

JUAN RODRIGO VELÁSQUEZ LÓPEZ

**ANÁLISE ESTATÍSTICA DOS MOMENTOS DE
PRIMEIRA E SEGUNDA ORDENS DOS
ALGORITMOS DLMS E LMS DE ERRO FILTRADO
MODIFICADOS**

**FLORIANÓPOLIS
2006**

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
EM ENGENHARIA ELÉTRICA**

**ANÁLISE ESTATÍSTICA DOS MOMENTOS DE
PRIMEIRA E SEGUNDA ORDENS DOS
ALGORITMOS DLMS E LMS DE ERRO FILTRADO
MODIFICADOS**

Dissertação submetida à
Universidade Federal de Santa Catarina
como parte dos requisitos para a
obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica

JUAN RODRIGO VELÁSQUEZ LÓPEZ

Florianópolis, março de 2006

ANÁLISE ESTATÍSTICA DOS MOMENTOS DE PRIMEIRA E SEGUNDA ORDENS DOS ALGORITMOS DLMS E LMS DE ERRO FILTRADO MODIFICADOS

Juan Rodrigo Velásquez López

‘Esta Dissertação foi julgada adequada para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Elétrica, Área de Concentração em *Comunicações e Processamento de Sinais*, e aprovada em sua forma final pelo programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica da universidade Federal de Santa Catarina’

Prof. Rui Seara, Dr.
Orientador

Prof. Nelson Sadowski, Dr.
Coordenador do curso de Pós-graduação em Engenharia Elétrica

Banca Examinadora:

Prof. Rui Seara, Dr.
Presidente

Orlando José Tobias, Dr.
Co-Orientador

Prof. Sidnei Noceti Filho, Dr.

Prof. Walter Pereira Carpes Jr., Dr.

Prof. Hans Helmut Zürn., Dr.

*A mi madre, bernarda
por todo el incondicional
amor, apoyo e comprensión
en los buenos y malos momentos
transcurridos en mi vida*

AGRADECIMENTOS

A Deus, por estar sempre presente, conduzindo-me em todos os caminhos.

Ao Prof. Rui Seara pela orientação.

Ao Orlando, pela amizade, motivação e orientação.

Ao Prof. Sidnei Noceti filho pela amizade.

A minha família pelo apoio e compreensão.

Ao Elton, pela amizade e disposição em ajudar.

A todos os colegas do LINSE que de alguma forma contribuíram no desenvolvimento deste trabalho.

Aos amigos que fiz durante estes três últimos anos no Brasil.

Resumo da Dissertação apresentada à UFSC como parte dos requisitos necessários
Para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica.

ANÁLISE ESTATÍSTICA DOS MOMENTOS DE PRIMEIRA E SEGUNDA ORDENS DOS ALGORITMOS DLMS E LMS DE ERRO FILTRADO MODIFICADOS

Juan Rodrigo Velásquez López

Março/2006

Orientador: Prof. Rui Seara, Dr.

Co-orientador: Orlando José Tobias, Dr.

Área de concentração: Comunicações e Processamento de Sinais.

Palavras-chave: Adaptação lenta, algoritmo DLMS, algoritmo LMS de erro filtrado, Teoria da Independência.

Número de Páginas: 100

RESUMO: Neste trabalho, são propostos modelos analíticos para os algoritmos *delayed least-mean-square* (DLMS) e *least-mean-square* (LMS) de erro filtrado modificados. Para cada um desses algoritmos, são obtidas as expressões que descrevem o comportamento dos momentos de primeira e segunda ordens e da curva de aprendizagem. Os modelos são obtidos sem invocar a suposição clássica da Teoria da Independência (TI), levando-se em conta a hipótese de adaptação lenta e considerando-se sinais de entrada Gaussianos. Os modelos aqui propostos não dependem do tipo de sinal de referência, podendo ser utilizados tanto para sinais de entrada brancos quanto para sinais coloridos. Para fins de comparação em cada caso, são também derivados modelos considerando-se a TI. A partir dos resultados obtidos, observa-se que os modelos propostos descrevem adequadamente o comportamento dos algoritmos em questão; em contraste, os modelos que consideram a TI não predizem tais algoritmos satisfatoriamente.

Abstract of Dissertação presented to UFSC as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master in Electrical Engineering.

STATISTICAL ANALYSIS OF THE FIRST AND SECOND ORDER MOMENTS OF THE MODIFIED DLMS AND MODIFIED FILTERED ERROR LMS ALGORITHMS

Juan Rodrigo Velásquez López

March/2006

Advisor: Prof. Rui Seara, Dr.

Co-advisor: Orlando José Tobias, Dr.

Area of Concentration: Communications and Signal Processing.

Keywords: DLMS algorithm, FE-LMS algorithm, Independence Theory, slow adaptation.

Number of Pages: 100

ABSTRACT: In this work, analytical models for both modified delayed least-mean-square (MDLMS) and modified filtered error least-mean-square (MFE-LMS) algorithms are proposed. For each algorithm, expressions that describe the behavior of the first and second order moments and learning curve are derived. These models are obtained without invoking the classic assumption of the Independence Theory (IT), taking into account the slow adaptation assumption and considering Gaussian input signal. The proposed models do not depend on the type of reference signal, being applicable to both white and colored input signals. For comparison purposes, models considering IT are also derived. Through the obtained results one can verify that the proposed models successfully predict the behavior of the algorithms in question; in contrast, the models that consider IT do not satisfactorily describe such algorithms.

SUMÁRIO

Lista de Figuras

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Introdução | 1 |
| 1.1. | Algoritmo DLMS | 2 |
| 1.2. | Algoritmo DLMS Modificado | 4 |
| 1.3. | Algoritmo FE-LMS Modificado | 4 |
| 1.4. | Estrutura da dissertação | 6 |
| 2 | Algoritmo DLMS Convencional | 7 |
| 2.1. | Introdução | 7 |
| 2.2. | Diagrama de blocos do algoritmo DLMS | 7 |
| 2.3. | Equações do algoritmo DLMS | 8 |
| 2.4. | Comportamento médio do vetor de coeficientes | 9 |
| 2.5. | Valor de regime permanente do vetor de coeficientes | 10 |
| 2.6. | Vetor de erro nos coeficientes | 11 |
| 2.7. | Curva de aprendizagem | 11 |
| 2.8. | Conclusões | 12 |
| 3 | Algoritmo DLMS Modificado | 13 |
| 3.1. | Introdução | 13 |
| 3.2. | Derivação do algoritmo | 13 |
| 3.3. | Modelo do algoritmo DLMS modificado (aproximação de segunda ordem) | 16 |
| 3.3.1. | Comportamento médio do vetor de coeficientes | 16 |
| 3.3.2. | Valor de regime Permanente do vetor de coeficientes | 21 |
| 3.3.3. | Vetor de erro nos coeficientes | 22 |
| 3.3.4. | Curva de aprendizagem | 22 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 3.4. | Modelo do algoritmo DLMS modificado (aproximação de terceira ordem) | .25 |
| 3.4.1. | Comportamento médio do vetor de coeficientes | .25 |
| 3.4.2. | Valor de regime permanente do vetor de coeficientes | .29 |
| 3.4.3. | Vetor de erro nos coeficientes | .31 |
| 3.4.4. | Curva de aprendizagem | .32 |
| 3.5. | Modelo utilizando a teoria da independência | .32 |
| 3.6. | Conclusões | .34 |
| 4 | Algoritmo LMS de Erro Filtrado Modificado | .35 |
| 4.1. | Introdução | .35 |
| 4.2. | Análise do algoritmo MFE-LMS | .35 |
| 4.2.1. | Algoritmo LMS de erro filtrado | .35 |
| 4.2.2. | Algoritmo FE-LMS modificado | .37 |
| 4.2.3. | Comportamento médio do vetor de coeficientes | .39 |
| 4.2.4. | Valor de regime permanente do vetor de coeficientes | .45 |
| 4.2.5. | Vetor de erro nos coeficientes | .46 |
| 4.2.6. | Curva de aprendizagem | .47 |
| 4.3. | Modelo utilizando a teoria da independência | .50 |
| 4.4. | Conclusões | .53 |
| 5 | Resultados de Simulação | .54 |
| 5.1. | Algoritmo MDLMS utilizando sinal de entrada branco | .54 |
| 5.2. | Algoritmo MDLMS utilizando sinal de entrada colorido | .63 |
| 5.3. | Algoritmo MFE-LMS utilizando sinal de entrada branco | .71 |
| 5.4. | Algoritmo MFE-LMS utilizando sinal de entrada colorido | .77 |
| 5.5. | Conclusões | .84 |
| 6 | Comentários e Conclusões Finais | .85 |
| 6.1. | Sumário e comentários dos resultados | .85 |
| 6.2. | Proposta de trabalhos futuros | .87 |

| | |
|-----------------------------------|-----------|
| Apêndice A | 88 |
| Apêndice B | 91 |
| Referências bibliográficas | 98 |

LISTAS DE FIGURAS

- Figura 1.1. Diagrama de blocos do algoritmo LMS de erro filtrado-----5
- Figura 2.1. Diagrama de blocos do algoritmo DLMS-----7
- Figura 4.1. Diagrama de blocos do algoritmo FE-LMS-----36
- Figura 5.1. Exemplo 1. Curva de aprendizagem com $\mu = 0,04$. Algoritmo DLMS (linha irregular cinza); algoritmo MDLMS (linha irregular preta)-----55
- Figura 5.2. Exemplo 2. (a) Comportamento médio do vetor de coeficientes, com $\mu_{\max} / 35$. Simulação MC (linha irregular cinza); modelo utilizando a TI (3.82) idêntico aos modelos propostos (3.36) e (3.72) (linha tracejada preta). (b) Curva de aprendizagem com $\mu_{\max} / 35$. Simulação MC (linha irregular cinza); modelo utilizando a TI (3.89) idêntico aos modelos propostos (3.58) e (3.80) (linha tracejada preta)-----57
- Figura 5.3. Exemplo 2. (a) Comportamento médio do vetor de coeficientes, com $\mu_{\max} / 20$. Simulação MC (linha irregular cinza); modelo utilizando a TI (3.82) idêntico aos modelos propostos (3.36) e (3.72) (linha tracejada preta). (b) Curva de aprendizagem com $\mu_{\max} / 20$. Simulação MC (linha irregular cinza); modelo utilizando a TI (3.89) idêntico aos modelos propostos (3.58) e (3.80) (linha tracejada preta)-----58
- Figura 5.4. Exemplo 2. (a) Comportamento médio do vetor de coeficientes, com $\mu_{\max} / 7$. Simulação MC (linha irregular cinza); modelo utilizando a TI (3.82) idêntico aos modelos propostos (3.36) e (3.72) (linha tracejada preta). (b) Curva de aprendizagem com $\mu_{\max} / 7$. Simulação MC (linha irregular cinza); modelo utilizando a TI (3.89) idêntico aos modelos propostos (3.58) e (3.80) (linha tracejada preta)-----59
- Figura 5.5. Exemplo 3. (a) Comportamento médio do vetor de coeficientes, com $\mu_{\max} / 20$. Simulação MC (linha irregular cinza); modelo utilizando a TI (3.82) idêntico aos

modelos propostos (3.36) e (3.72) (linha tracejada preta). (b) Curva de aprendizagem com $\mu_{\max} / 20$. Simulação MC (linha irregular cinza); modelo utilizando a TI (3.89) idêntico aos modelos propostos (3.58) e (3.80) (linha tracejada preta)-----60

Figura 5.6. Exemplo 4. (a) Resposta ao impulso da planta. (b) Comportamento médio do vetor de coeficientes, com $\mu_{\max} / 20$. Simulação MC (linha irregular cinza); modelo utilizando a TI (3.82) idêntico aos modelos propostos (3.36) e (3.72) (linha tracejada preta). (c) Curva de aprendizagem com $\mu_{\max} / 20$. Simulação MC (linha irregular cinza); modelo utilizando a TI (3.89) idêntico aos modelos propostos (3.58) e (3.80) (linha tracejada preta)-----62

Figura 5.7. Exemplo 5. Curva de aprendizagem com $\mu=0,006$. Algoritmo DLMS idêntico ao algoritmo MDLMS (linha irregular cinza)-----64

Figura 5.8. Exemplo 6. (a) Comportamento médio do vetor de coeficientes para $0,5\mu_{\max}$. Simulação MC (linha irregular cinza); modelo utilizando a TI (3.82) idêntico aos modelos propostos (3.36) e (3.72) (linha tracejada preta). (b) Curva de aprendizagem com $0,5\mu_{\max}$. Simulação MC (linha irregular cinza); modelo utilizando a TI (3.89) idêntico aos modelos propostos (3.58) e (3.80) (linha tracejada preta)-----65

Figura 5.9. Exemplo 7. (a) Comportamento médio do vetor de coeficientes para $\mu = 0,25\mu_{\max}$. Simulação MC (linha irregular cinza); modelo utilizando a TI (3.82) idêntico ao modelos propostos (3.36) e (3.72) (linha tracejada preta). (b) Curva de aprendizagem com $0,25\mu_{\max}$. Simulação MC (linha irregular cinza); modelo utilizando a TI (3.89) idêntico aos modelos propostos (3.58) e (3.80) (linha tracejada preta)----67

Figura 5.10. Exemplo 7. (a) Comportamento médio do vetor de coeficientes para $0,4\mu_{\max}$. Simulação MC (linha irregular cinza); modelo utilizando a TI (3.82) idêntico ao modelo proposto (3.72) (linha tracejada preta). (b) Curva de aprendizagem com

$0,4\mu_{\max}$. Simulação MC (linha irregular cinza); modelo utilizando a TI (3.89) idêntico ao modelo proposto (3.80) (linha tracejada preta)-----68

Figura 5.11. Exemplo 8. (a) Comportamento médio do vetor de coeficientes para $0,1\mu_{\max}$. Simulação MC (linha irregular cinza); modelo utilizando a TI (3.82) idêntico aos modelos propostos (3.36) e (3.72) (linha tracejada preta). (b) Curva de aprendizagem com $0,1\mu_{\max}$. Simulação MC (linha irregular cinza); modelo utilizando a TI (3.89) idêntico aos modelos propostos (3.58) e (3.80) (linha tracejada preta)-----69

Figura 5.12. Exemplo 8. (a) Comportamento médio do vetor de coeficientes com $\mu = 0,4\mu_{\max}$. Simulação MC (linha irregular cinza); modelo utilizando a TI (3.82) idêntico ao modelo proposto (3.72) (linha tracejada preta). (b) Curva de aprendizagem para $0,4\mu_{\max}$. Simulação MC (linha irregular cinza); modelo utilizando a TI (3.89) idêntico ao modelo proposto (3.80) (linha tracejada preta)-----70

Figura 5.13. Exemplo 9. Curva de aprendizagem para $\mu = 0,12$. Algoritmo FE-LMS (linha irregular cinza); algoritmo MFE-MS (linha irregular preta)-----72

Figura 5.14. Exemplo 10. (a) Comportamento médio do vetor de coeficientes para $0,8\mu_{\max}$. Simulação MC (linha irregular cinza); usando a TI (4.61) (linha contínua preta); modelo proposto (4.34) (linha tracejada preta). (b) Curva de aprendizagem com $0,8\mu_{\max}$. Simulação MC (linha irregular cinza); usando a TI (4.68) (linha contínua preta); modelo proposto (4.59) (linha tracejada preta)-----73

Figura 5.15. Exemplo 10. (a) Comportamento médio do vetor de coeficientes com $0,3\mu_{\max}$. Simulação MC (linha irregular cinza); usando a TI (4.61) (linha contínua preta); modelo proposto (4.34) (linha tracejada preta). (b) Curva de aprendizagem para $0,3\mu_{\max}$. Simulação MC (linha irregular cinza); usando a TI (4.68) (linha contínua preta); modelo proposto (4.59) (linha tracejada preta)-----74

Figura 5.16. Exemplo 11. (a) Comportamento médio do vetor de coeficientes para $0,6\mu_{\max}$. Simulação MC (linha irregular cinza); usando a TI (4.61) (linha contínua preta); modelo proposto (4.34) (linha tracejada preta). (b) Curva de aprendizagem com $0,6\mu_{\max}$. Simulação MC (linha irregular cinza); usando a TI (4.68) (linha contínua preta); modelo proposto (4.59) (linha tracejada preta)-----76

Figura 5.17. Exemplo 11. (a) Comportamento médio do vetor de coeficientes para $0,3\mu_{\max}$. Simulação MC (linha irregular cinza); usando a TI (4.61) (linha contínua preta); modelo proposto (4.34) (linha tracejada preta). (b) Curva de aprendizagem com $0,3\mu_{\max}$. Simulação MC (linha irregular cinza); usando a TI (4.68) (linha contínua preta); modelo proposto (4.59) (linha tracejada preta)-----77

Figura 5.18. Exemplo 12. Curva de aprendizagem para $\mu = 0,018$. Algoritmo FE-LMS idêntico ao algoritmo MFE-LMS (linha irregular cinza)-----78

Figura 5.19. Exemplo 13. (a) Comportamento médio do vetor de coeficientes para $\mu = 0,8\mu_{\max}$. Simulação MC (linha irregular cinza); modelo proposto (4.34) (linha tracejada preta). (b) Curva de aprendizagem com $0,8\mu_{\max}$. Simulação MC (linha irregular cinza); modelo proposto (4.59) (linha tracejada preta)-----79

Figura 5.20. Exemplo 13. (a) Comportamento médio do vetor de coeficientes com $\mu = 0,6\mu_{\max}$. Simulação MC (linha irregular cinza); modelo proposto (4.34) (linha tracejada preta). (b) Curva de aprendizagem com $0,6\mu_{\max}$. Simulação MC (linha irregular cinza); modelo proposto (4.59) (linha tracejada preta)-----80

Figura 5.21. Exemplo 13. (a) Comportamento médio do vetor de coeficientes para $0,5\mu_{\max}$. Simulação MC (linha irregular cinza); usando a TI (4.61) (linha contínua preta); modelo proposto (4.34) (linha tracejada preta). (b) Curva de aprendizagem com $0,5\mu_{\max}$. Simulação MC (linha irregular cinza); usando a TI (4.68) (linha contínua preta); modelo proposto (4.59) (linha tracejada preta)-----81

Figura 5.22. Exemplo 14. (a) Comportamento médio do vetor de coeficientes para $0,8\mu_{\max}$.
Simulação MC (linha irregular cinza); modelo proposto (4.34) (linha tracejada preta).
(b) Curva de aprendizagem com $0,8\mu_{\max}$. Simulação MC (linha irregular cinza); modelo
proposto (4.59) (linha tracejada preta)-----83

Figura 5.23. Exemplo 14. (a) Comportamento médio do vetor de coeficientes para $0,1\mu_{\max}$.
Simulação MC (linha irregular cinza); usando a TI (4.61) (linha contínua preta);
modelo proposto (4.34) (linha tracejada preta). (b) Curva de aprendizagem com
 $0,1\mu_{\max}$. Simulação MC (linha irregular cinza); usando a TI (4.68) (linha contínua
preta); modelo proposto (4.59) (linha tracejada preta)-----84

INTRODUÇÃO

A filtragem adaptativa constitui uma ferramenta útil em processamento de sinais para aplicações em tempo real. Em particular, sempre que houver necessidade de processar sinais resultantes de ambientes com características e comportamento desconhecidos, a utilização de filtragem adaptativa é uma solução bastante interessante e eficaz quando confrontada com os resultados obtidos através de filtragem convencional.

Em geral, os filtros adaptativos são apropriados a ambientes em que não há conhecimento *a priori* das características dos sinais de entrada [2]. O filtro adaptativo então modifica de forma automática as características de tais sinais baseando-se quase sempre em um algoritmo recursivo para ajuste de seus parâmetros, minimizando uma dada função custo. Assim, o algoritmo começa com um conjunto de parâmetros iniciais predeterminados, convergindo para uma solução que fornece o mínimo valor para a definida função custo. Se o ambiente for estacionário, os parâmetros do filtro convergem, a cada iteração, para a solução ótima do filtro de Wiener [1], [2]. Em ambientes não-estacionários o algoritmo permite ao filtro a possibilidade de acompanhar as variações estatísticas do ambiente, desde que essas sejam suficientemente lentas.

A escolha do algoritmo de adaptação apropriada é realizada considerando-se os seguintes parâmetros:

- i) velocidade de convergência e precisão do algoritmo;
- ii) complexidade numérica do algoritmo;
- iii) estabilidade numérica dependendo do algoritmo utilizado.

O algoritmo *least-mean-square* (LMS) é o mais utilizado dentre os algoritmos adaptativos apresentados na literatura [1], [2]. O principal motivo é sua robustez e

simplicidade computacional. Esse algoritmo usa uma estimativa instantânea da função custo para realizar o ajuste contínuo dos coeficientes do filtro. Devido a tal característica, o algoritmo LMS pertence à classe dos algoritmos baseados no método de gradiente estocástico.

1.1. Algoritmo DLMS

O algoritmo LMS tem sido largamente estudado em filtragem adaptativa [1], [2]. O sinal de erro desse algoritmo, o qual é obtido pela diferença entre o sinal de saída do filtro e o sinal desejado utilizado para a atualização dos coeficientes adaptativos do filtro. Esse processo é realizado para cada amostra do sinal de entrada. Em algumas aplicações práticas, o sinal de erro considerado na adaptação do algoritmo LMS impõe limitações críticas à sua implementação. Por exemplo, em equalização adaptativa, a adaptação é realizada utilizando-se o critério do mínimo erro quadrático médio. Caso o equalizador utilize o algoritmo de Viterbi [4], [5] ou o detector descrito por Abend e Fritchman [6], o sinal desejado e o sinal de erro são avaliados com um atraso de várias amostras, requerendo assim a inserção de um retardo no algoritmo com o propósito de compensar tal atraso [4]-[6]. Também podemos encontrar a necessidade de inserir um atraso fixo no sinal de erro do algoritmo LMS para o projeto de arquiteturas paralelas [7]-[8], visando implementar estruturas *pipeline* mais simples. A partir da inserção de certo atraso ao algoritmo LMS convencional, obtém-se então o chamado algoritmo LMS com atraso (*delayed least-mean-square - DLMS*) [12].

Algumas aplicações do algoritmo DLMS podem ser encontradas na implementação de estruturas de processamento usando arranjos sistólicos [9]-[10] (esses últimos considerados em aplicações requerendo processamento rápido de sinal, sendo uma alternativa muito interessante e de grande viabilidade devido ao contínuo avanço na tecnologia VLSI [31]). O algoritmo DLMS é então implementado baseado em arranjos sistólicos devido à sua compatibilidade com a tecnologia VLSI [31]. Em [11], o algoritmo DLMS é usado para o projeto de próteses auditivas, requerendo uma potência de dissipação muito baixa em relação a outras implementações de tais sistemas [33]-[35].

Muitos autores têm estudado o algoritmo DLMS visando determinar a estabilidade e suas propriedades de convergência [12]-[15]. Em [12] e [13], é apresentada uma análise de estabilidade e o comportamento médio do vetor de coeficientes; em [14], a análise é obtida visando determinar o limite de estabilidade que assegure a convergência do algoritmo, invocando para tal a bem conhecida teoria da independência (TI) [19]. A teoria da independência assume que:

- O conjunto de vetores $\mathbf{x}(1), \mathbf{x}(2), \dots, \mathbf{x}(n)$ constitui uma seqüência de vetores estatisticamente independentes;
- no instante n , o sinal desejado $d(n)$ é estatisticamente dependente ao correspondente vetor de entrada $\mathbf{x}(n)$.

A teoria da independência pode ser justificada em certas aplicações. Por exemplo, no caso de antenas adaptativas, elas recebem múltiplas entradas independentes entre si. Entretanto, em filtragem adaptativa aplicada a comunicações (predição do sinal, equalização do canal e cancelamento de eco, dentre outras), os vetores de entrada são estatisticamente dependentes. Essa dependência é justificada pela propriedade de deslocamento. Especificamente, o vetor de entrada no instante n é $\mathbf{x}(n) = [x(n) \ x(n-1) \ x(n-2) \ \dots \ x(n-N+1)]^T$. No instante $n+1$, o vetor toma um novo valor $\mathbf{x}(n+1) = [x(n+1) \ x(n) \ x(n-1) \ \dots \ x(n-N+2)]^T$. Assim, com a chegada de cada nova amostra $x(n+1)$, a última amostra $x(n-N+1)$ é descartada de $\mathbf{x}(n)$, e as restantes $x(n-1) \ x(n-2) \ \dots \ x(n-N+2)$, são deslocadas uma posição para a direita, sendo assim é inserida a nova amostra $x(n+1)$ na primeira posição do vetor. A partir desse processo, observa-se que os vetores de entrada são de fato estatisticamente dependentes.

As análises já mencionadas para algoritmo DLMS invocando a TI são interessantes, porém, não são suficientemente adequadas para se obter de forma analítica uma modelagem precisa para tal algoritmo. Em [16], é apresentada uma análise estatística do algoritmo DLMS sem invocar a teoria da independência, sendo assim consideradas no processo todas as correlações existentes do vetor de entrada para instantes diferentes de amostras. Nesse trabalho, são discutidos os momentos de primeira e segunda ordens do

vetor de coeficientes do filtro adaptativo, resultando modelos que descrevem satisfatoriamente o comportamento do algoritmo sob análise.

1.2. Algoritmo DLMS modificado

Na seção anterior, foram exemplificadas algumas situações em que deve ser utilizado o algoritmo DLMS, como também os diferentes estudos já realizados considerando tal algoritmo. No entanto, o algoritmo DLMS tem como inconveniente uma degradação tanto na taxa de convergência quanto em estabilidade, a qual é progressiva conforme o atraso existente no caminho do erro aumenta. Para contornar tais problemas, uma modificação desse algoritmo foi proposta em [17]. O resultado de tal alteração é que o algoritmo modificado agora se comporta como um algoritmo LMS convencional. Isto é, as características de velocidade de convergência e estabilidade são restabelecidas àquelas de um algoritmo LMS convencional. Tal algoritmo é denominado algoritmo DLMS modificado (*modified delayed least-mean-square - MDLMS*)[17].

Na literatura técnica não existem trabalhos que modelem este algoritmo. Assim, para o presente trabalho de dissertação, dois modelos analíticos são desenvolvidos. Da mesma forma que nos algoritmos DLMS [16] e LMS filtrado (*filtered-x least-mean-square – Fx-LMS*) [22]-[23], a TI não é invocada. Assim, os momentos de primeira e segunda ordens do vetor de coeficientes do algoritmo DLMS modificado são determinados. Também, por simplicidade matemática, o momento de segunda ordem é aqui desenvolvido utilizando-se a hipótese de adaptação lenta e sinais de entrada Gaussianos. Comparações entre os resultados de simulação Monte Carlo e as predições obtidas a partir do modelo proposto são apresentadas tanto para sinais de entrada brancos quanto para coloridos.

1.3. Algoritmo FE-LMS modificado

Em aplicações de controle ativo de ruído acústico e vibrações como também em cancelamento de eco acústico, dentre outras, a existência de um filtro no caminho do erro faz com que o uso do algoritmo DLMS não seja mais possível, visto que para garantir a estabilidade do algoritmo precisa-se do cancelamento de tal filtro [36]. Nesses casos,

devem ser utilizados algoritmos adaptativos de erro filtrado (Fig. 1.1). No entanto, os algoritmos de erro filtrado, similarmente ao algoritmo DLMS, apresentam um comportamento pobre tanto em velocidade de convergência quanto em estabilidade. Para contornar tais problemas, a modificação considerada para o algoritmo DLMS [17] também pode ser estendida aos algoritmos de erro filtrado. Tal algoritmo é denominado algoritmo LMS de erro filtrado modificado [18].

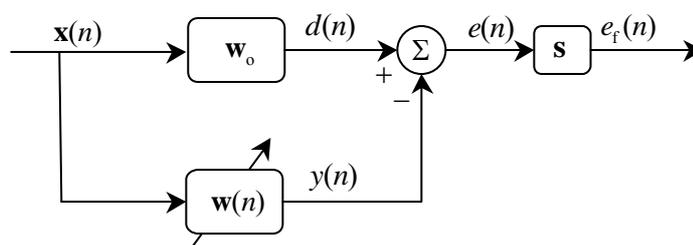


Fig. 1.1. Diagrama de blocos do algoritmo LMS de erro filtrado.

Na literatura, podemos encontrar três tipos de algoritmos pertencentes à família de algoritmos adaptativos de erro filtrado, a saber: Fx-LMS [20]-[21], que é amplamente utilizado em aplicações de controle ativo de ruído acústico; algoritmo LMS filtrado modificado (*modified filtered-x least-mean-square* - MFx-LMS) [26]-[27], que é uma versão modificada do Fx-LMS padrão; e o LMS de erro filtrado (*filtered error least-mean-square* - FE-LMS) [24], que é usado como uma implementação alternativa ao algoritmo Fx-LMS em diversas aplicações [25], [29], tais como cancelamento de eco e equalização adaptativa.

Uma outra contribuição deste trabalho de dissertação é o desenvolvimento de um modelo analítico para o algoritmo FE-LMS modificado (*modified filtered error least-mean-square* - MFE-LMS). As considerações para a obtenção dos modelos do algoritmo DLMS modificado podem ser estendidas também a este algoritmo. Assim, os momentos de primeira e segunda ordens para tal algoritmo são obtidos sem invocar a TI e levando-se em conta a hipótese de adaptação lenta bem como a consideração de sinais de entrada Gaussianos. Comparações entre os resultados de simulação Monte Carlo e as previsões obtidas a partir do modelo proposto são apresentadas tanto para sinais de entrada brancos quanto para sinais coloridos.

1.4. Estrutura da dissertação

Esta dissertação é organizada como segue. O Capítulo 2 apresenta um breve estudo do comportamento dos momentos de primeira e segunda ordens do algoritmo DLMS convencional. Nos Capítulos 3 e 4 são introduzidas as versões modificadas dos algoritmos DLMS convencional e FE-LMS, respectivamente. Ainda nestes capítulos desenvolvem-se modelos que descrevem o comportamento de tais algoritmos sem invocar a TI e utilizando a consideração de adaptação lenta. O Capítulo 5 mostra e discute os resultados obtidos via método Monte Carlo (MC) e através dos modelos propostos obtidos nos Capítulos 3 e 4. Finalmente, no Capítulo 5, são apresentados os comentários e as conclusões deste trabalho de dissertação como também as propostas para trabalhos futuros.

ALGORITMO DLMS CONVENCIONAL

2.1. Introdução

Neste capítulo, é estudado o algoritmo DLMS convencional, sendo apresentadas as expressões que descrevem o comportamento desse algoritmo. O diagrama em blocos da Fig. 2 apresenta os sinais envolvidos para o caso de uma aplicação de identificação de sistemas. Também, são apresentadas as expressões do sinal de erro e de atualização do vetor de coeficientes do filtro adaptativo, seguido de um breve estudo do comportamento dos momentos de primeira e segunda ordens e da curva de aprendizagem do algoritmo em questão.

2.2. Diagrama de blocos do algoritmo DLMS convencional

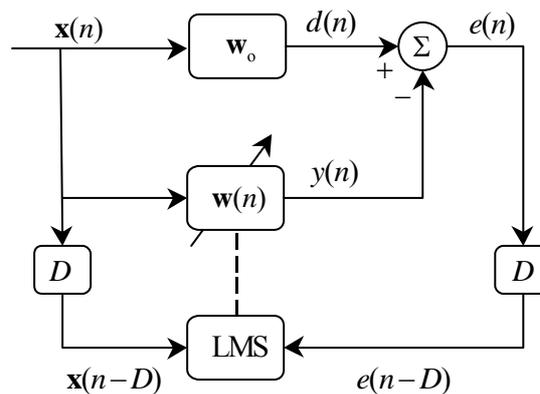


Fig. 2.1. Diagrama de blocos do algoritmo DLMS convencional.

As variáveis envolvidas no processo são:

$\mathbf{w}_0 = [w_{0,0} \ w_{0,1} \ \dots \ w_{0,N-1}]^T$: resposta ao impulso a ser identificada

$\mathbf{w}(n) = [w_0(n) \ w_1(n) \ \dots \ w_{N-1}(n)]^T$: vetor de coeficientes adaptativos

$\mathbf{x}(n) = [x(n) \ x(n-1) \ x(n-2) \ \dots \ x(n-N+1)]^T$: sinal de referência

$d(n)$: sinal desejado

$y(n)$: saída do filtro adaptativo

$e(n)$: sinal de erro

D : atraso inerente ao sistema

$e(n-D)$: sinal de erro atrasado

$\mathbf{x}(n-D)$: sinal de referência atrasado

No processo de análise considerado, $\mathbf{x}(n)$ é assumido Gaussiano com média zero e variância σ_x^2 . Também, as dimensões de \mathbf{w}_0 e $\mathbf{w}(n)$ são consideradas iguais para fins de simplicidade no tratamento matemático.

2.3. Equações do algoritmo DLMS

A partir da Fig. 2.1, obtém-se a expressão para o sinal de erro instantâneo como sendo a diferença entre o sinal desejado e a saída do filtro adaptativo. Assim,

$$e(n) = d(n) - y(n), \quad (2.1)$$

onde o sinal desejado é dado por

$$d(n) = \mathbf{w}_0^T \mathbf{x}(n) = \mathbf{x}^T(n) \mathbf{w}_0, \quad (2.2)$$

e a saída do filtro adaptativo é dada por

$$y(n) = \mathbf{w}^T(n) \mathbf{x}(n) = \mathbf{x}^T(n) \mathbf{w}(n). \quad (2.3)$$

Substituindo-se (2.3) em (2.1), tem-se

$$e(n) = d(n) - \mathbf{w}^T(n) \mathbf{x}(n). \quad (2.4)$$

Do diagrama em blocos vemos que o sinal de erro, que é utilizado pelo algoritmo, é afetado pelo atraso do sistema. Assim, o sinal de erro atrasado é

$$e(n-D) = d(n-D) - \mathbf{w}^T(n-D)\mathbf{x}(n-D). \quad (2.5)$$

Para a atualização do vetor de coeficientes usa-se a implementação estocástica do método *steepest decesent* [1]. Assim,

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) - \frac{\mu}{2} \nabla \hat{\xi}(n), \quad (2.6)$$

onde μ é uma constante denominada passo de adaptação e $\nabla \hat{\xi}(n)$ é a estimativa instantânea do gradiente do erro quadrático médio $\nabla e^2(n-D)$, expresso como,

$$\nabla \hat{\xi}(n) = \nabla e^2(n-D) = 2e(n-D) \frac{\partial e(n-D)}{\partial \mathbf{w}(n-D)}. \quad (2.7)$$

Cabe ressaltar que $e(n-D)$ é o erro instantâneo utilizado pelo algoritmo para a atualização do vetor de coeficientes. Agora, derivando-se (2.5) em relação a $\mathbf{w}(n-D)$ e substituindo-se a expressão resultante em (b), obtém-se

$$\nabla \hat{\xi}(n) = \nabla e^2(n-D) = -2e(n-D)\mathbf{x}(n-D). \quad (2.8)$$

Finalmente, aplicando-se (2.8) em (2.6), obtém-se a expressão recursiva para a atualização do vetor de coeficientes dada por

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \mu e(n-D)\mathbf{x}(n-D). \quad (2.9)$$

2.4. Comportamento médio do vetor de coeficientes

O comportamento médio do vetor de coeficientes é obtido substituindo-se (2.5) em (2.9) e tomando-se o valor esperado em ambos os lados da expressão resultante. Assim,

$$\begin{aligned} E[\mathbf{w}(n+1)] &= E[\mathbf{w}(n)] + \mu E[d(n-D)\mathbf{x}(n-D)] \\ &\quad - \mu E[\mathbf{x}(n-D)\mathbf{x}^T(n-D)\mathbf{w}(n-D)]. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Utilizando-se em (2.7) a consideração de adaptação lenta, tem-se

$$\begin{aligned} E[\mathbf{x}(n-D)\mathbf{x}^T(n-D)\mathbf{w}(n-D)] &\cong E[\mathbf{x}(n-D)\mathbf{x}^T(n-D)]E[\mathbf{w}(n-D)] \\ &\cong \mathbf{R}E[\mathbf{w}(n-D)], \end{aligned} \quad (2.11)$$

onde $\mathbf{R} = E[\mathbf{x}(n-D)\mathbf{x}^T(n-D)]$ é a matriz de autocorrelação do sinal de referência.

