
Universidade Federal de Santa Catarina
Curso de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica

Métodos de Regularização Tipo Level Set para Problemas Inversos

Adriano De Cezaro
Orientador: Prof. Dr. Antônio Leitão

Florianópolis
Fevereiro de 2006

Universidade Federal de Santa Catarina
Curso de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica

**Métodos de Regularização Tipo Level Set para
Problemas Inversos**

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica, do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina, para a obtenção do grau de Mestre em Matemática, com Área de Concentração em Matemática Aplicada.

Adriano De Cezaro
Florianópolis
Fevereiro de 2006

Métodos de Regularização Tipo Level Set para Problemas Inversos

por

Adriano De Cezaro

Esta Dissertação foi julgada para a obtenção do Título de “Mestre”,
Área de Concentração em Matemática Aplicada, e aprovada em sua forma
final pelo Curso de Pós-Graduação em Matemática e
Computação Científica.

Igor Mozolevski
Coordenador

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Antônio Leitão (UFSC-Orientador)

Prof. Dr. Jorge P. Zubelli (IMPA)

Prof. Dr. Igor Mozolevski (UFSC)

Prof. Dr. Uri M. Ascher (UBC)

Florianópolis, Fevereiro de 2006.

Agradecimentos

A meus pais Luiz e Inês, por orientar o meu caminho e apoiar as decisões em todos os momentos.

A minha namorada Fabiana Travessini, pelo incentivo de prosseguir sempre, pela dedicação, compreensão e amor durante essa jornada.

A meus amigos, por fazerem jus a assim serem chamados.

Ao Departamento de Matemática, em especial a Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Santa Catarina pela acolhida desde o primeiro curso de verão.

À Elisa Amaral, pela atenção e prestatividade com que sempre nos atendeu na secretaria da Pós-Graduação.

Aos professores Mario Zambaldi, Elieser Batista, Joel dos Santos e Oscar Janesch pelo conhecimento transmitido.

Aos professores Mario R. Retamoso, Leandro S. Bellincanta e José C. Pinto Leivas da Fundação Universidade Federal de Rio Grande, por incentivar o prosseguimento dos estudos.

A CAPS pelo suporte financeiro.

Finalmente, deixo meus sinceros agradecimentos ao Professor Antônio Leitão, pela dedicação, paciência, amizade, pelo conhecimento compartilhado e pela forma com que conduziu esse trabalho. Enfim, acredito ter aqui, mais que um orientador, mas um grande amigo.

Ainda a banca examinadora, por dedicarem seu tempo a avaliarem o trabalho desenvolvido.

Resumo

Este trabalho trata da análise de métodos de regularização tipo level set para problemas inversos. Tais problemas são tipicamente mal postos no sentido de Hadamard (a dependência contínua de soluções não é satisfeita) e envolvem operadores tanto não lineares quanto descontínuos. Devido a essa última característica, as técnicas clássicas de regularização não podem ser aplicadas diretamente para esses problemas, visto que essas técnicas exigem Fréchet diferenciabilidade do operador que modela o problema inverso. A técnica de regularização aqui proposta é baseada na minimização de um funcional de Tikhonov. Um novo conceito generalizado de minimização é introduzido. A partir daí, são obtidos resultados de existência de minimizantes para o funcional de Tikhonov e é realizada uma análise de convergência para o método de regularização. Testes numéricos para o problema de tomografia por emissão (EIT) são apresentados a fim de ilustrar a eficiência do método em estudo.

Abstract

In this monography we consider regularization methods of level set type for inverse problems. These problems are typically ill-posed in the sense of Hadamard (continuous dependency is not satisfied) and are modeled by nonlinear operators and by discontinuous operators as well. Due to this last characteristic, classical regularization techniques cannot be directly applied for these inverse problems, since these techniques require a Fréchet differentiability assumption on the parameter to output map. The regularization method considered here is based on the minimization of a Tikhonov functional. A generalized minimization concept is introduced. This is the starting point to prove existence of minima for the Tikhonov functional as well as to prove a convergency property of the regularization method. A numerical experiment concerning the emission tomography (EIT) problem is presented in order to illustrate the efficiency of the proposed method.

Conteúdo

Introdução	1
1 Teoria Clássica para Regularização de Problemas Inversos	2
1.1 Introdução aos Problemas Inversos e Mal Postos	2
1.2 Regularização de operadores	4
1.2.1 Regularização de Tikhonov	5
1.2.2 Regularização por métodos iterativos: Método de Landweber	7
1.2.3 Regularização assintótica	8
2 Métodos Level Set para problemas inversos	11
2.1 Formulação para problemas inversos	11
3 Métodos Level Set e Otimização Restrita	14
3.1 Formulação do problema inverso com operadores descontínuos	14
3.2 Método level set e otimização restrita	15
3.3 Análise de regularização por métodos level set	17
3.3.1 Boa colocação	25
3.3.2 Resultados de convergência	26
3.4 Solução numérica	29
3.4.1 Condição de otimalidade	31
3.5 Regularização iterativa em métodos level set	33
4 Aplicação: Tomografia por Impedância	36
4.1 Resultados preliminares	37
4.1.1 Continuidade e Fréchet diferenciabilidade em domínios derivativos	38
4.2 Descrição do problema	42
4.2.1 Tomografia por impedância - EIT	42
4.3 Reconstrução por regularização level set	43
4.3.1 Implementação numérica e exemplos	44
5 Apêndice: Notações e definições	50

Introdução

Uma vasta quantidade de problemas em ciências aplicadas, em especial, em ciências médicas, ambientais, em engenharia, estão relacionados com a determinação da forma de um conjunto $\mathbb{D} \subset \Omega$, onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio de referência conhecido. Diversos desses problemas são modelados por equações diferenciais parciais, em que a função característica de um conjunto \mathbb{D} representa um parâmetro que rege as leis físicas do sistema estudado como, por exemplo, a condutividade elétrica, a condutividade térmica de diferentes materiais. Tais problemas aparecem em aplicações relacionadas a medicina, com a detecção de tumores; em ciências ambientais, com o monitoramento de fluídos, detecção de depósitos de minerais no subsolo; em engenharia, com a detecção de corrosão em estruturas [4, 5, 6, 8, 10, 15, 18]. Esses problemas pertencem a família dos problemas de identificação ou reconstrução de parâmetros modelados por equações diferenciais parciais.

Neste trabalho tratamos de problemas de identificação de parâmetros que podem ser representados pela função característica de um conjunto $\mathbb{D} \subset \Omega$. A reconstrução de tais parâmetros, (ou analogamente da forma do conjunto \mathbb{D}) é feita por métodos de regularização tipo level set. Tais métodos tem como característica principal a representação da fronteira de \mathbb{D} através das curvas de nível de uma função, denominada *função level set*.

No Capítulo 1, apresentamos a teoria clássica de regularização para problemas inversos, em particular a regularização de Tikhonov e Landweber, ambos com algumas variantes, e a regularização assintótica. Nesse primeiro Capítulo, os resultados não são verificados com rigor, apenas apresentamos uma explanação da teoria. A verificação pode ser encontrada nas referências. O Capítulo 2 é uma breve introdução a teoria dos métodos level set em problemas inversos. A pretensão é a de introduzir a teoria de problemas que envolvem métodos level set bem como fazer referência aos trabalhos mais relevantes dessa abordagem. Para o Capítulo 3 é reservado a apresentação dos resultados de regularização para métodos level set sob o ponto de vista de otimização restrita. Nesse, resultados de existência de soluções para o problema inverso $F(u) = y$ (onde u pertence a uma classe admissível) são garantidos através de resultados teóricos, baseados em uma abordagem funcional analítica. No Capítulo 4 é apresentada uma aplicação do método iterativo derivado no Capítulo 3 para a reconstrução da forma de um conjunto $\mathbb{D} \subset \Omega$ no problema clássico de tomografia por impedância. Uma implementação numérica é apresentada no final desse Capítulo.

Capítulo 1

Teoria Clássica para Regularização de Problemas Inversos

Este capítulo, apresenta uma breve introdução aos problemas inversos e mal postos, com ênfase à apresentação de algumas estratégias de regularização. São apresentadas considerações, necessárias e suficientes, para a regularização de operadores lineares e não-lineares mal postos, de modo a garantir estabilidade e obter taxas de convergência. Em outras palavras, são impostas condições de regularidade no operador F para que tenhamos uma aproximação estável e convergente para a solução exata do problema, mesmo que seja num sentido fraco (veja [16]).

1.1 Introdução aos Problemas Inversos e Mal Postos

O estudo de problemas inversos é muito novo e também muito velho. Há cerca de dois milênios atrás, no livro VII do diálogo “*República*”, Platão propôs o filosófico problema de e reconstruir a “realidade” pela observação da imagem de objetos e pessoas através de sombras que são projetadas na penumbra de uma caverna. Com idéia de discutir aspectos filosóficos das fontes de conhecimento humano, Platão também estava introduziu o primeiro exemplo de problemas inversos que se tem relatos [26].

Nas últimas décadas, um novo campo de estudos na área de matemática aplicada, tem conquistado uma grande quantidade de pesquisadores adeptos. Esse trata de problemas como os formulados por Platão. A essa área de estudos denominamos *Problemas Inversos*. O súbito crescimento deve-se, certamente, ao grande número de aplicações em outras ciências, como, por exemplo, em geofísica, engenharia, ciências médicas (essa última, com ênfase na reconstrução de imagens), ciências ambientais, entre outras [3, 10, 16, 21].

Diante do exposto até agora surge a questão: O que são os chamados *problemas inversos*? Segundo [10], entendemos por um *problema inverso* aquele que aparece na tentativa de determinar uma causa, dada a observação de um efeito. Enquanto, um problema é dito *direto*, quando,

dada uma causa, determinamos o efeito. Em [21] diz-se que dois problemas são inversos um do outro se a formulação de um envolve todo (ou parcial) conhecimento da solução do outro. Assim, sempre que há um problema direto (o qual entendemos pelo que é mais estudado ou já é conhecido), existe um problema inverso (do qual ainda pouco se conhece).

Geralmente, representamos um problema inverso por equações do tipo

$$F(u) = y, \quad (1.1)$$

para um dado efeito y ; e uma causa a ser determinada u que pertence a um conjunto de dados admissíveis \mathcal{U} . Essa equação é gerada a partir de um modelo matematicamente determinado (ou a determinar) F , geralmente, um operador definido entre espaços de Hilbert \mathbb{X} e \mathbb{Y} . Para uma boa quantidade de aplicações, o operador F é linear e a teoria já é amplamente desenvolvida, por exemplo, para equações integrais de primeira espécie (veja [16]). No entanto, é possível que o operador F seja não-linear, e, para esse, a formulação, correspondente tratamento e obtenção de uma solução é bem mais complicada (veja [10]).

Existe uma diferença entre problemas inversos e diretos: os primeiros são, geralmente, *mal postos*. Segundo Hadamard, um problema de natureza matemática é *bem posto* se sua solução satisfaz as condições de *existência, unicidade e dependência contínua dos dados*, para todo conjunto de dados admissíveis. Caso uma dessas propriedades seja violada, dizemos que o problema é *mal posto*. Ou seja, problemas inversos não satisfazem algumas (ou todas) as condições de Hadamard.

Matematicamente, a questão de *existência de soluções* pode ser enfraquecida, bastando para tanto aumentar o espaço solução. Por exemplo, podemos considerar uma solução de norma mínima, como definida na equação (1.5). Em relação a *unicidade*, sua ausência significa que estão faltando informações no modelo. Podemos adicionar propriedades, impor mais condições ao operador, ou ainda, podemos escolher uma entre as várias soluções, a qual melhor corresponde ao modelo. A violação da *estabilidade* é a de maior importância. Se um problema não possui a propriedade de dependência contínua dos dados, surgem sérias complicações para obter uma solução aproximada. Tais complicações não podem ser compensadas por “truques” matemáticos.

Existência e unicidade de solução dependem unicamente da natureza algébrica dos espaços e do operador, isto é, do operador ser injetor e sobrejetor. Por outro lado, estabilidade depende primeiramente da topologia dos espaços envolvidos no problema, isto é, se existe o operador inverso $F^{-1} : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{X}$ e se esse é contínuo. Sendo assim, em várias aplicações é necessário considerar topologias diferentes das usuais para obtermos resultados de estabilidade e convergência.

Na prática, por questões relacionadas à obtenção dos dados (imprecisão dos aparelhos para tal) e à falta de rigor na modelagem matemática do problema, os dados não são conhecidos exatamente. Disponemos apenas de uma versão dotada de ruídos y^δ (que pode ou não pertencer

a imagem do operador F) para um $\delta > 0$ conhecido *a priori*, chamado de *nível de ruído*, que satisfaz

$$\|y - y^\delta\| \leq \delta. \quad (1.2)$$

Logo, a má-colocação do problema é agravada. Assim, ao invés de resolvermos a equação (1.1), passamos a resolver um problema do tipo

$$F(u) = y^\delta. \quad (1.3)$$

1.2 Regularização de operadores

É natural solucionar um problema do tipo (1.1) ou (1.3) aplicando o operador inverso F^{-1} . Na prática, nos deparamos muitas vezes com operadores que não possuem inversa ou, se a possuem, esta é ilimitada. Assim, não há possibilidades analíticas de garantirmos a dependência contínua dos dados, produzindo soluções inadequadas para o problema.

Para contornar impecílios como instabilidade e mal-condicionamento, introduzimos o conceito de *método de regularização*. Esse consiste de uma família de operadores (chamada de operadores de regularização) $R_\alpha : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{X}$, os quais são contínuos (não necessariamente lineares) e aproximam a inversa generalizada de F , denotada por F^\dagger . O método de regularização depende ainda de uma regra para escolha de parâmetros α (a qual pode ser feita *a-priori* ($\alpha = \alpha(\delta)$), ou *a-posteriori* ($\alpha = \alpha(\delta, y^\delta)$), dependendo do método de regularização utilizado), de maneira que, se o parâmetro de regularização α é escolhido de acordo com essa regra, então a solução regularizada u_α^δ converge (em alguma norma) para a solução de (1.1) quando $\delta \rightarrow 0$. Isto é, se o erro no pior caso (veja [10]) satisfaz

$$\limsup_{\delta \rightarrow 0} \{\|R_{\alpha(\delta)} y^\delta - F^\dagger y\| : y^\delta \in \mathbb{Y}, \|y^\delta - y\| \leq \delta\} = 0. \quad (1.4)$$

Além disso, o método de regularização depende do conceito de solução considerada e da topologia em que esse conceito de solução está imerso. Para considerações sobre convergência (e divergência) de soluções regularizadas em topologias fracas, veja [16].

Em outras palavras, um método de regularização consiste em aproximar a solução $u^\dagger := F^\dagger y$ (que pode ser a *solução generalizada*, veja [17]) de um problema mal posto como (1.1) por soluções de uma família de problemas bem postos $R_\alpha(y^\delta)$, de maneira a obtermos uma aproximação estável e que convirja para a solução do problema inverso considerado. Sintetizando, aplicamos métodos de regularização com o intuito de que o erro no pior caso (1.4) convirja para zero, com a mesma ordem do nível de ruídos δ . Uma vez confirmada a taxa de convergência, de acordo com o erro do pior caso, dizemos que essa taxa de convergência é *ótima* (veja [10]).

A arte de aplicar métodos de regularização está sempre relacionada com o compromisso entre precisão e estabilidade. Ou seja, procuramos por aproximações u_α^δ de u^\dagger , que dependam continuamente dos dados com ruídos y^δ (estabilidade), e que convirjam para u^\dagger , se o nível de ruídos δ convergir para zero (assumindo que o parâmetro de regularização α é escolhido de forma adequada).

Diante ao apresentado até então surgem as seguintes questões:

- (i) Como construir operadores de regularização?
- (ii) Como obter uma escolha de parâmetros para que um tal método de regularização convirja?
- (iii) É possível obter uma performance “ótima” nesse caminho? Isto é, podemos assegurar que um método de regularização produz taxas ótimas de convergência?

Para responder (iii), ou seja, para assegurar que um método de regularização produz taxas de convergência, é necessário obter algumas informações a-priori sobre a solução exata u^\dagger ou sobre y . Essas informações são formuladas em termos das *condições de fonte* (*source conditions*) para o problema inverso (veja [10, 16, 21]). Apenas com condições de fonte é possível obter taxas de convergência. As questões (i) e (ii) são respondidas na apresentação abaixo para os métodos de regularização de Tikhonov, Landweber e regularização assintótica.

1.2.1 Regularização de Tikhonov

Queremos garantir a existência de uma solução, denotada por u , para o problema (1.1), ou, mais geralmente, uma solução aproximada u_α^δ para (1.2). Para tal, seja $F : \mathcal{U} \subseteq \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ um operador, onde $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{X}$ é um conjunto de dados admissíveis com \mathbb{X} e \mathbb{Y} espaços de Hilbert. É assumida a existência de pelo menos uma u_0 – solução de norma mínima para (1.1), denotada por u^\dagger , que, por definição, satisfaz

$$F(u^\dagger) = y \quad e \quad \|u^\dagger - u_0\| := \min\{\|u_* - u_0\|; F(u_*) = y\}, \quad (1.5)$$

para um lado direito fixo $y \in \mathbb{Y}$, para toda $u_0 \in \mathcal{U}$. Ainda, são consideradas as hipóteses adicionais sobre F :

- (H1) F é limitado e linear;
- (H2) F é não-linear, contínuo e fracamente fechado, isto é, para qualquer seqüência $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(F)$, a convergência fraca de u_n para u em \mathbb{X} e a convergência fraca de $F(u_n)$ para $y \in \mathbb{Y}$ implica que $u \in \mathcal{D}(F)$ e $F(u) = y$.

Para o caso de múltiplas soluções u^\dagger , escolhe-se u_0 por um critério de seleção, o qual depende, na maioria das vezes, de alguma(s) informação(ões) *a priori* a respeito da solução preferida, se essa(s) está(ão) disponível(veis).

Quando o lado direito conhecido é provido de ruídos y^δ , com precisão $\|y - y^\delta\| \leq \delta$, procuramos por uma aproximação u_α^δ de u^\dagger , que minimize o funcional de Tikhonov

$$\|F(u) - y^\delta\|_{\mathbb{Y}}^2 + \alpha \|u - u_0\|_{\mathbb{X}}^2, \quad (1.6)$$

sendo $\alpha > 0$ um parâmetro de regularização e $u \in \mathcal{U}$.

Dadas as hipóteses **(H1)** e **(H2)** em F , segue-se de [10, Teorema 10.2] que existe pelo menos um mínimo para (1.6). Por outro lado, [10, Teorema 10.3] garante que, dado $y^\delta \in \mathbb{Y}$, com $\|y - y^\delta\| \leq \delta$ e $\alpha(\delta)$ escolhido de forma que $\alpha(\delta) \rightarrow 0$ e $\frac{\delta^2}{\alpha(\delta)} \rightarrow 0$, quando $\delta \rightarrow 0$, então toda seqüência $\{u_{\alpha_k}^\delta\}$, onde $\delta_k \rightarrow 0$, $\alpha_k := \alpha(\delta_k)$ e $u_{\alpha_k}^\delta$ é um mínimo de (1.6), possui uma subseqüência convergente. O limite de qualquer subseqüência convergente é um mínimo para (1.6) (resultado denominado de estabilidade). Ainda, o limite de qualquer subseqüência convergente é uma u_0 -solução de norma mínima (resultado denominado de convergência).

Segundo [10], resultados sobre taxas de convergência, são:

$$\|u_\alpha^\delta - u^\dagger\| = \mathcal{O}(\delta^{\frac{2\mu}{2\mu+1}}), \quad \mu \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], \quad (1.7)$$

para a solução regularizada u_α^δ , obtida através da regularização de Tikhonov, com uma escolha $\alpha \sim \delta^{\frac{2}{2\mu+1}}$. Caso F seja não linear as mesmas taxas são obtidas, desde que sejam impostas as condições adicionais:

(H3) o operador F é Fréchet diferenciável;

(H4) existe um $\gamma \geq 0$ tal que $\|F'(u^\dagger) - F'(u)\| \leq \gamma \|u^\dagger - u\|$, $\forall u \in \mathcal{U}$ numa bola centrada em u^\dagger e de raio conveniente;

(H5) existem $w \in \mathbb{X}$, constantes $2\mu \in (0, 1]$ e $E \geq 0$ satisfazendo a condição de fonte

$$u^\dagger - u_0 = (F'(u^\dagger)^* F'(u^\dagger))^\mu w \quad \|w\| \leq E \quad (1.8)$$

(onde, $F'(u^\dagger)^*$ representa o operador Hilbert adjunto da derivada de Fréchet de F);

(H6) é adicionado a condição de suavidade $\gamma \|w\| < 1$.

