundo a equação seguinte,

$$\delta \varphi(x, y, z) = \bar{\delta \varphi}(x, y) \frac{(z - z_k)}{(z_{k+1} - z_k)} \quad (3.64)$$

Inserindo a relação na Eq. (3.63),

$$\begin{aligned} \int_{\partial\psi\Omega} \bar{\psi} \delta \varphi d\Omega &= \int_{\partial A_\psi} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{\psi} \cdot \bar{\delta \varphi} \frac{(z - z_k)}{(z_{k+1} - z_k)} dz dA \\ &= - \int_{\partial A_\psi} \bar{\psi} \cdot \bar{\delta \varphi}_{z_k} \vec{e}_z dA \end{aligned} \quad (3.65)$$

Considerando agora a relação estabelecida entre o campo elétrico e o potencial  $\vec{E} = -\nabla \varphi$  aplicada às variações,

$$\begin{aligned} \delta \vec{E}(x, y, z) &= -\nabla \delta \varphi(x, y, z) \\ &= -\frac{\bar{\delta \varphi}(x, y)}{h_{k,1}} \vec{e}_z \end{aligned} \quad (3.66)$$



Substituindo na Eq. (3.65),

$$\int_{\partial_{\psi}\Omega} \bar{\psi} \delta \varphi d\partial_{\psi}\Omega = \int_{\partial A_{\psi}} \bar{\psi} z_k h_{k,1} \bar{e}_z \cdot \delta \vec{E} dA \quad (3.67)$$

A equação elétrica completamente integrada é apresentada na equação abaixo,

$$\begin{aligned} \int_A \left\{ \sum_{k=1}^n \left[ \bar{\epsilon}_D^{(k)} \right] h_{k,1} \vec{E}^{(k)} \cdot \delta \vec{E}^{(k)} \right\} dA + \int_A \sum_{k=1}^n [\mathbb{E}_{PS}]^T \vec{D}_g \cdot \delta \vec{E}^{(k)} dA = \\ - \int_{\partial A_{\psi}} \bar{\psi} z_k h_{k,1} \bar{e}_z \cdot \delta \vec{E}^{(k)} dA, \forall \delta \vec{E}^{(k)} \in \overline{Var}_{\varphi} \end{aligned} \quad (3.68)$$

Desta forma, o problema piezelétrico pode então ser formulado como: Para cada  $t \in [0, t_f]$ , determinar  $(\vec{u}_0(x, y, t), \vec{\theta}(x, y, t)) \in \bar{K}_u$  e  $\bar{\varphi}^k(x, y, t) \in \bar{K}_{\varphi}$  tal que:

$$\begin{aligned} \int_A \vec{C}_g \cdot \delta \vec{D}_g dA + \int_A \sum_{k=1}^n \left\{ \rho^k h_{k,1} \right\} \vec{u}_0 \cdot \delta \vec{u}_0 dA + \int_A \sum_{k=1}^n \left\{ \rho^k h_{k,3} \right\} \vec{\theta} \cdot \delta \vec{\theta} dA \\ - \int_A \sum_{k=1}^n \left\{ \rho^k h_{k,2} \right\} \left( \vec{u}_0 \cdot \delta \vec{\theta} + \vec{\theta} \cdot \delta \vec{u}_0 \right) dA = \int_{\partial A_t} \left\{ \vec{N} \cdot \delta \vec{u}_0 - \vec{M} \cdot \delta \vec{\theta} \right\} dA \\ + \int_A \sum_{k=1}^n \left\{ \rho^k h_{k,1} \right\} \vec{g} \cdot \delta \vec{u}_0 dA - \int_A \sum_{k=1}^n \left\{ \rho^k h_{k,2} \right\} \vec{g} \cdot \delta \vec{\theta} dA, \forall (\delta \vec{u}_0, \delta \vec{\theta}) \in \overline{Var}_u \end{aligned} \quad (3.69)$$

e

$$\begin{aligned} \int_A \left\{ \sum_{k=1}^n \left[ \bar{\epsilon}_D^{(k)} \right] h_{k,1} \vec{E}^{(k)} \cdot \delta \vec{E}^{(k)} \right\} dA + \int_A \sum_{k=1}^n [\mathbb{E}_{PS}]^T \vec{D}_g \cdot \delta \vec{E}^{(k)} dA = \\ - \int_{\partial A_{\psi}} \bar{\psi} z_k h_{k,1} \bar{e}_z \cdot \delta \vec{E}^{(k)} dA, \forall \delta \vec{E}^{(k)} \in \overline{Var}_{\varphi} \end{aligned} \quad (3.70)$$

sujeitas às condições iniciais para  $\vec{u}_0$ ,  $\vec{\theta}$  e  $\vec{E}^{(k)}$ , definidas na Eq. (3.5). Dado o caso presente, em que existem lâminas apenas nas superfícies superiores e inferiores, onde um funciona como sensor e o outro como atuador, apresentando individualmente os vetores campo elétrico  $\vec{E}^s$  e  $\vec{E}^a$ , respectivamente, pode-se definir o problema como: Para cada  $t \in [0, t_f]$ , determinar  $(\vec{u}_0(x, y, t), \vec{\theta}(x, y, t)) \in \bar{K}_u$  e  $(\bar{\varphi}^s(x, y, t) \text{ e } \bar{\varphi}^a(x, y, t)) \in \bar{K}_{\varphi}$  tais que:

$$\begin{aligned}
& \int_A \vec{C}_g \cdot \delta \vec{D}_g \, dA + \int_A \sum_{k=1}^n \left\{ \rho^k h_{k,1} \right\} \vec{u}_0 \cdot \delta \vec{u}_0 \, dA + \int_A \sum_{k=1}^n \left\{ \rho^k h_{k,3} \right\} \vec{\theta} \cdot \delta \vec{\theta} \, dA \\
& - \int_A \sum_{k=1}^n \left\{ \rho^k h_{k,2} \right\} \left( \vec{u}_0 \cdot \delta \vec{\theta} + \vec{\theta} \cdot \delta \vec{u}_0 \right) \, dA = \int_{\partial A_t} \left\{ \vec{N} \cdot \delta \vec{u}_0 - \vec{M} \cdot \delta \vec{\theta} \right\} \, dA \quad (3.71) \\
& + \int_A \sum_{k=1}^n \left\{ \rho^k h_{k,1} \right\} \vec{g} \cdot \delta \vec{u}_0 \, dA - \int_A \sum_{k=1}^n \left\{ \rho^k h_{k,2} \right\} \vec{g} \cdot \delta \vec{\theta} \, dA, \forall \left( \delta \vec{u}_0, \delta \vec{\theta} \right) \in \overline{Var}_u
\end{aligned}$$

em que é o vetor de carregamentos generalizados dado pela Eq. (3.51),

$$\vec{C}_g = \begin{bmatrix} \mathbb{D}_P & 0 \\ 0 & \mathbb{D}_S \end{bmatrix} \vec{D}_g + \left[ \mathbb{E}_{PS}^{(n)} \right] \vec{E}^s + \left[ \mathbb{E}_{PS}^{(1)} \right] \vec{E}^a \quad (3.72)$$

e

$$\begin{aligned}
& \int_A \left\{ h_{n,1} \left[ \overline{\epsilon}_D^{(n)} \right] \vec{E}^s \cdot \delta \vec{E}^s \right\} \, dA + \int_A \left\{ h_{1,1} \left[ \overline{\epsilon}_D^{(1)} \right] \vec{E}^a \cdot \delta \vec{E}^a \right\} \, dA + \\
& \int_A \left[ \mathbb{E}_{PS}^{(n)} \right]^T \vec{D}_g \cdot \delta \vec{E}^s \, dA + \int_A \left[ \mathbb{E}_{PS}^{(1)} \right]^T \vec{D}_g \cdot \delta \vec{E}^a \, dA = \quad (3.73) \\
& - \int_{\partial A_\psi} \overline{\psi}^s z_n h_{n,1} \vec{e}_z \cdot \vec{E}^s \, dA - \int_{\partial A_\psi} \overline{\psi}^a z_1 h_{1,1} \vec{e}_z \cdot \delta \vec{E}^a \, dA, \forall \left( \delta \vec{E}^a \text{ e } \delta \vec{E}^s \right) \in \overline{Var}_\varphi
\end{aligned}$$

Uma vez obtidas as equações de equilíbrio integradas na espessura, pode-se submetê-las à discretização em pequenos domínios. Para tanto, é utilizado o método dos elementos finitos.

### 3.3 Discretização por elementos finitos

A solução das equações que regem o comportamento de placas de Mindlin é facilitada pelo uso de métodos numéricos. Dentre os métodos numéricos disponíveis para a solução de equações diferenciais definidas em domínios arbitrários, o Método dos Elementos Finitos tem mostrado ser o mais eficiente. Neste trabalho, é elaborado um modelo numérico utilizando uma formulação em termos de deslocamentos. Tal modelo é baseado no teorema dos trabalhos virtuais sendo as equações correspondentes formuladas em termos dos deslocamentos. Alguns aspectos sobre o modelo encontram-se listados abaixo:

- (i) O elemento finito a ser desenvolvido será o isoparamétrico Quad9, cujos graus de liberdade, por nó são:  $(u, v, w, \theta_y, -\theta_x)$ . Serão adicionados também graus de liberdade associados ao potencial elétrico (um para sensor  $\bar{\varphi}^s$  e outro para atuador  $\bar{\varphi}^a$ ). Como o elemento tem 9 nós, o vetor de graus de liberdade do elemento  $\vec{q}_e$  é dado por,

$$\bar{q}_e^T = \{u_1, v_1, w_1, \theta_{y_1}, -\theta_{x_1}, \dots, u_9, v_9, w_9, \theta_{y_9}, -\theta_{x_9}, \bar{\varphi}^s, \bar{\varphi}^a\} \quad (3.74)$$

- (ii) Para evitar o *locking* de cisalhamento, será utilizado o método de integração seletiva reduzida, em que serão utilizados 9 pontos de integração para os termos de membrana e momento e apenas 4 pontos de integração para os termos associados ao cisalhamento transversal.

### 3.3.1 Partição do domínio em elementos e mudança de variáveis

Elementos quadriláteros utilizam um sistema de coordenadas local, definido em termos de  $(\xi, \eta)$ , de acordo com o exposto na Fig. 3.3. Portanto, é necessário efetuar a mudança do sistema de coordenadas do laminado para o sistema do elemento.

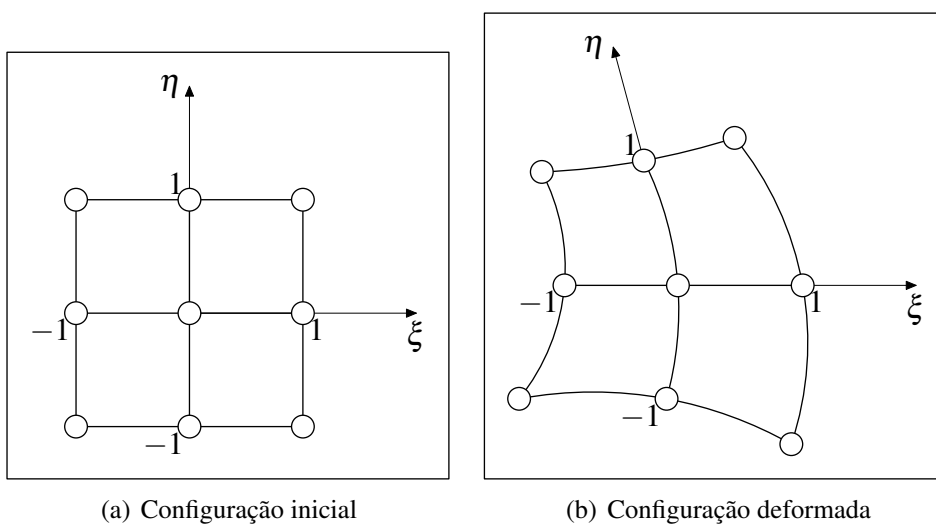


Figura 3.3: Sistema de coordenadas do elemento padrão

Esta transformação se faz através das relações expostas na Eq. (3.75),

$$\begin{aligned} x &= x(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^9 x_i \mathbb{N}_i(\xi, \eta) \\ y &= y(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^9 y_i \mathbb{N}_i(\xi, \eta) \end{aligned} \quad (3.75)$$

em que  $\mathbb{N}_i$  são as seguintes funções de forma,

$$\begin{aligned}
\mathbb{N}_1(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(\xi^2 - \xi)(\eta^2 - \eta), & \mathbb{N}_5(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(\eta^2 - \eta) \\
\mathbb{N}_2(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(\xi^2 + \xi)(\eta^2 - \eta), & \mathbb{N}_6(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(\xi^2 + \xi)(1 - \eta^2) \\
\mathbb{N}_3(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(\xi^2 + \xi)(\eta^2 + \eta), & \mathbb{N}_7(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(\eta^2 + \eta) \\
\mathbb{N}_4(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(\xi^2 - \xi)(\eta^2 + \eta), & \mathbb{N}_8(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(\xi^2 - \xi)(1 - \eta^2) \\
\mathbb{N}_9(\xi, \eta) &= (1 - \xi^2)(1 - \eta^2)
\end{aligned} \tag{3.76}$$

A integral, definida na célula de integração quadrilátera  $A_e$ , apresenta o seguinte formato,

$$\int_{A_e} f(x, y) dx dy = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) J(\xi, \eta) d\xi d\eta \tag{3.77}$$

sendo que  $J(\xi, \eta)$  representa o determinante abaixo,

$$J = \det[\mathbf{J}] \tag{3.78}$$

sendo a matriz jacobiana  $[\mathbf{J}]$  a responsável pelo mapeamento entre o domínio do elemento  $(\xi, \eta)$  e o sistema de coordenadas globais  $(x, y)$ , descrita na equação abaixo,

$$[\mathbf{J}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \tag{3.79}$$

A inversa de  $[\mathbf{J}]$  possibilita o processo contrário, avaliada como,

$$[\mathbf{J}]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det[\mathbf{J}]} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix}. \tag{3.80}$$

Desta forma, as derivadas das funções de aproximação podem ser obtidas pela regra da derivação em cadeia,

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{array} \right\} = [\mathbf{J}]^{-1} \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{array} \right\} \tag{3.81}$$

O apêndice B demonstra mais detalhadamente o cálculo da matriz jacobiana e seu determinante para um elemento quadrilátero.

A fim de resolver as integrais no domínio do elemento, utiliza o procedimento de integração numérica. Esta pode ser feita por meio da quadratura de Gauss. Neste caso, as integrais no domínio do elemento podem ser tratadas através da aproximação fornecida na equação abaixo,

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta \simeq \sum_{i=1}^{npt} \sum_{j=1}^{npt} f(\xi_i, \eta_j) W_i W_j \quad (3.82)$$

onde  $npt$  corresponde ao número de pontos de integração ao longo do elemento e  $W_i$  e  $W_j$  são os coeficientes de ponderação associados à posição do nó no domínio do elemento, de acordo com a Tab. 3.1,

Número de pontos de integração $npt$	Posição do nó $\xi_i$	Coefficientes de ponderação $W_i$
2	$\pm 0,5773502691 = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$	1
3	0 $\pm 0,7745966692 = \pm \sqrt{0,6}$	$0,8 = \frac{8}{9}$ $0,5 = \frac{5}{9}$

Tabela 3.1: Pontos de integração e coeficientes de ponderação para a quadratura de Gauss-Legendre em um intervalo de  $-1 \leq \xi \leq 1$

A fim de obter as equações discretizadas relativas à forma fraca dada pela Eq. (3.15), tanto os campos de deslocamentos  $\vec{u}_0$  e  $\vec{\theta}$  quanto os campos de deslocamentos virtuais  $\delta\vec{u}_0$  e  $\delta\vec{\theta}$  serão construídos com base na aproximação do método dos elementos finitos dada pela Eq. (3.83),

$$\begin{aligned} u^h(\vec{x}) &= \sum_{i=1}^9 N_i(\xi, \eta) u_i, & \delta u^h(\vec{x}) &= \sum_{i=1}^9 N_i(\xi, \eta) \delta u_i \\ v^h(\vec{x}) &= \sum_{i=1}^9 N_i(\xi, \eta) v_i, & \delta v^h(\vec{x}) &= \sum_{i=1}^9 N_i(\xi, \eta) \delta v_i \\ w^h(\vec{x}) &= \sum_{i=1}^9 N_i(\xi, \eta) w_i, & \delta w^h(\vec{x}) &= \sum_{i=1}^9 N_i(\xi, \eta) \delta w_i \\ \theta_y^h(\vec{x}) &= \sum_{i=1}^9 N_i(\xi, \eta) \theta_{y_i}, & \delta \theta_y^h(\vec{x}) &= \sum_{i=1}^9 N_i(\xi, \eta) \delta \theta_{y_i} \\ -\theta_x^h(\vec{x}) &= -\sum_{i=1}^9 N_i(\xi, \eta) \theta_{x_i}, & -\delta \theta_x^h(\vec{x}) &= -\sum_{i=1}^9 N_i(\xi, \eta) \delta \theta_{x_i} \end{aligned} \quad (3.83)$$

O vetor deslocamento discretizado  $\vec{u}_0^h$  e sua variação  $\delta\vec{u}_0^h$  podem ser expressos na forma matricial de acordo com a equação abaixo,

$$\begin{aligned}\vec{u}_0^h(\vec{x}) &= \begin{Bmatrix} u^h(\vec{x}(\xi, \eta)) \\ v^h(\vec{x}(\xi, \eta)) \\ w^h(\vec{x}(\xi, \eta)) \end{Bmatrix} = [\mathbb{N}^u(\xi, \eta)] \{\vec{q}_e\} \\ &= \left[ \mathbb{N}_1^u(\xi, \eta) \mid \mathbb{N}_2^u(\xi, \eta) \mid \cdots \mid \mathbb{N}_9^u(\xi, \eta) \mid [0] \right] \{\vec{q}_e\}\end{aligned}\quad (3.84)$$

em que  $\vec{q}_e$  representa o vetor que agrupa os graus de liberdade associados ao elemento, apresentado na Eq. (3.74). Por analogia, pode-se definir o vetor de deslocamentos virtuais segundo a equação abaixo,

$$\delta\vec{u}_0^h(\vec{x}) = \begin{Bmatrix} \delta u^h(\vec{x}(\xi, \eta)) \\ \delta v^h(\vec{x}(\xi, \eta)) \\ \delta w^h(\vec{x}(\xi, \eta)) \end{Bmatrix} = [\mathbb{N}^u(\xi, \eta)] \{\delta\vec{q}_e\} \quad (3.85)$$

em que

$$[\mathbb{N}^u(\xi, \eta)] = \begin{bmatrix} \mathbb{N}_a(\xi, \eta) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{N}_a(\xi, \eta) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{N}_a(\xi, \eta) & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } [0] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.86)$$

O vetor rotação  $\vec{\theta}^h$  e sua variação  $\delta\vec{\theta}^h$  podem ser expressos na forma matricial como,

$$\begin{aligned}\vec{\theta}^h &= \begin{Bmatrix} \theta_y^h(\vec{x}(\xi, \eta)) \\ -\theta_x^h(\vec{x}(\xi, \eta)) \end{Bmatrix} = [\mathbb{N}^\theta(\xi, \eta)] \{\vec{q}_e\} \\ &= \left[ \mathbb{N}_1^\theta(\xi, \eta) \mid \mathbb{N}_2^\theta(\xi, \eta) \mid \cdots \mid \mathbb{N}_9^\theta(\xi, \eta) \mid [0] \right] \{\vec{q}_e\}\end{aligned}\quad (3.87)$$

em que,

$$[\mathbb{N}^\theta(\xi, \eta)] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\mathbb{N}_a(\xi, \eta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbb{N}_a(\xi, \eta) \end{bmatrix} \quad (3.88)$$

Por analogia, tem-se,

$$\begin{aligned} \delta \vec{\theta}^h &= \begin{Bmatrix} \delta \theta_y^h(\vec{x}) \\ -\delta \theta_x^h(\vec{x}) \end{Bmatrix} = [\mathbb{N}^\theta(\xi, \eta)] \{\delta \vec{q}_e\} \\ &= \left[ \mathbb{N}_1^\theta(\xi, \eta) \mid \mathbb{N}_2^\theta(\xi, \eta) \mid \cdots \mid \mathbb{N}_9^\theta(\xi, \eta) \mid [0] \right] \{\delta \vec{q}_e\} \end{aligned} \quad (3.89)$$

Uma vez discretizados os deslocamentos, pode-se escrever a forma discretizada do vetor de deformações generalizadas, composto pelas deformações geradas pelos esforços de membrana, flexão e cortantes, segundo a equação abaixo,

$$\vec{D}_g = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^o(\vec{x}) \\ \varepsilon_{yy}^o(\vec{x}) \\ \gamma_{xy}^o(\vec{x}) \\ \kappa_{xx}(\vec{x}) \\ \kappa_{yy}(\vec{x}) \\ \kappa_{xy}(\vec{x}) \\ \gamma_{yz}(\vec{x}) \\ \gamma_{xz}(\vec{x}) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u^h}{\partial x} \\ \frac{\partial v^h}{\partial y} \\ \frac{\partial u^h}{\partial y} + \frac{\partial v^h}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_y^h}{\partial y} \\ -\frac{\partial \theta_x^h}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_y^h}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x^h}{\partial x} \\ -\theta_x^h + \frac{\partial w^h}{\partial y} \\ \theta_y^h + \frac{\partial w^h}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (3.90)$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} \vec{D}_g &= [\mathbb{B}(\vec{x}(\xi, \eta))] \{\vec{q}_e\} \\ &= \left[ \mathbb{B}_1(\vec{x}(\xi, \eta)) \mid \mathbb{B}_2(\vec{x}(\xi, \eta)) \mid \cdots \mid \mathbb{B}_9(\vec{x}(\xi, \eta)) \mid [0] \right] \{\vec{q}_e\} \end{aligned} \quad (3.91)$$

sendo a matriz  $\mathbb{B}$  dada pela relação seguinte,

$$\mathbb{B}(\vec{x}(\xi, \eta)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_a(\xi, \eta)}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_a(\xi, \eta)}{\partial y} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial N_a(\xi, \eta)}{\partial y} & \frac{\partial N_a(\xi, \eta)}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_a(\xi, \eta)}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial N_a(\xi, \eta)}{\partial y} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_a(\xi, \eta)}{\partial y} & -\frac{\partial N_a(\xi, \eta)}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_a(\xi, \eta)}{\partial y} & 0 & -N_a(\xi, \eta) \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_a(\xi, \eta)}{\partial x} & N_a(\xi, \eta) & 0 \end{bmatrix} \quad (3.92)$$

A fim de separar as parcelas de deformações que incidem no plano daquelas que se dão transversalmente à ele, o vetor de deformações generalizadas  $\vec{D}_g$  é dividido conforme mostrado abaixo,

$$\vec{D}_g = \begin{bmatrix} \vec{D}_g^P \\ \vec{D}_g^S \end{bmatrix} \quad (3.93)$$

onde o vetor de deformações generalizadas no plano  $\vec{D}_g^P$  é definido como sendo as seis primeiras linhas do vetor  $\vec{D}_g$  e  $\vec{D}_g^S$  é o vetor de deformações generalizadas relativo às deformações cisalhantes é definido como sendo as duas últimas linhas. Logo, a matriz de discretização das deformações generalizadas pode ser repartida como,

$$[\mathbb{B}(\vec{x}(\xi, \eta))] = \begin{bmatrix} [\mathbb{B}^P(\vec{x}(\xi, \eta))] \\ [\mathbb{B}^S(\vec{x}(\xi, \eta))] \end{bmatrix} \quad (3.94)$$

Por analogia, o vetor de deformações virtuais pode ser descrito como,

$$\delta \vec{D}_g = [\mathbb{B}(\vec{x}(\xi, \eta))] \{ \delta \vec{q}_e \} \quad (3.95)$$

A determinação do campo elétrico no elemento é obtida por,



$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} E_3^s \\ E_3^a \end{Bmatrix} &= [\mathbb{B}^\varphi(\vec{x}(\xi, \eta))] \{\vec{q}_e\} \\ &= \left[ \begin{array}{c|c|c|c|c} [0_\varphi] & [0_\varphi] & \cdots & [0_\varphi] & [\mathbb{B}^\varphi] \end{array} \right] \{\vec{q}_e\} \end{aligned} \quad (3.96)$$

em que os sobrescritos  $s$  e  $a$  designam o sensor e o atuador, respectivamente. Tal matriz é definida unicamente para os elementos piezelétricos, dado que as lâminas de material composto são consideradas não dielétricas. Os componentes da matriz  $[\mathbb{B}^\varphi(\xi, \eta)]$  encontram-se expostos abaixo,

$$[0_\varphi] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [\mathbb{B}^\varphi] = \begin{bmatrix} \frac{1}{h_{n,1}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{h_{1,1}} \end{bmatrix} \quad (3.97)$$

Definidas as relações de discretização descritas acima, é possível aplicá-las às equações de equilíbrio que resolvem o problema da placa laminada de material compósito com sensores e atuadores piezelétricos integrados.

