

RICARDO SOUZA MONTEIRO FERNANDES

**PROJETO DE FILTROS DIGITAIS
TRANSICIONAIS CAUER-CHEBYSHEV INVERSO**

**FLORIANÓPOLIS
2006**

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
EM ENGENHARIA ELÉTRICA**

**PROJETO DE FILTROS DIGITAIS
TRANSICIONAIS CAUER-CHEBYSHEV INVERSO**

Dissertação submetida à
Universidade Federal de Santa Catarina
como parte dos requisitos para a
obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica.

RICARDO SOUZA MONTEIRO FERNANDES

Florianópolis, Fevereiro de 2006

Projeto de Filtros Digitais Transicionais Cauer-Chebyshev Inverso

Ricardo Souza Monteiro Fernandes

‘Esta dissertação foi julgada adequada para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Elétrica, Área de Concentração em Comunicações e Processamento de Sinais, e aprovada em sua forma final pelo Curso de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Santa Catarina.’

Prof. Sidnei Noceti Filho, D. Sc.
Orientador

Prof. Rui Seara, Dr.
Co-orientador

Prof. Alexandre Trofino Neto, Dr.
Coordenador do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

Banca Examinadora

Prof. Sidnei Noceti Filho, D. Sc.
Presidente

Prof. Rui Seara, Dr.

Prof. Bartolomeu Uchoa Filho, Ph.D.

Prof. Joceli Mayer, Ph.D.

Prof. Walter Pereira Carpes Jr., Dr.

*Dedico este trabalho aos meus pais,
Antonio e Fátima, por todo o amor, incentivo e
dedicação. Vocês são meus exemplos de vida!*

*Ao meu irmão Marcelo, pela imensa
amizade, carinho e admiração que temos um
pelo outro.*

*A minha esposa, Ana Paula, pelo amor,
compreensão e às experiências transmitidas que
foram fundamentais para a conclusão deste
trabalho.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço acima de tudo a Deus, por ter dado a oportunidade de concluir mais esta etapa da minha vida com sucesso.

Aos meus avós Zilda, Áureo, Daysi e Antonio, pelo incentivo e pelas orações e velas acesas nos momentos de dificuldade.

Aos meus tios Eliana e Zuba, que foram meus únicos familiares próximos durante estes dois anos em Floripa, à minha madrinha Nyssea e à Tita pela amizade e carinho de sempre.

Aos meus amigos de laboratório Elton, Mateus, André e Renan pela amizade e a agradável convivência, ao amigo Juan Rodrigo, pelas experiências de vida trocadas, e ao Micheli, pela amizade, as dicas de Matlab e os passes que me deixaram na cara do gol no futsal de sábado.

Aos meus amigos e vizinhos Victor e Cláudio que se tornaram meus irmãos mais novos e foram meus maiores companheiros durante este período.

Ao meu amigo de infância Dr. Diogo, mais conhecido por Diu, pelas longas conversas que atravessavam a madrugada no posto de gasolina.

Agradeço especialmente aos meus professores e orientadores Sidnei Noceti Filho e Rui Seara, pelo apoio, amizade, confiança e colaboração para a conclusão deste trabalho.

Agradeço à Capes pelo apoio financeiro e à UFSC pela infra-estrutura, especialmente ao LINSE pelo material concedido para a realização do trabalho.

Resumo da Dissertação apresentada à UFSC como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica.

PROJETO DE FILTROS DIGITAIS TRANSICIONAIS CAUER-Chebyshev INVERSO

Ricardo Souza Monteiro Fernandes

Fevereiro/2006

Orientador: Sidnei Noceti Filho, D. Sc.

Área de Concentração: Comunicações e Processamento de Sinais.

Palavras-chave: filtros transicionais, filtros digitais IIR, transformação espectral, características de magnitude, fase e tempo.

Número de Páginas: 110

RESUMO: O presente trabalho apresenta uma metodologia de projeto de filtros transicionais a partir de aproximações não-polinomiais. A implementação desses filtros é realizada com base em técnicas de síntese de filtros digitais IIR, com o objetivo de obter o melhor desempenho de respostas de magnitude, fase e tempo visando uma específica aplicação. A utilização de filtros transicionais não-polinomiais, mais especificamente filtros transicionais Cauer-Chebyshev Inverso, deve-se ao fato de a aproximação Cauer apresentar a menor ordem dentre todas as funções de filtros seletores e de a aproximação Chebyshev Inverso ser também não-polinomial e apresentar melhores características de fase e de tempo em relação à aproximação Cauer. Os exemplos de aplicação mostrados são avaliados através de seis técnicas de projeto de filtros digitais utilizando-se uma abordagem de projeto indireta. Na tentativa de obter o melhor desempenho de cada uma delas são consideradas algumas estratégias de projeto, tais como pré-distorção e principalmente transformação espectral, cujo estudo resultou em procedimentos que melhoram a aplicabilidade dessa última. Assim, é possível compará-las entre si, possibilitando a escolha da melhor estratégia de filtragem para cada problema. Para auxiliar no projeto de filtros digitais como também viabilizar algumas medidas de linearidade de fase consideradas, um software em ambiente Matlab foi desenvolvido.

Abstract of Dissertation presented to UFSC as a partial fulfillment of the requirements for degree of Master in Electrical Engineering.

DESIGN OF ELLIPTIC-INVERSE CHEBYSHEV TRANSITIONAL DIGITAL FILTERS

Ricardo Souza Monteiro Fernandes

February/2006

Advisor: Sidnei Noceti Filho, D. Sc.

Area of Concentration: Communications and Signal Processing

Keywords: transitional filters, IIR digital filters, spectral transformations, characteristics of magnitude, phase and time.

Number of Pages: 110

ABSTRACT: This work presents a methodology of design of transitional filters from nonpolynomial approximations. The implementation of those filters is accomplished based on IIR digital filter synthesis techniques, aiming at obtaining the best performance in magnitude, phase and time responses for a specific application. The use of nonpolynomial transitional filters, more specifically Elliptic-to-Inverse Chebyshev filters, is due to the Elliptic approximation to present the lower order among all selective filters functions, and the Inverse Chebyshev approximation to be also a nonpolynomial function as well as to possess better phase and time characteristics than the Elliptic one. Application examples are shown aiming to assess six techniques of digital filter design, which use analog-to-digital mapping approaches. Considering the specific characteristics of each technique, as well as trying to achieve their best performance, some design strategies are applied, such as pre-warping and mainly spectral transformation, whose study has resulted in procedures that improve their applicability. Thus, by comparing the magnitude, phase and time responses, it is possible to choose the best filtering approach for each problem. In order to support the proposed filter design and make feasible some considered phase linearity measures, a software using Matlab ambient has been developed.

SUMÁRIO

LISTA DE SÍMBOLOS	x
LISTA DE FIGURAS	xv
LISTA DE TABELAS	xix
CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO	1
1.1 SÍNTESE DE FILTROS ANALÓGICOS.....	1
1.2 TRANSFORMAÇÃO $S \rightarrow Z$	4
1.3 OBJETIVO DA DISSERTAÇÃO.....	5
1.4 ORGANIZAÇÃO DO MANUSCRITO.....	5
CAPÍTULO 2 – DESCRIÇÃO DOS MÉTODOS	7
2.1 INTRODUÇÃO.....	7
2.2 FASE E MEDIDAS DE LINEARIDADE.....	8
2.3 FILTROS TRANSICIONAIS.....	10
2.3.1 Ajuste da Magnitude na Banda Passante e Normalização.....	13
2.3.2 Ajuste da Magnitude na Banda de Rejeição.....	14
2.3.3 Algoritmo de Projeto do Filtro Transicional Não-Polinomial Passa-Baixas Analógico.....	15
2.4 PROJETO DE FILTROS DIGITAIS IIR UTILIZANDO UM MÉTODO INDIRETO.....	16
2.4.1 Método da Invariância ao Impulso.....	16
2.4.2 Método da Invariância ao Degrau Unitário.....	17
2.4.3 Método da Invariância à Rampa.....	18
2.4.4 Método da Transformação Z-Casada.....	19
2.4.5 Método da Transformação de Euler.....	21
2.4.6 Método da Transformação Bilinear.....	23
2.4.7 Transformação Espectral.....	26
2.5 CONCLUSÕES.....	27
CAPÍTULO 3 – ESTUDO E ANÁLISE DA TRANSFORMAÇÃO ESPECTRAL	29
3.1 DESCRIÇÃO DO PROBLEMA.....	29
3.2 METODOLOGIA DE PROJETO.....	30

3.3	TRANSFORMAÇÃO PB-PB.....	31
3.4	TRANSFORMAÇÃO PB-PA.....	33
3.5	TRANSFORMAÇÃO PB-PF.....	36
3.6	TRANSFORMAÇÃO PB-RF.....	40
3.7	ANÁLISE DA SENSIBILIDADE.....	44
3.8	SOLUÇÕES PROPOSTAS E EXEMPLOS.....	48
3.9	CONCLUSÕES.....	58
CAPÍTULO 4 – RESULTADOS E EXEMPLOS DE APLICAÇÃO.....		60
4.1	EXEMPLO DE FILTRO PASSA-BAIXAS.....	60
4.2	EXEMPLO DE FILTRO PASSA-ALTAS.....	67
4.3	EXEMPLO DE FILTRO PASSA-FAIXA.....	73
4.4	EXEMPLO DE FILTRO REJEITA-FAIXA.....	79
4.5	CONCLUSÕES.....	87
CAPÍTULO 5 – COMENTÁRIOS E CONCLUSÕES FINAIS.....		89
APÊNDICE A – JANELAS DE INTERFACE COM O USUÁRIO DO SOFTWARE.....		91
APÊNDICE B – ALGORITMO DE PROJETO DO FILTRO GERADOR CA.....		95
APÊNDICE C – ALGORITMO DE PROJETO DO FILTRO GERADOR CI.....		97
APÊNDICE D – ALGORITMO DE PROJETO DO FILTRO PASSA-BAIXAS DIGITAL.....		99
APÊNDICE E – ALGORITMO DE PROJETO DO FILTRO PASSA-ALTAS DIGITAL.....		101
APÊNDICE F – ALGORITMO DE PROJETO DO FILTRO PASSA-FAIXA DIGITAL.....		103
APÊNDICE G – ALGORITMO DE PROJETO DO FILTRO REJEITA-FAIXA DIGITAL.....		106
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....		109

LISTA DE SÍMBOLOS

m	fator interpolador
n	ordem do filtro
A_p	máxima atenuação permitida no limite da banda passante (dB)
A_s	mínima atenuação exigida na banda de rejeição (dB)
n_{BT}	ordem do Butterworth
n_{CA}	ordem do Cauer
j	unidade imaginária
ω	freqüência angular (rad/s)
$\bar{\omega}_s$	freqüência limite da banda de rejeição normalizada
$\bar{\theta}_s$	freqüência limite da banda de rejeição normalizada do filtro protótipo
ϕ	fase (rad)
T_0	constante de tempo (s)
τ_p	atraso de fase (s)
τ_{pmed}	atraso de fase médio (s)
τ_g	atraso de grupo (s)
τ_{gmed}	atraso de grupo médio (s)
K	constante de ganho
$h(t)$	resposta ao impulso no tempo
$\Delta\tau_p$	variação do atraso de fase (s)

$\Delta\tau_g$	variação do atraso de grupo (s)
τ_{pmax}	atraso de fase máximo (s)
τ_{pmin}	atraso de fase mínimo (s)
ε_{τ_p}	erro do atraso de fase
ε_{τ_g}	erro do atraso de grupo
$\Delta\omega$	passo de amostragem em frequência (rad/s)
ω_f	frequência final (rad/s)
ω_i	frequência inicial (rad/s)
L	número de amostras
ε_h	erro de simetria da resposta ao impulso
Δt	passo de amostragem no tempo (s)
t_f	tempo final (s)
t_i	tempo inicial (s)
\bar{s}_{IA}	singularidades normalizadas do filtro A que compõe o filtro transicional
\bar{s}_{IB}	singularidades normalizadas do filtro B que compõe o filtro transicional
s'_{IT}	singularidades do filtro transicional intermediário
\bar{s}_{IT}	singularidades normalizadas do filtro transicional
$H(s')$	função de transferência intermediária
s'_{ITz}	zeros finitos imaginários do filtro transicional
s'_{ITp}	pólos finitos imaginários do filtro transicional
ω_N	frequência de normalização (rad/s)
$H(\bar{s})$	função de transferência normalizada

m_{antigo}	fator interpolador auxiliar
m_{novo}	fator interpolador auxiliar
m_{atual}	fator interpolador auxiliar
$H_a(s)$	função de transferência analógica no domínio da frequência
$h_a(t)$	função de transferência analógica no domínio do tempo
$h_a(l\Delta t)$	função de transferência discreta no domínio do tempo
$\delta_{\Delta t}$	trem de impulsos
$H(z)$	função de transferência digital
$u_a(t)$	degrau unitário
$r_a(t)$	rampa
$H(f)$	resposta em frequência
F_s	frequência de amostragem (Hz)
Ω_s	frequência de amostragem (rad/s)
$g(t)$	saída de um sistema que possui o degrau unitário como entrada
$G(z)$	transformada- z de $g(t)$
$X(z)$	transformada- z de uma entrada $x(t)$ de um sistema
$Y(z)$	transformada- z de uma saída $y(t)$ de um sistema
$q(t)$	saída de um sistema que possui a rampa como entrada
$Q(z)$	transformada- z de $q(t)$
Ω	frequência angular do plano- s (rad/s)
α	variável auxiliar da transformação espectral
α'	variável auxiliar da transformação espectral para o filtro intermediário 1

α''	variável auxiliar da transformação espectral para o filtro intermediário 2
k	variável auxiliar da transformação espectral
θ_p	freqüência de corte da banda passante do filtro passa-baixas protótipo (rad/s)
θ_s	freqüência de corte da banda de rejeição do filtro passa-baixas protótipo
(rad/s)	
θ'_p	freqüência de corte da banda passante do filtro passa-baixas intermediário 1
(rad/s)	
θ'_s	freqüência de corte da banda de rejeição do filtro passa-baixas intermediário
1 (rad/s)	
θ''_p	freqüência de corte da banda passante do filtro passa-baixas intermediário 2
(rad/s)	
θ''_s	freqüência de corte da banda de rejeição do filtro passa-baixas intermediário
2 (rad/s)	
ω_p	freqüência de corte da banda passante (rad/s)
ω_s	freqüência de corte da banda de rejeição (rad/s)
ω'_p	freqüência de corte da banda passante normalizada
ω'_s	freqüência de corte da banda de rejeição normalizada
f_{p1}	freqüência de corte da banda passante esquerda (Hz)
f_{p2}	freqüência de corte da banda passante direita (Hz)
f_{s3}	freqüência de corte da banda de rejeição direita (Hz)
f_{s4}	freqüência de corte da banda de rejeição esquerda (Hz)
γ	<i>overshoot</i> da resposta ao degrau (%)

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Resposta ao impulso de um filtro passa-baixas com fase linear.	9
Figura 2.2 – Magnitude da resposta em frequência dos filtros CA, CI e TR para $m = 0,5$	12
Figura 2.3 – Atraso de fase dos filtros CA, CI e TR para $m = 0,5$	12
Figura 2.4 – Diferença entre $A(\omega_s)$ dos filtros geradores CA e CI e do filtro transicional.....	13
Figura 2.5 - (a) Função antes do escalamento. (b) Função após o escalamento.....	14
Figura 2.6 - Efeito do mapeamento de zeros com frequência central maior do que $F_s/2$ utilizando transformação z -casada.....	21
Figura 2.7 - Mapeamento dos zeros do plano- s para o plano- z utilizando diferentes frequências de amostragem.....	23
Figura 2.8 - Mapeamento das frequências do plano- s para o plano- z utilizando transformação bilinear.....	24
Figura 2.9 - Efeito da transformação bilinear na característica de fase.....	26
Figura 3.1 – Variação de α com θ_p para um projeto com $\Delta t = 200\mu s$ e $\omega_p = 159,15\text{rad/s}$	32
Figura 3.2 – Variação de θ com ω [conforme (3.3)] para valores de α distintos e $\Delta t = 200\mu s$	33
Figura 3.3 – Variação de α com θ_p para um projeto com $\Delta t = 200\mu s$ e $\omega_p = 159,15\text{rad/s}$	34
Figura 3.4 - variação de θ com ω [conforme (3.6)] para valores de α distintos e $\Delta t = 200\mu s$	35
Figura 3.5 – Gabarito de atenuação de um filtro passa-faixa.....	37
Figura 3.6 – Variação de k para valores de θ_p normalizados.....	38
Figura 3.7 – Variação de θ com ω [conforme (4.10)] para diferentes valores de k	39
Figura 3.8 - variação de θ com ω [conforme (4.12)] para diversos valores de α	40
Figura 3.9 – Variação de k para diferentes valores de θ_p	42
Figura 3.10 – Variação de θ com ω [conforme (3.17)] para diversos valores de k	43
Figura 3.11 – (a) Resposta em magnitude de um filtro passa-baixas digital com $\alpha = -0,914917055$. (b) Ampliação da banda passante.....	46
Figura 3.12 – (a) Resposta em magnitude de um filtro passa-baixas digital com $\alpha = -0,915826706$. (b) Ampliação da banda passante.....	47

Figura 3.13 – (a) Resposta em magnitude de um filtro passa-baixas digital com $\alpha = -0,916919427$.	
(b) Ampliação da banda passante.....	47
Figura 3.14 – Obtenção de um filtro passa-altas através do uso de dois filtros intermediários.....	49
Figura 3.15 – Magnitude do filtro passa-altas de ordem 7 utilizando transformação espectral direta.....	50
Figura 3.16 – Magnitude do filtro passa-altas de ordem 7 utilizando transformação espectral com o uso de um filtro intermediário.....	51
Figura 3.17 – Magnitude do filtro passa-altas de ordem 6 utilizando transformação espectral com o uso de dois filtros intermediários.....	51
Figura 3.18 – Obtenção do filtro passa-faixa desejado através do uso de um filtro intermediário.....	53
Figura 3.19 – Magnitude do filtro passa-faixa de ordem 10 com $k = 1$	54
Figura 3.20 – Magnitude do filtro passa-faixa de ordem 10 usando um filtro intermediário PF-PF.....	54
Figura 3.21 – Magnitude do filtro passa-faixa de ordem 11 construído através de um filtro passa-baixas em cascata com um filtro passa-altas.....	55
Figura 3.22 – Magnitude do filtro rejeita-faixa projetado com k arbitrário.....	57
Figura 3.23 – Magnitude do filtro rejeita-faixa de ordem 12 usando um filtro intermediário RF-RF.....	57
Figura 3.24 – Magnitude do filtro rejeita-faixa de ordem 12 construído através de um filtro passa-baixas em cascata com um filtro passa-altas.....	58
Figura 4.1 – Resposta de magnitude dos filtros passa-baixas de ordem 4 CA, CI e TR utilizando as técnicas:	
(a) Invariância à rampa; (b) Invariância à rampa (ampliação da banda de transição); (c) Transformação bilinear e (d) Transformação bilinear (ampliação da banda de transição).....	61
Figura 4.2 – Mapa de pólos e zeros dos filtros CA, CI e TR passa-baixas utilizando as técnicas: (a) Invariância à rampa; (b) Invariância à rampa (ampliação); (c) Transformação bilinear e (d) Transformação bilinear (ampliação).....	62
Figura 4.3 – Atraso de fase na banda passante dos filtros CA, CI e TR passa-baixas. (a) Invariância à rampa. (b) Transformação bilinear.....	62
Figura 4.4 – Resposta ao impulso dos filtros CA, CI e TR passa-baixas. (a) Invariância à rampa. (b) Transformação bilinear.....	63
Figura 4.5 – Resposta ao degrau dos filtros CA, CI e TR passa-baixas. (a) Invariância à rampa. (b) Transformação bilinear.....	63

Figura 4.6 – Atraso de grupo na banda passante dos filtros CA, CI e TR passa-baixas. (a) Invariância à rampa. (b) Transformação bilinear.....	64
Figura 4.7 – Resposta de magnitude dos filtros passa-altas de ordem 4 CA, CI e TR. (a) Invariância à rampa; (b) Invariância à rampa (ampliação da banda de transição); (c) Transformação bilinear e (d) Transformação bilinear (ampliação da banda de transição).....	67
Figura 4.8 – Mapas de pólos e zeros dos filtros CA, CI e TR passa-altas. (a) Invariância à rampa; (b) Invariância à rampa (ampliação); (c) Transformação bilinear e (d) Transformação bilinear (ampliação).....	68
Figura 4.9 – Atraso de fase na banda passante dos filtros CA, CI e TR passa-altas. (a) Invariância à rampa. (b) Transformação bilinear.....	68
Figura 4.10 – Resposta ao impulso dos filtros CA, CI e TR passa-altas. (a) Invariância à rampa. (b) Transformação bilinear.....	69
Figura 4.11 – Resposta ao degrau dos filtros CA, CI e TR passa-altas. (a) Invariância à rampa. (b) Transformação bilinear.....	69
Figura 4.12 – Atraso de grupo na banda passante dos filtros CA, CI e TR passa-altas. (a) Invariância à rampa. (b) Transformação bilinear.....	70
Figura 4.13 – Resposta de magnitude dos filtros passa-faixa de ordem 6 CA, CI e TR. (a) Invariância à rampa; (b) Invariância à rampa (ampliação da banda de transição); (c) Transformação bilinear e (d) Transformação bilinear (ampliação da banda de transição).....	73
Figura 4.14 – Mapas de pólos e zeros dos filtros CA, CI e TR passa-faixa. (a) Invariância à rampa; (b) Invariância à rampa (ampliação); (c) Transformação bilinear e (d) Transformação bilinear (ampliação).....	74
Figura 4.15 – Atraso de fase na banda passante dos filtros CA, CI e TR passa-faixa. (a) Invariância à rampa. (b) Transformação bilinear.....	75
Figura 4.16 – Resposta ao impulso dos filtros CA, CI e TR passa-faixa. (a) Invariância à rampa. (b) Transformação bilinear.....	75
Figura 4.17 – Resposta ao degrau dos filtros CA, CI e TR passa-faixa. (a) Invariância à rampa. (b) Transformação bilinear.....	76
Figura 4.18 – Atraso de grupo na banda passante dos filtros CA, CI e TR passa-faixa. (a) Invariância à rampa. (b) Transformação bilinear.....	76

Figura 4.19 – Resposta de magnitude dos filtros rejeita-faixa de ordem 8 CA, CI e TR. (a) Invariância à rampa; (b) Invariância à rampa (ampliação da banda de transição); (c) Transformação bilinear e (d) Transformação bilinear (ampliação da banda de transição).....	80
Figura 4.20 – Mapa de pólos e zeros dos filtros CA, CI e TR rejeita-faixa. (a) Invariância à rampa; (b) Invariância à rampa (ampliação); (c) Transformação bilinear e (d) Transformação bilinear (ampliação).....	81
Figura 4.21 – Atraso de fase na banda passante dos filtros CA, CI e TR rejeita-faixa. (a) Invariância à rampa. (b) Transformação bilinear.....	82
Figura 4.22 – Resposta ao impulso dos filtros CA, CI e TR rejeita-faixa. (a) Invariância à rampa. (b) Transformação bilinear.....	83
Figura 4.23 – Resposta ao degrau dos filtros CA, CI e TR rejeita-faixa. (a) Invariância à rampa. (b) Transformação bilinear.....	83
Figura 4.24 – Atraso de grupo na banda passante dos filtros CA, CI e TR rejeita-faixa. (a) Invariância à rampa. (b) Transformação bilinear.....	84
Figura A.1 – Janela de abertura do software.....	91
Figura A.2 – Janelas com as especificações de projeto dos filtros analógicos (a) passa-baixas, (b) passa-altas, (c) passa-faixa e (d) rejeita-faixa.....	92
Figura A.3 – Janelas com as especificações de projeto dos filtros digitais (a) passa-baixas, (b) passa-altas, (c) passa-faixa e (d) rejeita-faixa.....	93
Figura A.4 – Janelas para escolha de gráficos individuais ou comparações entre as aproximações: (a) comparação entre as aproximações e medidas de linearidade, (b) escolha da aproximação individual, (c) aproximação Causer e (d) aproximação Transicional.....	94
Figura A.5 – Janela de escolha do gráfico desejado e respectiva medida de linearidade de fase.....	94

LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1 – Medidas de linearidade de fase dos filtros CA, CI e TR passa-baixas para a invariância à rampa.....	65
Tabela 4.2 – Medidas de linearidade de fase dos filtros CA, CI e TR passa-baixas para a transformação bilinear.....	65
Tabela 4.3 – Medidas de linearidade de fase dos filtros CA, CI e TR passa-altas para a invariância à rampa.....	71
Tabela 4.4 – Medidas de linearidade de fase dos filtros CA, CI e TR passa-altas para a transformação bilinear.....	71
Tabela 4.5 – Medidas de linearidade de fase dos filtros CA, CI e TR passa-faixa para a invariância à rampa.....	77
Tabela 4.6 – Medidas de linearidade de fase dos filtros CA, CI e TR passa-faixa para a transformação bilinear.....	78
Tabela 4.7 – Medidas de linearidade de fase dos filtros CA, CI e TR rejeita-faixa para a invariância à rampa.....	86
Tabela 4.8 – Medidas de linearidade de fase dos filtros CA, CI e TR rejeita-faixa para a transformação bilinear.....	86

INTRODUÇÃO

Este trabalho apresenta uma metodologia de projeto de filtros transicionais digitais, baseados em aproximações não-polinomiais, com o intuito de obter um filtro digital que atenda a requisitos de magnitude, fase e tempo simultaneamente. Inicialmente, são discutidas as etapas de projeto de filtros digitais IIR, através de um método indireto e, posteriormente, considerações sobre as técnicas utilizadas são apresentadas.

Dentre as possíveis técnicas para projeto de filtros digitais, podem-se destacar aquelas baseadas em síntese de filtros analógicos associada a uma transformação $s \rightarrow z$. Dessa forma, aproveita-se o conhecimento ao longo dos anos sobre filtros analógicos levando parte desse conhecimento para o mundo digital através de uma transformação analógico \rightarrow digital.

As etapas do projeto de um filtro digital (síntese de filtros analógicos e transformação $s \rightarrow z$) são tratadas de maneira distinta.

1.1 SÍNTESE DE FILTROS ANALÓGICOS

Dado um conjunto de especificações, a síntese de um filtro analógico pode ser realizada através de um número ilimitado de funções que satisfazem aos requisitos de magnitude da resposta em frequência. Em muitos casos, uma solução analítica é possível com a utilização de funções de aproximação cujas características já foram exaustivamente estudadas, chamadas aproximações clássicas.

Em grande parte dos problemas, a síntese pode ser feita levando em conta apenas a magnitude da resposta em frequência sem que haja uma preocupação com as características de fase e temporais do sistema. No entanto, em muitas aplicações, esses últimos requisitos podem também ser considerados.

Atender a requisitos de magnitude, fase e tempo simultaneamente não é uma tarefa trivial para as funções de aproximação clássicas, pois quando se comparam as características de atenuação (CAA) com as características de fase (CAF) e/ou as

características de tempo (CAT) de funções de aproximação passa-baixas clássicas [por exemplo, Butterworth (BT), Chebyshev (CB), Cauer (CA)] de mesma ordem n e mesma atenuação A_p no limite da banda passante, constata-se que existe sempre um compromisso entre tais características. Quanto melhores são as CAA, ou seja, quanto menor a ordem necessária da aproximação para que os requisitos de magnitude sejam atendidos, piores são as CAF e/ou as CAT e *vice-versa* [1]-[2]. Melhores CAF estão relacionadas com a linearidade da fase do sistema e melhores CAT significam um menor *overshoot* e um menor tempo de atraso na resposta ao degrau.

Na maioria dos projetos, a síntese é feita considerando em primeira mão apenas a magnitude da resposta em frequência, sendo que a fase é considerada em uma etapa posterior ou deixada como um grau de liberdade. Quando isso ocorre, os projetos são realizados de modo que as características de atenuação sejam satisfeitas quase sempre de maneira superestimada, deixando uma certa “folga” em relação aos limites de projeto. Essa “folga” surge do arredondamento da ordem n do filtro, que geralmente é obtida através de uma expressão conhecida, para o número inteiro imediatamente superior ao valor mínimo requerido no projeto. Isso faz com que as características de fase e tempo sejam prejudicadas, pois essas se tornam inferiores àquelas obtidas quando as especificações de magnitude do projeto são atendidas com a menor seletividade possível. Assim, podem surgir situações conflitantes entre as características de atenuação, fase e/ou tempo, tornando o projeto inviável.

Para resolver tais dificuldades, três abordagens podem ser consideradas [3]:

1. Projeto do filtro através de um processo de otimização simultânea das características de magnitude e fase;
2. Projeto do filtro considerando duas estruturas de filtragem em cascata; a primeira obtida por uma aproximação clássica, atendendo às características de magnitude desejadas; e uma segunda, para equalizar a fase dentro das especificações de projeto requeridas; ou
3. Projeto de um filtro transicional (TR) a partir de duas aproximações: uma que atende, com uma certa folga, aos requisitos de magnitude mas não aos de fase, e outra que atende, com uma certa folga, aos requisitos de fase mas não aos de magnitude, de modo que suas características sejam mescladas em um único filtro.

Destas três abordagens, a primeira normalmente requer um custo computacional relativamente elevado. Além disso, na maioria das vezes o sistema a ser otimizado é não-linear. Então, se o processo convergir, poderá levar a mínimos locais e em muitos casos torna-se difícil discernir se o mínimo obtido é o resultado desejado. A segunda abordagem tem a desvantagem de se usar dois blocos em cascata com conseqüente aumento do atraso e ordem do sistema. A terceira opção é capaz de aliar as características de dois filtros que atenderiam, individualmente, a apenas uma das características desejadas. Isso é feito sem qualquer aumento de ordem do sistema, mesclando as características dos filtros através de um fator interpolador, obtido através de um simples algoritmo *ad hoc*.

Assim, o intuito de realizar um sistema de filtragem utilizando filtros TR se deve ao fato de essa família de filtros poder representar a única solução possível para um caso particular de especificações simultâneas de características de atenuação, fase e resposta temporal. É importante ressaltar que será necessário utilizar uma das abordagens alternativas citadas anteriormente se eventualmente o filtro TR não for capaz de atender às especificações de um determinado projeto.

Na literatura é possível encontrar vários trabalhos de pesquisa versando sobre filtros transicionais obtidos através de aproximações clássicas [3]-[14], em grande maioria polinomiais. Isso se deve ao fato de que, no caso de filtros analógicos contínuos, as funções polinomiais são mais fáceis de implementar do que aquelas cujas transferências apresentam zeros finitos sobre o eixo imaginário [1] e por isso costumam ser a primeira opção para esse tipo de projeto. No entanto, essa maior dificuldade de implementação não se aplica a sistemas cuja função de transferência é dada no domínio z , como é o caso de filtros digitais e também analógicos amostrados.

Assim, dependendo dos requisitos de seletividade, é conveniente o uso de filtros TR não-polinomiais, pois esses geralmente levam a uma redução de ordem do filtro final. No intuito de projetar um filtro digital que atenda a um dado conjunto de especificações de atenuação, fase e tempo com a menor ordem possível, foram selecionadas as aproximações não-polinomiais Cauer e Chebyshev Inverso (CI). A escolha da função Cauer se deve a essa apresentar a menor ordem (para um mesmo requisito de magnitude) dentre todas as possíveis funções de aproximação conhecidas. A escolha da função Chebyshev Inverso é devida à sua melhor característica de fase com respeito à função Cauer e ser também de natureza não-polinomial.

A partir dessas considerações, este trabalho descreve uma metodologia de projeto de filtros transicionais a partir das aproximações não-polinomiais Caue e Chebyshev Inverso, com o objetivo de obter o melhor desempenho de magnitude, fase e tempo visando uma específica aplicação. Para implementar os filtros desejados são utilizadas técnicas de síntese de filtros digitais IIR indiretas, baseadas em aproximações de filtros analógicos.

Assim, projetado o filtro transicional analógico, baseado em aproximações cujas funções podem ser obtidas através de equacionamentos fechados, resta obter a função de transferência do filtro digital através de uma transformação $s \rightarrow z$.

1.2 TRANSFORMAÇÃO $s \rightarrow z$

Da literatura [15], sabe-se que nem sempre as transformações $s \rightarrow z$ funcionam adequadamente. Por exemplo, pode-se citar a aplicação das transformações da invariância ao impulso e da invariância ao degrau para projeto de filtros passa-altas e rejeita-faixa.

Seis técnicas de transformação $s \rightarrow z$ para projeto de filtros digitais são consideradas. Visando o melhor desempenho de cada uma delas para a obtenção da função de transferência do filtro digital, são utilizados recursos, como por exemplo, pré-distorção e transformação espectral.

A aplicação da transformação $s \rightarrow z$ para a obtenção da função de transferência do filtro digital pode ser realizada de duas formas. Em uma delas o filtro digital desejado é obtido através de uma transformação direta a partir do seu correspondente no domínio s , seja ele passa-baixas, passa-altas, passa-faixa ou rejeita-faixa. Porém, dessa maneira, o projeto de filtros passa-altas e rejeita-faixa, utilizando-se algumas das técnicas existentes de transformação $s \rightarrow z$, pode se tornar inviável. Outra forma de se obter a função de transferência no domínio z é: sabendo-se que a transformação $s \rightarrow z$ funciona muito bem para filtros passa-baixas [16], pode-se projetar um filtro passa-baixas, utilizar uma transformação $s \rightarrow z$ para obter um filtro digital protótipo e, através de uma transformação espectral [17], obter o filtro desejado.

No entanto, no decorrer deste trabalho, foi verificado que a técnica de transformação espectral proposta em [17] pode apresentar algumas limitações em sua aplicação devido à não linearidade dos parâmetros envolvidos no seu equacionamento. Isto ocorre devido à limitada precisão numérica das ferramentas computacionais utilizadas para

projeto, neste caso o *software* Matlab. Tais limitações serão detalhadas no Capítulo 4 e algumas sugestões para melhorar sua aplicabilidade serão propostas. Além disso, como uma ferramenta de auxílio na implementação de filtros analógicos e digitais, um *software* em ambiente Matlab foi desenvolvido. Esse *software*, que será descrito no Apêndice A, tem como objetivo ajudar na avaliação do desempenho dos filtros projetados através de medidas de linearidade de fase [2], fornecer diversas saídas gráficas para auxiliar na avaliação do desempenho dos filtros projetados e também avaliar as limitações da transformação espectral. Isso auxiliará na escolha do melhor sistema de filtragem para cada problema.

1.3 OBJETIVO DA DISSERTAÇÃO

Este trabalho tem como objetivo principal o desenvolvimento de uma metodologia de projeto de filtros digitais transicionais utilizando as aproximações não-polinomiais Cauer e Chebyshev Inverso. Dessa forma, foram estabelecidos ainda os seguintes objetivos específicos:

1. Fazer um estudo teórico de filtros não-polinomiais analógicos analisando suas vantagens e desvantagens em relação às aproximações polinomiais clássicas.
2. Fazer considerações sobre as técnicas de síntese de filtros digitais IIR de modo a projetar um filtro digital através de métodos indiretos que atenda a um gabarito específico e possua as melhores características de fase e tempo possíveis.
3. Desenvolver um *software* em Matlab capaz de projetar filtros analógicos e digitais Cauer, Chebyshev Inverso e transicional. Esse software além de possibilitar o projeto de tais filtros, também permitirá a avaliação de seus desempenhos, viabilizando algumas medidas de linearidade de fase.

1.4 ORGANIZAÇÃO DO MANUSCRITO

O Capítulo 2 descreve os métodos utilizados no projeto de filtros digitais transicionais não-polinômias e avaliação de seus desempenhos. O Capítulo 3 apresenta as limitações encontradas na aplicação da técnica de transformação espectral e sugere algumas técnicas capazes de reduzir a influência dessas limitações nas respostas dos filtros. O Capítulo 4 apresenta alguns exemplos de filtros transicionais não-polinômias CA-CI projetados a partir dos métodos descritos e os resultados da avaliação de desempenho desses filtros. Finalmente no Capítulo 5 são apresentados os comentários e as conclusões finais deste trabalho de dissertação.

DESCRIÇÃO DOS MÉTODOS

2.1 INTRODUÇÃO

Os métodos descritos neste capítulo são utilizados para realizar a implementação e a avaliação do desempenho dos filtros propostos em relação a um determinado conjunto de especificações.

Dado um gabarito para o projeto de um filtro, com as desejadas especificações de atenuação, fase e tempo, é necessário, inicialmente, encontrar o filtro Cauer que atenda aos requisitos de magnitude com a menor ordem possível e, em seguida, o filtro Chebyshev Inverso com a mesma ordem do filtro Cauer que atenda aos requisitos de fase mas não os de magnitude. Caso um desses filtros já atenda a todas as especificações de projeto, não se faz necessário o projeto de um filtro transicional.

Projetados tais filtros, através dos algoritmos descritos nos Apêndices B e C, respectivamente, o procedimento descrito a seguir é utilizado:

- Projetar o filtro transicional a partir das singularidades (pólos e zeros) dos filtros CA e CI, utilizando um algoritmo similar ao proposto em [18], o qual permite escolher o fator interpolador m adequado para que esse filtro atenda aos requisitos de magnitude da maneira menos seletiva possível;
- Encontrar o equivalente digital do filtro utilizando uma das técnicas de transformação $s \rightarrow z$: invariância ao impulso, invariância ao degrau, invariância à rampa, transformação z-casada, transformação de Euler e transformação bilinear, sempre buscando explorar suas melhores características;
- Utilizar a técnica de transformação espectral para filtros digitais a fim de otimizar o desempenho dos filtros projetados;
- Avaliar o desempenho das características de fase e tempo dos filtros projetados através do uso de algumas medidas de linearidade de fase aqui consideradas.

