

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA - UFSC
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL - PPGEC

ANÁLISE DE PAVIMENTOS DE EDIFÍCIOS UTILIZANDO A
ANALOGIA DE GRELHA

Dissertação submetida à Universidade Federal de Santa Catarina como requisito parcial exigido pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil - PPGEC, para a obtenção do Título de MESTRE em Engenharia Civil.

EDUARDO MARTINS DOS REIS

Florianópolis, julho de 2007

**“ANÁLISE DE PAVIMENTOS DE EDIFÍCIOS UTILIZANDO A ANALOGIA
DE GRELHA”**

EDUARDO MARTINS DOS REIS

Dissertação julgada adequada para a obtenção do Título de MESTRE em Engenharia Civil e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil - PPGEC da Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC.

Prof. Glicério Trichês - Coordenador do PPGEC

Prof. Dr. Daniel Domingues Loriggio - Orientador

COMISSÃO EXAMINADORA:

Prof. Dr. Daniel Domingues Loriggio - Moderador - ECV/UFSC

Prof. Dr. Narbal Ataliba Marcellino - ECV/UFSC

Prof. Roberto Caldas de Andrade Pinto, Phd - ECV /UFSC

Prof. Dr. Roberto Chust Carvalho. - UFSCar

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS.....	I
LISTA DE TABELAS.....	VI
RESUMO.....	VII
ABSTRACT.....	VIII
1. INTRODUÇÃO.....	1
1.1 INTRODUÇÃO.....	1
1.2 HISTÓRICO.....	2
1.3 JUSTIFICATIVA.....	8
1.4 OBJETIVO GERAL.....	9
1.5 OBJETIVO ESPECÍFICO.....	9
2. TEORIA DAS PLACAS EM REGIME ELÁSTICO.....	10
3. TEORIA DAS GRELHAS.....	15
3.1 ANÁLISE MATRICIAL DE ESTRUTURAS.....	15
3.2. MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS.....	15
3.3. ANÁLISE DE GRELHAS PLANAS.....	17
4. MODELAMENTO DE PISOS DE EDIFÍCIOS.....	20
4.1. ANÁLISE DE LAJES BASEADA NA TEORIA DAS PLACAS.....	20
4.2. PROCESSO DA ANALOGIA DE GRELHA.....	22
4.2.1. PROPRIEDADES FÍSICAS E GEOMÉTRICAS DAS BARRAS.....	17
4.2.1.1. RIGIDEZ À FLEXÃO DAS BARRAS DA GRELHA.....	23
4.2.1.2. RIGIDEZ À TORÇÃO DAS BARRAS DA GRELHA.....	24
4.2.2. CARREGAMENTO.....	26
4.3. MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS.....	27
4.4. CONSIDERAÇÕES NO CÁLCULO DE PAVIMENTOS.....	31
4.4.1. CONSIDERAÇÃO DA LARGURA COLABORANTE DA LAJE.....	31
4.4.2. CONSIDERAÇÃO DA VINCULAÇÃO DOS PILARES.....	32

5. EXEMPLOS DE MODELAGEM – PAVIMENTO 1.....	34
5.1. PAVIMENTO MODELADO EM LAJES ISOLADAS - MODELOS 1 E 2.....	40
5.2. COMPATIBILIZAÇÃO DOS MOMENTOS FLETORES NEGATIVOS DE LAJES ISOLADAS UTILIZANDO OS MODELOS 1 E 2.....	44
5.3. COMPATIBILIZAÇÃO DE LAJES INTEGRADAS – MODELO 3...47	
5.3.1. COMPARAÇÃO COM AS TABELAS DE CZERNY.....	47
5.3.2. COMPARAÇÃO COM ELEMENTOS FINITOS.....	51
5.4. EFEITO DA RIGIDEZ À TORÇÃO DAS VIGAS DE APOIO.....	54
5.4.1. MALHAS COINCIDENTES – MODELO 4.....	54
5.4.2. MALHAS DESENCONTRADAS – MODELO 5.....	58
5.4.2.1. ROTAÇÃO DAS BARRAS DE EXTREMIDADE DAS VIGAS.....	70
5.4.2.2. EFEITO DO ESPAÇAMENTO E ALINHAMENTO DA MALHA.....	73
5.5 EFEITO DA RIGIDEZ DOS APOIOS.....	84
5.5.1 EFEITO DA RIGIDEZ DOS APOIOS EM MALHAS COINCIDENTES COM RIGIDEZ À TORÇÃO NULA DA VIGA DE APOIO – MODELO 6.....	84
5.5.2. EFEITO DA DESLOCABILIDADE VERTICAL DOS APOIOS EM MALHAS DESENCONTRADAS – MODELO 7.....	95
6. EXEMPLO DE MODELAGEM EM UM PAVIMENTO REPRESENTATIVO – PAVIMENTO 2.....	102
7. CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES	122
8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	125

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 - (a) Laje maciça; (b) grelha equivalente, HAMBLY (1976)	3
Figura 1.2: Continuidade da malha através da rigidez a torção da viga de apoio (COELHO 2000).....	6
Figura 1.3 – ações verticais de uma placa quadrada em uma viga periférica segundo a teoria das placas TIMOSHENKO (1959).....	7
Figura 1.4 – ação na viga periférica pela laje modelada numa análise linear por analogia de grelha. Seção das viga (1) 12x50; (2) 12x25; (3) 31x10; (4) 12x16; (5) critério da NB1. (Adaptado de CARVALHO 1996).....	7
Figura 2.1 – Esforços cortantes em um elemento infinitesimal de placa (COELHO 2000).....	11
Figura 2.2 – Momentos Fletores e Torsões em um elemento infinitesimal de placa (COELHO 2000).....	11
Figura 3.1 - Grelha plana, COELHO (2000).....	18
Figura 3.2 - Graus de liberdade de uma barra de grelha.....	18
Figura 3.3 – Matriz de rigidez da barra em relação ao sistema de eixo local.....	19
Figura 4.1 – Lajes perfeitamente engastadas (a) e lajes compatibilizadas (b).....	21
Figura 4.2 - Torção em uma laje como se fosse viga, HAMBLY (1976).....	23
Figura 4.3 – Carregamento nos nós – carga nodal P – e carregamento nas barras – carga uniformemente distribuída q.(STRAMANDINOLI, 2003).....	27
Figura 4.4 –Esforços no elemento SHELL = esforços de membrana (esquerda) e esforços de placa (direita).....	28
Figura 4.5 – Vista do elemento finito de placa e seus graus de liberdade. (ALVES FILHO, 2000).....	29
Figura 4.6 - Largura da mesa colaborante (NBR 6118:2003).....	32
Figura 4.7 - aproximação em apoios extremos (NBR 6118:2003).....	33
Figura 5.1- Vista em planta do pavimento – exemplo 1. CARVALHO (1994).....	35
Figura 5.2 - Convenção dos esforços.....	39
Figura 5.3 – Nomenclatura dos deslocamentos máximos para cada laje do pavimento.....	39
Figura 5.4: MODELO 2A – Laje modelada em analogia de grelha com barras espaçadas de 25cm.....	40
Figura 5.5: MODELO 2B – Laje modelada em analogia de grelha com barras espaçadas de 50cm.....	41
Figura 5.6: MODELO 2C – Laje modelada em analogia de grelha com barras espaçadas de 100cm.....	41
Figura 5.7: MODELO 2EF – Laje modelada em elementos finitos de casca.....	41
Figura 5.8: variação do momento negativo no bordo entre as laje 1, 2 e 3 – modelos 1 e 2.....	43
Figura 5.9: variação do momento negativo no bordo entre as laje 1 e 2 – modelos 1 e 2.....	43
Figura 5.10: variação dos momento compatibilizados entre as lajes 1,2 e 3 – modelos 1 e 2.....	46
Figura 5.11: variação dos momentos compatibilizados entre as lajes 1 e 2 – modelos 1 e 2.....	46
Figura 5.12: variação do momento fletor bordos laje 1, 2 e 3 – modelos 1 e 3.....	49
Figura 5.13: variação do momento fletor bordos laje 1e 2– modelos 1 e 3.....	49
Figura 5.14: Visualização das barras que geram a descontinuidade na laje 3.....	50
Figura 5.15: variação do momento fletor bordos laje 1, 2 e 3 – modelo 1 e modelo 3 em MEF e AG.....	52

Figura 5.16: variação do momento fletor bordos laje 1 e 2– modelo 1 e modelo 3 em MEF e AG.....	53
Figura 5.17 - Variação de M_{yy} e X_{yy} entre as lajes 1 e 3 (kNm/m). Modelo 4A com rigidez à torção da viga reduzida (superior) e modelo 4B com rigidez à torção integral (inferior).....	56
Figura 5.18 - Variação de M_{yy} e X_{yy} entre as lajes 2 e 3 (kNm/m) (não correspondem aos valores máximos). Modelo 4A com rigidez à torção da viga reduzida (superior) e modelo 4B com rigidez à torção integral (inferior).....	57
Figura 5.19 - Variação de M_{xx} e X_{xx} entre as lajes 1 e 2 (kNm/m) (não correspondem aos valores máximos). Modelo 4A com rigidez à torção da viga reduzida (superior) e modelo 4B com rigidez à torção integral (inferior).....	57
Figura 5.20 - modelo 5.....	59
Figura 5.21 - variação X_{yy1} , X_{yy2} e X_{yy3} modelo 5A e modelo 4A para 15% da rigidez da viga de apoio de ambos modelos.....	60
Figura 5.22 - variação X_{xx1} e X_{xx2} modelo 5A e modelo 4A para 15% da rigidez da viga de apoio de ambos modelos.....	60
Figura 5.23 - trecho da viga VT5, ilustrando a variação do comprimento da viga de apoio entre as lajes 2 e 3.....	61
Figura 5.24 - torção VT5 modelo 5A e modelo 4A para 15% da rigidez elástica à torção da viga de ambos modelos.....	62
Figura 5.25 - torção VT2 modelo 5A e modelo 4A para 15% da rigidez elástica à torção da viga de ambos modelos.....	63
Figura 5.26- variação X_{yy1} , X_{yy2} e X_{yy3} modelo 5B com 100% da rigidez da viga de apoio modelo 4A.....	65
Figura 5.27 - variação X_{xx1} e X_{xx2} modelo 5B com 100% da rigidez da viga de apoio e modelo 4A.....	65
Figura 5.28 - torção VT5 para modelo 5B considerando 100% da rigidez elástica à torção da viga em comparação ao modelo 4A.....	66
Figura 5.29 - variação X_{yy1} , X_{yy2} e X_{yy3} modelo 4A e modelo 5C com rigidez muito grande à torção da viga de apoio.....	67
Figura 5.30 - variação X_{xx1} e X_{xx2} modelo 4A e modelo 5C com rigidez muito grande à torção da viga de apoio.....	68
Figura 5.31 - torção VT5 para modelo 5C considerando a rigidez elástica a torção da viga infinita em comparação ao modelo 4A.....	69
Figura 5.32 - pontos onde foram liberados os momentos torsores das vigas de apoio do modelo 5C, formando o modelo 5C ROT.....	70
Figura 5.33- variação X_{yy1} , X_{yy2} e X_{yy3} modelo 7 e modelo 5 para rigidez infinita da viga de apoio, articulada nas extremidades.....	71
Figura 5.34 - torção VT5 para modelo 5C ROT considerando rigidez infinita à torção e articulação nas extremidades em comparação ao modelo A.....	72
Figura 5.37 - pavimento discretizado com malha de 50x50, contendo as barras das lajes contíguas equidistantes (MOD 5D1)	74

Figura 5.38 - pavimento discretizado com malha de 50x50, contendo as barras das lajes contíguas espaçadas de 25% do espaçamento da grelha (MOD 5D2).....	74
Figura 5.39 - pavimento discretizado com malha de 100x100, contendo as barras das lajes contíguas equidistantes (MOD 5E1)	75
Figura 5.40 - pavimento discretizado com malha de 100x100, contendo as barras das lajes contíguas espaçadas de 25% do espaçamento da grelha (MOD 5E2)	75
Figura 5.41 - variação de X_{yy3} para rigidez à torção da viga reduzida à 15% em comparação ao modelo 4A.....	77
Figura 5.42 - variação de X_{yy3} para rigidez à torção da integral em comparação ao modelo 4A.....	78
Figura 5.43 - variação de X_{yy3} para rigidez à torção da viga reduzida à 15%.....	80
Figura 5.45 - Momentos fletores positivos e flechas: variação das diferenças em relação ao modelo 5 em porcentagem.....	82
Figura 5.46 - Momentos fletores negativos: variação das diferenças em relação ao modelo 5 em porcentagem	82
Figura 5.47: vista tridimensional do pórtico do modelo 6.....	85
Figura 5.48: Seção em T das vigas do modelo 6.....	85
Figura 5.49 – Convenção dos deslocamentos máximos das vigas.....	86
Figura 5.50 – Deformada modelo 6D.....	88
Figura 5.51 - Variação do momento fletor negativo no bordo comum entre as lajes 1, 2 e 3.....	89
Figura 5.52 – Variação do momento fletor negativo entre as lajes 1 e 2.....	90
Figura 5.53– Seção sobre as lajes 1 e 3 – modelo 6.....	91
Figura 5.54 – Momento M_{yy} e X_{yy} em função da variação da rigidez dos apoios (não correspondem aos valores máximos).....	91
Figura 5.55– Seção sobre as lajes 1 e 2 – modelo 6.....	92
Figura 5.56 – Momento M_{xx} e X_{yy} em função da variação da rigidez dos apoios (não correspondem aos valores máximos).....	92
Figura 5.57 – Seção sobre as lajes 2 e 3 – modelo 6.....	93
Figura 5.58– Momento M_{yy} e X_{yy} em função da variação da rigidez dos apoios (não correspondem aos valores máximos).....	94
Figura 5.59 - Vista do modelo 7 em perspectiva.....	95
Figura 5.60 - Variação do momentos fletores negativos das lajes 1, 2 e 3 do modelo 7 em comparação ao modelo 8 em MEF.....	97
Figura 5.61 - Variação do momentos fletores negativos das lajes 1, 2 e 3 do modelo 8 em analogia de grelha em comparação ao MEF.....	97
Figura 5.62 - Variação do momentos fletores negativos das lajes 1 e 2 do modelo 8 em comparação ao modelo 6 em MEF.....	98
Figura 5.63 - Variação do momentos fletores negativos das lajes 1 e 2 do modelo 8 em analogia de grelha em comparação ao MEF.....	98
Figura 5.64 – posicionamento das barras sobre o ponto de encontro das lajes 1,2 e 3 – modelo 7.....	99

Figura 5.65 - variação dos momentos na direção y-y do modelo 8 em elementos finitos.....	100
Figura 5.66 - variação dos momentos na direção x-x do modelo 8 em elementos finitos.....	100
Figura 6.1 - planta de fôrmas com as dimensões empregadas nos elementos.....	103
Figura 6.2 - pavimento modelado em analogia de grelha com malha coincidente de 25x25.....	104
Figura 6.3 - pavimento modelado em analogia de grelha com malha desencontradas.....	105
Figura 6.4 - pavimento modelado em elementos finitos com malha de 25x25.....	106
Figura 6.5 - convenção dos esforços no pavimento.....	106
Figura 6.6 - convenção para os deslocamentos máximos das lajes do pavimento.....	107
Figura 6.7 – localização do bordo comum entre as lajes 1 e 5.....	109
Figura 6.8 - variação do momento fletor negativo entre as lajes 1 e 5 – modelo em analogia de grelha com malhas coincidentes.....	110
Figura 6.9 - variação do momento fletor negativo entre as lajes 1 e 5 – modelo em elementos finitos....	110
Figura 6.10 - variação do momento fletor negativo entre as lajes 1 e 5 – modelo em analogia de grelha com malhas desencontradas.	110
Figura 6.11 – localização do bordo comum entre as lajes 2, 3 e 6.....	111
Figura 6.12 - variação do momento fletor negativo entre as lajes 2,3 e 6 – modelo em analogia de grelha com malhas coincidentes.....	112
Figura 6.13 - variação do momento fletor negativo entre as lajes 2,3 e 6 – modelo em elementos finitos	112
Figura 6.14 - variação do momento fletor negativo entre as lajes 1 e 5 – modelo em analogia de grelha com malhas desencontradas.....	112
Figura 6.15 - modelagem do encontro das lajes 2,3 e 6 (a) analogia de grelha com malhas coincidentes e elementos finitos (b) analogia de grelha com barras desencontradas.....	113
Figura 6.16 – localização do bordo comum entre as lajes 5 e 7.....	114
Figura 6.17 - variação do momento fletor negativo entre as lajes 5 e 7 – modelo em analogia de grelha com malhas coincidentes.	115
Figura 6.18 - variação do momento fletor negativo entre as lajes 5 e 7 – modelos em elementos finitos.	115
Figura 6.19 - variação do momento fletor negativo entre as lajes 5 e 7 – modelo em analogia de grelha com malhas desencontradas.....	115
Figura 6.20 – localização do bordo comum entre as lajes 6 e 8.....	116
Figura 6.21 - variação do momento fletor negativo entre as lajes 6 e 8 – modelo em analogia de grelha com malhas coincidentes.	117
Figura 6.22 - variação do momento fletor negativo entre as lajes 6 e 8 – modelos em elementos finitos.	117
Figura 6.23 - variação do momento fletor negativo entre as lajes 6 e 8 – modelo em analogia de grelha com malhas desencontradas.	117
Figura 6.24 – localização do bordo comum entre as lajes 1,2,5,6,7,8,e 9.....	118

Figura 6.25 - variação do momento fletor negativo entre as lajes 1,2,5,7,8 e 9 – modelo em analogia de grelha com malhas coincidentes.....	119
Figura 6.26 - variação do momento fletor negativo entre as lajes 1,2,5,7,8 e 9 – modelos em elementos finitos.	119
Figura 6.27 - variação do momento fletor negativo entre as lajes 1,2,5,7,8 e 9 – modelo em analogia de grelha com malhas desencontradas.....	119
Figura 6.28 - modelagem do encontro das lajes 5,6 e 7 (a) elementos finitos (b) analogia de grelha com barras desencontradas (c) analogia de grelha com malhas coincidentes e elementos finitos.....	119

LISTA DE TABELAS

Tabela 5.1 - resultados em virtude do refinamento da malha para o modelo 2 em comparação ao modelo 1 (kNm/m)	42
Tabela 5.2 - resultados em virtude do compatibilização dos momentos negativos (kNm/m) – modelos 1 e 2.....	45
Tabela 5.3 - resultados em virtude do compatibilização dos momentos máximos do modelo 3 em comparação aos momentos máximos compatibilizados do modelo 1 (kNm/m).....	47
Tabela 5.4 - resultados analogia de grelha x elementos finitos (kNm/m).....	51
Tabela 5.5 - resultados do modelo 4 em comparativo com o modelo 3 (kNm/m).....	55
Tabela 5.6 - resultados do modelo 5A com rigidez de 15% à torção das vigas que promovem a continuidade em comparação ao modelo 4A (kNm/m).....	59
Tabela 5.7 - resultados do modelo 5B com rigidez integral das vigas que promovem a continuidade em comparação ao modelo 4A (kNm/m).....	64
Tabela 5.8 - resultados do modelo 5C com rigidez à torção muito grande das vigas que promovem a continuidade em comparação ao modelo 4A (kNm/m).....	67
Tabela 5.9 - resultados do modelo 5C2 com as extremidades das vigas liberadas à torção em comparação ao modelo 4A (kNm/m)	71
Tabela 5.10- comparativo modelo 5D e modelo 4A – rigidez à torção da viga de apoio reduzida a 15% em ambos modelos	76
Tabela 5.11 - comparativo modelo 5D com rigidez à torção da viga de apoio integral e modelo 4A.....	77
Tabela 5.12 - comparativo modelo 5E e modelo 4A – rigidez à torção da viga de apoio reduzida a 15% em ambos modelos.....	79
Tabela 5.13 - comparativo do modelo 5E com rigidez à torção da viga de apoio integral e modelo 4A....	81
Tabela 5.14 – Seção em T das vigas do modelo 6.....	85
Tabela 5.15 – Comparativo vigas indeslocáveis x variação das vigas de apoio. Momentos em kNm/m e flechas em cm.	87
Tabela 5.16 - resultados do modelo 7 em comparação ao modelo 8 modelado em analogia e elementos finitos (kNm/m).....	96
Tabela 6.1 – Seção em T das vigas do exemplo 2.....	104
Tabela 6.2 – momentos fletores máximos das lajes do exemplo 2.....	108
Tabela 6.3 – deslocamentos máximos das lajes do exemplo 2.....	109

RESUMO

No procedimento manual empregado para determinação dos esforços e deformações nos pavimentos de edifícios em concreto armado, adota-se a decomposição da estrutura em lajes e vigas para a análise individual de cada elemento.

Neste trabalho, será realizado um estudo sobre avaliação de esforços de pavimentos utilizando a técnica da analogia de grelha, considerando-se a interação laje-viga-pilar, num comparativo com outros processos, como o método dos elementos finitos e métodos simplificados.

Ainda sim, será necessário avaliar alguns parâmetros que podem modificar os resultados na modelagem de um painel de lajes, sendo desta forma, importante analisar o efeito de cada um deles separadamente, entre eles, a rigidez à torção da viga e a influência da disposição da malha sobre o pavimento.

ABSTRACT

In the manual process employed for the determination of the efforts and deformations in the pavements of concrete buildings, the decomposition of the structure is adopted in slab and beams for the individual analysis of each element.

In this work, will be made a study about evaluation of the pavement bending moments using the technique of the grid analogy, being considered the interaction slab-beam-column, in a comparative one with other processes, as the method of the finite elements and simplified methods.

Finally, it will be necessary to evaluate some parameters that can modify the results in the modelling of a panel of slabs, being this way, important to analyze the effect separately of each one of them, among them, the torsion to rigidity of the beam and the influence of the disposition of the mesh on the pavement.

1. INTRODUÇÃO

1.1. INTRODUÇÃO

As lajes podem ser consideradas como um dos elementos mais comuns utilizados em estruturas de edificações. Estas, no entanto, podem ser responsáveis pelo consumo de até dois terços de concreto de uma obra.

Durante muitos anos, o cálculo das lajes limitou-se à utilização de tabelas de lajes isoladas, geralmente retangulares, e a certos procedimentos simplificados para determinar os esforços em painéis contínuos.

Neste contexto, surgiu a necessidade de se avaliar o comportamento dessas lajes por modelos mais precisos, capazes de avaliar o pavimento de forma integrada. Métodos numéricos, como a analogia de grelha e elementos finitos, antigamente de difícil implementação computacional, devido à capacidade de processamento dos computadores da época, são hoje comumente empregados nos programas comerciais de projeto, sendo desta forma, mais utilizados que as tabelas nos escritórios de engenharia.

A analogia de grelha, que consiste em simular a placa através de elementos de barras, possui algumas vantagens em relação a outros processos numéricos, entre os quais pode-se citar a sua formulação mais simples e não requerer um alto grau de especialização do usuário para a modelagem e análise dos resultados.

A decomposição da estrutura do pavimento, citada na atual NBR 6118 e versões anteriores, permite considerar as lajes como elementos apoiados sobre as vigas. As vigas menos rígidas apóiam-se sobre vigas mais rígidas e estas sobre os pilares.

Pelo fato do pavimento de concreto armado apresentar um comportamento monolítico, este trabalho propõe o cálculo da estrutura do pavimento da estrutura do pavimento de forma integrada, sem essa decomposição, com enfoque especial nos momentos fletores na continuidade das lajes. As lajes e as vigas serão calculadas em conjunto, de modo a considerar a interação entre estes elementos.

No estudo desta integração, novos efeitos podem ser atribuídos à análise de esforços, como as concentrações de tensão. Torna-se necessário avaliar alguns parâmetros que podem influenciar no cálculo de um pavimento, como a influência da flexibilidade das vigas que servem de apoio para as lajes. Outrossim, fatores como a

consideração da torção das vigas, podem ser importantes para a promoção da continuidade de lajes contíguas em alguns tipos de modelagem.

1.2. HISTÓRICO

A idéia de se interpretar uma laje através de uma grelha equivalente não é uma prática inovadora, tendo sido utilizada por Marcus, que não dispunha na época da tecnologia dos computadores e, portanto, tinha que se valer de processos aproximados para resolver as lajes.

LIGHFOOT (1959) retomou a analogia de grelha no estudo de pavimentos, desta vez fazendo o uso de programas de computador, sendo que posteriormente tal estudo foi sistematizado por HAMBLBY (1976).

Sabe-se que a analogia de grelha consiste em representar a laje, sendo esta um meio contínuo, através de barras perpendiculares entre si, ligadas em nós. É importante consolidar que existem quatro esforços básicos a serem considerados no cálculo, sendo eles dois momentos (um torsor e um fletor) e dois esforços cortantes, e ainda, os deslocamentos.

Segundo BARBOZA (1992), ao fazer-se esta representação, deve-se ponderar as rigidezes das barras que compõem a grelha equivalente, de modo a retificar os esforços e os deslocamentos de cada barra para que esses esforços sejam iguais às resultantes das tensões verticais da porção da laje que esta representa. Para tanto, constata-se que o momento fletor da barra depende da curvatura no plano que compõe os esforços, enquanto que no elemento de placa o momento em qualquer direção depende também da curvatura na direção ortogonal. Nos elementos de placa, deve-se levar em consideração outra diferença, esta em comparação aos elementos de grelha, podendo ser verificada em relação aos momentos fletores, em que se constata que para haver o equilíbrio, o momento torsor nas duas direções ortogonais é de mesma magnitude. Já para o modelo de grelha, não existe nenhum princípio matemático garantindo que isso ocorra. Para tanto, se as barras da grelha forem suficientemente pouco espaçadas, a deformada irá se assemelhar a um pano liso e, possibilitando que as distorções sejam quase iguais nas direções ortogonais.

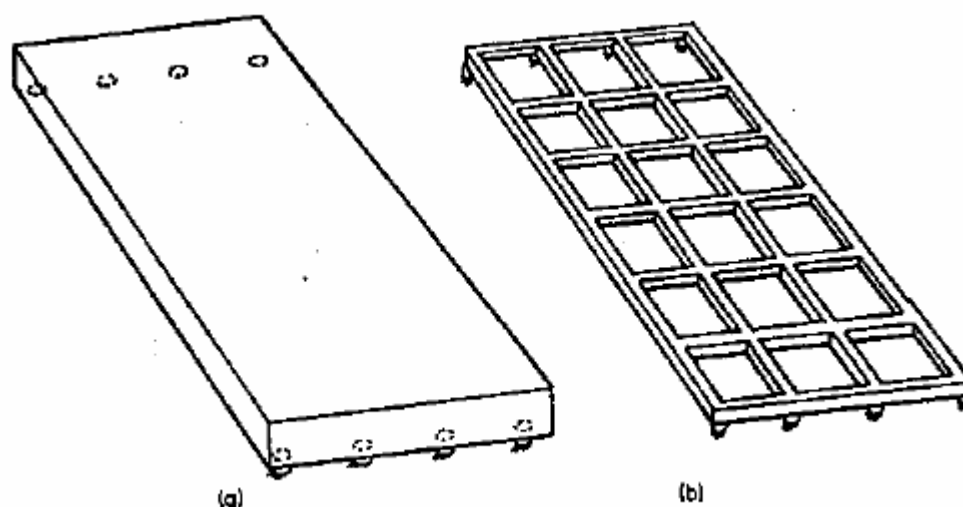


Figura 1.1 - (a) Laje maciça; (b) grelha equivalente, HAMBLY (1976)

O estudo da rigidez à torção das barras da grelha equivalente tem sido verificado em experimentações numéricas de diversos trabalhos. Considerando isso, verifica-se em HENRICHS (2003), que a adoção da rigidez à torção como sendo a metade da rigidez a flexão, sugerido por HAMBLY (1976), tem trazido resultados satisfatórios em comparação aos resultados calculados pela teoria da elasticidade. Nos estudos de COELHO (2000) e STRAMANINOLI (2003), é concluído que valores existentes na relação entre duas e duas vezes e meia da razão do momento de inércia sobre o momento de inércia polar, trazem valores com boa aproximação, neste caso se comparados a resultados de lajes calculadas pela Teoria da Elasticidade.

Vale ressaltar que, embora não existam muitas publicações sobre o tema, este ainda não se encontra esgotado havendo uma gama de problemas de engenharia de lajes que podem ser modelados e estudados através do método da analogia de grelha.

Em pesquisas recentes, tem-se feito a utilização da técnica da analogia da grelha para o cálculo de lajes planas, verificando deste modo, resultados satisfatórios como pode ser visto em HENRICHS (2003), enfocando, deste modo, boa parte do estudo sobre a obtenção dos momentos fletores negativos em lajes planas.

Dentre as pesquisas realizadas na modelagem de painéis de lajes, o estudo da continuidade está cada vez mais facilitado com o aprimoramento dos computadores e, em consequência disto, dos programas de análise estrutural.

De acordo com CARVALHO (1994), o uso de processos de cálculo que consideram o pavimento de maneira integrada permite, em princípio, melhorar a avaliação de pavimentos nos seguintes aspectos:

- A resolução do pavimento de forma integrada permite considerar na capacidade de rotação de uma laje, a rigidez das vizinhas;
- as vigas podem ser consideradas como elementos deformáveis verticalmente;
- é possível modelar mais adequadamente a interação das lajes com as vigas.

Nesse sentido, a continuidade entre as placas pode ser considerada através da introdução de momentos de correção em lajes adjacentes, conforme pode ser visto em TIMOSHENKO (1959). Essa correção tem o intuito de ponderar os momentos de engastamento perfeito que sejam muito diferentes. Tal procedimento, embora exija maior trabalho, pode-se afirmar que melhora as hipóteses descritas acima.

Segundo SILVA (2002), a Analogia de Grelha também pode ser empregada na resolução de lajes em conjunto com os apoios que na sua maioria são flexíveis, assim como considerar os carregamentos decorrentes de paredes como cargas distribuídas linearmente sobre as lajes.

Quanto às técnicas simplificadoras, é importante observar que a NBR-6118:2003, no seu item 14.7.6.2 cita que “quando houver predominância de cargas permanentes, as lajes vizinhas podem ser consideradas como isoladas, realizando-se compatibilização dos momentos sobre os apoios de forma aproximada”.

Neste item consta ainda que, simplificada, pode-se adotar o maior valor de momento negativo ao invés de equilibrar os momentos de uma laje sobre uma borda comum, resultando, em alguns casos, em dimensionamentos anteconômicos.

Nas faculdades de engenharia, utiliza-se a recomendação que pode ser encontrada em ROCHA (1968), no qual toma-se como momento fletor negativo compatibilizado, o maior dos seguintes valores:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0,80 \cdot M_a' \text{ ou } 0,80 \cdot M_b' \\ \frac{M_a' + M_b'}{2} \end{array} \right. \quad (1.1)$$

M_a' e M_b' representam os valores dos momentos negativos de cada uma das lajes adjacentes.

Em função da compatibilização dos momentos negativos, torna-se necessário corrigir os momentos positivos.

No entanto, na compatibilização de momentos fletores das lajes, as vigas de apoio interagem com as lajes não apenas na consideração de sua deformação, mas em outros fatores.

O item 14.6.7.2 relata sobre a modelagem de estruturas como grelhas ou pórticos espaciais, deve-se relevar que: “de maneira aproximada, nas grelhas e pórticos espaciais, pode-se reduzir a rigidez à torção das vigas por fissuração utilizando-se 15% da rigidez elástica (...)”.

Essa consideração pode ser observada também em LEONHARDT (1982) apud BARBOZA (1992), no qual em ensaios ocorre uma diminuição da rigidez à torção em peças de concreto armado, mesmo estas estando no estágio I. Essa queda deve-se ao fato de haver microfissuras existentes na superfície, as quais levam essa queda na rigidez torsional. Esta consideração foi utilizada nos exemplos encontrados em BARBOZA (1992) e CARVALHO (1994).

Baseando-se nessas pesquisas, tem-se que a queda da rigidez à torção das vigas de concreto armado torna-se um fator importante no cálculo dos esforços em um pavimento, onde a descontinuidade de momento fletor negativo entre as lajes adjacentes pode ser diminuída. Sendo assim, a viga torna-se menos sensível à rotação destas lajes, acarretando na diminuição do momento torsor da viga e conseqüentemente atenuando as descontinuidades citadas.

Cabe acrescentar que a redução das descontinuidades nos momentos negativos das lajes decorrentes da redução da rigidez à torção das vigas pode ser observada nos resultados de CARVALHO (1994) e BARBOZA (1992), em que foram realizados comparativos sobre os momentos positivos e os deslocamentos das lajes não se encontrando, porém, maiores aprofundamentos sobre o comportamento das continuidades.

Os parâmetros geométricos da viga de apoio de lajes contíguas são de grande importância como pode ser visto em COELHO (2000). Verifica-se que a rigidez a flexão da viga de apoio modifica os momentos fletores e os deslocamentos das lajes,

sendo que, se ela for relativamente pequena, a possibilidade de ocorrência de momentos fletores negativos diminui na mesma proporção neste bordo. Já a rigidez a torção da viga é mencionada na avaliação de lajes idênticas sobre apoios indeslocáveis, no caso das malhas da grelha equivalente não serem coincidentes (figura 1.2), mostrando assim que J_t da viga é necessário para a promoção da continuidade das lajes. Os estudo das malhas desencontradas será um dos motivos de estudo do presente trabalho.

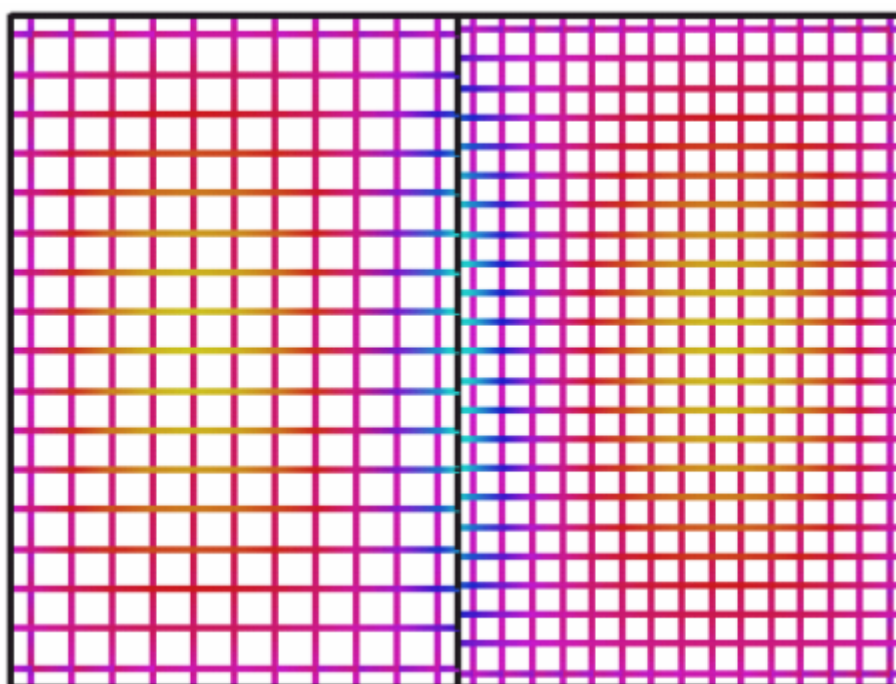


Figura 1.2: Continuidade da malha através da rigidez a torção da viga de apoio (COELHO 2000)

A fim de avaliar as reações de apoio das lajes sobre as vigas, CARVALHO (1996) fez um estudo comparativo de uma laje submetida a diversas rigidezes de apoio, em que pode se encontrar diferenças significativas em relação ao método preconizado na então NBR 6118-78. Atualmente, este procedimento, também é adotado na atual versão da norma, permitindo que, simplificadamente, possa se adotar as reações de lajes como sendo uniformemente distribuídas. Esse estudo mostra que, inequivocamente, os valores das reações das lajes na viga dependem da relação da rigidez entre a laje e a viga, e que está longe de, ao longo da viga, ser uniforme. Foi verificado que o emprego

de ações uniformemente distribuídas nas vigas, preconizado pela NB1, tem o intuito de simplificar o processo de cálculo dos esforços e deslocamentos nas vigas.

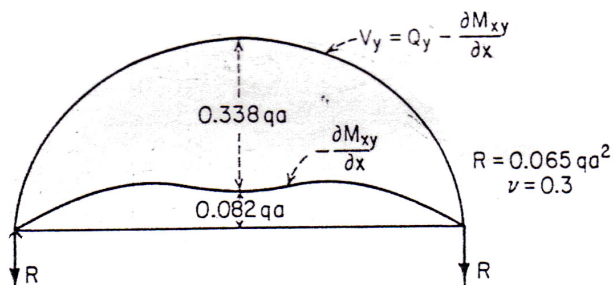


Figura 1.3 – ações verticais de uma placa quadrada em uma viga periférica segundo a teoria das placas TIMOSHENKO (1959).

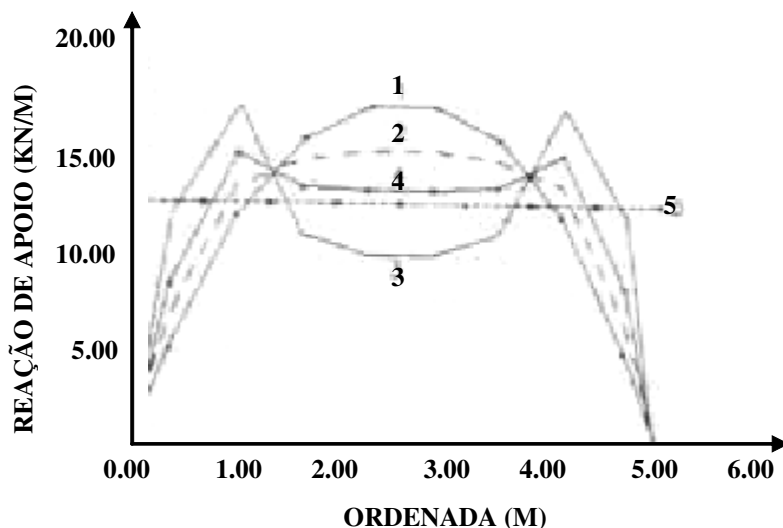


Figura 1.4 – ação na viga periférica pela laje modelada numa análise linear por analogia de grelha. Seção das viga (1) 12x50; (2) 12x25; (3) 31x10; (4) 12x16; (5) critério da NB1. (Adaptado de CARVALHO 1996)

1.3. JUSTIFICATIVA

Há alguns anos atrás, diante da indisponibilidade do uso da tecnologia dos computadores, os engenheiros civis, na tarefa de analisar os esforços de um pavimento, enfocavam a análise estrutural no conceito de apoios rígidos, tanto para as vigas quanto para as lajes, justificando o uso de tabelas e simplificações para a avaliação dos esforços e deslocamentos. Partindo desse procedimento, em que era omitida a deformação das vigas de contorno, a laje interagia de maneira simplificada com os demais elementos do pavimento.

Ao contrário do que se fazia anteriormente, com soluções padronizadas pelo uso dessas tabelas, torna-se necessário ir ao encontro de soluções particulares para cada projeto. Hoje em dia, com o aumento dos vãos, procura-se por modelos mais precisos, a fim de melhor simular a estrutura em serviço. Com o avanço das técnicas computacionais, é possível modelar a estrutura de um edifício em um pórtico espacial, vivendo-se o contrário da técnica de subdivisão de estruturas, que é uma prática com muitas simplificações e que ainda constam na atual NBR 6118. A situação torna-se controversa quando, ao simplificarmos uma estrutura, os valores resultantes da análise são diferentes dos que ocorrem na utilização de modelos mais sofisticados o qual simulam a interação de todos os elementos do pavimento.