Agora, substituindo-se (2.11) em (2.10), obtém-se a expressão recursiva para o comportamento médio do vetor de coeficientes. Assim,

$$E[\mathbf{w}(n+1)] = E[\mathbf{w}(n)] + \mu\mathbf{p} - \mu\mathbf{R}E[\mathbf{w}(n-D)], \quad (2.12)$$

onde $\mathbf{p} = E[d(n-D)\mathbf{x}(n-D)]$ é o vetor de correlação cruzada entre os sinais desejado e de referência.

2.5. Valor de regime permanente do vetor de coeficientes

Pode-se então determinar o valor de regime permanente aplicando-se o limite quando $n \rightarrow \infty$ em ambos os lados de (2.12). Portanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[\mathbf{w}(n+1)] = \lim_{n \rightarrow \infty} E[\mathbf{w}(n)] + \mu\mathbf{p} - \mu\mathbf{R} \lim_{n \rightarrow \infty} E[\mathbf{w}(n-D)]. \quad (2.13)$$

Assumindo-se que o algoritmo converge, o valor de regime permanente do vetor de coeficientes do filtro adaptativo é determinado a partir da seguinte condição:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[\mathbf{w}(n+1)] = \lim_{n \rightarrow \infty} E[\mathbf{w}(n-D)] = \lim_{n \rightarrow \infty} E[\mathbf{w}(n)] = \mathbf{w}_\infty. \quad (2.14)$$

Finalmente, substituindo-se (2.14) em (2.13), obtemos a expressão do valor de regime permanente do vetor de coeficientes. Assim,

$$\mathbf{w}_\infty = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{p}. \quad (2.15)$$

2.6. Vetor de erro nos coeficientes

Definindo-se o vetor de erro nos coeficientes como

$$\mathbf{v}(n) = \mathbf{w}(n) - \mathbf{w}_\infty, \quad (2.16)$$

e substituindo-se (2.16) em (2.12), tem-se

$$E[\mathbf{v}(n+1)] = E[\mathbf{v}(n)] - \mu \mathbf{p} + \mu \mathbf{R} \mathbf{w}_\infty - \mu \mathbf{R} E[\mathbf{v}(n-D)]. \quad (2.17)$$

Finalmente, aplicando-se (2.15) em (2.17), obtém-se uma expressão para o vetor de erro nos coeficientes. Assim,

$$E[\mathbf{v}(n+1)] = E[\mathbf{v}(n)] - \mu \mathbf{R} E[\mathbf{v}(n-D)]. \quad (2.18)$$

2.7. Curva de aprendizagem

A curva de aprendizagem representa a evolução, ao longo do tempo, do erro quadrático médio. Para o caso do algoritmo DLMS, a curva de aprendizagem é obtida elevando-se (2.5) ao quadrado e tomando-se o valor esperado da expressão resultante. Assim,

$$\begin{aligned} E[e^2(n-D)] = & E[d^2(n-D)] - 2\mathbf{p}^T E[\mathbf{v}(n-D)] - 2\mathbf{p}^T \mathbf{w}_\infty + \text{tr}\{\mathbf{R} \mathbf{w}_\infty \mathbf{w}_\infty^T\} \\ & + \text{tr}\{\mathbf{R} \mathbf{w}_\infty E[\mathbf{v}^T(n-D)]\} + \text{tr}\{\mathbf{R} E[\mathbf{v}(n-D) \mathbf{v}^T(n-D)]\} + \sigma_{\text{ruído}}^2. \end{aligned} \quad (2.19)$$

onde $\text{tr}\{\cdot\}$ representa o operador traço da matriz.

Em [16] encontra-se um procedimento detalhado para a obtenção de (2.19).

A partir de (2.19), observa-se que para descrever o comportamento da curva de aprendizagem, é necessário conhecer o valor esperado $E[\mathbf{v}(n-D) \mathbf{v}^T(n-D)]$. Tal valor esperado é determinado através dos seguintes passos:

- i) determinar-se $\mathbf{v}(n-D)$;
- ii) obtém-se o produto externo $\mathbf{v}(n-D)\mathbf{v}^T(n-D)$;
- iii) determina-se o valor esperado $E[\mathbf{v}(n-D)\mathbf{v}^T(n-D)]$, para o qual é considerada a seguinte notação $\mathbf{K}_{D,D}(n) = E[\mathbf{v}(n-D)\mathbf{v}^T(n-D)]$.

Realizando-se os passos (i), (ii) e (iii) e utilizando-se a relação $\mathbf{K}_{D,D}(n) = \mathbf{K}_{0,0}(n-D)$, obtém-se uma expressão recursiva para determinar $\mathbf{K}(n)$. Assim,

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_{0,0}(n) = & \mathbf{K}_{0,0}(n-1) - \mu\mathbf{K}_{0,0}(n-D-1)\mathbf{R} - \mu\mathbf{R}\mathbf{K}_{0,0}(n-D-1) \\
& + \mu^2 D\mathbf{R}(\mathbf{K}_{1,0}(n-D-1) + \mathbf{K}_{0,1}(n-D-1))\mathbf{R} \\
& + \mu^2 (2\mathbf{R}\mathbf{K}_{D,D}(n-1)\mathbf{R} + \mathbf{R} \operatorname{tr}\{\mathbf{R}\mathbf{K}_{D,D}(n-1)\}) \\
& + \mu^2 \mathbf{R}\sigma_{\text{ruído}}^2.
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Note que para descrever completamente $\mathbf{K}(n)$, deve-se conhecer $\mathbf{K}_{1,0}(n) = E[\mathbf{v}(n-1)\mathbf{v}^T(n)]$ ou $\mathbf{K}_{0,1} = E[\mathbf{v}(n)\mathbf{v}^T(n-1)]$. Por exemplo, para o cálculo de $\mathbf{K}_{1,0}(n)$, determina-se primeiramente uma expressão para $\mathbf{v}(n-1)$, e pós-multiplica-se então ambos os lados dessa expressão por $\mathbf{v}^T(n)$ e toma-se o valor esperado da expressão resultante, obtendo-se

$$\mathbf{K}_{0,1}(n) = \mathbf{K}_{0,0}(n-1) - \mu\mathbf{R}\mathbf{K}_{1,0}(n-1), \tag{2.21}$$

onde $\mathbf{K}_{0,1}(n) = \mathbf{K}_{1,0}^T(n)$.

Em [16] encontra-se um procedimento detalhado para a obtenção de (2.20) e (2.21).

2.8. Conclusões

Neste capítulo, foi apresentado um breve estudo do comportamento dos momentos de primeira e segunda ordens do algoritmo DLMS convencional. Tal modelo foi obtido sem o uso da clássica teoria da independência e levando em conta a hipótese de adaptação lenta.

ALGORITMO DLMS MODIFICADO

Equation Section (Next)

3.1. Introdução

Neste capítulo, são derivadas as expressões que descrevem o comportamento do algoritmo DLMS modificado. Na Seção 3.2, é obtida a expressão para o sinal de erro desse algoritmo. Tal expressão é determinada a partir de uma compensação realizada no sinal de erro do algoritmo DLMS convencional [equação (2.5)] introduzida no capítulo anterior. Nas subseqüentes seções, são determinados os modelos que descrevem o comportamento dos momentos de primeira e segunda ordens e da curva de aprendizagem. Tais modelos são obtidos considerando-se a hipótese de adaptação lenta e não utilizando a TI. Também para fins de comparação é desenvolvido um modelo invocando a TI, que é uma suposição clássica na modelagem do algoritmo LMS.

3.2. Derivação do algoritmo DLMS modificado

O algoritmo DLMS modificado é obtido fazendo compensação no sinal de erro [equação (2.5)] do algoritmo DLMS convencional. Tal compensação é obtida acrescentado-se um termo, denotado por $-\Lambda(n)$, em (2.5). Assim, a expressão para o erro compensado $\hat{e}(n-D)$ é dada por [17]

$$\hat{e}(n-D) = d(n-D) - \mathbf{w}^T(n-D)\mathbf{x}(n-D) - \Lambda(n). \quad (3.1)$$

Agora, necessita-se determinar uma expressão para $\Lambda(n)$, tal que faça (3.1) ser igual à expressão do sinal de erro do algoritmo LMS convencional. Então,

$$e(n-D)|_{\text{LMS}} = d(n-D) - \mathbf{w}^T(n)\mathbf{x}(n-D). \quad (3.2)$$

Assim, determina-se $\Lambda(n)$ igualando (3.1) e (3.2). Portanto,

$$e(n-D)|_{\text{LMS}} = \hat{e}(n-D). \quad (3.3)$$

Desta forma, rearranjando-se os termos da expressão resultante, obtém-se

$$\Lambda(n) = [\mathbf{w}^T(n) - \mathbf{w}^T(n-D)]\mathbf{x}(n-D). \quad (3.4)$$

A partir (2.9), pode-se determinar uma expressão que exprima $[\mathbf{w}^T(n) - \mathbf{w}^T(n-D)]$ da seguinte forma:

$$\text{instante } (n) \Rightarrow \mathbf{w}^T(n) = \mathbf{w}^T(n-1) + \mu\hat{e}(n-D-1)\mathbf{x}^T(n-D-1), \quad (3.5)$$

$$\text{instante } (n-1) \Rightarrow \mathbf{w}^T(n-1) = \mathbf{w}^T(n-2) + \mu\hat{e}(n-D-2)\mathbf{x}^T(n-D-2), \quad (3.6)$$

$$\text{instante } (n-2) \Rightarrow \mathbf{w}^T(n-2) = \mathbf{w}^T(n-3) + \mu\hat{e}(n-D-3)\mathbf{x}^T(n-D-3), \quad (3.7)$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad = \quad \vdots \quad + \quad \vdots \quad \vdots$$

$$\text{instante } (n-D-1) \Rightarrow \mathbf{w}^T(n-D+1) = \mathbf{w}^T(n-D) + \mu\hat{e}(n-D-D)\mathbf{x}^T(n-D-D). \quad (3.8)$$

Agora, substituindo-se as expressões para o instante $(n-D-1)$ no instante anterior $(n-D)$ e assim, sucessivamente, obtém-se

$$\begin{aligned} \mathbf{w}(n)^T - \mathbf{w}(n-D)^T &= \mu\hat{e}(n-D-1)\mathbf{x}^T(n-D-1) + \mu\hat{e}(n-D-2) \\ &\quad \times \mathbf{x}^T(n-D-2) + \mu\hat{e}(n-D-3)\mathbf{x}^T(n-D-3) \\ &\quad + \dots + \mu\hat{e}(n-D-D)\mathbf{x}^T(n-D-D). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Rearranjando-se os termos de (3.9), tem-se

$$\mathbf{w}(n)^T - \mathbf{w}(n-D)^T = \mu[\hat{e}(n-D-1) + \dots + \hat{e}(n-D-D)] \begin{bmatrix} \mathbf{x}^T(n-D-1) \\ \mathbf{x}^T(n-D-2) \\ \vdots \\ \mathbf{x}^T(n-D-D) \end{bmatrix}. \quad (3.10)$$

Substituindo-se (3.10) em (3.4), obtém-se

$$\Lambda(n) = \mu[\hat{e}(n-D-1) + \dots + \hat{e}(n-D-D)] \begin{bmatrix} \mathbf{x}^T(n-D-1) \\ \mathbf{x}^T(n-D-2) \\ \vdots \\ \mathbf{x}^T(n-D-D) \end{bmatrix} \mathbf{x}(n-D). \quad (3.11)$$

A expressão (3.11) pode agora ser escrita da seguinte forma:

$$\Lambda(n) = \mu \sum_{j=1}^D \hat{e}(n-D-j) \mathbf{x}^T(n-D-j) \mathbf{x}(n-D). \quad (3.12)$$

Então, aplicando-se (3.12) em (3.1), tem-se uma expressão para o sinal de erro modificado.

Assim,

$$\begin{aligned} \hat{e}(n-D) &= d(n-D) - \mathbf{w}^T(n-D) \mathbf{x}(n-D) \\ &\quad - \mu \sum_{j=1}^D \hat{e}(n-D-j) \mathbf{x}^T(n-D-j) \mathbf{x}(n-D). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Note que no algoritmo DLMS modificado, (3.13) apresenta inúmeros termos devido ao fator $\hat{e}(n-D)$, sendo que tal característica não se encontra presente no caso do DLMS convencional. Entretanto, é essa característica que fornece ao algoritmo modificado um comportamento similar ao do LMS convencional.

3.3. Modelo do algoritmo DLMS modificado (aproximação de segunda ordem)

Nesta seção, é desenvolvido um modelo para descrever o comportamento dos momentos de primeira e segunda ordens e da curva de aprendizagem, considerando-se o caso de adaptação lenta e sem invocar a TI.

3.3.1. Comportamento médio do vetor de coeficientes

Para o comportamento médio do vetor de coeficientes, deve-se inicialmente substituir (3.13) em (2.9). Assim,

$$\begin{aligned} \mathbf{w}(n+1) = & \mathbf{w}(n) + \mu \mathbf{x}(n-D) d(n-D) - \mu \mathbf{x}(n-D) \mathbf{x}^T(n-D) \mathbf{w}(n-D) \\ & - \mu^2 \mathbf{x}(n-D) \sum_{j=1}^D \hat{e}(n-D-j) \mathbf{x}^T(n-D) \mathbf{x}(n-D-j). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Tomando-se o valor esperado em ambos os lados de (3.14), tem-se

$$\begin{aligned} E[\mathbf{w}(n+1)] = & E[\mathbf{w}(n)] + \mu E[\mathbf{x}^T(n-D) d(n-D)] \\ & - \mu E[\mathbf{x}(n-D) \mathbf{x}^T(n-D) \mathbf{w}(n-D)] \\ & - \mu^2 E[\mathbf{x}(n-D) \sum_{j=1}^D \hat{e}(n-D-j) \mathbf{x}^T(n-D-j) \mathbf{x}(n-D)]. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Para calcular os valores esperados em (3.15), são aplicadas as seguintes considerações para a determinação do comportamento do algoritmo.

As correlações entre os diferentes vetores de entrada são muito mais importantes do que as correlações entre vetores de entrada e vetores de coeficientes:

- i) $E[\mathbf{x}(n) \mathbf{x}^T(n) \mathbf{w}(n)] \approx E[\mathbf{x}(n) \mathbf{x}^T(n)] E[\mathbf{w}(n)]$
- ii) $E[\mathbf{x}(n-i) \mathbf{x}(n-j)] = \mathbf{R}_{j-i} \neq 0$ se $i \neq j$

As considerações (i) e (ii) são suportadas pela hipótese de adaptação lenta e por extensas simulações realizadas para o caso do algoritmo Fx-LMS [22]-[23]. Assim, cada um dos valores esperados de (3.15) é determinado da seguinte forma:

$$\text{a) Cálculo de } E[\mathbf{x}(n-D) d(n-D)] \quad (3.16)$$

$d(n-D)$ é obtido a partir de (2.2), então $d(n-D) = \mathbf{x}^T(n-D)\mathbf{w}_o$; substituindo-se essa expressão em (3.16), obtém-se

$$E[\mathbf{x}(n-D) d(n-D)] = E[\mathbf{x}(n-D) \mathbf{x}^T(n-D)]\mathbf{w}_o = \mathbf{R}\mathbf{w}_o, \quad (3.17)$$

onde \mathbf{R} é a matriz de autocorrelação do vetor de entrada.

$$\text{b) Cálculo de } E[\mathbf{x}(n-D) \mathbf{x}^T(n-D)\mathbf{w}(n-D)] \quad (3.18)$$

De acordo com as considerações assumidas, tem-se

$$\begin{aligned} E[\mathbf{x}(n-D) \mathbf{x}^T(n-D)\mathbf{w}(n-D)] &\cong E[\mathbf{x}(n-D) \mathbf{x}^T(n-D)]E[\mathbf{w}(n-D)] \\ &= \mathbf{R}E[\mathbf{w}(n-D)]. \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\text{c) Cálculo de } \sum_{j=1}^D E[\mathbf{x}(n-D) \hat{e}(n-D-j)\mathbf{x}^T(n-D-j)\mathbf{x}(n-D)]$$

Para este caso, define-se o seguinte vetor:

$$\mathbf{a} = \sum_{j=1}^D \mathbf{x}(n-D) \hat{e}(n-D-j)\mathbf{x}^T(n-D-j)\mathbf{x}(n-D). \quad (3.20)$$

Agora, deve-se encontrar o valor esperado de \mathbf{a} . Para tal, primeiro necessita-se conhecer o termo $\hat{e}(n-D-j)$, o qual é obtido a partir de (3.1). Assim,

$$\hat{e}(n-D-j) = d(n-D-j) - \mathbf{w}^T(n-D-j)\mathbf{x}(n-D-j) - \Lambda(n-j). \quad (3.21)$$

Substituindo-se (3.21) em (3.20) e tomando-se o valor esperado, tem-se

$$\begin{aligned} E[\mathbf{a}] &= \sum_{j=1}^D E\{\mathbf{x}(n-D) [d(n-D-j) - \mathbf{w}^T(n-D-j)\mathbf{x}(n-D-j) - \Lambda(n-j)] \\ &\quad \times \mathbf{x}^T(n-D-j)\mathbf{x}(n-D)\}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Agora, rearranjando-se os termos de (3.22), tem-se

$$\begin{aligned}
E[\mathbf{a}] &= \sum_{j=1}^D E[\mathbf{x}(n-D) d(n-D-j) \mathbf{x}^T(n-D-j) \mathbf{x}(n-D)] \\
&\quad - \sum_{j=1}^D E[\mathbf{x}(n-D) \mathbf{w}^T(n-D-j) \mathbf{x}(n-D-j) \mathbf{x}^T(n-D-j) \mathbf{x}(n-D)] \quad (3.23) \\
&\quad - \sum_{j=1}^D E[\mathbf{x}(n-D) \Lambda(n-j) \mathbf{x}^T(n-D-j) \mathbf{x}(n-D)].
\end{aligned}$$

Note que para o cálculo dos valores esperados do lado direito de (3.23) devem ser determinados os seguintes valores esperados:

c.1) Cálculo de $\sum_{j=1}^D E[\mathbf{x}(n-D) d(n-D-j) \mathbf{x}^T(n-D-j) \mathbf{x}(n-D)]$

Seja o seguinte vetor:

$$\mathbf{b} = \sum_{j=1}^D E[\mathbf{x}(n-D) d(n-D-j) \mathbf{x}^T(n-D-j) \mathbf{x}(n-D)], \quad (3.24)$$

$d(n-D-j)$ é determinado a partir de (2.2); então, $d(n-D-j) = \mathbf{x}^T(n-D-j) \mathbf{w}_o$.

Substituindo-se então essa expressão em (3.24), tem-se

$$\mathbf{b} = \sum_{j=1}^D E[\mathbf{x}(n-D) \mathbf{x}^T(n-D-j) \mathbf{x}(n-D) \mathbf{x}^T(n-D-j)] \mathbf{w}_o, \quad (3.25)$$

No Apêndice A é detalhado o cálculo do momento de quarta ordem de uma variável Gaussiana. Assim, a partir de (3.25), obtém-se o requerido valor esperado. Então,

$$E[\mathbf{x}(n-D) \mathbf{x}^T(n-D-j) \mathbf{x}(n-D) \mathbf{x}^T(n-D-j)] = \mathbf{R}^2 + \mathbf{R}_j^2 + \mathbf{R}_j \text{tr}[\mathbf{R}_j]. \quad (3.26)$$

Agora, substituindo-se (3.26) em (3.25), tem-se

$$\mathbf{b} = \sum_{j=1}^D \{ \mathbf{R}^2 + \mathbf{R}_j^2 + \mathbf{R}_j \text{tr}[\mathbf{R}_j] \} \mathbf{w}_o, \quad (3.27)$$

Note que em (3.27), todas as correlações do vetor de entrada são consideradas. Isso não acontece quando é assumida a TI.

$$\text{c.2) Cálculo de } \sum_{j=1}^D E[\mathbf{x}(n-D) \mathbf{w}^T(n-D-j) \mathbf{x}(n-D-j) \mathbf{x}^T(n-D-j) \mathbf{x}(n-D)].$$

Seja o seguinte vetor:

$$\mathbf{c} = \sum_{j=1}^D E[\mathbf{x}(n-D) \mathbf{w}^T(n-D-j) \mathbf{x}(n-D-j) \mathbf{x}^T(n-D-j) \mathbf{x}(n-D)], \quad (3.28)$$

Rearranjando-se os termos em (3.28) e usando-se a hipótese de adaptação lenta, tem-se

$$\mathbf{c} = \sum_{j=1}^D E[\mathbf{x}(n-D) \mathbf{x}^T(n-D-j) \mathbf{x}(n-D) \mathbf{x}^T(n-D-j)] E[\mathbf{w}(n-D-j)], \quad (3.29)$$

Agora, considerando-se o momento de quarta ordem de uma variável Gaussiana, determinado no Apêndice A, obtém-se

$$\mathbf{c} = \sum_{j=1}^D \{ \mathbf{R}^2 + \mathbf{R}_j^2 + \mathbf{R}_j \text{tr}[\mathbf{R}_j] \} E[\mathbf{w}(n-D-j)]. \quad (3.30)$$

$$\text{c.3) Cálculo de } \sum_{j=1}^D E[\mathbf{x}(n-D) \Lambda(n-j) \mathbf{x}^T(n-D-j) \mathbf{x}(n-D)]$$

Seja o seguinte vetor:

$$\mathbf{e} = \sum_{j=1}^D E[\mathbf{x}(n-D) \Lambda(n-j) \mathbf{x}^T(n-D-j) \mathbf{x}(n-D)]. \quad (3.31)$$

Para o cálculo deste valor esperado, necessita-se $\Lambda(n-j)$, o qual é obtido a partir de (3.12). Assim,

$$\Lambda(n-j) = \mu \sum_{k=1}^D \hat{\mathbf{e}}(n-D-j-k) \mathbf{x}^T(n-D-j-k) \mathbf{x}(n-D-j). \quad (3.32)$$

Agora, substituindo-se (3.32) em (3.31), obtém-se

$$\mathbf{e} = \mu \sum_{j=1}^D \sum_{k=1}^D E[\mathbf{x}(n-D) \hat{e}(n-D-j-k) \mathbf{x}^T(n-D-j-k) \mathbf{x}(n-D-j) \times \mathbf{x}^T(n-D-j) \mathbf{x}(n-D)]. \quad (3.33)$$

Substituindo-se (3.27), (3.30) e (3.33) em (3.23), tem-se

$$\begin{aligned} \mathbf{a} = & \sum_{j=1}^D \left\{ \mathbf{R}^2 + \mathbf{R}_j^2 + \mathbf{R}_j \text{tr}[\mathbf{R}_j] \right\} \{ \mathbf{w}_o - E[\mathbf{w}(n-D-j)] \} \\ & - \mu \sum_{j=1}^D \sum_{k=1}^D E[\mathbf{x}(n-D) \hat{e}(n-D-j-k) \mathbf{x}^T(n-D-j-k) \\ & \times \mathbf{x}(n-D-j) \mathbf{x}^T(n-D-j) \mathbf{x}(n-D)]. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Agora, aplicando-se (3.17), (3.19) e (3.34) em (3.15), obtém-se

$$\begin{aligned} E[\mathbf{w}(n+1)] = & E[\mathbf{w}(n)] + \mu \mathbf{R} \mathbf{w}_o - \mu \mathbf{R} E[\mathbf{w}(n-D)] \\ & - \mu^2 \sum_{j=1}^D \left\{ \mathbf{R}^2 + \mathbf{R}_j^2 + \mathbf{R}_j \text{tr}[\mathbf{R}_j] \right\} \{ \mathbf{w}_o - E[\mathbf{w}(n-D-j)] \} \\ & + \mu^3 \sum_{j=1}^D \sum_{k=1}^D E[\mathbf{x}(n-D) \hat{e}(n-D-j-k) \mathbf{x}^T(n-D-j-k) \\ & \times \mathbf{x}(n-D-j) \mathbf{x}^T(n-D-j) \mathbf{x}(n-D)]. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Dado que o modelo é derivado para adaptação lenta, podem ser desconsiderados em (3.35) os termos afetados pelo fator μ^β com $\beta \geq 3$. Assim, (3.35) pode ser reescrita como segue:

$$\begin{aligned} E[\mathbf{w}(n+1)] = & E[\mathbf{w}(n)] + \mu \mathbf{R} \mathbf{w}_o - \mu \mathbf{R} E[\mathbf{w}(n-D)] \\ & - \mu^2 \sum_{j=1}^D \left\{ \mathbf{R}^2 + \mathbf{R}_j^2 + \mathbf{R}_j \text{tr}[\mathbf{R}_j] \right\} \{ \mathbf{w}_o - E[\mathbf{w}(n-D-j)] \}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

3.3.2. Valor de regime permanente do vetor de coeficientes

O valor de regime permanente do vetor de coeficientes é calculado aplicando-se o limite quando $n \rightarrow \infty$ em ambos os lados de (3.36). Assim,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} E[\mathbf{w}(n+1)] &= \lim_{n \rightarrow \infty} E[\mathbf{w}(n)] + \mu \mathbf{R} \mathbf{w}_o - \mu \mathbf{R} \lim_{n \rightarrow \infty} E[\mathbf{w}(n-D)] \\ &\quad - \mu^2 \sum_{j=1}^D \left\{ \mathbf{R}^2 + \mathbf{R}_j^2 + \mathbf{R}_j \text{tr}[\mathbf{R}_j] \right\} \left\{ \mathbf{w}_o - \lim_{n \rightarrow \infty} E[\mathbf{w}(n-D-j)] \right\}, \end{aligned} \quad (3.37)$$

Assumindo-se que o algoritmo converge, o valor de regime permanente do vetor de coeficientes do filtro adaptativo é determinado a partir da seguinte condição:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[\mathbf{w}(n+1)] = \lim_{n \rightarrow \infty} E[\mathbf{w}(n)] = \lim_{n \rightarrow \infty} E[\mathbf{w}(n-D)] = \lim_{n \rightarrow \infty} E[\mathbf{w}(n-D-j)] = \mathbf{w}_\infty. \quad (3.38)$$

Substituindo-se (3.38) em (3.37), obtém-se

$$\mathbf{w}_\infty = \mathbf{w}_\infty + \mu \mathbf{R} \mathbf{w}_o - \mu \mathbf{R} \mathbf{w}_\infty - \mu^2 \sum_{j=1}^D \left\{ \mathbf{R}^2 + \mathbf{R}_j^2 + \mathbf{R}_j \text{tr}[\mathbf{R}_j] \right\} \left\{ \mathbf{w}_o - \mathbf{w}_\infty \right\}. \quad (3.39)$$

Após uma simples manipulação matemática em (3.39), determina-se

$$\mathbf{A} \mathbf{w}_\infty = \mathbf{A} \mathbf{w}_o, \quad (3.40)$$

onde $\mathbf{A} = \left\{ \mu \mathbf{R} - \mu^2 \sum_{j=1}^D \left\{ \mathbf{R}^2 + \mathbf{R}_j^2 + \mathbf{R}_j \text{tr}[\mathbf{R}_j] \right\} \right\}$.

Finalmente, pré-multiplicando ambos os lados de (3.40) por \mathbf{A}^{-1} , obtém-se

$$\mathbf{w}_\infty = \mathbf{w}_o. \quad (3.41)$$

Note que o algoritmo DLMS modificado tem o mesmo valor de regime permanente que o algoritmo DLMS convencional. O termo de compensação atua apenas durante a fase transiente do algoritmo. Tal fato é mais bem observado em (3.4), na qual para a condição de convergência, a diferença $[\mathbf{w}^T(n) - \mathbf{w}^T(n-D)]$ é zero, anulando assim o efeito de $\Lambda(n)$.

3.3.3. Vetor de erro nos coeficientes

Define-se o vetor de erro nos coeficientes como

$$\mathbf{v}(n) = \mathbf{w}(n) - \mathbf{w}_\infty. \quad (3.42)$$

Agora, substituindo-se (3.42) em (3.36), tem-se

$$\begin{aligned} E[\mathbf{v}(n+1)] + \mathbf{w}_\infty &= E[\mathbf{v}(n)] + \mathbf{w}_\infty + \mu \mathbf{R} \mathbf{w}_0 - \mu \mathbf{R} E[\mathbf{v}(n-D) + \mathbf{w}_\infty] \\ &\quad - \mu^2 \sum_{j=1}^D \left\{ \mathbf{R}^2 + \mathbf{R}_j^2 + \mathbf{R}_j \text{tr}[\mathbf{R}_j] \right\} \left\{ \mathbf{w}_0 - E[\mathbf{v}(n-D-j) + \mathbf{w}_\infty] \right\}, \end{aligned} \quad (3.43)$$

rearranjando-se os termos de (3.43), obtém-se

$$\begin{aligned} E[\mathbf{v}(n+1)] &= E[\mathbf{v}(n)] + \mu \mathbf{R} (\mathbf{w}_0 - \mathbf{w}_\infty) - \mu \mathbf{R} E[\mathbf{v}(n-d)] \\ &\quad - \mu^2 \sum_{j=1}^d \left\{ \mathbf{R}^2 + \mathbf{R}_j^2 + \mathbf{R}_j \text{tr}[\mathbf{R}_j] \right\} \left\{ \mathbf{w}_0 - \mathbf{w}_\infty - E[\mathbf{v}(n-d-j)] \right\}. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Finalmente, substituindo-se (3.41) em (3.44) e rearranjando a expressão resultante, obtém-se uma expressão recursiva que descreve o comportamento do vetor de erro nos coeficientes. Assim,

$$\begin{aligned} E[\mathbf{v}(n+1)] &= E[\mathbf{v}(n)] - \mu \mathbf{R} E[\mathbf{v}(n-D)] \\ &\quad + \mu^2 \sum_{j=1}^D \left\{ \mathbf{R}^2 + \mathbf{R}_j^2 + \mathbf{R}_j \text{tr}[\mathbf{R}_j] \right\} E[\mathbf{v}(n-D-j)]. \end{aligned} \quad (3.45)$$

3.3.4. Curva de aprendizagem

A expressão para a curva de aprendizagem do algoritmo DLMS modificado é obtida a partir da substituição de (3.4) em (3.1). Desta forma, reduz-se de forma considerável a complexidade matemática requerida para se determinar uma expressão que descreva o comportamento da curva de aprendizagem. Então,

$$\begin{aligned}\hat{e}(n-D) &= d(n-D) - \mathbf{w}^T(n-d)\mathbf{x}(n-D) - [\mathbf{w}^T(n) - \mathbf{w}^T(n-D)]\mathbf{x}(n-D) \\ &= d(n-D) - \mathbf{w}^T(n)\mathbf{x}(n-D).\end{aligned}\quad (3.46)$$

Substituindo-se a definição do vetor de erro (3.42) em (3.46), obtém-se

$$\hat{e}(n-D) = d(n-D) - \mathbf{v}^T(n)\mathbf{x}(n-D) - \mathbf{w}_\infty^T\mathbf{x}(n-D).\quad (3.47)$$

Definindo-se o erro em regime permanente como sendo

$$\hat{e}_\infty(n) = d(n) - \mathbf{w}_\infty^T\mathbf{x}(n-D),\quad (3.48)$$

e substituindo-se (3.48) em (3.47), pode-se escrever o erro como

$$\hat{e}(n-D) = \hat{e}_\infty(n) - \mathbf{v}^T(n)\mathbf{x}(n-D).\quad (3.49)$$

Elevando-se (3.49) ao quadrado e tomando-se o valor esperado em ambos os lados da expressão resultante, tem-se

$$E[e^2(n-D)] = E[e_\infty^2(n)] - E[\hat{e}_\infty(n)\mathbf{v}^T(n)\mathbf{x}(n-D)] + E[\mathbf{v}^T(n)\mathbf{x}(n-D)].\quad (3.50)$$

Definindo-se a seguintes grandezas:

$$\xi(n) = E[\hat{e}^2(n-D)]\quad (3.51)$$

e

$$\xi_\infty = E[\hat{e}_\infty^2(n)],\quad (3.52)$$

os valores esperados do segundo e terceiro termos do lado direito de (3.50) são determinados como segue:

a) Cálculo de $E[\hat{e}_\infty(n)\mathbf{v}^T(n)\mathbf{x}(n-D)]$

$$E[\hat{e}_\infty(n)\mathbf{v}^T(n)\mathbf{x}(n-D)] \cong E[\hat{e}_\infty(n)\mathbf{x}^T(n-D)]E[\mathbf{v}(n)]. \quad (3.53)$$

Substituindo-se (3.48) em (3.53) e arranjando-se os termos, tem-se

$$\begin{aligned} E[\hat{e}_\infty(n)\mathbf{v}^T(n)\mathbf{x}(n-D)] &\cong E[d(n)\mathbf{x}^T(n-D)]E[\mathbf{v}(n)] \\ &\quad - E[\mathbf{w}_\infty^T\mathbf{x}(n-D)\mathbf{x}^T(n-D)]E[\mathbf{v}(n)]. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Agora, substituindo-se (3.17) e utilizando-se as considerações de análise (i) e (ii) em (3.54), obtém-se

$$E[\hat{e}_\infty(n)\mathbf{v}^T(n)\mathbf{x}(n-D)] \cong \mathbf{w}_0^T \mathbf{R} E[\mathbf{v}(n)] - \mathbf{w}_\infty^T \mathbf{R} E[\mathbf{v}(n)]. \quad (3.55)$$

Finalmente, substituindo-se (3.41) em (3.55), tem-se o seguinte resultado:

$$E[\hat{e}_\infty(n)\mathbf{v}^T(n)\mathbf{x}(n-D)] = \mathbf{w}_0^T \mathbf{R} E[\mathbf{v}(n)] - \mathbf{w}_0^T \mathbf{R} E[\mathbf{v}(n)] = 0. \quad (3.56)$$

b) Cálculo de $E\left[\left(\mathbf{v}^T(n)\mathbf{x}(n-D)\right)^2\right]$

sendo $\left[\mathbf{v}^T(n)\mathbf{x}(n-D)\right]^2$ um escalar, o valor esperado pode ser escrito como segue:

$$\begin{aligned} E\left[\left(\mathbf{v}^T(n)\mathbf{x}(n-D)\right)^2\right] &= \text{tr}\left\{E\left[\left(\mathbf{v}^T(n)\mathbf{x}(n-D)\right)^2\right]\right\} \\ &= E\left\{\text{tr}[\mathbf{v}^T(n)\mathbf{R}\mathbf{v}(n)]\right\} \\ &= \text{tr}\left\{E[\mathbf{v}(n)\mathbf{v}^T(n)]\mathbf{R}\right\}. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Finalmente, substituindo-se (3.51), (3.56) e (3.57) em (3.50), obtém-se

$$\xi(n) = \xi_\infty + \text{tr}\left\{E[\mathbf{v}(n)\mathbf{v}^T(n)]\mathbf{R}\right\}. \quad (3.58)$$

A partir de (3.58), observa-se que, para descrever o comportamento da curva de aprendizagem, é necessário conhecer o valor esperado $E[\mathbf{v}(n)\mathbf{v}^T(n)]$. Entretanto, dado que o modelo é derivado utilizando-se a hipótese de adaptação lenta, o momento de segunda ordem pode ser obtido como o produto dos momentos de primeira ordem [32]. Assim,

$$E[\mathbf{v}(n)\mathbf{v}^T(n)] \cong E[\mathbf{v}(n)]E[\mathbf{v}^T(n)], \quad (3.59)$$

onde $E[\mathbf{v}(n)]$ é dado por (3.42).

