

Luciano Moreira Coelho

**Estudo de Métodos Não Lineares de Pontos Interiores
Aplicados a Problemas de Fluxo de Potência Ótimo**

**FLORIANÓPOLIS
2007**

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

**Estudo de Métodos Não Lineares de Pontos Interiores
Aplicados a Problemas de Fluxo de Potência Ótimo**

Dissertação submetida à
Universidade Federal de Santa Catarina
como parte dos requisitos para a
obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica.

Luciano Moreira Coelho

Florianópolis, agosto de 2007.

Estudo de Métodos Não Lineares de Pontos Interiores Aplicados a Problemas de Fluxo de Potência Ótimo

Luciano Moreira Coelho

‘Esta Dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica, Área de Concentração em *Sistemas de Energia Elétrica*, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Santa Catarina.’

Prof. Roberto de Souza Salgado, Ph.D.
(Orientador - EEL - UFSC)

Prof^a. Katia Campos de Almeida, Ph.D.
(Coordenadora do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica)

Banca Examinadora:

Prof. Roberto de Souza Salgado, Ph.D.
Presidente

Prof. Clóvis Caesar Gonzaga, D.Sc.

Prof. Antonio Simões Costa, Ph.D.

Prof^a. Katia Campos de Almeida, Ph.D.

AGRADECIMENTOS

À meus pais, Lúcia e Renato, e meu irmão Vinícius, pelo apoio em todas as horas.

Ao professor Roberto de Souza Salgado, pela amizade e paciência ao longo de sua valiosa orientação.

À todos os professores, funcionários e colegas do LABSPOT, pela amizade e carinho.

À CAPES, pelo suporte financeiro durante o curso de mestrado.

Resumo da Dissertação apresentada à UFSC como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica.

Estudo de Métodos Não Lineares de Pontos Interiores Aplicados a Problemas de Fluxo de Potência Ótimo

Luciano Moreira Coelho

Agosto / 2007

Orientador: Roberto de Souza Salgado, Ph.D.

Área de Concentração: Sistemas de Energia Elétrica

Palavras-chave: Fluxo de Potência Ótimo, Programação Não Linear, Pontos Interiores, Primal-Dual, Preditor-Corretor, Múltiplas Correções Centralizadoras, Caminho Central

Número de Páginas: xiv + 131

O presente trabalho apresenta um estudo sobre Métodos Não Lineares de Pontos Interiores aplicados a problemas de Fluxo de Potência Ótimo (FPO). O Método de Múltiplas Correções Centrais (MCC) e o Método do Máximo Passo no Caminho Central (MPCC) constituem o foco principal desta dissertação, sendo ambos baseados no Método Primal-Dual de Pontos Interiores.

Os dois métodos em questão, primeiramente desenvolvidos para a programação linear, são aplicados à problemas não lineares de FPO na intenção de reduzir as inviabilidades dos produtos de complementariedade, acelerando o processo de convergência, em função do aumento do valor do passo na direção de otimização.

Os resultados obtidos para estes dois algoritmos são comparados aos resultados gerados pelo Método Preditor-Corretor, para cinco sistemas-teste do IEEE. Os problemas de otimização estudados são: Minimização das Perdas de Potência Ativa nas Linhas de Transmissão, Minimização do Desvio Quadrático de um Nível de Tensão Pré-Estabelecido e Maximização do Carregamento do Sistema de Potência.

Os resultados apresentados apontam as melhores estratégias para a estimativa do ponto inicial, bem como a faixa de valores iniciais para o parâmetro de barreira, que proporciona o melhor desempenho dos métodos. É sugerida uma forma alternativa para o cálculo da distância ao caminho central, que melhora o desempenho do método MPCC. Para o método MCC são apresentados os valores mais adequados ao número máximo de correções centralizadoras. Finalmente são apresentados os tempos computacionais dos diferentes métodos utilizados, visando fornecer uma idéia do desempenho destes métodos em termos de velocidade de processamento.

Abstract of Dissertation presented to UFSC as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master in Electrical Engineering.

A Study of Nonlinear Interior Points Methods Applied to Optimal Power Flow Problems

Luciano Moreira Coelho

August/2007

Advisor: Roberto de Souza Salgado, Ph.D.

Area of Concentration: Electric Energy Systems

Key words: Optimal Power Flow, Nonlinear Programming, Interior Points, Primal-Dual, Predictor-Corrector, Multiple Centrality Corrections, Central Path

Number of Pages: xiv + 131

The present work presents a study of Nonlinear Interior Point Methods applied to the Optimal Power Flow (OPF) problem. The Multiple Centrality Corrections (MCC) and the Maximum Step to the Central Path (MSCP) methods are the main focus of this text, both based on the Primal Dual Interior Point Method.

The mentioned methods, initially developed to Linear Programming problems, are applied to nonlinear OPF problems aiming at reducing the infeasibility of the complementary conditions, speeding up the iterative process as a result of a better step choice in the direction of the optimal solution.

The numerical results obtained from the application of these two methods are compared to those determined with the Predictor-Corrector method for five IEEE test systems. The optimization problems studied here are: Active Power Transmission Loss Minimization, Squared Deviation of a Pre-Specified Voltage Magnitude Level Minimization and Maximization of the Loadability of the Power System.

These results point out the best strategies to the selection of the initial solution as well as the suitable range for the barrier parameter, which result in the best performance of the methods studied. It is also suggested an alternative way of computing the distance to the central path, which improves the performance of the MSCP. With respect to the MCC, the analysis of these results indicate the adequate number of centrality corrections. Finally, aiming at providing some idea of the computational effort for convergence, the processing times are presented.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Fluxo de Potência Ótimo	1
1.2	Métodos de Pontos Interiores	2
1.3	Trabalho Proposto	3
1.4	Organização da Dissertação	3
2	Fluxo de Potência Ótimo	5
2.1	Introdução	5
2.1.1	Aplicações do FPO	6
2.1.2	Utilização do FPO nos Mercados Desregulamentados	6
2.1.3	Vantagens do FPO	7
2.2	Fundamentos Básicos do FPO	7
2.2.1	Variáveis	8
2.2.2	Restrições	8
2.2.3	Funções Objetivo	11
2.3	Métodos de Solução do FPO	11
2.3.1	Programação Linear	12
2.3.2	Programação Não Linear	12
2.4	Revisão Bibliográfica sobre Métodos de Pontos Interiores	16
2.5	Conclusão	25

3	Métodos de Pontos Interiores Aplicados ao Problema de Fluxo de Potência Ótimo	26
3.1	Introdução	26
3.2	Conceitos Preliminares	27
3.3	Método Primal-Dual	31
3.4	Método Preditor-Corretor	33
3.5	Método do Máximo Passo no Caminho Central	37
3.6	Método de Múltiplas Correções Centrais	43
3.7	Escolha do Ponto Inicial	48
3.8	Redução do Sistema Linear	54
3.9	Conclusão	55
4	Implementação Proposta	56
4.1	Introdução	56
4.2	Modelagem das Funções Objetivo	56
4.2.1	Perda nas Linhas de Transmissão	56
4.2.2	Desvio de um Nível de Tensão Pré-Estabelecido	57
4.2.3	Carregamento de um Sistema de Potência	57
4.3	Modelagem das Restrições de Igualdade	58
4.4	Modelagem das Restrições de Desigualdade	59
4.5	Modelagem dos Problemas de Otimização	60
4.5.1	Perdas nas Linhas de Transmissão e Desvio de um Nível de Tensão Pré-Estabelecido	60
4.5.2	Carregamento de um Sistema de Potência	61
4.6	Implementação dos Métodos de Otimização	63
4.7	Inicialização dos Problemas de Otimização	75
4.7.1	Partida Plana	75
4.7.2	Partida via Solução do Fluxo de Potência	77
4.8	Critério de Convergência	78
4.9	Conclusão	79

5	Resultados Numéricos	80
5.1	Introdução	80
5.2	Aspectos Preliminares	80
5.2.1	Sistemas-Teste	80
5.2.2	Funções Objetivo Utilizadas	81
5.2.3	Objetivo dos Testes	82
5.2.4	Equipamento e Ambiente Computacional Utilizados	83
5.3	Influência do Parâmetro de Barreira no Processo de Convergência	83
5.3.1	Função Objetivo: Perdas nas Linhas de Transmissão	83
5.3.2	Função Objetivo: Desvio de um Nível de Tensão Pré-Estabelecido	86
5.3.3	Função Objetivo: Carregamento de um Sistema de Potência	89
5.4	Obtenção do Valor da Distância ao Caminho Central ξ no Método de Máximo Passo no Caminho Central	92
5.4.1	Função Objetivo: Perdas nas Linhas de Transmissão	92
5.4.2	Função Objetivo: Desvio de um Nível de Tensão Pré-Estabelecido	99
5.4.3	Função Objetivo: Carregamento de um Sistema de Potência	103
5.5	Número Máximo de Correções Centralizadas	104
5.5.1	Função Objetivo: Perdas nas Linhas de Transmissão	105
5.5.2	Função Objetivo: Desvio de um Nível de Tensão Pré-Estabelecido	108
5.5.3	Função Objetivo: Carregamento de um Sistema de Potência	110
5.6	Análise do Custo Computacional	112
5.6.1	Função Objetivo: Perdas nas Linhas de Transmissão	112
5.6.2	Função Objetivo: Desvio de um Nível de Tensão Pré-Estabelecido	116
5.6.3	Função Objetivo: Carregamento de um Sistema de Potência	119
5.7	Conclusão	121
6	Conclusões e Sugestões para Futuros Trabalhos	124
6.1	Conclusões	124
6.2	Sugestões para Futuros Trabalhos	125

Lista de Figuras

3.1	<i>Exemplo do processo de busca unidirecional da Dicotomia.</i>	42
5.1	<i>Deformações na função Lagrangeana em função do valor inicial de μ_0.</i>	87
5.2	<i>Gráficos gerados pela equação quártica para o sistema IEEE30 nas iterações 1 e 3 com $\xi = 15$ e partida Plana.</i>	94
5.3	<i>Gráficos gerados pela equação quártica para o sistema IEEE30 nas iterações 1 e 2 com $\xi = \xi_{med}$ e partida com Fluxo de Potência.</i>	97
5.4	<i>Gráficos da Minimização da Perda nas Linhas de Transmissão para o sistema IEEE57 com $\mathbf{K} = 7$, partida Plana e $\mu_0 = 0,01$.</i>	107
5.5	<i>Gráficos da Minimização da Perda nas Linhas de Transmissão para o sistema IEEE57 com $\mathbf{K} = 8$, partida Plana e $\mu_0 = 0,01$.</i>	108
5.6	<i>Gráficos do valor de γ para a Minimização do Desvio de um Nível de Tensão Pré-Estabelecido com o sistema IEEE57 utilizando partida Plana e $\mu_0 = 0,01$.</i>	110
5.7	<i>Gráficos da Minimização do Desvio de um Nível de Tensão Pré-Estabelecido para o sistema IEEE300 com $\mathbf{K} = 3$, partida Plana e $\mu_0 = 0,01$.</i>	110

Lista de Tabelas

5.1	<i>Dimensões dos Sistemas-Teste.</i>	81
5.2	<i>Variáveis utilizadas na modelagem dos problemas de otimização.</i>	81
5.3	<i>Dimensões dos Problemas de Otimização.</i>	82
5.4	<i>Influência de μ_0 no número de iterações para o processo de convergência com Partidas Plana e com Fluxo de Potência no Método Preditor-Corretor.</i>	84
5.5a	<i>Influência de μ_0 no número de iterações para o processo de convergência com Partidas Plana e com Fluxo de Potência no Método Máximo Passo no Caminho Central com $\xi = 3$.</i>	85
5.5b	<i>Influência de μ_0 no número de iterações para o processo de convergência com Partidas Plana e com Fluxo de Potência no Método Máximo Passo no Caminho Central com cálculo dinâmico de ξ.</i>	85
5.6	<i>Influência de μ_0 no número de iterações para o processo de convergência com Partidas Plana e com Fluxo de Potência no Método Múltiplas Correções Centrais com $K = 1$.</i>	86
5.7	<i>Influência de μ_0 no número de iterações para o processo de convergência com Partidas Plana e com Fluxo de Potência no Método Preditor-Corretor.</i>	87
5.8a	<i>Influência de μ_0 no número de iterações para o processo de convergência com Partidas Plana e com Fluxo de Potência no Método Máximo Passo no Caminho Central com $\xi = 3$.</i>	88
5.8b	<i>Influência de μ_0 no número de iterações para o processo de convergência com Partidas Plana e com Fluxo de Potência no Método Máximo Passo no Caminho Central com cálculo dinâmico de ξ.</i>	88
5.9	<i>Influência de μ_0 no número de iterações para o processo de convergência com Partidas Plana e com Fluxo de Potência no Método Múltiplas Correções Centrais com $K = 1$.</i>	89

5.10	<i>Influência de μ_0 no número de iterações para o processo de convergência com Partidas Plana e com Fluxo de Potência no Método Preditor-Corretor.</i>	90
5.11a	<i>Influência de μ_0 no número de iterações para o processo de convergência com Partidas Plana e com Fluxo de Potência no Método Máximo Passo no Caminho Central com $\xi = 3$.</i>	91
5.11b	<i>Influência de μ_0 no número de iterações para o processo de convergência com Partidas Plana e com Fluxo de Potência no Método Máximo Passo no Caminho Central com cálculo dinâmico de ξ.</i>	91
5.12	<i>Influência de μ_0 no número de iterações para o processo de convergência com Partidas Plana e com Fluxo de Potência no Método Múltiplas Correções Centrais com $K = 1$.</i>	91
5.13	<i>Influência de ξ no número de iterações para Função Objetivo Perda nas Linhas de Transmissão, com $\mu_0 = 0,1$ e Partida Plana.</i>	93
5.14	<i>Influência de ξ no número de iterações para Função Objetivo Perda nas Linhas de Transmissão, com $\mu_0 = 0,1$ e Partida com Fluxo de Potência.</i>	93
5.15	<i>Valores de σ a cada iteração para diferentes valores de ξ, com $\mu_0 = 0,1$ e Partida Plana aplicados à função objetivo Perda nas Linhas de Transmissão.</i>	94
5.16	<i>Valores de σ a cada iteração do processo de minimização da função objetivo Perdas Nas Linhas de Transmissão, com $\xi =$ Valor Médio, Partida Plana e $\mu_0 = 0,10$.</i>	95
5.17	<i>Valores de σ a cada iteração do processo de minimização da função objetivo Perdas Nas Linhas de Transmissão, com $\xi = \xi_{min} + \Delta\xi \times 0,05$, Partida Plana e $\mu_0 = 0,10$.</i>	96
5.18	<i>Valores de σ a cada iteração do processo de minimização da função objetivo Perdas Nas Linhas de Transmissão, com $\xi =$ Valor Médio, Partida com Fluxo de Potência e $\mu_0 = 0,10$.</i>	97
5.19	<i>Valores de σ a cada iteração para diferentes valores de ξ, com $\mu_0 = 0,1$ e Partida Com Fluxo de Potência aplicados à função objetivo Perda nas Linhas de Transmissão.</i>	98
5.20	<i>Influência de ξ no número de iterações para a Função Objetivo Desvio de um Nível de Tensão Pré-Estabelecido, com $\mu_0 = 0,01$ e Partida Plana.</i>	99
5.21	<i>Influência de ξ no número de iterações para a Função Objetivo Desvio de um Nível de Tensão Pré-Estabelecido, com $\mu_0 = 0,01$ e Partida com Fluxo de Potência.</i>	99

5.22	<i>Valores de σ a cada iteração para diferentes valores de ξ, com $\mu_0 = 0,01$ e Partida Plana aplicados à função objetivo Desvio de um Nível de Tensão Pré-Especificado.</i>	100
5.23	<i>Valores de σ a cada iteração do processo de minimização da função objetivo Desvio de um Nível de Tensão Pré-Especificado, com $\xi =$ Valor Médio, Partida Plana e $\mu_0 = 0,01$.</i>	100
5.24	<i>Valores de σ a cada iteração do processo de minimização da função objetivo Desvio de um Nível de Tensão Pré-Especificado, com $\xi = \xi_{min} + \Delta\xi \times 0,05$, Partida Plana e $\mu_0 = 0,01$.</i>	101
5.25	<i>Valores de σ a cada iteração do processo de minimização da função objetivo Desvio de um Nível de Tensão Pré-Especificado, com $\xi =$ Valor Médio, Partida com Fluxo de Potência $\mu_0 = 0,01$.</i>	102
5.26	<i>Influência de ξ no número de iterações do método de Máximo Passo no Caminho Central, com $\mu_0 = 10,0$ e Partida Plana.</i>	103
5.27	<i>Influência de ξ no número de iterações do método de Máximo Passo no Caminho Central, com $\mu_0 = 10,0$ e Partida com Fluxo de Potência.</i>	103
5.28	<i>Valores de σ a cada iteração para diferentes valores de ξ, com $\mu_0 = 10,0$ e Partida Plana aplicados à função objetivo Carregamento de um Sistema de Potência.</i>	104
5.29	<i>Valores de σ a cada iteração do processo de minimização da função objetivo Carregamento de Sistema de Potência, com $\xi =$ Valor Médio, Partida Plana e $\mu_0 = 10,0$.</i>	105
5.30	<i>Valores de σ a cada iteração do processo de minimização da função objetivo Carregamento de Sistema de Potência, com $\xi = \xi_{min} + \Delta\xi \times 0,05$, Partida Plana e $\mu_0 = 10,0$.</i>	106
5.31	<i>Influência do número máximo de correções centrais (K) no número de iterações para a função objetivo Perda nas Linhas de Transmissão com Partida Plana.</i>	106
5.32	<i>Influência do número máximo de correções centrais (K) no número de iterações para a função objetivo Perda nas Linhas de Transmissão com Partida com Fluxo de Potência.</i>	108
5.33	<i>Influência do número máximo de correções centrais (K) no número de iterações para a função objetivo Desvio de um Nível de Tensão Pré-Especificado com Partida Plana.</i>	109
5.34	<i>Influência do número máximo de correções centrais (K) no número de iterações para a função objetivo Desvio de um Nível de Tensão Pré-Especificado com Partida com Fluxo de Potência.</i>	109

5.35	<i>Influência do número máximo de correções centrais (K) no número de iterações para a função objetivo Carregamento de um Sistema de Potência com Partida Plana.</i>	111
5.36	<i>Influência do número máximo de correções centrais (K) no número de iterações para a função objetivo Carregamento de um Sistema de Potência com Partida com Fluxo de Potência.</i>	111
5.37	<i>Tempo Computacional para a Minimização das Perdas nas Linhas de Transmissão, com Método Preditor-Corretor e $\mu_0 = 0,1$.</i>	112
5.38	<i>Variação do Tempo Computacional em função de ξ, para a Minimização das Perdas nas Linhas de Transmissão, com Método Máximo Passo no Caminho Central e $\mu_0 = 0,1$.</i>	113
5.39	<i>Variação do Tempo Computacional em função de K, para a Minimização das Perdas nas Linhas de Transmissão, com Partida Plana e $\mu_0 = 0,1$.</i>	114
5.40	<i>Variação percentual do tempo computacional obtido com o método de múltiplas correções centrais em relação ao método preditor-corretor, para a função objetivo perda nas linhas de transmissão, utilizando a partida plana e $\mu_0 = 0,1$.</i>	115
5.41	<i>Variação do Tempo Computacional em função de K, para a Minimização das Perdas nas Linhas de Transmissão, com Partida com Fluxo de Potência e $\mu_0 = 0,1$.</i>	115
5.42	<i>Tempo Computacional para a Minimização do Desvio de um Nível de Tensão Pré-Estabelecido, com Método Preditor-Corretor e $\mu_0 = 0,01$.</i>	116
5.43	<i>Variação do Tempo Computacional em função de ξ, para a Minimização do Desvio de um Nível de Tensão Pré-Estabelecido, com Método Máximo Passo no Caminho Central e $\mu_0 = 0,01$.</i>	117
5.44	<i>Variação do Tempo Computacional em função de K, para a Minimização do Desvio de um Nível de Tensão Pré-Estabelecido, com Partida Plana e $\mu_0 = 0,01$.</i>	118
5.45	<i>Variação do Tempo Computacional em função de K, para a Minimização do Desvio de um Nível de Tensão Pré-Estabelecido, com Partida com Fluxo de Potência e $\mu_0 = 0,01$.</i>	119
5.46	<i>Variação percentual do tempo computacional obtido com o Método de Múltiplas Correções Centrais em relação aos métodos Preditor-Corretor e Máximo Passo no Caminho Central, para a função objetivo Desvio de um Nível de Tensão Pré-Estabelecido, utilizando a Partida via Fluxo de Potência e $\mu_0 = 0,01$.</i>	119
5.47	<i>Tempo Computacional para a Maximização do Carregamento de um Sistema de Potência, com Método Preditor-Corretor, Partida Plana e $\mu_0 = 10,0$.</i>	120

5.48	<i>Variação do Tempo Computacional em função de ξ, para a Maximização do Carregamento de um Sistema de Potência, com Método do Máximo Passo no Caminho Central, Partida Plana e $\mu_0 = 10,0$.</i>	120
5.49	<i>Variação do Tempo Computacional em função de K, para a Maximização do Carregamento de um Sistema de Potência, com Partida Plana e $\mu_0 = 0,01$.</i>	121

Capítulo 1

Introdução

1.1 Fluxo de Potência Ótimo

O Fluxo de Potência Ótimo (FPO) é uma ferramenta numérica aplicada à análise estática de sistemas elétricos de potência. De uma forma geral, qualquer problema de sistemas de potência, em regime permanente, no qual busca-se otimizar um determinado índice de desempenho, através de ajustes de quantidades controláveis apropriadas, com a solução simultânea das equações de balanço de potência, pode ser visto como um problema de Fluxo de Potência Ótimo. Além das equações de balanço de potência, cuja resolução diz respeito ao suprimento da demanda e das perdas de energia nas linhas de transmissão, restrições de desigualdade são usualmente incorporadas à sua formulação matemática, de forma a modelar mais detalhadamente as limitações físicas e operacionais do sistema.

A representação matemática do problema de FPO possibilita a aplicação de diversas metodologias de solução, as quais diferem basicamente em função do grau de precisão e detalhamento da modelagem dos sistemas de potência e da técnica numérica utilizada na execução da otimização. Estes dois aspectos estão intimamente relacionados, podendo algumas vezes constituir pontos conflitantes.

A modelagem matemática busca descrever o comportamento físico do sistema elétrico, estando relacionada à escolha das variáveis a serem consideradas no problema de otimização, à formulação analítica das restrições em termos destas variáveis e à seleção do índice de desempenho a ser otimizado. A técnica numérica de otimização, relaciona-se ao método de solução, bem como aos detalhes numéricos do algoritmo utilizado. Dentre as diversas variações disponíveis para as técnicas de Programação Linear e Programação Não Linear, procura-se optar por aquela cujas características sejam mais convenientes, tanto com relação à formulação analítica quanto ao que diz respeito à precisão desejada.

O FPO caracteriza-se como um problema de grande porte, não linear e multivariável. Muitos são os fatores que dificultam a obtenção de uma metodologia de solução eficiente. Dentre

as mais importantes características desejáveis a um método de solução, pode-se destacar: confiabilidade de convergência; baixo custo computacional para a obtenção da solução; moderados requisitos de memória; versatilidade para o tratamento de diferentes tipos de índices de desempenho; e simplicidade de formulação.

1.2 Métodos de Pontos Interiores

Os algoritmos de otimização, baseados nos Métodos de Pontos Interiores, representam algumas das abordagens de maior sucesso no atual cenário da otimização restrita. Inicialmente, na forma de métodos de barreira, as técnicas de pontos interiores foram populares durante a década de 60, sendo empregadas na resolução de problemas não lineares restritos. Porém, o seu uso na programação linear não foi aprofundado devido à total dominância do método Simplex.

Embora houvesse continuidade nos estudos sobre a utilização de técnicas de pontos interiores em programação não linear, novas metodologias, aparentemente mais eficientes, como o Método do Lagrangeano Aumentado e a Programação Quadrática Seqüencial, levaram ao seu total abandono. Antes da década de 80, os métodos de barreira eram considerados, sem exceção, um capítulo virado na história da otimização (FORSGREN; GILL; WRIGHT, 2002).

A “redescoberta” dos métodos de pontos interiores se deu no ano de 1984, quando Karmarkar apresentou um método de pontos interiores, aplicado à programação linear, com resultados superiores aos obtidos pelo método simplex. Logo em seguida, no ano de 1985, estabeleceu-se uma conexão formal entre os métodos clássicos de barreira e o método proposto por Karmarkar. Desde então, os métodos de pontos interiores têm avançado sobremaneira, promovendo grandes mudanças tanto na teoria, quanto na prática da otimização restrita.

Dentre as diversas extensões baseadas no algoritmo original de Karmarkar, destacam-se os métodos Primal-Dual, de 1986, apresentado por Meggido, e o Preditor-Corretor, desenvolvido por Mehrotra em 1992. Com base nestas duas metodologias, diversas abordagens foram propostas nas últimas décadas, visando melhorias em termos de rapidez de convergência, robustez e confiabilidade do processo iterativo. Mais recentemente, (GONZAGA; BONNANS, 1996) e (GONDZIO, 1996), apresentaram diferentes algoritmos, baseados na versão primal-dual, onde sugerem a reutilização dos fatores triangulares da matriz de coeficientes do sistema linear resolvido a cada iteração do método de Newton, na intenção de melhorar a centralização da trajetória de convergência, de forma a minimizar o número de iterações necessárias à solução de problemas de programação linear restrita.

1.3 Trabalho Proposto

O presente trabalho apresenta o estudo de duas diferentes abordagens para a resolução do problema de FPO, as quais têm por base a versão não linear do Método Primal-Dual de Pontos Interiores. Estas abordagens são: o *Método de Máximo Passo no Caminho Central* (MPCC), de Gonzaga e Bonnans, e o *Método de Múltiplas Correções Centralizadas* (MCC) de Gondzio.

Os algoritmos MPCC e MCC foram primeiramente aplicados ao problema de FPO em (CASTRONUOVO; CAMPAGNOLO; SALGADO, 2000) e (TORRES; QUINTANA, 2001), respectivamente, onde apresentaram bons resultados, em função da centralização da trajetória de convergência. Entretanto, em ambos os casos, apenas um índice de desempenho (perda de potência ativa nas linhas de transmissão) foi analisado, o que restringe as observações que podem ser feitas sobre a aplicação destes algoritmos em problemas de FPO não linear. No intuito de estudar os resultados obtidos através destas duas metodologias é utilizado o algoritmo Preditor-Corretor convencional, sendo que estas três metodologias são aplicadas a três problemas de FPO, com índices de desempenho distintos. Os resultados obtidos através destas metodologias (Preditor-Corretor, MPCC e MCC) são comparados em termos de desempenho computacional.

A implementação computacional é desenvolvida em ambiente MatLab[®], contemplando os seguintes problemas de FPO: (a) minimização de perdas de potência ativa nas linhas de transmissão; (b) minimização do desvio quadrático de um perfil de tensão pré-estabelecido; e (c) maximização da demanda do sistema de potência. Os resultados numéricos são obtidos para cinco sistemas-teste do IEEE, de 14, 30, 57, 118 e 300 barras.

Os testes executados concentram-se na análise dos seguintes aspectos: (a) a influência do valor inicial do parâmetro de barreira com relação ao número de iterações do processo iterativo; (b) a utilização do perfil plano e da solução do Fluxo de Potência convencional como soluções iniciais; (c) diferentes estratégias para a obtenção da distância ao caminho central no método MPCC; (d) estudo sobre a influência do número de correções centrais no método MCC; e (e) comparação do custo computacional demandado pelos métodos de otimização sob análise.

1.4 Organização da Dissertação

O restante desta monografia segue a seguinte estrutura:

Capítulo 2: Apresenta uma visão geral sobre os aspectos ligados ao problema de Fluxo de Potência Ótimo. Inicialmente são consideradas as aplicações da ferramenta computacional, bem como suas vantagens e sua utilização em mercados desregulamentados. São apresentados os fundamentos básicos do Fluxo de Potência Ótimo, com relação à

sua formulação analítica, variáveis, restrições e índices de desempenho. Os métodos de otimização mais comumente utilizados na resolução do problema de Fluxo de Potência Ótimo são comentados, com especial atenção aos métodos não lineares de pontos interiores, primal-dual e preditor-corretor. Finalmente, é realizada uma revisão bibliográfica referente às diversas metodologias, baseadas em pontos interiores, utilizadas na resolução do Fluxo de Potência Ótimo.

Capítulo 3: Neste Capítulo é inicialmente apresentada a base teórica sobre os Métodos de Pontos Interiores: Primal-Dual e Preditor-Corretor. Em seguida são descritos dois algoritmos matemáticos, baseados no método primal-dual. Estes métodos, Método do Máximo Passo no Caminho Central e Método das Múltiplas Correções Centrais, visam a diminuição das inviabilidades dos produtos de complementariedade, através da reutilização dos fatores triangulares da matriz de coeficientes do sistema linear resolvido a cada iteração do método de Newton. São ainda apresentados critérios para a escolha do ponto inicial do processo de convergência e um algoritmo para a redução do sistema linear do método de Newton.

Capítulo 4: Este Capítulo contempla aspectos da implementação computacional dos algoritmos de otimização utilizados. É mostrada a modelagem matemática dos seguintes elementos do problema de otimização: Funções Objetivo, Restrições de Igualdade e de Desigualdade, além da modelagem geral dos problemas propostos. Ainda é descrita a aplicação de dois critérios para a estimação da solução inicial, assim como, os critérios de convergência adotados.

Capítulo 5: Os resultados numéricos obtidos nos testes computacionais são apresentados e analisados neste capítulo. Inicialmente, são mostradas as características dos cinco sistemas-teste utilizados, as dimensões dos três problemas de otimização implementados, os objetivos dos testes e aspectos relacionados ao equipamento e ao ambiente computacional utilizado. Nos testes, são analisados aspectos relativos à influência da escolha do valor inicial do parâmetro de barreira, os métodos para a obtenção do valor da distância ao caminho central, no método de máximo passo no caminho central, o número máximo de correções centralizadoras, para o método de múltiplas correções centrais, e os tempos computacionais dispendidos pelos métodos de otimização estudados. Os resultados são obtidos para três funções objetivo, utilizando-se dois métodos de partida, para os métodos preditor-corretor, máximo passo no caminho central e múltiplas correções centrais.

Capítulo 6: As conclusões gerais sobre o trabalho desenvolvido são apresentadas neste capítulo. São ainda discutidas sugestões para futuros trabalhos.

Capítulo 2

Fluxo de Potência Ótimo

2.1 Introdução

O Fluxo de Potência Ótimo (FPO) consiste em um problema matemático para a determinação do estado de operação de um sistema elétrico de potência em regime permanente. Neste, uma dada *função objetivo* (ou *índice de desempenho*) é otimizada, enquanto simultaneamente são resolvidas as equações da rede elétrica e certas restrições físicas e operacionais são satisfeitas.

Desde sua formulação inicial (CARPENTIER, 1962), vários métodos de otimização vêm sendo aplicados em sua resolução, dentre os quais destacam-se os algoritmos de Programação Não Linear baseados no Método de Pontos Interiores (FRISCH, 1955), em especial as versões Primal-Dual (MEGGIDO, 1986) e Preditor-Corretor (MEHROTRA, 1992). Diversas metodologias foram propostas, na intenção de melhorar os algoritmos baseados em métodos de pontos interiores (TORRES; QUINTANA, 1998; CASTRONUOVO; CAMPAGNOLO; SALGADO, 1999; MO-MOH; ZHU, 1999; DAI; MCCALLEY; VITTAL, 2000; WU; DEBS, 2001). Em sua maioria, estes trabalhos são dedicados a melhoras relativas à formulação ou à modelagem dos problemas de otimização. Mais recentemente, as referências (CASTRONUOVO; CAMPAGNOLO; SALGADO, 2000; TORRES; QUINTANA, 2001; WU; CHANG, 2004) buscaram explorar a reutilização da matriz de coeficientes do sistema linear do método de Newton, para obter melhorias na performance do algoritmo Primal-Dual.

Na intenção de fornecer uma visão geral sobre os aspectos ligados ao FPO, este capítulo apresenta os conceitos básicos do Fluxo de Potência Ótimo, suas aplicações e alguns dos métodos de otimização mais utilizados. Dentre estes métodos, especial atenção é dispensada às abordagens de Programação Não Linear, baseadas no Método de Pontos Interiores.

2.1.1 Aplicações do FPO

O grande avanço tecnológico experimentado nas últimas décadas, associado ao desenvolvimento de novos algoritmos computacionais com aplicação para problemas de sistemas de potência, vem consolidando a utilização de ferramentas computacionais na análise e planejamento da operação de sistemas de elétricos de grande porte. Dentre estas ferramentas, destaca-se o FPO, cujas aplicações estão relacionadas à busca pelo estado operativo ótimo do sistema, para o qual certos objetivos são almejados. Estes objetivos podem estar ligados à aspectos práticos da operação, aspectos econômicos, sociais e de segurança.

Ao analisar a operação do sistema, pode-se buscar, por exemplo: (a) a redução dos custos de geração, através do despacho ótimo de potência; (b) o controle do intercâmbio de potência, no caso em que é possível obter vantagem a partir do baixo custo da energia de intercâmbio, porém as restrições de segurança devem ser atendidas (limites térmicos das linhas, perfil de tensões etc); (c) a inclusão de elementos de compensação reativa, quando deve ser determinada a quantidade mínima de potência reativa a ser instalada em determinadas barras do sistema, de forma a manter as condições de segurança; e (d) a redução do fluxo de potência reativa e perdas de potência ativa nas linhas de transmissão, mantendo-se o balanço de potência.

Outra importante aplicação potencial dos programas de FPO, diz respeito à operação em *Tempo-Real*. Nesta, a ferramenta computacional pode ser utilizada pelo operador como um instrumento de decisão. Algumas das situações onde esta aplicação é útil são: (a) determinação de soluções corretivas, que mantenham o estado operativo o mais próximo possível do original, quando da variação de carga ou na ocorrência de contingências; e (b) estabelecimento de um novo perfil de tensão, ou novo despacho de potência, para situações de saída forçada de linhas de transmissão.

Em estudos de estabilidade de tensão, os programas de FPO podem ser utilizados na (a) análise de máximo carregamento do sistema e (b) mínimo corte de carga, onde o estado operativo da rede é restabelecido através da identificação e eliminação de cargas inviáveis.

Para situações em que as restrições de segurança são consideradas, a ferramenta FPO pode determinar o despacho de segurança, seja para o estado corrente da rede, ou para uma previsão de carga de curto prazo.

Com relação à melhora no perfil das tensões da rede elétrica, a resolução de um problema de FPO pode fornecer ajustes em controles de determinados equipamentos, tais como: tapes de transformadores, capacitores chaveáveis e compensadores estáticos de reativos.

2.1.2 Utilização do FPO nos Mercados Desregulamentados

Nas últimas décadas, o mercado de energia elétrica vem experimentando um processo de reestruturação que visa a criação de condições de mercado, que possibilitem a entrada de

empresas privadas no setor. Por conta disto, várias concessionárias de energia elétrica vêm sendo privatizadas, tendo seus segmentos de serviços de geração, transmissão e distribuição, separados e administrados por diferentes empresas.

Em função desta nova configuração, ferramentas computacionais, para a análise e o planejamento do sistema elétrico, são necessárias para possibilitar a operação do sistema de forma imparcial e garantir condições de igualdade para as diversas empresas e consumidores do setor.

Desta forma, os programas computacionais para a solução das diversas modalidades de problemas de Fluxo de Potência Ótimo são indispensáveis para a prática do novo modelo de mercado de energia elétrica. O principal objetivo do uso generalizado deste programa é que, tanto as empresas quanto os grandes consumidores, tenham condições de analisar as tendências mercadológicas, garantindo a transparência do livre comércio e a busca por melhores condições de compra e venda dos bens e serviços.

Neste sentido, os programas computacionais de FPO têm sido utilizados para o cálculo de diversos índices, tais como: custos marginais de potência ativa e reativa, custos de perdas, custos de congestionamentos de linhas de transmissão, preço *spot* e preços de serviços ancilares, entre outros.

2.1.3 Vantagens do FPO

Os aplicativos computacionais de Fluxo de Potência Ótimo possuem diversas vantagens na análise de sistemas elétricos de potência. Dentre estas, duas dizem respeito à flexibilidade de formulação e à qualidade das soluções, podendo ser resumidas nos seguintes tópicos: (a) as soluções são obtidas em termos globais; (b) as equações do sistema de potência são formuladas no nível de barra, utilizando a mesma forma adotada nos estudos de fluxo de potência convencional; (c) há múltiplas possibilidades de escolha de índices de desempenho, devendo cada um destes refletir os objetivos práticos da operação; (d) é possível formular a grande maioria das restrições operativas, além das restrições de segurança, o que não é verificado nos métodos convencionais de solução das equações da rede; e (e) a possibilidade de se estimar a sensibilidade do índice de desempenho com relação às variações de demanda ou de determinados limites operativos.

2.2 Fundamentos Básicos do FPO

O FPO é um problema matemático de larga escala, não convexo e não linear, que pode ser expresso matematicamente como:

$$\begin{aligned} & \textit{Minimizar} && f(\mathbf{x}) \\ & \textit{sujeito a} && \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \\ & && \mathbf{h}(\mathbf{x}) \geq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{2.1}$$

onde $f(\mathbf{x})$ é a função objetivo a ser minimizada, \mathbf{x} é o vetor das variáveis de otimização, $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ é o vetor composto pelas restrições de igualdade e $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ é o vetor composto pelas restrições de desigualdade.

2.2.1 Variáveis

Dentre as variáveis de um sistema de potência, operando em regime permanente, pode-se destacar:

- módulo das tensões complexas nodais nas barras do sistema;
- ângulo das tensões complexas nodais nas barras do sistema;
- tapes de transformadores com comutação automática de sob carga (LTC's);
- variação angular de transformadores defasadores;
- geração de potência ativa;
- geração de potência reativa;
- injeção de potência reativa de compensadores estáticos;
- corte de carga;
- fluxos de potência em elos de corrente contínua;
- fluxos de potência nas linhas de transmissão.

Além destas grandezas, algumas características físicas da rede elétrica são modeladas como parâmetros fixos, sendo estes pré-estabelecidos e mantidos constantes ao longo da resolução do problema. Em geral, estes parâmetros são:

- demandas de potência ativa e reativa;
- topologia do sistema de potência;
- impedância série das linhas de transmissão;
- elementos reativos em derivação (elementos *shunt*);
- coeficientes de custo associadas aos índices de desempenho.

2.2.2 Restrições

São utilizados dois tipos de restrições na modelagem do problema de FPO. Em função da forma de seu equacionamento, estas restrições são classificadas em *Restrições de Igualdade* e *Restrições de Desigualdade*.

Restrições de Igualdade

As restrições de igualdade representam a relação entre as variáveis de controle e as variáveis dependentes. Também denominadas de *Restrições de Carga*, as restrições de igualdade são tipicamente modeladas pelas equações de balanço de potência, garantindo que, ao final da solução do problema de FPO, as demandas de potência ativa e reativa, além das perdas nas linhas de transmissão, são totalmente supridas pela geração do sistema.

Como mostrado em (SUN *et al.*, 1984), o problema de FPO pode ser descrito como uma extensão do problema clássico de Fluxo de Potência (FP), no qual devem ser respeitados certos limites ao se minimizar uma dada função objetivo. Desta forma, as equações não lineares de fluxo de potência, empregadas para caracterizar o sistema, são também utilizadas no FPO. Assim, um sistema elétrico de potência, com n barras, pode ser estaticamente representado por n equações complexas não lineares, definidas como:

$$V_k \sum_{m \in \{K\}}^n V_m (\cos \delta_{km} + j \sin \delta_{km}) (G_{km} + jB_{km}) = (P_{gk} - P_{dk}) - j(Q_{gk} - Q_{dk}) \quad k = 1, \dots, n$$

$$m = 1, \dots, n \quad (2.2)$$

onde, V_k é o módulo da tensão complexa na k -ésima barra; δ_k é o ângulo da tensão complexa na k -ésima barra; δ_{km} é por definição igual à diferença angular ($\delta_k - \delta_m$); G_{km} é a condutância da linha de transmissão entre as barras k e m ; B_{km} é a susceptância da linha de transmissão entre as barras k e m ; P_{gk} e Q_{gk} são as gerações de potência ativa e reativa da k -ésima barra, respectivamente, representando as parcelas de potência que entram na barra k ; P_{dk} e Q_{dk} são, respectivamente, as demandas de potência ativa e reativa da k -ésima barra, representando as parcelas fixas de potência que saem da barra k ; e K é o conjunto de barras adjacentes à barra k .

Ao separar-se os termos reais e imaginários da Eq. (2.2), obtém-se

$$V_k \sum_{m \in \{K\}}^n V_m (G_{km} \cos \delta_{km} + B_{km} \sin \delta_{km}) = P_{gk} - P_{dk}$$

$$V_k \sum_{m \in \{K\}}^n V_m (G_{km} \sin \delta_{km} - B_{km} \cos \delta_{km}) = Q_{gk} - Q_{dk} \quad k = 1, \dots, n$$

$$m = 1, \dots, n$$

desta forma, a equação complexa (2.2) pode ser expandida em duas equações reais não lineares, aumentando para $2n$ o número de equações necessárias para representação estática de um sistema de n barras.

A injeção líquida de potência em cada barra do sistema representa o somatório algébrico

de todas as potências que entram e saem de cada nó. Assim, podem ser representadas por

$$\begin{aligned} P_k(V, \delta) &= P_{g_k} - P_{d_k} \\ Q_k(V, \delta) &= Q_{g_k} - Q_{d_k} \quad k = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (2.3)$$

A partir da Eq. (2.3), são obtidas as restrições de igualdade utilizadas no problema clássico de FPO modelado em (2.1), assumindo a seguinte representação:

$$\begin{aligned} P_k(V, \delta) - P_{g_k} + P_{d_k} &= 0 \\ Q_k(V, \delta) - Q_{g_k} + Q_{d_k} &= 0 \quad k = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Restrições de Desigualdade

As restrições de desigualdade, também chamadas de *Restrições de Canalização*, são introduzidas no problema de FPO afim de modelar limites físicos e operacionais da rede elétrica (*Restrições Operacionais*), além de aspectos de segurança relacionados à prática de operação do sistema (*Restrições de Segurança*).

Modeladas matematicamente por inequações, geralmente estas restrições estão relacionadas à limites mínimos e máximos. Desta forma, estas restrições podem ser representadas analiticamente por:

$$x_k^{min} \leq x_k \leq x_k^{max} \quad k = 1, \dots, l$$

onde, x representa a variável sob restrição, os superescritos *min* e *max* relacionam-se aos limites mínimos e máximos, respectivamente, e l é o número de variáveis sujeitas à restrições de desigualdade.

As restrições de desigualdade podem ser subdivididas em três grupos:

Restrições de Controle: Caracterizam-se por modelar as limitações físicas dos equipamentos da rede elétrica. Geralmente aplicadas às variáveis de controle, são tipicamente relacionadas à limites de geração de potência ativa, limites de magnitude de tensão nas barras de geração e limites de tapes de LTC's.

Restrições Funcionais: Modelam os limites relacionados às variáveis dependentes, cujos valores variam em função das variáveis de controle. Dentre estas, as mais comuns são: limites de geração de potência reativa e limites de fluxos de potência (ativos e reativos).

Restrições de Segurança: São restrições relacionados à *Análise de Segurança do Sistema*, que buscam modelar restrições operacionais e de carga, relativas à análise de contingências. Em situações de perda de linhas e/ou unidades geradoras, pode-se estabelecer limites em grandezas como: fluxo de potência em linhas consideradas críticas, módulos das tensões nodais e injeção de reativos através de compensadores estáticos, por exemplo.

O tratamento das restrições de desigualdade representa o aspecto de maior dificuldade na solução dos problemas de FPO. Isto se dá pelo grande número de restrições envolvidas, além da impossibilidade, ao início do processo iterativo, de identificar quais restrições estarão ativas na solução (restrições cujas variáveis estão no limite).

2.2.3 Funções Objetivo

Um dos pontos mais importantes na implementação de um processo de otimização, refere-se à escolha e modelagem adequada da função objetivo. Em aplicações relativas à sistemas de potência, esta deve representar realisticamente as características requeridas à prática da operação, além de ser bem formulada analiticamente, de forma a facilitar a aplicação das técnicas de otimização.

Dentre todos os aspectos relacionados à implementação de algoritmos para a solução de FPO, a definição da função objetivo está entre os menos desenvolvidos. Em função da complexidade dos problemas de otimização, associados à sistemas de potência, é praticamente impossível definir uma função escalar cujo valor reflita o melhor estado operativo do sistema. Assim, diversas funções objetivo são propostas, sendo selecionadas cuidadosamente, com base na análise de aspectos relacionados à economia e segurança do sistema elétrico. Alguns dos índices de desempenho mais freqüentemente utilizados são:

- custo de geração de potência ativa, reativa, ou ambas;
- perda de potência ativa nas linhas de transmissão;
- desvio no valor de grandezas elétricas com relação a valores pré-estabelecidos;
- máxima demanda;
- corte de carga.

Com a desregulamentação do mercado de energia elétrica, outros índices têm sido propostos, tais como *Benefício individual* ou *Benefício social* (WEBER; OVERBYE, 2002), os quais não serão abordados neste texto.

A Seção 4.2 detalha a formulação matemática dos índices de desempenho utilizados neste trabalho.

2.3 Métodos de Solução do FPO

Embora o foco principal deste trabalho esteja diretamente relacionado à utilização de Métodos de Pontos Interiores, aplicados a problemas não lineares restritos, esta seção busca fornecer uma breve análise sobre alguns dos diversos métodos de otimização utilizados na solução do problema de FPO.

2.3.1 Programação Linear

As metodologias baseadas em Programação Linear são aplicadas na resolução de problemas de otimização nos quais, tanto a função objetivo, quanto as restrições, são modeladas por equações lineares, com variáveis não negativas.

Uma propriedade fundamental de problemas lineares bem-comportados, de n variáveis com m restrições de desigualdade, é a de que deve existir um vértice minimizador, ou seja, um ponto onde n restrições, com gradientes linearmente independentes, satisfazem uma dada igualdade. O método *Simplex*, criado por Dantzig em 1947, é um procedimento iterativo, aplicado à problemas lineares, que explora esta característica. Neste método, as sucessivas soluções movem-se de vértice em vértice, a cada iteração, alterando o conjunto de restrições de forma a satisfazê-las exatamente. Desde o princípio, o método simplex dominou o campo da programação linear. Ainda que diferentes estratégias fossem sugeridas, estas não conseguiam superar o método simplex em termos de velocidade e confiabilidade. Embora extremamente robusta, esta técnica teve sua posição revista em função da sua complexidade computacional no tratamento de problemas de grande porte. Pode-se dizer que o método simplex, e suas extensões, são métodos inerentemente combinatórios, de forma que seu desempenho está diretamente ligado, no pior caso, ao número máximo de combinações entre n variáveis e m restrições, para as quais as igualdades são satisfeitas. O método simplex só foi superado em 1984, quando Karmarkar apresentou seu método projetivo, aplicado à programação linear.

A aplicação de métodos de programação linear a problemas de FPO, requer sucessivas linearizações das equações de rede e da função objetivo, além de haver a necessidade de partir de um dos vértices do problema, o que implica em tomar uma solução viável como ponto inicial.

Dentre as diversas publicações relacionadas à aplicação de métodos de programação linear à problemas de FPO, pode-se destacar (DIKIN, 1967; WELLS, 1968; STOTT; HOBSON, 1978; HOUSOS; IRISARRI, 1983; MOTA-PALOMINO; QUINTANA, 1984).

A despeito da importância dos métodos de programação linear para o estudo do problema de fluxo de potência ótimo, o objetivo deste trabalho é o estudo de métodos baseados em programação não linear, aplicados ao problema de fluxo de potência ótimo. Desta forma, as próximas seções tratam especificamente deste assunto.

2.3.2 Programação Não Linear

A primeira formulação do problema de FPO, relativa à programação não linear generalizada, foi apresentada em 1962 por Carpentier (CARPENTIER, 1962), onde foi modelado o problema de despacho econômico, incluindo restrições operacionais. A partir deste trabalho, diversas técnicas de otimização, aplicadas a problemas não lineares de FPO, foram apresentadas. A seguir, relaciona-se alguma das técnicas mais utilizadas.

Métodos de Gradiente

Os *Métodos de Gradiente* foram os primeiros a serem utilizados na resolução de problemas não lineares de fluxo de potência ótimo. Dentre as diversas abordagens baseadas neste método, destaca-se o pioneiro trabalho de Dommel e Tinney, apresentado em 1968. Neste, os autores empregavam o método de Newton, para solução das equações de fluxo de potência, e o método do gradiente, para o ajuste ótimo dos parâmetros de controle.

Nesta abordagem, o processo de otimização é desenvolvido em quatro etapas. Primeiramente o problema de fluxo de potência clássico é resolvido pelo método de Newton, de forma a gerar uma solução viável, porém, não ótima. Em seguida, o problema de FPO irrestrito é resolvido, encontrando-se uma solução ótima para as equações do fluxo de potência. E finalmente, são introduzidas as restrições de desigualdade, primeiramente para os parâmetros de controle, e, logo após, para as variáveis dependentes (restrições funcionais).

Dentre os passos a serem seguidos nesta abordagem, o tratamento das restrições funcionais é com certeza o mais complexo. Para lidar com este problema, os autores utilizaram funções de penalidade, que somadas à função objetivo, tendem a relaxar os limites das variáveis funcionais que extrapolam os seus respectivos *limites rígidos*. Esta técnica faz com que a trajetória de otimização possa retornar à região viável, mantendo a solução do problema tão próxima do ponto ótimo, quanto maiores forem os fatores de penalidade adotados para as restrições violadas. Porém, valores elevados para os parâmetros de penalidade, podem levar a problemas de convergência, aumentando consideravelmente o tempo computacional. A solução adotada para contornar este problema leva a escolha de fatores de penalidade com baixos valores ao início do processo iterativo e, a medida que o processo se aproxima da solução, seus valores vão sendo aumentados.

Os resultados apresentados pelo método, mostraram a possibilidade de se utilizar o método de Newton na solução do problema de FPO, com tratamento de restrições de desigualdade através das funções de penalidade para corrigir as inviabilidades funcionais.

Programação Quadrática

Os métodos de *Programação Quadrática* podem ser tomados como uma categoria especial entre os métodos de programação não linear, na qual o processo de solução do problema de FPO é semelhante ao utilizado nos Métodos de Programação Linear Sequencial. Nesta categoria, as funções objetivo são modeladas por equações quadráticas, enquanto que as restrições são linearizadas. Alguns trabalhos relacionados à esta metodologia são (REID; HASDORF, 1973; WOLLENBERG; STADLIN, 1974; BURCHETT; HAPP; WIRGAU, 1982; BURCHETT; HAPP; VIERATH, 1984).

