

Universidade Federal de Santa Catarina
Curso de Pós-Graduação em Matemática e
Computação Científica

Estimativas de Erro de
Aproximação de Funcionais das
Soluções para Equações de
Difusão-Advecção-Reação

João Luis Gonçalves
Orientador: Prof. Dr. Igor Mozolevski

Florianópolis
Fevereiro de 2007

Universidade Federal de Santa Catarina
Curso de Pós-Graduação em Matemática e
Computação Científica

Estimativas de Erro de Aproximação de
Funcionais das Soluções para Equações de
Difusão-Advecção-Reação

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica, do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, da Universidade Federal de Santa Catarina, para a obtenção, do grau de Mestre em Matemática, com Área de Concentração em Matemática Aplicada.

João Luis Gonçalves
Florianópolis
Fevereiro de 2007

Estimativas de Erro de Aproximação de Funcionais das Soluções para Equações de Difusão-Advecção-Reação

por

João Luis Gonçalves

Esta Dissertação foi julgada para a obtenção do Título de Mestre,
Área de Concentração em Matemática Aplicada, e aprovada em sua forma
final pelo Curso de Pós-Graduação em Matemática e
Computação Científica.

Clóvis Caesar Gonzaga
Coordenador

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Igor Mozolevski (MTM-UFSC-Orientador)

Prof. Dr. Philippe R. B. Devloo

Profa. Dra. Sônia Maria Gomes

Prof. Dr. Jáuber Cavalcante de Oliveira

Florianópolis, fevereiro de 2007.

À minha família.

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus, pela vida e por colocar nela pessoas tão maravilhosas como são as pessoas com quem convivo.

A minha família, em especial a minha mãe Erondina Hammes Gonçalves e meu pai Darci Gonçalves que não mediram esforços para me dar oportunidades.

A Mael, pelo amor e carinho.

Aos grandes amigos que a vida pôs no meu caminho, pois muitas vezes tudo o que precisamos é de um amigo pra nos reanimar e motivar a continuar e isso nunca me faltou.

Aos mestres que me ajudaram a chegar até aqui, em especial os professores José Luiz Rosas Pinho, Daniel Noberto Kozakevich e Igor Mozolevski, que além de professores são grandes amigos.

Aos que muito me ajudaram na realização deste trabalho, Paulo Bösing, Luciane Inês Assmann Schuh, Tiago Forti, Edimar Cesar Rylo, Gustavo, Philippe Remy Bernard Devloo e Rafael Casali .

Ao Laboratório de Mecânica Computacional da Faculdade de Engenharia Civil da Universidade Estadual de Campinas que disponibilizou sua estrutura e ajuda em uma estadia de mais de um mês que foi importantíssima para este trabalho.

À Universidade Federal de Santa Catarina e em especial ao Programa de Pós Graduação em Matemática e Computação Científica que sempre me ajudou a participar de eventos que com certeza contribuíram muito para a minha formação.

Ao CNPq, pelo suporte financeiro nestes dois anos.

Sumário

Lista de figuras	iv
Resumo	ix
Abstract	x
Introdução	1
1 Aproximação de Funcionais	4
1.1 Introdução	4
1.2 Problema	4
1.3 Estimativa de Erro de Aproximação de Funcionais	6
1.4 Exemplos de Funcionais Lineares Limitados	11
2 O Método de Elementos Finitos de Galerkin Descontínuo para a Equação de Difusão-Advecção-Reação	14
2.1 Equação de Difusão-Advecção-Reação	14
2.2 Notação	15
2.3 Versão hp do Método de Galerkin Descontínuo	18
2.4 Análise da Estabilidade	20
3 Análise de Erro <i>a posteriori</i>	25
4 Análise de Erro <i>a priori</i>	30
5 Implementação	37
5.1 Introdução	37
5.2 Algoritmo Adaptativo	37
5.3 O Ambiente de Programação Científica PZ	38
5.4 Compreendendo as Necessidades Computacionais	39

6	Experimentos Numéricos	42
6.1	Exemplo 1	42
6.2	Exemplo 2	46
6.3	Exemplo 3	52
6.4	Exemplo 4	55
6.5	Exemplo 5	60

Lista de Figuras

2.1	Nó Suspenso	16
2.2	Exemplos de elementos condizentes e não-condizentes.	17
6.1	Exemplo 1: Convergência do DGFEM-SIP com h-refinamento.	43
6.2	Exemplo 1: Convergência do DGFEM-NIP com h-refinamento.	43
6.3	Exemplo 1: Convergência do Erro do DGFEM-SIP na Norma H^1	44
6.4	Exemplo 1: Convergência do Erro do DGFEM-SIP na Norma L_2	44
6.5	Exemplo 1: Convergência do Erro do DGFEM-NIP na Norma H^1	44
6.6	Exemplo 1: Convergência do Erro do DGFEM-NIP na Norma L_2	44
6.7	Exemplo 1: Convergência do DGFEM-SIP com p-refinamento.	45
6.8	Exemplo 1: Convergência do DGFEM-NIP com p-refinamento.	45
6.9	Exemplo 1: Solução primal.	46
6.10	Exemplo 1: Solução dual.	47
6.11	Exemplo 2: h-refinamento com 25 iterações, 5 % de elementos refinados a cada iteração e a solução primal, p=2.	47
6.12	Exemplo 2: h-refinamento com 25 iterações, 5 % de elementos refinados a cada iteração e a solução dual, p=2.	47
6.13	Exemplo 2: h-refinamento com 25 iterações, 5 % de elementos refinados a cada iteração e a solução primal, p=3.	48
6.14	Exemplo 2: h-refinamento com 25 iterações, 5 % de elementos refinados a cada iteração e a solução dual, p=3.	48
6.15	Exemplo 2: h-refinamento com 20 iterações, 5 % de elementos refinados a cada iteração e a solução primal, p=4.	48
6.16	Exemplo 2: h-refinamento com 20 iterações, 5 % de elementos refinados a cada iteração e a solução dual, p=4.	48
6.17	Exemplo 2: h-refinamento \times refinamento uniforme.	49
6.18	Exemplo 2: Índice de efetividade do estimador no h-refinamento.	50
6.19	Exemplo 3: h-refinamento com 25 iterações, 5% de elementos refinados a cada iteração e a solução primal, p=2.	52

6.20	Exemplo 3: h-refinamento com 25 iterações, 5% de elementos refinados a cada iteração e a solução dual, $p=2$	52
6.21	Exemplo 3: h-refinamento com 21 iterações, 5% de elementos refinados a cada iteração e a solução primal, $p=3$	53
6.22	Exemplo 3: h-refinamento com 21 iterações, 5% de elementos refinados a cada iteração e a solução dual, $p=3$	53
6.23	Exemplo 3: h-refinamento \times refinamento uniforme.	53
6.24	Exemplo 3: Índices de Efetividade.	54
6.25	Exemplo 4: Solução Primal.	55
6.26	Exemplo 4: h-refinamento com 30 iterações, 5% de elementos refinados a cada iteração e a solução primal, $p=2$	56
6.27	Exemplo 4: h-refinamento com 30 iterações, 5% de elementos refinados a cada iteração e a solução dual, $p=2$	56
6.28	Exemplo 4: h-refinamento com 25 iterações, 5% de elementos refinados a cada iteração e a solução primal, $p=3$	57
6.29	Exemplo 4: h-refinamento com 25 iterações, 5% de elementos refinados a cada iteração e a solução dual, $p=3$	57
6.30	Exemplo 4: h-refinamento com 19 iterações, 5% de elementos refinados a cada iteração e a solução primal, $p=4$	57
6.31	Exemplo 4: h-refinamento com 19 iterações, 5% de elementos refinados a cada iteração e a solução dual, $p=4$	57
6.32	Exemplo 4: h-refinamento com 16 iterações, 5% de elementos refinados a cada iteração e a solução primal, $p=5$	58
6.33	Exemplo 4: h-refinamento com 16 iterações, 5% de elementos refinados a cada iteração e a solução dual, $p=5$	58
6.34	Exemplo 4: h-refinamento comparado ao refinamento uniforme.	58
6.35	Exemplo 4: IE x DOF.	59
6.36	Exemplo 5: $\epsilon = 10^{-2}$, 16 iterações, com 10% de elementos refinados a cada iteração.	61
6.37	Exemplo 5: $\epsilon = 10^{-2}$, 16 iterações, com 10% de elementos refinados a cada iteração.	61
6.38	Exemplo 5: $\epsilon = 10^{-4}$, 16 iterações, com 10% de elementos refinados a cada iteração.	61
6.39	Exemplo 5: $\epsilon = 10^{-4}$, 16 iterações, com 10% de elementos refinados a cada iteração.	61

6.40	Exemplo 5: $\epsilon = 10^{-5}$, 10 iterações, com 20% de elementos refinados a cada iteração.	61
6.41	Exemplo 5: $\epsilon = 10^{-5}$, 10 iterações, com 20% de elementos refinados a cada iteração.	61
6.42	Exemplo 5: $\epsilon = 10^{-6}$, 10 iterações, com 20% de elementos refinados a cada iteração.	62
6.43	Exemplo 5: $\epsilon = 10^{-6}$, 10 iterações, com 20% de elementos refinados a cada iteração.	62
6.44	Exemplo 5: $\epsilon = 10^{-7}$, 10 iterações, com 20% de elementos refinados a cada iteração.	62
6.45	Exemplo 5: $\epsilon = 10^{-7}$, 10 iterações, com 20% de elementos refinados a cada iteração.	62
6.46	Exemplo 5: $\epsilon = 10^{-8}$, 10 iterações, com 20% de elementos refinados a cada iteração.	62
6.47	Exemplo 5: $\epsilon = 10^{-8}$, 10 iterações, com 20% de elementos refinados a cada iteração.	62
6.48	Exemplo 5: Para $p=2$, refinamento uniforme \times h-refinamento.	63
6.49	Exemplo 5: Aproximação da solução dual.	64

Resumo

Neste trabalho usaremos os métodos de Galerkin Descontínuo com Penalização Interior Simétrico e Não-Simétrico, para resolver problemas de Difusão-Advecção-Reação. Com base na aproximação obtida por esses métodos apresentamos, conforme [19], estimativas *a priori* e *a posteriori* para o erro gerado ao usarmos esta aproximação em quantidades de interesse. As quantidades de interesse serão representadas por funcionais lineares limitados. Com base no indicador de erro obtido utilizando o resíduo e soluções do problema dual, apresentado nas estimativas *a posteriori*, apresentamos uma estratégia de adaptação do espaço de aproximação que procura melhorar as aproximações nas quantidades de interesse. Os experimentos numéricos comprovam as estimativas apresentadas, mostram a importância da consistência dual e ilustram o comportamento da estratégia adaptativa apresentada.

Abstract

In this work we used the symmetric and nonsymmetric discontinuous Galerkin interior penalty methods, to solve problems of Diffusion-Advection-Reaction. Based on the approximation obtained by these methods we presented, accordingly to [19], *a priori* and *a posteriori* error estimates of interest amounts. The interest amounts will be represented by bounded linear functional. Based on the error indicator obtained using the residue and solutions of the dual problem, presented in the estimates *a posteriori*, we presented a strategy of adaptation of the approximating space that try to improve the approximation in the interest amounts. The numeric experiments prove the estimates presented, they show the importance of the dual consistence and illustrate the behavior of the adaptive strategy presented.

Introdução

Em muitas situações na modelagem de problemas aplicados, o que se deseja da EDP que descreve o modelo não é sua solução e sim alguma quantidade dessa solução, tais como derivadas, fluxo através de uma fronteira, valor médio sobre um subdomínio, valor da solução em um ponto, etc. Para tais finalidades nem sempre o refinamento uniforme ou uma estratégia de *hp*-refinamento que privilegie a qualidade da solução são os mais apropriados pois elevam o custo computacional sem melhorar significativamente a aproximação da quantidade de interesse.

Este trabalho tem como objetivo apresentar estimativas de erro das quantidades de interesse, conforme [19], comprovar estas estimativas numericamente, apresentar uma estratégia de *hp*-refinamento que considere o problema dual, bem como os argumentos que justificam o uso do problema dual, conforme [33]. Isto será feito utilizando os métodos de elementos finitos de Galerkin descontínuo com penalização interior simétrico (DGFEM-SIP) e não simétrico (DGFEM-NIP).

O método de Elementos Finitos de Galerkin Descontínuo (DGFEM) foi proposto de forma independente por Reed e Hill [47], em 1973, para a solução numérica da equação de transporte de nêutrons e por Nitsche [27], em 1971, como um esquema não padrão para a solução de equações elípticas de segunda ordem. Desde então muito trabalho tem sido dedicado para o desenvolvimento e análise desta classe de métodos. Para um apanhado sobre os mais recentes avanços e desenvolvimento histórico destes métodos, veja o artigo [13] e o livro [12].

Uma das vantagens dos DGFEM, em comparação com os métodos de elementos finitos baseado em espaços de aproximação conformes, é seu alto grau de localidade. Deste modo, aproximações *hp*-adaptativas de alta ordem podem ser controladas de maneira particularmente flexível e simples. Essa classe de métodos de elementos finitos associados a estratégias adaptativas oferecem ganhos em eficiência de computação em comparação com estratégias nas quais o refinamento uniforme é empregado para um grau de interpolação fixado. Entretanto o custo computacional do DGFEM permanece muito alto, em particular quando o grau de interpolação é aumentado. Uma revisão das estratégias de *hp*-refinamento recentes, é apresentada

em [20].

Neste trabalho consideramos a discretização do operador diferencial parcial $\mathcal{L}u = -\nabla \cdot \mathbf{a}\nabla u + \nabla \cdot (\mathbf{b}u) + cu$, conforme [19], empregamos uma classe de métodos de Galerkin descontínuos com penalização interior, os quais conduzem a uma discretização simétrica ou não-simétrica do operador difusivo, dependendo da escolha de um parâmetro no esquema.

Enquanto a discretização simétrica do operador auto-adjunto parece natural, o método DGFEM-NIP é preferido freqüentemente, particularmente para problemas de advecção dominante cuja a matriz de rigidez subjacente é não-simétrica de qualquer forma, devido ao fato que o método DGFEM-NIP é estável para qualquer escolha de parâmetro de penalização $C_\sigma > 0$. Por outro lado, o esquema DGFEM-SIP é estável somente quando $C_\sigma > 0$ é escolhido suficientemente grande. Em termos de precisão, ambos os esquemas convergem com uma taxa ótima em termos da norma da energia, mas a falta de consistência dual do método DGFEM-NIP conduz a uma convergência subótima do erro na norma L_2 . Neste caso, o esquema DGFEM-SIP ainda converge com taxa ótima, enquanto experimentos numéricos indicam que a norma L_2 do erro do esquema DGFEM-NIP converge com taxa ótima quando o grau de interpolação polinomial é ímpar, conforme [21]. Portanto, na prática, a perda de otimalidade do esquema DGFEM-NIP na norma L_2 , ocorre apenas para grau de interpolação par. Usando resultados teóricos apresentados em [19], verificaremos que a falta de consistência adjunta do esquema DGFEM-NIP conduz a taxas subótimas de convergência para todo $p \geq 2$, quando consideramos o erro de aproximação de funcionais lineares limitados, que representam as quantidades de interesse. Mais precisamente, para p fixo, o erro de aproximação de um certo funcional $J(\cdot)$ tem taxa de convergência $2p$ quando h tende a zero quando o esquema DGFEM-SIP é empregado, enquanto que para o esquema DGFEM-NIP, a taxa de convergência é de apenas p quando h tende a zero. Para trabalhos relacionados com estimativas de erro *a posteriori* para DGFEM com penalização interior, veja [11],[10] e [49].

Seguindo o que foi apresentado em [33], o Capítulo 1 tem como objetivo principal mostrar como surgem os argumentos de dualidade que serão usados nos capítulos seguintes. Outro objetivo é apresentar o efeito da escalabilidade da relação entre o erro no funcional e a norma da energia dos erros das aproximações primal e dual, isto será apresentado através do estudo da qualidade das estimativas. Além disso, apresentamos exemplos de funcionais lineares limitados que representam algumas das principais quantidades de interesse.

No Capítulo 2 apresentamos o problema modelo, a equação de difusão-

advecção-reação, ou seja, uma equação de segunda ordem, com forma característica não-negativa. Também apresentamos o método de Galerkin descontínuo.

O Capítulo 3 aborda as estimativas de erro *a posteriori* para o funcional que representa a quantidade interesse, usando o problema dual para obter o indicador de erro necessário ao processo adaptativo. Nesse capítulo, verificamos que o método simétrico é dual consistente e que o mesmo não acontece com o método não-simétrico.

No Capítulo 4 obtemos as estimativas de erro *a priori* para o funcional alvo, também usando soluções do problema dual.

O Capítulo 5 tem como objetivo apresentar o algoritmo adaptativo referente à teoria apresentada nos Capítulos 2, 3 e 4. Além disso, os principais aspectos da implementação e o ambiente computacional utilizado são apresentados.

No Capítulo 6 apresentamos os experimentos numéricos realizados com base no que foi anteriormente apresentado, sendo quatro exemplos de problemas de difusão e um de difusão-advecção. Os funcionais lineares que utilizamos representam o valor médio da solução sobre o domínio e a integral sobre um subdomínio.

Capítulo 1

Aproximação de Funcionais

1.1 Introdução

Seguindo o que foi apresentado por Oden e Prudhomme em [33], iremos mostrar como surge o problema dual quando o objetivo da análise é estimar a aproximação de funcionais da solução. Além disso, apresentaremos alguns funcionais lineares e limitados que representam quantidades de interesse em problemas práticos.

1.2 Problema

Neste capítulo não consideraremos nenhuma equação em particular e nenhum método de elementos finitos em específico, portanto as definições serão feitas da forma mais abstrata possível.

Seja Ω um domínio aberto limitado contido em \mathbb{R}^d com fronteira $\partial\Omega$ Lipschitziana. Consideremos o operador diferencial \mathcal{L} e o problema de valor de fronteira associado a \mathcal{L} , dado por:

$$\mathcal{L}u = f \quad \text{em } \Omega \tag{1.1}$$

com as condições de fronteira

$$\frac{\partial u}{\partial n} = g \quad \text{em } \Gamma_N \quad (\text{Neumann}) \tag{1.2}$$

e

$$u = 0 \quad \text{em } \Gamma_D \quad (\text{Dirichlet}). \tag{1.3}$$

As fronteiras Γ_D e Γ_N são tais que $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$ e $\overline{\Gamma_D} \cup \overline{\Gamma_N} = \partial\Omega$.

Vamos supor que f , $\partial\Omega$, Γ_N e Γ_D satisfazem as condições que garantem a existência e unicidade da solução u .

Multiplicando (1.1) por uma função de teste v e integrando por partes, obtemos a formulação variacional, dada por:

Encontrar $u \in V$ tal que,

$$B(u, v) = F(v), \quad \forall v \in V \quad (1.4)$$

onde V é assumido como um espaço de Hilbert, que é definido de acordo com o problema considerado.

A forma bilinear $B(\cdot, \cdot)$ em (1.4), embora não seja especificada, será assumida como simétrica e definida positiva em $V \times V$. Assim, $B(\cdot, \cdot)$ define um produto interno em V , do qual a norma associada é a chamada de norma da energia, definida como segue

$$|||v||| = \sqrt{B(v, v)}. \quad (1.5)$$

A definição do espaço de aproximação depende muito do método que será utilizado para obter a aproximação. No entanto, como não estamos especificando nenhum método, apenas denotaremos este espaço por V^{hp} , e o definiremos quando o método for apresentado. Por enquanto basta saber que V^{hp} tem dimensão finita e $V^{hp} \subset V$.

A aproximação $u_{h,p}$ é definida como $u_{h,p} \in V^{hp}$, tal que

$$B(u_{h,p}, v) = F(v) \quad \forall v \in V^{hp}. \quad (1.6)$$

Com a aproximação definida, partimos para a análise do erro. Definimos o erro numérico como a função

$$e = u - u_{h,p}, \quad (1.7)$$

observamos que $e \in V$.

Usando a linearidade da forma $B(\cdot, \cdot)$, (1.6) e (1.7), obtemos que o erro satisfaz a equação

$$B(e, v) = R_{h,p}^u(v) \quad \forall v \in V \quad (1.8)$$

onde $R_{h,p}^u$ denota o resíduo. O resíduo mede quanto a aproximação falha ao satisfazer

a formulação variacional (1.4) e é definido por:

$$R_{h,p}^u(v) = F(v) - B(u_{h,p}, v), \quad v \in V. \quad (1.9)$$

Desta definição fica claro que $R_{h,p}$ é um funcional linear e como o resíduo está definido em V , temos que $R_{h,p} \in V'$, onde V' denota o espaço dual de V .

De (1.6) e (1.9) temos que

$$R_{h,p}^u(v) = 0, \quad \forall v \in V^{hp}. \quad (1.10)$$

Para obtermos a ortogonalidade de Galerkin, basta observar (1.8) e (1.10) e concluir que:

$$B(e, v) = 0, \quad \forall v \in V^{hp}. \quad (1.11)$$

1.3 Estimativa de Erro de Aproximação de Funcionais

O objetivo da estimativa de erro de aproximação de funcionais é estimar a precisão de funcionais da solução, ao invés de alguma norma do erro de aproximação da própria solução.

Os funcionais que representarão as quantidades de interesse serão funcionais lineares e limitados, assim vamos tomar J pertencente ao espaço dual de V e nosso objetivo será avaliar a aproximação de $J(u)$.

Usando a linearidade de J , definimos o erro na aproximação do funcional, $\varepsilon^J \in \mathbb{R}$, como:

$$\varepsilon^J = J(u) - J(u_{h,p}) = J(u - u_{h,p}) = J(e). \quad (1.12)$$

Assim o que precisamos estimar é $J(e)$. Uma possibilidade para avaliar $J(e)$ é aproximar e usando (1.8) e aplicar em J , mas essa possibilidade tem problemas pois ela tem um custo computacional tão grande quanto resolver o problema original, além do que estaríamos obtendo apenas uma aproximação, o implica que teríamos mais um erro para nos preocuparmos e não saberíamos se a estimativa obtida é um cota inferior ou superior.

Considerando que o resíduo contém todas as informações sobre o erro e , se descobrirmos a relação entre o resíduo e $J(e)$ obteremos uma estimativa para

$J(e)$ sem termos que aproximar o erro e , uma vez que o resíduo depende apenas da solução $u_{h,p}$ e dos dados do problema.

Com base nisso, desejamos encontrar a relação entre $J(e)$ e $R_{h,p}^u$. Vamos supor que exista um funcional linear ω que represente essa relação da seguinte forma:

$$J(e) = \omega(R_{h,p}^u). \quad (1.13)$$

O funcional ω é chamado de *Função de Influência*, pois ele deve indicar a influência do resíduo em $J(e)$. Como ω atua sobre V' , temos que ω é um elemento do bidual de V .

Lembrando que V foi assumido como um espaço de Hilbert, e portanto um espaço reflexivo, podemos reescrever (1.13) como

$$J(e) = R_{h,p}^u(\omega) \quad (1.14)$$

onde ω agora representa um elemento de V . No entanto ainda não sabemos como obter a função de influência e este será nosso próximo passo.

De (1.8) e (1.14), concluímos que ω satisfaz a seguinte igualdade

$$J(e) = B(e, \omega). \quad (1.15)$$

Como $e \in V$, (1.15) será necessariamente satisfeito quando $\omega \in V$ é solução de

$$B(v, \omega) = J(v), \quad \forall v \in V, \quad (1.16)$$

problema o qual é denominado problema dual ou adjunto do problema primal (1.4). Então, agora temos uma forma de obter a função de influência, resolvendo o problema dual. Como a forma bilinear $B(\cdot, \cdot)$ é a mesma do problema primal e assumimos que $J(\cdot)$ é um funcional linear e limitado, pelo teorema de Lax-Milgram podemos concluir a existência e unicidade da solução de (1.16).

Mais do que apenas obtermos a função de influência, encontramos uma forma de relacionar o erro no funcional com a forma bilinear e conseqüentemente com a norma da energia. Como está relação pode ser estabelecida é o que mostraremos no Lema 1.1.

Lema 1.1. *Se $\omega_{h,p} \in S^{\mathbf{P}}(\Omega, \tau_h, \mathbf{F})$ é uma aproximação de ω , tal que*

$$B(v, \omega_{h,p}) = J(v), \quad \forall v \in V^{hp} \quad (1.17)$$

Então,

$$J(e) = B(e, \varepsilon), \quad (1.18)$$

onde $\varepsilon \in V$ denota o erro numérico em $\omega_{h,p}$, isso quer dizer $\varepsilon = \omega - \omega_{h,p}$.

Prova: Da propriedade de ortogonalidade (1.11) temos:

$$B(e, \omega_{h,p}) = R_{h,p}^u(\omega_{h,p}) = 0 \quad (1.19)$$

e combinando (1.4) e (1.5):

$$J(e) = B(e, \omega) - B(e, \omega_{h,p}) = B(e, \omega - \omega_{h,p}) = B(e, \varepsilon) \quad (1.20)$$

como afirmamos.