Observação 1.2.1 *Caso tenhamos $\mathbb{X} = \mathbb{Y} = L^2$, a condição natural de otimalidade para o funcional de Tikhonov, garantida a hipótese **(H3)** com $F'(u)^*$ como descrito em **(H4)**, é*

$$F'(u)^*(F(u) - y^\delta) + \alpha(u - u_0) = 0 \quad (1.9)$$

A teoria de regularização de Tikhonov é bem desenvolvida e possui tratamento preciso (veja [3, 10, 21]) para o caso de F ser linear. Para o caso de operadores não-lineares, o funcional

de Tikhonov apresenta, em geral, mínimos locais, o que é uma desvantagem. Desta maneira, uma alternativa são os métodos iterativos, os quais já possuem propriedades regularizantes.

O *método de Tikhonov iterado* é um método alternativo ao método de regularização de Tikhonov para o caso de F ser não-linear. Esse é definido pelo problema de minimização:

$$\min \|F(u_k^\delta) + F'(u_k^\delta)(z - u_k^\delta) - y^\delta\|^2 + \alpha_k \|z - u_{k-1}^\delta\|^2, \quad (1.10)$$

em termos de z , onde denotamos u_{k-1}^δ como um minimizador. Calculando formalmente uma condição de otimalidade para (1.10), obtemos o seguinte método iterativo:

$$\begin{aligned} u_0^\delta &:= u^*, & u^* &\text{valor inicial} \\ u_{k+1}^\delta &:= u_k^\delta + (F'(u_k^\delta)^* F'(u_k^\delta) + \alpha_k I)^{-1} F'(u_k^\delta)^* (y^\delta - F(u_k^\delta)) \quad \forall k > 0. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Este método também é conhecido como *método de Levenberg-Maquardt* (veja [10]).

1.2.2 Regularização por métodos iterativos: Método de Landweber

Como comentado acima, uma alternativa para regularização de operadores são os métodos iterativos, os quais tem propriedades auto-regularizantes (veja [10, 21] para definições).

Quando mencionamos métodos iterativos, nos vem em mente alguns métodos conhecidos e bem desenvolvidos, os quais são amplamente utilizados para resolver problemas bem postos. Por exemplo, o *método de Newton*, *método do gradiente conjugado* (com suas variantes) entre outros. No entanto, para solucionar problemas inversos, os quais são mal postos, Landweber (1951) propôs modificar a *equação normal* $F^*Fu = F^*y$, de forma a obter, a partir de uma ponto de partida u_* , uma forma iterativa de solucionar o problema (1.1), definindo aproximações u_k recursivamente por

$$\begin{aligned} u_k &= u_{k-1} + \omega F^*(y - Fu_{k-1}), \quad (k \in \mathbb{N}), \\ u_0 &= u_* \text{ usando algum conhecimento } a \text{ priori sobre a solução } u^\dagger \end{aligned} \quad (1.12)$$

onde $0 < \omega \leq \|T\|^{-2}$ é um parâmetro de relaxamento imposto de forma que as iterações de Landweber convirjam para a solução u^\dagger de (1.1). Podemos, sem perda de generalidade, suprimir o parâmetro ω supondo $\|F\| < 1$.

Para o caso com ruídos de nível δ , as iterações (1.12) tomam a forma

$$u_0^\delta = u_*, \quad u_k^\delta = u_{k-1}^\delta + \omega F^*(y^\delta - Fu_{k-1}^\delta), \quad (k \in \mathbb{N}). \quad (1.13)$$

Observação: Nas iterações definidas acima, consideramos F como um operador linear.

Caso o operador F seja não-linear, novas condições são impostas na definição das iterações

de Landweber. Estas são:

(H7) $F'(\cdot)$ é um operador contínuo em subconjuntos abertos e convexos de $\mathcal{D}(F) \subset \mathbb{X}$.

(H8) Em uma bola $B_r(\bar{u})$ de raio r em torno de \bar{u} temos

$$\|F(\tilde{u}) - F(u) - F'(u)(\tilde{u} - u)\| \leq \eta \|F(u) - F(\tilde{u})\| \quad \eta < 1 \quad (1.14)$$

para todo $u, \tilde{u} \in B_r(\bar{u}) \subset \mathcal{D}(F)$. Essa é conhecida como *condição do cone tangencial*.

Imposta a nova condição sobre F e denotando por $F'(\cdot)^*$ o adjunto de $F'(\cdot)$, as iterações de Landweber para o caso não-linear ficam definidas por

$$u_k^\delta = u_{k-1}^\delta + F'(u_{k-1}^\delta)^*(y^\delta - F u_{k-1}^\delta), \quad (k = 1, 2, \dots, N), \quad (1.15)$$

onde o número de iterações N determina a regra de parada do método, a qual é dada pelo princípio de discrepância

$$\|y^\delta - F(u_N^\delta)\| < \tau\delta \leq \|y^\delta - F(u_k^\delta)\| \quad 0 \leq k < N. \quad (1.16)$$

Se $N = N(\delta)$ é escolhido pelo princípio de discrepância, para algum $\tau > 2$, então da condição **(H7)** acima temos:

$$(i) \quad u_N^\delta \longrightarrow u^\dagger \quad (\delta \rightarrow 0); \quad (ii) \quad \|u_N^\delta - u^\dagger\| \leq c\delta^{\frac{2\mu}{2\mu+1}} \quad 2\mu \in (0, 1],$$

com c uma constante independente de δ . A prova de (ii) requer a condição de fonte **(H5)**.

A condição (ii) é de ordem ótima para a iteração de Landweber (veja [10]).

Introduzindo a penalização à equação (1.15), com $0 \leq \omega_k \leq 1$ e $\xi \in B_\rho(u_0) \subset \mathcal{D}(F)$, definida por

$$u_{k+1} = u_k - F'(u_k)^*(F(u_k) - y) - \omega_k(u_k - \xi), \quad (1.17)$$

obtemos a chamada de *iteração de Landweber modificada*. A vantagem desta iteração é de podermos obter taxas de convergência com condições de fonte usuais, sem que seja necessário usar condições de fonte (1.8) em F' (veja [4] para maiores detalhes).

1.2.3 Regularização assintótica

Assim como os métodos de regularização de Tikhonov e Landweber, a regularização assintótica é aplicada a problemas inversos lineares e não-lineares. No entanto, faremos aqui considerações com atenção voltada para problemas não-lineares mal postos.

O método de regularização assintótica é a forma contínua do método descrito em (1.15). Neste método, uma solução regularizada $u^\delta(T)$ para u^* é obtida pela solução do problema de valor inicial

$$\dot{u}^\delta(t) = F'(u^\delta(t))^*[y^\delta - F(u^\delta(t))] \quad 0 < t \leq T, \quad u^\delta(0) = \bar{u}. \quad (1.18)$$

Considerando a hipótese **(H8)** e $u^\delta(T)$ uma solução de (1.18) para $T > 0$, obtém-se

$$\frac{d}{dT} \|F(u^\delta(T)) - y^\delta\|^2 = -2 \|F'(u^\delta(T))^*[F(u^\delta(T)) - y^\delta]\|^2. \quad (1.19)$$

Além disso, sejam (1.2) e a hipótese **(H8)** satisfeitas e u_* uma solução de (1.1) na bola $B_r(\bar{u})$. Então, segundo [28, Proposição 1], valem as estimativas

$$\frac{d}{dT} \|u^\delta - u^*\| \leq -2 \|F(u^\delta(T)) - y^\delta\| \{(1 - \eta) \|F(u^\delta(T)) - y^\delta\| - (1 + \eta)\delta\}. \quad (1.20)$$

Caso $\delta = 0$ temos

$$\int_0^\infty \|F(u(T)) - y\|^2 dT \leq \frac{1}{2(1 - \eta)} \|u^* - \bar{u}\|^2. \quad (1.21)$$

Observação 1.2.2 A propriedade (1.19) mostra que a discrepância $\|F(u^\delta(T)) - y^\delta\|$ como uma função de T é monotonamente não crescente. Além disso, a propriedade (1.20) mostra que o erro $\|u^\delta(T) - u^*\|$ como uma função de T decresce monotonamente tanto mais rápido quanto maior a desigualdade $\|F(u^\delta(T)) - y^\delta\| > \tau\delta$ com $\tau = \frac{1+\eta}{1-\eta}$. Assim, a escolha do parâmetro de regularização em (1.18) é tomada como um novo princípio de discrepância, i.e., $T = T^*$ que é uma solução da equação não-linear (1.16).

Na mesma linha, para $u^\delta(T)$ solução de (1.18) e u_* solução de (1.1) na bola $B_r(\bar{u})$ com a hipótese **(H8)**, $\|F(u^\delta(T)) - y^\delta\| > \tau\delta$ e $\tau = \frac{1+\eta}{1-\eta}$ satisfeitas, prova-se que a função $h(T) := \|F(u^\delta(T)) - y^\delta\| - \tau\delta$ em (1.16) possui uma única solução $T^* < \infty$ (veja [28, Proposição 2]).

Assumindo as hipóteses apresentadas nos últimos parágrafos e $T = T^*$ escolhido de acordo com o princípio de discrepância (1.16), $u^\delta(T^*)$ solução de (1.18) e (1.1) solúvel na bola $B_r(\bar{u})$, então

$$u^\delta(T^*) \longrightarrow u_* \quad (\delta \longrightarrow 0)$$

(convergência), onde $u_* \in B_r(\bar{u})$ é solução de (1.1). Este resultado é válido também para dados sem ruídos (veja [28, Teorema 4]).

Para obtermos ordem de otimalidade com o método de regularização assintótica para problemas não lineares, fazemos a hipótese adicional

(H9) Para todo $u \in B_r(\bar{u})$ existe um operador linear limitado $R_u : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{X}$ e uma constante $C \geq 0$ tal que:

$$(i) \quad F'(u) = R_u F'(u^\dagger);$$

$$(ii) \quad \|R_u - I\| \leq C \|u - u^\dagger\|.$$

Prova-se também em [28, Teorema 6] que, sob certas hipótese fortes (como **(H5)**, **(H8)** e **(H9)**), $\|u^\delta(T) - u^\dagger\| \leq cE^{\frac{1}{2\mu+1}} \delta^{\frac{2\mu}{2\mu+1}}$, onde E é suficientemente pequeno. Esta é uma taxa de ordem ótima de acordo com a definição em [10].

Capítulo 2

Métodos Level Set para problemas inversos

Muitos problemas inversos consistem em encontrar uma região desconhecida de \mathbb{R}^N . A princípio, essas regiões podem constituir-se de várias sub-regiões conexas. Como exemplos, citamos o *problema do espalhamento inverso por um obstáculo*, *reconstrução de imagens*, [4, 7, 27], *tomografia por impedância* [5, 6, 8, 15], *problema do potencial inverso* [4, 7, 23].

Métodos Level Set foram desenvolvidos para problemas de deslocamento (ou evolução) de curvas e superfícies por Osher e Sethian [25]. Estes métodos mostraram-se eficientes para solucionar problemas inversos de reconstrução de regiões, como no trabalho pioneiro de F. Santosa [27], que, mesmo sem rigor matemático, obteve sucesso com a formulação para *problemas inversos envolvendo obstáculos*. M. Burger [7], apresentou a primeira formulação com rigor matemático para a teoria de métodos level set em problemas inversos. Posteriormente, nos trabalhos de A. Leitão e O. Scherzer [23] e F. Frühauf et al. [14], o mesmo problema foi tratado como um problema inverso de otimização restrita. Nestes, uma nova visão foi proposta e resultados expressivos de convergência foram obtidos (veja Capítulo 3).

Métodos level set são vantajosos, pois fornecem uma maneira natural para descrever curvas fechadas, particularmente, aquelas que variam seqüencialmente seguindo certas regras. Ainda, estes métodos, tem a característica de aproximar satisfatoriamente variações topológicas através de uma sucessão de deslocamentos.

2.1 Formulação para problemas inversos

A família particular de problemas inversos envolvendo obstáculos é caracterizada pelo fato de que podem ser formulados como: dado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N = 2$ ou 3), encontrar a forma do conjunto $\mathbb{D} \subset \text{int}(\Omega)$ ou de sua fronteira a partir de informações indiretas sobre \mathbb{D} .

De forma abstrata, formulamos o problema por:

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto (fixo) dado, $F : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{Y}$ um operador Fréchet diferenciável, \mathbb{X} e \mathbb{Y} espaços de Hilbert ou Banach. O problema é encontrar $\mathbb{D} \subset \text{int}(\Omega)$ satisfazendo a equação (1.1), onde $u := \chi_{\mathbb{D}}$. O conjunto \mathbb{D} representa o modelo de parâmetros (desconhecido), y representa os dados do problema e F é o operador que aplica o modelo nos dados.

Aproximações por métodos level set em problemas inversos consistem em gerar uma seqüência de funções $\phi_k : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ de forma que $\mathbb{D}_k \longrightarrow \mathbb{D}$, com fronteiras descritas como $\partial\mathbb{D} = \{x \in \Omega; \phi(x) = 0\}$ e $\partial\mathbb{D}_k = \{x \in \Omega; \phi_k(x) = 0\}$ respectivamente. O *parâmetro de evolução* k pode ser interpretado como uma *variável temporal* e pode ser considerado contínuo. A função $\phi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ é dita *função level set*. Pensando em uma evolução contínua, introduzimos a variável livre t como um tempo artificial. Assim a função level set depende de ambos t e x , i.e., $\phi = \phi(x, t)$. Deste modo, $\partial\mathbb{D}(t) := \{x \in \Omega; \phi(x, t) = 0\}$.

Em termos de ϕ , obtemos a representação de u como

$$u(x, t) = \begin{cases} u_{int}; & \{x \in \Omega; \phi(x, t) < 0\} \\ u_{ext}; & \{x \in \Omega; \phi(x, t) > 0\}, \end{cases} \quad (2.1)$$

que é chamada de representação level set de u .

Observação 2.1.1 *Das formulações acima seguem as seguintes observações:*

- (1) A representação por level set para um conjunto $\mathbb{D} \subset \text{int}(\Omega)$ não é única. De fato, dadas ϕ uma representação level set de \mathbb{D} e qualquer constante $c > 0$, então $\psi(x) := c\phi(x)$ é também uma representação level set para \mathbb{D} .
- (2) Não há necessidade de impor nenhuma condição a-priori sobre a topologia de \mathbb{D} .
- (3) Mesmo no caso em que F é linear, a formulação level set torna a equação (1.1) não-linear, uma vez que u depende de ϕ de forma não linear.

Para o caso em que $\mathbb{X} = \mathbb{Y} = L^2(\Omega)$, solucionar o problema inverso (1.1) equivale a minimizar o funcional de Tikhonov

$$J(u) = \frac{1}{2} \|F(u) - y\|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha \|u - u_0\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad (2.2)$$

Em concordância com (1.9), uma condição de otimalidade para minimizar (2.2) é

$$F'(u_\alpha)^*(F(u_\alpha) - y) + \alpha(u_\alpha - u_*) = 0.$$

Definindo formalmente $\frac{1}{\Delta t} =: \alpha$, $u_\alpha =: u(\cdot, t + \Delta t)$, $u_* := u(\cdot, t)$ e tomando o limite formal quando $\Delta t \longrightarrow 0^+$ na equação acima, obtemos

$$\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, t) = F'(u(\cdot, t))^*[y - F(u(\cdot, t))], \quad (2.3)$$

que é um método de regularização assintótica como descrito em (1.18). Esse foi o ponto de partida para uma análise rigorosa dos métodos level set proposta por M. Burger [7] em 2001.

Santosa em [27] propôs tomar uma velocidade para a evolução da função level set $\phi_k(x, t)$ de forma que $J(u(x, t))$ seja uma função decrescente em t . Com argumentos eurísticos, Santosa propôs como velocidade de deslocamento para as funções level set a expressão $v(x, t) := F'(u(x, t))^*[y - F(u(x, t))]$, $x \in \Omega$.

Observação 2.1.2 *Apesar da escolha eurística feita por Santosa para a velocidade v ter-se mostrado eficiente, esta não permite que se faça uma análise rigorosa deste método level set. Por exemplo, não é possível provar que $\mathbb{D}(x, t) \rightarrow \mathbb{D}(T)$, uma solução de (1.1), já que não existe métrica que possibilite analisar convergência de $\mathbb{D}(x, t)$ a $\mathbb{D}(T)$, ou equivalentemente, de $u(x, t)$ para $u(x, T)$.*

Em [7], M. Burger deduziu propriedades para a aproximação por métodos level set que são semelhantes às propriedades da regularização assintótica. Burger definiu um funcional de Tikhonov, motivado pela observação do funcional erro (1.20) para dados sem ruídos, baseado na métrica da diferença simétrica (veja Apêndice, Definição 5.0.2). A partir de propriedades já conhecidas da regularização assintótica Burger mostrou que o conjunto perturbado $\mathbb{D}(\cdot, t)$ converge para o conjunto $\mathbb{D}(\cdot, T)$ na métrica da diferença simétrica, caso $T = T^*$ seja escolhido através do princípio de discrepância.

A. Leitão e O. Scherzer [23] e posteriormente, F. Fröhlich, O. Scherzer e A. Leitão [14], propuseram olhar para problemas inversos envolvendo obstáculos de uma maneira diferente. A proposta é ver o problema como um problema restrito $F(u) = y$, onde u pertence a um conjunto admissível (veja Capítulo 3). Os métodos level set são interpretados como métodos de regularização restritos, baseados na regularização de Tikhonov e estratégias de projeção. Essa nova formulação, permitiu obter resultados de convergência. O tratamento proposto em [23] e [14] será apresentado de forma mais detalhada no Capítulo 3.

Observação 2.1.3 *Mesmo sendo possível provar convergência para métodos level set, assim como feito nos trabalhos [7] e [14], não é possível obter taxas de convergência. Isso deve-se ao fato de não ser possível formular condições de fonte, compatíveis e cuja interpretação coincida com a formulação level set.*

Capítulo 3

Métodos Level Set e Otimização Restrita

Este capítulo destina-se a apresentação de uma alternativa para aproximação por métodos level set para problemas inversos envolvendo obstáculos. Esta alternativa está baseada em considerar o problema inverso como um problema de otimização restrita, para o qual a solução é buscada levando-se em conta os métodos de regularização apresentados no Capítulo 1.

Em muitas aplicações, como em problemas de reconstrução de imagens (tomografia por impedância e potencial inverso), os métodos de resolução envolvem teoria de problemas inversos, otimização de formas, otimização restrita. Uma alternativa recente para a solução de tais problemas é o tratamento via regularização level set.

3.1 Formulação do problema inverso com operadores descontínuos

De uma forma geral, um problema inverso envolvendo operadores descontínuos, consiste em solucionar a equação mal posta

$$F(u) = y^\delta, \tag{3.1}$$

onde $F : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ é um operador contínuo e Fréchet diferenciável. Ainda temos: $y \in \mathbb{Y}$ com $\|y - y^\delta\|_{\mathbb{Y}} \leq \delta$ e u pertencente a um conjunto de classes admissíveis

$$\mathcal{U} := \{u : u = P(\phi) \text{ e } \phi \in \mathcal{D}(P)\}, \tag{3.2}$$

com P um operador descontínuo na topologia de um subespaço de \mathbb{X} no conjunto de classes admissíveis \mathcal{U} .

O problema restrito (3.1) (3.2) pode ser reformulado de maneira irrestrita como

$$F(P(\phi)) = y. \quad (3.3)$$

Observação 3.1.1 *Mesmo que F seja linear, $F(P(\phi)) = y$ é não linear, pois P é não-linear (compare com a Observação 2.1.1).*

Na apresentação feita no Capítulo 1, a teoria clássica de regularização em espaços de Hilbert garante: *existência, estabilidade e propriedades de aproximação* de uma solução regularizada, caso o operador P satisfaça **(H1)** e **(H2)**. Como P não é contínuo, essa teoria não se aplica diretamente.

3.2 Método level set e otimização restrita

Faremos a derivação do método level set para o problema de otimização restrito, onde solucionamos (3.1) sobre o conjunto das funções que são constantes por partes. Especificamente, tratamos de funções como em (2.1), em que u_{int} e u_{ext} tomam valores distintos e constantes (1 e 0 por exemplo). Denotaremos por $\chi_{\mathbb{D}}$ como a função característica e $\mathcal{H}^{n-1}(\partial\mathbb{D})$ a medida de Hausdorff $(n-1)$ -dimensional do conjunto \mathbb{D} .

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ com $\partial\Omega$ Lipschitz, $y \in \mathbb{Y}$ um espaço de Banach e o conjunto de classes admissíveis definido por

$$\mathcal{U} := \{u : u = \chi_{\mathbb{D}} : \mathbb{D} \subset \Omega \text{ mensurável e } \mathcal{H}^{n-1}(\partial\mathbb{D}) < \infty\}. \quad (3.4)$$

O problema inverso pode ser formulado de forma irrestrita, solucionando (3.3) com F definido em (3.1) e

$$P : H^1(\Omega) \longrightarrow \mathcal{U} \text{ com } P(\phi) := \begin{cases} 1 & \text{se } \phi(x) \geq 0 & x \in \mathbb{D}. \\ 0 & \text{se } \phi(x) < 0 & x \in \Omega \setminus \overline{\mathbb{D}} \end{cases}$$

O espaço $H^1(\Omega)$ é escolhido por conveniência. A única justificativa para tal escolha é a de que funções distância para domínios suaves estão em $H^1(\Omega)$.