Para tanto, observam-se duas possibilidades de cálculo para a avaliação de lajes integradas às vigas e os pilares de um pavimento, sendo elas o Método dos Elementos Finitos e o Processo da Analogia de Grelha.

Percebe-se que os engenheiros dos escritórios de engenharia familiarizam-se com o processo da analogia de grelha, em virtude da formulação matricial mais simples, a qual é obtida durante a formação acadêmica.

Estudar as lajes com apoios elásticos é um passo válido, uma vez que os momentos e os deslocamentos encontrados são diferentes em comparação aos apoios indeformáveis. Outrossim, a consideração da laje vizinha pode trazer um comportamento mais apropriado do que o imaginado no cálculo manual de pavimentos.

Desta forma, por meio dessa pesquisa pretende-se prosseguir, numa continuação natural, os estudos desenvolvidos nessa área. Partindo disso, almeja-se acrescentar o efeito da continuidade das lajes modeladas pelo processo da analogia de grelha,

integrada às vigas e aos pilares de pavimentos representativos, à análise dos esforços, simulando, então, caso a caso o efeito de cada um desses elementos junto às prescrições da NBR 6118:2003.

1.4. OBJETIVO GERAL

O principal objetivo da pesquisa é o estudo da continuidade das lajes em concreto armado inseridas em um pavimento utilizando métodos numéricos como a analogia de grelha e elementos finitos.

1.5. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Averiguar o comportamento do conjunto laje-viga-pilar em pavimentos de edifícios de concreto armado;
- Analisar o efeito da continuidade dos esforços de lajes contíguas apoiada sobre vigas;
- Avaliar a influência da rigidez à torção da viga;
- Fazer o estudo comparativo dos resultados obtidos pelo modelo de analogia de grelha, método dos elementos finitos e processos simplificados;

2. TEORIA DAS PLACAS EM REGIME ELÁSTICO

Neste trabalho, será apresentado alguns comparativos de lajes analisadas por analogia de grelha e tabelas baseadas na teoria das placas, tornando-se necessário revisar seus fundamentos.

Placas são estruturas de superfície plana, sem curvatura, sendo que uma das dimensões é pequena se comparada com as outras duas, em que o carregamento é perpendicular à superfície.

Define-se como altura h da placa a menor das três dimensões e a superfície média como sendo aquela que passa pelos pontos médios do segmento a qual determina a altura em cada ponto da placa.

Na teoria de Kirchhoff, para placas finas com pequenas deflexões, são admitidas as hipóteses:

1. O material da placa é elástico linear, homogêneo e isotrópico;
2. A espessura da placa é pequena em relação às demais dimensões;
3. As deflexões são pequenas em relação à espessura da placa;
4. As rotações da superfície média deformada são pequenas em relação à unidade;
5. Linhas retas, inicialmente normais à superfície média, permanecem retas e normais à superfície média após as deformações. Esta hipótese é equivalente à hipótese das seções planas na teoria das vigas e consiste em desprezar as deformações pelo corte;
6. As deflexões da placa são normais ao plano indeformado inicial.
7. As tensões normais à superfície média são desprezíveis.

Inicialmente é feito o equilíbrio de forças e momentos para um elemento infinitesimal de placa de dimensões dx , dy e h e submetido a um carregamento distribuído $q(x,y)$.

Os eixos cartesianos a serem utilizados podem ser vistos na figura 2.1. Os eixos x e y são horizontais, no mesmo plano da superfície média e o eixo z vertical, na mesma direção de h e positivo para baixo.

O equilíbrio das forças para o citado elemento pode ser vista na figura 2.1, e dos momentos na figura 2.2.

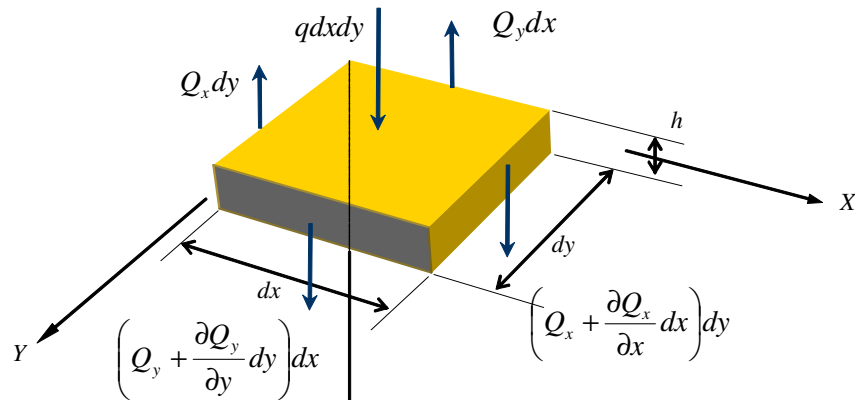


Figura 2.1 – Esforços cortantes em um elemento infinitesimal de placa (COELHO 2000)

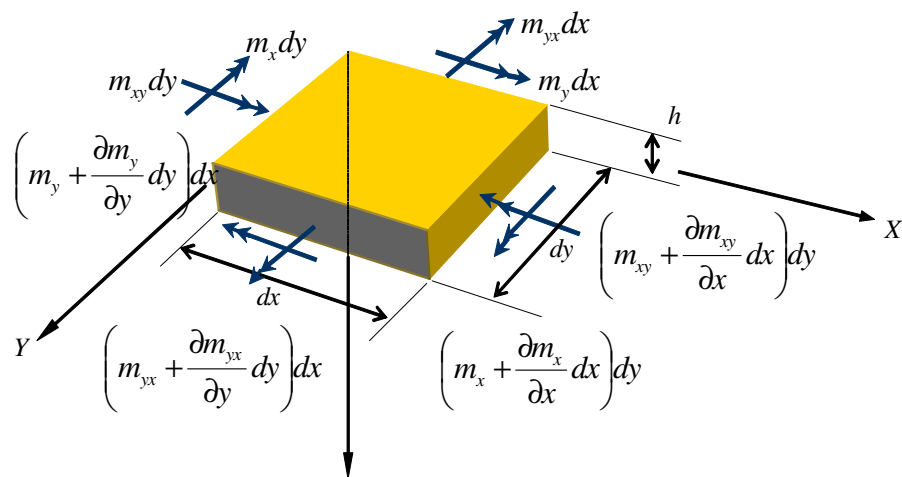


Figura 2.2 – Momentos Fletores e Torsões em um elemento infinitesimal de placa (COELHO 2000)

Onde :

$$Q_x = q_x \cdot dy \quad (2.1)$$

$$\text{e } Q_y = q_y \cdot dx \quad (2.2)$$

Nessas figuras, m_x e m_y representam os momentos fletores distribuídos nas faces

do elemento, m_{xy} e m_{yx} são os momentos torsores também distribuídos nas faces do elemento e $\frac{\partial M_x}{\partial x} dx$, $\frac{\partial M_y}{\partial y} dy$, $\frac{\partial M_{xy}}{\partial y} dy$, e $\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx$ são os incrementos nos

momentos ocorridos em diferentes seções do elemento estrutural.

Fazendo-se primeiramente o somatório de forças segundo o eixo z tem-se:

$$-Q_x + Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx - Q_y + Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy + q \cdot dx \cdot dy = 0 \quad (2.3)$$

Substituindo as equações (2.1) e (2.2) em (2.3) é encontrado:

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + q = 0 \quad (2.4)$$

Fazendo-se o somatório dos momentos em relação ao eixo x sob a resultante da carga distribuída q obtém-se:

$$\begin{aligned} & -m_{yx} dx + \frac{\partial m_{yx}}{\partial y} dy dx + m_x dy + \frac{\partial m_x}{\partial x} dx dy + m_x dy + m_{yx} dx \\ & -q_x dy \frac{dx}{2} - \partial q_x dy \frac{dx}{2} = 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Que se resume a:

$$q_x = \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{yx}}{\partial y} \quad (2.6)$$

Fazendo-se o somatório dos momentos em relação ao eixo y sob a resultante da carga distribuída q , obtém-se a terceira equação do equilíbrio:

$$q_y = \frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} \quad (2.7)$$

Substituindo as equações 2.6 e 2.7 em 2.4 têm-se:

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial m_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} = -q \quad (2.8)$$

A equação 2.8 é a equação diferencial de equilíbrio das placas.

A partir da equação diferencial do equilíbrio das placas, utilizando-se as relações entre esforços e deslocamentos da Resistência dos Materiais e baseando-se nas hipóteses de Kirchhoff-Love, chega-se a equação diferencial das placas, conhecida como equação diferencial de Lagrange:

$$\frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} = \frac{q}{D} \quad (2.9)$$

onde:

$$D = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (2.10) \text{ é a expressão que define a rigidez a flexão da placa;}$$

E = módulo de deformação longitudinal do concreto;

h = altura da laje;

ν = coeficiente de Poisson do concreto.

Trata-se de uma equação diferencial de quarta ordem. Logo, o problema básico consiste em encontrar uma expressão para a superfície deformada que satisfaça simultaneamente a equação diferencial e as condições de contorno da placa

A solução exata da equação diferencial da placa pode somente ser obtida para uns poucos casos particulares. Nos casos mais gerais de carregamento e condições de contorno, as soluções são encontradas adotando-se expansões de séries de Fourier como a solução de Navier e a solução de Lévy, podendo estas, serem facilmente programadas em planilhas eletrônicas. Existe também, vasta bibliografia contendo tabelas para o cálculo de esforços e deslocamentos, como a tabelas de Czerny, Kalmanok, Bares, entre outras.

As tabelas têm sido usadas, geralmente, para o cálculo de lajes isoladas com condições de apoio simples, engastados ou livres. Para o cálculo de painéis contínuos de lajes apoiadas em vigas através de tabelas, os resultados são corrigidos para levar em conta a continuidade de maneira simplificada. Nessas tabelas, no caso do apoio de lajes em vigas, a flexibilidade é geralmente desprezada, o que em alguns casos, pode resultar em grandes diferenças nos valores dos esforços e dos deslocamentos verticais. Neste procedimento, não há transmissão de momentos de torção para as vigas.

Ainda sim, existem vários métodos, de fácil aplicação computacional, que resolvem a equação diferencial de Lagrange, entre eles o método das diferenças finitas, método dos elementos finitos e o método dos elementos de contorno, sendo alguns citados em TIMOSHENKO (1959). Desta forma, através da aplicação computacional desses métodos, pode-se obter os esforços e os deslocamentos de uma grande gama de lajes com diversos formatos, condições de contorno e ainda a consideração da deslocabilidade vertical dos apoios, sendo estas desprezadas pelas tabelas, obtendo-se resultados mais realistas.

3. TEORIA DAS GRELHAS

3.1. ANÁLISE MATRICIAL DE ESTRUTURAS

Conforme pode ser visto em LA ROVERE (2001), a análise matricial de estruturas tem como objetivo geral a modelagem e a análise estática linear de estruturas reticuladas, utilizando o Método dos Deslocamentos com formulação matricial, visando sua implementação em programas computacionais.

Para calcular os esforços solicitantes nas grelhas aplicam-se os métodos conhecidos na estática das estruturas, tais como o Método dos Deslocamentos também conhecido como Método da Rigidez. Este método é muito utilizado para resolver estruturas através da análise matricial, devido ao seu melhor desempenho para a programação.

3.2. MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS (MÉTODO DA RIGIDEZ)

O método dos deslocamentos consiste em obter os deslocamentos de uma estrutura através das equações de compatibilidade e, a partir de tais deslocamentos obter os esforços da estrutura.

Primeiramente fixam-se os graus de liberdade da estrutura, obtendo-se o sistema principal. Em cada nó da barra os coeficientes de rigidez são obtidos introduzindo-se um deslocamento unitário – rotação ou translação – na direção dos graus de liberdade, impedindo-se os deslocamentos nas demais direções.

Em seguida montam-se as equações de equilíbrio de forças em torno dos nós, tendo-se como incógnitas os deslocamentos e compõe-se assim, a matriz de rigidez de cada barra.

Para obter-se a matriz de rigidez do sistema é necessário sobrepor os coeficientes dos elementos que compartilham o mesmo nó.

A equação básica do método é:

$$[K] \cdot [\delta] = \{F\} - \{F_0\} \quad (3.1)$$

Onde:

$\{F\}$ = matriz coluna das ações externas atuantes na estrutura;

$\{F_o\}$ = matriz coluna das ações atuantes na estrutura;

$[K]$ = matriz de rigidez da estrutura;

$[\delta]$ = matriz coluna dos deslocamentos.

Segundo LORIGGIO (2000), a análise de uma estrutura pelo método dos deslocamentos pode ser descrita, matricialmente, pelas seguintes etapas:

1. Elaboração do modelo da estrutura. Escolha do sistema estrutural resistente, comportamento dos componentes da estrutura, vinculações, propriedades dos materiais, dimensões da estrutura, geometrias dos componentes, carregamentos e combinações de carregamento.
2. Definição e numeração do nós.
3. Definição da incidência e numeração das barras.
4. Cálculo da matriz de rigidez no sistema local $[r]$ para todas as barras da estrutura.
5. Cálculo da matriz de rigidez no sistema global $[r] = [T]^t \cdot [r] \cdot [T]$ para todas as barras da estrutura.

Onde :

$[T]$ = matriz de transformação do eixo local para o eixo global.

$[T]^t$ = transposta da matriz de rotação

6. Montagem da matriz $[K]$ da estrutura.
7. Determinação do vetor de esforços de imobilização dos nós da cada barra no sistema local $\{S_o\}$.
8. Determinação do vetor de esforços de imobilização dos nós da cada barra no sistema global $\{S_o\} = [T]^t \cdot \{S_o\}$.
9. Montagem do vetor de esforços de imobilização dos nós da estrutura $\{F_o\}$.
10. Montagem do sistema de equação da estrutura em relação aos graus de liberdade originais, vetor $\{\delta\}$ (deslocamentos), $\{F\}$ (ações nodais). $[K] \cdot [\delta] = \{F\} - \{F_o\}$ (2.12) 11.
- Reordenação do sistema de equações deixando as direções restringidas para o final. 12.

Resolução do sistema de equações $[K_{LL}] \cdot \{\delta_L\} = \{F_L\}$, correspondentes às direções livres.

13. Separar de $\{\delta_L\}$ os deslocamentos $\{d\}$ de cada barra da estrutura.

14. Encontrar o vetor de reações de apoio nas direções restringidas.

15. Calcular os esforços solicitantes nas extremidades das barras no sistema global $\{S\} = [r] \cdot \{d\}$. Em seguida transforma-se os esforços para o sistema local $\{S\}$.

Quando todos os deslocamentos e reações de apoio tiverem sido obtidos, a análise pode ser considerada como terminada.

3.3. ANÁLISE DE GRELHAS

Nas grelhas planas, todos os membros e nós existem no mesmo plano, supondo-se que os membros estão rigidamente ligados nos nós. As deformações por flexão são predominantes e as deformações por torção e cisalhamento, na maioria dos casos, podem ser secundárias na análise de grelhas.

Na análise de uma estrutura de grelha, os eixos ordenados são tomados como mostrado na figura 3.1. A estrutura existe no plano x-y, todas as forças aplicadas atuando paralelas no eixo z. Os binários, por sua vez, têm seus vetores momento no plano x-y. Os seis deslocamentos significativos na barra, uma translação e duas rotações por nó, são os giros nos sentidos de x e de y e as translações no sentido de z como pode ser visto na figura 3.2.

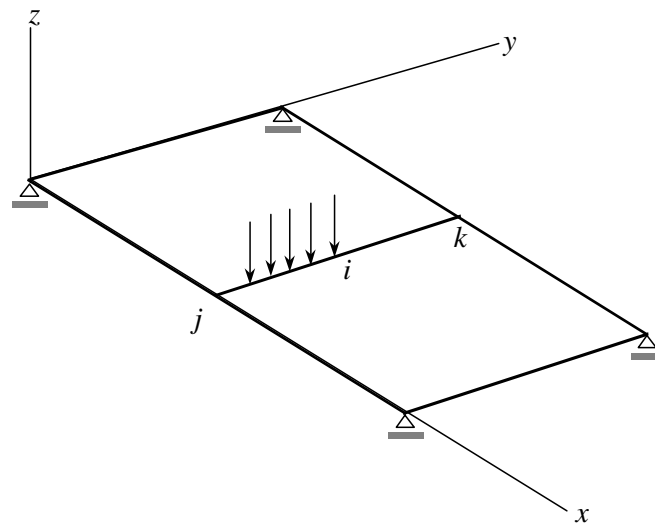


FIGURA 3.1 - Grelha plana, COELHO (2000).

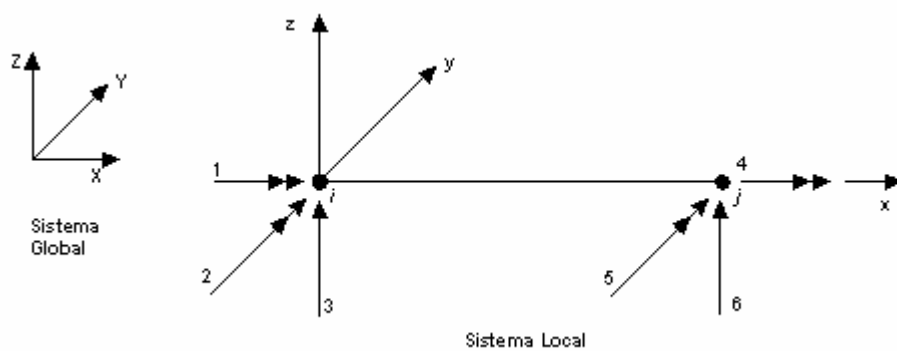


Figura 3.2 - Graus de liberdade de uma barra de grelha.

Os esforços solicitantes são:

- a) Momento fletor (em torno do eixo 2)
- b) Momento torsor (em torno do eixo 1)
- c) Esforço cortante (no eixo 3)

Para obter os coeficientes da matriz de rigidez da barra da grelha, a barra deve ser totalmente restringida e devem ser aplicados deslocamentos unitários nos seis graus de liberdade, um de cada vez. As reações que surgem devido a esses deslocamentos unitários são os coeficientes de rigidez da barra. Quando agrupados esses coeficientes vão formar uma matriz de ordem 6x6 (6 graus de liberdade). A Figura 3.3 a seguir

mostra a matriz de rigidez de um elemento de grelha em relação ao sistema de eixo local.

$$\{S_L\} = \begin{bmatrix} \frac{GJp}{L} & 0 & 0 & -\frac{GJp}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4EIy}{L} & -\frac{6EIy}{L^2} & 0 & \frac{2EIy}{L} & \frac{6EIy}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EIy}{L^2} & \frac{12EIy}{L^3} & 0 & -\frac{6EIy}{L^2} & \frac{12EIy}{L^3} \\ -\frac{GJp}{L} & 0 & 0 & \frac{GJp}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2EIy}{L} & -\frac{6EIy}{L^2} & 0 & \frac{4EIy}{L} & \frac{6EIy}{L^2} \\ 0 & \frac{6EIy}{L^2} & -\frac{12EIy}{L^3} & 0 & \frac{6EIy}{L^2} & \frac{12EIy}{L^3} \end{bmatrix}$$

Figura 3.3 – Matriz de rigidez da barra em relação ao sistema de eixo local

Onde:

I_y é o momento de inércia a flexão;

J_p é o momento de inércia a torção;

E é o módulo de elasticidade longitudinal;

G é o módulo de elasticidade transversal;

L é o comprimento da barra.

4. MODELAMENTO DE PISOS DE EDIFÍCIOS

4.1. ANÁLISE DE LAJES BASEADA NA TEORIA DAS PLACAS

Como foi visto no capítulo 2, a solução exata da equação diferencial da placa pode somente ser obtida para uns poucos casos particulares. Nos casos mais gerais de carregamento e condições de contorno, existem tabelas de diversos autores que apresentam resultados da equação diferencial das placas para diversas relações de geometria de lajes.

Para uma laje inserida num pavimento, os valores dos esforços obtidos pelas tabelas, para bordos com continuidade, correspondem ao momento de engastamento perfeito da placa sobre o apoio em questão, ou seja, o momento necessário para que o ângulo de rotação do plano tangente a placa sobre este apoio seja nulo. Esta situação, entretanto, somente ocorrerá em casos de lajes adjacentes exatamente iguais (dimensões, condições de contorno e carregamento) ou em casos de extrema coincidência, nos quais os momentos de engastamento perfeito das duas placas no apoio onde se encontram sejam exatamente iguais. O que ocorre na prática é que para o caso uma de duas placas, uma delas terá uma relação de vão e carregamento maior do que a outra e assim terá um momento de engastamento perfeito maior (figura 4.1a). A compatibilização dos momentos e deslocamentos se dará pela rotação dessas duas lajes sobre o apoio (figura 4.1b). Assim a laje de maior relação de vão e carregamento sofrerá uma rotação positiva sobre o apoio e a outra uma rotação negativa. O momento compatibilizado será inferior ao momento de engastamento perfeito para a laje de maior relação vão e carregamento, sendo superior ao momento de engastamento perfeito para a laje de menor vão e carregamento.

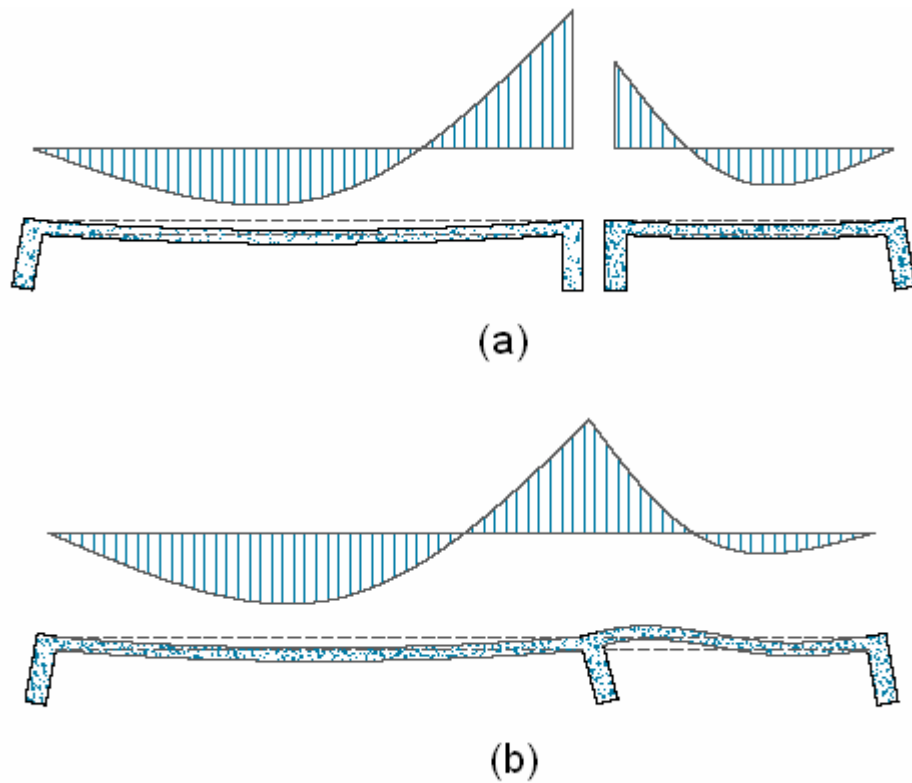


Figura 4.1 – Lajes perfeitamente engastadas (a) e lajes compatibilizadas (b)

Conforme visto no capítulo 1, a compatibilização dos momentos fletores negativos pode ser realizada através da expressão:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0,80 \cdot M_a' \text{ ou } 0,80 \cdot M_b' \\ \frac{M_a' + M_b'}{2} \end{array} \right. \quad (4.1)$$

M_a' e M_b' representam os valores dos momentos negativos de cada uma das lajes adjacentes e o momento fletor compatibilizado a ser utilizado será o maior resultado encontrado entre as duas equações de (4.1)

4.2. PROCESSO DA ANALOGIA DE GRELHA

Para analisar uma laje por analogia de grelha, deve-se discretizá-la por uma série de faixas com determinada largura. Considerando que as faixas podem ser substituídas por elementos estruturais de barras exatamente nos seus eixos, obtém-se então uma grelha de barras.

As grelhas podem ser consideradas como um conjunto de vigas individuais, interconectadas nos seus nós ou pontos nodais.

Pelo fato das lajes possuírem formas variadas, bem como diferentes tipos de carregamento, não é possível definir um tipo de malha ideal. No entanto, baseado em HAMBLY (1976), pode-se estabelecer alguns critérios para lajes retangulares, que devem ser adequados a cada projeto.

a) Procurar localizar as barras da grelha em posições pré-determinadas no projeto, tais como linhas de apoio ao longo das vigas de extremidade, bem como de outras se existirem, que contenham uma ação específica, etc;

b) Numa laje isótropa, cada barra deve ter no máximo largura igual a $\frac{1}{4}$ do vão transversal ao seu eixo;

c) Numa laje ortótropa, na direção da menor inércia, deve-se considerar a largura das barras igual a 40% do vão transversal ao seu eixo. Caso haja dúvida quanto à ortotropia, deve-se adotar o critério b);

d) Quanto mais densa a malha, melhores são os resultados obtidos. No entanto, essa melhora deixa de acontecer quando a largura das barras for menor que 2 ou 3 vezes a espessura da laje;

e) No caso de balanço na laje, é necessário colocar-se pelo menos duas barras transversais ao vão em balanço;

f) Deve-se colocar uma linha de barras no contorno livre da laje, cuja largura para o cálculo do momento a inércia a torção deve ser diminuída de 0,3h, por se tratar do ponto por onde esta passa a resultante das tensões de cisalhamento devidas à torção (figura 4.2).

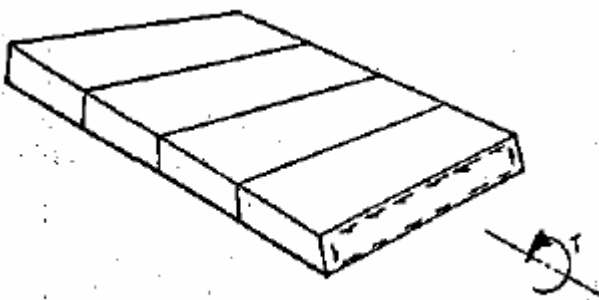


Figura 4.2 - Torção em uma laje como se fosse viga, HAMBLY (1976)

g) Nas regiões de grande concentração de esforços, tais como apoios ou cargas concentradas, recomenda-se dispor uma malha cuja largura das barras não seja superior a 3 ou 4 vezes a espessura da laje.

h) A menos que estejam localizados muito próximo aos pilares, não devem ser considerados orifícios na laje cuja menor dimensão não exceda a $3h$, onde h é a espessura da laje. No caso de haver aberturas maiores, deve-se aplicar os mesmos critérios para bordas livres.

4.2.1. PROPRIEDADES FÍSICAS E GEOMÉTRICAS DAS BARRAS

As propriedades das barras influenciam diretamente nos resultados. Cada barra da grelha irá representar uma certa faixa da placa, apresentando a espessura da laje e a largura, a qual depende da malha de grelha. As propriedades físicas dependem do material da placa.

4.2.1.1. RIGIDEZ À FLEXÃO DAS BARRAS DA GRELHA

Segundo HAMBLY, o momento de inércia à flexão das barras longitudinais e transversais da grelha é calculado considerando que cada barra representa uma largura “ b ” da laje igual a distância entre os centros dos vãos adjacentes à barra. Sendo assim:

$$I = \frac{bh^3}{12} \quad (4.2)$$

Onde:

b = largura da barra da grelha;

h = altura da barra da grelha.

Os módulos de deformação longitudinal do concreto adotados E_{ci} e E_{cs} serão expostos adiante.

4.2.1.2. RIGIDEZ À TORÇÃO DAS BARRAS DA GRELHA

O parâmetro de rigidez a torção GJ_p é composto do módulo de elasticidade transversal (G) do material, que pode ser medido ou calculado em função do módulo de elasticidade transversal (E_c) ou módulo de Young e do momento de inércia polar (J_p) da seção transversal da barra.

Para materiais isotrópicos homogêneos, a lei de Hooke generalizada possui apenas duas constantes elásticas E e ν . O módulo de elasticidade transversal G pode ser obtido por:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (4.3)$$

Para aplicações em concreto armado a NB1 fixa o valor do coeficiente de Poisson em 0,2. Para a entrada de dados do programa utilizado neste trabalho foi adotada a seguinte relação aproximada:

$$G = 0,4E_c \quad (4.4)$$

Para a especificação do momento de inércia polar das vigas, utiliza-se a expressão que consta em GERE & WEAVER (1980):

$$J_p = \beta hb^3 \quad (4.5)$$

onde:

$$\beta = \frac{1}{3} - \left(0.21 \frac{b}{h} \right) \left(1 - \frac{b^4}{12h^4} \right) \quad (4.6)$$

Para uma viga em seção tipo T, o momento de inércia à torção pode ser tomado pelo somatório das rigidezes à torção, conforme a expressão 5.12, dos retângulos que formam a seção transversal.

$$J = \sum_{i=1}^n \beta \cdot e_i^3 \cdot f_i \quad (4.7)$$

onde:

e_i = menor dimensão da seção transversal;

f_i = maior dimensão da seção transversal.

Neste trabalho, será utilizada somente a rigidez à torção da seção retangular.

Conforme foi visto na revisão bibliográfica, LEONHARDT (1982) verificou que, numa peça de concreto armado mesmo no estágio I, já se observa uma queda na rigidez a torção devido à presença de microfissuras existentes nas peças. Desta forma, serão utilizados em alguns exemplos dos comparativos, a recomendação da redução de 85% da torção das vigas que promovem a continuidade, ou seja, G igual a razão de 15% do valor de G calculado inicialmente.

Esta recomendação era utilizada por alguns autores antes mesmo de ser introduzida no item 14.6.7.2 da NBR 6118:2003.

Na modelagem de lajes por analogia de grelha, a aplicação imediata da fórmula (4.5) não apresenta resultados apropriados conforme pôde ser visto em COELHO (2000) e STRAMANDINOLLI (2003).

Estes autores estudaram diversas relações de rigidez, variando a relação do comprimento pela largura da laje, entre diversas condições de contorno dos bordos. Chegou-se a conclusão que não existe, a priori, uma relação exata da rigidez a torção das barras que possam representar com boa aproximação, os momentos fletores positivos, momentos fletores negativos e deslocamentos concomitantemente para todos os tipos de laje.

HAMBLY (1976), descreve que, para uma peça submetida à torção constante de Saint-Venant, o momento de inércia à torção não é simplesmente uma propriedade geométrica da seção da peça como é o momento de inércia à flexão I . No caso de um cilindro, momento de inércia à torção é igual ao momento polar de inércia J_p . Entretanto, para outros tipos de seção esta relação é diferente. Portanto, não existe uma regra geral para a determinação do momento de inércia à torção.

Sendo assim, de forma generalizada, pode-se utilizar a seguinte indicação:

$$J_p = 2. I \quad (4.8)$$

Ou seja, segundo HAMBLY (1976), o momento de inércia à torção pode ser tomado como sendo duas vezes o momento de inércia à flexão, sendo esta, empregada na maioria das modelagens em analogia de grelha.

4.2.2. CARREGAMENTO

O carregamento uniformemente distribuído proveniente do peso próprio mais as cargas advindas da carga variável e permanente, estas atuando perpendicularmente ao plano xy , serão representados através de cargas distribuídas ao longo da barra da grelha. Este carregamento é obtido através da área de influência das barras adjacentes. Há também a possibilidade, descartada neste trabalho, dos esforços serem representados através de cargas pontuais, pela área de influência dos nós. Estas metodologias apresentam, na maioria das vezes, diferenças irrelevantes nos cálculos dos esforços e dos deslocamentos.

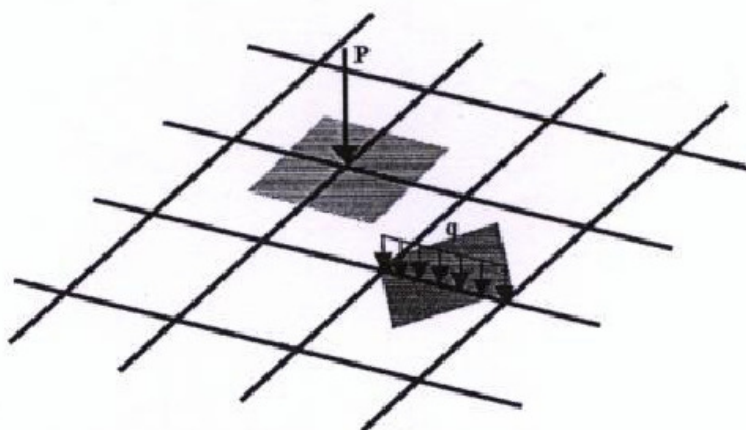


Figura 4.3 – Carregamento nos nós – carga nodal P – e carregamento nas barras – carga uniformemente distribuída q .(STRAMANDINOLI, 2003)

4.3. MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Segundo LA ROVERE (2001), o método dos elementos finitos é um método aproximado e é aplicado em geral a problemas em que não é possível obter soluções satisfatórias por métodos analíticos. O grande atrativo do método é a generalidade da formulação, o que permite que um conjunto de rotinas de cálculo possa ser utilizado para resolver problemas diferentes.

O método consiste em dividir o domínio de integração do problema em um número discreto de regiões pequenas de dimensões finitas, ou seja, o problema contínuo é discretizado. Este conjunto de regiões dá-se o nome de malha de elementos finitos.

Ao invés de procurar-se soluções aproximadas tratando-se o problema globalmente, considera-se cada região ou elemento isoladamente, o que possibilita a escolha de polinômios mais simples para descrever a solução aproximada, que em geral teriam funções complexas, se comparado à teoria da elasticidade.

No caso da análise estrutural, o método pode ser empregado tanto na formulação em deslocamentos, quanto na formulação em forças. Essas formulações são análogas ao método da rigidez e ao método das forças, utilizados na análise de estruturas reticuladas. A formulação em deslocamentos tem sido preferida em função da implementação computacional.

Cada elemento é definido por sua geometria e pelo número de nós. Assim, no plano, têm-se os elementos triangulares e três a seis nós, elementos retangulares de quatro a oito nós e os elementos isoparamétricos. Esses últimos permitem uma boa modelagem de domínios irregulares.

Neste trabalho serão adotados elementos finitos do tipo casca (Shell), que engloba o comportamento de placa mais o comportamento de membrana, para o caso de solicitação no plano.

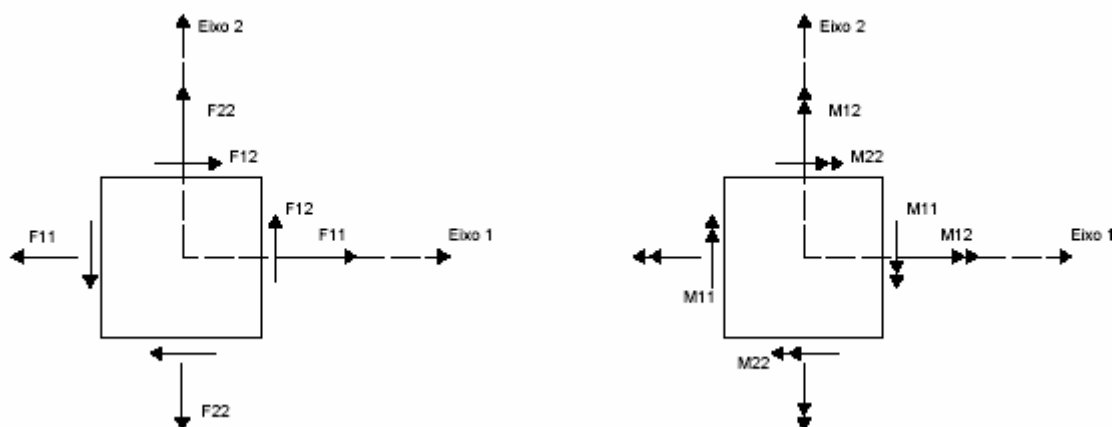


Figura 4.4 – Esforços no elemento SHELL = esforços de membrana (esquerda) e esforços de placa (direita)

No método dos elementos finitos, as incógnitas do problema são expressas em função de valores nodais que são relacionados através de funções de interpolação polinomiais válidas para cada região ou elemento. Esses polinômios podem ser do primeiro grau ou de ordem superior.

A figura 4.5 ilustra um elemento de placa retangular de quatro nós. O movimento dos nós pode ser descrito pelo componente “ w ”, pois a definição do campo de deslocamentos em uma placa sob flexão é efetuada por um componente de deslocamento perpendicular ao plano da placa, segundo a Teoria das Placas. Podemos definir os ângulos de inclinação da placa em um ponto nas duas direções, por intermédio das derivadas primeiras da função que fornece os deslocamentos “ w ”.

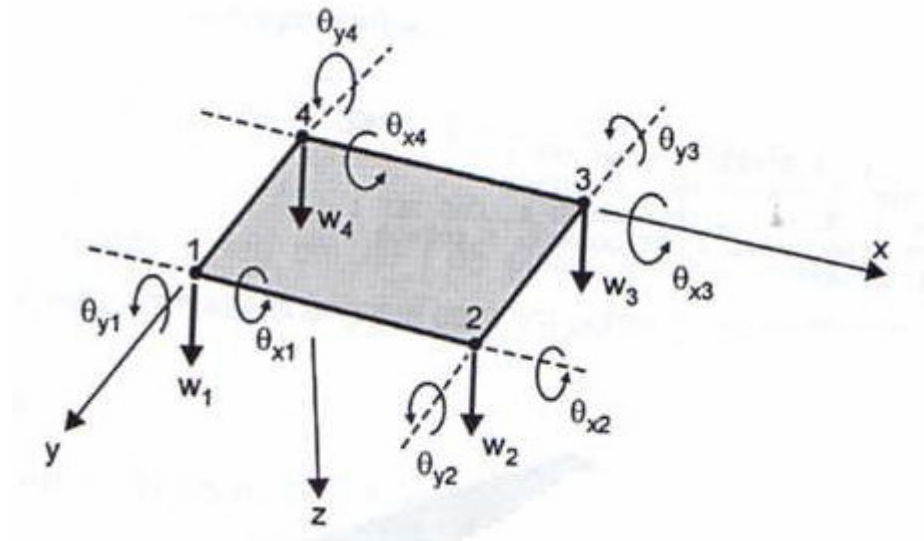


Figura 4.5 – Vista do elemento finito de placa e seus graus de liberdade. (ALVES FILHO, 2000)

Para um problema qualquer de placa, o deslocamento de qualquer ponto é definido pelo componente “w”, na direção z. O deslocamento de um ponto depende da posição em que esse ponto se encontra na placa. Ou seja, em um problema bi-dimensional, o deslocamento “w” depende da posição (x,y) em que o ponto se encontra. Como existe um componente de deslocamento em cada ponto, tem-se uma função para representar o campo dos deslocamentos. As inclinações da chapa em cada ponto podem ser obtidas pela derivação da função de “w”. O elemento de placa apresenta, portanto, 3 graus de liberdade por nó, um deslocamento em z e dois ângulos, um em x e outro em y. Como o elemento retangular tem quatro nós, este terá 12 graus de liberdade. O polinômio que representa o deslocamento w pode ser descrito da seguinte forma:

$$w(x,y) = C_1 + C_2 x + C_3 y + C_4 xy + C_5 x^2 + C_6 y^2 + C_7 x^2 y + C_8 xy^2 + C_9 x^3 + C_{10} y^3 + C_{11} x^3 y + C_{12} xy^3 \quad (4.8)$$

E a rotação de cada nó pode ser descrita através da derivada na direção x e y:

$$\theta^x = (\partial w / \partial y) = C_3 + C_4 x + 2 C_6 y + C_7 x^2 + 2 C_8 xy + 3 C_{10} y^2 + C_{11} x^3 + 3 C_{12} xy^2 \quad (4.9)$$

$$\theta^y = (-\partial w / \partial x) = -(C_2 + C_4 y + 2 C_5 x + 2 C_7 x y + C_8 y^2 + 3 C_9 x^2 + 3 C_{11} x^2 y + C_{12} y^3) \quad (4.10)$$

Substituindo nos polinômios dos deslocamentos e rotações nodais dos quatro nós, os valores das coordenadas, encontram-se os valores dos doze coeficientes para que assim, sejam montadas as funções de interpolação. Deste modo, pode-se calcular a matriz de rigidez do elemento.