### 3.3.2 Equação de equilíbrio mecânico

A equação de equilíbrio mecânico, após a discretização no domínio do elemento, pode ser expressa como,

$$\begin{aligned} &\sum_e \int_{A_e} \vec{C}_g \cdot \delta \vec{D}_g \, dA + \sum_e \int_{A_e} \sum_{k=1}^n \left\{ \rho^k h_{k,1} \right\} \vec{u}_0 \cdot \delta \vec{u}_0 \, dA + \sum_e \int_{A_e} \sum_{k=1}^n \left\{ \rho^k h_{k,3} \right\} \vec{\theta} \cdot \delta \vec{\theta} \, dA \\ &- \sum_e \int_{A_e} \sum_{k=1}^n \left\{ \rho^k h_{k,2} \right\} \left( \vec{u}_0 \cdot \delta \vec{\theta} + \vec{\theta} \cdot \delta \vec{u}_0 \right) \, dA = \sum_e \int_{\partial A_r \cap \partial A_e} \left\{ \vec{N} \cdot \delta \vec{u}_0 - \vec{M} \cdot \delta \vec{\theta} \right\} \, dA \quad (3.98) \\ &+ \sum_e \int_{A_e} \sum_{k=1}^n \left\{ \rho^k h_{k,1} \right\} \vec{g} \cdot \delta \vec{u}_0 \, dA - \sum_e \int_{A_e} \sum_{k=1}^n \left\{ \rho^k h_{k,2} \right\} \vec{g} \cdot \delta \vec{\theta} \, dA \end{aligned}$$

em que

$$\vec{C}_g = \begin{bmatrix} \mathbb{D}_P & 0 \\ 0 & \mathbb{D}_S \end{bmatrix} \vec{D}_g + [\mathbb{E}_{PS}^{(n)}] \vec{E}^s + [\mathbb{E}_{PS}^{(1)}] \vec{E}^a \quad (3.99)$$

### Determinação da contribuição do primeiro termo da equação de equilíbrio mecânico

O primeiro termo da equação de equilíbrio mecânico pode ser decomposto em função do vetor de esforços generalizados  $\vec{C}_g$  segundo a equação abaixo,

$$\int_{A_e} \vec{C}_g \cdot \delta \vec{D}_g dA = \int_{A_e} [\mathbb{D}_P] \vec{D}_g^P \cdot \delta \vec{D}_g^P dA + \int_{A_e} [\mathbb{D}_S] \vec{D}_g^S \cdot \delta \vec{D}_g^S dA + \int_{A_e} \left( [\mathbb{E}_{PS}^{(n)}] \vec{E}^s + [\mathbb{E}_{PS}^{(1)}] \vec{E}^a \right) \cdot \delta \vec{D}_g dA \quad (3.100)$$

onde pode-se visualizar uma parcela puramente mecânica e uma parcela acoplada de natureza eletro-mecânica. A fim de computar a matriz de rigidez mecânica deve-se, portanto, separar os termos de origem elétrica. Aplicando as relações de discretização expostas nas Eqs. 3.92 e 3.94 nos termos puramente mecânicos resulta,

$$\int_{A_e} [\mathbb{D}_P] \vec{D}_g^P \cdot \delta \vec{D}_g^P dA + \int_{A_e} [\mathbb{D}_S] \vec{D}_g^S \cdot \delta \vec{D}_g^S dA = [\mathbb{K}_e^P] \{ \vec{q}_e \} \cdot \{ \delta \vec{q}_e \} + [\mathbb{K}_e^S] \{ \vec{q}_e \} \cdot \{ \delta \vec{q}_e \} \quad (3.101)$$

em que pode-se identificar as matrizes de rigidez  $[\mathbb{K}_e^P]$  e  $[\mathbb{K}_e^S]$ , dadas por

$$\begin{aligned} [\mathbb{K}_e^P] &= \int_{A_e} [\mathbb{B}^P(\vec{x}(\xi, \eta))]^T [\mathbb{D}_P] [\mathbb{B}^P(\vec{x}(\xi, \eta))] dA \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\mathbb{B}^P(\vec{x}(\xi, \eta))]^T [\mathbb{D}_P] [\mathbb{B}^P(\vec{x}(\xi, \eta))] J(\xi, \eta) d\xi d\eta \end{aligned} \quad (3.102)$$

e

$$\begin{aligned} [\mathbb{K}_e^S] &= \int_{A_e} [\mathbb{B}^S(\vec{x}(\xi, \eta))]^T [\mathbb{D}_S] [\mathbb{B}^S(\vec{x}(\xi, \eta))] dA \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\mathbb{B}^S(\vec{x}(\xi, \eta))]^T [\mathbb{D}_S] [\mathbb{B}^S(\vec{x}(\xi, \eta))] J(\xi, \eta) d\xi d\eta \end{aligned} \quad (3.103)$$

A matriz de rigidez final da estrutura é então dada por,

$$[\mathbb{K}_e] = [\mathbb{K}_e^P] + [\mathbb{K}_e^S] \quad (3.104)$$

### Determinação do termo eletro-mecânico

Para efetuar-se a discretização do termo acoplado, algumas relações são definidas. Dado o vetor de deformações generalizadas  $\vec{D}_g$  e sua variação  $\delta \vec{D}_g$ , apresentados na Eqs. 3.91 e 3.95 e os vetores campo elétrico do sensor e do atuador, respectivamente, representados na equação

abaixo,

$$\begin{aligned}\vec{E}^s{}^T &= \{0, 0, E_3^s\} \\ \vec{E}^a{}^T &= \{0, 0, E_3^a\}\end{aligned}\quad (3.105)$$

Introduzindo as relações descritas acima no termo eletro-mecânico e efetuando as operações necessárias, obtém-se,

$$\int_{A_e} \left( [\mathbb{E}_{PS}^{(n)}] \vec{E}^s + [\mathbb{E}_{PS}^{(1)}] \vec{E}^a \right) \cdot \delta \vec{D}_g \, dA = [\mathbb{H}_e^{qu}] \{ \vec{q}_e \} \cdot \{ \delta \vec{q}_e \} \quad (3.106)$$

em que  $[\mathbb{H}_e^{qu}]$  é dado por

$$\begin{aligned}[\mathbb{H}_e^{qu}] &= \int_{A_e} [\mathbb{B}(\vec{x}(\xi, \eta))]^T [\mathbb{P}] [\mathbb{B}^\varphi(\vec{x}(\xi, \eta))] \, dA \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\mathbb{B}(\vec{x}(\xi, \eta))]^T [\mathbb{P}] [\mathbb{B}^\varphi(\vec{x}(\xi, \eta))] J(\xi, \eta) \, d\xi \, d\eta\end{aligned}\quad (3.107)$$

onde  $[\mathbb{P}]$  é representada pela matriz cujas colunas são os vetores  $\left\{ \overrightarrow{\mathbb{E}_{PS}^{(n)}}(:, 3) \right\}$  e  $\left\{ \overrightarrow{\mathbb{E}_{PS}^{(1)}}(:, 3) \right\}$ , ou seja,

$$[\mathbb{P}] = \left[ \begin{array}{cc} \left\{ \overrightarrow{\mathbb{E}_{PS}^{(n)}}(:, 3) \right\} & \left\{ \overrightarrow{\mathbb{E}_{PS}^{(1)}}(:, 3) \right\} \end{array} \right] \quad (3.108)$$

sendo a matriz  $[\mathbb{E}_{PS}]$  definida na Eq. (3.50).

### Determinação da contribuição do segundo termo da equação de equilíbrio mecânico – matriz de massa

Para a obtenção da matriz de massa discreta, basta introduzir as relações estabelecidas anteriormente nas parcelas dependentes do tempo da equação de equilíbrio mecânico. Logo, inserindo as Eqs. 3.84 e 3.85 no termo abaixo resulta,

$$\int_{A_e} \sum_{k=1}^n \left\{ \rho^k h_{k,1} \right\} \vec{u}_0 \cdot \delta \vec{u}_0 \, dA = [\mathbb{M}_e^u] \left\{ \vec{q}_e \right\} \cdot \left\{ \delta \vec{q}_e \right\} \quad (3.109)$$

em que

$$\begin{aligned}
[\mathbb{M}_e^u] &= \sum_{k=1}^n \left\{ \rho^k h_{k,1} \right\} \int_{A_e} [\mathbb{N}^u(\xi, \eta)]^T [\mathbb{N}^u(\xi, \eta)] dA \\
&= \sum_{k=1}^n \left\{ \rho^k h_{k,1} \right\} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\mathbb{N}^u(\xi, \eta)]^T [\mathbb{N}^u(\xi, \eta)] J(\xi, \eta) d\xi d\eta
\end{aligned} \tag{3.110}$$

Aplicando as relações apresentadas nas Eqs. 3.87 e 3.89 abaixo,

$$\int_{A_e} \sum_{k=1}^n \rho^k h_{k,3} \vec{\theta} \cdot \delta \vec{\theta} dA = [\mathbb{M}_e^\theta] \left\{ \vec{q}_e \right\} \cdot \left\{ \delta \vec{q}_e \right\} \tag{3.111}$$

sendo a matriz  $[\mathbb{M}_e^\theta]$  representada segundo a Eq. (3.112),

$$\begin{aligned}
[\mathbb{M}_e^\theta] &= \sum_{k=1}^n \rho^k h_{k,3} \int_{A_e} [\mathbb{N}^\theta(\xi, \eta)]^T [\mathbb{N}^\theta(\xi, \eta)] dA \\
&= \sum_{k=1}^n \rho^k h_{k,3} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\mathbb{N}^\theta(\xi, \eta)]^T [\mathbb{N}^\theta(\xi, \eta)] J(\xi, \eta) d\xi d\eta
\end{aligned} \tag{3.112}$$

Finalmente, utilizando as quatro relações de discretização acima, pode-se definir o último termo de inércia, de acordo com a equação abaixo,

$$\int_{A_e} \sum_{k=1}^n \left\{ \rho^k h_{k,2} \right\} \left( \vec{u}_0 \cdot \delta \vec{\theta} + \vec{\theta} \cdot \delta \vec{u}_0 \right) dA = [\mathbb{M}_e^{u\theta}] \left\{ \vec{q}_e \right\} \cdot \left\{ \delta \vec{q}_e \right\} \tag{3.113}$$

em que

$$\begin{aligned}
[\mathbb{M}_e^{u\theta}] &= \sum_{k=1}^n \rho^k h_{k,2} \int_{A_e} \left( [\mathbb{N}^\theta(\xi, \eta)]^T [\mathbb{N}^u(\xi, \eta)] + [\mathbb{N}^u(\xi, \eta)]^T [\mathbb{N}^\theta(\xi, \eta)] \right) dA \\
&= \sum_{k=1}^n \rho^k h_{k,2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left( [\mathbb{N}^\theta(\xi, \eta)]^T [\mathbb{N}^u(\xi, \eta)] + [\mathbb{N}^u(\xi, \eta)]^T [\mathbb{N}^\theta(\xi, \eta)] \right) J(\xi, \eta) d\xi d\eta
\end{aligned} \tag{3.114}$$

Como resultado, obtém-se a matriz de massa final da estrutura, dada por,

$$[\mathbb{M}_e] = [\mathbb{M}_e^u] + [\mathbb{M}_e^\theta] + [\mathbb{M}_e^{u\theta}] \tag{3.115}$$

É importante salientar que no cálculo de  $[\mathbb{M}_e]$ , apenas as duas primeiras linhas da matriz  $[\mathbb{N}^u]$  são consideradas, dada a inexistência de componentes na direção  $z$  para as rotações. Desta forma, todas as parcelas localizadas do lado esquerdo da equação de equilíbrio mecânico foram

deduzidas. Os termos do lado direito são devidos à forças externas, tais quais gravidade e carregamentos prescritos no contorno.

### Determinação do vetor de força nodal equivalente associado ao peso próprio

Para a descrição discretizada dos termos associados ao peso próprio, utiliza-se primeiramente a definição mostrada na Eq. (3.85). Logo,

$$\int_{A_e} \sum_{k=1}^n \left\{ \rho^k h_{k,1} \right\} \vec{g} \cdot \delta \vec{u}_0 dA = \vec{F}_e^{gu} \cdot \{ \delta \vec{q}_e \} \quad (3.116)$$

em que

$$\begin{aligned} \vec{F}_e^{gu} &= \sum_{k=1}^n \left\{ \rho^k h_{k,1} \right\} \int_{A_e} [\mathbb{N}^u(\vec{x})]^T \vec{g} dA \\ &= \sum_{k=1}^n \left\{ \rho^k h_{k,1} \right\} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\mathbb{N}^u \vec{x}(\xi, \eta)]^T \vec{g} J(\xi, \eta) d\xi d\eta \end{aligned} \quad (3.117)$$

e introduzindo a Eq. (3.89) no segundo termo, obtém-se,

$$\int_{A_e} \sum_{k=1}^n \left\{ \rho^k h_{k,2} \right\} \vec{g} \cdot \delta \vec{\theta} dA = \vec{F}_e^{g\theta} \cdot \{ \delta \vec{q}_e \} \quad (3.118)$$

em que

$$\begin{aligned} \vec{F}_e^{g\theta} &= \sum_{k=1}^n \left\{ \rho^k h_{k,2} \right\} \int_{A_e} [\mathbb{N}^\theta(\xi, \eta)]^T \vec{g} dA \\ &= \sum_{k=1}^n \left\{ \rho^k h_{k,2} \right\} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\mathbb{N}^\theta(\xi, \eta)]^T \vec{g} J(\xi, \eta) d\xi d\eta \end{aligned} \quad (3.119)$$

### Determinação da vetor de força nodal equivalente, associado aos carregamentos prescritos no contorno

Até este ponto, todas as relações de discretização eram aplicadas em uma área que resultava do particionamento da integral de volume após a integração na espessura. Entretanto, os termos devidos a carregamentos prescritos são dados por integrais na superfície que, após integradas em  $z$ , se reduzem à integrais de linha. Logo, para o caso de integrais de linha, define-se,

$$x(\tau) = \sum_{i=1}^3 x_i \varpi_i(\tau) \quad (3.120)$$

$$y(\tau) = \sum_{i=1}^3 y_i \varpi_i(\tau)$$

em que se apresentam as seguintes funções de forma, que podem visualizadas na Fig. 3.4,

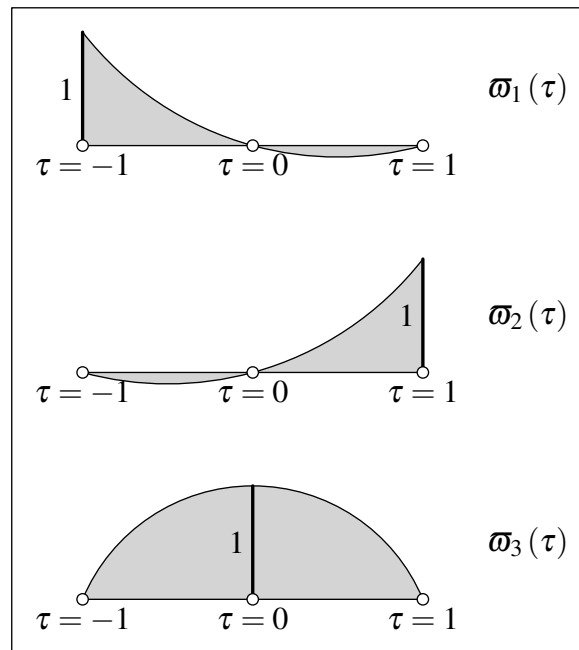


Figura 3.4: Funções de forma isoparamétricas para o elemento de barra de três nós

$$\varpi_1(\tau) = -\frac{1}{2}\tau(1-\tau) \quad (3.121)$$

$$\varpi_2(\tau) = 1 - \tau^2$$

$$\varpi_3(\tau) = \frac{1}{2}\tau(1+\tau)$$

Considerando o vetor posição abaixo,

$$\vec{r}(\tau) = x(\tau) \vec{e}_x + y(\tau) \vec{e}_y. \quad (3.122)$$

onde a sua diferencial é dada por,

$$d\vec{r} = \left\{ \frac{dx(\tau)}{d\tau} \vec{e}_x + \frac{dy(\tau)}{d\tau} \vec{e}_y \right\} d\tau \quad (3.123)$$

e o comprimento de arco  $ds$  é

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{d\vec{r} \cdot d\vec{r}} \\ &= \sqrt{\left(\frac{dx(\tau)}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dy(\tau)}{d\tau}\right)^2} d\tau \\ &= J(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (3.124)$$

em que  $J(\tau)$  é o jacobiano da transformação de coordenadas e é dado por

$$J(\tau) = \sqrt{\left(\frac{dx(\tau)}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dy(\tau)}{d\tau}\right)^2} \quad (3.125)$$

Logo,

$$\int_{\partial A_f \cap \partial A_e} h(\vec{x}) ds = \int_{-1}^1 h(\vec{x}(\tau)) J(\tau) d\tau \quad (3.126)$$

Desta forma, introduzindo as definições acima no primeiro termo de carregamento prescrito,

$$\int_{\partial A_f \cap \partial A_e} \vec{N} \cdot \delta \vec{u}_0 ds = \vec{F}_e^N \cdot \{\delta \vec{q}_e\} \quad (3.127)$$

em que

$$\vec{F}_e^N = \int_{-1}^1 [\mathbb{N}^u(\tau)]^T \vec{N} J(\tau) d\tau \quad (3.128)$$

Aplicando as relações de discretização ao termo relacionado ao momento da tração prescrita no contorno,

$$\int_{\partial A_f \cap \partial A_e} \vec{M} \cdot \delta \vec{\theta} dA = \int_{\partial A_f \cap \partial A_e} \vec{M} \cdot [\mathbb{N}^\theta(\tau)] \{\delta \vec{q}_e\} ds = \vec{F}_e^M \cdot \{\delta \vec{q}_e\} \quad (3.129)$$

em que

$$\vec{F}_e^M = \int_{-1}^1 [\mathbb{N}^\theta(\tau)]^T \vec{M} J(\tau) d\tau. \quad (3.130)$$

Para efetuar a integração numérica, utiliza-se a relação descrita na Eq. (3.82) e a Tab. 3.1,

atentando ao número de pontos de integração utilizados em cada parcela da equação de equilíbrio mecânico. Os resultados estão ordenados na Tab. 3.2.

Matrizes	Integração numérica
$[\mathbb{K}_e^P]$	$\sum_{i=1}^{npt} \sum_{j=1}^{npt} [\mathbb{B}^P(\bar{x}(\xi_i, \eta_j))]^T [\mathbb{D}_P] [\mathbb{B}^P(\bar{x}(\xi_i, \eta_j))] J(\xi_i, \eta_j) W_i W_j$
$[\mathbb{K}_e^S]$	$\sum_{i=1}^{npt} \sum_{j=1}^{npt} [\mathbb{B}^S(\bar{x}(\xi_i, \eta_j))]^T [\mathbb{D}_S] [\mathbb{B}^S(\bar{x}(\xi_i, \eta_j))] J(\xi_i, \eta_j) W_i W_j$
$[\mathbb{H}_e^{qu}]$	$\sum_{i=1}^{npt} \sum_{j=1}^{npt} [\mathbb{B}(\bar{x}(\xi_i, \eta_j))]^T [\mathbb{P}] [\mathbb{B}^\phi(\bar{x}(\xi_i, \eta_j))] J(\xi_i, \eta_j) W_i W_j$
$[\mathbb{M}_e^u]$	$\sum_{i=1}^{npt} \sum_{j=1}^{npt} \left( \sum_{k=1}^n \{ \rho^k h_{k,1} \} [\mathbb{N}^u(\xi_i, \eta_j)]^T [\mathbb{N}^u(\xi_i, \eta_j)] J(\xi_i, \eta_j) W_i W_j \right)$
$[\mathbb{M}_e^\theta]$	$\sum_{i=1}^{npt} \sum_{j=1}^{npt} \left( \sum_{k=1}^n \{ \rho^k h_{k,3} \} [\mathbb{N}^\theta(\xi_i, \eta_j)]^T [\mathbb{N}^\theta(\xi_i, \eta_j)] J(\xi_i, \eta_j) W_i W_j \right)$
$[\mathbb{M}_e^{u\theta}]$	$\sum_{i=1}^{npt} \sum_{j=1}^{npt} \left( \sum_{k=1}^n \{ \rho^k h_{k,2} \} \left\{ [\mathbb{N}^\theta(\xi_i, \eta_j)]^T [\mathbb{N}^u(\xi_i, \eta_j)] \right. \right. \\ \left. \left. + [\mathbb{N}^u(\xi_i, \eta_j)]^T [\mathbb{N}^\theta(\xi_i, \eta_j)] \right\} J(\xi_i, \eta_j) W_i W_j \right)$
$\vec{F}_e^{gu}$	$\sum_{i=1}^{npt} \sum_{j=1}^{npt} \left( \sum_{k=1}^n \{ \rho^k h_{k,1} \} [\mathbb{N}^u(\xi_i, \eta_j)]^T \vec{g} J(\xi_i, \eta_j) W_i W_j \right)$
$\vec{F}_e^{g\theta}$	$\sum_{i=1}^{npt} \sum_{j=1}^{npt} \left( \sum_{k=1}^n \{ \rho^k h_{k,2} \} [\mathbb{N}^\theta(\xi_i, \eta_j)]^T \vec{g} J(\xi_i, \eta_j) W_i W_j \right)$
$\vec{F}_e^N$	$\sum_{i=1}^{npt} [\mathbb{N}^u(\tau_i)]^T \vec{N} J(\tau_i) W_i$
$\vec{F}_e^M$	$\sum_{i=1}^{npt} [\mathbb{N}^\theta(\tau_i)]^T \vec{M} J(\tau_i) W_i$

Tabela 3.2: Integração numérica das matrizes da equação de equilíbrio mecânico pela quadratura de Gauss-Legendre

### 3.3.3 Equação de equilíbrio elétrico

A equação de equilíbrio elétrico, após a partição do domínio em elementos, resulta em,



$$\begin{aligned}
& \sum_e \int_{A_e} \left\{ h_{n,1} \left[ \overline{\epsilon_D^{(n)}} \right] \vec{E}^s \cdot \delta \vec{E}^s \right\} dA + \sum_e \int_{A_e} \left\{ h_{1,1} \left[ \overline{\epsilon_D^{(1)}} \right] \vec{E}^a \cdot \delta \vec{E}^a \right\} dA \\
& + \sum_e \int_{A_e} \left[ \mathbb{E}_{PS}^{(n)} \right]^T \vec{D}_g \cdot \delta \vec{E}^s dA + \sum_e \int_{A_e} \left[ \mathbb{E}_{PS}^{(1)} \right]^T \vec{D}_g \cdot \delta \vec{E}^a dA = \\
& - \int_{\partial A_\psi \cap \partial A_e} \overline{\psi}^s z_n h_{n,1} \vec{e}_z \cdot \vec{E}^s dA - \int_{\partial A_\psi \cap \partial A_e} \overline{\psi}^a z_1 h_{1,1} \vec{e}_z \cdot \vec{E}^a dA
\end{aligned} \tag{3.131}$$

### Determinação da contribuição dos termos puramente elétricos

Dado que a polarização do material piezelétrico é orientada ao longo da espessura e que a aplicação de um potencial elétrico externo se efetua na mesma direção da polarização do material, pode-se definir os vetores campo elétrico do sensor e do atuador, respectivamente, de acordo com as Eqs. 3.132,

$$\left( \vec{E}^s \right)^T = \{0, 0, E_3^s\} \text{ e } \left( \vec{E}^a \right)^T = \{0, 0, E_3^a\} \tag{3.132}$$

Portanto, tomando os termos dependentes apenas do campo elétrico da equação de equilíbrio e substituindo a relação acima, obtém-se,

$$\begin{aligned}
\int_{A_e} \left\{ h_{n,1} \left[ \overline{\epsilon_D^{(n)}} \right] \vec{E}^s \cdot \delta \vec{E}^s + h_{1,1} \left[ \overline{\epsilon_D^{(1)}} \right] \vec{E}^a \cdot \delta \vec{E}^a \right\} dA &= h_{n,1} \overline{\epsilon_{D33}^{(n)}} \int_{A_e} E_3^s \delta E_3^s dA \\
&+ h_{1,1} \overline{\epsilon_{D33}^{(1)}} \int_{A_e} E_3^a \delta E_3^a dA
\end{aligned} \tag{3.133}$$

Fazendo uso das relações de discretização descritas nas Eqs. 3.96 e 3.97 pode-se re-arranjar a equação conforme abaixo,

$$\int_{A_e} \left\{ h_{n,1} \left[ \overline{\epsilon_D^{(n)}} \right] \vec{E}^s \cdot \delta \vec{E}^s + h_{1,1} \left[ \overline{\epsilon_D^{(1)}} \right] \vec{E}^a \cdot \delta \vec{E}^a \right\} dA = [\mathbb{Q}_e] \{ \vec{q}_e \} \cdot \{ \delta \vec{q}_e \} \tag{3.134}$$

em que

$$\begin{aligned}
[\mathbb{Q}_e] &= \int_{A_e} [\mathbb{B}^\varphi(\vec{x}(\xi, \eta))]^T [\mathbb{Z}] [\mathbb{B}^\varphi(\vec{x}(\xi, \eta))] dA \\
&= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\mathbb{B}^\varphi(\vec{x}(\xi, \eta))]^T [\mathbb{Z}] [\mathbb{B}^\varphi(\vec{x}(\xi, \eta))] J(\xi, \eta) d\xi d\eta
\end{aligned} \tag{3.135}$$

sendo que a matriz  $[\mathbb{Z}]$  é dada por,

$$[\mathbb{Z}] = \begin{bmatrix} h_{n,1} \overline{\epsilon}_{D33}^{(n)} & 0 \\ 0 & h_{1,1} \overline{\epsilon}_{D33}^{(1)} \end{bmatrix} \quad (3.136)$$

Efetutando-se as multiplicações de matrizes e resolvendo a integral na área  $A$ , obtém-se,

$$[\mathbb{Q}_e] = \int_{A_e} \begin{bmatrix} \frac{\overline{\epsilon}_{D33}^{(n)}}{h_{n,1}} & 0 \\ 0 & \frac{\overline{\epsilon}_{D33}^{(1)}}{h_{1,1}} \end{bmatrix} dA = \begin{bmatrix} \frac{\overline{\epsilon}_{D33}^{(n)} A}{h_{n,1}} & 0 \\ 0 & \frac{\overline{\epsilon}_{D33}^{(1)} A}{h_{1,1}} \end{bmatrix} \quad (3.137)$$

Comparando com a equação da capacitância de um capacitor de placas paralelas, dada pela Eq. (1.4), é possível verificar que a matriz  $[\mathbb{Q}_e]$ , formada por termos puramente elétricos, corresponde à matriz de permissividade da equação constitutiva e que cada um de seus termos corresponde à capacitância das lâminas de material piezolétrico presente na estrutura do laminado, sejam estas sensores ou atuadores, confirmando o comportamento tipo capacitor das lâminas de PZT.