Observação 3.2.1 *O operador P está bem definido. Com efeito, sejam $\phi \in H^1(\Omega)$ e $\mathbb{D} := \{x \in \Omega : \phi(x) \geq 0\}$. Como ϕ é mensurável, então $\mathbb{D} = \phi^{-1}([0, \infty[)$ é mensurável.*

Poderíamos considerar vários outros operadores ao invés de P . Um exemplo para o caso em que a restrição é positiva pode ser dada pelo operador $P^+(t) := \exp(t)$, no conjunto de classes admissíveis $\mathcal{U}^+ := \{u : 0 < u = P^+(\phi)\}$.

O protótipo para solucionar o problema (3.3) é aplicar a regularização de Tikhonov. Esta consiste em minimizar o funcional

$$J_\alpha(\phi) := \|F(P(\phi)) - y^\delta\|_{\mathbb{Y}}^2 + \alpha\|\phi - \phi_0\|_{H^1(\Omega)}^2 \quad (\alpha > 0), \text{ sobre } H^1(\Omega). \quad (3.5)$$

Como o funcional (3.5) não necessariamente atinge um mínimo, introduzimos um conceito generalizado de mínimo:

$$\phi_\alpha = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \phi_{\varepsilon, \alpha}, \quad (3.6)$$

onde o limite deve ser entendido apropriadamente, e $\phi_{\varepsilon, \alpha}$ é o minimizador do funcional

$$J_{\varepsilon, \alpha}(\phi) := \|F(P_\varepsilon(\phi)) - y^\delta\|_{\mathbb{Y}}^2 + \alpha\|\phi - \phi_0\|_{H^1(\Omega)}^2 \quad (\alpha > 0), \quad (3.7)$$

para a aproximação P_ε de P quando $\varepsilon \rightarrow 0^+$ definida por

$$P_\varepsilon(\phi(x)) := \begin{cases} 0 & \text{se } \phi(x) < -\varepsilon, \\ 1 + \frac{\phi(x)}{\varepsilon} & \text{se } \phi(x) \in [-\varepsilon, 0], \\ 1 & \text{se } \phi(x) > 0 \end{cases} \quad x \in \Omega. \quad (3.8)$$

Observação 3.2.2 Denotemos por $F'(u)^*$ e $P'_\varepsilon(\phi)^*$ os L^2 -adjuntos de $F'(u)$ e $P'_\varepsilon(\phi)$, respectivamente, i.e., para todo $w_1, w_2 \in L^2(\Omega)$ vale

$$\int_{\Omega} w_1(F'(u)w_2) = \int_{\Omega} (F'(u)^*w_1)w_2 \quad e \quad \int_{\Omega} w_1(P'_\varepsilon(\phi)w_2) = \int_{\Omega} (P'_\varepsilon(\phi)^*w_1)w_2$$

Observação 3.2.3 É fácil ver que a derivada de Fréchet de $P_\varepsilon(\phi)$ é auto-adjunta, onde:

$$P'_\varepsilon(\phi(x))(v) := \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon}v(x) & \text{se } \phi(x) \in [-\varepsilon, 0], \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Neste trabalho definiu-se $P'(t) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} P'_\varepsilon(t) = \delta(t)$ (veja Apêndice).

Observação 3.2.4 Uma das vantagens de métodos level set é a de recuperar variações da topologia do conjunto de nível, como uma evolução do tempo. Em [23] A. Leitão e O. Scherzer propuseram uma formulação considerando mínimos generalizados. Mas a formulação apresentada em [23], não é válida para grandes perturbações da topologia do conjunto de nível-zero. Em particular, uma das dificuldades é o caso de uma topologia que contenha buracos. Essa topologia, não é contemplada pelo método level set obtido em [23]. O motivo é a utilização da Teoria de Morse para superfícies, a qual não é válida para grandes variações topológicas. A regularização level set deduzida em [23], depende essencialmente da Teoria de Morse.

3.3 Análise de regularização por métodos level set

O *metodo level set* para otimização restrita obtido em [23] não dá margens a uma análise de convergência mais detalhada. Para tanto, em [14] Frühauf *et.al.*, foi proposto um novo conceito de mínimo e uma nova penalização no funcional de Tikhonov de forma a obter propriedades de regularização. Com a nova formulação é possível garantir a obtenção de um mínimo, mesmo que em um sentido generalizado.

De agora em diante, consideraremos $F : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ como um operador contínuo, definido sobre espaços $\mathbb{X} := L^1(\Omega)$ e \mathbb{Y} como um espaço de Banach, a menos que se faça menção em contrário. Ainda, faremos algumas hipóteses adicionais.

(H10) Assumiremos que (3.3) possui uma solução, i.e., existe um $z \in \mathcal{U}$ satisfazendo $F(z) = y$ e $P(\phi) = z$ para uma função $\phi \in H^1(\Omega)$ tal que $|\nabla\phi| \neq 0$ em uma vizinhança do conjunto de nível $\{\phi = 0\}$.

(H11) $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ é limitado, com $\partial\Omega$ pertencente ao conjunto C^1 por partes.

(H12) $\varepsilon, \alpha, \beta$ são parâmetros positivos.

Lema 3.3.1 *Para toda seqüência $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em $H^1(\Omega)$ convergindo para $\phi \in H^1(\Omega)$ o operador $P_\varepsilon(\phi_n)$ converge para $P_\varepsilon(\phi)$ na norma de $L^1(\Omega)$.*

Demonstração : Seja $\phi_n \rightarrow \phi \in H^1(\Omega)$, então:

$$\begin{aligned} \|P_\varepsilon(\phi_n) - P_\varepsilon(\phi)\|_{L^1(\Omega)} &= \int_{\Omega} |P_\varepsilon(\phi_n) - P_\varepsilon(\phi)| d\mathcal{L}^n \leq \int_{\Omega} \frac{1}{\varepsilon} |\phi_n - \phi| d\mathcal{L}^n \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon} \left(\int_{\Omega} 1 d\mathcal{L}^n \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |\phi_n - \phi|^2 d\mathcal{L}^n \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\varepsilon} \sqrt{\mathcal{L}^n(\Omega)} \|\phi_n - \phi\|_{L^2(\Omega)}. \quad \square \end{aligned}$$

Teorema 3.3.2 *Para qualquer $\phi_0 \in H^1(\Omega)$, o funcional $J_{\varepsilon, \alpha}$, definido em (3.7), atinge um mínimo $\phi_{\varepsilon, \alpha}$ em $H^1(\Omega)$.*

Demonstração : Da continuidade de F sobre $L^1(\Omega)$, segue que

$$\inf J_{\varepsilon, \alpha}(\phi) \leq J_{\varepsilon, \alpha}(0) < \infty.$$

Seja $\{\phi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ uma seqüência em $H^1(\Omega)$ satisfazendo $J_{\varepsilon, \alpha}(\phi_k) \rightarrow \inf J_{\varepsilon, \alpha}$. Então, a seqüência $\{\phi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ é uniformemente limitada em $H^1(\Omega)$. Com efeito, tome $\phi \in H^1(\Omega)$. Para cada $k \in \mathbb{N}$ fixo,

$$\alpha \|\phi_k\|_{H^1(\Omega)} \leq \alpha \|\phi_k - \phi\|_{H^1(\Omega)} + \alpha \|\phi\|_{H^1(\Omega)} + \|F(P_\varepsilon(\phi_k)) - y^\delta\|_{\mathbb{Y}} = J_{\varepsilon, \alpha}(\phi_k) + \alpha \|\phi\|_{H^1(\Omega)}.$$

Assim, $\{\phi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ é uniformemente limitada em $H^1(\Omega)$. Consequentemente, esta possui uma subsequência fracamente convergente em $H^1(\Omega)$, pois $H^1(\Omega)$ é um espaço de Hilbert. Pelo Teorema de imersões compactas de Sobolev [1, Teorema 6.2], $\{\phi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ possui uma subsequência convergindo forte em $L^2(\Omega)$. Denote esta subsequência também por $\{\phi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ e por $\phi \in L^2(\Omega)$ o seu limite. Do Lema 3.3.1 segue que

$$\|P_\varepsilon(\phi_k) - P_\varepsilon(\phi)\|_{L^1(\Omega)} \leq \frac{1}{\varepsilon} \sqrt{\mathcal{L}^n(\Omega)} \|\phi_k - \phi\|_{L^2(\Omega)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

Da continuidade de F em $L^1(\Omega)$ e da semi-continuidade fraca inferior da norma em espaços de Hilbert, temos

$$\begin{aligned} \|F(P_\varepsilon(\phi_k)) - F(P_\varepsilon(\phi))\|_{\mathbb{Y}} &\longrightarrow 0 \\ \|\phi - \phi_0\|_{H^1(\Omega)}^2 &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|\phi_k - \phi_0\|_{H^1(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Portanto,

$$J_{\varepsilon, \alpha}(\phi) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} J_{\varepsilon, \alpha}(\phi_k) = \inf J_{\varepsilon, \alpha}. \quad \square$$

A definição do funcional J_α como em (3.5) produz dificuldades extras na tentativa de uma análise rigorosa da regularização por métodos level set. A justificativa é que não temos garantias que o operador F seja fracamente fechado. Essa é uma propriedade necessária para garantir que o mínimo para o funcional J_α pertença ao espaço solução (veja [10, Capítulo 10]).

Uma possível situação é:

d₁. Suponha que $\phi_{\varepsilon, \alpha}$ satisfaça

$$\|P(\phi_{\varepsilon, \alpha})\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1 \quad e \quad \|\phi_{\varepsilon, \alpha} - \phi_0\|_{H^1(\Omega)} < \infty.$$

Como $L^\infty(\Omega)$ é o espaço dual de $L^1(\Omega)$ [1, Teorema 2.34], i.e., $L^1(\Omega)^* = L^\infty(\Omega)$, então existe uma subsequência $\{\phi_{\varepsilon_k, \alpha_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ tal que

$$\phi_{\varepsilon_k, \alpha_k} \rightharpoonup \phi \text{ em } H^1(\Omega) \quad e \quad P(\phi_{\varepsilon_k, \alpha_k}) \overset{*}{\rightharpoonup} z \text{ em } L^\infty(\Omega).$$

No entanto, não é possível provar que $z \in \mathcal{U}$, i.e., não existem evidências analíticas de que z pertença a imagem do operador P .

Para contornar essas dificuldades faremos uma hipótese sobre a seqüência $\{\phi_{\varepsilon_k, \alpha_k}\}$:

(H13) Assumimos que a seqüência $\{\phi_{\varepsilon_k, \alpha_k}\}$ possui a medida de Hausdorff para a fronteira do conjunto $\{x : \phi_{\varepsilon_k, \alpha_k}(x) \geq 0\}$ uniformemente limitada.

Assumindo **(H13)**, então a semi-norma para a função de variação limitada (veja Definição 5.0.1 no Apêndice) $P(\phi_{\varepsilon_k, \alpha_k})$ é uniformemente limitada, conseqüentemente, possui uma subsequência convergente na topologia de $L^1(\Omega)$ [11, Teorema 4, pg. 176], mostrando que $z \in \mathcal{U}$ contornando a dificuldade \mathbf{d}_1 .

Isto sugere uma penalização no funcional (3.5) com a incorporação de um termo regularizante, associado a semi-norma da função de variação limitada $P(\phi)$, penalizando o tamanho do conjunto de nível zero de ϕ . Ou seja, passaremos a minimizar o funcional modificado

$$\mathcal{F}_\alpha(\phi) := \|F(P(\phi)) - y^\delta\|_{\mathbb{Y}}^2 + 2\alpha\beta|P(\phi)|_{BV} + \alpha\|\phi - \phi_0\|_{H^1(\Omega)}^2. \quad (3.9)$$

Em [9], discute-se a incorporação da semi-norma de variação limitada ao funcional (3.9). Embora haja concordância na necessidade de penalizar o conjunto de nível zero, a crítica feita por Doel e Ascher [9] é de que a semi-norma de variação limitada não é um termo regularizante, pois a projeção da função level set $P(\phi)$ elimina a função level set totalmente. Ainda, como $P(\phi)$ depende somente da interface, a imposição da semi norma $|P(\phi)|_{BV(\Omega)}$ não remove o núcleo ϕ , permitindo múltiplos mínimos para o funcional (??) (veja Observação 3.3.4).

Para garantir a existência de um mínimo para o funcional (3.9), F. Fröhlich *et al.* definiram um novo conceito de minimizador, o qual é tomado sobre o produto cartesiano $\mathcal{U} \times H^1(\Omega)$. O intuito é de impor condições de forma que o funcional de Tikhonov (3.9) atinja mínimos e então aplicar o método de regularização de Tikhonov apresentado no Capítulo 1.

Definição 3.3.3 [Novo conceito de minimização]

(C₁) Um **par** de funções $(z, \phi) \in \mathcal{U} \times H^1(\Omega)$ é dito **admissível** se existem

(i) uma seqüência $\{\phi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ em $H^1(\Omega)$, tal que $\phi_k \rightarrow \phi$ com respeito a norma no espaço de Hilbert $L^2(\Omega)$;

(ii) uma seqüência $\{\varepsilon_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ de números positivos convergindo para zero, tal que

$$P_{\varepsilon_k}(\phi_k) \rightarrow z \text{ em } L^1(\Omega).$$

(C₂) Um mínimo para o funcional \mathcal{F}_α é considerado como qualquer par admissível de funções (z, ϕ) minimizando

$$\mathcal{F}_\alpha(z, \phi) = \|F(z) - y^\delta\|_{\mathbb{Y}}^2 + \alpha\rho(z, \phi) \quad (3.10)$$

sobre todos os pares admissíveis. Aqui, $\rho(z, \phi)$ é definido por

$$\rho(z, \phi) := \inf \left\{ \liminf_{k \rightarrow \infty} \left\{ 2\beta|P_{\varepsilon_k}(\phi_k)|_{BV(\Omega)} + \|\phi_k - \phi_0\|_{H^1(\Omega)}^2 \right\} \right\}, \quad (3.11)$$

onde o ínfimo é tomado com respeito a todas as seqüências $\{\varepsilon_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ satisfazendo (C_1) item (ii) e $\{\phi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ satisfazendo (C_1) item (i).

No que segue, faremos algumas observações pertinentes a definição do novo conceito de minimização.

Observação 3.3.1 *Esse novo conceito de mínimo permite a análise de minimizadores para $\mathcal{F}_\alpha(\phi)$. Um minimizador de $\mathcal{F}_\alpha(\phi)$ é um minimizador de $\mathcal{F}_\alpha(z, \phi)$ no conjunto de pares admissíveis.*

Observação 3.3.2 *Suponha o operador P contínuo. Neste caso, podemos definir $P_\varepsilon := P$. Então, a classe de pares admissíveis (z, ϕ) satisfazendo a definição (3.3.3) também satisfazem a equação $P(\phi) = z$ trivialmente. Esta é uma outra formulação de otimização restrita, a qual difere da tratada aqui, pois o operador P considerado é descontínuo, conseqüentemente, o novo conceito de mínimo faz-se necessário.*

Exemplo 3.3.4 *Seja $\phi \in H^1(\Omega)$ satisfazendo $|\nabla\phi| > 0$ em uma vizinhança do conjunto de nível $\{\phi = 0\}$.*

(a) Tome $\phi_k := \phi \in H^1(\Omega)$ e $z = P(\phi) = P(\phi_k)$. Note que para qualquer seqüência $\varepsilon_k \rightarrow 0$, temos

$$\begin{aligned} \|P_{\varepsilon_k}(\phi) - P(\phi)\|_{L^1(\Omega)} &= \int_{\phi^{-1}[-\varepsilon_k, 0]} \left| 1 - \frac{\phi}{\varepsilon_k} \right| d\mathcal{L} \leq \int_{\phi^{-1}[-\varepsilon_k, 0]} 1 d\mathcal{L} \\ &= \int_{-\varepsilon_k}^0 \left(\int_{\phi^{-1}[\tau]} 1 d\tau \right) dt \leq \mathcal{L}[\phi^{-1}(\tau)] \int_{-\varepsilon_k}^0 1 dt \xrightarrow{\varepsilon_k \rightarrow 0} 0, \end{aligned}$$

pois, por hipótese, $|\nabla\phi| > 0$ em uma vizinhança do conjunto de nível zero. Ou seja, ϕ é um difeomorfismo local. Segue-se da Definição (3.3.3) que (z, ϕ) é admissível.

Em particular, da hipótese **(H10)**, temos $F(z) = y$. Assim, o conjunto de pares admissíveis com $F(z) = y$ é não vazio.

(b) Seja $\phi \in H^1(\Omega)$ e denote $\phi_k := \frac{1}{k}\phi$. Tome a seqüência $\varepsilon_k := \frac{1}{k} \rightarrow 0$. Então,

$$\begin{aligned} \|P_{\varepsilon_k}(\phi_k) - z\|_{L^1(\Omega)} &= \int_{\Omega} |P_{\varepsilon_k}(\phi_k) - z| d\mathcal{L}^n = \int_{\phi_k^{-1}[-\varepsilon_k, 0]} \left| 1 + \frac{\phi_k}{\varepsilon_k} \right| d\mathcal{L}^n \\ &\leq \int_{\phi^{-1}[-\frac{1}{k}, 0]} |1 + \phi| d\mathcal{L}^n \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Logo, $P_{\varepsilon_k}(\phi_k) \rightarrow z$ em $L^1(\Omega)$. Conseqüentemente, $(z, 0)$ é admissível.

Observação 3.3.3 *Temos como consequência do item (b) do exemplo acima que o funcional \mathcal{F}_α pode não atingir um mínimo no sentido comum. De fato, suponha que $\phi = 0$ e que exista*

um minimizador $\phi_\alpha \neq 0$ de \mathcal{F}_α . Então, para qualquer $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{F}_\alpha\left(\frac{\phi_\alpha}{k}\right) < \mathcal{F}_\alpha(\phi)$. Deste modo, o par $(z = P(\phi_\alpha), 0)$ é um par admissível e pode ser considerado como uma solução generalizada.

Lema 3.3.5 *Seja $\{(z_k, \phi_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de pares admissíveis convergindo para $(z, \phi) \in \mathcal{U} \times H^1(\Omega)$ em $L^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$. Então, (z, ϕ) é um par admissível.*

Demonstração : Para cada $k \in \mathbb{N}$, (z_k, ϕ_k) é admissível, por definição, existem seqüências $\{\varepsilon_l^k\}_{l \in \mathbb{N}}$ de números positivos convergindo para zero e $\{\phi_l^k\}_{l \in \mathbb{N}}$ em $H^1(\Omega)$ tal que

$$\phi_l^k \longrightarrow \phi_k \text{ em } L^2(\Omega) \quad e \quad P_{\varepsilon_l^k}(\phi_l^k) \longrightarrow z_k \text{ em } L^1(\Omega) \quad \text{para } l \longrightarrow \infty.$$

Assim, existe uma função monótona crescente $\tau : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$;

$$\varepsilon_{\tau(k)}^k < \frac{1}{2} \varepsilon_{\tau(k-1)}^{k-1}, \quad \|\phi_{\tau(k)}^k - \phi_k\|_{L^2(\Omega)} < \frac{1}{k} \quad e \quad \|P_{\varepsilon_{\tau(k)}^k}(\phi_{\tau(k)}^k) - z_k\|_{L^1(\Omega)} < \frac{1}{k}.$$

Conseqüentemente, para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \|\phi_{\tau(k)}^k - \phi\|_{L^2(\Omega)} &\leq \|\phi_{\tau(k)}^k - \phi_k\|_{L^2(\Omega)} + \|\phi - \phi_k\|_{L^2(\Omega)} \\ \|P_{\varepsilon_{\tau(k)}^k}(\phi_{\tau(k)}^k) - z\|_{L^1(\Omega)} &\leq \|P_{\varepsilon_{\tau(k)}^k}(\phi_{\tau(k)}^k) - z_k\|_{L^1(\Omega)} + \|z - z_k\|_{L^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\phi_{\tau(k)}^k \longrightarrow \phi \text{ em } L^2(\Omega) \quad e \quad P_{\varepsilon_{\tau(k)}^k}(\phi_{\tau(k)}^k) \longrightarrow z \text{ em } L^1(\Omega) \quad (k \longrightarrow \infty).$$

Isso mostra que (z, ϕ) é admissível. \square

Os próximos lemas apresentam algumas propriedades do funcional ρ definido em (3.11).

