ANDRESSA SEBBEN

UMA LÓGICA PARA A REFERÊNCIA AMBÍGUA

FLORIANÓPOLIS - SC
2007

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

Andressa Sebben

UMA LÓGICA PARA A REFERÊNCIA AMBÍGUA

Dissertação submetida à Universidade Federal de Santa Catarina como parte dos requisitos para a obtenção do grau de mestre em Ciência da Computação.

Prof. Dr. Arthur Ronald de Vallauris Buchsbaum

Florianópolis, setembro de 2007

UMA LÓGICA PARA A REFERÊNCIA AMBÍGUA

Andressa Sebben

Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de mestre em Ciência da Computação, área de concentração Sistemas de Conhecimento e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação.

Prof. Dr. Rogério Cid Bastos – Coordenador do PPGCC

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Arthur Ronald de Vallauris Buchsbaum – UFSC (Orientador)

Prof. Catedrático Newton Carneiro Affonso da Costa – USP

Prof. Dr. Carlos Becker Westphall – UFSC

Prof. Dr. João Bosco Mangueira Sobral – UFSC

Quanto mais alto se sobe, mais longe é o horizonte.
(Vergílio Ferreira)

À minha amada família.

Agradecimentos

A Deus, pela proteção e pelas oportunidades valiosas que sempre me concedeu.

Ao meu orientador, Prof. Arthur Buchsbaum, pela disponibilidade, paciência e prontidão em me auxiliar sempre que necessário.

Ao Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação da UFSC e demais professores, pelos conhecimentos compartilhados. Aos colegas de curso, pela convivência, auxílio e companheirismo.

À CAPES pelo auxílio financeiro concedido no primeiro ano deste curso.

Ao Centro Universitário Católico do Sudoeste do Paraná (UNICS), o qual concedeu-me o período de um ano de afastamento das atividades docentes para que pudesse cursar as disciplinas em Florianópolis e, posteriormente, aceitou minhas diversas justificativas de falta ao trabalho, quando era necessário deslocar-me novamente até esta cidade.

Aos amigos de Palmas (PR), pela torcida e incentivo. Aos amigos que fiz em Florianópolis, os quais tornaram menos árdua minha permanência aqui.

À minha família, pelo apoio incondicional durante esta caminhada. Aos meus pais Nelson e Ivete, pela educação, valores e confiança que me transmitem desde a infância. Ao meu irmão Marcelo, pelo companheirismo e por compartilhar comigo muitos momentos difíceis. À minha irmã Adriana e sua família, que mesmo de longe nunca deixaram de se preocupar comigo em minhas tantas viagens. Ao Peterson pelo amor e por compreender meus inúmeros momentos de ausência. Enfim, a todas estas pessoas únicas que tenho em minha vida, por me mostrarem, diariamente, que a vida é muito mais do que livros e computadores.

Sumário

Lista de Símbolos

$\rightleftharpoons$	- Definição
$\square$	- Final de prova
$\mathcal{L}$	- Neste trabalho, representa o nome de uma dada lógica
$\vdash_{\mathcal{L}}$	- Conseqüência sintática na lógica $\mathcal{L}$
$\models_{\mathcal{L}}$	- Conseqüência semântica na lógica $\mathcal{L}$
$P \dashv\vdash_{\mathcal{L}} Q$	- $P \vdash_{\mathcal{L}} Q$ e $Q \vdash_{\mathcal{L}} P$
$\neg$	- Conectivo da negação
$\sim$	- Conectivo da negação clássica
$\wedge$	- Conectivo da conjunção
$\vee$	- Conectivo da disjunção
$\rightarrow$	- Conectivo da implicação
$\leftrightarrow$	- Conectivo da equivalência
$\rightarrowtriangle$	- Conectivo da implicação forte / alcance
$\leftarrowtriangle\!\rightarrowtriangle$	- Conectivo da equivalência forte
$\Rightarrow$	- Conectivo da superimplicação
$\Leftrightarrow$	- Conectivo da superequivalência / correspondência
$\forall$	- Quantificador universal, significando “para todo”
$\exists$	- Quantificador existencial, significando “existe pelo menos um”
$\bar{\exists}$	- Quantificador numérico, significando “existe um máximo”
$\exists!$	- Quantificador numérico, significando “existe um único”
$)\!\!=$	- Sinal predicativo representando a abrangência
Υ	- Letra grega “*úpsilon*” , adotada como descritor em LAR
τ	- Letra grega “*tau*”, adotada em algumas teorias como descritor
ε	- Letra grega “*épsilon*”, usualmente adotada em Lógica como descritor indefinido
ι	- Letra grega “*iota*”, usualmente empregada em Lógica como descritor definido

Ψ	-	Letra grega “*psi*”, utilizada neste trabalho para referir-se a um dos quantificadores de uma dada lista
Θ	-	Letra grega “*teta*”, utilizada neste trabalho para referir-se a um qualificador qualquer de $\mathcal{L}$
Σ	-	Letra grega “*sigma*”, utilizada neste trabalho para referir-se uma lista finita de seqüentes em $\mathcal{L}$
ζ	-	Letra grega “*zeta*”, utilizada neste trabalho para referir-se a um seqüente qualquer em $\mathcal{L}$
Ω	-	Letra grega “*omega*”, utilizada neste trabalho para referir-se a uma coleção de designadores em uma dada lógica
Γ	-	Letra grega “*gama*”, utilizada neste trabalho para referir-se a uma coleção de fórmulas em uma dada lógica
Φ	-	Letra grega “*fi*”, utilizada neste trabalho para referir-se a uma coleção de fórmulas em uma dada lógica
#	-	Refere-se a um dos conectivos de uma dada lista
P°	-	Abreviatura para a fórmula $\sim(P \wedge \neg P)$
P^{*}	-	Abreviatura para a fórmula $P \vee \neg P$
$D(x\|t)$	-	Instanciação da variável x pelo termo t no designador D
$D(E\|\|G)$	-	Substituição do designador E pelo designador G no designador D
$\approx_c$	-	Relação de congruência
$=$	-	Igualdade
$=^{\mathrm{HI}}$	-	Igual, por hipótese de indução
$\neq$	-	Diferença
$<$	-	Menor
$\leq$	-	Menor ou igual
$\leq^{\mathrm{HI}}$	-	Menor ou igual, por hipótese de indução
$+$	-	Operador de adição
v	-	Valor veritativo correspondente a verdadeiro
f	-	Valor veritativo correspondente a falso
$\in$	-	Relação de pertinência
$\notin$	-	Negação da relação de pertinência
$\subseteq$	-	Relação de inclusão

$\supseteq$	-	Relação inversa da inclusão
$\{x, y\}$	-	Conjunto cujos elementos são x e y
$\emptyset$	-	Conjunto vazio
$\min A$	-	Elemento mínimo do conjunto A
$\max A$	-	Elemento máximo do conjunto A
$\langle a, b\rangle$	-	Par ordenado cujo primeiro elemento é a e o segundo é b
$\langle d_1, \ldots, d_n\rangle$	-	n-tupla; conjunto ordenado cujos elementos são $d_1, \ldots, d_n$
$\mathcal{D}(f)$	-	Domínio da função f
$\mathcal{P}(A)$	-	Conjunto potência de A, onde A é uma coleção
$f(x)$	-	Valor da função f em x
o	-	Composição de funções
$\mathbb{N}$	-	Coleção dos números naturais
$\mathbb{Z}$	-	Coleção dos números inteiros
$\mathbb{R}$	-	Coleção dos números reais
$\{:\}$	-	Operador de abstração da Teoria dos Conjuntos
$\cup$	-	União de conjuntos
$\bigcup_{i \in A}$	-	União indexada de conjuntos, onde A é uma coleção
$\int$	-	Integral
$\approx$	-	Isomorfismo
x	-	Produto categórico
Δ	-	Coleção não vazia / Propriedade a ser provada por indução
$\overrightarrow{\Psi}$	-	Lista de quantificadores $\Psi_1, \ldots, \Psi_n$, onde n é um número natural
$\overrightarrow{D}$	-	Lista de designadores $D_1, \ldots, D_n$, onde n é um número natural
$\overrightarrow{x}$	-	Lista de variáveis $x_1, \ldots, x_n$, onde n é um número natural

Lista de Abreviaturas

¬-int	-	Regra do ¬-Introdução
¬-el	-	Regra do ¬-Eliminação
∼-int	-	Esquema do ∼-Introdução
∼-el	-	Esquema do ∼-Eliminação
∧-int	-	Esquema do ∧-Introdução
∧-el	-	Esquema do ∧-Eliminação
∨-int	-	Esquema do ∨-Introdução
∃-int	-	Esquema do ∃-Introdução
∃-el	-	Regra da Testemunha, ou ∃-Eliminação
∀-el	-	Esquema do ∀-Eliminação
↔-el	-	Esquema do ↔-Eliminação
⇿-el	-	Esquema do ⇿-Eliminação
⇿-pres	-	Esquema do ⇿-Preservação pela Negação
⇔-el	-	Esquema do ⇔-Eliminação
AI	-	Antecedente da Implicação
AIF	-	Antecedente da Implicação Forte
ALT	-	Esquema da Alternância
CAD	-	Regra da Cadeia
CGR	-	Regra da Congruência
CI	-	Conseqüente da Implicação
CME	-	Comutatividade da Equivalência
CTP	-	Contraposição
CTPIF	-	Contraposição da Implicação Forte
CTPS	-	Contraposição da Superimplicação
DCF	-	Dilema Construtivo Forte

DESCR	-	Esquema da Descrição
DM	-	Esquema de De Morgan
DN	-	Esquema da Dupla Negação
dsg	-	Designação
EGIA	-	Esquema Geral da Instanciação para o Alcance
EGIC	-	Esquema Geral da Instanciação para a Correspondência
EGSA	-	Esquema Geral da Substituição para o Alcance
EGSC	-	Esquema Geral da Substituição para a Correspondência
eld	-	Função de eliminação de descrições
EP	-	Equivalência Pura
EXT	-	Esquema da Extensão
FUNC	-	Esquema da Função
GEN	-	Regra da Generalização
GLOB	-	Esquema da Globalização
HI	-	Hipótese de Indução
hip	-	Hipótese
IA	-	Inteligência Artificial
IAS	-	Inteligência Artificial Simbólica
IM	-	Implicação Material
imp	-	Implica
INS	-	Esquema da Instanciação
IFP	-	Implicação Forte Pura
IP	-	Implicação Pura
KR	-	*Knowledge Representation*
LAR	-	*Logic of Ambiguous Reference* (Lógica da Referência Ambígua)
LDC	-	Lógica Descritiva Clássica
LDI	-	Lógica das Descrições Indefinidas
LEC	-	Lógica Equacional Clássica
LSC	-	Lema da Substituição para Conectivos
LSCE	-	Lema da Substituição para Conectivos e Equivalência
LSCI	-	Lema da Substituição para Conectivos e Implicação
LSQ	-	Lema da Substituição para Quantificadores

LSSQD	-	Lema da Substituição da Superequivalência para Quantificadores e Descrições
MON	-	Regra da Monotonicidade
MP	-	Modus Ponens
MPF	-	Modus Ponens Forte
MPSF	-	Modus Ponens Superforte
MT	-	Modus Tollens
MTSF	-	Modus Tollens Superforte
NCJ	-	Negação da Conjunção
PC	-	Prova por Casos
PCF	-	Prova por Casos Forte
pr	-	Premissa
RA	-	Reflexividade da Abrangência
RC	-	Representação de Conhecimento
RD	-	Regra da Dedução
RDF	-	Regra da Dedução Forte
RDJ	-	Redução da Disjunção
RFL	-	Esquema da Reflexividade
RFLIF	-	Reflexividade da Implicação Forte
RGSA	-	Regra Geral da Substituição para o Alcance
RGSC	-	Regra Geral da Substituição para a Correspondência
RI	-	Reflexividade da Igualdade
RImp	-	Reflexividade da Implicação
RRD	-	Regra Recíproca da Dedução
sai	-	Função de substituição da abrangência pela igualdade
SD	-	Silogismo Disjuntivo
SFA	-	Substituição em Fórmulas Atômicas
SH	-	Silogismo Hipotético
SHF	-	Silogismo Hipotético Forte
SHSF	-	Silogismo Hipotético Superforte
SI	-	Simetria da Igualdade
sia	-	Função de substituição da igualdade pela abrangência
sss	-	se, e somente se

SUBST	-	Postulado da Substituição
sup	-	Suposição
STF	-	Substituição em Termos Funcionais
STI	-	Simetria e Transitividade da Igualdade
TA	-	Transitividade da Abrangência
TE	-	Transitividade da Equivalência
TEF	-	Transitividade da Equivalência Forte
TI	-	Transitividade da Igualdade
TQ	-	Transporte de Quantificadores
TQQI	-	Transporte de Quantificadores para Quantificação Iterada
tr	-	Função de tradução de LAR para LEC
TSE	-	Transitividade da Superequivalência
UN	-	Esquema da Univocidade
VAC	-	Esquema da Vacuidade
vbto	-	*variable-binding term operator*, ou termo operador que liga variáveis
ZF	-	Teoria dos Conjuntos Zermelo-Fraenkel

Convenções de Notação

Adotaremos como convenção as seguintes referências para as listas de letras abaixo, seguidas ou não de plicas ou subíndices, considerando uma dada lógica $\mathcal{L}$:

- a, b, c: referem-se a constantes;
- x, y, z, w: referem-se a variáveis;
- f, g, h: referem-se a sinais funcionais;
- p, q, r: referem-se a sinais predicativos distintos de "$\models$";
- t, u, v: referem-se a termos em $\mathcal{L}$;
- P, Q, R, S: referem-se a fórmulas em $\mathcal{L}$;
- D, E, G: referem-se a designadores em $\mathcal{L}$;
- Γ, Φ: referem-se a coleções de fórmulas em $\mathcal{L}$;
- Ω: refere-se a uma coleção de designadores em $\mathcal{L}$;
- d, e: referem-se a elementos do universo de discurso de uma dada $\mathcal{L}$-interpretação;
- t^I: refere-se ao único elemento do conjunto unitário $I_{\mathrm{A}}(t)$.

A menos que seja dito o contrário, adotaremos também as seguintes convenções para os símbolos abaixo:

- O símbolo "$\#$" refere-se a um dos conectivos "$\wedge$" ou "$\vee$".
- O símbolo "Ψ" refere-se a um dos quantificadores "$\forall$" ou "$\exists$".
- Quando Ψ' aparecer no mesmo contexto em que Ψ, $\Psi' = \begin{cases} \forall, & \text{se } \Psi = \exists, \\ \exists, & \text{se } \Psi = \forall. \end{cases}$
- $\overrightarrow{x}$ é a lista de variáveis $x_1, \ldots, x_n$.
- $\overrightarrow{t}$ é a lista de termos $t_1, \ldots, t_n$.
- $\overrightarrow{D}$ é a lista de designadores $D_1, \ldots, D_n$.
- $\forall\overrightarrow{x}$ é a samblagem $\forall x_1 \ldots \forall x_n$.

- Se $\overrightarrow{\Psi}$ é a lista $\Psi_1, \ldots, \Psi_n$, então $\overrightarrow{\Psi'}$ é a lista $\Psi'_1, \ldots, \Psi'_n$.

- Se $\overrightarrow{\Psi}$ é a lista $\Psi_1, \ldots, \Psi_n$ e $\overrightarrow{x}$ é a lista $x_1, \ldots, x_n$, então $\begin{cases} \overrightarrow{\Psi}\overrightarrow{x} \rightleftharpoons \Psi_1 x_1 \ldots \Psi_n x_n. \\ \overrightarrow{\Psi'}\overrightarrow{x} \rightleftharpoons \Psi'_1 x_1 \ldots \Psi'_n x_n. \end{cases}$

Resumo

Descritores são operadores que formam termos a partir de variáveis e fórmulas de sistemas lógicos. Diversas teorias introduzem descritores para representar, em linguagens formais, o artigo definido (o/a) e o artigo indefinido (um/uma) das linguagens naturais. Entretanto, as abordagens mais conhecidas não oferecem um tratamento para termos ambíguos. A lógica LAR (*Logic of Ambiguous Reference*), originalmente apresentada em Buchsbaum (2002), foi proposta para representar adequadamente estas situações, bastante comuns na matemática e na linguagem cotidiana. LAR apresenta um modo diferenciado de tratar descrições, através da associação de cada termo a uma coleção de objetos do universo de discurso, em oposição às semânticas usuais, as quais associam cada termo a um único objeto. Dessa forma, pode-se tratar uniformemente descrições unívocas, vácuas e ambíguas. Outra característica de destaque é o conceito de abrangência, o qual opera como uma igualdade unidirecional. Essas duas características, descrição e abrangência, permitem uma representação de conhecimento mais próxima da prática lingüística usual. Este trabalho apresenta um detalhamento de LAR, incluindo provas dos resultados originais e algumas correções, além da apresentação de diversos exemplos. Por fim, LAR é comparada às lógicas descritivas de Bertrand Russell, John Barkley Rosser e David Hilbert.

Abstract

Description operators make terms from variables and formulas of logical systems. Several theories introduce description operators to represent, in formal languages, the definite article (the) and the indefinite article (a/an) of natural languages. However, the known approaches do not offer a treatment for ambiguous terms. The logic LAR (Logic of Ambiguous Reference), firstly presented in Buchsbaum (2002), was proposed to represent suitably these situations, which appear very often in mathematics and in everyday speech. LAR presents a different way to treat descriptions, through the association of each term to a collection of objects of the universe of discourse, in opposition to usual semantics, which associate each term to a single object. Thus, we can deal uniformly with univocal, vacuous and ambiguous descriptions. Another remarkable feature of LAR is the concept of comprising, which behaves as an unidirectional equality. These two features, description and comprising, allow a knowledge representation closer to usual linguistic practice. This work presents LAR in detail, including the proof of original results and some corrections, besides a presentation of many examples. Finally, a comparison between LAR and the description logics of Bertrand Russell, John Barkley Rosser and David Hilbert is accomplished.

Capítulo 1

Introdução

O interesse na construção de sistemas que apresentem comportamento inteligente, simulando o pensamento humano, vem de longa data. Desde as rudimentares máquinas de calcular até os primeiros computadores, a humanidade vivia um misto de admiração e espanto com a possibilidade de ver máquinas pensando e agindo racionalmente. Desde então, o desenvolvimento da Inteligência Artificial (IA) passou por diversas etapas, entre progressos e decepções.

Nas últimas décadas, esta visão mística se dissolveu. O computador deixou de ser uma máquina hermética e passou a ser uma ferramenta de negócios e entretenimento. O interesse em IA cresce com a possibilidade de aplicações comerciais práticas. Junta-se a isso a tendência de sistemas de informação processarem não apenas informação, mas conhecimento.

Em geral, um sistema inteligente envolve processos de aquisição, representação e manipulação de conhecimento. Representação de Conhecimento (RC ou *KR - Knowledge Representation*) é definida como o estudo de como o conhecimento sobre o mundo pode ser representado e que tipos de raciocínio podem realizados sobre este conhecimento (CIRL, 2005). Os conceitos de representação de conhecimento e processos de raciocínio são centrais para toda a área de IA (RUSSELL; NORVIG, 2004), constituindo-se em uma das principais áreas de pesquisa da Inteligência Artificial Simbólica (IAS) (BITTENCOURT, 2006).

Existem diversos métodos de representação de conhecimento, baseados em metodologias diferentes e com níveis de complexidade e sofisticação distintos. Destacam-se as redes semânticas, quadros, regras de produção, fatos, ontologias, roteiros (*scripts*) e a Lógica. Segundo Bittencourt (2006), “em termos de representação, grande parte da comunidade de IA tem preferência por uma representação na forma de uma linguagem simbólica como a Lógica, constituída de um conjunto de símbolos e de um conjunto de relações entre esses símbolos". Em uma das linhas de IA, defendida por McCarthy, procura-se desenvolver a Lógica para que esta se aproxime tanto quanto possível da capacidade humana de raciocinar e representar conhecimento (BARRETO, 2001). Esta adequação da Lógica como formalismo de representação de conhecimento provém de sua natureza essencialmente declarativa.

A Lógica[1] é uma ciência que se presta ao estudo de certas estruturas abstratas, encontrando aplicações nas mais diversas áreas do conhecimento, tais como matemática, filosofia, tecnologia e ciências empíricas. Na computação, por exemplo, seus conceitos aplicam-se, além da representação de conhecimento, às áreas de programação, prova automática de teoremas, projeto e verificação de hardware, especificação formal, prova de correção de programas e estudos sobre complexidade e computabilidade.

Uma das atribuições da Lógica, certamente a mais difundida, é o estudo das inferências válidas, isto é, aquelas onde a conclusão será verdadeira sempre que as premissas o forem. Podemos assim deduzir um vasto volume de conhecimento a partir de um número relativamente pequeno de fatos ou hipóteses explicitamente estabelecidas. Diferentemente das linguagens naturais, as linguagens para a Lógica devem ser suficientemente estruturadas de modo a permitir a expressão do conhecimento de forma exata e inequívoca. Tais linguagens, ditas *artificiais* ou *formais*, possuem pelo menos duas dimensões relevantes para a Lógica: dimensão sintática e dimensão semântica (CARRION; DA COSTA, 1988). A dimensão sintática, que define a sintaxe lógica da linguagem, trata das combinações entre símbolos pertencentes ao alfabeto da mesma, sem levar em consideração o significado destes símbolos. Já a dimensão semântica considera os objetos referenciados pelas combinações de símbolos da linguagem, juntamente com seus significados. O uso destas linguagens na Lógica permite a expressão do conhecimento de forma concisa e precisa e oferece um meio de raciocinar de modo rigoroso sobre as conseqüências deste conhecimento (NISSANKE, 1999).

O sistema formal mais antigo é atribuído a Aristóteles, responsável por sistematizar um conjunto de formas de argumentação denominadas *silogismos*, os quais, supunha-se, capturavam todas as formas de raciocínio válidas. Foi o estudo dessas leis do pensamento que originou o que chamamos de Lógica. Entretanto, a silogística aristotélica apresentava diversas

[1]Denominaremos "Lógica" (com inicial maiúscula) a disciplina científica, e "lógica" (com inicial minúscula) um sistema lógico em particular.

limitações. Uma delas é que os silogismos operam apenas sobre duas premissas, o que inviabiliza a representação de uma série de raciocínios mais complexos. Além disso, certas formas de inferência utilizadas em matemática não são capturadas adequadamente. Soma-se ainda o fato de lidar apenas com objetos reais, chegando-se a resultados paradoxais caso inferências sejam executadas sobre objetos inexistentes (KRAUSE, 2005). Mesmo assim, a lógica aristotélica permaneceu quase inalterada durante 2000 anos, sendo apenas retransmitida com modificações superficiais. Atualmente, a teoria dos silogismos tem apenas relevância histórica, sendo que seu conteúdo mais substancial foi incorporado à teoria quantificacional (POGORZELSKI, 1994). Também se atribui a Aristóteles a elaboração dos três princípios que caracterizam a chamada Lógica clássica: o *princípio da não-contradição*, segundo o qual uma fórmula e sua negação não podem ambas serem verdadeiras; o *princípio do terceiro excluído*, que diz que para qualquer fórmula, ou ela ou sua negação é verdadeira; e o *princípio da identidade*, o qual afirma que uma fórmula verdadeira é sempre verdadeira, e uma fórmula falsa é sempre falsa.

O desenvolvimento matemático da Lógica começou com George Boole e a chamada *lógica proposicional*. Neste sistema, sentenças atômicas são representadas por símbolos, os quais podem ser combinados através de conectivos, a fim de construir sentenças de complexidade arbitrária. A chamada *Lógica moderna* teve início com Gotlob Frege, o qual elaborou o que atualmente é conhecido como *cálculo de predicados* ou *lógica de primeira ordem*, incorporando a lógica proposicional de Boole e estendendo a noção de predicado da teoria dos silogismos para captar relacionamentos entre qualquer número de elementos (NISSANKE, 1999).

Por volta do final do século XIX, a Lógica passou a ser utilizada como base formal para outros campos da matemática (BITTENCOURT, 2006). De acordo com Carrion e da Costa (1988), a lógica clássica atingiu sua forma quase definitiva com a obra *Principia Mathematica*, escrita por Russell e Whitehead (WHITEHEAD; RUSSELL, 1910). Nesta obra e em trabalhos como o célebre artigo *On Denoting* (RUSSELL, 1905), Russell expôs sua Teoria das Descrições Definidas. Descrições definidas são frases da forma “o número par primo” ou “a maior cidade da Terra”, as quais falam acerca de um objeto que possui determinada propriedade, sem no entanto utilizar explicitamente um nome ou rótulo para este objeto. Posteriormente, Hilbert introduz um operador para formalizar descrições indefinidas, ou seja, descrições da forma “um número par”, onde se fala acerca de um objeto dentre uma coleção de elementos que possuem um dado predicado, sem no entanto fazer referência a um objeto específico desta coleção.

Para formalizar frases descritivas no âmbito da lógica de primeira ordem, recorreu-se a operadores capazes de formar termos a partir de fórmulas, os chamados descritores ou *vbtos* (*variable-binding term operators*).

Um *descritor* é um operador que, ao ser aplicado a uma variável e uma fórmula, produz um termo, tornando as ocorrências livres da variável na fórmula ligadas. Por exemplo, o operador "τ" produz um termo quando aplicado a uma fórmula P e uma variável x, ligando as ocorrências de x em seu escopo (HATCHER, 1982). O termo resultante, "$\tau x\, P$", é chamado de *descrição*. Em sua teoria, Russell (RUSSELL, 1905) introduz o descritor por definição contextual. Outras abordagens, como as de Rosser (ROSSER, 1953) e de Hilbert (HILBERT; BERNAYS, 1934), adotam o descritor como sinal primitivo da linguagem.

Russell emprega a letra grega "ι" (*iota*) como descritor. Nesta teoria, descrições não são termos da linguagem, mas samblagens incompletas, as quais apenas possuem significado quando ocorrem no contexto de uma fórmula.

A lógica clássica de descrições formulada por Rosser (ROSSER, 1953) utiliza o descritor "ι" para representar o artigo definido "o/a" das linguagens naturais. Assim, o termo "$\iota x\, P$" significa, intuitivamente, "o objeto x que satisfaz P". Se existe um e somente um objeto x satisfazendo P, o termo "$\iota x\, P$" denota tal objeto. Caso contrário, se mais de um ou nenhum objeto satisfaz P, o termo "$\iota x\, P$" pode ser considerado destituído de significado, ou pode ser associado a um objeto fixo do universo de discurso, escolhido arbitrariamente para corresponder a todas as descrições deste tipo. No primeiro caso, temos uma descrição *própria*; já no segundo, a descrição é dita *imprópria* (ABAR, 1985).

Por outro lado, o descritor "ε", conhecido como símbolo de Hilbert, é empregado para formalizar o artigo indefinido "um/uma". Uma descrição da forma "$\varepsilon x\, P$" pode ser interpretada como "um objeto x que satisfaz P", e denota um objeto qualquer dentre aqueles que satisfazem à propriedade P (através de uma função-escolha), ou um objeto fixo qualquer, caso nenhum objeto satisfaça tal propriedade. Por este motivo, "ε" é também conhecido como *descritor indefinido*, pois permite referenciar um objeto do domínio, sem no entanto especificar de modo preciso que objeto é esse. Assim, uma descrição somente será imprópria quando for vácua, ou seja, quando nenhum objeto satisfaz a propriedade especificada pela mesma. Bourbaki emprega o símbolo "τ" como sinal primitivo da linguagem de sua versão de ZF, com comportamento análogo ao "ε" de Hilbert (BOURBAKI, 1966).

1.1 Justificativa

As lógicas descritivas mencionadas anteriormente não oferecem um tratamento para a ambigüidade. No entanto, é bastante comum encontrarmos situações na matemática e na linguagem natural, onde temos mais de um objeto satisfazendo determinada propriedade, e usualmente empregamos um nome para referenciar um objeto qualquer desta coleção. Na matemática, por exemplo, denotamos uma primitiva da função $f(x) = 2x$ por $\int 2x\, \mathrm{d}x$, apesar de haver mais de uma primitiva para esta função. Similarmente, a teoria das categorias utiliza, em sua linguagem, nomes que podem ter mais de um significado. Dizemos, por exemplo, que "o produto categórico de a por b é isomorfo ao produto categórico de b por a", embora em geral, existe mais de um objeto que é o produto categórico de dois objetos dados. Encontramos na literatura diversas menções à preocupação em não empregar nomes ambíguos (denotando mais de um objeto) ou vácuos (denotando algo que não existe).

Ao definir o conjunto vazio como "o conjunto que não contém membros", Enderton (1977) afirma que esta definição atribui o nome "$\emptyset$" a um certo conjunto. Enfatiza ainda que, para que tal definição seja satisfatória,dois fatos devem ser assegurados:

(i) existe um conjunto que não contém membros (o que é garantido pelo *Axioma do Conjunto Vazio* [2]);

(ii) não pode haver mais de um conjunto que não contém membros (o que é garantido pelo *Axioma da Extensionalidade* [3]).

O autor justifica estas restrições afirmando que "dificuldades lógicas severas surgem da introdução de símbolos quando não há objeto a ser nomeado, ou (ainda pior) o símbolo nomeia ambiguamente mais de um objeto" [4].

Outro exemplo é dado por Suppes (1972), o qual sustenta que, em matemática, não se pode definir operações com mais de um resultado, uma vez que isso acarreta paradoxos. O autor cita a expressão "$x * y = z$", onde $z > x \wedge z > y$, e "$*$", neste contexto, representa um operador binário. Observa-se que z pode assumir qualquer valor, desde que seja maior do que os valores de x e y. Poderíamos ter, como possíveis valores para a expressão, $2*3 = 8$, $2*3 = 9$, $2*3 = 10$,

[2] *Empty Set Axiom: There is a set having no members*: $\exists B\, \forall x\, (x \notin B)$ (ENDERTON, 1977).

[3] *Extensionality Axiom: If two sets have exactly the same members, then they are equal*: $\forall A \forall B(\forall x\, (x \in A \leftrightarrow x \in B) \rightarrow A = B)$ (ENDERTON, 1977).

[4] *"Severe logical difficulties arise from introducing symbols when either there is no object for the symbol to name, or (even worse) the symbol names ambiguously more than one object"* (ENDERTON, 1977) pg. 19.

etc., donde pode-se inferir que 8 = 9, por exemplo.

Na matemática tradicional, termos não podem denotar mais de um objeto sem provocar certas inconveniências de notação, devido à inexistência da idéia de *igualdade unidirecional*, que permite substituições apenas em um sentido, e não em ambos.

Vejamos o caso de uma integral indefinida. Dizemos que a função $g(x) = x^2 + c$ é uma primitiva de $f(x) = 2x$, e denotamos este fato por "$\int 2x\, \mathrm{d}x = x^2 + c$", para qualquer $c \in \mathbb{R}$. Teríamos então, como possíveis exemplares,

$$\int 2x\, \mathrm{d}x = x^2 + 1 \quad \text{e} \quad \int 2x\, \mathrm{d}x = x^2 + 2.$$

A igualdade, sendo uma relação de equivalência, é simétrica, transitiva e reflexiva. Considerando as propriedades de simetria e a transitividade, temos então que $x^2 + 1 = x^2 + 2$, donde pode-se chegar à conclusão errônea de que $1 = 2$. Tal fato decorre do uso inadequado do sinal de igualdade nesta situação, pois $\forall c \in \mathbb{R} \left(\int 2x\, \mathrm{d}x = x^2 + c \right)$ é, na verdade, uma abreviatura para a expressão $\forall c \in \mathbb{R}\,(\text{primitiva}(x^2 + c,\ 2x))$, ou seja, o sinal " = " na primeira expressão não desempenha o papel de um sinal predicativo que estabelece uma relação entre dois objetos iguais, mas sim de uma abreviatura. Seria mais conveniente representar a situação acima exposta por uma "semi-igualdade", uma vez que $\int 2x\, \mathrm{d}x = x^2 + 1$ não implica necessariamente que $x^2 + 1 = \int 2x\, \mathrm{d}x$, se "=" denota, neste caso, a igualdade unidirecional.

As linguagens naturais, como por exemplo a língua portuguesa, lidam com a ambigüidade de uma forma praticamente ubíqua. Na linguagem informal, em muitos casos, um substantivo precedido por um artigo indefinido é uma referência ambígua para qualquer objeto da coleção correspondente. Por exemplo, na frase "o produto de um inteiro por 6 é par", a expressão "um inteiro" não denota um número inteiro específico, mas é uma referência ambígua para qualquer número dentre a coleção dos números inteiros, isto é, para qualquer membro do conjunto $\mathbb{Z}$. Tal expressão é, portanto, um nome ambíguo para qualquer número inteiro. A afirmação "um número inteiro é um número real" pode significar, em certo sentido, que todos os números inteiros são números reais.

Portanto, diferentemente das descrições usualmente empregadas em lógica, onde cada descrição denota um único objeto, nas linguagens naturais uma expressão pode estar associada a uma coleção de objetos. Entretanto, pelo menos quase todas as lógicas, monotônicas ou não, não trabalham com a ambigüidade, ou seja, com termos ou nomes denotando eventualmente mais de um objeto.

1.2 Delimitação do tema

Este trabalho apresenta uma lógica para formalizar adequadamente situações como as descritas acima, denominada *Logic of Ambiguous Reference* - LAR. Esta lógica é uma extensão conservativa da Lógica Quantificacional Clássica, acrescida de dois conceitos principais: *descrição* e *abrangência*.

Para adotar estas noções em uma linguagem formal, definiremos em LAR um novo descritor, com um comportamento diferente do "ι" de Russell (WHITEHEAD; RUSSELL, 1910), do "ι" de Rosser (ROSSER, 1953) e do "ε" de Hilbert (HILBERT; BERNAYS, 1934). As descrições aqui empregadas serão associadas a coleções de objetos do universo de discurso, ou seja, serão referências ambíguas para quaisquer objetos da coleção correspondente. Cada termo em LAR será associado semanticamente a uma coleção de objetos, do mesmo modo que nas linguagens naturais, a expressão "uma flor" é associada, muitas vezes, à coleção das flores, apesar de, obviamente, não significar esta coleção, e sim representar ambiguamente uma flor arbitrária. Se tal coleção for vazia, dizemos que o termo é *vácuo*, ou seja, um nome que não denota nada. Se, ao contrário, a coleção não for vazia, o termo é dito *existencial*. Um termo *existencial* pode ainda ser *unívoco*, caso a coleção a ele associada seja um conjunto unitário, e *ambíguo*, caso tal coleção possua mais de um elemento. O símbolo "Υ" será adotado como operador de descrição. Uma descrição da forma "$\Upsilon x\, P$" é lida "um x tal que P". Ressaltamos que um termo em LAR não é a coleção em si, e sim é associado à coleção. Por exemplo, "Υx leão(x)" não é a coleção de todos os leões, mas a representação ambígua de um leão qualquer. Similarmente, "$\Upsilon x(x = x)$" não representa a coleção de todas as coisas, mas apenas um objeto arbitrário.

Dados dois termos em LAR, de modo que o primeiro é uma descrição que compreende mais objetos do que a segunda, representamos a *igualdade unidirecional* entre esses dois termos, denominada *abrangência*, pelo símbolo "$\succeq$". A fórmula Υx inteiro(x) $\succeq$ Υx primo(x) é lida "um x tal que x é inteiro *abrange* um x tal que x é primo" (ou, informalmente, "um primo é um inteiro"), ou seja, a coleção associada a Υx inteiro(x) contém a coleção associada a Υx primo(x), mas o inverso não é verdadeiro (não podemos inferir daí que "um inteiro *é* um primo"). Ou seja, abranger, em LAR, é o inverso de ser, na língua portuguesa.

A igualdade tradicional não é adotada em LAR como conceito primitivo, mas definida a partir da abrangência. Se "$t \succeq u$" e "$u \succeq t$", ou seja, quando dois termos abrangem um ao outro, os mesmos são ditos iguais, e o sinal "$=$" é empregado para representar esta asserção.

Podemos utilizar as idéias acima expostas para formalizar o exemplo dado por Suppes (1972): “$x * y = z$”, onde $z > x \wedge z > y$, e “ $*$ ” representa um operador binário. Denotaremos z por “$\Upsilon z\,(z > x \wedge z > y)$” (lê-se “um z tal que z é maior que x e z é maior que y”). Esta descrição está associada ao conjunto de todos os valores maiores que x e y, ou seja, é uma referência ambígua para um valor arbitrário, dentre os possíveis valores que z pode assumir, sem no entanto realizar uma escolha por um elemento particular, como seria o caso se empregássemos o operador “ε”. A expressão pode ser reescrita como “$x * y \rightleftharpoons \Upsilon z\,(z > x \wedge z > y)$”[5]. Como conseqüência, $2 * 3$ não é igual a 8, e sim abrange 8. Temos daí que $2 * 3 \;\succ\!\!= 8$, $2 * 3 \;\succ\!\!= 9$, etc., mas não se deriva que $8 = 9$, por exemplo. Em outras palavras, se $t \;\succ\!\!= u$ e $t \;\succ\!\!= v$, não se tem necessariamente que $u = v$.

Uma forma de comutatividade do produto categórico, em lógica clássica de primeira ordem, pode ser expressa por $\forall x\, \forall y(\mathrm{prod}(x, a, b) \wedge \mathrm{prod}(y, a, b) \rightarrow x \approx y)$, onde, neste contexto, prod é um sinal predicativo triádico. Em LAR, tal frase pode ser escrita de uma forma bem mais simples: “$a \times b \approx b \times a$”, onde “$a \times b$” denota, de uma forma ambígua, qualquer produto categórico de a por b. Ou seja, “$a \times b$” é, na verdade, abreviatura para a descrição “$\Upsilon x\, \mathrm{prod}(x, a, b)$”. Ainda de acordo com esta notação:

- $\int 2x\, \mathrm{d}x = \Upsilon g$(g é uma primitiva da função $f(x) = 2x$);
- Podemos expressar o fato de que a função $g(x) = x^2 + 1$ é uma primitiva de $f(x) = 2x$ escrevendo “$\int 2x\, \mathrm{d}x \;\succ\!\!= g$” ou “$\int 2x\, \mathrm{d}x \;\succ\!\!= (x^2 + 1)\mathrm{d}x$”;

Ou seja, LAR quebra um paradigma da notação matemática, por permitir que termos denotem mais de um objeto ao mesmo tempo, o que as linguagens naturais, pelo menos as mais conhecidas, costumam fazer.

LAR apresenta regras para lidar com descrições ambíguas e abrangência, enriquecendo a lógica clássica e aumentando seu poder de expressividade. Esta lógica foi desenvolvida para operar o mais próximo possível da lógica clássica, embora nas fórmulas em que ocorrem descrições ambíguas ou vácuas, apresente deviâncias como paraconsistência, paracompletude e não-reflexividade (para termos e para fórmulas). Estas situações serão melhor detalhadas no decorrer deste trabalho.

[5] O símbolo $\rightleftharpoons$ será empregado para definições.

1.3 Objetivo geral

Desenvolver, detalhar e verificar resultados referentes a uma lógica que formalize adequadamente descrições vácuas e ambíguas, baseando-se na associação de termos a coleções de objetos e na relação de igualdade unidirecional entre termos.

1.4 Objetivos específicos

LAR foi proposta originalmente em Buchsbaum (2002), cujo autor é o orientador deste trabalho. No artigo, uma exposição sucinta da lógica é apresentada, englobando sua linguagem, uma semântica e suas leis primitivas. Alguns teoremas são enunciados intuitivamente, sem uma verificação formal e precisa de sua validade. Com base nesta proposta original, este trabalho busca:

- Apresentar de forma detalhada e didática as idéias, motivações e peculiaridades de LAR, visto que esse assunto ainda não foi objeto de estudo aprofundado. Assim, um dos objetivos deste trabalho é servir como fonte de consulta para futuras pesquisas neste tema.
- Provar os teoremas enunciados em Buchsbaum (2002).
- Modificar os enunciados de tais teoremas, quando os mesmos não puderam ser provados em sua forma original.
- Elaborar resultados novos considerados relevantes não presentes no artigo original.
- Comparar LAR com as lógicas descritivas mais conhecidas.

1.5 Estrutura do trabalho

Este trabalho está organizado em capítulos, a saber:

- O Capítulo 2 expõe alguns conceitos fundamentais sobre sistemas lógicos, os quais serão empregados ao longo deste trabalho.
- No Capítulo 3, apresentamos sucintamente a Lógica Equacional Clássica (LEC).
- O Capítulo 4 apresenta algumas lógicas com descritores, baseadas nos operadores propostos por Russell, Rosser e Hilbert.

- A Lógica da Referência Ambígua (LAR) é apresentada no Capítulo 5. Além de definir uma linguagem, um cálculo de seqüentes e uma semântica para LAR, diversos teoremas são formulados e provados. Exemplos e contra-exemplos são dados, quando julgamos necessário.
- No Capítulo 6, faz-se uma análise dos resultados obtidos e compara-se a lógica LAR com as demais lógicas descritivas vistas neste trabalho.
- Por fim, apresentamos a conclusão e algumas perspectivas de desenvolvimentos futuros deste trabalho no Capítulo 7.

Capítulo 2

Sistemas Lógicos

A história nos mostra que diversos desenvolvimentos de grande relevância em ciência da computação se deram associados ao desenvolvimento de sistemas lógicos. Como exemplo, pode-se citar os estudos sobre decidibilidade de sistemas lógicos, desenvolvidos por Turing, Church, Gödel, entre outros, os quais levaram ao desenvolvimento da noção de computabilidade. Para Malanovicz (2004), os sistemas lógicos assemelham-se em muitos aspectos a sistemas de computação, pois possuem uma linguagem que permite expressar os objetos da sintaxe, uma semântica e uma teoria da prova, a qual está intimamente relacionada ao conceito de algoritmo em computação. Além de sua importância para a ciência da computação, o estudo de sistemas lógicos também serve ao propósito de fundamentar aplicações tecnológicas decorrentes das pesquisas nesta área.

Neste capítulo estão reunidas diversas definições, pré-definições, notações e convenções acerca de sistemas lógicos, as quais fundamentam a formulação das demais lógicas apresentadas neste trabalho[1].

Um *sistema lógico* ou *lógica* é constituído por uma *linguagem* ou *classe de linguagens*, e uma *teoria* associada a estas linguagens.

Uma linguagem[2] é o ambiente material no qual o sistema se manifesta, sendo definida em duas etapas (BUCHSBAUM, 2006):

---

[1]As definições, notações e convenções aqui apresentadas passam a valer para todas as demais lógicas discutidas neste trabalho. As pré-definições referem-se a conceitos que podem variar de lógica para lógica, sendo então consideradas definidas neste capítulo e reescritas de forma específica para cada lógica, no capítulo correspondente, quando necessário.

[2]Referimo-nos aqui a linguagens formais ou artificiais.

- a escolha de um conjunto não vazio de sinais básicos, geralmente gráficos, o qual denominamos *alfabeto*. Os símbolos pertencentes ao alfabeto são empregados na construção de expressões ou samblagens[3] na referida linguagem;
- a enunciação de uma coleção de regras de formação, chamada *gramática* da linguagem. A gramática permite distinguir quais combinações de símbolos, dentre aquelas possíveis na linguagem considerada, constituem expressões significativas da mesma. Tais expressões ou samblagens significativas são *termos* (nomes de objetos do universo de discurso[4]) ou *fórmulas* (asserções, na linguagem considerada, acerca de objetos do universo de discurso).

Uma teoria, por outro lado, permite avaliar, para uma dada linguagem, quais fórmulas devem ser consideradas absoluta ou relativamente verdadeiras na lógica em questão. Para isso, deve-se definir uma relação de conseqüência entre coleções de fórmulas e fórmulas nesta lógica, tarefa que pode ser realizada através de uma das seguintes vias (BUCHSBAUM, 2006):

- *Via sintática*: tem como base certos objetos formais iniciais, aos quais aplica regras para obter novos objetos formais, a partir de uma lista daqueles já obtidos. Nesta via enquadram-se os *Cálculos Axiomáticos* ou *Sistemas de Hilbert*, os *Cálculos de Seqüentes* e os *Sistemas de Dedução Natural*;
- *Via semântica*: baseia-se em uma coleção de *valores veritativos* (ou domínio veritativo), os quais são rótulos representando diferentes graus de veracidade ou falsidade, e uma coleção de funções chamadas *valorações*, as quais associam fórmulas a valores veritativos.
- *Via de automatização*: utiliza algoritmos que têm como entrada seqüentes e como saída as possíveis respostas que avaliam cada seqüente considerado. Os métodos de automatização usuais são *Resolução*, *Tablôs* e *Seqüentes de Gentzen*.

2.1 Linguagens para Sistemas Lógicos

Nesta seção, apresentamos algumas definições sintáticas que serão empregadas no decorrer deste trabalho.

2.1.1 Definição. Um *alfabeto* é uma coleção não vazia de sinais.

---

[3]Utilizaremos a palavra “samblagem” como um sinônimo para a expressão “cadeia de caracteres”.

[4]Um *universo de discurso* é a coleção de objetos associada a uma dada interpretação para um sistema lógico, conforme será detalhado na seção 2.2.1.

Todas as lógicas abordadas neste trabalho adotarão, como base para suas linguagens, os sinais de um *alfabeto quantificacional*, definido a seguir.

2.1.2 Definição. Um *alfabeto quantificacional* contém os seguintes sinais, mutuamente disjuntos dois a dois:

- *Constantes*: são nomes de objetos, em geral definidos, do universo de discurso. A coleção de constantes pode eventualmente ser vazia.
- *Variáveis*: também conhecidas como *variáveis individuais*, referem-se a objetos, em geral indefinidos, do universo de discurso. Adotamos aqui, como variáveis, os sinais da lista infinita "$\mathsf{x}, \mathsf{y}, \mathsf{z}, \mathsf{w}, \mathsf{x}_1, \mathsf{y}_1, \mathsf{z}_1, \mathsf{w}_1, \mathsf{x}_2, \mathsf{y}_2, \mathsf{z}_2, \mathsf{w}_2, \ldots$".
- *Sinais funcionais*: são sinais que formam termos a partir de um ou mais termos. Se um sinal funcional usa n termos para formar um termo, dizemos que n é a *aridade* deste sinal. A coleção dos sinais funcionais de um alfabeto quantificacional pode ser vazia.
- *Sinais predicativos*: são sinais que formam fórmulas a partir de uma lista eventualmente vazia de termos. Se um sinal predicativo usa n termos para formar uma fórmula, dizemos que n é a *aridade* deste sinal. *Letras sentenciais* são sinais predicativos de aridade 0. Um alfabeto quantificacional deve possuir pelo menos um sinal predicativo.
- *Conectivos*: são sinais que formam fórmulas a partir de fórmulas. Se um conectivo usa n fórmulas para formar uma fórmula, dizemos que n é a *aridade* deste conectivo. Os conectivos usualmente possuem aridade 1 ou 2. Um alfabeto quantificacional deve possuir pelo menos um conectivo.
- *Quantificadores*: são sinais que formam fórmulas a partir de uma variável e uma fórmula. Um alfabeto quantificacional deve possuir pelo menos um quantificador.
- *Qualificadores* ou *Descritores*: são sinais que formam termos a partir de uma variável e uma fórmula. A coleção dos qualificadores pode ser vazia.
- *Sinais de pontuação*: são sinais auxiliares, como o parêntese de abertura "(", o parêntese de fechamento ")" e a vírgula " , ". Têm como propósito agrupar corretamente os sinais da linguagem na construção de expressões significativas.

2.1.3 Notação. De agora em diante, consideraremos $\mathcal{L}$ uma lógica cujos alfabetos são quantificacionais.

2.1.4 Definição. Seja s um conectivo, um sinal funcional ou um sinal predicativo. Se s possui aridade n, dizemos que s é *n-ário* ou *n-ádico*. Se s possui uma das aridades 1, 2 ou 3, então s é também chamado respectivamente de *monádico*, *diádico* ou *triádico*.

2.1.5 Nota. Os alfabetos de todas as lógicas consideradas neste trabalho adotarão, como conectivos primitivos, os conectivos diádicos "$\rightarrow$" (conectivo da implicação), "$\wedge$" (conectivo da conjunção) e "$\vee$" (conectivo da disjunção), e o conectivo monádico "$\neg$" (conectivo da negação), este último de escrita pré-fixada.

2.1.6 Definição. Uma *samblagem* em $\mathcal{L}$ é uma seqüência finita de sinais (vazia ou não) de algum alfabeto de $\mathcal{L}$.

2.1.7 Definição. *Termos* e *fórmulas em* $\mathcal{L}$ são certas samblagens em $\mathcal{L}$ satisfazendo as cláusulas abaixo:

- Uma constante é um termo em $\mathcal{L}$, dito *termo atômico*[5].
- Uma variável é um termo em $\mathcal{L}$, dito *termo atômico*.
- Se f é um sinal funcional de aridade n em $\mathcal{L}$ e $t_1, \ldots, t_n$ são termos em $\mathcal{L}$, então $f(t_1, \ldots, t_n)$ é um termo em $\mathcal{L}$, dito *termo funcional*.
- Se x é uma variável em $\mathcal{L}$, P é uma fórmula em $\mathcal{L}$ e Θ é um qualificador em $\mathcal{L}$, então $\Theta x\, P$ é um termo em $\mathcal{L}$, dito *descrição*.
- Se p é um sinal predicativo de aridade n em $\mathcal{L}$ e $t_1, \ldots, t_n$ são termos em $\mathcal{L}$, então $p(t_1, \ldots, t_n)$ é uma fórmula em $\mathcal{L}$, dita *fórmula atômica*[6].
- Se $P_1, \ldots, P_n$ são fórmulas em $\mathcal{L}$ e $\#$ é um conectivo de aridade n em $\mathcal{L}$, então $\#(P_1, \ldots, P_n)$ é uma fórmula em $\mathcal{L}$.
- Se x é uma variável em $\mathcal{L}$, P é uma fórmula em $\mathcal{L}$ e Ψ é um quantificador em $\mathcal{L}$, então $\Psi x\, P$ é uma fórmula em $\mathcal{L}$.

No caso de um sistema lógico possuir diversas linguagens, suas gramáticas não devem atribuir tipos diferentes ao mesmo sinal. Por exemplo, um sinal não pode ser um conectivo em uma linguagem L_1 para $\mathcal{L}$ e um sinal funcional em uma linguagem L_2 para $\mathcal{L}$. Da mesma forma, uma mesma samblagem não pode ser um termo em uma linguagem L_1 para $\mathcal{L}$ e uma fórmula em uma linguagem L_2 para $\mathcal{L}$. Por outro lado, as coleções de constantes, sinais funcionais e sinais predicativos, ditos *sinais não lógicos*, podem variar em diferentes linguagens para um sistema lógico.

2.1.8 Definição. Um *designador* $\mathcal{L}$ é um termo em $\mathcal{L}$ ou uma fórmula em $\mathcal{L}$ [7].

[5]Um *termo atômico* é um termo que não contém outros termos.

[6]Uma *fórmula atômica* é uma fórmula que não possui subfórmulas.

[7]Utilizaremos a palavra *designador* no sentido adotado por Shoenfield (1967), pg. 15, e não no sentido introduzido por Kripke, no qual esta palavra refere-se somente aos termos singulares (BRANQUINHO; MURCHO, 2001).

2.1.9 Definição. Uma *subfórmula de uma fórmula P* é uma subseqüência da samblagem P que também é uma fórmula, ou seja, uma fórmula que ocorre em P.

2.1.10 Definição. Uma *ocorrência de uma variável* em um designador é uma cópia específica da mesma neste designador.

2.1.11 Notação. Adotaremos como convenção, em todo este trabalho, as seguintes referências para as listas de letras abaixo, seguidas ou não de plicas ou subíndices, dada uma lógica $\mathcal{L}$ qualquer:

- a, b, c: referem-se a constantes;
- x, y, z, w: referem-se a variáveis;
- f, g, h: referem-se a sinais funcionais;
- p, q, r: referem-se a sinais predicativos;
- t, u, v: referem-se a termos em $\mathcal{L}$;
- P, Q, R, S: referem-se a fórmulas em $\mathcal{L}$;
- D, E, G: referem-se a designadores em $\mathcal{L}$;
- Γ, Φ: referem-se a coleções de fórmulas em $\mathcal{L}$;
- Ω: refere-se a uma coleção de designadores em $\mathcal{L}$.

2.1.12 Notação. A menos que o contrário seja dito, adotaremos, em todo este trabalho, as seguintes convenções:

- O símbolo "$\#$" refere-se a um dos conectivos "$\wedge$" ou "$\vee$".
- O símbolo "Ψ" refere-se a um dos quantificadores "$\forall$" ou "$\exists$".
- Quando Ψ' aparecer no mesmo contexto em que Ψ, $\Psi' = \begin{cases} \forall, & \text{se } \Psi = \exists, \\ \exists, & \text{se } \Psi = \forall. \end{cases}$

2.1.13 Definição. Em todas as lógicas deste trabalho, utilizaremos o conectivo diádico "$\leftrightarrow$", denominado *equivalência*, o qual é definido a seguir:

- $(P \leftrightarrow Q) \rightleftharpoons ((P \to Q) \wedge (Q \to P))$.

2.1.14. Convenções para escrita informal de termos e fórmulas. Adotaremos, no restante deste trabalho, as seguintes convenções para a escrita de termos e fórmulas, sempre que não houver margem para confusão, a fim de evitar o uso excessivo de parênteses (BUCHSBAUM, 2006):

- Se todos os conectivos monádicos da lógica considerada são de escrita pré-fixada e $\#$ é um conectivo monádico nesta lógica, então notamos $\#(P)$ por $\#P$.

- Se # for um conectivo diádico, então notamos $\#(P, Q)$ por $(P \# Q)$ e, se $(P \# Q)$ não estiver no interior de outra fórmula, então notamos $(P \# Q)$ por $P \# Q$.
- A lista "$\leftrightarrow, \rightarrow, \{\wedge, \vee\}$" fornece a ordem de prioridade para a separação em subfórmulas.
- Quando o conectivo da implicação se suceder em uma fórmula, a parentetização implícita se dá da direita para a esquerda.
- Quando conectivos diádicos de mesmo nível hierárquico, exceto o conectivo da implicação, se sucederem em uma fórmula, a parentetização implícita se dá da esquerda para a direita.
- Se f é um sinal funcional monádico de escrita pré-fixada, notamos $f(t)$ por (ft). Quando (ft) não estiver no interior de outro termo, podemos prescindir do seu par exterior de parênteses.
- Se f é um sinal funcional monádico de escrita pós-fixada, notamos $f(t)$ por (tf). Quando (tf) não estiver no interior de outro termo, podemos prescindir do seu par exterior de parênteses.
- Se f é um sinal funcional diádico, notamos $f(t_1, t_2)$ por $(t_1 f t_2)$. Quando $(t_1 f t_2)$ não estiver escrito como subtermo de outro termo, podemos prescindir do seu par exterior de parênteses.
- Quando o mesmo sinal funcional diádico se suceder em um termo, podemos suprimir no mesmo todos os pares internos de parênteses, considerando a parentetização implícita da esquerda para a direita.
- Se p for um sinal predicativo diádico, então notamos $p(t_1, t_2)$ por $(t_1 p t_2)$ e, se $(t_1 p t_2)$ não for uma subfórmula de outra fórmula, notamos $(t_1 p t_2)$ por $t_1 p t_2$.

2.1.15 Convenção. Em todo este trabalho, considerar-se-á que as variáveis estão ordenadas de acordo com a lista infinita "$\mathsf{x}, \mathsf{y}, \mathsf{z}, \mathsf{w}, \mathsf{x}_1, \mathsf{y}_1, \mathsf{z}_1, \mathsf{w}_1, \mathsf{x}_2, \mathsf{y}_2, \mathsf{z}_2, \mathsf{w}_2, \ldots$". Chamaremos esta ordem de estândar.

2.2 Teorias de Sistemas Lógicos

Todo sistema lógico possui uma teoria própria, construída a partir de suas linguagens, a qual descreve a veracidade absoluta ou relativa das fórmulas de tal sistema, através de uma relação de conseqüência entre coleções de fórmulas e fórmulas.

O sinal "$\vdash$" , ou um de seus variantes, é usado, em Lógica, para denotar a relação de conseqüência de uma dada lógica. Dada uma lógica $\mathcal{L}$, se a sua relação de conseqüência for definida por uma via sintática ou de automatização, notamos, então, esta relação de conseqüência por "$\vdash_{\mathcal{L}}$ "e se sua relação de conseqüência for definida semanticamente, então a notamos por

"$\models_{\mathcal{L}}$". As definições e notações a seguir referem-se tanto a "$\vdash_{\mathcal{L}}$" como a "$\models_{\mathcal{L}}$"[8].

2.2.1 Notação. Pode-se ler "$\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} P$" de uma das seguintes maneiras:

- "P é conseqüência de Γ em $\mathcal{L}$";
- "P é $\mathcal{L}$-conseqüência de Γ";
- "P é teorema de Γ em $\mathcal{L}$";
- "Γ acarreta P em $\mathcal{L}$";
- "De Γ, em $\mathcal{L}$, afirma-se P".

Desta forma, "$\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} P$" significa que, se todas as fórmulas pertencentes a Γ forem verdadeiras em $\mathcal{L}$, P também será verdadeiro em $\mathcal{L}$. Em particular, se Γ for vazio, então "$\emptyset \vdash_{\mathcal{L}} P$" expressa a veracidade absoluta de P em $\mathcal{L}$. Do contrário, "$\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} P$" expressa a veracidade relativa de P em $\mathcal{L}$, dependendo de Γ.

2.2.2 Definição. Γ é $\mathcal{L}$-trivial se, para toda fórmula P em $\mathcal{L}$, $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} P$. Caso contrário, Γ é dito *não trivial em $\mathcal{L}$*.

2.2.3 Notação.

- $\vdash_{\mathcal{L}} P \ \rightleftharpoons\ \emptyset \vdash_{\mathcal{L}} P$.
- $P_1, \ldots, P_n \vdash_{\mathcal{L}} P \ \rightleftharpoons\ \{P_1, \ldots, P_n\} \vdash_{\mathcal{L}} P$.
- $\Gamma, P \vdash_{\mathcal{L}} Q \ \rightleftharpoons\ \Gamma \cup \{P\} \vdash_{\mathcal{L}} Q$.
- $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n, P_1, \ldots, P_r \vdash_{\mathcal{L}} Q \ \rightleftharpoons\ \Gamma_1 \cup \ldots \cup \Gamma_n \cup \{P_1, \ldots, P_r\} \vdash_{\mathcal{L}} Q$.

2.2.4 Definição. Um *seqüente* em $\mathcal{L}$ é um par $\langle \Gamma, P \rangle$, onde Γ é uma coleção de fórmulas em $\mathcal{L}$ e P é uma fórmula em $\mathcal{L}$. Um *esquema* em $\mathcal{L}$ é uma coleção de seqüentes de mesmo formato em $\mathcal{L}$. Os elementos de um esquema em $\mathcal{L}$ são chamados de *exemplares* deste esquema.

2.2.5 Definição. Uma *aplicação* em $\mathcal{L}$ é um par $\langle \Sigma, \zeta \rangle$, onde Σ é uma lista finita de seqüentes em $\mathcal{L}$ e ζ é um seqüente em $\mathcal{L}$. Os elementos de Σ são ditos *hipóteses da aplicação* e ζ é dito a *conclusão da aplicação*. Uma *regra* em $\mathcal{L}$ é uma coleção de aplicações em $\mathcal{L}$.

2.2.6 Definição. Uma *lei* em $\mathcal{L}$ é um esquema em $\mathcal{L}$ ou uma regra em $\mathcal{L}$.

2.2.7 Definição. Um seqüente $\langle \Gamma, P \rangle$ é *correto* em $\mathcal{L}$ se existir uma demonstração para ele no referido cálculo. Este fato é notado por $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} P$. Um *esquema* é dito *correto* em $\mathcal{L}$ se todos os seus exemplares forem corretos em $\mathcal{L}$.

[8] Os símbolos "$\vdash$" e "$\models$", bem como outras versões dos mesmos, são também conhecidos como barras de Frege (WIKIPEDIA, 2007).

2.2.8 Exemplos.

- Esquema do $\wedge$-Introdução: $P, Q \vdash_{\mathcal{L}} P \wedge Q$.
- Um exemplar do Esquema do $\wedge$-Introdução: $p(\mathsf{x}, \mathsf{y}), q(\mathsf{z}, \mathsf{w}) \vdash_{\mathcal{L}} p(\mathsf{x}, \mathsf{y}) \wedge q(\mathsf{z}, \mathsf{w})$.

2.2.9 Definição. Uma *aplicação* é dita *correta* em $\mathcal{L}$ se a correção em $\mathcal{L}$ de todas as suas hipóteses implica na correção de sua conclusão. Uma *regra* é dita *correta* em $\mathcal{L}$ se todas as suas aplicações forem corretas em $\mathcal{L}$. Uma *lei* é dita *correta* em $\mathcal{L}$ se esta for um esquema correto em $\mathcal{L}$ ou uma regra correta em $\mathcal{L}$.

2.2.10 Exemplos.

- Regra da Dedução: $\dfrac{\Gamma, P \vdash_{\mathcal{L}} Q}{\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} P \to Q}$.
- Uma aplicação da Regra da Dedução: $\dfrac{p(\mathsf{x}, \mathsf{y}) \vdash_{\mathcal{L}} q(\mathsf{z}, \mathsf{w})}{\vdash_{\mathcal{L}} p(\mathsf{x}, \mathsf{y}) \to q(\mathsf{z}, \mathsf{w})}$.

2.2.1 Semânticas de Sistemas Lógicos

Para as lógicas apresentadas neste trabalho, definiremos um objeto formal denominado *interpretação*, o qual dá significado a todos os sinais contidos na linguagem considerada. Uma interpretação pode incluir, entre outros possíveis objetos, uma coleção não vazia, denominada *universo de discurso* (ou simplesmente *universo*) da interpretação, um *mundo* e uma *atribuição para variáveis*. O universo de discurso contém todos os objetos do contexto em estudo. Um mundo dá significado aos chamados sinais não lógicos: constantes, sinais funcionais e sinais predicativos. Uma atribuição para variáveis associa variáveis a objetos do universo de discurso. Estes elementos, bem como as noções de satisfatibilidade, validade e conseqüência semântica em $\mathcal{L}$, serão definidos a seguir.

2.2.11 Definição. Um *universo de discurso* é uma coleção não vazia.

2.2.12 Definição. Um *mundo* w para um universo de discurso Δ é uma função cujo domínio é uma coleção de constantes, sinais funcionais e sinais predicativos, atendendo às seguintes condições:

- para cada constante $c \in \mathcal{D}(w)$, $w(c) \in \Delta$;
- para cada sinal funcional $f \in \mathcal{D}(w)$ de aridade n, $w(f)$ é uma função de Δ^n em Δ;
- para cada sinal predicativo $p \in \mathcal{D}(w)$ de aridade n, $w(p) \subseteq \Delta^n$.

2.2.13 Definição. Dado um designador D em $\mathcal{L}$, dizemos que w é um mundo para D se o domínio de w contiver todas as constantes, sinais funcionais e sinais predicativos que ocorrem em D. Dizemos também que w é um mundo para Ω se w é um mundo para cada $D \in \Omega$.

2.2.14 Definição. Um *termo* (fórmula/designador) *em* um mundo w é um termo (fórmula/ designador) cujas constantes, sinais funcionais e sinais predicativos estão no domínio de w.

2.2.15 Definição. Seja Δ um universo de discurso. Uma Δ-atribuição para variáveis s é uma função cujo domínio é a coleção das variáveis e cuja imagem está contida em Δ.

2.2.16 Definição. Sejam s uma Δ-atribuição para variáveis, $x_1, \ldots, x_n$ variáveis distintas e $d, d_1, \ldots, d_n$ elementos de Δ. $s(x|d)$ e $s(x_1, \ldots, x_n \,|\, d_1, \ldots, d_n)$ são Δ-atribuições para variáveis definidas por:

- $s(x|d)(y) = \begin{cases} s(y), & \text{se } y \neq x; \\ d, & \text{se } y = x. \end{cases}$
- $s(x_1, \ldots, x_n \,|\, d_1, \ldots, d_n)(y) = \begin{cases} s(y), & \text{se } y \notin \{x_1, \ldots, x_n\}; \\ d_i, & \text{se } y = x_i, \text{ para } i \in \{1, \ldots, n\}. \end{cases}$

2.2.17 Pré-definição. Dada uma lógica $\mathcal{L}$, consideramos como previamente conhecido o que vem a ser uma $\mathcal{L}$-interpretação. Dada uma $\mathcal{L}$-interpretação I, consideramos também como previamente conhecido o mundo de I.

2.2.18 Notação. No restante deste trabalho, consideraremos que: w é um mundo para um universo de discurso Δ; s é uma Δ-atribuição para variáveis; I é uma interpretação para a lógica considerada; d e e, seguidos ou não de subíndices, são elementos do universo de discurso de uma dada interpretação.

2.2.19 Definição. Dizemos que I é uma interpretação para D se o mundo de I for um mundo para D. Dizemos também que I é uma interpretação para Ω se o mundo de I for um mundo para Ω.

2.2.20 Pré-definição. Dada uma fórmula P em $\mathcal{L}$, consideramos como previamente definido quando uma $\mathcal{L}$-interpretação I satisfaz P em $\mathcal{L}$.

2.2.21 Definição. I satisfaz Γ em $\mathcal{L}$ se I é uma $\mathcal{L}$-interpretação e, para cada $P \in \Gamma$, I satisfaz P em $\mathcal{L}$.

2.2.22 Definição. P é uma $\mathcal{L}$-conseqüência semântica de Γ se toda $\mathcal{L}$-interpretação para $\Gamma \cup \{P\}$ que satisfaz Γ também satisfaz P. Notamos isto por $\Gamma \models_{\mathcal{L}} P$.

2.2.23 Definição. P é $\mathcal{L}$-válida se toda $\mathcal{L}$-interpretação para P satisfaz P.

2.2.24 Definição. P é $\mathcal{L}$-satisfatível se existir uma $\mathcal{L}$-interpretação I que satisfaz P.

2.2.25 Definição. Γ é $\mathcal{L}$-satisfatível se existir uma $\mathcal{L}$-interpretação que satisfaz Γ.

2.2.2 Cálculos de Seqüentes para Sistemas Lógicos

Em todos os sistemas lógicos definidos neste trabalho, adotaremos como via sintática preferencial os cálculos de seqüentes. Os cálculos de seqüentes são um tipo de sistema dedutivo, ou seja, um sistema que possibilita inferir, derivar ou deduzir as conseqüências de um conjunto de fórmulas (SILVA; FINGER; MELO, 2006).

2.2.26 Definição. Um *cálculo de seqüentes* é dado por uma coleção de leis em alguma lógica $\mathcal{L}$, ditas *leis primitivas* ou *postulados* deste cálculo. Um(a) esquema(regra) primitivo(a) deste cálculo é um postulado deste cálculo que é esquema(regra). Uma *demonstração* neste cálculo é uma lista de seqüentes, tal que cada seqüente é um exemplar de um esquema primitivo deste cálculo ou é conseqüência da aplicação de uma regra primitiva do mesmo a um ou mais seqüentes anteriores nesta demonstração (BUCHSBAUM, 2006).

2.2.27 Notação. Consideraremos no restante desta seção que $\mathcal{L}$ é definido por um cálculo de seqüentes.

2.2.28 Definição. Um esquema correto em $\mathcal{L}$ que não for primitivo em $\mathcal{L}$ é dito *derivado* em $\mathcal{L}$. Uma regra correta em $\mathcal{L}$ que não seja primitiva em $\mathcal{L}$ é dita *derivada* em $\mathcal{L}$.

2.2.3 Correção e Completude de Sistemas Lógicos

Sejam $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ lógicas que possuem as mesmas linguagens, de forma que $\mathcal{L}_1$ é definida por um cálculo de seqüentes e $\mathcal{L}_2$ é definida por uma semântica.

2.2.29 Definição. Dizemos que $\mathcal{L}_1$ é *correto com respeito a* $\mathcal{L}_2$ se, para todo Γ e para todo P, $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}_1} P$ implica em $\Gamma \models_{\mathcal{L}_2} P$.

2.2.30 Definição. Dizemos que $\mathcal{L}_2$ é *completo com respeito a* $\mathcal{L}_1$ se, para todo Γ e para todo P, $\Gamma \models_{\mathcal{L}_2} P$ implica em $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}_1} P$.

Quando sabemos que o cálculo de seqüentes de $\mathcal{L}_1$ e a semântica de $\mathcal{L}_2$ definem uma mesma lógica, costumamos designar $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ pelo mesmo nome. Usualmente, por abuso de linguagem, usamos o mesmo nome para $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$, com a condição de mostrar posteriormente que o cálculo de $\mathcal{L}_1$ e a semântica de $\mathcal{L}_2$ definem a mesma lógica.

Capítulo 3

A Lógica Equacional Clássica

3.1 Introdução

Neste capítulo abordaremos a *Lógica Equacional Clássica* – LEC, também conhecida como *Lógica Elementar Clássica*, *Lógica de Primeira Ordem com Igualdade* ou *Cálculo de Predicados de Primeira Ordem com Igualdade*. Esta lógica opera sobre os chamados conectivos (*conjunção, disjunção, implicação* e *negação*), quantificadores (*para todo* e *algum*) e sobre o predicado de igualdade.

Sobre a importância desta lógica, Carrion e da Costa (1988) afirmam que

> ela é de fundamental importância para a lógica e a matemática tradicionais, pois é o ponto de partida para a codificação rigorosa das mesmas. Mas também é relevante para as lógicas não-clássicas, dado que estas sempre se originam a partir de modificações de seus princípios. Além disso ela é importante por si própria, como teoria matemático-formal extremamente fecunda, e encontrou aplicações variadas na filosofia, nas ciências empíricas e na tecnologia. Por exemplo, ela se evidenciou imprescindível para a computação.

A denominação *primeira ordem* qualifica lógicas onde há unicamente variáveis que denotam elementos do universo de discurso (indivíduos), mas não há variáveis para predicados ou funções (DA COSTA; KRAUSE, 2005). Nas lógicas de ordem superior, há sinais predicativos que tomam outros sinais predicativos ou funcionais como argumentos, ou onde quantificadores predicativos ou funcionais são permitidos (POGORZELSKI, 1994). Por exemplo, na frase "todo conjunto não vazio de números naturais tem um primeiro elemento", a quantificação está sendo aplicada sobre conjuntos de números, e não sobre variáveis individuais que denotam números (CARNIELLI; CONIGLIO; BIANCONI, 2002).

Conforme Hatcher (1982), uma lógica de primeira ordem com igualdade é uma lógica de primeira ordem contendo um sinal predicativo binário, usualmente denotado por " = ", satisfazendo às condições de reflexividade e substitutividade. Esta última, articulada há 350 anos e conhecida como Lei de Leibniz, pode ser enunciada como: "*duas expressões são iguais, em qualquer atribuição de variáveis, se e somente se substituindo-se uma por outra em qualquer expressão E, o valor veritativo de E não se altera*". A Lei de Leibniz pode ser representada como: $\dfrac{x = y \qquad E(z\,|\,x)}{E(z\,|\,y)}$[1]. Ou seja, se x e y denotam o mesmo objeto, então tudo o que for verdadeiro sobre x também será sobre y. Desse modo, se começarmos com uma fórmula contendo ocorrências de x, e substituirmos algumas, não necessariamente todas, por y, então as duas fórmulas terão o mesmo valor veritativo (BOSTOCK, 1997). Gries e Schneider (1994) ressaltam que, na lógica equacional, a substituição de termos por seus iguais é, mais do que a modus ponens, a principal regra de inferência.

A seguir definiremos uma linguagem, um cálculo de seqüentes e uma semântica para LEC, adaptadas de Buchsbaum (2006). Todas as definições e convenções estabelecidas no Capítulo 2 valem também para esta lógica.