Na próxima seção, serão apresentadas as características de um sistema de fase linear e as medidas de linearidade de fase utilizadas para avaliar as especificações de fase e

tempo dos filtros projetados. Em seguida será descrito o método utilizado para projetar o filtro transicional, juntamente com o algoritmo empregado para determinar o fator interpolador m adequado; finalmente, serão descritos os métodos utilizados para projetar filtros digitais IIR a partir de seu equivalente analógico, incluindo as técnicas de transformação $s \rightarrow z$ e o método de transformação espectral.

2.2 FASE E MEDIDAS DE LINEARIDADE

Nos sistemas físicos, a fase geralmente é uma função não-linear da frequência, que pode introduzir distorções nos sinais processados [15], [19]-[21]. O comportamento da fase pode ser determinante, por exemplo, em processamento de imagens.

Desta forma, surge a necessidade de definir maneiras para avaliar se as especificações dos projetos estão sendo atendidas. No caso da magnitude, é simples observar através da resposta em frequência do sistema se os requisitos de atenuação estão cumprindo as especificações de projeto. Já no caso da fase, não é possível dizer se ela atende ou não às especificações de um projeto apenas observando a resposta do sistema. É necessário então definir qual o comportamento desejado da fase e estipular medidas para que se possa avaliar seu desempenho neste quesito.

Espera-se de um sistema de filtragem que nenhuma distorção seja inserida por ele no sinal que se almeja processar, a menos com respeito à atenuação nas frequências desejadas. Para que isso ocorra, é preciso que a fase seja estritamente linear.

Sabe-se que, idealmente, uma fase estritamente linear pode ser obtida pela seguinte função:

$$\phi(\omega) = -\omega T_0, \quad (2.1)$$

onde ω representa a frequência em rad/s e T_0 é uma constante de tempo.

Esta função apresenta as seguintes características:

- i) O atraso de fase é dado por $\tau_p(\omega) = -\phi(\omega)/\omega = \tau_{pmed} = T_0$, onde τ_{pmed} é o atraso de fase médio do sistema;
- ii) O atraso de grupo é dado por $\tau_g(\omega) = -d\phi(\omega)/d\omega = \tau_{gmed} = T_0$, onde τ_{gmed} é o atraso de grupo médio do sistema;
- iii) Para uma entrada $x(t)$, a saída é $y(t) = Kx(t - T_0)$, onde K é um ganho constante.

iv) A resposta ao impulso de um filtro passa-baixas é perfeitamente simétrica e seu valor de pico ocorre em T_0 (ver Figura 2.1).

Nota-se que para um sistema com fase linear tem-se $\tau_{pmed} = \tau_{gmed} = T_0$. No entanto, para sistemas físicos não equalizados, os valores desses parâmetros diferem entre si. Na medida em que uma equalização de fase é efetuada, tem-se a fase mais linear e os valores desses parâmetros tornam-se mais próximos.

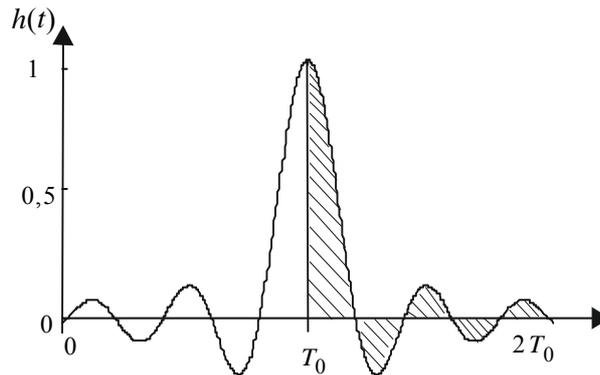


Figura 2.1 – Resposta ao impulso de um filtro passa-baixas com fase linear.

Considerando tais características, definem-se algumas medidas de linearidade da fase [2]:

i. Variação do atraso de fase $\Delta\tau_p(\omega)$ [ou de grupo $\Delta\tau_g(\omega)$] na banda de interesse, dada por

$$\Delta\tau_p(\omega) = \tau_{pmax} - \tau_{pmin}, \quad (2.2)$$

onde τ_{pmax} e τ_{pmin} são os atrasos de fase máximo e mínimo, respectivamente.

ii. Erro do atraso de fase ε_{τ_p} (ou de grupo ε_{τ_g}) definido por

$$\varepsilon_{\tau_p} = \sum_{l=0}^{L-1} [\tau_p(\omega_i + \Delta\omega l) - \tau_{pmed}]^2 \Delta\omega, \quad (2.3)$$

onde $\Delta\omega = (\omega_f - \omega_i)/(L-1)$ é o passo de amostragem; ω_i e ω_f são as frequências inicial e final da banda de interesse, respectivamente; L denota o número de amostras igualmente espaçadas no domínio da frequência; e τ_{pmed} é o atraso de fase médio na banda de interesse, dado por

$$\tau_{pmed} = \frac{1}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \tau_p(\omega_i + \Delta\omega l), \quad (2.4)$$

iii. Erro de simetria da resposta ao impulso ε_h [22].

Para um sistema com características passa-baixas de fase linear, a seguinte relação deve ser satisfeita (ver Figura 2.1):

$$\int_0^{T_0} h(t)dt - \int_{T_0}^{2T_0} h(t)dt = 0 \quad (2.5)$$

onde $h(t)$ é a função de transferência no domínio do tempo do sistema passa-baixas.

No caso de resposta ao impulso real, pode-se usar uma função que expresse aproximadamente a diferença entre as áreas antes e depois do referencial de tempo T_0 para o qual ocorre o pico da resposta ao impulso. Para um processo de medida em tempo discreto, a expressão que mede a energia do erro de simetria é dada por

$$\varepsilon_h = \sum_{i=0}^{L-1} [h(T_0 + i) - h(T_0 - i)]^2 \Delta t, \quad (2.6)$$

onde L denota o número de amostras igualmente espaçadas; $\Delta t = (t_f - t_i)/(L-1)$ é o passo de amostragem; t_i é o tempo inicial do intervalo (normalmente igual a zero) e t_f é tempo final, adotado aqui $t_f = 10T_0$.

Para estas medidas, não existe uma relação biunívoca entre o valor de erro e a função que originou tal erro. Assim, os valores dos erros medidos se tornam mais confiáveis à medida que a equalização de fase melhora.

Outra medida utilizada para avaliar o desempenho dos filtros propostos neste trabalho é o *overshoot* da resposta ao degrau [19], definida pela diferença entre o valor de pico e o valor final da resposta ao degrau, sendo expresso como um percentual [23]. No caso de filtros passa-altas, devido às características desse tipo de filtro, a referida medida é substituída pelo *undershoot* da resposta ao degrau, definida pela diferença entre o valor final e o mínimo valor da resposta ao degrau, sendo também expresso como um percentual.

2.3 FILTROS TRANSICIONAIS

Neste trabalho, é proposto um procedimento de projeto para filtros TR não-polinomiais considerando as aproximações Cauer-Chebyshev Inverso (CA-CI). Tais funções atendem a um conjunto de requisitos de seletividade e fase com uma ordem menor, quando comparada com aquelas obtidas usando aproximações polinomiais.

Comparando-se funções CA e CI de mesma ordem tem-se que a aproximação CA apresenta as melhores CAA em detrimento de suas CAF e que a aproximação CI apresenta

o inverso. O filtro TR proposto é gerado a partir do filtro CA (mais seletivo) com singularidades \bar{s}_{lA} , e do filtro CI (menos seletivo) com singularidades \bar{s}_{lB} , porém, atendendo aos requisitos de fase. Entretanto, nada garante que um filtro transicional satisfaça todos os requisitos preestabelecidos. Suas características também dependem da trajetória que as singularidades seguem, conforme descrito em [24].

Em uma primeira etapa do projeto, os pólos e zeros s'_{lT} de um filtro TR intermediário são obtidos utilizando uma das trajetórias representadas por (2.7) ou (2.8) [24], que caracterizam as interpolações exponencial e linear, respectivamente.

$$s'_{lT} = (\bar{s}_{lA})^{1-m} (\bar{s}_{lB})^m, \quad 0 \leq m \leq 1 \quad (2.7)$$

$$s'_{lT} = (1-m)\bar{s}_{lA} + m(\bar{s}_{lB}), \quad 0 \leq m \leq 1 \quad (2.8)$$

onde $l = 1, \dots, n$ para pólos e zeros em funções de ordem par; no caso de ordem ímpar $l = 1, \dots, n$ para pólos e $l = 1, \dots, (n-1)$ para zeros (nesse caso tem-se um zero no infinito).

Em uma segunda etapa, as singularidades \bar{s}_{lT} do filtro TR final são obtidas após um escalamento de frequência, conforme discutido na Seção 2.3.1. O processo de determinação do filtro TR consiste em encontrar um valor para o fator interpolador m tal que o filtro atenda simultaneamente aos requisitos de atenuação e de fase especificados.

Em (2.7) ou (2.8) observa-se que:

- se $m = 0 \Rightarrow$ filtro TR \equiv filtro CA;
- se $m = 1 \Rightarrow$ filtro TR \equiv filtro CI; e
- se $0 < m < 1 \Rightarrow$ filtro TR apresenta características intermediárias entre os

filtros CA e CI. São possíveis infinitos valores de m no intervalo $[0,1]$.

Como discutido em [24], não se pode dizer *a priori* se existe vantagem de um tipo de interpolação sobre o outro. As diferentes interpolações geram diferentes trajetórias para as singularidades e, dependendo do caso, uma delas pode apresentar uma melhor solução.

Como exemplo [2], a Figura 2.2 apresenta a magnitude da resposta em frequência de um filtro TR com $m = 0,5$ e a magnitude dos filtros geradores CA e CI, cujas especificações de projeto são ordem $n = 3$, atenuação na banda passante $A_p = 1$ dB e atenuação na banda de rejeição $A_s = 50$ dB. A Figura 2.3 mostra os correspondentes atrasos de fase obtidos para este caso.

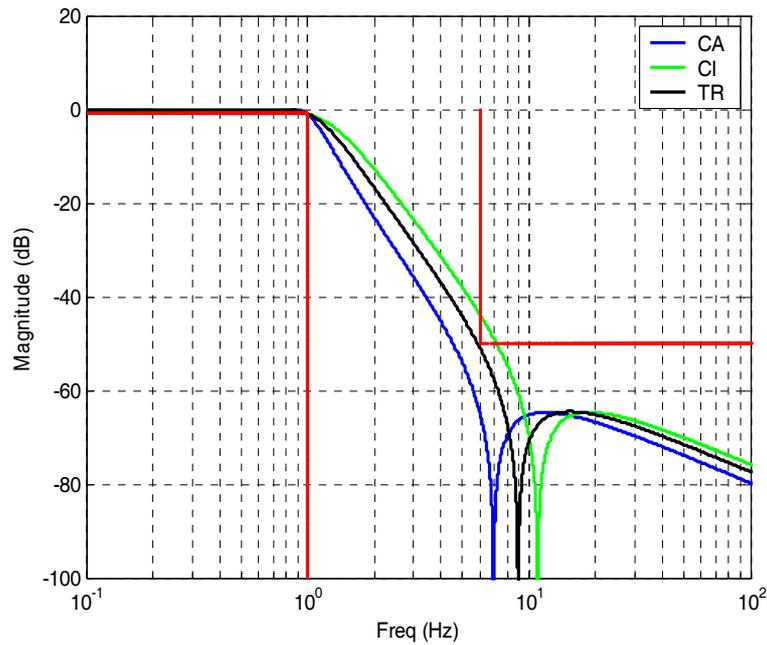


Figura 2.2 – Magnitude da resposta em frequência dos filtros CA, CI e TR para $m = 0,5$.

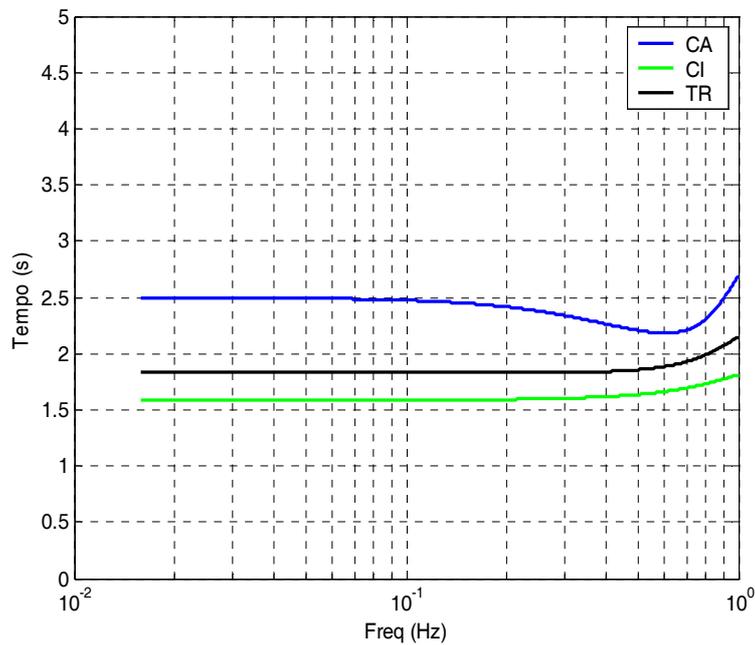


Figura 2.3 – Atraso de fase dos filtros CA, CI e TR para $m = 0,5$.

Em razão de ser adotado um número inteiro para a ordem n (arredondado-se o valor encontrado através do equacionamento do filtro CA para o número inteiro imediatamente superior), ocorrerá uma certa “folga” no gabarito na banda de rejeição (ver Figura 2.2), tal que a atenuação no limite da banda de rejeição seja $A(f_s) > A_s$. O filtro CI será projetado

para o valor $A(f_s)$ (ver Apêndices B e C) e não para A_s . Porém, não existe garantia que $A(f_s)$ do filtro TR projetado seja igual ao dos filtros geradores. A Figura 2.4 mostra a diferença entre os filtros obtidos.

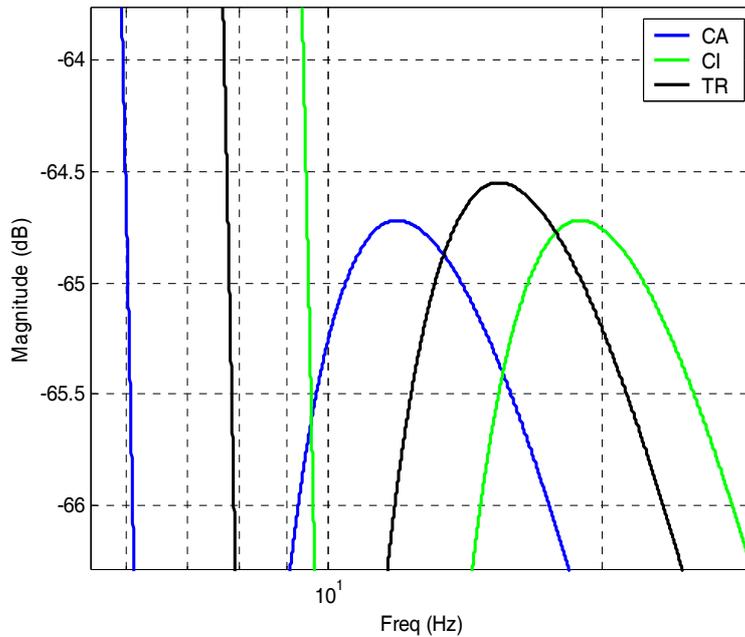


Figura 2.4 – Diferença entre $A(f_s)$ dos filtros geradores CA e CI e do filtro transicional.

Além do mais, deve ser considerado que, em um projeto prático, as especificações devem sempre acomodar uma certa “folga” para prever as não idealidades inerentes à etapa de realização. Mesmo assim, caso o desvio encontrado não seja tolerável, pode-se pré-distorcer a atenuação na banda de rejeição do filtro CI e refazer o projeto. O quanto deve ser tal pré-distorção depende do caso em questão [2].

2.3.1 Ajuste da Magnitude na Banda Passante e Normalização

Os filtros CA e CI devem apresentar uma desejada atenuação A_p no limite da banda passante. Entretanto, considerando um valor qualquer de m inicialmente, não se pode afirmar o mesmo para a função intermediária do filtro TR (com singularidades s'_{IT})

após um ajuste de ganho. Para um valor de m inicial, a função de transferência intermediária do filtro TR $H(s')$ é

$$H(s') = \frac{K \prod_{l=1}^b (s' - s'_{ITz})}{\prod_{l=1}^b (s' - s'_{ITp})} \quad \begin{cases} b = n & n \text{ par} \\ b = n - 1 & n \text{ ímpar} \end{cases} \quad (2.9)$$

onde s'_{ITz} e s'_{ITp} são os zeros finitos imaginários e os pólos finitos, respectivamente; K é uma constante calculada de modo que o valor máximo do $|H(\omega')|_{dB}$ na banda passante seja igual a zero dB.

Após o ajuste de ganho, determina-se numericamente a frequência de normalização ω_N , onde ocorre a atenuação A_p . Após, faz-se uma mudança de variável, substituindo s' por $s' = \omega_N \bar{s}$ na função $H(s')$ (2.10). Assim, no limite da banda passante normalizada $\bar{\omega}_p = 1$, será obtida a desejada atenuação A_p (Figura 2.5) [1]. A nova função $|H(\bar{\omega})|_{dB}$ terá então a atenuação desejada A_p no limite da banda passante normalizada. Portanto,

$$H(\bar{s}) = H(s') \Big|_{s' = \omega_N \bar{s}} \quad (2.10)$$

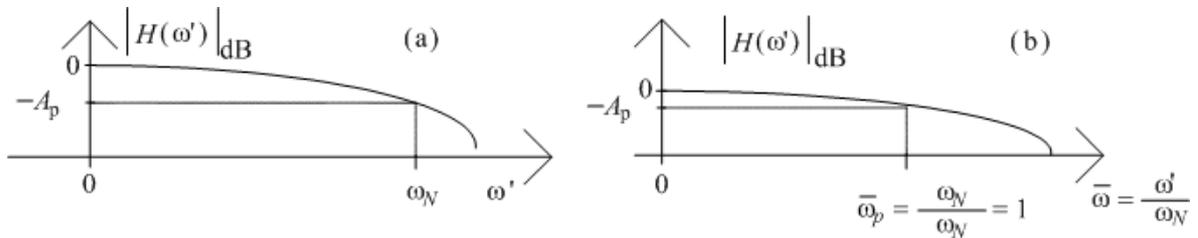


Figura 2.5 - (a) Função antes do escalamento. (b) Função após o escalamento.

2.3.2 Ajuste da Magnitude na Banda de Rejeição

Para que o filtro TR tenha a melhor característica de fase possível, a magnitude na banda de rejeição é ajustada, tornando-o o menos seletivo possível, ou seja, atendendo com a mínima folga aos requisitos de magnitude, porém ainda atendendo ao gabarito desejado. Isso nos leva a buscar

$$H(\bar{\omega}_s) \Big|_{dB} = A_s \quad (2.11)$$

Para um dado n , um dado A_p e um dado par de filtros CA e CI, existirá um único valor de m que satisfaz (2.11).

2.3.3 Algoritmo de Projeto do Filtro Transicional Não-Polinomial Passa-Baixas Analógico

O seguinte algoritmo é similar ao proposto em [18]. Ele apenas incorpora uma adaptação para o caso em questão, possibilitando a obtenção de um valor de m ótimo que ajuste a magnitude na banda de rejeição:

- i) Determina-se a mínima ordem necessária e calculam-se todas as singularidades dos filtros CA e CI, conforme descrito nos Apêndices B e C. Os pólos complexos são classificados segundo seus fatores de qualidade; e os zeros, segundo suas magnitudes. São então “pareados” pólos com pólos e zeros com zeros, considerando um de cada função geradora, seguindo a correspondente classificação.
- ii) Forçam-se os valores iniciais $m_{\text{antigo}} = 0$, $m_{\text{novo}} = 0,5$ e $m_{\text{atual}} = 0,5$.
- iii) Toma-se m_{atual} como o valor de m em (2.7) ou (2.8). Em seguida, realiza-se o devido ajuste de magnitude na banda passante de $|H(\omega')|_{\text{dB}}$, determina-se ω_N e, posteriormente, $H(\bar{s})$ [ver (2.10)].
- iv) Verifica-se o valor da magnitude no limite da banda de rejeição $|H(\bar{\omega})|_{\text{dB}}$.
- v) Se $|H(\bar{\omega}_s)|_{\text{dB}} < A_s$ vá para o passo (vi). Se $|H(\bar{\omega}_s)|_{\text{dB}} > A_s$ vá para o passo (vii).
- vi) Toma-se $m_{\text{novo}} + |(m_{\text{novo}} - m_{\text{antigo}})/2|$ como o novo valor para m_{atual} . Em seqüência, faz-se $m_{\text{antigo}} = m_{\text{novo}}$ e $m_{\text{novo}} = m_{\text{atual}}$, retornando-se aos passos (iii), (iv) e (v).
- vii) Toma-se $m_{\text{novo}} - |(m_{\text{novo}} - m_{\text{antigo}})/2|$ como o novo valor para m_{atual} . Em seguida, faz-se $m_{\text{antigo}} = m_{\text{novo}}$ e $m_{\text{novo}} = m_{\text{atual}}$, retornando-se aos passos (iii), (iv) e (v).

O processo continua até que $|H(\bar{\omega}_s)|_{\text{dB}}$ apresente um valor praticamente igual a A_s .

2.4 PROJETO DE FILTROS DIGITAIS IIR UTILIZANDO UM MÉTODO INDIRETO

Dentre as possíveis técnicas para projeto de filtros digitais, pode-se citar o projeto de filtros IIR, a partir de filtros analógicos, como um dos métodos mais simples e eficazes existentes. Isso se deve ao fato de que as técnicas de aproximação de filtros analógicos são altamente dominadas e grande parte das aproximações possui soluções disponíveis a partir de equacionamentos conhecidos.

A transformação do domínio analógico para o digital pode ser realizada de diversas maneiras, sendo que cada uma delas possui características específicas que podem impor limitações a alguns tipos de projetos. Como exemplos de tais limitações, pode-se citar o problema de sobreposição de espectro na aplicação das transformações de invariância ao impulso e invariância ao degrau no projeto de filtros passa-altas e rejeita-faixa ou a restrição na região de trabalho no plano- z na transformação de Euler.

Geralmente, busca-se que as propriedades essenciais da resposta em frequência do filtro analógico sejam preservadas na resposta em frequência do filtro digital resultante, utilizando-se as transformações $s \rightarrow z$. Para isso, é necessário que haja uma equivalência entre o lugar geométrico dos planos s e z . O eixo imaginário do plano- s deve ser mapeado na circunferência unitária do plano- z . Além disso, um filtro contínuo estável deve ser transformado em um filtro discreto estável. Isso significa que um sistema contínuo com todos os pólos no semiplano lateral esquerdo deverá gerar um sistema discreto com todos os pólos dentro da circunferência unitária. Esses requisitos são essenciais para todas as técnicas aqui discutidas.

2.4.1 Método da Invariância ao Impulso

Sabe-se que um filtro pode ser bem caracterizado tanto por sua resposta ao impulso quanto por sua resposta em frequência. Assim, o intuito de utilizar o método de invariância ao impulso no projeto de filtros digitais é obter, através da amostragem da resposta ao impulso do sistema contínuo, um sistema discreto cuja resposta ao impulso preserve as características da resposta ao impulso do sistema analógico para o digital.

Seja um filtro contínuo com função de transferência $H_a(s)$ e resposta ao impulso $h_a(t)$. A resposta ao impulso do sistema discreto é dada por

$$h_a(t) \xrightarrow{\delta_{\Delta t}(t)} h_a(l\Delta t) \quad (2.12)$$

onde $\delta_{\Delta t}(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(t - l\Delta t)$ é um trem de impulsos no tempo. A função de transferência do filtro digital será

$$H(z) = \mathcal{Z}[h_a(l\Delta t)] \quad (2.13)$$

onde o operador \mathcal{Z} representa a transformada z da função, e a resposta em frequência do filtro digital é dada por $H(f) = H(z) \Big|_{z=e^{j2\pi f\Delta t}}$.

Uma desvantagem deste método é que, caso o filtro analógico não possua banda limitada, o que geralmente ocorre, pode haver sobreposição de espectro no filtro digital. Dessa forma, a resposta no tempo é mantida, porém não necessariamente a resposta em frequência.

Devido ao problema de recobrimento de espectros, é natural pensar em utilizar este tipo de aproximação para funções do tipo passa-baixas e passa-faixa. Em algumas situações, pode-se desejar aproximar pela invariância ao impulso filtros digitais passa-altas, rejeita-faixa ou passa-tudo. Nessas situações, uma possível solução é utilizar a técnica de transformação espectral, na qual qualquer tipo de filtro pode ser realizado a partir de um passa-baixas protótipo.

2.4.2 Método da Invariância ao Degrau Unitário

Assim como no método da invariância ao impulso, no método da invariância ao degrau unitário deseja-se obter um sistema discreto que preserve uma determinada característica do filtro contínuo, neste caso, a resposta ao degrau. Isso é obtido amostrando a resposta ao degrau do filtro contínuo, buscando preservar características do sistema analógico como o tempo de subida e o *overshoot*.

Seja um filtro contínuo com função de transferência $H_a(s)$. Dado um degrau unitário $u_a(t)$ como entrada, a saída do sistema é

$$g_a(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{H_a(s)}{s} \right] \quad (2.14)$$

onde o operador $\mathcal{L} [.]$ caracteriza a transformada de Laplace da função.

Assim,

$$g_a(l\Delta t) = \delta_{\Delta t}(t) \cdot g_a(t) \quad (2.15)$$

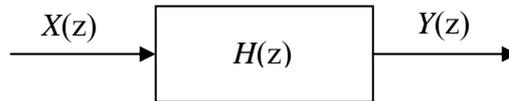
e

$$G(z) = \mathcal{Z} [g_a(k\Delta t)]. \quad (2.16)$$

A transformada- z do degrau unitário é dada por

$$\mathcal{Z}[u(l)] = \frac{z}{z-1} = \frac{1}{1-z^{-1}}, \quad (2.17)$$

logo, dado o sistema com entrada $X(z)$ e saída $Y(z)$



tem-se que:

$$X(z) = \frac{z}{z-1} \quad \rightarrow \quad Y(z) = H(z) \frac{z}{z-1} \quad (2.18)$$

conseqüentemente,

$$Y(z) = G(z) = H(z) \frac{z}{z-1} \quad (2.19)$$

e

$$H(z) = \left(\frac{z}{z-1} \right)^{-1} G(z) \quad (2.20)$$

A vantagem deste método em relação ao anterior é que o recobrimento de espectro é menos significativa, pois $H_a(s)/s$ decai mais rapidamente do que $H_a(s)$.

2.4.3 Método da Invariância à Rampa

A principal vantagem de utilizar o método da invariância à rampa é diminuir ainda mais a influência de uma banda não limitada na sobreposição de espectro.

Seja um filtro com função de transferência $H_a(s)$. A saída de um sistema que possui como entrada a rampa $r_a(t)$ é dada por

$$q_a(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{H_a(s)}{s^2} \right], \quad (2.21)$$

a qual decai mais rapidamente do que $H_a(s)$ e $H_a(s)/s$.

Da equação anterior, pode-se obter a função de transferência do filtro digital.

Assim, seja $r_a(t) = \mathcal{L}^{-1} [tu(t)] = \frac{1}{s^2}$,

$$q_a(l\Delta t) = \delta_{\Delta t}(t) \cdot q_a(t) \quad (2.22)$$

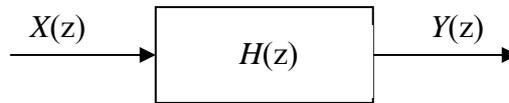
e

$$Q(z) = \mathcal{Z} [q_a(k\Delta t)]. \quad (2.23)$$

A transformada z da rampa é dada por

$$\mathcal{Z}[lu(l)] = \frac{z}{(z-1)^2} = \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}, \quad (2.24)$$

logo, dado o sistema



tem-se que

$$X(z) = \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} \rightarrow Y(z) = H(z) \cdot \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} = Q(z) \quad (2.25)$$

e

$$H(z) = \frac{(1-z^{-1})^2}{z^{-1}} Q(z). \quad (2.26)$$

2.4.4 Método da Transformação Z-Casada

Diferente dos métodos anteriores, esta técnica consiste no mapeamento direto dos pólos e zeros do plano- s para os pólos e zeros do plano- z .

Dado um pólo ou zero no plano- s , ele é transformado da seguinte maneira

$$\begin{aligned} s = -a & \longrightarrow z = e^{-a\Delta t} \\ (s + a) & \longrightarrow (1 - qz^{-1}) \Big|_{q=e^{-a\Delta t}} \end{aligned}$$

onde a é uma singularidade do sistema.

Nota-se que os pólos do filtro digital, obtidos através desta técnica, são idênticos aos pólos obtidos através do método de invariância ao impulso para o mesmo filtro analógico; os zeros, contudo, são diferentes.

É necessário que a função de transferência analógica $H(s)$ esteja na forma fatorada para que a transformação z -casada possa ser aplicada, pois cada pólo é transformado individualmente.

Embora a transformação z -casada seja fácil de aplicar, existem muitos casos em que ela não conduz a um adequado mapeamento. Por exemplo, se o filtro analógico tem zeros com frequência central maior do que $\frac{1}{2\Delta t} = \frac{F_s}{2}$, onde F_s representa a frequência de amostragem, suas localizações no plano- z serão bastante degradadas com relação às localizações do filtro analógico, resultando em um efeito semelhante ao recobrimento de espectros, como ilustrado na Figura 2.4, alterando significativamente a resposta em frequência do filtro digital [25].

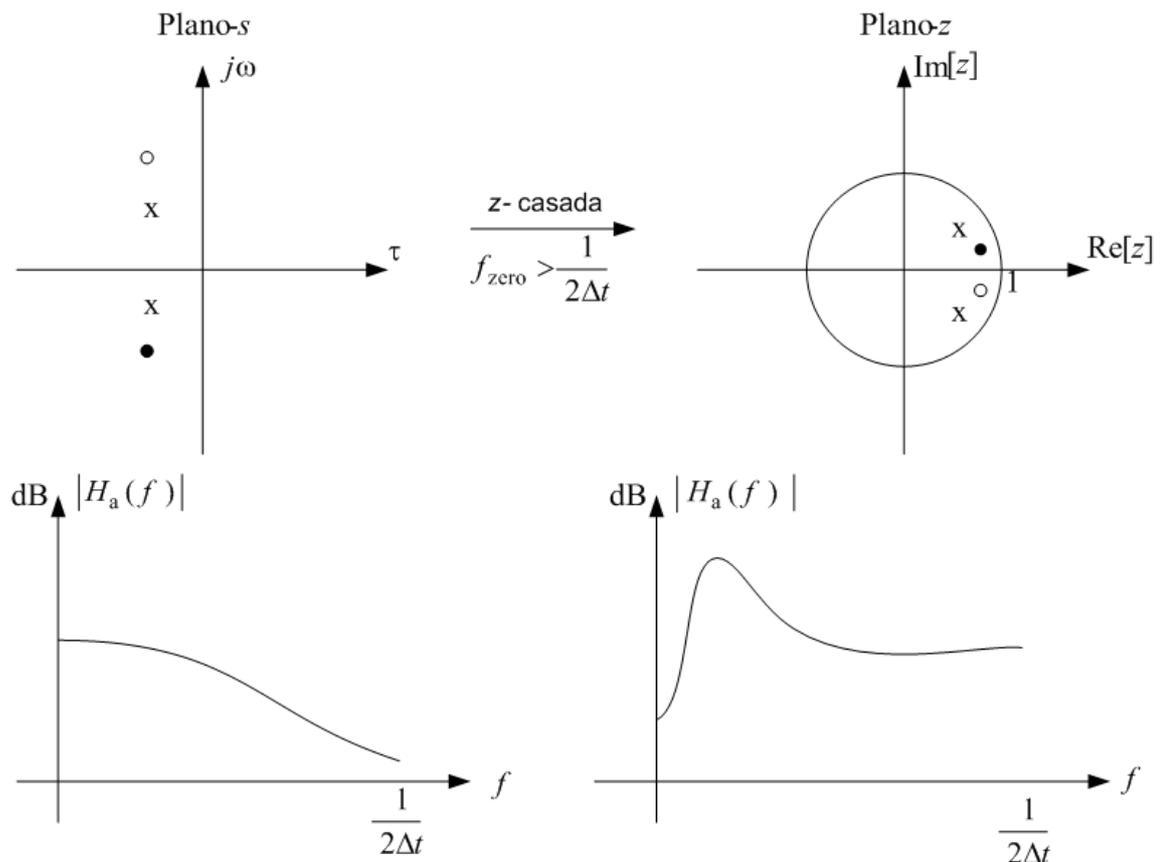


Figura 2.6 - Efeito do mapeamento de zeros com frequência central maior do que $F_s/2$ utilizando transformação z-casada.

Um outro caso em que a transformação z-casada pode não ser adequada é aquele em que a função de transferência do filtro analógico tem unicamente pólos, o que não ocorre com os filtros não-polinomiais utilizados neste trabalho. Em muitos casos, esta transformação não representa adequadamente o sistema analógico desejado, evidenciando os mesmos problemas do método de invariância ao impulso.

2.4.5 Método da Transformação de Euler

Este método, também conhecido como equivalência da derivada, tem como vantagem ser biunívoco, ou seja, a mesma transformação capaz de mapear uma função de s em z também pode fazer o inverso: mapear uma função de z em s . Além disso, não é mais necessário que a função esteja fatorada para que este mapeamento possa ser aplicado, pois

a transformação é considerada diretamente nas variáveis s e z , e não nas singularidades da função de transferência.

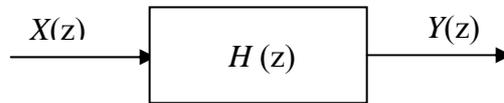
O equacionamento da transformação de Euler através da equivalência da derivada pode ser feito de duas maneiras: *forward* e *backward*. Estamos considerando aqui apenas a maneira *backward*.

Dada inicialmente a seguinte relação:

$$y_a(t) = \frac{d x_a(t)}{dt} \longleftrightarrow y(l) = \frac{x(l) - x(l-1)}{\Delta t} \quad (2.27)$$

onde $y_a(t)$ é a saída analógica de um sistema e $x_a(t)$ sua entrada.

Para $x(l) = x_a(l\Delta t)$ e dado o sistema



sua saída é dada por

$$y(l) = \frac{x(l) - x(l-1)}{\Delta t} \quad (2.28)$$

tal que

$$Y(z) = \mathcal{Z} [y(l)], \quad (2.29)$$

$$Y(z) = X(z) \frac{(1 - z^{-1})}{\Delta t} \quad (2.30)$$

e

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 - z^{-1}}{\Delta t}. \quad (2.31)$$

Assim, a transformação é definida por

$$\begin{aligned} s &\rightarrow z & s &\rightarrow \frac{1 - z^{-1}}{\Delta t} \\ z &\rightarrow s & z &\rightarrow \frac{1}{1 - s\Delta t} \end{aligned}$$

O problema desta técnica é encontrar o lugar geométrico em z quando s descreve o eixo imaginário. Através do equacionamento mostrado em [25], tem-se que o eixo imaginário do plano- s é mapeado em uma circunferência de raio igual a $\frac{1}{2}$ centrada em $z = \frac{1}{2}$. Isso faz com que os zeros do filtro analógico, posicionados sobre o eixo imaginário,

sejam mapeados dentro da circunferência unitária, com suas posições dependendo da frequência de amostragem, como mostrado na Figura 2.7.

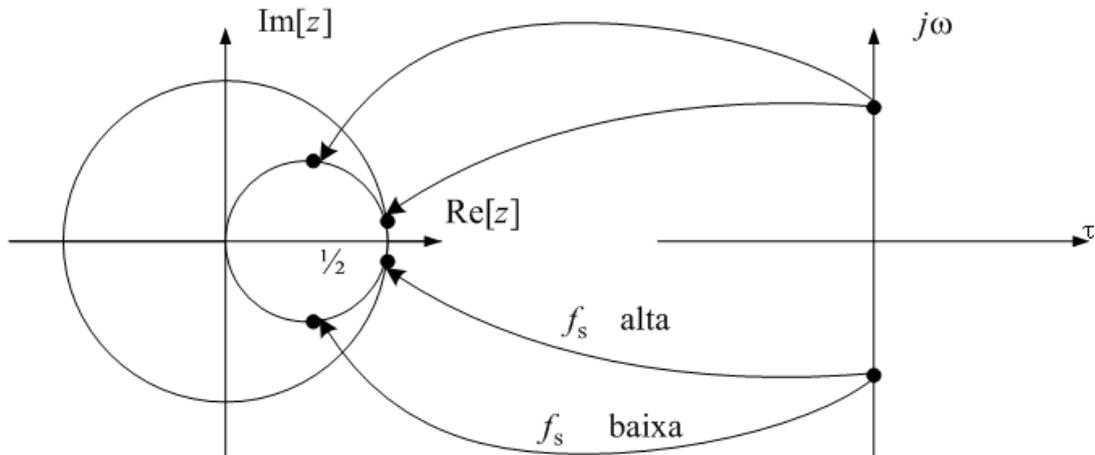


Figura 2.7 - Mapeamento dos zeros do plano-s para o plano-z utilizando diferentes frequências de amostragem.

A aplicação direta deste método não é muito eficiente, pois estaremos limitados a trabalhar em uma zona restrita do plano-z, o que implica em se utilizar um passo de amostragem pequeno e, conseqüentemente, produzindo um grande número de dados redundantes. Entretanto, a técnica de transformação espectral utilizada em conjunto pode diminuir tais limitações, visto que se torna possível o melhor aproveitamento da circunferência de raio unitário quando usada a transformação de Euler. Isso ocorre, pois é possível trabalhar em uma região onde a circunferência de raio igual a $\frac{1}{2}$ centrada em $z = \frac{1}{2}$ praticamente “se confunde” com a circunferência de raio unitário.

