

# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>vi</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>vii</b>
<b>Simbologia</b>	<b>vii</b>
<b>Resumo</b>	<b>x</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Considerações iniciais . . . . .	1
1.2 Objetivos . . . . .	2
1.3 Descrição dos capítulos . . . . .	3
<b>2 Modelos viscoelásticos</b>	<b>4</b>
2.1 Descrição do comportamento viscoelástico . . . . .	4
2.2 Fluência . . . . .	5
2.3 Relaxação . . . . .	7
2.4 Comportamento dinâmico . . . . .	8
2.4.1 Módulo complexo . . . . .	8
2.5 Função degrau unitário e função impulso unitário . . . . .	11
2.6 Transformada de Laplace . . . . .	12
2.6.1 Definição da transformada de Laplace . . . . .	12
2.6.2 Propriedades da transformada de Laplace . . . . .	12
2.7 Modelamento do comportamento viscoelástico . . . . .	13
2.7.1 Modelos matemáticos para viscoelasticidade linear . . . . .	13
2.7.2 Materiais reais: modelos de vários elementos . . . . .	22
2.7.3 Aplicação do modelo de Maxwell generalizado . . . . .	22
2.8 Efeito da temperatura . . . . .	27
2.8.1 Equivalência tempo-temperatura . . . . .	27
2.8.2 O efeito do envelhecimento . . . . .	30
2.9 Princípio da sobreposição de Boltzmann . . . . .	31
2.10 Princípio da correspondência . . . . .	32

---

2.11	Estado de tensão multiaxial . . . . .	33
2.12	Conversão entre o módulo de fluência e módulo de relaxação deviatórico . .	35
2.13	Extensometria . . . . .	36
2.13.1	Sistema de medição para extensômetros . . . . .	37
<b>3</b>	<b>Determinação experimental de propriedades mecânicas viscoelásticas e simulação numérica</b>	<b>40</b>
3.1	Objetivo experimental . . . . .	40
3.2	Ensaio de fluência . . . . .	41
3.2.1	Aparato de ensaio . . . . .	41
3.2.2	Corpos de prova . . . . .	42
3.2.3	Condicionamento dos corpos de prova . . . . .	43
3.2.4	Seleção das condições de ensaio . . . . .	43
3.2.5	Procedimento para ensaio de fluência . . . . .	44
3.3	Ensaio dinâmico sob flexão . . . . .	45
3.3.1	Aparato de ensaio . . . . .	46
3.3.2	Corpos de prova . . . . .	46
3.3.3	Condicionamento dos corpos de prova . . . . .	47
3.3.4	Procedimento para ensaio dinâmico . . . . .	47
3.4	Ensaio realizados e simulação numérica . . . . .	47
3.4.1	Ensaio de fluência sob flexão e tração . . . . .	47
3.4.2	Simulação numérica . . . . .	59
3.4.3	Implementação numérica do comportamento viscoelástico . . . . .	62
3.4.4	Ensaio dinâmicos . . . . .	65
<b>4</b>	<b>Discussão dos resultados</b>	<b>73</b>
<b>5</b>	<b>Conclusão</b>	<b>79</b>
5.1	Comentários . . . . .	79
5.2	Propostas para futuros trabalhos . . . . .	81
<b>A</b>	<b>Projeto do oscilador mecânico</b>	<b>84</b>

# Lista de Figuras

2.1	Resposta viscoelástica linear e não-linear. . . . .	5
2.2	Fluência e recuperação de fluência. . . . .	6
2.3	Variação do módulo de fluência em relação ao tempo [2]. . . . .	6
2.4	Relaxação de tensão. . . . .	7
2.5	Variação do módulo de relaxação em relação ao tempo [2]. . . . .	8
2.6	Excitação e reposta do ensaio dinâmico. . . . .	9
2.7	Representação da excitação e resposta dinâmica de um material viscoelástico linear através de vetores girantes. . . . .	10
2.8	Função degrau unitário. . . . .	11
2.9	Função delta de Dirac ou impulso unitário. . . . .	12
2.10	Elementos básicos: mola e amortecedor. . . . .	14
2.11	Modelo de Maxwell. . . . .	14
2.12	Resposta do modelo de Maxwell à fluência, recuperação de fluência e relaxação. . . . .	16
2.13	Modelo de Kelvin-Voight. . . . .	17
2.14	Resposta do modelo de Kelvin a fluência, recuperação de fluência e relaxação. . . . .	18
2.15	Modelo de Zener. . . . .	19
2.16	Resposta do modelo de Zener a fluência, recuperação de fluência e relaxação. . . . .	21
2.17	Comparação entre o módulo de fluência de um material real e do modelo de Zener. . . . .	22
2.18	Modelo de vários elementos de Kelvin em série em (a) e vários elementos de Maxwell em paralelo em (b). . . . .	23
2.19	Variação do módulo de relaxação em função da temperatura. . . . .	28
2.20	Variação do módulo de fluência em relação ao tempo para duas temperaturas. . . . .	28
2.21	Módulo de fluência obtido de uma resina epoxi (Evide TE251) para vários tempos de envelhecimento [14]. . . . .	30
2.22	Resposta de um material viscoelástico linear a carregamentos de múltiplos estágios. . . . .	32
2.23	Módulo de relaxação volumétrico $K$ e deviatórico $G$ [16]. . . . .	34
2.24	Variação da resistência elétrica devido a aplicação de carga. . . . .	37

---

2.25	Sistema de medição para extensômetro. . . . .	37
2.26	Extensômetro metálico. . . . .	38
3.1	Dispositivos de fixação dos corpos de prova. . . . .	42
3.2	Dispositivo de aplicação de carga. . . . .	43
3.3	Dispositivo mecânico com relógio comparador para medição de deslocamento nos ensaios de fluência sob flexão. . . . .	44
3.4	Máquina de ensaio. . . . .	45
3.5	Corpos de prova para ensaio de fluência. . . . .	46
3.6	Oscilador mecânico para ensaio dinâmico . . . . .	46
3.7	Dispositivos experimentais para ensaio de fluência. . . . .	48
3.8	Calibração do transdutor de deslocamento diametral. . . . .	49
3.9	Ajuste linear a partir de dados de calibração do transdutor de deslocamento diametral. . . . .	49
3.10	Configuração em meia ponte com compensação de temperatura utilizada nos ensaios de fluência sob tração e flexão. . . . .	52
3.11	Dimensões dos corpos de prova para ensaio de fluência sob tração (a) e flexão (b). . . . .	53
3.12	Ajuste dos dados experimentais do ensaio de fluência sob tração em PVC a 40°C ao modelo de Maxwell generalizado com 11 parâmetros, $n = 5$ . . . . .	53
3.13	Ajuste dos dados experimentais do ensaio de fluência sob flexão em PVC a 40°C ao modelo de Maxwell generalizado com 11 parâmetros, $n = 5$ . . . . .	54
3.14	Ajuste dos dados experimentais do ensaio de fluência sob tração em PVC a 50°C ao modelo de Maxwell generalizado com 11 parâmetros, $n = 5$ . . . . .	55
3.15	Anel sob compressão diametral. . . . .	56
3.16	Resultados de deformação obtidos no ensaio de fluência sob flexão em PVC a 40°C. . . . .	57
3.17	Resultados de deformação obtidos no ensaio de fluência sob flexão em PVC a 50°C. . . . .	59
3.18	Módulo de fluência obtido em ensaio de tração em PVC a 40°C e 50°C. . . . .	59
3.19	Extrapolação do módulo de fluência na temperatura de referência, 40°C. . . . .	60
3.20	Resultados numéricos e experimentais com propriedades viscoelásticas obtidas através de ensaio de fluência sob tração em PVC a 40°C. . . . .	64
3.21	Resultados numéricos e experimentais com propriedades viscoelásticas obtidas através de ensaio de fluência sob flexão em PVC a 40°C. . . . .	65
3.22	Resultados numéricos e experimentais para ensaio de fluência sob tração em PVC a 50°C. . . . .	66
3.23	Ajuste dos dados experimentais para cálculo do ângulo de fase. . . . .	66
3.24	Sistema de medição para ensaio dinâmico. . . . .	68

---

3.25	Dados de calibração do transdutor de deslocamento para ensaio dinâmico.	68
3.26	Dados de calibração do transdutor de força para ensaio dinâmico. . . . .	69
3.27	Dimensões do corpo de prova para ensaio dinâmico. . . . .	69
3.28	Módulo de armazenamento dinâmico para o PVC em função da frequência.	70
3.29	Módulo de dissipação dinâmico para o PVC em função da frequência. . . .	70
3.30	Ângulo de fase para o PVC em função da frequência. . . . .	71
3.31	Força em função do deslocamento para ensaio dinâmico em PVC a 5 Hz. .	71
3.32	Força em função do deslocamento para ensaio dinâmico em PVC a 50 Hz. .	72
3.33	Força em função do deslocamento para ensaio dinâmico em PVC a 90 Hz. .	72
4.1	Ensaio de tração em PVC realizado na máquina Emic modelo DL3000. . .	73
4.2	Resultados de deformação do ensaio de tração em PVC obtidos através de extensômetros e transdutor de deslocamento eletrônico. . . . .	74
4.3	Módulos de fluência sob tração para o PVC obtidos de dados de defor- mações por extensômetros do fabricante Excel e transdutor de desloca- mento mecânico [19]. . . . .	75
4.4	Módulo de fluência sob tração para o PVC obtido na temperatura de refer- ência, $40^{\circ}C$ , pela translação da curva em temperatura superior, $50^{\circ}C$ , e por ensaio de longa duração a $40^{\circ}C$ . . . . .	76
4.5	Módulo de fluência obtido por ensaio sob tração e flexão anelar em PVC a $50^{\circ}C$ . . . . .	77
A.1	Oscilador mecânico para ensaio dinâmico . . . . .	85
A.2	Transdutor de deslocamento para ensaio dinâmico. . . . .	85
A.3	Distribuição de tensões trativas e compressivas no transdutor de força sob carregamento estático. . . . .	86
A.4	Extensômetro modelo diafragma para transdutor de força. . . . .	86

# Lista de Tabelas

3.1	Extensômetros utilizados para ensaio de fluência em PVC a 40°C. . . . .	51
3.2	Nível de carregamento para ensaio de fluência em PVC a 40°C. . . . .	51
3.3	Dimensões dos corpos de prova para ensaio de fluência sob tração em PVC a 40°C conforme Fig. 3.11. . . . .	52
3.4	Dimensões dos corpos de prova para ensaio de fluência sob flexão em PVC a 40°C conforme Fig. 3.11. . . . .	52
3.5	Extensômetros utilizados para ensaio de fluência em PVC a 50°C. . . . .	54
3.6	Nível de carregamento para ensaio de fluência em PVC a 50°C. . . . .	54
3.7	Dimensões dos corpos de prova para ensaio de fluência sob tração em PVC a 50°C conforme Fig. 3.11. . . . .	54
3.8	Dimensões dos corpos de prova para ensaio de fluência sob flexão em PVC a 50°C conforme Fig. 3.11. . . . .	55
3.9	Extensômetros utilizados para ensaio de fluência sob flexão em PVC a 40°C.	56
3.10	Nível de carregamento para ensaio de fluência sob flexão em PVC a 40°C. .	57
3.11	Dimensões dos corpos de prova para ensaio de fluência sob flexão em PVC a 40°C conforme Fig. 3.11. . . . .	57
3.12	Extensômetros utilizados para ensaio de fluência sob flexão em PVC a 50°C.	58
3.13	Nível de carregamento para ensaio de fluência sob flexão em PVC a 50°C. .	58
3.14	Dimensões dos corpos de prova para ensaio de fluência sob flexão em PVC a 50°C conforme Fig. 3.11. . . . .	58
3.15	Condições para ensaio de dinâmico sob flexão em PVC. . . . .	69
3.16	Dimensões dos corpos de prova de PVC para ensaio dinâmico sob flexão conforme Fig. 3.27. . . . .	69

# Simbologia

$a(T)$	Fator de translação horizontal.
$A$	Área da seção transversal.
$\varepsilon$	Deformação.
$\sigma$	Tensão.
$\omega$	Frequência.
$E'$	Módulo de armazenamento dinâmico.
$E''$	Módulo de dissipação dinâmico.
$E, E_{el}$	Módulo de elasticidade.
$Y(t)$	Módulo de relaxação.
$G(t)$	Módulo de relaxação deviatório.
$J(t)$	Módulo de fluência.
$K(t)$	Módulo de relaxação volumétrico.
$K_{el}$	Módulo de relaxação volumétrico elástico.
$\nu$	Coefficiente de Poisson.
$t$	Tempo.
$T$	Temperatura.
$\varphi$	Ângulo de fase.
$B_i$	i-ésima constante do módulo de fluência.
$\tau_i$	i-ésimo tempo de retardo.
$D_i$	i-ésima constante do módulo de relaxação.
$\lambda_i$	i-ésimo tempo de relaxação.
$R_i$	i-ésima constante do módulo de relaxação deviatório.
$\beta_i$	i-ésimo tempo de relaxação deviatório.
$A_i$	i-ésima constante do módulo de relaxação volumétrico.
$\alpha_i$	i-ésimo tempo de relaxação volumétrico.
$\mathcal{L}$	Operador da transformada de Laplace.
$P, Q$	Operadores diferenciais.
$p_i$	i-ésima constante do operador diferencial P.
$q_i$	i-ésima constante do operador diferencial Q.
$J(0)$	Módulo de fluência em $t = 0$ .

---

$J(\infty)$	Módulo de fluência em $t = \infty$ .
$G(0)$	Módulo de relaxação deviatórico em $t = 0$ .
$G(\infty)$	Módulo de relaxação deviatórico em $t = \infty$ .
$\Phi_i$	$i$ -ésima constante associada ao módulo de relaxação deviatórico.
$\Psi_i$	$i$ -ésima constante associada ao módulo de relaxação volumétrico.
$s$	Parâmetro de Laplace.
$n$	Número de constantes $B_i$ do módulo de fluência.
$C_1, C_2$	Constantes da equação de William-Landel-Ferry (WLF).
$\eta$	Viscosidade.
$\tau$	Tensão cisalhante.
$u, v, w$	Componentes do vetor deslocamento.
$X, Y, Z$	Forças de corpo por unidade de volume.
$G_{el}$	Módulo de elasticidade transversal.
$T_g$	Temperatura de transição vítrea.
$r_i$	Raio interno do corpo de prova anelar.
$r_e$	Raio externo do corpo de prova anelar.
$\bar{r}$	Raio médio do corpo de prova anelar.
$M$	Momento fletor.
$I$	Momento de inércia
$f$	Função.
$P$	Força aplicada.
$R_e$	Eixo real no plano complexo.
$I_m$	Eixo imaginário no plano complexo.
$PVC$	Polivinil clorídrico rígido.
$\rho$	Resistividade.
$R$	Resistência elétrica.
$\Delta R$	Varição de resistência elétrica.
$S$	Sensibilidade do extensômetro.
$\overset{(n)}{\sigma}$	Derivada de ordem $n$ da tensão.
$\overset{(n)}{\varepsilon}$	Derivada de ordem $n$ da deformação.

---

$V_e$	Tensão elétrica de entrada.
$V_s$	Tensão elétrica de saída.
$\Delta(t)$	Função degrau unitário.
$\delta(t)$	Função impulso unitário.
$\sigma_o$	Amplitude de tensão.
$\sigma'_o$	Tensão em fase com a deformação.
$\sigma''_o$	Tensão fora de fase com a deformação.
$\Delta L$	Variação de comprimento.
$\Delta A$	Variação de área.
$\Delta\rho$	Variação de resistividade.
$u$	Deslocamento.
$F$	Força.
$y_{\text{exp}}(t_i)$	Dados experimentais de fluência para cada tempo de medição.

# Resumo

O uso de polímeros em aplicações estruturais requer que o comportamento dependente do tempo e suas implicações sobre a resposta mecânica seja considerada no projeto de componentes envolvendo estes materiais. A dependência temporal das propriedades mecânicas é resultado da combinação de efeitos de materiais sólidos elásticos e líquidos, que definem o comportamento viscoelástico. O principal enfoque deste trabalho é determinar as propriedades mecânicas viscoelásticas do polivinil clorídrico rígido (PVC), através de ensaios de fluência sob tração e flexão em diferentes temperaturas, e ensaios dinâmicos sob carga senoidal de flexão com frequência variável, utilizando técnicas de medição por extensometria.

Os ensaios de fluência sob flexão em corpos de prova anelar pretendem estabelecer uma maneira alternativa para caracterizar o material viscoelástico, substituindo os ensaios de fluência sob tração. Para execução dos ensaios de fluência, os corpos de prova foram usados a partir de chapas de PVC, mantendo a direção de extrusão da chapa correspondente à direção de carregamento dos ensaios, oferecendo melhor comparação entre os resultados experimentais de ambos. Os ensaios de fluência sob tração e flexão fornecem os dados de deformação ao longo do tempo, que serão ajustados por um função matemática na forma de série de Prony, fornecida pelo modelo de Maxwell generalizado de 11 parâmetros. Esta função deverá ser convertida para simular numericamente o comportamento viscoelástico. O método de conversão apresentado baseia-se no princípio da correspondência e na aplicação da transformada de Laplace nas relações elásticas tridimensionais. Esta abordagem experimental e numérica para os ensaios de fluência, possibilita o confronto dos resultados experimentais com os das simulações numéricas e com os dados disponíveis na literatura.

Como complemento aos objetivos experimentais realizam-se ensaios dinâmicos sob flexão, a fim de estabelecer comparativamente as propriedades mecânicas viscoelásticas do material obtidas através de ensaios dinâmicos e de fluência estáticos.

# Abstract

The use of polymers for structural applications requires that the behavior along the time and its effects on the mechanical response need to be considered in the design of parts involving these materials. Time dependence on the mechanical properties is the result of both elastic solids and liquids materials behavior, which defines a viscoelastic material. The main focus of this work is the determination of viscoelastic mechanical properties of the rigid polyvinyl chloride (PVC), through traction and flexure creep tests in different temperature levels, and dynamic tests under flexural sinusoidal loading of variable frequency, using strain gauges to measurements.

The creep tests in ring specimens under flexure intend to establish an alternative way to characterize the viscoelastic material, substituting the creep test under traction. In order to perform the creep tests, specimens were machined from PVC sheets, maintaining the extrusion direction related to the loading direction, offering better comparison between results of both experiments. The creep tests under traction and flexure supply the time dependent data of deformation, that will be fit by a mathematical function in the form of Prony series, according to eleven parameters Maxwell model. This function must be converted to perform numerical analyses of a viscoelastic component. The presented method of conversion is based on the correspondence principle and in the application of Laplace transform in three dimensional elastic relations. This experimental and numeric evaluation for the creep tests allows to face experimental results with numeric simulations, and with the available data in the literature.

As an addition to the experimental objectives it is performed dynamic tests under flexural load, in order to establish a comparative of viscoelastic mechanical properties obtained by dynamic tests and static creep tests.

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Considerações iniciais

A teoria clássica da elasticidade trata as propriedades mecânicas de sólidos elásticos, para os quais, de acordo com o lei de Hooke, a tensão imposta no caso de pequenas deformações é sempre proporcional à deformação e independente da taxa de deformação. Entretanto, mesmo as tensões e deformações sendo infinitesimais, certos materiais exibem comportamento mecânico que combinam características de materiais sólidos elásticos e fluidos. Materiais cujo comportamento mecânico apresentam estas características são chamados de viscoelásticos. Todos os materiais estruturais manifestam os efeitos da viscoelasticidade, sendo que a intensidade deste comportamento depende das condições do ambiente, principalmente temperatura. Enquanto os metais são praticamente elásticos na temperatura ambiente, os materiais poliméricos, em geral, são viscoelásticos nessa temperatura.

Materiais poliméricos exibem comportamento mecânico dependente do tempo. As tensões e as deformações induzidas devido à aplicação de carga são funções do tempo. Esta relação entre tensão, deformação e tempo, ou seja, a relação constitutiva do material, pode ser determinada através de três tipos de ensaios: fluência, relaxação e dinâmico. No primeiro caso, o material submetido a uma tensão constante exibe uma deformação dependente do tempo que se sobrepõe a uma deformação elástica inicial. No segundo caso, submetendo o material a uma deformação constante, ocorrerá uma relaxação de tensão dependente do tempo. Entretanto, os ensaios de fluência e relaxação não são capazes de fornecer informação completa sobre o comportamento mecânico de sólidos viscoelásticos. Em certos casos a resposta da estrutura para tempos de carregamento substancialmente pequenos em relação ao limite inferior de tempo dos ensaios de fluência usuais [1], pode ter importância prática. Ensaios de fluência e relaxação podem fornecer dados onde os tempos de carregamento variam de 10 segundos a 10 anos enquanto nos ensaios dinâmicos esses tempos variam de  $10^{-8}$  a  $10^3$  segundos. Desta forma existe uma região em comum

onde os dados podem ser obtidos de ambos os experimentos.

Considerável atenção tem sido direcionada ao desenvolvimento das relações constitutivas de materiais poliméricos. A motivação surge do desejo de prever o comportamento do material, seja no seu processamento ou na performance mecânica do produto final. O desenvolvimento de ferramentas numéricas expressam a possibilidade de detectar as dificuldades no processo e no projeto em desenvolvimento, oferecendo a oportunidade de correção e otimização dos parâmetros envolvidos nessas etapas.

O projeto estrutural de componentes plásticos sujeitos a solicitações mecânicas de longa duração, deverá considerar a resposta viscoelástica do material. Através da associação de elementos elásticos (molas) e viscosos (amortecedores) representa-se o comportamento dependente do tempo dos materiais poliméricos, estabelecendo desta forma o modelo viscoelástico. Este modelo fornecerá a equação constitutiva dependente do tempo do material, cujos parâmetros serão determinados a partir dos dados experimentais dos ensaios de fluência, relaxação de tensão ou dinâmicos.

## 1.2 **Objetivos**

Objetiva-se desenvolver e aplicar uma metodologia experimental que permita, utilizando técnicas de medição por extensometria, obter as propriedades viscoelásticas através de ensaios de fluência sob flexão em corpos de prova anelar não normalizados e sob tração em corpos de prova com dimensões e geometria definida por norma técnica, para a realização de análise numérica utilizando o método de elementos finitos. Os ensaios de fluência sob flexão anelar são realizados com o intuito de estabelecer um método experimental inovador, em substituição aos ensaios de fluência sob tração, oferecendo a oportunidade de obter as propriedades viscoelásticas do material a partir de segmentos de tubos e conexões injetadas, fabricadas através do processo de moldagem por extrusão e injeção respectivamente. Além disso, para investigar a resposta do material quando submetido a pequenos tempos de carregamento realiza-se ensaios dinâmicos seguindo recomendações normalizadas.

Os conceitos e técnicas utilizados, tem como principal objetivo demonstrar e avaliar a utilidade da teoria da viscoelasticidade linear no projeto e análise de componentes viscoelásticos. Dentro do escopo deste trabalho busca-se caracterizar as propriedades mecânicas viscoelásticas de materiais plásticos, em especial o polivinil clorídrico rígido (PVC).

Em resumo, evidencia-se os objetivos específicos:

- Realizar ensaios de fluência sob tração e flexão anelar em PVC.
- Obter as propriedades mecânicas viscoelásticas.

- Simular numericamente os experimentos.
- Determinar o comportamento dinâmico de materiais plásticos, em especial do PVC, sob carregamento senoidal de frequência variável.
- Correlacionar as propriedades mecânicas viscoelásticas obtidas através de ensaios dinâmicos e de fluência estáticos.

## 1.3 Descrição dos capítulos

Para desenvolver o tema proposto divide-se este trabalho em capítulos, buscando seguir uma sequência lógica que permita a associação da parte teórica e sua aplicação prática de maneira clara e precisa.