Conforme apresentado por [5], a relação entre $J(e)$ e a norma da energia pode ser da seguinte forma:

Teorema 1.1. *Sobre as definições anteriores e condições assumidas*

$$J(e) = B(e, \varepsilon) = \frac{1}{4} |||e + \varepsilon|||^2 - \frac{1}{4} |||e - \varepsilon|||^2 \quad (1.21)$$

Prova: Notamos que,

$$|||e + \varepsilon|||^2 = B(e + \varepsilon, e + \varepsilon) = B(e, e) + 2B(e, \varepsilon) + B(\varepsilon, \varepsilon) \quad (1.22)$$

$$|||e - \varepsilon|||^2 = B(e - \varepsilon, e - \varepsilon) = B(e, e) - 2B(e, \varepsilon) + B(\varepsilon, \varepsilon). \quad (1.23)$$

Combinando esses dois resultados, temos

$$|||e - \varepsilon|||^2 - |||e + \varepsilon|||^2 = 4B(e, \varepsilon) \quad (1.24)$$

o qual, com o Lema 1.1, prova a relação. \square

Uma versão modificada de (1.21) usando um fator de escala $s \in \mathbb{R}$, foi proposta por [33], como:

$$J(e) = B(e, \varepsilon) = B(se, \frac{\varepsilon}{s}) = \frac{1}{4} |||se + \frac{\varepsilon}{s}|||^2 - \frac{1}{4} |||se - \frac{\varepsilon}{s}|||^2 \quad (1.25)$$

O valor de s é escolhido de forma a igualar as quantidades $|||se|||$ e $|||\frac{\varepsilon}{s}|||$, isso implica

$$s = \sqrt{\frac{|||\varepsilon|||}{|||e|||}}. \quad (1.26)$$

A equação (1.25) estabiliza a relação entre o erro $J(e)$ e a norma da energia da combinação linear de e e ε .

Vamos supor que tenhamos estimativas superiores e inferiores para $|||se + \frac{\varepsilon}{s}|||$ e $|||se - \frac{\varepsilon}{s}|||$. Com base nestes estimativas vamos obter estimativas para $J(e)$ e analisar a qualidade das mesmas.

Sejam η_{low}^+ , η_{upp}^+ , η_{low}^- e η_{upp}^- , números reais tais que as estimativas seguintes são válidas:

$$\eta_{low}^+ \leq |||se + \frac{\varepsilon}{s}||| \leq \eta_{upp}^+, \quad (1.27)$$

e

$$\eta_{low}^- \leq |||se - \frac{\varepsilon}{s}||| \leq \eta_{upp}^-. \quad (1.28)$$

Então é simples obter as seguintes aproximações de $J(e)$:

$$J(e) \approx \eta_{eel}^J = \frac{1}{4}(\eta_{low}^+)^2 - \frac{1}{4}(\eta_{low}^-)^2 \quad (1.29)$$

e

$$J(e) \approx \eta_{eeu}^J = \frac{1}{4}(\eta_{upp}^+)^2 - \frac{1}{4}(\eta_{upp}^-)^2, \quad (1.30)$$

tão bem quanto a aproximação média:

$$J(e) \approx \eta_{eea}^J = \frac{1}{2}(\eta_{eel}^J + \eta_{eeu}^J). \quad (1.31)$$

Teorema 1.2. *(Limites Inferior e Superior)* Sejam as quantidades η_{low}^J e η_{upp}^J sendo definidas como:

$$\eta_{low}^J = \frac{1}{4}(\eta_{low}^+)^2 - \frac{1}{4}(\eta_{upp}^-)^2 \quad (1.32)$$

e

$$\eta_{upp}^J = \frac{1}{4}(\eta_{upp}^+)^2 - \frac{1}{4}(\eta_{low}^-)^2. \quad (1.33)$$

Então, η_{low}^J e η_{upp}^J são estimativas inferior e superior de $J(e)$, como segue:

$$\eta_{low}^J \leq J(e) \leq \eta_{upp}^J. \quad (1.34)$$

Notamos que a média de η_{low}^J e η_{upp}^J dá η_{eea}^J

Prova: Segue imediatamente de (1.25). \square

Avaliaremos a qualidade das estimativas η_{low}^J e η_{upp}^J em termos do índice de efetividade de η_{low}^+ , η_{upp}^+ , η_{low}^- e η_{upp}^- . Os índices de efetividade são:

$$\lambda_{low}^- = \frac{\eta_{low}^-}{\|se - \frac{\varepsilon}{s}\|}, \quad \lambda_{upp}^- = \frac{\eta_{upp}^-}{\|se - \frac{\varepsilon}{s}\|},$$

$$\lambda_{low}^+ = \frac{\eta_{low}^+}{\|se + \frac{\varepsilon}{s}\|}, \quad \lambda_{upp}^+ = \frac{\eta_{upp}^+}{\|se + \frac{\varepsilon}{s}\|}.$$

Assim, usando (1.25) e assumindo $J(e)$ diferente de zero, temos:

$$\begin{aligned} \frac{\eta_{low}^J}{J(e)} &= \frac{1}{J(e)} \left(\frac{1}{4} (\eta_{low}^+)^2 - \frac{1}{4} (\eta_{upp}^-)^2 \right) \\ &= \frac{1}{J(e)} \left(\frac{1}{4} (\lambda_{low}^+)^2 \|se + \frac{\varepsilon}{s}\|^2 - \frac{1}{4} (\lambda_{upp}^-)^2 \|se - \frac{\varepsilon}{s}\|^2 \right) \\ &= \frac{1}{J(e)} \left(\frac{1}{4} (\lambda_{low}^+)^2 \|se + \frac{\varepsilon}{s}\|^2 - \frac{1}{4} (\lambda_{upp}^-)^2 \|se + \frac{\varepsilon}{s}\|^2 + (\lambda_{upp}^-)^2 J(e) \right) \end{aligned}$$

então o seguinte índice de efetividade para a estimativa inferior em $J(e)$ é dada por:

$$\lambda_{low}^J = \frac{\eta_{low}^J}{J(e)} = (\lambda_{upp}^-)^2 + \frac{1}{4} ((\lambda_{low}^+)^2 - (\lambda_{upp}^-)^2) \frac{\|se + \frac{\varepsilon}{s}\|^2}{J(e)}.$$

Da mesma maneira, temos para o limite superior

$$\lambda_{upp}^J = \frac{\eta_{upp}^J}{J(e)} = (\lambda_{low}^-)^2 + \frac{1}{4} ((\lambda_{upp}^+)^2 - (\lambda_{low}^-)^2) \frac{\|se + \frac{\varepsilon}{s}\|^2}{J(e)}.$$

Podemos observar que a qualidade das estimativas depende diretamente da razão $\frac{\|se + \frac{\varepsilon}{s}\|^2}{J(e)}$. Essa razão pode tomar um valor grande dependendo da quantidade de interesse. Quando o objetivo da adaptatividade é controlar $J(e)$ ao invés de $\|e\|$, essa razão tem uma tendência a crescer. Obtendo os índices de efetividade λ_{low}^J e λ_{upp}^J próximos a um, o índice de efetividade com respeito a quantidade em norma da energia será excelente, isto é, muito próximo a um, tal que $(\lambda_{low}^+)^2 - (\lambda_{upp}^-)^2$ e $(\lambda_{upp}^+)^2 - (\lambda_{low}^-)^2$ são próximos de zero.

Caso contrário podemos esperar que λ_{low}^J e λ_{upp}^J se deteriorem quando a razão tornar-se muito grande.

Por outro lado, o índice de efetividade da estimativa η_{eel}^J é dado por:

$$\lambda_{eel}^J = \frac{\eta_{low}^J}{J(e)} = (\lambda_{low}^-)^2 + \frac{1}{4}((\lambda_{low}^+)^2 - (\lambda_{low}^-)^2) \frac{\|se + \frac{\varepsilon}{s}\|^2}{J(e)}.$$

Dessa vez esperamos que a diferença $(\lambda_{low}^+)^2 - (\lambda_{low}^-)^2$ esteja muito próximo de zero. Então a qualidade de η_{eel}^J não dependerá tanto da razão $\frac{\|se + \frac{\varepsilon}{s}\|^2}{J(e)}$. A observação é análoga para as estimativas η_{eeu}^J e η_{eea}^J .

1.4 Exemplos de Funcionais Lineares Limitados

Apresentaremos aqui alguns exemplos de quantidades de interesse e as caracterizaremos em termos de funcionais lineares limitados. Em aplicações de elementos finitos, o uso de funcionais lineares limitados é muito conveniente para expressar a quantidade de interesse e se possível, na forma de uma integral sobre o domínio Ω , visto que a integração é muito utilizada nos códigos de elementos finitos. Assumimos $V = H_0^1(\Omega)$ nesta seção.

Uma quantidade de possível interesse é a média da solução u sobre um subdomínio $\Omega_s \in \Omega$. O correspondente funcional linear é escrito como:

$$J(u) = \frac{1}{|\Omega_s|} \int_{\Omega} k(x)u(x)dx \quad (1.35)$$

onde $k(x)$ é igual a 1 se $x \in \Omega_s$ e 0 caso contrário, onde $|\Omega_s|$ define a área ou volume de Ω_s .

Proposição 1.1. *Seja $u \in H_0^1(\Omega)$. Então, o funcional $J(u) = \int_{\Omega} kudx$ é limitado em $H_0^1(\Omega)$.*

Prova: Visto que $u \in H_0^1(\Omega)$ e $k \in L^2(\Omega)$, usando a desigualdade de Minkowski:

$$J(u) = \int_{\Omega} kudx \leq \|k\|_0 \|u\|_0 \leq C_0 |\Omega_s| \|u\|_1 \quad (1.36)$$

onde C_0 é a constante de Poincaré \square .

Quando a solução é uma função vetorial em $(H_0^1(\Omega))^d$, pode ser de interesse o fluxo através da $\partial\Omega_s$ de Ω_s , nesse caso o funcional, será:

$$J(\mathbf{u}) = \int_{\partial\Omega_s} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} ds = \int_{\Omega_s} \nabla \cdot \mathbf{u} dx = \int_{\Omega} k(x) \nabla \cdot \mathbf{u}(x) dx \quad (1.37)$$

Isso também define um funcional linear limitado.

Também pode acontecer que o objetivo seja avaliar uma quantidade não-linear $N(u)$ da solução u tal como:

$$N(u) = \int_{\Omega_s} u^2 dx. \quad (1.38)$$

Nesse caso, o erro ε^L será:

$$\varepsilon^N = N(u) - N(u_{h,p}) = \int_{\Omega_s} (u^2 - u_{h,p}^2) dx = 2 \int_{\Omega_s} u_{h,p} e dx + \int_{\Omega_s} e^2 dx \quad (1.39)$$

Negligenciando, o termo de maior ordem em e , podemos considerar o seguinte funcional linear, o qual é limitado,

$$L(e) = 2 \int_{\Omega_s} u_{h,p} e dx = 2 \int_{\Omega} k(x) u_{h,p}(x) e(x) dx \quad (1.40)$$

e aplicamos a metodologia de estimativa de erro de aproximação de funcionais, para obter a estimativa $\varepsilon^N \approx J(e)$.

Entretanto, existem quantidades de interesse, as quais não podem ser caracterizadas por um funcional linear limitado. Esse é o caso para o valor da solução em um ponto do domínio.

A estimativa de erro pontual objetiva avaliar a precisão da solução em um ponto dado $x_0 \in \bar{\Omega}$. Infelizmente, para $u \in H^1(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, sabemos do Teorema de Imersão de Sobolev que u não pode ser definido em x_0 quando a dimensão geométrica d é maior ou igual que dois. Em outras palavras, o funcional corresponde a quantidade de interesse $u(x_0)$,

$$J(u) = u(x_0), \quad (1.41)$$

não é necessariamente limitado.

Apelamos para o uso de funções suavizantes para driblar esse inconveniente, o qual nos permite introduzir o seguinte funcional

$$J(u) = \langle u \rangle_\varepsilon(x_0) = \int_{\Omega} u(x) k_\varepsilon(x - x_0) dx, \quad (1.42)$$

onde os suavizantes k_ε formam uma família de funções infinitamente suaves em $(-\infty, +\infty)^d$ caracterizado pelo parâmetro ε . A quantidade $\langle u \rangle_\varepsilon(x_0)$ é vista como uma média de u sobre uma pequena vizinhança de x_0 . Os suavizantes k_ε são escol-

hidos da forma:

$$k_\epsilon(x) = \begin{cases} c \cdot \exp\left(\frac{|x|^2}{\epsilon^2} - 1\right)^{-1}, & \text{se } |x| < \epsilon; \\ 0, & \text{se } |x| \geq \epsilon, \end{cases} \quad (1.43)$$

onde a constante c , a qual depende de d, ϵ e x_0 é selecionado para satisfazer

$$\int_{\Omega} k_\epsilon(x - x_0) dx = 1. \quad (1.44)$$

Como uma observação, notamos que os suavizantes não são necessariamente empregados para obter um funcional linear limitado em $H^1(\Omega)$.

Nossa motivação para usar o processo de suavização conta com as propriedades de que quando $u \in L^2(\Omega)$, a função $x_0 \mapsto \langle u \rangle_\epsilon(x_0)$ converge para u quando ϵ tende para zero e quando u é constante ou linear na bola $B(x_0, \epsilon) \subset \Omega$, temos $\langle u \rangle_\epsilon(x_0) = u(x_0)$ independente do valor de ϵ .

Observamos que para calcular $J(u)$ em (1.42) e a constante c em (1.44), é necessária a integração numérica do suavizante k_ϵ . Essas funções são muito locais e por isso a integração é geralmente realizada usando a regra de quadratura de Gauss clássica, ela mostra-se necessária para limitar o tamanho do suporte de $k_\epsilon(x - x_0)$, igual a 2ϵ , com respeito ao tamanho da malha h do elemento contendo o ponto x_0 . No entanto, requer que:

$$k \leq \frac{2\epsilon}{h} \quad (1.45)$$

onde k é um número fracionário dado, $0 < k \leq 1$. De fato, para alcançar uma precisão aceitável para L , evitando também muitos pontos de Gauss, foi sugerido o valor $k = \frac{1}{4}$ em [41].

Essa aproximação também aplica-se para estimar o erro pontual das derivadas direcionais da solução. Então consideramos o funcional limitado:

$$J(u) = \langle \mathbf{n} \cdot \nabla u \rangle_\epsilon(x_0) = \int_{\Omega} \mathbf{n} \cdot \nabla u(x) k_\epsilon(x - x_0) dx \quad (1.46)$$

onde \mathbf{n} é o vetor unitário representando a direção de interesse.

Capítulo 2

O Método de Elementos Finitos de Galerkin Descontínuo para a Equação de Difusão-Advecção-Reação

Neste capítulo serão apresentados os Métodos de Elementos Finitos de Galerkin Descontínuo com Penalização Interior Simétrico e Não-Simétrico, respectivamente abreviados pelas siglas DGFEM-SIP e DGFEM-NIP, para a equação de Difusão-Advecção-Reação, conforme foram apresentados em [19].

2.1 Equação de Difusão-Advecção-Reação

Consideremos Ω um domínio poliedral, aberto e limitado em \mathbb{R}^d , com a dimensão $d \geq 2$, e seja Γ a união das faces $(d - 1)$ -dimensionais abertas de $\partial\Omega$. A equação de Difusão-Advecção-Reação, é dada por

$$\mathcal{L}u \equiv -\nabla \cdot (\mathbf{a}\nabla u) + \nabla \cdot (\mathbf{b}u) + cu = f, \quad (2.1)$$

assumimos que $f \in L_2(\Omega)$, $c \in L_\infty(\Omega)$ e f e c são funções a valores reais. Além disso $\mathbf{b} = \{b_i\}_{i=1}^d$ é uma função vetorial cujas entradas b_i são funções a valores reais, Lipschitz contínuas em $\bar{\Omega}$ e $\mathbf{a} = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^d$ é um tensor simétrico, cujas entradas a_{ij} são funções a valores reais, limitadas, contínuas por partes, definidas em $\bar{\Omega}$ e que satisfazem a seguinte desigualdade

$$\zeta^T \mathbf{a}(x)\zeta \geq 0 \quad \forall \zeta \in \mathbb{R}^d, \quad a.e. \quad x \in \bar{\Omega}. \quad (2.2)$$

Assumidas estas hipóteses, chamamos (2.1) de uma *Equação Diferencial Parcial com Forma Característica Não-Negativa*. Por $\mathbf{n}(x) = n_i(x)_{i=1}^d$ denotamos o vetor normal unitário exterior a Γ em $x \in \Gamma$.

A *Função de Fichera*, $\mathbf{b} \cdot \mathbf{n}$, apresentada em [34], é definida no ponto x por

$$(\mathbf{b} \cdot \mathbf{n})(x) = \sum_{i=1}^d \mathbf{b}_i(x) \mathbf{n}_i(x).$$

Definimos também os seguintes tipos de fronteira:

$$\Gamma_0 = \{x \in \Gamma : \mathbf{n}(x)^T a(x) \mathbf{n}(x)\},$$

$$\Gamma_- = \{x \in \Gamma \setminus \Gamma_0 : \mathbf{b}(x) \cdot \mathbf{n}(x) < 0\} \quad (\text{Entrada de Fluxo}),$$

$$\Gamma_+ = \{x \in \Gamma \setminus \Gamma_0 : \mathbf{b}(x) \cdot \mathbf{n}(x) > 0\} \quad (\text{Saída de Fluxo}).$$

Se Γ_0 é não vazio, então Γ_0 será a união de dois subconjuntos disjuntos Γ_D e Γ_N , com Γ_D não vazio e aberto relativamente a Γ . Com as fronteiras definidas dessa forma podemos complementar a equação (2.1) com as condições de fronteira

$$u = g_D \text{ em } \Gamma_D \cup \Gamma_-, \quad n \cdot (a \nabla u) = g_N \text{ em } \Gamma_N. \quad (2.3)$$

Adotaremos ainda as hipóteses de que $\mathbf{b} \cdot \mathbf{n} \geq 0$ em Γ_N e que vale a hipótese de positividade: existe $\xi \in \mathbb{R}^d$ tal que

$$c(x) + \frac{1}{2} \nabla \cdot \mathbf{b}(x) + \mathbf{b}(x) \cdot \xi > 0 \text{ q.s. } x \in \Omega. \quad (2.4)$$

Para simplificar a apresentação do método, assumimos que (2.4) vale com $\xi \equiv \mathbf{0}$ e com base nesta hipótese, definimos a função positiva c_0 como segue:

$$(c_0(x))^2 = c(x) + \frac{1}{2} \nabla \cdot \mathbf{b}(x) \text{ q.s. } x \in \Omega. \quad (2.5)$$

Para ver que o problema (2.1), (2.3), está bem posto, no caso de condições de fronteira homogêneas, veja [21].

2.2 Notação

Consideramos $\tau_h = \{\Omega_i\}$ uma malha regular, que particiona o domínio Ω , em elementos Ω_i , abertos, com possíveis nós suspensos. Nó suspenso é como

denominamos o vértice de um elemento quando ele pertence a uma face de um elemento vizinho, como por exemplo o vértice A na Figura 2.1,

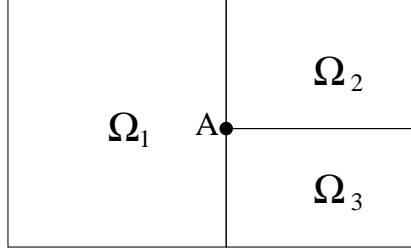


Figura 2.1: Nó Suspenso

Vamos considerar que a malha nesta descrição do método, tem no máximo um nó suspenso por face, o qual assumimos como sendo o baricentro da face. Uma malha nestas condições é chamada de 1-irregular.

Por h denotamos a função dependente da malha, constante por partes, definida por $h(x) \equiv h_i = \text{diam}(\Omega_i)$ quando $x \in \Omega_i$.

Assumimos que cada $\Omega_i \in \tau_h$ é a imagem por uma função bijetiva suave de um elemento de referência fixo $\widehat{\Omega}$, o qual chamaremos de Elemento Mestre. Ou seja, $\Omega_i = F_i(\widehat{\Omega}) \quad \forall \Omega_i \in \tau_h$, em que $\widehat{\Omega}$ é ou um aberto unitário simplex

$$\widehat{\Omega}_s = \{\widehat{x} = (\widehat{x}_1, \dots, \widehat{x}_d) \in \mathbb{R}^d : 0 < \widehat{x}_1 + \dots + \widehat{x}_d < 1, \widehat{x}_i > 0, i = 1, \dots, d\}$$

ou um hipercubo aberto

$$\widehat{\Omega}_c = (-1, 1)^d \in \mathbb{R}^d.$$

Sobre o elemento mestre $\widehat{\Omega}$ definimos os espaços dos polinômios de grau $p \geq 1$. Se o elemento mestre for um hipercubo o espaço dos polinômios será definido como

$$\zeta_p = \text{span}\{\widehat{x}^\alpha : 0 \leq \alpha_i \leq p, 1 \leq i \leq d\},$$

se o elemento mestre for um simplex, o espaço dos polinômios será

$$\mathcal{P}_p = \text{span}\{\widehat{x}^\alpha : 0 \leq |\alpha| \leq p\}.$$

Para cada elemento $\Omega_i \in \tau_h$, denotamos por p_i o grau de interpolação no elemento, observamos que p_i é um inteiro e maior que 1. Também a cada elemento $\Omega_i \in \tau_h$, denotamos por F_i a função afim tal que $F_i(\widehat{\Omega}) = \Omega_i$. Agrupando os p_i e F_i nos vetores $\mathbf{p} = \{p_i : \Omega_i \in \tau_h\}$ e $\mathbf{F} = \{F_i : \Omega_i \in \tau_h\}$, respectivamente, podemos

introduzir o espaço dos elementos finitos como

$$S^{\mathbf{P}}(\Omega, \tau_h, \mathbf{F}) = \{u \in L_2(\Omega) : u|_{\Omega_i} \circ F_i \in \zeta_{p_i} \text{ se } F_i^{-1}(\Omega_i) = \widehat{\Omega}_c$$

$$\text{ou } u|_{\Omega_i} \circ F_i \in \mathcal{P}_{p_i} \text{ se } F_i^{-1}(\Omega_i) = \widehat{\Omega}_s ; \Omega_i \in \tau_h\}.$$

Associado com a partição τ_h , introduzimos o espaço particionado de Sobolev de ordem composta \mathbf{s} definido por

$$H^{\mathbf{s}}(\Omega, \tau_h) = \{u \in L_2(\Omega) : u|_{\Omega_i} \in H^{s_i}(\Omega_i) \quad \forall \Omega_i \in \tau_h\}.$$

Lembramos que o espaço de Sobolev de ordem s , $H^s(\Omega)$ é definido como:

$$H^s(\Omega) = \{u \in L_2(\Omega) : D^\alpha u \in L_2(\Omega), \quad |\alpha| \leq s\}.$$

O espaço particionado de Sobolev de ordem composta \mathbf{s} , está equipado com a norma particionada de Sobolev e correspondente seminorma, respectivamente dadas por

$$\|u\|_{\mathbf{s}, \tau_h} = \left(\sum_{\Omega_i \in \tau_h} \|u\|_{H^{s_i}}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad |u|_{\mathbf{s}, \tau_h} = \left(\sum_{\Omega_i \in \tau_h} |u|_{H^{s_i}}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.6)$$

Quando $s_i = s_j = s$, para todo Ω_i e $\Omega_j \in \tau_h$, simplificaremos a notação de $H^{\mathbf{s}}(\Omega, \tau_h)$ para $H^s(\Omega, \tau_h)$ e analogamente a norma e semi-norma serão denotadas por $\|u\|_{s, \tau_h}$ e $|u|_{s, \tau_h}$. Se $u \in H^1(\Omega, \tau_h)$ definimos o gradiente particionado de u por

$$(\nabla_{\tau_h} u)|_{\Omega_i} = \nabla(u|_{\Omega_i}), \quad \Omega_i \in \tau_h.$$

Uma face interior de τ_h é definida como o interior $(n-1)$ -dimensional de $\partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j$, em que, Ω_i e Ω_j são dois elementos adjacentes de τ_h , não necessariamente condizentes. Dois elementos são ditos condizentes quando a intersecção de suas fronteiras é uma aresta ou uma face inteira para cada um dos elementos. Na figura (2.2), temos exemplos de elementos condizentes e não-condizentes.

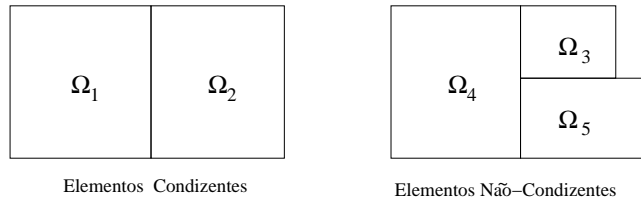


Figura 2.2: Exemplos de elementos condizentes e não-condizentes.

Uma face de fronteira de τ_h é definida como o interior não-vazio e $(d-1)$ -dimensional de $\partial\Omega_i \cap \Gamma$, em que Ω_i é um elemento de τ_h .