2.4.6 Método de Transformação Bilinear

Este método, também conhecido como equivalência da integral, tem seu equacionamento desenvolvido por uma aproximação da integral através do método dos trapézios. Uma transformação algébrica entre as variáveis s e z mapeia todo o eixo $j\Omega$ do plano-s, com frequência Ω , em uma revolução completa da circunferência unitária no plano-z, com frequência ω , como mostrado na Figura 2.8. Dessa forma, o mapeamento das frequências $-\infty \leq \Omega \leq \infty$ em $-\pi \leq \omega \leq \pi$ faz com que a transformação entre as variáveis

contínua e discreta torne tal mapeamento não-linear. Portanto, o uso desta técnica é restrito a situações em que uma distorção devido a não-linearidade no eixo da frequência é aceitável.

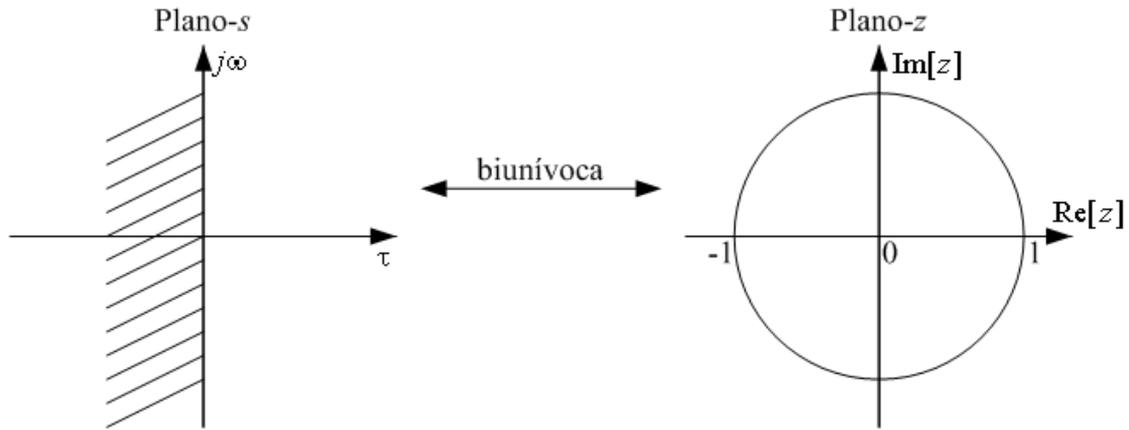


Figura 2.8 - Mapeamento das frequências do plano-s para o plano-z utilizando transformação bilinear.

Sendo $H(s)$ a função de transferência de um filtro contínuo e $H(z)$ a função de transferência de um filtro discreto, a transformação bilinear corresponde a

$$H(z) = H_a \left[\frac{2(1-z^{-1})}{\Delta t(1+z^{-1})} \right] \quad (2.32)$$

ou seja, uma substituição da variável s por

$$s = \frac{2}{\Delta t} \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right). \quad (2.33)$$

Assim, a transformação bilinear também é biunívoca, e o mapeamento inverso ($s \rightarrow z$) é possível pela seguinte relação

$$z = \frac{1 + \frac{\Delta t}{2}s}{1 - \frac{\Delta t}{2}s}. \quad (2.34)$$

Além disso, a sobreposição de espectro é evitada devido ao eixo imaginário do plano-s ser inteiramente mapeado na circunferência unitária do plano-z. O preço pago por isso, entretanto, é uma compressão não-linear das frequências no domínio z .

Seja $z = e^{j\omega}$ e $s = j\Omega$. Substituindo tais variáveis em (2.33) e igualando as partes real e imaginária em ambos os lados da equação, tem-se que

$$\Omega = \frac{2}{\Delta t} \tan\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (2.35)$$

ou

$$\omega = 2 \arctan\left(\frac{\Omega \Delta t}{2}\right). \quad (2.36)$$

Se as frequências críticas (como as frequências de corte das bandas passante e de rejeição) são pré-distorcidas quando a função contínua é transformada na função digital através de (2.36), o filtro digital será mapeado nas frequências desejadas.

Embora a transformação bilinear possa ser usada efetivamente no mapeamento das características da resposta em magnitude do plano- s para o plano- z , a distorção no eixo das frequências também causa uma distorção na resposta de fase do filtro. Por exemplo, a Figura 2.9 mostra o resultado da aplicação da transformação bilinear a um termo de fase linear $e^{-s\alpha}$. Avaliando-se o mapeamento (2.33) na circunferência unitária, o ângulo de fase é $-(2\alpha/\Delta t)\tan(\omega/2)$. A linha pontilhada mostra a função de fase linear periódica $-(\omega\alpha/\Delta t)$, enquanto a linha cheia mostra a função $-(2\alpha/\Delta t)\tan(\omega/2)$. A partir dessa análise, percebe-se que a transformação bilinear não é eficiente para transformar uma função analógica com característica de fase linear preservando tal característica no sistema digital. Desse modo, no caso de um projeto que exija característica de fase linear, a transformação bilinear não será a mais indicada. Alternativas para esses casos são, por exemplo, a utilização das transformações de invariância ao impulso, invariância ao degrau ou invariância à rampa.

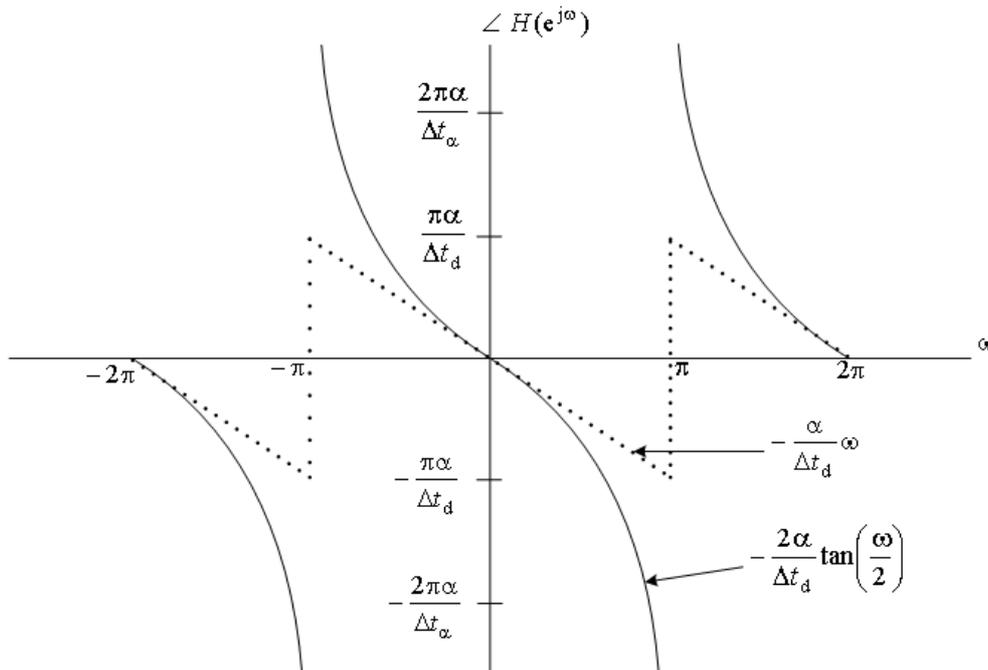


Figura 2.9 – Efeito da transformação bilinear na característica de fase.

2.4.7 Transformação Espectral

Apresentadas as características de cada um dos métodos de transformação $s \rightarrow z$ para projetos de filtros digitais IIR, nota-se que todas elas possuem vantagens e desvantagens (restrições), como observado anteriormente. Dentre tais restrições, podem ser citadas as limitações na aplicação dos métodos de invariância para filtros passa-altas e rejeita-faixa, devido à sobreposição de espectro ou a restrição na região de trabalho do plano- z na transformação para a Euler.

Assim, visto que as transformações de $s \rightarrow z$ funcionam muito bem para o projeto de filtros passa-baixas, uma solução proposta na literatura para sobrepujar tais limitações é a realização do projeto de um filtro passa-baixas digital protótipo e, através dele, a obtenção do filtro desejado utilizando uma transformação espectral [17].

Durante o estudo desta técnica, foi verificado que a aplicação da transformação espectral pode apresentar algumas limitações, as quais ocorrem devido à não linearidade dos parâmetros envolvidos nas equações de mapeamento. Isso foi verificado com o estudo da região de linearidade dos parâmetros para cada tipo de transformação possível (passa-baixas \leftrightarrow passa-baixas, passa-baixas \leftrightarrow passa-altas, passa-baixas \leftrightarrow passa-faixa e passa-baixas \leftrightarrow rejeita-faixa). Notou-se que quanto mais próximo se trabalha da região

não-linear, mais elevada é a precisão numérica necessária para que o mapeamento seja realizado sem que se provoque distorção nas variáveis mapeadas. No caso das transformações passa-baixas \leftrightarrow passa-altas, passa-baixas \leftrightarrow passa-faixa e passa-baixas \leftrightarrow rejeita-faixa, torna-se difícil evitar, em muitos projetos, que os parâmetros não apresentem valores próximos da região não-linear. Por consequência, vários projetos realizados utilizando tal transformação apresentam distorção na magnitude da resposta em frequência.

Assim, o próximo capítulo é dedicado exclusivamente a estudar os problemas decorrentes do uso da técnica de transformação espectral. Através da análise dos problemas resultantes, são desenvolvidos e propostos métodos para contornar as limitações dos parâmetros envolvidos em cada tipo de projeto.

2.5 CONCLUSÕES

Neste capítulo mostrou-se que o filtro TR proposto pode ser obtido a partir das singularidades de um filtro CA, que atenda a requisitos de magnitude, mas não de fase, e de um filtro CI, que atenda a requisitos de fase, porém não de magnitude, utilizando um algoritmo similar ao proposto por [18]. Um exemplo exhibe as características intermediárias do filtro TR em relação aos filtros CA e CI.

O paritr do conceito de fase linear, apresentado na seção 2.2, alguns métodos que permitem avaliar a linearidade de fase dos filtros são apresentados, como a variação do atraso de fase, erro do atraso de fase, variação do atraso de grupo, erro do atraso de grupo e erro de simetria da resposta ao impulso. Além dessas, outra medida utilizada neste trabalho para avaliar o desempenho dos filtros propostos é o *overshoot* da resposta ao degrau.

A seção 2.4 mostra alguns métodos que podem ser aplicados, com suas respectivas vantagens e limitações, para realizar a transformação do domínio analógico para o domínio digital ao se projetar filtros digitais IIR baseado em uma técnica indireta. Além disso, a utilização da técnica de transformação espectral é sugerida para melhorar o desempenho das técnicas discutidas.

O capítulo a seguir descreve algumas limitações encontradas durante este estudo na aplicação da técnica de transformação espectral.

ESTUDO E ANÁLISE DA TRANSFORMAÇÃO ESPECTRAL**3.1 DESCRIÇÃO DO PROBLEMA**

Neste capítulo é apresentado um estudo sobre a utilização da transformação espectral [17] para os quatro casos possíveis: transformação passa-baixas ↔ passa-baixas, transformação passa-baixas ↔ passa-altas, transformação passa-baixas ↔ passa-faixa e transformação passa-baixas ↔ rejeita-faixa.

Na literatura, sempre que se trata da técnica de transformação espectral como ferramenta para auxiliar no projeto de filtros digitais [15]-[17], são apresentados apenas exemplos de utilização dessa técnica para transformações passa-baixas ↔ passa-baixas. Para os outros tipos de transformações, geralmente são apresentadas apenas as equações utilizadas para realizar tal transformação.

Neste trabalho é mostrado que a aplicação da técnica de transformação espectral, principalmente no caso das transformações passa-baixas ↔ passa-altas, passa-baixas ↔ passa-faixa e passa-baixas ↔ rejeita-faixa, não é trivial. Em alguns casos essa técnica apresentará limitações em sua aplicação que poderão tornar sua utilização inviável para determinados projetos.

A transformação espectral proposta em [17] consiste de uma transformação no domínio digital que modifica apenas as características em frequência, mantendo inalteradas as características de magnitude do filtro. Isso é feito através do mapeamento da variável

complexa Z^{-1} na variável complexa z^{-1} utilizando funções do tipo $Z^{-1} = \prod_{i=1}^n \frac{z^{-1} - \alpha_i}{1 - \alpha_i z^{-1}}$,

conhecidas por funções unitárias. Pode-se notar que tal função tem característica passa tudo.

No caso das transformações passa-baixas↔passa-baixas (PB-PB) e passa-baixas↔passa-altas (PB-PA), a função unitária apresenta ordem igual a 1, ou seja, o único parâmetro envolvido no mapeamento é a variável α . No caso das transformações passa-baixas↔passa-faixa (PB-PF) e passa-baixas↔rejeita-faixa (PB-RF), cada

singularidade do filtro protótipo é transformada em duas singularidades para o filtro desejado. Em consequência, a função unitária para esses casos tem ordem igual a 2, sendo necessários dois parâmetros para realizar o mapeamento: α e k . Nesse caso, ambos os parâmetros possuem características não-lineares e, como será visto, podem causar distorções no filtro digital desejado dependendo dos valores por eles assumidos.

3.2 METODOLOGIA DE PROJETO

A primeira etapa do projeto de um filtro digital utilizando a técnica de transformação espectral é a determinação do filtro passa-baixas protótipo. Por questão de facilidade, todas as frequências utilizadas são normalizadas para que possamos trabalhar com frequências entre 0 e 2π , sendo essa última equivalente à frequência de amostragem F_s .

Segundo [16], a escolha da frequência de corte θ_p do filtro passa-baixas protótipo é arbitrária. Entretanto, conforme a transformação $s \rightarrow z$ utilizada, a escolha do θ_p mais conveniente pode ser muito importante para que o mapeamento das frequências não ocorra em uma região de menor linearidade ao se aplicar a transformação espectral.

Por exemplo, no caso de se utilizar a transformação de Euler, é conveniente que se escolha θ_p muito próxima a 0, ou seja, θ_p deve se localizar em uma região onde a circunferência de raio $\frac{1}{2}$, centrada em $\{\frac{1}{2}, 0\}$, do mapeamento de Euler, possa ser “confundida” com a circunferência de raio unitário (Figura 2.7). Dessa forma, é possível reduzir a distorção causada pelo mapeamento das frequências de Euler fora da circunferência de raio unitário.

No caso da transformação bilinear, pode-se tirar proveito da relação não-linear entre as frequências no domínio s e z . A escolha de θ_p mais próximo a π pode resultar em uma redução da ordem do filtro protótipo e conseqüentemente do filtro desejado.

Uma vez determinado θ_p , podem-se calcular os outros parâmetros do filtro passa-baixas protótipo a partir de equações derivadas da função unitária para cada tipo de filtro desejado. O problema que surge ao utilizar a técnica de transformação espectral está justamente nessa etapa, na qual estão envolvidas as variáveis não-lineares responsáveis pelo mapeamento $\omega \rightarrow \theta$. Na Seção 3.7 será apresentada uma análise entre as variáveis

que auxiliam o mapeamento $(\alpha e k)$ e a sensibilidade das variáveis envolvidas no mapeamento $(\omega e \theta)$.

Cada tipo de transformação é tratada separadamente.

3.3 TRANSFORMAÇÃO PB-PB

A transformação PB-PB requer apenas que se alargue ou estreite as bandas passante e de rejeição do filtro protótipo mantendo inalteradas as características de atenuação do filtro [17].

De [17], temos que a função de transformação PB-PB é dada por

$$Z^{-1} = \frac{z^{-1} - \alpha}{1 - \alpha z^{-1}} \quad (3.1)$$

onde $Z^{-1} = e^{-j\theta}$ e $z^{-1} = e^{-j\omega}$, tal que θ representa as frequências do filtro protótipo e ω representa as frequências do filtro desejado.

Determinado θ_p , as próximas etapas do projeto do filtro protótipo são, respectivamente, a determinação da variável α e da frequência de corte de banda de rejeição do filtro protótipo θ_s . Isso pode ser feito através de equações derivadas de (3.1) [16] da seguinte maneira:

$$\alpha = \frac{\sin\left[(\theta_p - \omega_p) \frac{\Delta t}{2}\right]}{\sin\left[(\theta_p + \omega_p) \frac{\Delta t}{2}\right]} \quad (3.2)$$

e

$$\theta \cdot \Delta t = \text{tg}^{-1} \left[\frac{(1 - \alpha^2) \sin(\omega \Delta t)}{(1 + \alpha^2) \cos(\omega \Delta t) - 2\alpha} \right]. \quad (3.3)$$

Pode-se observar de (3.2) que α depende de θ_p e $\Delta t = \frac{1}{F_s}$ e que possui uma característica não-linear em relação a esses parâmetros. Para a maior parte das transformações $s \rightarrow z$ consideradas, Δt deve ser pequeno o suficiente para que não ocorra sobreposição de espectros ou algum outro tipo de distorção na passagem do domínio analógico para o digital.

Sendo assim, dada uma frequência de amostragem, a escolha de θ_p pode não ser tão arbitrária como se havia mencionado. Analisando a Figura 3.1, observa-se que quando θ_p é menor do que ω_p , α assume valores entre -1 e 0 ; quando θ_p é maior do que ω_p , α assume valores entre 0 e 1 ; e para $\theta_p = \omega_p$, $\alpha = 0$.

Para evitar uma possível distorção na passagem do domínio analógico para o digital, recomenda-se escolher sempre uma frequência θ_p menor do que ω_p , trabalhando-se assim com valores negativos de α .

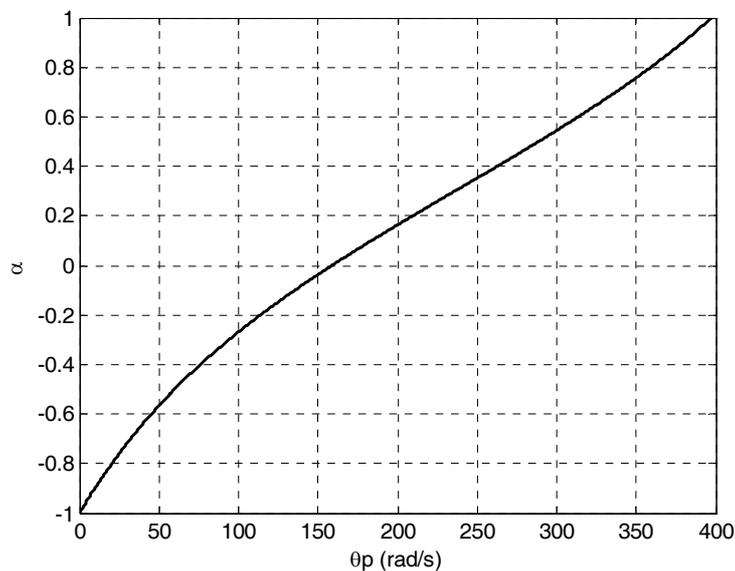


Figura 3.1 – Variação de α com θ_p para um projeto com $\Delta t = 200\mu s$ e $\omega_p = 159,15\text{rad/s}$.

Avaliando o mapeamento $\omega \rightarrow \theta$ decorrente de (3.3) e assumindo-se diferentes valores para α , observa-se que quanto maior o módulo de α , mais não-linear se torna a relação entre as frequências ω e θ .

Por exemplo, um valor de θ_p muito baixo implica em um valor de α próximo de -1 . Através da Figura 3.2 nota-se que, na região de α próxima a -1 , qualquer pequena variação de θ resulta em uma grande variação de ω . O resultado é que, ao se fazer o mapeamento $\omega \rightarrow \theta$, teremos os parâmetros do filtro protótipo equivalentes aos do filtro original. Entretanto, ao fazer o mapeamento inverso $\theta \rightarrow \omega$, qualquer pequena variação de θ , levará a uma grande variação de ω , podendo causar grandes distorções no filtro final. Assim, caso a ferramenta computacional utilizada para realizar os cálculos não possua

precisão numérica suficiente, pode haver uma grande distorção no filtro desejado ao ser feita a transformação espectral PB-PB.

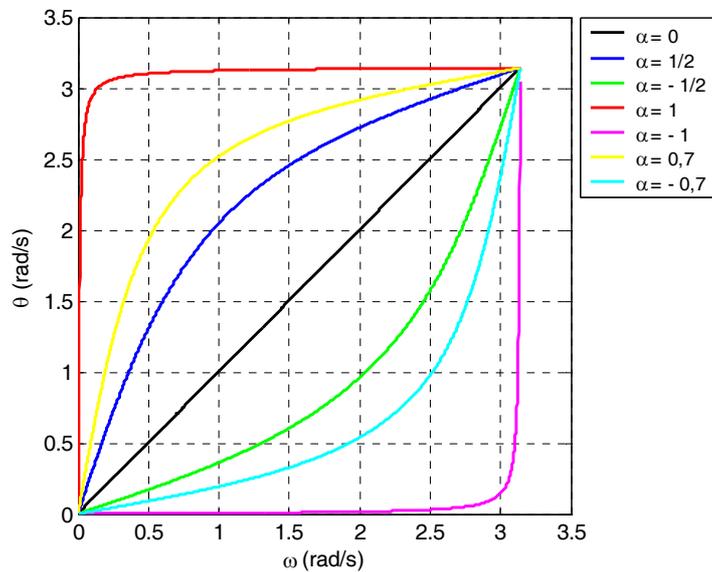


Figura 3.2 – Variação de θ com ω [conforme (3.3)] para valores de α distintos e $\Delta t = 200\mu s$.

Assim, o bom senso na escolha da frequência de corte do filtro protótipo seria recomendado, analisando-se o compromisso entre θ_p e F_s de modo que α não venha a causar distorção no mapeamento de ω em θ .

3.4 TRANSFORMAÇÃO PB-PA

O projeto de um filtro passa-altas digital pode ser feito de maneira análoga ao projeto de um filtro passa-baixas. A principal diferença é a função que faz o mapeamento $Z^{-1} \rightarrow z^{-1}$ [17], ou seja, a transformação do filtro passa-baixas protótipo no filtro passa-altas desejado. Tal mapeamento é dado por

$$Z^{-1} = -\frac{z^{-1} + \alpha}{1 + \alpha z^{-1}} \quad (3.4)$$

e as equações derivadas de (3.4) utilizadas para a determinação de α e θ_s são

$$\alpha = -\frac{\cos\left[(\theta_p - \omega_p)\frac{\Delta t}{2}\right]}{\cos\left[(\theta_p + \omega_p)\frac{\Delta t}{2}\right]} \quad (3.5)$$

e

$$\theta_p \cdot \Delta t = \text{tg}^{-1}\left[\frac{(\alpha^2 - 1)\sin(\omega\Delta t)}{-(1 + \alpha^2)\cos(\omega\Delta t) - 2\alpha}\right]. \quad (3.6)$$

Assim como foi feito para a transformação PB-PB, um estudo da relação entre θ_p , Δt e α para a transformação PB-PA se faz necessário. De (3.5) e da Figura 3.4 é possível notar que α novamente depende dos parâmetros θ_p e Δt ; porém, nesse caso, quando θ_p é menor do que $\pi - \omega_p$, α assume valores entre $-\infty$ e -1 ; quando θ_p é maior do que $\omega_p - \pi$, α assume valores entre 1 e ∞ ; e quando θ_p é igual a $\omega_p - \pi$, α é indefinido.

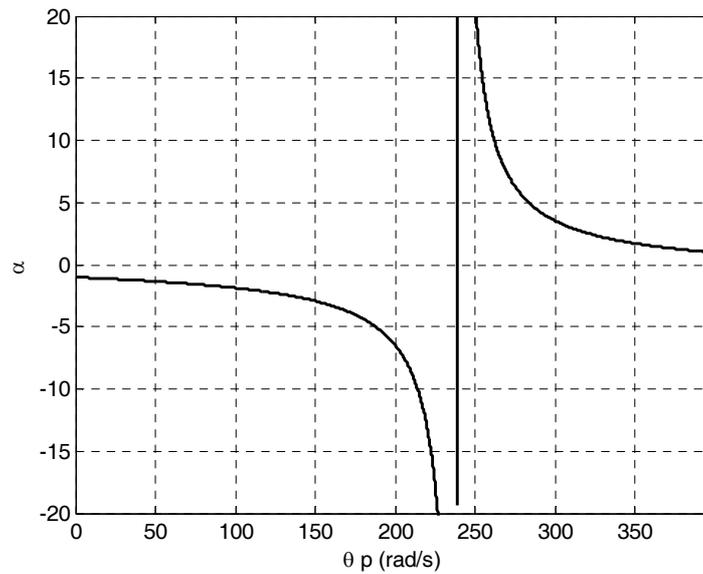


Figura 3.3 – Variação de α com θ_p para um projeto com $\Delta t = 200\mu\text{s}$ e $\omega_p = 159,15\text{rad/s}$.

Para evitar uma possível distorção na passagem do domínio analógico para o digital decorrente do mapeamento $\omega \rightarrow \theta$, recomenda-se escolher uma frequência θ_p menor do que $\omega_p - \pi$, trabalhando-se, assim, com valores negativos de α . Entretanto, nota-se da Figura 3.3 que para valores de α próximos a -1 , uma pequena variação desse parâmetro causa uma grande variação em θ . Isso pode fazer com que, para um determinado valor de

θ_p , o valor calculado de θ_s não corresponda precisamente ao valor de ω_s . No caso de valores de α tendendo a $-\infty$, a distorção no mapeamento inverso, ou seja $\theta \rightarrow \omega$, pode também ocorrer.

Da Figura 3.4 é possível avaliar o comportamento do mapeamento $\omega \rightarrow \theta$ para diversos valores de α . Dessa figura observa-se que a região na qual o mapeamento se torna mais linear ocorre para α tendendo a $\pm\infty$. Do mesmo modo como acontece na transformação PB-PB, quando α assume valores próximos a -1 ou 1 , uma pequena variação de ω causa uma grande variação em θ , e *vice-versa*.

Considerando uma frequência ω_p muito menor do que a frequência de amostragem utilizada, α tendendo a $\pm\infty$ leva a valores muito altos de θ . O problema que surge nesse momento é o fato de que quanto mais linear se deseja o comportamento de α para que não haja distorção no mapeamento, mais próximo de π deve estar θ_p . Assim, para a maioria dos casos práticos de projeto, a escolha dos parâmetros que atendem a tal condição acabam por causar sobreposição de espectro na conversão analógico \rightarrow digital.

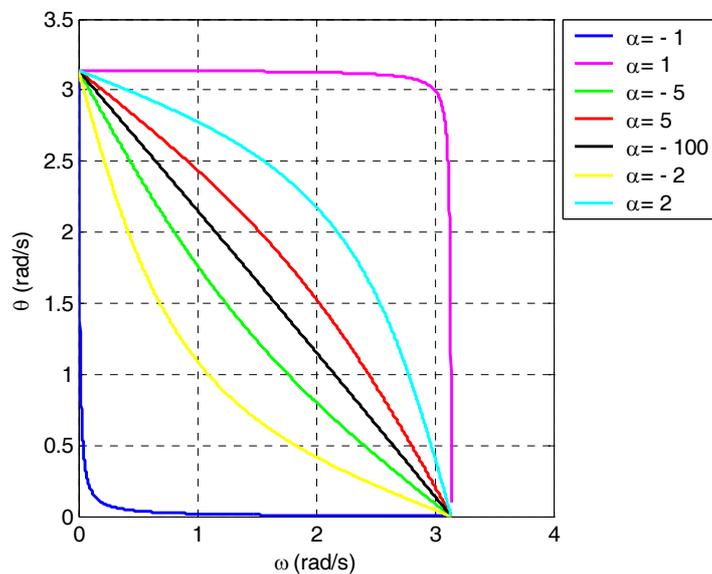


Figura 3.4 - variação de θ com ω [conforme (3.6)] para valores de α distintos e $\Delta t = 200\mu s$.

Conclui-se dessa análise que existe uma região muito reduzida do espectro de frequências para escolher θ_p de modo que tanto as limitações do projeto devidas à sobreposição de espectro quanto as limitações devidas à linearidade de α atendam às

especificações sem uma distorção que torne o projeto impraticável. Conseqüentemente, existirá uma faixa de valores de α muito limitada para se trabalhar, visto que esse parâmetro não pode assumir valores positivos, valores muito próximos a -1 e valores tendendo a $-\infty$.

Durante o desenvolvimento do trabalho pôde-se verificar também, através de diversos exemplos, que quanto maior a ordem do filtro desejado, maior se torna a restrição de escolha de θ_p . Isso ocorre porque, quanto maior o número de elementos do filtro, maior a influência da não-linearidade nos parâmetros de sua resposta.

Desta maneira, dependendo da transformação $s \rightarrow z$ utilizada e da ordem do filtro desejado, o projeto de um filtro passa-altas utilizando transformação espectral pode se tornar inviável.

3.5 TRANSFORMAÇÃO PB-PF

Quando se deseja transformar um filtro protótipo passa-baixas em um filtro passa-faixa, pode-se imaginar o filtro passa-faixa como uma associação em cascata de um filtro passa-baixas e um filtro passa-altas. Em vista disso, a função de transformação não será mais de primeira ordem, mas sim de segunda ordem. Isso significa que cada singularidade do filtro protótipo deve ser transformada em duas singularidades do filtro desejado. Como conseqüência, tem-se a utilização de dois parâmetros (α e k) para realizar a requerida transformação. Assim, é necessário então avaliar a região de linearidade dos dois parâmetros a fim de evitar qualquer distorção de característica no filtro desejado obtido via transformação espectral.

Analisando o mapeamento $\omega \rightarrow \theta$ em função dos parâmetros α e k (Figuras 3.6, 3.7 e 3.8), pode-se destacar a transformação de uma singularidade do filtro protótipo em duas do filtro desejado.

Considere que se deseja projetar um filtro passa-faixa com as seguintes especificações:

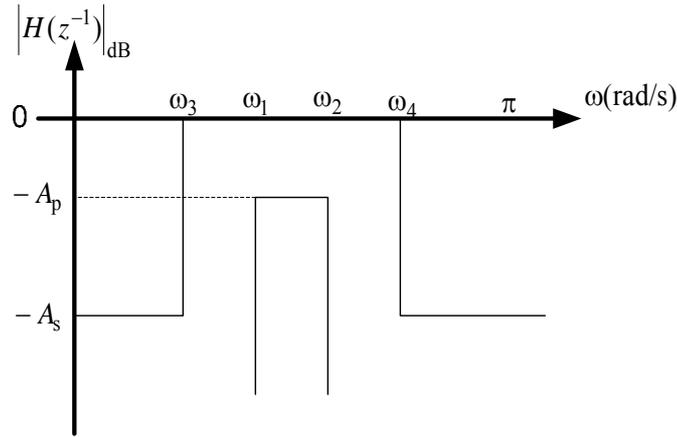


Figura 3.5 – Gabarito de atenuação de um filtro passa-faixa.

Escolhida a frequência de corte do filtro passa-baixas protótipo, precisam-se determinar os parâmetros α e k presentes na equação de transformação de segunda ordem. Assim,

$$Z^{-1} = -\frac{z^{-2} - \frac{2\alpha k}{k+1}z^{-1} + \frac{k-1}{k+1}}{\frac{k-1}{k+1}z^{-2} - \frac{2\alpha k}{k+1}z^{-1} + 1}. \quad (3.7)$$

As equações derivadas de (3.7), utilizadas para calcular k , α e θ , são

$$k = \cotg\left[(\omega_2 - \omega_1)\frac{\Delta t}{2}\right] \operatorname{tg}\left[\theta_p \frac{\Delta t}{2}\right], \quad (3.8)$$

$$\alpha = \frac{\cos\left[(\omega_2 + \omega_1)\frac{\Delta t}{2}\right]}{\cos\left[(\omega_2 - \omega_1)\frac{\Delta t}{2}\right]} \quad (3.9)$$

e

$$\theta \cdot \Delta t = \operatorname{tg}^{-1}\left[\frac{-4\alpha k \sin(\omega \Delta t) + 2k \sin(2\omega \Delta t)}{4\alpha k^2 \cos(\omega \Delta t) - (k^2 + 1)\cos(2\omega \Delta t) - k^2(1 + \alpha^2) + 1}\right], \quad (3.10)$$

onde obtém-se θ_{s1} substituindo ω por ω_3 e θ_{s2} substituindo ω por ω_4 . A frequência de corte da banda de rejeição do filtro passa-baixas protótipo pode ser determinada então por [16]:

$$\theta_s = \min(|\theta_{s1}|, |\theta_{s2}|). \quad (3.11)$$

Nota-se através das equações anteriormente mostradas que a escolha de θ_p influenciará apenas no parâmetro k , pois o único parâmetro que pode variar na equação de

α é Δt . Dessa maneira, avalia-se primeiramente o comportamento do mapeamento $\omega \rightarrow \theta$ em função de k . De (3.8), é possível perceber que k pode assumir valores entre 0 e ∞ dependendo dos parâmetros θ_p e Δt , como pode ser visto na Figura 3.6, sendo que quanto mais alto o valor de k , mais alto será o valor de θ_p e menos linear será a relação entre esses dois parâmetros.

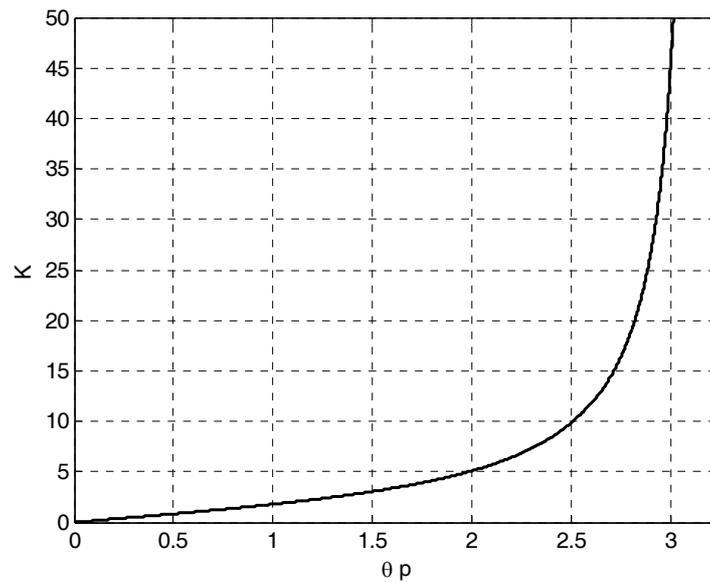


Figura 3.6 – Variação de k para valores de θ_p normalizados.

Avaliando o comportamento do mapeamento $\omega \rightarrow \theta$ com a variação de k , observa-se da Figura 3.7 que $k = 1$ é o valor mais adequado. Tal situação é descrita em [17] e facilita sobremaneira o equacionamento da transformação. Assim,

$$Z^{-1} = -\frac{z^{-1}(z^{-1} - \alpha)}{1 - \alpha z^{-1}} \quad (3.12)$$

e

$$\theta \cdot \Delta t = \text{tg}^{-1} \left[\frac{-2\alpha \sin(\omega \Delta t) + \sin(2\omega \Delta t)}{2\alpha \cos(\omega \Delta t) - \cos(2\omega \Delta t) - \alpha^2} \right]. \quad (3.13)$$

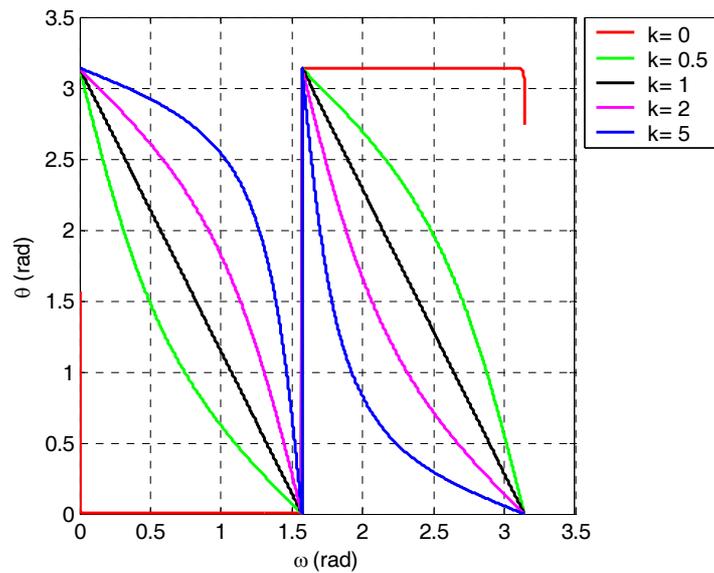


Figura 3.7 – Variação de θ com ω [conforme (4.10)] para diferentes valores de k .

A equação (3.9) de α , por sua vez, depende, não apenas da banda passante do filtro desejado, mas também da frequência de amostragem utilizada. Isso nos leva a concluir que ao se escolher uma região de maior linearidade de k , ($k = 1$), a viabilidade de projeto de um filtro passa-faixa, utilizando transformação espectral, depende unicamente da frequência de amostragem considerada. Como nem sempre é possível trabalhar com a frequência de amostragem mais adequada, um problema que temos aqui é que algumas técnicas de transformação $s \rightarrow z$ podem não ser viáveis para esse tipo de projeto. Fazendo então uma análise do mapeamento através de (3.12), para diferentes valores de α , pode-se observar da Figura 3.8 que o valor mais indicado para α é zero.

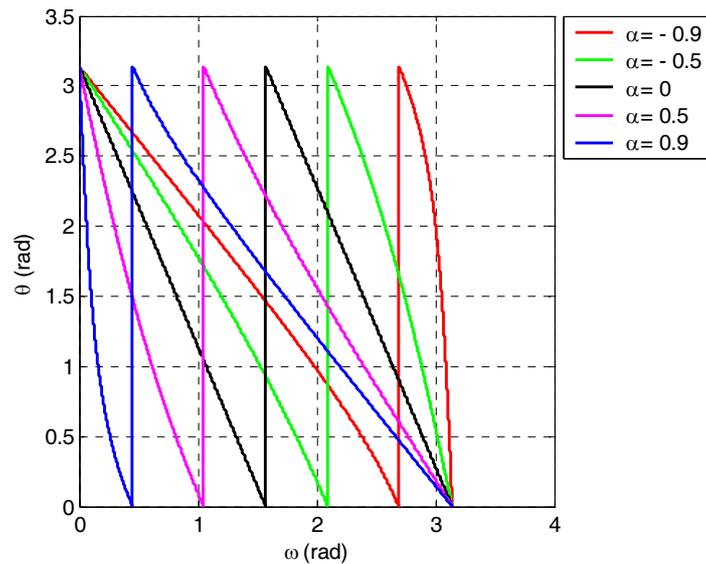


Figura 3.8 - variação de θ com ω [conforme (4.12)] para diversos valores de α .