3.2 Linguagens para LEC

3.2.1 Definição. Um alfabeto para LEC é um alfabeto quantificacional (def. 2.1.2) possuindo os conectivos diádicos "$\to$" (conectivo da implicação), "$\land$" (conectivo da conjunção) e "$\lor$" (conectivo da disjunção), o conectivo monádico "$\neg$" (conectivo da negação), o sinal predicativo diádico "=" (igualdade) e os quantificadores "$\forall$" (quantificador universal) e "$\exists$" (quantificador existencial).

3.2.2 Notação. Adotaremos neste capítulo as notações especificadas nos itens 2.1.11 e 2.1.12, exceto para o símbolo, " # " o qual se refere, nesta seção, a um dos conectivos "$\land$", "$\lor$" ou "$\to$".

3.2.3 Definição. Todas as ocorrências de uma variável em um termo em LEC são ditas *livres* neste termo. Uma ocorrência de uma variável x em uma fórmula P em LEC é dita *ligada em* P se esta estiver em uma subfórmula de P de uma das formas $\forall x\, Q$ ou $\exists x\, Q$; caso contrário, a

[1]Em [Clarence I. Lewis. *A survey of symbolic logic*. Dover Publication, New York, 1960.], Lewis apresenta uma versão em inglês do trabalho de Leibniz, o qual é encontrado em [Karl Imanuel Gerhardt (editor). *Die Philosophischen von G. W. Leibniz*, Band VII, "Scientific Generalis". XIX e XX. Weidmannsche Buchh., Berlin, 1887].

ocorrência é dita *livre em P*.

3.2.4 Definição. Uma *variável* é dita ser *livre em um termo em* LEC se a mesma possuir pelo menos uma ocorrência neste termo. Uma *variável* é dita ser *ligada em uma fórmula em* LEC se esta possuir pelo menos uma ocorrência ligada nesta fórmula. Analogamente, uma *variável* é dita ser *livre em uma fórmula em* LEC se esta possuir pelo menos uma ocorrência livre nesta fórmula. Uma *variável* é dita ser *livre em uma coleção de designadores em* LEC se ela for livre em pelo menos um elemento desta coleção.

3.2.5 Definição. As cláusulas abaixo especificam a *instanciação de variáveis por termos* em LEC:

- A *instanciação* de x por t em um termo u, notada por $u(x|t)$, é o termo obtido de u substituindo todas as ocorrências de x por t;
- A *instanciação* de x por t em P, notada por $P(x|t)$, é a fórmula obtida de P substituindo todas as ocorrências livres de x por t, se P não possuir quantificadores. Se houverem quantificadores em P, a instanciação é definida de acordo com as cláusulas abaixo, onde x e y são variáveis distintas[2]:

  $*$ $(\Psi x\, P)(x|t) = \Psi x\, P$;

  $*$ $(\Psi y\, P)(x|t) = \begin{cases} * \ \Psi y\, P(x|t), \text{ se } x \text{ não é livre em } P \text{ ou } y \text{ não é livre em } t; \\ * \ \Psi z\, P(y|z)(x|t), \text{ se } x \text{ é livre em } P \text{ e } y \text{ é livre em } t, \text{ onde } z \text{ é a} \\ \quad \text{primeira variável não livre em } \{t, P\}. \end{cases}$

- A *instanciação* de x por t em Γ, notada por $\Gamma(x|t)$, é a coleção $\{P(x|t) \,|\, P \in \Gamma\}$.

3.2.6 Definição. Todas as ocorrências de um termo em um termo em LEC são ditas *reais neste termo*. Uma ocorrência de um termo v em uma fórmula Q em LEC é dita *real* em Q se a mesma não suceder em Q um dos quantificadores "$\forall$" ou "$\exists$". Um termo v é dito ser *real em Q* se v possuir pelo menos uma ocorrência real em Q.

3.2.7 Definição. As cláusulas abaixo especificam a *substituição de termos por termos* e *substituição de fórmulas por fórmulas* em LEC:

- A *substituição* de v por t em u, notada por $u(v||t)$, é o termo obtido de u substituindo todas as ocorrências de v por t;
- A *substituição* de v por t em P, notada por $P(v||t)$, é a fórmula obtida de P substituindo todas as ocorrências reais de v por t;

[2]Esta definição impede o que é comumente chamado de *confusão* ou *colisão de variáveis*, ou seja, nenhuma variável livre em t torna-se ligada após a instanciação.

- A *substituição* de v por t em Γ, notada por $\Gamma(v\|t)$, é a coleção $\{P(v\|t) \mid P \in \Gamma\}$;
- A *substituição* de S por P em Q, notada por $Q(S\|P)$, é a fórmula obtida de Q substituindo todas as ocorrências de S por P;
- A *substituição* de S por P em Γ, notada por $\Gamma(S\|P)$, é a coleção $\{Q(S\|P) \mid Q \in \Gamma\}$.

3.2.8 Definição. As cláusulas abaixo definem a relação de *congruência entre designadores* em LEC, notada por "$\approx_c$" [3]:

- $a \approx_c b$ sss "a" e "b" são a mesma constante;
- $x \approx_c y$ sss "x" e "y" são a mesma variável;
- $f(t_1, \ldots, t_n) \approx_c g(u_1, \ldots, u_p)$ sss $f = g$, $n = p$ e $t_i = u_i$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$[4];
- $p(t_1, \ldots, t_n) \approx_c q(u_1, \ldots, u_p)$ sss $p = q$, $n = p$ e $t_i = u_i$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$[5];
- $\neg P_1 \approx_c \neg P_2$ sss $P_1 \approx_c P_2$;
- $P_1 \# Q_1 \approx_c P_2 \# Q_2$ sss $P_1 \approx_c P_2$ e $Q_1 \approx_c Q_2$;
- $\Psi x\, P_1 \approx_c \Psi y\, P_2$ sss y não é livre em $\forall x\, P_1$ e $P_1(x|y) \approx_c P_2$.
- Se P_1 e P_2 forem fórmulas de tipos diferentes, então $P_1 \not\approx_c P_2$ [6].

3.2.9 Definição. Um termo v é dito estar no escopo de uma variável x em uma fórmula Q em LEC se Q possuir uma subfórmula de uma das formas $\forall x\, R$ ou $\exists x\, R$, tal que v é real em R. Uma fórmula S é dita estar no escopo de uma variável x em uma fórmula Q se Q possuir uma subfórmula de uma das formas $\forall x\, R$ ou $\exists x\, R$, tal que S ocorre em R.

3.3 Um Cálculo de Seqüentes para LEC

A seguir são relacionadas as Leis Estruturais, as Leis de Introdução e Eliminação de Conectivos, as Leis Quantificacionais e as Leis Equacionais, as quais constituem conjuntamente as Leis Primitivas de LEC. Estas leis são baseadas nas apresentadas Buchsbaum (2006).

---

[3] Dois designadores são congruentes se o segundo for obtido do primeiro por um número finito de substituições de ocorrências de $\Psi x\, P$ por $\Psi y\, P(x|y)$, onde y não ocorre em P. Informalmente, segundo Carrion e da Costa (1988), duas fórmulas são congruentes quando diferem apenas pelas suas variáveis ligadas, e ocorrências correspondentes de variáveis ligadas são ligadas por quantificadores correspondentes (ou pelo descritor, nas lógicas com descrições). Fórmulas congruentes possuem o mesmo sentido, ou seja, se P for verdadeiro, qualquer fórmula congruente a P também o será. Fórmulas congruentes são também equivalentes.

[4] Ou seja, dois termos funcionais são congruentes se e somente se forem iguais.

[5] Ou seja, duas fórmulas atômicas são congruentes se e somente se forem iguais.

[6] Ou seja, não é verdade que $P_1 \approx_c P_2$.

3.3.1. Leis Estruturais.

- **Esquema da Reflexividade (RFL)**: Se $P \in \Gamma$, então $\Gamma \vdash_{\text{LEC}} P$.
- **Regra da Cadeia (CAD)**: $\dfrac{\Gamma \vdash_{\text{LEC}} P \qquad \Gamma, P \vdash_{\text{LEC}} Q}{\Gamma \vdash_{\text{LEC}} Q}$.
- **Regra da Monotonicidade (MON)**: Se $\Gamma \subseteq \Gamma'$, então $\dfrac{\Gamma \vdash_{\text{LEC}} P}{\Gamma' \vdash_{\text{LEC}} P}$.

3.3.2. Leis de Introdução e Eliminação de Conectivos.

- **Esquema Modus Ponens (MP)**: $P, P \to Q \vdash_{\text{LEC}} Q$.
- **Regra da Dedução (RD)**: $\dfrac{\Gamma, P \vdash_{\text{LEC}} Q}{\Gamma \vdash_{\text{LEC}} P \to Q}$.
- **Esquema do ∧-Introdução (∧-int)**: $P, Q \vdash_{\text{LEC}} P \wedge Q$.
- **Esquema do ∧-Eliminação (∧-el)**: $\begin{cases} P \wedge Q \vdash_{\text{LEC}} P; \\ P \wedge Q \vdash_{\text{LEC}} Q. \end{cases}$
- **Esquema do ∨-Introdução (∨-int)**: $\begin{cases} P \vdash_{\text{LEC}} P \vee Q; \\ Q \vdash_{\text{LEC}} P \vee Q. \end{cases}$
- **Esquema da Prova por Casos (PC)**: $P \vee Q, P \to R, Q \to R \vdash_{\text{LEC}} R$ ·
- **Regra do ¬-Introdução (¬-int)**: $\dfrac{\Gamma, P \vdash_{\text{LEC}} Q \qquad \Gamma, P \vdash_{\text{LEC}} \neg Q}{\Gamma \vdash_{\text{LEC}} \neg P}$.
- **Regra do ¬-Eliminação (¬-el)**: $\dfrac{\Gamma, \neg P \vdash_{\text{LEC}} Q \qquad \Gamma, \neg P \vdash_{\text{LEC}} \neg Q}{\Gamma \vdash_{\text{LEC}} P}$.

3.3.3. Leis Quantificacionais.

- **Esquema do ∀-Eliminação (∀-el)**: $\forall x\, P \vdash_{\text{LEC}} P(x|t)$.
- **Regra da Generalização (GEN)**[7]: Se x não é livre em Γ, então $\dfrac{\Gamma \vdash_{\text{LEC}} P}{\Gamma \vdash_{\text{LEC}} \forall x\, P}$.
- **Regra da Testemunha (∃-el)**[8]:
  - ∗ Se y não é livre em $\Gamma \cup \{\exists x\, P, Q\}$, então $\dfrac{\Gamma, P(x|y) \vdash_{\text{LEC}} Q}{\Gamma, \exists x\, P \vdash_{\text{LEC}} Q}$.
- **Esquema do ∃-Introdução (∃-int)**: $P(x|t) \vdash_{\text{LEC}} \exists x\, P$.

---

[7]Regra de introdução do quantificador universal “∀”.
[8]Regra de eliminação do quantificador existencial “∃”.

3.3.4. Leis Equacionais.

- **Reflexividade da Igualdade (RI)**: $\vdash_{\text{LEC}} t = t$.

- **Substituição em Termos Funcionais (STF)**:

  $*$ $t_1 = u_1, \ldots, t_n = u_n \vdash_{\text{LEC}} f(t_1, \ldots, t_n) = f(u_1, \ldots, u_n)$.

- **Substituição em Fórmulas Atômicas (SFA)**:

  $*$ $t_1 = u_1, \ldots, t_n = u_n \vdash_{\text{LEC}} p(t_1, \ldots, t_n) \to p(u_1, \ldots, u_n)$.

Apresentaremos a seguir alguns resultados sintáticos básicos de LEC. Para não nos estendermos exageradamente nesta lógica, a qual não constitui o foco deste trabalho, apenas enunciaremos as leis, sem prová-las.

3.3.5. Leis Básicas dos Conectivos.

- **Reflexividade da Implicação (RImp)**: $\vdash_{\text{LEC}} P \to P$.

- **Não Contradição (NC)**: $\begin{cases} \text{(i)} \quad P, \neg P \vdash_{\text{LEC}} Q; \\ \text{(ii)} \quad \vdash_{\text{LEC}} \neg(P \wedge \neg P). \end{cases}$

- **Conseqüente da Implicação (CI)**: $Q \vdash_{\text{LEC}} P \to Q$.

- **Antecedente da Implicação (AI)**: $\neg P \vdash_{\text{LEC}} P \to Q$.

- **Silogismo Hipotético (SH)**: $P \to Q, Q \to R \vdash_{\text{LEC}} P \to R$.

- **Regra Recíproca da Dedução (RRD)**: Se $\Gamma \vdash_{\text{LEC}} P \to Q$, então $\Gamma, P \vdash_{\text{LEC}} Q$.

- **Dupla Negação (DN)**: $\begin{cases} \text{(i)} \quad P \vdash_{\text{LEC}} \neg\neg P; \\ \text{(ii)} \quad \neg\neg P \vdash_{\text{LEC}} P. \end{cases}$

- **Modus Tollens (MT)**: $\neg Q, P \to Q \vdash_{\text{LEC}} \neg P$.

- **Contraposição (CTP)**: $\begin{cases} \text{(i)} \quad P \to Q \vdash_{\text{LEC}} \neg Q \to \neg P; \\ \text{(ii)} \quad \neg Q \to \neg P \vdash_{\text{LEC}} P \to Q. \end{cases}$

- **Silogismo Disjuntivo (SD)**: $\begin{cases} \text{(i)} \quad \neg P, P \vee Q \vdash_{\text{LEC}} Q; \\ \text{(ii)} \quad \neg Q, P \vee Q \vdash_{\text{LEC}} P. \end{cases}$

- **Negação da Conjunção (NCJ)**: $\begin{cases} \text{(i)} \quad \neg(P \wedge Q) \vdash_{\text{LEC}} P \to \neg Q; \\ \text{(ii)} \quad P \to \neg Q \vdash_{\text{LEC}} \neg(P \wedge Q); \\ \text{(iii)} \quad \neg(P \wedge Q) \vdash_{\text{LEC}} Q \to \neg P; \\ \text{(iv)} \quad Q \to \neg P \vdash_{\text{LEC}} \neg(P \wedge Q). \end{cases}$

- **De Morgan (DM)**: $\begin{cases} \text{(i)} \quad \neg(P \lor Q) \mid\!\overline{}_{\text{LEC}}\ \neg P \land \neg Q; \\ \text{(ii)} \quad \neg P \land \neg Q \mid\!\overline{}_{\text{LEC}}\ \neg(P \lor Q); \\ \text{(iii)} \ \neg(P \land Q) \mid\!\overline{}_{\text{LEC}}\ \neg P \lor \neg Q; \\ \text{(iv)} \quad \neg P \lor \neg Q \mid\!\overline{}_{\text{LEC}}\ \neg(P \land Q). \end{cases}$

- **Implicação Material (IM)**: $\begin{cases} \text{(i)} \quad P \to Q \mid\!\overline{}_{\text{LEC}}\ \neg P \lor Q; \\ \text{(ii)} \quad \neg P \lor Q \mid\!\overline{}_{\text{LEC}}\ P \to Q; \\ \text{(iii)} \ \neg(P \to Q) \mid\!\overline{}_{\text{LEC}}\ P \land \neg Q; \\ \text{(iv)} \quad P \land \neg Q \mid\!\overline{}_{\text{LEC}}\ \neg(P \to Q). \end{cases}$

- **Redução da Disjunção (RDJ)**: $\begin{cases} \text{(i)} \quad P \lor Q \mid\!\overline{}_{\text{LEC}}\ \neg P \to Q; \\ \text{(ii)} \quad \neg P \to Q \mid\!\overline{}_{\text{LEC}}\ P \lor Q; \\ \text{(iii)} \ P \lor Q \mid\!\overline{}_{\text{LEC}}\ \neg Q \to P; \\ \text{(iv)} \quad \neg Q \to P \mid\!\overline{}_{\text{LEC}}\ P \lor Q. \end{cases}$

- **Esquema do $\leftrightarrow$-Eliminação ($\leftrightarrow$-el)**: $\begin{cases} \text{(i)} \quad P, P \leftrightarrow Q \mid\!\overline{}_{\text{LEC}}\ Q; \\ \text{(ii)} \quad P, P \leftrightarrow Q \mid\!\overline{}_{\text{LEC}}\ P. \end{cases}$

- **Comutatividade da Equivalência (CME)**: $\mid\!\overline{}_{\text{LEC}}\ (P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow (Q \leftrightarrow P)$.

- **Transitividade da Equivalência (TE)**: $P \leftrightarrow Q, Q \leftrightarrow R \mid\!\overline{}_{\text{LEC}}\ P \leftrightarrow R$.

- **Lema da Substituição para Conectivos (LSC)**:

(i) $P_1 \leftrightarrow P_2 \mid\!\overline{}_{\text{LEC}}\ \neg P_1 \leftrightarrow \neg P_2$;

(ii) $P_1 \leftrightarrow P_2 \mid\!\overline{}_{\text{LEC}}\ (P_1 \to Q) \leftrightarrow (P_2 \to Q)$;

(iii) $P_1 \leftrightarrow P_2 \mid\!\overline{}_{\text{LEC}}\ (Q \to P_1) \leftrightarrow (Q \to P_2)$;

(iv) $P_1 \leftrightarrow P_2 \mid\!\overline{}_{\text{LEC}}\ (P_1 \land Q) \leftrightarrow (P_2 \land Q)$;

(v) $P_1 \leftrightarrow P_2 \mid\!\overline{}_{\text{LEC}}\ (Q \land P_1) \leftrightarrow (Q \land P_2)$;

(vi) $P_1 \leftrightarrow P_2 \mid\!\overline{}_{\text{LEC}}\ (P_1 \lor Q) \leftrightarrow (P_2 \lor Q)$;

(vii) $P_1 \leftrightarrow P_2 \mid\!\overline{}_{\text{LEC}}\ (Q \lor P_1) \leftrightarrow (Q \lor P_2)$;

(viii) $P_1 \leftrightarrow P_2, Q_1 \leftrightarrow Q_2 \mid\!\overline{}_{\text{LEC}}\ (P_1 \to Q_1) \leftrightarrow (P_2 \to Q_2)$;

(ix) $P_1 \leftrightarrow P_2, Q_1 \leftrightarrow Q_2 \mid\!\overline{}_{\text{LEC}}\ (P_1 \land Q_1) \leftrightarrow (P_2 \land Q_2)$;

(x) $P_1 \leftrightarrow P_2, Q_1 \leftrightarrow Q_2 \mid\!\overline{}_{\text{LEC}}\ (P_1 \lor Q_1) \leftrightarrow (P_2 \lor Q_2)$.

3.3.6. Leis Básicas dos Quantificadores.

- **Alternância (ALT)**: $\begin{cases} \mid\!\overline{}_{\text{LEC}}\ \neg\exists x\, P \leftrightarrow \forall x\, \neg P; \\ \mid\!\overline{}_{\text{LEC}}\ \forall x\, \neg P \leftrightarrow \neg\exists x\, P. \end{cases}$

- **Instanciação (INS)**: Se $\begin{cases} \Gamma \vdash_{\text{LEC}} P \\ x \text{ não é livre em } \Gamma \end{cases}$, então $\vdash_{\text{LEC}} P(x|t)$.

- **Vacuidade (VAC)**: Se x não é livre em P, então $\begin{cases} \vdash_{\text{LEC}} \forall x\, P \leftrightarrow P; \\ \vdash_{\text{LEC}} \exists x\, P \leftrightarrow P. \end{cases}$

- **Congruência (CGR)**: Se y não é livre em P, então $\begin{cases} \vdash_{\text{LEC}} \forall x\, P \leftrightarrow \forall y\, P(x|y); \\ \vdash_{\text{LEC}} \exists x\, P \leftrightarrow \exists y\, P(x|y). \end{cases}$

- **Lema da Substituição para Quantificadores (LSQ)**:

  (i) $\vdash_{\text{LEC}} \forall x\, (P_1 \leftrightarrow P_2) \to (\forall x\, P_1 \leftrightarrow \forall x\, P_2)$;

  (ii) $\vdash_{\text{LEC}} \exists x\, (P_1 \leftrightarrow P_2) \to (\exists x\, P_1 \leftrightarrow \exists x\, P_2)$.

- **∃-Eliminação generalizado**

  (i) Se $\begin{cases} \Gamma \vdash_{\text{LEC}} \exists x_1\, P_1, \\ \vdots \\ \Gamma \vdash_{\text{LEC}} \exists x_n\, P_n, \\ \text{se } i \neq j, \text{ então } x_i \text{ não é livre em } P_j, \\ \Gamma, P_1, \ldots, P_n \vdash_{\text{LEC}} Q, \\ x_1, \ldots, x_n \text{ não são livres em } \Gamma \cup \{Q\}, \end{cases}$ então $\Gamma \vdash_{\text{LEC}} Q$.

  (ii) Se $\begin{cases} \Gamma \vdash_{\text{LEC}} \exists x_1 \ldots \exists x_n\, P, \\ \Gamma, P \vdash_{\text{LEC}} Q, \\ x_1, \ldots, x_n \text{ não são livres em } \Gamma \cup \{Q\}, \end{cases}$ então $\Gamma \vdash_{\text{LEC}} Q$.

3.3.7. Leis Básicas da Igualdade.

- **Substituição em Fórmulas Atômicas (SFA)**:

  * $t_1 = u_1, \ldots, t_n = u_n \vdash_{\text{LEC}} p(t_1, \ldots, t_n) \leftrightarrow p(u_1, \ldots, u_n)$.

- **Simetria da Igualdade (SI)**: $t = u \vdash_{\text{LEQ}} u = t$.

- **Transitividade da Igualdade (TI)**: $t = u, u = v \vdash_{\text{LEQ}} t = v$.

- **Simetria e Transitividade da Igualdade (STI)**:

  (i) $t = v, u = v \vdash_{\text{LEQ}} t = u$;

  (ii) $v = t, v = u \vdash_{\text{LEQ}} t = u$.

- **Esquema da Substituição da Igualdade para Termos**:
  - $t_1 = t_2 \mid_{\overline{\mathrm{LEQ}}}\, u(v\|t_1) = u(v\|t_2)$.

- **Esquema da Substituição da Igualdade para Fórmulas**:
  - Se $x_1, \ldots, x_n$ são as variáveis livres em $\{t_1, t_2\}$ tais que v está em Q no seu escopo, então $\forall x_1 \ldots \forall x_n\,(t_1 = t_2) \mid_{\overline{\mathrm{LEC}}}\, Q(v\|t_1) \leftrightarrow Q(v\|t_2)$.

- **Regra da Substituição da Igualdade para Fórmulas**:
  - Se $\begin{cases} \Gamma \mid_{\overline{\mathrm{LEC}}}\, t_1 = t_2, \\ v \text{ não está, em } Q\text{, no escopo de nenhuma variável livre em } \Gamma \text{ e em } \{t_1, t_2\}, \end{cases}$

    então $\Gamma \mid_{\overline{\mathrm{LEC}}}\, Q(v\|t_1) \leftrightarrow Q(v\|t_2)$.

- **Esquema da Instanciação da Igualdade para Fórmulas**:
  - $t_1 = t_2 \mid_{\overline{\mathrm{LEC}}}\, Q(x|t_1) \leftrightarrow Q(x|t_2)$.

- **Esquema da Substituição da Equivalência**:
  - Se $x_1, \ldots, x_n$ são as variáveis livres em $\{P_1, P_2\}$ tais que S está em Q no seu escopo, então $\forall x_1 \ldots \forall x_n\,(P_1 \leftrightarrow P_2) \mid_{\overline{\mathrm{LEC}}}\, Q(S\|P_1) \leftrightarrow Q(S\|P_2)$.

- **Regra da Substituição da Equivalência**:
  - Se $\begin{cases} \Gamma \mid_{\overline{\mathrm{LEC}}}\, P_1 \leftrightarrow P_2, \\ S \text{ não está, em } Q\text{, no escopo de nenhuma variável livre em } \Gamma \text{ e em } \{P_1, P_2\}, \end{cases}$

    então $\Gamma \mid_{\overline{\mathrm{LEC}}}\, Q(S\|P_1) \leftrightarrow Q(S\|P_2)$.

- **Quantificação Pontual (QP)**:
  - Se x não é livre em t, então $\begin{cases} \text{(i)} & \mid_{\overline{\mathrm{LEC}}}\, \forall x\,(x = t \to P) \leftrightarrow P(x|t); \\ \text{(ii)} & \mid_{\overline{\mathrm{LEC}}}\, \exists x\,(x = t \land P) \leftrightarrow P(x|t). \end{cases}$

- **Quantificação Pontual Plural (QPP)**:
  - Se x não é livre em $t_1, \ldots, t_n$, então

    $\begin{cases} \text{(i)} & \mid_{\overline{\mathrm{LEC}}}\, \forall(x = t_1 \lor \ldots \lor x = t_n)\, x\, P \leftrightarrow P(x|t_1) \land \ldots \land P(x|t_n); \\ \text{(ii)} & \mid_{\overline{\mathrm{LEC}}}\, \exists(x = t_1 \lor \ldots \lor x = t_n)\, x\, P \leftrightarrow P(x|t_1) \lor \ldots \lor P(x|t_n). \end{cases}$

- **Unificação pela Substituição**:
  - Se v não está, em Q, no escopo de nenhuma variável livre em $\{t_1, t_2\}$, então $Q(v\|t_1), \neg Q(v\|t_2) \mid_{\overline{\mathrm{LEC}}}\, t_1 \neq t_2$.

- **Unificação pela Instanciação**: $Q(x|t_1), \neg Q(x|t_2) \mid_{\overline{\mathrm{LEC}}}\, t_1 \neq t_2$.

Para cada número inteiro n, positivo ou nulo, pode-se definir em LEC seis quantificadores existenciais especiais, denominados *quantificadores numéricos*. Dado n, os três primeiros quantificadores a ele associados têm o propósito de representar formalmente expressões como "existem pelo menos n objetos x tais que $P(x)$", "existem no máximo n objetos x tais que $P(x)$" e "existem exatamente n objetos x tais que $P(x)$".

Abordaremos aqui apenas o caso em que n é igual a um. A fórmula $\exists x\, P$ significa "existe pelo menos um objeto x tal que $P(x)$". Definiremos abaixo mais dois destes quantificadores, a fim de formalizar expressões do tipo "existe no máximo um objeto x tal que $P(x)$", representada pela fórmula $\overline{\exists} x\, P$, e "existe exatamente um objeto x tal que $P(x)$", representada pela fórmula $\exists! x\, P$ (BUCHSBAUM, 2006).

3.3.8 Definição. (**Quantificadores Numéricos**)

- $\overline{\exists} x\, P \rightleftharpoons \forall x_1 \forall x_2 (P(x|x_1) \,\wedge\, P(x|x_2) \to x_1 = x_2)$, onde x_1, x_2 são as primeiras variáveis não livres em $\exists x\, P$.
- $\exists! x\, P \rightleftharpoons \exists x\, P \,\wedge\, \overline{\exists} x\, P$.

3.3.9. Unicidade. Sejam x_1, x_2 variáveis distintas não livres em $\exists x\, P$ e y uma variável não livre em $\{x, P\}$. São equivalentes:

(i) $\overline{\exists} x\, P$.

(ii) $\forall x_1 \forall x_2 (P(x|x_1) \wedge P(x|x_2) \to x_1 = x_2)$.

(iii) $\forall x \forall y (P \wedge P(x|y) \to x = y)$.

(iv) $\exists x \forall y, (P(x|y) \to x = y)$.

3.3.10. Absorção na Unicidade. Se y não é livre em $\{t, \exists x\, P\}$, então são equivalentes:

(i) $P(x|t) \wedge \exists! x\, P$.

(ii) $P(x|t) \wedge \overline{\exists} x\, P$.

(iii) $P(x|t) \wedge \forall y (P(x|y) \to y = t)$.

(iv) $\forall y (P(x|y) \leftrightarrow y = t)$.

3.3.11. Existência e Unicidade. Se y não é livre em $\{x, P\}$, então são equivalentes:

(i) $\exists! x\, P$.

(ii) $\exists x (P \wedge \overline{\exists} x\, P)$.

(iii) $\exists x (P \wedge \forall y(P(x|y) \to x = y))$.

(iv) $\exists x \forall y (P(x|y) \leftrightarrow x = y)$.

3.3.12 Lema.

(i) $\exists x_1 P_1, \ldots, \exists x_n P_n \vdash_{\text{LEC}} \forall x_1 ... \forall x_n (P_1 \wedge \ldots \wedge P_n \rightarrow Q) \rightarrow \exists x_1 \ldots \exists x_n (P_1 \wedge \ldots \wedge P_n \wedge Q)$.

(ii) $\overline{\exists} x_1 P_1, \ldots, \overline{\exists} x_n P_n \vdash_{\text{LEC}} \exists x_1 \ldots \exists x_n (P_1 \wedge \ldots \wedge P_n \wedge Q) \rightarrow \forall x_1 ... \forall x_n (P_1 \wedge \ldots \wedge P_n \rightarrow Q)$.

(iii) $\exists ! x_1 P_1, \ldots, \exists ! x_n P_n \vdash_{\text{LEC}} \forall x_1 ... \forall x_n (P_1 \wedge \ldots \wedge P_n \rightarrow Q) \leftrightarrow \exists x_1 \ldots \exists x_n (P_1 \wedge \ldots \wedge P_n \wedge Q)$.

Abaixo definiremos as noções de *positividade* e *negatividade* de uma fórmula em uma fórmula em LEC, além do *Esquema da Substituição para a Implicação* e a *Regra da Substituição para a Implicação*em LEC (BUCHSBAUM, 2006).

3.3.13 Definição. Definimos a *positividade* e *negatividade* de uma dada fórmula em outra fórmula em LEC pelas cláusulas abaixo:

- Se P não ocorre em Q, então P é tanto positivo como negativo em Q.
- P é positivo nas fórmulas $P, Q \rightarrow P, P \wedge Q, Q \wedge P, P \vee Q$ e $Q \vee P$.
- P é negativo nas fórmulas $\neg P$ e $P \rightarrow Q$.
- P é positivo nas fórmulas $\forall x\, P$ e $\exists x\, P$.
- Se P é positivo em Q e Q é positivo em R, então P é positivo em R.
- Se P é positivo em Q e Q é negativo em R, então P é negativo em R.
- Se P é negativo em Q e Q é positivo em R, então P é negativo em R.
- Se P é negativo em Q e Q é negativo em R, então P é positivo em R.

P é dito ser *estritamente positivo* em Q se P não ocorre em Q ou se P é positivo em Q e P não é negativo em Q. P é dito ser *estritamente negativo* em Q se P não ocorre em Q ou se P é negativo em Q e P não é positivo em Q.

3.3.14. Esquemas da Substituição para a Implicação.

(i) Se $\begin{cases} S \text{ é estritamente positivo em } Q, \\ x_1, \ldots, x_n \text{ são as variáveis livres em } \{P_1, P_2\} \text{ tais que } S \text{ está no seu escopo em } Q, \end{cases}$

então $\forall x_1 \ldots \forall x_n (P_1 \rightarrow P_2) \vdash_{\text{LEC}} Q(S \| P_1) \rightarrow Q(S \| P_2)$.

(ii) Se $\begin{cases} S \text{ é estritamente negativo em } Q, \\ x_1, \ldots, x_n \text{ são as variáveis livres em } \{P_1, P_2\} \text{ tais que } S \text{ está no seu escopo em } Q, \end{cases}$

então $\forall x_1 \ldots \forall x_n (P_1 \rightarrow P_2) \vdash_{\text{LEC}} Q(S \| P_2) \rightarrow Q(S \| P_1)$.

3.3.15. Regras da Substituição para a Implicação.

(i) Se $\begin{cases} \Gamma \vdash_{\text{LEC}} P_1 \to P_2, \\ S \text{ é estritamente positivo em } Q, \\ S \text{ não está, em } Q, \text{ no escopo de nenhuma variável livre em } \Gamma \text{ e em } \{P_1, P_2\}, \end{cases}$

então $\Gamma \vdash_{\text{LEC}} Q(S \| P_1) \to Q(S \| P_2)$.

(ii) Se $\begin{cases} \Gamma \vdash_{\text{LEC}} P_1 \to P_2, \\ S \text{ é estritamente negativo em } Q, \\ S \text{ não está, em } Q, \text{ no escopo de nenhuma variável livre em } \Gamma \text{ e em } \{P_1, P_2\}, \end{cases}$

então $\Gamma \vdash_{\text{LEC}} Q(S \| P_2) \to Q(S \| P_1)$.

3.4 Uma Semântica para LEC

3.4.1 Notação. Empregaremos nesta seção as mesmas notações estabelecidas no item 2.2.18.

3.4.2 Definição. Os valores veritativos de LEC são v (verdadeiro) e f (falso).

3.4.3 Definição. Uma LEC-interpretação I é uma tripla $I = \langle \Delta, w, s \rangle$, onde Δ é um universo de discurso (ou domínio da interpretação), w é um mundo sobre Δ, s é uma Δ-atribuição e $w(=) = \{\langle d, d \rangle \mid d \in \Delta\}$.

3.4.4 Definição. Sejam I uma LEC-interpretação, $x_1, \ldots, x_n$ variáveis distintas e d, $d_1, \ldots, d_n$ elementos de Δ. Definimos:

- $I(x|d)$ é uma LEC-interpretação definida por $I(x|d) = \langle \Delta, w, s(x|d) \rangle$;
- $I(x_1, \ldots, x_n | d_1, \ldots, d_n)$ é uma LEC-interpretação definida por
  $I(x_1, \ldots, x_n | d_1, \ldots, d_n) = \langle \Delta, w, s(x_1, \ldots, x_n \mid d_1, \ldots, d_n) \rangle$.

3.4.5 Definição. Definimos nas cláusulas abaixo as funções I_{D} e I_{V}, denominadas respectivamente a *denotação* especificada por I e a *valoração* especificada por I:

- I_{D} é uma função da coleção de termos em w para $\mathcal{P}(\Delta)$;
- I_{V} é uma função da coleção de fórmulas em w para $\{v, f\}$;
- $I_{\text{D}}(x) = s(x)$;
- $I_{\text{D}}(c) = w(c)$;
- $I_{\text{D}}(f(t_1, \ldots, t_n)) = w(f)(I_{\text{D}}(t_1), \ldots, I_{\text{D}}(t_n))$;

- $I_V(p(t_1, \ldots, t_n)) = v$ sss $\langle I_D(t_1), \ldots, I_D(t_n)\rangle \in w(p)$;
- $I_V(\neg P) \neq I_V(P)$;
- $I_V(P \to Q) = \begin{cases} I_V(Q), \text{se } I_V(P) = v; \\ v, \text{se } I_V(P) = f; \end{cases}$
- $I_V(P \wedge Q) = \min\{I_V(P), I_V(Q)\}$;
- $I_V(P \vee Q) = \max\{I_V(P), I_V(Q)\}$;
- $I_V(\forall xP) = \min\{I(x|d)_V(P) \mid d \in \Delta\}$;
- $I_V(\exists xP) = \max\{I(x|d)_V(P) \mid d \in \Delta\}$.

3.4.6 Escólio. Se I é uma LEC-interpretação para $\{t, u\}$, então $I_V(t = u) = v$ sss $I_D(t) = I_D(u)$.

3.4.7 Definição. I satisfaz P em LEC se $\begin{cases} I \text{ é uma LEC-interpretação para } P, \\ I_V(P) = v. \end{cases}$

3.4.8. Avaliação de Termos e Fórmulas Instanciados na Lógica Clássica.

(i) $I_D(u(x|t)) = I(x|\,I_D(t))(u)$;

(ii) $I_V(P(x|t)) = I(x|\,I_D(t))_V(P)$.

3.5 Correção e Completude do Cálculo de Seqüentes para LEC

3.5.1. Teorema da Correção do Cálculo de Seqüentes para LEC.

- Se $\Gamma \vdash_{\text{LEC}} P$, então $\Gamma \models_{\text{LEC}} P$.

3.5.2. Teorema da Completude do Cálculo de Seqüentes para LEC.

- Se $\Gamma \models_{\text{LEC}} P$, então $\Gamma \vdash_{\text{LEC}} P$.

Provas de correção e completude podem ser encontradas em diversos livros de lógica, como por exemplo, em Bell e Machover (1977) e em Enderton (1972).

Capítulo 4

Lógicas Descritivas

4.1 Introdução

As samblagens significativas em um sistema lógico podem ser de dois tipos: *termos* ou *fórmulas*. Em uma analogia com as linguagens naturais, termos são comparáveis a nomes e fórmulas a frases, as quais podem ser verdadeiras ou falsas.

Segundo Branquinho e Murcho (2001), nas teorias de primeira ordem com igualdade suficientemente desenvolvidas, um objeto pode ser representado por um nome, como “2”, no domínio dos números inteiros, ou por uma expressão mais complexa, como “a raiz quadrada de quatro”, a qual se refere ao mesmo objeto, mesmo sem mencionar explicitamente o nome “2”. Dessa forma, um *nome* é um símbolo atribuído a um objeto do domínio (ou seja, a *denotação* do objeto), enquanto que uma *descrição* é uma especificação que se aplica a qualquer objeto do domínio que satisfaça a uma dada propriedade. Similarmente, “$a + b$” pode ser facilmente visto como uma abreviatura para a expressão “o número x que resulta da adição entre a e b” (BOSTOCK, 1997).

Descrições são frases da forma “o x tal que P” ou “um x tal que P” e são freqüentemente encontradas nas teorias de primeira ordem. Através de uma descrição, pode-se falar sobre um objeto que possui determinada propriedade, mesmo que não se conheça seu nome. A distinção entre descrições *próprias* e *impróprias* varia conforme a teoria considerada. A grosso modo, uma descrição é dita *própria* quando está associada a um objeto do universo de discurso que satisfaz a propriedade especificada por ela. De outro modo, a descrição é dita *imprópria*.

Tanto nomes quanto descrições denotam objetos e, portanto, podem ser termos da linguagem considerada. Por outro lado, as propriedades utilizadas na construção das descrições devem ser fórmulas, uma vez que tais propriedades serão avaliadas para cada elemento do universo de discurso, buscando identificar aqueles que a satisfazem. Ou seja, uma descrição é um termo formado a partir de uma fórmula, numa operação que, em geral, envolve ligação de variáveis. Consideremos o exemplo dado por Hatcher (1982): seja $A(x)$ uma fórmula, em uma linguagem de primeira ordem, na qual x é livre. Suponha que, numa dada interpretação, $A(x)$ significa "x é vermelho". Quando quisermos falar sobre "um objeto vermelho", tal referência deve ser um termo. Faz-se necessário, então, uma maneira de transformar uma fórmula $A(x)$ em um termo t.

Os sinais funcionais se aplicam a uma lista de termos para produzir um novo termo, sem ligação de variáveis, não servindo, portanto, para formar descrições. Já os quantificadores ligam variáveis ao serem aplicados a uma variável e uma fórmula, mas produzem como resultado outra fórmula. A solução é, portanto, empregar um operador que forme termos ligando variáveis a fórmulas. Tais operadores são comumente denominados *vbtos* (*variable-binding term operators*). Exemplos clássicos de *vbtos* são, de acordo com da Costa e Mortensen (1983), o operador de abstração "$\{:\}$" da teoria dos conjuntos, o operador de descrição "ι" e o operador de Hilbert "ε". Dada uma fórmula F e uma variável x, "$\{x : F\}$", "$\iota x\, F$" e "$\varepsilon x\, F$" representam, respectivamente, "o conjunto dos x tais que F", "o único F" e "um F". Segundo Carrion e da Costa (1988), a teoria dos operadores que formam termos ligando variáveis de fórmulas tem sido muito desenvolvida e encontrado aplicações diversas.

Os *vbtos* utilizados para representar formalmente as descrições são símbolos conhecidos como *descritores* ou *qualificadores*. Por exemplo, o operador "τ" produz um termo quando aplicado a uma fórmula P e uma variável x, ligando as ocorrências em P da variável x em seu escopo (HATCHER, 1982). Expressões como "$\tau x\, P$" são termos chamados de *descrições* ou *descritivos* (DA COSTA, 1963). Há vários métodos de incorporar estes termos em teorias formais. Em algumas teorias, os *descritores* são introduzidos por definição contextual, como fez Russell. Em outras, incorpora-se um ou mais descritores como símbolos primitivos às linguagens de primeira ordem, regidos por postulados específicos, a fim de se obter *lógicas elementares com vbto* (DA COSTA; KRAUSE, 2005).

Historicamente, segundo Bochénski[1] *apud* Abar (1985), o conceito de descrição teria

[1]BOCHÉNSKI, I. M. Formale Logik. München, Verlag Karl Alber, Freiburg, 1956.

surgido com Gotlob Frege por volta de 1880. Entretanto, o primeiro tratamento deste processo lógico fundamental foi feito por Bertrand Russell (BRANQUINHO; MURCHO, 2001). Em 1905, Russell publica sua teoria de descrições no artigo "*On Denoting*" (RUSSELL, 1905)[2]. Esta teoria é exposta superficialmente em *Introduction to Mathematical Philosophy* (RUSSELL, 1919)[3] e de forma mais detalhada em *Principia Mathematica* (WHITEHEAD; RUSSELL, 1910). Russell adotou a letra "ι" invertida como descritor em seu artigo "*Mathematical logic as based on the theory of types*[4]". Como símbolo primitivo, o descritor é introduzido na década de 50 por Rosser (ROSSER, 1953) e por Kalish e Montague [5].

Descrições podem ser definidas ou indefinidas. As descrições definidas são usualmente representadas pelo operador *iota*, definido por Branquinho e Murcho (2001) como um operador monádico de ligação de variáveis, cuja contraparte em linguagens naturais é o artigo definido no singular "o" ou "a". Uma descrição da forma "$\iota x\, P$" denota o único objeto x que satisfaz P, se existe tal objeto único. Caso contrário, podemos ou deixar "$\iota x\, P$" representar algum objeto arbitrário fixo ou podemos considerá-lo sem sentido (POGORZELSKI, 1994). Por exemplo, a aplicação do operador *iota* à frase aberta "x é filósofo e x bebeu a cicuta" gera o termo descritivo "ιx(x é filósofo e x bebeu a cicuta)", a qual se lê "o único x tal que x é filósofo e x bebeu a cicuta", ou simplesmente "o filósofo que bebeu a cicuta" (BRANQUINHO; MURCHO, 2001). Já as descrições indefinidas são comumente representadas pelo operador de Hilbert "ε", o qual tem como contraparte na linguagem natural o artigo indefinido "um" ou "uma". O termo "$\varepsilon x\, P$" denota um objeto qualquer, dentre aqueles do universo de discurso que satisfazem P, ou um objeto fixo qualquer, se nenhum objeto satisfaz P. Por exemplo, o termo "εx(x é filósofo)" e lido "um filósofo", e representa um filósofo qualquer.

Neste capítulo procederemos uma breve explanação sobre a Teoria das Descrições de Russell, sobre a Lógica Descritiva Clássica, a qual adota o descritor de Rosser, e sobre a Lógica das Descrições Indefinidas, a qual emprega o descritor de Hilbert. Esta exposição tem como objetivo fornecer algumas noções elementares sobre estes sistemas, a fim de compará-los posteriormente com a lógica LAR.

[2] *On Denoting* foi, mais tarde, incluído em *Logic and Knowledge: essays 1901-1950* (RUSSELL, 1988). Uma tradução deste artigo para o português aparece em *Os Pensadores* (RUSSELL, 1978).

[3] Uma tradução de *Introduction to Mathematical Philosophy* para o português pode ser encontrada em *Introdução à Filosofia Matemática* (RUSSELL, 1974).

[4] RUSSELL, B. Mathematical logic as based on the theory of types. *American Journal of Mathematics*. 30:222-262, 1908.

[5] KALISH, D. MONTAGUE, R. *Logic – Techniques of Formal Reasoning*. New York. Harcourt. Brace & World Inc., 1964.

4.2 Teoria das Descrições de Russell

Segundo Lambert (1990), Russell teve na verdade duas teorias das descrições definidas. A primeira foi apresentada no artigo *On Denoting* (RUSSELL, 1905), e a segunda na obra *Principia Mathematica* (WHITEHEAD; RUSSELL, 1910). Em *On Denoting*, Russell procura analisar a forma lógica de sentenças da linguagem natural contendo descrições definidas, contestando alguns argumentos de Meinong sobre objetos sem existência. Já em *Principia Mathematica*, o objetivo é prover os fundamentos para a reduzir a matemática à lógica, o chamado Logicismo.

Em suas teorias, Russell introduz o descritor por definição contextual. Desse modo, as descrições não são termos da linguagem, mas constituem apenas uma abreviação matemática, ou símbolo incompleto[6], o qual somente possui significado no contexto em que ocorre. Portanto, não é necessário atribuir denotações às descrições, e a distinção entre descrições próprias e impróprias fica implícita na definição contextual do descritor (ABAR, 1985). Russell introduziu a notação

$$G(\iota x\, F(x)) \rightleftharpoons \exists y\, (\forall x\, (F(x) \leftrightarrow x = y) \wedge G(y)),$$

a qual confere sentido à descrição "$\iota x F(x)$" apenas quando a mesma ocorre na fórmula G, isto é, no contexto G (ABAR, 1985).

Se o descritor for adotado por definição contextual, o mesmo pode ser eliminado em todas as fórmulas em que este ocorrer. Entretanto, o tratamento rigoroso deste processo requer uma série de resultados metalógicos (DA COSTA, 1980b).

Embora em *Introduction to Mathematical Philosophy* Russell tenha feito uma distinção entre descrições definidas e indefinidas, a teoria desenvolvida por ele ocupou-se essencialmente das descrições definidas. Uma descrição definida caracteriza-se pelo fato de que seu predicado é satisfeito por um e apenas um objeto. Esta restrição é expressa nas chamadas fórmulas da univocidade (BRANQUINHO; MURCHO, 2001):

$\exists x\, Fx$

$\forall x\, \forall y\, ((Fx \wedge Fy) \rightarrow x = y)$.

[6]Um símbolo incompleto é um símbolo que, ocorrendo sozinho, não constitui um termo ou fórmula da lógica considerada (BRANQUINHO; MURCHO, 2001).

Uma fórmula será avaliada como falsa se contiver uma descrição cujas condições de univocidade expressas pelas fórmulas acima não sejam satisfeitas. Se as fórmulas de univocidade podem ser derivadas para Fa, então a descrição $\iota x\, Fx$ é um termo e representa o objeto único que satisfaz Fa (BRANQUINHO; MURCHO, 2001).

4.3 A Lógica Descritiva Clássica

Nesta seção apresentamos a *Lógica Descritiva Clássica* – LDC, a qual será formulada a partir da *Lógica Equacional Clássica*, apresentada no Capítulo 3. Esta lógica estuda as propriedades dos conectivos, dos quantificadores, da igualdade e das descrições definidas.

O cálculo clássico de descrições é obtido do cálculo clássico de predicados com igualdade, acrescentando-se o descritor à linguagem (ABAR, 1985). Uma formulação deste cálculo é apresentada em Rosser (1953), e servirá como base para a lógica LDC desenvolvida nesta seção. No entanto, Rosser deixa em aberto a questão de como proceder no caso de descrições impróprias. Em LDC, se houver mais de um ou nenhum objeto satisfazendo uma descrição ι, convencionaremos associá-la a um objeto fixo do universo de discurso, definido pela interpretação.

Em LDC, um termo "$\iota x\, P$" possui os seguintes possíveis significados (BUCHSBAUM, 2006):

- Nos contextos em que a fórmula $\exists! x\, P$ for verdadeira, $\iota x\, P$ denota o único objeto do universo de discurso que satisfaz P. Nesse caso, a descrição $\iota x\, P$ é uma *descrição própria*;
- Nos contextos em que a fórmula $\exists! x\, P$ for falsa, $\iota x\, P$ denota um objeto do universo de discurso escolhido arbitrariamente para corresponder a todas as descrições deste tipo. Tais descrições são denominadas, nos contextos em que ocorrem, *descrições impróprias*.

4.3.1 Exemplo. Considerando os significados usuais atribuídos aos símbolos contidos nas descrições abaixo, temos:

- Descrição própria: $\iota \mathsf{x}\,(\text{primo}(\mathsf{x}) \wedge \text{par}(\mathsf{x}))$.
- Descrição imprópria: $\iota \mathsf{x}\,(\mathsf{x} > 0 \wedge \mathsf{x} < 10)$.

A seguir apresentaremos uma linguagem, um cálculo de seqüentes e uma semântica para LDC, baseadas em Buchsbaum (2006). Valem igualmente as definições e convenções estabelecidas no Capítulo 2.

4.3.1 Linguagens para LDC

4.3.2 Definição. Um *alfabeto* para LDC se constitui de todos os símbolos de um *alfabeto* para LEC, mais o descritor “ι”, denominado *artigo definido*.

4.3.3 Notação. Adotaremos nesta seção as notações especificadas no item 2.1.11.

4.3.4 Definição. Os termos e fórmulas de LDC são todos os termos e fórmulas obtidos pelas regras de formação de LEC, mais os termos da forma $\iota x\, P$, onde P é uma fórmula em LDC. Os termos $\iota x\, P$ são chamados de descrições, e a fórmula P é chamada de corpo da descrição. $\iota x\, P$ é lido como “o x tal que P”.

Como “ι” é um operador que liga variáveis em seu escopo, algumas das definições apresentadas para LEC precisam ser adaptadas para LDC. Todas as demais convenções e definições presentes no Capítulo 3 continuam valendo nesta seção.

4.3.5 Definição. Uma ocorrência de uma variável x em um designador D é dita ser *ligada em D* se a mesma ocorrer em um subdesignador de D de uma das formas $\forall x\, P$, $\exists x\, P$ ou $\iota x\, P$. Caso contrário, a ocorrência é dita ser *livre em D*.

4.3.6 Definição. Uma variável é dita ser *livre em um designador* se esta possuir pelo menos uma ocorrência livre neste designador. Similarmente, uma variável é dita ser *ligada em um designador* se esta possuir pelo menos uma ocorrência ligada neste designador. Uma variável é dita ser *livre(ligada) em uma coleção de designadores* se ela for livre(ligada) em pelo menos um elemento desta coleção.

4.3.7 Definição. A *instanciação* de x por t em um designador D, notada por $D(x|t)$ é a fórmula obtida de D substituindo-se todas as ocorrências livres de x por t, se D não possuir quantificadores ou o descritor ι. Se houverem quantificadores ou o descritor em D, a instanciação é definida de acordo com as cláusulas abaixo, onde x e y são variáveis distintas e $\Psi \in \{\forall, \exists, \iota\}$:

- $(\Psi x\, P)(x|t) = \Psi x\, P$;
- $(\Psi y\, P)(x|t) = \begin{cases} * \ \ \Psi y\, P(x|t), \text{ se } x \text{ não é livre em } P \text{ ou } y \text{ não é livre em } t; \\ * \ \ \Psi z\, P(y|z)(x|t), \text{ se } x \text{ é livre em } P \text{ e } y \text{ é livre em } t, \text{ onde } z \text{ é a} \\ \quad\ \text{primeira variável não livre em } \{t, P\}. \end{cases}$

4.3.8 Definição. Uma ocorrência de um designador em um designador E em LDC é dita *real em E* se a mesma não suceder em E um dos sinais “$\forall$”, “$\exists$” ou “ι”. Um designador D é dito ser *real em E* se D possuir pelo menos uma ocorrêncial *real em E*.

4.3.9 Definição. A substituição de D por D' em E, onde D e D' são ambos termos ou ambos fórmulas, notada por $E(D\|D')$, é o designador obtido de E substituindo todas as ocorrências reais de D por D' em E.

4.3.10 Definição. Um designador D é dito estar no *escopo de uma variável x* em um designador E se E possuir uma subfórmula de uma das formas $\forall x\, R$, $\exists x\, R$ ou $\iota x\, R$, tal que D é real em R. Caso contrário, D é dito estar *fora do escopo de x* em E.

4.3.11 Definição. Definimos nas cláusulas abaixo a congruência entre designadores em LDC, onde $\# \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$ e $\Psi \in \{\forall, \exists, \iota\}$:

- $a \approx_c b$ sss "a" e "b" são a mesma constante;
- $x \approx_c y$ sss "x" e "y" são a mesma variável;
- $f(t_1, \ldots, t_n) \approx_c g(u_1, \ldots, u_p)$ sss $f = g$, $n = p$ e $t_i \approx_c u_i$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$;
- $p(t_1, \ldots, t_n) \approx_c q(u_1, \ldots, u_p)$ sss $p = q$, $n = p$ e $t_i \approx_c u_i$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$;
- $\neg P_1 \approx_c \neg P_2$ sss $P_1 \approx_c P_2$;
- $P_1 \# Q_1 \approx_c P_2 \# Q_2$ sss $P_1 \approx_c P_2$ e $Q_1 \approx_c Q_2$;
- $\Psi x\, P_1 \approx_c \Psi y\, P_2$ sss y não é livre em $\forall x\, P_1$ e $P_1(x|y) \approx_c P_2$.
- Se D_1 e D_2 forem designadores de tipos diferentes, então $D_1 \not\approx_c D_2$[7].

4.3.2 Um Cálculo de Seqüentes para LDC

O cálculo de seqüentes para LDC possui todas as leis primitivas de LEC, mais algumas leis primitivas concernentes a descrições definidas. Analogamente, as leis definidas de LEC, devidamente traduzidas, valem também em LDC, com exceção do *Esquema da Substituição da Igualdade para Termos*.

4.3.12. Esquemas Primitivos da Descrição Definida.

- **Descrição Própria**: $\vdash_{\mathrm{LDC}} \exists! x\, P \rightarrow P(x|\iota x\, P)$.
- **Descrições Equivalentes**: $\vdash_{\mathrm{LDC}} \forall x\, (P \leftrightarrow Q) \rightarrow \iota x\, P = \iota x\, Q$.
- **Descrições Congruentes**: Se y não é livre em P, $\vdash_{\mathrm{LDC}} \iota x\, P = \iota y\, P(x|y)$.
- **Descrições Impróprias**: $\neg\exists! x\, P, \neg\exists! y\, Q \vdash_{\mathrm{LDC}} \iota x\, P = \iota y\, Q$.

Os resultados abaixo podem ser provados a partir das leis primitivas de LDC.

---

[7]Ou seja, não é verdade que $D_1 \approx_c D_2$.

4.3.13. Leis Básicas da Descrição Definida.

- **Existência e Unicidade**: Se y não é livre em $\iota x\, P$:
  (i) $\models_{\mathrm{LDC}} \exists! x\, P \leftrightarrow \forall y\, (P(x|y) \leftrightarrow y = \iota x\, P)$.
  (ii) $\models_{\mathrm{LDC}} \exists! x\, P \leftrightarrow P(x|\iota x\, P) \wedge \forall y\, (P(x|y) \rightarrow y = \iota x\, P)$.

- **Congruência**: As seguintes proposições referentes à congruência de designadores em LDC são válidas:
  (i) Se t é congruente a t', então $\models_{\mathrm{LDC}} t = t'$.
  (ii) Se P é congruente a P', então $\models_{\mathrm{LDC}} P \leftrightarrow P'$.

Devido à existência de variáveis ligadas em termos em LDC, o *Esquema* e a *Regra da Substituição da Igualdade* precisam ser reformulados. Faz-se necessária também a formulação de um *Esquema da Instanciação da Igualdade para Termos*, uma vez que, em LDC, a operação de instanciação de variáveis por termos em termos não é idêntica à operação de substituição. O *Esquema* e a *Regra da Substituição da Igualdade para Fórmulas*, bem como o *Esquema da Instanciação da Igualdade para Fórmulas* de LEC são também válidos em LDC, e serão repetidos abaixo por comodidade.

- **Esquema da Substituição da Igualdade para Termos**:
  * Se $x_1, \ldots, x_n$ são as variáveis livres em $\{t_1, t_2\}$ tais que v está em u no seu escopo, então $\forall x_1 \ldots \forall x_n\, (t_1 = t_2) \models_{\mathrm{LDC}} u(v\|t_1) = u(v\|t_2)$.

- **Regra da Substituição da Igualdade para Termos**:
  * Se $\begin{cases} \Gamma \models_{\mathrm{LDC}} t_1 = t_2, \\ v \text{ não está, em } u\text{, no escopo de nenhuma variável livre em } \Gamma \text{ e em } \{t_1, t_2\}, \end{cases}$
  então $\Gamma \models_{\mathrm{LDC}} u(v\|t_1) = u(v\|t_2)$.

- **Esquema da Instanciação da Igualdade para Termos**:
  * $t_1 = t_2 \models_{\mathrm{LDC}} u(x|t_1) = u(x|t_2)$.

- **Esquema da Substituição da Igualdade para Fórmulas**:
  * Se $x_1, \ldots, x_n$ são as variáveis livres em $\{t_1, t_2\}$ tais que v está em Q no seu escopo, então $\forall x_1 \ldots \forall x_n\, (t_1 = t_2) \models_{\mathrm{LDC}} Q(v\|t_1) \leftrightarrow Q(v\|t_2)$.

- **Regra da Substituição da Igualdade para Fórmulas**:
  - $*$ Se $\begin{cases} \Gamma \mid_{\overline{\text{LDC}}}\ t_1 = t_2, \\ v \text{ não está, em } Q\text{, no escopo de nenhuma variável livre em } \Gamma \text{ e em } \{t_1, t_2\}, \end{cases}$

    então $\Gamma \mid_{\overline{\text{LDC}}}\ Q(v\|t_1) \leftrightarrow Q(v\|t_2)$.

- **Esquema da Instanciação da Igualdade para Fórmulas**:
  - $*$ $t_1 = t_2 \mid_{\overline{\text{LDC}}}\ Q(x|t_1) \leftrightarrow Q(x|t_2)$.

- **Esquema da Substituição da Equivalência**:
  - $*$ Se $x_1, \ldots, x_n$ são as variáveis livres em $\{P_1, P_2\}$ tais que S está em Q no seu escopo, então $\forall x_1 \ldots \forall x_n (P_1 \leftrightarrow P_2) \mid_{\overline{\text{LDC}}}\ Q(S\|P_1) \leftrightarrow Q(S\|P_2)$.

- **Regra da Substituição da Equivalência**:
  - $*$ Se $\begin{cases} \Gamma \mid_{\overline{\text{LDC}}}\ P_1 \leftrightarrow P_2, \\ S \text{ não está, em } Q\text{, no escopo de nenhuma variável livre em } \Gamma \text{ e em } \{P_1, P_2\}, \end{cases}$

    então $\Gamma \mid_{\overline{\text{LDC}}}\ Q(S\|P_1) \leftrightarrow Q(S\|P_2)$.

Em LDC é possível que fórmulas ocorram em termos, no caso de descrições. Por este motivo, formulamos a seguir o *Esquema* e a *Regra da Substituição da Equivalência para Termos*. São listados também o *Esquema* e *Regra da Substituição da Equivalência para Fórmulas*, os quais são idênticos à versão apresentada para LEC.

- **Esquema da Substituição da Equivalência para Termos**:
  - $*$ Se $x_1, \ldots, x_n$ são as variáveis livres em $\{P_1, P_2\}$ tais que S está em u no seu escopo, então $\forall x_1 \ldots \forall x_n (P_1 = P_2) \mid_{\overline{\text{LDC}}}\ u(S\|P_1) = u(S\|P_2)$.

- **Regra da Substituição da Equivalência para Termos**:
  - $*$ Se $\begin{cases} \Gamma \mid_{\overline{\text{LDC}}}\ P_1 = P_2, \\ S \text{ não está, em } u\text{, no escopo de nenhuma variável livre em } \Gamma \text{ e em } \{P_1, P_2\}, \end{cases}$

    então $\Gamma \mid_{\overline{\text{LDC}}}\ u(S\|P_1) = u(S\|P_2)$.

- **Esquema da Substituição da Equivalência para Fórmulas**:
  - $*$ Se $x_1, \ldots, x_n$ são as variáveis livres em $\{P_1, P_2\}$ tais que S está em Q no seu escopo, então $\forall x_1 \ldots \forall x_n (P_1 \leftrightarrow P_2) \mid_{\overline{\text{LDC}}}\ Q(S\|P_1) \leftrightarrow Q(S\|P_2)$.

- **Regra da Substituição da Equivalência para Fórmulas**:

$*$ Se $\begin{cases} \Gamma \vdash_{\text{LDC}} P_1 \leftrightarrow P_2, \\ S \text{ não está, em } Q\text{, no escopo de nenhuma variável livre em } \Gamma \text{ e em } \{P_1, P_2\}, \end{cases}$

então $\Gamma \vdash_{\text{LDC}} Q(S \| P_1) \leftrightarrow Q(S \| P_2)$.

4.3.3 Uma Semântica para LDC

As definições referentes à semântica de LEC, enunciadas na seção 3.4, continuam válidas em LDC, com exceção da definição de LDC-interpretação, reformulada abaixo.

4.3.14 Definição. Uma LDC-interpretação é uma quádrupla $\langle \Delta, w, s, d_0 \rangle$, onde $\langle \Delta, w, s \rangle$ é uma LEC-interpretação e d_0 é um elemento do universo de discurso. Deste modo, as seguintes condições são satisfeitas:

(i) se existe um único $d_1 \in \Delta$ tal que $I(x|d_1)_{\text{V}}(P) = v$, então $I_{\text{D}}(\iota x\, P) = d_1$;

(ii) se não existe $d \in \Delta$ tal que $I(x|d)_{\text{V}}(P) = v$ ou existem pelo menos dois $d \in \Delta$ tal que $I(x|d)_{\text{V}}(P) = v$, então $I_{\text{D}}(\iota x\, P) = d_0$.

4.4 A Lógica das Descrições Indefinidas

Apresentaremos nesta seção uma lógica construída sobre a Lógica Equacional Clássica, adotando o artigo indefinido "ε", ou símbolo de Hilbert, como sinal primitivo. Chamaremos esta lógica de *Lógica das Descrições Indefinidas* – LDI. Esta lógica estuda as propriedades dos conectivos, dos quantificadores, da igualdade e das descrições indefinidas.

Historicamente, segundo da Costa (1980a), o símbolo "ε" aparece pela primeira vez na tese de Ackermann em 1924[8], a qual foi orientada por Hilbert. Anteriormente, Hilbert[9] havia utilizado um símbolo análogo, representado por "τ".

Hilbert introduziu o símbolo ε para simplificar certas demonstrações matemáticas e facilitar as investigações metateóricas (DA COSTA, 1980a). Este operador é também conhecido como *operador de seleção* (HATCHER, 1982) ou *descritor indefinido* (CARRION; DA COSTA, 1988), uma vez que permite referenciarmos um objeto, dentre aqueles no universo de discurso

[8]ACKERMANN, W. *Begrundüng des 'tertium non datur' mittels der Hilbertschen Theorie der Widerspruchsfreiheit*. Math. An. 93, 1924.

[9]HILBERT, D. *Die Logischen Grundlagen der Mathematik*. Math. An. 88, 1923.

que possuem determinada propriedade, mesmo sem especificar de modo preciso qual é esse objeto.

Em uma linguagem que adota "ε" como símbolo primitivo, o mesmo pode ser utilizado para definir os quantificadores $\forall$ e $\exists$:

$$\exists x\, P \rightleftharpoons P(x|\varepsilon x\, P) \quad \text{e} \quad \forall x\, P \rightleftharpoons P(x|\varepsilon x \neg P).$$

Segundo Hatcher (1982), a aplicação de "εx" [10] a uma fórmula $A(x)$ pode ser interpretada como a escolha de algum objeto particular, dentre os objetos do universo de discurso que, de acordo com uma dada interpretação, satisfazem a propriedade $A(x)$. Assim, se $A(x)$ significa "x é vermelho", "$\varepsilon x\, A(x)$" significa "um objeto vermelho". Ou seja, "$\varepsilon x\, A(x)$" denota um objeto qualquer, embora fixado, que satisfaz $A(x)$, caso exista pelo menos um objeto, e um objeto fixo arbitrário, caso nenhum objeto satisfaça $A(x)$ (CARRION; DA COSTA, 1988). Ou seja, "$\varepsilon x\, P$" fornece um meio de obter um objeto que satisfaz P, se existir tal objeto.

Hilbert e Bernays (HILBERT; BERNAYS, 1934) propuseram uma teoria que utiliza o operador ε como uma forma de eliminar o operador ι de Russell. Segundo Branquinho e Murcho (2001), o termo $\iota x\, Ax$ somente pode ser introduzido mediante a derivação das fórmulas de univocidade. Hilbert mostra que tais fórmulas podem ser dispensadas e o operador ι substituído por ε, utilizando princípios de sintaxe e axiomas adequados.

O símbolo "ε" está relacionado ao axioma da escolha. Daí, pode se provar que o mesmo não pode ser introduzido por definição contextual, como o ι de Russell (DA COSTA, 1980a). Uma exposição sobre lógica de primeira ordem com símbolo de Hilbert é apresentada em Carrion e da Costa (1988).

De acordo com Buchsbaum (2006), $\varepsilon x\, P$ possui os seguintes possíveis significados:

- Nos contextos em que a fórmula $\exists x\, P$ for verdadeira, $\varepsilon x\, P$ denota um objeto do universo de discurso que satisfaz P. Nesse caso, a descrição $\varepsilon x\, P$ é uma *descrição própria*;
- Nos contextos em que a fórmula $\exists x\, P$ for falsa, $\varepsilon x\, P$ denota um objeto escolhido arbitrariamente para corresponder a todas as descrições deste tipo. Tais descrições são ditas *descrições impróprias*.

[10] O autor emprega no texto o símbolo "τ". Porém, pelo contexto, fica claro que trata-se do artigo indefinido. Portanto, para evitar confusão, empregamos aqui o símbolo de Hilbert "ε".

4.4.1 Exemplo. Considerando os significados usuais atribuídos aos símbolos contidos nas descrições abaixo, temos:

- Descrição própria: $\varepsilon x\,(x \in \mathbb{N} \wedge x > 5 \wedge\; x < 10)$.
- Descrição imprópria: $\varepsilon x\,(x \neq x)$.

Definiremos a seguir uma linguagem, cálculo de seqüentes e uma semântica para LDI (BUCHSBAUM, 2006).

4.4.1 Linguagens para LDI

4.4.2 Definição. Um *alfabeto* para LDI se constitui de todos os símbolos de um *alfabeto* para LEC, mais o descritor "ε", denominado *artigo indefinido*.

4.4.3 Definição. Os termos e fórmulas de LDI são todos os termos e fórmulas de LEC, mais os termos da forma $\varepsilon x\,P$, onde x é uma variável e P é uma fórmula em LDI. Os termos $\varepsilon x\,P$ são chamados de descrições, e a fórmula P é chamada de corpo da descrição. $\varepsilon x\,P$ é lido como "um x tal que P".

4.4.4 Notação. Adotaremos nesta seção as notações especificadas no item 2.1.11.

4.4.5 Definição. As definições de *designador em LDI*, *ocorrência de variável em um designador*, *ocorrência ligada de uma variável*, *ocorrência livre de uma variável*, *variável ligada em um designador*, *variável livre em um designador*, *instanciação de variável por termo*, *escopo de uma variável*, *aceitação de um termo por uma variável*, *ocorrência real de um designador*, *designador real* e *substituição de um designador* são definidas em LDI de modo análogo ao efetuado para LDC, com as devidas adaptações (BUCHSBAUM, 2006).

4.4.2 Um Cálculo de Seqüentes para LDI

Adotaremos em LDI todas as leis primitivas de LEC, mais algumas leis primitivas de descrições indefinidas. Analogamente, as leis definidas de LEC, devidamente traduzidas, valem também em LDI, com exceção do *Esquema da Substituição da Igualdade para Termos*.

4.4.6. Esquemas Primitivos da Descrição Indefinida.

- **Descrição Própria**: $\vdash_{\text{LDI}} \exists x\, P \to P(x|\varepsilon x\, P)$.
- **Descrições Equivalentes**[11]: $\vdash_{\text{LDI}} \forall x\, (P \leftrightarrow Q) \to \varepsilon x\, P = \varepsilon x\, Q$.
- **Descrições Congruentes**: Se y não é livre em P, $\vdash_{\text{LDI}} \varepsilon x\, P = \varepsilon y\, P(x|y)$.

Abaixo são listados alguns resultados sintáticos de LDI, sem provas.

4.4.7. Leis Básicas da Descrição Indefinida.

- **Fórmula Existencial**: $\vdash_{\text{LDI}} \exists x\, P \leftrightarrow P(x|\varepsilon x\, P)$.
- **Fórmula Universal**: $\vdash_{\text{LDI}} \forall x\, P \leftrightarrow P(x|\varepsilon x\, \neg P)$.

4.4.8 Definição. A congruência de designadores em LDI é definida de modo análogo ao realizado para LDC. As proposições referentes à congruência válidas em LDC valem também em LDI, com as devidas adaptações (BUCHSBAUM, 2006).

4.4.9 Definição. O *Esquema da Substituição da Igualdade para Termos*, a *Regra da Substituição da Igualdade para Termos*, o *Esquema da Instanciação da Igualdade para Termos*, o *Esquema da Substituição da Igualdade para Fórmulas*, a *Regra da Substituição da Igualdade para Fórmulas*, o *Esquema da Instanciação da Igualdade para Fórmulas*, o *Esquema da Substituição da Equivalência para Termos*, a *Regra da Substituição da Equivalência para Termos*, o *Esquema da Substituição da Equivalência para Fórmulas* e a *Regra da Substituição da Equivalência para Fórmulas* valem igualmente em LDI (BUCHSBAUM, 2006).

4.4.10 Escólio. O Esquema Geral da Substituição, a Regra Geral da Substituição e o Esquema Geral da Instanciação para a Igualdade valem igualmente em LDI (BUCHSBAUM, 2006).

4.4.3 Uma Semântica para LDI

As definições referentes à semântica de LEC, enunciadas na seção 3.4, continuam válidas em LDI, com exceção da definição de LDC-interpretação, reformulada abaixo, juntamente com a definição de função-escolha.

4.4.11 Definição. Seja Δ uma coleção não vazia. Dizemos que f é uma função-escolha para Δ se as seguintes condições forem satisfeitas:

[11] Este esquema serve para fazer com que as fórmulas equivalentes P e Q correspondam ao mesmo objeto denotado por $\varepsilon x\, P$ (CARRION; DA COSTA, 1988).

(i) f é uma função;

(ii) $\mathcal{D}(f) = \mathcal{P}(\Delta) - \{\emptyset\}$;

(iii) para cada $A \in \mathcal{D}(f)$, $f(A) \in A$.

4.4.12 Definição. Uma LDI-interpretação é uma quádrupla $\langle \Delta, w, s, f, d_0 \rangle$, onde $\langle \Delta, w, s \rangle$ é uma LEC-interpretação, f é uma função-escolha para Δ e $d_0 \in \Delta$. Desse modo, as seguintes condições são satisfeitas:

(i) se existe pelo menos um $d \in \Delta$ tal que $I(x|d)_{\mathrm{V}}(P) = v$, então

$I_{\mathrm{D}}(\varepsilon x\, P) = f(\{d \mid d \in \Delta \wedge I(x|d)_{\mathrm{V}}(P) = v\})$;

(ii) se não existe $d \in \Delta$ tal que $I(x|d)_{\mathrm{V}}(P) = v$, então $I_{\mathrm{D}}(\varepsilon x\, P) = d_0$.

Capítulo 5

A Lógica da Referência Ambígua

5.1 Introdução

Este capítulo apresenta a *Lógica da Referência Ambígua* – LAR (do inglês, *Logic of Ambiguous Reference*). A linguagem desta lógica possui os mesmos símbolos de uma linguagem para a Lógica Equacional Clássica (LEC), descrita na seção 3.2, exceto igualdade, acrescentando-se ainda como símbolos primitivos o descritor " Υ " e o sinal predicativo binário " $\succeq$ ", o qual representa a abrangência. Todas as definições e convenções apresentadas no Capítulo 2 valem também para esta lógica.