O capítulo 2 compreende a revisão bibliográfica, englobando uma introdução à viscoelasticidade linear. Primeiramente descreve-se os tipos de ensaios que permitem obter as propriedades mecânicas viscoelásticas, que após obtidas, deverão ser representadas pelos modelos matemáticos clássicos. Para melhor compreensão sobre a utilização destes modelos parte-se de casos mais simples, como o modelo de Maxwell até chegar ao modelo de Maxwell generalizado que será fundamental para atender os objetivos deste trabalho. O princípio da sobreposição de Boltzmann, que permite a determinação da resposta de materiais viscoelásticos lineares ocasionadas por carregamentos complexos, assim como o princípio da equivalência tempo-temperatura que fornece a extrapolação do tempo em determinada temperatura de referência através de ensaios de curta duração em diferentes temperaturas, são também enfatizados. Por fim, o capítulo 2 propõe um método baseado no princípio da correspondência e na aplicação da transformada de Laplace para efetuar a conversão do módulo de fluência,  $J(t)$ , obtido experimentalmente através de ensaios uniaxiais para o módulo de relaxação deviatórico,  $G(t)$ . Efetuando estas operações e aplicando determinadas hipóteses é possível realizar uma análise numérica de um componente viscoelástico.

O capítulo 3 descreve a metodologia experimental utilizada, relatando os resultados experimentais assim como as soluções numéricas para os ensaios de fluência sob tração e flexão. Busca-se ressaltar as principais considerações relativas ao tratamento dos dados experimentais e as simplificações utilizadas para modelar numericamente uma viga tração e o anel sob compressão diametral que foram também objetos dos experimentos.

No capítulo 4 apresenta-se de forma comparativa os resultados obtidos, com especial argumentação sobre as técnicas de extensometria utilizadas como ferramenta de medição experimental.

Finalmente no capítulo 5 apresentam-se as conclusões e recomendações para futuros trabalhos.

# Capítulo 2

## Modelos viscoelásticos

### 2.1 Descrição do comportamento viscoelástico

A combinação do comportamento mecânico de materiais elásticos e viscosos caracteriza a resposta de um material viscoelástico. A parcela viscosa é responsável pela energia dissipada, enquanto a parcela elástica armazena energia. A ocorrência de propriedades viscoelásticas em um material depende em grande parte das condições do ambiente, principalmente a temperatura. Portanto, em muitas aplicações estruturais, conhecer o efeito da temperatura sobre as propriedades mecânicas é necessário [1]. Dois fenômenos importantes exibidos pelos materiais viscoelásticos são as deformações que ocorre ao longo do tempo, quando o material é submetido a um carregamento constante, e o gradual decréscimo das tensões quando sujeito a deformação e temperatura constantes. Pode-se expressar a dependência do comportamento viscoelástico como uma combinação de um sólido elástico e um fluido viscoso, através da expressão:

$$\begin{array}{ccc} \text{Sólido Elástico} & + & \text{Fluido Viscoso} \\ \sigma = E\varepsilon & & \sigma = \eta d\varepsilon/dt \end{array} = \text{Sólido Viscoelástico} \quad \sigma = f(\varepsilon, t) \quad (2.1)$$

Esta é a expressão geral para um sólido viscoelástico não linear onde a tensão é uma função genérica  $f$  da deformação e do tempo.

Para pequenas deformações, a relação entre tensão e deformação em qualquer instante é frequentemente linear conforme pode ser observado na Fig. 2.1. Neste caso a deformação e a resposta no tempo podem ser separadas, fornecendo a equação geral para um material viscoelástico linear:

$$\sigma(t) = \varepsilon(t) Y(t), \quad (2.2)$$

sendo  $Y(t)$  o módulo de relaxação do material. A teoria de viscoelasticidade linear é uma aproximação razoável do comportamento dependente do tempo de polímeros submetidos a níveis de tensões e temperatura relativamente baixos. Muitos materiais exibem com-

portamento viscoelástico linear quando submetido a baixos níveis de tensão e não linear quando o níveis de tensões for elevado [1].

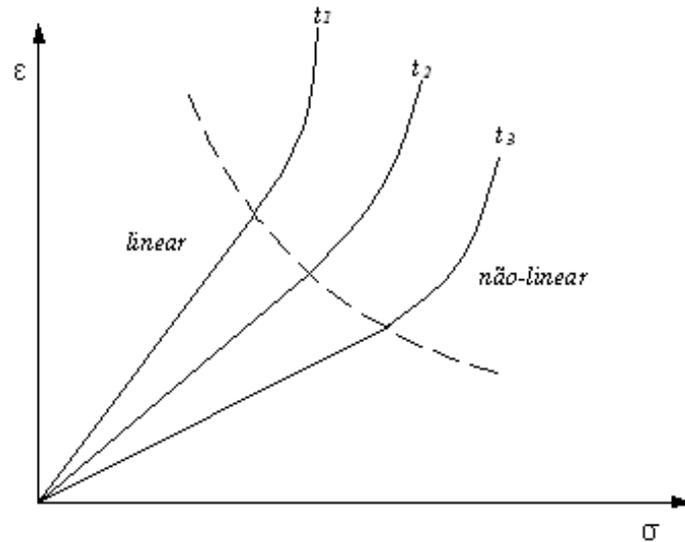


Figura 2.1: Resposta viscoelástica linear e não-linear.

Busca-se caracterizar os materiais viscoelásticos através de ensaios que forneçam informações relevantes sobre condições reais de aplicação. Desta forma, a caracterização de propriedades mecânicas viscoelásticas consiste na realização de ensaios similares aos utilizados em materiais elásticos, porém modificados para permitir obter informações sobre o comportamento dependente do tempo. Os ensaios mais comumente encontrados são: fluência, relaxação e dinâmico.

## 2.2 Fluência

O ensaio de fluência consiste em mensurar as deformações apresentadas pelo material ao longo do tempo, sob um carregamento constante. A Fig. 2.2 ilustra como o fenômeno ocorre.

Esta resposta típica do material viscoelástico consiste em uma deformação elástica instantânea inicial OA, seguida de uma deformação dependente do tempo AB resultante da combinação de efeitos elásticos e viscosos. Pode ocorrer também um escoamento viscoso permanente no material, principalmente em elevados níveis de temperatura ou carregamento, ou caso o carregamento for aplicado durante longo período de tempo. Removendo o carregamento, um processo inverso ocorre. Um certo nível de recuperação instantânea BC é seguido por uma recuperação da deformação que se estende por um certo tempo CD. O efeito viscoso durante a aplicação do carregamento resulta em uma deformação residual quando ele é removido.

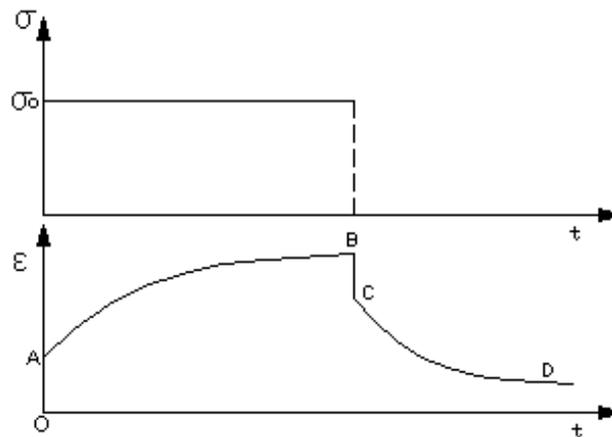


Figura 2.2: Fluência e recuperação de fluência.

A deformação de fluência  $\varepsilon(t)$  pode ser representada pela equação:

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 J(t) \quad (2.3)$$

sendo  $\sigma_0$  a tensão constante aplicada e  $J(t)$  o módulo de fluência [2].

A dependência do módulo de fluência em relação ao tempo pode ser visualizada através de um gráfico em escala log-log, como mostrado na Fig. 2.3

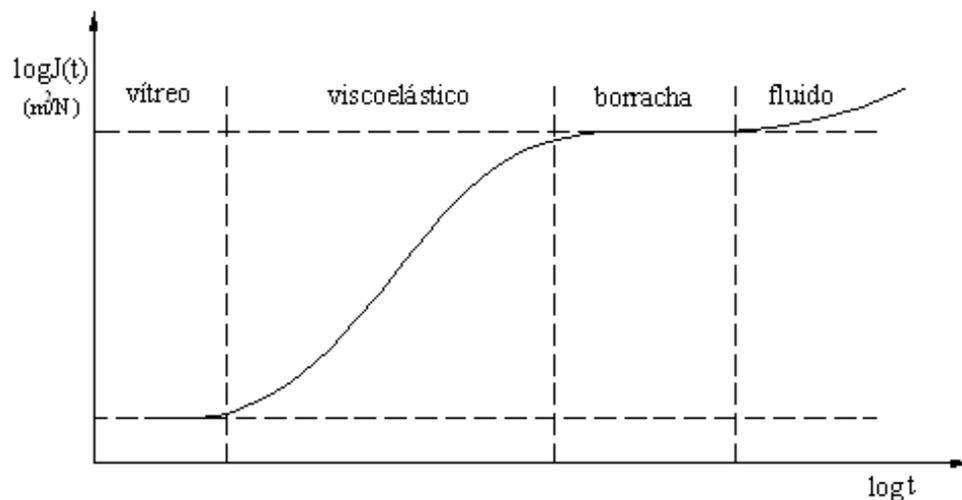


Figura 2.3: Variação do módulo de fluência em relação ao tempo [2].

Nos instantes iniciais, o material demonstra um comportamento elástico com um baixo módulo de fluência. Em um período de tempo intermediário entre o instante em que o material exibe o comportamento de um sólido rígido elástico e aquele em que o material comporta-se como uma borracha, o módulo de fluência é dependente do tempo de aplicação do carregamento e o material é considerado como sendo viscoelástico. A dependência do

módulo de fluência em relação ao tempo é expressa através de uma relação entre o tempo de aplicação do carregamento e um parâmetro característico do material. Em fluência, este parâmetro é chamado de tempo de retardo,  $\tau$ , variando para diferentes materiais de acordo com sua estrutura molecular [16].

## 2.3 Relaxação

O alívio de tensões é também outro fenômeno viscoelástico. Segundo [3] e [4], este fenômeno é definido como um gradual decréscimo na tensão sob uma deformação e temperatura constantes.

Em certas condições a tensão aumenta instantaneamente, seguida por uma relaxação de tensão lenta durante um certo período de tempo, até atingir um valor constante conforme mostrado na Fig. 2.4.

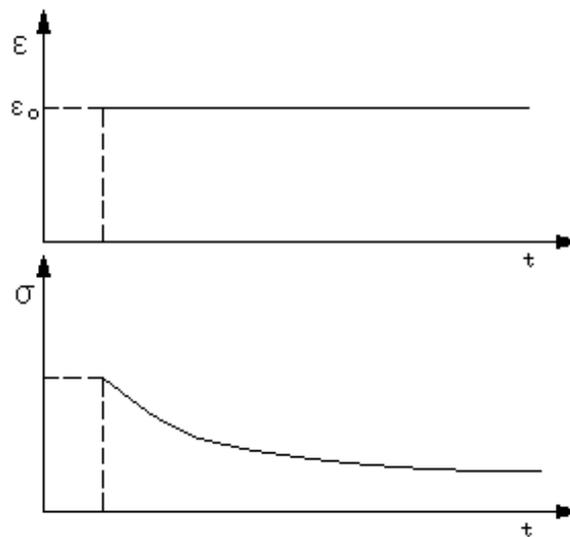


Figura 2.4: Relaxação de tensão.

A variação dependente do tempo da tensão pode ser representada pela seguinte equação:

$$\sigma(t) = \epsilon_0 Y(t) \quad (2.4)$$

sendo  $\epsilon_0$  a deformação constante aplicada e  $Y(t)$  é denominado módulo de relaxação de tensão que, como o módulo de fluência, é dependente do tempo. A variação do módulo de relaxação com o tempo é apresentada em um gráfico em escala log-log, como mostrado na Fig. 2.5.

Na relaxação de tensão existem as mesmas regiões de comportamento como ocorre na fluência. Nos instantes iniciais, o material é rígido e possui um alto módulo de relaxação. Após um certo período o módulo é baixo e o material apresenta comportamento borra-

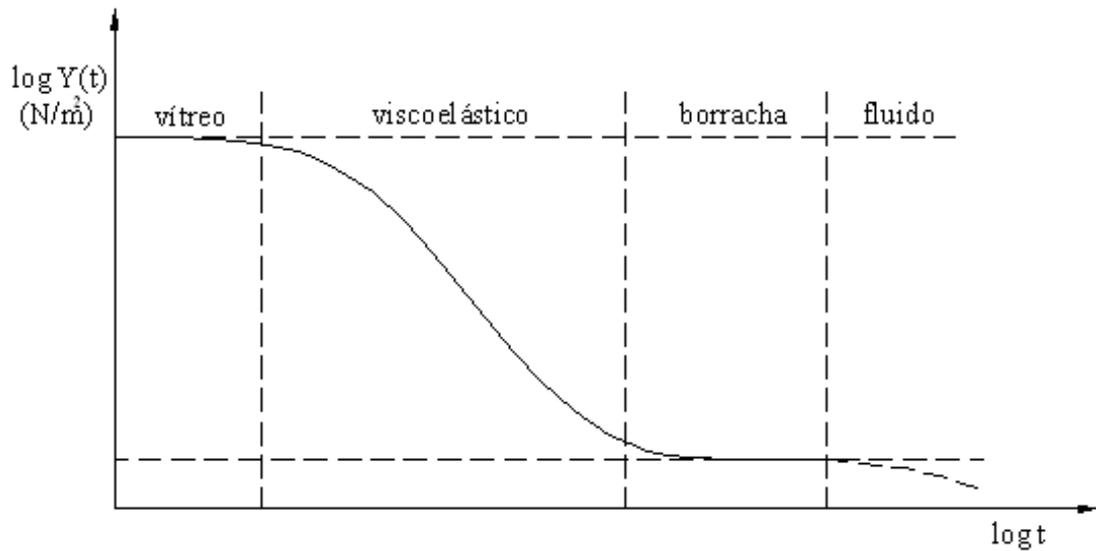


Figura 2.5: Variação do módulo de relaxação em relação ao tempo [2].

choso. Em instantes intermediários o material apresenta comportamento viscoelástico, como um módulo de relaxação dependente do tempo. O tempo de duração da relaxação varia de acordo com a estrutura molecular do material e é caracterizado pelo tempo de relaxação,  $\lambda$  [6].

## 2.4 Comportamento dinâmico

Submetendo componentes viscoelásticos a oscilações mecânicas, viabiliza-se o monitoramento de sua resposta elástica e dissipativa pela aquisição de dados de força e deslocamento para cada frequência de ensaio. Em muitas aplicações estruturais e de controle de vibrações conhecer a resposta do material para tempos de carregamento pequenos em relação ao limite inferior de tempo dos ensaios de fluência usuais é necessário. Além disso, os limites inferiores de tempos de carregamentos para os ensaios de fluência estáticos pode ser alcançados pela realização de ensaios dinâmicos em baixas frequências, permitindo que os resultados de ambos os ensaios sejam comparáveis.

### 2.4.1 Módulo complexo

Aplicando uma força de amplitude e frequência constantes em um sólido viscoelástico, determina-se a variação da tensão através da Eq. 2.5:

$$\sigma = \sigma_o \cos \omega t \quad (2.5)$$

sendo  $\sigma_o$  a amplitude de tensão e  $\omega$  a frequência de vibração forçada.

Tem-se por definição:

$$e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t \quad (2.6)$$

$i = \sqrt{-1}$  representa o eixo imaginário da variável complexa. A Eq. 2.5 é a parte real da Eq. 2.7:

$$\sigma = \sigma_o e^{i\omega t} \quad (2.7)$$

Considerando o material linearmente viscoelástico a resposta de deformação terá a mesma frequência da tensão imposta mas atrasada por um ângulo de fase  $\varphi$ , conforme Fig. 2.6 e Eq. 2.8.

$$\varepsilon = \varepsilon_o \cos(\omega t - \varphi) \quad (2.8)$$

ou escrevendo na forma da Eq. 2.7, tem-se:

$$\varepsilon = \varepsilon_o e^{i(\omega t - \varphi)} \quad (2.9)$$

sendo  $\varepsilon_o$  a amplitude de deformação. O ângulo de fase  $\varphi$  é frequentemente chamado de ângulo de perda e é uma função da viscosidade do material.

Pode-se observar pela Fig. 2.7 os vetores girantes da tensão e deformação no plano complexo. Verifica-se que o vetor tensão encontra-se adiantado em relação ao vetor deformação pelo ângulo de fase  $\varphi$ .

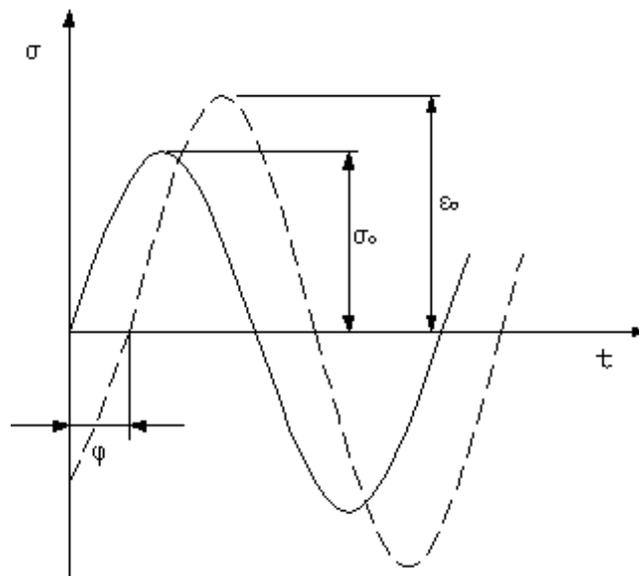


Figura 2.6: Excitação e resposta do ensaio dinâmico.

Observando as Fig. 2.6 e 2.7 pode-se desenvolver as relações entre os vários parâmetros,

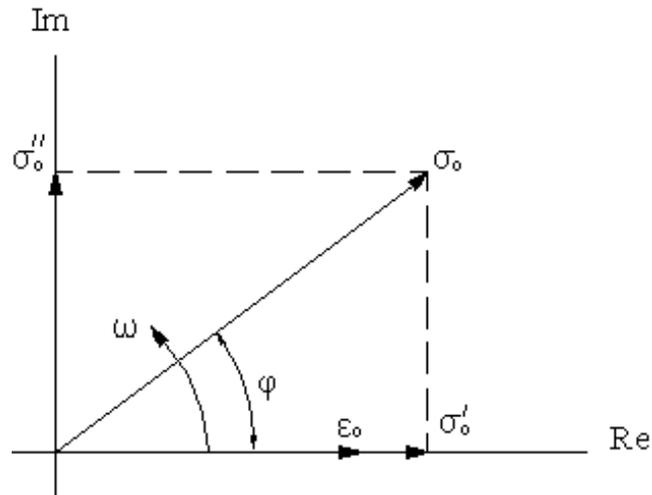


Figura 2.7: Representação da excitação e resposta dinâmica de um material viscoelástico linear através de vetores girantes.

quais sejam:

$$\tan \varphi = \sigma''_o / \sigma'_o \quad (2.10)$$

$$\sigma_o = \sqrt{(\sigma'_o)^2 + (\sigma''_o)^2} \quad (2.11)$$

$$\sigma'_o = \sigma_o \cos \varphi \quad (2.12)$$

$$\sigma''_o = \sigma_o \sin \varphi \quad (2.13)$$

Utiliza-se esta forma complexa da função tensão para definir dois diferentes módulos dinâmicos, ambos como sendo razões entre a tensão e deformação, mas com interpretações moleculares e consequências macroscópicas distintas. O primeiro pode ser chamado módulo real ou de armazenamento, definido como sendo a razão entre a tensão em fase e a deformação, expresso pela equação:

$$E' = \frac{\sigma'_o}{\varepsilon_o} \quad (2.14)$$

O outro é definido como módulo imaginário ou de dissipação, sendo obtido através da razão entre a tensão fora de fase e a deformação, expresso pela equação:

$$E'' = \frac{\sigma''_o}{\varepsilon_o} \quad (2.15)$$

## 2.5 Função degrau unitário e função impulso unitário

Como foi exposto no ensaio de fluência, a aplicação instantânea de uma tensão  $\sigma = 0$  para  $t < 0$  e  $\sigma = \sigma_0$  para  $t > 0$  pode ser escrita matematicamente através da função degrau unitário.

A função degrau unitário é definida como limite de uma função contínua:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ \frac{t}{\varepsilon} & \text{se } 0 \leq t \leq \varepsilon \\ 1 & \text{se } t > \varepsilon \end{cases} \quad (2.16)$$

$t$  é o tempo. A Eq. 2.16 pode ser representada graficamente pela Fig. 2.8.

Com o auxílio desta função, pode-se expressar o carregamento no ensaio de fluência por:  $\sigma = \sigma_0 \Delta(t)$ . Para introduzir esta função nas equações diferenciais deve-se conhecer sua derivada em relação ao tempo. Derivando a Eq. 2.16 em relação ao tempo, obtém-se a função delta de Dirac,  $\delta(t)$ , que pode ser visualizada na Fig. 2.9 e definida como:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ \frac{1}{\varepsilon} & \text{se } 0 \leq t \leq \varepsilon \\ 0 & \text{se } t > \varepsilon \end{cases} \quad (2.17)$$

Por definição, a integral desta função ao longo do domínio tem valor unitário.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = \int_0^{\varepsilon} (1/\varepsilon) dt = 1 \quad (2.18)$$

No limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $\delta(t)$  tem valor infinito, constituindo uma função singular, porém sua integral permanece unitária.

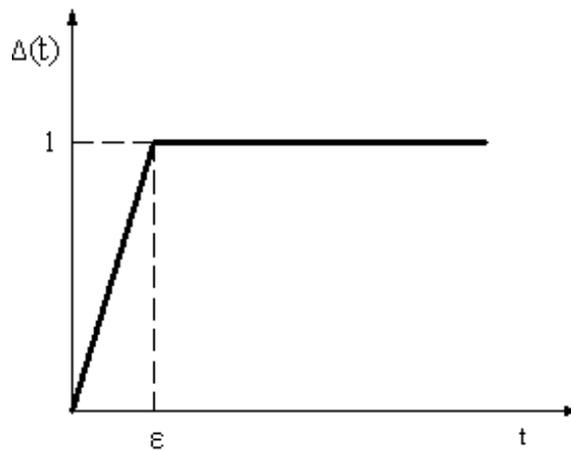


Figura 2.8: Função degrau unitário.

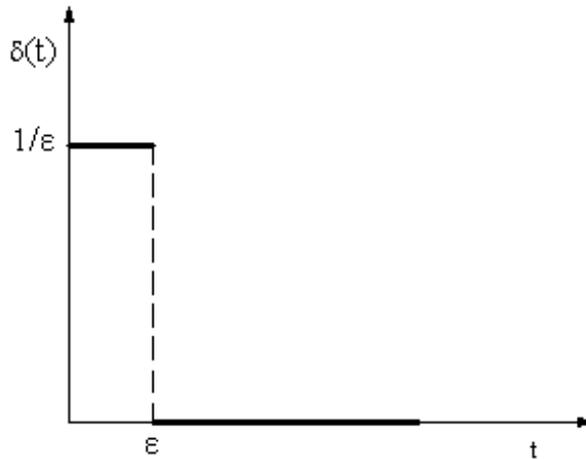


Figura 2.9: Função delta de Dirac ou impulso unitário.