Para o cálculo das tensões e deformações, utiliza-se a matriz constitutiva do elemento:

$$[\sigma] = [D].[\epsilon] \quad (4.11)$$

Onde:

$[\sigma]$: Vetor de tensões

$[D]$: matriz constitutiva do material

$[\epsilon]$: Vetor de deformações específicas

Entretanto, para o elemento de placa, como as curvaturas são constantes no elemento, utilizam-se essas curvaturas como “deformação específica generalizada”, a rigidez à flexão da placa como “matriz constitutiva generalizada” e o momento fletor como “tensão generalizada”. Sendo assim, a expressão 4.11, pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E.h^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

Onde:

M_x = Momento fletor na direção x;

M_y = Momento fletor na direção y;

M_{xy} = Momento torsor;

E = módulo de deformação longitudinal do concreto;

h = altura da laje;

ν = coeficiente de Poison do concreto.

4.4. CONSIDERAÇÕES NO CÁLCULO DE PAVIMENTOS

4.4.1. CONSIDERAÇÃO DA LARGURA COLABORANTE DA LAJE

Nas barras que representam as vigas, as partes laterais da laje e a viga estão sujeitas, na junção, às mesmas deformações longitudinais na flexão, quando o carregamento é aplicado. Em LEONHARDT (1982), consta que, ao longo da ligação da laje com a viga, surge uma força que solicita a laje como chapa e faz com que uma parte da laje contribua na rigidez da viga. Deste modo, em um dos exemplos comparativos será introduzido este efeito apenas para efeito de flexão, da mesma maneira que foi aplicado em CARVALHO (1994), avaliando, portanto, a influência da largura colaborante da laje.

De acordo com a NBR 6118:2003, A largura colaborante b_f deve ser dada pela largura da viga b_w acrescida de no máximo 10% da distância "a" entre pontos de momento fletor nulo, para cada lado da viga em que houver laje colaborante.

A distância "a" pode ser estimada, em função do comprimento l do tramo considerado, como se apresenta na figura 4.6:

- viga simplesmente apoiada..... $a = 1,00 l$
- tramo com momento em uma só extremidade..... $a = 0,75 l$
- tramo com momentos nas duas extremidades..... $a = 0,60 l$
- tramo em balanço..... $a = 2,00 l$

No caso de vigas contínuas, permite-se calculá-las com uma largura colaborante única para todas as seções, inclusive nos apoios sob momentos negativos, desde que ela seja calculada a partir do trecho de momentos positivos onde resulte mínima.

Devem ser respeitados os limites b_1 e b_3 conforme indicado na figura 4.6.

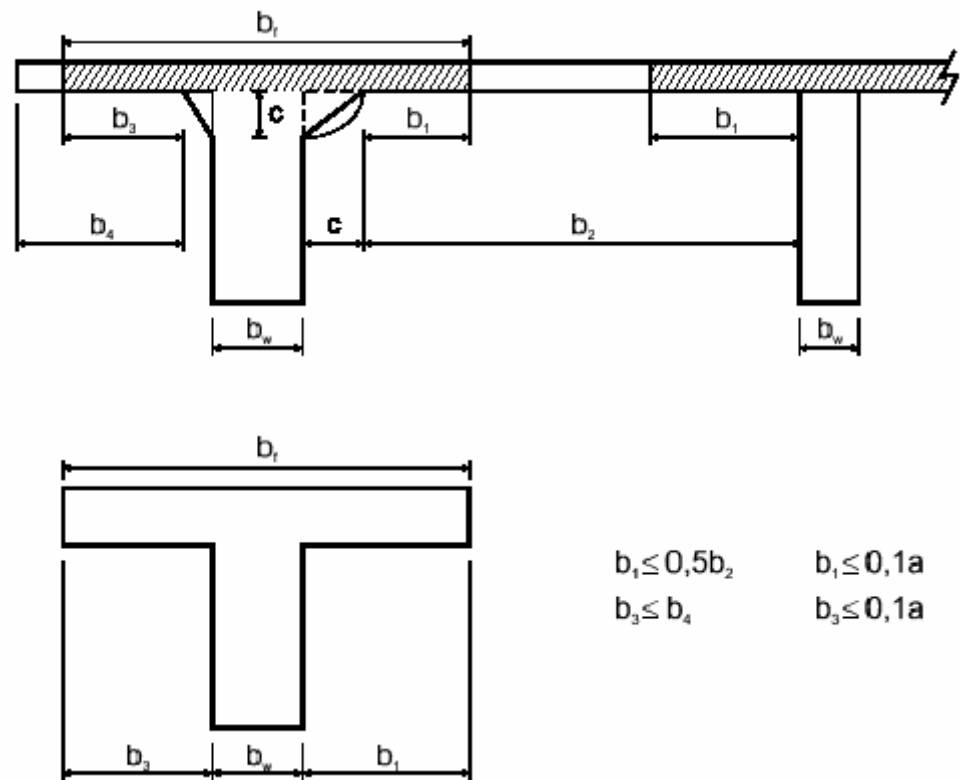


Figura 4.6 - Largura da mesa colaborante (NBR 6118:2003)

4.4.2. CONSIDERAÇÃO DA VINCULAÇÃO COM OS PILARES

Através da inclusão adequada dos pilares nos modelos do pavimento é possível avaliar a influência das rigidezes desses pilares no cálculo do pavimento de concreto armado. Esta influência poderá ser considerada segundo a recomendação do item 14.6.7.1 da NBR 6118:2003.

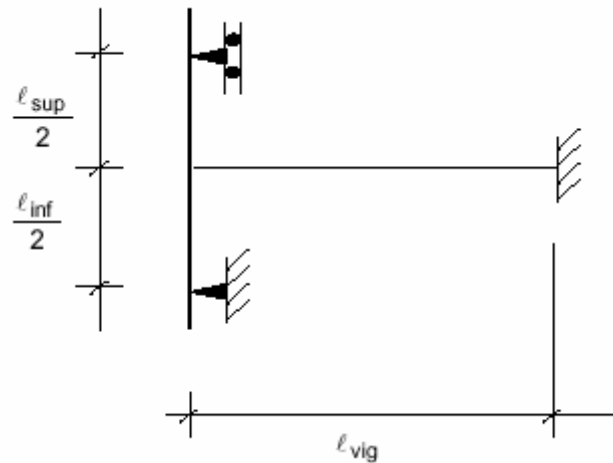


Figura 4.7 - aproximação em apoios extremos (NBR 6118:2003)

Neste trabalho, serão considerados os efeitos dos pilares externos e intermediários, em que tal procedimento será adotado tanto para o eixo x, quanto para o eixo y do pilar, onde apenas o efeito da rotação será considerado, desprezando-se as deformações axiais.

5. EXEMPLOS DE MODELAGEM – PAVIMENTO 1

Para o estudo dos esforços e dos deslocamentos de lajes integradas a um pavimento que contém pilares e vigas serão elaborados exemplos numéricos, levando-se em conta a inclusão de alguns parâmetros que podem influenciar no comportamento dessas lajes. Deste modo pretende-se:

- Comparar critérios simplificados com análises numéricas;
- Coincidência das barras da grelha equivalente;
- Rigidez à torção das vigas periféricas à laje;
- Efeito do deslocamento dos apoios das lajes.

Deste modo, as análises serão feitas utilizando-se do modelo de grelha plana, com a inclusão de cada um dos parâmetros descritos acima, para que sejam realizadas as comparações e a cada verificação, a constatação das diferenças presentes nos esforços e nos deslocamentos dos elementos contidos no pavimento. A fim de comparar o modelo construído através da analogia de grelha com outros processos, o mesmo pavimento será modelado em elementos finitos, sendo a laje modelada por elementos de casca e as vigas representadas por elementos reticulados. Para isso, será utilizado o programa SAP2000, formulado com base no método dos deslocamentos.

A partir disto, estes exemplos serão comparados ao procedimento manual, em que os esforços e os deslocamentos das lajes serão calculados como placa, com valores obtidos através das tabelas de CZERNY.

Percebe-se na revisão bibliográfica, partindo da idéia que os elementos de um pavimento estão solidários entre si, que a inclusão das vigas junto à análise através da analogia de grelha é uma prática antiga, mas que no cálculo dos elementos (lajes, vigas e pilares) de uma maneira integrada, ainda deve ser pesquisada investigando-se os parâmetros para a promoção da continuidade entre as lajes vizinhas bem como os efeitos que podem ser verificados nos resultados deste pavimento. Desta forma, pretende-se fazer uma comparação com as técnicas adotadas pelos métodos simplificados, e de certa forma avaliar o processo da analogia de grelha frente a métodos mais sofisticados para a modelagem de pavimentos.

Para que seja elucidado o comportamento dos esforços e dos deslocamentos de um pavimento modelado pela analogia de grelha, será utilizado inicialmente como exemplo o pavimento descrito em MAZZILLI (1988), também utilizado por BARBOZA (1992) e CARVALHO (1994), com algumas modificações nos parâmetros envolvidos. Este pavimento contém oito pilares, seis vigas e três lajes.

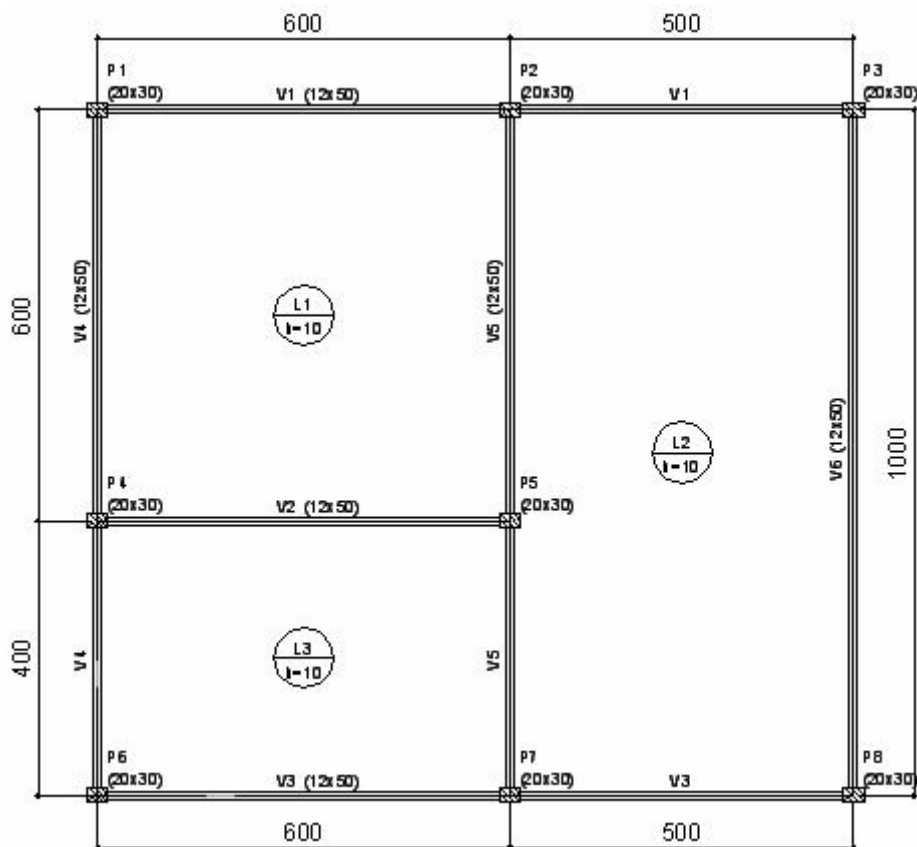


Figura 5.1- Vista em planta do pavimento – exemplo 1. CARVALHO (1994)

Para o pavimento em questão, serão estudados os seguintes modelos:

MODELO 1 – Processo simplificado – Tabelas

- Esforços e deslocamentos da laje obtidos através das tabelas de Czerny, considerando o coeficiente de Poisson igual a 0,2. Em uma segunda etapa, será feita a compatibilização dos momentos negativos.

MODELO 2 – Lajes isoladas por métodos numéricos – Verificação das Tabelas

- Lajes analisadas por elementos finitos e analogia de grelha com malha coincidente, considerando o giro das barras nulo na continuidade.
- Rigidez à torção da grelha equivalente $J=2 I$;
- Vigas indeslocáveis verticalmente.

Neste contexto serão elaborados novos modelos com diferentes espaçamentos de malha e processos de cálculo:

Modelo 2A (25x25), Modelo 2B (50x50), Modelo 2C (100x100) e Modelo 2EF (elemento finito de casca como malha de 25x25).

Numa segunda etapa, será feita a compatibilização dos momentos negativos dos modelos em analogia de grelha.

MODELO 3 – Estudo da continuidade automáticas das lajes sem a influência das vigas.

- Lajes discretizadas por elementos finitos e analogia de grelha com malha coincidente.
- Rigidez à torção da grelha equivalente $J=2 I$;
- Vigas indeslocáveis verticalmente. Rigidez à torção nula.

Neste contexto serão elaborados novos modelos com diferentes espaçamentos de malha e processos de cálculo:

Modelo 3A (25x25), Modelo 3B (50x50), Modelo 3C (100x100) e Modelo 3EF (elemento finito de casca com malha de 25x25).

MODELO 4 – Estudo da influência da rigidez a torção das vigas de apoio das lajes em malhas coincidentes

- Lajes discretizadas por analogia de grelha com malha coincidente. Espaçamento da malha: 25x25;
- Rigidez à torção da grelha equivalente $J=2 I$;
- Vigas indeslocáveis verticalmente, considerando a largura colaborante da laje. Rigidez à torção nula nas vigas de bordo. Neste contexto, serão gerados dois sub-modelos:

-Modelo 4A com 15% da rigidez integral à torção nas vigas que promovem a continuidade das lajes;

-Modelo 4B com 100% da rigidez à torção nas vigas que promovem a continuidade das lajes .

Como será visto adiante, a torção das vigas de bordo do pavimento geram pequenos valores de momento volvente. Estes serão desprezados focando a influência da torção das vigas na promoção da continuidade.

MODELO 5 – Estudo da influência da rigidez à torção das vigas de apoio das lajes em malhas desencontradas

- Lajes discretizadas por analogia de grelha com malha desencontrada. Espaçamento da malha: 38x38 para a laje 1, 25x25 para a laje 2 e 35x35 para a laje 3.

- Rigidez à torção da grelha equivalente $J=2 I$;

- Vigas indeslocáveis verticalmente. Rigidez à torção nula nas vigas de bordo e variando de 15% da rigidez integral (modelo 5A), 100%(modelo 5B) e infinita (modelo 5C) nas vigas que promovem a continuidade das lajes.

- Este pavimento também será apresentado com espaçamentos de 50x50 (modelo 5E) e 100x100 (modelo 5E) para todas as lajes;

MODELO 6 – Efeito da influência da rigidez à flexão das vigas de apoio. (Rigidez à torção nula)

- Lajes discretizadas por analogia de grelha com malha coincidente. Espaçamento da malha: 25x25;

- Rigidez à torção da grelha equivalente $J=2 I$;

- Vigas deslocáveis verticalmente, considerando a largura colaborante da laje. Seções 12x50 (Modelo 6A), 12x30 (Modelo 6B), 12x20 (Modelo 6C) e 12x10 (Modelo 6).

Rigidez à torção nula;

- Consideração da vinculação dos pilares. Altura total igual a 3 metros. Metodologia conforme descrita no item 3.4.

MODELO 7 – Estudo da influência da rigidez a torção e a flexão das vigas de apoio em malhas desencontradas.

- Lajes discretizadas por analogia de grelha com malha desencontrada. Espaçamento da malha: 38x38 para a laje 1, 25x25 para a laje 2 e 35x35 para a laje 3. - Rigidez à torção da grelha equivalente $J=2 I$;
- Vigas deslocáveis verticalmente, considerando a largura colaborante da laje. Seção transversal das vigas igual a 12x50, considerando a largura colaborante da laje. Rigidez à torção nula nas vigas de bordo e 15% da rigidez integral nas vigas que promovem a continuidade das lajes.
- Consideração da vinculação dos pilares. Altura total igual a 3 metros. Metodologia conforme descrita no item 3.4.

MODELO 8 – Estudo da influência da rigidez à torção e flexão das vigas de apoio em malhas coincidentes.

- Lajes discretizadas em elementos finitos e por analogia de grelha com malha coincidente. Espaçamento da malha: 25x25;
- Rigidez à torção da grelha equivalente $J=2 I$;
- Vigas deslocáveis verticalmente, considerando a largura colaborante da laje. Seção transversal das vigas igual a 12x50. Rigidez à torção nula nas vigas de bordo e 15% da rigidez integral nas vigas que promovem a continuidade das lajes.
- Consideração da vinculação dos pilares. Altura total igual a 3 metros. Metodologia conforme item 3.4.

Para as propriedades físicas do concreto armado e o carregamento, foram adotados os seguintes parâmetros:

Módulo de elasticidade longitudinal secante $E_{cs} = 30000 \text{ MPa}$;

Módulo de elasticidade transversal $G=0,4 \times 30000=12000 \text{ MPa}$;

Cargas permanentes + acidentais = 10 KN/m²;

A convenção dos esforços e deslocamentos está ilustrada nas figuras 5.2 e 5.3

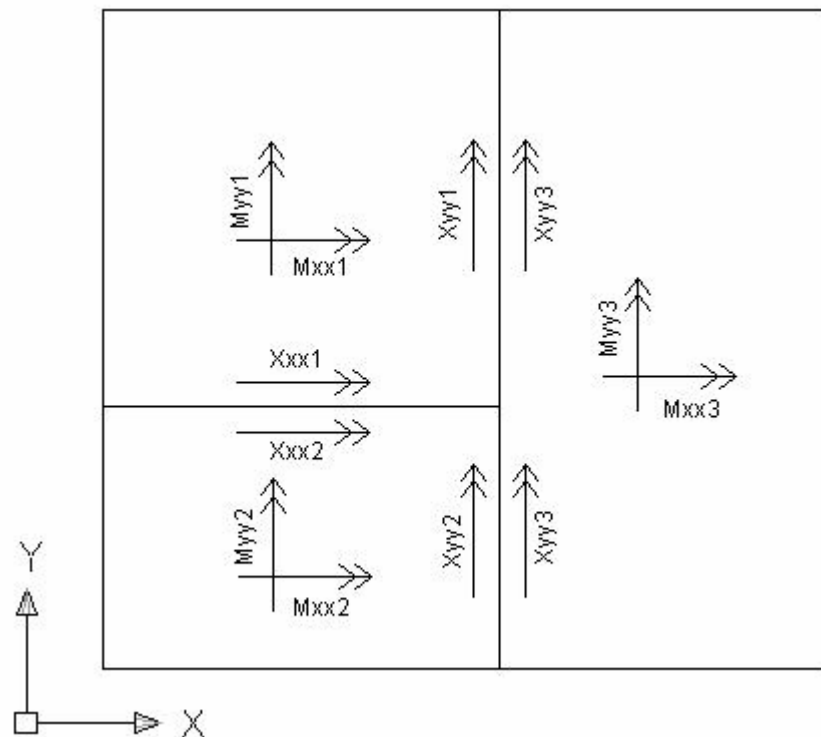


Figura 5.2 - Convenção dos esforços.

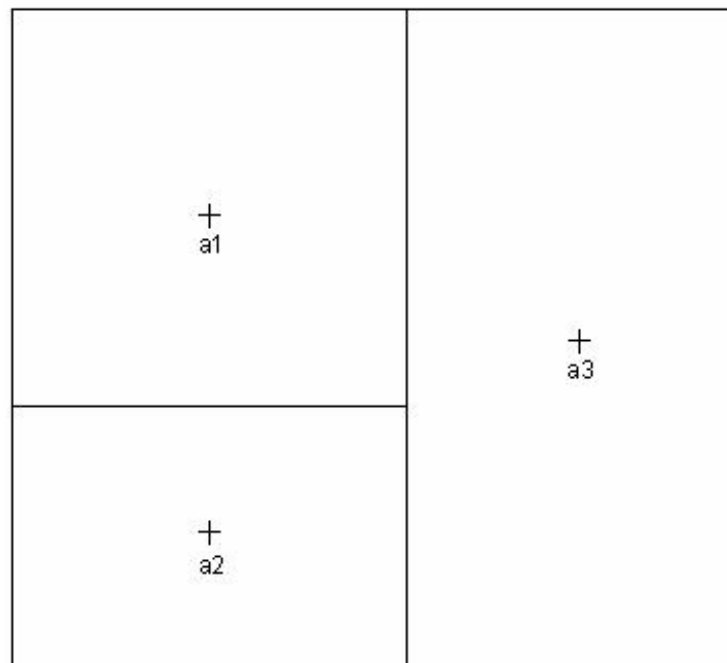


Figura 5.3 – Nomenclatura dos deslocamentos máximos para cada laje do pavimento.

5.1. PAVIMENTO MODELADO EM LAJES ISOLADAS – MODELOS 1 E 2

A fim de avaliar o comportamento das lajes isoladamente, optou-se por discretizar o pano em malhas espaçadas de 25x25, 50x50 e 100x100 e comparar com os valores obtidos classicamente nos parâmetros das tabelas de Czerny, com coeficiente de Poisson igual a 0,2. Esses valores também foram comparados a um modelo construído em elementos finitos. Neste caso, os apoios serão considerados indeslocáveis e com rotações nulas nos apoios simuladas através de engastamento perfeito.

Nos estudos realizados por COELHO e STRAMANDINOLLI, podem-se observar alguns modelos, com diversas relações de l_x/l_y , nos quais variam os parâmetros físicos e geométricos das grelhas entre diversos espaçamentos, sempre comparados a valores obtidos através da Teoria da Elasticidade. Quando se varia a relação J/I , percebe-se maior sensibilidade nos resultados. Para cada relação l_y/l_x , há um parâmetro J/I ideal que faz os valores convergirem para os valores clássicos.

Por outro lado, tendo em vista a variabilidade de formas e das dimensões das lajes que existem em um pavimento, verifica-se que é pouco prático fixar várias relações de rigidez num painel de lajes para cada um dos esforços pretendidos. Para tanto, optou-se por utilizar J/I igual a 2 para todas as lajes do pavimento, conforme sugerido por HAMBLY.

As figuras 5.4,5.5,5.6 e 5.7 ilustram as modelagens realizadas para o modelo 2:

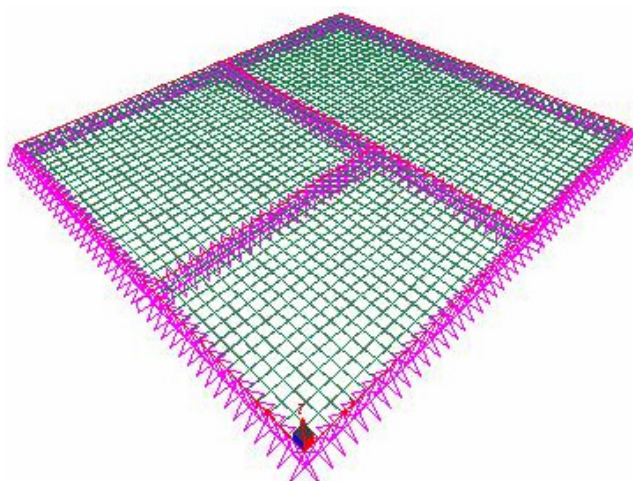


Figura 5.4: MODELO 2A – Laje modelada em analogia de grelha com barras espaçadas de 25cm

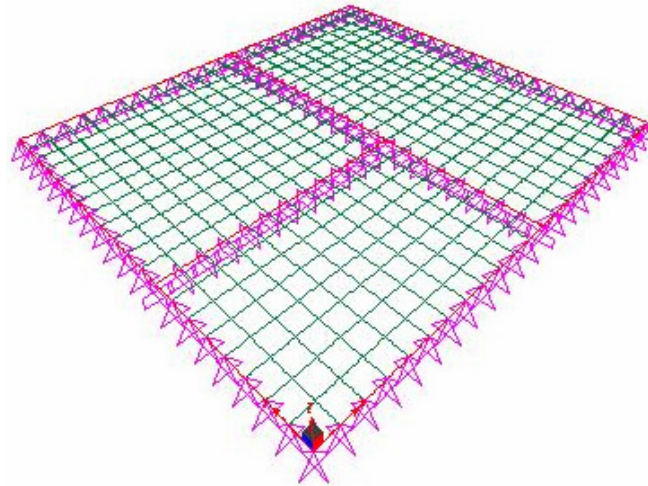


Figura 5.5: MODELO 2B – Laje modelada em analogia de grelha com barras espaçadas de 50cm

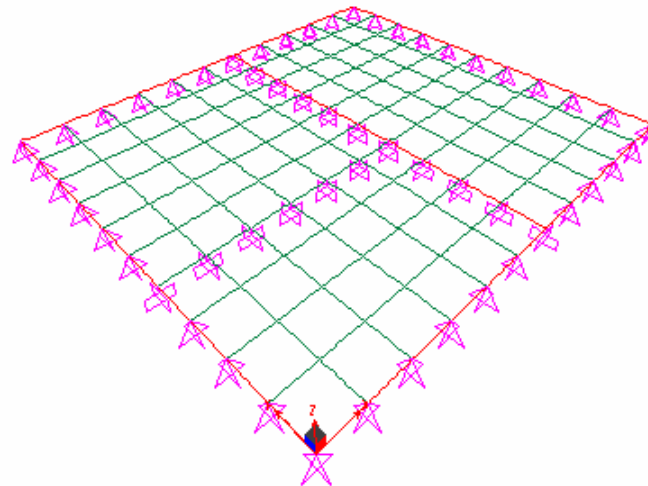


Figura 5.6: MODELO 2C – Laje modelada em analogia de grelha com barras espaçadas de 100cm

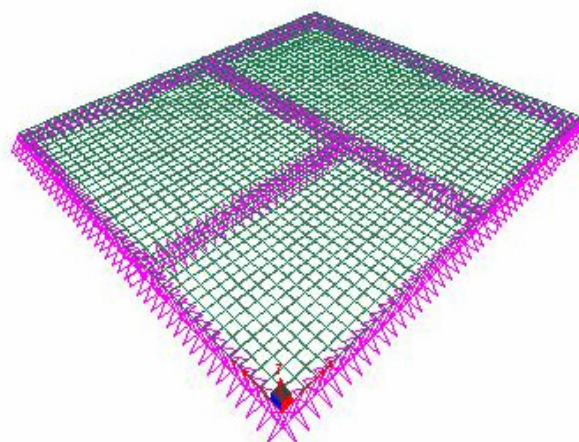


Figura 5.7: MODELO 2EF – Laje modelada em elementos finitos de casca.

A tabela 5.1 ilustra os resultados encontrados para os modelos considerando as lajes isoladas, apresentando as diferenças percentuais em relação aos valores encontrados na Tabela de Czerny:

Tabela 5.1 - resultados em virtude do refinamento da malha para o modelo 2 em comparação ao modelo 1 (kNm/m)

	CZERNY	MOD 2A	DIF (%)	MOD 2B	DIF (%)	MOD 2C	DIF (%)	MOD 2EF	DIF (%)
Mxx1	10,74	10,36	-3,54	10,83	0,84	11,46	6,70	10,99	2,33
Myy1	10,74	10,36	-3,54	10,83	0,84	11,46	6,70	10,99	2,33
Xxx1	-25,17	-26,08	3,60	-26,27	4,37	-25,78	2,42	-24,93	-0,96
Xyy1	-25,17	-26,08	3,60	-26,27	4,37	-25,78	2,42	-24,93	-0,96
Mxx2	7,81	8,71	11,52	8,82	12,93	9,19	17,67	8,52	9,09
Myy2	4,46	3,84	-13,90	4,50	0,83	5,23	17,26	4,36	-2,24
Xxx2	-16,67	-17,38	4,27	-17,51	5,06	-17,33	3,97	-16,59	-0,49
Xyy2	-12,90	-13,00	0,75	-12,88	-0,17	-12,36	-4,19	-12,73	-1,36
Mxx3	7,14	5,31	-25,63	6,14	-14,01	7,91	10,78	6,15	-13,87
Myy3	15,46	16,95	9,64	17,17	11,06	17,75	14,81	16,52	6,86
Xyy3	-30,12	-31,13	3,37	-31,19	3,55	-31,11	3,27	-30,23	0,38
a1 (cm)	1,05	1,25	19,05	1,26	20	1,25	19,05	1,06	0,95
a2 (cm)	0,38	0,44	15,79	0,43	13,16	0,44	15,79	0,38	0,00
a3 (cm)	1,16	1,32	13,79	1,33	14,66	1,34	15,52	1,18	1,72

Os momentos ao longo da borda entre as lajes 1,2 e 3 (Xyy1, Xyy2 e Xyy3) e entre as lajes 1 e 2 (Xxx1 e Xxx2) podem ser visualizadas nas figuras 5.8 e 5.9.

Os momentos negativos nos bordos do modelo 1 foram apresentados como constantes, embora é sabido que variam de forma parabólica como nos outros modelos, uma vez que nas Tabelas de Czerny, que é formulada através das equações da Teoria das Placas, é oferecido um valor para cada esforço da laje, sendo este, seu valor máximo.

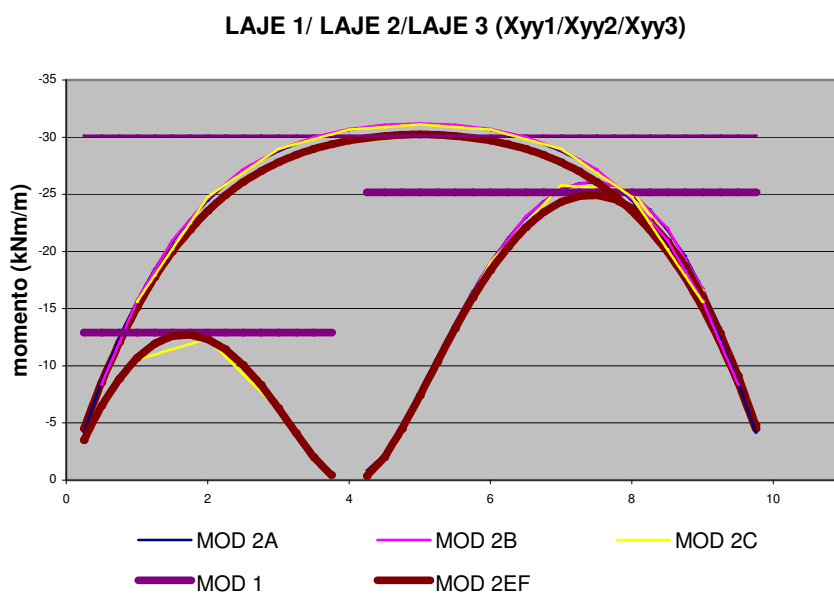


Figura 5.8: variação do momento negativo no bordo entre as laje 1, 2 e 3 – modelos 1 e 2.

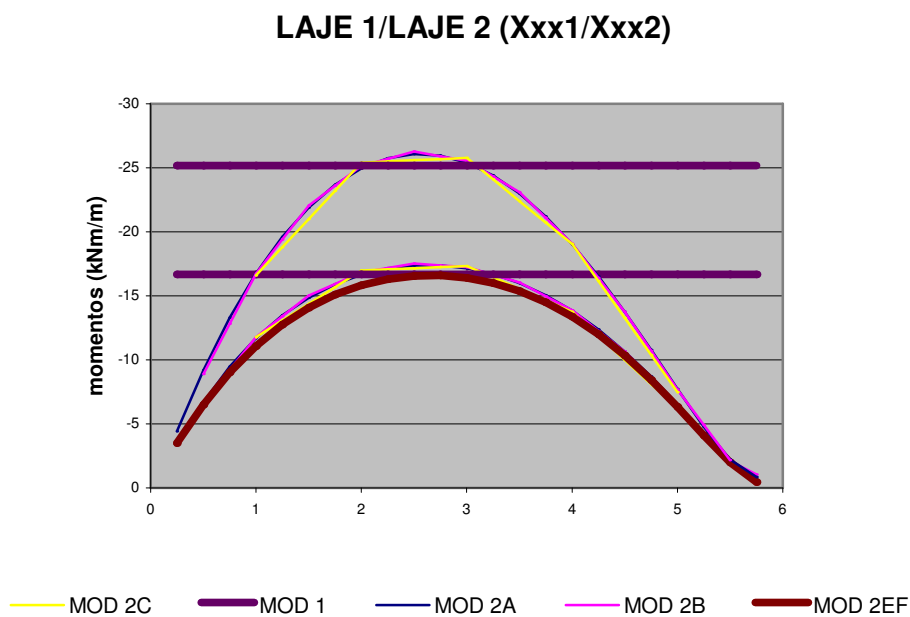


Figura 5.9: variação do momento negativo no bordo entre as laje 1 e 2 – modelos 1 e 2.

Analisando as figuras 5.8 e 5.9, percebe-se que as curvas dos momentos fletores negativos mostraram-se muito parecidas, apesar da diferença entre o espaçamento das malhas.

Na laje 1, utilizou-se a relação recomendada por HAMBLY, ou seja, $J/I = 2$, obteve-se boas aproximações para os momentos com menor diferença na ordem de 0,84%. A malha de 25x25 apresentou as menores diferenças em relação aos momentos positivos, já que a malha de 100x100 foram percebidas as maiores diferenças nos momentos negativos.

Na laje 2, como era previsto, as diferenças foram substancialmente maiores que a da laje anterior. Para M_{xx} , a menor diferença foi para a grelha de 25X25, de 11,52% em relação à teoria da elasticidade. Para M_{yy} a grelha que mais se aproximou da teoria elástica foi a de 50x50, com diferença de 0,83%. Para os momentos fletores negativos, as grelhas de 25x25 e 50x50 obtiveram as melhores aproximações.

Para a laje 3, verifica-se que todos os modelos em analogia de grelha obtiveram grandes diferenças nos momentos positivos em relação à Teoria da Elasticidade.

Nos de COELHO (2000) e STRAMANDINOLLI (2003), percebeu-se que para lajes com relação $I_x/I_y = 2$, os momentos fletores são muito sensíveis à variação da rigidez torcional. Quanto ao momento fletor negativo a diferença encontrada foi na ordem de 3% .

Todos os modelos em analogia de grelha tiveram grande discrepância em relação à flecha, que se estabeleceu em torno de 20%.

5.2. COMPATIBILIZAÇÃO DOS MOMENTOS FLETORES NEGATIVOS DE LAJES ISOLADAS UTILIZANDO OS MODELOS 1 E 2

A técnica manual de compatibilização dos momentos fletores negativos, conforme a equação (4.1) consiste em adotar a média dos momentos negativos entre bordos adjacentes ou 80% do maior momento, preponderando o maior resultado. Devido a esta mudança, os momentos positivos devem ser corrigidos. Nesta comparação, o giro das lajes será livre nos bordos externos. Para este modelo, serão

levantados os momentos nos bordos, considerando o espaçamento da malha para comparação com a técnica usual de compatibilização, através do uso das tabelas de Czerny.

Para a compatibilização dos momentos fletores, será utilizada a equação (4.1) considerando as lajes isoladas tanto para a analogia de grelha, quanto para os valores encontrados nas Tabelas de Czerny.

Nest exemplo os valores dos momentos negativos foram sempre obtidos pela média simples. No modelo 2, analisado em analogia de grelha com barras coincidentes, a média dos momentos fletores pode ser tomada barra a barra ao longo do bordo. No modelo 1, onde os esforços foram obtidos através das tabelas, tomou-se para a média, o valor máximo de cada laje no bordo. Sendo assim, os momentos fletores positivos devem ser corrigidos aplicando-se a metade da variação do momento fletor negativo obtido com a compatibilização

A tabela 5.2 ilustra os resultados obtidos através da média dos momentos negativos no bordo e as diferenças percentuais em relação à técnica manual de compatibilização usando as tabelas de Czerny:

Tabela 5.2 - resultados em virtude do compatibilização dos momentos negativos (kNm/m) – modelos 1 e 2

	MOD 1	MOD 2A	MOD 1 COMP.	MOD 2A COMP.	DIF (%)
Mxx1	10,74	10,36	12,87	12,53	-2,58
Myy1	10,74	10,36	9,50	9,86	3,73
Xxx1	-25,17	-26,08	-20,92	-21,73	3,87
Xyy1	-25,17	-26,08	-27,65	-27,08	-2,04
Mxx2	7,81	8,71	5,69	6,54	14,98
Myy2	4,46	3,84	0,15	0,95	516,06
Xxx2	-16,67	-17,38	-20,92	-21,73	3,87
Xyy2	-12,9	-13,00	-21,51	-18,77	-12,75
Mxx3	7,14	5,31	7,14	5,31	-25,63
Myy3	15,46	16,95	19,77	21,48	8,70
Xyy3/Xyy1	-30,12	-31,13	-21,51	-22,07	2,58
Xyy3/Xyy2			-27,65	-28,61	3,47

Analisando as figuras 5.10 e 5.11 pode-se perceber que, ao utilizarmos a analogia de grelha, os momentos obtidos através da técnica manual de compatibilização tem diferenças muito pequenas em comparação aos momentos compatibilizados utilizando as teorias clássicas. No entanto, esta técnica tem algumas ressalvas, como será visto adiante, que é a desconsideração das concentrações de tensão que eventualmente podem ocorrer num pavimento.

5.3. COMPATIBILIZAÇÃO DE LAJES INTEGRADAS – MODELO

3

A continuidade sobre os apoios resulta em um comportamento distinto das lajes isoladas. Neste modelo, no qual existe a integração de todas as lajes, a compatibilização é feita automaticamente. Sendo assim, pode-se visualizar a interação das lajes no pavimento e ainda, avaliar e o comportamento dos momentos fletores negativos nas continuidades bem como a correção dos momentos fletores positivos. Com o propósito de avaliar o refinamento da malha, o pavimento será discretizado em analogia de grelha com as barras espaçadas de 25x25 (modelo 3A), 50x50 (modelo 3B) e 100x100 (modelo 3C). Para efeito de comparação, no item 5.3.2 será gerado um modelo em elementos finitos (modelo 3EF). Nestes modelos, a torção e a deslocabilidade das vigas de apoio serão desconsideradas.

5.3.1. COMPARAÇÃO COM AS TABELAS DE CZERNY

Na tabela 5.3, podem ser vistos os valores máximos dos momentos positivos e negativos nos bordos do modelo 3, em comparação aos momentos compatibilizados com o uso da Tabela da Czerny.