As Υ-descrições de LAR são inspiradas nas descrições indefinidas das linguagens naturais, as quais aparecem freqüentemente associadas a coleções de objetos. Como exemplo, considere a frase "um leão é capaz de comer cem quilos de carne de uma só vez". Nesta frase, a locução substantiva "um leão" denota qualquer leão, e não algum leão específico. Poderíamos traduzi-la em uma fórmula de LAR, na qual a expressão "um leão" é formalizada em LAR por "Υx leão(x)", onde, neste contexto, "leão" é um sinal predicativo monádico. "Υx leão(x)" é uma descrição, ou seja, um termo em LAR. A frase original pode ser reescrita em LAR da seguinte forma: "pode_comer(Υx leão(x), 100, carne)"[1]. Se abreviarmos "Υx leão(x)" por "um leão", esta fórmula pode ser reescrita como: "pode_comer(um leão,100,carne)".

A relação de abrangência em LAR ocorre entre dois termos. Por exemplo, considere a seguinte frase: "cabras são animais". Em LAR esta frase pode ser representada da seguinte

[1]Considerando uma extensão de LAR na qual são definidos numerais como "100".

forma: "Υx animal(x) $\succ\!\!=$ Υx cabra(x)", ou, se abreviarmos "Υx animal(x)" por "um animal" e "Υx cabra(x)" por "uma cabra", teríamos, em LAR, a fórmula "um animal $\succ\!\!=$ uma cabra", que, em língua portuguesa, significa "uma cabra é um animal". Isto é, "abranger" em LAR é o inverso de "ser" na língua portuguesa. A fórmula "um animal $\succ\!\!=$ uma cabra", em LAR, significa que a coleção associada a "um animal" contém a coleção associada a "uma cabra". Embora o termo "um animal" seja associado em LAR à coleção de todos os animais, "um animal" não significa a coleção de todos os animais, mas representa um objeto arbitrário desta coleção. Em termos pragmáticos, isto significa que tudo o que pode ser dito sobre um animal pode ser dito sobre uma cabra, mas não vale a recíproca, ou seja, nem tudo que pode ser dito sobre uma cabra pode ser dito sobre um animal. Ou seja, "$\succ\!\!=$" é, em LAR, um sinal predicativo que expressa uma *igualdade unidirecional*, apenas da esquerda para a direita.

LAR foi desenvolvida para operar o mais próximo possível da lógica clássica. Entretanto, em fórmulas onde há ocorrência de descrições, podem ocorrer deviâncias: descrições ambíguas geram paracompletude e não-reflexividade, enquanto que descrições vácuas geram paraconsistência[2]. Portanto, os termos e fórmulas de LAR em que não há ocorrência de descrições obedecem às mesmas regras de inferência da lógica clássica de primeira ordem. Por esse motivo, dizemos que LAR é uma *extensão conservativa*[3] da lógica clássica. Esta característica está de acordo com Carrion e da Costa (1988), segundo os quais os sistemas lógicos inconsistentes mais fortes contém, além de proposições "mal comportadas" (aquelas para as quais não vale o princípio da não-contradição), também proposições "bem comportadas" (aquelas para as quais se aplica o mesmo princípio), englobando a lógica tradicional como caso especial.

Na seção 5.2 deste capítulo, delimitamos uma linguagem para LAR, relacionando algumas definições e convenções que serão empregadas no decorrer deste trabalho.

Na seqüência (seção 5.3), a semântica de LAR é especificada através de três funções: $I_{\mathrm{A}}, I_{\mathrm{S}}$ e I_{N}. A função I_{A}, denominada *função-âmbito*, associa cada termo a uma coleção, eventualmente vazia, de elementos do universo de discurso. A função I_{S}, por outro lado, é uma valoração, ou seja, associa fórmulas a valores veritativos. I_{N} é uma função complementar, utili-

---

[2] As *lógicas paraconsistentes*, nas quais não vale o *princípio da não-contradição*, servem como base para teorias inconsistentes e não triviais; as *lógicas paracompletas* derrogam o *princípio do terceiro excluído*; em *lógicas não-reflexivas* não vale o *princípio da identidade*. Referências adicionais para estas lógicas podem ser obtidas em da Costa (1974), da Costa (1989) e da Costa (1963).

[3] Por extensão conservativa de uma teoria T em uma linguagem S, entendemos uma teoria $T' \supset T$ em uma linguagem estendida onde todo modelo de T tem uma extensão para um modelo de T' (POGORZELSKI, 1994).

zada para definir I_S recursivamente. Nesta seção também são definidas as funções de tradução de LAR para LEC, seguidas de alguns resultados semânticos relacionados.

A seção 5.4 traz um cálculo de seqüentes para LAR. São definidas as leis primitivas da linguagem e alguns resultados sintáticos são apresentados e provados.

Ao final deste capítulo, na seção 5.5, alguns resultados sintáticos concernentes à eliminação de descrições são enunciados. Estes resultados permitem traduzir adequadamente fórmulas expressas em LAR para LEC. A correção e completude de LAR são apresentadas baseando-se nesta tradução.

As técnicas empregadas para as provas foram indução sobre termos, indução sobre fórmulas, indução sobre o grau da fórmula, indução sobre designadores, indução sobre seqüentes válidos e provas de seqüentes no estilo de Fitch (FITCH, 1952). Algumas provas são apresentadas de modo informal, ou seja, expressam apenas os passos relevantes da prova, utilizando como metalinguagem o português acrescido de símbolos (primitivos ou definidos) de LAR.

As provas no estilo de Fitch aqui adotadas consistem em uma lista de fórmulas, uma abaixo da outra, em linhas numeradas. À direita da fórmula consta sua justificativa, indicando se a mesma é uma hipótese (hip), premissa (pr), designação (dsg)[4], suposição (sup) ou o resultado da aplicação de alguma lei a uma ou mais fórmulas anteriores, devidamente identificadas por seus respectivos números. As suposições são acompanhadas de uma linha vertical à esquerda, conforme ilustra o exemplo abaixo, onde P, Q e R são fórmulas em LAR.

$$
\begin{array}{lll}
1 & P & \text{pr} \\
2 & \quad\vert\; Q & \text{sup} \\
3 & \quad\vert\; R & \text{1, 2, Nome ou sigla da lei utilizada} \\
4 & Q \rightarrow R & \text{2, 3, RD}
\end{array}
$$

Para indicar a implicação e a equivalência informais, empregaremos, respectivamente, as abreviaturas “imp” (“se ... então”) e “sss” (“se, e somente se”). Por razões de simplicidade, algumas provas são desenvolvidas por equivalência, utilizando a abreviatura “sss” ou os conectivos definidos “⇿” ou “$\Leftrightarrow$”. Algumas provas mais simples ou semelhantes a outras já desenvolvidas são apenas esboçadas.

Em todas as seções, exemplos ilustram diversos conceitos referentes a esta lógica. Para

[4] Chamamos de *designação* às convenções ou restrições estabelecida no interior de uma prova no estilo de Fitch.

justificar certas restrições, alguns contra-exemplos são apresentados, baseando-se no fato de que $\Gamma \mathrel{|}\!\frac{}{\text{LAR}} P$ implica em $\Gamma \mathrel{|}\!\!\frac{\;=\;}{\text{LAR}} P$, ou seja, no Teorema da Correção do Cálculo para LAR com respeito à semântica, o qual será provado na seção 5.6.

5.2 Linguagens para LAR

Esta seção apresenta algumas convenções e definições sintáticas de LAR, as quais serão utilizadas no restante deste trabalho.

5.2.1 Definição. Um alfabeto para LAR é um alfabeto quantificacional (def. 2.1.2) possuindo os conectivos diádicos "$\rightarrow$" (conectivo da implicação), "$\wedge$" (conectivo da conjunção) e "$\vee$" (conectivo da disjunção), o conectivo monádico "$\neg$" (conectivo da negação), o sinal predicativo diádico "$\models$" (sinal da abrangência), os quantificadores "$\forall$" (quantificador universal) e "$\exists$" (quantificador existencial) e o descritor (ou qualificador) "Υ".

5.2.2 Escólio. Os termos e fórmulas de LAR são todos os termos e fórmulas obtidos pelas regras de formação de uma lógica quantificacional (def. 2.1.7), o que inclui os seguintes:

- se t e t' são termos em LAR, então $t \models t'$ é uma fórmula atômica em LAR;
- se x é uma variável e P é uma fórmula em LAR, então $\Upsilon x\, P$ é um termo em LAR, também chamado de *descrição*.

5.2.3 Notação. No restante deste capítulo, adotaremos como convenção as seguintes referências para as listas de letras abaixo, seguidas ou não de plicas ou subíndices:

- a, b, c: referem-se a constantes;
- x, y, z, w: referem-se a variáveis;
- f, g, h: referem-se a sinais funcionais;
- p, q, r: referem-se a sinais predicativos distintos de "$\models$";
- t, u, v: referem-se a termos em LAR;
- P, Q, R, S: referem-se a fórmulas em LAR;
- D, E, G: referem-se a designadores em LAR;
- Γ, Φ: referem-se a coleções de fórmulas em LAR;
- Ω: refere-se a uma coleção de designadores em LAR;

5.2.4 Notação. A partir de agora, a menos que o contrário seja dito, adotaremos as seguintes convenções:

- O símbolo "$\#$" refere-se a um dos conectivos "$\wedge$" ou "$\vee$".
- O símbolo "Ψ" refere-se a um dos quantificadores "$\forall$" ou "$\exists$".
- Quando Ψ' aparecer no mesmo contexto em que Ψ, $\Psi' = \begin{cases} \forall, & \text{se } \Psi = \exists, \\ \exists, & \text{se } \Psi = \forall. \end{cases}$

5.2.5 Definição. Uma ocorrência de uma variável x em um designador D é dita *ligada em D* se esta ocorrer em um subdesignador de D de uma das formas $\forall x\, P$, $\exists x\, P$ ou $\Upsilon x\, P$. Uma ocorrência de uma variável x em D é dita *livre em D* se esta não for ligada em D. Uma variável é dita *livre em D* se esta possuir pelo menos uma ocorrência livre em D. Uma variável é dita *ligada em D* se esta possuir pelo menos uma ocorrência ligada em D.

5.2.6 Definição. Uma ocorrência de um designador D em um designador E é dita *real em E* se esta não suceder "$\forall$", "$\exists$" ou "Υ" em E. Um designador D é dito *real em* um designador em E se D possuir pelo menos uma ocorrência real em E.

5.2.7 Escólio. Se D não é uma variável, então toda ocorrência de D em um designador E é real em E.

5.2.8 Definição. Um designador D é dito estar no *escopo de uma variável x em* um designador E se há um subdesignador em E de uma das formas $\forall x\, P$, $\exists x\, P$ ou $\Upsilon x\, P$, tal que há uma ocorrência real de D em P. Caso contrário, D é dito estar *fora do escopo de x em E*.

5.2.9 Definição. Uma ocorrência de um designador D é dita estar no *escopo de* "$\succeq$" *em* um designador E se E possuir um subdesignador da forma $u \succeq v$ e esta ocorrência for real em pelo menos um dos termos u ou v. Caso contrário, esta ocorrência é dita estar *fora do escopo de* "$\succeq$" *em E*. Um designador D é dito estar no *escopo de* "$\succeq$" *em E* se D possuir pelo menos uma ocorrência no escopo de "$\succeq$" em E. Caso contrário, D é dito estar *fora do escopo de* "$\succeq$" *em E*. Também dizemos que uma ocorrência de D (ou um designador D) está no *escopo da abrangência em E*, no lugar de dizer que a mesma está no *escopo de* "$\succeq$" *em E*.

5.2.10 Definição. Uma ocorrência de um designador D é dita estar no *escopo de* "Υ" *em* um designador E se E possuir um subdesignador da forma $\Upsilon x\, P$ e esta ocorrência for real em P. Caso contrário, esta ocorrência dita estar *fora do escopo de* "Υ" *em E*. Um designador D é dito estar no *escopo de* "Υ" *em E* se D possuir pelo menos uma ocorrência no escopo de "Υ" em E. Caso contrário, D é dito estar *fora do escopo de* "Υ" *em E*. Também dizemos que uma ocorrência de D (ou um designador D) está no *escopo do descritor em E*, no lugar de dizer que a mesma está no *escopo de* "Υ" *em E*.

5.2.11 Definição. Um designador em LAR é dito *puro* se este não possuir nenhuma ocorrência de “ Υ ” fora do escopo de “ $\mathrel{)\!\!=}$ ” .

5.2.12 Definição. Uma ocorrência de um designador D em um designador E em LAR é dita *de topo em E* se a mesma é real em E e está fora do escopo de “ Υ ” e “ $\mathrel{)\!\!=}$ ” em E [5].

5.2.13 Definição. Uma variável x é dita *de topo em* um designador E se todas as ocorrências livres de x em E são ocorrências de topo em E. Um designador D que não seja uma variável é dito *de topo em* um designador E se todas as ocorrências de D em E são ocorrências de topo em E.

5.2.14 Definição. Uma fórmula que não contém nenhuma ocorrência de topo de alguma fórmula da forma “$u \mathrel{)\!\!=} v$” é dita uma *fórmula básica*.

5.2.15 Definição. Uma variável x é dita *pontual em* um designador E se x possui exatamente uma ocorrência livre em E.

5.2.16 Exemplos. Damos a seguir alguns exemplos das situações descritas pelas definições acima (BUCHSBAUM; SEBBEN, 2007).

- **Variável livre e/ou ligada**. Na fórmula $\forall \mathsf{x}\,(f(\mathsf{x},\mathsf{y},\mathsf{z}) \wedge \forall \mathsf{z}\, g(\mathsf{z}))$, a variável x é ligada, enquanto que as variáveis y e z são livres (z é ligada na subfórmula $\forall \mathsf{z}\, g(\mathsf{z})$, mas como possui outra ocorrência livre na fórmula, passa a ser livre na mesma).
- **Ocorrência real**. A primeira ocorrência de x no termo $\Upsilon \mathsf{x}\,(\mathsf{x} \mathrel{)\!\!=} \mathsf{y})$ não é real neste termo. Já a segunda é uma ocorrência real no mesmo termo.
- **Escopo de variável**. As subfórmulas $p(\mathsf{y},\mathsf{z})$ e $q(\mathsf{y},\mathsf{z})$ estão no escopo da variável x na fórmula $\forall \mathsf{x}\,(p(\mathsf{y},\mathsf{z}) \to q(\mathsf{y},\mathsf{z})) \wedge r(\mathsf{z},\mathsf{w})$. A subfórmula $r(\mathsf{z},\mathsf{w})$ está fora do escopo da variável x na mesma fórmula.
- **Escopo da abrangência**. As variáveis x e y estão no escopo da abrangência na fórmula $(\Upsilon \mathsf{x}\ \mathrm{inteiro}(\mathsf{x}) \mathrel{)\!\!=} \Upsilon \mathsf{y}\ \mathrm{par}(\mathsf{y})) \wedge f(\mathsf{z},\mathsf{w})$. Já as variáveis z e w estão fora do escopo da abrangência na mesma fórmula.
- **Escopo do descritor**. A variável x está no escopo do descritor na fórmula $g(\Upsilon \mathsf{x}\ \mathrm{par}(\mathsf{x}),\mathsf{y})$. A variável y está fora do escopo do descritor na mesma fórmula.
- **Fórmula pura**. A fórmula $(\Upsilon \mathsf{x}\, P \mathrel{)\!\!=} \Upsilon \mathsf{y}\, Q) \wedge \mathsf{p}(\mathsf{x}_1,\mathsf{x}_2)$ é pura, uma vez que todas as descrições que ocorrem nesta fórmula estão no escopo da abrangência. Por outro lado, a

[5] Uma descrição pode ser um termo de topo, desde que não esteja no escopo de “ Υ ” ou “ $\mathrel{)\!\!=}$ ” .

fórmula $(\Upsilon \mathsf{x}\, P \,\,)\!\!= \Upsilon \mathsf{y}\, Q\,) \wedge p(\Upsilon \mathsf{z}\, P, \mathsf{y})$ não é pura, pois contém uma descrição fora do escopo da abrangência.

- **Ocorrência de topo**. Somente a primeira ocorrência de x no termo $f(\mathsf{x}, \mathsf{y}, \Upsilon \mathsf{x}\,(\mathsf{x} \,\,)\!\!= \mathsf{t}))$ é uma ocorrência de topo.
- **Fórmula básica**. A fórmula persegue(Υx cão(x), Υx gato(x)) é básica, pois não contém nenhuma ocorrência de topo de " $)\!\!=$ ". Por outro lado, Υx cão(x) $)\!\!=$ Υx poodle(x) é uma fórmula não básica.
- **Variável pontual**. A variável y é pontual no termo $\Upsilon \mathsf{x}\, p(\mathsf{x}, \mathsf{y}, \mathsf{z}, \mathsf{z})$. A variável z não é pontual no mesmo termo.

A distinção entre as operações de substituição e instanciação nem sempre é apresentada de forma clara na literatura. Denominaremos *instanciação* a operação de substituição de ocorrências livres de variáveis por termos em um designador [6]. A operação de *substituição*, por outro lado, consiste em trocar ocorrências reais de designadores por designadores (ou seja, termos por termos e fórmulas por fórmulas) em um designador [7]. Definimos a seguir estas duas operações.

5.2.17 Definição. A *instanciação de x por t em E*, notada por $E(x|t)$, é o designador obtido de E substituindo todas as ocorrências livres de x por t, se E não possuir quantificadores ou o descritor "Υ". Se houverem quantificadores ou o descritor "Υ" em E, a instanciação é definida conforme as cláusulas abaixo, onde x e y são variáveis distintas e $\Psi \in \{\forall, \exists, \Upsilon\}$:

- $(\Psi x\, P)(x|t) = \Psi x\, P$;
- $(\Psi y\, P)(x|t) = \begin{cases} * \;\; \Psi y\, P(x|t), \text{ se } x \text{ não é livre em } P \text{ ou } y \text{ não é livre em } t; \\ * \;\; \Psi z\, P(y|z)(x|t), \text{ se } x \text{ é livre em } P \text{ e } y \text{ é livre em } t, \text{ onde } z \text{ é a primeira} \\ \quad\;\; \text{variável não livre em } \{t, P\}. \end{cases}$

5.2.18 Definição. A *substituição de G por D em E*, notada por $E(G||D)$, é o designador obtido de E substituindo todas as ocorrências reais de G por D.

5.2.19 Exemplos. Os exemplos abaixo ilustram a diferença entre as operações de instanciação e substituição.

[6] A operação de *instanciação* é fundamental para algumas leis de introdução e eliminação de quantificadores e de abrangência, pertencentes ao cálculo de seqüentes de LAR.

[7] Esta operação é essencial para a definição de leis gerais de substituição de designadores por designadores em LAR.

- **Instanciação**:

  $P = \forall \mathsf{x}\,(\mathsf{x} \in \mathsf{y}) \vee (\mathsf{x} = 3)$.

  $P\,(\mathsf{x} \,|\, \mathsf{z} + \mathsf{w}) = \forall \mathsf{x}\,(\mathsf{x} \in \mathsf{y}) \vee (\mathsf{z} + \mathsf{w} = 3)$.

- **Substituição**:

  $P = \forall \mathsf{x}\,(\mathsf{x} \in \mathsf{y}) \vee (\mathsf{x} = 3)$.

  $P\,(\mathsf{x} \,\|\, \mathsf{z} + \mathsf{w}) = \forall \mathsf{x}\,(\mathsf{z} + \mathsf{w} \in \mathsf{y}) \vee (\mathsf{z} + \mathsf{w} = 3)$.

Definimos a seguir a instanciação simultânea em LAR.

5.2.20 Notação. A partir de agora, a menos que o contrário seja dito, adotamos as seguintes convenções para os símbolos abaixo, onde $\Psi \in \{\forall, \exists, \Upsilon\}$ e n e p são números naturais, eventualmente nulos:

- $\overrightarrow{x}$ refere-se à lista de variáveis $x_1, \ldots, x_n$.
- $\overrightarrow{y}$ refere-se à lista de variáveis $y_1, \ldots, y_n$.
- $\overrightarrow{z}$ refere-se à lista de variáveis $z_1, \ldots, z_p$.
- $\overrightarrow{w}$ refere-se à lista de variáveis $w_1, \ldots, w_p$.
- $\overrightarrow{t}$ refere-se à lista de termos $t_1, \ldots, t_n$.
- $\overrightarrow{u}$ refere-se à lista de termos $u_1, \ldots, u_p$.
- $\overrightarrow{D}$ refere-se à lista de designadores $D_1, \ldots, D_n$.
- $\overrightarrow{E}$ refere-se à lista de designadores $E_1, \ldots, E_p$.
- $\overrightarrow{\Psi}$ refere-se à lista de $\Psi_1, \ldots, \Psi_n$.
- $\forall\overrightarrow{x}$ é a samblagem “$\forall x_1 \ldots \forall x_n$”.
- $\overrightarrow{\Psi}\overrightarrow{x}$ é a samblagem “$\Psi_1 x_1 \ldots \Psi_n x_n$”.
- $\overrightarrow{\Psi}\overrightarrow{z}$ é a samblagem “$\Psi_1 z_p \ldots \Psi_p z_p$”.

5.2.21 Definição.

- $\overrightarrow{x}$ *ocorre em* $D \rightleftharpoons$ existe algum $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que x_i ocorre em D.
- $\overrightarrow{x}$ *é livre em* $D \rightleftharpoons$ existe algum $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que x_i é livre em D.
- $\overrightarrow{x}$ *ocorre em* $\overrightarrow{E} \rightleftharpoons$ para algum $i \in \{1, \ldots, n\}$ e para algum $j \in \{1, \ldots, p\}$, x_i ocorre em E_j.
- $\overrightarrow{x}$ *é livre em* $\overrightarrow{E} \rightleftharpoons$ para algum $i \in \{1, \ldots, n\}$ e para algum $j \in \{1, \ldots, p\}$, x_i é livre em E_j.
- $\overrightarrow{x}$ é *ligada em* $\overrightarrow{E} \rightleftharpoons$ para algum $i \in \{1, \ldots, n\}$ e para algum $j \in \{1, \ldots, p\}$, x_i é ligada em E_j.
- $\overrightarrow{x}$ é *de topo em* $E \rightleftharpoons$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, se x_i é livre em E, então x_i é de topo em E.
- $\overrightarrow{D}$ é *própria* $\rightleftharpoons$ para quaisquer $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, se $i \neq j$, então $D_i \neq D_j$.
- $\overrightarrow{D}$ e $\overrightarrow{E}$ são *disjuntas* $\rightleftharpoons$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ e para cada $j \in \{1, \ldots, p\}$, $D_i \neq E_j$.

5.2.22 Definição. Sejam $x_1, \dots, x_n$ variáveis distintas ($n \geq 0$). A *instanciação simultânea* de $\overrightarrow{x}$ por $\overrightarrow{t}$ em um designador E, notada por $E(\overrightarrow{x}|\overrightarrow{t})$, é o designador obtido de E substituindo simultaneamente todas as ocorrências livres de $x_1, \dots, x_n$ respectivamente por $t_1, \dots, t_n$, se E não possuir quantificadores ou o descritor " Υ ". Se houverem quantificadores ou o descritor " Υ " em E, então tal instanciação é definida pelas seguintes cláusulas, onde $\Psi \in \{\forall, \exists, \Upsilon\}$:

- Se existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $x_i = y$ ou $x_i = t_i$ ou x_i não é livre em P, então

$$(\Psi y\, P)(\overrightarrow{x}|\overrightarrow{t}) = \Psi y\, P(\overrightarrow{w}|\overrightarrow{u}),\ \text{onde} \begin{cases} * \ i_1, \dots, i_r \text{ são os naturais } i \in \{1, \dots, n\} \text{ tais que} \\ \quad x_i \neq y,\ x_i \neq t_i \ \text{e}\ x_i \text{ é livre em } P. \\ * \ \overrightarrow{w} = x_{i_1}, \dots, x_{i_r}; \\ * \ \overrightarrow{u} = t_{i_1}, \dots, t_{i_r}. \end{cases}$$

- Se, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, $x_i \neq y$ e $x_i \neq t_i$ e x_i é livre em P, então

$$(\Psi y\, P)(\overrightarrow{x}|\overrightarrow{t}) = \begin{cases} * \ \Psi y\, P(\overrightarrow{x}|\overrightarrow{t}), \text{ se } y \text{ não é livre em } \overrightarrow{t}; \\ * \ \Psi z\, P(y|z)(\overrightarrow{x}|\overrightarrow{t}) \text{ em caso contrário, onde } z \text{ é a primeira variável} \\ \quad \text{não livre em } \{\overrightarrow{t}, P\}. \end{cases}$$

5.2.23 Fato. Dado um designador D sem descrições de topo no escopo de alguma variável, existem $E, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, P_1, \dots, P_n$, tais que $D = E(x_1, \dots, x_n | \Upsilon y_1\, P_1, \dots, \Upsilon y_n\, P_n)$

$$\text{e} \begin{cases} E \text{ é designador puro,} \\ x_1, \dots, x_n \text{ não estão no escopo de nenhuma variável em } E, \\ x_1, \dots, x_n \text{ não são livres em } \Upsilon y_1\, P_1, \dots, \Upsilon y_n\, P_n, \\ x_1, \dots, x_n \text{ são de topo pontuais em } E. \end{cases}$$

Esboço da prova: Prova-se por indução sobre o designador D. □

5.2.24 Definição. Definimos a relação de *congruência entre designadores em* LAR pelas condições abaixo, onde $\# \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$ e $\Psi \in \{\forall, \exists, \Upsilon\}$:

- $a \approx_c b$ sss "a" e "b" são a mesma constante;
- $x \approx_c y$ sss "x" e "y" são a mesma variável;
- $f(t_1, \dots, t_n) \approx_c g(u_1, \dots, u_p)$ sss $f = g$, $n = p$ e $t_i \approx_c u_i$, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$;
- $p(t_1, \dots, t_n) \approx_c q(u_1, \dots, u_p)$ sss $p = q$, $n = p$ e $t_i \approx_c u_i$, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$;
- $t_1 \models u_1 \approx_c t_2 \models u_2$ sss $t_1 \approx_c t_2$ e $u_1 \approx_c u_2$;
- $\neg P_1 \approx_c \neg P_2$ sss $P_1 \approx_c P_2$;
- $P_1 \# Q_1 \approx_c P_2 \# Q_2$ sss $P_1 \approx_c P_2$ e $Q_1 \approx_c Q_2$;

- $\Psi x\, P_1 \approx_c \Psi y\, P_2$ sss y não é livre em $\forall x\, P_1$ e $P_1(x|y) \approx_c P_2$;
- Se D_1 e D_2 forem designadores de tipos diferentes, então $D_1 \not\approx_c D_2$[8].

5.2.25 Fato. Utilizaremos neste trabalho os seguintes resultados sintáticos envolvendo congruência, instanciação simples e instanciação simultânea, extraídos de Buchsbaum (2006). Consideraremos $x_1, \ldots, x_n$ variáveis distintas e $\Psi \in \{\forall, \exists, \Upsilon\}$.

- $D \approx_c D$.
- Se $D \approx_c E$, então D e E possuem as mesmas variáveis livres.
- Se $D \approx_c E$, então $E \approx_c D$.
- Se $D \approx_c E$ e $E \approx_c G$, então $D \approx_c G$.
- Se $D \approx_c E$, então $D(\overrightarrow{x}|\overrightarrow{t}) \approx_c E(\overrightarrow{x}|\overrightarrow{t})$.
- Se $\overrightarrow{y}$ não é livre em $\forall\overrightarrow{x}\, P$, então $\begin{cases} P(\overrightarrow{x}|\overrightarrow{y})(\overrightarrow{y}|\overrightarrow{t}) \approx_c P(\overrightarrow{x}|\overrightarrow{t}), \\ P(\overrightarrow{x}|\overrightarrow{y})(\overrightarrow{y}|\overrightarrow{x}) \approx_c P. \end{cases}$
- Se $\begin{cases} \overrightarrow{x} \text{ e } \overrightarrow{z} \text{ são disjuntas} \\ \overrightarrow{x} \text{ não é livre em } \overrightarrow{u}, \\ \overrightarrow{z} \text{ não é livre em } \overrightarrow{t}, \end{cases}$ então $D(\overrightarrow{x}|\overrightarrow{t})(\overrightarrow{z}|\overrightarrow{u}) \approx_c D(\overrightarrow{z}|\overrightarrow{u})(\overrightarrow{x}|\overrightarrow{t})$.
- Se $\begin{cases} \overrightarrow{x} \text{ não é ligada em } D, \\ i_1, \ldots, i_n \text{ é uma permutação de } 1, \ldots, n, \end{cases}$ então $D(\overrightarrow{x}|\overrightarrow{t}) \approx_c D(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}|t_{i_1}, \ldots, t_{i_n})$.
- Se $\overrightarrow{x}$ não é livre em $\overrightarrow{t}$, então $D(\overrightarrow{x}|\overrightarrow{t}) \approx_c D(x_1|t_1)\ldots(x_n|t_n)$.
- Se $\begin{cases} \overrightarrow{x} \text{ e } \overrightarrow{y} \text{ são próprias}, \\ \overrightarrow{y} \text{ não é livre em } \forall\overrightarrow{x}\, P, \end{cases}$ então $\overrightarrow{\Psi}\overrightarrow{x}\, P \approx_c \overrightarrow{\Psi}\overrightarrow{y}\, P(\overrightarrow{x}|\overrightarrow{y})$.
- Se Se $\begin{cases} \overrightarrow{x}, \overrightarrow{z} \text{ e } \overrightarrow{w} \text{ são próprias}, \\ \overrightarrow{x} \text{ e } \overrightarrow{z} \text{ são disjuntas}, \\ \overrightarrow{w} \text{ não é livre em } \{\overrightarrow{x}, \overrightarrow{t}, \forall\overrightarrow{z}\, P\}, \end{cases}$ então $(\Psi\overrightarrow{z}\, P)(\overrightarrow{x}|\overrightarrow{t}) \approx_c \Psi\overrightarrow{w}\, P(\overrightarrow{z}|\overrightarrow{w})(\overrightarrow{x}|\overrightarrow{t})$.
- Se $\begin{cases} \overrightarrow{y} \text{ não é livre em } \{\overrightarrow{x}, \overrightarrow{t}, D\}, \\ i \in \{1, \ldots, n\}, \\ \overrightarrow{z} = \overrightarrow{y} - y_i, \\ \overrightarrow{u} = \overrightarrow{t} - t_i, \end{cases}$ então $D(\overrightarrow{x}|\overrightarrow{t}) \approx_c D(\overrightarrow{x}|\overrightarrow{y})(\overrightarrow{z}|\overrightarrow{u})(y_i|t_i)$.

[8] Ou seja, não é verdade que $D_1 \approx_c D_2$.

5.2.26 Definição. Além dos sinais primitivos de LAR, adotaremos também os seguintes sinais definidos (considerando x e y as primeiras variáveis não livres em t):

- $t = t' \rightleftharpoons t \succ\!\!\models t' \wedge t' \succ\!\!\models t$;
- $t \neq t' \rightleftharpoons \neg(t = t')$;
- $\mathrm{vac}(t) \rightleftharpoons \neg\exists x\,(t \succ\!\!\models x)$. Lê-se vac($t$) como "$t$ é vácuo";
- $\mathrm{ex}(t) \rightleftharpoons \exists x\,(t \succ\!\!\models x)$. Lê-se ex($t$) como "$t$ é existencial";
- $\mathrm{fix}(t) \rightleftharpoons \forall x\,\forall y\,(t \succ\!\!\models x \wedge t \succ\!\!\models y \rightarrow x = y)$. Lê-se fix($t$) como "$t$ é fixo".
- $\mathrm{un}(t) \rightleftharpoons \mathrm{ex}(t) \wedge \mathrm{fix}(t)$. Lê-se un($t$) como "$t$ é unívoco";
- $\mathrm{amb}(t) \rightleftharpoons \exists x\,\exists y\,(t \succ\!\!\models x \wedge t \succ\!\!\models y \rightarrow x \neq y)$. Lê-se amb($t$) como "$t$ é ambíguo".
- $t \equiv t' \rightleftharpoons \mathrm{fix}(t) \wedge \mathrm{fix}(t') \wedge t = t'$.

O sinal "≡" definido acima corresponde em LAR a uma igualdade, em geral, não-reflexiva. A mesma apenas será reflexiva entre termos fixos, ou seja, entre termos não ambíguos. O sinal "=", por outro lado, opera como uma igualdade reflexiva. Isto será melhor detalhado em um exemplo adiante.

5.3 Uma Semântica para LAR

Nesta seção apresentamos uma semântica para LAR, extraída de Buchsbaum (2002), com algumas adaptações.

5.3.1 Notação. Para as definições a seguir, consideraremos Δ uma coleção não vazia.

5.3.2 Definição. Uma LAR-interpretação I é uma tripla $I = \langle \Delta, w, s\rangle$, onde Δ é um universo de discurso (ou domínio da interpretação), w é um mundo sobre Δ e s é uma Δ-atribuição.

5.3.3 Definição. Sejam I uma LAR-interpretação, $x_1, \ldots, x_n$ variáveis distintas e d, $d_1, \ldots, d_n$ elementos de Δ. Definimos:

- $I(x|d)$ é uma LAR-interpretação definida por $I(x|d) = \langle \Delta, w, s(x|d)\rangle$;
- $I(x_1, \ldots, x_n|d_1, \ldots, d_n)$ é uma LAR-interpretação definida por
  $I(x_1, \ldots, x_n|d_1, \ldots, d_n) = \langle \Delta, w, s(x_1, \ldots, x_n \,|\, d_1, \ldots, d_n)\rangle$.

5.3.4 Notação. No restante desta seção, as seguintes convenções para as letras abaixo, seguidas ou não de plicas e subíndices:

- w é um mundo sobre um universo de discurso Δ.

- s é uma Δ-atribuição para variáveis.
- $I = \langle \Delta, w, s \rangle$ é uma LAR-interpretação.
- d e e são a elementos do universo de discurso de uma dada LAR-interpretação.

Para especificar a semântica de LAR, definimos, para cada LAR-interpretação I, três funções: I_A, I_S e I_N.

A função I_A, ou *função-âmbito* de I, associa cada termo a uma coleção, eventualmente vazia, dita *âmbito* do termo (daí o "A" em I_A), de elementos do universo de discurso de I. Se tal coleção for vazia, dizemos que o termo é *vácuo em I*, ou seja, é um nome que não denota nada. Se a mesma contiver no máximo um elemento, dizemos que o termo é *fixo em I*. Se esta coleção não for vazia, o termo é dito *existencial em I*. Um termo *existencial em I* pode ainda ser *unívoco em I*, caso a coleção a ele associada seja um conjunto unitário[9], e *ambíguo em I*, caso tal coleção possua mais de um elemento. Desta forma, um termo ambíguo é um nome para cada objeto da coleção a ele associada.

5.3.5 Exemplos. Considere uma interpretação na qual os símbolos "$\mathbb{N}$", "$\neq$", "$>$" e "$\in$" possuem seus significados usuais. Com respeito a esta interpretação, damos a seguir alguns exemplos.

- Termo vácuo: $\Upsilon \mathsf{x}\,(\mathsf{x} \neq \mathsf{x})$.
- Termo ambíguo: $\Upsilon \mathsf{x}\,(\mathsf{x} \in \mathbb{N} \wedge \mathsf{x} > 2)$.
- Termo unívoco: $\Upsilon \mathsf{x}\,(\mathsf{x} \in \mathbb{N} \wedge \mathrm{par}(\mathsf{x}) \wedge \mathrm{primo}(\mathsf{x}))$.

A função I_S, por outro lado, é uma valoração, ou seja, associa fórmulas a valores veritativos. I_N é uma função auxiliar, utilizada para definir I_S por recursão simultânea. Os valores veritativos de LAR são 1 (um), ou *vitória* e 0 (zero), ou *derrota*, sendo que 1 é o valor distinguido. Este tipo de semântica é denominado *semântica de jogos* (BUCHSBAUM; PEQUENO, 2000; HINTIKKA; KULAS, 1983), e baseia-se numa espécie de jogo imaginário entre o *sujeito* (daí o "S" em I_S), o qual deseja provar que uma dada fórmula é verdadeira, e a *natureza* (daí o "N" em I_N), que deseja provar que a negação da fórmula considerada é verdadeira. Semânticas de jogos são particularmente adequadas para lógicas paraconsistentes, onde associar P a 1 não significa, necessariamente, que $\neg P$ será associado a 0. Particularmente em LAR, dependendo da estrutura da fórmula P, que pode conter termos vácuos, $\neg P$ pode ser tanto associado a 0 como a 1.

[9] Ou seja, um termo unívoco é um termo que é existencial e fixo.

Dizemos que o sujeito ganha o jogo com respeito a uma fórmula P se $I_{\mathrm{S}}(P) = 1$, e que a natureza ganha o jogo se $I_{\mathrm{N}}(P) = 1$. Da mesma forma, dizemos que sujeito perde o jogo com respeito a uma fórmula P se $I_{\mathrm{S}}(P) = 0$, e que a natureza perde o jogo se $I_{\mathrm{N}}(P) = 0$.

Dizemos também que uma fórmula P é verdadeira em I se $I_{\mathrm{S}}(P) = 1$, e que uma fórmula P é falsa em I se $I_{\mathrm{S}}(P) = 0$.

Para motivar a definição das funções I_{A}, I_{S} e I_{N}, dada a seguir, consideremos P uma fórmula básica, tal que $x_1, \ldots, x_n$ são variáveis de topo distintas e pontuais em P. Consideremos também $P(x_1, \ldots, x_n | t_1, \ldots, t_n)$ a fórmula obtida de P instanciando-se simultaneamente $x_1, \ldots, x_n$ por $t_1, \ldots, t_n$.

Dizemos que $d_1, \ldots, d_n$ satisfazem $P(x_1, \ldots, x_n)$, de acordo com uma dada interpretação I, se $I(x_1, \ldots, x_n | d_1, \ldots, d_n)_{\mathrm{S}}(P) = 1$.

Se, em I, cada um dos termos $t_1, \ldots, t_n$ denota pelo menos um objeto, então I_{S} associa vitória a $P(x_1, \ldots, x_n | t_1, \ldots, t_n)$ se, e somente se, para cada $d_1, \ldots, d_n$ tal que $d_1, \ldots, d_n$ são respectivamente elementos do universo de discurso denotados (ambiguamente) por $t_1, \ldots, t_n$, $d_1, \ldots, d_n$ satisfizerem P. Se algum destes termos não denota nenhum objeto em I, e P é uma fórmula atômica, então $P(x_1, \ldots, x_n | t_1, \ldots, t_n)$ é avaliado como vitória (vácua) do sujeito em I.

I_{N} comporta-se de modo complementar. Se cada um dos termos $t_1, \ldots, t_n$ denota pelo menos um objeto, então I_{N} associa vitória a $P(x_1, \ldots, x_n | t_1, \ldots, t_n)$ se, e somente se, para todos os objetos $d_1, \ldots, d_n$ denotados por $t_1, \ldots, t_n$, $d_1, \ldots, d_n$ não satisfizerem P. Se algum destes termos não denota nenhum objeto, e P é uma fórmula atômica, então $P(x_1, \ldots, x_n | t_1, \ldots, t_n)$ é avaliado como vitória (vácua) da natureza em I.

5.3.6 Definição. As cláusulas abaixo especificam as funções I_{A}, I_{S} e I_{N}, onde I_{A} é a *função-âmbito definida por I*, e I_{S} é denominada a LAR-*valoração definida por I*:

- I_{A} é uma função da coleção de termos em w para $\mathcal{P}(\Delta)$;
- I_{S}, I_{N} são funções da coleção das fórmulas em w para $\{0, 1\}$;
- $I_{\mathrm{A}}(c) = \{w(c)\}$;
- $I_{\mathrm{A}}(x) = \{s(x)\}$;
- $I_{\mathrm{A}}(f(t_1, \ldots, t_n)) = \{w(f)(d_1, \ldots, d_n) \mid d_1 \in I_{\mathrm{A}}(t_1), \ldots, d_n \in I_{\mathrm{A}}(t_n)\}$;
- $I_{\mathrm{A}}(\Upsilon x\, P) = \{d \in \Delta \mid I(x|d)_{\mathrm{S}}(P) = 1\}$;
- $I_{\mathrm{S}}(p(t_1, \ldots, t_n)) = 1$ sss para cada $d_1 \in I_{\mathrm{A}}(t_1), \ldots,$ para cada $d_n \in I_{\mathrm{A}}(t_n)$, $\langle d_1, \ldots, d_n \rangle \in w(p)$;

- $I_{\mathrm{N}}(p(t_1, \ldots, t_n)) = 1$ sss para cada $d_1 \in I_{\mathrm{A}}(t_1), \ldots,$ para cada $d_n \in I_{\mathrm{A}}(t_n)$, $\langle d_1, \ldots, d_n \rangle \notin w(p)$;
- $I_{\mathrm{S}}(t \not\models t') = 1$ sss $I_{\mathrm{N}}(t \not\models t') = 0$ sss $I_{\mathrm{A}}(t) \supseteq I_{\mathrm{A}}(t')$;
- $I_{\mathrm{S}}(\neg P) = I_{\mathrm{N}}(P)$;
- $I_{\mathrm{N}}(\neg P) = I_{\mathrm{S}}(P)$;
- $I_{\mathrm{S}}(P \to Q) = \max\{I_{\mathrm{N}}(P), I_{\mathrm{S}}(Q)\}$;
- $I_{\mathrm{N}}(P \to Q) = \min\{I_{\mathrm{S}}(P), I_{\mathrm{N}}(P)\}$;
- $I_{\mathrm{S}}(P \wedge Q) = \min\{I_{\mathrm{S}}(P), I_{\mathrm{S}}(Q)\}$;
- $I_{\mathrm{N}}(P \wedge Q) = \max\{I_{\mathrm{N}}(P), I_{\mathrm{N}}(Q)\}$;
- $I_{\mathrm{S}}(P \vee Q) = \max\{I_{\mathrm{S}}(P), I_{\mathrm{S}}(Q)\}$;
- $I_{\mathrm{N}}(P \vee Q) = \min\{I_{\mathrm{N}}(P), I_{\mathrm{N}}(Q)\}$;
- $I_{\mathrm{S}}(\forall x\, P) = \min\{I(x|d)_{\mathrm{S}}(P) \mid d \in \Delta\}$;
- $I_{\mathrm{N}}(\forall x\, P) = \max\{I(x|d)_{\mathrm{N}}(P) \mid d \in \Delta\}$;
- $I_{\mathrm{S}}(\exists x\, P) = \max\{I(x|d)_{\mathrm{S}}(P) \mid d \in \Delta\}$;
- $I_{\mathrm{N}}(\exists x\, P) = \min\{I(x|d)_{\mathrm{N}}(P) \mid d \in \Delta\}$.

5.3.7 Definição. Um termo t é dito *vácuo com respeito* a uma interpretação I se $I_{\mathrm{A}}(t)$ é o conjunto vazio, *existencial* se $I_{\mathrm{A}}(t)$ é não vazio, *fixo* se $I_{\mathrm{A}}(t)$ contém no máximo um elemento, *unívoco* se $I_{\mathrm{A}}(t)$ é um conjunto unitário e *ambíguo* se $I_{\mathrm{A}}(t)$ contém pelo menos dois elementos.

5.3.8 Notação. Dado um termo unívoco t, notamos por t^I o único elemento do conjunto $I_{\mathrm{A}}(t)$.

5.3.9 Exemplo. A fim de ilustrar a semântica de LAR para fórmulas atômicas básicas, considere $d_1, \ldots, d_5$ elementos de Δ e t_1, t_2 termos ambíguos cujos âmbitos são, respectivamente $I_{\mathrm{A}}(t_1) = \{d_1, d_2\}$ e $I_{\mathrm{A}}(t_2) = \{d_3, d_4, d_5\}$. Logo, pela definição 5.3.6,

$$I_{\mathrm{S}}(p(t_1, t_2)) = 1$$
$$\text{sss}$$
$$\langle d_1, d_3 \rangle \in w(p) \text{ e } \langle d_1, d_4 \rangle \in w(p) \text{ e } \langle d_1, d_5 \rangle \in w(p) \text{ e } \langle d_2, d_3 \rangle \in w(p) \text{ e } \langle d_2, d_4 \rangle \in w(p) \text{ e } \langle d_2, d_5 \rangle \in w(p).$$

Esta semântica caracteriza uma lógica *não alética*, ou seja, uma lógica que é *paraconsistente* e *paracompleta*. Isto é, uma lógica onde ambos P e $\neg P$ podem ser verdadeiros (o sujeito e a natureza podem ganhar), ou na qual ambos P e $\neg P$ podem ser falsos (a natureza e o sujeito podem perder). Além disso, LAR é também uma lógica *não-reflexiva*, isto é, é uma lógica onde a proposição $P \to P$ pode ser falsa. O exemplo a seguir demonstra estas situações.

5.3.10 Exemplo. Considere $p(\mathsf{x})$ uma fórmula atômica básica e I uma interpretação na qual os sinais "=" e "≠" possuem seus significados usuais.

- Se t é vácuo com respeito a I, então ambas $p(t)$ e $\neg p(t)$ são verdadeiras em I, confirmando a *paraconsistência* de LAR. Por exemplo, ambas as fórmulas $p(\Upsilon\mathsf{x}(\mathsf{x} \neq \mathsf{x}))$ e $\neg p(\Upsilon\mathsf{x}(\mathsf{x} \neq \mathsf{x}))$ são verdadeiras [10].
- Se t é ambíguo com respeito a I, tal que existem d_1 e d_2 pertencendo a $I_{\mathrm{A}}(t)$, para os quais $I(\mathsf{x}|d_1)_{\mathrm{S}}(p(\mathsf{x})) = 1$ e $I(\mathsf{x}|d_2)_{\mathrm{S}}(p(\mathsf{x})) = 0$, então ambas $p(t)$ e $\neg p(t)$ são falsas em I, confirmando a *paracompletude* de LAR. Neste caso também acontece que a fórmula $p(t) \to p(t)$ é falsa em I, pois $I_{\mathrm{N}}(p(t)) = 0$ e $I_{\mathrm{S}}(p(t)) = 0$, confirmando a ***não-reflexividade*** de LAR. Por exemplo, a fórmula $\mathrm{par}(\Upsilon\mathsf{x}\,(\mathsf{x} = 1 \vee \mathsf{x} = 2))$ e sua negação são falsas, daí, a fórmula $\mathrm{par}(\Upsilon\mathsf{x}\,(\mathsf{x} = 1 \vee \mathsf{x} = 2)) \to \mathrm{par}(\Upsilon\mathsf{x}\,(\mathsf{x} = 1 \vee \mathsf{x} = 2))$ é também falsa.

Definimos a seguir a semântica da igualdade "≡", apresentada na definição 5.2.26.

5.3.11 Escólio.

- $I_{\mathrm{S}}(t_1 \equiv t_2) = 1$ sss para cada $d_1 \in I_{\mathrm{A}}(t_1)$, para cada $d_2 \in I_{\mathrm{A}}(t_2)$, d_1 e d_2 são o mesmo objeto.

Definimos abaixo quando uma LAR-interpretação I satisfaz uma fórmula P em LAR.

5.3.12 Definição. I satisfaz P em LAR $\rightleftharpoons \begin{cases} I \text{ é uma LAR-interpretação para } P, \\ I_{\mathrm{S}}(P) = 1. \end{cases}$

A seguir formulamos a noção de coincidência de interpretações e o Lema da Coincidência, necessário para a prova de alguns resultados semânticos de LAR.

5.3.13 Definição. Sejam $I = \langle \Delta, w, s \rangle$ e $I' = \langle \Delta, w', s' \rangle$ LAR-interpretações. Dizemos que I e I' coincidem em um designador E se as seguintes condições forem satisfeitas:

- I e I' são LAR-interpretações para E.
- Para toda variável x livre em E, $s(x) = s'(x)$.
- Para toda constante c ocorrendo em E, $w(c) = w'(c)$.
- Para todo sinal funcional f ocorrendo em E, $w(f) = w'(f)$.
- Para todo sinal predicativo p ocorrendo em E, $w(p) = w'(p)$.

5.3.14 Escólio. Se $I = \langle \Delta, w, s \rangle$ e $I' = \langle \Delta, w', s' \rangle$ são LAR-interpretações coincidentes em E, então $I(x|d)$ e $I'(x|d)$ também coincidem em E.

[10] Quando algum termo de topo de uma fórmula atômica básica for vácuo, a fórmula torna-se paraconsistente.

5.3.15. Lema da Coincidência.

$$\text{Se } I \text{ e } I' \text{ coincidem em } E\text{, então } \begin{cases} E \text{ é termo implica que } I_A(E) = I_A'(E); \\ E \text{ é fórmula implica que } \begin{cases} I_S(E) = I_S'(E); \\ I_N(E) = I_N'(E). \end{cases} \end{cases}$$

Esboço da prova:

Suponha que $I = \langle \Delta, w, s \rangle$ e $I' = \langle \Delta, w', s' \rangle$ coincidem em E.

$$\text{Seja } \Delta(E)\text{: } \begin{cases} \text{se E é termo, então } I_A(E) = I_A'(E); \\ \text{se E é fórmula, então } \begin{cases} I_S(E) = I_S'(E); \\ I_N(E) = I_N'(E). \end{cases} \end{cases}$$

A prova é feita mostrando-se a validade de $\Delta(E)$, por indução sobre E. □

Em LEC e em qualquer das diversas lógicas mais conhecidas, devido à inexistência de termos ambíguos, a semântica da instanciação é definida pelas duas cláusulas abaixo:

(i) $I_D(u(x|t)) = I(x|\, I_D(t))(u)$;

(ii) $I_V(P(x|t)) = I(x|\, I_D(t))_V(P)$.

Em LAR, tais resultados semânticos são mais elaborados, uma vez que os termos são associados a coleções de objetos. Esta característica exige um tratamento mais detalhado, o qual é dado pelo resultado a seguir.

5.3.16. Avaliação de Designadores Instanciados em LAR.

(i) Se t é um termo puro, então $\begin{cases} I_A(u(x|t)) = I(x|t^I)_A(u), \\ I_S(P(x|t)) = I(x|t^I)_S(P), \\ I_N(P(x|t)) = I(x|t^I)_N(P). \end{cases}$

(ii) Se x é de topo em u, então $I_A(u(x|t)) \supseteq \bigcup_{d \in I_A(t)} I(x|d)_A(u)$.

(iii) Se $\begin{cases} x \text{ é de topo em } P, \\ I_A(t) \neq \emptyset, \end{cases}$ então $\begin{cases} I_S(P(x|t)) \leq \min\{I(x|d)_S(P) \mid d \in I_A(t)\}, \\ I_N(P(x|t)) \leq \min\{I(x|d)_N(P) \mid d \in I_A(t)\}. \end{cases}$

(iv) Se x é de topo pontual em u, então $I_A(u(x|t)) = \bigcup_{d \in I_A(t)} I(x|d)_A(u)$.

(v) Se $\begin{cases} x \text{ é de topo pontual em } P, \\ I_A(t) \neq \emptyset, \end{cases}$

então $\begin{cases} I_S(P(x|t)) = \min\{I(x|d)_S(P) \mid d \in I_A(t)\}, \\ I_N(P(x|t)) = \min\{I(x|d)_N(P) \mid d \in I_A(t)\}. \end{cases}$

(vi) Se $\begin{cases} x \text{ possui uma ocorrência de topo em } u, \\ I_A(t) = \emptyset, \end{cases}$ então $I_A(u(x|t)) = \emptyset$.

(vii) Se $\begin{cases} P \text{ é uma fórmula atômica básica ou uma negação de uma fórmula atômica básica}, \\ P \text{ possui pelo menos uma ocorrência de topo de } x, \\ I_A(t) = \emptyset, \end{cases}$

então $I_S(P(x|t)) = I_N(P(x|t)) = 1$.

Prova de (i):

Suponha que t é um termo puro.

Seja $\Delta(E)$: Para qualquer I, $\begin{cases} \text{Se } E \text{ é termo, então } I_A(E(x|t)) = I(x|t^I)_A(E). \\ \text{Se } E \text{ é fórmula, então } \begin{cases} I_S(E(x|t)) = I(x|t^I)_S(E), \\ I_N(E(x|t)) = I(x|t^I)_N(E). \end{cases} \end{cases}$

- Caso E é uma constante c.

  $I_A(c(x|t)) = I_A(c) = I(x|t^I)_A(c)$, pelo Lema da Coincidência.

  Logo, Δ vale quando E é uma constante.

- Caso E é uma variável y distinta de x.

  $I_A(y(x|t)) = I_A(y) = I(x|t^I)_A(y)$, pelo Lema da Coincidência.

  Portanto, Δ vale quando E é uma variável distinta de x.

- Caso E é x.

  $I_A(x(x|t)) = I_A(t) = \{\, t^I\}$.

  $I(x|t^I)_A(x) = \{\, t^I\}$, donde temos que Δ vale quando E é x.

- Caso E é $f(t_1, \ldots, t_n)$.

  Por HI, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, $I_{\mathrm{A}}(t_i(x|t)) = I(x|t^I)_{\mathrm{A}}(t_i)$.

  $I_{\mathrm{A}}(f(t_1, \ldots, t_n)(x|t)) = I_{\mathrm{A}}(f(t_1(x|t), \ldots, t_n(x|t))) =$

  $\{w(f)(d_1, \ldots, d_n) \mid d_1 \in I_{\mathrm{A}}(t_1(x|t)), \ldots, d_n \in I_{\mathrm{A}}(t_n(x|t))\} =^{\mathrm{HI}}$

  $\{w(f)(d_1, \ldots, d_n) \mid d_1 \in I(x|t^I)_{\mathrm{A}}(t_1), \ldots, d_n \in I(x|t^I)_{\mathrm{A}}(t_n)\} =$

  $I(x|t^I)_{\mathrm{A}}(f(t_1, \ldots, t_n))$.

  Logo, $I_{\mathrm{A}}(f(t_1, \ldots, t_n)(x|t)) = I(x|t^I)_{\mathrm{A}}(f(t_1, \ldots, t_n))$, ou seja, Δ vale quando E é $f(t_1, \ldots, t_n)$.

- Caso E é $\Upsilon x\, P$.

  $I_{\mathrm{A}}((\Upsilon x\, P)(x|t)) = I_{\mathrm{A}}(\Upsilon x\, P) = \{d \in \Delta \mid I(x|d)_{\mathrm{S}}(P) = 1\}$.

  $I(x|t^I)_{\mathrm{A}}(\Upsilon x\, P) = \{d \in \Delta \mid I(x|t^I)(x|d)_{\mathrm{S}}(P) = 1\} = \{d \in \Delta \mid I(x|d)_{\mathrm{S}}(P) = 1\}$.

  Portanto, $I_{\mathrm{A}}((\Upsilon x\, P)(x|t)) = I(x|t^I)_{\mathrm{A}}(\Upsilon x\, P)$. Daí, Δ vale quando E é $\Upsilon x\, P$.

- Caso E é $\Upsilon y\, P$, onde y é uma variável distinta de x.

  * Subcaso: x não é livre em P ou y não é livre em t.

    $I_{\mathrm{A}}((\Upsilon y\, P)(x|t)) = I_{\mathrm{A}}(\Upsilon y\, P(x|t)) =$

    $\{d \in \Delta \mid I(y|d)_{\mathrm{S}}(P(x|t)) = 1\} =^{\mathrm{HI}}$

    $\{d \in \Delta \mid I(y|d)(x|t^I)_{\mathrm{S}}(P) = 1\} =$

    $\{d \in \Delta \mid I(x|t^I)(y|d)_{\mathrm{S}}(P) = 1\} = I(x|t^I)_{\mathrm{A}}(\Upsilon y\, P)$.

    Logo, $I_{\mathrm{A}}((\Upsilon y\, P)(x|t)) = I(x|t^I)_{\mathrm{A}}(\Upsilon y\, P)$, donde Δ vale quando E é $\Upsilon y\, P$.

  * Subcaso: x é livre em P e y é livre em t.

    Seja z a primeira variável não livre em $\{t, P\}$.

    Então $(\Upsilon y\, P)(x|t) = \Upsilon z\, P(y|z)(x|t)$.

    $I_{\mathrm{A}}((\Upsilon y\, P)(x|t)) = I_{\mathrm{A}}(\Upsilon z\, P(y|z)(x|t)) =$

    $\{d \in \Delta \mid I(z|d)_{\mathrm{S}}(P(y|z)(x|t)) = 1\} =^{\mathrm{HI}}$

    $\{d \in \Delta \mid I(z|d)(x|t^I)_{\mathrm{S}}(P(y|z)) = 1\} =^{\mathrm{HI}}$

    $\{d \in \Delta \mid I(z|d)(x|t^I)(y|d)_{\mathrm{S}}(P) = 1\}$.

    Como z não é livre em P,

    $\{d \in \Delta \mid I(z|d)(x|t^I)(y|d)_{\mathrm{S}}(P) = 1\} = \{d \in \Delta \mid I(x|t^I)(y|d)_{\mathrm{S}}(P) = 1\} =$

    $I(x|t^I)_{\mathrm{A}}(\Upsilon y\, P)$.

    Logo, $I_{\mathrm{A}}((\Upsilon y\, P)(x|t)) = I(x|t^I)_{\mathrm{A}}(\Upsilon y\, P)$.

  Daí, em qualquer subcaso, Δ vale quando E é $\Upsilon y\, P$, sendo y distinto de x.

- Caso E é $p(t_1, \ldots, t_n)$.

  Por HI, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, $I_A(t_i(x|t)) = I(x|t^I)_A(t_i)$.

$$I_S(p(t_1, \ldots, t_n)(x|t)) = 1$$
$$\text{sss}$$
$$I_S(p(t_1(x|t), \ldots, t_n(x|t))) = 1$$
$$\text{sss} \quad \text{(def. 5.3.6)}$$
$$\langle d_1, \ldots, d_n \rangle \in w(p), \text{ para cada } d_1 \in I_A(t_1(x|t)), \ldots, \text{ para cada } d_n \in I_A(t_n(x|t))$$
$$\text{sss} \quad \text{(HI)}$$
$$\langle d_1, \ldots, d_n \rangle \in w(p), \text{ para cada } d_1 \in I(x|t^I)_A(t_1), \ldots, \text{ para cada } d_n \in I(x|t^I)_A(t_n)$$
$$\text{sss} \quad \text{(def. 5.3.6)}$$
$$I(x|t^I)_S(p(t_1, \ldots, t_n)) = 1.$$

  Portanto, $I_S(p(t_1, \ldots, t_n)(x|t)) = I(x|t^I)_S(p(t_1, \ldots, t_n))$. (1)

$$I_N(p(t_1, \ldots, t_n)(x|t)) = 1$$
$$\text{sss}$$
$$I_N(p(t_1(x|t), \ldots, t_n(x|t))) = 1$$
$$\text{sss} \quad \text{(def. 5.3.6)}$$
$$\langle d_1, \ldots, d_n \rangle \notin w(p), \text{ para cada } d_1 \in I_A(t_1(x|t)), \ldots, \text{ para cada } d_n \in I_A(t_n(x|t))$$
$$\text{sss} \quad \text{(HI)}$$
$$\langle d_1, \ldots, d_n \rangle \notin w(p), \text{ para cada } d_1 \in I(x|t^I)_A(t_1), \ldots, \text{ para cada } d_n \in I(x|t^I)_A(t_n)$$
$$\text{sss} \quad \text{(def. 5.3.6)}$$
$$I(x|t^I)_N(p(t_1, \ldots, t_n)) = 1.$$

  Portanto, $I_N(p(t_1, \ldots, t_n)(x|t)) = I(x|t^I)_N(p(t_1, \ldots, t_n))$. (2)

  De (1) e (2), temos que Δ vale quando E é $p(t_1, \ldots, t_n)$.

- Caso E é $u \;\rangle\!\!\models v$.

  Por HI, $I_A(u(x|t)) = I(x|t^I)_A(u)$ e $I_A(v(x|t)) = I(x|t^I)_A(v)$.

$$I_S((u \;\rangle\!\!\models v)(x|t)) = 1$$
$$\text{sss}$$
$$I_S(u(x|t) \;\rangle\!\!\models v(x|t)) = 1$$
$$\text{sss} \quad \text{(def. 5.3.6)}$$
$$I_A(u(x|t)) \supseteq I_A(v(x|t))$$
$$\text{sss} \quad \text{(HI)}$$
$$I(x|t^I)_A(u) \supseteq I(x|t^I)_A(v))$$
$$\text{sss} \quad \text{(def. 5.3.6)}$$
$$I(x|t^I)_S(u \;\rangle\!\!\models v) = 1.$$

  Portanto, $I_S((u \;\rangle\!\!\models v)(x|t)) = I(x|t^I)_S(u \;\rangle\!\!\models v)$. (3)

$$I_N((u \models v)(x|t)) = 0$$
sss (def. 5.3.6)
$$I_S((u \models v)(x|t)) = 1$$
sss (3)
$$I(x|t^I)_S(u \models v) = 1.$$
sss (def. 5.3.6)
$$I(x|t^I)_N(u \models v) = 0.$$

Portanto, $I_N((u \models v)(x|t)) = I(x|t^I)_N(u \models v)$. (4)

De (3) e (4), temos que Δ vale quando E é $u \models v$.

- Caso E é $(\neg P)$.

$I_S((\neg P)(x|t)) = I_S(\neg P(x|t)) = I_N(P(x|t)) =^{HI} I(x|t^I)_N(P) = I(x|t^I)_S(\neg P)$. (5)

$I_N((\neg P)(x|t)) = I_N(\neg P(x|t)) = I_S(P(x|t)) =^{HI} I(x|t^I)_S(P) = I(x|t^I)_N(\neg P)$. (6)

Portanto, de (5) e (6), $\Delta(\neg P)$.

- Caso E é $(P \to Q)$.

$I_S((P \to Q)(x|t)) = I_S(P(x|t) \to Q(x|t)) = \max\{I_N(P(x|t)), I_S(Q(x|t))\} =^{HI}$
$\max\{I(x|t^I)_N(P), I(x|t^I)_S(Q)\} = I(x|t^I)_S(P \to Q)$. (7)

$I_N((P \to Q)(x|t)) = I_N(P(x|t) \to Q(x|t)) = \min\{I_S(P(x|t)), I_N(Q(x|t))\} =^{HI}$
$\min\{I(x|t^I)_S(P), I(x|t^I)_N(Q)\} = I(x|t^I)_N(P \to Q)$. (8)

Daí, de (7) e (8), Δ vale quando E é $(P \to Q)$.

- Caso E é $(P \wedge Q)$.

$I_S((P \wedge Q)(x|t)) = I_S(P(x|t) \wedge Q(x|t)) = \min\{I_S(P(x|t)), I_S(Q(x|t))\} =^{HI}$
$\min\{I(x|t^I)_S(P), I(x|t^I)_S(Q)\} = I(x|t^I)_S(P \wedge Q)$. (9)

$I_N((P \wedge Q)(x|t)) = I_N(P(x|t) \wedge Q(x|t)) = \max\{I_N(P(x|t)), I_N(Q(x|t))\} =^{HI}$
$\max\{I(x|t^I)_N(P), I(x|t^I)_N(Q)\} = I(x|t^I)_N(P \wedge Q)$. (10)

Daí, de (9) e (10), Δ vale quando E é $(P \wedge Q)$.

- Caso E é $(P \vee Q)$.

$I_S((P \vee Q)(x|t)) = I_S(P(x|t) \vee Q(x|t)) = \max\{I_S(P(x|t)), I_S(Q(x|t))\} =^{HI}$
$\max\{I(x|t^I)_S(P), I(x|t^I)_S(Q)\} = I(x|t^I)_S(P \vee Q)$. (11)

$I_N((P \vee Q)(x|t)) = I_N(P(x|t) \vee Q(x|t)) = \min\{I_N(P(x|t)), I_N(Q(x|t))\} =^{HI}$
$\min\{I(x|t^I)_N(P), I(x|t^I)_N(Q)\} = I(x|t^I)_N(P \vee Q)$. (12)

Daí, de (11) e (12), Δ vale quando E é $(P \vee Q)$.

- Caso E é $\forall x\, P$.

  $I_S((\forall x\, P)(x|t)) = I_S(\forall x\, P) = \min\{I(x|d)_S(P) \mid d \in \Delta\}$.

  $I(x|t^I)_S(\forall x\, P) = \min\{I(x|t^I)(x|d)_S(P) \mid d \in \Delta\} = \min\{I(x|d)_S(P) \mid d \in \Delta\}$.

  Logo, $I_S((\forall x\, P)(x|t)) = I(x|t^I)_S(\forall x\, P)$. (13)

  $I_N((\forall x\, P)(x|t)) = I_N(\forall x\, P) = \max\{I(x|d)_S(P) \mid d \in \Delta\}$.

  $I(x|t^I)_N(\forall x\, P) = \max\{I(x|t^I)(x|d)_N(P) \mid d \in \Delta\} = \max\{I(x|d)_N(P) \mid d \in \Delta\}$.

  Logo, $I_N((\forall x\, P)(x|t)) = I(x|t^I)_N(\forall x\, P)$. (14)

  Temos de (13) e (14) que Δ vale quando E é $\forall x\, P$.

- Caso E é $\forall y\, P$, onde y é uma variável distinta de x.

  * Subcaso: Se x não é livre em P ou y não é livre em t.

    $I_S((\forall y\, P)(x|t)) = I_S(\forall y\, P(x|t)) =$

    $\min\{I(y|d)_S(P(x|t)) \mid d \in \Delta\} =^{HI} \min\{I(y|d)(x|t^I)_S(P) \mid d \in \Delta\} =$

    $\min\{I(x|t^I)(y|d)_S(P) \mid d \in \Delta\} = I(x|t^I)_S(\forall y\, P)$.

    Logo, $I_S((\forall y\, P)(x|t)) = I(x|t^I)_S(\forall y\, P)$. (15)

    $I_N((\forall y\, P)(x|t)) = I_N(\forall y\, P(x|t)) =$

    $\max\{I(y|d)_N(P(x|t)) \mid d \in \Delta\} =^{HI} \max\{I(y|d)(x|t^I)_N(P) \mid d \in \Delta\} =$

    $\max\{I(x|t^I)(y|d)_N(P) \mid d \in \Delta\} = I(x|t^I)_N(\forall y\, P)$.

    Logo, $I_N((\forall y\, P)(x|t)) = I(x|t^I)_N(\forall y\, P)$. (16)

    De (15) e (16), temos que vale $\Delta(E)$.

  * Subcaso: Se x é livre em P e y é livre em t.

    Considere z a primeira variável não livre em $\{t, P\}$.

    Então, $(\forall y\, P)(x|t) = \forall z\, P(y|z)(x|t)$.

    $I_S((\forall y\, P)(x|t)) = I_S(\forall z\, P(y|z)(x|t)) =$

    $\min\{I(z|d)_S(P(y|z)(x|t)) \mid d \in \Delta\} =^{HI} \min\{I(z|d)(x|t^I)_S(P(y|z)) \mid d \in \Delta\} =^{HI}$

    $\min\{I(z|d)(x|t^I)(y|d)_S(P) \mid d \in \Delta\}$.

    Como z não é livre em P,

    $\min\{I(z|d)(x|t^I)(y|d)_S(P) \mid d \in \Delta\} = \min\{I(x|t^I)(y|d)_S(P) \mid d \in \Delta\} = I(x|t^I)_S(\forall y\, P)$.

    Daí, $I_S((\forall y\, P)(x|t)) = I(x|t^I)_S(\forall y\, P)$. (17)

    $I_N((\forall y\, P)(x|t)) = I_N(\forall z\, P(y|z)(x|t)) =$

    $\max\{I(z|d)_N(P(y|z)(x|t)) \mid d \in \Delta\} =^{HI} \max\{I(z|d)(x|t^I)_N(P(y|z)) \mid d \in \Delta\} =^{HI}$

    $\max\{I(z|d)(x|t^I)(y|d)_N(P) \mid d \in \Delta\}$.

    Como z não é livre em P,

$\max\{I(z|d)(x|t^I)(y|d)_N(P) \mid d \in \Delta\} = \max\{I(x|t^I)(y|d)_N(P) \mid d \in \Delta\} = I(x|t^I)_N(\forall y\, P)$.

Daí, $I_N((\forall y\, P)(x|t)) = I(x|t^I)_N(\forall y\, P)$. (18)

De (17) e (18), temos que vale $\Delta(E)$.

Daí, em qualquer subcaso, Δ vale quando E é $\forall y\, P$.

- Caso E é $\exists x\, P$.

$I_S((\exists x\, P)(x|t)) = I_S(\exists x\, P) = \max\{I(x|d)_S(P) \mid d \in \Delta\}$.

$I(x|t^I)_S(\exists x\, P) = \max\{I(x|t^I)(x|d)_S(P) \mid d \in \Delta\} = \max\{I(x|d)_S(P) \mid d \in \Delta\}$.

Logo, $I_S((\exists x\, P)(x|t)) = I(x|t^I)_S(\exists x\, P)$. (19)

$I_N((\exists x\, P)(x|t)) = I_N(\exists x\, P) = \min\{I(x|d)_S(P) \mid d \in \Delta\}$.

$I(x|t^I)_N(\exists x\, P) = \min\{I(x|t^I)(x|d)_S(P) \mid d \in \Delta\} = \min\{I(x|d)_S(P) \mid d \in \Delta\}$.

Logo, $I_N((\exists x\, P)(x|t)) = I(x|t^I)_N(\exists x\, P)$. (20)

Temos de (19) e (20) que Δ vale quando E é $\exists x\, P$.

- Caso E é $\exists y\, P$, onde y é uma variável distinta de x.

$*$ Subcaso: Se x não é livre em P ou y não é livre em t:

$I_S((\exists y\, P)(x|t)) = I_S(\exists y\, P(x|t)) =$

$\max\{I(y|d)_S(P(x|t)) \mid d \in \Delta\} =^{\mathrm{HI}} \max\{I(y|d)(x|t^I)_S(P) \mid d \in \Delta\} =$

$\max\{I(x|t^I)(y|d)_S(P) \mid d \in \Delta\} = I(x|t^I)_S(\exists y\, P)$.

Logo, $I_S((\exists y\, P)(x|t)) = I(x|t^I)_S(\exists y\, P)$. (21)

$I_N((\exists y\, P)(x|t)) = I_N(\exists y\, P(x|t)) =$

$\min\{I(y|d)_N(P(x|t)) \mid d \in \Delta\} =^{\mathrm{HI}} \min\{I(y|d)(x|t^I)_N(P) \mid d \in \Delta\} =$

$\min\{I(x|t^I)(y|d)_N(P) \mid d \in \Delta\} = I(x|t^I)_N(\exists y\, P)$.

Logo, $I_N((\exists y\, P)(x|t)) = I(x|t^I)_N(\exists y\, P)$. (22)

De (21) e (22), temos que vale $\Delta(E)$.

$*$ Subcaso: Se x é livre em P e y é livre em t:

Considere z a primeira variável não livre em $\{t, P\}$.

Então, $(\exists y\, P)(x|t) = \exists z\, P(y|z)(x|t)$.

$I_S((\exists y\, P)(x|t)) = I_S(\exists z\, P(y|z)(x|t)) =$

$\max\{I(z|d)_S(P(y|z)(x|t)) \mid d \in \Delta\} =^{\mathrm{HI}} \max\{I(z|d)(x|t^I)_S(P(y|z)) \mid d \in \Delta\} =^{\mathrm{HI}}$

$\max\{I(z|d)(x|t^I)(y|d)_S(P) \mid d \in \Delta\}$.

Como z não é livre em P,

$\max\{I(z|d)(x|t^I)(y|d)_S(P) \mid d \in \Delta\} = \max\{I(x|t^I)(y|d)_S(P) \mid d \in \Delta\} = I(x|t^I)_S(\exists y\, P)$.

Daí, $I_S((\exists y\, P)(x|t)) = I(x|t^I)_S(\exists y\, P)$. (23)

$I_N((\exists y\, P)(x|t)) = I_N(\exists z\, P(y|z)(x|t)) =$

$\min\{I(z|d)_N(P(y|z)(x|t)) \mid d \in \Delta\} =^{HI} \min\{I(z|d)(x|t^I)_N(P(y|z)) \mid d \in \Delta\} =^{HI}$

$\min\{I(z|d)(x|t^I)(y|d)_N(P) \mid d \in \Delta\}$.