Definimos Γ_{int} como a união de todas as faces interiores de τ_h . Dada uma face $\gamma \subset \Gamma_{int}$, formada por dois elementos Ω_i e Ω_j , tais que os índices i e j satisfazem $i > j$, por \mathbf{n}_γ denotaremos o vetor unitário e normal a γ de Ω_i para Ω_j , portanto dependente da numeração dos elementos na partição. Nas faces de fronteira, o vetor \mathbf{n}_γ aponta para fora do elemento e substituíremos a notação \mathbf{n}_γ por \mathbf{n} apenas. Além disso, para $v \in H^1(\Omega, \tau_h)$ definimos o salto de v sobre γ e o valor médio de v em γ , respectivamente, por

$$[v] = v|_{\partial\Omega_i \cap \gamma} - v|_{\partial\Omega_j \cap \gamma} \quad \text{e} \quad \langle v \rangle = \frac{1}{2}(v|_{\partial\Omega_i \cap \gamma} + v|_{\partial\Omega_j \cap \gamma}). \quad (2.7)$$

Seja γ uma face de fronteira. Definimos o salto e a média em γ como:

$$[v] = v|_{\partial\Omega_i \cap \gamma} \quad \text{e} \quad \langle v \rangle = v|_{\partial\Omega_i \cap \gamma}.$$

Agora vamos estabelecer a notação para o traço. Dada uma função $v \in H^1(\Omega, \tau_h)$ e um elemento $\Omega_i \in \tau_h$, denotaremos por v_i^+ o traço interior de v em $\partial\Omega_i$ e de forma análoga denotaremos por v_i^- o traço exterior v em $\partial\Omega_i \setminus \Gamma$. Sempre que estiver claro no contexto a qual elemento Ω_i de τ_h o traço se refere, simplificaremos a notação dos traços suprimindo o índice que indica o elemento e escreveremos, v^+ e v^- .

2.3 Versão hp do Método de Galerkin Descontínuo

Seja Ω_i um elemento da partição τ_h , denotamos por $\partial\Omega_i$ a união das faces $(d-1)$ -dimensionais abertas de Ω_i . Se $x \in \partial\Omega_i$, definimos a função $\mathbf{n}_i(x)$ como o vetor unitário normal exterior a $\partial\Omega_i$ em x . Definimos o fluxo interior e o fluxo exterior das partes de $\partial\Omega_i$, respectivamente, por:

$$\partial_- \Omega_i = \{x \in \partial\Omega_i; \mathbf{b}(x) \cdot \mathbf{n}(x) < 0\} \quad \text{e} \quad \partial_+ \Omega_i = \{x \in \partial\Omega_i; \mathbf{b}(x) \cdot \mathbf{n}(x) \geq 0\}.$$

Vamos supor que as entradas da matriz \mathbf{a} são constantes em cada elemento $\Omega_i \in \tau_h$. Isto é,

$$\mathbf{a} \in [S^0(\Omega, \tau_h, F)]_{sym}^{d \times d}. \quad (2.8)$$

Notamos que, com apenas uma pequena mudança, nossos resultados podem facilmente serem estendidos para o caso $\sqrt{\mathbf{a}} \in [S^{\mathbf{q}}(\Omega, \tau_h, F)]_{sym}^{d \times d}$, em que o vetor \mathbf{q} , tem entradas não-negativas. Escrevemos $\bar{\mathbf{a}} = |\sqrt{\mathbf{a}}|_2^2$, em que $|\cdot|_2$ denota a norma matricial

subordinada à norma vetorial l_2 em \mathbb{R}^d e $\bar{\mathbf{a}}_i = \bar{\mathbf{a}}|_{\Omega_i}$. Por $\bar{\mathbf{a}}_{\bar{i}}$ denotamos a média aritmética dos valores $\bar{\mathbf{a}}'_j$ sobre os elementos Ω'_j (incluindo o próprio Ω_i) que possuem uma face $(d-1)$ -dimensional comum com Ω_i .

A hp-DGFEM aproximação de (2.1), (2.3) é definida como segue:
Encontrar u_{DG} em $S^{\mathbf{p}}(\Omega, \tau_h, \mathbf{F})$ tal que

$$B_{DG}(u_{DG}, v) = l_{DG}(v), \quad (2.9)$$

para qualquer $v \in S^{\mathbf{p}}(\Omega, \tau_h, F)$.

A forma bilinear $B_{DG}(\cdot, \cdot)$ é definida por:

$$B_{DG}(u, v) = B_a(u, v) + B_b(u, v) + \theta B_\gamma(v, u) - B_\gamma(u, v) + B_\sigma(u, v),$$

sendo

$$B_a(u, v) = \sum_{\Omega_i \in \tau_h} \int_{\Omega_i} \mathbf{a} \nabla u \cdot \nabla v dx,$$

$$B_b(u, v) = \sum_{\Omega_i \in \tau_h} \left\{ - \int_{\Omega_i} (u \mathbf{b} \cdot \nabla v - c u v) dx + \int_{\partial_+ \Omega_i} (\mathbf{b} \cdot \mathbf{n}_i) u^+ v^+ ds + \int_{\partial_- \Omega_i \setminus \Gamma} (\mathbf{b} \cdot \mathbf{n}_i) u^- v^+ ds \right\},$$

$$B_\gamma(u, v) = \int_{\Gamma_{int} \cup \Gamma_D} \langle (\mathbf{a} \nabla u) \cdot \mathbf{n}_\gamma \rangle [v] ds,$$

$$B_\sigma(u, v) = \int_{\Gamma_{int} \cup \Gamma_D} \sigma[u][v] ds,$$

e o funcional linear $l_{DG}(\cdot)$ é dado por

$$\begin{aligned} l_{DG} &= \sum_{\Omega_i \in \tau} \left(\int_{\Omega_i} f v dx - \int_{\partial_- \Omega_i \cap (\Gamma_D \cup \Gamma_-)} (\mathbf{b} \cdot \mathbf{n}_i) g_D v^+ \right. \\ &+ \int_{\partial \Omega_i \cap \Gamma_D} \theta g_D ((\mathbf{a} \nabla v^+) \cdot \mathbf{n}_i) ds + \int_{\partial \Omega_i \cap \Gamma_N} g_N v^+ ds + \left. \int_{\partial \Omega_i \cap \Gamma} \sigma g_D v^+ ds \right). \end{aligned}$$

O parâmetro σ é chamado de parâmetro de penalização descontínuo e é definido por

$$\sigma|_{\gamma} = C_{\sigma} \frac{\langle \bar{\mathbf{a}} p^2 \rangle}{\langle h \rangle} \text{ para } \gamma \subset \Gamma_{int} \cup \Gamma_D, \quad (2.10)$$

com C_{σ} uma constante positiva, conforme apresentada em [21]. As arestas $\gamma \subset (\Gamma_{int} \cup \Gamma_D)$ com $\sigma|_{\gamma} = 0$ são omitidas das integrais que aparecem na definição de $B_{\sigma}(u, v)$ e $l_{DG}(v)$.

Escolhendo o parâmetro $\theta = 1$ teremos o método com penalização interior não simétrico (DGFEM -NIP), enquanto que para $\theta = -1$ teremos o método com penalização interior simétrico (DGFEM-SIP).

2.4 Análise da Estabilidade

Como se sabe da teoria de elementos finitos a coercividade da forma bilinear garante a estabilidade do método de elementos finitos.

Portanto, antes de analisar o erro do método de Galerkin Descontínuo (2.9), vamos obter alguns resultados preliminares referentes a coercividade da forma bilinear. Introduzimos a norma DG, $||| \cdot |||_{DG}$ como:

$$\begin{aligned} |||u|||_{DG}^2 &= \sum_{\Omega_i \in \tau_h} (\|\sqrt{a} \nabla u\|_{L_2(\Omega_i)}^2 + \|c_0 u\|_{L_2(\Omega_i)}^2 + \\ &\frac{1}{2} \|u^+\|_{\partial_- \Omega_i \cap (\Gamma_D \cup \Gamma_-)}^2 + \frac{1}{2} \|u^+ - u^-\|_{\partial_- \Omega_i \setminus \Gamma}^2 + \frac{1}{2} \|u^+\|_{\partial_+ \Omega_i \cap \Gamma}^2) + \\ &\int_{\Gamma_{int} \cup \Gamma_D} \sigma [u]^2 ds + \int_{\Gamma_{int} \cup \Gamma_D} \frac{1}{\sigma} \langle (a \nabla u) \cdot \mathbf{n}_{\gamma} \rangle^2 ds \end{aligned} \quad (2.11)$$

em que $\|\cdot\|_{\gamma}$, $\gamma \subset \partial \Omega_i$, denota a (semi)norma associada com o (semi) produto interno

$$(v, u)_{\gamma} = \int_{\gamma} |\mathbf{b} \cdot \mathbf{n}_i| v u ds,$$

e c_0 está definida como em (2.5). Lembramos que a definição acima de $||| \cdot |||_{DG}$ representa uma leve modificação da norma considerada na referência [21]; no caso $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, (2.11) corresponde a norma proposta por Baumann et. al [9], [28] e Baker et. al [8], conforme [35].

Com essa notação, agora nos munimos do seguinte resultado de coercividade para a forma bilinear $B(\cdot, \cdot)$ sobre $S^{\mathbf{P}}(\Omega, \tau_h, \mathbf{F}) \times S^{\mathbf{P}}(\Omega, \tau_h, \mathbf{F})$.

Teorema 2.1. *Com σ definido como em (2.10), existe uma constante positiva C , a qual depende apenas da dimensão d e da regularidade da forma de τ_h , tal que*

$$B_{DG}(v, v) \geq C \|v\|_{DG}^2 \quad \forall v \in S^P(\Omega, \tau_h, \mathbf{F}), \quad (2.12)$$

desde que a constante C_σ que surge na definição do parâmetro de penalização descontínuo σ seja escolhido tal que $C_\sigma > 0$ quando $\theta = 1$ e $C_\sigma > C'_\sigma$ quando $\theta = -1$, C'_σ é uma constante positiva suficientemente grande

Para a demonstração desse teorema veja [19], [35] e [21].

O teorema (2.1) indica que o esquema DGFEM-NIP é coercivo sobre $S^P(\Omega, \tau_h, \mathbf{F}) \times S^P(\Omega, \tau_h, \mathbf{F})$ para qualquer escolha da constante $C_\sigma > 0$ na definição do parâmetro de penalização σ , enquanto o esquema DGFEM-SIP é coercivo apenas se C_σ é escolhido suficientemente grande.

Seguindo com a análise do erro, assumimos que a solução u para o problema de valor de fronteira (2.1), (2.3) é suficientemente lisa, isto é $u \in H^2(\Omega, \tau_h)$ e as funções u e $(a\nabla u) \cdot \mathbf{n}_e$ são contínuas através de cada face $e \subset \partial\Omega_i \setminus \Gamma$ que intersecta o subdomínio de elipticidade, $\Omega_0 = \{x \in \bar{\Omega} : \xi^T \mathbf{a}(x) \xi > 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d\}$. Se a suavidade solicitada é violada, o método de discretização tem que ser modificado conforme [21]. Sob estas hipóteses, o método é consistente com o problema considerado e a propriedade de ortogonalidade de Galerkin é verdadeira, ou seja,

$$B_{DG}(u - u_{DG}, v) = 0 \quad \forall v \in S^P(\Omega, \tau_h, \mathbf{F}). \quad (2.13)$$

Será assumido na análise precedente, e também na obtenção de estimativas *a priori*, que o vetor velocidade \mathbf{b} satisfaz a seguinte hipótese:

$$\mathbf{b} \cdot \nabla_{\tau_h} v \in S^P(\Omega, \tau_h, \mathbf{F}), \quad \forall v \in S^P(\Omega, \tau_h, \mathbf{F}). \quad (2.14)$$

Para assegurar que as curvas características do operador advectivo estejam corretamente definidas, iremos assumir que $\mathbf{b} \in [W_\infty^1(\Omega)]^d$.

Denotamos por Π_p o projetor ortogonal de $L_2(\Omega)$ sobre o espaço de elementos finitos $S^P(\Omega, \tau_h, \mathbf{F})$; isto é, dado $u \in L_2(\Omega)$, definimos $\Pi_p u$ por

$$(u - \Pi_p u, v) = 0, \quad \forall v \in S^P(\Omega, \tau_h, \mathbf{F}),$$

em que (\cdot, \cdot) denota o produto interno de $L_2(\Omega)$.

Notemos que (2.14) implica que

$$(u - \Pi_p u, \mathbf{b} \cdot \nabla_{\tau_h} v) = 0, \quad (2.15)$$

para qualquer $v \in S^{\mathbf{P}}(\Omega, \tau_h, \mathbf{F})$, conforme as provas do lema e do teorema abaixo.

Lembramos que se o esquema (2.9) é suplementado por estabilização do tipo streamline-diffusion, então uma escolha diferente de Π_p pode ser empregada tal que maximize as propriedades de hp -aproximação.

Vamos decompor o erro global $u - u_{DG}$ como

$$u - u_{DG} = (u - \Pi_p u) + (\Pi_p u - u_{DG}) \equiv \eta + \xi. \quad (2.16)$$

Com esta definição podemos enunciar o seguinte lema,

Lema 2.1. *Assuma que (2.4) e (2.14) valem e que $\beta_1|_k = \|c/(c_0)^2\|_{L^\infty(\Omega_k)}$. Então as funções ξ e η definidas em (2.16) satisfazem a seguinte desigualdade*

$$\begin{aligned} \|\xi\|_{DG}^2 \leq C & \left(\sum_{\Omega_k \in \tau_h} (\|\sqrt{a}\eta\|_{L_2(\Omega_k)}^2 + \beta_1^2 \|c_0\eta\|_{L_2(\Omega_k)}^2 + \|\eta^+\|_{\partial_+\Omega_k \cap \Gamma}^2 + \|\eta^-\|_{\partial_-\Omega_k \cap \Gamma}^2) \right. \\ & \left. + \int_{\Gamma_{int} \cup \Gamma_D} \frac{1}{\sigma} \langle (a\nabla\eta) \cdot \mathbf{n}_\sigma \rangle^2 ds + \int_{\Gamma_{int} \cup \Gamma_D} \sigma[\eta]^2 ds \right) \end{aligned}$$

sendo C é uma constante que depende apenas da dimensão d e da constante de regularidade de τ_h .

Prova: Da propriedade de ortogonalidade de Galerkin (2.13), deduzimos que

$$B_{DG}(\xi, \xi) = -B_{DG}(\eta, \xi), \quad (2.17)$$

em que ξ e η são definidos como em (2.16). Aplicando a coercividade de $B(\cdot, \cdot)$, temos que

$$\|\xi\|_{DG} \leq -\frac{1}{C} B_{DG}(\eta, \xi).$$

Vamos estimar $B_{DG}(\eta, \xi)$. Para tal, considere os seguintes resultados:

Resultado 1:

$$\sum_{\Omega_k \in \tau_h} \left\{ \int_{\partial_+\Omega_k} (b \cdot n_k) \eta^+ \xi^+ ds + \int_{\partial_-\Omega_k \setminus \Gamma} (b \cdot n_k) \eta^- \xi^+ ds \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\Omega_k \in \tau_h} \left\{ \int_{\partial_- \Omega_k \setminus \Gamma} (b \cdot n_k) \eta^- [\xi] ds + \int_{\partial_+ \Omega_k \cap \Gamma} (b \cdot n_k) \eta^+ \xi^+ ds \right\} \\
&\leq \sum_{\Omega_k \in \tau_h} \left\{ \left(\int_{\partial_- \Omega_k \setminus \Gamma} 2(b \cdot n_k) (\eta^-)^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\partial_- \Omega_k \setminus \Gamma} \frac{1}{2} (b \cdot n_k) [\xi]^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \right. \\
&\quad \left. + \left(\int_{\partial_+ \Omega_k \cap \Gamma} 2(b \cdot n_k) (\eta^+)^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\partial_+ \Omega_k \cap \Gamma} \frac{1}{2} (b \cdot n_k) (\xi^+)^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \right\}
\end{aligned}$$

Resultado 2: Usando (2.15), temos que

$$\int_{\Omega_k} \eta b \cdot \nabla \xi dx = 0$$

Agora vamos estimar $B_{DG}(\eta, \xi)$:

$$\begin{aligned}
B_{DG}(\eta, \xi) &= \sum_{\Omega_k \in \tau_h} \int_{\Omega_k} a \nabla \eta \cdot \nabla \xi dx + \sum_{\Omega_k \in \tau_h} \left(\int_{\Omega_k} -\eta b \cdot \nabla \xi dx + \int_{\Omega_k} c \frac{c_0^2}{c_0^4} \eta (c_0^2) \xi dx \right) \\
&\quad + \sum_{\Omega_k \in \tau_h} \left(\int_{\partial_+ \Omega_k} (b \cdot n_k) \eta^+ \xi^+ ds + \int_{\partial_- \Omega_k \setminus \Gamma} (b \cdot n_k) \eta^+ \xi^+ ds \right) \\
&\quad + \theta \int_{\Gamma_{int} \cup \Gamma_D} \langle (a \nabla \xi) \cdot n_e \rangle [\eta] ds - \int_{\Gamma_{int} \cup \Gamma_D} \langle (a \nabla \eta) \cdot n_e \rangle [\xi] ds + \int_{\Gamma_{int} \cup \Gamma_D} \sigma[\eta] [\xi] ds \\
&\leq \sum_{\Omega_k \in \tau_h} \left(\int_{\Omega_k} a (\nabla \eta)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega_k} a (\nabla \xi)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + \sum_{\Omega_k \in \tau_h} \left(\int_{\Omega_k} \frac{cc_0^2}{c_0^4} (\eta)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega_k} c_0^2 (\xi)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad + \sum_{\Omega_k \in \tau_h} \left(\int_{\partial_- \Omega_k} 2|b \cdot n_k| (\eta^-)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\partial_- \Omega_k} \frac{1}{2} |b \cdot n_k| [\xi]^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad + \sum_{\Omega_k \in \tau_h} \left(\int_{\partial_+ \Omega_k \cap \Gamma} 2|b \cdot n_k| (\eta^+)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\partial_+ \Omega_k \cap \Gamma} \frac{1}{2} |b \cdot n_k| (\xi)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad + \sum_{\gamma \in \Gamma_{int} \cup \Gamma_D} \left(\int_{\gamma} \frac{1}{\sigma} \langle (a \nabla \xi) \cdot n_e \rangle^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\gamma} \sigma [\eta]^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad + \sum_{\gamma \in \Gamma_{int} \cup \Gamma_D} \left(\int_{\gamma} \frac{1}{\sigma} \langle (a \nabla \eta) \cdot n_e \rangle^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\gamma} \sigma [\xi]^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{\gamma \in \Gamma_{int} \cup \Gamma_D} \left(\int_{\gamma} \sigma[\eta]^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\gamma} \sigma[\xi]^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
\leq & \left(\sum_{\Omega_k \in \mathcal{T}_h} \left\{ \|\sqrt{a} \nabla \xi\|_{L_2(\Omega_k)}^2 + \|c_0 \xi\|_{L_2(\Omega_k)}^2 + \frac{1}{2} \|\xi^+ - \xi^-\|_{\partial_- \Omega_k \setminus \Gamma}^2 + \frac{1}{2} \|\xi^+\|_{\partial_+ \Omega_k \cap \Gamma}^2 \right\} + \right. \\
& \left. \int_{\Gamma_{int} \cup \Gamma_D} \sigma[\xi]^2 ds + \int_{\Gamma_{int} \cup \Gamma_D} \frac{1}{\sigma} \langle (a \nabla \xi) \cdot \mathbf{n}_e \rangle^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \times \left(\sum_{\Omega_k \in \mathcal{T}_h} \left(\|\sqrt{a} \nabla \eta\|_{L_2(\Omega_k)}^2 + \beta_1^2 \|c_0 \eta\|_{L_2(\Omega_k)}^2 + 2 \|\eta^+\|_{\partial_+ \Omega_k \cap \Gamma}^2 + \|\eta^-\|_{\partial_- \Omega_k \setminus \Gamma}^2 \right) + \right. \\
& \left. 2 \int_{\Gamma_{int} \cup \Gamma_D} \sigma[\eta]^2 ds + \int_{\Gamma_{int} \cup \Gamma_D} \frac{1}{\sigma} \langle (a \nabla \eta) \cdot \mathbf{n}_\gamma \rangle^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
\leq & C \|\xi\|_{DG} \left(\sum_{\Omega_k \in \mathcal{T}_h} \left(\|\sqrt{a} \nabla \eta\|_{L_2(\Omega_k)}^2 + \beta_1^2 \|c_0 \eta\|_{L_2(\Omega_k)}^2 + 2 \|\eta^+\|_{\partial_+ \Omega_k \cap \Gamma}^2 + \|\eta^-\|_{\partial_- \Omega_k \setminus \Gamma}^2 \right) + \right. \\
& \left. 2 \int_{\Gamma_{int} \cup \Gamma_D} \sigma[\eta]^2 ds + \int_{\Gamma_{int} \cup \Gamma_D} \frac{1}{\sigma} \langle (a \nabla \eta) \cdot \mathbf{n}_\gamma \rangle^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.18}
\end{aligned}$$

Logo substituindo (2.18) em (2.17), obtemos o resultado desejado. Este lema nos mostra que o erro do método é limitado pelo erro de um interpolador da solução exata.

Capítulo 3

Análise de Erro *a posteriori*

Análise exposta neste capítulo segue a apresentada em [19]. Neste capítulo deduzimos um indicador do erro tipo *a posteriori* para um funcional de interesse, este indicador será composto de estimativas do erro por elemento da partição. Usaremos este indicador de erro no processo adaptativo aproveitando a consistência dual do método simétrico (DGFEM-SIP).

Com base na teoria apresentada no Capítulo 1, começamos a análise considerando o seguinte problema dual ou adjunto: encontrar $z \in H^2(\Omega, \tau_h)$ tal que

$$B_{DG}(v, w) = J(v) \quad \forall v \in H^2(\Omega, \tau_h). \quad (3.1)$$

A existência e unicidade da solução de (3.1) depende do funcional linear $J(\cdot)$. Vamos assumir que este funcional é escolhido tal que (3.1) tenha única solução.

O primeiro passo na obtenção das estimativas do erro *a posteriori*, na forma como faremos aqui, é a definição dos resíduos. Consideremos um funcional linear dado $J(\cdot)$. O primeiro tipo de resíduo é o resíduo interno, este é definido sobre cada elemento $\Omega_i \in \tau_h$ da seguinte forma,

$$R_{int}|_{\Omega_i} = (f - \mathcal{L}u_{DG})|_{\Omega_i}.$$

O resíduo interno mede quanto u_{DG} falha ao satisfazer a equação diferencial nos elementos Ω_i da partição τ_h .

Como u_{DG} aproxima apenas de maneira fraca as condições de fronteira (2.3), podemos definir resíduos sobre as fronteiras $\Gamma_D \cup \Gamma_-$ e Γ_N da seguinte forma

$$R_D|_{\partial\Omega_i \cap (\Gamma_D \cup \Gamma_-)} = (g_D - u_{DG}^+)|_{\partial\Omega_i \cap (\Gamma_D \cup \Gamma_-)},$$

$$R_N|_{\partial\Omega_i \cap \Gamma_N} = (g_N - (a\nabla u_{DG}^+) \cdot \mathbf{n})|_{\partial\Omega_i \cap \Gamma_N}.$$

Usando os resíduos acima definidos e o teorema da divergência a propriedade de ortogonalidade (2.13) pode ser reescrita da seguinte forma,

$$\begin{aligned}
0 &= B_{DG}(u - u_{DG}, v) = l_{DG}(v) - B_{DG}(u_{DG}, v) \\
&= \sum_{\Omega_i \in \tau_h} \left(\int_{\Omega_i} R_{int} v dx - \int_{\partial_- \Omega_i \cap \Gamma} (\mathbf{b} \cdot \mathbf{n}_i) R_D v^+ ds \right. \\
&\quad + \int_{\partial_- \Omega_i \setminus \Gamma} (\mathbf{b} \cdot \mathbf{n}_i) [u_{DG}] v^+ ds + \int_{\partial\Omega_i \cap \Gamma_D} \theta R_D ((a\nabla v^+) \cdot \mathbf{n}_i) ds \\
&\quad + \int_{\partial\Omega_i \cap \Gamma_D} \sigma R_D v^+ ds + \int_{\partial k \cap \Gamma_N} R_N v^+ ds \\
&\quad - \int_{\partial\Omega_i \setminus \Gamma} \left\{ \frac{\theta}{2} [u_{DG}] (a\nabla v^+) \cdot \mathbf{n}_i + \frac{1}{2} [(a\nabla u_{DG}) \cdot \mathbf{n}_i] v^+ \right\} ds \\
&\quad \left. - \int_{\partial\Omega_i \setminus \Gamma} \sigma [u_{DG}] v^+ ds \right) \tag{3.2}
\end{aligned}$$

para todo $v \in S^{\mathbf{P}}(\Omega, \tau_h, \mathbf{F})$.

O teorema seguinte é o principal resultado deste capítulo e seu corolário fornece a estimativa de erro *a posteriori*.

