

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM  
ENGENHARIA MECÂNICA**

**CONTROLE ATIVO DE VIBRAÇÕES EM MÁQUINAS-FERRAMENTAS**

**Dissertação submetida à**

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA**

**para a obtenção do grau de**

**MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**EDUARDO MARTINS DE QUEIROZ**

**Florianópolis, novembro de 2007**

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM  
ENGENHARIA MECÂNICA**

**CONTROLE ATIVO DE VIBRAÇÕES EM MÁQUINAS-FERRAMENTAS**

**EDUARDO MARTINS DE QUEIROZ**

**Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de  
MESTRE EM ENGENHARIA  
ESPECIALIDADE ENGENHARIA MECÂNICA  
sendo aprovada em sua forma final.**

---

Prof. Edson Roberto de Pieri, Dr. - Orientador

---

Prof. Daniel Martins, Dr.Eng. - Co-orientador

---

Prof. Fernando Cabral, Ph.D. - Coordenador do Curso

**BANCA EXAMINADORA**

---

Prof. Walter Lindolfo Weingaetner, Dr.-Ing. - Presidente

---

Prof. Arcanjo Lenzi, Ph.D.

---

Prof. Eugênio de Bona Castelan Neto, Dr.Eng

*“Pessoalmente considero o otimismo a forma mais perfeita e generosa da inteligência.”*

**DOMENICO DE MASI**

*“A guerra deve visar à paz, o trabalho visar ao ócio, as coisas necessárias e úteis devem ter em vista as coisas belas.”*

**ARISTÓTELES**

*“Poderia se afirmar sem dúvida que a mola principal da criatividade é...a necessidade imperiosa de se expandir, de se estender e de se desenvolver...”*

*Tenho a convicção, confortada pela experiência, de que essa tendência existe em todo indivíduo.”*

**CARL R. ROGERS**

*“Não é que eu procure falar difícil, é que as coisas têm nome.”*

**JOÃO GUIMARÃES ROSA**

*Dedico este trabalho a todos  
que me acompanharam neste período,  
em especial a toda minha família  
e à minha namorada Vanessa.*

*Aos meus pais, Osvaldo e Neara,  
pelo exemplo de vida, dedico apenas os elogios.*

## Agradecimentos

Dentro desta dissertação esta página deveria ser uma das mais simples. Bastaria agradecer a todos que contribuíram para que este trabalho chegasse a se completar.

Ocorreu que ela foi difícil a ponto de ser tirada dos meus planos por várias vezes, o que seria uma saída tão simples quanto injusta com aqueles que me ajudaram e naturalmente com o Prof. Raul Guenther, meu orientador durante vários anos desde a iniciação científica. Talvez nenhum outro termo seria mais adequado do que “orientador”.

Infelizmente não houve tempo para transmiti-lo nenhum tipo de agradecimento. Em primeiro lugar pela simples existência deste trabalho. Sem ele este trabalho não teria nem começado, se desenvolvido e, muito menos, se concluído. Em segundo lugar é necessário agradecê-lo pelo apoio durante todas as fases deste trabalho até a fase final de dissertação. Suas sugestões estão presentes em cada página. Apesar de não se fazer mais presente, fica a sua *orientação*, o seu constante incentivo e sobretudo o grande exemplo. Obrigado Prof. Raul!

Agradeço igualmente o empenho dos professores Daniel Martins e Edson de Pieri, que num momento tão difícil para todos conseguiram encontrar meios de “rejeitar as perturbações”. Suas contribuições são de grande valor e continuaremos “seguindo as referências”.

O financiamento deste trabalho só foi possível graças ao apoio da CAPES e do CNPq através do Posmec, do Departamento de Engenharia Mecânica e, naturalmente, da UFSC. Devo agradecer também o apoio do Departamento de Automação e Sistemas pela parceria constante. Agradeço à toda equipe do Laboratório de Robótica e também do Laboratório de Vibrações e Acústica.

A parte experimental deste trabalho foi realizada no Instituto de Máquinas-feramentas e Tecnologia da Produção da Universidade Técnica de Braunschweig/Alemanha, com recursos da própria universidade e do DAAD(Deutscher Akademischer Austausch Dienst), através de um acordo entre esta universidade e a UFSC.

An alle IWF Gruppe muss ich mich unbedingt bedanken. Ich bedanke Prof. Hesselbach und Prof. Hoffmeister die Gelegenheit diese Arbeit durchzuführen. Diese Arbeit wurde nicht möglich ohne die Unterstützung von IWF und TU-Braunschweig. Vielen Danke an Marc Simnofske für die Aufwand, Unterstützung, die Herzliche Freundschaft und besonders die Bereitschaft zur Zusammenarbeit. Immer fleißig!

## Simbologia

CBN: *Cubic Boron Nitride*

FFT: *Fast Fourier Transform*

FIR: *Finite Impulse Response*

FRF: Função Resposta em Frequência

FXLMS: *Filtered X Least Mean Square*

IIR: *Infinite Impulse Response*

LIT: Linear Invariante no Tempo

LMS: *Least Mean Square*

LQG: *Linear Quadratic Gaussian*

LQR: *Linear Quadratic Regulator*

PID: Proporcional Integral Diferencial

TDF: Transformada Discreta de Fourier

## Resumo

Máquinas-ferramentas podem executar um processo de usinagem instável quando modos de vibração da estrutura da máquina são excitados pelas próprias forças de processo, situação que leva a níveis de vibração que causam marcas na superfície da peça trabalhada e da ferramenta. Este trabalho apresenta a aplicação do controle ativo de vibrações com o objetivo de adicionar amortecimento aos modos de vibração de uma retificadora e torná-la menos suscetível a um processo de usinagem instável.

A modelagem é feita a partir de modelos obtidos experimentalmente através de algoritmos de identificação de sistemas lineares. A natureza multivariável do problema motiva a utilização de modelos no espaço de estados, e, especificamente, é proposta a aplicação de realizações modais de maneira a trazer um significado físico/estrutural aos modelos. Este tipo de realização modal também permite um tratamento direto da controlabilidade e observabilidade de cada modo de vibração a partir de cada atuador e sensor, respectivamente. O controle aplicado é do tipo realimentado, no qual o sinal de realimentação é obtido através de acelerômetros montados na máquina e é utilizado para definir o comportamento de atuadores piezo-elétricos de forma a causar forças reativas às vibrações medidas. Para o projeto de controladores é proposto o projeto de um controlador LQG em sua versão balanceada, que apresenta vantagens em relação a outras abordagens implementadas em um ambiente ruidoso para um problema de dinâmica multivariável e com forte acoplamento entre entradas e saídas.

Os resultados da identificação, modelagem e projeto de controladores são validados em processo através da adição de amortecimento aos modos de vibração e consequente diminuição do tempo de acomodação da estrutura, de maneira que em malha fechada a estrutura da máquina seja menos suscetível a um processo instável.

A execução deste trabalho permitiu o desenvolvimento de uma metodologia de projeto de controle ativo de vibrações de estruturas mecânicas onde a falta de amortecimento representa um inconveniente. De fato, na apresentação desta metodologia fica evidente a natureza multidisciplinar do problema e todos os elementos envolvidos no desenvolvimento de um sistema de controle ativo.

## **Abstract**

Machine-tools may perform a so called unstable process when the machine structure vibration modes are excited by the process forces. This leads to vibration levels that cause chatter marks on the workpiece and tool surfaces. This work presents the application of active control of vibrations with the main objective of adding damping to the vibration modes of a grinding machine in order to reduce its sensitivity to an unstable process.

The modelling is done from experimental data through linear system identification algorithms. The multivariable nature of the problem inspires using state space models, and, specifically, it is proposed the application of modal realizations in order to bring some physical/structural meaning to the models. This kind of realization also allows a direct treatment of controllability and observability of each vibration mode from each actuator and sensor, respectively. The applied approach is a feedback control, where the feedback signal is obtained from accelerometers mounted on the machine structure and is used to define the behaviour of piezo-actuators in such a way to cause reactive forces to the measured vibrations. For the controller design it is proposed the balanced LQG controller, which brings advantages in comparison to other implemented design methods in a noisy environment for a multivariable dynamic problem with strong coupling between inputs and outputs.

The system identification, modelling and controller design results are in process through the vibration modes damping addition and structure's settling time decrease. In fact, in closed loop the machine is less sensitive to an unstable grinding process.

The acquired experience brought by this work allows an analysis of the applied methodology, which is proposed for active vibration control projects applied to mechanical structures where the lack of damping represents a problem. In fact, the methodology analysis evidences the multidisciplinary nature of the problem and all involved elements under the development of an active control system.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	p. 13
1.1	Tipos de vibração	p. 13
1.2	Processo de Usinagem Instável	p. 14
1.3	Controle de Vibrações	p. 15
1.4	Proposta e objetivos	p. 17
1.5	Bancada de Testes	p. 18
1.6	Organização Geral	p. 19
<b>2</b>	<b>Modelagem de Estruturas Mecânicas Através de Sistemas LIT</b>	p. 20
2.1	Sistemas com um grau de liberdade	p. 22
2.2	Transmissibilidade	p. 24
2.3	Sistemas de múltiplos graus de liberdade	p. 25
2.4	Modelos Modais no Espaço de Estados	p. 30
2.4.1	Realizações Modais	p. 32
2.4.2	Redução de Modelos via Realização Balanceada	p. 34
2.4.2.1	Realização Balanceada	p. 35
2.4.2.2	Truncamento Balanceado	p. 36
2.4.3	Controlabilidade e Observabilidade em Modelos Modais	p. 37
<b>3</b>	<b>Análise Modal Experimental e Análise Espectral</b>	p. 40
3.1	Análise Modal Experimental	p. 40
3.2	Análise Espectral	p. 50
3.2.1	FRF a partir da TDF de entrada-saída	p. 53
3.2.2	Densidade Espectral de Potência	p. 55

3.2.3	FRF a partir dos espectros de potência . . . . .	p. 56
3.2.4	Coerência . . . . .	p. 58
3.2.5	Janelas espectrais . . . . .	p. 58
<b>4</b>	<b>Controle Ativo de Vibrações</b>	p. 62
	Controle pré-alimentado vs. realimentado . . . . .	p. 63
4.1	Controle por pré-alimentação . . . . .	p. 64
4.1.1	Controladores digitais adaptativos . . . . .	p. 65
4.2	Controle por Realimentação . . . . .	p. 68
	Modificação da resposta de um sistema de um grau de liberdade . . . . .	p. 69
	O efeito de atrasos e filtros . . . . .	p. 71
	Sistemas multivariáveis e acoplamento . . . . .	p. 72
4.2.1	Realimentação de Estados e Observadores de Estado . . . . .	p. 73
4.2.2	Controle por Alocação de Pólos . . . . .	p. 76
4.2.3	Controle Ótimo . . . . .	p. 77
4.2.4	Filtro de Kalman e Controlador LQG . . . . .	p. 78
4.2.5	Controlador LQG balanceado . . . . .	p. 79
<b>5</b>	<b>Desenvolvimentos Anteriores</b>	p. 82
5.1	Análise Modal . . . . .	p. 85
5.2	Posicionamento e Montagem dos Atuadores e Sensores . . . . .	p. 90
5.3	Influência dos Atuadores no Comportamento Dinâmico . . . . .	p. 93
<b>6</b>	<b>Identificação e Modelagem</b>	p. 95
6.1	Metodologia de Identificação de Sistemas . . . . .	p. 95
6.2	Identificação e Modelagem . . . . .	p. 97
6.2.1	Identificação da Dinâmica dos Atuadores . . . . .	p. 102
	Atuador A . . . . .	p. 103
	Atuador B . . . . .	p. 106

6.2.2	Identificação da Comportamento Vibratório do Eixo . . . . .	p. 110
6.2.3	Composição e Redução dos Modelos . . . . .	p. 114
<b>7</b>	<b>Projeto de Controladores</b>	p. 120
7.1	Projeto do Observador de Estados . . . . .	p. 122
7.2	Realimentação por Alocação de Pólos . . . . .	p. 123
7.3	Controlador LQG . . . . .	p. 125
7.4	Controlador LQG Balanceado . . . . .	p. 127
7.5	Testes em Processo . . . . .	p. 130
<b>8</b>	<b>Metodologia de projeto</b>	p. 136
<b>9</b>	<b>Conclusões e Perspectivas</b>	p. 142
	<b>Referências</b>	p. 144
	<b>Apêndice A – Sistemas LIT</b>	p. 147
A.1	Representação Matemática . . . . .	p. 148
	Função de Transferência . . . . .	p. 149
	Sistemas Multivariáveis . . . . .	p. 149
	Espaço de Estados . . . . .	p. 150
A.2	Resposta no Domínio do Tempo . . . . .	p. 151
A.3	Resposta no Domínio da Frequência . . . . .	p. 152
	Sistemas Monovariáveis . . . . .	p. 153
	Sistemas Multivariáveis . . . . .	p. 153
	A Decomposição em Valores Singulares . . . . .	p. 154
	Os Ganhos Principais . . . . .	p. 156
A.4	Pólos e Zeros . . . . .	p. 156
	Pólos e Zeros em Sistemas Multivariáveis . . . . .	p. 157
	Influência dos Pólos e Zeros na Resposta de Sistemas LIT . . . . .	p. 157

Sistemas de 1ª Ordem . . . . .	p. 158
Sistemas de 2ª Ordem . . . . .	p. 159
Resposta Total no Domínio da Freqüência . . . . .	p. 162
A.5 Interconexão de Sistemas . . . . .	p. 163
A.5.1 Série . . . . .	p. 163
A.5.2 Paralelo . . . . .	p. 165
A.6 Propriedades Estruturais de Sistemas LIT . . . . .	p. 166
A.6.1 Controlabilidade . . . . .	p. 167
A.6.2 Observabilidade . . . . .	p. 168
A.6.3 Estabilidade . . . . .	p. 170
A.7 Formulações para Sistemas Discretos . . . . .	p. 171
A.7.1 Representação de Sistemas LIT Discretos . . . . .	p. 172
A.7.2 Função Resposta em Freqüência . . . . .	p. 173
A.7.3 Raízes no Plano Complexo e Estabilidade . . . . .	p. 174
<b>Apêndice B – Modelos Utilizados</b>	p. 176
B.1 Modelo 1 . . . . .	p. 176
B.2 Modelo 2 . . . . .	p. 178

# 1 Introdução

Vibrações em máquinas-ferramentas, durante o processo de usinagem, podem levar a marcas na peça trabalhada que vêm a afetar a qualidade da peça. A investigação de soluções para este problema se fundamenta na perspectiva de melhorar a precisão e reduzir as tolerâncias envolvidas nos processos.

## 1.1 Tipos de vibração

O problema das vibrações que se traduzem em marcas na peça pode ser dividido em duas classes. A primeira, referida como excitação (ou vibração) forçada, consiste em vibrações causadas por desbalanceamento do eixo-árvore<sup>1</sup>. A segunda é caracterizada por vibrações auto-induzidas, onde as forças do processo excitam os modos de vibração da estrutura.

Tipo de vibração		Por excitação forçada	Auto-induzida
Excitação	Durabilidade	Persistente	Não persistente
	Previsibilidade	Correlacionada com variáveis mensuráveis	Pouco previsível
	Distribuição em frequência	Espectro estreito (um ou alguns picos)	Espectro largo
Causa fundamental		Desbalanceamento ou irregularidades em partes girantes	Pouco amortecimento nos modos de vibração

Tabela 1: Diferenças entre as duas classes de vibração

A Tabela 1 contrapõe algumas características destes dois tipos de vibração. A excitação forçada tem sua causa no desbalanceamento de partes girantes ou nas irregularidades destas superfícies, que leva a um sinal de perturbação persistente no domínio do tempo e com um espectro em frequência estreito. O sinal de excitação resultante está correlacionado com o giro das partes desbalanceadas ou irregulares, o que lhe traz uma natureza mais previsível em comparação com o tipo de excitação

<sup>1</sup>Em geral a maior parte da contribuição no desbalanceamento não é do eixo em si, mas sim da peça ou da ferramenta que gira anexada a ele.

presente nas vibrações auto-induzidas. Neste caso, a excitação é normalmente decorrente de choques entre peça e ferramenta que levam a estrutura a vibrar segundo seus modos de vibração. A busca por soluções para os dois casos difere, portanto, a partir da identificação das causas.

## 1.2 Processo de Usinagem Instável

Em determinadas situações, é possível que as vibrações que causam marcas tendam a aumentar durante o processo. Isto acontece porque as vibrações afetam as superfícies da peça e da ferramenta. Esta situação é conhecida como processo de usinagem instável. Especificamente no processo de retificação, a instabilidade é um problema presente e que é foco de investigações (INSAKI; KERPUSCHEWSKI; LEE, 2001). A Fig. 1 ilustra imperfeições nas superfícies da peça e ferramenta neste processo, bem como um exemplo de peça com marcas decorrentes de uma retificação instável.

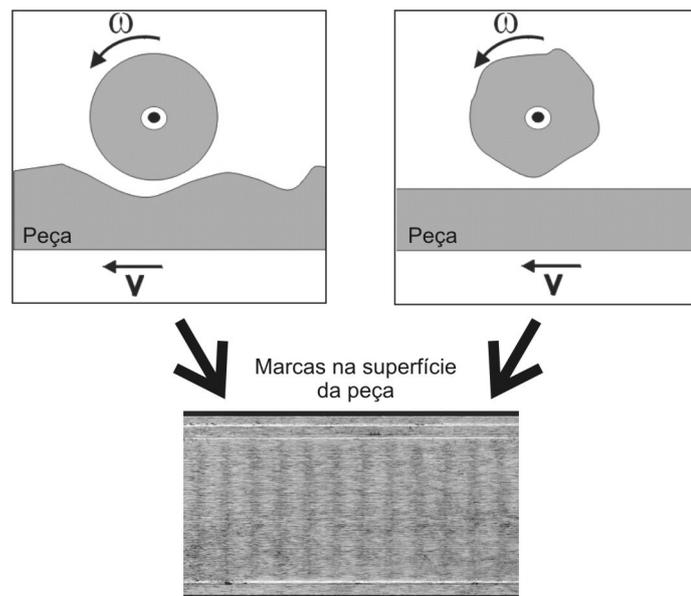


Figura 1: Imperfeição nas superfícies e processo instável

Se por um lado as marcas na peça usinada representam perda de qualidade, aquelas que ocorrem na ferramenta representam perda de produtividade uma vez que a capacidade de corte é comprometida e a ferramenta deve ser afiada novamente. Isto constitui um problema relevante principalmente para ferramentas caras como as de CBN (Nitreto de Boro Cúbico) (SIMNOFSKE; HESSELBACH, 2006).

A maneira usual de resolver o problema do processo de retificação instável consiste em encontrar condições de processo que evitem este problema. Isto faz com que não se possa aproveitar o potencial de máquinas disponíveis na medida em que deve-se evitar, por exemplo, a usinagem a velocidades de corte mais altas. Além disto,

embora a instabilidade do processo seja apenas uma consequência de vibrações, encontrar a causa pode ser difícil (ATLINTAS; WECK, 2004). A Fig. 2 apresenta alguns fatores que influenciam na ocorrência de processos instáveis.

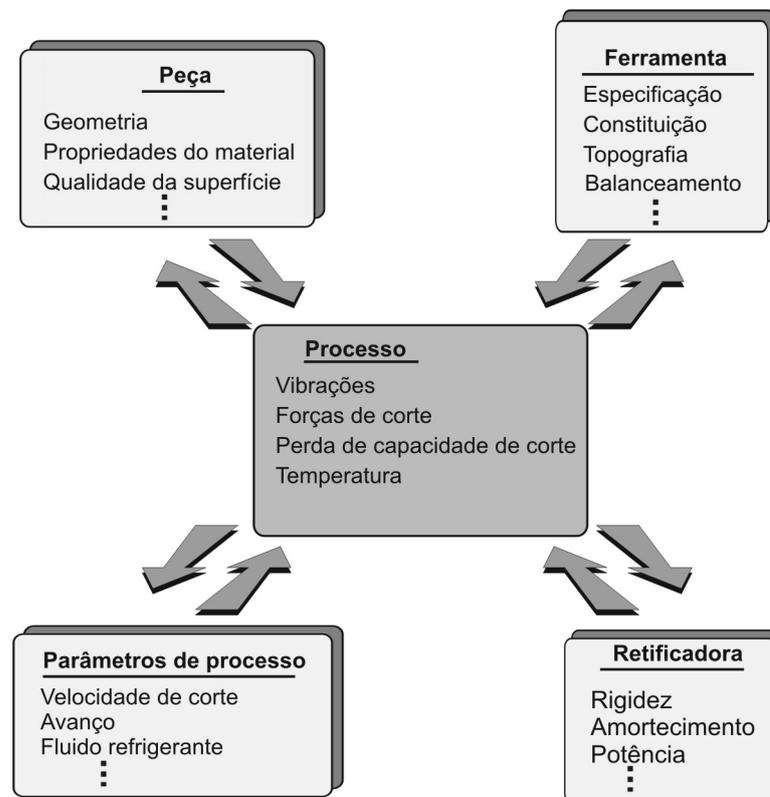


Figura 2: Elementos que influenciam a estabilidade da retificação

### 1.3 Controle de Vibrações

De modo geral, o problema do controle de vibrações em estruturas mecânicas pode ser realizada por três vias fundamentais:

- Abordagem passiva ou controle passivo: envolve fundamentalmente a utilização de elementos que aplicam forças de reação à estrutura de maneira a dissipar a energia das vibrações;
- Abordagem ativa ou controle ativo: envolve a alteração da dinâmica da estrutura através do fechamento de uma malha de controle, que envolve sensores para a medição dos níveis de vibração e atuadores que trabalham de maneira a amortecer o movimento da estrutura;
- Abordagem mista: as duas abordagens anteriores não são excludentes por natureza, de maneira que é possível atacar o problema pelas duas vias.

A primeira das três soluções predomina no atual estado da arte em máquinas-ferramentas. Ela pode ser feita já desde o projeto de novas máquinas, levando em conta os modos de vibração que podem vir a causar instabilidade no processo, como também pode ser aplicada em máquinas já existentes. Neste segundo caso o fundamento é agregar elementos na estrutura de maneira a trazer amortecimento aos modos de vibração.

A abordagem ativa tem sido foco de investigações com intensidade cada vez maior à medida que o desenvolvimento de certas áreas tem viabilizado este tipo de solução. Neste aspecto destacam-se os avanços em eletrônica, teoria de controle e engenharia de materiais. As primeiras aplicações residem na indústria aeroespacial a partir da década de 80 (HANSEN; SNYDER, 1997). Nos últimos anos é percebida uma variedade de aplicações um pouco maior, por exemplo na indústria automobilística e engenharia civil (KALINKE; GNAUERT; FEHREN, 2001; HUBER; LORENZ; SVARICEK, 2001).

Os avanços da eletrônica vêm a permitir a implementação de algoritmos de controle mais complexos e com frequências de amostragem cada vez mais altas (HANSEN; SNYDER, 1997). Paralelamente, o desenvolvimento de novos materiais permite a construção de atuadores e sensores robustos e duráveis. De fato, ocorre muita dissipação de energia térmica nos atuadores em sistemas de controle ativo de vibrações, de maneira que é importante que suas propriedades se mantenham nesta situação. A influência dos tipos de materiais normalmente utilizados, bem como de métodos de construção para sensores e atuadores é investigada por exemplo em (PREUMONT, 2002) e (PI, 2006).

Um fator importante que permite a aplicação de controle ativo de vibrações em diversas áreas é o intercâmbio de conhecimento entre algumas áreas da engenharia. O problema não pode ser resolvido integralmente através de análise estrutural ou de análise modal. Por outro lado, a escolha de métodos em teoria de controle deve ser feita à luz do conhecimento da dinâmica da estrutura. É preciso encontrar métodos de projeto de controladores com algum tipo de apelo estrutural e, principalmente, modal, de maneira a facilitar o intercâmbio conceitual entre as áreas em questão. Em (GAWRONSKY, 1998) e (INMAN, 2006) encontram-se abordagens que visam a integração de conceitos de teoria de controle, modelagem e análise estrutural.

Do ponto de vista da teoria de controle, as duas classes de vibrações que ocorrem no processo de identificação têm soluções distintas. As vibrações por excitação forçada têm uma característica previsível já que a velocidade angular do eixo-árvore é conhecida. Para este problema, é indicada neste trabalho a solução através do controle pré-alimentado, apresentado no Capítulo 4.1. Este tipo de controle utiliza

a informação prévia da causa das vibrações para que se tente realizar interferência destrutiva através dos atuadores. Os métodos geralmente utilizados para o controle pré-alimentado de vibrações têm suas origens em algoritmos de filtragem adaptativa e visam prever o comportamento vibratório da estrutura através de filtros digitais (HANSEN; SNYDER, 1997; FULLER; ELLIOTT; S.J. NELSON, 1996; ELLIOTT, 1998). As vibrações por excitação auto-induzida não são previsíveis como no caso anterior. Neste caso só é possível medir a consequência. A solução para este problema passa a ser o controle realimentado, onde o fechamento de uma malha de controle tem objetivos parecidos com os do controle passivo, ou seja, alterar propriedades dinâmicas da estrutura.

#### 1.4 Proposta e objetivos

A proposta deste trabalho é encontrar e implementar uma solução para a estabilidade do processo de retificação através da melhoria das características dinâmicas da retificadora. Especificamente, a adição de amortecimento aos modos da estrutura pode melhorar significativamente a estabilidade do processo frente a vibrações auto-induzidas.

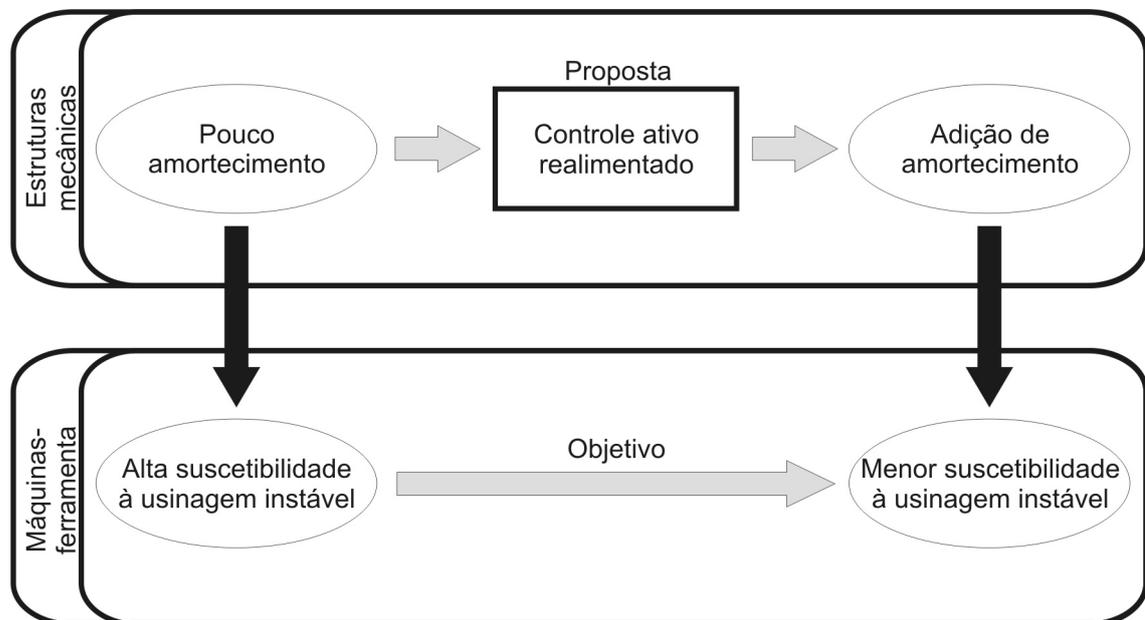


Figura 3: Objetivos e propostas

A Fig. 3 ilustra a proposta e objetivos fundamentais deste trabalho. Espera-se também encontrar uma solução aplicável a outros tipos de máquina-ferramenta ou, de modo geral, a outras estruturas cuja origem das vibrações reside em pouco amortecimento dos modos.

Em termos acadêmicos, este trabalho visa também integrar algumas áreas da engenharia como análise estrutural, teoria de controle, modelagem dinâmica, análise espectral e processos de usinagem. De fato, a falta de integração, ou até mesmo de comunicação, entre estas áreas constitui um dos fatores que dificulta a investigação de soluções através do controle ativo de vibrações.

## 1.5 Bancada de Testes

A bancada de testes utilizada está disponível para pesquisa no Instituto de Máquinas-ferramentas e Tecnologia da Produção da Universidade Técnica de Braunschweig, Alemanha (IWF - *Institut für Werkzeugmaschinen und Fertigungstechnik - Technische Universität Braunschweig*). O Capítulo 5 contextualiza este trabalho dentro das linhas de pesquisa deste instituto.

A retificadora do fabricante Blohm-Hauni, modelo HFS 9V, é apresentada na Fig. 4. Nesta máquina o eixo-árvore é horizontal e é movido verticalmente ao longo da torre através de um fuso de esferas recirculantes. O movimento no plano XZ é feito pela mesa, sobre a qual é fixada a peça. A Tabela 2 apresenta alguns parâmetros técnicos desta máquina.

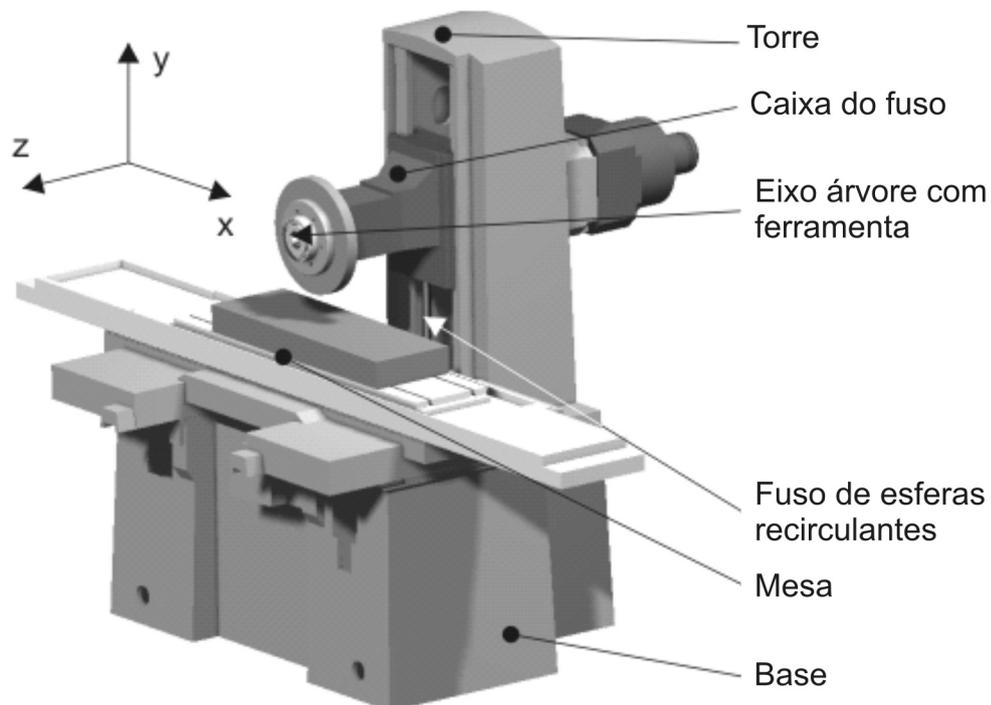


Figura 4: A retificadora utilizada neste trabalho

Potência de alimentação [kW]	11
Espaço de trabalho X × Y × Z [mm]	900×600×400
Rotação máxima [1/min]	2400
Velocidade de corte máxima [m/s]	30

Tabela 2: Freqüências das vibrações que originam marcas na peça

## 1.6 Organização Geral

O Capítulo 2 apresenta fundamentos relevantes para a análise e modelagem de estruturas mecânicas em termos de modos de vibração, com o objetivo de construir modelos que possam ser utilizados no projeto de controladores. Em seguida, o Capítulo 3 apresenta fundamentos da análise modal experimental e análise espectral.

Uma discussão sobre métodos de controle ativo de vibrações é apresentada no Capítulo 4, onde são diferenciados o controle por pré-alimentação do controle por realimentação. São apresentados os métodos de projeto utilizados posteriormente para o controle realimentado.

O Capítulo 5 contextualiza este trabalho dentro de desenvolvimentos anteriores, o que compreende a análise modal da retificadora utilizada, a definição do posicionamento dos atuadores e sensores bem como o projeto mecânico para a sua montagem na máquina. Finalmente é analisada a influência dos módulos montados sobre o comportamento dinâmico da máquina.

Os resultados obtidos experimentalmente são descritos no Capítulo 6 que compreende a análise e identificação da dinâmica dos atuadores bem como a identificação do sistema global, utilizado no projeto de controladores, cujos resultados são apresentados no Capítulo 7. Alguns dos controladores projetados são apresentados, com resultados em bancada e em processo.

O desenvolvimento deste trabalho segue uma metodologia geral apresentada no Capítulo 8. Tal metodologia é analisada e proposta como uma opção para a estruturação de projetos de controle ativo de vibrações. Neste capítulo também são apresentadas algumas conclusões relativas ao desenvolvimento do trabalho. Finalmente, conclusões mais gerais e perspectivas são apontadas no Capítulo 9. O Apêndice A apresenta fundamentos teóricos dos sistemas lineares invariantes no tempo, utilizados ao longo do trabalho. O Apêndice B apresenta os modelos utilizados neste trabalho para o projeto de controladores.

## 2 Modelagem de Estruturas Mecânicas Através de Sistemas LIT

Este capítulo apresenta uma revisão bibliográfica a respeito da modelagem de estruturas mecânicas. Especificamente concentra-se na modelagem dinâmica de estruturas descritas em termos de modos de vibração já que tem-se o objetivo de implementar controladores considerando a importância e o significado de cada modo. Além disto, este capítulo direciona a modelagem através de sistemas lineares e invariantes no tempo (LIT).

Estruturas mecânicas que obedecem a certas condições podem ter sua dinâmica descrita em termos de modos de vibração, caracterizados em termos de uma frequência de ressonância, forma modal e fator de amortecimento. Uma das condições determina que a estrutura pode ser modelada como um conjunto discreto de massas ligadas por molas sem massa (HANSEN; SNYDER, 1997). A *análise modal* é a análise da dinâmica de um sistema mecânico em termos de modos de vibração. Ela pode ser realizada, por exemplo, para auxiliar o projeto de uma estrutura. Neste trabalho, entretanto, utiliza-se a análise modal como uma ferramenta para a modelagem de estruturas mecânicas e também para a definição do posicionamento de atuadores e sensores em um sistema de controle ativo. Dentro deste contexto, são buscados modelos simples e que possuam propriedades interessantes para o projeto de um sistema de controle ativo de vibrações.

Para tanto, sistemas reais, cuja massa encontra-se continuamente distribuída no espaço, podem ser discretizados em um conjunto de massas ligadas por molas sem massa e elementos que representem o amortecimento. A análise do sistema discretizado pode ser feita utilizando as leis de Newton (equilíbrio de forças) ou métodos da mecânica analítica, como as equações de Lagrange. De qualquer maneira, o processo pressupõe a determinação de um *sistema de coordenadas* e de *parâmetros* como massas dos corpos bem como rigidez e constantes de amortecimentos de elementos que compõe o sistema total. Independentemente do método analítico, o objetivo é definir matrizes de massa, rigidez e amortecimento com respeito ao sistema de coordenadas definido.

A complexidade dos sistemas pode levar a dificuldades na modelagem baseada em leis físicas e justifica a abordagem através de métodos baseados em *elementos finitos*. Estes métodos baseiam-se na aproximação das estruturas em dois níveis. No primeiro, o sistema contínuo é discretizado em partes chamadas elementos finitos que são, em geral, bastante simples como barras, placas, ou vigas, com equações de movimento simples. Os elementos são ligados por *nós*, formando uma malha de elementos finitos. As equações de movimento de cada elemento são definidas e resolvidas, levando ao segundo nível de aproximação, onde as soluções destas equações são aproximadas por uma combinação linear de polinômios de baixa ordem de maneira que as soluções de elementos vizinhos coincidam nos nós que os unem. Estas soluções são então rearranjadas de maneira a levar a matrizes de massa e rigidez (INMAN, 2001). Analogamente à modelagem a partir de leis físicas, o objetivo é a definição de tais matrizes e neste caso o sistema de coordenadas está relacionado aos nós da malha de elementos finitos e configura um sistema de coordenadas *nodal* (GAWRONSKY, 1998).

A determinação dos parâmetros modais a partir da modelagem em coordenadas nodais é independente de como as matrizes de massa, rigidez e amortecimento são definidas. A partir daqui, é utilizada a expressão *modelo nodal* para denotar qualquer tipo de modelo em coordenadas nodais, independentemente da origem das matrizes de massa ou rigidez, ainda que na modelagem através de leis físicas (equações de movimento) não exista o conceito de nó (GAWRONSKY, 1998).

Em muitas situações práticas, entretanto, a determinação de parâmetros necessários para a modelagem através de leis físicas ou métodos de elementos finitos mostra-se complexa e exige muitas simplificações que fazem com que os modelos obtidos não correspondam à realidade de maneira satisfatória. Para estes casos faz-se necessária a realização de uma análise modal *experimental*, problema tratado na Seção 3.1. Além disto, os parâmetros modais obtidos experimentalmente podem ser utilizados para a otimização dos parâmetros nos modelos em coordenadas nodais. As constantes de amortecimento mostram-se especialmente difíceis de serem obtidas e são, em geral, estimadas com um grande nível de incerteza (HANSEN; SNYDER, 1997). Por outro lado, a abordagem experimental permite a utilização de métodos de identificação para a determinação de fatores de amortecimento modal.

Ainda que para muitos sistemas físicos a complexidade dificulte ou impossibilite a definição de parâmetros modais por vias analíticas, o estudo destes métodos permite a interpretação da influência de parâmetros como rigidez e massa nos modos de vibração de estruturas. Sistemas com apenas um grau de liberdade, *i.e.* um modo de

vibração, são analisados e ligados aos conceitos apresentados no Apêndice A para que se descreva, em seguida, sistemas com múltiplos graus de liberdade.

## 2.1 Sistemas com um grau de liberdade

Um sistema idealizado de um grau de liberdade, como o da Fig. 5, pode ser descrito como uma massa (de valor  $m$ ), que tem liberdade para mover-se apenas ao longo de uma direção, ligada a um contorno rígido através de uma mola (de rigidez  $k_m$ ) e um amortecedor, ambos sem massa. O amortecimento pode ser do tipo viscoso, histerético ou ainda viscoelástico. Este trabalho lida apenas com o amortecimento viscoso, onde assume-se que o amortecimento é responsável por uma força proporcional à velocidade da massa através de um fator  $c_m$ . Sistemas com amortecimento histerético, ou estrutural, são tratados em (EWINS, 1984) *et al.*, enquanto que a identificação de estruturas com amortecimento viscoelástico é apresentada em (ESPÍNDOLA; SILVA; LOPES, 2005).

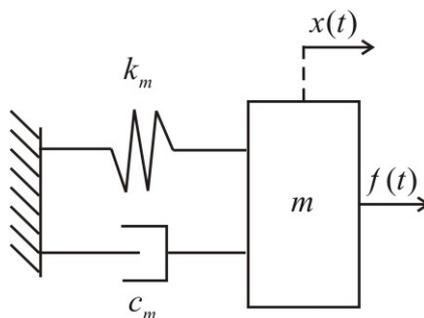


Figura 5: Sistema de um grau de liberdade

A equação de movimento para tal sistema sujeito a uma força  $f(t)$  é  $m\ddot{x}(t) = -c_m\dot{x}(t) - k_mx(t) + f(t)$ , onde  $x(t) = 0$  para  $f(t) = 0$  em regime permanente e  $x$  é positivo no sentido positivo de  $f$ . Com o intuito de modelar tal sistema como um sistema com um sinal de entrada (força  $f(t)$ ) e um sinal de saída (deslocamento  $x(t)$ ) e representá-lo através de uma função de transferência (v. Apêndice A), faz-se

$$m\ddot{x}(t) + c_m\dot{x}(t) + k_mx(t) = f(t) \quad (2.1)$$

cuja transformada de Laplace para condições iniciais nulas é

$$(ms^2 + c_ms + k_m)X(s) = F(s) \quad (2.2)$$

que leva à definição da função de transferência:

$$G(s) \triangleq \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + c_ms + k_m} = \frac{\frac{1}{m}}{s^2 + \frac{c_m}{m}s + \frac{k_m}{m}} \quad (2.3)$$

Ou seja, um sistema LIT de segunda ordem com

- frequência natural:  $\omega_n^2 = \frac{k_m}{m} \rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{k_m}{m}}$
- fator de amortecimento:  $2\xi\omega_n = \frac{c_m}{m} \rightarrow \xi = \frac{c_m}{2\sqrt{mk_m}}$
- ganho estático:  $K_s\omega_n^2 = 1/m \rightarrow K_s = \frac{1}{k_m}$

Tal sistema tem portanto um modo de vibração com a frequência natural e fator de amortecimento apresentados acima. A forma modal constitui o modo complexo decorrente do par de pólos complexos conjugados. A função de transferência, como apresentada na Eq. (2.3) é denominada *receptância*. Funções de transferência similares podem ser definidas quando a resposta do sistema não é medida em função do deslocamento  $x$ , mas sim da velocidade ou aceleração. A função de transferência que tem como saída a velocidade é denominada *mobilidade*. Através da propriedade da derivada na Transformada de Laplace tem-se que  $sX(s)$  é a transformada da velocidade  $\dot{x}(t)$ :

$$sG(s) = \frac{sX(s)}{F(s)} = \frac{s}{ms^2 + c_ms + k_m} \quad (2.4)$$

Para o caso de utilização da aceleração  $\ddot{x}$  a função de transferência é a *acelerância*:

$$s^2G(s) = \frac{s^2X(s)}{F(s)} = \frac{s^2}{ms^2 + c_ms + k_m} \quad (2.5)$$

Cada uma dessas funções de transferência define a função resposta em frequência através da substituição  $s = j\omega$ . A Tabela 3 abaixo mostra as denominações para as funções de transferência comumente utilizadas em análise de vibrações (INMAN, 2001).

Tipo de resposta	Função de Transferência	Função de Transferência Inversa
Aceleração	Acelerância	Massa aparente
Velocidade	Mobilidade	Impedância mecânica
Deslocamento	Receptância	Rigidez mecânica

Tabela 3: Tipos de função de transferência utilizadas em análise de vibrações

## 2.2 Transmissibilidade

Outra função de transferência mostra-se útil na análise de vibrações, e corresponde àquela que relaciona a transmissão do deslocamento ou força sobre um sistema vibratório até sua base e é chamada transmissibilidade. Esta função de transferência é bastante utilizada para o tratamento de isolamento de vibrações, já que permite analisar como uma parte da estrutura, por exemplo um isolador a ser projetado, age no sentido de transmitir deslocamentos ou forças entre dois sistemas (INMAN, 2001). A transmissibilidade de deslocamento consiste na função de transferência entre  $x(t)$  e  $y(t)$  na Fig. 6 à esquerda, pressupondo o sistema montado sobre uma base móvel. No caso da transmissibilidade de força relaciona-se a força  $f(t)$  que atua sobre a massa com aquela transmitida à base  $f_t(t)$ .

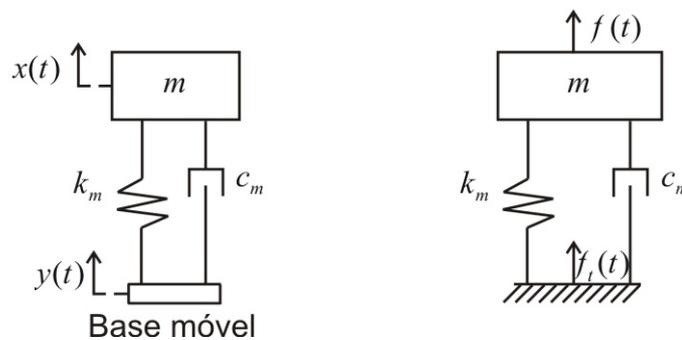


Figura 6: A transmissibilidade

Neste trabalho a transmissibilidade de força mostra-se relevante. A força transmitida é  $f_t(t) = k_m x(t) + c_m \dot{x}(t)$ , para condições iniciais nulas a transformada de Laplace é:

$$F_t(s) = (k_m + c_m s)X(s) \quad (2.6)$$

Substituindo a Eq. (2.3) na equação acima:

$$F_t(s) = (k_m + c_m s) \frac{\frac{1}{m}}{s^2 + \frac{c_m}{m}s + \frac{k_m}{m}} F(s) \quad (2.7)$$

Para o sistema da Fig. 5 e definindo  $\omega_n = \sqrt{\frac{k_m}{m}}$ ,  $\xi = \frac{c_m}{2\sqrt{mk_m}}$  e  $K_s = \frac{1}{k_m}$  a transmissibilidade é, então:

$$T(s) \triangleq \frac{F_T(s)}{F(s)} = \frac{2\xi\omega_n s + \omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (2.8)$$

que corresponde a um sistema de 2ª ordem com um zero  $z_1 = -\omega_n/2\xi$ . Este zero

adicional faz com que a fase aumente  $90^\circ$  na frequência  $\omega_z = \omega_n/2\xi$ . A Fig. 7 ilustra à esquerda a influência do fator de amortecimento no posicionamento do zero e à direita o diagrama de Bode para três sistemas com fator de amortecimento de 5, 10 e 40%.

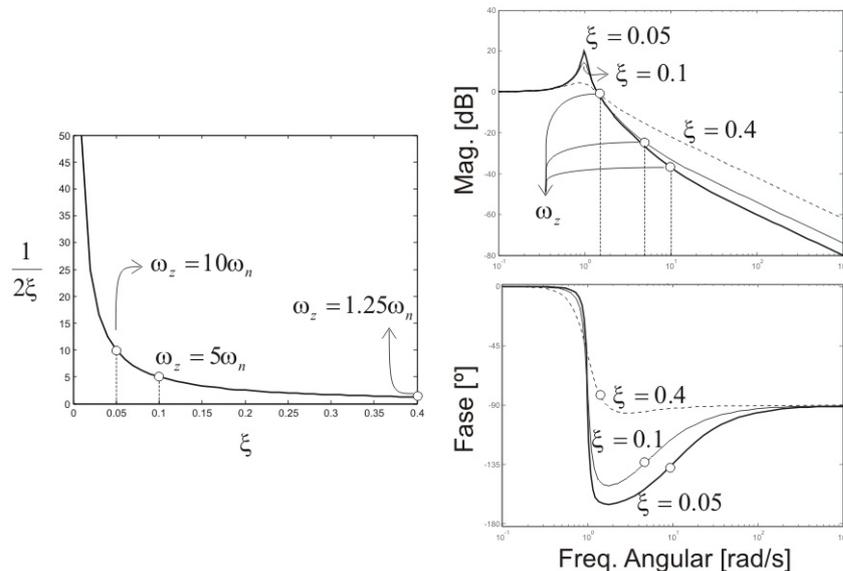


Figura 7: A transmissibilidade

### 2.3 Sistemas de múltiplos graus de liberdade

Sistemas com múltiplos graus de liberdade, como o da Fig. 8 são representados por equações diferenciais de segunda ordem análogas à Eq. (2.1). Os parâmetros de massa, rigidez e amortecimento constituem matrizes, e não escalares como no caso do sistema com apenas um modo de vibração. O sistema da Fig. 8 tem dois graus de liberdade enquanto que o sistema à direita representa uma estrutura discretizada em massas puntiformes ligadas por molas.

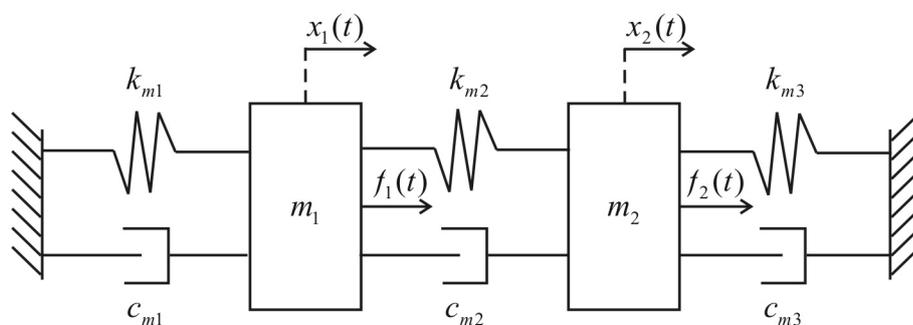


Figura 8: Um sistema com mais de um grau de liberdade

O sistema da Fig. 8 tem dois graus de liberdade, assim sua dinâmica pode ser representada através de duas equações diferenciais de segunda ordem acopladas,

que podem ser obtidas através do equacionamento do equilíbrio de forças atuantes em cada uma das massas:

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1(t) + (c_{m1} + c_{m2})\dot{x}_1(t) + (k_{m1} + k_{m2})x_1(t) - c_{m2}\dot{x}_2(t) - k_{m2}x_2(t) = f_1(t) \\ -c_{m2}\dot{x}_1(t) - k_{m2}x_1(t) + m_2\ddot{x}_2(t) + (c_{m2} + c_{m3})\dot{x}_2(t) + (k_{m2} + k_{m3})x_2(t) = f_2(t) \end{cases} \quad (2.9)$$

que podem ser rearranjadas em notação matricial

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{m1} + c_{m2} & -c_{m2} \\ -c_{m2} & c_{m1} + c_{m2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{m1} + k_{m2} & -k_{m2} \\ -k_{m2} & k_{m1} + k_{m2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Analogamente à Eq. (2.1), tem-se a equação diferencial de segunda ordem para um sistema com múltiplos graus de liberdade

$$M_0\ddot{\mathbf{q}} + C_0\dot{\mathbf{q}} + K_0\mathbf{q} = \mathbf{f}_0 \quad (2.11)$$

onde  $M_0$ ,  $C_0$  e  $K_0$  são as matrizes de massa, amortecimento e rigidez, respectivamente. Todas com dimensão  $(n_d \times n_d)$ , onde  $n_d$  é a dimensão do vetor de deslocamentos  $\mathbf{q}$ . Finalmente, o vetor de forças  $\mathbf{f}_0$  contém os sinais de forças externas aplicados ao sistema.

Do ponto de vista mecânico, a Eq. (2.11) descreve completamente a dinâmica do sistema. Entretanto, do ponto de vista da modelagem de sistemas de controle, os sinais de força não são aplicados diretamente na estrutura, mas sim através de sinais de controle aplicados em atuadores. Além disto, é possível que os vetores de forças externas não atuem exatamente na mesma direção e sentido das coordenadas escolhidas, como no caso da Fig. 5. Assim, o vetor de forças  $\mathbf{f}_0$  pode ser substituído por um vetor de entradas  $\mathbf{u}$  pré-multiplicado por uma matriz de entrada  $B_0$ , que relaciona cada elemento de  $\mathbf{u}$  com as coordenadas  $\mathbf{q}$ .

$$M_0\ddot{\mathbf{q}} + C_0\dot{\mathbf{q}} + K_0\mathbf{q} = B_0\mathbf{u} \quad (2.12)$$

Para a determinação dos modos de vibração do sistema acima considere-se primeiro a resposta livre ( $\mathbf{u} = 0$ ) para o sistema sem amortecimento ( $C_0 = 0$ )

$$M_0 \ddot{\mathbf{q}} + K_0 \mathbf{q} = 0 \quad (2.13)$$

que tem soluções na forma  $\mathbf{q} = \phi e^{j\omega t}$ , i.e.  $\ddot{\mathbf{q}} = -\omega^2 \phi e^{j\omega t}$ :

$$(K_0 - \omega^2 M_0) \phi e^{j\omega t} = \mathbf{0} \quad (2.14)$$

Como  $e^{j\omega t} \neq 0 \forall t$ , a equação acima pode ser reescrita como

$$K_0 \phi = \omega^2 M_0 \phi \quad (2.15)$$

Já que  $K_0$  e  $M_0$  são matrizes  $n_d \times n_d$ , pode-se resolver a Eq. (2.15) como um problema de autovalores<sup>1</sup> cujas soluções constituem um conjunto de  $n_d$  autovalores

$$\omega^2 : \left\{ \omega_1^2 \quad \omega_2^2 \quad \cdots \quad \omega_{n_d}^2 \right\}$$

e respectivos autovetores associados

$$\phi : \left\{ \phi_1 \quad \phi_2 \quad \cdots \quad \phi_{n_d} \right\}$$

Isto significa que a resposta livre do sistema não-amortecido, que é descrito pela Eq. (2.12), é uma combinação de oscilações harmônicas  $\phi_i e^{j\omega_i t}$  com freqüências  $\omega_i$  e a configuração espacial  $\phi_i$ , chamada forma modal, já que estes são vetores ortogonais. Como propriedade dos problemas de autovalor, os autovetores podem ser arbitrariamente normalizados. Assim, se  $\phi_i$  é um autovetor  $\alpha \phi_i$  também o é, onde  $\alpha$  é um escalar não nulo.

Com o objetivo de derivar uma descrição modal da dinâmica da Eq. (2.12), devem ser definido um vetor de coordenadas modais. Para isto, defina-se

$$\Omega \triangleq \text{diag}(\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_{n_d})$$

a matriz de freqüências naturais e

$$\Phi \triangleq \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \cdots & \phi_{n_d} \end{bmatrix}$$

a matriz de formas modais, ou matriz modal.

A matriz modal  $\Phi$  diagonaliza as matrizes de rigidez e massa  $K_0$  e  $M_0$ , tal que

<sup>1</sup>Já que  $K_0$  não é singular porque é positiva definida.

$$K_m \triangleq \Phi^T K_0 \Phi \quad \text{e} \quad M_m \triangleq \Phi^T M_0 \Phi$$

são chamadas matrizes de rigidez e massa modais, respectivamente.

Os autovetores podem ser arbitrariamente escalados, sendo uma opção conveniente a normalização pela matriz massa<sup>2</sup>, definida como aquela onde tem-se:

$$M_m = \Phi^T M_0 \Phi = I$$

Se a matriz de amortecimento  $C_0$  também pode ser diagonalizada pela matriz de formas modais, como as de massa e rigidez, tal que  $C_m = \Phi^T C_0 \Phi$ , tem-se o chamado *amortecimento proporcional*. O nome deriva do fato de que a matriz  $C_0$  é diagonalizável se é proporcional a  $M_0$  ou  $K_0$ , ou de maneira mais geral se ela pode ser decomposta em uma combinação linear de ambas, ou seja  $C_0 = \alpha_c M_0 + \beta_c K_0$ , onde  $\alpha_c$  e  $\beta_c$  são escalares arbitrários.

Agora é possível definir o vetor de coordenadas modais  $\mathbf{z}$  como (GAWRONSKY, 1998)

$$\mathbf{q} \triangleq \Phi \mathbf{z} \quad (2.16)$$

Aplicando coordenadas modais e multiplicando a Eq. (2.12) por  $\Phi^T$  pela esquerda

$$\Phi^T M_0 \Phi \ddot{\mathbf{z}} + \Phi^T C_0 \Phi \dot{\mathbf{z}} + \Phi^T K_0 \Phi \mathbf{z} = \mathbf{0} \quad (2.17)$$

Se os autovetores são normalizados pela massa ( $\Phi^T M_0 \Phi = I$ ), então

$$\ddot{\mathbf{z}} + C_m \dot{\mathbf{z}} + K_m \mathbf{z} = \mathbf{0} \quad (2.18)$$

que pode ser reescrito como

$$\ddot{\mathbf{z}} + 2\Xi\Omega\dot{\mathbf{z}} + \Omega^2\mathbf{z} = \mathbf{0} \quad (2.19)$$

onde:

- $\Omega^2 \triangleq K_m$ : matriz diagonal que contém os autovalores da Eq. (2.15);
- $\Xi \triangleq (1/2)C_m\Omega^{-1} = (1/2)K_m^{-1/2}C_m$ : matriz com os fatores de amortecimento associados a cada modo;

<sup>2</sup>Se a normalização é outra qualquer, a normalização pela massa pode ser obtida através de  $\Phi \rightarrow \Phi M_m^{-1/2}$ .

Assim, a resposta livre de cada modo  $i$  é

$$\ddot{z}_i + 2\xi_i\omega_i\dot{z}_i + \omega_i^2 z_i = 0 \quad (2.20)$$

A equação acima mostra que a resposta livre de sistemas que apresentam amortecimento proporcional corresponde a uma combinação linear de modos independentes, dada a ortogonalidade resultante do problema de autovalores. Entretanto, sistemas que apresentam algum tipo de amortecimento não proporcional apresentam, em geral, um acoplamento entre os modos. A solução deste problema é conhecida e apresentada na literatura referente a análise modal e vibrações em geral (v. por exemplo (EWINS, 1984)). Neste trabalho, o objetivo não é a análise da dinâmica da estrutura, mas sim sua modelagem. Neste contexto opta-se pela determinação experimental do fator de amortecimento associado a cada modo de vibração, o que configura amortecimento proporcional (GAWRONSKY, 1998). Assim, o fator de amortecimento associado a cada modo (como na Eq. (2.20)) pode ser utilizado para determinar as constantes de proporcionalidade da matriz de amortecimento (INMAN, 2001), como  $2\xi_i\omega_i = \alpha + \beta\omega_i^2$  ou então

$$\xi_i = \frac{\alpha}{2\omega_i} + \frac{\beta\omega_i}{2} \quad (2.21)$$

Assim é possível ajustar  $\alpha$  e  $\beta$  de maneira que  $\xi_i$  se aproxime de valores medidos experimentalmente. Portanto, a adoção de amortecimento proporcional na modelagem de tais sistemas simplifica a análise mas também se justifica por esta ser a maneira mais prática de medir ou estimar a natureza do amortecimento (GAWRONSKY, 1998).

Agora, é necessário generalizar o problema acima para o caso de  $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ . Para isto, pressupõe-se a existência de uma matriz  $\Phi$  que diagonaliza  $M_0, C_0$  e  $K_0$ . Tal matriz é aquela composta em colunas pelos autovetores que formam a solução do problema apresentado na Eq. (2.15), pressupondo amortecimento proporcional. Assim, pode-se executar o mesmo procedimento utilizado para a derivação da resposta livre em coordenadas modais:

$$\begin{aligned} \Phi^T M_0 \Phi \ddot{\mathbf{z}} + \Phi^T C_0 \Phi \dot{\mathbf{z}} + \Phi^T K_0 \Phi \mathbf{z} &= \Phi^T B_0 \mathbf{u} \\ \ddot{\mathbf{z}} + C_m \dot{\mathbf{z}} + K_m \mathbf{z} &= \Phi^T B_0 \mathbf{u} \\ \ddot{\mathbf{z}} + 2\Xi \Omega \dot{\mathbf{z}} + \Omega^2 \mathbf{z} &= B_m \mathbf{u} \end{aligned} \quad (2.22)$$

onde  $B_m = \Phi^T B_0$  é a matriz de entrada em coordenadas modais, ou seja, representa a contribuição de cada um dos termos do vetor de entrada para modo  $i$ , cuja dinâmica é

$$\ddot{z}_i + 2\xi_i\omega_i\dot{z}_i + \omega_i^2 z_i = B_{mi}\mathbf{u} \quad (2.23)$$

onde  $B_{mi}$  é a  $i$ -ésima linha de  $B_m$ .

Caso as matrizes de massa, amortecimento e rigidez sejam obtidas através de métodos baseados em elementos finitos é provável que  $n_d$  seja grande o bastante para que nem todas as soluções sejam confiáveis. Considera-se que tanto métodos analíticos como experimentais justificam-se para a identificação dos modos mais baixos (os primeiros 20 ou 30 modos segundo (HANSEN; SNYDER, 1997)). Em geral, modos mais altos têm um grau de incerteza maior de maneira que utilizam-se somente as primeiras  $n_m$  soluções obtidas. Além disto, modelos de ordem excessivamente alta não mostram-se práticos para a simulação da dinâmica da estrutura e também para o projeto de controladores. Na prática, existe um conjunto reduzido de modos que dominam a dinâmica do sistema e justificam sua modelagem (GAWRONSKY, 1998). A Seção 2.4.2 apresenta o método do truncamento balanceado para a redução de modelos no espaço de estados, como os apresentados no Apêndice A.

## 2.4 Modelos Modais no Espaço de Estados

A modelagem de estruturas mecânicas como desenvolvida acima, através de equações diferenciais de segunda ordem matriciais, apresenta algumas propriedades interessantes para a análise da dinâmica destas estruturas. Entretanto, do ponto de vista do desenvolvimento de sistemas de controle ativo, modelos baseados em equações de segunda ordem mostram-se inadequados. De fato, métodos de controle utilizam frequentemente modelos no espaço de estados ou funções de transferência, de modo que a utilização de alguma dessas formas de representação amplia as possibilidades de métodos de controle disponíveis. Esta seção apresenta a derivação de modelos modais no espaço de estados, mais adequados para sistemas com múltiplas entradas e saídas (v. Apêndice A). Aqui supõe-se que os autovetores são normalizados pela matriz de massa, *i.e.*  $\Phi^T M_0 \Phi = I$ .