Como z não é livre em P,

$\min\{I(z|d)(x|t^I)(y|d)_N(P) \mid d \in \Delta\} = \min\{I(x|t^I)(y|d)_N(P) \mid d \in \Delta\} = I(x|t^I)_N(\exists y\, P)$.

Daí, $I_N((\exists y\, P)(x|t)) = I(x|t^I)_N(\exists y\, P)$. (24)

De (23) e (24), temos que vale $\Delta(E)$.

Daí, em qualquer subcaso, Δ vale quando E é $\exists y\, P$.

□

Prova de (ii):

Seja $\Delta(u) : I_A(u(x|t)) \supseteq \bigcup_{d \in I_A(t)} I(x|d)_A(u)$.

Suponha que x é de topo em u.

- Caso u é uma constante c.

  $I_A(c(x|t)) = I_A(c) = \{w(c)\}$.

  $\bigcup_{d \in I_A(t)} I(x|d)_A(c) = \bigcup_{d \in I_A(t)} I_A(c) = \bigcup_{d \in I_A(t)} \{w(c)\}$.

  Se $I_A(t) = \emptyset$, então $\bigcup_{d \in I_A(t)} \{w(c)\} = \emptyset$;

  Se $I_A(t) \neq \emptyset$, então $\bigcup_{d \in I_A(t)} \{w(c)\} = \{w(c)\}$.

  Daí, em qualquer caso, $I_A(c(x|t)) \supseteq \bigcup_{d \in I_A(t)} I(x|d)_A(c)$, donde temos que Δ vale quando u é uma constante c.

- Caso u é uma variável y distinta de x.

  $I_A(y(x|t)) = I_A(y) = \{s(y)\}$

  $\bigcup_{d \in I_A(t)} I(x|d)_A(y) = \bigcup_{d \in I_A(t)} I_A(y) = \bigcup_{d \in I_A(t)} \{s(y)\}$.

  Se $I_A(t) = \emptyset$, então $\bigcup_{d \in I_A(t)} \{s(y)\} = \emptyset$;

  Se $I_A(t) \neq \emptyset$, então $\bigcup_{d \in I_A(t)} \{s(y)\} = \{s(y)\}$.

  Daí, em qualquer caso, $I_A(y(x|t)) \supseteq \bigcup_{d \in I_A(t)} I(x|d)_A(y)$, donde temos que Δ vale quando u é uma variável y, distinta de x.

- Caso u é x.

  $I_{\mathrm{A}}(x(x|t)) = I_{\mathrm{A}}(t)$.

  $\bigcup_{d \in I_{\mathrm{A}}(t)} I(x|d)_{\mathrm{A}}(x) = \bigcup_{d \in I_{\mathrm{A}}(t)} \{d\} = I_{\mathrm{A}}(t)$.

  Logo, temos que Δ vale quando u é x.

- Caso u é $f(t_1, \dots, t_n)$.

  Temos que x é de topo em $t_1, \dots, t_n$.

  Por HI, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, $I_{\mathrm{A}}(t_i(x|t)) \supseteq \bigcup_{d \in I_{\mathrm{A}}(t)} I(x|d)_{\mathrm{A}}(t_i)$.

  $$\text{Logo, } \begin{cases} \text{para cada } i \in \{1, \dots, n\}, \\ \text{para cada } d \in I_{\mathrm{A}}(t) \end{cases} , I_{\mathrm{A}}(t_i(x|t)) \supseteq I(x|d)_{\mathrm{A}}(t_i). \quad (1)$$

  $I_{\mathrm{A}}(f(t_1, \dots, t_n)(x|t)) = I_{\mathrm{A}}(f(t_1(x|t), \dots, t_n(x|t)) =$

  $\{w(f)(d_1, \dots, d_n) \mid d_1 \in I_{\mathrm{A}}(t_1(x|t)), \dots, d_n \in I_{\mathrm{A}}(t_n(x|t))\}$. (2)

  Se $d \in I_{\mathrm{A}}(t)$, temos que

  $I(x|d)_{\mathrm{A}}(f(t_1, \dots, t_n)) = \{w(f)(d_1, \dots, d_n) \mid d_1 \in I(x|d)_{\mathrm{A}}(t_1), \dots, d_n \in I(x|d)_{\mathrm{A}}(t_n)\}$.(3)

  Daí, de (1), (2) e (3), para cada $d \in I_{\mathrm{A}}(t)$,

  $I_{\mathrm{A}}(f(t_1, \dots, t_n)(x|t)) \supseteq I(x|d)_{\mathrm{A}}(f(t_1, \dots, t_n))$.

  Portanto, $I_{\mathrm{A}}(f(t_1, \dots, t_n)(x|t)) \supseteq \bigcup_{d \in I_{\mathrm{A}}(t)} I(x|d)_{\mathrm{A}}(f(t_1, \dots, t_n))$, donde temos que Δ vale quando u é $f(t_1, \dots, t_n)$.

- Caso u é $\Upsilon x\, P$.

  $I_{\mathrm{A}}((\Upsilon x\, P)(x|t)) = I_{\mathrm{A}}(\Upsilon x\, P) = \{d \in \Delta \mid I(x|d)_{\mathrm{S}}(P) = 1\}$. (4)

  Para cada $d \in I_{\mathrm{A}}(t)$,

  $I(x|d)_{\mathrm{A}}(\Upsilon x\, P) = \{e \in \Delta \mid I(x|d)(x|e)_{\mathrm{S}}(P) = 1\} = \{e \in \Delta \mid I(x|e)_{\mathrm{S}}(P) = 1\} =$

  $\{d \in \Delta \mid I(x|d)_{\mathrm{S}}(P) = 1\}$. (5)

  De (4) e (5), para cada $d \in I_{\mathrm{A}}(t)$, $I_{\mathrm{A}}((\Upsilon x\, P)(x|t)) \supseteq I(x|d)_{\mathrm{A}}(\Upsilon x\, P)$.

  Logo, $I_{\mathrm{A}}((\Upsilon x\, P)(x|t)) \supseteq \bigcup_{d \in I_{\mathrm{A}}(t)} I(x|d)_{\mathrm{A}}(\Upsilon x\, P)$, donde $\Delta(u)$.

- Caso u é $\Upsilon y\, P$, onde y é uma variável distinta de x.

  Como x é de topo em u, temos que x não é livre em P.

  $I_{\mathrm{A}}((\Upsilon y\, P)(x|t)) = I_{\mathrm{A}}(\Upsilon y\, P) = \{d \in \Delta \mid I(y|d)_{\mathrm{S}}(P) = 1\}$. (6)

  Para cada $d \in I_{\mathrm{A}}(t)$, $I(x|d)_{\mathrm{A}}(\Upsilon y\, P) = \{e \in \Delta \mid I(x|d)(y|e)_{\mathrm{S}}(P) = 1\}$.

  Como x não é livre em P,

  $\{e \in \Delta \mid I(x|d)(y|e)_{\mathrm{S}}(P) = 1\} = \{e \in \Delta \mid I(y|e)_{\mathrm{S}}(P) = 1\} = \{d \in \Delta \mid I(y|d)_{\mathrm{S}}(P) = 1\}$. (7)

Daí, de (6) e (7), para cada $d \in I_A(t)$, $\quad I_A((\Upsilon y\, P)(x|t)) \supseteq I(x|d)_A(\Upsilon y\, P)$.

Logo, $I_A((\Upsilon y\, P)(x|t)) \supseteq \bigcup_{d \in I_A(t)} I(x|d)_A(\Upsilon y\, P)$, ou seja, Δ vale quando u é $\Upsilon y\, P$.

□

Prova de (iii):

Suponha que $\begin{cases} x \text{ é de topo em } P, \\ I_A(t) \neq \emptyset. \end{cases}$

Seja $\Delta(P)$: $\begin{cases} I_S(P(x|t)) \leq \min\{I(x|d)_S(P) \mid d \in I_A(t)\}, \\ I_N(P(x|t)) \leq \min\{I(x|d)_N(P) \mid d \in I_A(t)\}. \end{cases}$

- Caso P é $p(t_1, \ldots, t_n)$.

  Então, x é de topo em $t_1, \ldots, t_n$. Daí, por (ii), para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$,

  $I_A(t_i(x|t)) \supseteq \bigcup_{d \in I_A(t)} I(x|d)_A(t_i)$. (1)

$$I_S((p(t_1, \ldots, t_n)(x|t)) = 1$$
$$\text{sss}$$
$$I_S(p(t_1(x|t), \ldots, t_n(x|t))) = 1$$
$$\text{sss} \quad \text{(def. 5.3.6)}$$
$$\langle d_1, \ldots, d_n\rangle \in w(p), \text{ para cada } d_1 \in I_A(t_1(x|t)), \ldots, \text{ para cada } d_n \in I_A(t_n(x|t))$$
$$\text{imp} \;\; (1)$$
$$\langle d_1, \ldots, d_n\rangle \in \; w(p), \text{ p/ cada } d_1 \;\in \bigcup_{d \in I_A(t)} I(x|d)_A(t_1),\; \ldots,\; \text{ p/ cada } d_n \;\in \bigcup_{d \in I_A(t)} I(x|d)_A(t_n)$$

Se $d \in I_A(t)$, temos que $I_S(p(t_1, \ldots, t_n)(x|t)) = 1$ implica que

$\langle d_1, \ldots, d_n\rangle \in w(p)$, para cada $d_1 \in I(x|d)_A(t_1), \ldots$, para cada $d_n \in I(x|d)_A(t_n)$,

o que equivale dizer que $I(x|d)_S(p(t_1, \ldots, t_n)) = 1$.

Ou seja, para cada $d \in I_A(t)$, $I_S(p(t_1, \ldots, t_n)(x|t)) \leq I(x|d)_S(p(t_1, \ldots, t_n))$.

Logo, $I_S(p(t_1, \ldots, t_n)(x|t)) \leq \min\{I(x|d)_S(p(t_1, \ldots, t_n)) \mid d \in I_A(t)\}$. (2)

$$I_N((p(t_1, \ldots, t_n)(x|t)) = 1$$
$$\text{sss}$$
$$I_N(p(t_1(x|t), \ldots, t_n(x|t))) = 1$$
$$\text{sss} \quad \text{(def. 5.3.6)}$$

$$\langle d_1, \ldots, d_n\rangle \notin w(p), \text{ para cada } d_1 \in I_{\mathrm{A}}(t_1(x|t)), \ldots, \text{ para cada } d_n \in I_{\mathrm{A}}(t_n(x|t))$$

$$\text{imp } (1)$$

$$\langle d_1, \ldots, d_n\rangle \notin w(p), \text{ p/ cada } d_1 \in \bigcup_{d \in I_{\mathrm{A}}(t)} I(x|d)_{\mathrm{A}}(t_1), \ \ldots, \text{ p/ cada } d_n \in \bigcup_{d \in I_{\mathrm{A}}(t)} I(x|d)_{\mathrm{A}}(t_n)$$

Se $d \in I_{\mathrm{A}}(t)$, temos que $I_{\mathrm{N}}(p(t_1, \ldots, t_n)(x|t)) = 1$ implica que

$\langle d_1, \ldots, d_n\rangle \notin w(p)$, para cada $d_1 \in I(x|d)_{\mathrm{A}}(t_1), \ldots$, para cada $d_n \in I(x|d)_{\mathrm{A}}(t_n)$,

o que equivale dizer que $I(x|d)_{\mathrm{N}}(p(t_1, \ldots, t_n)) = 1$.

Ou seja, para cada $d \in I_{\mathrm{A}}(t)$, $I_{\mathrm{N}}(p(t_1, \ldots, t_n)(x|t)) \leq I(x|d)_{\mathrm{N}}(p(t_1, \ldots, t_n))$.

Logo, $I_{\mathrm{N}}(p(t_1, \ldots, t_n)(x|t)) \leq \min\{I(x|d)_{\mathrm{N}}(p(t_1, \ldots, t_n)) \mid d \in I_{\mathrm{A}}(t)\}$ (3)

De (2) e (3), Δ vale quando P é $p(t_1, \ldots, t_n)$.

- Caso P é $u \models v$.

Como x é de topo em P, temos que x não é livre em $u \models v$. Daí,

$I_{\mathrm{S}}((u \models v)(x|t)) = I_{\mathrm{S}}(u \models v) = I(x|d)_{\mathrm{S}}(u \models v)$, pelo Lema da Coincidência.

Se $d \in I_{\mathrm{A}}(t)$, $I_{\mathrm{S}}((u \models v)(x|t)) \leq I(x|d)_{\mathrm{S}}(u \models v)$.

Daí, $I_{\mathrm{S}}((u \models v)(x|t)) \leq \min\{I(x|d)_{\mathrm{S}}(u \models v) \mid d \in I_{\mathrm{A}}(t)\}$. (4)

$I_{\mathrm{N}}((u \models v)(x|t)) = I_{\mathrm{N}}(u \models v) = I(x|d)_{\mathrm{N}}(u \models v)$, pelo Lema da Coincidência.

Se $d \in I_{\mathrm{A}}(t)$, $I_{\mathrm{N}}((u \models v)(x|t)) \leq I(x|d)_{\mathrm{N}}(u \models v)$.

Logo, $I_{\mathrm{N}}((u \models v)(x|t)) \leq \min\{I(x|d)_{\mathrm{N}}(u \models v) \mid d \in I_{\mathrm{A}}(t)\}$. (5)

Portanto, de (4) e (5), Δ vale quando P é $u \models v$.

- Caso P é $\neg Q$.

$I_{\mathrm{S}}((\neg Q)(x|t)) = I_{\mathrm{S}}(\neg Q(x|t)) = I_{\mathrm{N}}(Q(x|t)) \leq^{\mathrm{HI}} \min\{I(x|d)_{\mathrm{N}}(Q) \mid d \in I_{\mathrm{A}}(t)\} =$

$\min\{I(x|d)_{\mathrm{S}}(\neg Q) \mid d \in I_{\mathrm{A}}(t)\}$.

Logo, $I_{\mathrm{S}}((\neg Q)(x|t)) \leq \min\{I(x|d)_{\mathrm{S}}(\neg Q) \mid d \in I_{\mathrm{A}}(t)\}$. (6)

$I_{\mathrm{N}}((\neg Q)(x|t)) = I_{\mathrm{N}}(\neg Q(x|t)) = I_{\mathrm{S}}(Q(x|t)) \leq^{\mathrm{HI}} \min\{I(x|d)_{\mathrm{S}}(Q) \mid d \in I_{\mathrm{A}}(t)\} =$

$\min\{I(x|d)_{\mathrm{N}}(\neg Q) \mid d \in I_{\mathrm{A}}(t)\}$.

Logo, $I_{\mathrm{N}}((\neg Q)(x|t)) \leq \min\{I(x|d)_{\mathrm{N}}(\neg Q) \mid d \in I_{\mathrm{A}}(t)\}$. (7)

Daí, de (6) e (7), Δ vale quando P é $\neg Q$.

- Caso P é $Q \to R$.

$I_{\mathrm{S}}((Q \to R)(x|t)) = I_{\mathrm{S}}(Q(x|t) \to R(x|t)) = \max\{I_{\mathrm{N}}(Q(x|t)), I_{\mathrm{S}}(R(x|t))\}$.

$$\text{Por HI, } \begin{cases} I_{\mathrm{N}}(Q(x|t)) \leq \min\{I(x|d)_{\mathrm{N}}(Q) \mid d \in I_{\mathrm{A}}(t)\}, \\ I_{\mathrm{S}}(R(x|t)) \leq \min\{I(x|d)_{\mathrm{S}}(R) \mid d \in I_{\mathrm{A}}(t)\}, \end{cases}$$

donde $I_{\mathrm{S}}((Q \to R)(x|t)) \leq \min\{I(x|d)_{\mathrm{N}}(Q) \mid d \in I_{\mathrm{A}}(t)\}$ ou

$I_S((Q \to R)(x|t)) \leq \min\{I(x|d)_S(R) \mid d \in I_A(t)\}$ (1).

Dado $d \in I_A(t)$, temos de (1) que $I_S((Q \to R)(x|t)) \leq I(x|d)_N(Q)$ ou

$I_S((Q \to R)(x|t)) \leq I(x|d)_S(R)$, donde

$I_S((Q \to R)(x|t)) \leq \max\{I(x|d)_N(Q), I(x|d)_S(R)\}$. (8)

Para cada $d \in I_A(t), I(x|d)_S(Q \to R) = \max\{I(x|d)_N(Q), I(x|d)_S(R)\}$. (9)

De (8) e (9), para cada $d \in I_A(t)$, temos que $I_S((Q \to R)(x|t)) \leq I(x|d)_S(Q \to R)$, donde

$I_S((Q \to R)(x|t)) \leq \min\{I(x|d)_S(Q \to R) \mid d \in I_A(t)\}$. (10)

$I_N((Q \to R)(x|t)) = I_N(Q(x|t) \to R(x|t)) = \min\{I_S(Q(x|t)), I_N(R(x|t))\}$.

Por HI, $\begin{cases} I_S(Q(x|t)) \leq \min\{I(x|d)_S(Q) \mid d \in I_A(t)\}, \\ I_N(R(x|t)) \leq \min\{I(x|d)_N(R) \mid d \in I_A(t)\}, \end{cases}$

donde $\begin{cases} I_N((Q \to R)(x|t)) \leq \min\{I(x|d)_S(Q) \mid d \in I_A(t)\}, \\ I_N((Q \to R)(x|t)) \leq \min\{I(x|d)_N(R) \mid d \in I_A(t)\}. \end{cases}$ (11)

Dado $d \in I_A(t)$, temos de (11) que $\begin{cases} I_N((Q \to R)(x|t)) \leq I(x|d)_S(Q), \\ I_N((Q \to R)(x|t)) \leq I(x|d)_N(R), \end{cases}$

donde $I_N((Q \to R)(x|t)) \leq \min\{I(x|d)_S(Q), I(x|d)_N(R)\}$. (12)

Para cada $d \in I_A(t)$, $I(x|d)_N(Q \to R) = \min\{I(x|d)_S(Q), I(x|d)_N(R)\}$. (13)

De (12) e (13), para cada $d \in I_A(t)$, temos que $I_N((Q \to R)(x|t)) \leq I(x|d)_N(Q \to R)$, donde

$I_N((Q \to R)(x|t)) \leq \min\{I(x|d)_N(Q \to R) \mid d \in I_A(t)\}$. (14)

Portanto de (10) e (14), Δ vale quando P é $Q \to R$.

- Caso P é $Q \wedge R$.

$I_S((Q \wedge R)(x|t)) = I_S(Q(x|t) \wedge R(x|t)) = \min\{I_S(Q(x|t)), I_S(R(x|t))\}$.

Por HI, $\begin{cases} I_S(Q(x|t)) \leq \min\{I(x|d)_S(Q) \mid d \in I_A(t)\}, \\ I_S(R(x|t)) \leq \min\{I(x|d)_S(R) \mid d \in I_A(t)\}, \end{cases}$

donde $\begin{cases} I_S((Q \wedge R)(x|t)) \leq \min\{I(x|d)_S(Q) \mid d \in I_A(t)\}, \\ I_S((Q \wedge R)(x|t)) \leq \min\{I(x|d)_S(R) \mid d \in I_A(t)\}. \end{cases}$ (15)

Dado $d \in I_A(t)$, temos de (15) que $\begin{cases} I_S((Q \wedge R)(x|t)) \leq I(x|d)_S(Q), \\ I_S((Q \wedge R)(x|t)) \leq I(x|d)_S(R), \end{cases}$

donde $I_S((Q \wedge R)(x|t)) \leq \min\{I(x|d)_S(Q), I(x|d)_S(R)\}$. (16)

Para cada $d \in I_A(t)$, $I(x|d)_S(Q \wedge R) = \min\{I(x|d)_S(Q), I(x|d)_S(R)\}$. (17)

De (16) e (17), para cada $d \in I_A(t)$, temos que $I_S((Q \wedge R)(x|t)) \leq I(x|d)_S(Q \wedge R)$, donde

$I_S((Q \wedge R)(x|t)) \leq \min\{I(x|d)_S(Q \wedge R) \mid d \in I_A(t)\}$. (18)

$I_N((Q \wedge R)(x|t)) = I_N(Q(x|t) \wedge R(x|t)) = \max\{I_N(Q(x|t)), I_N(R(x|t))\}$.

Por HI, $\begin{cases} I_N(Q(x|t)) \leq \min\{I(x|d)_N(Q) \mid d \in I_A(t)\}, \\ I_N(R(x|t)) \leq \min\{I(x|d)_N(R) \mid d \in I_A(t)\}, \end{cases}$

donde $I_N((Q \wedge R)(x|t)) \leq \min\{I(x|d)_N(Q) \mid d \in I_A(t)\}$ ou

$I_N((Q \wedge R)(x|t)) \leq \min\{I(x|d)_N(R) \mid d \in I_A(t)\}$. (19)

Dado $d \in I_A(t)$, temos de (19) que $I_N((Q \wedge R)(x|t)) \leq I(x|d)_N(Q)$ ou

$I_N((Q \wedge R)(x|t)) \leq I(x|d)_N(R)$, donde

$I_N((Q \wedge R)(x|t)) \leq \max\{I(x|d)_N(Q), I(x|d)_N(R)\}$. (20)

Para cada $d \in I_A(t)$, $I(x|d)_N(Q \wedge R) = \max\{I(x|d)_N(Q), I(x|d)_N(R)\}$. (21)

De (20) e (21), para cada $d \in I_A(t)$, temos que $I_N((Q \wedge R)(x|t)) \leq I(x|d)_N(Q \wedge R)$, donde

$I_N((Q \wedge R)(x|t)) \leq \min\{I(x|d)_N(Q \wedge R) \mid d \in I_A(t)\}$. (22)

Logo, de (18) e (22), Δ vale quando P é $Q \wedge R$.

- Caso P é $Q \vee R$.

$I_S((Q \vee R)(x|t)) = I_S(Q(x|t) \vee R(x|t)) = \max\{I_S(Q(x|t)), I_S(R(x|t))\}$.

Por HI, $\begin{cases} I_S(Q(x|t)) \leq \min\{I(x|d)_S(Q) \mid d \in I_A(t)\}, \\ I_S(R(x|t)) \leq \min\{I(x|d)_S(R) \mid d \in I_A(t)\}, \end{cases}$

donde $I_S((Q \vee R)(x|t)) \leq \min\{I(x|d)_S(Q) \mid d \in I_A(t)\}$ ou

$I_S((Q \vee R)(x|t)) \leq \min\{I(x|d)_S(R) \mid d \in I_A(t)\}$. (23)

Dado $d \in I_A(t)$, temos de (23) que $I_S((Q \vee R)(x|t)) \leq I(x|d)_S(Q)$ ou

$I_S((Q \vee R)(x|t)) \leq I(x|d)_S(R)$, donde

$I_S((Q \vee R)(x|t)) \leq \max\{I(x|d)_S(Q), I(x|d)_S(R)\}$. (24)

Para cada $d \in I_A(t), I(x|d)_S(Q \vee R) = \max\{I(x|d)_S(Q), I(x|d)_S(R)\}$. (25)

De (24) e (25), para cada $d \in I_A(t)$, temos que $I_S((Q \vee R)(x|t)) \leq I(x|d)_S(Q \vee R)$, donde

$I_S((Q \vee R)(x|t)) \leq \min\{I(x|d)_S(Q \vee R) \mid d \in I_A(t)\}$. (26)

$I_N((Q \vee R)(x|t)) = I_N(Q(x|t) \vee R(x|t)) = \min\{I_N(Q(x|t)), I_N(R(x|t))\}$.

Por HI, $\begin{cases} I_N(Q(x|t)) \leq \min\{I(x|d)_N(Q) \mid d \in I_A(t)\}, \\ I_N(R(x|t)) \leq \min\{I(x|d)_N(R) \mid d \in I_A(t)\}, \end{cases}$

donde $\begin{cases} I_N((Q \vee R)(x|t)) \leq \min\{I(x|d)_N(Q) \mid d \in I_A(t)\}, \\ I_N((Q \vee R)(x|t)) \leq \min\{I(x|d)_N(R) \mid d \in I_A(t)\}. \end{cases}$ (27)

Dado $d \in I_A(t)$, temos de (27) que $\begin{cases} I_N((Q \vee R)(x|t)) \leq I(x|d)_N(Q), \\ I_N((Q \vee R)(x|t)) \leq I(x|d)_N(R), \end{cases}$

donde $I_N((Q \vee R)(x|t)) \leq \min\{I(x|d)_N(Q), I(x|d)_N(R)\}$. (28)

Para cada $d \in I_A(t)$, $I(x|d)_N(Q \vee R) = \min\{I(x|d)_N(Q), I(x|d)_N(R)\}$. (29)

De (28) e (29), para cada $d \in I_A(t)$, temos que $I_N((Q \vee R)(x|t)) \leq I(x|d)_N(Q \vee R)$, donde $I_N((Q \vee R)(x|t)) \leq \min\{I(x|d)_N(Q \vee R) \mid d \in I_A(t)\}$. (30)

Portanto, de (29) e (30), Δ vale quando P é $Q \vee R$.

- Caso P é $\forall x\, P$.

  $I_S((\forall x\, P)(x|t)) = I_S(\forall x\, P) = \min\{I(x|d)_S(P) \mid d \in \Delta\}$.

  Se $d \in I_A(t)$, então

  $I(x|d)_S(\forall x\, P) = \min\{I(x|d)(x|e)_S(P) \mid e \in \Delta\} =$

  $\min\{I(x|e)_S(P) \mid e \in \Delta\} = \min\{I(x|d)_S(P) \mid d \in \Delta\}$.

  Daí, para todo $d \in I_A(t)$,

  $I_S((\forall x\, P)(x|t)) \leq I(x|d)_S(\forall x\, P)$, donde $I_S((\forall x\, P)(x|t)) \leq \min\{I(x|d)_S(P) \mid d \in \Delta\}$. (31)

  $I_N((\forall x\, P)(x|t)) = I_N(\forall x\, P) = \max\{I(x|d)_N(P) \mid d \in \Delta\}$.

  Se $d \in I_A(t)$, então

  $I(x|d)_N(\forall x\, P) = \max\{I(x|d)(x|e)_N(P) \mid e \in \Delta\} =$

  $\max\{I(x|e)_N(P) \mid e \in \Delta\} = \max\{I(x|d)_N(P) \mid d \in \Delta\}$.

  Daí, para todo $d \in I_A(t)$,

  $I_N((\forall x\, P)(x|t)) \leq I(x|d)_N(\forall x\, P)$, donde $I_N((\forall x\, P)(x|t)) \leq \min\{I(x|d)_N(P) \mid d \in \Delta\}$. (32)

  Daí, de (31) e (32), Δ vale quando P é $\forall x\, P$.

- Caso P é $\forall y\, P$, onde y é uma variável distinta de x.

  * Subcaso: x não é livre em P ou y não é livre em t.

    $I_S((\forall y\, P)(x|t)) = I_S(\forall y\, P(x|t)) = \min\{I(y|e)_S(P(x|t)) \mid e \in \Delta\}$. (33)

    Dado $d \in I_A(t)$, pela def. 5.3.6, $I(x|d)_S(\forall y\, P) = \min\{I(x|d)(y|e)_S(P) \mid e \in \Delta\}$. (34)

    Dado $e \in \Delta$, de (33), por HI, $I(y|e)_S(P(x|t)) \leq \min\{I(y|e)(x|d)_S(P) \mid d \in I_A(t)\}$.

    Daí, para qualquer $e \in \Delta$ e $d \in I_A(t)$, $I(y|e)_S(P(x|t)) \leq I(y|e)(x|d)_S(P)$.

    Daí, para qualquer $e \in \Delta$ e $d \in I_A(t)$, $\min\{I(y|e)_S(P(x|t)) \mid e \in \Delta\} \leq I(y|e)(x|d)_S(P)$.

    Logo, para qualquer $d \in I_A(t)$,

    $\min\{I(y|e)_S(P(x|t)) \mid e \in \Delta\} \leq \min\{I(y|e)(x|d)_S(P) \mid e \in \Delta\}$.

    Logo, para qualquer $d \in I_A(t)$, de (33) e (34), $I_S((\forall y\, P)(x|t)) \leq I(x|d)_S(\forall y\, P)$.

Portanto, $I_S((\forall y\, P)(x|t)) \leq \min\{I(x|d)_S(\forall y\, P) \mid d \in I_A(t)\}$. (35)

$I_N((\forall y\, P)(x|t)) = I_N(\forall y\, P(x|t)) = \max\{I(y|e)_N(P(x|t)) \mid e \in \Delta\}$. (36)

Dado $d \in I_A(t)$, pela def. 5.3.6, $I(x|d)_N(\forall y\, P) = \max\{I(x|d)(y|e)_N(P) \mid e \in \Delta\}$. (37)

Dado $e \in \Delta$, de (36), por HI, $I(y|e)_N(P(x|t)) \leq \min\{I(y|e)(x|d)_N(P) \mid d \in I_A(t)\}$.

Daí, para qualquer $e \in \Delta$ e $d \in I_A(t)$, $I(y|e)_N(P(x|t)) \leq I(y|e)(x|d)_N(P)$.

Daí, para qualquer $e \in \Delta$ e $d \in I_A(t)$, $\max\{I(y|e)_N(P(x|t)) \mid e \in \Delta\} \leq I(y|e)(x|d)_S(P)$.

Logo, para qualquer $d \in I_A(t)$,

$\max\{I(y|e)_N(P(x|t)) \mid e \in \Delta\} \leq \max\{I(y|e)(x|d)_N(P) \mid e \in \Delta\}$.

Logo, para qualquer $d \in I_A(t)$, de (36) e (37), $I_N((\forall y\, P)(x|t)) \leq I(x|d)_N(\forall y\, P)$.

Portanto, $I_N((\forall y\, P)(x|t)) \leq \min\{I(x|d)_N(\forall y\, P) \mid d \in I_A(t)\}$. (38)

De (35) e (38), temos que Δ vale para este subcaso.

∗ Subcaso: x é livre em P e y é livre em t.

Considere z a primeira variável não livre em $\{t, P\}$.

Então $(\forall y\, P)(x|t) = \forall z\, P(y|z)(x|t)$. Daí $I_S((\forall y\, P)(x|t)) = I_S(\forall z\, P(y|z)(x|t))$.

Daí, pelo caso anterior, $I_S(\forall z\, P(y|z)(x|t)) \leq \min\{I(x|d)_S(\forall z\, P(y|z)) \mid d \in I_A(t)\}$.

Analogamente, $I_N(\forall z\, P(y|z)(x|t)) \leq \min\{I(x|d)_N(\forall z\, P(y|z)) \mid d \in I_A(t)\}$.

Portanto, Δ vale quando P é $\forall y\, P$, onde y é uma variável distinta de x.

- Caso P é $\exists x\, P$.

$I_S((\exists x\, P)(x|t)) = I_S(\exists x\, P) = \max\{I(x|d)_S(P) \mid d \in \Delta\}$.

Se $d \in I_A(t)$, então

$I(x|d)_S(\exists x\, P) = \max\{I(x|d)(x|e)_S(P) \mid e \in \Delta\} =$

$\max\{I(x|e)_S(P) \mid e \in \Delta\} = \max\{I(x|d)_S(P) \mid d \in \Delta\}$.

Daí, para todo $d \in I_A(t)$,

$I_S((\exists x\, P)(x|t)) \leq I(x|d)_S(\exists x\, P)$, donde $I_S((\exists x\, P)(x|t)) \leq \min\{I(x|d)_S(P) \mid d \in \Delta\}$. (39)

$I_N((\exists x\, P)(x|t)) = I_N(\exists x\, P) = \min\{I(x|d)_N(P) \mid d \in \Delta\}$.

Se $d \in I_A(t)$, então

$I(x|d)_N(\exists x\, P) = \min\{I(x|d)(x|e)_N(P) \mid e \in \Delta\} =$

$\min\{I(x|e)_N(P) \mid e \in \Delta\} = \min\{I(x|d)_N(P) \mid d \in \Delta\}$.

Daí, para todo $d \in I_A(t)$,

$I_N((\exists x\, P)(x|t)) \leq I(x|d)_N(\exists x\, P)$, donde $I_N((\exists x\, P)(x|t)) \leq \min\{I(x|d)_N(P) \mid d \in \Delta\}$. (40)

Daí, de (39) e (40), Δ vale quando P é $\exists x\, P$.

- Caso P é $\exists y\, P$, onde y é uma variável distinta de x.

  ∗ Subcaso: x não é livre em P ou y não é livre em t.

  $I_S((\exists y\, P)(x|t)) = I_S(\exists y\, P(x|t)) = \max\{I(y|e)_S(P(x|t)) \mid e \in \Delta\}$. (41)

  Dado $d \in I_A(t)$, pela def. 5.3.6, $I(x|d)_S(\exists y\, P) = \max\{I(x|d)(y|e)_S(P) \mid e \in \Delta\}$. (42)

  Dado $e \in \Delta$, de (41), por HI, $I(y|e)_S(P(x|t)) \leq \min\{I(y|e)(x|d)_S(P) \mid d \in I_A(t)\}$.

  Daí, para qualquer $e \in \Delta$ e $d \in I_A(t)$, $I(y|e)_S(P(x|t)) \leq I(y|e)(x|d)_S(P)$.

  Daí, para qualquer $e \in \Delta$ e $d \in I_A(t)$, $\max\{I(y|e)_S(P(x|t)) \mid e \in \Delta\} \leq I(y|e)(x|d)_S(P)$.

  Logo, para qualquer $d \in I_A(t)$,

  $\max\{I(y|e)_S(P(x|t)) \mid e \in \Delta\} \leq \max\{I(y|e)(x|d)_S(P) \mid e \in \Delta\}$.

  Logo, para qualquer $d \in I_A(t)$, de (41) e (42), $I_S((\exists y\, P)(x|t)) \leq I(x|d)_S(\exists y\, P)$.

  Portanto, $I_S((\exists y\, P)(x|t)) \leq \min\{I(x|d)_S(\exists y\, P) \mid d \in I_A(t)\}$. (43)

  $I_N((\exists y\, P)(x|t)) = I_N(\exists y\, P(x|t)) = \min\{I(y|e)_N(P(x|t)) \mid e \in \Delta\}$. (44)

  Dado $d \in I_A(t)$, pela def. 5.3.6, $I(x|d)_N(\exists y\, P) = \min\{I(x|d)(y|e)_N(P) \mid e \in \Delta\}$. (45)

  Dado $e \in \Delta$, de (44), por HI, $I(y|e)_N(P(x|t)) \leq \min\{I(y|e)(x|d)_N(P) \mid d \in I_A(t)\}$.

  Daí, para qualquer $e \in \Delta$ e $d \in I_A(t)$, $I(y|e)_N(P(x|t)) \leq I(y|e)(x|d)_N(P)$.

  Daí, para qualquer $e \in \Delta$ e $d \in I_A(t)$, $\min\{I(y|e)_N(P(x|t)) \mid e \in \Delta\} \leq I(y|e)(x|d)_S(P)$.

  Logo, para qualquer $d \in I_A(t)$,

  $\min\{I(y|e)_N(P(x|t)) \mid e \in \Delta\} \leq \min\{I(y|e)(x|d)_N(P) \mid e \in \Delta\}$.

  Logo, para qualquer $d \in I_A(t)$, de (44) e (45), $I_N((\exists y\, P)(x|t)) \leq I(x|d)_N(\exists y\, P)$.

  Portanto, $I_N((\exists y\, P)(x|t)) \leq \min\{I(x|d)_N(\exists y\, P) \mid d \in I_A(t)\}$. (46)

  Logo, de (43) e (46), Δ vale para este subcaso.

  ∗ Subcaso: x é livre em P e y é livre em t.

  Considere z a primeira variável não livre em $\{t, P\}$.

  Então $(\exists y\, P)(x|t) = \exists z\, P(y|z)(x|t)$. Daí $I_S((\exists y\, P)(x|t)) = I_S(\exists z\, P(y|z)(x|t))$.

  Daí, pelo caso anterior, $I_S(\exists z\, P(y|z)(x|t)) \leq \min\{I(x|d)_S(\exists z\, P(y|z)) \mid d \in I_A(t)\}$.

  Analogamente, $I_N(\exists z\, P(y|z)(x|t)) \leq \min\{I(x|d)_N(\exists z\, P(y|z)) \mid d \in I_A(t)\}$.

Portanto, Δ vale quando P é $\exists y\, P$, onde y é uma variável distinta de x.

□

Prova de (iv):

Seja $\Delta(u) : I_A(u(x|t)) = \bigcup_{d \in I_A(t)} I(x|d)_A(u)$.

Suponha que x é de topo pontual em u.

Como x é de topo pontual em u, temos que u não pode ser uma constante, variável distinta de x ou uma descrição.

- Caso u é x.

  $I_A(x(x|t)) = I_A(t)$. (1)

  $\bigcup_{d \in I_A(t)} I(x|d)_A(x) = \bigcup_{d \in I_A(t)} \{d\} = I_A(t)$. (2)

  De (1) e (2), temos que $I_A(u(x|t)) = \bigcup_{d \in I_A(t)} I(x|d)_A(u)$, ou seja, Δ vale quando u é x.

- Caso u é $f(t_1, \ldots, t_n)$.

  Temos que $\begin{cases} x \text{ é de topo em } t_1, \ldots, t_n, \\ \text{existe um único } i \in \{1, \ldots, n\} \text{ tal que } x \text{ é pontual em } t_i. \end{cases}$

  $I_A(f(t_1, \ldots, t_n)(x|t)) = I_A(f(t_1(x|t), \ldots, t_n(x|t)) = I_A(f(t_1, \ldots, t_{i-1}, t_i(x|t), t_{i+1}, \ldots, t_n)) = \{w(f)(d_1, \ldots, d_n) \mid d_1 \in I_A(t_1), \ldots, d_{i-1} \in I_A(t_{i-1}), d_i \in I_A(t_i(x|t)), d_{i+1} \in I_A(t_{i+1}), \ldots, d_n \in I_A(t_n)\}$. (3)

  Para cada $d \in I_A(t)$, temos que

  $I(x|d)_A(f(t_1, \ldots, t_n)) = \{w(f)(d_1, \ldots, d_n) \mid d_1 \in I(x|d)_A(t_1), \ldots, d_n \in I(x|d)_A(t_n)\} = \{w(f)(d_1, \ldots, d_n) \mid d_1 \in I_A(t_1), \ldots, d_{i-1} \in I_A(t_{i-1}), d_i \in I(x|d)_A(t_i), d_{i+1} \in I_A(t_{i+1}), \ldots, d_n \in I_A(t_n)\}$. (4)

  Dado $d \in I_A(t)$, por HI, $I_A(t_i(x|t)) = I(x|d)_A(t_i)$.

  Daí, temos que, para cada $d \in I_A(t)$, (3)= (4), donde

  $I_A(f(t_1, \ldots, t_n)(x|t)) = I(x|d)_A(f(t_1, \ldots, t_n))$.

  Logo, $I_A(f(t_1, \ldots, t_n)(x|t)) = \bigcup_{d \in I_A(t)} I(x|d)_A(f(t_1, \ldots, t_n))$,

  donde temos que Δ vale quando u é $f(t_1, \ldots, t_n)$.

$\square$

Esboço da prova de (v):

$$\text{Suponha que } \begin{cases} x \text{ é de topo pontual em } P, \\ I_A(t) \neq \emptyset, \end{cases}$$

$$\text{Seja } \Delta(P) : \begin{cases} I_S(P(x|t)) = \min\{I(x|d)_S(P) \mid d \in I_A(t)\}, \\ I_N(P(x|t)) = \min\{I(x|d)_N(P) \mid d \in I_A(t)\}. \end{cases}$$

A prova é feita mostrando-se a validade de $\Delta(P)$, por indução sobre P.

□

Esboço da prova de (vi):

$$\text{Suponha que } \begin{cases} x \text{ possui uma ocorrência de topo em } u, \\ I_A(t) = \emptyset. \end{cases}$$

Seja $\Delta(u)$: $I_A(u(x|t)) = \emptyset$.

A prova é feita por indução sobre t.

□

Esboço da prova de (vii):

$$\text{Suponha que } \begin{cases} * \ P \text{ é uma fórmula atômica básica ou uma negação de uma} \\ \quad\ \text{fórmula atômica básica,} \\ * \ P \text{ possui pelo menos uma ocorrência de topo de } x, \\ * \ I_A(t) = \emptyset. \end{cases}$$

Seja $\Delta(P)$: $I_S(P(x|t)) = I_N(P(x|t)) = 1$.

A prova é feita mostrando-se a validade de Δ para os casos em que P é uma fórmula atômica básica ou negação de uma fórmula atômica básica.

□

5.3.17 Exemplo. Seja I uma LAR-interpretação cujo universo de discurso é $\mathbb{N}$ e que atribui ao sinal funcional diádico "+" e ao sinal predicativo monádico "par" seus significados usuais. Sejam u o termo $\mathsf{x} + \mathsf{x}$ e t o termo $\Upsilon\mathsf{x}\,\mathrm{par}(\mathsf{x})$. Pelo lema 5.3.16 (ii):

$$I_{\mathrm{A}}((\mathsf{x}+\mathsf{x})(\mathsf{x}|\Upsilon\mathsf{x}\,\mathrm{par}(\mathsf{x}))) \supseteq \bigcup_{d \in I_{\mathrm{A}}(\Upsilon\mathsf{x}\,\mathrm{par}(\mathsf{x}))} I(\mathsf{x}|d)_{\mathrm{A}}(\mathsf{x}+\mathsf{x})$$

Temos que $I_{\mathrm{A}}((\mathsf{x}+\mathsf{x})(\mathsf{x}|\Upsilon\mathsf{x}\,\mathrm{par}(\mathsf{x}))) = \{\mathsf{x} \mid \mathsf{x} \text{ é par}\}$.
$\bigcup_{d \in I_{\mathrm{A}}(\Upsilon\mathsf{x}\,\mathrm{par}(\mathsf{x}))} I(\mathsf{x}|d)_{\mathrm{A}}(\mathsf{x}+\mathsf{x}) = \{\mathsf{x} \mid \mathsf{x} \text{ é múltiplo de } 4\}$, pois

$$\begin{gathered} I(\mathsf{x}|0)_{\mathrm{A}}(\mathsf{x}+\mathsf{x}) = \{0\} \\ I(\mathsf{x}|2)_{\mathrm{A}}(\mathsf{x}+\mathsf{x}) = \{4\} \\ I(\mathsf{x}|4)_{\mathrm{A}}(\mathsf{x}+\mathsf{x}) = \{8\} \\ I(\mathsf{x}|6)_{\mathrm{A}}(\mathsf{x}+\mathsf{x}) = \{12\} \\ \vdots \end{gathered}$$

Por exemplo, $14 \in I_{\mathrm{A}}(\Upsilon\mathsf{x}\,\mathrm{par}(\mathsf{x}))$, mas não existe um natural par que somado a si mesmo, resulte 14. Logo, $14 \notin \bigcup_{d \in I_{\mathrm{A}}(\Upsilon\mathsf{x}\,\mathrm{par}(\mathsf{x}))} I(\mathsf{x}|d)_{\mathrm{A}}(\mathsf{x}+\mathsf{x})$. Isso acontece porque x ocorre duas vezes em u. Portanto, a primeira coleção apenas contém a segunda. Se x ocorresse apenas uma vez em u, teríamos que a primeira coleção é igual à segunda, conforme especifica o item (*iv*) do mesmo lema.

5.3.18 Exemplo. Seja I uma LAR-interpretação cujo universo de discurso é $\mathbb{N}$. Seja P a fórmula atômica básica $\mathrm{divide}(\mathsf{x},\mathsf{x})$ e t o termo $\Upsilon\mathsf{x}\ \mathrm{inteiro}(\mathsf{x})$. Como não é verdade que todo inteiro divide um inteiro, temos que:
$I_{\mathrm{S}}(\mathrm{divide}(\mathsf{x},\mathsf{x})(\mathsf{x}|\Upsilon\mathsf{x}\ \mathrm{inteiro}(\mathsf{x}))) = 0$.
Todo número inteiro divide a si próprio. Logo, $I(\mathsf{x}|d)_{\mathrm{S}}(\mathrm{divide}(\mathsf{x},\mathsf{x})) = 1$, para todo inteiro. Daí, $\min\{I(\mathsf{x}|d)_{\mathrm{S}}(\mathrm{divide}(\mathsf{x},\mathsf{x})) \mid d \in I_{\mathrm{A}}(\Upsilon\mathsf{x}\ \mathrm{inteiro}(\mathsf{x}))\} = 1$.
Pelo lema 5.3.16 (iii),

$$I_{\mathrm{S}}(\mathrm{divide}(\mathsf{x},\mathsf{x})(\mathsf{x}|\Upsilon\mathsf{x}\ \mathrm{inteiro}(\mathsf{x}))) \leq \min\{I(\mathsf{x}|d)_{\mathrm{S}}(\mathrm{divide}(\mathsf{x},\mathsf{x})) \mid d \in I_{\mathrm{A}}(\Upsilon\mathsf{x}\ \mathrm{inteiro}(\mathsf{x}))\},$$

o que se confirma pelo exemplo acima. Se houver apenas uma ocorrência de x em P, o resultado acima será uma igualdade, conforme especifica o item (*v*) do mesmo lema.

5.3.1 Uma tradução de LAR para LEC

Nesta seção fornecemos uma tradução de LAR para LEC, feita em duas etapas. Na primeira, são eliminadas, de um dado designador, todas as ocorrências do descritor, através de uma função que denominamos de **eld** (**el**iminação de **d**escrições). Na segunda etapa, todas as ocorrências do sinal de abrangência são substituídas pelo sinal de igualdade, através de uma função que denominamos **sai** (**s**ubstituição da **a**brangência por **i**gualdade). Obtemos finalmente uma função de tradução de fórmulas em LAR para fórmulas em LEC, a qual denominamos **tr** (**tr**adução).

5.3.19 Definição. Definimos nas cláusulas abaixo a função **form**, a qual associa uma lista de um termo e uma variável não livre neste termo a uma fórmula:

- $\mathrm{form}(c, x) \rightleftharpoons c \succeq x$.
- $\mathrm{form}(y, x) \rightleftharpoons y \succeq x$.
- $\mathrm{form}(f(t_1, \ldots, t_n), x) \rightleftharpoons$
  $\exists x_1 \ldots \exists x_n\, (\mathrm{form}(t_1, x_1) \wedge \ldots \wedge \mathrm{form}(t_n, x_n) \wedge f(x_1, \ldots, x_n) \succeq x)$,
  onde $x_1, \ldots, x_n$ são as primeiras variáveis distintas entre si e não livres em x e em $f(t_1, \ldots, t_n)$.
- $\mathrm{form}(\Upsilon x\, P, x) \rightleftharpoons P$.
- $\mathrm{form}(\Upsilon y\, P, x) \rightleftharpoons P(y|x)$.

5.3.20 Lema.

(i) $I(x_1, \ldots, x_n|d_1, \ldots, d_n)_{\mathrm{S}}(p(x_1, \ldots, x_n)) = 1$ sss $\langle d_1, \ldots, d_n\rangle \in w(p)$.

(ii) $I(x_1, \ldots, x_n|d_1, \ldots, d_n)_{\mathrm{A}}(f(x_1, \ldots, x_n)) = \{w(f)(d_1, \ldots, d_n)\}$.

(iii) $I(x_1, \ldots, x_n, x|d_1, \ldots, d_n, d)_{\mathrm{S}}(f(x_1, \ldots, x_n) \succeq x) = 1$ sss $d = w(f)(d_1, \ldots, d_n)$.

Prova de (i):

$$I(x_1, \ldots, x_n|d_1, \ldots, d_n)_{\mathrm{S}}(p(x_1, \ldots, x_n)) = 1$$
$$\text{sss} \quad \text{(def. 5.3.6)}$$
$$\text{para cada } e_1 \in I(x_1, \ldots, x_n|d_1, \ldots, d_n)_{\mathrm{A}}(x_1), \ldots, \text{para cada } e_n \in I(x_1, \ldots, x_n|d_1, \ldots, d_n)_{\mathrm{A}}(x_n),$$
$$\langle e_1, \ldots, e_n\rangle \in w(p)$$
$$\text{sss}$$
$$\text{para cada } e_1 \in \{d_1\}, \ldots, \text{para cada } e_n \in \{d_n\}, \langle e_1, \ldots, e_n\rangle \in w(p)$$
$$\text{sss}$$
$$\langle d_1, \ldots, d_n\rangle \in w(p).$$

Portanto, $I(x_1,\ldots,x_n|d_1,\ldots,d_n)_{\mathrm{S}}(p(x_1,\ldots,x_n)) = 1$ sss $\langle d_1,\ldots,d_n\rangle \in w(p)$.

□

Prova de (ii):

$$I(x_1,\ldots,x_n|d_1,\ldots,d_n)_{\mathrm{A}}(f(x_1,\ldots,x_n)) =$$

$$\{w(f)(e_1,\ldots,e_n)|e_1 \in I(x_1,\ldots,x_n|d_1,\ldots,d_n)_{\mathrm{A}}(x_1),\ldots,e_n \in I(x_1,\ldots,x_n|d_1,\ldots,d_n)_{\mathrm{A}}(x_n)\} =$$

$$\{w(f)(d_1,\ldots,d_n)\}.$$

Portanto, $I(x_1,\ldots,x_n|d_1,\ldots,d_n)_{\mathrm{A}}(f(x_1,\ldots,x_n)) = \{w(f)(d_1,\ldots,d_n)\}$.

□

Prova de (iii):

$$I(x_1,\ldots,x_n,x|d_1,\ldots,d_n,d)_{\mathrm{S}}(f(x_1,\ldots,x_n) \models x) = 1$$

sss (def. 5.3.6)

$$I(x_1,\ldots,x_n,x|d_1,\ldots,d_n,d)_{\mathrm{A}}(x) \subseteq I(x_1,\ldots,x_n,x|d_1,\ldots,d_n,d)_{\mathrm{A}}(f(x_1,\ldots,x_n))$$

sss (ii)

$$\{d\} \subseteq \{w(f)(d_1,\ldots,d_n)\}$$

sss

$$d \in \{w(f)(d_1,\ldots,d_n)\}$$

sss

$$d = w(f)(d_1,\ldots,d_n).$$

Portanto, $I(x_1,\ldots,x_n,x|d_1,\ldots,d_n,d)_{\mathrm{S}}(f(x_1,\ldots,x_n) \models x) = 1$ sss $d = w(f)(d_1,\ldots,d_n)$.

□

5.3.21 Lema.

(i) para cada $d_1,\ldots$, para cada d_n, $I(x_1,\ldots,x_n|d_1,\ldots,d_n)_{\mathrm{S}}(P) = 1$ sss $I_{\mathrm{S}}(\forall x_1 \ldots \forall x_n\, P) = 1$.

(ii) existe $d_1,\ldots$, existe d_n, $I(x_1,\ldots,x_n|d_1,\ldots,d_n)_{\mathrm{S}}(P) = 1$ sss $I_{\mathrm{S}}(\exists x_1 \ldots \exists x_n\, P) = 1$.

Esboço da prova: A prova é feita por indução sobre n.

□

5.3.22 Lema. Se x não é livre em t, então $d \in I_{\mathrm{A}}(t)$ sss $I(x|d)_{\mathrm{S}}(\mathrm{form}(t, x)) = 1$.

Prova:

Suponha que x não é livre em t.

- Caso t é uma constante c.

  $I(x|d)_{\mathrm{S}}(\mathrm{form}(c, x)) = 1$ sss $I(x|d)_{\mathrm{S}}(c \models x) = 1$ sss $I(x|d)_{\mathrm{A}}(x) \subseteq I(x|d)_{\mathrm{A}}(c)$ sss $\{d\} \subseteq \{w(c)\}$ sss $d \in \{w(c)\}$ sss $d \in I_{\mathrm{A}}(c)$.

- Caso t é uma variável y distinta de x.

  $I(x|d)_{\mathrm{S}}(\mathrm{form}(y, x)) = 1$ sss $I(x|d)_{\mathrm{S}}(y \models x) = 1$ sss $I(x|d)_{\mathrm{A}}(x) \subseteq I(x|d)_{\mathrm{A}}(y)$ sss $\{d\} \subseteq \{s(y)\}$ sss $d \in \{s(y)\}$ sss $d \in I_{\mathrm{A}}(y)$.

- Caso t é $f(t_1, \ldots, t_n)$.

  Sejam $x_1, \ldots, x_n$ as primeiras variáveis distintas entre si e não livres em x e em $f(t_1, \ldots, t_n)$.

$$d \in I_{\mathrm{A}}(f(t_1, \ldots, t_n))$$
$$\text{sss (def. 5.3.6)}$$
$$d \in \{w(f)(d_1, \ldots, d_n) | d_1 \in I_{\mathrm{A}}(t_1), \ldots, d_n \in I_{\mathrm{A}}(t_n)\}$$
$$\text{sss}$$
$$\text{existe } d_1, \ldots, \text{existe } d_n \text{ tal que } d_1 \in I_{\mathrm{A}}(t_1) \text{ e } \ldots \text{ e } d_n \in I_{\mathrm{A}}(t_n) \text{ e } w(f)(d_1, \ldots, d_n) = d$$
$$\text{sss (HI, lema 5.3.20 (iii))}$$
$$\text{existe } d_1, \ldots, \text{existe } d_n \text{ tal que } I(x_1|d_1)_{\mathrm{S}}(\mathrm{form}(t_1, x_1)) = 1 \text{ e } \ldots \text{ e } I(x_n|d_n)_{\mathrm{S}}(\mathrm{form}(t_n, x_n)) = 1$$
$$\text{e } I(x_1, \ldots, x_n, x|d_1, \ldots, d_n, d)_{\mathrm{S}}(f(x_1, \ldots, x_n) \models x) = 1$$
$$\text{sss}$$
$$\text{existe } d_1, \ldots, \text{existe } d_n \text{ tal que } I(x_1, \ldots, x_n, x|d_1, \ldots, d_n, d)_{\mathrm{S}}(\mathrm{form}(t_1, x_1) \wedge \ldots \wedge \mathrm{form}(t_n, x_n)$$
$$\wedge\ f(x_1, \ldots, x_n) \models x) = 1$$
$$\text{sss (lema 5.3.21)}$$
$$I(x|d)_{\mathrm{S}}(\exists x_1, \ldots, \exists x_n(\mathrm{form}(t_1, x_1) \wedge \ldots \wedge \mathrm{form}(t_n, x_n) \wedge f(x_1, \ldots, x_n) \models x) = 1$$
$$\text{sss (def. 5.3.19)}$$
$$I(x|d)_{\mathrm{S}}(\mathrm{form}(f(t_1, \ldots, t_n), x)) = 1.$$

  Portanto, $d \in I_{\mathrm{A}}(f(t_1, \ldots, t_n))$ sss $I(x|d)_{\mathrm{S}}(\mathrm{form}(f(t_1, \ldots, t_n), x)) = 1$.

- Caso t é $\Upsilon x\, P$.

$$d \in I_{\mathrm{A}}(\Upsilon x\, P)$$
$$\text{sss (def. 5.3.6)}$$
$$d \in \{d \in \Delta | I(x|d)_{\mathrm{S}}(P) = 1\}$$
$$\text{sss}$$

$$I(x|d)_S(P) = 1$$
sss (def. 5.3.19)
$$I(x|d)_S(\mathrm{form}(\Upsilon x\, P, x)) = 1.$$

Portanto, $d \in I_A(f(t_1, \ldots, t_n))$ sss $I(x|d)_S(\mathrm{form}(\Upsilon x\, P, x)) = 1$.

- Caso t é $\Upsilon y\, P$.

  Seja $I' = I(x|d)$. Daí, $I'(y|d) = I(x|d)(y|d)$.

$$d \in I_A(\Upsilon y\, P)$$
sss (def. 5.3.6)
$$d \in \{d \in \Delta | I(y|d)_S(P) = 1\}$$
sss
$$I(y|d)_S(P) = 1$$
sss
$$I'(y|d)_S(P) = 1$$
sss
$$I'(y|x^I)_S(P) = 1$$
sss
$$I'_S(P(y|x)) = 1$$
sss
$$I(x|d)_S(P(y|x)) = 1$$
sss (def. 5.3.19)
$$I(x|d)_S(\mathrm{form}(\Upsilon y\, P, x)) = 1.$$

Portanto, $d \in I_A(f(t_1, \ldots, t_n))$ sss $I(x|d)_S(\mathrm{form}(\Upsilon y\, P, x)) = 1$.

□

5.3.23 Definição. Definimos a seguir as funções $P \longmapsto P_S$ e $P \longmapsto P_N$ por recursão simultânea, a fim de obter a especificação da função **eld**:

- se P é da forma $p(t_1, \ldots, t_n)$, então

$$\begin{cases} P_S = \forall x_1 \ldots \forall x_n\, (\mathrm{form}(t_1, x_1)_S \wedge \ldots \wedge \mathrm{form}(t_n, x_n)_S \rightarrow p(x_1, \ldots, x_n)), \\ P_N = \exists x_1 \ldots \exists x_n\, (\mathrm{form}(t_1, x_1)_S \wedge \ldots \wedge \mathrm{form}(t_n, x_n)_S \wedge p(x_1, \ldots, x_n)), \end{cases}$$

  onde $x_1, \ldots, x_n$ são as primeiras n variáveis não livres em $t_1, \ldots, t_n$.

- se $\begin{cases} t \text{ é um termo não puro,} \\ x \text{ é a primeira variável não livre em } t, t', \end{cases}$

  então $(t' \models t)_S = (t' \models t)_N = \forall x \Big((t \models x)_S \rightarrow (t' \models x)_S\Big)$;

- se $\begin{cases} t \text{ é um termo puro,} \\ x_1, \ldots, x_n \text{ são as primeiras } n \text{ variáveis não livres em } t_1, \ldots, t_n, t, \end{cases}$

  então

$$(f(t_1, \ldots, t_n) \models t)_S = (f(t_1, \ldots, t_n) \models t)_N =$$

$$\exists x_1 \ldots \exists x_n \big((t_1 \models x_1)_S \wedge \ldots \wedge (t_n \models x_n)_S \wedge (f(x_1, \ldots, x_n) \models t)_S\big);$$

- se t é um termo puro, então $(\Upsilon x\, P \models t)_S = (\Upsilon x\, P \models t)_N = P_S(x|t)$;
- $(\neg P)_S = \neg(P_N)$;
- $(\neg P)_N = \neg(P_S)$;
- $(P \to Q)_S = P_N \to Q_S$;
- $(P \to Q)_N = P_S \to Q_N$;
- $(P \wedge Q)_S = P_S \wedge Q_S$;
- $(P \wedge Q)_N = P_N \wedge Q_N$;
- $(P \vee Q)_S = P_S \vee Q_S$;
- $(P \vee Q)_N = P_N \vee Q_N$;
- $(\forall x\, P)_S = \forall x\, P_S$;
- $(\forall x\, P)_N = \forall x\, P_N$;
- $(\exists x\, P)_S = \exists x\, P_S$;
- $(\exists x\, P)_N = \exists x\, P_N$.

5.3.24 Escólio. Se P não possui ocorrência de “ Υ ”, então $P_S = P_N = P$.

5.3.25 Exemplos.

- $(p(\Upsilon \mathrm{x}\, q(\mathrm{x})))_S = \forall \mathrm{x}\, (q(\mathrm{x}) \to p(\mathrm{x}))$.

  $(p(\Upsilon \mathrm{x}\, q(\mathrm{x})))_N = \exists \mathrm{x}\, (q(\mathrm{x}) \wedge p(\mathrm{x}))$.
- $(\neg p(\Upsilon \mathrm{x}\, q(\mathrm{x})))_S = \forall \mathrm{x}\, (q(\mathrm{x}) \to \neg p(\mathrm{x}))$.

  $(\neg p(\Upsilon \mathrm{x}\, q(\mathrm{x})))_N = \exists \mathrm{x}\, (q(\mathrm{x}) \wedge \neg p(\mathrm{x}))$.
- $(\Upsilon \mathrm{x}\ \text{mamífero}(\mathrm{x}) \models \Upsilon \mathrm{x}\, \text{leão}(\mathrm{x}))_S = (\Upsilon \mathrm{x}\ \text{mamífero}(\mathrm{x}) \models \Upsilon \mathrm{x}\, \text{leão}(\mathrm{x}))_N =$

  $\forall \mathrm{x}\, ((\Upsilon \mathrm{x}\ \text{leão}(\mathrm{x}) \models \mathrm{x})_S \to (\Upsilon \mathrm{x}\ \text{mamífero}(\mathrm{x}) \models \mathrm{x})_S) =$

  $\forall \mathrm{x}\, (\text{leão}(\mathrm{x}) \to \text{mamífero}(\mathrm{x}))$.
- $(\Upsilon \mathrm{x}\ \text{primo}(\mathrm{x}) + \Upsilon \mathrm{y}\ \text{par}(\mathrm{y})) \models \mathrm{z})_S = (\Upsilon \mathrm{x}\ \text{primo}(\mathrm{x}) + \Upsilon \mathrm{y}\ \text{par}(\mathrm{y})) \models \mathrm{z})_N =$

  $\exists \mathrm{x}\, \exists \mathrm{y}\, ((\Upsilon \mathrm{x}\ \text{primo}(\mathrm{x}) \models \mathrm{x})_S \wedge (\Upsilon \mathrm{y}\ \text{par}(\mathrm{y}) \models \mathrm{y})_S \wedge \mathrm{z} \models \mathrm{x} + \mathrm{y}) =$

  $\exists \mathrm{x}\, \exists \mathrm{y}\, (\text{primo}(\mathrm{x}) \wedge \text{par}(\mathrm{y}) \wedge \mathrm{z} \models \mathrm{x} + \mathrm{y})$.
- $(\Upsilon \mathrm{x}\, p(\mathrm{x}) \models \mathrm{y})_S = (\Upsilon \mathrm{x}\, p(\mathrm{x}) \models \mathrm{y})_N = p(\mathrm{y})$.

- (feroz(ϒx carnívoro(x)) → feroz(ϒx leão(x)))$_S$ =
  (feroz(ϒx carnívoro(x)))$_N$→ feroz(ϒx leão(x))$_S$ =
  ∃x (carnívoro(x) ∧ feroz(x)) → ∀x (leão(x) → feroz(x)).

5.3.26 Definição. Dada uma fórmula P, **eld**$(P) = P_S$.

5.3.27 Teorema.

- $I_S(P) = I_S(P_S)$.
- $I_N(P) = I_N(P_N)$.

Esboço da prova:

A prova é feita por indução sobre P. Demonstraremos aqui apenas o caso em que P é uma fórmula atômica.

$$I_S(p(t_1,\ldots,t_n)) = 1$$
$$\text{sss}$$
$$\text{para cada } d_1,\ldots,d_n, d_1 \in I_A(t_1) \text{ e } \ldots \text{ e } d_n \in I_A(t_n), \text{ então } \langle d_1,\ldots,d_n\rangle \in w(p)$$
$$\text{sss} \quad \text{lema 5.3.22, lema 5.3.20 (i)}$$
$$\text{para cada } d_1,\ldots, \text{ para cada } d_n, I(x|d_1)_S(\text{form}(t_1,x_1)) = 1 \text{ e } \ldots \text{ e } I(x|d_n)_S(\text{form}(t_n,x_n)) = 1,$$
$$\text{então } I(x_1,\ldots,x_n|d_1,\ldots,d_n)_S(p(x_1,\ldots,x_n)) = 1$$
$$\text{sss} \quad \text{HI}$$
$$\text{para cada } d_1,\ldots, \text{ para cada } d_n, I(x|d_1)_S(\text{form}(t_1,x_1)_S) = 1 \text{ e } \ldots \text{ e } I(x|d_n)_S(\text{form}(t_n,x_n)_S) = 1,$$
$$\text{então } I(x_1,\ldots,x_n|d_1,\ldots,d_n)_S(p(x_1,\ldots,x_n)) = 1$$
$$\text{sss}$$
$$\text{para cada } d_1,\ldots, \text{ para cada } d_n, I(x_1,\ldots,x_n|d_1,\ldots,d_n)_S(\text{form}(t_1,x_1)_S \wedge \ldots \wedge \text{form}(t_n,x_n)_S) = 1,$$
$$\text{então } I(x_1,\ldots,x_n|d_1,\ldots,d_n)_S(p(x_1,\ldots,x_n)) = 1$$
$$\text{sss}$$
$$\text{para cada } d_1,\ldots, \text{ para cada } d_n,$$
$$I(x_1,\ldots,x_n|d_1,\ldots,d_n)_S(\text{form}(t_1,x_1)_S \wedge \ldots \wedge \text{form}(t_n,x_n)_S \rightarrow p(x_1,\ldots,x_n)) = 1$$
$$\text{sss} \quad \text{lema 5.3.21}$$
$$I_S(\forall x_1 \ldots \forall x_n(\text{form}(t_1,x_1)_S \wedge \ldots \wedge \text{form}(t_n,x_n)_S \rightarrow p(x_1,\ldots,x_n)) = 1$$
$$\text{sss} \quad \text{def. 5.3.23}$$
$$I_S(p(t_1,\ldots,t_n)_S) = 1.$$

Daí, $I_S(p(t_1,\ldots,t_n)) = 1$ sss $I_S(p(t_1,\ldots,t_n)_S) = 1$, ou seja,
$I_S(p(t_1,\ldots,t_n)) = I_S(p(t_1,\ldots,t_n)_S)$.

$$I_N(p(t_1,\ldots,t_n)) = 1$$
$$\text{sss}$$
$$\text{existe } d_1,\ldots,d_n, d_1 \in I_A(t_1) \text{ e } \ldots \text{ e } d_n \in I_A(t_n), \text{ e } \langle d_1,\ldots,d_n\rangle \in w(p)$$
$$\text{sss} \quad \text{lema 5.3.22, lema 5.3.20 (i)}$$
$$\text{existe } d_1,\ldots, \text{existe } d_n, I(x|d_1)_S(\text{form}(t_1,x_1)) = 1 \text{ e } \ldots \text{ e } I(x|d_n)_S(\text{form}(t_n,x_n)) = 1,$$
$$\text{e } I(x_1,\ldots,x_n|d_1,\ldots,d_n)_S(p(x_1,\ldots,x_n)) = 1$$
$$\text{sss} \quad \text{HI}$$
$$\text{existe } d_1,\ldots, \text{existe } d_n, I(x|d_1)_S(\text{form}(t_1,x_1)_S) = 1 \text{ e } \ldots \text{ e } I(x|d_n)_S(\text{form}(t_n,x_n)_S) = 1,$$
$$\text{e } I(x_1,\ldots,x_n|d_1,\ldots,d_n)_S(p(x_1,\ldots,x_n)) = 1$$
$$\text{sss}$$
$$\text{existe } d_1,\ldots, \text{existe } d_n, I(x_1,\ldots,x_n|d_1,\ldots,d_n)_S(\text{form}(t_1,x_1)_S \wedge \ldots \wedge \text{form}(t_n,x_n)_S) = 1,$$
$$\text{e } I(x_1,\ldots,x_n|d_1,\ldots,d_n)_S(p(x_1,\ldots,x_n)) = 1$$
$$\text{sss}$$
$$\text{existe } d_1,\ldots, \text{existe } d_n,$$
$$I(x_1,\ldots,x_n|d_1,\ldots,d_n)_S(\text{form}(t_1,x_1)_S \wedge \ldots \wedge \text{form}(t_n,x_n)_S \wedge p(x_1,\ldots,x_n)) = 1$$
$$\text{sss} \quad \text{lema 5.3.21}$$
$$I_N(\exists x_1 \ldots \exists x_n(\text{form}(t_1,x_1)_S \wedge \ldots \wedge \text{form}(t_n,x_n)_S \wedge p(x_1,\ldots,x_n)) = 1$$
$$\text{sss} \quad \text{def. 5.3.23}$$
$$I_N(p(t_1,\ldots,t_n)_N) = 1.$$

Daí, $I_N(p(t_1,\ldots,t_n)) = 1$ sss $I_N(p(t_1,\ldots,t_n)_S) = 1$, ou seja,
$I_N(p(t_1,\ldots,t_n)) = I_N(p(t_1,\ldots,t_n)_S)$. □

5.3.28 Corolário. $I_S(P) = I_S(\mathbf{eld}(P))$.

5.3.29 Lema. I satisfaz Γ sss I satisfaz $\mathbf{eld}(\Gamma)$.

5.3.30 Teorema. $\Gamma \models_{\text{LAR}} P$ sss $\mathbf{eld}(\Gamma) \models_{\text{LAR}} \mathbf{eld}(P)$.

Prova:

$$\Gamma \models_{\text{LAR}} P$$
$$\text{sss} \quad \text{def. de satisfatibilidade (2.2.22)}$$
$$\text{toda LAR-interpretação } I \text{ para } \Gamma \cup \{P\} \text{ que satisfaz } \Gamma \text{ satisfaz } P$$
$$\text{sss} \quad \text{lema 5.3.29}$$
$$\mathbf{eld}(\Gamma) \models_{\text{LAR}} \mathbf{eld}(P).$$

□

5.3.31 Lema.

- Se P é uma fórmula pura, então $I_S(\neg P) \neq I_S(P)$.
- Se P é uma fórmula pura, então $I_S(P \to Q) = \begin{cases} I_S(Q), \text{ se } I_S(P) = 1, \\ 1, \text{ se } I_S(P) = 0. \end{cases}$

5.3.32 Definição. Definimos nas cláusulas abaixo $\sim P$, P° e P^*:

- $\sim P \rightleftharpoons \neg(P_S)$ [11];
- $P^\circ \rightleftharpoons \sim(P \wedge \neg P)$ [12];
- $P^* \rightleftharpoons P \vee \neg P$ [13].

5.3.33 Lema.

(i) $I_S(\sim P) \neq I_S(P)$.

(ii) $I_S(P^\circ) \neq \min\{I_S(P), I_N(P)\}$.

(iii) $I_S(P^*) = \max\{I_S(P), I_N(P)\}$.

Prova de (i):

$$
\begin{aligned}
&I_S(\sim P) = 1 \\
&\quad \text{sss} \quad \text{def. 5.3.32} \\
&I_S(\neg(P_S)) = 1 \\
&\quad \text{sss} \quad \text{lema 5.3.31} \\
&I_S(P_S) = 0 \\
&\quad \text{sss} \quad \text{teorema 5.3.27} \\
&I_S(P) = 0.
\end{aligned}
$$

Portanto, $I_S(\sim P) \neq I_S(P)$.

Provas de (ii) *e* (iii): Seguem de modo análogo à anterior, utilizando a definição 5.3.32, o item (i) deste lema e a definição 5.3.6.

[11] Chamaremos ~ de “conectivo da negação clássica”.

[12] P° lê-se “P bola”.

[13] P^* lê-se “P estrela”.

5.3.34 Definição. Definimos a função **sai** (**s**ubstituição da **a**brangência por **i**gualdade), a qual, dada uma fórmula em LAR, associa a mesma a uma fórmula correspondente em LEC, onde todos os sinais de abrangência " $\succcurlyeq$ " são substituídos pelo sinal de igualdade " $=$ ". **sai**(Γ) é o conjunto {**sai**(P) | $P \in \Gamma$}.

Analogamente, definimos sua função inversa **sia** (**s**ubstituição da **i**gualdade por **a**brangência), a qual associa uma fórmula em LEC à sua fórmula correspondente em LAR, substituindo cada ocorrência do sinal de igualdade " $=$ " pelo sinal de abrangência " $\succcurlyeq$ ". **sia**(Γ) é o conjunto {**sia**(P) | $P \in \Gamma$}.

5.3.35 Escólio.

(i) Se P é uma fórmula de LAR sem descrições, então **sia**(**sai**(P)) $= P$.

(ii) Se P é uma fórmula de LEC, então **sia**(P) é uma fórmula de LAR sem descrições.

(iii) Se P é uma fórmula de LEC, então **sai**(**sia**(P)) $= P$.

5.3.36 Lema. Se t é um termo sem descrições, então $I_A(t) = \{I_D(t)\}$.

5.3.37 Lema. Se P é uma fórmula sem descrições, então $I_S(P) = 1$ sss $I_V(\textbf{sai}(P)) = v$.

Prova:

Sejam:

- $\Delta_1(P)$: $I_S(P) = 1$ sss $I_V(\textbf{sai}(P)) = v$.
- $\Delta_2(P)$: $I_N(P) = 1$ sss $I_V(\textbf{sai}(P)) = f$.
- $\Delta(P)$: $\Delta_1(P)$ e $\Delta_2(P)$.