## 2.6 Transformada de Laplace

### 2.6.1 Definição da transformada de Laplace

Seja  $f(t)$  uma função de  $t$ , para  $t > 0$ . Sua transformada, denotada por  $\mathcal{L}[f(t)]$ , é definida como:

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt. \quad (2.19)$$

A operação acima converte a função  $f(t)$  de  $t$  em uma nova função  $\mathcal{L}[f(t)]$  da variável de transformação  $s$ , que pode ser real ou complexa.

Seja  $f(t) = e^{at}$ , então sua transformada de Laplace é  $\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} dt = \frac{1}{s-a}$

### 2.6.2 Propriedades da transformada de Laplace

Listam-se a seguir as principais propriedades da transformada de Laplace. Maiores detalhes podem ser vistos em [5].

(a) Linearidade

$$\mathcal{L}[a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) + \dots + a_n f_n(t)] = a_1 \mathcal{L}[f_1(t)] + a_2 \mathcal{L}[f_2(t)] + \dots + a_n \mathcal{L}[f_n(t)] \quad (2.20)$$

onde  $a_1, a_2, \dots, a_n$  são constantes independentes de  $t$ .

(b) Transformada de Laplace de derivadas

$$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt} f(t)\right] = s \mathcal{L}[f(t)] - f(0) \quad (2.21)$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2}{dt^2}f(t)\right] = s^2\mathcal{L}[f(t)] - sf(0) - \left(\frac{d}{dt}f(0)\right) \quad (2.22)$$

## 2.7 Modelamento do comportamento viscoelástico

O modelamento do comportamento viscoelástico é obtido através do ajuste dos parâmetros de um modelo matemático aos dados experimentais. A analogia mecânica, que irá fornecer o modelo matemático para a resposta viscoelástica pode ser realizada utilizando os modelos clássicos, através da associação de molas e amortecedores em série ou paralelo, definindo funções viscoelásticas na forma de série de Prony. Inclui-se também, entre outras formas, o emprego de modelos fracionários, os quais consistem na substituição dos elementos de amortecedores dos modelos clássicos por elementos reológicos cuja equação constitutiva utiliza derivadas de ordem fracionária. A aplicação dos modelos clássicos para grandes períodos de tempo requer o uso de modelos contendo um grande número de parâmetros, porém com menor complexidade matemática. Os modelos fracionários apresentam como principal vantagem em relação aos modelos clássicos a utilização de um menor número de parâmetros, porém maior complexidade matemática envolvida na solução do problema. A definição do modelo constitutivo é uma tarefa importante na solução de problemas de análise estrutural envolvendo materiais viscoelásticos, pois uma escolha incoerente comprometerá os resultados das simulações numéricas.

Embora os modelos clássicos e fracionários não contenham informações sobre os fenômenos físicos e moleculares que ocorrem, ou seja, são modelos exclusivamente fenomenológicos, eles são empregados por fornecer a resposta viscoelástica. Neste trabalho utiliza-se os modelos clássicos para modelar o comportamento viscoelástico.

Analisa-se a resposta de três modelos clássicos simples de material viscoelástico sob fluência e relaxação de tensão. Vale lembrar que tais modelos não são capazes de descrever o comportamento do material em relação ao tempo corretamente, sendo apresentados em caráter didático. Através do aumento do número de elementos, os modelos de Maxwell ou Kelvin generalizados surgem para melhor descrever o comportamento do material.

### 2.7.1 Modelos matemáticos para viscoelasticidade linear

#### Elementos básicos

Os elementos básicos de um modelo de material viscoelástico são: a mola linear (elemento elástico) e o amortecedor linear (elemento viscoso) conforme Fig. 2.10. As relações constitutivas uniaxiais respectivamente são:

$$\sigma_1 = E\varepsilon_1 \quad (2.23)$$

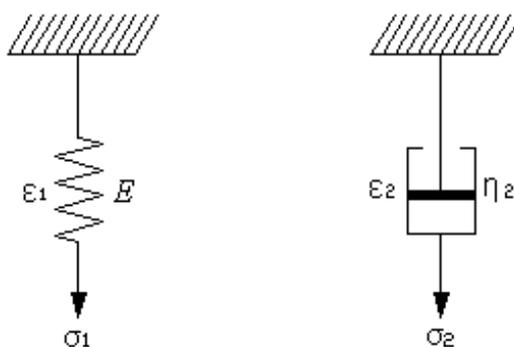


Figura 2.10: Elementos básicos: mola e amortecedor.

$$\sigma_2 = \eta \frac{d\varepsilon_2}{dt} \quad (2.24)$$

$E$  : rigidez da mola.

$\eta$  : viscosidade do amortecedor.

$\varepsilon_1$  : deformação da mola.

$\frac{d\varepsilon_2}{dt}$  : taxa de deformação do amortecedor.

### Modelo de Maxwell: mola e amortecedor em série

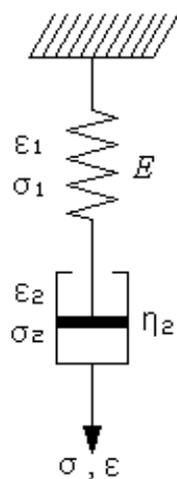


Figura 2.11: Modelo de Maxwell.

Neste caso, a mola e o amortecedor suportam a mesma tensão aplicada no modelo da Fig. 2.11.

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma \quad (2.25)$$

A deformação total é a soma da deformação da mola e do amortecedor:

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \quad (2.26)$$

Diferenciando Eq. 2.26 em relação ao tempo e substituindo na expressão resultante as taxas de deformação obtidas da Eq. 2.23 e Eq. 2.24, obtém-se a equação diferencial do modelo:

$$\frac{d\varepsilon(t)}{dt} = \frac{d\sigma}{dt} \frac{1}{E} + \frac{\sigma}{\eta} \quad (2.27)$$

#### **Solução do modelo de Maxwell para Fluência: Tensão constante $\sigma_0$**

Neste caso  $\sigma(t) = \sigma_0$  e não há variação de tensão ao longo do tempo, ou seja,  $\dot{\sigma} = 0$ . A equação diferencial do modelo fica reduzida a parcela correspondente a taxa de deformação do amortecedor:

$$\frac{d\varepsilon(t)}{dt} = \frac{\sigma}{\eta} \quad (2.28)$$

Integrando a Eq. 2.28 em relação ao tempo e sabendo que no instante inicial, tem-se uma deformação instantânea da mola,  $\varepsilon(0) = \sigma_0/E$ , obtém-se a expressão da deformação total em função do tempo:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{\eta}t + \frac{\sigma_0}{E} \quad (2.29)$$

Dividindo a Eq. 2.29 pela tensão constante,  $\sigma_0$ , o módulo de fluência  $J(t)$  é definido pela Eq. 2.30:

$$J(t) = \frac{\varepsilon(t)}{\sigma_0} = \frac{t}{\eta} + \frac{1}{E} \quad (2.30)$$

Sob condições de fluência o modelo de Maxwell apresenta uma elongação instantânea inicial devido à mola, seguida por uma variação linear ao longo do tempo devida ao amortecedor, como mostrado na Fig. 2.12.

Quando a tensão é removida, o modelo apresenta a recuperação instantânea da mola elástica e uma deformação permanente dependente da deformação inicial de fluência do amortecedor.

#### **Solução do Modelo de Maxwell para Relaxação: Deformação constante $\varepsilon_0$**

Neste caso se tem que  $\varepsilon(t) = \varepsilon_0$  e a taxa de deformação é nula,  $\dot{\varepsilon} = 0$ . Substituindo esta condição na equação diferencial do modelo, Eq. 2.27, obtém-se:

$$\frac{d\sigma}{dt} \frac{1}{E} + \frac{\sigma}{\eta} = 0 \quad (2.31)$$

Integrando a Eq. 2.31 em relação ao tempo, e sabendo que no instante inicial a deformação instantânea aplicada  $\varepsilon_0$  resulta em uma tensão na mola,  $\sigma(0) = E\varepsilon_0$ , obtém-se a expressão da tensão em função do tempo:

$$\sigma(t) = E\varepsilon_0 e^{-\frac{t}{\lambda}} \quad (2.32)$$

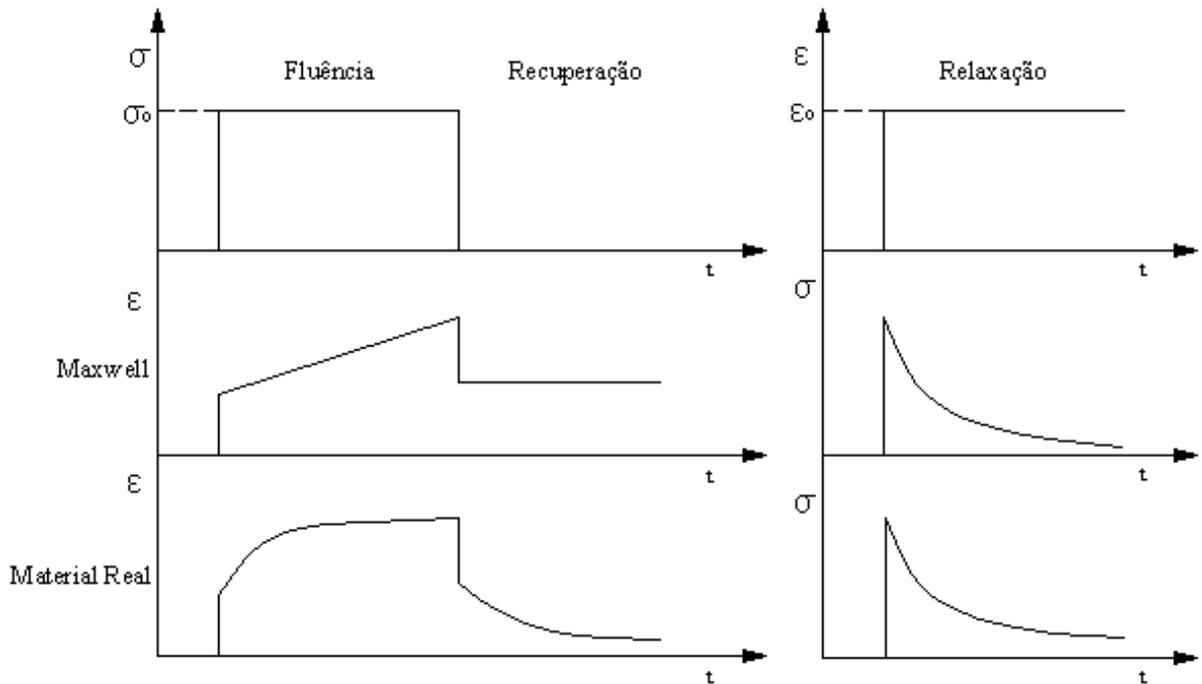


Figura 2.12: Resposta do modelo de Maxwell à fluência, recuperação de fluência e relaxação.

sendo  $\lambda = \eta/E$  o tempo de relaxação.

O módulo de relaxação  $Y(t)$  é obtido dividindo a tensão dada pela Eq. 2.32, pela deformação constante  $\varepsilon_0$  imposta ao modelo:

$$Y(t) = \frac{\sigma(t)}{\varepsilon_0} = E e^{-\frac{t}{\lambda}} \quad (2.33)$$

O modelo de Maxwell apresenta representação aceitável do comportamento de relaxação como primeira aproximação, mas a representação do comportamento de fluência é inadequada.

### Modelo de Kelvin: mola e amortecedor em paralelo

No modelo de Kelvin-Voight, Fig. 2.13, uma parcela da tensão total aplicada ao modelo é suportada pela mola e a outra parcela é suportada pelo amortecedor:

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 \quad (2.34)$$

A mola e o amortecedor deformam-se igualmente, correspondendo à deformação total do modelo:

$$\varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 \quad (2.35)$$

Substituindo as tensões dadas pelas Eq. 2.23 e Eq. 2.24, em Eq. 2.34, obtém-se a

equação diferencial do modelo:

$$\sigma(t) = E\varepsilon + \eta \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (2.36)$$

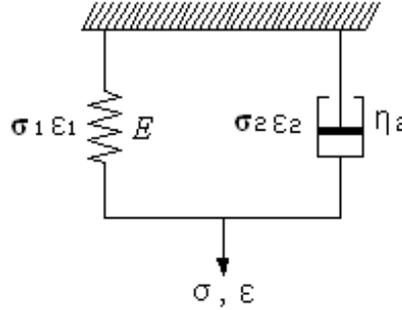


Figura 2.13: Modelo de Kelvin-Voight.

### Solução do modelo de Kelvin para Fluência: Tensão constante $\sigma_0$

Aplicando os conceitos apresentados sobre a função degrau unitário e a transformada de Laplace:

$$\sigma = \sigma_0 \Delta(t), \quad \frac{d\sigma}{dt} = \sigma_0 \delta(t) \quad (2.37)$$

$$\mathcal{L}[\sigma] = \frac{\sigma_0}{s}, \quad \mathcal{L}\left[\frac{d\sigma}{dt}\right] = \sigma_0 \quad (2.38)$$

A transformada de Laplace da Eq. 2.36 pode ser escrita:

$$\mathcal{L}[\sigma] = E\mathcal{L}[\varepsilon] + \eta s\mathcal{L}[\varepsilon] - \varepsilon(0) \quad (2.39)$$

Sabendo que no tempo inicial,  $t = 0$ , a deformação é nula e aplicando as condições definidas nas Eq. 2.37 e Eq. 2.38:

$$\mathcal{L}[\varepsilon] = \frac{\sigma_0}{\eta s \left(\frac{E}{\eta} + s\right)} \quad (2.40)$$

Realizando a transformada de Laplace inversa da Eq. 2.40, tem-se:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad (2.41)$$

sendo  $\tau = \eta/E$  o tempo de retardo.

Obtém-se a expressão do módulo de fluência dividindo a deformação dada pela Eq. 2.41, pela tensão constante  $\sigma_0$ , aplicada no modelo:

$$J(t) = \frac{\varepsilon(t)}{\sigma_0} = \frac{1}{E} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad (2.42)$$

Da 2.42 conclui-se que sob condições de fluência o modelo de Kelvin apresenta um

aumento exponencial da deformação até um valor limite,  $\varepsilon_{\text{lim}} = \sigma_0/E$ , com um tempo de retardo  $\tau$ , como mostrado na Fig. 2.14

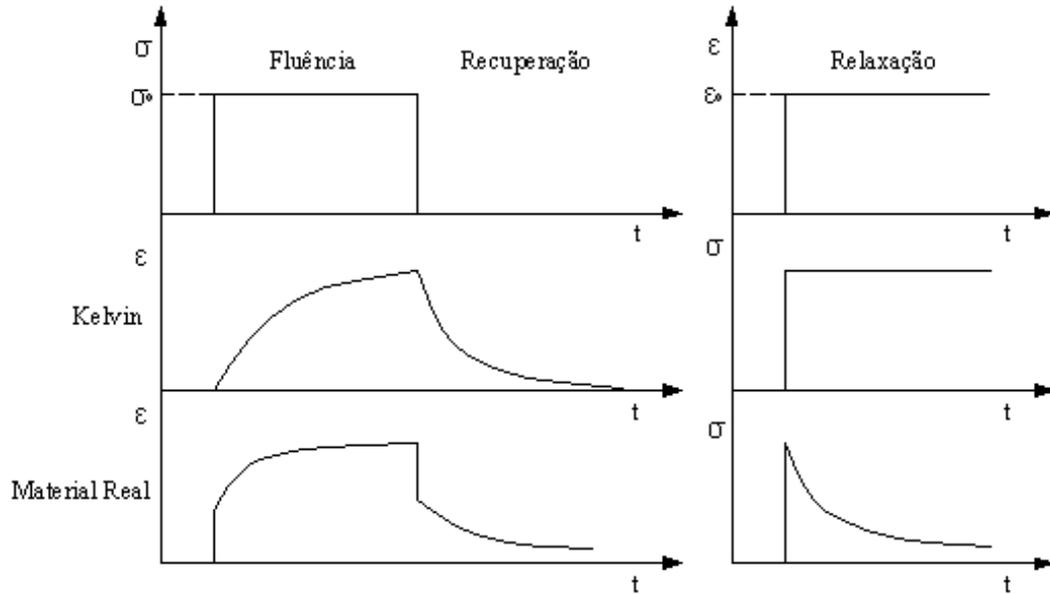


Figura 2.14: Resposta do modelo de Kelvin a fluência, recuperação de fluência e relaxação.

Removendo a tensão, a equação diferencial do modelo fica:

$$E\varepsilon + \eta \frac{d\varepsilon}{dt} = 0 \quad (2.43)$$

A solução da Eq. 2.43, com a condição de deformação inicial  $\varepsilon_0$  é:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (2.44)$$

sendo  $t$  o tempo transcorrido a partir do instante em que a tensão é removida e  $\varepsilon_0$  é a deformação no instante imediatamente anterior a remoção da tensão. Esta é uma recuperação exponencial da deformação com tempo de retardo  $\tau$ , da deformação de fluência.

**Solução do modelo de Kelvin para Relaxação: Deformação constante  $\varepsilon_0$**

Com a deformação constante  $\varepsilon(t) = \varepsilon_0$ , sua derivada em relação ao tempo  $\dot{\varepsilon} = 0$ . A equação diferencial do modelo, Eq. 2.36, fica reduzida a:

$$\sigma = E\varepsilon_0 \quad (2.45)$$

Esta é a resposta de um material elástico, ou seja, não há relaxação de tensão, como mostrado na Fig. 2.14

Sobre o modelo Kelvin pode-se afirmar que a resposta de fluência e recuperação de fluência são aceitáveis como primeira aproximação, mas é inadequada para a relaxação de tensão.

### Modelo de Zener: mola e modelo de Kelvin em série

Para uma boa descrição da fluência, recuperação de fluência e relaxação de tensão é necessário uma combinação dos modelos de Maxwell e Kelvin. Esta combinação pode ser chamado de sólido linear padrão ou modelo de Zener [5] conforme Fig. 2.15.

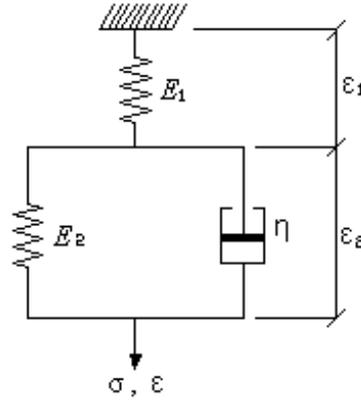


Figura 2.15: Modelo de Zener.

A deformação total é igual à deformação da mola somada à do elemento de Kelvin:

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \mathcal{L}[\varepsilon] = \mathcal{L}[\varepsilon_1] + \mathcal{L}[\varepsilon_2] \quad (2.46)$$

Neste modelo a mola e o elemento de Kelvin suportam a mesma tensão  $\sigma$ :

$$\sigma = E_1 \varepsilon_1, \mathcal{L}[\sigma] = E_1 \mathcal{L}[\varepsilon_1] \quad (2.47)$$

$$\sigma = E_2 \varepsilon_2 + \eta \frac{d\varepsilon_2}{dt}, \mathcal{L}[\sigma] = E_2 \mathcal{L}[\varepsilon_2] + \eta s \mathcal{L}[\varepsilon_2] - \varepsilon_2(0) \quad (2.48)$$

O elemento de Kelvin não apresenta resposta instantânea. Desta forma,  $\varepsilon_2(0) = 0$ . Isolando  $\mathcal{L}[\varepsilon_1]$  e  $\mathcal{L}[\varepsilon_2]$  das Eq. 2.47 e Eq. 2.48 e substituindo na Eq. 2.46, obtém-se:

$$\mathcal{L}[\varepsilon] = \mathcal{L}[\sigma] \left( \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2 + \eta s} \right) \quad (2.49)$$

$$\mathcal{L}[\varepsilon](E_1)(E_2 + \eta s) = \mathcal{L}[\sigma](E_2 + \eta s + E_1) \quad (2.50)$$

$$\mathcal{L}[\varepsilon](E_1 E_2) + s \mathcal{L}[\varepsilon](E_1 \eta) = \mathcal{L}[\sigma](E_1 + E_2) + s \mathcal{L}[\sigma] \eta \quad (2.51)$$

Realizando a inversa da transformada de Laplace da Eq. 2.51, obtém-se a equação diferencial do modelo:

$$E_1 E_2 \varepsilon + \eta E_1 \frac{d\varepsilon}{dt} = \eta \frac{d\sigma}{dt} + (E_1 + E_2)\sigma \quad (2.52)$$

A solução desta equação pode ser obtida para as condições de fluência e relaxação de tensão.

**Solução do modelo de Zener para Fluência: Tensão constante  $\sigma_0$**

$$\sigma = \sigma_0 \Delta(t), \quad \frac{d\sigma}{dt} = \sigma_0 \delta(t) \quad (2.53)$$

$$\mathcal{L}[\sigma] = \frac{\sigma_0}{s}, \quad \mathcal{L}\left[\frac{d\sigma}{dt}\right] = \sigma_0 \quad (2.54)$$

Aplicando as Eq. 2.53 e Eq. 2.54 na Eq. 2.51 tem-se:

$$\mathcal{L}[\varepsilon] = \frac{\sigma_0(E_1 + E_2 + s\eta)}{sE_1(E_2 + s\eta)} \quad (2.55)$$

A Eq. 2.55 pode ser escrita de forma simplificada para facilitar a inversão da transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}[\varepsilon] = \frac{\sigma_0}{\eta E_1} \left( \frac{E_1 + E_2}{s\left(\frac{E_2}{\eta} + s\right)} + \frac{\eta}{\frac{E_2}{\eta} + s} \right) \quad (2.56)$$

A inversa da transformada de Laplace da Eq. 2.56 é escrita como:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E_1} + \frac{\sigma_0}{E_2} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad (2.57)$$

sendo  $\tau = \eta/E_2$  o tempo de retardo.

O módulo de fluência é a razão entre a deformação  $\varepsilon(t)$ , dada pela Eq. 2.57, e a tensão  $\sigma_0$  aplicada ao modelo:

$$J(t) = \frac{\varepsilon(t)}{\sigma_0} = \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad (2.58)$$

A deformação possui duas componentes, a deformação instantânea correspondente à mola e a resposta correspondente ao modelo Kelvin. A resposta do modelo Zener é mostrada na Fig. 2.16

O módulo de fluência varia de um valor inicial  $J(0) = 1/E$ , em  $t = 0$ , até  $J(\infty) = 1/E_1 + 1/E_2$ , em  $t = \infty$ .

Quando a tensão é removida, a recuperação do elemento mola ocorre instantaneamente, ao passo que o elemento de Kelvin apresenta um atraso na recuperação. Solucionando a equação do modelo com a tensão removida, obtém-se a seguinte expressão:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_c e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (2.59)$$

sendo  $t$  o tempo após a remoção do carregamento e  $\varepsilon_c$  a deformação de fluência do elemento

de Kelvin devida ao carregamento.

**Solução do modelo de Zener para Relaxação: Deformação constante  $\varepsilon_0$**

Aplicando condições iniciais na Eq. 2.51:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \Delta(t), \quad \mathcal{L}[\varepsilon] = \frac{\varepsilon_0}{s} \quad (2.60)$$

Obtém-se,

$$\mathcal{L}[\sigma] = \frac{\varepsilon_0 E_1 E_2}{\eta s \left( \frac{E_1 + E_2}{\eta} + s \right)} + \frac{\varepsilon_0 E_1}{\frac{E_1 + E_2}{\eta} + s} \quad (2.61)$$

Realizando a transformada de Laplace inversa na Eq. 2.61, obtém-se a expressão da tensão em função do tempo:

$$\sigma(t) = \frac{E_1 \varepsilon_0}{E_1 + E_2} (E_2 + E_1 e^{-\frac{t}{\lambda}}) \quad (2.62)$$

$\lambda = \frac{\eta}{E_1 + E_2}$ , é o tempo de relaxação.