Tabela 5.3 - resultados em virtude do compatibilização dos momentos máximos do modelo 3 em comparação aos momentos máximos compatibilizados do modelo 1 (kNm/m)

	MOD 1 COMP.	MOD 3A	DIF (%)	MOD 3B	DIF (%)	MOD 3C	DIF (%)
Mxx1	12,87	10,08	-21,65	10,59	-17,68	11,25	-12,55
Myy1	9,50	10,93	15,02	11,37	19,65	12,26	29,02
Xxx1	-20,92	-21,12	0,95	-21,28	1,70	-20,86	-0,27
Xyy1	-27,65	-27,98	1,20	-28,14	1,80	-28,33	2,46
Mxx2	5,69	7,76	36,50	8,00	40,72	8,41	47,93
Myy2	0,15	3,54	2183,87	4,08	2535,10	4,51	2809,68
Xxx2	-20,92	-21,12	0,95	-21,28	1,70	-20,86	-0,27
Xyy2	-21,51	-18,97	-11,81	-21,87	1,65	-19,66	-8,60
Mxx3	7,14	5,84	-18,21	6,63	-7,14	8,61	20,59
Myy3	19,77	17,85	-9,69	18,07	-8,58	18,68	-5,49
Xyy3/Xyy1	-21,51	-27,98	1,21	-28,14	1,80	-28,33	2,46
Xyy3/Xyy2	-27,65						

Por meio desta comparação, pode-se saber quanto as hipóteses simplificadoras da NBR 6118:2003 são eficientes quanto à compatibilização, uma vez que o modelo 3 considera a integração de todo o pavimento. Nota-se que nos momentos fletores, as diferenças variam de acordo com o espaçamento determinado na malha, sem uma definição precisa. Como resultado disso, a malha de 25x25 foi a que demonstrou as menores diferenças em Myy1, Xyy1, Mxx2 e Myy2 em relação à técnica usual de compatibilização. A grelha de 100x100 apresentou as menores diferenças em Mxx1, Myy3 e Xxx2.

A maior diferença recaiu sobre Myy2 no qual imaginava-se que, pela rotação do nó a favor da laje de maior vão, anularia-se o momento fletor positivo. Com o uso de tabelas, o momento corrigido ficou igual a 0,15 kNm/m. Este momento, porém, chegou a valores maiores que 3 kNm/m, contrariando essa tendência. Na laje 1, onde imaginava-se que Mxx1 teria um valor maior que Mxx2, acabou ocorrendo no inverso.

Pode-se perceber inicialmente através desses resultados, que a técnica manual de compatibilização dos momentos das lajes apresenta algumas inconsistências quando comparado com métodos que consideram a integração do painel.

As figuras 5.12 e 5.13 ilustram a variação dos momentos negativos ao longo dos bordos para a técnica manual de compatibilização das lajes do pavimento (MOD 1A

COMP), comparando-se com os valores obtidos no modelamento do pavimento em analogia de grelha, considerando-se a compatibilização automática desses momentos:

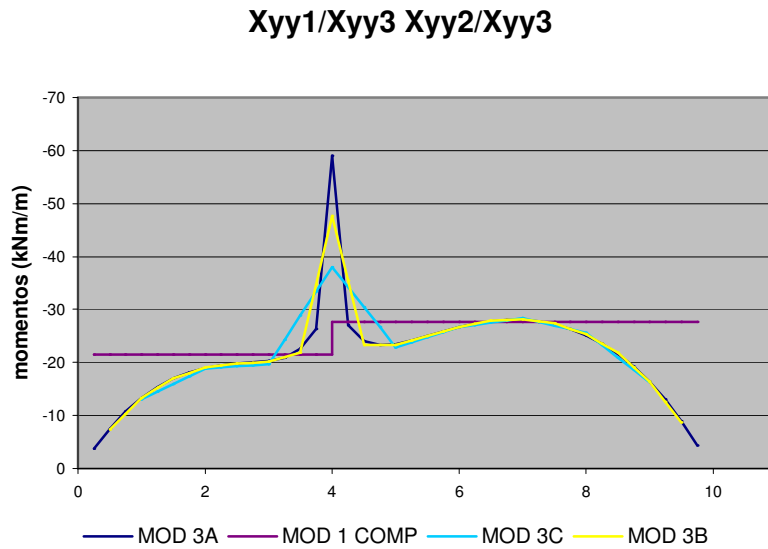


Figura 5.12: variação do momento fletor bordos laje 1, 2 e 3 – modelos 1 e 3

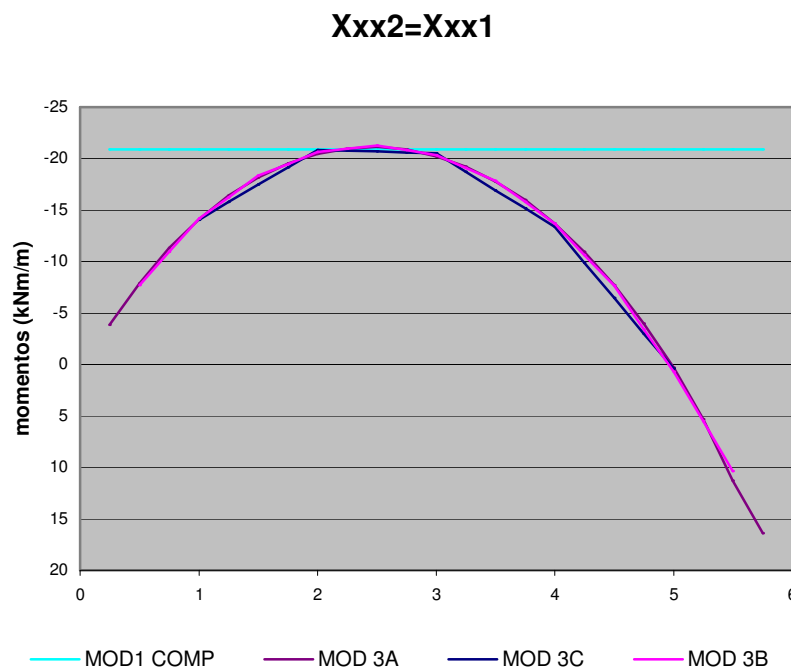


Figura 5.13: variação do momento fletor bordos laje 1e 2– modelos 1 e 3

Analisando as figuras 5.12 e 5.13, percebe-se que as diferenças entre os valores máximos dos momentos foram pequenas. Uma vez desconsiderada a torção da viga que

une as lajes, os momentos negativos dos dois lados são iguais sendo que a única diferença está no ponto de encontro das três lajes onde, desta vez, pode ser visualizada uma concentração de tensões na laje 3.

A figura 5.14 ilustra o encontro das três lajes onde ocorre um pico no diagrama. Neste ponto, observa-se a tendência de giro das barras que compõe a laje 3, que é impedida pelo bordo comum que une as lajes 1 e 2.

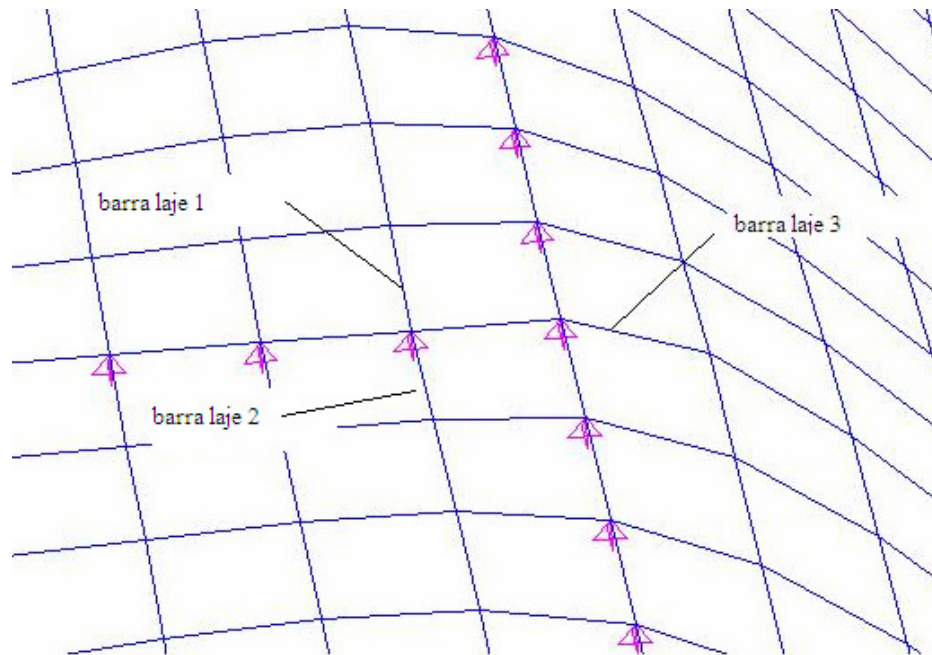


Figura 5.14: Visualização das barras que geram a descontinuidade na laje 3

Ainda neste bordo, ao analisar a ação do momento fletor negativo da laje 3, nota-se que há uma inversão de giro das lajes 1 e 2, fazendo com que um certo trecho dessas barras sejam levantadas ocasionando inversão de esforços tornando, o momento que eventualmente seria negativo, em momento fletor positivo. Este comportamento pode ser visualizado na figura 5.13.

Analisando novamente a figura 5.12 observa-se que, quando a malha da grelha é refinada, ocorre um aumento no pico de momento fletor negativo na concentração de tensão. Em todos os modelos existe uma barra posicionada exatamente sobre esse ponto de concentração de tensão. A malha em analogia de grelha que registrou o maior pico foi a malha de 25x25. Foi observado que, para as grelhas mais espaçadas, existe a tendência do pico de momento fletor a diminuir. Embora que, para a ratificação de tal constatação seja necessário uma pesquisa mais aprofundada, pode-se entender que este fato ocorre

em função da formulação da matriz de rigidez da barra da grelha, que tem todos os termos divididos pelo comprimento da barra. Quanto menor o comprimento da barra, maior será a rigidez desse elemento aos esforços solicitados, absorvendo mais esforços, justificando o pico no momento fletor negativo. Ao modelar o pavimento em elementos finitos, o qual tenta-se aproximar do contínuo, constatou-se que o pico de momento fletor negativo na concentração obteve maior valor.

É importante salientar que a escolha do espaçamento da malha pode trazer valores diferentes principalmente sobre as concentrações tensão, uma vez que não houve uma variação significativa dos resultados dos momentos positivos

5.3.2. COMPARAÇÃO COM ELEMENTOS FINITOS

Nesse modelo, construído em elementos de casca com as mesmas condições de contorno citadas anteriormente, será estudado o comportamento da compatibilização dos momentos, focando comparar as descontinuidades verificadas no modelo anterior na ocasião da interação das lajes. Neste modelo, as flechas serão comparadas.

A tabela 5.4 ilustra a diferença percentual do modelo 3 modelado em analogia de grelha em comparação ao de elementos finitos, ambos com malha de 25x25.

Tabela 5.4 - resultados analogia de grelha x elementos finitos (KNm/m)

	MOD 3EF	MOD 3A	DIF (%)
Mxx1	10,77	10,08	-6,41
Myy1	11,43	10,93	-4,47
Xxx1	-20,17	-21,12	4,71
Xyy1	-26,91	-27,98	3,98
Mxx2	7,71	7,76	0,65
Myy2	4,03	3,54	-12,16
Xxx2	-20,17	-21,12	4,71
Xyy2	-20,61	-18,97	-7,94
Mxx3	6,73	5,84	-13,24
Myy3	17,34	17,85	2,94
Xyy3	-26,91	-27,98	3,99
a1 (cm)	1,11	1,27	14,79
a2 (cm)	0,32	0,35	10,58
a3 (cm)	1,34	1,47	9,58

Fazendo uma análise dos resultados obtidos, pôde-se observar que as variações foram pequenas, salvo em alguns momentos positivos, cujas diferenças foram maiores.

Como já era esperado, ocorreram algumas diferenças percentuais dos resultados para o modelo em elementos finitos, uma vez que a rigidez $J=2I$ não apresenta boas aproximações para todas as relações de vão em relação à teoria das placas em regime elástico.

Ainda sim, o comportamento dos momentos negativos na região das descontinuidades foi mantido, como pode ser visto nas figuras 5.15 e 5.16.

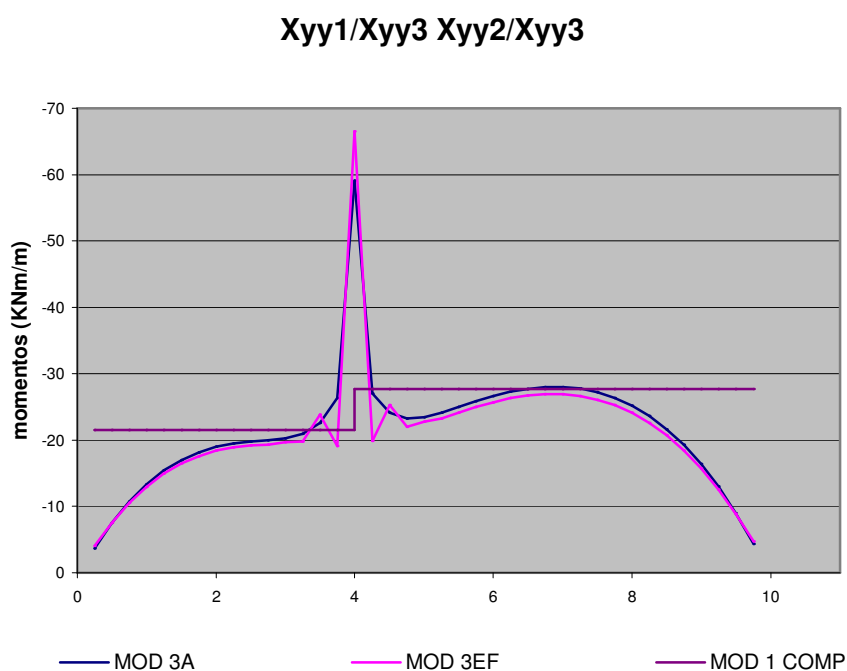


Figura 5.15: variação do momento fletor bordos laje 1, 2 e 3 – modelo 1 e modelo 3 em MEF e AG

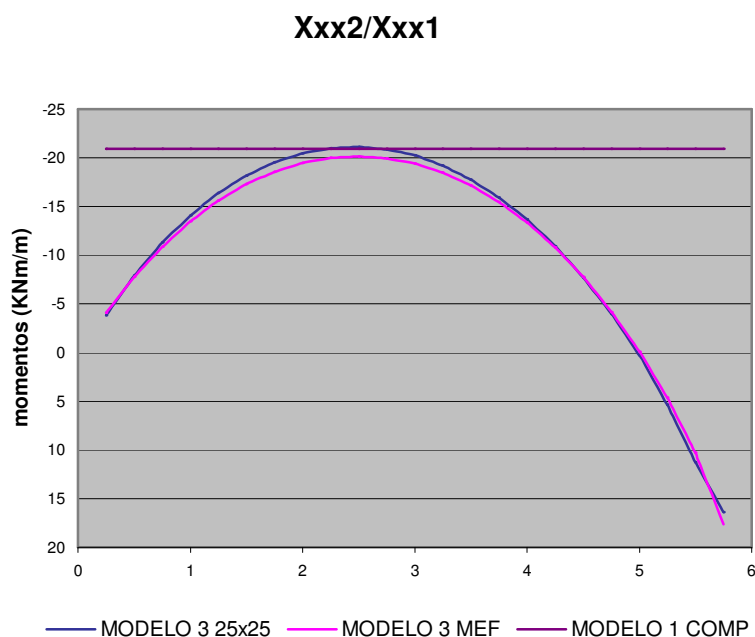


Figura 5.16: variação do momento fletor bordos laje 1e 2– modelo 1 e modelo 3 em MEF e AG

Conforme foi constatado no modelo em analogia de grelha, no bordo comum entre a laje 1 e 2, foi preservada a tendência de inversão de esforços, em que é observada uma região de momento positivo .

Para a maioria dos esforços, verificou-se que a diferença percentual entre o modelo 3 e o modelo em elementos finitos foi menor, se comparada com a análise realizada entre o modelo 3 e o modelo 2 utilizando-se da compatibilização simples dos momentos fletores.

Demonstra-se assim, que a técnica manual de compatibilização torna-se interessante para fins práticos, não representando, no entanto, um comportamento mais preciso do pavimento como no caso de concentração de tensões e inversão de esforços no bordo, tornando-se necessário o uso de processos numéricos.

5.4. EFEITO DA RIGIDEZ À TORÇÃO DAS VIGAS DE APOIO

5.4.1 MALHAS COINCIDENTES – MODELO 4

Baseando-se na técnica manual de análise de esforços das estruturas de concreto armado, a torção da viga de apoio ocasionada pelo giro da laje, é usualmente desprezada.

A NBR 6118:2003 no item 14.6.7.2 descreve sobre a possibilidade da modelagem de estruturas como grelhas ou pórticos espaciais, deve-se relevar que: “de maneira aproximada, nas grelhas e pórticos espaciais, pode-se reduzir a rigidez à torção das vigas por fissuração utilizando-se 15% da rigidez elástica (...)”.

Essa consideração pode ser observada em LEONHARDT (1982), sendo utilizada nos exemplos encontrados em BARBOZA (1992) e CARVALHO (1994). Em ensaios ocorre uma diminuição da rigidez à torção em peças de concreto armado, mesmo estas estando no estágio I. Essa queda deve-se ao fato de haver microfissuras existentes na superfície do concreto, as quais levam a essa queda na rigidez torsional.

Na maioria dos casos a queda da rigidez à torção das vigas de concreto armado, faz com que a viga pouco influencie nos momentos fletores negativos das lajes adjacentes num pavimento. Diminuída a rigidez a torção, a viga torna-se menos sensível à rotação destas lajes, acarretando na diminuição do momento torsor e conseqüentemente as descontinuidades nos momentos fletores negativos nas lajes são atenuadas.

Para que seja estudado este efeito, será atribuído ao modelo 3 a rigidez torcional das vigas de bordo, resguardando assim as recomendações já citadas, isto é, a adoção de 15% da rigidez elástica à torção. Este será o modelo 4A. Para comparação o pavimento será estudado utilizando a rigidez integral das vigas à torção, que será o modelo 4B. A seção transversal adotada para todas as vigas será de 12 x 50 cm, considerando-as indeslocáveis verticalmente.

Deve-se salientar que a rigidez à torção das vigas foi considerada apenas nas vigas entre lajes contíguas, desconsiderado nas vigas externas, uma vez que a finalidade desta pesquisa é estudar o efeito da rigidez torcional dessas vigas na continuidade das lajes. Conforme DORNELLES E PEREIRA (2006), a consideração da rigidez à torção

nas vigas externas gera momentos torsões adicionais muito pequenos, gerando efeitos muito pequenos nos valores finais dos momentos das lajes.

A tabela 5.5 ilustra os resultados obtidos em comparação ao modelo 3A, no qual desta vez, os momentos negativos entre as lajes contíguas serão diferentes, pela influência da torção das vigas.

Tabela 5.5 - resultados do modelo 4 em comparativo com o modelo 3 (kNm/m)

	MOD 4A	DIF. MOD 3A (%)	MOD 4B	DIF. MOD 3A (%)
Mxx1	10,08	0,00	10,10	0,20
Myy1	10,92	-0,09	10,85	-0,74
Xxx1	-21,24	0,57	-21,91	3,61
Xyy1	-28,00	0,07	-28,05	0,26
Mxx2	7,80	0,52	7,91	1,90
Myy2	3,56	0,56	3,59	1,39
Xxx2	-21,00	-0,57	-20,49	-3,07
Xyy2	-18,80	-0,9	-17,88	-6,10
Mxx3	5,76	-1,37	5,76	-1,39
Myy3	17,76	-0,5	17,69	-0,90
Xyy3	-27,88	-0,36	-27,66	-1,16
a1 (cm)	1,27cm	0,00	1,26cm	-0,79
a2 (cm)	0,35cm	0,00	0,36cm	2,78
a3 (cm)	1,47cm	0,00	1,44cm	-2,08

Para que seja verificado o comportamento da continuidade, foram traçadas seções para a visualização, utilizando, desta vez, a saída gráfica do programa SAP2000:

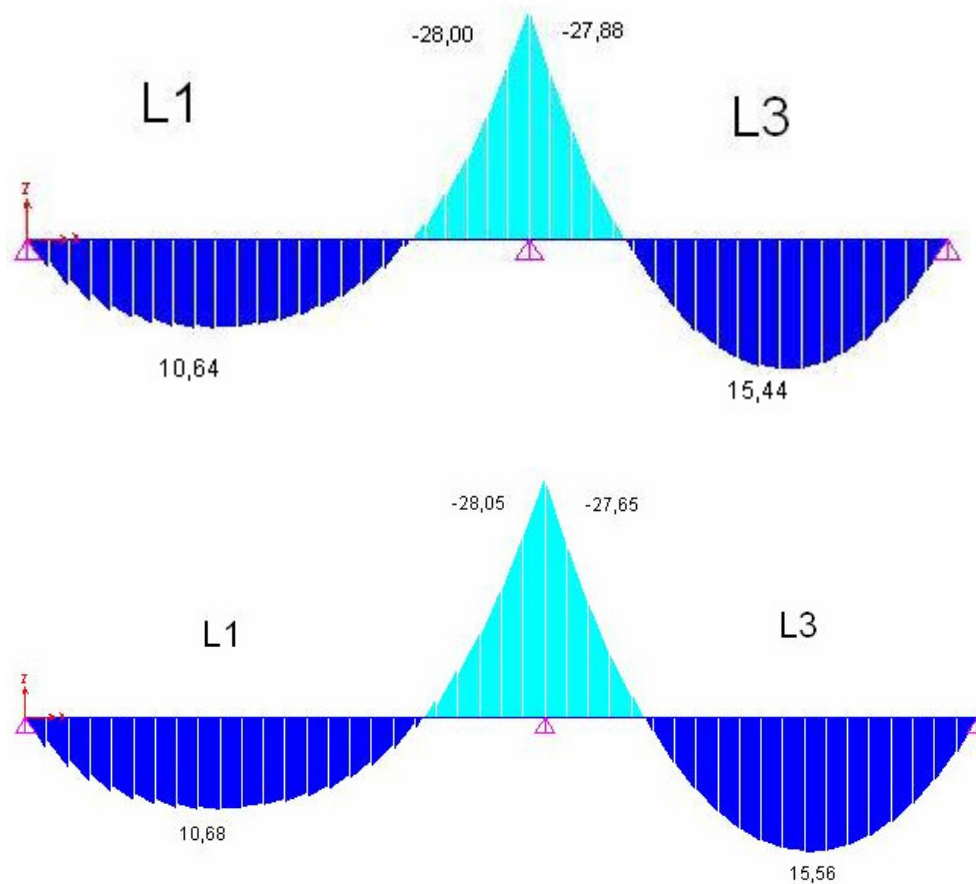


figura 5.17 - Variação de M_{yy} e X_{yy} entre as lajes 1 e 3 (kNm/m). Modelo 4A com rigidez à torção da viga reduzida (superior) e modelo 4B com rigidez à torção integral (inferior)

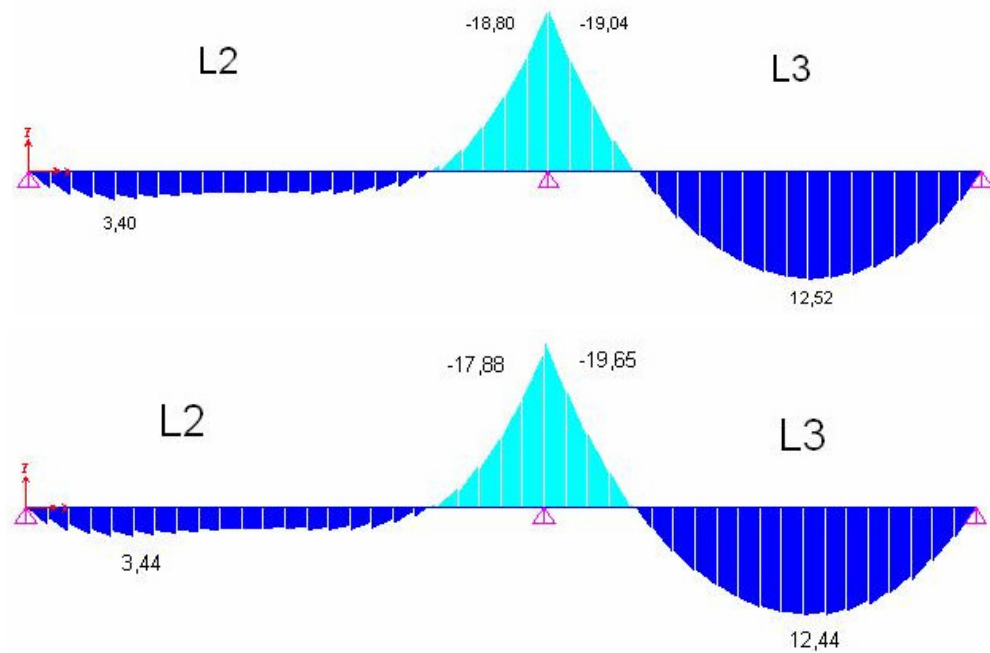


figura 5.18 - Variação de M_{yy} e X_{yy} entre as lajes 2 e 3 (kNm/m) (não correspondem aos valores máximos). Modelo 4A com rigidez à torção da viga reduzida (superior) e modelo 4B com rigidez à torção integral (inferior)

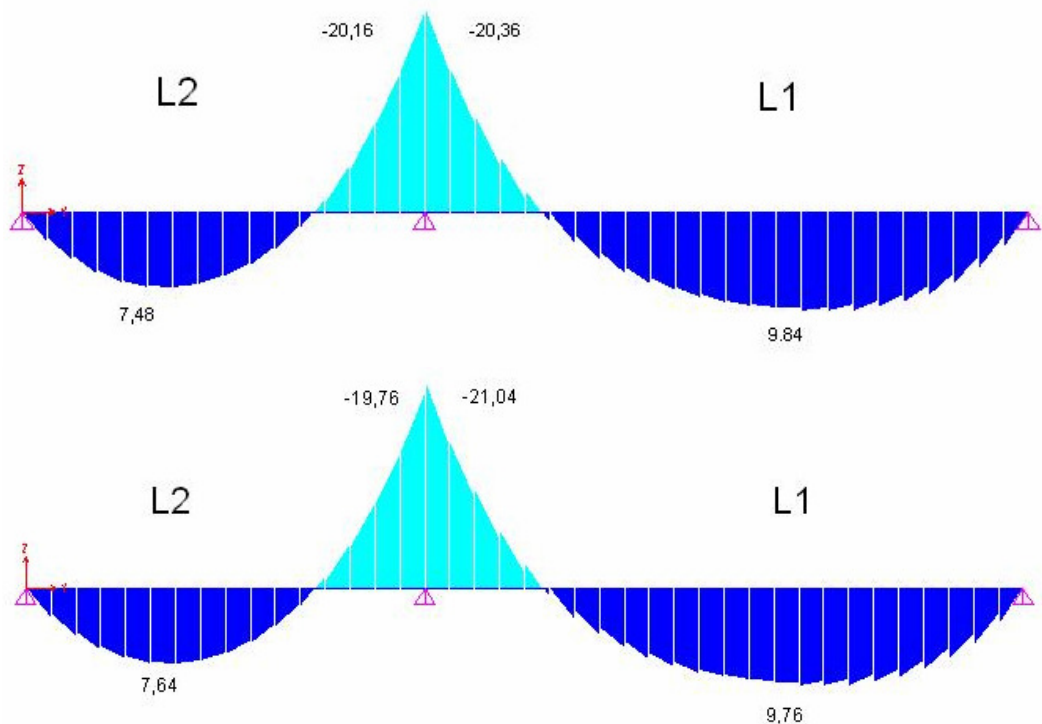


figura 5.19 - Variação de M_{xx} e X_{xx} entre as lajes 1 e 2 (kNm/m) (não correspondem aos valores máximos). Modelo 4A com rigidez à torção da viga reduzida (superior) e modelo 4B com rigidez à torção integral (inferior)

Na análise destes modelos, principalmente para o modelo 4A, apesar de ter-se adotado para as vigas uma seção transversal usual de 20x50, os momentos torsores nas vigas gerados em virtude da rotação das lajes (compatibilidade) foram de pequeno valor justificando as pequenas descontinuidades apresentadas entre momentos fletores negativos das lajes contíguas. Sabe-se que, ao aumentar a área da seção transversal para grandes dimensões, a rigidez à torção desta atingiria o comportamento semelhante ao de um engaste.

Na prática, a adoção da torção da viga de apoio reduzida, conforme indicado na norma, pouco influi nos resultados.

Na adoção da rigidez integral da torção das vigas entre as lajes contíguas, as descontinuidades entre os momentos negativos das lajes foram maiores.

Existe ainda, uma verificação a ser realizada no dimensionamento das vigas ocasionado pela compatibilização de lajes contíguas, que é o momento torsor. A verificação deste esforço para dimensionamento será visto com mais detalhes no próximo modelo, onde serão estudadas as malhas desencontradas.

5.4.2 MALHAS DESENCONTRADAS – MODELO 5

Em um painel de lajes modelado por analogia de grelha, nem sempre é possível encontrar um espaçamento ideal para todas as lajes contidas nele. Por vezes, com foco na melhora dos resultados e na diminuição no tempo de processamento, opta-se por espaçamentos de barras diferentes para cada laje. Este procedimento implica no desencontro das barras em seu apoio comum.

Neste contexto, a consideração da torção da viga de apoio torna-se imprescindível, uma vez que a continuidade de momentos fletores é transferida através da mesma. A figura 5.20 mostra o pavimento que está em estudo, para o qual as três lajes são discretizadas com espaçamentos diferentes. Este modelo, o qual será chamado de modelo 5, possui as vigas com apoios indeslocáveis.

Para dar início aos estudos da transferência de momentos, a rigidez à torção da viga de apoio será mantida em 15% da rigidez elástica (modelo 5A), respeitando, assim, as recomendações normativas. Para tanto, será feita uma comparação com o modelo 4A, com o intuito de verificar as mudanças no comportamento das continuidades.

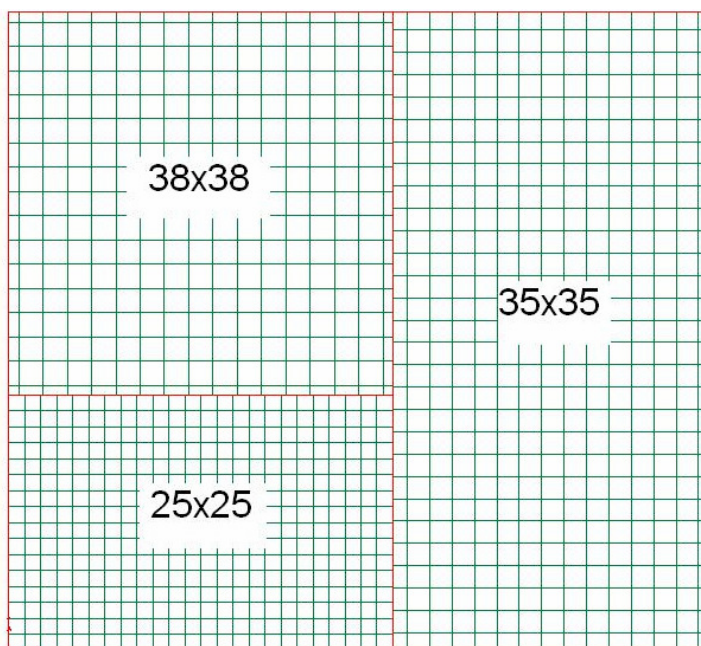


figura 5.20 - modelo 5

A tabela 5.6 ilustra os resultados obtidos para o modelo 5A, em comparação ao modelo 4A:

Tabela 5.8 - resultados do modelo 5A com rigidez de 15% à torção das vigas que promovem a continuidade em comparação ao modelo 4A (kNm/m)

	MOD 5A	DIF. MOD 4A(%)
Mxx1	10,08	0,00
Myy1	10,90	-0,18
Xxx1	-20,13	-5,23
Xyy1	-25,46	-9,07
Mxx2	7,95	1,92
Myy2	3,67	3,09
Xxx2	-21,71	3,88
Xyy2	-22,01	17,07
Mxx3	5,94	3,13
Myy3	18,16	5,51
Xyy3	-25,44	-8,75
a1 (cm)	1,27cm	0,00
a2 (cm)	0,37cm	5,71
a3 (cm)	1,52cm	3,40

O comportamento dos momentos fletores das lajes dos modelos 4A e 5A ao longo da continuidade pode ser visto nas figuras 5.21 e 5.22:

VT5 R 015

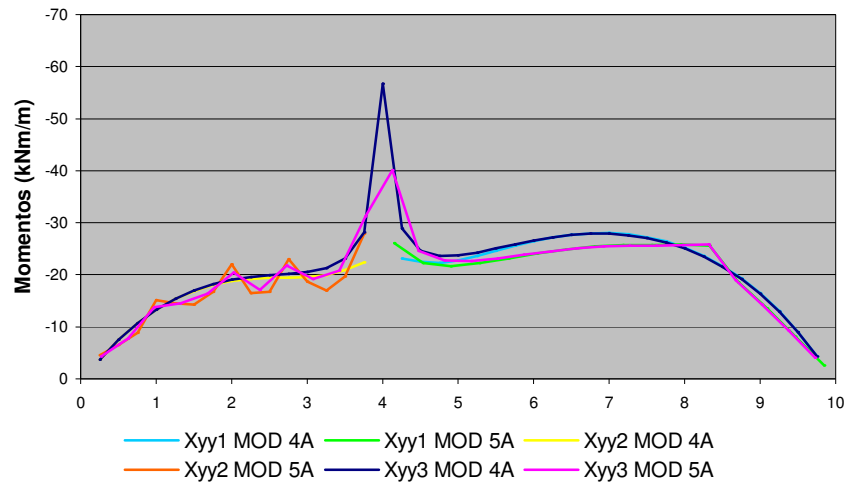


figura 5.21 - variação Xyy1, Xyy2 e Xyy3 modelo 5A e modelo 4A para 15% da rigidez da viga de apoio de ambos modelos

VT2 R015

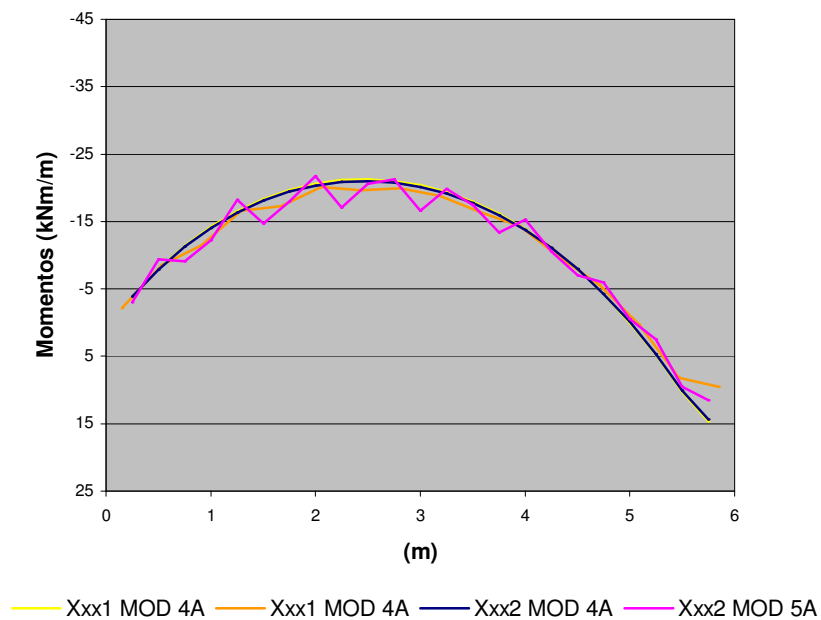


figura 5.22 - variação Xxx1 e Xxx2 modelo 5A e modelo 4A para 15% da rigidez da viga de apoio de ambos modelos

Através desta comparação, observou-se que nos momentos positivos e nas flechas as diferenças foram significativamente pequenas. As maiores diferenças foram verificadas nos momentos negativos que compõe a continuidade das lajes. Apesar das barras desencontradas, as diferenças sempre estiveram abaixo de 10%, a não ser para a laje 2. Nesta laje, como pode ser visto na figura 5.21 e 5.22, foram encontradas seqüências de picos nos diagramas de momento fletor negativo sobre o apoio. A figura 5.23 ilustra a variação no comprimento das vigas que compõem a continuidade que, em virtude da escolha do espaçamento da malha das lajes contíguas, criou trechos de pequeno comprimento e grande rigidez onde esses picos eram mais acentuados.

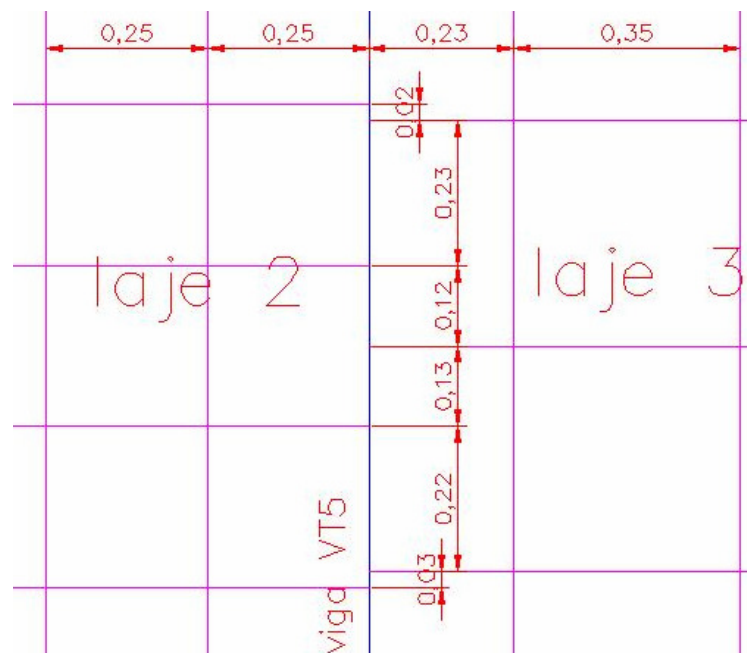


figura 5.23 - trecho da viga VT5, ilustrando a variação do comprimento da viga de apoio entre as lajes 2 e 3

Ao recorrer-se ao uso de barras desencontradas, depara-se com a mesma problemática das concentrações de tensão, ou seja, o comprimento das barras que compõe a malha pode influenciar significativamente os resultados.