Suponha que P é uma fórmula sem descrições.

- Caso P é $p(t_1, \ldots, t_n)$.

$$I_S(p(t_1, \ldots, t_n)) = 1$$
sss def. 5.3.6
$$\text{para cada } d_1 \in I_A(t_1), \ldots, \text{para cada } d_n \in I_A(t_n), \langle d_1, \ldots, d_n\rangle \in w(p)$$
sss lema 5.3.36
$$\text{para cada } d_1 \in \{I_D(t_1)\}, \ldots, \text{para cada } d_n \in \{I_D(t_n)\}, \langle d_1, \ldots, d_n\rangle \in w(p)$$
sss
$$\langle I_D(t_1), \ldots, I_D(t_n)\rangle \in w(p)$$
sss def. 3.4.5

$$I_{\mathrm{V}}(p(t_1, \ldots, t_n)) = v$$
$$\text{sss}$$
$$I_{\mathrm{V}}(\mathbf{sai}(p(t_1, \ldots, t_n))) = v.$$

Logo, vale $\Delta_1(P)$.

$$I_{\mathrm{N}}(p(t_1, \ldots, t_n)) = 1$$
$$\text{sss} \quad \text{def. 5.3.6}$$
$$\text{para cada } d_1 \in I_{\mathrm{A}}(t_1), \ldots, \text{para cada } d_n \in I_{\mathrm{A}}(t_n), \langle d_1, \ldots, d_n \rangle \notin w(p)$$
$$\text{sss} \quad \text{lema 5.3.36}$$
$$\text{para cada } d_1 \in \{I_{\mathrm{D}}(t_1)\}, \ldots, \text{para cada } d_n \in \{I_{\mathrm{D}}(t_n)\}, \langle d_1, \ldots, d_n \rangle \notin w(p)$$
$$\text{sss}$$
$$\langle I_{\mathrm{D}}(t_1), \ldots, I_{\mathrm{D}}(t_n) \rangle \notin w(p)$$
$$\text{sss} \quad \text{def. 3.4.5}$$
$$I_{\mathrm{V}}(p(t_1, \ldots, t_n)) = f$$
$$\text{sss}$$
$$I_{\mathrm{V}}(\mathbf{sai}(p(t_1, \ldots, t_n))) = f.$$

Logo, vale $\Delta_2(P)$.

Portanto, vale $\Delta(P)$.

- Caso P é $t \mathrel{)\!\!=} u$.

$$I_{\mathrm{S}}(t \mathrel{)\!\!=} u) = 1$$
$$\text{sss} \quad \text{def. 5.3.6}$$
$$I_{\mathrm{A}}(t) \supseteq I_{\mathrm{A}}(u)$$
$$\text{sss} \quad \text{lema 5.3.36}$$
$$\{I_{\mathrm{D}}(t)\} \supseteq \{I_{\mathrm{D}}(u)\}$$
$$\text{sss}$$
$$I_{\mathrm{D}}(t) = I_{\mathrm{D}}(u)$$
$$\text{sss} \quad \text{escólio 3.4.6}$$
$$I_{\mathrm{V}}(t = u) = v$$
$$\text{sss}$$
$$I_{\mathrm{V}}(\mathbf{sai}(t) = \mathbf{sai}(u)) = v$$
$$\text{sss}$$
$$I_{\mathrm{V}}(\mathbf{sai(}t \mathrel{)\!\!=} u\mathbf{)}) = v.$$

Logo, vale $\Delta_1(P)$.

$$I_{\mathrm{N}}(t \mathrel{)\!\!=} u) = 1$$

sss def. 5.3.6

$$I_{\mathrm{A}}(t) \not\supseteq I_{\mathrm{A}}(u)$$

sss lema 5.3.36

$$\{I_{\mathrm{D}}(t)\} \not\supseteq \{I_{\mathrm{D}}(u)\}$$

sss

$$I_{\mathrm{D}}(t) \neq I_{\mathrm{D}}(u)$$

sss escólio 3.4.6

$$I_{\mathrm{V}}(t = u) = f$$

sss

$$I_{\mathrm{V}}(\mathbf{sai}(t) = \mathbf{sai}(u)) = f$$

sss

$$I_{\mathrm{V}}(\mathbf{sai}(t \mathrel{)\!=} u)) = f.$$

Logo, vale $\Delta_2(P)$.

Portanto, vale $\Delta(P)$.

- Caso P é $\neg Q$.

$$I_{\mathrm{S}}(\neg Q) = 1$$

sss def. 5.3.6

$$I_{\mathrm{N}}(Q) = 1$$

sss HI

$$I_{\mathrm{V}}(\mathbf{sai}(Q)) = f$$

sss

$$I_{\mathrm{V}}(\mathbf{sai}(\neg Q)) = v.$$

Logo, vale $\Delta_1(P)$.

$$I_{\mathrm{N}}(\neg Q) = 1$$

sss def. 5.3.6

$$I_{\mathrm{S}}(Q) = 1$$

sss HI

$$I_{\mathrm{V}}(\mathbf{sai}(Q)) = v$$

sss

$$I_{\mathrm{V}}(\mathbf{sai}(\neg Q)) = f.$$

Logo, vale $\Delta_2(P)$.

Portanto, vale $\Delta(P)$.

- Caso P é $Q \to R$.

$$I_{\mathrm{S}}(Q \to R) = 1$$

$$\text{sss} \quad \text{def. 5.3.6}$$

$$I_N(Q) = 1 \text{ ou } I_S(R) = 1$$

$$\text{sss} \quad \text{HI}$$

$$I_V(\mathbf{sai}(Q)) = f \text{ ou } I_V(\mathbf{sai}(R)) = v$$

$$\text{sss}$$

$$I_V(\mathbf{sai}(Q) \rightarrow \mathbf{sai}(R)) = v$$

$$\text{sss}$$

$$I_V(\mathbf{sai}(Q \rightarrow R)) = v.$$

Logo, vale $\Delta_1(P)$.

$$I_N(Q \rightarrow R) = 1$$

$$\text{sss} \quad \text{def. 5.3.6}$$

$$I_S(Q) = 1 \text{ e } I_N(R) = 1$$

$$\text{sss} \quad \text{HI}$$

$$I_V(\mathbf{sai}(Q)) = v \text{ e } I_V(\mathbf{sai}(R)) = f$$

$$\text{sss}$$

$$I_V(\mathbf{sai}(Q) \rightarrow \mathbf{sai}(R)) = f$$

$$\text{sss}$$

$$I_V(\mathbf{sai}(Q \rightarrow R)) = f.$$

Logo, vale $\Delta_2(P)$.

Portanto, vale $\Delta(P)$.

- Caso P é $Q \wedge R$.

  O raciocínio é análogo ao anterior.

- Caso P é $Q \vee R$.

  O raciocínio é análogo ao anterior.

- Caso P é $\forall x\, Q$.

$$I_S(\forall x\, Q) = 1$$

$$\text{sss} \quad \text{def. 5.3.6}$$

$$\text{para cada } d \in \Delta,\ I(x|d)_S(Q) = 1$$

$$\text{sss} \quad \text{HI}$$

$$\text{para cada } d \in \Delta,\ I(x|d)_V(\mathbf{sai}(Q)) = v$$

$$\text{sss}$$

$$I_V(\forall x\ \mathbf{sai}(Q)) = v$$

sss

$$I_V(\mathbf{sai}(\forall x\, Q)) = v.$$

Logo, vale $\Delta_1(P)$.

$$I_N(\forall x\, Q) = 1$$

sss   def. 5.3.6

$$\text{existe } d \in \Delta,\ I(x|d)_N(Q) = 1$$

sss   HI

$$\text{existe } d \in \Delta,\ I(x|d)_V(\mathbf{sai}(Q)) = f$$

sss

$$I_V(\forall x\ \mathbf{sai}(Q)) = f$$

sss

$$I_V(\mathbf{sai}(\forall x\, Q)) = f.$$

Logo, vale $\Delta_2(P)$.

Portanto, vale $\Delta(P)$.

- Caso P é $\exists x\, Q$.

  O raciocínio é análogo ao anterior.

□

5.3.38 Lema. Se P é uma fórmula em LEC, então $I_V(P) = v$ sss $I_S(\mathbf{sia}(P)) = 1$.

Prova:

Suponha que P é uma fórmula em LEC.

$$I_V(P) = v$$

sss   escólio 5.3.35 (iii)

$$I_V(\mathbf{sai}(\mathbf{sia}(P)) = v$$

sss   lema 5.3.37

$$I_S(\mathbf{sia}(P)) = 1$$

□

5.3.39 Lema. Se $\begin{cases} \text{“ } \Upsilon \text{ ” não ocorre em } \Gamma \text{ e em } P, \\ \Gamma \models_{\text{LAR}} P, \end{cases}$ então $\mathbf{sai}(\Gamma) \models_{\text{LEC}} \mathbf{sai}(P)$.

Prova:

Suponha que $\begin{cases} \text{“ } \Upsilon \text{ ” não ocorre em } \Gamma \text{ e em } P, & (1) \\ \Gamma \models_{\text{LAR}} P. & (2) \end{cases}$

Seja I uma LEC-interpretação para $\mathbf{sai}(\Gamma) \cup \{\mathbf{sai}(P)\}$ que satisfaz $\mathbf{sai}(\Gamma)$. (3)

Temos que I é uma LAR-interpretação para $\Gamma \cup \{P\}$. (4)

Suponha que $Q \in \Gamma$. Daí, $\mathbf{sai}(Q) \in \mathbf{sai}(\Gamma)$, donde de (3), $I_V(\mathbf{sai}(Q)) = v$, e daí, pelo lema 5.3.37, $I_S(Q) = 1$.

Portanto, I satisfaz Γ, donde, de (4) e (2), I satisfaz P em LAR, ou seja, $I_S(P) = 1$, donde de (1) e pelo lema 5.3.37, $I_V(\mathbf{sai}(P)) = v$.

Logo, $\mathbf{sai}(\Gamma) \models_{\text{LEC}} \mathbf{sai}(P)$.

□

5.3.40 Lema. Se $\Gamma \models_{\text{LEC}} P$, então $\mathbf{sia}(\Gamma) \models_{\text{LAR}} \mathbf{sia}(P)$.

Prova:

Suponha que $\Gamma \models_{\text{LEC}} P$. (1)

Seja I uma LAR-interpretação para $\mathbf{sia}(\Gamma) \cup \{\mathbf{sia}(P)\}$ que satisfaz $\mathbf{sia}(\Gamma)$. (2)

Temos que I é uma LEC-interpretação para $\Gamma \cup \{P\}$. (3)

Suponha que $Q \in \Gamma$. Daí, $\mathbf{sia}(Q) \in \mathbf{sia}(\Gamma)$, donde de (2), $I_S(\mathbf{sia}(Q)) = 1$, e daí, pelo lema 5.3.38, $I_V(Q) = v$.

Portanto, I satisfaz Γ, donde de (3) e (1), I satisfaz P em LEC, ou seja, $I_V(P) = v$, donde pelo lema 5.3.38, $I_S(\mathbf{sia}(P)) = 1$.

Logo, $\mathbf{sia}(\Gamma) \models_{\text{LAR}} \mathbf{sia}(P)$.

□

5.3.41 Lema. Se “ Υ ” não ocorre em Γ e em P, então

- $\Gamma \models_{\text{LAR}} P$ sss $\mathbf{sai}(\Gamma) \models_{\text{LEC}} \mathbf{sai}(P)$.

Prova:

Imediata pelos lemas 5.3.39 e 5.3.40. □

5.3.42 Definição. $\mathbf{tr} \rightleftharpoons \mathbf{sai} \ o \ \mathbf{eld}$.

5.3.43 Teorema. $\Gamma \mathrel{|\!\!\!=}_{\text{LAR}} P$ sss $\mathbf{tr}(\Gamma) \mathrel{|\!\!\!=}_{\text{LEC}} \mathbf{tr}(P)$.

Prova:

$$\Gamma \mathrel{|\!\!\!=}_{\text{LAR}} P$$
$$\text{sss} \quad \text{teorema 5.3.30}$$
$$\mathbf{eld}(\Gamma) \mathrel{|\!\!\!=}_{\text{LAR}} \mathbf{eld}(P)$$
$$\text{sss} \quad \text{lema 5.3.41}$$
$$\mathbf{sai}(\mathbf{eld}(\Gamma)) \mathrel{|\!\!\!=}_{\text{LEC}} \mathbf{sai}(\mathbf{eld}(P))$$
$$\text{sss} \quad \text{def. 5.3.42}$$
$$\mathbf{tr}(\Gamma) \mathrel{|\!\!\!=}_{\text{LEC}} \mathbf{tr}(P)$$

□

5.4 Um Cálculo de Seqüentes para LAR

Nesta seção, fornecemos um cálculo de seqüentes para LAR, o qual caracteriza sintaticamente a lógica. Diversos resultados sintáticos são também apresentados e provados.

As leis abaixo relacionadas são adotadas como primitivas no cálculo de LAR.

5.4.1. Leis Estruturais.

- **Esquema da Reflexividade (RFL)**: Se $P \in \Gamma$, então $\Gamma \vdash_{\text{LAR}} P$.
- **Regra da Cadeia (CAD)**: $\dfrac{\Gamma \vdash_{\text{LAR}} P \qquad \Gamma, P \vdash_{\text{LAR}} Q}{\Gamma \vdash_{\text{LAR}} Q}$.
- **Regra da Monotonicidade (MON)**[14]: Se $\Gamma \subseteq \Gamma'$, então $\dfrac{\Gamma \vdash_{\text{LAR}} P}{\Gamma' \vdash_{\text{LAR}} P}$.

5.4.2. Leis de Introdução e Eliminação de Conectivos.

- **Esquema Modus Ponens (MP)**: Se P é uma fórmula pura, então $P, P \to Q \vdash_{\text{LAR}} Q$.
- **Regra da Dedução (RD)**: Se P é uma fórmula pura, então $\dfrac{\Gamma, P \vdash_{\text{LAR}} Q}{\Gamma \vdash_{\text{LAR}} P \to Q}$.
- **Esquema do ∧-Eliminação (∧-el)**: $\begin{cases} P \wedge Q \vdash_{\text{LAR}} P; \\ P \wedge Q \vdash_{\text{LAR}} Q. \end{cases}$

[14] Esta lei determina que todo subconjunto finito de um conjunto não trivial de fórmulas em LAR é também não trivial em LAR.

- **Esquema do ∧-Introdução (∧-int)**: $P, Q \mid_{\overline{\text{LAR}}} P \wedge Q$.

- **Regra da Prova por Casos (PC)**: $\dfrac{\Gamma \mid_{\overline{\text{LAR}}} P \vee Q \qquad \Gamma, P \mid_{\overline{\text{LAR}}} R \qquad \Gamma, Q \mid_{\overline{\text{LAR}}} R}{\Gamma \mid_{\overline{\text{LAR}}} R}$.

- **Esquema do ∨-Introdução (∨-int)**: $\begin{cases} P \mid_{\overline{\text{LAR}}} P \vee Q; \\ Q \mid_{\overline{\text{LAR}}} P \vee Q. \end{cases}$

- **Regra do ¬-Introdução (¬-int)**:
  * Se P e Q são fórmulas puras, então $\dfrac{\Gamma, P \mid_{\overline{\text{LAR}}} Q \qquad \Gamma, P \mid_{\overline{\text{LAR}}} \neg Q}{\Gamma \mid_{\overline{\text{LAR}}} \neg P}$.

- **Esquema da Dupla Negação (DN)**: $\begin{cases} \neg\neg P \mid_{\overline{\text{LAR}}} P; \\ P \mid_{\overline{\text{LAR}}} \neg\neg P. \end{cases}$

- **Esquema da Implicação Material (IM)**: $\begin{cases} P \to Q \mid_{\overline{\text{LAR}}} \neg P \vee Q; \\ \neg P \vee Q \mid_{\overline{\text{LAR}}} P \to Q; \\ \neg(P \to Q) \mid_{\overline{\text{LAR}}} P \wedge \neg Q; \\ P \wedge \neg Q \mid_{\overline{\text{LAR}}} \neg(P \to Q). \end{cases}$

- **Esquema de De Morgan (DM)**: $\begin{cases} \neg(P \vee Q) \mid_{\overline{\text{LAR}}} \neg P \wedge \neg Q; \\ \neg P \wedge \neg Q \mid_{\overline{\text{LAR}}} \neg(P \vee Q); \\ \neg(P \wedge Q) \mid_{\overline{\text{LAR}}} \neg P \vee \neg Q; \\ \neg P \vee \neg Q \mid_{\overline{\text{LAR}}} \neg(P \wedge Q). \end{cases}$

5.4.3. Leis Quantificacionais.

- **Esquema do ∀-Eliminação (∀-el)**: Se t é um termo puro, então $\forall x\, P \mid_{\overline{\text{LAR}}} P(x|t)$.

- **Regra da Generalização (GEN)**[15]:
  * Se $\begin{cases} \Gamma \mid_{\overline{\text{LAR}}} P(x|y) \\ y \text{ não é livre em } \Gamma \cup \{\forall x\, P\} \end{cases}$, então $\Gamma \mid_{\overline{\text{LAR}}} \forall x\, P$.

- **Regra da Testemunha (∃-el)**[16]: Se y não é livre em $\Gamma \cup \{\exists x\, P, Q\}$, então $\dfrac{\Gamma, P(x|y) \mid_{\overline{\text{LAR}}} Q}{\Gamma, \exists x\, P \mid_{\overline{\text{LAR}}} Q}$.

[15] Regra de introdução do quantificador universal "∀".
[16] Regra de eliminação do quantificador existencial "∃".

- **Esquema do ∃-Introdução (∃-int)**: Se t é um termo puro, então $P(x|t) \mid_{\overline{\mathrm{LAR}}} \exists x\, P$.

- **Esquema da Alternância (ALT)**: $\begin{cases} \neg\exists x\, P \mid_{\overline{\mathrm{LAR}}} \forall x\, \neg P; \\ \forall x\, \neg P \mid_{\overline{\mathrm{LAR}}} \neg\exists x\, P; \\ \neg\forall x\, P \mid_{\overline{\mathrm{LAR}}} \exists x\, \neg P; \\ \exists x\, \neg P \mid_{\overline{\mathrm{LAR}}} \neg\forall x\, P. \end{cases}$

5.4.4. Leis da Abrangência.

- **Esquema da Transitividade da Abrangência (TA)**: $t \;)\!\!= u, u \;)\!\!= v \mid_{\overline{\mathrm{LAR}}} t \;)\!\!= v$.

- **Esquema da Extensão (EXT)**:
  * Se x não é livre em t, t', então $\forall x\, (t \;)\!\!= x \rightarrow t' \;)\!\!= x) \mid_{\overline{\mathrm{LAR}}} t' \;)\!\!= t$.

- **Esquema da Globalização (GLOB)**:
  * Se $\begin{cases} x \text{ não é livre em } t, \\ x \text{ é de topo pontual em } P, \end{cases}$ então $\mathrm{ex}(t), \forall x\, (t \;)\!\!= x \rightarrow P) \mid_{\overline{\mathrm{LAR}}} P(x|t)$.

- **Postulado da Substituição (SUBST)**[17]:

(i) $t_1 \;)\!\!= u_1, \ldots, t_n \;)\!\!= u_n \mid_{\overline{\mathrm{LAR}}} f(t_1, \ldots, t_n) \;)\!\!= f(u_1, \ldots, u_n)$.

(ii) $t_1 \;)\!\!= u_1, \ldots, t_n \;)\!\!= u_n, p(t_1, \ldots, t_n) \mid_{\overline{\mathrm{LAR}}} p(u_1, \ldots, u_n)$.

(iii) $t_1 \;)\!\!= u_1, \ldots, t_n \;)\!\!= u_n, \neg p(t_1, \ldots, t_n) \mid_{\overline{\mathrm{LAR}}} \neg p(u_1, \ldots, u_n)$.

- **Esquema da Univocidade (UN)**: Se t, t' são termos puros, então $t \;)\!\!= t' \mid_{\overline{\mathrm{LAR}}} t' \;)\!\!= t$.
- **Esquema da Vacuidade (VAC)**:
  * Se $\begin{cases} P \text{ é uma fórmula atômica básica ou uma negação de fórmula atômica básica,} \\ P \text{ possui pelo menos uma ocorrência livre de topo de } x, \end{cases}$

  então $\mathrm{vac}(t) \mid_{\overline{\mathrm{LAR}}} P(x|t)$.

- **Esquema da Função (FUNC)**:
  * Se $\begin{cases} u \text{ é um termo puro,} \\ x_1, \ldots, x_n \text{ não são livres em } u, t_1, \ldots, t_n, \end{cases}$ então

$$\begin{cases} f(t_1, \ldots, t_n) \;)\!\!= u \mid_{\overline{\mathrm{LAR}}} \exists x_1 \ldots \exists x_n\, (t_1 \;)\!\!= x_1 \wedge \ldots \wedge t_n \;)\!\!= x_n \wedge f(x_1, \ldots, x_n) \;)\!\!= u)\, , \\ \exists x_1 \ldots \exists x_n\, (t_1 \;)\!\!= x_1 \wedge \ldots \wedge t_n \;)\!\!= x_n \wedge f(x_1, \ldots, x_n) \;)\!\!= u) \mid_{\overline{\mathrm{LAR}}} f(t_1, \ldots, t_n) \;)\!\!= u\, . \end{cases}$$

[17]Chamaremos esta esquema de Postulado, a fim de evitar confusão com os Esquemas Gerais da Substituição, apresentados adiante.

- **Esquema da Descrição (DESCR)**: Se t é um termo puro, então $\begin{cases} \Upsilon x\, P \;\models t \mid_{\overline{\text{LAR}}}\; P(x|t), \\ P(x|t) \mid_{\overline{\text{LAR}}}\; \Upsilon x\, P \;\models t. \end{cases}$

5.4.5 Exemplos. A título de ilustração, são apresentados a seguir exemplos de aplicação de algumas Leis da Abrangência, pertencentes ao cálculo de seqüentes de LAR. Para os exemplos, considere as constantes “Sócrates”, “Tom”, “Jerry” e “5”, o sinal funcional “+”, os sinais predicativos monádicos “leão”, “animal”, “feroz”, “gato”, “rato”, “homem” e “filósofo” e o sinal predicativo diádico “caça”.

- *Esquema da Transitividade da Abrangência*:

  $$\Upsilon x \text{ ser\_vivo}(x) \models \Upsilon x \text{ animal}(x), \Upsilon x \text{ animal}(x) \models \Upsilon x \text{ leão}(x) \mid_{\overline{\text{LAR}}} \Upsilon x \text{ ser\_vivo}(x) \models \Upsilon x \text{ leão}(x)$$

  A transitividade da abrangência vem da transitividade da inclusão de conjuntos.

- *Esquema da Extensão*:

  $$\forall x\, (\Upsilon x \text{ leão}(x) \models x \to \Upsilon x \text{ animal}(x) \models x) \mid_{\overline{\text{LAR}}} \Upsilon x \text{ animal}(x) \models \Upsilon x \text{ leão}(x)$$

  Informalmente, se todos os elementos da coleção associada a Υx leão(x) também são elementos da coleção associada a Υx animal(x), então esta última coleção contém a primeira.

- *Esquema da Globalização*:

  $$\text{ex}(\Upsilon x \text{ leão}(x)), \forall x\, (\Upsilon x \text{ leão}(x) \to \text{feroz}(x)) \mid_{\overline{\text{LAR}}} \text{feroz}(\Upsilon x \text{ leão}(x))$$

  Ou seja, se o termo Υx leão(x) for existencial e se todos os elementos da coleção associada a ele satisfazem à fórmula feroz(x), então o termo Υx leão(x) satisfaz esta mesma fórmula. A grosso modo, para que um termo existencial t satisfaça a uma fórmula P, é necessário que todos os elementos pertencentes ao âmbito de t satisfaçam P.

- *Postulado da Substituição (ii)*:

  $$\Upsilon x \text{ gato}(x) \models \text{Tom}, \Upsilon x \text{ rato}(x) \models \text{Jerry}, \text{caça}(\Upsilon x \text{ gato}(x), \Upsilon x \text{ rato}(x)) \mid_{\overline{\text{LAR}}} \text{caça}(\text{Tom}, \text{Jerry})$$

  Se a fórmula caça(Υx gato(x), Υx rato(x)) é verdadeira, então também será verdadeira para os elementos pertencentes aos âmbitos dos termos Υx gato(x) e Υx rato(x).

- *Esquema da Função*:

  $$\Upsilon y \text{ par}(y) + \Upsilon z \text{ ímpar}(z) \models 5 \mid_{\overline{\text{LAR}}} \exists x_1 \exists x_2 (\Upsilon y \text{ par}(y) \models x_1 \wedge \Upsilon z \text{ ímpar}(z) \models x_2 \wedge x_1 + x_2 \models 5)$$

  Se a soma de um par e um ímpar abrange “5”, então existe um par e existe um ímpar tal que a soma de ambos abrange “5”.

- *Esquema da Descrição*:

  $\Upsilon \mathsf{x}\,(\text{homem}(\mathsf{x}) \wedge \text{filósofo}(\mathsf{x})) \succcurlyeq \text{Sócrates} \vdash_{\text{LAR}} \text{homem(Sócrates)} \wedge \text{filósofo(Sócrates)}$

  Se Sócrates pertence ao âmbito do termo $\Upsilon \mathsf{x}\,(\text{homem}(\mathsf{x}) \wedge \text{filósofo}(\mathsf{x}))$, então a constante "Sócrates" satisfaz o corpo desta descrição.

Com base nas leis primitivas já apresentadas, formulamos a seguir alguns resultados sintáticos elementares de LAR.

5.4.6. Reflexividade da Abrangência (RA). $\vdash_{\text{LAR}} t \succcurlyeq t$.

Prova:

Considere x a primeira variável não livre em t. (1)

Pelo Esquema da Reflexividade (RFL), temos $t \succcurlyeq x \vdash_{\text{LAR}} t \succcurlyeq x$, donde pela Regra da Dedução (RD), $\vdash_{\text{LAR}} t \succcurlyeq x \to t \succcurlyeq x$.

Daí, por GEN, temos $\vdash_{\text{LAR}} \forall x\,(t \succcurlyeq x \to t \succcurlyeq x)$. (2)

De (1) e (2), pela Regra da Extensão (EXT), $\vdash_{\text{LAR}} t \succcurlyeq t$. □

5.4.7. Reflexividade da Igualdade (RI): $\vdash_{\text{LAR}} t = t$.

5.4.8. Simetria da Igualdade (RI): $t = u \vdash_{\text{LAR}} u = t$.

5.4.9. Transitividade da Igualdade (TI): $t = u, u = v \vdash_{\text{LAR}} t = v$.

A igualdade "≡", formulada na definição 5.2.26, não é, em geral, reflexiva. O contra-exemplo abaixo mostra uma situação em que isto ocorre.

5.4.10 Contra-exemplo. Seja I uma LAR-interpretação que atribui ao símbolo $\in$ seu significado habitual e cujo universo de discurso é a coleção dos números naturais. Considere o termo ambíguo $\Upsilon \mathsf{x}\,(\mathsf{x} \in \{1,2\})$. De acordo com o escólio 5.3.11,

$$I_{\text{S}}\Big(\Upsilon \mathsf{x}\,(\mathsf{x} \in \{1,2\}) \equiv \Upsilon \mathsf{x}\,(\mathsf{x} \in \{1,2\})\Big) = 0.$$

Portanto, $\vdash_{\text{LAR}} t \equiv t$ não é, em geral, um esquema correto em LAR. Restringindo-se este esquema para o caso em que t é um termo fixo, então o mesmo seria correto.

A partir da igualdade "≡" entre dois termos, podemos derivar a igualdade "=" em LAR, o que é mostrado pelo esquema abaixo.

5.4.11. $t \equiv t' \vdash_{\text{LAR}} t = t'$.

A *Regra do Corte*, a *Regra da Compacidade* e a *Regra da Dedução Generalizada*, apresentadas a seguir, serão necessárias para as provas de alguns resultados no decorrer deste trabalho.

5.4.12. Regra do Corte [18].

- Se $\begin{cases} \Gamma \vdash_{\text{LAR}} P_1 \\ \quad\vdots \\ \Gamma \vdash_{\text{LAR}} P_n \end{cases}$ e $\Phi, P_1, \ldots, P_n \vdash_{\text{LAR}} Q$, então $\Gamma, \Phi \vdash_{\text{LAR}} Q$.

5.4.13. Regra da Compacidade[19].

- Se $\Gamma \vdash_{\text{LAR}} P$, então existe Γ' finito tal que $\Gamma' \subseteq \Gamma$ e $\Gamma' \vdash_{\text{LAR}} P$.

5.4.14. Regra da Dedução Generalizada.

- Se $P_1, \ldots, P_n$ são fórmulas puras, então $\dfrac{\Gamma, P_1, \ldots, P_n \vdash_{\text{LAR}} Q}{\Gamma \vdash_{\text{LAR}} P_1 \wedge \ldots \wedge P_n \to Q}$.

Esboço da prova: A prova é feita por indução sobre n, tendo como caso inicial a Regra da Dedução primitiva. □

Em LAR, a paraconsistência é gerada por termos vácuos e a paracompletude e não-reflexividade por termos ambíguos [20]. Ou seja, fórmulas em LAR que não possuem ocorrência de descrições não apresentam estas deviâncias. Considerando a função **sai** (**s**ubstituição da **a**brangência por **i**gualdade), apresentada na definição 5.3.34, os resultados a seguir mostram que, para fórmulas não possuindo ocorrência de “ Υ ”, P é conseqüência de Γ em LAR implica que **sai**(P) é conseqüência de **sai**(Γ) em LEC, e vice-versa, ou seja, a função **sai** preserva a relação de conseqüência de LAR para LEC, e reciprocamente.

5.4.15 Lema. Se $\begin{cases} \Gamma \text{ e } P \text{ não possuem ocorrência de “ } \Upsilon \text{ ”}, \\ \Gamma \vdash_{\text{LAR}} P, \end{cases}$ então $\textbf{sai}(\Gamma) \vdash_{\text{LEC}} \textbf{sai}(P)$.

[18]Ou seja, se uma fórmula Q é obtida a partir de $\Phi \cup \{P_1, \ldots, P_n\}$ e, simultaneamente, $P_1, \ldots, P_n$ podem ser obtidos de Γ, então Q é derivável de $\Gamma \cup \Phi$. A formulação geral desta regra foi primeiramente apresentada por Gentzen em sua formalização da lógica clássica (POGORZELSKI, 1994).

[19]Esta lei determina que um conjunto de formulas é não trivial se cada um de seus subconjuntos finitos é não trivial (POGORZELSKI, 1994).

[20]Conforme o exemplo 5.3.10.

Prova:

Seja $\Delta(\Gamma \vdash_{\text{LAR}} P)$ uma propriedade sobre seqüentes válidos em LAR que não possuem "Υ", isto é, "$\Delta(\Gamma \vdash_{\text{LAR}} P)$" é "$\mathbf{sai}(\Gamma) \vdash_{\text{LEC}} \mathbf{sai}(P)$".

Suponha que $\begin{cases} \Gamma \text{ e } P \text{ não possuem ocorrência de "}\Upsilon\text{"}, \\ \Gamma \vdash_{\text{LAR}} P. \end{cases}$

- Se $\Gamma \vdash_{\text{LAR}} P$ é um exemplar do Esquema da Reflexividade, então $P \in \Gamma$, daí $\mathbf{sai}(P) \in \mathbf{sai}(\Gamma)$. Temos daí que $\mathbf{sai}(\Gamma) \vdash_{\text{LEC}} \mathbf{sai}(P)$, ou seja, $\Delta(\Gamma \vdash_{\text{LAR}} P)$.
- Considere o exemplar da Modus Ponens $P, P \to Q \vdash_{\text{LAR}} Q$. Temos que $\mathbf{sai}(\{P, P \to Q\})$ é $\{\mathbf{sai}(P), \mathbf{sai}(P) \to \mathbf{sai}(Q)\}$. Pela Modus Ponens em LEC, temos $\mathbf{sai}(P), \mathbf{sai}(P) \to \mathbf{sai}(Q) \vdash_{\text{LEC}} \mathbf{sai}(Q)$, donde, $\mathbf{sai}(\{P, P \to Q\}) \vdash_{\text{LEC}} \mathbf{sai}(Q)$, ou seja $\Delta(P, P \to Q \vdash_{\text{LAR}} Q)$. Portanto, o esquema Modus Ponens preserva Δ.
- Seja $P, Q \vdash_{\text{LAR}} P \wedge Q$ um exemplar do $\wedge$-int. $\mathbf{sai}(\{P, Q\})$ é $\{\mathbf{sai}(P), \mathbf{sai}(Q)\}$. Por $\wedge$-int em LEC, temos $\mathbf{sai}(P), \mathbf{sai}(Q) \vdash_{\text{LEC}} \mathbf{sai}(P) \wedge \mathbf{sai}(Q)$. Ou seja, $\mathbf{sai}(\{P, Q\}) \vdash_{\text{LEC}} \mathbf{sai}(P \wedge Q)$, donde, $\Delta(P, Q \vdash_{\text{LAR}} P \wedge Q)$. Logo, o esquema $\wedge$-int preserva Δ.
- Um exemplar do $\wedge$-el é da forma $P \wedge Q \vdash_{\text{LAR}} P$. Temos que $\mathbf{sai}(P \wedge Q)$ é $\mathbf{sai}(P) \wedge \mathbf{sai}(Q)$. Temos por $\wedge$-el em LEC que $\mathbf{sai}(P) \wedge \mathbf{sai}(Q) \vdash_{\text{LEC}} \mathbf{sai}(P)$. Ou seja, $\mathbf{sai}(P \wedge Q) \vdash_{\text{LEC}} \mathbf{sai}(P)$, donde $\Delta(P \wedge Q \vdash_{\text{LAR}} P)$. Daí, o esquema $\wedge$-el preserva Δ. Para os exemplares do $\wedge$-el da forma $P \wedge Q \vdash_{\text{LAR}} Q$, o raciocínio é análogo.
- Para os exemplares dos esquemas $\vee$-int, Dupla Negação, Implicação Material e De Morgan, o raciocínio é análogo.
- Considere $\forall x\, P \vdash_{\text{LAR}} P(x|t)$ um exemplar do $\forall$-el. Temos que $\mathbf{sai}(\forall x\, P)$ é $\forall x\; \mathbf{sai}(P)$. Por $\forall$-el em LEC, temos $\forall x\; \mathbf{sai}(P) \vdash_{\text{LEC}} \mathbf{sai}(P)(x|t)$, ou seja, $\mathbf{sai}(\forall x\, P) \vdash_{\text{LEC}} \mathbf{sai}(P)(x|t)$. Como t é um termo puro, temos $\mathbf{sai}(\forall x\, P) \vdash_{\text{LEC}} \mathbf{sai}(P(x|t))$, donde, $\Delta(\forall x\, P \vdash_{\text{LAR}} P(x|t))$. Portanto, o esquema $\forall$-el preserva Δ.
- Um exemplar do $\exists$-int é da forma $P(x|t) \vdash_{\text{LAR}} \exists x\, P$. Temos que $\mathbf{sai}(P(x|t))$ é $\mathbf{sai}(P)(x|t)$. Por $\exists$-int em LEC, temos $\mathbf{sai}(P)(x|t) \vdash_{\text{LEC}} \exists x\; \mathbf{sai}(P)$, ou seja, $\mathbf{sai}(P(x|t)) \vdash_{\text{LEC}} \mathbf{sai}(\exists x\, P)$, donde $\Delta(P(x|t) \vdash_{\text{LAR}} \exists x\, P)$. Portanto, $\exists$-int preserva Δ.
- Para os exemplares do Esquema da Alternância, o raciocínio é análogo.
- Seja $t \;)\!\!= u, u \;)\!\!= v \vdash_{\text{LAR}} t \;)\!\!= v$ um exemplar do Esquema da Transitividade da Abrangência (TA). Temos que $\mathbf{sai}(\{t \;)\!\!= u, u \;)\!\!= v\})$ é $\{t = u, u = v\}$, e $\mathbf{sai}(t \;)\!\!= v)$ é $t = v$. Daí, pela Transitividade da Igualdade em LEC, temos que $\mathbf{sai}(\{t \;)\!\!= u, u \;)\!\!= v\}) \vdash_{\text{LEC}} \mathbf{sai}(t \;)\!\!= v)$, ou seja, $\Delta(t \;)\!\!= u, u \;)\!\!= v \vdash_{\text{LAR}} t \;)\!\!= v)$. Logo, o esquema TA preserva Δ.

- Considere $\forall x\,(t \succeq x \to t' \succeq x) \vdash_{\text{LAR}} t' \succeq t$ um exemplar do Esquema da Extensão (EXT). Temos que $\mathbf{sai}(\forall x\,(t \succeq x \to t' \succeq x)) = \forall x\,(\mathbf{sai}(t \succeq x) \to \mathbf{sai}(t' \succeq x)) = \forall x\,(t = x \to t' = x)$. Temos também que $\mathbf{sai}(t' \succeq t) = (t' = t)$.
  Como $\forall x\,(t = x \to t' = x) \vdash_{\text{LEC}} t' = t$, temos então que
  $\mathbf{sai}(\forall x\,(t \succeq x \to t' \succeq x)) \vdash_{\text{LEC}} \mathbf{sai}(t' \succeq t)$, ou seja, $\Delta(\forall x\,(t \succeq x \to t' \succeq x) \vdash_{\text{LAR}} t' \succeq t)$.
  Portanto, EXT preserva Δ.
- Considere que $\begin{cases} x \text{ não é livre em } t, \\ x \text{ é de topo pontual em } P. \end{cases}$
  Um exemplar do Esquema da Globalização (GLOB) é da forma
  $\text{ex}(t), \forall x\,(t \succeq x \to P) \vdash_{\text{LAR}} P(x|t)$.
  Sendo x' a primeira variável não livre em P, temos que
  $\mathbf{sai}(\text{ex}(t)) = \mathbf{sai}(\exists x'\,(t \succeq x')) = \exists x'\,(\mathbf{sai}(t \succeq x')) = \exists x'\,(t = x')$ e
  $\mathbf{sai}(\forall x\,(t \succeq x \to P)) = \forall x\,(\mathbf{sai}(t \succeq x) \to \mathbf{sai}(P)) = \forall x\,(t = x \to \mathbf{sai}(P))$.
  Temos ainda que $\mathbf{sai}(P(x|t)) = \mathbf{sai}(P)(x|t)$.
  Como $\exists x'\,(t = x'), \forall x\,(t = x \to \mathbf{sai}(P)) \vdash_{\text{LEC}} \mathbf{sai}(P)(x|t)$[21], então
  $\mathbf{sai}(\{\text{ex}(t), \forall x\,(t \succeq x \to P)\}) \vdash_{\text{LEC}} \mathbf{sai}(P(x|t))$, donde
  $\Delta(\text{ex}(t), \forall x\,(t \succeq x \to P) \vdash_{\text{LAR}} P(x|t))$, ou seja, GLOB preserva Δ.
- Seja $t_1 \succeq u_1, \ldots, t_n \succeq u_n \vdash_{\text{LAR}} f(t_1, \ldots, t_n) \succeq f(u_1, \ldots, u_n)$ um exemplar do Postulado da Substituição (SUBST) (i). Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, temos que $\mathbf{sai}(t_i \succeq u_i) = (t_i = u_i)$. Temos também que $\mathbf{sai}(f(t_1, \ldots, t_n) \succeq f(u_1, \ldots, u_n)) = (f(t_1, \ldots, t_n) = f(u_1, \ldots, u_n))$.
  Pela Substituição em Termos Funcionais (STF) em LEC, temos
  $t_1 = u_1, \ldots, t_n = u_n \vdash_{\text{LEC}} f(t_1, \ldots, t_n) = f(u_1, \ldots, u_n)$.
  Ou seja, $\mathbf{sai}(\{t_1 \succeq u_1, \ldots, t_n \succeq u_n\}) \vdash_{\text{LEC}} \mathbf{sai}(f(t_1, \ldots, t_n) \succeq f(u_1, \ldots, u_n))$, donde
  $\Delta(t_1 \succeq u_1, \ldots, t_n \succeq u_n \vdash_{\text{LAR}} f(t_1, \ldots, t_n) \succeq f(u_1, \ldots, u_n))$.
  Para os exemplares de SUBST (ii) e (iii), o raciocínio é análogo, utilizando-se a Substituição em Fórmulas Atômicas (SFA) em LEC.
  Portanto, o Postulado da Substituição (SUBST) preserva Δ.
- Considere que $t \succeq t' \vdash_{\text{LAR}} t' \succeq t$ é um exemplar da Regra da Univocidade (UN). Como $\mathbf{sai}(t \succeq t') = (t = t)'$ e $\mathbf{sai}(t' \succeq t) = (t' = t)$, temos, por Simetria da Igualdade em LEC, que $\mathbf{sai}(t \succeq t') \vdash_{\text{LEC}} \mathbf{sai}(t' \succeq t)$. Logo, UN preserva Δ.
- Considere que $\begin{cases} P \text{ é fórmula atômica básica ou negação de fórmula atômica básica}, \\ P \text{ tem pelo menos uma ocorrência livre de topo de } x. \end{cases}$

[21] Pelo esquema da Quantificação Pontual em LEC, apresentado no item 3.3.7

Considere $\mathrm{vac}(t) \vdash_{\mathrm{LAR}} P(x|t)$ um exemplar do Esquema da Vacuidade (VAC).

Sendo x' a primeira variável não livre em P, temos que

$\mathbf{sai}(\mathrm{vac}(t)) = \mathbf{sai}(\neg\exists x'\,(t \models x')) = \neg\exists x'\,(\mathbf{sai}(t \models x')) = \neg\exists x'\,(t = x')$.

Temos também que $\mathbf{sai}(P(x|t)) = \mathbf{sai}(P)(x|t)$. Como $\neg\exists x'\,(t = x') \vdash_{\mathrm{LEC}} \mathbf{sai}(P)(x|t)$[22], então $\mathbf{sai}(\mathrm{vac}(t)) \vdash_{\mathrm{LEC}} \mathbf{sai}(P(x|t))$, donde $\Delta(\mathrm{vac}(t) \vdash_{\mathrm{LAR}} P(x|t))$. Logo, VAC preserva Δ.

- Considere que $x_1, \ldots, x_n$ não são livres em $u, t_1, \ldots, t_n$.

  Seja $f(t_1, \ldots, t_n) \models u \vdash_{\mathrm{LAR}} \exists x_1 \ldots \exists x_n\,(t_1 \models x_1 \wedge \ldots \wedge t_n \models x_n \wedge f(x_1, \ldots, x_n) \models u)$ um exemplar do Esquema da Função (FUNC).

  Temos que $\mathbf{sai}(f(t_1, \ldots, t_n) \models u) = (f(t_1, \ldots, t_n) = u)$.

  Temos também que $\mathbf{sai}(\exists x_1 \ldots \exists x_n\,(t_1 \models x_1 \wedge \ldots \wedge t_n \models x_n \wedge f(x_1, \ldots, x_n) \models u)) = \exists x_1 \ldots \exists x_n (t_1 = x_1 \wedge \ldots \wedge t_n = x_n \wedge f(x_1, \ldots, x_n) = u)$.

  Como $f(t_1, \ldots, t_n) = u \vdash_{\mathrm{LEC}} \exists x_1 \ldots \exists x_n (t_1 = x_1 \wedge \ldots \wedge t_n = x_n \wedge f(x_1, \ldots, x_n) = u)$, então temos que

  $\mathbf{sai}(f(t_1, \ldots, t_n) \models u) \vdash_{\mathrm{LEC}} \mathbf{sai}(\exists x_1 \ldots \exists x_n (t_1 \models x_1 \wedge \ldots \wedge t_n \models x_n \wedge f(x_1, \ldots, x_n) \models u))$, ou seja, $\Delta(f(t_1, \ldots, t_n) \models u \vdash_{\mathrm{LAR}} \exists x_1 \ldots \exists x_n\,(t_1 \models x_1 \wedge \ldots \wedge t_n \models x_n \wedge f(x_1, \ldots, x_n) \models u))$.

  Para os exemplares de FUNC da forma

  $\exists x_1 \ldots \exists x_n\,(t_1 \models x_1 \wedge \ldots \wedge t_n \models x_n \wedge f(x_1, \ldots, x_n) \models u) \vdash_{\mathrm{LAR}} f(t_1, \ldots, t_n) \models u$,

  o raciocínio é análogo. Logo, FUNC preserva Δ.

- Queremos mostrar que a Regra da Monotonicidade (MON) preserva Δ.

  Suponha que $\begin{cases} \Gamma \subseteq \Gamma', \\ \Gamma \vdash_{\mathrm{LAR}} P. \end{cases}$

  Por HI, temos que $\mathbf{sai}(\Gamma) \subseteq \mathbf{sai}(\Gamma')$ e $\mathbf{sai}(\Gamma) \vdash_{\mathrm{LEC}} \mathbf{sai}(P)$, donde por Monotonicidade em LEC, temos $\mathbf{sai}(\Gamma') \vdash_{\mathrm{LEC}} \mathbf{sai}(P)$. Portanto, a Regra da Monotonicidade preserva Δ.

- Queremos mostrar que a Regra da Cadeia preserva Δ.

  Suponha que $\begin{cases} \Gamma \vdash_{\mathrm{LAR}} P, \\ \Gamma, P \vdash_{\mathrm{LAR}} Q. \end{cases}$ Daí, por HI, $\begin{cases} \mathbf{sai}(\Gamma) \vdash_{\mathrm{LEC}} \mathbf{sai}(P), \\ \mathbf{sai}(\Gamma), \mathbf{sai}(P) \vdash_{\mathrm{LEC}} \mathbf{sai}(Q). \end{cases}$

  Daí, pela Regra da Cadeia (CAD) em LEC, $\mathbf{sai}(\Gamma) \vdash_{\mathrm{LEC}} \mathbf{sai}(Q)$.

  Portanto, a Regra da Cadeia preserva Δ.

- Queremos mostrar que a Regra da Dedução preserva Δ.

  Suponha que $\Gamma, P \vdash_{\mathrm{LAR}} Q$. Por HI, $\mathbf{sai}(\Gamma), \mathbf{sai}(P) \vdash_{\mathrm{LEC}} \mathbf{sai}(Q)$, donde, pela Regra da Dedução (RD) em LEC, $\mathbf{sai}(\Gamma) \vdash_{\mathrm{LEC}} \mathbf{sai}(P) \to \mathbf{sai}(Q)$, ou seja $\mathbf{sai}(\Gamma) \vdash_{\mathrm{LEC}} \mathbf{sai}(P \to Q)$.

[22] Isto é, $\neg\exists x'\,(t = x')$ acarreta qualquer fórmula em LEC.

Logo, a RD preserva Δ.

- Queremos mostrar que a Regra da Prova por Casos preserva Δ.

Suponha que $\begin{cases} \Gamma \vdash_{\text{LAR}} P \vee Q, \\ \Gamma, P \vdash_{\text{LAR}} R, \\ \Gamma, Q \vdash_{\text{LAR}} R. \end{cases}$ Por HI, temos $\begin{cases} \mathbf{sai}(\Gamma) \vdash_{\text{LEC}} \mathbf{sai}(P) \vee \mathbf{sai}(Q), \\ \mathbf{sai}(\Gamma), \mathbf{sai}(P) \vdash_{\text{LEC}} \mathbf{sai}(R), \\ \mathbf{sai}(\Gamma), \mathbf{sai}(Q) \vdash_{\text{LEC}} \mathbf{sai}(R). \end{cases}$

Daí, pela Regra da Prova por Casos (PC) em LEC, $\mathbf{sai}(\Gamma) \vdash_{\text{LEC}} \mathbf{sai}(R)$, donde temos que esta regra preserva Δ.

- Queremos mostrar que a Regra do $\neg$-Introdução preserva Δ.

Suponha que $\begin{cases} \Gamma, P \vdash_{\text{LAR}} Q, \\ \Gamma, P \vdash_{\text{LAR}} \neg Q. \end{cases}$ Por HI, temos $\begin{cases} \mathbf{sai}(\Gamma), \mathbf{sai}(P) \vdash_{\text{LEC}} \mathbf{sai}(Q), \\ \mathbf{sai}(\Gamma), \mathbf{sai}(P) \vdash_{\text{LEC}} \mathbf{sai}(\neg Q). \end{cases}$

Como $\mathbf{sai}(\neg Q) = \neg\, \mathbf{sai}(Q)$, pela Regra do $\neg$-Introdução ($\neg$-int) em LEC, temos $\mathbf{sai}(\Gamma) \vdash_{\text{LEC}} \neg\, \mathbf{sai}(P)$, donde $\mathbf{sai}(\Gamma) \vdash_{\text{LEC}} \mathbf{sai}(\neg P)$. Ou seja, esta regra preserva Δ.

- Queremos mostrar que a Regra da Generalização preserva Δ.

Suponha que $\begin{cases} \Gamma \vdash_{\text{LAR}} P(x|y), \\ y \text{ não é livre em } \Gamma \cup \{\forall x\, P\}. \end{cases}$

Por HI, $\mathbf{sai}(\Gamma) \vdash_{\text{LEC}} \mathbf{sai}(P(x|y))$, ou seja, $\mathbf{sai}(\Gamma) \vdash_{\text{LEC}} \mathbf{sai}(P)(x|y)$. Daí, por GEN em LEC, para um y não livre em $\mathbf{sai}(\Gamma)$ e em $\mathbf{sai}(P)$, $\mathbf{sai}(\Gamma) \vdash_{\text{LEC}} \forall y\ \mathbf{sai}(P)(x|y)$, donde por CGR em LEC, $\mathbf{sai}(\Gamma) \vdash_{\text{LEC}} \forall x\ \mathbf{sai}(P)$, ou seja, $\mathbf{sai}(\Gamma) \vdash_{\text{LEC}} \mathbf{sai}(\forall x\, P)$. Logo, GEN preserva Δ.

- Queremos mostrar que a Regra do $\exists$-el preserva Δ.

Suponha que $\begin{cases} \Gamma, P(x|y) \vdash Q, \\ y \text{ não é livre em } \Gamma \cup \{\exists x\, P, Q\}. \end{cases}$

Por HI, $\mathbf{sai}(\Gamma), \mathbf{sai}(P(x|y)) \vdash_{\text{LEC}} \mathbf{sai}(Q)$, donde $\mathbf{sai}(\Gamma), \mathbf{sai}(P)(x|y) \vdash_{\text{LEC}} \mathbf{sai}(Q)$.

Por $\exists$-el em LEC, $\mathbf{sai}(\Gamma), \exists x\ \mathbf{sai}(P) \vdash_{\text{LEC}} \mathbf{sai}(Q)$, ou seja, $\mathbf{sai}(\Gamma), \mathbf{sai}(\exists x\, P) \vdash_{\text{LEC}} \mathbf{sai}(Q)$.

Daí, $\exists$-el preserva Δ.

□

5.4.16 Lema. Se $\Gamma \vdash_{\text{LEC}} P$, então $\mathbf{sia}(\Gamma) \vdash_{\text{LAR}} \mathbf{sia}(P)$.

Esboço da prova: A prova é feita de modo análogo à anterior, por indução sobre seqüentes válidos em LEC. □

5.4.17 Teorema.

- Se Γ e P não possuem ocorrência de " Υ ", então $\Gamma \vdash_{\text{LAR}} P$ sss $\mathbf{sai}(\Gamma) \vdash_{\text{LEC}} \mathbf{sai}(P)$.

Prova: Imediata pelos lemas 5.4.15 e 5.4.16. □

Como LAR é uma lógica deviante, nem todas as leis da lógica clássica são válidas de modo irrestrito nesta lógica, como por exemplo, a modus ponens e a modus tollens. Os contra-exemplos abaixo mostram a não correção destas leis no cálculo de LAR.

5.4.18 Contra-exemplo. Seja I uma LAR-interpretação que dá o significado usual ao símbolo "$\neq$" e cujo universo de discurso é a coleção dos números naturais. Considere o termo vácuo $\Upsilon\mathsf{x}\,(\mathsf{x} \neq \mathsf{x})$. Temos que a fórmula atômica primo$(\Upsilon\mathsf{x}\,(\mathsf{x} \neq \mathsf{x}))$ é paraconsistente, ou seja, $I_{\mathrm{S}}(\mathrm{primo}(\Upsilon\mathsf{x}\,(\mathsf{x} \neq \mathsf{x}))) = 1$ e $I_{\mathrm{S}}(\neg\,\mathrm{primo}(\Upsilon\mathsf{x}\,(\mathsf{x} \neq \mathsf{x}))) = 1$, donde $I_{\mathrm{N}}(\mathrm{primo}(\Upsilon\mathsf{x}\,(\mathsf{x} \neq \mathsf{x}))) = 1$. Considerando a implicação primo$(\Upsilon\mathsf{x}\,(\mathsf{x} \neq \mathsf{x})) \to 2 \neq 2$, podemos ter

$$\begin{cases} I_{\mathrm{S}}(\mathrm{primo}(\Upsilon\mathsf{x}\,(\mathsf{x} \neq \mathsf{x}))) = 1; \\ I_{\mathrm{S}}(\mathrm{primo}(\Upsilon\mathsf{x}\,(\mathsf{x} \neq \mathsf{x})) \to 2 \neq 2) = \max\{I_{\mathrm{N}}(\mathrm{primo}(\Upsilon\mathsf{x}\,(\mathsf{x} \neq \mathsf{x}))), I_{\mathrm{S}}(2 \neq 2)\} = 1. \end{cases}$$

Portanto, as duas fórmulas acima são satisfeitas pela interpretação considerada, ao passo que a fórmula $2 \neq 2$ não é satisfeita, ou seja, $I_{\mathrm{S}}(2 \neq 2) = 0$. Deste modo,

$$\mathrm{primo}(\Upsilon\mathsf{x}\,(\mathsf{x} \neq \mathsf{x})), \mathrm{primo}(\Upsilon\mathsf{x}\,(\mathsf{x} \neq \mathsf{x})) \to 2 \neq 2 \not\vdash_{\mathrm{LAR}} 2 \neq 2.$$

Portanto, a lei Modus Ponens ($P, P \to Q \vdash_{\mathrm{LAR}} Q$) não é, em geral, um esquema correto em LAR. A mesma vale dentro de certas restrições alternativas. Uma delas é que a fórmula P seja pura.

5.4.19 Contra-exemplo. Seja I uma LAR-interpretação que dá o significado usual aos símbolos "$<$" e "$\leq$" e cujo universo de discurso é a coleção dos números naturais. Considere a fórmula $\Upsilon\mathsf{x}\,(\mathsf{x} \leq 10) < 8$. A mesma é uma fórmula paracompleta, pois $I_{\mathrm{S}}(\Upsilon\mathsf{x}\,(\mathsf{x} \leq 10) < 8) = 0$ e $I_{\mathrm{S}}(\neg(\Upsilon\mathsf{x}\,(\mathsf{x} \leq 10) < 8)) = 0$, donde $I_{\mathrm{N}}(\Upsilon\mathsf{x}\,(\mathsf{x} \leq 10) < 8) = 0$. Considere também a fórmula $\Upsilon\mathsf{x}(\mathsf{x}^2 = 8) \leq 10$, a qual comporta-se de forma paraconsistente. Temos que

$$\begin{cases} I_{\mathrm{S}}(\neg(\Upsilon\mathsf{x}\,(\mathsf{x}^2 = 8) \leq 10)) = 1, \\ I_{\mathrm{S}}(\Upsilon\mathsf{x}(\mathsf{x} \leq 10) < 8 \to \Upsilon\mathsf{x}(\mathsf{x}^2 = 8) \leq 10) = \max\{I_{\mathrm{N}}(\Upsilon\mathsf{x}(\mathsf{x} \leq 10) < 8), I_{\mathrm{S}}(\Upsilon\mathsf{x}(\mathsf{x}^2 = 8) \leq 10)\} = 1. \end{cases}$$

Como $I_{\mathrm{S}}(\neg(\Upsilon\mathsf{x}\,(\mathsf{x} \leq 10) < 8)) = 0$, então

$\neg(\Upsilon\mathsf{x}\,(\mathsf{x}^2 = 8) \leq 10), \Upsilon\mathsf{x}\,(\mathsf{x} \leq 10) < 8 \to \Upsilon\mathsf{x}\,(\mathsf{x}^2 = 8) \leq 10 \not\vdash_{\mathrm{LAR}} \neg(\Upsilon\mathsf{x}\,(\mathsf{x} \leq 10) < 8)$.

Logo, a lei Modus Tollens ($\neg Q, P \to Q \vdash_{\mathrm{LAR}} \neg P$) não é, em geral, um esquema correto em LAR. A mesma vale, por exemplo, sob a restrição de que P e Q sejam fórmulas puras, conforme demonstra o resultado abaixo.

5.4.20. Modus Tollens (MT): Se P e Q são fórmulas puras, então $\neg Q, P \to Q \vdash_{\mathrm{LAR}} \neg P$.

Prova:

1	P e Q são fórmulas puras	hip
2	$\neg Q$	pr
3	$P \to Q$	pr
4	$\quad$ P	sup
5	$\quad$ Q	1, 4, 3, MP
6	$\quad$ $\neg Q$	2
7	$\neg P$	1, 5, 6, ¬-int

Em vista dos contra-exemplos acima, é necessário definir dois novos tipos de implicação e equivalência para a elaboração das leis gerais de substituição e instanciação. O primeiro possui a modus ponens e uma lei irrestrita de introdução desta implicação, mas não a modus tollens. O segundo possui a modus ponens e a modus tollens, mas não uma lei irrestrita de introdução desta segunda implicação. Na seqüência, alguns resultados envolvendo estes novos conectivos são apresentados.

5.4.21 Definição. Definimos nas cláusulas abaixo a *implicação forte*, através do conectivo definido "$\rightarrowtriangle$", e a *equivalência forte*, através do conectivo definido "$\leftrightarrowtriangle$".

- $P \rightarrowtriangle Q \rightleftharpoons \Upsilon x\, Q \models \Upsilon x\, P$, onde x é a primeira variável não livre em $\{P, Q\}$.
- $P \leftrightarrowtriangle Q \rightleftharpoons (P \rightarrowtriangle Q) \wedge (Q \rightarrowtriangle P)$.

A samblagem "$P \rightarrowtriangle Q$" é lida "*P implica fortemente Q*". A samblagem "$P \leftrightarrowtriangle Q$" é lida "*P equivale fortemente a Q*".

5.4.22 Definição. Definimos nas cláusulas abaixo a *superimplicação*, através do conectivo definido "$\Rightarrow$", e a *superequivalência*, através do conectivo definido "$\Leftrightarrow$".

- $P \Rightarrow Q \rightleftharpoons (P \rightarrowtriangle Q) \wedge (\neg Q \rightarrowtriangle \neg P)$.
- $P \Leftrightarrow Q \rightleftharpoons (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$.

A samblagem "$P \Rightarrow Q$" é lida "*P superimplica Q*". A samblagem "$P \Leftrightarrow Q$" é lida "*P superequivale a Q*".

5.4.23 Convenção. No restante deste trabalho, adotaremos as seguintes convenções:

- A ordem de prioridade para a separação em subfórmulas passa a ser dada pela lista "$\Leftrightarrow, \Rightarrow, \leftrightarrowtriangle, \rightarrowtriangle, \leftrightarrow, \to, \{\wedge, \vee\}$".
- Quando o conectivo "$\rightarrowtriangle$" se suceder em uma fórmula, a parentetização implícita se dá da direita para a esquerda. O mesmo vale para o conectivo "$\Rightarrow$".

5.4.24. Modus Ponens Forte (MPF): $P, P \rightarrowtriangle Q \vdash_{\mathrm{LAR}} Q$.

Prova:

1	P	pr
2	$P \rightarrowtriangle Q$	pr
3	x é a primeira variável não livre em $\{P, Q\}$	dsg
4	$\Upsilon x\, Q \mathrel{)\!\!\models} \Upsilon x\, P$	2, 3, def. 5.4.21
5	$\Upsilon x\, P \mathrel{)\!\!\models} x$	1, DESCR
6	$\Upsilon x\, Q \mathrel{)\!\!\models} x$	4, 5, TA
7	Q	6, DESCR

5.4.25. Regra da Dedução Forte (RDF): Se $\Gamma, P \vdash_{\mathrm{LAR}} Q$, então $\Gamma \vdash_{\mathrm{LAR}} P \rightarrowtriangle Q$.

Prova:

Suponha $\Gamma, P \vdash_{\mathrm{LAR}} Q$.

Pela Regra da Compacidade (5.4.13), existe Γ' finito tal que $\Gamma' \subseteq \Gamma$ e $\Gamma', P \vdash_{\mathrm{LAR}} Q$. (1)

Seja x a primeira variável não livre em $\Gamma' \cup \{P, Q\}$.

Pela Regra da Descrição (DESCR), $\Upsilon x\, P \mathrel{)\!\!\models} x \vdash_{\mathrm{LAR}} P$. (2)

De (1) e (2), pela Regra do Corte (5.4.12), temos $\Gamma', \Upsilon x\, P \mathrel{)\!\!\models} x \vdash_{\mathrm{LAR}} Q$. (3)

Pela Regra da Descrição (DESCR), $Q \vdash_{\mathrm{LAR}} \Upsilon x\, Q \mathrel{)\!\!\models} x$. (4)

De (3) e (4), pela Regra da Cadeia (CAD), $\Gamma', \Upsilon x\, P \mathrel{)\!\!\models} x \vdash_{\mathrm{LAR}} \Upsilon x\, Q \mathrel{)\!\!\models} x$ donde, pela Regra da Dedução (RD), $\Gamma' \vdash_{\mathrm{LAR}} \Upsilon x\, P \mathrel{)\!\!\models} x \rightarrow \Upsilon x\, Q \mathrel{)\!\!\models} x$.

Aplicando a Regra da Generalização (GEN), temos $\Gamma' \vdash_{\mathrm{LAR}} \forall x (\Upsilon x\, P \mathrel{)\!\!\models} x \rightarrow \Upsilon x\, Q \mathrel{)\!\!\models} x)$, donde, pelo Esquema da Extensão (EXT), $\Gamma' \vdash_{\mathrm{LAR}} \Upsilon x\, Q \mathrel{)\!\!\models} \Upsilon x\, P$.

Logo, pela definição 5.4.21, $\Gamma' \vdash_{\mathrm{LAR}} P \rightarrowtriangle Q$.

Daí, pela Regra da Monotonicidade (MON), temos $\Gamma \vdash_{\mathrm{LAR}} P \rightarrowtriangle Q$. □

5.4.26. Modus Ponens Superforte (MPSF): $P, P \Rightarrow Q \vdash_{\mathrm{LAR}} Q$.

Prova:

1	P	pr
2	$P \Rightarrow Q$	pr
3	$(P \rightarrowtriangle Q) \wedge (\neg Q \rightarrowtriangle \neg P)$	2, def
4	$P \rightarrowtriangle Q$	3, $\wedge$-el
5	Q	1, 4, MPF

5.4.27. Modus Tollens Superforte (MTSF): $\neg Q, P \Rightarrow Q \mid_{\overline{\text{LAR}}} \neg P$

Prova:

1	$\neg Q$	pr
2	$P \Rightarrow Q$	pr
3	$(P \twoheadrightarrow Q) \wedge (\neg Q \twoheadrightarrow \neg P)$	2, def
4	$\neg Q \twoheadrightarrow \neg P$	3, $\wedge$-el
5	$\neg P$	1, 4, MPF

5.4.28. Reflexividade da Implicação Forte (RFLIF): $\mid_{\overline{\text{LAR}}} P \twoheadrightarrow P$.

Prova: Como a abrangência é reflexiva, temos que $\mid_{\overline{\text{LAR}}} \Upsilon x\, P \;\models\; \Upsilon x\, P$, onde x é a primeira variável não ocorrendo em P. Daí, $\mid_{\overline{\text{LAR}}} P \twoheadrightarrow P$, pela definição 5.4.21. □

5.4.29. Antecedente da Implicação Forte (AIF): $Q \mid_{\overline{\text{LAR}}} P \twoheadrightarrow Q$.

Prova: Conseqüência imediata da RDF. □

5.4.30. Implicação Pura (IP):

- Se P é fórmula pura, então $\mid_{\overline{\text{LAR}}} (P \twoheadrightarrow Q) \;\leftrightarrow\; (P \to Q)$.

Prova:

1	P é uma fórmula pura	hip
2	$\quad\mid P \twoheadrightarrow Q$	sup
3	$\quad\mid\quad\mid P$	sup
4	$\quad\mid\quad\mid Q$	3, 2, MPF
5	$\quad\mid P \to Q$	1, 3, 4, RD
6	$(P \twoheadrightarrow Q) \twoheadrightarrow (P \to Q)$	2, 5, RDF
7	$\quad\mid P \to Q$	sup
8	$\quad\mid\quad\mid P$	sup
9	$\quad\mid\quad\mid Q$	1, 8, 7, MP
10	$\quad\mid P \twoheadrightarrow Q$	8, 9, RDF
11	$(P \to Q) \twoheadrightarrow (P \twoheadrightarrow Q)$	7, 10, RDF
12	$((P \twoheadrightarrow Q) \twoheadrightarrow (P \to Q)) \wedge ((P \to Q) \twoheadrightarrow (P \twoheadrightarrow Q))$	6, 11, $\wedge$-int
13	$(P \twoheadrightarrow Q) \leftrightarrow (P \to Q)$	12, def. 5.4.21

5.4.31. Equivalência Pura (EP):

- Se P e Q são fórmulas puras, então $\mid_{\overline{\text{LAR}}} (P \leftrightarrow Q) \;\leftrightarrow\; (P \leftrightarrow Q)$.

5.4.32. Contraposição da Implicação Forte (CTPIF).

- Se P e Q são fórmulas puras, $\vdash_{\text{LAR}} (P \rightarrowtriangle Q) \leftrightarrow (\neg Q \rightarrowtriangle \neg P)$.

Prova:

1	P e Q são fórmulas puras	hip
2	$\quad P \rightarrowtriangle Q$	sup
3	$\quad P \rightarrow Q$	1, 2, IP
4	$\quad\quad \neg Q$	sup
5	$\quad\quad \neg P$	1, 4, 3, MT
6	$\quad \neg Q \rightarrowtriangle \neg P$	4, 5, RDF
7	$(P \rightarrowtriangle Q) \rightarrowtriangle (\neg Q \rightarrowtriangle \neg P)$	2, 6, RDF
8	$\quad \neg Q \rightarrowtriangle \neg P$	sup
9	$\quad \neg Q \rightarrow \neg P$	1, 8, IP
10	$\quad\quad P$	sup
11	$\quad\quad \neg\neg P$	10, DN
12	$\quad\quad \neg\neg Q$	1, 11, 9, MT
13	$\quad\quad Q$	12, DN
14	$\quad P \rightarrowtriangle Q$	10, 13, RDF
15	$(\neg Q \rightarrowtriangle \neg P) \rightarrowtriangle (P \rightarrowtriangle Q)$	8, 14, RDF
16	$(P \rightarrowtriangle Q) \leftrightarrow (\neg Q \rightarrowtriangle \neg P)$	7, 15, $\wedge$-int, def. 5.4.21

5.4.33. Contraposição da Implicação Superforte (CTPS). $P \Rightarrow Q \vdash_{\text{LAR}} \neg Q \Rightarrow \neg P$.

5.4.34. Implicação Forte Pura (IFP).

- Se P e Q são fórmulas puras, então $P \rightarrowtriangle Q \vdash_{\text{LAR}} P \Rightarrow Q$.

5.4.35. Equivalência Forte Pura (EFP).

- Se P e Q são fórmulas puras, então $P \leftrightarrow Q \vdash_{\text{LAR}} P \Leftrightarrow Q$.

5.4.36. Silogismo Hipotético Forte (SHF): $P \rightarrowtriangle Q, Q \rightarrowtriangle R \vdash_{\text{LAR}} P \rightarrowtriangle R$.

5.4.37. Transitividade da Equivalência Forte (TEF): $P \leftrightarrow Q, Q \leftrightarrow R \vdash_{\text{LAR}} P \leftrightarrow R$

5.4.38. Importação / Exportação (IE): $\vdash_{\text{LAR}} P \rightarrowtriangle (Q \rightarrowtriangle R) \leftrightarrow (P \wedge Q) \rightarrowtriangle R$.

5.4.39. Prova por Casos Forte (PCF): $P \vee Q, P \rightarrowtriangle R, Q \rightarrowtriangle R \vdash_{\text{LAR}} R$.

5.4.40. Dilema Construtivo Forte (DCF): $P \vee Q, P \rightarrowtriangle R, Q \rightarrowtriangle S \vdash_{\text{LAR}} R \vee S$.

5.4.41. $\leftrightarrowtriangle$-Eliminação ($\leftrightarrowtriangle$-el): $\begin{cases} \text{(i)}\ \ P, P \leftrightarrowtriangle Q \vdash_{\text{LAR}} Q; \\ \text{(ii)}\ Q, P \leftrightarrowtriangle Q \vdash_{\text{LAR}} P. \end{cases}$

5.4.42. $\leftrightarrowtriangle$-Preservação pela Negação ($\leftrightarrowtriangle$-pres):

- Se P e Q são fórmulas puras, então $P \leftrightarrowtriangle Q \vdash_{\text{LAR}} \neg P \leftrightarrowtriangle \neg Q$.

5.4.43. $\Leftrightarrow$-Eliminação ($\Leftrightarrow$-el): $\begin{cases} \text{(i)}\ \ P, P \Leftrightarrow Q \vdash_{\text{LAR}} Q; \\ \text{(ii)}\ Q, P \Leftrightarrow Q \vdash_{\text{LAR}} P. \end{cases}$

5.4.44. Silogismo Hipotético Superforte (SHSF): $P \Rightarrow Q, Q \Rightarrow R \vdash_{\text{LAR}} P \Rightarrow R$.

5.4.45. Transitividade da Superequivalência (TSE): $P \Leftrightarrow Q, Q \Leftrightarrow R \vdash_{\text{LAR}} P \Leftrightarrow R$.

5.4.46. Alternância para Quantificação Iterada[23]. $\vdash_{\text{LAR}} \neg\overrightarrow{\Psi}\overrightarrow{x}\, P \Leftrightarrow \overrightarrow{\Psi'}\overrightarrow{x}\, \neg P$.

Esboço da prova: A prova é feita por indução sobre n, tomando como caso inicial o Esquema da Alternância (ALT). □

5.4.47. Transporte de Quantificadores (TQ).

(i) Se x não é livre em P, então $\begin{cases} \vdash_{\text{LAR}} \Psi x\,(P \to Q) \Leftrightarrow P \to \Psi x\, Q. \\ \vdash_{\text{LAR}} \Psi x\,(P \# Q) \Leftrightarrow P \# \Psi x\, Q. \end{cases}$

(ii) Se x não é livre em Q, então $\begin{cases} \vdash_{\text{LAR}} \Psi x\,(P \to Q) \Leftrightarrow \Psi' x\, P \to Q. \\ \vdash_{\text{LAR}} \Psi x\,(P \# Q) \Leftrightarrow \Psi x\, P \# Q. \end{cases}$

5.4.48. Transporte de Quantificadores para Quantificação Iterada (TQQI).

(i) Se $\overrightarrow{x}$ não é livre em P, então $\begin{cases} \vdash_{\text{LAR}} P \to \overrightarrow{\Psi}\overrightarrow{x} Q \Leftrightarrow \overrightarrow{\Psi}\overrightarrow{x}(P \to Q). \\ \vdash_{\text{LAR}} P \wedge \overrightarrow{\Psi}\overrightarrow{x} Q \Leftrightarrow \overrightarrow{\Psi}\overrightarrow{x}(P \wedge Q). \\ \vdash_{\text{LAR}} P \vee \overrightarrow{\Psi}\overrightarrow{x} Q \Leftrightarrow \overrightarrow{\Psi}\overrightarrow{x}(P \vee Q). \end{cases}$

(ii) Se $\overrightarrow{x}$ não é livre em Q, então $\begin{cases} \vdash_{\text{LAR}} \overrightarrow{\Psi}\overrightarrow{x} P \to Q \Leftrightarrow \overrightarrow{\Psi'}\overrightarrow{x}(P \to Q). \\ \vdash_{\text{LAR}} \overrightarrow{\Psi}\overrightarrow{x} P \wedge Q \Leftrightarrow \overrightarrow{\Psi}\overrightarrow{x}(P \wedge Q). \\ \vdash_{\text{LAR}} \overrightarrow{\Psi}\overrightarrow{x} P \vee Q \Leftrightarrow \overrightarrow{\Psi}\overrightarrow{x}(P \vee Q). \end{cases}$

Esboço da prova: As provas são feitas por indução sobre n, onde o caso inicial é constatado a partir do lema 5.4.47. □

[23] Adotamos a denominação Quantificação Iterada para as listas $\Psi_1, \ldots, \Psi_n$, representadas por $\overrightarrow{\Psi}$, onde cada Ψ_i é um dos quantificadores $\forall$ ou $\exists$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$,.