A derivação de uma representação no espaço de estados pressupõe a determinação de um vetor de estados e de um vetor de saídas. Na prática é possível que a saída seja dada pela medição de deslocamento, velocidade ou aceleração em determinados pontos da estrutura. No caso da medição de deslocamento tem-se

$\mathbf{y} = C_y \mathbf{q}$ , onde a matriz  $C_y$  seleciona quais termos de  $\mathbf{q}$  são medidos. Analogamente, as medições de velocidade e aceleração levam a  $\mathbf{y} = C_y \dot{\mathbf{q}}$  e  $\mathbf{y} = C_y \ddot{\mathbf{q}}$ , respectivamente. Uma possível escolha para o vetor de estados é  $\mathbf{x} = [\mathbf{z} \ \dot{\mathbf{z}}]^T$  e a partir da Eq. (2.22) ( $\ddot{\mathbf{z}} + 2\Xi\Omega\dot{\mathbf{z}} + \Omega^2\mathbf{z} = B_m\mathbf{u}$ ) obtém-se a equação de estados:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{z}} \\ \ddot{\mathbf{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I_{n_m} \\ -\Omega^2 & -2\Xi\Omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ \dot{\mathbf{z}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ B_m \end{bmatrix} \mathbf{u} \equiv \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u} \quad (2.24)$$

As  $n_m$  equações de segunda ordem passam então a ser representadas através de um sistema de ordem  $2n_m$ , que no espaço de estados significa  $2n_m$  equações de primeira ordem acopladas. Para o caso de medição de deslocamento tem-se a equação de saída

$$\mathbf{y} = C_y \mathbf{q} = C_y \Phi \mathbf{z} = C_m \mathbf{z} = \begin{bmatrix} C_m & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ \dot{\mathbf{z}} \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

onde  $C_m = C_y \Phi$ . Analogamente, a medição de velocidades

$$\mathbf{y} = C_y \dot{\mathbf{q}} = C_y \Phi \dot{\mathbf{z}} = C_m \dot{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} 0 & C_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ \dot{\mathbf{z}} \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

O caso da medição de acelerações traz uma matriz de transmissão direta não nula. A partir da Eq. (2.22), a segunda derivada do vetor de coordenadas modais pode ser descrito como

$$\ddot{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} -\Omega^2 & -2\Xi\Omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ \dot{\mathbf{z}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_m \end{bmatrix} \mathbf{u} \quad (2.27)$$

Assim, a equação de saída passa a ser

$$\mathbf{y} = C_y \ddot{\mathbf{q}} = C_m \ddot{\mathbf{z}} = C_m \left[ \begin{bmatrix} -\Omega^2 & -2\Xi\Omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ \dot{\mathbf{z}} \end{bmatrix} + B_m \mathbf{u} \right] \quad (2.28)$$

$$\mathbf{y} = C_m \begin{bmatrix} -\Omega^2 & -2\Xi\Omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ \dot{\mathbf{z}} \end{bmatrix} + C_m B_m \mathbf{u} \equiv \mathbf{y} = C\mathbf{x} + D\mathbf{u} \quad (2.29)$$

levando então a uma matriz de saída  $C_m[-\Omega^2 \ -2\Xi\Omega]$  e uma matriz de transmissão direta  $C_m B_m$ .

### 2.4.1 Realizações Modais

Embora a derivação acima seja baseada em um vetor de estados em coordenadas modais, ela não pode ser considerada uma realização modal (GAWRONSKY, 1998; KWAKERNAAK; SIVAN, 1991). De fato, a matriz de estados

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I_{n_m} \\ -\Omega^2 & -2\Xi\Omega \end{bmatrix}$$

apresenta um acoplamento entre os estados, o que contradiz o conceito de modo de um sistema linear. Uma realização modal caracteriza-se por uma matriz de estados *bloco diagonal*, como aquela obtida quando da interconexão de sistemas em paralelo (v. Apêndice A).

A partir da Eq. (2.23), que define a dinâmica do  $i$ -ésimo modo, defina-se o vetor de estados para este modo como  $\mathbf{x}_i = [z_i \ \dot{z}_i]^T$ :

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_i \\ \ddot{z}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_i^2 & -2\xi_i\omega_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_i \\ \dot{z}_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ B_{mi} \end{bmatrix} \mathbf{u} \equiv \dot{\mathbf{x}}_i = A_i\mathbf{x}_i + B_i\mathbf{u} \quad (2.30)$$

A utilização de sinais de deslocamento como saída leva a

$$\mathbf{y}_i = \begin{bmatrix} C_{mi} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_i = C_i\mathbf{x}_i,$$

onde  $C_{mi}$  é  $i$ -ésima coluna de  $C_m$ . A medição de velocidade leva a

$$C_i = \begin{bmatrix} 0 & C_{mi} \end{bmatrix}$$

Finalmente, obtém-se  $C_i = C_{mi} \begin{bmatrix} -\omega_i^2 & -2\xi_i\omega_i \end{bmatrix}$  e  $C_i = C_{mi}B_{mi}$  quando a saída compreende sinais de aceleração. Esta realização coincide com aquela apresentada nas equações (2.24) a (2.29) quando existe apenas um modo de vibração.

Assim, o  $i$ -ésimo modo pode ser representado pela quádrupla  $(A_i, B_i, C_i, D_i)$  com respeito a  $x_i$ . Definindo-se o vetor de estados para o sistema completo como  $x = \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_{n_m} \end{bmatrix}^T$ , tem-se

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{n_m} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_{n_m} \end{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & \cdots & C_{n_m} \end{bmatrix} \mathbf{x} + D\mathbf{u} \end{cases} \quad (2.31)$$

onde  $D$  é a soma de todos  $D_i$ .

A realização acima é utilizada em (HANSEN; SNYDER, 1997). Neste trabalho, entretanto, a sua utilização levou a algumas dificuldades numéricas porque a matriz em geral não é muito bem condicionada. De fato, para modos de frequência mais alta o valor de  $\omega_i^2$  torna-se muito maior do que os valores 1 e 0 da primeira linha. Na busca por outros tipos de realização modal pode ser utilizada a transformação de similaridade

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\xi_i\omega_i & \omega_i \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

que quando aplicada no sistema representado pelas Eqs. (2.31) fornece blocos  $A_i$ , na forma

$$A_i = \begin{bmatrix} -\xi_i\omega_i & \omega_i \\ -\omega_i & \xi_i\omega_i \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

Nesta forma o vetor de estados é definido como  $\mathbf{x}_i = \begin{bmatrix} z_i & (\xi_i z_i + \dot{z}_i/\omega_i) \end{bmatrix}^T$ . Apesar de levar a um significado menos intuitivo aos estados, esta forma apresenta a vantagem de evitar o fator  $\omega_i^2$ , o que pode evitar problemas numéricos quando frequências naturais mais altas são modeladas. Além disto, o termo  $(\xi_i z_i + \dot{z}_i/\omega_i)$  é aproximadamente igual a  $\dot{z}_i/\omega_i$  para sistemas com pouco amortecimento. Em (GAWRONSKY, 1998) é apresentado um algoritmo que transforma qualquer realização  $(A, B, C, D)$  em uma bloco-diagonal com blocos na forma da Eq. (2.33), o que mostra-se como outra vantagem deste tipo de realização já que assim modelos obtidos de uma forma qualquer, por exemplo experimentalmente, podem ser convertidos numa realização modal. Neste caso, pólos reais não compõem blocos 2x2 mas sim escalares correspondentes ao valor do pólo. No caso de sistemas que tenham apenas pólos reais esta realização coincide com a forma canônica de Jordan.

A Tabela 4 apresenta quatro tipos de representação bloco diagonal, com as respectivas definições para o vetor de estados (GAWRONSKY, 1998). O tipo #4 consiste

na forma canônica de Jordan.

Tipo	$A_i$	$\mathbf{x}_i$
#1	$\begin{bmatrix} 0 & \omega_i \\ -\omega_i & -2\xi_i\omega_i \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} z_i \\ \dot{z}_i/\omega_i \end{bmatrix}$
#2	$\begin{bmatrix} -\xi_i\omega_i & \omega_i \\ -\omega_i & -\xi_i\omega_i \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} z_i \\ \xi_i z_i + \dot{z}_i/\omega_i \end{bmatrix}$
#3	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_i^2 & -2\xi_i\omega_i \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} z_i \\ \dot{z}_i \end{bmatrix}$
#4	$\begin{bmatrix} -\xi_i\omega_i + j\omega_i\sqrt{1-\xi_i^2} & 0 \\ 0 & -\xi_i\omega_i - j\omega_i\sqrt{1-\xi_i^2} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} z_i - j(\xi_i z_i + \dot{z}_i/\omega_i) \\ z_i + j(\xi_i z_i + \dot{z}_i/\omega_i) \end{bmatrix}$

Tabela 4: Quatro possibilidades para representações bloco diagonais

Finalmente, seja  $\mathbf{G}_i(s) = [C_i(sI - A_i)^{-1}B_i + D_i]$  a função de transferência associada à realização  $(A_i, B_i, C_i, D_i)$  que modela o  $i$ -ésimo modo. Devido à natureza bloco diagonal da matriz de estados do sistema completo, sua função de transferência

$$\mathbf{G}(s) = [C(sI - A)^{-1}B + D]$$

é a soma das funções de transferência de cada modo

$$\mathbf{G}(s) = \sum_{i=1}^{n_m} \mathbf{G}_i(s) \quad (2.34)$$

Esta propriedade constitui uma generalização das relações apresentadas no Apêndice A (Seção A.5.2) para  $n_m$  sistemas associados em paralelo.

### 2.4.2 Redução de Modelos via Realização Balanceada

É possível que os modelos obtidos tenham um número de estados excessivamente elevado, tornando-os não práticos para o projeto de controladores ou para a simulação da dinâmica do sistema modelado. Modelos de ordem elevada podem também levar a problemas numéricos na simulação devido a pólos e zeros em altas frequências. É também possível que modelos de ordem elevada não sejam controláveis ou observáveis ainda que os estados que dominam a dinâmica do sistema sejam controláveis e observáveis. Nestes casos é possível realizar uma redução da ordem do modelo sem que se altere significativamente seu comportamento dentro da faixa de frequência onde o sistema deve operar. De qualquer maneira, a redução do modelo deve ser feita à luz do conhecimento do comportamento do sistema real, ou seja, dos modos de vibração dominantes.

Além disto, técnicas de redução de modelos podem ser aplicadas para a redução

da ordem de controladores, levando a controladores com desempenho parecido e ordem mais baixa, o que implica em redução de custos de implementação.

Na Seção A.6.1 é definido o gramiano de controlabilidade  $W_c$ , que dá a relação de acoplamento entre os estados e entradas (BURL, 1999). De fato, o gramiano de controlabilidade pode ser interpretado como a matriz de covariância dos estados quando o sistema é sujeito a uma entrada do tipo ruído branco<sup>3</sup>, *i.e.*  $W_c = E(\mathbf{x}\mathbf{x}^T)$  (GAWRONSKY, 1998). Analogamente, o gramiano de observabilidade  $W_o$  revela o acoplamento entre os estados e saídas. É razoável assumir que estados fracamente acoplados com entradas e saídas podem ser retirados dos modelos sem maiores diferenças no comportamento do sistema. Infelizmente, é possível que estados sejam bastante acoplados a entradas e pouco acoplados a saídas, ou o contrário. Para contornar este risco, a realização balanceada é definida como aquela onde os gramianos de controlabilidade e observabilidade são iguais e diagonais. Os estados de tal realização são igualmente acoplados às entradas e às saídas.

### 2.4.2.1 Realização Balanceada

Os gramianos de controlabilidade e observabilidade não são invariantes quanto a transformações de similaridade como da Eq. (A.5). Seja então o novo vetor de estados  $\mathbf{x}_n$  tal que  $\mathbf{x} = T\mathbf{x}_n$  ao qual se associa a realização  $(T^{-1}AT, T^{-1}B, CT, D)$ , com o gramiano de controlabilidade igual a  $T^{-1}W_cT^{-T}$ . Assim, a equação de Lyapunov (Eq. (A.32)) que define  $W_c$  torna-se

$$\begin{aligned} (T^{-1}AT)(T^{-1}W_cT^{-T}) + (T^{-1}W_cT^{-T})(T^{-1}AT)^T + (T^{-1}B)(T^{-1}B)^T &= \mathbf{0} \\ T^{-1}(AW_c + W_cA^T + BB^T)T^{-T} &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (2.35)$$

A equação acima pode ser pré-multiplicada por  $T$  e pós-multiplicada pela sua transposta, levando à Eq. (A.32). Assim, o novo gramiano de controlabilidade continua obedecendo à equação de Lyapunov. Analogamente, a transformação de similaridade leva ao novo gramiano de observabilidade  $T^TW_oT$ . A realização balanceada leva a

<sup>3</sup>A excitação através de ruído branco significa que o sistema é excitado igualmente em todos os níveis de frequência.

$$W_c = W_o = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_n \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

Onde os elementos da diagonal  $\sigma_i$  constituem os valores singulares dos dois gramianos e são ordenados do maior para o menor. Estes são também chamados de valores singulares de Hankel para o sistema (GAWRONSKY, 1998).

A realização balanceada é obtida, então, através da utilização da transformação  $T$  calculada como (BURL, 1999):

1. Aplicar a decomposição de Cholesky para o gramiano de controlabilidade original:

$$W_c = R^T R$$

Assumindo que o sistema encontra-se em uma realização mínima.

2. Aplicar a decomposição em valores singulares na matriz  $RW_oR^T$ :

$$RW_oR^T = U\Sigma^2U^T$$

onde  $\Sigma^2$  é a matriz de valores singulares e  $U$  uma matriz ortogonal unitária. Note que os vetores singulares pela esquerda e direita são iguais já que  $RW_oR^T$  é simétrica e real.

3. Calcular a matriz de transformação

$$T = R^T U \Sigma^{-1/2}$$

A prova relativa ao algoritmo acima é apresentada inicialmente em (MOORE, 1981) e também descrita em (ZHOU; DOYLE, 1998) e (BURL, 1999). Uma realização balanceada pode, então, ser calculada para um sistema estável (assim os gramianos podem ser calculados através de equações de Lyapunov) e com realização mínima.

### 2.4.2.2 Truncamento Balanceado

Na realização mínima, os valores singulares que compõe a diagonal dos gramianos revelam o acoplamento dos respectivos estados com as entradas e saídas. O

truncamento balanceado consiste em eliminar todos os estados relacionados a valores singulares de Hankel abaixo de um determinado valor  $\sigma_m$ . Por exemplo, para uma realização balanceada:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} + D\mathbf{u}(t) \end{cases} \quad (2.37)$$

com valores singulares de Hankel:

$$W_c = W_o = \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m & | & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & | & \sigma_{m+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & \sigma_n \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

de maneira que  $\mathbf{x}_1$  tem dimensão  $m$  e  $\begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 \end{bmatrix}^T$  tem dimensão  $n$ , o sistema reduzido é, então:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_1 = A_{11}\mathbf{x}_1 + B_1\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = C_1\mathbf{x}_1 + D\mathbf{u} \end{cases} \quad (2.39)$$

Este sistema preserva aqueles estados com alto valor singular de Hankel, ou seja, mais acoplados a entrada-saída.

### 2.4.3 Controlabilidade e Observabilidade em Modelos Modais

Do ponto de vista do projeto de sistemas de controle ativo de vibrações, a controlabilidade significa que os atuadores podem excitar todos os modos de interesse. Analogamente, a observabilidade significa que os sensores montados são suficientes para detectar o movimento de todos estes modos. Esta seção analisa estas duas propriedades para modelos modais, como os desenvolvidos na Seção 2.4, ou seja, sistemas com fraco acoplamento entre os modos e que possuem a propriedade apontada na Eq. (2.34). Assumindo pouco amortecimento, *i.e.*  $\xi_i \ll 1 \forall i = 1, \dots, n_m$  as realizações modais e balanceadas estão intimamente relacionadas. De fato, os gramínicos para realizações modais são diagonal dominantes (GAWRONSKY, 1998):

$$\begin{aligned}
 W_c &\cong \text{diag}(w_{ci}I_2) & w_{ci} &= \frac{\|B_i\|_2^2}{4\xi_i\omega_i} > 0 & i &= 1, \dots, n_m \\
 W_o &\cong \text{diag}(w_{oi}I_2) & w_{oi} &= \frac{\|C_i\|_2^2}{4\xi_i\omega_i} > 0 & i &= 1, \dots, n_m
 \end{aligned} \tag{2.40}$$

Os perfis das matrizes  $A$  e dos gramianianos para sistemas em coordenadas modais é representado na Fig. 9. O gramianiano pode ser interpretado como a matriz de covariância dos estados  $W_c = E(\mathbf{x}\mathbf{x}^T)$  quando o sistema é sujeito a entradas do tipo ruído branco. Através deste ponto de vista, a dominância diagonal do gramianiano mostra que os modos respondem de maneira predominantemente independente, o que reflete a ortogonalidade dos modos.

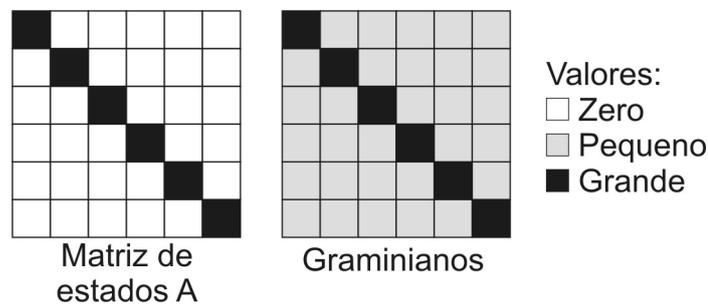


Figura 9: Perfis dos blocos das matrizes  $A$  e dos gramianianos para modelos modais

A ortogonalidade referida acima é obtida na realização balanceada, onde os gramianianos são bloco diagonais por definição. Neste caso, para sistemas com pouco amortecimento a matriz de estados  $A$  é, então, diagonal dominante, como ilustrado na Fig. 10. Neste caso, os blocos  $A_i$  aproximam-se do Tipo #2 da Tabela 2.4.3.

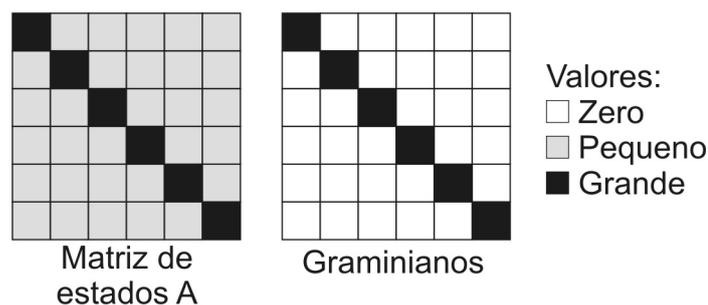


Figura 10: Perfis dos blocos das matrizes  $A$  e dos gramianianos para a realização balanceada

A Eq. (2.40) mostra que, para realizações modais, o gramianiano de controlabilidade do  $i$ -ésimo modo é inversamente proporcional ao seu fator de amortecimento e frequência natural. Assim, quanto menor  $\xi$  ou  $\omega_i$  maior é o grau de controlabilidade do modo, ou seja, menores esforços de controle são necessários para excitá-lo. Analogamente, modos com baixo amortecimento e frequência natural são mais facilmente observados.

Os termos  $\|B_i\|_2^2$  e  $\|C_i\|_2^2$  estão fortemente relacionados com as formas modais. De fato, se os sinais de entrada do sistema correspondem a forças puntiformes tem-se  $B_0$  (da Eq. (2.12)) composto apenas por zeros e uns, o que leva a  $B_{mi}$  das equações (2.23) e (2.30) como  $B_{mi} = \begin{bmatrix} \phi_1(\mathbf{c}_1) & \phi_1(\mathbf{c}_2) & \cdots & \phi_1(\mathbf{c}_{nc}) \end{bmatrix}$  onde  $\phi_i(\mathbf{r}_{cj})$  representa o valor da forma modal  $i$  no ponto onde a força  $j$  atua. Como apresentado na Seção 2.4, as matrizes de entrada e saída para o  $i$ -ésimo modo são construídas em função de  $B_{mi}$  e  $C_{mi}$  de maneira que  $\|B_i\|_2^2$  e  $\|C_i\|_2^2$  são mais altos quanto maiores forem os valores da forma de vibração  $\phi_i$  no pontos onde atuam forças e onde são montados sensores para realimentação. A formulação exata para  $B_i$  e  $C_i$  depende de qual tipo de realização modal é utilizada. Além disto, é possível que as entradas para o modelo construído não sejam exatamente forças, mas sim sinais de controle que são convertidos em forças através dos atuadores que podem ter algum comportamento dinâmico considerável.

De qualquer maneira o posicionamento de atuadores e sensores influencia a controlabilidade e observabilidade dos modos. As propriedades apontadas acima justificam a noção intuitiva de que a montagem de atuadores e sensores devem ser feitas de maneira a evitar nós e a priorizar regiões onde as formas modais têm amplitude máxima. Para estruturas com um alto número de modos, atuadores e sensores, técnicas de otimização mostram-se interessantes e são descritas em (GAWRONSKY, 1998) e (HANSEN; SNYDER, 1997). Por outro lado, para aquelas como a tratada neste trabalho, as particularidades construtivas acabam por restringir técnicas mais sofisticadas de otimização.

Este capítulo apresentou os fundamentos da modelagem de estruturas mecânicas sujeitas a vibrações, a partir dos modelos estruturais que derivam de equações diferenciais de segunda ordem até a modelagem utilizando sistemas lineares invariantes no tempo. Especificamente é dada ênfase à modelagem através da representação no espaço de estados, adequada a problemas multivariáveis, e à utilização de realizações modais. Este tipo de realização traz um significado físico/estrutural para modelos que podem ser usados para o projeto de controladores.

Neste trabalho, os modelos não são obtidos analiticamente, mas sim por vias experimentais. De fato, a modelagem analítica mostra-se um tanto complexa para determinados sistemas enquanto que a modelagem através de elementos finitos implica na estimação de muitos parâmetros, de maneira que os modelos podem perder confiabilidade e acabam exigindo obrigatoriamente ensaios experimentais para a validação. O Capítulo 3 mostra alguns fundamentos da análise modal experimental e da análise espectral, utilizados neste trabalho para auxiliar na identificação dos sistemas.

### **3 Análise Modal Experimental e Análise Espectral**

Este capítulo apresenta elementos básicos da análise modal experimental e análise espectral muito utilizados no desenvolvimento deste trabalho. De fato, os elementos apresentados neste capítulo não constituem abordagens originais ou avançadas nestas áreas mas justifica-se na natureza interdisciplinar deste trabalho.

A análise modal experimental é neste trabalho uma das ferramentas fundamentais para a análise do comportamento vibratório da estrutura da retificadora utilizada e da influência da montagem dos atuadores sobre ela. A análise espectral é utilizada para o tratamento de dados adquiridos no domínio do tempo de maneira a transformá-los no domínio da frequência. Este tipo de tratamento cumpre alguns papéis fundamentais que vêm a facilitar o emprego de algoritmos de identificação. Estes papéis são descritos no Capítulo 6.

#### **3.1 Análise Modal Experimental**

A análise modal experimental é um conjunto de métodos experimentais e de técnicas de identificação aplicados em sistemas com pouco amortecimento. Tem como objetivo determinar os parâmetros modais (frequência natural, fator de amortecimento e forma modal) a partir de funções resposta em frequência (como as da Tabela 3) obtidas experimentalmente.

Testes experimentais de vibração visam a determinação do comportamento de uma estrutura quando sujeita a certos níveis de vibração. O interesse em tais parâmetros pode também estar relacionado à manutenção de equipamentos. De fato, mudanças nas frequências naturais de uma estrutura podem indicar a necessidade de manutenção ou de algum tipo de supervisão (INMAN, 2001). Entretanto, também é possível utilizar este tipo de metodologia para a validação de modelos obtidos analiticamente ou através de elementos finitos. Portanto, dados obtidos através de uma análise modal experimental podem ser aplicados na modelagem de estruturas. De fato, a análise modal experimental pode prover uma idéia razoável de como os modos

de uma estrutura se apresentam e pode ajudar na determinação do posicionamento de atuadores e sensores.

Na Eq. (2.22), se o vetor de entradas contém exatamente forças com direção e sentido iguais às utilizadas nas coordenadas escolhidas para  $\mathbf{q}$ , *i.e.*  $B_0$  é composto apenas por zeros e uns, a matriz  $B_m$  tem uma forma especial dada por (HANSEN; SNYDER, 1997):

$$B_m = \begin{bmatrix} \phi_1(\mathbf{c}_1) & \phi_1(\mathbf{c}_2) & \cdots & \phi_1(\mathbf{c}_{nc}) \\ \phi_2(\mathbf{c}_1) & \phi_2(\mathbf{c}_2) & \cdots & \phi_2(\mathbf{c}_{nc}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{n_m}(\mathbf{c}_1) & \phi_{n_m}(\mathbf{c}_2) & \cdots & \phi_{n_m}(\mathbf{c}_{nc}) \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

onde  $\phi_i(\mathbf{c}_j)$  representa o valor da forma modal  $i$  no ponto onde a força  $j$  (pressupondo formas modais normalizadas pela massa) atua e  $n_m$  o número de modos modelados. A análise modal experimental pode levar à identificação de um conjunto de modos de vibração com respectivas frequências naturais  $\omega_i$ , fatores de amortecimento  $\xi_i$  e formas modais  $\phi_i$ . Portanto, pode-se derivar modelos de segunda ordem como da Eq. (2.22) a partir de dados obtidos experimentalmente, bem como modelos modais no espaço de estados como os descritos na Seção 2.4.

Alguns pressupostos são necessários quando da execução de uma análise modal experimental:

- O sistema é analisado como um conjunto finito de massas ligadas por molas sem massa;
- O sistema é linear ou está sujeito a níveis de excitação para os quais seu comportamento é assumido como linear;
- A dinâmica do sistema não varia com o tempo e nem com condições ambientais, tais como a temperatura;
- A lei da reciprocidade de Maxwell aplica-se à estrutura. Esta lei, que é consequência da linearidade, determina que “o deslocamento na posição A devido a uma força unitária aplicada na posição B é igual àquele obtido em B quando da aplicação de uma força unitária em A”(HANSEN; SNYDER, 1997).

De fato, estes quatro pressupostos são consequência do sistema a ser identificado ser linear e invariante no tempo. Além disto, como este procedimento visa

analisar estruturas que apresentam comportamento vibratório, assume-se um baixo valor para o fator de amortecimento.

O procedimento completo da análise modal experimental compreende basicamente três passos:

1. preparação da estrutura;
2. aquisição das funções de resposta em frequência;
3. identificação dos parâmetros modais.

A preparação da estrutura compreende a montagem de instrumentos para a excitação e medição da resposta da estrutura. A excitação da estrutura deve ser feita por meio de forças que excitam modos de interesse, o que compreende a direção da força, sua intensidade e a sua distribuição no domínio da frequência. A fixação dos instrumentos para a excitação deve interferir minimamente na dinâmica da estrutura, ainda que compreenda a montagem de peças externas que possibilitem a fixação. A maioria dos métodos de identificação de parâmetros modais utilizados posteriormente pressupõe a medição da excitação, de maneira que devem ser montados transdutores para a medição da excitação e da resposta. A resposta da estrutura, por sua vez, compreende a medição de deslocamentos, velocidades ou acelerações em pontos e direções de interesse. É importante isolar a estrutura de outras que possuam modos de vibração, de maneira que os modos identificados correspondam apenas àqueles da estrutura em questão.

O segundo passo corresponde à aquisição dos sinais de excitação e resposta e o cálculo da função resposta em frequência (FRF). A transformada rápida de Fourier, referida usualmente como FFT (*Fast Fourier Transform*), consiste em um algoritmo que otimiza a transformada discreta de Fourier quanto ao tempo de processamento. Assim, os sinais dos transdutores são “digitalizados”, ou seja, amostrados no tempo e quantizados em amplitude, através de conversores analógico-digitais (AD), seus espectros em frequência são calculados através da transformada rápida de Fourier e são utilizados para o cálculo da função resposta em frequência. A Seção 3.2 trata deste procedimento levando em conta medições contaminadas por ruído. A Fig. 11 apresenta o esquema básico para a aquisição das FRF. Este procedimento é usualmente feito por instrumentos conhecidos como analisadores de Fourier, pelo fato deles terem sido desenvolvidos após a descoberta da transformada rápida de Fourier.

O terceiro passo consiste na identificação de frequências naturais, fatores de amortecimento e formas modais. Os dois primeiros tipos de parâmetro podem ser

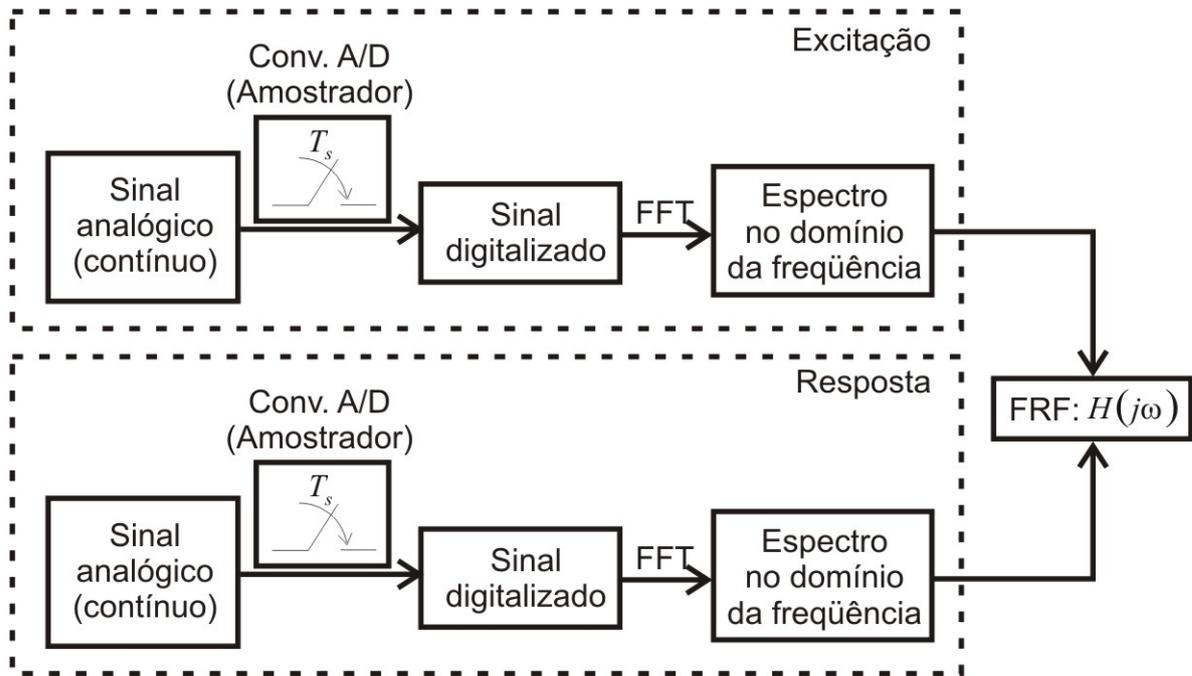


Figura 11: Esquema básico para a determinação da FRF experimentalmente

identificados a partir de uma FRF simples mas as formas modais só podem ser identificadas se a estrutura for excitada em vários pontos ou a resposta medida em vários pontos. A Fig. 12 ilustra a determinação das formas modais a partir da parte imaginária das FRF obtidas através da medição da resposta nos pontos indicados quando da aplicação de uma força na extremidade da viga.

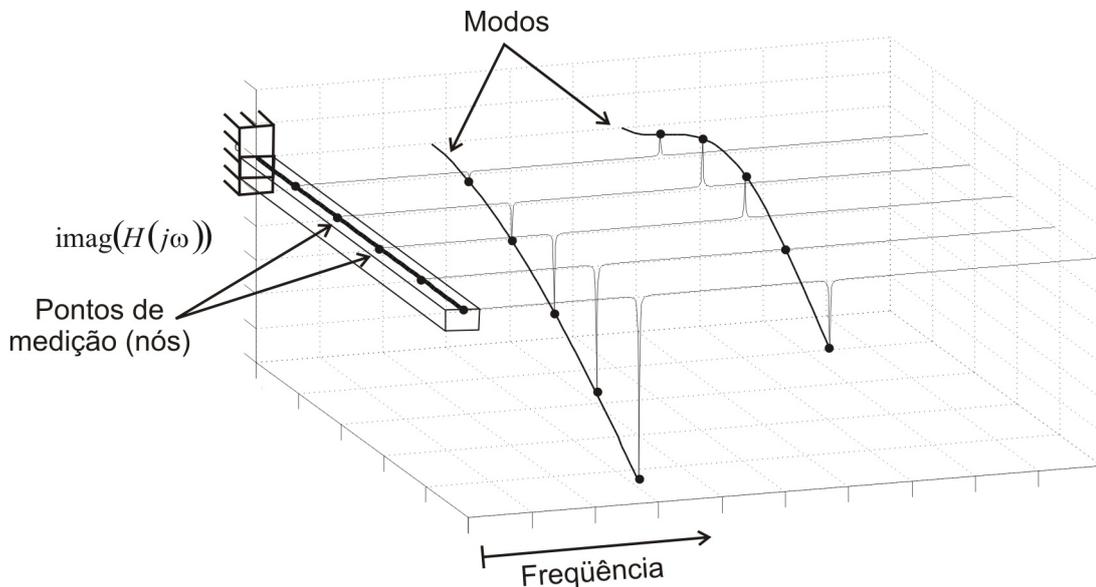


Figura 12: A utilização da parte imaginária da FRF para a determinação das formas modais

Muitos métodos para a identificação de parâmetros modais têm sido desenvolvidos nos últimos anos e estão disponíveis, em geral, como partes de pacotes ou sistemas comerciais. De maneira que usualmente o sistema disponível para uma apli-

cação determina quais métodos podem ser utilizados com mais praticidade.

Os instrumentos necessários para a realização de uma análise modal experimental compreendem elementos para (Fig. 13) a excitação da estrutura, medição da excitação e resposta, condicionamento de sinais (CS na Fig. 13) e, finalmente, a análise modal em si, ou seja, a identificação dos modos de vibração.

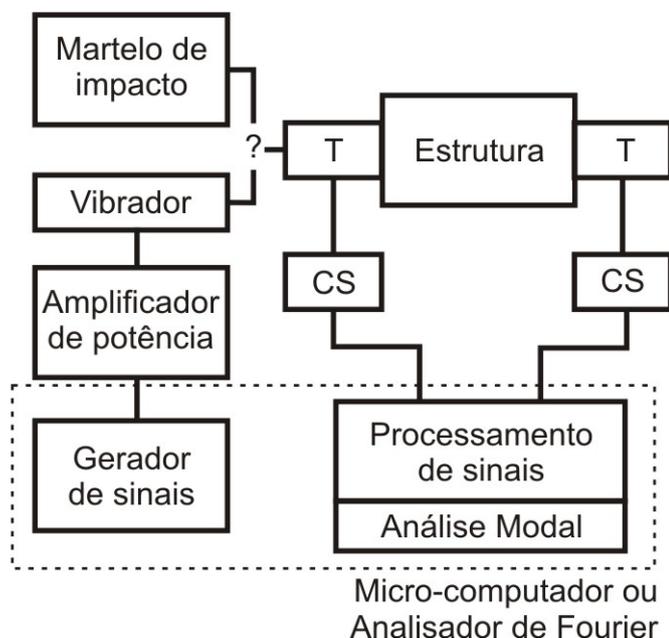


Figura 13: Instrumentação básica para a análise modal experimental

A excitação da estrutura pode ser feita de diversas maneiras, apresentadas em (EWINS, 1984). Neste trabalho têm relevância a excitação através de martelo de impacto e vibrador.

A excitação através de martelo de impacto produz um sinal de força que aproxima-se de um Delta de Dirac  $\delta(t)$ , ou seja, um impacto muito rápido e de intensidade bastante alta. Idealmente a energia de  $\delta(t)$  se distribui uniformemente no domínio da frequência, o que torna este tipo de excitação interessante para a identificação de modos de vibração. Entretanto, na prática a excitação produzida pelo martelo de impacto não é instantânea e tem a energia concentrada quase uniformemente até uma determinada frequência. A duração do impacto e a conseqüente distribuição da energia no domínio da frequência variam de acordo com o material da ponteira utilizada no martelo, como ilustra a Fig. 14. Materiais mais duros, como metais, levam a um tempo de impacto mais curto e a uma excitação aproximadamente uniforme até frequências mais altas, justificando sua utilização quando ressonâncias em altas frequências são analisadas. Por outro lado, materiais mais moles, como borrachas, apresentam um tempo de impacto maior, de maneira que a energia concentra-se mais em baixas frequências. Materiais como Nylon possuem um comportamento intermediário. Na

Fig. 14, três impactos com a mesma energia e diferentes ponteiros são apresentados no domínio do tempo e no domínio da frequência através da densidade espectral de potência, uma medida da distribuição da energia no domínio da frequência, definida na Seção 3.2.

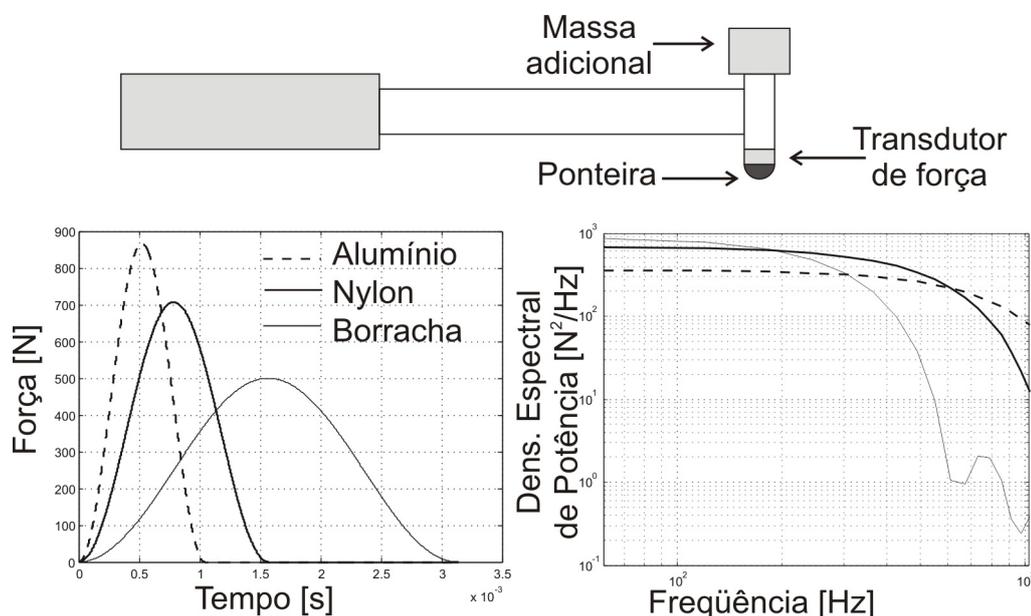


Figura 14: O martelo de impacto e a influência do material da ponteira

Os vibradores utilizados para a excitação de estruturas podem ser eletromagnéticos, eletro-hidráulicos, baseados em materiais piezo-elétricos, entre outros princípios de funcionamento que levam a diferentes níveis de força e tempo de resposta (JORDAN, 2002). As dimensões da estrutura a ser analisada definem os níveis de força necessários para que os modos sejam excitados enquanto que o valor das frequências naturais define o tempo de resposta destes atuadores. De fato, a excitação de ressonâncias em altas frequências exige atuadores suficientemente rápidos. Os sinais aos quais os vibradores são submetidos a vibrar são, comumente, do tipo ruído branco com limitação de frequência.

Os transdutores utilizados em análise modal são normalmente piezo-elétricos, tanto para a medição de forças como de movimentos. No primeiro caso o sensor provê uma carga elétrica proporcional à força de compressão. Em geral estes são submetidos a uma pré-carga de compressão na montagem, de maneira que podem medir forças de tração. Em outras formas de construção, os transdutores produzem cargas elétricas proporcionais a acelerações. Os assim chamados acelerômetros consistem de duas massas, uma delas fixa à estrutura, separadas por material piezo-elétrico que age como uma mola de elevada rigidez. O sistema tem portanto uma frequência de ressonância de maneira que a máxima frequência de trabalho para um acelerômetro constitui uma fração de sua ressonância para que se evitem distorções em ganho e

fase na medição (v. Fig. 97).

A impedância de saída de transdutores piezo-elétricos não é adequada para seu uso direto em equipamentos de análise de sinais (INMAN, 2001). Por isso, condicionadores de sinal, como amplificadores de carga ou tensão, são empregados para gerar sinais em tensão. Estes condicionadores podem ser utilizados para filtrar componentes de baixa ou alta freqüência bem como integrar sinais de aceleração, provendo tensões proporcionais à velocidade ou ainda ao deslocamento no ponto onde o acelerômetro é montado. Os acelerômetros constituem, em geral, os transdutores mais adequados para a análise de vibrações, entretanto eles provêm sinais muito fracos para movimentos em baixas freqüências. De fato, um deslocamento harmônico de amplitude  $X$  e freqüência angular  $\omega$  tem uma aceleração de amplitude  $-\omega^2 X$ . Assim, acelerômetros são calibrados de maneira a gerar cargas elétricas (e consequentemente tensões) para uma dada faixa de freqüência, de maneira que vibrações importantes em baixas freqüências podem apresentar uma aceleração  $-\omega^2 X$  muito pequena em comparação a ruídos de medição. Mais ainda, ruídos em alta freqüência são amplificados na razão  $-\omega^2$ .

Uma vez que os sinais dos transdutores são condicionados estes são utilizados para que sejam calculadas as funções resposta em freqüência. Estas são utilizadas para que os parâmetros modais sejam identificados. A descrição dos métodos utilizados para este fim foge do escopo deste trabalho e pode ser consultada em (EWINS, 1984).

A definição das freqüências naturais é feita em geral através da identificação de máximos locais nas curvas de magnitude das FRFs e acompanhadas por mudanças de fase. Os fatores de amortecimento estão relacionados com a largura dos picos e são, em geral, assumidos na forma de amortecimento modal. O método da quadratura ilustrado na Fig. 15, por exemplo, consiste na definição de  $\xi$  através da identificação de dois pontos da resposta em freqüência em torno da freqüência natural amortecida onde

$$|H(j\omega_a)| = |H(j\omega_b)| = \frac{|H(j\omega_d)|}{\sqrt{2}}$$

Pode-se provar que  $\omega_b - \omega_a = 2\xi\omega_d$  de maneira que (INMAN, 2001).

$$\xi = \frac{\omega_b - \omega_a}{2\omega_d}$$

O intervalo  $[\omega_a, \omega_b]$  define a banda de meia potência, assim chamada pois a potên-

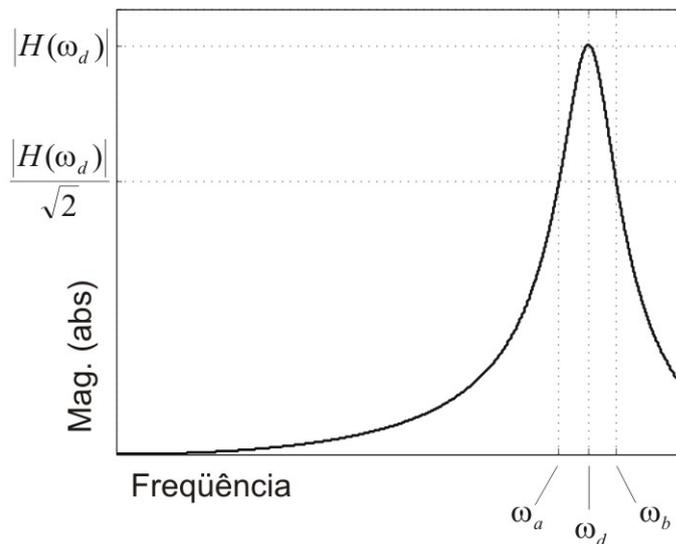


Figura 15: Magnitude da receptância e a definição de  $\xi$  pelo método da quadratura.

cia destes pontos é igual à metade da potência máxima.

A determinação de formas modais implica a medição de mais de uma FRF, de maneira que se possa estimar o movimento relativo entre as partes da estrutura como função da frequência. Para derivar o fundamento da determinação de formas modais é necessário definir o conceito de *matriz de receptância* e *constante modal*. Defina-se  $\mathbf{q}_{n_d \times 1}$  o vetor de deslocamentos para uma malha de  $n_d$  pontos definidos na estrutura. A receptância relativa à entrada de força aplicada no termo  $r$  de  $\mathbf{q}$  e saída de índice  $e$  de  $\mathbf{f}_0_{n_d \times 1}$  compõe  $\alpha_{re}$  da matriz de receptância  $\alpha_{n_d \times n_d}$ , para um sistema como o da Eq. (2.11) ( $M_0\ddot{\mathbf{q}} + C_0\dot{\mathbf{q}} + K_0\mathbf{q} = \mathbf{f}_0$ ).

Dado o pressuposto da lei da reciprocidade de Maxwell a matriz de receptância é simétrica, ou seja  $\alpha_{re} = \alpha_{er}$ . Portanto não é necessário medir<sup>1</sup> a receptância entre todos os pares entrada e saída. Na verdade, mostra-se abaixo que é suficiente medir apenas uma linha ou coluna desta matriz para que se possa determinar as formas de vibração. Medir uma linha significa fixar um transdutor para a resposta em um ponto da estrutura e excitar (em geral através de um martelo de impacto) todos os pontos, estimando cada FRF. Por outro lado, medir uma coluna consiste em fixar a excitação a um ponto (em geral através de um vibrador) e variar a posição do transdutor para a resposta por todos os pontos da estrutura.

A aplicação da transformada de Laplace na Eq. (2.11)  $(M_0s^2 + C_0s + K_0)\mathbf{Q}(s) = \mathbf{F}(s)$ , onde  $\mathbf{Q}(s)$  e  $\mathbf{F}(s)$  correspondem às transformadas de Laplace de  $\mathbf{q}(t)$  e  $\mathbf{f}_0(t)$ , respectivamente, avaliada na frequência complexa  $s = j\omega$  leva à definição da matriz de receptância:

<sup>1</sup>O termo “medir” representa, na verdade, estimar a FRF a partir da medição dos sinais de excitação e resposta, através de um procedimento como o da Fig. 11

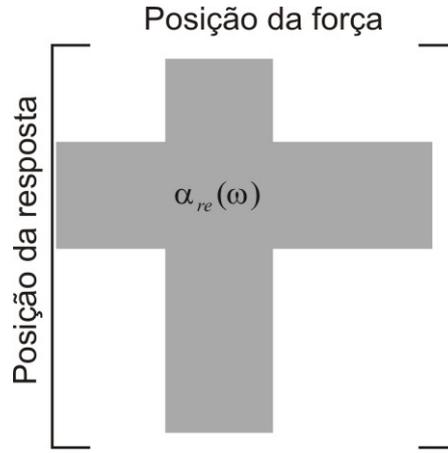


Figura 16: Matriz de receptância indicando uma linha ou coluna de medições.

$$\alpha(\omega) \triangleq \frac{\mathbf{Q}(\omega)}{\mathbf{F}(\omega)} = ((K_0 - \omega^2 M_0) + j\omega C_0)^{-1} \quad (3.2)$$

Seja  $\Phi = [\phi_1 \ \phi_2 \ \dots \ \phi_{n_m}]$  a matriz de formas modais que contém cada coluna  $i$  correspondente à  $i$ -ésima forma modal e  $n_m$  o número de modos de interesse. Invertendo a Eq. (3.2) e multiplicando por  $\Phi^T$  e  $\Phi$  pela esquerda e direita, respectivamente, obtém-se

$$\Phi^T \alpha(\omega)^{-1} \Phi = \Phi^T (K_0 - \omega^2 M_0) \Phi + j\omega \Phi^T C_0 \Phi \quad (3.3)$$

Aqui pressupõe-se que  $\Phi$  diagonaliza  $M_0$ ,  $K_0$  e  $C_0$ , ou seja,  $\Phi$  constitui a solução do problema de autovalores da Eq. (2.15) e o amortecimento é do tipo proporcional:

$$\Phi^T \alpha(\omega)^{-1} \Phi = ((K_m - \omega^2 I) + j\omega C_m) \quad (3.4)$$

Além disto, se os autovetores estão normalizados pela massa, ou seja  $\Phi^T M_0 \Phi = I$ , tem-se  $\Phi^T (K_0) \Phi = K_m = \text{diag}(\omega_i^2)$  e  $\Phi^T (C_0) \Phi = C_m = \text{diag}(2\xi_i \omega_i)$ :

$$\Phi^T \alpha(\omega)^{-1} \Phi = \text{diag}((\omega_i^2 - \omega^2) + j(2\xi_i \omega)) \quad (3.5)$$

Como a matriz do segundo membro da Eq. (3.5) é diagonal sua inversa corresponde à inversão de cada elemento da diagonal. Assim, a sua inversão seguida da multiplicação por  $\Phi$  e  $\Phi^T$  leva a

$$\alpha(\omega) = \Phi \left[ \text{diag} \left( \frac{1}{(\omega_i^2 - \omega^2) + j(2\xi_i \omega)} \right) \right] \Phi^T \quad (3.6)$$

Dada a ortogonalidade dos modos, é possível descrever a dinâmica completa como o somatório de modos individuais. Assim, a receptância  $\alpha_{re}(\omega)$  pode ser escrita como

$$\alpha_{re}(\omega) = \sum_{i=1}^{n_m} \frac{\Phi_{ri}\Phi_{ei}}{(\omega_i^2 - \omega^2) + j(2\xi_i\omega_i)} = \sum_{i=1}^{n_m} \frac{{}_iA_{re}}{(\omega_i^2 - \omega^2) + j(2\xi_i\omega_i)} \quad (3.7)$$

onde  ${}_iA_{re} = \Phi_{ri}\Phi_{ei}$  é a chamada constante modal e  $\Phi_{ri}, \Phi_{ei}$  correspondem ao valor da forma modal  $i$  ( $i$ -ésima coluna de  $\Phi$ ) nos pontos  $r$  e  $e$ , respectivamente.

A parametrização como a da Eq. (3.7) constitui uma das utilizadas por algoritmos de identificação de parâmetros modais, que visam identificar para cada modo  $\omega_i$  e  $\xi_i$  e também  ${}_iA_{re}$  para cada FRF  $\alpha_{re}(\omega)$ .

A forma modal pode então ser identificada, a partir de uma linha de medições, a partir da FRF pontual  $\alpha_{rr}(\omega)$ , onde a excitação coincide com o ponto fixo para a resposta, onde:

$${}_iA_{rr} = \Phi_{ri}^2 \quad \rightarrow \quad \Phi_{ri} = \sqrt{{}_iA_{rr}} \quad (3.8)$$

Para o restante das medições da linha, onde a excitação percorre os outros  $n_d$  pontos, pode-se identificar  $\Phi_{ei}$ :

$$\Phi_{ei} = \frac{{}_iA_{re}}{\Phi_{ri}} \quad (3.9)$$

Analogamente, a partir de uma coluna de medições, pode-se inferir  $\Phi_{ei}$ , ou seja, a forma modal no ponto onde a excitação é fixa, a partir de

$${}_iA_{ee} = \Phi_{ei}^2 \quad \rightarrow \quad \Phi_{ei} = \sqrt{{}_iA_{ee}} \quad (3.10)$$

Para o restante das medições da coluna, onde o transdutor para a resposta percorre os  $n_d$  pontos:

$$\Phi_{ri} = \frac{{}_iA_{re}}{\Phi_{ei}} \quad (3.11)$$

### 3.2 Análise Espectral

A análise espectral, também referida como análise de Fourier, consiste na análise de sinais temporais através da sua transformação para o domínio da frequência. O termo análise de Fourier é utilizado uma vez que a análise espectral tem seus fundamentos nas séries e transformadas de Fourier.

A série de Fourier para um sinal periódico  $x(t)$ , de período  $T_0$  tal que  $x(t + T_0) = x(t) \forall t$  é definida como

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n \cos(2\pi n f_1 t) + B_n \sin(2\pi n f_1 t)] \quad (3.12)$$

onde  $f_1 = 1/T_0$  é a harmônica fundamental (a definição de  $A_n$  e  $B_n$  é analisada abaixo). Portanto o sinal  $x(t)$  é expandido em uma soma de ondas com frequências múltiplas à harmônica fundamental  $f_1$ . A Fig. 17 ilustra a decomposição de uma onda quadrada em Série de Fourier. Neste caso tem-se  $B_n = 4/(n\pi)$  para  $n$  ímpar e  $B_n = 0$  para  $n$  par e  $A_n = 0$  para todo  $n$ . Assim, este sinal apresenta maiores componentes para os coeficientes que multiplicam harmônicas baixas.

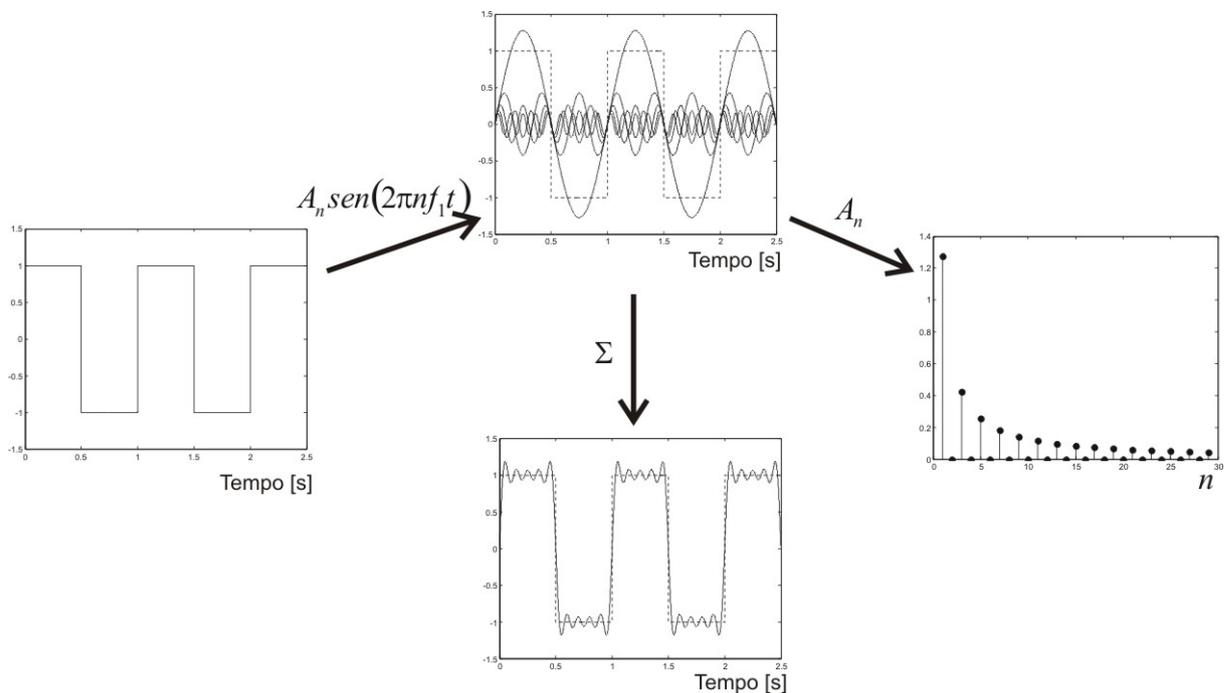


Figura 17: A série de Fourier de uma onda quadrada

Através da definição de exponencial complexa ( $e^{j\theta} = \cos(\theta) + j\sin(\theta)$ ) a Eq. (3.12) pode ser reescrita como

$$x(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} [(A_n - jB_n)e^{2\pi n f_1 t} + (A_n + jB_n)e^{-2\pi n f_1 t}] \quad (3.13)$$

Definindo  $X_n = (A_n - jB_n)/2$  e  $X_{-n} = (A_n + jB_n)/2$ , o que define  $X_n = X_{-n}^*$ . Assumindo que  $x(t)$  é real, pode-se representar a Eq. (3.13) em uma forma mais compacta:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{j2\pi n f_1 t} \quad (3.14)$$

que inclui coeficientes  $X_n$  complexos e freqüências positivas bem como negativas, configurando o espectro bilateral. Os coeficientes de amplitude podem ser calculados como

$$X_n = X(f_n) = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-j2\pi n f_1 t} dt \quad (3.15)$$

A notação  $X(f_n)$  indica que o coeficiente  $X_n$  refere-se à harmônica  $f_n$ . As Eqs. (3.14) e (3.15) compõem, então, a decomposição do sinal  $x(t)$  em uma *Série de Fourier* com harmônicas  $f_n$  múltiplas da fundamental  $f_1 = 1/T_0$  e com coeficientes  $X(f_n)$ .

A derivação acima pode ser generalizada para o caso onde  $x(t)$  não é periódico, o que significa que o período  $T_0$  tende ao infinito. Neste caso  $X(f_n)$  torna-se  $X(f)$ , ou seja passa a ser contínuo em função da freqüência  $f$ . Note-se que enquanto a unidade de  $X(f_n)$  é a mesma que a de  $x(t)$ , a unidade de  $X(f)$  é igual à de  $x(t)$  por Hz (HANSEN; SNYDER, 1997). Assim, a Eq. (3.15) torna-se

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt \quad (3.16)$$

enquanto a Eq. (3.14) torna-se

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{-j2\pi f t} df \quad (3.17)$$

de maneira que o par de equações (3.16) e (3.17) define a *Transformada de Fourier* e a sua inversa, respectivamente.

Na prática, os sinais a serem analisados são amostrados através de um período de amostragem  $T_s$ . Seja  $x(t_k) \triangleq x(t + kT_s)$  (para todo  $k$  inteiro) a representação do sinal  $x(t)$  amostrado. Aqui também é necessário pressupor que o sinal tem período  $T_0$ .

A Eq. (3.15) passa a ser neste caso

$$X(f_n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(t_k) e^{-j \frac{2\pi n}{N} k} \quad n = 0, 1, 2, \dots, (N-1) \quad (3.18)$$

que constitui a *Transformada Discreta de Fourier* (TDF), onde  $N$  é o número de amostras no intervalo  $t \in [0, T_0)$ . O coeficiente  $X(f_n)$  corresponde à frequência  $f_n = \frac{2\pi n}{N}$ . A partir dos  $N$  coeficientes complexos  $X(f_n)$ , a função amostrada pode ser calculada

$$x(t_k) = \sum_{n=0}^{N-1} X(f_n) e^{j \frac{2\pi n}{N} k} \quad k = 0, 1, 2, \dots, (N-1) \quad (3.19)$$

A Fig. 18 ilustra as derivações apresentadas acima. A transformada de Fourier em (a) não impõe restrições de periodicidade no tempo nem na frequência. A série de Fourier, em (b), pressupõe um sinal  $x(t)$  com período  $T_0$ . No caso da transformada discreta de Fourier, em (c), o sinal amostrado é assumido como periódico e também os coeficientes da transformada são periódicos no domínio da frequência. De fato,  $X(f_{n+N}) = X(f_n)$  pode ser verificado a partir na Eq. (3.18). Além disto, a referência para o tempo zero foi transladada de maneira a não contradizer a Eq. (3.18), que mostra-se assim para facilitar a implementação da transformada em microprocessadores, de maneira a evitar índices negativos.