Foi percebido durante o estudo, que mesmo utilizando a relação reduzida a 15% da rigidez a torção da viga que promove a continuidade, a transmissão de esforços é satisfatória em comparação ao modelo de grelha contínua. Os comprimentos de viga

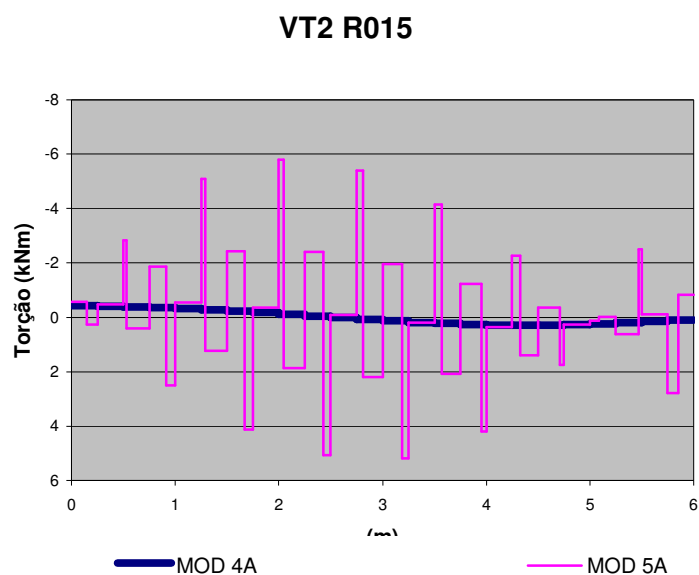


figura 5.25 - torção VT2 modelo 5A e modelo 4A para 15% da rigidez elástica à torção da viga de ambos modelos

No texto da NBR 6118/2003, nada consta especificamente sobre o dimensionamento desses momentos adicionais, mesmo os de compatibilização, encontrados no modelo 4. Todavia, consta no item 17.5.1.2 que “sempre que a torção for necessária ao equilíbrio do elemento estrutural, deve existir armadura destinada a resistir aos esforços de tração oriundos da torção... Quando a torção não for necessária ao equilíbrio, caso da torção de compatibilidade, é possível desprezá-la, desde que o elemento estrutural tenha a adequada capacidade de adaptação plástica e que todos os outros esforços sejam calculados sem considerar os efeitos por ela provocados”.

Este item da norma torna-se útil para os modelos estudados, em que é possível desprezar a torção das vigas no caso de continuidade de lajes, ou mesmo proceder o cálculo com torção nula o que seria falho na utilização de malhas desencontradas.

Continuando os estudos sobre a condição de transmissão de esforços através da viga de apoio, foi considerada desta vez, a rigidez integral à torção das vigas que promovem a continuidade gerando-se o modelo 5B.

A finalidade deste incremento é averiguar quanto a melhoria na transmissão de esforços das lajes através da viga e não fazer um comparativo com o modelo 4B, que

também possui rigidez torsional integral das vigas. Para tanto, os comparativos continuarão em relação ao modelo 4A.

A tabela 5.7 ilustra os resultados encontrados junto com a diferença percentual em relação aos resultados do modelo 4A:

Tabela 5.7 - resultados do modelo 5B com rigidez integral das vigas que promovem a continuidade em comparação ao modelo 4A (kNm/m)

	MOD 5B	DIF. MOD 4A(%)
Mxx1	9,97	-1,09
Myy1	10,71	-1,92
Xxx1	-21,35	0,52
Xyy1	-27,29	-2,54
Mxx2	7,98	2,31
Myy2	3,63	1,98
Xxx2	-20,04	-4,57
Xyy2	-18,57	-1,22
Mxx3	5,90	2,43
Myy3	17,72	-0,23
Xyy3	-27,00	-3,16
a1 (cm)	1,23cm	-3,15
a2 (cm)	0,37cm	5,71
a3 (cm)	1,43cm	-2,80

Neste modelo, foi constatado que os percentuais mantiveram-se baixos e os momentos fletores positivos continuaram com uma boa aproximação, quando comparados ao modelo 4A. Houve também uma sensível melhora no resultado dos momentos fletores negativos com percentuais sempre abaixo dos 5%. Assim como ocorreu para o modelo 5A, as diferenças percentuais para os momentos fletores positivos mantiveram-se baixas.

A variação dos momentos negativos entre as lajes contíguas na utilização da rigidez à torção intergral das vigas que promovem a continuidade podem ser visualizadas nas figuras 5.26 e 5.27.

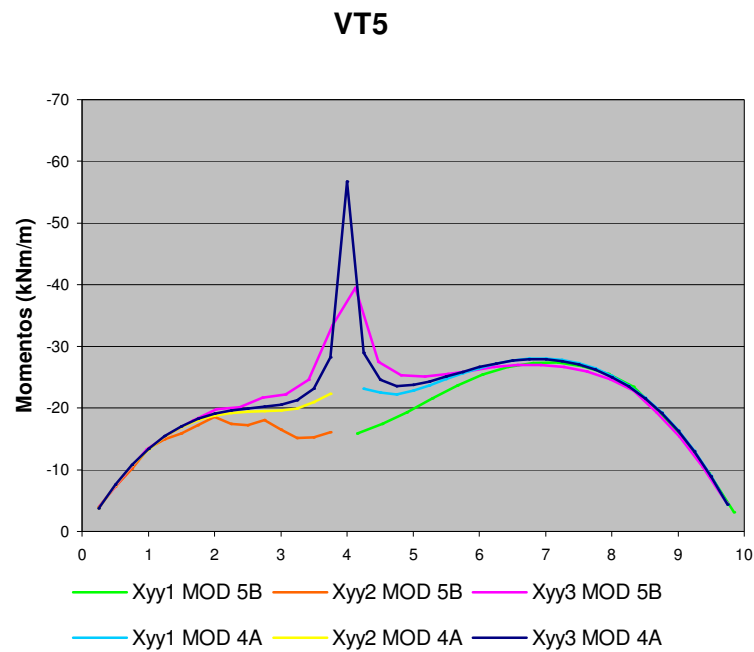


figura 5.26- variação Xyy1, Xyy2 e Xyy3 modelo 5B com 100% da rigidez da viga de apoio e modelo 4A

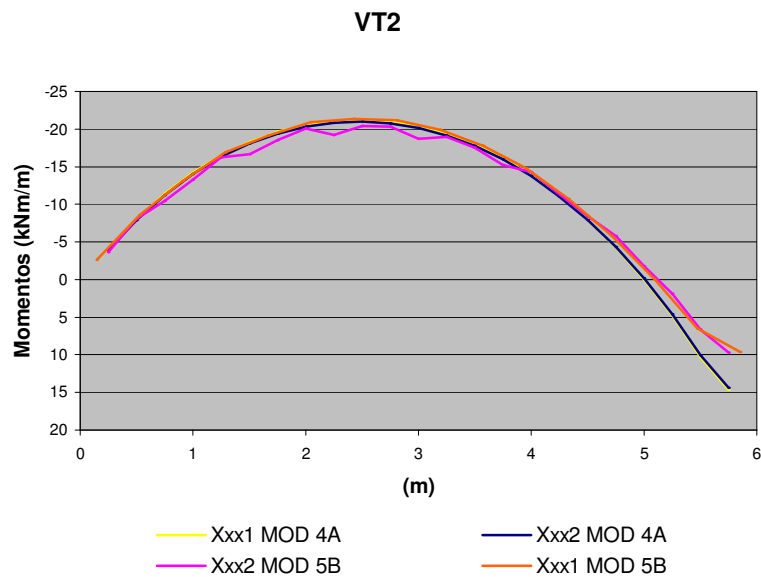


figura 5.27 - variação Xxx1 e Xxx2 modelo 5B com 100% da rigidez da viga de apoio e modelo 4A

Tabela 5.8 - resultados do modelo 5C com rigidez à torção muito grande das vigas que promovem a continuidade em comparação ao modelo 4A (kNm/m)

	MOD 5C	DIF. MOD 4A(%)
Mxx1	10,18	0,99
Myy1	10,24	-6,23
Xxx1	-25,49	20,00
Xyy1	-24,52	-12,43
Mxx2	8,67	11,15
Myy2	3,83	7,58
Xxx2	-17,41	-17,1
Xyy2	-12,78	-32,02
Mxx3	5,46	-5,21
Myy3	16,98	-4,39
Xyy3	-28,72	3,01
a1 (cm)	1,21cm	-4,72
a2 (cm)	0,43cm	22,86
a3 (cm)	1,31cm	-10,88

Neste modelo, constatou-se que as diferenças aumentaram significativamente em relação ao modelo 4A, sendo mais acentuado nos momentos negativos e nas flechas como pode ser visto nas figuras 5.29 e 5.30.

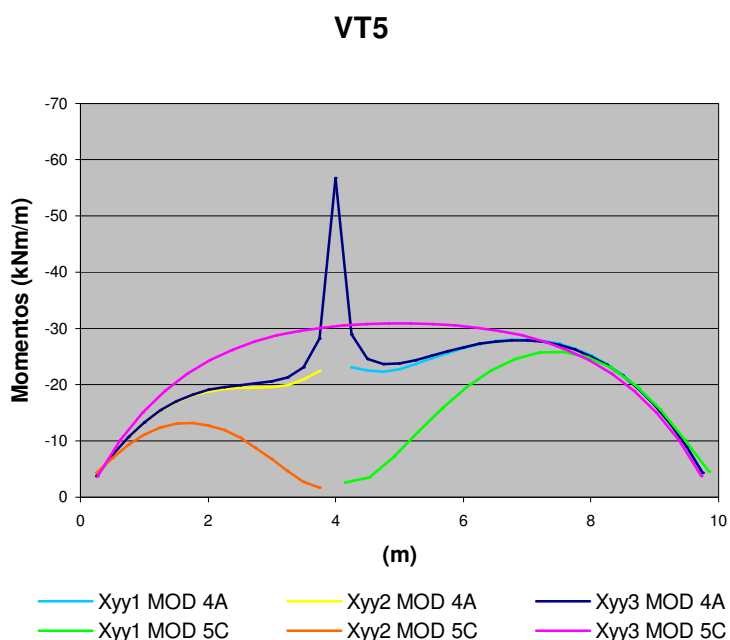


figura 5.29 - variação Xyy1, Xyy2 e Xyy3 modelo 4A e modelo 5C com rigidez muito grande à torção da viga de apoio

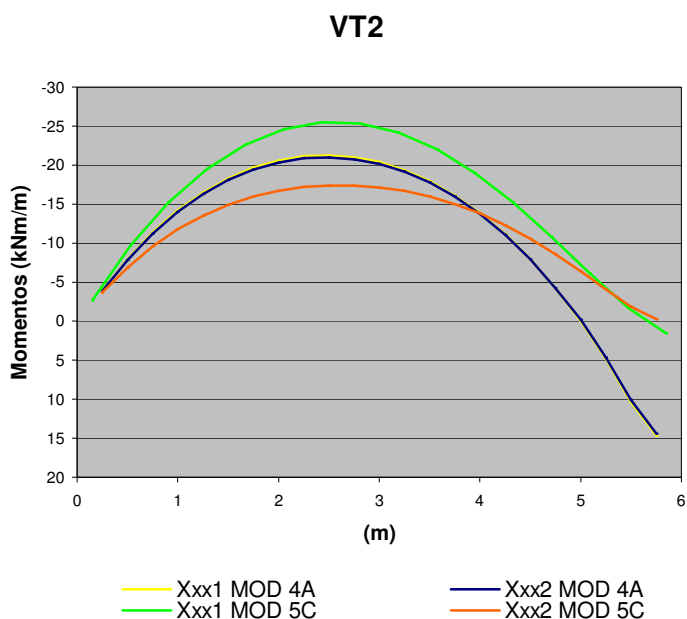


figura 5.30 - variação Xxx1 e Xxx2 modelo 4A e modelo 5C com rigidez muito grande à torção da viga de apoio

Como ocorreu no modelo com rigidez a torção de 100%, as curvas dos momentos negativos não apresentaram variação brusca ao longo do comprimento da viga, tornando-se lisa. Os picos que representavam as concentrações de tensão não estão mais presentes e a descontinuidade entre as lajes contíguas, como era presumido, aumentou da mesma maneira que o valor da torção das vigas de apoio, como pode ser visto na figura 5.31.

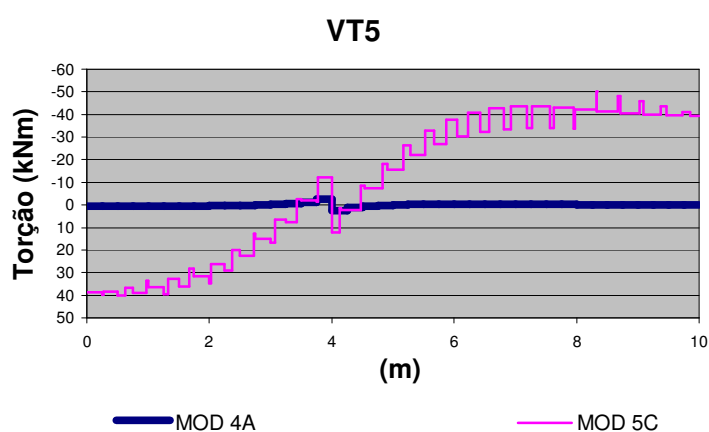


figura 5.31 - torção VT5 para modelo 5C considerando a rigidez elástica a torção da viga infinita em comparação ao modelo 4A

Procedendo a análise da figura 5.31 percebe-se um aumento na transmissão de esforços através das conexões de extremidade da viga para os pilares do pórtico, em relação ao modelo que utilizava torção integral.

Pode-se dizer que para as barras desencontradas, a variação da rigidez da viga de apoio, de certo modo, pode influenciar negativamente dependendo de qual valor utilizar. As rigidezes que variam de 15% a 100% revertem bons resultados quando comparados a grelhas com barras encontradas, cuja compatibilidade é feita ponto a ponto.

O aspecto das curvas que compõem os momentos negativos sobre a continuidade também é um fato relevante, uma vez que os diagramas das lajes contíguas que apóiam-se sobre vigas em que se considera 15% da rigidez torsional, mostram-se com algumas irregularidades fazendo-se necessário avaliar o comportamento médio destes diagramas.

Cabe relatar que à medida que se enrijece esta viga, as diferenças aumentam em relação ao modelo 4A modificando os valores das flechas e dos momentos fletores, incrementando inclusive os momentos torsões das vigas de apoio, que posteriormente são transmitidos ao restante da estrutura através das conexões da extremidade.

5.4.2.1 ROTAÇÃO DAS BARRAS DE EXTREMIDADE DAS VIGAS

Ao adotar a rigidez à torção muito grande da viga de apoio, percebe-se que os esforços de torção apresentaram valores representativos e podem influenciar, deste modo, nos esforços do pórtico. Considerando isso, para que não haja a transmissão do momento torsor, uma vez que este interfere nos esforços do restante da estrutura, optou-se por liberar a rotação nas extremidades das vigas que servem de apoio para as lajes. Sendo assim, a torção observada nesta viga será aquela provocada pela compatibilidade da continuidade das lajes pelo desencontro das barras dessas lajes.

A figura 5.32 ilustra os pontos em que serão liberados os esforços de torção das vigas que promovem a continuidade.

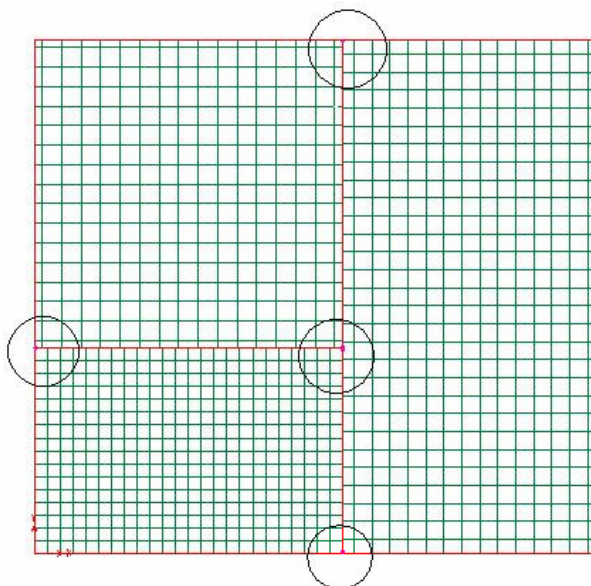


figura 5.32 - pontos onde foram liberados os momentos torsores das vigas de apoio do modelo 5C, formando o modelo 5C ROT.

Seguindo o estudo para o modelo com rigidez infinita de torção, foi realizada a liberação dos esforços de torção nas extremidades das barras das vigas. Este será o modelo 5C ROT. Uma vez que a deformação elástica à torção da viga será desprezível, a compatibilidade das lajes será dada através de um único giro por trecho sobre a viga que gera a continuidade.

A tabela 5.9 ilustra os resultados para a liberação das extremidades das vigas à torção.

Tabela 5.9 - resultados do modelo 5C2 com as extremidades das vigas liberadas à torção em comparação ao modelo 4A (kNm/m)

	MOD 5C ROT	DIF. MOD 4A(%)
Mxx1	9,81	-2,68
Myy1	10,46	-4,21
Xxx1	-24,05	13,23
Xyy1	-26,89	-3,96
Mxx2	8,05	3,21
Myy2	3,72	4,49
Xxx2	-17,8	-15,24
Xyy2	-17,04	-9,36
Mxx3	6,08	5,56
Myy3	17,64	-0,68
Xyy3	-27,3	-2,08
a1 (cm)	1,19cm	-6,30
a2 (cm)	0,39cm	11,43
a3 (cm)	1,41cm	-4,08

A figura 5.33 ilustra a variação dos momentos negativos ao longo da viga VT5, em que algumas particularidades podem ser observadas em relação ao modelo 5C, que transmite os esforços de torção ao pórtico.

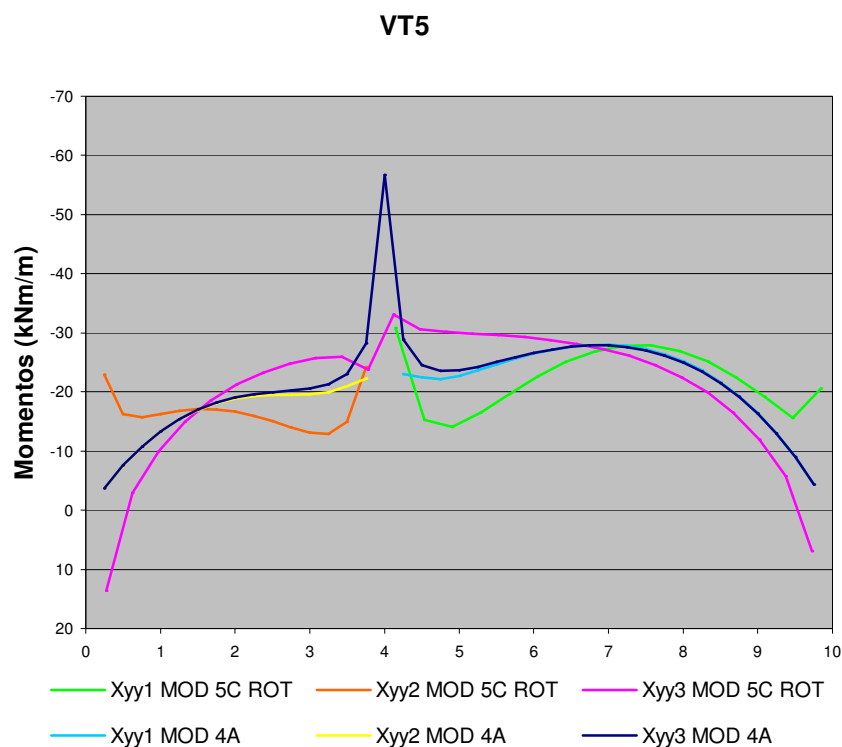


figura 5.33- variação Xyy1, Xyy2 e Xyy3 modelo 7 e modelo 5 para rigidez infinita da viga de apoio, articulada nas extremidades

A figura 5.34, por sua vez, ilustra o comportamento dos momentos torsores da viga VT5, em que é possível verificar que os momentos torsores são nulos nas extremidades, ou seja, não há transmissão de esforços adicionais às vigas e pilares do pórtico em decorrência da compatibilidade das lajes.

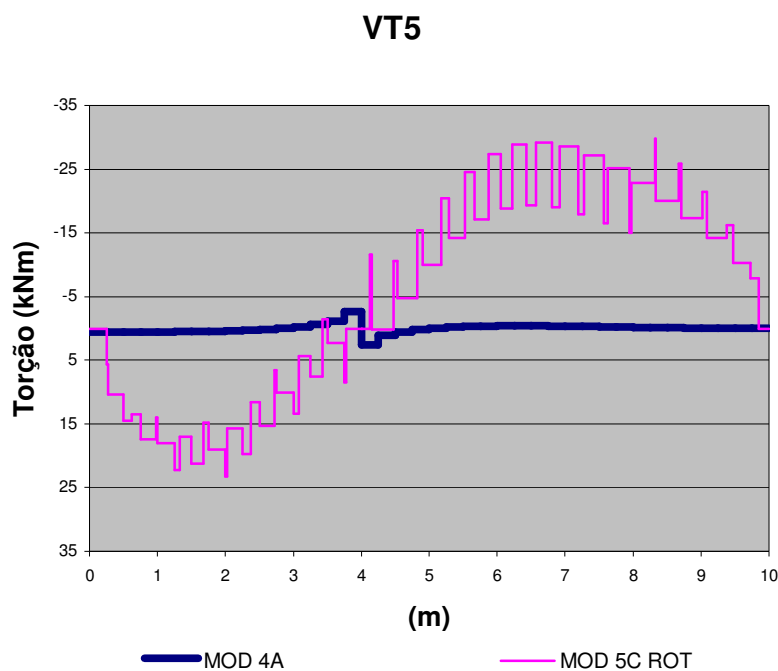


figura 5.34 - torção VT5 para modelo 5C ROT considerando rigidez infinita à torção e articulação nas extremidades em comparação ao modelo 4A.

Através da análise dos resultados da tabela 5.9, observa-se que em relação ao modelo solidário à estrutura, a liberação da torção nas extremidades das vigas trouxe melhoras para a maioria dos parâmetros, principalmente aos momentos negativos. Apesar da diminuição da diferenças em relação ao modelo 4A, as curvas dos momentos fletores modificaram-se nas barras próximas à liberação, ficando difusas, simulando artificialmente uma concentração de tensões. Sendo assim, este artifício não será utilizado nos modelos seguintes.

5.4.2.2. EFEITO DO ESPAÇAMENTO E ALINHAMENTO DA MALHA

Nos modelos já estudados, as malhas das lajes contíguas eram discretizadas utilizando-se malhas com diferentes espaçamentos. Deste modo, tal procedimento gerava pequenos trechos de grande rigidez à torção entre as barras das lajes, promovendo boa transmissão de momentos e uma compatibilidade satisfatória mesmo quando a rigidez a torção era limitada a 15% da rigidez integral.

Para a avaliação da compatibilidade dos momentos com o uso de malhas desencontradas em virtude do espaçamento da grelha, serão gerados novos modelos. O primeiro deles terá espaçamento de 50x50 chamando-se modelo 5D e o segundo terá espaçamento de 100x100, chamando-se modelo 5E. Cabe averiguar que todas as barras que compõe as lajes no pavimento estarão dispostas com o mesmo espaçamento. Assim para gerar o desencontro das barras das lajes no apoio, as malhas serão movidas de maneira que se formem duas situações. Na primeira situação, a distância entre as barras das lajes contíguas será equidistante gerando os modelos 5D1 e 5E1 (figuras 5.37 e 5.39) e na segunda, a distância será limitada a 25% do espaçamento geral da grelha (figuras 5.38 e 5.40) gerando os modelos 5D2 e 5E2. Sendo assim, poderá ser verificado se o comprimento da viga que tem real relevância na compatibilidade em detrimento da rigidez à torção a ser adotada.

Nestes modelos, para as vigas que promovem a continuidade, serão adotados dois valores de rigidez à torção, a rigidez integral e a limitada à 15% gerando dois sub-modelos para cada espaçamento. Por ter acarretado maiores diferenças no comparativo anterior, a rigidez muito grande à torção não será utilizada neste comparativo.

Todos os modelos serão comparados ao modelo 4A que promove a continuidade ponto a ponto e possui em comum à estes modelos a rigidez a torção da viga que promove a continuidade, ainda que reduzida a 15%.

As figuras 5.37, 5.38, 5.39 e 5.40 ilustram a disposição das barras dos modelos:

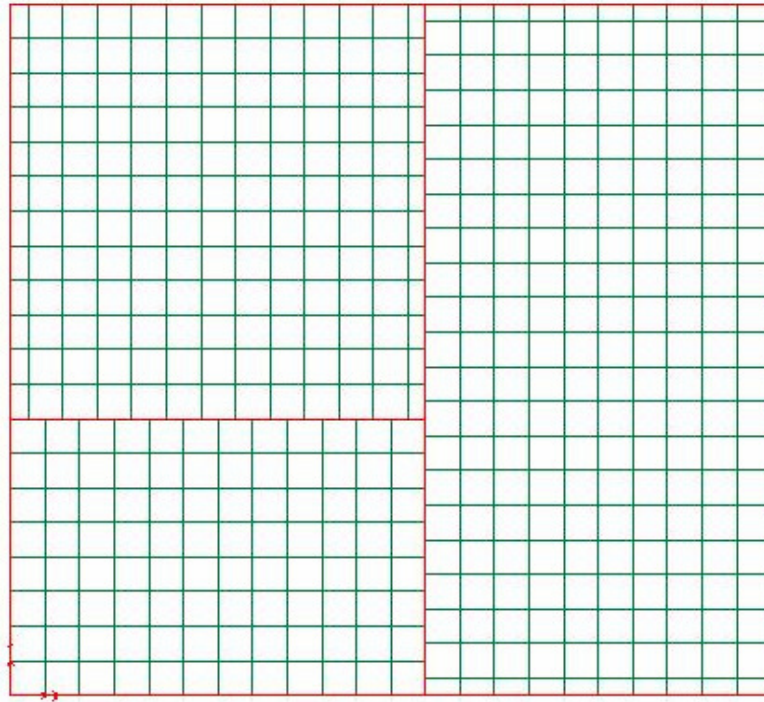


figura 5.37 - pavimento discretizado com malha de 50x50, contendo as barras das lajes contíguas equidistantes (MOD 5D1)

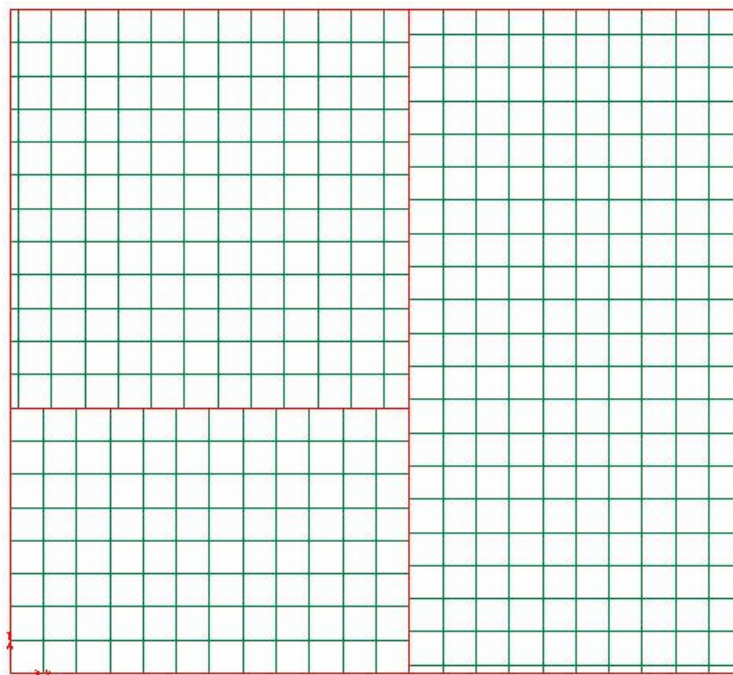


figura 5.38 - pavimento discretizado com malha de 50x50, contendo as barras das lajes contíguas espaçadas de 25% do espaçamento da grelha (MOD 5D2)

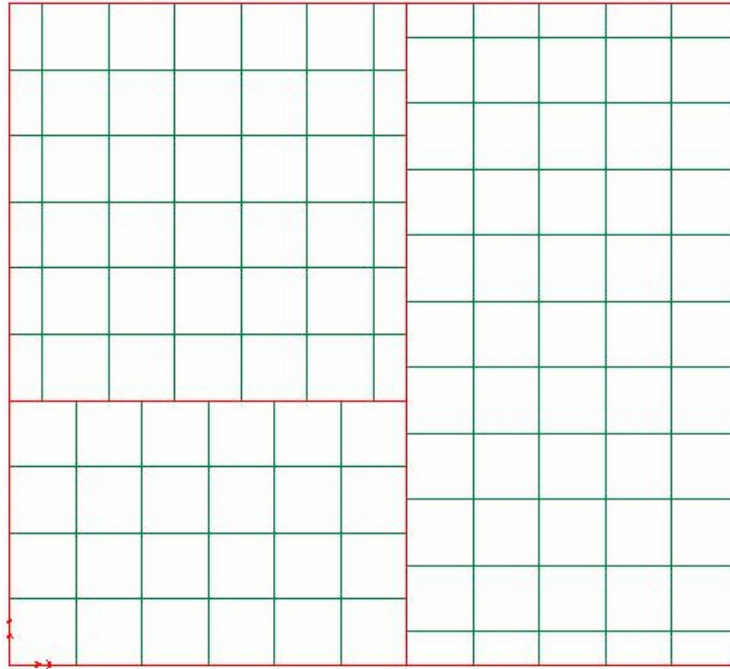


figura 5.39 - pavimento discretizado com malha de 100x100, contendo as barras das lajes contíguas equidistantes (MOD 5E1)

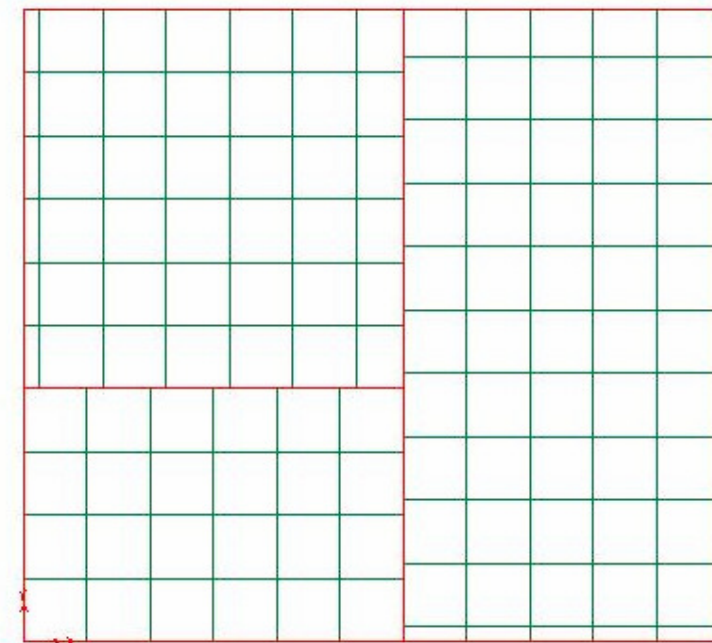


figura 5.40 - pavimento discretizado com malha de 100x100, contendo as barras das lajes contíguas espaçadas de 25% do espaçamento da grelha (MOD 5E2)

Para o modelo discretizado com malha de 50x50, utilizando-se rigidez à torção da viga de apoio limitada a 15%, foram encontrados os seguintes resultados, apresentados na tabela 5.10:

tabela 5.10- comparativo modelo 5D e modelo 4A – rigidez à torção da viga de apoio reduzida a 15% em ambos modelos. (kNm/m)

	MOD 5D1 15%	DIF. MOD 4A (%)	MOD 5D2 15%	DIF. MOD 4A (%)
Mxx1	10,84	7,54	10,34	2,58
Myy1	11,50	5,31	11,37	4,12
Xxx1	-18,44	-13,18	-19,06	-10,26
Xyy1	-24,90	-11,07	-25,66	-8,36
Mxx2	8,57	9,87	8,47	8,59
Myy2	4,40	23,60	4,35	22,19
Xxx2	-18,30	-12,86	-18,83	-10,33
Xyy2	-16,53	-12,07	-16,96	-9,79
Mxx3	6,46	12,15	6,19	7,47
Myy3	19,02	7,09	18,78	5,74
Xyy3	-24,86	-10,83	-25,55	-8,36
a1 (cm)	1,37	7,87	1,34	5,51
a2 (cm)	0,41	17,14	0,40	14,29
a3 (cm)	1,63	10,88	1,59	8,16

Na análise do modelo com espaçamento equidistante, foram constatadas perdas de transmissão de esforços por rotação elástica da viga de apoio, uma vez que a rigidez a torção reduzida a 15% permite maior deformação desta viga, tornando-a mais flexível à torção, sendo assim menos eficiente na promoção da continuidade. Em outras palavras, isto faz com que os ângulos de giro das barras das lajes contíguas sejam diferentes. Este efeito faz com que os diagramas de momento fletor negativo diminuam ocorrendo acréscimo nos momentos positivos em razão dessa diminuição. Observa-se que as diferenças mantiveram-se na casa de 20% para os negativos e 10% para os positivos. No intuito de incrementar a rigidez à torção da viga de apoio, a distância entre as barras das lajes foi modificada para 25% do espaçamento da grelha. Este artifício diminuiu muito pouco as diferenças para o modelo 4A, melhorando, quase imperceptivelmente, a compatibilização do pavimento.

A figura 5.41 ilustra o comportamento do diagrama de Xyy3 para cada uma das situações citadas.

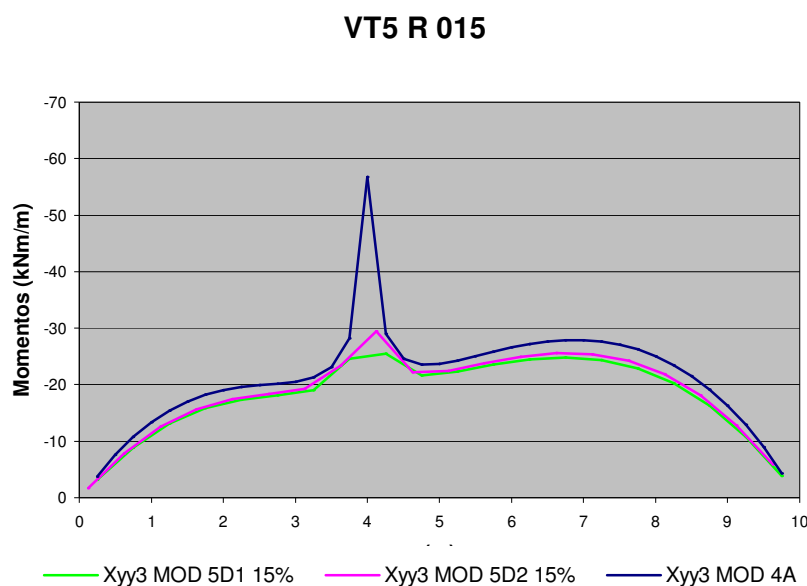


figura 5.41 - variação de Xyy3 para rigidez à torção da viga reduzida à 15% em comparação ao modelo 4A.

A tabela 5.11, por sua vez, ilustra os resultados para o modelo com rigidez integral, em que as perdas por rotação elástica da viga foram sensivelmente minimizadas, não refletindo em grandes melhoras quando a distância entre as barras foi diminuída, ou seja, apesar de haver a diminuição da distância entre as barras das lajes contíguas, o resultado foi muito parecido.

Tabela 5.11 - comparativo modelo 5D com rigidez à torção da viga de apoio integral e modelo 4A (kNm/m)

	MOD 100%	5D1DIF. 4A (%)	MODMOD 100%	5D2DIF. 4A (%)	MOD
Mxx1	10,41	3,27	10,32	2,38	
Myy1	11,05	1,19	11,03	1,01	
Xxx1	-21,27	0,14	-21,40	0,75	
Xyy1	-27,46	-1,93	-27,62	-1,36	
Mxx2	8,28	6,15	8,12	4,10	
Myy2	4,20	17,98	4,20	17,98	
Xxx2	-20,01	-4,71	-20,06	-4,48	
Xyy2	-16,54	-12,02	-16,96	-9,79	
Mxx3	6,19	7,47	5,93	2,95	
Myy3	17,99	1,30	17,94	1,01	
Xyy3	-27,06	-2,94	-27,19	-2,47	
a1 (cm)	1,27	0,00	1,26	-0,79	
a2 (cm)	0,38	8,57	0,38	8,57	
a3 (cm)	1,46	-0,68	1,45	-1,36	

Neste caso, para a grelha de 50x50, utilizando-se a rigidez integral da viga de apoio, o efeito da diminuição do comprimento de viga entre as lajes contíguas não melhorou significativamente as diferenças para o modelo 4A, como foi relatado no modelo com rigidez de 15%. A figura 5.42 mostra que o comportamento das curvas dos momentos flectores negativos estão mais próximos neste comparativo. Embora a rigidez integral foi a que melhor se adaptou aos espaçamentos destas malhas, esta não atende à recomendação da NBR 6118, em considerar a diminuição da rigidez à torção do concreto reduzida a 15% da rigidez integral.

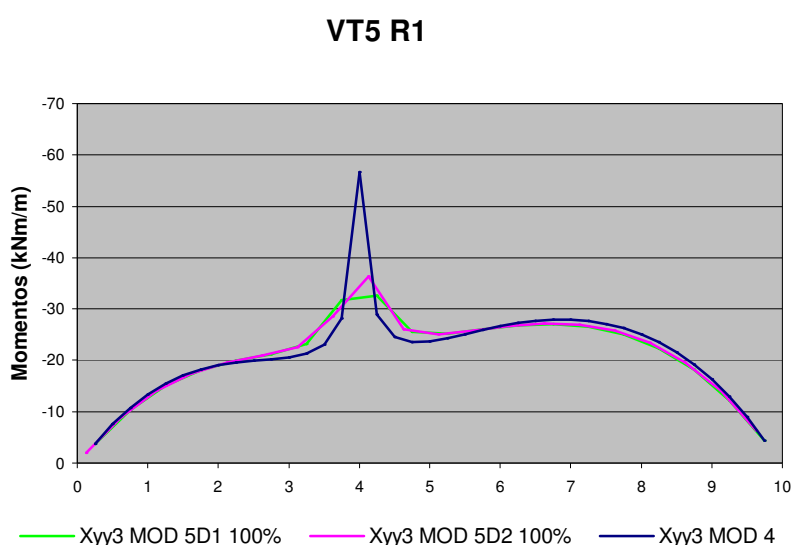


Figura 5.42 - variação de Xyy3 para rigidez à torção da integral em comparação ao modelo 4A.

Prosseguindo os estudos sobre este modelo, será feita a análise do modelo 5E, com malha de 100x100. Como imaginado, utilizando-se a rigidez de 15% na grelha com espaçamento de 100x100, as discrepâncias em relação ao modelo 4A foram maiores, uma vez que a distância entre as barras das lajes contíguas aumentou e a rigidez à torção da barra que promove a continuidade foi diminuída. A deformação por torção contribuiu para a diminuição dos momentos negativos e aumento dos valores dos momentos positivos. As diferenças mantiveram-se maiores que 20% em todas as situações para o espaçamento equidistante das barras. A tabela 5.12 ilustra estes resultados.

Tabela 5.12 - comparativo modelo 5E e modelo 4A – rigidez à torção da viga de apoio reduzida a 15% em ambos modelos (kNm/m)

	MOD 5E1 15%	DIF. MOD 4A (%)	MOD 5E2 15%	DIF. MOD 4A (%)
Mxx1	12,66	25,60	11,80	17,06
Myy1	13,03	19,32	12,87	17,86
Xxx1	-13,89	-34,60	-14,80	-30,32
Xyy1	-18,82	-32,79	-20,68	-26,14
Mxx2	9,65	23,72	9,51	21,92
Myy2	6,16	73,03	5,93	66,57
Xxx2	-13,38	-36,29	-14,50	-30,95
Xyy2	-12,16	-35,32	-13,17	-29,95
Mxx3	8,23	42,88	7,95	38,02
Myy3	21,41	20,55	20,91	17,74
Xyy3	-18,77	-32,68	-20,34	-27,04
a1 (cm)	1,64	29,13	1,50	18,11
a2 (cm)	0,54	54,29	0,50	42,86
a3 (cm)	1,92	30,61	1,84	25,17

Para o espaçamento reduzido entre as barras das lajes contíguas, as diferenças mantiveram-se maiores que 17%.