5.4.49 Lema.

- $\vdash_{\text{LAR}} P \Leftrightarrow Q$ sss $\begin{cases} \vdash_{\text{LAR}} P \leftrightarrow Q. \\ \vdash_{\text{LAR}} \neg P \leftrightarrow \neg Q. \end{cases}$

Abaixo, são listadas alguns dos esquemas primitivos de LAR, expressos na forma de equivalência forte.

5.4.50. Esquema da Descrição: Se t é um termo puro, então $\vdash_{\text{LAR}} \Upsilon x\, P \models t \leftrightarrow P(x|t)$.

5.4.51. Esquema da Função:

- Se $\begin{cases} u \text{ é um termo puro,} \\ x_1, \ldots, x_n \text{ não são livres em } u, t_1, \ldots, t_n, \end{cases}$ então

$\vdash_{\text{LAR}} f(t_1, \ldots, t_n) \models u \leftrightarrow \exists x_1 \ldots \exists x_n\, (t_1 \models x_1 \wedge \ldots \wedge t_n \models x_n \wedge f(x_1, \ldots, x_n) \models u)$.

5.4.52. Esquema da Extensão:

- Se x não é livre em t, t', então $\begin{cases} \text{(i) } \vdash_{\text{LAR}} \forall x\, (t \models x \rightarrow t' \models x) \leftrightarrow t' \models t. \\ \text{(ii) } \vdash_{\text{LAR}} \forall x\, (t \models x \leftrightarrow t' \models x) \leftrightarrow t' = t. \end{cases}$

Prova de (i):

1	x não é livre em t, t'	hip
2	$\quad \forall x\, (t \models x \rightarrow t' \models x)$	sup
3	$\quad t' \models t$	1, 2, EXT
4	$\forall x\, (t \models x \rightarrow t' \models x) \rightharpoonup t' \models t$	2, 4, RDF
5	$\quad t' \models t$	sup
6	$\quad\quad t \models x$	sup
7	$\quad\quad t' \models x$	6, 7, TA
8	$\quad t \models x \rightarrow t' \models x$	7, 8, RD
9	$\quad \forall x\, (t \models x \rightarrow t' \models x)$	1, 9, GEN
10	$t' \models t \rightharpoonup \forall x\, (t \models x \rightarrow t' \models x)$	6, 10, RDF
11	$\forall x\, (t \models x \rightarrow t' \models x) \leftrightarrow t' \models t$	4, 11, def. 5.4.21

A seguir, são listadas algumas das leis primitivas do cálculo de LAR, para as quais vale a equivalência superforte.

5.4.53. Esquema da Dupla Negação (DN): $\vdash_{\text{LAR}} \neg\neg P \Leftrightarrow P$.

5.4.54. Esquema da Implicação Material (IM): $\begin{cases} \vdash_{\text{LAR}} P \to Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q; \\ \vdash_{\text{LAR}} \neg(P \to Q) \Leftrightarrow P \wedge \neg Q. \end{cases}$

5.4.55. Esquema de De Morgan (DM): $\begin{cases} \vdash_{\text{LAR}} \neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q; \\ \vdash_{\text{LAR}} \neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q. \end{cases}$

5.4.56. Esquema da Alternância (ALT): $\begin{cases} \vdash_{\text{LAR}} \neg\forall x\, P \Leftrightarrow \exists x\, \neg P; \\ \vdash_{\text{LAR}} \neg\exists x\, P \Leftrightarrow \forall x\, \neg P; \end{cases}$

Os lemas a seguir são necessários para a prova dos resultados relativos às leis gerais de substituição e instanciação para a correspondência e o alcance.

5.4.57. Lema da Substituição para Conectivos e Equivalência (LSCE).

Considere $* \in \{\Leftrightarrow\!\!\!\!\!\!\;\;, \Leftrightarrow\}$ e $\# \in \{\wedge, \vee\}$:

(i) $P_1 \Leftrightarrow P_2 \vdash_{\text{LAR}} \neg P_1 \Leftrightarrow \neg P_2$.

(ii) $P_1 * P_2 \vdash_{\text{LAR}} (Q \# P_1) * (Q \# P_2)$.

(iii) $P_1 * P_2 \vdash_{\text{LAR}} (P_1 \# Q) * (P_2 \# Q)$.

(iv) $P_1 * P_2 \vdash_{\text{LAR}} (Q \to P_1) * (Q \to P_2)$.

(v) $P_1 \Leftrightarrow P_2 \vdash_{\text{LAR}} (P_1 \to Q) \Leftrightarrow (P_2 \to Q)$.

(vi) $P_1 * P_2, Q_1 * Q_2 \vdash_{\text{LAR}} (P_1 \# Q_1) * (P_2 \# Q_2)$.

(vii) $P_1 \Leftrightarrow P_2, Q_1 \Leftrightarrow Q_2 \vdash_{\text{LAR}} (P_1 \to Q_1) \Leftrightarrow (P_2 \to Q_2)$.

5.4.58. Lema da Substituição para a Igualdade em Termos Funcionais.

- $t_1 = u_1, \ldots, t_n = u_n \vdash_{\text{LAR}} f(t_1, \ldots, t_n) = f(u_1, \ldots, u_n)$.

5.4.59. Lema da Substituição para a Superequivalência em Fórmulas Atômicas Básicas.

- $t_1 = u_1, \ldots, t_n = u_n \vdash_{\text{LAR}} p(t_1, \ldots, t_n) \Leftrightarrow p(u_1, \ldots, u_n)$.

5.4.60. Lema da Substituição para a Superequivalência em Fórmulas Atômicas Não Básicas.

- $t_1 = t_2, u_1 = u_2 \vdash_{\text{LAR}} t_1 \;)\!\!= u_1 \Leftrightarrow t_2 \;)\!\!= u_2$.

5.4.61. Lema da Substituição da Superequivalência para Quantificadores e Descrições (LSSQD).

- $\forall x\,(P \Leftrightarrow Q) \vdash_{\text{LAR}} \Psi x\, P \Leftrightarrow \Psi x\, Q$, onde $\Psi \in \{\forall, \exists, \Upsilon\}$.

5.4.62. Lema da Substituição para Conectivos e Implicação (LSCI).

Considere $* \in \{\rightarrowtriangle, \Rightarrow\}$ e $\# \in \{\wedge, \vee\}$:

(i) $P_1 * P_2 \vdash_{\mathrm{LAR}} (P_1 \# Q) * (P_2 \# Q)$.

(ii) $P_1 * P_2 \vdash_{\mathrm{LAR}} (Q \# P_1) * (Q \# P_2)$.

(iii) $P_1 * P_2 \vdash_{\mathrm{LAR}} (Q \rightarrow P_1) * (Q \rightarrow P_2)$.

(iv) $P_1 \Rightarrow P_2 \vdash_{\mathrm{LAR}} (P_2 \rightarrow Q) \Rightarrow (P_1 \rightarrow Q)$.

(v) $P_1 * P_2, Q_1 * Q_2 \vdash_{\mathrm{LAR}} (P_1 \# Q_1) * (P_2 \# Q_2)$.

(vi) $P_1 \Rightarrow P_2, Q_1 \Rightarrow Q_2 \vdash_{\mathrm{LAR}} (P_2 \rightarrow Q_1) \Rightarrow (P_1 \rightarrow Q_2)$.

5.4.63. Lema da Substituição para a Implicação Forte em Fórmulas Atômicas Básicas.

(i) $t_1 \mathrel{)\!\models} u_1, \ldots, t_n \mathrel{)\!\models} u_n \vdash_{\mathrm{LAR}} p(t_1, \ldots, t_n) \rightarrowtriangle p(u_1, \ldots, u_n)$.

(ii) $t_1 \mathrel{)\!\models} u_1, \ldots, t_n \mathrel{)\!\models} u_n \vdash_{\mathrm{LAR}} \neg p(t_1, \ldots, t_n) \rightarrowtriangle \neg p(u_1, \ldots, u_n)$.

5.4.64. Lema da Substituição para a Implicação Forte em Fórmulas Atômicas Não Básicas.

(i) $u_1 \mathrel{)\!\models} u_2, v_1 \mathrel{)\!\models} v_2 \vdash_{\mathrm{LAR}} u_2 \mathrel{)\!\models} v_1 \rightarrowtriangle u_1 \mathrel{)\!\models} v_2$.

(ii) $u_1 \mathrel{)\!\models} u_2, v_1 \mathrel{)\!\models} v_2 \vdash_{\mathrm{LAR}} \neg(u_1 \mathrel{)\!\models} v_2) \rightarrowtriangle \neg(u_2 \mathrel{)\!\models} v_1)$.

5.4.65. Lema da Substituição para a Implicação Forte e Quantificadores.

- $\forall x\,(P \rightarrowtriangle Q) \vdash_{\mathrm{LAR}} \Psi x\, P \rightarrowtriangle \Psi x\, Q$.

5.4.66 Teorema. $\vdash_{\text{LAR}} \forall x\,(P \rightarrowtriangle Q) \Leftrightarrow \Upsilon x\, Q \mathrel{)\!=} \Upsilon x\, P$.

Prova:

1	$\forall x\,(P \rightarrowtriangle Q)$	sup
2	$P(x\vert y) \rightarrowtriangle Q(x\vert y)$	1, $\forall$-el
3	y não é livre em $\{P, Q\}$	dsg
4	$\Upsilon x\, P \mathrel{)\!=} y$	sup
5	$P(x\vert y)$	4, DESCR
6	$Q(x\vert y)$	5, 2, MPF
7	$\Upsilon x\, Q \mathrel{)\!=} y$	6, DESCR
8	$\Upsilon x\, P \mathrel{)\!=} y \rightarrow \Upsilon x\, Q \mathrel{)\!=} y$	4, 7, RD
9	$\forall y\,(\Upsilon x\, P \mathrel{)\!=} y \rightarrow \Upsilon x\, Q \mathrel{)\!=} y)$	3, 8, GEN
10	$\Upsilon x\, Q \mathrel{)\!=} \Upsilon x\, P$	9, EXT
11	$\forall x\,(P \rightarrowtriangle Q) \rightarrowtriangle \Upsilon x\, Q \mathrel{)\!=} \Upsilon x\, P$	1, 10, RDF
12	$\neg(\Upsilon x\, Q \mathrel{)\!=} \Upsilon x\, P) \rightarrowtriangle \neg(\forall x\,(P \rightarrowtriangle Q))$	11, CTPIF
13	$\forall x\,(P \rightarrowtriangle Q) \Rightarrow \Upsilon x\, Q \mathrel{)\!=} \Upsilon x\, P$	11, 12, $\wedge$-int, def. 5.4.22
14	$\Upsilon x\, Q \mathrel{)\!=} \Upsilon x\, P$	sup
15	P	sup
16	$P(x\vert x)$	15
17	$\Upsilon x\, P \mathrel{)\!=} x$	16, DESCR
18	$\Upsilon x\, Q \mathrel{)\!=} x$	14, 17, TA
19	$Q(x\vert x)$	18, DESCR
20	Q	19
21	$P \rightarrowtriangle Q$	15, 20, RDF
22	$\forall x\,(P \rightarrowtriangle Q)$	21, GEN
23	$\Upsilon x\, Q \mathrel{)\!=} \Upsilon x\, P \rightarrowtriangle \forall x\,(P \rightarrowtriangle Q)$	14, 22, RDF
24	$\neg(\forall x\,(P \rightarrowtriangle Q)) \rightarrowtriangle \neg(\Upsilon x\, Q \mathrel{)\!=} \Upsilon x\, P)$	23, CTPIF
25	$\Upsilon x\, Q \mathrel{)\!=} \Upsilon x\, P \Rightarrow \forall x\,(P \rightarrowtriangle Q)$	23, 24, $\wedge$-int, def. 5.4.22
26	$\forall x\,(P \rightarrowtriangle Q) \Leftrightarrow \Upsilon x\, Q \mathrel{)\!=} \Upsilon x\, P$	13, 25, $\wedge$-int, def.5.4.22

5.4.67 Corolário. $\vdash_{\text{LAR}} \forall x\,(P \leftrightarrowtriangle Q) \Leftrightarrow \Upsilon x\, Q = \Upsilon x\, P$.

Prova: Conseqüência do teorema 5.4.66. □

Podemos reescrever as definições de $\mathrm{vac}(t), \mathrm{ex}(t), \mathrm{fix}(t), \mathrm{un}(t)$ e $\mathrm{amb}(t)$, apresentadas na definição 5.2.26, utilizando a equivalência superforte.

5.4.68 Escólio. Sejam x e y variáveis distintas não livres em t. Então valem as seguintes proposições:

- $\vdash_{\text{LAR}} \mathrm{vac}(t) \Leftrightarrow \neg\exists x\,(t \mathrel{)\!\!=} x)$.
- $\vdash_{\text{LAR}} \mathrm{ex}(t) \Leftrightarrow \exists x\,(t \mathrel{)\!\!=} x)$.
- $\vdash_{\text{LAR}} \mathrm{fix}(t) \Leftrightarrow \forall x\,\forall y\,(t \mathrel{)\!\!=} x \wedge t \mathrel{)\!\!=} y \to x = y)$.
- $\vdash_{\text{LAR}} \mathrm{un}(t) \Leftrightarrow \mathrm{ex}(t) \wedge \mathrm{fix}(t)$.
- $\vdash_{\text{LAR}} \mathrm{amb}(t) \Leftrightarrow \exists x\,\exists y\,(t \mathrel{)\!\!=} x \wedge t \mathrel{)\!\!=} y \to x \neq y)$.

Definimos a seguir os quantificadores numéricos "$\overline{\exists}$" ("existe um máximo") e "$\exists!$" ("existe um único").

5.4.69. Quantificadores Numéricos.

- $\overline{\exists}x\,P \rightleftharpoons \forall x_1 \forall x_2 (P(x|x_1) \wedge P(x|x_2) \to x_1 = x_2)$, onde x_1, x_2 são as primeiras variáveis não livres em $\exists x\,P$.
- $\exists! x\,P \rightleftharpoons \exists x\,P \wedge \overline{\exists}x\,P$.

5.4.70 Escólio. Sejam x_1 e x_2 variáveis não livres em $\exists x\,P$. Valem as seguintes proposições:

- $\vdash_{\text{LAR}} \overline{\exists}x\,P \leftrightarrow \forall x_1 \forall x_2 (P(x|x_1) \wedge P(x|x_2) \to x_1 = x_2)$.
- $\vdash_{\text{LAR}} \exists! x\,P \leftrightarrow \exists x\,P \wedge \overline{\exists}x\,P$.

5.4.71 Escólio. Valem as seguintes proposições, onde para as duas primeiras x não é livre em t:

- $\vdash_{\text{LAR}} \mathrm{fix}(t) \Leftrightarrow \overline{\exists}x\,(t \mathrel{)\!\!=} x)$.
- $\vdash_{\text{LAR}} \mathrm{un}(t) \Leftrightarrow \exists! x\,(t \mathrel{)\!\!=} x)$.
- $\vdash_{\text{LAR}} \mathrm{un}(\Upsilon x\,P) \leftrightarrow \exists! x\,P$.
- $\vdash_{\text{LAR}} \mathrm{fix}(\Upsilon x\,P) \leftrightarrow \overline{\exists}x\,P$.
- $\vdash_{\text{LAR}} \mathrm{ex}(\Upsilon x\,P) \leftrightarrow \exists x\,P$.

5.4.72 Lema. Se t é um termo puro, então $\vdash_{\text{LAR}} \mathrm{un}(t)$.

5.4.73 Lema.

- $\vdash_{\text{LAR}} \mathrm{ex}(t) \vee \mathrm{vac}(t)$.
- $\vdash_{\text{LAR}} (\mathrm{ex}(t_1) \wedge \ldots \wedge \mathrm{ex}(t_n)) \vee (\mathrm{vac}(t_1) \vee \ldots \vee \mathrm{vac}(t_n))$.

5.4.74 Lema. $\vdash_{\text{LAR}} t_1 \equiv t_2 \leftrightarrow \mathrm{vac}(t_1) \vee \mathrm{vac}(t_2) \vee (\mathrm{un}(t_1) \wedge \mathrm{un}(t_2))$.

A seguir, apresentaremos e provaremos alguns resultados concernentes à congruência de designadores em LAR.

5.4.75 Lema. Se y não é livre em $\forall x\, P$, então $\begin{cases} \text{(i)} \vdash_{\text{LAR}} \exists x\, P \Leftrightarrow \exists y\, P(x|y). \\ \text{(ii)} \vdash_{\text{LAR}} \forall x\, P \Leftrightarrow \forall y\, P(x|y). \end{cases}$

Prova de (i) :

1	y não é livre em $\forall x\, P$	hip
2	$\exists x\, P$	sup
3	$P(x\|y)$	sup
4	$\exists y\, P(x\|y)$	3, $\exists$-int
5	$\exists y\, P(x\|y)$	1, 2, 3, 4, $\exists$-el
6	$\exists x\, P \rightarrowtriangle \exists y\, P(x\|y)$	2, 5, RDF
7	$\exists y\, P(x\|y)$	sup
8	$P(x\|y)$	sup
9	$\exists x\, P$	8, $\exists$-int
10	$\exists x\, P$	1, 7, 8, 9, $\exists$-el
11	$\exists y\, P(x\|y) \rightarrowtriangle \exists x\, P$	7, 10, RDF
12	$\exists x\, P \leftrightarrowtriangle \exists y\, P(x\|y)$	6, 11, $\wedge$-int, def. 5.4.21
13	$\neg\exists x\, P$	sup
14	$\forall x\, \neg P$	13, ALT
15	$\neg P(x\|y)$	14, $\forall$-el
16	$\forall y\, \neg P(x\|y)$	1, 15, GEN
17	$\neg\exists y\, P(x\|y)$	16, ALT
18	$\neg\exists x\, P \rightarrowtriangle \neg\exists y\, P(x\|y)$	13, 17, RDF
19	$\neg\exists y\, P(x\|y)$	sup
20	$\forall y\, \neg P(x\|y)$	19, ALT
21	$\neg P(x\|y)$	20, $\forall$-el
22	$\forall x\, \neg P$	1, 21, GEN
23	$\neg\exists x\, P$	22, ALT
24	$\neg\exists y\, P(x\|y) \rightarrowtriangle \neg\exists x\, P$	19, 23, RDF
25	$\neg\exists x\, P \leftrightarrowtriangle \neg\exists y\, P(x\|y)$	18, 24, $\wedge$-int, def. 5.4.21
26	$\exists x\, P \Leftrightarrow \exists y\, P(x\|y)$	12, 25, lema 5.4.49

Prova de (ii) :

Suponha que y não é livre em $\forall x\, P$. (1)

Temos que

$$\begin{aligned} & \forall x\, P \\ \Leftrightarrow\ & \quad \text{DN, ALT} \\ & \neg\exists x\, \neg P \\ \Leftrightarrow\ & \quad \text{1, lema 5.4.75 (i)} \\ & \neg\exists y\, \neg P(x|y) \\ \Leftrightarrow\ & \quad \text{ALT, DN} \\ & \forall y\, P(x|y) \end{aligned}$$

Logo, $\vdash_{\text{LAR}} \forall x\, P \Leftrightarrow \forall y\, P(x|y)$. (2)

Temos que

$$\begin{aligned} & \neg\forall x\, P \\ \Leftrightarrow\ & \quad \text{ALT} \\ & \exists x\, \neg P \\ \Leftrightarrow\ & \quad \text{1, lema 5.4.75 (i)} \\ & \exists y\, \neg P(x|y) \\ \Leftrightarrow\ & \quad \text{ALT} \\ & \neg\forall y\, P(x|y) \end{aligned}$$

Logo, $\vdash_{\text{LAR}} \neg\forall x\, P \Leftrightarrow \neg\forall y\, P(x|y)$. (3)

Logo, de (2) e (3), pelo lema 5.4.49, $\vdash_{\text{LAR}} \forall x\, P \Leftrightarrow \forall y\, P(x|y)$.

□

A seguir, definimos a relação de correspondência entre designadores em LAR. *Correspondência* é o nome genérico adotado para representar igualdade entre termos ou superequivalência entre fórmulas.

5.4.76 Definição. Sejam D_1 e D_2 dois designadores em LAR tal que ambos são termos ou ambos são fórmulas. A samblagem "$D_1 \Leftrightarrow D_2$" representa:

- $D_1 = D_2$, se D_1 e D_2 são ambos termos;
- $D_1 \Leftrightarrow D_2$, se D_1 e D_2 são ambos fórmulas.

No restante desta seção, o sinal $\Leftrightarrow$ será denominado *sinal da correspondência*. Deste modo, a samblagem "$D_1 \Leftrightarrow D_2$" é lida "*D_1 corresponde a D_2*".

5.4.77. Regra da Congruência (CGR).

- Se $D \approx_c E$, então $\vdash_{\text{LAR}} D \Leftrightarrow E$.

Prova:

- Caso D é uma constante c.

  Então E é uma constante b. Se $D \approx_c E$, pela definição 5.2.24, então c e b são a mesma constante. Logo, pela Reflexividade da Igualdade 5.4.7, $\vdash_{\text{LAR}} c = b$, donde $\vdash_{\text{LAR}} D \Leftrightarrow E$.

- Caso D é uma variável x.

  Analogamente ao caso anterior, temos $\vdash_{\text{LAR}} D \Leftrightarrow E$.

- Caso D é $f(t_1, \ldots, t_n)$.

  Então E é $f(u_1, \ldots, u_n)$. Se $D \approx_c E$, então $f(t_1, \ldots, t_n) \approx_c f(u_1, \ldots, u_n)$, donde pela def. 5.2.24, $t_1 \approx_c u_1, \ldots, t_n \approx_c u_n$. Daí, por HI, $\vdash_{\text{LAR}} t_1 = u_1, \ldots, \vdash_{\text{LAR}} t_n = u_n$, donde pelo lema 5.4.58, $\vdash_{\text{LAR}} f(t_1, \ldots, t_n) = f(u_1, \ldots, u_n)$. Ou seja, $\vdash_{\text{LAR}} D \Leftrightarrow E$.

- Caso D é $\Upsilon x\, P$.

  Então E é $\Upsilon y\, Q$. Se $D \approx_c E$, então $\Upsilon x\, P \approx_c \Upsilon y\, Q$, o que é o mesmo que $\Upsilon y\, Q \approx_c \Upsilon x\, P$ (fato 5.2.25).

  Daí, pela definição 5.2.24, $\begin{cases} x \text{ não é livre em } \Upsilon y\, Q, & (1) \\ Q(y|x) \approx_c P. & (2) \end{cases}$

  De (2), temos $P \approx_c Q(y|x)$, donde por HI, $\vdash_{\text{LAR}} P \Leftrightarrow Q(y|x)$.

  Pelo Esquema da Descrição, $\vdash_{\text{LAR}} \Upsilon x\, P \models x \Leftrightarrow P$ e $\vdash_{\text{LAR}} \Upsilon y\, Q \models x \Leftrightarrow Q(y|x)$.

  Daí, $\vdash_{\text{LAR}} \Upsilon x\, P \models x \Leftrightarrow \Upsilon y\, Q \models x$, donde por GEN, $\vdash_{\text{LAR}} \forall x\, (\Upsilon x\, P \models x \Leftrightarrow \Upsilon y\, Q \models x)$.

  Daí, de (1) e pelo lema 5.4.52, $\vdash_{\text{LAR}} \Upsilon x\, P = \Upsilon y\, Q$. Logo, $\vdash_{\text{LAR}} D \Leftrightarrow E$.

- Caso D é $p(t_1, \ldots, t_n)$.

  Então E é $p(u_1, \ldots, u_n)$. Se $D \approx_c E$, então $p(t_1, \ldots, t_n) \approx_c p(u_1, \ldots, u_n)$, donde pela def. 5.2.24, $t_1 \approx_c u_1, \ldots, t_n \approx_c u_n$. Daí, por HI, $\vdash_{\text{LAR}} t_1 = u_1, \ldots, \vdash_{\text{LAR}} t_n = u_n$, donde pelo lema 5.4.59, $\vdash_{\text{LAR}} p(t_1, \ldots, t_n) \Leftrightarrow p(u_1, \ldots, u_n)$. Ou seja, $\vdash_{\text{LAR}} D \Leftrightarrow E$.

- Caso D é $t \models t'$.

  Então E é $u \models u'$. Se $D \approx_c E$, então $t \models t' \approx_c u \models u'$, donde pela definição 5.2.24, $t \approx_c u$ e $t' \approx_c u'$. Por HI, $\vdash_{\text{LAR}} t = u$ e $\vdash_{\text{LAR}} t' = u'$, donde pelo lema 5.4.60, $\vdash_{\text{LAR}} t \models t' \Leftrightarrow u \models u'$.

  Ou seja, $\vdash_{\text{LAR}} D \Leftrightarrow E$.

- Caso D é $\neg P$. Então E é $\neg Q$. Se $D \approx_c E$, então $\neg P \approx_c \neg Q$, donde pela definição 5.2.24, $P \approx_c Q$. Daí, por HI, $\vdash_{\text{LAR}} P \Leftrightarrow Q$, donde pelo LSCE (5.4.57) (i), $\vdash_{\text{LAR}} \neg P \Leftrightarrow \neg Q$.

  Portanto, $\vdash_{\text{LAR}} D \Leftrightarrow E$.

- Caso D é $P \to Q$.

  Então E é $R \to S$. Se $D \approx_c E$, então $P \to Q \approx_c R \to S$, donde pela definição 5.2.24, $P \approx_c R$ e $Q \approx_c S$.

  Por HI, $\begin{cases} \vdash_{\mathrm{LAR}} P \Leftrightarrow R, & (3) \\ \vdash_{\mathrm{LAR}} Q \Leftrightarrow S. & (4) \end{cases}$

  De (3), pelo LSCE (5.4.57) (i), $\vdash_{\mathrm{LAR}} \neg P \Leftrightarrow \neg R$. Daí e de (4), pelo LSCE (vii), $\vdash_{\mathrm{LAR}} \neg P \vee Q \Leftrightarrow \neg R \vee S$, donde $\vdash_{\mathrm{LAR}} P \to Q \Leftrightarrow R \to S$. Portanto, $\vdash_{\mathrm{LAR}} D \Leftrightarrow E$.

- Caso D é $P \# Q$.

  Então E é $R \# S$. Se $D \approx_c E$, então $P \# Q \approx_c R \# S$, donde pela definição 5.2.24, $P \approx_c R$ e $Q \approx_c S$.

  Por HI, $\begin{cases} \vdash_{\mathrm{LAR}} P \Leftrightarrow R \\ \vdash_{\mathrm{LAR}} Q \Leftrightarrow S \end{cases}$, donde pelo LSCE (5.4.57)) (vi) e (vii), $\vdash_{\mathrm{LAR}} P \# Q \Leftrightarrow R \# S$.

  Portanto, $\vdash_{\mathrm{LAR}} D \Leftrightarrow E$.

- Caso D é $\Psi x\, P$.

  Então E é $\Psi y\, Q$. Se $D \approx_c E$, então $\Psi x\, P \approx_c \Psi y\, Q$.

  Daí, pela definição 5.2.24 $\begin{cases} y \text{ não é livre em } \forall x\, P, & \\ P(x|y) \approx_c Q. & (5) \end{cases}$

  De (5), por HI, $\vdash_{\mathrm{LAR}} P(x|y) \Leftrightarrow Q$, donde por GEN, $\vdash_{\mathrm{LAR}} \forall y\, (P(x|y) \Leftrightarrow Q)$ e daí, pelo lema 5.4.61, $\vdash_{\mathrm{LAR}} \Psi y\, P(x|y) \Leftrightarrow \Psi y\, Q$.

  Do lema 5.4.75, temos que $\vdash_{\mathrm{LAR}} \Psi x\, P \Leftrightarrow \Psi y\, P(x|y)$. Portanto, $\vdash_{\mathrm{LAR}} \Psi x\, P \Leftrightarrow \Psi y\, Q$, donde temos que $\vdash_{\mathrm{LAR}} D \Leftrightarrow E$.

□

5.4.78 Corolário. Se y não é livre em $\forall x\, P$, então $\vdash_{\mathrm{LAR}} \Upsilon x\, P \mathrel{)\!\!=} \Upsilon y\, P(x|y)$.

Prova:

1	$\quad \Upsilon y\, P(x|y) \mathrel{)\!\!=} x$	sup
2	$\quad P(x|y)(y|x)$	1, DESCR
3	$\quad P$	2, fato 5.2.25, CGR
4	$\quad \Upsilon x\, P \mathrel{)\!\!=} x$	3, DESCR
5	$\Upsilon y\, P(x|y) \mathrel{)\!\!=} x \to \Upsilon x\, P \mathrel{)\!\!=} x$	1, 4, RD
6	$\forall x\, (\Upsilon y\, P(x|y) \mathrel{)\!\!=} x \to \Upsilon x\, P \mathrel{)\!\!=} x)$	5, GEN
7	$\Upsilon x\, P \mathrel{)\!\!=} \Upsilon y\, P(x|y)$	6, EXT

5.4.79 Corolário. (**Descrições Congruentes**)

- Se y não é livre em $\forall x\, P$, então $\mid_{\overline{\mathrm{LAR}}}\ \Upsilon x\, P = \Upsilon y\, P(x|y)$.

5.4.80 Corolário. Se x não é livre em $\{P, Q\}$, então $\begin{cases} \text{(i)} \quad P \rightarrowtriangle Q \mid_{\overline{\mathrm{LAR}}}\ \Upsilon x\, Q \mathrel{)\!\!\models} \Upsilon x\, P. \\ \text{(ii)} \quad \Upsilon x\, Q \mathrel{)\!\!\models} \Upsilon x\, P \mid_{\overline{\mathrm{LAR}}}\ P \rightarrowtriangle Q. \end{cases}$

Prova de (i):

1	x não é livre em $\{P, Q\}$	hip
2	$P \rightarrowtriangle Q$	pr
3	y é a primeira variável não livre em $\{P, Q\}$	dsg
4	$\Upsilon y\, Q \mathrel{)\!\!\models} \Upsilon y\, P$	2, 3, def. 5.4.21
5	$\Upsilon x\, Q(y|x) \mathrel{)\!\!\models} \Upsilon y\, Q$	1, corolário 5.4.79
6	$\Upsilon y\, P \mathrel{)\!\!\models} \Upsilon x\, P(y|x)$	1, corolário 5.4.78
7	$\Upsilon x\, Q(y|x) \mathrel{)\!\!\models} \Upsilon x\, P(y|x)$	5, 4, 6, TA
8	$\Upsilon x\, Q \mathrel{)\!\!\models} \Upsilon x\, P$	3, 7

Prova de (ii):

1	x não é livre em $\{P, Q\}$	hip
2	$\Upsilon x\, Q \mathrel{)\!\!\models} \Upsilon x\, P$	pr
3	$\mid\ P$	sup
4	$\mid\ P(x|x)$	3
5	$\mid\ \Upsilon x\, P \mathrel{)\!\!\models} x$	4, DESCR
6	$\mid\ \Upsilon x\, Q \mathrel{)\!\!\models} x$	2, 5, TA
7	$\mid\ Q(x|x)$	6, DESCR
8	$\mid\ Q$	7
9	$P \rightarrowtriangle Q$	3, 8, RDF

5.4.1 Leis de Substituição e Instanciação para a Correspondência

Nesta seção apresentamos o *Esquema Geral da Substituição para a Correspondência*, a *Regra Geral da Substituição para a Correspondência* e o *Esquema Geral da Instanciação para a Correspondência*. Estas leis mostram que, sob certas condições, a correspondência entre dois designadores gera, através da substituição ou instanciação de um terceiro designador por ambos, uma nova correspondência.

5.4.81. Esquema Geral da Substituição para a Correspondência (EGSC).

- Se $x_1, \ldots, x_n$ são as variáveis livres em $\{D_1, D_2\}$ tais que G está em E no seu escopo, então $\forall x_1 \ldots \forall x_n(D_1 \Leftrightarrow D_2) \vdash_{\text{LAR}} E(G\|D_1) \Leftrightarrow E(G\|D_2)$.

Prova:

Seja $\Delta(E)$ a proposição: Para quaisquer $x_1, \ldots, x_n$, se $x_1, \ldots, x_n$ são as variáveis livres em $\{D_1, D_2\}$ tais que G está em E no seu escopo, então
$\forall x_1 \ldots \forall x_n(D_1 \Leftrightarrow D_2) \vdash_{\text{LAR}} E(G\|D_1) \Leftrightarrow E(G\|D_2)$.

- Caso G não ocorre em E.

  Daí, $E(G\|D_1) = E(G\|D_2) = E$.

  Como $\vdash_{\text{LAR}} E \Leftrightarrow E$, temos que $\vdash_{\text{LAR}} E(G\|D_1) \Leftrightarrow E(G\|D_2)$, donde por MON,
  $\forall x_1 \ldots \forall x_n(D_1 \Leftrightarrow D_2) \vdash_{\text{LAR}} E(G\|D_1) \Leftrightarrow E(G\|D_2)$. Logo, $\Delta(E)$.

- Caso G é igual a E.

  Então $\begin{cases} E(G\|D_1) = D_1, \\ E(G\|D_2) = D_2. \end{cases}$

  Como $\forall x_1 \ldots \forall x_n(D_1 \Leftrightarrow D_2) \vdash_{\text{LAR}} D_1 \Leftrightarrow D_2$, temos que
  $\forall x_1 \ldots \forall x_n(D_1 \Leftrightarrow D_2) \vdash_{\text{LAR}} E(G\|D_1) \Leftrightarrow E(G\|D_2)$, donde $\Delta(E)$.

  Sem perder a generalidade, podemos considerar doravante que G ocorre em E e G é diferente de E.

- Caso E é $f(u_1, \ldots, u_r)$.

  Para cada $i \in \{1, \ldots, r\}$, seja r_i o número de variáveis livres em $\{D_1, D_2\}$ tais que G está no seu escopo em u_i.

  Para cada $i \in \{1, \ldots, r\}$, sejam $x^i_1, \ldots, x^i_{r_i}$ as variáveis livres em $\{D_1, D_2\}$ tais que G está no seu escopo em u_i.

  Sejam $x_1, \ldots, x_n$ as variáveis tais que $\{x_1, \ldots, x_n\} = \bigcup_{i \in \{1,\ldots,r\}} \{x^i_1, \ldots, x^i_{r_i}\}$.

  Daí, $x_1, \ldots, x_n$ são as variáveis livres em $\{D_1, D_2\}$ tais que G está no seu escopo em $f(u_1, \ldots, u_r)$.

  Por HI, para cada $i \in \{1, \ldots, r\}$, $\forall x^i_1 \ldots \forall x^i_{r_i}(D_1 \Leftrightarrow D_2) \vdash_{\text{LAR}} u_i(G\|D_1) = u_i(G\|D_2)$. (1)

  Para cada $i \in \{1, \ldots, r\}$, $\forall x_1 \ldots \forall x_n(D_1 \Leftrightarrow D_2) \vdash_{\text{LAR}} \forall x^i_1 \ldots \forall x^i_{r_i}(D_1 \Leftrightarrow D_2)$. (2)

De (1) e (2), para cada $i \in \{1, \ldots, r\}$, $\forall x_1 \ldots \forall x_n(D_1 \Leftrightarrow D_2) \models_{\overline{\text{LAR}}} u_i(G\|D_1) = u_i(G\|D_2)$. (3)

Pelo Lema da Substituição para a Igualdade em Termos Funcionais (lema 5.4.58), temos que $u_1(G\|D_1) = u_1(G\|D_2), \ldots, u_r(G\|D_1) = u_r(G\|D_2) \models_{\overline{\text{LAR}}}$
$f(u_1(G\|D_1), \ldots, u_r(G\|D_1)) = f(u_1(G\|D_2), \ldots, u_r(G\|D_2))$.

Ou seja, $u_1(G\|D_1) = u_1(G\|D_2), \ldots, u_r(G\|D_1) = u_r(G\|D_2) \models_{\overline{\text{LAR}}}$
$f(u_1, \ldots, u_r)(G\|D_1) = f(u_1, \ldots, u_r)(G\|D_2)$. (4)

Portanto, de (3) e (4), $\forall x_1 \ldots \forall x_n(D_1 \Leftrightarrow D_2) \models_{\overline{\text{LAR}}} f(u_1, \ldots, u_r)(G\|D_1) = f(u_1, \ldots, u_r)(G\|D_2)$, donde $\Delta(E)$.

- Caso E é $p(u_1, \ldots, u_r)$.

  Para cada $i \in \{1, \ldots, r\}$, seja r_i o número de variáveis livres em $\{D_1, D_2\}$ tais que G está no seu escopo em u_i.

  Para cada $i \in \{1, \ldots, r\}$, sejam $x^i_1, \ldots, x^i_{r_i}$ as variáveis livres em $\{D_1, D_2\}$ tais que G está no seu escopo em u_i.

  Sejam $x_1, \ldots, x_n$ as variáveis tais que $\{x_1, \ldots, x_n\} = \bigcup_{i \in \{1,\ldots,r\}} \{x^i_1, \ldots, x^i_{r_i}\}$.

  Daí, $x_1, \ldots, x_n$ são as variáveis livres em $\{D_1, D_2\}$ tais que G está no seu escopo em $p(u_1, \ldots, u_r)$.

  Por HI, para cada $i \in \{1, \ldots, r\}$, $\forall x^i_1 \ldots \forall x^i_{r_i}(D_1 \Leftrightarrow D_2) \models_{\overline{\text{LAR}}} u_i(G\|D_1) = u_i(G\|D_2)$. (5)

  Para cada $i \in \{1, \ldots, r\}$, $\forall x_1 \ldots \forall x_n(D_1 \Leftrightarrow D_2) \models_{\overline{\text{LAR}}} \forall x^i_1 \ldots \forall x^i_{r_i}(D_1 \Leftrightarrow D_2)$. (6)

  De (5) e (6), para cada $i \in \{1, \ldots, r\}$, $\forall x_1 \ldots \forall x_n(D_1 \Leftrightarrow D_2) \models_{\overline{\text{LAR}}} u_i(G\|D_1) = u_i(G\|D_2)$. (7)

  Pelo Lema da Substituição para a Superequivalência em Fórmulas Atômicas Básicas (lema 5.4.59), $u_1(G\|D_1) = u_1(G\|D_2), \ldots, u_r(G\|D_1) = u_r(G\|D_2) \models_{\overline{\text{LAR}}}$
  $p(u_1(G\|D_1), \ldots, u_r(G\|D_1)) \Leftrightarrow p(u_1(G\|D_2), \ldots, u_r(G\|D_2))$.

  Ou seja, $u_1(G\|D_1) = u_1(G\|D_2), \ldots, u_r(G\|D_1) = u_r(G\|D_2) \models_{\overline{\text{LAR}}}$
  $p(u_1, \ldots, u_r)(G\|D_1) \Leftrightarrow p(u_1, \ldots, u_r)(G\|D_2)$. (8)

  Portanto, de (7) e (8), $\forall x_1 \ldots \forall x_n(D_1 \Leftrightarrow D_2) \models_{\overline{\text{LAR}}} p(u_1, \ldots, u_r)(G\|D_1) \Leftrightarrow p(u_1, \ldots, u_r)(G\|D_2)$, donde $\Delta(E)$.

- Caso E é $u \rightleftharpoons v$.

  Sejam $y_1, \ldots, y_r$ as variáveis livres em $\{D_1, D_2\}$ tais que G está em u no seu escopo.

  Sejam $z_1, \ldots, z_s$ as variáveis livres em $\{D_1, D_2\}$ tais que G está em v no seu escopo.

  Sejam $x_1, \ldots, x_n$ as variáveis tais que $\{x_1, \ldots, x_n\} = \{y_1, \ldots, y_r\} \cup \{z_1, \ldots, z_s\}$.

  Daí, $x_1, \ldots, x_n$ são as variáveis livres em $\{D_1, D_2\}$ tais que G está em $u \rightleftharpoons v$ no seu escopo.

Por HI, temos que $\begin{cases} \forall y_1 \ldots \forall y_r(D_1 \Leftrightarrow D_2) \models_{\text{LAR}} u(G\|D_1) = u(G\|D_2), \\ \forall z_1 \ldots \forall z_s(D_1 \Leftrightarrow D_2) \models_{\text{LAR}} v(G\|D_1) = v(G\|D_2). \end{cases}$

Logo, temos que $\begin{cases} \forall x_1 \ldots \forall x_n(D_1 \Leftrightarrow D_2) \models_{\text{LAR}} u(G\|D_1) = u(G\|D_2), \\ \forall x_1 \ldots \forall x_n(D_1 \Leftrightarrow D_2) \models_{\text{LAR}} v(G\|D_1) = v(G\|D_2). \end{cases}$ (9)

Do Lema da Substituição para a Superequivalência em Fórmulas Atômicas Não Básicas (lema 5.4.60), $u(G\|D_1) = u(G\|D_2), v(G\|D_1) = v(G\|D_2) \models_{\text{LAR}}$
$u(G\|D_1) \;\rangle\!\models v(G\|D_1) \Leftrightarrow u(G\|D_2) \;\rangle\!\models v(G\|D_2)$, donde
$u(G\|D_1) = u(G\|D_2), v(G\|D_1) = v(G\|D_2) \models_{\text{LAR}} (u \;\rangle\!\models v)(G\|D_1) \Leftrightarrow (u \;\rangle\!\models v)(G\|D_2)$. (10)
De (9) e (10), $\forall x_1 \ldots \forall x_n(D_1 \Leftrightarrow D_2) \models_{\text{LAR}} (u \;\rangle\!\models v)(G\|D_1) \Leftrightarrow (u \;\rangle\!\models v)(G\|D_2)$, ou seja, $\Delta(E)$.

- Caso E é $\neg Q$.

  Sejam $x_1, \ldots, x_n$ as variáveis livres em $\{D_1, D_2\}$ tais que G está no seu escopo em Q.
  Por HI, $\forall x_1 \ldots \forall x_n(D_1 \Leftrightarrow D_2) \models_{\text{LAR}} Q(G\|D_1) \Leftrightarrow Q(G\|D_2)$. (11)
  Do LSCE (lema 5.4.57), temos $Q(G\|D_1) \Leftrightarrow Q(G\|D_2) \models_{\text{LAR}} \neg Q(G\|D_1) \Leftrightarrow \neg Q(G\|D_2)$. (12)
  Daí, de (11) e (12), $\forall x_1 \ldots \forall x_n(D_1 \Leftrightarrow D_2) \models_{\text{LAR}} \neg Q(G\|D_1) \Leftrightarrow \neg Q(G\|D_2)$, onde $x_1, \ldots, x_n$ são as variáveis livres em $\{D_1, D_2\}$ tais que G está no seu escopo em $\neg Q$. Daí, temos $\Delta(E)$.

- Caso E é $P \# Q$, onde $\# \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$.

  Sejam $y_1, \ldots, y_r$ as variáveis livres em $\{D_1, D_2\}$ tais que G está no seu escopo em P.
  Sejam $z_1, \ldots, z_s$ as variáveis livres em $\{D_1, D_2\}$ tais que G está no seu escopo em Q.
  Sejam $x_1, \ldots, x_n$ as variáveis distintas tais que $\{x_1, \ldots, x_n\} = \{y_1, \ldots, y_r\} \cup \{z_1, \ldots, z_s\}$.
  Então, $x_1, \ldots, x_n$ são as variáveis livres em $\{D_1, D_2\}$ tais que G está no seu escopo em $P \# Q$.

  Por HI, $\begin{cases} \forall y_1 \ldots \forall y_r(D_1 \Leftrightarrow D_2) \models_{\text{LAR}} P(G\|D_1) \Leftrightarrow P(G\|D_2), \\ \forall z_1 \ldots \forall z_s(D_1 \Leftrightarrow D_2) \models_{\text{LAR}} Q(G\|D_1) \Leftrightarrow Q(G\|D_2). \end{cases}$

  Logo, $\begin{cases} \forall x_1 \ldots \forall x_n(D_1 \Leftrightarrow D_2) \models_{\text{LAR}} P(G\|D_1) \Leftrightarrow P(G\|D_2), \\ \forall x_1 \ldots \forall x_n(D_1 \Leftrightarrow D_2) \models_{\text{LAR}} Q(G\|D_1) \Leftrightarrow Q(G\|D_2). \end{cases}$ (13)

  Do LSCE (lema 5.4.57), temos que
  $P(G\|D_1) \Leftrightarrow P(G\|D_2), Q(G\|D_1) \Leftrightarrow Q(G\|D_2) \models_{\text{LAR}} P(G\|D_1) \# Q(G\|D_1) \Leftrightarrow P(G\|D_2) \# Q(G\|D_2)$,
  ou seja,
  $P(G\|D_1) \Leftrightarrow P(G\|D_2), Q(G\|D_1) \Leftrightarrow Q(G\|D_2) \models_{\text{LAR}} (P \# Q)(G\|D_1) \Leftrightarrow (P \# Q)(G\|D_2)$. (14)
  Portanto, de (13) e (14), $\forall x_1 \ldots \forall x_n(D_1 \Leftrightarrow D_2) \models_{\text{LAR}} (P \# Q)(G\|D_1) \Leftrightarrow (P \# Q)(G\|D_2)$.
  Logo, $\Delta(E)$.

- Caso E é $\Psi x\, P$, onde $\Psi \in \{\forall, \exists, \Upsilon\}$.

  Sejam $x_1, \ldots, x_n$ as variáveis livres em $\{D_1, D_2\}$ tais que G está no seu escopo em P.

  * Subcaso: x não é livre em $\{D_1, D_2\}$ ou x é livre em $\{D_1, D_2\}$ e $x \in \{x_1, \ldots, x_n\}$.

    Por HI, $\forall x_1 \ldots \forall x_n(D_1 \Leftrightarrow D_2) \,|\!\underline{}_{\mathrm{LAR}}\, P(G\|D_1) \Leftrightarrow P(G\|D_2)$.

    Daí, por GEN, $\forall x_1 \ldots \forall x_n(D_1 \Leftrightarrow D_2) \,|\!\underline{}_{\mathrm{LAR}}\, \forall x\, (P(G\|D_1) \Leftrightarrow P(G\|D_2))$.

    Daí, pelo LSSQD (lema 5.4.61),

    $\forall x_1 \ldots \forall x_n(D_1 \Leftrightarrow D_2) \,|\!\underline{}_{\mathrm{LAR}}\, \Psi x\, P(G\|D_1) \Leftrightarrow \Psi x\, P(G\|D_2)$, donde

    $\forall x_1 \ldots \forall x_n(D_1 \Leftrightarrow D_2) \,|\!\underline{}_{\mathrm{LAR}}\, (\Psi x\, P)(G\|D_1) \Leftrightarrow (\Psi x\, P)(G\|D_2)$, onde $x_1, \ldots, x_n$ são as variáveis livres em $\{D_1, D_2\}$ tais que G está no seu escopo em $\Psi x\, P$.

  * Subcaso: x é livre em $\{D_1, D_2\}$ e $x \notin \{x_1, \ldots, x_n\}$.

    Por HI, $\forall x_1 \ldots \forall x_n(D_1 \Leftrightarrow D_2) \,|\!\underline{}_{\mathrm{LAR}}\, P(G\|D_1) \Leftrightarrow P(G\|D_2)$.

    Como $\forall x\, \forall x_1 \ldots \forall x_n(D_1 \Leftrightarrow D_2) \,|\!\underline{}_{\mathrm{LAR}}\, \forall x_1 \ldots \forall x_n(D_1 \Leftrightarrow D_2)$, temos

    $\forall x\, \forall x_1 \ldots \forall x_n(D_1 \Leftrightarrow D_2) \,|\!\underline{}_{\mathrm{LAR}}\, P(G\|D_1) \Leftrightarrow P(G\|D_2)$.

    Daí, por GEN, $\forall x\, \forall x_1 \ldots \forall x_n(D_1 \Leftrightarrow D_2) \,|\!\underline{}_{\mathrm{LAR}}\, \forall x\, (P(G\|D_1) \Leftrightarrow P(G\|D_2))$.

    Daí, pelo LSSQD (lema 5.4.61),

    $\forall x\, \forall x_1 \ldots \forall x_n(D_1 \Leftrightarrow D_2) \,|\!\underline{}_{\mathrm{LAR}}\, \Psi x\, P(G\|D_1) \Leftrightarrow \Psi x\, P(G\|D_2)$, donde

    $\forall x\, \forall x_1 \ldots \forall x_n(D_1 \Leftrightarrow D_2) \,|\!\underline{}_{\mathrm{LAR}}\, (\Psi x\, P)(G\|D_1) \Leftrightarrow (\Psi x\, P)(G\|D_2)$, onde $x, x_1, \ldots, x_n$ são as variáveis livres em $\{D_1, D_2\}$ tais que G está no seu escopo em $\Psi x\, P$.

  Ou seja, em qualquer subcaso, $\Delta(E)$.

$\square$

5.4.82. Regra Geral da Substituição para a Correspondência (RGSC).

- Se $\begin{cases} \Gamma \,|\!\underline{}_{\mathrm{LAR}}\, D_1 \Leftrightarrow D_2, \\ G \text{ não está, em } E \text{, no escopo de nenhuma variável livre em } \Gamma \text{ e em } \{D_1, D_2\}, \end{cases}$

  então $\Gamma \,|\!\underline{}_{\mathrm{LAR}}\, E(G\|D_1) \Leftrightarrow E(G\|D_2)$.

Prova:

Suponha que

$$\begin{cases} \Gamma \,|\!\underline{}_{\mathrm{LAR}}\, D_1 \Leftrightarrow D_2, & (1) \\ G \text{ não está, em } E \text{, no escopo de nenhuma variável livre em } \Gamma \text{ e em } \{D_1, D_2\}. & (2) \end{cases}$$

Sejam $x_1, \ldots, x_n$ as variáveis livres em $\{D_1, D_2\}$ tais que G está no seu escopo em E. (3)

Se existe $x_i \in \{x_1, \ldots, x_n\}$ tal que x_i é livre em Γ, teríamos que G está, em E, no escopo de x_i, e x_i é livre em Γ e em $\{D_1, D_2\}$, o que é absurdo segundo (2).

Portanto, $x_1, \ldots, x_n$ não são livres em Γ, daí, de (1) e GEN,

$\Gamma \vdash_{\text{LAR}} \forall x_1 \ldots \forall x_n(D_1 \Leftrightarrow D_2)$. (4)

De (3), pelo Esquema Geral da Substituição para a Correspondência (EGSC), temos que

$\forall x_1 \ldots \forall x_n(D_1 \Leftrightarrow D_2) \vdash_{\text{LAR}} E(G \| D_1) \Leftrightarrow E(G \| D_2)$. (5)

De (4) e (5), pela Regra da Cadeia (CAD), temos que $\Gamma \vdash_{\text{LAR}} E(G \| D_1) \Leftrightarrow E(G \| D_2)$.

$\square$

5.4.83. Esquema Geral da Instanciação para a Correspondência (EGIC).

- $t_1 = t_2 \vdash_{\text{LAR}} E(x|t_1) \Leftrightarrow E(x|t_2)$.

Prova:

Seja $\Delta(E)$ a proposição: $t_1 = t_2 \vdash_{\text{LAR}} E(x|t_1) \Leftrightarrow E(x|t_2)$.

- Caso x não é livre em E.

  Daí, $E(x|t_1) = E(x|t_2) = E$. Como $\vdash_{\text{LAR}} E \Leftrightarrow E$, temos que $\vdash_{\text{LAR}} E(x|t_1) \Leftrightarrow E(x|t_2)$, donde por MON, $t_1 = t_2 \vdash_{\text{LAR}} E(x|t_1) \Leftrightarrow E(x|t_2)$. Logo, $\Delta(E)$.

- Caso E é x.

  Então $\begin{cases} E(x|t_1) = t_1, \\ E(x|t_2) = t_2. \end{cases}$

  Como $t_1 = t_2 \vdash_{\text{LAR}} t_1 = t_2$, temos $t_1 = t_2 \vdash_{\text{LAR}} E(x|t_1) = E(x|t_2)$, ou seja, $t_1 = t_2 \vdash_{\text{LAR}} E(x|t_1) \Leftrightarrow E(x|t_2)$, donde $\Delta(E)$.

  Sem perder a generalidade, podemos considerar doravante que x é livre em E e x é diferente de E.

- Caso E é uma constante ou uma variável qualquer distinta de x.

  Então x não é livre em E, o que já foi considerado.

- Caso E é $f(u_1, \ldots, u_n)$.

  Por HI, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, $t_1 = t_2 \vdash_{\text{LAR}} u_i(x|t_1) = u_i(x|t_2)$. (1)

  Pelo Lema da Substituição para a Igualdade em Termos Funcionais (lema 5.4.58), temos que

$u_1(x|t_1) = u_1(x|t_2), \ldots, u_n(x|t_1) = u_n(x|t_2) \vdash_{\text{LAR}} f(u_1(x|t_1), \ldots, u_n(x|t_1)) = f(u_1(x|t_2), \ldots, u_n(x|t_2))$.

Ou seja,

$u_1(x|t_1) = u_1(x|t_2), \ldots, u_n(x|t_1) = u_n(x|t_2) \vdash_{\text{LAR}} f(u_1, \ldots, u_n)(x|t_1) = f(u_1, \ldots, u_n)(x|t_2)$. (2)

Portanto, de (1) e (2), $t_1 = t_2 \vdash_{\text{LAR}} f(u_1, \ldots, u_n)(x|t_1) = f(u_1, \ldots, u_n)(x|t_2)$, donde $\Delta(E)$.

- Caso E é $p(u_1, \ldots, u_n)$.

  Por HI, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, $t_1 = t_2 \vdash_{\text{LAR}} u_i(x|t_1) = u_i(x|t_2)$. (3)

  Pelo Lema da Substituição para a Superequivalência em Fórmulas Atômicas Básicas (lema 5.4.59),

  $u_1(x|t_1) = u_1(x|t_2), \ldots, u_n(x|t_1) = u_n(x|t_2) \vdash_{\text{LAR}} p(u_1(x|t_1), \ldots, u_n(x|t_1)) \Leftrightarrow p(u_1(x|t_2), \ldots, u_n(x|t_2))$.

  Ou seja,

  $u_1(x|t_1) = u_1(x|t_2), \ldots, u_n(x|t_1) = u_n(x|t_2) \vdash_{\text{LAR}} p(u_1, \ldots, u_n)(x|t_1) \Leftrightarrow p(u_1, \ldots, u_n)(x|t_2)$. (4)

  Portanto, de (3) e (4), $t_1 = t_2 \vdash_{\text{LAR}} p(u_1, \ldots, u_n)(x|t_1) \Leftrightarrow p(u_1, \ldots, u_n)(x|t_2)$, donde $\Delta(E)$.

- Caso E é $u \mathrel{)\!\!=} v$.

  Por HI temos que $\begin{cases} t_1 = t_2 \vdash_{\text{LAR}} u(x|t_1) = u(x|t_2), \\ t_1 = t_2 \vdash_{\text{LAR}} v(x|t_1) = v(x|t_2). \end{cases}$ (5)

  Do Lema da Substituição para a Superequivalência em Fórmulas Atômicas Não Básicas (lema 5.4.60), $u(x|t_1) = u(x|t_2), v(x|t_1) = v(x|t_2) \vdash_{\text{LAR}} u(x|t_1) \mathrel{)\!\!=} v(x|t_1) \Leftrightarrow u(x|t_2) \mathrel{)\!\!=} v(x|t_2)$,

  donde $u(x|t_1) = u(x|t_2), v(x|t_1) = v(x|t_2) \vdash_{\text{LAR}} (u \mathrel{)\!\!=} v)(x|t_1) \Leftrightarrow (u \mathrel{)\!\!=} v)(x|t_2)$. (6)

  Daí, de (5) e (6), $t_1 = t_2 \vdash_{\text{LAR}} (u \mathrel{)\!\!=} v)(x|t_1) \Leftrightarrow (u \mathrel{)\!\!=} v)(x|t_2)$, ou seja, $\Delta(E)$.

- Caso E é $\neg Q$.

  Por HI, $t_1 = t_2 \vdash_{\text{LAR}} Q(x|t_1) \Leftrightarrow Q(x|t_2)$. (7)

  Do LSCE (lema 5.4.57), temos $Q(x|t_1) \Leftrightarrow Q(x|t_2) \vdash_{\text{LAR}} \neg Q(x|t_1) \Leftrightarrow \neg Q(x|t_2)$. (8)

  De (7) e (8), $t_1 = t_2 \vdash_{\text{LAR}} \neg Q(x|t_1) \Leftrightarrow \neg Q(x|t_2)$, donde $\Delta(E)$.

- Caso E é $P \# Q$, onde $\# \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$.

  Por HI, $\begin{cases} t_1 = t_2 \vdash_{\text{LAR}} P(x|t_1) \Leftrightarrow P(x|t_2), \\ t_1 = t_2 \vdash_{\text{LAR}} Q(x|t_1) \Leftrightarrow Q(x|t_2). \end{cases}$ (9)

  Do LSCE (lema 5.4.57), temos que

  $P(x|t_1) \Leftrightarrow P(x|t_2), Q(x|t_1) \Leftrightarrow Q(x|t_2) \vdash_{\text{LAR}} P(x|t_1) \# Q(x|t_1) \Leftrightarrow P(x|t_2) \# Q(x|t_2)$, ou seja,

$$P(x|t_1) \Leftrightarrow P(x|t_2), Q(x|t_1) \Leftrightarrow Q(x|t_2) \vdash_{\mathrm{LAR}} (P \# Q)(x|t_1) \Leftrightarrow (P \# Q)(x|t_2). \tag{10}$$

Portanto, de (9) e (10), $t_1 = t_2 \vdash_{\mathrm{LAR}} (P \# Q)(x|t_1) \Leftrightarrow (P \# Q)(x|t_2)$. Logo, $\Delta(E)$.

- Caso E é da forma $\Psi x\, P$, onde $\Psi \in \{\forall, \exists, \Upsilon\}$.

  Temos daí que x não é livre em E, o que já foi considerado.

- Caso E é da forma $\Psi y\, P$, onde y é distinto de x e $\Psi \in \{\forall, \exists, \Upsilon\}$.

  * Subcaso: x não é livre em P ou y não é livre em $\{t_1, t_2\}$.

    Por HI, $t_1 = t_2 \vdash_{\mathrm{LAR}} P(x|t_1) \Leftrightarrow P(x|t_2)$.

    Daí, por GEN, $t_1 = t_2 \vdash_{\mathrm{LAR}} \forall y\, (P(x|t_1) \Leftrightarrow P(x|t_2))$.

    Daí, pelo LSSQD (lema 5.4.61),

    $t_1 = t_2 \vdash_{\mathrm{LAR}} \Psi y\, P(x|t_1) \Leftrightarrow \Psi y\, P(x|t_2)$, donde $t_1 = t_2 \vdash_{\mathrm{LAR}} (\Psi y\, P)(x|t_1) \Leftrightarrow (\Psi y\, P)(x|t_2)$.

  * Subcaso: x é livre em P e y é livre em $\{t_1, t_2\}$.

    Considere z a primeira variável não livre em $\{t_1, t_2, P\}$.

    $$\Psi y\, P \approx_c \Psi z\, P(y|z) \text{ (fato 5.2.25), então } \begin{cases} (\Psi y\, P)(x|t_1) \approx_c \Psi z\, P(y|z)(x|t_1), \\ (\Psi y\, P)(x|t_2) \approx_c \Psi z\, P(y|z)(x|t_2). \end{cases} \tag{11}$$

    Por HI, $t_1 = t_2 \vdash_{\mathrm{LAR}} P(y|z)(x|t_1) \Leftrightarrow P(y|z)(x|t_2)$.

    Por GEN, $t_1 = t_2 \vdash_{\mathrm{LAR}} \forall z\, (P(y|z)(x|t_1) \Leftrightarrow P(y|z)(x|t_2))$.

    Daí, pelo LSSQD (lema 5.4.61), $t_1 = t_2 \vdash_{\mathrm{LAR}} \Psi z\, P(y|z)(x|t_1) \Leftrightarrow \Psi z\, P(y|z)(x|t_2)$.

    Logo, de (11) e CGR, $t_1 = t_2 \vdash_{\mathrm{LAR}} (\Psi y\, P)(x|t_1) \Leftrightarrow (\Psi y\, P)(x|t_2)$.

  Daí, em qualquer subcaso, temos $\Delta(E)$.

$\square$

5.4.2 Leis de Substituição e Instanciação para o Alcance

À semelhança das leis de substituição e instanciação para a correspondência, apresentadas no tópico 5.4.1, as quais lidam com a igualdade e superequivalência, formularemos nesta seção leis de substituição e instanciação para o *Alcance*, as quais operam sobre a abrangência e a implicação forte. Por razões técnicas, restringiremos estas leis para o caso em que o termo a ser substituído ou a variável am ser instanciada é de topo na fórmula considerada. Quando um termo abrange outro termo, podemos, através da substituição ou instanciação de um terceiro termo de topo por ambos, formar novas implicações fortes ou abrangências.

5.4.84 Definição. Sejam D_1 e D_2 dois designadores em LAR tais que ambos são termos ou ambos são fórmulas. A samblagem "$D_1 \mathrel{-\!\triangleright} D_2$" representa:

- $D_1 \mathrel{)\!\!=} D_2$, se D_1 e D_2 são ambos termos;
- $D_1 \mathrel{\longrightarrow\!\triangleright} D_2$, se D_1 e D_2 são ambos fórmulas.

No restante desta seção, o sinal "$\mathrel{-\!\triangleright}$" será denominado "*sinal do alcance*". A samblagem "$D_1 \mathrel{-\!\triangleright} D_2$" é lida "$D_1$ *alcança* D_2".

5.4.85. Esquema Geral da Substituição para o Alcance (EGSA).

- Se $\begin{cases} E \text{ possui somente ocorrências de topo de } u, \\ x_1, \ldots, x_n \text{ são as variáveis livres em } \{t_1, t_2\} \text{ tais que } u \text{ está em } E \text{ no seu escopo,} \end{cases}$

  então $\forall x_1 \ldots \forall x_n\,(t_1 \mathrel{)\!\!=} t_2) \vdash_{\text{LAR}} E(u\|t_1) \mathrel{-\!\triangleright} E(u\|t_2)$.

Esboço da prova: A prova é feita por indução sobre E, analogamente à prova do Esquema Geral da Substituição para a Correspondência. □

5.4.86. Regra Geral da Substituição para o Alcance (RGSA).

- Se $\begin{cases} \Gamma \vdash_{\text{LAR}} t_1 \mathrel{)\!\!=} t_2, \\ E \text{ possui somente ocorrências de topo de } u, \\ u \text{ não está, em } E\text{, no escopo de nenhuma variável livre em } \Gamma \text{ e em } \{t_1, t_2\}, \end{cases}$

  então $\Gamma \vdash_{\text{LAR}} E(u\|t_1) \mathrel{-\!\triangleright} E(u\|t_2)$.

Esboço da prova: Esta regra é um corolário do Esquema Geral da Substituição para o Alcance, analogamente à prova da Regra Geral da Substituição para a Correspondência. □

5.4.87. Esquema Geral da Instanciação para o Alcance (EGIA).

- Se x é de topo em E, então $t_1 \mathrel{)\!\!=} t_2 \vdash_{\text{LAR}} E(x|t_1) \mathrel{-\!\triangleright} E(x|t_2)$.

Prova:

Seja $\Delta(E)$ a proposição:

Se x é de topo em E, então $\begin{cases} t_1 \mathrel{)\!\!=} t_2 \vdash_{\text{LAR}} E(x|t_1) \mathrel{-\!\triangleright} E(x|t_2), \\ \text{se } E \text{ é fórmula, então } t_1 \mathrel{)\!\!=} t_2 \vdash_{\text{LAR}} (\neg E)(x|t_1) \mathrel{-\!\triangleright} (\neg E)(x|t_2). \end{cases}$

Suponha que x é de topo em E.

- Caso x não é livre em E.

  Então, $E(x|t_1) = E(x|t_2) = E$.

  Pela Reflexividade da Implicação Forte (5.4.28), temos que $\vdash_{\mathrm{LAR}} E \rightharpoondown E$, donde $\vdash_{\mathrm{LAR}} E(x|t_1) \rightharpoondown E(x|t_2)$. Daí, por Monotonicidade, $t_1 \;\rangle\!\!\models t_2 \vdash_{\mathrm{LAR}} E(x|t_1) \rightharpoondown E(x|t_2)$.

  Logo, $\Delta(E)$.

- Caso E é x.

  Então $\begin{cases} E(x|t_1) = t_1, \\ E(x|t_2) = t_2. \end{cases}$

  Como $t_1 \;\rangle\!\!\models t_2 \vdash_{\mathrm{LAR}} t_1 \;\rangle\!\!\models t_2$, temos $t_1 \;\rangle\!\!\models t_2 \vdash_{\mathrm{LAR}} E(x|t_1) \;\rangle\!\!\models E(x|t_2)$, ou seja, $t_1 \;\rangle\!\!\models t_2 \vdash_{\mathrm{LAR}} E(x|t_1) \rightharpoondown E(x|t_2)$, donde $\Delta(E)$.

  Sem perder a generalidade, podemos considerar doravante que x é livre em E e x é diferente de E.

- Caso E é uma constante ou uma variável distinta de x.

  Então x não é livre em E, o que já foi considerado.

- Caso E é $f(t_1, \ldots, t_n)$.

  Temos que x é de topo em $t_1, \ldots, t_n$.

  Por HI, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, $t_1 \;\rangle\!\!\models t_2 \vdash_{\mathrm{LAR}} t_i(x|t_1) \;\rangle\!\!\models t_i(x|t_2)$. (1)

  Pelo Postulado da Substituição (i),

  $t_1(x|t_1) \;\rangle\!\!\models t_1(x|t_2), \ldots, t_n(x|t_1) \;\rangle\!\!\models t_n(x|t_2) \vdash_{\mathrm{LAR}} f(t_1(x|t_1), \ldots, t_n(x|t_1)) \;\rangle\!\!\models f(t_1(x|t_2), \ldots, t_n(x|t_2))$.

  Ou seja,

  $t_1(x|t_1) \;\rangle\!\!\models t_1(x|t_2), \ldots, t_n(x|t_1) \;\rangle\!\!\models t_n(x|t_2) \vdash_{\mathrm{LAR}} f(t_1, \ldots, t_n)(x|t_1) \;\rangle\!\!\models f(t_1, \ldots, t_n)(x|t_2)$. (2)

  Portanto, de (1) e (2), $t_1 \;\rangle\!\!\models t_2 \vdash_{\mathrm{LAR}} f(t_1, \ldots, t_n)(x|t_1) \;\rangle\!\!\models f(t_1, \ldots, t_n)(x|t_2)$, donde $\Delta(E)$.

- Caso E é $\Upsilon x\, P$.

  Temos daí que x não é livre em E, o que já foi considerado.

- Caso E é $\Upsilon y\, P$.

  Como x é de topo em E, então x não é livre em E, o que já foi considerado.

- Caso E é $p(t_1, \ldots, t_n)$.

  Temos que x é de topo em $t_1, \ldots, t_n$.

  Por HI, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, $t_1 \mathrel{)\!\!=} t_2 \vdash_{\mathrm{LAR}} t_i(x|t_1) \mathrel{)\!\!=} t_i(x|t_2)$. (3)

  Pelo Lema da Substituição para a Implicação Forte em Fórmulas Atômicas Básicas (lema 5.4.63),

  $t_1(x|t_1) \mathrel{)\!\!=} t_1(x|t_2), \ldots, t_n(x|t_1) \mathrel{)\!\!=} t_n(x|t_2) \vdash_{\mathrm{LAR}} p(t_1(x|t_1), \ldots, t_n(x|t_1)) \mathrel{-\!\!\triangleright} p(t_1(x|t_2), \ldots, t_n(x|t_2))$.

  Ou seja,

  $t_1(x|t_1) \mathrel{)\!\!=} t_1(x|t_2), \ldots, t_n(x|t_1) \mathrel{)\!\!=} t_n(x|t_2) \vdash_{\mathrm{LAR}} p(t_1, \ldots, t_n)(x|t_1) \mathrel{-\!\!\triangleright} p(t_1, \ldots, t_n)(x|t_2)$. (4)

  Portanto, de (3) e (4), $t_1 \mathrel{)\!\!=} t_2 \vdash_{\mathrm{LAR}} p(t_1, \ldots, t_n)(x|t_1) \mathrel{-\!\!\triangleright} p(t_1, \ldots, t_n)(x|t_2)$. (5)

  Pelo Lema da Substituição para a Implicação Forte em Fórmulas Atômicas Básicas (lema 5.4.63),

  $t_1(x|t_1) \mathrel{)\!\!=} t_1(x|t_2), \ldots, t_n(x|t_1) \mathrel{)\!\!=} t_n(x|t_2) \vdash_{\mathrm{LAR}} \neg p(t_1(x|t_1), \ldots, t_n(x|t_1)) \mathrel{-\!\!\triangleright} \neg p(t_1(x|t_2), \ldots, t_n(x|t_2))$.

  Ou seja,

  $t_1(x|t_1) \mathrel{)\!\!=} t_1(x|t_2), \ldots, t_n(x|t_1) \mathrel{)\!\!=} t_n(x|t_2) \vdash_{\mathrm{LAR}} \neg p(t_1, \ldots, t_n)(x|t_1) \mathrel{-\!\!\triangleright} \neg p(t_1, \ldots, t_n)(x|t_2)$. (6)

  Portanto, de (3) e (6), $t_1 \mathrel{)\!\!=} t_2 \vdash_{\mathrm{LAR}} \neg p(t_1, \ldots, t_n)(x|t_1) \mathrel{-\!\!\triangleright} \neg p(t_1, \ldots, t_n)(x|t_2)$. (7)

  De (5) e (7), temos $\Delta(E)$.

- Caso E é $u \mathrel{)\!\!=} v$.

  Como x é de topo em E, então x não é livre em E, o que já foi considerado.

- Caso E é $\neg P$.

  Temos que x é de topo em P.

  $$\text{Por HI, } \begin{cases} t_1 \mathrel{)\!\!=} t_2 \vdash_{\mathrm{LAR}} P(x|t_1) \mathrel{-\!\!\triangleright} P(x|t_2), & (8) \\ t_1 \mathrel{)\!\!=} t_2 \vdash_{\mathrm{LAR}} (\neg P)(x|t_1) \mathrel{-\!\!\triangleright} (\neg P)(x|t_2). & (9) \end{cases}$$

  $$\text{Pelo Esquema da Dupla Negação (DN) (5.4.53), temos que } \begin{cases} \vdash_{\mathrm{LAR}} P(x|t_1) \Leftrightarrow \neg\neg P(x|t_1), \\ \vdash_{\mathrm{LAR}} P(x|t_2) \Leftrightarrow \neg\neg P(x|t_2). \end{cases}$$

  Daí, de (8), $t_1 \mathrel{)\!\!=} t_2 \vdash_{\mathrm{LAR}} \neg\neg P(x|t_1) \mathrel{-\!\!\triangleright} \neg\neg P(x|t_2)$. (10)

  Daí, de (9) e (10) temos $\Delta(E)$.