Assim, através das expressões (3.58) e (3.59), obtém-se a descrição para o comportamento da curva de aprendizagem.

3.4. Modelo do algoritmo DLMS modificado (aproximação de terceira ordem)

Nesta seção, é apresentado um segundo modelo para o algoritmo DLMS modificado. Agora são considerados em (3.35) os termos até μ^3 . Assim para essa condição, são novamente determinados os momentos de primeira e segunda ordens e a curva de aprendizagem do algoritmo em questão.

3.4.1. Comportamento médio do vetor de coeficientes

Para se obter a expressão recursiva que descreva o comportamento médio do vetor de coeficientes, em (3.35) deve-se determinar o seguinte valor esperado:

a) Cálculo de \mathbf{e}

Seja \mathbf{e} dado pelo seguinte vetor:

$$\mathbf{e} = \sum_{j=1}^D \sum_{k=1}^D E[\mathbf{x}(n-D) \hat{\mathbf{e}}(n-D-j-k) \mathbf{x}^T(n-D-j-k) \mathbf{x}(n-D-j) \times \mathbf{x}^T(n-D-j) \mathbf{x}(n-D)]. \quad (3.60)$$

A partir de (3.12), pode-se determinar $\hat{\mathbf{e}}(n-D-j-k)$. Assim,

$$\begin{aligned} \hat{e}(n-D-j-k) &= d(n-D-j-k) - \mathbf{w}^T(n-D-j-k)\mathbf{x}(n-D-j-k) \\ &\quad - \mu \sum_{l=1}^D \hat{e}(n-D-j-k-l)\mathbf{x}^T(n-D-j-k-l)\mathbf{x}(n-D-j-k). \end{aligned} \quad (3.61)$$

Substituindo-se (3.61) em (3.60) e rearranjando-se a expressão resultante, tem-se

$$\begin{aligned} \mathbf{e} &= \sum_{j=1}^D \sum_{k=1}^D E[\mathbf{x}(n-D)d(n-D-j-k)\mathbf{x}^T(n-D-j)\mathbf{x}(n-D-j-k) \\ &\quad \times \mathbf{x}^T(n-D-j)\mathbf{x}(n-D)] \\ &\quad - \sum_{j=1}^D \sum_{k=1}^D E[\mathbf{x}(n-D)\mathbf{w}^T(n-D-j-k)\mathbf{x}(n-D-j-k)\mathbf{x}^T(n-D-j-k) \\ &\quad \times \mathbf{x}(n-D-j)\mathbf{x}^T(n-D-j)\mathbf{x}(n-D)] \\ &\quad - \mu \sum_{j=1}^D \sum_{k=1}^D \sum_{l=1}^D E[\mathbf{x}(n-D)\hat{e}(n-D-j-k-l)\mathbf{x}^T(n-D-j-k-l)\mathbf{x}(n-D-j-k) \\ &\quad \times \mathbf{x}^T(n-D-j-k)\mathbf{x}(n-D-j)\mathbf{x}^T(n-D-j)\mathbf{x}(n-D)]. \end{aligned} \quad (3.62)$$

Os valores esperados em (3.62) são determinados como segue:

a.1) Cálculo de \mathbf{f}

Seja \mathbf{f} dado pelo seguinte vetor:

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= \sum_{j=1}^D \sum_{k=1}^D E[\mathbf{x}(n-D)d(n-D-j-k)\mathbf{x}^T(n-D-j-k)\mathbf{x}(n-D-j) \\ &\quad \times \mathbf{x}^T(n-D-j)\mathbf{x}(n-D)], \end{aligned} \quad (3.63)$$

A partir de (2.2), tem-se que $d(n-D-j-k) = \mathbf{x}^T(n-D-j-k)\mathbf{w}_o$. Substituindo-se essa expressão em (3.63) e rearranjando-se a expressão resultante, tem-se

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= \sum_{j=1}^D \sum_{k=1}^D E[\mathbf{x}(n-D)\mathbf{x}^T(n-D-j-k)\mathbf{x}(n-D-j)\mathbf{x}^T(n-D-j) \\ &\quad \times \mathbf{x}(n-D)\mathbf{x}^T(n-D-j-k)]\mathbf{w}_o. \end{aligned} \quad (3.64)$$

No Apêndice B, é detalhado o cálculo do momento de sexta ordem de uma variável Gaussiana. Assim, de (3.64), o requerido valor esperado é

$$\begin{aligned}
& E[\mathbf{x}(n-D)\mathbf{x}^T(n-D-j-k)\mathbf{x}(n-D-j)\mathbf{x}^T(n-D-j)\mathbf{x}(n-D)\mathbf{x}^T(n-D-j-k)] \\
& = \mathbf{R}_{j+k}\mathbf{R}\mathbf{R}_{j+k} + \mathbf{R}_{j+k}\mathbf{R}_j^T\mathbf{R}_k + \mathbf{R}_{j+k}\mathbf{R}_k\text{tr}[\mathbf{R}_j] + \mathbf{R}_j\mathbf{R}_k^T\mathbf{R}_{j+k} + \mathbf{R}_j\mathbf{R}_{j+k}^T\mathbf{R}_k \\
& \quad + \mathbf{R}_j\mathbf{R}\text{tr}[\mathbf{R}_j] + \mathbf{R}_j\text{tr}[\mathbf{R}_k]\mathbf{R}_{j+k} + \mathbf{R}_j\mathbf{R}_{j+k}\mathbf{R}_k + \mathbf{R}_j^2\mathbf{R} + \mathbf{R}^3 + \mathbf{R}\text{tr}[\mathbf{R}_k]\mathbf{R}_k \\
& \quad + \mathbf{R}\mathbf{R}_k\mathbf{R}_k + \mathbf{R}_{j+k}\text{tr}[\mathbf{R}_{j+k}\mathbf{R}] + \mathbf{R}_{j+k}\text{tr}[\mathbf{R}_j^T\mathbf{R}_k^T] + \mathbf{R}_{j+k}\text{tr}[\mathbf{R}_j]\text{tr}[\mathbf{R}_k].
\end{aligned} \tag{3.65}$$

Note que em (3.65), novamente, são consideradas todas as correlações do vetor de entrada para os diferentes atrasos.

Agora, substituindo-se (3.65) em (3.64), tem-se:

$$\begin{aligned}
\mathbf{f} = \sum_{j=1}^D \sum_{k=1}^D & \left\{ \mathbf{R}_{j+k}\mathbf{R}\mathbf{R}_{j+k} + \mathbf{R}_{j+k}\mathbf{R}_j^T\mathbf{R}_k + \mathbf{R}_{j+k}\mathbf{R}_k\text{tr}[\mathbf{R}_j] + \mathbf{R}_j\mathbf{R}_k^T\mathbf{R}_{j+k} \right. \\
& \quad + \mathbf{R}_j\mathbf{R}_{j+k}^T\mathbf{R}_k + \mathbf{R}_j\mathbf{R}\text{tr}[\mathbf{R}_j] + \mathbf{R}_j\text{tr}[\mathbf{R}_k]\mathbf{R}_{j+k} + \mathbf{R}_j\mathbf{R}_{j+k}\mathbf{R}_k \\
& \quad + \mathbf{R}_j^2\mathbf{R} + \mathbf{R}^3 + \mathbf{R}\text{tr}[\mathbf{R}_k]\mathbf{R}_k + \mathbf{R}\mathbf{R}_k\mathbf{R}_k + \mathbf{R}_{j+k}\text{tr}[\mathbf{R}_{j+k}\mathbf{R}] \\
& \quad \left. + \mathbf{R}_{j+k}\text{tr}[\mathbf{R}_j^T\mathbf{R}_k^T] + \mathbf{R}_{j+k}\text{tr}[\mathbf{R}_j]\text{tr}[\mathbf{R}_k] \right\} \mathbf{w}_o.
\end{aligned} \tag{3.66}$$

a.2) Cálculo de \mathbf{g}

Seja \mathbf{g} dado pelo seguinte vetor:

$$\begin{aligned}
\mathbf{g} = \sum_{j=1}^D \sum_{k=1}^D & E[\mathbf{x}(n-D)\mathbf{w}^T(n-D-j-k)\mathbf{x}(n-D-j-k)\mathbf{x}^T(n-D-j-k) \\
& \quad \times \mathbf{x}(n-D-j)\mathbf{x}^T(n-D-j)\mathbf{x}(n-D)],
\end{aligned} \tag{3.67}$$

Rearranjando-se os termos em (3.67) e usando-se as considerações de análise (i) e (ii), tem-se

$$\mathbf{g} = \sum_{j=1}^D \sum_{k=1}^D E[\mathbf{x}(n-D)\mathbf{x}^T(n-D-j-k)\mathbf{x}^T(n-D-j)\mathbf{x}(n-D-j) \times \mathbf{x}(n-D)\mathbf{x}^T(n-D-j-k)]E[\mathbf{w}(n-D-j-k)]. \quad (3.68)$$

Substituindo-se (3.65) em (3.68), obtém-se

$$\begin{aligned} \mathbf{g} = \sum_{j=1}^D \sum_{k=1}^D \{ & \mathbf{R}_{j+k} \mathbf{R} \mathbf{R}_{j+k} + \mathbf{R}_{j+k} \mathbf{R}_j^T \mathbf{R}_k + \mathbf{R}_{j+k} \mathbf{R}_k \text{tr}[\mathbf{R}_j] + \mathbf{R}_j \mathbf{R}_k^T \mathbf{R}_{j+k} \\ & + \mathbf{R}_j \mathbf{R}_{j+k}^T \mathbf{R}_k + \mathbf{R}_j \mathbf{R} \text{tr}[\mathbf{R}_j] + \mathbf{R}_j \text{tr}[\mathbf{R}_k] \mathbf{R}_{j+k} + \mathbf{R}_j \mathbf{R}_{j+k} \mathbf{R}_k \\ & + \mathbf{R}_j^2 \mathbf{R} + \mathbf{R}^3 + \mathbf{R} \text{tr}[\mathbf{R}_k] \mathbf{R}_k + \mathbf{R} \mathbf{R}_k \mathbf{R}_k + \mathbf{R}_{j+k} \text{tr}[\mathbf{R}_{j+k} \mathbf{R}] \\ & + \mathbf{R}_{j+k} \text{tr}[\mathbf{R}_j^T \mathbf{R}_k^T] + \mathbf{R}_{j+k} \text{tr}[\mathbf{R}_j] \text{tr}[\mathbf{R}_k] \} E[\mathbf{w}(n-D-j-k)]. \end{aligned} \quad (3.69)$$

Agora, substituindo-se (3.69) e (3.66) em (3.62), determina-se

$$\begin{aligned} \mathbf{e} = \sum_{j=1}^D \sum_{k=1}^D \{ & \mathbf{R}_{j+k} \mathbf{R} \mathbf{R}_{j+k} + \mathbf{R}_{j+k} \mathbf{R}_j^T \mathbf{R}_k + \mathbf{R}_{j+k} \mathbf{R}_k \text{tr}[\mathbf{R}_j] + \mathbf{R}_j \mathbf{R}_k^T \mathbf{R}_{j+k} \\ & + \mathbf{R}_j \mathbf{R}_{j+k}^T \mathbf{R}_k + \mathbf{R}_j \mathbf{R} \text{tr}[\mathbf{R}_j] + \mathbf{R}_j \text{tr}[\mathbf{R}_k] \mathbf{R}_{j+k} + \mathbf{R}_j \mathbf{R}_{j+k} \mathbf{R}_k \\ & + \mathbf{R}_j^2 \mathbf{R} + \mathbf{R}^3 + \mathbf{R} \text{tr}[\mathbf{R}_k] \mathbf{R}_k + \mathbf{R} \mathbf{R}_k \mathbf{R}_k + \mathbf{R}_{j+k} \text{tr}[\mathbf{R}_{j+k} \mathbf{R}] \\ & + \mathbf{R}_{j+k} \text{tr}[\mathbf{R}_j^T \mathbf{R}_k^T] + \mathbf{R}_{j+k} \text{tr}[\mathbf{R}_j] \text{tr}[\mathbf{R}_k] \} \{ E[\mathbf{w}_o - \mathbf{w}(n-D-j-k)] \}. \end{aligned} \quad (3.70)$$

Finalmente, substituindo-se (3.70) em (3.35) obtém-se uma expressão recursiva para o comportamento médio do vetor de coeficientes. Então,

$$\begin{aligned} & E[\mathbf{w}(n+1)] \\ & = E[\mathbf{w}(n)] + \mu \mathbf{R} \mathbf{w}_o - \mu \mathbf{R} E[\mathbf{w}(n-D)] \\ & - \mu^2 \sum_{j=1}^D \{ \mathbf{R}^2 + \mathbf{R}_j^2 + \mathbf{R}_j \text{tr}[\mathbf{R}_j] \} \{ \mathbf{w}_o - E[\mathbf{w}(n-D-j)] \} \\ & + \mu^3 \sum_{j=1}^D \sum_{k=1}^D \{ \mathbf{R}_{j+k} \mathbf{R} \mathbf{R}_{j+k} + \mathbf{R}_{j+k} \mathbf{R}_j^T \mathbf{R}_k + \mathbf{R}_{j+k} \mathbf{R}_k \text{tr}[\mathbf{R}_j] + \mathbf{R}_j \mathbf{R}_k^T \mathbf{R}_{j+k} \\ & + \mathbf{R}_j \mathbf{R}_{j+k}^T \mathbf{R}_k + \mathbf{R}_j \mathbf{R} \text{tr}[\mathbf{R}_j] + \mathbf{R}_j \text{tr}[\mathbf{R}_k] \mathbf{R}_{j+k} + \mathbf{R}_j \mathbf{R}_{j+k} \mathbf{R}_k \\ & + \mathbf{R}_j^2 \mathbf{R} + \mathbf{R}^3 + \mathbf{R} \text{tr}[\mathbf{R}_k] \mathbf{R}_k + \mathbf{R} \mathbf{R}_k \mathbf{R}_k + \mathbf{R}_{j+k} \text{tr}[\mathbf{R}_{j+k} \mathbf{R}] \\ & + \mathbf{R}_{j+k} \text{tr}[\mathbf{R}_j^T \mathbf{R}_k^T] + \mathbf{R}_{j+k} \text{tr}[\mathbf{R}_j] \text{tr}[\mathbf{R}_k] \} \{ \mathbf{w}_o - E[\mathbf{w}(n-D-j-k)] \} \\ & - \mu^4 \sum_{j=1}^D \sum_{k=1}^D \sum_{l=1}^D E[\mathbf{x}(n-D)\hat{\mathbf{e}}(n-D-j-k-l)\mathbf{x}^T(n-D-j-k-l) \\ & \times \mathbf{x}(n-D-j-k)\mathbf{x}^T(n-D-j-k)\mathbf{x}(n-D-j)\mathbf{x}^T(n-D-j)\mathbf{x}(n-D)]. \end{aligned} \quad (3.71)$$

Dado que o modelo é derivado para adaptação lenta, em (3.71) podem ser desconsiderados os termos afetados pelo fator μ^β com $\beta \geq 4$. Assim, (3.71) pode ser reescrita como segue:

$$\begin{aligned}
 & E[\mathbf{w}(n+1)] \\
 &= E[\mathbf{w}(n)] + \mu \mathbf{R} \mathbf{w}_o - \mu \mathbf{R} E[\mathbf{w}(n-D)] \\
 & - \mu^2 \sum_{j=1}^D \left\{ \mathbf{R}^2 + \mathbf{R}_j^2 + \mathbf{R}_j \operatorname{tr}[\mathbf{R}_j] \right\} \left\{ \mathbf{w}_o - E[\mathbf{w}(n-D-j)] \right\} \\
 & + \mu^3 \sum_{j=1}^D \sum_{k=1}^D \left\{ \mathbf{R}_{j+k} \mathbf{R} \mathbf{R}_{j+k} + \mathbf{R}_{j+k} \mathbf{R}_j^T \mathbf{R}_k + \mathbf{R}_{j+k} \mathbf{R}_k \operatorname{tr}[\mathbf{R}_j] + \mathbf{R}_j \mathbf{R}_k^T \mathbf{R}_{j+k} \right. \\
 & \quad + \mathbf{R}_j \mathbf{R}_{j+k}^T \mathbf{R}_k + \mathbf{R}_j \mathbf{R} \operatorname{tr}[\mathbf{R}_j] + \mathbf{R}_j \operatorname{tr}[\mathbf{R}_k] \mathbf{R}_{j+k} + \mathbf{R}_j \mathbf{R}_{j+k} \mathbf{R}_k \\
 & \quad + \mathbf{R}_j^2 \mathbf{R} + \mathbf{R}^3 + \mathbf{R} \operatorname{tr}[\mathbf{R}_k] \mathbf{R}_k + \mathbf{R} \mathbf{R}_k \mathbf{R}_k + \mathbf{R}_{j+k} \operatorname{tr}[\mathbf{R}_{j+k} \mathbf{R}] \\
 & \quad \left. + \mathbf{R}_{j+k} \operatorname{tr}[\mathbf{R}_j^T \mathbf{R}_k^T] + \mathbf{R}_{j+k} \operatorname{tr}[\mathbf{R}_j] \operatorname{tr}[\mathbf{R}_k] \right\} \left\{ \mathbf{w}_o - E[\mathbf{w}(n-D-j-k)] \right\}. \tag{3.72}
 \end{aligned}$$

3.4.2. Valor de regime permanente do vetor de coeficientes

O valor de regime permanente do vetor de coeficientes é determinado aplicando o limite quando $n \rightarrow \infty$ em ambos os lados em (3.72). Assim,

$$\begin{aligned}
 & \lim_{n \rightarrow \infty} E[\mathbf{w}(n+1)] \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} E[\mathbf{w}(n)] + \mu \mathbf{R} \mathbf{w}_o - \mu \mathbf{R} \lim_{n \rightarrow \infty} E[\mathbf{w}(n-D)] \\
 & - \mu^2 \sum_{j=1}^D \left\{ \mathbf{R}^2 + \mathbf{R}_j^2 + \mathbf{R}_j \operatorname{tr}[\mathbf{R}_j] \right\} \left\{ \mathbf{w}_o - \lim_{n \rightarrow \infty} E[\mathbf{w}(n-D-j)] \right\} \\
 & + \mu^3 \sum_{j=1}^D \sum_{k=1}^D \left\{ \mathbf{R}_{j+k} \mathbf{R} \mathbf{R}_{j+k} + \mathbf{R}_{j+k} \mathbf{R}_j^T \mathbf{R}_k + \mathbf{R}_{j+k} \mathbf{R}_k \operatorname{tr}[\mathbf{R}_j] + \mathbf{R}_j \mathbf{R}_k^T \mathbf{R}_{j+k} \right. \\
 & \quad + \mathbf{R}_j \mathbf{R}_{j+k}^T \mathbf{R}_k + \mathbf{R}_j \mathbf{R} \operatorname{tr}[\mathbf{R}_j] + \mathbf{R}_j \operatorname{tr}[\mathbf{R}_k] \mathbf{R}_{j+k} + \mathbf{R}_j \mathbf{R}_{j+k} \mathbf{R}_k \\
 & \quad + \mathbf{R}_j^2 \mathbf{R} + \mathbf{R}^3 + \mathbf{R} \operatorname{tr}[\mathbf{R}_k] \mathbf{R}_k + \mathbf{R} \mathbf{R}_k \mathbf{R}_k + \mathbf{R}_{j+k} \operatorname{tr}[\mathbf{R}_{j+k} \mathbf{R}] \\
 & \quad \left. + \mathbf{R}_{j+k} \operatorname{tr}[\mathbf{R}_j^T \mathbf{R}_k^T] + \mathbf{R}_{j+k} \operatorname{tr}[\mathbf{R}_j] \operatorname{tr}[\mathbf{R}_k] \right\} \left\{ \mathbf{w}_o - \lim_{n \rightarrow \infty} E[\mathbf{w}(n-D-j-k)] \right\}, \tag{3.73}
 \end{aligned}$$

Agora, substituindo-se (3.38) em (3.73), tem-se

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{w}_\infty \\
 &= \mathbf{w}_\infty + \mu \mathbf{R} \mathbf{w}_\infty - \mu \mathbf{R} \mathbf{w}_\infty \\
 & - \mu^2 \sum_{j=1}^D \left\{ \mathbf{R}^2 + \mathbf{R}_j^2 + \mathbf{R}_j \operatorname{tr}[\mathbf{R}_j] \right\} \{ \mathbf{w}_\infty - \mathbf{w}_\infty \} \\
 & + \mu^3 \sum_{j=1}^D \sum_{k=1}^D \left\{ \mathbf{R}_{j+k} \mathbf{R} \mathbf{R}_{j+k} + \mathbf{R}_{j+k} \mathbf{R}_j^T \mathbf{R}_k + \mathbf{R}_{j+k} \mathbf{R}_k \operatorname{tr}[\mathbf{R}_j] + \mathbf{R}_j \mathbf{R}_k^T \mathbf{R}_{j+k} \right. \\
 & \quad + \mathbf{R}_j \mathbf{R}_{j+k}^T \mathbf{R}_k + \mathbf{R}_j \mathbf{R} \operatorname{tr}[\mathbf{R}_j] + \mathbf{R}_j \operatorname{tr}[\mathbf{R}_k] \mathbf{R}_{j+k} + \mathbf{R}_j \mathbf{R}_{j+k} \mathbf{R}_k \\
 & \quad + \mathbf{R}_j^2 \mathbf{R} + \mathbf{R}^3 + \mathbf{R} \operatorname{tr}[\mathbf{R}_k] \mathbf{R}_k + \mathbf{R} \mathbf{R}_k \mathbf{R}_k + \mathbf{R}_{j+k} \operatorname{tr}[\mathbf{R}_{j+k} \mathbf{R}] \\
 & \quad \left. + \mathbf{R}_{j+k} \operatorname{tr}[\mathbf{R}_j^T \mathbf{R}_k^T] + \mathbf{R}_{j+k} \operatorname{tr}[\mathbf{R}_j] \operatorname{tr}[\mathbf{R}_k] \right\} \{ \mathbf{w}_\infty - \mathbf{w}_\infty \}. \tag{3.74}
 \end{aligned}$$

Agrupando-se os termos, obtém-se então

$$(\mu \mathbf{R} + \mathbf{Q}) \mathbf{w}_\infty = (\mu \mathbf{R} + \mathbf{Q}) \mathbf{w}_\infty, \tag{3.75}$$

onde

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Q} &= -\mu^2 \sum_{j=1}^D \left\{ \mathbf{R}^2 + \mathbf{R}_j^2 + \mathbf{R}_j \operatorname{tr}[\mathbf{R}_j] \right\} \\
 & + \mu^3 \sum_{j=1}^D \sum_{k=1}^D \left\{ \mathbf{R}_{j+k} \mathbf{R} \mathbf{R}_{j+k} + \mathbf{R}_{j+k} \mathbf{R}_j^T \mathbf{R}_k + \mathbf{R}_{j+k} \mathbf{R}_k \operatorname{tr}[\mathbf{R}_j] + \mathbf{R}_j \mathbf{R}_k^T \mathbf{R}_{j+k} \right. \\
 & \quad + \mathbf{R}_j \mathbf{R}_{j+k}^T \mathbf{R}_k + \mathbf{R}_j \mathbf{R} \operatorname{tr}[\mathbf{R}_j] + \mathbf{R}_j \operatorname{tr}[\mathbf{R}_k] \mathbf{R}_{j+k} + \mathbf{R}_j \mathbf{R}_{j+k} \mathbf{R}_k \\
 & \quad + \mathbf{R}_j^2 \mathbf{R} + \mathbf{R}^3 + \mathbf{R} \operatorname{tr}[\mathbf{R}_k] \mathbf{R}_k + \mathbf{R} \mathbf{R}_k \mathbf{R}_k + \mathbf{R}_{j+k} \operatorname{tr}[\mathbf{R}_{j+k} \mathbf{R}] \\
 & \quad \left. + \mathbf{R}_{j+k} \operatorname{tr}[\mathbf{R}_j^T \mathbf{R}_k^T] + \mathbf{R}_{j+k} \operatorname{tr}[\mathbf{R}_j] \operatorname{tr}[\mathbf{R}_k] \right\}.
 \end{aligned}$$

Pré-multiplicando ambos os lados de (3.75) por $(\mu \mathbf{R} + \mathbf{Q})^{-1}$, obtém-se

$$\mathbf{w}_\infty = \mathbf{w}_\infty. \tag{3.76}$$

Note que (3.41) e (3.76) são iguais, ou seja, tal como esperado, os modelos usando a aproximação de segunda e terceira ordens apresentam o mesmo valor de regime permanente.

3.4.3. Vetor de erro nos coeficientes

O vetor de erro nos coeficientes é obtido a partir da seguinte definição:

$$\mathbf{v}(n) = \mathbf{w}(n) - \mathbf{w}_\infty. \quad (3.77)$$

Assim, substituindo-se (3.77) em (3.72), tem-se

$$\begin{aligned} & E[\mathbf{v}(n+1)] + \mathbf{w}_\infty \\ &= E[\mathbf{v}(n)] + \mathbf{w}_\infty + \mu \mathbf{R} (\mathbf{w}_0 - \mathbf{w}_\infty) - \mu \mathbf{R} E[\mathbf{v}(n-D)] \\ & - \mu^2 \sum_{j=1}^D \left\{ \mathbf{R}^2 + \mathbf{R}_j^2 + \mathbf{R}_j \text{tr}[\mathbf{R}_j] \right\} \left\{ \mathbf{w}_0 - \mathbf{w}_\infty - E[\mathbf{v}(n-D-j)] \right\} \\ & + \mu^3 \sum_{j=1}^D \sum_{k=1}^D \left\{ \mathbf{R}_{j+k} \mathbf{R} \mathbf{R}_{j+k} + \mathbf{R}_{j+k} \mathbf{R}_j^T \mathbf{R}_k + \mathbf{R}_{j+k} \mathbf{R}_k \text{tr}[\mathbf{R}_j] + \mathbf{R}_j \mathbf{R}_k^T \mathbf{R}_{j+k} \right. \\ & \quad + \mathbf{R}_j \mathbf{R}_{j+k}^T \mathbf{R}_k + \mathbf{R}_j \mathbf{R} \text{tr}[\mathbf{R}_j] + \mathbf{R}_j \text{tr}[\mathbf{R}_k] \mathbf{R}_{j+k} + \mathbf{R}_j \mathbf{R}_{j+k} \mathbf{R}_k \\ & \quad + \mathbf{R}_j^2 \mathbf{R} + \mathbf{R}^3 + \mathbf{R} \text{tr}[\mathbf{R}_k] \mathbf{R}_k + \mathbf{R} \mathbf{R}_k \mathbf{R}_k + \mathbf{R}_{j+k} \text{tr}[\mathbf{R}_{j+k} \mathbf{R}] \\ & \quad \left. + \mathbf{R}_{j+k} \text{tr}[\mathbf{R}_j^T \mathbf{R}_k^T] + \mathbf{R}_{j+k} \text{tr}[\mathbf{R}_j] \text{tr}[\mathbf{R}_k] \right\} \left\{ \mathbf{w}_0 - \mathbf{w}_\infty - E[\mathbf{v}(n-D-j-k)] \right\}. \end{aligned} \quad (3.78)$$

Agora, Aplicando-se (3.76) em (3.78), obtém-se uma expressão que descreve o comportamento médio para o vetor de erro nos coeficientes. Assim,

$$\begin{aligned} & E[\mathbf{v}(n+1)] \\ &= E[\mathbf{v}(n)] - \mu \mathbf{R} E[\mathbf{v}(n-D)] \\ & + \mu^2 \sum_{j=1}^D \left\{ \mathbf{R}^2 + \mathbf{R}_j^2 + \mathbf{R}_j \text{tr}[\mathbf{R}_j] \right\} E[\mathbf{v}(n-D-j)] \\ & - \mu^3 \sum_{j=1}^D \sum_{k=1}^D \left\{ \mathbf{R}_{j+k} \mathbf{R} \mathbf{R}_{j+k} + \mathbf{R}_{j+k} \mathbf{R}_j^T \mathbf{R}_k + \mathbf{R}_{j+k} \mathbf{R}_k \text{tr}[\mathbf{R}_j] + \mathbf{R}_j \mathbf{R}_k^T \mathbf{R}_{j+k} \right. \\ & \quad + \mathbf{R}_j \mathbf{R}_{j+k}^T \mathbf{R}_k + \mathbf{R}_j \mathbf{R} \text{tr}[\mathbf{R}_j] + \mathbf{R}_j \text{tr}[\mathbf{R}_k] \mathbf{R}_{j+k} + \mathbf{R}_j \mathbf{R}_{j+k} \mathbf{R}_k \\ & \quad + \mathbf{R}_j^2 \mathbf{R} + \mathbf{R}^3 + \mathbf{R} \text{tr}[\mathbf{R}_k] \mathbf{R}_k + \mathbf{R} \mathbf{R}_k \mathbf{R}_k + \mathbf{R}_{j+k} \text{tr}[\mathbf{R}_{j+k} \mathbf{R}] \\ & \quad \left. + \mathbf{R}_{j+k} \text{tr}[\mathbf{R}_j^T \mathbf{R}_k^T] + \mathbf{R}_{j+k} \text{tr}[\mathbf{R}_j] \text{tr}[\mathbf{R}_k] \right\} E[\mathbf{v}(n-D-j-k)]. \end{aligned} \quad (3.79)$$

3.4.4. Curva de aprendizagem

A expressão que descreve o comportamento da curva de aprendizagem é dada por (3.58) e (3.79). Assim tem-se

$$\xi(n) = \xi_{\infty} + \text{tr} \left\{ E[\mathbf{v}(n)\mathbf{v}^T(n)]\mathbf{R} \right\}, \quad (3.80)$$

onde

$$E[\mathbf{v}(n)\mathbf{v}^T(n)] \cong E[\mathbf{v}(n)]E[\mathbf{v}^T(n)], \quad (3.81)$$

e $E[\mathbf{v}(n)]$ é dado por (3.79).

3.5 Modelo utilizando a teoria da independência

Nesta seção, é apresentado o modelo do algoritmo DLMS modificado obtido através do uso da teoria da independência. O comportamento dos momentos de primeira e segunda ordens e da curva de aprendizagem são derivados a partir do modelo que utiliza a aproximação de terceira ordem.

A expressão recursiva do comportamento médio do vetor de coeficientes considerando a TI é obtida de (3.72). Assume-se $\mathbf{R}_{\beta-\alpha} = E[\mathbf{x}(n-\alpha)\mathbf{x}^T(n-\beta)] = 0$ para $\beta \neq \alpha$. Adotando-se então tal condição, obtém-se

$$\begin{aligned} E[\mathbf{w}(n+1)] &= E[\mathbf{w}(n)] + \mu\mathbf{R}\mathbf{w}_o - \mu\mathbf{R}E[\mathbf{w}(n-D)] \\ &\quad - \mu^2 \sum_{j=1}^D \mathbf{R}^2 \{ \mathbf{w}_o - E[\mathbf{w}(n-D-j)] \} \\ &\quad + \mu^3 \sum_{j=1}^D \sum_{k=1}^D \mathbf{R}^3 \{ \mathbf{w}_o - E[\mathbf{w}(n-D-j-k)] \}. \end{aligned} \quad (3.82)$$

Note que em (3.82) são desconsideradas as correlações do vetor de entrada para instantes diferentes de tempo.

O valor de regime permanente do vetor de coeficientes é obtido aplicando-se o limite quando $n \rightarrow \infty$ em ambos os lados da expressão (3.82). Assim,

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} E[\mathbf{w}(n+1)] &= \lim_{n \rightarrow \infty} E[\mathbf{w}(n)] + \mu \mathbf{R} \mathbf{w}_0 - \mu \mathbf{R} \lim_{n \rightarrow \infty} E[\mathbf{w}(n-D)] \\
&\quad - \mu^2 \sum_{j=1}^D \mathbf{R}^2 \left\{ \mathbf{w}_0 - \lim_{n \rightarrow \infty} E[\mathbf{w}(n-D-j)] \right\} \\
&\quad + \mu^3 \sum_{j=1}^D \sum_{k=1}^D \mathbf{R}^3 \left\{ \mathbf{w}_0 - \lim_{n \rightarrow \infty} E[\mathbf{w}(n-D-j-k)] \right\}.
\end{aligned} \tag{3.83}$$

Assumindo-se que o algoritmo convergiu, o valor de regime permanente do vetor de coeficientes do filtro adaptativo é determinado a partir da condição:

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} E[\mathbf{w}(n+1)] &= \lim_{n \rightarrow \infty} E[\mathbf{w}(n-d-j)] \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} E[\mathbf{w}(n-D-j-k)] \\
&= \mathbf{w}_\infty,
\end{aligned} \tag{3.84}$$

então, substituindo-se (3.84) em (3.83), obtém-se

$$\mathbf{w}_\infty = \mathbf{w}_0. \tag{3.85}$$

A partir de (3.41), (3.76) e (3.85), observa-se que os diferentes modelos obtidos para o algoritmo DLMS modificado apresentam o mesmo valor de regime permanente para o vetor de coeficientes que, por sua vez, é igual ao do algoritmo LMS convencional. Essa condição foi forçada através da inclusão do termo de compensação $\Lambda(n)$.

O vetor de erro nos coeficientes é obtido a partir da seguinte definição:

$$\mathbf{v}(n) = \mathbf{w}(n) - \mathbf{w}_\infty. \tag{3.86}$$

Assim, substituindo-se (3.86) em (3.82), tem-se

$$\begin{aligned}
E[\mathbf{v}(n+1)] + \mathbf{w}_\infty &= E[\mathbf{v}(n)] + \mathbf{w}_\infty + \mu \mathbf{R} (\mathbf{w}_0 - \mathbf{w}_\infty) - \mu \mathbf{R} E[\mathbf{v}(n-D)] \\
&\quad - \mu^2 \sum_{j=1}^D \mathbf{R}^2 \left\{ \mathbf{w}_0 - \mathbf{w}_\infty - E[\mathbf{v}(n-D-j)] \right\} \\
&\quad + \mu^3 \sum_{j=1}^D \sum_{k=1}^D \mathbf{R}^3 \left\{ \mathbf{w}_0 - \mathbf{w}_\infty - E[\mathbf{v}(n-D-j-k)] \right\}.
\end{aligned} \tag{3.87}$$

Agora, substituindo-se (3.85) em (3.87) e simplificando-se a expressão resultante, obtém-se o vetor de erro nos coeficientes. Assim,

$$\begin{aligned}
E[\mathbf{v}(n+1)] &= E[\mathbf{v}(n)] - \mu \mathbf{R} E[\mathbf{v}(n-D)] \\
&\quad + \mu^2 \mathbf{R}^2 \sum_{j=1}^D E[\mathbf{v}(n-D-j)] \\
&\quad - \mu^3 \mathbf{R}^3 \sum_{j=1}^D \sum_{k=1}^D E[\mathbf{w}(n-D-j-k)].
\end{aligned} \tag{3.88}$$

A expressão para a curva de aprendizagem é dada por (3.58) e (3.59). Então,:

$$\xi(n) = \xi_{\infty} + \text{tr} \left\{ E[\mathbf{v}(n) \mathbf{v}^T(n)] \mathbf{R} \right\}, \tag{3.89}$$

onde

$$E[\mathbf{v}(n) \mathbf{v}^T(n)] \cong E[\mathbf{v}(n)] E[\mathbf{v}^T(n)], \tag{3.90}$$

onde $E[\mathbf{v}(n)]$ é dado por (3.88).