Mais recentemente, (NEJDAWI; CLEMENTS; DAVIS, 2000) apresentaram uma abordagem para a solução do problema de FPO, na qual é empregada a programação quadrática sequen-

cial, juntamente à metodologia de pontos interiores. Neste trabalho o problema é resolvido utilizando-se dois procedimentos computacionais (*laços*), caracterizados pela implementação das diferentes metodologias supracitadas. No *laço externo*, as condições de otimalidade de primeira ordem de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) são linearizadas, com relação às variáveis de otimização. No *laço interno* é realizada a solução do problema linearizado, através do método primal-dual de pontos interiores. Adicionalmente, é proposta a relaxação das restrições de desigualdade, através do uso de uma função quadrática de penalidade. Neste procedimento, a cada iteração do laço interno, são identificadas as restrições que sofreram violação. Após a identificação, estas restrições são relaxadas através de variáveis artificiais. Assim, as variáveis artificiais, introduzidas nas restrições de desigualdade violadas, são reduzidas a cada iteração, até atingirem o valor zero. Os autores propõe ainda a redução do sistema linear do método de Newton, utilizado no laço interno, de forma a diminuir o esforço computacional. O algoritmo foi testado para os problemas de minimização do custo de geração e minimização de perdas de potência ativa, utilizando partida plana. Os resultados foram obtidos com base em cinco sistemas-teste, de 23, 30, 57, 118 e 300 barras. Como a dimensão do sistema linear resolvido no laço interno é proporcional ao número de restrições violadas, o algoritmo apresenta bom desempenho computacional, já que apenas uma pequena parcela do total de restrições atinge o limite. Com relação ao número de iterações, de ambos os laços, observa-se uma pequena variação para problemas de diferentes dimensões, o que demonstra a eficiência do algoritmo.

Método de Newton

O Método de Newton, também conhecido como *Método do Gradiente Modificado*, utiliza uma aproximação quadrática da função Lagrangeana, de forma a obter as condições de otimalidade de primeira ordem de KKT. A manipulação das restrições de desigualdade representa a grande dificuldade ligada a este método. Ao lidar com tal problema, pode-se adotar uma das três estratégias descritas a seguir.

- **Inclusão de Restrições Ativas:** Neste procedimento, seleciona-se um conjunto de possíveis restrições ativas (violadas) e procede-se o cálculo da solução relativa à primeira iteração. Analizando o sinal das respectivas variáveis duais, pode-se prosseguir o processo iterativo, ou, para o caso em que os sinais não correspondem ao esperado, escolher um novo grupo de restrições. Embora este procedimento seja relativamente simples, problemas ligados à manipulação da matriz de coeficientes e dificuldades de convergência, não conferem a este confiabilidade, em especial para problemas de grande porte, com muitas restrições de desigualdade.
- **Uso de Funções de Penalidade:** Esta metodologia assemelha-se àquela utilizada no Método do Gradiente Reduzido de Dommel e Tinney (DOMMEL; TINNEY, 1968). A idéia central está ligada à utilização de funções de penalidade adicionadas à função Lagrangeana, de forma a relaxar os limites das variáveis que violam as restrições. As dificuldades

encontradas nesta metodologia estão relacionadas à escolha dos coeficientes de penalidade e tratamento de violações severas. Apesar destas dificuldades, as técnicas baseadas nesta metodologia são as mais utilizadas no tratamento das restrições de desigualdade.

- **Iterações Experimentais:** Este método testa diferentes valores para o passo de Newton, de forma a obter soluções que não violem as restrições de desigualdade. Estes testes são efetuados antes de uma nova solução do método de Newton, introduzindo as novas restrições ativas (no limite) ao problema. O processo de solução do sistema linear, para cada teste de violação, faz com que o custo computacional seja elevado, de forma que esta abordagem não é considerada atrativa.

O método de Newton teve boa aceitação durante a década de oitenta, em especial por suas propriedades de convergência quadrática. Dentre os trabalhos ligados a esta metodologia pode-se citar (RASHED; KELLY, 1974; HAPP, 1974; ALVARADO, 1978; SUN *et al.*, 1984; PEREIRA *et al.*, 1987).

Métodos de Pontos Interiores

A primeira metodologia a empregar a abordagem de pontos interiores é usualmente atribuída à Frisch (1955). Neste trabalho, o autor propõe a utilização de um método de barreira logarítmica para a solução de problemas de natureza convexa. Na década seguinte, esta metodologia foi estudada por Fiacco e McCormick (1968), sendo aplicada à resolução de problemas não lineares com restrições de desigualdade. Esta abordagem visava, basicamente, utilizar os limites da região viável para penalizar a vizinhança da trajetória de convergência, de forma a gerar uma trajetória central até o ponto ótimo. Nas décadas seguintes, os bons resultados apresentados por novas metodologias de programação não linear desencorajaram a aplicação deste método, levando ao seu total abandono. Com relação à programação linear, o método de pontos interiores não obteve sucesso frente ao método simplex, que apresentava resultados superiores, tornando-se o método dominante na resolução de problemas de natureza linear.

Em 1984, Karmarkar mudou drasticamente o rumo das pesquisas nesta área, ao apresentar um método para programação linear 50 vezes mais rápido do que o método simplex. Com o trabalho de (GILL *et al.*, 1986), o Método Projetivo de Karmarkar foi formalmente reconhecido como um equivalente do método clássico de barreira logarítmica, aplicado à programação linear. O método de Karmarkar representa um divisor de águas na história da otimização contínua, dando início ao que se chamou de “revolução dos pontos interiores” (FORSGREN; GILL; WRIGHT, 2002).

Uma das grandes vantagens encontradas nos métodos de barreira é que, ao contrário do método simplex, esta metodologia poderia ser aplicada não apenas à programação linear, mas para outros problemas de otimização, como: programação quadrática, complementariedade

linear e não linear, e programação não linear. Desde então, várias abordagens, baseadas no trabalho de Karmarkar, vêm sendo propostas.

Os métodos de pontos interiores podem ser classificados em três categorias principais:

- Métodos Projetivos;
- Métodos Afim-Escala;
- Métodos Primais-Duais.

Os métodos projetivos incluem o algoritmo original de Karmarkar e são responsáveis pelo grande interesse despertado para esta área. Logo após 1984, os métodos de escala-afim, os quais relacionam-se ao trabalho de Dikin (DIKIN, 1967), foram obtidos como uma simplificação dos métodos projetivos. Eles não compartilham todas as boas qualidades teóricas dos métodos projetivos, mas reduziram a complexidade computacional e a sua simplicidade tornou-se muito popular na ocasião.

O primeiro resultado teórico para o método primal-dual *path-following* foi obtido por Megiddo (MEGGIDO, 1986), que propôs aplicar o método de barreira logarítmica aos problemas primal e dual, simultaneamente. O seu algoritmo path-following obteve sucesso maior do que os algoritmos de pontos interiores da época. Os algoritmos path-following que incorporaram a técnica do Preditor-Corretor de Mehrotra (MEHROTRA, 1992) são, atualmente, aceitos como os algoritmos preditor-corretores mais efetivos computacionalmente.

2.4 Revisão Bibliográfica sobre Métodos de Pontos Interiores

Esta seção visa fornecer uma visão geral sobre as diferentes técnicas de programação não linear, baseadas em pontos interiores, aplicadas ao problema de Fluxo de Potência Ótimo.

Embora a retomada dos métodos de pontos interiores tenha ocorrido em meados da década de 80, a sua aplicação em problemas de sistemas de potência começou a ser estudada um pouco mais tarde. Um dos primeiros estudos realizados nesta área foi apresentado por Clements, Davis e Frey (1991). Neste trabalho, os autores apresentam uma técnica de pontos interiores aplicada à programação não linear, para a estimação de estados do sistema de potência.

Em 1993, Wu, Debs e Marsten apresentaram um trabalho, no qual era aplicado o método primal-dual de pontos interiores, versão preditor-corretor (MEHROTRA, 1992), ao problema não linear de FPO. Neste trabalho, a formulação do algoritmo preditor-corretor é mostrada em detalhes, sendo que as restrições de igualdade e de desigualdade são resolvidas simultaneamente. Além disto, alguns aspectos de implementação são abordados, tais como: (a) ajuste do parâmetro de barreira; (b) determinação do passo de Newton; (c) critérios de parada; (d)

grau de precisão da solução; (e) escolha do ponto inicial; e (d) técnicas de esparsidade. A implementação proposta foi efetuada para duas funções objetivo: custo de geração de potência ativa e perdas nas linhas de transmissão. A modelagem do problema contava com restrições de desigualdade para os módulo e ângulos das tensões nodais, com exceção do ângulo da barra de referência, restrições de balanço de potência, tanto para a potência ativa, quanto reativa, e restrições de fluxo de potência nas linhas de transmissão, para alguns dos casos testados. O algoritmo foi implementado em Fortran e executado em uma estação de trabalho Sun Sparc 1. Os testes comparam os resultados do método preditor-corretor com os obtidos pelo método primal-dual padrão, utilizando sistemas de 9, 30, 39, 118, 244 e 2423 barras. Os resultados apresentados pelos autores mostram que a formulação não linear, proposta para o método preditor-corretor, apresenta uma convergência mais rápida, em termos do número de iterações e tempo computacional, do que a obtida com o método primal-dual, para todos os casos estudados. Vários são os fatores que propiciam este resultado, podendo ser destacado o uso dos termos de segunda ordem na resolução do sistema linear do método de Newton, o uso de apenas uma fatoração da matriz de fatores do sistema linear, que é reutilizada para ambos os passos de obtenção da direção de convergência (passo de predição e passo de correção) e a técnica de esparsidade aplicada à matriz Hessiana.

Ainda em 1993, os mesmos autores, Wu, Debs e Marsten, publicaram um trabalho no qual propunham uma abordagem híbrida para a solução do problema de FPO, na qual é utilizada uma combinação dos métodos de pontos interiores primal-dual convencional e preditor-corretor. Nesta abordagem, a direção predita é utilizada na composição da direção efetiva de busca, apenas se sua contribuição resultar em uma diminuição considerável para o parâmetro de barreira. De forma que, se o comprimento do passo de Newton, calculado na etapa de correção, for inferior a um determinado limiar, o valor do parâmetro de barreira é obtido como no método primal-dual convencional. Esta metodologia visa uma redução mais rápida no valor do parâmetro de barreira, de forma a diminuir o número de iterações necessárias para a solução do problema de FPO. Além disto, os autores propõem a utilização de dois comprimentos de passo para a atualização das variáveis. Fazendo com que as variáveis, primais e duais, sejam atualizadas com passo distintos. Neste mesmo trabalho é apresentado um algoritmo de inicialização de variáveis, que visa a minimização das inviabilidades relativas as restrições, proporcionando um bom ponto inicial para o processo iterativo. Os testes executados seguem as mesmas especificações técnicas descritas para o trabalho anterior destes autores. Porém, neste último artigo, a abordagem híbrida é comparada ao método preditor-corretor, além de serem comparadas duas estratégias de partida: (a) partida plana e (b) partida utilizando o algoritmo de inicialização. Os resultados apresentados mostram que a estratégia híbrida melhora a performance do algoritmo preditor-corretor, proporcionando um menor tempo de computação e menor número de iterações, para as duas formas de partida. Além disto, é mostrado que o algoritmo para obtenção do ponto inicial produz melhores resultados do que os encontrados para a partida plana.

Na referência (GRANVILLE, 1994) foi implementado uma método de pontos interiores,

baseado no algoritmo primal-dual, aplicado ao problema de despacho ótimo de reativos. Neste trabalho é apresentada uma descrição detalhada do algoritmo, com ênfase no processo de atualização dinâmica do parâmetro de barreira. Os autores mostram a modelagem matemática das funções objetivo: alocação ótima da geração de potência reativa e perdas nas linhas de transmissão, das restrições de igualdade e de desigualdade. Nesta abordagem, a geração de potência ativa é mantida fixa, de forma que apenas os controles relativos à parcela reativa são otimizados. As variáveis sujeitas à restrições de desigualdade são: módulo das tensões nodais, tapas de transformadores com comutação automática sob carga, geração de potência reativa e o somatório das injeções de reativos para cada barra do sistema. As restrições de balanço de potência são modeladas para as parcelas ativa e reativa. Ainda com relação à implementação, é apresentado um esquema para o desacoplamento das grandezas ativas e reativas, sendo que o sistema relativo à parcela ativa é resolvido pelo método de fluxo de potência desacoplado rápido, já o sistema relativo à parcela reativa não sofre aproximações, mantendo a sua formulação não linear. Os testes foram executados para dois sistemas de grande porte, o primeiro modelando o sistema SUL/SUDESTE Brasileiro do ano de 1995, contendo 1832 barras, e o segundo derivado do sistema norte americano, com 3467 barras. A implementação foi realizada em um computador 386 de 25MHz, com precisão aritmética simples. Os resultados mostram que o método pode ser bastante atrativo para aplicações em sistemas de potência de larga escala. Os autores apresentam os seguintes pontos favoráveis à utilização desta abordagem: (a) o número de iterações não apresenta grande sensibilidade com relação ao porte dos sistemas; (b) robustez numérica; (c) possibilidade de partida *a quente*; (d) facilidade no cálculo da parcela de grandezas ativas; e (e) facilidade na solução da alocação ótima de reativos e minimização de perdas, em problemas mal-condicionados de grande porte.

Um algoritmo para programação não linear, baseado no método primal-dual de pontos interiores, versão preditor-corretor, é apresentado na referência (TORRES; QUINTANA, 1998). O problema de FPO a ser resolvido é o de minimização de perdas nas linhas de transmissão, sendo que, o ponto chave deste artigo refere-se à representação das tensões nodais complexas em coordenadas retangulares, o que resulta em funções objetivo e restrições, modeladas na forma quadrática. Segundo os autores, as principais vantagens desta representação são: (a) a matriz Hessiana é constante; (b) a expansão em série de Taylor termina no termo de segunda ordem, evitando erros advindos do truncamento da série; e (c) a facilidade no cálculo dos termos de alta ordem. De maneira que, estas propriedades são traduzidas em um menor número de iterações necessárias ao final do processo de convergência. Os autores fornecem um estudo detalhado sobre os algoritmos primal-dual e preditor-corretor, em coordenadas retangulares, além de abordarem assuntos relativos à escolha do ponto inicial, resolução do sistema linear do método de Newton e precauções ante o seu mal-condicionamento. O algoritmo apresentado foi desenvolvido em MatLab[®] e testado para os sistemas do IEEE, de 30, 57, 118 e 300 barras. Os resultados obtidos com a representação em coordenadas retangulares foram comparados com os obtidos com representação em coordenadas polares, para as versões primal-dual convencional e preditor-corretor. Os resultados apresentados confirmam a boa performance, tanto

do método com representação retangular, quanto polar. As vantagens do método retangular relacionam-se a facilidade em montar a matriz Hessiana e em incorporar informações de alta ordem ao procedimento preditor-corretor. A desvantagem está em ter de tratar as restrições de desigualdade, relativas às tensões complexas, como restrições funcionais.

Em 1999, Momoh, El-Hawary e Adapa apresentaram dois artigos, onde relacionam alguns dos trabalhos mais relevantes sobre os métodos de otimização aplicados ao problema de FPO, publicados até 1993. Nestes dois artigos, os métodos são classificados como: (a) programação não linear; (b) programação quadrática; (c) solução das condições de complementariedade baseadas no método de Newton; (d) programação linear; (e) programação inteira mista; e (f) métodos de pontos interiores. Os autores enfatizam a grande variedade de técnicas empregadas na solução do FPO, fornecendo um boa fonte de pesquisa no campo da otimização aplicada à sistemas elétricos de potência.

No mesmo ano (1999), os autores Garzillo, Innorta e Ricci publicaram um artigo que trata da aplicação de um algoritmo baseado no método primal-dual de pontos interiores, aplicado aos problemas de mínimo custo de instalação de compensadores *shunt* de reativos (típico problema de planejamento) e mínimo corte de carga (típico problema de operação). A formulação dos problemas conta com as seguintes variáveis: (a) módulos e ângulos das tensões nodais (com exceção do ângulo da barra de referência); (b) geração de potência ativa e reativa; (c) tapes de LTC's; e (d) magnitude da corrente em ramos controlados. Sendo que este último tipo de variável é tratado dinamicamente pelo algoritmo, de forma que a cada iteração é efetuado um teste com relação ao limite térmico dos ramos em questão, para que as possíveis violações sejam coibidas. Este procedimento leva a um crescimento na dimensão do problema, em função do aumento do número de variáveis controladas, a medida que o processo se aproxima da solução. Assim, o tamanho mínimo do problema é encontrado nas primeiras iterações do processo de solução. Para o problema de mínimo custo de instalação de compensadores são introduzidas duas novas variáveis: potência reativa capacitiva e potência reativa indutiva, instaladas em cada nó candidato à instalação de bancos compensadores. Para o caso de minimização de corte de carga, as novas variáveis representam o total de demanda ativa e reativa, retiradas de cada barra, sendo que a relação entre o corte de ativos e reativos é constante, mantendo a relação obtida entre as demandas de cada barra no caso base. As funções objetivo são modeladas pela equação quadrática que representa o custo de geração de potência ativa, sendo que no caso do mínimo custo de instalação de compensadores, é adicionado a esta o somatório das potências reativas geradas pelos compensadores, multiplicados por coeficientes de custo. Já para o mínimo corte, é adicionado o total de demanda cortada, também multiplicada por coeficientes de custo. O procedimento foi testado para diferentes sistemas reais, com dimensões superiores a 1500 barras e 500 geradores. O algoritmo proposto foi implementado em Fortran e utiliza a metodologia SIPARIO (*Sparse Interior-Point Active Reactive Integrated Optimization*) para o despacho acoplado das potências ativa e reativa (GARZILLO; INNORTA; RICCI, 1998). A metodologia foi avaliada com relação à sua capacidade de restituir o estado operativo do sistema, frente a situações de inviabilidade de solução. Os

resultados foram comparados aos obtidos com programas que utilizam modelos compactos e desacoplados, mostrando uma maior precisão e robustez.

A referência (DAI; MCCALLEY; VITTAL, 2000) apresenta um algoritmo simplificado, baseado no método primal-dual de pontos interiores, aplicado aos problemas de FPO de máximo carregamento e mínimo corte de carga. Neste procedimento, o equacionamento das condições de Karush-Kuhn-Tucker é simplificado, reduzindo consideravelmente o número de variáveis de folga e multiplicadores duais relativos às restrições de desigualdade, podendo-se afirmar que a dimensão dos problemas de FPO é reduzida em aproximadamente 25%. Os autores mostram a modelagem de duas abordagens para a variação de carga do sistema. Na primeira o sistema é considerado com uma única zona de variação, assim, todas as cargas (ativas e reativas) sofrem variações proporcionais. Como esta modelagem não se mostra satisfatória para os casos em que deve ser aplicado o corte de carga, os autores propõem a utilização do esquema de multi-zonas de variação de carga, onde as cargas pertencentes a uma determinada zona de variação sofrem incrementos/decrementos proporcionais entre si. Ainda com relação a modelagem do problema, é apresentada a formulação para o cálculo da capacidade disponível de transferência de único um gerador até a unidade consumidora. Este procedimento é efetuado ao liberar-se a geração de potência de apenas uma das barras (empresa geradora) e a demanda de outra (unidade consumidora), de forma que todas as outras barras mantenham tanto geração, quanto demanda, constantes. O trabalho também conta com uma seção dedicada à análise do *preço marginal*, cujo comportamento revela o “preço” a ser pago em virtude de restrições que atinjam seus respectivos limites. Com relação à implementação propriamente dita, os autores abordam três aspectos referentes ao desempenho do algoritmo, são estes: (a) oscilações causadas pelo valor reduzido do parâmetro de barreira; (b) oscilações causadas pelas equações de fluxo de potência; e (c) melhoras na convergência através da escolha do ponto inicial e da multiplicação das equações de fluxo de potência por multiplicadores de valor elevado (e.g. 100). Os testes foram realizados com o sistema-teste do IEEE RTS’96. Os resultados obtidos foram comparados aos gerados pelo programa VSTAB (desenvolvido por Powertech Labs Incorporated), que utiliza o método da continuação do fluxo de potência. Os resultados mostram que, para os testes de estabilidade de tensão, os resultados obtidos coincidem com os gerados pelo programa VSTAB, validando a eficácia do algoritmo. Após vários testes para diferentes restrições, utilizando a abordagem multi-zonas, os resultados mostraram-se satisfatórios, encorajando o uso do algoritmo e mostrando que o método de pontos interiores é eficaz na solução do problema de máximo carregamento e corte de carga.

Em 2000, Castronuovo, Campagnolo e Salgado aplicaram o algoritmo de *máximo passo no caminho central* (MPCC), ao problema de FPO. Este algoritmo foi primeiramente proposto em (GONZAGA; BONNANS, 1996) e (GONZAGA, 1997), para a solução de problemas de complementariedade linear. A metodologia proposta para a solução do FPO é baseada no método primal-dual de pontos interiores. Desta forma, a direção predita é calculada desprezando-se a perturbação aplicada ao problema original, correspondendo à direção *afim-escala*. Já na etapa de correção, esta perturbação é considerada na solução do sistema linear, o que não corres-

ponde à solução das condições de KKT para o sistema original. De posse das duas direções de busca (afim-escala e de correção), procede-se o cálculo da direção efetiva de busca, como uma combinação linear das direções obtidas anteriormente. A influência de cada uma das direções, previamente calculadas, na composição da direção efetiva é dada por um escalar, sendo este obtido em função da distância entre a solução atual e o caminho central da trajetória de otimização. Esta metodologia visa manter a trajetória de convergência *centralizada*, evitando que as variáveis envolvidas no problema aproximem-se demasiadamente dos seus respectivos limites. Por sua vez, a centralização da trajetória de convergência busca a diminuição no tempo de computação, em função do aumento dos passos de convergência obtidos a cada iteração, o que pode ser traduzido em um menor número de iterações do processo iterativo. Os testes apresentados foram realizados para dois índices de desempenho distintos e comparados com os obtidos com algoritmo primal-dual convencional. O primeiro índice refere-se à minimização do preço de geração de potência ativa, com representação obtida através de curvas quadráticas, enquanto que o segundo, refere-se à minimização da injeção de potência ativa da barra de referência, com a injeção de potência ativa das demais barras de geração mantidas entre limites bastante estreitos ($\pm 0,1$ p.u. a partir dos valores iniciais). Em ambos os problemas de minimização, tem-se que as restrições de igualdade são representadas pelas equações de balanço de potência, ativa e reativa, e as restrições de desigualdade contemplam limites de geração de potência ativa e reativa e limites de magnitude de tensão nodal. Ainda nesta formulação, as variáveis de otimização são as tensões nodais complexas e a geração de potência ativa. O algoritmo computacional foi implementado em Fortran 90 e os resultados obtidos em um computador Pentium II de 400MHz, com 128MB de memória RAM. Foram utilizados três sistemas-teste do IEEE (30, 57 e 118 barras), além de dois sistemas elétricos equivalentes ao Sistema Sudoeste Brasileiro (176 e 352 barras). Os resultados numéricos para a minimização do preço de geração de potência ativa mostram que, o método de máximo passo no caminho central apresenta tempo de processamento superior do que o apresentado para o método primal-dual (26% em média), o que é explicado em função do esforço extra para o cálculo da combinação linear entre as direções, em especial para problemas de maior porte. Os resultados para o problema de minimização da geração de potência ativa da barra de referência mostram que, o algoritmo de máximo passo no caminho central apresenta, na maioria dos casos, um número de iterações e tempo de computação, inferior ao observado para o algoritmo primal-dual. O que pode ser atribuído a baixa convexidade apresentada pela função objetivo associada ao estreitamento dos limites de geração de potência ativa.

No mesmo ano (2000), Quintana, Torres e Medina-Palomo apresentaram uma importante revisão e classificação de várias publicações referentes à teoria e aplicação de métodos de pontos interiores ao FPO. Este trabalho classifica as mais relevantes publicações segundo os seguintes tópicos: (a) origem e evolução dos métodos de pontos interiores; (b) desenvolvimento, implementação e testes de algoritmos de pontos interiores; (c) assuntos relacionados à álgebra linear, (d) códigos de programas de pontos interiores; (e) sites sobre pontos interiores na internet; e (f) aplicação de pontos interiores para sistemas de potência. A contribuição

deste trabalho para quem começa, ou mesmo para quem já possui alguma experiência, no campo da pesquisa sobre pontos interiores é valiosa. Servindo como um bom ponto de partida para a compreensão do atual cenário, no campo da otimização aplicada aos problemas ligados à sistemas elétricos de potência.

A referência (WU; DEBS, 2001) apresenta um estudo sobre quatro importantes aspectos ligados à implementação de métodos não lineares de pontos interiores aplicados ao FPO. Estes aspectos contemplam: *inicialização de variáveis*, *desacoplamento*, *hot start* e *warm start*. Os assuntos, inicialização de variáveis, hot start e warm start, referem-se à escolha do ponto inicial do processo de otimização, estando diretamente ligados à robustez do processo iterativo. Já o desacoplamento, refere-se à decomposição de variáveis e equações do fluxo de potência de forma a gerar subconjuntos “desacoplados”, que relacionem-se apenas às grandezas ativas ou reativas do sistema de potência. Este desacoplamento pode ser considerado apenas para sistemas nos quais a relação R/x nas linhas de transmissão seja baixa. Este procedimento possibilita a diminuição da complexidade dos problemas de FPO, permitindo o uso de diferentes técnicas para a resolução de cada subproblema (ativo e reativo), além de permitir que os subproblemas seja resolvidos em um número diferente de vezes. A implementação proposta aplica o método primal-dual de pontos interiores versão preditor-corretor, sendo executado em um computador Pentium II 233MHz. São utilizados duas funções objetivo para os problemas de minimização: custo de geração de potência e perda nas linhas de transmissão. Sendo aplicadas a dois sistemas reais de 244 e 2423 barras. Baseados nos resultados, os autores apontam uma redução de 24% no tempo de computação ao utilizar a estratégia de inicialização de variáveis. Com o desacoplamento (juntamente à inicialização de variáveis) esta redução chega a 27%. As estratégias hot start e warm start resolveram os problemas cerca de 2,0 e 2,7 vezes mais rápido do que com a inicialização de variáveis, respectivamente, e 2,5 e 3,3, respectivamente, sem o uso da inicialização.

Em 2001, Torres e Quintana apresentaram um trabalho aplicado ao problema de minimização de perdas de potência ativa nas linhas de transmissão, baseado no algoritmo primal-dual de pontos interiores de *múltiplas correções centrais* (MCC) de Gondzio (GONDZIO, 1996). Este método, inicialmente aplicado à problemas de programação linear, visa explorar a característica de fatoração matricial do método preditor-corretor clássico. Nesta abordagem, a direção predita é calculada como no método preditor-corretor e em seguida são obtidas uma ou mais direções de centralização que visam melhorar a centralidade da próxima iteração e aumentar o tamanho dos passos de convergência. Após inúmeros testes computacionais Gondzio observou que, o desempenho dos algoritmos primais-duais de pontos interiores poderia ser reduzida em função das grandes discrepâncias entre os produtos de complementariedade. Assim, o método visa a redução destas variações, através de sucessivas etapas de correção, onde apenas os produtos de complementariedade que não pertençam a um determinado conjunto de valores (produtos externos ao hipercubo) são computados no lado direito do sistema linear do método de Newton das etapas de correção. A implementação proposta foi testada para sistemas de 118, 300, 256, 555 e 2098 barras, sendo este último baseado no sistema elétrico brasileiro

reduzido, e comparada com os resultados obtidos para os algoritmos primal-dual padrão e preditor-corretor. O problema de FPO foi modelado com restrições de balanço de potência ativa e reativa, limites de magnitude de tensão, limites de tapes de transformadores e limites de injeção de potência reativa de geradores e bancos reativos em derivação. Os algoritmos foram implementados em Fortran 77 em um Pentium III de 500MHz, com 128 MB de memória RAM, em plataforma Linux. Os testes apresentados mostram uma impressionante desempenho do algoritmo MCC na solução de problemas de grande porte, superando os algoritmos primal-dual e preditor-corretor, além de apresentar menor sensibilidade à escolha de parâmetros pré-definidos. Os melhores resultados são obtidos para um grande número de etapas de correções centralizadoras, diferentemente do sugerido para problemas de programação linear (2 correções centralizadoras).

A referência (FERREIRA *et al.*, 2002), propõe a utilização de uma técnica combinada, baseada no método de pontos interiores, para o tratamento do problema de colapso de tensão. Os autores salientam que, embora a natureza deste fenômeno esteja mais ligada a análise dinâmica de sistemas de potência, para casos em que o crescimento da demanda é caracterizado por uma variação lenta, as técnicas estáticas de análise podem ser empregadas gerando bons resultados. Desta forma, ao analisar o colapso de tensão, através do modelo do fluxo de potência, três aspectos devem ser considerados: (a) a margem de carga do sistema; (b) identificação de barras críticas; e (c) ações de controle para evitar o fenômeno. Como o trabalho apresentado pelos autores não está ligado à análise em tempo real, o método da continuação é empregado para a identificação da margem de carga, muito embora, esta técnica não represente a melhor solução em termos de tempo computacional. A determinação de barras críticas tem um papel fundamental na análise do colapso de tensão, isto se deve ao fato de que, uma barra considerada crítica, apresenta as maiores variações de tensão com relação ao aumento de demanda, para uma região situada em sua vizinhança. Assim, os autores utilizam o método do vetor tangente para a identificação destas barras. Embora o conhecimento da margem de carga do sistema e a identificação das barras críticas sejam de suma importância, o operador pode não tomar as decisões de controle mais adequadas para evitar o colapso de tensão. A utilização de técnicas de otimização fornece alternativas de controle que visam contornar o colapso de tensão, seja explorando os recursos atuais da rede, ou, se isto não for suficiente, indicando pontos estratégicos para a instalação de bancos capacitivos. No método combinado, para situações em que os recursos do sistema são priorizados, a técnica de otimização é utilizada. Assim, o vetor tangente é utilizado para determinar dois grupos de barras: (a) barras críticas com relação ao colapso de tensão; e (b) barras de carga, nas quais a instalação de bancos capacitivos maximiza a redução de demanda reativa. No segundo passo, é utilizada uma técnica de otimização, baseada em pontos interiores, de forma a quantificar as ações de controle. Os testes foram realizados para os sistema SUL/SUDESTE Brasileiro, de 1700 barras. O programa FLUPOT, que incorpora o algoritmo apresentado pelos autores, é utilizado na obtenção dos resultados. Os resultados mostram que, a minimização das perdas de potência ativa nas linhas de transmissão, pode não ser suficiente para gerar o aumento

da margem de carga do sistema. Por outro lado, minimizar a geração de reativos, em barras próximas a áreas críticas do sistema, tende a aumentar esta margem. Para os casos em que bancos capacitivos são necessários, o conhecimento de barras consideradas “fracas” (do pontos de vista do colapso de tensão), pode ser de grande valia para a obtenção de bons resultados. A análise global dos resultados apresentados, qualifica a metodologia empregada no estudo do colapso de tensão.

No ano de 2004, Wu e Chang realizaram a análise comparativa entre dois algoritmos aplicados ao problema de FPO, baseados no método preditor-corretor, com múltiplas correções para os produtos de complementariedade. O primeiro algoritmo (MCC) baseia-se no trabalho de Gondzio, primeiramente aplicado à sistemas de potência em (TORRES; QUINTANA, 2001). O segundo algoritmo, *esquema fuzzy para segunda correção* (FSCS), utiliza uma lógica *fuzzy* de ajuste para múltiplos parâmetros de barreira, efetuada após a etapa de predição e a primeira correção do método preditor corretor (WU, 2001). Ao contrário do conceito do hipercubo (utilizado no método MCC), o algoritmo FSCS utiliza um esquema fuzzy para o cálculo de múltiplos valores para o parâmetro de barreira, de forma a corrigir apenas os pares de complementariedade que possam causar a diminuição no passo de convergência. Porém, a segunda correção só é realizada se houver produtos de complementariedade muito afastados da trajetória central. A principal intenção do trabalho apresentado, refere-se a análise de parâmetros de controle que possam contribuir para o desempenho dos algoritmos em questão. Os autores apontam cinco importantes diferenças entre as metodologias propostas: (a) o cálculo do tamanho de passo na etapa de predição; (b) a formação do vetor a direita do sistema linear do método de Newton na etapa de correção dos produtos de complementariedade; (c) o critério de parada de correção; (d) o tempo demandado na etapa de correção centralizada; e (e) o número de correções. Além destas diferenças pode-se destacar que, no método MCC o número máximo de correções de centralização é definido pelo usuário, sendo que estas são realizadas logo após a etapa de predição, já no método FSCS original, apenas uma etapa de centralização é efetuada, sendo realizada após a etapa de predição e a primeira correção. Os testes apresentados foram realizados utilizando técnicas avançadas de esparsidade na fatorização da matriz do método de Newton, o que proporciona uma melhor performance do que a obtida com algoritmos convencionais de fatoração. Os resultados numéricos foram gerados em um computador Pentium III 800MHz, utilizando um sistema real de 2423 barras. A partir dos testes foi observado que, as etapas de correções centralizadoras produzem melhores resultados quando executadas logo após os passos de predição e correção do método preditor-corretor, diferentemente do que é implementado no método MCC original. Além disto, o método FSCS apresenta melhores resultados em termos do tempo computacional, para a maioria dos casos estudados. Porém, ao contrário do que é implementado no método FSCS original, o número “ótimo” de correções centralizadoras é superior a 1.

O trabalho apresentado em (TORRES; CARVALHO JR, 2006) aborda tópicos relativos à eficiência na implementação computacional de algoritmos de FPO não lineares, baseados no método primal-dual de pontos interiores e suas extensões. Estes tópicos relacionam-se à

inicialização de variáveis, montagem das matrizes Jacobiana e Hessiana, estrutura esparsa de dados, solução dos sistemas de equações e ajustes de parâmetros do algoritmo de otimização. As discussões são baseadas na implementação do problema de minimização de perdas elétricas nas linhas de transmissão. Os autores apresentam um procedimento prático para a escolha do ponto inicial, primeiramente apresentado em (TORRES, 1998), onde enfatizam a importância da “centralidade” dos valores iniciais das variáveis, a fim de evitar o decréscimo no tamanho do passo nas primeiras iterações, o que pode resultar em problemas de convergência. Ainda com relação à escolha do ponto inicial, é proposta a inicialização dos Multiplicadores de Lagrange, associados às restrições de balanço de potência ativa, com o valor unitário. Isto em função do valor esperado para estas variáveis ao final do processo iterativo. Com relação aos parâmetros pré-definidos dos algoritmos de otimização, os autores sugerem, a partir de várias experimentações numéricas, que o valor inicial do parâmetro de barreira esteja entre os limites 0,01 e 10,0. São ainda apresentadas em detalhes, formas eficientes para o cálculo de gradientes e Hessianas, permitindo uma estruturação de dados que visa otimizar o uso de memória computacional, possibilitando a redução do tempo de processamento.

2.5 Conclusão

Desde a sua proposição, há aproximadamente quatro décadas, o Fluxo de Potência Ótimo tem ganho uma importância cada vez maior, como ferramenta computacional de análise de sistemas de potência em regime permanente. A desregulamentação do mercado de energia elétrica acentuou esta importância, principalmente pelo caráter imparcial dos resultados que podem ser obtidos via FPO no ambiente desregulamentado.

Em termos analíticos, o FPO é modelado como um problema de otimização não linear, multivariável, de grande porte e de acentuada complexidade. Uma variedade de abordagens têm sido propostas para a sua solução, por exemplo, metodologias baseadas em Programação Linear, Quadrática e Não Linear. Dentro desta última classe, os métodos de Newton e de Pontos Interiores têm se destacado como os mais adequados para a solução do problema de FPO. Com relação aos métodos de Pontos Interiores, as abordagens baseadas na versão primal-dual, preditor-corretor e múltiplas correções centralizadas são apontadas como as mais eficientes com relação ao esforço computacional. O capítulo subsequente apresenta a base teórica dos métodos de pontos interiores utilizados neste trabalho.

Capítulo 3

Métodos de Pontos Interiores Aplicados ao Problema de Fluxo de Potência Ótimo

3.1 Introdução

Desde o trabalho de Karmarkar (KARMARKAR, 1984), os métodos de Pontos Interiores têm sido aplicados na solução de problemas de otimização restritos. A forma de tratar as restrições de desigualdade, através da redução gradativa de uma perturbação na condição de folga complementar, fez com que o uso destes métodos se tornasse atrativo para a solução do problema não linear de Fluxo de Potência Ótimo (GRANVILLE, 1994; WU; DEBS; MARSTEN, 1994; IRISARRI *et al.*, 1997). Os fundamentos que incentivaram a aplicação do Método de Pontos Interiores (PI) na versão Primal-Dual (PD) à Programação Não Linear (PNL) foram apresentados em (EL-BAKRY *et al.*, 1996), no qual os autores demonstram a convergência desses métodos em problemas de PNL. Nas últimas duas décadas, outras pesquisas surgiram relacionadas à modificação do algoritmo original, as quais consistem geralmente em extensões de algoritmos propostos para a solução de problemas de PL, no sentido de melhorar as características de convergência do processo iterativo.

Este Capítulo apresenta os fundamentos teóricos de quatro versões de algoritmos de Pontos Interiores utilizadas para resolver o problema de FPO. Esses algoritmos são: Primal-Dual convencional (EL-BAKRY *et al.*, 1996), Preditor-Corretor (MEHROTRA, 1992; TAPIA *et al.*, 1996), Máximo Passo no Caminho Central (GONZAGA, 1997) e Múltiplas Correções Centralizadoras (GONDZIO, 1996). A principal diferença entre essas metodologias consiste na forma de tratar as condições de complementaridade, o que pode afetar consideravelmente a convergência do processo iterativo.

3.2 Conceitos Preliminares

Considere o seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & f(\mathbf{x}) \\ \text{sujeito a} \quad & \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \\ & \mathbf{h}(\mathbf{x}) \geq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{3.1}$$

onde, \mathbf{x} é um vetor coluna n -dimensional, cujas componentes são as variáveis de otimização; $f(\mathbf{x})$ é a função objetivo expressa em termos de \mathbf{x} ; $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ é um vetor coluna m -dimensional, cujas componentes são as equações $g_i(\mathbf{x})$ que representam as restrições de igualdade do problema de otimização e $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ é um vetor coluna l -dimensional constituído pelas equações $h_i(\mathbf{x})$ que representam as restrições de desigualdade.

Se apenas as restrições de igualdade são consideradas, a função Lagrangeana pode ser escrita como

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\lambda}^t \mathbf{g}(\mathbf{x})$$

onde, $\boldsymbol{\lambda}$ é o vetor coluna m -dimensional dos multiplicadores duais relativos às restrições de igualdade; e o problema representado pela Eq. (3.1) pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & \mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\lambda}^t \mathbf{g}(\mathbf{x}) \\ \text{sujeito a} \quad & \mathbf{h}(\mathbf{x}) \geq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{3.2}$$

com correspondentes condições de otimalidade de primeira ordem de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) expressas como

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{x}} \mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) - \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{h}(\mathbf{x})^t \boldsymbol{\pi} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{h}(\mathbf{x}) &\geq \mathbf{0} \\ \mathbf{\Pi} \mathbf{h}(\mathbf{x}) &= \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\pi} &\geq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{3.3}$$

onde, $\mathbf{\Pi}$ e $\boldsymbol{\pi}$ são uma matriz diagonal e um vetor coluna, ambos de dimensão l , cujos elementos π_i são os multiplicadores duais associados às restrições de desigualdade; $\nabla_{\mathbf{x}} \mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})$ é o vetor coluna n -dimensional constituído pelas derivadas de primeira ordem da função $\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})$, em relação às variáveis de otimização e $\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{h}(\mathbf{x})$ é a matrix de dimensões $(l \times n)$ das derivadas primeiras da função $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ com relação às variáveis de otimização.

A Eq. (3.3) indica que na solução ótima:

- o vetor gradiente da função Lagrangeana é formado pela combinação linear dos vetores gradientes das restrições;

- as restrições de desigualdade são todas satisfeitas;
- se uma restrição de desigualdade está no limite (ou seja, $h_i(\mathbf{x}) = 0$), então o multiplicador dual correspondente (π_i) é não nulo, e vice-versa. Esta relação é chamada de *condição de complementaridade*;
- não é possível excluir nenhuma desigualdade do conjunto de restrições ativas para uma eventual redução no valor da função Lagrangeana.

Seja $(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})$ um ponto qualquer pertencente à região das soluções viáveis, definida pelo conjunto de inequações $\mathbf{h}(\mathbf{x}) \geq \mathbf{0}$, para o qual seja possível determinar multiplicadores duais π_i não negativos, de maneira a satisfazer a primeira, a segunda e a quarta das Eqs. (3.3). O fato da terceira condição de otimalidade não ser satisfeita, pode ser interpretado como a aplicação de uma *perturbação* na condição de complementaridade. Na solução ótima esta perturbação é suprimida e a condição de complementaridade original é satisfeita. Portanto, no ponto considerado, a condições de complementaridade é expressa por

$$\mathbf{\Pi h}(\mathbf{x}) \geq \mathbf{0} \quad (3.4)$$

O uso de variáveis de folga e de restrições de não negatividade permite converter as inequações que representam a condição de complementaridade em igualdades da forma

$$\mathbf{\Pi h}(\mathbf{x}) - \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{com} \quad \mathbf{u} \geq \mathbf{0} \quad (3.5)$$

onde \mathbf{u} é o vetor l -dimensional das variáveis de folga correspondente à condição de complementaridade.

A análise da Equação (3.5) revela que:

- se no ponto $(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})$ todas as desigualdades correspondentes à terceira das Eqs. (3.3) estão no limite, então as variáveis de folga correspondentes são nulas. Isto pode ser interpretado como a ausência de perturbação na condição de complementaridade. Este ponto satisfaz as Eqs. (3.3) e é portanto a solução ótima do problema apresentado na Eq. (3.2);
- se no ponto $(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})$ as desigualdades expressas pela terceira das Eqs. (3.3) não estiverem todas no limite, então existe pelo menos uma variável de folga não nula e a condição de complementaridade não é satisfeita. Neste caso, o ponto $(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})$ não é a solução ótima.

Para cada condição de complementaridade não satisfeita, reescreve-se a Eq. (3.5) como

$$\boldsymbol{\pi} = \mathbf{D}_h(\mathbf{x})^{-1} \mathbf{u} \quad (3.6)$$

onde $\mathbf{D}_h(\mathbf{x})$ é uma matriz diagonal de dimensão l , cujos componentes são as funções $h_i(\mathbf{x})$. A substituição da Eq. (3.6) na primeira das Eqs. (3.3) resulta nas seguintes condições de otimalidade no ponto $(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})$:

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{x}} \mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) - \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{h}(\mathbf{x})^t \mathbf{D}_h(\mathbf{x})^{-1} \mathbf{u} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{h}(\mathbf{x}) &\geq \mathbf{0} \\ \mathbf{u} &\geq \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\pi} &\geq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{3.7}$$

onde a primeira equação pode ser interpretada como resultante da derivada parcial da função

$$P(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = \mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) - \mathbf{u}^t \ln \mathbf{h}(\mathbf{x})$$

com relação às variáveis de otimização.

A análise do termo $\mathbf{u}^t \ln \mathbf{h}(\mathbf{x})$ indica que, se a i -ésima desigualdade tende ao limite ($h_i(\mathbf{x}) \rightarrow 0$), então $\ln h_i(\mathbf{x}) \rightarrow -\infty$. Desde que o problema em questão é de minimização, o termo logarítmico age neste caso como uma barreira que impede a violação da restrição de desigualdade. Isto garante que, se a restrição de desigualdade é satisfeita na condição inicial, a trajetória da solução será localizada no interior da região das soluções viáveis com relação à referida restrição. Por esta razão, este termo é denominado *barreira logarítmica*.

A Eq. (3.7) pode ser interpretada como as condições de otimalidade do problema

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } f(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\lambda}^t \mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{u}^t \ln [\mathbf{h}(\mathbf{x})] \\ \text{sujeito a } \mathbf{h}(\mathbf{x}) \geq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{3.8}$$

Utilizando-se variáveis de folga \mathbf{s} para transformar as inequações $\mathbf{h}(\mathbf{x}) \geq \mathbf{0}$ em restrições de igualdade; isto é,

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{s} = \mathbf{0}, \quad \text{com } \mathbf{s} \geq \mathbf{0}$$

e considerando a definição de $\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})$, o problema de otimização representado pela Eq. (3.8) é reescrito como

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } f(\mathbf{x}) - \mathbf{u}^t \ln(\mathbf{s}) \\ \text{sujeito a } \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \\ \mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{s} = \mathbf{0} \\ \mathbf{s} \geq \mathbf{0} \\ \mathbf{u} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{3.9}$$

onde, \mathbf{s} é o vetor coluna l -dimensional composto pelas variáveis de folga s_i .

Para que os problemas expressos pelas Eqs. (3.1) e (3.9) tenham a mesma solução, as variáveis de folga relativas à condição de folga complementar (componentes do vetor \mathbf{u}) devem

tender a zero. Para simplificar a aplicação desta condição, ao invés dos valores individuais das variáveis de folga \mathbf{u} , um escalar μ , denominado *parâmetro de barreira* ou *parâmetro de perturbação*, é geralmente usado. Este parâmetro é expresso como a média aritmética das distâncias primais-duais da solução corrente até o ponto ótimo, medida de acordo com as equações de complementaridade. Para a i -ésima restrição de desigualdade, a distância primal-dual (também denominada *gap de complementaridade*) é definida como o produto de $h_i(\mathbf{x})$ pelo correspondente multiplicador dual π_i . O parâmetro de barreira é então computado como

$$\mu = \frac{\boldsymbol{\pi}^t \mathbf{h}(\mathbf{x})}{l}$$

com a sua não-negatividade garantida pela condição

$$h_i(\mathbf{x}) = s_i \quad \text{com} \quad s_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, l$$

para cada solução viável. Desta forma,

$$\mu = \frac{\boldsymbol{\pi}^t \mathbf{s}}{l} \quad (3.10)$$

tal que o vetor das variáveis de folga relativas à condição de complementaridade é expresso como

$$\mathbf{u} = \mu \mathbf{e} \quad (3.11)$$

onde \mathbf{e} é um vetor coluna de dimensão l , com todos os elementos unitários.

Desde que as condições de otimalidade do problema original devem ser satisfeitas na solução ótima, o parâmetro de barreira deve convergir a zero durante o processo iterativo. Isto significa reduzir o efeito da perturbação aplicada à condição de complementaridade, até a sua completa eliminação. Entretanto, o número de restrições de desigualdade é constante, e portanto, se a Eq. (3.10) é usada para calcular o parâmetro barreira, a redução de seu valor não é acentuada. Para se obter um decréscimo significativo, o fator β (onde $0 < \beta \leq 1$, 0 é um parâmetro previamente especificado pelo usuário) é utilizado na Eq. (3.10), ou seja,

$$\mu = \beta \frac{\boldsymbol{\pi}^t \mathbf{s}}{l} \quad (3.12)$$

Observa-se que, se a i -ésima restrição de desigualdade é ativa na solução ótima, então

$$h_i(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{com} \quad s_i = 0, \quad \pi_i > 0$$

De maneira análoga, se a i -ésima restrição de desigualdade não é ativa na solução ótima, então

$$h_i(\mathbf{x}) > 0 \quad \text{com} \quad s_i > 0, \quad \pi_i = 0$$

tal que, em ambos os casos, as equações que representam as condições de complementaridade são satisfeitas.

3.3 Método Primal-Dual

A definição do parâmetro de barreira mostrada na Eq. (3.11), permite reescrever o problema de otimização da Eq. (3.9) como

$$\begin{aligned}
 \text{Minimizar } & f(\mathbf{x}) - \mu \mathbf{e}^t \ln(\mathbf{s}) \\
 \text{sujeito a } & \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \\
 & \mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{s} = \mathbf{0} \\
 & \mathbf{s} \geq \mathbf{0}
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

onde, todas as variáveis foram definidas anteriormente.

As condições de otimalidade para este problema são expressas por:

$$\begin{aligned}
 \nabla_{\mathbf{x}} \mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}) &= \mathbf{0} = \nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) - \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x})^t \boldsymbol{\lambda} - \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{h}(\mathbf{x})^t \boldsymbol{\pi} \\
 \nabla_{\mathbf{s}} \mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}) &= \mathbf{0} = \mu \mathbf{e} - \mathbf{S} \boldsymbol{\pi} \\
 \nabla_{\boldsymbol{\lambda}} \mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}) &= \mathbf{0} = -\mathbf{g}(\mathbf{x}) \\
 \nabla_{\boldsymbol{\pi}} \mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}) &= \mathbf{0} = -[\mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{s}]
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

onde, $\nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x})$ é o vetor gradiente n -dimensional da função $f(\mathbf{x})$, em relação às variáveis de otimização; $\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{h}(\mathbf{x})$ é a matriz Jacobiana de dimensões $(l \times n)$, do vetor de funções $\mathbf{h}(\mathbf{x})$, em relação às variáveis de otimização; $\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x})$ é a matriz Jacobiana de $\mathbf{g}(\mathbf{x})$, em relação às variáveis de otimização, com dimensões $(m \times n)$ e \mathbf{S} é uma matriz diagonal de dimensão $(l \times l)$, composta pelas variáveis de folga s_i .

Além das condições de otimalidade expressas no conjunto de Eqs. (3.14), são consideradas as restrições de não negatividade nas variáveis de folga e nos multiplicadores duais; isto é,

$$\begin{aligned}
 s_i &\geq 0 & i &= 1, \dots, l \\
 \pi_i &\geq 0 & i &= 1, \dots, l
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

as quais são controladas diretamente através do fator de passo.

O ponto estacionário do problema representado pela Eq. (3.14) é obtido resolvendo-se a Eq. através do método de Newton-Raphson. A cada iteração, o seguinte sistema de equações lineares deve ser resolvido:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{H}(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}) \Delta \mathbf{x} - \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x})^t \Delta \boldsymbol{\lambda} - \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{h}(\mathbf{x})^t \Delta \boldsymbol{\pi} &= -\mathbf{t} \\
 -\mathbf{\Pi} \Delta \mathbf{s} - \mathbf{S} \Delta \boldsymbol{\pi} &= -(\mu \mathbf{e} - \mathbf{S} \boldsymbol{\pi}) \\
 -\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{x} &= \mathbf{g}(\mathbf{x}) \\
 -\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \Delta \mathbf{s} &= \mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{s}
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

onde,

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}) = \nabla_{\mathbf{x}}^2 f(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla_{\mathbf{x}}^2 g_i(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^l \pi_j \nabla_{\mathbf{x}}^2 h_j(\mathbf{x}) \quad (3.17)$$

é a matriz de segundas derivadas da função Lagrangeana em relação às variáveis de otimização; $\nabla_{\mathbf{x}}^2 f(\mathbf{x})$, $\nabla_{\mathbf{x}}^2 g_i(\mathbf{x})$ e $\nabla_{\mathbf{x}}^2 h_j(\mathbf{x})$ são as matrizes de segunda derivada de $f(\mathbf{x})$, $g_i(\mathbf{x})$ e $h_j(\mathbf{x})$, respectivamente, com relação às variáveis de otimização;

$$\mathbf{t} = \nabla_{\mathbf{x}} \mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}) = \nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) - \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x})^t \boldsymbol{\lambda} - \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{h}(\mathbf{x})^t \boldsymbol{\pi} \quad (3.18)$$

e os outros elementos têm a mesma definição anterior.