### Determinação da contribuição das deformações mecânicas na equação de equilíbrio elétrico

A fim de efetuar a discretização do termo eletromecânico da equação de equilíbrio elétrico, aplica-se inicialmente a relação descrita na Eq. (3.91), conforme apresentado abaixo,

$$\int_{A_e} [\mathbb{E}_{PS}^{(n)}]^T \vec{D}_g \cdot \delta \vec{E}^s dA + \int_{A_e} [\mathbb{E}_{PS}^{(1)}]^T \vec{D}_g \cdot \delta \vec{E}^a dA = \int_{A_e} [\mathbb{E}_{PS}^{(n)}]^T [\mathbb{B}] \cdot \{\vec{q}_e\} \delta \vec{E}^s dA + \int_{A_e} [\mathbb{E}_{PS}^{(1)}]^T [\mathbb{B}] \cdot \{\vec{q}_e\} \cdot \delta \vec{E}^a dA \quad (3.138)$$

Dado o versor da base cartesiana da lâmina  $\vec{e}_3$ , alinhado com a direção de polarização do material piezolétrico e do campo elétrico aplicado. Pode-se assim, descrever o vetor campo elétrico do sensor e do atuador em função do versor  $\vec{e}_3$  através das relações abaixo,

$$\begin{aligned} \vec{E}^s &= E_3^s \vec{e}_3 \\ \vec{E}^a &= E_3^a \vec{e}_3 \end{aligned} \quad (3.139)$$

Aplicando as equações acima às variações do vetor campo elétrico e substituindo na Eq. (3.138),

$$\begin{aligned} \int_{A_e} \left[ \mathbb{E}_{PS}^{(n)} \right]^T \vec{D}_g \cdot \delta \vec{E}^s dA + \int_{A_e} \left[ \mathbb{E}_{PS}^{(1)} \right]^T \vec{D}_g \cdot \delta \vec{E}^a dA = \\ \int_{A_e} \left[ \mathbb{E}_{PS}^{(n)} \right]^T [\mathbb{B}] \{ \vec{q}_e \} \cdot \vec{e}_3 \delta E_3^a dA + \int_{A_e} \left[ \mathbb{E}_{PS}^{(1)} \right]^T [\mathbb{B}] \{ \vec{q}_e \} \cdot \vec{e}_3 \delta E_3^a dA \end{aligned} \quad (3.140)$$

Lembrando que  $\vec{e}_3 = \delta_{3i} \hat{e}_i$  e analisando a fração da equação acima mostrada abaixo, pode-se discernir a validade das operações tensoriais realizadas, apresentadas em notação indicial para maior clareza,

$$\begin{aligned} \left[ \mathbb{E}_{PS} \right]^T [\mathbb{B}] \{ \vec{q}_e \} \cdot \vec{e}_3 &= \left[ \mathbb{E}_{PS} \right]_{ij} [\mathbb{B}]_{jk} \{ \vec{q}_e \}_k \delta_{3i} \\ &= \left[ \mathbb{E}_{PS} \right]_{3j} [\mathbb{B}]_{jk} \{ \vec{q}_e \}_k \end{aligned} \quad (3.141)$$

Substituindo a Eq. (3.141) na parcela abaixo da equação de equilíbrio elétrico, assim como as relações de discretização do campo elétrico definida na Eq. (3.97), resulta,

$$\begin{aligned} \int_{A_e} \left\{ \left[ \mathbb{E}_{PS}^{(n)} \right]^T [\mathbb{B}] \{ \vec{q}_e \} \cdot \vec{e}_3 \delta E_3^s + \left[ \mathbb{E}_{PS}^{(1)} \right]^T [\mathbb{B}] \{ \vec{q}_e \} \cdot \vec{e}_3 \delta E_3^a \right\} dA &= \int_{A_e} [\mathbb{B}^\varphi]^T [\mathbb{P}]^T [\mathbb{B}] dA \{ \vec{q}_e \} \{ \delta \vec{q}_e \} \\ &= [\mathbb{H}_e^{qu}]^T \{ \vec{q}_e \} \cdot \{ \delta \vec{q}_e \} \end{aligned} \quad (3.142)$$

sendo a matriz  $[\mathbb{H}_e^{qu}]$  definida na Eq. (3.107).

### Determinação da vetor de força nodal equivalente, associado à carga prescrita no contorno

Para a obtenção da forma discreta deste vetor, é necessário o uso da relação estabelecida na Eq. (3.139), que sendo aplicada na equação abaixo resulta em,

$$\begin{aligned} \int_{\partial A_\psi \cap \partial A_e} \bar{\Psi}^s z_n h_{n,1} \vec{e}_z \cdot \delta \vec{E}^s dA + \int_{\partial A_\psi \cap \partial A_e} \bar{\Psi}^a z_1 h_{1,1} \vec{e}_z \cdot \delta \vec{E}^a dA = \\ \int_{\partial A_\psi \cap \partial A_e} \bar{\Psi}^s z_n h_{n,1} \vec{e}_z \cdot \vec{e}_3 \delta E_3^s dA + \int_{\partial A_\psi \cap \partial A_e} \bar{\Psi}^a z_1 h_{1,1} \vec{e}_z \cdot \vec{e}_3 \delta E_3^a dA \end{aligned} \quad (3.143)$$

Dado que  $\vec{e}_z = \vec{e}_3$ , o produto escalar entre estes desaparece no produto, ou seja,  $\vec{e}_z \cdot \vec{e}_3 = 1$ . Portanto, pode-se re-arranjar os dois termos segundo a equação abaixo,

$$\int_{\partial A_\psi \cap \partial A_e} \bar{\psi}^s z_n h_{n,1} \vec{e}_z \cdot \delta \vec{E}^s dA + \int_{\partial A_\psi \cap \partial A_e} \bar{\psi}^a z_1 h_{1,1} \vec{e}_z \cdot \delta \vec{E}^a dA = \int_{\partial A_\psi \cap \partial A_e} [\bar{\Psi}] \begin{Bmatrix} \delta \vec{E}_3^s \\ \delta E_3^a \end{Bmatrix} dA \quad (3.144)$$

sendo a matriz  $[\bar{\Psi}]$  dada por,

$$[\bar{\Psi}] = \begin{bmatrix} \bar{\psi}^s z_n h_{n,1} & 0 \\ 0 & \bar{\psi}^a z_1 h_{1,1} \end{bmatrix} \quad (3.145)$$

Inserindo a relação de discretização do campo elétrico descrita na Eq. (3.97), obtém-se,

$$\begin{aligned} \int_{\partial A_\psi \cap \partial A_e} \bar{\psi}^s z_n h_{n,1} \vec{e}_z \cdot \delta \vec{E}^s dA + \int_{\partial A_\psi \cap \partial A_e} \bar{\psi}^a z_1 h_{1,1} \vec{e}_z \cdot \delta \vec{E}^a dA &= \int_{\partial A_\psi \cap \partial A_e} [\bar{\Psi}] [\mathbb{B}^\varphi] dA \left\{ \delta \vec{q}_e \right\} \\ &= \left\{ \vec{F}_e^E \right\} \left\{ \delta \vec{q}_e \right\} \end{aligned} \quad (3.146)$$

Assim como a força devida à tração prescrita no contorno, a força devida à carga prescrita na superfície, após integrada em  $z$ , se reduz a uma integral de linha. Logo, utilizando as relações de discretização assumidas nas Eqs. 3.120, 3.121, 3.125 e 3.126, define-se o vetor de força de origem elétrica  $\vec{F}_e^E$  como,

$$\vec{F}_e^E = \int_{-1}^1 [\bar{\Psi}] [\mathbb{B}^\varphi] J(\tau) d\tau \quad (3.147)$$

Para efetuar a integração numérica, utiliza-se a relação descrita na Eq. (3.82) e a Tab. 3.1, atentando ao número de pontos de integração utilizados em cada parcela da equação de equilíbrio elétrico. Os resultados estão ordenados na Tab. 3.3.

Matrizes	Integração numérica
$[\mathbb{Q}_e]$	$\sum_{i=1}^{npt} \sum_{j=1}^{npt} [\mathbb{B}^\varphi(\vec{x}(\xi_i, \eta_j))]^T [\mathbb{Z}] [\mathbb{B}^\varphi(\vec{x}(\xi_i, \eta_j))] J(\xi_i, \eta_j) W_i W_j$
$\vec{F}_e^E$	$\sum_{i=1}^{npt} [\bar{\Psi}] [\mathbb{B}^\varphi] J(\tau_i) W_i$

Tabela 3.3: Integração numérica das matrizes da equação de equilíbrio elétrico pela quadratura de Gauss-Legendre

Com a aplicação do método de Galerkin-Elementos finitos obtém-se o seguinte sistema de equações discretizadas,

$$\sum_e [\mathbb{M}_e] \left\{ \vec{q}_e \right\} \cdot \{ \delta \vec{q}_e \} + \sum_e [ [\mathbb{K}_e] + [\mathbb{H}_e^{qu}] ] \{ \vec{q}_e \} \cdot \{ \delta \vec{q}_e \} = \sum_e \left\{ \vec{F}_e^{gu} - \vec{F}_e^{g\theta} + \vec{F}_e^N - \vec{F}_e^M \right\} \cdot \{ \delta \vec{q}_e \} \quad (3.148)$$

em que

$$[\mathbb{M}_e] = [\mathbb{M}_e^u] + [\mathbb{M}_e^\theta] - [\mathbb{M}_e^{u\theta}] \quad (3.149)$$

e

$$[\mathbb{K}_e] = [\mathbb{K}_e^P] + [\mathbb{K}_e^S] \quad (3.150)$$

e

$$\sum_e [ [\mathbb{Q}_e] + [\mathbb{H}_e^{qu}]^T ] \{ \vec{q}_e \} \cdot \{ \delta \vec{q}_e \} = \sum_e \left\{ \vec{F}_e^E \right\} \{ \delta \vec{q}_e \} \quad (3.151)$$

ou ainda

$$\sum_e [\mathbb{K}_e^E] \{ \vec{q}_e \} \cdot \{ \delta \vec{q}_e \} = \sum_e \left\{ \vec{F}_e^E \right\} \{ \delta \vec{q}_e \} \quad (3.152)$$

em que

$$[\mathbb{K}_e^E] = [\mathbb{Q}_e] + [\mathbb{H}_e^{qu}]^T \quad (3.153)$$

Denominando  $(\vec{U}, \vec{\phi})$  como sendo o vetor de graus de liberdade globais do problema eletromecânico, no qual  $\vec{\phi} = (\vec{\phi}_S, \vec{\phi}_A)$ ,  $\vec{\phi}_S$  representando o vetor de potenciais elétricos associados aos sensores,  $\vec{\phi}_A$  o vetor de potenciais elétricos associados aos atuadores, e  $\vec{U}$  os graus de liberdade devido a deslocamentos e rotações nodais tem-se,

$$(\vec{U}, \vec{\phi}) = \cup_e \{ \vec{q}_e \}. \quad (3.154)$$

na qual  $\cup_e(\circ)$  representa o operador união de todos os graus de liberdade do problema eletromecânico, no qual os graus de liberdade são adequadamente ordenados.

De forma análoga, as variações dos graus de liberdade são representadas segundo a equação

seguinte,

$$(\delta\vec{U}, \delta\vec{\phi}) = \cup_e \{\delta\vec{q}_e\} \quad (3.155)$$

Adicionalmente, introduzindo o operador montagem de matrizes  $\mathbb{A}_e^M(\circ)$  e o operador montagem de vetores  $\mathbb{A}_e^v(\circ)$  pode-se definir,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbb{M} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} &= \mathbb{A}_e^M [\mathbb{M}_e] \\ \begin{bmatrix} \mathbb{K}_U & \mathbb{K}_{U\phi} \\ \mathbb{K}_{\phi U} & \mathbb{K}_\phi \end{bmatrix} &= \mathbb{A}_e^M [[\mathbb{K}_e] + [\mathbb{H}_e^{qu}] + [\mathbb{K}_e^E]] \end{aligned} \quad (3.156)$$

sendo que a matriz  $\mathbb{M}$  representa a matriz de massa discreta do laminado e as matrizes  $\mathbb{K}$  representam matrizes discretas de termos puramente mecânicos (matriz de rigidez  $\mathbb{K}_U$ ), de acoplamento eletro-mecânico (matrizes  $\mathbb{K}_{U\phi}$  e  $\mathbb{K}_{\phi U}$ ) e de termos puramente elétricos (matriz dielétrica  $\mathbb{K}_\phi$ ) do laminado, e

$$\begin{Bmatrix} \vec{F}_{ext}^{mec} \\ \vec{F}^E \end{Bmatrix} = \mathbb{A}_e^v \left\{ \vec{F}_e^{gu} - \vec{F}_e^{g\theta} + \vec{F}_e^N - \vec{F}_e^M + \vec{F}_e^E \right\} \quad (3.157)$$

em que o vetor  $\vec{F}_{ext}^{mec}$  representa as forças externas de natureza mecânica aplicadas ao laminado e o vetor  $\vec{F}^E$  as forças de origem elétrica. Logo, re-arranjando o sistema de equações de equilíbrio em função das definições acima,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbb{M} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{U} \\ \vec{\phi} \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \delta\vec{U} \\ \delta\vec{\phi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbb{K}_U & \mathbb{K}_{U\phi} \\ \mathbb{K}_{\phi U} & \mathbb{K}_\phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{U} \\ \vec{\phi} \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \delta\vec{U} \\ \delta\vec{\phi} \end{Bmatrix} \\ = \begin{Bmatrix} \vec{F}_{ext}^{mec} \\ \vec{F}^E \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \delta\vec{U} \\ \delta\vec{\phi} \end{Bmatrix}, \quad \forall \begin{Bmatrix} \delta\vec{U} \\ \delta\vec{\phi} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (3.158)$$

Para que o equilíbrio seja estabelecido para qualquer variação de deslocamento e potencial elétrico, a equação acima resulta em,

$$\begin{bmatrix} \mathbb{M} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{U} \\ \vec{\phi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbb{K}_U & \mathbb{K}_{U\phi} \\ \mathbb{K}_{\phi U} & \mathbb{K}_\phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{U} \\ \vec{\phi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \vec{F}_{ext}^{mec} \\ \vec{F}^E \end{Bmatrix} \quad (3.159)$$

No caso de utilização da decomposição  $\vec{\phi} = (\vec{\phi}_S, \vec{\phi}_A)$  é possível re-escrever a equação acima na forma seguinte,

$$\begin{bmatrix} \mathbb{M} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{U} \\ \vec{\phi}_S \\ \vec{\phi}_A \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbb{K}_U & \mathbb{K}_{U\phi}^{(S)} & \mathbb{K}_{U\phi}^{(A)} \\ \mathbb{K}_{\phi U}^{(S)} & \mathbb{K}_{\phi}^{(S)} & 0 \\ \mathbb{K}_{\phi U}^{(A)} & 0 & \mathbb{K}_{\phi}^{(A)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{U} \\ \vec{\phi}_S \\ \vec{\phi}_A \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \vec{F}_{ext}^{mec} \\ \vec{F}^S \\ \vec{F}^A \end{Bmatrix} \quad (3.160)$$

### 3.3.4 Obtenção das equações do sensor e do atuador

Dado que o elemento piezolétrico que apresenta a função de sensor trabalha utilizando o princípio piezolétrico direto, ou seja, um carregamento mecânico gerando o aparecimento de cargas induzidas no material, considera-se que o efeito piezolétrico inverso no sensor seja desprezível. Logo, o elemento sensor não produz forças de origem elétrica capazes de causar deformação na estrutura, uma consideração válida visto que o potencial elétrico desenvolvido no sensor é fraco (normalmente inferior à 1V). Logo, o vetor de forças elétricas  $\vec{F}^S$  é admitido nulo. Aplicando esta condição no sistema de equações acima, obtém-se,

$$\begin{aligned} [\mathbb{M}] \{ \vec{U}(t) \} + [\mathbb{K}_U] \{ \vec{U}(t) \} + [\mathbb{K}_{U\phi}^{(S)}] \{ \vec{\phi}_S(t) \} &= \{ \vec{F}_{ext}^{mec}(t) \} - [\mathbb{K}_{U\phi}^{(A)}] \{ \vec{\phi}_A(t) \} \\ [\mathbb{K}_{\phi U}^{(S)}] \{ \vec{U}(t) \} + [\mathbb{K}_{\phi}^{(S)}] \{ \vec{\phi}_S(t) \} &= 0 \\ [\mathbb{K}_{\phi U}^{(A)}] \{ \vec{U}(t) \} + [\mathbb{K}_{\phi}^{(A)}] \{ \vec{\phi}_A(t) \} &= \{ \vec{F}^A(t) \} \end{aligned} \quad (3.161)$$

A segunda equação do sistema representa a equação do sensor, relacionando o potencial elétrico gerado neste devido à ação de um deslocamento imposto à estrutura, onde o efeito piezolétrico direto é claramente verificado ou seja, ausência de tensão elétrica externa gerando o aparecimento de cargas elétricas no interior do corpo. A terceira equação é conhecida como equação do atuador, representando a relação entre a tensão elétrica imposta ao atuador e o deslocamento e força criados por consequência, caracterizando o efeito piezolétrico inverso, onde a presença de um campo elétrico resulta em deformação mecânica da estrutura. Nesta análise, torna-se necessário conhecer o impacto da evolução no tempo das variáveis dependentes deste. Como as forças mecânicas externas aplicadas na placa causam deformações únicas em cada instante de tempo, o potencial elétrico gerado no sensor em virtude de tais deformações apresentará igualmente um caráter temporal. Portanto, a fim de caracterizá-lo dinamicamente, deve-se conhecer as cargas elétricas que o originam. Dado que tais cargas se espalham na superfície do material de acordo com o modelo do capacitor ilustrado na Fig. 1.5 e que o deslocamento des-

tas é determinado pela segunda equação constitutiva do material piezolétrico, pode-se calcular a quantidade de cargas no sensor através da lei de Gauss, onde a carga elétrica de circuito fechado através dos eletrodos é dada por,

$$\psi^{(s)}(t) = \frac{1}{2} \left\{ \int_{A(z=z_n)} D_z(t) dA + \int_{A(z=z_{n+1})} D_z(t) dA \right\}$$

Nesta relação, apenas  $D_z$  é utilizado dado o sentido de polarização do material, ou seja, o deslocamento de cargas se dá unicamente nesta direção. Substituindo a equação constitutiva na relação acima obtém-se,

$$\begin{aligned} \psi^{(s)}(t) = \frac{1}{2} \int_A \left\{ [\bar{e}(3, :)]^{(n)} \vec{\epsilon}(t) + [\bar{\epsilon}_D^{\bar{e}}(3, :)]^{(n)} \vec{E}(t) \right. \\ \left. + [\bar{e}(3, :)]^{(n+1)} \vec{\epsilon}(t) + [\bar{\epsilon}_D^{\bar{e}}(3, :)]^{(n+1)} \vec{E}(t) \right\} dA \end{aligned} \quad (3.162)$$

Dado que os valores de carga gerados no sensor são pouco elevados (na faixa de  $mV$ ), o efeito piezolétrico inverso que aparece no sensor pode ser desconsiderado. Logo, a equação acima resume-se à,

$$\psi^{(s)}(t) = \frac{1}{2} \int_A \left\{ [\bar{e}(3, :)]^{(n)} \vec{\epsilon}(t) + [\bar{e}(3, :)]^{(n+1)} \vec{\epsilon}(t) \right\} dA$$

Separando as deformações resultantes de tensões no plano da lâmina das cisalhantes,

$$\begin{aligned} \psi^{(s)}(t) = \sum_e \frac{1}{2} \int_{A_e} \left\{ \left( [\bar{e}_p(3, :)]^{(n)} \right)^T \vec{\epsilon}_p(t) + \left( [\bar{e}_s(3, :)]^{(n)} \right)^T \vec{\gamma}_s(t) \right. \\ \left. + \left( [\bar{e}_p(3, :)]^{(n+1)} \right)^T \vec{\epsilon}_p(t) + \left( [\bar{e}_s(3, :)]^{(n+1)} \right)^T \vec{\gamma}_s(t) \right\} dA \end{aligned} \quad (3.163)$$

Substituindo as relações descritas na Eq. (D.2),

$$\begin{aligned} \psi^{(s)}(t) = \sum_e \frac{1}{2} \int_{A_e} \left\{ \left( [\bar{e}_p(3, :)]^{(n)} \right)^T \vec{\epsilon}_p^o(t) + z^{(n)} \left( [\bar{e}_p(3, :)]^{(n)} \right)^T \vec{\kappa}(t) \right. \\ \left. + \left( [\bar{e}_s(3, :)]^{(n)} \right)^T \vec{\gamma}_s(t) + \left( [\bar{e}_p(3, :)]^{(n+1)} \right)^T \vec{\epsilon}_p^o(t) \right. \\ \left. + z^{(n+1)} \left( [\bar{e}_p(3, :)]^{(n+1)} \right)^T \vec{\kappa}(t) + \left( [\bar{e}_s(3, :)]^{(n+1)} \right)^T \vec{\gamma}_s(t) \right\} dA \end{aligned} \quad (3.164)$$



Dado que as propriedades piezelétricas são as mesmas em ambas as superfícies do sensor e que estas são constantes, pode-se escrever,

$$\begin{aligned} [\bar{e}_p]^{(n)} &= [\bar{e}_p]^{(n+1)} \equiv [\bar{e}_p]^{(s)} \\ [\bar{e}_s]^{(n)} &= [\bar{e}_s]^{(n+1)} \equiv [\bar{e}_s]^{(s)} \end{aligned} \quad (3.165)$$

Inserindo a relação acima e re-organizando os termos, obtém-se,

$$\psi^{(s)}(t) = \sum_e \int_{A_e} \left\{ \left( [\bar{e}_p(3, :)]^{(s)} \right)^T \left[ \vec{\epsilon}_p^0(t) + \frac{(z^{(n)} + z^{(n+1)})}{2} \vec{k}(t) \right] + \left( [\bar{e}_s(3, :)]^{(s)} \right)^T \vec{\gamma}_s(t) \right\} dA \quad (3.166)$$

Multiplicando a equação acima por  $h_{n,1}$ , obtém-se,

$$\psi^{(s)}(t) = \sum_e \int_{A_e} \frac{1}{h_{n,1}} \left\{ \left[ \hat{G}^{(s)}(:, 3) \right]^T \vec{\epsilon}_p^0(t) + \left[ \hat{H}^{(s)}(:, 3) \right]^T \vec{k}(t) + \left[ \hat{I}^{(s)}(:, 3) \right]^T \vec{\gamma}_s(t) \right\} dA \quad (3.167)$$

Agrupando as parcelas das matrizes  $[\hat{G}]$ ,  $[\hat{H}]$  e  $[\hat{I}]$ , obtém-se a matriz  $[\mathbb{P}]$ , definida na Eq. (3.108), considerando unicamente a coluna relacionada ao sensor,

$$\psi^{(s)}(t) = \sum_e \int_{A_e} \frac{1}{h_{n,1}} [\mathbb{P}(:, 1)]^T \vec{D}_g(t) dA \quad (3.168)$$

Aplicando a discretização ao vetor de deformações,

$$\psi^{(s)}(t) = \sum_e \int_{A_e} \frac{1}{h_{n,1}} [\mathbb{P}(:, 1)]^T [\mathbb{B}] \{ \vec{q}_e(t) \} dA \quad (3.169)$$

Desta forma, a carga desenvolvida em cada sensor pode ser calculada. No caso de múltiplos sensores, a constante  $\frac{1}{h_{n,1}}$  será agrupada em uma matriz diagonal. Tal matriz corresponde à  $[\mathbb{B}^\phi]$ , apresentada na Eq. (3.97). Dado o fato desta matriz ser diagonal, pode-se afirmar que,

$$[\mathbb{B}^\phi] = [\mathbb{B}^\phi]^T \quad (3.170)$$

Substituir esta relação na equação da carga do sensor resulta em,

$$\boldsymbol{\psi}^{(s)}(t) = \sum_e \int_{A_e} [\mathbb{B}^{\varphi(s)}]^T [\mathbb{P}^{(s)}]^T [\mathbb{B}] dA \{\vec{q}_e(t)\} = [\mathbb{H}_e^{qu(s)}]^T \{\vec{q}_e(t)\} \quad (3.171)$$

Conhecendo a carga existente no sensor é possível calcular a tensão elétrica neste através da relação abaixo,

$$\boldsymbol{\varphi}^{(s)}(t) = \frac{1}{C_s} \boldsymbol{\psi}^s(t) \quad (3.172)$$

sendo sua capacitância  $C_s$  dada pela Eq. (1.4), conforme descrito abaixo,

$$C_s = \overline{\epsilon}_{D33} \frac{A}{h_{n,1}} \quad (3.173)$$

sendo que  $\overline{\epsilon}_{D33}$  é o coeficiente da matriz de permissividade (dielétrica) associado à direção do deslocamento das cargas elétricas e  $h_{n,1}$  e  $A$  a espessura e a área do sensor, respectivamente. Quando se considera a existência de múltiplos sensores, a constante  $\frac{1}{C_s}$  é agrupada em uma matriz diagonal. Tal matriz é representada pela inversa de  $[\mathbb{Q}_e]$ . Assim, a equação da tensão elétrica no sensor discretizada resta,

$$\boldsymbol{\varphi}^{(s)}(t) = [\mathbb{Q}_e^{(s)}]^{-1} [\mathbb{H}_e^{qu(s)}]^T \{\vec{q}_e(t)\} \quad (3.174)$$