O principal problema de projeto de filtros passa-faixa não decorre propriamente da não-linearidade dos parâmetros em relação ao mapeamento $\omega \rightarrow \theta$. A partir da análise das equações (3.8) a (3.10) e de vários exemplos simulados, constatou-se que quando a banda de passagem do filtro é grande em relação à banda de rejeição, o mapeamento da variável ω_s gera valores para θ_s menores do que θ_p , tornando impossível o projeto do filtro protótipo. Isso mostra que existe uma faixa limitada de valores que as variáveis de mapeamento α e k podem assumir, as quais independem da frequência de amostragem considerada.

Na Seção 3.8 serão apresentadas algumas estratégias para superar tais limitações no projeto de filtros passa-faixa.

3.6 TRANSFORMAÇÃO PB-RF

De forma similar ao procedimento usado no projeto de filtros passa-faixa, a função de transformação PB-RF é aqui também de segunda ordem. Desse modo, faz-se necessário analisar o domínio dos parâmetros α e k da expressão (3.14).

$$Z^{-1} = \frac{z^{-2} - \frac{2\alpha k}{1+k} z^{-1} + \frac{1-k}{1+k}}{\frac{1-k}{1+k} z^{-2} - \frac{2\alpha}{1+k} z^{-1} + 1} \quad (3.14)$$

Considere que o filtro desejado tenha uma banda passante limitada pelas frequências ω_1 e ω_2 e a banda de rejeição limitada por ω_3 e ω_4 . Escolhida a frequência de corte do filtro passa-baixas protótipo, podem-se determinar os parâmetros α e k da equação de transformação de segunda ordem através das seguintes expressões:

$$k = \operatorname{tg} \left[(\omega_2 - \omega_1) \frac{\Delta t}{2} \right] \operatorname{tg} \left[\theta_p \frac{\Delta t}{2} \right], \quad (3.15)$$

$$\alpha = \frac{\cos \left[(\omega_2 + \omega_1) \frac{\Delta t}{2} \right]}{\cos \left[(\omega_2 - \omega_1) \frac{\Delta t}{2} \right]} \quad (3.16)$$

e

$$\theta_p \cdot \Delta t = \operatorname{tg}^{-1} \left[\frac{4\alpha k \sin(\omega \Delta t) - 2k \sin(2\omega \Delta t)}{-4\alpha \cos(\omega \Delta t) + (k^2 + 1) \cos(2\omega \Delta t) + (1 - k^2) + 2\alpha^2} \right], \quad (3.17)$$

onde pode-se obter θ_{s1} substituindo ω por ω_3 e, θ_{s2} substituindo ω por ω_4 . Com o auxílio de (3.11) é possível obter a frequência de corte de banda de rejeição do filtro protótipo.

De (3.15) e (3.16), constata-se que, assim como para a transformação PB-PF, neste caso α também depende apenas da banda passante do filtro desejado e da frequência de amostragem utilizada. Já a variável k depende também da escolha de θ_p .

A Figura 3.9 mostra os valores que k pode assumir para diversos valores de θ_p escolhidos e a relação não-linear existente entre esses parâmetros.

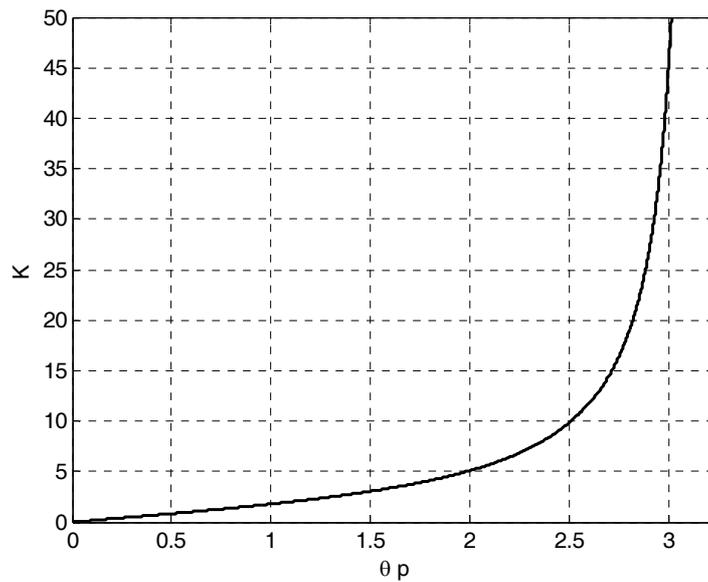


Figura 3.9 – Variação de k para diferentes valores de θ_p .

Analisando agora a influência de k no mapeamento $\omega \rightarrow \theta$ (Figura 3.10), é possível constatar que $k = 1$ é o valor mais adequado para projeto. Esse valor simplifica sobremaneira o mapeamento $\omega \rightarrow \theta$ como pode ser visto pelas equações (3.18) e (3.19); porém, para que isso seja possível, é preciso que $\theta_p = \pi - (\omega_2 - \omega_1)$.

$$Z^{-1} = \frac{z^{-1}(z^{-1} - \alpha)}{1 - \alpha z^{-1}} \quad (3.18)$$

$$\theta \cdot \Delta t = \text{tg}^{-1} \left[\frac{2\alpha \sin(\omega \Delta t) - \sin(2\omega \Delta t)}{-2\alpha \cos(\omega \Delta t) + \cos(2\omega \Delta t) + \alpha^2} \right] \quad (3.19)$$

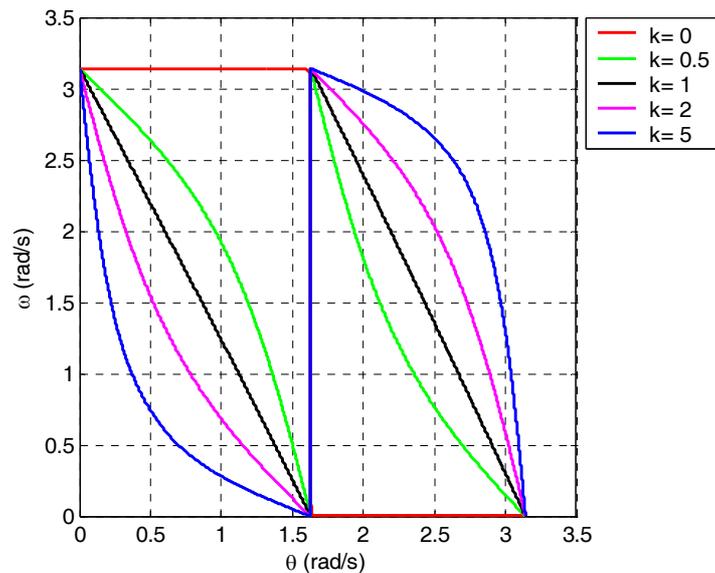


Figura 3.10 – Variação de θ com ω [conforme (3.17)] para diversos valores de k .

Essa restrição torna o procedimento de projeto de filtros rejeita-faixa bastante difícil. Assim, assumindo-se $k = 1$ tem-se uma fonte de dependência da frequência de amostragem utilizada, pois se F_s for demasiadamente grande, θ_p estará muito próximo de π , o que pode causar sobreposição de espectro ao se utilizar os métodos de invariância ao impulso ou invariância ao degrau no mapeamento analógico→digital. Por outro lado, se F_s for muito pequena, podem-se obter distorções no mapeamento $\omega \rightarrow \theta$ devido ao valor de α . A escolha de um θ_p diferente de $\pi - (\omega_2 - \omega_1)$ a fim de evitar a sobreposição de espectro pode fazer com que o valor de k venha a causar distorção no mapeamento $\omega \rightarrow \theta$ e, conseqüentemente, degradar as características do filtro desejado.

A análise do mapeamento $\omega \rightarrow \theta$ simplificado em função de α é idêntica à obtida para a transformação PB-PF, pois (3.19) é igual a (3.13) a menos de um sinal negativo.

Assim como na transformação PB-PF, o principal problema do projeto de filtros rejeita-faixa ocorre quando a banda de passagem do filtro é grande em relação à banda de rejeição, pois o mapeamento da variável ω_s gera valores para θ_s menores do que θ_p tornando irrealizável o projeto do filtro protótipo.

Durante este estudo foi possível observar através de diversos exemplos que a frequência de amostragem utilizada para este tipo de projeto pode assumir apenas valores restritos a uma determinada faixa de frequências e que quanto maior a seletividade do

filtro, mais estreita é essa faixa. Tais restrições tornam inviável o projeto de filtros rejeita-faixa muito seletivos através da técnica de transformação espectral.

3.7 ANÁLISE DA SENSIBILIDADE

Para auxiliar a análise das distorções que podem ocorrer no mapeamento $\omega \rightarrow \theta$ em função dos valores de α e k , realizamos um estudo de sensibilidade dos parâmetros envolvidos.

Segundo [1], sensibilidade é uma grandeza que nos permite medir como variam certas características de um sistema quando um ou mais de seus parâmetros variam. Assim, a sensibilidade permite prever os desvios estatísticos e/ou determinísticos das funções do sistema.

A sensibilidade S_x^y de uma função $y(x)$ em relação à variação do parâmetro x , é definida por

$$S_x^y = \frac{\partial \ln(y)}{\partial \ln(x)} = \frac{\partial y/y}{\partial x/x} = \frac{x}{y} \frac{\partial y}{\partial x} \quad (3.20)$$

No caso em questão, queremos avaliar a sensibilidade da resposta em frequência $H(\theta, \alpha)|_{\alpha=f(\theta, \omega_i)} = H(\theta, \omega_i)$ em relação à variação do parâmetro α , onde ω_i representa as frequências do filtro original que serão mapeadas para gerar o filtro protótipo, no caso as frequências de corte das bandas passante e de rejeição. Dessa maneira, a análise de sensibilidade é realizada por

$$S_\theta^{|H(\theta, \omega_i)|} = \frac{\theta}{|H(\theta, \omega_i)|} \frac{\partial |H(\theta, \omega_i)|}{\partial \theta}. \quad (3.21)$$

Para resolver este equacionamento, é necessário que se obtenha inicialmente $|H(\theta, \omega_i)|$. Mostraremos através de um exemplo a complexidade matemática do equacionamento que deve ser considerado para que se obtenha a um valor numérico de sensibilidade.

Considere os parâmetros de projeto de um filtro passa-altas: $A_p, A_s, \omega_p, \omega_s$, respectivamente, máxima atenuação na banda passante, mínima atenuação na banda de

rejeição, frequência de corte da banda passante, frequência de corte da banda de rejeição. Consideramos $\Delta t = 2$ a fim de facilitar o equacionamento.

Dados os parâmetros do filtro desejado, calculam-se os parâmetros de projeto do filtro passa-baixas protótipo. Escolhe-se a frequência de corte de banda passante do filtro passa-baixas protótipo como sendo θ_p . A partir daí calcula-se

$$\alpha = -\frac{\cos(\theta_p - \omega_p)}{\cos(\theta_p + \omega_p)} \quad (3.22)$$

$$\theta = \text{tg}^{-1} \left[\frac{(\alpha^2 - 1)\sin(2\omega)}{-(1 + \alpha^2)\cos(2\omega) - 2\alpha} \right] \quad (3.23)$$

$$\theta_s = \text{tg}^{-1} \left[\frac{\left[\frac{\cos^2(\theta_p - \omega_p)}{\cos^2(\theta_p + \omega_p)} - 1 \right] \sin(2\omega_s)}{- \left[1 + \frac{\cos^2(\theta_p - \omega_p)}{\cos^2(\theta_p + \omega_p)} \right] \cos(2\omega_s) + 2 \frac{\cos(\theta_p - \omega_p)}{\cos(\theta_p + \omega_p)}} \right] \quad (3.24)$$

$$\bar{\theta}_s = \frac{\theta_s}{\theta_p} = \frac{\text{tg}^{-1} \left[\frac{\left[\frac{\cos^2(\theta_p - \omega_p)}{\cos^2(\theta_p + \omega_p)} - 1 \right] \sin(2\omega_s)}{- \left[1 + \frac{\cos^2(\theta_p - \omega_p)}{\cos^2(\theta_p + \omega_p)} \right] \cos(2\omega_s) + 2 \frac{\cos(\theta_p - \omega_p)}{\cos(\theta_p + \omega_p)}} \right]}{\theta_p} \quad (3.25)$$

A partir desses parâmetros pode-se iniciar o projeto dos filtros geradores CA e CI, conforme descrito nos Apêndices B e C, apenas substituindo a variável $\bar{\omega}_s$ por $\bar{\theta}_s$. Nota-se de (3.25) que $|H(\theta, \omega_p)|$ e $|H(\theta, \omega_s)|$ serão equações extremamente complexas e que dificultarão a análise numérica da sensibilidade.

Apesar disso, mostrou-se graficamente nas seções anteriores, através das Figuras 3.2, 3.4, 3.7 e 3.10, que, dependendo dos valores que os parâmetros α e k venham a assumir, uma pequena variação de ω pode resultar em uma grande variação de θ . Dessa forma, caso não se tenha uma precisão numérica adequada para realizar o mapeamento $\omega \rightarrow \theta$, grandes distorções podem ser introduzidas no projeto do filtro protótipo e conseqüentemente no filtro digital desejado.

Considerando uma precisão numérica limitada da ferramenta computacional utilizada, pode-se dizer que existirá uma faixa de valores limitada para α e k de modo que um determinado projeto possa ser realizado sem que grandes distorções sejam causadas na resposta de magnitude do filtro.

Além disso, as distorções de mapeamento tornam-se mais significativas à medida que a ordem do filtro que se deseja projetar aumenta. Isto ocorre pois um maior número de parâmetros é afetado pela sensibilidade do mapeamento $\omega \rightarrow \theta$ em relação a α .

O exemplo abaixo mostra a diferença na resposta em magnitude de um mesmo projeto utilizando três valores distintos de α .

Considere os parâmetros de projeto $A_s = 50$ dB, $A_p = 1$ dB, $f_p = 50$ Hz, $f_s = 60$ Hz e $F_s = 1000$ Hz de um filtro passa-baixas. Para um filtro de ordem 6 utilizando transformação espectral e invariância ao impulso para o mapeamento do domínio s para o domínio z , projetamos um filtro CA para três valores de α distintos.

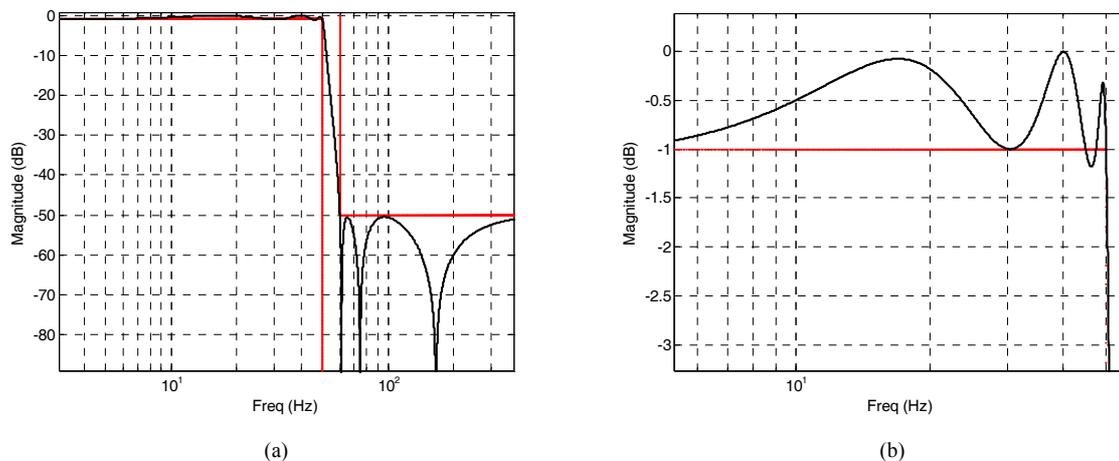
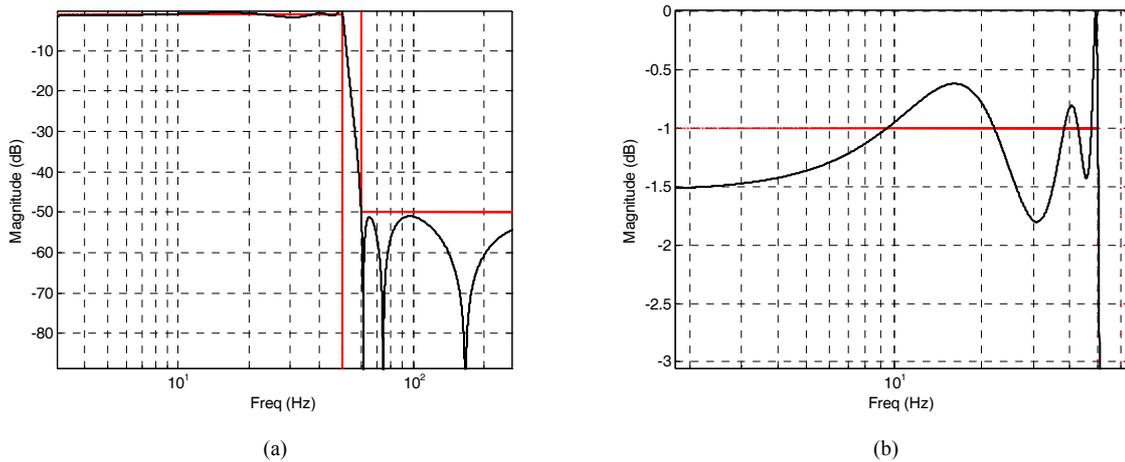
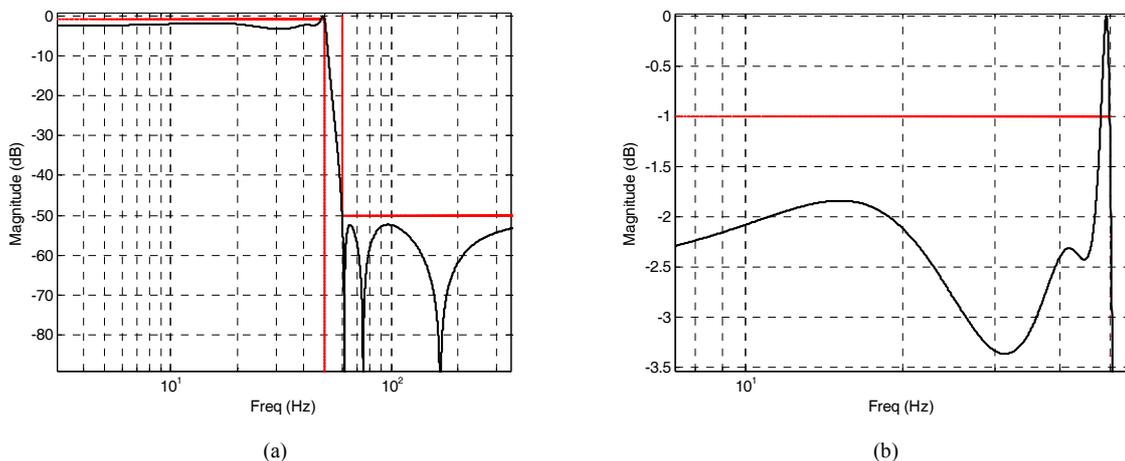


Figura 3.11 –(a) Resposta em magnitude de um filtro passa-baixas digital com $\alpha = -0,914917055$.

(b) Ampliação da banda passante.



**Figura 3.12 –(a) Resposta em magnitude de um filtro passa-baixas digital com $\alpha = -0,915826706$.
(b) Ampliação da banda passante.**



**Figura 3.13 – (a) Resposta em magnitude de um filtro passa-baixas digital com $\alpha = -0,916919427$.
(b) Ampliação da banda passante.**

As figuras 3.11 a 3.13 mostram que uma pequena variação no valor assumido por α pode resultar em grandes distorções no filtro projetado. Isso prova que existe uma grande sensibilidade do mapeamento à variação do parâmetro α , o qual possui comportamento não-linear. Dessa forma, torna-se clara a limitação da transformação espectral para alguns tipos de projeto e a dependência dessa técnica com a precisão numérica utilizada para realizar os cálculos.

A próxima seção mostra algumas soluções alternativas propostas para que se utilize a transformação espectral de modo a diminuir a sensibilidade dos parâmetros envolvidos no mapeamento em relação às variáveis α e k .

3.8 SOLUÇÕES PROPOSTAS E EXEMPLOS

Nesta seção são apresentadas algumas estratégias que visam minimizar as restrições causadas pela precisão numérica limitada das ferramentas computacionais utilizadas para auxiliar os projetos de filtros digitais que aplicam a técnica de transformação espectral. Na seqüência, para cada caso, são mostrados exemplos que comprovam as análises feitas neste trabalho. Todos os exemplos são gerados a partir de filtros Caue analógicos e transformação $s \rightarrow z$ via método da invariância ao impulso. Essa técnica foi escolhida com o objetivo de mostrar, através de exemplos, que mesmo tendo, para alguns casos, sérias limitações, é possível obter bons resultados com a utilização das estratégias propostas. Cada um dos quatro casos é tratado separadamente.

A. Transformação PB-PB

Iniciando pela transformação PB-PB, tem sido constatado que não existem grandes restrições no projeto de filtros passa-baixas digitais. A escolha de θ_p pode ser feita com bastante liberdade e caso venha a ocorrer alguma distorção no mapeamento $\omega \rightarrow \theta$ devido ao valor de α , isso pode ser corrigido simplesmente escolhendo um valor menor para θ_p .

B. Transformação PB-PA

Na Seção 3.4, em que foi estudada a transformação PB-PA, foi mostrado que para realizar um projeto no qual o mapeamento $\omega \rightarrow \theta$ não ocorra muito próximo à região de menor linearidade e cause degradação no filtro desejado, é necessário que se escolha um θ_p próximo a π , o que pode resultar em sobreposição de espectro.

O caminho proposto para realizar este tipo de projeto diminuindo-se a influência da não-linearidade de α no mapeamento é utilizar um filtro digital intermediário. O objetivo dessa estratégia é mitigar a influência da escolha dos valores dos parâmetros considerando mais etapas de modo a tornar as restrições menos severas em cada uma delas.

A implementação desta estratégia pode ser separada em duas etapas: na primeira, é feita uma transformação PB-PB escolhendo-se um θ_p adequado para o caso (pequeno o suficiente para evitar sobreposição de espectro e trabalhar em uma região menos não-linear

de α). Na segunda, por envolver uma transformação que atua somente no domínio digital, podem-se escolher valores para θ_p buscando-se apenas trabalhar na região de maior linearidade de α , ou seja, α mais próximo a $\pm\infty$. A princípio não se pode dizer qual o valor ideal para α , pois isso dependerá de cada projeto. Quanto mais etapas intermediárias forem consideradas, mais ampla é a faixa de valores que α pode assumir. Por outro lado, quanto maior a ordem do filtro a ser projetado, mais restrita será a faixa de valores de α .

Foi mostrado na Seção 3.4 que para minimizar uma possível distorção na transformação PB-PA devido a um mapeamento não-linear, θ_p deve ser próximo o suficiente de π . Portanto, a primeira etapa consiste em obter um filtro intermediário passa-baixas com um valor de θ_p o mais próximo possível de π . No entanto, como um valor de θ_p elevado pode causar degradação na transformação PB-PB intermediária, sugere-se trabalhar com vários filtros intermediários de modo a repartir as restrições em um maior número de etapas. Esse procedimento é mais bem visualizado através da Figura 3.14.

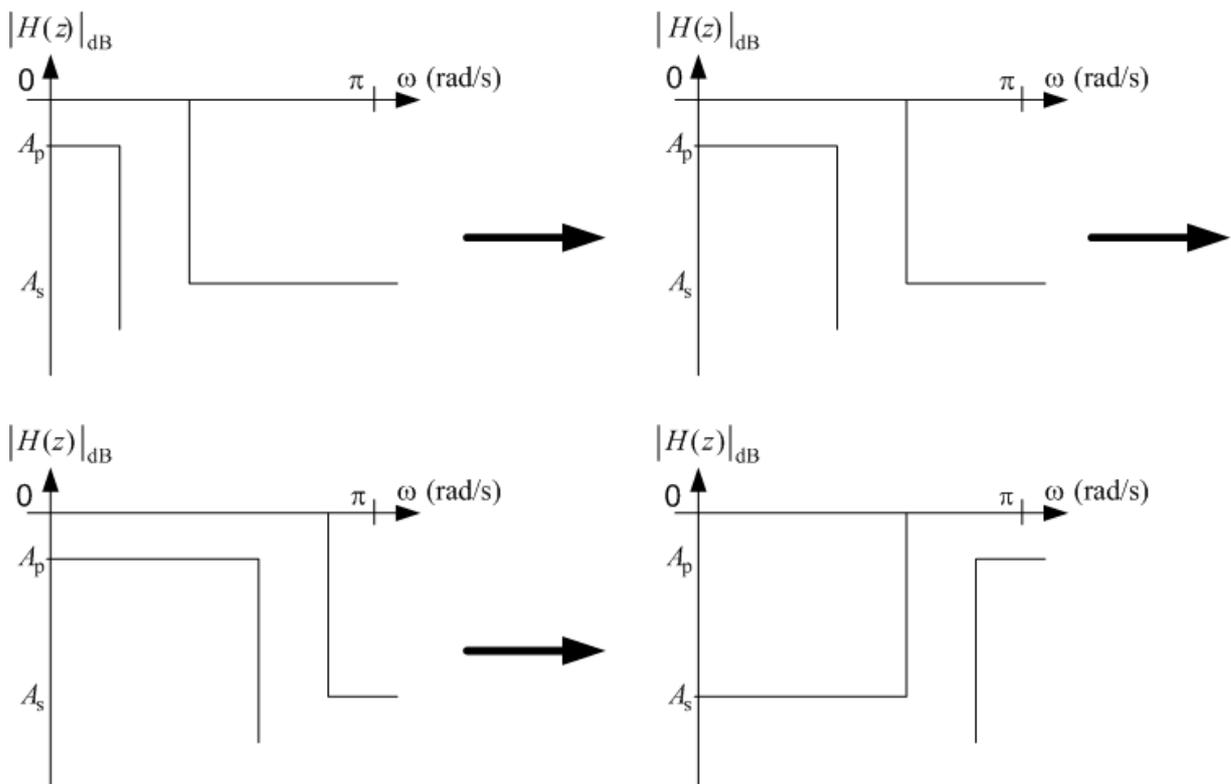


Figura 3.14 – Obtenção de um filtro passa-altas através do uso de dois filtros intermediários.

O exemplo a seguir ilustra a solução proposta. Deseja-se projetar um filtro digital passa-altas com as seguintes características: $A_s = 50$ dB, $A_p = 1$ dB, $f_p = 60$ Hz, $f_s = 50$ Hz e $F_s = 8000$ Hz.

A Figura 3.15 mostra o resultado do projeto utilizando a transformação espectral direta a partir de um filtro passa-baixas protótipo. Nota-se que as especificações de frequência não são atendidas nem na banda passante nem na banda de rejeição. Nas Figuras 3.16 e 3.17 o projeto é realizado utilizando, respectivamente, um e dois filtros intermediários. As distorções são visivelmente reduzidas conforme as restrições são repartidas em mais etapas.

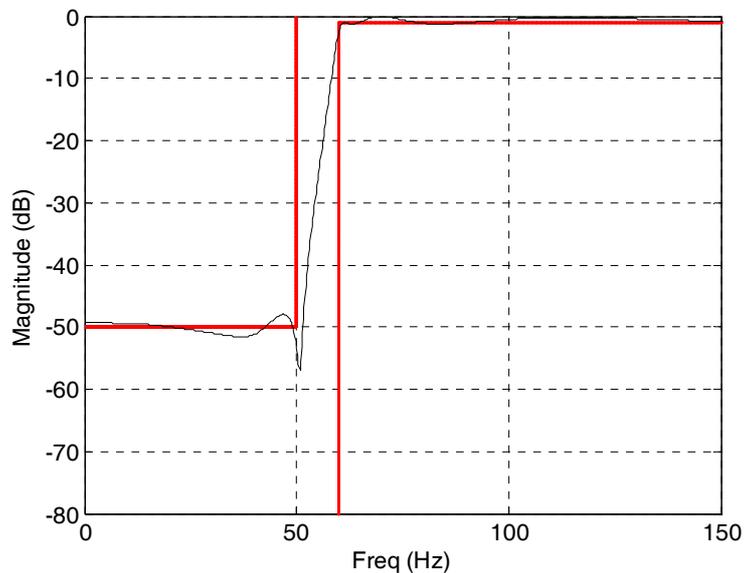


Figura 3.15 – Magnitude do filtro passa-altas de ordem 7 utilizando transformação espectral direta.

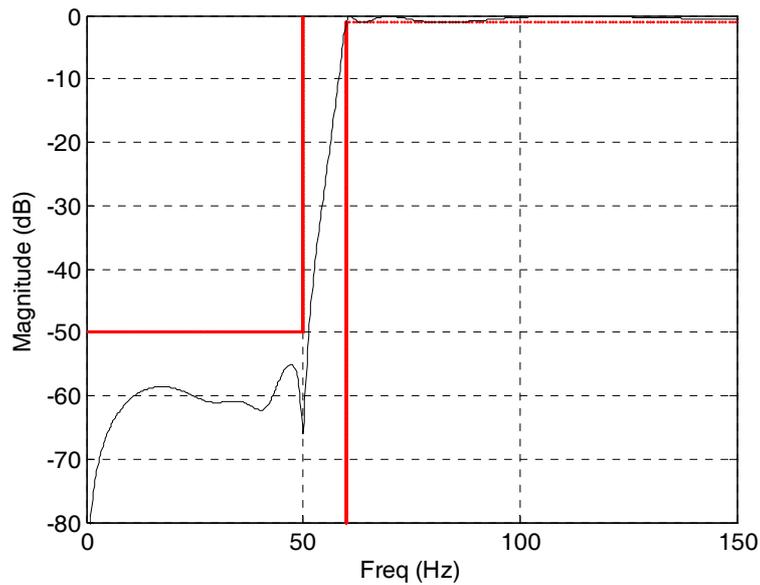


Figura 3.16 – Magnitude do filtro passa-altas de ordem 7 utilizando transformação espectral com um filtro intermediário.

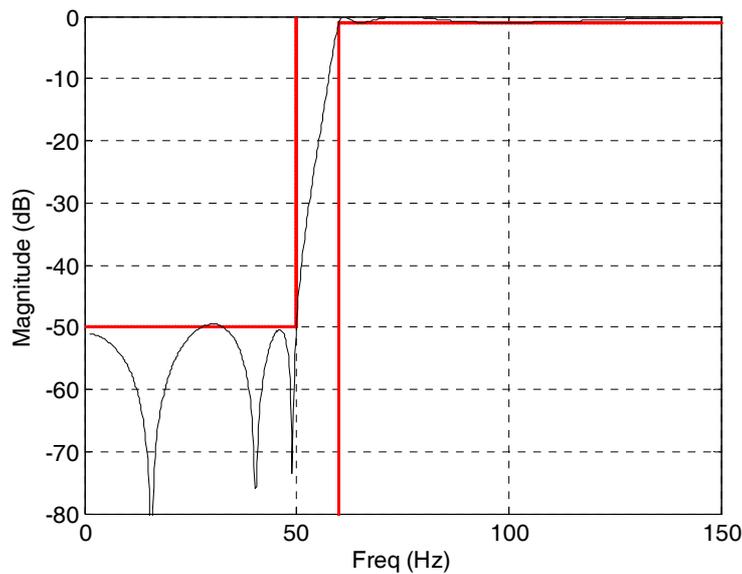


Figura 3.17 – Magnitude do filtro passa-altas de ordem 6 utilizando transformação espectral com o uso de dois filtros intermediários.

Das Figuras 3.15 até 3.17 pode ser verificada a eficácia da estratégia de projeto considerada à medida que são utilizados mais filtros intermediários. Não somente as especificações de projeto são mais bem atendidas, como também a ordem do filtro desejado reduz-se pela escolha de um valor de α que leva a um mapeamento mais linear.

C. Transformação PB-PF

Como visto na Seção 3.5, há dois parâmetros envolvidos na transformação espectral de um filtro passa-faixa: α e k . A região de maior linearidade do parâmetro k ocorre para $k = 1$, o que implica em $\theta_p = \omega_2 - \omega_1$. Já α depende da frequência de amostragem e das frequências que compõem a banda passante do filtro desejado, ω_1 e ω_2 . Assim, quanto mais próxima de π estiver a banda passante do filtro desejado, mais linear torna-se o mapeamento $\omega \rightarrow \theta$.

Pode-se então concluir neste caso que, a utilização de um filtro intermediário com o objetivo de deslocar θ_p não proporciona qualquer benefício, pois sempre é possível trabalhar com um valor de θ_p tal que k esteja situado em uma região de maior linearidade. Além disso, α não é influenciado por θ_p . A maior limitação ocorre quando a banda passante não está próxima o suficiente de π . Isso faz com que α assuma valores que causam degradações quando aplicada a transformação espectral PB-PF, pois como visto em (3.9), α depende das frequências ω_1 e ω_2 . Como essa restrição torna-se mais severa à medida que a ordem do filtro desejado aumenta, alguns projetos de filtros muito seletivos tornam-se inviáveis.

As estratégias propostas neste caso são três e, dependendo das características do filtro passa-faixa desejado, a aplicação de uma delas pode ser mais eficiente do que as outras. A primeira estratégia é realizar o projeto sempre escolhendo $\theta_p = \omega_2 - \omega_1$ e, conseqüentemente, $k = 1$. Evita-se nesse caso qualquer distorção causada por tal parâmetro. No entanto, α pode assumir qualquer valor e gerar possíveis degradações no mapeamento. A segunda estratégia utiliza filtros intermediários com o objetivo de deslocar toda a banda passante do filtro desejado, ω_1 e ω_2 , para frequências próximas a π , buscando realizar o mapeamento em uma região de maior linearidade. Isso é feito através de transformações PF-PF, as quais são realizadas utilizando o mesmo equacionamento da transformação PB-PB. Esta etapa é realizada antes que seja especificado o filtro passa-baixas protótipo, como mostra a Figura 3.18.

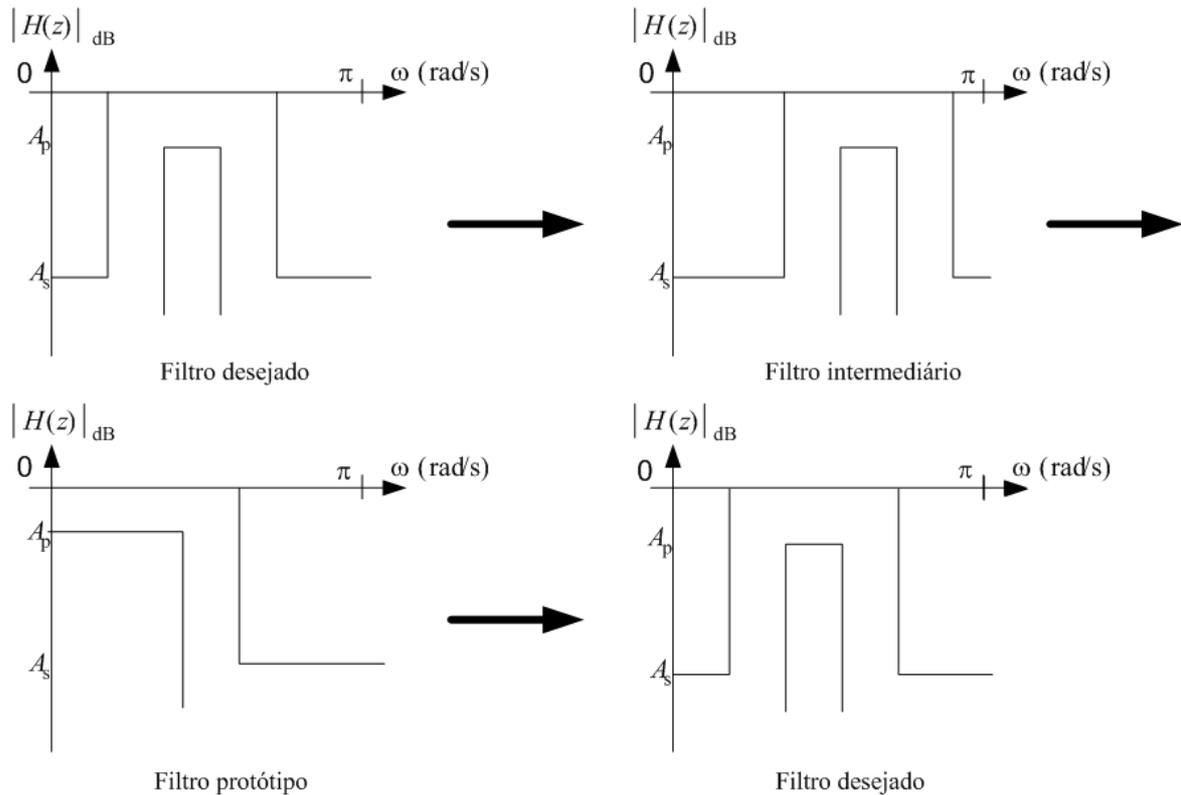


Figura 3.18 – Obtenção do filtro passa-faixa desejado através do uso de um filtro intermediário.

Assim como na estratégia utilizada para a transformação PB-PA, é possível utilizar mais de um filtro intermediário de modo a distribuir as limitações entre esses. Conforme a ordem do filtro desejado aumenta, mais distantes da região de menor linearidade devem estar os parâmetros e conseqüentemente mais filtros intermediários são necessários para superar as limitações.

A terceira solução separa o projeto do filtro passa-faixa em dois: um passa-baixas e um passa-altas, que como visto nas seções anteriores, podem ser obtidos de maneira simples. A associação em cascata dos dois filtros deverá resultar no passa-faixa desejado. Essa solução, entretanto, pode não ser eficaz caso os pólos e zeros dos dois filtros estejam muito próximos, pois sua influência mútua causa um comportamento indesejado na função final. Esse fato ocorre principalmente em projetos em que a largura da banda passante do filtro passa-faixa é muito estreita. Esta terceira estratégia é a mais indicada e também a única que pode ser aplicada quando a frequência θ_s for mapeada em um valor mais baixo do que θ_p , tornando o projeto do filtro protótipo inviável.