A Eq. (3.16) pode ser reescrita na forma matricial como

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}) & 0 & -\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x})^t & -\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{h}(\mathbf{x})^t \\ 0 & -\mathbf{\Pi} & 0 & -\mathbf{S} \\ -\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}) & 0 & 0 & 0 \\ -\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{h}(\mathbf{x}) & \mathbf{I} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x} \\ \Delta \mathbf{s} \\ \Delta \boldsymbol{\lambda} \\ \Delta \boldsymbol{\pi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{t} \\ -(\mu \mathbf{e} - \mathbf{S} \boldsymbol{\pi}) \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{s} \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

onde, \mathbf{I} é a matriz identidade de dimensão $(l \times l)$.

Conforme pode ser observado, a matriz de coeficientes do sistema linear, denotada $\mathbf{W}(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi})$ originalmente não é simétrica. Entretanto a simetria pode ser obtida multiplicando-se a segunda linha da equação matricial (3.19) pela matriz $-\mathbf{S}^{-1}$, o que resulta em

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}) & 0 & -\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x})^t & -\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{h}(\mathbf{x})^t \\ 0 & \mathbf{S}^{-1} \mathbf{\Pi} & 0 & \mathbf{I} \\ -\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}) & 0 & 0 & 0 \\ -\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{h}(\mathbf{x}) & \mathbf{I} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x} \\ \Delta \mathbf{s} \\ \Delta \boldsymbol{\lambda} \\ \Delta \boldsymbol{\pi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{t} \\ \mathbf{S}^{-1}(\mu \mathbf{e} - \mathbf{S} \boldsymbol{\pi}) \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{s} \end{bmatrix}$$

cuja solução fornece os incrementos nas variáveis primais e duais. Para assegurar a condição de não negatividade das variáveis de folga e multiplicadores duais (Eq. (3.15)), o seguinte fator de passo é calculado a cada iteração:

$$\gamma = \min \left[\min_{\Delta \mathbf{s}_i < 0} \frac{\mathbf{s}_i}{|\Delta \mathbf{s}_i|} \quad \min_{\Delta \boldsymbol{\pi}_j < 0} \frac{\boldsymbol{\pi}_j}{|\Delta \boldsymbol{\pi}_j|} \quad 1, 0 \right] \quad (3.20)$$

A atualização das variáveis primais e duais do problema de otimização é dada por,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{k+1} &= \mathbf{x}^k + \tau \gamma \Delta \mathbf{x}^k & \boldsymbol{\lambda}^{k+1} &= \boldsymbol{\lambda}^k + \tau \gamma \Delta \boldsymbol{\lambda}^k \\ \mathbf{s}^{k+1} &= \mathbf{s}^k + \tau \gamma \Delta \mathbf{s}^k & \boldsymbol{\pi}^{k+1} &= \boldsymbol{\pi}^k + \tau \gamma \Delta \boldsymbol{\pi}^k \end{aligned} \quad (3.21)$$

onde, k representa a iteração corrente, τ é uma constante cuja finalidade é garantir que as variáveis \mathbf{s} e $\boldsymbol{\pi}$ não se anulem, sendo recomendado o valor de 0,9995 para a mesma (GRANVILLE, 1994).

Ao final de cada iteração o novo valor do parâmetro de barreira é dado por

$$\mu = \beta \frac{\mathbf{s}^t \boldsymbol{\pi}}{l} \quad (3.22)$$

onde, todas as variáveis foram previamente definidas.

O algoritmo para a resolução de um problema de otimização via método de Pontos Interiores versão Primal-Dual é sumarizado nos passos descritos a seguir.

1. Inicialização das variáveis \mathbf{x} , \mathbf{s} , $\boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{\pi}$ e μ satisfazendo a condição $(\mathbf{s}_0, \boldsymbol{\pi}_0, \mu) > 0$;
2. Cálculo do vetor gradiente da função Lagrangeana (Eq. (3.14));
3. Teste de convergência: comparação da norma infinita do vetor gradiente e do parâmetro barreira μ com as respectivas tolerâncias. Se o critério de convergência é satisfeito, o processo é encerrado;
4. Cálculo da matriz de coeficientes do sistema linear \mathbf{W} e solução do sistema linear (Eq. (3.19));
5. Cálculo do fator de passo na direção obtida no passo (4) (Eq. 3.20);
6. Atualização das variáveis primais e duais (Eq. 3.21);
7. Cálculo de μ^{k+1} (Eq. 3.22). Retorno ao passo (2).

3.4 Método Preditor-Corretor

O Método Preditor-Corretor, apresentado por (MEHROTRA, 1992), utiliza as soluções de dois sistemas lineares para a definição da direção de busca da solução ótima. Essas duas soluções, denominadas *passo de predição* e *passo de correção*, são obtidas com a mesma matriz de coeficientes \mathbf{W} e diferentes lados direitos do sistema linear.

Para apresentar o fundamento analítico deste método, seja a atualização das variáveis numa iteração expressa por

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{k+1} &= \mathbf{x}^k + \Delta \mathbf{x}^k & \boldsymbol{\lambda}^{k+1} &= \boldsymbol{\lambda}^k + \Delta \boldsymbol{\lambda}^k \\ \mathbf{s}^{k+1} &= \mathbf{s}^k + \Delta \mathbf{s}^k & \boldsymbol{\pi}^{k+1} &= \boldsymbol{\pi}^k + \Delta \boldsymbol{\pi}^k \end{aligned} \quad (3.23)$$

onde todos os termos foram definidos previamente.

Substituindo estas estimativas na Eq. (3.14) e omitindo o superescrito k , obtém-se

$$\begin{aligned}
\nabla_{\mathbf{x}}f(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) - \nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{g}(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x})^t(\boldsymbol{\lambda} + \Delta\boldsymbol{\lambda}) - \nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{h}(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x})^t(\boldsymbol{\pi} + \Delta\boldsymbol{\pi}) &= \mathbf{0} \\
\mu\mathbf{e} - (\mathbf{S} + \Delta\mathbf{S})(\boldsymbol{\pi} + \Delta\boldsymbol{\pi}) &= \mathbf{0} \\
-\mathbf{g}(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) &= \mathbf{0} \\
-[\mathbf{h}(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) - (\mathbf{s} + \Delta\mathbf{s})] &= \mathbf{0}
\end{aligned} \tag{3.24}$$

A expansão dos termos não lineares da Eq. (3.24) em série de Taylor, até o termo de primeira ordem, em torno do ponto $(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi})$, na direção de busca $(\Delta\mathbf{x}, \Delta\mathbf{s}, \Delta\boldsymbol{\lambda}, \Delta\boldsymbol{\pi})$, resulta em

$$\begin{aligned}
\nabla_{\mathbf{x}}f(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) &= \nabla_{\mathbf{x}}f(\mathbf{x}) + \nabla_{\mathbf{x}}^2f(\mathbf{x})\Delta\mathbf{x} \\
\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{g}(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) &= \nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{g}(\mathbf{x}) + \nabla_{\mathbf{x}}^2\mathbf{g}(\mathbf{x})\Delta\mathbf{x} \\
\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{h}(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) &= \nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{h}(\mathbf{x}) + \nabla_{\mathbf{x}}^2\mathbf{h}(\mathbf{x})\Delta\mathbf{x} \\
\mathbf{g}(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) &= \mathbf{g}(\mathbf{x}) + \nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{g}(\mathbf{x})\Delta\mathbf{x} \\
\mathbf{h}(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) &= \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{h}(\mathbf{x})\Delta\mathbf{x}
\end{aligned} \tag{3.25}$$

A substituição das Eqs. (3.25) na primeira das Eqs. (3.24) resulta em

$$\begin{aligned}
\nabla_{\mathbf{x}}f(\mathbf{x}) + \nabla_{\mathbf{x}}^2f(\mathbf{x})\Delta\mathbf{x} - [\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{g}(\mathbf{x}) + \nabla_{\mathbf{x}}^2\mathbf{g}(\mathbf{x})\Delta\mathbf{x}]^t(\boldsymbol{\lambda} + \Delta\boldsymbol{\lambda}) \\
- [\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{h}(\mathbf{x}) + \nabla_{\mathbf{x}}^2\mathbf{h}(\mathbf{x})\Delta\mathbf{x}]^t(\boldsymbol{\pi} + \Delta\boldsymbol{\pi}) = 0
\end{aligned} \tag{3.26}$$

e de forma estendida,

$$\begin{aligned}
\nabla_{\mathbf{x}}f(\mathbf{x}) + \nabla_{\mathbf{x}}^2f(\mathbf{x})\Delta\mathbf{x} - [\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{g}(\mathbf{x})]^t\boldsymbol{\lambda} - [\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{g}(\mathbf{x})]^t\Delta\boldsymbol{\lambda} - [\nabla_{\mathbf{x}}^2\mathbf{g}(\mathbf{x})\Delta\mathbf{x}]^t\boldsymbol{\lambda} - [\nabla_{\mathbf{x}}^2\mathbf{g}(\mathbf{x})\Delta\mathbf{x}]^t\Delta\boldsymbol{\lambda} \\
- [\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{h}(\mathbf{x})]^t\boldsymbol{\pi} - [\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{h}(\mathbf{x})]^t\Delta\boldsymbol{\pi} - [\nabla_{\mathbf{x}}^2\mathbf{h}(\mathbf{x})\Delta\mathbf{x}]^t\boldsymbol{\pi} - [\nabla_{\mathbf{x}}^2\mathbf{h}(\mathbf{x})\Delta\mathbf{x}]^t\Delta\boldsymbol{\pi} = 0
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Os termos que envolvem derivada segunda podem ser reescritos na forma

$$\begin{aligned}
[\nabla_{\mathbf{x}}^2\mathbf{g}(\mathbf{x})\Delta\mathbf{x}]^t\boldsymbol{\lambda} &= \sum_{i=1}^m [\lambda_i \nabla_{\mathbf{x}}^2g_i(\mathbf{x})] \Delta\mathbf{x} \\
[\nabla_{\mathbf{x}}^2\mathbf{g}(\mathbf{x})\Delta\mathbf{x}]^t\Delta\boldsymbol{\lambda} &= \sum_{i=1}^m [\Delta\lambda_i \nabla_{\mathbf{x}}^2g_i(\mathbf{x})] \Delta\mathbf{x} \\
[\nabla_{\mathbf{x}}^2\mathbf{h}(\mathbf{x})\Delta\mathbf{x}]^t\boldsymbol{\pi} &= \sum_{j=1}^l [\pi_j \nabla_{\mathbf{x}}^2h_j(\mathbf{x})] \Delta\mathbf{x} \\
[\nabla_{\mathbf{x}}^2\mathbf{h}(\mathbf{x})\Delta\mathbf{x}]^t\Delta\boldsymbol{\pi} &= \sum_{j=1}^l [\Delta\pi_j \nabla_{\mathbf{x}}^2h_j(\mathbf{x})] \Delta\mathbf{x}
\end{aligned} \tag{3.28}$$

A substituição das Eqs. (3.28) na Eq. (3.27) permite que a primeira das Eqs. (3.24) seja

reescrita como

$$\begin{aligned} & \left[\nabla_{\mathbf{x}}^2 f(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla_{\mathbf{x}}^2 g_i(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^l \pi_j \nabla_{\mathbf{x}}^2 h_j(\mathbf{x}) \right] \Delta \mathbf{x} - [\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x})]^t \Delta \boldsymbol{\lambda} - [\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{h}(\mathbf{x})]^t \Delta \boldsymbol{\pi} = \\ & - \{ \nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) - [\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x})]^t \boldsymbol{\lambda} - [\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{h}(\mathbf{x})]^t \boldsymbol{\pi} \} + \left[\sum_{i=1}^m \Delta \lambda_i \nabla_{\mathbf{x}}^2 g_i(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^l \Delta \pi_j \nabla_{\mathbf{x}}^2 h_j(\mathbf{x}) \right] \Delta \mathbf{x} \end{aligned} \quad (3.29)$$

O restante das Eqs. (3.24) podem ser expressas como

$$\begin{aligned} -\mathbf{\Pi} \Delta \mathbf{s} - \mathbf{S} \Delta \boldsymbol{\pi} &= -(\mu \mathbf{e} - \mathbf{S} \boldsymbol{\pi}) + \Delta \mathbf{S} \Delta \boldsymbol{\pi} \\ \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{g} \Delta \mathbf{x} &= -\mathbf{g}(\mathbf{x}) \\ -\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{h}(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{x} + \Delta \mathbf{s} &= \mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{s} \end{aligned} \quad (3.30)$$

Combinando as Eqs. (3.29) e (3.30) e usando a forma matricial, obtêm-se

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}) & 0 & -\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x})^t & -\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{h}(\mathbf{x})^t \\ 0 & -\mathbf{\Pi} & 0 & -\mathbf{S} \\ -\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}) & 0 & 0 & 0 \\ -\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{h}(\mathbf{x}) & \mathbf{I} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x} \\ \Delta \mathbf{s} \\ \Delta \boldsymbol{\lambda} \\ \Delta \boldsymbol{\pi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{t} + \mathbf{z} \\ -(\mu \mathbf{e} - \mathbf{S} \boldsymbol{\pi}) + \Delta \mathbf{S} \Delta \boldsymbol{\pi} \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{s} \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

onde, a matriz de coeficientes do sistema linear $\mathbf{W}(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi})$ e o vetor \mathbf{t} são os mesmos termos da Eq. (3.19) e o vetor \mathbf{z} é expresso por

$$\mathbf{z} = \left[\sum_{i=1}^m \Delta \lambda_i \nabla_{\mathbf{x}}^2 g_i(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^l \Delta \pi_j \nabla_{\mathbf{x}}^2 h_j(\mathbf{x}) \right] \Delta \mathbf{x} \quad (3.32)$$

A diferença entre as Eqs. (3.19) (Primal-Dual) e (3.31) (Preditor-Corretor) é o vetor do lado direito do sistema. Na versão Preditor-Corretor, este vetor apresenta termos não lineares nos vetores \mathbf{z} e $\Delta \mathbf{S} \Delta \boldsymbol{\pi}$, tal que o vetor do lado direito da Eq. (3.24) não pode ser determinado diretamente. Esta equação pode ser resolvida apenas de forma aproximada, desprezando-se o termo \mathbf{z} na avaliação do vetor do lado direito do sistema, sem deterioração da característica de convergência do processo iterativo.

Para estimar os termos não lineares $\Delta \mathbf{S} \Delta \boldsymbol{\pi}$, a referência (MEHROTRA, 1992) sugere que seja realizada primeiramente a etapa de predição, na qual resolve-se o problema original. Isto significa desprezar a influência da função barreira logarítmica e obter a solução do sistema linear

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}) \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x}_p \\ \Delta \mathbf{s}_p \\ \Delta \boldsymbol{\lambda}_p \\ \Delta \boldsymbol{\pi}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{t} \\ \mathbf{S} \boldsymbol{\pi} \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{s} \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

Após isto, o parâmetro de barreira e os termos não lineares, que serão utilizados na etapa de correção, são estimados. A referência (WU; DEBS; MARSTEN, 1994) sugere que o parâmetro de barreira seja dinamicamente computado como

$$\tilde{\mu} = \left(\frac{\widetilde{gap}}{gap} \right)^2 \left(\frac{\widetilde{gap}}{2l} \right) \quad (3.34)$$

onde, $gap = \mathbf{s}^t \boldsymbol{\pi}$ é o gap de complementaridade calculado sem a atualização das variáveis; $\widetilde{gap} = (\mathbf{s} + \tilde{\gamma} \Delta \mathbf{s}_p)^t (\boldsymbol{\pi} + \tilde{\gamma} \Delta \boldsymbol{\pi}_p)$ é o gap de complementaridade computado com a atualização das variáveis; e

$$\tilde{\gamma} = \min \left[\min_{\Delta \mathbf{s}_{pi} < 0} \frac{\mathbf{s}_i}{|\Delta \mathbf{s}_{pi}|}, \min_{\Delta \boldsymbol{\pi}_{pj} < 0} \frac{\boldsymbol{\pi}_j}{|\Delta \boldsymbol{\pi}_{pj}|}, 1, 0 \right] \quad (3.35)$$

Para a definição da direção de busca efetiva da iteração corrente, é realizado o cálculo dos incrementos das variáveis na etapa de correção através de

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}) \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x}_c \\ \Delta \mathbf{s}_c \\ \Delta \boldsymbol{\lambda}_c \\ \Delta \boldsymbol{\pi}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t \\ -(\tilde{\mu} \mathbf{e} - \mathbf{S}\boldsymbol{\pi}) + \Delta \mathbf{S}_p \Delta \boldsymbol{\pi}_p \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{s} \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

onde o parâmetro de barreira e os elementos não lineares $\Delta \mathbf{S} \Delta \boldsymbol{\pi}$, do lado direito do sistema linear, são estimados para a iteração corrente.

Uma vez computados os incrementos do passo corretor, as variáveis são atualizadas como

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{k+1} &= \mathbf{x}^k + \tau \gamma \Delta \mathbf{x}_c^k & \boldsymbol{\lambda}^{k+1} &= \boldsymbol{\lambda}^k + \tau \gamma \Delta \boldsymbol{\lambda}_c^k \\ \mathbf{s}^{k+1} &= \mathbf{s}^k + \tau \gamma \Delta \mathbf{s}_c^k & \boldsymbol{\pi}^{k+1} &= \boldsymbol{\pi}^k + \tau \gamma \Delta \boldsymbol{\pi}_c^k \end{aligned} \quad (3.37)$$

onde γ é computado como na Eq.(3.35), porém utilizando os incrementos do passo corretor, $\Delta \mathbf{s}_c$ e $\Delta \boldsymbol{\pi}_c$, obtidos em (3.36).

Ao final de cada iteração o novo valor do parâmetro de barreira é obtido a partir de

$$\mu = \beta \frac{\mathbf{s}^t \boldsymbol{\pi}}{l} \quad (3.38)$$

O algoritmo para a resolução de um problema de otimização utilizando o método de Pontos Interiores versão Preditor-Corretor do Primal-Dual é apresentado a seguir.

1. Inicialização das variáveis $\mathbf{x}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}$ e μ satisfazendo a condição $(\mathbf{s}_0, \boldsymbol{\pi}_0, \mu) > 0$;
2. Cálculo do vetor gradiente da função Lagrangeana (Eq. (3.14));
3. Teste de convergência: comparação da norma infinita do vetor gradiente e do parâmetro de barreira μ com as respectivas tolerâncias. Se o critério de convergência é satisfeito, o processo é encerrado;

4. Cálculo e fatoração da matriz \mathbf{W} (Eq. (3.19));
5. Etapa de predição: solução da Eq. (3.33); Cálculo dos termos não lineares e estimação dinâmica de $\tilde{\mu}$ (Eq. (3.34));
6. Etapa de correção: solução da Eq. (3.36);
7. Atualização das variáveis primais e duais (Eq. (3.37));
8. Cálculo do valor atualizado de μ (Eq. (3.38)). Retorno ao passo (2).

Como o método Preditor-Corretor utiliza a mesma matriz de coeficientes em ambas as etapas de solução dos sistemas lineares, a fatoração da referida matriz é realizada apenas uma vez, durante o passo de predição. Portanto, na etapa de correção a solução do sistema linear requer apenas o processo de substituição direta e inversa.

3.5 Método do Máximo Passo no Caminho Central

Conforme visto anteriormente, a cada iteração o parâmetro de barreira μ é gradativamente reduzido a zero, tal que, na solução ótima, as condições de Karush-Kuhn-Tucker do problema original são satisfeitas. Este parâmetro é expresso por

$$\mu = \sigma \hat{\mu} \quad (3.39)$$

onde σ , denominado *parâmetro de centralização* ou de *combinação das direções*, é um parâmetro arbitrariamente especificado e $\hat{\mu}$ é a distância média da condição de complementaridade, dada por

$$\hat{\mu} = \frac{\mathbf{s}^t \boldsymbol{\pi}}{l} \quad (3.40)$$

com \mathbf{s} , $\boldsymbol{\pi}$ e l conforme definições anteriores.

A distância entre o ponto da trajetória definida pela direção de busca e a solução corrente, medida em termos da condição de complementaridade ($\hat{\mu}$) é única. Portanto, é o parâmetro σ que efetivamente determina a perturbação aplicada na condição de complementaridade, e por conseguinte a forma da trajetória seguida para determinar o ponto ótimo. O significado deste parâmetro pode ser melhor compreendido, observando-se que o lado direito da Eq. (3.19), expresso por

$$\begin{bmatrix} -t \\ -(\mu \mathbf{e} - \mathbf{S}\boldsymbol{\pi}) \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{s} \end{bmatrix}$$

é afetado pela perturbação μ , a qual, por sua vez, é dependente de σ . Com relação a esta dependência, os dois seguintes casos são relevantes:

- $\sigma = 0$: corresponde à *direção afim-escala*. Se apenas esta direção é utilizada ao longo do processo iterativo, a busca da solução ótima pode ser interpretada como a solução simples não perturbada das condições de otimalidade de primeira ordem, expressas pelas Eqs. (3.14);
- $\sigma = 1$: corresponde à *direção de centralização*. Neste caso, um conjunto de equações não lineares, que não corresponde às condições de otimalidade do problema original, é resolvido. Se apenas esta direção é utilizada ao longo do processo iterativo, uma solução não ótima é determinada, sem redução apreciável no valor inicial do parâmetro de perturbação.

O valor entre estes extremos representa uma combinação linear das direções afim-escala e de centralização. O decréscimo do valor de μ requer $0 < \sigma < 1$, conforme sugerido em (EL-BAKRY *et al.*, 1996). Na aplicação do método de Pontos Interiores convencional (como sugerido em (GRANVILLE, 1994), por exemplo) o valor de σ é pré-determinado pelo usuário e mantido constante durante o processo iterativo; isto é, a combinação linear das direções afim-escala e de centralização é constante ao longo da busca da solução ótima. Com base no Princípio da Superposição, os incrementos determinados como solução do sistema linear resolvido a cada iteração do método de Newton podem ser escritos como

$$\begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x} \\ \Delta \mathbf{s} \\ \Delta \boldsymbol{\lambda} \\ \Delta \boldsymbol{\pi} \end{bmatrix} = \sigma \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x}_c \\ \Delta \mathbf{s}_c \\ \Delta \boldsymbol{\lambda}_c \\ \Delta \boldsymbol{\pi}_c \end{bmatrix} + (1 - \sigma) \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x}_a \\ \Delta \mathbf{s}_a \\ \Delta \boldsymbol{\lambda}_a \\ \Delta \boldsymbol{\pi}_a \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

onde os incrementos com subscritos c e a referem-se às direções de centralização e afim-escala, as quais são obtidas resolvendo-se dois sistemas lineares, com $\sigma = 1$ e com $\sigma = 0$, respectivamente.

A Eq. (3.41) indica que existe uma infinidade de trajetórias conduzindo à solução ótima. Conforme a referência (GONZAGA, 1997), um ponto $(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi})$ pertence à trajetória central, se satisfaz as condições

$$\begin{aligned} \mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{s} &= 0 \\ \frac{\mathbf{s}^t \boldsymbol{\pi}}{l} &= \mu \\ \mathbf{s}, \boldsymbol{\pi}, \mu &> 0 \end{aligned} \quad (3.42)$$

Este ponto está situado a uma distância ξ da trajetória central, dada por

$$\xi(\mathbf{s}, \boldsymbol{\pi}, \mu) = \left\| \frac{\mathbf{S}\boldsymbol{\pi}}{\mu} - \mathbf{e} \right\| \quad (3.43)$$

onde, \mathbf{S} , $\boldsymbol{\pi}$ e \mathbf{e} possuem o mesmo significado das seções anteriores.

O algoritmo do máximo passo no caminho central busca a solução ótima através de uma trajetória, na qual, a cada iteração, o ponto corrente é localizado a uma distância pré-fixada

do caminho central. Na iteração $(k + 1)$, essa distância é dada por

$$\xi(\mathbf{s}, \boldsymbol{\pi}, \mu)^{(k+1)} = \left\| \frac{\mathbf{S}^{(k+1)} \boldsymbol{\pi}^{(k+1)}}{\sigma^{(k)} \widehat{\mu}^{(k)}} - \mathbf{e} \right\| \quad (3.44)$$

A principal dificuldade para determinar a distância ao caminho central é que os fatores de passo nos espaços primal e dual, utilizados para o cálculo dos componentes do produto $(\mathbf{s}^{(k+1)})^t (\boldsymbol{\pi}^{(k+1)})$ são determinados após a definição da direção de busca. Para contornar esta dificuldade, estes termos são computados como

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}^{(k+1)} \\ \mathbf{s}^{(k+1)} \\ \boldsymbol{\lambda}^{(k+1)} \\ \boldsymbol{\pi}^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^{(k)} \\ \mathbf{s}^{(k)} \\ \boldsymbol{\lambda}^{(k)} \\ \boldsymbol{\pi}^{(k)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x}^{(k)} \\ \Delta \mathbf{s}^{(k)} \\ \Delta \boldsymbol{\lambda}^{(k)} \\ \Delta \boldsymbol{\pi}^{(k)} \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

tal que o produto *primal-dual* é calculado utilizando-se a expressão

$$\boldsymbol{\Pi}^{(k+1)} \mathbf{s}^{(k+1)} = \boldsymbol{\Pi}^{(k)} \mathbf{s}^{(k)} + \boldsymbol{\Pi}^{(k)} \Delta \mathbf{s}^{(k)} + \Delta \boldsymbol{\Pi}^{(k)} \mathbf{s}^{(k)} + \Delta \boldsymbol{\Pi}^{(k)} \Delta \mathbf{s}^{(k)} \quad (3.46)$$

onde $\boldsymbol{\Pi}$ é a matriz diagonal definida previamente.

Para determinar os termos envolvidos na expansão da Eq. (3.46), considere a segunda Eq. de (3.16), isto é

$$-\boldsymbol{\Pi} \Delta \mathbf{s} - \mathbf{S} \Delta \boldsymbol{\pi} = -(\mu \mathbf{e} - \mathbf{S} \boldsymbol{\pi}) \quad (3.47)$$

cujo rearranjo dos termos fornece

$$\Delta \boldsymbol{\pi} = -\boldsymbol{\pi} + \mathbf{S}^{-1} [\mu \mathbf{e} - \boldsymbol{\Pi} \Delta \mathbf{s}]$$

ou alternativamente,

$$\Delta \boldsymbol{\pi} = -\boldsymbol{\pi} + \mathbf{S}^{-1} [\mu \mathbf{e} - \Delta \mathbf{S} \boldsymbol{\pi}] \quad (3.48)$$

Lembrando que o produto $\boldsymbol{\Pi}^{(k+1)} \mathbf{s}^{(k+1)}$ da Eq. (3.46) pode ser alternativamente expresso como $\mathbf{S}^{(k+1)} \boldsymbol{\pi}^{(k+1)}$; então

$$(\mathbf{S}^{(k)} + \Delta \mathbf{S}^{(k)}) (\boldsymbol{\pi}^{(k)} + \Delta \boldsymbol{\pi}^{(k)}) = \mathbf{S}^{(k)} \boldsymbol{\pi}^{(k)} + \Delta \mathbf{S}^{(k)} \boldsymbol{\pi}^{(k)} + \mathbf{S}^{(k)} \Delta \boldsymbol{\pi}^{(k)} + \Delta \mathbf{S}^{(k)} \Delta \boldsymbol{\pi}^{(k)} \quad (3.49)$$

A substituição da Eq. (3.48) na Eq. (3.49) resulta

$$\begin{aligned}
(\mathbf{S}^{(k)} + \Delta\mathbf{S}^{(k)})(\boldsymbol{\pi}^{(k)} + \Delta\boldsymbol{\pi}^{(k)}) &= \mathbf{S}^{(k)}\boldsymbol{\pi}^{(k)} + \Delta\mathbf{S}^{(k)}\boldsymbol{\pi}^{(k)} \\
&\quad + \mathbf{S}^{(k)} \left[-\boldsymbol{\pi}^{(k)} + \mathbf{S}^{(k)-1} \left(\mu^{(k)} \mathbf{e} - \Delta\mathbf{S}^{(k)}\boldsymbol{\pi}^{(k)} \right) \right] \\
&\quad + \Delta\mathbf{S}^{(k)} \left[-\boldsymbol{\pi}^{(k)} + \mathbf{S}^{(k)-1} \left(\mu^{(k)} \mathbf{e} - \Delta\mathbf{S}^{(k)}\boldsymbol{\pi}^{(k)} \right) \right] \\
&= \mu^{(k)} \mathbf{e} + \Delta\mathbf{S}^{(k)} \left[-\boldsymbol{\pi}^{(k)} + \mathbf{S}^{(k)-1} \left(\mu^{(k)} \mathbf{e} - \Delta\mathbf{S}^{(k)}\boldsymbol{\pi}^{(k)} \right) \right]
\end{aligned} \tag{3.50}$$

e portanto,

$$\boldsymbol{\pi}^{(k+1)} \times \mathbf{s}^{(k+1)} = \mathbf{S}^{(k+1)}\boldsymbol{\pi}^{(k+1)} = \sigma^{(k)} \widehat{\mu}^{(k)} \mathbf{e} + \Delta\mathbf{S}^{(k)} \Delta\boldsymbol{\pi}^{(k)} \tag{3.51}$$

Aplicando este resultado na Eq. (3.44), obtêm-se

$$\xi(\sigma)^{(k+1)} = \left\| \frac{\Delta\mathbf{S}^{(k)} \Delta\boldsymbol{\pi}^{(k)}}{\sigma^{(k)} \widehat{\mu}^{(k)}} \right\| \tag{3.52}$$

e substituindo-se a Eq. (3.41) nesta última equação, encontra-se

$$\xi(\sigma) = \left\| \frac{[\sigma\Delta\mathbf{S}_c + (1-\sigma)\Delta\mathbf{S}_a][\sigma\Delta\boldsymbol{\pi}_c + (1-\sigma)\Delta\boldsymbol{\pi}_a]}{\sigma\widehat{\mu}} \right\| \tag{3.53}$$

onde, $\xi(\sigma)$ é o valor da distância ao caminho central, especificado para a próxima iteração, em unidades de μ . O controle sobre o valor desta grandeza permite monitorar a trajetória de busca ao caminho central. Em problemas de otimização com alto grau de convexidade, uma trajetória próxima ao caminho central é geralmente requerida. Isto implica num compromisso entre rapidez da convergência e a robustez do processo iterativo.

A Eq. (3.53) pode ser reescrita em forma compacta como

$$\xi(\sigma) = \left\| \frac{\sigma^2 a + \sigma b + c}{\sigma\widehat{\mu}} \right\| \tag{3.54}$$

onde, os seguintes termos são definidos como:

$$\begin{aligned}
a &= [\Delta\mathbf{S}_c(\Delta\boldsymbol{\pi}_c - \Delta\boldsymbol{\pi}_a) + \Delta\mathbf{S}_a(\Delta\boldsymbol{\pi}_a - \Delta\boldsymbol{\pi}_c)] \\
b &= [\Delta\mathbf{S}_a(\Delta\boldsymbol{\pi}_c - 2\Delta\boldsymbol{\pi}_a) + \Delta\mathbf{S}_c\Delta\boldsymbol{\pi}_a] \\
c &= \Delta\mathbf{S}_a\Delta\boldsymbol{\pi}_a
\end{aligned} \tag{3.55}$$

e pela definição da norma Euclidiana

$$\xi(\sigma) = \sqrt{\frac{\sigma^4(a) + \sigma^3(2ab) + \sigma^2(2ac + b^2) + \sigma(2bc) + c^2}{\sigma^2\widehat{\mu}^2}} \tag{3.56}$$

ou ainda, para um valor pré-especificado de ξ , obtêm-se

$$\sigma^4(a) + \sigma^3(2ab) + \sigma^2(2ac + b^2 + \xi^2\widehat{\mu}^2) + \sigma(2bc) + c^2 = 0 \tag{3.57}$$

onde todos os termos foram previamente especificados.

Conforme a referência (CASTRONUOVO; CAMPAGNOLO; SALGADO, 2000), é possível o cálculo das raízes da Eq. Quártica (3.57), através do método da bisseção, para um valor pré-determinado da distância ao caminho central. Dentre as raízes encontradas, deverá ser utilizada a maior raiz real em magnitude, pertencente ao intervalo de interesse de σ ; isto é, de 0,0 a 1,0. Caso não existam raízes neste intervalo, que satisfaçam tais condições, deve-se adotar o valor 0,1 para σ , da mesma forma como utilizado para o procedimento convencional.

Outra abordagem para o cálculo de σ , visa a obtenção das raízes da Eq. Quártica (3.57), para valores de $\xi(\sigma)$ calculados dinamicamente durante o processo de otimização. Utilizando o método de busca unidirecional da Dicotomia (BAZARAA; SHETTY, 1979) é possível obter os valores mínimo ($\xi(\sigma)_{min}$) e máximo ($\xi(\sigma)_{max}$) da distância $\xi(\sigma)$, para uma dada iteração, no intervalo de interesse de σ . Desta forma, garante-se que, ao calcular as raízes da equação quártica, haverá ao menos uma raiz real que satisfaça as condições de intervalo de σ , para um dado valor de $\xi(\sigma)$ pertencente ao intervalo $\xi(\sigma)_{min} < \xi(\sigma) < \xi(\sigma)_{max}$.

O método da Dicotomia de busca unidirecional, não utiliza derivadas em seu processo de busca e pode ser utilizado para resolver problemas de minimização de funções não lineares, como mostrado a seguir.

Considere a função $\Theta(x)$, apresentada na Figura 3.1, que deve ser minimizada no intervalo de x compreendido entre os pontos a_1 e b_1 , onde os subscritos referem-se à iteração corrente. A partir da avaliação de $\Theta(x)$, para os pontos η_1 e ν_1 , pode-se constatar que $\Theta(\eta_1) < \Theta(\nu_1)$. Para este caso, o novo intervalo de incerteza, que deve conter o mínimo da função, será $[a_1, \nu_1]$. Desta forma b_2 assume o valor de ν_1 e a_2 mantém o valor de a_1 . Repetindo o processo de avaliação da função, o tamanho da região de incerteza diminuirá a cada nova iteração, chegando ao valor aproximado do mínimo da função para o intervalo inicial de busca. O valor final encontrado será tão próximo ao valor real quanto menor for o valor da tolerância escolhida no início do processo, este valor é referente ao menor tamanho da região de incerteza considerado aceitável.

O posicionamento dos pontos $\eta_{(k)}$ e $\nu_{(k)}$, pode ser tomado em função de um deslocamento equidistante em relação ao ponto médio da região de incerteza, limitada por a_1 e b_1 . Desta forma, utilizando-se um valor de $\epsilon > 0$, pequeno o bastante para não causar erro em função da tolerância final do intervalo de incerteza, pode-se iniciar o processo de busca. Para cada nova iteração o mesmo processo de posicionamento dos pontos deve ser repetido. Quando o valor de tolerância da região de incerteza for atingido, o processo terá terminado e o ponto que implicar no menor valor da função $\Theta(x)$ será o ponto ótimo, neste caso, o mínimo.

Embora este método seja limitado e passível de erros em função das características do problema sob estudo, após vários testes para os diferentes problemas de otimização utilizados nesta dissertação, observou-se que as características da Eq. (3.56) são apropriadas para o uso

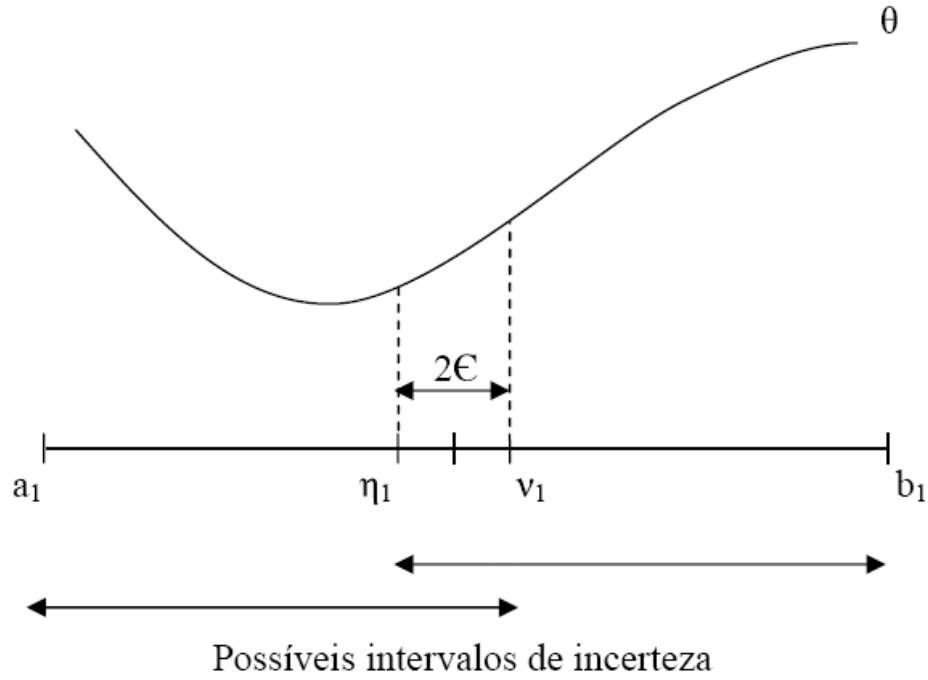


Figura 3.1: Exemplo do processo de busca unidirecional da Dicotomia.

deste processo de busca unidirecional, além de sua implementação ser extremamente simples e sua aplicação exigir pouco esforço computacional.

Após encontrado o valor de σ a direção efetiva de busca é calculada conforme a Eq. (3.41), o passo de convergência é computado como

$$\gamma = \min \left[\min_{\Delta s_i < 0} \frac{s_i}{|\Delta s_i|}, \min_{\Delta \pi_j < 0} \frac{\pi_j}{|\Delta \pi_j|}, 1, 0 \right] \quad (3.58)$$

e as variáveis de otimização são atualizadas segundo as expressões

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{k+1} &= \mathbf{x}^{(k)} + \tau\gamma\Delta\mathbf{x}^{(k)} & \boldsymbol{\lambda}^{k+1} &= \boldsymbol{\lambda}^{(k)} + \tau\gamma\Delta\boldsymbol{\lambda}^{(k)} \\ \mathbf{s}^{k+1} &= \mathbf{s}^{(k)} + \tau\gamma\Delta\mathbf{s}^{(k)} & \boldsymbol{\pi}^{k+1} &= \boldsymbol{\pi}^{(k)} + \tau\gamma\Delta\boldsymbol{\pi}^{(k)} \end{aligned} \quad (3.59)$$

Em seguida, calcula-se o valor de μ para a próxima iteração, como mostrado na Eq. (3.22).

O algoritmo para o Método de Pontos Interiores de Máximo Passo no Caminho Central é sumarizado a seguir.

1. Inicialização das variáveis \mathbf{x} , \mathbf{s} , $\boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{\pi}$ e μ , satisfazendo as condições $(\mathbf{s}_0, \boldsymbol{\pi}_0, \mu_0) > 0$;
2. Cálculo do vetor gradiente da função Lagrangeana (Eq. (3.14));
3. Teste de convergência: comparação da norma euclidiana do vetor gradiente e do valor

do parâmetro de barreira μ com as respectivas tolerâncias. Se o critério de convergência é satisfeito, o processo é encerrado;

4. Cálculo e fatoração da matriz \mathbf{W} (Eq. (3.19));
5. Direção afim-escala: solução da Eq. (3.19) com $\sigma = 0$;
6. Direção de centralização: solução da Eq. (3.19) com $\sigma = 1$;
7. Determinação dinâmica de σ e composição da direção efetiva de busca (Eq. 3.41);
8. Atualização das variáveis do problema de otimização;
9. Cálculo de $\mu^{(k+1)}$ (Eq. 3.22). Retorno ao passo (2).

3.6 Método de Múltiplas Correções Centrais

O Método Primal-Dual de Pontos Interiores de Múltiplas Correções Centralizadoras de (GONDZIO, 1996), desenvolvido originalmente para problemas de programação linear, explora o uso de correções no vetor incremental das variáveis, visando aumentar a centralização de cada ponto calculado durante o processo iterativo. No caso dos problemas de PNL estudados no presente trabalho, esta estratégia pode ser vista como uma extensão do Método Preditor-Corretor, na qual os sistemas lineares da etapa de predição e correção são resolvidos com a mesma matriz de coeficientes. Como a fatoração da matriz \mathbf{W} envolve um esforço computacional consideravelmente superior àquele correspondente ao processo de substituição direta-inversa, a realização de múltiplas correções não implica num aumento significativo do tempo computacional por iteração. O principal efeito das correções centralizadoras é a melhoria do passo incremental calculado em cada iteração. Isto resulta em geral num menor número de iterações para a convergência e, por conseguinte, na redução do esforço computacional total. Em termos geométricos, a principal idéia é a utilização do conceito de um hipercubo para representar os limites relacionados aos produtos de complementaridade ($s_i \pi_i$) e a identificação dos produtos de complementaridade não pertencentes ao espaço limitado pelo hipercubo, de forma a permitir a centralização dos mesmos.

Vários algoritmos de pontos interiores desenvolvidos originalmente à programação linear foram aplicados na solução de problemas de otimização não linear, alguns tendo obtido efetivo sucesso em problemas de grande escala. Isto motivou TORRES e QUINTANA (2001) a propor a utilização do Método de Múltiplas Correções Centrais para a solução do problema de Fluxo de Potência Ótimo.

Para apresentar a base teórica deste algoritmo, é necessário lembrar que na etapa de

predição do Método Preditor Corretor, abordado na Seção 3.4, resolve-se o sistema linear

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}) \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x}_{af} \\ \Delta \mathbf{s}_{af} \\ \Delta \boldsymbol{\lambda}_{af} \\ \Delta \boldsymbol{\pi}_{af} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{t} \\ \mathbf{S}\boldsymbol{\pi} \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{s} \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

desprezando-se a influência da função barreira logarítmica. Isto resulta na obtenção da direção afim-escala, definida como

$$\Delta \mathbf{y}_{af} = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x}_{af} \\ \Delta \mathbf{s}_{af} \\ \Delta \boldsymbol{\lambda}_{af} \\ \Delta \boldsymbol{\pi}_{af} \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

Em seguida, o valor do parâmetro barreira correspondente a direção afim-escala, denotado μ_{af} , é calculado como

$$\mu_{af} = \min \left\{ \left(\frac{\widetilde{gap}}{gap} \right)^2, 0,2 \right\} \frac{\widetilde{gap}}{l} \quad (3.62)$$

onde, gap e \widetilde{gap} são obtidos a partir de

$$\begin{aligned} gap &= (\mathbf{s}^{(k)})^t (\boldsymbol{\pi}^{(k)}) \\ \widetilde{gap} &= (\mathbf{s}^{(k)} + \gamma_{af} \Delta \mathbf{s}_{af})^t (\boldsymbol{\pi}^{(k)} + \gamma_{af} \Delta \boldsymbol{\pi}_{af}) \end{aligned} \quad (3.63)$$

com γ_{af} calculado como

$$\gamma_{af} = \min \left[\begin{array}{ccc} \min_{\Delta \mathbf{s}_i^{(k)} < 0} \frac{\mathbf{s}_i^{(k)}}{|\Delta \mathbf{s}_{af_i}|} & \min_{\Delta \boldsymbol{\pi}_j^{(k)} < 0} \frac{\boldsymbol{\pi}_j^{(k)}}{|\Delta \boldsymbol{\pi}_{af_j}|} & 1,0 \end{array} \right] \quad (3.64)$$

Este procedimento visa a obtenção de um valor baixo para μ_{af} se a direção $\Delta \mathbf{y}_{af}$ produzir uma grande redução na condição de complementaridade (ou seja, se $\widetilde{gap} \ll gap$), ou um valor alto para μ_{af} no caso contrário.

Segundo a referência (GONDZIO, 1996), testes numéricos indicam que uma das causas de mau desempenho do algoritmo Primal-Dual é a possível discrepância entre os *produtos de complementaridade* ($s_i \pi_i$). A existência de um ou mais índices i e j para os quais a relação ($s_i \pi_i \ll s_j \pi_j$) é verificada, tende a influenciar negativamente a convergência do processo iterativo. Por esta razão, os termos $s_i \pi_i$ que apresentam valores muito baixos (ou muito altos) quando comparados ao valor médio da condição de complementaridade ($\mu_{med} = gap/l$), são indesejáveis. Desta forma, se a direção $\mathbf{y}_{(k)}$ for *mal centrada*; ou seja, se algum produto de complementaridade diferir consideravelmente dos demais em magnitude, então, o lado direito do sistema de equações lineares da Eq. (3.19) será mal escalonado. Desde que a direção obtida a cada iteração do método de Newton concentra-se na redução dos produtos de complementaridade com os valores mais altos, a presença de produtos com valores muito

baixos reduz demasiadamente a magnitude do passo incremental, fazendo com que o processo de convergência seja mais demorado.

Para a definição das correções centralizadoras, considera-se que a direção $\Delta \mathbf{y}_{af}$ e a magnitude do passo na direção afim-escala γ_{af} foram determinados previamente na etapa de predição. Assim, o próximo passo é o cálculo de uma direção corretora $\Delta \mathbf{y}_{co}$, tal que o fator de passo $\tilde{\gamma} > \gamma_{af}$, seja definido por

$$\tilde{\gamma} = \min \{ \gamma_{af} + \delta_{af} ; 1, 0 \} \quad (3.65)$$

onde δ_{af} é um escalar de valor reduzido, utilizado para assegurar um pequeno acréscimo no fator de passo da etapa de predição; e a direção de busca $\Delta \mathbf{y}$ seja dada por

$$\Delta \mathbf{y} = \Delta \mathbf{y}_{af} + \Delta \mathbf{y}_{co} \quad (3.66)$$

sem que o ponto predito viole a condição de positividade estrita $(\mathbf{s}, \boldsymbol{\pi}) > 0$. Para que isto seja possível, certas condições devem ser impostas à direção corretora $\Delta \mathbf{y}_{co}$.

De acordo com (TORRES; QUINTANA, 2001), é possível observar que, geralmente quando $\gamma_{af} < 1$ o ponto predito

$$\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{y}^{(k)} + \tilde{\gamma} \Delta \mathbf{y}_{af} \quad (3.67)$$

contém componentes que violam a restrição $(\mathbf{s}, \boldsymbol{\pi}) > 0$. Quando isto acontece, o termo corretor $\Delta \mathbf{y}_{co}$ deve compensar os componentes negativos de forma a fazer com que o ponto predito $\tilde{\mathbf{y}}$ retorne à vizinhança do caminho central.

Seja \mathbf{q} vetor dos produtos da condição de complementaridade, tal que na fase de predição este vetor é expresso por

$$\tilde{\mathbf{q}} = \tilde{\mathbf{S}} \tilde{\boldsymbol{\pi}} \quad (3.68)$$

Ainda na fase de predição, deve-se identificar os componentes de $\tilde{\mathbf{q}}$ não pertencentes ao intervalo $[\beta_{min}\mu_{af}, \beta_{max}\mu_{af}]$, onde $\beta_{min}\mu_{af}$ e $\beta_{max}\mu_{af}$ são valores de limites mínimo e máximo, respectivamente. Estes componentes são denominados *produtos de complementaridade externos*. O passo de correção visa modificar esses produtos no sentido de melhorar a centralidade de \mathbf{y}_{k+1} . Para corrigir os produtos externos, primeiro projeta-se os elementos de $\tilde{\mathbf{q}}$ em um hipercubo $\Upsilon = [\beta_{min}\mu_{af}, \beta_{max}\mu_{af}]^l$, o que analiticamente implica na definição

$$\mathbf{q}_{t_i} = \begin{cases} \beta_{min}\mu_{af}, & \text{se } \tilde{q}_i < \beta_{min}\mu_{af}, \\ \beta_{max}\mu_{af}, & \text{se } \tilde{q}_i > \beta_{max}\mu_{af}, \\ \tilde{q}_i, & \text{nos outros casos.} \end{cases} \quad (3.69)$$

tal que a direção de correção $\Delta \mathbf{y}_{co}$ é obtida da solução do sistema linear

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}) & 0 & -\mathbf{J}(\mathbf{x})^t & -\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{h}(\mathbf{x})^t \\ 0 & -\boldsymbol{\Pi} & 0 & -\mathbf{S} \\ -\mathbf{J}(\mathbf{x}) & 0 & 0 & 0 \\ -\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{h}(\mathbf{x}) & \mathbf{I} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x}_{co} \\ \Delta \mathbf{s}_{co} \\ \Delta \boldsymbol{\lambda}_{co} \\ \Delta \boldsymbol{\pi}_{co} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{q}_t - \tilde{\mathbf{q}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.70)$$

O lado direito da Eq. (3.70), possui elementos diferentes de zero apenas para os componentes de $\mathbf{q}_t - \tilde{\mathbf{q}}$ referentes aos produtos externos; ou seja, os elementos que não pertencem ao intervalo $[\beta_{min} \mu_{af}, \beta_{max} \mu_{af}]$. Porém, o lado direito do sistema linear pode permanecer mal escalonado se houver componentes de $\tilde{\mathbf{q}}$ com valor elevado. Assim, para prevenir o efeito indesejável desta condição, todos os componentes de $\mathbf{q}_t - \tilde{\mathbf{q}}$ menores do que $-\beta_{max} \mu_{af}$, devem ser substituídos por este valor, que corresponde ao limite esperado para o decréscimo dos maiores produtos de complementaridade $\tilde{\mathbf{q}}$.

Com a direção efetiva de busca da solução ótima $\Delta \mathbf{y}$ definida pela Eq. (3.66), o novo fator de passo $\gamma^{(k)}$ é calculado como

$$\gamma^{(k)} = \min \left[\min \frac{\mathbf{s}_i^{(k)}}{|\Delta \mathbf{s}_i^{(k)}|}, \min \frac{\boldsymbol{\pi}_j^{(k)}}{|\Delta \boldsymbol{\pi}_j^{(k)}|}, 1, 0 \right] \quad (3.71)$$

e uma nova solução $\mathbf{y}^{(k+1)}$ é determinada com o auxílio da Eq. (3.59).

O processo de correção pode ser repetido quantas vezes forem desejadas. Para isto, antes de aplicar uma nova correção faz-se $\Delta \mathbf{y}_{af} \leftarrow \Delta \mathbf{y}$ e $\gamma_{af} \leftarrow \gamma^{(k)}$; ou seja, a direção efetiva da iteração corrente é tomada como a nova direção predita para um novo passo corretor.

O uso de múltiplos passos de correção central é de interesse prático apenas se a redução no número de iterações resultar numa diminuição no tempo total de computação do processo iterativo. Desta forma, é essencial monitorar o melhoramento resultante de múltiplas soluções da Eq. (3.70). Segundo (GONDZIO, 1996), a correção deve ser interrompida quando o fator do passo na direção $\Delta \mathbf{y}$, calculado através da Eq. (3.71), não aumenta suficientemente em comparação com o fator de passo correspondente à $\Delta \mathbf{y}_{af}$, determinado via Eq. (3.64). Ou seja, se

$$\gamma^{(k)} - \gamma_{af} < \varsigma_{\gamma} \delta_{af} \quad (3.72)$$

onde ς_{γ} é o mínimo valor aceitável para o decréscimo do fator do passo.