A passagem para sistema de coordenadas global do laminado se faz pela aplicação do operador união  $\cup(\circ)$ , definido na Eq. (3.154), para ordenar adequadamente os graus de liberdade dos sensores e atuadores. Neste sistema, encontra-se a equivalência entre  $[\mathbb{H}_e^{qu(s)}]^T$  e  $[\mathbb{K}_{\phi U}^{(S)}]$  e  $[\mathbb{Q}_e^{(s)}]$  e  $[\mathbb{K}_{\phi}^{(S)}]$ . Substituir as relações estabelecidas na primeira equação do conjunto descrito na Eq. (3.161) resulta em,

$$[\mathbb{M}] \{\overline{\dot{U}}(t)\} + [\mathbb{K}_U] \{\vec{U}(t)\} + [\mathbb{K}_{U\phi}^{(S)}] \{\vec{\phi}_S(t)\} = \{\vec{F}_{ext}^{mec}(t)\} + [\mathbb{K}_{U\phi}^{(A)}] \{\vec{\phi}_A(t)\} \quad (3.175)$$

Substituir a equação do sensor na relação acima resulta em,

$$[\mathbb{M}] \{\overline{\dot{U}}(t)\} + \left( [\mathbb{K}_U] - [\mathbb{K}_{U\phi}^{(S)}] [\mathbb{K}_{\phi}^{(S)}]^{-1} [\mathbb{K}_{\phi U}^{(S)}] \right) \{\vec{U}(t)\} = \{\vec{F}_{ext}^{mec}(t)\} + [\mathbb{K}_{U\phi}^{(A)}] \{\vec{\phi}_A(t)\} \quad (3.176)$$

Considerando um amortecimento do tipo Rayleigh ou proporcional para representar o amor-

tecimento estrutural, pode-se re-escrever a equação de acordo com o exposto abaixo,

$$\begin{aligned} [\mathbb{M}] \left\{ \overrightarrow{\ddot{U}}(t) \right\} + [\mathbb{C}] \left\{ \overrightarrow{\dot{U}}(t) \right\} + \left[ [\mathbb{K}_U] - [\mathbb{K}_{U\phi}^{(S)}] [\mathbb{K}_{\phi}^{(S)}]^{-1} [\mathbb{K}_{\phi U}^{(S)}] \right] \left\{ \vec{U}(t) \right\} \\ = \left\{ \vec{F}_{ext}^{mec}(t) \right\} + [\mathbb{K}_{U\phi}^{(A)}] \left\{ \vec{\phi}_A(t) \right\} \end{aligned} \quad (3.177)$$

na qual a matriz de amortecimento  $[\mathbb{C}]$  é descrita como,

$$[\mathbb{C}] = \alpha [\mathbb{M}] + \beta [\mathbb{K}_U] \quad (3.178)$$

Sendo conhecido o comportamento dinâmico da estrutura sob a ação de esforços mecânicos e elétricos, é então possível a elaboração do controle, buscando a redução de vibrações da placa. A fim de modelar numericamente o problema proposto, o Método de Elementos Finitos foi selecionado para representar o comportamento dos materiais que compõem a estrutura em questão. Para a simulação da parte estática, este método é suficiente para obter-se a solução das equações de equilíbrio. Porém, no caso dinâmico, a utilização de um algoritmo capaz de resolvê-las passo a passo é necessária. Neste trabalho, um método implícito de integração direta foi escolhido, de modo a solucionar as equações de equilíbrio a cada instante de tempo. Assim, considerando conhecida a solução destas equações em um instante de tempo  $t$ , pode-se calcular a solução do problema para um instante  $t + 1$ . Entre diferentes métodos de integração direta, este trabalho optou pela utilização do método de Newmark, apresentado no apêndice C.



## 4 VALIDAÇÃO DO MODELO

Este capítulo visa validar o modelo matemático para estruturas laminadas contendo materiais piezelétricos que trabalham como sensores e atuadores desenvolvido anteriormente. A fim de simular numericamente as estruturas, modelos foram desenvolvidos no software comercial MATLAB<sup>®</sup>. A verificação da eficácia dos resultados foi efetuada através de comparações com resultados analíticos, outros trabalhos que utilizaram igualmente o Método dos Elementos Finitos e com modelos desenvolvidos no software comercial ANSYS<sup>®</sup>. Diferentes configurações de placas foram testadas, submetidas a estímulos mecânicos e elétricos, apresentando de condições de contorno diversas. Em todas as situações, o elemento utilizado foi o Quad9. As condições de contorno associadas à cada caso encontram-se na Tab. 4.1, contendo unicamente os graus de liberdades mecânicos associados a tais testes, onde 0 e 1 representam livre e fixo, respectivamente.

Tipo de apoio	Graus de liberdade				
	$u$	$v$	$w$	$\theta_y$	$-\theta_x$
simples em $x$	0	0	1	1	0
simples em $y$	0	0	1	0	1
engastado	1	1	1	1	1

Tabela 4.1: Condições de contorno dos graus de liberdade mecânicos

Os valores dos resultados para a deflexão são adimensionalizados através da Eq. (4.1) relatada abaixo,

$$\bar{w} = w \frac{Y_2 h^3}{l^4 F_{ext}^{mec}} 10^n \quad (4.1)$$

onde  $Y_2$  é o módulo de Young tomado na direção 2 nos eixos de ortotropia dos materiais composto e piezelétrico,  $l$  e  $h$  são o comprimento e a espessura da placa, respectivamente, e  $n$  é uma constante inteira que define o fator multiplicativo de  $w$ .

## 4.1 Placa isotrópica

Neste primeiro teste, uma placa de material isotrópico sob ação de carga concentrada é considerada. A estrutura proposta é mostrada na Fig. 4.1, sendo possível visualizar o ponto de aplicação da força (central), assim como sua direção e sentido (perpendicular ao plano da placa) e o tipo de condição de contorno considerado. As dimensões da placa e suas propriedades mecânicas encontram-se na Tab. 4.2, todas apresentando unidades definidas no Sistema Inglês.

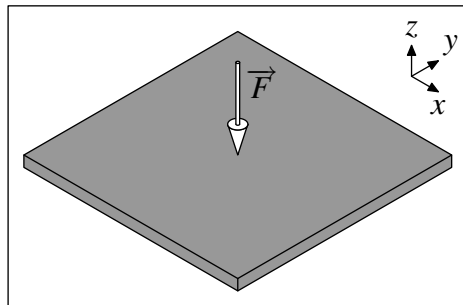


Figura 4.1: Placa isotrópica

Propriedades	Valor	Valor SI
Comprimento ( $l$ ) e largura ( $b$ )	10in	0,254m
Espessura ( $h$ )	0,1in	$2,54e^{-3}m$
Módulo de Young ( $Y$ )	$30e^6psi$	206,8GPa
Coefficiente de Poisson ( $\nu_{12}$ )	0,3	0,3
Carga aplicada ( $F_{ext}^{mec}$ )	40lb	177,93N

Tabela 4.2: Dados da placa isotrópica [39]

A intenção deste teste é validar a simetria e a não-singularidade da matriz de rigidez tangente do modelo  $\mathbb{K}_U$ , fatores essenciais para o correto funcionamento do cálculo dos deslocamentos da estrutura. Dada a simetria existente devido ao fato da placa ser quadrada e o material ser homogêneo, apenas 1/4 da placa foi utilizado nos cálculos, sendo a porção da placa discretizada em 4 elementos. O valor de deflexão máxima obtido foi comparado com o valor da solução analítica e o valor do exemplo resolvido 10.7.1 encontrados em Kwon e Bang [39]. Neste exemplo, o elemento utilizado é o Quad4 e três tipos de integração numérica são utilizados: completa (F), reduzida (R) e seletiva (S). A comparação de resultados é exposta na Tab. 4.3.

O resultado encontrado foi considerado satisfatório e capaz de validar a integridade da matriz de rigidez tangente  $\mathbb{K}_U$  da estrutura. Com a malha utilizada, a convergência ao valor da solução analítica é atingida tanto com integração reduzida quanto com a seletiva. Entretanto,

<b>Tipo de integração</b>	<b>Kwon <i>Q4</i></b>	<b>FEM <i>Q9</i></b>
F	0,0002	0,0151
R	0,0177	0,0169
S	0,0168	0,0169
<b>Solução analítica</b>	0.0169	0.0169

Tabela 4.3: Comparação dos valores de deflexão máxima  $w$  (em polegadas) para a placa isotrópica simplesmente apoiada submetida a carga concentrada

a integração numérica completa apresentou um percentual de erro de  $-11,92\%$  em relação ao valor da solução analítica.

Outros testes foram realizados para analisar o comportamento da placa submetida à carga distribuída, onde pretendeu-se verificar também a robustez do modelo frente a diferentes relações  $l/h$  e condições de contorno. Os resultados de deflexão máxima obtidos foram adimensionados utilizando a relação apresentada na Eq. (4.1) para  $n = 2$  e comparados com soluções analíticas e resultados encontrados por Reddy em [40]. As propriedades mecânicas da estrutura utilizada nestes testes são apresentadas na Tab. 4.4, todas com unidades definidas no Sistema International (SI).

<b>Propriedades</b>	<b>Valor</b>
Comprimento ( $l$ ) e largura ( $b$ )	$1m$
Módulo de Young ( $Y$ )	$30Mpa$
Coefficiente de Poisson ( $\nu_{12}$ )	$0,25$
Carga aplicada ( $F_{ext}^{mec}$ )	$10Pa$

Tabela 4.4: Dados da placa isotrópica [40]

Como a placa é simétrica, apenas 1/4 desta foi discretizado. O primeiro teste foi efetuado com a placa simplesmente apoiada no contorno, dividida em malhas com diferentes números de elementos Quad9, exatamente como proposto pela referência de comparação. Os tipos de integração numérica completa, reduzida e seletiva foram igualmente analisados. A comparação dos resultados é mostrada na Tab. 4.5.

Os resultados obtidos se mostraram aceitáveis, com margens de erro nulas em relação aos valores encontrados por Reddy. O pior resultado foi para a utilização de um único elemento para a representação de placa fina ( $l/h = 100$ ), onde a margem de erro em relação à solução analítica se mostrou de  $12,4082\%$ . Entretanto, dado que o mesmo valor foi encontrado por Reddy, acredita-se que a disparidade existente é devida à pouca representatividade de modelar toda a placa por um elemento somente. Com o aumento do número de elementos, o percentual de erro se reduziu. Na representação da placa espessa ( $l/h = 10$ ) a mesma situação ocorreu para

Relação l/h	Malha	Tipo de Integração	Reddy	FEM
10	1 x 1	F	4,5304	4,5304 – (5,447%)
		R	4,9711	4,9711 – (3,750%)
		S	4,9426	4,9426 – (3,156%)
	2 x 2	F	4,7707	4,7707 – (0,432%)
		R	4,8005	4,8005 – (0,190%)
		S	4,7989	4,7989 – (0,157%)
	4 x 4	F	4,7897	4,7897 – (0,035%)
		R	4,7917	4,7917 – (0,006%)
		S	4,7916	4,7916 – (0,004%)
<b>Solução analítica</b>			4,7914	
100	1 x 1	F	4,0028	4,0028 – (12,408%)
		R	4,7483	4,7483 – (3,906%)
		S	4,7196	4,7196 – (3,278%)
	2 x 2	F	4,4822	4,4822 – (1,917%)
		R	4,5815	4,5815 – (0,256%)
		S	4,5799	4,5799 – (0,221%)
	4 x 4	F	4,5530	4,5530 – (0,368%)
		R	4,5729	4,5729 – (0,068%)
		S	4,5728	4,5728 – (0,066%)
<b>Solução analítica</b>			4,5698	

Tabela 4.5: Comparação dos valores de deflexão máxima  $\bar{w}$  para a placa isotrópica simplesmente apoiada submetida à carga distribuída

a simulação com um único elemento. Porém, com o refino da malha, a taxa de erro se manteve abaixo de 0,5% de erro em relação à solução analítica.

Para a placa fina, a melhor precisão obtida em comparação com a solução analítica foi de 0,0657% de erro para a malha de 4X4 elementos no tipo de integração numérica seletiva, que apresentou melhores resultados que a integração numérica completa e reduzida em todos os casos testados. Para a placa espessa, a melhor precisão obtida foi de 0,0045% de erro para a mesma malha de 4X4 elementos no tipo de integração numérica seletiva, que apresentou igualmente melhores resultados que os outros dois tipos de integração em todas as situações. Testes com maior discretização de malha foram efetuados a fim de verificar se o valor de deflexão tenderia ao valor exato da solução analítica. Para a malha de 8X8 elementos, o valor encontrado é de 4,5724 para a placa delgada e este valor se mantém para outras situações de discretização, ou seja, este é o valor de convergência máximo do modelo, apresentando um percentual de erro de 0,0569% em relação à solução analítica apresentada na Tab. 4.5. Para a placa espessa, o valor de convergência máximo foi de 4,7912, obtido igualmente com a malha de 8X8 elementos, apresentando um percentual de erro de 0,0045%. Ambos os testes acima mencionados representam valores obtidos utilizando integração numérica seletiva.



No segundo teste realizado a placa engastada no contorno foi considerada. A análise da influência do refino da malha e do tipo de integração numérica aplicado foram analisados e comparados novamente com os valores encontrados por Reddy [40] e com o valor obtido pela Teoria Clássica de Placas (CPT) para a situação de placa fina. Os resultados são apresentados na Tab. 4.6.

Relação l/h	Malha	Tipo de Integração	Reddy	FEM
10	2 x 2	F	1,5983	1,5983
		R	1,6903	1,6903
		S	1,6880	1,6880
	4 x 4	F	1,6685	1,6685
		R	1,6760	1,6760
		S	1,6758	1,6758
100	2 x 2	F	1,1222	1,1222
		R	1,4417	1,4417
		S	1,4382	1,4382
	4 x 4	F	1,3546	1,3546
		R	1,4271	1,4271
		S	1,4268	1,4268
100	4 x 4	<b>CPT(C)</b>	1,4370	

Tabela 4.6: Comparação dos valores de deflexão máxima  $\bar{w}$  para a placa isotrópica engastada submetida à carga distribuída

Os resultados obtidos se mostraram aceitáveis novamente, com margens de erro nulas em relação aos valores encontrados por Reddy. O pior resultado foi em comparação com a Teoria Clássica de Placas, com um percentual de erro de 6,0830% usando integração numérica completa. Tal diferença foi atribuída à diferença de formulações dado que o percentual de erro entre o valor encontrado por Reddy e o CPT foi o mesmo. Com a utilização de integração numérica reduzida e seletiva, o percentual de erro reduziu para 0,6937% e 0,7149% respectivamente. Entretanto, o grande enfoque comparativo neste teste é dado aos valores apresentados por Reddy, dado que sua placa é também formulada utilizando a Teoria de Placas de Mindlin.

## 4.2 Placa ortotrópica

A fim de validar o modelo para materiais ortotrópicos, três testes foram efetuados. Inicialmente, apenas uma lâmina foi simulada, considerando-se diferentes ângulos de direção das fibras em relação ao eixo  $x$ . Uma vez validado o modelo para uma lâmina, o laminado por inteiro foi testado, sendo este formado por lâminas com diferentes orientações. Nestes testes, a condição de simetria não mais pôde ser considerada, pois para ângulos de orientação das fibras diferentes de  $0^\circ$  e  $90^\circ$  a estrutura apresenta uma não simetria material [34].

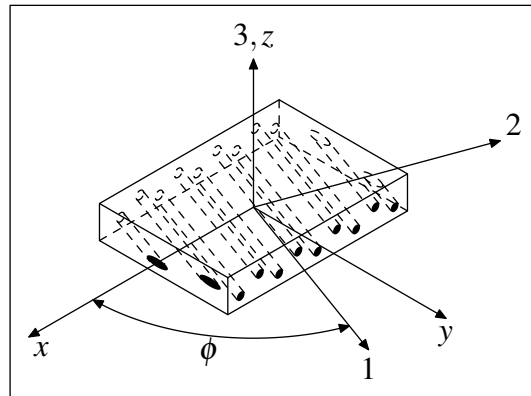


Figura 4.2: Representação esquemática da lâmina composta

O teste para verificação do modelo de uma única lâmina foi efetuado para uma placa retangular engastada no contorno submetida à uma carga distribuída. As propriedades mecânicas da lâmina e as dimensões da placa encontram-se expostas na Tab. 4.7 e uma representação esquemática desta é fornecida na Fig. 4.2.

Propriedades	Valor
Comprimento ( $l$ )	$2m$
Largura ( $b$ )	$1m$
Módulo de Young na direção $x$ ( $Y_1$ )	$30Mpa$
Módulos de Young na direção $y$ e $z$ ( $Y_2 = Y_3$ )	$Y_1/40$
Módulos de cisalhamento ( $G_{12} = G_{13}$ )	$0,6Y_2$
Módulo de cisalhamento ( $G_{23}$ )	$0,5Y_2$
Coefficientes de Poisson ( $\nu_{12} = \nu_{13}$ )	$0,25$
Carga aplicada ( $F_{ext}^{mec}$ )	$10Pa$

Tabela 4.7: Dados da placa ortotrópica

Os resultados de deflexão máxima obtidos foram adimensionalizados utilizando a relação apresentada na Eq. (4.1) para  $n = 3$ . Como não existe uma solução analítica para este problema, os resultados foram comparados com os resultados encontrados por [Lakshminarayana e Murthy \[41\]](#), que são tomados como referência. Dado que estes utilizam um tipo diferente de elemento (TRIPLT), os resultados obtidos foram também comparados com [Noel \[42\]](#) e [Calixto \[34\]](#), que utilizaram elementos Quad9. A placa ortotrópica modelada por Noel foi baseada no Princípio de Hellinger-Reissner modificado e a de Calixto na Teoria de Placas de Ordem Superior. Dado que nos testes anteriores a integração numérica seletiva apresentou melhores resultados que os tipos reduzido e completo, os próximos testes são feitos considerando apenas a integração S. A comparação da deflexão máxima na placa ortotrópica é apresentada na Tab. 4.8.

Os valores que se encontram entre parênteses são os percentuais de erro associados à cada

Relação l/h	$\theta$	TRIPLT	FEM	Noel	Calixto
10	0°	16,0507	16,2317 – (1,13%)	16,2272 – (1,10%)	15,7343 – (1,97%)
	15°	14,8537	15,0671 – (1,44%)	15,0643 – (1,42%)	14,6168 – (1,59%)
	30°	11,0010	11,1742 – (1,57%)	11,1749 – (1,58%)	10,8630 – (1,25%)
	45°	6,8400	6,9028 – (0,92%)	6,9045 – (0,94%)	6,7023 – (2,01%)
	60°	4,5215	4,5347 – (0,29%)	4,5367 – (0,34%)	4,3751 – (3,24%)
	75°	3,5430	3,5442 – (0,03%)	3,5458 – (0,08%)	3,4000 – (4,04%)
	90°	3,2798	3,2786 – (0,04%)	3,2798 – (0,00%)	3,1388 – (4,30%)
100	0°	10,5375	10,6593 – (1,16%)	10,6598 – (1,16%)	10,3073 – (2,18%)
	15°	9,4455	9,8893 – (4,70%)	8,8907 – (5,87%)	9,5603 – (1,22%)
	30°	6,0859	6,4766 – (6,42%)	6,4782 – (6,45%)	6,2694 – (3,02%)
	45°	2,8985	2,8974 – (0,04%)	2,8969 – (0,06%)	2,8067 – (3,17%)
	60°	1,4139	1,3849 – (2,05%)	1,3847 – (2,07%)	1,3409 – (5,16%)
	75°	0,9134	0,9176 – (0,46%)	0,9177 – (0,47%)	0,8883 – (2,75%)
	90°	0,8017	0,8051 – (0,42%)	0,8051 – (0,42%)	0,7793 – (2,79%)

Tabela 4.8: Comparação dos valores de deflexão máxima  $\bar{w}$  para a placa ortotrópica engastada submetida à carga distribuída

formulação em relação àqueles obtidos pelo elemento TRIPLT. As taxas de erro variaram de um valor de  $\theta$  para outro, apresentando valores compreendidos entre 0,03% e 1,57% para a placa espessa e entre 0,04% e 6,42% para a placa delgada. Realizando uma comparação com os valores obtidos por outros autores em relação à referência, os resultados encontrados foram considerados aceitáveis, dado que estes se situam em uma faixa de valores próxima (entre 0,00% e 6,50%).

Uma vez validado o modelo para uma única lâmina de material composto, é possível verificar o desempenho do laminado por completo, formado por lâminas com diferentes orientações de fibras. Dois casos foram testados: laminado simétrico e anti-simétrico. As propriedades mecânicas do material utilizado em ambos os testes estão expostas na Tab. 4.9.

Propriedades	Valor
Comprimento ( $l$ ) e largura ( $b$ )	1m
Módulo de Young na direção $x$ ( $Y_1$ )	175Gpa
Módulos de Young na direção $y$ e $z$ ( $Y_2 = Y_3$ )	$Y_1/25$
Módulos de cisalhamento ( $G_{12} = G_{13}$ )	$0,5Y_2$
Módulo de cisalhamento ( $G_{23}$ )	$0,2Y_2$
Coefficientes de Poisson ( $\nu_{12} = \nu_{13}$ )	0,25
Carga aplicada ( $F_{ext}^{mec}/A$ )	10Pa

Tabela 4.9: Propriedades mecânicas do laminado ortotrópico

O laminado simétrico proposto apresenta um esquema de laminação  $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ , sendo que todas as lâminas possuem a mesma espessura. O laminado em questão se encontra simples-

mente apoiado no contorno e é submetido à uma carga distribuída sobre sua superfície. Neste teste, os resultados são comparados com os valores obtidos por Belo [43] utilizando elementos tipo Quad8 e com a solução analítica de Navier. Três relações comprimento-espessura são avaliadas: laminado espesso, semi-espesso e delgado, sendo cada um simulado utilizando diferentes malhas. A integração numérica é do tipo seletiva. Os resultados foram adimensionalizados através da relação definida na Eq. (4.1) com  $n = 2$  e são mostrados na Tab. 4.10, onde os valores contidos entre parênteses são os erros tomados em relação à solução analítica.

Relação $l/h$	Malha	FEM	Belo
10	2 x 2	1,0234 – (0,15%)	1,0284 – (0,64%)
	4 x 4	1,0220 – (0,01%)	1,0229 – (0,10%)
	8 x 8	1,0219 – (0,00%)	1,0232 – (0,13%)
<b>Solução analítica</b>		1,0219	
20	2 x 2	0,7582 – (0,13%)	0,7500 – (0,95%)
	4 x 4	0,7573 – (0,01%)	0,7548 – (0,32%)
	8 x 8	0,7572 – (0,00%)	0,7574 – (0,03%)
<b>Solução analítica</b>		0,7572	
100	2 x 2	0,6704 – (0,10%)	0,6576 – (1,81%)
	4 x 4	0,6697 – (0,00%)	0,6660 – (0,55%)
	8 x 8	0,6697 – (0,00%)	0,6694 – (0,04%)
<b>Solução analítica</b>		0,6697	

Tabela 4.10: Comparação dos valores de deflexão máxima  $\bar{w}$  para o laminado ortotrópico  $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$  simplesmente apoiado submetido à carga distribuída

Os valores obtidos foram considerados satisfatórios, apresentando um erro máximo de 0,15% na malha de 2X2 elementos para o caso de laminado espesso ( $l/h = 10$ ). Os maiores erros encontrados foram para os casos de malha menos discretizada (apenas quatro elementos), pois com o refino da malha a taxa de erro ficou restrita ao intervalo entre 0,01% e 0,00%. O melhor desempenho foi alcançado na situação de placa delgada ( $l/h = 100$ ), onde a convergência para a solução exata se deu com uma malha de 4X4 elementos.

No segundo caso, um laminado anti-simétrico é proposto, apresentando uma seqüência de empilhamento de lâminas  $[45^\circ/-45^\circ]_4$ , todas estas possuindo a mesma espessura. O laminado em questão se encontra simplesmente apoiado no contorno e é submetido à uma carga distribuída sobre sua superfície. Assim como anteriormente, os resultados são comparados com os valores obtidos por Belo [43] e com a solução analítica de Navier. As mesmas relações comprimento-espessura e malhas são avaliadas, utilizando integração numérica seletiva. Os resultados adimensionalizados usando  $n = 2$  na Eq. (4.1) são expostos na Tab. 4.11, onde os valores contidos entre parênteses são os erros tomados em relação à solução analítica.

O desempenho obtido pelo modelo foi considerado satisfatório, apresentando um erro má-

Relação $l/h$	Malha	FEM	Belo
10	2 x 2	0,6374 – (0,13%)	0,6510 – (2,26%)
	4 x 4	0,6367 – (0,02%)	0,6463 – (1,52%)
	8 x 8	0,6367 – (0,02%)	0,6337 – (0,46%)
<b>Solução analítica</b>		0,6366	
20	2 x 2	0,4488 – (0,11%)	0,4099 – (8,57%)
	4 x 4	0,4483 – (0,00%)	0,4466 – (0,38%)
	8 x 8	0,4483 – (0,00%)	0,4425 – (1,29%)
<b>Solução analítica</b>		0,4483	
100	2 x 2	0,3888 – (0,13%)	0,3327 – (14,32%)
	4 x 4	0,3883 – (0,00%)	0,3826 – (1,47%)
	8 x 8	0,3883 – (0,00%)	0,3815 – (1,75%)
<b>Solução analítica</b>		0,3883	

Tabela 4.11: Comparação dos valores de deflexão máxima  $\bar{w}$  para o laminado ortotrópico  $[45^\circ / -45^\circ]_4$  simplesmente apoiado submetido à carga distribuída

ximo de 0,13% na malha de 2X2 elementos para o caso de laminado espesso ( $l/h = 10$ ) e delgado ( $l/h = 100$ ). Assim como no teste anterior, os maiores erros encontrados foram para a malha menos refinada. Com o aumento do número de elementos, a taxa de erro ficou restrita ao valor máximo de 0,02%. As melhores taxas de convergência foram alcançadas nas situações de placa semi-espessa ( $l/h = 20$ ) e delgada ( $l/h = 100$ ), onde esta se deu com uma malha de somente 4X4 elementos.