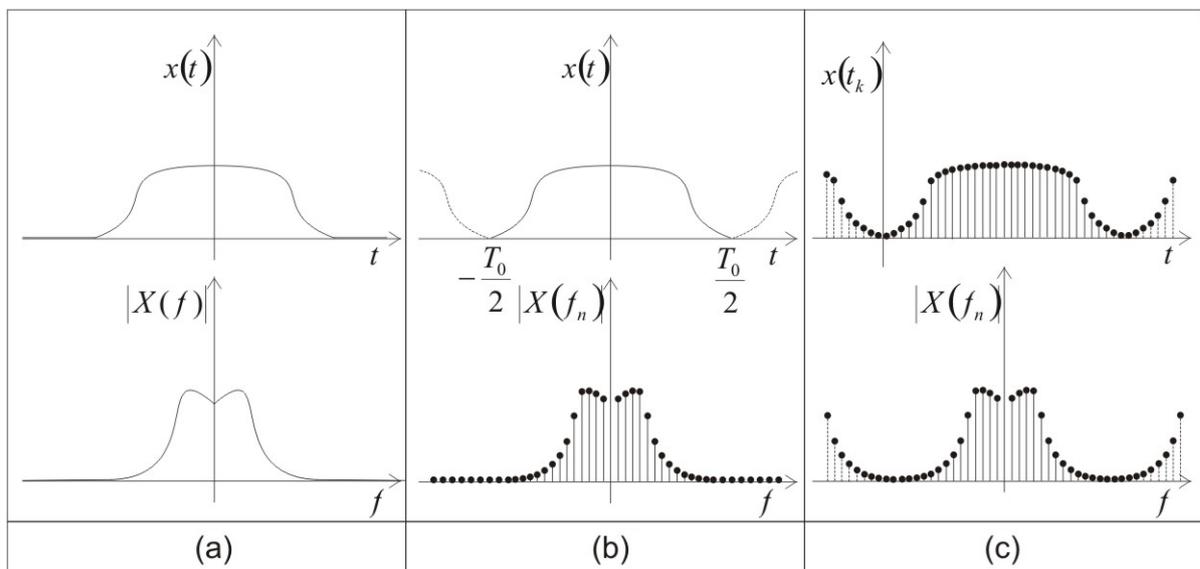


Figura 18: Pares de Fourier

A transformada de Fourier permite o cálculo de  $N$  coeficientes relativos a harmônicas em frequências  $f_n = \frac{2\pi n}{N}$ . Os coeficientes calculados pela Eq. (3.18) não são, na verdade, independentes. De fato, defina-se  $n = (N/2 + k)$  na Eq. (3.18), pode-se

verificar que (JUANG, 1994)

$$X(f_{(N/2+k)}) = X^*(f_{(N/2-k)}) \quad k = 0, 1, 2, \dots, (N/2 - 1) \quad (3.20)$$

A equação acima mostra ainda que  $X(f_N) = X^*(f_0)$ , e pela Eq. (3.18)  $X(f_N)$  é obrigatoriamente real, assim como  $X(f_0)$ . A Eq. (3.20) define ainda que  $X(f_{N/2}) = X^*(N/2)$  e é, portanto real. Assim, os coeficientes em  $k = 0, 1, 2, \dots, (N/2 - 1)$  são independentes enquanto que aqueles de  $k = N/2$  a  $k = N - 1$  são seus complexo conjugados, como ilustrado na Fig. 19.

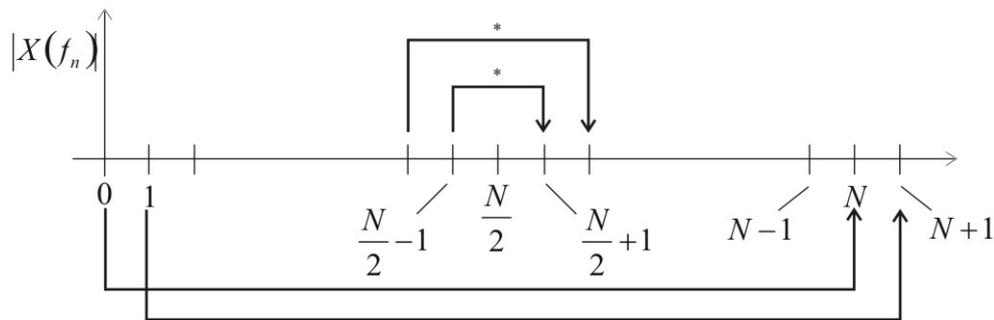


Figura 19: A periodicidade da TDF

O exposto acima define que a máxima freqüência capturada por uma TDF é aquela de índice  $n = N/2$ . Resta saber agora qual é esta freqüência em Hz. Seja  $f_s = 1/T_s$  a freqüência de amostragem. Esta corresponde a  $\omega_n = \frac{2\pi n}{NT_s}$  com  $n = N$ . A resolução em freqüência, ou seja, o incremento de  $f_n$  para  $f_{n+1}$  é  $\Delta f = 1/(NT_s) = 1/T_0$ . A máxima freqüência capturada é então:

$$f_{nyq} = \frac{N}{2} \Delta f = \frac{1}{2T_s} = \frac{f_s}{2} \quad (3.21)$$

que corresponde à freqüência de Nyquist definida na Seção A.7. A periodicidade dos coeficientes da TDF faz com que componentes em altas freqüências (acima da de Nyquist) sejam reconhecidas como se fossem de baixa freqüência. Esta fenômeno não constitui uma propriedade particular da TDF, mas decorre diretamente da amostragem de sinais contínuos, como ilustra a Fig. 20, que mostra um sinal de 11Hz, amostrado com  $T_s = 0.1s$ . Este sinal é reconhecido como possuindo uma freqüência de 1Hz. Este efeito é conhecido como dobramento (ou em inglês “aliasing”). Portanto, faz-se necessário adquirir ao menos duas amostras por ciclo da onda a ser capturada.

### 3.2.1 FRF a partir da TDF de entrada-saída

A aplicação da transformada discreta de Fourier na Eq. (A.47), leva a

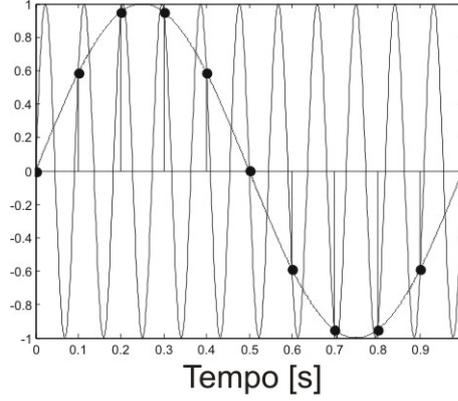


Figura 20: O efeito do dobramento (“aliasing”)

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} y(t_k) e^{-j \frac{2\pi n}{N} k} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{i=0}^{\infty} h_i u(t_{k-i}) e^{-j \frac{2\pi n}{N} k}$$

$$Y(f_n) = H(z_n)U(f_n) - \epsilon_u(f_n) \quad (3.22)$$

onde  $Y(f_n)$  é a TDF de  $y(t_k)$ ,  $U(f_n)$  a correspondente de  $u(t_k)$ ,  $H(z_n)$  é a FRF na frequência  $f_n = n/T_0$ , que equivale a  $z = e^{-j \frac{2\pi n}{N}}$ . O termo

$$\epsilon_u(f_n) = \sum_{i=0}^{\infty} h_i e^{-j \frac{2\pi n}{N} i} \sum_{\nu=k-i}^{-1} [u(t_{\nu+N}) - u(t_{\nu})] e^{-j \frac{2\pi n}{N} \nu} \quad (3.23)$$

representa um erro que não existe quando o sinal de entrada é periódico ( $u(t_{\nu+N}) = u(t_{\nu})$ ). Neste caso:

$$H(z_n) = \frac{Y(f_n)}{U(f_n)} \quad (3.24)$$

A equação acima mostra que a função resposta em frequência não descreve apenas entradas senoidais. De fato, se o sinal de entrada apresenta uma transformada de Fourier, o sinal de saída pode ser calculado pela transformada inversa de  $H(z_n)U(f_n)$ .

O cálculo da FRF através da Eq. (3.24) pressupõe  $U(f_n) \neq 0 \forall n$ . De modo geral, do ponto de vista da implementação em microprocessadores é desejável que  $U(f_n)$  seja suficientemente alto para que problemas numéricos sejam evitados. Isto é possível se o sinal de excitação for rico em componentes dentro de uma faixa de frequência de interesse para o cálculo da FRF.

Para a diminuição dos efeitos oriundos de ruídos de medição, em geral deseja-se realizar o cálculo acima a partir de várias medições. Ou então dividir uma longa medição em diversos setores para a realização de médias. A Eq. (3.24) não é ade-

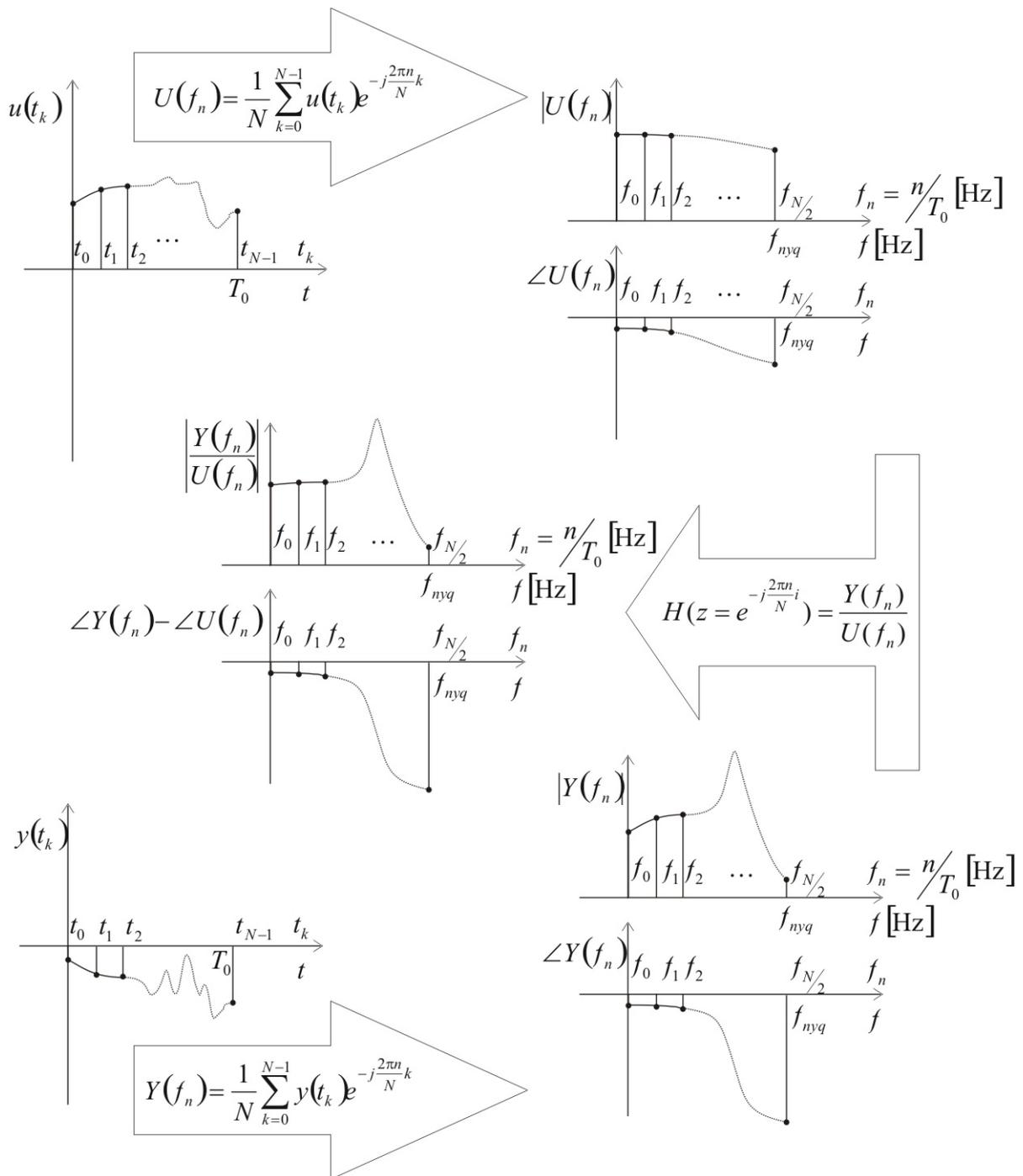


Figura 21: A determinação da FRF a partir da TDF

quada para este fim já que os espectros dos sinais de entrada e saída são instantâneos (HANSEN; SNYDER, 1997; BENDAT; PIERSOL, 1980). O cálculo da FRF pode ser feito através da utilização da densidade espectral de potência, definida a seguir.

### 3.2.2 Densidade Espectral de Potência

A densidade espectral de potência constitui a forma mais comum de representação espectral em acústica e análise de vibrações (HANSEN; SNYDER, 1997) e pode

ser definida como a transformada de Fourier da função de auto-correlação de um sinal. A maneira mais comum de calcular esta função é através de suas transformadas, calculadas pela Eq. (3.18)

$$S_{xx}(f_n) = X(f_n)X^*(f_n) \quad (3.25)$$

A derivação da densidade espectral de potência decorre de uma abordagem estocástica e, portanto, mais adequada à realização de médias, em comparação com a TDF. A partir de  $q$  amostras  $x(t_k)$   $k = 0, 1, \dots, N - 1$ , pode-se estimar a densidade espectral de potência de um sinal sujeito a ruídos de medição como

$$S_{xx}(f_n) \approx \bar{S}_{xx}(f_n) = \sum_{i=1}^q X^{(i)}(f_n)X^{(i)*}(f_n) \quad (3.26)$$

onde  $X^{(i)}(f_n)$  é a TDF da  $i$ -ésima amostra. A realização de uma média como feita acima diretamente para  $X^{(i)}(f_n)$  resultará em zero já que a TDF é um espectro instantâneo e tem a fase dependente do momento em que a  $i$ -ésima amostra foi medida. Isto explica a maior utilização da densidade espectral de potência. De fato, a informação de fase é perdida, como mostra a Eq. (3.25).

Na prática, o espectro bilateral  $S_{xx}(f_n)$  é representado através do espectro unilateral  $G_{xx}$ , normalmente utilizados por analisadores espectrais comerciais:

$$\begin{cases} G_{xx}(f_n) = 0 & f_n < 0 \\ G_{xx}(f_n) = S_{xx}(f_n) & f_n = 0 \\ G_{xx}(f_n) = 2S_{xx}(f_n) & f_n > 0 \end{cases} \quad (3.27)$$

Analogamente, define-se a densidade espectral cruzada:

$$S_{yx}(f_n) \approx \bar{S}_{yx}(f_n) = \sum_{i=1}^q Y^{(i)}(f_n)X^{(i)*}(f_n) \quad (3.28)$$

onde  $X^{(i)}(f_n)$  e  $Y^{(i)*}(f_n)$  são espectros instantâneos. A média acima pode ser feita porque a defasagem entre estes dois espectros não é aleatória desde que as amostras de  $x(t_k)$  e  $y(t_k)$  sejam obtidas simultaneamente. A densidade espectral cruzada unilateral  $G_{yx}(f_n)$  pode ser definida analogamente à Eq. (3.27).

### 3.2.3 FRF a partir dos espectros de potência

A FRF definida na Eq. (3.24) pode também ser calculada através dos espectros de potência definidos na Seção anterior, o que permite a utilização de médias a partir

de várias amostras. A Eq. (3.24) pode ser alterada de duas maneiras para que derive a FRF a partir dos espectros de maneira. Multiplicando-se pelo complexo conjugado do espectro de entrada, defina-se  $H_1(f_n)$ :

$$H_1(f_n) = \frac{\bar{Y}(f_n)\bar{U}^*(f_n)}{\bar{U}(f_n)\bar{U}^*(f_n)} = \frac{\bar{G}_{uy}(f_n)}{\bar{G}_{uu}(f_n)} \quad (3.29)$$

ou então, a multiplicação pelo complexo conjugado do espectro de saída define  $H_2(f_n)$ :

$$H_2(f_n) = \frac{\bar{Y}(f_n)\bar{Y}^*(f_n)}{\bar{U}(f_n)\bar{Y}^*(f_n)} = \frac{\bar{G}_{yy}(f_n)}{\bar{G}_{yu}(f_n)} \quad (3.30)$$

Para situações onde os sinais são livres de ruído  $H_1(f_n)$  e  $H_2(f_n)$  representam exatamente o mesmo resultado. Entretanto, seja  $\check{u}(t_k) = u(t_k) + \tilde{u}(t_k)$  o sinal de entrada medido e sujeito a um ruído  $\tilde{u}(t_k)$  e  $\check{y}(t_k) = y(t_k) + \tilde{y}(t_k)$  o sinal de saída medido e sujeito a um ruído  $\tilde{y}(t_k)$ . Se os ruídos não estão correlacionados com os sinais e nem entre si a estimativa do tipo  $H_1$ , da Eq. (3.29), aplicada nos sinais medidos é então:

$$\begin{aligned} \check{H}_1(f_n) &= \frac{\check{\bar{Y}}(f_n)\check{\bar{U}}^*(f_n)}{\check{\bar{U}}(f_n)\check{\bar{U}}^*(f_n)} = \frac{(\bar{Y}(f_n) + \check{\bar{Y}}(f_n))(\bar{U}^*(f_n) + \check{\bar{U}}^*(f_n))}{(\bar{U}(f_n) + \check{\bar{U}}(f_n))(\bar{U}^*(f_n) + \check{\bar{U}}^*(f_n))} \\ &= \frac{\bar{Y}(f_n)\bar{U}^*(f_n)}{\bar{U}(f_n)\bar{U}^*(f_n) + \check{\bar{U}}(f_n)\check{\bar{U}}^*(f_n)} = \frac{\bar{G}_{uy}(f_n)}{\bar{G}_{uu}(f_n) + \bar{G}_{\check{u}\check{u}}(f_n)} \\ &< H_1(f_n) \text{ se } \bar{G}_{\check{u}\check{u}}(f_n) \neq 0 \end{aligned} \quad (3.31)$$

Assim, a estimativa  $H_1$  sempre será menor que a FRF real sempre que o sinal de entrada estiver contaminado por ruído. Como o ruído na saída não interfere na estimativa ela mostra-se interessante sempre que os sinais de saída forem mais contaminados que os de entrada. Analogamente, para a estimativa  $H_2$ :

$$\check{H}_2(f_n) = \frac{\bar{G}_{yy}(f_n) + \bar{G}_{\check{y}\check{y}}(f_n)}{\bar{G}_{yu}(f_n)} > H_2(f_n) \text{ se } \bar{G}_{\check{y}\check{y}}(f_n) \neq 0 \quad (3.32)$$

ou seja, a estimativa  $H_2$  resulta em valores mais baixos sempre que o sinal de saída estiver contaminado com ruído. Como esta estimativa não é sensível a ruídos na entrada ela é preferida para os casos onde o sinal de entrada está mais contaminado que o de saída.

### 3.2.4 Coerência

A função de coerência é uma medida da dependência linear entre dois sinais como uma função da frequência e é definida como

$$\sigma^2(f_n) = \frac{|\bar{G}_{uy}(f_n)|^2}{\bar{G}_{uu}(f_n)\bar{G}_{yy}(f_n)} \quad (3.33)$$

Pela definição acima  $0 \leq \sigma^2(f_n) \leq 1$ , onde a unidade indica um alto grau de dependência linear entre os sinais de entrada e saída. Esta função constitui normalmente uma medida da qualidade de uma estimativa de FRF. Comportamentos não lineares do sistema a identificar, bem como ruídos de medição fazem com que a função coerência diminua. Para um número  $q = 1$  de amostras obtém-se  $\sigma^2(f_n) = 1 \forall f_n$  (BENDAT; PIERSOL, 1980), o que constitui uma informação sem utilidade prática e reforça a necessidade de um certo número de amostras para que se possa qualificar a estimativa de uma FRF.

### 3.2.5 Janelas espectrais

Um dos pressupostos para a validade da TDF é a periodicidade do sinal analisado, o que quer dizer que um sinal adquirido no intervalo de tempo  $[0, T_0)$  deve ter um período  $T_0$ , o que pode levar a descontinuidades nos limites deste intervalo, como ilustrado na Fig. 22. A série de Fourier referente a uma função descontínua em um instante  $T_0$ , tal que seus limites pela esquerda e direita sejam diferentes, converge para o ponto médio dos valores periféricos, o que se reflete nos valores dos coeficientes da série.

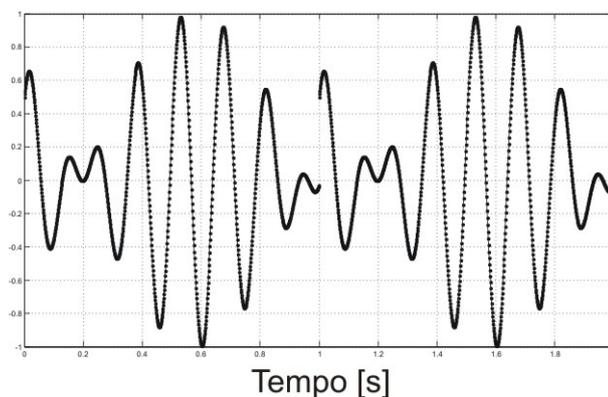


Figura 22: Descontinuidade decorrente da exigência de periodicidade para a TDF

Outra maneira de verificar a consequência de tais descontinuidades é assumir que o sinal a ser analisado  $v(t)$  não é periódico e é multiplicado por uma função  $w(t)$

que vale 0 fora de  $[0, T_0)$  e 1 caso contrário. Tal função é conhecida como janela retangular, e pode ser definida matematicamente como:

$$\begin{cases} w(t) = 1 & 0 \leq t < T_0 \\ w(t) = 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.34)$$

Assim, o sinal analisado passa a ser  $x(t) = u(t)w(t)$ . A transformada de Fourier (definida pela Eq. (3.16)) da janela retangular

$$W(f) = T_0 \frac{\text{sen}(\pi f T_0)}{\pi f T_0} e^{-j\pi f T_0} \quad (3.35)$$

que tende à constituir um Delta de Dirac quando  $T_0$  tende ao infinito. Para  $T_0$  finito obtém-se o fenômeno do vazamento, como ilustrado na Fig. 23 o sinal não tem toda a sua energia concentrada no intervalo correspondente à resolução em frequência  $\Delta f = 1/T_0$ . De fato, como o sinal  $x(t)$  a ser analisado é multiplicado no tempo ele tem sua transformada de Fourier como a convolução com a transformada da janela  $X(f) = U(f) \otimes W(f)$  e a energia correspondente a uma determinada frequência  $X(f_n)$  “vaza” para as frequências vizinhas.

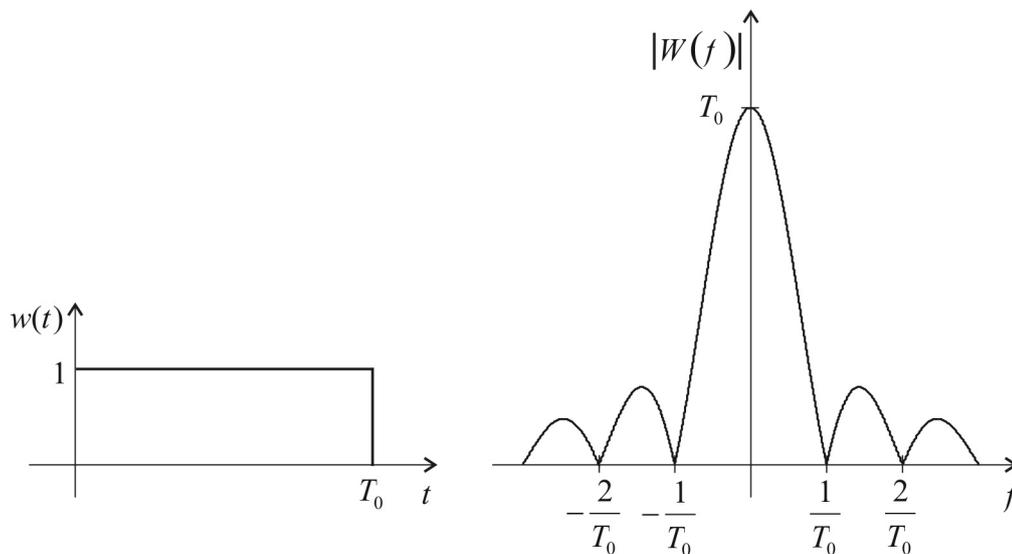


Figura 23: A janela retangular

Para contornar este problema é comum a utilização de outros tipos de janela que não a retangular, como por exemplo a janela de Hanning, definida como:

$$\begin{cases} w(t) = \frac{1}{2} \left( 1 - \cos \left( \frac{2\pi t}{T_0} \right) \right) & 0 \leq t < T_0 \\ w(t) = 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.36)$$

apresentada na Fig. 24. Diversas janelas são apresentadas e comparadas em (HARRIS, 1978). Em geral, elas diferem quanto à exatidão quanto a amplitude das harmôni-

cas capturadas e resolução em frequência. Um bom compromisso entre estes dois parâmetros fundamentais é apresentado pela janela de Hanning (HANSEN; SNYDER, 1997).

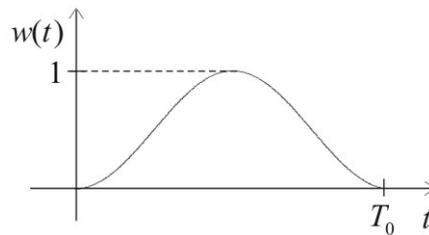


Figura 24: A janela Hanning

A Fig. 25 ilustra uma aquisição de 5s dividida em 5 partes de 1s para a realização da média. Na parte inferior percebe-se que a aplicação de uma janela que não a retangular, faz com que informação seja perdida. Este problema é evitado através da superposição de amostras, como ilustrado na Fig. 26 os limites de cada amostra são superpostos de maneira a minimizar a perda de informação causada pelas janelas espectrais.

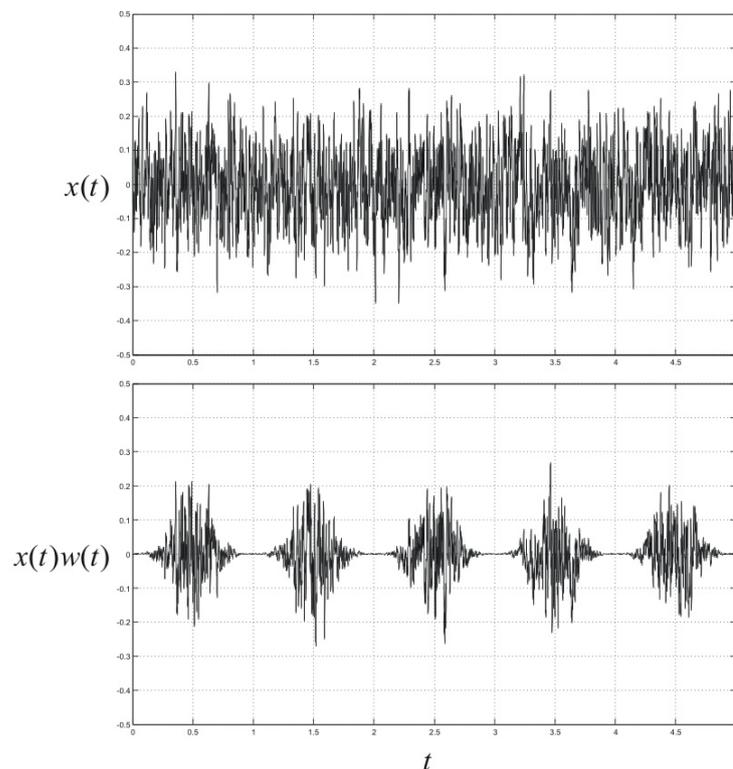


Figura 25: Divisão em amostras menores e a utilização de janelas

Os elementos levantados neste capítulo não têm o objetivo de cobrir com plenitude a análise modal experimental bem como a análise espectral. São apenas destacados aqueles que têm relevância para o desenvolvimento deste trabalho. Uma discussão mais aprofundada a respeito da análise modal experimental pode ser encon-

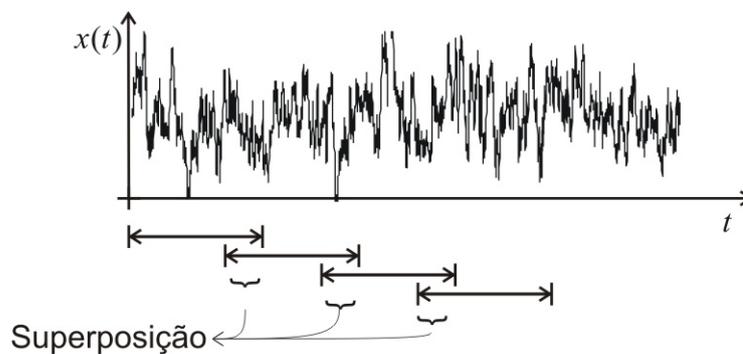


Figura 26: A superposição de amostras

trada inicialmente em (EWINS, 1984), mas também em (HANSEN; SNYDER, 1997) e (INMAN, 2001).

Em (BENDAT; PIERSOL, 1980) são apresentados elementos de análise espectral no domínio contínuo. Embora aplicações práticas sejam normalmente digitais, a análise no domínio contínuo é útil para uma apresentação inicial das funções básicas em análise espectral. Em (HANSEN; SNYDER, 1997), (JUANG, 1994) e (KWAKERNAAK; SIVAN, 1991) a análise é feita também no domínio discreto, levando em conta os problemas que se apresentam quando da discretização de sinais contínuos.

O Capítulo 4 trata do projeto do controle ativo de vibrações sob o ponto de vista específico do projeto dos controladores. São apresentadas as diferenças fundamentais entre o controle pré-alimentado e o realimentado, tendo o foco principal neste último, utilizado neste trabalho.

## 4 Controle Ativo de Vibrações

Este capítulo apresenta elementos da teoria de controle normalmente aplicados para problemas de controle ativo de vibrações. Neste trabalho é aplicado o controle realimentado através de métodos de projeto descritos mais adiante. Além disto, é indicada a aplicação adicional de controle pré-alimentado como perspectiva futura.

Referências gerais para elementos da teoria de controle podem ser encontradas em (KWAKERNAAK; SIVAN, 1991) e (OGATA, 2000). Os métodos normalmente aplicados para sistemas de controle ativo de vibrações é encontrada em (HANSEN; SNYDER, 1997), (PREUMONT, 2002) e em (FULLER; ELLIOTT; S.J. NELSON, 1996), nesta última de maneira mais sucinta. Em (BURL, 1999) é apresentada uma abordagem interessante através de métodos de controle ótimo ( $H_2$ ) e robusto ( $H_\infty$ ), também encontrada em (GAWRONSKY, 1998), onde é feita também uma análise a respeito da modelagem de estruturas mecânicas através de uma abordagem modal, como apresentado no Capítulo 2. Ainda em (GAWRONSKY, 1998) é apresentado um algoritmo para a versão balanceada do controlador LQG, utilizada neste trabalho.

A busca pelo desenvolvimento de sistemas ativos para o controle de ruído e vibrações tem suas raízes na década de 30, em trabalhos que buscavam uma solução alternativa para a abordagem passiva no cancelamento de som (LUEG, 1993). O motivo fundamental é que o controle de ruído e vibrações em baixas frequências mostrasse tradicionalmente difícil e caro, além de muitas vezes impraticável já que baixas frequências implicam em altos comprimentos de onda que levam à necessidade de peças maiores. A expansão para a aplicação em outros problemas teve ao longo do tempo sua investigação dificultada devido à falta de (HANSEN; SNYDER, 1997):

- avanços em teoria de controle e, principalmente, em microeletrônica;
- instrumentação (sensores e atuadores) robustos e duráveis;
- trabalhos envolvendo teoria de controle para a análise vibroacústica;
- evidências que motivassem economicamente o controle ativo.

Com o passar do tempo, essas barreiras foram aos poucos sendo transpostas e a partir dos anos 80 e 90 percebe-se um surgimento intenso de sistemas eletrônicos multicanais para aquisição e processamento de sinais bem como de transdutores e atuadores mais robustos e duráveis. Os trabalhos de investigação aumentaram consideravelmente com um predomínio de desenvolvimento de técnicas de cancelamento ativo de vibração e ruído através de controle pré-alimentado.

A maior parte das aplicações de controle ativo de vibrações concentra-se em vibrações de baixas frequências (abaixo de 500Hz). Frequências mais altas trazem a necessidade de eletrônica mais rápida, o que tem se mostrado cada vez mais factível devido ao aumento da velocidade de microprocessadores recentes. Ainda assim, para altas frequências abordagens passivas apresentam vantagens econômicas (HANSEN; SNYDER, 1997).

### **Controle pré-alimentado vs. realimentado**

O controle ativo de vibrações e ruído é realizado basicamente de duas formas fundamentalmente diferentes. O controle pré-alimentado só é possível quando se pode medir a excitação (ou algum sinal correlacionado com ela) antes que ela cause vibrações na estrutura em questão. Neste caso tenta-se causar uma excitação contrária àquela medida. Por outro lado, o controle por realimentação baseia-se em medir as conseqüências (movimentos na estrutura) causadas pela excitação e atuar de maneira a minimizar estes movimentos. Na verdade as duas abordagens não são, por natureza, excludentes e podem ser combinadas.

A decisão de implementação ou não de cada uma delas não deve ser feita apenas pela possibilidade ou não de medição do sinal de excitação. Embora os dois tipos de controle apresentem vantagens e desvantagens (v. (PREUMONT, 2002)) a escolha deve também levar em conta a natureza do problema.

O controle por pré-alimentação visa causar interferência destrutiva de posse da informação da excitação que causa o efeito indesejado. Neste caso, o problema é a excitação. Em geral, a excitação não é larga no domínio da frequência e tem uma característica estacionária. Um caso típico é o de vibrações causadas por desbalanceamento de rotores, onde a força de excitação está relacionada à frequência associada à rotação. A vibração percebida tem a mesma frequência da excitação independentemente das frequências naturais da estrutura. Na verdade, a restrição de que a excitação seja estreita no domínio da frequência não constitui uma restrição para a aplicação de controle pré-alimentado. Entretanto, a maior parte das aplicações

concentra-se nestes casos embora já existam investigações para os casos de excitação em banda (FARHANG-BOROUJENY, 1998).

O controle realimentado procura alterar a dinâmica da estrutura através do fechamento de uma malha. Em geral deseja-se adicionar amortecimento aos modos de vibração da estrutura. O problema neste caso é, então, adicionar amortecimento à estrutura de maneira a torná-la menos sensível a perturbações externas. Em geral, a perturbação é de natureza transitória e mais larga no domínio da frequência, de maneira a excitar alguns dos modos da estrutura.

No caso de máquinas-ferramentas existe a necessidade de aplicação das duas abordagens de controle. De modo geral o giro da peça ou da ferramenta está sempre acompanhado de algum desbalanceamento, configurando o problema apontado anteriormente e que pode ser solucionado através de controle pré-alimentado caso seja possível medir o giro do eixo-árvore. Além disto choques entre ferramenta e peça levam a perturbações que excitam frequências naturais da estrutura. A solução deste problema é, então, o enrijecimento da estrutura que leve a um tempo de acomodação mais baixo para os modos.

Na Seção 4.1 descreve-se o controle por pré-alimentação e é apresentado sucintamente o FXLMS (*Filtered X Least Mean Square*), um algoritmo largamente utilizado neste tipo de controle. Na Seção 4.2 o controle realimentado é apresentado, dando destaque ao controle modal multivariável, utilizado neste trabalho.

#### 4.1 Controle por pré-alimentação

A Fig. 27 mostra o diagrama de blocos simplificado de um controle por pré-alimentação. Esta seção utiliza uma notação particular para a denominação dos sinais, que difere daquela utilizada no restante deste trabalho. O objetivo é adequá-la àquela frequentemente utilizada na literatura a respeito (FULLER; ELLIOTT; S.J. NELSON, 1996; HANSEN; SNYDER, 1997).

O sinal de excitação  $X(s)$  provoca uma força de excitação primária  $F_P(s)$  através da função de transferência  $P(s)$ . O Modelo da dinâmica de  $P(s)$  é o controlador  $H(s)$ . O resultado das excitações impostas ao sistema está relacionado com a sua resposta  $E(s)$  através da função de transferência  $G_m(s)$ .

O objetivo do projeto é fazer  $H(s) = P(s)$  para anular a resposta do sistema, o que é, em princípio, apenas uma questão de projeto de um filtro  $H(s)$  adequado, entretanto na prática diversos problemas são percebidos. A dinâmica de  $P(s)$  pode variar

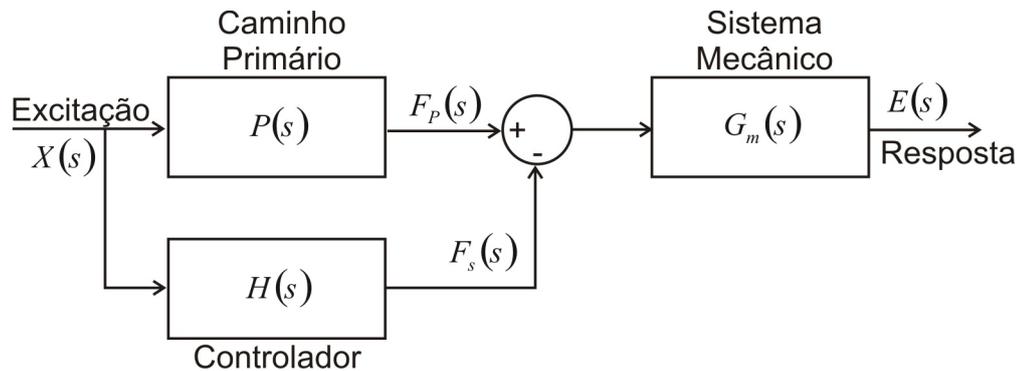


Figura 27: O controle por pré-alimentação

consideravelmente durante o tempo e levar diferenças entre a excitação primária e secundária que comprometem a eficiência do cancelamento. Além disto, é possível que  $P(s)$  não seja facilmente modelável já que o sinal  $X(s)$  a que se tem acesso é apenas um sinal correlacionado com  $F_p(s)$ . Em particular, quando este controlador é implementado de forma digital obtém-se inevitavelmente um atraso (KWAKERNAAK; SIVAN, 1991). A consequência disto não representa um empecilho tão importante em aplicações de controle ativo de ruído; entretanto, no caso do controle ativo de vibrações, as componentes de alta frequência se propagam pela estrutura com uma velocidade bastante alta (FULLER; ELLIOTT; S.J. NELSON, 1996). Portanto, o desempenho de sistemas de controle ativo de vibrações são grandemente influenciados pela frequência de amostragem utilizada pelos controladores digitais.

Para uma atenuação de 20 dB, a diferença de ganho entre  $H(s)$  e  $P(s)$  deve ser menor que  $\pm 0.6$  dB e uma diferença de fase de  $\pm 4^\circ$  (ANGEVINE, 1992), o que mostra que o controle pré-alimentado é especialmente sensível a erros de modelagem.

#### 4.1.1 Controladores digitais adaptativos

Com o objetivo de manter  $H(s)$  próxima de  $P(s)$  à medida que este último varia durante o funcionamento do sistema de controle é possível a utilização de filtros adaptativos. É relativamente simples ajustar a resposta em frequência de um filtro digital através da alteração de seus coeficientes. Entretanto, o equivalente ajuste de um filtro analógico mostra-se bastante complexo. Por isso, a maioria das aplicações de controle adaptativo por pré-alimentação são feitas de maneira digital (FULLER; ELLIOTT; S.J. NELSON, 1996).

Para a apresentação de algumas técnicas de controle pré-alimentado adaptativas a representação da Fig. 28 mostra-se mais conveniente. Nela, o sinal de excitação é representado pela seqüência  $x(n)$ . O bloco  $H_d(z)$  representa a função de transferência

discreta do controlador  $G_{md}(z)$ , cuja saída é a seqüência  $u(n)$  que, por sua vez, é entrada para a representação digital da dinâmica do sistema mecânico  $G_{md}(z)$ . O sinal  $d(n)$  representa a saída do sistema na ausência do sistema de controle. O sinal  $e(n)$  representa a saída total medida, a letra  $e$  é utilizada pois a derivação feita aqui tem suas origens no desenvolvimento de filtros adaptativos e esse sinal representa o erro de predição do filtro. O objetivo é, então, buscar uma estratégia de adaptação do filtro  $H(z)$  que minimize  $e(n)$ .

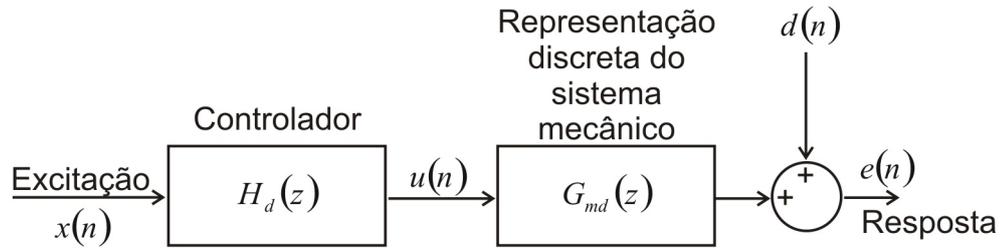


Figura 28: Diagrama equivalente do controle pré-alimentação digital

Seja a função de transferência  $H(z)$  construída através de um filtro FIR (*Finite Impulse Response*) que constitui um polinômio em  $z^{-1}$  com  $I$  coeficientes:

$$H(z) = h_0 + h_1z^{-1} + h_2z^{-2} + \dots + h_{I-1}z^{I-1} \quad (4.1)$$

A saída  $u(n)$  é então:

$$u(n) = H(z)x(n) = \sum_{i=0}^{I-1} h_i x(n-i) \quad (4.2)$$

A resposta do sistema representado na Fig. 28 é então:

$$e(n) = d(n) + G_{md}(z)H_d(z)x(n) \quad (4.3)$$

Considera-se que os operadores lineares  $H_d(z)$  e  $G_{md}(z)$  são invariantes no tempo, sendo assim, pode-se considerar a resposta do sistema como sendo:

$$e(n) = d(n) + H_d(z)r(n) \quad (4.4)$$

onde  $r(n) = G_{md}(z)x(n)$ .

A definição da estratégia de adaptação pode vir, por exemplo, da minimização do valor quadrático da resposta  $e(n)$ . Assim, define-se a função custo a ser minimizada como:

$$J = e^2(n) \quad (4.5)$$

A minimização da função custo acima resulta na seguinte expressão para a atualização dos coeficientes  $h_i$ :

$$h_i(n+1) = h_i(n) - \alpha x(n)r(n-i) \quad (4.6)$$

onde  $\alpha$  é uma constante utilizada para ajustar a taxa de convergência. Este algoritmo é conhecido como filtro X-LMS (*LMS - Least Mean Square*), já que  $r(n)$  é obtida através da filtragem do sinal de excitação  $x(n)$  com  $\bar{G}_{MD}(z)$ . Este algoritmo foi inicialmente proposto em (MORGAN, 1980). As propriedades de convergência deste algoritmo são similares àsquelas do algoritmo clássico dos mínimos quadrados recursivo (FULLER; ELLIOTT; S.J. NELSON, 1996).

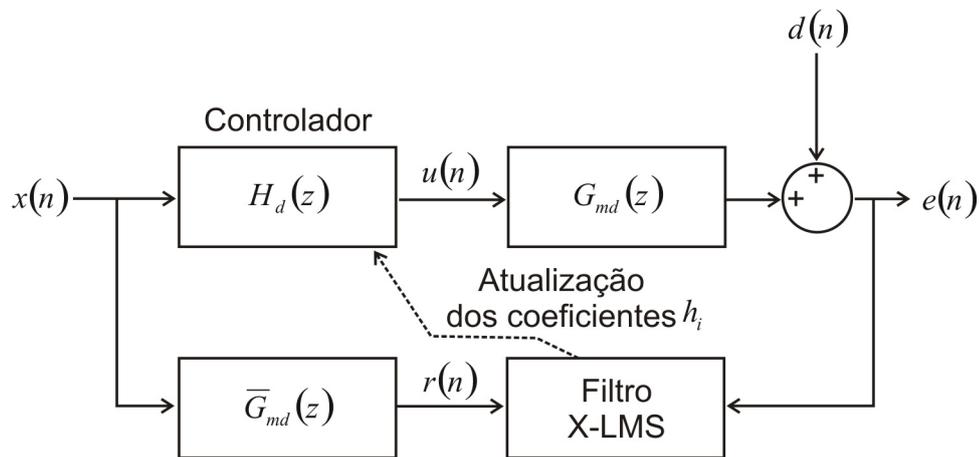


Figura 29: Controle pré-alimentado adaptativo

A Fig. 29 mostra o controle pré-alimentado através do FXLMS para a atualização dos coeficientes  $h_i$ . A função de transferência  $\bar{G}_{MD}(z)$  é o modelo de  $G(z)$ . A taxa de convergência do algoritmo é afetada caso ocorram erros de modelagem em  $\bar{G}_{MD}(z)$ . A discussão a respeito deste problema é apresentada em (FULLER; ELLIOTT; S.J. NELSON, 1996; HANSEN; SNYDER, 1997). De acordo com os erros em ganho e fase, associa-se um máximo valor para a constante  $\alpha$  que garanta a convergência do algoritmo. Em (VIPPERMAN; BURDISSO; FULLER, 1993) o uso de filtros IIR (*Infinite Impulse Response*) é investigado para a definição de  $\bar{G}_{MD}(z)$ . Em (HANSEN; SNYDER, 1997) é apresentada a versão deste algoritmo para o caso de múltiplas entradas e saídas.

## 4.2 Controle por Realimentação

Esta seção apresenta os fundamentos do controle por realimentação. O efeito básico é ilustrado para um sistema com um grau de liberdade e são descritos efeitos de atrasos e filtros utilizados no condicionamento dos sinais de realimentação. São apresentadas as limitações de técnicas de controle clássico e descritas as metodologias de projeto utilizadas neste trabalho.

De modo geral, o controle realimentado tem dois objetivos principais. O primeiro é fazer com que o sinal de saída siga um sinal de referência, o que é também referido como rastreamento. O segundo consiste em tornar o sistema menos sensível a perturbações externas, de maneira a retornar mais rapidamente à situação de equilíbrio anterior à ocorrência da perturbação. Este segundo objetivo denota o problema fundamental do controle ativo de vibrações. Embora existam aplicações de controle ativo de vibrações onde também existam especificações de rastreamento (GAWRONSKY, 1998), este trabalho restringe-se ao projeto visando somente a rejeição de perturbações.

A Fig. 30 representa simplificada um sistema de controle monovariável por realimentação onde existe uma força de perturbação  $F_P$ , um sinal de saída  $y$  e um sinal de força secundário gerado pelo controlador  $F_s$ . O sinal de saída pode constituir a medição de posição, velocidade ou aceleração. A partir do sinal  $y$ , o controlador  $G_C(s)$  gera um sinal de controle para um atuador que gera uma excitação secundária  $F_S(s)$ .

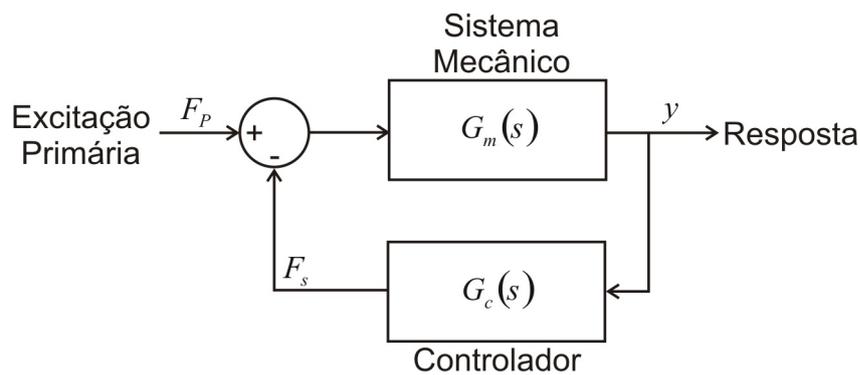


Figura 30: O controle por realimentação

Em malha aberta a função de transferência do sistema é  $G_m(s) = Y(s)/F_P(s)$ . Em malha fechada, a função de transferência entre a saída do sistema e a excitação primária passa a ser aquela da Eq. (4.7). A função de transferência acima pode ser transformada em uma função resposta em frequência fazendo  $s = j\omega$ :

$$\frac{Y(s)}{F_P(s)} = \frac{G_m(s)}{1 + G_m(s)G_C(s)} \xrightarrow{s=j\omega} \frac{Y(j\omega)}{F_P(j\omega)} = \frac{G_m(j\omega)}{1 + G_m(j\omega)G_C(j\omega)} \quad (4.7)$$

O objetivo do controle é a atenuação da resposta do sistema, assim, sintoniza-se a função de transferência do controlador de modo a obter  $G_m(j\omega)G_C(j\omega)$  com um ganho alto e uma fase pequena em uma certa faixa de freqüência de operação. Assim tem-se  $|1 + G_m(j\omega)G_C(j\omega)| \gg 1$  e, portanto, para  $\omega$  dentro desta faixa de operação:

$$\left| \frac{Y(j\omega)}{F_P(j\omega)} \right| \ll |G_m(j\omega)| \quad (4.8)$$

O que significa que a resposta é significativamente atenuada. Entretanto na prática não é possível construir uma  $G_C(s)$  que garanta as condições acima para todo  $\omega$ , especialmente na presença de atrasos, como é visto a seguir. Se para uma freqüência crítica  $\omega_c$  tem-se  $G_m(j\omega_c)G_C(j\omega_c)$  com ganho unitário e fase  $180^\circ$ , a resposta tende ao infinito, o que caracteriza instabilidade do sistema (FULLER; ELLIOTT; S.J. NELSON, 1996). A condição acima pode ser verificada através do critério de estabilidade de Nyquist (OGATA, 2000). Este critério mostra-se útil para a definição não somente da estabilidade absoluta do sistema bem como sua estabilidade relativa, que descreve a proximidade da resposta em freqüência em malha aberta ao ponto  $s = -1 + j0$  (FULLER; ELLIOTT; S.J. NELSON, 1996). A partir da explanação acima, decorrem técnicas descritas usualmente como controle clássico, que compreendem basicamente os métodos do lugar das raízes e o projeto no domínio da freqüência (OGATA, 2000). Embora os controladores desenvolvidos neste trabalho utilizem técnicas de projeto multivariáveis, a análise de controladores mais simples permite a avaliação dos efeitos do fechamento de um laço de realimentação. Além disto, na prática uma importante diferença está presente já que a função de transferência não é a mesma a partir do sinal de excitação primário e secundário. Esta hipótese mostra-se na prática irreal já que em princípio a dinâmica entre a excitação primária e a saída é diferente daquela entre a secundária e esta mesma saída. É possível, inclusive, que  $F_P$  excite modos não excitados por  $F_S$ , ou o contrário.

### Modificação da resposta de um sistema de um grau de liberdade

Nsta seção é analisado o tipo de modificação possível de obter quando da utilização de controle ativo por realimentação. Ilustrativamente, seja um sistema de um grau de liberdade como o da Fig. 5 e em malha aberta a função de transferência corresponde à receptância (Eq. (2.3)). Inicialmente imagina-se um sistema onde estão

disponíveis os sinais de posição, velocidade e aceleração. O controlador  $G_C(s)$  pode ter uma lei de controle que define a atuação de  $f_S(t)$  como:

$$f_S(t) = g_a \ddot{x}(t) + g_v \dot{x}(t) + g_p x(t) \quad (4.9)$$

Preferencialmente seriam utilizados três transdutores separados, mas na prática normalmente dispõe-se apenas de um deles. Os outros dois sinais podem, por hipótese, ser construídos a partir de métodos de derivação ou integração numéricas, o que é válido em certa faixa de frequência (FULLER; ELLIOTT; S.J. NELSON, 1996). Além disto, podem ser obtidos problemas numéricos em baixas frequências. Entretanto é preciso salientar que tal lei de controle tem sentido em problemas onde o comportamento do sistema tem vibrações dentro de uma determinada faixa de frequência de interesse. A transformada de Laplace da lei de controle acima para condições iniciais nulas é

$$G_C(s) = g_a s^2 + g_v s + g_p \quad (4.10)$$

Na verdade tal função de transferência representa um sistema não causal (onde o valor da saída depende do valor de entradas futuras (KWAKERNAAK; SIVAN, 1991)). Entretanto, na prática, o uso de observadores de estado torna possível a implementação de uma função de dinâmica bastante semelhante (OGATA, 2000). Aqui, a função é considerada desta maneira para simplificar a interpretação da modificação da resposta do sistema quando do fechamento da malha de controle. Tal estratégia de controle é análoga a uma estratégia do tipo PID. Assim, a função de transferência em malha fechada fica na forma:

$$\frac{X(s)}{F_P(s)} = \frac{1}{(m + g_a)s^2 + (c_m + g_v)s + (k_m + g_p)} = \frac{1}{m_{MF}s^2 + c_{MF}s + k_{MF}} \quad (4.11)$$

Onde  $m_{MF}, c_{MF}$  e  $k_{MF}$  representam os fatores de massa, constante de amortecimento e rigidez em malha fechada. Isto significa que a sintonia dos parâmetros de controle leva a uma nova dinâmica em malha fechada. Outras leis de controle levam a dinâmicas diferentes, mas sempre ocorre alguma modificação na resposta do sistema e este é o pressuposto fundamental para o projeto de controladores por realimentação.

### O efeito de atrasos e filtros

O controle ativo é implementado, na prática, de maneira digital. A discretização de um sistema contínuo ocasiona um atraso no mínimo de um período de amostragem (KWAKERNAAK; SIVAN, 1991). O atraso pode ser maior dependendo da velocidade de propagação das vibrações na estrutura. Assim, a influência desse tipo de atraso deve ser levada em conta. Considerando a função de transferência do controlador como a estrutura apresentada anteriormente com a presença de um atraso  $\tau$ :

$$G_C(s) = (g_a s^2 + g_v s + g_p) e^{-s\tau} \quad (4.12)$$

Assumindo  $s = j\omega$  e  $\omega\tau \ll 1$ , pode-se fazer  $e^{-j\omega\tau} = 1 - j\omega\tau$ , ou seja, uma aproximação truncada em série de Taylor. Aplicando esta aproximação, a função resposta em freqüência em malha fechada fica:

$$\frac{X(j\omega)}{F_P(j\omega)} = \frac{1}{k_{MF} - \omega^2 m_{MF} + j\omega c_{MF}} \quad (4.13)$$

Onde  $k_{MF} = k_m + g_p$ ,  $m_{MF} = m + g_a - \tau g_v$  e  $c_{MF} = c_m + g_v - \tau g_p + \omega^2 \tau g_a$ . Portanto, a rigidez equivalente em malha fechada não é afetada<sup>1</sup> pela ocorrência de atraso. A massa equivalente diminui proporcionalmente à magnitude de  $\tau$ . A constante de amortecimento equivalente é fortemente afetada de uma maneira dependente da freqüência. O termo  $\omega^2 \tau g_a$  torna-se comparável ao valor de  $c$  para freqüências acima da freqüência natural do sistema (FULLER; ELLIOTT; S.J. NELSON, 1996). Portanto, a ocorrência de atraso afeta significativamente a dinâmica do sistema de controle e seu desempenho é mais influenciado quanto maior o período de amostragem do amostrador utilizado.

A velocidade de propagação das vibrações ao longo da estrutura é alta o suficiente para que se considere apenas o atraso gerado pela amostragem dos sinais. De maneira que na prática obtem-se um atraso total de  $T_s$ , que corresponde a uma defasagem de  $-j\omega T_s$ , ou seja, proporcional ao período de amostragem e à freqüência angular  $\omega$ .

A Fig. 31 apresenta um esquema um pouco mais detalhado de um sistema de controle realimentado, onde são diferenciadas as funções de transferência a partir de perturbação ( $G_w(s)$ ) e do sinal de força de controle  $G_u(s)$ , que é aplicada na estrutura através de um atuador ( $A(s)$ ) comandado por um sinal de controle. Outro elemento

<sup>1</sup>Considerando as simplificações feitas.

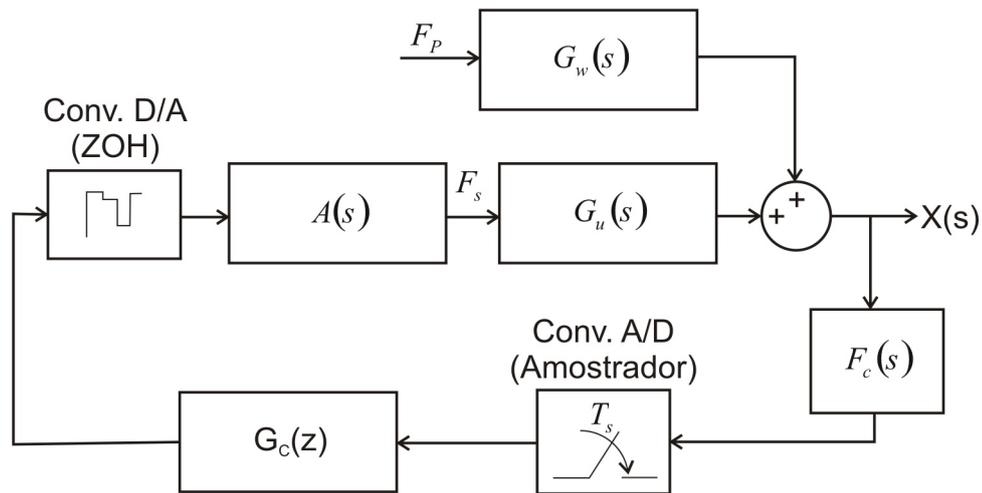


Figura 31: O controle por realimentação

importante é aquele descrito como  $F_c(s)$  e que compreende filtros utilizados para o tratamento dos sinais medidos. Na verdade estes filtros podem estar presentes em forma analógica, como representado, ou em forma digital (após o amostrador), o importante aqui é a resposta em frequência trazida por este elemento. Do ponto de vista do controlador a ser projetado, o sistema em torno do qual se fecha a malha compreende as dinâmicas do atuador ( $A(s)$ ), da estrutura ( $G_u(s)$ ), dos filtros utilizados ( $F_s(s)$ ) e do amostrador, que corresponde a um atraso  $e^{-sE_s}$ .

A dinâmica dos filtros e do amostrador correspondem a um elemento que não está presente em procedimentos de análise modal experimental pois os mesmos filtros são utilizados para o sinal de entrada e para o sinal de saída, de maneira que a FRF estimada (como descrito na Seção 3.2) é feita através dos espectros de entrada e saída, que passam pelos mesmos filtros de maneira a anular o ganho e fase aplicados. Especificamente a fase é um fator relevante e que muitas vezes é negligenciada por fabricantes de módulos de condicionamento de sinal que não fornecem este tipo de informação. A explicação para isto é justamente porque normalmente os analisadores comerciais são utilizados para a estimativa da FRF, de maneira que a informação de ganho dos filtros é suficiente para o usuário.

### Sistemas multivariáveis e acoplamento

Os exemplos ilustrados acima compreendem sistemas monovariáveis. Na prática, no entanto, sistemas de controle ativo são frequentemente multivariáveis, compostos por vários atuadores e/ou sensores. Uma solução para o problema é fechar diversos laços de realimentação entre sensores e atuadores. Para isto é importante que exista pouco acoplamento entre estes laços, ou seja, o sinal de controle de um laço não deve

perturbar significativamente outros laços.

Um dos principais fatores levados em conta na definição do posicionamento dos atuadores é justamente fazer com que eles tenham a capacidade de excitar todos os modos de interesse. Analogamente, os sensores são posicionados de maneira a serem capazes de observar todos estes modos. Isto leva a um forte acoplamento entre todas as entradas e saídas do sistema e restringe a utilização de uma abordagem monovariável para o problema.

Existe um esforço de investigação no sentido de estender técnicas de controle clássico para problemas multivariáveis. Entretanto, estes métodos ainda continuam pouco práticos para sistemas de alta ordem (BURL, 1999).

Os problemas multivariáveis são tratados de maneira mais concisa através de uma modelagem no espaço de estados. Além disto, a presença de vários atuadores e sensores traz uma certa flexibilidade para o sistema. De fato, vários atuadores atuam nos mesmos modos que são observados por vários sensores. Métodos baseados no espaço de estados permitem a otimização, por exemplo, da utilização dos atuadores e sensores de maneira a minimizar algum critério de desempenho. Por outro lado, métodos de projeto de controladores no espaço de estados usualmente possuem a desvantagem de gerar controladores de alta ordem, o que implica a necessidade de processadores suficientemente rápidos. Quando necessário, este problema pode ser minimizado através de uma redução de modelos através de truncagem balanceada, como apresentado na Seção 2.4.2.

A especificação do problema a ser tratado neste trabalho compreende o aumento da rigidez dinâmica de uma estrutura mecânica. Especificamente, são conhecidos os modos de vibração que causam marcas nas peças usinadas e o aumento da rigidez dinâmica pode ser obtido através da adição de amortecimento a estes modos, o que motiva a busca de métodos de projeto de controle que façam uso do conhecimento dos modos de vibração a serem amortecidos.

As próximas seções apresentam alguns tipos de controladores baseados no espaço de estados. Estes têm como fundamento os conceitos de realimentação de estados e dos observadores de estado.

#### **4.2.1 Realimentação de Estados e Observadores de Estado**

Seja o sistema no espaço de estados descrito através da Eq. (4.14), onde as matrizes de transmissão direta (entre entradas e saídas) são assumidas como nulas.