O módulo de relaxação é obtido dividindo a Eq. 2.62 pela deformação constante  $\varepsilon_0$  aplicada ao modelo:

$$Y(t) = \frac{E_1}{E_1 + E_2} (E_2 + E_1 e^{-\frac{t}{\lambda}}) \quad (2.63)$$

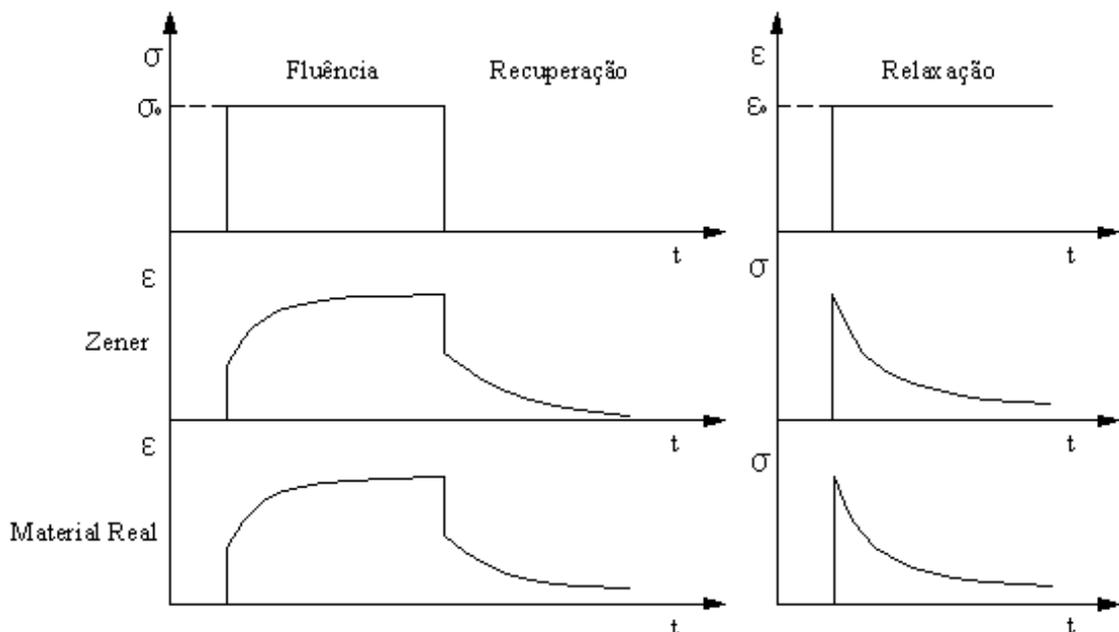


Figura 2.16: Resposta do modelo de Zener a fluência, recuperação de fluência e relaxação.

A relaxação da tensão ocorre exponencialmente ao longo do tempo a partir de um valor inicial alto para um valor menor de equilíbrio, conforme Fig. 2.16. O tempo de

relaxação depende da rigidez da mola,  $E_1$ , e dos parâmetros do modelo de Kelvin,  $E_2$  e  $\eta$ . O módulo de relaxação varia de um valor inicial,  $Y(0) = E_1$ , em  $t = 0$ , até um valor  $Y(\infty) = E_1 E_2 / (E_1 + E_2)$ , em  $t = \infty$ .

O modelo Zener apresenta uma boa descrição qualitativa do comportamento de fluência e relaxação [6].

### 2.7.2 Materiais reais: modelos de vários elementos

O modelo Zener fornece uma razoável aproximação qualitativa para o comportamento de fluência e relaxação dos polímeros. Porém, o modelo incorpora apenas um tempo de retardo, conseqüentemente a fluência ocorre numa faixa estreita de tempo. A curva do módulo de fluência plotada em escala log-log apresenta uma variação relativamente abrupta. Uma alteração do valor do tempo de retardo causa apenas uma translação da curva do módulo de fluência ao longo do eixo do tempo, como pode ser visto na Fig. 2.17.

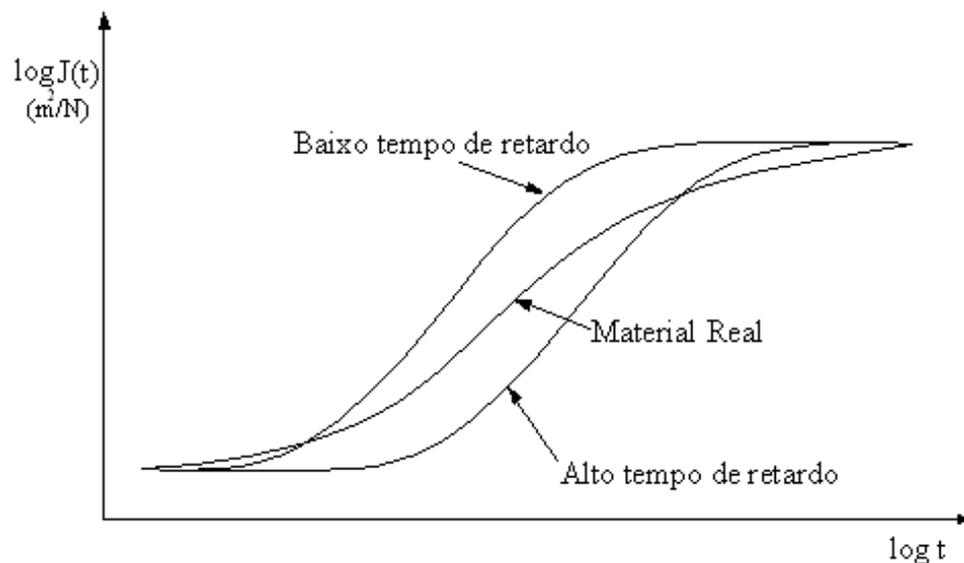


Figura 2.17: Comparação entre o módulo de fluência de um material real e do modelo de Zener.

Materiais reais apresentam a curva do módulo de fluência mais suave. Este comportamento pode ser modelado pela combinação de várias unidades de Kelvin em série ou de Maxwell em paralelo conforme Fig. 2.18. Tais modelos apresentam um número limite de elementos mecânicos, fornecendo um número finito de tempos de retardo, e conseqüentemente uma curva de módulo de fluência mais suave.

### 2.7.3 Aplicação do modelo de Maxwell generalizado

A associação em paralelo de uma mola a vários elementos de Maxwell, como visto na Fig. 2.18b é adotada como modelo constitutivo para representar o comportamento

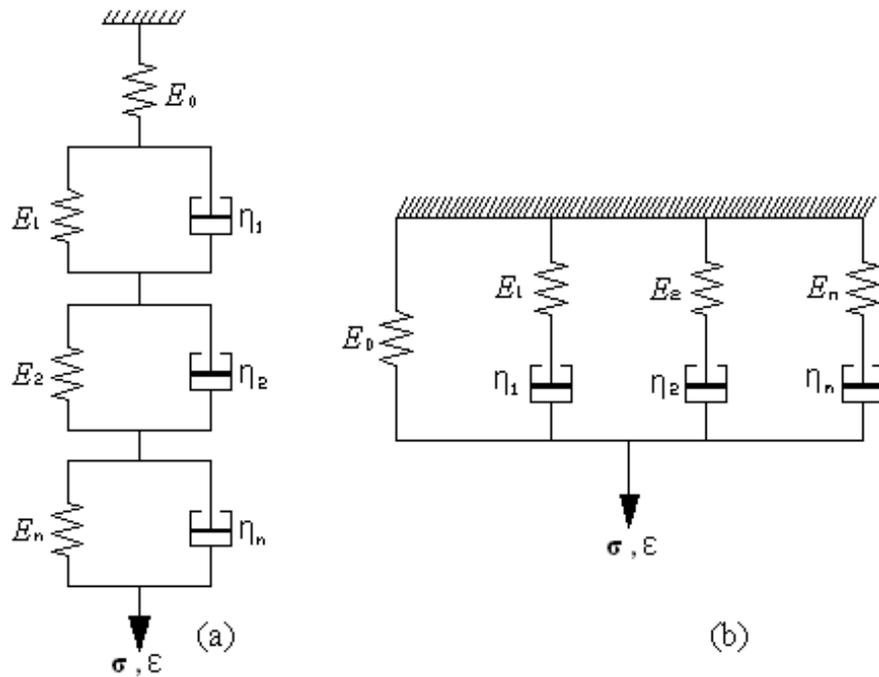


Figura 2.18: Modelo de vários elementos de Kelvin em série em (a) e vários elementos de Maxwell em paralelo em (b).

dependente do tempo do material. Será visto neste trabalho o caso particular de ajuste dos dados experimentais utilizando o modelo de Maxwell generalizado com  $n=5$ , ou seja, cinco elementos de Maxwell associados em paralelo a uma mola, resultando no ajuste de onze parâmetros para modelar matematicamente o material viscoelástico.

Para o modelo representado na Fig. 2.18b verifica-se que a deformação total é equivalente à deformação no elemento mola, e a tensão total é igual à soma da tensão no elemento mola com as tensões em cada elemento de Maxwell:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dots = \varepsilon_n \quad (2.64)$$

$$\sigma = \sigma_0 + \sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_n \quad (2.65)$$

Nos módulos de Maxwell a relação entre tensão e deformação estabelece-se da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon_1}{dt} &= \frac{1}{E_1} \frac{d\sigma_1}{dt} + \frac{\sigma_1}{\eta_1}, \\ \frac{d\varepsilon_2}{dt} &= \frac{1}{E_2} \frac{d\sigma_2}{dt} + \frac{\sigma_2}{\eta_2}, \end{aligned} \quad (2.66)$$

:

$$\frac{d\varepsilon_n}{dt} = \frac{1}{E_n} \frac{d\sigma_n}{dt} + \frac{\sigma_n}{\eta_n}$$

Para o elemento mola a relação entre tensão e deformação é definida como:

$$\sigma_0 = E_0\varepsilon_0 \quad (2.67)$$

Aplicando a transformada de Laplace nas Eq. 2.64 a Eq. 2.67, obtém-se:

$$\mathcal{L}[\varepsilon] = \mathcal{L}[\varepsilon_1] = \mathcal{L}[\varepsilon_2] = \dots = \mathcal{L}[\varepsilon_n] \quad (2.68)$$

$$\mathcal{L}[\sigma] = \mathcal{L}[\sigma_0] + \mathcal{L}[\sigma_1] + \mathcal{L}[\sigma_2] + \dots + \mathcal{L}[\sigma_n] \quad (2.69)$$

$$s\mathcal{L}[\varepsilon_1] = \frac{s}{E_1}\mathcal{L}[\sigma_1] + \frac{1}{\eta_1}\mathcal{L}[\sigma_1],$$

$$s\mathcal{L}[\varepsilon_2] = \frac{s}{E_2}\mathcal{L}[\sigma_2] + \frac{1}{\eta_2}\mathcal{L}[\sigma_2],$$

:

$$(2.70)$$

$$s\mathcal{L}[\varepsilon_n] = \frac{s}{E_n}\mathcal{L}[\sigma_n] + \frac{1}{\eta_n}\mathcal{L}[\sigma_n]$$

$$\mathcal{L}[\sigma_0] = E_0\mathcal{L}[\varepsilon_0] \quad (2.71)$$

Substituindo a transformada da deformação total apresentada na Eq. 2.68 em Eq. 2.70, obtém-se através da Eq. 2.69 a relação entre a transformada de Laplace da tensão total  $\mathcal{L}[\sigma]$  e a da deformação total  $\mathcal{L}[\varepsilon]$  :

$$\mathcal{L}[\sigma] = \mathcal{L}[\varepsilon] \left( E_0 + \frac{E_1\eta_1s}{E_1 + \eta_1s} + \frac{E_2\eta_2s}{E_2 + \eta_2s} + \dots + \frac{E_n\eta_ns}{E_n + \eta_ns} \right) \quad (2.72)$$

Reagrupando os termos da Eq. 2.72, chega-se a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\sigma](E_1 + \eta_1s)(E_2 + \eta_2s)\dots(E_n + \eta_ns) &= \mathcal{L}[\varepsilon] \left( (E_0)(E_1 + \eta_1s)(E_2 + \eta_2s)\dots(E_n + \eta_ns) + \right. \\ &\quad (E_1\eta_1s)(E_2 + \eta_2s)\dots(E_n + \eta_ns) + \\ &\quad (E_2\eta_2s)(E_1 + \eta_1s)\dots(E_n + \eta_ns) + \\ &\quad \left. E_n\eta_ns(E_1 + \eta_1s)(E_2 + \eta_2s)\dots(E_{n-1} + \eta_{n-1}s) \right) \end{aligned} \quad (2.73)$$

Efetuando os produtos e definindo as constantes  $p_1, p_2, \dots, p_n$  e  $q_0, q_1, \dots, q_n$  em função das constantes mecânicas do modelo obtém-se:

$$\mathcal{L}[\sigma] + p_1 s \mathcal{L}[\sigma] + p_2 s^2 \mathcal{L}[\sigma] + \dots + p_n s^n \mathcal{L}[\sigma] = q_0 \mathcal{L}[\varepsilon] + q_1 s \mathcal{L}[\varepsilon] + q_2 s^2 \mathcal{L}[\varepsilon] + \dots + q_n s^n \mathcal{L}[\varepsilon] \quad (2.74)$$

A inversa da transformada de Laplace da Eq. 2.74 fornece a equação constitutiva do modelo no domínio do tempo:

$$\sigma + p_1 \overset{(1)}{\sigma} + p_2 \overset{(2)}{\sigma} + \dots + p_n \overset{(n)}{\sigma} = q_0 \varepsilon + q_1 \overset{(1)}{\varepsilon} + q_2 \overset{(2)}{\varepsilon} + \dots + q_n \overset{(n)}{\varepsilon} \quad (2.75)$$

$\overset{(n)}{\sigma}$  : derivada de ordem n da tensão total.

$\overset{(n)}{\varepsilon}$  : derivada de ordem n da deformação total.

A Eq. 2.75 é uma equação diferencial que relaciona a tensão e a deformação total. Pode ser reescrita na forma compacta através da definição dos operadores diferenciais P(t) e Q(t) :

$$P(t) = 1 + p_1 \frac{d}{dt} + p_2 \frac{d^2}{dt^2} + \dots + p_n \frac{d^n}{dt^n} \quad (2.76)$$

$$Q(t) = q_0 + q_1 \frac{d}{dt} + q_2 \frac{d^2}{dt^2} + \dots + q_n \frac{d^n}{dt^n} \quad (2.77)$$

Desta forma pode-se reescrever a Eq. 2.75 como:

$$P(t)\sigma(t) = Q(t)\varepsilon(t) \quad (2.78)$$

### Módulo de fluência

O módulo de fluência J(t), é obtido aplicando-se um tensão constante com o auxílio da função degrau  $\sigma = \sigma_0 \Delta t$  na Eq. 2.74. Para realizar esta operação é conveniente trabalhar no domínio de Laplace, desta forma tem-se que:

$$\mathcal{L}[\sigma] = \frac{\sigma_0}{s} \quad (2.79)$$

$$(1 + p_1 s + p_2 s^2 + \dots + p_n s^n) \frac{\sigma_0}{s} = (q_0 + q_1 s + q_2 s^2 + \dots + q_n s^n) \mathcal{L}[\varepsilon] \quad (2.80)$$

Considerando que o módulo de fluência é definido como a deformação por unidade de tensão, tem-se:

$$\mathcal{L}[J] = \frac{\mathcal{L}[\varepsilon]}{\sigma_0} \quad (2.81)$$

Desta forma a transformada do módulo de fluência é definida:

$$\mathcal{L}[J] = \frac{(1 + p_1 s + p_2 s^2 + \dots + p_n s^n)}{s(q_0 + q_1 s + q_2 s^2 + \dots + q_n s^n)} \quad (2.82)$$

A separação do quociente da Eq. 2.82 em frações parciais torna conveniente a realização da transformada de Laplace inversa dessa expressão, portanto:

$$\mathcal{L}[J] = \frac{(1 + p_1s + p_2s^2 + \dots + p_ns^n)}{q_ns(s - s_1)(s - s_2)\dots(s - s_n)} \quad (2.83)$$

$s_1, s_2, \dots, s_n$  são as raízes do polinômio do denominador da Eq. 2.82. O módulo de fluência no domínio do tempo obtido através da transformada de Laplace inversa da Eq. 2.83 é representado por:

$$\begin{aligned} J(t) = & -\frac{1}{q_n} \frac{1}{s_1 s_2 \dots s_n} + \frac{1}{q_n} \frac{1 + p_1s + p_2s^2 + \dots + p_ns^n}{s_1(s_1 - s_2)(s_1 - s_2)\dots(s_1 - s_n)} e^{s_1 t} + \\ & \frac{1}{q_n} \frac{1 + p_1s + p_2s^2 + \dots + p_ns^n}{s_2(s_2 - s_1)(s_2 - s_3)\dots(s_2 - s_n)} e^{s_2 t} + \dots \\ & \dots + \frac{1}{q_n} \frac{1 + p_1s + p_2s^2 + \dots + p_ns^n}{s_n(s_n - s_1)(s_n - s_2)\dots(s_n - s_{n-1})} e^{s_n t} \end{aligned} \quad (2.84)$$

Observando a Eq. 2.84 verifica-se que para sua completa definição necessita-se determinar as raízes  $s_1, s_2, \dots, s_n$  e os valores das constantes  $p_1, p_2, \dots, p_n$  e  $q_1, q_2, \dots, q_n$ . Pode-se reescrever a Eq. 2.84 de forma simplificada em termos de novas constantes:

$$J(t) = B_o - B_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}} - B_2 e^{-\frac{t}{\tau_2}} - \dots - B_n e^{-\frac{t}{\tau_n}} \quad (2.85)$$

sendo  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$  os tempos de retardo definidos em função das raízes do denominador da Eq. 2.82:

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \frac{-1}{s_1}, \\ \tau_2 &= \frac{-1}{s_2} \\ &\vdots \\ \tau_n &= \frac{-1}{s_n} \end{aligned} \quad (2.86)$$

e  $B_o, B_1, \dots, B_n$  são as constantes definidas como:

$$\begin{aligned} B_o &= \frac{1}{q_n} \frac{1}{s_1 s_2 \dots s_n}, \\ B_1 &= \frac{1}{q_n} \frac{1 + p_1s + p_2s^2 + \dots + p_ns^n}{s_1(s_1 - s_2)(s_1 - s_2)\dots(s_1 - s_n)}, \\ B_n &= \frac{1}{q_n} \frac{1 + p_1s + p_2s^2 + \dots + p_ns^n}{s_n(s_n - s_1)(s_n - s_2)\dots(s_n - s_{n-1})} \end{aligned} \quad (2.87)$$

Desta forma o módulo de fluência fica definido através da determinação dos tempos de retardo  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$  e das constantes  $B_o, B_1, \dots, B_n$  através da minimização do erro entre a Eq. 2.84 e a curva experimental para o módulo de fluência.

### Módulo de relaxação

Para obter o módulo de relaxação faz-se o uso da relação entre a transformada de Laplace do módulo de relaxação e a do módulo de fluência  $\mathcal{L}[J] \cdot \mathcal{L}[Y] = s^{-2}$ . A expressão para a transformada de Laplace do módulo de relaxação pode ser escrita como:

$$\mathcal{L}[Y] = \frac{(q_o + q_1s + q_2s^2 + \dots + q_ns^n)}{s(1 + p_1s + p_2s^2 + \dots + p_ns^n)} \quad (2.88)$$

A inversa da transformada de Laplace da Eq. 2.88 fornecerá o módulo de relaxação no domínio do tempo:

$$Y(t) = D_o + D_1e^{-\frac{t}{\lambda_1}} + D_2e^{-\frac{t}{\lambda_2}} + \dots + D_ne^{-\frac{t}{\lambda_n}} \quad (2.89)$$

sendo  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  os tempos de relaxação e  $D_o, D_1, \dots, D_n$  as constantes do módulo de relaxação.

## 2.8 Efeito da temperatura

### 2.8.1 Equivalência tempo-temperatura

Como mencionado anteriormente, a temperatura exerce forte influência na resposta viscoelástica. Polímeros semicristalinos e amorfos apresentam propriedades mecânicas fortemente alteradas pela ação de temperatura. O módulo de fluência aumenta com o aumento da temperatura, enquanto o módulo de relaxação diminui com o aumento da temperatura, verificando-se uma dependência da temperatura mais acentuada para os polímeros amorfos do que para os semicristalinos [17].

A variação do módulo de relaxação de um polímero amorfo em relação à temperatura em um curto período de tempo, após 10 segundos, é mostrada na Fig. 2.19. Esta curva possui forma semelhante à curva do módulo de relaxação em relação ao tempo com a temperatura mantida constante. No início, a baixa temperatura o material comporta-se como um sólido, passando por uma região de transição até atingir um patamar em que é semelhante ao comportamento borrachoso e finalmente a altas temperaturas torna-se fluido. A temperatura de transição do comportamento sólido para o de borracha é a temperatura de transição vítrea,  $T_g$  [7].

A semelhança entre as curvas módulo de relaxação-tempo e módulo de relaxação-temperatura, conduzem ao conceito de equivalência tempo-temperatura. Por exemplo,

em um ensaio de curta duração observa-se um material com alto módulo de relaxação, que é o mesmo caso de um ensaio de baixa temperatura. Por outro lado, em um ensaio de longa duração observa-se um material com comportamento semelhante a borracha, baixo módulo de relaxação. Este é o caso de um ensaio em alta temperatura. Desta forma, com uma variação de temperatura, todo o espectro de tempos de relaxação é transladado ao longo do eixo do tempo.

A curva completa de relaxação do material em uma temperatura de referência pode ser obtida pela translação no eixo do tempo das curvas de relaxação em diferentes temperaturas. Este processo de translação é chamado de princípio das variáveis reduzidas, em que duas variáveis independentes tempo e temperatura, são reduzidas a uma variável simples, o tempo reduzido em uma certa temperatura.

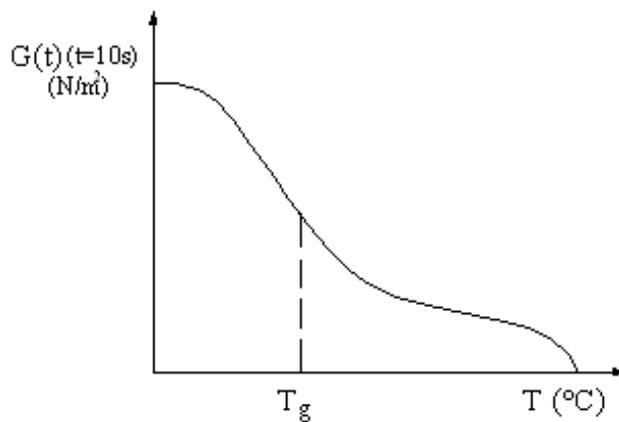


Figura 2.19: Variação do módulo de relaxação em função da temperatura.

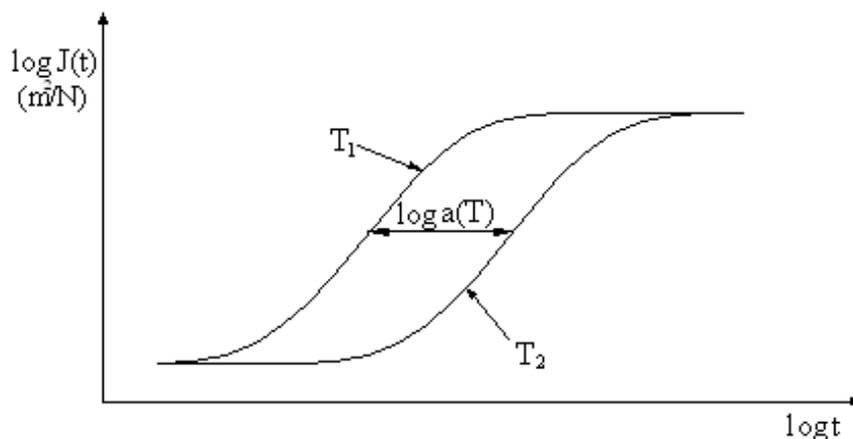


Figura 2.20: Variação do módulo de fluência em relação ao tempo para duas temperaturas.