### 4.3 Placa compósita com atuadores piezelétricos acoplados à superfície

Uma vez comprovado o correto funcionamento da placa compósita laminada, a eficácia da modelagem do material piezelétrico foi investigada. A princípio, um teste estático utilizando o PZT unicamente como atuador foi efetuado, de acordo com o teste proposto por [Lam et al.](#) [8]. A estrutura simulada consistiu em uma placa laminada compósita engastada por um de seus lados com sequência de laminação  $[-45^\circ/45^\circ / -45^\circ/45^\circ]$  e de dois atuadores aderidos às superfícies superior e inferior da placa, revestindo-as completamente. As dimensões da estrutura e as propriedades físicas dos materiais utilizados encontram-se descritas na Tab. 4.12.

Primeiramente, uma tensão elétrica de 10V foi aplicada aos atuadores, um com sinal oposto em relação ao outro, sem a presença de força mecânica externa. A deflexão na linha central da placa foi avaliada em função do estímulo elétrico e comparada com os valores obtidos pelo modelo desenvolvido no software ANSYS<sup>®</sup>, dada a inexistência de valores para comparação em [8]. Os resultados dos modelos são ilustrados na Fig. 4.3.

Propriedades	PZT	Material composto
Comprimento ( $l$ ) e largura ( $b$ )	$0,2m$	$0,2m$
Espessura das lâminas ( $h$ )	$1X10^{-4}m$	$25X10^{-5}m$
Módulo de Young na direção $x$ ( $Y_1$ )	$63GPa$	$150GPa$
Módulos de Young na direção $y$ e $z$ ( $Y_2 = Y_3$ )	$63GPa$	$9GPa$
Módulos de cisalhamento ( $G_{12} = G_{13}$ )	$24,2GPa$	$7,10GPa$
Módulo de cisalhamento ( $G_{23}$ )	$24,2GPa$	$2,50GPa$
Coefficientes de Poisson ( $\nu_{12} = \nu_{13}$ )	$0,3$	$0,3$
Coefficiente de Poisson ( $\nu_{23}$ )	$0,3$	$0,3$
Constantes piezelétricas ( $d_{31} = d_{32}$ )	$254X10^{-12}m/V$	
Constantes dielétricas ( $\epsilon_{11}^e = \epsilon_{22}^e$ )	$15,3X10^{-9}F/m$	
Constante dielétrica ( $\epsilon_{33}^e$ )	$15,0X10^{-9}F/m$	

Tabela 4.12: Propriedades físicas dos materiais piezelétrico e composto

Uma pequena divergência é encontrada em relação à deflexão no ponto final considerado, sendo o valor obtido pelo modelo desenvolvido de  $-0,5412mm$  e o encontrado com o modelo ANSYS® de  $-0,5433mm$ , resultando em um erro de  $0,3759\%$ . Tal discrepância foi considerada admissível dado o fato do primeiro modelo ser formulado utilizando elementos planos (Quad9), enquanto no software comercial utilizou-se elementos sólidos (SOLID5 para o material composto e piezelétrico).

Um segundo teste foi efetuado a fim de avaliar o comportamento da placa sob esforço mecânico. Uma carga distribuída de  $100N.m^{-2}$  é aplicada sobre a placa simultaneamente à uma tensão elétrica que visa eliminar os efeitos de deformação desta. Tal situação foi simulada para diferentes valores de alimentação dos atuadores, inclusive para tensão elétrica nula, a fim de possibilitar a visualização do efeito dos atuadores em relação ao caso de ausência de reação à tensão mecânica externa. Os deslocamentos da estrutura foram calculados sobre a linha central e são expostos na Fig. 4.4, em comparação com os valores encontrados pelo modelo desenvolvido no ANSYS®.

Para a tensão elétrica nula, pode-se observar a simples deflexão da estrutura. Com a aplicação de potenciais elétricos, os atuadores deformam-se devido ao efeito piezelétrico inverso e tendem a contrabalancear a ação do esforço mecânico. Com o aumento da tensão elétrica, deformações mais expressivas são geradas pelos atuadores. Assim, a estrutura se aproxima da configuração de equilíbrio inicial. No caso de alimentar-se os atuadores com  $50V$ , pode-se observar que a deflexão na linha central da placa aproxima-se da situação de deslocamento nulo, conforme pretendido. Os valores de deslocamento obtidos e diferença absoluta entre os modelos para cada curva encontram-se expostos na Tab. 4.13.

Face aos valores obtidos em cada situação, os resultados foram considerados satisfatórios.

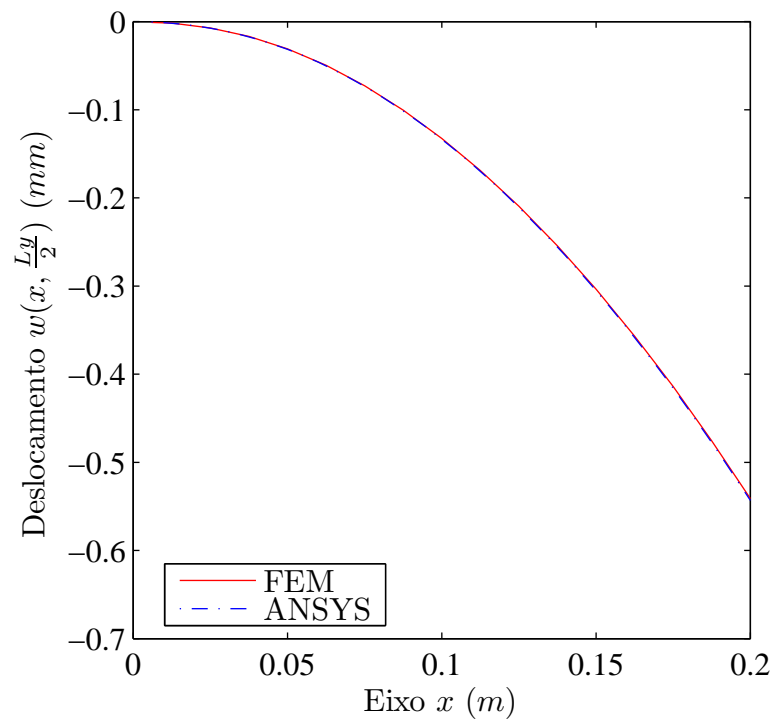


Figura 4.3: Deflexão da linha central da placa sujeita à tensão elétrica de 10V

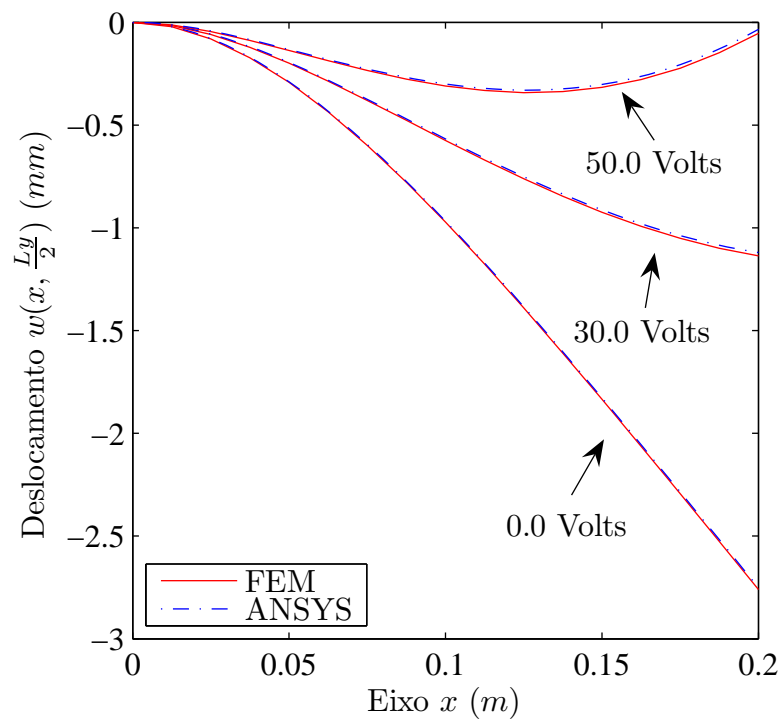


Figura 4.4: Deflexão na linha central da placa sob ação de tensões mecânica e elétrica

Tensão elétrica de entrada	ANSYS®	FEM
0,0V	-2,7599mm	-2,7504mm - (0,0095mm)
30,0V	-1,1362mm	-1,1206mm - (0,0156mm)
50,0V	-0,0537mm	-0,0340mm - (0,0197mm)

Tabela 4.13: Comparação dos valores de deflexão no ponto *P*

A ação dos atuadores na estrutura mostrou-se capaz de gerar esforços resistivos significativos, causando impacto na deformação final da placa.

#### 4.4 Placa com sensores e atuadores piezelétricos acoplados à superfície

Um segundo teste para a validação dos materiais piezelétricos é efetuado, considerando a utilização destes como sensores e atuadores aderidos às superfícies de uma placa de material isotrópico simplesmente apoiada. A estrutura proposta apresenta três atuadores e três sensores situados na face superior e inferior, respectivamente, sendo que o atuador encontra-se perfeitamente alinhado com seu respectivo sensor ao longo da espessura do laminado, de acordo com o proposto por [Abreu, Ribeiro e Steffen Jr \[44\]](#). O objetivo deste teste foi avaliar a exatidão do sensor nas medidas de deformação da estrutura. Tais deformações foram inflingidas à placa através da alimentação dos atuadores. Uma representação gráfica da estrutura é apresentada na [Fig. 4.5](#), onde é possível visualizar a disposição dos elementos piezelétricos sobre as superfícies da placa.

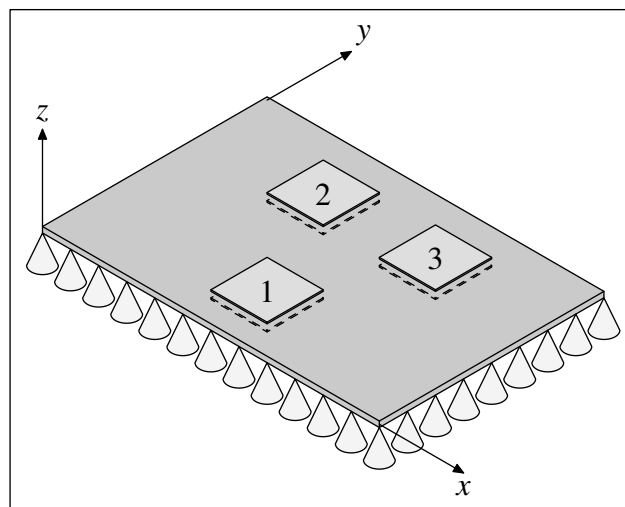


Figura 4.5: Configuração da placa com sensores e atuadores

A [Tab. 4.14](#) contém as propriedades físicas dos materiais utilizados no teste e a [Fig. 4.6](#)



apresenta a posição dos sensores e atuadores sobre a placa.

Propriedades	Sensor	Atuador	Placa
Comprimento ( $a$ ) e largura ( $b$ )	$0,1m \times 0,1m$	$0,1m \times 0,1m$	$0,6m \times 0,4m$
Espessura ( $h$ )	$0,205 \times 10^{-3}m$	$0,254 \times 10^{-3}m$	$1 \times 10^{-3}m$
Módulo de Young ( $Y$ )	$2GPa$	$69GPa$	$207GPa$
Coefficiente de Poisson	0,3	0,3	0,29
Constante piezelétrica ( $e_{31} = e_{32}$ )	$-0,046C/m^2$	$-12,5C/m^2$	
Constante dielétrica	$1,06 \times 10^{-10}F/m$	$1,6 \times 10^{-8}F/m$	

Tabela 4.14: Propriedades físicas dos materiais piezelétrico e isotrópico

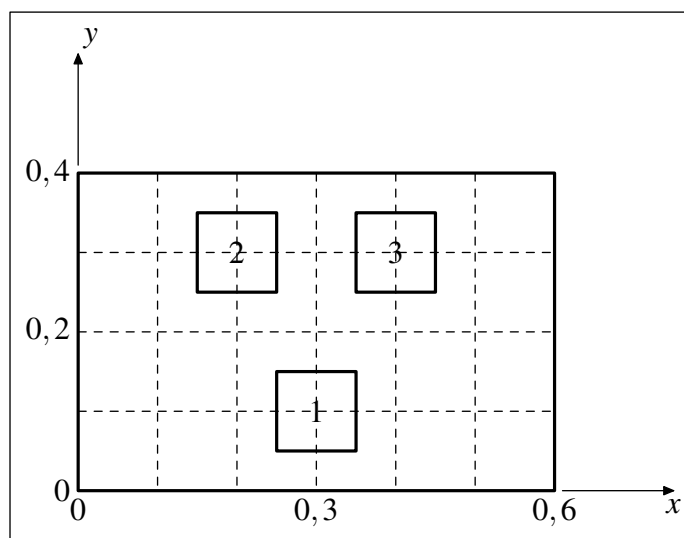


Figura 4.6: Configuração da placa com materiais piezelétrico

Neste teste, os valores de alimentação dos atuadores foram de  $-1V$ ,  $1V$  e  $1V$  para os atuadores 1, 2 e 3, respectivamente. Uma representação gráfica da deformação da placa encontra-se exposta na Fig. 4.7.

Nesta figura é possível visualizar a deformação causada pela ação dos atuadores em função do potencial elétrico de entrada. O atuador 1, ao qual é fornecida uma tensão elétrica de sinal oposto aos outros atuadores, apresenta uma deformação em sentido contrário. A fim de verificar a veracidade dos deslocamentos obtidos, os resultados foram comparados com um modelo desenvolvido no software ANSYS<sup>®</sup> e com a solução analítica proposta por Dimitriadis, Fuller e Rogers [45]. Os deslocamentos transversais da placa ao longo do eixo  $x$  e  $y$ , sobre as seções médias são apresentados nas Figs. 4.8(a) e 4.8(b), respectivamente.

Na Fig. 4.8(a), pode-se verificar uma diferença significativa entre os valores de deslocamento transversal máximos entre o modelo de elementos finitos desenvolvido e o modelo ANSYS<sup>®</sup> em relação à solução analítica. Tal diferença é principalmente gerada pelo fato da

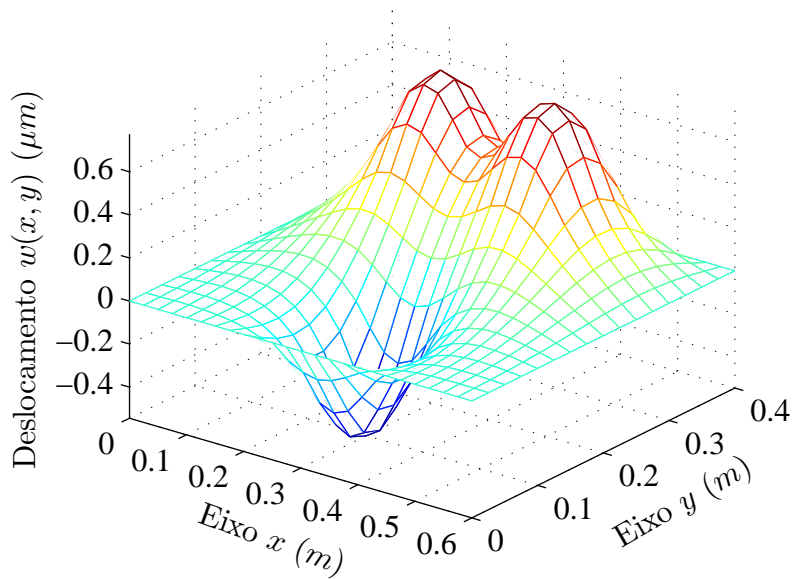


Figura 4.7: Deflexão da placa sob ação de tensões elétricas aplicadas aos atuadores

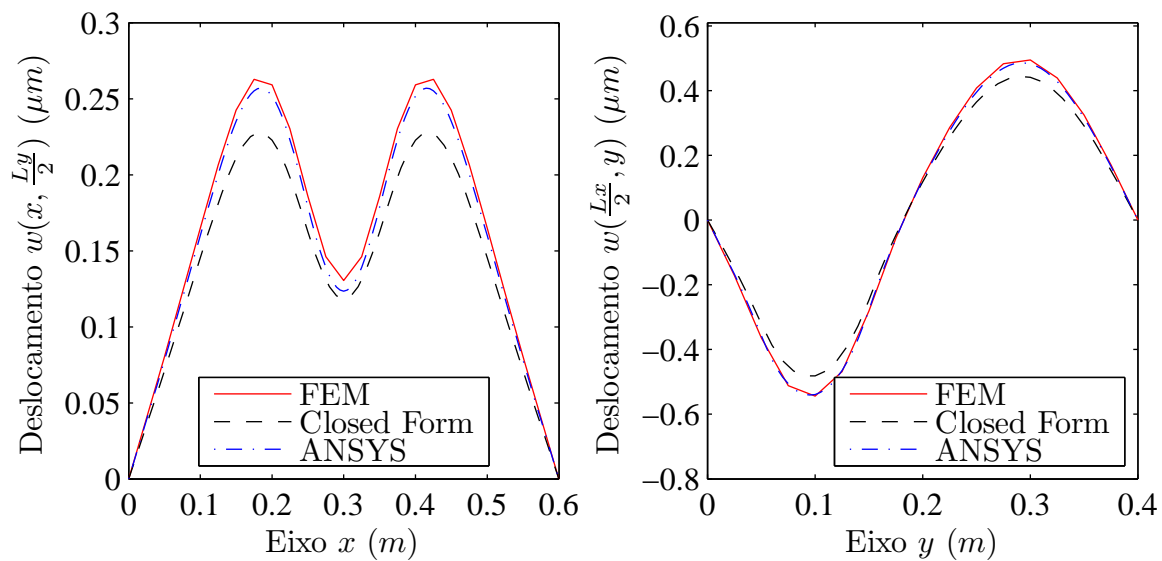


Figura 4.8: Deslocamento transversal nas seções longitudinal e transversal da placa

solução analítica não considerar o efeito da rigidez do sensor na estrutura [31]. A fim de medir a discrepância, foram investigados os valores de deslocamento transversal ocorridos no centro dos sensores, onde se deram as deformações máximas. Tais respostas encontram-se expostas na Tab. 4.15, onde os erros dos modelos numéricos foram tomados em relação ao valor da solução analítica.

Apesar das taxas de erro em relação à solução analítica não apresentarem valores satisfatórios, a comparação entre os modelos numéricos apresentou percentuais de 0,89% e 1,96% para os deslocamentos mínimo no sensor 1 e máximos nos sensores 2 e 3. Além dos valores

Sensor	Sol. analítica	FEM	ANSYS®
1	$-4,816 \times 10^{-7}$	$-5,440 \times 10^{-7} - (12,97\%)$	$-5,392 \times 10^{-7} - (11,97\%)$
2	$6,827 \times 10^{-7}$	$7,747 \times 10^{-7} - (13,48\%)$	$7,598 \times 10^{-7} - (11,29\%)$
3	$6,827 \times 10^{-7}$	$7,747 \times 10^{-7} - (13,48\%)$	$7,598 \times 10^{-7} - (11,29\%)$

Tabela 4.15: Comparação dos valores de deflexão encontrados no centro dos sensores.

de deslocamentos apresentados pelos sensores, foram igualmente comparadas as tensões elétricas desenvolvidas no interior destes, devidas ao efeito piezelétrico direto. Como explicado em capítulos anteriores, sob um estímulo mecânico externo, o PZT tende à resistir a tal esforço. Portanto, os potenciais elétricos nos sensores apresentam sinal oposto à deformação mecânica geradora. Os valores obtidos pelos modelos numéricos são comparados com a solução analítica na Tab. 4.16.

Sensor	Sol. analítica	FEM	ANSYS®
1	+0,0139	+0,0125 - (10,31%)	+0,0126 - (9,12%)
2	-0,0139	-0,0128 - (7,84%)	-0,0125 - (9,82%)
3	-0,0139	-0,0128 - (7,84%)	-0,0125 - (9,82%)

Tabela 4.16: Comparação dos valores de potenciais elétricos gerados pelos sensores piezelétricos incorporados na placa.

Uma margem de erro semelhante àquela encontrada para os deslocamentos transversais foi obtida na comparação entre potenciais elétricos com a solução analítica. Desta forma, pode-se estimar a importância da rigidez do sensor na resposta do sistema. Entre os modelos numéricos, os erros apresentados foram de 0,79% para o potencial no sensor 1 e 2,40% para os sensores 2 e 3. Tais valores foram considerados satisfatórios e capazes de validar o comportamento estático da estrutura proposta.



## 5 APLICAÇÃO E CONTROLE

### 5.1 Descrição da aplicação

Neste trabalho, a aplicação proposta é relativa ao problema de controle de vibrações de placas de materiais compostos com sensores e atuadores incorporados na superfície, enfatizando unicamente o comportamento da estrutura em função do tempo. A análise no domínio da frequência e investigação dos modos de vibração não são contemplados neste estudo. A estrutura apresentada encontra-se engastada por um de seus lados (*cantilever*) e possui um sensor aderido à superfície superior e o atuador na superfície inferior, sendo que ambos os elementos piezelétricos possuem a mesma largura e comprimento da placa compósita. Uma representação é exposta na Fig. 5.1. Tal conjunto é submetido à ação de força mecânica externa concentrada pontualmente no centro do lado oposto ao engastamento, que conseqüentemente gera deformação na estrutura. Esta deformação provoca o aparecimento de cargas elétricas no interior do sensor piezelétrico situado na superfície superior da placa compósita, que perceberá a deformação ocorrida. O potencial criado no sensor pelas cargas elétricas é então controlado e atribuído como entrada ao elemento de atuação, situado na superfície inferior da placa, sendo este alinhado e de mesmo tamanho que o sensor. O atuador por sua vez responde à tal sinal com uma deformação mecânica, dado o efeito piezelétrico inverso que rege seu funcionamento, no sentido contrário da deformação local infligida ao sistema pela ação da força mecânica externa. Desta forma, o sensor e o atuador situados na placa efetuam o trabalho de reduzir as vibrações do sistema. A interação de cada elemento da estrutura é sucintamente ilustrada no esquema da Fig. 5.2.

### 5.2 Controle da estrutura

#### 5.2.1 Noções de controle

O objetivo primordial de um sistema de controle é garantir a estabilidade absoluta do processo sobre o qual este atua. Entende-se por estabilidade absoluta a característica de um sistema estável, definido como um sistema dinâmico com resposta limitada à uma entrada limitada.

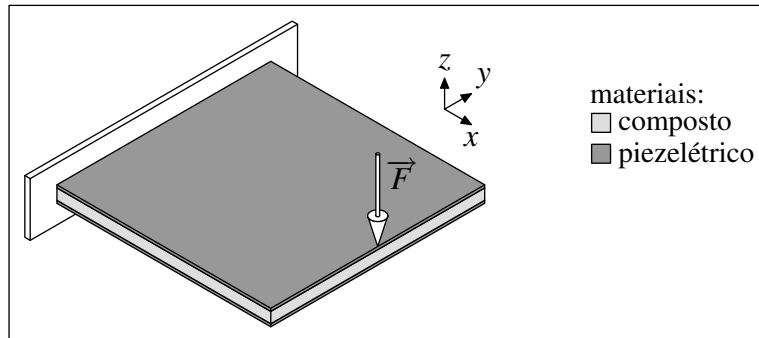


Figura 5.1: Estrutura da aplicação proposta

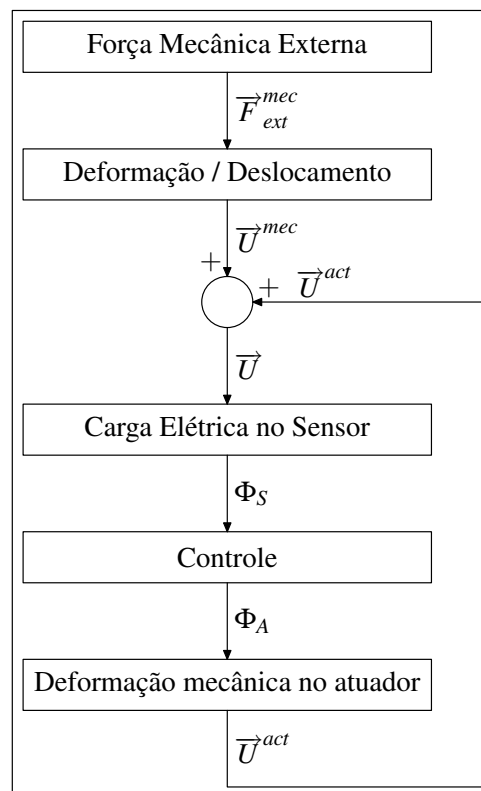


Figura 5.2: Esquema de funcionamento do problema proposto

Logo, um sistema linear é estável se a saída encontrar um estado de equilíbrio após a aplicação de um esforço externo. Dado que um sistema físico envolve armazenamento de energia, ao se aplicar a ele um sinal de entrada ou perturbação, o sinal de saída não pode seguir a excitação imediatamente, exibindo uma resposta característica que apresenta duas porções distintas: a resposta transitória e a resposta estacionária. Entende-se por transitória a resposta que ocorre logo após a aplicação de uma entrada ao sistema, onde encontram-se variações na saída do processo. A resposta estacionária ou regime permanente é a maneira como o sinal de saída do sistema se comporta quando o tempo tende a infinito. Uma representação dessas respostas é mostrada na Fig. 5.3.