Vale salientar que as expressões da curva de aprendizagem dos modelos desenvolvidos (3.58), (3.80) e (3.89) são iguais. No entanto, o momento de segunda ordem (determinado a partir do produto dos momentos de primeira ordem) utilizado para descrever tais expressões é diferente para cada um dos modelos obtidos.

3.6. Conclusões

Neste capítulo, foram propostos dois modelos que descrevem o comportamento dos momentos de primeira e segunda ordens do algoritmo DLMS modificado. Tais modelos foram obtidos sem o uso da clássica TI e levando-se em conta a hipótese de adaptação lenta. Também, para fins de comparação foi desenvolvido um modelo considerando a TI.

CAPÍTULO 4

Equation Section (Next)

ALGORITMO LMS DE ERRO FILTRADO MODIFICADO

4.1. Introdução

Neste capítulo, são derivadas as expressões que descrevem o comportamento do algoritmo FE-LMS modificado (MFE-LMS). É obtida uma expressão recursiva para o sinal de erro filtrado modificado, o qual é utilizado para a atualização do vetor de coeficientes do filtro adaptativo. Expressões para o comportamento dos momentos de primeira e segunda ordens e da curva de aprendizagem são derivadas, considerando-se adaptação lenta e sem utilizar a TI. Para fins de comparação é apresentado o modelo obtido invocando a TI.

4.2. Análise do algoritmo MFE-LMS

4.2.1. Algoritmo LMS de erro filtrado

Primeiramente, são apresentadas as expressões para o algoritmo FE-LMS convencional, o qual tem seu diagrama em blocos ilustrado na Fig. 4.1. Os sinais que descrevem o comportamento do algoritmo FE-LMS são definidos como segue:

$\mathbf{w}_o = [w_{o,0} \ w_{o,1} \ \cdots \ w_{o,N-1}]^T$: resposta ao impulso a ser identificada

$\mathbf{w}(n) = [w_0(n) \ w_1(n) \ \cdots \ w_{N-1}(n)]^T$: vetor de coeficientes adaptativos

$\mathbf{s} = [s_0 \ s_1 \ \cdots \ s_{M-1}]^T$: resposta ao impulso no caminho do erro

$\mathbf{x}(n) = [x(n) \ x(n-1) \ \cdots \ x(n-N+1)]^T$: sinal de referência

$\mathbf{x}_f(n) = [x_f(n) \ x_f(n-1) \ \cdots \ x_f(n-N+1)]^T$: sinal de referência filtrado

$d(n)$: sinal desejado

$z(n)$: ruído de medição Gaussiano de média zero, decorrelacionado dos demais sinais do sistema

No processo de análise considerado, $\mathbf{x}(n)$ é assumido Gaussiano com média zero e variância σ_x^2 . Também as dimensões de \mathbf{w}_o e $\mathbf{w}(n)$ são consideradas iguais para fins de simplicidade de tratamento matemático.

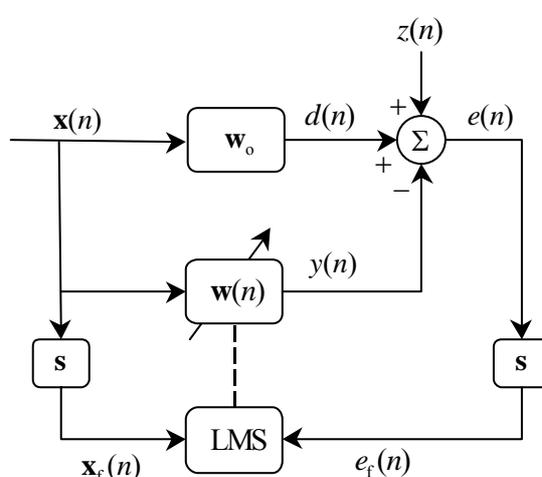


Fig. 4.1. Diagrama de blocos do algoritmo FE-LMS.

A partir da Fig. 4.1, obtém-se o sinal de erro definido como

$$e(n) = d(n) - y(n) + z(n), \quad (4.1)$$

onde os sinais $d(n)$ e $y(n)$ são, respectivamente, dados por

$$d(n) = \mathbf{w}_o^T \mathbf{x}(n) = \mathbf{x}^T(n) \mathbf{w}_o, \quad (4.2)$$

e

$$y(n) = \mathbf{w}^T(n) \mathbf{x}(n) = \mathbf{x}^T(n) \mathbf{w}(n). \quad (4.3)$$

Substituindo-se (4.3) em (4.1), obtém-se

$$e(n) = d(n) - \mathbf{w}^T(n) \mathbf{x}(n) + z(n). \quad (4.4)$$

Os sinais de referência e de erro filtrados, utilizados para a atualização dos coeficientes, são dados por

$$\mathbf{x}_f(n) = \sum_{i=0}^{M-1} s_i \mathbf{x}(n-i), \quad (4.5)$$

e

$$e_f(n) = \sum_{i=0}^{M-1} s_i e(n-i). \quad (4.6)$$

Substituindo-se (4.4) em (4.6), obtém-se uma expressão para o sinal de erro filtrado instantâneo em função do sinal desejado e da saída do filtro adaptativo. Assim,

$$e_f(n) = \sum_{i=0}^{M-1} s_i d(n-i) - \sum_{i=0}^{M-1} s_i \mathbf{w}^T(n-i) \mathbf{x}(n-i) + \sum_{i=0}^{M-1} s_i z(n-i). \quad (4.7)$$

Finalmente, a equação de atualização dos coeficientes é dada por [25]

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \mu e_f(n) \mathbf{x}_f(n). \quad (4.8)$$

4.2.2. Algoritmo FE-LMS modificado

De forma similar ao algoritmo DLMS modificado, discutido no Capítulo 3, o algoritmo FE-LMS modificado (MFE-LMS) é também obtido através de uma estratégia de compensação via filtragem aplicada no caminho de erro do algoritmo FE-LMS. Essa compensação é efetuada acrescentado um termo, denotado por $-\Lambda_f(n)$, em (4.7). Assim, a expressão para o erro compensado $\hat{e}_f(n)$ torna-se

$$\hat{e}_f(n) = \sum_{i=0}^{M-1} s_i d(n-i) - \sum_{i=0}^{M-1} s_i \mathbf{w}^T(n-i) \mathbf{x}(n-i) + \sum_{i=0}^{M-1} s_i z(n-i) - \Lambda_f(n). \quad (4.9)$$

O termo $\Lambda_f(n)$ é determinado a partir da condição de que (4.9) seja igual ao erro do algoritmo LMS convencional [17], dado por

$$\begin{aligned}
e(n)|_{\text{LMS}} &= d_f(n) - \mathbf{w}^T(n)\mathbf{x}_f(n) + z_f(n) \\
&= \sum_{i=0}^{M-1} s_i d(n-i) - \sum_{i=0}^{M-1} s_i \mathbf{w}^T(n)\mathbf{x}(n-i) + \sum_{i=0}^{M-1} s_i z(n-i).
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Desta forma, igualando-se (4.9) a (4.10), ou seja $\hat{e}_f(n) = e(n)|_{\text{LMS}}$, e manipulando estas expressões, obtém-se

$$\Lambda_f(n) = \sum_{i=0}^{M-1} s_i [\mathbf{w}^T(n) - \mathbf{w}^T(n-i)] \mathbf{x}(n-i). \tag{4.11}$$

A partir de (4.8), seguindo o procedimento realizado em (3.4) até (3.9), pode-se obter $[\mathbf{w}^T(n) - \mathbf{w}^T(n-i)]$. Assim,

$$[\mathbf{w}^T(n) - \mathbf{w}^T(n-i)] = \mu \sum_{j=1}^i \hat{e}_f(n-j) \mathbf{x}_f^T(n-j). \tag{4.12}$$

Aplicando-se (4.12) em (4.11), tem-se

$$\Lambda_f(n) = \mu \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=1}^i s_i \hat{e}_f(n-j) \mathbf{x}_f^T(n-j) \mathbf{x}(n-i). \tag{4.13}$$

Agora, substituindo-se (4.13) em (4.9), obtém-se a seguinte expressão para o sinal de erro filtrado instantâneo:

$$\begin{aligned}
\hat{e}_f(n) &= \sum_{i=0}^{M-1} s_i d(n-i) - \sum_{i=0}^{M-1} s_i \mathbf{w}^T(n-i)\mathbf{x}(n-i) \\
&\quad - \mu \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=1}^i s_i \hat{e}_f(n-j) \mathbf{x}_f^T(n-j)\mathbf{x}(n-i) \\
&\quad + \sum_{i=0}^{M-1} s_i z(n-i).
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Note que no algoritmo MFE-LMS, (4.14) apresenta uma recursão em $\hat{e}_f(n)$, sendo que tal característica não se encontra presente no algoritmo FE-LMS convencional. Entretanto, tal característica é que fornece ao algoritmo modificado um comportamento similar ao do LMS convencional.

4.2.3. Comportamento médio do vetor de coeficientes

A expressão que descreve o comportamento médio do vetor de coeficientes é obtida a seguir. Então, substituindo-se (4.5) e (4.14) em (4.8), a expressão resultante é

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}(n+1) = & \mathbf{w}(n) + \mu \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{k=0}^{M-1} s_i s_k \mathbf{x}(n-k) d(n-i) \\
& - \mu \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{k=0}^{M-1} s_i s_k \mathbf{x}(n-k) \mathbf{w}^T(n-i) \mathbf{x}(n-i) \\
& - \mu^2 \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=1}^i \sum_{k=0}^{M-1} s_i s_k \mathbf{x}(n-k) \hat{e}_f(n-j) \mathbf{x}_f^T(n-j) \mathbf{x}(n-i) \\
& + \mu \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{k=0}^{M-1} s_i s_k \mathbf{x}(n-k) z(n-i),
\end{aligned} \tag{4.15}$$

e tomando-se o valor esperado em ambos os lados de (4.15), obtém-se

$$\begin{aligned}
E[\mathbf{w}(n+1)] = & E[\mathbf{w}(n)] + \mu \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{k=0}^{M-1} s_i s_k E[\mathbf{x}(n-k) d(n-i)] \\
& - \mu \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{k=0}^{M-1} s_i s_k E[\mathbf{x}(n-k) \mathbf{w}^T(n-i) \mathbf{x}(n-i)] \\
& - \mu^2 \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=1}^i \sum_{k=0}^{M-1} s_i s_k E[\mathbf{x}(n-k) \hat{e}_f(n-j) \mathbf{x}_f^T(n-j) \mathbf{x}(n-i)] \\
& + \mu \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{k=0}^{M-1} s_i s_k E[\mathbf{x}(n-k) z(n-i)],
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Para se determinar os valores esperados em (4.16), são assumidas as considerações seguintes:

As correlações entre diferentes vetores de entrada são muito mais importantes do que as correlações entre vetores de entrada e vetores de coeficientes. Assim,

- i) $E[\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)\mathbf{w}(n)] \approx E[\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)]E[\mathbf{w}(n)];$
- ii) $E[\mathbf{x}(n-i)\mathbf{x}^T(n-j)] = \mathbf{R}_{j-i} \neq 0$ se $i \neq j$.

As considerações (i) e (ii) são suportadas pela hipótese de adaptação lenta. Assim, cada um dos valores esperados de (4.16) é determinado como segue:

a) Cálculo de $E[\mathbf{x}(n-k)d(n-i)]:$ (4.17)

Obtendo-se $d(n-i)$ a partir de (4.2) e substituindo-o na (4.17), obtém-se

$$E[\mathbf{x}(n-k)d(n-i)] = E[\mathbf{x}(n-k)\mathbf{x}^T(n-i)]\mathbf{w}_o = \mathbf{R}_{i-k}\mathbf{w}_o. \quad (4.18)$$

b) Cálculo de $E[\mathbf{x}(n-k)\mathbf{w}^T(n-i)\mathbf{x}(n-i)]$

De acordo com as considerações de análise (i) e (ii), tem-se então

$$\begin{aligned} E[\mathbf{x}(n-k)\mathbf{w}^T(n-i)\mathbf{x}(n-i)] &\cong E[\mathbf{x}(n-k)\mathbf{x}^T(n-i)]E[\mathbf{w}(n-i)] \\ &= \mathbf{R}_{i-k}E[\mathbf{w}(n-i)]. \end{aligned} \quad (4.19)$$

c) Cálculo de \mathbf{a} :

Seja \mathbf{a} dado pelo seguinte vetor:

$$\mathbf{a} = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=1}^i \sum_{k=0}^{M-1} s_i s_k \mathbf{x}(n-k) \hat{e}_f(n-j) \mathbf{x}_f^T(n-j) \mathbf{x}(n-i). \quad (4.20)$$

Deve-se encontrar o valor esperado de \mathbf{a} . Para tal, primeiramente necessita-se determinar os termos $e_f(n-j)$ e $\mathbf{x}_f^T(n-j)$, os quais são, a partir de (4.14) e (4.5), respectivamente obtidos por

$$\begin{aligned}
\hat{e}_f(n-j) &= \sum_{l=0}^{M-1} s_l d(n-j-l) - \sum_{l=0}^{M-1} s_l \mathbf{w}^T(n-j-l) \mathbf{x}(n-j-l) \\
&\quad - \mu \sum_{l=0}^{M-1} \sum_{m=1}^l s_l \hat{e}_f(n-j-l) \mathbf{x}_f^T(n-j-l) \mathbf{x}(n-j-l) \\
&\quad + \sum_{l=0}^{M-1} s_l z(n-j-l),
\end{aligned} \tag{4.21}$$

e

$$\mathbf{x}_f^T(n-j) = \sum_{p=0}^{M-1} s_p \mathbf{x}^T(n-j-p). \tag{4.22}$$

Substituindo-se (4.21) e (4.22) em (4.20) e tomando-se o valor esperado da expressão resultante, tem-se

$$\begin{aligned}
E[\mathbf{a}] &= \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=1}^i \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{M-1} \sum_{p=0}^{M-1} s_i s_k s_l s_p E[\mathbf{x}(n-k) d(n-j-l) \mathbf{x}^T(n-j-p) \mathbf{x}(n-i)] \\
&\quad - \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=1}^i \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{M-1} \sum_{p=0}^{M-1} s_i s_k s_l s_p E[\mathbf{x}(n-k) \mathbf{w}^T(n-j-l) \mathbf{x}(n-j-l) \mathbf{x}^T(n-j-p) \\
&\quad \quad \quad \times \mathbf{x}(n-i)] \\
&\quad - \mu \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=1}^i \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{M-1} \sum_{m=1}^l \sum_{p=0}^{M-1} s_i s_k s_l s_p E[\mathbf{x}(n-k) \hat{e}_f(n-j-m) \mathbf{x}_f^T(n-j-m) \\
&\quad \quad \quad \times \mathbf{x}(n-j-l) \mathbf{x}^T(n-j-p) \mathbf{x}(n-i)] \\
&\quad + \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=1}^i \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{M-1} \sum_{p=0}^{M-1} s_i s_k s_l s_p E[\mathbf{x}(n-k) z(n-j-l) \mathbf{x}^T(n-j-p) \mathbf{x}(n-i)].
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Para o cálculo do valor esperado (4.23), devem ser determinados, primeiramente, os seguintes valores esperados:

c.1) Cálculo de \mathbf{b} :

Seja \mathbf{b} dado pelo seguinte vetor:

$$\mathbf{b} = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=1}^i \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{M-1} \sum_{p=0}^{M-1} s_i s_k s_l s_p E[\mathbf{x}(n-k) d(n-j-l) \mathbf{x}^T(n-j-p) \mathbf{x}(n-i)]. \quad (4.24)$$

A partir de (4.2), tem-se que $d(n-j-l) = \mathbf{x}^T(n-j-l) \mathbf{w}_o$; então, substituindo-se essa expressão em (4.24), obtém-se

$$\mathbf{b} = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=1}^i \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{M-1} \sum_{p=0}^{M-1} s_i s_k s_l s_p E[\mathbf{x}(n-k) \mathbf{x}^T(n-j-p) \mathbf{x}(n-i) \mathbf{x}^T(n-j-l)] \mathbf{w}_o. \quad (4.25)$$

No Apêndice A é detalhado o cálculo do momento de quarta ordem de uma variável Gaussiana. Assim, para o caso $E[\mathbf{x}(n-k) \mathbf{x}^T(n-j-p) \mathbf{x}(n-i) \mathbf{x}^T(n-j-l)]$, tal valor esperado é

$$E[\mathbf{x}(n-k) \mathbf{x}^T(n-j-p) \mathbf{x}(n-i) \mathbf{x}^T(n-j-l)] = \mathbf{R}_{j+p-k} \mathbf{R}_{j+l-i} + \mathbf{R}_{i-k} \mathbf{R}_{l-p} + \mathbf{R}_{j+l-k} \text{tr}[\mathbf{R}_{j+p-i}^T]. \quad (4.26)$$

Finalmente, substituindo-se (4.26) em (4.25), tem-se

$$\mathbf{b} = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=1}^i \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{M-1} \sum_{p=0}^{M-1} s_i s_k s_l s_p \left\{ \mathbf{R}_{j+p-k} \mathbf{R}_{j+l-i} + \mathbf{R}_{i-k} \mathbf{R}_{l-p} + \mathbf{R}_{j+l-k} \text{tr}[\mathbf{R}_{j+p-i}^T] \right\} \mathbf{w}_o. \quad (4.27)$$

c.2) Cálculo de \mathbf{c} :

Seja \mathbf{c} dado pelo seguinte vetor:

$$\mathbf{c} = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=1}^i \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{M-1} \sum_{p=0}^{M-1} s_i s_k s_l s_p E[\mathbf{x}(n-k) \mathbf{w}^T(n-j-l) \mathbf{x}(n-j-l) \times \mathbf{x}^T(n-j-p) \mathbf{x}(n-i)], \quad (4.28)$$

utilizando-se as considerações de análise, (4.28) pode ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\mathbf{c} &= \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=1}^i \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{M-1} \sum_{p=0}^{M-1} s_i s_k s_l s_p E[\mathbf{x}(n-k)\mathbf{x}^T(n-j-p)\mathbf{x}(n-i)\mathbf{x}^T(n-j-l) \\
&\quad \times \mathbf{w}(n-j-l)] \\
&\cong \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=1}^i \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{M-1} \sum_{p=0}^{M-1} s_i s_k s_l s_p E[\mathbf{x}(n-k)\mathbf{x}^T(n-j-p)\mathbf{x}(n-i)\mathbf{x}^T(n-j-l)] \\
&\quad \times E[\mathbf{w}(n-j-l)].
\end{aligned} \tag{4.29}$$

Agora, substituindo-se (4.26) em (4.29), obtém-se

$$\begin{aligned}
\mathbf{c} &= \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=1}^i \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{M-1} \sum_{p=0}^{M-1} s_i s_k s_l s_p \left\{ \mathbf{R}_{j+p-k} \mathbf{R}_{j+l-i} + \mathbf{R}_{i-k} \mathbf{R}_{l-p} + \mathbf{R}_{j+l-k} \text{tr}[\mathbf{R}_{j+p-i}^T] \right\} \\
&\quad \times E[\mathbf{w}(n-j-l)].
\end{aligned} \tag{4.30}$$

Finalmente, substituindo-se (4.27) e (4.30) em (4.23) e arranjando-se os termos da expressão resultante, chega-se à seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
E[\mathbf{a}] &= \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=1}^i \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{M-1} \sum_{p=0}^{M-1} s_i s_k s_l s_p \left\{ \mathbf{R}_{j+p-k} \mathbf{R}_{j+l-i} + \mathbf{R}_{i-k} \mathbf{R}_{l-p} + \mathbf{R}_{j+l-k} \text{tr}[\mathbf{R}_{j+p-i}^T] \right\} \\
&\quad \times \{ \mathbf{w}_o - E[\mathbf{w}(n-j-l)] \} \\
&\quad - \mu \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=1}^i \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{M-1} \sum_{m=1}^l \sum_{p=0}^{M-1} s_i s_k s_l s_p E[\mathbf{x}(n-k)\hat{\mathbf{e}}_f(n-j-m)\mathbf{x}_f^T(n-j-m) \\
&\quad \times \mathbf{x}(n-j-l)\mathbf{x}^T(n-j-p)\mathbf{x}(n-i)] \\
&\quad + \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=1}^i \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{M-1} \sum_{p=0}^{M-1} s_i s_k s_l s_p E[\mathbf{x}(n-k)z(n-j-l)\mathbf{x}^T(n-j-p)\mathbf{x}(n-i)].
\end{aligned} \tag{4.31}$$

Então, para se obter o resultado procurado, substitui-se (4.18), (4.19) e (4.31) em (4.16). Assim, a expressão recursiva que descreve o comportamento médio do vetor de coeficientes do algoritmo MFE-LMS é dada por

$$\begin{aligned}
E[\mathbf{w}(n+1)] &= \\
\text{(I)} \rightarrow E[\mathbf{w}(n)] & \\
\text{(II)} \rightarrow +\mu \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{k=0}^{M-1} s_i s_k \mathbf{R}_{i-k} \{ \mathbf{w}_o - E[\mathbf{w}(n-i)] \} & \\
\text{(III)} \rightarrow -\mu^2 \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=1}^i \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{M-1} \sum_{p=0}^{M-1} s_i s_k s_l s_p \{ \mathbf{R}_{j+p-k} \mathbf{R}_{j+l-i} + \mathbf{R}_{i-k} \mathbf{R}_{l-p} + \mathbf{R}_{j+l-k} \text{tr}[\mathbf{R}_{j+p-i}^T] \} & \\
&\times \{ \mathbf{w}_o - E[\mathbf{w}(n-j-l)] \} & \\
\text{(IV)} \rightarrow +\mu^3 \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=1}^i \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{M-1} \sum_{m=1}^l \sum_{p=0}^{M-1} s_i s_k s_l s_p E[\mathbf{x}(n-k) \hat{e}_f(n-j-m) \mathbf{x}_f^T(n-j-m) & \\
&\times \mathbf{x}(n-j-l) \mathbf{x}^T(n-j-p) \mathbf{x}(n-i)] & \\
\text{(V)} \rightarrow -\mu^2 \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=1}^i \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{M-1} \sum_{p=0}^{M-1} s_i s_k s_l s_p E[\mathbf{x}(n-k) z(n-j-l) \mathbf{x}^T(n-j-p) \mathbf{x}(n-i)]. & \\
\text{(VI)} \rightarrow +\mu \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{k=0}^{M-1} s_i s_k E[\mathbf{x}(n-k) z(n-i)]. & \tag{4.32}
\end{aligned}$$

Agora, assumindo ainda que:

- iii)* o modelo derivado considera a hipótese de adaptação lenta; então em (4.32) podem ser desprezados aqueles termos que sejam afetados pelo fator μ^β , com $\beta \geq 3$;
- iv)* o ruído de medição é branco, Gaussiano e de média zero, decorrelacionado dos demais sinais do sistema, ou seja

$$E[z(n-i) \mathbf{x}(n-j)] = E[z(n-i)] E[\mathbf{x}(n-j)] = 0, \quad \forall i \neq j. \tag{4.33}$$

Assim, em (4.32), levando-se em consideração (*iii*), pode ser desconsiderado o termo (IV); e utilizando-se (*iv*) podem ser cancelados os termos (V) e (VI). Dessa forma, reescrevendo (4.32), tem-se

$$\begin{aligned}
E[\mathbf{w}(n+1)] &= \\
E[\mathbf{w}(n)] + \mu \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{k=0}^{M-1} s_i s_k \mathbf{R}_{i-k} \{ \mathbf{w}_o - E[\mathbf{w}(n-i)] \} & \\
- \mu^2 \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=1}^i \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{M-1} \sum_{p=0}^{M-1} s_i s_k s_l s_p \{ \mathbf{R}_{j+p-k} \mathbf{R}_{j+l-i} + \mathbf{R}_{i-k} \mathbf{R}_{l-p} + \mathbf{R}_{j+l-k} \text{tr}[\mathbf{R}_{j+p-i}^T] \} & \\
&\times \{ \mathbf{w}_o - E[\mathbf{w}(n-j-l)] \}. & \tag{4.34}
\end{aligned}$$

4.2.4. Valor de regime permanente do vetor de coeficientes

O valor de regime permanente do vetor de coeficientes é obtido calculando-se o limite quando $n \rightarrow \infty$ em ambos os lados de (4.34). Assim,

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow \infty} E[\mathbf{w}(n+1)] = \\
& \lim_{n \rightarrow \infty} E[\mathbf{w}(n)] + \mu \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{k=0}^{M-1} s_i s_k \mathbf{R}_{i-k} \left\{ \mathbf{w}_0 - \lim_{n \rightarrow \infty} E[\mathbf{w}(n-i)] \right\} \\
& - \mu^2 \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=1}^i \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{M-1} \sum_{p=0}^{M-1} s_i s_k s_l s_p \left\{ \mathbf{R}_{j+p-k} \mathbf{R}_{j+l-i} + \mathbf{R}_{i-k} \mathbf{R}_{l-p} + \mathbf{R}_{j+l-k} \text{tr}[\mathbf{R}_{j+p-i}^T] \right\} \\
& \times \left\{ \mathbf{w}_0 - \lim_{n \rightarrow \infty} E[\mathbf{w}(n-j-l)] \right\}.
\end{aligned} \tag{4.35}$$

Assumindo-se então que o algoritmo converge, o valor de regime permanente do vetor de coeficientes do filtro adaptativo é determinado a partir da seguinte condição:

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} E[\mathbf{w}(n+1)] &= \lim_{n \rightarrow \infty} E[\mathbf{w}(n-i)] \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} E[\mathbf{w}(n)] = \mathbf{w}_\infty \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} E[\mathbf{w}(n-j-k)].
\end{aligned} \tag{4.36}$$

Substituindo-se (4.36) em (4.35) e agrupando-se os termos da expressão resultante, obtém-se

$$\mathbf{A} \mathbf{w}_\infty = \mathbf{A} \mathbf{w}_0, \tag{4.37}$$

onde

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \mu \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{k=0}^{M-1} s_i s_k \mathbf{R}_{i-k} \\
& - \mu^2 \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{M-1} \sum_{k=1}^i \sum_{l=0}^{M-1} \sum_{p=0}^{M-1} s_i s_k s_l s_p \left\{ \mathbf{R}_{j+p-k} \mathbf{R}_{j+l-i} + \mathbf{R}_{i-k} \mathbf{R}_{l-p} + \mathbf{R}_{j+l-k} \text{tr}[\mathbf{R}_{j+p-i}^T] \right\}.
\end{aligned}$$

Finalmente, pré-multiplicando ambos os lados de (4.37) por \mathbf{A}^{-1} , determina-se

$$\mathbf{w}_\infty = \mathbf{w}_0. \quad (4.38)$$

Note que similarmente ao algoritmo MDLMS, o algoritmo MFE-LMS tem o mesmo valor do regime permanente que o algoritmo FE-LMS. O termo de compensação apenas tem efeito durante a fase transiente do algoritmo, extinguindo-se no regime permanente. Tal fato é mais bem observado em (4.11), na qual para a condição de convergência, a diferença $\{\mathbf{w}^T(n) - \mathbf{w}^T(n-i)\}$ é zero, anulando assim o efeito de $\Lambda_f(n)$.

4.2.5. Vetor de Erro nos Coeficientes

Definindo-se o vetor de erro nos coeficientes em relação a \mathbf{w}_∞ como

$$\mathbf{v}(n) = \mathbf{w}(n) - \mathbf{w}_\infty, \quad (4.39)$$

e substituindo-se (4.39) em (4.34), tem-se

$$\begin{aligned} E[\mathbf{v}(n+1)] + \mathbf{w}_\infty = & \\ E[\mathbf{v}(n)] + \mathbf{w}_\infty + \mu \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{k=0}^{M-1} s_i s_k \mathbf{R}_{i-k} \{ \mathbf{w}_0 - \mathbf{w}_\infty - E[\mathbf{v}(n-i)] \} & \\ - \mu^2 \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=1}^i \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{M-1} \sum_{p=0}^{M-1} s_i s_k s_l s_p \{ \mathbf{R}_{j+p-k} \mathbf{R}_{j+l-i} + \mathbf{R}_{i-k} \mathbf{R}_{l-p} + \mathbf{R}_{j+l-k} \text{tr}[\mathbf{R}_{j+p-i}^T] \} & \\ \times \{ \mathbf{w}_0 - \mathbf{w}_\infty - E[\mathbf{v}(n-j-l)] \}. & \end{aligned} \quad (4.40)$$

Finalmente, substituindo-se (4.38) em (4.40) e manipulando-se a expressão resultante, obtém-se uma expressão recursiva para o vetor de erro nos coeficientes. Assim,

$$\begin{aligned} E[\mathbf{v}(n+1)] = & \\ E[\mathbf{v}(n)] - \mu \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{k=0}^{M-1} s_i s_k \mathbf{R}_{i-k} E[\mathbf{v}(n-i)] & \\ + \mu^2 \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=1}^i \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{M-1} \sum_{p=0}^{M-1} s_i s_k s_l s_p \{ \mathbf{R}_{j+p-k} \mathbf{R}_{j+l-i} + \mathbf{R}_{i-k} \mathbf{R}_{l-p} + \mathbf{R}_{j+l-k} \text{tr}[\mathbf{R}_{j+p-i}^T] \} & \\ \times E[\mathbf{v}(n-j-l)]. & \end{aligned} \quad (4.41)$$

4.2.6. Curva de aprendizagem

Para determinar a expressão da curva de aprendizagem do algoritmo MFE-LMS, deve-se inicialmente substituir (4.11) em (4.9), e após uma simples manipulação matemática na expressão resultante, obtém-se

$$\hat{e}_f(n) = \sum_{i=0}^{M-1} s_i d(n-i) - \sum_{i=0}^{M-1} s_i \mathbf{w}^T(n) \mathbf{x}(n-i) + \sum_{i=0}^{M-1} s_i z(n-i). \quad (4.42)$$

Agora, aplicando-se novamente a definição do vetor de erro nos coeficientes $\mathbf{v}(n) = \mathbf{w}(n) - \mathbf{w}_\infty$ em (4.42), obtém-se

$$\begin{aligned} \hat{e}_f(n) = & \sum_{i=0}^{M-1} s_i d(n-i) - \sum_{i=0}^{M-1} s_i \mathbf{v}^T(n) \mathbf{x}(n-i) \\ & - \sum_{i=0}^{M-1} s_i \mathbf{w}_\infty^T \mathbf{x}(n-i) + \sum_{i=0}^{M-1} s_i z(n-i). \end{aligned} \quad (4.43)$$

Definindo-se o erro mínimo de regime permanente como

$$\hat{e}_\infty(n) = \sum_{i=0}^{M-1} s_i d(n-i) - \sum_{i=0}^{M-1} s_i \mathbf{w}_\infty^T \mathbf{x}(n-i) + \sum_{i=0}^{M-1} s_i z(n-i), \quad (4.44)$$

e substituindo-se (4.44) em (4.43), tem-se

$$\hat{e}_f(n) = \hat{e}_\infty(n) - \sum_{i=0}^{M-1} s_i \mathbf{v}^T(n) \mathbf{x}(n-i). \quad (4.45)$$

Elevando-se ao quadrado ambos os lados de (4.42) e tomando-se o valor esperado da expressão resultante, obtém-se

$$\begin{aligned} E[\hat{e}_f^2(n)] = & E[\hat{e}_\infty^2(n)] - 2 \sum_{i=0}^{M-1} s_i E[\hat{e}_\infty(n) \mathbf{v}^T(n) \mathbf{x}(n-i)] \\ & + \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{M-1} s_i s_j E[\mathbf{v}^T(n) \mathbf{x}(n-i) \mathbf{x}^T(n-j) \mathbf{v}(n)]. \end{aligned} \quad (4.46)$$

Definindo-se a seguinte grandeza:

$$\xi_f(n) = E[\hat{e}_f^2(n)], \quad (4.47)$$

determinam-se os valores esperados da expressão (4.46) como segue:

a) Cálculo de $E[\hat{e}_\infty^2(n)]$:

Primeiramente, necessita-se conhecer $\hat{e}_\infty^2(n)$; para tal, substitui-se (4.36) em (4.41). Agora, elevando-se ao quadrado a expressão resultante, obtém-se

$$\hat{e}_\infty^2(n) = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{k=0}^{M-1} s_i s_k z(n-k) z(n-i). \quad (4.48)$$

Tomando-se então o valor esperado em ambos os lados da expressão (4.48), tem-se

$$E[\hat{e}_\infty^2(n)] = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{k=0}^{M-1} s_i s_k E[z(n-k) z(n-i)]. \quad (4.49)$$

Levando-se em consideração (iv), (4.49) é escrita como

$$E[\hat{e}_\infty^2(n)] = \sigma_{\text{ruído}}^2 \sum_{i=0}^{M-1} s_i^2. \quad (4.50)$$

b) Cálculo de $\sum_{i=0}^{M-1} s_i E[\hat{e}_\infty(n) \mathbf{v}^T(n) \mathbf{x}(n-i)]$: (4.51)

Aplicando-se a consideração de análise (i) em (4.51), tem-se

$$\sum_{i=0}^{M-1} s_i E[\hat{e}_\infty(n) \mathbf{v}^T(n) \mathbf{x}(n-i)] = \sum_{i=0}^{M-1} s_i E[\hat{e}_\infty(n) \mathbf{x}^T(n-i)] E[\mathbf{v}(n)]. \quad (4.52)$$

Define-se então o vetor:

$$\mathbf{a} = \sum_{i=0}^{M-1} s_i E[\hat{e}_\infty(n) \mathbf{x}^T(n-i)]. \quad (4.53)$$

Agora, substituindo-se (4.44) em (4.53) e arranjando-se os termos da expressão resultante, obtém-se

$$\begin{aligned} \mathbf{a} = & \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{k=0}^{M-1} s_i s_k E[d(n-k) \mathbf{x}^T(n-i)] - \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{k=0}^{M-1} s_i s_k \mathbf{w}_\infty^T E[\mathbf{x}(n-k) \mathbf{x}^T(n-i)] \\ & + \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{k=0}^{M-1} s_i s_k E[z(n-k)] E[\mathbf{x}^T(n-i)]. \end{aligned} \quad (4.54)$$

A partir de (4.2), pode-se obter $d(n-k)$; assim, substituindo-se a expressão resultante em (4.54) e utilizando-se as considerações de análise (ii) e (iv), obtém-se

$$\mathbf{a} = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{k=0}^{M-1} s_i s_k \mathbf{w}_o^T \mathbf{R}_{i-k} - \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{k=0}^{M-1} s_i s_k \mathbf{w}_\infty^T \mathbf{R}_{i-k} \quad (4.55)$$

Agora, substituindo-se (4.37) em (4.55), tem-se

$$\mathbf{a} = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{k=0}^{M-1} s_i s_k \mathbf{w}_o^T \mathbf{R}_{i-k} - \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{k=0}^{M-1} s_i s_k \mathbf{w}_o^T \mathbf{R}_{i-k} = 0. \quad (4.56)$$

Finalmente, aplicando-se (4.56) em (4.52), obtém-se

$$\sum_{i=0}^{M-1} s_i E[\hat{e}_\infty(n) \mathbf{v}^T(n) \mathbf{x}(n-i)] = \sum_{i=0}^{M-1} s_i E[\hat{e}_\infty(n) \mathbf{x}^T(n-i)] E[\mathbf{v}(n)] = 0. \quad (4.57)$$

c) Cálculo de $E[\mathbf{v}^T(n) \mathbf{x}(n-i) \mathbf{x}^T(n-j) \mathbf{v}(n)]$:

Como $[\mathbf{v}^T(n) \mathbf{x}(n-i) \mathbf{x}^T(n-j) \mathbf{v}(n)]$ é um escalar, o correspondente valor esperado é dado por

$$\begin{aligned} E[\mathbf{v}^T(n) \mathbf{x}(n-i) \mathbf{x}^T(n-j) \mathbf{v}(n)] &= \text{tr} \left\{ E[\mathbf{v}^T(n) \mathbf{R}_{j-i} \mathbf{v}(n)] \right\} \\ &= \text{tr} \left\{ E[\mathbf{v}(n) \mathbf{v}^T(n)] \mathbf{R}_{j-i} \right\}. \end{aligned} \quad (4.58)$$

Finalmente, substituindo-se (4.47), (4.50), (4.57) e (4.58) em (4.46), obtém-se uma expressão para a curva de aprendizagem. Assim,

$$\xi_f(n) = \sigma_{\text{ruído}}^2 \sum_{i=0}^{M-1} s_i^2 + \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{M-1} s_i s_j \text{tr} \{ \mathbf{R}_{j-i} E[\mathbf{v}(n)\mathbf{v}^T(n)] \}. \quad (4.59)$$

A partir de (4.59), observa-se que para descrever o comportamento da curva de aprendizagem é necessário conhecer o valor esperado $E[\mathbf{v}(n)\mathbf{v}^T(n)]$. Entretanto, levando-se em consideração a hipótese de adaptação lenta, o momento de segunda ordem pode ser determinado utilizando-se a aproximação apresentada em [32]. Dessa forma,

$$E[\mathbf{v}(n)\mathbf{v}^T(n)] \cong E[\mathbf{v}(n)]E[\mathbf{v}^T(n)], \quad (4.60)$$

onde $E[\mathbf{v}(n)]$ é dado por (4.41).