Esta restrição simplifica a análise e é razoável no sentido que em muitas aplicações as plantas disponíveis possuem uma característica passa-baixa, como as utilizadas neste trabalho. Em (BURL, 1999) são detalhadas as derivações aqui descritas quando existe uma matriz de transmissão direta não-nula. Os sinais de entrada são definidos em um grupo de entradas de controle  $\mathbf{u}$  e em outro de sinais de perturbação aqui considerados como um único sinal  $w$ .

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B_u\mathbf{u} + B_w w \\ \mathbf{y} = C\mathbf{x} \end{cases} \quad (4.14)$$

A realimentação de estados parte do pressuposto que o vetor de estados completo está disponível para a leitura, o que muitas vezes não é verdade já que é possível até mesmo que os estados não tenham um significado físico direto. Esta restrição pode ser contornada através da aplicação de observadores de estados, como descrito mais adiante.

A partir do vetor de estados disponível define-se uma lei de controle do tipo

$$\mathbf{u} = -K_r \mathbf{x} \quad (4.15)$$

como ilustrado na Fig. 32.

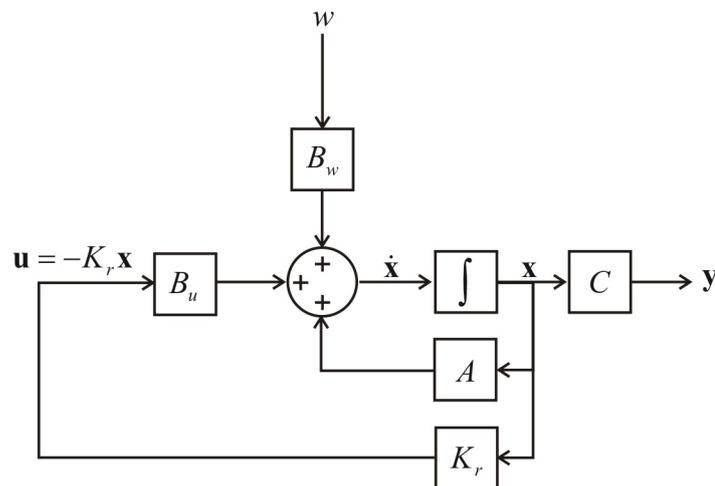


Figura 32: A realimentação de estados

A realimentação de estados causa um deslocamento na posição dos pólos do sistema. Em malha aberta estes são os autovalores de  $A$ . Em malha fechada, eles passam a ser em malha fechada os autovalores de  $A - B_u K_r$ , como mostra a Eq. (4.16)

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B_u(-K_r\mathbf{x}) + B_w w = (A - B_u K_r)\mathbf{x} + B_w w \\ \mathbf{y} = C\mathbf{x} \end{cases} \quad (4.16)$$

Desta maneira a dinâmica do sistema pode ser alterada a partir da realimentação de estados. Pressupondo que os sinais de perturbação excitam os mesmos modos que os sinais de controle, pode-se melhorar a sensibilidade do sistema frente a perturbações. Isto quer dizer que é importante que a controlabilidade do sistema seja a mesma a partir de  $\mathbf{u}$  e de  $w$ . Os métodos de projeto utilizados neste trabalho pressupõe que o sistema seja controlável, o que significa a controlabilidade do par  $(A, B_u)$ . De acordo com a observação anterior, é necessária também a controlabilidade do par  $(A, B_w)$ . O problema do projeto passa a ser a escolha de  $K_r$  de maneira que o sistema em malha fechada apresente propriedades desejadas.

O vetor de estados passa a estar disponível para a realização da realimentação de estados através dos observadores de estados. Eles são modelos matemáticos que têm a propriedade de estimar o valor de  $\mathbf{x}$  através da leitura de  $\mathbf{u}$  (e eventualmente de outros sinais de entrada que possam ser lidos) e  $\mathbf{y}$ . Sinais de perturbação que por natureza não possam ser lidos tendem, portanto, a dificultar o funcionamento de um observador de estados. Os observadores de estado têm a estrutura ilustrada na Fig. 33.

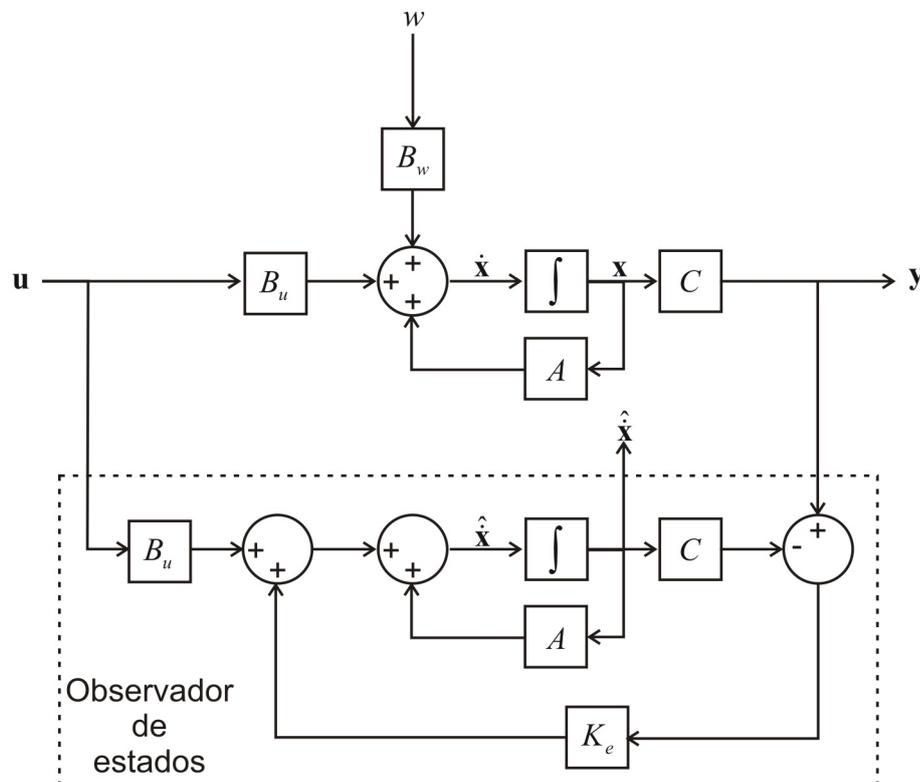


Figura 33: O observador de estados

O vetor de estados estimado  $\hat{\mathbf{x}}$  é definido pela equação diferencial abaixo, onde  $K_e$  é uma matriz relacionada com a velocidade de estimação:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = A\hat{\mathbf{x}} + B_u\mathbf{u} + B_w w + K_e(\mathbf{y} - C\hat{\mathbf{x}}) \quad (4.17)$$

O objetivo fundamental do projeto do observador é obter uma matriz  $K_e$  tal que a estimativa tenda rapidamente ao vetor real. Seja o erro de estimação  $\mathbf{e} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$ , e tomando sua derivada temporal:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}} = \dot{\mathbf{x}} - \dot{\hat{\mathbf{x}}} &= A\mathbf{x} + B\mathbf{u} + B_w w - (A\hat{\mathbf{x}} + B_u\mathbf{u} + K_e(\mathbf{y} - C\hat{\mathbf{x}})) \\ &= (A - K_e C)(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) + B_w w \\ &= (A - K_e C)\mathbf{e} + B_w w \end{aligned} \quad (4.18)$$

Na ausência de perturbações ( $w = 0$ ), o erro tende exponencialmente a zero sempre que o  $(A - K_e C)$  é estável. Mais ainda, o erro tende a zero tão mais rapidamente quanto mais rápidos forem os pólos. Quando  $w \neq 0$  não se pode garantir que o erro tende a zero.

Um controlador baseado na combinação de um observador de estados que provê  $\hat{\mathbf{x}}$  que permite a realimentação de estados  $u = -K_r \hat{\mathbf{x}}$  é um sistema dinâmico que tem como entradas os sinais medidos  $\mathbf{y}$  e como saída os sinais de controle para a planta  $\mathbf{u}$ . O sistema em malha fechada possui um conjunto de pólos que é a união dos autovalores de  $(A - B_u K_r)$  e de  $(A - K_e C)$ , portanto os critérios para a o projeto de  $K_r$  e  $K_e$  podem ser definidos separadamente, o que é definido como *princípio da separação* (BURL, 1999).

### 4.2.2 Controle por Alocação de Pólos

O controle por alocação de pólos consiste no cálculo de  $K_r$  tal que os autovalores de  $(A - B_u K_r)$  sejam alocados de uma maneira desejada:

$$\det(sI - A + B_u K_r) = (s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n) \quad (4.19)$$

onde  $(p_1 \dots p_n)$  é o conjunto de pólos desejados para a malha fechada. A alocação dos pólos pode ser feita de maneira a atingir certos objetivos como por exemplo um determinado tempo de acomodação ou fator de amortecimento. No entanto um problema encontrado é que especificações de desempenho podem levar a sinais

de controle muito altos. A relação entre esta especificação e o esforço de controle necessário para que isto ocorra não está explícita no projeto do controlador.

Existem algoritmos que resolvem a Eq. (4.19) para  $K_r$ . A fórmula de Ackermann (KAILATH, 1980), encontra  $K_r$  para sistemas que possuem apenas um sinal de entrada. Dado que o sistema é controlável a solução é, em geral, única (BURL, 1999). Em (KAUTSKY; NICHOLS, 1985), é apresentado um algoritmo que busca soluções para sistemas com múltiplas entradas. Neste caso existem infinitas soluções e a solução é otimizada de maneira a obter robustez.

Para sistemas com múltiplas entradas é possível (e necessário) definir restrições para o problema da Eq. (4.19) de maneira a obter uma solução única. Em situações práticas é interessante, por exemplo, poupar um atuador em detrimento a outros. Se, por um lado, a existência de vários sinais de controle traz mais flexibilidade, a escolha da solução constitui mais uma tarefa para o projetista. A solução deste problema é feita de maneira mais simples através do controle ótimo.

A alocação de pólos também pode ser utilizada para o cálculo de  $K_e$ , bastando utilizar  $C^T$  no lugar de  $B_u$  na Eq. (4.19) já que  $(A - K_e C) = (A - C^T K_e^T)$ . Assim obtém-se  $K_e^T$ .

Se no caso do cálculo de  $K_r$  os pólos desejados podem ser definidos à luz de especificações de desempenho em malha fechada, no cálculo de  $K_e$  existe a orientação de alocar os pólos de  $(A - K_e C)$  à esquerda dos pólos do sistema a ser observado, de 3 a 5 vezes de acordo com os níveis de ruído e perturbação presentes. Para sistemas com pouco amortecimento este tipo de abordagem não se mostra prática. Além disto, a presença de vários sensores traz o mesmo problema daquele obtido com a presença de vários atuadores. A próxima seção apresenta o cálculo para  $K_e$  e  $K_r$  baseado na minimização de funções de custo.

### 4.2.3 Controle Ótimo

O controle ótimo baseia-se na minimização de uma função custo que pondera a minimização da resposta dos estados e sinal de controle:

$$J = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T Q \mathbf{x} + \mathbf{u}^T R \mathbf{u}) d\tau \quad (4.20)$$

A restrição de  $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}$  e a minimização da equação acima em função de  $K_r$  resulta em

$$K_r = R^{-1}B^T S_r \quad (4.21)$$

onde  $S_r$  é a solução da equação de Ricatti:

$$A^T S_r + S_r A - (S_r B)R^{-1}(B^T S_r) + Q = 0 \quad (4.22)$$

A escolha das matrizes  $Q$  e  $R$ , no entanto, não é uma tarefa simples principalmente quando não se conhece o vetor de estados. Para estruturas vibrantes é interessante a utilização de realizações modais que auxiliam na definição de  $Q$ . A equação de Ricatti acima pode ser resolvida numericamente, como em (ARNOLD; LAUB, 1984). Este tipo de controlador é também referido como LQR (*Linear Quadratic Regulator*), devido à natureza da função de custo quadrática.

A função custo da Eq. (4.20) pode ser levemente alterada:

$$J = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T Q \mathbf{x} + \mathbf{u}^T R \mathbf{u} + \mathbf{x}^T N \mathbf{u}) d\tau \quad (4.23)$$

onde  $N$  é uma matriz que pode auxiliar no projeto através da definição de qual modo deve ser controlado por qual atuador. As equações de Riccati para a solução da minimização desta função são apresentadas em (ARNOLD; LAUB, 1984). Embora a matriz  $N$  traga mais flexibilidade para o projeto, as equações de Riccati têm solução apenas quando  $R > 0$  e  $Q - NR^{-1}N^T \geq 0$ . Para  $N = 0$  estas condições significam que  $R$  seja definida positiva e  $Q$  semi-positiva definida com  $(A, Q^{1/2})$  observável. A escolha de  $N$  não nula deve ser feita com cuidado e é limitada pela condição  $Q - NR^{-1}N^T \geq 0$ .

#### 4.2.4 Filtro de Kalman e Controlador LQG

Para o problema do projeto do observador de estados também existe uma solução ótima, baseada no filtro de Kalman. Neste caso a otimização leva em conta a energia dos ruídos presentes. Assume-se que o sinal de entrada é conhecido e, portanto, livre de ruído. Seja o sistema da Eq. (4.16) onde o sinal de saída é contaminado por um ruído de medição  $\mathbf{v}$  e existe um sinal de entrada  $w$  que caracteriza uma perturbação ao sistema, sua contribuição a cada elemento do vetor de estados é dada através da matriz  $B_w$ . Assim:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B_u \mathbf{u} + B_w w \\ \mathbf{y} = C\mathbf{x} + \mathbf{v} \end{cases} \quad (4.24)$$

Neste contexto, o sinal  $w$  é frequentemente referido como ruído de processo, em oposição ao ruído de medição  $v$ . O filtro de Kalman pressupõe que os dois sinais de ruído são do tipo ruído branco com covariância  $S_w = E[ww^T]$  e  $S_v = E[vv^T]$ . A hipótese de ruído branco implica densidades espectrais de potência constantes<sup>2</sup>  $S_w(\omega) = S_w$  e  $S_v(\omega) = S_v$ . Na verdade, tal tipo de ruído apresentaria teoricamente variância infinita, o que não ocorre na prática. Entretanto, a hipótese de ruído branco é válida sempre que a energia do ruído (medida através da densidade espectral de potência) encontrar-se distribuída uniformemente ao longo da faixa de frequência para a qual o sistema deve funcionar (onde existem modos relevantes).

O filtro de Kalman é aquele que minimiza o valor médio quadrático do erro de estimativa  $E = [ee^T]$  para um sistema sob as condições acima. A solução deste problema é

$$K_e = S_e C^T S_v^{-1} \quad (4.25)$$

onde  $S_e$  é a solução da equação de Ricatti:

$$AS_e + S_e A^T - S_e C^T R^{-1} C S_e + B_w S_w B_w^T = 0 \quad (4.26)$$

O controlador LQG (*Linear Quadratic Gaussian*) é aquele que compreende uma lei de controle  $u = -K_r \hat{x}$  que minimiza uma função custo como a da Eq. (4.20), onde  $\hat{x}$  é estimado através de um filtro de Kalman.

#### 4.2.5 Controlador LQG balanceado

As soluções das equações de Ricatti  $S_r$  e  $S_e$  são obtidas separadamente na derivação acima, e são elas que definem as matrizes de ganho  $K_r$  e  $K_e$ . Em (JONCKHEERE; SILVERMAN, 1983) é demonstrado que para um sistema observável e controlável existe uma versão balanceada do controlador LQG, onde as soluções das duas equações de Ricatti são iguais e diagonais:

$$S_r = S_e = M = \text{diag}(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) \quad \mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_n > 0 \quad (4.27)$$

Uma realização no espaço de estados que obedece à condição acima é denominada de realização LQG balanceada. O algoritmo abaixo calcula a transformação  $T$  que leva uma realização qualquer a esta realização através de  $x = T x_b$  (GAWRONSKY,

<sup>2</sup>Em (BURL, 1999) é apresentada uma versão do filtro de Kalman para o caso de ruídos coloridos.

1998):

1. Definir  $Q$ ,  $R$ ,  $S_w$  e  $S_v$  e resolver as respectivas equações de Ricatti;
2. Decompor  $S_c$  e  $S_e$ :

$$S_c = P_c^T P_c \quad S_e = P_e^T P_e \quad (4.28)$$

3. Calcular a matriz  $H$  tal que

$$H = P_c P_e \quad (4.29)$$

4. Encontrar a decomposição em valor singular de  $H$ :

$$H = V M U^T \quad (4.30)$$

5. Calcular  $T$

$$T = P_e U M^{-1/2} \quad (4.31)$$

A realização LQG balanceada é  $(T^{-1}AT, T^{-1}[B_u B_w], CT)$ , mas ainda é preciso ajustar a matriz  $Q$  para o vetor de estados, uma vez que na sua definição original ele compõe a forma quadrática com o vetor de estados não balanceado:

$$Q_b = T^T Q T \quad (4.32)$$

Agora é possível calcular  $K_r$  e  $K_e$  para a realização LQG balanceada e a função de custo adaptada pela Eq. (4.32).

A diferença fundamental entre esta versão balanceada e sua versão original do controlador LQG é que ela força as soluções das equações de Ricatti a serem iguais, de maneira que o projeto da realimentação de estados e do filtro de Kalman não são mais independentes. Esta perda de flexibilidade pode facilitar o trabalho do projetista uma vez que o projeto em separado do observador e realimentação de estados pode levar à tentativa de controlar modos fracamente observáveis e vice-versa. Isto faz com que, em geral, a resposta em frequência do controlador seja mais suave em comparação com o LQG não balanceado, o que é uma característica importante para controladores onde a excitação (neste caso a saída do sistema a ser controlado) é larga no domínio da frequência.

Neste trabalho é proposta a utilização desta versão balanceada do controlador LQG para um modelo em uma realização modal. Esta combinação concilia a facilidade de sintonia do controlador com um significado físico/estrutural dado pela realização modal.

Uma limitação importante dos métodos de projeto aqui apresentados é que estes partem do pressuposto de que o sistema real tem uma dinâmica idêntica à do modelo disponível. Na prática os sistemas reais têm características lineares ou parâmetros que podem variar em função de condições ambientais. Este tipo de variação pode afetar o desempenho de controladores ou até mesmo comprometer a sua estabilidade. Este problema é tratado de maneira explícita através de métodos de controle robusto, que admitem faixas para a variação de parâmetros do modelo e visam garantir tanto a estabilidade quanto o desempenho do controlador. Uma referência importante nesta área pode ser encontrada em (ZHOU; DOYLE, 1998), onde é estudado o método de projeto  $H_\infty$ . Em (GAWRONSKY, 1998) é também apresentada uma versão balanceada para este método de projeto.

O Capítulo 5 apresenta os trabalhos desenvolvidos anteriormente aos resultados apresentados nos capítulos seguintes, onde resultados são mostrados e tentam ilustrar a superioridade da modelagem através de realizações modais no espaço de estados e do projeto do controlador LQG balanceado frente a outros utilizados para comparação.

## 5 Desenvolvidos Anteriores

Este capítulo apresenta os trabalhos de investigação desenvolvidos anteriormente a este trabalho, o que compreende, a análise modal descrita na Seção 5.1 que fundamenta os critérios para o posicionamento dos sensores e atuadores, descritos na Seção 5.2, que também apresenta a influência da presença dos atuadores na dinâmica da estrutura através da comparação com uma análise modal realizada posteriormente à montagem dos atuadores.

O Instituto de Máquinas-ferramentas e Tecnologia da Produção da Universidade Técnica de Braunschweig/Alemanha (IWF - Institut für Werkzeugmaschinen und Fertigungstechnik - Technische Universität Braunschweig) desenvolve pesquisas, dentre outras áreas, em usinagem de precisão, desenvolvimento de máquinas-ferramentas e sistemas de controle. Este trabalho encontra-se na interseção de duas das áreas de concentração da pesquisa desenvolvida neste instituto, a usinagem de precisão e desenvolvimento de máquinas-ferramentas e sistemas de controle. De fato, este trabalho prevê o desenvolvimento de um sistema de controle ativo de vibrações para máquinas-ferramentas com o objetivo de tornar processos de usinagem mais estáveis. O interesse no controle ativo de vibrações vem atrelado a uma linha de pesquisa que prevê a investigação da utilização de componentes adaptrônicos<sup>1</sup> para a redução dos níveis de vibração em máquinas.

A máquina escolhida para o estudo foi a retificadora Blohm-Hauni modelo HFS 9V, cujo modelo CAD está retratado na Fig. 34. A escolha desta máquina foi feita em comparação com um modelo AR 10 Tipo 5 da Reform, também disponível para este fim (PIETSCH et al., 2005). Para isto, a análise modal dos dois modelos foi feita e a escolha levou em conta a adequação dos modos de vibração e da estrutura de cada uma delas à implementação de controle ativo sem que partes das máquinas tivessem de ser substituídas (HESELBACH, 2005).

A redução de vibrações em estruturas paralelas constitui uma das linhas de

---

<sup>1</sup>Nenhuma tradução razoavelmente exata do termo alemão “Adaptronik” foi encontrada na literatura. Este termo designa a instrumentação e as abordagens de controle relativos ao desenvolvimento de estruturas de estruturas adaptativas.

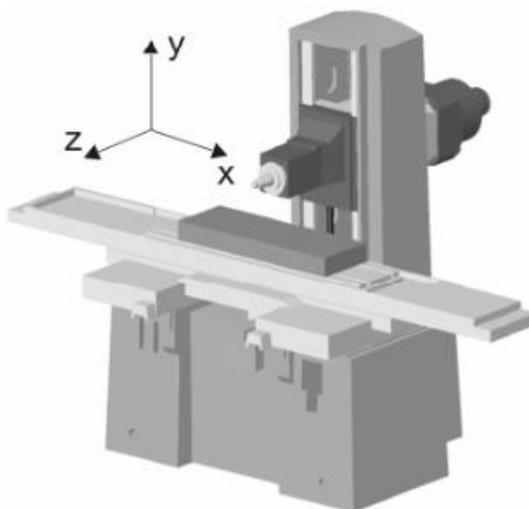


Figura 34: Retificadora Blohm-Hauni HFS 9V

pesquisa do IWF. Especialmente no contexto do SFB 562, este instituto desenvolve pesquisas em conjunto com o DLR (Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt) na área de sistemas robóticos para manipulação e montagem através de estruturas paralelas com controle ativo de vibrações. Diversos materiais têm sido testados para o projeto de sistemas de controle ativo em estruturas paralelas (KEIMER et al., 2003; GLASER et al., 2002). Em (HESSELBACH et al., 2001) são descritas técnicas de controle para a redução de vibrações e para a melhoria da exatidão em robôs paralelos. Mostra-se que vibrações estruturais induzidas pela própria máquina (em especial pelos motores) podem ser contra-atacadas através de técnicas de controle ativo. As abordagens apresentadas são baseadas em um manipulador paralelo planar. Diversas técnicas de controle baseado em modelo são apresentadas em (PIETSCH et al., 2004) e comparadas à implementação em um manipulador paralelo.

A execução de testes de usinagem na retificadora Blohm-Hauni mostrou o aparecimento de marcas na peça trabalhada que são oriundas de vibrações no eixo-árvore. A consideração da velocidade de corte utilizada permite a verificação da frequência que origina cada tipo de marca. Através da variação dos parâmetros de usinagem são obtidas marcas referentes a faixas de frequência.

Faixa	#1	#2	#3
Frequência [Hz]	23 - 26	83 - 97	189 - 195

Tabela 5: Frequências das vibrações que originam marcas na peça

A primeira faixa coincide com a frequência angular do eixo-árvore (em geral também podem ser obtidas marcas com frequências iguais ao dobro ou triplo desta). Essas marcas não correspondem, portanto, a nenhuma forma de vibração do eixo-

árvore, mas sim ao seu desbalanceamento. A proposta para a minimização deste tipo de vibração é apresentada na Seção 4.1 que descreve o controle por pré-alimentação. De fato, este tipo de vibração não é decorrente a uma baixa rigidez dinâmica do eixo nesta freqüência, mas sim a uma perturbação persistente e estacionária com energia quase que toda concentrada nesta freqüência. Além do desbalanceamento, é possível que o rebolo não possua uma circunferência perfeita, o que também contribui para o aparecimento de marcas de freqüência correspondente à sua rotação.

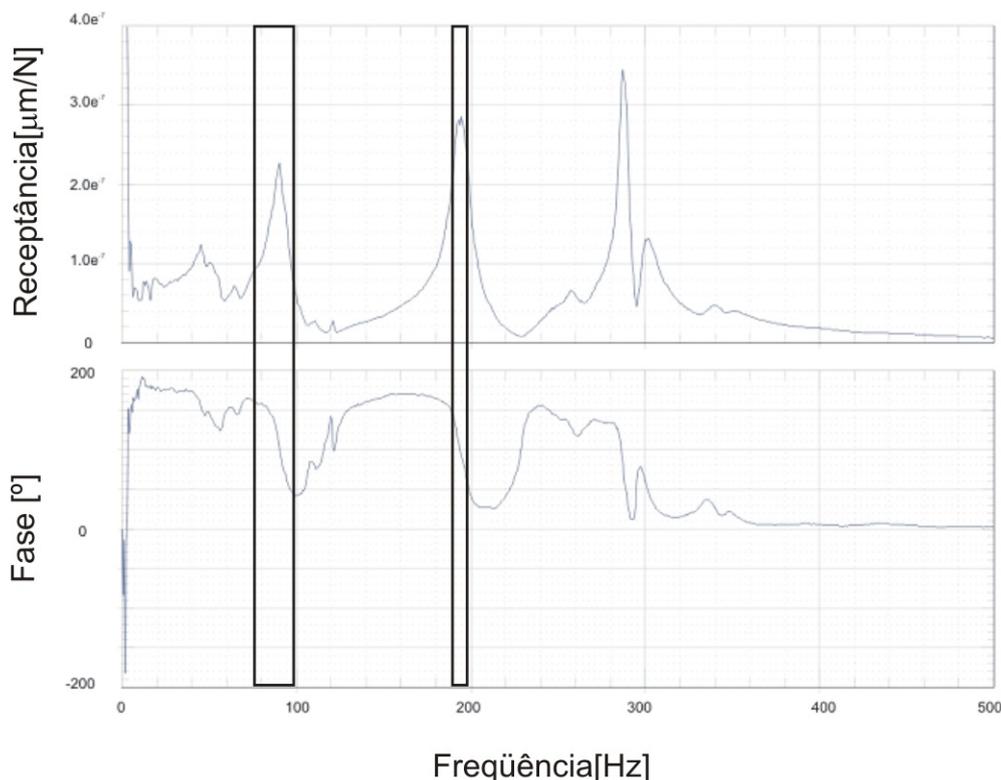


Figura 35: Faixas de freqüência das marcas na usinagem

As outras duas faixas, no entanto, coincidem com freqüências de ressonância do eixo-árvore. De fato, como ilustrado na Fig. 35, que apresenta a receptância do flange para uma força aplicada sobre ele mesmo. Essas vibrações são consequência de excitações transitórias oriundas de forças do processo de usinagem, como ilustrado na Fig. 36. O foco do trabalho restringe-se, então, em desenvolver uma estratégia de controle ativo que adicione amortecimento a estes modos de maneira a aumentar a rigidez dinâmica nestas freqüências.

As marcas oriundas de freqüências da faixa #1 estão sempre presentes na peça usinada, já que o desbalanceamento do eixo-árvore pode ser apenas minimizado. As marcas referentes às outras faixas ocorrem apenas quando os parâmetros de usinagem levam ao que se chama de um processo instável, onde as forças são grandes o suficiente para que os modos de vibração da estrutura sejam excitados.

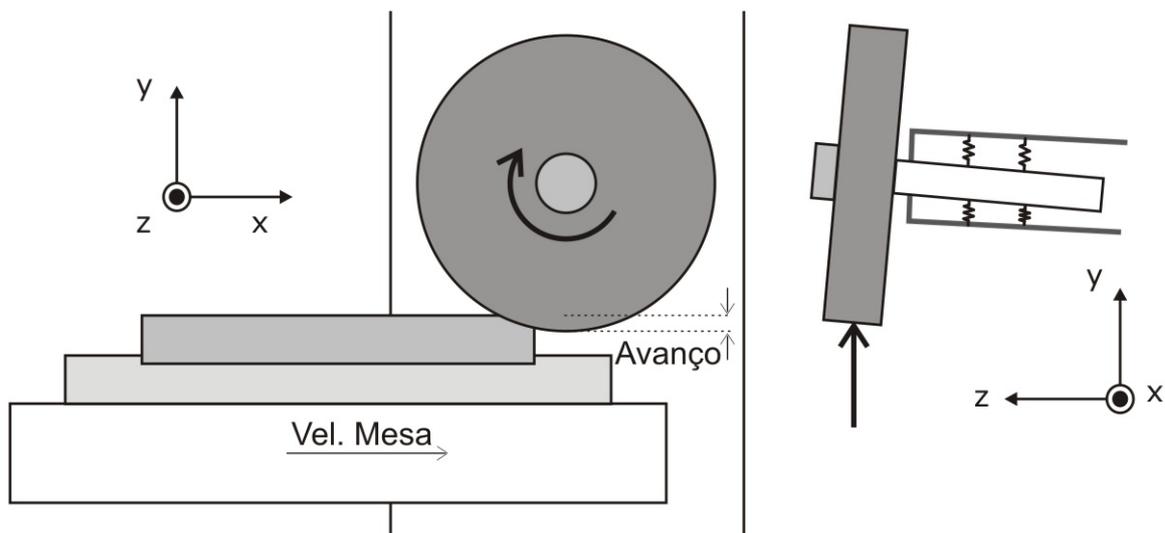


Figura 36: Forças decorrentes do processo de usinagem

Este tipo de vibração pode ser solucionado através do reajuste dos parâmetros de usinagem, que envolvem o material do rebolo, velocidade da mesa, velocidade do rebolo e avanço. Além disto, é possível realizar um alto número de passadas de maneira que as forças do processo sejam cada vez menores e um melhor acabamento seja obtido (v. Fig. 36). De modo geral, uma usinagem mais lenta evita este tipo de vibração e soluciona o problema. O aumento da rigidez dinâmica nesses modos vem, então, a propiciar que se utilize a máquina com velocidades mais altas e sem que se tenha a necessidade de se realizar um elevado número de passadas.

## 5.1 Análise Modal

A análise modal realizada foi do tipo experimental. Neste procedimento é definido um conjunto de pontos na máquina como ilustrado na Fig. 37. A excitação é aplicada no ponto indicado na figura e a resposta é adquirida sucessivamente em todos os pontos da malha definida. As marcas obtidas durante a usinagem são decorrentes de movimentos ao longo da direção Y. Mas como ilustrado na Fig. 36 forças importantes na direção X resultam da usinagem. Entretanto, testes realizados asseguram que os níveis de vibração na direção Y são importantes apenas quando a excitação ocorre nesta direção. Assim, neste trabalho são consideradas apenas os movimentos e forças nesta direção.

Como apresentado na Seção 3.1(v. Fig. 16) a realização de apenas uma linha ou coluna de medições é suficiente para determinação das formas modais. No caso da análise modal da Blohm a realização de uma coluna de medições mostra-se mais

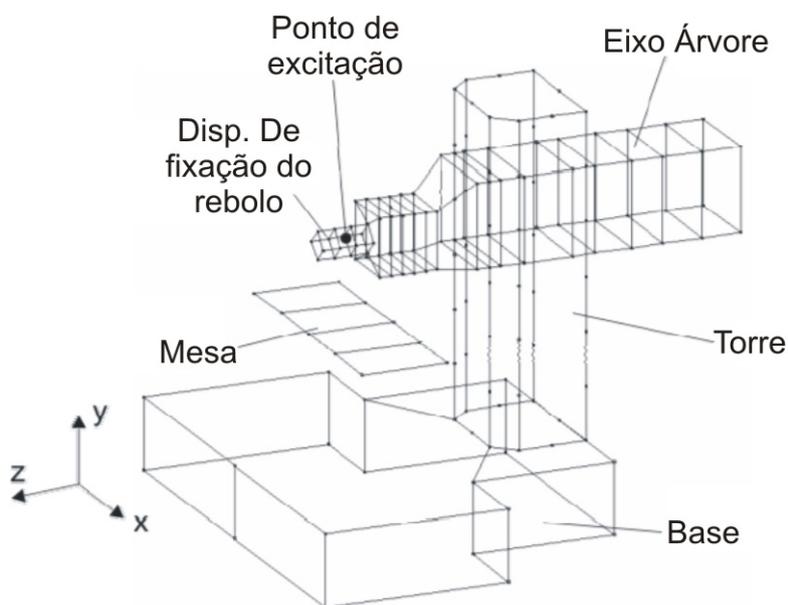


Figura 37: Aproximação geométrica para análise modal experimental

intuitiva já que permite a avaliação do comportamento vibratório quando da ocorrência de forças sobre o rebolo na direção Y. Tanto a excitação por martelo de impacto como através da utilização de um vibrador provêm resultados equivalentes. O vibrador é montado entre a mesa e o flange, como indicado na Fig. 38. Um vibrador comporta-se, de maneira geral, como um sistema de um grau de liberdade que possui, portanto, uma frequência de ressonância. A equivalência dos resultados utilizando vibrador e martelo só é possível se a ressonância do vibrador for alta o suficiente para que o vibrador atue apenas como uma mola de maneira a não afetar a identificação dos modos de interesse.

A equivalência dos dois tipos de excitação justifica a utilização do vibrador por motivos práticos. De fato, a análise modal prevê a excitação pelo ponto indicado na Fig. 38 e a aquisição da resposta em cada um dos pontos da malha da Fig. 37. Além disto, a estrutura em questão tem uma massa bastante elevada (o eixo-árvore tem 500 Kg) de maneira que, além dos cuidados práticos comuns referentes à excitação com martelo, os ataques devem ser feitos com suficiente intensidade para que os modos sejam excitados.

A pré-carga aplicada sobre o vibrador influencia o valor da sua ressonância, portanto é preciso definir um nível mínimo de pré-carga que garante que a sua ressonância seja suficientemente alta. Para a verificação deste nível é realizado um experimento onde utiliza-se um transdutor de força adicional que é montado entre o vibrador e a mesa, provendo o sinal  $f_t$  cuja componente estática corresponde à pré-carga. Dado que o transdutor utilizado é capaz de medir forças estáticas e dinâmicas é possível ve-

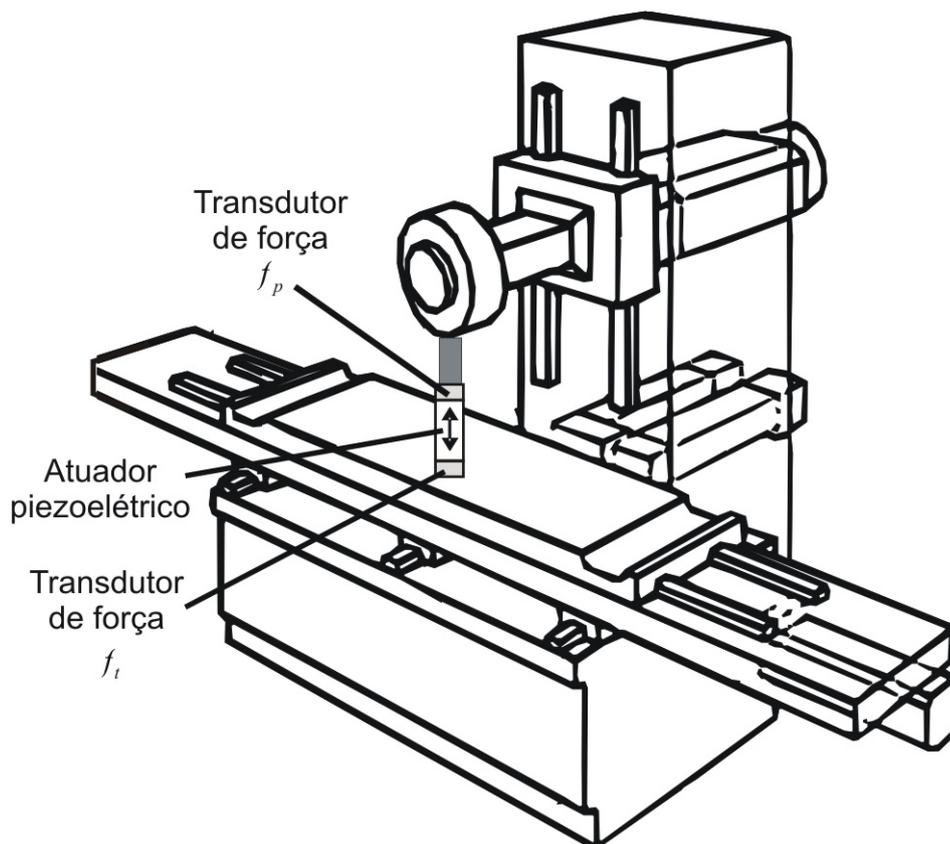


Figura 38: Montagem do vibrador

rificar a relação entre  $f_p$  (entre o atuador e o flange) e  $f_t$  como função da frequência e da pré-carga utilizada. Esta relação pode ser avaliada através da estimativa da FRF entre  $f_p$  e  $f_t$ , ou seja, da transmissibilidade de força do vibrador (definida da Seção 2.2). A Fig. 39 apresenta os resultados obtidos para três níveis de pré-carga. Para 250 N verifica-se que a ressonância encontra-se em torno de 380 Hz, onde existe 90° de defasagem entre os dois sinais. Para as curvas correspondentes a pré-cargas de 600 e 800 N verifica-se que não há defasagem e o ganho é unitário dentro da faixa de modos relevantes, ou seja até 200 Hz. A faixa de 200 a 300 Hz já apresenta alguma influência da ressonância do vibrador. De fato, os testes com martelo de impacto são equivalentes até aproximadamente 300 Hz, frequência a partir da qual existe pouca excitação utilizando ponteiras tanto de nylon como alumínio. Assim, os resultados para esta análise modal podem ser considerados relevantes até no máximo 300 Hz.

A Figura 35, na página 84, mostra a receptância do sistema quando da aquisição da resposta no flange. As formas dos modos de vibração identificadas estão representados na Fig. 40.

Ao primeiro modo está associada uma frequência natural de 49 Hz. São visíveis deslocamentos da parte traseira do eixo-árvore enquanto deslocamentos na parte anterior, onde se localiza a ferramenta, mostram-se pequenos. Isto explica o não apare-

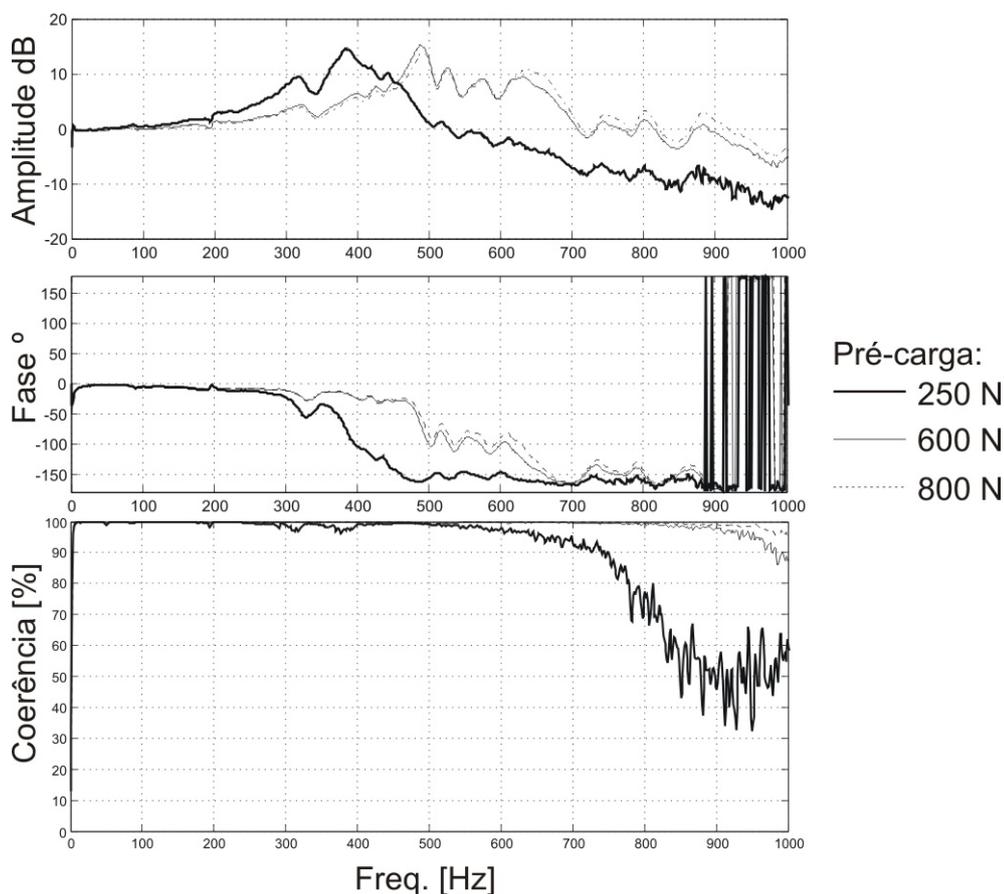


Figura 39: O efeito da pré-carga na transmissibilidade do vibrador

cimento de marcas com esta freqüência. O segundo modo tem uma freqüência natural associada de 89 Hz e corresponde a um modo de corpo rígido do eixo-árvore. A mesa se move em anti-fase mas com amplitude menor. Assim, existe um movimento relativo entre a mesa e o eixo-árvore. Este foi o único modo de vibração de corpo rígido identificado.

O modo 3 (192 Hz) corresponde a um modo de vibração do eixo-árvore, sendo que o flange e também a fixação do eixo-árvore com a torre correspondem a anti-nós. Neste modo também há movimento relativo entre a mesa e o eixo-árvore, outras partes da máquina como a torre não apresentam movimento importante na direção Y.

O quarto modo (295 Hz) também corresponde a mais um modo de vibração do eixo-árvore, com movimentos predominantemente na parte anterior. A ausência de marcas decorrentes deste modo de vibração mostra que ele é dificilmente excitado durante o processo. De fato, a distribuição da excitação depende, entre outros fatores, da dureza do rebolo e material usinado. De maneira que os choques geram uma excitação parecida com aquela gerada por um martelo de impacto (v. Fig. 14), ou seja, concentrada em baixas freqüências.

Os testes de usinagem mostram que os modos 1 e 4 não são responsáveis por

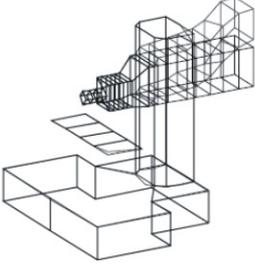
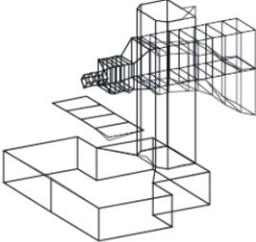
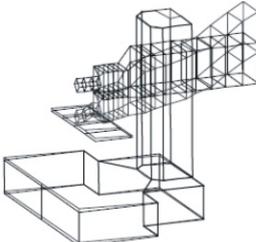
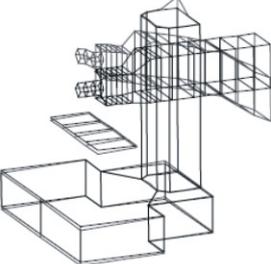
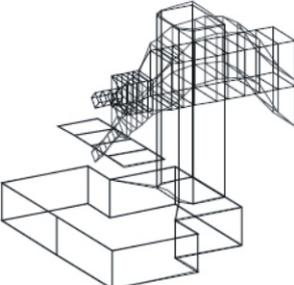
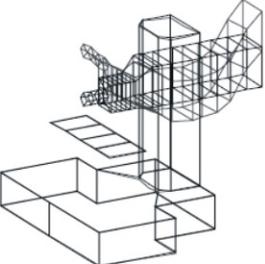
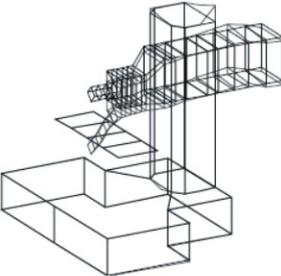
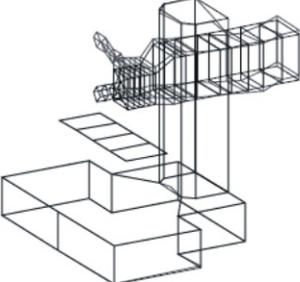
Modo	Frequência [Hz]	Forma do modo	
1	49		
2	89		
3	192		
4	295		

Figura 40: Formas dos modos de vibração identificados

marcas na peça nem na ferramenta. Por outro lado, os modos 2 e 3 constituem a origem de marcas detectadas.

## 5.2 Posicionamento e Montagem dos Atuadores e Sensores

O primeiro princípio a ser levado em conta para o posicionamento dos atuadores é utilizá-los de maneira a maximizar a controlabilidade dos modos identificados. Como apresentado na Seção 2.4.3 a controlabilidade é maior quanto maior for o valor da forma modal no ponto onde aplica-se a força. Em um caso limite um modo não é controlável se os atuadores aplicam forças apenas sobre os nós dos modos.

O posicionamento baseado nas formas modais pode levar a soluções não práticas ou até mesmo impossíveis devido a restrições mecânicas. Uma delas é que o processo de retificação inclui a utilização de fluido refrigerante e remoção de cavaco. De fato a região próxima à peça está exposta a estes materiais e a montagem de atuadores traz a necessidade de vedação.

O projeto no qual se inclui este trabalho também prevê o aumento da rigidez estática do eixo-árvore na direção Y. Portanto é interessante a busca de soluções onde os atuadores possam ser utilizados para o enrijecimento dinâmico e também estático futuramente.

Finalmente, não são interessantes soluções que impliquem a substituição de partes existentes da máquina. Este tipo de solução viria a dificultar a proposta de uma solução modular para o controle ativo de vibrações em máquinas-ferramentas. Soluções modulares mostram-se mais interessantes economicamente já que permitem a aplicação opcional em máquinas já existentes e de cinemática equivalente.

Como apontado na seção anterior, o foco do trabalho é a adição de amortecimento para os modos 2 e 3. A análise da forma modal correspondente ao modo 2 mostra que este modo apresenta maiores amplitudes no fuso de esferas recirculantes. O movimento do eixo-árvore é de corpo rígido e adquire uma característica pendular já que seu centro de massa encontra-se cerca de 13 cm para trás do ponto onde o eixo-árvore é apoiado pelo fuso de esferas, exatamente no ponto onde encontra-se o único nó deste modo.

O modo 3 consiste basicamente em um modo de corpo flexível do eixo-árvore, onde seus extremos se movem em fase e a região central em anti-fase.

A atuador A é posicionado entre o fuso de esferas recirculantes e o eixo-árvore, de maneira a permitir o enrijecimento ativo do fuso, uma vez que a rigidez deste modo está intimamente ligada ao modo 2. Além disto este atuador também é capaz de controlar o modo 3, que possui grandes amplitudes na região central do eixo-árvore. Tensões tangenciais podem danificar permanentemente atuadores piezo-elétricos (PI,

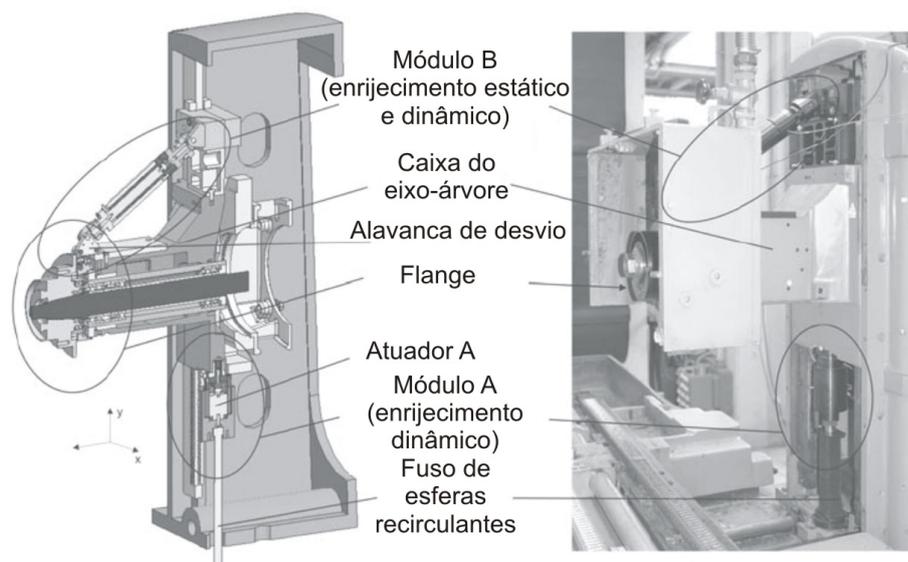


Figura 41: Atuadores e sensores montados

2006), o que justifica a necessidade de construção de uma guia. Esta é construída de maneira a abrigar um transdutor de força em série com o atuador. A Fig. 41 apresenta a montagem do módulo A, que compreende a guia, o transdutor de força e o atuador em si. Tal módulo pode ser montado em muitos tipos de máquina-ferramenta que apresente cinemática parecida com a utilizada.

O posicionamento do atuador B é escolhido de maneira a permitir o controle destes dois modos e adicionalmente enrijecer estaticamente a estrutura. A Fig. 41 mostra a montagem do atuador, que como no caso do atuador A necessita da construção de uma guia para evitar tensões transversais. A disposição diagonal faz com que este atuador efetue forças nas direções Y e Z. Forças na direção Z são indesejáveis primeiramente porque os modos relevantes consistem em movimentos na direção Y. Além disto, estas seriam somadas à pré-carga necessária para a montagem do módulo e causariam tensões que poderiam danificar o fuso do eixo-árvore, que não é projetado para suportar tensões longitudinais. Este problema é contornado através na construção de uma alavanca de desvio de forma triangular, mostrada na Fig. 42. Esta possui o pivô fixo à caixa do eixo-árvore e transmite a força diagonal para a direção Z. Alguns problemas são decorrem da utilização desta alavanca e são descritos na Seção 6.2.1, que apresenta uma análise da dinâmica dos atuadores.

O posicionamento de sensores obedece aos mesmos princípios quanto à consideração das formas modais devido à dualidade dos conceitos de controlabilidade e observabilidade. As restrições mecânicas e geométricas são bem menos críticas já que acelerômetros são transdutores de dimensão bastante reduzida. Já que o objetivo do controle é diminuir os movimentos do rebolo é interessante medir o seu posiciona-

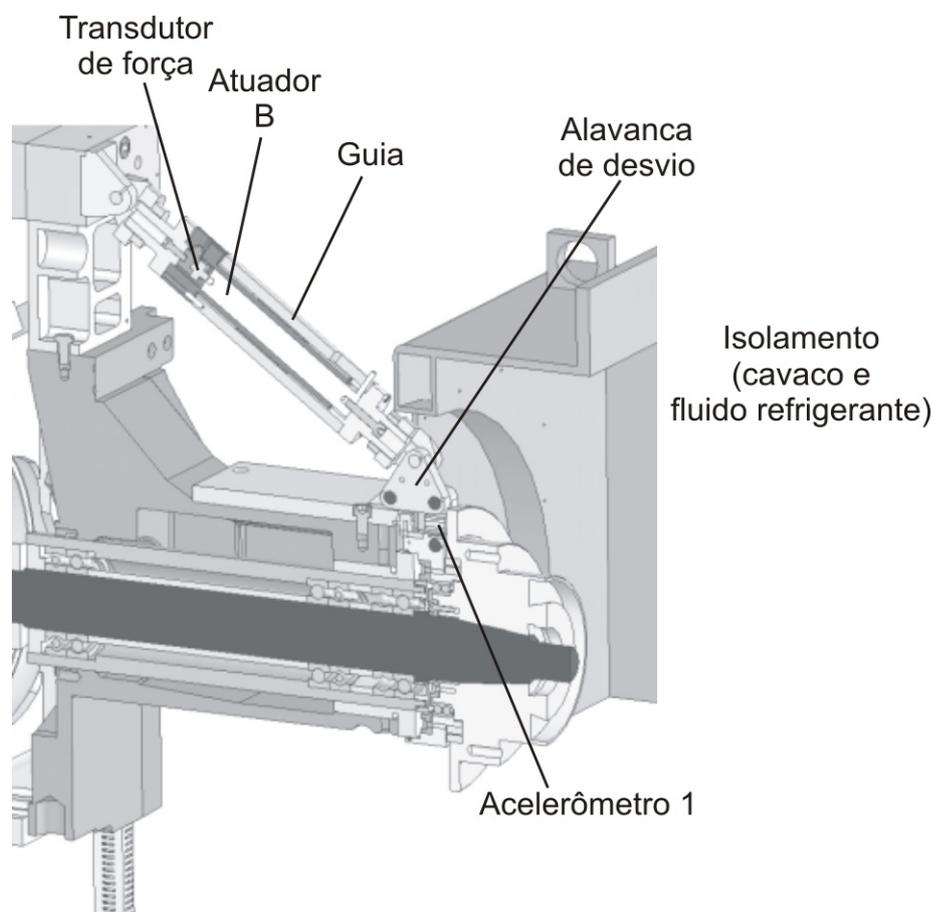


Figura 42: Módulo completo correspondente ao atuador B

mento vertical. A parte não-girante mais próxima é entre a alavanca de desvio triangular e o flange. Neste ponto é montado um acelerômetro, como apontado na Fig. 42. A medição neste ponto é muito importante mas durante o processo é percebido um alto nível de ruído que pode ser atribuído à movimentação do rolamento do eixo-árvore, diretamente abaixo do sensor.

O segundo acelerômetro é posicionado sob o caixa do eixo-árvore, no ponto onde é aplicada a força do atuador A. A medição da aceleração nesta posição auxilia a observação do modo 3, já que nesta região o eixo move-se em anti-fase com suas extremidades. Esta região não apresenta níveis de ruído tão altos como aquela região onde o primeiro acelerômetro é montado.

Finalmente, é montado um terceiro acelerômetro na parte traseira do eixo, onde obtêm-se maiores amplitudes de movimento para todos os modos, com exceção do quarto. Entretanto, o quarto modo não é responsável pelo aparecimento de marcas na usinagem e como é descrito abaixo, é bastante enrijecido pela presença do atuador B.

### 5.3 Influência dos Atuadores no Comportamento Dinâmico

Alguma alteração na dinâmica da estrutura é esperada após a montagem dos módulos A e B. Entretanto é importante que o comportamento geral e, principalmente, as formas de vibração mantenham a natureza original de maneira a permitir que os atuadores e sensores possam controlar e observar os modos de interesse. Para a avaliação desta mudança faz-se necessária a realização de uma nova análise modal.

O módulo A é montado em série com o fuso de esferas recirculantes. A Fig. 43 apresenta os elementos rígidos em série. A rigidez do conjunto base e fuso é de aproximadamente  $52,68 \text{ N}/\mu\text{m}$ . O módulo A é composto pelo atuador de rigidez  $680 \text{ N}/\mu\text{m}$ , um adaptador de e o sensor de força, que têm rigidez bem mais alta. A rigidez equivalente do conjunto é, então, de  $47,39 \text{ N}/\mu\text{m}$ . Portanto, a pequena mudança na rigidez decorrente da montagem do módulo A faz com que grandes mudanças não sejam esperadas para os modos 1 e 2, que estão intimamente ligados com a rigidez do conjunto que suporta o eixo-árvore.

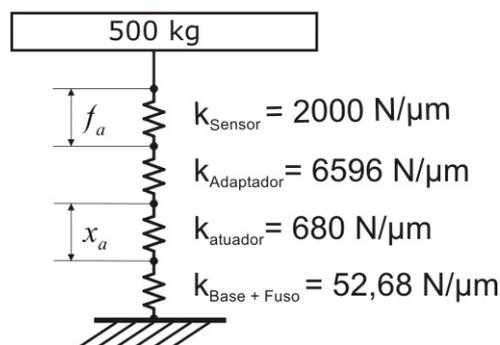


Figura 43: A influência do Atuador A

Já o módulo B, tende a trazer um enrijecimento dos modos 2, 3 e 4. A quantificação deste enrijecimento está relacionada com a pré-carga realizada na montagem deste módulo. A Fig. 44 apresenta a receptância para uma força aplicada sob o flange e a resposta adquirida sobre ele mesmo.

De fato, o modo 2 apresenta algum enrijecimento. O modo 3, por outro lado, apresenta-se mais rígido, mas com basicamente a mesma forma modal. A alteração no quarto modo é mais nítida, esta no entanto mostra-se bastante sensível à pré-carga utilizada na montagem.

É importante salientar que os dados apresentados até aqui foram realizados antes deste trabalho. Uma diferença importante com estes resultados e os apresentados daqui a diante é que os primeiros foram realizados sem a montagem do rebolo. As curvas apresentadas na Fig. 44 foram obtidas em análises modais onde o rebolo

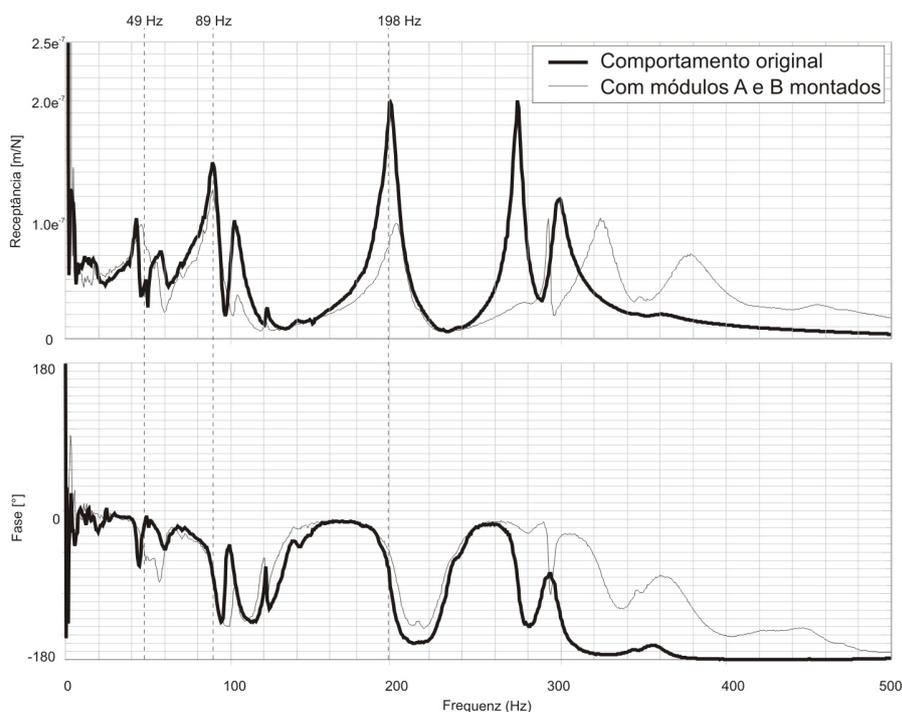


Figura 44: Receptância no flange com e sem os módulos A e B

não estava montado. A influência do rebolo consiste basicamente em uma translação do modo 3, que sem rebolo apresenta-se em torno de 198 Hz e não em torno de 192 Hz como identificado anteriormente. A translação exata depende da pré-carga utilizada na montagem do módulo B. Além disto, a presença do rebolo torna mais nítido um modo de vibração com frequência natural de aproximadamente 260 Hz. A identificação descrita na Seção 6.2 leva em conta estas diferenças.

O Capítulo 6 inicia a apresentação dos resultados obtidos neste trabalho. Nele são apresentados inicialmente a identificação e modelagem do comportamento dinâmico da estrutura. Em seguida, no Capítulo 7 são apresentados alguns resultados importantes na perspectiva de efetuar uma comparação entre alguns métodos de projeto de controlador. O Capítulo 8 apresenta uma proposta de metodologia para projetos de controle ativo de vibrações baseada na experiência adquirida neste trabalho.

## 6 Identificação e Modelagem

Este capítulo apresenta o procedimento de identificação utilizado para a obtenção dos modelos necessários para o projeto de controladores. A Seção 6.1 apresenta a metodologia utilizada para a identificação de sistemas e ressalta o tratamento realizado nos dados de entrada de maneira a melhorar o desempenho dos algoritmos utilizados.

Na Seção 6.2 é apresentada a instrumentação utilizada para a experimentação. Além disto é analisado o comportamento dinâmico dos atuadores e os modelos obtidos são apresentados através da sua resposta no domínio da frequência. Finalmente, ainda nesta seção é descrito o procedimento de composição dos modelos obtidos e a posterior redução.

### 6.1 Metodologia de Identificação de Sistemas

Este trabalho não inclui a investigação de algoritmos de identificação com o objetivo de avaliar sua aplicação para sistemas com pouco amortecimento. Foram utilizados métodos disponíveis no pacote computacional System Identification Toolbox do Matlab© para os resultados apresentados adiante. Esta ferramenta foi utilizada para tratar os dados de entrada e aplicar métodos disponíveis para a obtenção de modelos cuja resposta em frequência fosse o mais próxima possível daquela obtida experimentalmente.