Lema 3.3.6 *Seja (z, ϕ) um par admissível. Então, existem seqüências $\{\phi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ e $\{\varepsilon_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ satisfazendo (C_1) itens (i) e (ii), respectivamente, tais que*

$$\rho(z, \phi) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(2\beta |P_{\varepsilon_k}(\phi_k)|_{BV(\Omega)} + \|\phi_k - \phi_0\|_{H^1(\Omega)}^2 \right)$$

Demonstração : Pela definição de $\rho(z, \phi)$ em (3.11), existem seqüências $\{\varepsilon_k^l\}_{k, l \in \mathbb{N}}$ de números positivos convergindo para zero e $\{\phi_k^l\}_{k, l \in \mathbb{N}}$ em $H^1(\Omega)$ tal que para cada $l \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \phi_k^l \longrightarrow \phi \text{ em } L^2(\Omega) \quad e \quad P_{\varepsilon_k^l}(\phi_k^l) \longrightarrow z \text{ em } L^1(\Omega) \quad \text{quando } k \longrightarrow \infty \quad e \\ \rho(z, \phi) = \lim_{l \rightarrow \infty} \left\{ \liminf_{k \rightarrow \infty} \left\{ 2\beta |P_{\varepsilon_k^l}(\phi_k^l)|_{BV(\Omega)} + \|\phi_k^l - \phi_0\|_{H^1(\Omega)}^2 \right\} \right\}. \end{aligned}$$

Deste modo, existem subsequências de $\{\varepsilon_k^l\}_{k, l \in \mathbb{N}}$ e de $\{\phi_k^l\}_{k, l \in \mathbb{N}}$, respectivamente, (as quais

denotaremos com os mesmos índices) tais que

$$\rho(z, \phi) = \lim_{l \rightarrow \infty} \left\{ \lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ 2\beta |P_{\varepsilon_k^l}(\phi_k^l)|_{BV(\Omega)} + \|\phi_k^l - \phi_0\|_{H^1(\Omega)}^2 \right\} \right\}.$$

Repetindo a extração de subsequências, de maneira diagonal, obtemos $\{\varepsilon_{\tau(k)}^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ e $\{\phi_{\tau(k)}^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tais que

$$\phi_{\tau(k)}^k \longrightarrow \phi \text{ em } L^2(\Omega), \quad (\varepsilon_{\tau(k)}^k \longrightarrow 0) \text{ e } P_{\varepsilon_{\tau(k)}^k}(\phi_{\tau(k)}^k) \longrightarrow z \text{ em } L^1(\Omega) \quad (k \longrightarrow \infty),$$

satisfazendo

$$\rho(z, \phi) = \lim_{l \rightarrow \infty} \left\{ \beta |P_{\varepsilon_k^l}(\phi_k^l)|_{BV(\Omega)} + \|\phi_k^l - \phi_0\|_{H^1(\Omega)}^2 \right\}. \quad \square$$

Lema 3.3.7 ρ é coercivo no conjunto de pares admissíveis, i.e., para cada (z, ϕ) admissível

$$2\beta |z|_{BV(\Omega)} + \|\phi - \phi_0\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \rho(z, \phi).$$

Demonstração : Seja (z, ϕ) um par admissível. Então, pelo Lema 3.3.6 juntamente com a semi-continuidade fraca inferior da semi-norma em $BV(\Omega)$ [11, Teorema 1, pg. 177] e da norma em $H^1(\Omega)$ respectivamente, existem seqüências $\{\phi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ e $\{\varepsilon_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, tais que

$$\begin{aligned} \rho(z, \phi) &= \liminf_{k \rightarrow \infty} \left(2\beta |P_{\varepsilon_k}(\phi_k)|_{BV(\Omega)} + \|\phi_k - \phi_0\|_{H^1(\Omega)}^2 \right) \\ &\geq \liminf_{k \rightarrow \infty} 2\beta |P_{\varepsilon_k}(\phi_k)|_{BV(\Omega)} + \liminf_{k \rightarrow \infty} \|\phi_k - \phi_0\|_{H^1(\Omega)}^2 \\ &\geq 2\beta |z|_{BV(\Omega)} + \|\phi - \phi_0\|_{H^1(\Omega)}^2. \end{aligned} \quad \square$$

Observação 3.3.4 Seja $\phi \in H^1(\Omega)$ tal que possua um conjunto conexo de pontos críticos sobre o conjunto de nível zero $\{\phi = 0\}$ com medida positiva (ver Figura 3.1). Então, é possível encontrar seqüências $\{\phi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ e $\{\tilde{\phi}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ que convergem forte para $\phi \in L^2(\Omega)$ mas, seus limites diferem: $z = \lim_{k \rightarrow \infty} P_{\varepsilon_k}(\phi_k) \neq \tilde{z} = \lim_{k \rightarrow \infty} P_{\varepsilon_k}(\tilde{\phi}_k)$ em $BV(\Omega)$. Em tal caso temos $\rho(z, \phi) \neq \rho(\tilde{z}, \phi)$. Como, pelo Lema 3.3.7, ρ é coercivo, esta é uma propriedade necessária.

A definição de $\rho(z, \phi)$ não permite aplicações práticas. Para tal conjecturamos a seguinte caracterização para $\rho(z, \phi)$.

Conjectura 3.3.8 Definimos por:

$$\Phi_+ := \{x \in \Omega : \phi(x) > 0\}, \quad \Phi_- := \{x \in \Omega : \phi(x) < 0\} \text{ e } \Psi := \Omega - (\Phi_+ \cup \Phi_-).$$

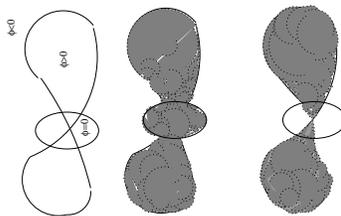


Figura 3.1: Na primeira figura temos uma função level set que possui pontos críticos $|\nabla\phi| = 0$ em uma elipse. Após aparecem duas possibilidades para a função z e \tilde{z} . Achurrados correspondem ao valor de $z = 1$.

(i) Se $\partial\Phi_+ \cap \Omega = \partial\Phi_- \cap \Omega$, então

$$\begin{aligned} \rho(z, \phi) &= 2\beta\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Phi_- \cap \Omega) + \|\phi - \phi_0\|_{H^1(\Omega)}^2 \\ &= 2\beta\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Phi_+ \cap \Omega) + \|\phi - \phi_0\|_{H^1(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

(ii) O problema consiste em encontrar a superfície \mathcal{S} (confira Figura 3.2) com medida de Hausdorff $(n-1)$ -dimensional mínima em Ψ , e

$$\rho(z, \phi) = 2\beta\mathcal{H}^{n-1}(\mathcal{S}) + \|\phi - \phi_0\|_{H^1(\Omega)}^2.$$

Uma vez demonstrada esta conjectura, segue que o funcional ρ é independente da escolha de uma aproximação P_ε . Assim, qualquer aproximação para P com a propriedade da Lipschitz-continuidade e que a derivada aproxime a δ -distribuição é adequada.

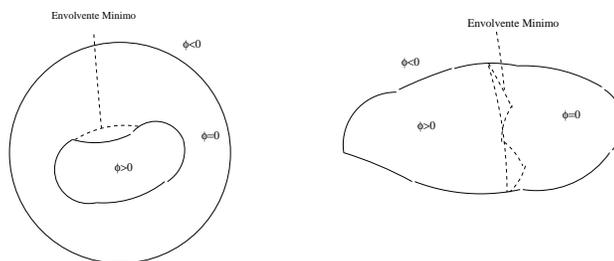


Figura 3.2: Envolveinte mínimo em Ψ .

Intuitivamente a conjectura é óbvia (veja figura 3.2).

Lema 3.3.9 Para toda seqüência $\{(z_l, \phi_l)\}_{l \in \mathbb{N}}$ de pares admissíveis, convergindo para (z, ϕ) em $L^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, com $\rho(z_l, \phi_l) \leq c \forall l \in \mathbb{N}$ e para constante $c \in \mathbb{R}$, temos $\rho(z, \phi) \leq c$.

Demonstração : Faremos um argumento de contradição. Suponha $\{(z_l, \phi_l)\}_{l \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de pares admissíveis convergindo para (z, ϕ) em $L^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ satisfazendo

$$\liminf_{l \rightarrow \infty} \rho(z_l, \phi_l) < \rho(z, \phi).$$

Da definição de ínfimo, obtemos $c \in \mathbb{R}$ e uma subsequência $\{(z_{l(k)}, \phi_{l(k)})\}_{k \in \mathbb{N}}$ tal que

$$\liminf_{l \rightarrow \infty} \rho(z_l, \phi_l) = \lim_{l \rightarrow \infty} \rho(z_{l(k)}, \phi_{l(k)}) < c < \rho(z, \phi).$$

Assim, obtemos uma subsequência, denotada com o mesmo índice, tal que

$$\rho(z_{l(k)}, \phi_{l(k)}) < c \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} (z_{l(k)}, \phi_{l(k)}) = (z, \phi) \text{ em } L^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \text{ e } \rho(z, \phi) > c.$$

Isto é uma contradição. Portanto, o Lema está provado. \square

Lema 3.3.10 *Sejam $z_n \rightarrow z$ em $L^1(\Omega)$ e $\phi_n \rightarrow \phi$ em $H^1(\Omega)$ com (z_n, ϕ_n) admissíveis. Então*

$$\rho(z, \phi) \leq \liminf_{n \in \mathbb{N}} \rho(z_n, \phi_n).$$

Demonstração : Seja $\{(z_l, \phi_l)\}_{l \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de pares admissíveis convergindo para (z, ϕ) em $L^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, satisfazendo $\rho(z_l, \phi_l) \leq c \quad \forall l \in \mathbb{N}$. Como, para cada $l \in \mathbb{N}$, o par (z_l, ϕ_l) é admissível existe, por definição, uma seqüência $\{\varepsilon_k^l\}_{k \in \mathbb{N}}$ de números reais positivos convergindo para zero e uma seqüência $\{\phi_k^l\}_{k \in \mathbb{N}}$ em $H^1(\Omega)$, tal que para $k \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \phi_k^l &\longrightarrow \phi \text{ em } L^2(\Omega) \\ P_{\varepsilon_k^l}(\phi_k^l) &\longrightarrow z_l \text{ em } L^1(\Omega). \end{aligned}$$

Do Lema 3.3.6, a menos de subsequências ,

$$\rho(z_l, \phi_l) = \lim_{k \rightarrow \infty} (2\beta |P_{\varepsilon_k^l}(\phi_k^l)|_{BV(\Omega)} + \|\phi_k^l - \phi_0\|_{H^1(\Omega)}^2) \leq c$$

Assim, existe uma função monótona crescente $\tau : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tal que, para cada $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\tau(k)}^k &< \frac{1}{2} \varepsilon_{\tau(k-1)}^{k-1}, \quad \|\phi_{\tau(k)}^k - \phi_k\|_{L^2(\Omega)} < \frac{1}{k}, \quad \|P_{\varepsilon_{\tau(k)}^k}(\phi_{\tau(k)}^k) - z_k\|_{L^1(\Omega)} < \frac{1}{k} \\ 2\beta |P_{\varepsilon_{\tau(k)}^k}(\phi_{\tau(k)}^k)|_{BV(\Omega)} + \|\phi_{\tau(k)}^k - \phi_0\|_{H^1(\Omega)}^2 &< c + \frac{1}{k} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Ou seja, para cada $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \|\phi - \phi_{\tau(k)}^k\|_{L^2(\Omega)} &\leq \|\phi - \phi_k\|_{L^2(\Omega)} + \|\phi_k - \phi_{\tau(k)}^k\|_{L^2(\Omega)}, \\ \|z - P_{\varepsilon_{\tau(k)}^k}(\phi_{\tau(k)}^k)\|_{L^1(\Omega)} &\leq \|z - z_k\|_{L^1(\Omega)} + \|z_k - P_{\varepsilon_{\tau(k)}^k}(\phi_{\tau(k)}^k)\|_{L^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\phi_{\tau(k)}^k \longrightarrow \phi \text{ em } L^2(\Omega), \quad \varepsilon_{\tau(k)}^k \longrightarrow 0 \text{ e } P_{\varepsilon_{\tau(k)}^k}(\phi_{\tau(k)}^k) \longrightarrow z \text{ em } L^1(\Omega) \quad k \longrightarrow \infty.$$

Da definição de ρ e da desigualdade (3.12) obtemos:

$$\rho(z, \phi) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} (2\beta |P_{\varepsilon_{\tau(k)}}^k(\phi_{\tau(k)}^k)|_{BV(\Omega)} + \|\phi_{\tau(k)}^k - \phi_0\|_{H^1(\Omega)}^2) \leq c.$$

Aplicando o Lema 3.3.9, demonstramos o Lema. \square

3.3.1 Boa colocação

De forma análoga ao feito para o funcional J_α , provaremos que o funcional \mathcal{F}_α atinge um mínimo no conjunto de pares admissíveis. Ou seja, a incorporação da semi-norma da função de variação limitada $P(\phi)$ ao funcional \mathcal{F}_α , juntamente com o novo conceito de mínimo, agregaram ao funcional a propriedade de ser localmente convexo no produto cartesiano $\mathcal{U} \times H^1(\Omega)$.

Teorema 3.3.11 *Tanto o funcional \mathcal{F}_α quanto o funcional*

$$\tilde{\mathcal{F}}_\alpha(z, \phi) := \|F(z) - y^\delta\|_{\mathbb{Y}}^2 + 2\alpha\beta|z|_{BV(\Omega)} + \alpha\|\phi - \phi_0\|_{H^1(\Omega)}^2, \quad (3.13)$$

atingem um mínimo no conjunto de pares admissíveis.

Demonstração : Faremos a demonstração para o funcional \mathcal{F}_α . Para o funcional $\tilde{\mathcal{F}}_\alpha$, a demonstração é análoga.

Do Exemplo 3.3.4, o conjunto de pares admissíveis é não vazio.

Seja $\{(z_k, \phi_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de pares admissíveis tais que

$$\mathcal{F}_\alpha(z_k, \phi_k) \longrightarrow \inf\{\mathcal{F}_\alpha(z, \phi) : (z, \phi) \text{ pares admissíveis}\} \leq \mathcal{F}_\alpha(0, 0) < \infty.$$

Pelo Lema 3.3.7, para cada $k \in \mathbb{N}$, $\{(z_k, \phi_k)\}$ é limitada em $BV(\Omega) \times H^1(\Omega)$. Assim a seqüência $\{(z_k, \phi_k)\}$ é uniformemente limitada. Pelos Teoremas de imersão compacta de Sobolev [1, Teorema 6.2] e [11, Teorema 4, pg. 176], existem subseqüências, denotadas agora por $\{\phi_k\}$ e $\{z_k\}$, respectivamente, tal que

$$\begin{aligned} \phi_k &\rightharpoonup \phi \text{ em } H^1(\Omega) \text{ e } \phi_k \rightarrow \phi \text{ em } L^2(\Omega), & e \\ z_k &\rightarrow z \text{ em } L^1(\Omega), \quad |z|_{BV(\Omega)} \leq \rho(z, \phi) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \rho(z_k, \phi_k). \end{aligned}$$

Da semi-continuidade fraca inferior de ρ dada pelo Lema 3.3.10 e da continuidade de F sobre $L^1(\Omega)$, segue que

$$\begin{aligned} \inf\{\mathcal{F}_\alpha(z, \phi) : (z, \phi) \in \text{pares admissíveis}\} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{F}_\alpha(z_k, \phi_k) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \{\|F(z_k) - y^\delta\|_{\mathbb{Y}}^2 + \alpha\rho(z_k, \phi_k)\} \geq \|F(z) - y^\delta\|_{\mathbb{Y}}^2 + \alpha\rho(z, \phi) = \mathcal{F}_\alpha(z, \phi). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Resta-nos mostrar que (z, ϕ) é um par admissível. Fixe $k \in \mathbb{N}$; Como por hipótese (z_k, ϕ_k) é admissível, por definição, existe uma seqüência $\{\varepsilon_{k,l}\}_{l \in \mathbb{N}}$ de números positivos e uma subsequência $\{\phi_{k,l}\}_{l \in \mathbb{N}}$ em $H^1(\Omega)$ tal que, com a mesma argumentação acima,

$$\phi_{k,l} \xrightarrow{l \rightarrow \infty} \phi_k \text{ em } L^2(\Omega), \quad P_{\varepsilon_{k,l}}(\phi_{k,l}) \xrightarrow{l \rightarrow \infty} \phi_k \text{ em } L^1(\Omega).$$

Pelo Lema 3.3.5, (z, ϕ) é admissível. \square

3.3.2 Resultados de convergência

Agora provaremos resultados de convergência para minimizadores regularizados. O próximo Teorema trata da existência de uma solução de norma mínima.

Teorema 3.3.12 *Assumindo as hipóteses (H10)-(H13), existe uma solução de norma mínima $(z^\dagger, \phi^\dagger)$, i.e., um par de funções admissíveis que satisfaçam*

(a) $F(z^\dagger) = y$,

(b) $\rho(z^\dagger, \phi^\dagger) = \inf\{\rho(z, \phi) : (z, \phi) \in \text{pares admissíveis e } F(z) = y\} =: \Upsilon$.

Demonstração : Segue do Exemplo 3.3.4 item (a), que o conjunto de pares admissíveis admitindo $F(z) = y$ é não vazio.

Suponha $\{(z_k, \phi_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de pares admissíveis com $F(z_k) = y$, tal que

$$\rho(z_k, \phi_k) \longrightarrow \Upsilon \leq \rho(\tilde{z}, \tilde{\phi}) < \infty.$$

Do Lema 3.3.7, temos que as seqüências $\{\phi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ e $\{z_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ são uniformemente limitadas em $H^1(\Omega)$ e $BV(\Omega)$, respectivamente. Por argumentação análoga à demonstração do Teorema 3.3.11, existem subsequências, ainda denotadas por $\{\phi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ e $\{z_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, tais que

$$\phi_k \longrightarrow \phi^\dagger \text{ em } L^2(\Omega)$$

$$z_k \longrightarrow z^\dagger \text{ em } L^1(\Omega).$$

Do Lema 3.3.10 segue

$$\Upsilon = \lim_{k \rightarrow \infty} \rho(z_k, \phi_k) \geq \rho(z^\dagger, \phi^\dagger).$$

Como F é contínuo em $L^1(\Omega)$, temos $F(z^\dagger) = \lim_{k \rightarrow \infty} F(z_k) = y$. Agora, de maneira análoga ao demonstrado no Teorema 3.3.11, segue que $(z^\dagger, \phi^\dagger)$ é um par admissível e, portanto, uma solução de norma mínima. \square

Teorema 3.3.13 *Seja (z_α, ϕ_α) um minimizador de \mathcal{F}_α com $y^\delta = y$ em (3.9). Então, para qualquer seqüência $\{\alpha_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ convergindo para zero, existe uma subsequência $\{\alpha_{k(l)}\}_{l \in \mathbb{N}}$, tal que,*

$\{(z_{\alpha_k(l)}, \phi_{\alpha_k(l)})\}_{l \in \mathbb{N}}$ é fortemente convergente em $L^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$. Mais ainda, o limite é uma solução de norma mínima.

Demonstração: Pelo Teorema 3.3.12, existe uma solução de norma mínima, a qual denotamos por $(z^\dagger, \phi^\dagger)$. Defina $\{(z_k, \phi_k)\} := \{(z_{\alpha_k}, \phi_{\alpha_k})\}$ uma seqüência de elementos minimizantes de \mathcal{F}_{α_k} . Então, para cada $k \in \mathbb{N}$, temos

$$\mathcal{F}_{\alpha_k}(z_k, \phi_k) = \|F(z_k) - y\|_{\mathbb{Y}}^2 + \alpha_k \rho(z_k, \phi_k) \leq \|F(z^\dagger) - y\|_{\mathbb{Y}}^2 + \alpha_k \rho(z^\dagger, \phi^\dagger) = \alpha_k \rho(z^\dagger, \phi^\dagger).$$

Da continuidade de F em $L^1(\Omega)$, como $\limsup_{k \rightarrow \infty} \rho(z_k, \phi_k) \leq \rho(z^\dagger, \phi^\dagger)$ e, por hipótese, $\alpha_k \rightarrow 0$ e $\rho(z^\dagger, \phi^\dagger) < \infty$, temos

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k \rho(z^\dagger, \phi^\dagger) &= 0 \\ \lim_{k \rightarrow \infty} F(z_k) &= y. \end{aligned}$$

Do Lema 3.3.7 e Lema 3.3.10 temos que

$$2\beta \|z_k\|_{BV(\Omega)} + \|\phi_k - \phi_0\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \rho(z_k, \phi_k) \leq \rho(z^\dagger, \phi^\dagger) < \infty.$$

Disto, obtém-se que a seqüência $\{(z_k, \phi_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ é uniformemente limitada em $BV(\Omega) \times H^1(\Omega)$. Novamente, com a mesma argumentação da demonstração do Teorema 3.3.11, existe uma subseqüência denotada ainda como acima tal que, quando $k \rightarrow \infty$,

$$\begin{aligned} \phi_k &\rightarrow \phi \text{ em } L^2(\Omega); \\ z_k &\rightarrow z \text{ em } L^1(\Omega). \end{aligned}$$

Novamente, da continuidade de F em $L^1(\Omega)$, temos

$$F(z) = \lim_{k \rightarrow \infty} F(z_k) = y.$$

Da semi-continuidade fraca inferior de ρ , dada pelo Lema 3.3.10, e da definição de solução de norma mínima, segue que

$$\rho(z, \phi) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \rho(z_k, \phi_k) \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \rho(z_k, \phi_k) \leq \rho(z^\dagger, \phi^\dagger) \leq \rho(z, \phi).$$

Conforme o Teorema 3.3.11, (z, ϕ) é um par admissível. Assim, juntando com a última desigualdade acima, obtemos que (z, ϕ) é uma solução de norma mínima para \mathcal{F}_α . \square

Agora, estamos de posse de resultados suficientes para provarmos convergência.