A figura 5.43, ilustra o comportamento dos momentos negativos dos modelos 5E1 e 5E2, com rigidez à torção das vigas que promovem a continuidade limitada a 15% da rigidez integral.

VT5 R 015

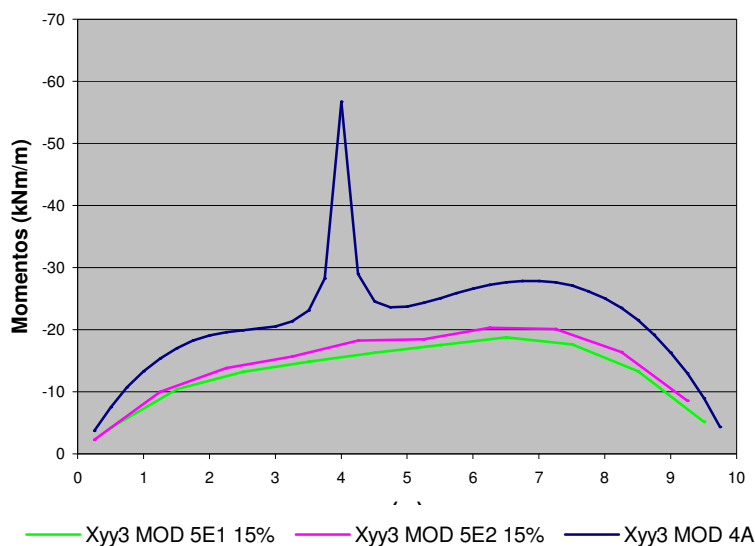


Figura 5.43 - variação de Xyy3 para rigidez à torção da viga reduzida à 15%

Analisando a tabela 5.13 e a figura 5.44, observou-se que, quando incrementada a rigidez à torção para 100%, as diferenças em relação ao modelo 4A diminuíram, mas ainda em valores próximos aos obtido com a grelha de 50x50 com rigidez à torção de 15%, não significando, portanto, um ganho real nos resultados. Pode-se concluir que, nesta malha, que a rigidez torcional da viga para uma compatibilização adequada dos momentos negativos está acima de 100%.

Tabela 5.13 – comparativo do modelo 5E com rigidez à torção da viga de apoio integral e modelo 4A (kNm/m)

	MOD 5E1 100%	DIF. MOD 4A (%)	MOD 5E2 100%	DIF. MOD 4A (%)
Mxx1	11,39	13,00	10,84	7,54
Myy1	11,83	8,33	11,64	6,59
Xxx1	-20,29	-4,47	-20,3	-4,43
Xyy1	-26,04	-7,00	-26,57	-5,11
Mxx2	8,80	12,82	8,77	12,44
Myy2	5,07	42,42	5,01	40,73
Xxx2	-18,15	-13,57	-18,42	-12,29
Xyy2	-16,37	-12,93	-16,51	-12,18
Mxx3	7,41	28,65	7,39	28,30
Myy3	18,89	6,36	18,86	6,19
Xyy3	-25,49	-8,57	-25,74	-7,68
a1 (cm)	1,33	4,72	1,27	0,00
a2 (cm)	0,39	11,43	0,39	11,43
a3 (cm)	1,55	5,44	1,52	3,40

Neste comparativo, a diminuição da distância entre as barras das lajes contíguas não trouxe melhoras significativas aos resultados da malha, como pode ser visto na figura 5.44.

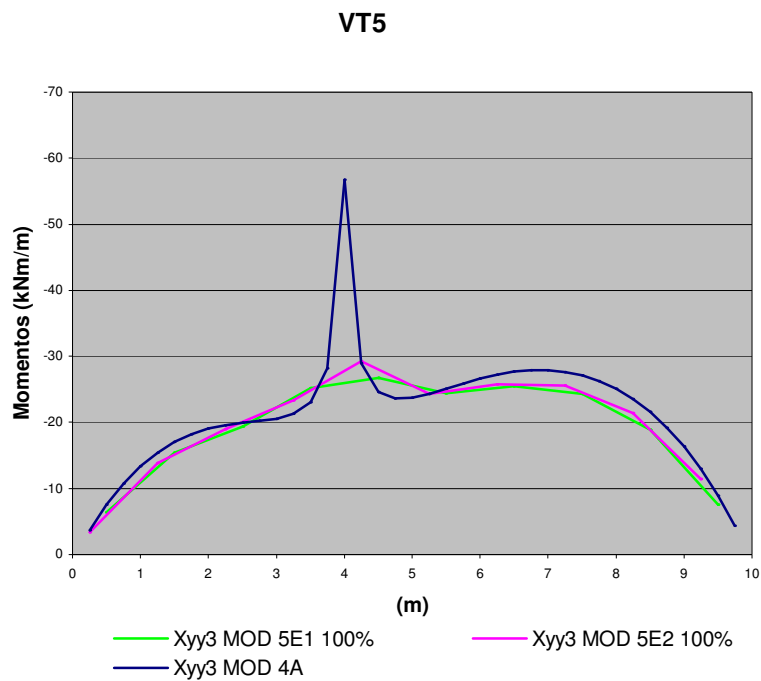


Figura 5.44 - variação de Xyy3 para rigidez à torção da integral do modelo 5E.

Para a retirada de algumas conclusões, as figuras 5.45 e 5.46 ilustram gráficos que demonstram a evolução dos resultados em função da malha e da rigidez da viga que promove a continuidade.

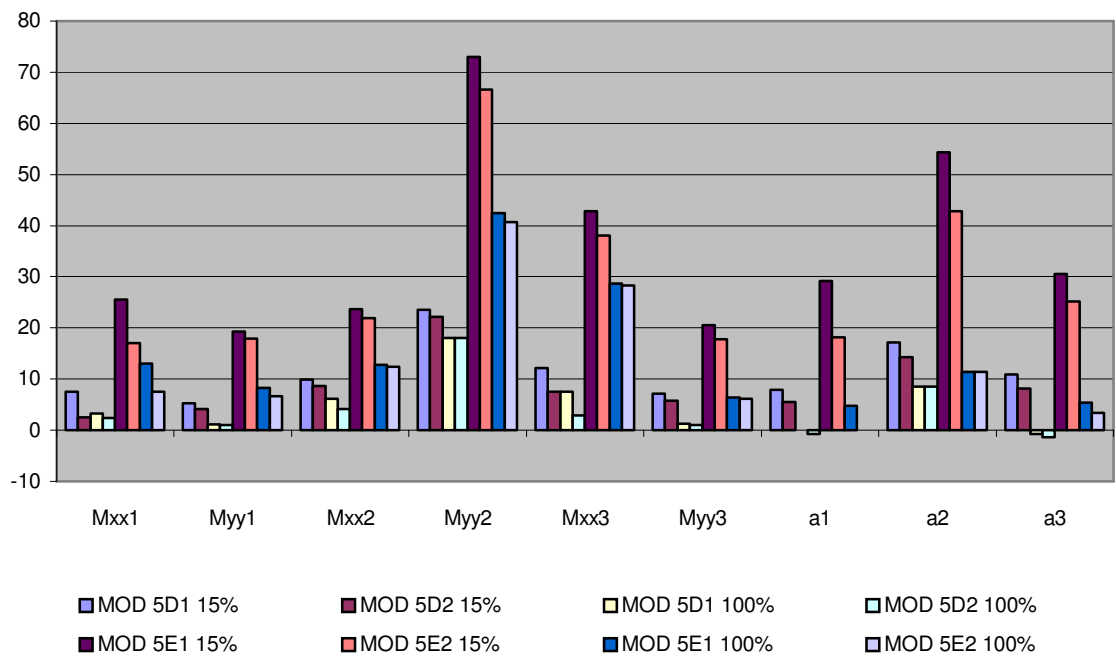


Figura 5.45 - Momentos fletores positivos e flechas: variação das diferenças em relação ao modelo 5 em porcentagem

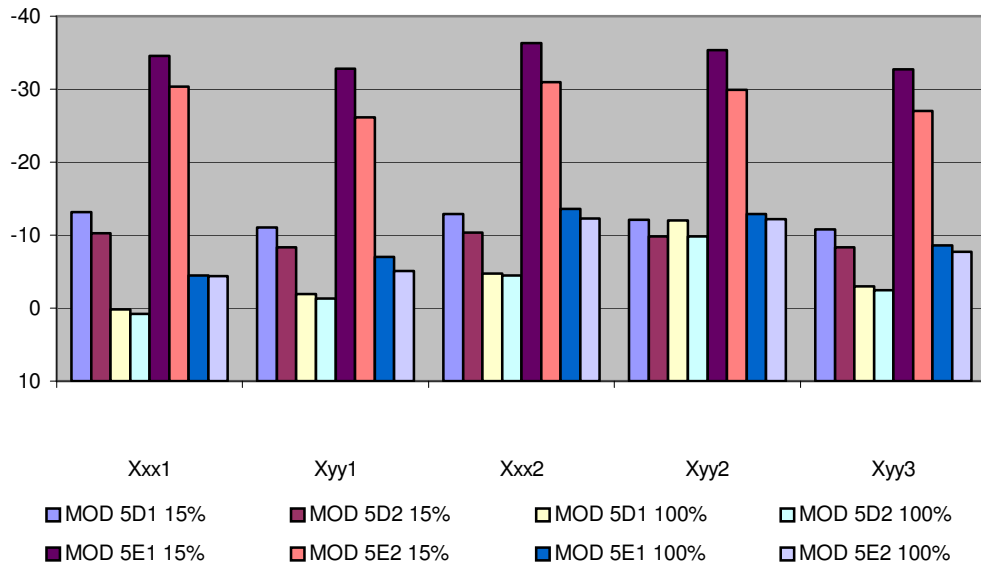


Figura 5.46 - Momentos fletores negativos: variação das diferenças em relação ao modelo 5 em porcentagem

No decorrer deste estudo, ao utilizar malhas mais espaçadas, as perdas de compatibilidade em virtude da deformação por torção da viga, provocadas pela redução da rigidez à torção recomendada pela NB1, ocasionaram uma redistribuição de esforços simulando uma plastificação da laje sobre o apoio.

Além das perdas provocadas pela rotação elástica da viga, o maior espaçamento da malha também reflete no mascaramento das concentrações de tensão no pavimento, como foi visto anteriormente. Ainda sim, a diminuição do espaço entre as barras das lajes contíguas não auferiu ganhos significativos aos resultados.

Embora seja confortável empregar a rigidez integral à torção da viga em malhas mais espaçadas, visando melhorar a transmissão de momentos para gerar a continuidade entre as lajes, este artifício não vai ao encontro da recomendação da NBR 6118 e outros autores, uma vez que ocorrem perdas de rigidez já na fase elástica em razão da pré-fissuração do concreto.

É importante salientar que com o avanço dos computadores e dos processos de cálculo para resolução de equações, o uso de malhas menos espaçadas tem sido cada vez mais oportuno na modelagem de pavimentos, uma vez que o tempo dispendido no processamento dessas estruturas está cada vez menor.

Na utilização de malhas menos espaçadas em malhas desencontradas, foi verificado que é vantajoso empregar a rigidez reduzida à 15%, sendo que, além de atender a recomendação da NBR 6118, esta malha mostrou eficácia na compatibilização dos momentos no apoio, de tal modo que essa rigidez pode ser generalizada tanto para barras encontradas quanto para barras desencontradas sobre o apoio.

5.5 EFEITO DA RIGIDEZ DOS APOIOS

5.5.1 EFEITO DA RIGIDEZ DOS APOIOS EM MALHAS COINCIDENTES COM RIGIDEZ À TORÇÃO NULA DA VIGA DE APOIO – MODELO 6

Num pavimento, as lajes não são as únicas a sofrerem deformações. As vigas que servem de suporte também estão sujeitos a deformações devido às cargas.

Para avaliar o comportamento dos momentos das lajes em função da deslocabilidade das vigas de contorno, foram atribuídos ao modelo 3, vigas considerando a largura colaborante da laje, além de pilares nos encontros destas vigas. Este será o modelo 6. O modelo será analisado com altura de vigas de 50, 30, 20 e 10cm, gerando os modelos 6A, 6B, 6C e 6D, respectivamente. A rigidez à torção das vigas bordo será desconsiderada. Portanto, o giro das lajes sobre a continuidade não sofrerá a restrição das vigas.

Por se tratar de vigas flexíveis, a rigidez dos pilares torna-se importante neste comparativo. Para tanto, serão incluídos oito pilares de seção 20 x 30cm no encontro das vigas do painel, como ilustra a figura 5.47. Os esforços serão comparados com os valores obtidos na análise do modelo 3A, que possui apoios indeslocáveis.

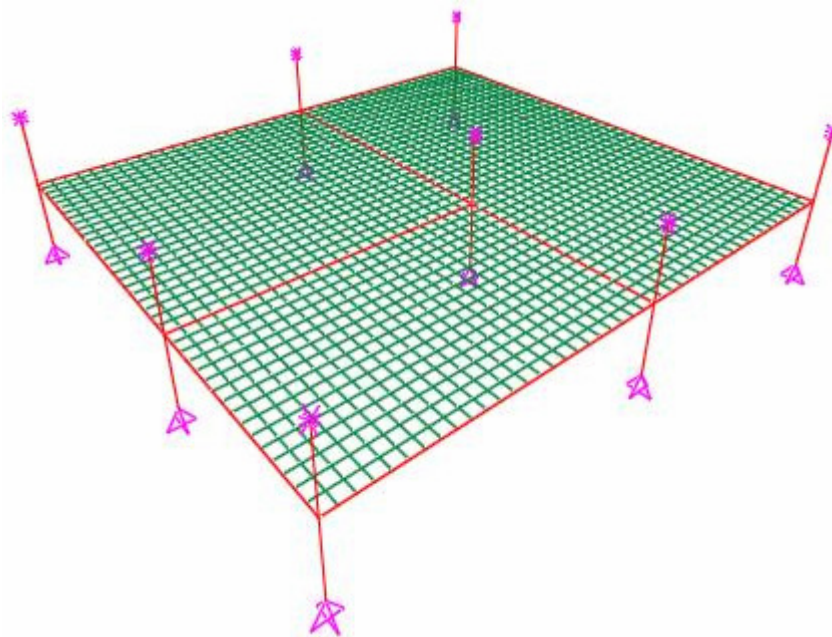


Figura 5.47: vista tridimensional do pórtico do modelo 6. (SAP 2000)

Dados:

Pilares: seção 20 x 30cm, com altura de 1,40m

Os dados das vigas e a convenção das larguras colaborantes podem ser visualizados na figura 5.48 e na tabela 5.14:

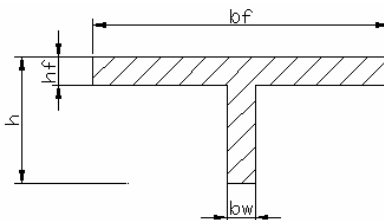


Figura 5.48: Seção em T das vigas do modelo 6.

Tabela 5.14 – Seção em T das vigas do modelo 6.

viga	bw	H	Hf	bf
1	12	50/30/20	10	48
2	12	50/30/20	10	84
3	12	50/30/20	10	48
4	12	50/30/20	10	48
5	12	50/30/20	10	84
6	12	50/30/20	10	72

No modelo de vigas com altura de 10cm, o pavimento comportar-se-á como uma laje plana. Sendo assim, a largura colaborante da laje será desprezada.

Neste modelo, será analisada a deformação das vigas de apoio das lajes. A convenção dos deslocamentos máximos por viga está ilustrada na figura 5.49:

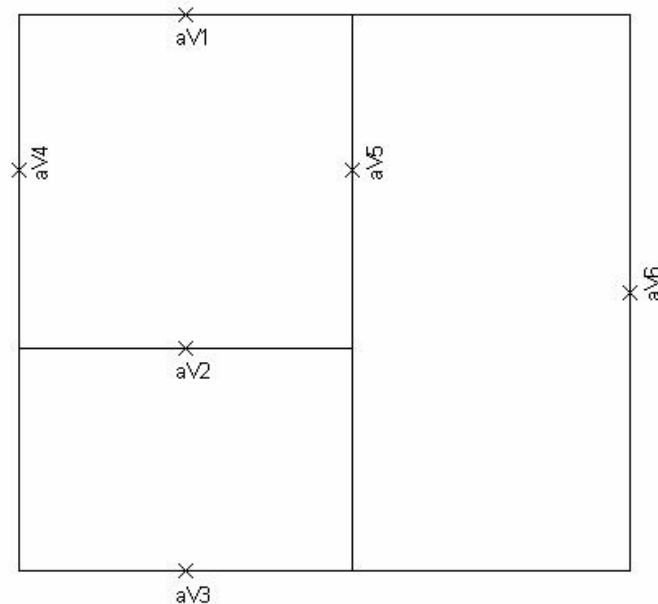


Figura 5.49 – Convenção dos deslocamentos máximos das vigas.

A tabela 5.15 ilustra os resultados encontrados para cada altura da viga de apoio, bem como as diferenças percentuais para o modelo 3A.

Para a tomada dos momentos negativos máximos incluindo-se a flexibilidade das vigas, foram percebidos novos efeitos nos diagramas, em que esses máximos migravam para outros pontos do bordo, não mais posicionando-se aproximadamente no meio do bordo, como ocorria com as vigas inflexíveis. Para tanto, quando este ponto de momento máximo estiver numa concentração de tensão, será tomado o valor da barra imediatamente ao lado.

Tabela 5.15 – Comparativo vigas indeslocáveis x variação das vigas de apoio. Momentos em KNm/m e flechas em cm.

	MOD 3A	MOD 6A		MOD 6B		MOD 6C		MOD 6D	
			DIF (%)		DIF (%)		DIF (%)		DIF (%)
Mxx1	10,08	10,92	8,33	12,35	22,57	20,51	103,50	34,60	243,25
Myy1	10,93	11,31	3,49	11,67	6,74	15,27	39,70	26,39	141,41
Xxx1	-21,12	-18,78	-11,05	-18,22	-13,72	-36,71	73,84	-86,54	309,81
Xyy1	-27,98	-28,88	3,23	-49,22	75,93	-70,12	150,62	-122,26	337,01
Mxx2	7,76	7,16	-7,73	6,44	-17,01	6,32	-18,56	16,77	116,06
Myy2	3,54	4,44	25,42	8,20	131,64	14,88	320,34	26,17	639,14
Xxx2	-21,12	-18,78	-11,05	-18,22	-13,72	-36,71	73,84	-86,54	309,81
Xyy2	-18,97	-34,48	81,74	-44,29	133,49	-56,75	199,15	-65,11	243,22
Mxx3	5,84	6,67	14,29	11,84	102,66	20,70	254,42	35,20	502,77
Myy3	17,85	16,75	-6,17	15,86	-11,16	14,83	-16,90	19,44	8,91
Xyy3	-27,98	-28,88	3,22	-49,22	75,91	-70,12	150,60	-122,26	336,96
a1	1,27	1,63	28,28	2,20	73,45	3,02	137,40	-5,02	-495,58
a2	0,35	0,52	49,11	0,80	127,83	1,42	305,46	2,85	712,89
a3	1,47	2,32	57,55	3,69	150,99	6,14	317,59	11,26	665,82
aV1		0,15		0,47		1,07		2,71	
aV2		0,35		0,84		1,50		2,99	
aV3		0,11		0,33		0,77		1,88	
aV4		0,20		0,57		1,22		2,94	
aV5		0,51		1,32		2,30		4,38	
aV6		1,57		3,55		6,25		11,26	

Como já eram esperadas, as variações foram significativas em virtude do aumento da flexibilidade dos apoios. Através desse comparativo chegou-se à conclusão que quanto mais se aumentava a flexibilidade do apoio, mais os momentos diferiam em relação ao modelo 3A que, em tese, mais se assemelha ao painel calculado pelas teorias clássicas.

Na análise dos deslocamentos das vigas, à medida que estas eram flexibilizadas, foi percebido que as flechas máximas das lajes aumentaram. Este comportamento pode ser percebido na figura 5.50, em que é ilustrada a deformada do modelo 6D, que possui vigas de 10cm de altura.

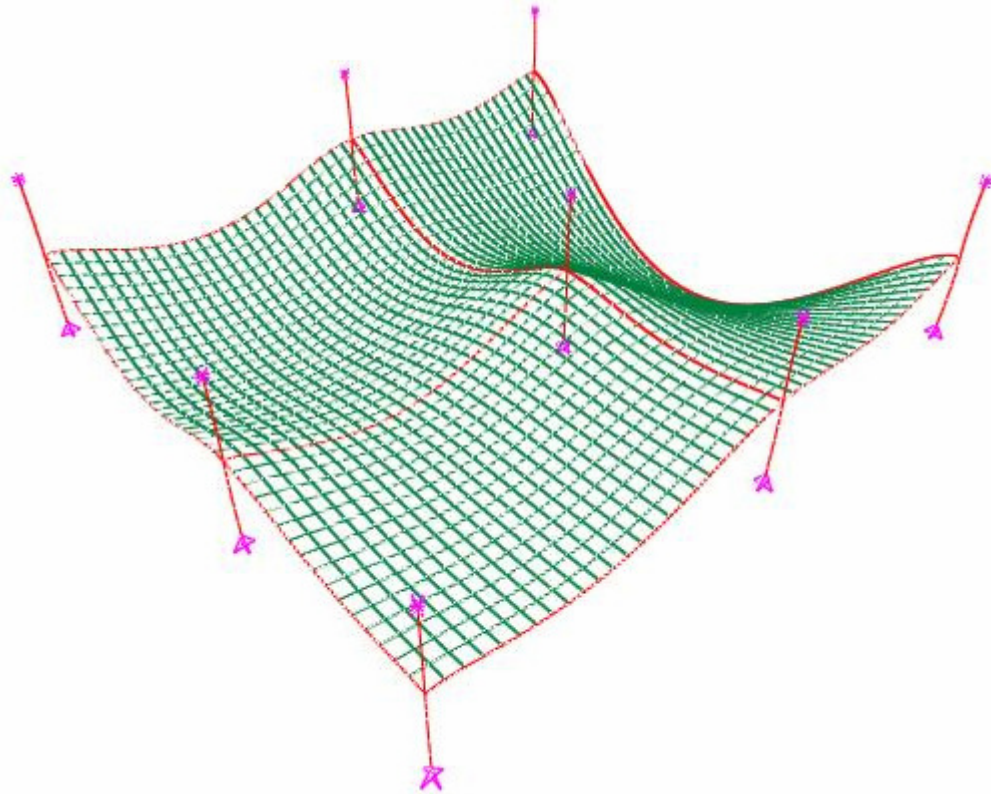


Figura 5.50 – Deformada modelo 6D. (SAP 2000)

Na análise dos esforços das lajes, a maior diferença encontrada recaiu sobre X_{yy1} , X_{yy2} e X_{yy3} , uma vez que, em virtude da concentração de esforços no encontro das três lajes, ocorre um pico no diagrama de momentos fletores. Neste bordo, como pode ser visto da figura 5.51, não foi possível coletar um momento máximo, que não recaísse sobre o encontro das lajes 1, 2 e 3.

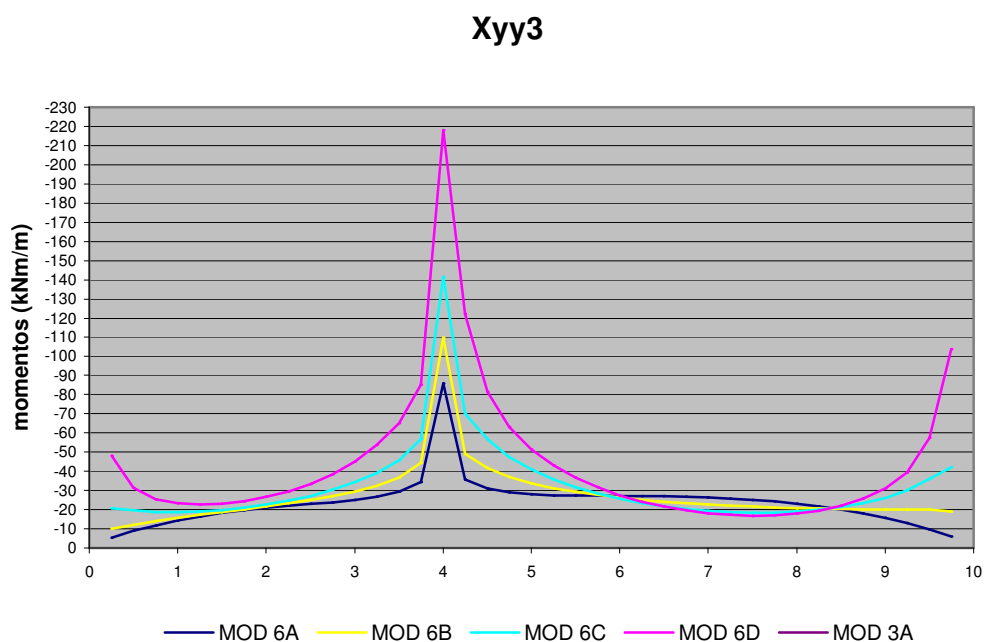


Figura 5.51 - Variação do momento fletor negativo no bordo comum entre as lajes 1, 2 e 3.

A figura 5.52, mostra a variação dos momentos negativos no bordo comum entre as lajes 1 e 2. Para o modelo com vigas de 50cm, assim como ocorre no modelo das lajes de apoios indeslocáveis, os momentos tendem a zero do início e ao fim do apoio, em que o máximo momento fletor negativo posiciona-se aproximadamente no trecho intermediário. Para os outros modelos, com vigas mais flexíveis, os momentos máximos ocorreram junto aos pilares, mostrando que as lajes tendem a transmitir os esforços diretamente para os pilares à medida de que as vigas tornavam-se mais deformáveis.

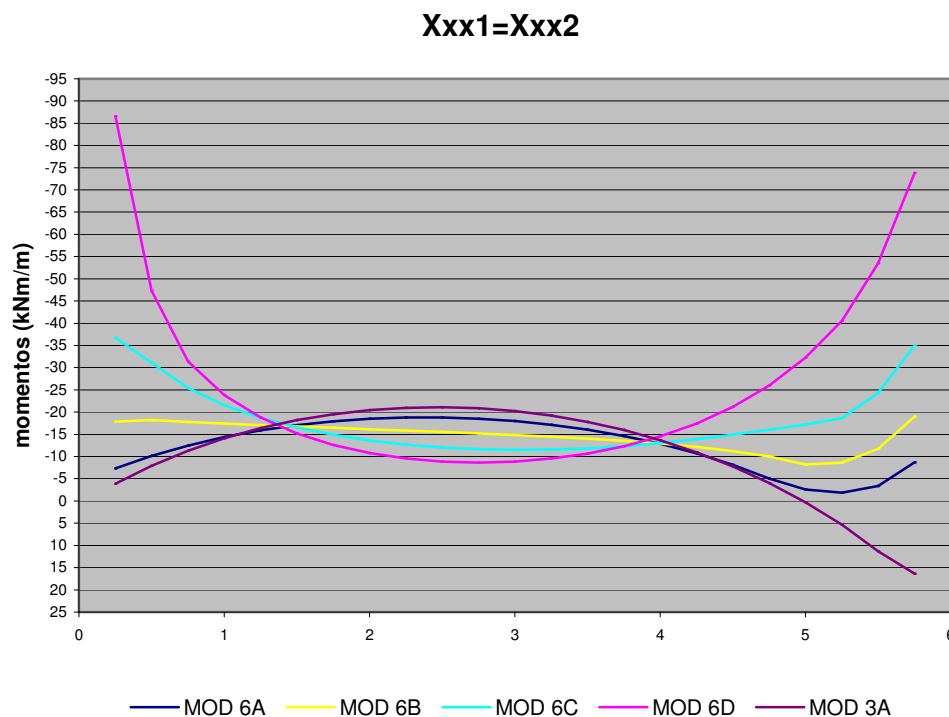


Figura 5.52 – Variação do momento fletor negativo entre as lajes 1 e 2.

O mesmo comportamento pôde ser detectado no bordo comum entre as lajes 1,2 e 3, conforme a figura 5.51, ficando mais evidente nas vigas com altura menor que 30cm. Para as vigas de menor altura, a rigidez do pilar passa a influenciar nos momentos negativos das lajes. Observa-se também, o aumento no pico de momento fletor no encontro das três lajes, onde existe concentração de tensões.

Para que se possa visualizar melhor o comportamento dos momentos fletores das lajes e função da deslocabilidade dos apoios, foram traçadas seções transversais. O plano da primeira seção, de coordenada $y = 7\text{m}$, cortam as lajes 1 e 3, ilustrado na figura 5.53:

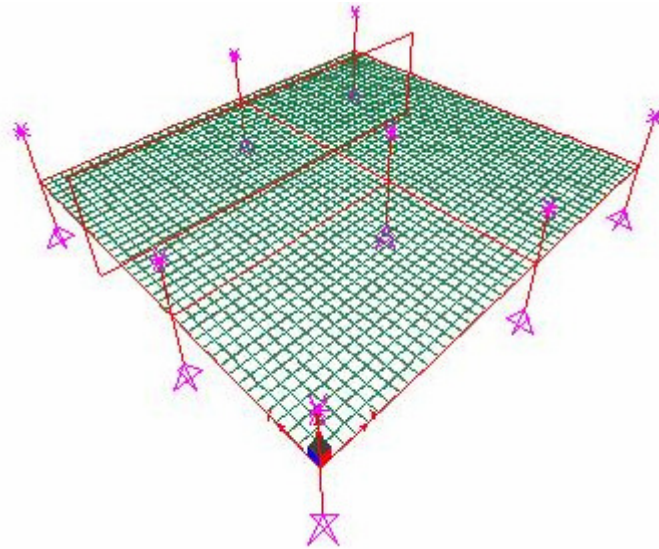


Figura 5.53– Seção sobre as lajes 1 e 3 – modelo 6

O comportamento do momento fletor das lajes nesta seção em virtude da flexibilização das vigas pode ser visto na figura 5.54:

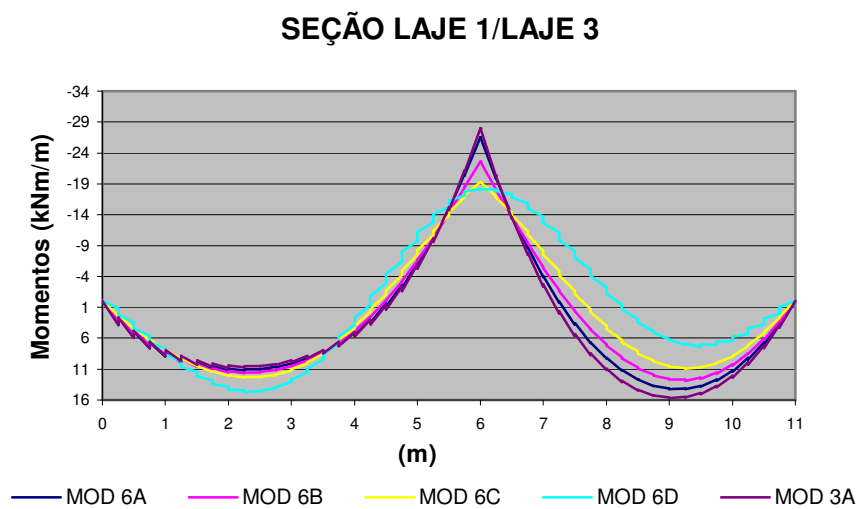


Figura 5.54 – Momento M_{yy} e X_{yy} em função da variação da rigidez dos apoios (não correspondem aos valores máximos)

Por sua vez, plano da segunda seção, de coordenada $x = 3\text{m}$, cortam as lajes 2 e 1 está ilustrado na figura 5.55:

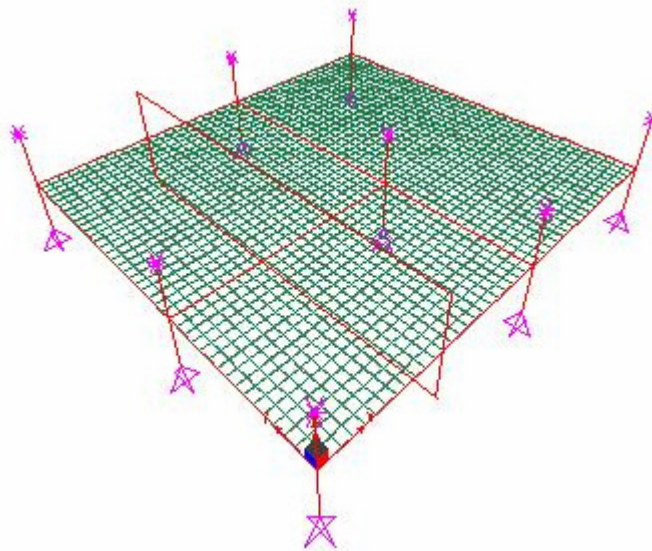


Figura 5.55– Seção sobre as lajes 1 e 2 – modelo 6

O comportamento do momento fletor das lajes nesta seção em virtude da flexibilização das vigas pode ser visto na figura 5.56:

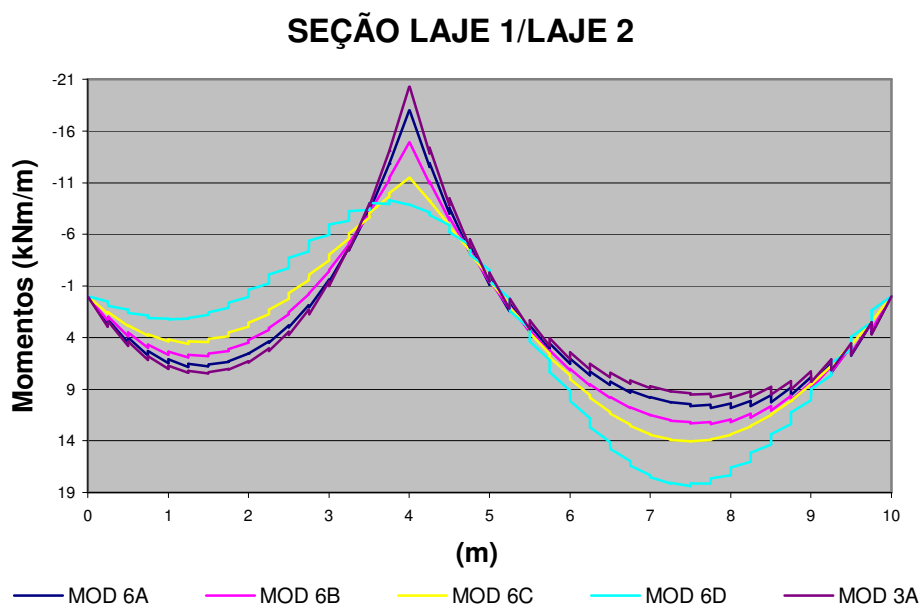


Figura 5.56 – Momento M_{xx} e X_{yy} em função da variação da rigidez dos apoios (não correspondem aos valores máximos)

Analisando as seções 1 e 2 entre as lajes contíguas, observa-se a tendência de giro no sentido da laje de maior vão, acentuado pelo aumento da flexibilidade do apoio. Provocado pela compatibilização automática das lajes, este giro provoca a diminuição dos momentos positivos das lajes de menor vão, assim como o aumento desses momentos para as lajes de maior vão. Nas seções ilustradas pelas figuras 5.54 e 5.56, os momentos fletores negativos das lajes diminuam à medida que a vigas eram flexibilizadas.

Por fim, o plano da terceira seção, de coordenada $y = 2\text{m}$, cortam as lajes 2 e 3 ilustrada na figura 5.57:

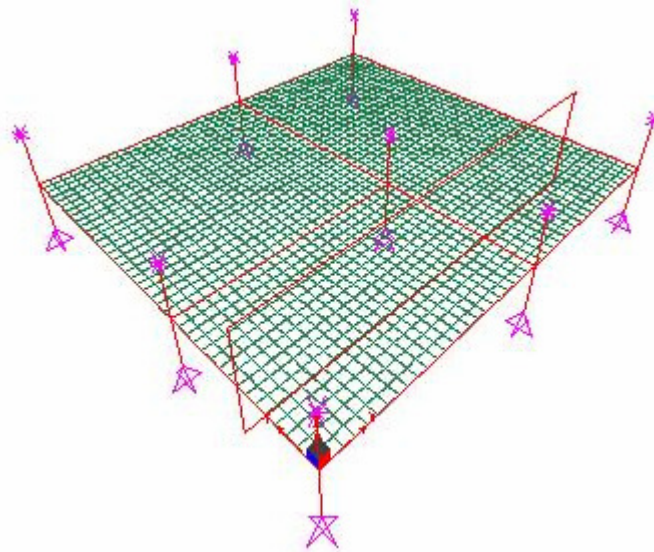


Figura 5.57 – Seção sobre as lajes 2 e 3 – modelo 6

O comportamento do momento fletor das lajes nesta seção em virtude da flexibilização das vigas pode ser visto na figura 5.58:

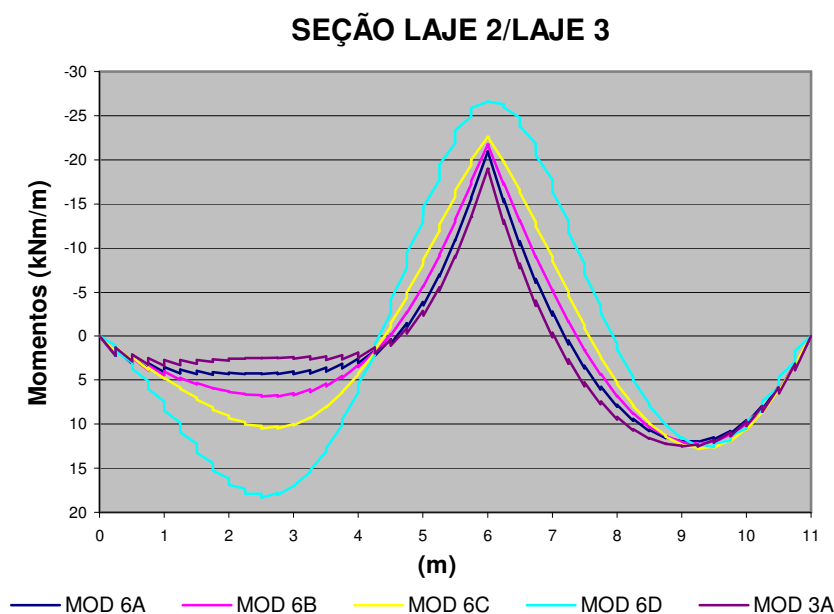


Figura 5.58– Momento M_{yy} e X_{yy} em função da variação da rigidez dos apoios (não correspondem aos valores máximos)

Analisando a figura 5.58, que mostra a seção sobre as lajes 2 e 3, o comportamento relatado sobre as seções 1 e 2 não está presente, uma vez que os momentos negativos das lajes aumentaram, ao invés de diminuir.