Teorema 3.1. *Se u e u_{DG} denotam as soluções de (2.1), (2.3) e (2.9), respectivamente, e supondo que a solução dual w esteja definida por (3.1), então vale a seguinte fórmula de representação do erro:*

$$J(u) - J(u_{DG}) = \varepsilon_{\Omega}(u_{DG}, h, p, w - w_{hp}) \equiv \sum_{\Omega_i \in \tau_h} \eta_i, \tag{3.3}$$

em que

$$\begin{aligned}
\eta_i &= \int_{\Omega_i} R_{int}(w - w_{hp}) dx - \int_{\partial_{-\Omega_i} \cap \Gamma} (\mathbf{b} \cdot \mathbf{n}_i) R_D(w - w_{hp})^+ ds \\
&+ \int_{\partial_{-\Omega_i} \setminus \Gamma} (\mathbf{b} \cdot \mathbf{n}_i) [u_{DG}](w - w_{hp})^+ ds + \int_{\partial\Omega_i \cap \Gamma_D} \theta R_D((a\nabla(w - w_{hp}))^+ \cdot \mathbf{n}_i) ds \\
&+ \int_{\partial\Omega_i \cap \Gamma_D} \sigma R_D(w - w_{hp})^+ ds + \int_{\partial\Omega_i \cap \Gamma_N} R_N(w - w_{hp})^+ ds \\
&- \int_{\partial\Omega_i \setminus \Gamma} \left\{ \frac{\theta}{2} [u_{DG}](a\nabla(w - w_{hp}))^+ \cdot \mathbf{n}_i + \frac{1}{2} [(a\nabla u_{DG}) \cdot \mathbf{n}_i](w - w_{hp})^+ \right\} ds \\
&- \int_{\partial\Omega_i \setminus \Gamma} \sigma [u_{DG}](w - w_{hp})^+ ds \tag{3.4}
\end{aligned}$$

para todo $w_{hp} \in S^{\mathbf{P}}(\Omega, \tau_h, \mathbf{F})$.

Prova: Escolhendo $v = u - u_{DG}$ em (3.1), lembrando da linearidade de $J(\cdot)$ e da propriedade de ortogonalidade de Galerkin (3.2), deduzimos que

$$\begin{aligned}
J(u) - J(u_{DG}) &= J(u - u_{DG}) \\
&= B_{DG}(u - u_{DG}, w) \\
&= B_{DG}(u - u_{DG}, w - w_{hp}), \tag{3.5}
\end{aligned}$$

e logo segue (3.3).

Portanto, aplicando a desigualdade triangular obtemos uma estimativa *a posteriori* para o erro.

Corolário 3.1. *Sob as hipóteses do Teorema 3.1, vale o seguinte limitante a posteriori para o erro:*

$$|J(u) - J(u_{DG})| \leq \varepsilon_{|\Omega|}(u_{DG}, h, p, w - w_{hp}) \equiv \sum_{\Omega_i \in \tau_h} |\eta_i|, \tag{3.6}$$

em que η_i está definido como em (3.4).

Os termos locais envolvendo a diferença entre a solução dual w e sua aproximação obtida pelo método de Galerkin descontínuo $w_{hp} \in S^{\mathbf{P}}(\Omega, \tau_h, \mathbf{F})$, que aparecem na estimativa *a posteriori* (3.6) contém informações úteis sobre o transporte global do erro. Desta forma, evitamos eliminar os termos envolvendo a solução dual, w , mesmo que esta seja desconhecida, depois a aproximaremos numericamente de uma forma mais precisa que w_{hp} .

Agora vamos analisar a estrutura do problema dual definido por (3.1). Vamos supor que o objetivo final é aproximar o valor médio (ponderado) da solução u , isto é, o funcional linear é $J(\cdot) \equiv M_\Psi(\cdot)$, com

$$M_\Psi(u) = \int_{\Omega} u \Psi dx,$$

em que $\Psi \in L_2(\Omega)$. Integrando por partes o problema dual (3.1), encontramos que a solução dual w deve satisfazer o seguinte problema dependente da malha: encontrar w tal que

$$\mathcal{L}^* w \equiv -\nabla \cdot (\mathbf{a} \nabla w) - \mathbf{b} \cdot \nabla w + cw = \Psi \quad \text{em } \Omega_i, \quad (3.7)$$

sujeito às seguintes condições nas interfaces,

$$(\mathbf{b} \cdot \mathbf{n}_k)[w] + (1 + \theta) \langle (\mathbf{a} \nabla w) \cdot \mathbf{n}_i \rangle + \sigma[w] = 0 \quad \text{em } \partial_{+\Omega_i} \setminus \Gamma, \quad (3.8)$$

$$(1 + \theta) \langle (\mathbf{a} \nabla w) \cdot \mathbf{n}_i \rangle + \sigma[w] = 0 \quad \text{em } \partial_{-\Omega_i} \setminus \Gamma, \quad (3.9)$$

$$[w] = 0 \quad \text{em } \partial\Omega_i \cap \Omega_{\mathbf{a}}, \quad (3.10)$$

e condições de fronteira,

$$w = 0 \quad \text{em } \partial\Omega_i \cap (\Gamma_D \cup \Gamma_+), \quad (3.11)$$

$$(\mathbf{b} \cdot \mathbf{n}_i)w + (\mathbf{a} \nabla w) \cdot \mathbf{n}_i = 0 \quad \text{em } \partial\Omega_i \cap \Gamma_N, \quad (3.12)$$

$$(1 + \theta)(\mathbf{a} \nabla w) \cdot \mathbf{n}_i = 0 \quad \text{em } \partial\Omega_i \cap \Gamma_D, \quad (3.13)$$

para todo $\Omega_i \in \tau_h$. Caso $\theta = -1$, a dependência da malha da solução dual pode ser removida usando a continuidade de w no domínio de elipticidade $\Omega_{\mathbf{a}}$ e o problema dual (3.7),(3.8),(3.9),(3.10), (3.11),(3.12) e (3.13) reduz-se a encontrar w tal que

$$\mathcal{L}^* w \equiv -\nabla \cdot (\mathbf{a} \nabla w) - \mathbf{b} \cdot \nabla w + cw = \Psi \quad \text{em } \Omega, \quad (3.14)$$

$$w = 0 \quad \text{em } \Gamma_D \cup \Gamma_+, \quad (\mathbf{b} \cdot \mathbf{n})w + (\mathbf{a} \nabla w) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{em } \Gamma_N. \quad (3.15)$$

Desta forma, para $\theta = -1$ o problema dual correspondente está bem posto para esta escolha de funcional alvo. Observamos que a solução problema formado transpondo os argumentos na forma bilinear $B_{DG}(\cdot, \cdot)$ resolve o problema adjunto formal dado pelo operador diferencial parcial adjunto a \mathcal{L} , \mathcal{L}^* . Portanto conforme a definição de consistência dual apresentada em [14], podemos dizer que

$B_{DG}(\cdot, \cdot)$ é dual consistente. Por outro lado, quando $\theta = 1$ a forma bilinear $B_{DG}(\cdot, \cdot)$ não é dual consistente e, neste caso, os termos envolvendo o fluxo difusivo em (3.8), (3.9) e (3.13) e as condições de fronteira forçam que ambos w e $(a\nabla w) \cdot \mathbf{n}$ sejam iguais a zero em Γ_D . Além disso as condições nas interfaces tornam-se inconsistentes no sentido que enquanto (3.10) força a continuidade de z em Ω_a , (3.9) requer que

$$(a\nabla w)|_{\partial\Omega_i \cap \gamma} \cdot \mathbf{n}_i = -(a\nabla w)|_{\partial\Omega_j \cap \gamma} \cdot \mathbf{n}_i$$

para todas as arestas $\gamma \subset \partial\Omega_i$, em que k_i e k_j são dois elementos vizinhos com a aresta comum γ . Em geral ambas as condições não podem ser satisfeitas simultaneamente. Essa falta de regularidade quando $\theta = 1$ levará à degradação da taxa de convergência do erro no funcional $J(\cdot)$, quando o espaço de elementos finitos $S^{\mathbf{p}}(\Omega, \tau_h, \mathbf{F})$ é enriquecido. Em contraste, quando o esquema DGFEM-SIP é empregado, o problema dual é simplesmente o problema adjunto, sujeito a condições de fronteira adequadas, conforme feito acima. Portanto para o DGFEM-SIP, taxas de convergência ótimas serão observadas para dados suficientemente suaves nos problemas primal e dual. Estas observações serão feitas mais precisamente no próximo capítulo, no qual trataremos da análise de erro *a priori* do *hp*-DGFEM.

Capítulo 4

Análise de Erro *a priori*

Conforme apresentado em [19], obteremos estimativas *a priori* para o erro de aproximação de funcionais de interesse das soluções dos métodos DGFEM-SIP e DGFEM-NIP, introduzidos no Capítulo 2.

Usaremos os sobrescritos DGFEM-NIP e DGFEM-SIP para distinguir os dois métodos. Portanto para a forma bilinear vamos usar a notação $B_{DG}^{SIP}(\cdot, \cdot)$ quando $\theta = -1$ e $B_{DG}^{NIP}(\cdot, \cdot)$ quando $\theta = 1$.

As soluções numéricas u_{DG}^{SIP} e u_{DG}^{NIP} satisfazem os seguintes problemas: encontrar u_{DG}^{SIP} em $S^{\mathbf{P}}(\Omega, \tau_h, \mathbf{F})$ tal que

$$B_{DG}^{SIP}(u_{DG}^{SIP}, v) = l_{DG}(v) \quad \forall v \in S^{\mathbf{P}}(\Omega, \tau_h, \mathbf{F});$$

e encontrar u_{DG}^{NIP} em $S^{\mathbf{P}}(\Omega, \tau_h, \mathbf{F})$ tal que

$$B_{DG}^{NIP}(u_{DG}^{NIP}, v) = l_{DG}(v) \quad \forall v \in S^{\mathbf{P}}(\Omega, \tau_h, \mathbf{F}),$$

respectivamente. Usando a identidade (3.5) adaptada a notação que acabamos de definir, temos que

$$J(u) - J(u_{DG}^{SIP}) = B_{DG}^{SIP}(u - u_{DG}^{SIP}, w^{SIP} - w_{h,p}), \quad (4.1)$$

quando o esquema DGFEM-SIP é empregado, enquanto para o esquema DGFEM-NIP, temos

$$J(u) - J(u_{DG}^{NIP}) = B_{DG}^{NIP}(u - u_{DG}^{NIP}, w^{NIP} - w_{h,p}), \quad (4.2)$$

para todo $w_{h,p}$ em $S^{\mathbf{P}}(\Omega, \tau_h, \mathbf{F})$. Aqui, w^{SIP} e w^{NIP} são as soluções analíticas dos

seguintes problemas duais: encontrar $w^{SIP} \in H^2(\Omega, \tau_h)$ tal que

$$B_{DG}^{SIP}(v, w^{SIP}) = J(v) \quad \forall v \in H^2(\Omega, \tau_h),$$

e encontrar $w^{NIP} \in H^2(\Omega, \tau_h)$ tal que

$$B_{DG}^{NIP}(v, w^{NIP}) = J(v) \quad \forall v \in H^2(\Omega, \tau_h), \quad (4.3)$$

respectivamente.

Agora reescreveremos a fórmula (4.2) para o erro no funcional quando o esquema DGFEM-NIP é empregado em termos de w^{SIP} ao invés da solução dual w^{NIP} . O objetivo desta estratégia é contar com a regularidade da solução dual. Enquanto que a regularidade da solução dual w^{SIP} pode ser facilmente determinada, visto que o problema de valor de fronteira subjacente à equação diferencial parcial é o problema adjunto, sujeito a dados apropriados, a regularidade de Sobolev da solução do problema dual no caso não-simétrico depende da malha (4.3) e não está bem compreendida, portanto para $h > 0$, esperamos que w^{NIP} não seja uma função contínua.

Notamos que

$$J(u) - J(u_{DG}^{NIP}) = B_{DG}^{NIP}(u - u_{DG}^{NIP}, w^{SIP} - w_{h,p}) - 2B_\epsilon(w^{SIP}, u - u_{DG}^{NIP})$$

para todo $w_{h,p} \in \mathcal{S}^{\mathbf{P}}(\Omega, \tau_h, \mathbf{F})$. Assim, o erro de aproximação do funcional, pode ser escrito de forma unificada como:

$$J(u) - J(u_{DG}) = B_{DG}(u - u_{DG}, w^{SIP} - w_{h,p}) - (1 + \theta)B_\epsilon(w^{SIP}, u - u_{DG}^{NIP}), \quad (4.4)$$

para todo $w_{h,p} \in \mathcal{S}^{\mathbf{P}}(\Omega, \tau_h, \mathbf{F})$. O segundo termo do lado direito da equação (4.4) aparece somente quando o esquema DGFEM-NIP é empregado, isto é, quando $\theta = 1$. Além disso, esperamos que este termo seja de ordem menor do que o primeiro termo em (4.4) e isso tornará a taxa de convergência sub ótima para o método DGFEM-NIP quando o espaço de elementos finitos $\mathcal{S}^{\mathbf{P}}(\Omega, \tau_h, \mathbf{F})$ for enriquecido. Antes de embarcar na análise de erro *a priori*, primeiro vamos apresentar o seguinte resultado sobre as propriedades de aproximação do projetor ortogonal Π_p , anteriormente introduzido. Por conveniência, vamos assumir que as malhas são no máximo 1-irregulares e também que consistem de elementos afim equivalentes a d -paralelepípedos, ou seja as funções F_i são funções afins e o elemento mestre é um d -paralelepípedo.

Lema 4.1. *Suponha que $\Omega_i \in \tau_h$ é um d -paralelepípedo de diâmetro h_i e que $u|_{\Omega_i} \in H^{k_i}(\Omega_i)$, $k_i \geq 0$, para $\Omega_i \in \tau_h$. Então, valem os seguintes resultados de aproximação*

$$\begin{aligned} \|u - \Pi_p u\|_{L_2(\Omega_i)} &\leq C \frac{h_i^{s_i}}{p_i^{k_i}} \|u\|_{H^{k_i}(\Omega_i)}, \quad \|u - \Pi_p u\|_{L_2(\partial\Omega_i)} \leq C \frac{h_i^{s_i - \frac{1}{2}}}{p_i^{k_i - \frac{1}{2}}} \|u\|_{H^{k_i}(\Omega_i)}, \\ |u - \Pi_p u|_{H^1(\Omega_i)} &\leq C \frac{h_i^{s_i - 1}}{p_i^{k_i - \frac{3}{2}}} \|u\|_{H^{k_i}(\Omega_i)}, \quad |u - \Pi_p u|_{H^1(\partial\Omega_i)} \leq C \frac{h_i^{s_i - \frac{3}{2}}}{p_i^{k_i - \frac{5}{2}}} \|u\|_{H^{k_i}(\Omega_i)}, \end{aligned}$$

em que $1 \leq s_i \leq \min(p_i + 1, k_i)$ e C é uma constante independente de u , h_i e p_i , mas dependente da dimensão d e da regularidade de τ_h .

Prova:Veja [4].

Para o resto deste capítulo, assumiremos que o vetor dos graus polinomiais de interpolação \mathbf{p} , com $p_i \geq 1$ para cada $\Omega_i \in \tau_h$, tem variação local limitada, isto é, existe uma constante $\rho \geq 1$ tal que, para qualquer par de elementos Ω_i e Ω_j os quais possuem uma face $(d - 1)$ -dimensional em comum,

$$\rho^{-1} \leq \frac{p_i}{p_j} \leq \rho. \quad (4.5)$$

Sob estas hipóteses, combinando as aproximações do Lema 4.1 com o Lema 2.1, deduzimos que

$$\|\xi\|_{DG}^2 \leq C \sum_{\Omega_i \in \tau_h} \left(\alpha \frac{h_i^{2(s_i - 1)}}{p_i^{2(k_i - \frac{3}{2})}} + \beta_2 \frac{h_i^{2s_i}}{p_i^{2k_i}} + \gamma \frac{h_i^{2(s_i - \frac{1}{2})}}{p_i^{2(k_i - \frac{1}{2})}} \right) \|\xi\|_{H^{k_i}(\Omega_i)}^2 \quad (4.6)$$

em que $\alpha|_{\Omega_i} = \bar{\alpha}_i$, $\beta_2|_{\Omega_i} = (\beta_1|_{\Omega_i})^2 \|c_0\|_{L^\infty(\Omega_i)}^2$, $(\beta_1|_{\Omega_i} = \|\frac{c}{(c_0)^2}\|_{L^\infty(\Omega_i)})$, $\gamma|_{\Omega_i} = \|\mathbf{b}\|_{L^\infty(\Omega_i)}$ e C é uma constante positiva que depende apenas de d , do parâmetro ρ em (4.5) e da regularidade e forma de τ_h .

Com esses resultados de aproximação, procedemos agora a prova do principal teorema deste capítulo.

Teorema 4.1. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ um domínio poliedral limitado, J um funcional linear limitado em Ω , τ_h uma subdivisão regular de Ω em d -paralelepípedos e \mathbf{p} o vetor dos graus dos polinômios, de variação local limitada. Assumindo que as condições sobre os dados (2.4), (2.8), e (2.14), são verdadeiras e que $u|_{\Omega_i} \in H^{k_i}(\Omega_i)$, $k_i \geq 2$, para $\Omega_i \in \tau_h$, $w^{SIP}|_{\Omega_i} \in H^{l_i}$, $l_i \geq 2$, para $\Omega_i \in \tau_h$, então solução $u_{DG} \in S^{\mathbf{p}}(\Omega, \tau_h, \mathbf{F})$ de*

(2.9) obedece a seguinte estimativa para o erro

$$|J(u) - J(u_{DG})|^2 \leq C \sum_{\Omega_i \in \tau_h} \left(\alpha \frac{h_i^{2(s_i-1)}}{p_i^{2(k_i-\frac{3}{2})}} + \beta_3 \frac{h_i^{2s_i}}{p_i^{2k_i}} + \gamma \frac{h_i^{2(s_i-\frac{1}{2})}}{p_i^{2(k_i-\frac{1}{2})}} \right) \|u\|_{H^{k_i}}^2 \quad (4.7)$$

$$\times \left(\sum_{\Omega_i \in \tau_h} \left(\alpha \frac{h_i^{2(t_i-1)}}{p_i^{2(l_i-\frac{3}{2})}} + \beta_4 \frac{h_i^{2t_i}}{p_i^{2l_i}} + \gamma \frac{h_i^{2(t_i-\frac{1}{2})}}{p_i^{2(l_i-1)}} \right) \|w^{SIP}\|_{H^{l_i}}^2 + (1+\theta) \|w^{SIP}\|_{2,\tau_h}^2 \right)$$

para $1 \leq s_i \leq \min(p_i+1, k_i)$, $1 \leq t_i \leq \min(p_i+1, l_i)$, $p_i \geq 1$, $\Omega_i \in \tau_h$, com $\alpha|_{\Omega_i} = \bar{\alpha}_i$, $\beta_3|_{\Omega_i} = (1 + (\beta_1|_{\Omega_i})^2) \|c_0\|_{L^\infty(\Omega_i)}^2$, $\beta_1|_{\Omega_i} = \|\frac{c(x)}{(c_0(x))^2}\|_{L^\infty(\Omega_i)}$, $\beta_4|_{\Omega_i} = \|c + \nabla \cdot \mathbf{b}\|_{L^\infty(\Omega_i)}^2$, $\gamma|_{\Omega_i} = \|\mathbf{b}\|_{L^\infty(\Omega_i)}$ e C é uma constante dependente da dimensão d , do parâmetro ρ de (4.5) e da regularidade de τ_h .

Prova: Decompondo o erro $u - u_{DG}$ como em (2.16), observamos da equação (4.4) que o erro no funcional $J(\cdot)$ pode ser expresso como segue:

$$J(u) - J(u_{DG}) = B_{DG}(\eta, w^{SIP} - w_{h,p}) + B_{DG}(\xi, w^{SIP} - w_{h,p})$$

$$-(1+\theta)B_e(w^{SIP}, \eta) - (1+\theta)B_e(w^{SIP}, \xi) \equiv I + II + III + IV. \quad (4.8)$$

Começamos tratando o termo I . Para isso, definimos $w_{h,p} - \Pi_p w^{SIP}$. Empregando os resultados de aproximação apresentados no lema (4.1),

$$I^2 = B_{DG}^2(\eta, w^{SIP} - \Pi w^{SIP}) \leq \|\eta\|_{DG}^2 \|w^{SIP} - \Pi w^{SIP}\|_{DG}^2 =$$

$$\left(\sum_{\Omega_i \in \tau_h} (\|\sqrt{a} \nabla \eta\|_{L_2(\Omega_i)}^2 + \|c_0 \eta\|_{L_2(\Omega_i)}^2 + \frac{1}{2} \|\eta^+\|_{\partial_- \Omega_i \cap (\Gamma_D \cup \Gamma_-)}^2 + \frac{1}{2} \|\eta^+ - \eta^-\|_{\partial_- \Omega_i \cap \Gamma}^2 + \frac{1}{2} \|\eta^+\|_{\partial_+ \Omega_i \cap \Gamma}^2) \right.$$

$$\left. + \int_{\Gamma_{int} \cup \Gamma_D} \sigma [\eta]^2 ds + \int_{\Gamma_{int} \cup \Gamma_D} \frac{1}{\sigma} \langle (\mathbf{a} \nabla \eta) n_\gamma \rangle^2 ds \right)$$

$$\times \left(\sum_{\Omega_i \in \tau_h} (\|\sqrt{a} \nabla (w^{SIP} - \Pi w^{SIP})\|_{L_2(\Omega_i)}^2 + \|c_0 (w^{SIP} - \Pi w^{SIP})\|_{L_2(\Omega_i)}^2) \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \|(w^{SIP} - \Pi w^{SIP})^+\|_{\partial_- \Omega_i \cap (\Gamma_D \cup \Gamma_-)}^2 + \frac{1}{2} \|(w^{SIP} - \Pi w^{SIP})^+ - (w^{SIP} - \Pi w^{SIP})^-\|_{\partial_- \Omega_i \cap \Gamma}^2 \right.$$

$$\left. + \int_{\Gamma_{int} \cup \Gamma_D} \sigma [(w^{SIP} - \Pi w^{SIP})]^2 ds + \int_{\Gamma_{int} \cup \Gamma_D} \frac{1}{\sigma} \langle (\mathbf{a} \nabla (w^{SIP} - \Pi w^{SIP})) n_\gamma \rangle^2 ds \right)$$

$$\leq \left(\sum_{\Omega_i \in \tau_h} (\|\sqrt{a}\|^2 C \frac{h_i^{2(s_i-1)}}{p_i^{2(k_i-\frac{3}{2})}} \|u\|_{H^{k_i}}^2 + \|c_0\|_{L^\infty(\Omega_i)}^2 C \frac{h_i^{2s_i}}{p_i^{2k_i}} \|u\|_{H^{k_i}}^2 + \frac{\|b\|_{L^\infty(\Omega_i)}}{2} C \frac{h_i^{2(s_i-\frac{1}{2})}}{p_i^{2(k_i-\frac{1}{2})}} \|u\|_{H^{k_i}}^2) \right)$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{\Omega_i \in \tau_h} |\sqrt{\mathbf{a}}|_2^2 C \frac{h_i^{2(s_i-1)}}{p_i^{2(k_i-\frac{3}{2})}} \|u\|_{H^{k_i}}^2 + \sum_{\Omega_i \in \tau_h} |\sqrt{\mathbf{a}}|_2^2 C \frac{h_i^{2(s_i-1)}}{p_i^{2(k_i-\frac{3}{2})}} \|u\|_{H^{k_i}}^2 \\
& \times \left(\sum_{\Omega_i \in \tau_h} (|\sqrt{\mathbf{a}}|_2^2 C \frac{h_i^{2(t_i-1)}}{p_i^{2(l_i-\frac{3}{2})}} \|w^{SIP}\|_{H^{l_i}}^2 + \|c_0\|_{L^\infty(\Omega)}^2 C \frac{h_i^{2t_i}}{p_i^{2l_i}} \|w^{SIP}\|_{H^{l_i}}^2 + \frac{\|b\|_{L^\infty(\Omega_i)}}{2} C \frac{h_i^{2(t_i-\frac{1}{2})}}{p_i^{2(l_i-\frac{1}{2})}} \|w^{SIP}\|_{H^{l_i}}^2) \right. \\
& \left. + \sum_{\Omega_i \in \tau_h} |\sqrt{\mathbf{a}}|_2^2 C \frac{h_i^{2(t_i-1)}}{p_i^{2(l_i-\frac{3}{2})}} \|w^{SIP}\|_{H^{l_i}}^2 + \sum_{\Omega_i \in \tau_h} |\sqrt{\mathbf{a}}|_2^2 C \frac{h_i^{2(t_i-1)}}{p_i^{2(l_i-\frac{3}{2})}} \|w^{SIP}\|_{H^{l_i}}^2 \right) \\
& \leq c \sum_{\Omega_i \in \tau} \left(\alpha \frac{h_i^{2(s_i-1)}}{p_i^{2(k_i-\frac{3}{2})}} + \|c_0\|_{L^\infty(\Omega_i)}^2 \frac{h_i^{2s_i}}{p_i^{2k_i}} + \gamma \frac{h_i^{2(s_i-\frac{1}{2})}}{p_i^{2(k_i-\frac{1}{2})}} \right) \|u\|_{H^{k_i}(\Omega_i)}^2 \\
& \quad \times \sum_{\Omega_i \in \tau} \left(\alpha \frac{h_i^{2(t_i-1)}}{p_i^{2(l_i-\frac{3}{2})}} + \beta_4 \frac{h_i^{2t_i}}{p_i^{2l_i}} + \gamma \frac{h_i^{2(t_i-\frac{1}{2})}}{p_i^{2(l_i-\frac{1}{2})}} \right) \|w^{SIP}\|_{H^{l_i}(\Omega_i)}^2. \tag{4.9}
\end{aligned}$$

Agora consideramos o termo II . Aqui, notamos que um limite análogo ao (2.18) visto na prova do Lema (2.1) vale com η e ξ trocados por ξ e $w^{SIP} - w_{hp}$, em (2.18), respectivamente. De fato, aplicando o lema (5.1), temos

$$\begin{aligned}
& (II)^2 = B_{DG}(\xi, w^{SIP} - \Pi w^{SIP}) \\
& \leq C \|\xi\|_{DG}^2 \times \left(\sum_{\Omega_i \in \tau_h} (\|\sqrt{\mathbf{a}} \nabla (w^{SIP} - \Pi w^{SIP})\|_{L^2(\omega_i)}^2 + \beta_1^2 \|c_0 (w^{SIP} - \Pi w^{SIP})\|_{L^2(\Omega_i)}^2) \right. \\
& \left. + \|(w^{SIP} - \Pi w^{SIP})^+\|_{\partial_+ \Omega_i \cap \Gamma}^2 + \|(w^{SIP} - \Pi w^{SIP})^-\|_{\partial_- \Omega_i \setminus \Gamma}^2 + \int_{\Gamma_{int} \cap \Gamma_D} \frac{1}{\sigma} \langle (\mathbf{a} \nabla \eta) \rangle^2 ds + \int_{\Gamma_{int} \cap \Gamma_D} \sigma [\eta]^2 ds \right) \\
& \leq C \|\xi\|_{DG}^2 \times \sum_{\Omega_i \in \tau_h} \left(\alpha \frac{h_i^{2(t_i-1)}}{p_i^{2(l_i-\frac{3}{2})}} + \beta_4 \frac{h_i^{2t_i}}{p_i^{2l_i}} + \gamma \frac{h_i^{2(t_i-\frac{1}{2})}}{p_i^{2(l_i-\frac{1}{2})}} \right) \|w^{SIP}\|_{H^{l_i}(\Omega_i)}^2. \tag{4.10}
\end{aligned}$$

Aqui notamos a importância de escolher w_{hp} como a projeção ortogonal de w^{SIP} de $L_2(\Omega)$ no espaço de elementos finitos $S^{\mathbf{p}}(\Omega, \tau_h, \mathbf{F})$, visto que a identidade (2.15) foi necessária para obtermos (4.10).