De um modo geral, sistemas com pouco amortecimento apresentam uma dificuldade adicional para sua identificação quando comparados com sistemas com maior amortecimento ou principalmente com sistemas que têm apenas pólos reais. Sistemas com pouco amortecimento estão muito próximos da instabilidade (v. Apêndice A), o que faz que estes algoritmos tenham a tendência de identificá-los como instáveis.

Em alguns casos é possível aplicar a redução de modelos via realização balanceada (apresentada na Seção 2.4.2) para eliminar modos instáveis. Entretanto não é possível garantir que a resposta em frequência do modelo reduzido se diferencie

pouco do sistema original.

Muitos métodos podem ser aplicados a partir de dados de entrada tanto no domínio do tempo quanto no da freqüência. Esta segunda possibilidade apresenta algumas vantagens em relação à primeira. Uma delas se refere ao volume de dados de entrada. Como é interessante utilizar a freqüência de amostragem alta de maneira a evitar efeitos como aliasing, as amostras obtidas experimentalmente tendem a ficar muito grandes no domínio do tempo. O cálculo da resposta em freqüência permite reduzir este volume de dados e também propicia um tratamento especial, como a utilização de um alto número para realização de médias e aplicação de janelas espectrais. Além disto, a transformação no domínio da freqüência pode incluir a aplicação de filtros nos sinais de entrada e saída, de maneira a remover componentes fora da faixa de freqüência que contém os modos de vibração dominantes. Finalmente, a função resposta em freqüência pode ser utilizada para o cálculo da resposta ao impulso, que pode ser usada como dado no domínio do tempo para métodos que tenham esta limitação.

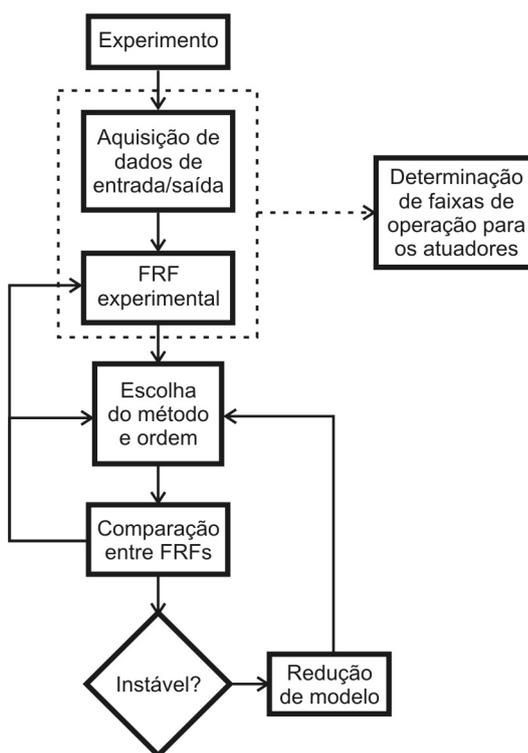


Figura 45: Metodologia utilizada neste trabalho

A Fig. 45 ilustra a metodologia utilizada neste trabalho para a identificação de sistemas. Os dados de entrada e saída são adquiridos experimentalmente e a partir deles é construída a função resposta em freqüência. A linearidade do sistema a ser identificado pode ser verificada neste processo uma vez que um sistema linear tem sua FRF constante e independente do tipo de sinal aplicado como entrada. Portanto, este

procedimento permite definir faixas para as quais a função resposta em frequência é válida e definir então faixas de operação para os atuadores onde os modelos utilizados são válidos.

O próximo passo é a definição do método a ser utilizado e da ordem do sistema. Estas escolhas são feitas de maneira iterativa através da comparação da FRF do sistema identificado com aquela obtida experimentalmente. O processo iterativo pode compreender a tentativa de definir o método, a ordem e também pode incluir um novo cálculo da função resposta em frequência experimental (que é dado de entrada para o método). Este novo cálculo pode ser feito variando filtros utilizados, número de médias, janela espectral, etc.

Caso o sistema identificado apresente uma FRF aceitável mas tenha pólos instáveis, é possível aplicar uma redução de modelos via realização balanceada para a eliminação destes modos. O modelo obtido na redução deve ter suas funções resposta em frequência novamente comparadas com as experimentais.

## 6.2 Identificação e Modelagem

O esquema básico de controle, apresentado na Fig. 46, inclui os dois atuadores piezo elétricos e os três acelerômetros. Os dois atuadores, denominados aqui A e B, são comandados por tensões de controle  $u_a$  e  $u_b$ . Estes sinais são amplificados para tensões  $V_a$  e  $V_b$ , cujos valores não são facilmente medidos e não encontram-se disponíveis para o desenvolvimento do sistema.

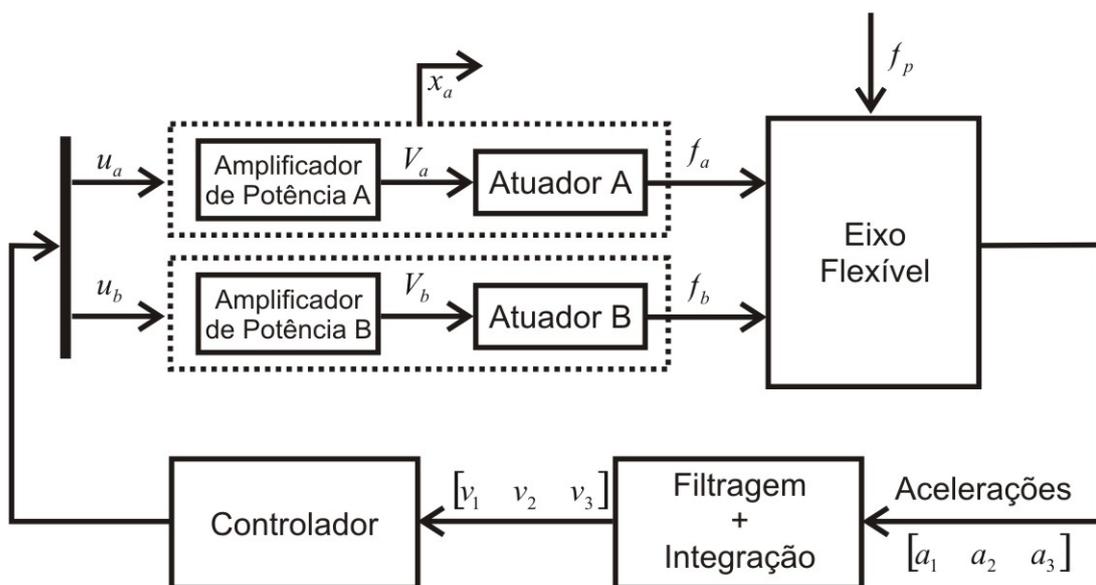


Figura 46: Esquema básico de controle

Todo o eixo-árvore é suportado pelo atuador A, o que configura uma carga con-

siderável e traz a necessidade de um amplificador de potência com capacidade suficiente. O circuito formado pelo amplificador de potência e o atuador constitui, grosso modo, um circuito RC que passa a ter uma frequência de corte dependente da capacitância do atuador utilizado (neste caso 2300 nF), como verificado na Seção 6.2.1. Para este atuador encontra-se disponível um servo controlador (integrado ao amplificador de potência) cujo objetivo é assegurar que o deslocamento do atuador é proporcional à tensão  $u_a$ . O deslocamento deste atuador é medido através de um extensômetro colado à cerâmica piezoelétrica cujo sinal é aqui denominado  $x_a$ .

Transdutores de força são montados em série com os dois atuadores e provêm os sinais denominados como  $f_a$  e  $f_b$ . A Seção 6.2.1 descreve o procedimento para a identificação dos atuadores A e B, o que compreende a dinâmica entre  $u_a$  e  $f_a$  e entre  $u_b$  e  $f_b$ .

Ainda na Fig. 46, o sinal  $f_p$  representa forças de perturbação na direção Y geradas no processo de usinagem. Especialmente com o propósito de estudar a dinâmica do sistema e seus modos de vibração, o sinal é emulado através de um vibrador posicionado entre o flange e a mesa, como ilustrado na Fig. 38, onde o procedimento de análise modal experimental é descrito.

Assim, três forças agem no eixo da máquina e o comportamento vibratório é medido através dos três acelerômetros cujos sinais ( $a_1$ ,  $a_2$  e  $a_3$ ) são condicionados para que sejam utilizados pelo controlador como  $v_1$ ,  $v_2$  e  $v_3$ . Estes são filtrados de maneira a remover componentes de baixa e alta frequência e, então, integrados.

A Fig. 47 apresenta o armário de comando construído para o sistema de controle. Ele inclui os amplificadores de carga para o condicionamento dos sinais de força e aceleração, conversores A/D e D/A, um PC industrial e um sistema da empresa dSpace que é responsável pela aquisição dos sinais dos conversores A/D, cálculo dos algoritmos de controle e aplicação dos sinais de controle através dos conversores D/A.

O limiar mínimo para o período de amostragem é definido pelos conversores A/D e o tempo necessário para a execução da lei de controle. Os conversores A/D utilizados neste trabalho necessitam de  $0,8 \mu\text{s}$  por canal utilizado. De maneira que para os 8 canais referentes a todas as grandezas medidas necessita-se de um mínimo de  $6,4 \mu\text{s}$  apenas para a leitura dos canais de entrada de sinais. Para fins de experimentação é interessante ter flexibilidade para a medição de outros sinais em experimentos e também é necessário reservar tempo para a algoritmos de controle. O cálculo da transformada rápida de Fourier é mais eficiente a utilização de frequências de amostragem em potência de 2. Assim, é utilizada uma frequência de amostragem de  $2^{14} = 16384\text{Hz}$ ,

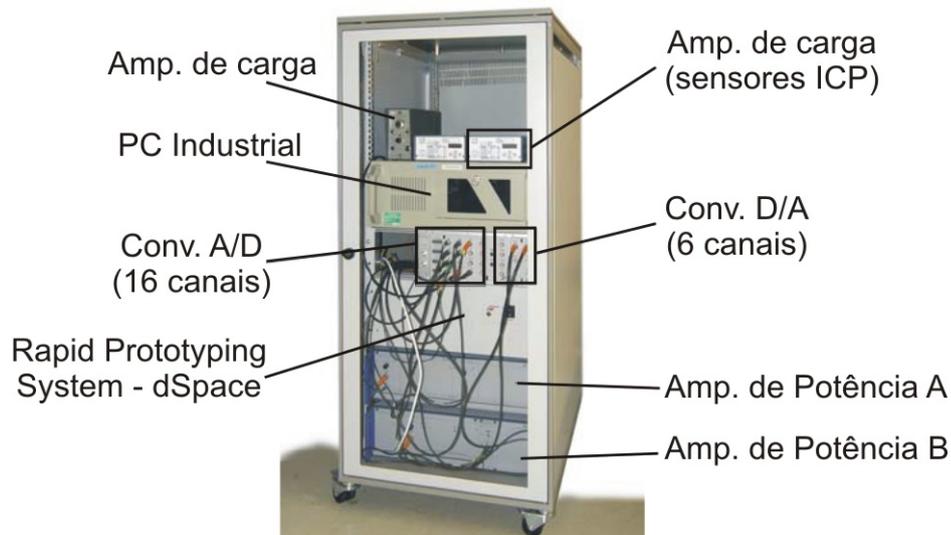


Figura 47: Armário de comando

que leva a um período de amostragem de  $2^{-14} = 61,03515625 \mu\text{s}$ . Na prática em torno de 30% deste tempo é necessário para a implementação de leis de controle como as utilizadas neste trabalho. A implementação combinada com controladores pré-alimentados, no entanto, traz a necessidade de mais tempo para o cálculo.

A defasagem obtida com tal período de amostragem é de  $\angle e^{-j\omega T_s}$ . O atraso é de um intervalo de amostragem  $T_s$  e leva a uma defasagem a 300 Hz de

$$\angle e^{-j2\pi f T_s} = \angle e^{-j2\pi \times 300 \times 6,103515625 \times 10^{-5}} \approx -6,6^\circ$$

Como apresentado no Capítulo 4 a característica dos filtros utilizados para o condicionamento dos sinais de realimentação deve ser levada em consideração. Neste trabalho é necessário um filtro passa-banda, de maneira a

- retirar componentes de baixa frequência e permitir a integração. De fato, componentes de baixa frequência tendem a levar altos sinais integrados. No caso mais crítico, se o sinal a ser integrado tem uma componente estática (frequência nula) a integração levará a um valor infinito.
- retirar componentes de alta frequência. Este problema é especialmente crítico quando acelerômetros são utilizados para a realimentação já que estes amplificam ruídos de alta frequência na razão  $\omega^2$ , como exposto na Seção 3.1.

Idealmente, procura-se um filtro que tenha ganho unitário na faixa de frequência para a qual pretende-se modelar a dinâmica da máquina e ganho nulo fora desta faixa, além de nenhuma defasagem. Na prática é preciso realizar um compromisso entre

filtragem e defasagem. Alguma defasagem pode ser tolerada já que o comportamento do filtro é conhecido e pode ser incluído no modelo final de maneira que a utilização de técnicas mais sofisticadas para a otimização dos filtros não se justifica neste trabalho.

O filtro utilizado é do tipo elíptico passa-banda, cuja FRF é apresentada na Fig. 48. As frequências de corte escolhidas são 10 e 850 Hz com ondulações (*ripple*) de até 0,1 dB na banda de passagem. Tal nível de ondulação não chega a afetar o comportamento global das medições e diminui a defasagem na faixa de interesse, onde existem os modos a ser modelados.

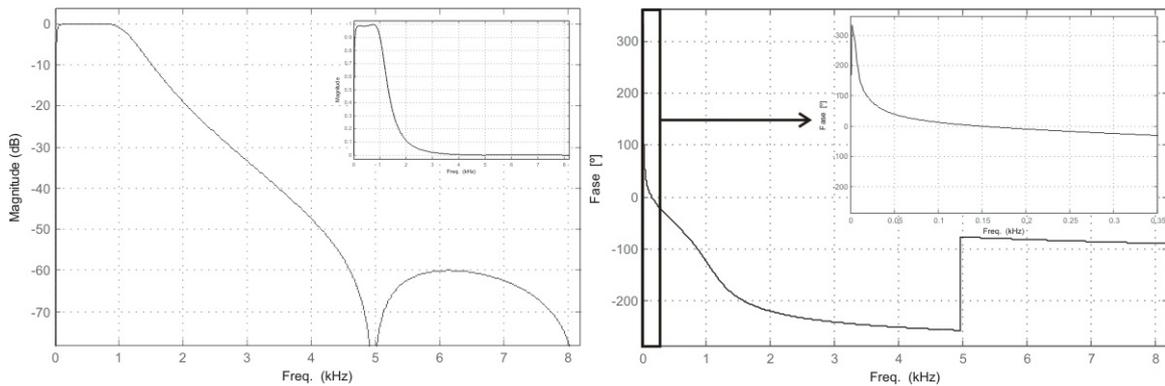


Figura 48: Filtro PB utilizado para a integração do sinal de aceleração

Por fim a utilização da velocidade como sinal para a realimentação vem a prover uma característica passa-baixa ao modelo e deixa os modos de interesse no mesmo nível, o que torna-se interessante para o projeto de controladores ótimos. A Fig. 49 mostra a aceleração, mobilidade e receptância entre  $f_p$  e o sinal do acelerômetro 1. A aceleração  $a_1/f_p$  não traz uma característica passa-baixa para a planta, o que é pressuposto em muitos projetos de controladores. A utilização de sinais de deslocamento para a realimentação pressupõe uma dupla integração do sinal de aceleração, o que traz mais defasagem ao sinal duplamente integrado em relação à utilização de velocidade, que envolve apenas uma integração. Assim, a utilização de velocidade é suficiente para trazer a desejada característica passa-baixa para o modelo obtido.

A abordagem multivariável prevê o projeto de um controlador que tem como entradas a medição (realimentação) do movimento do eixo (velocidade) e como saída as tensões de controle necessárias para que os atuadores trabalhem de maneira a minimizar o movimento medido. O projeto de tal controlador também pode tomar vantagem do conhecimento de como as forças de perturbação agem no movimento do eixo, já que este constitui basicamente o efeito a ser minimizado. Portanto, é desejável a obtenção de um modelo que tem entradas de controle e perturbações e saídas correspondentes àquelas que alimentam o controlador. Uma maneira compacta de representar tal modelo é através de um sistema linear invariante no tempo em repre-

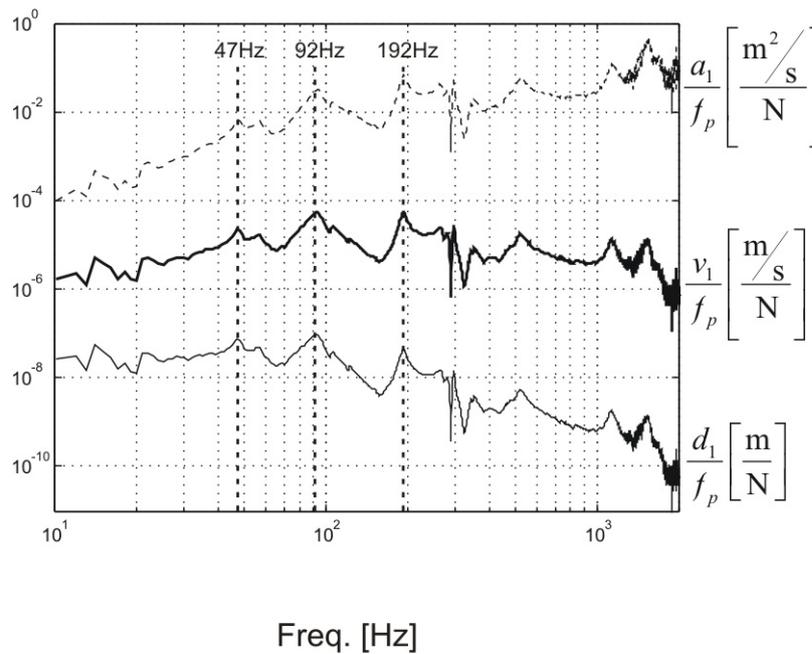


Figura 49: FRFs para aceleração, velocidade e deslocamento

sentação no espaço de estados, na forma:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_u\mathbf{u} + \mathbf{B}_w\mathbf{w} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}_u\mathbf{u} + \mathbf{D}_w\mathbf{w} \end{cases} \quad (6.1)$$

onde  $\mathbf{u} = [u_a \quad u_b]^T$ ,  $\mathbf{w} = f_p \mathbf{e}$  e  $\mathbf{y} = [v_1 \quad v_2 \quad v_3]^T$ .

A Fig. 50 apresenta os modelos a serem identificados e que devem ser compostos posteriormente para formar um sistema como o da equação acima. Algoritmos de identificação geram normalmente sistemas discretos, que podem posteriormente ser aproximados para sistemas contínuos.  $G_a(z)$  e  $G_b(z)$  representam os modelos dos atuadores A e B, respectivamente.  $G_{su}(z)$  é a matriz de transferência para as entradas de força controláveis e  $G_{sw}(z)$  é aquela para o sinal de perturbação  $f_p$ . Estes modelos estão relacionados com os mesmos modos de vibração, ou seja, a mesma dinâmica interna, de maneira que devem ser identificados como um sistema que tem como entradas  $f_a$ ,  $f_b$  e  $f_p$  e saídas  $a_1$ ,  $a_2$  e  $a_3$ , denominado aqui de  $G_s(z)$ . A dinâmica entre as acelerações e as velocidades é conhecida e não precisa, em princípio, ser identificada.

O procedimento de identificação consiste em excitar a estrutura através de uma das entradas ( $u_a$ ,  $u_b$  ou  $f_p$ ), enquanto as outras são mantidas nulas<sup>1</sup> e medir todas as saídas simultaneamente. Os sinais no domínio do tempo são convertidos em es-

<sup>1</sup>Para o caso dos atuadores A e B, isto significa que uma tensão constante é aplicada e é igual ao zero definido para estes atuadores. Para o caso da excitação através do vibrador isto significa desmontá-lo da estrutura quando um dos atuadores é excitado.

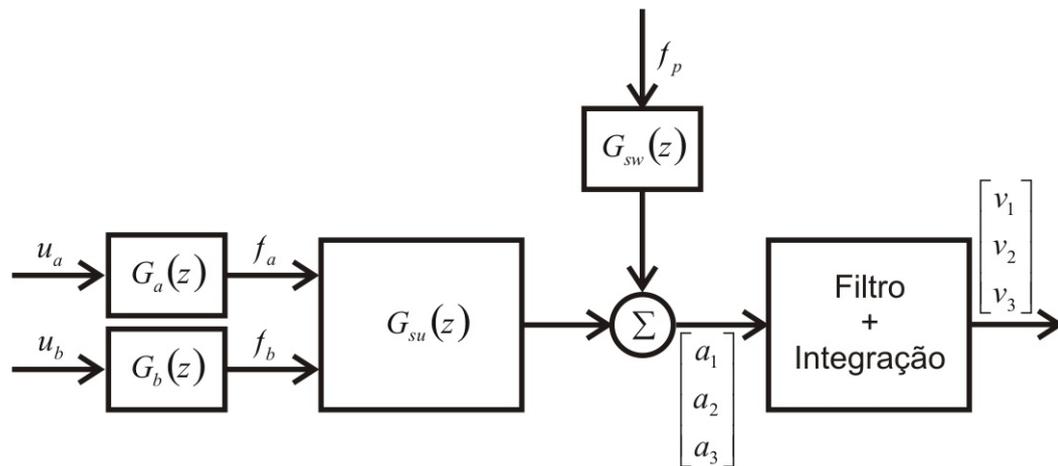


Figura 50: Modelos envolvidos

pectros no domínio da frequência, com os quais funções de resposta em frequência são estimadas e utilizadas como entrada para algoritmos de identificação. Muitos desses algoritmos funcionam com dados no domínio do tempo bem como no da frequência. Entretanto, o procedimento de cálculo dos espectros e das função resposta em frequência compreende a realização de médias e correção de tendências. Assim, algoritmos de identificação tendem a prover melhores resultados quando os dados de entrada são tratados desta maneira.

### 6.2.1 Identificação da Dinâmica dos Atuadores

Atuadores piezoelétricos são baseados nas propriedades piezoelétricas de cerâmicas em estado sólido obtidas a partir de pós de titanato de zirconato de chumbo (PZT). Este material quando dopado artificialmente tem a propriedade de converter energia elétrica diretamente em um movimento de extensão (energia mecânica) (PI, 2006). As propriedades do material permitem o alcance de resoluções tão altas que, em geral, são limitadas pelos circuitos de condicionamento de sinal e amplificação de potência. Daí a larga utilização destes atuadores para aplicações de nanoposição. Tais atuadores são também utilizados para o controle ativo de vibrações por possuírem tempos de resposta bastante altos, o que significa uma largura banda suficiente para controlar modos até 500Hz (HANSEN; SNYDER, 1997).

A capacidade inerente ao material garante a capacidade de extensão e, portanto, de realização de forças de compressão na estrutura onde ele é montado. A fabricação usualmente inclui a aplicação de uma pré-carga que permite que os atuadores também sejam capazes de realizar forças de tensão.

A Tabela 6 apresenta dados referentes aos atuadores utilizados. O atuador A tem

Atuador	A	B
Modelo	P-247.30	P-239.90
Extensão máxima [ $\mu\text{m}$ ]	40	180
Capacidade de força (compressão/tensão) [N]	30000/3500	4500/500
Tensão elétrica de alimentação	[0 , 1000V]	[0 , 1000V]
Rigidez [ $\text{N}/\mu\text{m}$ ] ( $\pm 20\%$ )	680	35
Capacitância [nF] ( $\pm 20\%$ )	2300	2100
Freq. de Ressonância (sem carga) [kHz] ( $\pm 20\%$ )	4,5	2,0

Tabela 6: Dados técnicos dos Atuadores (PI, 2006)

uma capacidade de carga mais alta já que suporta todo o eixo-árvore. Por outro lado, o atuador B é escolhido com uma extensão máxima mais alta pois o tipo de carga à qual ele é submetido acaba por restringir sua extensão máxima, como é descrito abaixo.

As vibrações obtidas durante o processo são de alguns  $\mu\text{m}$ . As maiores amplitudes são de 6  $\mu\text{m}$  (no flange) e ocorrem no segundo modo de vibração. Assim, a capacidade de extensão dos atuadores é suficiente para controlar os modos de interesse. Entretanto, uma característica importante deste tipo de atuador é sua baixa rigidez. Como apresentado na Fig. 43 o atuador A tem a rigidez alta o suficiente para que não diminua consideravelmente a rigidez do conjunto formado com a base e o fuso de esferas recirculantes abaixo dele. Por outro lado, o atuador B possui uma rigidez muito baixa e que restringe sua funcionalidade. A isto se somam características não lineares apresentadas abaixo. A baixa rigidez deste atuador faz com que sejam necessários grandes deslocamentos para a aplicação de forças consideráveis sobre o eixo, entretanto isto é preferencialmente limitado para evitar comportamentos não lineares do módulo B.

### Atuador A

O atuador A suporta todo o eixo-árvore, que constitui uma carga importante. A Fig. 51 apresenta o efeito da carga no comportamento do atuador. O seu deslocamento total permanece o mesmo mas seu zero é deslocado devido ao peso da massa suportada por ele. Tal deslocamento é obtido por  $\Delta L_N = F/k_T$ , onde  $F$  é a força estática  $F = Mg$  aplicada sobre o atuador e  $k_t$  a sua rigidez. A massa do eixo é de aproximadamente 500Kg e a rigidez é  $k_T = 680 \text{ N}/\mu\text{m}$ , que leva a um deslocamento  $\Delta L_N = 500 \cdot 9,81/680 \mu \approx 7,21 \mu\text{m}$ .

A Fig. 52 comprova o resultado obtido através da aplicação de um movimento senóide lento e a medição de  $x_a$ , o sinal do extensômetro colado à cerâmica. O

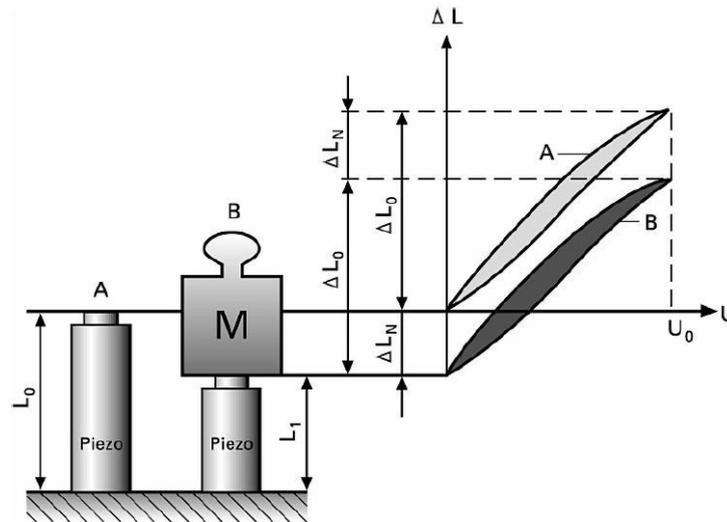


Figura 51: O deslocamento do zero devido a uma carga(PI, 2006).

atuador A tem uma tensão de controle  $u_a$  no intervalo  $[-2V, 8V]$ . A translação de  $-2V$  é aplicada em decorrência de ruídos nos potenciômetros de ajuste do amplificador de potência. O zero deste atuador é então definido como  $u_{a0} = 3V$ , de maneira que o sinal de fato aplicado ao atuador é de  $u_{ae} = u_{a0} + u_a$ . Os sinais para a identificação deste atuador também são somados à componente estática  $u_{a0} = 3V$ .

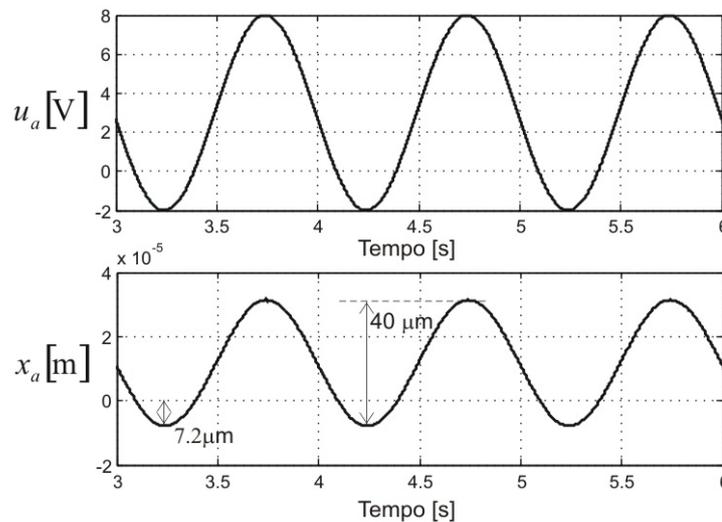


Figura 52: Uma senóide lenta aplicada em  $u_a$  e o correspondente deslocamento  $x_a$

O amplificador de potência utilizado para este atuador apresenta uma frequência de corte dentro da faixa de frequência onde estão os modos de vibração de interesse. A Fig. 53 apresenta a função resposta em frequência entre a tensão de controle  $u_a$  e o sinal do extensômetro  $x_a$ . Na verdade, este é o comportamento dinâmico que existe entre  $u_a$  e  $V_a$  e é decorrente da característica equivalente ao circuito RC formado entre o amplificador de potência e o atuador. Como este atuador é projetado para altas cargas o amplificador de potência precisa prover uma potência muito alta, o que limita sua resposta em frequência. Percebe-se um decaimento típico de um sistema de

primeira ordem a partir de aproximadamente 50 Hz. Assim, este atuador é capaz de realizar movimentos utilizando toda sua capacidade de extensão somente até 50Hz.

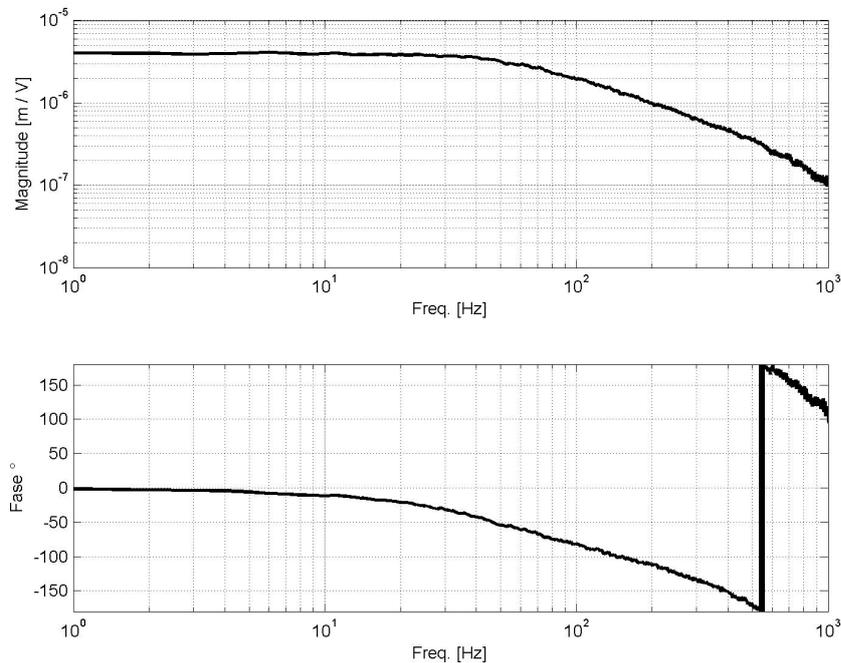


Figura 53: A estimativa  $H_1$  de  $x_a/u_a$

Foram testados diversos tipos de sinais e não foram identificados comportamentos não lineares importantes de maneira que não existe justificativa para poupar a utilização deste atuador durante o controle das vibrações. Por fim, para a identificação foi utilizado um ruído branco de energia  $1.2V^2$  com a limitação de banda em 1 kHz. A Fig. 54 apresenta a resposta em freqüência entre  $u_a$  e  $f_a$  e o modelo de terceira ordem obtido através do método do subespaço (LJUNG; PIERSOL, 1999). Para a identificação a estimativa é filtrada a partir de 500Hz de maneira a que se obtenha um modelo cuja resposta em freqüência se aproxima daquela experimental na faixa de freqüência onde o atuador é projetado para trabalhar (até 300 Hz). A Eq. (6.2) apresenta o modelo obtido.

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x}_a(k+1) = \begin{bmatrix} 0,9868 & -0,6983 & 0,5133 \\ 4,724 \cdot 10^{-4} & 0,9881 & -1,625 \\ 2,548 \cdot 10^{-5} & 6,122 \cdot 10^{-4} & 0,9336 \end{bmatrix} \mathbf{x}_a(k) + \begin{bmatrix} 8,442 \\ -1,799 \\ -9,288 \cdot 10^{-2} \end{bmatrix} \mathbf{u}_a(k) \\ \mathbf{f}_a(k) = \begin{bmatrix} 0,4588 & 0,6316 & 0,5352 \end{bmatrix} \mathbf{x}_a(k) \end{array} \right. \quad (6.2)$$

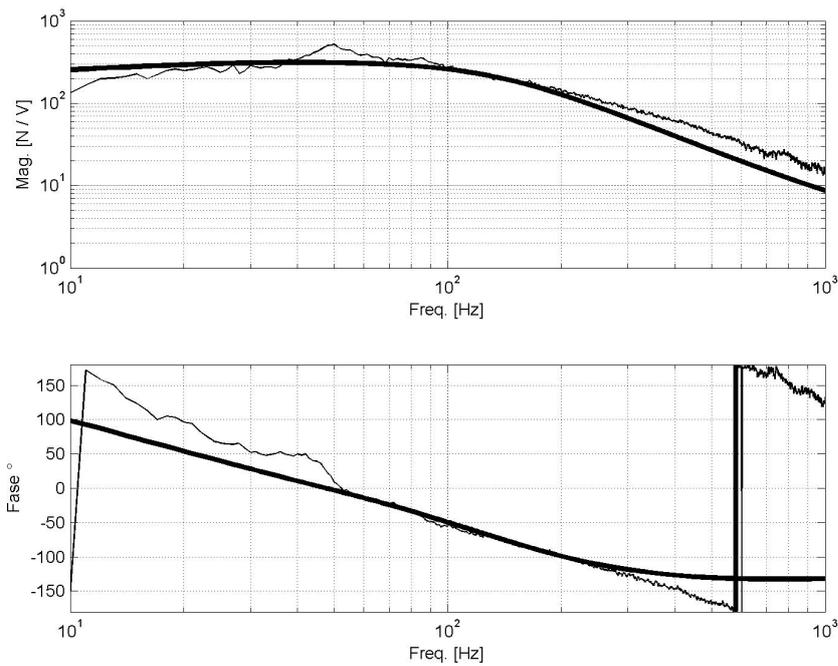


Figura 54: A estimativa  $H_1$  de  $f_a/u_a$  e a FRF do modelo identificado

### Atuador B

O atuador piezoelétrico modelo P-239.90, da companhia Physik Instrumente, foi escolhido para compor o módulo B por já estar disponível para pesquisa e justificarse por motivos econômicos. No entanto, este atuador apresenta uma capacidade de extensão de  $180 \mu\text{m}$ , que mostra-se muito acima do necessário para a compensação de vibrações no flange (em torno de no máximo  $6 \mu\text{m}$  no flange) e para projetos futuros de compensação de deformações estáticas (abaixo de  $10 \mu\text{m}$  de deformação no flange para forças da ordem das que ocorrem no processo (SIMNOFSKE; HESSELBACH, 2006)). Além disto a rigidez deste atuador ( $35 \text{ N}/\mu\text{m}$ ) é muito baixa. Uma rigidez baixa implica que para extensões da ordem das obtidas nas vibrações este atuador aplica forças relativamente baixas. Projetos futuros envolvem a otimização do módulo B, de maneira que a alavanca de desvio (v. Fig. 42) transforme a relação entre extensão e força transmitida para o eixo. Como utilizada neste projeto esta alavanca consiste em um triângulo equilátero que apenas desvia a direção da força.

A carga à qual o atuador B é submetido é de natureza diferente daquela do atuador A. De fato, a força que age contra este atuador não é constante e, sim, está relacionada com a extensão do atuador. De modo geral é equivalente a atuar contra uma mola de rigidez  $k_s$ , como indicado na Fig. 55. Neste caso existe uma perda na capacidade de extensão que está relacionada os valores da rigidez do atuador e da mola contra a qual ele se estende.

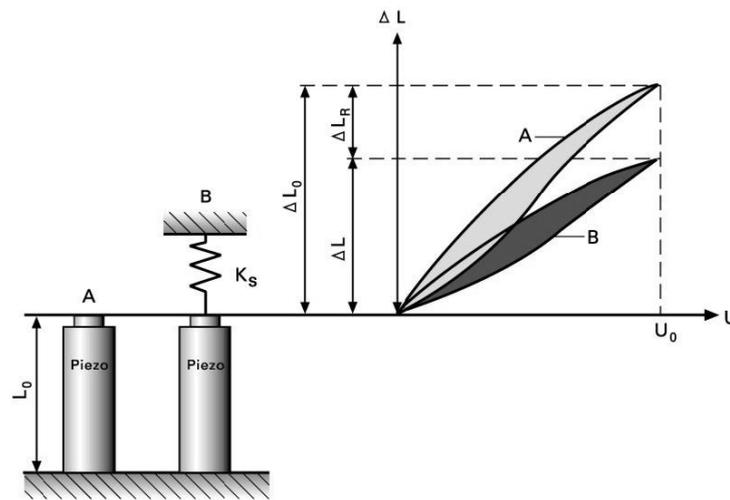


Figura 55: A diminuição da amplitude do atuador que age contra uma carga do tipo mola (PI, 2006).

A perda pode ser calculada pela expressão (PI, 2006)

$$\Delta L_R \approx \Delta L_0 \left( 1 - \frac{k_T}{k_T + k_s} \right) \quad (6.3)$$

A aplicação exata da equação acima para o caso do módulo B não se justifica já que este módulo não é montado exatamente sobre um elemento de rigidez  $k_s$ . Entretanto ela mostra que um atuador de baixa rigidez tende a perder muito de sua capacidade de extensão quando aplicado contra um elemento rígido. No caso do módulo B foi medido uma capacidade de extensão de aproximadamente  $60 \mu\text{m}$ , ou seja, dois terços da capacidade total são perdidos.

Este atuador apresenta características não-lineares mais nítidas que o atuador A, como é apresentado a seguir. Entretanto, em uma primeira abordagem, espera-se obter um modelo linear para o projeto de controladores lineares e para tanto faz-se necessário definir uma faixa de operação para este atuador. A Fig. 56 apresenta à esquerda o sinal de força  $f_b$  obtido quando da aplicação do ruído branco  $u_b$  apresentado. Um comportamento assimétrico é percebido e é tão mais nítido quanto maiores são as amplitudes aplicadas. As forças de tração mostram-se mais intensas que as de compressão. De fato, quanto maior a extensão do atuador, maiores as forças sobre os pontos de giro da alavanca de desvio e, portanto, maiores as forças de atrito.

O problema pode ser solucionado aplicando um ruído branco com menor energia. Entretanto, tal sinal não seria adequado para a identificação do comportamento vibratório do eixo pois o sinal dos acelerômetros é muito baixo. A aplicação de uma onda quadrada no atuador não apresenta o comportamento assimétrico, como apresentado na Fig. 56 à direita, e excita os modos da estrutura. As FRFs obtidas atra-

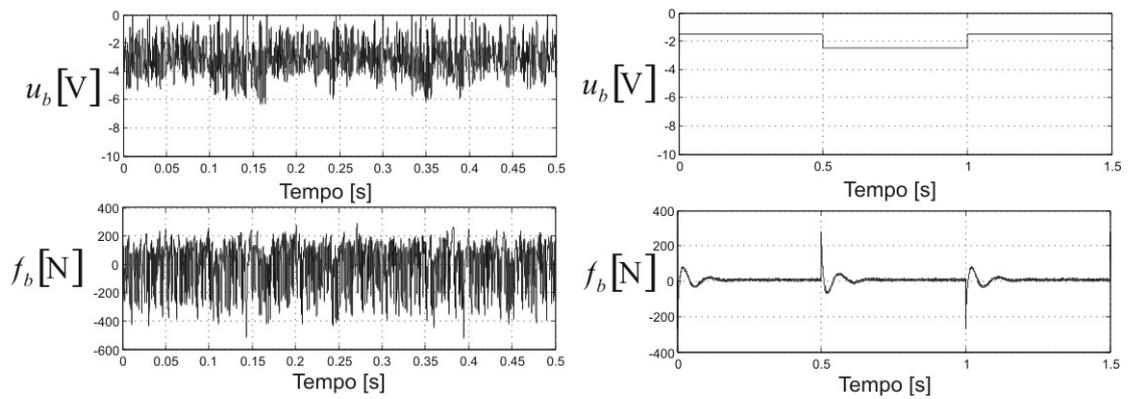


Figura 56: Tensão de entrada e força obtida no atuador B

vés da aplicação de ruído branco e onda quadrada são apresentadas na Fig. 57, o comportamento não linear pode ser verificado pelo valor da coerência. No caso da utilização da FRF a partir da onda quadrada percebe-se uma queda na coerência a partir de aproximadamente 600 Hz. Isto acontece porque a onda quadrada tem sua energia mais concentrada em baixas frequências, enquanto que o ruído branco tem aproximadamente uma distribuição constante até 1 kHz, frequência a partir da qual é aplicado um filtro para a limitação da excitação. A distribuição da energia do sinal  $u_b$  é comparada através da densidades espectral de potência na Fig. 58.

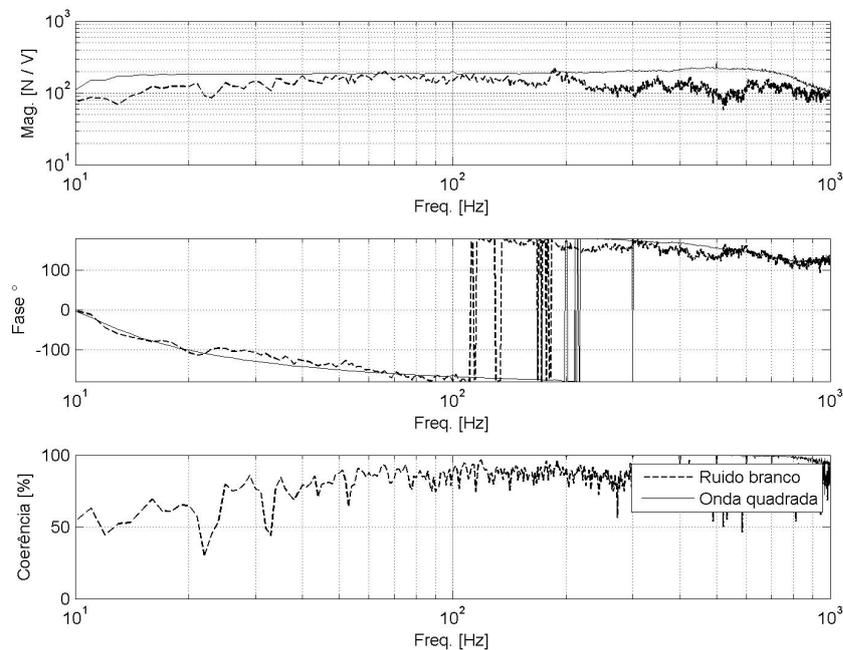


Figura 57: A estimativa  $H_1$  de  $f_b/u_b$  através da aplicação de sinais diferentes

É preciso definir um zero para o atuador B, de maneira que o sinal de controle efetivamente aplicado é aquele somado a esta componente estática. Diferentemente do atuador A, o comportamento do atuador B é sensível à sua extensão. A extensão

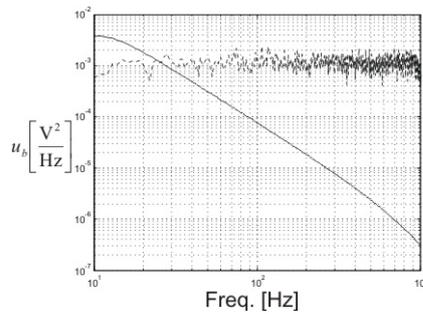


Figura 58: A densidade espectral de potência de  $u_b$  através da aplicação de sinais diferentes

deste atuador tensiona a estrutura e pode ser prejudicial aos rolamentos da torre e do eixo-árvore. A tensão de controle varia de 0 a -10 V, que corresponde ao atuador recolhido e totalmente estendido, respectivamente. O comportamento apresenta-se nitidamente diferente a partir de uma extensão de -4 V, que equivale a aproximadamente  $24 \mu\text{m}$ . A Fig. 59 apresenta à direita a FRF  $v_1/f_b$  para a aplicação de ondas quadradas centradas em -0,5 V, -2,0 V e -4,0 V (linha mais grossa). Em geral, quanto mais se estende o atuador, menos força é convertida em movimento no eixo. Assim define-se o zero deste atuador como  $u_{b0} = -2 \text{ V}$ , de maneira que o sinal de fato aplicado ao atuador é de  $u_{be} = u_{b0} + u_b$ . Os sinais para a identificação deste atuador também são somados à componente estática  $u_{a0} = -2 \text{ V}$ .

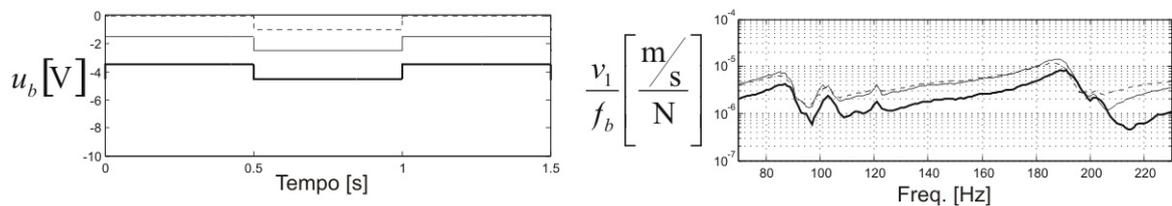


Figura 59: O efeito do atrito de Coulomb quando o atuador B decorrente da extensão do atuador B

A Fig. 60 apresenta as FRFs obtidas com ondas quadradas de amplitude 0,5 V e 1,2 V e o modelo identificado (a partir dos dados obtidos através do primeiro sinal). O modelo foi obtido através de uma busca iterativa que minimiza o erro quadrático médio da saída para um sistema parametrizado como um modelo de processo que possui um ganho, um pólo, um zero e um atraso.

$$\frac{F_b(s)}{U_b(s)} = 148,29 \cdot \frac{1 - 0,011671s}{1 + 0,0080023s} e^{-4,6627 \cdot 10^{-5}s} \quad (6.4)$$

O zero localiza-se na frequência física 13,6 Hz e o pólo 19,9 Hz. O atraso é de praticamente um intervalo amostral. Este modelo é discretizado através do método do sustentador de ordem zero (BURL, 1999), apresentado na Seção A.7.1 do Apêndice A, para que se obtenha  $G_b(z)$ .

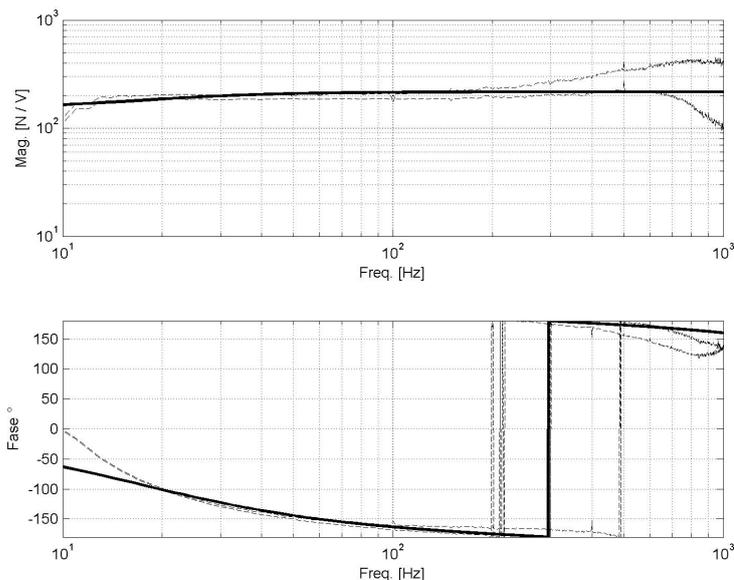


Figura 60: FRFs experimentais e do modelo  $G_b(z)$

### 6.2.2 Identificação da Comportamento Vibratório do Eixo

Esta seção apresenta a identificação do comportamento vibratório do eixo-árvore, ou seja, o sistema que tem como entradas  $f_a$ ,  $f_b$  e  $f_p$  e como saídas as medições dos 3 acelerômetros.

Tal modelo poderia, em princípio ser obtido a partir dos resultados de uma análise modal experimental, como apontado na Seção 3.1. Entretanto, existe um problema relativo à construção do módulo B, que faz com que a força medida  $f_b$  não seja exatamente aquela aplicada no eixo, como ilustrado na Fig. 61. Um segundo problema, é que modelos a partir de resultados de uma análise modal experimental devem ter os vetores normalizados pela massa. Entretanto, o software utilizado para a análise modal experimental apresenta problemas para a normalização pela massa e que não foram corrigidos até o final deste projeto.

Finalmente, alguns fatores podem trazer mudanças à dinâmica da estrutura. A pré-carga na montagem do módulo B, necessária para a eliminação de folgas, influi na dinâmica da estrutura. Além disto, o modo correspondente a 260 Hz está intimamente ligado com a presença do rebolo bem como sua massa.

A construção de modelos a partir de uma análise modal parece então ser um empecilho para a portabilidade do sistema construído. De fato, a cada troca do módulo B, ou até mesmo do rebolo, a realização de uma nova análise modal seria necessária. Ainda que de modo geral a dinâmica da estrutura não muda. A utilização de algoritmos de identificação mostra-se mais prática já que pressupõe apenas a excitação

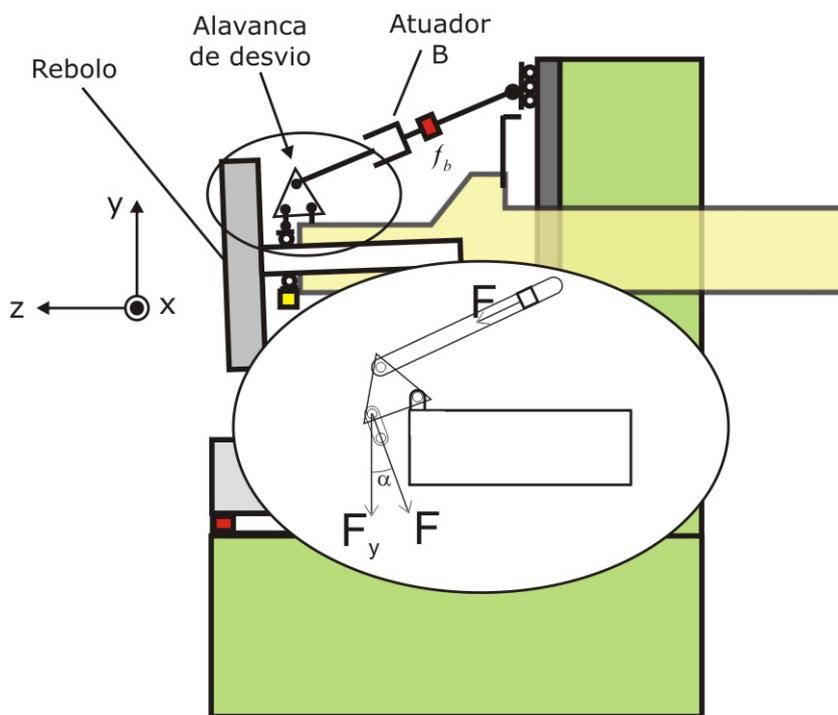


Figura 61: A diferença entre a força medida  $f_b$  e a efetivamente aplicada na direção  $Y$  do eixo através de cada uma das entradas. Como a dinâmica geral da estrutura não muda a parametrização dos modelos utilizados neste trabalho pode ser usada para que o modelo se adapte a pequenas mudanças, quando estas se mostrarem importantes.

Na verdade, os algoritmos de identificação apresentaram resultados melhores com os sinais filtrados e integrados ( $v_1$ ,  $v_2$  e  $v_3$ ) como saída, ao invés da utilização direta daqueles oriundos dos acelerômetros.

Um elemento importante na dinâmica desta estrutura é a pré-carga entre a mesa e o flange. A Fig. 62 apresenta a magnitude das FRFs a partir dos 3 sinais de entrada para o sinal de saída  $v_1$ . Em geral, a curva de  $v_1/f_p$  tem valores mais altos do que de  $v_1/f_b$  que tem valores mais altos que aquela de  $v_1/f_a$ , o que poderia levar à idéia de que  $f_p$  tem uma maior capacidade de gerar movimentos no eixo do que  $f_b$  e  $f_a$ . Entretanto, isto é consequência dos valores de rigidez dos atuadores utilizados para gerar estas forças.

De fato, a extensão do atuador é convertida numa força proporcional à sua rigidez. A dinâmica entre esta força e a velocidade medida constitui, então, a mobilidade, como ilustrado na Fig. 62. A rigidez dos atuadores deve ser, então, levada em conta no momento da identificação do sistema. Caso o valor da mobilidade seja dividido pelo valor da rigidez do atuador utilizado, as curvas da Fig. 62 passam a estar no mesmo nível. Neste caso elas relacionam a extensão do atuador no ponto de aplicação da força com o movimento no ponto de montagem do acelerômetro. Este cuidado mostra-

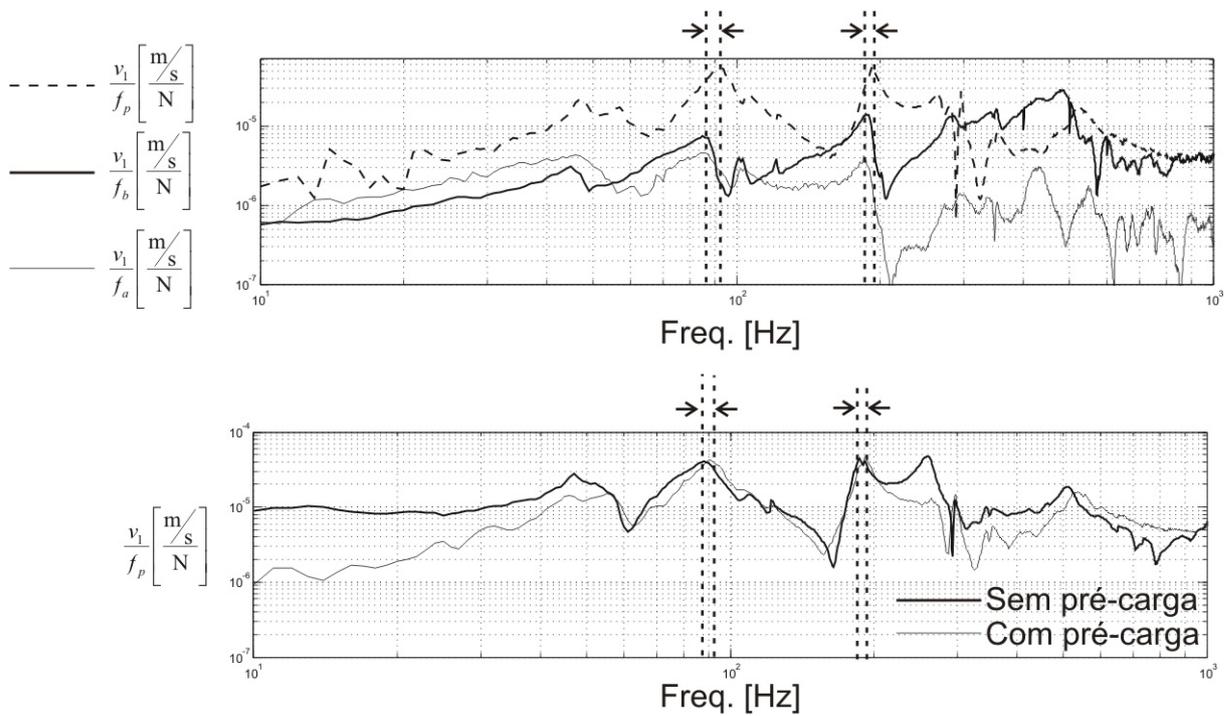


Figura 62: O efeito da pré-carga

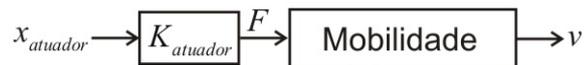


Figura 63: A influência da rigidez do atuador

se importante na aplicação de algoritmos de identificação multivariáveis que usam diversos critérios para minimização mas que, em geral, tendem a dar mais peso para aqueles canais que levam a maiores valores de saída.

Ainda na Fig. 62 é destacada a diferença do aparecimento dos valores de ressonância dos modos 2 e 3. Esta diferença na ressonância é efeito da pré-carga entre a mesa e o flange. Na curva superior a mobilidade  $v_1/f_p$  é realizada através do vibrador, onde é utilizada uma pré-carga de aproximadamente 700 N. Na curva abaixo duas curvas  $v_1/f_p$  geradas a partir de martelo de impacto são comparadas, em uma delas não existe nenhuma pré-carga entre a mesa e o flange, na outra o rebolo é pressionado sobre uma peça com uma pré-carga de aproximadamente 300 N.

Além da translação dos modos 2 e 3, existe o aparecimento de um modo a 260 Hz. Os teste de usinagem não apresentaram marcas relativas a vibrações nesta frequência. De fato, no processo de usinagem enquanto existe contato entre o rebolo e a peça usinada existe alguma pré-carga entre a mesa e o flange (v. Fig. 36), que parece ser suficiente para o desaparecimento desse modo.

O modelo foi obtido através de uma busca iterativa para um modelo parametrizado no espaço de estados de 18ª ordem. Assim, procura-se iterativamente por uma rea-

lização no espaço de estados que minimize a previsão do erro da saída. A Tabela 7 apresenta as frequências naturais (através da frequência física em Hz) e o fator de amortecimento associado a cada par de pólos conjugados complexos. Não existe o interesse na modelagem de vários desses modos, entretanto a aplicação de algoritmos para a identificação em ordem mais baixa não trouxe resultados tão bons. Os modos fracamente acoplados com entrada e saída podem ser eliminados posteriormente através de uma truncagem balanceada, como exposto na Seção 2.4.2.

Freq. Natural [Hz] ( $\omega_{ni}/2\pi$ )	Fator de amortecimento [%] $100 \cdot \xi_i$
50,7	10,6
75,7	10,7
85,3	4,3
138,0	7,0
190,1	2,6
210,2	2,4
265,8	2,8
276,0	2,7
292,0	0,7

Tabela 7: Frequências naturais para  $\mathbf{G}_s(z)$

A Fig. 64 apresenta os pólos e os zeros invariantes do modelo. O baixo nível de amortecimento é refletido na proximidade dos pólos ao círculo unitário. Uma das dificuldades envolvidas na identificação de sistemas deste tipo é que frequentemente os pólos identificados estão fora do círculo unitário, configurando sistemas instáveis e sem utilidade prática, já que sabe-se que o sistema é estável por sua natureza física.

As Figs. 65, 66 e 67 comparam 3 das 9 FRFs do modelo identificado com a estimativa  $H_1$  utilizada para a identificação. Na Fig. 65 percebe-se uma tendência do modelo em identificar o valor do modo 2 com a frequência de ressonância reconhecida nos outros canais. Entretanto, é prioritário obter um bom modelo para os canais oriundos das forças de controle. Já que esta parte do modelo é realmente usada no projeto de controladores multivariáveis (v. Seção 4.2.1).

A Fig. 66 apresenta uma FRF pontual típica, alternando ressonâncias e anti-ressonâncias (EWINS, 1984). O modo 1 não é tão bem identificado como os modos 2 e 3, o que deve ser levado em conta no projeto dos controladores.

Na FRF entre  $f_b$  e  $v_3$  também percebe-se que o modo 1 está mal identificado, enquanto que os outros modos de interesse apresentam uma boa aproximação entre o resultado experimental e a resposta do modelo.