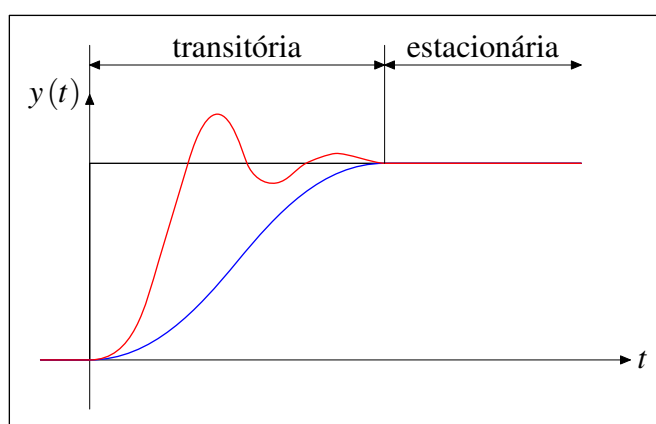


Figura 5.3: Representação das respostas transitória e estacionária

Freqüentemente, as características de desempenho de um sistema de controle são especificadas em termos da resposta transitória a uma excitação em degrau unitário, pois este sinal é fácil de ser gerado e corresponde a uma solicitação suficientemente severa. Além disso, conhecendo-se a resposta a uma excitação em degrau, é matematicamente possível computar a resposta para qualquer outro tipo de sinal. A resposta transitória de um sistema a uma excitação em degrau unitário depende das condições iniciais. Por uma questão de conveniência, na comparação de respostas transitórias de vários sistemas, é usual a condição inicial padrão de que o sistema encontra-se inicialmente em repouso, com valor nulo da variável de saída e de todas as suas derivadas, sendo assim as características do sinal de resposta facilmente comparáveis.

Um controlador automático avalia a diferença entre o valor real da grandeza de saída do processo e da grandeza de referência (valor desejado), determina o desvio e produz um sinal de controle que reduzirá o desvio à zero ou a um valor pequeno. A forma como o sistema de controle produz o sinal de controle é chamada ação de controle [46]. Uma representação esquemática de um sistema de controle é mostrada na Fig. 5.4. Nesta, é possível a visualização de cada parte do sistema e da interação entre os componentes.

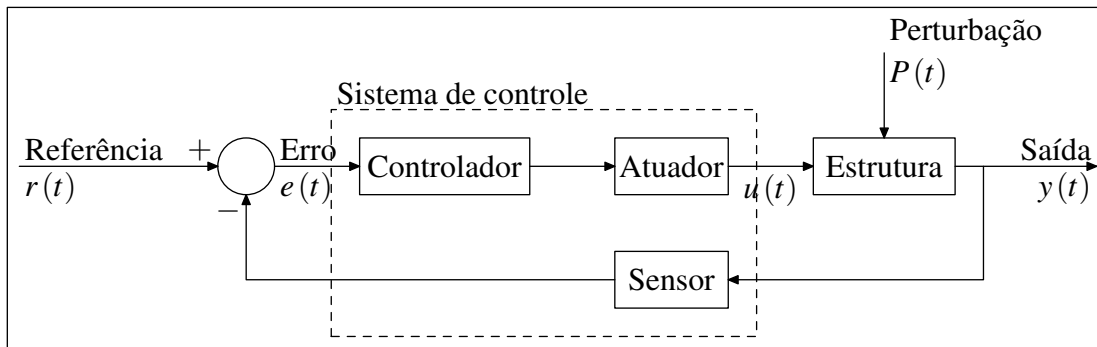


Figura 5.4: Representação esquemática de um sistema de controle

Em sistemas de controle convencionais, o sinal de saída do processo a ser controlado é capturado por um elemento de medida denominado sensor. A eficácia do controle está diretamente ligada à precisão deste dispositivo, dado o fato de que o sinal proveniente do sensor é comparado com o valor de resposta desejado, denominado valor de referência, e a diferença destes é a entrada do elemento compensador ou controlador. Tal dispositivo efetua operações matemáticas sobre o sinal a fim de reduzir ou anular o erro entre a saída do processo e a referência. O sinal resultante calculado pelo compensador alimenta o atuador com o objetivo de corrigir a diferença.

O projeto de um sistema de controle é basicamente composto por três etapas: a modelagem matemática do processo a ser controlado, a definição de uma estrutura de controle e a definição do conjunto de especificações do comportamento a ser apresentado. Cada fase deve ser criteriosamente executada a fim de obter-se um resultado final adequado. Erros ou aproximações excessivas no processo de modelagem podem tornar o modelo da estrutura pouco representativo. Neste caso, por melhor que seja o controlador desenvolvido, este não será capaz exercer sua função corretamente. Em se tratando de sistemas complexos, o grau de dificuldade em se representar fidedignamente o sistema é substancialmente aumentado e eventuais aproximações devem ser feitas a fim de obter-se uma caracterização do seu comportamento. Assim, cabe ao projetista analisar as especificações e estabelecer os pontos de operação nos quais o modelo e o controle são válidos e garantir o funcionamento nestas áreas. Em relação às especificações, estas devem ser impostas de maneira realista, dado que normalmente é inviável um projeto de controlador suficientemente robusto a ponto de rejeitar toda e qualquer perturbação que venha a ser imposta ao sistema. As especificações mais comuns estão relacionadas aos tempos de resposta do sistema e às amplitudes de oscilação do sinal de saída. Outro fator importante a ser considerado é o esforço que o atuador deverá aplicar a fim de levar o sistema à referência especificada. Os atuadores possuem limites de funcionamento que devem ser respeitados pela



ação de controle para garantir sua integridade e a do sistema sobre o qual este age.

Controlar um sistema por realimentação permite ao controlador atuar dinamicamente sobre a resposta e compensar as perturbações assim que estas se façam presentes. Entre as técnicas mais utilizadas de controle por realimentação ou em malha fechada destacam-se as técnicas de alocamento de pólos, controle ótimo, controle adaptativo, controle inteligente, além do controle proporcional, integral e derivativo e suas combinações. Entre estas estratégias de controle, a mais utilizada em processos industriais é o controle PID, dado a simplicidade e eficácia. Seu nome provém das características dos três termos (proporcional, integral e diferencial) que operam sobre o erro entre a saída do sistema e o valor de referência produzindo o sinal ou ação de controle. A descrição matemática de um controlador PID possui a forma geral apresentada na Eq. (5.1),

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int e(t) dt + K_d \frac{de(t)}{dt} \quad (5.1)$$

sendo o erro calculado como  $e(t) = r(t) - y(t)$  [46]. A dinâmica em malha fechada é obtida através do ajuste dos parâmetros  $K_p$ ,  $K_i$  e  $K_d$ , denominados ganhos proporcional, integral e derivativo, respectivamente. De maneira geral, a estabilidade do sistema pode ser garantida utilizando apenas a parcela proporcional. Entretanto, o uso do controle proporcional unicamente gera o aparecimento de erro estacionário na resposta do sistema, definido como a diferença entre o valor da resposta em regime permanente e o valor de referência. Logo, o termo integral é adicionado, permitindo a convergência da resposta ao valor de referência, corrigindo a diferença. O termo derivativo possui um caráter preditivo, dado o fato deste agir sobre a variação do erro. Mais especificamente, a ação derivativa predomina nos instantes onde a variação do erro é mais acentuada, por exemplo, em pontos de mudança de referência e perturbação externa [47]. Desta forma, o controle opera sobre a tendência futura do erro, corrigindo o sinal antecipadamente. Entretanto, este termo pode acrescentar oscilações na resposta caso seja mal dimensionado.

O ajuste dos ganhos de um PID é denominado sintonia. Existem inúmeras técnicas disponíveis em literatura que permitem a estimação dos ganhos proporcional, integral e derivativo. Entre estas, a mais difundida é a técnica proposta por Ziegler e Nichols [48], dado que não é necessário conhecer a função de transferência do sistema para sua aplicação. Esta baseia-se unicamente sobre o conhecimento empírico do funcionamento do sistema em malha fechada [47]. O objetivo desta sintonia é estabelecer uma redução de 25% entre o primeiro e o segundo pico de oscilação. Esta metodologia consiste na observação da resposta do sistema em malha fechada considerando-se apenas a ação proporcional do controlador. O objetivo é encontrar o ganho proporcional crítico  $K_{cr}$ , onde a saída do sistema apresente amortecimento nulo. É com

base neste parâmetro e no período  $P_{cr}$  associado às oscilações da resposta que os ganhos do controlador são estabelecidos, de acordo com a Tab. 5.1.

Controle	$K_p$	$K_i$	$K_d$
PID	$0.6K_{cr}$	$\frac{2K_p}{P_{cr}}$	$\frac{K_p P_{cr}}{8}$

Tabela 5.1: Sintonia do controlador PID pela técnica de Ziegler-Nichols

## 5.2.2 Controle da aplicação proposta

Com base no modelo matemático da placa compósita com sensor e atuador aderidos às superfícies, um exemplo de controle ativo de vibrações foi desenvolvido. Dado o fato da estrutura apresentar um comportamento estável em malha aberta, o controle elaborado visa a melhoria das características dinâmicas, principalmente a redução das oscilações do sinal de saída, traduzindo-se em uma melhor taxa de convergência ao valor de regime permanente. Como a estrutura proposta é composta por materiais ditos inteligentes, esta apresenta dois componentes do sistema de controle diretamente integrados: o sensor e o atuador. Portanto, a realização do controle por retroação ou realimentação consiste unicamente do projeto do compensador que utiliza como entrada os sinais de medida do sensor e o valor de referência e que gera a ação de controle executada pelo atuador. Dada a fraca relação encontrada entre os sinais de entrada e saída desenvolvidos no sensor via efeito piezométrico direto, o potencial elétrico precisa ser amplificado a fim de fornecer ao atuador alimentação suficiente de modo a obter-se deformações apreciáveis como resposta, capazes de reagir às forças externas aplicadas à estrutura. Tal amplificação corresponde à um ganho proporcional em malha fechada, conforme descrito abaixo,

$$\vec{\varphi}_a(t) = K_p e(t) \quad (5.2)$$

sendo que  $K_p$  é o ganho do amplificador. Este tipo de estrutura de controle foi abordado nos trabalhos de [Lam et al. \[8\]](#), [Reddy \[7\]](#), [Han e Lee \[9\]](#) e [Moita et al. \[49\]](#). Entretanto, o controle proporcional apresenta erro estacionário na saída do processo para excitações não impulsivas. Portanto, visando a correção da saída, uma parcela integradora foi inserida no projeto do compensador. Com o intuito de reduzir o tempo de resposta da estrutura, uma parcela derivativa foi igualmente adicionada para a obtenção de uma ação preditiva. Neste trabalho optou-se por atribuir um valor de referência nulo ao potencial elétrico do sensor, sendo o objetivo do controle traduzido em alcançar deformação nula onde este esteja situado. Logo, define-se o erro como,

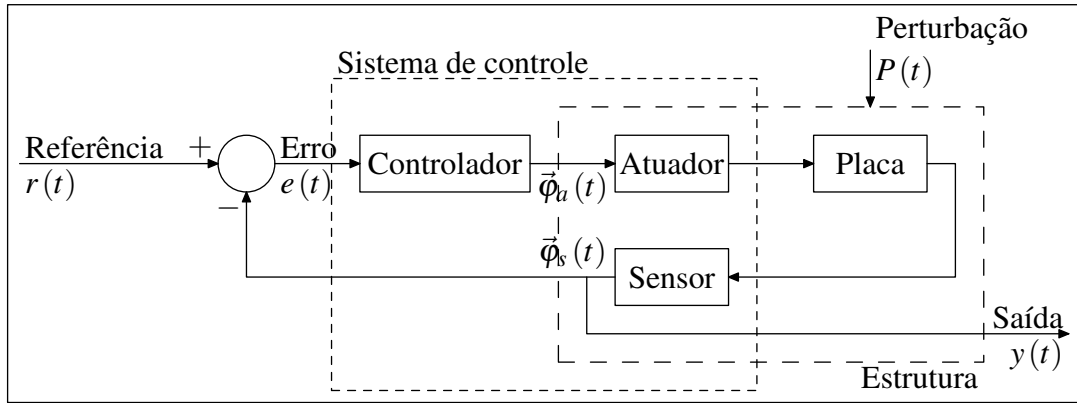


Figura 5.5: Representação esquemática do sistema de controle desenvolvido

$$\vec{e}(t) = \vec{r}(t) - \vec{\phi}_s(t) = -\vec{\phi}_s(t) \quad (5.3)$$

Desta forma, enquanto houver tensão elétrica no sensor, existirá uma ação de controle agindo na estrutura. Assim, a equação da tensão elétrica inserida no atuador pode ser definida através da Eq. (5.1) como,

$$\vec{\phi}_a(t) = -K_p \vec{\phi}_s(t) - K_i \int \vec{\phi}_s(t) dt - K_d \frac{d\vec{\phi}_s(t)}{dt} \quad (5.4)$$

A estrutura de controle proposta é sucintamente resumida na Fig. 5.5.

### 5.2.3 Investigação da dinâmica de malha aberta e definição dos parâmetros de controle

Uma vez definida a estrutura de controle a ser utilizada, torna-se necessário o conhecimento da dinâmica do sistema. Para tanto, uma simulação do comportamento do sistema em malha aberta é desenvolvida a fim de efetuar-se uma comparação posteriormente com a resposta do sistema sob a ação do controle. Conforme ilustrado na Fig. 5.1, a placa é exposta à uma força externa concentrada pontualmente no centro do lado oposto ao encastramento no valor de 1N do tipo degrau. Nenhum potencial elétrico é imposto ao atuador e os valores de deslocamento no ponto de aplicação da força e a tensão elétrica no sensor são avaliados. Uma comparação com os valores estáticos é realizada para análise da convergência da resposta dinâmica. As propriedades dos materiais da estrutura são listadas na Tab. 4.12 e os valores dos parâmetros da matriz de amortecimento  $\mathbb{C}$  utilizados foram  $\alpha = \beta = 1 \times 10^{-4}$ . O resultado desta simulação encontra-se exposto nas Figs. 5.6(a) e 5.6(b).

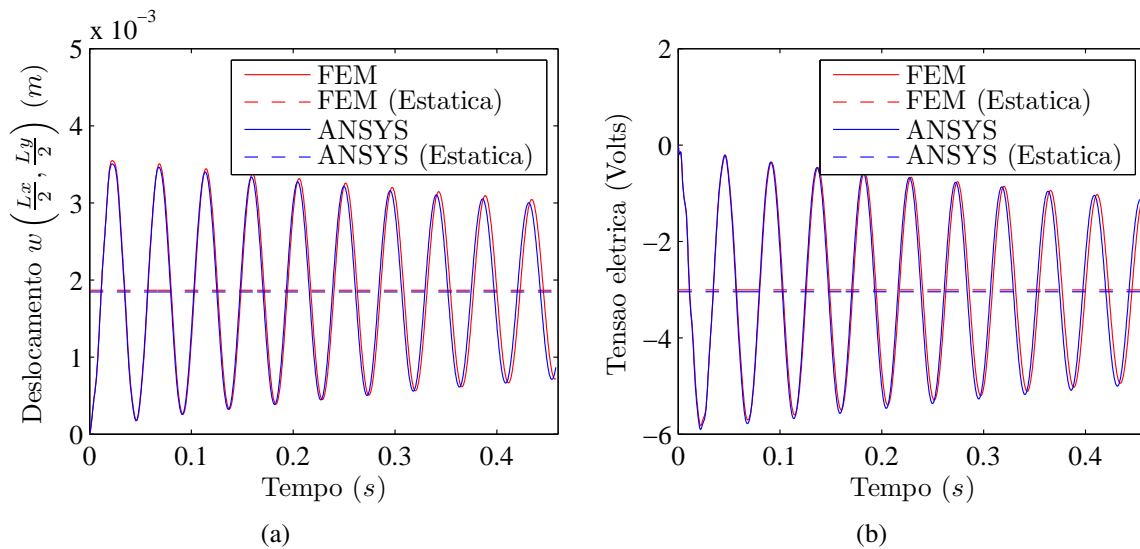


Figura 5.6: Deslocamento transversal (a) e potencial elétrico (b) do sensor em malha aberta

Através das respostas, é possível confirmar a estabilidade do sistema e a boa convergência das respostas ao valor de regime permanente (resposta estática). A comprovação da veracidade dos resultados é obtida pela comparação destes com as respostas do modelo numérico efetuado no ANSYS<sup>®</sup>, igualmente expostas nas figuras supracitadas. Uma certa discrepância entre as curvas pode ser verificada, inclusive no valor estático encontrado. A causa desta diferença reside na impossibilidade de se efetuar esta simulação com uma malha mais refinada no ANSYS<sup>®</sup>, pois o tempo de simulação é longo e, sobretudo, o espaço físico de armazenamento dos dados da resposta ultrapassam os disponíveis<sup>1</sup>. Entretanto, uma análise da convergência dos resultados do modelo do ANSYS<sup>®</sup> em relação ao modelo FEM foi efetuada para diferentes quantidades de elementos, sendo o resultado apresentado na Fig. 5.7.

Assim, é possível constatar que, com uma malha mais refinada, o modelo desenvolvido no ANSYS<sup>®</sup> converge ao valor da resposta obtida pelo modelo FEM, que utiliza uma malha de 8X8 elementos. Porém, a fim de se obter um tempo de resposta apreciável para a comparação entre respostas, optou-se pela utilização da malha de 20X20 elementos, que apresenta um erro de 1,28% em relação ao valor estático do modelo FEM. Analisando as Figs. 5.6(a) e 5.6(b), pode-se perceber que este erro se mantém ao longo do tempo, criando uma defasagem entre as respostas.

Analisando atentivamente as curvas de resposta obtidas em malha aberta instantes após a aplicação do esforço externo, é possível identificar uma leve perturbação. Estas são devidas aos diferentes modos de vibração da estrutura, de ordem superior ao primeiro modo, preferencial-

<sup>1</sup>Por exemplo, a simulação de 0,46 segundos (1400 passos com um  $\Delta t$  de 0,000327s) utilizando uma malha de 20X20 elementos demora 10 horas e utiliza mais de 10GB de espaço físico.

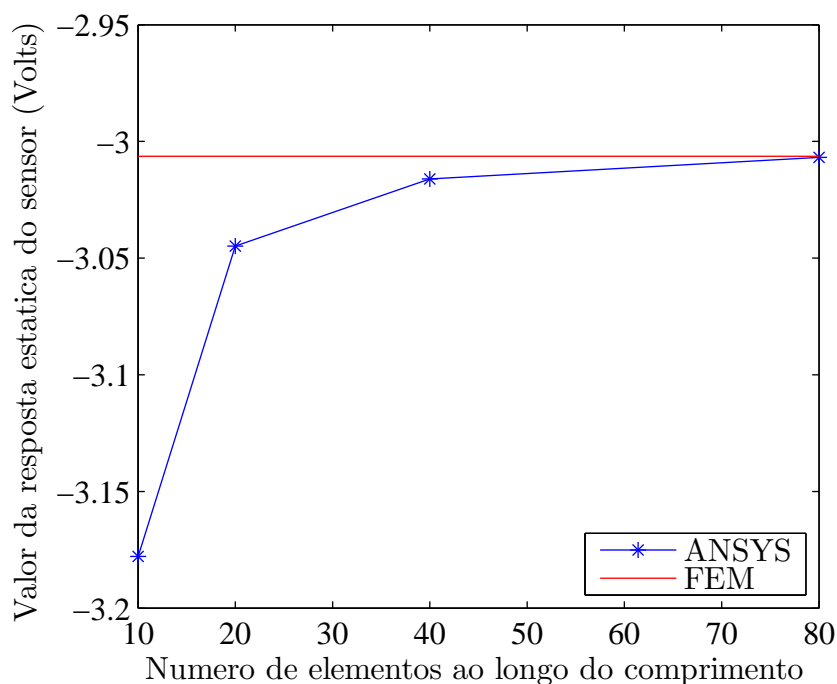


Figura 5.7: Taxa de convergência do modelo face ao refino da malha em relação ao modelo FEM

mente excitado pelo esforço do tipo degrau que foi imposto à placa. Um estudo aprofundado no domínio da frequência é capaz de identificar tais modos. Entretanto, este trabalho foi dedicado ao estudo do comportamento estrutural no tempo, o que permite apenas supor que tais perturbações sejam geradas pela superposição de outros modos. A análise modal deste tipo de estrutura deverá ser efetuada em trabalhos futuros.

Para a definição dos parâmetros de controle, a malha do sistema deve ser fechada e a resposta deve ser analisada sob a ação exclusiva do controle proporcional. O objetivo desta etapa é encontrar o valor de ganho proporcional crítico  $K_{cr}$  que induza oscilações não amortecidas na resposta da variável controlada  $\varphi_s$ . Outro parâmetro a ser obtido para sintonizar o controlador é o período crítico  $P_{cr}$  relacionado às oscilações da resposta causadas pelo ganho proporcional crítico. Os valores de  $K_{cr}$  e  $P_{cr}$  encontrados foram de 12,4000 e 0,0386, respectivamente. Aplicando as relações de sintonia de Ziegler-Nichols expostas na Tab. 5.1, obteve-se os ganhos proporcional, integral e derivativo mostrados na Tab. 5.2.

$K_p$	$K_i$	$K_d$
7,4400	385,4922	0,0359

Tabela 5.2: Valores dos parâmetros do controlador

Os parâmetros foram aplicados ao controle e o sistema apresentou uma resposta instável

devido aos altos valores de ganho obtidos pela sintonia. A especificação de redução de 25% entre os dois primeiros picos da resposta foi excessivamente severa e levou o sistema à instabilidade. Uma redução gradativa do valor de ganho proporcional crítico foi efetuada até o retorno da estabilidade do sistema, encontrado para um valor de  $K_{cr}$  de 2,7. Os novos valores de ganho são apresentados na Tab. 5.3.

$K_p$	$K_i$	$K_d$
1,6200	83,9378	0,0078

Tabela 5.3: Valores adaptados dos parâmetros do controlador

A resposta do sistema sob ação do controle é ilustrada nas Figs. 5.8(a) e 5.8(b). O resultado é confrontado com a resposta do modelo em malha fechada desenvolvido no ANSYS®, utilizando a malha de 20X20 elementos.

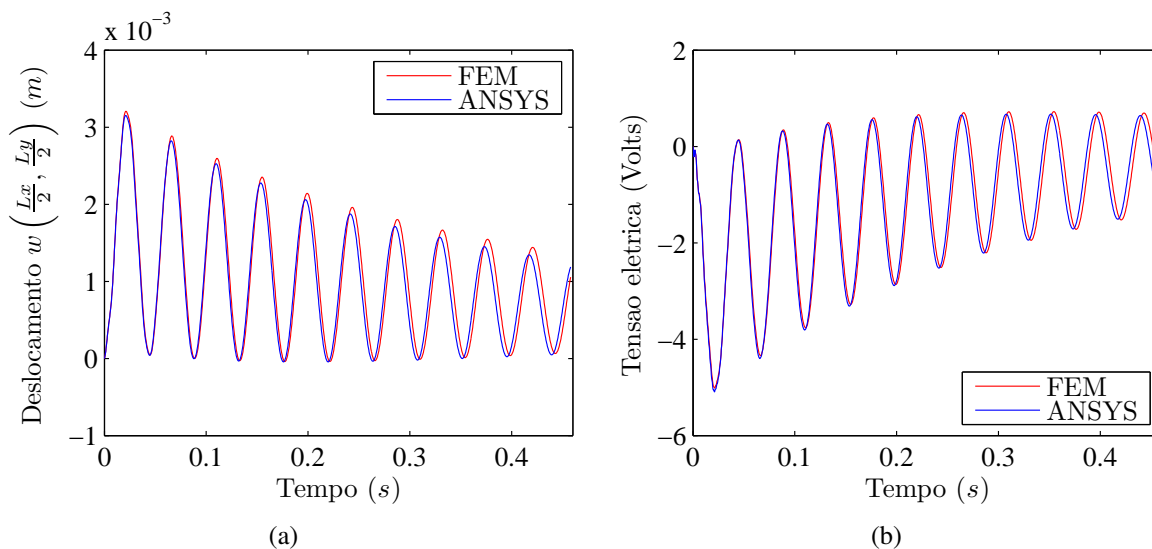


Figura 5.8: Deslocamento transversal (a) e potencial elétrico (b) do sensor em malha fechada

A mesma taxa de erro entre as respostas foi encontrada para o comportamento do sistema em malha fechada. Entretanto, pode-se observar que a característica dinâmica dos sistemas é semelhante. Na curva de deslocamento transversal, verifica-se a atenuação das oscilações causada pelo atuador em relação à resposta em malha aberta, comprovando a eficácia do controle proposto. O efeito da ação integradora do controlador é nítido na curva de resposta da variável controlada  $\varphi_s$ , que tende ao valor de referência estabelecido como nulo, caracterizando a ausência de erro estacionário. Uma comparação mais ampla é apresentada na Fig. 5.9, exibindo as respostas do modelo desenvolvido em elementos finitos FEM em malha aberta e malha fechada, a fim de evidenciar o resultado obtido pela ação do controlador.