Assim, através de (4.59) e (4.60), obtém-se a descrição para o comportamento da curva de aprendizagem do algoritmo MFE-LMS.

4.3. Modelo utilizando a teoria da independência

Para fins de comparação, nesta seção, é apresentado um modelo do algoritmo MFE-LMS considerando a TI. Nessa condição, tem-se que $\mathbf{R}_{\beta-\alpha} = E[\mathbf{x}(n-\alpha)\mathbf{x}^T(n-\beta)] = 0$ para $\beta \neq \alpha$.

Usando-se então a TI em (4.34), o comportamento médio do vetor de coeficientes é dado por

$$E[\mathbf{w}(n+1)] = E[\mathbf{w}(n)] + \mu \mathbf{R} \sum_{i=0}^{M-1} s_i^2 \{ \mathbf{w}_o - E[\mathbf{w}(n-i)] \} - \mu^2 \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=1}^i \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{M-1} \sum_{p=0}^{M-1} s_i s_k s_l s_p (\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_3) \{ \mathbf{w}_o - E[\mathbf{w}(n-j-l)] \}. \quad (4.61)$$

onde

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_{j+p-k} \mathbf{R}_{j+l-i} = \begin{cases} \mathbf{R}^2, & j+p=k \text{ e } j+l=i \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$\mathbf{R}_2 = \mathbf{R}_{i-k} \mathbf{R}_{l-p} = \begin{cases} \mathbf{R}^2, & i=k \text{ e } l=p \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$\mathbf{R}_3 = \mathbf{R}_{j+l-k} \text{tr}[\mathbf{R}_{j+p-i}^T] = \begin{cases} \mathbf{R} \text{tr}[\mathbf{R}], & j+l=k \text{ e } j+p=i \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

A partir de (4.61), observa-se que o modelo que utiliza a TI desconsidera as correlações do vetor de entrada para instantes de tempo diferentes.

O vetor de regime permanente do vetor de coeficientes é obtido aplicando-se o limite quando $n \rightarrow \infty$ em ambos os lados de (4.61). Assim,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} E[\mathbf{w}(n+1)] = & \\ \lim_{n \rightarrow \infty} E[\mathbf{w}(n)] + \mu \mathbf{R} \sum_{i=0}^{M-1} s_i^2 \left\{ \mathbf{w}_0 - \lim_{n \rightarrow \infty} E[\mathbf{w}(n-i)] \right\} & \quad (4.62) \\ - \mu^2 \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=1}^i \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{M-1} \sum_{p=0}^{M-1} s_i s_k s_l s_p (\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_3) \left\{ \mathbf{w}_0 - \lim_{n \rightarrow \infty} E[\mathbf{w}(n-j-l)] \right\}. & \end{aligned}$$

Assumindo-se então que o algoritmo convergiu, o valor de regime permanente do vetor de coeficientes do filtro adaptativo é determinado pela seguinte condição:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} E[\mathbf{w}(n+1)] = \lim_{n \rightarrow \infty} E[\mathbf{w}(n-i)] = \lim_{n \rightarrow \infty} E[\mathbf{w}(n)] & \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} E[\mathbf{w}(n-j-k)] = \mathbf{w}_\infty. & \quad (4.63) \end{aligned}$$

Agora, substituindo-se (4.63) em (4.62) e agrupando-se os termos comuns, tem-se

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_\infty = \mathbf{w}_\infty + \mu \mathbf{R} \sum_{i=0}^{M-1} s_i^2 (\mathbf{w}_0 - \mathbf{w}_\infty) & \\ - \mu^2 \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=1}^i \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{M-1} \sum_{p=0}^{M-1} s_i s_k s_l s_p (\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_3) (\mathbf{w}_0 - \mathbf{w}_\infty). & \quad (4.64) \end{aligned}$$

Então, realizando-se uma simples manipulação matemática em (4.64), obtém-se

$$\mathbf{w}_\infty = \mathbf{w}_o. \quad (4.65)$$

Note que as expressões (4.38) e (4.65) são iguais, ou seja, ambos os modelos têm o mesmo valor de regime permanente. A diferença está na fase transiente. Isto acontece porque, quando usada a TI, algumas correlações importantes são desconsideradas. Tal fato ficará evidenciado no capítulo 5, no qual serão apresentados os resultados de simulação.

O vetor de erro nos coeficientes é obtido pela substituição de (2.12) em (4.61); portanto,

$$\begin{aligned} & E[\mathbf{v}(n+1)] + \mathbf{w}_\infty \\ &= E[\mathbf{v}(n)] + \mathbf{w}_\infty + \mu \mathbf{R} \sum_{i=0}^{M-1} s_i^2 \{ \mathbf{w}_o - \mathbf{w}_\infty - E[\mathbf{v}(n-i)] \} \\ & - \mu^2 \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^i \sum_{k=1}^{M-1} \sum_{l=0}^{M-1} \sum_{p=0}^{M-1} s_i s_k s_l s_p (\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_3) \{ \mathbf{w}_o - \mathbf{w}_\infty - E[\mathbf{v}(n-j-l)] \}. \end{aligned} \quad (4.66)$$

Finalmente, aplicando-se (4.65) em (4.66), obtém-se uma expressão recursiva para o vetor erro nos coeficientes. Assim,

$$\begin{aligned} E[\mathbf{v}(n+1)] &= E[\mathbf{v}(n)] - \mu \mathbf{R} \sum_{i=0}^{M-1} s_i^2 E[\mathbf{v}(n-i)] \\ & + \mu^2 \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^i \sum_{k=1}^{M-1} \sum_{l=0}^{M-1} \sum_{p=0}^{M-1} s_i s_k s_l s_p (\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_3) E[\mathbf{v}(n-j-l)]. \end{aligned} \quad (4.67)$$

As mesmas observações feitas para o comportamento médio do vetor de coeficientes podem também ser estendidas para o vetor de erro nos coeficientes quando comparadas as expressões (4.41) e (4.67).

Utilizando-se a TI em (4.59), obtém-se a expressão do erro quadrático médio. Assim,

$$\xi_f(n) = \sigma_{\text{ruído}}^2 \sum_{i=0}^{M-1} s_i^2 + \sum_{i=0}^{M-1} s_i^2 \text{tr} \{ E[\mathbf{v}(n)\mathbf{v}^T(n)]\mathbf{R} \}, \quad (4.68)$$

sendo

$$E[\mathbf{v}(n)\mathbf{v}^T(n)] \cong E[\mathbf{v}(n)]E[\mathbf{v}^T(n)], \quad (4.69)$$

onde $E[\mathbf{v}(n)]$ é dado por (4.54).

A partir de (4.61), (4.67) e (4.68), pode-se observar que a TI desconsidera um conjunto de termos que faz com que o modelo resultante seja inadequado para representar o algoritmo em questão. No próximo capítulo, será evidenciada tal situação.

4.4. Conclusões

Neste capítulo, foi apresentado um modelo que descreve o comportamento dos momentos de primeira e segunda ordens e da curva de aprendizagem do algoritmo MFE-LMS. Tal modelo foi determinado levando-se em consideração a hipótese de adaptação lenta e sinais Gaussianos de entrada. Também, para fins de comparação é apresentado um outro modelo que considera a TI para a sua obtenção.

RESULTADOS DE SIMULAÇÃO

Neste capítulo, são apresentados resultados de simulações com objetivo de verificar os modelos analíticos desenvolvidos nos Capítulos 3 e 4. Os parâmetros utilizados nos exemplos foram escolhidos para representar, de forma clara e concisa, as vantagens e limitações dos modelos propostos.

5.1. Algoritmo MDLMS utilizando sinal de entrada branco

Nesta seção, primeiramente, é comparado o algoritmo DLMS convencional com o algoritmo DLMS modificado (MDLMS) através do método Monte Carlo (MC). Para tal, levam-se em conta três parâmetros de comparação: valor máximo do passo de adaptação, velocidade de convergência (para um mesmo passo de adaptação) e o erro em excesso, os quais são determinados experimentalmente para cada um dos algoritmos. Já nos exemplos subseqüentes, são apresentados resultados dos modelos desenvolvidos para o algoritmo DLMS modificado.

Exemplo_1: Para este exemplo, são apresentados resultados de simulação Monte Carlo (MC) (média de 200 realizações independentes) dos algoritmos DLMS e MDLMS. Os parâmetros utilizados são: atraso $D=12$; resposta ao impulso da planta $\mathbf{w}_0 = [1; 0,9; 0,8; 0,7; -0,3; -0,4; -0,5; -0,6]^T$; $\{x(n)\}$ processo branco, Gaussiano com média zero e $\sigma_x^2 = 1$; limite superior para o passo de adaptação $\mu_{\max} = 0,06$ e $\mu_{\max} = 0,1$ (determinados experimentalmente, observando-se o valor máximo do passo o qual assegure a convergência do algoritmo para apenas uma realização) para os algoritmos DLMS e MDLMS, respectivamente. A Fig. 5.1 ilustra os resultados de simulação para $\mu = 0,04$, observando-se que o algoritmo MDLMS converge muito mais rápido do que o algoritmo DLMS convencional para um mesmo valor de passo de adaptação. Os erros em excesso iguais a $1,10 \times 10^{-4}$ e $1,12 \times 10^{-4}$ (obtidos a partir das simulações), correspondentes, respectivamente, aos algoritmos MDLMS e DLMS, são também determinados.

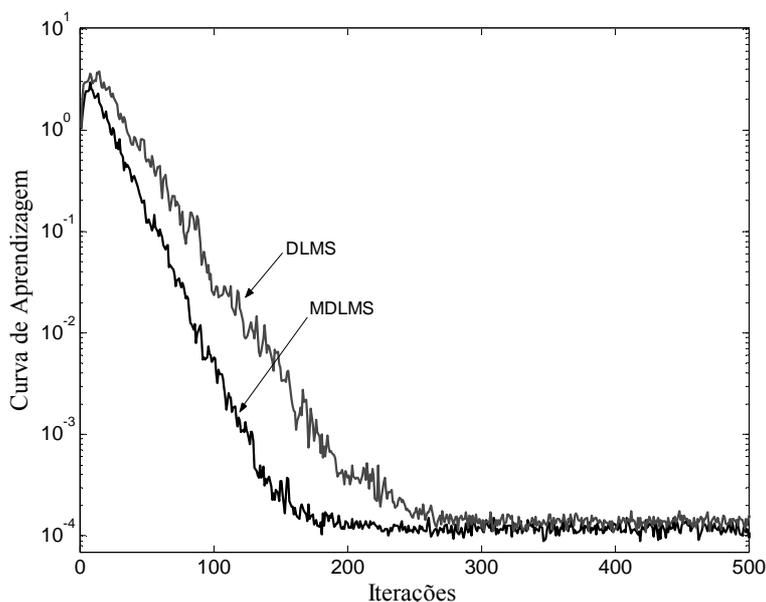
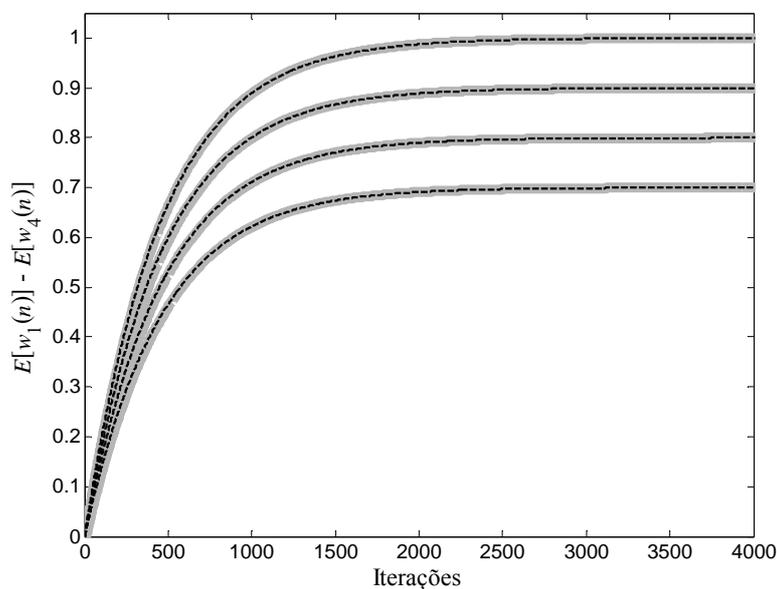
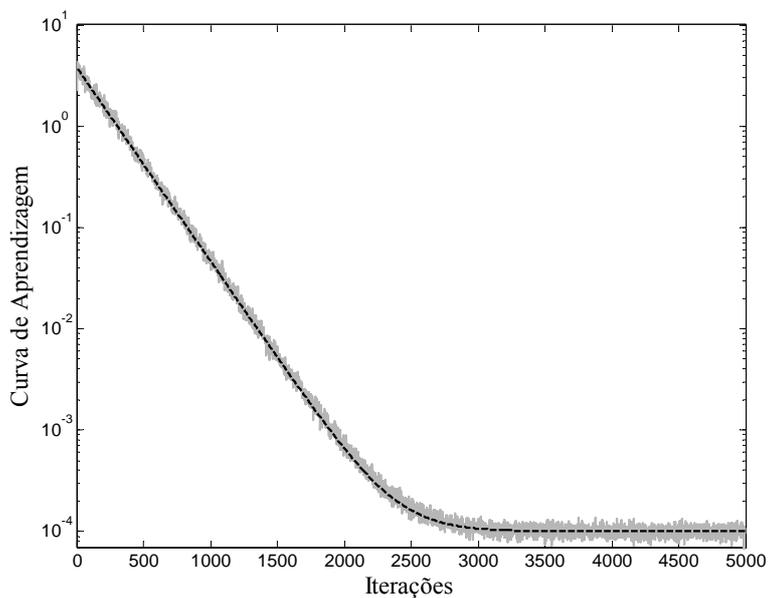


Figura 5.1. Exemplo 1. Curva de aprendizagem com $\mu = 0,04$. Algoritmo DLMS (linha irregular cinza); algoritmo MDLMS (linha irregular preta).

Exemplo 2: Neste exemplo são apresentados os resultados de simulação Monte Carlo (média de 200 realizações independentes) e o modelo proposto para o algoritmo MDLMS. Os parâmetros utilizados são: $D = 6$; a planta utilizada é a mesma do Exemplo 1; $\{x(n)\}$ é um processo branco, Gaussiano com média zero e $\sigma_x^2 = 1$; o limite superior para o passo de adaptação é $\mu_{\max} = 0,1$ (determinado experimentalmente). Para esse caso, são utilizados: $\mu_{\max}/35$, $\mu_{\max}/20$ e $\mu_{\max}/7$. As Figs. 5.2(a), 5.3(a) e 5.4(a) ilustram a evolução do comportamento médio do vetor de coeficientes considerando o método de Monte Carlo, o modelo usando a TI (3.82) e os modelos propostos (3.36) e (3.72). As figuras mostram que os modelos (usando a TI e os modelos propostos) predizem satisfatoriamente o comportamento médio do vetor de coeficientes. As curvas mostradas correspondem aos coeficientes $E[w_1(n)] - E[w_4(n)]$ do filtro adaptativo. As Figs. 5.2(b), 5.3(b) e 5.4(b) ilustram as curvas de aprendizagem obtidas a partir de simulação Monte Carlo e através dos modelos teóricos (considerando a TI e os modelos propostos). Nota-se também aqui um satisfatório casamento entre simulação e modelos teóricos obtidos.

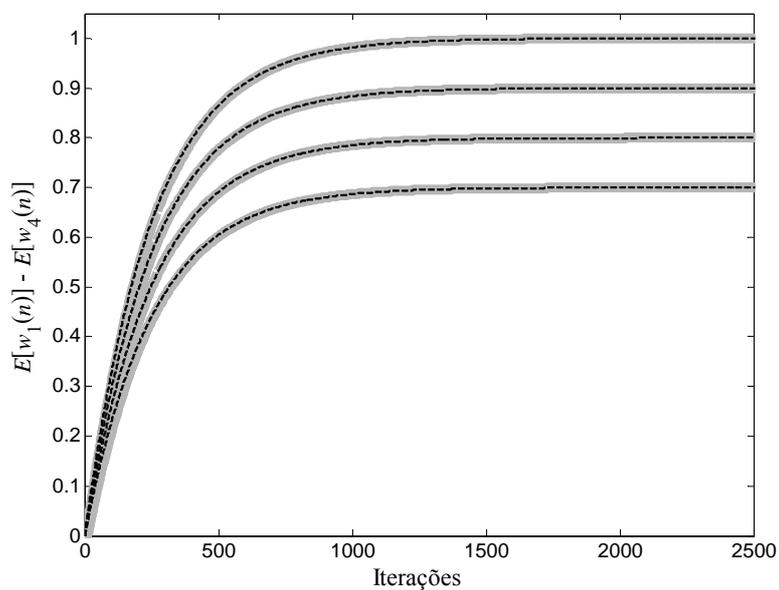


(a)

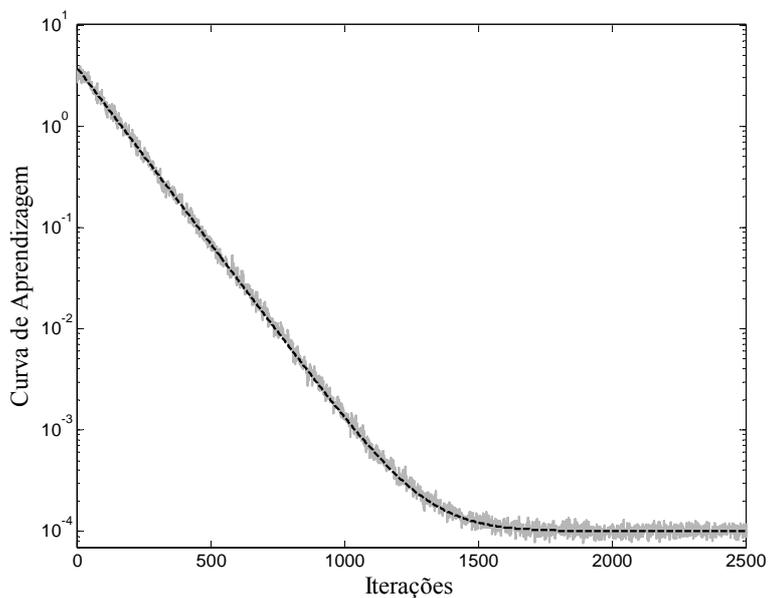


(b)

Figura 5.2. Exemplo 2. (a) Comportamento médio do vetor de coeficientes, com $\mu_{\max}/35$. Simulação MC (linha irregular cinza); modelo utilizando a TI (3.82) idêntico aos modelos propostos (3.36) e (3.72) (linha tracejada preta). (b) Curva de aprendizagem com $\mu_{\max}/35$. Simulação MC (linha irregular cinza); modelo utilizando a TI (3.89) idêntico aos modelos propostos (3.58) e (3.80) (linha tracejada preta).

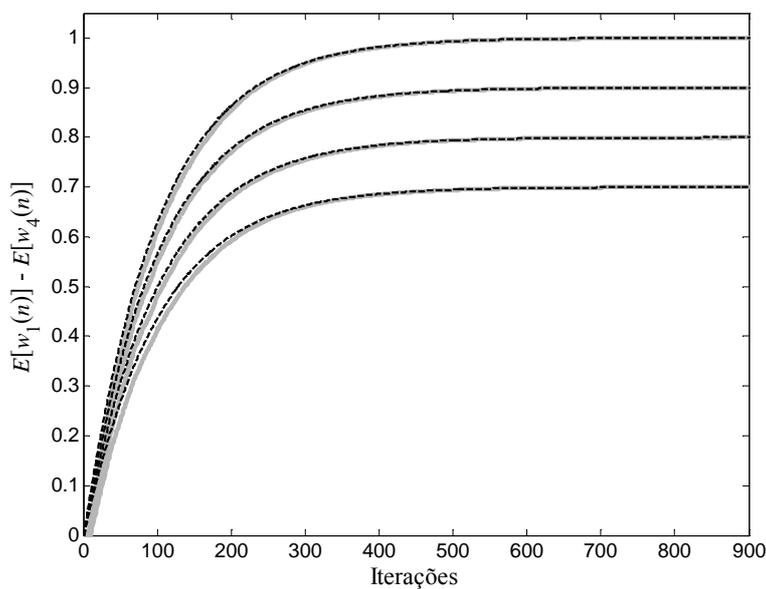


(a)



(b)

Figura 5.3. Exemplo 2. (a) Comportamento médio do vetor de coeficientes, com $\mu_{\max}/20$. Simulação MC (linha irregular cinza); modelo utilizando a TI (3.82) idêntico aos modelos propostos (3.36) e (3.72) (linha tracejada preta). (b) Curva de aprendizagem com $\mu_{\max}/20$. Simulação MC (linha irregular cinza); modelo utilizando a TI (3.89) idêntico aos modelos propostos (3.58) e (3.80) (linha tracejada preta).



(a)

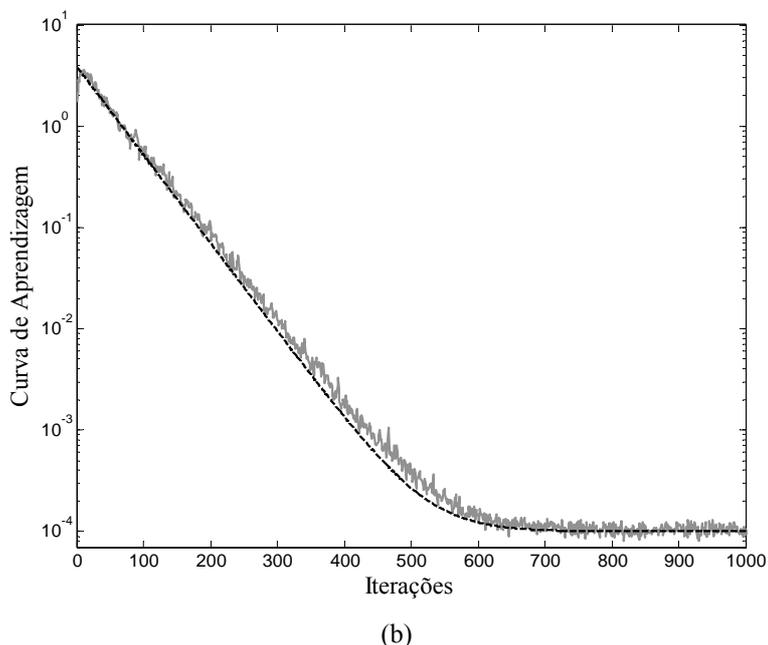
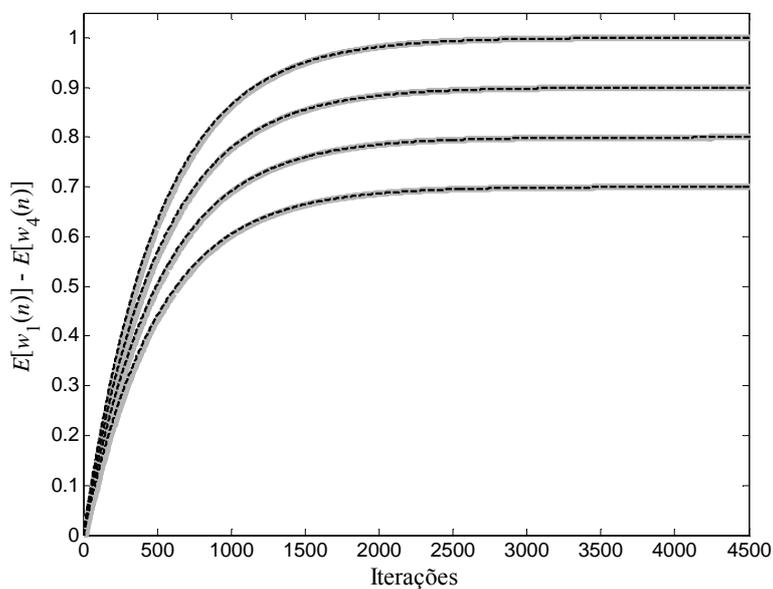
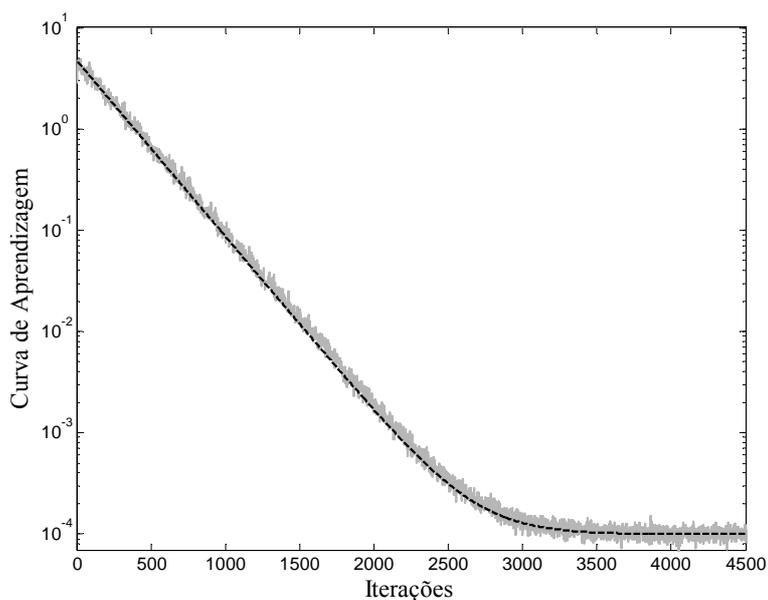


Figura 5.4. Exemplo 2. (a) Comportamento médio do vetor de coeficientes, com $\mu_{\max}/7$. Simulação MC (linha irregular cinza); modelo utilizando a TI (3.82) idêntico aos modelos propostos (3.36) e (3.72) (linha tracejada preta). (b) Curva de aprendizagem com $\mu_{\max}/7$. Simulação MC (linha irregular cinza); modelo utilizando a TI (3.89) idêntico aos modelos propostos (3.58) e (3.80) (linha tracejada preta).

Exemplo 3: Neste exemplo os parâmetros usados são: $D = 12$; planta $\mathbf{w}_0 = [1; 0,9; 0,8; 0,7; 0,6; 0,5; 0,4; 0,3; 0,2; 0,1; -0,1; -0,2; -0,3; -0,4; -0,5; -0,6]^T$; passo máximo $\mu_{\max} = 0,1$ (determinado experimentalmente); para este exemplo, é usado $\mu_{\max}/20$. A Fig. 5.5(a) ilustra o comportamento médio do vetor de coeficientes obtidos a partir de simulação Monte Carlo (média de 200 realizações independentes) e através de (3.82), (3.36) e (3.72). Observa-se que utilizando um filtro com maior número de coeficientes também se obtém uma predição satisfatória com o modelo utilizando a TI e os modelos propostos. As curvas ilustradas correspondem aos valores esperados dos coeficientes $E[w_1(n)] - E[w_4(n)]$ do filtro adaptativo. A Fig. 5.5(b) mostra o comportamento da curva de aprendizagem, observando-se novamente uma predição satisfatória do resultado de simulação a partir de tais modelos.



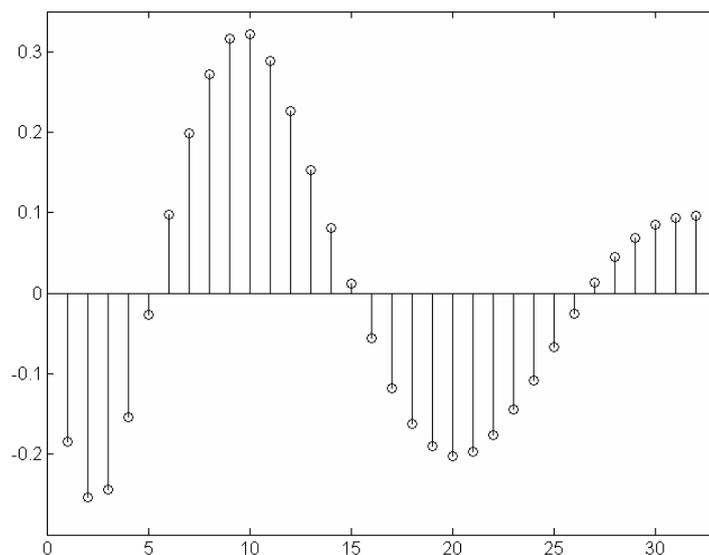
(a)



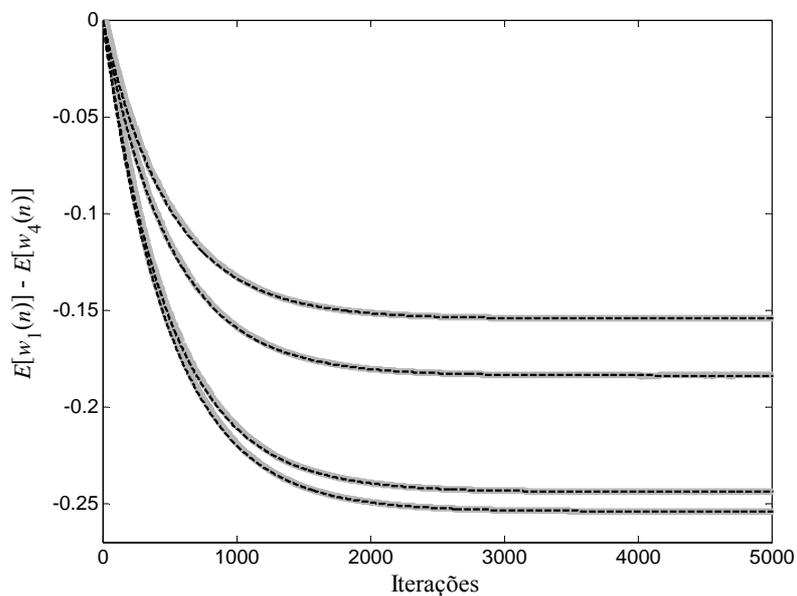
(b)

Figura 5.5. Exemplo 3. (a) Comportamento médio do vetor de coeficientes, com $\mu_{\max} / 20$. Simulação MC (linha irregular cinza); modelo utilizando a TI (3.82) idêntico aos modelos propostos (3.36) e (3.72) (linha tracejada preta). (b) Curva de aprendizagem com $\mu_{\max} / 20$. Simulação MC (linha irregular cinza); modelo utilizando a TI (3.89) idêntico aos modelos propostos (3.58) e (3.80) (linha tracejada preta).

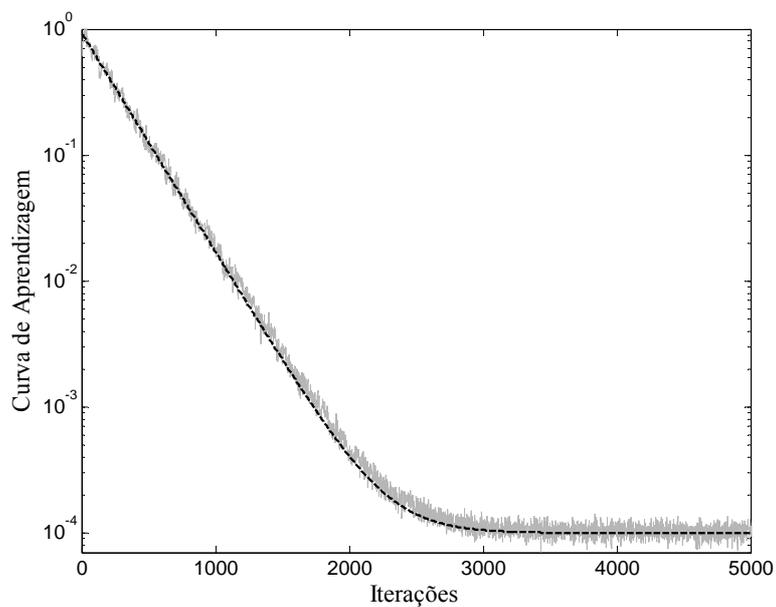
Exemplo 4: Para este exemplo, a planta utilizada é ilustrada na Fig. 5.6(a), cuja dimensão é $N = 32$. Os outros parâmetros são: $D = 20$; valor máximo do passo de adaptação é $\mu_{\max} = 0,04$ (determinado experimentalmente) e o valor utilizado é $\mu_{\max} / 20$. As curvas ilustradas na Fig. 5.6(b) correspondem aos valores esperados dos coeficientes $E[w_1(n)]$ - $E[w_4(n)]$ do filtro adaptativo. Resultados similares resultados aos obtidos nas Figs. 5.5(b) e (c) são também conseguidos nas Figs. 5.6(b) e (c), respectivamente. Novamente, o modelo utilizando a TI e os modelos propostos apresentam resultados satisfatórios na predição da evolução do comportamento médio do vetor de coeficientes e da curva de aprendizagem.