A partir das especificações a seguir podemos comparar o desempenho de cada uma das soluções propostas. Considere o projeto de um filtro passa-faixa com as seguintes

especificações de projeto: $A_s = 50$ dB, $A_p = 1$ dB, $f_1 = 100$ Hz, $f_2 = 200$ Hz, $f_3 = 70$ Hz, $f_4 = 250$ Hz e $F_s = 8000$ Hz.

A Figura 3.19 ilustra a resposta em magnitude do filtro passa-faixa obtido para a condição de maior linearidade de k . Na Figura 3.20 é mostrada a resposta em magnitude de um projeto que utiliza um filtro intermediário passa-faixa e a Figura 3.21 apresenta o mesmo projeto realizado através de um filtro passa-baixas em cascata com um passa-altas.

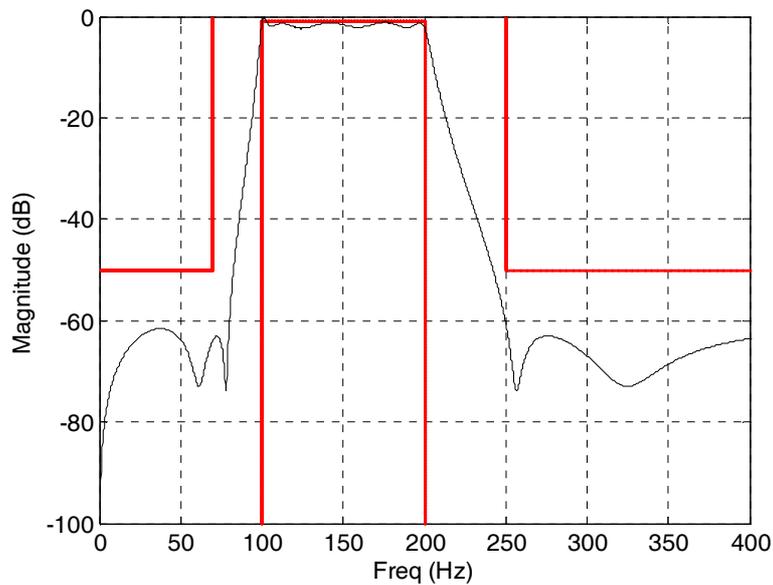


Figura 3.19 – Magnitude do filtro passa-faixa de ordem 10 com $k = 1$.

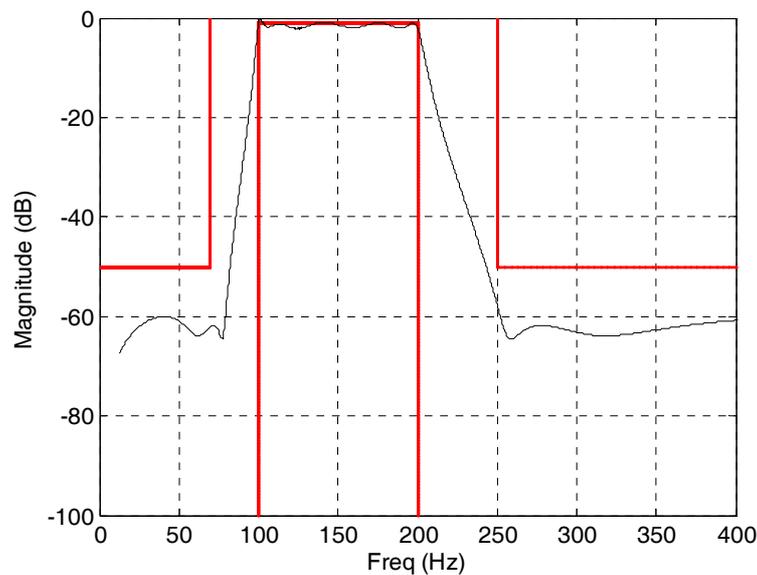


Figura 3.20 – Magnitude do filtro passa-faixa de ordem 10 usando um filtro intermediário PF-PF.

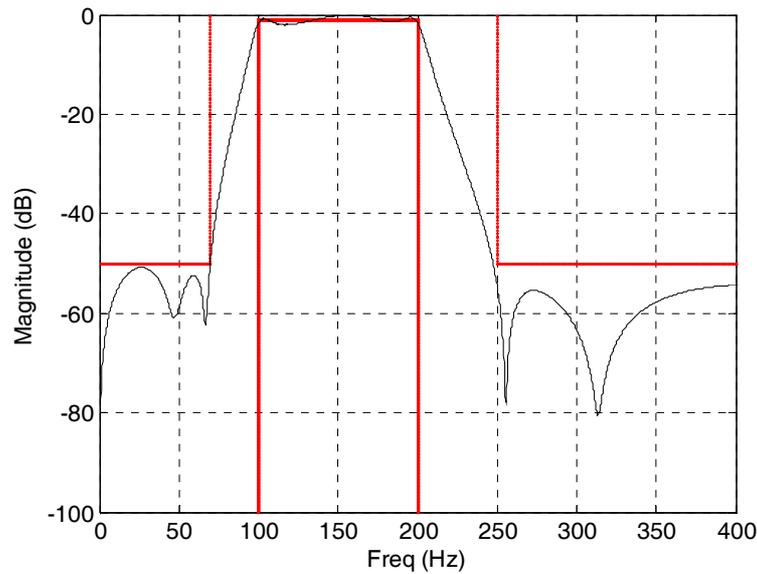


Figura 3.21 – Magnitude do filtro passa-faixa de ordem 11 construído através de um filtro passa-baixas em cascata com um filtro passa-altas.

Através das curvas das figuras anteriores, pode-se observar que nenhuma das alternativas de projeto atende perfeitamente às especificações. Não é possível dizer qual das estratégias é melhor, mas, dependendo do projeto, uma delas pode se mostrar mais eficiente do que a outra.

D. Transformação PB-RF

Fazendo finalmente a análise das restrições impostas pelos parâmetros da transformação passa-baixas \leftrightarrow rejeita-faixa da seção 3.6, observa-se que, apesar da semelhança no projeto entre um filtro passa-faixa e um rejeita-faixa, algumas características específicas do filtro rejeita-faixa fazem com que nem todas as estratégias aplicadas no caso anterior se apliquem também aqui.

Foi visto que para trabalhar com k em uma região de maior linearidade, é necessário ter $\theta_p = \pi - (\omega_2 - \omega_1)$. Assim, quanto mais afastada estiver a banda passante $(\omega_2 - \omega_1)$ de π , maior o valor de θ_p , o que pode levar à sobreposição de espectro em muitos casos. Além disso, outro problema que eventualmente pode ocorrer quando o valor de $(\omega_2 - \omega_1)$ é grande, é o mapeamento de θ_s em uma frequência mais baixa do que θ_p . Isso torna inviável o projeto do filtro passa-baixas protótipo, com um problema similar ao

que ocorre no projeto de um passa-faixa, independente da frequência de amostragem utilizada.

Por estes motivos, torna-se muito difícil trabalhar com valores de k em uma região de maior linearidade. Tenta-se então escolher um θ_p de modo que se opere com um valor de k em uma região em que sua não-linearidade não tenha grande influência no mapeamento $\omega \rightarrow \theta$. Utilizando filtros intermediários RF-RF para abrandar as limitações entre várias etapas, assim como descrito para o projeto de filtros passa-faixa, é possível reduzir as degradações no filtro final resultante.

A estratégia de utilizar um filtro passa-baixas cascadeado com um passa-altas não pode ser aplicada neste caso. Isso porque o filtro passa-baixas necessário possui ao menos um zero no infinito, o que causa uma atenuação indesejada na banda passante direita do filtro rejeita-faixa. Da mesma maneira, o filtro passa-altas apresenta ao menos um zero na origem, o que causa uma degradação na banda passante esquerda. Isso é mais bem visualizado na Figura 3.24, a qual mostra um exemplo do projeto de um filtro rejeita-faixa através do cascadeamento de um filtro passa-baixas e um passa-altas. Considere então um filtro rejeita-faixa com as seguintes especificações: $A_s = 50$ dB, $A_p = 1$ dB, $f_1 = 100$ Hz, $f_2 = 400$ Hz, $f_3 = 150$ Hz, $f_4 = 350$ Hz e $F_s = 8000$ Hz.

A Figura 3.22 ilustra a resposta em frequência do filtro rejeita-faixa projetado considerando k arbitrário e uma transformação PB-RF direta. Na Figura 3.23 o mesmo projeto é realizado utilizando-se um filtro rejeita-faixa intermediário e a Figura 3.24 mostra o filtro rejeita-faixa formado pelo cascadeamento de um filtro passa-baixas e um filtro passa-altas.

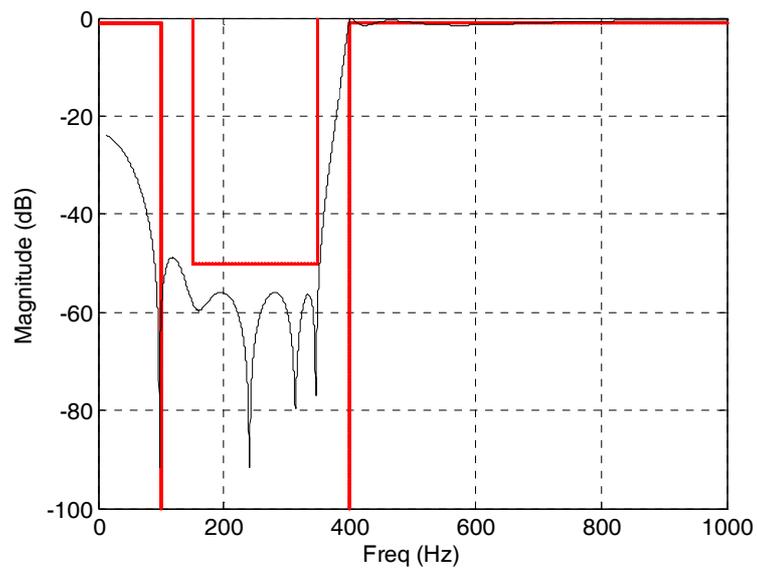


Figura 3.22 – Magnitude do filtro rejeita-faixa projetado com k arbitrário.

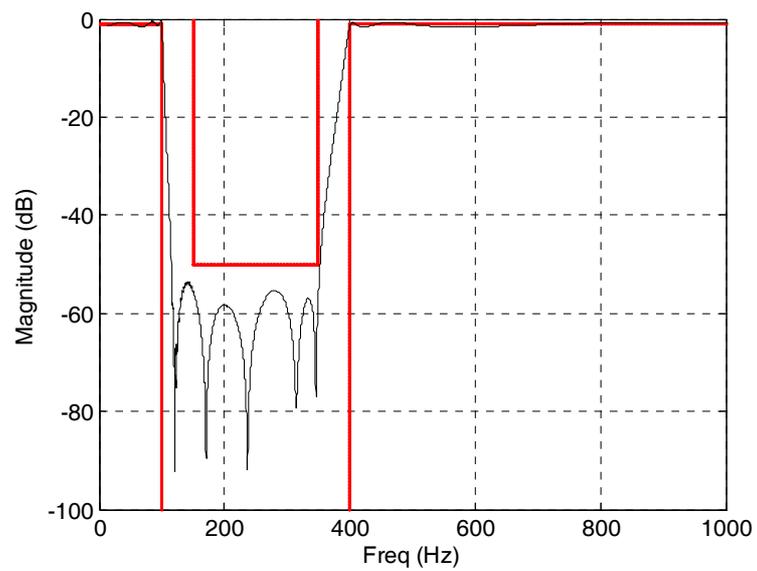


Figura 3.23 – Magnitude do filtro rejeita-faixa de ordem 12 usando um filtro intermediário RF-RF.

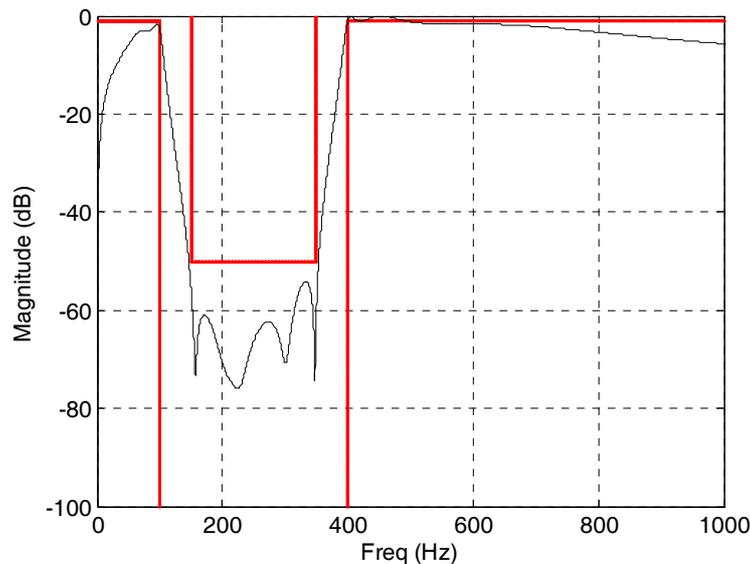


Figura 3.24 – Magnitude do filtro rejeita-faixa de ordem 12 construído através de um filtro passa-baixas em cascata com um filtro passa-altas.

Analisando-se as Figuras 3.22 a 3.24, pode-se observar que nenhuma das estratégias de projeto de filtros rejeita-faixa usadas atendeu completamente às especificações do gabarito. O filtro obtido com k arbitrário apresentou grande distorção na banda passante esquerda devido ao mapeamento $\theta \rightarrow \omega$ ter sido realizado utilizando-se um valor não adequado de k . O filtro projetado utilizando um filtro rejeita-faixa intermediário feriu levemente as especificações de projeto, sendo no entanto aquele que forneceu a melhor resposta em magnitude para as especificações requisitadas. A utilização de mais filtros rejeita-faixa intermediários pode melhorar ainda mais sua resposta em magnitude. Por último, o filtro projetado pela associação em cascata de um filtro passa-baixas e um passa-altas resultou em uma grande distorção nas duas bandas passantes devido à influência dos zeros nessas regiões, como já observado.

No capítulo 4 são apresentados alguns exemplos de filtros projetados utilizando os métodos descritos nos Capítulos 2 e 3.

3.9 CONCLUSÕES

Através do estudo da técnica de transformação espectral [17], são levantadas algumas restrições de sua aplicação devido à limitada precisão numérica das ferramentas

computacionais utilizadas. Com isso, os parâmetros envolvidos no equacionamento da transformação espectral geram degradações no mapeamento das frequências θ e ω , que resultam em distorção no projeto dos filtros.

Analisando o equacionamento de cada tipo de transformação foram levantadas as razões para tais restrições, propondo-se estratégias para tentar viabilizar o uso da transformação espectral. O estudo da sensibilidade clarifica a análise dos exemplos estudados e nos ajuda a buscar soluções para o problema em questão. Um método capaz de mitigar as restrições de projeto pelo uso de etapas intermediárias, reduzindo dessa forma a sensibilidade aos parâmetros em cada uma delas, foi adotado. No projeto de filtros passa-altas, tal solução demonstrou ser bastante eficiente para todos os casos avaliados. Já para projeto de filtros passa-faixa e rejeita-faixa, devido à maior complexidade do equacionamento, várias soluções foram propostas, porém não obtivemos o completo êxito nos exemplos considerados. Foi verificado que, dependendo das especificações e das características de projeto, uma das soluções propostas pode apresentar melhor desempenho do que as outras. A fim de prevenir tais problemas, pode-se sempre realizar uma pré-avaliação dos dados, como por exemplo, a ordem do filtro a ser projetado e a melhor frequência de amostragem a ser utilizada. Desse modo, ao se analisar as especificações de projeto, caso seja verificada a possibilidade de alguma distorção devido aos parâmetros de entrada no filtro a ser projetado, novos parâmetros de projeto podem ser considerados. Essa facilidade é permitida no *software* desenvolvido para auxiliar os projetos aqui propostos, no qual uma pré-avaliação dos dados é realizada automaticamente. Janelas de advertência são exibidas ao usuário alertando de algum eventual erro que possa ocorrer bem como sugerindo alterações de projeto. Além disso, tentou-se reduzir-se ao máximo o número de operações de cálculo críticos realizadas pelo *software* a fim de melhorar a precisão numérica do processo.

No Apêndice A é exibido o *software* de projeto de filtros desenvolvido e nos Apêndices D, E, F e G são exibidos os algoritmos de projeto de cada tipo de filtro estudado (passa-baixas, passa-altas, passa-faixa e rejeita-faixa).

RESULTADOS E EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

Neste capítulo são mostrados quatro exemplos de projetos (passa-baixas, passa-altas, passa-faixa e rejeita-faixa) de filtros transicionais digitais baseados nas aproximações de Cauer e Chebyshev Inverso. Os exemplos discutidos comprovam o melhor desempenho dos filtros transicionais em relação a outras funções de aproximação, principalmente, quando levando em conta apenas as aproximações Cauer ou Chebyshev Inverso, em projetos que exigem especificações simultâneas de magnitude, fase e tempo, conforme discutido anteriormente neste trabalho. Gráficos comparativos entre os três tipos de aproximações mencionadas acima são gerados e medidas de linearidade de fase são obtidas para auxiliar na avaliação das estratégias de projeto propostas. Todos os resultados apresentados são gerados pelo *software* de auxílio desenvolvido. Dentre as seis técnicas estudadas para obter a transformação $s \rightarrow z$, são comparados os resultados obtidos com a invariância à rampa (que dentre as transformações de invariância é a que apresenta as melhores características) e com a transformação bilinear (a mais conhecida e usada na literatura).

O objetivo de cada projeto é atender, simultaneamente, a todas as especificações através de um filtro que possua a menor ordem possível. Os exemplos consideram especificações de magnitude, fase e tempo. Gráficos de singularidades, magnitude, atraso de fase, resposta ao impulso, resposta ao degrau e atraso de grupo são apresentados, além das medidas de linearidade de fase, discutidas no Capítulo 2, e de *overshoot* da resposta ao degrau [19].

4.1 EXEMPLO DE FILTRO PASSA-BAIXAS

Deseja-se projetar um filtro passa-baixas digital IIR com as seguintes especificações: $A_p = 2$ dB, $A_s = 30$ dB, $f_p = 100$ Hz, $f_s = 150$ Hz, $F_s = 4000$ Hz, $\Delta\tau_p < 15$ ms, $\varepsilon_{\tau_p} < 0,01$ e $\varepsilon_h < 600 \times 10^{-6}$.

As Figuras 4.1 a 4.6 mostram os gráficos obtidos através do *software* desenvolvido. A fim de facilitar a comparação dos resultados obtidos utilizando as técnicas de transformação bilinear e invariância à rampa, os gráficos são apresentados lado a lado.

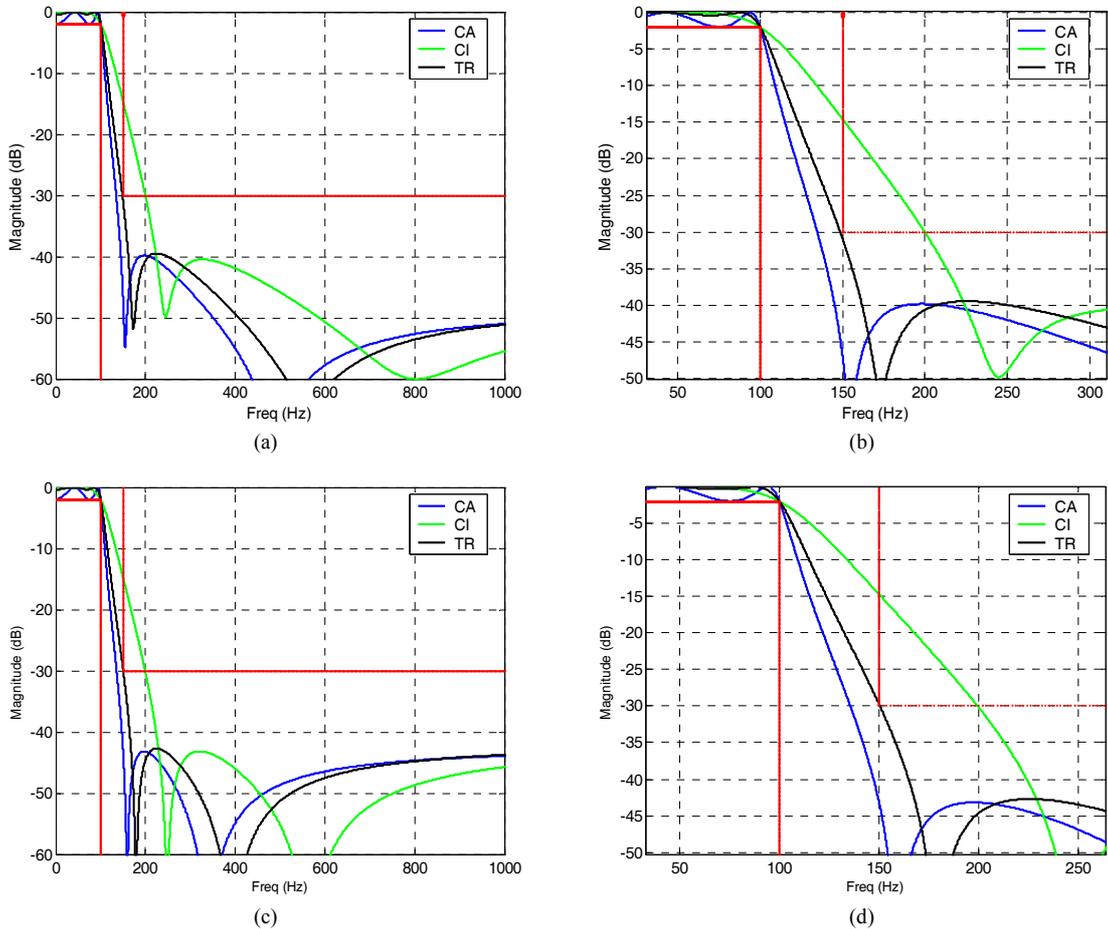


Figura 4.1 – Resposta de magnitude dos filtros passa-baixas de ordem 4 CA, CI e TR utilizando as técnicas: (a) Invariância à rampa; (b) Invariância à rampa (ampliação da banda de transição); (c) Transformação bilinear e (d) Transformação bilinear (ampliação da banda de transição).

O filtro TR passa-baixas que satisfaz aos requisitos de magnitude com a menor seletividade possível é obtido a partir do fator interpolador $m = 0,21875$.

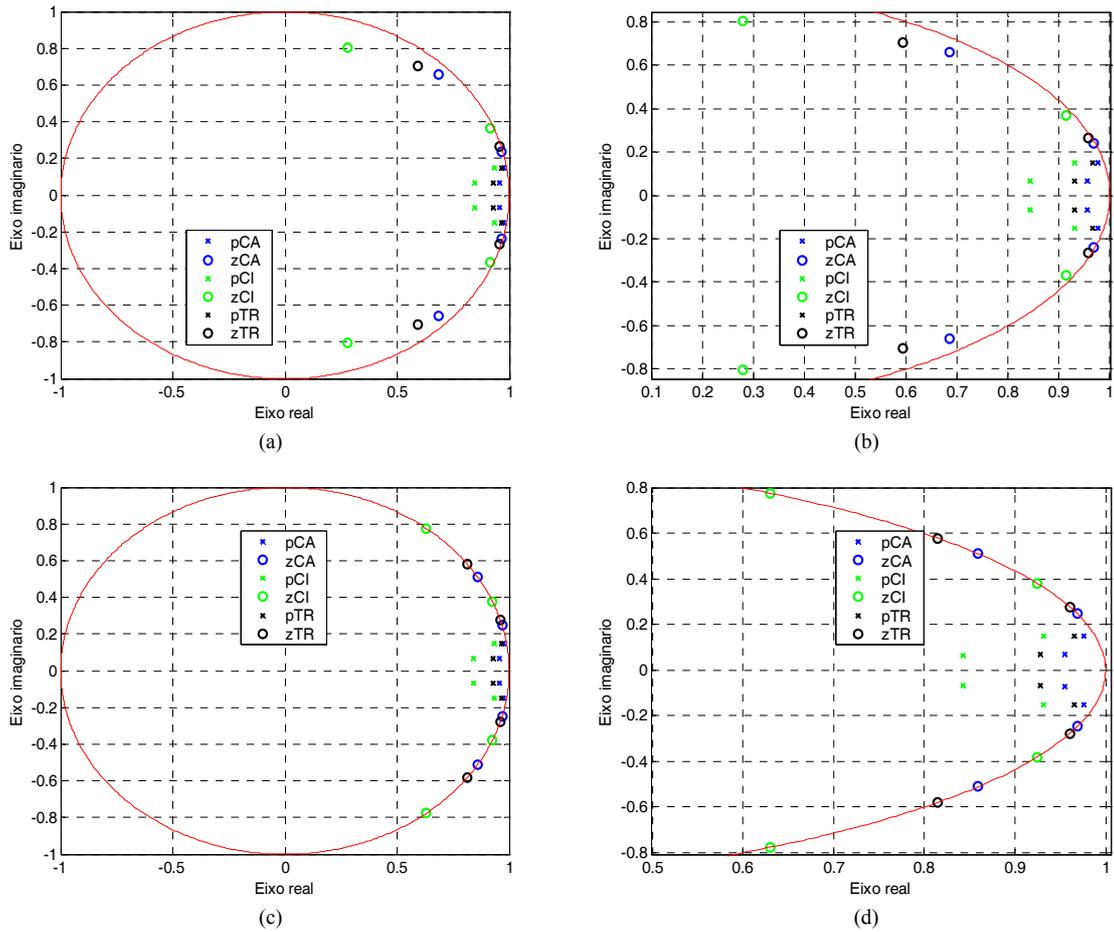


Figura 4.2 – Mapa de pólos e zeros dos filtros CA, CI e TR passa-baixas utilizando as técnicas: (a) Invariância à rampa; (b) Invariância à rampa (ampliação); (c) Transformação bilinear e (d) Transformação bilinear (ampliação).

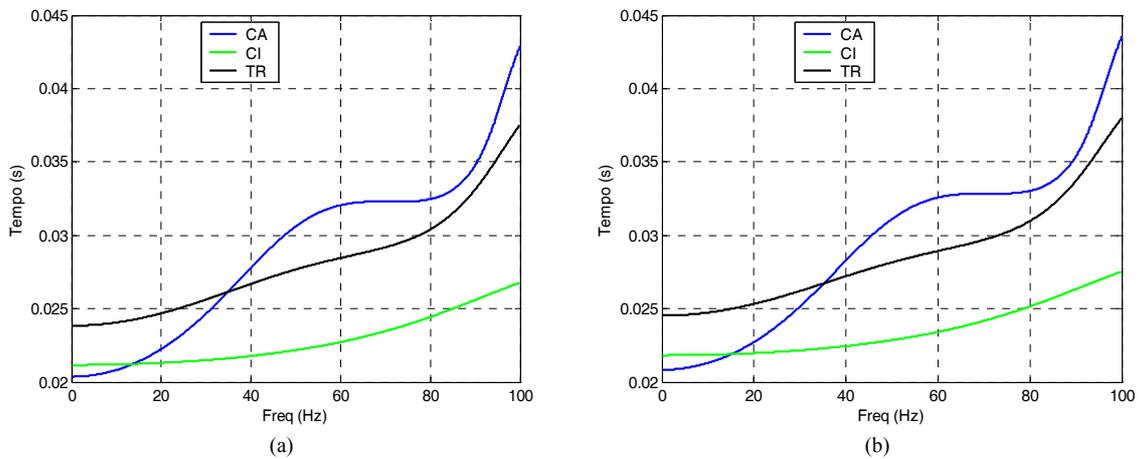


Figura 4.3 – Atraso de fase na banda passante dos filtros CA, CI e TR passa-baixas. (a) Invariância à rampa; (b) Transformação bilinear.

Os gráficos da resposta ao impulso e resposta ao degrau são apresentados com traço contínuo para facilitar a visualização.

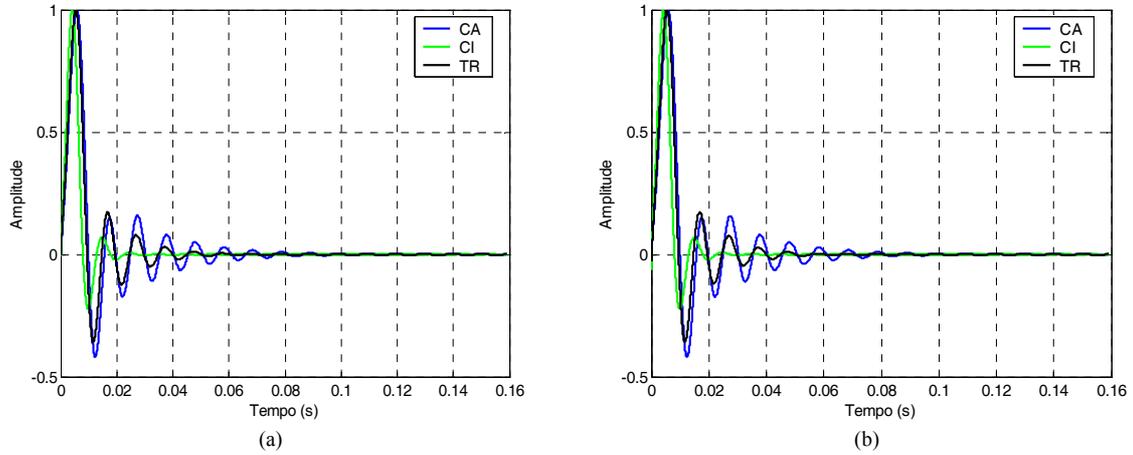


Figura 4.4 – Resposta ao impulso dos filtros CA, CI e TR passa-baixas. (a) Invariância à rampa. (b) Transformação bilinear.

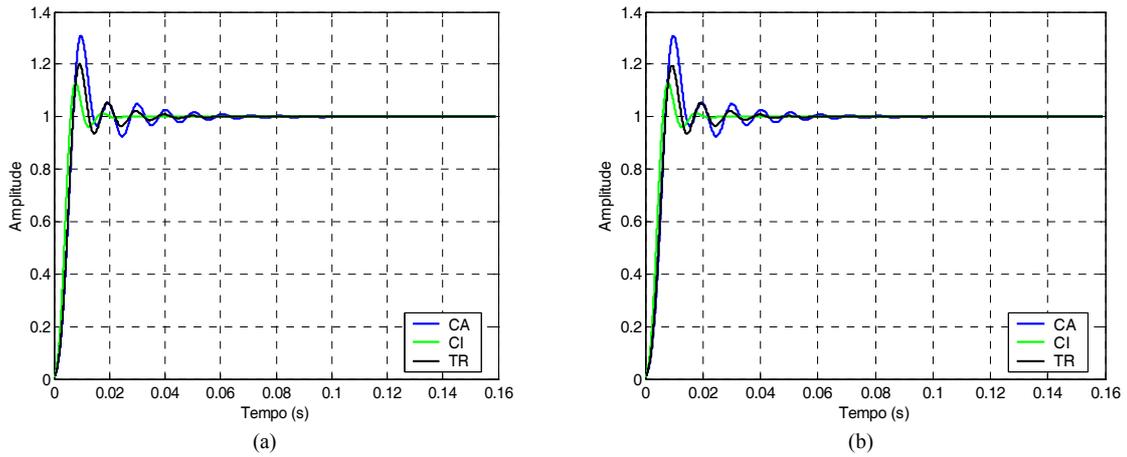


Figura 4.5 – Resposta ao degrau dos filtros CA, CI e TR passa-baixas. (a) Invariância à rampa; (b) Transformação bilinear.

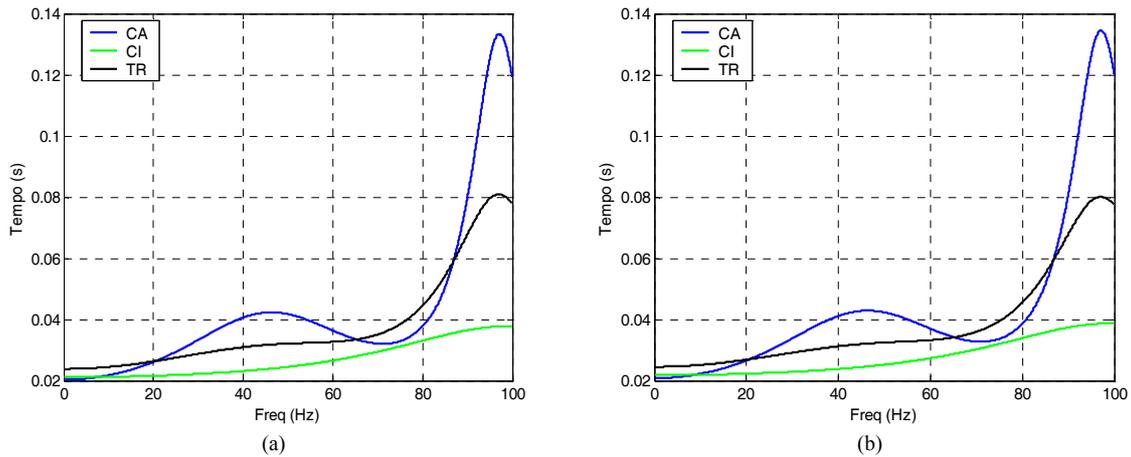


Figura 4.6 – Atraso de grupo na banda passante dos filtros CA, CI e TR passa-baixas. (a) Invariância à rampa. (b) Transformação bilinear.

As equações (5.1) a (5.3) mostram, respectivamente, as funções de transferência dos filtros CA, CI e TR projetados através da técnica de invariância à rampa, e as equações (5.4) a (5.6) mostram as funções de transferência dos mesmos filtros projetados através da técnica de transformação bilinear.

$$H_{CA}(z) = 0,0039670696 \frac{z^4 - 3,3042451258z^3 + 4,5450452870z^2 - 3,1055112125z + 0,8957897119}{z^4 - 3,8628383971z^3 + 5,6226810213z^2 - 3,6544599491z + 0,8947735778} \quad (5.1)$$

$$H_{CI}(z) = 0,0047016855 \frac{z^4 - 2,3864482534z^3 + 2,7133263054z^2 - 1,8615620406z + 0,7005101919}{z^4 - 3,5496707231z^3 + 4,7478890534z^2 - 2,8343391397z + 0,6369013496} \quad (5.2)$$

$$H_{TR}(z) = 0,0043602359 \frac{z^4 - 3,1020134502z^3 + 4,1105259228z^2 - 2,7994310962z + 0,8390815685}{z^4 - 3,7930455536z^3 + 5,4214125773z^2 - 3,4597847839z + 0,8316398272} \quad (5.3)$$

$$H_{CA}(z) = 0,0071195421 \frac{z^4 - 3,6571926741z^3 + 5,3318345996z^2 - 3,6571926741z + 1,0000000000}{z^4 - 3,8628358810z^3 + 5,6226800050z^2 - 3,6544646916z + 0,8947769642} \quad (5.4)$$

$$H_{CI}(z) = 0,0070551709 \frac{z^4 - 3,1099977160z^3 + 4,3309694839z^2 - 3,1099977160z + 1,0000000000}{z^4 - 3,5494789007z^3 + 4,7474014313z^2 - 2,8339211444z + 0,6367815547} \quad (5.5)$$

$$H_{TR}(z) = 0,0074577046 \frac{z^4 - 3,5500364433z^3 + 5,1292552609z^2 - 3,5500364433z + 1,0000000000}{z^4 - 3,7881064570z^3 + 5,4073188479z^2 - 3,4462950829z + 0,8273110543} \quad (5.6)$$

As Tabelas 5.1 e 5.2 apresentam as medidas de linearidade de fase e o *overshoot* da resposta ao degrau para as técnicas de invariância à rampa e transformação bilinear, respectivamente.

Tabela 4.1 – Medidas de linearidade de fase dos filtros CA, CI e TR passa-baixas para a invariância à rampa

Filtros	$\Delta\tau_p$ (ms)	$\Delta\tau_g$ (ms)	$\varepsilon_{\tau_p} (10^{-3})$	ε_{τ_g}	$\varepsilon_h (10^{-6})$	γ (%)
CA	22,5426	112,9907	19,7630	449,6537	942,2911	30,9302
CI	5,6016	16,5821	1,7151	19,6979	136,5430	12,7132
TR	13,6839	57,0264	7,2162	158,3512	595,9064	19,9695

Tabela 4.2 – Medidas de linearidade de fase dos filtros CA, CI e TR passa-baixas para a transformação bilinear

Filtros	$\Delta\tau_p$ (ms)	$\Delta\tau_g$ (ms)	$\varepsilon_{\tau_p} (10^{-3})$	ε_{τ_g}	$\varepsilon_h (10^{-6})$	γ (%)
CA	22,7106	113,7145	20,0549	455,5788	944,2945	30,8321
CI	5,6895	16,8886	1,7674	20,3243	138,8497	12,7232
TR	13,4516	55,5345	7,0453	153,0038	583,8584	19,5363

Verifica-se da Figura 4.1 que o filtro TR apresenta uma resposta de magnitude intermediária à dos filtros Caue e Chebyshev Inverso, atendendo às especificações de magnitude da maneira menos seletiva possível, ou seja, deixando a mínima folga possível no limite da banda de rejeição, e ainda preservando a ordem do filtro Caue. O filtro

Chebyshev Inverso não é capaz de atender às especificações de magnitude com a ordem mínima e o filtro Cauer apresenta uma certa “folga” na banda de transição, o que degrada suas respostas de fase e tempo, conforme discutido no Capítulo 2. O fato de o filtro TR, no que se refere à especificação de magnitude, tirar proveito de tal “folga” faz com que ele tenha suas características de fase e tempo otimizadas. Essa é a principal vantagem do filtro TR em relação às outras funções de aproximação clássicas. Tais características são observadas nas Figuras 4.3 a 4.6.