Uma preocupação relevante quando utiliza-se atuadores piezelétricos é quanto aos valores

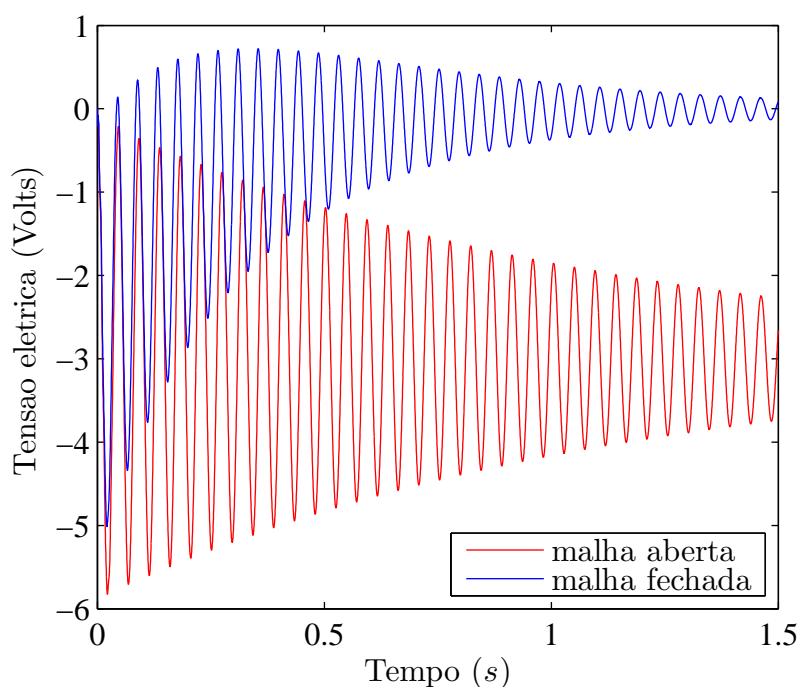


Figura 5.9: Potencial elétrico do sensor em malha aberta e fechada

de tensão elétrica que os alimentam, pois a aplicação de potenciais elétricos elevados pode levar à despolarização do material, causando a perda do efeito piezolétrico. Assim, uma averiguação dos níveis de tensão elétrica no atuador foi efetuada, a fim de garantir sua integridade. O resultado obtido é apresentado na Fig. 5.10.

Apesar da discordância gerada pelo erro existente entre os dois modelos, o comportamento dinâmico da curva é semelhante, validando o resultado obtido. Analisando atentamente as curvas, pode-se perceber uma atividade mais abrupta no início, gerada pelas deformações repentinas causadas pelo esforço externo tipo degrau. Entretanto, com o passar do tempo, a resposta torna-se mais suave. A fim de estudar o comportamento do atuador mais próximo do regime permanente, o resultado do modelo FEM é fornecido, apresentando um maior tempo de simulação, exibido na Fig. 5.11.

A faixa de tensão elétrica máxima aplicada ao atuador foi de 51V, sendo esta considerada segura para funcionamento. Para valores superiores à 150V, os riscos de despolarização são aumentados significativamente. Entretanto, este número pode variar dependendo do tipo de material piezolétrico utilizado. Através da curva exposta, pode-se verificar que o potencial elétrico no atuador tende à um valor de regime permanente, levando o sistema à uma situação de equilíbrio. Uma constatação importante é o fato que, apesar da tensão elétrica no sensor tender a zero, a alimentação do atuador se mantém. Isto é devido à ação da parcela integradora do controlador. Caso o controlador implementado fosse unicamente proporcional, o atuador trabalharia

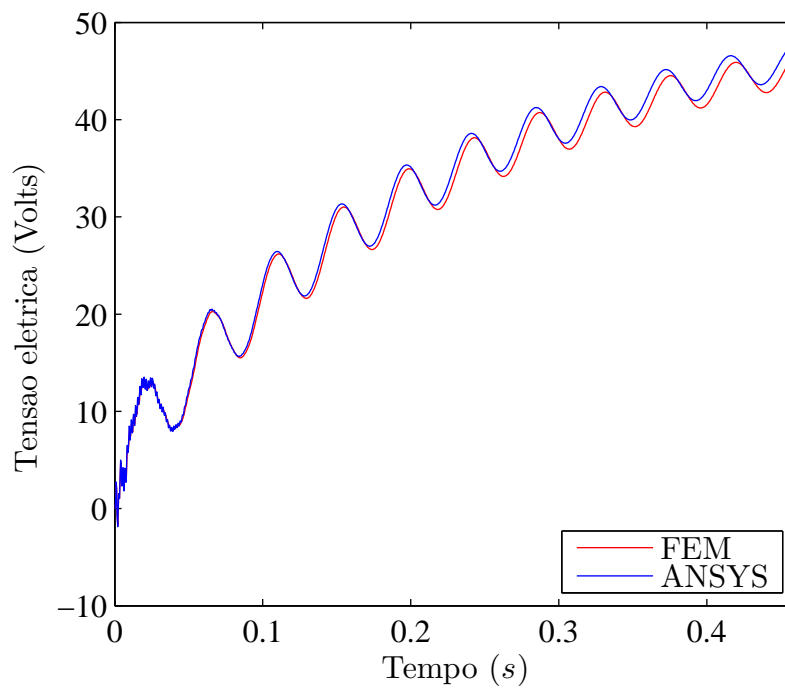


Figura 5.10: Comparação do potencial elétrico do atuador em malha fechada

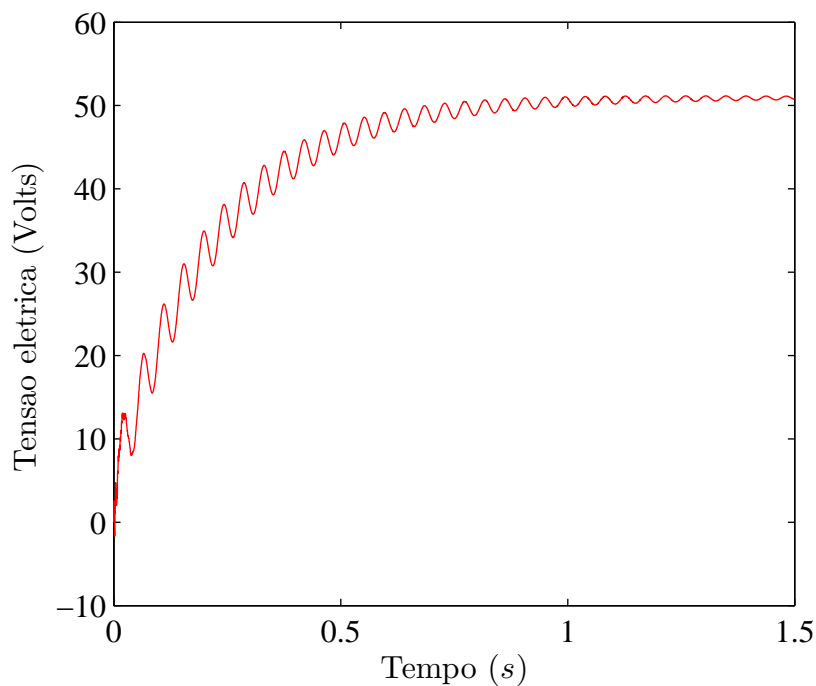


Figura 5.11: Potencial elétrico do atuador em malha fechada

somente enquanto existisse potencial elétrico no sensor e seria incapaz de retomar a configuração original do sistema, exceto no caso de estímulos externos impulsivos. Para esclarecer este efeito, a resposta do deslocamento transversal do modelo FEM é apresentada na Fig. 5.12 para um tempo de simulação de 1,5s.



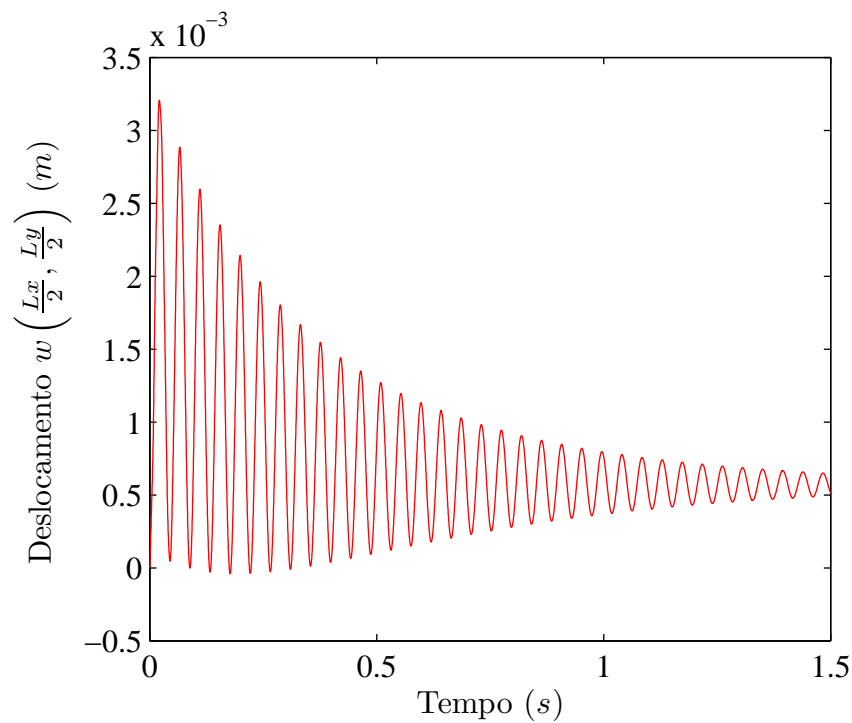


Figura 5.12: Deslocamento transversal no ponto de aplicação da força externa

Nesta, é possível observar que o deslocamento não tende para o valor de regime permanente em malha aberta, se estabilizando em um valor menor, mais próximo de zero. Com o aumento do tempo de simulação, o atuador continuará agindo sobre a estrutura, paulatinamente aproximando o deslocamento à um valor nulo. Este efeito, entretanto, acontece de forma gradual, devido ao valor de tensão elétrica no sensor ser muito baixo (próximo de zero) dada a pobre taxa de conversão de energia gerada pelo efeito piezolétrico direto. Assim, o retorno à configuração inicial levará muito tempo.



## 6 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS DE TRABALHOS FUTUROS

O objetivo principal deste trabalho foi a descrição minuciosa de modelos matemático e numérico capazes de representar fidedignamente o comportamento de uma estrutura compósita laminada, assim como dos atuadores e sensores piezelétricos acoplados. A formulação matemática da estrutura, realizada nos Capítulos 2 e 3, foi baseada na teoria de primeira ordem para laminados, a qual considera efeitos do cisalhamento no conjunto. Dada a estrutura apresentada ser tipo placa, foi admitido esta encontrar-se sob um estado plano de tensões. Assim, as tensões mecânicas ao longo da espessura da placa foram consideradas nulas, entretanto, as deformações nesta direção foram incluídas nesta análise. O aparecimento de tais deformações é nítido no caso dos materiais piezelétricos dado os acoplamentos existentes entre as direções de ortotropia gerados pelos coeficientes da matriz piezelétrica. Desta forma, obteve-se um modelo mais completo e realista em comparação à formulação que desconsidera estes efeitos, comumente empregada na literatura.

Um modelo numérico foi elaborado baseado no método dos elementos finitos. A discretização da estrutura foi efetuada utilizando elementos quadriláteros de nove nós (Quad9), vastamente empregados na literatura. O modelo numérico foi desenvolvido no ambiente computacional do software comercial MATLAB<sup>®</sup>, que mostrou-se preciso e robusto. A fim de evitar o problema de rigidez artificial (*shear locking*), foi empregada a integração seletiva. Entretanto, durante a validação do modelo, os tipos de integração completa e reduzida foram igualmente avaliados. O modelo numérico foi validado através de comparações efetuadas com soluções analíticas, com modelos computacionais elaborados no software comercial ANSYS<sup>®</sup> e com outros trabalhos, conforme relatado no Capítulo 4. Os resultados obtidos foram considerados bons, mostrando concordância com os valores tomados como referência. As taxas de erro computadas apresentaram valores na faixa de 1% e a convergência mostrou-se rápida, sendo que alguns modelos simulados atingiram a referência utilizando uma malha pouco refinada de 4X4 elementos.

Um exemplo de aplicação foi proposto no Capítulo 5, explorando o problema de vibrações em placas de material composto com atuadores e sensores piezelétricos aderidos à superfície.

O comportamento dinâmico da estrutura sob a ação de força mecânica externa foi investigado e validado com o modelo desenvolvido no software ANSYS<sup>®</sup>. Baseada na resposta do sistema, uma estrutura de controle por realimentação foi implementada a fim de reduzir o nível de vibração na placa. O controlador tipo PID foi selecionado pelo fato deste ser o mais empregado no meio industrial devido aos bons resultados e simplicidade de implementação. A técnica utilizada para a sintonia dos parâmetros do controlador foi o método proposto por Ziegler e Nichols, clássico na literatura de controle. Os resultados obtidos nas simulações do sistema em malha fechada comprovaram que o controlador proposto foi capaz de atenuar as vibrações e a veracidade destes resultados foi confirmada pela confrontação destes com a resposta do modelo realimentado implementado no ANSYS<sup>®</sup>.

A modelagem da estrutura compósita laminada com sensores e atuadores piezelétricos incorporados mostrou-se adequada, apresentando bons resultados em todas as situações as quais o modelo foi submetido. Considerando cumprido o objetivo desta dissertação de mestrado, algumas sugestões de continuidade são propostas, tais quais:

- (i) utilização da teoria de ordem superior ou da teoria *layerwise* para a formulação matemática da placa laminada;
- (ii) incorporação do efeito da camada do adesivo nos modelos matemáticos, usando modelos de materiais viscoelásticos;
- (iii) desenvolver um procedimento de otimização para a alocação dos elementos piezelétricos sobre o laminado;
- (iv) evoluir o modelo linear para um modelo que considere grandes deslocamentos;
- (v) implementar diferentes estratégias de controle, utilizando teorias de controle ótimo, difuso e estocástico, dentre outras;
- (vi) elaborar um aparato experimental a fim de confrontar os resultados do modelo com um sistema real.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- 1 MASON, W. P. Piezoelectricity, its history and applications. *The Journal of the Acoustical Society of America*, v. 70, n. 6, p. 1561–1566, Dezembro 1981. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1121/1.387221>>.
- 2 GALLEGO-JUÁREZ, J. A. Piezoelectric ceramics and ultrasonic transducers. *Journal of Physics E: Scientific Instruments*, v. 22, p. 804–816, Outubro 1989. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1088/0022-3735/22/10/001>>.
- 3 ADRIAENS, H. J. M. T. A.; KONING, W. L. de; BANNING, R. Modeling piezoelectric actuators. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, v. 5, n. 4, p. 331–341, Dezembro 2000. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1109/3516.891044>>.
- 4 SILVA, F. C. G. da. *Indirect Force Measurement using a Piezoelectric Actuator*. Dissertação (Monografia) — Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, Brasil, Março 2005.
- 5 BENJEDDOU, A.; TRINDADE, M. A.; OHAYON, R. A unified beam finite element model for extension and shear piezoelectric actuation mechanisms. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, v. 8, n. 12, p. 1012–1025, Dezembro 1997. Disponível em: <<http://jim.sagepub.com/cgi/content/abstract/8/12/1012>>.
- 6 PENG, X. Q.; LAM, K. Y.; LIU, G.-R. Active vibration control of composite beams with piezoelectrics: A finite element model with third order theory. *Journal of Sound and Vibration*, v. 209, n. 4, p. 635–650, Janeiro 1998. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1006/jsvi.1997.1249>>.
- 7 REDDY, J. N. On laminated composite plates with integrated sensors and actuators. *Engineering Structures*, v. 21, n. 7, p. 568–593, Julho 1999. Disponível em: <[http://dx.doi.org/10.1016/S0141-0296\(97\)00212-5](http://dx.doi.org/10.1016/S0141-0296(97)00212-5)>.
- 8 LAM, K. Y.; PENG, X. Q.; LIU, G.-R.; REDDY, J. N. A finite element model for piezoelectric composite laminates. *Smart Materials and Structures*, v. 6, n. 5, p. 583–591, Maio 1997. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1088/0964-1726/6/5/009>>.
- 9 HAN, J.-H.; LEE, I. Analysis of composite plates with piezoelectric actuators for vibration control using layerwise displacement theory. *Composites Part B: Engineering*, v. 29, n. 5, p. 621–632, Setembro 1998. Disponível em: <[http://dx.doi.org/10.1016/S1359-8368\(98\)00027-4](http://dx.doi.org/10.1016/S1359-8368(98)00027-4)>.
- 10 BAO, Y.; TZOU, H.-S.; VENKAYYA, V. B. Analysis of non-linear piezothermoelastic laminated beams with electric and temperature effects. *Journal of Sound and Vibration*, v. 209, n. 3, p. 505–518, janeiro 1998.

- 11 WANG, J.; YONG, Y.-K.; IMAI, T. Finite element analysis of the piezoelectric vibrations of quartz plate resonators with higher-order plate theory. *International Journal of Solids and Structures*, v. 36, p. 2303–2319, 1999. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1109/FREQ.1997.638748>>.
- 12 YI, S.; LING, S. F.; YING, M. Large deformation finite element analyses of composite structures integrated with piezoelectric sensors and actuators. *Finite Elements in Analysis and Design*, v. 35, n. 1, p. 1–15, abril 2000. Disponível em: <[http://dx.doi.org/10.1016/S0168-874X\(99\)00045-1](http://dx.doi.org/10.1016/S0168-874X(99)00045-1)>.
- 13 LEE, Y. Y.; YUEN, K. K.; NG, C. F.; CHENG, G. F. Numerical simulation model of vibration responses of rectangular plates embedded with piezoelectric actuators. *Thin-Walled Structures*, v. 40, n. 1, p. 1–28, janeiro 2002. Disponível em: <[http://dx.doi.org/10.1016/S0263-8231\(01\)00044-1](http://dx.doi.org/10.1016/S0263-8231(01)00044-1)>.
- 14 MUKHERJEE, A.; CHAUDHURI, A. S. Nonlinear dynamic response of piezolaminated smart beams. *Computers and Structures: Modelling of Smart Structures*, v. 83, n. 15-16, p. 1298–1304, Junho 2005. Disponível em: <10.1016/j.compstruc.2004.06.008>.
- 15 CHENG, J.; WANG, B.; DU, S.-Y. A theoretical analysis of piezoelectric/composite anisotropic laminate with larger-amplitude deflection effect, part i: Fundamental equations. *International Journal of Solids and Structures*, v. 42, n. 24-25, p. 6166–6180, dezembro 2005. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2005.04.007>>.
- 16 CADY, W. G. *Piezoelectricity: An Introduction to the Theory and Applications of Electro-mechanical Phenomena in Crystals*. New revised. New York: Dover Publications, 1964. 405 p.
- 17 AGNUS, J. *Contribution à la micromanipulation. Etude, réalisation, caractérisation et commande d'une micropince piézoélectrique*. Tese (Doutorado) — Université de Franche-Comté, Besançon, França, Novembro 2003.
- 18 PERIĆ, L. S. *Coupled Tensors of Piezoelectric Materials State*. Tese (Doutorado) — University of Niš, Serbia, Janeiro 2004.
- 19 PIEZOCERAMICS and Piezoactuators' Tutorial. <http://www.physikinstrumente.com/produkte.html>.
- 20 PEREZ, R. *Analysis of monolithic piezoceramic structures for micro and nanopositioning*. Tese (Doutorado) — École Polytechnique Fédérale de Lausanne, Lausanne, Suíça, Dezembro 2002.
- 21 CARBONARI, R. C. *Projeto de atuadores piezelétricos flexensionais usando o método de otimização topológica*. Dissertação (Dissertação de mestrado) — Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, Brasil, Março 2003. Disponível em: <<http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/3/3132/tde-08082003-124007/>>.
- 22 IKEDA, T. *Fundamentals of Piezoelectricity*. [S.l.]: Oxford Science Publications, 1990. 280 p.
- 23 GABORIAUD, E. *Etude des résonateurs piézoélectriques dans le domaine des microondes: application au filtrage*. Tese (Doutorado) — Université de Limoges, Limoges, França, Outubro 2004. Disponível em: <<http://www.unilim.fr/theses/2004/sciences/2004limo0049/notice.htm>>.

- 24 IEEE. Norma. *ANSI /IEEE Std 176-1987: An American National Standard : IEEE Standard on Piezoelectricity*. New York, NY, USA: IEEE, 1987. 74 p.
- 25 PIEFORT, V. *Finite Element Modeling of Piezoelectric Active Structures*. Tese (Doutorado) — Université Libre de Bruxelles, Bruxelles, Belgique, Junho 2001.
- 26 PIEZOTECH. *Films piézo- et pyro-électrique*. DT-96/a, 1997.
- 27 NYE, J. F. *Physical Properties of Crystals: Their Representation by Tensors and Matrices*. Oxford: Clarendon Press, 1957. 338 p.
- 28 DONADON, M. V.; ALMEIDA, S. F. M. de; FARIA, A. R. de. Stiffening effects on the natural frequencies of laminated plates with piezoelectric actuators. *Composites Part B: engineering*, v. 33, n. 5, p. 335–342, Julho 2002. Disponível em: <[http://dx.doi.org/10.1016/S1359-8368\(02\)00026-4](http://dx.doi.org/10.1016/S1359-8368(02)00026-4)>.
- 29 POHANKA, R. C.; SMITH, P. L. Recent advances in piezoelectric ceramics. In: LEVINSON, L. M. (Ed.). *Electronic Ceramics*. New York: Marcel Dekker, 1988. p. 45–145.
- 30 RUSCHMEYER, K. (Ed.). *Piezokeramik: Grundlagen, Werkstoffe, Applikationen*. [S.l.]: Renningen-Malmsheim: expert-Verlag, 1995.
- 31 ABREU, G. L. C. M. de. *Projeto Robusto  $H_{\infty}$  Aplicado no Controle de Vibrações em Estruturas Flexíveis com Materiais Piezoelétricos Incorporados*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Uberlândia, Dezembro 2003.
- 32 NADER, G. *Desenvolvimento de técnicas de caracterização de transdutores piezelétricos*. Tese (Doutorado) — Escola Politécnica de Sao Paulo, Agosto 2002. Disponível em: <<http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/3/3132/tde-20052003-185121/>>.
- 33 SMITS, J. G.; DALKE, S. I.; COONEY, T. K. The constituent equations of piezoelectric bimorphs. *Sensors and Actuators A: Physical*, v. 28, n. 1, p. 41–61, Junho 1991. Disponível em: <[http://dx.doi.org/10.1016/0924-4247\(91\)80007-C](http://dx.doi.org/10.1016/0924-4247(91)80007-C)>.
- 34 CALIXTO, A. K. *Análise e Otimização de Cascas de Materiais Compostos Laminados*. Dissertação (Dissertação de Mestrado) — Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, Brasil, Julho 1998.
- 35 PEREIRA, J. C. *Curso de Projeto Estrutural com Materiais Compostos*. Florianópolis, Brasil, 2004.
- 36 MAURINI, C. *Piezoelectric composites for distributed passive electric control: beam modelling, modal analysis and experimental implementation*. Tese (Doutorado) — Université Paris 6 e Università degli Studi di Roma, Novembro 2005. Disponível em: <<http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00011252/en/>>.
- 37 HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; KRANE, K. S. *Física*. 5. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora, 2004. 412 p.
- 38 BHATTACHARYA, P. Effects of piezo actuated damping on parametrically excited laminated composite plates. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, v. 25, n. 8, p. 801–813, 2006. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1177/0731684406064996>>.

- 39 KWON, Y. W.; BANG, H. *The Finite Element Method Using Matlab*. 1. ed. [S.l.]: CRC Press, 1997.
- 40 REDDY, J. N. *An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis*. 1. ed. [S.l.]: Oxford University Press, 2004. 463 p.
- 41 LAKSHMINARAYANA, H. V.; MURTHY, S. S. A shear-flexible triangular finite element model for laminated composite plates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 20, p. 591–623, Abril 1984. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1002/nme.1620200403>>.
- 42 NOEL, A. T. *Desenvolvimento de um elemento misto de casca de dupla curvatura para análise de materiais multilaminados*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, Brasil, Outubro 1991.
- 43 BELO, I. M. *Análise eficiente de compósitos laminados planos utilizando-se a formulação de elementos finitos corrigida a-priori sem os efeitos do travamento*. Dissertação (Mestrado) — Pontifícia Universidade Católica do Paraná, Curitiba, Brasil, Fevereiro 2006.
- 44 ABREU, G. L. C. M. de; RIBEIRO, J. F.; STEFFEN JR, V. Finite element modeling of a plate with localized piezoelectric sensors and actuators. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, v. 26, n. 2, p. 117–128, Junho 2004. Disponível em: <[http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S1678-58782004000200002&nrm=iso](http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1678-58782004000200002&nrm=iso)>.
- 45 DIMITRIADIS, E. K.; FULLER, C. R.; ROGERS, C. A. Piezoelectric actuators for distributed vibration excitation of thin plates. *Transactions of the ASME*, v. 113, p. 100–107, 1991.
- 46 OGATA, K. *Engenharia de Controle Moderno*. 3. ed. [S.l.]: Prentice-Hall, 1997.
- 47 NORMEY-RICO, J. E. *Controle Clássico*. Florianópolis, Brasil, 1993.
- 48 ZIEGLER, J. G.; NICHOLS, N. B. Optimum settings for automatic controllers. *Transactions of the ASME*, v. 64, p. 759–768, 1942.
- 49 MOITA, J. M. S.; CORREIA, I. F.; SOARES, C. M. M.; SOARES, C. A. M. Active control of adaptive laminated structures with bonded piezoelectric sensors and actuators. *Computers and Structures*, v. 82, p. 1349–1358, Março 2004. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruc.2004.03.030>>.
- 50 COOK, R. D.; MALKUS, D. S.; PLESHA, M. E.; WITT, R. J. *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*. 4. ed. [S.l.: s.n.], 2003. ISBN 978-0-471-35605-9.
- 51 BATHE, K.-J.; WILSON, E. L. *Numerical Methods in Finite Element Analysis*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 1976. ISBN 0-13-627190-1.