Múltiplos passos de correção reduzem o número de iterações ao custo de um esforço computacional extra a cada iteração. Assim, a redução no tempo total de computação é influenciada por fatores tais como:

- diminuição no número de iterações;

- esforço computacional na fatoração da matriz de coeficientes;
- esforço computacional no processo de substituição direta-inversa.

Desta forma, além da da condição imposta pela Eq. (3.72), é necessário limitar o número de correções centrais por iteração. A referência (GONDZIO, 1996) sugere o cálculo da relação entre o *esforço computacional requerido pela fatoração* e o *esforço computacional requerido pela substituição direta-inversa*, denotada $r_{f/s}$. Esta relação é utilizada para definir o número de correções centralizadoras por iteração, da seguinte forma:

- se $30 > r_{f/s} > 10$, uma correção centralizadora é realizada;
- se $50 > r_{f/s} > 30$, duas correções centralizadoras são realizadas;
- se $r_{f/s} > 50$, três correções centralizadoras são realizadas;;

Diferentemente do que é observado na solução de problemas de Programação Linear, o uso do método de Newton em problemas de Programação Não Linear requer intenso cálculo de derivadas de primeira e segunda ordens, para a formação das matrizes Jacobianas e Hessianas. Para levar em conta este esforço computacional extra, a referência (TORRES; QUINTANA, 2001) sugere que a relação $r_{f/s}$ seja computada como o tempo de CPU, utilizado para o passo preditor na primeira iteração do Método de Múltiplas Correções Centrais. Desta forma, é possível considerar outros aspectos do processo iterativo, tais como a computação intermediária de matrizes e vetores, acesso direto e indireto de dados, particularidades da arquitetura do computador e etc.

Na implementação realizada em (TORRES; QUINTANA, 2001), o fator para o aumento de tamanho do passo δ_γ é escolhido dinamicamente. Para isto, seja K o número máximo de correções centrais (número de incrementos no tamanho do passo) e γ_{af} o passo inicial de convergência. Desde que idealmente o tamanho do passo deve ser próximo a unidade, então

$$\delta_{af} = \frac{(1 - \gamma_{af})}{K}$$

Adicionalmente, considera-se que δ_{af} não deverá ser menor do que 0,1 (muito pessimista) e maior do que 0,2 (muito otimista).

O Método de Múltiplas Correções Centrais pode ainda ser implementado utilizando-se tanto o ponto predito, como o ponto obtido através do passo corretor convencional. A implementação desta variação do algoritmo original pode trazer uma melhora considerável no tempo total de computação, como é demonstrado em (WU; CHANG, 2004). Neste trabalho, é sugerido que a direção de busca $\Delta \mathbf{y}_{af}$ seja substituída por $\Delta \mathbf{y}_c$, representando a direção calculada ao final do passo de correção do Método Preditor Corretor convencional (Eq. 3.36). Assim, de posse da direção $\Delta \mathbf{y}_c$, procede-se o cálculo da direção de correção central da forma descrita anteriormente neste Capítulo.

O algoritmo da versão padrão do método de múltiplas correções de centralização pode ser sumarizado como:

1. Inicialização das variáveis \mathbf{x} , \mathbf{s} , $\boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{\pi}$ e μ , satisfazendo as condições $(\mathbf{s}_0, \boldsymbol{\pi}_0, \mu_0) > 0$;
2. Cálculo do vetor gradiente da função Lagrangeana (Eq. (3.14));
3. Teste de convergência: comparação da norma euclidiana do vetor gradiente e do valor do parâmetro de barreira μ com as respectivas tolerâncias. Se o critério de convergência é satisfeito, o processo é encerrado;
4. Cálculo e fatoração da matriz \mathbf{W} (Eq. (3.19));
5. Direção afim-escala: solução da Eq. (3.60);
6. Direção Predita: solução da Eq.(3.67);
7. Direção de Correção Centralizadora: solução da Eq. (3.70);
8. Teste de parada de correção: comparação do número de correções centralizadas com relação ao limite K e verificação do cumprimento da Eq. (3.72). Se nenhum dos critérios de parada é satisfeito faz-se: $\Delta \mathbf{y}_{af} \leftarrow \Delta \mathbf{y}$ e $\gamma_{af} \leftarrow \gamma(k)$, e retorna ao passo (6); em caso contrário o processo prossegue;
9. Atualização das variáveis do problema de otimização;
10. Cálculo de $\mu^{(k+1)}$ (Eq. 3.22). Retorno ao passo (2).

3.7 Escolha do Ponto Inicial

Os métodos de Pontos Interiores são consideravelmente sensíveis à escolha dos valores iniciais das variáveis de otimização. Sob circunstâncias desfavoráveis, o fator de passo na direção de busca pode ser drasticamente reduzido, resultando num avanço desprezível na busca da solução ótima. Este comportamento pode se repetir por várias iterações, causando a não convergência do processo iterativo (GERTZ; NOCEDAL; SARTENAER, 2004). No texto a seguir, são abordados aspectos relacionados à escolha do ponto inicial utilizado na partida desses métodos.

Conforme citado em (TORRES; CARVALHO JR, 2006), uma importante característica de algoritmos baseados em Métodos de Pontos Interiores, refere-se à não obrigatoriedade do ponto inicial representar uma solução viável do problema de otimização. Assim, a única condição a ser imposta a este ponto, refere-se à estrita não negatividade dos multiplicadores duais π_i e das variáveis de folga s_i . A condição de não-negatividade deve ser mantida durante o processo de convergência, de forma a definir valores positivos para os termos de barreira

logarítmica e evitar soluções que, embora satisfaçam as condições de otimalidade de KKT, não representem a solução ótima do problema.

As três seguintes abordagens para a seleção de valores iniciais para as variáveis de otimização são apresentadas em (WU; DEBS, 2001):

- Inicialização via minimização das violações;
- *Hot Start*;
- *Warm Start*.

Na ausência de uma solução obtida com as estratégias de *Hot Start* ou *Warm Start*, é proposta a utilização de um algoritmo que visa minimizar a violação das restrições de desigualdade. Em termos analíticos, o problema de otimização a ser resolvido é expresso por

$$\begin{aligned}
 & \text{Minimizar} && f_a(\mathbf{x}, \mathbf{s}_{xu}, \mathbf{s}_u, \mathbf{s}_l) \\
 & \text{sujeito a} && \mathbf{g}(\mathbf{x}) = 0 \\
 & && \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{s}_u = \mathbf{h}_u \\
 & && \mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{s}_l = \mathbf{h}_l \\
 & && \mathbf{x} + \mathbf{s}_{xu} = \mathbf{x}_u
 \end{aligned} \tag{3.73}$$

onde,

$$f_a(\mathbf{x}, \mathbf{s}_{xu}, \mathbf{s}_u, \mathbf{s}_l) = \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_l)^t \mathbf{R}_1 \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_l) + \frac{1}{2} \mathbf{s}_{xu}^t \mathbf{R}_1 \mathbf{s}_{xu} + \frac{1}{2} \mathbf{s}_u^t \mathbf{R}_2 \mathbf{s}_u + \frac{1}{2} \mathbf{s}_l^t \mathbf{R}_2 \mathbf{s}_l ; \tag{3.74}$$

e \mathbf{h}_u e \mathbf{h}_l são vetores coluna l -dimensionais dos limites superiores e inferiores, respectivamente, das restrições de desigualdade; \mathbf{x}_u é o vetor coluna n -dimensional dos limites superiores das restrições de desigualdade das variáveis de otimização; \mathbf{s}_{xu} , \mathbf{s}_u e \mathbf{s}_l são os vetores coluna relativos as restrições de desigualdade de \mathbf{x}_u , \mathbf{h}_u e \mathbf{h}_l , respectivamente, com as dimensões apropriadas; \mathbf{R}_1 e \mathbf{R}_2 são matrizes identidade, com dimensões $n \times n$ e $l \times l$, respectivamente; e os outros termos foram previamente definidos.

Como o objetivo deste procedimento é o de encontrar um ponto que satisfaça as restrições, com o mínimo esforço computacional, não há necessidade de resolver com exatidão o problema mostrado na Eq. (3.73). Desta forma, executa-se apenas as iterações do método de Newton necessárias para obter a estimativa a ser utilizada como ponto inicial, a partir de um ponto pré-selecionado $\hat{\mathbf{x}}$. Para esta finalidade, a função Lagrangena é expressa por

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}_{hl}, \boldsymbol{\pi}_{hu}, \boldsymbol{\pi}_{xu}, \mathbf{s}_{hl}, \mathbf{s}_{hu}, \mathbf{s}_{xu}) = & f_a(\mathbf{x}, \mathbf{s}_{xu}, \mathbf{s}_u, \mathbf{s}_l) - \boldsymbol{\lambda}^t \mathbf{g}(\mathbf{x}) \\
 & - \boldsymbol{\pi}_{hl}^t [\mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{s}_{hl} - \mathbf{h}_l] \\
 & - \boldsymbol{\pi}_{hu}^t [\mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{s}_{hu} - \mathbf{h}_u] \\
 & - \boldsymbol{\pi}_{xl}^t [\mathbf{x} - \mathbf{s}_{xl} - \mathbf{x}_l]
 \end{aligned} \tag{3.75}$$

onde, $\boldsymbol{\lambda}$ é um vetor coluna m -dimensional composto pelos multiplicadores duais das restrições de igualdade; $\boldsymbol{\pi}_{hl}$ e $\boldsymbol{\pi}_{hu}$ são vetores coluna l -dimensionais dos multiplicadores duais relacionados às restrições de desigualdade operacionais; e $\boldsymbol{\pi}_{xu}$ é o vetor coluna n -dimensionais dos multiplicadores duais relacionados às restrições de desigualdade de limite máximo das variáveis de otimização.

Omitindo o argumento da função Lagrangeana, as condições de primeira ordem de KKT para este problema são dadas por

$$\begin{aligned}
\nabla_{\mathbf{x}}\mathcal{L} &= 0 = \mathbf{R}_1^t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_l) - \nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{g}(\mathbf{x})^t\boldsymbol{\lambda} - \nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{h}(\mathbf{x})^t(\boldsymbol{\pi}_{hu} + \boldsymbol{\pi}_{hl}) - \boldsymbol{\pi}_{xu} \\
\nabla_{\boldsymbol{\lambda}}\mathcal{L} &= 0 = -\mathbf{g}(\mathbf{x}) \\
\nabla_{\boldsymbol{\pi}_{hu}}\mathcal{L} &= 0 = -[\mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{s}_{hu} - \mathbf{h}_u] \\
\nabla_{\boldsymbol{\pi}_{hl}}\mathcal{L} &= 0 = -[\mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{s}_{hl} - \mathbf{h}_l] \\
\nabla_{\boldsymbol{\pi}_{xu}}\mathcal{L} &= 0 = -[\mathbf{x} + \mathbf{s}_{xu} - \mathbf{x}_u] \\
\nabla_{\boldsymbol{\pi}_{xl}}\mathcal{L} &= 0 = -[\mathbf{x} - \mathbf{s}_{xl} - \mathbf{x}_l] \\
\nabla_{\mathbf{s}_{hu}}\mathcal{L} &= 0 = \mathbf{s}_{hu}^t\mathbf{R}_2 - \boldsymbol{\pi}_{hu} \\
\nabla_{\mathbf{s}_{hl}}\mathcal{L} &= 0 = \mathbf{s}_{hl}^t\mathbf{R}_2 + \boldsymbol{\pi}_{hl} \\
\nabla_{\mathbf{s}_{xu}}\mathcal{L} &= 0 = \mathbf{s}_{xu}^t\mathbf{R}_1 - \boldsymbol{\pi}_{xu}
\end{aligned} \tag{3.76}$$

A expansão em série de Taylor, até o termo de primeira ordem, permite fazer as seguintes substituições na segunda das Eqs. (3.76):

$$\begin{aligned}
-\mathbf{g}(\hat{\mathbf{x}} + \Delta\mathbf{x}) &= -[\mathbf{g}(\hat{\mathbf{x}}) + \nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{g}(\hat{\mathbf{x}})^t\Delta\mathbf{x}] \\
-\mathbf{g}(\mathbf{x}^0) &= -[\mathbf{g}(\hat{\mathbf{x}}) + \nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{g}(\hat{\mathbf{x}})^t(\mathbf{x}^0 - \hat{\mathbf{x}})] \\
-\mathbf{g}(\mathbf{x}^0) &= -[\mathbf{g}(\hat{\mathbf{x}}) + \nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{g}(\hat{\mathbf{x}})^t\mathbf{x}^0 - \nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{g}(\hat{\mathbf{x}})^t\hat{\mathbf{x}}]
\end{aligned} \tag{3.77}$$

O mesmo raciocínio pode ser aplicado à terceira e à quarta das Eqs. (3.76), resultando em:

$$\begin{aligned}
-[\mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}} + \Delta\mathbf{x}) + \mathbf{s}_{hu} - \mathbf{h}_u] &= -[\mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}) + \nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}})^t\Delta\mathbf{x} + \mathbf{s}_{hu} - \mathbf{h}_u] \\
-[\mathbf{h}(\mathbf{x}^0) + \mathbf{s}_{hu} - \mathbf{h}_u] &= -[\mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}) + \nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}})^t(\mathbf{x}^0 - \hat{\mathbf{x}}) + \mathbf{s}_{hu} - \mathbf{h}_u] \\
-[\mathbf{h}(\mathbf{x}^0) + \mathbf{s}_{hu} - \mathbf{h}_u] &= -[\mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}) + \nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}})^t\mathbf{x}^0 - \nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}})^t\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{s}_{hu} - \mathbf{h}_u] \\
\\ \\
-[\mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}} + \Delta\mathbf{x}) - \mathbf{s}_{hl} - \mathbf{h}_l] &= -[\mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}) + \nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}})^t\Delta\mathbf{x} - \mathbf{s}_{hl} - \mathbf{h}_l] \\
-[\mathbf{h}(\mathbf{x}^0) - \mathbf{s}_{hl} - \mathbf{h}_l] &= -[\mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}) + \nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}})^t(\mathbf{x}^0 - \hat{\mathbf{x}}) - \mathbf{s}_{hl} - \mathbf{h}_l] \\
-[\mathbf{h}(\mathbf{x}^0) - \mathbf{s}_{hl} - \mathbf{h}_l] &= -[\mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}) + \nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}})^t\mathbf{x}^0 - \nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}})^t\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{s}_{hl} - \mathbf{h}_l]
\end{aligned}$$

Assim, as novas condições de otimalidade, relativas a segunda, terceira e quarta Eqs. de

(3.76), são expressas como

$$\begin{aligned}
\nabla_{\lambda} \mathcal{L} &= 0 = -[\mathbf{g}(\hat{\mathbf{x}}) + \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{g}(\hat{\mathbf{x}})^t \mathbf{x}^0 - \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{g}(\hat{\mathbf{x}})^t \hat{\mathbf{x}}] \\
\nabla_{\pi_{hu}} \mathcal{L} &= 0 = -[\mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}) + \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}})^t \mathbf{x}^0 - \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}})^t \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{s}_{hu} - \mathbf{h}_u] \\
\nabla_{\pi_{hl}} \mathcal{L} &= 0 = -[\mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}) + \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}})^t \mathbf{x}^0 - \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}})^t \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{s}_{hl} - \mathbf{h}_l]
\end{aligned} \tag{3.78}$$

Com base nas Eqs. (3.76) e (3.78), é possível definir o sistema linear a ser resolvido pelo método de Newton em sua forma matricial

$$\begin{bmatrix}
\mathbf{R}_1 & -\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x})^t & -\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{h}(\mathbf{x})^t & -\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{h}(\mathbf{x})^t & -I & 0 & 0 & 0 \\
-\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{h}(\mathbf{x}) & 0 & 0 & 0 & 0 & -I & 0 & 0 \\
-\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{h}(\mathbf{x}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\
-I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -I \\
-I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -I & 0 & 0 & \mathbf{R}_2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & \mathbf{R}_2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -I & 0 & 0 & \mathbf{R}_1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\mathbf{x}^0 \\
\lambda^0 \\
\pi_{hu}^0 \\
\pi_{hl}^0 \\
\pi_{xu}^0 \\
\mathbf{s}_{hu}^0 \\
\mathbf{s}_{hl}^0 \\
\mathbf{s}_{xu}^0
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\mathbf{R}_1 \mathbf{x}_l \\
\mathbf{g}(\hat{\mathbf{x}}) - \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{x}} \\
\mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}) - \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}})^t \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{h}_u \\
\mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}) - \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}})^t \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{h}_l \\
\mathbf{x}_u \\
0 \\
0 \\
0
\end{bmatrix} \tag{3.79}$$

A resolução de sistemas lineares deste tipo, é repetida até que as variáveis \mathbf{s}_{hu} , \mathbf{s}_{hl} , \mathbf{s}_{xu} ou a Eq. $(\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}_l)$ sejam todas positivas. Neste caso, o ponto encontrado é utilizado como solução inicial. De outra forma, os elementos negativos deverão sofrer as modificações descritas a seguir, até que seja assegurada a não violação das restrições.

$$\begin{aligned}
x_i^0 &\leftarrow (x_l)_i + \max \{ (x^0 - x_l)_i, \psi(x_u - x_l)_i \} \\
(s_{hu}^0)_i &\leftarrow \max \{ (s_{hu}^0)_i, \psi(h_u - h_l)_i \} \\
(s_{hl}^0)_i &\leftarrow \max \{ (s_{hl}^0)_i, \psi(h_u - h_l)_i \} \\
(s_{xu}^0)_i &\leftarrow \max \{ (s_{xu}^0)_i, \psi(x_u - x_l)_i \}
\end{aligned} \tag{3.80}$$

onde

$$\psi = \min \{ 0, 1, |\eta| \}$$

e

$$\eta = \min \left\{ \min_{x_i^0 - (x_l)_i < 0} \frac{x_i^0 - (x_l)_i}{(x_u - x_l)_i}, \min_{(s_{xu}^0)_i < 0} \frac{(s_{xu}^0)_i}{(x_u - x_l)_i}, \min_{(s_{hu}^0)_i < 0} \frac{(s_{hu}^0)_i}{(h_u - h_l)_i}, \min_{(s_{hl}^0)_i < 0} \frac{(s_{hl}^0)_i}{(h_u - h_l)_i} \right\}$$

As variáveis duais são inicializadas como

$$\lambda^0 = \mathbf{e} \quad \pi_{hu}^0 = 0 \quad \pi_{hl}^0 = 1, 5\xi\tilde{\mathbf{e}} \quad (3.81)$$

e

$$\begin{cases} (\pi_{xl}^0)_i = -\nabla f a_i, & (\pi_{xu}^0)_i = -2\nabla f a_i, & \text{se } \nabla f a_i < -\xi \\ (\pi_{xl}^0)_i = \nabla f a_i + \xi, & (\pi_{xu}^0)_i = \xi, & \text{se } \nabla f a_i \geq 0 \\ (\pi_{xl}^0)_i = \xi, & (\pi_{xu}^0)_i = \nabla f a_i + \xi, & \text{se } -\xi \leq \nabla f a_i < 0 \end{cases} \quad (3.82)$$

onde, $\nabla f a$ é a derivada primeira da função objetivo $f a(\mathbf{x}, \mathbf{s}_{xu}, \mathbf{s}_u, \mathbf{s}_l)$, \mathbf{e} é um vetor coluna unitário m -dimensional, $\tilde{\mathbf{e}}$ é um vetor coluna unitário l -dimensional,

$$\xi = 1 + \|\nabla f a(\mathbf{x}^0)\|_1$$

e $\|\cdot\|_1$ representa a norma 1.

Esta metodologia requer um esforço computacional reduzido para obter o ponto inicial, independentemente da dimensão da matriz de coeficientes da Eq. (3.79), já que esta permanecerá sempre bem condicionada e não singular (WU; DEBS, 2001).

No método de partida *Hot Start*, é utilizada uma solução ótima de um problema de otimização, como estimativa do ponto inicial de outro problema de otimização semelhante. A maior dificuldade ligada à esta abordagem, refere-se ao fato de que, embora o ponto inicial possa representar uma solução aproximada para o problema de otimização perturbado, este pode conter algumas variáveis no limite, o que pode resultar em mal condicionamento numérico do sistema linear a ser resolvido. Desta forma, torna-se importante a melhora no condicionamento do sistema linear, o que pode ser alcançado pela alteração adequada dos valores destas variáveis. Note que isto é refletido no valor inicial do parâmetro barreira.

O método *Warm Start* difere da abordagem *Hot Start* por não utilizar a solução ótima de outro problema, como estimativa para o ponto inicial do problema perturbado, evitando assim os problemas advindos do mal condicionamento do sistema linear. Assim, a estimativa do ponto inicial para o problema perturbado é uma solução aproximada do problema original. A questão central desta abordagem é qual solução do processo iterativo será a estimativa adequada. A referência (WU; DEBS, 2001) propõe um índice a ser utilizado para avaliar se a solução corrente do problema original é apropriada como estimativa do ponto inicial; ou seja, se está próxima o suficiente da solução ótima, porém, afastada dos limites. Este índice

é calculado como

$$\frac{\boldsymbol{\pi}_{(k)}^t \mathbf{s}_{(k)}}{1 + |f_{val}|} \leq tol \quad (3.83)$$

onde f_{val} é o valor da função objetivo. De forma que, quando esta relação é verificada, a solução corrente é armazenada e utilizada como estimativa para o ponto inicial do problema de otimização perturbado.

Além das abordagens discutidas anteriormente, a referência (TORRES; CARVALHO JR, 2006) analisa o uso de pontos de partida baseados na solução do problema de Fluxo de Potência convencional e na *Partida Plana*. Este procedimento pode ser descrito como:

i) Estimar \mathbf{x}_0 a partir de um dos seguintes métodos: (a) solução dada na convergência de um Fluxo de Potência CA; (b) solução alcançada na iteração 1, 2 ou 3 pelo Método de Gauss-Seidel aplicado às Equações de Fluxo de Potência; (c) solução de um Fluxo de Potência CC; ou aplicação da *Partida Plana*, utilizando o ponto médio entre os limites superiores e inferiores das variáveis sob restrições canalizadoras.

ii) Com \mathbf{x}_0 estimado, inicializar as variáveis de folga como

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_l &= \min [\max (\mathbf{h}(\mathbf{x}_0) - \mathbf{h}_l, \tau \Delta \mathbf{h}), \bar{\tau} \Delta \mathbf{h}] \\ \mathbf{s}_u &= \Delta \mathbf{h} - \mathbf{s}_l \end{aligned} \quad (3.84)$$

onde, $\Delta \mathbf{h} = \mathbf{h}_u - \mathbf{h}_l$; \mathbf{h}_u e \mathbf{h}_l são vetores coluna l -dimensionais dos limites superiores e inferiores, respectivamente, das restrições de desigualdade; \mathbf{s}_u e \mathbf{s}_l são vetores coluna l -dimensionais das variáveis de folga superiores e inferiores das restrições de desigualdade, respectivamente; τ é a distância relativa dos limites; e $\bar{\tau} = 1 - \tau$.

iii) Com $\mu_0 > 0$, \mathbf{s}_u e \mathbf{s}_l , obter

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\pi}_l &= \mu_0 \mathbf{s}_l \\ \boldsymbol{\pi}_u &= \mu_0 \mathbf{s}_u \end{aligned} \quad (3.85)$$

onde, $\boldsymbol{\pi}_u$ e $\boldsymbol{\pi}_l$ são vetores coluna l -dimensionais compostos pelos multiplicadores duais relativos às restrições de desigualdade superiores e inferiores, respectivamente.

iv) atribuir valor inicial unitário aos multiplicadores duais associados às restrições de balanço de potência ativa e valor nulo àqueles associados às restrições de balanço de potência reativa.

O passo iv, descrito acima, refere-se exclusivamente à função objetivo Perda nas Linhas de Transmissão, quando apenas a geração de potência ativa da barra de referência é minimizada. Com isto, todas as barras do sistema sob análise terão, ao final do processo de solução, multiplicadores de Lagrange associados ao desbalanço de potência ativa com valores muito próximos de 1. A razão disto é que os multiplicadores de Lagrange representam índices de sensibilidade, relacionando variações na função objetivo com o aumento da demanda das

barras às quais estão associados. Assim, como a única geração "livre" de potência ativa está na barra de referência, um aumento de demanda ativa da ordem de 1 p.u, em qualquer outra barra do sistema, resultará em um aumento do valor da função objetivo de aproximadamente 1,0 pu. Toda parcela do valor associado aos multiplicadores de Lagrange que exceder a 1,0 é relacionada às perdas nas linhas de transmissão, que também demandarão um aumento de geração de ativos da barra de referência. Para as demais funções objetivo deve ser utilizado valor nulo para todos os multiplicadores de Lagrange, salvo para situações como a descrita acima, em que o valor esperado para os multiplicadores é previamente conhecido.

3.8 Redução do Sistema Linear

O sistema linear a ser resolvido a cada passo do processo iterativo do método de pontos interiores pode ser significativamente reduzido (GRANVILLE, 1994). Para isto, são definidos os seguintes vetores

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nu} &= \boldsymbol{\mu}e - \mathbf{S}\boldsymbol{\pi} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{s}\end{aligned}\tag{3.86}$$

tal que, a segunda e a quarta das eqs. (3.16) podem ser reescritas na forma

$$\begin{aligned}-\boldsymbol{\Pi}\boldsymbol{\Delta}\mathbf{s} - \mathbf{S}\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{\pi} &= -\boldsymbol{\nu} \\ -\nabla_x \mathbf{h}(\mathbf{x})\boldsymbol{\Delta}\mathbf{x} + \boldsymbol{\Delta}\mathbf{s} &= \mathbf{y}\end{aligned}\tag{3.87}$$

A última equação pode ser expressa alternativamente como

$$\boldsymbol{\Delta}\mathbf{s} = \nabla_x \mathbf{h}(\mathbf{x})\boldsymbol{\Delta}\mathbf{x} + \mathbf{y}\tag{3.88}$$

A substituição da Eq. (3.88) na primeira das eqs. (3.87) resulta em

$$\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{\pi} = \mathbf{S}^{-1}(\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\Pi}\mathbf{y}) - \mathbf{S}^{-1}\boldsymbol{\Pi}\nabla_x \mathbf{h}(\mathbf{x})\boldsymbol{\Delta}\mathbf{x}\tag{3.89}$$

Substituindo as equações (3.89) na primeira das equações (3.16) obtém-se

$$\begin{aligned}\{\mathbf{H}(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}) + \nabla_x \mathbf{h}(\mathbf{x})^t (\mathbf{S}^{-1}\boldsymbol{\Pi}) \nabla_x \mathbf{h}(\mathbf{x})\} \boldsymbol{\Delta}\mathbf{x} - \nabla_x \mathbf{g}(\mathbf{x})^t \boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{\lambda} = \\ -\mathbf{t} + [\nabla_x \mathbf{h}(\mathbf{x})]^t [\mathbf{S}^{-1}(\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\Pi}\mathbf{y})]\end{aligned}\tag{3.90}$$

Definindo-se

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathbf{H}}(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}) &= \mathbf{H}(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}) + \nabla_x \mathbf{h}(\mathbf{x})^t (\mathbf{S}^{-1}\boldsymbol{\Pi}) \nabla_x \mathbf{h}(\mathbf{x}) \\ \widetilde{\mathbf{t}} &= -\mathbf{t} + [\nabla_x \mathbf{h}(\mathbf{x})]^t [\mathbf{S}^{-1}(\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\Pi}\mathbf{y})]\end{aligned}$$

a equação (3.90) transforma-se em

$$\widetilde{\mathbf{H}}(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}) \boldsymbol{\Delta x} - \nabla_x \mathbf{g}(\mathbf{x})^t \boldsymbol{\Delta \lambda} = \widetilde{\mathbf{t}} \quad (3.91)$$

a qual, juntamente com a terceira das equações (3.16), forma o sistema linear reduzido

$$\begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{H}}(\mathbf{x}, \mathbf{s}_l, \mathbf{s}_u, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}_l, \boldsymbol{\pi}_u) & -\nabla_x \mathbf{g}(\mathbf{x})^t \\ -\nabla_x \mathbf{g}(\mathbf{x}) & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Delta x} \\ \boldsymbol{\Delta \lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{t}} \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (3.92)$$

A análise da equação (3.92) revela que a dimensão do sistema linear reduzido é independente do número de restrições de desigualdade, sendo igual a soma dos números de variáveis de otimização e de restrições de igualdade.

Equações semelhantes à (3.92) podem ser estabelecidas para a versão Preditor-Corretor. Neste caso, deve-se observar que:

- na etapa de predição:

$$\boldsymbol{\nu} = -\mathbf{S}\boldsymbol{\pi}$$

- na etapa de correção:

$$\boldsymbol{\nu} = -(\boldsymbol{\mu}e - \mathbf{S}\boldsymbol{\pi}) + \boldsymbol{\Delta S}\boldsymbol{\Delta \pi}$$

3.9 Conclusão

Quatro versões dos algoritmos de pontos interiores foram apresentadas, incluindo métodos de partida comuns e uma estratégia de redução do sistema linear.

As principais dificuldades da aplicação desses métodos estão relacionadas às restrições de desigualdade, mais particularmente às condições de complementaridade. As diferentes versões sugerem formas distintas de melhorar as características de convergência através de artifícios para tratar a folga complementar. Observa-se que isto estabelece um compromisso entre o número de iterações e o esforço computacional para a convergência.

A despeito do grande avanço que estes métodos introduziram na solução dos problemas de programação linear restrita, vários aspectos necessitam de melhorias (tais como a especificação do valor inicial do parâmetro barreira, o método de partida etc), como será ilustrado no capítulo de resultados numéricos.

Capítulo 4

Implementação Proposta

4.1 Introdução

Este Capítulo objetiva esclarecer aspectos implementacionais, ligados às quatro diferentes metodologias de otimização apresentadas no Capítulo 3. É mostrada a modelagem das funções objetivo, restrições de igualdade e desigualdade, além de particularidades implementacionais ligadas aos métodos de otimização utilizados. Ainda são descritos os procedimentos para a inicialização de variáveis e os critérios de convergência utilizados.

4.2 Modelagem das Funções Objetivo

Esta Seção apresenta a modelagem matemática das três funções objetivo utilizadas neste trabalho.

4.2.1 Perda nas Linhas de Transmissão

A função objetivo Perda nas Linhas de Transmissão (PLT) é equacionada como

$$f(\mathbf{V}, \boldsymbol{\delta}, \mathbf{a}) = \sum_{i=0}^{nb} (P_{g_i} - P_{d_i})$$

onde, \mathbf{V} é o vetor coluna, cuja dimensão é igual ao número de barras do sistema (nb), formado pelas variáveis de otimização V_i , relacionadas aos módulos das tensões nodais; $\boldsymbol{\delta}$ é o vetor coluna, de dimensão $(nb - 1)$, formado pelas variáveis de otimização δ_i , relacionadas aos ângulos das tensões nodais, com exceção do ângulo da barra de referência; \mathbf{a} é o vetor coluna, cuja dimensão é igual ao número de Transformadores com Comutação Automática Sob Carga (LTC's) do sistema (nt), formado pelas variáveis contínuas de otimização a_i , relacionadas

às posições dos tapes dos LTC's; os valores de demanda de potência ativa P_{d_i} são obtidos ao início do processo iterativo, mantendo-se constantes durante a resolução do problema de minimização de $f(\mathbf{V}, \boldsymbol{\delta}, \mathbf{a})$; e as gerações de potência ativa, P_{g_i} , são também mantidas constantes a partir do início do processo iterativo, com exceção da geração relacionada a barra de referência $P_{g_{ref}}$, que é calculada a cada iteração a partir de

$$P_{g_{ref}} = P_{ref}(\mathbf{V}, \boldsymbol{\delta}, \mathbf{a}) + P_{d_{ref}}$$

onde, o subscrito *ref* está relacionado à barra de referência angular e o somatório algébrico das injeções de potência na barra de referência angular $P_{ref}(\mathbf{V}, \boldsymbol{\delta}, \mathbf{a})$ é tomado em função das variáveis de otimização V_i , δ_i e a_i .

A estratégia de 'liberar' apenas a geração da barra de referência visa manter a solução do processo de minimização o mais próximo possível de um despacho de potência ativa pré-existente, simplificando a prática de operação do sistema de potência.

4.2.2 Desvio de um Nível de Tensão Pré-Estabelecido

A função objetivo Desvio de um Nível de Tensão Pré-Estabelecido (DNT) tem sua modelagem implementada como

$$f(\mathbf{V}, \mathbf{a}) = \sum_{i=1}^{nb} (V_i - V_i^{esp})^2 + \sum_{j=1}^{nt} (a_j - a_j^{esp})^2 \quad (4.1)$$

onde, V_i e V_i^{esp} são, respectivamente, os valores dos módulos das tensões complexas a serem calculados e pré-estabelecidos, associados a i -ésima barra do sistema; e a_i e a_i^{esp} são os elementos relativos às posições dos tapes dos LTC's, a serem calculados e pré-estabelecido, respectivamente, associados ao i -ésimo LTC.

A minimização de (4.1) visa a solução do problema de fluxo de potência ótimo de forma a manter as variáveis de otimização V_i e a_i o mais próximo possível de valores pré-especificados.

Assim como para o processo de minimização das perdas nas linhas de transmissão, e com relação as variáveis relativas à geração de potência ativa, apenas a geração de potência ativa da barra de referência é atualizada durante o processo de otimização desta função objetivo.

4.2.3 Carregamento de um Sistema de Potência

A função objetivo Carregamento de um Sistema de Potência (CSP) é modelada como

$$f(\rho) = \rho$$

onde, ρ é um escalar cujo valor reflete a variação da demanda base do sistema. Desta forma, a cada iteração do processo iterativo, os novos valores de demanda são obtidos por

$$\begin{aligned} P_{d_i}^{k+1} &= P_{b_i} + \rho^k \Delta P_{d_i} \\ Q_{d_i}^{k+1} &= Q_{b_i} + \rho^k \Delta Q_{d_i} \end{aligned} \quad (i = 1, \dots, nb)$$

onde, k corresponde a iteração corrente, P_{b_i} e Q_{b_i} são, respectivamente, os valores de demanda de potência ativa e reativa do caso base, com relação a i -ésima barra do sistema, e os incrementos de carga ΔP_{d_i} e ΔQ_{d_i} , obtidos no início do processo iterativo, são computados como

$$\begin{aligned} \Delta P_{d_i} &= \frac{P_{b_i}}{100,0} \\ \Delta Q_{d_i} &= \frac{Q_{b_i}}{100,0} \end{aligned} \quad (i = 1, \dots, nb) \quad (4.2)$$

Com os incrementos de carga obtidos na Eq. (4.2), o valor calculado para ρ indica a variação percentual aplicada ao valor da demanda base.

Durante o processo de solução do problema de Fluxo de Potência Ótimo, a função objetivo Carregamento de um Sistema de Potência é maximizada, de forma que todos os limites físicos e operacionais sejam satisfeitos. Diferentemente da modelagem aplicada às funções objetivo anteriores, todas as barras de geração do sistema devem ter suas gerações de potência ativa recalculadas a cada iteração. Assim, tanto a geração de potência ativa quanto a reativa são reavaliadas como

$$\begin{aligned} P_{g_i} &= P_i(\mathbf{V}, \boldsymbol{\delta}, \mathbf{a}) + P_{d_i} \\ Q_{g_i} &= Q_i(\mathbf{V}, \boldsymbol{\delta}, \mathbf{a}) + Q_{d_i} \end{aligned} \quad (\forall i \in \mathbf{CG})$$

onde, \mathbf{CG} é o conjunto formado por todas as barras de geração do sistema.

4.3 Modelagem das Restrições de Igualdade

As restrições de igualdade, também chamadas de *restrições de carga*, são relacionadas às equações de balanço de potência, previamente abordadas no Capítulo 2.

Na implementação dos problemas de minimização das funções objetivo PLT e DNT, as restrições de igualdade são dadas por

$$\begin{aligned} P_i(\mathbf{V}, \boldsymbol{\delta}, \mathbf{a}) - P_{g_i} + P_{d_i} &= 0 & (\forall i \in \mathbf{SR}) \\ Q_i(\mathbf{V}, \boldsymbol{\delta}, \mathbf{a}) + Q_{d_i} &= 0 & (\forall i \in \mathbf{SG}) \end{aligned} \quad (4.3)$$

onde, \mathbf{SR} é o conjunto formado por todas as barras do sistema, com exceção da barra de referência angular; indicando que, apenas a barra de referência não possui restrições de balanço de potência ativa associadas. Assim, a primeira das equações em (4.3) é aplicada a todas as barras, com exceção da barra de referência. Na segunda equação, o conjunto formado pelas

barras sem geração de potência, **SG**, mostra que as restrições de balanço de potência reativa são aplicadas a todas as barras que não possuem geração.

Na maximização da função objetivo CSP, todas as barras sem geração possuem restrições de carga ativa e reativa. Assim, o equacionamento destas restrições é dado por

$$\begin{aligned} P_i(\mathbf{V}, \boldsymbol{\delta}, \mathbf{a}) + P_{d_i} &= 0 & (\forall i \in \mathbf{SG}) \\ Q_i(\mathbf{V}, \boldsymbol{\delta}, \mathbf{a}) + Q_{d_i} &= 0 & (\forall i \in \mathbf{SG}) \end{aligned}$$

4.4 Modelagem das Restrições de Desigualdade

Para os três problemas de otimização aqui abordados, as restrições de desigualdade associadas às variáveis V_i , a_i e Q_{g_i} são modeladas como

$$\begin{aligned} V_i^{min} &\leq V_i \leq V_i^{max} & (i = 1, \dots, nb) \\ a_j^{min} &\leq a_j \leq a_j^{max} & (j = 1, \dots, nt) \\ Q_{g_i}^{min} &\leq Q_{g_i} \leq Q_{g_i}^{max} & (\forall i \in \mathbf{CG}) \end{aligned}$$

onde, os elementos com superescrito *min* e *max* são relacionados aos limites inferiores e superiores das restrições de desigualdade, respectivamente.

Com relação à geração de potência ativa, as restrições de desigualdade dos problemas de minimização das funções objetivo PLT e DNT são modeladas como

$$P_{g_i}^{min} \leq P_{g_i} \leq P_{g_i}^{max} \quad (i = ref) \quad (4.4)$$

De forma que, as equações em (4.4), são aplicadas apenas a barra de referência. Já para o problema de maximização da função objetivo Carregamento de um Sistema de Potência, as restrições de desigualdade associadas à P_{g_i} são dadas por

$$P_{g_i}^{min} \leq P_{g_i} \leq P_{g_i}^{max} \quad (\forall i \in \mathbf{CG})$$

sendo aplicadas à todas as barras de geração.

4.5 Modelagem dos Problemas de Otimização

4.5.1 Perdas nas Linhas de Transmissão e Desvio de um Nível de Tensão Pré-Estabelecido

Os problemas de Minimização das *Perdas de Potência Ativa nas Linhas de Transmissão* e do *Desvio de um Nível de Tensão Pré-Estabelecido* possuem modelagens semelhantes, diferindo apenas em relação aos índices de desempenho e suas relativas derivadas. Assim, a modelagem mostrada a seguir, expressa analiticamente uma das possíveis formulações para estes dois problemas, onde o índice de desempenho é representado genericamente por $f(\mathbf{V}, \boldsymbol{\delta}, \mathbf{a})$.

Os problemas de minimização das funções objetivo Perda nas Linhas de Transmissão e Desvio de um Nível de Tensão Pré-Estabelecido podem ser representados como

$$\begin{aligned}
 & \text{Minimizar } f(\mathbf{V}, \boldsymbol{\delta}, \mathbf{a}) \\
 & \text{sujeito a } P_i(\mathbf{V}, \boldsymbol{\delta}, \mathbf{a}) - P_{g_i} + P_{d_i} = 0 & (\forall i \in \mathbf{SR}) \\
 & \quad Q_i(\mathbf{V}, \boldsymbol{\delta}, \mathbf{a}) + Q_{d_i} = 0 & (\forall i \in \mathbf{SG}) \\
 & \quad V_j \leq V_j^{max} \\
 & \quad V_j \geq V_j^{min} & (j = 1, \dots, nb) \\
 & \quad a_m \leq a_m^{max} \\
 & \quad a_m \geq a_m^{min} & (m = 1, \dots, nt) \\
 & \quad Q_{g_n} \leq Q_{g_n}^{max} \\
 & \quad Q_{g_n} \geq Q_{g_n}^{min} & (\forall n \in \mathbf{CG}) \\
 & \quad P_{g_{ref}} \leq P_{g_{ref}}^{max} \\
 & \quad P_{g_{ref}} \geq P_{g_{ref}}^{min}
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

onde,

$$\begin{aligned}
 P_{g_i} &= P_i(\mathbf{V}, \boldsymbol{\delta}, \mathbf{a}) + P_{d_i} \\
 Q_{g_i} &= Q_i(\mathbf{V}, \boldsymbol{\delta}, \mathbf{a}) + Q_{d_i}
 \end{aligned}$$

Adicionando a função barreira logarítmica à função objetivo e utilizando variáveis de folga para transformar as restrições de desigualdade em restrições de igualdade, o problema apresentado em (4.5) passa a ser expresso por

$$\text{Minimizar } f(\mathbf{V}, \boldsymbol{\delta}, \mathbf{a}) - \mu \left\{ \sum_{j=1}^{nb} [\ln(s_{vu_j}) + \ln(s_{vl_j})] + \sum_{m=1}^{nt} [\ln(s_{au_m}) + \ln(s_{al_m})] + \sum_{n=1}^{ncg} [\ln(s_{qu_n}) + \ln(s_{ql_n})] + [\ln(s_{p_{uref}}) + \ln(s_{pl_{ref}})] \right\}$$

$$\text{sujeito a } \begin{aligned} P_i(\mathbf{V}, \boldsymbol{\delta}, \mathbf{a}) - P_{g_i} + P_{d_i} &= 0 & (\forall i \in \mathbf{SR}) \\ Q_i(\mathbf{V}, \boldsymbol{\delta}, \mathbf{a}) + Q_{d_i} &= 0 & (\forall j \in \mathbf{SG}) \\ V_j - V_j^{max} + s_{vu_j} &= 0 \\ V_j - V_j^{min} - s_{vl_j} &= 0 & (\forall j) \\ a_m - a_m^{max} + s_{au_m} &= 0 \\ a_m - a_m^{min} - s_{al_m} &= 0 & (\forall m) \\ Q_{g_n} - Q_{g_n}^{max} + s_{qu_n} &= 0 \\ Q_{g_n} - Q_{g_n}^{min} - s_{ql_n} &= 0 & (\forall n \in \mathbf{CG}) \\ P_{g_{ref}} - P_{g_{ref}}^{max} + s_{p_{uref}} &= 0 \\ P_{g_{ref}} - P_{g_{ref}}^{min} - s_{pl_{ref}} &= 0 \\ (s_{vu}, s_{vl}, s_{au}, s_{al}, s_{qu}, s_{ql}, s_{p_{uref}}, s_{pl_{ref}}) &\geq 0 \end{aligned} \quad (4.6)$$

onde, s_{vu} , s_{vl} , s_{au} , s_{al} , s_{qu} e s_{ql} são vetores coluna, formados pelas variáveis de folga s_{vu_j} , s_{vl_j} , s_{au_m} , s_{al_m} , s_{qu_n} e s_{ql_n} , respectivamente; e $s_{p_{uref}}$ e $s_{pl_{ref}}$ são, respectivamente, as variáveis de folga associadas as restrições de limite máximo e mínimo de geração de potência ativa da barra de referência.

4.5.2 Carregamento de um Sistema de Potência

O problema de *Maximização do Carregamento de um Sistema de Potência* pode ser representado analiticamente como

$$\begin{aligned} &\text{Maximizar } f(\rho) \\ &\text{sujeito a } \begin{aligned} P_i(\mathbf{V}, \boldsymbol{\delta}, \mathbf{a}) + P_{d_i} &= 0 & (\forall i \in \mathbf{SG}) \\ Q_i(\mathbf{V}, \boldsymbol{\delta}, \mathbf{a}) + Q_{d_i} &= 0 & (\forall i \in \mathbf{SG}) \\ V_j &\leq V_j^{max} \\ V_j &\geq V_j^{min} & (j = 1, \dots, nb) \\ a_m &\leq a_m^{max} \\ a_m &\geq a_m^{min} & (m = 1, \dots, nt) \\ Q_{g_n} &\leq Q_{g_n}^{max} \\ Q_{g_n} &\geq Q_{g_n}^{min} & (\forall n \in \mathbf{CG}) \\ P_{g_\eta} &\leq P_{g_\eta}^{max} \\ P_{g_\eta} &\geq P_{g_\eta}^{min} & (\forall \eta \in \mathbf{CG}) \end{aligned} \end{aligned}$$

ou, de forma alternativa, pode-se alterar o sinal do índice de desempenho de forma a gerar

$$\begin{aligned}
& \text{Minimizar} && -f(\rho) \\
& \text{sujeito a} && P_i(\mathbf{V}, \boldsymbol{\delta}, \mathbf{a}) + P_{d_i} = 0 && (\forall i \in \mathbf{SG}) \\
& && Q_i(\mathbf{V}, \boldsymbol{\delta}, \mathbf{a}) + Q_{d_i} = 0 && (\forall i \in \mathbf{SG}) \\
& && V_j \leq V_j^{max} && \\
& && V_j \geq V_j^{min} && (j = 1, \dots, nb) \\
& && a_m \leq a_m^{max} && \\
& && a_m \geq a_m^{min} && (m = 1, \dots, nt) \\
& && Q_{g_n} \leq Q_{g_n}^{max} && \\
& && Q_{g_n} \geq Q_{g_n}^{min} && (\forall n \in \mathbf{CG}) \\
& && P_{g_\eta} \leq P_{g_\eta}^{max} && \\
& && P_{g_\eta} \geq P_{g_\eta}^{min} && (\forall \eta \in \mathbf{CG})
\end{aligned} \tag{4.7}$$

onde,

$$\begin{aligned}
P_{g_i} &= P_i(\mathbf{V}, \boldsymbol{\delta}, \mathbf{a}) + P_{d_i} \\
Q_{g_i} &= Q_i(\mathbf{V}, \boldsymbol{\delta}, \mathbf{a}) + Q_{d_i}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
P_{d_i} &= P_{b_i} + \rho \Delta P_{d_i} \\
Q_{d_i} &= Q_{b_i} + \rho \Delta Q_{d_i}
\end{aligned}$$

Ao adicionar a função barreira logarítmica à função objetivo e transformando as restrições de desigualdade em restrições de igualdade, o problema apresentado em (4.7) passa a ser expresso por

$$\begin{aligned}
& \text{Minimizar} && -f(\rho) - \mu \left\{ \sum_{j=1}^{nb} [\ln(s_{vu_j}) + \ln(s_{vl_j})] + \sum_{m=1}^{nt} [\ln(s_{au_m}) + \ln(s_{al_m})] \right. \\
& && \left. + \sum_{n=1}^{ncg} [\ln(s_{qu_n}) + \ln(s_{ql_n})] + \sum_{\eta=1}^{ncg} [\ln(s_{pu_\eta}) + \ln(s_{pl_\eta})] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{sujeito a} && P_i(\mathbf{V}, \boldsymbol{\delta}, \mathbf{a}) + P_{d_i} = 0 && (\forall i \in \mathbf{SG}) \\
& && Q_i(\mathbf{V}, \boldsymbol{\delta}, \mathbf{a}) + Q_{d_i} = 0 && (\forall j \in \mathbf{SG}) \\
& && V_j - V_j^{max} + s_{vu_j} = 0 && \\
& && V_j - V_j^{min} - s_{vl_j} = 0 && (\forall j) \\
& && a_m - a_m^{max} + s_{au_m} = 0 && \\
& && a_m - a_m^{min} - s_{al_m} = 0 && (\forall m) \\
& && Q_{g_n} - Q_{g_n}^{max} + s_{qu_n} = 0 && \\
& && Q_{g_n} - Q_{g_n}^{min} - s_{ql_n} = 0 && (\forall n \in \mathbf{CG}) \\
& && P_{g_\eta} - P_{g_\eta}^{max} + s_{pu_\eta} = 0 && \\
& && P_{g_\eta} - P_{g_\eta}^{min} - s_{pl_\eta} = 0 && (\forall \eta \in \mathbf{CG}) \\
& && (s_{vu}, s_{vl}, s_{au}, s_{al}, s_{qu}, s_{ql}, s_{pu_\eta}, s_{pl_\eta}) \geq 0
\end{aligned}$$

4.6 Implementação dos Métodos de Otimização

Esta Seção relaciona alguns aspectos implementacionais relacionados ao problema de otimização apresentado em (4.6).

Método Primal-Dual

Adotando a forma matricial, define-se o vetor coluna composto pelas variáveis de otimização como

$$\mathbf{x} \triangleq \left[V_1, \dots, V_{nb}, a_1, \dots, a_{nt}, \delta_1, \dots, \delta_{nb-1} \right]^t$$

onde, o subscrito $(nb - 1)$ informa que o ângulo da tensão complexa da barra de referência é constante.

O vetor coluna formado pelas restrições de balanço de potência é representado como

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) \triangleq \left[g_{P_1}(\mathbf{x}), \dots, g_{P_{nb-1}}(\mathbf{x}), g_{Q_1}(\mathbf{x}), \dots, g_{Q_{nsg}}(\mathbf{x}) \right]^t$$

onde, nsg é o número de barras sem geração, e

$$\begin{aligned} g_{P_i}(\mathbf{x}) &= P_i(\mathbf{x}) - P_{g_i} + P_{d_i} \\ g_{Q_i}(\mathbf{x}) &= Q_i(\mathbf{x}) - Q_{g_i} + Q_{d_i} \end{aligned}$$

As restrições canalizadoras, relativas às variáveis de otimização, são representadas na forma vetorial como

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_h - \mathbf{x}_h^{max} + \mathbf{s}_{x_u} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{x}_h - \mathbf{x}_h^{min} - \mathbf{s}_{x_l} &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

onde,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_h &\triangleq \left[V_1, \dots, V_{nb}, a_1, \dots, a_{nt} \right]^t \\ \mathbf{x}_h^{max} &\triangleq \left[V_1^{max}, \dots, V_{nb}^{max}, a_1^{max}, \dots, a_{nt}^{max} \right]^t \\ \mathbf{x}_h^{min} &\triangleq \left[V_1^{min}, \dots, V_{nb}^{min}, a_1^{min}, \dots, a_{nt}^{min} \right]^t \\ \mathbf{s}_{x_u} &\triangleq \left[s_{vu_1}, \dots, s_{vu_{nb}}, s_{au_1}, \dots, s_{vu_{nt}} \right]^t \\ \mathbf{s}_{x_l} &\triangleq \left[s_{vl_1}, \dots, s_{vl_{nb}}, s_{al_1}, \dots, s_{vl_{nt}} \right]^t \end{aligned}$$

As equações relativas aos limites das variáveis associadas à geração são representadas na forma vetorial por

$$\begin{aligned} \mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{h}^{max} + \mathbf{s}_u &= \mathbf{0} \\ \mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{h}^{min} - \mathbf{s}_l &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

onde,

$$\begin{aligned} \mathbf{h}(\mathbf{x}) &\triangleq \begin{bmatrix} P_{gref}, & Q_{g1} & \cdots, & Q_{gncg} \end{bmatrix}^t \\ \mathbf{h}^{max} &\triangleq \begin{bmatrix} P_{gref}^{max}, & Q_{g1}^{max} & \cdots, & Q_{gncg}^{max} \end{bmatrix}^t \\ \mathbf{h}^{min} &\triangleq \begin{bmatrix} P_{gref}^{min}, & Q_{g1}^{min} & \cdots, & Q_{gncg}^{min} \end{bmatrix}^t \\ \mathbf{s}_u &\triangleq \begin{bmatrix} s_{pu_{ref}}, & s_{qu_1}, & \cdots, & s_{qu_{ncg}} \end{bmatrix}^t \\ \mathbf{s}_l &\triangleq \begin{bmatrix} s_{pl_{ref}}, & s_{ql_1}, & \cdots, & s_{ql_{ncg}} \end{bmatrix}^t \end{aligned}$$

com ncg representando o número de barras de geração.