A Fig. 2.20 apresenta curvas típicas do módulo de fluência de ensaios realizados em diferentes temperaturas. Em uma escala de tempo logarítmica, verifica-se que as curvas

estão transladadas por um fator constante, o fator de translação  $a(T)$ , devido a uma diferença de temperatura [9]. O fator de translação  $a(T)$ , pode ser expresso pela equação de William-Landel-Ferry (WLF),

$$\log a(T) = -\frac{C_1(T_1 - T_{ref})}{C_2 + (T_1 - T_{ref})} \quad (2.90)$$

sendo  $C_1$  e  $C_2$  constantes do material determinadas experimentalmente. Caso a temperatura de referência adotada esteja entre  $-30^\circ C$  e  $43^\circ C$  acima da temperatura de transição vítrea, os valores de  $C_1 = 8,9$  e  $C_2 = 89,5 K$  são adequados para grande variedade de polímeros [10].

Para determinação das constantes  $C_1$  e  $C_2$  da equação WLF, necessita-se realizar dois ensaios de fluência em temperaturas distintas. Primeiramente em uma temperatura de referência  $T_{ref}$ , sob certo nível de tensão  $\sigma_0$ , obtém-se através do ajuste dos dados experimentais ao modelo matemático na forma de séries de Prony, os parâmetros do módulo de fluência na temperatura de referência,  $J_{T_{ref}}$ . Adicionalmente, em uma outra temperatura  $T_1$ , determina-se o correspondente módulo de fluência  $J_{T_1}$ . Através da definição de tempo reduzido,  $\xi$ , estabelece-se:

$$\xi = ta(T) \quad (2.91)$$

$$J_{T_1} = J_{T_{ref}}(ta(T)) \quad (2.92)$$

Com as expressões de  $J_{T_{ref}}$  e  $J_{T_1}$  definidas através do processo de ajuste, pode-se definir a expressão do erro considerando  $k$  pontos da curva do módulo de fluência na temperatura  $T_1$ :

$$\begin{aligned} Erro = & \left[ \frac{J_{T_1}(t_1) - J_{T_{ref}}(t_1 a(T))}{J_{T_1}(t_1)} \right]^2 + \left[ \frac{J_{T_1}(t_2) - J_{T_{ref}}(t_2 a(T))}{J_{T_1}(t_2)} \right]^2 + \dots \\ & \dots + \left[ \frac{J_{T_1}(t_k) - J_{T_{ref}}(t_k a(T))}{J_{T_1}(t_k)} \right]^2 \end{aligned} \quad (2.93)$$

Substituindo a expressão do fator de translação, Eq. 2.90 em Eq. 2.93, obtém-se a expressão do erro em função das constantes  $C_1$  e  $C_2$ . A minimização do erro da Eq. 2.93 através de,

$$\frac{\partial Erro}{\partial C_1} = 0 \quad (2.94)$$

$$\frac{\partial Erro}{\partial C_2} = 0 \quad (2.95)$$

fornecerá os valores das duas constantes.

O princípio da equivalência tempo-temperatura quando aplicado a ensaios de longa duração não apresenta resultados válidos. A explicação para este fato é decorrente do processo de envelhecimento que ocorre em uma grande variedade de polímeros abaixo da temperatura de transição vítrea  $T_g$ , e que altera a resposta viscoelástica do material durante um ensaio de longa duração [13]. Para ensaios de longa duração, deve-se definir um novo fator de translação considerando os efeitos da temperatura e do envelhecimento.

### 2.8.2 O efeito do envelhecimento

O envelhecimento físico é definido como o processo de progressiva densificação do material que ocorre ao longo do tempo devido a mudanças de forma nas cadeias poliméricas [14]. A força causadora destas modificações surge quando o material é resfriado após ser submetido a certo nível de temperatura. O envelhecimento físico contrariamente ao envelhecimento químico é um processo reversível, isto é, um material envelhecido por um número de anos pode sofrer rejuvenescimento através do recozimento em uma temperatura apropriada por um pequeno período de tempo.

A influência do envelhecimento físico no comportamento de fluência dos plásticos pode ser vista na Fig. 2.21, que demonstra vários ensaios realizados sujeitando o corpo de prova ao mesmo nível de tensão para diferentes tempos de envelhecimento. O tempo de envelhecimento,  $t_e$ , corresponde ao período de tempo entre o início do resfriamento do material e o instante de aplicação de carga.

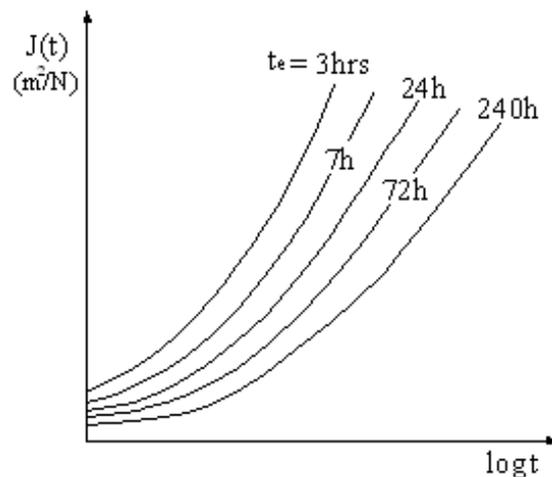


Figura 2.21: Módulo de fluência obtido de uma resina epoxi (Evide TE251) para vários tempos de envelhecimento [14].

Neste trabalho o modelamento do comportamento viscoelástico não considera o efeito do envelhecimento. Detalhes sobre a formulação matemática deste efeito são apresentados em [14].

## 2.9 Princípio da sobreposição de Boltzmann

O princípio da sobreposição de Boltzmann descreve a resposta do material para diferentes histórias de carregamento, permitindo a determinação da resposta viscoelástica linear ocasionada por carregamentos complexos.

As hipóteses deste princípio são:

1. A resposta do material em um dado instante, é uma função de toda a seqüência de carregamento anterior.
2. Cada estágio de carregamento contribui independentemente para a deformação final, e esta pode ser obtida pela adição de cada contribuição.

Considerando os estágios de carregamento mostrado na Fig. 2.22, tem-se as seguintes respostas:

$$\Delta\sigma_0 \text{ em } t = 0 \text{ é } \varepsilon_0(t) = \Delta\sigma_0 J(t)$$

$$\Delta\sigma_1 \text{ em } t = t_1 \text{ é } \varepsilon_1(t) = \Delta\sigma_1 J(t - t_1)$$

$$\Delta\sigma_2 \text{ em } t = t_2 \text{ é } \varepsilon_2(t) = \Delta\sigma_2 J(t - t_2)$$

$$\Delta\sigma_3 \text{ em } t = t_3 \text{ é } \varepsilon_3(t) = \Delta\sigma_3 J(t - t_3)$$

$J(t - t_i)$  é o módulo de fluência do material obtido em um ensaio de fluência com carregamento constante. A contribuição de cada estágio é o produto do incremento da tensão pelo módulo de fluência.

A deformação final é a soma das respostas:

$$\varepsilon(t) = \sum \Delta\sigma_i J(t - t_i) \quad (2.96)$$

Para variações contínuas de carregamento, esta soma é generalizada pela integral,

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^t J(t - t') d\sigma(t') \quad (2.97)$$

o que é geralmente escrito como:

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^t J(t - t') \frac{d\sigma(t')}{dt'} dt' \quad (2.98)$$

sendo  $J(t - t')$  o módulo de fluência após um intervalo de tempo de  $t - t'$ . A variável de tempo  $t'$  é integrada no intervalo de  $-\infty$  a  $t$  para abranger todas as seqüências anteriores de carregamento. Da mesma forma, a relaxação de tensão para uma seqüência completa de carregamento pode ser obtida por:

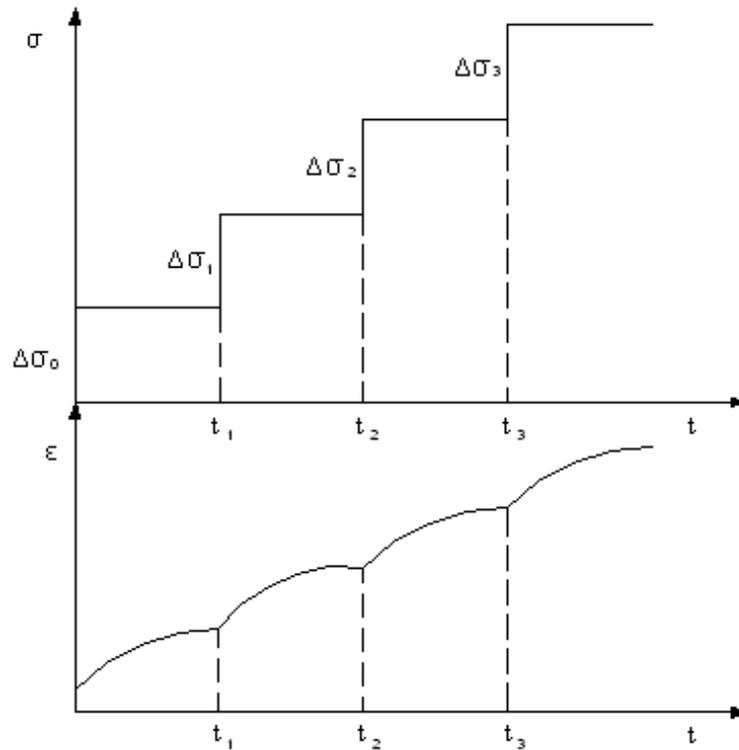


Figura 2.22: Resposta de um material viscoelástico linear a carregamentos de múltiplos estágios.

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t Y(t-t') \frac{d\varepsilon(t')}{dt'} dt' \quad (2.99)$$

sendo  $Y(t-t')$  o módulo de relaxação de tensão após um intervalo de tempo  $t-t'$  [15].

## 2.10 Princípio da correspondência

Na formulação de um problema arbitrário de resistência dos materiais, são necessárias que as equações de equilíbrio, as equações cinemáticas e as equações constitutivas do material juntamente com as condições de contorno sejam satisfeitas. As duas primeiras são comuns para materiais elásticos e viscoelásticos. As equações de equilíbrio descrevem o equilíbrio de forças para um elemento infinitesimal  $dx$ ,  $dy$  e  $dz$ :

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y = 0 \quad (2.100)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0$$

X, Y e Z as forças de corpo por unidade de volume. As relações cinemáticas expressam as deformações em termos das componentes u, v e w do vetor deslocamentos.

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (2.101)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right), \quad \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

A formulação que diferencia a análise elástica da viscoelástica está nas equações constitutivas do material. Para uma grande classe de problemas, a solução de um problema viscoelástico linear pode ser construída a partir da solução elástica linear, através da substituição da equação constitutiva elástica pela viscoelástica correspondente. Desta forma, soluções para muitos problemas de valor de contorno lineares, isotrópicos e elásticos podem ser convertidas para os correspondentes problemas de valor de contorno lineares, isotrópicos e viscoelásticos [2].

## 2.11 Estado de tensão multiaxial

Através da realização dos ensaios de fluência, aplicando uma tensão uniaxial nos corpos de prova em laboratório, obtém-se os dados experimentais que necessitam ser convertidos para a realização de uma análise numérica de um componente viscoelástico submetido a um estado de solicitações multiaxial.

Muitas formulações elásticas tridimensionais para tensão e deslocamento são funções do módulo de elasticidade,  $E_{el}$ , e do coeficiente de Poisson,  $\nu_{el}$ . Para determinar estas relações para o problema viscoelástico necessita-se determinar os correspondentes operadores  $Y(t)$  e  $\nu(t)$  através do ajuste dos dados de ensaios uniaxiais ao modelo matemático. Entretanto é conveniente utilizar o módulo de cisalhamento  $G_{el}$  e o módulo volumétrico  $K_{el}$  para descrever as relações ao invés de  $E_{el}$  e  $\nu_{el}$ , que pode ser feito utilizando as relações válidas para materiais elásticos lineares [16]:

$$E_{el} = \frac{9G_{el}K_{el}}{3K_{el} + G_{el}} \quad (2.102)$$

$$\nu_{el} = \frac{3K_{el} - 2G_{el}}{6K_{el} + 2G_{el}} \quad (2.103)$$

Aplicando o princípio da correspondência e a transformada de Laplace, os correspondentes operadores viscoelásticos obedecem relações análogas :

$$s\mathcal{L}[Y] = \frac{9s\mathcal{L}[G]s\mathcal{L}[K]}{3s\mathcal{L}[K] + s\mathcal{L}[G]} \quad (2.104)$$

$$s\mathcal{L}[\nu] = \frac{3s\mathcal{L}[K] - 2s\mathcal{L}[G]}{6s\mathcal{L}[K] + 2s\mathcal{L}[G]} \quad (2.105)$$

Através da consideração que o módulo de relaxação volumétrico  $K(t)$  é maior que do módulo de relaxação deviatório  $G(t)$  e que  $K(t)$ , para um grande número de polímeros, apresenta menos relaxação do que  $G(t)$  conforme observado na Fig. 2.23, pode-se considerar o módulo de relaxação volumétrico como elástico. Consequentemente a resposta viscoelástica é representada apenas pelo módulo de cisalhamento. Isolando  $\mathcal{L}[G]$  da Eq. 2.104, tem-se:

$$s\mathcal{L}[G] = \frac{3s\mathcal{L}[Y]s\mathcal{L}[K]}{9s\mathcal{L}[K] - s\mathcal{L}[Y]} \quad (2.106)$$

Como  $K$  independe do tempo,

$$K = K_{el}\Delta(t), \quad \mathcal{L}[K] = \frac{K_{el}}{s} \quad (2.107)$$

$$\mathcal{L}[G] = \frac{1}{s} \frac{3K_{el}s\mathcal{L}[Y]}{9K_{el} - s\mathcal{L}[Y]} \quad (2.108)$$

No caso de material isotrópico, considerando a hipótese acima apresentada, o operador viscoelástico  $G(t)$  necessita ser determinado para caracterização completa do material, [16].

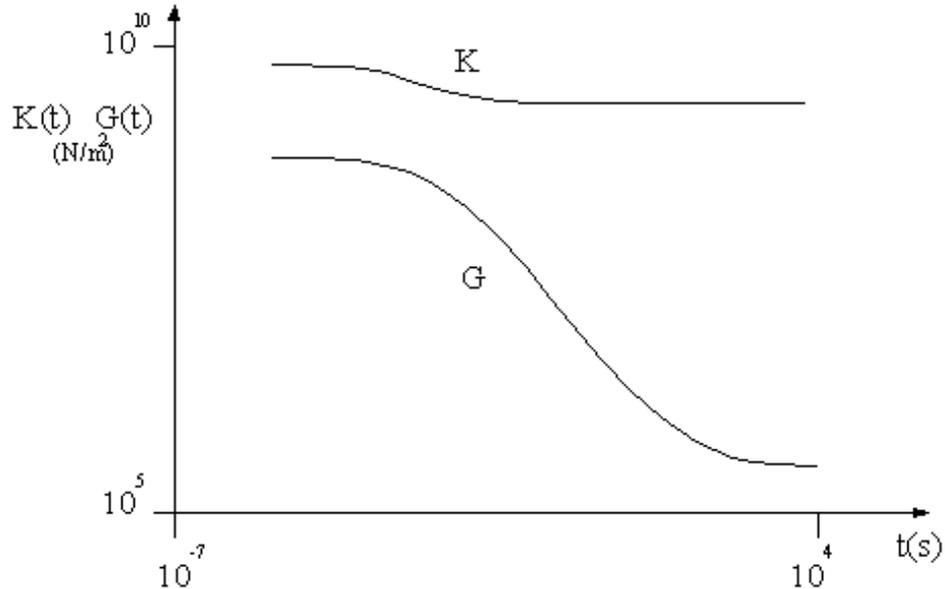


Figura 2.23: Módulo de relaxação volumétrico  $K$  e deviatório  $G$  [16].

## 2.12 Conversão entre o módulo de fluência e módulo de relaxação deviatórico

O módulo de fluência do material obtido nos experimentos precisa ser convertido para o módulo de relaxação deviatórico, para a implementação das propriedades viscoelásticas no software Ansys. Desta forma descreve-se as etapas envolvidas nesta conversão.

Parte-se da solução elástica isolando o módulo de cisalhamento elástico  $G_{el}$ , da Eq. 2.102:

$$G_{el} = \frac{3E_{el}K_{el}}{9K_{el} - E_{el}} \quad (2.109)$$

Utilizando o princípio da correspondência e aplicando a transformada de Laplace na Eq. 2.109 obtém-se:

$$s\mathcal{L}[G] = \frac{3s\mathcal{L}[Y]s\mathcal{L}[K]}{9s\mathcal{L}[K] - s\mathcal{L}[Y]} \quad (2.110)$$

Considerando o módulo volumétrico elástico, a resposta viscoelástica é representada pelo módulo de relaxação deviatórico,  $G(t)$ :

$$\mathcal{L}[K] = \frac{K_{el}}{s} \quad (2.111)$$

$$\mathcal{L}[G] = \frac{1}{s} \left( \frac{3K_{el}s\mathcal{L}[Y]}{9K_{el} - s\mathcal{L}[Y]} \right) \quad (2.112)$$

simplificando a Eq. 2.112 tem-se:

$$\mathcal{L}[G] = \frac{1}{s} \left( \frac{3K_{el}}{\frac{1}{s\mathcal{L}[Y]}9K_{el} - 1} \right) \quad (2.113)$$

No domínio de Laplace a relação entre  $\mathcal{L}[Y]$  e o módulo de fluência obtido experimentalmente  $\mathcal{L}[J]$  é definida como:

$$\mathcal{L}[Y]\mathcal{L}[J] = \frac{1}{s^2} \quad (2.114)$$

Substituindo a Eq. 2.114 em Eq. 2.113 obtém-se:

$$\mathcal{L}[G] = \frac{3K_{el}}{s(s\mathcal{L}[J]9K_{el} - 1)} \quad (2.115)$$

A Eq. 2.115 pode ser apresentada na forma de frações parciais da seguinte forma:

$$\mathcal{L}[G] = \frac{R_0}{s} + \frac{R_1}{s - p_1} + \frac{R_2}{s - p_2} + \dots + \frac{R_n}{s - p_n} \quad (2.116)$$

Realizando a inversão da transformada de Laplace da Eq. 2.116, obtém-se:

$$G(t) = R_0 + R_1 e^{\frac{-t}{\beta_1}} + R_2 e^{\frac{-t}{\beta_2}} + \dots + R_n e^{\frac{-t}{\beta_n}} \quad (2.117)$$

$R_0, R_1, \dots, R_n$  são as constantes do módulo de relaxação deviatórico, e  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n = -1/p_n$  são os tempos de relaxação do módulo de relaxação deviatórico para o modelo de Maxwell generalizado de  $n$  parâmetros.

Como apresentado na Eq. 2.117, a partir do módulo de fluência obtido experimentalmente, determina-se o módulo de relaxação deviatórico, cujas constantes serão implementadas em ferramentas de simulação numérica, oferecendo condições de projetar e analisar estruturalmente componentes viscoelásticos.

## 2.13 Extensometria

Atualmente disponibiliza-se comercialmente diversos tipos de extensômetros. Citam-se como principais os mecânicos, piezoresistivos, capacitivos e os metálicos de resistência variável. Os mecânicos são pouco utilizados devido a suscetibilidade a erros, os capacitivos em medições a temperaturas superiores a  $400^\circ C$ , os piezoresistivos são aplicados em transdutores específicos devido sua alta sensibilidade e os metálicos são os mais comumente usados em análise experimental de tensões. Utiliza-se neste trabalho extensômetros metálicos conforme Fig. 2.26 .

Extensômetros metálicos são dispositivos resistivos que permitem avaliar os esforços e deformações em componentes mecânicos. Para qualquer transdutor resistivo, a resistência elétrica é dependente do material e da geometria. Na Fig. 2.24 observa-se um elemento resistivo de comprimento,  $L$ , resistividade  $\rho$  e área da seção transversal  $A$ . A resistência desse elemento pode ser calculada através da equação:

$$R = \rho \left( \frac{L}{A} \right) \quad (2.118)$$

Submete-se o material condutor resistivo a uma carga axial  $P$ , como visto na Fig. 2.24. A variação da resistência  $\Delta R$  ocorre devido à mudança de comprimento do condutor  $\Delta L$ , a alteração da área da seção transversal  $\Delta A$  e a modificação de sua resistividade  $\Delta \rho$ . Esta variação de resistência elétrica torna possível medir alterações dimensionais devido a variação de carregamento:

$$\frac{\Delta R}{R} \approx \frac{\Delta L}{L} + \frac{\Delta \rho}{\rho} - \frac{\Delta A}{A} \quad (2.119)$$

A sensibilidade do extensômetro,  $S$ , é dada pela razão entre a variação relativa da resistência  $\Delta R/R$ , e a deformação  $\varepsilon$ , através da equação [24]:

$$S = \frac{\frac{\Delta R}{R}}{\varepsilon} \quad (2.120)$$

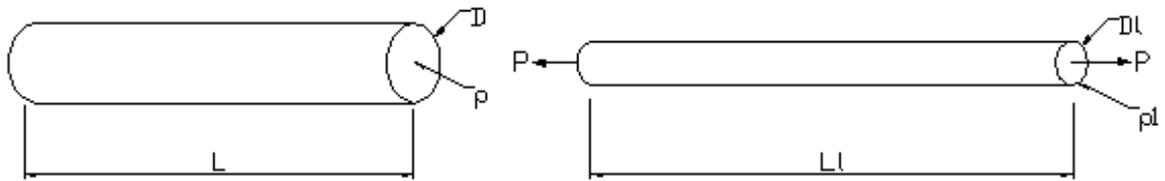


Figura 2.24: Variação da resistência elétrica devido a aplicação de carga.

### 2.13.1 Sistema de medição para extensômetros

Normalmente as deformações a serem medidas são pequenas, e assim as variações de resistência do extensômetro não podem ser monitoradas por multímetros comuns. Desta forma, a utilização do extensômetro acoplado a um sistema de medição conforme Fig. 2.25 permitirá medir com precisão sua resistência.

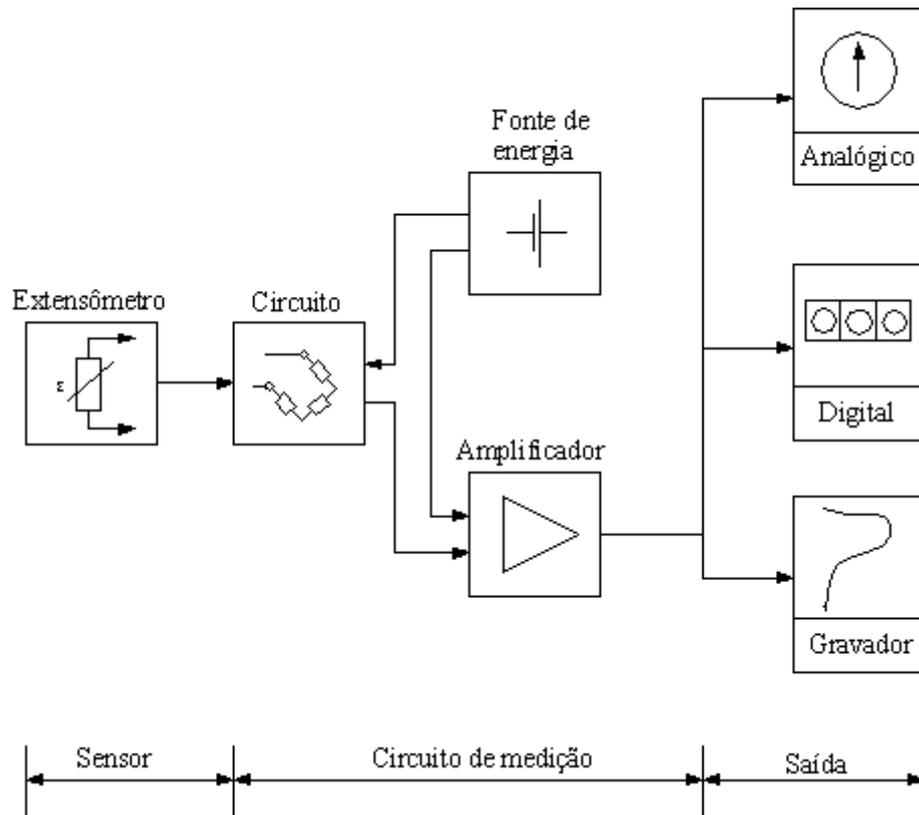


Figura 2.25: Sistema de medição para extensômetro.