- Caso E é $P \rightarrow Q$.

  Temos que x é de topo em P e em Q.

$$\text{Por HI, }\begin{cases} t_1 \mathrel{)\!\!=} t_2 \vdash_{\mathrm{LAR}} P(x|t_1) \rightarrowtriangle P(x|t_2), & (11) \\ t_1 \mathrel{)\!\!=} t_2 \vdash_{\mathrm{LAR}} (\neg P)(x|t_1) \rightarrowtriangle (\neg P)(x|t_2), & (12) \\ t_1 \mathrel{)\!\!=} t_2 \vdash_{\mathrm{LAR}} Q(x|t_1) \rightarrowtriangle Q(x|t_2), & (13) \\ t_1 \mathrel{)\!\!=} t_2 \vdash_{\mathrm{LAR}} (\neg Q)(x|t_1) \rightarrowtriangle (\neg Q)(x|t_2). & (14) \end{cases}$$

Do LSCI (lema 5.4.62), temos que

$(\neg P)(x|t_1) \rightarrowtriangle (\neg P)(x|t_2), Q(x|t_1) \rightarrowtriangle Q(x|t_2) \vdash_{\mathrm{LAR}} (\neg P)(x|t_1) \vee Q(x|t_1) \rightarrowtriangle$
$(\neg P)(x|t_2) \vee Q(x|t_2)$, ou seja,

$$(\neg P)(x|t_1) \rightarrowtriangle (\neg P)(x|t_2), Q(x|t_1) \rightarrowtriangle Q(x|t_2) \vdash_{\mathrm{LAR}} (\neg P \vee Q)(x|t_1) \leftrightarrowtriangle (\neg P \vee Q)(x|t_2). \quad (15)$$

Portanto, de (12), (13) e (15),

$$t_1 \mathrel{)\!\!=} t_2 \vdash_{\mathrm{LAR}} (\neg P \vee Q)(x|t_1) \rightarrowtriangle (\neg P \vee Q)(x|t_2). \quad (16)$$

De (16), pelo Esquema da Implicação Material,

$$t_1 \mathrel{)\!\!=} t_2 \vdash_{\mathrm{LAR}} (P \to Q)(x|t_1) \rightarrowtriangle (P \to Q)(x|t_2). \quad (17)$$

Do LSCI (lema 5.4.62), temos que

$P(x|t_1) \rightarrowtriangle P(x|t_2), (\neg Q)(x|t_1) \rightarrowtriangle (\neg Q)(x|t_2) \vdash_{\mathrm{LAR}} P(x|t_1) \wedge (\neg Q)(x|t_1) \rightarrowtriangle$
$P(x|t_2) \wedge (\neg Q)(x|t_2)$, ou seja,

$$P(x|t_1) \rightarrowtriangle P(x|t_2), (\neg Q)(x|t_1) \rightarrowtriangle (\neg Q)(x|t_2) \vdash_{\mathrm{LAR}} (P \wedge \neg Q)(x|t_1) \rightarrowtriangle (P \wedge \neg Q)(x|t_2). \quad (18)$$

De (11), (14) e (18), $t_1 \mathrel{)\!\!=} t_2 \vdash_{\mathrm{LAR}} (P \wedge \neg Q)(x|t_1) \rightarrowtriangle (P \wedge \neg Q)(x|t_2)$. (19)

De (19), pelo Esquema da Implicação Material,

$$t_1 \mathrel{)\!\!=} t_2 \vdash_{\mathrm{LAR}} \neg(P \to Q)(x|t_1) \rightarrowtriangle \neg(P \to Q)(x|t_2). \quad (20)$$

Logo, de (17) e (20), $\Delta(E)$ vale quando E é $P \to Q$.

- Caso E é $P \# Q$.

  O raciocínio é análogo ao caso anterior, utilizando o Esquema de De Morgan.

- Caso E é $\Psi x\, P$.

  Então x não é livre em E, o que já foi considerado.

- Caso E é $\Psi y\, P$.

  Temos que x é de topo em P.

  $*$ Subcaso: x não é livre em P ou y não é livre em $\{t_1, t_2\}$.

$$\text{Por HI, } \begin{cases} t_1 \ \models t_2 \mid_{\overline{\text{LAR}}} P(x|t_1) \multimap P(x|t_2) & (21) \\ t_1 \ \models t_2 \mid_{\overline{\text{LAR}}} (\neg P)(x|t_1) \multimap (\neg P)(x|t_2). & (22) \end{cases}$$

De (21), por GEN, $t_1 \ \models t_2 \mid_{\overline{\text{LAR}}} \forall y\,(P(x|t_1) \multimap P(x|t_2))$.

Daí, pelo Lema da Substituição para a Implicação Forte e Quantificadores (5.4.65),

$t_1 \ \models t_2 \mid_{\overline{\text{LAR}}} \Psi y\, P(x|t_1) \multimap \Psi y\, P(x|t_2)$, donde

$t_1 \ \models t_2 \mid_{\overline{\text{LAR}}} (\Psi y\, P)(x|t_1) \multimap (\Psi y\, P)(x|t_2)$. (23)

De (22), por GEN, $t_1 \ \models t_2 \mid_{\overline{\text{LAR}}} \forall y\,(\neg P(x|t_1) \multimap \neg P(x|t_2))$.

Daí, pelo Lema da Substituição para a Implicação Forte e Quantificadores (5.4.65),

$t_1 \ \models t_2 \mid_{\overline{\text{LAR}}} \Psi' y\, \neg P(x|t_1) \multimap \Psi' y\, \neg P(x|t_2)$, donde

$t_1 \ \models t_2 \mid_{\overline{\text{LAR}}} (\Psi' y\, \neg P)(x|t_1) \multimap (\Psi' y\, \neg P)(x|t_2)$.

Daí, pelo Esquema da Alternância (ALT), $t_1 \ \models t_2 \mid_{\overline{\text{LAR}}} (\neg \Psi y\, P)(x|t_1) \multimap (\neg \Psi y\, P)(x|t_2)$.(24)

De (23) e (24), $\Delta(E)$ vale para este subcaso.

∗ Subcaso: x é livre em P e y é livre em $\{t_1, t_2\}$.

Considere z a primeira variável não livre em $\{t_1, t_2, P\}$.

$$\Psi y\, P \approx_c \Psi z\, P(y|z) \text{ (fato 5.2.25), daí } \begin{cases} (\Psi y\, P)(x|t_1) \approx_c \Psi z\, P(y|z)(x|t_1), \\ (\Psi y\, P)(x|t_2) \approx_c \Psi z\, P(y|z)(x|t_2), \\ (\Psi y\, \neg P)(x|t_1) \approx_c \Psi z\, \neg P(y|z)(x|t_1), \\ (\Psi y\, \neg P)(x|t_2) \approx_c \Psi z\, \neg P(y|z)(x|t_2). \end{cases} \quad (25)$$

Por HI, $t_1 \ \models t_2 \mid_{\overline{\text{LAR}}} P(y|z)(x|t_1) \multimap P(y|z)(x|t_2)$.

Daí, $t_1 \ \models t_2 \mid_{\overline{\text{LAR}}} \Psi z\, P(y|z)(x|t_1) \multimap \Psi z\, P(y|z)(x|t_2)$, donde, de (25) e CGR,

$t_1 \ \models t_2 \mid_{\overline{\text{LAR}}} (\Psi y\, P)(x|t_1) \multimap (\Psi y\, P)(x|t_2)$. (43)

Por HI, $t_1 \ \models t_2 \mid_{\overline{\text{LAR}}} (\neg P)(y|z)(x|t_1) \multimap (\neg P)(y|z)(x|t_2)$.

Daí, $t_1 \ \models t_2 \mid_{\overline{\text{LAR}}} \Psi' z\, \neg P(y|z)(x|t_1) \multimap \Psi' z\, \neg P(y|z)(x|t_2)$, donde, de (25) e CGR,

$t_1 \ \models t_2 \mid_{\overline{\text{LAR}}} (\Psi' y\, \neg P)(x|t_1) \multimap (\Psi' y\, \neg P)(x|t_2)$.

Daí, pelo Esquema da Alternância (ALT),

$t_1 \ \models t_2 \mid_{\overline{\text{LAR}}} (\neg \Psi y\, P)(x|t_1) \multimap (\neg \Psi y\, P)(x|t_2)$. (44)

De (43), (44) temos que vale $\Delta(E)$ para este subcaso.

□

5.4.88. Esquema Geral do ∀-Eliminação.

- Se x é de topo pontual em P, então $\text{ex}(t), \forall x\, P \vdash_{\text{LAR}} P(x|t)$.

Prova:

1	x é de topo pontual em P	hip
2	$\text{ex}(t)$	pr
3	$\forall x\, P$	pr
4	y não é livre em $\{t, P\}$	dsg
5	$\quad\mid\ t \;)\!\!= y$	sup
6	$\quad\mid\ P(x|y)$	3, ∀-el
7	$t \;)\!\!= y \to P(x|y)$	5, 6, RD
8	$\forall y\, (t \;)\!\!= y \to P(x|y))$	7, GEN
9	y é de topo pontual em $P(x|y)$	1
10	$P(x|y)(y|t)$	4, 9, 2, 8, GLOB
11	$P(x|t)$	4, 10, fato 5.2.25, CGR

5.4.89. Esquema Geral do ∃-Introdução.

- Se x é de topo em P, então $\text{ex}(t), P(x|t) \vdash_{\text{LAR}} \exists x\, P$.

Prova:

1	x é de topo em P	hip
2	$\text{ex}(t)$	pr
3	$P(x|t)$	pr
4	y não é livre em $\{t, P\}$	dsg
5	$\exists y\, (t \;)\!\!= y)$	2, 4, escólio 5.4.68
6	$\quad\mid\ t \;)\!\!= y$	sup
7	$\quad\mid\ P(x|y)$	1, 6, 3, EGIA
8	$\quad\mid\ \exists x\, P$	7, ∃-int
9	$\exists x\, P$	4, 5, 6, 7, ∃-el

5.4.90. Lei do Contexto.

(i) Se x é de topo em Q, então $Q(x|\Upsilon x\, P) \vdash_{\text{LAR}} \forall x\,(P \multimap Q)$.

(ii) Se x é de topo pontual em Q, então $\exists x\, P, \forall x\,(P \multimap Q) \vdash_{\text{LAR}} Q(x|\Upsilon x\, P)$.

(iii) Se $x_1, \ldots, x_n$ são de topo em Q, então

$$Q(x_1, \ldots, x_n|\Upsilon x_1\, P_1, \ldots, \Upsilon x_n\, P_n) \vdash_{\text{LAR}} \forall x_1 \ldots \forall x_n(P_1 \wedge \ldots \wedge P_n \multimap Q).$$

(iv) Se $\begin{cases} x_1, \ldots, x_n \text{ são de topo pontuais em } Q, \\ \text{para quaisquer } i, j \in \{1, \ldots, n\}, \text{ se } i \neq j, \text{ então } x_i \text{ não é livre em } P_j, \end{cases}$
então

$$\exists x_1\, P_1 \ldots \exists x_n\, P_n, \forall x_1 \ldots \forall x_n(P_1 \wedge \ldots \wedge P_n \multimap Q) \vdash_{\text{LAR}} Q(x_1, \ldots, x_n|\Upsilon x_1\, P_1, \ldots, \Upsilon x_n\, P_n).$$

Prova de (i):

1	x é de topo em Q	hip
2	$Q(x\vert\Upsilon x\, P)$	pr
3	$\quad P$	sup
4	$\quad \Upsilon x\, P \;\rangle\!= x$	3, DESCR
5	$\quad Q(x\vert x)$	1, 4, 2, EGIA
6	$\quad Q$	5
7	$P \multimap Q$	3, 6, RDF
8	$\forall x\,(P \multimap Q)$	7, GEN

Prova de (ii):

1	x é de topo pontual em Q	hip
2	$\exists x\, P$	pr
3	$\forall x\,(P \multimap Q)$	pr
4	$P \multimap Q$	3, $\forall$-el
5	$\text{ex}(\Upsilon x\, P)$	2, escólio 5.4.71
6	$\quad \Upsilon x\, P \;\rangle\!= x$	sup
7	$\quad P(x\vert x)$	6, DESCR
8	$\quad P$	7
9	$\quad Q$	8, 4, MPF
10	$\Upsilon x\, P \;\rangle\!= x \to Q$	6, 9, RD
11	$\forall x\,(\Upsilon x\, P \;\rangle\!= x \to Q)$	10, GEN
12	$Q(x\vert\Upsilon x\, P)$	1, 5, 11, GLOB

Prova de (iii):

Seja $\Delta(n)$: para quaisquer $x_1, \ldots, x_n$, para quaisquer $P_1, \ldots, P_n$ e para qualquer Q, se $x_1, \ldots, x_n$ são de topo em Q, então

$Q(x_1, \ldots, x_n|\Upsilon x_1\, P_1, \ldots, \Upsilon x_n\, P_n) \vdash_{\text{LAR}} \forall x_1 \ldots \forall x_n(P_1 \wedge \ldots \wedge P_n \mathbin{-\!\triangleright} Q)$

1	$x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}$ são de topo em Q	hip
2	$Q(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}|\Upsilon x_1 P_1, \ldots, \Upsilon x_n P_n, \Upsilon x_{n+1}\, P_{n+1})$	pr
3	$y_1, \ldots, y_n, y_{n+1}$ são variáveis distintas não livres em $\{\overrightarrow{x}, x_{n+1}, \overrightarrow{P}, P_{n+1}, Q\}$	dsg
4	$Q(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}|y_1, \ldots, y_n, y_{n+1})(y_1, \ldots, y_n, y_{n+1}|\Upsilon x_1 P_1, \ldots, \Upsilon x_n P_n, \Upsilon x_{n+1}\, P_{n+1})$	2, 3, fato 5.2.25
5	R é $Q(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}|y_1, \ldots, y_n, y_{n+1})$	dsg
6	$R(y_1, \ldots, y_n, y_{n+1}|\Upsilon x_1 P_1, \ldots, \Upsilon x_n P_n, \Upsilon x_{n+1}\, P_{n+1})$	4, 5
7	$R(y_1, \ldots, y_n, y_{n+1}|\Upsilon y_1 P_1(x_1|y_1), \ldots, \Upsilon y_n P_n(x_n|y_n), \Upsilon y_{n+1}\, P_{n+1}(x_{n+1}|y_{n+1}))$	6, 3, fato 5.2.25
8	$R(y_1, \ldots, y_n|\Upsilon y_1 P_1(x_1|y_1), \ldots, \Upsilon y_n P_n(x_n|y_n))(y_{n+1}|\Upsilon y_{n+1}\, P_{n+1}(x_{n+1}|y_{n+1}))$	7, fato 5.2.25
9	y_{n+1} é de topo em $R(y_1, \ldots, y_n|\Upsilon y_1 P_1(x_1|y_1), \ldots, \Upsilon y_n P_n(x_n|y_n))$	1, 3, 5
10	$\forall y_{n+1}(P_{n+1}(x_{n+1}|y_{n+1}) \mathbin{-\!\triangleright} R(y_1, \ldots, y_n|\Upsilon y_1 P_1(x_1|y_1), \ldots, \Upsilon y_n P_n(x_n|y_n))$	9,8,(i)
11	$y_1, \ldots, y_n$ são de topo em R	1, 3, 5
12	$\forall y_{n+1}(P_{n+1}(x_{n+1}|y_{n+1}) \mathbin{-\!\triangleright} \forall y_1 \ldots \forall y_n(P_1(x_1|y_1) \wedge \ldots \wedge P_n(x_n|y_n) \mathbin{-\!\triangleright} R))$	10,11, HI
13	$\forall y_{n+1} \forall y_1 \ldots \forall y_n(P_{n+1}(x_{n+1}|y_{n+1}) \mathbin{-\!\triangleright} (P_1(x_1|y_1) \wedge \ldots \wedge P_n(x_n|y_n) \mathbin{-\!\triangleright} R))$	12, TQ
14	$\forall y_1 \ldots \forall y_n, \forall y_{n+1}(P_1(x_1|y_1) \wedge \ldots \wedge P_n(x_n|y_n) \wedge P_{n+1}(x_{n+1}|y_{n+1}) \mathbin{-\!\triangleright} R))$	13, IE
15	S é $P_1(x_1|y_1) \wedge \ldots \wedge P_n(x_n|y_n) \wedge P_{n+1}(x_{n+1}|y_{n+1}) \mathbin{-\!\triangleright} R$	dsg
16	$S(y_1, \ldots, y_n, y_{n+1}|x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \approx_c P_1 \wedge \ldots \wedge P_n \mathbin{-\!\triangleright} Q$	15,5,3,fato 5.2.25
17	$\forall x_1 \ldots \forall x_{n+1}(P_1 \wedge \ldots \wedge P_n \wedge P_{n+1} \mathbin{-\!\triangleright} Q)$	14,15,16,fato 5.2.25

Prova de (iv):

Seja $\Delta(n)$:

Se $\begin{cases} * \ x_1, \ldots, x_n \text{ são de topo pontuais em } Q, \\ * \ \text{para quaisquer } i, j \in \{1, \ldots, n\}, \text{ se } i \neq j, \text{ então } x_i \text{ não é livre em } P_j, \end{cases}$

então

$\exists x_1 P_1 \ldots \exists x_n P_n, \forall x_1 \ldots \forall x_n(P_1 \wedge \ldots \wedge P_n \rightarrow Q) \vdash_{\text{LAR}} Q(x_1, \ldots, x_n | \Upsilon x_1 P_1, \ldots, \Upsilon x_n P_n)$.

1	$x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}$ são de topo pontuais em Q	hip
2	para quaisquer $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, se $i \neq j$ então x_i não é livre em P_j	hip
3	$\exists x_1 P_1 \ldots \exists x_n P_n$	pr
4	$\exists x_{n+1} P_{n+1}$	pr
5	$\forall x_1 \ldots \forall x_n \forall x_{n+1}(P_1 \wedge \ldots \wedge P_n \wedge P_{n+1} \rightarrow Q)$	pr
6	$\quad P_{n+1}$	sup
7	$\quad P_1 \wedge \ldots \wedge P_n \wedge P_{n+1} \rightarrow Q$	5, $\forall$-el
8	$\quad P_{n+1} \wedge P_1 \wedge \ldots \wedge P_n \rightarrow Q$	7, 8
9	$\quad P_{n+1} \rightarrow P_1 \wedge \ldots \wedge P_n \rightarrow Q$	8, IE
10	$\quad P_1 \wedge \ldots \wedge P_n \rightarrow Q$	6, 9, MPF
11	$\quad \forall x_1 \ldots \forall x_n(P_1 \wedge \ldots \wedge P_n \rightarrow Q)$	10, GEN
12	$\quad Q(x_1, \ldots, x_n | \Upsilon x_1 P_1, \ldots, \Upsilon x_n P_n)$	1, 2, 3, 11, HI
13	$P_{n+1} \rightarrow Q(x_1, \ldots, x_n | \Upsilon x_1 P_1, \ldots, \Upsilon x_n P_n)$	6, 12, RDF
14	$\forall x_{n+1}(P_{n+1} \rightarrow Q(x_1, \ldots, x_n | \Upsilon x_1 P_1, \ldots, \Upsilon x_n P_n))$	13, GEN
15	x_{n+1} é de topo pontual em $Q(x_1, \ldots, x_n | \Upsilon x_1 P_1, \ldots, \Upsilon x_n P_n)$	1, 2
16	$Q(x_1, \ldots, x_n | \Upsilon x_1 P_1, \ldots, \Upsilon x_n P_n)(x_{n+1} | \Upsilon x_{n+1} P_{n+1})$	1, 5, 14, (ii)
17	$Q(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1} | \Upsilon x_1 P_1, \ldots, \Upsilon x_n P_n, \Upsilon x_{n+1} P_{n+1})$	1,6,2,fato 5.2.25

5.4.91 Corolário.

- Se $\begin{cases} x \text{ é de topo pontual em } Q, \\ Q \text{ é uma fórmula atômica básica ou uma negação de fórmula atômica básica,} \end{cases}$

  então $\vdash_{\text{LAR}} Q(x | \Upsilon x P) \leftrightarrow \forall x (P \rightarrow Q)$.

- Se $\begin{cases} x_1, \ldots, x_n \text{ são de topo pontuais em } Q, \\ Q \text{ é uma fórmula atômica básica ou uma negação de fórmula atômica básica,} \\ \text{se } i \neq j, \text{ então } x_i \text{ não é livre em } P_j \end{cases}$

  então $\vdash_{\text{LAR}} Q(x_1, \ldots, x_n | \Upsilon x_1 P_1, \ldots, \Upsilon x_n P_n) \leftrightarrow \forall x_1 \ldots \forall x_n (P_1 \wedge \ldots \wedge P_n \rightarrow Q)$.

Prova de (i):

1	x é de topo pontual em Q	hip
2	Q é uma f. at. básica ou uma negação de f. at. básica	hip
3	$Q(x \vert \Upsilon x\, P)$	sup
4	$\forall x\,(P \rightarrowtriangle Q)$	1, 3, Lei do Contexto (i)
5	$Q(x \vert \Upsilon x\, P) \rightarrowtriangle \forall x\,(P \rightarrowtriangle Q)$	3, 4, RDF
6	$\forall x\,(P \rightarrowtriangle Q)$	sup
7	$\mathrm{ex}(\Upsilon x\, P) \vee \mathrm{vac}(\Upsilon x\, P)$	lema 5.4.73
8	$\exists x\, P \vee \mathrm{vac}(\Upsilon x\, P)$	7, escólio 5.4.71
9	$\exists x\, P$	sup
10	$Q(x \vert \Upsilon x\, P)$	1, 9, 6, Lei do Contexto (ii)
11	$\exists x\, P \rightarrowtriangle Q(x \vert \Upsilon x\, P)$	9, 10, RDF
12	$\mathrm{vac}(\Upsilon x\, P) \rightarrowtriangle Q(x \vert \Upsilon x\, P)$	1, 2, VAC, RDF
13	$Q(x \vert \Upsilon x\, P)$	8, 11, 12, PCF
14	$\forall x\,(P \rightarrowtriangle Q) \rightarrowtriangle Q(x \vert \Upsilon x\, P)$	6, 13, RDF
15	$\forall x\,(P \rightarrowtriangle Q) \leftrightarrowtriangle Q(x \vert \Upsilon x\, P)$	5, 14, $\wedge$-int, def. 5.4.21

5.4.92. Esquema da Globalização (GLOB).

- Se $\begin{cases} x \text{ não é livre em } t, \\ x \text{ é de topo pontual em } P, \end{cases}$

  então $\mathrm{ex}(t) \vdash_{\mathrm{LAR}} \forall x\,(t \mathrel{)\!\!=} x \to P) \leftrightarrowtriangle P(x|t)$.

Prova:

1	x não é livre em t	hip
2	x é de topo pontual em P	hip
3	ex(t)	pr
4	$\quad \forall x\,(t \mathrel{)\!\!=} x \rightarrow P)$	sup
5	$\quad P(x\vert t)$	1, 2, 3, 4, GLOB
6	$\forall x\,(t \mathrel{)\!\!=} x \rightarrow P) \rightarrowtriangle P(x\vert t)$	4, 5, RDF
7	$\quad P(x\vert t)$	sup
8	$\qquad t \mathrel{)\!\!=} x$	sup
9	$\qquad P(x\vert x)$	2, 8, 7, EGIA
10	$\qquad P$	9
11	$\quad t \mathrel{)\!\!=} x \rightarrow P$	8, 10, RD
12	$\quad \forall x\,(t \mathrel{)\!\!=} x \rightarrow P)$	11, GEN
13	$P(x\vert t) \rightarrowtriangle \forall x\,(t \mathrel{)\!\!=} x \rightarrow P)$	7, 12, RDF
14	$\forall x\,(t \mathrel{)\!\!=} x \rightarrow P) \leftrightarrowtriangle P(x\vert t)$	6, 13, $\wedge$-int, def, 5.4.21

5.4.93. Esquema da Globalização Generalizado.

- Se $\begin{cases} x_1, \ldots, x_n \text{ não são livres em } t_1, \ldots, t_n, \\ x_1, \ldots, x_n \text{ são de topo pontuais em } P, \end{cases}$ então

$$\text{ex}(t_1), \ldots, \text{ex}(t_n) \vdash_{\text{LAR}} \forall x_1 \ldots \forall x_n\,(t_1 \mathrel{)\!\!=} x_1 \wedge \ldots \wedge t_n \mathrel{)\!\!=} x_n \rightarrow P) \leftrightarrowtriangle P(x_1, \ldots, x_n \vert t_1, \ldots, t_n).$$

Prova:

Suponha que $\begin{cases} x_1, \ldots, x_n \text{ não são livres em } t_1, \ldots, t_n, (1) \\ x_1, \ldots, x_n \text{ são de topo pontuais em } P.\ (2) \end{cases}$

Considere que $\begin{cases} \overrightarrow{z} = \overrightarrow{x} + x_{n+1}, \\ \overrightarrow{v} = \overrightarrow{t} + t_{n+1}, \\ \overrightarrow{w} = \overrightarrow{y} + y_{n+1}, \\ \overrightarrow{w} \text{ não ocorre em } \{\overrightarrow{z}, \overrightarrow{v}, P\}. \end{cases}$

1	$\mathrm{ex}(t_1), \ldots, \mathrm{ex}(t_n), \mathrm{ex}(t_{n+1})$	pr
2	$\forall\vec{z}(t_1 \models x_1 \wedge \ldots \wedge t_n \models x_n \wedge t_{n+1} \models x_{n+1} \to P)$	sup
3	$\forall\vec{w}(t_1 \models y_1 \wedge \ldots \wedge t_n \models y_n \wedge t_{n+1} \models y_{n+1} \to P(\vec{z}\vert\vec{w}))$	2, CGR
4	$\forall\vec{w}(t_1 \models y_1 \wedge \ldots \wedge t_n \models y_n \wedge t_{n+1} \models y_{n+1} \to P(\vec{x}\vert\vec{y})(x_{n+1}\vert y_{n+1}))$	3, CGR, fato 5.2.25
5	$t_1 \models y_1 \wedge \ldots \wedge t_n \models y_n \wedge t_{n+1} \models y_{n+1} \to P(\vec{x}\vert\vec{y})(x_{n+1}\vert y_{n+1})$	4, $\forall$-el
6	$t_1 \models y_1, \ldots, t_n \models y_n$	sup
7	$t_{n+1} \models y_{n+1}$	sup
8	$t_1 \models y_1 \wedge \ldots \wedge t_n \models y_n \wedge t_{n+1} \models y_{n+1}$	6, 7, $\wedge$-int
9	$P(\vec{x}\vert\vec{y})(x_{n+1}\vert y_{n+1})$	8, 5, MP
10	$\forall y_{n+1}(t_{n+1} \models y_{n+1} \to P(\vec{x}\vert\vec{y})(x_{n+1}\vert y_{n+1}))$	7, 9, RD, GEN
11	$P(\vec{x}\vert\vec{y})(x_{n+1}\vert y_{n+1})(y_{n+1}\vert t_{n+1})$	1, 10, GLOB
12	$\forall\vec{y}(t_1 \models y_1, \ldots, t_n \models y_n \to P(\vec{x}\vert\vec{y})(x_{n+1}\vert y_{n+1})(y_{n+1}\vert t_{n+1}))$	7, 11, RD-GEN, GEN
13	$P(\vec{x}\vert\vec{y})(x_{n+1}\vert y_{n+1})(y_{n+1}\vert t_{n+1})(\vec{y}\vert\vec{t})$	1, 12, GLOB (HI)
14	$P(\vec{z}\vert\vec{w})(\vec{w}\vert\vec{v})$	13, fato 5.2.25
15	$P(\vec{z}\vert\vec{v})$	14, CGR
16	$\forall\vec{z}(t_1 \models x_1 \wedge \ldots \wedge t_n \models x_n \wedge t_{n+1} \models x_{n+1} \to P) \rightarrowtriangle P(\vec{z}\vert\vec{v})$	2, 15, RDF
17	$P(\vec{z}\vert\vec{v})$	sup
18	$P(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}\vert t_1, \ldots, t_n, t_{n+1})$	17
19	$t_1 \models x_1 \wedge \ldots \wedge t_n \models x_n \wedge t_{n+1} \models x_{n+1}$	sup
20	$P(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}\vert x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$	19, 18, EGIA
21	P	20
22	$\forall\vec{z}(t_1 \models x_1 \wedge \ldots \wedge t_n \models x_n \wedge t_{n+1} \models x_{n+1} \to P)$	19, 21, RD, GEN
23	$P(\vec{z}\vert\vec{v}) \rightarrowtriangle \forall\vec{z}(t_1 \models x_1 \wedge \ldots \wedge t_n \models x_n \wedge t_{n+1} \models x_{n+1} \to P)$	17, 22, RDF
24	$\forall\vec{z}(t_1 \models x_1 \wedge \ldots \wedge t_n \models x_n \wedge t_{n+1} \models x_{n+1} \to P) \leftrightarrowtriangle P(\vec{z}\vert\vec{v})$	16, 23, def.5.2.26

□

5.4.94. Esquema da Vacuidade Generalizado.

- Se $\begin{cases} P \text{ é uma fórmula atômica básica ou uma negação de fórmula atômica básica,} \\ \text{para cada } i \in \{1, \ldots, n\}, x_i \text{ possui uma ocorrência de topo em } P, \end{cases}$

  então $\mathrm{vac}(t_1) \vee \ldots \vee \mathrm{vac}(t_n) \vdash_{\mathrm{LAR}} P(x_1, \ldots, x_n\vert t_1, \ldots, t_n)$.

Prova:

$$\text{Suponha que}\begin{cases} P \text{ é uma fórmula at. básica ou uma negação de fórmula at. básica,} & (1)\\ \text{para cada } i \in \{1,\ldots,n\},\ x_i \text{ possui uma ocorrência de topo em } P. & (2)\end{cases}$$

$$\text{Considere que}\begin{cases} \overrightarrow{y} \text{ não ocorre em } \{\overrightarrow{x}, \overrightarrow{t}, P\},\\ \overrightarrow{z} = \overrightarrow{y} - y_i,\\ \overrightarrow{v} = \overrightarrow{t} - t_i.\end{cases}$$

De (2), temos que, para cada $i \in \{1,\ldots,n\}$, y_i possui uma ocorrência de topo em $P(\overrightarrow{x}|\overrightarrow{y})$, donde y_i possui uma ocorrência de topo em $P(\overrightarrow{x}|\overrightarrow{y})(\overrightarrow{z}|\overrightarrow{v})$. (3)

De (1), (3) e VAC, para cada $i \in \{1,\ldots,n\}$, $\text{vac}(t_i) \vdash_{\text{LAR}} P(\overrightarrow{x}|\overrightarrow{y})(\overrightarrow{z}|\overrightarrow{v})(y_i|t_i)$.

Mas $P(\overrightarrow{x}|\overrightarrow{y})(\overrightarrow{z}|\overrightarrow{v})(y_i|t_i) \approx_c P(\overrightarrow{x}|\overrightarrow{y})(\overrightarrow{y}|\overrightarrow{t}) \approx_c P(\overrightarrow{x}|\overrightarrow{t})$,

donde, para cada $i \in \{1,\ldots,n\}$, $\text{vac}(t_i) \vdash_{\text{LAR}} P(\overrightarrow{x}|\overrightarrow{t})$.

Logo, $\text{vac}(t_1) \vee \ldots \vee \text{vac}(t_n) \vdash_{\text{LAR}} P(\overrightarrow{x}|\overrightarrow{t})$, ou seja,

$\text{vac}(t_1) \vee \ldots \vee \text{vac}(t_n) \vdash_{\text{LAR}} P(x_1,\ldots,x_n|t_1,\ldots,t_n)$.

□

5.5 Eliminação de Descrições

Considerando as funções **sai** (definição 5.3.34) e **eld** (definição 5.3.23), fornecemos a seguir alguns resultados, os quais são a expressão sintática dos resultados apresentados na seção 5.3. Ao final desta seção, a correção e completude de LAR são demonstradas, baseando-se na tradução de LAR para LEC.

5.5.1 Lema. Se x não é livre em t, então $\vdash_{\text{LAR}} \text{form}(t,x) \leftrightarrow t \ni x$.

Prova:

Suponha que x não é livre em t.

- Caso t é uma constante c.

  Da definição 5.3.19, temos de imediato que $\vdash_{\text{LAR}} \text{form}(c,x) \leftrightarrow c \ni x$.

- Caso t é uma variável y distinta de x.

  Analogamente ao caso anterior, $\vdash_{\text{LAR}} \text{form}(y,x) \leftrightarrow y \ni x$.

- Caso t é $f(u_1, \ldots, u_n)$.

  Pela definição 5.3.19,

  $\mathrm{form}(f(u_1, \ldots, u_n), x) =$

  $\exists x_1 \ldots \exists x_n\, (\mathrm{form}(u_1, x_1) \wedge \ldots \wedge \mathrm{form}(u_n, x_n) \wedge f(x_1, \ldots, x_n) \mathrel{)\!\!=} x)$, onde $x_1, \ldots, x_n$ são as primeiras variáveis distintas entre si e não livres em x e em $f(u_1, \ldots, u_n)$.

  Por HI,

  $\vdash_{\mathrm{LAR}} \mathrm{form}(f(u_1, \ldots, u_n), x) \leftrightarrow \exists x_1 \ldots \exists x_n\, (u_1 \mathrel{)\!\!=} x_1 \wedge \ldots \wedge u_n \mathrel{)\!\!=} x_n \wedge f(x_1, \ldots, x_n) \mathrel{)\!\!=} x)$.

  Daí, pelo Esquema da Função (FUNC) (5.4.51),

  $\vdash_{\mathrm{LAR}} \mathrm{form}(f(u_1, \ldots, u_n), x) \leftrightarrow f(u_1, \ldots, u_n) \mathrel{)\!\!=} x$.

- Caso t é $\Upsilon x\, P$.

  Pela definição 5.3.19, $\mathrm{form}(\Upsilon x\, P, x) = P$.

  Pelo Esquema da Descrição (DESCR) (5.4.50), $\vdash_{\mathrm{LAR}} P \leftrightarrow \Upsilon x\, P \mathrel{)\!\!=} x$.

  Logo, $\vdash_{\mathrm{LAR}} \mathrm{form}(\Upsilon x\, P, x) \leftrightarrow \Upsilon x\, P \mathrel{)\!\!=} x$.

- Caso t é $\Upsilon y\, P$.

  Pela definição 5.3.19, $\mathrm{form}(\Upsilon y\, P, x) = P(y|x)$.

  Pelo Esquema da Descrição (DESCR) (5.4.50), $\vdash_{\mathrm{LAR}} P(y|x) \leftrightarrow \Upsilon y\, P \mathrel{)\!\!=} x$.

  Logo, $\vdash_{\mathrm{LAR}} \mathrm{form}(\Upsilon y\, P, x) \leftrightarrow \Upsilon y\, P \mathrel{)\!\!=} x$.

□

5.5.2 Lema. Se $x_1, \ldots, x_n$ não são livres em $t_1, \ldots, t_n$, então

(i) $\vdash_{\mathrm{LAR}} p(t_1, \ldots, t_n) \leftrightarrow \forall x_1 \ldots \forall x_n\, (t_1 \mathrel{)\!\!=} x_1 \wedge \ldots \wedge t_n \mathrel{)\!\!=} x_n \rightarrow p(x_1, \ldots, x_n))$.

(ii) $\vdash_{\mathrm{LAR}} \neg p(t_1, \ldots, t_n) \leftrightarrow \forall x_1 \ldots \forall x_n\, (t_1 \mathrel{)\!\!=} x_1 \wedge \ldots \wedge t_n \mathrel{)\!\!=} x_n \rightarrow \neg p(x_1, \ldots, x_n))$.

Prova de (i):

1	$x_1, \ldots, x_n$ não são livres em $t_1, \ldots, t_n$	hip
2	$p(t_1, \ldots, t_n)$	sup
3	$t_1 \mathrel{)\!\!\models} x_1, \ldots, t_n \mathrel{)\!\!\models} x_n$	sup
4	$p(x_1, \ldots, x_n)$	3, 2, SUBST (ii)
5	$t_1 \mathrel{)\!\!\models} x_1 \wedge \ldots \wedge t_n \mathrel{)\!\!\models} x_n \to p(x_1, \ldots, x_n)$	3, 4, RD (5.4.14)
6	$\forall x_1 \ldots \forall x_n\,(t_1 \mathrel{)\!\!\models} x_1 \wedge \ldots \wedge t_n \mathrel{)\!\!\models} x_n \to p(x_1, \ldots, x_n))$	5, GEN
7	$p(t_1, \ldots, t_n) \rightarrowtriangle \forall x_1 \ldots \forall x_n\,(t_1 \mathrel{)\!\!\models} x_1 \wedge \ldots \wedge t_n \mathrel{)\!\!\models} x_n \to p(x_1, \ldots, x_n))$	2, 6, RDF
8	$\forall x_1 \ldots \forall x_n\,(t_1 \mathrel{)\!\!\models} x_1 \wedge \ldots \wedge t_n \mathrel{)\!\!\models} x_n \to p(x_1, \ldots, x_n))$	sup
9	$(\mathrm{ex}(t_1) \wedge \ldots \wedge \mathrm{ex}(t_n)) \vee (\mathrm{vac}(t_1) \vee \ldots \vee \mathrm{vac}(t_n))$	lema 5.4.73
10	$\mathrm{ex}(t_1) \wedge \ldots \wedge \mathrm{ex}(t_n)$	sup
11	$p(t_1, \ldots, t_n)$	1, 10, 8, GLOB Gener.
12	$\mathrm{ex}(t_1) \wedge \ldots \wedge \mathrm{ex}(t_n) \rightarrowtriangle p(t_1, \ldots, t_n)$	10, 11, RDF
13	$\mathrm{vac}(t_1) \vee \ldots \vee \mathrm{vac}(t_n) \rightarrowtriangle p(t_1, \ldots, t_n)$	VAC Gener., RDF
14	$p(t_1, \ldots, t_n)$	9, 12, 13, PCF
15	$\forall x_1 \ldots \forall x_n\,(t_1 \mathrel{)\!\!\models} x_1 \wedge \ldots \wedge t_n \mathrel{)\!\!\models} x_n \to p(x_1, \ldots, x_n)) \rightarrowtriangle p(t_1, \ldots, t_n)$	8, 14, RDF
16	$p(t_1, \ldots, t_n) \leftrightarrowtriangle \forall x_1 \ldots \forall x_n\,(t_1 \mathrel{)\!\!\models} x_1 \wedge \ldots \wedge t_n \mathrel{)\!\!\models} x_n \to p(x_1, \ldots, x_n))$	7, 15, $\wedge$-int

Esboço da prova de (ii): análoga à prova de (i), utilizando-se o item (iii) do Postulado da Substituição (SUBST).

5.5.3 Teorema.

- $\vdash_{\mathrm{LAR}} P \leftrightarrowtriangle P_{\mathrm{S}}$.
- $\vdash_{\mathrm{LAR}} \neg P \leftrightarrowtriangle \neg(P_{\mathrm{N}})$.

Prova:

Para esta prova, definimos [24] $\begin{cases} \mathrm{form}(P) = P, \\ \mathrm{form}(t) = \mathrm{form}(t, x), \text{ onde } x \text{ é a primeira variável não livre em } t. \end{cases}$

Definimos também $\begin{cases} t_{\mathrm{S}} = \mathrm{form}(t)_{\mathrm{S}}, \\ t_{\mathrm{N}} = \mathrm{form}(t)_{\mathrm{N}}. \end{cases}$

Daí, para cada designador D, definimos D_{S} e D_{N}. Vamos mostrar, por indução sobre D, que:

- $\Delta_1(D) : \vdash_{\mathrm{LAR}} \mathrm{form}(D) \leftrightarrowtriangle \mathrm{form}(D)_{\mathrm{S}}$;
- $\Delta_2(D) : \vdash_{\mathrm{LAR}} \neg\,\mathrm{form}(D) \leftrightarrowtriangle \neg(\mathrm{form}(D)_{\mathrm{N}})$;

[24] Para termos, utilizamos a função form definida em 5.3.19.

- $\Delta(D) = \Delta_1(D)$ e $\Delta_2(D)$.

- Caso D é uma constante c.

  $\text{form}(D) = c \models x$.

  $\text{form}(D)_S = (c \models x)_S = c \models x$.

  Logo, $\vdash_{\text{LAR}} \text{form}(c) \Leftrightarrow \text{form}(c)_S$, donde temos que $\Delta_1(D)$ vale para c.

  $\neg\,\text{form}(D) = \neg(c \models x)$.

  $\neg(\text{form}(D)_N) = \neg(c \models x)$.

  Daí, $\vdash_{\text{LAR}} \neg\,\text{form}(c) \Leftrightarrow \neg(\text{form}(c)_N)$, donde temos que $\Delta_2(D)$ vale para c.

  Portanto, vale $\Delta(D)$.

- Caso D é uma variável y.

  Analogamente ao caso anterior, temos que vale $\Delta(D)$.

- Caso D é $f(t_1, \ldots, t_n)$.

  Seja x a primeira variável não livre em $t_1, \ldots, t_n$.

  Sejam $x_1, \ldots, x_n$ as primeiras variáveis não livres em $t_1, \ldots, t_n, x$.

  Pela definição 5.3.19,

  $$\text{form}(D) = \exists x_1 \ldots \exists x_n\,(\text{form}(t_1, x_1) \wedge \ldots \wedge \text{form}(t_n, x_n) \wedge f(x_1, \ldots, x_n) \models x). \tag{1}$$

  $$\text{form}(D)_S = \exists x_1 \ldots \exists x_n(\text{form}(t_1, x_1)_S \wedge \ldots \wedge \text{form}(t_n, x_n)_S \wedge (f(x_1, \ldots, x_n) \models x)_S). \tag{2}$$

  $$\text{Por HI, } \begin{cases} \text{para cada } i \in \{1, \ldots, n\}, \vdash_{\text{LAR}} \text{form}(t_i) \Leftrightarrow \text{form}(t_i)_S, \\ \vdash_{\text{LAR}} f(t_1, \ldots, t_n) \models x \Leftrightarrow (f(t_1, \ldots, t_n) \models x)_S. \end{cases} \tag{3}$$

  De (1), (2) e (3), $\vdash_{\text{LAR}} \text{form}(D) \Leftrightarrow \text{form}(D)_S$. Logo, $\Delta_1(D)$.

  $$\neg\,\text{form}(D) = \neg\exists x_1 \ldots \exists x_n\,(\text{form}(t_1, x_1) \wedge \ldots \wedge \text{form}(t_n, x_n) \wedge f(x_1, \ldots, x_n) \models x). \tag{4}$$

  $$\neg(\text{form}(D)_N) = \neg\exists x_1 \ldots \exists x_n(\text{form}(t_1, x_1)_S \wedge \ldots \wedge \text{form}(t_n, x_n)_S \wedge (f(x_1, \ldots, x_n) \models x)_S). \tag{5}$$

  Daí, (3), (4) e (5), $\vdash_{\text{LAR}} \neg\,\text{form}(D) \Leftrightarrow \neg(\text{form}(D)_N)$. Logo, $\Delta_2(D)$.

  Portanto, vale $\Delta(D)$.

- Caso D é $\Upsilon x\, P$.

  Seja y a primeira variável não livre em $\Upsilon x\, P$.

  Pela definição 5.3.19, $\text{form}(D) = \text{form}(\Upsilon x\, P, y) = P(x|y)$.

  $\text{form}(D)_S = P(x|y)_S$.

  Por HI, $\vdash_{\text{LAR}} P(x|y) \Leftrightarrow P(x|y)_S$. Daí, $\vdash_{\text{LAR}} \text{form}(D) \Leftrightarrow \text{form}(D)_S$, donde $\Delta_1(D)$.

  $\neg\,\text{form}(D) = \neg\,\text{form}(\Upsilon x\, P, y) = \neg P(x|y)$.

  $\neg(\text{form}(D)_N) = \neg(P(x|y)_N)$.

Por HI, $\vdash_{\text{LAR}} \neg P(x|y) \leftrightarrow \neg(P(x|y)_{\text{N}})$. Daí, $\vdash_{\text{LAR}} \neg\,\text{form}(D) \leftrightarrow \neg(\text{form}(D)_{\text{N}})$, donde $\Delta_2(D)$. Portanto, vale $\Delta(D)$.

- Caso D é $p(t_1, \ldots, t_n)$.

  Considere $x_1, \ldots, x_n$ variáveis não livres em $t_1, \ldots, t_n$.

  Pela definição 5.3.19, $\text{form}(D) = p(t_1, \ldots, t_n)$.

  Pelo lema 5.5.2 (i),

  $\vdash_{\text{LAR}} p(t_1, \ldots, t_n) \leftrightarrow \forall x_1 \ldots \forall x_n\,(t_1 \models x_1 \wedge \ldots \wedge t_n \models x_n \to p(x_1, \ldots, x_n))$,

  donde pelo lema 5.5.1,

  $\vdash_{\text{LAR}} p(t_1, \ldots, t_n) \leftrightarrow \forall x_1 \ldots \forall x_n\,(\text{form}(t_1, x_1) \wedge \ldots \wedge \text{form}(t_n, x_n) \to p(x_1, \ldots, x_n))$. (6)

  Pela definição 5.3.23, temos que

  $\text{form}(D)_{\text{S}} = \forall x_1 \ldots \forall x_n\,(\text{form}(t_1, x_1)_{\text{S}} \wedge \ldots \wedge \text{form}(t_n, x_n)_{\text{S}} \to p(x_1, \ldots, x_n))$. (7)

  Por HI, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\vdash_{\text{LAR}} \text{form}(t_i, x_i) \leftrightarrow \text{form}(t_i, x_i)_{\text{S}}$. (8)

  Logo, $\vdash_{\text{LAR}} \text{form}(D) \leftrightarrow \text{form}(D)_{\text{S}}$, donde $\Delta_1(D)$.

  Pela definição 5.3.19, $\neg\,\text{form}(D) = \neg p(t_1, \ldots, t_n)$.

  Pelo lema 5.5.2 (ii),

  $\vdash_{\text{LAR}} \neg p(t_1, \ldots, t_n) \leftrightarrow \forall x_1 \ldots \forall x_n\,(t_1 \models x_1 \wedge \ldots \wedge t_n \models x_n \to \neg p(x_1, \ldots, x_n))$,

  donde pelo lema 5.5.1,

  $\vdash_{\text{LAR}} \neg p(t_1, \ldots, t_n) \leftrightarrow \forall x_1 \ldots \forall x_n\,(\text{form}(t_1, x_1) \wedge \ldots \wedge \text{form}(t_n, x_n) \to \neg p(x_1, \ldots, x_n))$. (9)

  Pela definição 5.3.23, temos

  $\neg(\text{form}(D)_{\text{N}}) = \neg\exists x_1 \ldots \exists x_n\,(\text{form}(t_1, x_1)_{\text{S}} \wedge \ldots \wedge \text{form}(t_n, x_n)_{\text{S}} \wedge p(x_1, \ldots, x_n))$. (10)

  Por HI, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\vdash_{\text{LAR}} \text{form}(t_i, x_i) \leftrightarrow \text{form}(t_i, x_i)_{\text{S}}$. (11)

  Como $\vdash_{\text{LAR}} \neg\exists x_1 \ldots \exists x_n\,(\text{form}(t_1, x_1) \wedge \ldots \wedge \text{form}(t_n, x_n) \wedge p(x_1, \ldots, x_n)) \leftrightarrow$

  $\forall x_1 \ldots \forall x_n\,(\text{form}(t_1, x_1) \wedge \ldots \wedge \text{form}(t_n, x_n) \to \neg p(x_1, \ldots, x_n))$,

  temos de (9), (10) e (11) que $\vdash_{\text{LAR}} \neg\,\text{form}(D) \leftrightarrow \neg(\text{form}(D)_{\text{N}})$, donde $\Delta_2(D)$.

  Logo, vale $\Delta(D)$.

- Caso D é $t' \models t$.

  * Subcaso: t é um termo não puro.

    Considere x a primeira variável não livre em t', t.

    Pela definição 5.3.19, $\text{form}(D) = \text{form}(t' \models t) = t' \models t$. (12)

    Pela definição 5.3.23, $\text{form}(D)_{\text{S}} = \text{form}(t' \models t)_{\text{S}} = \forall x\,((t \models x)_{\text{S}} \to (t' \models x)_{\text{S}})$. (13)

    Por HI, $\vdash_{\text{LAR}} \text{form}(D)_{\text{S}} \leftrightarrow \forall x\,(t \models x \to t' \models x)$. (14)

    Pelo Esquema da Extensão (5.4.52), temos que $\vdash_{\text{LAR}} t' \models t \leftrightarrow \forall x\,(t \models x \to t' \models x)$.

Daí e de (12), (13) e (14), $\vdash_{\text{LAR}} \text{form}(D) \leftrightarrow \text{form}(D)_{\text{S}}$, donde $\Delta_1(D)$.

$\neg\,\text{form}(D) = \neg(t' \,\models t)$. (15)

$\neg(\text{form}(D)_{\text{N}}) = \neg((t' \,\models t)_{\text{N}}) = \neg\forall x\,((t \,\models x)_{\text{S}} \to (t' \,\models x)_{\text{S}})$.

Por HI, $\vdash_{\text{LAR}} \neg(\text{form}(D)_{\text{N}}) \leftrightarrow \neg\forall x\,(t \,\models x \to t' \,\models x)$. (16)

Pelo Esquema da Extensão (5.4.52), como ambas são fórmulas puras, temos

$\vdash_{\text{LAR}} \neg(t' \,\models t) \leftrightarrow \neg\forall x\,(t \,\models x \to t' \,\models x)$.

Daí, de (15) e (16), $\vdash_{\text{LAR}} \neg\,\text{form}(D) \leftrightarrow \neg(\text{form}(D)_{\text{N}})$. Logo, $\Delta_2(D)$. Portanto, vale $\Delta(D)$.

∗ Subcaso: t é um termo puro.

- Subsubcaso: t' é $f(t_1, \ldots, t_n)$.

  Então D é da forma $f(t_1, \ldots, t_n) \,\models t$, onde t é um termo puro.

  Considere $x_1, \ldots, x_n$ as primeiras n variáveis não livres em $t_1, \ldots, t_n, t$.

  $\text{form}(D) = f(t_1, \ldots, t_n) \,\models t$. (17)

  $\text{form}(D)_{\text{S}} = (f(t_1, \ldots, t_n) \,\models t)_{\text{S}} =$

  $\exists x_1 \ldots \exists x_n((t_1 \,\models x_1)_{\text{S}} \wedge \ldots \wedge (t_n \,\models x_n)_{\text{S}} \wedge (f(x_1, \ldots, x_n) \,\models t)_{\text{S}})$

  Por HI, $\vdash_{\text{LAR}} \text{form}(D)_{\text{S}} \leftrightarrow \exists x_1 \ldots \exists x_n(t_1 \,\models x_1 \wedge \ldots \wedge t_n \,\models x_n \wedge f(x_1, \ldots, x_n) \,\models t)$.(18)

  Como t é puro, pelo Esquema da Função (5.4.51),

  $\vdash_{\text{LAR}} f(t_1, \ldots, t_n) \,\models t \leftrightarrow \exists x_1 \ldots \exists x_n\,(t_1 \,\models x_1 \wedge \ldots \wedge t_n \,\models x_n \wedge f(x_1, \ldots, x_n) \,\models t)$.

  Daí e de (17) e (18), temos que $\vdash_{\text{LAR}} \text{form}(D) \leftrightarrow \text{form}(D)_{\text{S}}$, ou seja, $\Delta_1(D)$.

  $\neg\,\text{form}(D) = \neg(f(t_1, \ldots, t_n) \,\models t)$. (19)

  $\neg(\text{form}(D)_{\text{N}}) = \neg((f(t_1, \ldots, t_n) \,\models t)_{\text{N}}) =$

  $\neg\exists x_1 \ldots \exists x_n((t_1 \,\models x_1)_{\text{S}} \wedge \ldots \wedge (t_n \,\models x_n)_{\text{S}} \wedge (f(x_1, \ldots, x_n) \,\models t)_{\text{S}})$.

  Por HI,

  $\vdash_{\text{LAR}} \neg(\text{form}(D)_{\text{N}}) \leftrightarrow \neg\exists x_1 \ldots \exists x_n(t_1 \,\models x_1 \wedge \ldots \wedge t_n \,\models x_n \wedge f(x_1, \ldots, x_n) \,\models t)$. (20)

  Pelo Esquema da Função (5.4.51), como ambas são fórmulas puras,

  $\vdash_{\text{LAR}} \neg(f(t_1, \ldots, t_n) \,\models t) \leftrightarrow \neg\exists x_1 \ldots \exists x_n\,(t_1 \,\models x_1 \wedge \ldots \wedge t_n \,\models x_n \wedge f(x_1, \ldots, x_n) \,\models t)$.

  Daí, de (19) e (20), temos que $\vdash_{\text{LAR}} \neg\,\text{form}(D) \leftrightarrow \neg(\text{form}(D)_{\text{N}})$, ou seja, $\Delta_2(D)$.

  Portanto, vale $\Delta(D)$.

- Subsubcaso: t' é $\Upsilon x\, Q$.

  Então D é da forma $\Upsilon x\, Q \,\models t$, onde t é um termo puro.

  $\text{form}(D) = \Upsilon x\, Q \,\models t$. (21)

  $\text{form}(D)_{\text{S}} = (\Upsilon x\, Q \,\models t)_{\text{S}} = Q_{\text{S}}(x|t)$.

  Pelo Esquema da Descrição (5.4.50), $\vdash_{\text{LAR}} \Upsilon x\, Q \,\models t \leftrightarrow Q(x|t)$, donde por HI, $\vdash_{\text{LAR}}$

$\Upsilon x\, Q \models t \leftrightarrow Q_S(x|t)$.

Portanto, de (21) e (22), $\vdash_{LAR}$ form(D) $\leftrightarrow$ form$(D)_S$, ou seja, $\Delta_1(D)$.

$\neg$ form(D) = $\neg(\Upsilon x\, Q \models t)$. (23)

$\neg$(form$(D)_N$) = $\neg((\Upsilon x\, Q \models t)_N) = \neg(Q_S(x|t))$.

Por HI, $\vdash_{LAR} \neg$(form$(D)_N$) $\leftrightarrow \neg(Q(x|t))$ (24)

Pelo Esquema da Descrição, como ambas são fórmulas puras, temos que

$\vdash_{LAR} \neg(\Upsilon x\, Q \models t) \leftrightarrow \neg(Q_S(x|t))$. (25)

Logo, de (23), (24) e (25), $\vdash_{LAR} \neg$ form(D) $\leftrightarrow \neg$(form$(D)_N$), ou seja, $\Delta_2(D)$.

Portanto, vale $\Delta(D)$.

- Caso D é $\neg Q$.

Por HI, $\begin{cases} \vdash_{LAR} Q \leftrightarrow Q_S; & (26) \\ \vdash_{LAR} \neg Q \leftrightarrow \neg(Q_N). & (27) \end{cases}$

De (27), como $\neg(Q_N) = (\neg Q)_S$, temos $\vdash_{LAR} \neg Q \leftrightarrow (\neg Q)_S$, ou seja, $\Delta_1(D)$.

Pelo Esquema da Dupla Negação (DN), $\vdash_{LAR} Q \Leftrightarrow \neg\neg Q$ e $\vdash_{LAR} Q_S \Leftrightarrow \neg\neg Q_S$.

Daí e de (26), $\vdash_{LAR} \neg\neg Q \leftrightarrow \neg\neg Q_S$. Como $\neg\neg Q_S = \neg((\neg Q)_N)$, temos

$\vdash_{LAR} \neg\neg Q \leftrightarrow \neg((\neg Q)_N)$, ou seja, $\Delta_2(D)$. Portanto, vale $\Delta(D)$.

- Caso D é $Q \to R$.

Por HI, $\begin{cases} \vdash_{LAR} Q \leftrightarrow Q_S; \\ \vdash_{LAR} \neg Q \leftrightarrow \neg(Q_N); \\ \vdash_{LAR} R \leftrightarrow R_S; \\ \vdash_{LAR} \neg R \leftrightarrow \neg(R_N). \end{cases}$

$\vdash_{LAR} (Q \to R) \leftrightarrow (\neg Q \vee R) \leftrightarrow^{HI} (\neg(Q_N) \vee R_S) \leftrightarrow (Q_N \to R_S) \leftrightarrow (Q \to R)_S$.

Logo, $\vdash_{LAR}$ form(D) $\leftrightarrow$ form$(D)_S$, donde $\Delta_1(D)$.

$\vdash_{LAR} \neg(Q \to R) \leftrightarrow (Q \wedge \neg R) \leftrightarrow^{HI} (Q_S \wedge \neg(R_N)) \leftrightarrow \neg(Q_S \to R_N) \leftrightarrow \neg((Q \to R)_N)$.

Ou seja, $\vdash_{LAR} \neg$ form(D) $\leftrightarrow \neg$(form$(D)_N$). Logo, $\Delta_2(D)$. Daí, vale $\Delta(D)$.

- Caso D é $Q \wedge R$.

$\vdash_{LAR} (Q \wedge R) \leftrightarrow^{HI} (Q_S \wedge R_S) \leftrightarrow (Q \wedge R)_S$. Ou seja, $\vdash_{LAR}$ form(D) $\leftrightarrow$ form$(D)_S$, donde $\Delta_1(D)$.

$\vdash_{LAR} \neg(Q \wedge R) \leftrightarrow (\neg Q \vee \neg R) \leftrightarrow^{HI} (\neg(Q_N) \vee \neg(R_N)) \leftrightarrow \neg(Q_N \wedge R_N) \leftrightarrow \neg((Q \wedge R)_N)$.

Daí, $\vdash_{LAR} \neg$ form(D) $\leftrightarrow \neg$(form$(D)_N$). Logo, $\Delta_2(D)$.

Portanto, vale $\Delta(D)$.

- Caso D é $Q \vee R$, o raciocínio é análogo ao caso anterior.
- Caso D é $\forall x\, Q$.

form$(D) = \forall x\, Q$.

form$(D)_{\mathrm{S}} = (\forall x\, Q)_{\mathrm{S}} = \forall x\, Q_{\mathrm{S}}$.

Por HI, $\vdash_{\mathrm{LAR}}$ form$(D)_{\mathrm{S}} \leftrightarrowtriangle \forall x\, Q$, ou seja, $\vdash_{\mathrm{LAR}}$ form$(D) \leftrightarrowtriangle$ form$(D)_{\mathrm{S}}$. Logo, $\Delta_1(D)$.

$\neg$ form$(D) = \neg\forall x\, Q$.

$\neg($form$(D)_{\mathrm{N}}) = \neg((\forall x\, Q)_{\mathrm{N}}) = \neg\forall x\, Q_{\mathrm{N}}$.

Temos de ALT que $\vdash_{\mathrm{LAR}} \neg($form$(D)_{\mathrm{N}}) \leftrightarrowtriangle \exists x\neg(Q_{\mathrm{N}})$, donde por HI $\vdash_{\mathrm{LAR}} \neg($form$(D)_{\mathrm{N}}) \leftrightarrowtriangle \exists x\neg Q$, donde, por ALT, $\vdash_{\mathrm{LAR}} \neg($form$(D)_{\mathrm{N}}) \leftrightarrowtriangle \neg\forall x Q$.

Daí, $\vdash_{\mathrm{LAR}} \neg$ form$(D) \leftrightarrowtriangle \neg($form$(D)_{\mathrm{N}})$. Logo, $\Delta_2(D)$. Portanto, vale $\Delta(D)$.

- Caso D é $\exists x\, Q$, o raciocínio é análogo ao caso anterior.

$\square$

Como P_{S} e P_{N} são fórmulas puras, valem os corolários abaixo.

5.5.4 Corolário. (i) $\vdash_{\mathrm{LAR}} (P \to Q) \leftrightarrowtriangle (P_{\mathrm{N}} \to Q_{\mathrm{S}})$;

(ii) $\vdash_{\mathrm{LAR}} (P \leftrightarrow Q) \leftrightarrowtriangle ((P_{\mathrm{N}} \to Q_{\mathrm{S}}) \wedge (Q_{\mathrm{N}} \to P_{\mathrm{S}}))$;

(iii) $\vdash_{\mathrm{LAR}} (P \rightarrowtriangle Q) \Leftrightarrow (P_{\mathrm{S}} \to Q_{\mathrm{S}})$;

(iv) $\vdash_{\mathrm{LAR}} (P \leftrightarrowtriangle Q) \Leftrightarrow (P_{\mathrm{S}} \leftrightarrow Q_{\mathrm{S}})$;

(v) $\vdash_{\mathrm{LAR}} (P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (P_{\mathrm{S}} \to Q_{\mathrm{S}}) \wedge (P_{\mathrm{N}} \to Q_{\mathrm{N}})$;

(vi) $\vdash_{\mathrm{LAR}} (P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (P_{\mathrm{S}} \leftrightarrow Q_{\mathrm{S}}) \wedge (P_{\mathrm{N}} \leftrightarrow Q_{\mathrm{N}})$.

Prova de (i):

$$
\begin{array}{ll}
P \to Q & \\
\quad \leftrightarrowtriangle & \text{teorema 5.5.3} \\
(P \to Q)_{\mathrm{S}} & \\
\quad \leftrightarrowtriangle & \text{definição 5.3.23} \\
P_{\mathrm{N}} \to Q_{\mathrm{S}} &
\end{array}
$$

Prova de (ii): Segue-se do item (i).

Prova de (iii):

$$
\begin{array}{ll}
P \rightarrowtriangle Q & \\
\quad \leftrightarrowtriangle & \text{lema 5.4.80} \\
\Upsilon x\, Q \models \Upsilon x\, P &
\end{array}
$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad \text{teorema 5.5.3}\\
(\Upsilon x\, Q &\models \Upsilon x\, P)_{\mathrm{S}}\\
&\Leftrightarrow \quad \text{definição 5.3.23}\\
\forall x\, ((\Upsilon x\, P \models x)_{\mathrm{S}} &\to (\Upsilon x\, Q \models x)_{\mathrm{S}})\\
&\Leftrightarrow \quad \text{Esquema da Descrição (5.4.50)}\\
\forall x\, (P_{\mathrm{S}} &\to Q_{\mathrm{S}})\\
&\Leftrightarrow \quad \forall\text{-el}\\
P_{\mathrm{S}} &\to Q_{\mathrm{S}}
\end{aligned}$$

Prova de (iv): Segue-se do item (iii).

Prova de (v):

$$\begin{aligned}
P &\Rightarrow Q\\
&\Leftrightarrow \quad \text{definição 5.4.22}\\
(P \rightarrowtriangle Q) \wedge (\neg Q &\rightarrowtriangle \neg P)\\
&\Leftrightarrow \quad \text{item (iii), definição 5.3.23}\\
(P_{\mathrm{S}} \to Q_{\mathrm{S}}) \wedge (\neg Q_{\mathrm{N}} &\to \neg(P_{\mathrm{N}}))\\
&\Leftrightarrow \quad \text{Contraposição}\\
(P_{\mathrm{S}} \to Q_{\mathrm{S}}) \wedge (P_{\mathrm{N}} &\to Q_{\mathrm{N}})
\end{aligned}$$

Prova de (vi): Segue-se do item (v).

5.5.5. Modus Ponens (reescrita). $P_{\mathrm{N}}, P \to Q \vdash_{\mathrm{LAR}} Q$.

Prova:

1	$P_{\mathrm{N}}, P_{\mathrm{N}} \to Q_{\mathrm{S}} \vdash_{\mathrm{LAR}} Q_{\mathrm{S}}$	MP
2	$P_{\mathrm{N}}, (P \to Q)_{\mathrm{S}} \vdash_{\mathrm{LAR}} Q_{\mathrm{S}}$	1, def. 5.3.23
3	$P_{\mathrm{N}}, P \to Q \vdash_{\mathrm{LAR}} (P \to Q)_{\mathrm{S}}$	teorema 5.5.3
4	$P_{\mathrm{N}}, P \to Q \vdash_{\mathrm{LAR}} P_{\mathrm{N}}$	RFL
5	$P_{\mathrm{N}}, P \to Q \vdash_{\mathrm{LAR}} Q_{\mathrm{S}}$	4, 3, 2, CAD
6	$Q_{\mathrm{S}} \vdash_{\mathrm{LAR}} Q$	teorema 5.5.3
7	$P_{\mathrm{N}}, P \to Q \vdash_{\mathrm{LAR}} Q$	5, 6, CAD

5.5.6. Regra da Dedução (reescrita). $\dfrac{\Gamma, P_N \vdash_{LAR} Q}{\Gamma \vdash_{LAR} P \to Q}$.

Prova:

1	$\Gamma, P_N \vdash_{LAR} Q$	hip
2	$Q \vdash_{LAR} Q_S$	teorema 5.5.3
3	$\Gamma, P_N \vdash_{LAR} Q_S$	1, 2, CAD
4	$\Gamma \vdash_{LAR} P_N \to Q_S$	3, RD
5	$\Gamma \vdash_{LAR} (P \to Q)_S$	4, def. 5.3.23
6	$\Gamma \vdash_{LAR} P \to Q$	5, teorema 5.5.3

5.5.7. Regra do ¬-Introdução (reescrita).

(i) $\dfrac{\Gamma, P \vdash_{LAR} Q \qquad \Gamma, P \vdash_{LAR} \neg(Q_S)}{\Gamma \vdash_{LAR} \neg(P_S)}$.

(ii) $\dfrac{\Gamma, P \vdash_{LAR} Q_N \qquad \Gamma, P \vdash_{LAR} \neg Q}{\Gamma \vdash_{LAR} \neg(P_S)}$.

(iii) $\dfrac{\Gamma, P_N \vdash_{LAR} Q \qquad \Gamma, P_N \vdash_{LAR} \neg(Q_S)}{\Gamma \vdash_{LAR} \neg P}$.

(iv) $\dfrac{\Gamma, P_N \vdash_{LAR} Q_N \qquad \Gamma, P_N \vdash_{LAR} \neg Q}{\Gamma \vdash_{LAR} \neg P}$.

Prova de (i):

1	$\Gamma, P \vdash_{LAR} Q$	hip
2	$\Gamma, P \vdash_{LAR} \neg(Q_S)$	hip
3	$Q \vdash_{LAR} Q_S$	teorema 5.5.3
4	$\Gamma, P \vdash_{LAR} Q_S$	1, 3, CAD
5	$\Gamma, P_S \vdash_{LAR} Q_S$	4, teorema 5.5.3
6	$\Gamma, P_S \vdash_{LAR} \neg(Q_S)$	2, teorema 5.5.3
7	$\Gamma \vdash_{LAR} \neg(P_S)$	5, 6, ¬-int

Prova de (ii):

1	$\Gamma, P \vdash_{LAR} Q_N$	hip
2	$\Gamma, P \vdash_{LAR} \neg Q$	hip
3	$\Gamma, P \vdash_{LAR} (\neg Q)_S$	2, teorema 5.5.3
4	$\Gamma, P \vdash_{LAR} \neg(Q_N)$	3, def. 5.3.23
5	$\Gamma, P_S \vdash_{LAR} Q_N$	1, teorema 5.5.3
6	$\Gamma, P_S \vdash_{LAR} \neg(Q_N)$	4, teorema 5.5.3
7	$\Gamma \vdash_{LAR} \neg(P_S)$	5, 6, ¬-int

Prova de (iii):

1	$\Gamma, P_N \vdash_{LAR} Q$	hip
2	$\Gamma, P_N \vdash_{LAR} \neg(Q_S)$	hip
3	$Q \vdash_{LAR} Q_S$	teorema 5.5.3
4	$\Gamma, P_N \vdash_{LAR} Q_S$	1, 3, CAD
5	$\Gamma \vdash_{LAR} \neg(P_N)$	2, 4, ¬-int
6	$\Gamma \vdash_{LAR} (\neg P)_S$	5, def. 5.3.23
7	$\Gamma \vdash_{LAR} \neg P$	6, teorema 5.5.3

Prova de (iv):

1	$\Gamma, P_N \vdash_{LAR} Q_N$	hip
2	$\Gamma, P_N \vdash_{LAR} \neg Q$	hip
3	$\neg Q \vdash_{LAR} (\neg Q)_S$	teorema 5.5.3
4	$\Gamma, P_N \vdash_{LAR} (\neg Q)_S$	2, 3, CAD
5	$\Gamma, P_N \vdash_{LAR} \neg(Q_N)$	4, def. 5.3.23
6	$\Gamma \vdash_{LAR} \neg(P_N)$	1, 5, ¬-int
7	$\Gamma \vdash_{LAR} (\neg P)_S$	6, def. 5.3.23
8	$\Gamma \vdash_{LAR} \neg P$	7, teorema 5.5.3

5.5.8 Lema. Se $P_1, \ldots, P_n$ são fórmulas puras, então

(i) $\exists x_1 P_1, \ldots, \exists x_n P_n \vdash_{\text{LAR}}$
$\forall x_1 ... \forall x_n (P_1 \wedge \ldots \wedge P_n \rightarrow Q) \rightarrowtriangle \exists x_1 \ldots \exists x_n (P_1 \wedge \ldots \wedge P_n \wedge Q)$.

(ii) $\overline{\exists} x_1 P_1, \ldots, \overline{\exists} x_n P_n \vdash_{\text{LAR}}$
$\exists x_1 \ldots \exists x_n (P_1 \wedge \ldots \wedge P_n \wedge Q) \rightarrowtriangle \forall x_1 ... \forall x_n (P_1 \wedge \ldots \wedge P_n \rightarrow Q)$.

(iii) $\exists! x_1 P_1, \ldots, \exists! x_n P_n \vdash_{\text{LAR}}$
$\forall x_1 ... \forall x_n (P_1 \wedge \ldots \wedge P_n \rightarrow Q) \leftrightarrowtriangle \exists x_1 \ldots \exists x_n (P_1 \wedge \ldots \wedge P_n \wedge Q)$.

Prova: A validade deste lema decorre da validade do mesmo em LEC (lema 3.3.12).

□

5.5.9 Definição. Considerando $\# \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$ e $\Psi \in \{\forall, \exists\}$, definimos nas cláusulas abaixo quando uma dada fórmula P é *existencial*, *fixa*, *unívoca*, *vácua* ou *ambígua*:

- $\text{ex}(p(t_1, \ldots, t_n)) \rightleftharpoons \text{ex}(t_1) \wedge \ldots \wedge \text{ex}(t_n)$;
- $\text{ex}(\neg P) \rightleftharpoons \text{ex}(P)$;
- $\text{ex}(P \# Q) \rightleftharpoons \text{ex}(P) \wedge \text{ex}(Q)$;
- $\text{ex}(\Psi x\, P) \rightleftharpoons \forall x\ \text{ex}(P)$;
- $\text{fix}(p(t_1, \ldots, t_n)) \rightleftharpoons \text{fix}(t_1) \wedge \ldots \wedge \text{fix}(t_n)$;
- $\text{fix}(\neg P) \rightleftharpoons \text{fix}(P)$;
- $\text{fix}(P \# Q) \rightleftharpoons \text{fix}(P) \wedge \text{fix}(Q)$;
- $\text{fix}(\Psi x\, P) \rightleftharpoons \forall x\ \text{fix}(P)$;
- $\text{un}(P) \rightleftharpoons \text{ex}(P) \wedge \text{fix}(P)$;
- $\text{vac}(P) \rightleftharpoons \neg\, \text{ex}(P)$;
- $\text{amb}(P) \rightleftharpoons \neg\, \text{fix}(P)$;
- “ex(P)” é lido “todos os termos de topo em P são existenciais”, ou simplesmente “P é existencial”;
- “fix(P)” é lido “todos os termos de topo em P são fixos”, ou simplesmente “P é fixo”;
- “un(P)” é lido “todos os termos de topo em P são unívocos”, ou simplesmente “P é unívoco”;
- “vac(P)” é lido pelo menos um termo de topo em P é vácuo”, ou simplesmente “P é vácuo”;
- “amb(P)” é lido “pelo menos um termo de topo em P é ambíguo”, ou simplesmente “P é ambíguo”.