O atraso de fase (Figura 4.3) mostra uma oscilação na banda passante mais branda do que a apresentada pelo filtro Cauer; porém, maior do que aquela exibida pelo filtro Chebyshev Inverso. Essa diferença pode ser mais bem analisada através das medidas de variação do atraso de fase $\Delta\tau_p$ e de erro do atraso de fase ε_{τ_p} mostradas nas Tabelas 4.1 e 4.2. Comportamento similar é observado nas curvas de atraso de grupo (Figura 4.6) como também através das medidas de variação do atraso de grupo $\Delta\tau_g$ e erro do atraso de grupo ε_{τ_g} nas Tabelas 4.1 e 4.2. Do gráfico da resposta ao impulso (Figura 4.4), nota-se que o filtro TR apresenta uma oscilação intermediária àquela dos filtros CA e CI, resultando, conseqüentemente, em um erro de simetria também intermediário ao desses dois filtros. O mesmo ocorre com a resposta ao degrau dos filtros. O filtro TR apresenta uma porcentagem de *overshoot* intermediária à dos filtros CA e CI. O comportamento das respostas do filtro TR em relação aos filtros CA e CI é explicado pela posição dos pólos e zeros dos três filtros conforme mostra a Figura 4.2. Todas as singularidades do filtro transicional estão localizadas sobre uma certa trajetória entre as singularidades dos filtros CA e CI, definidas pelas equações de interpolação utilizadas na obtenção do filtro TR.

A utilização de diferentes técnicas para obter a transformação $s \rightarrow z$ proporciona resultados semelhantes tanto nas respostas gráficas quanto nas medidas de linearidade de fase. As maiores diferenças que se pode notar entre as curvas obtidas via transformação bilinear e invariância ao impulso ocorre na banda de rejeição da resposta em magnitude (Figura 4.1). Isso é devido ao posicionamento dos zeros das funções envolvidas (Figura 4.2). No entanto, não se pode categoricamente afirmar que uma técnica é mais eficiente do que a outra a partir de tais diferenças.

4.2 EXEMPLO DE FILTRO PASSA-ALTAS

Deseja-se projetar um filtro passa-altas digital IIR com as seguintes especificações: $A_p = 3\text{dB}$, $A_s = 35\text{ dB}$, $f_p = 80\text{ Hz}$, $f_s = 50\text{ Hz}$, $F_s = 4000\text{ Hz}$, $\Delta\tau_p < 55\text{ms}$, $\varepsilon_{\tau_p} < 0,3$ e $\gamma < 50\%$.

Similar ao que foi considerado no exemplo anterior, a fim de facilitar a comparação, os resultados provenientes da transformação bilinear e invariância à rampa são mostrados lado a lado nas Figuras 4.7 a 4.12.

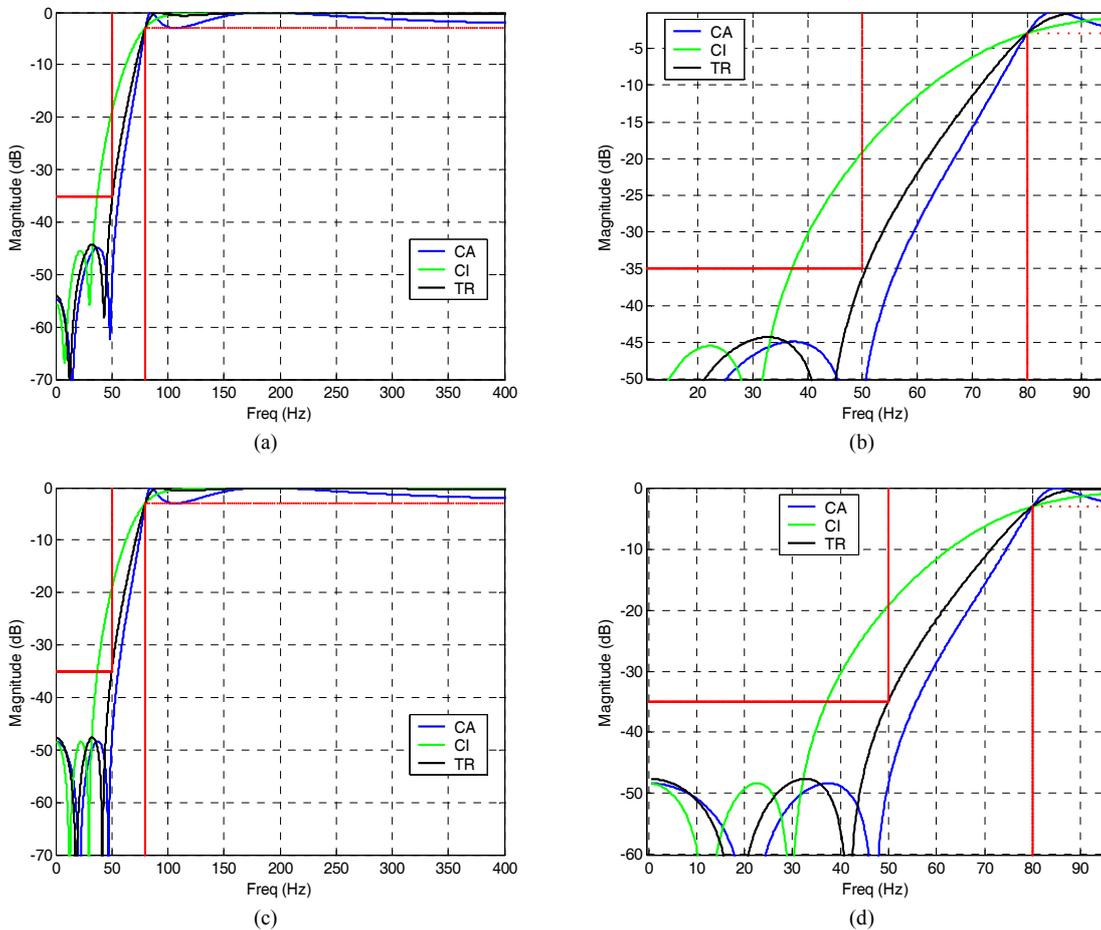


Figura 4.7 – Resposta de magnitude dos filtros passa-altas de ordem 4 CA, CI e TR. (a) Invariância à rampa; (b) Invariância à rampa (ampliação da banda de transição); (c) Transformação bilinear e (d) Transformação bilinear (ampliação da banda de transição).

O filtro TR passa-altas que satisfaz aos requisitos de magnitude com a menor seletividade possível é obtido a partir do fator interpolador $m = 0,21875$.

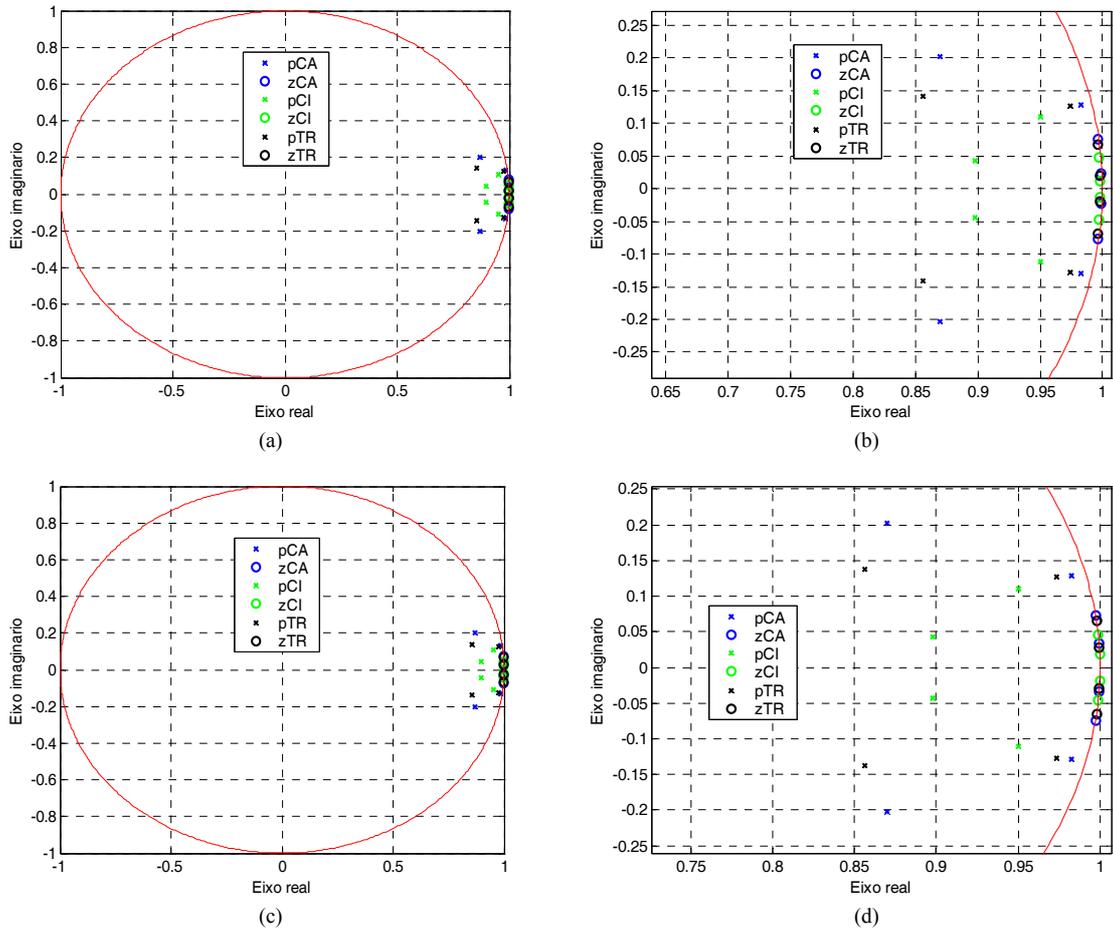


Figura 4.8 – Mapas de pólos e zeros dos filtros CA, CI e TR passa-altas. (a) Invariância à rampa; (b) Invariância à rampa (ampliação); (c) Transformação bilinear e (d) Transformação bilinear (ampliação).

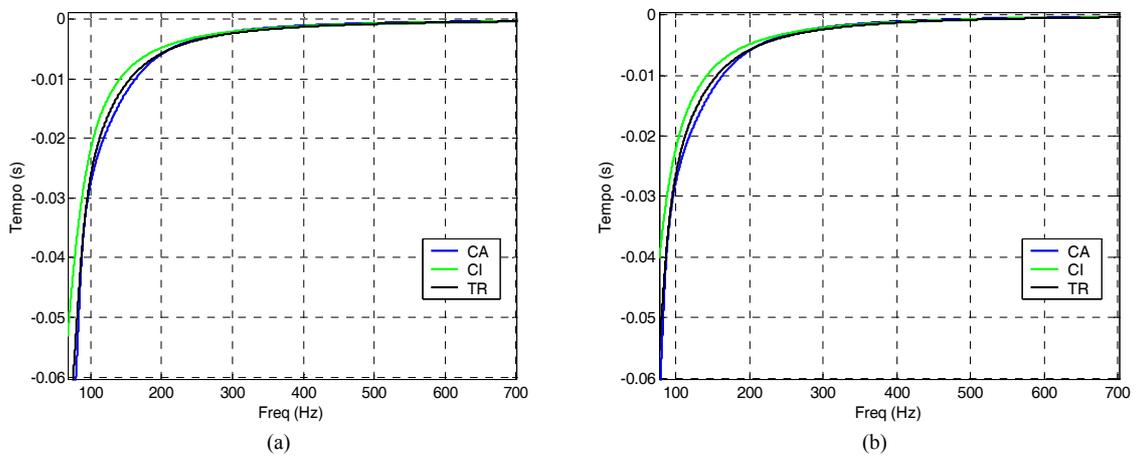


Figura 4.9 – Atraso de fase na banda passante dos filtros CA, CI e TR passa-altas. (a) Invariância à rampa. (b) Transformação bilinear.

Os gráficos da resposta ao impulso e resposta ao degrau são apresentados com traço contínuo para facilitar a visualização.

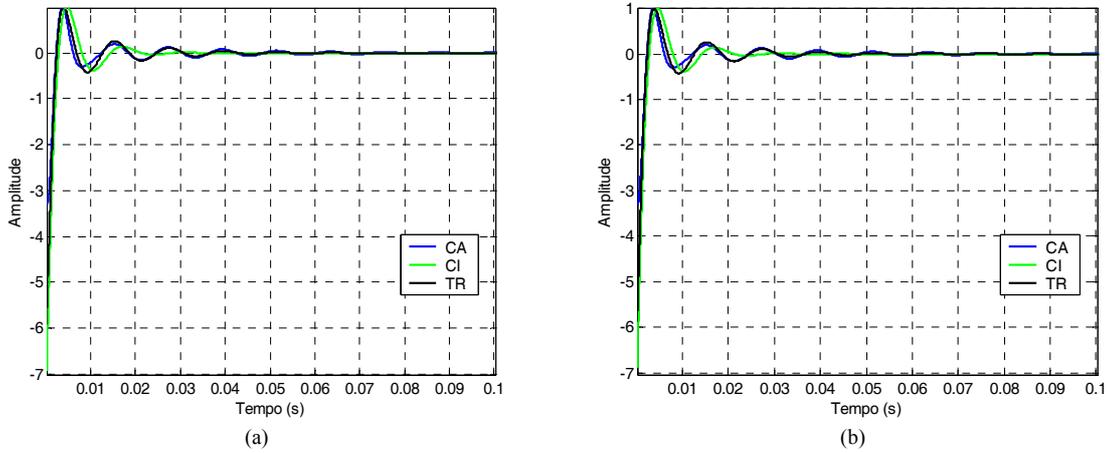


Figura 4.10 – Resposta ao impulso dos filtros CA, CI e TR passa-altas. (a) Invariância à rampa. (b) Transformação bilinear.

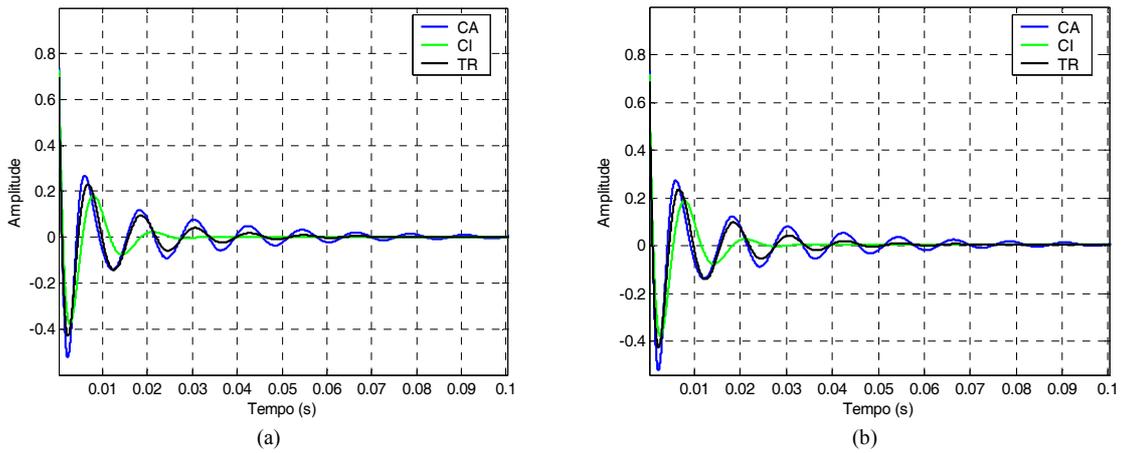


Figura 4.11 – Resposta ao degrau dos filtros CA, CI e TR passa-altas. (a) Invariância à rampa. (b) Transformação bilinear.

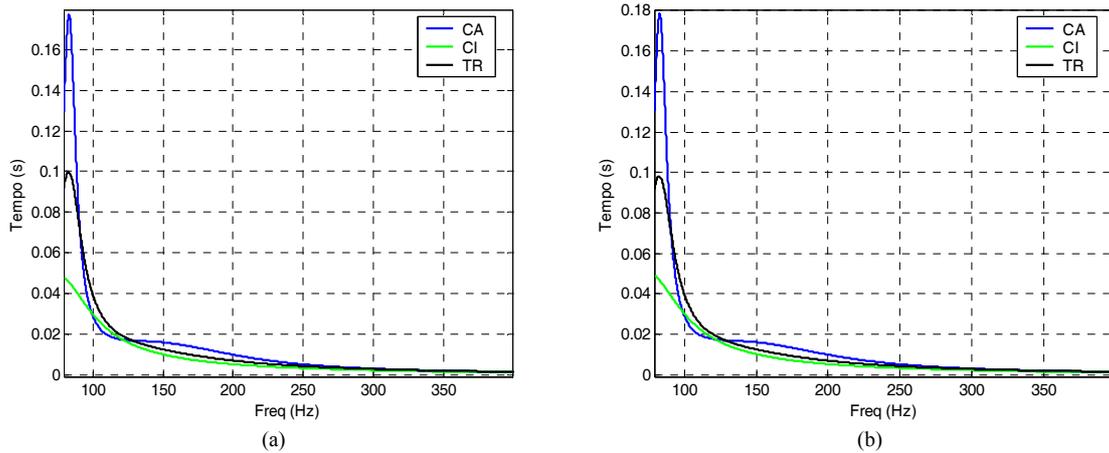


Figura 4.12 – Atraso de grupo na banda passante dos filtros CA, CI e TR passa-altas. (a) Invariância à rampa. (b) Transformação bilinear.

As equações (5.7) a (5.9) mostram, respectivamente, as funções de transferência dos filtros CA, CI e TR projetados através da técnica de invariância à rampa, e as equações (5.10) a (5.12) mostram as funções de transferência dos mesmos filtros projetados através da técnica de transformação bilinear.

$$H_{CA}(z) = 0,6180739047 \frac{z^4 - 3,9893269055z^3 + 5,9743164549z^2 - 3,9806309906z + 0,9956443744}{z^4 - 3,7046347835z^3 + 5,1978848603z^2 - 3,2754326177z + 0,7831599858} \quad (5.7)$$

$$H_{CI}(z) = 0,8627164740 \frac{z^4 - 3,9904631465z^3 + 5,9738306131z^2 - 3,9762622474z + 0,9928951393}{z^4 - 3,6964134466z^3 + 5,1365799253z^2 - 3,1796821171z + 0,7396975215} \quad (5.8)$$

$$H_{TR}(z) = 0,7835483413 \frac{z^4 - 3,9889623478z^3 + 5,9719175921z^2 - 3,9769283027z + 0,9939748045}{z^4 - 3,6601010101z^3 + 5,0527617656z^2 - 3,1182517415z + 0,7262758261} \quad (5.9)$$

$$H_{CA}(z) = 0,6188089657 \frac{z^4 - 3,9934518295z^3 + 5,9869096822z^2 - 3,9934518295z + 1,0000000000}{z^4 - 3,7048415854z^3 + 5,1984391166z^2 - 3,2759272550z + 0,7833061998} \quad (5.10)$$

$$H_{CI}(z) = 0,8603150293 \frac{z^4 - 3,9974639974z^3 + 5,9949287991z^2 - 3,9974639974z + 1,0000000000}{z^4 - 3,6969600806z^3 + 5,1381057357z^2 - 3,1811063500z + 0,74014194977} \quad (5.11)$$

$$H_{TR}(z) = 0,7883840460 \frac{z^4 - 3,9949030140z^3 + 5,9898095403z^2 - 3,9949030140z + 1,0000000000}{z^4 - 3,6595074088z^3 + 5,0501205662z^2 - 3,1147807196z + 0,7248325443} \quad (5.12)$$

As Tabelas 5.3 e 5.4 apresentam as medidas de linearidade de fase e o *overshoot* da resposta ao degrau utilizando as técnicas de invariância à rampa e transformação bilinear, respectivamente, para o exemplo do filtro passa-altas.

Tabela 4.3 – Medidas de linearidade de fase dos filtros CA, CI e TR passa-altas para a invariância à rampa

Filtros	$\Delta\tau_p$ (ms)	$\Delta\tau_g$ (ms)	$\varepsilon_{\tau_p} (10^{-3})$	ε_{τ_g}	$\varepsilon_h (10^{-3})$	γ (%)
CA	58,1906	177,4837	318,4339	1,6012	12,2978	52,2312
CI	37,1638	47,8680	174,3916	0,2987	42,2544	37,6403
TR	51,3765	99,6296	276,7022	0,8660	27,3521	42,8690

Tabela 4.4 – Medidas de linearidade de fase dos filtros CA, CI e TR passa-altas para a transformação bilinear

Filtros	$\Delta\tau_p$ (ms)	$\Delta\tau_g$ (ms)	$\varepsilon_{\tau_p} (10^{-3})$	ε_{τ_g}	$\varepsilon_h (10^{-3})$	γ (%)
CA	58,7395	178,4567	325,1320	1,6223	12,1242	52,1232
CI	37,9038	48,8373	181,6120	0,3099	41,2532	38,0272
TR	51,6738	98,0212	282,2161	0,8584	27,6033	42,6967

Nota-se da Figura 4.7 que, assim como verificado no exemplo anterior, o filtro TR passa-altas apresenta uma resposta de magnitude intermediária à dos filtros Cauer e Chebyshev Inverso, atendendo às especificações de magnitude da maneira menos seletiva possível e ainda preservando a ordem do filtro Cauer. O filtro CI, projetado com a mesma ordem do filtro CA, novamente não atende às especificações de magnitude enquanto o

filtro CA apresenta uma certa “folga” na banda de transição. As mesmas observações feitas para a resposta de magnitude para o exemplo de filtros passa-baixas se aplicam também nesse caso.

As curvas de atraso de fase (Figura 4.9) e atraso de grupo (Figura 4.12) mostram uma oscilação do filtro TR na banda passante mais branda do que a apresentada pelo filtro Cauer, porém maior do que aquela apresentada pelo Chebyshev Inverso. Tal diferença pode ser mais bem analisada através das medidas de variação do atraso de fase $\Delta\tau_p$ e de atraso de grupo $\Delta\tau_g$, como também do erro do atraso de fase ε_{τ_p} e do atraso de grupo ε_{τ_g} mostrados nas Tabelas 4.3 e 4.4. Do gráfico da resposta ao impulso (Figura 4.10) nota-se uma diferença de comportamento em relação ao exemplo anterior. Analisando as Tabelas 4.3 e 4.4, nota-se um melhor desempenho do filtro Cauer na simetria da resposta ao impulso, ao contrário do que se previa. Isso ocorre em virtude de a resposta ao impulso de um filtro passa-altas ideal não possuir a mesma característica de simetria de um filtro passa-baixas ideal, para o qual a medida de simetria foi desenvolvida. As medidas do erro de simetria da resposta ao impulso do filtro passa-altas encontram-se sombreadas na tabela, sendo que para esse tipo de filtros elas devem ser desconsideradas.

Da resposta ao degrau (Figura 4.11) nota-se que, diferentemente do exemplo anterior, a amplitude é máxima para o tempo inicial e quando o tempo tende a infinito, a amplitude tende a zero. Apesar de tal fato, a medida do *overshoot* pode ser feita de modo similar à dos filtros passa-baixas. O filtro TR apresenta porcentagem de *overshoot* intermediária à dos filtros CA e CI.

O comportamento do filtro passa-altas transicional está de acordo com o esperado, pois ele é o único que atende a todos os requisitos de projeto simultaneamente. Esse comportamento é explicado pela posição dos pólos e zeros dos três filtros conforme mostra a Figura 4.8. Todas as singularidades do filtro TR estão localizadas sobre uma certa trajetória entre as singularidades dos filtros CA e CI, definidas pelas equações de interpolação utilizadas na obtenção do filtro TR.

Comparando as respostas obtidas através da transformação bilinear e invariância à rampa, nota-se que há poucas diferenças. Com ambas as técnicas, pode-se obter um filtro digital que atende aos requisitos originais de projeto. A utilização de dois filtros intermediários na aplicação da transformação espectral abranda qualquer erro numérico de mapeamento que leve a degradações no filtro final. Além do mais, como a

ordem do projeto em questão é baixa ($n = 4$) as restrições devido à não-linearidade do mapeamento envolvido não são tão severas.

4.3 EXEMPLO DE FILTRO PASSA-FAIXA

Deseja-se projetar um filtro passa-faixa digital IIR com as seguintes especificações:

$A_p = 1$ dB, $A_s = 30$ dB, $f_{p1} = 120$ Hz, $f_{p2} = 150$ Hz, $f_{s3} = 100$ Hz, $f_{s4} = 180$ Hz, $F_s = 4000$ Hz, $\Delta\tau_p < 35$ ms, $\varepsilon_{\tau_p} < 0,015$ e $\varepsilon_h < 0,018$.

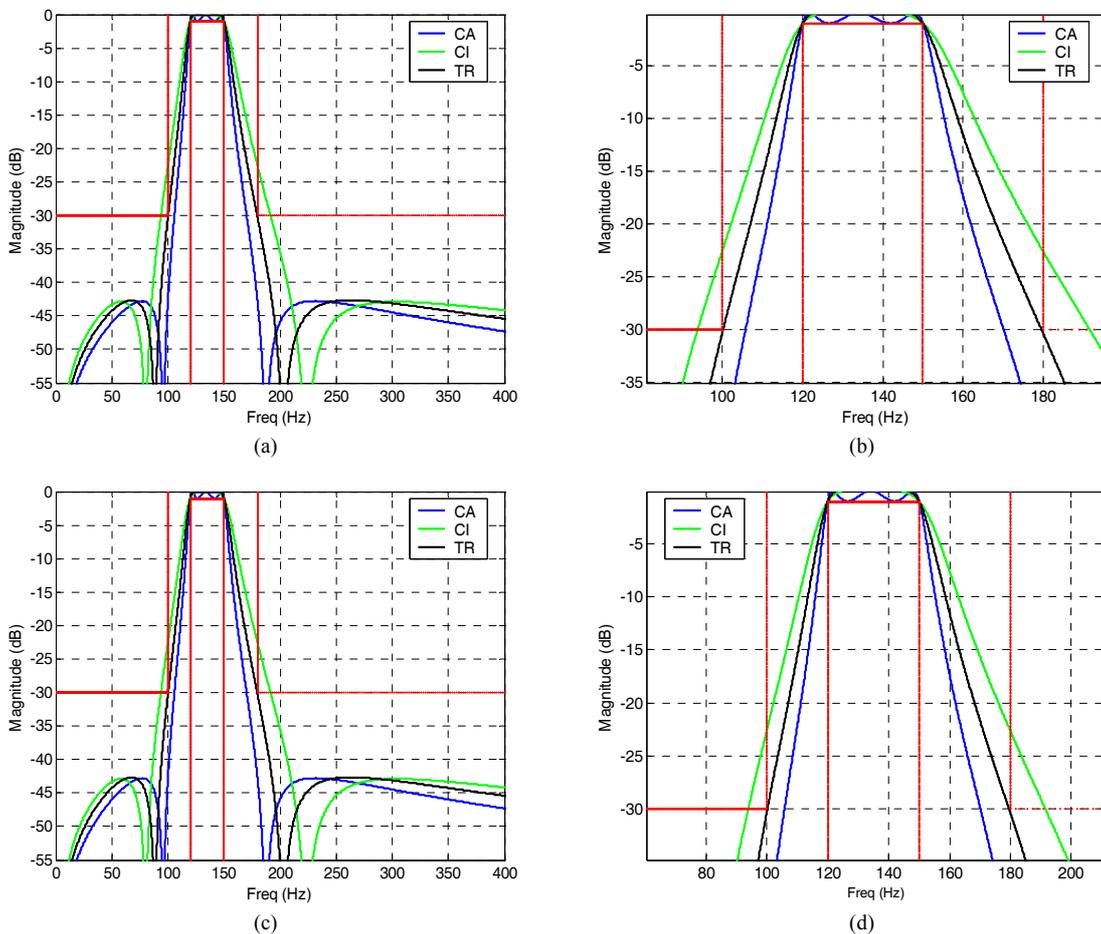


Figura 4.13 – Resposta de magnitude dos filtros passa-faixa de ordem 6 CA, CI e TR. (a) Invariância à rampa; (b) Invariância à rampa (ampliação da banda de transição); (c) Transformação bilinear e (d) Transformação bilinear (ampliação da banda de transição).

O filtro TR passa-faixa que satisfaz aos requisitos de magnitude com a menor seletividade possível é obtido a partir do fator interpolador $m = 0,46875$.

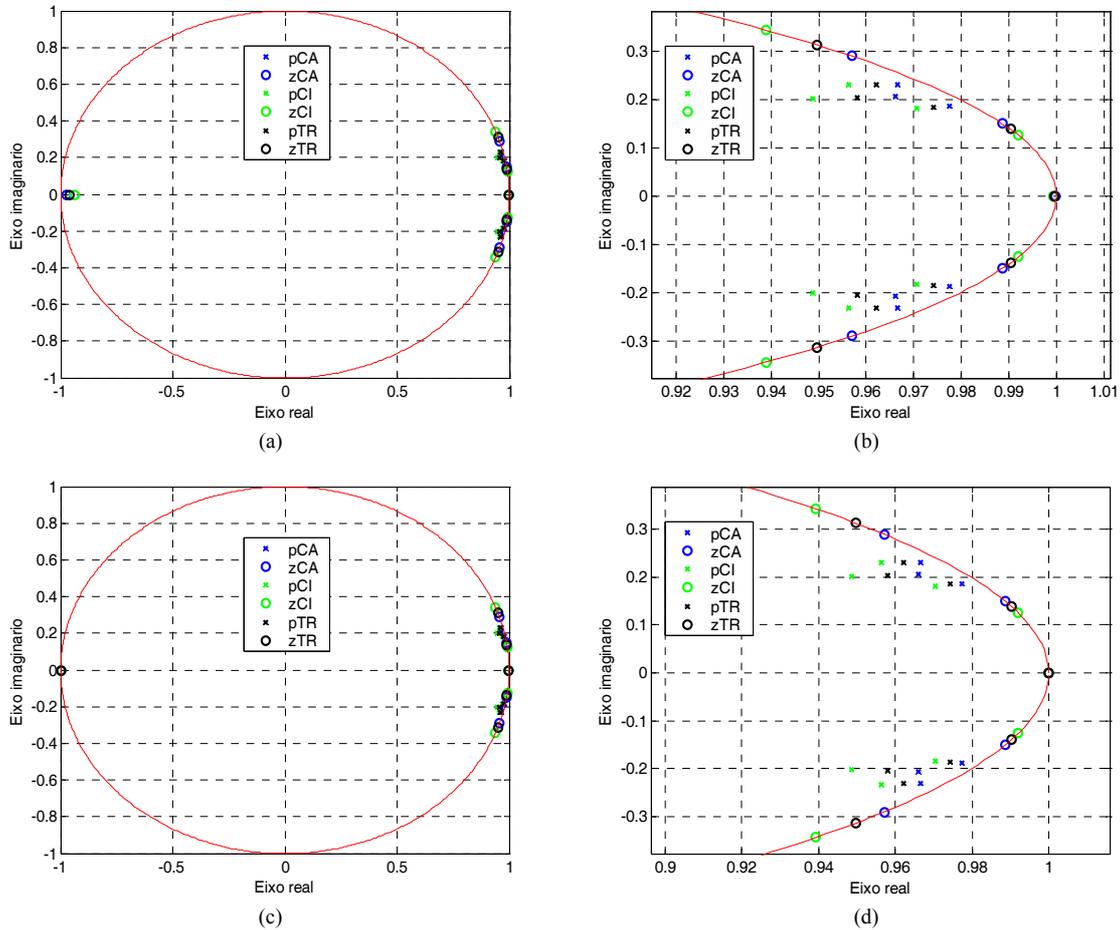


Figura 4.14 – Mapas de pólos e zeros dos filtros CA, CI e TR passa-faixa. (a) Invariância à rampa; (b) Invariância à rampa (ampliação); (c) Transformação bilinear e (d) Transformação bilinear (ampliação).

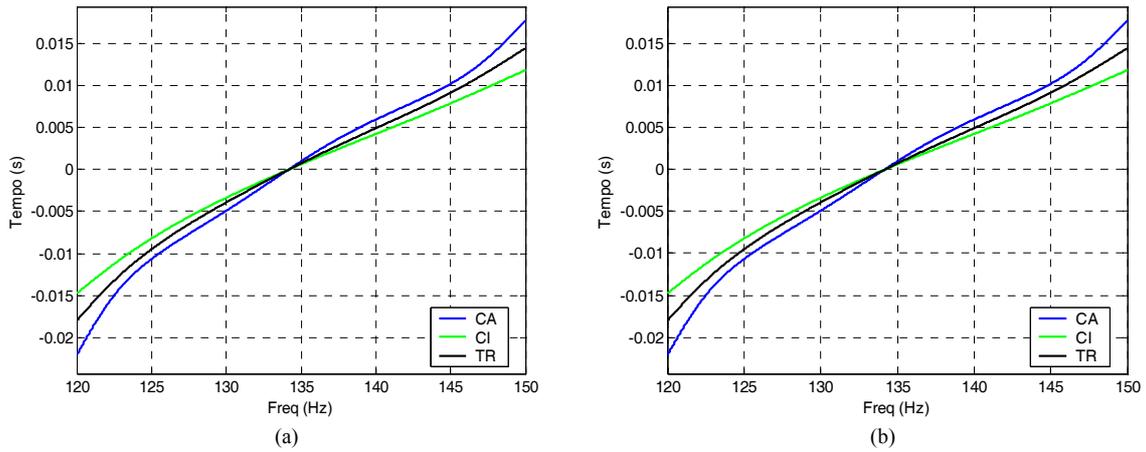


Figura 4.15 – Atraso de fase na banda passante dos filtros CA, CI e TR passa-faixa. (a) Invariância à rampa. (b) Transformação bilinear.

Os gráficos da resposta ao impulso e resposta ao degrau são apresentados com traço contínuo para facilitar a visualização.

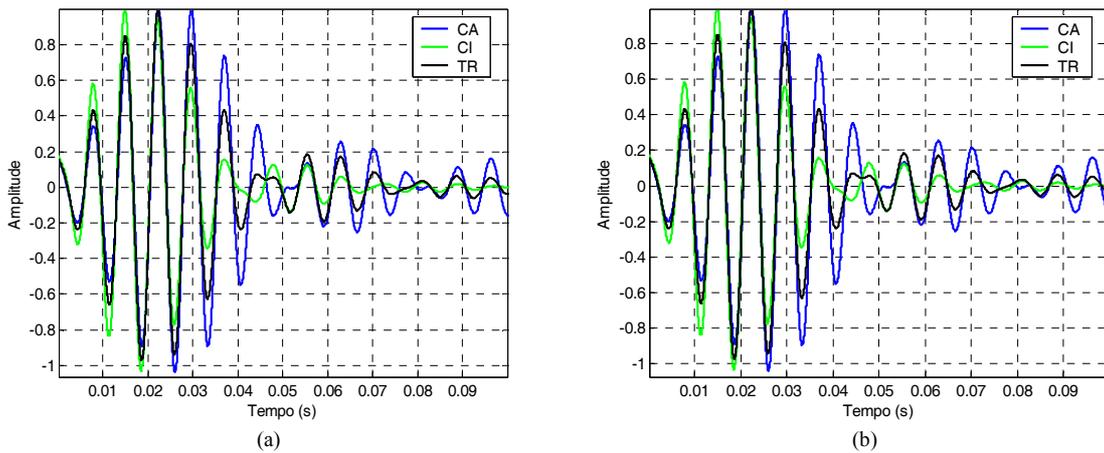


Figura 4.16 – Resposta ao impulso dos filtros CA, CI e TR passa-faixa. (a) Invariância à rampa. (b) Transformação bilinear.

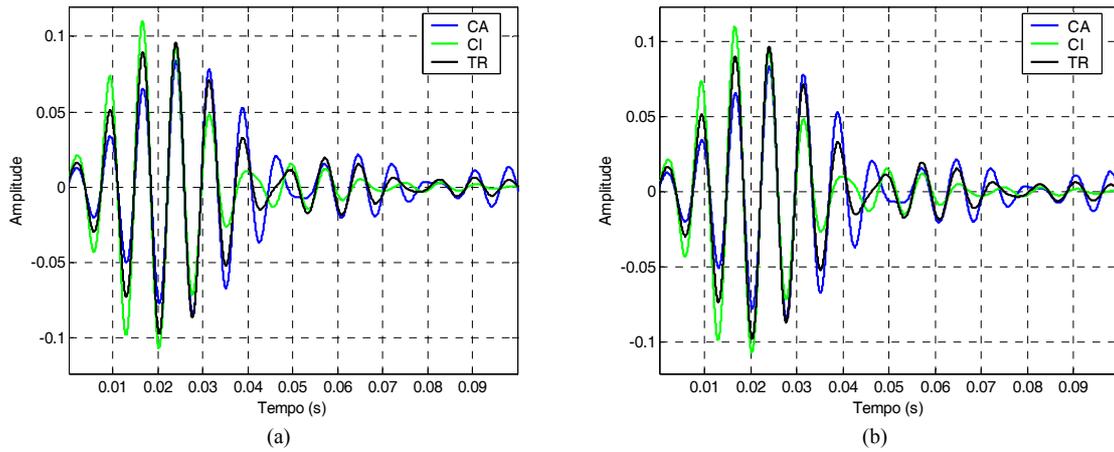


Figura 4.17 – Resposta ao degrau dos filtros CA, CI e TR passa-faixa. (a) Invariância à rampa. (b) Transformação bilinear.