O primeiro componente do sistema é formado pelo extensômetro conforme ilustrado na Fig. 2.25. Ele converte a deformação mecânica em uma variação na resistência elétrica. Posteriormente tem-se o circuito de medição denominado ponte de Wheatstone, onde acopla-se o extensômetro metálico, permitindo a leitura do sinal elétrico. O suprimento de energia pode ser feito por fonte de voltagem constante ou corrente constante.

A disposição dos extensômetros na ponte dependerá da aplicação a ser realizada e da quantidade de extensômetros necessários. As configurações: 1/4 de ponte, 1/2 ponte e ponte completa são comumente utilizadas.

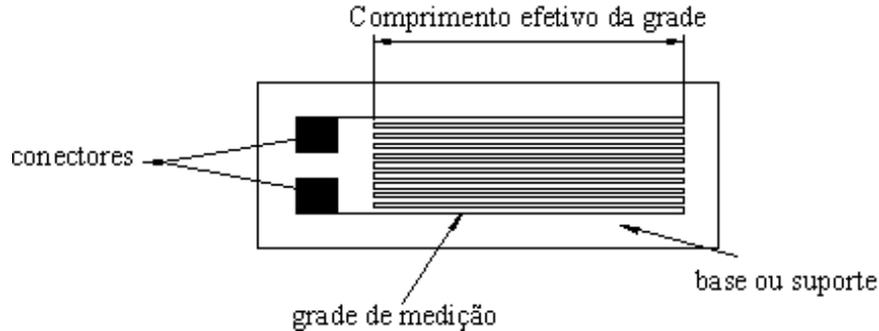


Figura 2.26: Extensômetro metálico.

As solicitações mecânicas ocasionarão variações na resistência elétrica dos extensômetros, desbalanceando a ponte. Este desbalanceamento é proporcional à tensão elétrica de entrada conforme Eq. 2.121, válida para pequenas variações de resistência [24]:

$$\frac{V_s}{V_e} = \frac{1}{4} \left( \frac{\Delta R_1}{R_1} - \frac{\Delta R_2}{R_2} + \frac{\Delta R_3}{R_3} - \frac{\Delta R_4}{R_4} \right) \quad (2.121)$$

sendo  $V_s$  e  $V_e$  a tensão elétrica de saída e entrada respectivamente,  $\Delta R_i$  a variação de resistência elétrica devido a aplicação de carga e  $R_i$  a resistência antes da aplicação para cada extensômetro.

A tensão de saída passa por um amplificador para atingir níveis aceitáveis. Posteriormente os dados serão armazenados em uma placa de aquisição de dados. Inserindo o fator de sensibilidade dado pela Eq. 2.120 na Eq. 2.121, obtém-se:

$$\frac{V_s}{V_e} = \frac{S}{4} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_4) \quad (2.122)$$

sendo  $S$  a sensibilidade do extensômetro e  $\varepsilon_i$  a deformação medida em cada extensômetro.

A performance dos extensômetros é fortemente afetada pelas condições de ambiente do ensaio. Fatores como umidade, altas temperaturas e presença de campos magnéticos e elétricos podem ser destacados como principais. A utilização de extensômetros e equipamentos adequados para cada aplicação, amenizam os efeitos causados por estes fatores externos.

A aplicação do extensômetro no componente a ser ensaiado é uma tarefa que requer muito cuidado. Considera-se que toda a deformação que ocorre na peça é transferida para o extensômetro. Isto exige grande aderência das superfícies, ausência de sujeira e resíduos. Limpar minuciosamente as superfícies antes da colagem é uma recomendação

altamente relevante na utilização das técnicas de extensometria.

# Capítulo 3

## Determinação experimental de propriedades mecânicas viscoelásticas e simulação numérica

### 3.1 Objetivo experimental

Para a caracterização do material viscoelástico foram realizados ensaios de fluência sob tração utilizando corpos de prova padrão tipo IV conforme norma ASTM D 2990-01 [10], ensaios de fluência sob flexão em corpos de prova anelar não padronizado e ensaios dinâmicos padronizados conforme norma ASTM D 4065-01[11].

Os ensaios de fluência sob flexão anelar realizados surgem com a intenção de avaliar uma forma alternativa de caracterizar os materiais plásticos a partir de segmentos de tubo provenientes dos processos de moldagem por injeção e extrusão. Percorrendo este caminho torna-se possível avaliar a influência do processo de fabricação sobre as propriedades mecânicas do material. Além disso, obtém-se dados mais realísticos, através da realização de ensaios em corpos de prova que apresentam condições de processamento similares ao componente a ser projetado.

Utilizando técnicas de extensometria, busca-se experimentalmente as propriedades viscoelásticas do polivinil clorídico rígido (PVC), estabelecendo maneiras alternativas de mensurar a resposta ao longo do tempo além da apresentada por [19]. Obtém-se os dados de deformação e deslocamento em função do tempo para os ensaios de fluência, através da fixação de extensômetros nos corpos de prova, por transdutores de deslocamento eletrônicos e dispositivo mecânico de medição com relógio comparador.

Finalmente realizam-se ensaios dinâmicos em temperatura constante, com o objetivo de determinar a resposta do material viscoelástico quando submetido a cargas senoidais de frequência variável.

## 3.2 Ensaio de fluência

Os dados do ensaio de fluência são necessários para definição do módulo de fluência, assim como as constantes do modelo de um material sob carregamento de longa duração. O método consiste em medir a deformação ao longo do tempo, de um corpo de prova sujeito a uma carga constante, em uma determinada temperatura.

Indicações sobre o procedimento experimental da norma ASTM D 2990-01[10] são apresentadas a seguir. É importante frisar que a definição do corpo de prova para os ensaios de fluência sob tração está especificado na norma citada. Os ensaios de fluência sob flexão seguem as mesmas recomendações, no entanto, a geometria e as dimensões do corpo de prova não está normalizada. O termo fluência, usado no ensaio amparado pela norma, refere-se à soma das deformações elásticas e inelásticas que ocorrem ao longo do tempo. Esta ressalva é válida devido à definição científica de fluência ser frequentemente definida como a parte não elástica da deformação.

### 3.2.1 Aparato de ensaio

- O dispositivo de fixação do corpo de prova deve minimizar a excentricidade do carregamento.
- Recomenda-se que o dispositivo de fixação permita o alinhamento do corpo de prova antes da aplicação de carga. Nas Fig. 3.1 pode-se observar os dispositivos de fixação aplicados nos experimentos.
- O sistema de carregamento deve impedir oscilações maiores que  $\pm 1\%$  da carga aplicada no corpo de prova. O dispositivo de aplicação de carga é apresentado na Fig. 3.2.
- O dispositivo utilizado para medir os deslocamentos do corpo de prova sob carga, não deve influenciar o comportamento do mesmo, seja por efeito mecânico, físico ou químico.
- A precisão do dispositivo de medição de deslocamento deve ser de  $\pm 1\%$  do deslocamento a ser medido.
- O dispositivo de medição de deslocamento deve ser calibrado com um micrômetro de precisão ou outro padrão adequado, sob condições mais próximas as encontradas no ensaio. A Fig. 3.3 ilustra o dispositivo mecânico de medição de deslocamento empregado no trabalho.
- O dispositivo de medição de deslocamento deve ser firmemente fixado para que não ocorra escorregamento.

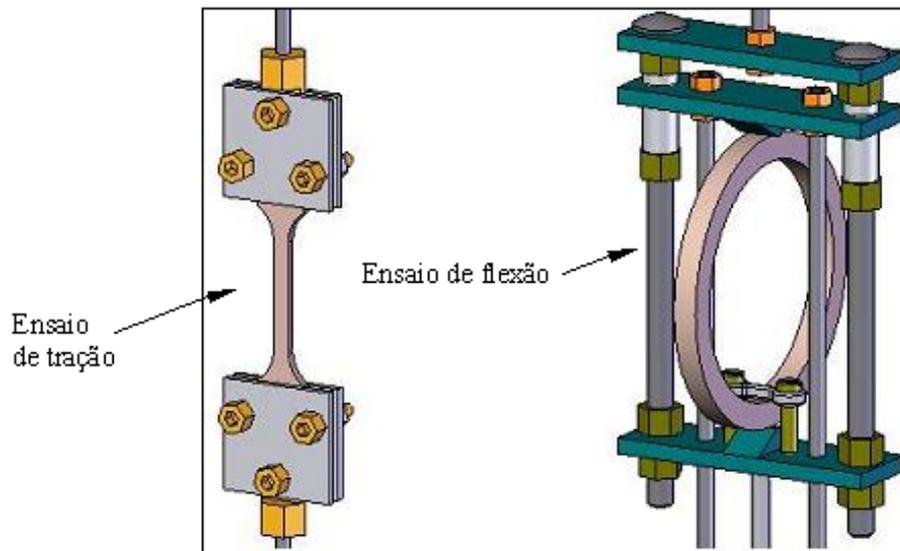


Figura 3.1: Dispositivos de fixação dos corpos de prova.

- O dispositivo de medição de tempo deve ter precisão de  $\pm 1\%$  do tempo transcorrido de cada medição de deformação.
- A temperatura do local onde o ensaio será realizado, especialmente próximo ao corpo de prova, deve ter sua oscilação mantida em  $\pm 2^\circ C$ .
- O dispositivo de medição de temperatura deve ser regularmente comparado a padrões e deve indicar a temperatura da área útil do corpo de prova.
- As medições de temperaturas devem ser feitas dentro de intervalos de tempo freqüentes, para assegurar a determinação precisa da temperatura média do ensaio.
- A composição do ambiente do ensaio deve ser mantida constante ao longo do tempo do ensaio.
- O local e o equipamento de ensaio deve assegurar isolamento do corpo de prova contra vibrações. Visualiza-se na Fig. 3.4 a máquina de ensaio utilizada.

### 3.2.2 Corpos de prova

- Os corpos de prova podem ser confeccionados através do processo de moldagem por injeção ou extrusão. Quando o objetivo do ensaio é obter dados para projeto, o método de fabricação do corpo de prova deve ser o mesmo da aplicação.
- A espessura e largura do corpo de prova devem ser medidas à temperatura ambiente, utilizando um micrômetro, em cinco ou mais pontos distintos do corpo de prova. Os corpos de prova são apresentados na Fig. 3.5.

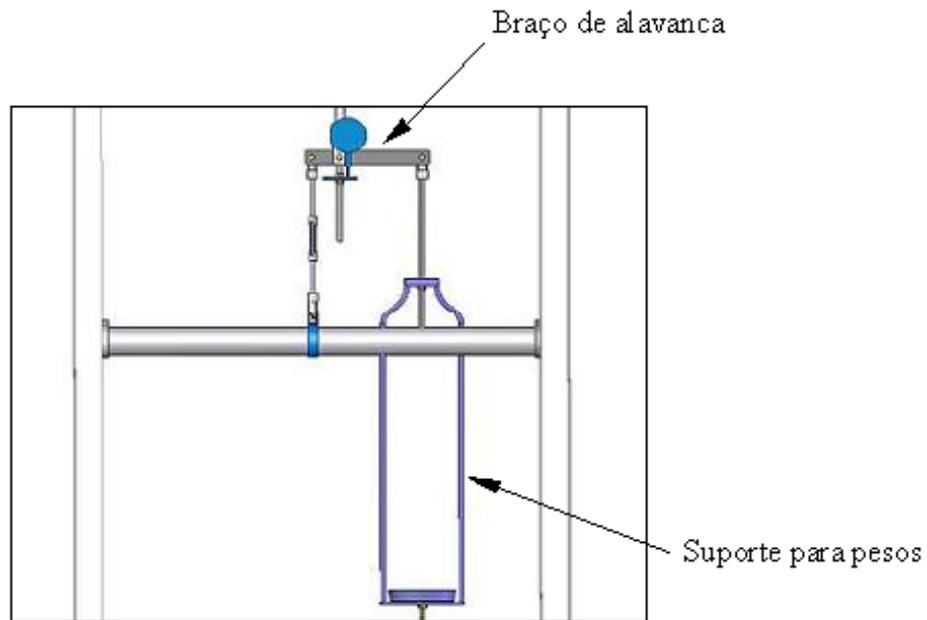


Figura 3.2: Dispositivo de aplicação de carga.

- No ensaio de fluência em uma única temperatura, é necessário um número mínimo de dois corpos de prova para cada nível de tensão, se quatro ou mais níveis de tensão são usados. Três corpos de prova são necessários para cada nível de tensão, se menos de quatro níveis de tensão são utilizados.

### 3.2.3 Condicionamento dos corpos de prova

- O corpo de prova deve ser pré-condicionado no ambiente do ensaio por um período mínimo de 48 horas antecedendo o início do ensaio.

### 3.2.4 Seleção das condições de ensaio

- Selecionar um número mínimo de três níveis de tensão para cada temperatura de interesse, para ensaio de materiais que apresentam pequena dependência da tensão, ou seja, plotando módulo de fluência para vários níveis de tensão, verifica-se uma sobreposição das curvas.
- Para materiais que são significativamente afetados pelas tensões, selecionar um número mínimo de cinco níveis de tensões [10], para cada temperatura de interesse.
- Para caracterizar o material, selecionar duas ou mais temperaturas, que cobrem a faixa de temperatura de utilização do material a ser ensaiado.

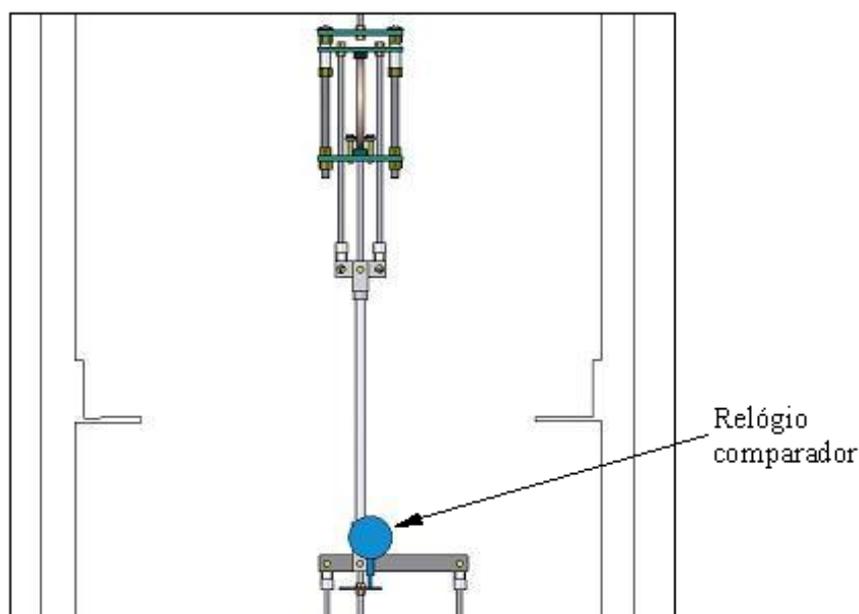


Figura 3.3: Dispositivo mecânico com relógio comparador para medição de deslocamento nos ensaios de fluência sob flexão.

- Não utilizar níveis de tensão que produzem falha do corpo de prova em menos de 1000 horas nos ensaios de fluência.

### 3.2.5 Procedimento para ensaio de fluência

- Montar o corpo de prova propriamente condicionado e medido no dispositivo de fixação.
- Instalar o dispositivo de medição de deslocamento.
- Aplicar toda a carga rápida e uniformemente no corpo de prova, preferencialmente em um período de tempo de 1 a 5 segundos.
- A medição de deslocamento do corpo de prova deve ser feita de acordo com a seguinte programação: 1, 6, 12 e 30 minutos; 1, 2, 5, 20, 100, 200, 500, 700 e 1000 h. Para ensaios de fluência com duração superior a 1000 h, medir o deslocamento mensalmente.
- Descontinuidades encontradas na deformação de fluência em relação ao tempo, torna necessário realizar medições mais frequentes que as recomendadas no item anterior.
- Medições de temperatura e umidade do ambiente devem ser feitas de acordo com a mesma programação das medições de deslocamento no corpo de prova.

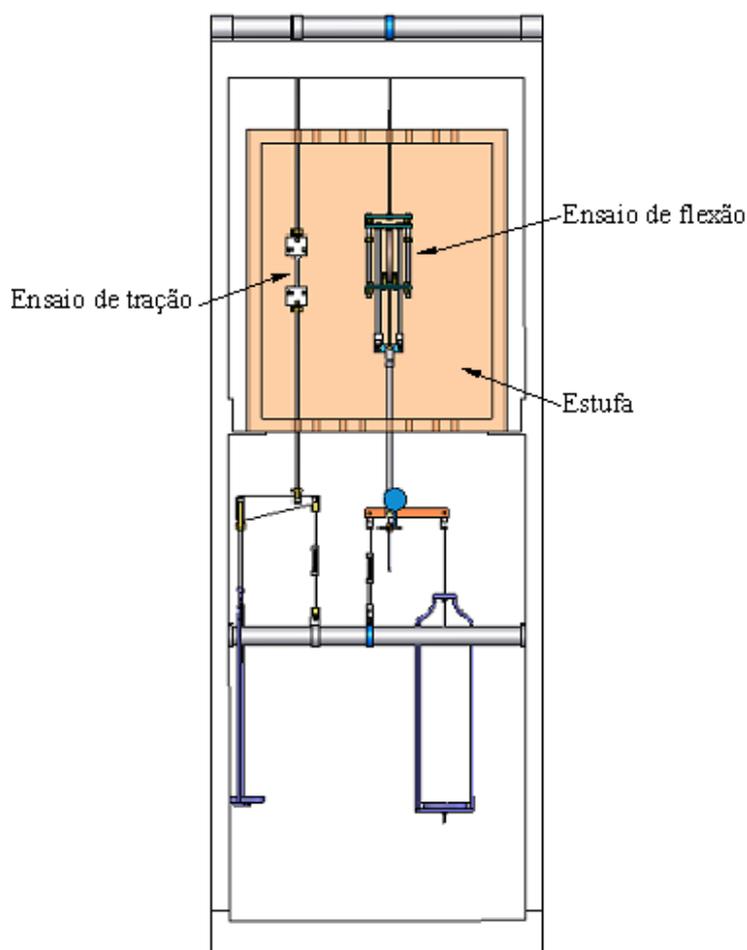


Figura 3.4: Máquina de ensaio.

- Depois de completado o período do ensaio sem ruptura, remover a carga rápida e uniformemente.
- Havendo necessidade, medições de recuperação de fluência podem ser iniciadas, de acordo com a mesma programação das medições de deslocamentos, durante a aplicação de carregamento.

### 3.3 Ensaio dinâmico sob flexão

Um corpo de prova de seção transversal retangular com extremidades apoiadas, é submetido a carregamento senoidal localizado em sua linha média através de um oscilador mecânico conforme Fig. 3.6 e Apêndice A. Mantendo a temperatura constante, mede-se força e deslocamento variando a frequência de 1 a 90 Hz. Desta forma, obtém-se o módulo dinâmico de armazenamento e o módulo dinâmico de dissipação do material em função da frequência descritos no item 2.4.1. Recomendações relevantes sobre o procedimento experimental conforme norma ASTM D 5023-02 [12] serão apresentadas a seguir.

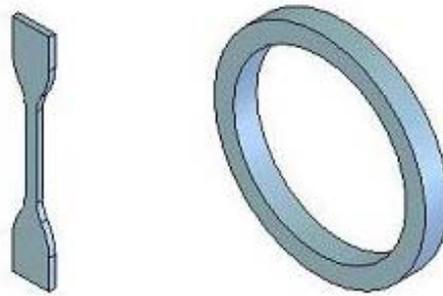


Figura 3.5: Corpos de prova para ensaio de fluência.

### 3.3.1 Aparato de ensaio

- A função do dispositivo de ensaio é submeter um corpo de prova de material polimérico a um carregamento dinâmico, fazendo com que ele atue como um elemento elástico e dissipativo.
- Os pontos de apoio para aplicação de carga devem apresentar superfícies cilíndricas, com raio suficiente para evitar indentação ou falha devido a concentração de tensão.
- A precisão dos dispositivos para determinar força, deslocamento e frequência devem ser  $\pm 1\%$ .

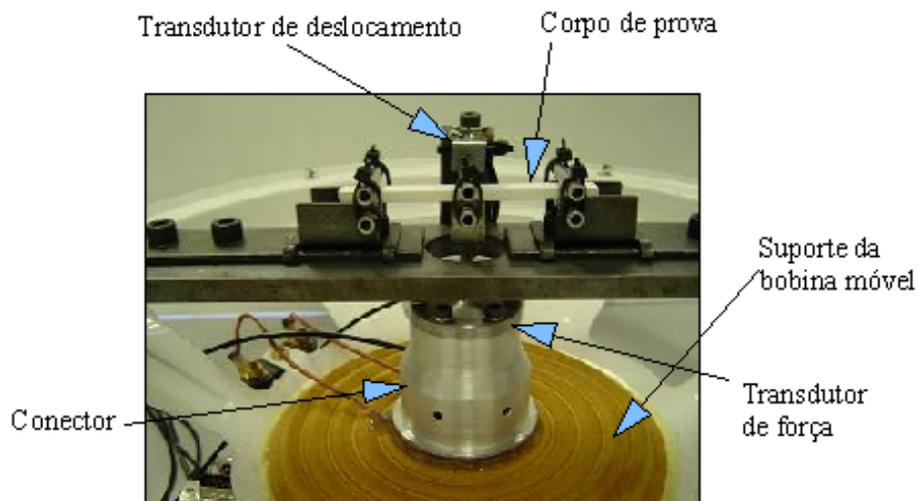


Figura 3.6: Oscilador mecânico para ensaio dinâmico

### 3.3.2 Corpos de prova

- Os corpos de prova podem ser cortados de chapas ou moldado nas dimensões desejadas. Tipicamente a distância entre os apoios deve ser 16 (+4 ou -2) vezes a

espessura da viga. Corpos de prova de dimensões diferentes podem ser utilizados, mas devem ser claramente especificados no relatório do ensaio.

### 3.3.3 Condicionamento dos corpos de prova

- Os corpos de prova devem ser condicionados na temperatura de  $23\pm 2^{\circ}C$  e  $50\pm 5\%$  de umidade relativa por no mínimo 40 horas.

### 3.3.4 Procedimento para ensaio dinâmico

- Para cada medição utilizar corpo de prova não testado. Medir a espessura e largura do corpo de prova com precisão de  $\pm 0,03\text{ mm}$ .
- A máxima amplitude de deformação deve estar dentro do limite onde o material apresentar comportamento viscoelástico linear. Deformações menores que 1% são recomendadas.
- Centrar o corpo de prova nos suportes, fazendo com que seu eixo axial fique perpendicular à linha de aplicação de carga.
- Selecionar as frequências desejadas, e medir força e deslocamento para cada frequência.
- Dois corpos de prova devem ser ensaiados, e os resultados médios relatados.