A função Lagrangeana para o problema de minimização apresentado em (4.6) é definida na forma matricial como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}, \mathbf{s}) &\triangleq f(\mathbf{x}) - \mu \mathbf{e}_x^t [\ln(\mathbf{s}_{x_u}) + \ln(\mathbf{s}_{x_l})] - \mu \mathbf{e}^t [\ln(\mathbf{s}_u) + \ln(\mathbf{s}_l)] - \boldsymbol{\lambda}^t \mathbf{g}(\mathbf{x}) \\ &\quad - \boldsymbol{\pi}_{x_u}^t (\mathbf{x}_h - \mathbf{x}_h^{max} + \mathbf{s}_{x_u}) - \boldsymbol{\pi}_{x_l}^t (\mathbf{x}_h - \mathbf{x}_h^{min} - \mathbf{s}_{x_l}) \\ &\quad - \boldsymbol{\pi}_u^t (\mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{h}^{max} + \mathbf{s}_u) - \boldsymbol{\pi}_l^t (\mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{h}^{min} - \mathbf{s}_l) \end{aligned} \quad (4.8)$$

onde, \mathbf{e}_x e \mathbf{e} são vetores coluna unitários de dimensões $(nb + nt)$ e $(1 + ncg)$, respectivamente; $\boldsymbol{\lambda}$ é o vetor coluna de dimensão igual a $(nsr + nsg)$, com $nsr = nb - 1$, formado pelos multiplicadores duais associados às restrições de balanço de potência; $\boldsymbol{\pi}_{x_u}$ e $\boldsymbol{\pi}_{x_l}$ são os vetores coluna de dimensões $(nb + nt)$, cujos componentes são os multiplicadores duais associados aos limites máximos e mínimos das variáveis de otimização, respectivamente; e $\boldsymbol{\pi}_u$ e $\boldsymbol{\pi}_l$ são os vetores coluna de dimensões $(1 + ncg)$, formados pelos multiplicadores duais associados aos limites máximos e mínimos das variáveis de geração, respectivamente. Ainda nesta equação, os vetores coluna \mathbf{s} e $\boldsymbol{\pi}$ são dados por

$$\begin{aligned} \mathbf{s} &\triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{s}_{x_u}^t, & \mathbf{s}_{x_l}^t, & \mathbf{s}_u^t, & \mathbf{s}_l^t \end{bmatrix}^t \\ \boldsymbol{\pi} &\triangleq \begin{bmatrix} \boldsymbol{\pi}_{x_u}^t, & \boldsymbol{\pi}_{x_l}^t, & \boldsymbol{\pi}_u^t, & \boldsymbol{\pi}_l^t \end{bmatrix}^t \end{aligned}$$

Alterando a notação da função Lagrangeana $\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}, \mathbf{s})$ para apenas \mathcal{L} , as condições de otimalidade de primeira ordem de Karush-Kuhn-Tucker, para o ponto ótimo da Eq. (4.8),

são

$$\nabla_{\mathbf{x}} \mathcal{L} = \mathbf{0} = \nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) - \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x})^t \boldsymbol{\lambda} - \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{h}(\mathbf{x})^t (\boldsymbol{\pi}_u + \boldsymbol{\pi}_l) - (\boldsymbol{\pi}_{x_u} + \boldsymbol{\pi}_{x_l}) \quad (4.9)$$

$$\nabla_{\mathbf{s}_{x_u}} \mathcal{L} = \mathbf{0} = \mu \mathbf{e}_x + \mathbf{S}_{x_u} \boldsymbol{\pi}_{x_u} \quad (4.10)$$

$$\nabla_{\mathbf{s}_{x_l}} \mathcal{L} = \mathbf{0} = \mu \mathbf{e}_x - \mathbf{S}_{x_l} \boldsymbol{\pi}_{x_l} \quad (4.11)$$

$$\nabla_{\mathbf{s}_u} \mathcal{L} = \mathbf{0} = \mu \mathbf{e} + \mathbf{S}_u \boldsymbol{\pi}_u \quad (4.12)$$

$$\nabla_{\mathbf{s}_l} \mathcal{L} = \mathbf{0} = \mu \mathbf{e} - \mathbf{S}_l \boldsymbol{\pi}_l \quad (4.13)$$

$$\nabla_{\boldsymbol{\lambda}} \mathcal{L} = \mathbf{0} = -\mathbf{g}(\mathbf{x}) \quad (4.14)$$

$$\nabla_{\boldsymbol{\pi}_{x_u}} \mathcal{L} = \mathbf{0} = -(\mathbf{x}_h - \mathbf{x}_h^{max} + \mathbf{s}_{x_u}) \quad (4.15)$$

$$\nabla_{\boldsymbol{\pi}_{x_l}} \mathcal{L} = \mathbf{0} = -(\mathbf{x}_h - \mathbf{x}_h^{min} - \mathbf{s}_{x_l}) \quad (4.16)$$

$$\nabla_{\boldsymbol{\pi}_u} \mathcal{L} = \mathbf{0} = -[\mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{h}^{max} + \mathbf{s}_u] \quad (4.17)$$

$$\nabla_{\boldsymbol{\pi}_l} \mathcal{L} = \mathbf{0} = -[\mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{h}^{min} - \mathbf{s}_l] \quad (4.18)$$

onde, $\nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x})$ é o vetor coluna do gradiente da função objetivo $f(\mathbf{x})$; $\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x})$ é a matriz de dimensões $(nsr + nsg \times nb)$ formada pelas derivadas de primeira ordem de $\mathbf{g}(\mathbf{x})$, em função das variáveis de otimização; $\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{h}(\mathbf{x})$ é a matriz de dimensões $(1 + ncg \times nb)$, cujos componentes são as derivadas de primeira ordem de $\mathbf{h}(\mathbf{x})$, em função das variáveis de otimização, $\mathbf{S}_{x_u} = \text{diag}(\mathbf{s}_{x_u})$, $\mathbf{S}_{x_l} = \text{diag}(\mathbf{s}_{x_l})$, $\mathbf{S}_u = \text{diag}(\mathbf{s}_u)$ e $\mathbf{S}_l = \text{diag}(\mathbf{s}_l)$.

Para que as condições de complementaridade, expressas de (4.10) a (4.13), sejam satisfeitas, as seguintes condições são aplicadas às variáveis de folga e multiplicadores duais relativos às restrições de desigualdade.

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_{x_u} &\geq \mathbf{0}, & \mathbf{s}_{x_l} &\geq \mathbf{0}, & \mathbf{s}_u &\geq \mathbf{0}, & \mathbf{s}_l &\geq \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\pi}_{x_u} &\leq \mathbf{0}, & \boldsymbol{\pi}_{x_l} &\geq \mathbf{0}, & \boldsymbol{\pi}_u &\leq \mathbf{0}, & \boldsymbol{\pi}_l &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

A resolução do sistema de equações não lineares (4.9 - 4.18) é efetuada pelo método de Newton-Raphson. Assim, as equações que representam as condições de optimalidade são expandidas em série de Taylor, até o termo de primeira ordem no ponto $(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}, \mathbf{s})$ e direção $(\Delta \mathbf{x}, \Delta \boldsymbol{\lambda}, \Delta \boldsymbol{\pi}, \Delta \mathbf{s})$, de forma a gerar as seguintes expressões:

$$\begin{aligned}
& \left[\nabla_{\mathbf{x}}^2 f(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^{(nsr+nsq)} \nabla_{\mathbf{x}}^2 \mathbf{g}_i(\mathbf{x})^t \boldsymbol{\lambda}_i - \sum_{j=1}^{(1+nsq)} \nabla_{\mathbf{x}}^x \mathbf{h}_j(\mathbf{x})^t (\boldsymbol{\pi}_{u_j} + \boldsymbol{\pi}_{l_j}) \right] \Delta \mathbf{x} \\
& + \nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) - \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x})^t (\boldsymbol{\lambda} + \Delta \boldsymbol{\lambda}) - \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{h}(\mathbf{x})^t (\boldsymbol{\pi}_u + \Delta \boldsymbol{\pi}_u + \boldsymbol{\pi}_l + \Delta \boldsymbol{\pi}_l) \\
& \quad - (\boldsymbol{\pi}_{x_u} + \Delta \boldsymbol{\pi}_{x_u} + \boldsymbol{\pi}_{x_l} + \Delta \boldsymbol{\pi}_{x_l}) = \mathbf{0} \\
& \quad \boldsymbol{\mu} \mathbf{e}_x + (\mathbf{S}_{x_u} \boldsymbol{\pi}_{x_u} + \boldsymbol{\Pi}_{x_u} \Delta \mathbf{s}_{x_u} + \mathbf{S}_{x_u} \Delta \boldsymbol{\pi}_{x_u}) = \mathbf{0} \\
& \quad \boldsymbol{\mu} \mathbf{e}_x - (\mathbf{S}_{x_l} \boldsymbol{\pi}_{x_l} + \boldsymbol{\Pi}_{x_l} \Delta \mathbf{s}_{x_l} + \mathbf{S}_{x_l} \Delta \boldsymbol{\pi}_{x_l}) = \mathbf{0} \\
& \quad \boldsymbol{\mu} \mathbf{e} + (\mathbf{S}_u \boldsymbol{\pi}_u + \boldsymbol{\Pi}_u \Delta \mathbf{s}_u + \mathbf{S}_u \Delta \boldsymbol{\pi}_u) = \mathbf{0} \\
& \quad \boldsymbol{\mu} \mathbf{e} - (\mathbf{S}_l \boldsymbol{\pi}_l + \boldsymbol{\Pi}_l \Delta \mathbf{s}_l + \mathbf{S}_l \Delta \boldsymbol{\pi}_l) = \mathbf{0} \\
& \quad - [\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{x} + \mathbf{g}(\mathbf{x})] = \mathbf{0} \\
& \quad - [\Delta \mathbf{x}_h + \mathbf{x}_h - \mathbf{x}^{max} + \mathbf{s}_{x_u} + \Delta \mathbf{s}_{x_u}] = \mathbf{0} \\
& \quad - [\Delta \mathbf{x}_h + \mathbf{x}_h - \mathbf{x}^{min} - \mathbf{s}_{x_l} - \Delta \mathbf{s}_{x_l}] = \mathbf{0} \\
& \quad - [\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{h}(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{x} + \mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{h}^{max} + \mathbf{s}_u + \Delta \mathbf{s}_u] = \mathbf{0} \\
& \quad - [\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{h}(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{x} + \mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{h}^{min} - \mathbf{s}_l - \Delta \mathbf{s}_l] = \mathbf{0}
\end{aligned} \tag{4.19}$$

com apenas os termos de primeira ordem da Eq. 4.19 à esquerda da igualdade, obtém-se

$$\begin{aligned}
& \left[\nabla_{\mathbf{x}}^2 f(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^{(nsr+nsq)} \nabla_{\mathbf{x}}^2 \mathbf{g}_i(\mathbf{x})^t \boldsymbol{\lambda}_i - \sum_{j=1}^{(1+nsq)} \nabla_{\mathbf{x}}^x \mathbf{h}_j(\mathbf{x})^t (\boldsymbol{\pi}_{u_j} + \boldsymbol{\pi}_{l_j}) \right] \Delta \mathbf{x} \\
& - \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x})^t (\Delta \boldsymbol{\lambda}) - \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{h}(\mathbf{x})^t (\Delta \boldsymbol{\pi}_u + \Delta \boldsymbol{\pi}_l) - (\Delta \boldsymbol{\pi}_{x_u} + \Delta \boldsymbol{\pi}_{x_l}) = \\
& - [\nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) - \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x})^t (\boldsymbol{\lambda}) - \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{h}(\mathbf{x})^t (\boldsymbol{\pi}_u + \boldsymbol{\pi}_l) - (\boldsymbol{\pi}_{x_u} + \boldsymbol{\pi}_{x_l})] \\
& \quad \boldsymbol{\Pi}_{x_u} \Delta \mathbf{s}_{x_u} + \mathbf{S}_{x_u} \Delta \boldsymbol{\pi}_{x_u} = -[\boldsymbol{\mu} \mathbf{e}_x + \mathbf{S}_{x_u} \boldsymbol{\pi}_{x_u}] \\
& \quad -\boldsymbol{\Pi}_{x_l} \Delta \mathbf{s}_{x_l} - \mathbf{S}_{x_l} \Delta \boldsymbol{\pi}_{x_l} = -[\boldsymbol{\mu} \mathbf{e}_x - \mathbf{S}_{x_l} \boldsymbol{\pi}_{x_l}] \\
& \quad \boldsymbol{\Pi}_u \Delta \mathbf{s}_u + \mathbf{S}_u \Delta \boldsymbol{\pi}_u = -[\boldsymbol{\mu} \mathbf{e} + \mathbf{S}_u \boldsymbol{\pi}_u] \\
& \quad -\boldsymbol{\Pi}_l \Delta \mathbf{s}_l - \mathbf{S}_l \Delta \boldsymbol{\pi}_l = -[\boldsymbol{\mu} \mathbf{e} - \mathbf{S}_l \boldsymbol{\pi}_l] \\
& \quad -\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{x} = \mathbf{g}(\mathbf{x}) \\
& \quad -\Delta \mathbf{x}_h - \Delta \mathbf{s}_{x_u} = \mathbf{x}_h - \mathbf{x}^{max} + \mathbf{s}_{x_u} \\
& \quad -\Delta \mathbf{x}_h + \Delta \mathbf{s}_{x_l} = \mathbf{x}_h - \mathbf{x}^{min} - \mathbf{s}_{x_l} \\
& \quad -\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{h}(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{x} - \Delta \mathbf{s}_u = \mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{h}^{max} + \mathbf{s}_u \\
& \quad -\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{h}(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{x} + \Delta \mathbf{s}_l = \mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{h}^{min} - \mathbf{s}_l
\end{aligned}$$

e, na forma matricial, o seguinte sistema linear é formado

$$\begin{bmatrix}
\mathbf{H} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{g}^t & -\mathbf{I}_x & -\mathbf{I}_x & -\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{h}^t & -\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{h}^t \\
0 & \mathbf{\Pi}_{x_u} & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{S}_{x_u} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\mathbf{\Pi}_{x_l} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathbf{S}_{x_l} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \mathbf{\Pi}_u & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{S}_u & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\mathbf{\Pi}_l & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathbf{S}_l \\
-\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{g} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\mathbf{I}_x & -\mathbf{I}_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\mathbf{I}_x & 0 & \mathbf{I}_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{h} & 0 & 0 & -\mathbf{I} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{h} & 0 & 0 & 0 & \mathbf{I} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\Delta\mathbf{x} \\
\Delta\mathbf{s}_{x_u} \\
\Delta\mathbf{s}_{x_l} \\
\Delta\mathbf{s}_u \\
\Delta\mathbf{s}_l \\
\Delta\boldsymbol{\lambda} \\
\Delta\boldsymbol{\pi}_{x_u} \\
\Delta\boldsymbol{\pi}_{x_l} \\
\Delta\boldsymbol{\pi}_u \\
\Delta\boldsymbol{\pi}_l
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
-t \\
-[\mu\mathbf{e}_x + \mathbf{S}_{x_u}\boldsymbol{\pi}_{x_u}] \\
-[\mu\mathbf{e}_x - \mathbf{S}_{x_l}\boldsymbol{\pi}_{x_l}] \\
-[\mu\mathbf{e} + \mathbf{S}_u\boldsymbol{\pi}_u] \\
-[\mu\mathbf{e} - \mathbf{S}_l\boldsymbol{\pi}_l] \\
\mathbf{g}(\mathbf{x}) \\
\mathbf{x}_h - \mathbf{x}^{max} + \mathbf{s}_{x_u} \\
\mathbf{x}_h - \mathbf{x}^{min} - \mathbf{s}_{x_l} \\
\mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{h}^{max} + \mathbf{s}_u \\
\mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{h}^{min} - \mathbf{s}_l
\end{bmatrix}
\tag{4.20}$$

onde,

$$\mathbf{H} = \nabla_{\mathbf{x}}^2 f(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^{(nsr+nsg)} \nabla_{\mathbf{x}}^2 \mathbf{g}_i(\mathbf{x})^t \boldsymbol{\lambda}_i - \sum_{j=1}^{(1+nscg)} \nabla_{\mathbf{x}}^x \mathbf{h}_j(\mathbf{x})^t (\boldsymbol{\pi}_{u_j} + \boldsymbol{\pi}_{l_j})$$

e

$$\mathbf{t} = \nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) - \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x})^t \boldsymbol{\lambda} - \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{h}(\mathbf{x})^t (\boldsymbol{\pi}_u + \boldsymbol{\pi}_l) - (\boldsymbol{\pi}_{x_u} + \boldsymbol{\pi}_{x_l})$$

Em cada iteração do processo iterativo as variáveis são atualizadas como

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}^{k+1} &= \mathbf{x}^k + \tau\gamma\Delta\mathbf{x}^k & \boldsymbol{\lambda}^{k+1} &= \boldsymbol{\lambda}^k + \tau\gamma\Delta\boldsymbol{\lambda}^k \\
\mathbf{s}_{x_u}^{k+1} &= \mathbf{s}_{x_u}^k + \tau\gamma\Delta\mathbf{s}_{x_u}^k & \boldsymbol{\pi}_{x_u}^{k+1} &= \boldsymbol{\pi}_{x_u}^k + \tau\gamma\Delta\boldsymbol{\pi}_{x_u}^k \\
\mathbf{s}_{x_l}^{k+1} &= \mathbf{s}_{x_l}^k + \tau\gamma\Delta\mathbf{s}_{x_l}^k & \boldsymbol{\pi}_{x_l}^{k+1} &= \boldsymbol{\pi}_{x_l}^k + \tau\gamma\Delta\boldsymbol{\pi}_{x_l}^k \\
\mathbf{s}_u^{k+1} &= \mathbf{s}_u^k + \tau\gamma\Delta\mathbf{s}_u^k & \boldsymbol{\pi}_u^{k+1} &= \boldsymbol{\pi}_u^k + \tau\gamma\Delta\boldsymbol{\pi}_u^k \\
\mathbf{s}_l^{k+1} &= \mathbf{s}_l^k + \tau\gamma\Delta\mathbf{s}_l^k & \boldsymbol{\pi}_l^{k+1} &= \boldsymbol{\pi}_l^k + \tau\gamma\Delta\boldsymbol{\pi}_l^k
\end{aligned}
\tag{4.21}$$

onde, $\tau = 0,9995$ e

$$\gamma = \min[\gamma_p \quad \gamma_d \quad 1,0]
\tag{4.22}$$

com γ_p e γ_d calculados a partir de

$$\begin{aligned} \gamma_p &= \min \left[\begin{array}{cccc} \min_{\Delta s_{x_{u_i}} < 0} \frac{s_{x_{u_i}}}{|\Delta s_{x_{u_i}}|} & \min_{\Delta s_{x_{l_i}} < 0} \frac{s_{x_{l_i}}}{|\Delta s_{x_{l_i}}|} & \min_{\Delta s_{u_i} < 0} \frac{s_{u_i}}{|\Delta s_{u_i}|} & \min_{\Delta s_{l_i} < 0} \frac{s_{l_i}}{|\Delta s_{l_i}|} \end{array} \right] \\ \gamma_d &= \min \left[\begin{array}{cccc} \min_{\Delta \pi_{x_{u_i}} > 0} \frac{-\pi_{x_{u_i}}}{|\Delta \pi_{x_{u_i}}|} & \min_{\Delta \pi_{x_{l_i}} < 0} \frac{\pi_{x_{l_i}}}{|\Delta \pi_{x_{l_i}}|} & \min_{\Delta \pi_{u_i} > 0} \frac{-\pi_{u_i}}{|\Delta \pi_{u_i}|} & \min_{\Delta \pi_{l_i} < 0} \frac{\pi_{l_i}}{|\Delta \pi_{l_i}|} \end{array} \right] \end{aligned}$$

Ao final de cada iteração um novo valor para o parâmetro de barreira é obtido através de

$$\mu = \beta \left[\frac{-(s_{x_u})^t(\pi_{x_u}) + (s_{x_l})^t(\pi_{x_l}) - (s_u)^t(\pi_u) + (s_l)^t(\pi_l)}{l} \right] \quad (4.23)$$

l é o número de restrições de desigualdade e $\beta = 0, 1$;

Método Preditor-Corretor

Ao utilizar o método Preditor-Corretor, o seguinte sistema linear deve ser resolvido para obter-se a direção afim-escala

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\nabla_x \mathbf{g}^t & -\mathbf{I}_x & -\mathbf{I}_x & -\nabla_x \mathbf{h}^t & -\nabla_x \mathbf{h}^t \\ 0 & \mathbf{\Pi}_{x_u} & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{S}_{x_u} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathbf{\Pi}_{x_l} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathbf{S}_{x_l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{\Pi}_u & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{S}_u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathbf{\Pi}_l & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathbf{S}_l \\ -\nabla_x \mathbf{g} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mathbf{I}_x & -\mathbf{I}_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mathbf{I}_x & 0 & \mathbf{I}_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\nabla_x \mathbf{h} & 0 & 0 & -\mathbf{I} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\nabla_x \mathbf{h} & 0 & 0 & 0 & \mathbf{I} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x}^{af} \\ \Delta \mathbf{s}_{x_u}^{af} \\ \Delta \mathbf{s}_{x_l}^{af} \\ \Delta \mathbf{s}_u^{af} \\ \Delta \mathbf{s}_l^{af} \\ \Delta \lambda^{af} \\ \Delta \pi_{x_u}^{af} \\ \Delta \pi_{x_l}^{af} \\ \Delta \pi_u^{af} \\ \Delta \pi_l^{af} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t \\ -\mathbf{S}_{x_u} \pi_{x_u} \\ \mathbf{S}_{x_l} \pi_{x_l} \\ -\mathbf{S}_u \pi_u \\ \mathbf{S}_l \pi_l \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x}_h - \mathbf{x}^{max} + \mathbf{s}_{x_u} \\ \mathbf{x}_h - \mathbf{x}^{min} - \mathbf{s}_{x_l} \\ \mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{h}^{max} + \mathbf{s}_u \\ \mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{h}^{min} - \mathbf{s}_l \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

O parâmetro de barreira, a ser utilizado no sistema linear da etapa de correção, é computado como:

$$\tilde{\mu} = \left(\frac{\widetilde{gap}}{gap} \right)^2 \left(\frac{\widetilde{gap}}{2l} \right)$$

onde,

$$\begin{aligned} \widetilde{gap} = & -(s_{x_u} + \tilde{\gamma} \Delta s_{x_u}^{af})^t (\pi_{x_u} + \tilde{\gamma} \Delta \pi_{x_u}^{af}) + (s_{x_l} + \tilde{\gamma} \Delta s_{x_l}^{af})^t (\pi_{x_l} + \tilde{\gamma} \Delta \pi_{x_l}^{af}) \\ & -(s_u + \tilde{\gamma} \Delta s_u^{af})^t (\pi_u + \tilde{\gamma} \Delta \pi_u^{af}) + (s_l + \tilde{\gamma} \Delta s_l^{af})^t (\pi_l + \tilde{\gamma} \Delta \pi_l^{af}); \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$gap = -(s_{x_u})^t (\pi_{x_u}) + (s_{x_l})^t (\pi_{x_l}) - (s_u)^t (\pi_u) + (s_l)^t (\pi_l); \quad (4.26)$$

e

$$\tilde{\gamma} = \min [\tilde{\gamma}_p \quad \tilde{\gamma}_d \quad 1, 0] \quad (4.27)$$

com,

$$\tilde{\gamma}_p = \min \left[\min_{\Delta s_{x_{u_i}} < 0} \frac{s_{x_{u_i}}}{|\Delta s_{x_{u_i}}^{af}|} \quad \min_{\Delta s_{x_{l_i}} < 0} \frac{s_{x_{l_i}}}{|\Delta s_{x_{l_i}}^{af}|} \quad \min_{\Delta s_{u_i} < 0} \frac{s_{u_i}}{|\Delta s_{u_i}^{af}|} \quad \min_{\Delta s_{l_i} < 0} \frac{s_{l_i}}{|\Delta s_{l_i}^{af}|} \right] \quad (4.28)$$

$$\tilde{\gamma}_d = \min \left[\min_{\Delta \pi_{x_{u_i}} > 0} \frac{-\pi_{x_{u_i}}}{|\Delta \pi_{x_{u_i}}^{af}|} \quad \min_{\Delta \pi_{x_{l_i}} < 0} \frac{\pi_{x_{l_i}}}{|\Delta \pi_{x_{l_i}}^{af}|} \quad \min_{\Delta \pi_{u_i} > 0} \frac{-\pi_{u_i}}{|\Delta \pi_{u_i}^{af}|} \quad \min_{\Delta \pi_{l_i} < 0} \frac{\pi_{l_i}}{|\Delta \pi_{l_i}^{af}|} \right] \quad (4.29)$$

De posse da direção de afim-escala e de $\tilde{\mu}$, procede-se o cálculo da direção efetiva de busca, a partir da solução do sistema linear do passo corretor:

$$\begin{bmatrix}
\mathbf{H} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{g}^t & -\mathbf{I}_x & -\mathbf{I}_x & -\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{h}^t & -\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{h}^t \\
0 & \mathbf{\Pi}_{x_u} & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{S}_{x_u} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\mathbf{\Pi}_{x_l} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathbf{S}_{x_l} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \mathbf{\Pi}_u & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{S}_u & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\mathbf{\Pi}_l & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathbf{S}_l \\
-\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{g} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\mathbf{I}_x & -\mathbf{I}_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\mathbf{I}_x & 0 & \mathbf{I}_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{h} & 0 & 0 & -\mathbf{I} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{h} & 0 & 0 & 0 & \mathbf{I} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\Delta\mathbf{x}^{co} \\
\Delta\mathbf{s}_{x_u}^{co} \\
\Delta\mathbf{s}_{x_l}^{co} \\
\Delta\mathbf{s}_u^{co} \\
\Delta\mathbf{s}_l^{co} \\
\Delta\boldsymbol{\lambda}^{co} \\
\Delta\boldsymbol{\pi}_{x_u}^{co} \\
\Delta\boldsymbol{\pi}_{x_l}^{co} \\
\Delta\boldsymbol{\pi}_u^{co} \\
\Delta\boldsymbol{\pi}_l^{co}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
-t \\
-[\tilde{\boldsymbol{\mu}}\mathbf{e}_x + \mathbf{S}_{x_u}\boldsymbol{\pi}_{x_u}] - \Delta\mathbf{S}_{x_u}^{af}\Delta\boldsymbol{\pi}_{x_u}^{af} \\
-[\tilde{\boldsymbol{\mu}}\mathbf{e}_x - \mathbf{S}_{x_l}\boldsymbol{\pi}_{x_l}] + \Delta\mathbf{S}_{x_l}^{af}\Delta\boldsymbol{\pi}_{x_l}^{af} \\
-[\tilde{\boldsymbol{\mu}}\mathbf{e} + \mathbf{S}_u\boldsymbol{\pi}_u] - \Delta\mathbf{S}_u^{af}\Delta\boldsymbol{\pi}_u^{af} \\
-[\tilde{\boldsymbol{\mu}}\mathbf{e} - \mathbf{S}_l\boldsymbol{\pi}_l] + \Delta\mathbf{S}_l^{af}\Delta\boldsymbol{\pi}_l^{af} \\
\mathbf{g}(\mathbf{x}) \\
\mathbf{x}_h - \mathbf{x}^{max} + \mathbf{s}_{x_u} \\
\mathbf{x}_h - \mathbf{x}^{min} - \mathbf{s}_{x_l} \\
\mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{h}^{max} + \mathbf{s}_u \\
\mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{h}^{min} - \mathbf{s}_l
\end{bmatrix}
\tag{4.30}$$

Com a direção de busca obtida na resolução do sistema linear em (4.30), procede-se a atualização das variáveis através de

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}^{k+1} &= \mathbf{x}^k + \tau\gamma\Delta\mathbf{x}^{co} & \boldsymbol{\lambda}^{k+1} &= \boldsymbol{\lambda}^k + \tau\gamma\Delta\boldsymbol{\lambda}^{co} \\
\mathbf{s}_{x_u}^{k+1} &= \mathbf{s}_{x_u}^k + \tau\gamma\Delta\mathbf{s}_{x_u}^{co} & \boldsymbol{\pi}_{x_u}^{k+1} &= \boldsymbol{\pi}_{x_u}^k + \tau\gamma\Delta\boldsymbol{\pi}_{x_u}^{co} \\
\mathbf{s}_{x_l}^{k+1} &= \mathbf{s}_{x_l}^k + \tau\gamma\Delta\mathbf{s}_{x_l}^{co} & \boldsymbol{\pi}_{x_l}^{k+1} &= \boldsymbol{\pi}_{x_l}^k + \tau\gamma\Delta\boldsymbol{\pi}_{x_l}^{co} \\
\mathbf{s}_u^{k+1} &= \mathbf{s}_u^k + \tau\gamma\Delta\mathbf{s}_u^{co} & \boldsymbol{\pi}_u^{k+1} &= \boldsymbol{\pi}_u^k + \tau\gamma\Delta\boldsymbol{\pi}_u^{co} \\
\mathbf{s}_l^{k+1} &= \mathbf{s}_l^k + \tau\gamma\Delta\mathbf{s}_l^{co} & \boldsymbol{\pi}_l^{k+1} &= \boldsymbol{\pi}_l^k + \tau\gamma\Delta\boldsymbol{\pi}_l^{co}
\end{aligned}$$

onde γ é calculado como nas Eqs. de (4.27) a (4.29), utilizando os incrementos obtidos na resolução do sistema linear (4.30).

Ao final da iteração corrente, o novo valor do parâmetro de barreira é computado como em (4.23).

Método Máximo Passo no Caminho Central

Nesta abordagem, a direção efetiva de busca é obtida como uma combinação linear da *direção afim-escala* (Sistema (4.24)) e da *direção de correção*. Sendo que esta última pode

ser obtida através da resolução do sistema linear (4.30), ao tomar-se o valor do parâmetro de barreira a partir da seguinte expressão:

$$\hat{\mu} = \frac{-(\mathbf{s}_{x_u})^t(\boldsymbol{\pi}_{x_u}) + (\mathbf{s}_{x_l})^t(\boldsymbol{\pi}_{x_l}) - (\mathbf{s}_u)^t(\boldsymbol{\pi}_u) + (\mathbf{s}_l)^t(\boldsymbol{\pi}_l)}{l}$$

o que equivale a computar $\beta = 1, 0$, na Eq. (4.23).

De posse das direções afim-escala e de correção, a direção efetiva de busca passa a ser expressa como:

$$\begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x} \\ \Delta \mathbf{s}_{x_u} \\ \Delta \mathbf{s}_{x_l} \\ \Delta \mathbf{s}_u \\ \Delta \mathbf{s}_l \\ \Delta \boldsymbol{\lambda} \\ \Delta \boldsymbol{\pi}_{x_u} \\ \Delta \boldsymbol{\pi}_{x_l} \\ \Delta \boldsymbol{\pi}_u \\ \Delta \boldsymbol{\pi}_l \end{bmatrix} = \sigma \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x}^{co} \\ \Delta \mathbf{s}_{x_u}^{co} \\ \Delta \mathbf{s}_{x_l}^{co} \\ \Delta \mathbf{s}_u^{co} \\ \Delta \mathbf{s}_l^{co} \\ \Delta \boldsymbol{\lambda}^{co} \\ \Delta \boldsymbol{\pi}_{x_u}^{co} \\ \Delta \boldsymbol{\pi}_{x_l}^{co} \\ \Delta \boldsymbol{\pi}_u^{co} \\ \Delta \boldsymbol{\pi}_l^{co} \end{bmatrix} + (1 - \sigma) \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x}^{af} \\ \Delta \mathbf{s}_{x_u}^{af} \\ \Delta \mathbf{s}_{x_l}^{af} \\ \Delta \mathbf{s}_u^{af} \\ \Delta \mathbf{s}_l^{af} \\ \Delta \boldsymbol{\lambda}^{af} \\ \Delta \boldsymbol{\pi}_{x_u}^{af} \\ \Delta \boldsymbol{\pi}_{x_l}^{af} \\ \Delta \boldsymbol{\pi}_u^{af} \\ \Delta \boldsymbol{\pi}_l^{af} \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

A composição da direção efetiva de busca, dada na Eq. (4.31), necessita do cálculo do parâmetro de centralização σ , o qual é obtido a partir da Equação Quártica

$$\sigma^4(a) + \sigma^3(2ab) + \sigma^2(2ac + b^2 + \xi^2\hat{\mu}^2) + \sigma(2bc) + c^2 = 0 \quad (4.32)$$

onde, ξ é o valor da distância ao caminho central, expresso em unidades de μ ,

$$\begin{aligned} a = & \text{diag}(\Delta \mathbf{s}_{x_u}^{co})(\Delta \boldsymbol{\pi}_{x_u}^{co} - \Delta \boldsymbol{\pi}_{x_u}^{af}) + \text{diag}(\Delta \mathbf{s}_{x_l}^{co})(\Delta \boldsymbol{\pi}_{x_l}^{co} - \Delta \boldsymbol{\pi}_{x_l}^{af}) + \text{diag}(\Delta \mathbf{s}_u^{co})(\Delta \boldsymbol{\pi}_u^{co} - \Delta \boldsymbol{\pi}_u^{af}) \\ & + \text{diag}(\Delta \mathbf{s}_l^{co})(\Delta \boldsymbol{\pi}_l^{co} - \Delta \boldsymbol{\pi}_l^{af}) + \text{diag}(\Delta \mathbf{s}_{x_u}^{af})(\Delta \boldsymbol{\pi}_{x_u}^{af} - \Delta \boldsymbol{\pi}_{x_u}^{co}) + \text{diag}(\Delta \mathbf{s}_{x_l}^{af})(\Delta \boldsymbol{\pi}_{x_l}^{af} - \Delta \boldsymbol{\pi}_{x_l}^{co}) \\ & + \text{diag}(\Delta \mathbf{s}_u^{af})(\Delta \boldsymbol{\pi}_u^{af} - \Delta \boldsymbol{\pi}_u^{co}) + \text{diag}(\Delta \mathbf{s}_l^{af})(\Delta \boldsymbol{\pi}_l^{af} - \Delta \boldsymbol{\pi}_l^{co}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b = & \left[\text{diag}(\Delta \mathbf{s}_{x_u}^{af})(\Delta \boldsymbol{\pi}_{x_u}^{co} - 2\Delta \boldsymbol{\pi}_{x_u}^{af}) + \text{diag}(\Delta \mathbf{s}_{x_l}^{af})(\Delta \boldsymbol{\pi}_{x_l}^{co} - 2\Delta \boldsymbol{\pi}_{x_l}^{af}) \right. \\ & \left. + \text{diag}(\Delta \mathbf{s}_u^{af})(\Delta \boldsymbol{\pi}_u^{co} - 2\Delta \boldsymbol{\pi}_u^{af}) + \text{diag}(\Delta \mathbf{s}_l^{af})(\Delta \boldsymbol{\pi}_l^{co} - 2\Delta \boldsymbol{\pi}_l^{af}) \right] \\ & + \left[\text{diag}(\Delta \mathbf{s}_{x_u}^{co})\Delta \boldsymbol{\pi}_{x_u}^{af} + \text{diag}(\Delta \mathbf{s}_{x_l}^{co})\Delta \boldsymbol{\pi}_{x_l}^{af} + \text{diag}(\Delta \mathbf{s}_u^{co})\Delta \boldsymbol{\pi}_u^{af} + \text{diag}(\Delta \mathbf{s}_l^{co})\Delta \boldsymbol{\pi}_l^{af} \right] \end{aligned}$$

$$c = \text{diag}(\Delta \mathbf{s}_{x_u}^{af})\Delta \boldsymbol{\pi}_{x_u}^{af} + \text{diag}(\Delta \mathbf{s}_{x_l}^{af})\Delta \boldsymbol{\pi}_{x_l}^{af} + \text{diag}(\Delta \mathbf{s}_u^{af})\Delta \boldsymbol{\pi}_u^{af} + \text{diag}(\Delta \mathbf{s}_l^{af})\Delta \boldsymbol{\pi}_l^{af}$$

Assim, com uma distância ξ previamente determinada, aplica-se o método da bissecção para o cálculo das raízes de (4.32). Dentre estas raízes, o maior valor real pertencente ao intervalo $[0, 0 \quad 1, 0]$, deverá ser atribuído a σ . No caso de nenhuma das raízes satisfazer estas

condições, o parâmetro de centralização é computado como $\sigma = 0, 1$.

Para o cálculo dinâmico da distância à trajetória central ξ , aplica-se o método de busca unidirecional da Dicotomia à seguinte expressão:

$$\xi(\sigma) = \sqrt{\frac{\sigma^4(a) + \sigma^3(2ab) + \sigma^2(2ac + b^2) + \sigma(2bc) + c^2}{\sigma^2\widehat{\mu}^2}} \quad (4.33)$$

onde todos os termos foram previamente definidos.

Ao encontrar os valores de máximo e mínimo para a Eq. (4.33), no intervalo de incerteza de σ (de 0,0 a 1,0), garante-se que, para qualquer valor entre estes limites, haverá uma raiz que satisfaça as condições de σ .

As variáveis são atualizadas a partir das Eqs. (4.21), ao final de cada iteração, e um novo valor de μ é computado como em (4.23), para ser utilizado no teste de convergência.

Os valores atribuídos à distância ξ , utilizados na realização dos testes computacionais apresentados nesta dissertação, são mostrados no Capítulo 5.

Método de Múltiplas Correções Centrais

A partir do cálculo da direção afim-escala, obtida na solução do sistema linear em (4.24), procede-se o cálculo do parâmetro de barreira correspondente a esta direção, sendo computado como

$$\mu_{af} = \min \left\{ \left(\frac{\widetilde{gap}}{gap} \right)^2, 0, 2 \right\} \frac{\widetilde{gap}}{l}$$

onde, \widetilde{gap} e gap são calculados da mesma forma como apresentado na Eqs. (4.25) e (4.26), respectivamente.

Afim de proceder o cálculo das direções de centralização, considera-se a direção afim-escala e a magnitude do passo do passo nesta direção, sendo este último calculado como

$$\gamma_{af} = \min [\gamma_p \quad \gamma_d \quad 1, 0]$$

com a magnitude dos passos calculados para os espaços primal (γ_p) e dual (γ_d), definidos pelas Eqs. (4.28) e (4.29), respectivamente.

Em seguida, estima-se o passo a ser utilizado na etapa de centralização, de forma que $\widetilde{\gamma} > \gamma_{af}$, sendo este dado por

$$\widetilde{\gamma} = \min \{ \gamma_{af} + \delta_{af} \quad ; \quad 1, 0 \}$$

onde, $\delta_{af} = 0, 1$, conforme utilizado em (TORRES; QUINTANA, 2001).

Assim, o ponto predito é então calculado como

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}} \\ \tilde{\mathbf{s}}_{x_u} \\ \tilde{\mathbf{s}}_{x_l} \\ \tilde{\mathbf{s}}_u \\ \tilde{\mathbf{s}}_l \\ \tilde{\boldsymbol{\lambda}} \\ \tilde{\boldsymbol{\pi}}_{x_u} \\ \tilde{\boldsymbol{\pi}}_{x_l} \\ \tilde{\boldsymbol{\pi}}_u \\ \tilde{\boldsymbol{\pi}}_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^{(k)} \\ \mathbf{s}_{x_u}^{(k)} \\ \mathbf{s}_{x_l}^{(k)} \\ \mathbf{s}_u^{(k)} \\ \mathbf{s}_l^{(k)} \\ \boldsymbol{\lambda}^{(k)} \\ \boldsymbol{\pi}_{x_u}^{(k)} \\ \boldsymbol{\pi}_{x_l}^{(k)} \\ \boldsymbol{\pi}_u^{(k)} \\ \boldsymbol{\pi}_l^{(k)} \end{bmatrix} + \tilde{\boldsymbol{\gamma}} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x}^{af} \\ \Delta \mathbf{s}_{x_u}^{af} \\ \Delta \mathbf{s}_{x_l}^{af} \\ \Delta \mathbf{s}_u^{af} \\ \Delta \mathbf{s}_l^{af} \\ \Delta \boldsymbol{\lambda}^{af} \\ \Delta \boldsymbol{\pi}_{x_u}^{af} \\ \Delta \boldsymbol{\pi}_{x_l}^{af} \\ \Delta \boldsymbol{\pi}_u^{af} \\ \Delta \boldsymbol{\pi}_l^{af} \end{bmatrix}$$

Utilizando \mathbf{q} para denotar o vetor composto pelos produtos de complementariedade, tem-se a seguinte relação na fase de predição:

$$\tilde{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}}_{x_u} \\ \tilde{\mathbf{q}}_{x_l} \\ \tilde{\mathbf{q}}_u \\ \tilde{\mathbf{q}}_l \end{bmatrix} = \text{diag} \left(\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{s}}_{x_u} \\ \tilde{\mathbf{s}}_{x_l} \\ \tilde{\mathbf{s}}_u \\ \tilde{\mathbf{s}}_l \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} -\tilde{\boldsymbol{\pi}}_{x_u} \\ \tilde{\boldsymbol{\pi}}_{x_l} \\ -\tilde{\boldsymbol{\pi}}_u \\ \tilde{\boldsymbol{\pi}}_l \end{bmatrix}$$

Para a identificação dos produtos de complementariedade em $\tilde{\mathbf{q}}$, não pertencentes ao hiper-cubo $\Upsilon = [\beta_{min}\boldsymbol{\mu}_{af}, \beta_{max}\boldsymbol{\mu}_{af}]^l$, executa-se o seguinte teste

$$q_{t_i} = \begin{cases} \beta_{min}\boldsymbol{\mu}_{af}, & \text{se } \tilde{q}_i < \beta_{min}\boldsymbol{\mu}_{af}, \\ \beta_{max}\boldsymbol{\mu}_{af}, & \text{se } \tilde{q}_i > \beta_{max}\boldsymbol{\mu}_{af}, \\ \tilde{q}_i, & \text{se não.} \end{cases} \quad (4.34)$$

onde, $\beta_{min} = 0, 1$ e $\beta_{max} = 10, 0$, conforme sugerido em (TORRES; QUINTANA, 2001).

De forma que a direção de correção centralizada é obtida ao resolver-se o sistema linear

$$\begin{bmatrix}
\mathbf{H} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{g}^t & -\mathbf{I}_x & -\mathbf{I}_x & -\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{h}^t & -\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{h}^t \\
0 & \mathbf{\Pi}_{x_u} & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{S}_{x_u} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\mathbf{\Pi}_{x_l} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathbf{S}_{x_l} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \mathbf{\Pi}_u & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{S}_u & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\mathbf{\Pi}_l & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathbf{S}_l \\
-\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{g} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\mathbf{I}_x & -\mathbf{I}_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\mathbf{I}_x & 0 & \mathbf{I}_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{h} & 0 & 0 & -\mathbf{I} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{h} & 0 & 0 & 0 & \mathbf{I} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\Delta\mathbf{x}^{co} \\
\Delta\mathbf{s}_{x_u}^{co} \\
\Delta\mathbf{s}_{x_l}^{co} \\
\Delta\mathbf{s}_u^{co} \\
\Delta\mathbf{s}_l^{co} \\
\Delta\lambda^{co} \\
\Delta\pi_{x_u}^{co} \\
\Delta\pi_{x_l}^{co} \\
\Delta\pi_u^{co} \\
\Delta\pi_l^{co}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\mathbf{0} \\
\mathbf{q}_{t_{x_u}} - \tilde{\mathbf{q}}_{x_u} \\
\mathbf{q}_{t_{x_l}} - \tilde{\mathbf{q}}_{x_l} \\
\mathbf{q}_{t_u} - \tilde{\mathbf{q}}_u \\
\mathbf{q}_{t_l} - \tilde{\mathbf{q}}_l \\
\mathbf{0} \\
\mathbf{0} \\
\mathbf{0} \\
\mathbf{0} \\
\mathbf{0}
\end{bmatrix}
\tag{4.35}$$

Adicionalmente às condições expressas na Eq. (4.34), os componentes $(\mathbf{q}_{t_i} - \tilde{\mathbf{q}}_i)$ do Sistema Linear (4.35), que forem menores do que $-\beta_{max}\mu_{af}$, devem ser substituídos por este valor.

Ao final de cada iteração, a direção efetiva de busca é computada a partir de

$$\begin{bmatrix}
\Delta\mathbf{x} \\
\Delta\mathbf{s}_{x_u} \\
\Delta\mathbf{s}_{x_l} \\
\Delta\mathbf{s}_u \\
\Delta\mathbf{s}_l \\
\Delta\lambda \\
\Delta\pi_{x_u} \\
\Delta\pi_{x_l} \\
\Delta\pi_u \\
\Delta\pi_l
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\Delta\mathbf{x}^{co} \\
\Delta\mathbf{s}_{x_u}^{co} \\
\Delta\mathbf{s}_{x_l}^{co} \\
\Delta\mathbf{s}_u^{co} \\
\Delta\mathbf{s}_l^{co} \\
\Delta\lambda^{co} \\
\Delta\pi_{x_u}^{co} \\
\Delta\pi_{x_l}^{co} \\
\Delta\pi_u^{co} \\
\Delta\pi_l^{co}
\end{bmatrix}
+
\begin{bmatrix}
\Delta\mathbf{x}^{af} \\
\Delta\mathbf{s}_{x_u}^{af} \\
\Delta\mathbf{s}_{x_l}^{af} \\
\Delta\mathbf{s}_u^{af} \\
\Delta\mathbf{s}_l^{af} \\
\Delta\lambda^{af} \\
\Delta\pi_{x_u}^{af} \\
\Delta\pi_{x_l}^{af} \\
\Delta\pi_u^{af} \\
\Delta\pi_l^{af}
\end{bmatrix}
\tag{4.36}$$

Em seguida calcula-se o fator de passo γ_k , como mostrado na Eq. (4.22), e uma nova solução é computada através de (4.21).

O processo de correção pode ser repetido ao tomar-se a direção de busca, obtida na Eq.

(4.36), como a direção afim-escala, e fazendo com que γ_{af} assumo o valor calculado para γ_k .

Ao executar múltiplas correções, pode-se encerrar esta etapa se a seguinte condição for verificada

$$\gamma_k - \gamma_{af} < \varsigma_\gamma \delta_{af}$$

onde, ς_γ representa o mínimo valor aceitável para o decréscimo do fator de passo, assumindo o valor 0,1, conforme a referência (TORRES; QUINTANA, 2001).

Ainda com relação a referência supracitada, é sugerido o cálculo dinâmico do fator de aumento de passo δ_{af} , através de

$$\delta_{af} = \frac{(1 - \gamma_{af})}{K}$$

onde, K é número máximo de correções centralizadoras permitidas, e δ_{af} não deverá ser menor do que 0,1 e maior do que 0,2.

Na implementação realizada para este trabalho, o número máximo de correções de centralização (K) é especificado ao início do processo de otimização, mantendo-se constante durante todas as iterações. Esta abordagem visa a observação da influência deste parâmetro na eficiência do algoritmo MCC. Os valores adotados para K são apresentados no Capítulo 5

4.7 Inicialização dos Problemas de Otimização

4.7.1 Partida Plana

Para a estratégia de partida plana, também chamada de *Flat Start*, as seguintes variáveis de controle são inicializadas como segue, para os três problemas de otimização estudados

$$\begin{aligned} V_i^0 &= \frac{(V_i^{max} + V_i^{min})}{2} & (i = 1, \dots, nb) \\ a_j^0 &= \frac{(a_j^{max} + a_j^{min})}{2} & (i = 1, \dots, nt) \\ \delta_i^0 &= 0 & (i = 1, \dots, nb) \end{aligned} \quad (4.37)$$

De forma que, os módulos das tensões complexas e as posições dos tapes dos LTC's, são inicialmente computados com o valor médio em relação aos limites das restrições de desigualdade. Já os ângulos das tensões nodais são inicializados com valor zero, sendo que, o ângulo da barra de referência, δ_{ref} , manterá este valor até o final da processo de convergência.

Para o problema de maximização da função objetivo Carregamento de um Sistema de Potência, o parâmetro ρ , relativo ao aumento percentual da demanda do caso base, é computado inicialmente com o valor zero ($\rho^0 = 0$). Assim, na primeira iteração do processo iterativo, a geração total de potência deve suprir a demanda do caso base.

As variáveis relativas à geração de potência são inicializadas obedecendo o mesmo critério das duas primeiras equações em (4.37), sendo obtidas a partir de

$$\begin{aligned} P_{gref}^0 &= \frac{(P_{gref}^{max} + P_{gref}^{min})}{2} \\ Q_{g_i}^0 &= \frac{(Q_{g_i}^{max} + Q_{g_i}^{min})}{2} \quad (\forall i \in \mathbf{CG}) \end{aligned}$$

Para o problema de maximização da função objetivo CSP, a inicialização das gerações de potência ativa é computada como:

$$P_{g_i}^0 = \frac{(P_{g_i}^{max} + P_{g_i}^{min})}{2} \quad (\forall i \in \mathbf{CG})$$

Como mostrado em (TORRES; CARVALHO JR, 2006), os multiplicadores duais referentes às restrições de balanço de potência, para o problema de minimização da função objetivo Perda nas Linhas de Transmissão, são inicializados através de

$$\begin{aligned} \lambda_{P_i}^0 &= 1 & (\forall i \in \mathbf{SR}) \\ \lambda_{Q_i}^0 &= 0 & (\forall i \in \mathbf{SG}) \end{aligned}$$

O valor unitário, atribuído aos multiplicadores duais $\lambda_{P_i}^0$, está associado ao valor esperado para estas variáveis ao final do processo de convergência, como comentado no Capítulo ???. Para os demais problemas de otimização, ambos os conjuntos de variáveis duais, λ_P^0 e λ_Q^0 , são inicializados com valor zero.