Para limitar os termos III e IV , primeiro notamos que dado uma interface/aresta $\gamma \subset \partial \Omega_i$, para algum $\Omega_i \in \tau_h$, usando a desigualdade multiplicativa do traço

$$\|w^{SIP}\|_{L_2(\gamma)}^2 \leq C_t (\|w^{SIP}\|_{L_2(\Omega_i)} \|\nabla w^{SIP}\|_{L_2(\Omega)} + h_i^{-1} \|w^{SIP}\|_{L_2(\Omega_i)}^2), \tag{4.11}$$

deduzimos que

$$|w^{SIP}|_{H^1(\gamma)}^2 \leq \frac{C}{h_i} \|w^{SIP}\|_{H^2(\Omega)}^2.$$

Portanto empregando o Lema (4.1), teremos

$$\begin{aligned}
III &\leq -(1+\theta)B_\gamma(w^{SIP}, \eta) = -(1+\theta) \int_{\Gamma_{int} \cup \Gamma_D} \langle (\mathbf{a}\nabla w^{SIP})n_\gamma \rangle [\eta] ds \\
&\leq (1+\theta) \left(\int_{\Gamma_{int} \cup \Gamma_D} \langle (\mathbf{a}\nabla w^{SIP})n_\gamma \rangle^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Gamma_{int} \cup \Gamma_D} [\eta]^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq (1+\theta) \left(\int_{\Gamma_{int} \cup \Gamma_D} 2|(\mathbf{a}\nabla w^{SIP})|_L |n_\gamma|^2 + 2|(\mathbf{a}\nabla w^{SIP})|_R |n_\gamma|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Gamma_{int} \cup \Gamma_D} |\eta|_L|^2 + |\eta|_R|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq (1+\theta) \left(\sum_{\Omega_i \in \tau_h} \int_{\partial\Omega_i \cap (\Gamma_{int} \cup \Gamma_D)} 2|(\mathbf{a}\nabla w^{SIP})|^2 |n_\gamma|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\Omega_i \in \tau_h} \int_{\partial\Omega_i \cap (\Gamma_{int} \cup \Gamma_D)} |\eta|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq (1+\theta) (|\sqrt{\mathbf{a}}|^2) \left(\sum_{\Omega_i \in \tau_h} \int_{\partial\Omega_i \cap (\Gamma_{int} \cup \Gamma_D)} 2|\nabla w^{SIP}|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\Omega_i \in \tau_h} \int_{\partial\Omega_i \cap (\Gamma_{int} \cup \Gamma_D)} |\eta|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq (1+\theta) \left(\sum_{\Omega_i \in \tau_h} |w^{SIP}|_{H^1(\partial\Omega_i \cap (\Gamma_{int} \cup \Gamma_D))} \right) C |\sqrt{\mathbf{a}}|^2 \left(\sum_{\Omega_i \in \tau} \frac{h_i^{2(s_i - \frac{1}{2})}}{p_i^{2(k_i - \frac{1}{2})}} \|u\|_{H^{k_i}(\Omega_i)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq (1+\theta) \left(\sum_{\Omega_i \in \tau_h} \frac{C}{h_i^{\frac{1}{2}}} \|w^{SIP}\|_{2, \tau_h} C |\sqrt{\mathbf{a}}|^2 \left(\sum_{\Omega_i \in \tau} \frac{h_i^{2(s_i - \frac{1}{2})}}{p_i^{2(k_i - \frac{1}{2})}} \|u\|_{H^{k_i}(\Omega_i)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right) \\
&\leq (1+\theta) \left(\sum_{\Omega_i \in \tau_h} \|w^{SIP}\|_{2, \tau_h} C \left(\sum_{\Omega_i \in \tau} \alpha \frac{h_i^{2(s_i - 1)}}{p_i^{2(k_i - \frac{1}{2})}} \|u\|_{H^{k_i}(\Omega_i)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (4.12)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
IV &= -(1+\theta)B_\gamma(w^{SIP}, \xi) = -(1+\theta) \int_{\Gamma_{int} \cup \Gamma_D} \langle (\mathbf{a}\nabla w^{SIP})n_\gamma \rangle [\xi] ds \\
&\leq (1+\theta) \left(\frac{1}{\sigma} \int_{\Gamma_{int} \cup \Gamma_D} \langle (\mathbf{a}\nabla w^{SIP})n_\gamma \rangle^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sigma \int_{\Gamma_{int} \cup \Gamma_D} [\xi]^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq (1+\theta) \left(\frac{1}{\sigma} \int_{\Gamma_{int} \cup \Gamma_D} \langle (\mathbf{a}\nabla w^{SIP})n_\gamma \rangle^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \| \xi \|_{DG} \\
&\leq (1+\theta) \left(\sum_{\Omega_i \in \tau_h} C \frac{1}{\sigma} \int_{\partial\Omega_i \cap (\Gamma_{int} \cup \Gamma_D)} |\sqrt{\mathbf{a}}|^2 |\nabla w^{SIP}|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \| \xi \|_{DG} \\
&\leq (1+\theta) \left(\sum_{\Omega_i \in \tau_h} C \frac{1}{\sigma} \| \cdot \|_{H^1(\partial\Omega_i \cap (\Gamma_{int} \cup \Gamma_D))} \right) \| \xi \|_{DG}
\end{aligned}$$

$$\leq C \|\xi\|_{DG} \|w^{SIP}\|_{2,\tau_h}. \quad (4.13)$$

Finalmente, colecionando as estimativas dos termos *I*, *II*, *III* e *IV* dados em (4.9), (4.10), (4.12) e (4.13), respectivamente, e empregado (4.6), obtemos o que o teorema afirma.

Dois casos particulares muito comuns da equação que estamos tratando são as equações difusiva dominante e extritamente hiperbólica. Os Corolários 4.1 e 4.2, mostram como fica a estimativa do Teorema 4.1 nestes casos.

Corolário 4.1. *Vamos supor que as condições do Teorema 4.1 são válidas e as ordens são uniformes, isto é, $p_i = p$, $s_i = s$, $t_i = t$, $k_i = k$, $l_i = l$, s , t , k e l inteiros, e $h_i = h$ para todo Ω_i em τ_h . Caso a equação seja de difusão dominante, \mathbf{b} muito próximo ao vetor nulo, então o erro no funcional pode ser limitado como segue*

$$|J(u) - J(u_{DG})| \leq C \frac{h^{s+t-2}}{p^{k+l-2}} p \|u\|_{H^k(\Omega)} \|w^{SIP}\|_{H^l(\Omega)} + (1+\theta) \frac{h^{s-1}}{p^{k-\frac{3}{2}}} \|u\|_{H^k(\Omega)} \|w^{SIP}\|_{H^2(\Omega)}, \quad (4.14)$$

com $1 \leq s \leq \min(p+1, k)$ e $1 \leq t \leq \min(p+1, l)$.

Portanto quando o esquema DGFEM-SIP é empregado, isto é, quando $\theta = -1$, esta estimativa de erro é ótima com respeito a h e sub ótimo em p por uma ordem completa. Entretanto, quando $\theta = 1$ esta estimativa indica que o erro de aproximação do funcional alvo calculado comporta-se como $\mathcal{O}(\frac{h^{s-1}}{p^{s-\frac{3}{2}}})$ quando $h \rightarrow 0$ e $p \rightarrow \infty$. Portanto a ordem dobrada da taxa de convergência de $|J(u) - J(u_{DG})|$ observada quando o esquema DGFEM-SIP é empregado é perdida quando o esquema DGFEM-NIP é empregado. Isso é verificado nos experimentos numéricos.

Corolário 4.2. *Vamos supor que as condições do Teorema 4.1 são válidas e que as ordens são uniformes, isto é, $p_i = p$, $s_i = s$, $t_i = t$, $k_i = k$, $l_i = l$, s , t , k e l inteiros, e $h_i = h$ para todo Ω_i em τ_h . Caso a equação seja estritamente hiperbólica, $\mathbf{a} \equiv \mathbf{0}$, então o erro no funcional pode ser limitado como segue*

$$|J(u) - J(u_{DG})| \leq C \frac{h^{s+t-1}}{p^{k+l-1}} p^{\frac{1}{2}} \|u\|_{H^k(\Omega)} \|w^{SIP}\|_{H^l(\Omega)}. \quad (4.15)$$

Esta estimativa é ótima em h e sub ótimo em p por $p^{\frac{1}{2}}$. Esta estimativa é análoga a obtida em [22] e a prova apresentada em [22] é baseada em um argumento totalmente diferente.

Capítulo 5

Implementação

5.1 Introdução

O objetivo deste capítulo é apresentar os principais aspectos da implementação computacional necessária para por em prática a teoria apresentada nos Capítulos 2, 3 e 4.

5.2 Algoritmo Adaptativo

O objetivo do algoritmo adaptativo é obter um hp espaço de elementos finitos $S^{\mathbf{P}}(\Omega, \tau_h, \mathbf{F})$ tal que

$$|J(u) - J(u_{DG})| \leq \text{TOL}, \quad (5.1)$$

com TOL uma tolerância pré determinada. Além disso, desejamos que o número de graus de liberdade de $S^{\mathbf{P}}(\Omega, \tau_h, \mathbf{F})$ seja minimizado.

O algoritmo que utilizamos nos experimentos numéricos está apresentado no Algoritmo 1.

No Algoritmo 1, no passo 7, precisamos de um critério para optar entre o h -refinamento/desrefinamento ou p -enriquecimento. Esse critério deve estar relacionado a suavidade da solução obtida. Como não chegamos a estudar esses critérios, em nossos experimentos optamos pelo critério mais simples que é usar apenas h -refinamento ou apenas p -enriquecimento.

O Algoritmo 1 está apresentado de forma bem simplificada. Muitos detalhes importantes e suas respectivas dificuldades só são percebidos no momento da implementação do algoritmo. Por este motivo, preferimos comentar estes detalhes,

juntamente com a apresentação das ferramentas computacionais que utilizamos.

Algoritmo 1: Algoritmo Adaptativo

Entrada: TOL , tolerância ao erro da aproximação de J .

Φ , percentual de elementos refinados a cada iteração.

\mathbf{p}_{inc} , graus de incremento do espaço enriquecido $S^{\hat{\mathbf{P}}}(\Omega, \tau_h, \mathbf{F})$.

τ_h , partição inicial. \mathbf{p} , graus de interpolação inicial.

Saída: $S^{\mathbf{P}}(\Omega, \tau_h, \mathbf{F})$ e $J(u_{DG})$.

- 1 Resolver: encontrar u_{DG} tal que
 $B_{DG}(u_{DG}, v) = F(v) \forall v \in S^{\mathbf{P}}(\Omega, \tau_h, \mathbf{F})$ - Problema Primal.
- 2 Resolver: encontrar w_{hp} tal que
 $B_{DG}(v, w_{hp}) = J(v) \forall v \in S^{\mathbf{P}}(\Omega, \tau_h, \mathbf{F})$ - Problema Dual.
- 3 Resolver: encontrar \hat{w} tal que
 $B_{DG}(v, w_{h\hat{p}}) = J(v) \forall v \in S^{\hat{\mathbf{P}}}(\Omega, \tau_h, \mathbf{F})$.- Problema Dual Enriquecido.
- 4 Calcular o estimador de erro η_i como apresentado em (3.4), porém com w substituído por \hat{w} , em cada elemento.
- 5 Verificar o critério de parada:

$$\hat{\varepsilon}_{|\Omega|} \equiv \varepsilon_{|\Omega|}(u_{DG}, h, p, \hat{w} - w_{hp}) \leq TOL.$$

- 6 Caso o critério de parada não for satisfeito, refinar os $\Phi\%$ elementos que têm os maiores estimadores de erro, definindo uma nova partição τ_h e um novo vetor de graus de interpolação \mathbf{p} .
 - 7 Voltar ao passo 2, lembrando que $S^{\mathbf{P}}(\Omega, \tau_h, \mathbf{F})$ está com τ_h e \mathbf{p} atualizados.
-

5.3 O Ambiente de Programação Científica PZ

A parte numérica deste trabalho foi desenvolvida usando o Ambiente de Programação Científica Orientado a Objetos PZ, que é um código livre, desenvolvido com ferramentas GNU, disponível para a comunidade científica através de repositório CVS livre (<http://labmec.fec.unicamp.br/pz/download>). Para maiores informações sobre o PZ veja [16] e [17].

O ambiente PZ é um conjunto de classes em linguagem C++, com o objetivo de permitir a implementação de métodos de elementos finitos. O PZ é constituído de módulos bem diferenciados, cada qual com funções específicas, os quais combinados adquirem as funcionalidades necessárias para a implementação de

métodos de elementos finitos.

No ambiente PZ existe uma distinção grande entre os aspectos geométricos e de interpolação.

As classes *TPZGeoMesh* e *TPZGeoEL* e suas classes derivadas definem a geometria da malha e de seus elementos. A classe *TPZCompEl* e suas classes derivadas, implementam o espaço de interpolação.

O método de Galerkin descontínuo, usado neste trabalho, é implementado pelas classes *TPZCompElDisc* e *TPZInterfaceElement*, ambas derivam da classe *TPZCompEl*.

5.4 Compreendendo as Necessidades Computacionais

O PZ é desenvolvido usando programação orientada a objetos e portanto tem como um de seus grandes trunfos a reutilização de código (objetos e métodos), pois a maioria das partes de um código de elementos finitos são muito semelhantes de uma formulação para outra. Desta forma, antes de mais nada, precisamos compreender o que é necessário, e o que já está pronto no PZ.

As formulações para a equação de Difusão-Advecção-Reação, que foram apresentadas anteriormente, são idênticas as já implementadas na classe **TPZMatPoisson3d**, exceto pelos termos de reação, mas esta é uma modificação muito simples. Assim sendo, usamos a classe **TPZMatPoisson3d** acrescida dos termos de reação.

Para colocar em prática o Algoritmo 1 é necessário que resolvamos três problemas distintos em malhas com a mesma geometria, sendo um problema primal e os outros dois problemas duais mas com ordens de interpolação diferentes. Usando a linguagem do PZ, precisamos trabalhar com dois materiais diferentes. Um material, para a formulação fraca do problema primal e um para a formulação fraca do problema dual. É possível que estas formulações sejam iguais, ou muito semelhantes, por exemplo quando o problema for apenas difusivo.

Quando estivermos de posse das três soluções sobre a mesma malha geométrica, precisaremos calcular o estimador de erro em cada elemento, conforme (3.4). Calcularemos o estimador de erro nos elementos, nas interfaces e nas fronteiras, então é necessário que as três malhas, iguais, dos três problemas se conheçam, ou seja, que possamos acessar as três soluções, para elementos respectivos. Para suprir a esta necessidade o Prof. Philippe Devloo criou uma classe derivada da classe **TPZCompMesh**, chamada **TPZCompMeshReferred** que permite identi-

ficar elementos correspondentes em malhas distintas e conseqüentemente as soluções nestes elementos.

Com a formulação variacional pronta, basta acrescentar a esta classe métodos para calcular o estimador. Na verdade, ao invés de acrescentar métodos à classe já existente, optamos por criar uma classe derivada da classe **TPZMatPoisson3d**, a classe **TPZMatPoisson3dEstimator**. Nesta classe derivada criamos os seguintes métodos:

ContributeErrorsDual: que calcula o estimador nos elementos 2D, ou seja, de (3.4), o termo $\int_k R_{int}(z - z_{hp})dx$.

ContributeInterfaceErrorsDual: que calcula o estimador nas interfaces (internas), ou seja, de (3.4), os termos

$$\begin{aligned} & \int_{\partial_{-k}\setminus\Gamma} (\mathbf{b} \cdot \mathbf{n}_k)[u_{DG}](z - z_{hp})^+ ds, \\ & - \int_{\partial k\setminus\Gamma} \left\{ \frac{\theta}{2}[u_{DG}](a\nabla(z - z_{hp})^+) \cdot \mathbf{n}_k + \frac{1}{2}[(a\nabla u_{DG}) \cdot \mathbf{n}_k](z - z_{hp})^+ \right\} ds \text{ e} \\ & - \int_{\partial k\setminus\Gamma} \sigma[u_{DG}](z - z_{hp})^+ ds. \end{aligned}$$

ContributeInterfaceBCErrorsDual: que calcula o estimador nas interfaces de fronteira, ou seja, de (3.4), os termos

$$\begin{aligned} & - \int_{\partial_{-k}\cap\Gamma} (\mathbf{b} \cdot \mathbf{n}_k)R_D(z - z_{hp})^+ ds, \int_{\partial k\cap\Gamma_D} \theta R_D((a\nabla(z - z_{hp})^+) \cdot \mathbf{n}_k)ds, \\ & \int_{\partial k\cap\Gamma_D} \sigma R_D(z - z_{hp})^+ ds \text{ e } \int_{\partial k\cap\Gamma_N} R_N(z - z_{hp})^+ ds. \end{aligned}$$

Estes métodos calculam o estimador em pontos. Logo, é necessário um método que organize este cálculos. Para tal, criamos o método **AssembleError** que faz um loop sobre os elementos (1D e 2D)(pontos de integração) e calcula o estimador de forma apropriada ao tipo de elemento.

Depois do método **AssembleError** ser aplicado, teremos uma matriz cuja uma coluna é o valor do estimador e outra indica o respectivo elemento(2D, pois os estimadores nos elementos 1D, contribuem para o estimador no elemento 2D uma vez que só podemos refinar elementos 2D). Agora, dado um critério de parada e um percentual de refinamento, verificamos se o critério de parada é satisfeito. Caso não seja, precisamos decidir quais elementos devem ser refinados, além de transmitir a informação de quais elementos serão refinados para todas as malhas computacionais. Isso tudo é feito pelos métodos **WhichRefine**, **MarkElementsRefine** e **FindReferred** e então refinamos os elementos marcados.

Os métodos para realizar o h -refinamento ou o p -enriquecimento são métodos padrões do PZ.

O que até o momento não está consolidado é o critério para decidir quando será realizado h e quando será realizado p refinamento. Por este motivo, não realizaremos simulações com hp -refinamento.

Sem o PZ, seria muito difícil realizar as simulações, pois teríamos que implementar muita coisa além do que fizemos. Graças ao PZ pudemos nos concentrar nas estimativas e na adaptatividade.

Capítulo 6

Experimentos Numéricos

6.1 Exemplo 1

Neste exemplo temos como objetivo, confirmar as ordens de aproximação do funcional alvo para os métodos DGFEM-SIP e DGFEM-NIP para uma equação elíptica, conforme o que foi apresentado na análise de erro *a priori* e confirmar também as ordens de convergência das soluções primal e dual.

Consideramos a equação de Poisson, com domínio $\Omega = (0, 1)^2$, f é escolhida de forma que a solução analítica de (2.1) seja

$$u(x, y) = \frac{(1+x)^2}{4} \sin(4\pi xy).$$

O funcional alvo ou de interesse escolhido, $J(\cdot)$ representa o valor médio de u , com peso ψ sobre Ω ,

$$J(u) \equiv \int_{\Omega} u\psi dx,$$

em que a função ψ é escolhida como $\psi = \sin^2(2\pi x)\sin^2(2\pi y)e^{-(x+y)}$.

Conhecendo a solução analítica sabemos que $J(u) = 0.025728908663892675043$ e desta forma podemos verificar as estimativas *a priori*.

Os gráficos apresentados nas Figuras 6.1 e 6.2 mostram as ordens de convergência dos erros do funcional alvo, nos métodos DGFEM-SIP e DGFEM-NIP, respectivamente

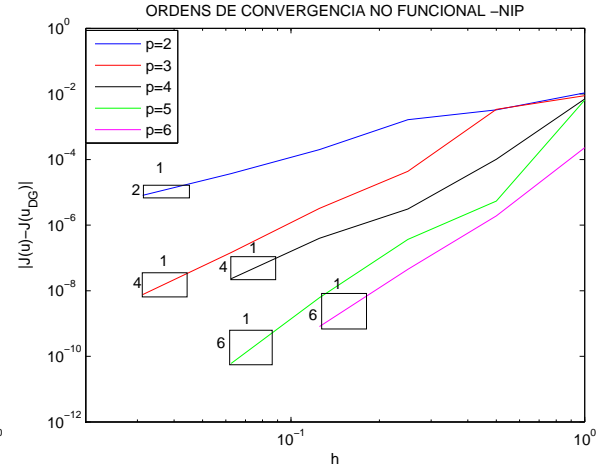
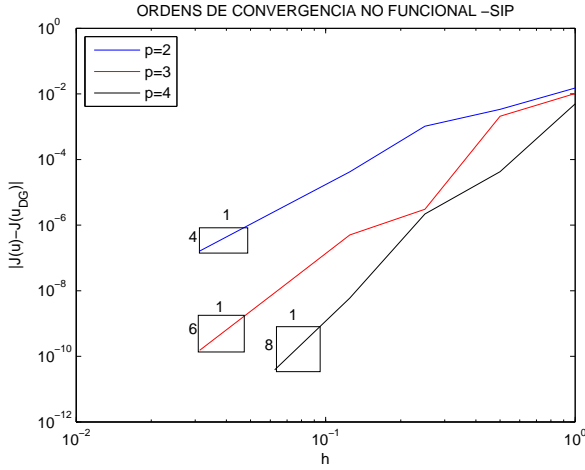


Figura 6.1: Exemplo 1: Convergência do DGFEM-SIP com h-refinamento.

Figura 6.2: Exemplo 1: Convergência do DGFEM-NIP com h-refinamento.

Observamos que as ordens calculadas numericamente são as mesmas obtidas nas estimativas *a priori*, além disso podemos observar que o método DGFEM-NIP perde a ordem de convergência $2p$ do DGFEM-SIP, como comentamos na análise de erro *a priori*. Observamos a ordem de convergência do DGFEM-NIP é p para p par e $p + 1$ para p ímpar.