## APÊNDICE A – MUDANÇA DE BASE

Sendo o material compósito constituído por várias camadas de lâminas, podendo cada uma ter uma direção de ortotropia distinta, é necessário efetuar uma mudança de variáveis, para cada lâmina, de modo a expressar suas propriedades com relação a um eixo global, definido pela base cartesiana  $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ , sendo o plano da lâmina definido pelas direções  $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y\}$ .

Considere os dois sistemas de coordenadas cartesianas ortonormais, definidos pelas bases  $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$  e  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ . Considere  $\phi$  como sendo a rotação do eixo  $\vec{e}_1$  com relação ao eixo  $\vec{e}_x$ , rotação esta ocorrendo no plano  $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y\}$  o qual contém os vetores  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ , de acordo com a Fig. A.1.

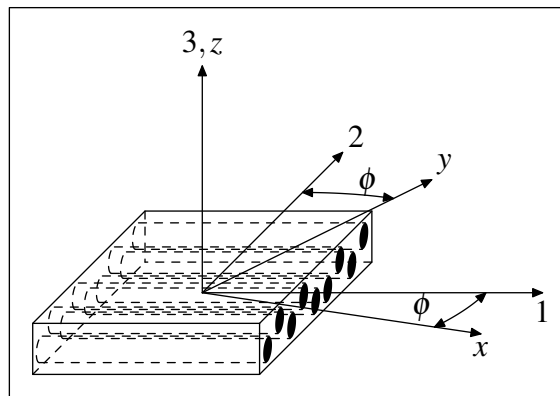


Figura A.1: Sistema de eixos de ortotropia e de referência

Desta forma pode-se descrever um vetor  $\vec{A}$  qualquer em relação à uma base em termos dos versores que a geram,

$$\begin{aligned}\vec{A} &= A_x \vec{e}_x + A_y \vec{e}_y + A_z \vec{e}_z \\ &= A_1 \vec{e}_1 + A_2 \vec{e}_2 + A_3 \vec{e}_3\end{aligned}\tag{A.1}$$

Considerando o ângulo de rotação  $\phi$  entre os sistemas de coordenadas, encontra-se as relações entre os versores formadores das bases descritas abaixo,

$$\begin{aligned}
\vec{e}_1 &= \cos(\phi) \vec{e}_x + \sin(\phi) \vec{e}_y \\
\vec{e}_2 &= -\sin(\phi) \vec{e}_x + \cos(\phi) \vec{e}_y \\
\vec{e}_3 &= \vec{e}_z
\end{aligned} \tag{A.2}$$

Logo, o vetor  $\vec{A}$  pode ser re-arranjado conforme abaixo,

$$\begin{aligned}
\vec{A} &= A_1 (\cos(\phi) \vec{e}_x + \sin(\phi) \vec{e}_y) + A_2 (-\sin(\phi) \vec{e}_x + \cos(\phi) \vec{e}_y) + A_3 \vec{e}_3 \\
&= \{A_1 \cos(\phi) - A_2 \sin(\phi)\} \vec{e}_x + \{A_1 \sin(\phi) + A_2 \cos(\phi)\} \vec{e}_y + A_3 \vec{e}_z
\end{aligned} \tag{A.3}$$

Como resultado, seus componentes podem ser relacionados entre si como,

$$\begin{aligned}
A_x &= A_1 \cos(\phi) - A_2 \sin(\phi) \\
A_y &= A_1 \sin(\phi) + A_2 \cos(\phi) \\
A_z &= A_3
\end{aligned} \tag{A.4}$$

o que pode ser representado, em forma matricial, de acordo com a Eq. (A.5)

$$\begin{Bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{Bmatrix} \tag{A.5}$$

ou ainda, em notação compacta,

$$\vec{A} = [R] \vec{A}^L \tag{A.6}$$

sendo que  $[R]$  é a matriz de rotação de um sistema de coordenadas para outro, definida pela Eq. (A.7),

$$[R] = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{A.7}$$

Assim, dado que  $[R]$  representa uma matrix de rotação, as seguintes propriedades são observadas,

$$\begin{aligned}
[R]^T [R] &= [R] [R]^T = [I] \\
[R]^T &= [R]^{-1} \\
\det [R] &= 1
\end{aligned} \tag{A.8}$$

De forma equivalente, a operação inversa de mudança de coordenadas se dá pela Eq. (A.9),

$$\begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) & 0 \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{Bmatrix} \tag{A.9}$$

que, em notação compacta, apresenta a forma abaixo,

$$\vec{A}^L = [R]^T \vec{A} \tag{A.10}$$

Considera-se  $[\sigma]$  e  $[\sigma]^L$  como tensores de tensão nas bases  $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$  e  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$  respectivamente. Neste caso, tem-se,

$$[\sigma] \vec{v} \cdot \vec{v} = [\sigma]^L \vec{v}^L \cdot \vec{v}^L \tag{A.11}$$

em que  $\vec{v}$  e  $\vec{v}^L$  são vetores arbitrários pertencentes às bases  $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$  e  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ , respectivamente. Aplicando a relação de rotação de vetores definida anteriormente, pode-se definir,

$$\vec{v} = [R] \vec{v}^L \tag{A.12}$$

Substituir a Eq. (A.12) na Eq. (A.11) resulta em,

$$\begin{aligned}
[\sigma] \vec{v} \cdot \vec{v} &= [\sigma] [R] \vec{v}^L \cdot [R] \vec{v}^L \\
&= [R]^T [\sigma] [R] \vec{v}^L \cdot \vec{v}^L
\end{aligned} \tag{A.13}$$

ou seja,

$$[\sigma]^L \vec{v}^L \cdot \vec{v}^L = [R]^T [\sigma] [R] \vec{v}^L \cdot \vec{v}^L \tag{A.14}$$

Como  $\vec{v}^L$  é arbitrário, as igualdades abaixo podem ser definidas,

$$\begin{aligned} [\sigma]^L &= [R]^T [\sigma] [R] \\ [\sigma] &= [R] [\sigma]^L [R]^T \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Considerando agora os tensores  $[\sigma]$  e  $[\sigma]^L$  em função de seus componentes, segundo as equações abaixo,

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (\text{A.16})$$

e

$$[\sigma]^L = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{A.17})$$

e definindo os vetores,

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}^T &= \{ \sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{yz}, \sigma_{xz}, \sigma_{xy} \} \\ (\vec{\sigma}^L)^T &= \{ \sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{13}, \sigma_{12} \} \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

obtem-se,

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) & 0 \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.19}) \end{aligned}$$

a qual pode ser expressa como

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2(\phi) & \sin^2(\phi) & 0 & 0 & 0 & -\sin(2\phi) \\ \sin^2(\phi) & \cos^2(\phi) & 0 & 0 & 0 & \sin(2\phi) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\phi) & \sin(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ \frac{1}{2}\sin(2\phi) & -\frac{1}{2}\sin(2\phi) & 0 & 0 & 0 & \cos(2\phi) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} \quad (\text{A.20})$$

ou ainda, em forma compacta,

$$\vec{\sigma} = [T_\sigma] \vec{\sigma}^L \quad (\text{A.21})$$

em que  $[T_\sigma]$  é a matriz de transformação de coordenadas para o tensor de tensão, descrita de acordo com a Eq. (A.22),

$$[T_\sigma] = \begin{bmatrix} \cos^2(\phi) & \sin^2(\phi) & 0 & 0 & 0 & -\sin(2\phi) \\ \sin^2(\phi) & \cos^2(\phi) & 0 & 0 & 0 & \sin(2\phi) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\phi) & \sin(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ \sin(\phi)\cos(\phi) & -\sin(\phi)\cos(\phi) & 0 & 0 & 0 & \cos(2\phi) \end{bmatrix} \quad (\text{A.22})$$

O mesmo procedimento de rotação pode ser aplicado ao tensor de deformações. A determinação da matriz de transformação de coordenadas associada às deformações  $[T_\epsilon]$  é obtida de forma similar à  $[T_\sigma]$ , conforme demonstrado abaixo.

$$\vec{\epsilon} = [R] \vec{\epsilon}^L [R]^T \quad (\text{A.23})$$

Efetuada-se as multiplicações e re-arranjando em formato matricial, o resultado é mostrado na Eq. (A.24),

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2(\phi) & \sin^2(\phi) & 0 & 0 & 0 & -\sin(\phi)\cos(\phi) \\ \sin^2(\phi) & \cos^2(\phi) & 0 & 0 & 0 & \sin(\phi)\cos(\phi) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\phi) & \sin(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ \sin(2\phi) & -\sin(2\phi) & 0 & 0 & 0 & \cos(2\phi) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} \quad (\text{A.24})$$

resultando em,

$$\vec{\varepsilon} = [T_\varepsilon] \vec{\varepsilon}^L \quad (\text{A.25})$$

sendo  $[T_\varepsilon]$  a matriz de mudança de coordenadas para o tensor de deformações, mostrada na Eq. (A.26),

$$[T_\varepsilon] = \begin{bmatrix} \cos^2(\phi) & \sin^2(\phi) & 0 & 0 & 0 & -\sin(\phi)\cos(\phi) \\ \sin^2(\phi) & \cos^2(\phi) & 0 & 0 & 0 & \sin(\phi)\cos(\phi) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\phi) & \sin(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ \sin(2\phi) & -\sin(2\phi) & 0 & 0 & 0 & \cos(2\phi) \end{bmatrix} \quad (\text{A.26})$$

em que  $\phi$  é o ângulo entre os sistemas de ortotropia e de referência, conforme Fig. A.1. Assim, as seguintes relações entre matrizes de transformações podem ser observadas,

$$\begin{aligned} [T_\varepsilon]^{-1} &= [T_\sigma]^T \\ [T_\sigma]^{-1} &= [T_\varepsilon]^T \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

## APÊNDICE B – CÁLCULO DA MATRIZ JACOBIANA E DE SEU DETERMINANTE

Os elementos quadriláteros utilizam um sistema de coordenadas local, definido no domínio  $(\xi, \eta)$ , conforme ilustrado na Fig. 3.3. Este sistema de coordenadas faz o mapeamento de um elemento físico para um elemento padrão, sendo este feito através de uma mudança de coordenadas do sistema de referência para o domínio do elemento. Ainda no domínio do elemento, são definidos graus de liberdade nodais e funções de forma (definidas em termos de  $(\xi, \eta)$ ) que serão responsáveis pela interpolação da geometria do elemento e do campo de deslocamento [50]. Logo, pode-se escrever a transformação de domínios de acordo com a equação abaixo,

$$\begin{aligned} x &= x(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^9 x_i \mathbb{N}_i(\xi, \eta) \\ y &= y(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^9 y_i \mathbb{N}_i(\xi, \eta) \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

sendo que  $\mathbb{N}_i$  são as seguintes funções de forma,

$$\begin{aligned} \mathbb{N}_1(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(\xi^2 - \xi)(\eta^2 - \eta), & \mathbb{N}_5(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(\eta^2 - \eta) \\ \mathbb{N}_2(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(\xi^2 + \xi)(\eta^2 - \eta), & \mathbb{N}_6(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(\xi^2 + \xi)(1 - \eta^2) \\ \mathbb{N}_3(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(\xi^2 + \xi)(\eta^2 + \eta), & \mathbb{N}_7(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(\eta^2 + \eta) \\ \mathbb{N}_4(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(\xi^2 - \xi)(\eta^2 + \eta), & \mathbb{N}_8(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(\xi^2 - \xi)(1 - \eta^2) \\ \mathbb{N}_9(\xi, \eta) &= (1 - \xi^2)(1 - \eta^2) \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Logo, o vetor deslocamento  $\vec{u}$  contínuo, é discretizado como,

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^9 \vec{q}_e \mathbb{N}_i(\xi, \eta) \quad (\text{B.3})$$

em que  $\vec{q}_e$  é o vetor que agrupa os graus de liberdade por nó associados ao elemento. A discretização do campo de deformações referentes à  $\vec{u}$  é feita de acordo com a equação abaixo,

$$\begin{aligned}\vec{D}_g &= [\mathbb{B}(\xi, \eta)] \{\vec{q}_e\} \\ &= \left[ \mathbb{B}_1(\xi, \eta) \mid \mathbb{B}_2(\xi, \eta) \mid \cdots \mid \mathbb{B}_9(\xi, \eta) \mid [0] \right] \{\vec{q}_e\}\end{aligned}\quad (\text{B.4})$$

com a matriz  $\mathbb{B}$  dada pela relação seguinte,

$$\mathbb{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_a(\xi, \eta)}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_a(\xi, \eta)}{\partial y} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial N_a(\xi, \eta)}{\partial y} & \frac{\partial N_a(\xi, \eta)}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_a(\xi, \eta)}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_a(\xi, \eta)}{\partial y} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_a(\xi, \eta)}{\partial y} & \frac{\partial N_a(\xi, \eta)}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_a(\xi, \eta)}{\partial y} & N_a(\xi, \eta) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_a(\xi, \eta)}{\partial x} & 0 & N_a(\xi, \eta) \end{bmatrix}\quad (\text{B.5})$$

No caso de operações matemáticas que envolvam apenas o vetor posição  $\vec{x}$ , a transformação de domínio é efetuada de forma direta através da Eq. (B.1). Entretanto, para a obtenção do campo de deformações, torna-se necessário a definição de uma entidade capaz de transformar as relações derivativas entre domínios. Tal entidade é dita matriz jacobiana, representada na equação abaixo,

$$[\mathbf{J}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^9 x_i \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} & \sum_{i=1}^9 y_i \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} \\ \sum_{i=1}^9 x_i \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} & \sum_{i=1}^9 y_i \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} \end{bmatrix}\quad (\text{B.6})$$

Através desta equação é possível calcular a matriz jacobiana do elemento Quad9 utilizado neste trabalho. Resolvendo as derivadas das funções de forma, a matriz jacobiana resulta em,

$$[\mathbf{J}] = \frac{l_e}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\quad (\text{B.7})$$



sendo que  $l_e$  é o lado do quadrado definido pelo elemento. Logo, o determinante da matriz jacobiana é dado por,

$$J = \det[\mathbf{J}] = \frac{l_e^2}{4} \quad (\text{B.8})$$

A inversa de  $[\mathbf{J}]$  possibilita o processo contrário, avaliada como,

$$[\mathbf{J}]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det[\mathbf{J}]} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix} \quad (\text{B.9})$$

Uma vez definida a transformação de operadores derivativos, pode-se calcular a matriz  $\mathbb{B}$ , através da relação,

$$\mathbb{B} = \frac{d\mathbb{N}(\xi, \eta)}{d(x, y)} = \frac{d\mathbb{N}(\xi, \eta)}{d(\xi, \eta)} \frac{d(\xi, \eta)}{d(x, y)} = J^{-1} \frac{d\mathbb{N}}{d\xi} \quad (\text{B.10})$$

Esta relação pode ser estendida a qualquer função. Logo, as derivadas das funções de aproximação podem ser obtidas pela regra da derivação em cadeia,

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{array} \right\} = [\mathbf{J}]^{-1} \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{array} \right\} \quad (\text{B.11})$$



## APÊNDICE C – MÉTODO DE NEWMARK

No método de Newmark, os sistemas de equações considerados apresentam a forma abaixo,

$$\vec{R} = [\mathbb{M}] \vec{\ddot{U}} + \vec{F}_{int}(\vec{U}, \vec{\dot{U}}) - \vec{F}_{ext}(\vec{U}, \vec{\dot{U}}), \quad (\text{C.1})$$

sendo que este precisa ser resolvido para qualquer  $t \in (0, t_f)$ , onde  $\vec{F}_{int}$  e  $\vec{F}_{ext}$  são os vetores de forças internas e externas, respectivamente. Para tanto, é utilizada a expansão em série de Taylor (Eq. (C.2)),

$$f(t + \Delta t) = f(t) + f'(t) \Delta t + \frac{(\Delta t)^2}{2} f''(t) + \dots + \frac{(\Delta t)^k}{k!} f^{(k)}(t) + R^{(k)} \quad (\text{C.2})$$

onde  $R^{(k)}$  é o resíduo da série, dado por,

$$R^{(k)} = \frac{1}{k!} \int_t^{t+\Delta t} f^{(k)}(\xi) [(t + \Delta t) - \xi]^k d\xi \quad (\text{C.3})$$

Logo, aplicando ao vetor de graus de liberdade do sistema, obtém-se,

$$\begin{aligned} \vec{U}_{n+1} &= \vec{U}_n + \int_t^{t+\Delta t} \vec{\ddot{U}}(\xi) d\xi \\ \vec{U}_{n+1} &= \vec{U}_n + \Delta t \vec{\dot{U}}_n + \int_t^{t+\Delta t} \vec{\ddot{U}}(\xi) [(t + \Delta t) - \xi] d\xi \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

Apesar das equações serem exatas, o termo  $\vec{\ddot{U}}(\xi)$  é uma incógnita. Assim, um procedimento numérico é empregado na realização de aproximações das integrais. A proposta do método de Newmark para a aproximação é exposta nas equações abaixo,

$$\begin{aligned} \vec{U}_{n+1} &= \vec{U}_n + (1 - \lambda) \Delta t \vec{\dot{U}}_n + \lambda \Delta t \vec{\dot{U}}_{n+1} \\ \vec{U}_{n+1} &= \vec{U}_n + \Delta t \vec{\dot{U}}_n + \left(\frac{1}{2} - \chi\right) \Delta t^2 \vec{\ddot{U}}_n + \chi \Delta t^2 \vec{\ddot{U}}_{n+1} \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

sendo  $\lambda$  e  $\chi$  são parâmetros que podem ser determinados para obter-se precisão de integração

e estabilidade, onde  $\lambda \in [0, 1]$  e  $\chi \in [0, \frac{1}{2}]$ . Newmark propôs um método de taxa constante de aceleração, nos quais os valores dos parâmetros citados acima seriam  $\lambda = \frac{1}{4}$  e  $\chi = \frac{1}{2}$  [51]. Dado que os valores do deslocamento  $\vec{U}_n$ , da velocidade  $\vec{U}_n$  e da aceleração  $\vec{U}_n$  são conhecidos, é possível estabelecer as seguintes relações,

$$\begin{aligned}\vec{U}_{n+1} &= \frac{1}{\chi \Delta t^2} \left\{ \vec{U}_{n+1} - \vec{U}_n - \Delta t \vec{U}_n - \left( \frac{1}{2} - \chi \right) \Delta t^2 \vec{U}_n \right\} \\ \vec{U}_{n+1} &= \frac{\lambda}{\chi \Delta t} \left\{ \vec{U}_{n+1} - \vec{U}_n + \left( \frac{\chi}{\lambda} - 1 \right) \Delta t \vec{U}_n + \left( \frac{\chi}{\lambda} - \frac{1}{2} \right) \Delta t^2 \vec{U}_n \right\}\end{aligned}\quad (C.6)$$

Logo, efetuando as derivadas parciais de tais termos em relação ao deslocamento no tempo  $t_{n+1}$  obtém-se,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{U}_{n+1}}{\partial \vec{U}_{n+1}} &= \frac{1}{\chi \Delta t^2} \\ \frac{\partial \vec{U}_{n+1}}{\partial \vec{U}_{n+1}} &= \frac{\lambda}{\chi \Delta t}\end{aligned}\quad (C.7)$$

A equação de equilíbrio pode ser então encontrada para o tempo  $t_{n+1}$ , e o problema pode ser definido como: Determinar  $\vec{x}_{n+1}$  tal que,

$$\vec{R}(\vec{U}_{n+1}) = [\mathbb{M}] \vec{U}_{n+1} + \vec{F}_{int}(\vec{U}_{n+1}, \vec{U}_{n+1}) - \vec{F}_{ext}(\vec{U}_{n+1}, \vec{U}_{n+1}) = 0 \quad (C.8)$$

onde,

$$\begin{aligned}\vec{F}_{int}(\vec{U}, \vec{U}) &= [\mathbb{C}] \{ \vec{U} \} + \left[ [\mathbb{K}_U] - [\mathbb{K}_{U\phi}^{(S)}] [\mathbb{K}_{\phi}^{(S)}]^{-1} [\mathbb{K}_{\phi U}^{(S)}] \right] \{ \vec{U} \} - [\mathbb{K}_{U\phi}^{(A)}] \{ \vec{\phi}_A(t) \} \\ \vec{F}_{ext}(\vec{U}, \vec{U}) &= \vec{F}_{ext}^{mec}(t)\end{aligned}\quad (C.9)$$

sendo  $\vec{F}_{ext}^{mec}(t)$  suposto não dependente do deslocamento ou da velocidade. As matrizes de rigidez e amortecimento tangentes são obtidas pelas relações estabelecidas na Eq. (C.10), listadas abaixo,

$$\begin{aligned}[\mathbb{K}_T] &= \frac{\partial}{\partial \vec{U}_{n+1}} \{ \vec{F}_{int} - \vec{F}_{ext} \} \\ [\mathbb{C}_T] &= \frac{\partial}{\partial \vec{U}_{n+1}} \{ \vec{F}_{int} - \vec{F}_{ext} \}\end{aligned}\quad (C.10)$$

O algoritmo proposto por Newmark para a resolução das equações é apresentado abaixo.

Figura C.1: Método de Newmark

A. Cálculos iniciais

Calcular as seguintes matrizes

$[\mathbb{K}_T]$ ; /\* Matriz de rigidez tangente \*/  
 $[\mathbb{C}_T]$ ; /\* Matriz de amortecimento tangente \*/  
 $[\mathbb{M}]$ ; /\* Matriz de massa \*/

Inicialização

$\vec{U}_0$ ; /\* deslocamento inicial \*/  
 $\vec{U}_0$ ; /\* velocidade inicial \*/  
 $\vec{U}_0$ ; /\* aceleração inicial \*/

Selecionar  $\Delta t$ ,  $\lambda$  e  $\chi$  e calcular as seguintes constantes,

$\chi \geq 0.05$ ;  
 $\lambda \geq 0.25(0.5 + \chi)^2$ ;  
 $a_0 = 1/\lambda \Delta t^2$ ;  
 $a_1 = \chi/\lambda \Delta t$ ;  
 $a_2 = 1/\lambda \Delta t$ ;  
 $a_3 = 1/2\lambda - 1$ ;  
 $a_4 = \chi/\lambda - 1$ ;  
 $a_5 = \Delta t/2 (\chi/\lambda - 2)$ ;  
 $a_6 = \Delta t (1 - \chi)$ ;  
 $a_7 = \chi \Delta t$ ;

Calcular a matriz de rigidez efetiva

$[\hat{\mathbb{K}}] = [\mathbb{K}_T] + a_0 [\mathbb{M}] + a_1 [\mathbb{C}_T]$ ;

Triangularizar  $\hat{\mathbb{K}}$

$[\hat{\mathbb{K}}] = LDL^T$ ;

B. Para cada instante de tempo  $\Delta t$ :

**for**  $t = 0$  to  $T$  **do**

Calcular as cargas efetivas no tempo  $t + \Delta t$

$\vec{F}_{t+\Delta t} = \vec{F}_{t+\Delta t} + [\mathbb{M}] (a_0 \vec{U}_n + a_2 \vec{U}_n + a_3 \vec{U}_n) + [\mathbb{C}_T] (a_1 \vec{U}_n + a_4 \vec{U}_n + a_5 \vec{U}_n)$ ;

Resolver os deslocamentos no tempo  $t + \Delta t$

$LDL^T \vec{U}_{n+1} = \vec{F}_{t+\Delta t}$ ;

Calcular a aceleração e a velocidade no tempo  $t + \Delta t$

$\vec{U}_{n+1} = a_0 (\vec{U}_{n+1} - \vec{U}_n) - a_2 \vec{U}_n - a_3 \vec{U}_n$ ;

$\vec{U}_{n+1} = \vec{U}_n + a_6 \vec{U}_n + a_7 \vec{U}_{n+1}$ ;

**endfor**



## APÊNDICE D – COMPONENTES DO CAMPO DE DEFORMAÇÕES DA TEORIA DE MINDLIN

Este anexo contém as relações que definem as componentes do campo de deformações proposto pela teoria de Mindlin aplicada neste estudo. Uma vez conhecidas as equações dos deslocamentos, as componentes do tensor de deformação infinitesimal podem ser expressas pelas relações descritas abaixo,

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{xx} &= \frac{\partial U}{\partial x} \\
 \epsilon_{yy} &= \frac{\partial V}{\partial y} \\
 \epsilon_{zz} &= \frac{\partial W}{\partial z} \\
 \gamma_{xy} &= \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \\
 \gamma_{yz} &= \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \\
 \gamma_{xz} &= \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x}
 \end{aligned} \tag{D.1}$$

Substituindo as componentes do campo de deslocamento definidas nas Eqs. 3.20 e 3.21, obtém-se o campo de deformações associado à formulação de placas de Mindlin,

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{xx} &= \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + z \frac{\partial \theta_y}{\partial x} = \epsilon_{xx}^o + z \kappa_{xx} \\
 \epsilon_{yy} &= \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} - z \frac{\partial \theta_x}{\partial y} = \epsilon_{yy}^o + z \kappa_{yy} \\
 \epsilon_{zz} &= 0 \\
 \gamma_{xy} &= \left[ \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right] = \left[ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right] + z \left[ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right] = \gamma_{xy}^o + z \kappa_{xy} \\
 \gamma_{yz} &= \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} = -\theta_x + \frac{\partial w}{\partial y} \\
 \gamma_{xz} &= \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} = \theta_y + \frac{\partial w}{\partial x}
 \end{aligned} \tag{D.2}$$