Teorema 3.3.14 [Convergência] *Suponha que $y^\delta \in \mathbb{Y}$, $\|y - y^\delta\|_{\mathbb{Y}} \leq \delta$ e que para cada $\alpha > 0$, (z_α, ϕ_α) denota um minimizador de \mathcal{F}_α . Seja $\alpha : [0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, $\delta \mapsto \alpha(\delta)$ uma função satisfazendo*

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \alpha(\delta) = 0 \quad e \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\delta^2}{\alpha(\delta)} = 0.$$

*Então, para qualquer seqüência $\{\delta_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ convergindo para **zero**, existe uma seqüência $\{\alpha_k := \alpha(\delta_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $\{(z_{\alpha_k}, \phi_{\alpha_k})\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge para uma solução de norma mínima.*

Demonstração : Denotemos por $(z^\dagger, \phi^\dagger)$ e $\{(z_k, \phi_k) := (z_{\alpha_k}, \phi_{\alpha_k})\}_{k \in \mathbb{N}}$ uma solução de norma mínima e uma seqüência de minimizadores de \mathcal{F}_{α_k} , respectivamente.

Segue da definição de (z_k, ϕ_k) que

$$\|F(z_k) - y^{\delta_k}\|_{\mathbb{Y}}^2 + \alpha(\delta_k)\rho(z_k, \phi_k) \leq \|F(z^\dagger) - y^{\delta_k}\|_{\mathbb{Y}}^2 + \alpha(\delta_k)\rho(z^\dagger, \phi^\dagger) \leq \delta_k^2 + \alpha(\delta_k)\rho(z^\dagger, \phi^\dagger).$$

Assim, da hipótese, temos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F(z_k) = y \quad e \quad \rho(z_k, \phi_k) \leq \frac{\delta_k^2}{\alpha(\delta_k)} + \rho(z^\dagger, \phi^\dagger).$$

Isso implica que

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \rho(z_k, \phi_k) \leq \rho(z^\dagger, \phi^\dagger).$$

Dos Lemas 3.3.7 e 3.3.10 obtemos

$$2\beta|z_k|_{BV(\Omega)} + \|\phi_k - \phi_0\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \rho(z_k, \phi_k) \leq \rho(z^\dagger, \phi^\dagger) < \infty.$$

Portanto, a seqüência $\{(z_k, \phi_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ é uniformemente limitada na norma de $BV(\Omega) \times H^1(\Omega)$. Seguindo a argumentação utilizada na demonstração do Teorema 3.3.11, garantimos a existência de uma subseqüência, denotada agora por $\{(z_k, \phi_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$, de modo que são válidos

$$\begin{aligned} \phi_k &\longrightarrow \phi \text{ em } L^2(\Omega), \\ z_k &\longrightarrow z \text{ em } L^1(\Omega), \\ \rho(z, \phi) &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \rho(z_k, \phi_k) \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \rho(z_k, \phi_k) \leq \rho(z^\dagger, \phi^\dagger) \leq \rho(z, \phi). \end{aligned}$$

Pelo mesmo Teorema, (z, ϕ) é um par admissível. Isso mostra que (z, ϕ) é uma solução de norma mínima para \mathcal{F}_α . \square

Corolário 3.3.15 *Nas mesmas hipóteses do Teorema 3.3.14, se a solução de norma mínima*

$(z^\dagger, \phi^\dagger)$ para \mathcal{F}_α é única, então

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} (z_\alpha, \phi_\alpha) = (z^\dagger, \phi^\dagger).$$

Demonstração : Do Teorema 3.3.14, toda seqüência (z_α, ϕ_α) possui uma subsequência convergindo para $(z^\dagger, \phi^\dagger)$. Como $(z^\dagger, \phi^\dagger)$ é única, segue o resultado. \square

Note que os Teoremas desta seção se enquadram à teoria clássica de regularização de Tikhonov para problemas não lineares (veja [10, Capítulo 10]). A diferença é que, um mínimo neste contexto é um par admissível tomado no produto cartesiano $\mathcal{U} \times H^1(\Omega)$. Ainda, como comentado anteriormente, métodos level set para problemas inversos não fornecem taxas de convergência, uma vez que não podemos formular condições de fonte compatíveis com a formulação level set.

3.4 Solução numérica

Minimizadores para o funcional \mathcal{F}_α são considerados como pares admissíveis $(z_\alpha, \phi_\alpha) \in \mathcal{U} \times H^1(\Omega)$. Logo, encontrar soluções numéricas para minimizar \mathcal{F}_α sobre o conjunto de pares admissíveis é impraticável. Assim, somos levados a considerar o funcional estabilizado

$$\mathcal{F}_{\varepsilon, \alpha} := \|F(P_\varepsilon(\phi)) - y^\delta\|_{\mathbb{Y}}^2 + 2\alpha\beta|P_\varepsilon(\phi)|_{BV(\Omega)} + \alpha\|\phi - \phi_0\|_{H^1(\Omega)}^2 \quad (3.15)$$

como uma aproximação para minimizar \mathcal{F}_α .

No que segue, derivamos condições de otimalidade para minimizar o funcional $\mathcal{F}_{\varepsilon, \alpha}$. No primeiro resultado, tratamos da boa colocação do funcional $\mathcal{F}_{\varepsilon, \alpha}$, i.e., da obtenção de um mínimo para $\mathcal{F}_{\varepsilon, \alpha}$ sobre $H^1(\Omega)$, para toda função $\phi_0 \in H^1(\Omega)$ e toda tripla de parâmetros $(\alpha, \beta, \varepsilon) \in (0, \infty)^3$.

Lema 3.4.1 *Para qualquer $\phi_0 \in H^1(\Omega)$, o funcional (3.15) atinge um mínimo em $H^1(\Omega)$.*

Demonstração : A demonstração segue em linhas gerais à feita no Teorema 3.3.2. Ou seja, notando que

$$\inf\{\mathcal{F}_{\varepsilon, \alpha}(\phi) : \phi \in H^1(\Omega)\} \leq \mathcal{F}_{\varepsilon, \alpha}(0) < \infty.$$

Seja $\{\phi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ em $H^1(\Omega)$ satisfazendo

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{F}_{\varepsilon, \alpha}(\phi_k) = \inf\{\mathcal{F}_{\varepsilon, \alpha}(\phi) : \phi \in H^1(\Omega)\}.$$

Desta forma, a seqüência $\{\phi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ é limitada na norma de $H^1(\Omega)$ e, portanto, possui uma subsequência (que denotamos com os mesmos índices) convergindo fraco em $H^1(\Omega)$. Uma vez que para qualquer seqüência $\{\phi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ convergindo fraco para ϕ na norma de $H^1(\Omega)$ temos, pelo

Teorema de imersão compacta de Sobolev [1, Teorema 6.2], que existe uma subsequência que converge forte para ϕ em $L^2(\Omega)$. Segue do Lema 3.3.1 que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|P_\varepsilon(\phi_k) - P_\varepsilon(\phi)\|_{L^1(\Omega)} = 0.$$

Como consequência da continuidade do operador F em $L^1(\Omega)$ temos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|F(P_\varepsilon(\phi_k)) - F(P_\varepsilon(\phi))\|_{\mathbb{Y}} = 0.$$

Agora, da semi-continuidade fraca inferior da semi-norma no espaço $BV(\Omega)$ [11, Teorema 1, pg. 172] e da semi-continuidade fraca inferior da norma em espaços de Hilbert, segue

$$\begin{aligned} |P_\varepsilon(\phi)|_{BV(\Omega)} &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} |P_\varepsilon(\phi_k)|_{BV(\Omega)} \\ \|\phi - \phi_0\|_{H^1(\Omega)} &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|\phi_k - \phi_0\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Conseqüentemente, das desigualdades acima unidas com a continuidade de F em $L^1(\Omega)$,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\varepsilon,\alpha}(\phi) &= \|F(P_\varepsilon(\phi)) - y^\delta\|_{\mathbb{Y}}^2 + 2\alpha\beta|P_\varepsilon(\phi)|_{BV(\Omega)} + \alpha\|\phi_k - \phi_0\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \|F(P_\varepsilon(\phi_k)) - y^\delta\|_{\mathbb{Y}}^2 + 2\alpha\beta \liminf_{k \rightarrow \infty} |P_\varepsilon(\phi_k)|_{BV(\Omega)} + \alpha \liminf_{k \rightarrow \infty} \|\phi_k - \phi_0\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{F}_{\varepsilon,\alpha}(\phi_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{F}_{\varepsilon,\alpha}(\phi_k) = \inf\{\mathcal{F}_{\varepsilon,\alpha}(\phi) : \phi \in H^1(\Omega)\}. \quad \square \end{aligned}$$

Observação 3.4.1 Note que minimizadores de $\mathcal{F}_{\varepsilon,\alpha}$ são funções em $H^1(\Omega)$, enquanto minimizadores de \mathcal{F}_α são pares admissíveis.

O próximo resultado mostra que para $\varepsilon \rightarrow 0$ um minimizador de $\mathcal{F}_{\varepsilon,\alpha}$ aproxima um minimizador de \mathcal{F}_α , ou seja, é aproximadamente um par admissível. Fechamos assim o ciclo da análise de convergência para o método de regularização level set.

Teorema 3.4.2 *Sejam $\phi_{\varepsilon,\alpha}$ um minimizador de $\mathcal{F}_{\varepsilon,\alpha}$ e $\phi_0 \in H^1(\Omega)$. Então, para $\varepsilon_k \rightarrow 0$ existe uma subsequência $\{P_{\varepsilon_k}(\phi_{\varepsilon_k,\alpha}), (\phi_{\varepsilon_k,\alpha})\} \rightarrow (\tilde{z}, \tilde{\phi})$ na topologia de $L^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ cujo limite minimiza \mathcal{F}_α no conjunto de pares admissíveis.*

Demonstração : Do Teorema 3.3.11 temos que o ínfimo de \mathcal{F}_α é atingido, i.e., existe (z_α, ϕ_α) minimizador de \mathcal{F}_α no conjunto de pares admissíveis. Da Definição 3.3.3 para pares admissíveis e do Lema 3.3.6, existem seqüências $\{\varepsilon_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ de números positivos convergindo para zero e correspondente $\{\phi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ em $H^1(\Omega)$, respectivamente, satisfazendo

$$\begin{aligned} (P_{\varepsilon_k}(\phi_k), \phi_k) &\rightarrow (z_\alpha, \phi_\alpha) \text{ em } L^1(\Omega) \times L^2(\Omega), \\ \rho(z_\alpha, \phi_\alpha) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \{2\beta|P_{\varepsilon_k}(\phi_k)|_{BV(\Omega)} + \|\phi_k - \phi_0\|_{H^1(\Omega)}^2\}. \end{aligned}$$

Seja ϕ_{ε_k} um minimizador de $\mathcal{F}_{\varepsilon_k, \alpha}$. Com a mesma argumentação do Lema 3.4.1, deduzimos que a seqüência $\{\phi_{\varepsilon_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ é uniformemente limitada em $H^1(\Omega)$ e, ainda, que esta possui uma subsequência (denotada com os mesmos índices) que converge fraco, cujo limite denotamos por $\tilde{\phi}$. Além disso, $\{P_{\varepsilon_k}(\phi_{\varepsilon_k})\}_{k \in \mathbb{N}}$ é uniformemente limitada em $BV(\Omega)$. Do Teorema de imersão compacta de Sobolev [1, Teorema 6.2], existe uma subsequência (novamente denotada com os mesmos índices), tal que

$$\phi_{\varepsilon_k} \rightharpoonup \tilde{\phi} \text{ em } L^2(\Omega), \quad P_{\varepsilon_k}(\phi_{\varepsilon_k}) \rightharpoonup \tilde{z} \text{ em } L^1(\Omega).$$

Deste modo, $(\tilde{z}, \tilde{\phi}) \in \mathcal{U} \times H^1(\Omega)$ é um par admissível.

Da definição de ρ e da continuidade do operador $F : L^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{Y}$ temos,

$$\begin{aligned} \|F(\tilde{z}) - y^\delta\|_{\mathbb{Y}}^2 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \|F(P_{\varepsilon_k}(\phi_{\varepsilon_k})) - y^\delta\|_{\mathbb{Y}}^2, \\ \rho(\tilde{z}, \tilde{\phi}) &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \{2\beta \|P_{\varepsilon_k}(\phi_{\varepsilon_k})\|_{BV(\Omega)} + \|\phi_{\varepsilon_k} - \phi_0\|_{H^1(\Omega)}^2\}. \end{aligned}$$

Portanto, segue que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\alpha(\tilde{z}, \tilde{\phi}) &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{F}_{\varepsilon_k, \alpha}(\phi_{\varepsilon_k}) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{F}_{\varepsilon_k, \alpha}(\phi_k) = \|F(z_\alpha) - y^\delta\|_{\mathbb{Y}}^2 + \alpha \rho(z_\alpha, \phi_\alpha) \\ &= \mathcal{F}_\alpha(z_\alpha, \phi_\alpha) = \inf\{\mathcal{F}_\alpha(z, \phi) : (z, \phi) \in \text{pares admissíveis}\}. \end{aligned}$$

Logo, o ínfimo de \mathcal{F}_α é atingido em $(\tilde{z}, \tilde{\phi})$. \square

Observação 3.4.2 *De acordo com a Observação 3.3.4, a função z_α não é unicamente definida por ϕ_α se esta atinge algum ponto crítico numa vizinhança de conjunto de nível zero.*

A observação acima foi justificada a partir de testes numéricos para o problema de (EIT) (veja Capítulo 4) em [9]. Em seu trabalho, Doel e Ascher [9] alertam que a imposição de semi-norma de variação limitada e do termo regularizante quadrático $\|\phi - \phi_0\|_{H^1(\Omega)}^2$ levam a funções muito achatadas na vizinhança do conjunto de nível zero. Isso deve-se ao fato do funcional $\phi \mapsto \|\phi - \phi_0\|_{H^1(\Omega)}^2$ admitir mínimos independentes do conjunto de nível zero.

3.4.1 Condição de otimalidade

A fim de obtermos condições de otimalidade para o funcional $\mathcal{F}_{\varepsilon, \alpha}$, com propósitos numéricos, é conveniente substituímos o espaço \mathbb{Y} pelo espaço de Hilbert $L^2(\Omega)$.

Os pontos de extremo do funcional $\mathcal{F}_{\varepsilon, \alpha}$ são proveniente do cálculo da derivada de Gâteaux igualada a zero. Para tal, assuma $\phi \in H^1(\Omega)$ e $v \in C_0^\infty(\Omega)$, então da definição de $P_\varepsilon(\phi)$ e da

Observação 3.2.2, obtemos

Primeiro termo :

$$\begin{aligned}
 & \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(\|F(P_\varepsilon(\phi + tv)) - y^\delta\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|F(P_\varepsilon(\phi)) - y^\delta\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(\|F(P_\varepsilon(\phi)) + tF'(P_\varepsilon(\phi))P'_\varepsilon(\phi)(v) + \mathcal{O}(t^2) - y^\delta\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|F(P_\varepsilon(\phi)) - y^\delta\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(\|F(P_\varepsilon(\phi)) - y^\delta\|_{L^2(\Omega)}^2 + \mathcal{O}(t^2) + 2t \langle F(P_\varepsilon(\phi)) - y^\delta, F'(P_\varepsilon(\phi))P'_\varepsilon(\phi)(v) \rangle_{L^2(\Omega)} \right. \\
 &\quad \left. - \|F(P_\varepsilon(\phi)) - y^\delta\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \\
 &= 2 \langle F(P_\varepsilon(\phi)) - y^\delta, F'(P_\varepsilon(\phi))P'_\varepsilon(\phi)(v) \rangle_{L^2(\Omega)} \\
 &= 2 \langle F'(P_\varepsilon(\phi))^* (F(P_\varepsilon(\phi)) - y^\delta), P'_\varepsilon(\phi)(v) \rangle_{L^2(\Omega)} \\
 &= 2 \langle P'_\varepsilon(\phi)F'(P_\varepsilon(\phi))^* (F(P_\varepsilon(\phi)) - y^\delta), v \rangle_{L^2(\Omega)}.
 \end{aligned}$$

Integrando por partes [11, Teorema 1, pg. 133], segue que para $\varphi \in C_0^1(\Omega, \mathbb{R})$ com $\|\varphi\|_\infty \leq 1$

$$\int_{\Omega} P_\varepsilon(\phi) \cdot \operatorname{div} \varphi \, d\mathcal{L} = - \int_{\Omega} \nabla P_\varepsilon(\phi) \varphi \, d\mathcal{L} + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} T P_\varepsilon(\phi) \, d\mathcal{H}^{n-1} \leq \int_{\Omega} |\nabla P_\varepsilon(\phi)| \, d\mathcal{L}.$$

Assim, $|P_\varepsilon(\phi)|_{BV(\Omega)} = \sup \left\{ \int_{\Omega} P_\varepsilon(\phi) \cdot \operatorname{div} \varphi \, d\mathcal{L} : \varphi \in C_0^1(\Omega, \mathbb{R}) \text{ com } \|\varphi\|_\infty \leq 1 \right\} = \int_{\Omega} |\nabla P_\varepsilon(\phi)| \, d\mathcal{L}.$

Disto e das fórmulas de Green [22, Teorema 6.3], temos

Segundo termo :

$$\begin{aligned}
 & \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (|P_\varepsilon(\phi + tv)|_{BV(\Omega)} - |P_\varepsilon(\phi)|_{BV(\Omega)}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(\int_{\Omega} |\nabla P_\varepsilon(\phi + tv)| \, d\mathcal{L}^n - \int_{\Omega} |\nabla P_\varepsilon(\phi)| \, d\mathcal{L}^n \right) \\
 &= \int_{\Omega} \frac{\nabla P_\varepsilon(\phi)}{|\nabla P_\varepsilon(\phi)|} \cdot \nabla P'_\varepsilon(\phi)(v) \, d\mathcal{L}^n = - \int_{\Omega} \nabla \cdot \left(\frac{\nabla P_\varepsilon(\phi)}{|\nabla P_\varepsilon(\phi)|} \right) P'_\varepsilon(\phi)(v) \, d\mathcal{L}^n \\
 &= - \left\langle \nabla \cdot \left(\frac{\nabla P_\varepsilon(\phi)}{|\nabla P_\varepsilon(\phi)|} \right), P'_\varepsilon(\phi)(v) \right\rangle_{L^2(\Omega)} = - \left\langle P'_\varepsilon(\phi) \nabla \cdot \left(\frac{\nabla P_\varepsilon(\phi)}{|\nabla P_\varepsilon(\phi)|} \right), v \right\rangle_{L^2(\Omega)}.
 \end{aligned}$$

Da primeira fórmula de Green [22, Teorema 6.3], temos

Terceiro termo :

$$\begin{aligned}
 & \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(\|\phi + tv - \phi_0\|_{H^1(\Omega)}^2 - \|\phi - \phi_0\|_{H^1(\Omega)}^2 \right) \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(\|\phi - \phi_0\|_{H^1(\Omega)}^2 + 2t \langle \phi - \phi_0, v \rangle_{H^1(\Omega)} + t^2 \|v\|_{H^1(\Omega)}^2 - \|\phi - \phi_0\|_{H^1(\Omega)}^2 \right) \\
 &= 2 \langle \phi - \phi_0, v \rangle_{H^1(\Omega)} = 2 \left(\int_{\Omega} (\phi - \phi_0) v d\mathcal{L}^n + \int_{\Omega} \nabla(\phi - \phi_0) \cdot \nabla v d\mathcal{L}^n \right) \\
 &= 2 \left(\int_{\Omega} (\phi - \phi_0) v d\mathcal{L}^n - \int_{\Omega} \Delta(\phi - \phi_0) v d\mathcal{L}^n \right) \\
 &= 2 \left(\langle \phi - \phi_0, v \rangle_{L^2(\Omega)} - \langle \Delta(\phi - \phi_0), v \rangle_{L^2(\Omega)} \right) = 2 \langle (I - \Delta)(\phi - \phi_0), v \rangle_{L^2(\Omega)} \\
 & \qquad \qquad \qquad \int_{\partial\Omega} \frac{\partial(\phi - \phi_0)}{\partial\eta} = 0.
 \end{aligned}$$

Juntando os termos acima e lembrando que $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $L^2(\Omega)$ [1, Teorema 2.9], segue que a condição de otimalidade para $\mathcal{F}_{\varepsilon, \alpha}$ é:

$$P'_\varepsilon(\phi) F'(P_\varepsilon(\phi))^* (F(P_\varepsilon(\phi)) - y^\delta) - \alpha\beta P'_\varepsilon(\phi) \nabla \cdot \left(\frac{\nabla P_\varepsilon(\phi)}{|\nabla P_\varepsilon(\phi)|} \right) + \alpha(I - \Delta)(\phi - \phi_0) = 0, \quad (3.16)$$

ou equivalentemente,

$$\begin{aligned}
 \alpha(\Delta - I)(\phi - \phi_0) &= P'_\varepsilon(\phi) F'(P_\varepsilon(\phi))^* (F(P_\varepsilon(\phi)) - y^\delta) - \alpha\beta P'_\varepsilon(\phi) \nabla \cdot \left(\frac{\nabla P_\varepsilon(\phi)}{|\nabla P_\varepsilon(\phi)|} \right). \quad (3.17) \\
 & \qquad \qquad \qquad \int_{\partial\Omega} \frac{\partial(\phi - \phi_0)}{\partial\eta} = 0
 \end{aligned}$$

3.5 Regularização iterativa em métodos level set

Nesta seção aplicamos a regularização de Tikhonov iterada para o funcional regularizado $\mathcal{F}_{\varepsilon, \alpha}$. Isto consiste em substituir ϕ_0 em (3.15) por ϕ_{k-1} no processo iterativo:

ϕ_0 adequado :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}_{\varepsilon, \alpha}^{(1)}(\phi) &= \mathcal{F}_{\varepsilon, \alpha}(\phi) \\
 \mathcal{F}_{\varepsilon, \alpha}^{(k)}(\phi) &:= \|F(P_\varepsilon(\phi)) - y^\delta\|_{\mathbb{Y}}^2 + 2\alpha\beta |P_\varepsilon(\phi)|_{BV(\Omega)} + \alpha \|\phi - \phi_{k-1}\|_{H^1(\Omega)}^2, \quad (3.18) \\
 \phi_{k-1} &\text{ em } H^1(\Omega) \text{ minimizador de } \mathcal{F}_{\varepsilon, \alpha}^{k-1} \text{ em } H^1(\Omega).
 \end{aligned}$$

Observação 3.5.1 A escolha do valor inicial ϕ_0 é crucial, pois F é não-linear.