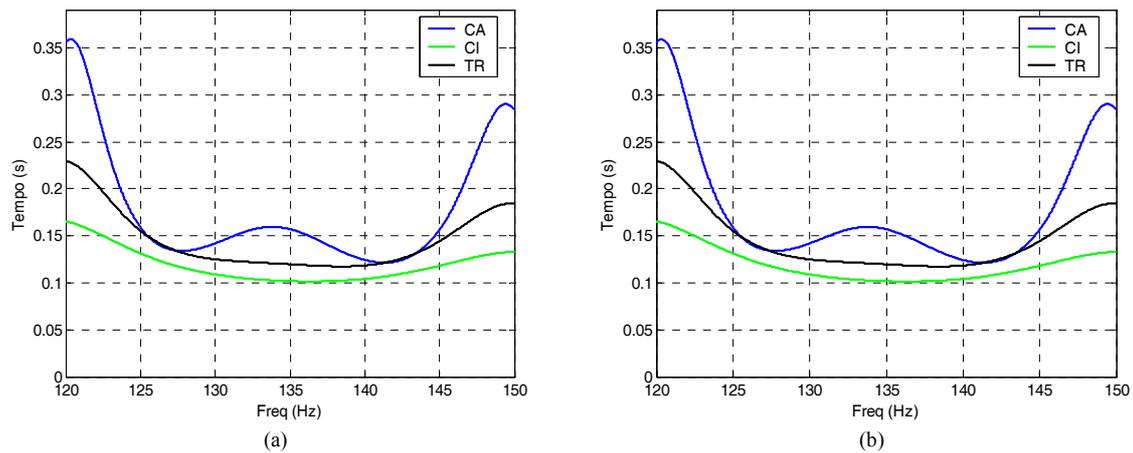


Figura 4.18 – Atraso de grupo na banda passante dos filtros CA, CI e TR passa-faixa. (a) Invariância à rampa. (b) Transformação bilinear.

As equações (5.13) a (5.15) mostram, respectivamente, as funções de transferência dos filtros CA, CI e TR projetados através da técnica de invariância à rampa, e as equações (5.16) a (5.18) mostram as funções de transferência dos mesmos filtros projetados através da técnica de transformação bilinear.

$$H_{CA}(z) = 0,0013097888 \frac{z^6 - 3,9153110262z^5 + 4,9022395147z^4 - 0,2334436591z^3 - 4,5502859491z^2 + 3,7723527661z - 0,9755505922}{z^6 - 5,8204349447z^5 + 14,2465601714z^4 - 18,7658654766z^3 + 14,0289186847z^2 - 5,6439645154z + 0,9548707531} \quad (5.13)$$

$$H_{CI}(z) = 0,0020740639 \frac{z^6 - 3,9225467030z^5 + 5,0211776101z^4 - 0,5841180829z^3 - 4,1396165594z^2 + 3,5633669962z - 0,9382606190}{z^6 - 5,7514077324z^5 + 13,9099276599z^4 - 18,1033648212z^3 + 13,3712284252z^2 - 5,3145705124z + 0,8882686817} \quad (5.14)$$

$$H_{TR}(z) = 0,0016865053 \frac{z^6 - 3,9207186329z^5 + 4,9614545975z^4 - 0,3957914291z^3 - 4,3644979369z^2 + 3,6779553947z - 0,9584002048}{z^6 - 5,7887614417z^5 + 14,0916766690z^4 - 18,4602161987z^3 + 13,7246523266z^2 - 5,4911566815z + 0,923888050} \quad (5.15)$$

$$H_{CA}(z) = 0,0012956525 \frac{z^6 - 3,8914277634z^5 + 4,7848041887z^4 - 4,7848041887z^2 + 3,8914277634z - 1,0000000000}{z^6 - 5,8204358940z^5 + 14,2465648959z^4 - 18,765874955z^3 + 14,0289282640z^2 - 5,6439693933z + 0,95487175449} \quad (5.16)$$

$$H_{CI}(z) = 0,0020298024 \frac{z^6 - 3,8626263395z^5 + 4,7271869183z^4 - 4,7271869183z^2 + 3,8626263395z - 1,0000000000}{z^6 - 5,7513994340z^5 + 13,9098874571z^4 - 18,1032861246z^3 + 13,3711506066z^2 - 5,3145316315z + 0,8882608268} \quad (5.17)$$

$$H_{TR}(z) = 0,0016590071 \frac{z^6 - 3,8801809493z^5 + 4,7623049286z^4 - 4,7623049286z^2 + 3,8801809493z - 1,0000000000}{z^6 - 5,7887692414z^5 + 14,0917145295z^4 - 18,4602902364z^3 + 13,7247253556z^2 - 5,4911929999z + 0,9238958924} \quad (5.18)$$

As Tabelas 5.5 e 5.6 apresentam as medidas de linearidade de fase e o *overshoot* da resposta ao degrau utilizando as técnicas de invariância à rampa e transformação bilinear, respectivamente, para o exemplo do filtro passa-faixa.

Tabela 4.5 – Medidas de linearidade de fase dos filtros CA, CI e TR passa-faixa para a invariância à rampa

Filtros	$\Delta\tau_p$ (ms)	$\Delta\tau_g$ (ms)	ε_{τ_p} (10^{-3})	ε_{τ_g} (10^{-3})	ε_h (10^{-3})	γ (%)
CA	39,8202	236,6135	18,6126	729,7180	1,9577	8,3722
CI	26,6604	63,0836	9,8665	53,8967	1,5926	11,0895
TR	32,9327	115,2300	14,0422	186,9944	0,4059	9,6268

Tabela 4.6 – Medidas de linearidade de fase dos filtros CA, CI e TR passa-faixa para a transformação bilinear

Filtros	$\Delta\tau_p$ (ms)	$\Delta\tau_g$ (ms)	ε_{τ_p} (10^{-3})	ε_{τ_g} (10^{-3})	ε_h (10^{-3})	γ (%)
CA	39,8511	237,9548	18,6140	737,2069	2,1766	8,3746
CI	26,7083	64,4009	9,8784	55,8624	1,6225	11,0015
TR	32,5670	112,3204	13,7712	177,1373	0,4079	9,7668

Neste exemplo, a transformação espectral é aplicada utilizando a estratégia de dois filtros intremediários para deslocar as frequências do filtro passa-faixa, a fim de evitar possíveis degradações no filtro final. Como consequência, ambas as técnicas de transformação $s \rightarrow z$ apresentam bons resultados, resultando pouca diferença entre as curvas e as medidas obtidas para as duas técnicas consideradas. Nota-se da Figura 4.13 que o filtro TR passa-faixa apresenta uma resposta de magnitude intermediária à dos filtros CA e CI. O filtro atende a todas as especificações de magnitude sem deixar “folga” alguma no gabarito de atenuações. Isso ocorre devido às frequências de projeto serem simétricas em relação à frequência central f_0 , ou seja, $f_0 = \sqrt{f_1 f_4} = \sqrt{f_2 f_3}$. No caso de projetos em que essa simetria não ocorre, o filtro apresentará uma certa “folga” em uma das banda de rejeição.

Os gráficos de atraso de fase (Figura 4.15) mostram uma variação intermediária do filtro TR na banda passante em relação ao atraso de fase dos filtros CA e CI, sendo que as três curvas se interceptam no ponto correspondente a f_0 . No caso do atraso de grupo (Figura 4.18) a melhora do filtro TR em relação ao filtro CA é mais evidente, visto que suas características estão mais próximas às do filtro CI. As medidas de linearidades de fase avaliadas através da variação dos atrasos de fase $\Delta\tau_p$ e de grupo $\Delta\tau_g$, como também erros de atraso de fase ε_{τ_p} e de grupo ε_{τ_g} , exibidas nas Tabelas 4.3 e 4.4, mostram que apenas o filtro TR e o filtro CI atendem às especificações de fase de projeto, sendo que apenas o filtro TR satisfaz a todas as especificações consideradas.

Analisando a curva da resposta ao impulso (Figura 4.16), nota-se novamente um comportamento intermediário do filtro TR em relação ao tempo em que ocorre a amplitude máxima. Entretanto, quanto ao erro de simetria da resposta ao impulso ε_h nada se pode afirmar, pois, conforme descrito no Capítulo 2, essa medida é apenas válida para filtros

passa-baixas. Ela encontra-se sombreada nas Tabelas 4.3 e 4.4. No caso da resposta ao degrau (Figura 4.17), também não é possível fazer uma avaliação consistente através das curvas e nem das medidas de *overshoot*, visto que essa última não é adequadamente definida para filtros passa-faixa.

Assim como nos exemplos anteriores, o comportamento intermediário do filtro TR em relação aos filtros Caue e Chebyshev Inverso são verificados através do posicionamento de suas singularidades, conforme mostra a Figura 4.14.

4.4 EXEMPLO DE FILTRO REJEITA-FAIXA

Deseja-se projetar um filtro rejeita-faixa digital IIR com as seguintes especificações: $A_p = 3$ dB, $A_s = 35$ dB, $f_{p1} = 150$ Hz, $f_{p2} = 350$ Hz, $f_{s3} = 200$ Hz, $f_{s4} = 300$ Hz, $F_s = 4000$ Hz, $\Delta\tau_p < 60$ ms, $\varepsilon_{\tau_p} < 0,24$ e $\gamma = 25\%$.

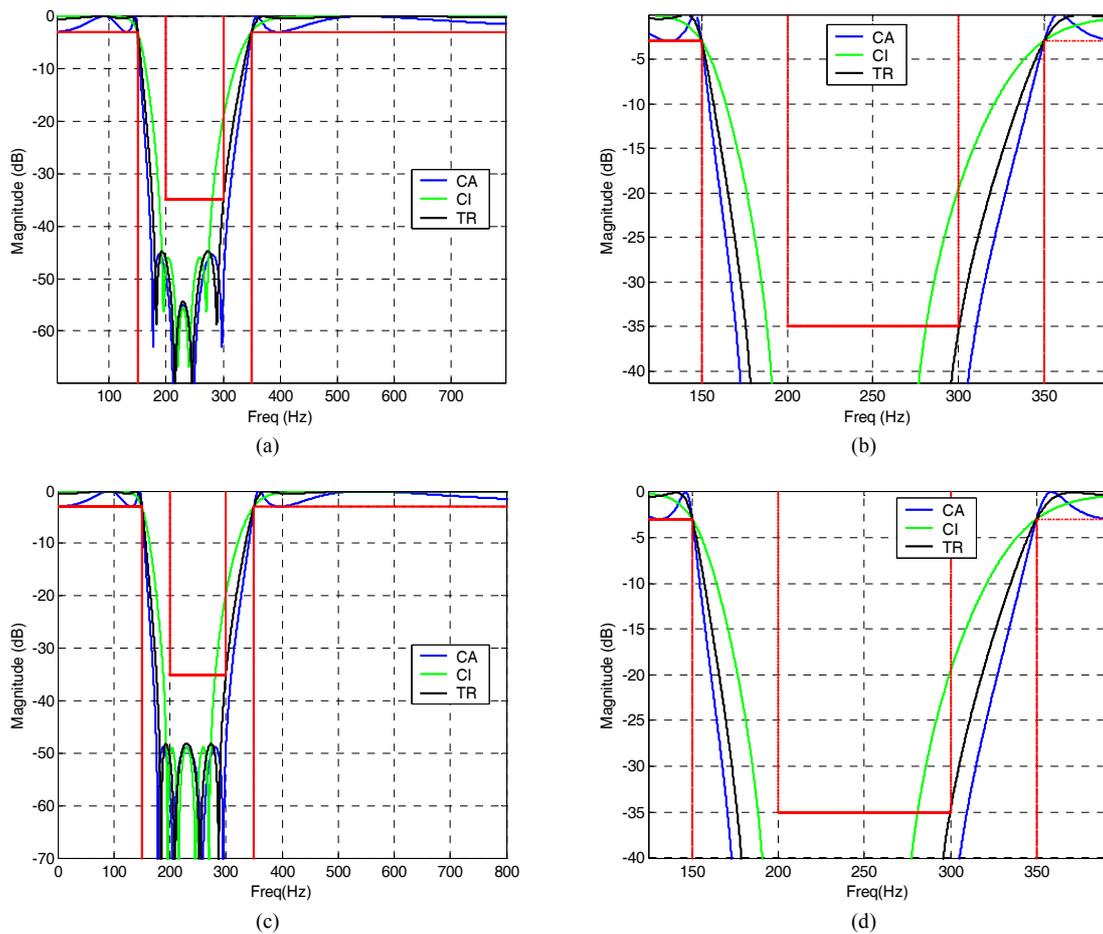


Figura 4.19 – Resposta de magnitude dos filtros rejeita-faixa de ordem 8 CA, CI e TR. (a) Invariância à rampa; (b) Invariância à rampa (ampliação da banda de transição); (c) Transformação bilinear e (d) Transformação bilinear (ampliação da banda de transição).

O filtro TR rejeita-faixa que satisfaz aos requisitos de magnitude com a menor seletividade possível é obtido a partir do fator interpolador $m = 0,25$.

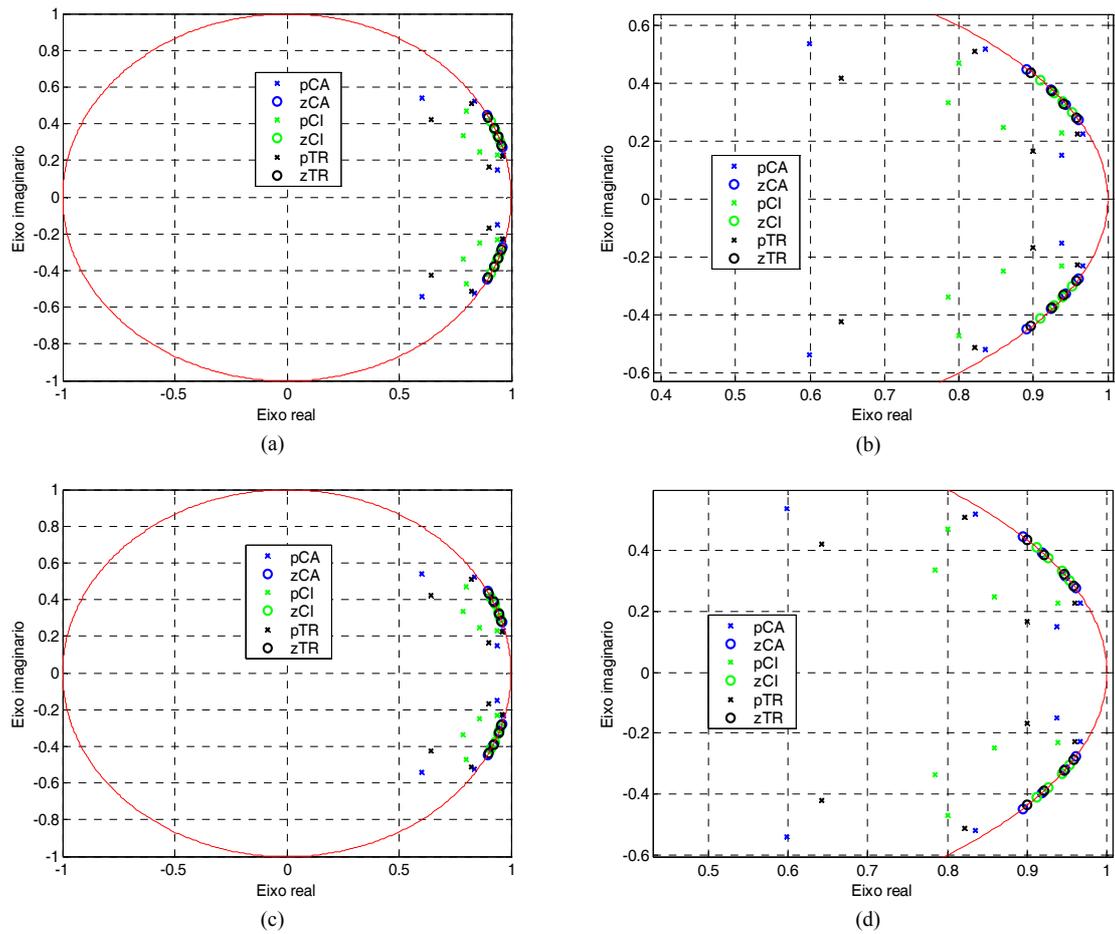


Figura 4.20 – Mapa de pólos e zeros dos filtros CA, CI e TR rejeita-faixa. (a) Invariância à rampa; (b) Invariância à rampa (ampliação); (c) Transformação bilinear e (d) Transformação bilinear (ampliação).

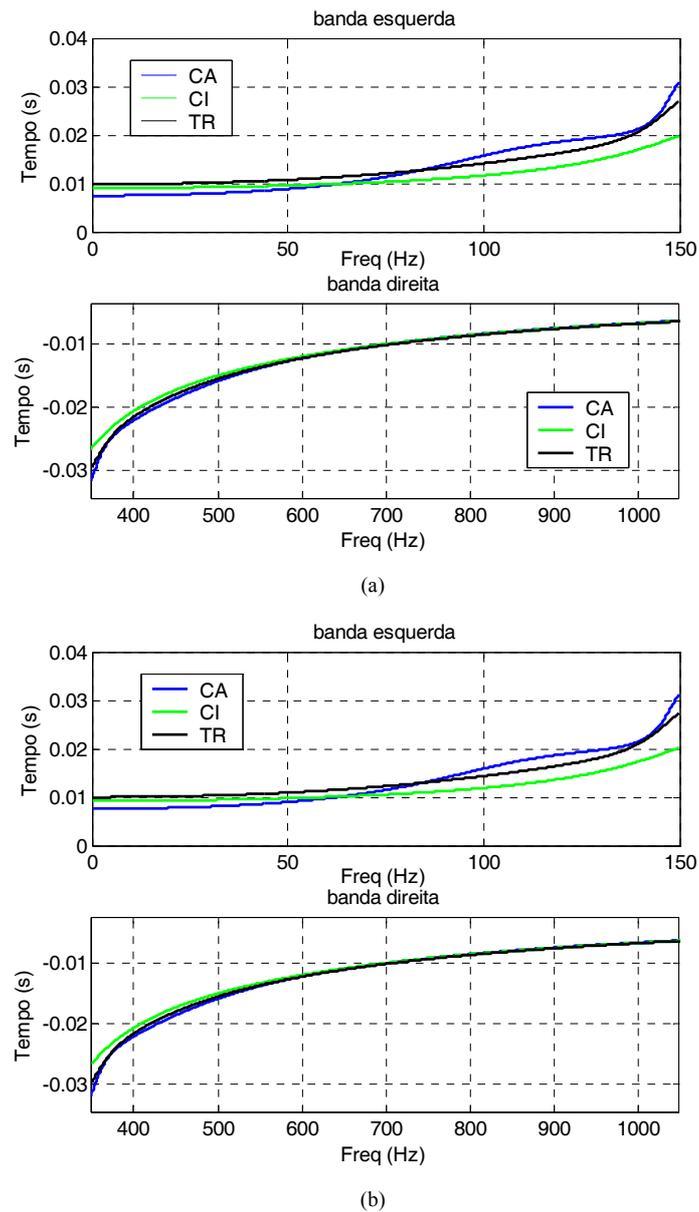


Figura 4.21 – Atraso de fase na banda passante dos filtros CA, CI e TR rejeita-faixa. (a) Invariância à rampa. (b) Transformação bilinear.

Os gráficos da resposta ao impulso e resposta ao degrau são apresentados com traço contínuo para facilitar a visualização.

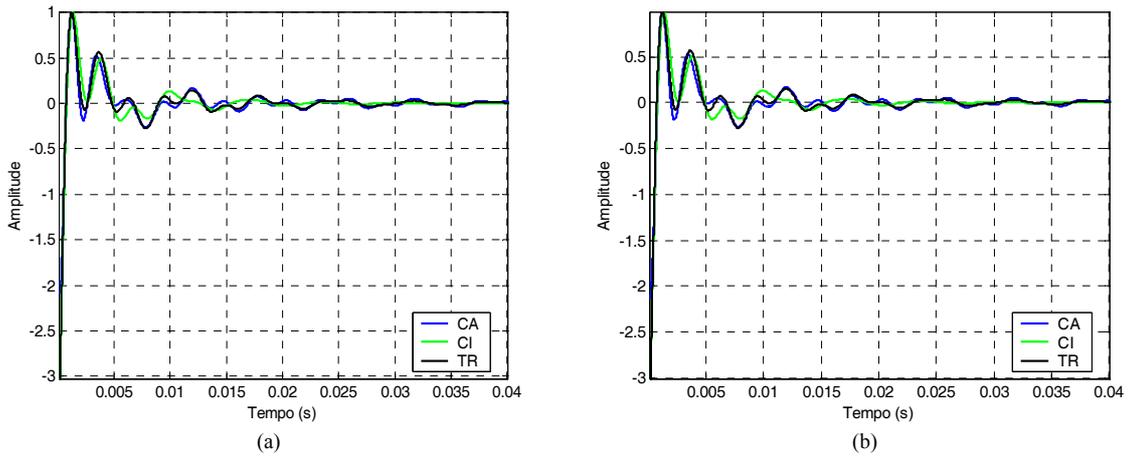


Figura 4.22 – Resposta ao impulso dos filtros CA, CI e TR rejeita-faixa. (a) Invariância à rampa. (b) Transformação bilinear.

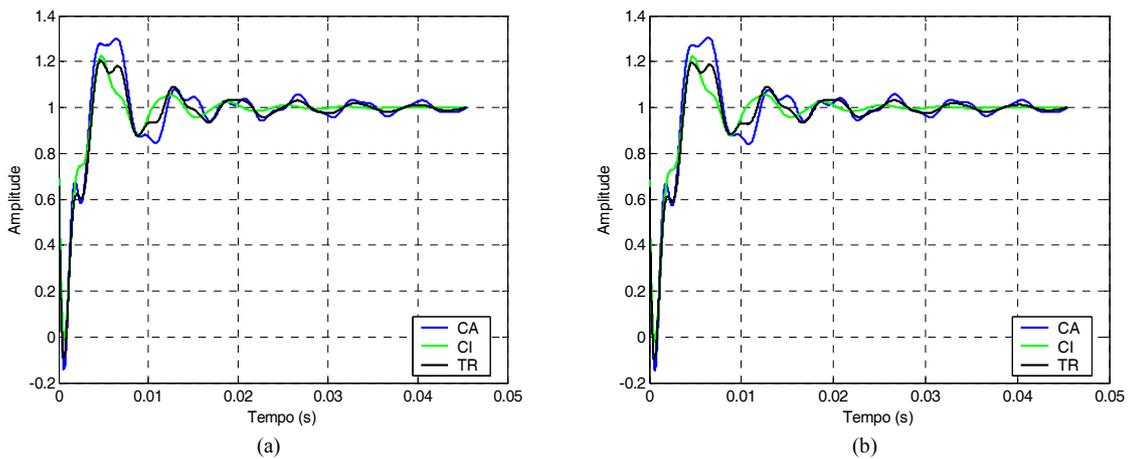


Figura 4.23 – Resposta ao degrau dos filtros CA, CI e TR rejeita-faixa. (a) Invariância à rampa. (b) Transformação bilinear.

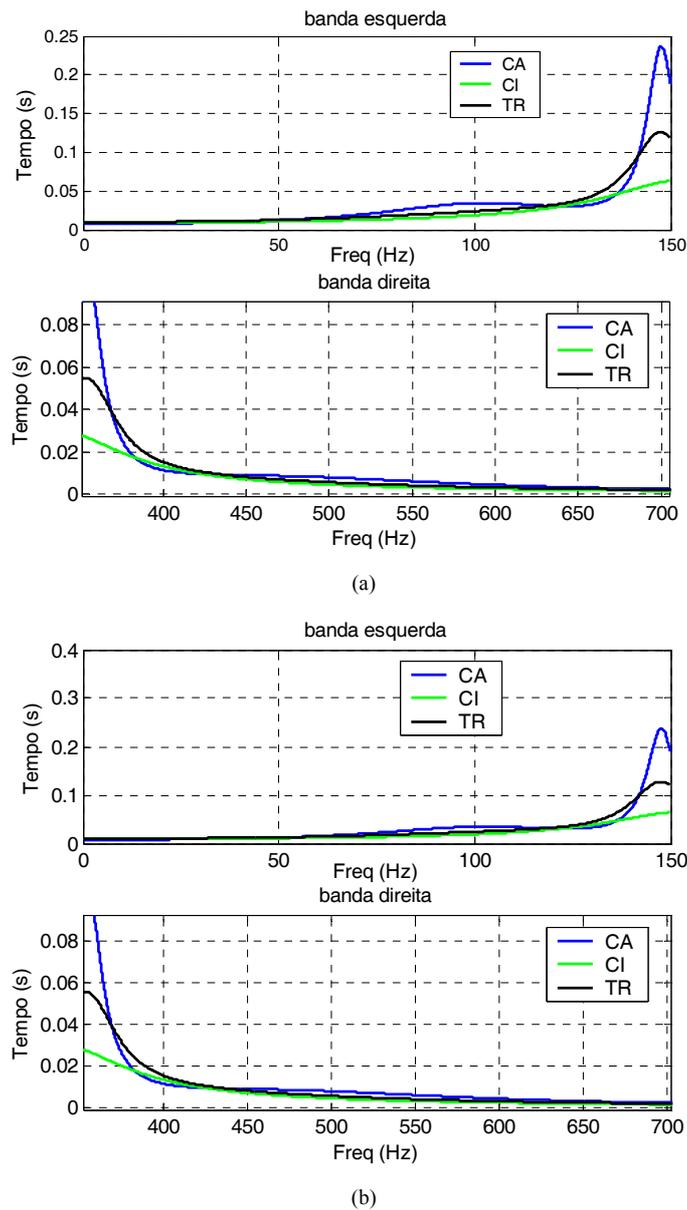


Figura 4.24 – Atraso de grupo na banda passante dos filtros CA, CI e TR rejeita-faixa. (a) Invariância à rampa. (b) Transformação bilinear.

As equações (5.19) a (5.21) mostram, respectivamente, as funções de transferência dos filtros CA, CI e TR projetados através da técnica de invariância à rampa, e as equações (5.22) a (5.24) mostram as funções de transferência dos mesmos filtros projetados através da técnica de transformação bilinear.

$$H_{CA}(z) = 0,4893248461 \frac{z^8 - 7,4368884218z^7 + 24,7242155875z^6 - 47,9381607605z^5 + 59,2567542681z^4 - 47,8094319251z^3 + 24,5916721108z^2 - 35,4286938621z + 0,9893289288}{z^8 - 6,6764196166z^7 + 20,0540368435z^6 - 47,9381607605z^5 + 59,2567542681z^4 - 47,8094319251z^3 + 24,5916721108z^2 - 35,4286938621z + 0,9893289288} \quad (5.19)$$

$$\frac{4,2541742501z + 0,5590285850}{4,2541742501z + 0,5590285850}$$

$$H_{CI}(z) = 0,6903446295 \frac{z^8 - 7,4526585463z^7 + 24,8086066508z^6 - 48,1225751256z^5 + 59,4585993473z^4 - 47,9092520995z^3 + 24,5891948958z^2 - 36,0991919256z + 0,9824066662}{z^8 - 6,7659767803z^7 + 20,4614558056z^6 - 48,1225751256z^5 + 59,4585993473z^4 - 47,9092520995z^3 + 24,5891948958z^2 - 36,0991919256z + 0,9824066662} \quad (5.20)$$

$$\frac{3,8303791519z + 0,46874490215}{3,8303791519z + 0,46874490215}$$

$$H_{TR}(z) = K \frac{z^8 - 7,4410829483z^7 + 24,7443646750z^6 - 47,9737107564z^5 + 59,2768182715z^4 - 47,7905399271z^3 + 24,5558452082z^2 - 34,4523282495z + 0,9848466664}{z^8 - 6,6457005798z^7 + 19,7833814249z^6 - 47,9737107564z^5 + 59,2768182715z^4 - 47,7905399271z^3 + 24,5558452082z^2 - 34,4523282495z + 0,9848466664} \quad (5.21)$$

$$\frac{3,6201934890z + 0,4493883388}{3,6201934890z + 0,4493883388}$$

$$H_{CA}(z) = 0,4885901310 \frac{z^8 - 7,4455281614z^7 + 24,7830953364z^6 - 48,1134162672z^5 + 59,5519740984z^4 - 48,1134162594z^3 + 24,7830953284z^2 - 35,4332548169z + 1,0000000000}{z^8 - 6,6767063460z^7 + 20,0557687919z^6 - 48,1134162672z^5 + 59,5519740984z^4 - 48,1134162594z^3 + 24,7830953284z^2 - 35,4332548169z + 1,0000000000} \quad (5.22)$$

$$\frac{4,2552322404z + 0,5591710237}{4,2552322404z + 0,5591710237}$$

$$H_{CI}(z) = 0,6849689922 \frac{z^8 - 7,4685722956z^7 + 24,9153355481z^6 - 48,4353365137z^5 + 59,9774241497z^4 - 48,4353365062z^3 + 24,9153355404z^2 - 36,1106383026z + 1,0000000000}{z^8 - 6,7666598083z^7 + 20,4656873169z^6 - 48,4353365137z^5 + 59,9774241497z^4 - 48,4353365062z^3 + 24,9153355404z^2 - 36,1106383026z + 1,0000000000} \quad (5.23)$$

$$\frac{3,8334478018z + 0,4691826580}{3,8334478018z + 0,4691826580}$$

$$H_{TR}(z) = 0,6124773564 \frac{z^8 - 7,4543193172z^7 + 24,833522967z^6 - 48,2361422421z^5 + 59,7141537530z^4 - 48,2361422358z^3 + 24,833522960z^2 - 34,4595823831z + 1,0000000000}{z^8 - 6,6461522318z^7 + 19,7861207553z^6 - 34,4595823831z^5 + 38,4091209358z^4 - 28,0744087916z^3 + 13,1574221626z^2 - 7,4543193143z + 1,0000000000} \quad (5.24)$$

$$3,6219756775z + 0,4496360053$$

As Tabelas 4.7 e 4.8 apresentam as medidas de linearidade de fase e o *overshoot* da resposta ao degrau utilizando as técnicas de invariância à rampa e transformação bilinear, respectivamente, para o exemplo do filtro rejeita-faixa.

Tabela 4.7 – Medidas de linearidade de fase dos filtros CA, CI e TR rejeita-faixa para a invariância à rampa.

Filtros	$\Delta\tau_p$ (ms)	$\Delta\tau_g$ (ms)	$\varepsilon_{\tau_p} (10^{-3})$	ε_{τ_g}	$\varepsilon_h (10^{-3})$	γ (%)
CA	62,1952	236,1330	243,8895	1,9748	1,9003	30,0667
CI	46,3056	62,6549	186,5008	0,3481	4,3216	22,4851
TR	56,7338	129,1820	235,5375	0,9961	3,8642	20,5948

Tabela 4.8 – Medidas de linearidade de fase dos filtros CA, CI e TR rejeita-faixa para a transformação bilinear.

Filtros	$\Delta\tau_p$ (ms)	$\Delta\tau_g$ (ms)	$\varepsilon_{\tau_p} (10^{-3})$	ε_{τ_g}	$\varepsilon_h (10^{-3})$	γ (%)
CA	62,5926	237,5896	247,3219	2,0006	1,9183	30,6203
CI	46,8063	63,9145	190,7264	0,3604	4,4006	22,2852
TR	56,9410	127,2953	239,2417	0,9874	3,9977	19,8300

Neste exemplo, novamente, utilizou-se a estratégia de dois filtros intremediários para deslocar as frequências do filtro rejeita-faixa na aplicação da transformação espectral a fim de evitar possíveis degradações no filtro final. Como consequência, ambas as técnicas de transformação $s \rightarrow z$ apresentam bons resultados, com pouca diferença entre as curvas e as medidas obtidas através delas. A Figura 4.19 mostra que para a resposta em magnitude do filtro rejeita-faixa existe uma certa “folga” na frequência de corte da banda

de rejeição esquerda. Isso ocorre, pois, ao contrário do exemplo anterior, não existe uma simetria do filtro em relação à frequência central f_0 , visto que $\sqrt{f_1 f_4} \neq \sqrt{f_2 f_3}$. Apesar de tal fato, o filtro TR atende às especificações de magnitude da maneira menos seletiva possível, apresentando características de fase e tempo otimizadas.

Os gráficos de atraso de fase e atraso de grupo (Figuras 4.21 e 4.24) mostram as duas bandas passantes separadamente. Nota-se que em ambas as curvas a banda esquerda tem comportamento similar ao observado no exemplo de filtro passa-baixas e que a banda direita tem comportamento similar ao observado no exemplo de filtro passa-altas. As mesmas propriedades verificadas nas seções 4.1 e 4.2 são válidas nesse caso, comprovando-se o melhor desempenho do filtro TR em relação a outras aproximações, quando especificações de magnitude, fase e tempo são requisitadas simultaneamente.

Avaliando a resposta ao impulso dos filtros (Figura 4.22), não é possível dizer, através das curvas obtidas, qual das aproximações apresenta melhor desempenho. No entanto, a medida de simetria apresenta um melhor resultado do filtro Cauer, o que não é esperado. Essas medidas, novamente, não devem ser consideradas, visto que não são conhecidas propriedades de simetria de filtros rejeita-faixa. Em relação à resposta ao degrau (Figura 4.23), é possível aplicar a definição da medida de *overshoot* [19] e [23]. Novamente, observa-se um desempenho intermediário do filtro TR em relação aos filtros CA e CI, a menos da medida de *overshoot* da resposta ao degrau, na qual o filtro TR obteve desempenho melhor do que os filtros CA e CI. Essa ocorrência foi verificada apenas para esse exemplo específico e não foi verificada em outros projetos de filtros no decorrer deste trabalho.

4.5 CONCLUSÕES

Neste Capítulo foram mostrados exemplos de projeto de filtros transicionais digitais passa-baixas, passa-altas, passa-faixa e rejeita-faixa baseados nas aproximações Cauer e Chebyshev Inverso. Dois métodos de transformação analógico→digital são comparados (invariância à rampa e transformação bilinear). As alternativas propostas no Capítulo 3 para superar as limitações verificadas na utilização da técnica de transformação espectral são aqui aplicadas.

Os resultados apresentados através dos exemplos discutidos confirmam que os filtros transicionais Cauer-Chebyshev Inverso podem representar uma melhor solução para muitos projetos que necessitam atender a especificações simultâneas de magnitude, fase e tempo.

COMENTÁRIOS E CONCLUSÕES FINAIS

Neste trabalho foi proposta uma metodologia de projeto de filtros transicionais Causer-Chebyshev Inverso digitais com o objetivo de obter um filtro com a menor ordem possível, capazes de atender a requisitos simultâneos de magnitude, fase e tempo, sem a necessidade de recursos adicionais, como por exemplo o uso de equalizadores de fase.

Foi verificado através de quatro exemplos que os filtros TR conseguiram atender a especificações que não poderiam ser alcançadas por nenhuma aproximação clássica.

Para conseguir este resultado, foram utilizados recursos como:

- Um algoritmo capaz de encontrar o fator interpolador m adequado para gerar o filtro transicional que mesclasse as características das aproximações Causer e Chebyshev Inverso e atendesse aos requisitos de magnitude sem que houvesse nenhuma “folga” na banda de rejeição;
- Medidas de linearidade de fase, que auxiliaram a avaliar o desempenho dos filtros projetados e comparar suas características de fase e tempo;
- O uso de seis técnicas de transformação $s \rightarrow z$: invariância ao impulso, invariância ao degrau e invariância à rampa como também transformações de Euler, z -casada e bilinear, explorando suas principais vantagens;
- O uso da técnica de transformação espectral, utilizando estratégias que ajudaram a melhorar seu desempenho.

Foi mostrado que o projeto de filtros digitais IIR via transformação espectral, aplicada da maneira tradicional, pode apresentar algumas limitações decorrente da precisão numérica considerada para realizar o mapeamento, principalmente no caso de filtros passa-faixa e rejeita-faixa. O estudo dessas limitações mostrou que pode ser difícil (ou mesmo inviável) projetar filtros digitais IIR de alta ordem através da técnica de transformação espectral.

Os resultados mais relevantes do estudo foram apresentados e algumas estratégias capazes de reduzir a influência da precisão numérica limitada foram propostas, melhorando

sobremaneira o desempenho da transformação espectral. Algumas dessas estratégias foram consideradas nos exemplos apresentados neste trabalho de dissertação.

Dos exemplos apresentados, pôde-se concluir que, dependendo das características dos filtros que se deseja projetar, algumas técnicas de transformação $s \rightarrow z$ podem ser mais eficientes do que outras, assim como as alternativas propostas para melhorar o desempenho da técnica de transformação espectral. Foi visto também que algumas medidas de linearidade de fase podem não ser tão eficazes dependendo do tipo de filtro a ser projetado.

Discutidas estas novas ferramentas para o projeto de filtros digitais IIR transicionais, torna-se possível obter soluções mais simples para projetos que necessitam atender especificações simultâneas de magnitude, fase e tempo.

Após a análise dos filtros transicionais Cauer-Chebyshev Inverso, alguns temas podem ser sugeridos para a continuação deste trabalho, a saber:

- Estudo de casos específicos de filtros digitais passa-faixa e rejeita-faixa aplicando transformação espectral, com o objetivo de fazer uma análise mais detalhada das limitações de projeto.
- Desenvolver uma análise de sensibilidade de pólos da função de transferência visando estudar os erros de precisão numérica envolvidos no projeto de alguns tipos de filtros digitais.
- Realizar a implementação dos filtros projetados e avaliar seus desempenhos considerando os erros de precisão existentes e os erros de quantização inseridos no processo.

Para isso, foi desenvolvido um *software* em ambiente Matlab, utilizado como ferramenta para auxiliar no projeto dos filtros transicionais Cauer-Chebyshev Inverso e permitir uma avaliação da linearidade de fase visando verificar o desempenho dos filtros projetados.

APÊNDICE A

JANELAS DE INTERFACE COM O USUÁRIO DO SOFTWARE

Neste apêndice são mostradas as janelas de interatividade com o usuário do software desenvolvido em Matlab utilizado para auxiliar no projeto dos filtros Cauer, Chebyshev Inverso e transicional analógicos e digitais.

A janela de abertura do programa permite que o usuário escolha entre o projeto de um filtro analógico ou um filtro digital e escolha o tipo de filtro que se deseja projetar.



Figura A.1 – Janela de abertura do software.

Caso a escolha seja pelo projeto de um filtro analógico, a janela seguinte mostra um gabarito com as especificações que devem ser fornecidas ao software, para que o projeto possa ser realizado e também permite a opção de trabalhar com frequência em rad/s ou Hz.

Após inseridas as informações requeridas, tecle OK para avançar, caso contrário, tecle VOLTAR para retornar à janela inicial.