As variáveis de folga, utilizadas para transformar as restrições de desigualdade em restrições de igualdade, são inicializadas a partir de

$$\begin{aligned} s_{vu_i}^0 &= V_i^{max} - V_i, & s_{vl_i}^0 &= V_i - V_i^{min} & (i = 1, \dots, nb) \\ s_{au_j}^0 &= a_j^{max} - a_j, & s_{al_j}^0 &= a_j - a_j^{min} & (j = 1, \dots, nt) \\ s_{qu_m}^0 &= Q_{g_m}^{max} - Q_{g_m}, & s_{ql_m}^0 &= Q_{g_m} - Q_{g_m}^{min} & (\forall m \in \mathbf{CG}) \\ s_{pu_{ref}}^0 &= P_{gref}^{max} - P_{gref}, & s_{pl_{ref}}^0 &= P_{gref} - P_{gref}^{min} \end{aligned} \quad (4.38)$$

O conjunto de equações (4.38) é aplicado na inicialização das variáveis de folga para os problemas de minimização das funções objetivo PLT e DNT. Para a maximização da função objetivo CSP, as equações relativas à geração de potência ativa em (4.38) são substituídas por

$$s_{pu_n}^0 = P_{g_n}^{max} - P_{g_n}, \quad s_{pl_n}^0 = P_{g_n} - P_{g_n}^{min} \quad (\forall n \in \mathbf{CG})$$

De posse das variáveis de folga e do valor inicial do parâmetro de barreira μ_0 (com $\mu_0 > 0$), as variáveis duais, relativas às restrições de desigualdade dos problemas de minimização das

funções objetivo PLT e DNT, são computadas como:

$$\begin{aligned}
\pi_{vu_i}^0 &= -\mu^0 s_{vu_i}^0, & \pi_{vl_i}^0 &= \mu^0 s_{vu_i}^0 & (i = 1, \dots, nb) \\
\pi_{au_j}^0 &= -\mu^0 s_{au_j}^0, & \pi_{al_j}^0 &= \mu^0 s_{al_i}^0 & (j = 1, \dots, nt) \\
\pi_{qu_m}^0 &= -\mu^0 s_{qu_m}^0, & \pi_{ql_m}^0 &= \mu^0 s_{ql_i}^0 & (\forall m \in \mathbf{CG}) \\
\pi_{pu_{ref}}^0 &= -\mu^0 s_{pu_{ref}}^0, & \pi_{pl_{ref}}^0 &= \mu^0 s_{pl_{ref}}^0
\end{aligned} \tag{4.39}$$

Para maximização da função objetivo Carregamento de um Sistema de Potência, as equações em (4.39), relativas aos multiplicadores duais das restrições de geração de potência ativa, são substituídas por

$$\pi_{pu_n}^0 = -\mu^0 s_{pu_n}^0, \quad \pi_{pl_n}^0 = \mu^0 s_{pl_n}^0 \quad (\forall n \in \mathbf{CG})$$

4.7.2 Partida via Solução do Fluxo de Potência

Na estratégia de partida via solução do fluxo de potência, as variáveis de otimização (V_i , a_i e δ_i) e as potências geradas (P_{g_i} e Q_{g_i}), podem ser inicializadas a partir da solução de um problema de Fluxo de Potência CA (TORRES; CARVALHO JR, 2006). Na implementação realizada neste trabalho, o problema clássico de fluxo de potência é resolvido pelo método de Newton-Raphson.

Seguindo as idéias expostas em (WU; DEBS, 2001), esta estimativa inicial pode conter variáveis muito próximas aos limites das restrições de desigualdade, trazendo problemas para a convergência do processo de otimização (ver Capítulo 3). Desta forma, as seguintes condições são impostas à estas variáveis, visando afastar seus valores da proximidade dos limites

$$\begin{cases} V_i = \begin{cases} (V_i^{max} + V_i^{min})/2; & \text{se } V_i^{ini} \geq V_i^{max}; \\ V_i^{ini}; & \text{se não.} \end{cases} \\ \\ V_i = \begin{cases} (V_i^{max} + V_i^{min})/2; & \text{se } V_i^{ini} \leq V_i^{min}; \\ V_i^{ini}; & \text{se não.} \end{cases} \\ \\ a_i = \begin{cases} (a_i^{max} + a_i^{min})/2; & \text{se } a_i^{ini} \geq a_i^{max}; \\ a_i^{ini}; & \text{se não.} \end{cases} \\ \\ a_i = \begin{cases} (a_i^{max} + a_i^{min})/2; & \text{se } a_i^{ini} \leq a_i^{min}; \\ a_i^{ini}; & \text{se não.} \end{cases} \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} P_i = \begin{cases} (P_i^{max} + P_i^{min})/2; & \text{se } P_i^{ini} \geq P_i^{max}; \\ P_i^{ini}; & \text{se não.} \end{cases} \\ \\ P_i = \begin{cases} (P_i^{max} + P_i^{min})/2; & \text{se } P_i^{ini} \leq P_i^{min}; \\ P_i^{ini}; & \text{se não.} \end{cases} \\ \\ Q_i = \begin{cases} (Q_i^{max} + Q_i^{min})/2; & \text{se } Q_i^{ini} \geq Q_i^{max}; \\ Q_i^{ini}; & \text{se não.} \end{cases} \\ \\ Q_i = \begin{cases} (Q_i^{max} + Q_i^{min})/2; & \text{se } Q_i^{ini} \leq Q_i^{min}; \\ Q_i^{ini}; & \text{se não.} \end{cases} \end{array} \right.$$

onde, o superescrito *ini* se refere aos termos obtidos na solução do problema de Fluxo de Potência CA.

As demais variáveis envolvidas no problema de otimização são obtidas como mostrado no item 4.7.1.

4.8 Critério de Convergência

São utilizados dois testes para a verificação da convergência do processo iterativo, sendo estes aplicados ao início de cada iteração. Os testes são executados em todos os algoritmos de otimização implementados para esta dissertação, de forma a fornecer um método imparcial para a avaliação do número de iterações necessárias à convergência.

O primeiro teste é executado tomando-se a norma infinita do vetor gradiente do sistema linear do método primal-dual convencional, definido na Eq. (4.20), em relação à uma dada tolerância. Desta forma, este teste pode ser equacionado como

$$|grad|_{\infty} \leq tol_{grad} \quad (4.40)$$

onde, $tol_{grad} = 10^{-3}$, $|\cdot|_{\infty}$ representa a norma infinita, e

$$grad = \begin{bmatrix} -t \\ -[\mu e_x + S_{x_u} \pi_{x_u}] \\ -[\mu e_x - S_{x_l} \pi_{x_l}] \\ -[\mu e + S_u \pi_u] \\ -[\mu e - S_l \pi_l] \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x}_h - \mathbf{x}^{max} + \mathbf{s}_{x_u} \\ \mathbf{x}_h - \mathbf{x}^{min} - \mathbf{s}_{x_l} \\ \mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{h}^{max} + \mathbf{s}_u \\ \mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{h}^{min} - \mathbf{s}_l \end{bmatrix}$$

O segundo teste avalia o decréscimo do valor do parâmetro de barreira, de maneira a garantir que a perturbação imposta ao problema original tenha sido reduzida a um valor aceitável. Assim, este teste é equacionado como

$$\mu \leq tol_\mu \quad (4.41)$$

onde, μ é obtido a partir da Eq. (4.23) e $tol_\mu = 10^{-5}$.

O processo de otimização só é finalizado, quando ambas as condições de convergência (Eqs. (4.40) e (4.41)) são satisfeitas.

4.9 Conclusão

Foram apresentados os detalhes da implementação computacional dos algoritmos utilizados nesta dissertação.

Mostrou-se a modelagem matemática relativa às funções objetivo: Perda nas Linhas de Transmissão, Desvio de um Nível de Tensão Pré-Estabelecido e Carregamento do Sistema de Potência. As restrições de igualdade e desigualdade, utilizadas nos problemas de otimização, foram descritas em termos analíticos, com ênfase à suas diferentes implementações para cada um dos problemas abordados. A modelagem geral aplicada aos três problemas de otimização estudados foi mostrada em detalhes.

Os aspectos relativos à implementação dos problemas de Minimização das Perdas de Potência Ativa nas Linhas de Transmissão e Minimização do Desvio de um Nível de Tensão Pré-Estabelecido foram mostrados em detalhes, podendo ser aplicados sem grandes alterações ao problema de Maximização do Carregamento de um Sistema de Potência.

Por fim, foram apresentados os dois critérios adotados para a inicialização das variáveis, bem com os testes para a convergência dos algoritmos de otimização empregados na obtenção dos resultados numéricos.

Capítulo 5

Resultados Numéricos

5.1 Introdução

Este capítulo apresenta os resultados numéricos da implementação computacional em ambiente MatLab[®], dos algoritmos mostrados no Capítulo 3. Os testes são realizados com programas computacionais correspondentes aos Métodos de Pontos Interiores Preditor-Corretor, Máximo Passo no Caminho Central e Múltiplas Correções Centralizadas. Para cada um destes métodos, três funções objetivo são utilizadas: (a) Perdas de Potência Ativa nas Linhas de Transmissão, (b) Desvio Quadrático de um Nível de Tensão Pré-especificado e (c) Carregamento do Sistema de Potência. Os resultados são obtidos para os sistemas-teste do IEEE, de 14, 30, 57, 118 e 300 barras. As seções subseqüentes mostram os resultados obtidos e a análise dos mesmos.

5.2 Aspectos Preliminares

Nesta seção são apresentadas informações referentes aos modelos de sistemas de potência, funções objetivo, equipamento utilizado e objetivo dos testes realizados no estudo dos métodos de otimização não lineares descritos nos capítulos anteriores.

5.2.1 Sistemas-Teste

Cinco modelos de sistemas de potência são utilizados na realização dos testes apresentados neste capítulo. São estes: os sistemas de 14, 30, 57, 118 e 300 barras do *Institute of Electrical and Electronics Engineers* (IEEE), denotados pelas legendas IEEE14, IEEE30, IEEE57, IEEE118 e IEEE300, respectivamente. Os dados originais de modelagem destes sistemas estão disponíveis em formato digital na rede mundial de computadores (WASHINGTON, 2007).

A Tabela 5.1 apresenta dados relativos aos cinco sistemas utilizados nos testes. Estes dados contemplam: o número de barras dos sistemas ($NBar$), o número de circuitos ($NLtr$), o número de transformadores com tape fixo ($NTra$), número de transformadores elegíveis como Transformadores com Comutação Automática de Tapes Sob-Carga ($NLtc$) e o número de geradores ($NGer$).

Sistemas	$NBar$	$NLtr$	$NTra$	$NLtc$	$NGer$
IEEE14	14	20	0	3	5
IEEE30	30	41	0	4	6
IEEE57	57	80	0	17	7
IEEE118	118	186	0	9	54
IEEE300	300	411	44	63	96

Tabela 5.1: *Dimensões dos Sistemas-Teste.*

5.2.2 Funções Objetivo Utilizadas

Utiliza-se três funções objetivo na obtenção de resultados, sejam estas: Perdas nas Linhas de Transmissão, Desvio de um Nível de Tensão Pré-Especificado e Carregamento de um Sistema de Potência, denotadas pelas legendas PLT, DNT e CSP, respectivamente. Os problemas de otimização referentes a estas funções objetivo relacionam-se à minimização de PLT e DNT, além da maximização de CSP.

A Tabela 5.2 apresenta aspectos da modelagem dos problemas de otimização em função das variáveis utilizadas como Variáveis de Otimização (VO), utilizadas em Restrições de Igualdade (RI) e Restrições de Desigualdade (RD), para cada uma das funções objetivo escolhidas (FO). Sendo que, V representa o módulo da tensão complexa nas barras, δ o ângulo da tensão complexa nas barras e a o valor dos tapes dos Transformadores com Comutação Automática Sob-Carga (LTCs); Pnr representa a geração de potência ativa em todas as barras, com exceção da barra de referência, Pl a demanda de potência ativa nas barras de carga, Ql a demanda de potência reativa nas barras de carga, Pr a potência ativa gerada na barra de referência, Pg a potência ativa gerada em todas as barras de geração e Qg a potência reativa gerada em todas as barras de geração.

FO	VO			RI				RD	
PLT	V	δ	a	Pnr	Ql	V	a	Pr	Qg
DNT	V	δ	a	Pnr	Ql	V	a	Pr	Qg
CSP	V	δ	a	Pl	Ql	V	a	Pg	Qg

Tabela 5.2: *Variáveis utilizadas na modelagem dos problemas de otimização.*

As dimensões dos Problemas de Otimização são apresentadas na Tabela 5.3, onde $Vpri$ é o número de variáveis primais, $Vdua$ é o número de variáveis duais e $Vtot$ é o número total de variáveis envolvidas nos problemas, representando a ordem do sistema linear a ser resolvido.

<i>FO</i>	<i>PLT</i>			<i>DNT</i>			<i>CSP</i>		
Sistemas	<i>Vpri</i>	<i>Vdua</i>	<i>Vtot</i>	<i>Vpri</i>	<i>Vdua</i>	<i>Vtot</i>	<i>Vpri</i>	<i>Vdua</i>	<i>Vtot</i>
IEEE14	76	68	144	76	68	144	84	72	156
IEEE30	145	135	280	145	135	280	155	140	295
IEEE57	294	270	564	294	270	564	306	276	582
IEEE118	581	527	1108	608	545	1153	714	598	1312
IEEE300	1339	1270	2609	1528	1396	2924	1664	1464	3128

Tabela 5.3: *Dimensões dos Problemas de Otimização.*

5.2.3 Objetivo dos Testes

Parâmetro de Barreira μ

Os testes sobre a influência do parâmetro de barreira μ , no processo de convergência dos métodos de otimização não lineares estudados, referem-se à análise da variação do número final de iterações dos processos iterativos, em função do valor inicial adotado para o parâmetro de barreira. Cada função objetivo é analisada separadamente, na intenção de encontrar-se valores iniciais para o parâmetro de barreira (μ_0) que proporcionem o menor número de iterações possível.

A escolha dos valores iniciais do parâmetro de barreira visa abranger uma ampla gama de possíveis escolhas de magnitude. Assim, este parâmetro assume os seguintes valores: 0,01, 0,10, 1,00, 10,0 e 100,0.

Condições Iniciais

São analisados resultados obtidos para dois métodos de partida distintos: O Método de Partida Plana, descrito em Torres e Carvalho Jr (2006), e o Método de Partida com Fluxo de Potência, ambos discutidos previamente no Capítulo 4.

Distância ao Caminho Central ξ

Ao utilizar o Método de Máximo Passo no Caminho Central são implementados dois métodos de obtenção do valor da distância ao caminho central (ξ). No primeiro método, o valor de ξ é mantido constante durante todo o processo de otimização para diferentes valores de teste, já no segundo método, este valor é calculado dinamicamente a cada nova iteração, como descrito na seção 3.5.

Número Máximo de Correções Centralizadoras K

Os testes relativos ao número máximo de correções efetuadas a cada iteração do Método de Múltiplas Correções Centrais busca encontrar o número ideal de correções para cada função

objetivo estudada. Este número ideal de correções é testado entre o valor máximo de nove correções e o mínimo de uma, conforme utilizado em Torres e Quintana (2001).

Estudo Comparativo Entre Métodos

Inicialmente, os métodos de otimização implementados são comparados em termos do número de iterações necessárias à convergência do processo computacional, para as diferentes funções objetivo. Optou-se por este índice de desempenho pela sua simplicidade, embora em várias situações este índice não reflita o esforço computacional dispendido. Além desta figura de análise, é apresentado também o tempo de processamento para os sistemas de maior porte. A variação deste tempo para os sistemas de pequeno porte é insignificante e, por esta razão, não é apresentada neste texto.

5.2.4 Equipamento e Ambiente Computacional Utilizados

Todos os resultados apresentados nesta dissertação foram obtidos em um computador Compaq Presario V2000, processador AMD Turion 64 Mobile 1.8GHz, disco rígido de 80GB e 1GB de memória RAM, utilizando o sistema operacional Microsoft Windows XP Home Edition, Versão 2002, Service Pack 2. Os algoritmos computacionais utilizados foram implementados no ambiente computacional MatLab®, versão 6.5, do Laboratório de Sistemas de Potência da Universidade Federal de Santa Catarina.

5.3 Influência do Parâmetro de Barreira no Processo de Convergência

Nesta seção são mostrados resultados relativos à influência do Parâmetro de Barreira no processo de convergência dos problemas de otimização não lineares estudados. Assim, cada função objetivo tem seus resultados analisados separadamente para cada um dos métodos de otimização propostos.

5.3.1 Função Objetivo: Perdas nas Linhas de Transmissão

Método Preditor-Corretor

A Tabela 5.4 mostra que, para o Método Preditor-Corretor utilizando Partida Plana, existem variações consideráveis no número final de iterações em função da escolha do valor inicial do parâmetro de barreira (μ_0). Estas variações chegam a sete iterações para o sistema-teste IEEE57 barras. Isto indica que, muito embora este método seja considerado confiável,

a escolha de um valor inicial adequado para μ deve receber especial atenção ao buscar-se a melhor performance possível do algoritmo.

Método Preditor-Corretor										
Partida	Plana					Fluxo de Potência				
μ_0	0,01	0,10	1,00	10,0	100,0	0,01	0,10	1,00	10,0	100,0
IEEE14	7	7	7	7	8	5	5	6	6	6
IEEE30	14	11	12	13	13	7	8	7	7	8
IEEE57	17	10	10	13	11	7	8	8	8	9
IEEE118	7	7	7	8	8	10	10	9	11	10
IEEE300	10	12	13	13	13	10	11	11	10	13

Tabela 5.4: *Influência de μ_0 no número de iterações para o processo de convergência com Partidas Plana e com Fluxo de Potência no Método Preditor-Corretor.*

Ainda na Tabela 5.4, para os resultados do Método Preditor-Corretor com Partida com Fluxo de Potência, observa-se uma menor variação no número de iterações do que o observado para Partida Plana. Mas, mesmo para esta condição de partida, faz-se necessário uma boa escolha do valor inicial de μ para uma convergência mais rápida do algoritmo.

Comparando os valores obtidos para ambos os métodos de partida, nota-se que valores de μ_0 próximos de 0,01 e 0,10 produzem melhor resultado em termos de número de iterações. Valores próximos a 10,0 e 100,0, estão relacionados a valores mais altos para o número de iterações. Isto pode ser atribuído ao condicionamento dos problemas resolvidos, os quais não necessitam de uma perturbação acentuada.

Método Máximo Passo no Caminho Central

Os resultados referentes ao Método de Máximo Passo no Caminho Central são mostrados nas tabelas 5.5a e 5.5b. A Tabela 5.5a mostra resultados obtidos com o valor da distância ao caminho central constante e igual a 3 durante todo o processo de otimização. Já a Tabela 5.5b, mostra resultados gerados ao calcular-se a distância dinamicamente para cada iteração do processo, como mostrado no Capítulo 3. Os resultados correspondentes ao processo dinâmico de cálculo da distância ao caminho central serão mostrados na Seção 5.4 deste Capítulo.

Nota-se que, em ambos processos de obtenção de ξ , existe uma grande variação no número de iterações para diferentes μ_0 . Esta variação chega a dez iterações para o sistema-teste IEEE14, ao utilizar-se a Partida com Fluxo de Potência juntamente com o cálculo dinâmico de ξ (Tabela 5.5b).

Embora os métodos para a obtenção do valor da distância ao caminho central sejam distintos nos algoritmos empregados na obtenção dos resultados mostrados em 5.5a e 5.5b, qualitativamente, existe pouca diferença entre os valores encontrados para o número de iterações, quando compara-se os resultados para as mesmas condições de partida e valor inicial de μ .

Método Máximo Passo no Caminho Central ($\xi = 3$)										
Partida	Plana					Fluxo de Potência				
μ_0	0,01	0,10	1,00	10,0	100,0	0,01	0,10	1,00	10,0	100,0
IEEE14	18	10	11	12	13	7	9	9	10	11
IEEE30	16	11	12	13	14	9	10	11	12	13
IEEE57	19	11	11	12	13	11	10	12	13	14
IEEE118	19	12	13	14	15	17	15	15	15	17
IEEE300	18	16	18	19	20	-	12	13	14	16

Tabela 5.5a: *Influência de μ_0 no número de iterações para o processo de convergência com Partidas Plana e com Fluxo de Potência no Método Máximo Passo no Caminho Central com $\xi = 3$.*

Método Máximo Passo no Caminho Central ($\xi = \text{dinâmico}$)										
Partida	Plana					Fluxo de Potência				
μ_0	0,01	0,10	1,00	10,0	100,0	0,01	0,10	1,00	10,0	100,0
IEEE14	16	10	11	12	14	7	9	12	14	17
IEEE30	17	10	12	13	16	9	13	13	16	18
IEEE57	17	11	11	13	14	11	10	13	15	17
IEEE118	19	11	12	13	15	17	14	14	17	20
IEEE300	18	15	16	18	19	-	13	14	17	19

Tabela 5.5b: *Influência de μ_0 no número de iterações para o processo de convergência com Partidas Plana e com Fluxo de Potência no Método Máximo Passo no Caminho Central com cálculo dinâmico de ξ .*

Com base nestes resultados, pode-se afirmar que o valor de μ_0 igual a 0,10 produz os melhores resultados em termos de rapidez de convergência para a grande maioria dos casos. Os piores casos em termos do número de iterações para a convergência ocorrem de forma distinta para os dois diferentes tipos de partida. No caso da Partida Plana, o valor inicial de 0,01 para o parâmetro de barreira gera os piores resultados, enquanto que, para a Partida com Fluxo de Potência este valor é igual a 100,0. Isto pode ser atribuído às discrepâncias entre os produtos relacionados às condições de complementaridade. Ou seja, no caso da partida plana, as variáveis de folga possuem valor relativamente alto na partida, porém o valor do parâmetro barreira inicial é baixo. No caso da partida via fluxo de potência, algumas variáveis estão situadas próximas aos limites, e desta forma o valor elevado do parâmetro barreira produz um mau escalonamento no sistema linear.

Observa-se ainda que, tanto para ξ constante quanto para o calculado dinamicamente, a utilização do valor 0,01 para μ_0 pode inviabilizar o processo de convergência para o sistema IEEE300, quando adotada a Partida com Fluxo de Potência. Estes resultados mostram que o Método de Máximo Passo no Caminho Central aplicado a função objetivo Perda nas Linhas de Transmissão, é razoavelmente sensível ao valor de μ_0 , apresentado as maiores variações quanto ao número de iterações do que os demais métodos de otimização estudados.

Método de Múltiplas Correções Centrais

Os resultados apresentados na Tabela 5.6 são relativos ao Método de Múltiplas Correções Centrais e são calculados com apenas uma correção central ($K = 1$).

Método Múltiplas Correções Centrais ($K = 1$)										
Partida	Plana					Fluxo de Potência				
μ_0	0,01	0,10	1,00	10,0	100,0	0,01	0,10	1,00	10,0	100,0
IEEE14	8	8	8	9	9	7	7	7	7	8
IEEE30	8	9	9	10	10	9	9	9	9	10
IEEE57	8	8	11	8	9	13	14	16	14	14
IEEE118	9	8	8	8	9	18	18	18	19	19
IEEE300	15	14	15	16	17	15	15	15	15	16

Tabela 5.6: Influência de μ_0 no número de iterações para o processo de convergência com Partidas Plana e com Fluxo de Potência no Método Múltiplas Correções Centrais com $K = 1$.

A análise da Tabela 5.6 mostra a ocorrência de uma menor variação no número de iterações em função dos valores iniciais de μ , sendo que as maiores variações são da ordem de três iterações. Os piores resultados são obtidos para valores elevados de μ_0 , na grande maioria iguais a 100,0. Já valores baixos, 0,01 e 0,10, geram um menor número de iterações ao final do processo iterativo. Observa-se também que ao adotar a solução do fluxo de potência como ponto inicial para o processo iterativo, tem-se um aumento significativo no número de iterações para os sistemas IEEE57 e IEEE118. De forma semelhante aos casos anteriores, no caso da partida via fluxo de potência, essas variações podem ser atribuídas ao efeito das restrições de folga complementar no escalonamento do sistema linear.

5.3.2 Função Objetivo: Desvio de um Nível de Tensão Pré-Estabelecido

Método Preditor-Corretor

A Tabela 5.7 apresenta os resultados para o método de otimização Preditor-Corretor utilizado na minimização da função objetivo Desvio de um Nível de Tensão Pré-Estabelecido.

Os resultados apresentados na Tabela 5.7 mostram que valores baixos de μ_0 levam a um menor número de iterações. Isto está relacionado à natureza da função objetivo que, sendo quadrática, convexa e diretamente dependente das variáveis de otimização (magnitude das tensões e tapes dos transformadores), em geral não requer uma distorção acentuada (causada pelo parâmetro barreira). Desta forma, valores iniciais elevados para o parâmetro de barreira deformam demasiadamente a função Lagrangeana dificultando o processo de convergência.

A Figura 5.1 apresenta superfícies da função Lagrangeana formadas no processo de minimização da função objetivo Desvio de um Nível de Tensão Pré-Estabelecido. Estas são

Método Predictor-Corretor										
Partida	Plana					Fluxo de Potência				
μ_0	0,01	0,10	1,00	10,0	100,0	0,01	0,10	1,00	10,0	100,0
IEEE14	4	6	7	7	7	4	4	4	5	5
IEEE30	10	10	12	12	14	4	4	5	5	5
IEEE57	9	9	11	12	11	5	6	5	7	7
IEEE118	4	5	6	6	7	9	10	9	10	11
IEEE300	8	9	11	11	11	20	10	12	26	13

Tabela 5.7: Influência de μ_0 no número de iterações para o processo de convergência com Partidas Plana e com Fluxo de Potência no Método Predictor-Corretor.

obtidas para diferentes valores de μ_0 , na primeira iteração do processo de convergência de um sistema de potência de duas barras.

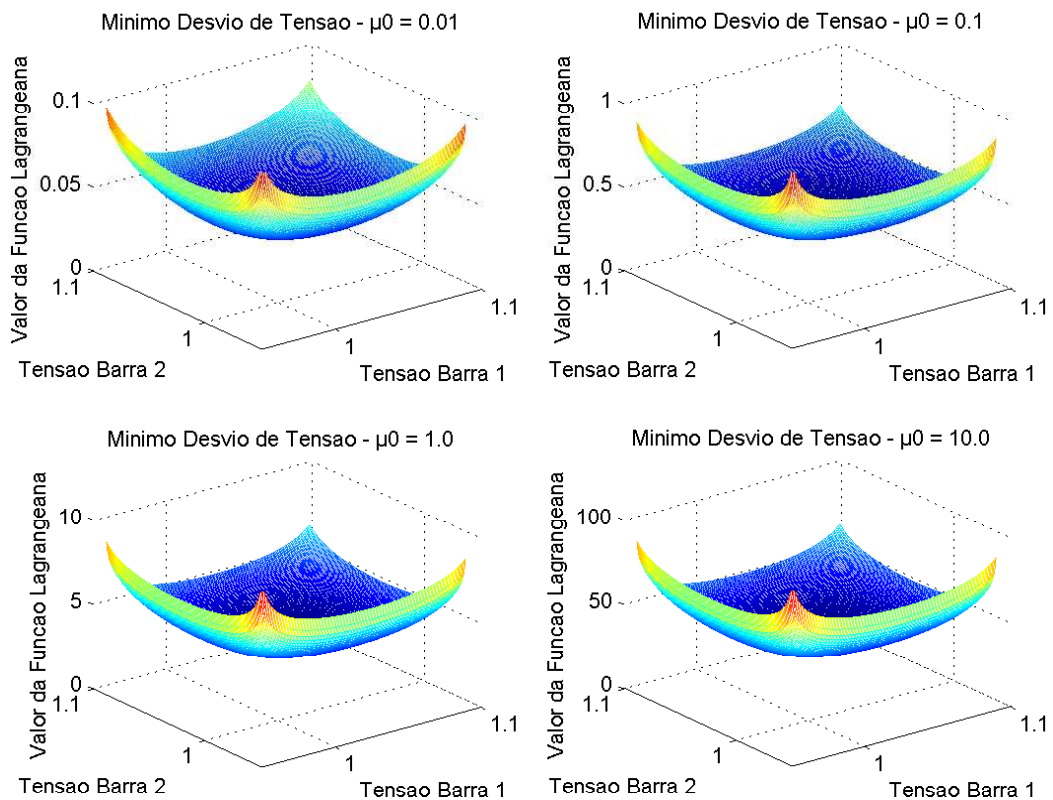


Figura 5.1: Deformações na função Lagrangeana em função do valor inicial de μ_0 .

Este sistema pode ser encontrado em Monticelli (1983), na página 89. Os valores utilizados para o ponto inicial seguem os critérios abordados no Capítulo 4, para o método de Partida Plana, mantendo-se as potências ativa e reativa geradas na barra de referência como constantes e fazendo com que os valores de módulo de tensão nas barras do sistema variem de 0,90 a 1,10.

Observa-se que, embora a forma da superfície permaneça praticamente inalterada, os valores da função Lagrangeana tendem a aumentar proporcionalmente com o aumento do

valor de μ_0 . Esta representação gráfica, embora de um sistema extremamente simples, está de acordo com as conclusões emitidas sobre os dados mostrados na Tabela 5.7.

Método Máximo Passo no Caminho Central

Os resultados relativos ao método de Máximo Passo no Caminho Central são apresentados nas tabelas 5.8a e 5.8b.

Método Máximo Passo no Caminho Central ($\xi = 3$)										
Partida	Plana					Fluxo de Potência				
μ_0	0,01	0,10	1,00	10,0	100,0	0,01	0,10	1,00	10,0	100,0
IEEE14	7	8	9	10	11	6	7	8	9	10
IEEE30	7	9	10	10	11	6	7	9	10	11
IEEE57	6	8	8	9	10	7	8	9	10	11
IEEE118	8	10	11	12	13	15	11	12	12	13
IEEE300	9	11	12	13	14	14	14	11	10	11

Tabela 5.8a: *Influência de μ_0 no número de iterações para o processo de convergência com Partidas Plana e com Fluxo de Potência no Método Máximo Passo no Caminho Central com $\xi = 3$.*

Método Máximo Passo no Caminho Central ($\xi = \text{dinâmico}$)										
Partida	Plana					Fluxo de Potência				
μ_0	0,01	0,10	1,00	10,0	100,0	0,01	0,10	1,00	10,0	100,0
IEEE14	6	8	9	10	12	6	7	9	12	14
IEEE30	6	8	9	11	13	6	7	11	13	15
IEEE57	6	7	8	10	12	7	8	10	12	15
IEEE118	6	8	9	10	12	12	11	13	13	17
IEEE300	9	10	11	13	15	21	10	11	13	15

Tabela 5.8b: *Influência de μ_0 no número de iterações para o processo de convergência com Partidas Plana e com Fluxo de Potência no Método Máximo Passo no Caminho Central com cálculo dinâmico de ξ .*

A análise desta Tabela mostra que, como observado anteriormente para a função objetivo Perda nas Linhas de Transmissão, este método apresenta as maiores variações no número de iterações em função do valor inicial de μ_0 . Particularmente, ao utilizar-se o cálculo dinâmico de ξ , juntamente com o ponto inicial gerado pelo resultado de um Fluxo de Potência (Tabela 5.8b), tem-se as maiores variações (11 iterações para o sistema IEEE300).

Nota-se nestas duas últimas tabelas, para o método de partida Plana, que o valor de μ_0 igual a 0,01 apresenta o menor número de iterações para todos os sistemas em qualquer um dos métodos de obtenção de ξ . Assim como, os maiores números de iterações estão associados ao maior valor de μ_0 , 100,0.

Os resultados relativos ao método de partida com Fluxo de Potência mostram que valores baixos de μ_0 , associados à partida via fluxo de potência, podem resultar num mau condicionamento do problema, cujo efeito dificulta a convergência, resultando num grande número de iterações. Deve ser observado, que o índice de desempenho que se deseja minimizar é o desvio da magnitude da tensão do valor 1,0 pu. Desta forma, a solução do fluxo de potência produz desvios iniciais distantes daqueles considerados ótimos, diferentemente do que se observa quando se utiliza a partida plana.

Método de Múltiplas Correções Centrais

Os resultados do método de Múltiplas Correções Centrais são apresentados na Tabela 5.9. Pode-se observar que este método apresenta resultados próximos dos encontrados no Método Preditor-Corretor em termos da variação do número de iterações.

Método Múltiplas Correções Centrais ($K = 1$)										
Partida	Plana					Fluxo de Potência				
μ_0	0,01	0,10	1,00	10,0	100,0	0,01	0,10	1,00	10,0	100,0
IEEE14	5	6	7	8	8	5	6	6	6	7
IEEE30	5	7	8	8	9	5	5	5	6	6
IEEE57	5	6	8	8	9	8	9	9	9	10
IEEE118	6	7	8	9	9	17	17	18	18	18
IEEE300	9	10	11	12	13	17	13	14	13	14

Tabela 5.9: Influência de μ_0 no número de iterações para o processo de convergência com Partidas Plana e com Fluxo de Potência no Método Múltiplas Correções Centrais com $K = 1$.

Quando utilizada a opção de Partida Plana, os resultados são semelhantes aos dos casos anteriores. Isto é, valores baixos de μ_0 produzem um menor número de iterações, enquanto que valores elevados produzem um alto número de iterações. Para o ponto inicial obtido do Fluxo de Potência, o número de iterações para o sistema IEEE300 com μ_0 igual a 0,01 é de 17, sendo o único resultado que não tem a mesma tendência mencionada anteriormente.

5.3.3 Função Objetivo: Carregamento de um Sistema de Potência

Método Preditor-Corretor

No caso deste índice de desempenho, os resultados referentes à Partida Plana apresentados na Tabela 5.10, mostram que os menores valores iniciais de μ geram os piores resultados em termos de número de iterações, enquanto que, valores mais elevados tendem a apresentar melhores resultados. Isto indica que este tipo de função objetivo, devido a sua forma analítica, requer um nível de distorção mais elevado do que aquele dos casos anteriores.

A maior variação encontrada para este método de partida é de nove iterações, para o sistema IEEE300. Isto, comparado com a variação obtida para os demais métodos de otimização aplicados a esta função objetivo, pode ser considerado um valor baixo. As tabelas subsequentes mostram que o Método Preditor-Corretor com Partida Plana é o que apresenta a menor sensibilidade à variação do valor inicial do parâmetro de barreira quando aplicado a função objetivo Carregamento de um Sistema de Potência.

Método Preditor-Corretor										
Partida	Plana					Fluxo de Potência				
μ_0	0,01	0,10	1,00	10,0	100,0	0,01	0,10	1,00	10,0	100,0
IEEE14	10	11	8	9	8	-	-	17	9	9
IEEE30	11	11	8	9	8	16	11	10	8	11
IEEE57	10	9	8	8	8	-	-	22	16	12
IEEE118	17	16	14	13	13	-	-	-	-	44
IEEE300	25	16	16	17	-	-	-	-	-	-

Tabela 5.10: *Influência de μ_0 no número de iterações para o processo de convergência com Partidas Plana e com Fluxo de Potência no Método Preditor-Corretor.*

Num grande número de casos, para os quais utilizou-se o método de partida com Fluxo de Potência, nota-se que isto dificulta o processo de convergência (em especial para os sistemas de maior porte). A razão disto é que, na solução do fluxo de potência, diversas variáveis podem estar muito próximas de seus correspondentes limites, o que resulta em discrepâncias nos termos relativos à condição de folga complementar. Por outro lado, os produtos de folga complementar relativos às variáveis próximas aos limites são baixos, e portanto resultam em valores muito reduzidos do fator de passo. Mesmo com esta estratégia de partida, valores iniciais elevados para o parâmetro de barreira levam a um menor número de iterações.

Método Máximo Passo no Caminho Central

Os resultados apresentados nas tabelas 5.11a e 5.11b mostram que, assim como observado para o método Preditor-Corretor, valores altos de μ_0 levam a melhores resultados quanto ao número de iterações. Porém, a variação do número de iterações com relação ao valor inicial do parâmetro de barreira é mais acentuada. Para ξ constante, a maior variação encontrada é de 24 iterações (sistema IEEE300). Se ξ é dinamicamente determinado, há uma variação máxima de 23 iterações para o sistema IEEE118. Isto indica que este método é mais sensível ao valor inicial do parâmetro barreira.

Os resultados referentes à partida com Fluxo de Potência, relativos às duas formas de obtenção de ξ , apresentam resultados similares aos mostrados para o Método Preditor-Corretor. Observa-se novamente, que este método de partida pode não ser adequado para este tipo de função objetivo, por dificultar a convergência em certos casos, conforme explicado anteriormente.

Método Máximo Passo no Caminho Central ($\xi = 3$)										
Partida	Plana					Fluxo de Potência				
μ_0	0,01	0,10	1,00	10,0	100,0	0,01	0,10	1,00	10,0	100,0
IEEE14	28	18	13	10	12	17	15	14	14	13
IEEE30	26	18	11	10	12	16	14	13	11	11
IEEE57	16	14	12	12	15	-	26	24	17	20
IEEE118	41	28	20	20	-	-	-	-	-	-
IEEE300	61	38	37	41	49	-	-	-	-	-

Tabela 5.11a: *Influência de μ_0 no número de iterações para o processo de convergência com Partidas Plana e com Fluxo de Potência no Método Máximo Passo no Caminho Central com $\xi = 3$.*

Método Máximo Passo no Caminho Central ($\xi = \text{variável}$)										
Partida	Plana					Fluxo de Potência				
μ_0	0,01	0,10	1,00	10,0	100,0	0,01	0,10	1,00	10,0	100,0
IEEE14	27	18	13	10	12	18	15	14	12	13
IEEE30	27	18	11	10	12	16	13	13	13	12
IEEE57	15	14	12	12	15	-	27	24	18	33
IEEE118	43	24	21	20	-	-	-	-	-	-
IEEE300	58	38	36	40	43	-	-	-	-	-

Tabela 5.11b: *Influência de μ_0 no número de iterações para o processo de convergência com Partidas Plana e com Fluxo de Potência no Método Máximo Passo no Caminho Central com cálculo dinâmico de ξ .*

Método Múltiplas Correções Centrais

A Tabela 5.12 apresenta os resultados da aplicação do Método de Múltiplas Correções Centrais. As variações referentes ao número de iterações em função do valor de μ_0 são consideráveis, sendo que o pior caso para a Partida Plana é de 16 iterações para o sistema IEEE118. Uma vez mais, é observada uma considerável sensibilidade do método em questão, com relação ao parâmetro barreira.

Método Múltiplas Correções Centrais ($K = 1$)										
Partida	Plana					Fluxo de Potência				
μ_0	0,01	0,10	1,00	10,0	100,0	0,01	0,10	1,00	10,0	100,0
IEEE14	23	14	11	9	10	-	-	12	10	13
IEEE30	19	12	9	9	10	13	10	11	12	12
IEEE57	14	11	10	10	12	29	21	20	18	25
IEEE118	33	21	17	23	21	-	-	-	-	-
IEEE300	39	33	30	40	41	-	-	-	-	-

Tabela 5.12: *Influência de μ_0 no número de iterações para o processo de convergência com Partidas Plana e com Fluxo de Potência no Método Múltiplas Correções Centrais com $K = 1$.*

5.4 Obtenção do Valor da Distância ao Caminho Central ξ no Método de Máximo Passo no Caminho Central

Testes referentes à obtenção do valor da distância ao caminho central ξ são realizados com a intenção de observar o comportamento do processo de convergência do Método de Máximo Passo no Caminho Central.

Conforme visto em Castronuovo, Campagnolo e Salgado (2000), o valor numérico recomendado para a distância ao caminho central deve ser 3, mantendo-se o mesmo durante todo o processo de otimização. Porém, com o objetivo de estudar o comportamento deste método, diferentes valores de ξ são utilizados, de modo a observar a sua influência no processo iterativo.

Além da abordagem descrita anteriormente, é implementado um método dinâmico para o cálculo de ξ . Este cálculo é realizado através do método de busca uni-direcional da Dicotomia (ver Capítulo 3), onde são encontrados os valores mínimo e máximo para a distância ao caminho central, ξ_{min} e ξ_{max} , respectivamente, no intervalo de busca de σ ($0 < \sigma < 1$). Assim, é possível estipular um valor para a distância ξ que esteja entre o valores limite máximo e mínimo. Com isto assegura-se que haverá ao menos uma raiz real que satisfaça as condições necessárias à variável σ .

Utilizando este processo para o cálculo de ξ são estabelecidos dois valores para testes, quais sejam: $\xi_{med} = (\xi_{min} + \xi_{max})/2$, que representa a média dos valores máximo e mínimo da função quártica para a corrente iteração, e $\xi_{Min} = \xi_{min} + \Delta\xi \times 1,05$, onde, $\Delta\xi = (\xi_{max} - \xi_{min})$, representado o valor mínimo da distância ao caminho central acrescido de 5% da variação da magnitude da distância em uma dada iteração. As seções seguintes apresentam o resultado do uso destes valores.

5.4.1 Função Objetivo: Perdas nas Linhas de Transmissão

ξ Constante

Os resultados apresentados na Tabela 5.13 são relativos a função objetivo Perda nas Linhas de Transmissão, utilizando-se o método de partida Plana. A Tabela 5.14 mostra os resultados relativos ao uso da partida com o Fluxo de Potência. O valor inicial de μ utilizado para ambos os métodos de partida é igual a 0,10.

Os resultados apresentados nestas tabelas mostram que, embora ξ varie em uma ampla faixa de valores (de 0,0 a 24,0), não houve uma variação considerável quanto ao número de iterações. Além disto, observa-se que o valor indicado na bibliografia ($\xi = 3$) não garante o melhor resultado em termos do número de iterações. Mesmo com valores de ξ para os quais

Variação de ξ com Partida Plana									
ξ	0,00	3,00	6,00	9,00	12,0	15,0	18,0	21,0	24,0
IEEE14	11	10	10	10	11	11	11	11	11
IEEE30	11	11	10	10	11	11	11	11	11
IEEE57	11	11	11	11	11	11	11	11	11
IEEE118	11	12	11	11	11	11	11	11	11
IEEE300	15	16	17	15	15	15	15	15	15

Tabela 5.13: *Influência de ξ no número de iterações para Função Objetivo Perda nas Linhas de Transmissão, com $\mu_0 = 0, 1$ e Partida Plana.*

Variação de ξ com Partida com Fluxo de Potência									
ξ	0,00	3,00	6,00	9,00	12,0	15,0	18,0	21,0	24,0
IEEE14	8	9	9	8	8	8	8	8	8
IEEE30	9	10	10	9	9	9	9	9	9
IEEE57	10	10	10	10	10	10	10	10	10
IEEE118	17	15	14	14	13	13	14	14	15
IEEE300	15	12	12	13	13	13	14	14	13

Tabela 5.14: *Influência de ξ no número de iterações para Função Objetivo Perda nas Linhas de Transmissão, com $\mu_0 = 0, 1$ e Partida com Fluxo de Potência.*

não é possível encontrar raízes reais no intervalo $0, 0 < \sigma < 1, 0$, para a equação quártica

$$\xi(\sigma) = \left\| \frac{[\sigma \Delta \mathbf{S}_c + (1 - \sigma) \Delta \mathbf{S}_a][\sigma \Delta \boldsymbol{\pi}_c + (1 - \sigma) \Delta \boldsymbol{\pi}_a]}{\sigma \hat{\mu}} \right\|$$

discutida previamente no Capítulo 3, o processo de convergência ocorre com praticamente o mesmo número de iterações encontrados no caso oposto. Isto pode ser melhor observado na Tabela 5.15, onde são apresentados valores de σ calculados para diferentes valores de ξ , a cada iteração do processo de minimização função objetivo Perda nas Linhas de Transmissão, utilizando partida Plana e $\mu_0 = 0, 10$, para o sistema IEEE30.

Os valores grifados são aqueles atribuídos à variável σ quando não é possível obter seu valor através da resolução da equação quártica, conforme sugere a referência (GONZAGA, 1997).

A Figura 5.2 mostra a curva gerada pela equação quártica, no intervalo de interesse de σ , para o sistema IEEE30 nas iterações 1 e 3 do processo iterativo, utilizando o valor da distância ao caminho central igual a 15 e partida Plana.

Como é possível observar na Figura 5.2(b), para determinados valores de ξ não é possível encontrar valores reais para σ , pois o valor atribuído à distância ao caminho central não está entre os valores máximo e mínimo de ξ para uma dada iteração.

Convém ressaltar que a forma da curva gerada pela equação quártica mantém as mesmas características para a grande maioria dos casos estudados. Desta forma, valores elevados de ξ tendem a resultar em valores baixos de σ . Assim, para que a parcela de centralização

Sistema IEEE30 - Partida Plana									
ξ	0,00	3,00	6,00	9,00	12,0	15,0	18,0	21,0	24,0
1	0,100	0,621	0,375	0,271	0,213	0,175	0,149	0,130	0,115
2	0,100	0,963	0,418	0,268	0,198	0,157	0,130	0,111	0,100
3	0,100	0,161	0,104	0,100	0,100	0,100	0,100	0,100	0,100
4	0,100	0,108	0,101	0,100	0,100	0,100	0,100	0,100	0,100
5	0,100	0,315	0,218	0,159	0,125	0,104	0,100	0,100	0,100
6	0,100	0,305	0,233	0,180	0,142	0,118	0,101	0,100	0,100
7	0,100	0,308	0,219	0,185	0,137	0,116	0,102	0,100	0,100
8	0,100	0,415	0,120	0,100	0,180	0,181	0,160	0,140	0,124
9	0,100	0,164	0,172	0,139	0,100	0,100	0,100	0,100	0,100
10	0,100	0,232	0,172	0,140	0,106	0,100	0,100	0,100	0,100
11	0,100	0,211	-	-	0,115	0,100	0,100	0,100	0,100

Tabela 5.15: Valores de σ a cada iteração para diferentes valores de ξ , com $\mu_0 = 0,1$ e Partida Plana aplicados à função objetivo Perda nas Linhas de Transmissão.

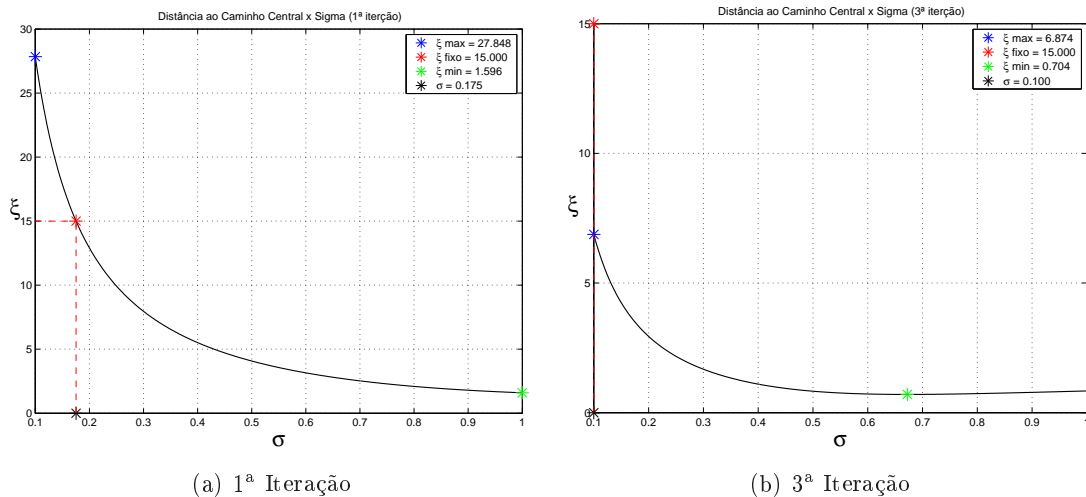


Figura 5.2: Gráficos gerados pela equação quártica para o sistema IEEE30 nas iterações 1 e 3 com $\xi = 15$ e partida Plana.

tenha sua influência aumentada quando da composição da direção de busca do processo de otimização é aconselhável adotar valores baixos para ξ .

ξ Calculado Dinamicamente

Utilizando o processo dinâmico para o cálculo de ξ observou-se que, em função da forma da curva gerada pela equação quártica, é possível estabelecer uma relação direta entre o valor médio da distância ao caminho central, ξ_{med} , e o valor de σ para uma dada iteração do processo iterativo.

Esta relação pode ser observada na Tabela 5.16, onde são mostrados dados relativos a minimização da função objetivo Perda nas Linhas de Transmissão com partida Plana e $\mu_0 =$

0,10.

Observa-se que, embora o valor médio da distância ao caminho central varie em cada iteração do processo de convergência, o valor de σ permanece próximo a 0,17. Desta forma, pode-se afirmar que ao utilizar $\xi = \xi_{med}$ faz-se com que a contribuição da parcela de centralização à direção de busca do processo de otimização seja de aproximadamente 17%. Este valor, em termos percentuais, representa um valor muito próximo ao que seria atribuído à variável σ caso não fosse possível encontrar raízes reais que estivessem no intervalo de interesse. Desta forma, na intenção de ampliar a participação da direção de centralização, optou-se por eleger um novo valor para ξ que proporcionasse um valor mais elevado para σ .

Valores de σ para $\xi =$ Valor Médio										
Sistema	IEEE14		IEEE30		IEEE57		IEEE118		IEEE300	
Iter	ξ	σ	ξ	σ	ξ	σ	ξ	σ	ξ	σ
1	11,505	0,178	14,722	0,178	29,533	0,179	17,672	0,178	305,637	0,181
2	14,750	0,181	12,985	0,179	8,372	0,173	22,094	0,179	38,671	0,177
3	2,406	0,168	3,755	0,164	7,815	0,182	6,739	0,170	26,919	0,173
4	4,457	0,183	3,474	0,180	6,879	0,176	8,802	0,178	24,517	0,174
5	5,288	0,165	6,951	0,171	10,154	0,172	18,912	0,174	19,523	0,168
6	6,043	0,178	8,302	0,177	24,773	0,179	38,879	0,178	14,329	0,169
7	6,092	0,175	9,454	0,174	13,163	0,172	27,511	0,177	25,612	0,175
8	5,329	0,170	4,661	0,169	22,828	0,178	19,574	0,177	29,931	0,174
9	5,075	0,166	4,889	0,180	13,492	0,175	14,370	0,176	32,193	0,168
10	3,097	0,178	4,736	0,181	9,037	0,174	13,349	0,177	42,641	0,177
11	-	-	-	-	4,908	0,175	9,023	0,173	33,072	0,175
12	-	-	-	-	-	-	-	-	28,059	0,173
13	-	-	-	-	-	-	-	-	13,970	0,167
14	-	-	-	-	-	-	-	-	10,706	0,173
15	-	-	-	-	-	-	-	-	7,066	0,175
Média	6,404	0,174	7,393	0,175	13,723	0,176	17,902	0,176	43,523	0,173

Tabela 5.16: Valores de σ a cada iteração do processo de minimização da função objetivo Perdas Nas Linhas de Transmissão, com $\xi =$ Valor Médio, Partida Plana e $\mu_0 = 0,10$.

A escolha natural deste valor levaria a $\xi = \xi_{min}$, porém, para esta escolha σ seria aproximadamente igual a 1 para praticamente todas as iterações, o que geralmente ocasiona a não convergência do processo iterativo, já que apenas a direção de centralização é utilizada. Assim, o novo valor adotado para ξ é igual a ξ_{min} acrescido de 5% da diferença entre ξ_{max} e ξ_{min} . A Tabela 5.17 mostra resultados obtidos com as mesmas condições descritas para os resultados anteriores, exceto pelo novo valor de ξ .

Observa-se que o valor de σ para cada iteração do processo aumentou consideravelmente e se mantém próximo a 0,56, implicando em uma contribuição da direção de centralização na direção de busca de aproximadamente 56%.