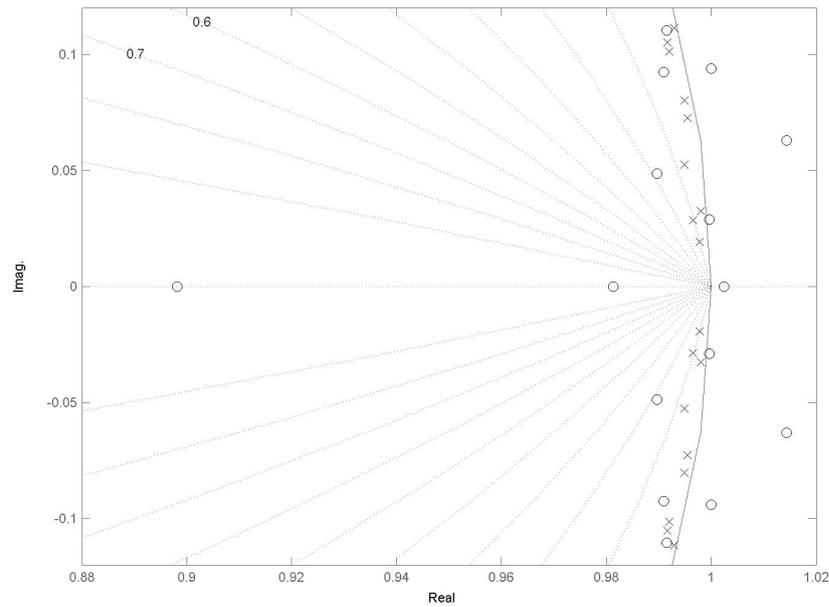


Figura 64: Pólos ( $\times$ ) e Zeros ( $\circ$ ) de  $G_s(z)$

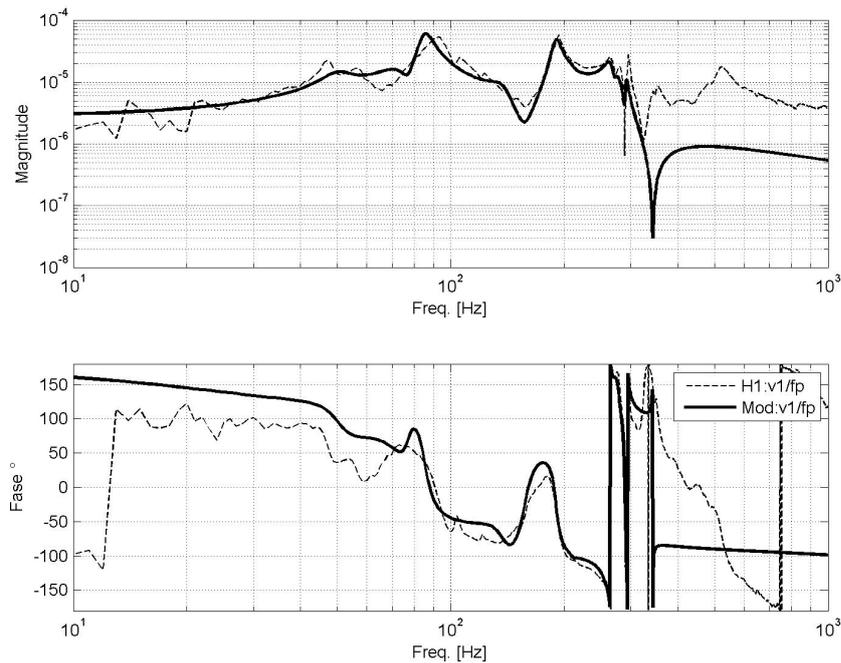


Figura 65: Estimativa  $H_1$  e FRF do modelo  $G_s(z)$  para  $v_1/f_p$

### 6.2.3 Composição e Redução dos Modelos

Esta seção apresenta a composição dos modelos identificados e o posterior procedimento de redução. A composição é realizada de maneira mais intuitiva através da utilização de realizações no espaço de estados, como ilustrado na Fig. 68. A Eq. (6.5)

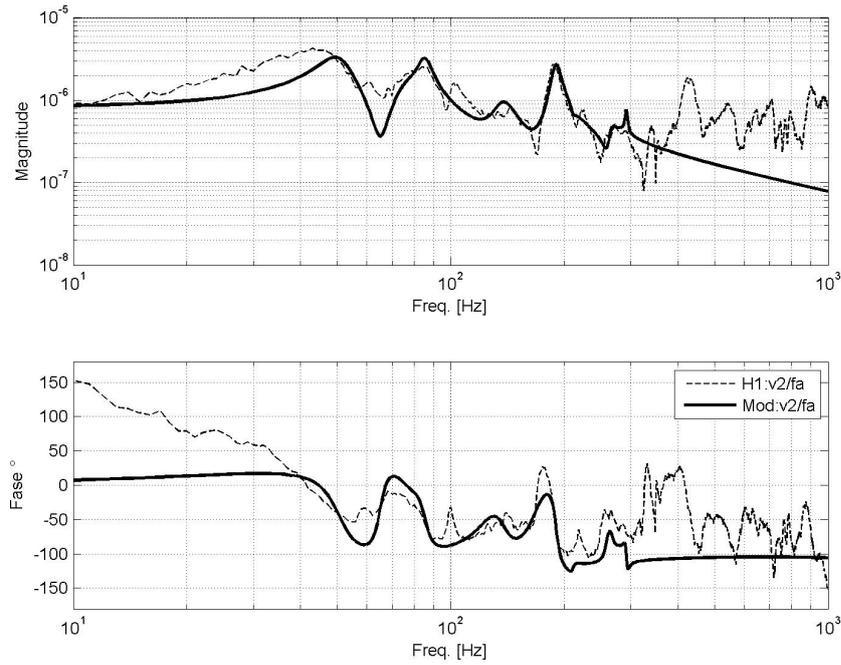


Figura 66: Estimativa  $H_1$  e FRF do modelo  $G_s(z)$  para  $v_2/f_a$

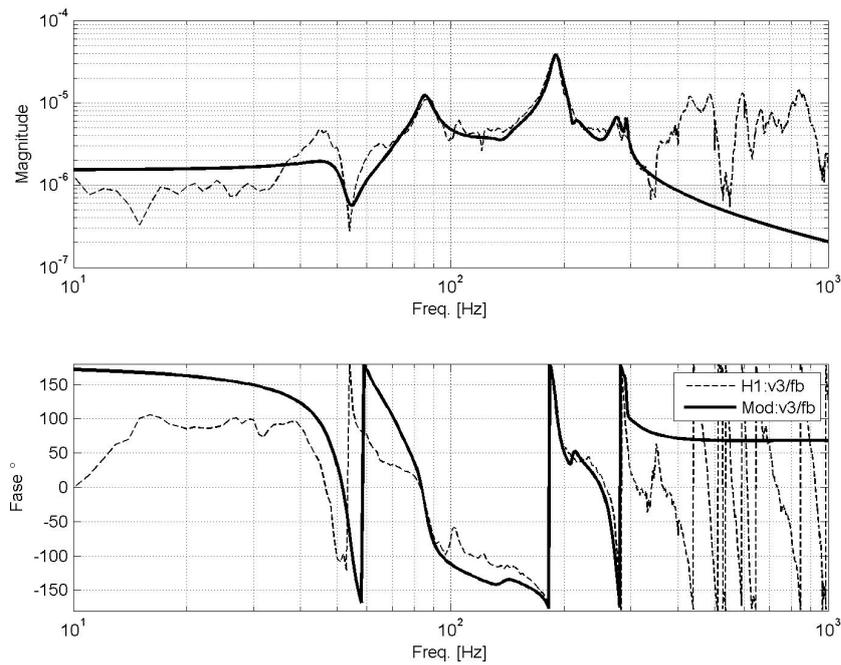


Figura 67: Estimativa  $H_1$  e FRF do modelo  $G_s(z)$  para  $v_3/f_b$

apresenta a realização para o sistema composto a partir das realizações da Fig. 68.

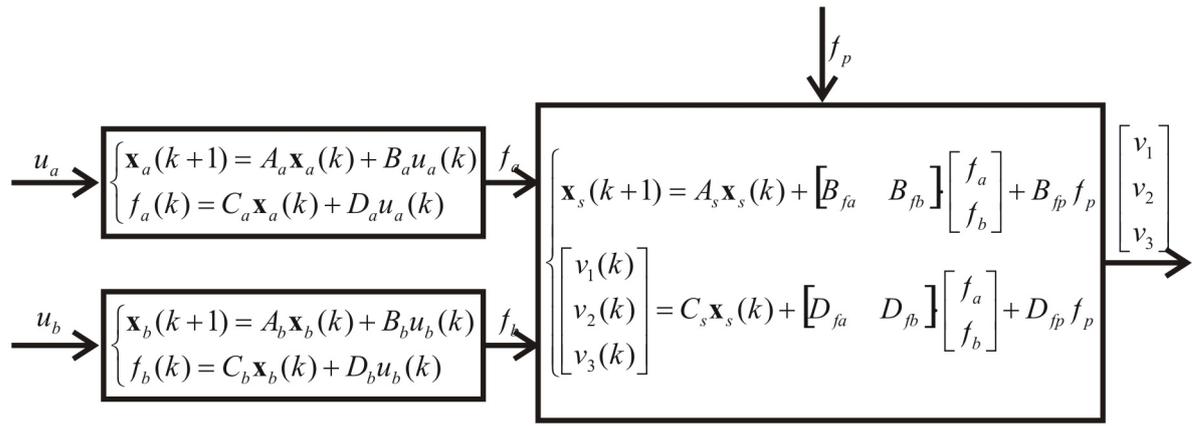


Figura 68: A composição dos modelos

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \mathbf{x}_s(k+1) \\ \mathbf{x}_a(k+1) \\ \mathbf{x}_b(k+1) \end{bmatrix} &= A_c \begin{bmatrix} \mathbf{x}_s(k) \\ \mathbf{x}_a(k) \\ \mathbf{x}_b(k) \end{bmatrix} + B_c \begin{bmatrix} u_a(k) \\ u_b(k) \end{bmatrix} + G_c f_p(k) \\
 \begin{bmatrix} v_1(k) \\ v_2(k) \\ v_3(k) \end{bmatrix} &= C_c \begin{bmatrix} \mathbf{x}_s(k) \\ \mathbf{x}_a(k) \\ \mathbf{x}_b(k) \end{bmatrix} + D_c \begin{bmatrix} u_a(k) \\ u_b(k) \end{bmatrix} + H_c f_p(k)
 \end{aligned} \tag{6.5}$$

onde:

$$\begin{aligned}
 A_c &= \begin{bmatrix} A_s & B_{fa}C_a & B_{fb}C_b \\ \mathbf{0} & A_a & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_b \end{bmatrix} & B_c &= \begin{bmatrix} B_{fa}D_a & B_{fb}D_b \\ B_a & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B_b \end{bmatrix} & G_c &= \begin{bmatrix} B_{fp} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \\
 C_c &= \begin{bmatrix} C_s & D_{fa}C_a & D_{fb}C_b \end{bmatrix} & D_c &= \begin{bmatrix} D_{fa}D_a & D_{fb}D_b \end{bmatrix} & H_c &= \begin{bmatrix} D_{fp} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

O modelo composto tem 23 estados e deve ser reduzido. Embora o par

$$(A_c, [B_c \ G_c])$$

seja controlável, o posto da matriz de controlabilidade composta pelo par  $(A_c, B_c)$  é 16, ou seja, apenas 16 dos 23 estados podem ser excitados pelos sinais de controle. A redução através da truncagem balanceada implica no cálculo dos valores singulares de Hankel para uma realização balanceada do sistema. A Fig. 69 apresenta estes valores e ilustra as FRFs  $(v_2/u_a)$  dos modelos reduzidos comparadas com a do modelo original. A manutenção dos 16 estados com maior valor singular de Hankel associado provê um modelo controlável e observável. Este modelo é denominado aqui como

modelo 1 e é utilizado posteriormente para o projeto de alguns controladores.

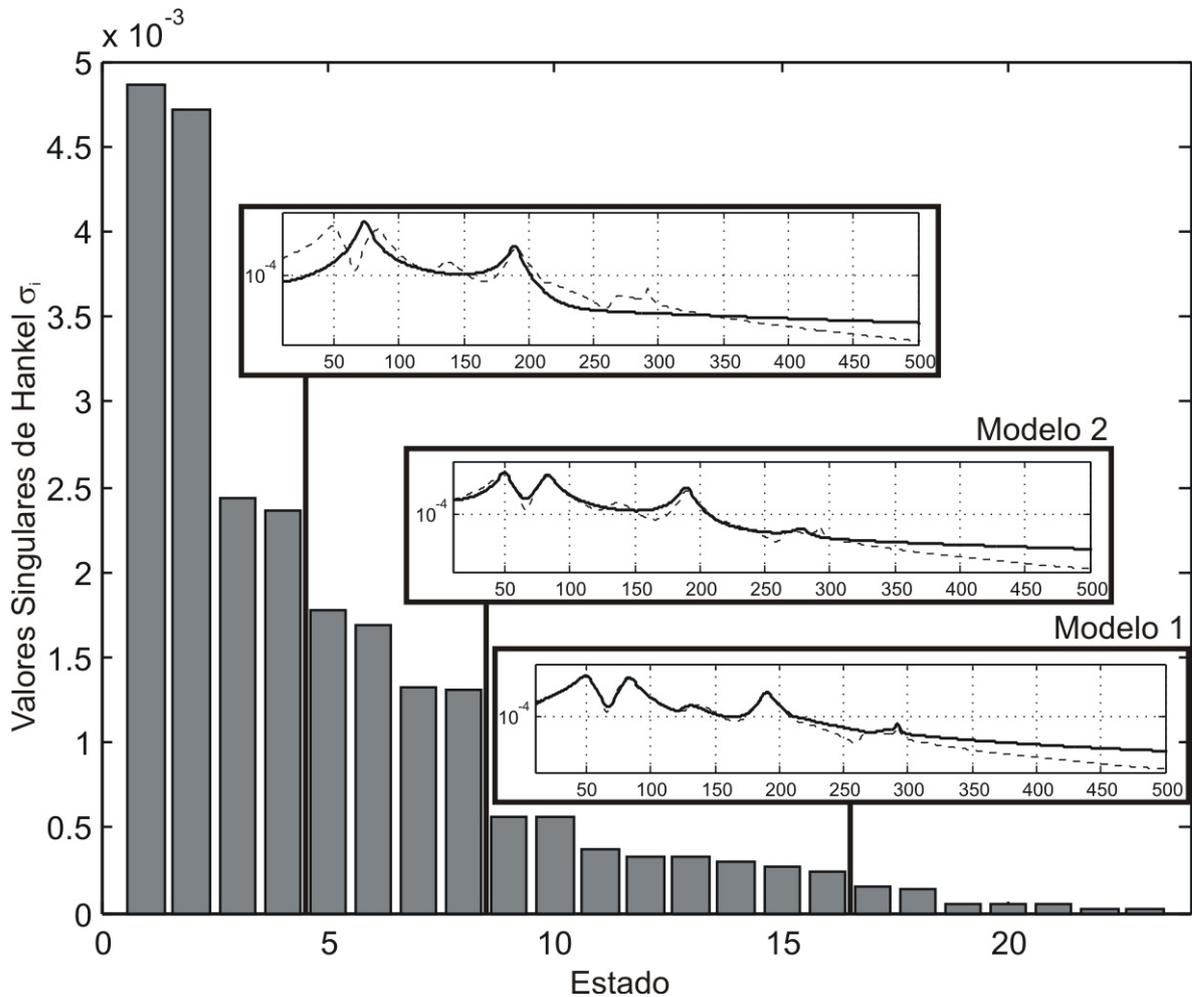


Figura 69: Redução do Modelo

Alguns métodos para o projeto de controlador apresentam problemas quando alguns dos estados são fracamente controláveis ou observáveis. Nestes casos é necessária a construção de um segundo modelo que contém apenas 8 estados que correspondem a 4 modos de vibração. Ainda na Fig. 69 é ilustrada a redução de modo que restem apenas dois modos de vibração (modos 2 e 3). Neste caso, o comportamento do modo 2 fica bastante diferente do modelo original e inviabiliza a utilização do modelo. Os modelos obtidos são apresentados no Apêndice B.

A Fig. 70 apresenta os valores dos gramínicos de controlabilidade para cada modo a partir de cada atuador. As barras pretas e brancas correspondem então ao valor de (v. Eq. (2.40))

$$w_{ci} = \frac{\|B_i\|_2^2}{4\xi_i\omega_i}$$

onde é utilizada apenas a coluna de  $B_i$  correspondente ao atuador A e B, respectivamente. Assim, pode-se visualizar a controlabilidade de cada atuador com cada modo

de vibração. Percebe-se uma queda da controlabilidade do atuador A para modos mais altos, o que se deve ao comportamento passa-baixa do amplificador de potência utilizado (v. Fig. 53) que faz com que este atuador precise utilizar um sinal de controle maior quanto maior a freqüência dos movimentos realizados. O atuador B não possui esta característica e as diferenças entre os modos vêm fundamentalmente das formas modais.

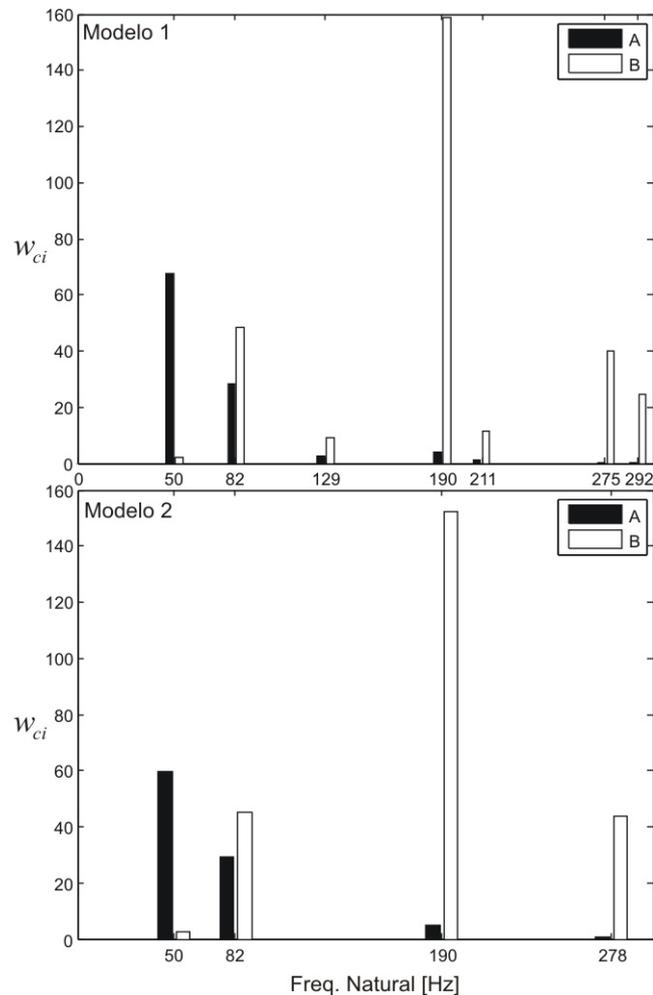


Figura 70: Controlabilidade dos modos através dos dois atuadores

Analogamente, a Fig. 71 apresenta os valores dos gramínicos de observabilidade separadamente para cada um dos sensores. As barras correspondem ao valor de

$$w_{oi} = \frac{\|C_i\|_2^2}{4\xi_i\omega_i}$$

onde é utilizada a linha de  $C_i$  correspondente a cada um dos sensores. É nítida a importância do sensor 3 (localizado na parte traseira do eixo-árvore) para a observabilidade do sistema. Embora a matriz de observabilidade tenha posto completo ainda que sejam utilizados somente as linhas de  $C$  referentes aos dois primeiros sensores,

o terceiro aumenta consideravelmente o valor do graminiiano, isto acontece pois as amplitudes dos movimentos são maiores na parte traseira do eixo-árvore.

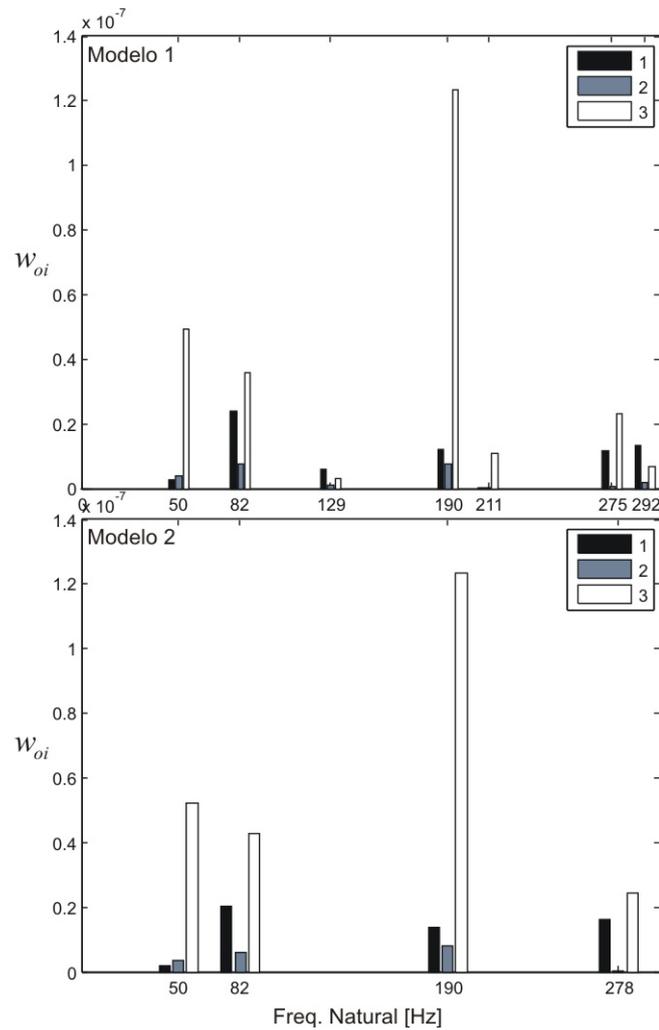


Figura 71: Observabilidade dos modos através de cada um dos acelerômetros

Os dois modelos derivados neste capítulo e apresentados no Apêndice B, são utilizados como base para a aplicação dos métodos de projeto de controlador. Os resultados da aplicação de tais métodos está contida no Capítulo 7, que tenta apresentar os principais elementos presentes na implementação de controladores em sistemas reais onde existe a presença de fontes importantes de ruído.

## 7 Projeto de Controladores

Este capítulo apresenta alguns resultados obtidos através de algumas metodologias de projeto de controladores. Especificamente são apresentados aqueles obtidos na implementação do projeto por alocação de pólos e do controlador LQG, em sua versão original e na balanceada. São apresentados testes em bancada bem como testes em processo.

Os controladores apresentados são baseados em uma realimentação de estados que faz uso de um observador de estados. O projeto do observador é apresentado na Seção 7.1. O projeto de um observador de estados por alocação de pólos não apresenta-se prático para este problema, resultados bem melhores e com mais facilidade de sintonia são obtidos através de um filtro de Kalman.

Além da comparação da eficiência dos controladores apresentados, pretende-se poder concluir a respeito da aplicabilidade dos métodos para este tipo de problema. De fato, métodos largamente aplicados em problemas de controle podem mostrar-se inadequados para este tipo de sistema. Além disto, a prática da implementação permite avaliar as dificuldades de sintonia de parâmetros.

A eficiência dos controladores é comparada através de FRFs, onde as resposta em malha aberta e fechada são contrapostas. O objetivo fundamental é obter uma metodologia para que se obtenha um controlador que adicione amortecimento aos modos 2 e 3 (v. Fig. 5.1), com níveis de esforço de controle que possam ser implementados em processo.

O esforço de controle define a sensibilidade do controlador a perturbações que podem ser sinais de força aplicados à estrutura bem como ruídos de medição. De fato, os controladores investigados neste trabalho são sistemas lineares que respondem à medição de  $v_1$ ,  $v_2$  e  $v_3$ . Assim, uma sensibilidade excessiva pode significar que o controlador faz com que os atuadores excitem a estrutura ainda que nenhuma força de perturbação esteja presente.

Para os controladores apresentados nesta seção, o esforço de controle é comparado através da sua decomposição em valores singulares como função da frequên-

cia (v. Seção A.3 no Apêndice A). Na verdade, são apresentados separadamente os valores singulares do sistema que tem como entradas

$$\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}^T$$

e como saída  $u_a$  e aquele sistema que tem  $u_b$  como saída. Os valores singulares de

$$\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}^T \rightarrow u_a$$

representam o maior sinal de controle  $u_a$  que o controlador pode aplicar a partir do vetor  $\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}^T$  como função da frequência.

As fontes mais problemáticas de ruído estão em baixas frequências, já que o sinal dos acelerômetros é filtrado e integrado. Entretanto, a interferência da rede elétrica (50Hz, no local onde os experimentos foram realizados) e da velocidade angular do rotor em operação (entre 20 e 30Hz) estão dentro da banda de passagem dos filtros utilizados. Portanto, altos ganhos do controlador para esta faixa de frequência podem significar dificuldades de implementação em processo. A Fig. 72 apresenta a magnitude da FRF entre os sinais de aceleração, obtido dos acelerômetros, e de velocidade, integrado numericamente. A característica passa baixa dos filtros utilizados (v. Fig. 48), aliada à integração faz com que componentes em alta frequência sejam filtradas. Além disto, a característica passa alta dos filtros também suprime harmônicas abaixo de 10Hz. Existe então uma faixa crítica, de 10 até aproximadamente 60Hz, onde altos ganhos do controlador devem ser especialmente evitados.

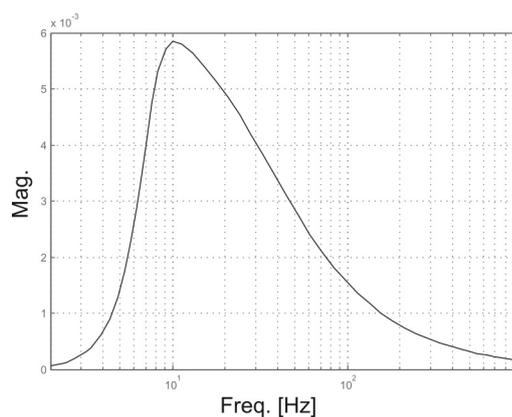


Figura 72: Magnitude da FRF dos filtros e integrador ( $v_i/a_i$ )

## 7.1 Projeto do Observador de Estados

O foco desta seção é descrever os fatores levados em conta para a construção de um observador de estados. Inicialmente procura-se um observador para o modelo 2 (v. Apêndice B) já que este é utilizado nos primeiros controladores projetados.

A construção de um observador de estados por alocação de pólos não mostra-se intuitiva para modelos de alta ordem. A orientação de alocar-se os pólos do observador 3 a 5 vezes mais rápidos que os da planta (BURL, 1999) não trouxe resultados satisfatórios. Os observadores obtidos desta maneira trouxeram uma amplificação considerável de ruído nos estados observados. Por outro lado, a construção de um filtro de Kalman pode ser feita através da análise dos ruídos de medição envolvidos bem como dos níveis de ruído de processo.

Os níveis de ruído dos acelerômetros utilizados podem ser obtidos de seus fabricantes e podem também ser medidos. Em geral eles têm a característica de ruído branco dentro da faixa de frequência para o qual foram projetados. Entretanto, neste trabalho os sinais utilizados para a realimentação são os de velocidade. A Fig. 73 apresenta os espectros de potência do sinal de aceleração e daquele sinal filtrado e integrado. Embora exista uma versão do filtro de Kalman para ruído colorido, julga-se que esta não é necessária neste trabalho já que na faixa de frequência para a qual o controlador deve trabalhar (até aproximadamente 300Hz) considera-se que o ruído é constante na frequência. A faixa apresenta o limiar definido para o projeto do filtro de Kalman ( $10^{-9}$ ), considerando uma faixa de segurança para que se evite principalmente a perturbação da rede elétrica, nítida em 25 e 50 Hz. Assim, chega-se a  $S_v = 10^{-9}I_3$ .

Quanto ao ruído de processo, deve-se utilizar um patamar equivalente aos ocorridos nos testes dos controladores, que por sua vez devem estar em nível parecido com aqueles observados no processo de usinagem. Tais fatores não são facilmente estimados, de maneira que há autores que chegam a utilizar o ruído de processo como a matriz identidade (GAWRONSKY, 1998). Neste caso, como é conhecido no modelo a matriz de entrada para a perturbação  $B_w$ , o ruído de processo é apenas um valor escalar a se estimar. Uma vez que o ruído de medição foi estimado através da medição mostrada na Fig. 73, o ruído de processo foi estimado através de tentativa e erro até que chega-se a um observador de estados cuja saída estimada ( $C\hat{x}$ ), tenha no máximo um nível de ruído igual ao da saída real. Esta metodologia leva a um valor de  $S_w = 1600$ . Os pólos do observador são ilustrados em triângulos juntamente com os pólos do modelo na Fig. 74.

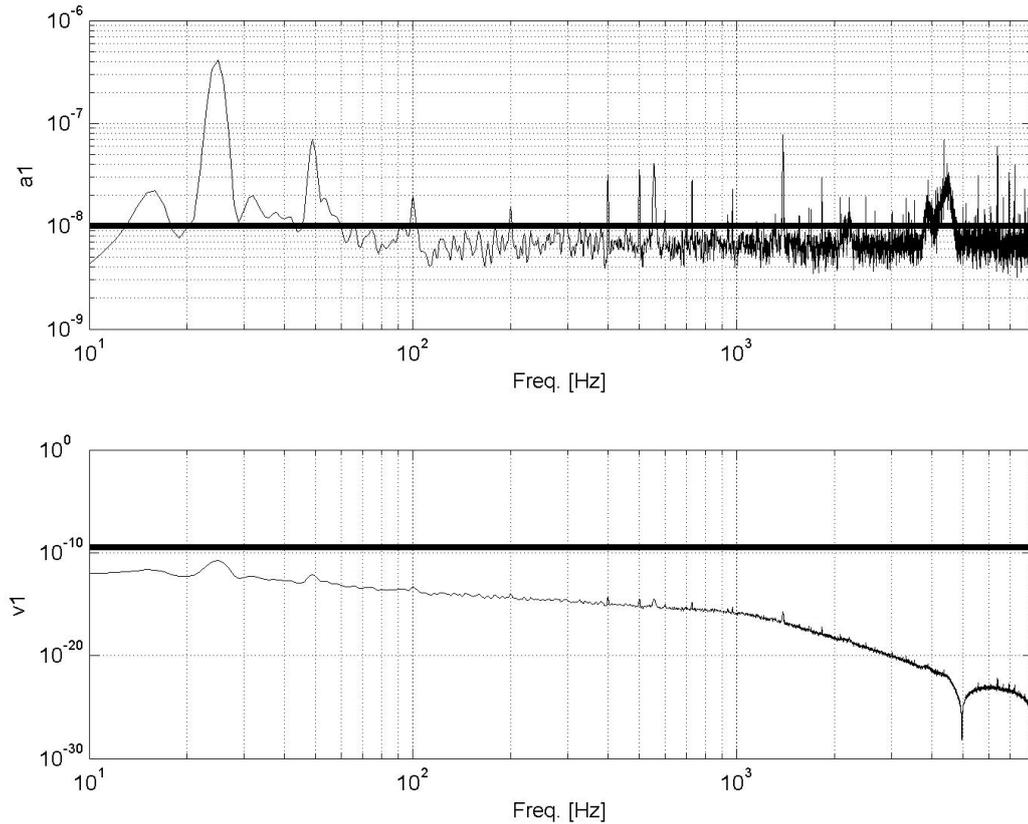
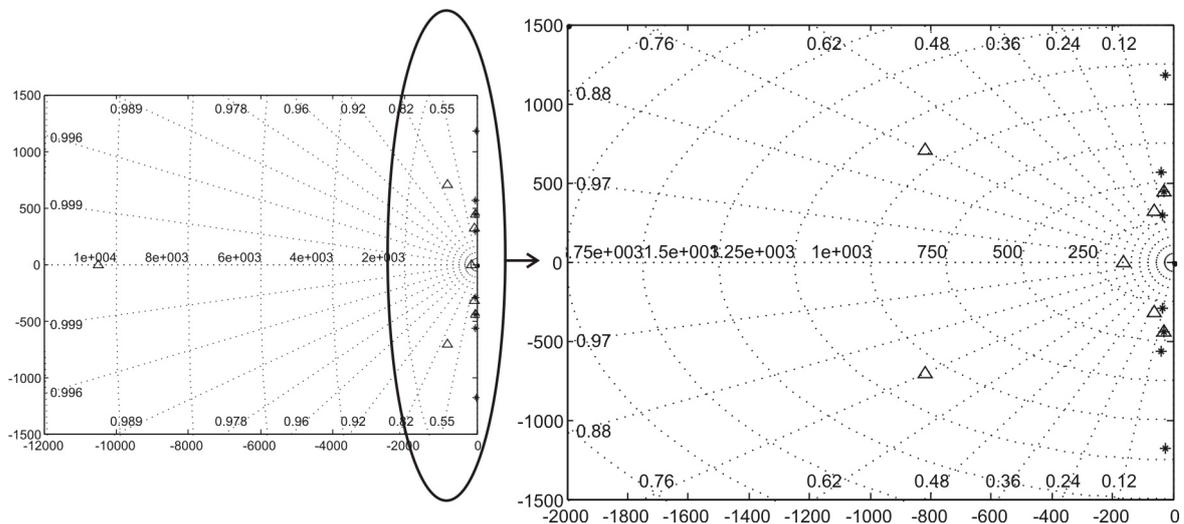


Figura 73: Ruído de medição

Figura 74: Pólos do Modelo 2 (\*) e do Observador ( $\Delta$ )

## 7.2 Realimentação por Alocação de Pólos

Como apresentado na Seção 6.2.3, embora o Modelo 1 tenha 16 estados e seja completamente controlável e observável, os gramianos de controlabilidade são muito baixos para alguns dos modos. Isto restringe a utilização deste modelo para o projeto

por alocação de pólos na medida em que o esforço de controle passa a ser muito alto para estes modos.

A definição dos pólos desejados é feita a partir do objetivo fundamental que consiste em adicionar amortecimento aos modos, principalmente os modos 2 e 3, levam a marcas na peça. Assim, a partir dos pólos em malha aberta, podem ser definidos os pólos desejados para a malha fechada como:

$$p_i, p_i^* = -\bar{\xi}\bar{\omega}_n \pm j\bar{\omega}_n\sqrt{1 - \bar{\xi}^2} \quad (7.1)$$

onde  $\bar{\xi}$  e  $\bar{\omega}_n$  são o fator de amortecimento e a freqüência natural para o par de pólos desejado.

A adição de um pouco de amortecimento (em torno de 3%) nestes dois modos já leva a um ganho de realimentação  $K_r$  alto o suficiente para que o controlador não possa ser implementado na prática. É possível tentar contornar este problema através da alteração adicional da freqüência natural dos pólos desejados. Entretanto, esta tarefa mostra-se tediosa de maneira que resultados aceitáveis são obtidos quando deseja-se adicionar amortecimento a apenas um modo. Assim, os pólos desejados constituem o mesmo conjunto dos pólos em malha aberta com exceção do par de pólos relativo ao modo em questão. A Fig. 75, apresenta a comparação entre as FRFs em malha aberta e fechada de  $v_1/f_p$ . Neste caso, 2% de amortecimento foram adicionados ao par de pólos do modo 3.

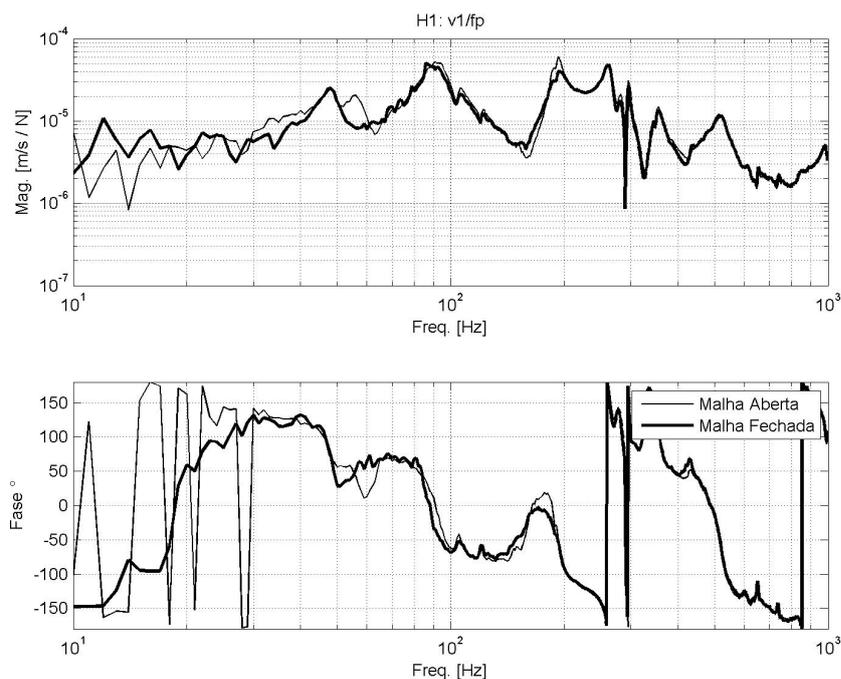


Figura 75: Controle por alocação de pólos: FRF de  $v_1/f_p$

A Fig. 76, apresenta a decomposição em valores singulares do controlador. Em comparação com outros métodos de projeto, descritos mais adiante, o esforço de controle é muito alto, principalmente tendo em vista a pequena alteração trazida pelo fechamento da malha. Mais ainda, não é possível definir no projeto se algum dos atuadores deve ser poupado, a menos que sejam procuradas soluções para o problema do cálculo de  $K_r$  de modo que os autovalores de  $(A - B_u K_r)$  coincidam com os pólos desejados. Para isto, o controlador LQG mostra-se mais adequado.

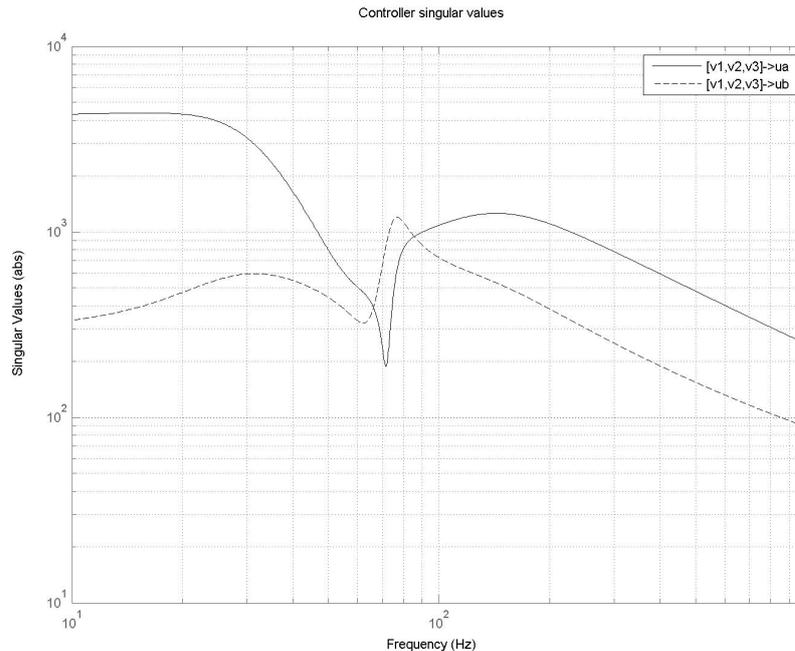


Figura 76: Controle por alocação de pólos: Valores Singulares do Controlador

### 7.3 Controlador LQG

Uma vez que o observador de estados já é construído a partir de um filtro de Kalman, esta seção descreve o procedimento para a definição da realimentação de estados através da minimização de uma função custo como a da Eq. 4.23. A realização modal está relacionada com um vetor de estados na forma:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} z_1 & z_{o1} & z_2 & z_{o2} & z_3 & z_{o3} & z_4 & z_{o4} \end{bmatrix}$$

onde  $z_{oi} = \xi_i z_i + \dot{z}_i / \omega_i$ . A partir da análise da matriz  $A_2$  (v. Seção B.2 no Apêndice B) sabe-se que os modos 2 e 3, equivalem aos modos 2 e 3 identificados na análise modal (v. Seção 5.1).

A Fig. 77, apresenta a comparação dos resultados em malha aberta e fechada

para as seguintes matrizes definidas para a função custo.

$$Q = \text{diag}(0.001I_2, 2I_2, 3I_2, 0.001I_2)$$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad N = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ 1.5 & 0 \\ 1.5 & 0 \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} \end{bmatrix}^T$$

A matriz  $Q$  é prioriza a minimização da resposta dos modos 2 e 3, enquanto que a matriz  $R$  prioriza a minimização do esforço de controle do atuador B. Finalmente, a matriz  $N$  visa diminuir ainda mais o esforço de controle do atuador B no modo 3.

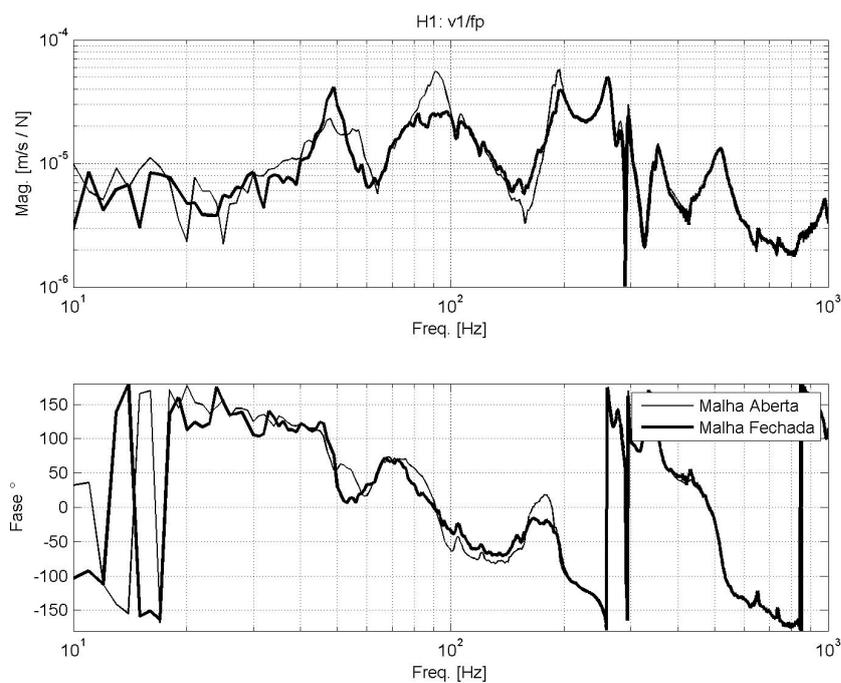


Figura 77: Controle LQG: FRF de  $v_1/f_p$

A Fig. 78 apresenta a decomposição em valores singulares do controlador obtido. De modo geral, há um menor esforço de controle para uma adição de amortecimento bem maior que a obtida através do controle por alocação de pólos.

A tarefa da definição das matrizes para a função de custo no controlador LQG é mais simples do que a tarefa de se definir os pólos desejados para a alocação. A utilização da matriz  $N$  pode ajudar a moldar o esforço de controle dentro de especificações de projeto. Entretanto, sua definição esbarra na condição apontada na Seção

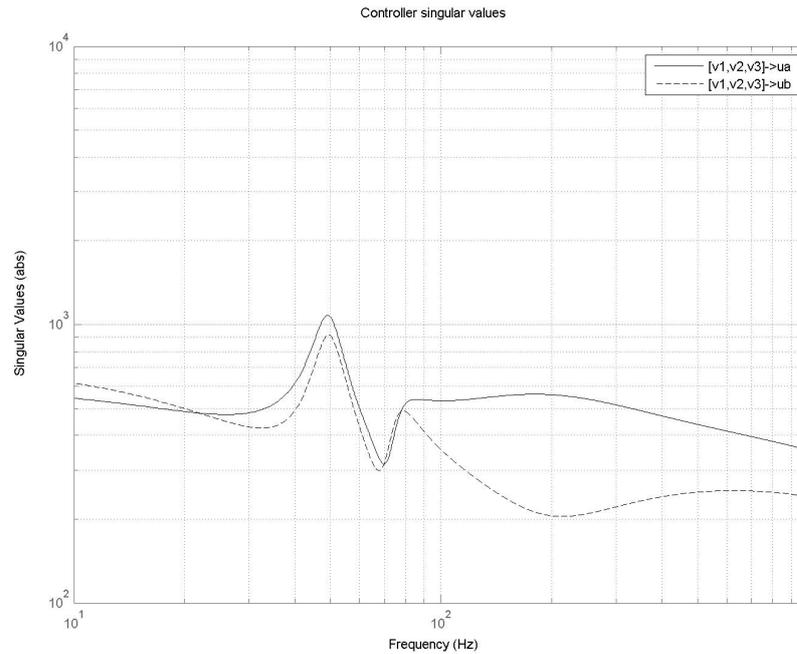


Figura 78: Controle LQG: Valores Singulares do Controlador

4.2.3, que limita sua utilização.

## 7.4 Controlador LQG Balanceado

Como apresentado na Seção 4.2.5, a versão balanceada do LQG força as soluções das equações de Riccati de controlabilidade e observabilidade a coincidirem na mesma solução. Sendo assim, é de se esperar que os pólos do observador mudem. A Fig. 79 compara os pólos do observador utilizado nas seções anteriores (em triângulos) com os da versão balanceada (em quadrados).

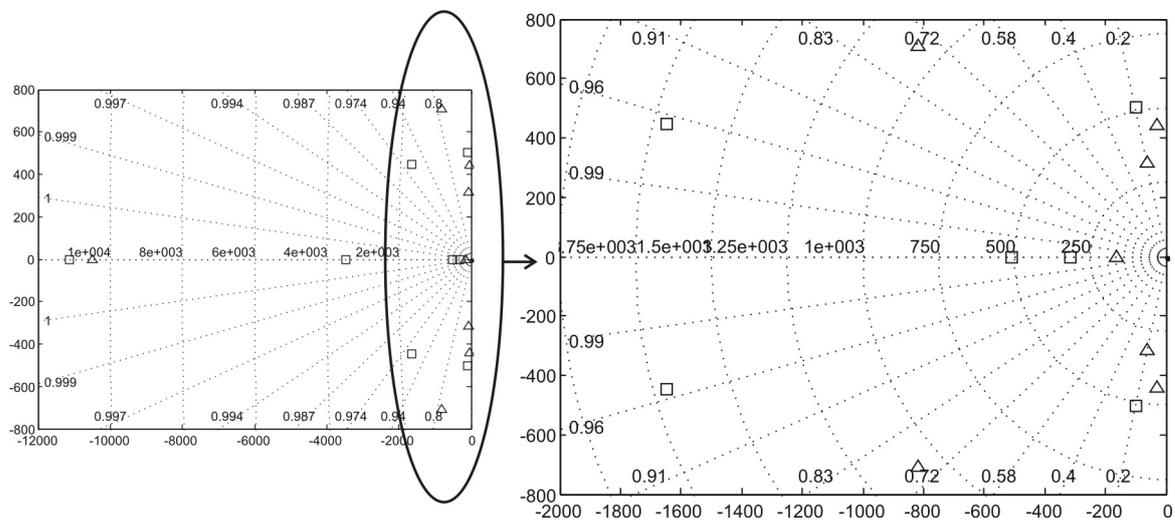


Figura 79: Pólos do filtro de Kalman ( $\triangle$ ) e da versão balanceada ( $\square$ )

O observador tem seus pólos com bem mais amortecimento, com exceção do par relativo ao modo dois, que tem em torno de 20%. Na verdade, os novos pólos mudam de acordo com a função custo utilizada para a realimentação de estados. A Fig. 79 corresponde aos pólos do observador para uma função custo da realimentação de estados com matrizes:

$$Q = \text{diag}(0.01I_2, 4I_2, 5I_2, 0.01I_2)$$

$$R = \begin{bmatrix} 1.5 & 0 \\ 0 & 2.5 \end{bmatrix}$$

A Fig. 80 apresenta a comparação da resposta em frequência entra malha aberta e a malha fechada com o controlador obtido. A decomposição em valores singulares é apresentada na Fig. 81.

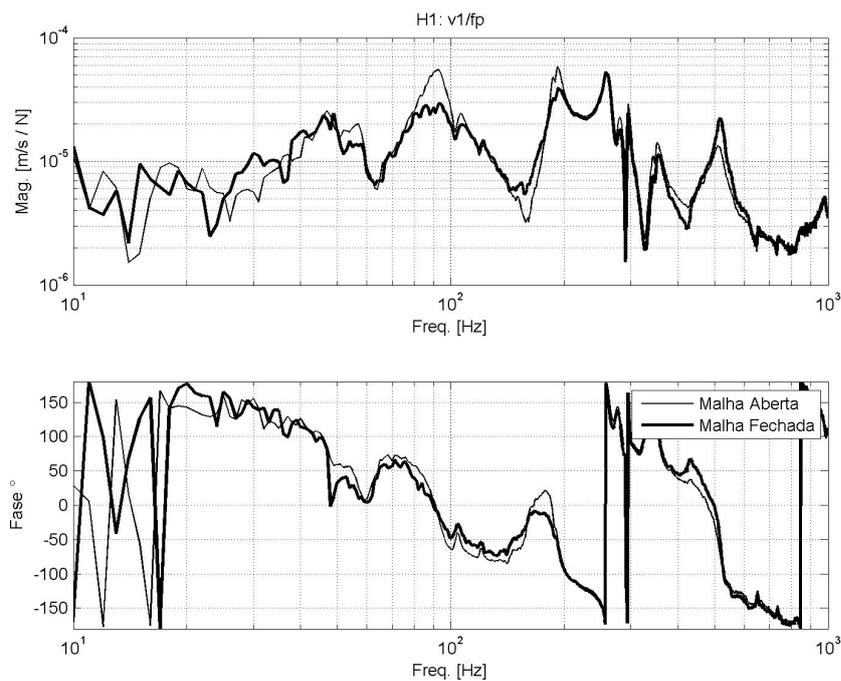


Figura 80: Controle LQG balanceado: FRF de  $v_1/f_p$

Considerando o objetivo inicial de encontrar um controlador que adicione amortecimento aos modos 2 e 3, pode-se definir que resultados como os da Fig. 80 são satisfatórios. De fato, o modo 2 é praticamente eliminado através do fechamento da malha. O modo 3 sofre influência do modo vizinho (a aproximadamente 260 Hz), o qual não se pretende amortecer. No entanto, a curva de fase no modo 3 mostra uma mudança menos abrupta em malha fechada, o que indica maior amortecimento. Como apresentado anteriormente, não são obtidas marcas na usinagem com frequências próximas

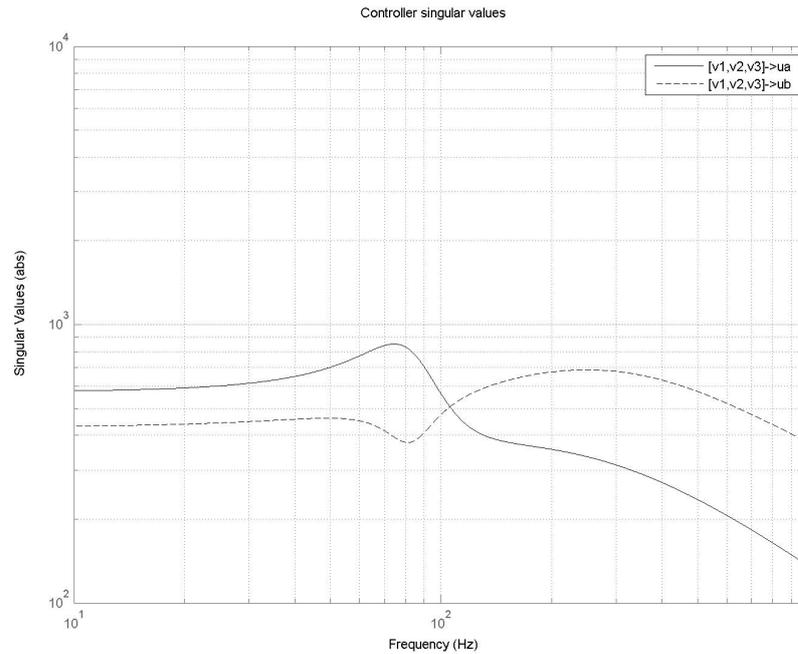


Figura 81: Controle LQG balanceado: Valores Singulares do Controlador

de 260 Hz. Este modo não está presente em experimentos onde o rebolo não está montado no flange. A Fig. 82 apresenta um exemplo de um controlador utilizado sem a presença do rebolo, onde pode-se perceber mais nitidamente o amortecimento do modo 3.

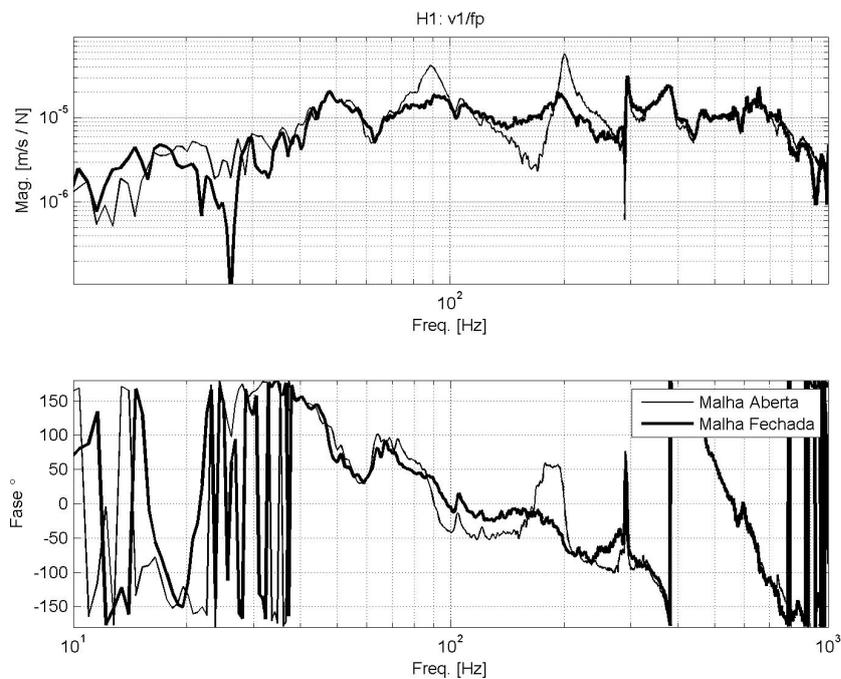


Figura 82: LQG balanceado:  $v_1/f_p$ , sem rebolo

Assim como para os outros métodos de projeto, são apresentados neste trabalho

apenas alguns dos resultados referentes a controladores obtidos. Embora perceba-se uma melhoria na resposta com esforços de controle ainda mais baixos, fica difícil demonstrar a facilidade de sintonia dos parâmetros. De fato este fator mostra-se bastante relevante na escolha de um controlador. A versão LQG balanceada apresenta vantagens em relação aos outros métodos apresentados anteriormente, onde o reprojeto do controlador consiste numa tarefa mais tediosa.

Além disto, este controlador apresenta bons resultados através da utilização dos dois modelos disponíveis. Neste caso, o modelo 1 é preferível já que apresenta uma resposta em freqüência mais próxima à do sistema real. Outra diferença importante é que a utilização do modelo 1 provê controladores onde o esforço de controle é menor em baixas freqüências. A Fig. 83 apresenta os valores singulares para um controlador com ganhos da mesma ordem daquele apresentado anteriormente na Fig. 81.

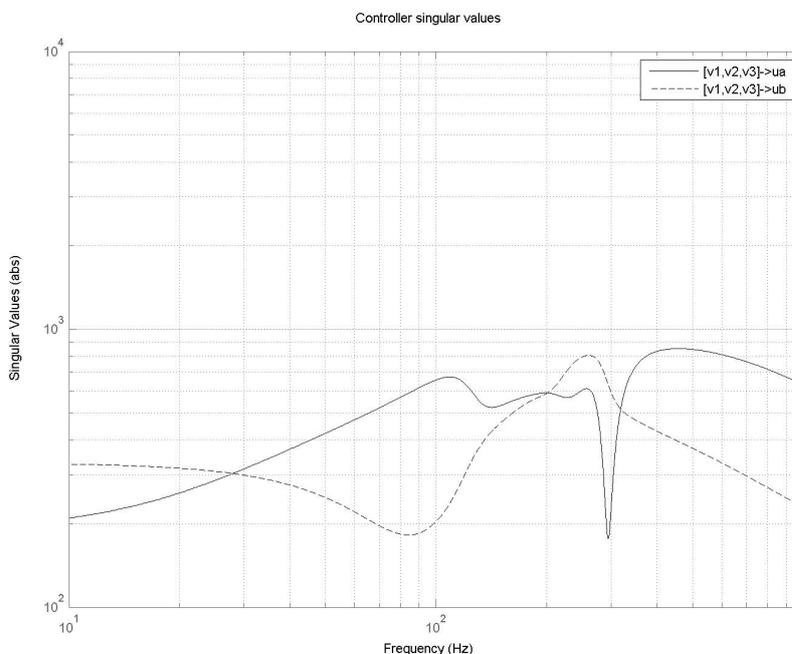


Figura 83: Controle LQG balanceado: Valores Singulares do Controlador

O próximo passo é analisar a viabilidade dos controladores propostos para a utilização em processo, onde o nível de ruído é uma diferença importante.

## 7.5 Testes em Processo

Em processo os níveis de ruído são bem mais altos do que na situação em que a máquina está desligada devido fundamentalmente ao giro do eixo-árvore. O acelerômetro 1 é especialmente afetado pois é montado sobre o rolamento do flange. O

acelerômetro 3 sofre a perturbação de um ventilador (com uma rotação equivalente a 47 Hz) utilizado para a refrigeração do motor. A Fig. 84 apresenta os níveis de ruído para os três acelerômetros.

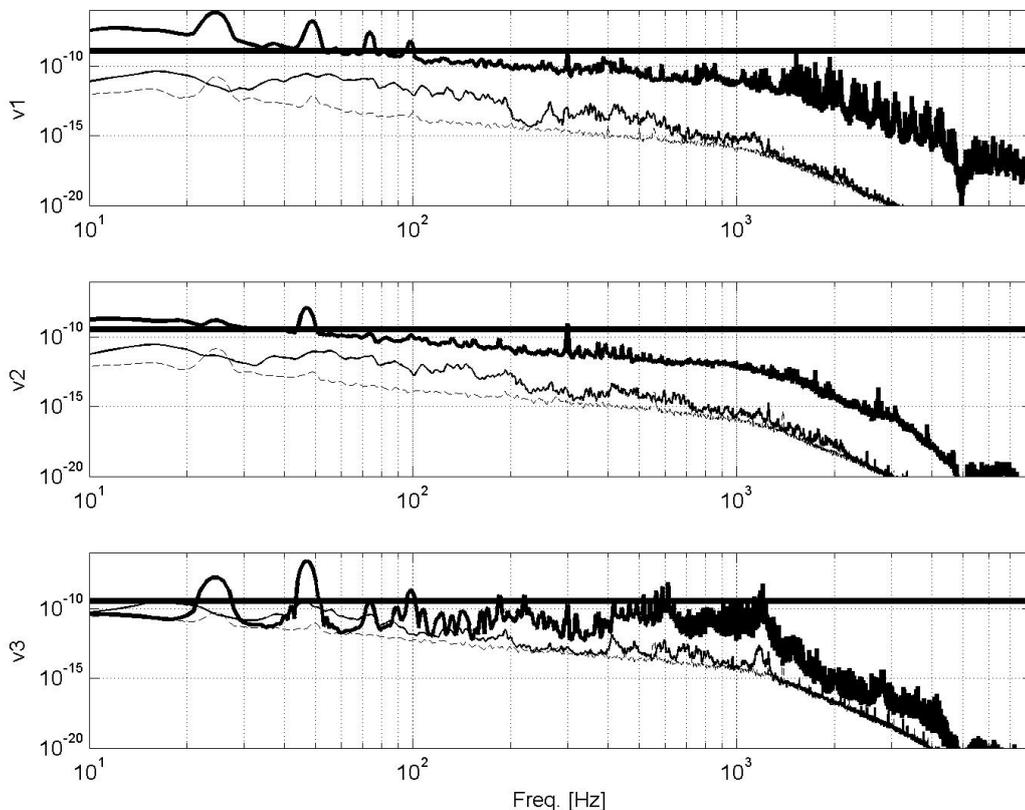


Figura 84: Níveis de ruído nos acelerômetros

As curvas tracejadas correspondem aos ruídos de medição dos sensores, as curvas contínuas e finas mostram um nível de ruído intermediário, onde o eixo-árvore não gira mas é feito movimento com a mesa. Finalmente, as curvas contínuas e grossas apresentam os sinais dos acelerômetros quando o eixo gira com uma velocidade angular de frequência equivalente a 25 Hz, que pode ser percebida nos três sinais. Múltiplos de 25 Hz também podem ser percebidos. As faixas mostram os limiares definidos para o projeto do observador de estados.