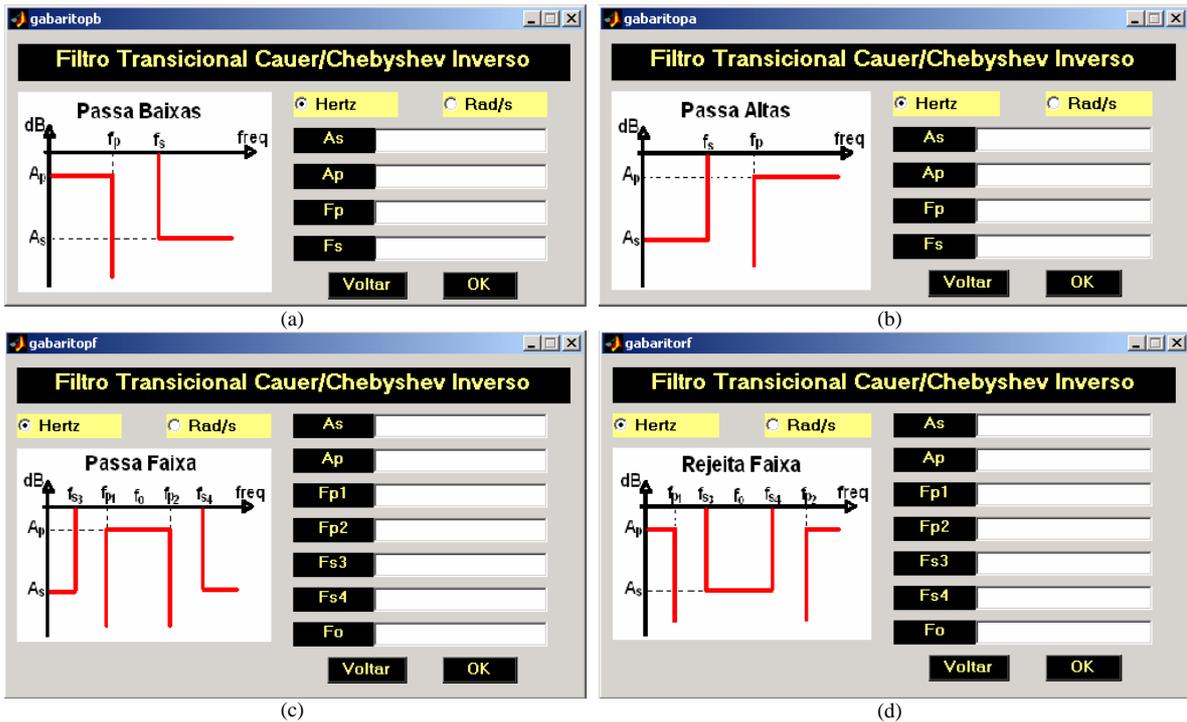


Figura A.2 – Janelas com as especificações de projeto dos filtros analógicos. (a) Passa-baixas. (b) Passa-altas. (c) Passa-faixa. (d) Rejeita-faixa.

Caso a escolha seja pelo projeto de um filtro digital, a janela seguinte além de mostrar um gabarito com as especificações que devem ser fornecidas ao software e permitir a escolha da frequência com a qual se deseja trabalhar, também permite selecionar uma das seis técnicas de transformação analógico-digital descritas no Capítulo 3.

Após inseridas as informações requeridas, tecele OK para avançar, caso contrário, tecele VOLTAR para retornar à janela inicial.

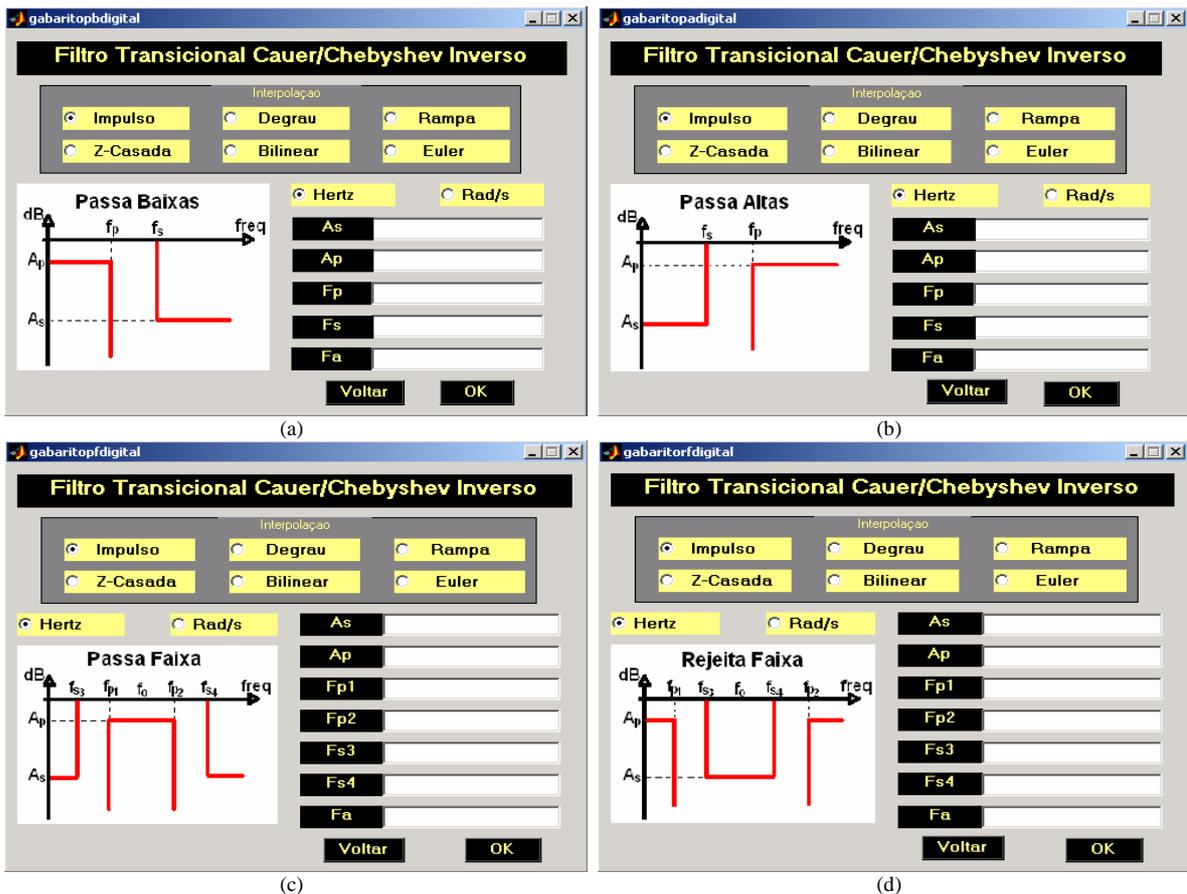


Figura A.3 – Janelas com as especificações de projeto dos filtros digitais. (a) Passa-baixas. (b) Passa-altas. (c) Passa-faixa. (d) Rejeita-faixa.

Uma vez selecionadas as opções desejadas e digitadas as especificações requeridas para o filtro, a janela seguinte permite ao usuário escolher gráficos individuais dos filtros CA, CI ou TR, ou a comparação entre os três filtros no mesmo gráfico e suas correspondentes medidas de linearidade de fase. Nessa janela também pode ser selecionado o tipo de interpolação desejada para o algoritmo do filtro TR, linear ou exponencial.

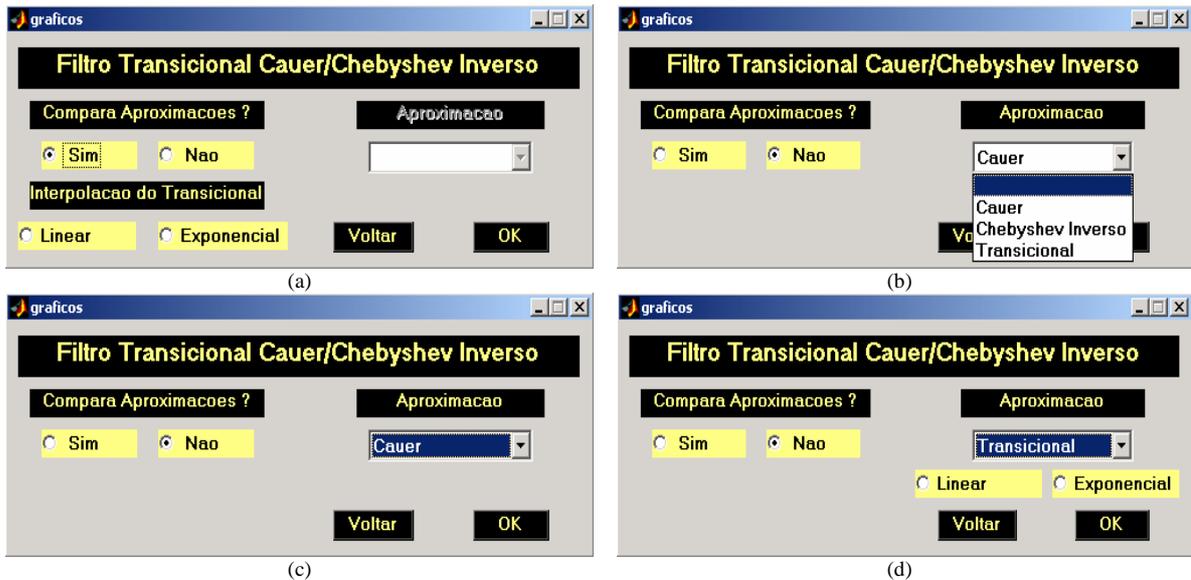


Figura A.4 – Janelas para escolha de gráficos individuais ou comparações entre as aproximações. (a) Comparação entre as aproximações e medidas de linearidade. (b) Escolha da aproximação individual. (c) Aproximação Cauer. (d) Aproximação Transicional.

Finalmente, a última janela permite ao usuário escolher entre as seis opções de gráficos disponíveis: singularidades, magnitude, atraso de fase, resposta ao impulso, resposta ao degrau e atraso de grupo.

Caso seja selecionada na janela anterior a opção de comparação entre as aproximações, ao se pedir o gráfico de atraso de fase, são exibidas as medidas de variação do atraso de fase e erro do atraso de fase; ao se solicitar o gráfico da resposta ao impulso, é exibida a medida do erro de simetria da resposta ao impulso; ao se pedir o gráfico de resposta ao degrau, é exibida a medida do *overshoot* da resposta ao degrau e ao se solicitar o gráfico do atraso de grupo, são exibidas as medidas da variação do atraso de grupo e do erro do atraso de grupo.

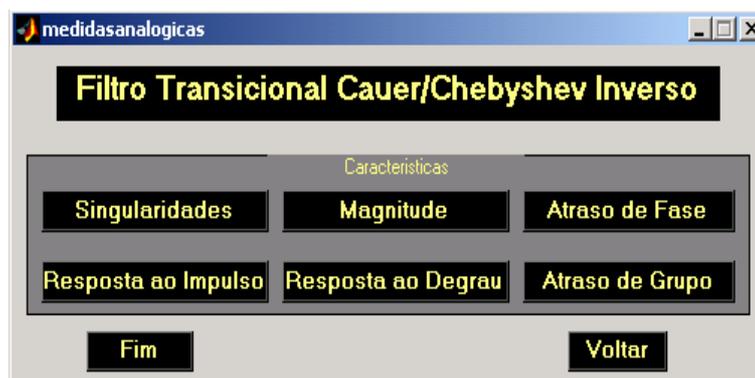


Figura A.5 – Janela de escolha do gráfico desejado e respectiva medida de linearidade de fase.

APÊNDICE B

ALGORITMO DE PROJETO DO FILTRO GERADOR CA

Dadas as especificações de magnitude e fase, determina-se a ordem mínima do filtro CA que atende às especificações de magnitude. Posteriormente, projeta-se o filtro menos seletivo, a saber, o filtro CI (ver Apêndice B).

- i. Dadas as especificações de magnitude A_p , A_s e $\bar{\omega}_s$, calcula-se a mínima ordem do filtro CA com o auxílio de (A.1) até (A.6)

$$k = \frac{1}{\bar{\omega}_s} \quad (\text{A.1})$$

$$k' = \sqrt{1 - k^2} \quad (\text{A.2})$$

$$q_0 = \left(\frac{1}{2} \right) \frac{1 - k'^{(1/2)}}{1 + k'^{(1/2)}} \quad (\text{A.3})$$

$$q = q_0 + 2q_0^5 + 15q_0^9 + \dots \quad (\text{A.4})$$

$$D = \frac{10^{0,1A_s} - 1}{10^{0,1A_p} - 1} \quad (\text{A.5})$$

$$n = \left\lceil \frac{\log(16D)}{\log(1/q)} \right\rceil^1 \quad (\text{A.6})$$

- ii. Após o projeto do filtro CA, segundo [26], verifica-se se a especificação de fase é atendida. Se sim, então não é necessário projetar o filtro TR. Se não, pula-se para o passo seguinte.
- iii. Calcula-se o novo valor de D , considerando-se $D = 1/(16q^n)$.
- iv. Calcula-se a nova atenuação na banda de rejeição A_s , necessária para o projeto do filtro CI, considerando $A_s = 10 \log \left[D(10^{0,1A_p} - 1) + 1 \right]$ obtida a partir de (A.5).
- v. Projeta-se então o filtro CI [1] (ver Apêndice C) a partir dos parâmetros: ordem n , A_p e A_s . A nova frequência $\bar{\omega}_s$ do filtro CI deve ser calculada com o auxílio de (B.1), onde A_s é a atenuação encontrada no passo (iv).

¹ $\lceil \cdot \rceil$ Número inteiro imediatamente superior

- vi. Se a fase não for atendida pelo filtro CI, o problema não tem solução através de um filtro TR. Nesse caso, é imperativo o uso de um equalizador de fase. Se o filtro CI atende simultaneamente aos requisitos de fase e magnitude, o próprio filtro CI é a solução do problema. Se o filtro CI atende aos requisitos de fase, mas não os de magnitude, o problema pode ser solucionado com um filtro TR seguindo os passos mostrados na seção 2.3.3.

APÊNDICE C

ALGORITMO DE PROJETO DO FILTRO GERADOR CI

No caso do projeto de filtros TR Caueer-Chebyshev Inverso, o filtro CI é especificado pela ordem n , por A_p e pelo novo A_s , determinado no Apêndice B.

Calcula-se primeiramente $\bar{\omega}_s$ com o auxílio de

$$\bar{\omega}_s = \cosh \left\{ \frac{\cosh^{-1}[(10^{0,1A_s} - 1)/(10^{0,1A_p} - 1)]^{1/2}}{n} \right\} \quad (\text{B.1})$$

As singularidades e a função de transferência de um filtro CI são obtidas através de (B.2) até (B.9). Os zeros \bar{z}_k e pólos \bar{p}_k são dados por

$$\bar{z}_k = \pm j\bar{\omega}_s (\omega_{\infty k})^{-1} = \pm jz_i, \quad (\text{B.2})$$

$$\bar{p}_k = \bar{\omega}_s (\bar{\sigma}_k \pm j\bar{\omega}_k)^{-1} = a_i \pm jb_i, \quad (\text{B.3})$$

onde $k = 1, 2, \dots, \begin{cases} n/2 & n \text{ par} \\ (n+1)/2 & n \text{ ímpar} \end{cases}$

$$\omega_{\infty k} = \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n}, \quad (\text{B.4})$$

$$\bar{\sigma}_k = \left\{ \pm \operatorname{sen} \left[\frac{(2k-1)\pi}{2n} \right] \right\} \left\{ \operatorname{senh} \left[\left(\frac{1}{n} \right) \operatorname{senh}^{-1} \left(\frac{1}{\delta} \right) \right] \right\} \quad (\text{B.5})$$

$$\bar{\omega}_k = \left\{ \cos \left[\frac{(2k-1)\pi}{2n} \right] \right\} \left\{ \operatorname{cosh} \left[\left(\frac{1}{n} \right) \operatorname{senh}^{-1} \left(\frac{1}{\delta} \right) \right] \right\} \quad (\text{B.6})$$

$$C_n(\bar{\omega}_s) = \frac{n}{2} \sum_{r=0}^{\lceil n/2 \rceil} \frac{(-1)^r (n-r-1)!}{r!(n-2r)!} (2\bar{\omega}_s)^{n-2r} \quad (\text{B.7})$$

$$\delta = \left[(10^{0,1A_p} - 1)^{1/2} C_n(\bar{\omega}_s) \right]^{-1} \quad (\text{B.8})$$

$$H(\bar{s}) = \frac{G_0 \prod_{i=1}^k (\bar{s}^2 + \omega_{zi}^2)}{\prod_{i=1}^k (\bar{s}^2 + 2a_i \bar{s} + a_i^2 + b_i^2)} \quad (\text{B.9})$$

O ganho G_0 é calculado de modo a se obter zero dB na origem.

APÊNDICE D

ALGORITMO DE PROJETO DO FILTRO PASSA-BAIXAS DIGITAL

O algoritmo descrito a seguir permite projetar um filtro TR não-polinomial passa-baixas digital através da técnica de transformação espectral utilizando a estratégia proposta neste trabalho. Tal estratégia é capaz de reduzir a sensibilidade do mapeamento em relação às variáveis envolvidas no processo.

- i. Dadas as especificações de magnitude A_p , A_s , ω_s , ω_p e Ω_s , calculam-se as frequências normalizadas $\omega'_p = \frac{2\pi\omega_p}{\Omega_s}$ e $\omega'_s = \frac{2\pi\omega_s}{\Omega_s}$.
- ii. Calcula-se a frequência de corte de banda passante do filtro passa-baixas protótipo θ_p . Partindo de $\alpha = -1$ e $\theta_p = 0$, enquanto $\alpha < -0,2$ faz-se $\theta_p = \theta_p + 0,001\pi$ utilizando (3.2).
- iii. Calcula-se θ_s a partir do α obtido e de ω_s através de (3.3).
- iv. Faz-se $\bar{\theta}_s = \frac{\theta_s}{\theta_p}$.
- v. A partir de A_p , A_s e $\bar{\theta}_s$, projeta-se o filtro gerador CA passa-baixas conforme descrito no Apêndice A.
- vi. A partir da mínima ordem n calculada no passo anterior e as atenuações A_p , A_s especificadas, calcula-se o filtro gerador CI conforme descrito no Apêndice B.
- vii. Projeta-se o filtro TR não-polinomial passa-baixas analógico através das singularidades dos filtros geradores conforme descrito na Seção 2.3.3.
- viii. Obtém-se o filtro TR digital protótipo utilizando uma dada transformação $s \rightarrow z$ (invariância ao impulso, invariância ao degrau, invariância à rampa, transformação z-casada, transformação bilinear ou transformação de Euler).
- ix. Substitui-se Z^{-1} por z^{-1} , considerando (3.1), na função de transferência do filtro passa-baixas protótipo digital obtido no passo anterior.
- x. Verifica-se se os requisitos de fase do projeto são atendidos utilizando a abordagem discutida na Seção 2.2.

- xi. Se o filtro TR projetado não atender simultaneamente às especificações de magnitude e fase, o projeto do filtro deverá ser realizado através de um sistema composto por um filtro em cascata com um equalizador de fase ou através de um processo de otimização simultânea das características de magnitude e fase.

APÊNDICE E

ALGORITMO DE PROJETO DO FILTRO PASSA-ALTAS DIGITAL

O algoritmo descrito a seguir permite implementar um filtro TR não-polinomial passa-altas digital através da técnica de transformação espectral utilizando a abordagem discutida neste trabalho, visando reduzir a sensibilidade do mapeamento em relação às variáveis envolvidas no processo.

- i. Dadas as especificações de magnitude A_p , A_s , ω_s , ω_p e Ω_s , calculam-se as frequências normalizadas $\omega'_p = \frac{2\pi\omega_p}{\Omega_s}$ e $\omega'_s = \frac{2\pi\omega_s}{\Omega_s}$.
- ii. Calcula-se a frequência de corte das bandas passante e de rejeição do filtro passa-baixas protótipo θ_p e θ_s a partir de α , ω_p e ω_s . Tomando-se $\alpha = -1$ e $\theta_p = 0$, faz-se $\theta_p = \theta_p + 0,001$ enquanto $\alpha < -0,5$ através de (3.5). De (3.6) θ_s é obtido.
- iii. Calcula-se a frequência de corte das bandas passante e de rejeição do filtro passa-baixas protótipo intermediário #2 θ''_p e θ''_s a partir de θ_p e θ_s . Para $\theta''_p = 0$ e $\alpha'' = -1$, enquanto $\alpha'' < -0,5$, $\theta''_p = \theta''_p + 0,001\pi$ calcula-se α'' de (3.2). Obtém-se θ''_s de (3.3).
- iv. Calcula-se a frequência de corte das bandas passante e de rejeição do filtro passa-baixas protótipo intermediário #1, θ'_p e θ'_s . Partindo de um fator de multiplicação $f = 0,3$ e $\theta'_s = 0$, enquanto $\theta'_s < 1$, faz-se $\theta'_p = f\pi$ e calcula-se α' através de (3.2) e θ'_s , de (3.3). Enquanto θ'_s não atingir o valor desejado, $f = f - 0,01$.
- v. Faz-se $\bar{\theta}_s = \frac{\theta''_s}{\theta''_p}$
- vi. A partir de A_p , A_s e $\bar{\theta}_s$ projeta-se o filtro gerador CA passa-baixas conforme descrito no Apêndice A.
- vii. A partir da mínima ordem n calculada no passo anterior e as atenuações A_p , A_s especificadas, calcula-se o filtro gerador CI conforme descrito no Apêndice B.

- viii. Projeta-se o filtro TR não-polinomial passa-baixas analógico através das singularidades dos filtros geradores conforme descrito na Seção 2.3.3.
- ix. Obtém-se o filtro TR digital protótipo utilizando uma dada transformação $s \rightarrow z$ (invariância ao impulso, invariância ao degrau, invariância à rampa, transformação z-casada, transformação bilinear ou transformação de Euler).
- x. Substitui-se Z'^{-1} por z^{-1} , usando-se de (3.1), na função de transferência do filtro passa-baixas protótipo digital obtido no passo anterior para determinar o filtro protótipo intermediário #1.
- xi. Substitui-se Z''^{-1} por Z'^{-1} , utilizando-se (3.1), na função de transferência do filtro protótipo intermediário #1 obtido no passo anterior para determinar o filtro protótipo intermediário #2.
- xii. Substitui-se Z^{-1} por Z''^{-1} , com auxílio de (3.4), na função de transferência do filtro protótipo intermediário #2 obtido no passo anterior, obtendo-se então o filtro passa-altas digital desejado.
- xiii. Verifica-se se os requisitos de fase do projeto são atendidos utilizando a abordagem discutida na Seção 2.2.
- xiv. Se o filtro TR projetado não atender simultaneamente às especificações de magnitude e fase, o projeto então deve ser realizado por um sistema composto de um filtro em cascata com um equalizador de fase ou através de um processo de otimização simultânea das características de magnitude e fase.

APÊNDICE F

ALGORITMO DE PROJETO DO FILTRO PASSA-FAIXA DIGITAL

O algoritmo descrito a seguir permite implementar um filtro TR não-polinomial passa-faixa digital através da técnica de transformação espectral considerando a abordagem discutida neste trabalho, a qual permite reduzir a sensibilidade do mapeamento em relação às variáveis envolvidas no processo.

- i. Dadas as especificações de magnitude A_p , A_s , ω_{s3} , ω_{s4} , ω_{p1} , ω_{p2} e Ω_s , calculam-se as frequências normalizadas $\omega'_{p1} = \frac{2\pi\omega_{p1}}{\Omega_s}$, $\omega'_{p2} = \frac{2\pi\omega_{p2}}{\Omega_s}$,
 $\omega'_{s3} = \frac{2\pi\omega_{s3}}{\Omega_s}$ e $\omega'_{s4} = \frac{2\pi\omega_{s4}}{\Omega_s}$.
- ii. Define-se uma frequência de amostragem auxiliar $\Omega'_s = 4(\omega_{p1} + \omega_{p2})$.
- iii. Define-se uma frequência de corte de banda passante para o filtro passa-faixa intermediário $\omega'_{p2} = \frac{\omega_{p2}}{\Omega'_s}$.
- iv. Calcula-se α''' para o filtro passa-faixa intermediário a partir de ω_{p2} e ω'_{p2} utilizando-se (3.2).
- v. Calculam-se as outras frequências do filtro passa-faixa intermediário ω'_{p1} , ω'_{s3} e ω'_{s4} de (3.3).
- vi. Define-se a frequência de corte de banda passante do filtro passa-baixas protótipo $\theta_p = 0,1\pi$ e calculam-se as variáveis α e k através de (3.9) e (3.8), respectivamente.
- vii. Calculam-se as duas frequências de corte da banda de rejeição θ_{s3} e θ_{s4} , equivalentes a ω'_{s3} e ω'_{s4} , através de (3.10) e obtém-se, através de (3.11), a mais apropriada frequência de corte de banda de rejeição θ_s do filtro protótipo passa-baixas.

- viii. Calcula-se a frequência de corte das bandas passante e de rejeição do filtro passa-baixas intermediário #2, θ_p'' e θ_s'' , a partir de θ_p e θ_s . Para $\theta_p'' = 0$ e $\alpha'' = -1$, enquanto $\alpha'' < -0,4$, $\theta_p'' = \theta_p'' + 0,001\pi$; calcula-se α'' de (3.2). Obtém-se θ_s'' de (3.3).
- ix. Calcula-se a frequência de corte das bandas passante e de rejeição do filtro passa-baixas intermediário #1, θ_p' e θ_s' a partir de θ_p'' e θ_s'' . Para $\theta_p' = 0$ e $\alpha' = -1$, enquanto $\alpha' < -0,4$, $\theta_p' = \theta_p' + 0,001\pi$; calcula-se α' de (3.2). Determina-se θ_s' de (3.3).
- x. Faz-se $\bar{\theta}_s = \frac{\theta_s''}{\theta_p''}$
- xi. A partir de A_p , A_s e $\bar{\theta}_s$ projeta-se o filtro gerador CA passa-baixas conforme descrito no Apêndice A.
- xii. A partir da mínima ordem n calculada no passo anterior e as atenuações A_p , A_s especificadas, calcula-se o filtro gerador CI conforme descrito no Apêndice B.
- xiii. Projeta-se o filtro TR não-polinomial passa-baixas analógico através das singularidades dos filtros geradores conforme descrito na Seção 2.3.3.
- xiv. Obtém-se o filtro TR digital protótipo utilizando uma dada transformação $s \rightarrow z$ (invariância ao impulso, invariância ao degrau, invariância à rampa, transformação z -casada, transformação bilinear ou transformação de Euler).
- xv. Substitui-se Z'^{-1} por z^{-1} , usando (3.1), na função de transferência do filtro passa-baixas protótipo digital obtido no passo anterior, obtendo assim o filtro protótipo intermediário #1.
- xvi. Substitui-se Z''^{-1} por Z'^{-1} , com o auxílio de (3.1), na função de transferência do filtro intermediário #1 obtido no passo anterior, gerando assim o filtro protótipo intermediário #2.
- xvii. Substitui-se Z'''^{-1} por Z''^{-1} , empregando (3.7), na função de transferência do filtro intermediário #2 obtido no passo anterior, dando origem ao filtro passa-faixa digital intermediário.
- xviii. Substitui-se Z^{-1} por Z'''^{-1} , através de (3.1), na função de transferência do filtro passa-faixa intermediário obtido no passo anterior para obter o filtro passa-faixa digital desejado.

- xix. Verifica-se se os requisitos de fase do projeto são atendidos utilizando a metodologia apresentada na Seção 2.2.
- xx. Se o filtro TR projetado não atender a ambas as especificações de magnitude e fase, o projeto deve então ser realizado através de um sistema composto de um filtro em cascata com um equalizador de fase ou através de um processo de otimização simultânea das características de magnitude e fase.

APÊNDICE G

ALGORITMO DE PROJETO DO FILTRO REJEITA-FAIXA DIGITAL

O algoritmo descrito a seguir permite implementar um filtro TR não-polinomial rejeita-faixa digital através da técnica de transformação espectral utilizando a estratégia proposta neste trabalho. Assim é possível reduzir a sensibilidade do mapeamento em relação às variáveis envolvidas no processo.

- i. Dadas as especificações de magnitude A_p , A_s , ω_{s3} , ω_{s4} , ω_{p1} , ω_{p2} e Ω_s , calculam-se as frequências normalizadas $\omega'_{p1} = \frac{2\pi\omega_{p1}}{\Omega_s}$, $\omega'_{p2} = \frac{2\pi\omega_{p2}}{\Omega_s}$,
 $\omega'_{s3} = \frac{2\pi\omega_{s3}}{\Omega_s}$ e $\omega'_{s4} = \frac{2\pi\omega_{s4}}{\Omega_s}$.
- ii. Define-se uma frequência de amostragem auxiliar $\Omega'_s = 8(\omega_{p1} + \omega_{p2})$.
- iii. Define-se uma frequência de corte de banda passante para o filtro passa-faixa intermediário $\omega'_{p2} = \frac{\omega_{p2}}{\Omega'_s}$.
- iv. Calcula-se α''' para o filtro rejeita-faixa intermediário a partir de ω_{p2} e ω'_{p2} através de (3.2).
- v. Calculam-se as outras frequências do filtro rejeita-faixa intermediário ω'_{p1} , ω'_{s3} e ω'_{s4} a partir de (3.3).
- vi. Define-se a frequência de corte de banda passante do filtro rejeita-baixas protótipo $\theta_p = 0,15\pi$ e calculam-se as variáveis α e k através de (3.16) e (3.15), respectivamente.
- vii. Calculam-se as duas frequências de corte de banda de rejeição θ_{s3} e θ_{s4} , equivalentes a ω'_{s3} e ω'_{s4} , através de (3.17) e determina-se, através de (3.11), a mais apropriada frequência de corte da banda de rejeição θ_s para o filtro protótipo passa-baixas.

- viii. Calcula-se a frequência de corte das bandas passante e de rejeição do filtro passa-baixas intermediário #2, θ_p'' e θ_s'' , a partir de θ_p e θ_s . Para $\theta_p'' = 0$ e $\alpha'' = -1$, enquanto $\alpha'' < -0,4$, $\theta_p'' = \theta_p'' + 0,001\pi$, calcula-se α'' de (3.2). Obtém-se θ_s'' de (3.3).
- ix. Calcula-se a frequência de corte das bandas passante e de rejeição do filtro passa-baixas intermediário #1, θ_p' e θ_s' a partir de θ_p'' e θ_s'' . Para $\theta_p' = 0$ e $\alpha' = -1$, enquanto $\alpha' < -0,4$, $\theta_p' = \theta_p' + 0,001\pi$; e calcula-se α' de (3.2). Determina-se θ_s' de (3.3).
- x. Faz-se $\bar{\theta}_s = \frac{\theta_s''}{\theta_p''}$
- xi. A partir de A_p , A_s e $\bar{\theta}_s$ projeta-se o filtro gerador CA passa-baixas conforme descrito no Apêndice A.
- xii. A partir da mínima ordem n calculada no passo anterior e as atenuações A_p , A_s especificadas, calcula-se o filtro gerador CI conforme descrito no Apêndice B.
- xiii. Projeta-se o filtro TR não-polinomial passa-baixas analógico através das singularidades dos filtros geradores conforme descrito na Seção 2.3.3.
- xiv. Obtém-se o filtro TR digital protótipo utilizando uma transformação $s \rightarrow z$ (invariância ao impulso, invariância ao degrau, invariância à rampa, transformação z -casada, transformação bilinear ou transformação de Euler).
- xv. Substitui-se Z'^{-1} por z^{-1} , através de (3.1), na função de transferência do filtro passa-baixas protótipo digital obtido no passo anterior, obtendo assim o filtro protótipo intermediário #1.
- xvi. Substitui-se Z''^{-1} por Z'^{-1} , usando-se de (3.1), na função de transferência do filtro intermediário #1 obtido no passo anterior, determinando então o filtro protótipo intermediário #2.
- xvii. Substitui-se Z'''^{-1} por Z''^{-1} , considerando (3.7), na função de transferência do filtro intermediário 2 obtido no passo anterior, obtendo o filtro rejeita-faixa digital intermediário.
- xviii. Substitui-se Z^{-1} por Z'''^{-1} , obtido de (3.1), na função de transferência do filtro rejeita-faixa intermediário do passo anterior, determinando o filtro rejeita-faixa digital desejado.

- xix. Verifica-se se os requisitos de fase do projeto são atendidos utilizando a abordagem discutida na Seção 2.2.
- xx. Caso o filtro transicional projetado não atender simultaneamente às especificações de magnitude e fase, o projeto deve ser realizado por um sistema composto de um filtro em cascata com um equalizador de fase ou através de um processo de otimização simultânea das características de magnitude e fase.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Noceti Filho, S., “Filtros Seletores de Sinais,” 2. ed. Florianópolis : Editora da UFSC, 2003.
- [2] Fernandes, R. S. M., Noceti Filho, S., Seara, R., Farias, A. S., “Otimização de Características de Fase via Filtros Transicionais Cauver-Chebyshev Inverso,” *Anais XV Congresso Brasileiro de Automática*, Gramado, RS, 2004.
- [3] Farias, A. S., Noceti Filho, S. e Seara, R., “Equalização de Fase Baseada na Inclinação de Uma Reta-Modelo Obtida a Partir do Atraso de Fase do filtro a Ser Equalizado,” *Anais XV Congresso Brasileiro de Automática*, Gramado, RS, 2004.
- [4] Farias A. S., Noceti Filho, S., Seara, R., “Projeto de Filtros Transicionais Chebyshev – Legendre – Butterworth – Bessel – Gauss – Multiplicidade N,” *Anais XVII Simpósio Brasileiro de Telecomunicações - SBT'99*, Vila Velha, PR, 1999, pp. 357-362.
- [5] Aiello, G. L. e Angelo, P. M., “Transitional Legendre-Thomson Filters,” *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, pp. 159-162, 1974.
- [6] Beccari, C., “Comparison Between Different Transitional filters,” *Alta Frequenza*, vol. 48, no. 11, pp. 681-684, 1979.
- [7] Peless, Y. e Murakami, T., “Analysis and Synthesis of Transitional Butterworth-Thomson Filters and Bandpass Amplifiers,” *RCA Review*, vol. 46, pp. 60-94, 1957.
- [8] Rakovich, B. D., “Transitional Butterworth-Legendre Filters,” *The Radio and Electronic Engineer*, vol. 44, no. 12, pp. 673-680, 1974.
- [9] Roy, S. C. D., e Varanasi, P., “Transitional Butterworth-Chebyshev Filters,” *Electronics Letters*, vol. 14, no. 6, pp. 179-180, 1978.
- [10] Farias, A. S., Noceti Filho, S. e Seara, R., “Transitional filters based on the classical polynomial approximations,” *Proc. of IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, pp. 693-696, Genebra, Suíça, II, 2000a.
- [11] Pai, K. R., Murthy, K. V. V., Ramachandran, V., “Complementary Pole-Pair Filters – A New Family of Transitional Filters,” *IEEE International Symposium on Circuits and Systems IV*, pp. 2264-2267, 1993.
- [12] Hájek, K., Sedláček, J., “A New TICFU Transitional Approximation,” *European Conference on Circuit Theory and Design*, vol. 1, pp. 913-916, Istanbul, Turquia, 1995.
- [13] Lindquist, C. S., Corral, C. A., “On the Construction of Transitional Filter Nomographs,” *Journal of the Franklin Institute – Engineering and Applied Mathematics* 339 (1): 77-102 JAN 2002, 339, pp. 77-102, Jan, 2002.

- [14] Pai, K. R., Murthy, K. V. V. e Ramachandran, V., "Chebyshev-Family Transitional Filters," *Journal of Circuits, Systems and Computers*, vol. 8, no. 2, pp. 283-299, 1998.
- [15] Oppenheim, A. V., Willsky, A. S., *Signal and Systems*. 2. ed. Prentice-Hall, New Jersey, 1997.
- [16] Perez, F. L. e Seara, R., "Considerações sobre a Utilização da Transformação Espectral para Projetos de Filtros Digitais a partir de Filtros Analógicos," *Anais IX Congresso Brasileiro de Automática*, Vitória, ES, 1992.
- [17] Constantinides A. G., "Spectral Transformation for Digital filters," *Proc. IEE*, Vol. 117, no. 8, pp. 1585-1595, 1970.
- [18] Farias, A. S., Noceti Filho, S. e Seara, R., "Algoritmo para Projeto de Filtros Transicionais - Considerações sobre Realizabilidade," *Anais XIII Congresso Brasileiro de Automática*, Florianópolis, SC, pp. 1398-1403, 2000b.
- [19] Zverev, A. I., *Handbook of Filter Synthesis*. John Wiley and Sons, New York, 1967.
- [20] Blinchikoff, H. J. e Zverev, A. I., *Filtering in the Time Frequency Domains*. John Wiley and Sons, New York, 1976.
- [21] Haykin, S., *An Introduction to Analog and Digital Communications*. John Wiley and Sons, New York, 1989.
- [22] Carvalho, D. B., Noceti Filho, S. e Seara, R., "Impulse Response Symmetry Error for Designing Phase Equalizers," *Electronics Letters*, vol.35, no. 13, pp. 1052-1054, 1999.
- [23] Farias, A. S., "*Projeto de Filtros Transicionais Baseados em Aproximações Polinomiais Clássicas*," Florianópolis, 1999, Dissertação de Mestrado em Engenharia Elétrica – Centro Tecnológico, Universidade Federal de Santa Catarina.
- [24] Farias, A. S., Noceti Filho, S. e Seara, R., "Filtros Transicionais Usando Interpolação Linear com a Seleção do Filtro Baseada no Desempenho Total Médio Ponderado," *Anais XIV Congresso Brasileiro de Automática*, Natal, RN, pp. 3095-3100, 2002.
- [25] Seara, R., "*Apostila de Processamento Digital de Sinais I*," Florianópolis, 2003 – Departamento de Engenharia Elétrica – Centro Tecnológico, Universidade Federal de Santa Catarina.
- [26] Antoniou, A., *Digital Filters: Analysis and Design*. 1. ed. McGraw-Hill, 1979.