(a)



(b)



(c)

Figura 5.6. Exemplo 4. (a) Resposta ao impulso da planta. (b) Comportamento médio do vetor de coeficientes, com $\mu_{\max} / 20$. Simulação MC (linha irregular cinza); modelo utilizando a TI (3.82) idêntico aos modelos propostos (3.36) e (3.72) (linha tracejada preta). (c) Curva de aprendizagem com $\mu_{\max} / 20$. Simulação MC (linha irregular cinza); modelo utilizando a TI (3.89) idêntico aos modelos propostos (3.58) e (3.80) (linha tracejada preta).

5.2. Algoritmo MDLMS utilizando sinal de entrada colorido

Nesta seção, primeiramente, é comparado o algoritmo DLMS convencional com o algoritmo MDLMS para um sinal de entrada colorido. Para tal finalidade, levam-se em conta dois parâmetros de comparação: velocidade de convergência máxima e o erro em excesso, os quais são determinados experimentalmente para cada um dos algoritmos. O sinal colorido é obtido a partir de um processo auto-regressivo de segunda ordem dado por

$$x(n) = a_1x(n-1) + a_2x(n-2) + u(n), \quad (5.70)$$

onde $u(n)$ é um ruído branco com variância unitária, $a_1 = -0,975$ e $a_2 = 0,95$. A dispersão dos autovalores da matriz de entrada é 45,25. Os Exemplos 6, 7 e 8 desta seção verificam a precisão do modelo proposto.

Exemplo 5: Neste exemplo, são apresentadas as curvas de aprendizagem obtidas a partir de simulação Monte Carlo (média de 300 realizações independentes) dos algoritmos DLMS e MDLMS. Os parâmetros utilizados são: $D = 12$ e a planta utilizada é a mesma do Exemplo 1. Os valores do passo de adaptação máximo são $\mu_{\max} = 0,02$ e $\mu_{\max} = 0,05$ (determinados experimentalmente) para os algoritmos DLMS e MDLMS, respectivamente. Para esse caso, a dispersão dos autovalores da matriz de entrada é 45,25 e o valor do passo de adaptação considerado é $\mu = 0,006$. Da Fig. 5.7, nota-se que ambos os algoritmos são representados por uma mesma curva, visto que tais algoritmos apresentaram tanto similar velocidade de convergência quanto de erro em excesso.

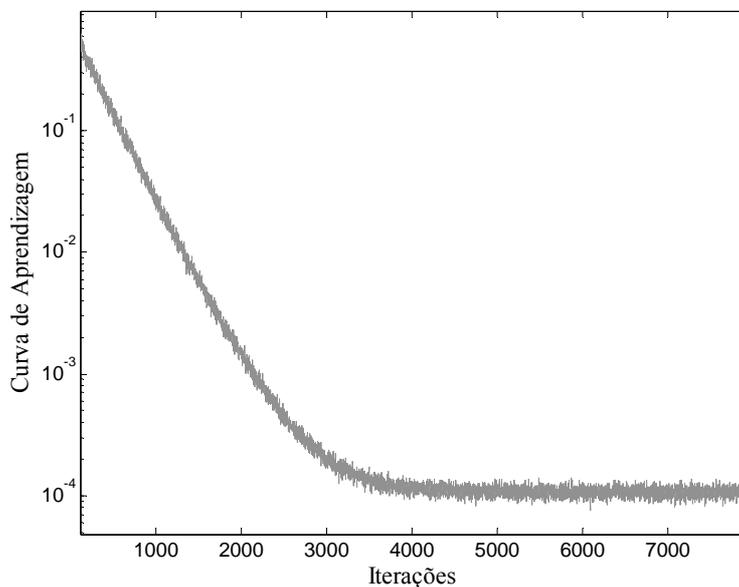
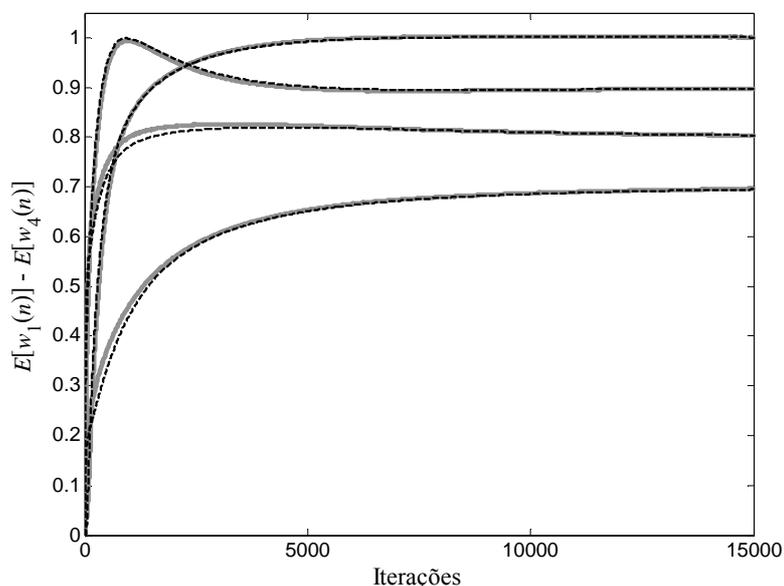
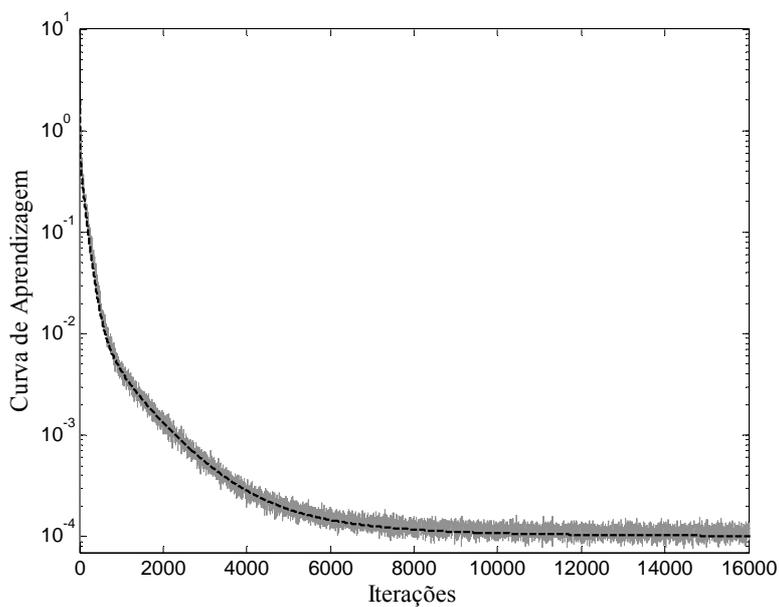


Figura 5.7. Exemplo 5. Curva de aprendizagem com $\mu=0,006$. Algoritmo DLMS idêntico ao algoritmo MDLMS (linha irregular cinza).

Exemplo 6: Neste exemplo, os parâmetros utilizados são: $D = 6$, a planta é a mesma descrita no Exemplo 5.1; valor do passo de adaptação máximo é $\mu_{\max} = 0,04$ (determinado experimentalmente), passo de adaptação usado é $0,5\mu_{\max}$. A Fig. 5.8(a) ilustra a evolução do comportamento médio do vetor de coeficientes considerando o método de Monte Carlo, o modelo usando a TI (3.82) e os modelos propostos (3.36) e (3.72). As figuras mostram que os modelos (usando a TI e os modelos propostos) predizem satisfatoriamente o comportamento médio do vetor de coeficientes. As curvas mostradas correspondem aos valores esperados dos coeficientes $E[w_1(n)] - E[w_4(n)]$ do filtro adaptativo. A Fig. 5.8(b) mostra o comportamento das curvas de aprendizagem obtidas a partir de simulação Monte Carlo e através do modelo usando a TI e os modelos propostos, apresentando um casamento satisfatório entre a simulação e os modelos teóricos derivados.



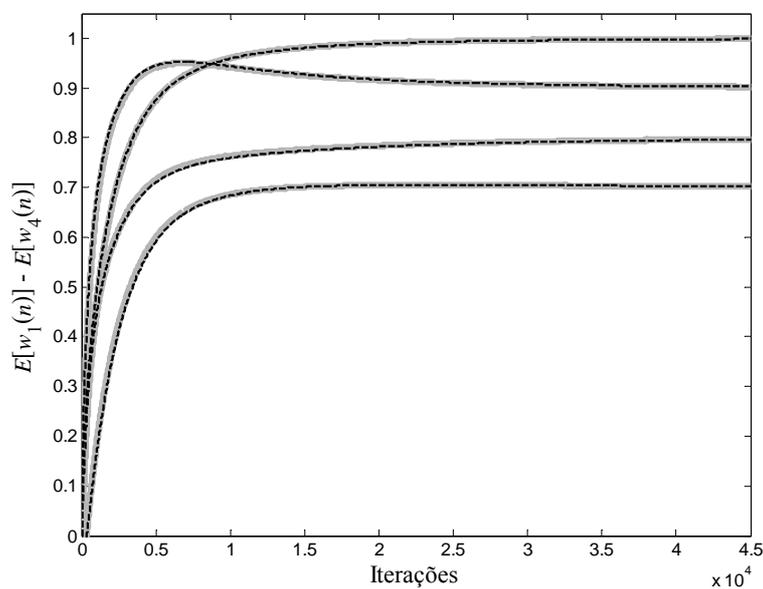
(a)



(b)

Figura 5.8. Exemplo 6. (a) Comportamento médio do vetor de coeficientes para $0,5\mu_{\max}$. Simulação MC (linha irregular cinza); modelo utilizando a TI (3.82) idêntico aos modelos propostos (3.36) e (3.72) (linha tracejada preta). (b) Curva de aprendizagem com $0,5\mu_{\max}$. Simulação MC (linha irregular cinza); modelo utilizando a TI (3.89) idêntico aos modelos propostos (3.58) e (3.80) (linha tracejada preta).

Exemplo 7: Neste exemplo, os parâmetros utilizados são: $D = 12$; a planta descrita no Exemplo 3; o valor máximo do passo de adaptação $\mu_{\max} = 0,02$ (determinado experimentalmente). A partir das figuras apresentadas para este exemplo, observa-se que para um valor de passo de adaptação $0,25\mu_{\max}$, os modelos teóricos mostrados nas Figs. 5.9(a) e (b) apresentam uma predição adequada para o comportamento médio do vetor de coeficientes e da curva de aprendizagem. Na Fig. 5.10(a), usando-se um valor de passo de adaptação $0,4\mu_{\max}$, o modelo que considera a TI (3.82) e o modelo proposto (aproximação de terceira ordem) (3.72), também apresentam uma predição satisfatória para o comportamento médio dos coeficientes do filtro. No entanto, o modelo com aproximação de segunda ordem (3.36) diverge. Tal divergência é devido ao fato de o modelo ter sido truncado, desconsiderando os termos afetados pelo fator μ^β , com $\beta \geq 3$. Resultados similares àqueles obtidos para o comportamento médio do vetor de coeficientes são também obtidos para a curva de aprendizagem.



(a)

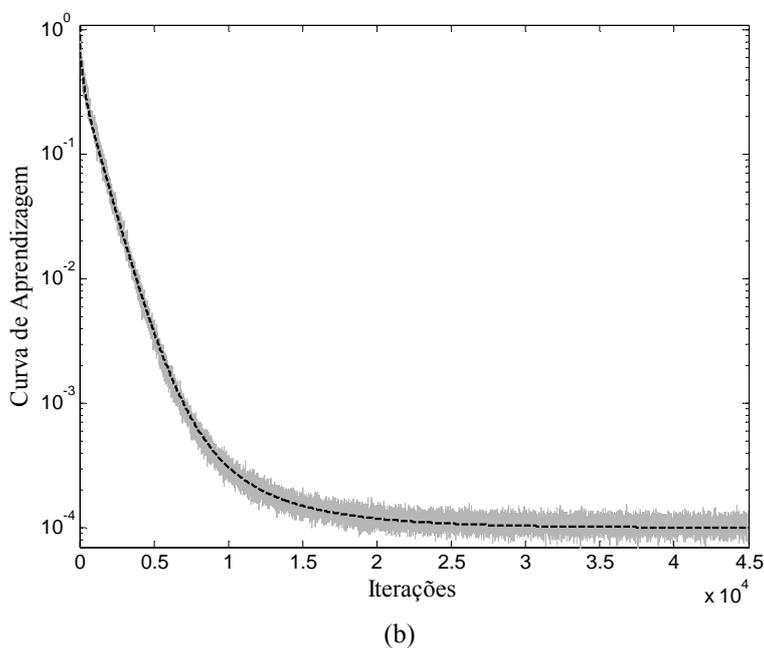
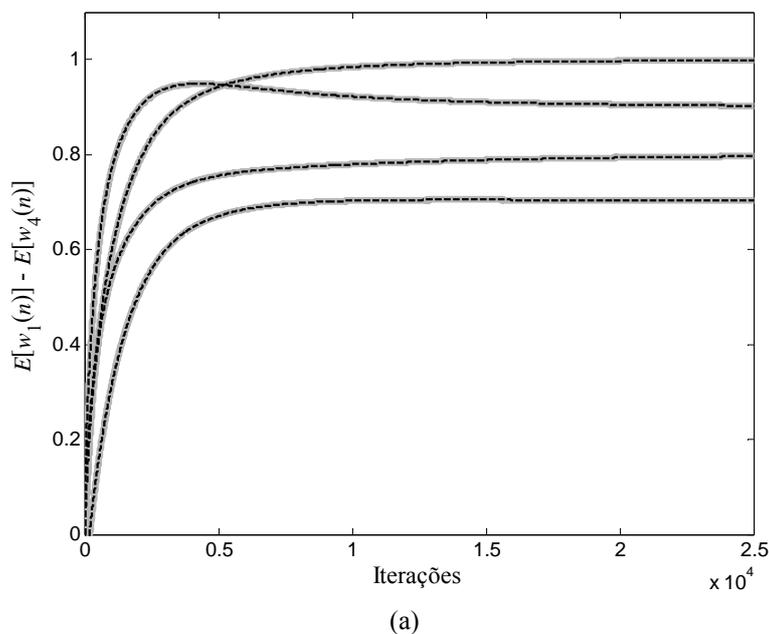


Figura 5.9. Exemplo 7. (a) Comportamento médio do vetor de coeficientes para $\mu = 0,25\mu_{\max}$. Simulação MC (linha irregular cinza); modelo utilizando a TI (3.82) idêntico aos modelos propostos (3.36) e (3.72) (linha tracejada preta). (b) Curva de aprendizagem com $0,25\mu_{\max}$. Simulação MC (linha irregular cinza); modelo utilizando a TI (3.89) idêntico aos modelos propostos (3.58) e (3.80) (linha tracejada preta).



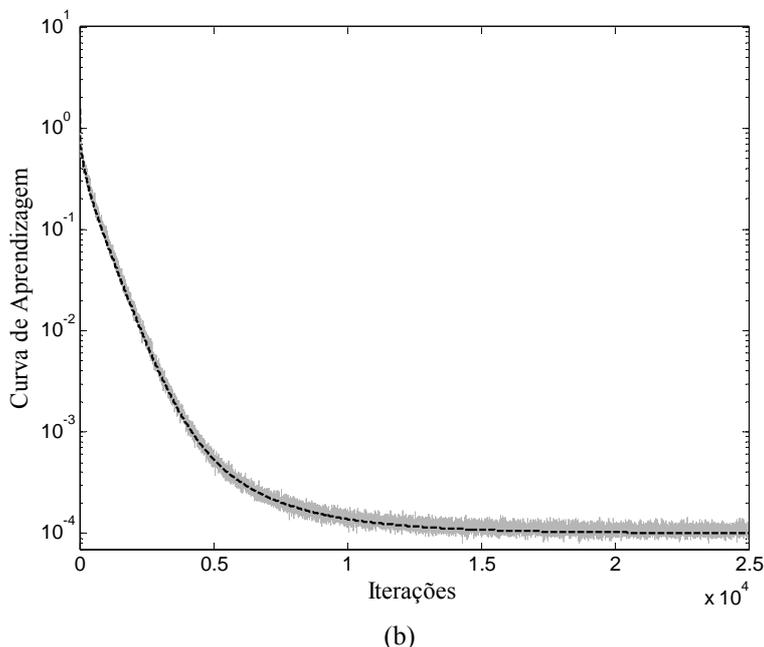
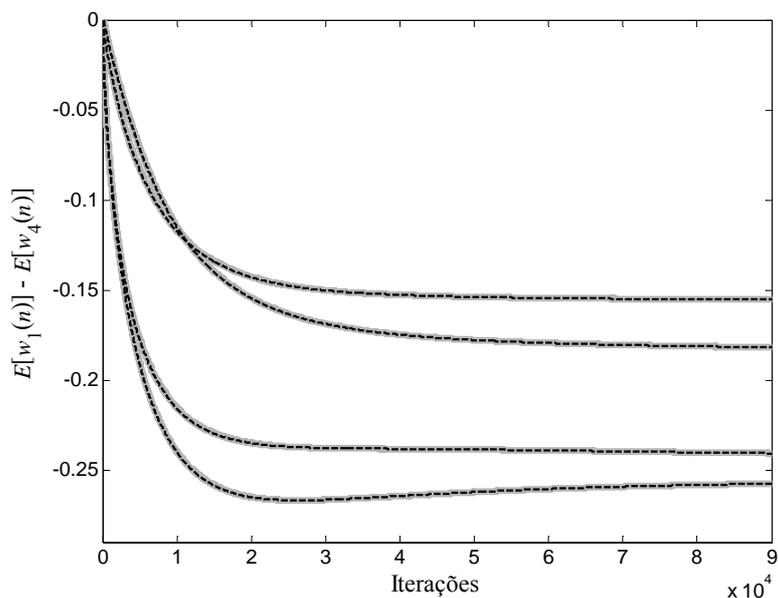
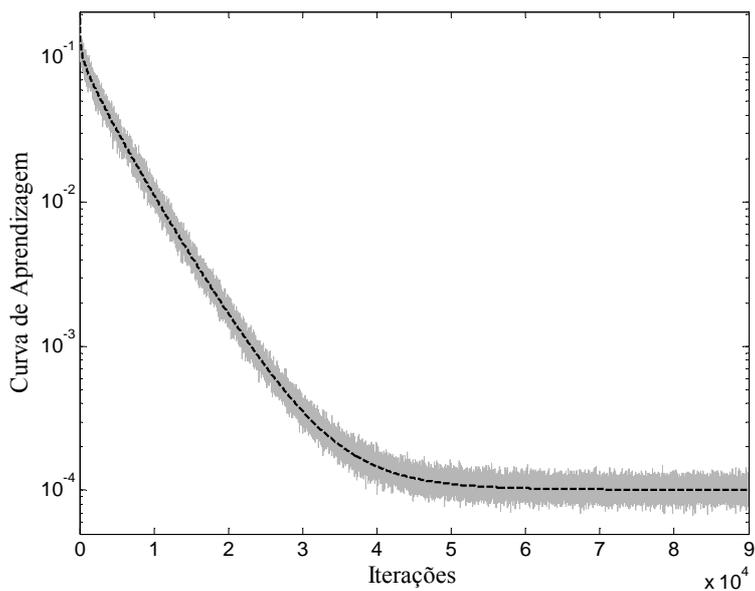


Figura 5.10. Exemplo 7. (a) Comportamento médio do vetor de coeficientes para $0,4\mu_{\max}$. Simulação MC (linha irregular cinza); modelo utilizando a TI (3.82) idêntico ao modelo proposto (3.72) (linha tracejada preta). (b) Curva de aprendizagem com $0,4\mu_{\max}$. Simulação MC (linha irregular cinza); modelo utilizando a TI (3.89) idêntico ao modelo proposto (3.80) (linha tracejada preta).

Exemplo 8: Neste exemplo, utilizou-se a planta ilustrada na Fig. 5.6(a); $D = 20$; e valor máximo do passo de adaptação $\mu_{\max} = 0,01$ (determinado experimentalmente). As curvas ilustradas nas Figs. 5.11(a) e 5.12(a) correspondem aos valores esperados dos coeficientes $E[w_1(n)] - E[w_4(n)]$ do filtro adaptativo. Resultados similares àqueles obtidos nas Figs. 5.9(a), (b) e 5.10(a), (b) são também conseguidos nas Figs. 5.11(a), (b) e 5.12(a), (b), respectivamente. Tal como ocorreu para o Exemplo 7, para este caso o modelo usando a aproximação de segunda ordem diverge para um valor do passo de adaptação de $0,4\mu_{\max}$.

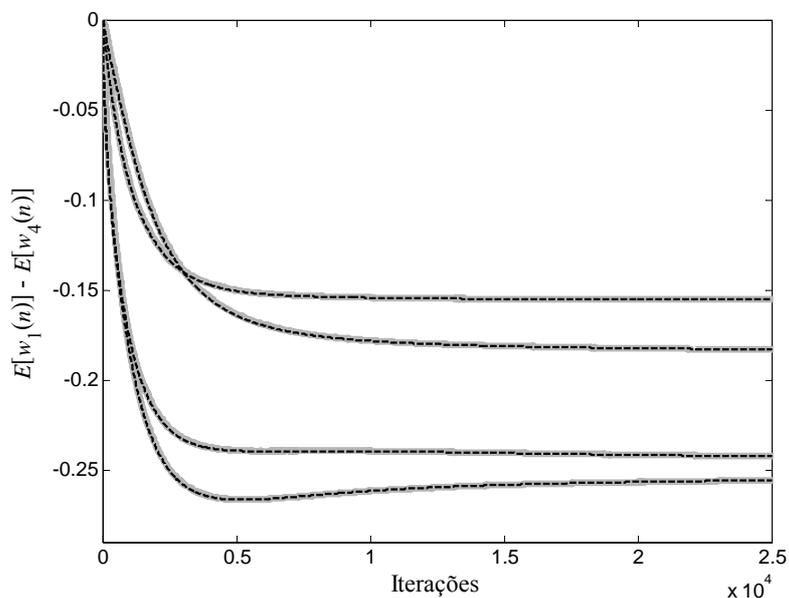


(a)

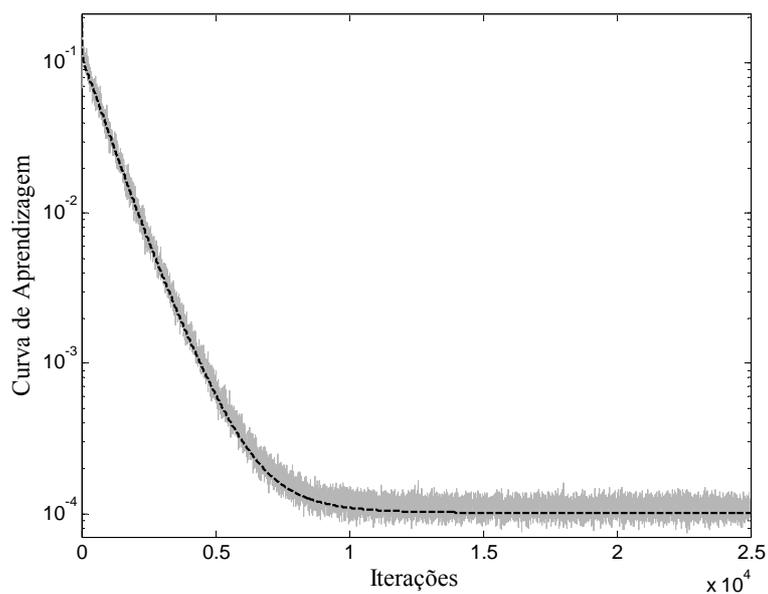


(b)

Figura 5.11. Exemplo 8. (a) Comportamento médio do vetor de coeficientes para $0,1\mu_{\max}$. Simulação MC (linha irregular cinza); modelo utilizando a TI (3.82) idêntico aos modelos propostos (3.36) e (3.72) (linha tracejada preta). (b) Curva de aprendizagem com $0,1\mu_{\max}$. Simulação MC (linha irregular cinza); modelo utilizando a TI (3.89) idêntico aos modelos propostos (3.58) e (3.80) (linha tracejada preta).



(a)



(b)

Figura 5.12. Exemplo 8. (a) Comportamento médio do vetor de coeficientes com $\mu = 0,4\mu_{\max}$. Simulação MC (linha irregular cinza); modelo utilizando a TI (3.82) idêntico ao modelo proposto (3.72) (linha tracejada preta). (b) Curva de aprendizagem para $0,4\mu_{\max}$. Simulação MC (linha irregular cinza); modelo utilizando a TI (3.89) idêntico ao modelo proposto (3.80) (linha tracejada preta).

5.3. Algoritmo MFE-LMS utilizando sinal de entrada branco

Nesta seção, primeiramente, é comparado o algoritmo FE-LMS com o algoritmo MFE-LMS através do método de Monte Carlo. Para tal, levam-se em conta três parâmetros de comparação: valor máximo do passo de adaptação, velocidade de convergência (para um mesmo passo de adaptação) e o erro em excesso, os quais são determinados experimentalmente para cada um dos algoritmos. Já nos seguintes exemplos, são apresentados resultados dos modelos, proposto e o que usa a TI, para o algoritmo MFE-LMS.

Exemplo 9: Neste exemplo, são apresentados os resultados de simulação Monte Carlo (média de 700 realizações independentes) dos algoritmos FELMS e MFELMS. A planta é a mesma descrita no Exemplo 1; $\mathbf{s} = [0,052; 0,281; 0,67]^T$, representa a resposta ao impulso no caminho do erro; $\{x(n)\}$ é um processo branco, Gaussiano com média zero e $\sigma_x^2 = 1$; valores máximos do passo são $\mu_{\max} = 0,16$ e $\mu_{\max} = 0,2$ (determinados experimentalmente) para os algoritmos FELMS e FE-LMS, respectivamente. A Fig. 5.13 mostra os resultados de simulação para $\mu = 0,12$; observa-se que o algoritmo MFE-LMS converge mais rápido do que o algoritmo FE-LMS para um mesmo valor do passo de adaptação. Também, determinou-se experimentalmente os erros em excesso $1,4 \times 10^{-4}$ e $1,8 \times 10^{-4}$ (determinados a partir das simulações), correspondentes, respectivamente, aos algoritmos MFE-LMS e FE-LMS.

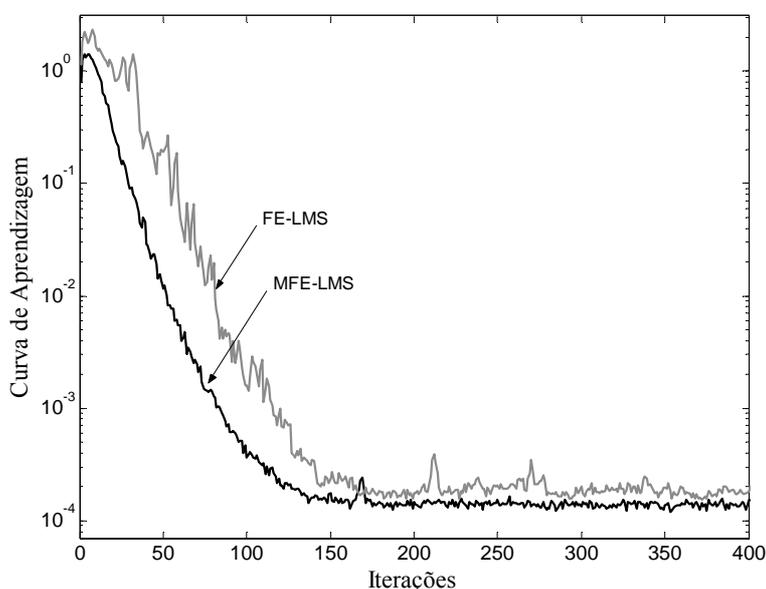
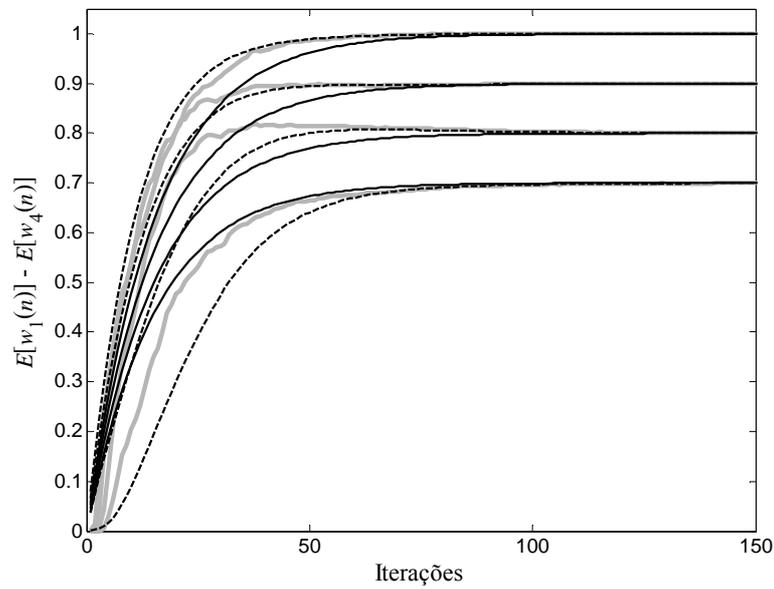
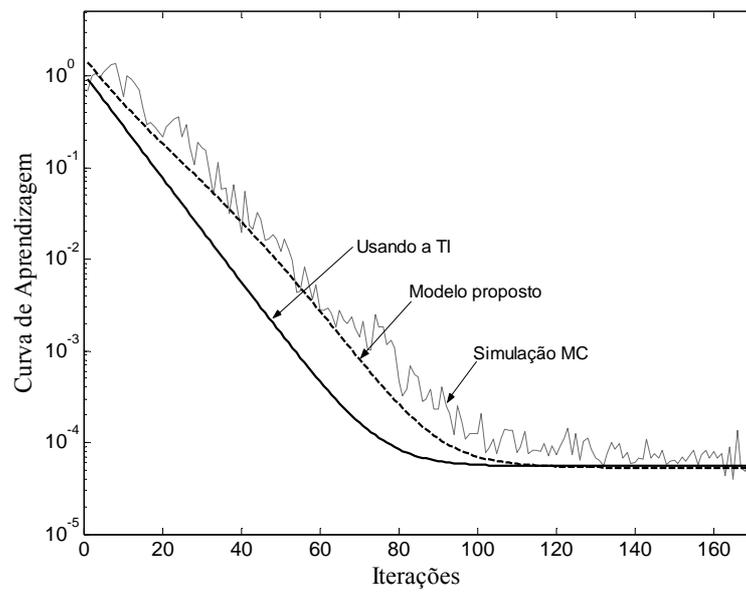


Figura 5.13. Exemplo 9. Curva de aprendizagem para $\mu = 0,12$. Algoritmo FE-LMS (linha irregular cinza); algoritmo MFE-MS (linha irregular preta).

Exemplo 10: Para este exemplo, a planta utilizada é a mesma descrita no Exemplo 1; $\mathbf{s} = [0,052; 0,28; 0,66]^T$; $\{x(n)\}$ é um ruído branco, Gaussiano com média zero e $\sigma_x^2 = 1$; o limite superior do passo de adaptação é $\mu_{\max} = 0,2$ (determinado experimentalmente). Para este caso são utilizados $\mu = 0,8\mu_{\max}$ e $0,3\mu_{\max}$. As Figs. 5.14(a) e 5.15(a) mostram o comportamento médio do vetor de coeficientes para os resultados de simulação Monte Carlo, os obtidos através do modelo que utiliza a TI (4.61) e o modelo proposto (4.34). Nota-se que o modelo proposto prediz satisfatoriamente a evolução do comportamento médio do vetor coeficientes do filtro. Entretanto, o modelo que utiliza a TI apresenta um descasamento na fase transiente; isso porque esse último modelo não considera as correlações do vetor de entrada para tempos diferentes. As curvas mostradas nas Figs. 5.14(a) e 5.15(a) correspondem aos valores médios dos coeficientes $E[w_1(n)] - E[w_4(n)]$ do filtro adaptativo. As Figs. 5.14(b) e 5.15(b) ilustram as curvas de aprendizagem obtidas a partir de simulação Monte Carlo, através do modelo que utiliza a TI (4.68) e do modelo proposto (4.59). Novamente, nota-se que o modelo proposto prediz satisfatoriamente o comportamento da curva de aprendizagem, enquanto aquele obtido com a TI falha para a fase transiente.

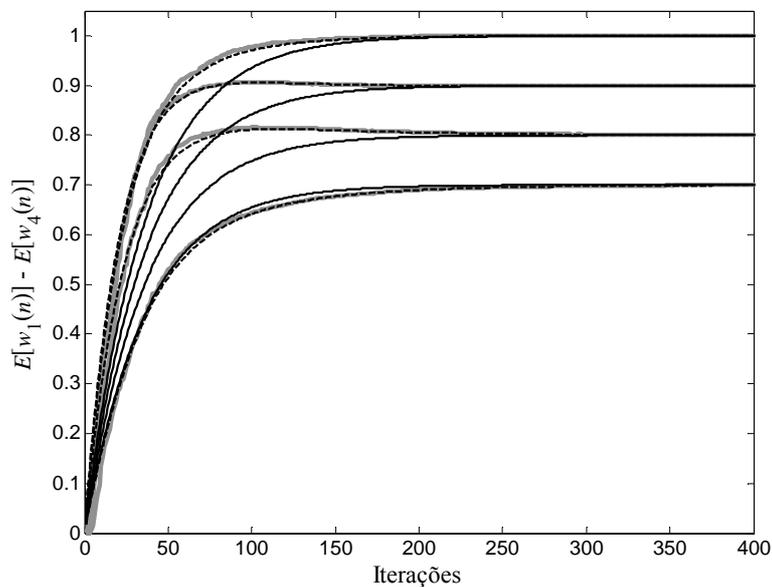


(a)

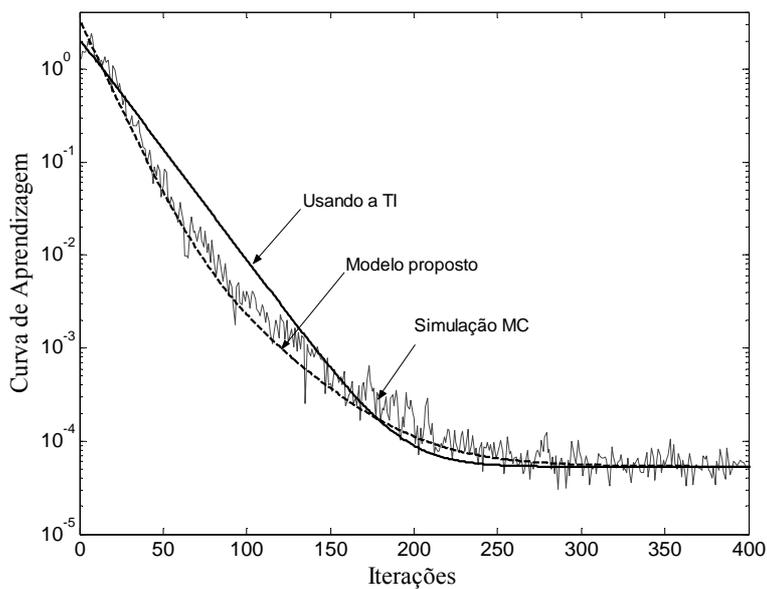


(b)

Figura 5.14. Exemplo 10. (a) Comportamento médio do vetor de coeficientes para $0,8\mu_{\max}$. Simulação MC (linha irregular cinza); usando a TI (4.61) (linha contínua preta); modelo proposto (4.34) (linha tracejada preta). (b) Curva de aprendizagem com $0,8\mu_{\max}$. Simulação MC (linha irregular cinza); usando a TI (4.68) (linha contínua preta); modelo proposto (4.59) (linha tracejada preta).