Os gráficos apresentados nas Figuras 6.4 e 6.6 mostram a convergência da solução primal, nos métodos DGFEM-SIP e DGFEM-NIP, e confirmam as ordens estimadas em [21]. No método DGFEM-NIP a ordem de convergência é ótima para p ímpar e igual a $p + 1$ e para p par é subótima e igual a p . Assim podemos dizer as ordens de convergência do erro da aproximação do funcional, comportam-se como as ordens do erro da solução em norma L_2 . Este fato, obviamente, se explica pela desigualdade de Cauchy-Schwarz como segue:

$$|J(u) - J(u_{DG})| = \left| \int_{\Omega} (u - u_{DG}) \Psi dx \right| \leq \|\Psi\|_{L_2(\Omega)} \|u - u_{DG}\|_{L_2(\Omega)}.$$

As Figuras 6.7 e 6.8, mostram que o método DGFEM-SIP apresentou melhores taxas de convergência na aproximação do funcional quando no p-refinamento. Com base nas estimativas *a priori* apresentadas no Capítulo 5 e confirmadas neste exemplo, usaremos apenas o método DGFEM-SIP nos demais exemplos.

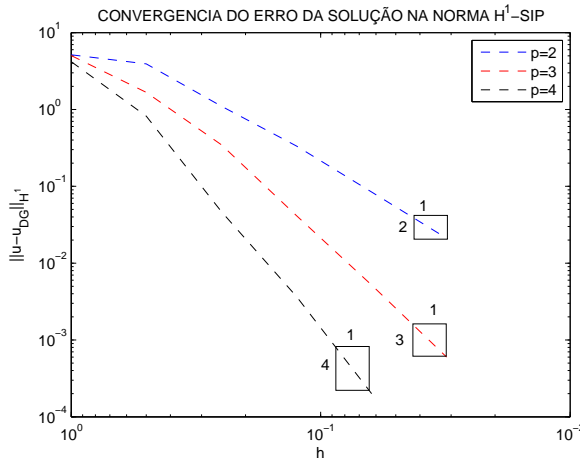


Figura 6.3: Exemplo 1: Convergência do Erro do DGFEM-SIP na Norma H^1 .

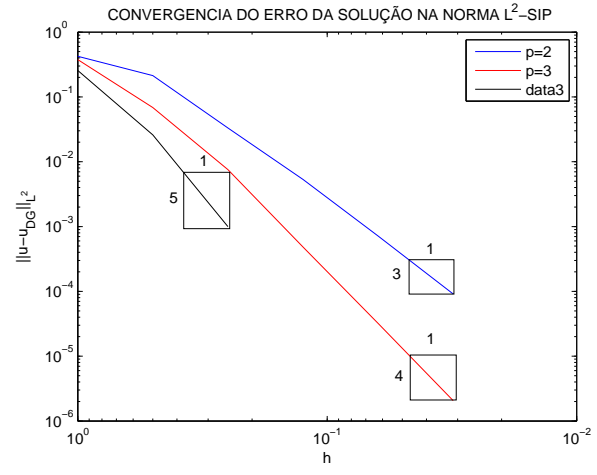


Figura 6.4: Exemplo 1: Convergência do Erro do DGFEM-SIP na Norma L_2 .

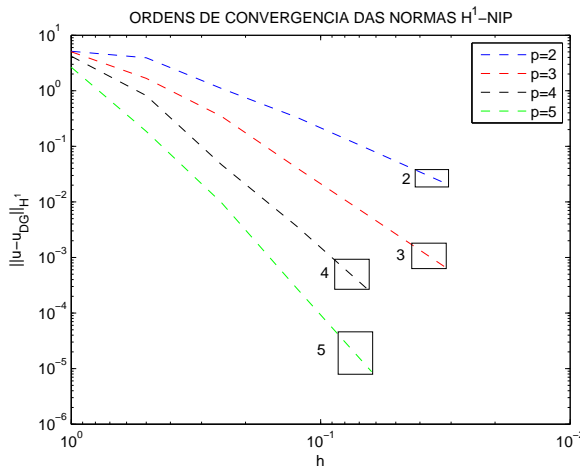


Figura 6.5: Exemplo 1: Convergência do Erro do DGFEM-NIP na Norma H^1 .

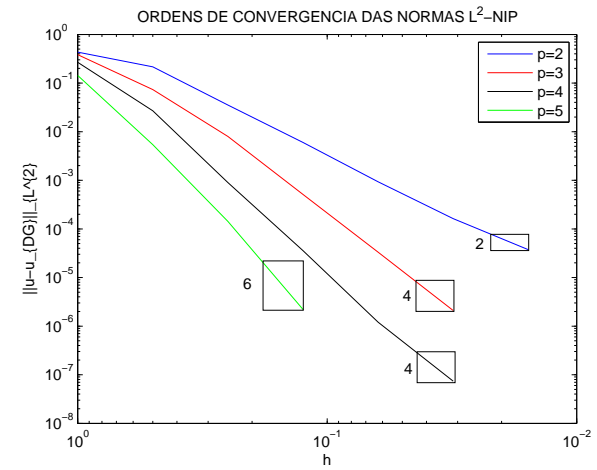


Figura 6.6: Exemplo 1: Convergência do Erro do DGFEM-NIP na Norma L_2 .

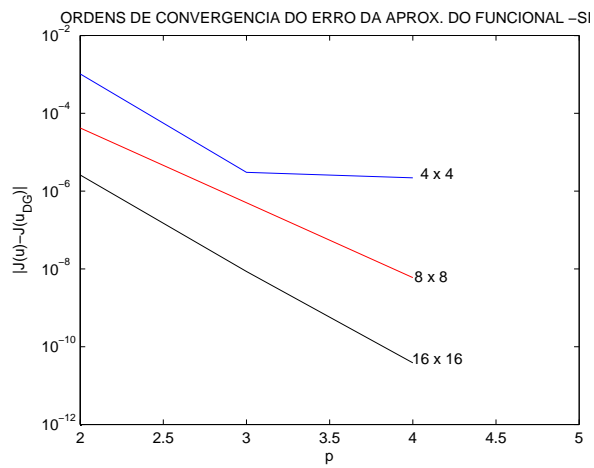


Figura 6.7: Exemplo 1: Convergência do DGFEM-SIP com p-refinamento.

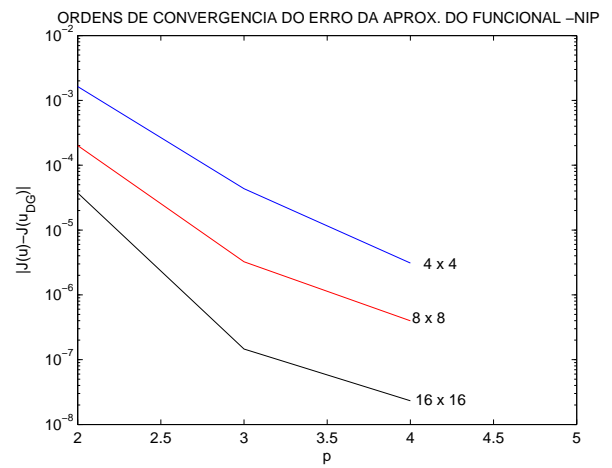


Figura 6.8: Exemplo 1: Convergência do DGFEM-NIP com p-refinamento.

6.2 Exemplo 2

Uma vez que já confirmamos as ordens de convergência dos métodos *a priori* passamos a focar os exemplos nos aspectos do processo adaptativo. Neste exemplo também resolveremos a equação de Poisson. Os dados foram fornecidos de forma que as soluções primal e dual exatas sejam conhecidas, são elas:

$$\text{Primal : } u(x) = 0.0005x^2(1-x)^2y^2(1-y)^2e^{10x^2+10y}$$

e

$$\text{Dual : } z(x) = x^3(1-x)^3y^3(1-y)^3.$$

As Figuras 6.9 e 6.10 mostram as soluções primal e dual.

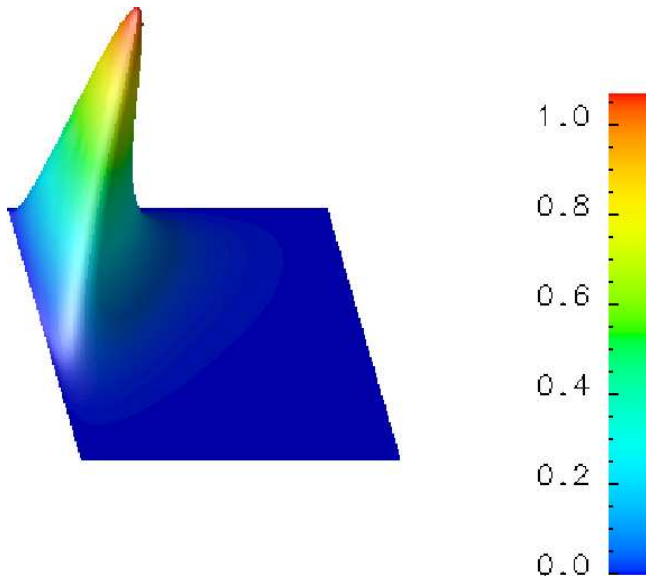


Figura 6.9: Exemplo 1: Solução primal.

O funcional que estaremos avaliando, assim como no exemplo anterior, será:

$$J(u) = \int_{\Omega} u \Delta z dx.$$

Pretendemos observar o comportamento do h-refinamento e compará-lo com o refinamento uniforme e além disso, analisar a qualidade do estimador de erro através dos índices de efetividade. Nas Figuras de 6.11 a 6.16 mostramos as malhas obtidas no h-refinamento com o respectivo número de iterações e as cores representam os valores das respectivas soluções calculadas no espaço.

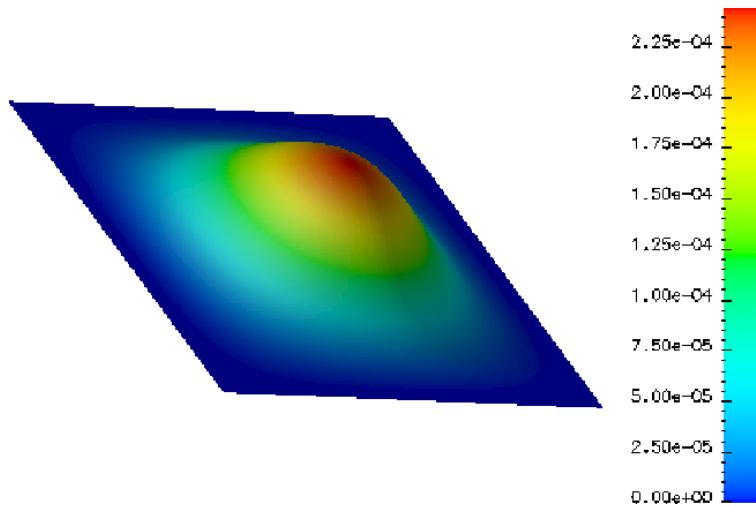


Figura 6.10: Exemplo 1: Solução dual.

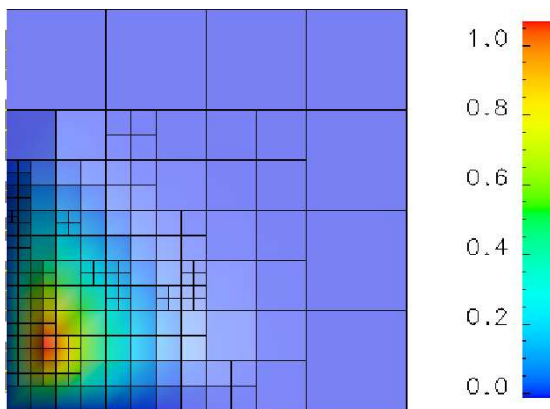


Figura 6.11: Exemplo 2: h-refinamento com 25 iterações, 5 % de elementos refinados a cada iteração e a solução primal, $p=2$.

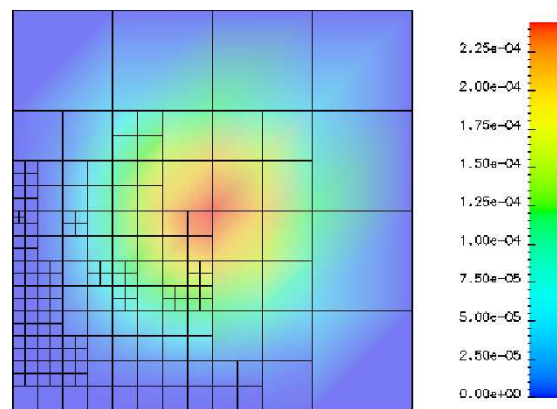


Figura 6.12: Exemplo 2: h-refinamento com 25 iterações, 5 % de elementos refinados a cada iteração e a solução dual, $p=2$.

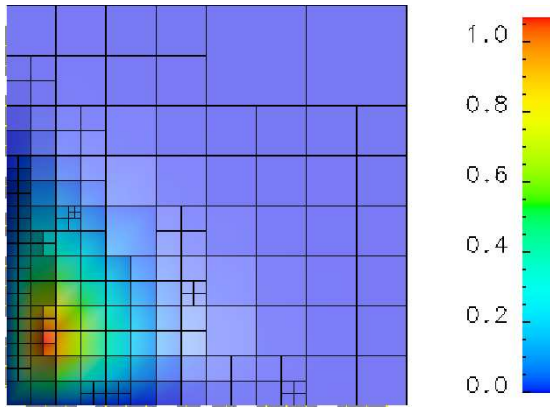


Figura 6.13: Exemplo 2: h-refinamento com 25 iterações, 5 % de elementos refinados a cada iteração e a solução primal, $p=3$.

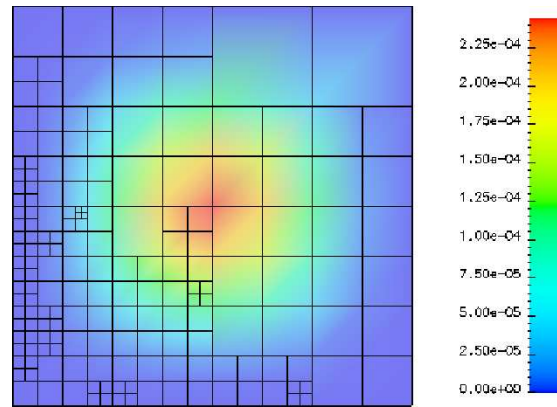


Figura 6.14: Exemplo 2: h-refinamento com 25 iterações, 5 % de elementos refinados a cada iteração e a solução dual, $p=3$.

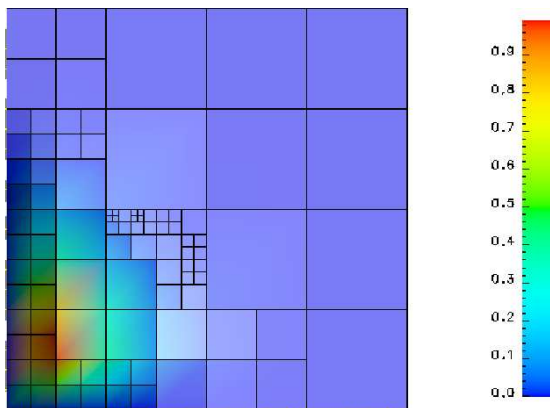


Figura 6.15: Exemplo 2: h-refinamento com 20 iterações, 5 % de elementos refinados a cada iteração e a solução primal, $p=4$.

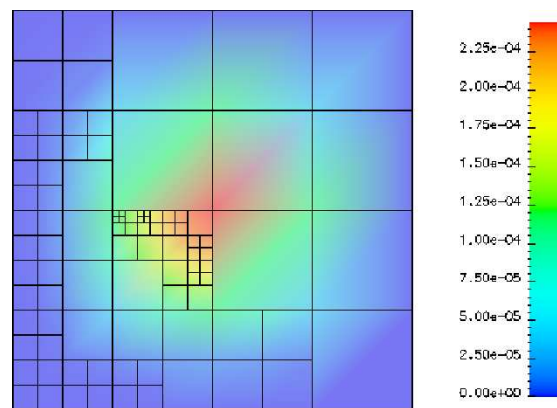


Figura 6.16: Exemplo 2: h-refinamento com 20 iterações, 5 % de elementos refinados a cada iteração e a solução dual, $p=4$.

Como podemos observar nas Figuras de 6.11 a 6.16, para ordem de aproximação baixa, o algoritmo começa a refinar a malha nas áreas onde o gradiente da solução primal é maior. Quando a ordem de aproximação aumenta, a necessidade de h-refinamento diminui devido à rápida convergência espectral do método de Galerkin descontínuo.

A Figura 6.17 compara o h-refinamento e o refinamento uniforme.

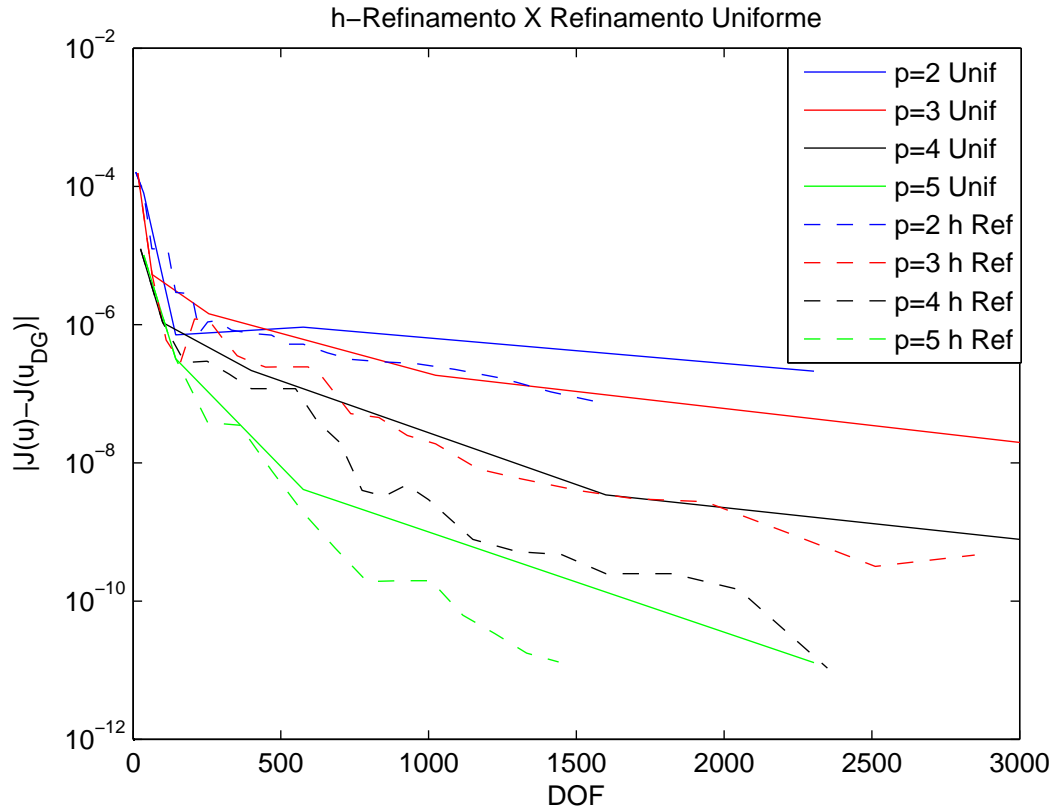


Figura 6.17: Exemplo 2: h-refinamento \times refinamento uniforme.

Esperávamos que com uma solução dual suave o h-refinamento, com essa estratégia que considera o problema dual além do resíduo do problema primal, talvez não tivesse um bom desempenho pois o estimador envolve a diferença entre a solução dual h_p e $h_{(p+1)}$. Entretanto, como apresentado na Figura 6.17, o h-refinamento mostrou-se superior ao refinamento uniforme. Portanto a estratégia adaptativa é relevante mesmo quando a solução dual for suave.

A eficiência dos indicadores de erro é medida pelos índices de efetivi-

dade. O índice de efetividade é definido por

$$IE = \frac{|\sum_{k \in \tau_h} \hat{\eta}_k|}{|J(u) - J(u_{DG})|}.$$

Os estimadores têm um desempenho considerado bom, ao estimar o erro, se os IE estão próximos a 1. A Figura 6.18 mostra gráfico dos índices de efetividade para este exemplo:

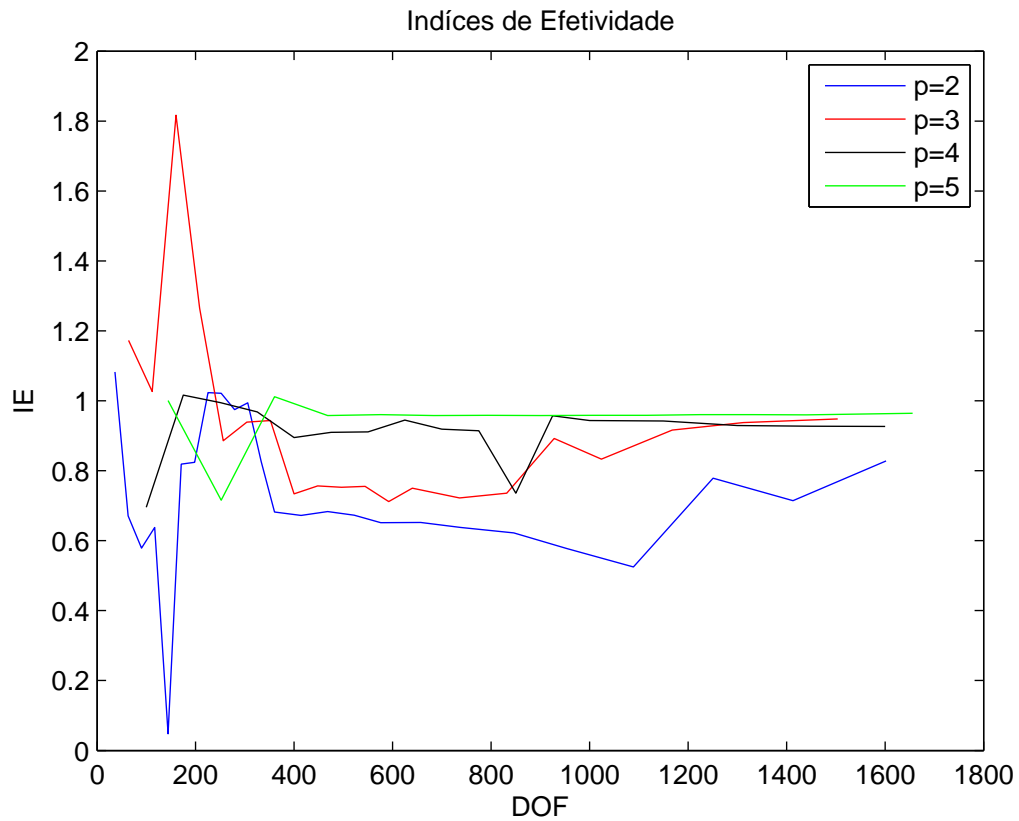


Figura 6.18: Exemplo 2: Índice de efetividade do estimador no h-refinamento.

Como podemos observar na Figura 6.18, para um número de graus de liberdade suficientemente grande, o índice de efetividade se aproxima 1, para todos os graus de aproximação usados. Assim podemos concluir que o estimador é de fato eficiente.

Um estudo que consideramos interessante, mas que não coube neste trabalho pelo curto tempo, é analisar os índices de efetividade em cada elemento, porque isso pode nos mostrar possíveis deficiências do estimador e uma vez que podemos usar vários estimadores poderíamos mesclá-los ou utilizar um outro de acordo com a suavidade da solução (mesmo critério para optar entre h ou p refinamento na adaptação).

6.3 Exemplo 3

No exemplo anterior exploramos uma solução primal com regiões de grande gradiente e solução dual suave e observamos adaptação de malha nas áreas de grandes gradientes da solução primal.

Neste experimento trocamos as soluções do primal e do dual do exemplo anterior, alterando o funcional respectivamente.

Desejamos novamente observar o comportamento do h-refinamento, compará-lo com o refinamento uniforme e analisar a qualidade do estimador de erro através dos índices de efetividade.

Esperamos que a estratégia adaptativa privilegie as regiões de grandes gradientes da solução dual e que isso contribua na convergência do funcional.

As Figuras 6.19 a 6.22, como esperávamos, mostram que o h-refinamento privilegia as áreas de grandes gradientes da solução dual.

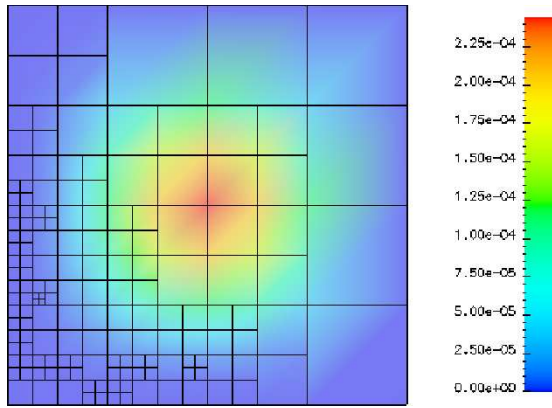


Figura 6.19: Exemplo 3: h-refinamento com 25 iterações, 5% de elementos refinados a cada iteração e a solução primal, $p=2$.

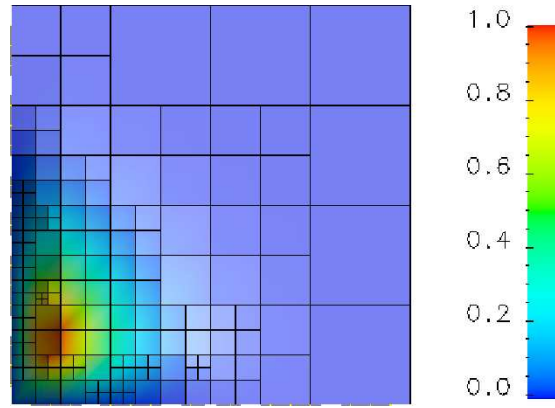


Figura 6.20: Exemplo 3: h-refinamento com 25 iterações, 5% de elementos refinados a cada iteração e a solução dual, $p=2$.