## 3.4 Ensaaios realizados e simulação numérica

Para caracterização completa do material, ensaios de fluência sob flexão e tração foram realizados em diferentes temperaturas e níveis de carregamento. Observa-se pela Fig. 3.7, que nos ensaios de fluência de flexão e tração para níveis de carga e temperatura elevadas ocorreu a ruptura do corpo de prova. Este fato pode ser ocasionado por regiões de concentrações de tensão resultantes do processo de fabricação dos corpos de prova. Diminuindo os níveis de tensão obteve-se êxito no tempo de duração dos ensaios.

Adicionalmente submeteu-se o mesmo material utilizado nos ensaios de fluência a oscilações senoidais de carregamento, determinando suas propriedades viscoelásticas em função da frequência.

### 3.4.1 Ensaaios de fluência sob flexão e tração

Mensurar as deformações e ou deslocamentos em função do tempo é a principal característica do ensaio de fluência. Utiliza-se extensômetros colados diretamente no corpo

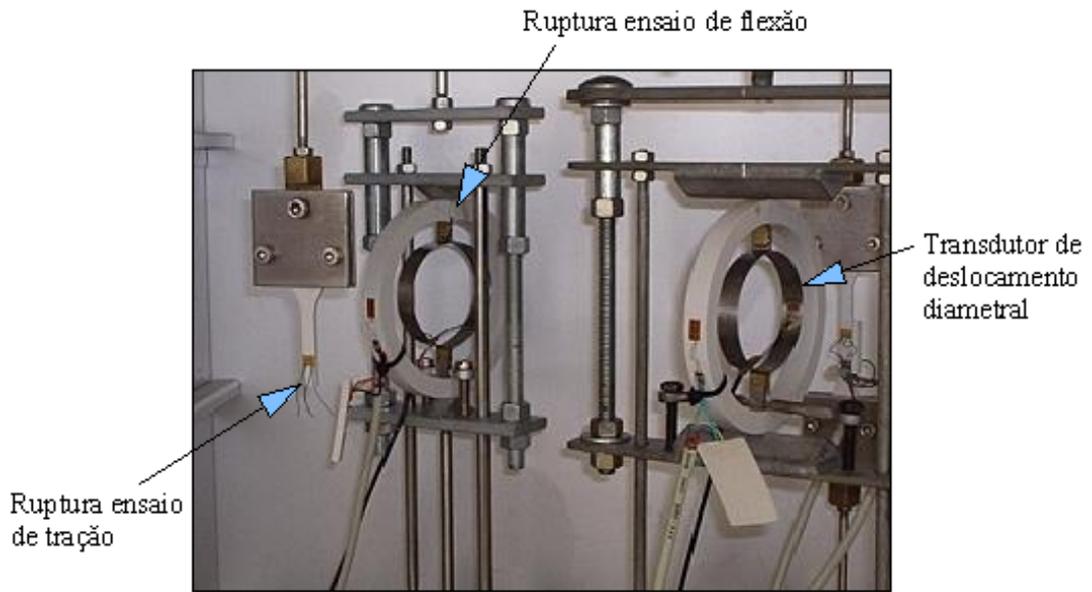


Figura 3.7: Dispositivos experimentais para ensaio de fluência.

de prova, dispositivo mecânico de medição com relógio comparador e transdutor de deslocamento diametral fabricado e calibrado em laboratório. Este transdutor foi construído com chapas de aço inox com espessura de 0,5 mm e largura de 10 mm, colando dois extensômetros tipo roseta 90° em ponte completa na posição mais solicitada de seu diâmetro interno. A calibração foi realizada nas dependências da Fundação Certi utilizando a coluna de calibração com parafuso de ajuste fino e o relógio comparador digital com resolução de  $1 \times 10^{-4}$  mm devidamente fixado e centralizado conforme Fig. 3.8. Incrementos de deslocamentos de 0,5 mm foram aplicados dentro da faixa de medição de 0 a 6 mm, obtendo o sinal elétrico da relação  $V_s/V_e$  em mV/V, Eq. 2.122, devido à variação do deslocamento. A Fig. 3.9 refere-se ao ajuste dos dados experimentais de calibração.

Os dados dos ensaios de fluência sob tração e flexão foram ajustados ao modelo de Maxwell generalizado,  $n = 5$ . Este modelo corresponde a uma mola em paralelo a 5 elementos de Maxwell ilustrado na Fig. 2.18b. O modelo matemático para o módulo de fluência que será ajustado aos dados experimentais é representado por:

$$J(t) = B_o - B_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}} - B_2 e^{-\frac{t}{\tau_2}} - B_3 e^{-\frac{t}{\tau_3}} - B_4 e^{-\frac{t}{\tau_4}} - B_5 e^{-\frac{t}{\tau_5}} \quad (3.1)$$

$B_o, B_1, B_2, B_3, B_4$  e  $B_5$  são as constantes do módulo de fluência.

$\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4$  e  $\tau_5$  são os tempos de retardo.

A determinação de  $J(t)$  a partir dos dados experimentais de deformação dos ensaios de fluência sob tração e flexão é efetuada através da Eq. 3.2:

$$J(t) = \frac{\varepsilon(t)}{\sigma_0} \quad (3.2)$$

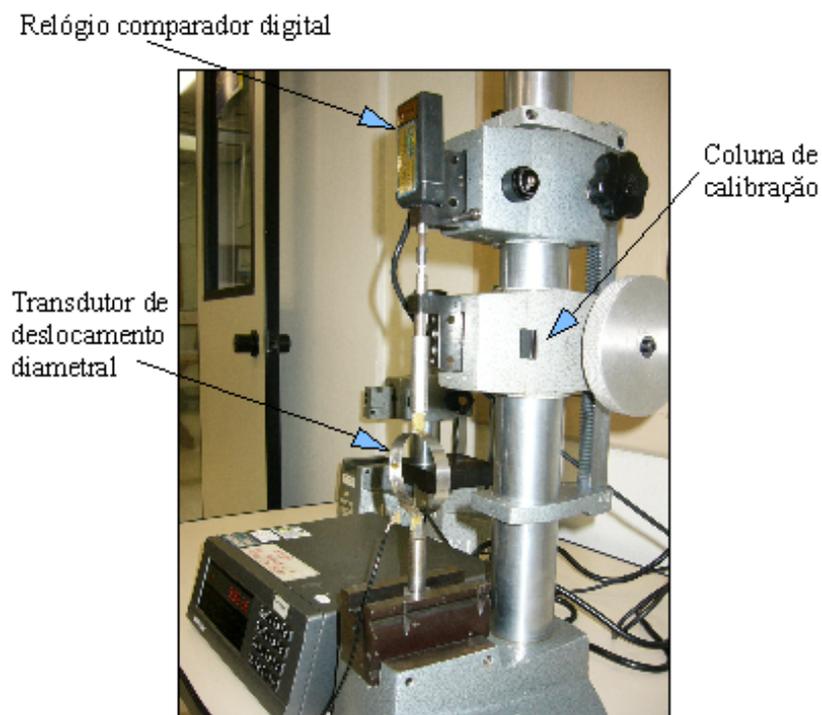


Figura 3.8: Calibração do transdutor de deslocamento diametral.

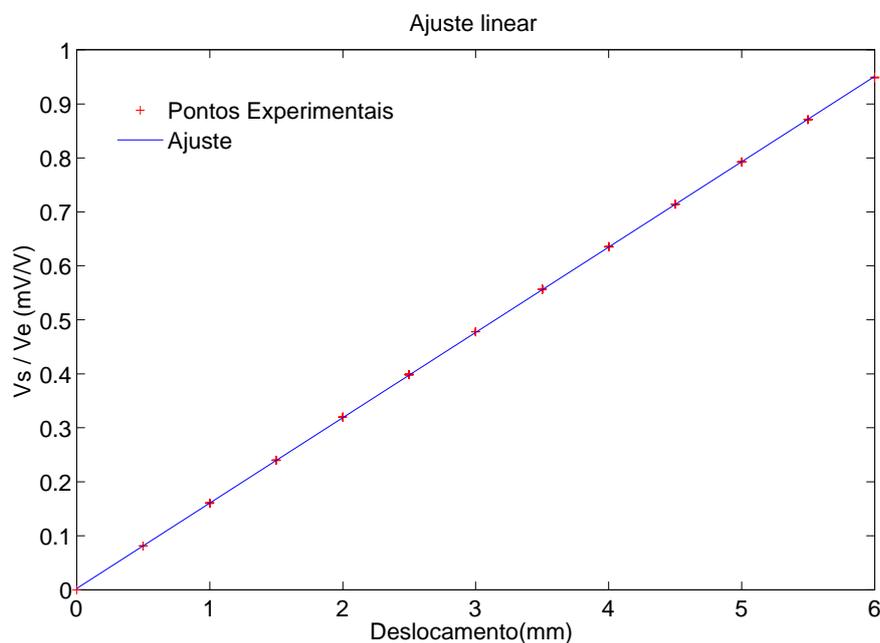


Figura 3.9: Ajuste linear a partir de dados de calibração do transdutor de deslocamento diametral.

$\varepsilon(t)$  é a deformação dependente do tempo medida em ambos os ensaios e  $\sigma_0$  o nível de tensão aplicada aos corpos de prova. Para os ensaios de fluência sob tração,  $\sigma_0$  tração =  $P/A$ , e para os ensaios de fluência sob flexão a tensão  $\sigma_0$  é calculada na posição  $x = r_e$ , e

$y = 0$  conforme Fig. 3.15, através da expressão [23]:

$$\sigma_{0 \text{ flexão}} = \frac{M(r_e - R)}{Acr_e} - \frac{P}{2A} \quad (3.3)$$

$$\bar{r} = \frac{r_i + r_e}{2}$$

$$M = \frac{F\bar{r}}{2} \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) \text{ conforme [22].}$$

$$R = \frac{h}{\ln\left(\frac{r_e}{r_i}\right)}$$

$$c = \bar{r} - R$$

$P$  : força aplicada

$A = e.L$  conforme Fig. 3.11.

Pela Eq. 3.1 verifica-se que:

$$J(0) = B_o - B_1 - B_2 - B_3 - B_4 - B_5 \quad (3.4)$$

Determinando  $J(0)$  através dos dados experimentais por  $J(0) = \frac{\varepsilon(0)}{\sigma_0}$ , pode-se definir  $B_o$  como:

$$B_o = J(0) + B_1 + B_2 + B_3 + B_4 + B_5 \quad (3.5)$$

Desta forma, o número de constantes a serem ajustadas é reduzido para dez valores. No procedimento de ajuste os tempos de retardo  $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4$  e  $\tau_5$  foram fixados dentro de intervalos de tempo com base no tempo total do ensaio. As constantes de fluência  $B_1, B_2, B_3, B_4$  e  $B_5$  foram ajustadas estabelecendo os limites superior e inferior do módulo de fluência apenas, e adotando como valor inicial o valor referente a  $\frac{J(t_f) - J(0)}{n}$ ,  $n$  é o número de elementos de Maxwell em paralelo ao elemento mola para o modelo de Maxwell generalizado [20]. O ajuste é feito mediante a minimização quadrática do erro entre os dados experimentais,  $y_{\text{exp}}(t_i)$ , e os valores da função a ser ajustada para cada tempo de medição,  $f(t_i)$ , de forma que:

$$Erro = \sum_{i=1}^f (f(t_i) - y_{\text{experimental}}(t_i))^2 \quad (3.6)$$

Assim os algoritmos de minimização frequentemente solicitam que sejam fornecidos fornecidos valores mínimos, iniciais e máximos para as variáveis a serem identificadas. Para exemplificar os valores atribuídos a estas variáveis cita-se o seguinte ensaio:

Tempo total do ensaio =  $2,9.10^6$  s

Limites inferiores para os tempos de retardo:

[  $\tau_1 = 1$ s,  $\tau_2 = 1.10^3$ s,  $\tau_3 = 1.10^4$ s,  $\tau_4 = 1.10^5$ s,  $\tau_5 = 1.10^6$ s];

Valores iniciais para os tempos de retardo:

[ $\tau_1 = 50$ s,  $\tau_2 = 5.10^3$ s,  $\tau_3 = 5.10^4$ s,  $\tau_4 = 5.10^5$ s,  $\tau_5 = 2.10^6$ s];

Limites superiores para os tempos de retardo:

$$[\tau_1 = 1.10^3 s, \tau_2 = 1.10^4 s, \tau_3 = 1.10^5 s, \tau_4 = 1.10^6 s, \tau_5 = 3,5.10^6 s];$$

Limite inferior para as constantes do módulo de fluência:

$$B_1, B_2, B_3, B_4 \text{ e } B_5 = J(0) \text{ (valor do módulo de fluência no tempo inicial do ensaio)}$$

Valores iniciais para as constantes do módulo de fluência:

$$B_1, B_2, B_3, B_4 \text{ e } B_5 = \frac{J(t_f) - J(0)}{5}$$

Limite superior para as constantes do módulo de fluência:

$$B_1, B_2, B_3, B_4 \text{ e } B_5 = J(t_f) \text{ (valor do módulo de fluência no tempo final do ensaio)}$$

Estabelecida as condições importantes do processo de ajuste, apresenta-se a seguir os resultados experimentais obtidos para os ensaios de fluência sob tração e flexão. Nestes ensaios extensômetros tipo roseta dupla 90° foram fixados nos corpos de prova em configuração de meia ponte com compensação de temperatura, permitindo mensurar as deformações longitudinais e transversais separadamente conforme Fig. 3.10. Os extensômetros ativos, A e C, medem a deformação mecânica e a deformação devido a variação de temperatura no decorrer do ensaio, enquanto nos extensômetros compensadores de temperatura, B e D, apenas a deformação ocasionada pela variação de temperatura. Pela Eq. 3.7, verifica-se que as deformações devido à oscilação de temperatura são anuladas para cada extensômetro ativo. Consequentemente adquire-se somente as deformações mecânicas necessárias para caracterização do material. Este procedimento foi adotado para todos os ensaios de fluência sob tração e flexão devido ao alto coeficiente de dilatação dos plásticos.

$$\frac{V_s}{V_e} = \frac{S}{4}(\varepsilon_A - \varepsilon_B) \text{ e } \frac{V_s}{V_e} = \frac{S}{4}(\varepsilon_C - \varepsilon_D) \quad (3.7)$$

#### Dados do ensaio na temperatura de 40°C

Tabela 3.1: Extensômetros utilizados para ensaio de fluência em PVC a 40°C.

Excel PA-06-062-TG-350 Lote 050419
Fator gage: 2,11 ± 1%
Resistência: 350 Ω ± 0,3
Configuração de ponte: 1/2 ponte com compensação de temperatura

Tabela 3.2: Nível de carregamento para ensaio de fluência em PVC a 40°C.

Corpo de prova de tração: 240N
Corpo de prova anelar: 240 N

Os resultados do ajuste fornece as constantes do modelo de Maxwell generalizado para o ensaio de fluência sob tração a 40°C :

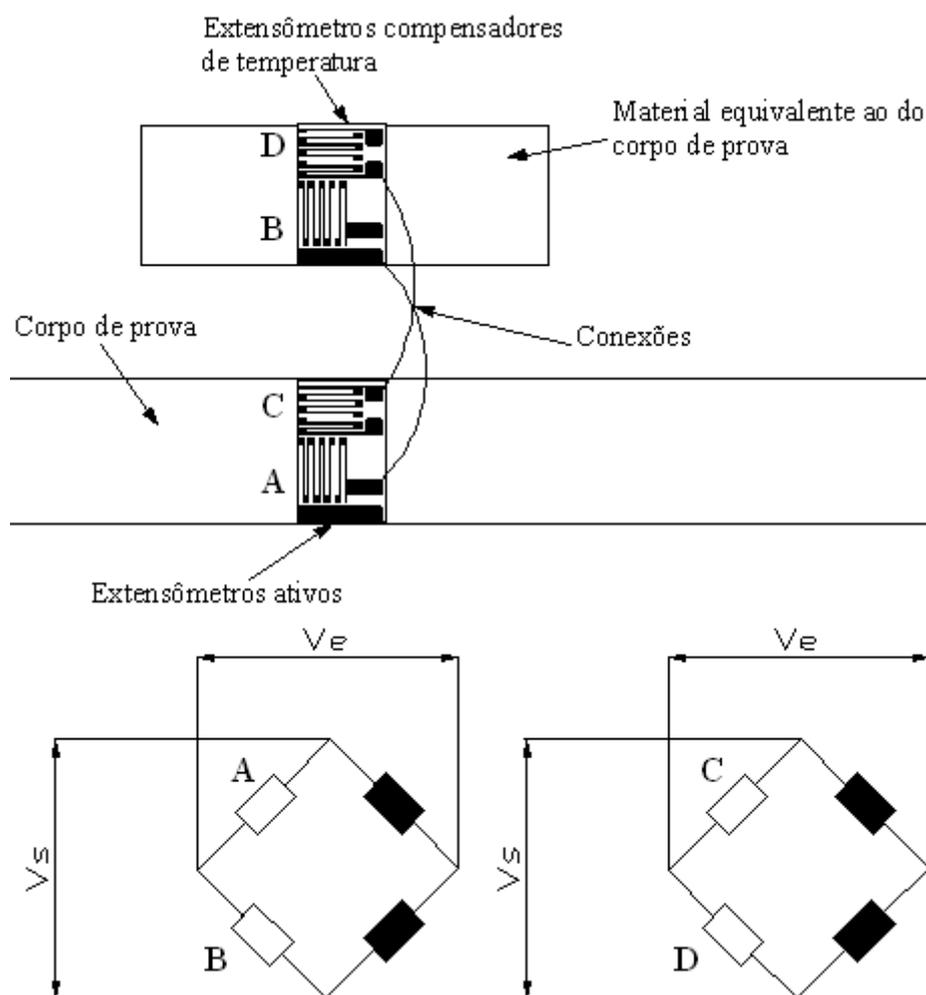


Figura 3.10: Configuração em meia ponte com compensação de temperatura utilizada nos ensaios de fluência sob tração e flexão.

Tabela 3.3: Dimensões dos corpos de prova para ensaio de fluência sob tração em PVC a 40°C conforme Fig. 3.11.

	$a(mm)$	$b(mm)$
Corpo de prova de tração	4,043	6,095

Tabela 3.4: Dimensões dos corpos de prova para ensaio de fluência sob flexão em PVC a 40°C conforme Fig. 3.11.

	$D_i(mm)$	$e(mm)$	$L(mm)$
Corpo de prova anelar	90,100	9,867	9,998

$$J_{tração}(t) = 7,721 \cdot 10^{-10} - 1,393 \cdot 10^{-11} e^{\frac{-t}{2,538 \cdot 10^2}} - 3,746 \cdot 10^{-11} e^{\frac{-t}{5,068 \cdot 10^3}} - 9,9 \cdot 10^{-11} e^{\frac{-t}{6,387 \cdot 10^4}} - 1,361 \cdot 10^{-10} e^{\frac{-t}{5,515 \cdot 10^5}} - 9,706 \cdot 10^{-11} e^{\frac{-t}{1,502 \cdot 10^6}} \quad (3.8)$$

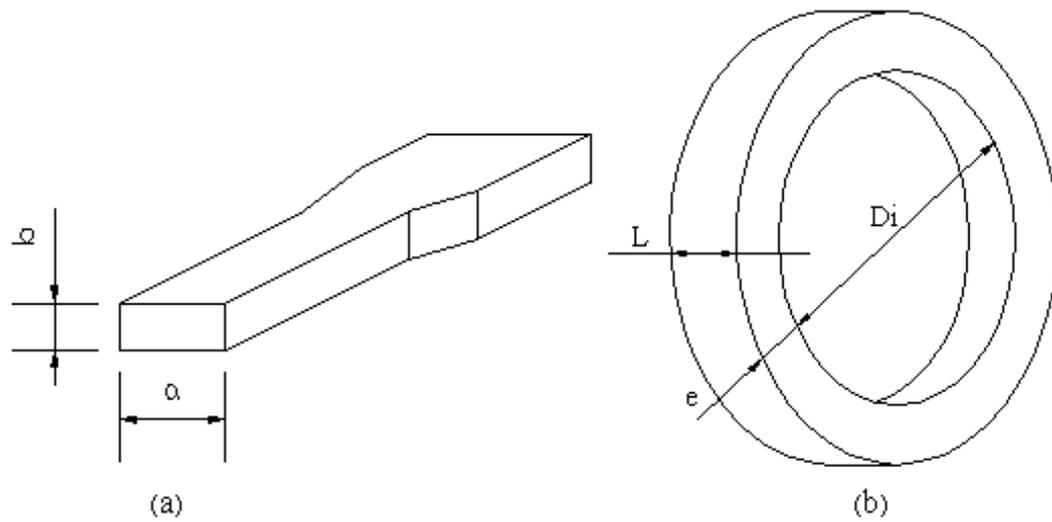


Figura 3.11: Dimensões dos corpos de prova para ensaio de fluência sob tração (a) e flexão (b).

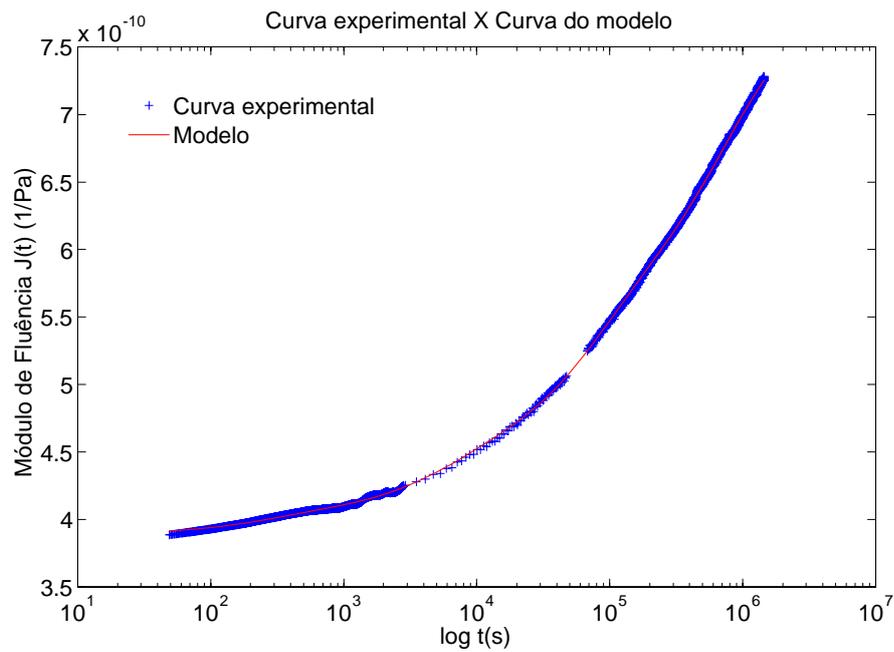


Figura 3.12: Ajuste dos dados experimentais do ensaio de fluência sob tração em PVC a  $40^\circ\text{C}$  ao modelo de Maxwell generalizado com 11 parâmetros,  $n = 5$ .