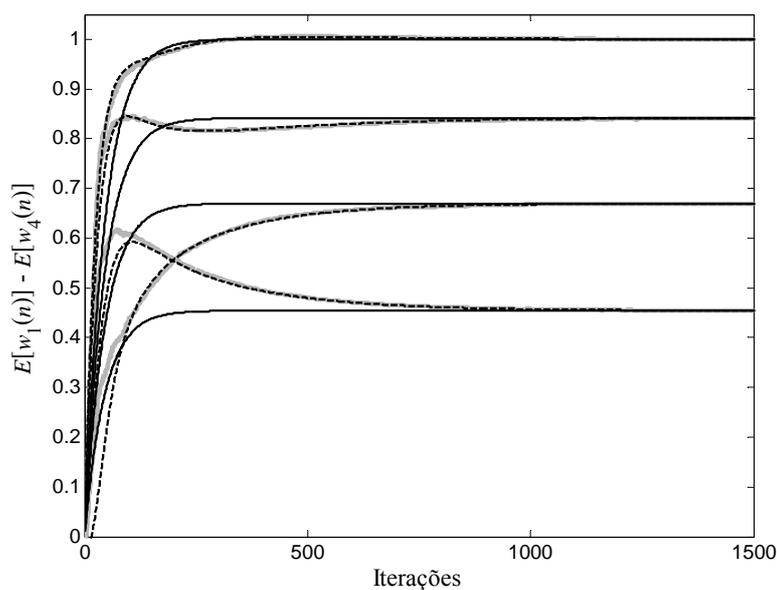
(a)



(b)

Figura 5.15. Exemplo 10. (a) Comportamento médio do vetor de coeficientes com $0,3\mu_{\max}$. Simulação MC (linha irregular cinza); usando a TI (4.61) (linha contínua preta); modelo proposto (4.34) (linha tracejada preta). (b) Curva de aprendizagem para $0,3\mu_{\max}$. Simulação MC (linha irregular cinza); usando a TI (4.68) (linha contínua preta); modelo proposto (4.59) (linha tracejada preta).

Exemplo 11: Para este exemplo, a planta considerada é $\mathbf{w}_o = [1,00; 0,84; 0,45; 0,67; -0,19; 0,39; 0,12; 0,30; -0,54]^T$; $\mathbf{s} = [0,023; 0,071; 0,194; 0,327; 0,384]^T$; $\{x(n)\}$ é um processo branco, Gaussiano com média zero e $\sigma_x^2 = 1$; valor máximo do passo de adaptação $\mu_{\max} = 0,16$ (determinado experimentalmente). Para este caso, são utilizados: $\mu = 0,6\mu_{\max}$ e $0,3\mu_{\max}$ (média de 100 realizações independentes). As curvas mostradas nas Figs. 5.16(a) e 5.17(a) correspondem aos valores esperados dos coeficientes $E[w_1(n)] - E[w_4(n)]$ do filtro adaptativo. Resultados similares àqueles obtidos nas Figs. 14(a), (b) e Fig. 15(a), (b) são obtidos também nas Figs. 16(a), (b) e Figs. 17(a), (b). Tal como para o Exemplo 10, o modelo proposto também apresenta uma boa concordância com os resultados de simulação, enquanto o modelo que usa a TI falha na fase transiente.



(a)

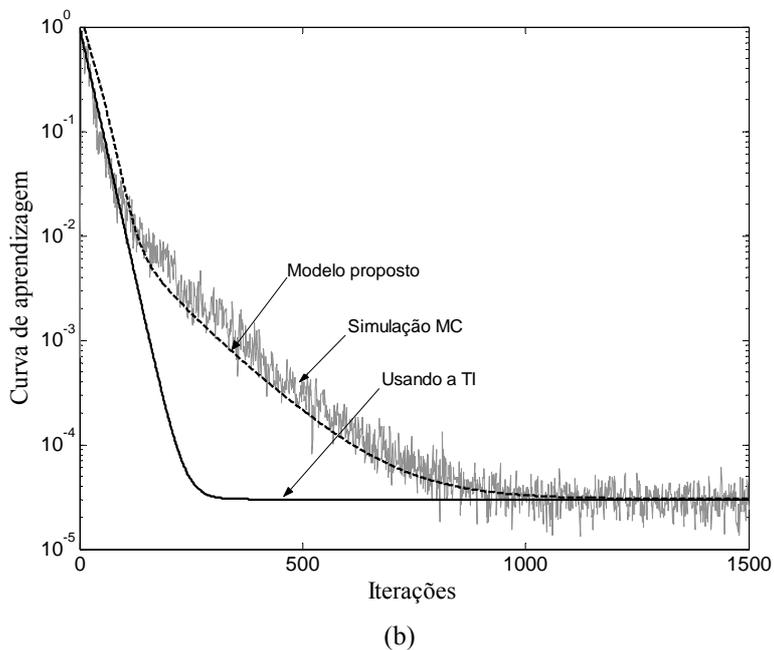
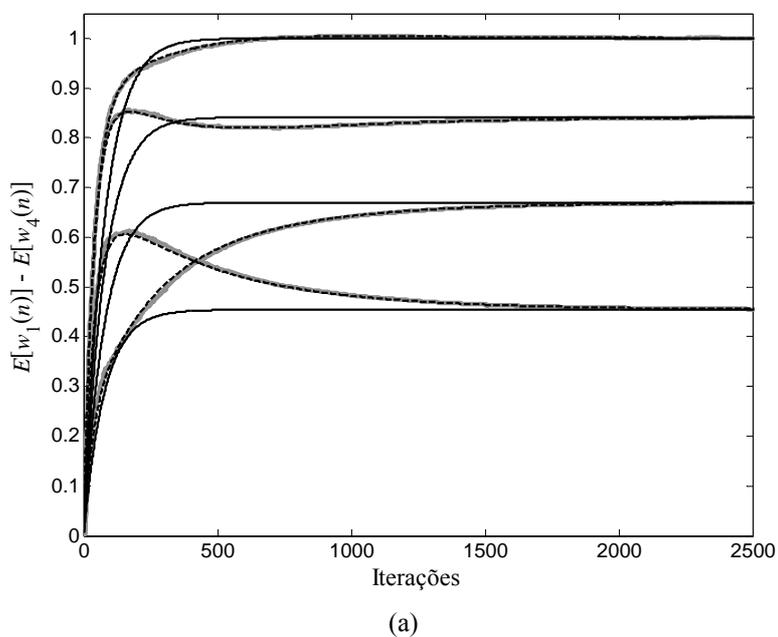


Figura 5.16. Exemplo 11. (a) Comportamento médio do vetor de coeficientes para $0,6\mu_{\max}$. Simulação MC (linha irregular cinza); usando a TI (4.61) (linha contínua preta); modelo proposto (4.34) (linha tracejada preta). (b) Curva de aprendizagem com $0,6\mu_{\max}$. Simulação MC (linha irregular cinza); usando a TI (4.68) (linha contínua preta); modelo proposto (4.59) (linha tracejada preta).



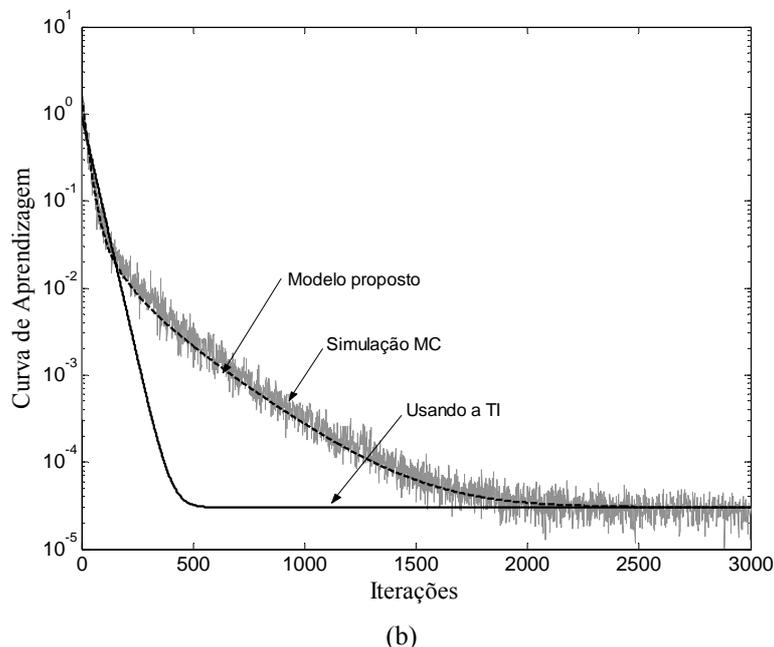


Figura 5.17. Exemplo 11. (a) Comportamento médio do vetor de coeficientes para $0,3\mu_{\max}$. Simulação MC (linha irregular cinza); usando a TI (4.61) (linha contínua preta); modelo proposto (4.34) (linha tracejada preta). (b) Curva de aprendizagem com $0,3\mu_{\max}$. Simulação MC (linha irregular cinza); usando a TI (4.68) (linha contínua preta); modelo proposto (4.59) (linha tracejada preta).

5.4. Algoritmo MFE-LMS para sinal de entrada colorido

Nesta seção, primeiramente, é comparado o algoritmo FE-LMS com o algoritmo MFE-LMS para um sinal de entrada colorido. Para tal, levam-se em conta três parâmetros de comparação: valor máximo do passo de adaptação, velocidade de convergência (para um mesmo passo de adaptação) e o erro em excesso, os quais são determinados experimentalmente para cada um dos algoritmos. Já nos seguintes exemplos, são apresentados resultados dos modelos, que usa a TI e o proposto para o algoritmo MFE-LMS. O sinal colorido é obtido a partir do processo auto-regressivo de segunda ordem dado por (5.1).

Exemplo 12: Neste exemplo, são apresentadas as curvas de aprendizagem obtidas por simulação Monte Carlo (média de 200 realizações independentes) dos algoritmos FE-LMS e MFE-LMS. A planta utilizada é a mesma descrita no Exemplo 1;

$\mathbf{s} = [0,052; 0,281; 0,66]^T$; valores máximos do passo de adaptação são: $\mu_{\max} = 0,06$ e $\mu_{\max} = 0,12$ (determinados experimentalmente) para os algoritmos FE-LMS e MFE-LMS, respectivamente. Para este caso, a dispersão dos autovalores da matriz de entrada é 45,25 e o valor do passo de adaptação utilizado é $\mu = 0,018$. Da Figura. 5.18, nota-se que ambos os algoritmos apresentam uma mesma curva de aprendizagem, dado que eles possuem similares velocidades de convergência e erros em excesso.

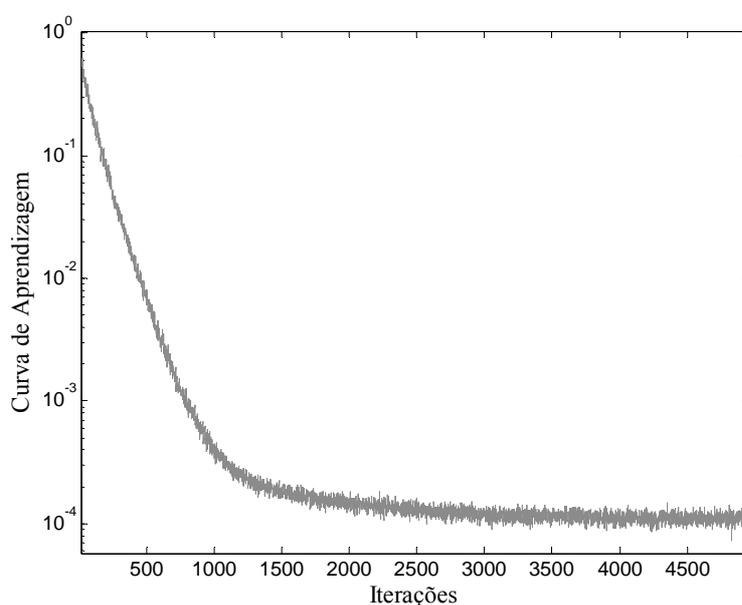
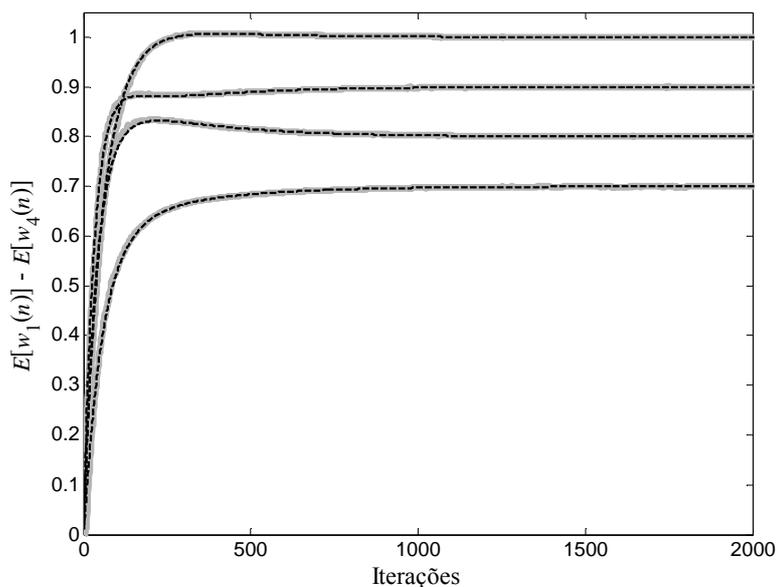


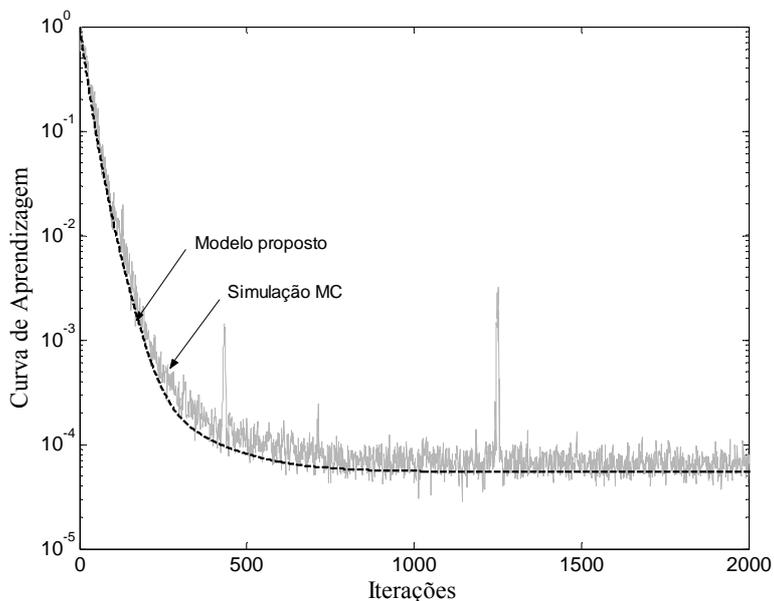
Figura 5.18. Exemplo 12. Curva de aprendizagem para $\mu = 0,018$. Algoritmo FE-LMS idêntico ao algoritmo MFE-LMS (linha irregular cinza).

Exemplo 13: Para este exemplo, a planta utilizada é a mesma descrita no Exemplo 1; o filtro no caminho do erro é também o mesmo usado no Exemplo 10; o valor máximo do passo de adaptação $\mu_{\max} = 0,12$ (determinado experimentalmente). Para este caso são considerados: $\mu = 0,8\mu_{\max}$, $0,6\mu_{\max}$ e $0,5\mu_{\max}$ (média de 200 realizações independentes). As curvas mostradas nas Figs. 5.19(a), 5.20(a) e 5.21(a) correspondem aos valores médios dos coeficientes $E[w_1(n)] - E[w_4(n)]$ do filtro adaptativo. As figuras mostram que o modelo proposto (4.34) prediz satisfatoriamente o comportamento médio dos coeficientes do filtro. Na Fig. 5.21(a), é também mostrado o comportamento médio dos coeficientes usando a TI (4.61). Observa-se que tal modelo falha para o regime transiente, como também o modelo diverge para valores de passo de adaptação maiores do que $0,5\mu_{\max}$. As observações feitas

para o comportamento médio do vetor de coeficientes podem ser também estendidas para a curva de aprendizagem, notando-se que o modelo proposto prediz satisfatoriamente seu comportamento, enquanto aquele usando a TI falha na predição do comportamento durante a fase transiente para $\mu \leq 0,5\mu_{\max}$ e diverge para $\mu > 0,5\mu_{\max}$.

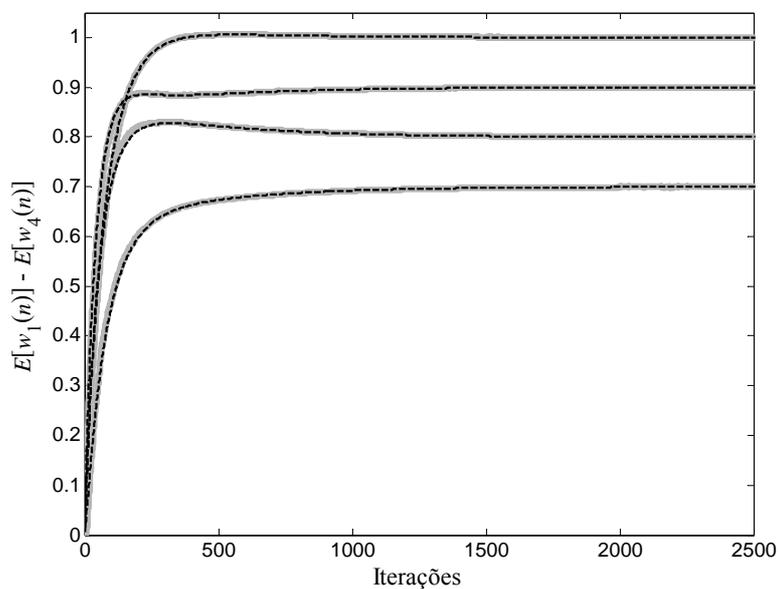


(a)

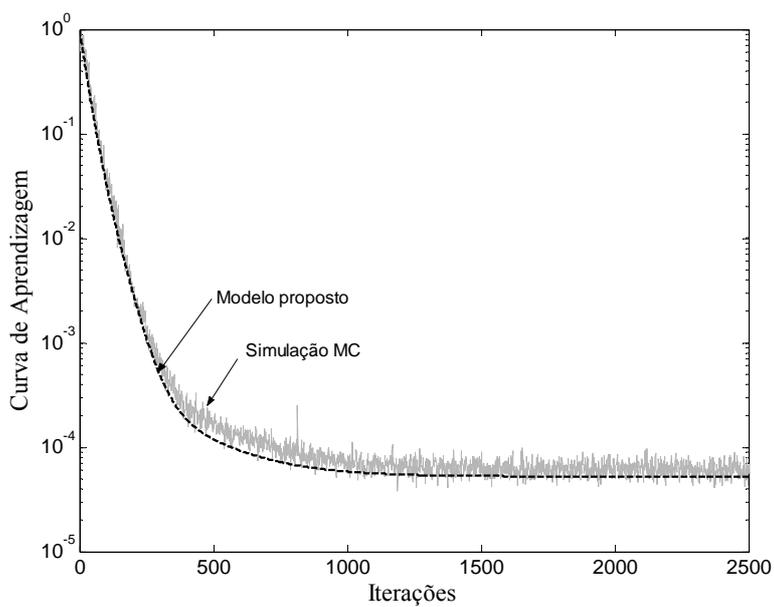


(b)

Figura 5.19. Exemplo 13. (a) Comportamento médio do vetor de coeficientes para $\mu = 0,8\mu_{\max}$. Simulação MC (linha irregular cinza); modelo proposto (4.34) (linha tracejada preta). (b) Curva de aprendizagem com $0,8\mu_{\max}$. Simulação MC (linha irregular cinza); modelo proposto (4.59) (linha tracejada preta).

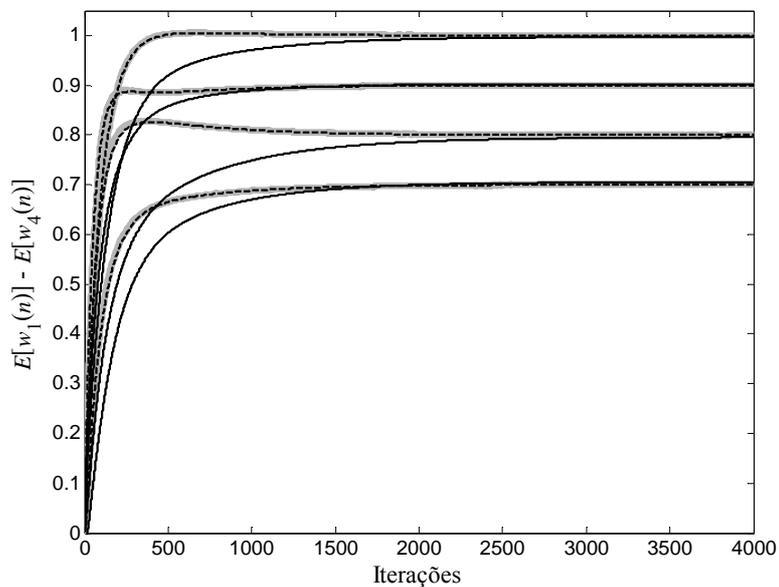


(a)

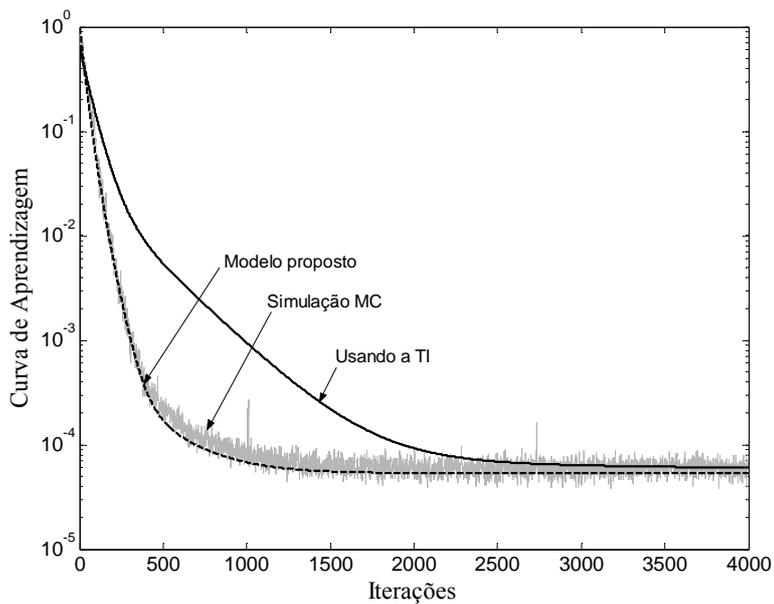


(b)

Figura 5.20. Exemplo 13. (a) Comportamento médio do vetor de coeficientes com $\mu = 0,6\mu_{\max}$. Simulação MC (linha irregular cinza); modelo proposto (4.34) (linha tracejada preta). (b) Curva de aprendizagem com $0,6\mu_{\max}$. Simulação MC (linha irregular cinza); modelo proposto (4.59) (linha tracejada preta).



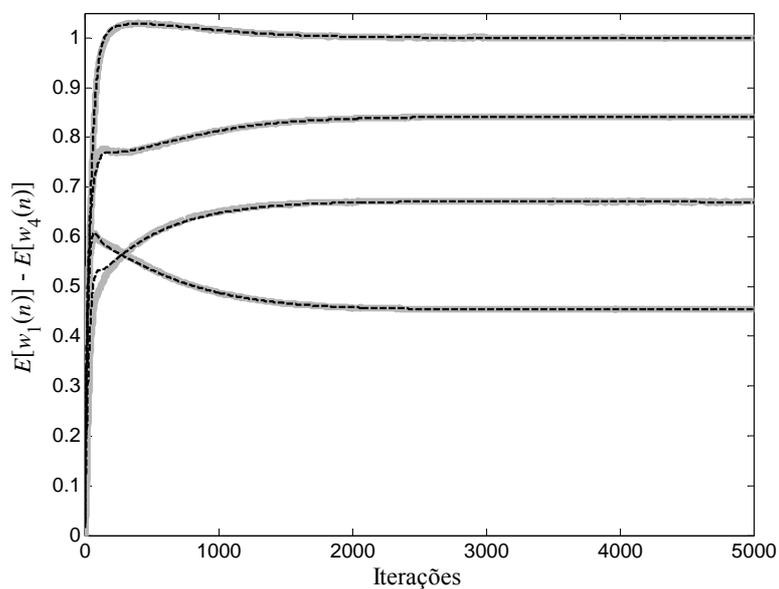
(a)



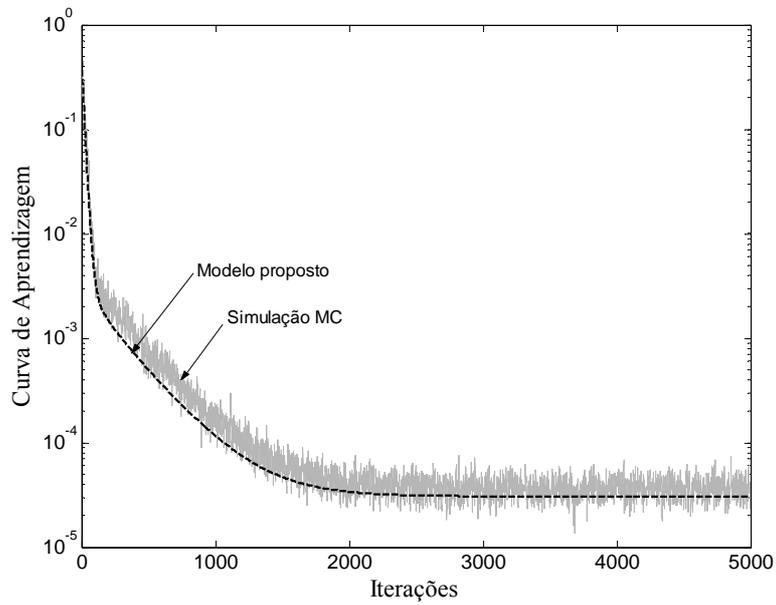
(b)

Figura 5.21. Exemplo 13. (a) Comportamento médio do vetor de coeficientes para $0,5\mu_{\max}$. Simulação MC (linha irregular cinza); usando a TI (4.61) (linha contínua preta); modelo proposto (4.34) (linha tracejada preta). (b) Curva de aprendizagem com $0,5\mu_{\max}$. Simulação MC (linha irregular cinza); usando a TI (4.68) (linha contínua preta); modelo proposto (4.59) (linha tracejada preta).

Exemplo 14: Para este exemplo, a planta e o filtro utilizados são descritos no Exemplo 11; valor máximo do passo de adaptação é $\mu = 0,2$ (determinado experimentalmente), para este caso são utilizados $0,8\mu_{\max}$ e $0,1\mu_{\max}$. Resultados similares àqueles obtidos na Figs. 5.20(a), (b) e 5.21(a), (b) são também obtidos nas Figs. 5.22(a), (b) e 5.23(a), (b), respectivamente. Novamente, o modelo proposto prediz adequadamente o comportamento médio dos coeficientes e a curva de aprendizagem. Já o modelo que usa a TI falha em regime transiente e, para um passo adaptação maior do que $0,1\mu_{\max}$, o modelo diverge.

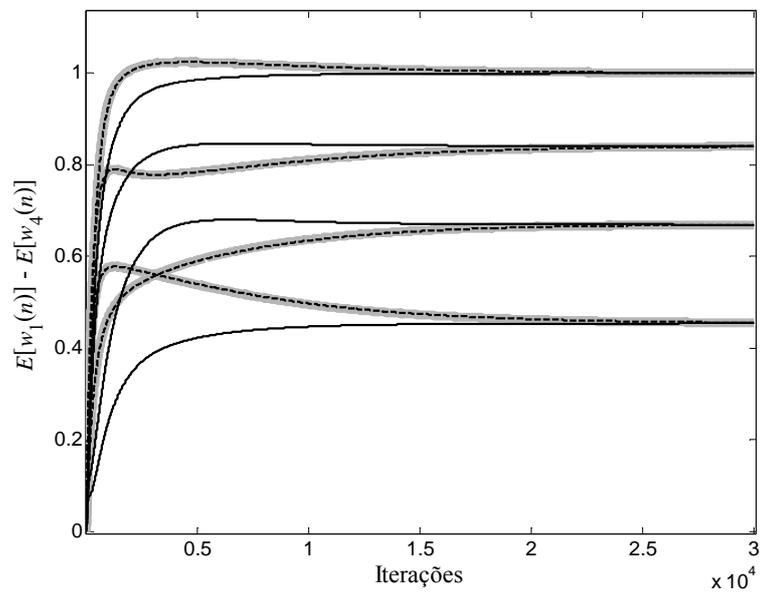


(a)



(b)

Figura 5.22. Exemplo 14. (a) Comportamento médio do vetor de coeficientes para $0,8\mu_{\max}$. Simulação MC (linha irregular cinza); modelo proposto (4.34) (linha tracejada preta). (b) Curva de aprendizagem com $0,8\mu_{\max}$. Simulação MC (linha irregular cinza); modelo proposto (4.59) (linha tracejada preta).



(a)

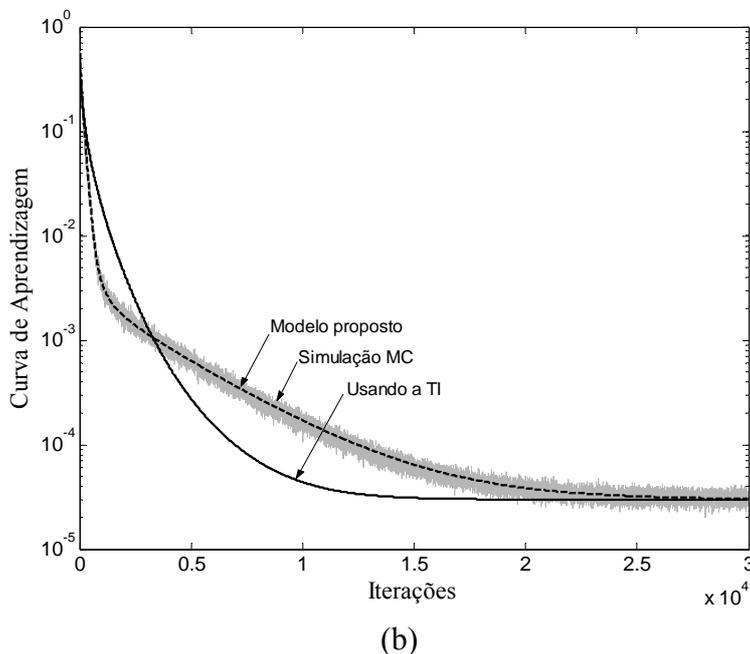


Figura 5.23. Exemplo 14. (a) Comportamento médio do vetor de coeficientes para $0,1\mu_{\max}$. Simulação MC (linha irregular cinza); usando a TI (4.61) (linha contínua preta); modelo proposto (4.34) (linha tracejada preta). (b) Curva de aprendizagem com $0,1\mu_{\max}$. Simulação MC (linha irregular cinza); usando a TI (4.68) (linha contínua preta); modelo proposto (4.59) (linha tracejada preta).

5.5. Conclusões

Neste capítulo, foram mostrados os resultados de simulação e os obtidos através dos modelos desenvolvidos no Capítulos 3 e 4 para os algoritmos DLMS e FE-LMS modificados, respectivamente, tanto para sinais de entrada brancos quanto para sinais coloridos. A partir de tais resultados observa-se que os modelos aqui propostos predizem satisfatoriamente o comportamento médio do vetor de coeficientes e a curva de aprendizagem. Também, são comparados os algoritmos DLMS e FE-LMS com suas respectivas versões modificadas via método de Monte Carlo.

COMENTÁRIOS E CONCLUSÕES FINAIS

Neste trabalho, um estudo detalhado dos algoritmos DLMS e FE-LMS modificados é apresentado. Neste capítulo, os principais resultados obtidos são comentados como também são sugeridas algumas propostas de trabalhos futuros.

6.1. Sumário e comentários dos resultados

Após uma breve introdução dos algoritmos DLMS, DLMS modificado e FE-LMS modificado (sendo esses dois últimos o foco principal deste trabalho de pesquisa), apresentamos, no Capítulo 2, um breve estudo do comportamento dos momentos de primeira e segunda ordens do algoritmo DLMS não considerando a clássica TI. Nos Capítulos 3 e 4, é introduzido um termo de compensação no sinal de erro nos algoritmos DLMS convencional e FE-LMS convencional. Dessa forma, derivam-se as expressões para o sinal de erro dos algoritmos DLMS modificado (MDLMS) e FE-LMS modificado (MFE-LMS) consideradas na atualização do vetor de coeficientes. Tais algoritmos, MDLMS e MFE-LMS, apresentam então o sinal de erro como uma função de suas versões atrasadas (3.13) e (4.16), respectivamente, sendo que tal característica não se encontra presente em suas versões convencionais. Tal compensação faz com que os algoritmos modificados tenham um comportamento similar ao do algoritmo LMS convencional. Uma outra particularidade desses algoritmos é que o valor de regime permanente do vetor de coeficientes é igual ao do algoritmo LMS convencional. Tal fato é mais bem observado em (3.4) e (4.11), nas quais, para a condição de convergência, as respectivas diferenças $[\mathbf{w}^T(n) - \mathbf{w}^T(n-D)]$ e $[\mathbf{w}^T(n) - \mathbf{w}^T(n-i)]$ são zeros, anulando assim o efeito do termo de compensação. Ainda, nos Capítulos 3 e 4, são desenvolvidos modelos que descrevem o

comportamento dos momentos de primeira e segunda ordens e da curva de aprendizagem não considerando a TI, levando em conta a hipótese de adaptação lenta e utilizando sinais de entrada Gaussianos. Cabe ressaltar que os modelos obtidos consideram todas as correlações do vetor de entrada para instantes de tempo diferentes. Também, para fins de comparação, foi derivado o modelo considerando a TI para cada um dos algoritmos em questão.