A Fig. 85 apresenta o sinal de força de um transdutor montado entre a peça e a mesa durante o processo de usinagem, para duas passadas. A intensidade da força depende de parâmetros como dureza da peça, dureza do rebolo, velocidade da mesa e avanço. Entretanto o comportamento básico é como o apresentado na figura, que consiste em um choque acompanhado por um patamar de força intermitente durante a passada.

Em processo fica um pouco mais complicada a tarefa de comparar a dinâmica do

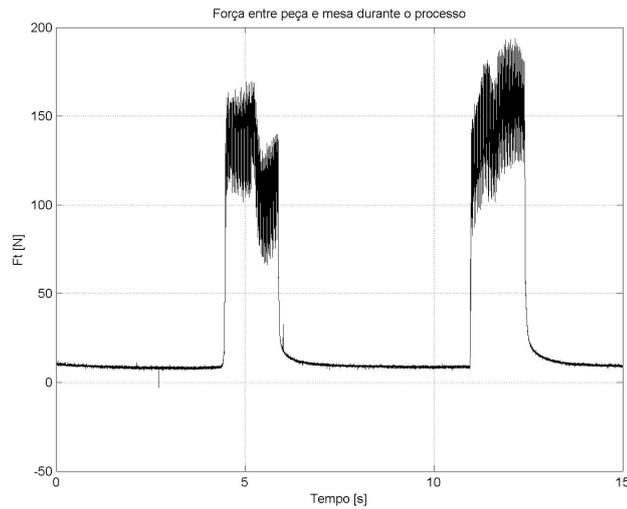


Figura 85: Forças do processo

eixo em malha aberta e fechada. A montagem de um vibrador entre o flange e a mesa é impossível pelo giro do rebolo. A Fig. 86 apresenta a comparação das respostas através da excitação com martelo, com ataques aplicados sobre o flange. A matriz  $Q$  é diagonal, como as apresentadas anteriormente, com  $10I_2$  para os modos de vibração 2 e 3 e  $0.01I_2$  para os restantes. A matriz  $R$  é utilizada como  $R = \text{diag}(1, 5)$ .

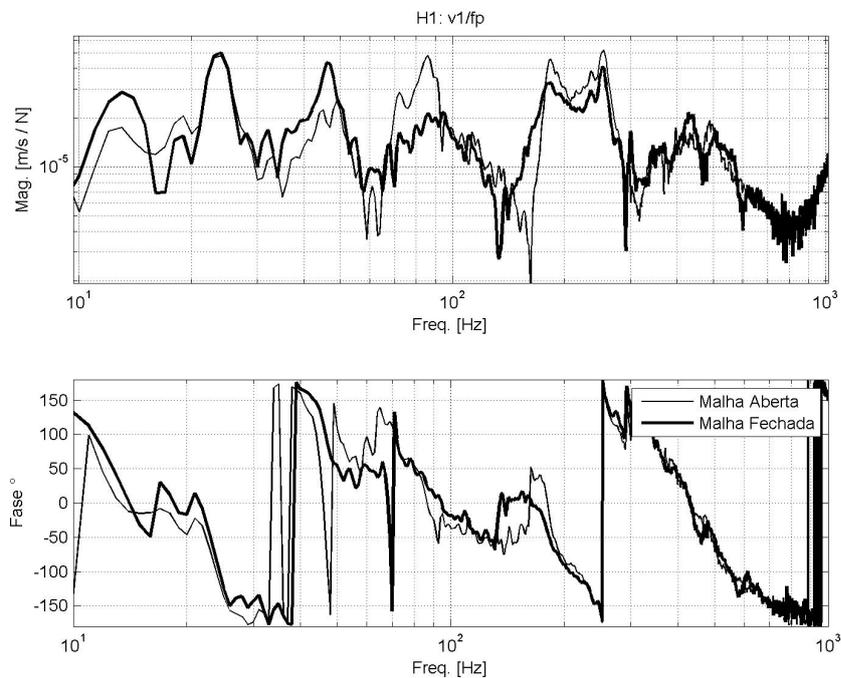


Figura 86: LQG balanceado:  $v_1/f_p$ , máquina em operação

O segundo modo de vibração é quase eliminado, enquanto que o terceiro modo é bastante amortecido mas sofre influência do modo vizinho, como apontado anteriormente. A verificação da resposta na parte traseira do eixo  $v_3/f_p$ , apresentada na

Fig. 87, mostra mais nitidamente a adição de amortecimento aos modos.

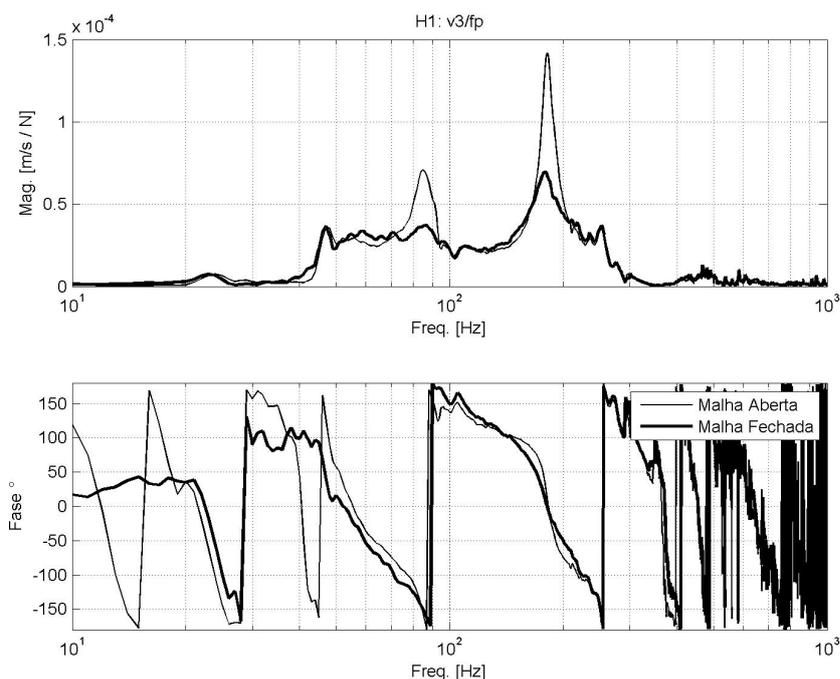


Figura 87: LQG balanceado:  $v_3/f_p$ , máquina em operação

A Fig. 88 apresenta a decomposição em valor singular para o controlador utilizado. Embora o esforço de controle para o atuador B seja mais alto, ele ainda é suficientemente baixo para que durante o processo a tensão de controle  $u_b$  se mantenha dentro da faixa definida na Seção 6.2.1, como apresentado na Fig. 89, onde são plotados os sinais de controle  $u_a$  e  $u_b$  paralelamente com o sinal de perturbação gerado pelo martelo.

Finalmente, a Fig. 90 apresenta as resposta no tempo de  $v_3$ , onde os níveis de ruído são mais baixos, para dois ataques com o martelo de intensidade parecida, acima em malha aberta e abaixo em malha fechada. As envoltórias indicam a diminuição do tempo de acomodação.

Os níveis de sinal de controle apontam que é possível construir controladores com uma menor economia de esforço de controle. Entretanto, julga-se que a adição de amortecimento no nível atingido já é suficiente para diminuir o efeito dos modos de vibração. De fato, em malha fechada não são obtidas marcas na peça através de um processo de usinagem instável.

A Fig. 86 evidencia a perturbação decorrente da excitação permanente e correlacionada com a frequência angular do rotor. De fato, fica comprovado que o controle realimentado é eficiente para a adição de amortecimento, mas pode até mesmo amplificar a resposta em faixas de frequência para as quais não foi projetado para operar.

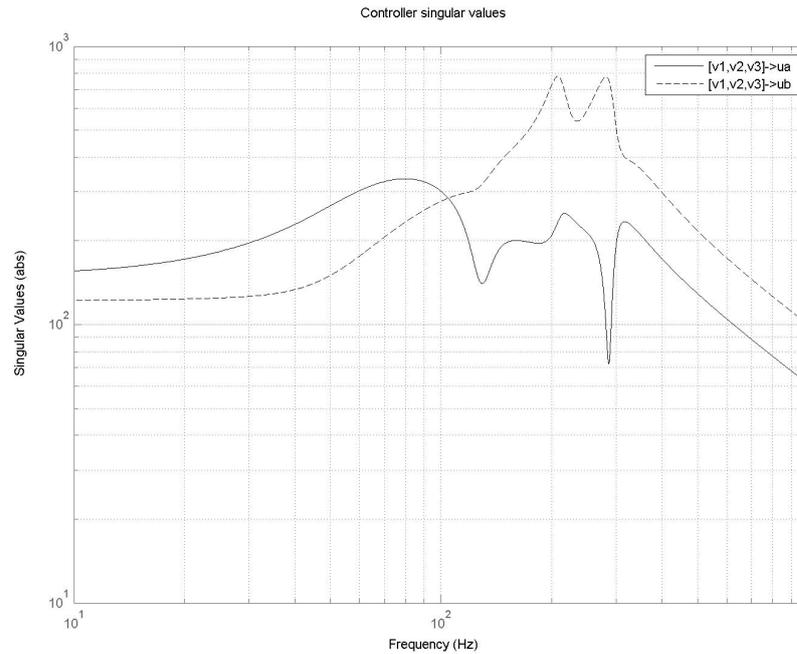


Figura 88: Controle LQG balanceado: Valores Singulares do Controlador

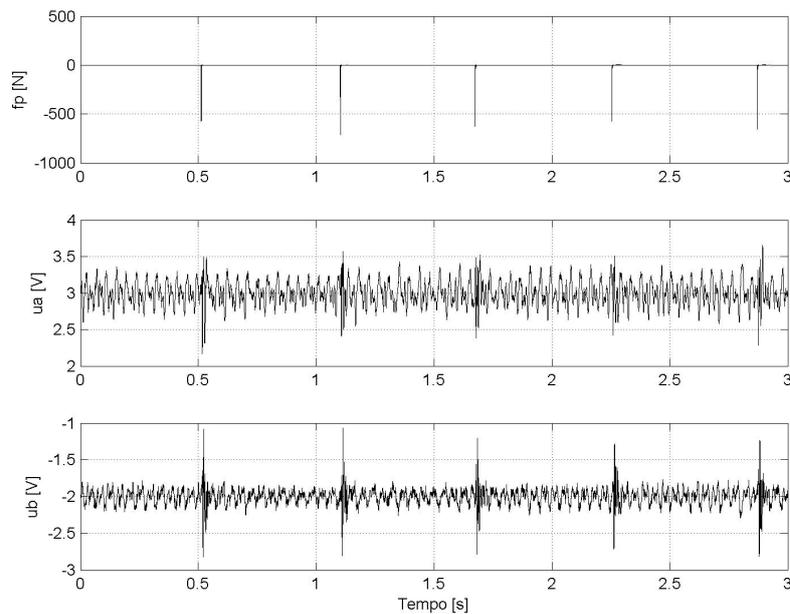


Figura 89: Sinais de controle para os atuadores e força de perturbação

Como apresentado na Seção 4.1, o controle pré-alimentado pode ser utilizado para diminuir este efeito quando combinado com o controle realimentado. Neste caso, o controle pré-alimentado tem o objetivo de suprimir as vibrações persistentes e decorrentes do giro do rotor enquanto que o realimentado teria o objetivo de diminuir o tempo de acomodação frente a excitações intermitentes.

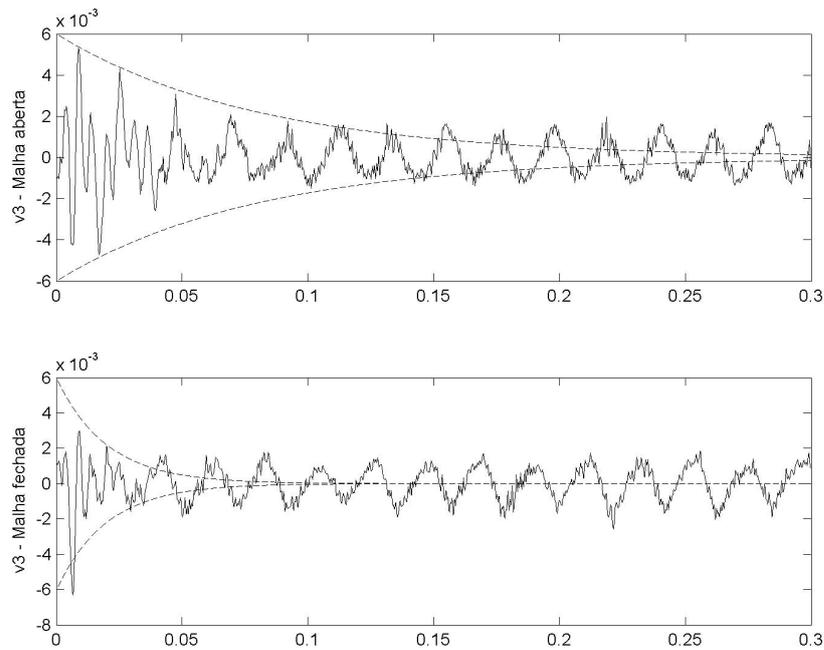


Figura 90: A diminuição do tempo de acomodação

A implementação de controle pré-alimentado é indicada no Capítulo 9 como uma perspectiva para trabalhos futuros. Nele também é apresentada uma análise final sobre este trabalho ressaltando pontos relevantes relativos à contribuições obtidas.

Do ponto de vista do controle realimentado pode-se concluir que o projeto por controle ótimo mostra-se de implementação mais prática do que por alocação de pólos. A versão balanceada do controlador LQG merece especial atenção no projeto de controladores para sistemas como o abordado neste trabalho. De fato, através dele a sintonia das matrizes para as funções custo (tanto da realimentação de estados como do filtro de Kalman) mostra-se bastante simples, principalmente utilizando um modelo que usa uma realização modal.

## 8 Metodologia de projeto

A experiência adquirida na execução deste trabalho pressupõe uma análise da metodologia utilizada. Mais ainda, acredita-se que é importante deixar como contribuição este tipo de análise e também como proposta para trabalhos futuros envolvendo controle ativo de vibrações. De fato, a metodologia de projeto tem especial importância em problemas multidisciplinares, onde existe uma grande dificuldade de se compreender todos os elementos envolvidos.

Em (PREUMONT, 2002) encontra-se uma proposta de metodologia para este tipo de problema que é usada como base para estruturar a utilizada neste trabalho. A proposta de (PREUMONT, 2002) mostra que o desenvolvimento de soluções em controle ativo de vibrações não inclui simplesmente o projeto de controladores mas envolve, sim, outros problemas como a identificação e a modelagem.

A Fig. 91 apresenta um fluxograma com a metodologia proposta neste trabalho. Uma das diferenças em relação àquela proposta em (PREUMONT, 2002) é a divisão em cinco fases consecutivas e a inclusão do projeto mecânico preliminar. Embora esta parte não tenha sido desenvolvida durante este trabalho é possível inferir sobre a sua influência nas fases seguintes:

1. Projeto Mecânico preliminar: Esta é a fase do projeto anterior a este trabalho (cujos resultados são apresentados no Capítulo 5). O trabalho parte da identificação dos modos dominantes a serem amortecidos. Isto é feito através do cruzamento dos resultados de análises modais e de análises nas superfícies da peça e ferramenta. Estes resultados são subsídio para a busca de soluções construtivas para o posicionamento e montagem dos atuadores e sensores.
2. Identificação: Nesta fase são utilizados algoritmos de identificação de sistemas para a obtenção de modelos para o comportamento vibratório do eixo bem como da dinâmica dos atuadores.

O processo de identificação compreende também a definição de faixas de operação para os atuadores onde os modelos identificados sejam válidos.

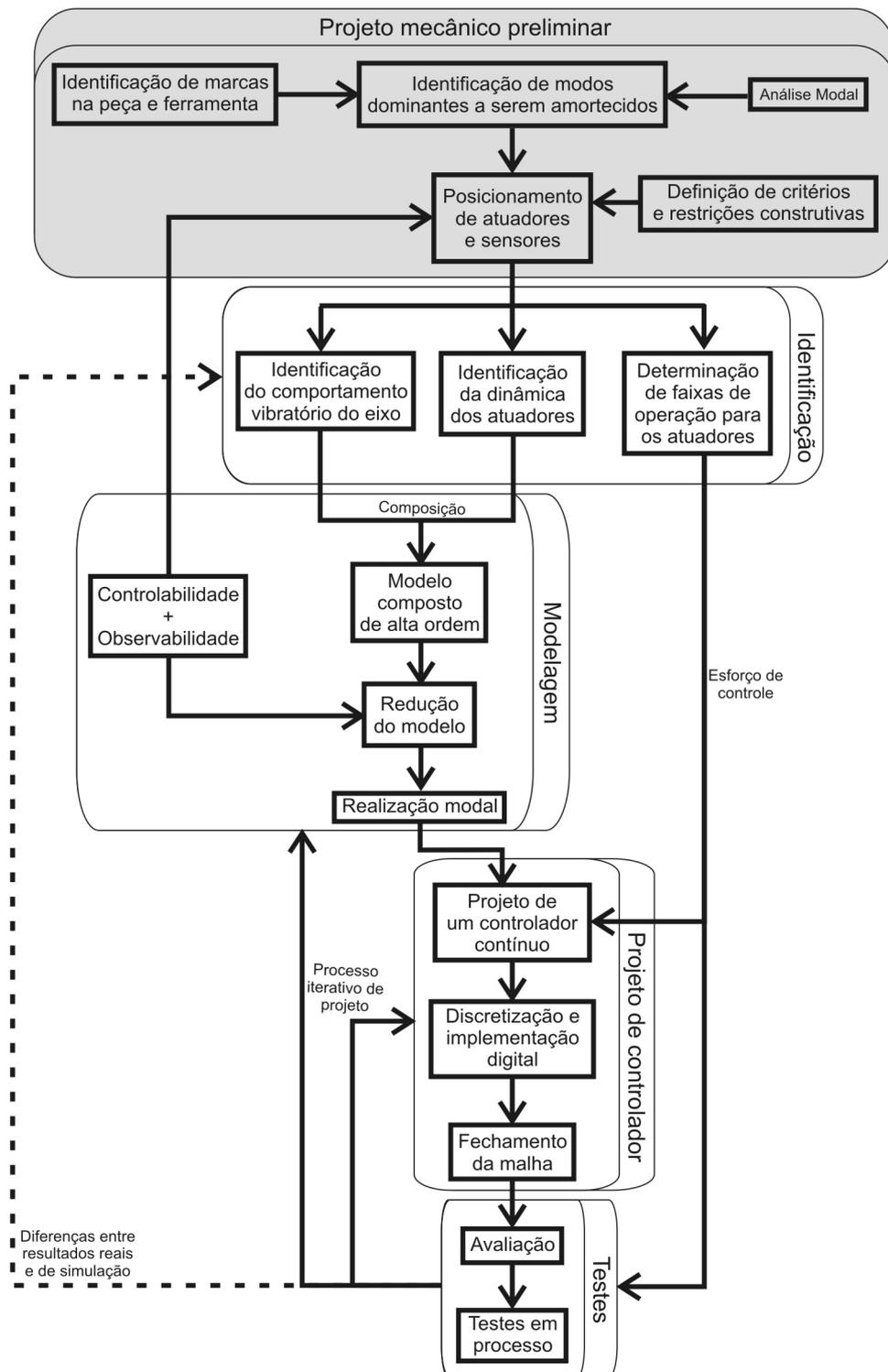


Figura 91: Metodologia proposta

3. Modelagem: Os modelos identificados na fase anterior podem não possuir propriedades interessantes para a sua utilização no projeto de controladores. Esta fase visa então “lapidar” estes modelos de entrada de maneira a obter um modelo de saída no espaço de estado controlável, observável, estável, ordem baixa e resposta em frequência tão próxima da real quanto possível.

Inicialmente estes modelos devem ser compostos em um modelo único e que

tenha propriedades de controlabilidade e observabilidade compatíveis com o sistema real. A análise destas duas propriedades guia a redução do modelo (de maneira a obter um modelo controlável e observável). Caso o sistema real não possua realmente estas características, é necessário reprojeter o posicionamento de atuadores e sensores.

Finalmente, propõe-se a transformação do modelo numa realização modal de maneira a trazer um significado físico/estrutural para os modelos adquiridos. Este tipo de apelo estrutural auxilia o projeto dos controladores uma vez que os modos a serem amortecidos encontram-se explicitamente nos modelos. Esta escolha é fundamentada em trabalhos apresentados em (HANSEN; SNYDER, 1997) e principalmente em (GAWRONSKY, 1998) onde estruturas descritas em termos de modos de vibração são modeladas no espaço de estados.

4. Projeto de controlador: O projeto é realizado a partir de um modelo contínuo, que recebe também como entrada a informação das faixas de operação para os atuadores, que definem limitações para o esforço de controle. O controlador projetado como um sistema contínuo deve ser então discretizado para permitir sua implementação digital e o fechamento da malha de controle.

Especificamente é proposta a aplicação de uma variante de controle ótimo, o controlador LQG balanceado, apresentado originalmente em (JONCKHEERE; SILVERMAN, 1983) e aplicado ao controle de vibrações em estruturas aeroespaciais em (GAWRONSKY, 1998).

5. Testes: Estes podem ser realizados através de forças externas a partir de martelos de impacto ou atuadores, bem como em processo. Os resultados de tais testes alimentam um processo iterativo de projeto de controladores, voltando à fase anterior ou até mesmo realizando uma nova redução do modelo na fase de modelagem. Entretanto, caso os resultados experimentais se afastem daqueles previstos pelos modelos é necessário voltar à fase de identificação.

Uma peculiaridade da metodologia proposta é a ausência da determinação de especificações de projeto. De fato, o objetivo fundamental deste trabalho é a adição de amortecimento de maneira a tornar a estrutura da máquina menos suscetível a um processo de usinagem instável. Não é definido, em princípio, nenhum tipo de especificação já que não se sabe quanto amortecimento deve ser adicionado, se é que é possível determinar tal limiar. De fato, o atual estado da arte em controle ativo de vibrações consiste na identificação do potencial deste tipo de solução. Especificamente para máquinas-ferramentas não são conhecidas investigações que quantificam a cor-

relação entre o amortecimento dos modos de vibração e a vulnerabilidade da estrutura a um processo instável.

A divisão de um problema multidisciplinar em fases distintas e interdependentes ajuda na compreensão do problema geral e permite uma visão do problema geral, que inclui vários problemas individuais que não podem ser resolvidos através da visão de uma área do conhecimento em particular.

A seguir, são apresentadas algumas conclusões a respeito do trabalho desenvolvido em cada uma das cinco fases:

- **Projeto mecânico preliminar:** O desenvolvimento em si desta fase não está no escopo deste trabalho. Entretanto pode-se avaliar a influência de da maneira como este projeto foi feito no desenvolvimento das fases posteriores. A Seção 6.2.1 sugere que o projeto mecânico do atuador B poderia ser melhorado. Primeiramente as forças de atrito na alavanca de desvio triangular restringem a utilização deste atuador, que passa apresentar características não lineares. Em segundo lugar este atuador apresenta uma capacidade de extensão mais alta do que a necessária para a aplicação, ao mesmo tempo que uma baixa rigidez. O reprojeto da alavanca de desvio deve, então, ter como objetivo a diminuição do atrito bem como melhorar a relação entre extensão e força transmitida.
- **Identificação:** Este trabalho apenas utiliza métodos de identificação disponíveis no pacote computacional Matlab (System Identification Toolbox ©) e não tem o objetivo de aprofundar-se na investigação de métodos para este problema. De modo geral a maior dificuldade vem do fato de que sistemas com pouco amortecimento possuem pólos muito próximos do eixo imaginário e que são frequentemente identificados como pólos instáveis. Esta dificuldade é minimizada quando os dados de entrada são transformados com técnicas de análise espectral como as apresentadas na Seção 3.2.
- **Modelagem:** A utilização de modelos no espaço de estados em realizações modais provê uma ligação entre os modelos identificados e aqueles úteis para o projeto de controladores. Os primeiros possuem uma parametrização qualquer, definida por critérios dos próprios algoritmos de identificação e que não necessariamente é adequada ao projeto de controladores. A redução de modelos via realização balanceada consiste em um método simples e que permite que a redução seja feita à luz do conhecimento da dinâmica do sistema real, uma vez que a realização balanceada se aproxima de uma realização modal para sistemas com pouco amortecimento, como apresentado na Seção 2.4.2. De fato,

realizações modais dão um significado físico/estrutural aos modelos que auxilia o processo de projeto de controladores.

- **Projeto de Controladores:** Os métodos de controle ótimo multivariável têm a sintonia mais simples do que métodos de controle por alocação de pólos. Especificamente a versão balanceada do controlador LQG facilita a sintonia do observador de estados e também da matriz de ganhos de realimentação. Além disto, o esforço de controle obtido é normalmente mais suave no domínio da frequência, ou seja, sem o aparecimento de picos que podem tornar o controlador muito sensível a perturbações.

Durante o desenvolvimento das cinco fases propostas para a metodologia percebe-se que falhas cometidas em alguma delas dificultam o desenvolvimento das posteriores. Assim cada fase influencia positiva ou negativamente cada uma das fases anteriores de maneira que é fundamental que se dedique mais tempo de projeto nas primeiras fases. Por exemplo pode-se citar a solução construtiva para o atuador B que pode levar a atrito e folgas que podem dificultar a utilização de sistemas lineares tanto para a identificação, modelagem e projeto de controladores. Além disto, resultados ruins podem obrigar um reprojeto como ilustrado pelas linhas mais grossas na Fig. 92, onde as linhas mais finas representam o processo iterativo de projeto dos controladores. De fato, a volta às fases de modelagem e projeto compreende basicamente um esforço de sintonia de parâmetros. Enquanto isto, a volta à fase de identificação compreende possivelmente a busca de novos métodos ou até mesmo a realização de novos experimentos. Ainda mais dispendiosa é uma possível volta à fase de projeto mecânico, que inclui o projeto em si, a fabricação de novas peças e a montagem.

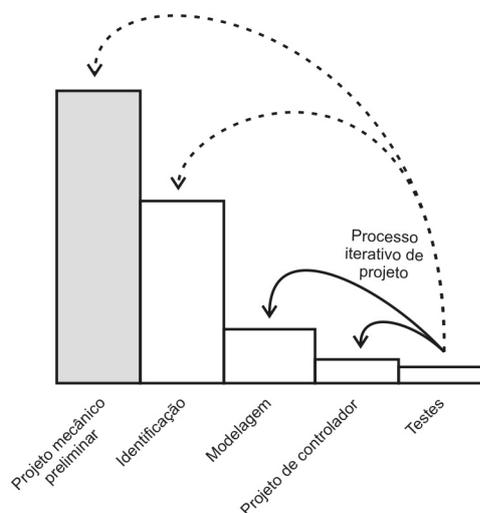


Figura 92: Custo de reprojeto e o processo iterativo de projeto

O Capítulo 9 finaliza este trabalho a partir de conclusões gerais a respeito do que

é obtido em relação aos objetivos iniciais.

## 9 Conclusões e Perspectivas

Este trabalho investigou a aplicação de controle realimentado de vibrações com o objetivo de adicionar amortecimento aos modos de vibração de uma máquina-ferramenta.

A adição de amortecimento tornou a estrutura da máquina menos vulnerável a forças de processo e conseqüentemente menos suscetível a instabilidade na usinagem. De fato, nos testes em malha fechada realizados em processo, não foi encontrado um conjunto de parâmetros de processo que levem a uma situação de instabilidade, de onde pode-se concluir que o objetivo fundamental do trabalho foi atingido.

A solução proposta pode ser aplicada a outras máquinas ferramentas com o mesmo objetivo. De modo geral, a solução proposta é válida para estruturas mecânicas em que a falta de amortecimento representem um problema.

Adicionalmente, a experiência adquirida durante a realização deste trabalho permitiu a proposta de uma metodologia de projeto, apresentada no Capítulo 8. Esta metodologia pode ajudar a isolar os problemas intrínsecos a um problema geral e de natureza multidisciplinar.

A utilização de modelos no espaço de estados mostrou-se bastante adequada a problemas multivariáveis, como é o caso de aplicações de controle ativo onde existe a presença de vários atuadores e sensores. Além disto, a utilização de realizações modais permitiu a ligação do modelo com os modos de vibração da estrutura de maneira explícita, o que facilita a sintonia de controladores e faz uma ligação interessante entre modelos adequados a projetos de controle e modelos estruturais baseados em equações diferenciais de segunda ordem. Finalmente, para sistemas com pouco amortecimento, realizações modais se aproximam de realizações balanceadas, de onde pode-se inferir propriedades interessantes a respeito da controlabilidade e observabilidade do sistema.

Dos métodos de projeto de controlador avaliados deve-se dar um destaque especial ao controlador LQG, em especial à sua versão balanceada. De fato, a sintonia deste tipo de controlador mostra-se bastante simples, principalmente utilizando reali-

zações modais para a modelagem.

O projeto mecânico realizado previamente a este trabalho objetivou a busca de uma solução modular, que poderia ser aplicada a outras máquinas com a mesma cinemática<sup>1</sup> sem a necessidade de substituir peças importantes e caras. A busca por soluções modulares traz a necessidade de encontrar uma metodologia para o projeto dos controladores que possa ser aplicada sempre que os módulos forem instalados em um novo modelo de máquina. Entretanto, este trabalho mostra que o projeto de um controlador para estruturas com pouco amortecimento compreende outras tarefas além do projeto mecânico.

Como perspectivas futuras a este trabalho pode ser destacada uma análise mais profunda no problema da identificação do sistema. De fato, muitos dos algoritmos disponíveis não são adequados para sistemas com pouco amortecimento enquanto que outros, utilizados em análise modal, não parametrizam o modelo identificado de uma maneira que seja útil para o projeto de controladores. Em (JUANG, 1994), por exemplo, são apresentadas algumas técnicas de identificação utilizadas em (GAWRONSKY, 1998) para sistemas com pouco amortecimento e que produzem modelos no espaço de estados, úteis para o projeto de controladores.

Além disto, uma análise mais detalhada da estabilidade do controlador proposto deve ser realizada considerando incertezas envolvidas no modelo. De fato, a robustez consiste em um dos fatores frequentemente criticados no controle ativo de vibrações em comparação com soluções passivas. Assim, o cuidado com a garantia da estabilidade mesmo frente a variações na planta é importante.

Finalmente, é prevista a investigação de técnicas de controle pré-alimentado para o problema das vibrações por excitação forçada, causadas por desbalanceamento da ferramenta bem como por imperfeições na superfície da mesma. Posteriormente tal controlador deve ser combinado ao controlador realimentado proposto neste trabalho, de maneira a diminuir os dois tipos de vibração que influenciam a estabilidade do processo.

---

<sup>1</sup>Entende-se por máquinas de mesma cinemática aquelas que têm o mesmo tipo de estrutura mecânica e que têm basicamente as mesmas formas modais

## Referências

- ANGEVINE, O. Active cancellation of the hum of large electric transformers. In: TORONTO, CANADA. *InterNoise 92*. [S.l.], 1992. p. 313–316.
- ARNOLD, W. I.; LAUB, A. Generalized eigenproblem algorithms and software for algebraic riccati equations. *Proc. IEEE*, v. 72, p. 1746–1754, 1984.
- ATLINTAS, Y.; WECK, M. Chatter stability of metal cutting and grinding. *Annals of the CIRP*, v. 53/2, 2004.
- BENDAT, J. S.; PIERSOL, A. G. *Engineering Applications of Correlation and Spectral Analysis*. [S.l.]: John Wiley & Sons, New York., 1980.
- BRIGHAM, E. O. *The Fast Fourier Transform - Appendix A*. [S.l.]: Prentice Hall, Upper Saddle River, N.J., 1988.
- BURL, J. *Linear Optimal Control - H2 and Hinf Methods*. [S.l.]: Addison-Wesley, 1999.
- CHEN, C. *Introduction to linear system theory*. [S.l.]: HRW series in Electrical Engineering, Electronics, and Systems, 1970.
- CHEN, C. *Linear System Theory and Design*. [S.l.]: Oxford University Press, Inc., 1999.
- ELLIOTT, S. J. Adaptive methods in active control. *Proceedings of MOVIC'98, Zurique, Suíça*, p. 41–48, 1998.
- ESPÍNDOLA, J.; SILVA, J. M.; LOPES, E. M. O. A generalized fractional derivative approach to viscoelastic material properties measurement. *Applied Mathematics and Computation*, v. 164, n. 2, p. 493–506, 2005.
- EWINS, D. *Modal testing: theory and practice*. [S.l.]: Research Studies Press, Letchworth, England, 1984.
- FARHANG-BOROUJENY, B. *Adaptive Filters: Theory and Applications*. National University of Singapore: John Wiley & Sons Ltd, 1998.
- FULLER, C.; ELLIOTT; S.J. NELSON, P. *Active Control of Vibration*. [S.l.]: Academic Press, 1996.
- GAWRONSKY, W. *Dynamics and Control of structures: A modal approach*. [S.l.]: Springer-Verlag, New York, 1998.
- GLASER, S. et al. Aktive schwingungsdämpfung bei glasschneidemaschinen. *Proceedings of Adaptronic Congress*, 2002.
- HANSEN, C.; SNYDER, S. *Active Control of Noise and Vibration*. [S.l.]: E & FN Spon, 1997.

- HARRIS, F. On the use of windows for harmonic analysis with the discrete fourier transform. In: *Proceedings of the IEEE*. [S.l.: s.n.], 1978. v. 66.
- HESSELBACH, J. *Zwischenbericht zum Forschungsvorhaben HE 1890/23-1*. [S.l.], 2005.
- HESSELBACH, J. et al. Adaptronik in der robotertechnik. In: *Adaptronic Congress Berlin*. [S.l.: s.n.], 2001.
- HIPPE, P.; WURMTHALER, C. *Zustandsregelung - Theoretische Grundlagen und anwendungsorientierte Regelungskonzepte*. [S.l.]: Springer-Verlag, 1985.
- HUBER, G.; LORENZ, M.; SVARICEK, F. Intelligente materialien zur schwingungsreduktion im kfz. *Proceedings of Adaptronic Congress*, 2001.
- INMAN, D. *Engineering Vibration*. [S.l.]: Prentice-Hall Inc., 2001.
- INMAN, D. *Vibration with Control*. [S.l.]: John Wiley & Sons, Ltd, 2006.
- INSAKI, I.; KERPUSCHEWSKI, B.; LEE, H.-S. Grinding chatter - origin and suppression. *Keynote Paper. Annals of the CIRP*, v. 50, p. 515–534, 2001.
- ISERMANN, R. *Digitale Regelsysteme. Band I - Grundlagen Deterministische Regelungen*. [S.l.]: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1988.
- JONCKHEERE, E.; SILVERMAN, L. A new set of invariants for linear systems-application to reduced order compensator design. *IEEE Trans. Automat. Control*, AC-28, p. 953–964, 1983.
- JORDAN, R. *Análise Modal Experimental*. Universidade Federal de Santa Catarina: Apostila - Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, 2002.
- JUANG, J.-N. *Applied System Identification*. [S.l.]: Prentice-Hall, 1994.
- KAILATH, T. *Linear Systems*. [S.l.]: Prentice-Hall, 1980.
- KALINKE, P.; GNAUERT, U.; FEHREN, H. Einsatz eines aktiven schwingungsreduktionssystems zur verbesserunf des schwingungskomforts bei cabriolets. *Proceedings of Adaptronic Congress*, 2001.
- KAUTSKY, J.; NICHOLS, N. Robust pole assignment in linear state feedback. *Int. J. Control*, v. 41, p. 1129–1155, 1985.
- KEIMER, R. et al. Adaptronische schwingungsunterdrückung an hochdynamischen parallelrobotern für handhabung und montage. In: *Kongress Intelligente Leichtbausysteme ILS*. [S.l.: s.n.], 2003.
- KWAKERNAAK, H.; SIVAN, R. *Modern Signals and Systems*. [S.l.]: Prentice-Hall, Inc., 1991.
- LJUNG, L. S.; PIERSOL, A. G. *System Identification - Theory for the user*. [S.l.]: Prentice Hall, Upper Saddle River, N.J., 1999.
- LUEG, P. Process of silencing sound oscillations. *Patente Alemã DRP No 655 508*, 1993.

LUNZE. *Regelungstechnik 2 - MehrgröSSensysteme, Digitale Regelung*. [S.l.]: Springer, 1997.

MOORE, B. Principal component analysis in linear systems: Controllability, observability, and model reduction. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, v. 26, p. 17–32, 1981.

MORGAN, D. *An analysis of multiple correlation cancellation loops with a filter in the auxiliary path*. [S.l.]: Institute of Electrical and Electronics Engineers Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing, 1980.

OGATA, K. *Engenharia de Controle Moderno*. [S.l.]: Livros Técnicos e Científicos, 2000.

PI. *Complete PI Nanopositioning & Micropositioning Catalog*. Karlsruhe, 2006.

PIETSCH, I. et al. Model-based control of plane parallel robots - how to choose the appropriate approach? In: *Parallel Kinematics Seminar - PKS*. [S.l.: s.n.], 2004. p. 211–232.

PIETSCH, I. et al. Adaptronik für werkzeugmaschinen. In: *Adaptronic Congress*. [S.l.: s.n.], 2005.

PREUMONT, A. *Vibration Control of Active Structures, An Introduction*. 2. ed. [S.l.]: Kluwer, 2002.

SIMNOFSKE, M.; HESSELBACH, J. The increase of the dynamic and static stiffness of a grinding machine. In: *Proceedings of IDETC/CIE 2006 - ASME 2006 International Design Engineering Technical Conference & Computers and Information in Engineering Conference*. Philadelphia, Pennsylvania, USA: [s.n.], 2006.

VIPPERMAN, J.; BURDISSO, R.; FULLER, C. Active control of broadband structural vibration using the lms adaptive algorithm. *Journal of Sound and Vibration*, v. 166, n. 2, p. 283–299, 1993.

ZHOU, K.; DOYLE, J. *Essentials of Robust Control*. [S.l.]: Prentice-Hall, 1998.

## APÊNDICE A – Sistemas LIT

Este apêndice trata da descrição matemática e propriedades do tipo de sistema utilizado neste trabalho com o objetivo especial de analisar e modelar estruturas mecânicas, atuadores e sensores. Sistemas lineares foram largamente estudados (CHEN, 1970; KWAKERNAAK; SIVAN, 1991) *et al.* e muitos dos métodos para controle automático são desenvolvidos para sistemas deste tipo. Este trabalho utiliza *Sistemas Lineares e Invariantes no Tempo* (LIT) para a modelagem dos *sistemas dinâmicos* de interesse. Tais sistemas possuem um ou alguns sinais de *entrada* (ou excitação) e como consequência a estes obtêm-se um ou alguns sinais de *saída* (ou resposta), como ilustrado na Fig. 93.

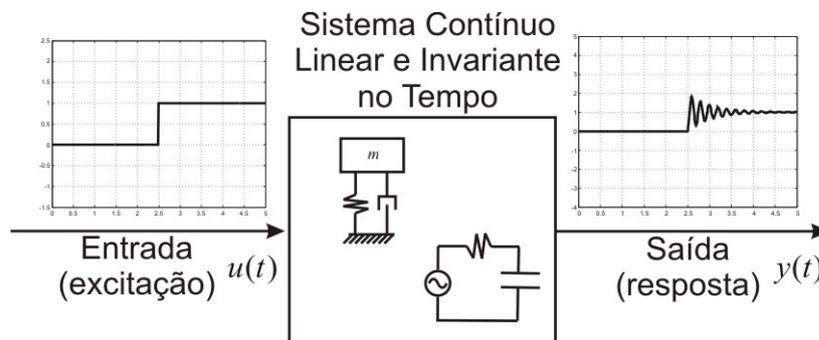


Figura 93: Sistema contínuo monovariável

Sistemas lineares obedecem ao princípio da superposição, que estabelece que a *resposta* de um sistema linear sujeito a uma *soma de sinais de entrada* é igual à *soma das respostas* a cada uma das entradas<sup>1</sup>, como é ilustrado na Fig. 94. Além disto a *invariância no tempo* define que a resposta do sistema é sempre a mesma para uma dado sinal de entrada e condições iniciais, independentemente de quando é aplicada tal entrada e de como é definido o instante para as condições iniciais, como ilustrado na Fig. 95.

<sup>1</sup>Uma definição matematicamente exata pode ser encontrada em (KWAKERNAAK; SIVAN, 1991).

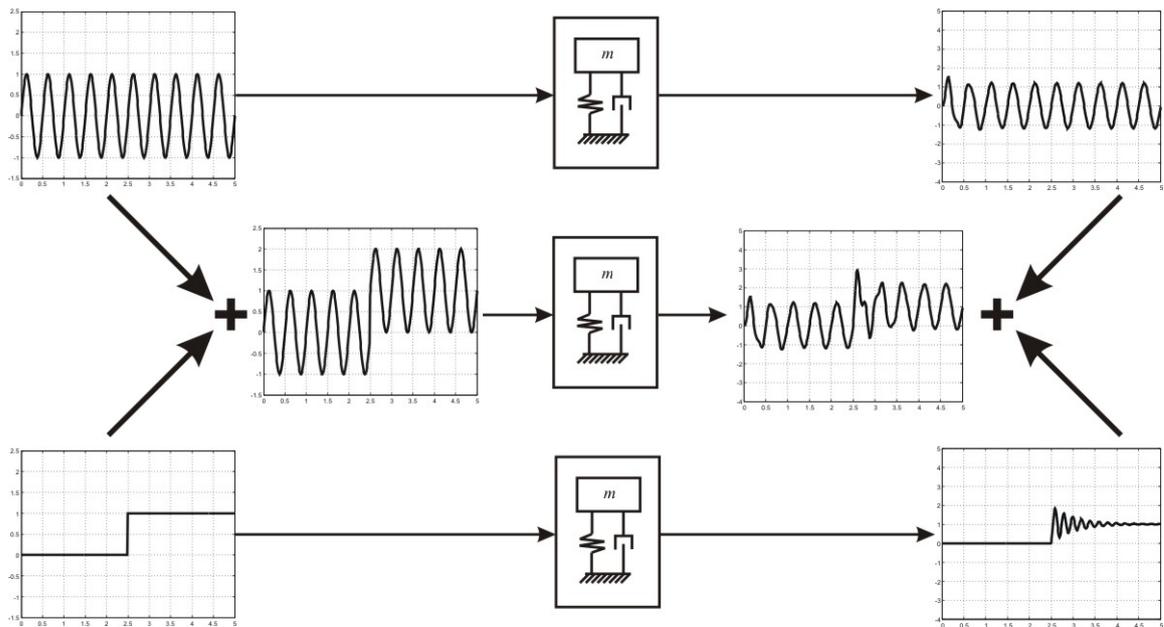


Figura 94: O princípio da superposição

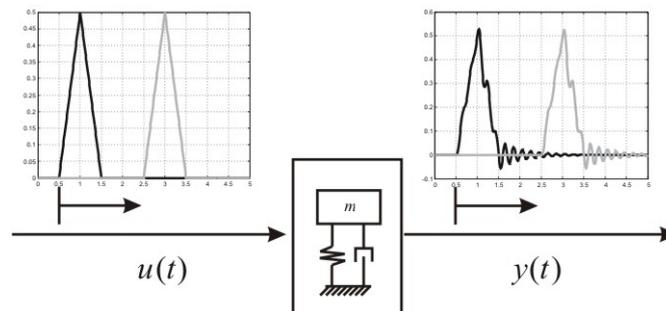


Figura 95: A invariância no tempo

### A.1 Representação Matemática

Seja o *sistema monovariável* com um sinal de entrada  $u(t)$  e um sinal de saída  $y(t)$  da Fig. 93 representado pela equação diferencial

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t) \quad (\text{A.1})$$

Tal sistema pode ser descrito por uma *função de transferência* ou através de uma representação no *espaço de estados*.

## Função de Transferência

A aplicação da Transformada de Laplace (considerando condições iniciais nulas<sup>2</sup>) na Eq.(A.1) resulta em

$$s^n Y(s) + a_{n-1} s^{n-1} Y(s) + \dots + a_1 s Y(s) + a_0 Y(s) = b_m s^m U(s) + b_{m-1} s^{m-1} U(s) + \dots + b_1 s U(s) + b_0 U(s) \quad (\text{A.2})$$

que leva à função de transferência do sistema, definida como  $G(s)$ , que quando multiplicado pela transformada de Laplace do sinal de entrada  $U(s)$ , resulta na transformada do sinal de saída ( $Y(s) = G(s)U(s)$ ):

$$G(s) \triangleq \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (\text{A.3})$$

## Sistemas Multivariáveis

O sistema representado pela Eq.(A.1) pode ser generalizado para o caso de possuir um número arbitrário de entradas e saídas, onde a entrada  $u(t)$  e a saída  $y(t)$  constituem vetores  $\mathbf{u}(t)_{n_u \times 1}$  e  $\mathbf{y}(t)_{n_y \times 1}$ , respectivamente<sup>3</sup>. Neste caso existe uma *matriz de transferência*  $\mathbf{G}(s)_{n_y \times n_u}$ , tal que  $\mathbf{Y}(s) = \mathbf{G}(s)\mathbf{U}(s)$ . Ou seja, uma matriz que contém as funções de transferência  $G_{ji}(s)$  para cada cada par  $u_i$  e  $y_j$ . Assim, a matriz de transferência tem cada linha  $i$  relacionada à  $i$ -ésima saída e cada coluna  $j$  relacionada com a  $j$ -ésima entrada.

$$\begin{array}{rcl}
 & & \begin{array}{cccc} u_1 & u_2 & \cdots & u_{n_u} \end{array} \\
 & & \begin{array}{cccc} \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow \end{array} \\
 \begin{array}{r} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n_y} \end{array} & \leftarrow & \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & \cdots & G_{1n_u} \\ G_{21} & G_{22} & \cdots & G_{2n_u} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{n_y 1} & G_{n_y 2} & \cdots & G_{n_y n_u} \end{bmatrix}
 \end{array}$$

<sup>2</sup>Isto representa uma das limitações da representação por função de transferência. A resposta do sistema para condições iniciais não nulas deve ser calculada de alguma outra maneira (CHEN, 1970).

<sup>3</sup>Neste trabalho, sinais monovariáveis como  $u(t)$  e multivariáveis como  $\mathbf{u}(t)$  serão eventualmente representados simplesmente como  $u$  e  $\mathbf{u}$ , respectivamente, quando o contexto deixar claro que sinais em função do tempo são tratados.

## Espaço de Estados

Um sistema LIT contínuo e multivariável com entrada  $\mathbf{u}(t)$  e saída  $\mathbf{y}(t)$  pode ser representado no espaço de estados, na forma

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

onde:

- $\mathbf{x}_{n \times 1}(t)$ : vetor de estados, onde  $n$  é a ordem do sistema.
- $\mathbf{A}_{n \times n}$ : matriz de estados.
- $\mathbf{B}_{n \times n_u}$ : matriz de entrada.
- $\mathbf{C}_{n_y \times n}$ : matriz de saída.
- $\mathbf{D}_{n_y \times n_u}$ : matriz de transmissão direta.

O vetor de estados  $\mathbf{x}$ , por definição (CHEN, 1970), dá toda a informação sobre a dinâmica interna do sistema. A definição das matrizes  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  depende da definição de  $\mathbf{x}$ . Alguns padrões podem ser encontrados, como as formas canônicas controlável, observável e de Jordan (HIPPE; WURMTHALER, 1985; LUNZE, 1997; CHEN, 1999). Neste trabalho são descritos os padrões relacionados com a modelagem de estruturas flexíveis (Seção 2.4) de maneira a levar um sentido físico ao vetor de estados. A matriz  $\mathbf{A}$  contém a informação sobre o acoplamento entre os estados e a dinâmica do sistema livre (sem entrada, *i.e.*  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ ). A matriz  $\mathbf{B}$  relaciona a contribuição de cada entrada com cada estado do sistema e analogamente a matriz  $\mathbf{C}$  dá a contribuição de cada estado com cada uma das saídas. Finalmente, a matriz  $\mathbf{D}$  contém a transferência entrada-saída que ocorre de maneira direta. A primeira equação ( $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$ ) é conhecida como *equação de estados* enquanto que a segunda equação ( $\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$ ) como *equação de saída*.

Na representação no espaço de estados, sistemas monovariáveis correspondem ao caso especial onde  $n_u = n_y = 1$ . Isto mostra que a diferença em complexidade para a representação de sistemas mono- e multivariáveis não é tão significativa quanto no caso da representação por funções de transferência. Isto constitui uma das vantagens da representação no espaço de estados, que leva a uma representação mais compacta para sistemas com diversos atuadores e perturbações (entradas) e sensores (saídas). Além disto este tipo de representação trata explicitamente da dinâmica interna do sistema, através do vetor de estados  $\mathbf{x}$ , o que pode vir a ser útil no projeto

de controladores. Como apontado acima, a definição de  $\mathbf{x}$  não é única. De fato, utilizando um novo vetor  $\mathbf{x}_n$  tal que  $\mathbf{x} = T\mathbf{x}_n$ , onde  $T$  é um operador linear, uma nova representação é obtida:

$$\begin{cases} T\dot{\mathbf{x}}_n = AT\mathbf{x}_n + B\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = CT\mathbf{x}_n + D\mathbf{u} \end{cases} \equiv \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_n = T^{-1}AT\mathbf{x}_n + T^{-1}B\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = CT\mathbf{x}_n + D\mathbf{u} \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

Assim, a quádrupla  $(A, B, C, D)$  com respeito ao vetor de estados  $\mathbf{x}$  tem uma representação equivalente através da quádrupla  $(T^{-1}AT, T^{-1}B, CT, D)$  com respeito a  $\mathbf{x}_n$ , a dinâmica entre a entrada  $\mathbf{u}$  e a saída  $\mathbf{y}$  permanece a mesma. Uma quádrupla  $(A, B, C, D)$  é frequentemente referida como uma *realização* para o sistema e uma transformação como a da Eq.(A.5) é chamada de *transformação de similaridade* (CHEN, 1999).

A matriz de transferência de um sistema representado no espaço de estados pode ser obtida através da equação abaixo:

$$\mathbf{G}(s) = [C(sI - A)^{-1}B + D] \quad (\text{A.6})$$

A função de transferência  $G_{ji}(s)$  entre a  $i$ -ésima entrada e a  $j$ -ésima saída pode ser obtida usando apenas a  $j$ -ésima linha de  $C$  e a  $i$ -ésima coluna de  $B$  e o termo  $D_{ji}$  de  $D$ , tal que  $G_{ji}(s) = [C_j(sI - A)^{-1}B_i + D_{ji}]$ .

## A.2 Resposta no Domínio do Tempo

A resposta no tempo de um sistema LIT pode ser calculada como a soma de duas partes independentes, a *resposta livre* e a *resposta forçada*. A resposta livre corresponde àquela onde a entrada é nula e o sistema é observado a partir de determinadas condições iniciais. Ela pode ser encontrada a partir da equação homogênea associada à Eq.(A.1). A resposta forçada é aquela onde o sistema, a partir de condições iniciais nulas, é sujeito a um sinal de entrada  $\mathbf{u}(t)$  e pode ser calculada através da investigação de uma solução particular para Eq.(A.1) (KWAKERNAAK; SIVAN, 1991).

O tratamento matemático da resposta como um todo dá-se de uma maneira compacta através da representação no espaço de estados. A resposta do vetor de estados  $\mathbf{x}(t)$  de um sistema como o da Eq.(A.4), dada uma condição inicial  $\mathbf{x}(0)$  e sujeito a um sinal de entrada  $\mathbf{u}(t)$  definido para  $t \in [0, \infty)$  é

$$\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}B\mathbf{u}(\tau)d\tau \quad (\text{A.7})$$

O cálculo de  $e^{At}$ , cujo resultado é conhecido como *matriz de transição de estados*  $\Phi(t) = e^{At}$ , pode ser realizado de várias maneiras, descritas em (KWAKERNAAK; SIVAN, 1991; CHEN, 1999). O termo  $e^{At}\mathbf{x}(0)$  corresponde à resposta livre enquanto  $\int_0^t e^{A(t-\tau)}B\mathbf{u}(\tau)d\tau$  à resposta forçada. A partir da equação de saída  $\mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t) + D\mathbf{u}(t)$  tem-se:

$$\mathbf{y}(t) = Ce^{At}\mathbf{x}(0) + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}B\mathbf{u}(\tau)d\tau + D\mathbf{u}(t) \quad (\text{A.8})$$

A resposta forçada de um sistema descrito por uma função de transferência pode ser obtida através da Transformada de Laplace inversa:

$$\mathbf{y}(t) = \mathcal{L}^{-1}[\mathbf{Y}(s)] = \mathcal{L}^{-1}[\mathbf{G}(s)\mathbf{U}(s)] \quad (\text{A.9})$$

Seja  $\mathbf{g}(t) = \mathcal{L}^{-1}[\mathbf{G}(s)]$  e  $\mathbf{u}(t) = \mathcal{L}^{-1}[U(s)]$ . A partir das propriedades da Transformada de Laplace (CHEN, 1970):

$$\mathbf{y}(t) = \int_0^t \mathbf{g}(t-\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau = \mathbf{g}(t) \otimes \mathbf{u}(t) \quad (\text{A.10})$$

onde  $\otimes$  denota o operador convolução. A matriz  $\mathbf{g}(t)$  contém  $n_y \times n_u$  *respostas ao impulso*. A função resposta ao impulso é a resposta do sistema quando sujeito a uma entrada do tipo  $\delta(t)$  (chamada Delta de Dirac), definida como  $\delta(t) = 0$  para  $t \neq 0$  e  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$ . Este sinal pode ser interpretado como um impulso no tempo zero, infinitamente curto (no tempo) e de intensidade infinita, com área unitária (KWAKERNAAK; SIVAN, 1991). É considerado mais adequado matematicamente (BRIGHAM, 1988) classificar  $\delta(t)$  não como pertencente ao campo das funções mas sim ao campo das distribuições. De fato, esta é uma representação matemática de um sinal com uma energia total unitária e concentrada em um instante de tempo.

### A.3 Resposta no Domínio da Freqüência

A resposta forçada em regime permanente de sistemas LIT sujeitos a um sinal de entrada senoidal (ou tonal) pode ser computada diretamente a partir da sua representação em função de transferência (KWAKERNAAK; SIVAN, 1991). Para sistemas monovariáveis a mudança em amplitude (ganho) e fase (defasagem) como uma função

da frequência do sinal de entrada são descritos pela *Função Resposta em Frequência* (FRF). Para sistemas multivariáveis pode ser definida uma FRF para cada par entrada-saída. Entretanto, um conceito mais geral de resposta em frequência é definido através da decomposição em valor singular e dos ganhos principais (BURL, 1999). Na verdade, a saída do sistema pode ser descrita através da sua resposta em frequência não apenas para sinais senoidais mas sim para sinais para os quais se possa definir um espectro no domínio da frequência.

### Sistemas Monovariáveis

A resposta em regime permanente, de um sistema LIT sujeito a uma entrada do tipo  $u(t) = u_0 e^{j\omega t}$  é

$$y(t) = G(j\omega)u_0 e^{j\omega t} = |G(j\omega)| u_0 e^{j(\omega t + \angle\{G(j\omega)\})} \quad (\text{A.11})$$

Isto significa que a função de transferência avaliada na frequência complexa  $G(s) = G(j\omega)$  dá a informação em termos de ganho  $|G(j\omega)|$  e defasagem<sup>4</sup>  $\angle\{G(j\omega)\}$  que o sistema LIT aplica em uma entrada senoidal de frequência  $\omega$ . É importante ressaltar que neste trabalho  $\omega$  representa a frequência angular, medida em rad/s, enquanto que  $f$  representa a frequência física, medida em Hz, que têm a relação  $\omega = 2\pi f$ . O termo frequência é utilizado sem distinção quando se assume que o contexto deixa claro o tratamento da frequência angular  $\omega$  ou física  $f$ .

A FRF é normalmente representada graficamente através do *Diagrama de Bode*, que compreende uma curva para a magnitude e outra para a fase, ambas em função da frequência. Em geral, utiliza-se escala logarítmica para o eixo da frequência e a magnitude é expressa em decibéis (dB), definido<sup>5</sup> como  $x_{dB} = 20 \log_{10} \left| \frac{x}{x_0} \right|$ , onde  $x_0$  é uma referência que para diagramas de Bode é escolhida como a unidade. A plotagem da FRF é chamada, por outro lado, de *Diagrama de Nyquist*.

### Sistemas Multivariáveis

A definição dos conceitos de ganho e defasagem torna-se mais apurada para sistemas multivariáveis (BURL, 1999). Para uma entrada senoidal, defina-se o ganho

<sup>4</sup>O termo fase representa o argumento de um número complexo. Neste trabalho, entretanto, dada à propriedade da resposta em frequência de sistemas LIT ele será utilizado como sinônimo de defasagem. Já que a fase do número complexo  $G(j\omega)$  representa justamente a defasagem aplicada no sistema para uma entrada senoidal de frequência  $\omega$ .

<sup>5</sup>Para sinais de intensidade ou potência  $x_{dB} = 10 \log_{10} \left| \frac{x}{x_0} \right|$ , que constitui a definição original de dB.

como

$$\text{Ganho} = \frac{\|\mathbf{y}(t)\|}{\|\mathbf{u}(t)\|} = \frac{\|\mathbf{G}(j\omega)\mathbf{u}_0 e^{j\omega t}\|}{\|\mathbf{u}_0 e^{j\omega t}\|} = \frac{\|\mathbf{G}(j\omega)\mathbf{u}_0\|}{\|\mathbf{u}_0\|} \quad (\text{A.12})$$

onde  $\|\bullet\|$  representa a norma euclidiana.

Como o ganho depende tanto de  $\omega$  como de  $\mathbf{u}_0$  (e não somente de  $\omega$  como no caso dos sistemas monovariáveis) não pode ser definido um simples ganho, mas sim uma faixa:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{u}_0} \frac{\|\mathbf{G}(j\omega)\mathbf{u}_0\|}{\|\mathbf{u}_0\|} &\leq \text{Ganho} \leq \max_{\mathbf{u}_0} \frac{\|\mathbf{G}(j\omega)\mathbf{u}_0\|}{\|\mathbf{u}_0\|} \\ \min_{\|\mathbf{u}_0\|=1} \frac{\|\mathbf{G}(j\omega)\mathbf{u}_0\|}{\|\mathbf{u}_0\|} &\leq \text{Ganho} \leq \max_{\|\mathbf{u}_0\|=1} \frac{\|\mathbf{G}(j\omega)\mathbf{u}_0\|}{\|\mathbf{u}_0\|} \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

onde  $\min_{\|\mathbf{u}_0\|=1}(\bullet)$  é o valor mínimo ao longo de todos os  $\mathbf{u}_0$  que tenham norma unitária. Se o vetor de entrada contém senóides da mesma freqüência  $\omega$ , a saída possui senóides na mesma freqüência

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} \alpha_1 \cos(\omega t + \theta_1) \\ \alpha_2 \cos(\omega t + \theta_2) \\ \vdots \\ \alpha_{n_u} \cos(\omega t + \theta_{n_u}) \end{bmatrix} \quad \mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} \beta_1 \cos(\omega t + \phi_1) \\ \beta_2 \cos(\omega t + \phi_2) \\ \vdots \\ \beta_{n_y} \cos(\omega t + \phi_{n_y}) \end{bmatrix}$$

O ganho pode ser definido com respeito às amplitudes da entrada e da saída  $\text{Ganho} = \|\beta\| / \|\alpha\|$ . Através da aplicação da decomposição em valores singulares tal ganho pode ser mostrado como pertencente a certos limites como os das inequações em (A.13) (BURL, 1999).

### A Decomposição em Valores Singulares

Seja  $M_{n_y \times n_u}$  uma matriz complexa, a decomposição em valores singulares é uma generalização do problema de autovalores para matrizes não quadradas. Os valores singulares provém uma medida para o “tamanho” ou “ganho” de uma matriz e os correspondentes vetores singulares são indicadores de direções fortes ou fracas em termos de entrada-saída (ZHOU; DOYLE, 1998). A decomposição é definida como

$$M = U\Sigma V^\dagger = \sum_{i=1}^p \sigma_i U_i V_i^\dagger \quad (\text{A.14})$$

onde  $U_{n_y \times n_y}$  e  $V_{n_u \times n_u}$  são matrizes unitárias e  $p$  é o menor entre  $n_y$  e  $n_u$ , o símbolo  $\dagger$  denota a matriz transposta conjugada e  $U_i$  e  $V_i$  são as  $i$ -ésimas colunas de  $U$  e  $V$ , respectivamente (BURL, 1999; ZHOU; DOYLE, 1998). A matriz unitária  $V$  é aquela que possui a propriedade  $V^\dagger V = V V^\dagger = I$ , *i.e.* a matriz cujas colunas são ortonormais. A matriz  $\Sigma$  é:

$$\Sigma = \left[ \begin{array}{ccc|c} \sigma_1 & \cdots & 0 & \\ \vdots & \ddots & \vdots & \mathbf{0} \\ 0 & \cdots & \sigma_p & \end{array} \right] \text{ ou } \Sigma = \left[ \begin{array}{ccc} \sigma_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_p \end{array} \right] \text{ ou } \Sigma = \left[ \begin{array}{ccc} \sigma_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_p \\ \hline & & \mathbf{0} \end{array} \right]$$

para  $n_y < n_u$ ,  $n_y = n_u$  ou  $n_y > n_u$ , respectivamente, e os parâmetros  $\sigma_i$  são chamados valores singulares e por convenção são ordenados:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_p \geq 0$$

Os vetores  $U_i$  e  $V_i$  constituem os  $i$ -ésimos vetores singulares pela direita e esquerda, respectivamente.