Procedendo como na subseção anterior, segue que a condição de otimalidade para o funcional iterado $\mathcal{F}_{\varepsilon, \alpha}^k$ é dada por:

$$\alpha(\Delta - I)(\phi - \phi_{k-1}) = P'_\varepsilon(\phi)F'(P_\varepsilon(\phi))^*(F(P_\varepsilon(\phi)) - y^\delta) - \alpha\beta P'_\varepsilon(\phi)\nabla \cdot \left(\frac{\nabla P_\varepsilon(\phi)}{|\nabla P_\varepsilon(\phi)|} \right).$$

Para um tempo artificial t , definindo formalmente $\alpha := \frac{1}{\Delta t}$, $t_k := k\Delta t$, com $k \in \mathbb{N}$ temos:

$$\begin{aligned} (\Delta - I) \left(\frac{\phi(t_k) - \phi(t_{k-1})}{\Delta t} \right) &= P'_\varepsilon(\phi(t_k))F'(P_\varepsilon(\phi(t_k)))^*(F(P_\varepsilon(\phi(t_k))) - y^\delta) \\ &\quad - \alpha\beta P'_\varepsilon(\phi(t_k))\nabla \cdot \left(\frac{\nabla P_\varepsilon(\phi(t_k))}{|\nabla P_\varepsilon(\phi(t_k))|} \right). \end{aligned} \quad (3.19)$$

onde Δt é considerado uma discretização temporal. Esta equação pode ser formalmente interpretada como o sistema dinâmico com solução regularizada ϕ_k ,

$$(\Delta - I) \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}(t) \right) = P'_\varepsilon(\phi(t))F'(P_\varepsilon(\phi(t)))^*(F(P_\varepsilon(\phi(t))) - y^\delta) - \alpha\beta P'_\varepsilon(\phi(t))\nabla \cdot \left(\frac{\nabla P_\varepsilon(\phi(t))}{|\nabla P_\varepsilon(\phi(t))|} \right).$$

Observação 3.5.2 *Este sistema dinâmico se compara ao proposto por Santosa [27]. Se tomarmos o lado direito da equação acima como uma velocidade regularizada pelo operador $(\Delta - I)^{-1}$, essa compara-se a proposta por Santosa para controlar a velocidade do método level set.*

Ainda, uma discretização pelo método de Euler para a equação acima, com uma escolha especial de t_k , coincide com o método de decida íngreme (tipo gradiente conjugado) com um condicionamento para o funcional (3.15).

Para fins numéricos, podemos resolver a equação (3.20) por argumentos de ponto fixo, fazendo $\phi(t_{k-1}) = \phi^{(0)}$ e tomando $\phi(t_n) = \lim_{k \rightarrow \infty} \phi^{(k)}$ na equação

$$\begin{aligned} (\Delta - I) \left(\frac{\phi^{(k+1)} - \phi^{(0)}}{\Delta t} \right) &= P'_\varepsilon(\phi^{(k)})F'(P_\varepsilon(\phi^{(k)}))^*(F(P_\varepsilon(\phi^{(k)})) - y^\delta) \\ &\quad - \alpha\beta P'_\varepsilon(\phi^{(k)})\nabla \cdot \left(\frac{\nabla P_\varepsilon(\phi^{(k)})}{|\nabla P_\varepsilon(\phi^{(k)})|} \right). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Em testes numéricos, notamos que, medindo o resíduo $\|F(P_\varepsilon(\phi^k)) - y^\delta\|$, em dependência de $\alpha = \frac{1}{\Delta t}$, a iteração (3.20) torna-se instável e muito oscilatória. As causas merecem uma investigação mais detalhada em trabalhos futuros.

Uma alternativa é reformular a equação (3.20), de forma a resolver

$$\begin{aligned} (\Delta - I) \left(\frac{\phi(t_k) - \phi(t_{k-1})}{\Delta t} \right) &= P'_\varepsilon(\phi(t_{k-1}))F'(P_\varepsilon(\phi(t_{k-1})))^*(F(P_\varepsilon(\phi(t_{k-1}))) - y^\delta) \\ &\quad - \alpha\beta P'_\varepsilon(\phi(t_{k-1}))\nabla \cdot \left(\frac{\nabla P_\varepsilon(\phi(t_{k-1}))}{|\nabla P_\varepsilon(\phi(t_{k-1}))|} \right), \end{aligned} \quad (3.21)$$

como um método tipo Euler.

Como em outros métodos iterativos, por exemplo Landweber, uma solução satisfatória depende de uma regra de parada. Neste caso, podemos aproveitar as propriedades regularizantes dos métodos iterativos, usando como critério de parada o princípio de discrepância.

Para implementação numérica, F. Früräuf et. al.[14], alertaram para a instabilidade numérica gerada pela divisão por pequenos valores absolutos do gradiente de P_ε na expressão $\nabla \cdot \left(\frac{\nabla P_\varepsilon(\phi)}{|\nabla P_\varepsilon(\phi)|} \right)$. A sugestão feita em [14] é substituir a expressão acima por $\nabla \cdot \left(\frac{\nabla P_\varepsilon(\phi)}{\sqrt{|\nabla P_\varepsilon(\phi)|^2 + r^2}} \right)$, onde r é um número positivo e pequeno. Para essa nova expressão, o algoritmo iterativo torna-se mais estável e, portanto, produz uma solução mais confiável.

Capítulo 4

Aplicação: Tomografia por Impedância

Como exemplo de aplicação da teoria tratada nos capítulos anteriores, apresentamos o problema da *tomografia elétrica por impedância - Electrical Impedance Tomography - EIT*. Esse problema possui inúmeras aplicações em áreas das mais diversas. Em ciências médicas, com aplicações em detecção de tumores, monitoramento de apnéias. Em geofísica e ciências ambientais, com a localização de depósitos de minerais, monitoramento de campos de fluídos e em engenharia com a detecção de corrosão em estruturas. As vantagens sobre outros métodos como tomografia por raio-X por exemplo, é que a aplicação de correntes elétricas não causam efeitos colaterais, além de diminuir os custos. Para referências veja [4, 5, 6, 14, 15, 23].

A intenção é tratar o problema através da formulação level set descrita no Capítulo 3. Inicialmente, apresentamos alguns resultados preliminares e a formulação matemática do problema. Em seguida, exibimos resultados numéricos que ilustram a teoria obtida no trabalho.

O problema da tomografia elétrica por impedância está relacionada com a identificação do parâmetro ω (chamado de coeficiente de difusão ou “condutividade”) no problema de Neumann

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\omega \nabla u) &= 0, & \Omega \\ \omega \frac{\partial u}{\partial \eta} &= h, & \partial \Omega,\end{aligned}\tag{4.1}$$

ou no problema de Dirichlet

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\omega \nabla u) &= 0, & \Omega \\ u &= f, & \partial \Omega,\end{aligned}\tag{4.2}$$

dependendo da formulação do problema de EIT.

4.1 Resultados preliminares

No que segue, mencionamos alguns resultados pertinentes a teoria de equações diferenciais parciais os quais fazem-se necessários à resolução do problema proposto. Também, impomos restrições aos espaços de forma a trabalhar com ambas as formulações (4.1) e (4.2) para o problema de EIT.

Como é bem conhecido, a equação (4.1) possui solução única $u_{\omega,h} \in H^1(\Omega)$ quando imposta a restrição $\int_{\partial\Omega} u d\mathcal{L} = 0$ na fronteira de Ω (veja [6]). Além disso, a equação (4.2) possui uma única solução $u_{\omega,f} \in H^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ (veja [12]). Assim, consideramos os seguintes subespaços dos espaços de Sobolev

$$\begin{aligned} L_+^\infty(\Omega) &:= \{\omega \in L^\infty(\Omega); \inf_{x \in \Omega} \omega(x) > 0\} \\ L_\star^2(\partial\Omega) &:= \{f \in L^2(\Omega); \int_{\partial\Omega} f d\mathcal{L} = 0\} \\ H_\star^1(\Omega) &:= \{h \in H^1(\Omega); \int_{\partial\Omega} h d\mathcal{L} = 0\} \\ H_\star^{\pm\frac{1}{2}}(\partial\Omega) &:= \{f \in H^{\pm\frac{1}{2}}(\partial\Omega); \int_{\partial\Omega} f d\mathcal{L} = 0\}. \end{aligned}$$

Note que se $\omega \in L_+^\infty(\Omega)$, então existem $\underline{\omega}, \bar{\omega}$ em $L^\infty(\Omega)$ tal que $0 < \underline{\omega} \leq \omega \leq \bar{\omega}$.

Estamos interessados em colher resultados que nos permitam tratar do problema de tomografia por impedância. Esse envolve os operadores de *Neumann para Dirichlet* (NpD) e de *Dirichlet para Neumann* (DpN), dependendo da formulação do problema. As restrições nos espaços das correntes h faz com que os operadores sejam inversos um do outro. Resultados de compacidade, auto-adjunto entre outros para os operadores são bem conhecidos (veja [5, 6]).

Definimos o operador linear e limitado

$$\begin{aligned} \Lambda_\omega : H_\star^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega) &\longrightarrow H_\star^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \\ h &\longmapsto T_1 u_{\omega,h} \end{aligned}$$

o qual chamamos de operador de Neumann para Dirichlet (NpD). Este aplica os dados de Neumann h no correspondente dado de Dirichlet $T_1 u_{\omega,h}$, onde T_1 é o operador de traço [22, Corolário 8.16] devidamente restrito. Conforme mencionado acima, dada uma conveniente restrição nos espaços, o operador de Dirichlet para Neumann (DpN) é Λ_ω^{-1} .

4.1.1 Continuidade e Fréchet diferenciabilidade em domínios derivativos

Estudamos aqui a continuidade e a Fréchet diferenciabilidade do operador

$$G_h : L_+^\infty(\Omega) \longrightarrow H_\star^1(\Omega); \quad G_h(\omega) := u_{\omega,h}$$

que aplica a condutividade $\omega \in L_+^\infty(\Omega)$ na única solução $u_{\omega,h}$ do problema de Neumann (4.1), obtida através da formulação fraca:

$$\text{Determine } u \in H_\star^1(\Omega); \quad \int_\Omega \omega \nabla u \cdot \nabla v d\mathcal{L}^2 = \int_{\partial\Omega} h T_1 v d\mathcal{L} \quad \forall v \in H_\star^1(\Omega). \quad (4.3)$$

O intuito é implementar o método de regularização iterativo do Capítulo 3 para o problema de tomografia por impedância. Ou seja, estamos interessados em resultados de Fréchet diferenciabilidade do operador G_h em topologias menos finas que a *topologia* $-L^\infty$ em $L_+^\infty(\Omega)$ (uma tal topologia é a *topologia* $-L^1$).

Lema 4.1.1 *Para cada $h \in H_\star^{-\frac{1}{2}}(\Omega)$, G_h é contínuo com respeito a topologia $-L^\infty$ em $L_+^\infty(\Omega)$. Mais precisamente, sejam $\omega_i \in L_+^\infty(\Omega)$ e $u_i := L_{\omega_i} h \in H_\star^1(\Omega)$, para $i = 1, 2$, correspondentes soluções do problema variacional (4.3). Então, existe $c > 0$, independente de ω_i , tal que*

$$\|u_1 - u_2\|_{H_\star^1(\Omega)} \leq \frac{1}{\underline{\omega}} \|u_2\|_{H_\star^1(\Omega)} \|\omega_2 - \omega_1\|_\infty \leq \frac{c}{\underline{\omega}^2} \|h\|_{L^2(\partial\Omega)} \|\omega_2 - \omega_1\|_\infty$$

Demonstração : Sejam u_1, u_2 soluções de (4.3). Então, da desigualdade de Poincaré [11, Teorema 2, pág. 140] temos

$$\begin{aligned} \underline{\omega} \|u_1 - u_2\|_{H_\star^1(\Omega)}^2 &\leq \int_\Omega \omega_1 |\nabla(u_1 - u_2)|^2 d\mathcal{L}^2 = \int_\Omega (\omega_1 \nabla u_1 \nabla(u_1 - u_2) - \omega_1 \nabla u_2 \nabla(u_1 - u_2)) d\mathcal{L}^2 \\ &= \int_{\partial\Omega} h T_1(u_1 - u_2) d\mathcal{L} - \int_\Omega \omega_1 \nabla u_2 \nabla(u_1 - u_2) d\mathcal{L}^2 \\ &= \int_\Omega \omega_2 \nabla u_2 \nabla(u_1 - u_2) d\mathcal{L}^2 - \int_\Omega \omega_1 \nabla u_2 \nabla(u_1 - u_2) d\mathcal{L}^2 \\ &= \int_\Omega (\omega_1 - \omega_2) \nabla u_2 \nabla(u_1 - u_2) d\mathcal{L}^2 \leq \|\omega_1 - \omega_2\|_\infty \|u_2\|_{H_\star^1(\Omega)} \|u_1 - u_2\|_{H_\star^1(\Omega)} \end{aligned}$$

o que prova a primeira das desigualdades. Como o operador de traço $T_1 : H_\star^1(\Omega) \longrightarrow L_\star^2(\partial\Omega)$ é contínuo, isto é, $\|T_1 u\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq c \|u\|_{H_\star^1(\Omega)}$, $\forall u \in H_\star^1(\Omega)$, segue a segunda desigualdade

$$\begin{aligned} \underline{\omega} \|u_2\|_{H_\star^1(\Omega)}^2 &\leq \int_\Omega \omega_2 |\nabla u_2|^2 d\mathcal{L}^2 = \int_{\partial\Omega} h T_1 u_2 d\mathcal{L} \\ &\leq \|h\|_{L^2(\partial\Omega)} \|T_1 u_2\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq c \|h\|_{L^2(\partial\Omega)} \|u_2\|_{H_\star^1(\Omega)}. \quad \square \end{aligned}$$

Seja $\omega \in L_+^\infty(\Omega)$ e assumamos $q \in L^\infty(\Omega)$ tal que $\tilde{\omega} := \omega + q \in L_+^\infty(\Omega)$. Defina $u := G_h \omega$ e $\tilde{u} := G_h \tilde{\omega}$ e considere o problema variacional

$$B_h(\tilde{u}, v) := \int_{\Omega} \omega \nabla \tilde{u} \nabla v d\mathcal{L}^2 = - \int_{\Omega} q \nabla u \nabla v d\mathcal{L}^2 \quad \forall v \in H_\star^1(\Omega). \quad (4.4)$$

Definindo

$$b : H_\star^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R} \text{ por } b(v) = \int_{\Omega} q \nabla u \nabla v d\mathcal{L}^2,$$

obtemos que b é linear e limitado e que B_h é limitada e coerciva. Assim, segue do Teorema de Lax-Milgram [22, Teorema 13.23] que existe uma única solução u' de (4.4). Defina $x := \tilde{u} - u - u'$. Então, x satisfaz:

$$\int_{\Omega} \omega \nabla x \nabla v d\mathcal{L}^2 = - \int_{\Omega} q \nabla(\tilde{u} - u) \nabla v d\mathcal{L}^2 \quad \forall v \in H_\star^1(\Omega). \quad (4.5)$$

Proposição 4.1.2 *O operador G_h é Fréchet diferenciável. Ainda, com a mesma notação, acima para $u' \in H_\star^1(\Omega)$ a única solução do problema variacional (4.4), temos: $DG_h(x)(q) = u'$. Mais precisamente, existe $c > 0$, independente de ω e q tal que*

$$\|G_h(\omega + q) - G_h(\omega) - u'\|_{H_\star^1(\Omega)} \leq \frac{c}{\underline{\omega}^3} \|h\|_{L^2(\partial\Omega)} \|q\|_\infty^2.$$

Demonstração : Temos que $x = \tilde{u} - u - u'$ é uma solução do problema variacional (4.5). Fazendo $v = x$ em (4.5) obtemos:

$$\underline{\omega} \|x\|_{H_\star^1(\Omega)}^2 \leq \int_{\Omega} \omega |\nabla x|^2 d\mathcal{L}^2 = - \int_{\Omega} q \nabla(\tilde{u} - u) \nabla x d\mathcal{L}^2 \leq \|q\|_\infty \|\tilde{u} - u\|_{H_\star^1(\Omega)} \|x\|_{H_\star^1(\Omega)}.$$

Do Lema 4.1.1, existe $c > 0$ independente de ω e q tal que

$$\|x\|_{H_\star^1(\Omega)} \leq \frac{c}{\underline{\omega}^3} \|h\|_{L^2(\partial\Omega)} \|q\|_\infty^2. \quad \square$$

Corolário 4.1.3 *Defina o operador $F_h : L_+^\infty(\Omega) \longrightarrow L_\star^2(\partial\Omega)$, $F_h(\omega) := T_1(G_h(\omega))$. Então F_h é contínuo e Fréchet diferenciável, com $DF_h = T_1 \circ DG_h$.*

Demonstração : Como o operador de traço $T_1 : H_\star^1(\Omega) \longrightarrow L_\star^2(\partial\Omega)$ é linear e limitado, consequentemente é Fréchet diferenciável. Segue, do Lema 4.1.1 e da Proposição 4.1.2, que G_h é contínuo e Fréchet diferenciável. Portanto, $F_h = T_1 \circ G_h$ também é contínuo e Fréchet diferenciável com derivada $DF_h = T_1 \circ DG_h$. \square

Para fins numéricos é conveniente trabalharmos com espaços de Hilbert, por exemplo $L^2(\Omega)$. Mas, surgem dificuldades, pois estimativas como a da Proposição 4.1.2 não são válidas, em geral, quando substituímos a norma $L^\infty(\Omega)$ pela norma $L^2(\Omega)$.