Comparando os resultados mostrados nas tabelas 5.16 e 5.17 nota-se que o número de ite-

Valores de σ para $\xi = \xi_{min} + \Delta\xi \times 0,05$										
Sistema	IEEE14		IEEE30		IEEE57		IEEE118		IEEE300	
Iter	ξ	σ	ξ	σ	ξ	σ	ξ	σ	ξ	σ
1	2,365	0,611	3,068	0,611	6,933	0,619	3,255	0,610	84,859	0,642
2	6,319	0,661	5,272	0,649	1,652	0,550	6,270	0,645	8,529	0,606
3	1,037	0,370	1,260	0,366	0,737	0,561	1,760	0,475	7,629	0,511
4	0,147	0,727	0,116	0,721	0,210	0,637	0,361	0,605	5,809	0,600
5	0,125	0,608	0,104	0,568	0,188	0,596	0,419	0,580	3,976	0,407
6	0,180	0,576	0,170	0,569	0,265	0,575	0,598	0,572	2,304	0,456
7	0,256	0,569	0,260	0,570	0,388	0,572	0,854	0,570	1,400	0,588
8	0,311	0,562	0,351	0,566	0,537	0,568	1,174	0,567	1,660	0,570
9	0,320	0,560	0,403	0,562	0,673	0,564	1,463	0,562	1,992	0,563
10	0,313	0,564	0,410	0,563	0,820	0,571	1,634	0,564	2,179	0,559
11	0,310	0,563	0,411	0,564	0,916	0,551	1,558	0,540	2,137	0,559
12	0,330	0,564	0,439	0,564	0,979	0,559	1,287	0,550	2,261	0,568
13	0,388	0,565	0,502	0,563	1,033	0,562	1,029	0,554	2,890	0,496
14	0,453	0,561	0,550	0,558	1,091	0,534	0,875	0,559	3,250	0,573
15	0,458	0,554	0,634	0,579	0,802	0,534	0,798	0,560	1,925	0,516
16	0,403	0,559	0,419	0,482	0,601	0,532	0,770	0,547	0,981	0,533
17	0,363	0,561	0,259	0,559	0,334	0,538	0,546	0,529	0,598	0,545
18	-	-	-	-	-	-	-	-	0,448	0,557
19	-	-	-	-	-	-	-	-	0,364	0,561
Média	0,828	0,573	0,860	0,566	1,068	0,566	1,450	0,564	7,115	0,548

Tabela 5.17: Valores de σ a cada iteração do processo de minimização da função objetivo Perdas Nas Linhas de Transmissão, com $\xi = \xi_{min} + \Delta\xi \times 0,05$, Partida Plana e $\mu_0 = 0,10$.

rações aumentou para todos os sistemas testados quando a parcela de centralização aumentou de aproximadamente 17% para 56%. Isto demonstra que, para esta função objetivo e utilizando o método de partida plana, a estratégia de “privilegiar” a direção de centralização não obteve bons resultados, sendo então mais eficiente, em termos do número de iterações, utilizar o valor médio de ξ fazendo com que a direção centralizadora tenha uma menor participação no processo de busca do ponto ótimo.

Ao comparar os resultados obtidos com ξ constante e variável, vê-se que ao utilizar o cálculo dinâmico do valor médio, atingimos resultados idênticos aos melhores obtidos no caso estático. Assim, com base nos resultados, pode-se afirmar que é viável a utilização desta metodologia para esta função objetivo utilizando o método de partida Plana.

Ao executar os mesmos testes descritos anteriormente, mas agora utilizando o método de partida com Fluxo de Potência, observou-se que, ao atribuir a ξ o valor médio, as primeiras iterações apresentam variações no valor de σ . Estas variações tendem a aumentar a influência da direção de centralização para algumas iterações, chegando a 93% no caso do sistema IEEE30 para a quinta iteração, como mostrado na Tabela 5.18. Porém, após esta variação, os valores de σ aproximam-se novamente de 0,17, assim como mostrado para o método de partida Plana.

Valores de σ para $\xi = \text{Valor Médio}$										
Sistema	IEEE14		IEEE30		IEEE57		IEEE118		IEEE300	
Iter	ξ	σ	ξ	σ	ξ	σ	ξ	σ	ξ	σ
1	1,984	0,358	2,269	0,327	3,773	0,280	7,650	0,204	6,326	0,210
2	2,999	0,355	17,040	0,604	4,814	0,158	9,809	0,155	9,155	0,167
3	1,953	0,168	2,098	0,384	8,355	0,149	14,459	0,160	18,535	0,170
4	4,409	0,169	6,887	0,574	11,250	0,168	19,341	0,171	28,845	0,171
5	7,015	0,177	0,899	0,939	21,371	0,173	33,940	0,173	44,544	0,147
6	4,640	0,172	2,062	0,174	14,616	0,170	35,194	0,171	64,114	0,139
7	5,341	0,169	5,494	0,172	17,889	0,175	33,736	0,168	35,105	0,175
8	7,524	0,178	7,882	0,177	13,613	0,173	41,888	0,178	43,552	0,175
9	4,049	0,172	7,794	0,173	10,685	0,175	30,279	0,175	29,894	0,171
10	-	-	15,457	0,179	5,408	0,172	24,993	0,164	26,246	0,174
11	-	-	3,695	0,172	-	-	15,846	0,174	14,905	0,171
12	-	-	4,450	0,180	-	-	14,066	0,177	10,515	0,171
13	-	-	4,239	0,181	-	-	12,933	0,177	6,354	0,171
14	-	-	-	-	-	-	8,717	0,172	-	-
Media	4,435	0,213	6,174	0,326	11,177	0,179	21,632	0,173	26,007	0,170

Tabela 5.18: Valores de σ a cada iteração do processo de minimização da função objetivo Perdas Nas Linhas de Transmissão, com $\xi = \text{Valor Médio}$, Partida com Fluxo de Potência e $\mu_0 = 0, 10$.

Estas variações no valor de σ nas primeiras iterações do processo de otimização para o método de partida com Fluxo de Potência podem ser entendidas como um período de acomodação, no qual a forma característica da curva gerada pela função quadrática é deformada. Estas deformações são apresentadas na Figura 5.3, onde são mostradas curvas referentes a primeira e a segunda iterações do processo de minimização da função Perda nas Linha de Transmissão com partida com Fluxo de Potência para o sistema IEEE30.

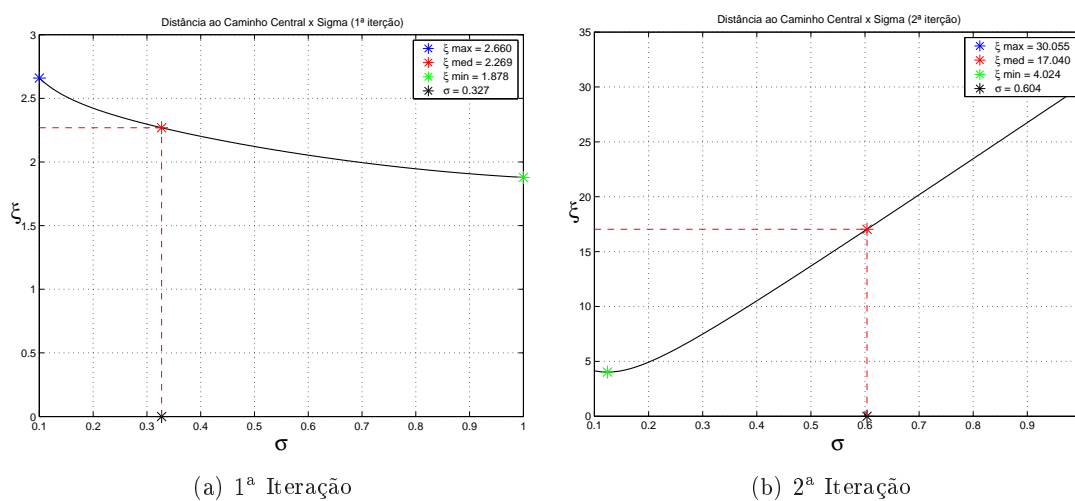


Figura 5.3: Gráficos gerados pela equação quártica para o sistema IEEE30 nas iterações 1 e 2 com $\xi = \xi_{med}$ e partida com Fluxo de Potência.

O resultado destes altos valores associados a variável σ nas primeiras iterações se reflete no número final de iterações, fazendo com que os resultados obtidos para ξ estático sejam melhores, como pode ser observado na Tabela 5.19, onde são mostrados resultados para o sistema IEEE30 utilizando partida com Fluxo de Potência e valores constantes para ξ .

Sistema IEEE30 - Partida com Fluxo de Potência									
ξ	0,00	3,00	6,00	9,00	12,0	15,0	18,0	21,0	24,0
1	0,100	0,100	0,100	0,100	0,100	0,100	0,100	0,100	0,100
2	0,100	0,447	0,747	0,100	0,100	0,100	0,100	0,100	0,100
3	0,100	0,251	0,107	0,159	0,123	0,100	0,100	0,100	0,100
4	0,100	0,311	0,210	0,188	0,156	0,132	0,111	0,100	0,100
5	0,100	0,298	0,239	0,123	0,100	0,100	0,100	0,100	0,100
6	0,100	0,299	0,213	0,377	0,299	0,241	0,202	0,174	0,155
7	0,100	0,458	0,377	0,100	0,100	0,100	0,100	0,100	0,100
8	0,100	0,158	0,100	0,128	0,100	0,100	0,100	0,100	0,100
9	0,100	0,231	0,170	0,153	0,135	0,112	0,100	0,100	0,100
10	-	0,212	0,171	-	-	-	-	-	-

Tabela 5.19: Valores de σ a cada iteração para diferentes valores de ξ , com $\mu_0 = 0,1$ e Partida Com Fluxo de Potência aplicados à função objetivo Perda nas Linhas de Transmissão.

5.4.2 Função Objetivo: Desvio de um Nível de Tensão Pré-Estabelecido

ξ Constante

As Tabelas 5.20 e 5.21 apresentam os resultados para o processo de minimização da função objetivo Desvio de um Nível de Tensão Pré-Estabelecido para as partidas Plana e com Fluxo de Potência. O valor inicial de μ é igual a 0,01 para todos os testes realizados nesta seção.

Variação de ξ com Partida Plana									
ξ	0,00	3,00	6,00	9,00	12,0	15,0	18,0	21,0	24,0
IEEE14	6	7	6	6	6	6	6	6	6
IEEE30	6	7	6	6	6	6	6	6	6
IEEE57	6	6	6	6	6	6	6	6	6
IEEE118	6	8	7	6	6	6	6	6	6
IEEE300	9	9	9	8	8	9	9	9	9

Tabela 5.20: *Influência de ξ no número de iterações para a Função Objetivo Desvio de um Nível de Tensão Pré-Estabelecido, com $\mu_0 = 0,01$ e Partida Plana.*

Variação de ξ com Partida com Fluxo de Potência									
ξ	0,00	3,00	6,00	9,00	12,0	15,0	18,0	21,0	24,0
IEEE14	6	6	6	6	5	6	6	6	6
IEEE30	5	6	5	5	5	5	5	5	5
IEEE57	7	7	7	7	7	7	7	7	7
IEEE118	16	15	12	10	13	13	14	14	14
IEEE300	14	14	16	15	11	12	12	35	38

Tabela 5.21: *Influência de ξ no número de iterações para a Função Objetivo Desvio de um Nível de Tensão Pré-Estabelecido, com $\mu_0 = 0,01$ e Partida com Fluxo de Potência.*

A exemplo dos resultados obtidos para a função objetivo Perda nas Linhas de Transmissão discutidos na seção 5.4.1, os valores referentes ao número de iterações para a função Desvio de Nível de Tensão Pré-Especificado com partida Plana não apresentam grande variação para os diferentes valores atribuídos a ξ . Como pode ser observado na Tabela 5.22, mesmo para valores de ξ para os quais não é possível o cálculo de σ (valores em destaque), não há variação no número de iterações para o sistema IEEE57 ao utilizar o método de partida Plana. Além disto, observando os resultados apresentados nas tabelas 5.20 e 5.21, constata-se que os menores valores obtidos para o número de iterações não estão associados a $\xi = 3$, valor este, indicado na bibliografia.

Para o método de partida com Fluxo de Potência (Tabela 5.21), nota-se uma grande variação no número de iterações para os sistemas de maior porte, em especial, para o sistema IEEE300, para o qual há uma variação de 27 iterações para os valores 12 e 24 de ξ .

Sistema IEEE57 - Partida Plana									
ξ	0,00	3,00	6,00	9,00	12,0	15,0	18,0	21,0	24,0
1	0,100	0,100	0,649	0,462	0,362	0,298	0,254	0,221	0,195
2	0,100	0,368	0,204	0,154	0,124	0,103	0,100	0,100	0,100
3	0,100	0,132	0,100	0,100	0,100	0,100	0,100	0,100	0,100
4	0,100	0,241	0,148	0,100	0,100	0,100	0,100	0,100	0,100
5	0,100	0,256	0,186	0,127	0,100	0,100	0,100	0,100	0,100
6	0,100	0,273	0,241	0,211	0,166	0,133	0,111	0,100	0,100

Tabela 5.22: Valores de σ a cada iteração para diferentes valores de ξ , com $\mu_0 = 0,01$ e Partida Plana aplicados à função objetivo Desvio de um Nível de Tensão Pré-Especificado.

ξ Calculado Dinamicamente

Assim como no caso dos testes executados para a função objetivo Perda nas Linhas de Transmissão, os valores atribuídos a ξ contemplam o valor médio $\xi_{med} = (\xi_{max} + \xi_{min})/2$ e o valor mínimo mais 5% da diferença entre o valor máximo e mínimo da distância ao caminho central para cada iteração, $\xi_{Min} = \xi_{min} + \Delta\xi \times 0,05$.

A Tabela 5.23 apresenta os resultados obtidos para a função objetivo Desvio de um Nível de Tensão Pré-Estabelecido utilizando o método de partida Plana, com $\xi = \xi_{med}$. Novamente a relação entre o valor médio de ξ e o valor de σ , para cada iteração, é encontrada. Assim, a contribuição da parcela de centralização para a formação da direção de busca do processo de minimização da função objetivo é de aproximadamente 17%.

Valores de σ para $\xi =$ Valor Médio										
Sistema	IEEE14		IEEE30		IEEE57		IEEE118		IEEE300	
Iter	ξ	σ	ξ	σ	ξ	σ	ξ	σ	ξ	σ
1	10,530	0,178	14,558	0,178	26,400	0,179	17,201	0,178	290,09	0,182
2	14,516	0,181	13,662	0,179	8,301	0,175	21,173	0,178	37,934	0,179
3	2,754	0,170	5,771	0,172	3,531	0,175	10,474	0,172	20,979	0,172
4	4,116	0,178	6,978	0,178	4,075	0,175	9,742	0,176	17,280	0,174
5	4,975	0,174	3,796	0,177	5,482	0,178	9,699	0,177	10,312	0,171
6	4,558	0,178	3,176	0,180	7,635	0,180	11,109	0,178	9,299	0,158
7	3,086	0,179	-	-	-	-	-	-	9,586	0,178
8	1,304	0,179	-	-	-	-	-	-	10,448	0,180
9	-	-	-	-	-	-	-	-	11,742	0,181
Média	5,730	0,177	7,990	0,177	9,237	0,177	13,233	0,176	46,408	0,175

Tabela 5.23: Valores de σ a cada iteração do processo de minimização da função objetivo Desvio de um Nível de Tensão Pré-Especificado, com $\xi =$ Valor Médio, Partida Plana e $\mu_0 = 0,01$.

Os testes realizados especificando-se $\xi = \xi_{Min}$ apresentam a mesma relação numérica correspondente à σ verificada para a função Perda nas Linhas de Transmissão. Ou seja, a contribuição da direção de centralização fica em trono de 56% da direção de busca (Tabela

5.24). Porém, o aumento desta contribuição não gera resultados da qualidade daqueles obtidos nos testes anteriores.

Valores de σ para $\xi = \xi_{min} + \Delta\xi \times 0,05$										
Sistema	IEEE14		IEEE30		IEEE57		IEEE118		IEEE300	
Iter	ξ	σ	ξ	σ	ξ	σ	ξ	σ	ξ	σ
1	2,235	0,612	2,992	0,611	6,321	0,621	3,026	0,612	80,866	0,643
2	6,149	0,662	5,089	0,656	1,228	0,552	5,526	0,641	8,269	0,635
3	1,022	0,374	1,223	0,452	0,217	0,499	1,789	0,467	6,032	0,460
4	0,160	0,609	0,471	0,586	0,170	0,573	0,723	0,581	2,670	0,597
5	0,175	0,581	0,400	0,545	0,202	0,569	0,599	0,564	0,685	0,539
6	0,223	0,570	0,330	0,554	0,230	0,566	0,565	0,562	0,628	0,564
7	0,266	0,565	0,257	0,554	0,251	0,564	0,558	0,562	0,600	0,563
8	0,289	0,562	0,197	0,555	0,256	0,562	0,540	0,561	0,558	0,562
9	0,283	0,559	0,152	0,556	0,244	0,561	0,514	0,562	0,503	0,561
10	0,257	0,558	0,121	0,559	0,230	0,563	0,501	0,563	0,441	0,561
11	0,222	0,558	0,100	0,561	0,220	0,564	0,491	0,561	0,383	0,562
12	0,182	0,557	0,081	0,560	0,208	0,564	0,457	0,559	0,332	0,563
13	0,140	0,555	0,062	0,557	0,193	0,564	0,407	0,560	0,284	0,562
14	0,099	0,552	-	-	-	-	-	-	0,238	0,561
15	0,065	0,548	-	-	-	-	-	-	-	-
16	0,039	0,543	-	-	-	-	-	-	-	-
17	0,023	0,540	-	-	-	-	-	-	-	-
Média	0,696	0,559	0,883	0,562	0,767	0,563	1,207	0,566	7,321	0,567

Tabela 5.24: Valores de σ a cada iteração do processo de minimização da função objetivo Desvio de um Nível de Tensão Pré-Especificado, com $\xi = \xi_{min} + \Delta\xi \times 0,05$, Partida Plana e $\mu_0 = 0,01$.

Nos testes realizados com $\xi = \xi_{med}$ e partida via Fluxo de Potência (Tabela 5.25), nota-se que a relação $\xi \times \sigma$ correspondente à partida plana não ocorre para o sistema IEEE300 em algumas das iterações do processo de minimização, levando a um aumento dos valores calculados para σ . Isto acentua a participação da direção de centralização, o que leva a um aumento no número de iterações para a convergência. O sistema IEEE118 também apresenta um aumento de mais de 100% no número de iterações, mas ao observar os valores de σ constata-se que estes estão próximos a 0,17 para praticamente todas as iterações. Assim, só é possível associar esta variação à diferença entre os valores iniciais dos diferentes métodos de partida aplicados.

Analisando a natureza da função objetivo Desvio de um Nível de Tensão Pré-Especificado, pode-se afirmar que, como os valores pré-estabelecidos para o módulo das tensões complexas nas barras e tapes dos transformadores com comutação automática sob-carga são iguais a 1,0 pu, a partida Plana propicia uma convergência mais rápida. Na partida com Fluxo de Potência estas variáveis são inicializadas com valores diferentes de 1,0 pu. Esta relação é melhor observada por sistemas de maior porte (IEEE118 e IEEE300), para os quais a complexidade dos problemas de otimização é mais elevada.

Valores de σ para $\xi = \text{Valor Médio}$										
Sistema	IEEE14		IEEE30		IEEE57		IEEE118		IEEE300	
Iter	ξ	σ	ξ	σ	ξ	σ	ξ	σ	ξ	σ
1	2,524	0,211	7,952	0,178	12,601	0,183	13,243	0,176	25,325	0,182
2	6,453	0,150	8,024	0,164	16,817	0,174	18,799	0,176	710,26	0,176
3	6,473	0,176	6,805	0,171	11,978	0,165	24,740	0,169	21,110	0,172
4	5,745	0,171	3,974	0,169	6,927	0,172	28,262	0,176	731,56	0,613
5	4,932	0,174	3,028	0,180	4,742	0,149	22,874	0,175	239,39	0,179
6	2,722	0,176	3,621	0,181	3,683	0,166	15,387	0,157	721,85	0,180
7	1,430	0,177	-	-	4,841	0,175	16,011	0,156	7197,8	0,558
8	-	-	-	-	-	-	11,797	0,167	964,07	0,162
9	-	-	-	-	-	-	108,89	0,156	77926,	0,170
10	-	-	-	-	-	-	11,112	0,161	98×10^6	0,179
11	-	-	-	-	-	-	9,792	0,139	21519,	0,180
12	-	-	-	-	-	-	6,325	0,175	28,320	0,162
13	-	-	-	-	-	-	-	-	2071,5	0,605
14	-	-	-	-	-	-	-	-	136,43	0,182
15	-	-	-	-	-	-	-	-	16,401	0,164
16	-	-	-	-	-	-	-	-	51,098	0,548
17	-	-	-	-	-	-	-	-	31,533	0,181
18	-	-	-	-	-	-	-	-	26,845	0,174
19	-	-	-	-	-	-	-	-	46,946	0,332
20	-	-	-	-	-	-	-	-	15,070	0,179
21	-	-	-	-	-	-	-	-	6,379	0,149
Media	4,326	0,176	5,567	0,174	8,798	0,169	23,936	0,165	$4,7 \times 10^6$	0,258

Tabela 5.25: Valores de σ a cada iteração do processo de minimização da função objetivo Desvio de um Nível de Tensão Pré-Especificado, com $\xi = \text{Valor Médio}$, Partida com Fluxo de Potência $\mu_0 = 0,01$.

5.4.3 Função Objetivo: Carregamento de um Sistema de Potência

ξ Constante

Conforme observado nos casos analisados anteriormente, o valor $\xi = 3$ não implica necessariamente no melhor desempenho do método de Máximo Passo no Caminho Central. Isto é confirmado na maximização do Carregamento de um Sistema de Potência, utilizando $\mu_0 = 10,0$ com partidas Plana e com Fluxo de Potência (ver tabelas 5.26 e 5.27).

Variação de ξ com Partida Plana									
ξ	0,00	3,00	6,00	9,00	12,0	15,0	18,0	21,0	24,0
IEEE14	10	10	11	11	10	10	10	10	10
IEEE30	11	10	11	11	11	10	10	10	10
IEEE57	12	12	12	12	12	12	12	12	12
IEEE118	20	20	20	20	20	20	20	20	20
IEEE300	41	41	41	40	40	40	41	40	40

Tabela 5.26: Influência de ξ no número de iterações do método de Máximo Passo no Caminho Central, com $\mu_0 = 10,0$ e Partida Plana.

Variação de ξ com Partida com Fluxo de Potência									
ξ	0,00	3,00	6,00	9,00	12,0	15,0	18,0	21,0	24,0
IEEE14	14	14	14	13	12	12	12	12	12
IEEE30	13	11	13	13	13	13	13	13	13
IEEE57	17	17	17	17	17	17	17	16	16

Tabela 5.27: Influência de ξ no número de iterações do método de Máximo Passo no Caminho Central, com $\mu_0 = 10,0$ e Partida com Fluxo de Potência.

Novamente a variação de ξ não gera diferenças consideráveis quanto ao número de iterações necessárias para a convergência dos problemas de otimização analisados nesta seção. Para os sistemas IEEE118 e IEEE300, o método de partida via Fluxo de Potência inviabilizou a convergência do processo iterativo, razão pela qual esses sistemas não figuram na Tabela 5.27.

Os resultados para os sistema IEEE300 mostram que, independentemente do valor fixo associado à ξ para o método de partida Plana, até a iteração de número 39 não é possível obter uma raiz real que satisfaça as condições para a variável σ , conforme mostrado na Tabela 5.28. Resultados semelhantes ao apresentado para o sistema IEEE300, são obtidos para os demais sistemas. Desta forma é justificável a pouca variação no número de iterações, que é a menor apresentada dentre as três funções objetivo estudadas.

Os resultados apresentados para os sistemas IEEE14, IEEE30 e IEEE57 utilizando a partida com Fluxo de Potência, são inferiores em termos do número de iterações quando comparados com os obtidos com o método de partida Plana. Portanto, é aconselhável a utilização da partida Plana para este método de obtenção de ξ .

Sistema IEEE300 - Partida Plana									
ξ	0,00	3,00	6,00	9,00	12,0	15,0	18,0	21,0	24,0
1	0,100	0,100	0,100	0,100	0,100	0,100	0,100	0,100	0,100
2	0,100	0,100	0,100	0,100	0,100	0,100	0,100	0,100	0,100
3	0,100	0,100	0,100	0,100	0,100	0,100	0,100	0,100	0,100
4	0,100	0,100	0,100	0,100	0,100	0,100	0,100	0,100	0,100
...
39	0,100	0,100	0,100	0,100	0,100	0,100	0,100	0,988	0,867
40	0,100	0,100	0,100	0,855	0,648	0,521	0,436	0,203	0,181
41	0,100	0,534	0,270	-	-	-	0,100	-	-

Tabela 5.28: Valores de σ a cada iteração para diferentes valores de ξ , com $\mu_0 = 10,0$ e Partida Plana aplicados à função objetivo Carregamento de um Sistema de Potência.

ξ Calculado Dinamicamente

Os resultados apresentados na Tabela 5.29 são referentes à $\xi = \xi_{med}$ utilizando partida Plana. Constata-se que os resultados obtidos com esta estratégia são iguais ou melhores do que aqueles obtidos com ξ constante para a mesma solução inicial. Assim, como esta abordagem não exige uma pré-seleção do valor ótimo de ξ , o cálculo dinâmico do valor médio da distância ao caminho central é mais confiável do que a adoção do valor constante.

Nota-se também que o valor médio de σ , a cada iteração, associado à ξ_{med} sofre uma ligeira variação com relação às duas funções objetivo mostradas anteriormente (método de partida Plana). Isto é, a contribuição da direção centralizadora no presente caso passa a ser de aproximadamente 18,2% da direção de busca do processo de otimização.

Os resultados obtidos para ξ_{Min} apresentam valores muito próximos daqueles obtidos para ξ_{med} . Observe-se porém, que a relação entre ξ_{Min} e σ aumenta para aproximadamente 0,64, indicando que o aumento da parcela centralizadora na direção de busca do processo de otimização não interferiu significativamente na busca do ponto ótimo. Estes resultados são apresentados na Tabela 5.30.

5.5 Número Máximo de Correções Centralizadas

Os testes realizados com o Método de Múltiplas Correções Centrais, visam observar o número de correções centralizadoras, cujo valor máximo é denotado por \mathbf{K} , que mais efetivamente propiciam a convergência do processo iterativo. O estudo é feito com as três funções objetivo analisadas anteriormente e usando os métodos de partida Plana e via Fluxo de Potência. Os valores iniciais do parâmetro de barreira são escolhidos entre aqueles que forneceram os melhores resultados apresentados na seção 5.3.

Assim com visto em Torres e Quintana (2001), a faixa de variação do número máximo de correções é de 1 a 9. Esta faixa desconsidera a relação do esforço computacional comentada no

Valores de σ para $\xi = \text{Valor Médio}$										
Sistema	IEEE14		IEEE30		IEEE57		IEEE118		IEEE300	
Iter	ξ	σ	ξ	σ	ξ	σ	ξ	σ	ξ	σ
1	28,4	0,179	16,1	0,178	11,0	0,179	12,3	0,179	272,9	0,181
2	209,9	0,182	195,8	0,182	179,8	0,182	3168,	0,182	610,3	0,182
3	109,3	0,182	120,9	0,182	204,2	0,182	257,7	0,182	262,3	0,182
4	105,5	0,182	111,9	0,182	58,8	0,182	213,1	0,182	2171,	0,182
5	80,4	0,182	168,1	0,182	52,6	0,182	269,8	0,182	263,0	0,182
6	82,6	0,182	69,7	0,181	38,3	0,182	380,9	0,182	218,3	0,182
7	79,2	0,182	102,6	0,182	149,9	0,182	394,3	0,182	251,7	0,182
8	49,9	0,182	152,7	0,182	236,5	0,182	236,3	0,182	345,7	0,182
9	189,5	0,182	96,5	0,182	248,7	0,182	218,8	0,182	381,7	0,182
10	38,5	0,182	137,2	0,182	280,2	0,182	298,0	0,182	344,5	0,182
11	-	-	-	-	173,2	0,182	348,4	0,182	347,2	0,182
12	-	-	-	-	119,6	0,182	283,4	0,182	370,3	0,182
13	-	-	-	-	-	-	216,7	0,182	363,8	0,182
14	-	-	-	-	-	-	204,0	0,182	386,1	0,182
15	-	-	-	-	-	-	239,8	0,182	482,6	0,182
16	-	-	-	-	-	-	406,5	0,182	316,8	0,182
17	-	-	-	-	-	-	190,1	0,182	317,4	0,182
18	-	-	-	-	-	-	164,2	0,182	633,7	0,182
19	-	-	-	-	-	-	148,1	0,182	295,3	0,182
20	-	-	-	-	-	-	66,8	0,180	429,9	0,182
21	-	-	-	-	-	-	-	-
...
39	-	-	-	-	-	-	-	-	33,8	0,182
Media	97,32	0,182	117,1	0,181	146,0	0,182	385,8	0,182	351,0	0,182

Tabela 5.29: Valores de σ a cada iteração do processo de minimização da função objetivo Carregamento de Sistema de Potência, com $\xi = \text{Valor Médio}$, Partida Plana e $\mu_0 = 10,0$.

capítulo 3, onde são comparados os tempos de CPU para o processo de fatoração das matrizes de coeficientes e o tempo de processamento da primeira correção central. Este procedimento visa uma melhor análise do comportamento do método, para diferentes valores de \mathbf{K} .

5.5.1 Função Objetivo: Perdas nas Linhas de Transmissão

Os testes realizados para este índice de desempenho com partida Plana, mostram que o aumento no número máximo de correções centrais tende a resultar numa diminuição do número de iterações para a convergência. Em alguns casos, este aumento inviabiliza a convergência do processo iterativo, como pode ser observado na Tabela 5.31, para os sistemas IEEE57 com $\mathbf{K} = 7$, IEEE118 com $\mathbf{K} = 5$ e IEEE300 com \mathbf{K} variando de 3 a 9. Os traços indicam a não convergência do processo e os valores em destaque mostram o menor número de iterações obtidos para cada sistema.

A Figura 5.4 apresenta a norma do gradiente, o parâmetro de barreira e o fator de passo

Valores de σ para $\xi = \xi_{min} + \Delta\xi \times 0,05$										
Sistema	IEEE14		IEEE30		IEEE57		IEEE118		IEEE300	
Iter	ξ	σ	ξ	σ	ξ	σ	ξ	σ	ξ	σ
1	6,95	0,623	3,36	0,611	1,72	0,619	2,02	0,616	75,91	0,643
2	42,71	0,648	37,95	0,647	24,24	0,651	97,75	0,647	251,36	0,646
3	23,79	0,650	23,95	0,651	38,95	0,649	53,78	0,650	96,60	0,647
4	21,23	0,650	27,55	0,651	12,87	0,649	45,30	0,651	95,11	0,650
5	31,87	0,649	45,97	0,648	12,21	0,651	72,27	0,649	481,55	0,646
6	16,24	0,648	17,38	0,640	11,03	0,648	102,37	0,648	503,43	0,648
7	23,16	0,649	24,49	0,648	35,57	0,649	83,56	0,649	581,13	0,648
8	11,82	0,650	32,82	0,647	71,56	0,648	48,57	0,649	99,18	0,648
9	23,31	0,647	17,69	0,647	58,59	0,648	56,89	0,649	55,64	0,650
10	26,76	0,645	19,75	0,646	41,34	0,649	84,94	0,648	65,23	0,651
11	5,60	0,647	-	-	35,66	0,649	71,33	0,649	72,65	0,649
12	-	-	-	-	24,18	0,648	56,82	0,650	89,82	0,649
13	-	-	-	-	-	-	51,32	0,650	116,02	0,648
14	-	-	-	-	-	-	56,70	0,649	97,14	0,649
15	-	-	-	-	-	-	97,20	0,649	89,07	0,650
16	-	-	-	-	-	-	46,36	0,647	76,67	0,650
17	-	-	-	-	-	-	39,18	0,649	110,06	0,649
18	-	-	-	-	-	-	34,44	0,649	76,25	0,649
19	-	-	-	-	-	-	17,99	0,608	99,58	0,649
20	-	-	-	-	-	-	-	-
...
40	-	-	-	-	-	-	-	-	12,44	0,647
Média	21,22	0,646	25,091	0,644	30,660	0,646	58,88	0,645	110,3	0,648

Tabela 5.30: Valores de σ a cada iteração do processo de minimização da função objetivo Carregamento de Sistema de Potência, com $\xi = \xi_{min} + \Delta\xi \times 0,05$, Partida Plana e $\mu_0 = 10,0$.

Variação de K com Partida Plana e $\mu_0 = 0,01$									
K	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0
IEEE14	8	8	7	6	5	5	5	5	5
IEEE30	8	8	7	7	6	6	6	6	6
IEEE57	8	8	9	7	7	7	-	6	6
IEEE118	9	10	8	8	-	8	8	9	9
IEEE300	15	15	-	-	-	-	-	-	-

Tabela 5.31: Influência do número máximo de correções centrais (K) no número de iterações para a função objetivo Perda nas Linhas de Transmissão com Partida Plana.

na direção de minimização para o sistema IEEE57 com partida Plana, $K = 7$ e $\mu_0 = 0,01$. Conforme pode ser visto nesta figura, não é obtida uma solução para o problema de FPO. Pode-se observar que logo nas primeiras iterações o fator do passo na direção de minimização é bastante reduzido, como consequência da existência de um número de variáveis no limite. Isto faz com que o deslocamento em direção ao ponto ótimo seja extremamente lento. Assim, ao final do limite de 50 iterações a solução não é encontrada, apesar do decréscimo da magnitude destes elementos. Nota-se ainda que, embora o valor de μ satisfaça o critério de convergência,

o valor da norma do gradiente praticamente não varia a partir da sétima iteração, mantendo um valor que não satisfaz o critério de convergência do processo de minimização (tolerância de $10^{-3} pu$). Resultados semelhantes a estes, são verificados para os demais sistemas, nos casos de não convergência decorrente do valor de \mathbf{K} .

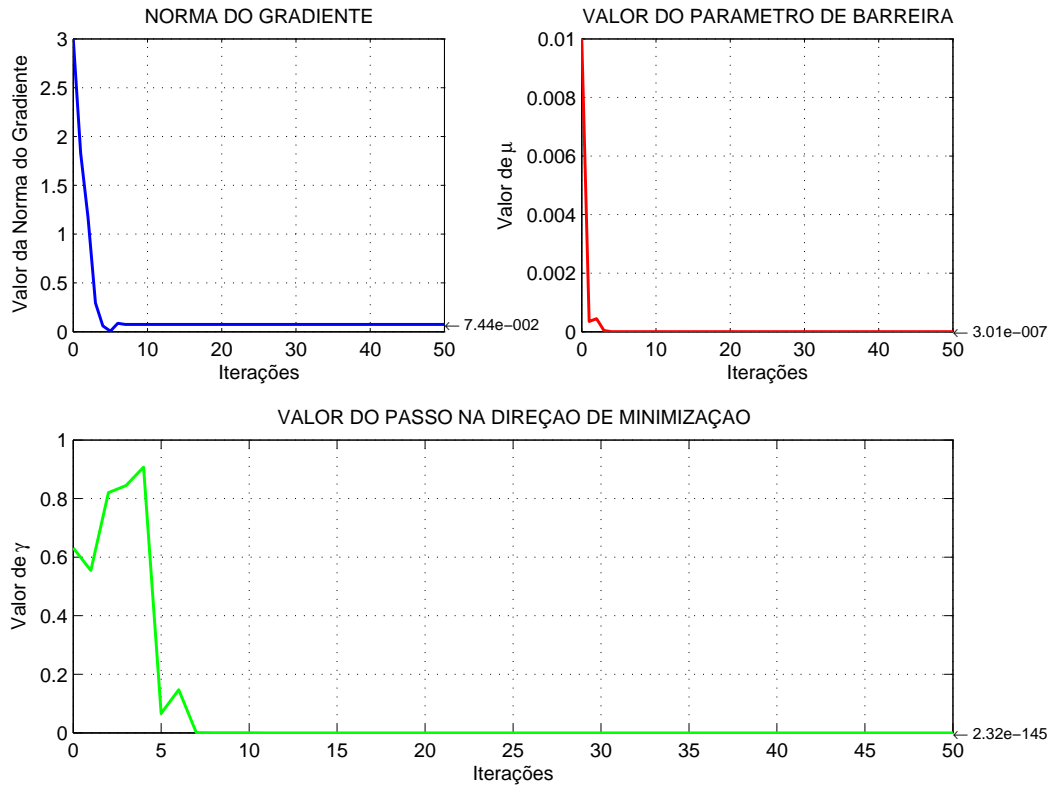


Figura 5.4: Gráficos da Minimização da Perda nas Linhas de Transmissão para o sistema IEEE57 com $\mathbf{K} = 7$, partida Plana e $\mu_0 = 0,01$.

Por outro lado, para $\mathbf{K} = 8$ a convergência é atingida em 6 iterações, como mostrado na Figura 5.5. Neste caso, o valor do fator de passo na direção de minimização mantém-se alto (próximo a 1,0) para as quatro últimas iterações e assim a convergência é rapidamente atingida.

A Tabela 5.32 apresenta os resultados obtidos para a minimização da Perda nas Linhas de Transmissão, com partida com Fluxo de Potência e $\mu_0 = 0,01$. Em termos do número de iterações, esses resultados tendem a ser melhores do que aqueles mostrados anteriormente. Porém, o resultado mais importante do ponto de vista da robustez do método refere-se à viabilidade da solução para todos os valores de \mathbf{K} testados. Assim, os resultados apresentados indicam que as dificuldades de convergência do processo iterativo são melhor superadas ao adotar-se a solução inicial fornecida pelo Fluxo de Potência. Isto enfatiza mais uma vez a importância da solução inicial no processo iterativo.

Outra constatação importante, referente aos métodos de partida, diz respeito ao fato de que o aumento linear do valor de \mathbf{K} não implica em uma diminuição linear no número de

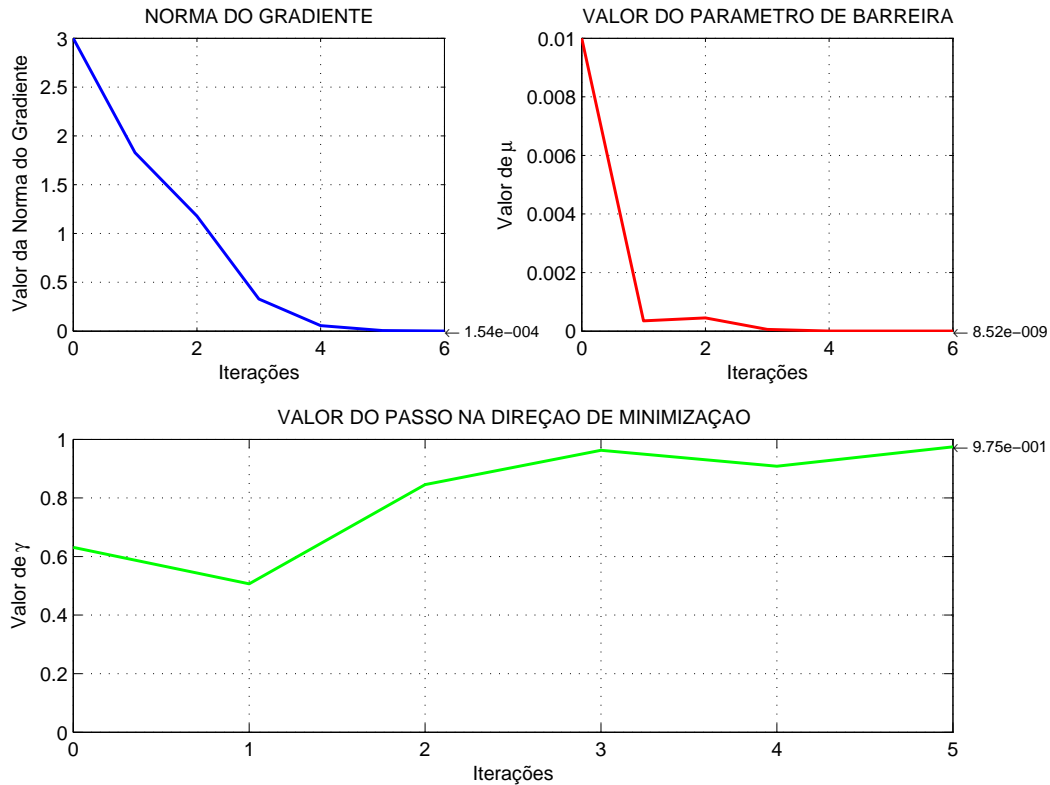


Figura 5.5: Gráficos da Minimização da Perda nas Linhas de Transmissão para o sistema IEEE57 com $K = 8$, partida Plana e $\mu_0 = 0,01$.

Variação de K com Partida com Fluxo de Potência e $\mu_0 = 0,01$									
K	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0
IEEE14	7	7	6	5	5	5	4	4	4
IEEE30	9	9	7	14	6	6	6	5	5
IEEE57	13	13	11	10	12	10	11	11	11
IEEE118	18	18	14	13	12	12	12	12	11
IEEE300	15	15	13	12	11	20	10	9	10

Tabela 5.32: Influência do número máximo de correções centrais (K) no número de iterações para a função objetivo Perda nas Linhas de Transmissão com Partida com Fluxo de Potência.

iterações. Como é possível constatar nas tabelas, existem casos em que o aumento de K leva a um aumento no número de iterações. Porém, em termos gerais, valores elevados de K tendem a resultar num menor número de iterações.

5.5.2 Função Objetivo: Desvio de um Nível de Tensão Pré-Estabelecido

As Tabelas 5.33 e 5.34 apresentam os resultados da minimização do Desvio de um Nível de Tensão Pré-Estabelecido, com $\mu_0 = 0,01$, utilizando os métodos de Partida Plana e Fluxo de Potência, respectivamente.

Os resultados obtidos para os sistemas IEEE14 e IEEE30 indicam que no caso desta função

Variação de K com Partida Plana e $\mu_0 = 0,01$									
K	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0
IEEE14	5	5	4	4	4	3	3	3	3
IEEE30	5	5	4	4	4	3	3	3	3
IEEE57	5	8	8	6	9	7	7	7	5
IEEE118	6	7	6	6	5	5	5	5	5
IEEE300	9	9	-	-	-	-	14	13	6

Tabela 5.33: *Influência do número máximo de correções centrais (K) no número de iterações para a função objetivo Desvio de um Nível de Tensão Pré-Especificado com Partida Plana.*

Variação de K com Partida com Fluxo de Potência e $\mu_0 = 0,01$									
K	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0
IEEE14	5	5	4	4	4	4	4	4	3
IEEE30	5	5	4	4	4	3	3	3	3
IEEE57	8	8	6	6	6	5	5	5	5
IEEE118	17	17	14	21	12	12	11	11	11
IEEE300	17	17	-	-	8	11	12	16	-

Tabela 5.34: *Influência do número máximo de correções centrais (K) no número de iterações para a função objetivo Desvio de um Nível de Tensão Pré-Especificado com Partida com Fluxo de Potência.*

objetivo há pouca sensibilidade do processo iterativo com relação aos métodos de partida.

No caso do sistema IEEE57, os resultados obtidos com a partida Plana (Tabela 5.33), apresentam um aumento no número de iterações a partir de $K = 2$ até $K = 8$.

A Figura 5.6 mostra os valores do fator de passo, durante as iterações, correspondentes à três casos de especificação do número de correções centralizadas (1, 5 e 8). Nota-se que $K = 1$ (apenas uma centralização em cada iteração) resulta em maiores valores do fator de passo γ , com relação aos resultados obtidos para K igual a 5 e 8, o que resulta na convergência do processo em 5 iterações (comparado a 7 e 9 iterações com 8 e 5 correções, respectivamente).

Para o sistema IEEE300, independentemente do critério de partida, observa-se que alguns valores de K inviabilizam a convergência do processo iterativo. A razão disto é a mesma do caso da minimização da Perda nas Linhas de Transmissão, como pode ser visto na Figura 5.7 (resultados relativos ao método de partida Plana). Embora o valor de μ seja consideravelmente baixo, a norma do gradiente mantém-se constante, não satisfazendo o critério de convergência. O motivo deste comportamento é o valor demasiadamente reduzido do fator de passo. Isto se verifica para ambos os métodos de partida utilizados.

Assim, com base nos resultados apresentados para esta função objetivo, pode-se afirmar que o aumento do número de correções centrais tende a levar a uma diminuição no número total de iterações para a convergência. Entretanto, determinados valores de K podem eventualmente inviabilizar a convergência.

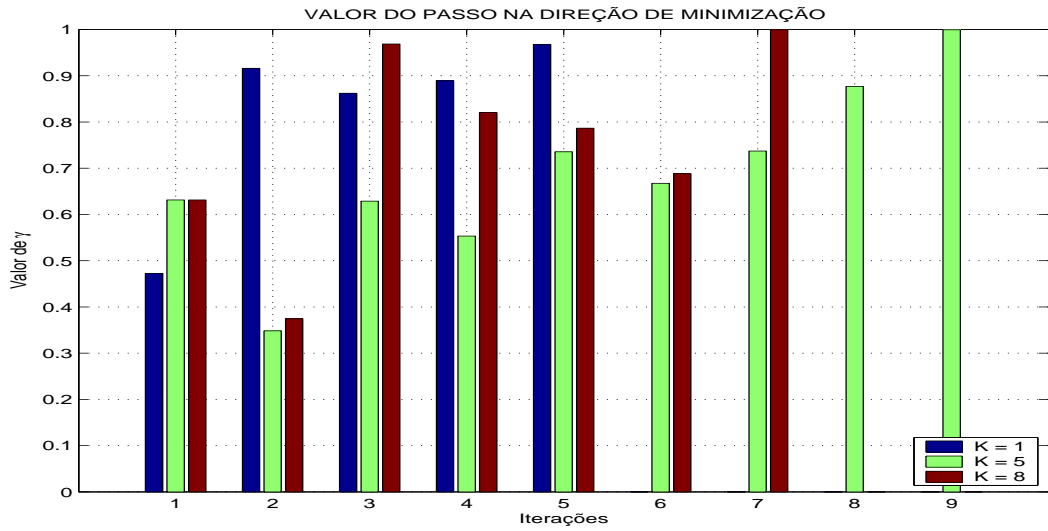


Figura 5.6: Gráficos do valor de γ para a Minimização do Desvio de um Nível de Tensão Pré-Estabelecido com o sistema IEEE57 utilizando partida Plana e $\mu_0 = 0,01$.

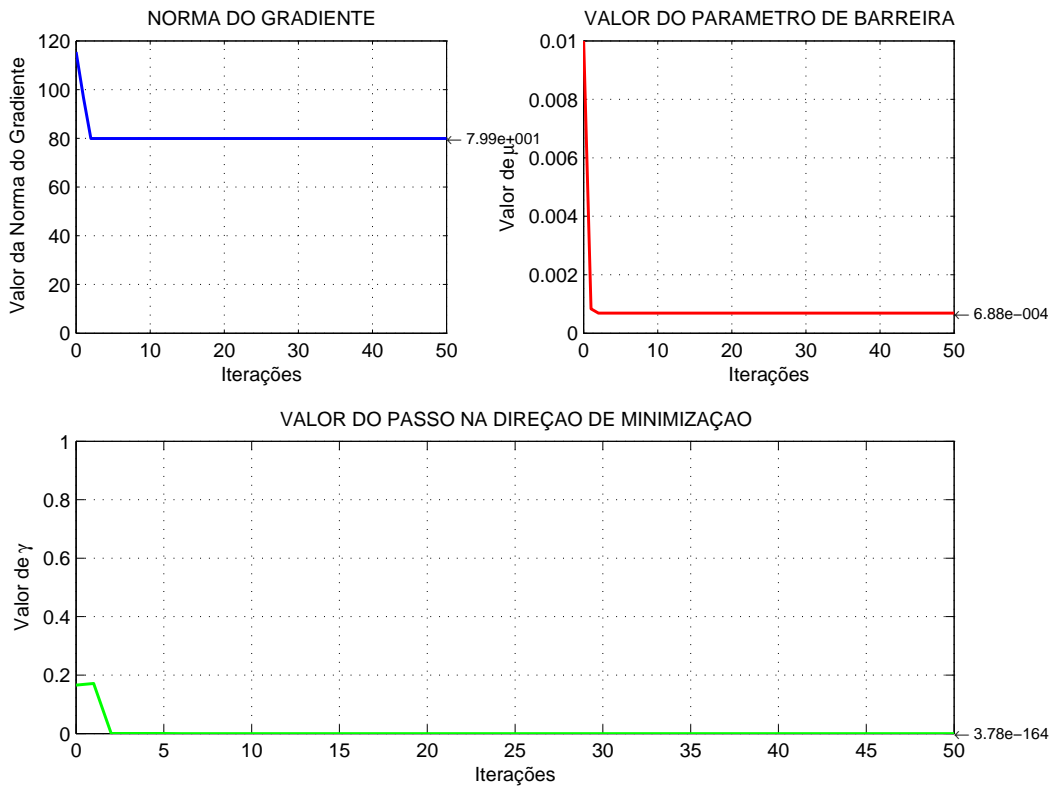


Figura 5.7: Gráficos da Minimização do Desvio de um Nível de Tensão Pré-Estabelecido para o sistema IEEE300 com $K = 3$, partida Plana e $\mu_0 = 0,01$.

5.5.3 Função Objetivo: Carregamento de um Sistema de Potência

Os resultados obtidos na maximização do Carregamento de um Sistema de Potência são apresentados nas tabelas 5.35 e 5.36.

Similarmente ao que é verificado na aplicação dos outros métodos de pontos interiores analisados neste trabalho, ao se utilizar a partida via Fluxo de Potência com $\mu_0 = 10,0$, não é possível obter a solução do FPO via método das Múltiplas Correções Centralizadas para os sistemas IEEE118 e IEEE300 (independentemente dos valores adotados para \mathbf{K}).

Variação de K com Partida Plana e $\mu_0 = 10,0$									
\mathbf{K}	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0
IEEE14	9	10	9	7	15	18	-	-	7
IEEE30	9	9	8	7	7	7	7	17	8
IEEE57	10	10	9	8	7	7	6	5	6
IEEE118	23	23	14	13	13	13	12	12	12
IEEE300	40	41	-	-	-	-	-	33	34

Tabela 5.35: *Influência do número máximo de correções centrais (K) no número de iterações para a função objetivo Carregamento de um Sistema de Potência com Partida Plana.*

Variação de K com Partida com Fluxo de Potência e $\mu_0 = 10,0$									
\mathbf{K}	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0
IEEE14	10	11	10	-	8	7	7	7	7
IEEE30	12	12	10	10	9	9	9	9	8
IEEE57	18	17	13	-	-	14	-	14	14

Tabela 5.36: *Influência do número máximo de correções centrais (K) no número de iterações para a função objetivo Carregamento de um Sistema de Potência com Partida com Fluxo de Potência.*

No caso do sistema IEEE14, o uso da partida Plana (Tabela 5.35) resulta num aumento do número de iterações para os valores 5 e 6 de \mathbf{K} , enquanto que para os valores 7 e 8, não é possível obter a convergência. Pode-se concluir que esta elevação do valor do número de iterações representa um indício de que o processo de convergência está comprometido, sendo que um aumento no número de correções pode gerar a sua inviabilidade.