Diante dessas análises foi percebida a sensibilidade dos resultados das lajes quanto à variação da rigidez à flexão das vigas de apoio, no qual conclui-se que em vigas cujas alturas são mantidas na relação aproximada de 10% do vão, obtém-se esforços com valores aproximados em relação às teorias clássicas. No entanto, à medida que se diminui a altura, pode-se observar o comportamento similar à de uma laje plana.

5.5.2. EFEITO DA DESLOCABILIDADE VERTICAL DOS APOIOS EM MALHAS DESENCONTRADAS – MODELO 7

Para o estudo deste efeito, foi utilizado o modelo 5A, modelado em analogia de grelha com malhas desencontradas, incluindo-se os mesmos parâmetros utilizados no modelo 6A, ou seja, vigas T, tendo as medidas da largura colaborante conforme a tabela 5.14, altura de 50cm e consideração dos pilares. Este será o modelo 7. Sendo fundamental para a promoção da continuidade em malhas desencontradas, a rigidez a torção das vigas que promovem a continuidade de todos os modelos será considerada como 15% da rigidez integral. O modelo 8, que em tese, seria a melhor opção para modelar o piso, será modelado em analogia de grelha com malha coincidente e elementos finitos (modelo 8EF) para comparação. Este modelo possui os mesmos parâmetros para as vigas e pilares citados acima para o modelo 7. a figura 5.59 ilustra o modelo 7 que possui as lajes modeladas em analogia de grelha com malha desencontrada.

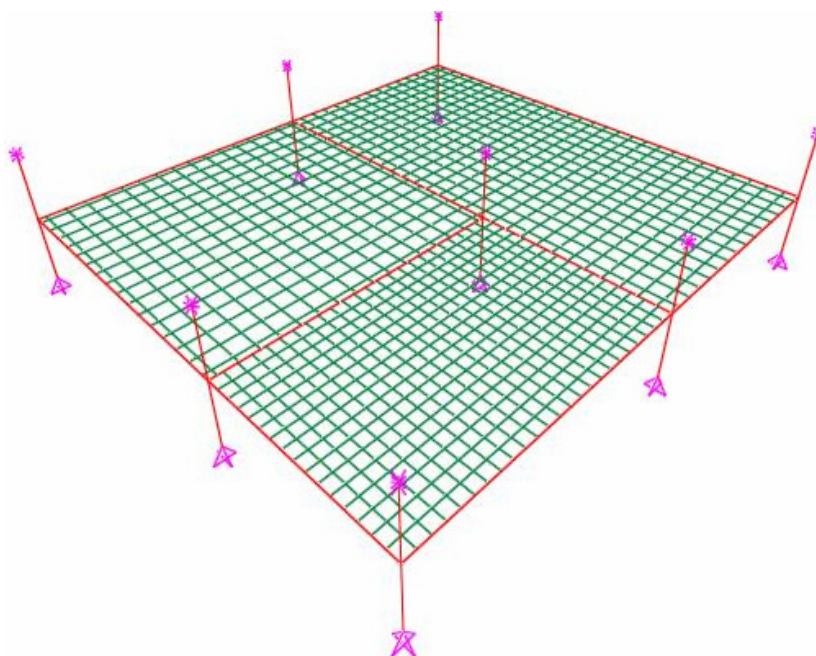


figura 5.59 - Vista do modelo 7 em perspectiva.

A tabela 5.16 ilustra os resultados obtidos para o modelo 7 modelado em analogia de grelha com malha desencontrada, junto ao modelo 8 modelado elementos finitos e analogia de grelha com malha coincidente:

Tabela 5.16 - resultados do modelo 7 em comparação ao modelo 8 modelado em analogia e elementos finitos (kNm/m)

	MOD 7	MOD 8	MOD 8EF
Mxx1	10,94	10,92	11,90
Myy1	11,30	11,28	12,14
Xxx1	-18,21	-18,92	-17,63
Xyy1	-24,20	-27,68	-34,98
Mxx2	7,33	7,20	7,41
Myy2	4,59	4,44	5,42
Xxx2	-19,63	-18,68	-17,44
Xyy2	-37,62	-29,16	-34,44
Mxx3	6,82	6,68	8,35
Myy3	17,11	16,68	16,24
Xyy3	-31,19	-29,88	-29,49
a1 (cm)	1,63cm	1,63cm	1,50cm
a2 (cm)	0,54cm	0,52cm	0,50cm
a3 (cm)	2,37cm	2,31cm	2,18cm

Analisando a tabela 5.16 percebe-se que mesmo na utilização das malhas desencontradas no pavimento modelado em analogia de grelha, a alteração dos momentos fletores positivos é muito pequena. Vale ressaltar que não houve perdas por rotação elástica das vigas que promovem a continuidade, mesmo utilizando a relação de 15% da rigidez torcional, o que é um fator positivo.

As figuras 5.60 e 5.61 ilustram a variação dos momentos fletores negativos do modelo 7 e 8 sobre a viga VT5, em comparação com o modelo 8 em elementos finitos.

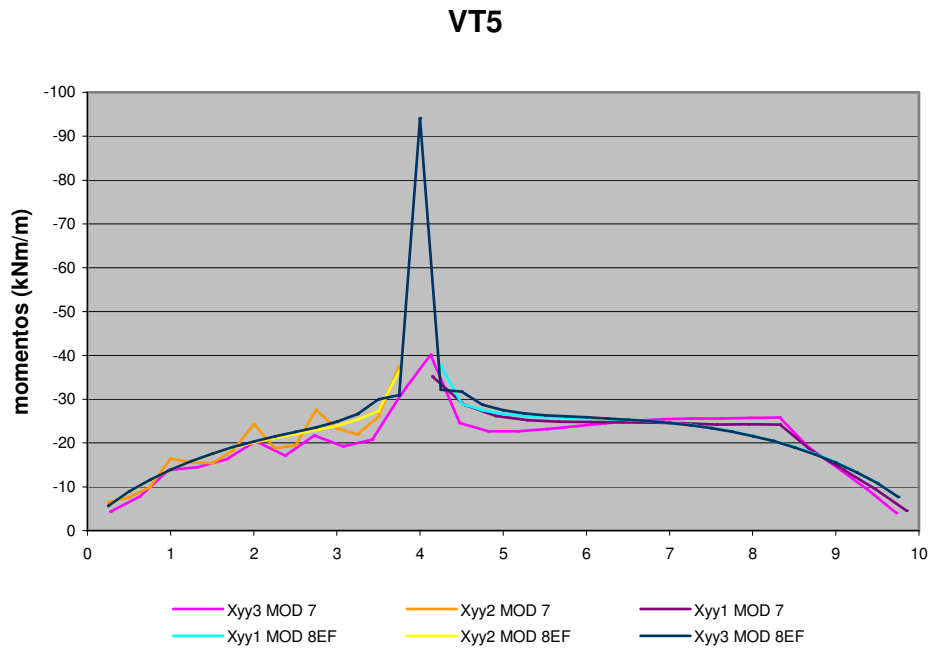


Figura 5.60 - Variação do momentos fletores negativos das lajes 1, 2 e 3 do modelo 7 em comparação ao modelo 8 em MEF

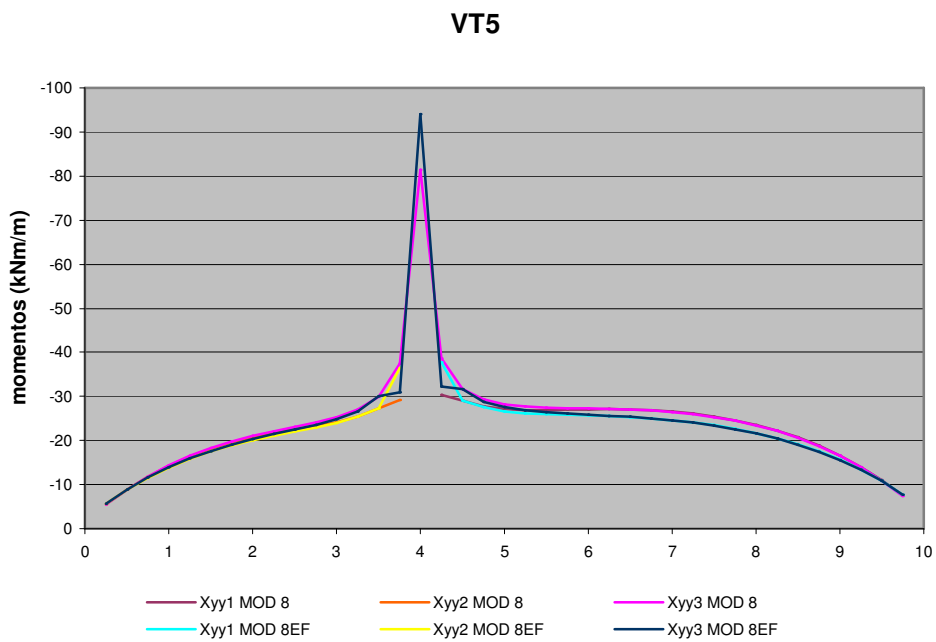


Figura 5.61 - Variação do momentos fletores negativos das lajes 1, 2 e 3 do modelo 8 em analogia de grelha em comparação ao MEF

Por sua vez as figuras 5.62 e 5.63 ilustram a variação dos momentos fletores negativos do modelo 7 e 8 sobre a viga VT2, em comparação com o modelo 8 em elementos finitos.

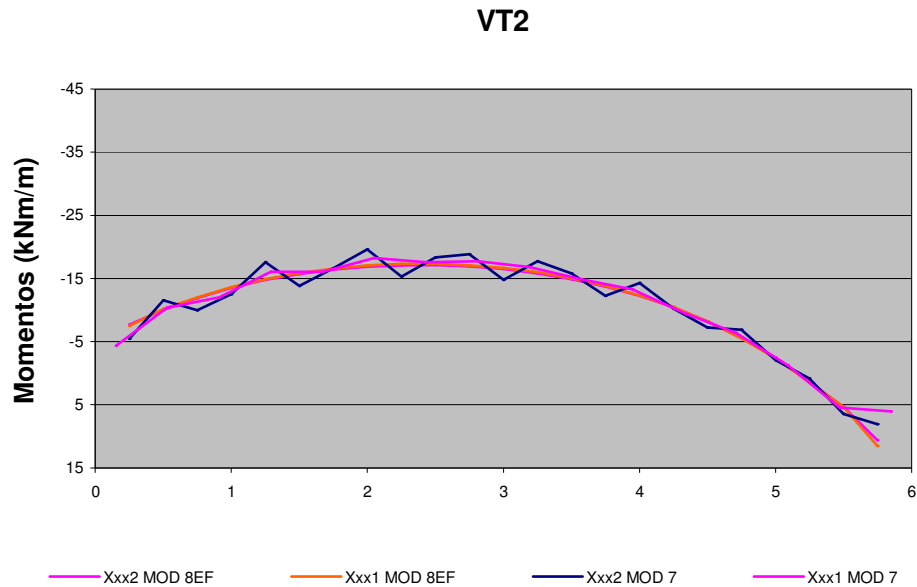


Figura 5.62 - Variação do momentos fletores negativos das lajes 1 e 2 do modelo 8 em comparação ao modelo 6 em MEF

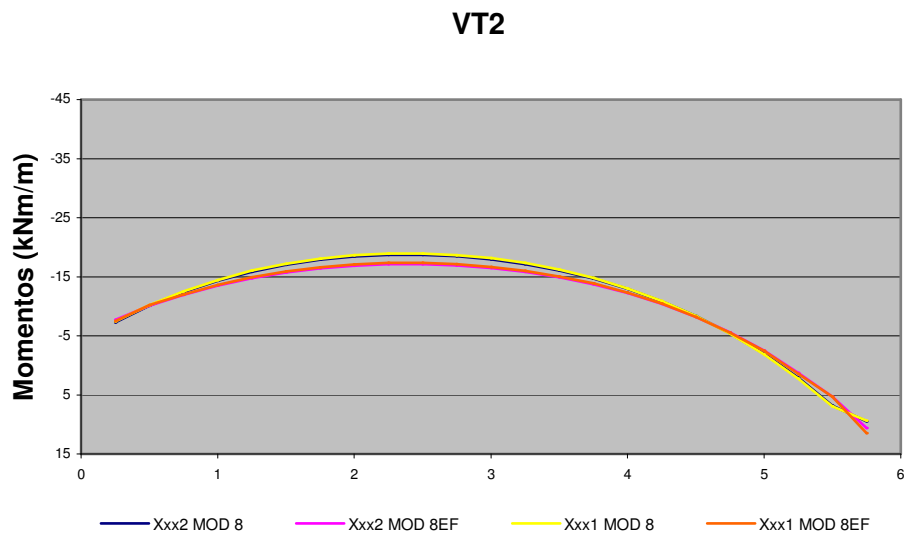


Figura 5.63 - Variação do momentos fletores negativos das lajes 1 e 2 do modelo 8 em analogia de grelha em comparação ao MEF

Procedendo a análise destes diagramas, percebe-se que, assim como aconteceu no modelo 4A, a descontinuidade no diagrama de momentos fletores negativos entre as lajes contíguas, em virtude da inclusão da rigidez à torção da viga de apoio descontinuidade foi muito pequena, em razão da seção da viga transversal e da redução da rigidez à torção de 85% como recomenda a norma.

Nas figuras 5.60 e 5.62 em que são ilustradas os diagramas das continuidades do modelo 7, foram percebidas as mesmas particularidades estudadas no modelo 5, ou seja, nos trechos de viga que promovem a continuidade entre as lajes contíguas que são muito pequenos, ocorrem picos nos diagramas. Ainda sim, na média, estes resultados são satisfatórios.

Ainda em relação ao modelo 7, outra particularidade percebida foi a diminuição do pico de momento fletor no encontro das três lajes conforme pode ser visto na figura 5.60 em comparação a figura 5.61. Justifica-se tal comportamento pelo fato do modelo 6, possuir uma barra justamente neste ponto, modelando de forma mais adequada as concentrações de tensão, tratando-se da analogia de grelha. No modelo 7, que é modelado em analogia de grelha com malha desencontrada, as barras contornam este ponto, como pode ser visto na figura 5.64, diminuindo os momentos fletores na região.

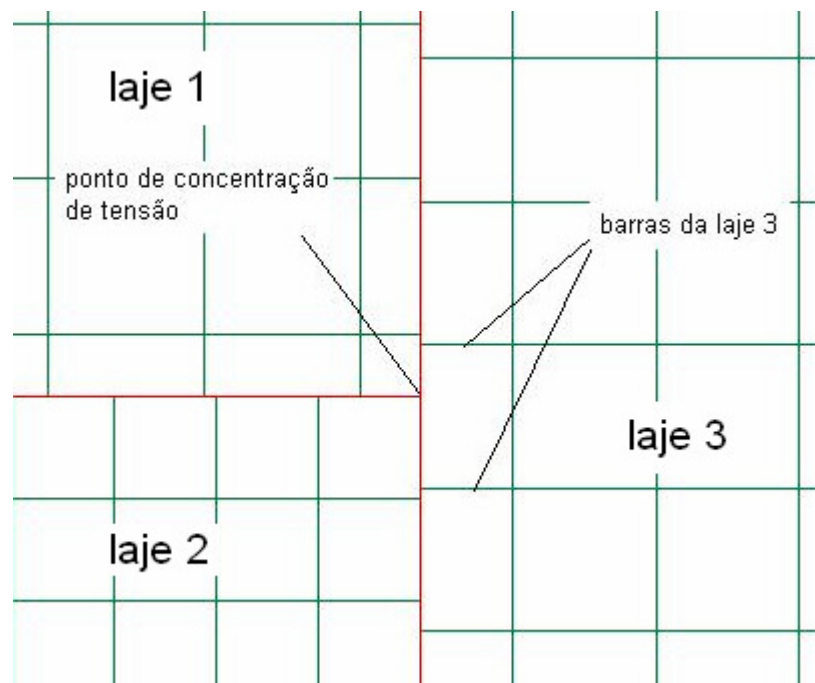


Figura 5.64 – posicionamento das barras sobre o ponto de encontro das lajes 1,2 e 3 – modelo 7

As figura 5.65 e 5.66 ilustram os momentos na direção y-y e x-x, para o modelo 8 com as lajes modeladas em elementos finitos:

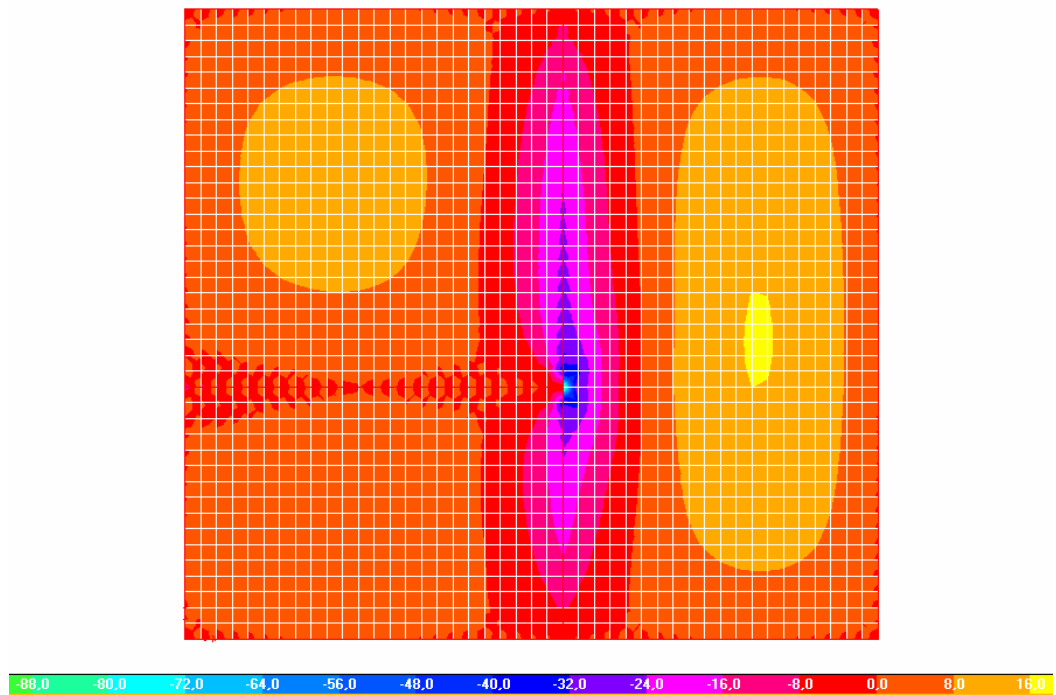


Figura 5.65 - variação dos momentos na direção y-y do modelo 8 em elementos finitos. (kNm/m)

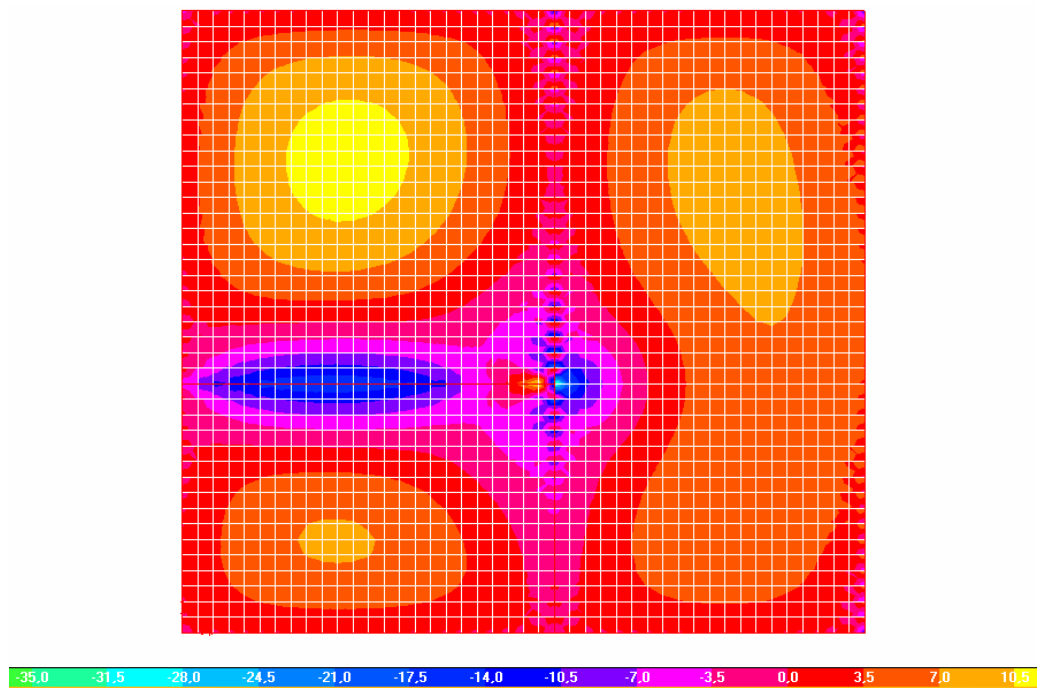


Figura 5.66 - variação dos momentos na direção x-x do modelo 8 em elementos finitos. (kNm/m)

Diante disso, foi observado um bom comportamento do modelo 7 em comparação ao modelo em elementos finitos, constatando que nos diagramas, pela semelhança na distribuição dos esforços, apesar dos picos e particularidades nas concentrações de tensão, pode-se concluir que a analogia de grelha é uma boa ferramenta para análise de pavimentos mesmo utilizando malhas desencontradas dentro dos parâmetros estudados, entre eles a rigidez à torção da viga que promove a continuidade das lajes, mesmo reduzida à 15% do seu valor integral correspondente à consideração do comportamento elástico linear.

6. EXEMPLO DE MODELAGEM EM UM PAVIMENTO REPRESENTATIVO – PAVIMENTO 2

Nos capítulos anteriores, a influência da interação lajes-vigas-pilares foi avaliada no processamento de um pavimento mais simples e, com os resultados obtidos, observaram-se diferenças significativas entre o procedimento manual e o procedimento onde as lajes são calculadas considerando-se a influência de todo pavimento. Percebeu-se também que a consideração da rigidez à torção reduzida da viga, sugerida pela NBR 6118, em pouco altera os resultados mesmo em malhas desencontradas, desde que o espaçamento da malha seja suficientemente pequeno.

Entretanto para que as diferenças sejam melhor avaliadas, torna-se necessário aplicar os procedimentos adotados a um pavimento com características similares aos empregados na prática. Sendo assim, neste capítulo será processada a estrutura do pavimento utilizado no tutorial do programa Altoqi Eberick, com algumas modificações nas dimensões dos elementos e no carregamento aplicado.

Deste modo, o pavimento citado será analisado em três modelagens, sendo uma em elementos finitos, outra em analogia de grelha com malhas desencontradas e a última em analogia de grelha com malhas coincidentes. A rigidez à torção das vigas entre as lajes contíguas será considerada como 15% da rigidez integral. As lajes serão apoiadas sobre vigas flexíveis, com a consideração da mesa colaborante. A figura 6.1 ilustra a disposição dos elementos do pavimento e a tabela 6.1 a largura da mesa colaborante para cada viga.

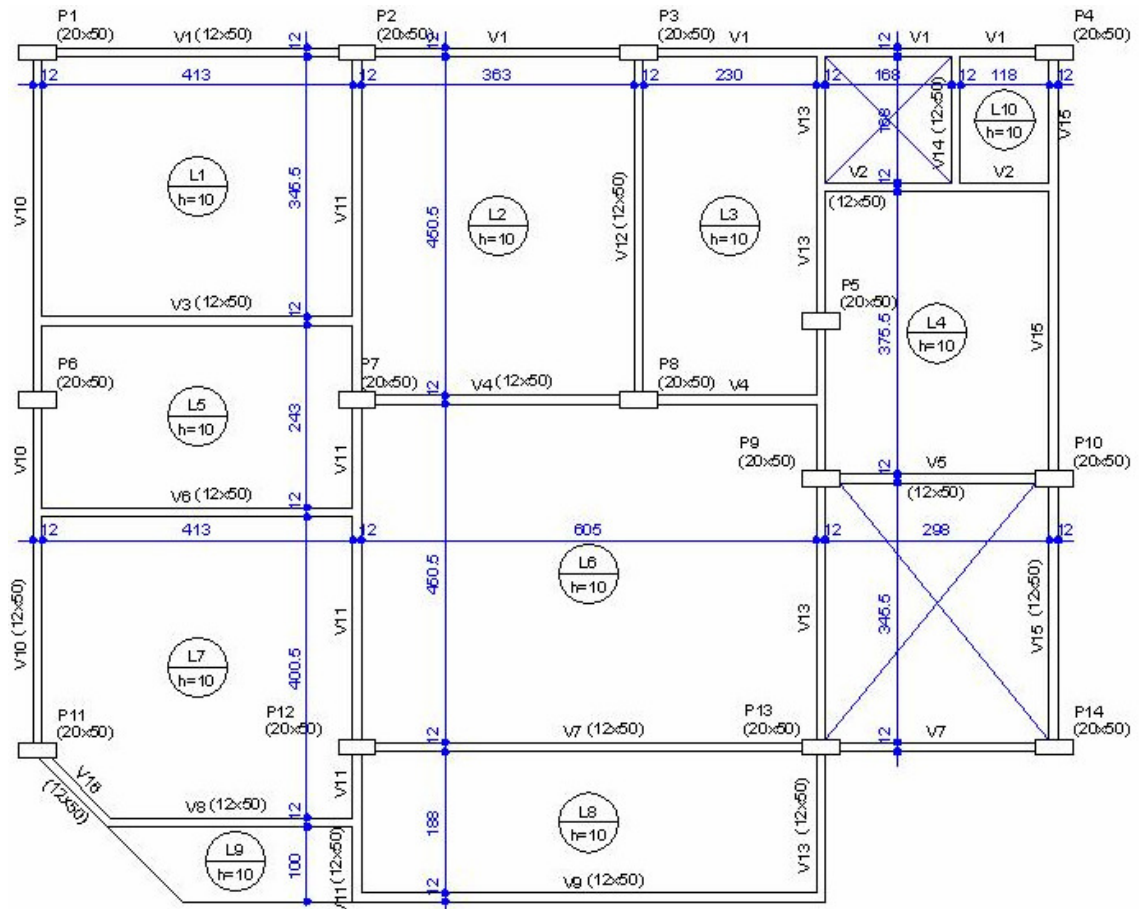


Figura 6.1 - planta de fôrmas com as dimensões empregadas nos elementos.

Para as propriedades físicas do concreto e carregamento, foram adotados os seguintes parâmetros:

Módulo de elasticidade longitudinal secante $E_{cs} = 30000 \text{ MPa}$;

Módulo de elasticidade transversal $G = 0,4 \times 30000 = 12000 \text{ MPa}$;

Cargas permanentes + acidentais = 10 KN/m^2 ;

Pilares de seção 20×50 com altura de $1,4 \text{ m}$.

Tabela 6.1 – Seção em T das vigas do exemplo 2.

viga	bw	H	Hf	bf
1	12	50	10	38
2	12	50	10	-
3,6	12	50	10	97
4	12	50	10	57
5	12	50	10	31
7	12	50	10	86
8	12	50	10	76
9	12	50	10	74
10	12	50	10	40
11,12	12	50	10	68
13	12	50	10	-
14	12	50	10	-
15	12	50	10	46

A figura 6.2 ilustra o pavimento modelado em analogia de gralha com malha coincidente, bem como a disposição da malha com espaçamento de 25x25:



Figura 6.2 - pavimento modelado em analogia de gralha com malha coincidente de 25x25.

A figura 6.3 ilustra o pavimento modelado em analogia de grelha com malhas desencontradas, bem como o espaçamento utilizado para cada laje:

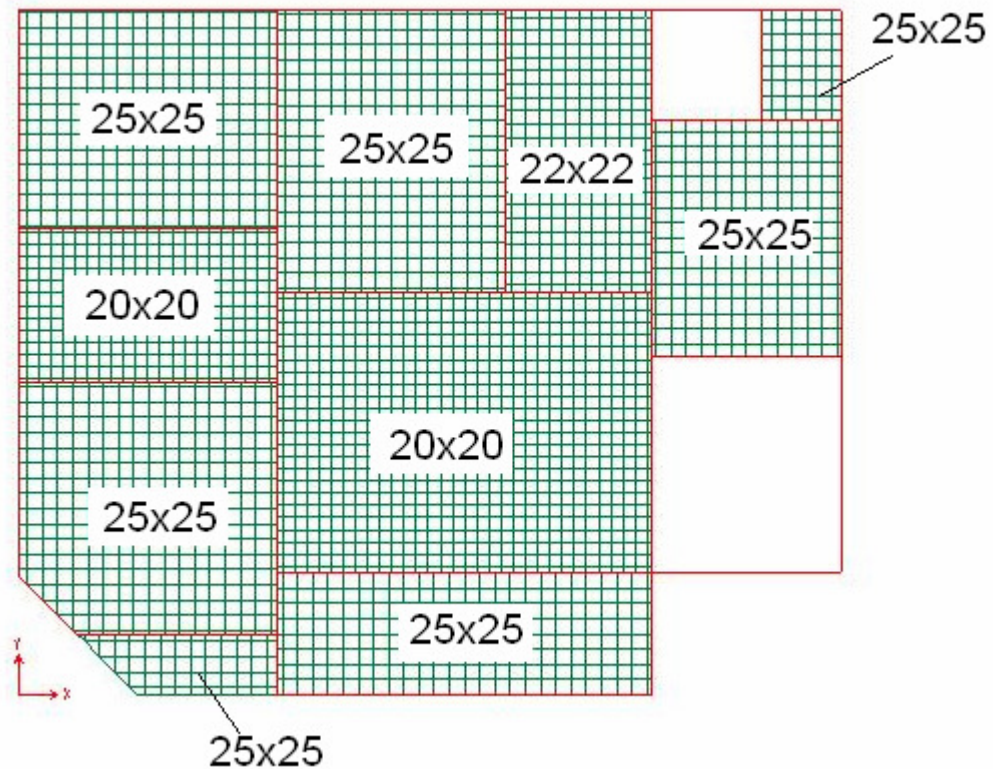


Figura 6.3 - pavimento modelado em analogia de grelha com malha desencontradas.

A figura 6.3 ilustra o pavimento modelado em elementos finitos de casca de 25x25cm. Para a transição da malha ao redor dos pilares e em regiões especiais, foram utilizados elementos triangulares.

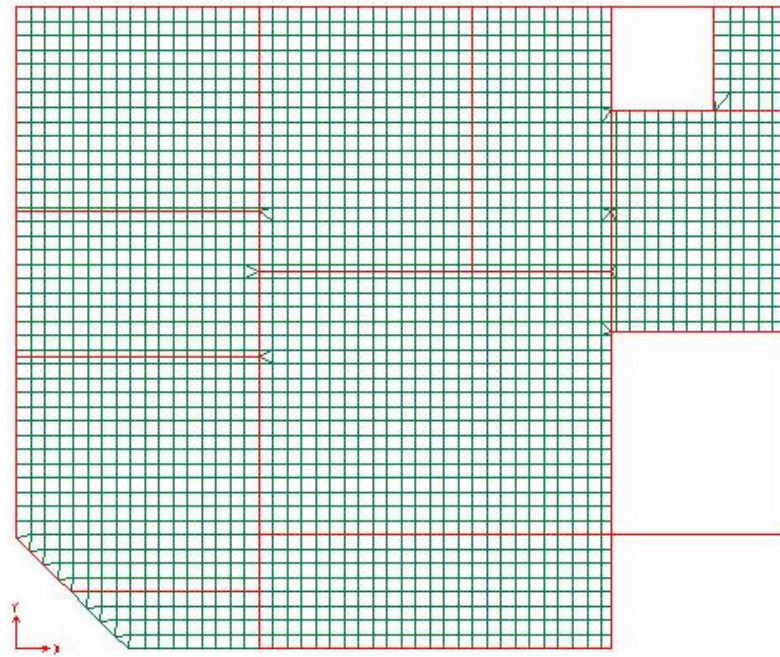


Figura 6.4 - pavimento modelado em elementos finitos com malha de 25x25.

A convenção para a obtenção dos esforços e deslocamentos está ilustrada nas figuras 6.5 e 6.6.

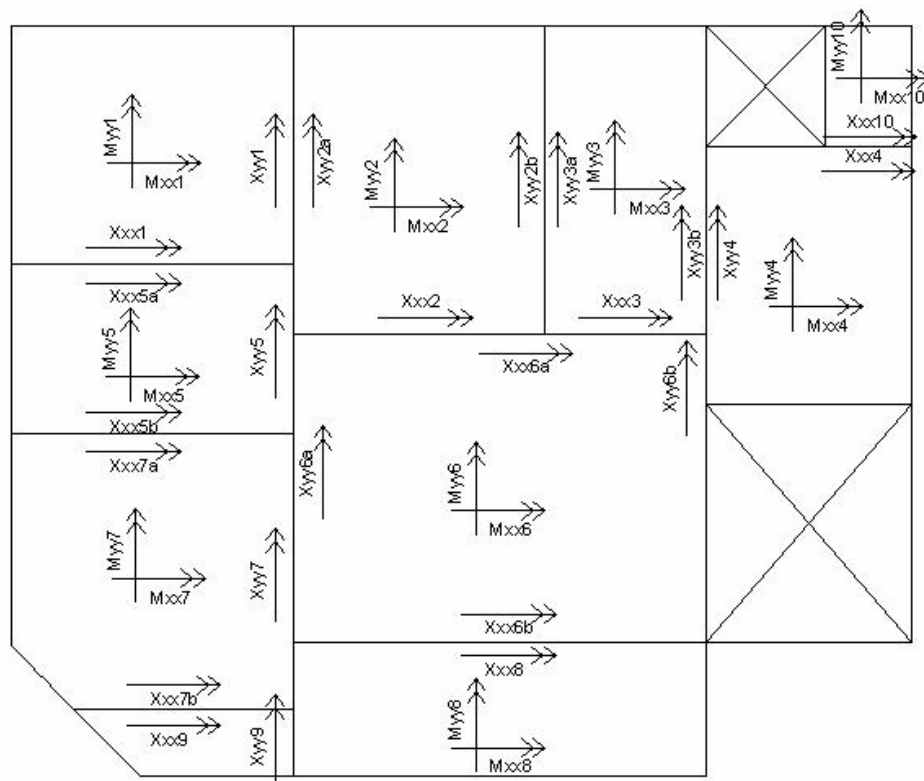


Figura 6.5 - convenção dos esforços no pavimento.

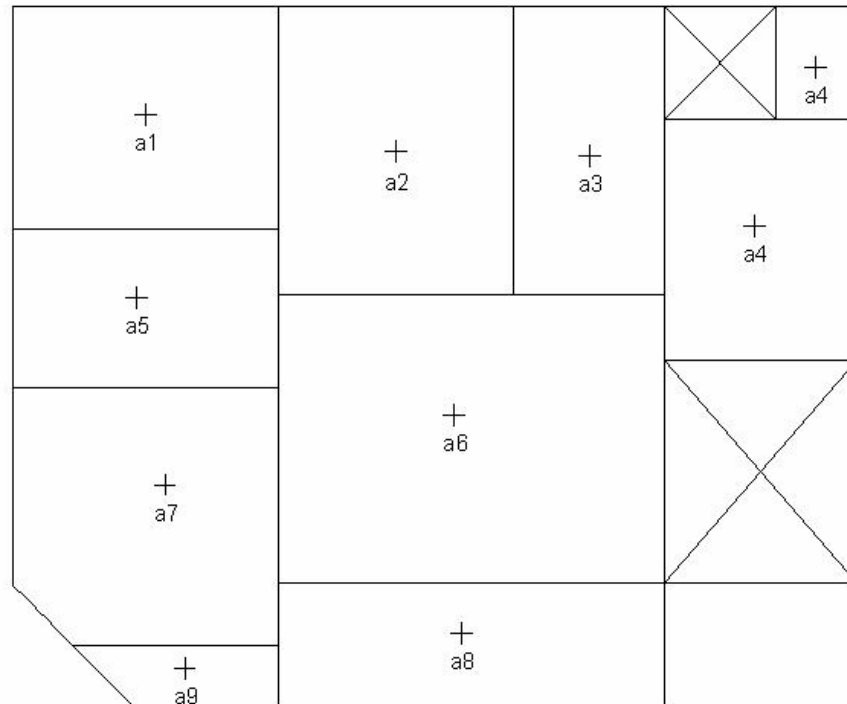


Figura 6.6 - convenção para os deslocamentos máximos das lajes do pavimento.

Realizado o processamento da estrutura, chega-se às tabelas 6.2 e 6.3 que ilustram os resultados dos momentos fletores e deslocamentos máximos para os três modelos:

Tabela 6.2 – momentos fletores máximos das lajes do exemplo 2. (kNm/m)

	MALHA COINCIDENTE	MEF	MALHA DESENCONTRADA
Mxx1	2,87	3,15	2,82
Myy1	2,48	2,90	2,43
Xxx1	-3,05	-2,41	-3,37
Xyy1	-4,83	-4,30	-4,69
Mxx2	1,99	2,43	2,02
Myy2	2,01	2,39	2,01
Xxx2	-7,59	-6,90	-7,82
Xyy2a	-4,85	-4,30	-4,69
Xyy2b	-3,29	-2,90	-3,25
Mxx3	1,31	1,16	1,30
Myy3	0,96	1,07	0,91
Xxx3	-6,75	-5,57	-8,11
Xyy3a	-3,23	-2,85	-3,26
Xyy3b	-4,24	-3,90	-3,85
Mxx4	1,11	1,33	1,09
Myy4	2,60	2,57	2,56
Xxx4a	-1,54	-1,08	-1,23
Xyy4	-6,32	-4,80	-3,90
Mxx5	0,41	0,81	0,51
Myy5	1,96	1,95	1,94
Xxx5a	-3,03	-2,45	-3,56
Xxx5b	-2,90	-2,31	-2,99
Xyy5	-7,86	-6,77	-5,75
Mxx6	3,89	4,09	3,90
Myy6	2,27	3,02	2,32
Xxx6a	-9,21	-8,01	-8,87
Xxx6b	-5,12	-5,22	-6,11
Xyy6a	-7,60	-6,22	-7,81
Xyy6b	-3,92	-4,08	-4,19
Mxx7	1,92	2,36	1,93
Myy7	2,98	3,14	2,99
Xxx7a	-2,94	-2,33	-2,91
Xxx7b	-3,71	-2,96	-3,47
Xyy7	-6,86	-6,42	-7,51
Mxx8	0,65	0,69	0,65
Myy8	1,62	1,29	1,69
Xxx8	-5,05	-5,29	-5,69
Xyy8	-4,59	-6,75	-4,16
Xxx9	-3,04	-2,80	-3,07
Xyy9	-2,91	-3,97	-2,25
Mxx10	0,50	0,49	0,45
Myy10	0,51	0,55	0,55
Xxx10	-1,24	-1,12	-0,92

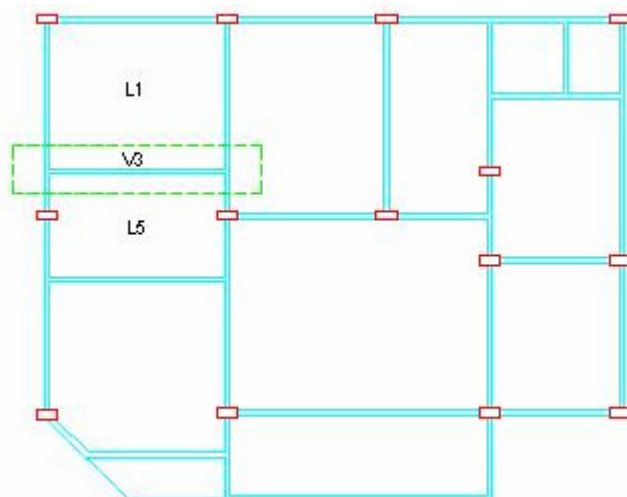
Tabela 6.3 – deslocamentos máximos das lajes do exemplo 2. (cm)

	MALHA COINCIDENTE	MEF	MALHA DESENCONTRADA
a1	0,22	0,20	0,22
a2	0,15	0,14	0,16
a3	0,06	0,06	0,07
a4	0,09	0,07	0,09
a5	0,14	0,13	0,14
a6	0,34	0,30	0,34
a7	0,21	0,18	0,21
a8	0,21	0,22	0,21
a9	0,11	0,10	0,11
a10	0,04	0,03	0,04

Analisando os resultados da tabela 6.2 e 6.3, percebe-se que para as malhas desencontradas e coincidentes, que os valores dos momentos positivos estiveram muito próximos. As diferenças destes dois modelos em comparação ao modelo em elementos finitos foi maior, mas ainda com boa aproximação.