5.5.10 Escólio. Se P é uma fórmula pura, então $\vdash_{\text{LAR}} \text{un}(P)$.

Esboço da prova: Prova-se por recursão sobre fórmulas. □

5.5.11 Lema. Seja R uma fórmula em que nenhuma descrição de topo está no escopo de uma variável em R. Então existem $x_1, \ldots, x_n, P_1, \ldots, P_n, Q$ tais que

$$\begin{cases} Q \text{ é uma fórmula pura,} \\ x_1, \ldots, x_n \text{ são variáveis de topo pontuais em } Q, \\ x_1, \ldots, x_n \text{ não são livres em } \Upsilon x_1\, P_1, \ldots, \Upsilon x_n\, P_n, \end{cases}$$

e $R \approx_c Q(x_1, \ldots, x_n \mid \Upsilon x_1\, P_1, \ldots, \Upsilon x_n\, P_n)$.

Esboço da prova: Conseqüência imediata do fato 5.2.23. □

5.5.12 Exemplos. Como exemplos da situação descrita pelo lema acima, temos:

- $p(\Upsilon \mathsf{x}\, Q_1, f(\Upsilon \mathsf{y}\, Q_2, \Upsilon \mathsf{z}\, Q_3)) \approx_c p(\mathsf{x}, f(\mathsf{y}, \mathsf{z}))(\mathsf{x}, \mathsf{y}, \mathsf{z} \mid \Upsilon \mathsf{x}\, Q_1, \Upsilon \mathsf{y}\, Q_2, \Upsilon \mathsf{z}\, Q_3)$.
- $p(\Upsilon \mathsf{x}\, q(\mathsf{x}, \mathsf{y}, \mathsf{z}), \Upsilon \mathsf{y}\, r(\mathsf{x}, \mathsf{y}, \mathsf{z}), \Upsilon \mathsf{z}\, s(\mathsf{x}, \mathsf{y}, \mathsf{z})) \approx_c$
  $p(\mathsf{x}_1, \mathsf{y}_1, \mathsf{z}_1)(x_1, y_1, z_1 \mid \Upsilon \mathsf{x}_1\, q(\mathsf{x}_1, \mathsf{y}, \mathsf{z}), \Upsilon \mathsf{y}_1\, r(\mathsf{x}, \mathsf{y}_1, \mathsf{z}), \Upsilon \mathsf{z}_1\, s(\mathsf{x}, \mathsf{y}, \mathsf{z}_1))$.

5.5.13 Lema.

(i) Se x é de topo pontual em Q, então
$\exists x\, P \mid\!\underline{\;{}_{\text{LAR}}\;}\; Q(x|\Upsilon x\, P) \Leftrightarrow \forall x\, (P_{\text{S}} \to Q)$.

(ii) Se $\begin{cases} x_1, \ldots, x_n \text{ são variáveis de topo pontuais em } Q, \\ x_1, \ldots, x_n \text{ não são livres em } \{\Upsilon x_1\, P_1, \ldots, \Upsilon x_n\, P_n\}, \end{cases}$ então
$\exists x_1\, P_1 \ldots \exists x_n\, P_n \mid\!\underline{\;{}_{\text{LAR}}\;}$
$Q(x_1, \ldots, x_n|\Upsilon x_1\, P_1, \ldots, \Upsilon x_n\, P_n) \Leftrightarrow \forall x_1 \ldots \forall x_n(P_{1\text{S}} \wedge \ldots \wedge P_{n\text{S}} \to Q)$.

Esboço da prova: Corolário da Lei do Contexto (5.4.90). □

5.5.14 Teorema. Seja P uma fórmula onde nenhuma descrição de topo está no escopo de alguma variável em P. Então existem $x_1, \ldots, x_n, P_1, \ldots, P_n, Q$ tais que

$$\begin{cases} Q \text{ é uma fórmula pura,} \\ x_1, \ldots, x_n \text{ são de topo pontuais em } Q, \\ x_1, \ldots, x_n \text{ não são livres em } \Upsilon x_1\, P_1, \ldots, \Upsilon x_n\, P_n, \end{cases}$$

e

(i) $\exists x_1\, P_1 \ldots \exists x_n\, P_n \mid\!\underline{\;{}_{\text{LAR}}\;}\; P_{\text{S}} \Leftrightarrow \forall x_1 \ldots \forall x_n(P_{1\text{S}} \wedge \ldots \wedge P_{n\text{S}} \to Q)$.

(ii) $\exists x_1\, P_1 \ldots \exists x_n\, P_n \mid\!\underline{\;{}_{\text{LAR}}\;}\; P_{\text{N}} \Leftrightarrow \exists x_1 \ldots \exists x_n(P_{1\text{S}} \wedge \ldots \wedge P_{n\text{S}} \wedge Q)$.

Prova de (i):

Pelo lema 5.5.11, temos que $P \approx_c Q(x_1, \ldots, x_n \mid \Upsilon x_1\, P_1, \ldots, \Upsilon x_n\, P_n)$,

$$\text{onde} \begin{cases} Q \text{ é uma fórmula pura,} \\ x_1, \ldots, x_n \text{ são de topo pontuais em } Q, \\ x_1, \ldots, x_n \text{ não são livres em } \Upsilon x_1\, P_1, \ldots, \Upsilon x_n\, P_n. \end{cases}$$

Do lema 5.5.13 (ii), temos que

$\exists x_1\, P_1 \ldots \exists x_n\, P_n \mid_{\overline{\text{LAR}}}$

$Q(x_1, \ldots, x_n | \Upsilon x_1\, P_1, \ldots, \Upsilon x_n\, P_n) \leftrightarrow \forall x_1 \ldots \forall x_n(P_{1\text{S}} \wedge \ldots \wedge P_{n\text{S}} \rightarrow Q)$.

Daí, $\exists x_1\, P_1 \ldots \exists x_n\, P_n \mid_{\overline{\text{LAR}}} P \leftrightarrow \forall x_1 \ldots \forall x_n(P_{1\text{S}} \wedge \ldots \wedge P_{n\text{S}} \rightarrow Q)$.

Como, pelo teorema 5.5.3, $\mid_{\overline{\text{LAR}}} P \leftrightarrow P_\text{S}$, temos

$\exists x_1\, P_1 \ldots \exists x_n\, P_n \mid_{\overline{\text{LAR}}} P_\text{S} \leftrightarrow \forall x_1 \ldots \forall x_n(P_{1\text{S}} \wedge \ldots \wedge P_{n\text{S}} \rightarrow Q)$. (1)

Daí, como ambos P_S e $\forall x_1 \ldots \forall x_n(P_{1\text{S}} \wedge \ldots \wedge P_{n\text{S}} \rightarrow Q)$ são fórmulas puras, então

$\exists x_1\, P_1 \ldots \exists x_n\, P_n \mid_{\overline{\text{LAR}}} \neg(P_\text{S}) \leftrightarrow \neg\forall x_1 \ldots \forall x_n(P_{1\text{S}} \wedge \ldots \wedge P_{n\text{S}} \rightarrow Q)$. (2)

De (1) e (2), pelo lema 5.4.49,

$\exists x_1\, P_1 \ldots \exists x_n\, P_n \mid_{\overline{\text{LAR}}} P_\text{S} \Leftrightarrow \forall x_1 \ldots \forall x_n(P_{1\text{S}} \wedge \ldots \wedge P_{n\text{S}} \rightarrow Q)$.

Prova de (ii):

Pelo lema 5.5.11, temos que $\neg P \approx_c \neg Q(x_1, \ldots, x_n \mid \Upsilon x_1\, P_1, \ldots, \Upsilon x_n\, P_n)$,

$$\text{onde} \begin{cases} \neg Q \text{ é uma fórmula pura,} \\ x_1, \ldots, x_n \text{ são de topo pontuais em } \neg Q, \\ x_1, \ldots, x_n \text{ não são livres em } \Upsilon x_1\, P_1, \ldots, \Upsilon x_n\, P_n. \end{cases}$$

Do lema 5.5.13 (ii), temos que

$\exists x_1\, P_1 \ldots \exists x_n\, P_n \mid_{\overline{\text{LAR}}}$

$\neg Q(x_1, \ldots, x_n | \Upsilon x_1\, P_1, \ldots, \Upsilon x_n\, P_n) \leftrightarrow \forall x_1 \ldots \forall x_n(P_{1\text{S}} \wedge \ldots \wedge P_{n\text{S}} \rightarrow \neg Q)$.

Daí, $\exists x_1\, P_1 \ldots \exists x_n\, P_n \mid_{\overline{\text{LAR}}} \neg P \leftrightarrow \forall x_1 \ldots \forall x_n(P_{1\text{S}} \wedge \ldots \wedge P_{n\text{S}} \rightarrow \neg Q)$, donde

$\exists x_1\, P_1 \ldots \exists x_n\, P_n \mid_{\overline{\text{LAR}}} \neg P \leftrightarrow \neg\exists x_1 \ldots \exists x_n(P_{1\text{S}} \wedge \ldots \wedge P_{n\text{S}} \wedge Q)$.

Como, pelo teorema 5.5.3, $\mid_{\overline{\text{LAR}}} \neg P \leftrightarrow \neg(P_\text{N})$, temos

$\exists x_1\, P_1 \ldots \exists x_n\, P_n \mid_{\overline{\text{LAR}}} \neg(P_\text{N}) \leftrightarrow \neg\exists x_1 \ldots \exists x_n(P_{1\text{S}} \wedge \ldots \wedge P_{n\text{S}} \wedge Q)$. (1)

Como ambos $\neg(P_\text{N})$ e $\neg\exists x_1 \ldots \exists x_n(P_{1\text{S}} \wedge \ldots \wedge P_{n\text{S}} \wedge Q)$ são fórmulas puras, então

$\exists x_1\, P_1 \ldots \exists x_n\, P_n \mid_{\overline{\text{LAR}}} \neg\neg(P_\text{N}) \leftrightarrow \neg\neg\exists x_1 \ldots \exists x_n(P_{1\text{S}} \wedge \ldots \wedge P_{n\text{S}} \wedge Q)$, donde, pelo Esquema da Dupla Negação (DN),

$\exists x_1\, P_1 \ldots \exists x_n\, P_n \mid_{\overline{\text{LAR}}} P_\text{N} \leftrightarrow \exists x_1 \ldots \exists x_n(P_{1\text{S}} \wedge \ldots \wedge P_{n\text{S}} \wedge Q)$. (2)

De (1) e (2), pelo lema 5.4.49,

$\exists x_1\, P_1 \ldots \exists x_n\, P_n \mid_{\overline{\text{LAR}}} P_\text{N} \Leftrightarrow \exists x_1 \ldots \exists x_n(P_{1\text{S}} \wedge \ldots \wedge P_{n\text{S}} \wedge Q)$.

5.5.15 Exemplo. Considere R a fórmula $p(\Upsilon \mathsf{x}\, q(\mathsf{x})) \wedge r(\Upsilon \mathsf{w}\, s(\mathsf{w}))$. Então $R \approx_c (p(\mathsf{x}) \wedge r(\mathsf{w}))(\mathsf{x}, \mathsf{w} | \Upsilon \mathsf{x}\, q(\mathsf{x}), \Upsilon \mathsf{w}\, s(\mathsf{w}))$, onde:

- $(p(\mathsf{x}) \wedge r(\mathsf{y}))$ é uma fórmula pura;
- x e w são variáveis de topo pontuais em $(p(\mathsf{x}) \wedge r(\mathsf{y}))$;
- x não é livre em $s(\mathsf{w})$ e w não é livre em $q(\mathsf{x})$;
- $\Upsilon \mathsf{x}\, q(\mathsf{x})$ e $\Upsilon \mathsf{w}\, s(\mathsf{w}))$ não estão, em R, no escopo de nenhuma variável.

Então, $\exists \mathsf{x}\, q(\mathsf{x}), \exists \mathsf{w}\, s(\mathsf{w}) \vdash R_{\mathrm{S}} \Leftrightarrow \forall \mathsf{x} \forall \mathsf{w}\, (q(\mathsf{x}) \wedge s(\mathsf{w}) \rightarrow p(\mathsf{x}) \wedge r(\mathsf{w}))$.

5.5.16 Lema. Dada uma fórmula P, existem quantificadores $\Psi_1, \ldots, \Psi_r$ e existem $y_1, \ldots, y_r, R$ tais que

$$\begin{cases} * \; y_1, \ldots, y_r \text{ são as variáveis cujas descrições de topo de } P \text{ estão no escopo de algumas delas em } P, \\ * \; R \text{ não possui descrições de topo no escopo de alguma variável em } R, \end{cases}$$

e

(i) $\vdash_{\mathrm{LAR}} P \;\Leftrightarrow\; \Psi_1 y_1 \ldots \Psi_r y_r\, R$.

(ii) $\vdash_{\mathrm{LAR}} \neg P \;\Leftrightarrow\; \Psi'_1 y_1 \ldots \Psi'_r y_r\, \neg R$.

Esboço da prova: prova é feita por indução sobre P, utilizando as leis de Transporte de Quantificadores (5.4.48). □

5.5.17 Teorema. Dada uma fórmula P, existem quantificadores $\Psi_1, \ldots, \Psi_r$ e existem $y_1, \ldots, y_r, x_1, \ldots, x_n, P_1, \ldots, P_n, Q$ tais que

$$\begin{cases} * \; y_1, \ldots, y_r \text{ são as variáveis onde as descrições de topo em } P \text{ estão no escopo de algumas delas em } P, \\ * \; Q \text{ é uma fórmula pura}, \\ * \; x_1, \ldots, x_n \text{ são de topo pontuais em } Q, \\ * \; x_1, \ldots, x_n \text{ não são livres em } \Upsilon x_1\, P_1, \ldots, \Upsilon x_n\, P_n, \end{cases}$$

e

(i) $\exists x_1\, P_1 \ldots \exists x_n\, P_n \vdash_{\mathrm{LAR}} P_{\mathrm{S}} \Leftrightarrow \Psi_1 y_1 \ldots \Psi_r y_r\, (\forall x_1 \ldots \forall x_n (P_{1\mathrm{S}} \wedge \ldots \wedge P_{n\mathrm{S}} \rightarrow Q))$.

(ii) $\exists x_1\, P_1 \ldots \exists x_n\, P_n \vdash_{\mathrm{LAR}} P_{\mathrm{N}} \Leftrightarrow \Psi_1 y_1 \ldots \Psi_r y_r\, (\exists x_1 \ldots \exists x_n (P_{1\mathrm{S}} \wedge \ldots \wedge P_{n\mathrm{S}} \wedge Q))$.

Prova: Imediata, pelo lema 5.5.16 e teorema 5.5.14.

□

5.5.18. Lei da Existência: $\mathrm{ex}(P), P_{\mathrm{S}} \mid_{\overline{\mathrm{LAR}}} P_{\mathrm{N}}$.

Prova:

- Caso P é $p(t_1, \ldots, t_n)$.

  Considere $x_1, \ldots, x_n$ as primeiras n variáveis não livres em $t_1, \ldots, t_n$.

1	$\mathrm{ex}(p(t_1, \ldots, t_n))$	pr
2	$(p(t_1, \ldots, t_n))_{\mathrm{S}}$	pr
3	$\mathrm{ex}(t_1) \wedge \ldots \wedge \mathrm{ex}(t_n)$	1, def. 5.5.9
4	$\forall x_1 \ldots \forall x_n(\mathrm{form}(t_1, x_1)_{\mathrm{S}} \wedge \ldots \wedge \mathrm{form}(t_n, x_n)_{\mathrm{S}} \rightarrow p(x_1, \ldots, x_n))$	2, def. 5.3.23
5	$\exists x_1(t_1 \;\models x_1) \wedge \ldots \wedge \exists x_n(t_n \;\models x_n)$	3, escólio 5.4.68
6	$\exists x_1(\mathrm{form}(t_1, x_1)) \wedge \ldots \wedge \exists x_n(\mathrm{form}(t_n, x_n))$	5, lema 5.5.1
7	$\exists x_1(\mathrm{form}(t_1, x_1))_{\mathrm{S}} \wedge \ldots \wedge \exists x_n(\mathrm{form}(t_n, x_n))_{\mathrm{S}}$	6, teorema 5.5.3
8	$\exists x_1 \ldots \exists x_n(\mathrm{form}(t_1, x_1)_{\mathrm{S}} \wedge \ldots \wedge \mathrm{form}(t_n, x_n)_{\mathrm{S}} \wedge p(x_1, \ldots, x_n))$	7, 4, lema 5.5.8
9	$(p(t_1, \ldots, t_n))_{\mathrm{N}}$	8, def. 5.3.23

  Portanto, $\mathrm{ex}(p(t_1, \ldots, t_n)), (p(t_1, \ldots, t_n))_{\mathrm{S}} \mid_{\overline{\mathrm{LAR}}} (p(t_1, \ldots, t_n))_{\mathrm{N}}$.

- Caso P é $\neg Q$.

  Por HI, temos $\mathrm{ex}(Q), Q_{\mathrm{S}} \mid_{\overline{\mathrm{LAR}}} Q_{\mathrm{N}}$.

1	$\mathrm{ex}(\neg Q)$	pr
2	$(\neg Q)_{\mathrm{S}}$	pr
3	$\mathrm{ex}(Q)$	1, def. 5.5.9
4	$\neg(Q_{\mathrm{N}})$	2, def. 5.3.23
5	$\mid\;Q_{\mathrm{S}}$	sup
6	$\mid\;Q_{\mathrm{N}}$	3, 5, HI
7	$\neg(Q_{\mathrm{S}})$	5, 4, 6, $\neg$-int
8	$(\neg Q)_{\mathrm{N}}$	7, def. 5.3.23

  Portanto, $\mathrm{ex}(\neg Q), (\neg Q)_{\mathrm{S}} \mid_{\overline{\mathrm{LAR}}} (\neg Q)_{\mathrm{N}}$.

- Caso P é $Q \rightarrow R$.

  Por HI, $\begin{cases} \mathrm{ex}(Q), Q_{\mathrm{S}} \mid_{\overline{\mathrm{LAR}}} Q_{\mathrm{N}}, & (1) \\ \mathrm{ex}(R), R_{\mathrm{S}} \mid_{\overline{\mathrm{LAR}}} R_{\mathrm{N}}. & (2) \end{cases}$

  De (1), temos $\mathrm{ex}(\neg Q), (\neg Q)_{\mathrm{S}} \mid_{\overline{\mathrm{LAR}}} (\neg Q)_{\mathrm{N}}$. (3)

  De (3) e (2), $\mathrm{ex}(\neg Q \vee R), (\neg Q \vee R)_{\mathrm{S}} \mid_{\overline{\mathrm{LAR}}} (\neg Q \vee R)_{\mathrm{N}}$.

  Portanto, $\mathrm{ex}(Q \rightarrow R), (Q \rightarrow R)_{\mathrm{S}} \mid_{\overline{\mathrm{LAR}}} (Q \rightarrow R)_{\mathrm{N}}$.

- Caso P é $Q \# R$, onde $\# \in \{\wedge, \vee\}$.

  Por HI, $\begin{cases} \mathrm{ex}(Q), Q_{\mathrm{S}} \vdash_{\mathrm{LAR}} Q_{\mathrm{N}}, & (4) \\ \mathrm{ex}(R), R_{\mathrm{S}} \vdash_{\mathrm{LAR}} R_{\mathrm{N}}. & (5) \end{cases}$

  De (4) e (5), $\mathrm{ex}(Q \# R), (Q \# R)_{\mathrm{S}} \vdash_{\mathrm{LAR}} (Q \# R)_{\mathrm{N}}$.

- Caso P é $\forall x\, Q$.

  Por HI, temos $\mathrm{ex}(Q), Q_{\mathrm{S}} \vdash_{\mathrm{LAR}} Q_{\mathrm{N}}$.

1	$\mathrm{ex}(\forall x\, Q)$	pr
2	$(\forall x\, Q)_{\mathrm{S}}$	pr
3	$\forall x\ \mathrm{ex}(Q)$	1, def. 5.5.9
4	$\forall x\, Q_{\mathrm{S}}$	2, def. 5.3.23
5	$\mathrm{ex}(Q)$	3, $\forall$-el
6	Q_{S}	4, $\forall$-el
7	Q_{N}	5, 6, HI
8	$\forall x\, Q_{\mathrm{N}}$	7, GEN
9	$(\forall x\, Q)_{\mathrm{N}}$	8, def. 5.3.23

  Portanto, $\mathrm{ex}(\forall x\, Q), (\forall x\, Q)_{\mathrm{S}} \vdash_{\mathrm{LAR}} (\forall x\, Q)_{\mathrm{N}}$.

- Caso P é $\exists x\, Q$.

  Por HI, temos $\mathrm{ex}(Q), Q_{\mathrm{S}} \vdash_{\mathrm{LAR}} Q_{\mathrm{N}}$.

1	$\mathrm{ex}(\exists x\, Q)$	pr
2	$(\exists x\, Q)_{\mathrm{S}}$	pr
3	$\forall x\ \mathrm{ex}(Q)$	1, def. 5.5.9
4	$\exists x\, Q_{\mathrm{S}}$	2, def. 5.3.23
5	$\mathrm{ex}(Q)$	3, $\forall$-el
6	| Q_{S}	sup
7	| Q_{N}	5, 6, HI
8	| $\exists x\, Q_{\mathrm{N}}$	7, $\exists$-int
9	$\exists x\, Q_{\mathrm{N}}$	4, 6, 8, $\exists$-el
10	$(\exists x\, Q)_{\mathrm{N}}$	9, def. 5.3.23

  Portanto, $\mathrm{ex}(\exists x\, Q), (\exists x\, Q)_{\mathrm{S}} \vdash_{\mathrm{LAR}} (\exists x\, Q)_{\mathrm{N}}$.

$\square$

5.5.19. Lei da Fixidez: $\text{fix}(P), P_{\text{N}} \vdash_{\text{LAR}} P_{\text{S}}$.

Prova:

- Caso P é $p(t_1, \ldots, t_n)$.

  Considere $x_1, \ldots, x_n$ as primeiras n variáveis não livres em $t_1, \ldots, t_n$.

1	$\text{fix}(p(t_1, \ldots, t_n))$	pr
2	$(p(t_1, \ldots, t_n))_{\text{N}}$	pr
3	$\text{fix}(t_1) \wedge \ldots \wedge \text{fix}(t_n)$	1, def. 5.5.9
4	$\exists x_1 \ldots \exists x_n(\text{form}(t_1, x_1)_{\text{S}} \wedge \ldots \wedge \text{form}(t_n, x_n)_{\text{S}} \wedge p(x_1, \ldots, x_n))$	2, def. 5.3.23
5	$\overline{\exists} x_1(t_1 \mathrel{\rangle\!\!=} x_1) \wedge \ldots \wedge \overline{\exists} x_n(t_n \mathrel{\rangle\!\!=} x_n)$	3, escólio 5.4.71
6	$\overline{\exists} x_1(\text{form}(t_1, x_1)) \wedge \ldots \wedge \overline{\exists} x_n(\text{form}(t_n, x_n))$	5, lema 5.5.1
7	$\overline{\exists} x_1(\text{form}(t_1, x_1))_{\text{S}} \wedge \ldots \wedge \overline{\exists} x_n(\text{form}(t_n, x_n))_{\text{S}}$	6, teorema 5.5.3
8	$\forall x_1 \ldots \forall x_n(\text{form}(t_1, x_1)_{\text{S}} \wedge \ldots \wedge \text{form}(t_n, x_n)_{\text{S}} \rightarrow p(x_1, \ldots, x_n))$	7, 4, lema 5.5.8
9	$(p(t_1, \ldots, t_n))_{\text{S}}$	8, def. 5.3.23

  Portanto, $\text{fix}(p(t_1, \ldots, t_n)), (p(t_1, \ldots, t_n))_{\text{N}} \vdash_{\text{LAR}} (p(t_1, \ldots, t_n))_{\text{S}}$.

- Caso P é $\neg Q$.

  Por HI, temos $\text{fix}(Q), Q_{\text{N}} \vdash_{\text{LAR}} Q_{\text{S}}$.

1	$\text{fix}(\neg Q)$	pr
2	$(\neg Q)_{\text{N}}$	pr
3	$\text{fix}(Q)$	1, def. 5.5.9
4	$\neg(Q_{\text{S}})$	2, def. 5.3.23
5	$\vert\quad Q_{\text{N}}$	sup
6	$\vert\quad Q_{\text{S}}$	3, 5, HI
7	$\neg(Q_{\text{N}})$	5, 4, 6, $\neg$-int
8	$(\neg Q)_{\text{S}}$	7, def. 5.3.23

  Portanto, $\text{fix}(\neg Q), (\neg Q)_{\text{N}} \vdash_{\text{LAR}} (\neg Q)_{\text{S}}$.

- Caso P é $Q \rightarrow R$.

  Por HI, $\begin{cases} \text{fix}(Q), Q_{\text{N}} \vdash_{\text{LAR}} Q_{\text{S}} \ (1), \\ \text{fix}(R), R_{\text{N}} \vdash_{\text{LAR}} R_{\text{S}} \ (2). \end{cases}$

  De (1), temos $\text{fix}(\neg Q), (\neg Q)_{\text{N}} \vdash_{\text{LAR}} (\neg Q)_{\text{S}}$ (3).

  De (3) e (2), $\text{fix}(\neg Q \vee R), (\neg Q \vee R)_{\text{N}} \vdash_{\text{LAR}} (\neg Q \vee R)_{\text{S}}$, ou seja,

  $\text{fix}(Q \rightarrow R), (Q \rightarrow R)_{\text{N}} \vdash_{\text{LAR}} (Q \rightarrow R)_{\text{S}}$.

- Caso P é $Q \# R$, onde $\# \in \{\wedge, \vee\}$.

Por HI, $\begin{cases} \text{fix}(Q), Q_N \vdash_{LAR} Q_S \text{ (4)}, \\ \text{fix}(R), R_N \vdash_{LAR} R_S \text{ (5)}. \end{cases}$

De (4) e (5), $\text{fix}(Q \# R), (Q \# R)_N \vdash_{LAR} (Q \# R)_S$.

- Caso P é $\forall x\, Q$.

  Por HI, temos $\text{fix}(Q), Q_N \vdash_{LAR} Q_S$.

1	$\text{fix}(\forall x\, Q)$	pr
2	$(\forall x\, Q)_N$	pr
3	$\forall x\ \text{fix}(Q)$	1, def. 5.5.9
4	$\forall x\, Q_N$	2, def. 5.3.23
5	$\text{fix}(Q)$	3, $\forall$-el
6	Q_N	4, $\forall$-el
7	Q_S	5, 6, HI
8	$\forall x\, Q_S$	7, GEN
9	$(\forall x\, Q)_S$	8, def. 5.3.23

  Portanto, $\text{fix}(\forall x\, Q), (\forall x\, Q)_N \vdash_{LAR} (\forall x\, Q)_S$.

- Caso P é $\exists x\, Q$.

  Por HI, temos $\text{fix}(Q), Q_N \vdash_{LAR} Q_S$.

1	$\text{fix}(\exists x\, Q)$	pr
2	$(\exists x\, Q)_N$	pr
3	$\forall x\ \text{fix}(Q)$	1, def. 5.5.9
4	$\exists x\, Q_N$	2, def. 5.3.23
5	$\text{fix}(Q)$	3, $\forall$-el
6	$\quad \mid\ Q_N$	sup
7	$\quad \mid\ Q_S$	5, 6, HI
8	$\quad \mid\ \exists x\, Q_S$	7, $\exists$-int
9	$\exists x\, Q_S$	4, 6, 8, $\exists$-el
10	$(\exists x\, Q)_S$	9, def. 5.3.23

  Portanto, $\text{fix}(\exists x\, Q), (\exists x\, Q)_N \vdash_{LAR} (\exists x\, Q)_S$.

□

5.5.20. Lei da Unicidade: $\begin{cases} \text{(i) un}(P) \vdash_{LAR} P \Leftrightarrow P_S; \\ \text{(ii) un}(P) \vdash_{LAR} P \Leftrightarrow P_N. \end{cases}$

Prova: Imediata pelas duas leis anteriores.

5.5.21. Modus Ponens (versão limpa): $\text{ex}(P), P, P \to Q \vdash_{\text{LAR}} Q$.

Prova:

1	$\text{ex}(P)$	pr
2	P	pr
3	$P \to Q$	pr
4	P_{S}	2, teorema 5.5.3
5	P_{N}	1, 4, Lei da Existência (5.5.18)
6	Q	5, 3, Modus Ponens reescrita (5.5.5)

5.5.22. Regra da Dedução (versão limpa): $\dfrac{\Gamma \vdash_{\text{LAR}} \text{fix}(P) \qquad \Gamma, P \vdash_{\text{LAR}} Q}{\Gamma \vdash_{\text{LAR}} P \to Q}$.

Prova:

1	$\Gamma \vdash_{\text{LAR}} \text{fix}(P)$	hip
2	$\Gamma, P \vdash_{\text{LAR}} Q$	hip
3	$\Gamma, P_{\text{N}} \vdash_{\text{LAR}} P_{\text{S}}$	1, Lei da Fixidez (5.5.19), Regra do Corte (5.4.12)
4	$\Gamma, P_{\text{N}} \vdash_{\text{LAR}} P$	3, teorema 5.5.3
5	$\Gamma, P_{\text{N}} \vdash_{\text{LAR}} Q$	2, 4, Regra do Corte (5.4.12)
6	$\Gamma, P_{\text{N}} \vdash_{\text{LAR}} Q_{\text{S}}$	5, teorema 5.5.3
7	$\Gamma \vdash_{\text{LAR}} P_{\text{N}} \to Q_{\text{S}}$	6, RD
8	$\Gamma \vdash_{\text{LAR}} (P \to Q)_{\text{S}}$	7, def. 5.3.23
9	$\Gamma \vdash_{\text{LAR}} P \to Q$	8, teorema 5.5.3

5.5.23 Escólio. $\vdash_{\text{LAR}} P^{*} \Leftrightarrow (P \to P)$.

Prova:

Temos, pela definição 5.3.32, que $\vdash_{\text{LAR}} P^{*} \leftrightarrow P \vee \neg P$. (1)

$$\neg(P^{*})$$

$\leftrightarrow$ Definição 5.3.32

$$\neg(P \vee \neg P)$$

$\leftrightarrow$ De Morgan

$$\neg P \wedge \neg\neg P$$

$\leftrightarrow$ Comutatividade

$$\neg\neg P \wedge \neg P$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \quad \text{Dupla Negação} \\ &P \wedge \neg P \\ &\Leftrightarrow \quad \text{Implicação Material} \\ &\neg(P \to P). \end{aligned}$$

Logo, $\models_{LAR} \neg(P^*) \Leftrightarrow \neg(P \to P)$. Daí e de (1), temos $\models_{LAR} P^* \Leftrightarrow P \to P$. □

Nos cálculos paraconsistentes C_1 (DA COSTA, 1974) e CI_2 (BUCHSBAUM; PEQUENO, 1991), temos que $\sim P \vdash \neg P$ e $\sim P \dashv\vdash \neg P \wedge P^{\circ}$ [25][26]. O contra-exemplo a seguir mostra que estes esquemas não são, em geral, corretos em LAR.

5.5.24 Contra-exemplo. Considere uma I uma LAR-interpretação que dá o significado usual aos símbolos contidos na fórmula $\mathrm{par}(\Upsilon x\,(x \leq 10))$ e cujo universo de discurso é a coleção dos números inteiros. Temos que

$\models_{LAR} \sim \mathrm{par}(\Upsilon x\,(x \leq 10)) \Leftrightarrow \neg(\mathrm{par}(\Upsilon x\,(x \leq 10))_S) \Leftrightarrow \neg\forall x\,(x \leq 10 \to \mathrm{par}(x)) \Leftrightarrow$
$\exists x\,(x \leq 10 \wedge \neg\,\mathrm{par}(x))$.

Temos que, no domínio dos números inteiros, $I_S(\exists x\,(x \leq 10 \wedge \neg\,\mathrm{par}(x))) = 1$.

Por outro lado,

$\models_{LAR} \neg\,\mathrm{par}(\Upsilon x\,(x \leq 10)) \Leftrightarrow (\neg\,\mathrm{par}(\Upsilon x\,(x \leq 10))_S) \Leftrightarrow \forall x\,(x \leq 10 \to \neg\,\mathrm{par}(x))$.

Mas $I_S(\forall x\,(x \leq 10 \to \neg\,\mathrm{par}(x))) = 0$.

Portanto, $I_S(\sim P) \neq I_S(\neg P)$. Logo, $\sim P \vdash \neg P$ não é, em geral, um esquema válido em LAR. Como corolário, $\vdash \sim P \Leftrightarrow \neg P \wedge P^{\circ}$ também não é um esquema correto em LAR.

Nos cálculos paracompletos P_1 (DA COSTA, 1963) e PCL (BUCHSBAUM; PEQUENO, 1991), a igualdade clássica é definida como $\sim P \rightleftharpoons P \to \neg P$. Temos também nesses cálculos que $\neg P \vdash \sim P$. O contra-exemplo a seguir ilustra a não correção destes esquemas em LAR.

5.5.25 Contra-exemplo. Considere uma I uma LAR-interpretação que dá o significado usual aos símbolos contidos na fórmula $\mathrm{par}(\Upsilon x\,(x \neq x))$ e cujo universo de discurso é a coleção dos números inteiros. Temos que

$\models_{LAR} \sim \mathrm{par}(\Upsilon x\,(x \neq x)) \Leftrightarrow \neg(\mathrm{par}(\Upsilon x\,(x \neq x))_S) \Leftrightarrow \neg\forall x\,(x \neq x \to \mathrm{par}(x)) \Leftrightarrow$
$\exists x\,(x \neq x \wedge \neg\,\mathrm{par}(x))$.

---

[25] $P \dashv\vdash Q \rightleftharpoons P \vdash Q$ e $Q \vdash P$.

[26] A samblagem "$\neg *$" é empregada em da Costa (1974) para representar a negação clássica, a qual é denominada *Negação Forte* e definida como $\neg * A \rightleftharpoons \neg A \wedge A^{\circ}$. Uma síntese do Cálculo C_1 é também apresentada em da Costa (1994). Outra exposição do mesmo pode ser encontrada em da Costa, Krause e Bueno (2005).

Temos que, no domínio dos números inteiros, $I_S(\exists x\,(x \neq x \wedge \neg\,\mathrm{par}(x))) = 0$.

Por outro lado, $\vdash_{LAR} \neg\,\mathrm{par}(\Upsilon x\,(x \neq x)) \leftrightarrowtriangle (\neg\,\mathrm{par}(\Upsilon x\,(x \neq x))_S) \leftrightarrowtriangle \forall x\,(x \neq x \rightarrow \neg\,\mathrm{par}(x))$.

Mas $I_S(\forall x\,(x \neq x \rightarrow \neg\,\mathrm{par}(x))) = 1$.

Portanto, $I_S(\sim P) \neq I_S(\neg P)$. Logo, $\neg P \vdash \sim P$ não é, em geral, um esquema válido em LAR. Como corolário, $\vdash \sim P \leftrightarrowtriangle (P \rightarrowtriangle \neg P)$ também não é um esquema correto em LAR.

A seguir, apresentamos as leis de introdução e eliminação da negação clássica.

5.5.26. ~ -int: $\dfrac{\Gamma, P \vdash_{LAR} Q \qquad \Gamma, P \vdash_{LAR} \sim Q}{\Gamma \vdash_{LAR} \sim P}$.

Prova:

1	$\Gamma, P \vdash_{LAR} Q$	hip
2	$\Gamma, P \vdash_{LAR} \sim Q$	hip
3	$\Gamma, P \vdash_{LAR} \neg(Q_S)$	2, def. 5.3.32
4	$\Gamma \vdash_{LAR} \neg(P_S)$	1, 3, ¬-int reescrita (5.5.7 (i))
5	$\Gamma \vdash_{LAR} \sim P$	4, def. 5.3.32

5.5.27. ~ -el: $\dfrac{\Gamma, \sim P \vdash_{LAR} Q \qquad \Gamma, \sim P \vdash_{LAR} \sim Q}{\Gamma \vdash_{LAR} P}$.

Prova:

1	$\Gamma, \sim P \vdash_{LAR} Q$	hip
2	$\Gamma, \sim P \vdash_{LAR} \sim Q$	hip
3	$\Gamma, \neg(P_S) \vdash_{LAR} Q$	1, def. 5.3.32
4	$\Gamma, \neg(P_S) \vdash_{LAR} \neg(Q_S)$	2, def. 5.3.32
5	$\Gamma, \neg(P_S) \vdash_{LAR} Q_S$	3, teorema 5.5.3
6	$\Gamma \vdash_{LAR} \neg\neg(P_S)$	4, 5, ¬-int
7	$\Gamma \vdash_{LAR} P_S$	6, DN
8	$\Gamma \vdash_{LAR} P$	7, teorema 5.5.3

5.5.28 Teorema. $\vdash_{\text{LAR}} P^\circ \vee P^*$.

Prova:

1	$\mid$ $\sim(P^\circ \vee P^*)$	sup
2	$\mid$ $\sim(P^\circ) \wedge \sim(P^*)$	1, DM
3	$\mid$ $\sim(P^\circ)$	2, $\wedge$-el
4	$\mid$ $\sim(P^*)$	2, $\wedge$-el
5	$\mid$ $\sim\sim(P \wedge \neg P)$	3, def. 5.3.32
6	$\mid$ $P \wedge \neg P$	5, DN
7	$\mid$ P	6, $\wedge$-el
8	$\mid$ $\neg P$	6, $\wedge$-el
9	$\mid$ $\sim(P \vee \neg P)$	4, def. 5.3.32
10	$\mid$ $\sim P \wedge \sim\neg P$	9, DM
11	$\mid$ $\sim P$	10, $\wedge$-el
12	$P^\circ \vee P^*$	1, 7, 11, $\sim$-el

5.5.29. Terceiro Excluído. $\vdash_{\text{LAR}} P \vee \sim P$.

Prova:

1	$\mid$ $\sim(P \vee \sim P)$	sup
2	$\mid$ $\mid$ P	sup
3	$\mid$ $\mid$ $P \vee \sim P$	2, $\vee$-int
4	$\mid$ $\sim P$	1, 2, 3, $\sim$-int
5	$\mid$ $P \vee \sim P$	4, $\vee$-int
6	$P \vee \sim P$	1, 5, $\sim$-el

5.5.30. Não Contradição. $P, \sim P \vdash_{\text{LAR}} Q$.

Prova:

1	P	pr
2	$\sim P$	pr
3	$\mid$ $\sim Q$	sup
4	$\mid$ P	1
5	$\mid$ $\sim P$	2
6	Q	3, 4, 5, $\sim$-el

5.5.31 Corolário. Γ é LAR-trivial sss existe P tal que $\begin{cases} \Gamma \vdash_{\text{LAR}} P, \\ \Gamma \vdash_{\text{LAR}} \sim P. \end{cases}$

5.5.32 Teorema. Se $\begin{cases} \Gamma \vdash_{\text{LAR}} P^{\circ}, \\ \Gamma \text{ é não LAR-trivial,} \end{cases}$ então não é o caso que $\begin{cases} \Gamma \vdash_{\text{LAR}} P, \\ \Gamma \vdash_{\text{LAR}} \neg P. \end{cases}$

Prova:

Suponha que $\begin{cases} \Gamma \vdash_{\text{LAR}} P^{\circ}, & (1) \\ \Gamma \text{ é não LAR-trivial.} & (2) \end{cases}$

Suponha, por absurdo, que $\begin{cases} \Gamma \vdash_{\text{LAR}} P, & (3) \\ \Gamma \vdash_{\text{LAR}} \neg P. & (4) \end{cases}$

De (1), temos $\Gamma \vdash_{\text{LAR}} \sim(P \wedge \neg P)$. (5)

De (3) e (4), por $\wedge$-int, temos $\Gamma \vdash_{\text{LAR}} P \wedge \neg P$. (6)

De (5) e (6), pelo corolário anterior, temos que Γ é LAR-trivial, o que contraria (2).

Logo, não é o caso que $\begin{cases} \Gamma \vdash_{\text{LAR}} P, \\ \Gamma \vdash_{\text{LAR}} \neg P. \end{cases}$

□

5.5.33. Regra do ¬-int (primeira versão limpa).

- $$\frac{\Gamma \vdash_{\text{LAR}} P^{*} \qquad \Gamma \vdash_{\text{LAR}} Q^{\circ} \qquad \Gamma, P \vdash_{\text{LAR}} Q \qquad \Gamma, P \vdash_{\text{LAR}} \neg Q}{\Gamma \vdash_{\text{LAR}} \neg P}.$$

Prova:

1	$\Gamma \vdash_{\text{LAR}} P^{*}$	pr
2	$\Gamma \vdash_{\text{LAR}} Q^{\circ}$	pr
3	$\Gamma, P \vdash_{\text{LAR}} Q$	pr
4	$\Gamma, P \vdash_{\text{LAR}} \neg Q$	pr
5	$\Gamma \vdash_{\text{LAR}} \sim(Q \wedge \neg Q)$	2, def. 5.3.32
6	$\Gamma, P \vdash_{\text{LAR}} Q \wedge \neg Q$	3, 4, $\wedge$-int
7	$\Gamma, P \vdash_{\text{LAR}} \sim(Q \wedge \neg Q)$	5, MON
8	$\Gamma \vdash_{\text{LAR}} \sim P$	6, 7, ~-int
9	$\Gamma \vdash_{\text{LAR}} P \vee \neg P$	1, def. 5.3.32
10	$\Gamma \vdash_{\text{LAR}} \neg P$	8, 9, SD

5.5.34 Lema.

(i) $\mathrm{ex}(P) \vdash_{\mathrm{LAR}} P^{\circ}$.

(ii) $\mathrm{fix}(P) \vdash_{\mathrm{LAR}} P^{*}$.

Prova de (i)

1	$\mathrm{ex}(P)$	pr
2	$\quad P_{\mathrm{S}} \wedge \neg(P_{\mathrm{N}})$	sup
3	$\quad P_{\mathrm{S}}$	2, $\wedge$-el
4	$\quad \neg(P_{\mathrm{N}})$	2, $\wedge$-el
5	$\quad P_{\mathrm{N}}$	1, 3, Lei da Existência (5.5.18)
6	$\neg(P_{\mathrm{S}} \wedge \neg(P_{\mathrm{N}}))$	2, 4, 5, $\neg$-int
7	$\neg(P_{\mathrm{S}} \wedge (\neg P)_{\mathrm{S}})$	6, def. 5.3.23
8	$\neg((P \wedge \neg P)_{\mathrm{S}})$	7, def. 5.3.23
9	$\sim(P \wedge \neg P)$	8, def. 5.3.32
10	P°	9, def. 5.3.32

Prova de (ii):

1	$\mathrm{fix}(P)$	pr
2	$\quad P_{\mathrm{N}}$	sup
3	$\quad P_{\mathrm{S}}$	1, 2, Lei da Fixidez (5.5.19)
4	$P_{\mathrm{N}} \rightarrow P_{\mathrm{S}}$	2, 3, RD
5	$(P \rightarrow P)_{\mathrm{S}}$	4, def. 5.3.23
6	$P \rightarrow P$	5, teorema 5.5.3
7	$\neg P \vee P$	6, IM
8	$P \vee \neg P$	7, Comutatividade da Disjunção
9	P^{*}	8, def. 5.3.32

Os contra-exemplos a seguir mostram que $P^{\circ} \nvdash_{\mathrm{LAR}} \mathrm{ex}(P)$ e $P^{*} \nvdash_{\mathrm{LAR}} \mathrm{fix}(P)$.

5.5.35 Contra-exemplo. Considere I uma interpretação que associa aos símbolos contidos na fórmula $\mathrm{par}(\Upsilon x\,(x < 10)) \wedge \mathrm{primo}(\Upsilon x\,(x \neq x))$ seus significados usuais. Temos que
$I_{\mathrm{S}}(\mathrm{par}(\Upsilon x\,(x < 10)) \wedge \mathrm{primo}(\Upsilon x\,(x \neq x))^{\circ}) \neq$
$\min\{I_{\mathrm{S}}(\mathrm{par}(\Upsilon x\,(x < 10)) \wedge \mathrm{primo}(\Upsilon x\,(x \neq x))), I_{\mathrm{N}}(\mathrm{par}(\Upsilon x\,(x < 10)) \wedge \mathrm{primo}(\Upsilon x\,(x \neq x)))\} \neq$

$\min\{1,1\} = 1$.

Por outro lado, $I_S(\text{ex}(\text{par}(\Upsilon x\,(x < 10)) \wedge \text{primo}(\Upsilon x\,(x \neq x))) = 0$. Logo, $P^\circ \models_{\text{LAR}} \text{ex}(P)$ não é, em geral, um esquema válido em LAR.

5.5.36 Contra-exemplo. Considere I uma interpretação que associa a "$\in$" e "par" seus significados usuais e cujo universo de discurso é a coleção dos números naturais. Seja P a fórmula $\text{par}(\Upsilon x\,(x \in \{2,4\}))$. Temos que

$I_S(\text{par}(\Upsilon x\,(x \in \{2,4\})^*) = \max\{I_S(\text{par}(\Upsilon x\,(x \in \{2,4\})), I_N(\text{par}(\Upsilon x\,(x \in \{2,4\}))\} = \max\{1,0\} = 1$.

Por outro lado, como o termo $\Upsilon x\,(x \in \{2,4\})$ é ambíguo, $I_S(\text{fix}(\text{par}(\Upsilon x\,(x \in \{2,4\}))) = 0$.

Logo, $P^* \models_{\text{LAR}} \text{fix}(P)$ não é, em geral, um esquema correto em LAR.

5.5.37 Escólio. Se P é fórmula pura, então $\begin{cases} \models_{\text{LAR}} P^\circ, \\ \models_{\text{LAR}} P^*. \end{cases}$

Prova: Do escólio 5.5.10, temos $\models_{\text{LAR}} \text{un}(P)$.

Pela definição 5.5.9, $\text{un}(P) = \text{ex}(P) \wedge \text{fix}(P)$. Daí, pelo lema anterior, temos $\begin{cases} \models_{\text{LAR}} P^\circ, \\ \models_{\text{LAR}} P^*. \end{cases}$

□

5.5.38. Regra do ¬-int (segunda versão limpa).

- $$\frac{\Gamma \models_{\text{LAR}} \text{fix}(P) \qquad \Gamma \models_{\text{LAR}} \text{ex}(Q) \qquad \Gamma, P \models_{\text{LAR}} Q \qquad \Gamma, P \models_{\text{LAR}} \neg Q}{\Gamma \models_{\text{LAR}} \neg P}.$$

Prova:

1	$\Gamma \models_{\text{LAR}} \text{fix}(P)$	pr
2	$\Gamma \models_{\text{LAR}} \text{ex}(Q)$	pr
3	$\Gamma, P \models_{\text{LAR}} Q$	pr
4	$\Gamma, P \models_{\text{LAR}} \neg Q$	pr
5	$\Gamma \models_{\text{LAR}} P^*$	1, lema 5.5.34
6	$\Gamma \models_{\text{LAR}} Q^\circ$	2, lema 5.5.34
7	$\Gamma \models_{\text{LAR}} \neg P$	5, 6, 3, 4, ¬-int (primeira versão limpa) (5.5.33)

Às vezes não é possível provar "$P \rightarrow Q$" em algum ambiente usando alguns dos resultados dados acima. Considerando esta possibilidade, outra versão da regra da dedução é mostrada abaixo.

5.5.39. Regra da Dedução (versão prática).

- Se $\begin{cases} P \text{ é uma fórmula sem descrições de topo no escopo de alguma variável,} \\ Q \text{ é uma fórmula pura,} \\ x_1, \ldots, x_n \text{ são variáveis de topo pontuais em } Q, \\ x_1, \ldots, x_n \text{ não são livres em } \Gamma \cup \{R, \Upsilon x_1\, P_1, \ldots, \Upsilon x_n\, P_n\}, \\ \Gamma \mid_{\overline{\text{LAR}}}\, \exists x_1\, P_1, \ldots \Gamma \mid_{\overline{\text{LAR}}}\, \exists x_n\, P_n \\ \Gamma, P_{1\text{S}}, \ldots, P_{n\text{S}}, Q \mid_{\overline{\text{LAR}}}\, R, \end{cases}$

  então $\Gamma \mid_{\overline{\text{LAR}}}\, P \to R$.

Prova:

1	P é uma fórm. sem descr. de topo no escopo de alguma var.	hip
2	Q é uma fórmula pura	hip
3	$x_1, \ldots, x_n$ são variáveis de topo pontuais em Q	hip
4	$x_1, \ldots, x_n$ não são livres em $\Gamma \cup \{R, \Upsilon x_1\, P_1, \ldots, \Upsilon x_n\, P_n\}$	hip
5	$\Gamma \mid_{\overline{\text{LAR}}}\, \exists x_1\, P_1, \ldots, \Gamma \mid_{\overline{\text{LAR}}}\, \exists x_n\, P_n$	hip
6	$\Gamma, P_{1\text{S}}, \ldots, P_{n\text{S}}, Q \mid_{\overline{\text{LAR}}}\, R$	hip
7	$\Gamma \mid_{\overline{\text{LAR}}}\, P_{1\text{S}} \wedge \ldots \wedge P_{n\text{S}} \wedge Q \to R$	6, RD Gen. (5.4.14)
8	$\Gamma \mid_{\overline{\text{LAR}}}\, \forall x_1 \ldots \forall x_n (P_{1\text{S}} \wedge \ldots \wedge P_{n\text{S}} \wedge Q \to R)$	4, 7, GEN
9	$\Gamma \mid_{\overline{\text{LAR}}}\, \exists x_1 \ldots \exists x_n\, (P_{1\text{S}} \wedge \ldots \wedge P_{n\text{S}} \wedge Q) \to R$	4, 8, TQ
10	$\Gamma \mid_{\overline{\text{LAR}}}\, P_{\text{N}} \to R_{\text{S}}$	1,2,3,4,5,9, teor. 5.5.14
11	$\Gamma \mid_{\overline{\text{LAR}}}\, (P \to R)_{\text{S}}$	10, def. 5.3.23
12	$\Gamma \mid_{\overline{\text{LAR}}}\, P \to R$	11, teor. 5.5.3

5.6 Correção e Completude do Cálculo para LAR com respeito à Semântica para LAR

5.6.1 Teorema. $\Gamma \vdash_{\mathrm{LAR}} P$ sss $\mathbf{eld}(\Gamma) \vdash_{\mathrm{LAR}} \mathbf{eld}(P)$.

Prova:

$$\Gamma \vdash_{\mathrm{LAR}} P$$

sss Regra da Compacidade (5.4.13)

$$\text{existem } Q_1, \ldots, Q_n \in \Gamma \text{ tal que } \{Q_1, \ldots, Q_n\} \vdash_{\mathrm{LAR}} P$$

sss teorema 5.5.3

$$\text{existem } Q_1, \ldots, Q_n \in \Gamma \text{ tal que } \{(Q_1)_{\mathrm{S}}, \ldots, (Q_n)_{\mathrm{S}}\} \vdash_{\mathrm{LAR}} P_{\mathrm{S}}$$

sss definição 5.3.26

$$\text{existem } Q_1, \ldots, Q_n \in \Gamma \text{ tal que } \{\mathbf{eld}(Q_1), \ldots, \mathbf{eld}(Q_n)\} \vdash_{\mathrm{LAR}} \mathbf{eld}(P)$$

sss Regra da Monotonicidade

$$\mathbf{eld}(\Gamma) \vdash_{\mathrm{LAR}} \mathbf{eld}(P).$$

□

5.6.2 Teorema. $\Gamma \vdash_{\mathrm{LAR}} P$ sss $\mathbf{tr}(\Gamma) \vdash_{\mathrm{LEC}} \mathbf{tr}(P)$.

Prova:

$$\Gamma \vdash_{\mathrm{LAR}} P$$

sss teorema 5.6.1

$$\mathbf{eld}(\Gamma) \vdash_{\mathrm{LAR}} \mathbf{eld}(P)$$

sss teorema 5.4.17

$$\mathbf{sai}(\mathbf{eld}(\Gamma)) \vdash_{\mathrm{LEC}} \mathbf{sai}(\mathbf{eld}(P))$$

sss definição 5.3.43

$$\mathbf{tr}(\Gamma) \vdash_{\mathrm{LEC}} \mathbf{tr}(P).$$

□

5.6.3. Correção e Completude. $\Gamma \vdash_{\text{LAR}} P$ se, e somente se, $\Gamma \models_{\text{LAR}} P$.

Prova:

$$\Gamma \vdash_{\text{LAR}} P$$

sss teorema 5.6.2

$$\mathbf{tr}(\Gamma) \vdash_{\text{LEC}} \mathbf{tr}(P)$$

sss Correção e Completude de LEC (3.5)

$$\mathbf{tr}(\Gamma) \models_{\text{LEC}} \mathbf{tr}(P)$$

sss teorema 5.3.43

$$\Gamma \models_{\text{LAR}} P.$$

□

Capítulo 6

Resultados

Segundo Pogorzelski (1994), as lógicas de primeira ordem são suficientes para a expressão das teorias matemáticas conhecidas. Entretanto, conforme alguns exemplos fornecidos na introdução deste trabalho, podemos perceber que algumas situações não são capturadas adequadamente, uma vez que a matemática usual não admite nomes vácuos ou ambíguos, e nem a idéia de igualdade unidirecional.

Em Suppes (1972), pg. 87 encontramos a seguinte definição para o termo "$f(x)$":

$$\vdash f(x) = y \leftrightarrow (\exists! z\,(xfz) \wedge xfy) \vee (\neg\exists! z\,(xfz) \wedge y = \emptyset)$$

Como a versão de ZF de Suppes não trabalha com algum descritor de um dos gêneros do "ι" de Rosser ou do "ε" de Hilbert, então é preciso dar definições de uma forma declarativa. Esta definição adota a prática de associar todas as descrições impróprias ao conjunto vazio ($\emptyset$). Tal prática é problemática, pois, se obtemos, em algum contexto, que $\Gamma \vdash_{\mathrm{ZF}} f(x) = \emptyset$, ficamos sem saber, somente pelo que está aqui escrito, se "$f(x)$" é uma descrição imprópria ou não, isto é, se $\exists! z\,(xfz)$ ou $\neg\exists! z\,(xfz)$, pois o resultado "$\emptyset$" para $f(x)$ pode estar associado a qualquer um dos dois casos.

Em LAR, podemos definir $f(x)$ por $f(x) \rightleftharpoons \Upsilon y\,(xfy)$. O termo "$f(x)$" contém em si todas as informações necessárias para sabermos, em um dado contexto, se não há nenhum resultado para $f(x)$, se há mais de um resultado para $f(x)$ ou se há exatamente um resultado para $f(x)$. Se estamos considerando Γ como a coleção local de premissas, basta saber se $\Gamma \vdash \mathrm{vac}(f(x))$ no primeiro caso, se $\Gamma \vdash \mathrm{amb}(f(x))$ no segundo caso e se $\Gamma \vdash \mathrm{un}(f(x))$ no terceiro caso.

Pelo "ι" de Rosser, tal definição poderia ser da seguinte forma: $f(x) \rightleftharpoons \iota y(xfy)$. Tal definição possui uma problemática análoga à definição expressa em Suppes (1972), pois o termo "$f(x)$" não diz, por ele só, se $\exists! z(xfz)$ ou se $\neg\exists! z(xfz)$. Pelo "ε" de Hilbert, a problemática é também análoga.

LAR possui duas idéias chave, a da descrição, expressa pelo descritor "Υ", e a da abrangência, expressa pelo sinal predicativo diádico "$\rangle\!\!=$".

A existência de termos ambíguos origina-se da ocorrência do descritor "Υ", o qual difere dos demais descritores acima mencionados, como o "ε" de Hilbert, o "ι" de Russell, ou o "ι" de Rosser.

O "ι" de Russell é introduzido por definição contextual, o que acarreta a necessidade de teoremas adequados para eliminá-lo. Tais resultados são complexos e elaborados, conforme da Costa (1980b). Uma descrição "$\iota x P$" não é um termo da linguagem, só possuindo sentido quando ocorre no contexto de uma fórmula. Quando $\exists! xP$, a descrição $\iota x P$ é associada ao único objeto x que satisfaz P, dentro do contexto em que esta aparece.

De acordo com Rosser (1953), a palavra descrição indica um nome cuja estrutura identifica univocamente o objeto nomeado. O autor adota o descritor "ι" como sinal primitivo da linguagem. Dessa forma, uma descrição da forma "$\iota x P$" é um termo e denota o único objeto x que satisfaz P. Nos casos em que mais de um ou nenhum objeto satisfaz P, a descrição é imprópria e pode ser considerada destituída de significado, ou então ser associada a um objeto arbitrário do universo de discurso definido pela interpretação.

O "ε" de Hilbert, adotado como sinal primitivo, associa uma descrição da forma $\varepsilon x P$ a um objeto qualquer, dentre a coleção de todos os objetos que satisfazem P, utilizando para isso uma função-escolha. Ou seja, $\varepsilon x P$ representa "um" objeto que satisfaz P. Uma descrição imprópria, como por exemplo $\varepsilon x(x \neq x)$ é associada pela interpretação a um d arbitrário do universo de discurso.

O descritor "Υ" de LAR, por outro lado, quebra o paradigma da notação matemática de que termos devem denotar exatamente um objeto, ao contrário da prática corrente nas linguagens naturais. Uma descrição da forma "$\Upsilon x P$" é associada à coleção de todos os objetos que satisfazem P, ou seja, $\Upsilon x P$ é um nome para cada objeto desta coleção, sem a necessidade de uma função-escolha, como no caso do descritor "ε". Em LAR não há descrições impróprias, pois todas as descrições recebem o mesmo tratamento. Descrições cujas propriedades não são satisfeitas por nenhum indivíduo do universo de discurso são vácuas, ou seja, são associadas ao conjunto vazio. Este tratamento é mais natural do que o utilizado pelos descritores "ε" de Hilbert e "ι" de Rosser, que utilizam o recurso de associar as descrições impróprias a objetos arbitrários.

Embora "Υ" seja adotado como sinal primitivo da linguagem de LAR, as descrições podem ser eliminadas através dos resultados apresentados na seção 5.5.

O artigo definido pode ser simulado em LAR da seguinte forma:

$$\iota x\, P \rightleftharpoons \Upsilon x\, (P \wedge \forall y(P(x|y) \to x = y)), \text{ onde } y \text{ é a primeira variável não livre em } P.$$

Nesse caso, se houver mais de um objeto ou nenhum que satisfaz P, $\iota x\, P$ será uma descrição vácua.

Pelas Leis do Alcance, temos que, se x é de topo em P, então

$$t \;)\!\!\models t' \;\vdash_{\mathrm{LAR}} P(x|t) \multimap P(x|t').$$

Assim sendo, podemos também considerar que a fórmula "$t \;)\!\!\models t'$" é uma espécie de "implicação entre os termos t e t'". Por exemplo, a frase "um peixe é um vertebrado" pode ser escrita em LAR pela fórmula "Υx vertebrado(x) $)\!\!\models$ Υx peixe(x)", isto é, abreviando Υx vertebrado(x) por "um vertebrado" e Υx peixe(x) por " um peixe", podemos expressar a frase original por "um vertebrado $)\!\!\models$ um peixe", ou seja, o sinal predicativo "$)\!\!\models$" é o inverso do verbo "ser".

Tal como os sistemas paraconsistentes ou paracompletos mais fortes, LAR engloba a lógica clássica como um caso especial, a qual rege as fórmulas bem comportadas. LAR apresenta deviâncias apenas quando há ocorrência de termos ambíguos ou vácuos. De outro modo, comporta-se exatamente como a lógica equacional clássica, uma vez que, entre termos puros, a abrangência opera como igualdade. Ou seja, LAR possui todo o poder de expressividade da lógica clássica, mais o tratamento da ambigüidade e vacuidade.

Todos os resultados aqui apresentados foram provados. No entanto, por questões de economia, as provas mais simples ou que se assemelham a outras provas foram omitidas.

Com relação à primeira versão de LAR apresentada em Buchsbaum (2002), este trabalho desenvolveu:

- Verificação de todos resultados originais, através de provas.

- Ajustes em algumas leis que não puderam ser provadas em sua forma original.
- Uniformização das leis de substituição originais, através dos conceitos de Correspondência e Alcance. Desse modo, os mesmos resultados se aplicam tanto a termos como a fórmulas.
- Desenvolvimento do esquemas gerais da Instanciação para Correspondência e para o Alcance.
- Apresentação didática e detalhada de LAR, com exemplos e contra-exemplos, a fim de que este trabalho possa servir como fonte de referência para futuros trabalhos na mesma linha.

Capítulo 7

Considerações Finais

Enquanto que o discurso das linguagens naturais é em geral repleto de ambigüidades, o mesmo não acontece usualmente com as linguagens formais usuais presentes na matemática. Entretanto, existem várias situações, tanto na prática matemática como na modelagem do raciocínio em Lógica, nas quais é bastante desejável lidar diretamente com a ambigüidade, como por exemplo a integral indefinida, o produto categorial, e diversas situações sintáticas nas linguagens formais. Esta dificuldade se deve à falta de ferramentas lógicas adequadas para a formalização de situações como ambigüidade e vacuidade. A lógica aqui descrita tenta suprir esta lacuna, adotando um novo paradigma semântico: a associação de cada termo a uma coleção de objetos, em oposição às semânticas mais conhecidas, onde cada termo é associado a apenas um objeto.

Em linguagens naturais, como português, inglês e outras, expressões podem empregar nomes ambíguos para coleções de objetos. Em LAR, adotamos este mesmo conceito na definição de uma linguagem formal para representação de conhecimento, enriquecendo a lógica clássica e aumentando seu poder de expressividade. Através dos resultados concernentes à eliminação de descrições, qualquer fórmula representada em LAR pode ser convertida para a lógica de primeira ordem com igualdade. Desse modo, podemos empregar nestas fórmulas os métodos de automatização conhecidos e largamente empregados, como tablôs e resolução, na construção de sistemas de inteligência artificial.

7.1 Trabalhos Futuros

Algumas linhas futuras de pesquisa identificadas durante o desenvolvimento deste trabalho são:

- Definições de positividade e negatividade adequadas para a obtenção, em LAR, de resultados análogos aos apresentados na seção 3.3.15, para a implicação forte e para a superimplicação. Tal definição tornaria possível a generalização das Leis de Substituição e Instanciação para o Alcance, a fim de trabalhar com termos não apenas de topo, mas ocorrendo em qualquer profundidade.
- Lidar com vinculações entre termos ambíguos. Por exemplo, se queremos dizer que "se um leão está com fome, então ele irá caçar". Neste caso, há uma vinculação entre a locução substantiva "um leão" e o pronome "ele". Em LAR, não haveria uma forma imediata de representar esta frase, pois esta lógica não lida diretamente com vinculações entre termos. Poderíamos, em LAR, representar esta frase pela fórmula

$$\exists x\,(\Upsilon x \text{ leão}(x) \succeq x \wedge \text{esfomeado}(x) \rightarrow \text{comerá}(x)).$$

  O leitor pode notar a relativa complexidade desta fórmula. Em uma lógica LAR com vinculação, ainda não desenvolvida, mas somente imaginada, poderíamos representar a mesma frase pela fórmula

$$\text{esfomeado}(\Upsilon_1 x \text{ leão}(x)) \rightarrow \text{comerá}(\Upsilon_1 \text{ leão}(x)).$$

- Desenvolvimento de uma lógica dual a esta, onde os termos sejam interpretados existencialmente, ao invés de serem interpretados universalmente, como foi feito neste trabalho. Não ficamos, a princípio, motivados a desenvolver tal lógica por somente termos detectado, no discurso matemático, raríssimas ocorrências de termos que podem ser vistos como existenciais.
- Explorar outras possibilidades abertas pela associação de termos a coleções de objetos, como, por exemplo, o uso de conectivos e quantificadores para termos. Por exemplo, uma disjunção de dois termos $t \vee u$, poderia ser definida semanticamente como a união das coleções associadas respectivamente a t e a u.

Referências Bibliográficas

ABAR, C. A. A. P. *Descrição e Paraconsistência*. Tese (Doutorado) — Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1985.

BARRETO, J. M. *Inteligência Artificial no Limiar do Século XXI*. 3. ed. Florianópolis: Rô Rô Rô Edições, 2001.

BELL, J. L.; MACHOVER, M. *A Course in Mathematical Logic*. Amsterdan: North-Holland, 1977.

BITTENCOURT, G. *Inteligência Artificial: Ferramentas e Teorias*. 3. ed. Florianópolis: Editora da UFSC, 2006. (Série Didática).

BOSTOCK, D. *Intermediate Logic*. Oxford: Clarendon Press & Oxford University Press, 1997.

BOURBAKI, N. *Descrição da Matemática Formal*. Niterói: Universidade Federal Fluminense, 1966. Tradução de Geraldo Sebastião Tavares Cardoso.

BRANQUINHO, J.; MURCHO, D. *Enciclopédia de Termos Lógico-Filosóficos*. Lisboa: Gradiva, 2001.

BUCHSBAUM, A. A logic for ambiguous description. *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, v. 67, p. 1–18, 2002. Disponível em http://www.informatik.uni-trier.de/~ley/db/journals/entcs/entcs67.html. Acesso em 15 de julho de 2006.

BUCHSBAUM, A. Lógica geral. Disponível em: http://wwwexe.inf.ufsc.br/~arthur/material_didatico/LogicaGeral.pdf. Acesso em 23 de setembro de 2006. 2006.

BUCHSBAUM, A.; PEQUENO, T. *Uma Família de Lógicas Paraconsistentes e/ou Paracompletas com Semânticas Recursivas*. Rio de Janeiro, 1991. (Monografias em Ciência da Computação).

BUCHSBAUM, A.; PEQUENO, T. A game characterization of paraconsistent negation. Apresentado no *Second World Congress on Paraconsistency*. Resumo disponível em: http://logica.cle.unicamp.br/wcp/Contributors/ArthurBuchsbaum_TarcisioPequeno.htm. Acesso em 14 de maio de 2007. 2000.

BUCHSBAUM, A.; SEBBEN, A. Uma lógica para a referência ambígua. *XXXIII Conferencia Latinoamericana de Informatica (CLEI)*, San José, Costa Rica, 2007.

CARNIELLI, W. A.; CONIGLIO, M.; BIANCONI, R. *Lógica e Aplicações em Ciência da Computação*. 2002. Disponível em: http://www.ime.usp.br/~bianconi/Livro/ livro.dvi.gz. Acesso em 20 de julho de 2007.

CARRION, R.; DA COSTA, N. C. A. *Introdução à Lógica Elementar (com o Símbolo de Hilbert)*. 1. ed. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 1988.

CIRL, C. I. R. L. *Knowledge Representation*. 2005. Disponível em http://www.cirl.uoregon.edu/research/kr.html. Acesso em 2 de janeiro de 2007.

DA COSTA, N. C. A. *Sistemas Formais Inconsistentes*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 1963.

DA COSTA, N. C. A. On the theory of inconsistent formal systems. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, v. 15, p. 497–510, 1974.

DA COSTA, N. C. A. El símbolo ε de Hilbert. *Lecturas Matemáticas*, Bogotá, v. 2, n. 1, p. 1–13, 1980.

DA COSTA, N. C. A. A model-theoretical approach to variable binding term operators. In: ARRUDA, A. I.; CHUAQUI, R.; DA COSTA, N. C. A. (Ed.). *Mathematical Logic in Latin America*. Amsterdã: North-Holland, 1980. p. 133–162.

DA COSTA, N. C. A. Logics that are both paraconsistent and paracomplete. *Rendiconti dell' Accademia Nazionale del Linzei*, v. 83, p. 29–32, 1989.

DA COSTA, N. C. A. *Ensaio sobre os Fundamentos da Lógica*. São Paulo: Hucitec, 1994.

DA COSTA, N. C. A.; KRAUSE, D. *Lógica*. Florianópolis: Grupo de Lógica e Fundamentos da Ciência - Departamento de Filosofia - UFSC, 2005. Disponível em: http://www.cfh.ufsc.br/~dkrause/pg/cursos/Novo5.pdf. Acesso em 17 jun. 2007.

DA COSTA, N. C. A.; KRAUSE, D.; BUENO, O. Paraconsistent logics and paraconsistency. North-Holland, Oxford, 2005. Disponível em: http://www.cfh.ufsc.br/~dkrause/pg/papers/CosKraBue2005.pdf. Acesso em 15 de setembro de 2007.

DA COSTA, N. C. A.; MORTENSEN, C. Notes on the theory of variable vinding term operators. In: *History and Philosophy of Logic*. Londres: Taylor & Francis, 1983. p. 63–72.

ENDERTON, H. B. *A Mathematical Introduction to Logic*. San Diego: Academic Press, 1972.

ENDERTON, H. B. *Elements of Set Theory*. San Diego: Academic Press, 1977.

FITCH, F. B. *Symbolic Logic: An Introduction*. Nova Iorque: The Ronald Press Company, 1952.

GRIES, D.; SCHNEIDER, F. B. *A Logical Approach to Discrete Math*. Nova Iorque: Springer-Verlag, 1994. (Texts and Monographs in Computer Science).

HATCHER, W. S. *The Logical Foundations of Mathematics*. Oxford, Nova Iorque: Pergamon Press, 1982. (Foundations and Philosophy of Science and Technology Series).

HILBERT, D.; BERNAYS, P. *Grundlagen der Mathematik*. Berlim: Springer, 1934.

HINTIKKA, J.; KULAS, J. *The Game of Language: Studies in Game-Theoretical Semantics and Its Applications*. Dordrecht, Holanda: Synthese Library, 1983.

KRAUSE, D. *Sistemas Formais*. Florianópolis: Grupo de Lógica e Fundamentos da Ciência - NEL/UFSC/CNPq, 2005. Disponível em: http://www.cfh.ufsc.br/~dkrause/pg/cursos/SistFormais.pdf. Acesso em 17 de junho de 2007.

LAMBERT, K. Russell's theory of definite descriptions. *Dialectica*, v. 44, n. 1–2, p. 137–152, 1990.

MALANOVICZ, A. V. *Definição Inicial de um Sistema de Provas Rotulado para Lógicas do Conhecimento*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2004.

NISSANKE, N. *Introductory Logic and Sets for Computer Scientists*. Harlow, Inglaterra: Addison-Wesley, 1999. (International Computer Science Series).

POGORZELSKI, W. A. *Notions and Theorems of Elementary Formal Logic*. Bialystok, Polônia: Warsaw University, 1994.

ROSSER, J. B. *Logic for Mathematicians*. Nova Iorque: McGraw-Hill, 1953. (International Series in Pure and Applied Mathematics).

RUSSELL, B. On denoting. *Mind*, v. 14, p. 479–493, 1905.

RUSSELL, B. *Introduction to Mathematical Philosophy*. Londres: George Allen & Unwin, 1919.

RUSSELL, B. *Introdução à Filosofia Matemática*. 3. ed. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1974.

RUSSELL, B. Da denotação. In: *Ensaios Escolhidos*. São Paulo: Abril Cultural, 1978, (Coleção Os Pensadores).

RUSSELL, B. *Logic and Knowledge: essays 1901-1950*. Londres: Routledge, 1988.

RUSSELL, S.; NORVIG, P. *Inteligência Artificial*. Rio de Janeiro: Elsevier, Campus, 2004. Tradução de Vandenberg D. de Souza.

SHOENFIELD, J. R. *Mathematical Logic*. Reading, Massachusetts, EUA: Addison-Wesley, 1967.

SILVA, F. S. C. da; FINGER, M.; MELO, A. C. V. de. *Lógica para Computação*. São Paulo: Thomson Learning, 2006.

SUPPES, P. *Axiomatic Set Theory*. Nova Iorque: Dover, 1972.

WHITEHEAD, A. N.; RUSSELL, B. *Principia Mathematica*. Cambridge: Cambridge University Press, 1910.

WIKIPEDIA. *Barra de Frege*. [S.l.: s.n.], 2007. Disponível em: http://pt.wikipedia.org/wiki/Barra_de_Frege. Acesso em 17 set. 2007.

Índice Remissivo