O sistema IEEE300, por ser o sistema mais complexo dos cinco estudados, apresenta cinco valores para o número máximo de correções para os quais não é possível a convergência ao utilizar-se a partida Plana. Estes valores vão de 3 a 7, porém, ao utilizar os valores 8 e 9, a solução é novamente encontrada com um menor número de iterações do que o verificado para apenas uma correção.

Embora a utilização do Fluxo de Potência com método de partida proporcione uma maior confiabilidade para as funções objetivo estudadas anteriormente, isto não se verifica para a Maximização do Carregamento de um Sistema de Potência. Ainda que o sistema IEEE14 apresente um menor número de casos não convergentes para este método, o sistema IEEE57, além de ter o número de iterações aumentado, ainda passa a ter casos de não convergência para três valores de \mathbf{K} , quais sejam: 4,5 e 7.

5.6 Análise do Custo Computacional

Esta seção apresenta resultados numéricos, relacionados ao tempo de computação necessário para o final do processo iterativo, para as diferentes técnicas de otimização utilizadas na resolução dos três problemas de FPO discutidos anteriormente.

Os testes são realizados apenas para os três sistemas de maior porte utilizados neste trabalho (IEEE57, IEEE118 e IEEE300), isto em função de que a baixa variação do tempo de computação para os demais sistemas (IEEE14 e IEEE30), não propicia boas condições de análise.

5.6.1 Função Objetivo: Perdas nas Linhas de Transmissão

Método Preditor-Corretor

A Tabela 5.37 mostra o número de iterações e o tempo computacional em segundos, necessários para a solução do problema de Minimização das Perdas nas Linhas de Transmissão, aplicado aos sistemas IEEE57, IEEE118 e IEEE300, utilizando o Método Preditor-Corretor, com o valor inicial do parâmetro de barreira igual a 0,1.

Tempo Computacional Preditor-Corretor e $\mu_0 = 0,1$				
Sistema	Partida Plana		Fluxo de Potência	
	(iter./seg.)		(iter./seg.)	
IEEE57	10	1,235	8	0,828
IEEE118	7	2,031	10	1,969
IEEE300	12	16,594	11	6,438

Tabela 5.37: *Tempo Computacional para a Minimização das Perdas nas Linhas de Transmissão, com Método Preditor-Corretor e $\mu_0 = 0,1$.*

Com base nos resultados apresentados, observa-se que, para todos os testes, a partida via fluxo de potência gera tempos de computação inferiores aos gerados com a partida plana. Porém, no caso do sistema IEEE118, o menor tempo obtido não está relacionado ao menor número de iterações. Isto se deve ao processo de inicialização via fluxo de potência, que, embora não seja computado na tomada de tempo, acaba por gerar algumas variáveis que serão reutilizadas no processo de minimização, fazendo com que, durante o processo de alocação dinâmica de memória, algumas variáveis já tenham sido alocadas, como por exemplo a Matriz Admitância Nodal. Além disto, a diferença numérica entre os tempos obtidos para as diferentes metodologias de partidas é pequena, acentuando este efeito.

Para os demais casos (IEEE57 e IEEE300), a diminuição do tempo computacional, obtida na partida via fluxo de potência, é reflexo do menor número de iterações necessárias à convergência, mostrando que o ponto inicial gerado por este método contribui para a melhora da

performance do método preditor-corretor, com relação à função objetivo Perda nas Linhas de Transmissão, em termos da rapidez de convergência. Estas reduções são de aproximadamente 33% e 61%, para os testes realizados para os sistemas IEEE57 e IEEE300, respectivamente.

Método do Máximo Passo no Caminho Central

Nos testes realizados com a abordagem de Máximo Passo no Caminho Central, utilizou-se três técnicas para a obtenção do valor da distância à trajetória central, sejam estas: (a) $\xi = 3$, sendo este valor mantido constante durante o processo de otimização, (b) $\xi = \xi_{med}$ e (c) $\xi = \xi_{Min}$. Os resultados obtidos com estes valores de ξ , ao utilizar $\mu_0 = 0, 1$, para a função objetivo Perdas nas Linhas de Transmissão, são apresentados na Tabela 5.38. Os valores em destaque representam os menores valores de tempo computacional.

Variação do Tempo Computacional em Função de ξ Máximo Passo no Caminho Central com $\mu_0 = 0, 1$						
Sistema	Partida Plana			Fluxo de Potência		
	$\xi = 3$	ξ_{med}	ξ_{Min}	$\xi = 3$	ξ_{med}	ξ_{Min}
IEEE57	11	11	17	10	10	18
(iter./seg.)	2,297	2,187	3,296	2,031	2,015	3,328
IEEE118	12	11	17	15	14	16
(iter./seg.)	3,890	3,547	5,218	4,109	3,828	4,313
IEEE300	16	15	19	12	13	18
(iter./seg.)	23,109	21,672	27,296	8,000	8,609	11,750

Tabela 5.38: *Variação do Tempo Computacional em função de ξ , para a Minimização das Perdas nas Linhas de Transmissão, com Método Máximo Passo no Caminho Central e $\mu_0 = 0, 1$.*

Os resultados mostram que, para ambas estratégias de partida, os menores tempos computacionais estão sempre associados ao menor número de iterações.

Para a partida plana tem-se que os melhores resultados estão relacionados à utilização de ξ_{med} , o que significa uma parcela de centralização da ordem de 17%, na composição da direção efetiva de busca. Demonstrando que, o aumento da contribuição da direção de centralização, relacionada à utilização de ξ_{Min} e $\xi = 3$, não implica na diminuição do tempo computacional.

Com a partida via fluxo de potência, obtém-se uma diminuição para a maioria dos tempos computacionais, e número de iterações, obtidos com a estratégia de partida plana, em especial para o sistema IEEE300, para o qual obtém-se reduções da ordem de 60% do tempo computacional. A utilização de ξ_{med} proporciona melhores resultados para os sistemas de menor porte, porém, para o sistema IEEE300, o melhor resultado com partida via fluxo de potência é obtido utilizando-se $\xi = 3$. Isto é atribuído ao grande número de iterações para as quais não é possível obter raízes reais para a Equação Quártica (3.57), que pertençam ao intervalo $(0 < \sigma < 1, 0)$. O que leva a atribuir o valor 0,1 à variável σ , fazendo com que a

parcela de centralização seja de apenas 10% da direção efetiva de busca. Ou seja, o melhor resultado, em termos de rapidez computacional, é obtido ao utilizar-se a menor porcentagem de centralização na composição da direção efetiva de busca.

Ao comparar os resultados obtidos com o método preditor-corretor (Tabela 5.37) e os obtidos com o método do máximo passo no caminho central (Tabela 5.38), nota-se que o primeiro destes métodos apresenta os melhores resultados em termos de rapidez de convergência, para todos os casos testados. De forma que, com base nestes resultados, o método preditor-corretor convencional ainda constitui a melhor opção em relação ao método de máximo passo no caminho central, sob estas condições de teste.

Método de Múltiplas Correções Centrais

As tabelas 5.39 e 5.41 mostram os resultados obtidos a partir das partidas plana e via fluxo de potência, respectivamente, ao utilizar-se o método de múltiplas correções centrais, com diferentes valores de máximas correções centralizadoras permitidas (K), para a função objetivo Perda nas Linhas de Transmissão e utilizando-se o valor inicial do parâmetro de barreira igual a 0,1. Os valores em destaque representam os melhores e piores valores de tempo de computação.

Variação do Tempo Computacional em Função de K									
Partida Plana e $\mu_0 = 0,1$									
K	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0
IEEE57	8	13	9	8	8	7	7	7	7
(iter./seg.)	0,891	1,313	1,093	1,125	1,188	1,109	1,140	1,313	1,250
IEEE118	8	8	7	7	7	7	7	7	7
(iter./seg.)	1,859	1,969	1,922	2,031	2,140	2,312	2,422	2,580	2,657
IEEE300	14	14	-	19	-	10	-	-	10
(iter./seg.)	18,922	19,422	-	27,453	-	15,765	-	-	16,937

Tabela 5.39: *Variação do Tempo Computacional em função de K , para a Minimização das Perdas nas Linhas de Transmissão, com Partida Plana e $\mu_0 = 0,1$.*

Os resultados apresentados na Tabela 5.39, mostram que, no caso da minimização das perdas de potência ativa nas linhas de transmissão com partida plana, o método de múltiplas correções centrais gera tempos de computação inferiores aos gerados pelo método preditor-corretor (Tabela 5.37) e pelo método de máximo passo no caminho central (Tabela 5.38), para determinados valores de K . Nos testes relativos aos sistemas IEEE57 e IEEE118, os melhores resultados são obtidos para apenas uma correção de centralização, $K = 1$, o que demonstra que o custo computacional de múltiplas correções de centralização pode comprometer a rapidez de convergência para sistemas de menor porte. Para o sistema IEEE300, a diminuição no número de iterações, obtida com $k = 6$, é responsável pelo decréscimo no tempo de computação, sendo este o único resultado de tempo computacional inferior ao obtido com o método preditor-corretor, para este índice de desempenho e com partida plana.

A Tabela 5.40 apresenta a variação percentual do tempo de computação, ao comparar-se os melhores e piores resultados obtidos com o método de múltiplas correções centrais e os obtidos com o método preditor-corretor convencional.

Percentuais da Variação do Tempo Computacional		
Sistemas	Diminuição	Aumento
IEEE57	K=1 27,9%	K=2 e 7 6,3%
IEEE118	K=1 8,5%	K=9 30,8%
IEEE300	K=6 5,0%	K=4 65,4%

Tabela 5.40: *Variação percentual do tempo computacional obtido com o método de múltiplas correções centrais em relação ao método preditor-corretor, para a função objetivo perda nas linhas de transmissão, utilizando a partida plana e $\mu_0 = 0, 1$.*

Com relação aos resultados obtidos utilizando-se a partida via fluxo de potência (Tabela 5.41), tem-se que o método de múltiplas correções centrais não fornece melhores resultados do que os obtidos com o método preditor-corretor convencional (Tabela 5.37). Porém, com relação aos resultados gerados pelo método do máximo passo no caminho central (Tabela 5.38), o método de múltiplas correções apresenta resultados superiores para qualquer um dos valores de K testados para os sistemas IEEE57 e IEEE118, e para K variando de 5 a 8, para o sistema IEEE300.

Variação do Tempo Computacional em Função de K Partida com Fluxo de Potência e $\mu_0 = 0, 1$									
K	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0
IEEE57	14	16	11	9	14	11	13	10	10
(iter./seg.)	1,109	1,457	1,188	1,141	1,625	1,469	1,734	1,563	1,625
IEEE118	18	18	14	12	12	11	11	10	10
(iter./seg.)	2,875	3,203	2,844	2,719	2,953	2,937	3,156	3,093	3,282
IEEE300	15	15	13	12	11	9	9	9	9
(iter./seg.)	8,391	8,985	8,344	8,188	7,984	6,969	7,266	7,656	8,016

Tabela 5.41: *Variação do Tempo Computacional em função de K , para a Minimização das Perdas nas Linhas de Transmissão, com Partida com Fluxo de Potência e $\mu_0 = 0, 1$.*

A partida via fluxo de potência piora os tempos gerados pelo método de múltiplas correções centrais com partida plana, para os sistemas IEEE57 e IEEE118. Já os resultados relativos ao sistema IEEE300, apresentam uma redução expressiva nos tempos computacionais, quando utilizada a partida via fluxo de potência, além de viabilizar a convergência para todos os valores de K testados. Demonstrando que, para este sistema, e sob estas condições de teste, a qualidade do ponto inicial pode interferir na rapidez da convergência e na confiabilidade do método.

Embora os resultados apresentados para o método de múltiplas correções centrais seja satisfatório para alguns valores de K , existe a necessidade de conhecer-se previamente o valor adequado a ser atribuído a esta variável, de forma que esta metodologia apresenta um ponto

negativo com relação à prática da análise de sistemas desconhecidos. Além disto, valores inadequados de K podem inviabilizar o processo de convergência, como comentado na Seção 5.5.

5.6.2 Função Objetivo: Desvio de um Nível de Tensão Pré-Estabelecido

Método Preditor-Corretor

Os resultados obtidos com o método Preditor-Corretor, para a função objetivo Desvio de um Nível de Tensão Pré-Estabelecido, são apresentados na Tabela 5.42. Os testes foram executados utilizando as estratégias de partida plana e partida via fluxo de potência, com o valor inicial do parâmetro de barreira igual a 0,01.

Tempo Computacional Preditor-Corretor e $\mu_0 = 0,01$				
Sistema	Partida Plana (iter./seg.)		Fluxo de Potência (iter./seg.)	
IEEE57	9	1,203	5	0,797
IEEE118	4	1,282	9	1,906
IEEE300	8	12,453	20	14,281

Tabela 5.42: *Tempo Computacional para a Minimização do Desvio de um Nível de Tensão Pré-Estabelecido, com Método Preditor-Corretor e $\mu_0 = 0,01$.*

Os menores tempos de computação, obtidos nestes testes, estão sempre relacionados aos menores números de iterações, diferindo do que foi obtido para a minimização das perdas nas linhas de transmissão com o método preditor-corretor. Ao analisar os resultados, pode-se observar que a estratégia de partida plana gera os menores tempos computacionais, para os testes relativos aos sistemas de maior porte utilizados (IEEE118 e IEEE300). Isto se deve ao fato de que, o ponto inicial gerado por esta abordagem de partida está mais próximo da solução esperada para esta função objetivo. O que resulta em um ponto inicial mais adequado, ao minimizar-se os desvios de um perfil plano de tensão.

As variações percentuais obtidas ao utilizar-se a partida via fluxo de potência, com relação ao tempo computacional obtido com a partida plana, são de aproximadamente -33% para os sistema IEEE57, 49% e 15% para os sistemas IEEE118 e IEEE300, respectivamente.

Método do Máximo Passo no Caminho Central

A Tabela 5.43 apresenta os resultados relativos ao tempo computacional e número de iterações, dispendidos no processo de minimização da função objetivo Desvio de um Nível de Tensão Pré-Estabelecido, ao utilizar-se o Método de Máximo Passo no Caminho Central, com $\mu_0 = 0,01$.

Variação do Tempo Computacional em Função de ξ Máximo Passo no Caminho Central com $\mu_0 = 0,01$						
Sistema	Partida Plana			Fluxo de Potência		
	$\xi = 3$	ξ_{med}	ξ_{Min}	$\xi = 3$	ξ_{med}	ξ_{Min}
IEEE57	6	6	13	7	7	14
(iter./seg.)	1,515	1,562	2,657	1,594	1,593	2,75
IEEE118	8	6	13	15	12	13
(iter./seg.)	2,906	2,297	4,313	4,312	3,516	3,860
IEEE300	9	9	14	14	21	17
(iter./seg.)	14,781	14,750	22,422	11,281	16,687	13,594

Tabela 5.43: *Variação do Tempo Computacional em função de ξ , para a Minimização do Desvio de um Nível de Tensão Pré-Estabelecido, com Método Máximo Passo no Caminho Central e $\mu_0 = 0,01$.*

Assim como o observado para o método preditor-corretor, a partida plana tende a gerar os melhores resultados em termos de rapidez de convergência para a maioria dos casos. Porém, para o caso do sistema IEEE300, o menor tempo computacional não está relacionado ao menor número de iterações (observado na partida plana), mas sim ao resultado obtido com a partida via fluxo de potência, utilizando-se a distância ao caminho central igual a 3. Ao analisar os valores atribuídos ao fator de centralização (σ), para $\xi = 3$, observa-se que para todas as 14 iterações não foi possível obter raízes que satisfizessem os critérios estipulados para esta variável, de forma que, neste caso, o método que proporcionou a menor parcela de centralização (10%), gerou os melhores resultados.

Para a maioria dos casos, onde a utilização de $\xi = 3$ não implica na adoção do valor 0,1 para o fator de centralização, o método de obtenção do valor médio da distância à trajetória central ($\xi_{med} \rightarrow \sigma \approx 0,17$) leva à soluções mais rápidas.

Com relação aos tempos computacionais gerados pelo método preditor-corretor (Tabela 5.42), observa-se que apenas para o sistema IEEE300, no caso de partida via fluxo de potência, são gerados tempos inferiores pelo método do máximo passo no caminho central. Com base nestes resultados, o método preditor-corretor ainda supera o método em questão, em termos da velocidade de resolução do problema de minimização do desvio de um nível de tensão pré-estabelecido.

Método de Múltiplas Correções Centrais

Os resultados obtidos com o Método de Múltiplas Correções Centrais, utilizando Partida Plana e $\mu_0 = 0,01$, para o problema de Minimização do Desvio de um Nível de Tensão Pré-Estabelecido, são apresentados na Tabela 5.44.

Ao comparar estes resultados, com os obtidos com o método preditor-corretor, utilizando a partida plana (Tabela 5.42), nota-se que o método de múltiplas correções obtém melhores

Variação do Tempo Computacional em Função de K Partida Plana e $\mu_0 = 0,01$									
K	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0
IEEE57 (iter./seg.)	5 0,687	8 0,859	8 0,969	6 0,875	9 1,250	7 1,063	7 1,156	7 1,218	5 0,937
IEEE118 (iter./seg.)	6 1,578	7 1,844	6 1,782	6 1,938	5 1,688	5 1,828	5 1,937	5 2,047	5 2,078
IEEE300 (iter./seg.)	9 13,750	9 14,125	- -	- -	- -	- -	14 24,500	13 23,313	6 11,531

Tabela 5.44: *Variação do Tempo Computacional em função de K , para a Minimização do Desvio de um Nível de Tensão Pré-Estabelecido, com Partida Plana e $\mu_0 = 0,01$.*

resultados para os testes relativos aos sistemas IEEE57 e IEEE300, para determinados valores de K .

Com relação ao sistema IEEE57, o método de múltiplas correções fornece tempos de computação superiores aos obtidos com o método preditor-corretor, apenas para K igual a 5 e 8. Além disso, a máxima redução no tempo computacional para este sistema é de aproximadamente 42%, sendo obtida ao utilizar apenas uma correção centralizadora.

No caso do sistema IEEE300, o melhor resultado em termos de velocidade é obtido para $K = 9$, onde é encontrada uma redução de aproximadamente 7% com relação ao tempo de processamento do método preditor-corretor. Porém, para este sistema, todas as outras opções de valores para K geram resultados piores do que os obtidos com o preditor-corretor.

Os resultados fornecidos pelo método de máximo passo no caminho central, utilizando partida plana (Tabela 5.43), apresentam tempos computacionais superiores aos obtidos com o método de múltiplas correções para os três sistemas testados, sendo que a máxima redução de tempo, obtida por este último método, é de aproximadamente 55% para o sistema IEEE57, 31% para o sistema IEEE118 e 22% para o sistema IEEE300, ao comparar os melhores resultados de ambos os métodos, utilizando a partida plana.

Resultados semelhantes aos observados para o método de múltiplas correções centrais, utilizando a estratégia de partida plana, são mostrados na Tabela 5.45, onde são apresentados os resultados gerados por este método, utilizando a partida via fluxo de potência.

Em comparação com a estratégia de partida plana, a partida via fluxo de potência tende a aumentar o tempo computacional para os testes com os sistemas IEEE57 e IEEE300. Esta variação é semelhante ao aumento do tempo computacional verificado para os outros métodos de otimização testados, mostrando novamente que a partida plana é mais indicada para o problema de minimização do desvio de tensão.

Ao comparar os menores tempos de computação obtidos com os três métodos de otimização testados e utilizando a partida via fluxo de potência, nota-se que, o método de múltiplas correções centrais, apresenta as seguintes variações percentuais, mostradas na Tabela 5.46.

Variação do Tempo Computacional em Função de K Partida com Fluxo de Potência e $\mu_0 = 0,01$									
K	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0
IEEE57 (iter./seg.)	8 0,781	8 0,875	6 0,828	6 0,859	6 0,875	5 0,844	5 0,890	5 0,953	5 1,015
IEEE118 (iter./seg.)	17 2,954	17 3,234	14 3,078	21 4,719	12 3,094	12 3,344	11 3,328	11 3,516	11 3,719
IEEE300 (iter./seg.)	17 11,750	17 12,562	- -	- -	8 7,219	11 10,281	12 11,687	16 16,235	- -

Tabela 5.45: *Variação do Tempo Computacional em função de K , para a Minimização do Desvio de um Nível de Tensão Pré-Estabelecido, com Partida com Fluxo de Potência e $\mu_0 = 0,01$.*

Percentuais da Variação do Tempo Computacional			
Sistemas	Pre-Cor		MPCC
IEEE57	K=1	-2,0%	K=1 -50,9%
IEEE118	K=1	54,9%	K=1 -15,9%
IEEE300	K=8	-49,5%	K=8 -36,0%

Tabela 5.46: *Variação percentual do tempo computacional obtido com o Método de Múltiplas Correções Centrais em relação aos métodos Preditor-Corretor e Máximo Passo no Caminho Central, para a função objetivo Desvio de um Nível de Tensão Pré-Estabelecido, utilizando a Partida via Fluxo de Potência e $\mu_0 = 0,01$.*

Como pode ser observado a partir destes resultados, ao adotar-se um valor adequado para o número máximo de correções centrais permitidas, o método de múltiplas correções centrais pode apresentar resultados superiores aos obtidos com os outros dois métodos testados, ao utilizar-se a estratégia de partida via fluxo de potência. Porém, para a obtenção destes resultados, persiste a necessidade de conhecer-se a priori o valor adequado de K para cada sistema.

5.6.3 Função Objetivo: Carregamento de um Sistema de Potência

Método Preditor-Corretor

Os resultados relativos ao tempo de computação e ao número de iterações necessárias ao final do processo iterativo, obtidos com o Método Preditor-Corretor para o problema de Maximização do Carregamento do Sistema de Potência, são apresentados na Tabela 5.47.

Os testes utilizam $\mu_0 = 10,0$ e a estratégia de Partida Plana. A partida via Fluxo de Potência não é utilizada na análise da resolução desta função objetivo, por gerar problemas de convergência para todos os métodos testados, como relatado nas seções anteriores.

Tempo Computacional Preditor-Corretor e $\mu_0 = 10,0$		
Sistema	Partida Plana (iter./seg.)	
	IEEE57	8
IEEE118	13	2,953
IEEE300	17	14,172

Tabela 5.47: *Tempo Computacional para a Maximização do Carregamento de um Sistema de Potência, com Método Preditor-Corretor, Partida Plana e $\mu_0 = 10,0$.*

Método do Máximo Passo no Caminho Central

Os resultados relativos à utilização do Método de Máximo Passo no Caminho Central, aplicado ao problema de Maximização do Carregamento de um Sistema de Potência, são apresentados na Tabela 5.48.

Variação do Tempo Computacional em Função de ξ Máximo Passo no Caminho Central com $\mu_0 = 10,0$						
Sistema	Partida Plana (iter./seg.)					
	$\xi = 3$		ξ_{med}		ξ_{Min}	
IEEE57	12	2,625	12	2,578	12	2,453
IEEE118	20	6,531	20	6,469	19	6,172
IEEE300	41	37,719	39	36,813	40	37,765

Tabela 5.48: *Variação do Tempo Computacional em função de ξ , para a Maximização do Carregamento de um Sistema de Potência, com Método do Máximo Passo no Caminho Central, Partida Plana e $\mu_0 = 10,0$.*

Ao contrário do que é verificado para as demais funções objetivo, os melhores resultados relativos ao tempo computacional, obtidos para a maioria dos casos testados (IEEE57 e IEEE118), são gerados quando da utilização de ξ_{Min} .

Analisando os valores atribuídos ao fator de centralização (σ), ao utilizar a distância ao caminho central igual a 3 ($\xi = 3$), nota-se que, para todos os sistemas analisados, apenas uma das iterações não computa $\sigma = 0, 1$. Assim, pode-se afirmar que, sob estas condições de teste, a utilização de $\xi = 3$ implica numa contribuição da parcela de centralização na direção efetiva de busca de apenas 10%.

Como comentado anteriormente, para esta função objetivo, a utilização de ξ_{med} , implica em uma contribuição da direção de centralização de aproximadamente 18% da direção de busca. Por outro lado, a utilização da ξ_{Min} resulta em uma contribuição da direção de centralização de aproximadamente 64% da direção de busca. Desta forma, nos testes realizados para os sistemas IEEE57 e IEEE118, o método de cálculo do fator de centralização que apresentou o valor mais elevado, obteve melhores resultados em termos do tempo computacional.

Comparando os resultados obtidos por este método, com os obtidos pelo método preditor-

corretor, observa-se que novamente o método preditor corretor apresenta tempos de solução mais baixos. Mantendo o que foi observado para as demais funções objetivo.

Método de Múltiplas Correções Centrais

A Tabela 5.49 mostra os resultados obtidos com o Método de Múltiplas Correções Centrais, para o problema de Maximização do Carregamento do Sistema de Potência, utilizando $\mu_0 = 10,0$.

Variação do Tempo Computacional em Função de K Partida Plana e $\mu_0 = 10,0$									
K	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0
IEEE57	10	10	9	8	7	7	6	5	6
(iter./seg.)	0,969	1,094	1,031	1,094	1,032	1,125	1,016	1,063	1,125
IEEE118	23	23	14	13	13	13	12	12	12
(iter./seg.)	4,594	5,109	3,625	3,641	4,016	4,250	4,234	4,484	4,766
IEEE300	40	41	-	-	-	-	-	33	34
(iter./seg.)	30,234	33,093	-	-	-	-	-	37,188	39,969

Tabela 5.49: Variação do Tempo Computacional em função de K , para a Maximização do Carregamento de um Sistema de Potência, com Partida Plana e $\mu_0 = 0,01$.

A exemplo dos resultados encontrados para o método de máximo passo no caminho central, para esta função objetivo a técnica de múltiplas correções centrais não apresenta melhores resultados do que o método preditor-corretor convencional. Porém com relação ao método de máximo passo, o método de múltiplas correções mostra resultados superiores para todos os sistemas testados. As reduções de tempo computacional obtidas são de aproximadamente 60,5% para os sistema IEEE57, 41,3% para os sistema IEEE118 e 17,9% para os sistema IEEE300, ao comparar-se os melhores resultados obtidos para ambos os métodos.

5.7 Conclusão

Os resultados referentes à influência do valor inicial do parâmetro de barreira, no número de iterações necessário ao final do processo de convergência, mostram que, para as funções objetivo Perdas de Potência Ativa nas Linhas de Transmissão e Desvio Quadrático de um Nível de Tensão Pré-Estabelecido, indiferentemente do método de otimização utilizado, valores iniciais baixos de μ_0 (0,01 e 0,1) proporcionam um número menor de iterações. Já no caso da Maximização da Demanda do Sistema de Potência, valores iniciais próximos a 10,0 são mais indicados. Além destes resultados é possível observar a grande influência deste valor inicial com relação ao número de iterações, podendo inclusive inviabilizar a convergência de alguns dos casos estudados.

Quanto às estratégias de partida estudadas, os resultados mostram que, para o problema de Minimização das Perdas de Potência Ativa nas Linhas de Transmissão, a estratégia de

partida plana é mais indicada, minimizando o número de iterações necessárias ao final do processo iterativo para todos os métodos estudados. Ao analisar os resultados obtidos para a função objetivo Carregamento do Sistema de Potência, observa-se que a estratégia de partida via fluxo de potência tende a inviabilizar a solução dos problemas de maior porte analisados. Desta forma, a partida plana é mais indicada em termos de confiabilidade, além de proporcionar um menor número de iterações para os casos em que ambas as estratégias viabilizam a convergência.

Para os testes relativos à forma de obtenção da distância ao caminho central (ξ), no Método do Máximo Passo no Caminho Central, observa-se que a estratégia sugerida na bibliografia ($\xi = 3$), não está relacionada aos melhores resultados apresentados. Além disto, a utilização de valores constantes para esta variável, indiferentemente de sua ordem de grandeza (0,0 a 24,0), não implica em grandes variações em relação ao número de iterações necessárias ao final do processo iterativo.

Ao utilizar o cálculo dinâmico para a distância ao caminho central, observa-se que, em função da forma da curva gerada pela Equação Quártica, é possível estabelecer uma relação direta entre o valor de ξ e o valor atribuído ao fator de centralização σ . Ao adotar $\xi = \xi_{med}$, para as funções objetivo Perdas de Potência Ativa nas linhas de Transmissão e Desvio Quadrático de um Nível de Tensão Pré-Estabelecido, tem-se que esta relação equivale a aproximadamente 17%, já com relação à função objetivo Carregamento do Sistema de Potência, esta relação é de aproximadamente 18%. O que implica em uma parcela de centralização desta ordem, quando da composição da direção efetiva de busca. Por outro lado, ao tomar-se $\xi = \xi_{Min}$, esta relação sobe para aproximadamente 56% para os problemas de Minimização de Perdas nas Linhas de Transmissão e do Desvio de um Nível de Tensão. Enquanto que, para a Maximização do Carregamento esta relação fica em torno de 64%.

Mostrou-se a viabilidade da utilização do cálculo dinâmico de ξ , em especial para a estratégia de utilização do valor médio entre os limites máximo e mínimo desta distância, para uma dada iteração. Os resultados obtidos com esta abordagem, para as funções objetivo Perda de Potência Ativa nas Linhas de Transmissão e Desvio de um Nível de Tensão Pré-Especificado, mostram-se superiores aos obtidos com as duas outras estratégias de obtenção de ξ .

Com relação ao Método de Múltiplas Correções Centrais, executou-se testes para valores do número máximo de correções de centralização variando de 1,0 a 9,0. Como primeira análise, observou-se que o aumento no número de correções tende a diminuir o número de iterações necessárias ao final do processo de convergência. Porém, em vários casos, valores elevados associados ao número máximo de correções de centralização podem inviabilizar o processo de convergência, em especial para os sistemas de maior porte estudados. Além disto, observa-se que não é verificada uma relação linear entre o aumento do número de correções de centralização e a diminuição do número de iterações.

Para a função Perdas de Potência Ativa nas Linhas de Transmissão, constatou-se que a utilização da partida via Fluxo de Potência, associada ao Método de Múltiplas Correções

Centrais, tende a melhorar a robustez do método, enfatizando a importância da qualidade da solução inicial ao empregar esta técnica de otimização.

Ao analisar o tempo computacional associado à solução dos problemas de otimização através do Método Preditor-Corretor, nota-se que, para o problema de Minimização das Perdas de Potência Ativa nas Linhas de Transmissão, a estratégia de partida via Fluxo de potência gera os melhores resultados para todos os sistemas testados. No caso função objetivo Desvio de Nível de Tensão Pré-Estabelecido, os problemas relativos aos sistemas de maior porte (IEEE118 e IEEE300) apresentam menor tempo computacional ao utilizar-se a partida plana. Com relação ao problema de Maximização da Demanda do Sistema de Potência, como comentado anteriormente, apenas a partida plana possibilita a convergência para os problemas associados aos sistemas de maior porte, sendo a mais indicada neste caso.

Dentre as estratégias testadas para a obtenção do valor da distância ao caminho central, o cálculo dinâmico do valor médio da distância à trajetória central ($\xi = \xi_{med}$), apresenta os menores tempos de computação para as funções objetivo Perdas de Potência Ativa nas Linhas de Transmissão e Desvio de um Nível de Tensão Pré-Estabelecido. No caso do problema de Maximização do Carregamento de um Sistema de Potência, a estratégia associada $\xi = \xi_{Min}$ gera menores tempos computacionais, isto em função da maior parcela de centralização utilizada na composição da direção efetiva de busca (aproximadamente 64%). Apesar destes resultados, os tempos de computação obtidos com o Método Preditor-Corretor convencional são inferiores aos melhores resultados obtidos com o Método do Máximo Passo no Caminho Central, o que mostra que este primeiro método é mais eficiente na solução dos problemas propostos.

Os resultados relativos ao tempo computacional demandando pelo Método de Máximo Passo no Caminho Central, mostram que este método é mais eficiente na resolução dos problemas de Minimização das Perdas de Potência Ativa nas Linhas de Transmissão e de Minimização dos Desvio de um Nível de Tensão Pré-Especificado, quando comparado aos dois outros métodos testados. Porém, para que o método gere tais resultados, é necessário conhecer quais os valores adequados ao número máximo de correções centralizadoras, o que constitui um ponto negativo ao utilizar este método para problemas desconhecidos. Com relação ao problema de Maximização da Demanda do Sistema de Potência, o Método Preditor-Corretor convencional apresentou tempos inferiores aos obtidos com o método de múltiplas correções, sendo o mais eficiente sob as condições de teste propostas.

Capítulo 6

Conclusões e Sugestões para Futuros Trabalhos

Esta dissertação teve como foco principal o estudo de metodologias não lineares de otimização, baseadas no Método Primal-Dual de Pontos Interiores, aplicadas ao problema de Fluxo de Potência Ótimo.

Foram comentadas algumas das principais metodologias utilizadas na solução do problema de FPO, compreendendo tanto técnicas de programação linear, quanto não linear. Alguns dos principais trabalhos publicados na área de otimização irrestrita, aplicada ao problema de FPO, foram analisados e as principais características de formulação e modelagem do problema foram abordadas.

Foi apresentada a base teórica de três algoritmos de otimização: (a) o Método Preditor-Corretor convencional, (b) o Método do Máximo Passo no Caminho Central e (c) o Método de Múltiplas Correções Centrais.

Aspectos implementacionais, ligados aos problemas de (a) Minimização de Perdas de Potência Ativa nas Linhas de Transmissão, (b) Minimização do Desvio Quadrático de um Nível de Tensão Pré-estabelecido e (c) Maximização da Demanda do Sistema de Potência, foram descritos, assim como assuntos relacionados à estratégias de partida e redução do sistema linear do método de Newton.

6.1 Conclusões

Com relação à influência do valor inicial do parâmetro de barreira no número de iterações do processo iterativo é possível constatar que cada um dos problemas estudados requer uma determinada faixa de valores para que se possa obter uma melhor performance computacional,

de forma que não é possível estipular um critério genérico para a melhor escolha do valor inicial desta variável.

A mesma conclusão pode ser emitida com relação à escolha da estratégia de partida ideal. Porém, para o problema de maximização do carregamento do sistema, observou-se que a partida com perfil plano tende a ser mais confiável.

Para o Método de Máximo Passo no Caminho Central, foram discutidas três diferentes abordagens para a obtenção da distância ao caminho central. A primeira abordagem apresentada utiliza um valor constante para esta variável, enquanto que, as duas abordagens restantes empregam um algoritmo desenvolvido neste trabalho, para o cálculo dinâmico do valor da distância à trajetória central. A partir dos resultados obtidos pode-se dizer que a estratégia de cálculo do valor médio para a distância ao caminho central, tende a gerar melhores resultados do que as outras duas estratégias testadas.

Nos testes relativos ao Método de Múltiplas Correções Centrais, avaliou-se a influência da escolha do máximo número de correções centralizadoras permitidas, do forma a obter o melhor desempenho do algoritmo. Com base nos resultados gerados é possível concluir que o aumento do número de correções tende a diminuir o número de iterações do processo iterativo. Porém, dentre os três métodos testados, este é o que apresenta o maior número de casos de não convergência, o que mostra a necessidade de estudos mais aprofundados neste tema.

Finalmente, foram comparados os tempos de processamento computacional, gerados por cada um dos métodos de otimização, utilizados na resolução dos três problemas de FPO propostos. Constata-se que o método de Múltiplas Correções Centralizadoras pode gerar os menores tempos computacionais se for escolhido o número de correções adequado, o que contrasta com os problemas de não convergência que podem ser gerados para números de correções inadequados. Assim, pode-se dizer que embora este método seja “potencialmente” mais eficiente dentre os testados, o método Preditor-Corretor oferece maior confiabilidade e robustez, além de possuir um menor número de parâmetros a serem escolhidos pelo usuário a partir de critérios empíricos.

A análise geral dos resultados numéricos obtidos nesta dissertação aponta que, embora a pesquisa relacionada à utilização de métodos de pontos interiores aplicados à problemas de Fluxo de Potência Ótimo tenha avançado nas últimas décadas, uma série de aspectos necessita ser melhor compreendida para que estes métodos possam ser utilizados de forma mais eficiente.

6.2 Sugestões para Futuros Trabalhos

O estudo apresentado nesta dissertação pode ser utilizado como base para novas pesquisas na área de otimização não linear irrestrita. Dentre as possíveis linhas que carecem de melhorias e de uma investigação mais aprofundada, pode-se sugerir os seguintes temas:

- Obtenção de algoritmos matemáticos para o cálculo do valor inicial do parâmetro de barreira, de forma que esta escolha melhore as características de convergência dos algoritmos utilizados. Sobretudo para programas de cunho comercial;
- Estudo de algoritmos para a estimação da solução inicial do processo de convergência, levando em conta as particularidades das diferentes funções objetivo utilizadas;
- Estudo da utilização do Método de Múltiplas Correções Centrais, de forma que as correções de centralização sejam executadas após os passos de Predição e Correção do Método Preditor-Corretor convencional. Seguindo as idéias apresentadas em (WU; CHANG, 2004);
- Desenvolvimento de um algoritmo *híbrido*, que incorpore as características dos Métodos Preditor-Corretor, Máximo Passo no Caminho Central e Múltiplas Correções Centrais;
- Aplicação dos algoritmos MPCC e MCC em problemas de FPO que envolvam outros índices de desempenho;
- Utilização de coordenadas retangulares na representação das tensões complexas nodais, aplicadas aos algoritmos de Máximo Passo no Caminho Central e Múltiplas Correções Centrais;
- Utilização de sistemas elétricos reais nos testes;
- Testes de robustez com relação à qualidade das soluções.

Referências Bibliográficas

ALVARADO, F. "Penalty Factors from Newton's Method". In: IEEE. *Transactions on Power Apparatus and Systems*. [S.l.], 1978. v. 97, n. 6, p. 2031–2037.

BAZARAA, M. S.; SHETTY, C. M. "*Nonlinear Programming - Theory and Algorithms*". 1ª. ed. School of Industrial and Systems Engineering, Georgia Institute of Technology, Atlanta, Georgia, USA: John Wiley & Sons, 1979. ISBN 0-471-78610-1.

BURCHETT, R. C.; HAPP, H. H.; VIERATH, D. R. "Quadratically Convergent Optimal Power Flow". In: IEEE. *Transactions on Power Apparatus and Systems*. [S.l.], 1984. v. 103, n. 11, p. 3267–3276.

BURCHETT, R. C.; HAPP, H. H.; WIRGAU, K. A. "Large Scale Optimal Power Flow". In: IEEE. *Transactions on Power Apparatus and Systems*. [S.l.], 1982. v. 101, n. 9, p. 3277–3732.

CARPENTIER, J. "Contribution à L'étude du Dispatching Économique". In: *Bulletin de la Société Française des Électriciens*. [S.l.: s.n.], 1962. v. 3, n. 8, p. 431–447.

CASTRONUOVO, E.; CAMPAGNOLO, J.; SALGADO, R. "A Largest-Step Central-Path Algorithm Applied to the Optimal Power Flow Problem". In: *SBA Controle e Automação*. [S.l.: s.n.], 2000. v. 11, n. 3, p. 176–181.

CASTRONUOVO, E. D.; CAMPAGNOLO, J. M.; SALGADO, R. "Optimal Power Flow Solutions via Interior Point Method with High-Performance Computation Techniques". In: 13th PSCC. *Proceedings of the Power System Computation Conference Proc.* Trondheim, 1999. p. 1207–1213.

CLEMENTS, K. A.; DAVIS, P. W.; FREY, K. D. "An Interior Point Algorithm for Weighted Least Absolute Value Power System State Estimation". In: *Proceedings of the IEEE/PES Winter Meeting*. [S.l.: s.n.], 1991.

DAI, Y.; MCCALLEY, J.; VITTAL, V. "Simplification, Expansion and Enhancement of Direct Interior Point Algorithm for Power System Maximum Loadability". In: IEEE. *Transactions on Power Systems*. [S.l.], 2000. v. 15, n. 3, p. 1014–1021.

DIKIN, I. I. "Iterative Solution of Problems of Linear and Quadratic Programming". In: *Sovietic Mathematics Doklady*. [S.l.: s.n.], 1967. v. 8, p. 674–675.

- DOMMEL, H.; TINNEY, W. "Optimal power flow solutions". In: IEEE. *Transactions on Power Apparatus and Systems*. [S.l.], 1968. p. 1866–1876.
- EL-BAKRY, A. *et al.* "On the Formulation and Theory of the Newton Interior-Point Method for Nonlinear Programming". In: *Journal of Optimization Theory and Applications*. [S.l.: s.n.], 1996. v. 89, n. 3, p. 507–541.
- FERREIRA, L. C. A. *et al.* "Interior Point Method Applied to Voltage Collapse Problems and System-Losses-Reduction". In: IEE. *Proceedings on Generation, Transmission and Distribution*. [S.l.], 2002. v. 149, n. 2.
- FIACCO, A. V.; MCCORNICK, G. P. "*Nonlinear Programming: Sequential Unconstrained Minimization Techniques*". [S.l.]: John Wiley & Sons, 1968.
- FORSQREN, A.; GILL, P. E.; WRIGHT, M. H. "Interior Methods for Nonlinear Optimization". In: *SIAM Review*. [S.l.: s.n.], 2002. v. 44, n. 4, p. 525–597.
- FRISCH, K. R. "*The Logarithmic Potential Method of Convex Programming*". University of Oslo, Institute of Economics, Noruega, 1955.
- GARZILLO, A.; INNORTA, M.; RICCI, M. "The Problem of the Active and Reactive Optimum Power Dispatching Solved by Utilizing a Primal-Dual Interior Point Method". In: *International Journal on Electrical Power & Energy Systems*. [S.l.: s.n.], 1998. v. 20, n. 6, p. 427–434.
- GARZILLO, A.; INNORTA, M.; RICCI, M. "The Flexibility of Interior Point Based Optimal Flow Algorithms Facing Critical Network Situations". In: *Electrical Power & Energy Systems*. [S.l.: s.n.], 1999. v. 21, n. 8, p. 579–584.
- GERTZ, M.; NOCEDAL, J.; SARTENAER, A. "A Starting Point Strategy for Nonlinear Interior Methods". In: *Applied Mathematics Letters*. [S.l.: s.n.], 2004. v. 17, n. 8, p. 945–952.
- GILL, P. E. *et al.* "On Projected Newton Methods for Linear Programming and an Equivalence to Karmarkar's Projective Method". In: *Mathematical Programming*. [S.l.: s.n.], 1986. v. 36, p. 183–209.
- GONDZIO, J. "Multiple Centrality Corrections in a Primal-Dual Method for Linear Programming". In: *Computational Optimization and Applications*. [S.l.: s.n.], 1996. v. 6, n. 2, p. 137–156.
- GONZAGA, C. "The Largest Step Path Following Algorithm for Monotone Linear Complementarity Problems". In: *Mathematical Programming*. [S.l.: s.n.], 1997. v. 76, p. 309–332.
- GONZAGA, C. C.; BONNANS, J. F. "Fast Convergence of the Simplified Largest Step Path Following Algorithm". In: *Mathematical Programming*. [S.l.: s.n.], 1996. v. 76, p. 99–115.

- GRANVILLE, S. "Optimal Reactive Dispatch Through Interior Point Methods". In: IEEE. *Transactions on Power Systems*. [S.l.], 1994. v. 9, n. 4, p. 136–146.
- HAPP, H. H. "Optimal Power Dispatch". In: IEEE. *Transactions on Power Apparatus and Systems*. [S.l.], 1974. v. 93, n. 3, p. 820–830.
- HOUSOS, E.; IRISARRI, G. "Real and Reactive Power Systems Security Dispatch Using a Variable Weight Optimization Method". In: IEEE. *Transactions on Power Apparatus and Systems*. [S.l.], 1983. v. 102, p. 1260–1268.
- IRISARRI, G. *et al.* "Maximum loadability of power systems using interior point non-linear optimization method". In: IEEE. *Transactions on Power Systems*. [S.l.], 1997. v. 12, n. 1, p. 162–172.
- KARMAKAR, N. "A New Polynomial-Time Algorithm for Linear Programming". In: *Technical Report, AT and T Bell Laboratories*. [S.l.: s.n.], 1984. p. 302–311.
- MEGGIDO, N. "*Pathways to the Optimal Set in Linear Programming*". IBM. Almaden Research Center, San Jose, CA, USA. Relatório Técnico RJ 5295, 1986.
- MEHROTRA, S. "On the Implementation of a Primal-Dual Interior Point Method". In: SIAM. *Journal on Optimization*. [S.l.], 1992. v. 2, n. 4, p. 575–601.
- MOMOH, J. A.; EL-HAWARY, M. E.; ADAPA, R. "A Review of Selected Optimal Power Flow Literature to 1993 Part I: NonLinear and Quadratic Programming Approaches". In: IEEE. *Transactions on Power Systems*. [S.l.], 1999. v. 14, n. 1, p. 96–104.
- MOMOH, J. A.; EL-HAWARY, M. E.; ADAPA, R. "A Review of Selected Optimal Power Flow Literature to 1993 Part II: Newton, Linear Programming and Interior Point Methods". In: IEEE. *Transactions on Power Systems*. [S.l.], 1999. v. 14, n. 1, p. 105–111.
- MOMOH, J. A.; ZHU, J. Z. "Improved Interior Point Method for OPF Problems". In: IEEE. *Transactions on Power Systems*. [S.l.], 1999. v. 14, n. 3, p. 1114–1120.
- MONTICELLI, A. "*Fluxo de Carga em Redes de Energia Elétrica*". São Paulo: Edgar Blücher LTDA, 1983.
- MOTA-PALOMINO, R.; QUINTANA, V. H. "A Penalty Function-Linear Programming Method for Solving Power Systems Constrained Economic Operation Problems". In: IEEE. *Transactions on Power Apparatus and Systems*. [S.l.], 1984. v. 103, n. 6, p. 1414–1442.
- NEJDAWI, I. M.; CLEMENTS, K. A.; DAVIS, P. W. "An Efficient Interior Point Method for Sequential Quadratic Programming Based Optimal Power Flow". In: IEEE. *Transactions on Power Systems*. [S.l.], 2000. v. 15, n. 4, p. 1179–1183.
- PEREIRA, M. V. F. *et al.* "A Decomposition Approach to Security-Constrained Power Flow With Post Contingency Corrective Rescheduling". In: 9thPSCC. *Proceedings of the Power System Computation Conference*. [S.l.], 1987. p. 585–591.

- QUINTANA, V.; TORRES, G.; MEDINA-PALOMO, J. "Interior-Point Methods and Their Applications to Power Systems: A Classification of Publications and Software Codes". In: IEEE. *Transactions on Power Systems*. [S.l.], 2007. v. 15, n. 1, p. 170–176.
- RASHED, A. M. H.; KELLY, D. H. "Optimal Load Flow Solution Using Lagrangian Multipliers and the Hessian Matrix". In: IEEE. *Transactions on Power Apparatus and Systems*. [S.l.], 1974. v. 93, p. 1292–1297.
- REID, G. F.; HASDORF, L. "Economic Dispatch Using Quadratic Programming". In: IEEE. *Transactions on Power Apparatus and Systems*. [S.l.], 1973. v. 92, p. 2015–2023.
- STOTT, B.; HOBSON, E. "Power System Security Control Calculation Using Linear Programming". In: IEEE. *Transactions on Power Apparatus and Systems*. [S.l.], 1978. v. 97, n. 5, p. 1713–1731.
- SUN, D. *et al.* "Optimal Power Flow by Newton Approach". In: IEEE. *Transactions on Power Apparatus and Systems*. [S.l.], 1984. v. 103, n. 10, p. 2864–2875.
- TAPIA, R. *et al.* "The mehrotra predictor-corrector interior-point method as a perturbed composite newton method". In: *SIAM Journal on Optimization*. [S.l.: s.n.], 1996. v. 6, n. 1, p. 47–56.
- TORRES, G.; CARVALHO JR, M. d. "Computational Implementation Issues of Interior-Point Based Optimal Power Flows". In: SOCIEDADE BRASILEIRA DE AUTOMÁTICA. *XII Congresso Brasileiro de Automática*. Salvador-BA, 2006. p. 917–922.
- TORRES, G.; QUINTANA, V. "On a Nonlinear Multiple-Centrality-Corrections Interior-Point Method for Optimal Power Flow". In: IEEE. *Transactions on Power Systems*. [S.l.], 2001. v. 16, n. 2, p. 222–228.
- TORRES, G. L. "*Nonlinear Optimal Power Flow by Interior and Non-Interior Point Methods*". Tese (PhD) — University of Waterloo, Canadá, 1998.
- TORRES, G. L.; QUINTANA, V. H. "An Interior-Point Method for Nonlinear Optimal Power Flow Using Voltage Rectangular Coordinates". In: IEEE. *Transactions on Power Systems*. [S.l.], 1998. v. 13, n. 4, p. 1211–1218.
- WASHINGTON, U. of. "*Power Systems Test Case Archive*". 2007. WEB. Disponível em: <<http://www.ee.washington.edu/research/pstca/>>.
- WEBER, J. D.; OVERBYE, T. J. "An individual welfare maximization algorithm for electricity markets". *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 17, n. 3, p. 590–596, Agosto 2002.
- WELLS, D. W. "Method for Economic Secure Loading of Power Systems". In: *Proceedings of IEEE*. [S.l.: s.n.], 1968. v. 115, n. 8, p. 606–614.

- WOLLENBERG, B. F.; STADLIN, W. O. "A Real Time Optimizer for Security Dispatch". In: IEEE. *Transactions on Power Apparatus and Systems*. [S.l.], 1974. v. 93, p. 1640–1649.
- WU, Y.; DEBS, A.; MARSTEN, R. "A Direct Nonlinear Predictor-Corrector Primal-Dual Interior Point Algorithm for Optimal Power Flows". In: PICA. *Proceedings of Power Industry Computer Application*. Phoenix, Arizona, USA, 1993. p. 138–145.
- WU, Y.; DEBS, A.; MARSTEN, R. "A Nonlinear Programming Approach Based on an Interior Point Method for Optimal Power Flows". In: IEEE/NTUA. *Athens Power Tech Conference: "Planning, Operation and Control of Today's Electric Power Systems"*. Atenas, Grécia, 1993. p. 196–200.
- WU, Y.; DEBS, A.; MARSTEN, R. "A Direct Nonlinear Predictor-Corrector Primal-Dual Interior Point Algorithm for Optimal Power Flows". In: IEEE. *Transactions on Power Systems*. [S.l.], 1994. v. 9, n. 2, p. 876–883.
- WU, Y.-C. "Fuzzy Second Correction on Complementarity Condition for Optimal Power Flows". In: IEEE. *Transactions on Power Systems*. [S.l.], 2001. v. 16, n. 3, p. 360–366.
- WU, Y.-C.; CHANG, W.-F. "Evaluation of Two Algorithms of Multiple Corrections on Complementarity Conditions". In: *LESCOPE - Large Engineering Systems Conference on Power Engineering*. [S.l.: s.n.], 2004. p. 192–197.
- WU, Y.-C.; DEBS, A. S. "Initialisation, Decoupling, Hot Start, and Warm Start in Direct Nonlinear Interior Point Algorithm for Optimal Power Flows". In: IEE. *Proceedings on Generation, Transmission and Distribution*. [S.l.], 2001. v. 148, n. 1, p. 67–75.