A decomposição em valor singular dá uma idéia detalhada de como uma matriz opera em um vetor  $\mathbf{x}$  (como um vetor de entrada):

$$M\mathbf{x} = \sum_{i=1}^p \sigma_i U_i V_i^\dagger \mathbf{x}$$

Além disto, a definição do maior valor singular, denominado  $\bar{\sigma}$ :

$$\sigma_1 \triangleq \bar{\sigma} = \max_{\|\mathbf{x}\|=1} \|M\mathbf{x}\| \equiv \frac{\|M\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \sigma_1 \triangleq \bar{\sigma}$$

leva à limitação de ganho da matriz complexa  $M$ . Tal limite é alcançado quando  $\mathbf{x}$  é proporcional a  $V_1$  (BURL, 1999). Neste caso, se  $\|\mathbf{x}\| = 1$  tem-se  $M\mathbf{x} = \sigma_1$ .

A limitação mínima é dada pelo menor valor singular, denominado  $\underline{\sigma}$ :

$$\frac{\|M\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \geq \sigma_{n_u} \triangleq \underline{\sigma} = \begin{cases} \sigma_p & \text{se } n_y \geq n_u \\ 0 & \text{se } n_y < n_u \end{cases}$$

Outra propriedade interessante da decomposição em valores singulares é que o maior valor singular de um produto de matrizes é menor ou igual ao produto dos maiores valores singulares individuais de cada uma delas (BURL, 1999), *i.e.* para matrizes  $M_1$  e  $M_2$ :

$$\bar{\sigma}(M_1 M_2) \leq \bar{\sigma}(M_1) \bar{\sigma}(M_2) \quad (\text{A.15})$$

### Os Ganhos Principais

A resposta em regime permanente de um sistema LIT multivariável sujeito a uma entrada senoidal  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_0 e^{j\omega t}$  é descrita através de sua matriz de transferência:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{G}(j\omega) \mathbf{u}_0 e^{j\omega t}$$

O produto matriz-vetor  $\mathbf{G}(j\omega) \mathbf{u}_0$  define a amplitude da saída, *i.e.* o ganho do sistema como uma função da frequência  $\omega$ . A decomposição em valor singular da matriz de transferência é

$$\mathbf{G}(j\omega) = \sum_{i=1}^p \sigma_i(\omega) U_i(\omega) V_i^\dagger(\omega) \quad (\text{A.16})$$

onde  $p$  é o menor entre  $n_u$  e  $n_y$ . Os valores singulares como função da frequência são chamados de *ganhos principais* do sistema, que determinam os limites em termos de ganho para o sistema em uma determinada frequência  $\omega$ . Não existe uma definição razoável de defasagem para sistemas multivariáveis, já que ela tem, em geral, um valor diferente para cada par entrada-saída (BURL, 1999).

## A.4 Pólos e Zeros

A função de transferência de um sistema SISO é uma razão de polinômios em  $s$ , a variável de Laplace (BURL, 1999):

$$G(s) = [C(sI - A)^{-1}B + D] = \frac{C \text{adj}(sI - A)B + D \det(sI - A)}{\det(sI - A)} = \frac{\text{num}(s)}{\text{den}(s)} \quad (\text{A.17})$$

onde  $\text{adj}(\bullet)$  representa a matriz adjunta.

As raízes do numerador, *i.e.* soluções de  $\text{num}(s) = 0$ , são chamadas de *zeros* do sistema  $s = z_i$ . Assim:

$$G(z_i) = 0 \quad (\text{A.18})$$

para cada zero da função de transferência.

As raízes do denominador, *i.e.* soluções de  $\text{den}(s) = 0$ , são chamadas de *pólos* do sistema  $s = p_i$ . O que leva a  $|G(p_i)| = \infty$  para cada um dos pólos da função de transferência. Para realizações mínimas<sup>6</sup> os pólos são as soluções da equação característica  $\det(sI - A) = 0$ , *i.e.* os autovalores de  $A$ . Para sistemas físicos a equação característica consiste em um polinômio com coeficientes reais, cujas raízes mostram-se puramente reais ou em pólos complexos conjugados. O conjunto de pólos e zeros é frequentemente representado no plano complexo e algumas abordagens clássicas para o projeto de controladores são baseadas neste tipo de representação (OGATA, 2000).

### Pólos e Zeros em Sistemas Multivariáveis

Em uma representação por função de transferência, os pólos de um sistema multivariável compreendem a união de todos os pólos de todas  $G_{ji}(s)$ . Para uma realização mínima no espaço de estados isto é igual à solução da equação característica  $\det(sI - A) = 0$ .

A definição dos zeros em um sistema multivariável deriva da generalização da Eq.(A.18). Assim, os zeros são os valores de  $s$ , para os quais a matriz de transferência perde posto:

$$\text{rank}(\mathbf{G}(z_i)) < \min(n_u, n_y) \quad (\text{A.19})$$

### Influência dos Pólos e Zeros na Resposta de Sistemas LIT

Tanto a resposta livre como a resposta ao impulso (que molda a resposta forçada através da convolução com o sinal de entrada) de sistemas LIT constitui uma combinação linear dos chamados modos naturais do sistema, ou apenas modos (BURL, 1999; KWAKERNAAK; SIVAN, 1991). Estes modos estão relacionados aos pólos do sistema, que podem ser reais ou complexos conjugados para sistemas reais (aqueles onde os coeficientes da Eq.(A.1) são reais). A um pólo real  $p_i$  com multiplicidade unitária<sup>7</sup>, associa-se um modo do tipo  $e^{p_i t}$ . Por outro lado, a um par de pólos complexos conjugados  $p_i, p_i^* = \lambda_i \pm j\omega_i$  associa-se um par de modos complexos  $e^{(\sigma_i \pm j\omega_i)t}$  que pode ser reescrito como  $\{e^{\lambda_i} \cos(\omega_i t), e^{\lambda_i} \text{sen}(\omega_i t)\}$ .

<sup>6</sup>Uma realização  $(A, B, C, D)$  é considerada mínima quando não existem fatores comuns no numerador e denominador da função de transferência associada pela Eq.(A.6). Ou seja,  $z_i \neq p_j \forall i, j$ .

<sup>7</sup>Pólos com multiplicidade  $k$  têm  $k$  modos associados com fatores  $t^{i-1}$ ,  $i = 1, \dots, k$  que multiplicam as funções exponenciais definidas acima (KWAKERNAAK; SIVAN, 1991).

Assim, a resposta total do sistema constitui uma combinação linear dos modos, associados aos pólos que podem ser reais ou complexos conjugados. Vale então analisar separadamente o tipo de resposta de dois sistemas fundamentais, aqueles chamados de sistemas de 1ª ordem e que contém apenas um pólo real, e aqueles chamados de sistemas de 2ª ordem e que contém dois pólos complexos (reais ou conjugados).

### Sistemas de 1ª Ordem

Um sistema monovariável de primeira ordem tem um polinômio característico de primeira ordem:

$$G(s) = \frac{b_0}{a_1s + a_0} = \frac{K_s\omega_c}{s + \omega_c} \quad (\text{A.20})$$

onde  $K_s$  é o ganho estático e  $\omega_c$  é chamada de freqüência de corte (assumida positiva) e tem unidade rad/s. A unidade de  $K_s$  depende da natureza física dos sinais de entrada e saída. Tal sistema tem um pólo  $p_1 = -\omega_c$ . A resposta livre tem a forma  $c_1e^{-\omega_c t}$ , onde  $c_1$  é uma constante dependente das condições iniciais. O termo  $e^{-\omega_c t}$ , que é o modo associado ao pólo do sistema, vai a zero tão mais rápido quanto maior é  $\omega_c$ , ou seja, a freqüência de corte está relacionada à rapidez com que o sistema responde aos sinais de entrada (resposta forçada) ou retorna à uma situação de equilíbrio após uma perturbação (resposta livre)<sup>8</sup>.

A resposta em freqüência

$$G(j\omega) = \frac{K_s\omega_c}{j\omega + \omega_c} \quad (\text{A.21})$$

possui as seguintes propriedades:

- para  $\omega \rightarrow 0$ :  $|G(j\omega)| \rightarrow K_s$  e  $\angle G(j\omega) \rightarrow 0$ ;
- para<sup>9</sup>  $\omega = \omega_c$ :  $|G(j\omega)| = K_s/\sqrt{2}$  e  $\angle G(j\omega) = -45^\circ$ ;
- para  $\omega \rightarrow \infty$ :  $|G(j\omega)| \rightarrow 0$  e  $\angle G(j\omega) \rightarrow -90^\circ$ .

Dois sistemas com  $K_s$  unitário e  $\omega_{c1} = 3$  rad/s e  $\omega_{c2} = 30$  rad/s são comparados na Fig. 96. A resposta a uma condição inicial unitária é apresentada à esquerda, o plano complexo ao centro e a resposta em freqüência (diagrama de Bode) à direita.

<sup>8</sup>É possível parametrizar um sistema de primeira ordem como  $\frac{K_s}{\tau s + 1}$ , onde  $\tau = 1/\omega_c$  é chamada de constante de tempo.

<sup>9</sup>Este valor define a chamada banda de meia potência ( $-\omega_c, \omega_c$ ) e corresponde a 3 dB a menos que o ganho estático  $K_s$  em dB.

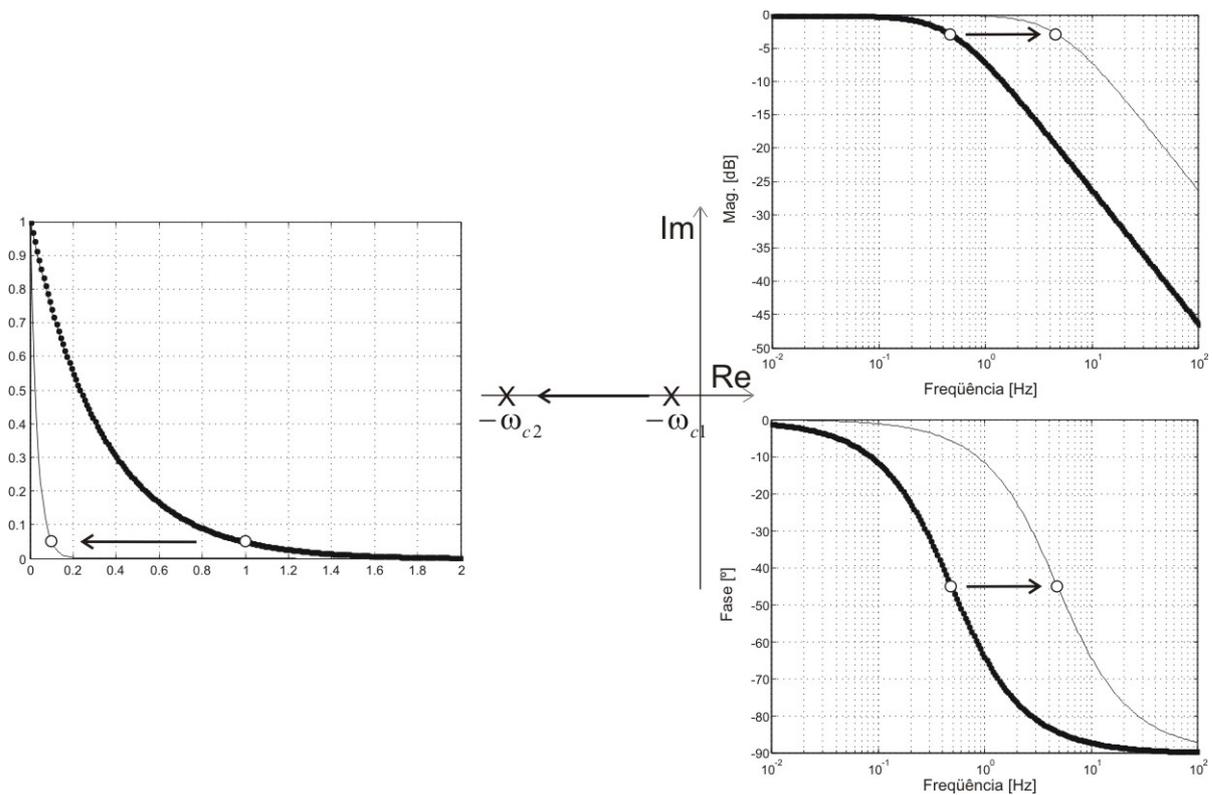


Figura 96: Resposta de sistemas de 1<sup>a</sup> ordem.

Na resposta livre a uma condição unitária, os círculos brancos correspondem ao tempo onde transcorreu 95% da resposta transitória e equivale a  $3/\omega_c$ . Este valor é conhecido como tempo de acomodação. Alguns autores, entretanto, utilizam 98% para o tempo de acomodação, que corresponde a  $4/\omega_c$ . De qualquer maneira o tempo de acomodação constitui uma medida do tempo necessário para que o sistema chegue ao regime permanente, embora matematicamente, o regime permanente só é alcançado após um tempo infinito. Na Fig. 96 a seta indica a mudança da resposta livre do sistema a partir do deslocamento do pólo de  $-\omega_{c1}$  para  $-\omega_{c2}$ .

No diagrama os círculos marcam os valores de  $\omega_{c1}$  e  $\omega_{c2}$  (a frequência é apresentada em função da frequência física  $f = \omega/2\pi$ ). A partir de  $\omega_c$  um sistema de primeira ordem apresenta um caimento em magnitude (ganho) no domínio da frequência de 20 dB por década ou 6 dB por oitava, ou seja, 20 dB sempre que a frequência se multiplica por 10 ou 6 dB sempre que ela dobra. Em escala logarítmica este caimento mostra-se linear.

## Sistemas de 2<sup>a</sup> Ordem

Um sistema monovariável de segunda ordem tem um polinômio característico de segunda ordem:

$$G(s) = \frac{b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0} = \frac{K_s \omega_n^2}{s^2 + 2\xi \omega_n s + \omega_n^2} \quad (\text{A.22})$$

onde  $\xi$  and  $\omega_n$  são denominados fator de amortecimento e freqüência natural respectivamente. Tal sistema possui dois pólos  $p_1, p_2 = -\xi \omega_n \pm \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}$ . Tanto  $\xi$  como  $\omega_n$  são assumidos positivos nesta análise, configurando sistemas estáveis (Seção A.6.3). O valor de  $\xi$  define a natureza dos pólos, que podem ser reais (diferentes para  $\xi > 1$  e iguais para  $\xi = 1$ ) ou complexos conjugados para  $\xi < 1$ .

O comportamento para a situação onde os pólos constituem um par de números complexos conjugados ( $0 < \xi < 1$ ) é de especial interesse para a modelagem de estruturas mecânicas flexíveis. Neste caso  $\xi$  é comumente representado em %. Ao par de pólos  $p_1, p_1^* = -\xi \omega_n \pm j \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$  associa-se um modo complexo na forma  $\{e^{-\xi \omega_n t} \cos(\omega_d t), e^{-\xi \omega_n t} \text{sen}(\omega_d t)\}$  onde  $\omega_d$  é definido como freqüência natural amortecida  $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$ . O lugar geométrico de pares de pólos com o mesmo amortecimento compreende retas que passam pela origem, quão mais próximo de zero se encontra  $\xi$  tanto menor é o ângulo da reta que contém pólos com este fator de amortecimento e o eixo imaginário.

Para certos sistemas com pouco amortecimento pode-se considerar  $\omega_n \approx \omega_d$ . De fato, para  $\xi = 0,02$  tem-se  $\omega_d = 0,9998 \omega_n$  e para  $\xi = 0,10$   $\omega_d = 0,9950 \omega_n$ . Para os casos onde esta simplificação se justifica o lugar geométrico de pólos com a mesma freqüência natural corresponde a retas paralelas ao eixo real.

A resposta em freqüência deste sistema tem a forma:

$$G(j\omega) = \frac{K_s \omega_n^2}{-\omega^2 + 2j\xi \omega_n \omega + \omega_n^2} = \frac{K_s \omega_n^2}{(\omega_n^2 - \omega^2) + j(2\xi \omega_n \omega)}$$

e possui as propriedades:

- para  $\omega \rightarrow 0$ :  $|G(j\omega)| \rightarrow K_s$  e  $\angle G(j\omega) \rightarrow 0$ ;
- para  $\omega = \omega_n$ :  $|G(j\omega)| = K_s / (2\xi)$  e  $\angle G(j\omega) = -90^\circ$ ;
- para  $\omega \rightarrow \infty$ :  $|G(j\omega)| \rightarrow 0$  e  $\angle G(j\omega) \rightarrow -180^\circ$ .

Três sistemas são comparados na Fig. 97 com combinações de fator de amortecimento e freqüência natural:

$$(1) \xi_1 = 0,02 \text{ e } \omega_{n1} = 15 \text{ rad/s}$$

$$(2) \xi_1 = 0,02 \text{ e } \omega_{n2} = 3 \text{ rad/s}$$

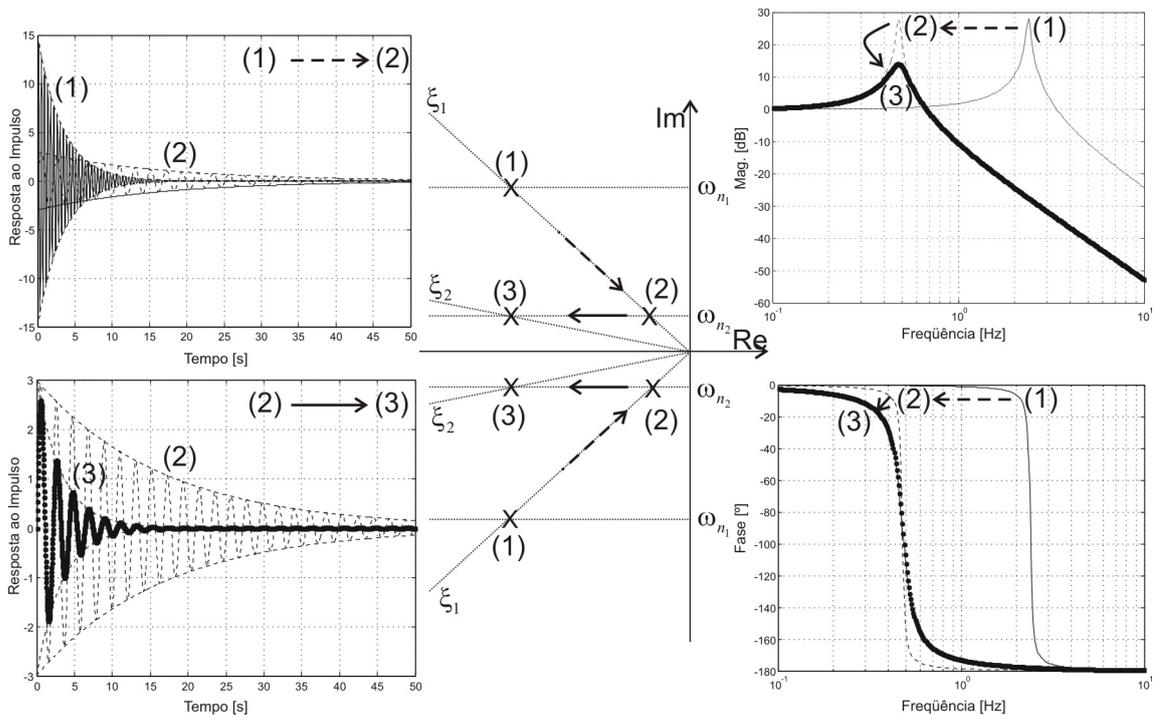


Figura 97: Resposta de sistemas de 2ª ordem.

(3)  $\xi_2 = 0,10$  e  $\omega_{n2} = 3\text{rad/s}$

Assim, a resposta livre ou a resposta ao impulso têm a forma

$$c_1 e^{-\xi\omega_n t} \cos(\omega_d t) + c_2 e^{-\xi\omega_n t} \text{sen}(\omega_d t)$$

que corresponde a um movimento harmônico que tende a zero em uma envoltória  $e^{-\xi\omega_n t}$ . A curva à esquerda e acima na Fig. 97 apresenta a resposta ao impulso dos sistemas (1) e (2), que diferem quanto à freqüência natural. Apesar do sistema com maior  $\omega_n$  ser mais rápido, ele apresenta movimentos de amplitude maior. A curva abaixo compara as respostas ao impulso dos sistemas (2) e (3), que diferem quanto ao fator de amortecimento. Neste caso pode-se perceber que o sistema com mais amortecimento apresenta um tempo de acomodação menor sem que maiores amplitudes sejam percebidas. Assim, para que se diminua o tempo de acomodação do sistema, definido como  $3/\xi\omega_n$  para 95% de acomodação, é possível, em princípio, adicionar amortecimento ao sistema ou aumentar a freqüência natural. De fato, tanto o sistema (1) como (3) apresentam 10s de tempo de acomodação, entretanto a resposta ao impulso de (3) apresenta amplitudes tão mais altas quanto maior é sua freqüência natural.

As curvas à direita na Fig. 97 constituem a resposta em freqüência para os três sistemas. Os sistemas (1) e (2) apresentam basicamente o mesmo comportamento, apenas com picos localizados diferentemente em consequência dos diferentes valo-

res de  $\omega_n$ . O pico da resposta em freqüência de um sistema de segunda ordem é conhecido como freqüência de ressonância, ou apenas ressonância, o que é utilizado como sinônimo de freqüência natural. Assim, para um sinal de entrada senoidal com freqüência igual à freqüência natural os sistemas (1) e (2) apresentam o mesmo ganho e defasagem. Já o sistema (3) apresenta um menor ganho para uma entrada com freqüência igual à sua ressonância, a razão entre os ganhos é o inverso da razão  $\xi_1/\xi_2$ . Além disto a fase cai de  $0$  para  $-180^\circ$  mais bruscamente para sistemas com pouco amortecimento.

### Resposta Total no Domínio da Freqüência

Nas seções anteriores a influência dos pólos é descrita tanto no domínio do tempo como no da freqüência em função dos modos dos sistemas, associados a pólos reais ou pares de complexos conjugados. A influência dos zeros é mais intuitivamente percebida através da resposta no domínio da freqüência. De fato, considerando a função de transferência de um sistema LIT monovariável  $G(s)$ , a função resposta em freqüência  $G(j\omega)$  é uma fração com um numerador  $B(j\omega)$ , associado aos zeros do sistema e um denominador  $A(j\omega)$  associado aos seus pólos.

A magnitude de  $G(j\omega)$  é a divisão entre as magnitudes do numerador e denominador

$$|G(j\omega)| = \frac{|B(j\omega)|}{|A(j\omega)|} \quad (\text{A.23})$$

e a fase, a diferença das fases do numerador e denominador.

$$\angle G(j\omega) = \angle B(j\omega) - \angle A(j\omega) \quad (\text{A.24})$$

Tanto o numerador como o denominador podem conter fatores do tipo

- (1)  $K_s$ : um ganho estático ;
- (2)  $j\omega$ : um pólo ou zero real e nulo;
- (3)  $\frac{j\omega}{\omega_c} + 1$ : um pólo ou zero real em  $p = -w_c$ ;
- (4)  $(\frac{j\omega}{\omega_n})^2 + \frac{2\xi}{\omega_n}j\omega + 1$ : um par de pólos ou zeros complexos conjugados em  $p, p^* = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$ .

Fatores do tipo (1) são constantes e independem da freqüência, de maneira que a contribuição para  $G(j\omega)$  é a mesma para todas as freqüências, com magnitude igual

ao próprio ganho estático e fase nula ou  $-180^\circ$  para ganhos positivos ou negativos, respectivamente.

O segundo tipo representa um zero ou pólo nulos, quando se encontra no numerador ou denominador respectivamente. A magnitude deste valor constitui exatamente a magnitude da frequência, em escala logarítmica um aumento ou decaimento de 20 dB/década, para um zero ou pólo nulo. No caso de um zero nulo tem-se uma fase constante de  $90^\circ$  e de um pólo nulo  $-90^\circ$ . A Fig. 98 apresenta este tipo de comportamento.

Fatores do tipo (3) quando encontrados no denominador constituem um pólo real, com características em frequência apontadas na descrição de sistemas de  $1^a$ . Quanto este se encontra no numerador a contribuição em magnitude é inversa e em fase é oposta, como apresentado na Fig. 98 onde os círculos brancos representam  $\omega_c$ . Finalmente, fatores do tipo (4) estão relacionados a um par de pólos ou zeros complexos conjugados com uma frequência natural e um fator de amortecimento, como nos sistemas de segunda ordem descritos acima. Enquanto um par de pólos complexos conjugados configura uma ressonância, um par de zeros complexos conjugados configura uma anti-ressonância.

## A.5 Interconexão de Sistemas

Sistemas lineares podem ser interconectados de diversas maneiras, em operações onde, por exemplo, sinais de entrada de alguns podem ser saídas de outros sistemas. As duas formas básicas de interconexão de sistemas compreendem a ligação em série e em paralelo, apresentadas na Fig. 99 em forma de diagrama de blocos.

### A.5.1 Série

O caso geral da ligação em série constitui aquele onde alguns dos sinais de entrada de um sistema  $G_1$  são alguns elementos do vetor de saídas de outro sistema  $G_2$ . Para o caso especial onde o vetor de saídas completo é utilizado exatamente como vetor de entradas de outro sistema a função de transferência do sistema composto  $G$  compreende a multiplicação das funções de transferência individuais (KWAKERNAAK; SIVAN, 1991):

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{G}_1(s)\mathbf{G}_2(s) \quad (\text{A.25})$$



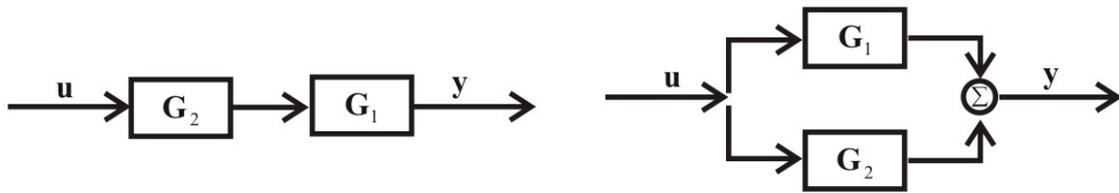


Figura 99: Interconexão em Série e Paralelo

variáveis, o ganho do sistema composto para uma dada frequência  $\omega$  é a multiplicação dos ganhos individuais aplicados por cada sistema  $|G(j\omega)| = |G_1(j\omega)| |G_2(j\omega)|$  e a fase a soma das defasagens aplicados por cada sistema  $\angle G(j\omega) = \angle G_1(j\omega) + \angle G_2(j\omega)$ . Para sistemas multivariáveis a Eq. A.15 define o máximo ganho de

$$\bar{\sigma}(\mathbf{G}(j\omega)) \leq \bar{\sigma}(\mathbf{G}_1(j\omega))\bar{\sigma}(\mathbf{G}_2(j\omega))$$

Para o caso onde os sistemas  $\mathbf{G}_1$  e  $\mathbf{G}_2$  têm realizações no espaço de estados o sistema composto tem a seguinte representação

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1C_2 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1D_2 \\ B_2 \end{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \begin{bmatrix} C_1 & D_1C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} + D_1D_2\mathbf{u} \end{cases} \quad (\text{A.26})$$

onde  $\mathbf{x}_1$  e  $\mathbf{x}_2$  são os vetores de estado dos sistemas conectados. A matriz de estados mostra que existe um acoplamento entre os estados dos sistemas, dado pelo produto  $B_1C_2$ .

Para o caso onde o vetor de entrada de  $\mathbf{G}_1$  não constituir integralmente o vetor de saída de  $\mathbf{G}_2$ , é necessário aplicar a Eq.(A.26) utilizando apenas as colunas de  $B_1$  e  $D_1$  correspondentes às entradas em questão, bem como as linhas de  $C_2$  e  $D_2$  referentes às saídas de  $\mathbf{G}_2$  utilizadas.

### A.5.2 Paralelo

A ligação em paralelo constitui o caso onde dois sistemas  $\mathbf{G}_1$  e  $\mathbf{G}_2$  têm algumas entradas em comum e algumas saídas em comum, somando-se as saídas em comum. Para o caso onde os vetores de entrada são idênticos e a saída total é soma dos vetores de saída completos, a função de transferência é exatamente a soma das funções de transferência individuais:

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{G}_1(s) + \mathbf{G}_2(s) \quad (\text{A.27})$$

Portando, a FRF resultante é a soma das FRFs individuais. Para sistemas mono-variáveis é possível que para uma dada frequência  $\omega$  obtenha-se  $G_1(j\omega) = G_2(j\omega)$  de maneira que  $G(j\omega) = 0$  para uma entrada não nula, o que configura um zero. Assim, os zeros de sistemas em paralelo, em geral, não coincidem com a união dos zeros de  $G_1$  e  $G_2$ , como no caso da ligação em série. Os pólos, entretanto, são aqueles da união dos dois sistemas conectados caso estes não possuam pólos em comum. Caso isto aconteça, o sistema resultante têm estes pólos com a multiplicidade igual à sua máxima multiplicidade em  $G_1$  ou  $G_2$ . De qualquer maneira, não são obtidos novos pólos na ligação em paralelo.

Para o caso onde os sistemas  $\mathbf{G}_1$  e  $\mathbf{G}_2$  têm realizações no espaço de estados o sistema composto tem a seguinte representação

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} + [D_1 + D_2] \mathbf{u} \end{cases} \quad (\text{A.28})$$

onde  $\mathbf{x}_1$  e  $\mathbf{x}_2$  são os vetores de estado dos sistemas conectados. A matriz de estados em forma bloco-diagonal mostra que não há acoplamento entre os estados, e que os auto-valores são a união dos auto-valores de  $A_1$  e  $A_2$ . É importante ressaltar que a realização acima não é mínima quando os sistemas conectados possuírem pólos em comum.

Assim como no caso da ligação em série, a Eq.(A.28) deve ser aplicada selecionando as colunas (de  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $D_1$  e  $D_2$ ) e linhas (de  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $D_1$  e  $D_2$ ) relativas às entradas e saídas conectadas.

## A.6 Propriedades Estruturais de Sistemas LIT

Esta seção contém uma apresentação sucinta da investigação de propriedades estruturais de sistemas LIT. Entende-se propriedades estruturais como propriedades inerentes à estrutura matemática destes sistemas, no que diz respeito à utilização deles para o projeto de controladores. Além disto, a avaliação da controlabilidade e observabilidade destes sistemas pode levar a critérios para a definição do posicionamento de sensores e atuadores em estruturas mecânicas para às quais pretende-se

desenvolver controle ativo de vibrações. A estabilidade constitui uma propriedade estrutural fundamental no projeto de sistemas para o controle ativo de vibrações e representa um dos pontos de maior fragilidade a críticas deste tipo de abordagem em comparação com o controle passivo de vibrações.

### A.6.1 Controlabilidade

A controlabilidade constitui a capacidade do sistema em ter sua dinâmica interna governada através da aplicação de um determinado sinal de entrada finito. Matematicamente isto significa que tal sinal de entrada é capaz de deslocar o vetor de estados de um estado para outro dentro de um intervalo de tempo finito. Esta propriedade, em um LTI, é um conceito que diz respeito à relação entre os estados de um sistema e suas entradas. Assim, a segunda equação de saída em (A.4) não desempenha nenhum papel. Portanto, é possível referir-se à controlabilidade do par  $(A, B)$ , já que estas duas matrizes definem a controlabilidade do sistema como um todo. Pela definição matemática um sistema é dito controlável se é possível levar o vetor de estados de uma configuração para outra em um tempo finito através da aplicação de um sinal de entrada finito durante este intervalo de tempo (CHEN, 1970). Sistemas que não atendem a esta definição são ditos não controláveis.

Do ponto de vista prático o teste mais comum para a definição da controlabilidade de sistemas LIT baseia-se na matriz de controlabilidade (CHEN, 1999; OGATA, 2000):

$$\mathfrak{C} = \left[ B \mid AB \mid A^2B \mid \cdots \mid A^{n-1}B \right]_{n \times n_u} \quad (\text{A.29})$$

onde  $n$  e  $n_u$  são o número de estados e sinais de entrada, respectivamente.

Se a matriz de controlabilidade  $\mathfrak{C}$  possui posto completo em linhas, ou seja, posto  $n$ , então o sistema é controlável.

Embora o posto de  $\mathfrak{C}$  dê a informação completa sobre a controlabilidade do sistema de um ponto de vista matemático, ela não dá informação sobre a magnitude do sinal de entrada necessário para governar os estados do sistema a partir de uma condição inicial até uma configuração desejada. O sinal de entrada necessário para deslocar os estados de um estado  $\mathbf{x}_0(t_0)$  para outro  $\mathbf{x}_1(t_1)$  é (HANSEN; SNYDER, 1997; CHEN, 1970)

$$\mathbf{u}(t) = -B^T e^{A^T t} W_c^{-1}(t_0, t_1) [\mathbf{x}_0 - e^{At} \mathbf{x}_1] \quad (\text{A.30})$$

onde a matriz  $W_c(t_0, t_1)$  é chamada de gramiano de controlabilidade, definido como

$$W_c(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} e^{A\tau} B B^T e^{A^T \tau} d\tau \quad (\text{A.31})$$

A partir da Eq.(A.30) pode-se concluir que se  $W_c(t_0, t_1)$  não tem posto completo em todo o intervalo  $[t_0, t_1]$  pelo menos um termo do vetor de entrada  $\mathbf{u}(t)$  deverá possuir magnitude infinita pelo menos em algum instante de tempo, o que contradiz a definição de controlabilidade. Assim, o posto completo de  $W_c(0, \infty)$  também constitui um teste para a controlabilidade do sistema. O gramiano de controlabilidade em regime permanente  $W_c = W_c(0, \infty)$  pode ser calculado através da equação de Lyapunov (CHEN, 1970):

$$A W_c + W_c A^T + B B^T = 0 \quad (\text{A.32})$$

De um ponto de vista prático, os atuadores têm limitações que podem trazer dificuldades mesmo quando os testes acima descritos indicarem que um dado sistema é controlável.

### A.6.2 Observabilidade

O conceito de observabilidade é matematicamente dual ao da controlabilidade. Neste caso a propriedade resulta da relação entre as saídas do sistema e seus estados. Isto significa que a matriz de entrada do sistema não interfere em sua observabilidade de maneira que é possível referir-se à observabilidade do par  $(A, C)$  quando se trata da observabilidade do sistema como um todo. A observabilidade pode ser definida como a capacidade do sistema em ter sua dinâmica interna (seus estados) observada através da medição das suas entradas e saídas. Pela definição matemática um sistema LIT é dito observável se é possível definir o vetor de estados em um instante de tempo anterior através do conhecimento dos sinais de entrada e saída durante o intervalo entre este instante e o atual. Ou seja, um sistema é observável se o conhecimento da condição inicial e dos sinais de entrada e saída são suficientes para observar o vetor de estados<sup>10</sup>.

Analogamente ao caso da controlabilidade, é definida a matriz de observabilidade o:

<sup>10</sup>A definição matemática exata pode ser encontrada em (CHEN, 1970).

$$\mathbf{o} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}_{n_y \times n} \quad (\text{A.33})$$

que possui posto completo em colunas ( $n$ ) quando o sistema é observável (OGATA, 2000; CHEN, 1970), caso contrário diz-se que o sistema é não observável.

Frequentemente os estados não são encontrados diretamente no vetor de saídas, o que leva à necessidade do desenvolvimento de um observador de estados, o que é possível somente se o sistema é observável. Entretanto, o projeto de um observador lida com um compromisso entre a velocidade na estimação dos estados e amplificação de ruído (OGATA, 2000). Assim, se a relação sinal/ruído é muito pequena a realização de um observador de estados pode tornar-se impraticável. Com o intuito de analisar este problema, seja a energia total da saída durante o intervalo de  $t_0$  até  $t_1$  definida como (HANSEN; SNYDER, 1997)

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{y}^T(\tau) \mathbf{y}(\tau) d\tau \quad (\text{A.34})$$

Agora é assumido que o sinal de saída é contaminado com um ruído de medição, *i.e.*  $\mathbf{y} = \bar{\mathbf{y}} + \nu$ . A Eq.(A.34) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} J &= \int_{t_0}^{t_1} (\bar{\mathbf{y}}(\tau) + \nu(\tau))^T (\bar{\mathbf{y}}(\tau) + \nu(\tau)) d\tau \\ &= \int_{t_0}^{t_1} (\bar{\mathbf{y}}^T(\tau) \bar{\mathbf{y}}(\tau) + \nu^T(\tau) \bar{\mathbf{y}}(\tau) + \bar{\mathbf{y}}^T(\tau) \nu(\tau) + \nu^T(\tau) \nu(\tau)) d\tau \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

Uma vez que o ruído não é correlacionado com o sinal é possível assumir

$$\nu^T(\tau) \bar{\mathbf{y}}(\tau) = \bar{\mathbf{y}}^T(\tau) \nu(\tau) = 0$$

Além disto, a resposta livre<sup>11</sup> ( $\mathbf{u} = 0$ ) do sistema a partir da condição inicial  $\mathbf{x}_0(t_0)$  é  $\bar{\mathbf{y}}(\tau) = C e^{A\tau} \mathbf{x}_0$

$$J = \int_{t_0}^{t_1} (\bar{\mathbf{y}}^T(\tau) \bar{\mathbf{y}}(\tau) + \nu^T \nu) d\tau = \mathbf{x}_0^T W_o(t_0, t_1) \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t_1} (\nu^T \nu) d\tau \quad (\text{A.36})$$

<sup>11</sup>A limitação para  $\mathbf{u} = 0$  apenas facilita o equacionamento, mas não é necessária para que seja feita a interpretação do gramiano de observabilidade em uma situação onde existe ruído de medição.

onde  $W_o(t_0, t_1)$  é o gramiano de observabilidade, definido como

$$W_o(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} e^{A^T \tau} C^T C e^{A \tau} d\tau \quad (\text{A.37})$$

Assim, o gramiano de observabilidade pode ser interpretado como uma amplificação (em termos de matrizes e vetores) aplicada no vetor de estados e que determina a quantidade total da energia do sistema. A partir da Eq.(A.37) pode ser visto que se  $W_o(t_0, t_1)$  não possui posto completo em todo o intervalo  $[t_0, t_1]$  pelo menos um dos estados não trará contribuição alguma na energia total da resposta, o que faz com que este não seja observável. Além disto, se o gramiano é “muito pequeno”, o que pode ser medido através de algum tipo de norma, alguns dos estados observados poderiam estar contaminados demais com o ruído, o que está relacionado com a amplificação de ruído referida acima.

O gramiano de observabilidade em regime permanente  $W_o = W_o(0, \infty)$  pode ser calculado através da equação de Lyapunov(CHEN, 1970):

$$A^T W_o + W_o A + C^T C = 0 \quad (\text{A.38})$$

### A.6.3 Estabilidade

Existem duas categorias de estabilidade para sistemas dinâmicos. Uma constitui a habilidade do sistema de retornar a um estado de equilíbrio após alguma perturbação. A outra equivale à restrição do sistema em gerar sinais limitados de saída quando sujeito a sinais de entrada também limitados. Para sistemas LIT estes dois critérios são praticamente equivalentes (HANSEN; SNYDER, 1997). Um sistema LIT é dito ELSL(Entrada limitada saída limitada) estável (ou simplesmente estável) se para qualquer entrada limitada:

$$|u_i(t)| < b_1 \text{ para todo } t \text{ e } i \quad (\text{A.39})$$

a saída é limitada:

$$|y_j(t)| < b_2 \text{ para todo } t \text{ e } j \quad (\text{A.40})$$

assumindo condições iniciais nulas(BURL, 1999).

A estabilidade de um sistema LIT pode ser verificada pela sua resposta ao impulso, uma vez que sua resposta forçada consiste na convolução entre o sinal de

entrada e a função resposta ao impulso  $g_{ji}$ , relativa à entrada  $u_i$  e à saída  $y_j$ . Assim, para a ELSL estabilidade, é necessário e suficiente que a resposta ao impulso seja absolutamente integrável:

$$\int_0^{\infty} |g_{ji}(\tau)| d\tau < \infty \quad (\text{A.41})$$

Já que a resposta ao impulso é uma combinação linear dos modos do sistema e os modos de um sistema LIT têm a forma

$$\{e^{p_i t}, te^{p_i t}, \dots, t^{k-1} e^{p_i t}\}$$

ou

$$\{e^{\lambda_i t} \cos(w_i), e^{\lambda_i t} \text{sen}(w_i), te^{\lambda_i t} \cos(w_i), te^{\lambda_i t} \text{sen}(w_i), \dots, t^{k-1} e^{\lambda_i t} \cos(w_i), t^{k-1} e^{\lambda_i t} \text{sen}(w_i)\}$$

para pólos reais  $p_i$  ou pares complexos conjugados  $p_i, p_i^* = \lambda_i \pm j\omega_i$  com multiplicidade  $k$ . Estes modos são absolutamente integráveis se e somente se as partes reais dos pólos são negativas. Assim, um sistema LIT é estável se e somente se todos os pólos têm parte real negativa.

## A.7 Formulações para Sistemas Discretos

Do ponto de vista tanto da simulação de sistemas LIT quando da implementação de controladores para estes tipos de sistema é necessário lidar com modelos discretos. Esta seção apresenta o método do sustentador de ordem zero, utilizado para a discretização de modelos contínuos, o que permite que a análise, modelagem e o projeto de controladores sejam feitos no domínio contínuo e o controlador projetado discretizado posteriormente para a implementação. O método do sustentador de ordem zero (ZOH da expressão em inglês *Zero Order Holder*) pressupõe que o sinal de entrada do sistema é constante durante o intervalo de amostragem, o que constitui uma hipótese razoável para sistemas onde o sinal de controle é aplicado através de um conversor digital analógico (Fig. 100)(CHEN, 1999). Assim, não se tem conhecimento de todos os sinais durante todo o tempo, mas apenas das amostras a cada  $T_s$ , chamado intervalo de amostragem. A Seção 3.2 trata dos fatores a se levar em conta quando da amostragem de sinais. Para esta seção portanto é assumido simplesmente que os sinais são amostrados de maneira que a discretização é possível.

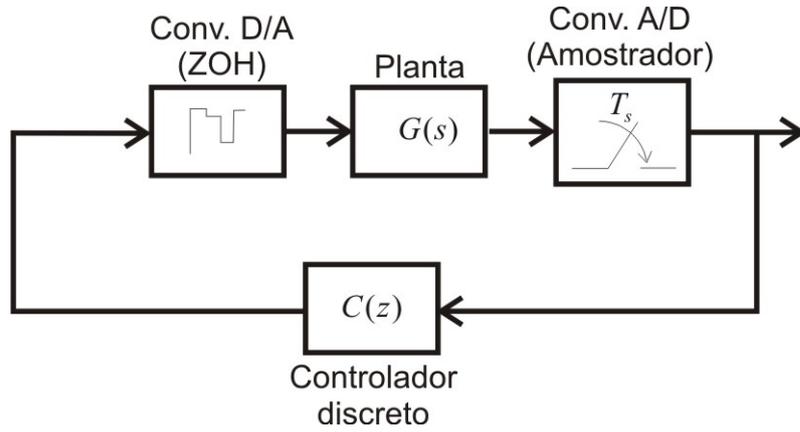


Figura 100: Sistema amostrado

### A.7.1 Representação de Sistemas LIT Discretos

Assumindo que o vetor de entradas é constante durante o intervalo amostral, *i.e.*  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(0) \forall t \in [0, T_s)$  (BURL, 1999):

$$\mathbf{x}(T_s) = e^{At} \mathbf{x}(0) + \int_0^{T_s} e^{A(T_s-\tau)} B \mathbf{u}(0) d\tau = [e^{At}] \mathbf{x}(0) + \left[ \int_0^{T_s} e^{A(T_s-\tau)} B d\tau \right] \mathbf{u}(0) \quad (\text{A.42})$$

que pode ser reescrito como

$$\mathbf{x}(T_s) = \Phi(T_s) \mathbf{x}(0) + \Gamma(T_s) \mathbf{u}(0) \quad (\text{A.43})$$

onde  $\Phi(T_s) = [e^{AT_s}]$  é a matriz de transição de estados avaliada em um período de amostragem (CHEN, 1999), e  $\Gamma(T_s) = \left[ \int_0^{T_s} e^{A(T_s-\tau)} B d\tau \right]$  é a matriz de entrada para o sistema discretizado. Assim, a matriz de estados para o sistema discretizado é  $A_d = \Phi(T_s)$  e a matriz de entrada  $B_d = \Gamma(T_s)$ . O vetor de estados para cada instante  $(k+1)T_s$  pode ser calculado a partir do conhecimento de  $kT_s$ . Como o sistema é invariante no tempo:

$$\mathbf{x}((k+1)T_s) = A_d \mathbf{x}(kT_s) + B_d \mathbf{u}(kT_s) \quad (\text{A.44})$$

A equação de saída é algébrica, de maneira que pode ser escrita como a avaliação dos sinais de Eq.(A.4) em cada amostragem

$$\mathbf{y}(kT_s) = C \mathbf{x}(kT_s) + D \mathbf{u}(kT_s) \quad (\text{A.45})$$

Assim como na representação de sistemas contínuos, a função de transferên-

cia também pode ser definida para sistemas discretos, para isto faz-se necessária a transformada Z (KWAKERNAAK; SIVAN, 1991).

$$\frac{\mathbf{y}(z)}{\mathbf{u}(z)} \triangleq \mathbf{G}_d(z) = [C [zI - A_d]^{-1} B_d] + D \quad (\text{A.46})$$

### A.7.2 Função Resposta em Freqüência

Para um sistema LIT monovariável sujeito a uma entrada tonal de freqüência  $\omega$  do tipo  $u(k) = \sin(\omega k T_s)$ , a saída também pode ser descrita em função da sua resposta em freqüência como no caso dos sistemas contínuos. A resposta forçada para sistemas discretos também pode ser calculada através da convolução do sinal de entrada com a resposta ao pulso unitário<sup>12</sup>, que tem a forma:

$$y(k) = \sum_{i=0}^{\infty} g_i u(k-i) \quad (\text{A.47})$$

onde  $g_i$  é a resposta ao pulso unitário. Para a entrada  $u(k) = \sin(\omega k T_s) = \frac{e^{j\omega k T_s} - e^{-j\omega k T_s}}{2j}$  tem-se

$$\begin{aligned} y(k) &= \sum_{i=0}^{\infty} g_i \sin(\omega(k-i)T_s) = \sum_{i=0}^{\infty} g_i \left( \frac{e^{j\omega(k-i)T_s} - e^{-j\omega(k-i)T_s}}{2j} \right) \\ &= \frac{e^{j\omega k T_s}}{2j} \sum_{i=0}^{\infty} g_i e^{-j\omega i T_s} - \frac{e^{-j\omega k T_s}}{2j} \sum_{i=0}^{\infty} g_i e^{j\omega i T_s} \\ &= \frac{e^{j\omega k T_s}}{2j} G(z) - \frac{e^{-j\omega k T_s}}{2j} G^*(z) \\ &= \frac{e^{j\omega k T_s}}{2j} |G(z)| e^{\angle G(z)} - \frac{e^{-j\omega k T_s}}{2j} |G(z)| e^{-\angle G(z)} \\ &= |G(z)| \sin(\omega k T_s + \angle G(z)) \end{aligned} \quad (\text{A.48})$$

onde a quarta igualdade é obtida através do uso da definição de função resposta em freqüência (JUANG, 1994):

$$G(z) = \sum_{i=0}^{\infty} g_i e^{-j\omega i T_s} = \sum_{i=0}^{\infty} g_i z^{-i} \quad z = e^{-j\omega T_s} \quad (\text{A.49})$$

Enquanto que em sistemas contínuos a função resposta em freqüência é obtida através da avaliação da função de transferência na freqüência complexa  $s = j\omega$  nos

<sup>12</sup>A resposta ao pulso unitário é aquela obtida quando o sistema é sujeito a uma entrada do tipo  $u(k) = 1$  para  $k = 0$  e  $u(k) = 0$  caso contrário.

sistemas amostrados ela é obtida avaliando a função de transferência para  $z = e^{-j\omega T_s}$  para  $-\pi \leq \omega T_s \leq \pi$ . Isto define a validade da FRF para sistemas amostrados para o intervalo

$$-\frac{\pi}{T_s} \leq \omega \leq \frac{\pi}{T_s}$$

ou em termos de frequência física

$$-\frac{1}{2T_s} \leq f \leq \frac{1}{2T_s}$$

que define a frequência de Nyquist  $f_{nyq} = 1/2T_s$ , como a metade da frequência de amostragem (ISERMANN, 1988).

### A.7.3 Raízes no Plano Complexo e Estabilidade

Um sinal  $y(t)$  amostrado idealmente sob um período de amostragem  $T_s$ , torna-se uma seqüência

$$\{y(kT_s) : k = 0, 1, 2, \dots\} = \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} y(t)\delta(t - kT_s) \right\} \quad (\text{A.50})$$

A transformada de Laplace da seqüência acima pode ser calculada como (JUANG, 1994)

$$y(s) = \mathcal{L}[y(kT_s)] = \int_0^{\infty} [y(t)\delta(t - kT_s)] e^{-st} dt = y(z) \text{ com } z = e^{sT_s} \quad (\text{A.51})$$

A equação acima diz que a transformada de Laplace de um sinal amostrado pode ser calculada a partir da transformada Z, através da relação  $z = e^{sT_s}$ . Assim, para o  $i$ -ésimo par de pólos complexos conjugados<sup>13</sup>  $s_i = \lambda_i \pm j\omega_i$  tem-se o par equivalente  $z_i = e^{T_s(\lambda_i \pm j\omega_i)}$ , que constitui um par de pólos complexos conjugados com magnitude  $|z_i| = e^{T_s\lambda_i}$  e fase  $\angle(z_i) = \pm\omega_i T_s$ .

As Figs. 101 e 102 mostram a relação entre os planos complexos no domínio de  $s$  (à esquerda) e de  $z$ .

<sup>13</sup>A análise é a mesma para o caso particular de pólos reais.

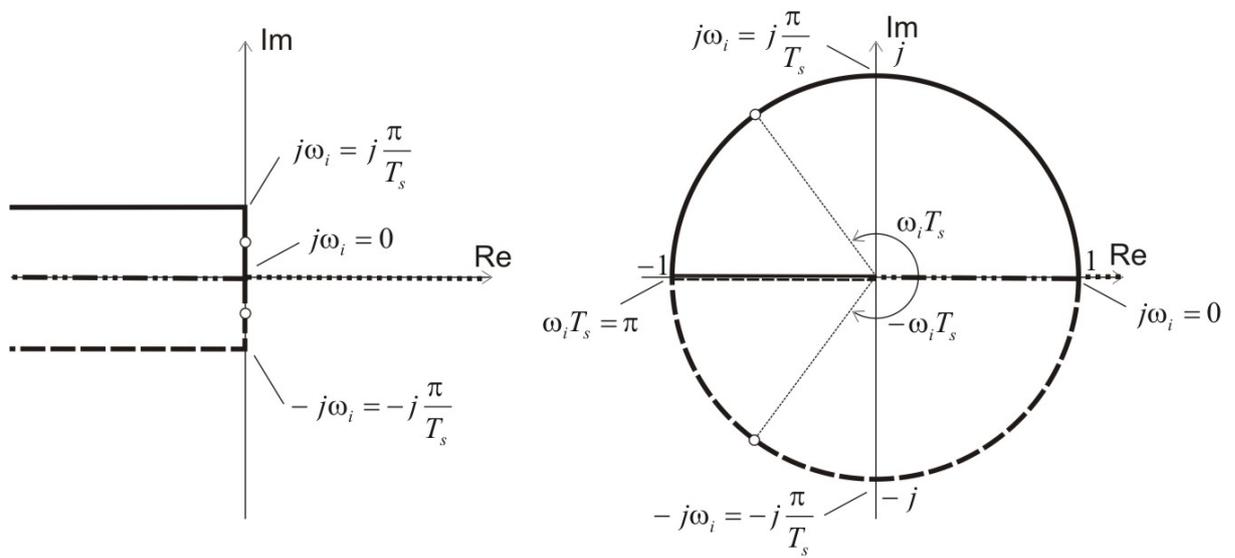


Figura 101: Equivalência do plano complexo através de  $z = e^{sT_s}$

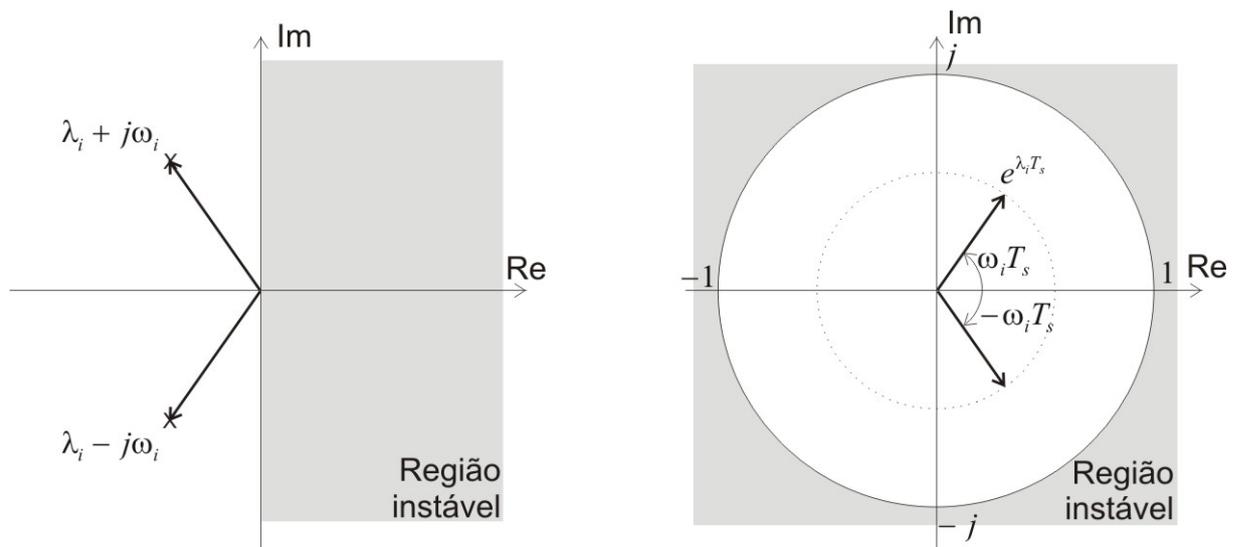


Figura 102: Equivalência par de pólos complexo no domínio contínuo e discreto



$$\begin{bmatrix}
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -30,772 & 1194,6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -1194,6 & -30,772 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -32,482 & 1323,3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -1323,3 & -32,482 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -43,071 & 1730,6 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -1730,6 & -43,071 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -11,494 & 1835,5 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1835,5 & -11,494
 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} B_{u1} & B_{w1} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix}
 31,54 & -33,375 & -0,43624 \\
 -75,512 & -19,013 & 0,092883 \\
 -60,408 & -12,074 & 0,42479 \\
 84,12 & -13,397 & -0,43413 \\
 -48,738 & -47,742 & -0,84125 \\
 -35,074 & 62,54 & 1,6969 \\
 21,071 & -42,743 & 1,2069 \\
 9,1908 & -8,9732 & 0,24548 \\
 -12,024 & -126,15 & -2,3511 \\
 18,573 & -60,433 & 0,52862 \\
 5,3684 & 38,224 & -0,72898 \\
 10,246 & -6,7328 & 0,17513 \\
 2,474 & -52,818 & 1,5156 \\
 0,5125 & 63,864 & 0,90735 \\
 0,84125 & -19,366 & -0,45 \\
 -1,8266 & 27,411 & -0,27037
 \end{bmatrix}$$

$$C_1 =$$

$$\begin{bmatrix}
-7,3085 \cdot 10^{-4} & 1,4491 \cdot 10^{-3} & 2,5588 \cdot 10^{-4} & 6,1463 \cdot 10^{-4} \\
-1,2034 \cdot 10^{-4} & 7,1615 \cdot 10^{-4} & 2,4350 \cdot 10^{-4} & 7,6029 \cdot 10^{-4} \\
1,9028 \cdot 10^{-3} & 3,7086 \cdot 10^{-3} & 1,8377 \cdot 10^{-4} & 2,7928 \cdot 10^{-3} \\
-1,6317 \cdot 10^{-3} & 6,5469 \cdot 10^{-4} & 3,8861 \cdot 10^{-4} & -1,0262 \cdot 10^{-3} \\
-8,9948 \cdot 10^{-4} & 3,9479 \cdot 10^{-4} & 2,1265 \cdot 10^{-4} & -3,7147 \cdot 10^{-4} \\
1,9806 \cdot 10^{-3} & -8,2395 \cdot 10^{-4} & -3,9369 \cdot 10^{-4} & 7,2216 \cdot 10^{-4} \\
-1,0675 \cdot 10^{-3} & 5,8964 \cdot 10^{-4} & 3,2792 \cdot 10^{-5} & 4,4570 \cdot 10^{-5} \\
8,7783 \cdot 10^{-4} & -3,9806 \cdot 10^{-4} & 9,6419 \cdot 10^{-5} & 3,6539 \cdot 10^{-5} \\
-3,4950 \cdot 10^{-3} & 1,7238 \cdot 10^{-3} & 1,1641 \cdot 10^{-3} & 2,2691 \cdot 10^{-4} \\
-1,3759 \cdot 10^{-3} & 2,9321 \cdot 10^{-4} & 2,3514 \cdot 10^{-4} & 7,4351 \cdot 10^{-4} \\
3,2796 \cdot 10^{-5} & -2,9123 \cdot 10^{-4} & 9,9837 \cdot 10^{-5} & 2,7414 \cdot 10^{-4} \\
-1,9996 \cdot 10^{-3} & -1,9904 \cdot 10^{-5} & 4,6577 \cdot 10^{-5} & 5,6322 \cdot 10^{-4}
\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} D_{u1} & D_{w1} \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

## B.2 Modelo 2

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_2 &= A_2 \mathbf{x}_2 + B_{u2} \begin{bmatrix} u_a \\ u_b \end{bmatrix} + B_{w2} f_p \\ \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} &= C_2 \mathbf{x}_2 + D_{u2} \begin{bmatrix} u_a \\ u_b \end{bmatrix} + D_{w2} f_p \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

$A_2 =$

$$\begin{bmatrix}
-27,095 & 315,86 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-315,86 & -27,095 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -29,707 & 517,69 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -517,69 & -29,707 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -29,158 & 1193 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1193 & -29,158 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -40,28 & 1749,6 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1749,6 & -40,28
\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} B_{u2} & B_{w2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -42,375 & -1,0606 & 0,4722 \\ 68,185 & -17,258 & -0,47524 \\ -51,35 & -48,278 & -1,0209 \\ -29,329 & 54,915 & 1,6786 \\ 10,64 & 121,36 & 2,3744 \\ -21,512 & 55,026 & -0,45236 \\ 7,6261 & -58,827 & 1,2823 \\ 4,7211 & 59,746 & 0,60144 \end{bmatrix}$$

$$C_2 =$$

$$\begin{bmatrix} 1,2184 \cdot 10^{-4} & 4,2624 \cdot 10^{-4} & -1,4618 \cdot 10^{-4} & 5,1373 \cdot 10^{-4} \\ 1,2950 \cdot 10^{-4} & 6,0240 \cdot 10^{-4} & -7,4564 \cdot 10^{-4} & 3,6549 \cdot 10^{-4} \\ 3,0730 \cdot 10^{-4} & 2,3596 \cdot 10^{-3} & 2,0729 \cdot 10^{-3} & -8,8343 \cdot 10^{-4} \\ 1,1279 \cdot 10^{-3} & -5,6290 \cdot 10^{-4} & -1,4974 \cdot 10^{-3} & 6,067 \cdot 10^{-4} \\ -8,6596 \cdot 10^{-4} & 4,0675 \cdot 10^{-4} & -7,8303 \cdot 10^{-5} & -1,1696 \cdot 10^{-4} \\ 3,4483 \cdot 10^{-3} & -1,5822 \cdot 10^{-3} & -1,9721 \cdot 10^{-3} & 1,4334 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} D_{u2} & D_{w2} \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$