No Capítulo 5, são apresentados os resultados de simulação dos algoritmos estudados nos Capítulos 3 e 4. Através do método de Monte Carlo, os algoritmos DLMS e FE-LMS foram comparados com os algoritmos MDLMS e MFE-LMS, respectivamente. Observa-se que as versões modificadas podem utilizar passos de adaptação superior, tanto para sinais de entrada brancos quanto para coloridos. Para o caso de sinais brancos, os algoritmos MDLMS e MFE-LMS exibiram uma convergência mais rápida como também um erro em excesso menor do que suas versões convencionais. Ainda, neste capítulo, verificou-se a precisão dos modelos aqui propostos para o algoritmo MDLMS, observando-se um casamento muito bom entre os resultados obtidos através da simulação Monte Carlo e pelos modelos propostos, tanto para sinais de entrada brancos quanto para coloridos, desde que a condição de adaptação lenta seja satisfeita. No entanto, um dos modelos propostos (aproximação de segunda ordem) apresentou divergência para sinal de entrada colorido quando usada uma planta de dimensão superior a $N = 15$. Para o caso do algoritmo MFE-LMS, o modelo proposto apresentou uma boa concordância com a simulação, tanto para sinais brancos quanto para coloridos. Nos modelos considerando a TI, observa-se que quando existe apenas um coeficiente do filtro diferente de zero no caminho do erro (caso do algoritmo MDLMS), o modelo apresenta uma predição muito boa comparado com os resultados de simulação. No entanto, à medida em que mais de um coeficiente seja diferente de zero (caso do algoritmo MFE-LMS), a TI já não pode ser mais levada em consideração. Esse último fato fica evidente no descasamento entre o modelo considerando a TI e a simulação numérica durante a fase transiente. Além disso, para certos valores do passo de adaptação (confinados à faixa de estabilidade), o modelo usando a TI pode apresentar divergência.

6.2. Proposta de trabalhos futuros

Como proposta de trabalhos futuros podemos sugerir:

- Aprimoramento dos modelos que descrevem o comportamento médio do vetor de coeficientes e da curva de aprendizagem sem restrição à condição de adaptação lenta usada neste trabalho.
- Realização de um estudo completo dos algoritmos MDLMS e MFE-LMS como, por exemplo, estudo da estabilidade e passo de adaptação máximo.
- Emprego de estratégias alternativas para reduzir a complexidade computacional dos modelos aqui desenvolvidos.
- Desenvolvimento de modelos para outros algoritmos como, por exemplo, para os algoritmos Fx-LMS modificado e LMS com erro filtrado híbrido.

APÊNDICE A

Determinação de $E[\mathbf{x}(n-k)\mathbf{x}^T(n-l)\mathbf{x}(n-m)\mathbf{x}^T(n-o)]$

Seja a seguinte matriz:

$$\mathbf{M} = \mathbf{x}(n-k)\mathbf{x}^T(n-l)\mathbf{x}(n-m)\mathbf{x}^T(n-o) \quad (\text{A.1})$$

Considerando-se $(\mathbf{M})_{rp}$ um elemento da matriz \mathbf{M} , então

$$(\mathbf{M})_{rp} = \sum_{q=1}^N x(n-k-r)x(n-l-q)x(n-m-q)x(n-o-p), \quad (\text{A.2})$$

com $r = 1, 2, \dots, N$ e $p = 1, 2, \dots, N$.

Tomando-se o valor esperado em ambos os lados de (A.2), tem-se

$$E[(\mathbf{M})_{rp}] = \sum_{q=1}^N E[x(n-k-r)x(n-l-q)x(n-m-q)x(n-o-p)]. \quad (\text{A.3})$$

Em [3], é apresentado o valor esperado de $E[z_1 z_2 z_3 z_4]$, dado por

$$E[z_1 z_2 z_3 z_4] = E[z_1 z_2]E[z_3 z_4] + E[z_1 z_3]E[z_2 z_4] + E[z_1 z_4]E[z_2 z_3]. \quad (\text{A.4})$$

onde z_1, z_2, z_3, z_4 são assumidos Gaussianos com média zero

Agora, aplicando-se (A.4) em (A.3), tem-se

$$\begin{aligned} E[(\mathbf{M})_{rp}] &= \sum_{q=1}^N E[x(n-k-r)x(n-l-q)]E[x(n-m-q)x(n-o-p)] \\ &+ \sum_{q=1}^N E[x(n-k-r)x(n-m-q)]E[x(n-l-q)x(n-o-p)] \\ &+ \sum_{q=1}^N E[x(n-k-r)x(n-o-p)]E[x(n-l-q)x(n-m-q)]. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Expressando-se (A.5) em forma matricial, podem-se identificar as seguintes estruturas:

$$\begin{aligned} & \sum_{q=1}^N E[x(n-k-r)x(n-l-q)]E[x(n-m-q)x(n-o-p)] = \\ & \sum_{q=1}^N E\{[\mathbf{x}(n-k)\mathbf{x}^T(n-l)]_{rq}\}E\{[\mathbf{x}(n-m)\mathbf{x}^T(n-o)]_{qp}\} = \mathbf{R}_{l-k}\mathbf{R}_{o-m}, \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

$$\begin{aligned} & \sum_{q=1}^N E[x(n-k-r)x(n-m-q)]E[x(n-l-q)x(n-o-p)] = \\ & \sum_{q=1}^N E\{[\mathbf{x}(n-k)\mathbf{x}^T(n-m)]_{rq}\}E\{[\mathbf{x}(n-l)\mathbf{x}^T(n-o)]_{qp}\} = \mathbf{R}_{m-k}\mathbf{R}_{o-l}, \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

$$\begin{aligned} & \sum_{q=1}^N E[x(n-k-r)x(n-o-p)]E[x(n-l-q)x(n-m-q)] = \\ & \sum_{q=1}^N E\{[\mathbf{x}(n-k)\mathbf{x}^T(n-o)]_{rp}\}E\{[\mathbf{x}(n-l)\mathbf{x}^T(n-m)]_{qq}\} = \mathbf{R}_{o-k}\text{tr}[\mathbf{R}_{m-l}]. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Finalmente, substituindo-se (A.6), (A.7) e (A.8) em (A.5), determina-se

$$\begin{aligned} & E[\mathbf{x}(n-k)\mathbf{x}^T(n-l)\mathbf{x}(n-m)\mathbf{x}^T(n-o)] = \\ & E[(\mathbf{M})_{rp}] = \mathbf{R}_{l-k}\mathbf{R}_{o-m} + \mathbf{R}_{m-k}\mathbf{R}_{o-l} + \mathbf{R}_{o-k}\text{tr}[\mathbf{R}_{m-l}]. \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Para se verificar (A.9) são apresentados dois exemplos. O primeiro considera um sinal de entrada branco; o segundo, um sinal de entrada colorido.

Exemplo A.1: Sinal de entrada $x(n)$ é branco e Gaussiano, com $\sigma_x^2 = 1$; o momento avaliado é $E[\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)\mathbf{x}(n-j)\mathbf{x}^T(n-j)]$, com $j = 1$ e uma média de 40000 realizações independentes.

Através de simulação Monte Carlo (MC)

$$E[\cdot]_{\text{MC}} = \begin{pmatrix} 1.01 & -0.005 & 0.0001 \\ -0.003 & 1.02 & -0.004 \\ 1.02 & -0.017 & 1.01 \end{pmatrix}$$

A partir de (A.9)

$$E[.]|_{(A.9)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemplo A.2: Neste caso, é usado um sinal correlacionado obtido a partir de um modelo auto-regressivo de segunda ordem, dado por

$$x(n) = a_1x(n-1) + a_2x(n-2) + u(n), \quad (A.10)$$

onde $u(n)$ é um ruído branco com variância unitária e $a_1 = -0.975$ e $a_2 = 0.95$. A dispersão dos autovalores da matriz de autocorrelação do sinal de entrada é igual a 82,84; os dados utilizados são idênticos aos do Exemplo A.1.

Através de simulação Monte Carlo (MC)

$$E[.]|_{MC} = \begin{pmatrix} 4.31 & 2.93 & 0.61 \\ 5.83 & 5.30 & 2.94 \\ 5.30 & 5.83 & 4.31 \end{pmatrix}$$

A partir de (A.9)

$$E[.]|_{(A.9)} = \begin{pmatrix} 4.65 & 3.17 & 0.646 \\ 6.30 & 5.72 & 3.17 \\ 5.72 & 6.30 & 4.65 \end{pmatrix}$$

APÊNDICE B

Determinação de $E[\mathbf{x}(n-k)\mathbf{x}^\top(n-l)\mathbf{x}(n-m)\mathbf{x}^\top(n-o)\mathbf{x}(n-p)\mathbf{x}^\top(n-q)]$

Seja a seguinte matriz:

$$\mathbf{M} = \mathbf{x}(n-k)\mathbf{x}^\top(n-l)\mathbf{x}(n-m)\mathbf{x}^\top(n-o)\mathbf{x}(n-p)\mathbf{x}^\top(n-q). \quad (\text{B.71})$$

Considerando-se $(\mathbf{M})_{ad}$ um elemento da matriz \mathbf{M} , então

$$(\mathbf{M})_{ad} = \sum_{b=1}^N \sum_{c=1}^N x(n-k-a)x(n-l-b)x(n-m-b)x(n-o-c)x(n-p-c)x(n-q-d), \quad (\text{B.72})$$

com $a = 1, 2, \dots, N$ e $d = 1, 2, \dots, N$.

Tomando-se o valor esperado em ambos os lados de (B.72), tem-se

$$E[(\mathbf{M})_{ad}] = \sum_{b=1}^N \sum_{c=1}^N E[x(n-k-a)x(n-l-b)x(n-m-b)x(n-o-c)x(n-p-c)x(n-q-d)]. \quad (\text{B.73})$$

Segundo [30], o valor esperado é dado por

$$\begin{aligned}
E[(\mathbf{M})_{ad}] = & \\
& \sum_{b=1}^N \sum_{c=1}^N E[x(n-k-a)x(n-l-b)]E[x(n-m-b)x(n-o-c)]E[x(n-p-c)x(n-q-d)] \\
& + \sum_{b=1}^N \sum_{c=1}^N E[x(n-k-a)x(n-l-b)]E[x(n-m-b)x(n-p-c)]E[x(n-o-c)x(n-q-d)] \\
& + \sum_{b=1}^N \sum_{c=1}^N E[x(n-k-a)x(n-l-b)]E[x(n-m-b)x(n-q-d)]E[x(n-o-c)x(n-p-c)] \\
& + \sum_{b=1}^N \sum_{c=1}^N E[x(n-k-a)x(n-m-b)]E[x(n-l-b)x(n-o-c)]E[x(n-p-c)x(n-q-d)] \\
& + \sum_{b=1}^N \sum_{c=1}^N E[x(n-k-a)x(n-m-b)]E[x(n-l-b)x(n-p-c)]E[x(n-o-c)x(n-q-d)] \\
& + \sum_{b=1}^N \sum_{c=1}^N E[x(n-k-a)x(n-m-b)]E[x(n-l-b)x(n-q-d)]E[x(n-o-c)x(n-p-c)] \\
& + \sum_{b=1}^N \sum_{c=1}^N E[x(n-k-a)x(n-o-c)]E[x(n-l-b)x(n-m-b)]E[x(n-p-c)x(n-q-d)] \\
& + \sum_{b=1}^N \sum_{c=1}^N E[x(n-k-a)x(n-o-c)]E[x(n-l-b)x(n-p-c)]E[x(n-m-b)x(n-q-d)] \\
& + \sum_{b=1}^N \sum_{c=1}^N E[x(n-k-a)x(n-o-c)]E[x(n-l-b)x(n-q-d)]E[x(n-m-b)x(n-p-c)] \\
& + \sum_{b=1}^N \sum_{c=1}^N E[x(n-k-a)x(n-p-c)]E[x(n-m-b)x(n-o-c)]E[x(n-l-b)x(n-q-d)] \\
& + \sum_{b=1}^N \sum_{c=1}^N E[x(n-k-a)x(n-p-c)]E[x(n-m-b)x(n-l-b)]E[x(n-o-c)x(n-q-d)] \\
& + \sum_{b=1}^N \sum_{c=1}^N E[x(n-k-a)x(n-p-c)]E[x(n-m-b)x(n-q-d)]E[x(n-o-c)x(n-l-b)] \\
& + \sum_{b=1}^N \sum_{c=1}^N E[x(n-k-a)x(n-q-d)]E[x(n-m-b)x(n-o-c)]E[x(n-p-c)x(n-l-b)] \\
& + \sum_{b=1}^N \sum_{c=1}^N E[x(n-k-a)x(n-q-d)]E[x(n-m-b)x(n-p-c)]E[x(n-o-c)x(n-l-b)] \\
& + \sum_{b=1}^N \sum_{c=1}^N E[x(n-k-a)x(n-q-d)]E[x(n-m-b)x(n-l-b)]E[x(n-o-c)x(n-p-c)].
\end{aligned} \tag{B.74}$$

Expressando-se (B.4) em forma matricial, podem-se identificar as seguintes estruturas:

$$\begin{aligned}
& \sum_{b=1}^N \sum_{c=1}^N E[x(n-k-a)x(n-l-b)]E[x(n-m-b)x(n-o-c)]E[x(n-p-c)x(n-q-d)] = \\
& \sum_{b=1}^N \sum_{c=1}^N E\{[\mathbf{x}(n-k)\mathbf{x}^T(n-l)]_{ab}\}E\{[\mathbf{x}(n-m)\mathbf{x}^T(n-o)]_{bc}\}E\{[\mathbf{x}(n-p)\mathbf{x}^T(n-q)]_{cd}\} = \\
& \mathbf{R}_{l-k} \mathbf{R}_{o-m} \mathbf{R}_{q-p}.
\end{aligned} \tag{B.5}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{b=1}^N \sum_{c=1}^N E[x(n-k-a)x(n-l-b)]E[x(n-m-b)x(n-p-c)]E[x(n-o-c)x(n-q-d)] = \\
& \sum_{b=1}^N \sum_{c=1}^N E\{[\mathbf{x}(n-k)\mathbf{x}^T(n-l)]_{ab}\}E\{[(\mathbf{x}(n-m)\mathbf{x}^T(n-p))]_{bc}\}E\{[(\mathbf{x}(n-o)\mathbf{x}^T(n-q))]_{cd}\} = \\
& \mathbf{R}_{l-k} \mathbf{R}_{p-m} \mathbf{R}_{q-o}.
\end{aligned} \tag{B.6}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{b=1}^N \sum_{c=1}^N E[x(n-k-a)x(n-l-b)]E[x(n-m-b)x(n-q-d)] E[x(n-o-c)x(n-p-c)] = \\
& \sum_{b=1}^N \sum_{c=1}^N E\{[\mathbf{x}(n-k)\mathbf{x}^T(n-l)]_{ab}\}E\{[\mathbf{x}(n-m)\mathbf{x}^T(n-q)]_{bd}\}E\{[\mathbf{x}(n-o)\mathbf{x}^T(n-p)]_{cc}\} = \\
& \mathbf{R}_{l-k} \mathbf{R}_{q-m} \text{tr}[\mathbf{R}_{p-o}].
\end{aligned} \tag{B.7}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{b=1}^N \sum_{c=1}^N E[x(n-k-a)x(n-m-b)]E[x(n-l-b)x(n-o-c)]E[x(n-p-c)x(n-q-d)] = \\
& \sum_{b=1}^N \sum_{c=1}^N E\{[\mathbf{x}(n-k)\mathbf{x}^T(n-m)]_{ab}\}E\{[\mathbf{x}(n-l)\mathbf{x}^T(n-o)]_{bc}\}E\{[\mathbf{x}(n-p)\mathbf{x}^T(n-q)]_{cd}\} = \\
& \mathbf{R}_{m-k} \mathbf{R}_{o-l} \mathbf{R}_{q-p}.
\end{aligned} \tag{B.8}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{b=1}^N \sum_{c=1}^N E[x(n-k-a)x(n-m-b)]E[x(n-l-b)x(n-p-c)]E[x(n-o-c)x(n-q-d)] = \\
& \sum_{b=1}^N \sum_{c=1}^N E\{[\mathbf{x}(n-k)\mathbf{x}^T(n-m)]_{ab}\}E\{[\mathbf{x}(n-l)\mathbf{x}^T(n-p)]_{bc}\}E\{[\mathbf{x}(n-o)\mathbf{x}^T(n-q)]_{cd}\} = \\
& \mathbf{R}_{m-k} \mathbf{R}_{p-l} \mathbf{R}_{q-o}.
\end{aligned} \tag{B.9}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{b=1}^N \sum_{c=1}^N E[x(n-k-a)x(n-m-b)]E[x(n-l-b)x(n-q-d)]E[x(n-o-c)x(n-p-c)] = \\
& \sum_{b=1}^N \sum_{c=1}^N E\{[\mathbf{x}(n-k)\mathbf{x}^\top(n-m)]_{ab}\}E\{[\mathbf{x}(n-l)\mathbf{x}^\top(n-q)]_{bd}\}E\{[\mathbf{x}(n-o)\mathbf{x}^\top(n-p)]_{cc}\} = \\
& \mathbf{R}_{m-k} \mathbf{R}_{q-l} \text{tr}[\mathbf{R}_{p-o}].
\end{aligned} \tag{B.10}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{b=1}^N \sum_{c=1}^N E[x(n-k-a)x(n-o-c)]E[x(n-l-b)x(n-m-b)]E[x(n-p-c)x(n-q-d)] = \\
& \sum_{b=1}^N \sum_{c=1}^N E\{[\mathbf{x}(n-k)\mathbf{x}^\top(n-o)]_{ac}\}E\{[\mathbf{x}(n-l)\mathbf{x}^\top(n-m)]_{bb}\}E\{[\mathbf{x}(n-p)\mathbf{x}^\top(n-q)]_{cd}\} = \\
& \mathbf{R}_{o-k} \text{tr}[\mathbf{R}_{m-l}] \mathbf{R}_{q-p}.
\end{aligned} \tag{B.11}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{b=1}^N \sum_{c=1}^N E[x(n-k-a)x(n-o-c)]E[x(n-l-b)x(n-p-c)]E[x(n-m-b)x(n-q-d)] = \\
& \sum_{b=1}^N \sum_{c=1}^N E\{[\mathbf{x}(n-k)\mathbf{x}^\top(n-o)]_{ac}\}E\{[\mathbf{x}(n-l)\mathbf{x}^\top(n-p)]_{bc}\}E\{[\mathbf{x}(n-m)\mathbf{x}^\top(n-q)]_{bd}\} = \\
& \mathbf{R}_{o-k} \mathbf{R}_{p-l}^\top \mathbf{R}_{q-m}.
\end{aligned} \tag{B.12}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{b=1}^N \sum_{c=1}^N E[x(n-k-a)x(n-o-c)]E[x(n-l-b)x(n-q-d)]E[x(n-m-b)x(n-p-c)] = \\
& \sum_{b=1}^N \sum_{c=1}^N E\{[x(n-k)x^\top(n-o)]_{ac}\}E\{[x(n-l)x^\top(n-q)]_{bd}\}E\{[x(n-m)x^\top(n-p)]_{bc}\} = \\
& \sum_{b=1}^N \sum_{c=1}^N E\{[\mathbf{x}(n-k)\mathbf{x}^\top(n-o)]_{ac}\}E\{[x(n-m)\mathbf{x}^\top(n-p)]_{bc}\}E\{[x(n-l)\mathbf{x}^\top(n-q)]_{bd}\} = \\
& \mathbf{R}_{o-k} \mathbf{R}_{p-m}^\top \mathbf{R}_{q-l}.
\end{aligned} \tag{B.13}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{b=1}^N \sum_{c=1}^N E[x(n-k-a)x(n-p-c)]E[x(n-m-b)x(n-o-c)]E[x(n-l-b)x(n-q-d)] = \\
& \sum_{b=1}^N \sum_{c=1}^N E\{[\mathbf{x}(n-k)\mathbf{x}^\top(n-p)]_{ac}\}E\{[\mathbf{x}(n-m)\mathbf{x}^\top(n-o)]_{bc}\}E\{[\mathbf{x}(n-l)\mathbf{x}^\top(n-q)]_{bd}\} = \\
& \mathbf{R}_{p-k} \mathbf{R}_{o-m}^\top \mathbf{R}_{q-l}.
\end{aligned} \tag{B.14}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{b=1}^N \sum_{c=1}^N E[x(n-k-a)x(n-p-c)]E[x(n-m-b)x(n-l-b)]E[x(n-o-c)x(n-q-d)] = \\
& \sum_{b=1}^N \sum_{c=1}^N E\{[\mathbf{x}(n-k)\mathbf{x}^\top(n-p)]_{ac}\}E\{[\mathbf{x}(n-m)\mathbf{x}^\top(n-l)]_{bb}\}E\{[\mathbf{x}(n-o)\mathbf{x}^\top(n-q)]_{cd}\} = \\
& \mathbf{R}_{p-k} \text{tr}[\mathbf{R}_{l-m}]\mathbf{R}_{q-o}.
\end{aligned} \tag{B.15}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{b=1}^N \sum_{c=1}^N E[x(n-k-a)x(n-p-c)]E[x(n-m-b)x(n-q-d)]E[x(n-o-c)x(n-l-b)] = \\
& \sum_{b=1}^N \sum_{c=1}^N (E[x(n-k)x^\top(n-p)]_{ac})E[(x(n-m)x^\top(n-q))_{bd}]E[(x(n-o)x^\top(n-l))_{cb}] = \\
& \sum_{b=1}^N \sum_{c=1}^N E\{[\mathbf{x}(n-k)\mathbf{x}^\top(n-p)]_{ac}\}E\{[\mathbf{x}(n-o)\mathbf{x}^\top(n-l)]_{cb}\}E\{[\mathbf{x}(n-m)\mathbf{x}^\top(n-q)]_{bd}\} = \\
& \mathbf{R}_{p-k} \mathbf{R}_{l-o} \mathbf{R}_{q-m}.
\end{aligned} \tag{B.16}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{b=1}^N \sum_{c=1}^N E[x(n-k-a)x(n-q-d)]E[x(n-m-b)x(n-o-c)]E[x(n-p-c)x(n-l-b)] = \\
& \sum_{b=1}^N \sum_{c=1}^N E\{[\mathbf{x}(n-k)\mathbf{x}^\top(n-q)]_{ad}\}E\{[\mathbf{x}(n-m)\mathbf{x}^\top(n-o)]_{bc}\}E\{[\mathbf{x}(n-p)\mathbf{x}^\top(n-l)]_{cb}\} = \\
& \mathbf{R}_{q-k} \text{tr}[\mathbf{R}_{o-m} \mathbf{R}_{l-p}].
\end{aligned} \tag{B.17}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{b=1}^N \sum_{c=1}^N E[x(n-k-a)x(n-q-d)]E[x(n-m-b)x(n-p-c)]E[x(n-o-c)x(n-l-b)] = \\
& \sum_{b=1}^N \sum_{c=1}^N E\{[\mathbf{x}(n-k)\mathbf{x}^\top(n-q)]_{ad}\}E\{[\mathbf{x}(n-m)\mathbf{x}^\top(n-p)]_{bc}\}E\{[\mathbf{x}(n-o)\mathbf{x}^\top(n-l)]_{cb}\} = \\
& \mathbf{R}_{q-k} \text{tr}[\mathbf{R}_{p-m} \mathbf{R}_{l-o}^\top].
\end{aligned} \tag{B.18}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{b=1}^N \sum_{c=1}^N E[x(n-k-a)x(n-q-d)]E[x(n-m-b)x(n-l-b)]E[x(n-o-c)x(n-p-c)] = \\
& \sum_{b=1}^N \sum_{c=1}^N E\{[\mathbf{x}(n-k)\mathbf{x}^\top(n-q)]_{ad}\}E\{[\mathbf{x}(n-m)\mathbf{x}^\top(n-l)]_{bb}\}E\{[\mathbf{x}(n-o)\mathbf{x}^\top(n-p)]_{cc}\} = \\
& \mathbf{R}_{q-k} \text{tr}[\mathbf{R}_{l-m}]\text{tr}[\mathbf{R}_{p-o}^\top].
\end{aligned} \tag{B.19}$$

Finalmente, substituindo-se (B.5) até (B.19), obtém-se:

$$\begin{aligned}
 E[\mathbf{x}(n-k)\mathbf{x}^T(n-l)\mathbf{x}(n-m)\mathbf{x}^T(n-o)\mathbf{x}(n-p)\mathbf{x}^T(n-q)] &= E[(\mathbf{M})_{ad}] = \\
 &\mathbf{R}_{l-k}\mathbf{R}_{o-m}\mathbf{R}_{q-p} + \mathbf{R}_{l-k}\mathbf{R}_{p-m}\mathbf{R}_{q-o} + \mathbf{R}_{l-k}\mathbf{R}_{q-m}\text{tr}[\mathbf{R}_{p-o}] + \mathbf{R}_{m-k}\mathbf{R}_{o-l}\mathbf{R}_{q-p} \\
 &+ \mathbf{R}_{m-k}\mathbf{R}_{p-l}\mathbf{R}_{q-o} + \mathbf{R}_{m-k}\mathbf{R}_{q-l}\text{tr}[\mathbf{R}_{p-o}] + \mathbf{R}_{o-k}\text{tr}[\mathbf{R}_{m-l}]\mathbf{R}_{q-p} + \mathbf{R}_{o-k}\mathbf{R}_{p-l}^T\mathbf{R}_{q-m} \\
 &+ \mathbf{R}_{o-k}\mathbf{R}_{p-m}^T\mathbf{R}_{q-l} + \mathbf{R}_{p-k}\mathbf{R}_{o-m}^T\mathbf{R}_{q-l} + \mathbf{R}_{p-k}\text{tr}[\mathbf{R}_{l-m}]\mathbf{R}_{q-o} + \mathbf{R}_{p-k}\mathbf{R}_{l-o}\mathbf{R}_{q-m} \\
 &+ \mathbf{R}_{q-k}\text{tr}[\mathbf{R}_{o-m}\mathbf{R}_{l-p}] + \mathbf{R}_{q-k}\text{tr}[\mathbf{R}_{p-m}\mathbf{R}_{l-o}^T] + \mathbf{R}_{q-k}\text{tr}[\mathbf{R}_{l-m}]\text{tr}[\mathbf{R}_{p-o}^T]
 \end{aligned} \tag{B.20}$$

Para se verificar (B.20) são apresentados dois exemplos. O primeiro considera um sinal de entrada branco; o segundo, um sinal de entrada colorido.

Exemplo B.1: Sinal de entrada $x(n)$ é branco e Gaussiano, com $\sigma_x^2 = 1$; o momento avaliado é $E[\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n-j-k)\mathbf{x}(n-j)\mathbf{x}^T(n-j)\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n-j-k)]$ com $j=1, k=1$ e uma média de 40000 realizações independentes.

Através de simulação Monte Carlo (MC), obtém-se

$$E[\cdot]_{\text{MC}} = \begin{pmatrix} 0.98 & -0.018 & 0.006 & 0.002 \\ -0.038 & 1.976 & -0.014 & 0.007 \\ 6.903 & -0.049 & 1.981 & -0.008 \\ -0.049 & 6.916 & -0.032 & 0.986 \end{pmatrix}$$

A partir de (B.20), tem-se

$$E[\cdot]_{\text{(B.20)}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemplo B.2: Neste caso, é usado um sinal colorido obtido a partir de um processo auto-regressivo de segunda ordem, dado por

$$x(n) = a_1x(n-1) + a_2x(n-2) + u(n), \tag{B.21}$$

onde $u(n)$ é um ruído branco com variância unitária e $a_1 = -0.975$ e $a_2 = 0.95$. A dispersão dos autovalores da matriz de autocorrelação do sinal de entrada é igual a 82,84 ; os dados utilizados são idênticos aos do Exemplo B.1.

Através de simulação Monte Carlo (MC), obtém-se

$$E[\cdot]_{\text{MC}} = \begin{pmatrix} -6.68 & -13.46 & -6.98 \\ 7.88 & -6.026 & -10.21 \\ 15.27 & 7.87 & -6.72 \end{pmatrix}$$

A partir de (B.20), tem-se

$$E[\cdot]_{\text{(B.20)}} = \begin{pmatrix} -6.12 & -12.30 & -6.37 \\ 7.21 & -5.48 & -12.30 \\ 13.96 & 7.21 & -6.12 \end{pmatrix}$$



REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] B. Widrow and S. D. Stearns. *Adaptive Signal Processing*, Prentice Hall, 1998.
- [2] S. Haykin. *Adaptive Filter Theory*, Prentice Hall, 2001.
- [3] I. S. Reed, “On a moment theorem for complex Gaussian processes,” *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 8, no. 3, pp. 194-195, Apr. 1962.
- [4] H. Kobayashi, “Correlative level coding and maximum-likelihood decoding,” *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 17, no. 5, pp. 586-594, Sept. 1971.
- [5] G. D. Forney Jr., “Maximum-likelihood sequence estimation of digital sequences in the presence of intersymbol interference,” *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 18, no. 3, pp. 363-378, May. 1972.
- [6] K. Abend and B. D. Fritchman, “Statistical detection for communication channels with intersymbol interference,” *Proc. of IEEE*, vol. 58, no. 5, pp. 779-785, May. 1970.
- [7] M. D. Meyer and D. P. Agrawal, “A high sampling rate delayed LMS filter architecture,” *IEEE Trans. Circuits Syst. II: Anal. Dig. Signal Process.*, vol. 40, no. 11, pp. 727-729, Nov. 1993.
- [8] C.-L. Wang, “Bit-serial VLSI implementation of delayed LMS adaptive FIR filter,” *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 42, no. 8, pp. 2169–2175, Aug. 1994.

-
- [9] H. Herzberg, R. Haimi-Cohen and Y. Be'ery, "A systolic-array for adaptive filters: Design and performance analysis," *Proc. IEEE 15th Conv. Of Electrical and Electronic Eng.*, Tel-Aviv, Israel, Apr. 1987, pp. 4.1.3:1-4.
- [10] —, "A systolic-array realization of adaptive filter and the effects of delayed adaptation," *IEEE Trans. Acoustics, Speech, Signal Process.*, vol. 40, no. 11, pp. 2799-2803, Nov. 1992.
- [11] C. H. Kim, H. Soeleman, and K. Roy, "Ultra-low-power DLMS adaptive filter for hearing aid applications", *IEEE Trans. Very Large Scale Integration Systems.*, vol. 11, no. 6, pp. 1058-1067, Dec. 2003.
- [12] G. Long, F. Ling, and J. Proakis, "The LMS with delayed coefficient adaptation," *IEEE Trans. Acoustics, Speech, Signal Process.*, vol. 37, no. 9, pp. 1397-1405, Sept. 1989.
- [13] —, "Corrections to the LMS with delayed coefficient adaptation," *IEEE Trans. Acoustics, Speech, Signal Process.*, vol. 40, no. 1, pp. 230-232, Jan. 1992.
- [14] P. Kabal, "The stability of adaptive minimum mean square error equalizers using delayed adjustment," *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-31, no. 3, pp. 430-432, Mar. 1983.
- [15] R. Haimi-Cohen, H. Herzberg, and Y. Be'ery, "Delayed adaptive LMS filtering: currents results," *Proc. IEEE Int. Conf. Acoustics, Speech, Signal Process.*, Albuquerque, NM, USA, vol. 3, Apr. 1990, pp. 1273-1876.
- [16] O. J. Tobias, J. C. M. Bermudez, and N. J. Bershad, "Stochastic analysis of the delayed LMS algorithm for a new model," *Proc. IEEE Int. Conf. Acoustics, Speech, Signal Process.*, Istanbul, Turkey, vol. 1, Jun. 2000, pp. 404-407.
- [17] R. D. Poltmann, "Conversion of the delayed LMS algorithm into the LMS algorithm," *IEEE Signal Process. Lett.*, vol. 2, no. 12, pp. 223, Dec. 1995.

-
- [18] M. Rupp, "Saving complexity of modified filtered-X LMS and delayed update LMS algorithms," *IEEE Trans. Circuits Syst. II: Anal. Dig. Signal Process.*, vol. 44, no. 1, pp. 45-48, Jan. 1997.
- [19] J. E. Mazo, "On the independence theory of equalizer convergence," *Bell System Technical Journal.*, vol. 58, no. 5, pp. 963-993, May/June 1979.
- [20] S. J. Elliott and P. A. Nelson, "Active noise control," *IEEE Signal Processing Mag.*, vol. 10, pp. 12-35, Oct. 1993.
- [21] J. R. Glover Jr., "Adaptive noise canceling applied to sinusoidal interferences," *IEEE Trans. Acoustics, Speech, Signal Process.*, vol. 25, no. 6, pp. 484-491, Dec. 1977.
- [22] O. J. Tobias, J. C. M. Bermudez, N. J. Bershad, and R. Seara, " , " *Proc. IEEE Int. Conf. Acoustics, Speech, Signal Process.*, Seattle, USA, May 1998, pp. 3545-3548.
- [23] —, "Second moment analysis of the filtered-X LMS algorithm," *Proc. IEEE Int. Conf. Acoustics, Speech, Signal Process.*, Phoenix, USA, Mar. 1999, pp. 1873-1876.
- [24] E. A. Wan, "Adjoint-LMS: An efficient alternative to the filtered-x LMS and multiple error LMS algorithms," *Proc. IEEE Int. Conf. Acoustics, Speech, Signal Process.*, Atlanta, USA, vol. 3, May 1996, pp. 1842-1845.
- [25] S. Shaffer and C. S. Williams, "The filtered error LMS algorithm," *Proc. IEEE Int. Conf. Acoustics, Speech, Signal Process.*, Boston, USA, Apr. 1983, pp. 41 44.
- [26] M. Rupp and A. H. Sayed, "Modified FX-LMS algorithms with improved convergence performance," *Proc. 29th Asilomar Conf. Signals, Systems, Computers*, Pacific Grove, CA, USA, vol. 2, Nov. 1995, pp. 1255-1259.
- [27] S. C. Douglas, "An efficient implementation of the modified filtered-x LMS algorithm," *IEEE Signal Process. Lett.*, vol. 4, no. 10, pp. 286-288, Oct. 1997.

-
- [28] E. Bjarnason, "Analysis of the filtered-X LMS algorithm," *IEEE Trans. Speech and Audio Process.*, vol. 3, no. 6, pp. 504-514, Nov. 1995.
- [29] E. Bjarnason, "Algorithms for active noise cancellation without exact knowledge of the error-path filter," *Proc. IEEE Int. Symp. Circ. Syst.*, London, UK, vol. 2, June 1994, pp. 573-576.
- [30] N. Morita and T. Yajima, "Ultrahigh-time-resolution coherent transient spectroscopy with incoherent light," *Phys. Rev. A*, vol. 30, no. 5, pp. 2525-2536, Nov. 1984.
- [31] H. T. Kung and W. L. Lin, "An algebra for VLSI algorithm design," *Proc. Conf. Elliptic Problem Solvers*, Monterey, CA, USA, Jan. 1983, pp. 141-160.
- [32] N. J. Bershad, P. Celka, and J. M. Vesin, "Stochastic analysis of gradient adaptive identification of nonlinear systems with memory for Gaussian data and noisy input and output measurements," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 47, no. 3, pp. 675-689, Mar. 1999.
- [33] J. M. Kates, "Feedback cancellation in hearing aids: Results from a computer simulation," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 39, no. 3, pp. 553-562, Mar. 1991.
- [34] D. P. Welker, J. E. Greenberg, J. G. Desloge, and P. M. Zurek, "Microphone-array hearing aids with binaural output-part II: A two-microphone adaptive system," *IEEE Trans. Speech and Audio Process.*, vol. 5, no. 6, pp. 543-551, Nov. 1997.
- [35] J. A. Maxwell and P. M. Zurek, "Reducing acoustic feedback in hearing aids," *IEEE Trans. Speech Audio and Process.*, vol. 3, no. 4, pp. 304-313, July 1995.
- [36] S. D. Snyder and C. H. Hansen, "The effect of transfer function estimation errors on the filtered-X LMS algorithm," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 2, no. 4, pp. 950-953, April 1994.