A aplicação em EIT requer a solução da equação de operadores $F_h(\omega) = f$, com os dados de Neumann $h \in L^2_\star(\partial\Omega)$, de Dirichlet $f \in L^2_\star(\partial\Omega)$, e uma condutividade ω restrita ao conjunto admissível $\mathcal{U} := \{1 + \chi_{\mathbb{D}}; \mathbb{D} \subset \Omega \text{ mensurável}\} \subset L^1(\Omega)$. Por isso, nosso interesse é de derivar condições para a continuidade do operador restrito $G_h|_{\mathcal{U}}: \mathcal{U} \rightarrow H^1_\star(\Omega)$, $\omega \mapsto G_h(\omega)$, com respeito a topologia de $L^1(\Omega)$ em \mathcal{U} . Uma tal condição é dada pelo:

Lema 4.1.4 *Seja $\omega \in \mathcal{U}$ tal que $u_{\omega,h} := G_h(\omega) \in W^{1,\infty}(\Omega)$ é a correspondente solução do problema variacional (4.3). Então, existe $c > 0$ tal que, para todo $\omega_\varepsilon \in \mathcal{U}$:*

$$\|G_h(\omega) - G_h(\omega_\varepsilon)\|_{H^1_\star(\Omega)} \leq c (\|\omega - \omega_\varepsilon\|_{L^1(\Omega)})^{\frac{1}{2}}$$

Demonstração : Defina $\mathbb{D}_\varepsilon \subset \Omega$ tal que $\omega_\varepsilon = 1 + \chi_{\mathbb{D}_\varepsilon}$. Defina $u := G_h(\omega)$ e $u_\varepsilon := G_h(\omega_\varepsilon)$. Observe que $\omega_\varepsilon = \omega$ em $\Omega \setminus \mathbb{D}_\varepsilon$. Usando o fato de que $u := u_{\omega,h}$ satisfaz (4.3), obtemos:

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \omega_\varepsilon |\nabla u|^2 d\mathcal{L}^2 - \int_{\partial\Omega} h T_1 u d\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \omega |\nabla u|^2 d\mathcal{L}^2 + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{D}_\varepsilon} (\omega_\varepsilon - \omega) |\nabla u|^2 d\mathcal{L}^2.$$

Assim, temos as equações

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \omega_\varepsilon |\nabla(u - u_\varepsilon)|^2 d\mathcal{L}^2 &= \int_{\Omega} \omega_\varepsilon (|\nabla u|^2 - 2\nabla u \nabla u_\varepsilon + |\nabla u_\varepsilon|^2) d\mathcal{L}^2 \\ &= \int_{\Omega} \omega_\varepsilon |\nabla u|^2 d\mathcal{L}^2 - 2 \int_{\partial\Omega} h T_1 u d\mathcal{L} + \int_{\Omega} \omega_\varepsilon |\nabla u_\varepsilon|^2 d\mathcal{L}^2 \\ &= - \int_{\Omega} \omega |\nabla u|^2 d\mathcal{L}^2 + \int_{\mathbb{D}_\varepsilon} (\omega_\varepsilon - \omega) |\nabla u|^2 d\mathcal{L}^2 + \int_{\Omega} \omega_\varepsilon |\nabla u_\varepsilon|^2 d\mathcal{L}^2 \end{aligned} \quad (4.6)$$

e

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \omega_\varepsilon |\nabla u_\varepsilon|^2 d\mathcal{L}^2 - \int_{\Omega} \omega |\nabla u|^2 d\mathcal{L}^2 &= \int_{\partial\Omega} h T_1 u_\varepsilon d\mathcal{L} - \int_{\partial\Omega} h T_1 u d\mathcal{L} \\ &= \int_{\Omega} \omega_\varepsilon \nabla u \nabla u_\varepsilon d\mathcal{L}^2 - \int_{\Omega} \omega \nabla u_\varepsilon \nabla u d\mathcal{L}^2 = \int_{\mathbb{D}_\varepsilon} (\omega - \omega_\varepsilon) \nabla u_\varepsilon \nabla u d\mathcal{L}^2. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Substituindo (4.7) em (4.6) e usando a desigualdade de Hölder obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \omega_\varepsilon |\nabla(u - u_\varepsilon)|^2 d\mathcal{L}^2 &= \int_{\mathbb{D}_\varepsilon} (\omega_\varepsilon - \omega) (\nabla u - \nabla u_\varepsilon) \nabla u d\mathcal{L}^2 \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{D}_\varepsilon} |\nabla(u - u_\varepsilon)|^2 d\mathcal{L}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{D}_\varepsilon} (\omega - \omega_\varepsilon)^2 |\nabla u|^2 d\mathcal{L}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Como $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$, existe $c_1 > 0$ tal que $\|\nabla u\|_\infty < c_1$. Combinando com o fato que $1 \leq \omega_\varepsilon \leq 2$

em Ω , $(\omega_\varepsilon - \omega)^2 = 1$ na $\mathbb{D}\Delta\mathbb{D}_\varepsilon$ e usando (4.8), segue que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla(u - u_\varepsilon)|^2 d\mathcal{L}^2 &\leq \int_{\Omega} \omega_\varepsilon |\nabla(u - u_\varepsilon)|^2 d\mathcal{L}^2 \leq \left(\int_{\mathbb{D}\Delta\mathbb{D}_\varepsilon} |\nabla(u - u_\varepsilon)|^2 d\mathcal{L}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{D}\Delta\mathbb{D}_\varepsilon} |\nabla u|^2 d\mathcal{L}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\int_{\Omega} |\nabla(u - u_\varepsilon)|^2 d\mathcal{L}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{D}\Delta\mathbb{D}_\varepsilon} c_1^2 d\mathcal{L}^2 \right)^{\frac{1}{2}} = c_1 \left(\int_{\Omega} |\nabla(u - u_\varepsilon)|^2 d\mathcal{L}^2 \right)^{\frac{1}{2}} (\|\omega - \omega_\varepsilon\|_{L^1(\Omega)})^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Assim, da desigualdade de Poincaré [11, Teorema 2, pág. 140], existe $c_2 > 0$ tal que

$$\|u - u_\varepsilon\|_{H_*^1(\Omega)} \leq c_2 \|\nabla(u - u_\varepsilon)\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |\nabla(u - u_\varepsilon)|^2 d\mathcal{L}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq c_2 c_1 (\|\omega - \omega_\varepsilon\|_{L^1(\Omega)})^{\frac{1}{2}}.$$

Fazendo $c := c_1 c_2$ temos:

$$\|G_h(\omega) - G_h(\omega_\varepsilon)\|_{H_*^1(\Omega)} = \|u - u_\varepsilon\|_{H_*^1(\Omega)} \leq c (\|\omega - \omega_\varepsilon\|_{L^1(\Omega)})^{\frac{1}{2}}. \quad \square$$

Corolário 4.1.5 *Nas mesmas hipóteses do Lema 4.1.4, o operador $F_h|_{\mathcal{U}}$ é contínuo com respeito a topologia $-L^1$.*

Demonstração : Segue da continuidade do operador de traço T_1 e do operador G_h dada pelo Lema 4.1.4. \square

Segundo [5], não é conhecida qual a regularidade necessária em $\omega \in \mathcal{U}$ de forma que $G_h(\omega) \in W^{1,\infty}(\Omega)$. Uma condição suficiente é que $\omega \in L_+^\infty(\Omega) \cap C^{1,1}(\Omega)$. Mas, existem funções descontínuas $\omega \in \mathcal{U}$ tal que $G_h(\omega) \in W^{1,\infty}(\Omega)$. Em [24] tais afirmativas foram provadas sob a hipótese de $\partial\Omega$ e $\partial\mathbb{D}$ pertencerem a $C^{1,\alpha}$ com $0 < \alpha < 1$.

Outro fato importante de ressaltar é a formulação do operador $F_h'(\omega)^*$ a qual aparece na iteração level set (confira (3.20)).

Proposição 4.1.6 *Seja $\omega \in L_+^\infty(\Omega)$. Então, o operador adjunto $F_h'(\omega)^*$ de $F_h'(\omega)$ é dado por:*

$$F_h'(\omega)^*(g) = -\nabla u_{\omega,h} \nabla u_{\omega,g},$$

onde

$$u_{\omega,h} := F_h(\omega) \in H_*^1(\Omega) \quad e \quad u_{\omega,g} := G_f(\omega) \in H_*^1(\Omega)$$

para cada $g, h \in L_*^2(\partial\Omega)$; g, h , dados de Neumann para o problema (4.1).

Demonstração : Suponha $q \in L^\infty(\Omega)$ e $g \in L_*^2(\partial\Omega)$. Da formulação variacional (4.3) para o problema de Neumann (4.1), segue que $u_{\omega,g}$ satisfaz

$$\int_{\Omega} \omega \nabla u_{\omega,g} \nabla v d\mathcal{L}^2 = \int_{\partial\Omega} g T_1 v d\mathcal{L} \quad \forall v \in H_*^1(\Omega). \quad (4.9)$$

Seja $u' := G'_h(\omega)(q) = DG_h(\omega)(q) \in H_*^1(\Omega)$ a derivada direcional de G_h como na Proposição 4.1.2. Pela mesma Proposição, u' é a única solução do problema variacional

$$\int_{\Omega} \omega \nabla u' \nabla v d\mathcal{L}^2 = - \int_{\Omega} q \nabla u_{\omega,h} \nabla v d\mathcal{L}^2 \quad \forall v \in H_*^1(\Omega). \quad (4.10)$$

Segue de (4.10) e (4.9) que

$$\begin{aligned} \langle F'_h(\omega)(q), g \rangle_{L^2(\partial\Omega)} &= \langle T_1 u', g \rangle_{L^2(\partial\Omega)} = \int_{\partial\Omega} g T_1 u' d\mathcal{L} = \int_{\Omega} \omega \nabla u' \nabla u_{\omega,g} d\mathcal{L}^2 \\ &= - \int_{\Omega} q \nabla u_{\omega,h} \nabla u_{\omega,g} d\mathcal{L}^2 = \langle q, -\nabla u_{\omega,h} \nabla u_{\omega,g} \rangle_{L^2(\Omega)}. \quad \square \end{aligned}$$

4.2 Descrição do problema

Nessa seção apresentamos a formulação do problema da tomografia por impedância EIT, bem como, resultados pertinentes a teoria necessária para trabalharmos a formulação level set desenvolvida no capítulo anterior para a solução do problema de EIT.

4.2.1 Tomografia por impedância - EIT

A *tomografia elétrica por impedância - EIT* é um método de reconstruir propriedades da condutividade elétrica de algum objeto condutor, sob medidas elétricas tomadas sobre a fronteira desse objeto.

Este problema, inicialmente proposto por Calderón [8], possui muitas variantes e técnicas para solucioná-lo. Uma alternativa recente é a solução por métodos level set.

O **problema direto** consiste em: dado Ω um domínio limitado em \mathbb{R}^N possuindo materiais com condutividade elétrica $\omega(x)$ satisfazendo $\omega(x) \geq \omega_0 > 0$, com fronteira $\partial\Omega \in C^1$ por partes, η o vetor normal unitário que aponta para fora de Ω ; solucionar o *problema de Neumann*, i.e., encontrar a solução u do problema (4.1) e correspondentes dados de Dirichlet $u|_{\partial\Omega}$, conhecido os dados de Neumann h e a condutividade ω . Uma formulação análoga é possível considerando-se o problema de Dirichlet (4.2).

O **problema inverso** é: reconstituir a condutividade elétrica $\omega(x) \in L_+^\infty(\Omega)$, usando o conjunto de valores da corrente elétrica h (dados de Neumann) aplicada à fronteira de Ω e os correspondentes valores do potencial elétrico $u(x)$ na $\partial\Omega$ (dados de Dirichlet $u|_{\partial\Omega} = f$ medidos).

Observação 4.2.1 *O problema inverso de reconstruir a condutividade elétrica é não linear e mal posto, i.e., o operador não depende continuamente dos dados (veja [5]).*

Na prática, é impossível medir os dados sobre toda a fronteira de Ω . Assim, o problema de reconstrução deve ser encarado com o conhecimento de uma quantidade finita de dados, obtida por medidas sob a fronteira de Ω .

Portanto, antes de seguirmos vamos responder a duas questões:

1. Quantos dados necessitamos conhecer, i.e., se o parâmetro ω em (4.1) é unicamente determinado pelo conhecimento de alguns pares de dados $(h, \Lambda_\omega(h))$ sobre a fronteira ou pelo operador (NpD)?
2. O problema inverso é mal posto no sentido de Hadamard?

Resultados de identificabilidade para $\omega \in L_+^\infty$, no caso de uma única medida no conjunto de dados $(h, \Lambda_\omega(h))$ sobre toda a fronteira de Ω no problema de EIT, são dados em [2, 5, 6, 13] e referências lá citadas. Resultados de identificabilidade para o caso de medidas sobre partes da fronteira de Ω são desconhecidos.

Para confirmar a resposta afirmativa, quanto a má-colocação do problema de identificação da condutividade, veja exemplo 2.1 em [6] ou [15].

4.3 Reconstrução por regularização level set

Agora, apresentamos resultados obtidos através de regularização level set descrita no Capítulo 3 para o problema de EIT, juntamente com o algoritmo utilizado na reconstrução da condutividade ω .

Nosso interesse é pela classe especial de condutividades $\omega = 1 + \chi_{\mathbb{D}} \in \mathcal{U}$, onde \mathbb{D} é um domínio, possivelmente multiconexo, de forma que $\bar{\mathbb{D}} \subset \text{int}(\Omega)$.

Na reconstituição da forma de \mathbb{D} , através da condutividade admissível $\omega \in \mathcal{U}$, utilizamos quatro pares de dados medidos sobre a fronteira de Ω , i.e., a determinação e localização da forma de $\mathbb{D} \subset \Omega$ pelo processo iterativo (3.20) utiliza pares de dados $(h, f) = (\Lambda_\omega^{-1}f, f)$ medidos sobre a fronteira. Por $h \in L_*^2(\partial\Omega)$ representamos os dados de Neumann e por $f := \Lambda_\omega(h) \in L_*^2(\partial\Omega)$ os correspondentes dados de Dirichlet. Como os dados são medidos, estamos sujeitos a conhecer somente os dados com ruídos f^δ , com $\|f - f^\delta\| \leq \delta$.

No contexto de regularização por level set, como apresentado no Capítulo 3, o problema de EIT consiste em resolver a equação de operadores mal posta

$$F_h(P_\varepsilon(\phi)) = f^\delta, \quad \phi \in H^1(\Omega). \quad (4.11)$$

Observação 4.3.1 *Para essa aplicação, temos que considerar novos operadores P e P_ε com o acréscimo de 1 aos respectivos operadores definidos em (3.1) e (3.8), respectivamente. Também, ressaltamos que toda a teoria desenvolvida no Capítulo 3 se aplica aos novos operadores P e P_ε sem perdas. Justificamos que a mudança de operadores é para garantir a compatibilidade com o parâmetro ω no problema (4.1). Neste caso, para termos elipticidade do problema, ω deve ser estritamente positivo.*

Se $\phi \in H^1(\Omega)$ é uma solução de (4.11), então $\omega = P(\phi) \in \mathcal{U}$ é uma solução de $F_h(\omega) = f^\delta$.

Como mencionamos na Seção 4.1.1, não está provado que o operador não linear

$$F_h : L^1(\Omega) \supset L_+^\infty(\Omega) \longrightarrow L_*^2(\partial\Omega)$$

é contínuo e Fréchet diferenciável com respeito a topologia $L^1(\Omega)$ em $L_+^\infty(\Omega)$. Mas, devido aos resultados de Y. Y. Li e M. Vogelius [24], para conjuntos $\mathbb{D} \subset \Omega$, ambos suficientemente regulares, $G_h(\omega) \in W^{1,\infty}(\Omega)$. Assim, pelo Lema 4.1.4, podemos implementar o método iterativo deduzido na Seção 3.5 via regularização level set para a equação (4.11).

4.3.1 Implementação numérica e exemplos

De posse dos resultados de Fréchet diferenciabilidade do operador F_h , a implementação numérica da iteração (3.21) é dada pelo algoritmo:

Algoritmo: 4.3.1 (1) Escolha um valor inicial $\phi_0 \in H^1(\Omega)$ apropriado e fixe os parâmetros $\alpha, \beta, \varepsilon \in [0, \infty)$

(2) Para $k=0$ até k_* (escolhido pelo princípio de discrepância) faça:

(i) Calcule $P_\varepsilon(\phi_k)$, $P'_\varepsilon(\phi_k)$, $\nabla \cdot \left(\frac{\nabla P_\varepsilon(\phi_k)}{|\nabla P_\varepsilon(\phi_k)|} \right)$

(ii) Para calcular $F_h(P_\varepsilon(\phi_k))$: Resolva o problema de Neumann

$$\nabla \cdot (P_\varepsilon(\phi_k) \nabla u_k) = 0 \text{ em } \Omega \quad \text{com} \quad \frac{\partial u_k}{\partial \eta} = h \text{ na } \partial\Omega$$

Então, $F_h(P_\varepsilon(\phi_k)) = T_1 u_k$;

(iii) Avalie o resíduo $r_k := T_1 u_k - f^\delta = F_h(P_\varepsilon(\phi_k)) - f^\delta$

(iv) Para calcular $F'_h(P_\varepsilon(\phi_k))^*(r_k)$: Resolva o problema de Neumann

$$\nabla \cdot (P_\varepsilon(\phi_k) \nabla v_k) = 0 \text{ em } \Omega \quad \text{com} \quad \frac{\partial v_k}{\partial \eta} = r_k \text{ na } \partial\Omega$$

Então, $F'_h(P_\varepsilon(\phi_k))^*(r_k) = -\nabla u_k \nabla v_k$

(v) Encontre $w_k \in H^1(\Omega)$ solução do problema de Neumann

$$(I - \Delta)w_k = P'_\varepsilon(\phi_k)(\nabla u_k \nabla v_k) + \beta\alpha P'_\varepsilon(\phi_k) \left(\frac{P'_\varepsilon(\phi_k)}{|\nabla P'_\varepsilon(\phi_k)|} \right) \quad \text{em } \Omega$$

$$\frac{\partial w_k}{\partial \eta} = 0 \quad \text{na } \partial\Omega$$

(vi) Atualize a função level set $\phi_{k+1} = \phi_k + \frac{1}{\alpha} w_k$

(3) Fim

Note que o algoritmo é complexo pela necessidade de resolver três problemas elípticos em cada passo.

Por simplicidade de implementação, consideraremos Ω como o quadrado unitário

$$\Omega :=]0, 1[\times]0, 1[\subset \mathbb{R}^2.$$

Nosso exemplo numérico trata de reconstituir o parâmetro ω apresentado na Figura 4.1 para a equação (4.2). Muito embora, apresentamos os resultados levando em consideração a equação (4.1). Dada a restrições nos espaços, os operadores (NpD) e (DpN) são inversos um do outro.

O método level set é aplicado partindo de uma condição inicial mostrada na Figura 4.2. Usamos ainda quatro pares de Dirichlet-Neumann dispostos de forma simétrica no quadrado unitário Ω , conforme a Figura 4.3.

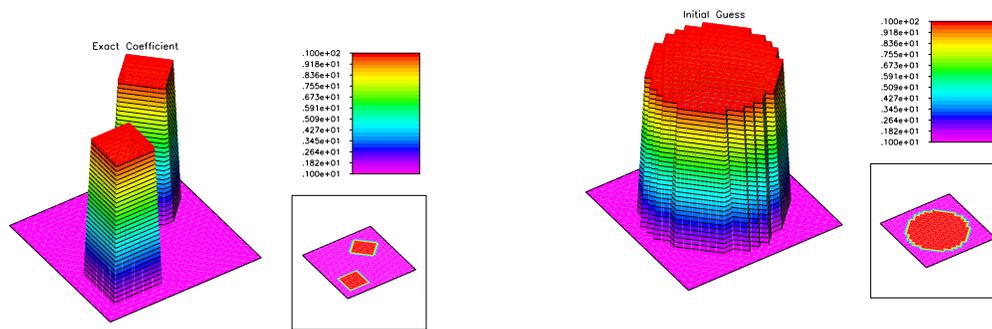


Figura 4.1: Parâmetro a ser reconstruído.

Figura 4.2: Condição inicial para o método de regularização pelo método level set

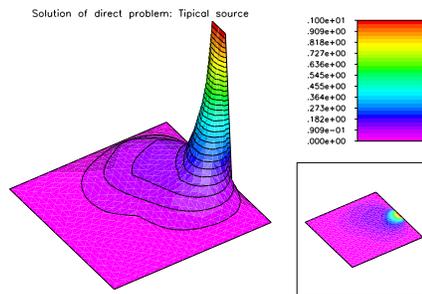


Figura 4.3: Dados de Dirichlet aplicados na fronteira de Ω .

Os testes de performance do método foram aplicados para reconstituir o parâmetro ω mostrado Figura 4.1. No entanto, testes foram implementados conhecendo os dados “exatamente” e com 5% e 10% de ruído.

A Figura 4.4 mostra a evolução do resíduo para o caso em que os dados são conhecidos “exatamente”, i.e., pela resolução do problema (4.2) pelo método direto em uma malha relativamente fina. O método é robusto, e depois de 350 passos a evolução torna-se lenta.