Como ocorrido nos estudos anteriores, na utilização da relação $J/I=2$ nos modelos em analogia de grelha, favorece boa aproximação para os esforços, no entanto, os deslocamentos tendem a ser maiores do que nos modelos em elementos finitos.

Para a uma melhor avaliação dos momentos fletores negativos, serão ilustradas a variação sobre os bordos das vigas. As figuras 6.8, 6.9 e 6.10 ilustram a variação do momento negativo entre as lajes 1 e 5, ao longo da viga 3.

**Figura 6.7 – localização do bordo comum entre as lajes 1 e 5**

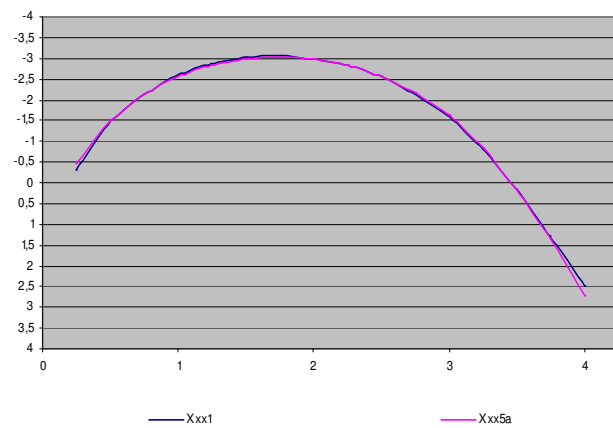


Figura 6.8 - variação do momento fletor negativo entre as lajes 1 e 5 – modelo em analogia de grelha com malhas coincidentes.

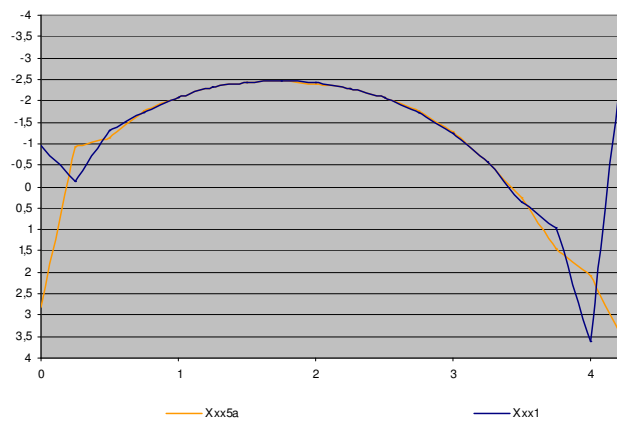


Figura 6.9 - variação do momento fletor negativo entre as lajes 1 e 5 – modelo em elementos finitos.

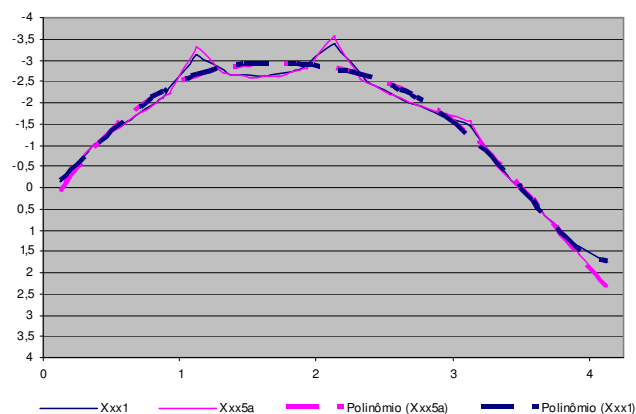


Figura 6.10 - variação do momento fletor negativo entre as lajes 1 e 5 – modelo em analogia de grelha com malhas desencontradas.

Procedendo a análise dos diagramas dos momentos negativos das lajes sobre a viga 3, foi percebido que na modelagem do pavimento com barras desencontradas, em que é considerada 15% da rigidez à torção da viga que promove a continuidade, foram observados picos nos momentos negativos nos bordos, aumentando o valor do momento negativo em alguns pontos. A fim de atenuar este efeito, em algumas continuidades, desta vez foram traçadas curvas de regressão polinomial de forma a visualizar o comportamento médio desse momento sobre o bordo, como pode ser visto na figura 6.9. Com o uso deste artifício, percebeu-se que, na média, estas curvas acabam por apresentar boa aproximação em relação ao modelo em analogia de grelha com barras coincidentes.

As figuras 6.12, 6.13 e 6.14 ilustram a variação do momento fletor negativo entre as lajes 2, 3 e 6, ao longo da viga 4:

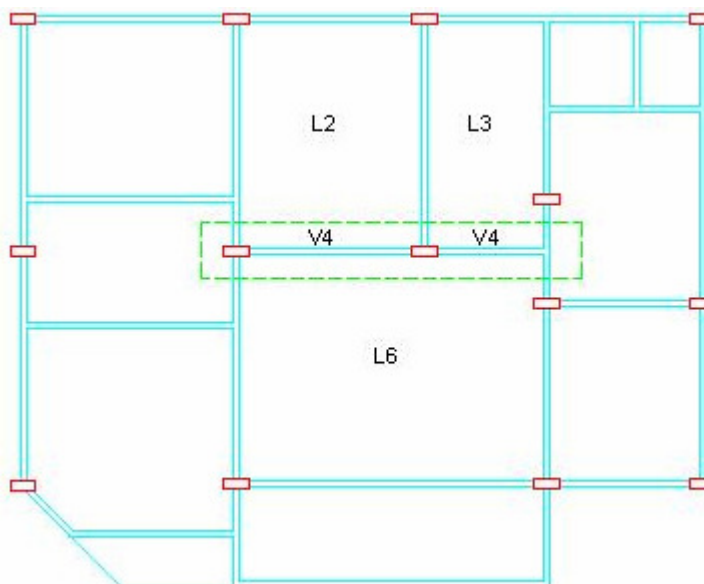


Figura 11– localização do bordo comum entre as lajes 2, 3 e 6

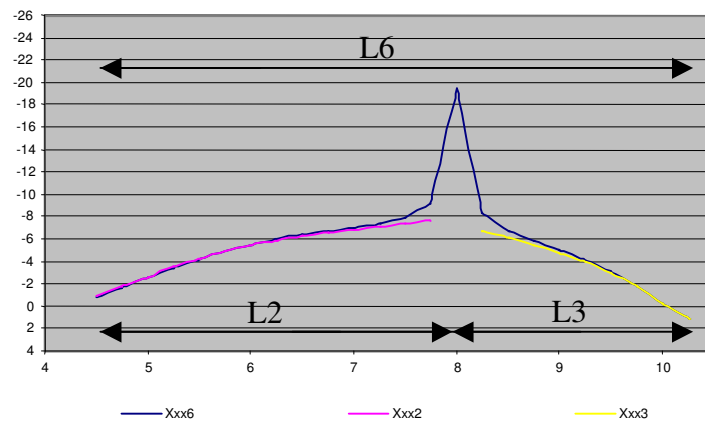


Figura 6.12 - variação do momento fletor negativo entre as lajes 2,3 e 6 – modelo em analogia de grelha com malhas coincidentes.

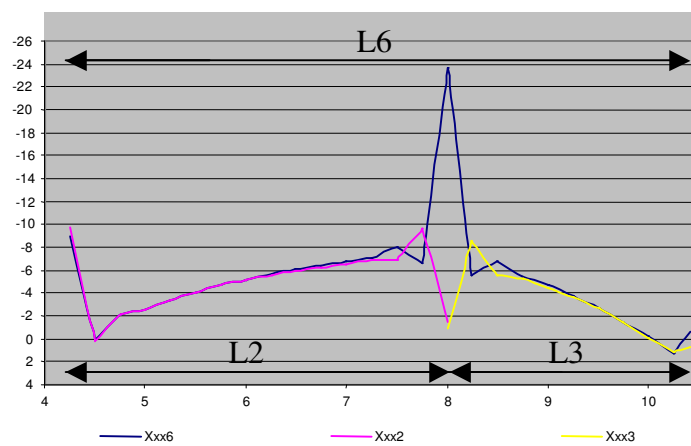


Figura 6.13 - variação do momento fletor negativo entre as lajes 2,3 e 6 – modelo em elementos finitos

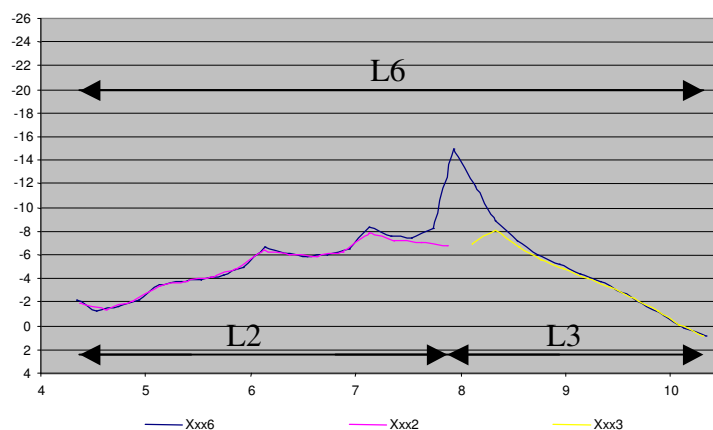


Figura 6.14 - variação do momento fletor negativo entre as lajes 1 e 5 – modelo em analogia de grelha com malhas desencontradas.

Nas continuidades dos momentos negativos das lajes sobre a viga 4, outra particularidade, observada nos exemplos em analogia de grelha em que era considerada a continuidade das lajes, foi referente aos valores dos momentos junto às concentrações de tensão. No modelo em elementos finitos, quando o nó dos elementos não coincide com o pilar, é feita uma transição da malha utilizando-se elementos de três nós, para que a modelagem das concentrações de tensão seja mais adequada. No modelo em analogia de grelha, modelado com barras ortogonais entre si, o refinamento desta região varia muito em função da malha. Nos diagramas das figuras 6.12, 6.13 e 6.14 em que é ilustrado o comportamento dos momentos negativos das lajes 2,3 e 6 podem-se observar os picos de momento gerado pela concentração de tensão junto ao pilar com três valores diferentes para cada modelagem. A figura 6.15 ilustra como as malhas foram distribuídas nesta região para cada modelo.

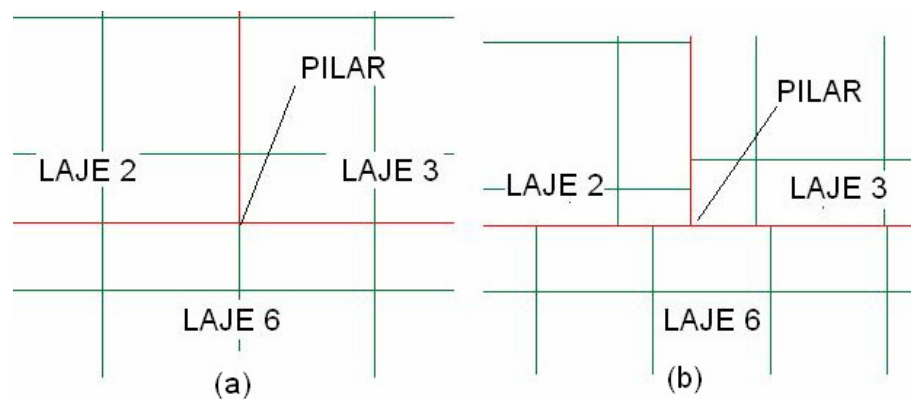


Figura 6.15 - modelagem do encontro das lajes 2,3 e 6 (a) analogia de grelha com malhas coincidentes e elementos finitos (b) analogia de grelha com barras desencontradas.

O modelo em analogia de grelha com barras coincidentes (figura 6.12) apresenta uma barra sobre este ponto, gerando um pico de momento de $-19,42 \text{ kNm/m}$, este menor do que o valor encontrado no modelo em elementos finitos, de $-23,75 \text{ kNm/m}$ (figura 6.13). No modelo com malhas desencontradas (figura 6.14), o pico foi de -15 kNm/m , uma vez que as barras das lajes deste modelo contornam a região em que ocorre a concentração de tensão.

As figuras 6.17, 6.18 e 6.19 ilustram a variação dos momentos negativos entre as lajes 5 e 7 ao longo da viga 6. Como pode ser visto na figura 6.19, também foi utilizado o artifício de regressão polinomial para a obtenção de uma curva média para os diagramas dos momentos negativos sobre a viga 6.

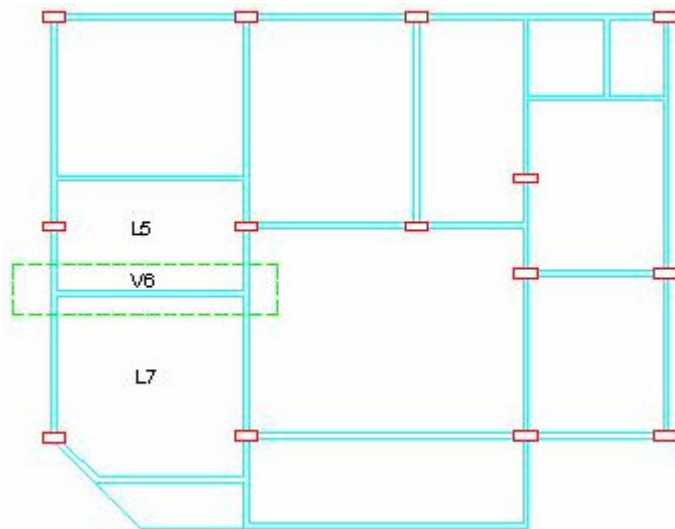


Figura 6.16 – localização do bordo comum entre as lajes 5 e 7

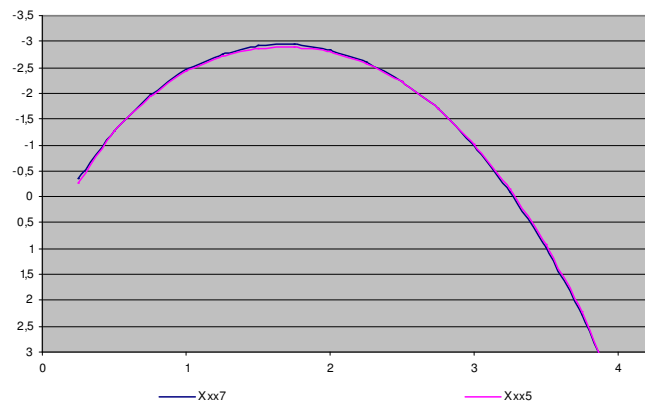


Figura 6.17 - variação do momento fletor negativo entre as lajes 5 e 7 – modelo em analogia de grelha com malhas coincidentes.

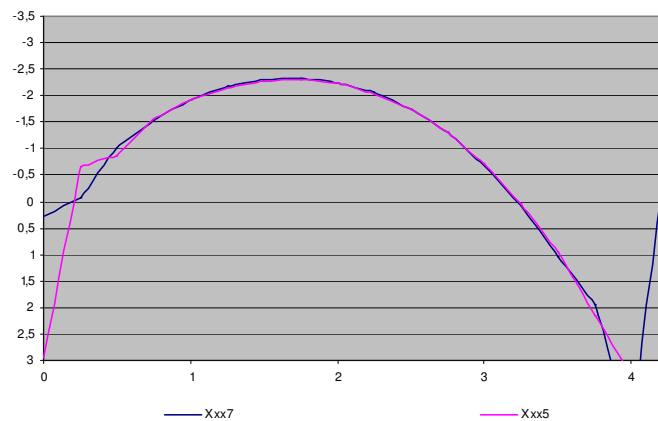


Figura 6.18 - variação do momento fletor negativo entre as lajes 5 e 7 – modelos em elementos finitos.

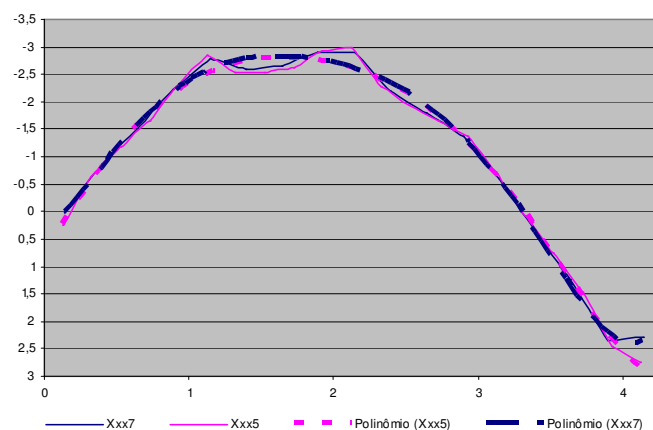


Figura 6.19 - variação do momento fletor negativo entre as lajes 5 e 7 – modelo em analogia de grelha com malhas desencontradas.

As figuras 6.21, 6.22 e 6.23 ilustram a variação dos momentos negativos entre as lajes 6 e 8 ao longo da viga 7. Como pode ser visto na figura 6.23, também foi utilizado o artifício de regressão polinomial para a obtenção de uma curva média para os diagramas dos momentos negativos sobre a viga 7.

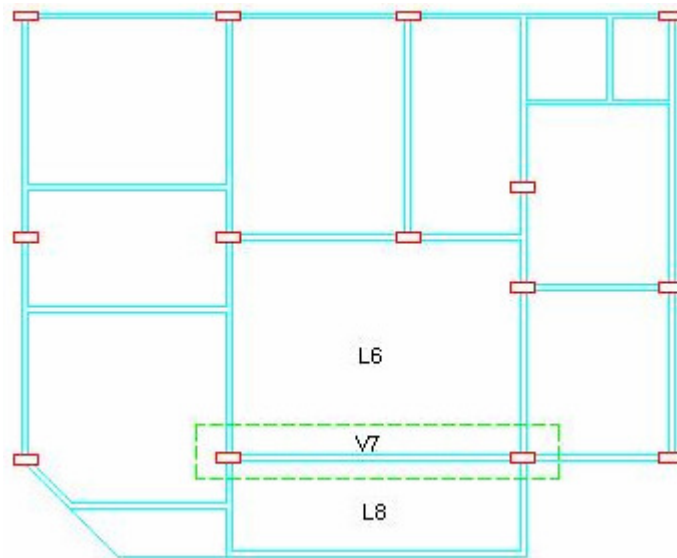


Figura 6.20 – localização do bordo comum entre as lajes 6 e 8

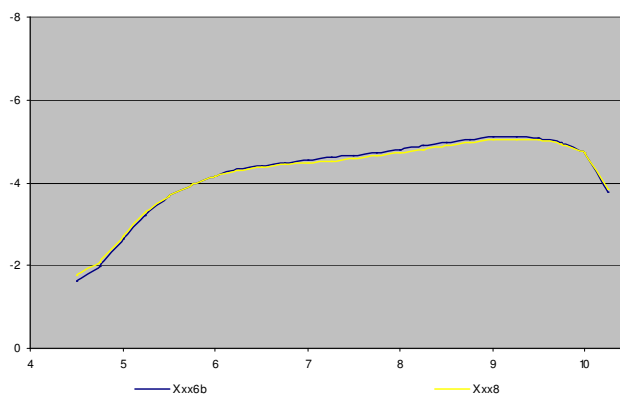


Figura 6.21 - variação do momento fletor negativo entre as lajes 6 e 8 – modelo em analogia de grelha com malhas coincidentes.

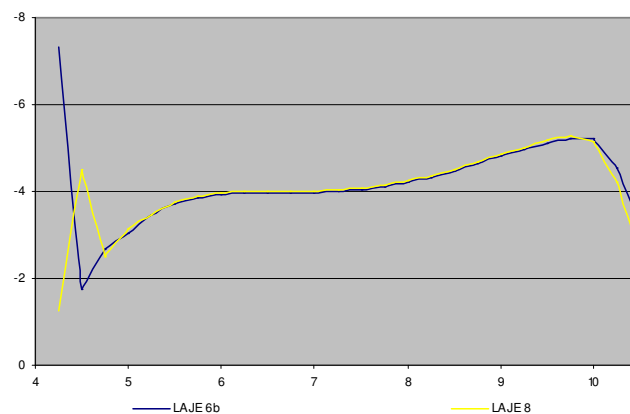


Figura 6.22 - variação do momento fletor negativo entre as lajes 6 e 8 – modelos em elementos finitos

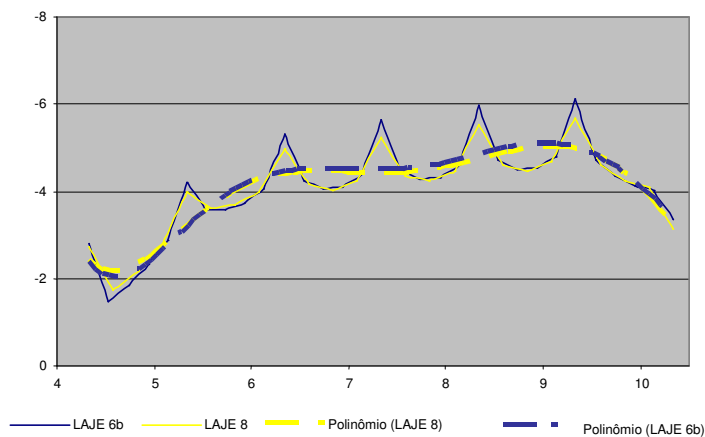


Figura 6.23 - variação do momento fletor negativo entre as lajes 6 e 8 – modelo em analogia de grelha com malhas desencontradas.

E por fim as figuras 6.25, 6.26 e 6.27 ilustram a variação dos momentos negativos entre as lajes 1,2,5,6,7,8,e 9 ao longo da viga 11.

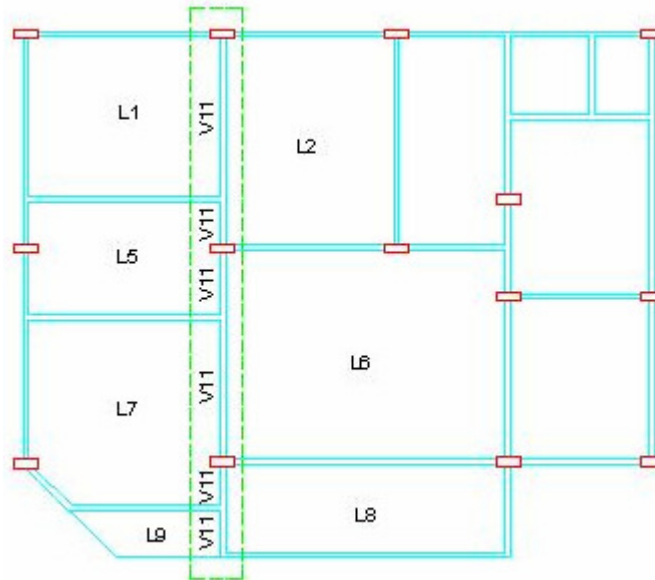


Figura 6.24 – localização do bordo comum entre as lajes 1,2,5,6,7,8,e 9

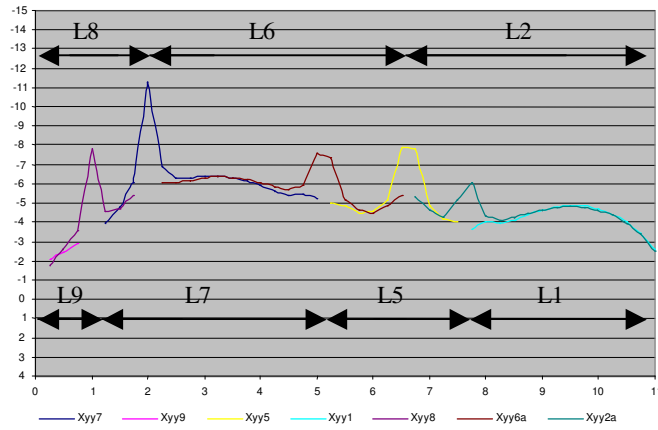


Figura 6.19 - variação do momento fletor negativo entre as lajes 1,2,5,7,8 e 9 – modelo em analogia de grelha com malhas coincidentes.

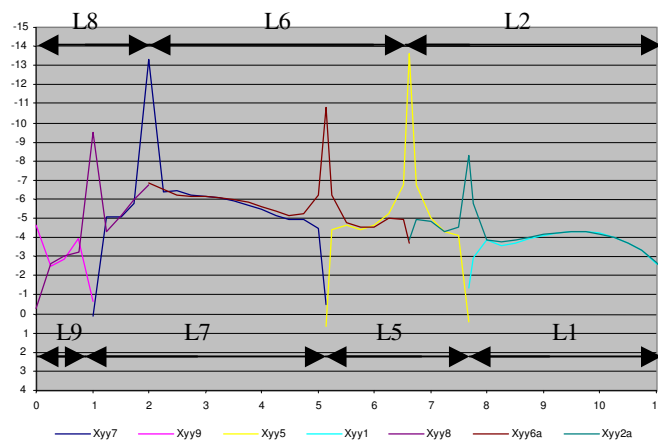


Figura 6.20 - variação do momento fletor negativo entre as lajes 1,2,5,7,8 e 9 – modelos em elementos finitos.

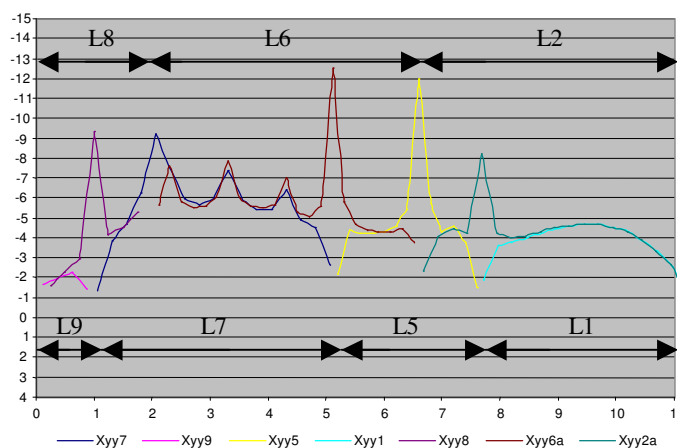


Figura 6.21 - variação do momento fletor negativo entre as lajes 1,2,5,7,8 e 9 – modelo em analogia de grelha com malhas desencontradas.

Analisando as figuras 6.25, 6.26 e 6.27, observa-se que, nas concentrações de tensão, o pico de momentos fletores junto aos pilares é maior, desta vez, no modelo com malhas desencontradas do que no modelo com malhas coincidentes. A figura 6.28 ilustra a modelagem para os três modelos junto ao encontro das lajes 5,6 e 7 no qual existe um pilar. Nesta figura, pode ser observada a transição da malha para o modelo em elementos finitos. Sendo assim, no modelo em analogia de grelha com barras desencontradas, as barras situam-se mais próximas da concentração de tensão do que no modelo em analogia de grelha com malhas coincidentes. Neste ponto, o pico de momento fletor é de $-15,64$ kNm/m para o modelo em elementos finitos (figura 6.26), $-7,86$ kNm/m para o modelo em analogia de grelha com malhas coincidentes (figura 6.25) e $-11,96$ kNm/m para o modelo em analogia de grelha com malhas desencontradas (figura 6.27).

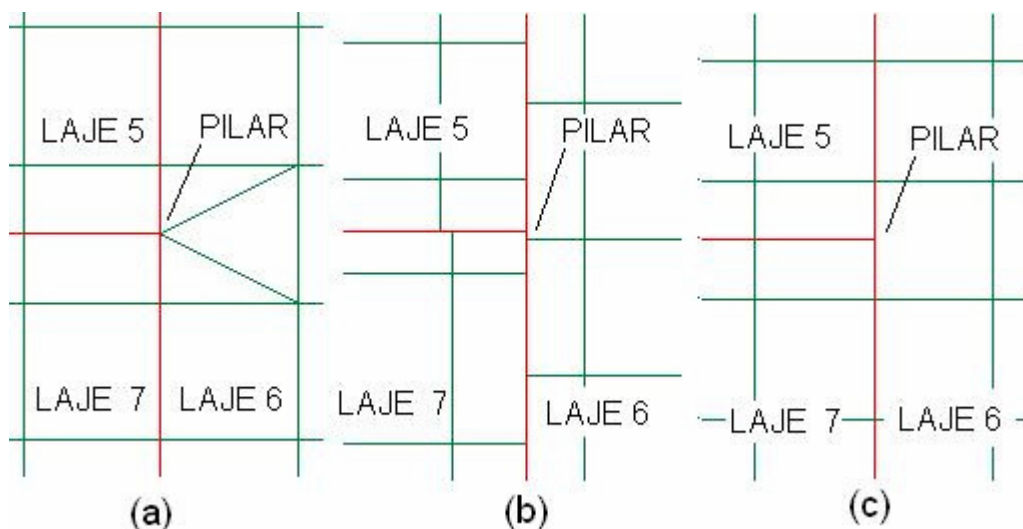


Figura 6.28 - modelagem do encontro das lajes 5,6 e 7 (a) elementos finitos (b) analogia de grelha com barras desencontradas (c) analogia de grelha com malhas coincidentes e elementos finitos.

Analisando-se todos os diagramas do pavimento, percebe-se que os modelos em analogia de grelha tiveram boa aproximação entre si nos valores dos momentos positivos e no comportamento médio dos diagramas dos momentos negativos da lajes, mantendo uma pequena diferença para o modelo em elementos finitos. O comportamento das curvas dos momentos fletores negativos manteve-se similar em todas as continuidades.

Outrossim, foi percebido neste modelo que o espaçamento da malha adotado, bem como a rigidez à torção da viga que promove a continuidade, mantido a 15%, mostrou-se eficiente na transmissão de esforços, apresentando bons resultados.

Pode-se concluir que na utilização de um modelo mais representativo, nos modelos com malhas coincidentes, sendo eles elementos finitos ou analogia de grelha, a adoção de 15% da rigidez a torção da viga de bordo geram descontinuidades imperceptíveis nos momentos fletores negativos entre lajes contíguas, sendo fundamental, no entanto, para uma boa transmissão de momentos nos modelos em analogia de grelha com malhas desencontradas. Outrossim, foi percebido que, sempre que possível, deve haver uma barra sobre o ponto de concentração de tensão para que este seja modelado de uma forma mais adequada.

7. CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

A partir do trabalho desenvolvido, pode-se afirmar que a análise conjunta entre os elementos de uma estrutura pode levar a diferenças significativas nos esforços em comparação ao método manual no qual é feita uma segmentação e o cálculo dos elementos é feito individualmente.

As técnicas clássicas de compatibilização são práticas, mas de uso limitado como no caso de painéis de lajes com formatos irregulares, apresentando grandes diferenças quando comparados a processos numéricos como os modelos em elementos finitos e analogia de grelha, em que o pavimento é calculado considerando-se a continuidade entre as lajes.

A utilização do método da analogia de grelha, apesar da pouca bibliografia existente sobre o assunto, mostrou-se mais simples, de fácil compreensão e pode-se chegar, em princípio, a resultados condizentes com o modelamento pelo método dos elementos finitos.

Sobre a deformabilidade dos apoios das lajes, foi percebido que em vigas cujas alturas são mantidas na relação próxima de 10% do vão, obtêm-se esforços com valores aproximados em relação às vigas indeformáveis. No entanto, à medida que se diminui e altura, observa-se no painel um comportamento similar ao de laje plana.

Ficou claro que a adoção 15% da rigidez integral à torção das vigas entre as lajes contíguas, além de atender a NBR 6118, pouco afeta a continuidade dos momentos negativos dos bordos. No caso de analogia de grelha com malhas desencontradas, esta rigidez mostrou-se adequada para a transmissão dos momentos, desde que a malha tenha um espaçamento suficiente pequeno para tal.

A inclusão da rigidez à torção das vigas auferiu momentos torsores adicionais, no qual a NBR 6118 não é muito clara a respeito, recomendando apenas, de modo geral, o desprezo destes esforços desde que estes não sejam fundamentais ao equilíbrio da estrutura.

Foi percebido que a liberação das extremidades das vigas com grande rigidez à torção, para que se evitasse que tais esforços fossem transmitidos ao pórtico, não demonstrou ser uma técnica adequada, alterando o comportamento dos momentos fletores das lajes nestas regiões.

Quanto às curvas dos momentos fletores negativos sobre as continuidades, estes mostraram-se semelhantes nos modelos numéricos apresentados. Entretanto, algumas diferenças puderam ser reparadas em relação aos modelos em analogia de grelha. Para o modelo em analogia de grelha com malhas desencontradas, ao avaliar os diagramas de momentos negativos sobre a viga, ocorrem picos quando o comprimento do trecho que promove a continuidade era muito pequeno. Com o uso de técnicas de regressão polinomial pôde-se concluir que os comportamentos médios destas curvas mostraram-se satisfatórios.

Num pavimento heterogêneo, as concentrações de tensão são inevitáveis e os únicos modelos capazes de retratar estes efeitos são aqueles no qual o painel é calculado simulando a continuidade entre as lajes.

Nos modelos em elementos finitos, a modelagem das concentrações de tensão foi efetuada através de transições de malha, alternando entre elementos de placa de três e quatro nós. Nos modelos em analogia de grelha, ainda que de forma introdutória, ficou evidenciado que a modelagem destas regiões depende de uma série de fatores. Um desses fatores é o posicionamento da malha sobre o pano de laje. Foi percebido no que, sempre que possível, deve haver uma barra numa região no qual existe uma possibilidade de uma concentração de tensão, a fim de ser evitar que haja um “mascaramento” deste efeito. Isto é perfeitamente possível na utilização da analogia de grelha com malhas desencontradas no qual a malha pode ser posicionada da melhor maneira em cada laje do painel.

Outro fator na modelagem das concentrações de tensão na utilização da analogia de grelha é o espaçamento da malha, no qual pôde-se concluir que em malhas menos espaçadas, os picos de momento fletor negativo alcançam valores maiores com tendência a se aproximar de valores obtidos utilizando o método dos elementos finitos.

Nestes casos, a análise apresenta resultados de esforços muito elevados em uma região reduzida. Portanto o dimensionamento correto da laje deveria ser feito pela teoria da plasticidade, com consideração da plastificação das seções de concreto nesta região de esforços elevados, e uma redistribuição de esforços teria que ser considerada para toda a laje.

Alguns tópicos sobre a modelagem de painéis de lajes ainda necessitariam ser pesquisados. Como sugestão para a continuação deste trabalho, sugere-se um estudo

complementar sobre a modelagem das concentrações de tensão na utilização da analogia de grelha em painéis de lajes, como no caso de lajes em “L” e aberturas.

8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALVES FILHO, A. Elementos finitos – a base da tecnologia CAE. São Paulo – SP, 2000.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 6118/78 – Projeto e execução de obras de concreto armado. Rio de Janeiro. 1978

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 6118/2003 – Projeto de estruturas em concreto. Rio de Janeiro, 2003.

ARAÚJO, J.M. Curso de Concreto Armado, vol II. Editora Dunas. Rio Grande – RS, 2003.

BARBOZA, A. S. R. (1992). Contribuição à análise estrutural de sistemas lajesvigas de concreto armado mediante analogia de grelha. São Carlos. Dissertação (mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

CARVALHO, R. C. (1994). Análise não linear de pavimentos de edifícios de concreto através da analogia de grelha. Tese (doutorado) – Universidade de São Paulo, Escola de Engenharia de São Carlos, SP, São Carlos.

CARVALHO, R. C; FIGUEIREDO FILHO, J. R. FURLAN JR., S. Cálculo das ações de apoio de lajes de concreto em vigas utilizando a analogia de grelha. Congresso Técnico Científico de Engenharia Civil, Florianópolis, 1996.

COELHO, J.A.(2000). Modelagem de lajes de concreto armado por analogia de grelha. Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Santa Catarina, UFSC, Florianópolis.

DORNELLES, F. C.; PEREIRA, J.S. (2006). Estudo sobre a análise de lajes em regime elástico. Trabalho de conclusão de curso - Engenharia Civil, UFSC, Florianópolis.

GERE, J. M.; WEAVER JR., W. Análise de Estruturas Reticuladas. Editora Guanabara Dois S.A. Rio de Janeiro – RJ, 1981.

HAMBLY, E.C. Bridge deck behavior. London, Chapman and Hall, 1976.

HENNRICH, C.A. (2003). Estudos sobre a modelagem de lajes planas de concreto armado. Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Santa Catarina, UFSC, Florianópolis.

LA ROVERE, H. L. (2001). Apostila de “Utilização do método dos elementos finitos em projetos de estruturas” do Curso de Pós-Graduação em Estruturas, UFSC, Florianópolis – SC.

LEONHARDT, F. Construções de concreto, volumes 1 e 4. Interciência, Rio de Janeiro, 1978.

LORIGGIO, D.D.(2001). Apostila de “Análise matricial de estruturas” do curso de Pós-Graduação em Estruturas, UFSC, Florianópolis – SC.

LIGHTFOOT, E. & SAWKO, F. Structural frame analysis by electronic computer: grid frameworks resolved by generalized slope deflection. Engineering, 1959.

MAZZILLI, A. R. P. (1988). Influência da flexibilidade das vigas de apoio no cálculo de estruturas de edifícios. São Carlos. Dissertação (mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

PRADO, A. A; ARAÚJO, D. L.; DUARTE, M. A. Avaliação dos esforços solicitantes em pavimentos de edifícios de concreto armado: comparação entre métodos clássicos, analogia de grelha e o MEF. Anais do 47º Congresso Brasileiro do Concreto. Volume XII, p 229-245, Recife, 2005.

REZENDE, M. N. (1990). Análise de pavimentos de edifícios pelo método dos elementos finitos em microcomputador. São Carlos. Dissertação (mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

ROCHA, A. M. Novo curso prático de concreto armado, vol I, Editora Científica, Rio de Janeiro, 1981.

SILVA, M.A.F; CARVALHO, R. C; FIGUEIREDO FILHO, J. R. A utilização da analogia de grelha para a análise de edifícios de concreto armado. Simpósio EPUSP sobre estruturas de concreto, V, São Paulo, 2003.

SILVA, A.(2002). Modelagem de pisos de edifícios. Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina, UFSC, Florianópolis.

SOUZA, V. C. M.; CUNHA, A. J. P. Lajes – Concreto armado e protendido. Editora EDUFF. Rio de Janeiro – RJ, 1998.

STRAMANDINOLI, J.S.B. (2003). Contribuições à análise de lajes nervuradas por analogia de grelha. Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Santa Catarina, UFSC, Florianópolis.

TIMOSHENKO, S. P. ; WOINOWSKY-KRIEGER, S. Theory of plates and shells, Mc Graw- Hill Kogakusha,Ltda, 1959.