Podemos observar que o refinamento capta a solução dual, como esperávamos, mas para $p > 4$ o h -refinamento mostrou-se pior que o refinamento uniforme.

Na Figura 6.23 podemos comparar o refinamento uniforme e o h -refinamento e verificar o que foi dito acima.

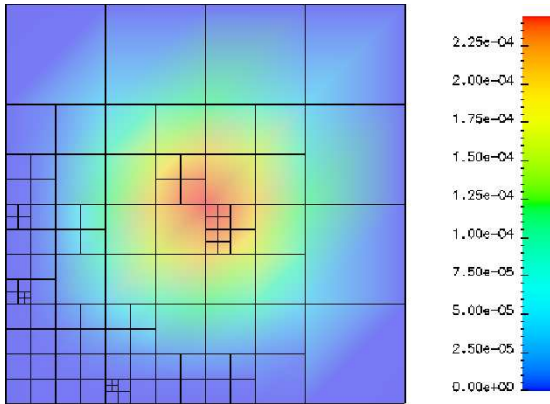


Figura 6.21: Exemplo 3: h-refinamento com 21 iterações, 5% de elementos refinados a cada iteração e a solução primal, $p=3$.

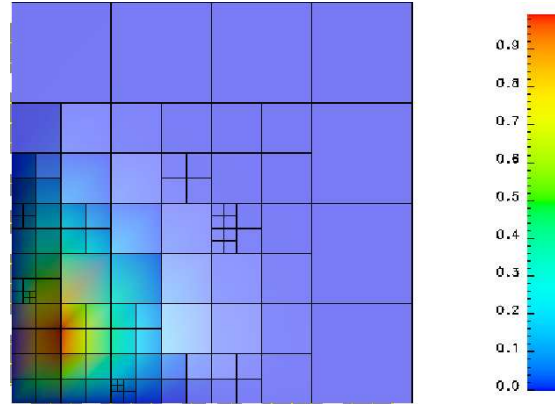


Figura 6.22: Exemplo 3: h-refinamento com 21 iterações, 5% de elementos refinados a cada iteração e a solução dual, $p=3$.

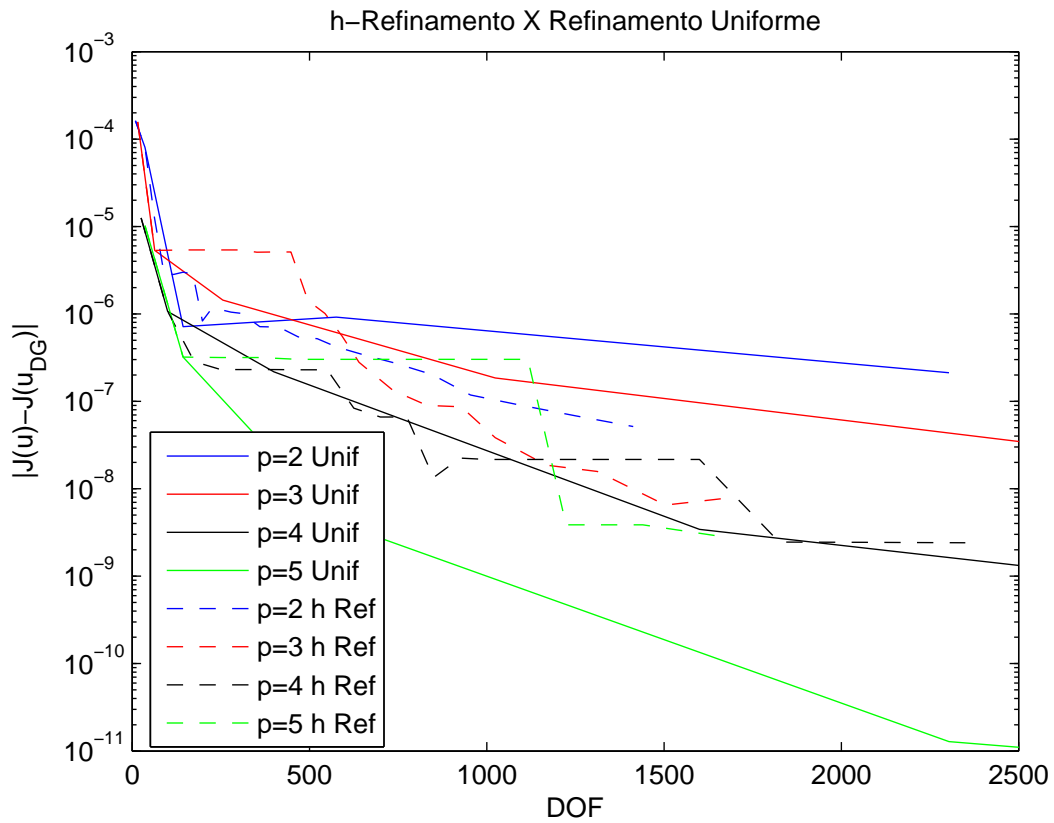


Figura 6.23: Exemplo 3: h-refinamento \times refinamento uniforme.

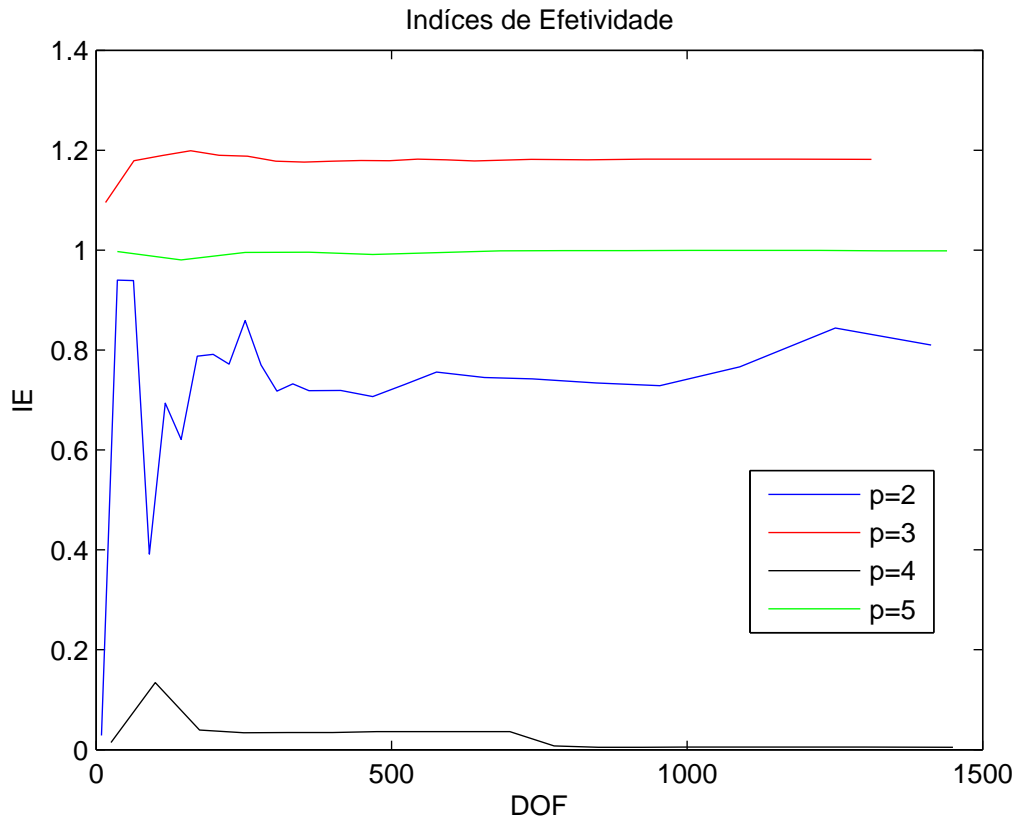


Figura 6.24: Exemplo 3: Índices de Efetividade.

Também podemos perceber na Figura 6.24 que embora o índice de efetividade para $p = 4$ esteja próximo a zero, todos os índices estão relativamente próximos a 1, o que indica que o estimador foi eficiente. Assim esperamos que para um número maior de graus de liberdade, o h-refinamento supere o refinamento uniforme. Não realizamos este experimento para um número maior de graus de liberdade porque isso seria inútil visto que a precisão real de nossos computadores é 10^{-12} , a partir desse valor o erro numérico domina os resultados.

Outro fato que pode explicar a melhor convergência do refinamento uniforme é a grande diferença nas ordens dos erros de aproximação das soluções dos problemas primal e dual, neste caso o estimador do erro não acompanha de maneira correta as singularidades da solução dual. Assim para obter um estimador mais eficiente deveríamos usar as técnicas apresentadas no Capítulo 1 para equilibrar a influência das ordens dos erros dos problemas primal e dual no estimador.

6.4 Exemplo 4

Neste exemplo tomaremos os termos de fonte e condições de fronteira tais que as soluções analíticas primal e dual não sejam suaves. O objetivo disso é observar se a estratégia de adaptação desenvolvida capta as áreas de grande gradiente da solução dual quando a solução primal não é suave.

As soluções analíticas são:

Primal:

$$u(x, y) = 0.0005x^2(1-x)^2y^2(y-1)^2e^{10(1-x)^2+10(1-y)} + 0.0005\sin(4\pi xy)$$

e Dual:

$$z(x, y) = 0.0005x^2(1-x)^2y^2(y-1)^2e^{10x^2+10y} + 0.0005\sin(4\pi(1-x)(1-y)).$$

A Figura 6.25 mostra como é a solução primal. A dual é igual à primal apenas rotacionada de forma que o pico fique próximo do ponto (1,1) ao invés de (0,0).

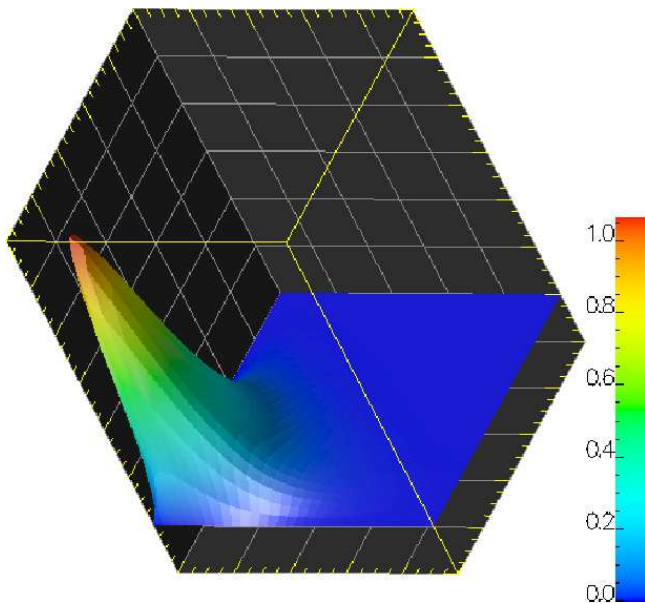


Figura 6.25: Exemplo 4: Solução Primal.

Como podemos observar nas Figuras 6.26 até 6.33 as áreas de grandes gradientes das soluções primal e dual são captadas corretamente. Comparando o refinamento adaptativo e o refinamento uniforme na Figura 6.34, podemos concluir

que o erro no h-refinamento tem convergência melhor que o refinamento uniforme.

O Gráfico na Figura 6.35 mostra os índices de efetividade, os quais estão relativamente próximos de 1, confirmando assim que a eficiência do processo adaptativo, como também podemos ver na Figura 6.34.

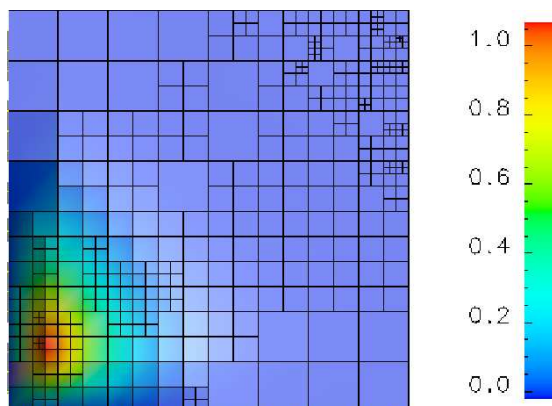


Figura 6.26: Exemplo 4: h-refinamento com 30 iterações, 5% de elementos refinados a cada iteração e a solução primal, $p=2$.

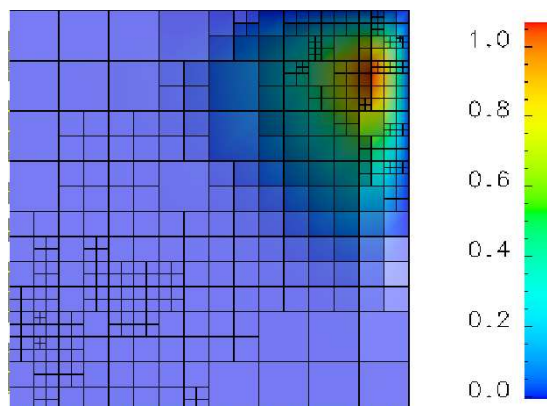


Figura 6.27: Exemplo 4: h-refinamento com 30 iterações, 5% de elementos refinados a cada iteração e a solução dual, $p=2$.

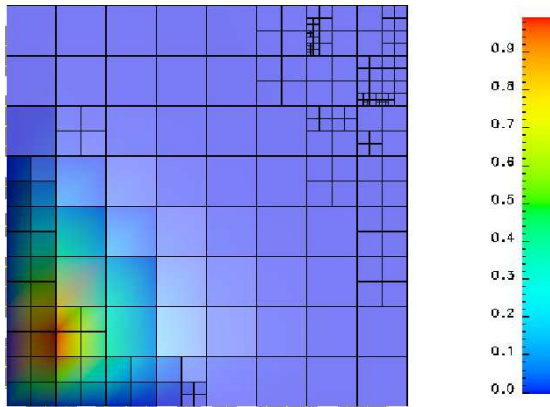


Figura 6.28: Exemplo 4: h-refinamento com 25 iterações, 5% de elementos refinados a cada iteração e a solução primal, $p=3$.

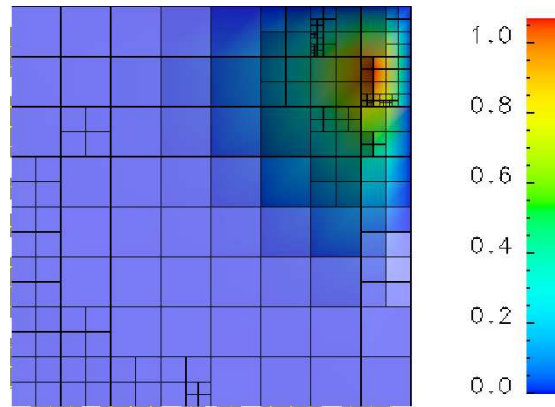


Figura 6.29: Exemplo 4: h-refinamento com 25 iterações, 5% de elementos refinados a cada iteração e a solução dual, $p=3$.

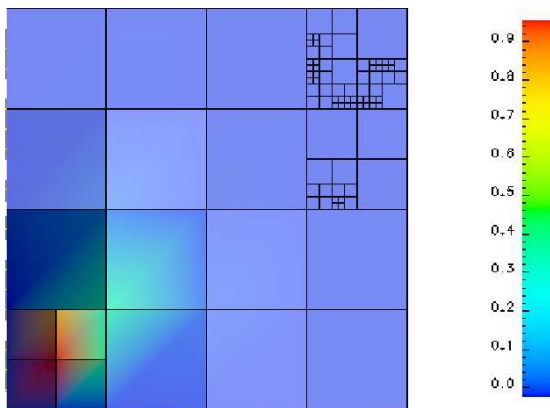


Figura 6.30: Exemplo 4: h-refinamento com 19 iterações, 5% de elementos refinados a cada iteração e a solução primal, $p=4$.

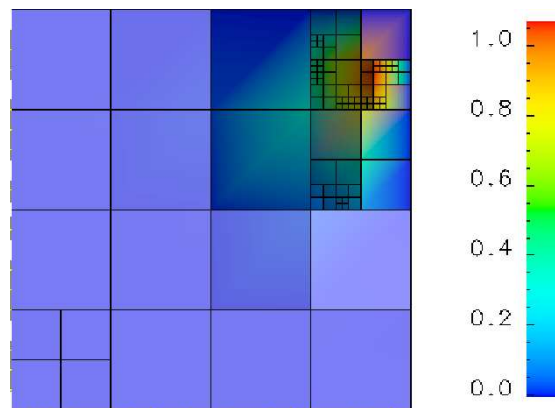


Figura 6.31: Exemplo 4: h-refinamento com 19 iterações, 5% de elementos refinados a cada iteração e a solução dual, $p=4$.

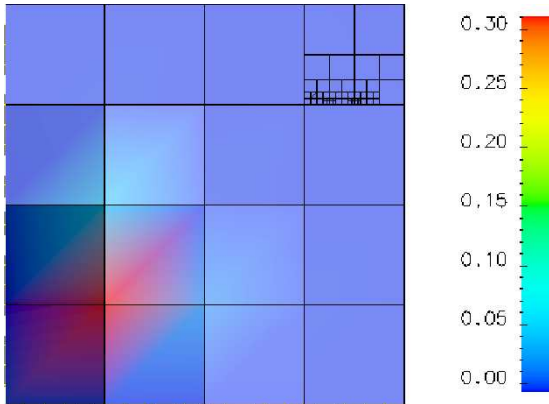


Figura 6.32: Exemplo 4: h-refinamento com 16 iterações, 5% de elementos refinados a cada iteração e a solução primal, $p=5$.

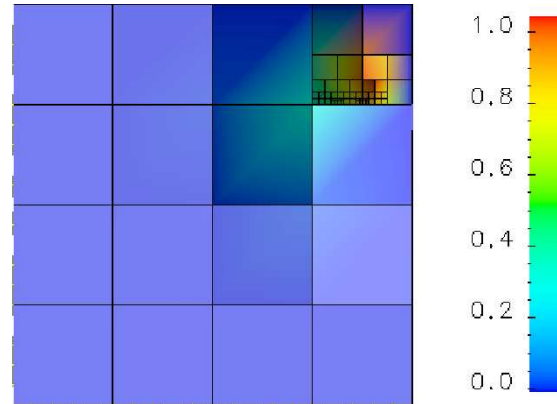


Figura 6.33: Exemplo 4: h-refinamento com 16 iterações, 5% de elementos refinados a cada iteração e a solução dual, $p=5$.

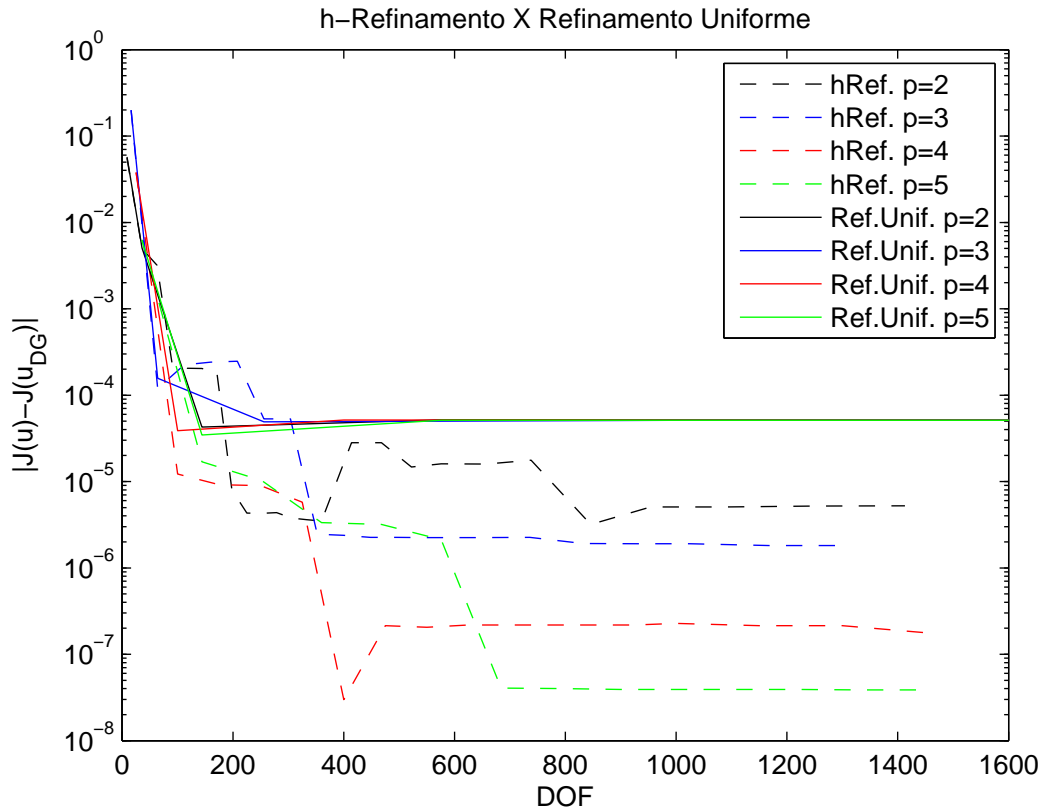


Figura 6.34: Exemplo 4: h-refinamento comparado ao refinamento uniforme.

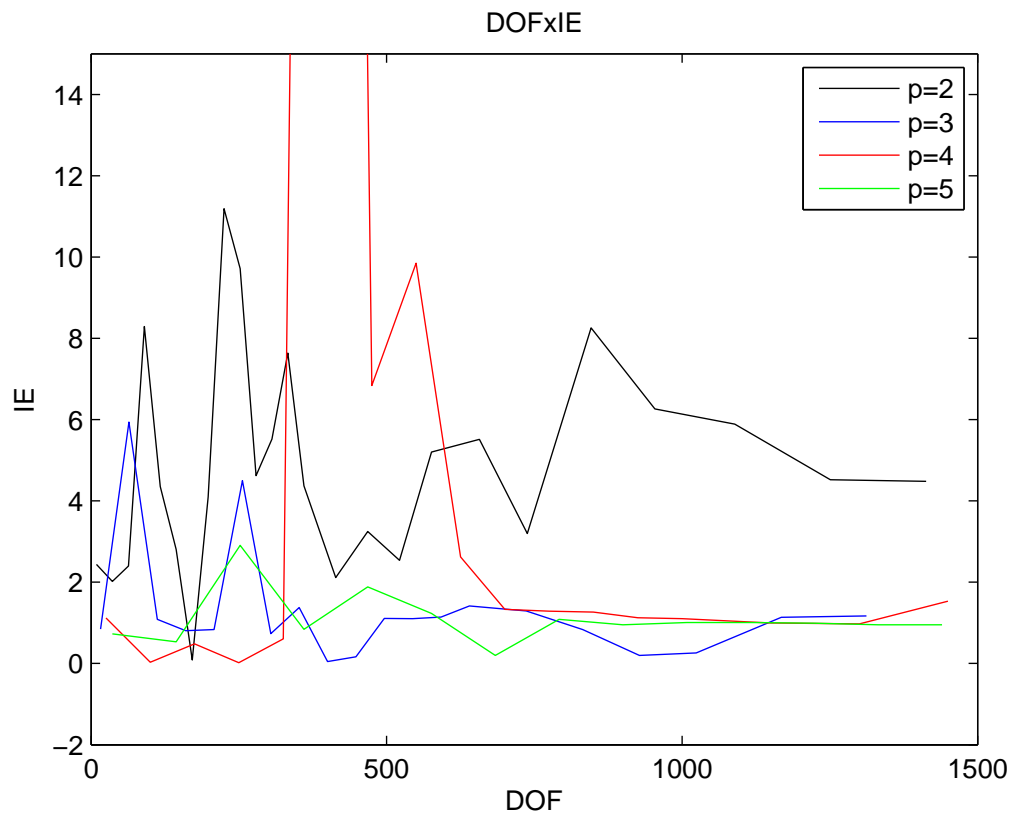


Figura 6.35: Exemplo 4: IE x DOF.

6.5 Exemplo 5

Neste exemplo, investigamos como a estratégia adaptativa apresentada comporta-se quando o funcional alvo é a integral da solução sobre um subdomínio, para a equação de difusão-advecção. Consideremos a equação,

$$-\epsilon \Delta u + \nabla \cdot \mathbf{b}u = f$$

em que $\epsilon \in \mathbb{R}$. Consideramos o domínio $\Omega = (0, 1)^2$, o campo $\mathbf{b} = (1, 1)$. A função f e as condições de fronteira, homogêneas, foram escolhidas tais que a solução exata do problema primal seja $u = \sin(\pi x)\sin(\pi y)$.