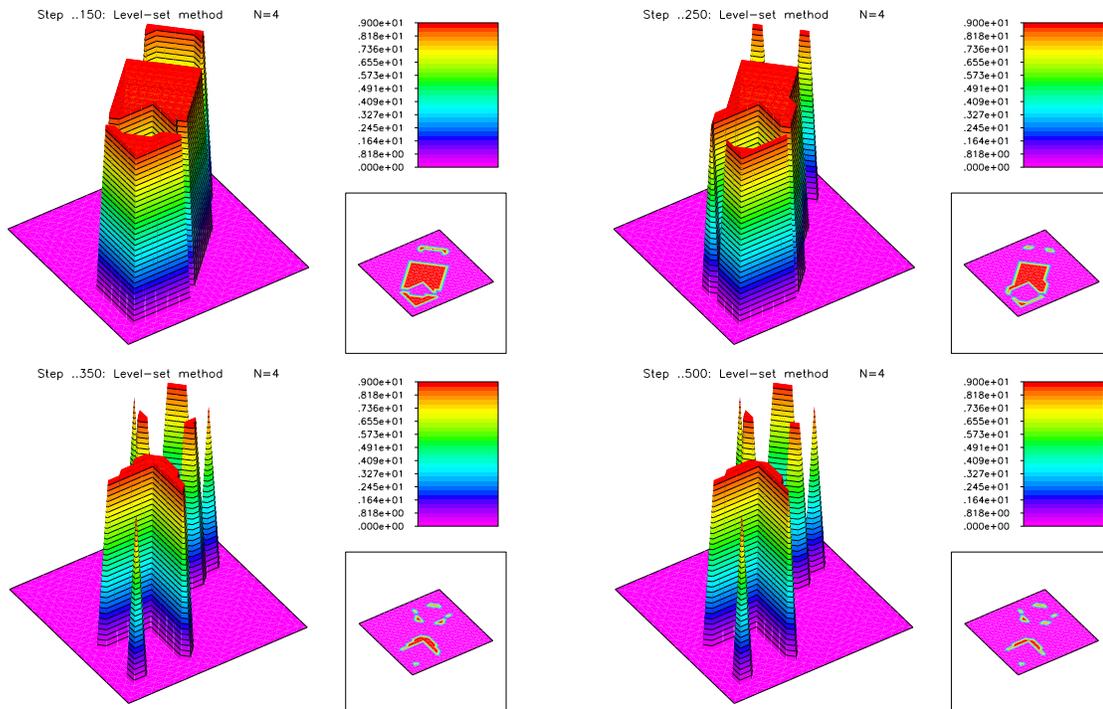


Figura 4.4: Evolução da iteração do erro para dados livres de ruídos

A Figura 4.5 apresenta a evolução da função level set ϕ para o caso em que a solução é livre de ruídos. A deformação da função level set também torna-se lenta após 350 passos.

As Figuras 4.6 e 4.7 mostram a evolução do resíduo para dados com 5% e 10% de ruídos, respectivamente. Observamos que, com o aumento do nível de ruídos, a identificação fica seriamente comprometida. A evolução para os dados com 5% de ruídos apresentam uma boa performance, cuja solução para 500 passos compara-se a solução obtida para dados sem ruídos. Já para dados com 10% de ruídos, o resíduo permanece grande mesmo após 500 passos.

Testes similares ao aqui apresentado são encontrados em [9]. Através de argumentos eurísticos Doel e Ascher obtiveram sucesso na identificação de parâmetros no problema de EIT a partir de outros funcionais. Ainda em [9] comparam-se vários termos de regularização e sua eficiência na reconstrução de parâmetros. Resultados numéricos obtidos por Doel e Ascher permitiram a eles comprovar que o termo de regularização quadrático é uma penalização muito severa ao funcional de Tikhonov. Assim, propuseram substituir o termo quadrático por um termo da forma

$$\left(\int_{\Omega} (1 - |\nabla\phi|^2) d\lambda \right)^2, \quad (4.12)$$

motivados pelo fato de que uma função level set “ideal” é uma função que satisfaça $|\nabla\phi| = 1$ quase sempre. A garantia teórica dos resultados de minimização apresentados no Capítulo 3

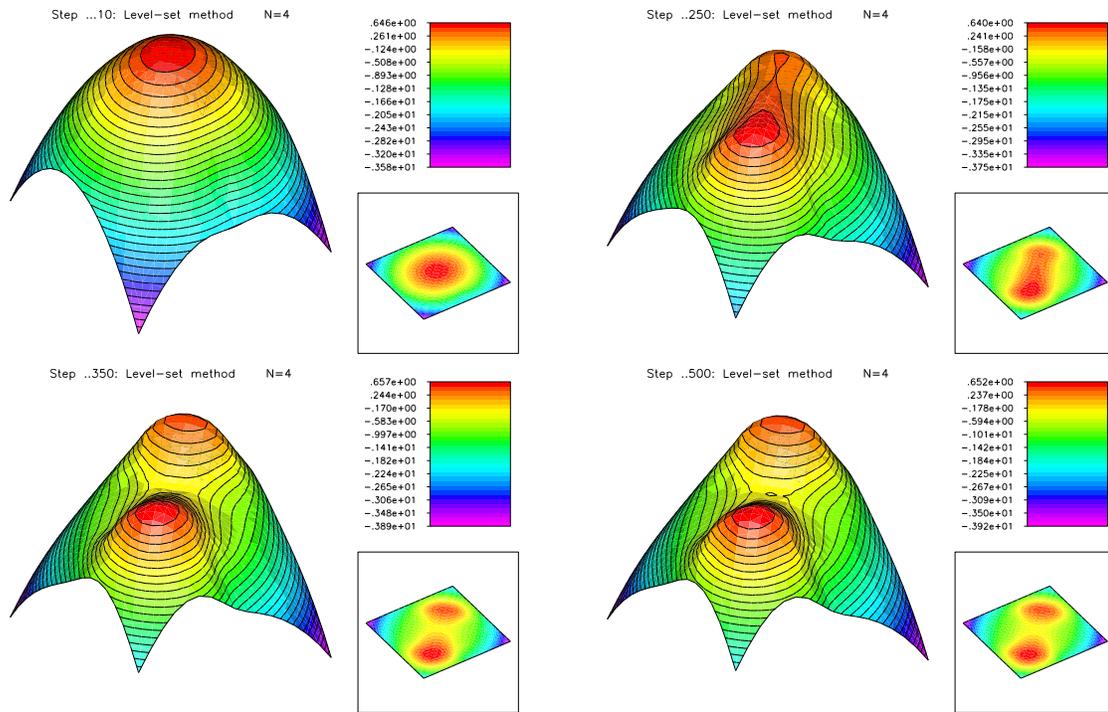


Figura 4.5: Evolução da função level set para dados livres de ruídos

para o novo termo de penalização é objeto de futuras investigações.

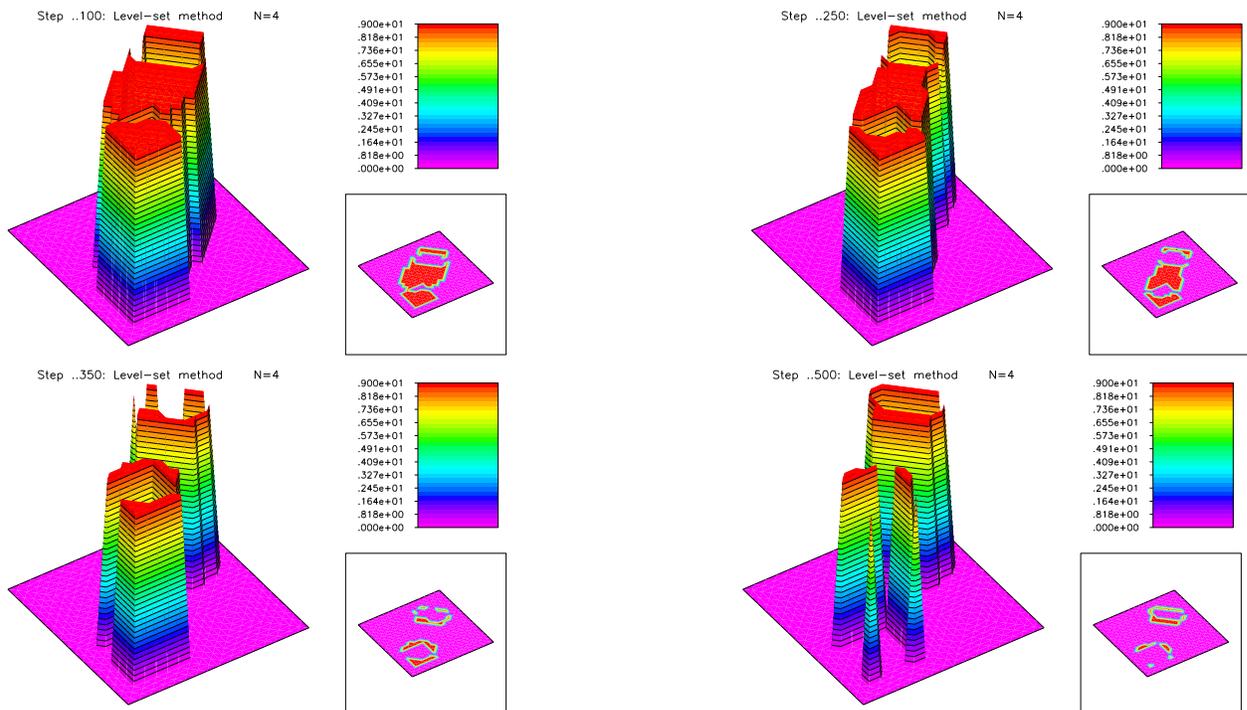


Figura 4.6: Evolução das iterações do erro para dados com 5% de ruídos

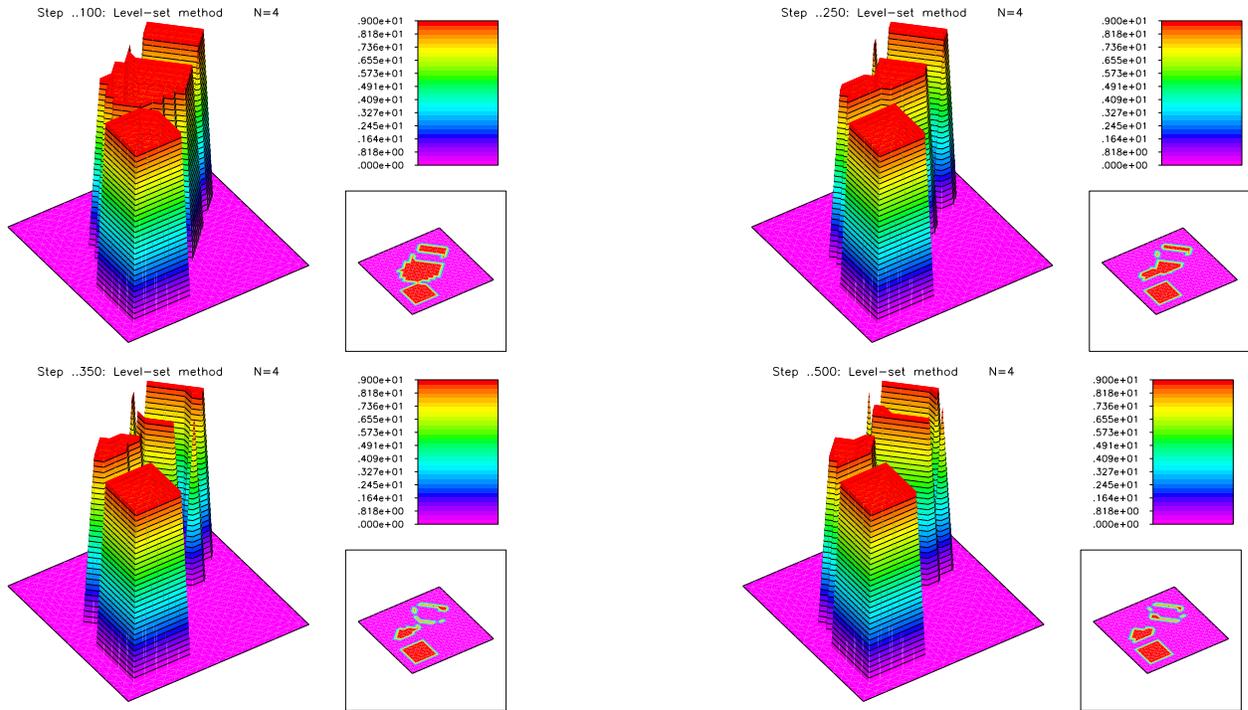


Figura 4.7: Evolução das iterações do erro para dados com 10% de ruídos

Outro ponto a ressaltar é o da quantidade de passos que o método iterativo necessita para convergência. Em nosso experimento, todos os testes foram abortados com 500 iterações. Em [9], os autores dizem-se satisfeitos com um número bem inferior de passos. Não há evidências analíticas para tal conclusão. Uma possível causa da diminuição do número de iterações é a implementação com pré-condicionadores. Outro possível motivo do número reduzido de passos é a magnitude da frequência dos dados de Dirichlet. Essa observação foi feita por Hettlich e Rundell [19] e, posteriormente, observada também por Doel e Ascher [9].

Conclusão

Problemas inversos envolvendo operadores descontínuos apresentam grandes dificuldades de resolução, pois estes, além de serem mal postos no sentido de Hadamard, envolvem operadores descontínuos. Assim, a resolução de tais problemas requer alguma forma de regularização. E, para operadores não lineares, a teoria de regularização de problemas inversos é ainda pouco desenvolvida. Os resultados obtidos envolvem condições fortes de regularidade nos operadores envolvidos.

O presente trabalho fornece uma alternativa de solução para problemas inversos sujeitos a restrições. Tal alternativa é a regularização por métodos level set.

Analizar matematicamente o problema inverso envolvendo obstáculos por intermédio de regularização level set exige a introdução de um novo conceito de mínimo para o funcional de Tikhonov (3.7). Sob esse novo conceito de mínimo, é possível repetir os resultados de existência de uma solução regularizada para o problema inverso envolvendo obstáculos $F(u) = y$. Ainda, propriedades de regularização similares as conhecidos para a teoria clássica de problemas inversos não lineares são aqui obtidos (compare com [10, Capítulo 10]).

A fim de tornar tratável numericamente a solução de problemas inversos que envolvem operadores descontínuos, é proposto um funcional estabilizado (3.15) de forma a obter uma aproximação para o funcional de Tikhonov (3.7). Por fim a apresentação dos resultados de aproximação da solução generalizada por soluções estabilizadas fecham a alternativa de solução de problemas inversos restritos por intermédio de regularização level set.

A aplicação ao problema de identificação de parâmetros, mais especificamente, ao problema de tomografia por impedância confirma a eficácia do método desenvolvido.

Aplicações da teoria desenvolvida nesse trabalho a outros problemas de matemática aplicada são objeto de futuras investigações.

Capítulo 5

Apêndice: Notações e definições

Espaços de funções (veja [1])

$L^p(\Omega)$	$\{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ Lebesgue mensurável}\}$
$L^\infty(\Omega)$	$\{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ Lebesgue mensurável, } \textit{ess sup} f < \infty\}$
$L_+^\infty(\Omega)$	$\{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ Lebesgue mensurável, } \textit{ess inf} f > 0\}$
$H^1(\Omega)$	espaços de Sobolev das funções em $L^2(\Omega)$ com primeiras derivadas em $L^2(\Omega)$
$W^{m,p}$	espaços de Sobolev das funções e derivadas de ordem $m \leq \alpha $ em $L^p(\Omega)$, α multi-índice

Medidas(veja [11])

\mathcal{L}^n	medida de Lebesgue n-dimensional
\mathcal{H}^n	medida de Hausdorff n-dimensional
$\delta(t)$	denota a delta-distribuição unidimensional (veja[1])

Definição 5.0.1 [Funções de variação limitada] Uma função $f \in L^1(\Omega)$ tal que

$$\sup\left\{\int_{\Omega} f \cdot \textit{div} \varphi d\mathcal{L}^n : \varphi \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^n) \text{ e } |\varphi| \leq 1\right\} < \infty$$

é dita de variação limitada e denotamos esse espaço de funções por $BV(\Omega)$.

$BV(\Omega)$ é um espaço de Banach com a norma

$$\|\cdot\|_{BV(\Omega)} = \|\cdot\|_{L^1(\Omega)} + |\cdot|_{BV(\Omega)}$$

onde semi-norma em $BV(\Omega)$ é definida como

$$|\cdot|_{BV(\Omega)} := \sup\left\{\int_{\Omega} f \cdot \textit{div} \varphi d\mathcal{L}^n : \varphi \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^n) \text{ e } |\varphi| \leq 1\right\}.$$

Definição 5.0.2 A métrica da diferença simétrica entre conjuntos A e B é definida como $A\Delta B = |A - B| + |B - A|$.

Bibliografia

- [1] R.A. Adams, *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, (1975).
- [2] G. Alessandrini, *Singular solutions of elliptic equations and the determination of conductivity by boundary measurements*, J. of Differential Equations, 84: 252-272, (1990).
- [3] J. Baumeister, *Stable Solutions of Inverse Problems*, Wieweg, Braunschweig, (1987).
- [4] J. Baumeister e A. Leitão, *Topics in Inverse Problems*, Publicações Matemáticas do IMPA: 25th Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro, (2005).
- [5] L. Borcea, *Electrical impedance tomography*, Inverse Problems, 18: R99-R136 , (2002).
- [6] M. Brühl, *Explicit characterization of inclusions in electrical impedance tomography*, SIAM J. Math. Anal., 32: n° 6, 1327-1341, (2001).
- [7] M. Burger, *A level set method for inverse problems*, Inverse Problems, 17:1327-1355, (2001).
- [8] A. P. Calderón, *On an inverse boundary value problems*, Seminário Brasileiro de Análise e suas aplicações à Física Contínua, Soc. Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 65-73, (1980).
- [9] K. van den Doel and U. M. Ascher, *On level set regularization for highly ill-posed distributed parameter estimation problems*, J. Comp. Physic, to appear (2006).
- [10] H. W. Engl, M. Hanke e A. Neubauer, *Regularization of Inverse Problems*, Kluwer Academic Publishers, (1996).
- [11] L. C. Evans e R. F. Gariepy, *Measure Theory and Fine Properties of Functions*, Boca Raton, FL: Chemical Rubber Company Press, (1992).
- [12] G. B. Folland, *Introduction to Partial differential Equations*, Princeton, NJ: Princeton University Press, (1995)
- [13] A. Friedman and V. Isakov, *On the Uniqueness in The Inverse Conductivity Problem with One Measurement*, Indiana University Mathematics Journal, Vol. 38, n° 3, (1989).

- [14] F. Frühauf, O. Scherzer and A. Leitão, *Analysis of regularization methods for the solution of ill-posed problems involving discontinuous operators*, SIAM J. Numerical Analysis, Vol. 43, n° 2, pp. 767 - 786 (2005).
- [15] R. Griesmaier, *A level set method for the solution of the inverse conductivity problem and several distance measures as error criterion for inverse problems*, Diploma Thesis, Leopold Franzens University Innsbruck, (2004).
- [16] C. W. Groetsch, *The Theory of Tikhonov Regularization for Fredholm equations of the first kind*, Pitman, Boston, (1984).
- [17] C. W. Groetsch, *Generalized Inverse of Linear Operators; Representation and Approximation*, Marcel Dekker, INC, New York, (1977).
- [18] F. Hettlich e W. Rundell, *Iterative methods for the reconstruction of an inverse potential problem*, Inverse Problems, 12: 251-266, (1996).
- [19] F. Hettlich e W. Rundell, *The determination of discontinuity in a conductivity from a single measurement*, Inverse Problems, 14: 67-82, (1998).
- [20] V. Isakov *Inverse source problems*, *Mathematical Surveys and Monographs*, American Mathematical Society, Providence, RI: vol 34, (1990).
- [21] A. Kirsch, *An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems*, Springer, Karlsruhe, (1996).
- [22] R. Kress, *Linear Integral Equations, 2nd end*, Springer, Berlin, (1999).
- [23] A. Leitão and O. Scherzer, *On the relation between constraint regularization, level sets, and shape optimization*, Inverse Problems, 19:L1-L11, (2003).
- [24] Y. Y. Li e M. Vogelius, *Gradient estimates for solutions to divergence from elliptic equations with discontinuous coefficients*, Arch. Rational Mech. Anal., n°. 2,91-151, 153(2000).
- [25] S. Osher and J. Sethian, *Fronts propagation with curvature dependent speed: Algorithms based on Hamilton-Jacobi formulation.*, J. of Computational Physics., 56:12-49, (1988).
- [26] Platão, *"A República" Coleção A Obra-Prima de cada Autor*, Editora: Martin Claret, São Paulo SP, 2002.
- [27] F. Santosa, *A level-set approach for inverse problems involving obstacles*, ESAIM Contrôle Optim. Calc. Var., 1:17-33 (electronic), (1995/96).
- [28] U. Teutenhahn, *On the asymptotical regularization of nonlinear ill-posed problems*, Inverse Problems. 10(1994), 1405-1418