O funcional alvo, ou de interesse, é dado por:

$$J(u) = \int_{\Omega_s} u dx,$$

em que $\Omega_s = (x, y) : 0.745 < x < 0.995$ e $0.375 < y < 0.625$. Então podemos reescrever $J(u)$ da seguinte forma:

$$J(u) = \int_{\Omega} K(x, y)u,$$

em que $K(x, y) = 1$ se $(x, y) \in \Omega_s$ e $K(x, y) = 0$ se $(x, y) \in \Omega \setminus \Omega_s$.

Lembramos que o problema dual difere do primal pelo sinal do termo advectivo neste caso.

As Figuras de 6.36 a 6.47 abaixo mostram as malhas depois de sucessivos refinamentos, para $p=2$ e para várias escolhas de ϵ , sendo à esquerda as soluções primais e à direita as soluções duais.

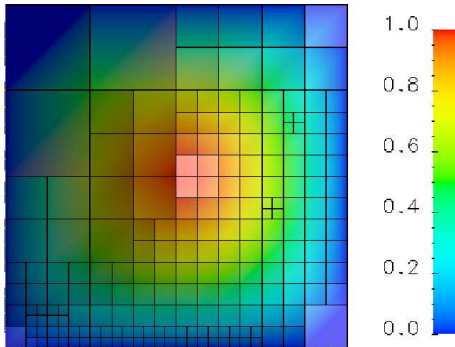


Figura 6.36: Exemplo 5: $\epsilon = 10^{-2}$, 16 iterações, com 10% de elementos refinados a cada iteração.

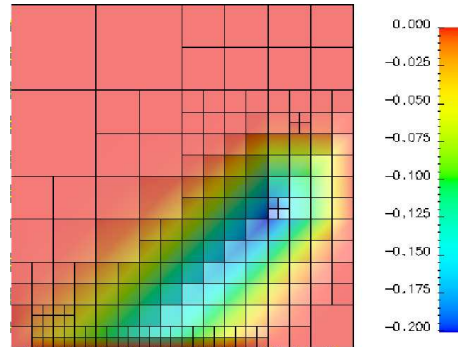


Figura 6.37: Exemplo 5: $\epsilon = 10^{-2}$, 16 iterações, com 10% de elementos refinados a cada iteração.

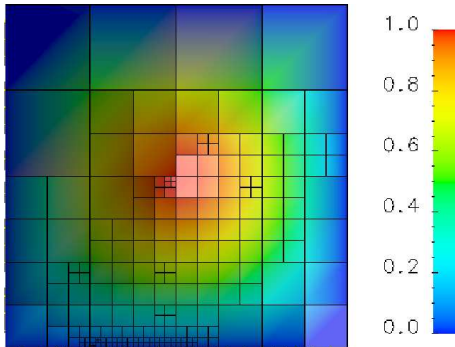


Figura 6.38: Exemplo 5: $\epsilon = 10^{-4}$, 16 iterações, com 10% de elementos refinados a cada iteração.

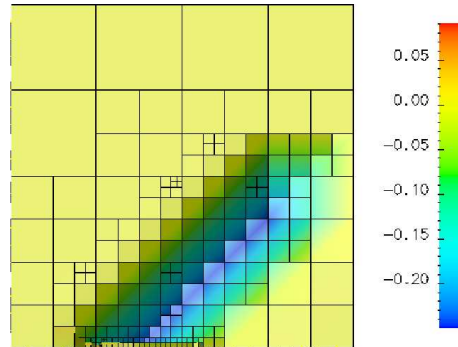


Figura 6.39: Exemplo 5: $\epsilon = 10^{-4}$, 16 iterações, com 10% de elementos refinados a cada iteração.

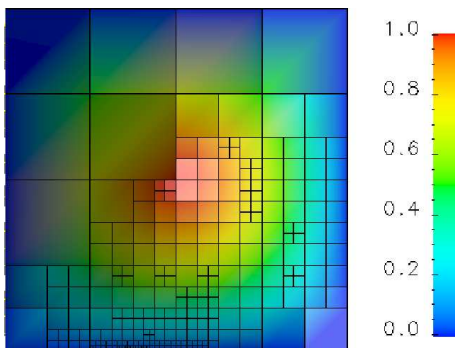


Figura 6.40: Exemplo 5: $\epsilon = 10^{-5}$, 10 iterações, com 20% de elementos refinados a cada iteração.

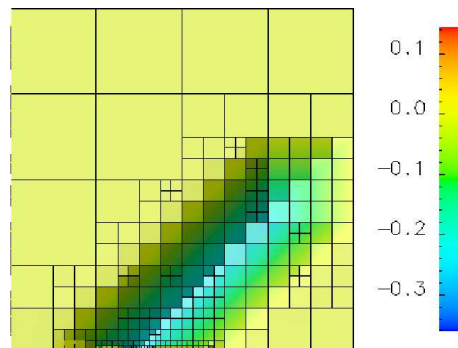


Figura 6.41: Exemplo 5: $\epsilon = 10^{-5}$, 10 iterações, com 20% de elementos refinados a cada iteração.

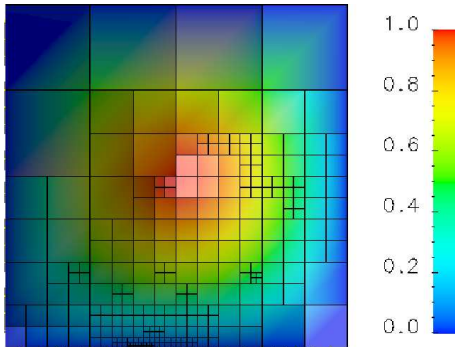


Figura 6.42: Exemplo 5: $\epsilon = 10^{-6}$, 10 iterações, com 20% de elementos refinados a cada iteração.

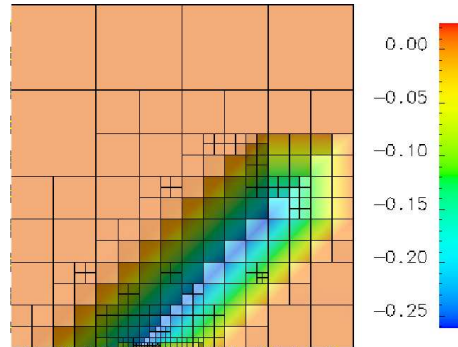


Figura 6.43: Exemplo 5: $\epsilon = 10^{-6}$, 10 iterações, com 20% de elementos refinados a cada iteração.

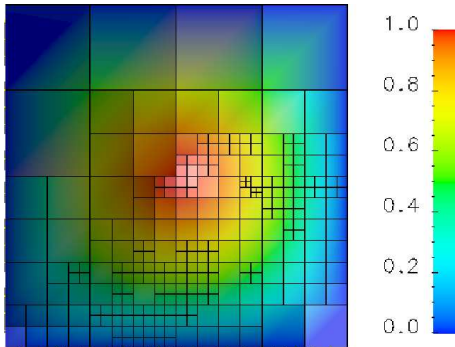


Figura 6.44: Exemplo 5: $\epsilon = 10^{-7}$, 10 iterações, com 20% de elementos refinados a cada iteração.

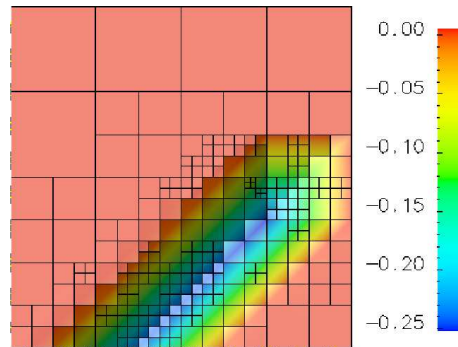


Figura 6.45: Exemplo 5: $\epsilon = 10^{-7}$, 10 iterações, com 20% de elementos refinados a cada iteração.

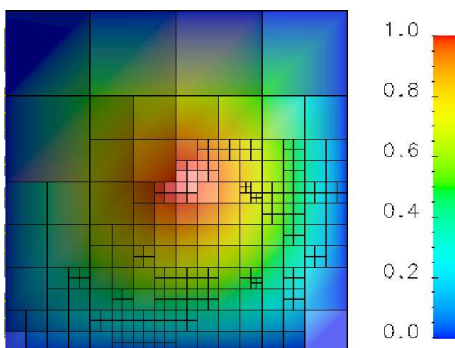


Figura 6.46: Exemplo 5: $\epsilon = 10^{-8}$, 10 iterações, com 20% de elementos refinados a cada iteração.

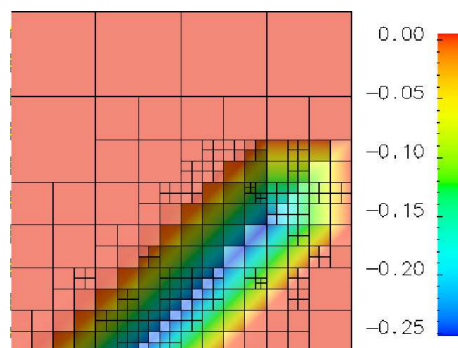


Figura 6.47: Exemplo 5: $\epsilon = 10^{-8}$, 10 iterações, com 20% de elementos refinados a cada iteração.

Podemos perceber que a estratégia de adaptação refina a malha de forma a melhorar a aproximação da solução dual, acompanhando assim a propagação da singularidade da fonte no problema dual ao longo das características do termo advectivo. Como o problema dual tem condições de fronteira $z = 0$ em $\partial\Omega$, mas para ϵ até 10^{-6} , o campo advectivo força a solução dual a ser maior que zero muito próximo à fronteira, formando assim uma camada limite ao longo da parte de saída de fluxo da fronteira. Com isso podemos perceber que a malha é bastante refinada nesta região para captar essa quase descontinuidade. Na Figura 6.48 mostramos como a adaptação melhora a convergência do funcional.

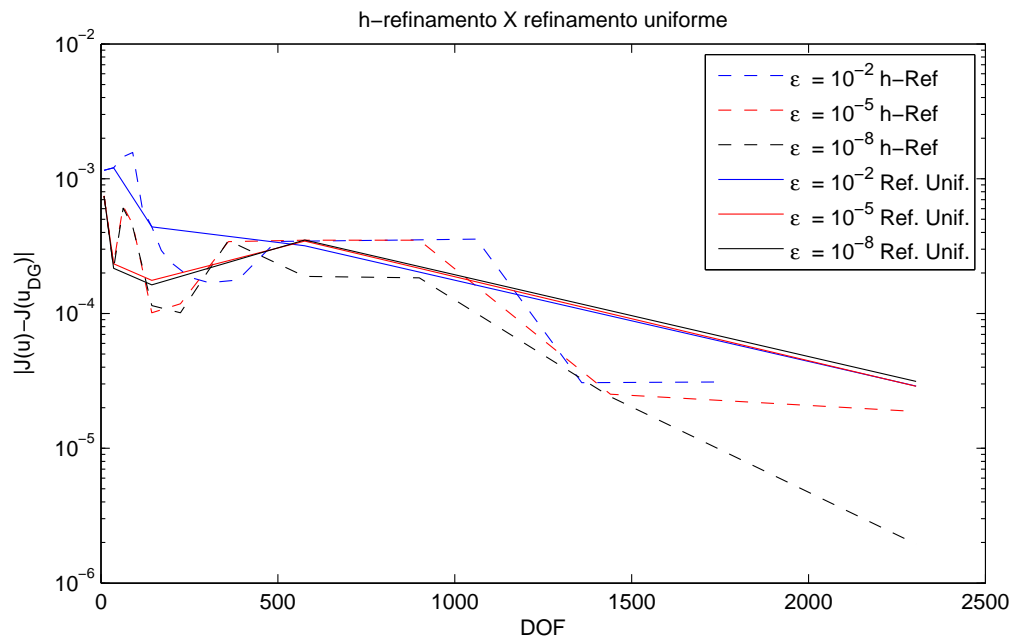


Figura 6.48: Exemplo 5: Para $p=2$, refinamento uniforme \times h-refinamento.

Uma aproximação da solução dual para $\epsilon = 10^{-8}$, é apresentada na Figura 6.49, lembramos que neste exemplo a solução dual é desconhecida.

Podemos ressaltar também que o algoritmo adaptativo torna-se mais eficiente para valores de ϵ pequenos.

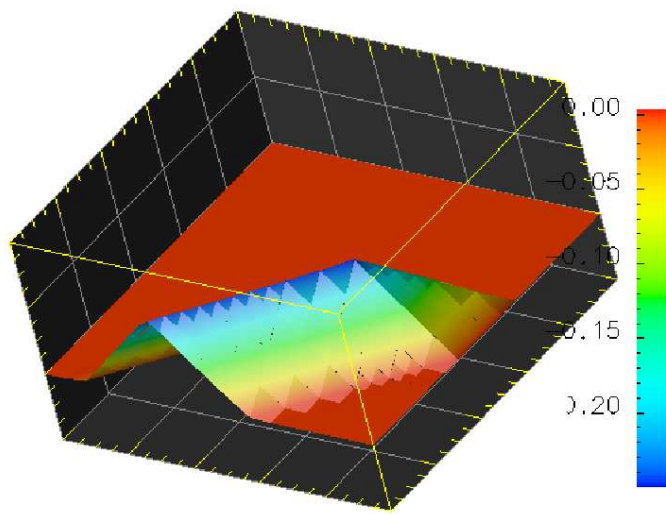


Figura 6.49: Exemplo 5: Aproximação da solução dual.

Conclusões

Neste trabalho mostramos como a solução do problema dual pode ser usada para relacionar o resíduo da aproximação primal com o erro de um funcional da solução primal. O problema dual ou adjunto é determinado pela forma bilinear associada ao problema primal e pelo funcional da solução que desejamos aproximar.

Na análise da versão hp dos métodos de elementos finitos de Galerkin descontínuo com penalização interior simétrico (DGFEM-SIP) e não-simétrico (DGFEM-NIP) estudamos estimativas *a priori* do erro de aproximação do funcional alvo que mostram que o método simétrico tem taxa de convergência $2p$ quando h tende a zero, enquanto que o método não-simétrico perde ordem $2p$, devido a falta de consistência dual do método não-simétrico. Essas taxas foram comprovadas numericamente no Exemplo 1, do Capítulo 6.

Concluimos que o indicador de erro, proveniente das estimativas *a posteriori* do erro no funcional e que utiliza os argumentos de dualidade, capta as regiões de grandes gradientes tanto na solução primal quanto na solução dual. Dessa forma, a malha obtida pelo processo adaptativo baseado neste indicador, capta as propriedades do funcional alvo. Isso é muito importante, pois sem um indicador de erros que use a dualidade do problema, não saberíamos onde refinar a malha para melhorar a convergência da aproximação do funcional de interesse.

Os experimentos numéricos em que as solução do problema primal é suave e a solução do problema dual tem regiões de grandes gradientes, mostraram que a técnica de escalabilidade, que é aplicada para equilibrar as ordens dos erros das soluções dos problemas primal e dual, apresentada no Capítulo 1, é relevante para que a estratégia adaptativa seja superior ao refinamento uniforme.

Em trabalhos futuros pretendemos incorporar técnicas de escalabilidade, tais como a apresentada no Capítulo 1, a indicadores de erros obtidos com argumentos de dualidade, além de implementar a hp adaptatividade.

Referências Bibliográficas

- [1] AINSWORTH, M.; ODEN, J. T. *A posteriori* error estimation in finite element analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 142:1–88, 1997.
- [2] AINSWORTH, M.; ODEN, J.T. *A Posteriori Error Estimation in Finite Element Analysis*. WILEY-INTERSCIENCE, 2000.
- [3] AINSWORTH, M. A hierarchical domain decomposition preconditioner for h-p finite element approximation on locally meshes. SIAM, 1996.
- [4] BABUSKA, I.; SURI, M. The p and h-p versions of the finite elements methods, an overview. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 80:5–26, 1990.
- [5] BABUSKA, I.; STROUBOLIS, T.; COPPS, K.; GANGARAJ, S. K.; UPADHYAY, C. S. *A posteriori* error estimation for finite element and generalized finite element method. Technical report, TICAM, 1998.
- [6] BABUSKA, I.; RHEINBOLDT, W. C. *A posteriori* error estimates for the finite element method. *International Journal Numerical Methods Engrg*, 12:1597–1615, 1978.
- [7] BABUSKA, I.; RHEINBOLDT, W. C. *A posteriori* error analysis of finite element solutions for one dimensional problems. *Journal Numerical Analysis*, 18:565–589, 1981.
- [8] BAKER, G. A.; JUREIDINI, W. N.; KARAKASHIAN, O. A. Piecewise solenoidal vector fields and the Stokes problems. *SIAM J. Numer. Anal.*, 27:1466–1485, 1990.
- [9] BAUMANN, C. *An hp-adaptive discontinuos Galerkin FEM for computational fluid dynamics*. PhD thesis, TICAM, 1997.

- [10] BECKER, R.; HANSBO, P.; LARSON, M. G. Energy norm *a posteriori* error estimation for discontinuous Galerkin methods. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Volume 192, Issues 5-6, Pages 723-733, 2003.
- [11] BECKER, R.; HANSBO, P. Discontinuous Galerkin methods for convection-diffusion problems with arbitrary pécelet number. In *Numerical Mathematics and Advanced Applications: Proceedings of the 3rd Eurpeans Conference.*, 2000.
- [12] COCKBURN, B.; KARNIADAKIS, G. E.; SHU, C.-W. *Discontinuous Galerkin Finite Element Methods*. Springer, 2000.
- [13] COCKBURN, B.; KARNIADAKIS, G. E.; SHU, C.-W. *The development of discontinuous Galerkin methods*, chapter 1. Springer, 2001.
- [14] COCKBURN, B.; D. ARNOLD, D.; BREZZI, F.. Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems. *SIAM J. Numer. Anal.*, 39:1749–1779, 2002.
- [15] DEMKOWICZ, L.; DEVLOO, P. R. B.; ODEN, J. T. On an h-type mesh refinement strategy based on minimization of interpolations errors. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1-2:63–87, 1986.
- [16] DEVLOO, P. R. B. PZ : An object oriented environment for scientific programming. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 150:133–153, 1997.
- [17] DEVLOO, P. R. B. PZ- object oriented finite element software. Technical report, FEC-UNICAMP, 2005.
- [18] GILES, B. M.; SÜLI, E. Adjoint methods for pdes: *a posteriori* error analysis and postprocessing by duality. *Acta Numerica*, pages 145–236, 2002.
- [19] HARRIMAN, K.; HOUSTON, P.; SENIOR, B.; SÜLI, E.. hp-Version Discontinuous Galerkin Methods with Interior Penalty for Partial Differential Equations with Nonnegative Characteristic Form. In C.-W. Shu, T. Tang, and S.-Y. Cheng, editors, *Recent Advances in Scientific Computing and Partial Differential Equations*. Contemporary Mathematics Vol. 330, pp. 89-119, AMS, 2003.
- [20] HOUSTON, P.; SENIOR, B.; SÜLI, E.. Sobolev regularity estimation for hp-adaptive finite element methods. 2002.

- [21] HOUSTON, P.; SCHWAB, C.; SÜLI, E. Discontinuous hp-finite element method for advection-diffusion-reaction problems. *SIAM Journal Numer. Anal.*, 39(6):2133–2163, 2002.
- [22] HOUSTON, P.; SÜLI, E. hp-adaptive discontinuous Galerkin finite element methods for hyperbolic problems. *SIAM J. Sci. Comp.*, 23:1225–1251, 2001.
- [23] HOUSTON, P.; SÜLI, E. Stabilized hp-finite element approximation of partial differential equations with non-negative characteristic form. *Computing*, 66:99–119, 2001.
- [24] HOUSTON, P.; RANNACHER, R.; SÜLI, E. *A posteriori* error analysis for stabilised finite element approximations of transport problems. Technical report, 1999.
- [25] KARAKASHIAN, O. A.; PASCAL, F. *A posteriori* error estimates for a discontinuous Galerkin approximation of second-order elliptic problems. *SIAM Journal Numerical Analysis*, 41:2374–2399, 2003.
- [26] KARAKASHIAN, O. A.; PASCAL, F. Adaptive discontinuous Galerkin approximations of second-order elliptic problems. 2004.
- [27] NITSCHKE, J. Über ein variationsprinzip zur lösung von dirchlet-problemen bei verwendung von teilräumen, die keinen randbedingungen unterworfen sind. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 36:9–15, 1971.
- [28] ODEN, J. T.; BABUSKA, I.; BAUMANN, C. A discontinuous hp-fem for diffusion problems. *J. Comput. Phys*, 146:491–519, 1998.
- [29] ODEN, J. T.; PRUDHOMME, S. Goal-oriented error estimation and adaptivity for the finite element method. Technical report, Texas Institute for Computational and Applied Mathematics, 1999.
- [30] ODEN, J. T.; PRUDHOMME, S. New approaches to error estimation and adaptivity for the Stokes and Oseen equations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 31:3–15, 1999.
- [31] ODEN, J. T.; PRUDHOMME, S. Development of a post-processor for *a posteriori* error estimation of quantities of interest. Technical report, Texas Institute for Computational and Applied Mathematics, 2001.

- [32] ODEN, J. T.;PRUDHOMME, S. Progress on practical methods of error estimation for engineering calculations. In *ECCM-2001, European Conference on Computational Mechanics*, 2001.
- [33] ODEN, J. T.;PRUDHOMME, S. Goal-oriented error estimation and adaptivity for the finite element method. *Computers & Mathematics with applications*, 41:735–756, 2001.
- [34] OLEINIK, O. A.; RADKEVIC, E. V. *Second Order Equations with Nonnegative Characteristic Form*. American Mathematical Society, 1973.
- [35] PRUDHOMME, S.; PASCAL, F.; ODEN, J. T.; ROMKES, A. Review of *a priori* error estimation for discontinuous Galerkin methods. Technical report, Texas Institute for Computational and Applied Mathematics, 2000.
- [36] PRUDHOMME, S.; ODEN, J. T. ;WESTERMANN, T.; BASS, J.; BOTKIN, M. E. Practical methods for *a posteriori* error estimation in engineering applications. *Journal Numer. Meth. Engng*, 2001.
- [37] PRUDHOMME, S.;ODEN, J. T.; WESTERMANN, T.; BASS, J.; BOTKIN, M. E. *International Journal For Numerical Methods in Engineering*, 56:1193–1224, 2003.
- [38] PRUDHOMME, S.; ODEN, J. T. ; ROMKES, A.; CAREY, G. F.. On a posteriori error estimator for the discontinuous galerkin method. *DOD Users Group Meeting*, 2001.
- [39] PRUDHOMME, S.; NOBILE, F.; CHAMION, L.; ODEN, J. T. Analysis of a subdomain-based error estimator for finite element approximations of elliptic problems. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, vol. 20(2), pp. 165-192, 2004.
- [40] PRUDHOMME, S.; ODEN, J. T. Computable error estimators and adaptive techniques for fluid flow problems. In *Error Estimation and Adaptive Discretization Methods in Computational Fluid Dynamics*, T. Barth and H. Deconinck (eds), *Lecture Notes in Computational Science and Engineering*, vol. 25, Springer-Verlag, Heidelberg, pp. 207-268, 2002.
- [41] PRUDHOMME, S.; ODEN, J. T. On goal-oriented error estimation for elliptic problems: Application to the control of pointwise errors. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 176:313–331, 1999.

- [42] PRUDHOMME, S.; ODEN, J. T. Simple techniques to improve the reliability of *a posteriori* error estimates for finite element. In *European Conference on Computational Mechanics*, 2001.
- [43] PRUDHOMME, S. *Adaptive Control of Error and Stability of h-p Approximations of the Transient Navier-Stokes Equations*. PhD thesis, The University of Texas at Austin, 1999.
- [44] RACHOWICZ, W.; ODEN, J. T.; DEMKOWICZ, L. Toward a universal h-p version of the finite element strategy. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, pages 181–212, 1989.
- [45] RANNACHER, R. Adaptive Galerkin finite element methods for partial differential equations. *J. Comput. Appl. Math.* 128, 205-233, 2001.
- [46] RANNACHER, R. ;BECKER, R. An optimal control approach to *a posteriori* error estimation in finite element methods, 2001.
- [47] REED, W.; HILL, T. R. Triangular mesh methods for the neutron transport equation. Technical report, Los Alamos Scientific Laboratory, 1973.
- [48] REPIN, S.; SAUTER, S.; SMOLIANSKI, A. *A posteriori* error estimation for the poisson equation with mixed Dirichlet/Neumann boundary conditions. *Journal Computational and Applied Mathematics*, 164-165:601–612, 2004.
- [49] RIVIÈRE, B.; WHEELER, M. F. *A posteriori* error estimates and mesh adaptation strategy for discontinuous Galerkin methods applied to diffusion problems. *Computers & Mathematics with Applications* , Volume 46, Number 1 p. 141-163, 2003.
- [50] ROMKES, A.; PRUDHOMME, S.; ODEN, J. T. *A posteriori* error estimation for a new stabilized discontinuous Galerkin method. *Applied Mathematics Letters*, vol. 16(4), pp. 447-452, 2003.
- [51] ROMKES, A.; PRUDHOMME, S.; ODEN, J. T. *A posteriori* error estimation for a new stabilized discontinuous Galerkin method. *Applied Mathematics Letters*, 16:447–452, 2003.
- [52] ZIENKIEWICZ, O. C. The background of error estimation and adaptivity in finite element computations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195:207–213, 2006.