Os resultados do ajuste fornece as constantes do modelo de Maxwell generalizado para o ensaio de fluência sob flexão a  $40^\circ\text{C}$ :

$$\begin{aligned}
 J_{flexão}(t) = & 6,356 \cdot 10^{-10} - 7,946 \cdot 10^{-11} e^{\frac{-t}{3,229 \cdot 10^2}} - 1,610 \cdot 10^{-11} e^{\frac{-t}{5,379 \cdot 10^3}} - \\
 & 7,516 \cdot 10^{-11} e^{\frac{-t}{6,539 \cdot 10^4}} - 7,321 \cdot 10^{-11} e^{\frac{-t}{5,505 \cdot 10^5}} - 1,157 \cdot 10^{-10} e^{\frac{-t}{1,502 \cdot 10^6}} \quad (3.9)
 \end{aligned}$$

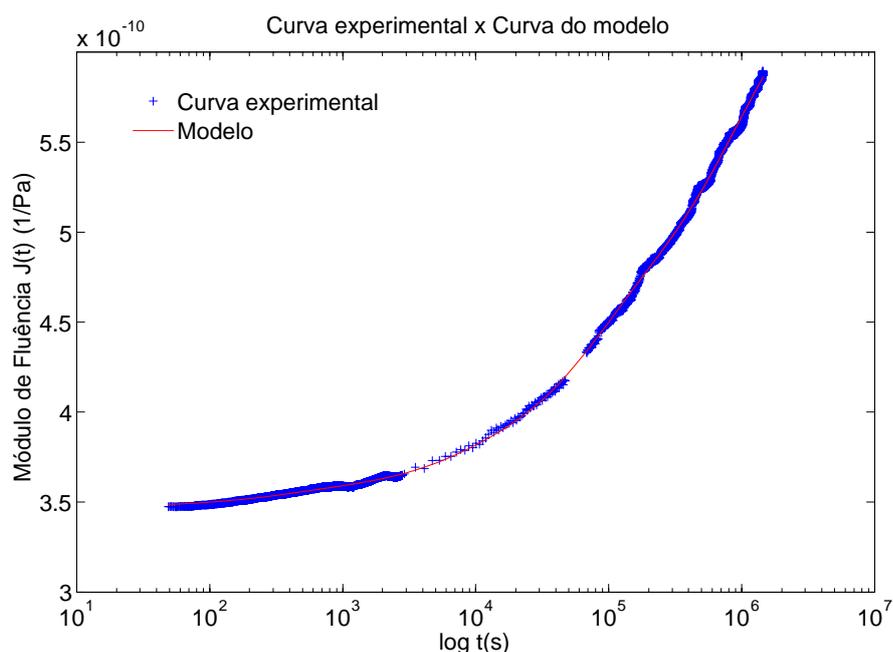


Figura 3.13: Ajuste dos dados experimentais do ensaio de fluência sob flexão em PVC a 40°C ao modelo de Maxwell generalizado com 11 parâmetros,  $n = 5$ .

#### Dados do ensaio na temperatura de 50°C

Tabela 3.5: Extensômetros utilizados para ensaio de fluência em PVC a 50°C.

Excel PA-06-062-TG-350 Lote 050419
Fator gage: 2,11 ± 1%
Resistência: 350 Ω ± 0,3
Configuração de ponte: 1/2 ponte com compensação de temperatura

Tabela 3.6: Nível de carregamento para ensaio de fluência em PVC a 50°C.

Corpo de prova de tração: 240N
Corpo de prova anelar: 202 N

Tabela 3.7: Dimensões dos corpos de prova para ensaio de fluência sob tração em PVC a 50°C conforme Fig. 3.11.

	$a(mm)$	$b(mm)$
Corpo de prova de tração	4,013	6,147

Os resultados do ajuste fornece as constantes do modelo de Maxwell generalizado para o ensaio de fluência sob tração a 50°C:

Tabela 3.8: Dimensões dos corpos de prova para ensaio de fluência sob flexão em PVC a 50°C conforme Fig. 3.11.

	$Di(mm)$	$e(mm)$	$L(mm)$
Corpo de prova anelar	90, 100	9, 900	10, 044

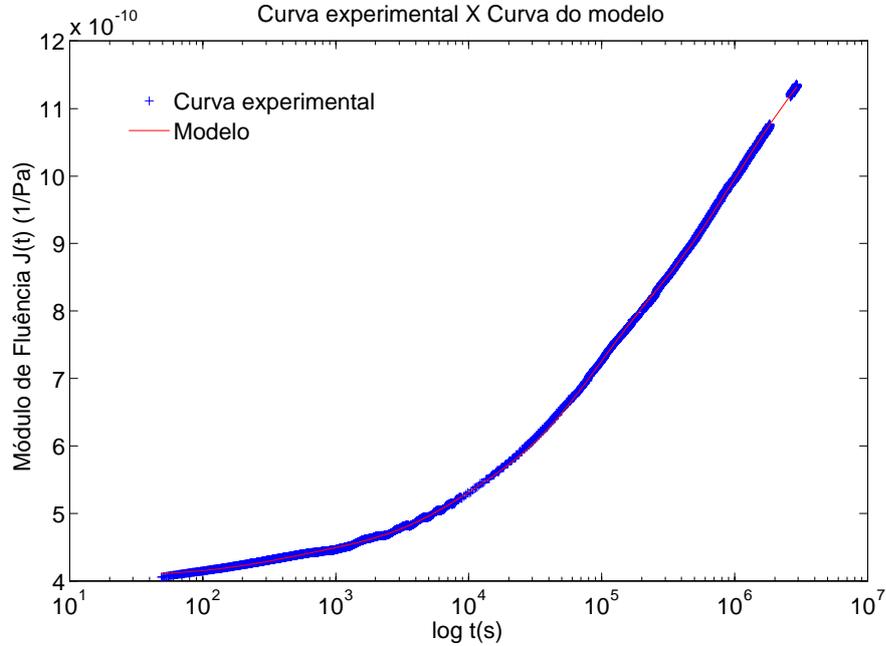


Figura 3.14: Ajuste dos dados experimentais do ensaio de fluência sob tração em PVC a 50°C ao modelo de Maxwell generalizado com 11 parâmetros,  $n = 5$ .

$$J(t_{tração}) = 1,206 \cdot 10^{-9} - 2,875 \cdot 10^{-11} e^{\frac{-t}{3,092 \cdot 10^2}} - 7,215 \cdot 10^{-11} e^{\frac{-t}{5,483 \cdot 10^3}} - 2,197 \cdot 10^{-10} e^{\frac{-t}{6,572 \cdot 10^4}} - 1,668 \cdot 10^{-10} e^{\frac{-t}{4,608 \cdot 10^5}} - 3,126 \cdot 10^{-10} e^{\frac{-t}{2,026 \cdot 10^6}} \quad (3.10)$$

No ensaio de fluência sob flexão a 50°C, a redução de 40% no nível de carregamento não impediu a ruptura prematura do corpo de prova, tornando ineficiente a aplicação do princípio de equivalência tempo e temperatura.

Além dos dados de deformação serem obtidos através da aplicação direta de extensômetro no corpo de prova, para os ensaios de flexão foi utilizado o transdutor, ilustrado na Fig. 3.8 e descrito no item 3.4.1, que juntamente com o dispositivo mecânico de medição com relógio comparador, Fig. 3.3, permite obter os dados de deslocamento diametral vertical do anel no decorrer do ensaio. Estes dados serão inseridos na solução analítica do problema de compressão diametral do anel, Eq. 3.11 e Fig. 3.15, permitindo obter os dados de deformação necessários para a solução viscoelástica [21]:

$$\varepsilon_o = \frac{(1,91 - 3 \cos \theta) \Delta y h}{1,79 r_e^2} \quad (3.11)$$

$\varepsilon_o$  : deformação no raio externo na posição indicada pelo ângulo  $\theta$ .

$\Delta y$  : deslocamento diametral vertical do anel.

$h$  : espessura radial do anel.

$r_e$  : raio externo do anel.

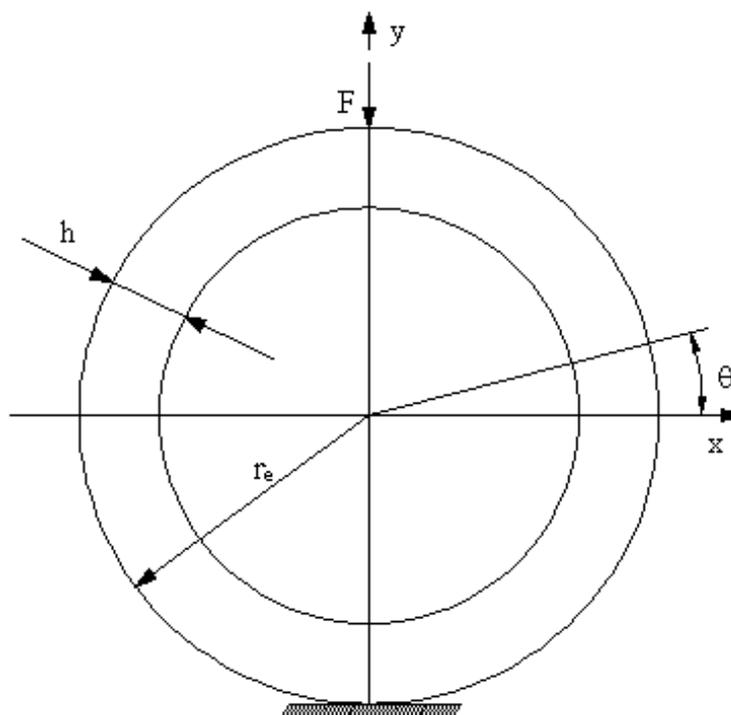


Figura 3.15: Anel sob compressão diametral.

A utilização da solução analítica apresentada na Eq. 3.11, permite apresentar os dados de deformação obtidos no ensaios de flexão mensurando o deslocamento vertical do anel com o transdutor de deslocamento e o dispositivo mecânico com relógio comparador. Vale lembrar que estes dados de deformação do ensaio de flexão foram obtidos também com a utilização de extensômetros fixados no corpo de prova. Desta forma para cada ensaio de fluência sob flexão são apresentados os resultados das três medições realizadas.

#### Dados do ensaio na temperatura de 40°C

Tabela 3.9: Extensômetros utilizados para ensaio de fluência sob flexão em PVC a 40°C.

Excel PA-06-062-TG-350 Lote 050419
Fator gage: 2,11 ±1%
Resistência: 350 Ω ± 0,3
Configuração de ponte: 1/2 ponte com compensação de temperatura

Tabela 3.10: Nível de carregamento para ensaio de fluência sob flexão em PVC a 40°C.

Corpo de prova para flexão: 202 N
-----------------------------------

Tabela 3.11: Dimensões dos corpos de prova para ensaio de fluência sob flexão em PVC a 40°C conforme Fig. 3.11.

Dimensões dos corpos de prova	$D_i(mm)$	$e(mm)$	$L(mm)$
Corpo de prova de flexão	90, 100	9, 867	9, 998

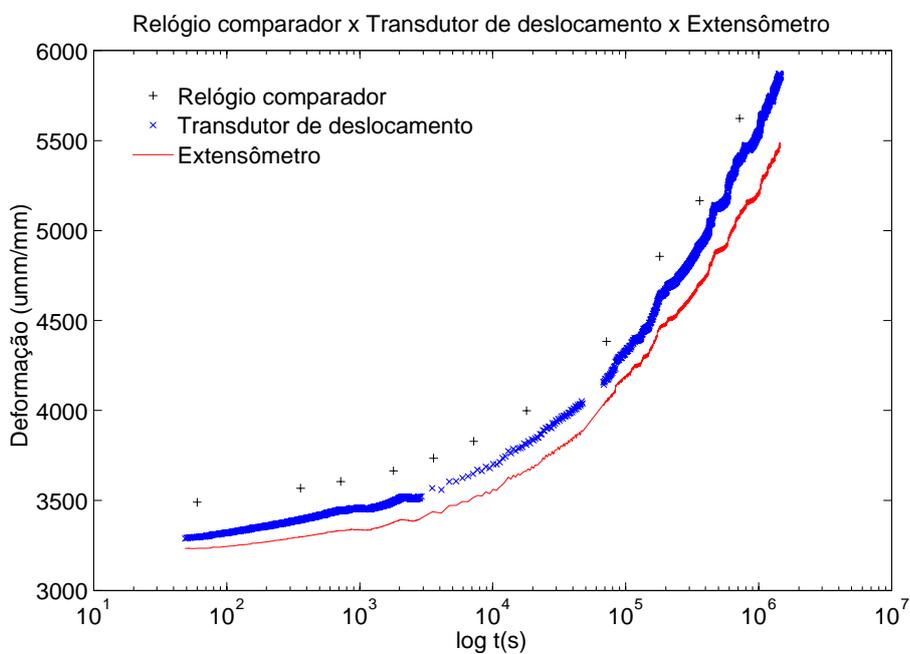


Figura 3.16: Resultados de deformação obtidos no ensaio de fluência sob flexão em PVC a 40°C.

**Dados do ensaio na temperatura de 50°C**

Tabela 3.12: Extensômetros utilizados para ensaio de fluência sob flexão em PVC a 50°C.

Excel PA-06-062-TG-350 Lote 050419
Fator gage: 2,11 ±1%
Resistência: 350 Ω ± 0,3
Configuração de ponte: 1/2 ponte com compensação de temperatura

Tabela 3.13: Nível de carregamento para ensaio de fluência sob flexão em PVC a 50°C.

Corpo de prova para flexão: 202 N
-----------------------------------

Tabela 3.14: Dimensões dos corpos de prova para ensaio de fluência sob flexão em PVC a 50°C conforme Fig. 3.11.

	$D_i(mm)$	$e(mm)$	$L(mm)$
Corpo de prova de flexão	90,100	9,900	10,044

**Equivalência tempo e temperatura**

Os dados experimentais obtidos através dos ensaios de fluência em temperatura distintas, permitem através do conceito de equivalência entre tempo e temperatura, extrapolar os dados experimentais obtidos na temperatura adotada como referência, 40°C. Pode-se verificar conforme a Fig. 3.18 os dados experimentais obtidos nos ensaios de fluência sob tração para duas temperaturas distintas 40°C e 50°C, com mesmo nível de carregamento. Através do ajuste dos dados experimentais para cada temperatura, determina-se  $J_{T_1}$  e  $J_{T_{ref}}$ . Seguindo o procedimento descrito no item 2.8.1 é possível calcular o fator de translação  $a(T)$ , implicando na obtenção de dados experimentais na temperatura de referência 40°C para um tempo maior de ensaio, conforme observa-se nas Fig. 3.18 e 3.19.

A minimização da Eq. 2.93, fornece os valores das constantes  $C_1$  e  $C_2$  da Eq. 2.90. Através dos dados experimentais obtidos nas temperaturas de 40°C e 50°C, os valores das constantes determinados foram:

$$C_1 = 9,36, \quad C_2 = 90,367 \text{ K}$$

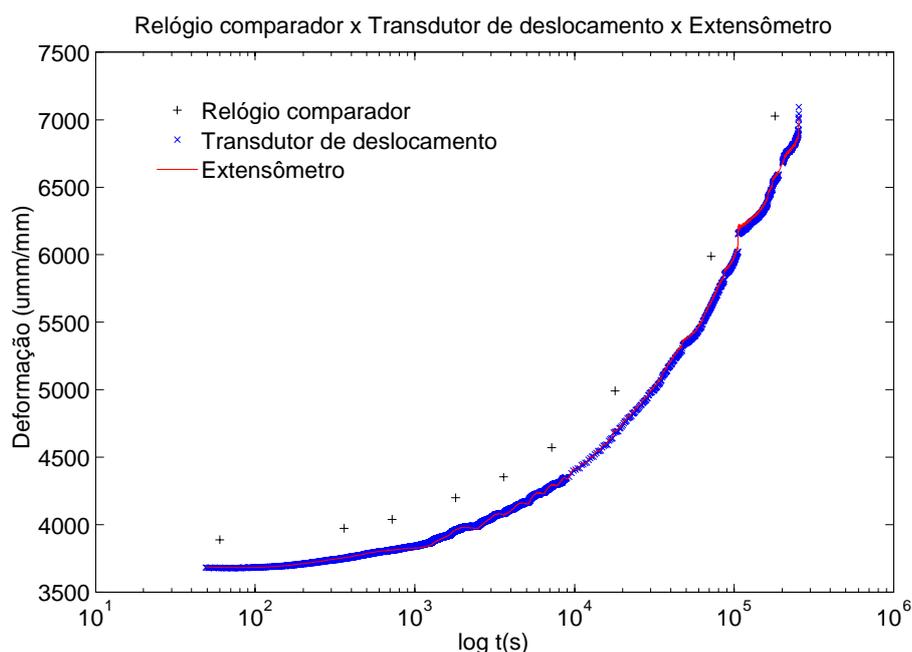


Figura 3.17: Resultados de deformação obtidos no ensaio de fluência sob flexão em PVC a 50°C.

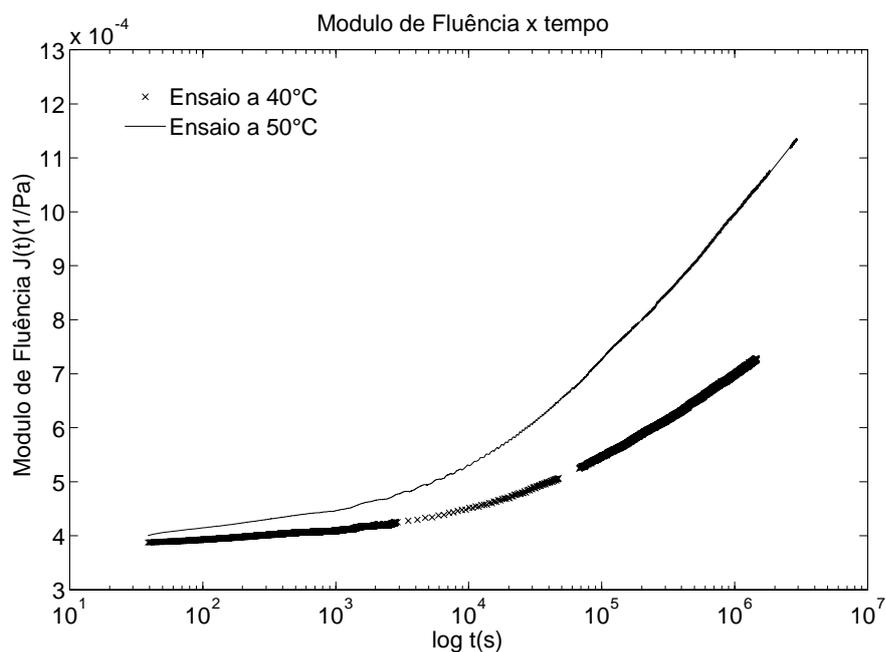


Figura 3.18: Módulo de fluência obtido em ensaio de tração em PVC a 40°C e 50°C.

### 3.4.2 Simulação numérica

A avaliação da integridade estrutural através do método de elementos finitos é composta de três etapas principais: o pré processamento, cálculo da solução e pós processamento. Da mesma forma, estas etapas envolvem a criação do modelo, aplicação do carregamento, cálculo da solução e obtenção dos resultados. Utilizou-se o software Ansys

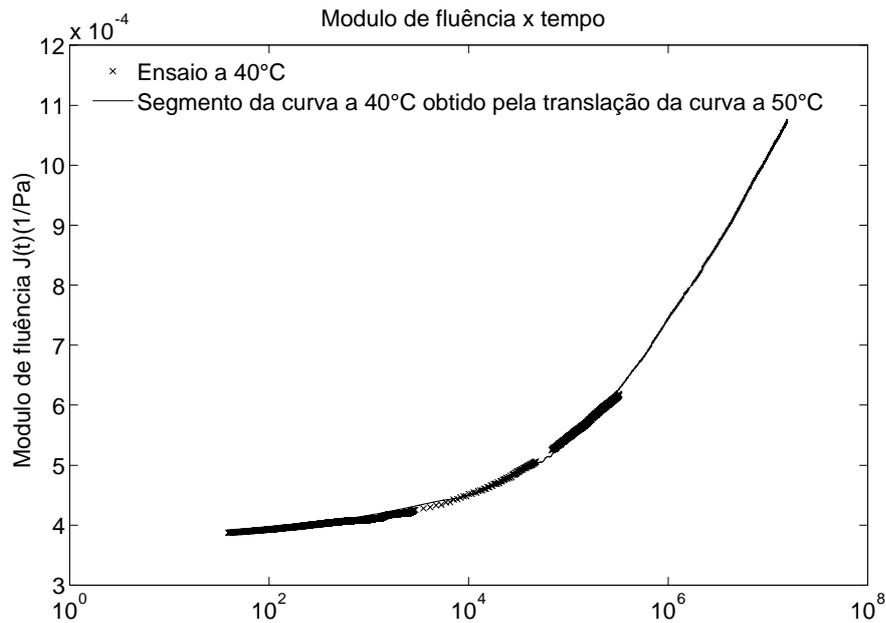


Figura 3.19: Extrapolação do módulo de fluência na temperatura de referência, 40°C.

para a implementação do comportamento viscoelástico, conforme descrito no item 3.4.3.

A definição do tipo de análise, os incrementos de tempo e a aplicação das condições de contorno de carregamento são requisitos essenciais para obter resultados de deslocamentos, tensões, deformações e forças de reação coerentes.

Os ensaios de tração e flexão realizados foram simulados numericamente para validar a implementação do modelo. Aplicando as mesmas condições de contorno do ensaio, implementou-se o modelo numérico de uma viga tracionada e um anel sobre compressão diametral para comparação entre os resultados numéricos e experimentais.

Os dados obtidos diretamente dos ensaios de fluência sob tração e flexão necessitaram ser tratados matematicamente, aplicando as equações apresentadas no item 2.12, para serem implementados no Ansys. Como hipótese, considerou-se que o material responde de forma elástica sob ação de tensões hidrostáticas.

A implementação no Ansys, após os dados dos ensaios de fluência ser obtidos experimentalmente, requer primeiramente a transformação do módulo de fluência,  $J(t)$ , para o módulo de relaxação deviatórico  $G(t)$ . Considerando que a parcela volumétrica do módulo de relaxação elástica, o valor de  $K$ , pode ser obtido diretamente dos dados experimentais através das expressões:

$$J(0) = \frac{\text{Deformação medida no início do ensaio}}{\text{Tensão}} \quad (3.12)$$

$$E_{el} = \frac{1}{J(0)} \quad (3.13)$$

$$K_{el} = \frac{E_{el}}{3(1 - 2\nu)} \quad (3.14)$$

$E_{el}$  : módulo de elasticidade.

$\nu$  : coeficiente de Poisson.

$K_{el}$  : módulo de relaxação volumétrico elástico.

É importante salientar que o valor de  $J(0)$  foi calculado após 40s do início do ensaio, ou seja, para todos os ensaios de fluência os primeiros quarenta segundos iniciais foram descartados. Este fato é determinante tanto para o procedimento de ajuste como para implementação dos dados para as simulações numéricas.

A determinação do módulo de relaxação deviatórico, parte da definição do módulo de cisalhamento elástico  $G_{el}$ , da aplicação do princípio da correspondência e da utilização da transformada de Laplace. O módulo de cisalhamento elástico é definido como:

$$G_{el} = \frac{3E_{el}K_{el}}{9K_{el} - E_{el}} \quad (3.15)$$

Aplicando a transformada de Laplace e o princípio da correspondência na Eq. 3.15, tem-se que:

$$s\mathcal{L}[G] = \frac{3s\mathcal{L}[Y]s\mathcal{L}[K]}{9s\mathcal{L}[K] - s\mathcal{L}[Y]} \quad (3.16)$$

Como  $K$  é considerado elástico, e sua transformada  $\mathcal{L}[K] = K_{el} / s$ , obtém-se:

$$\mathcal{L}[G] = \frac{1}{s} \left( \frac{3K_{el}s\mathcal{L}[Y]}{9K_{el} - s\mathcal{L}[Y]} \right) \quad (3.17)$$

$$\mathcal{L}[G] = \frac{1}{s} \left( \frac{3K_{el}}{\frac{1}{s\mathcal{L}[Y]}9K_{el} - 1} \right) \quad (3.18)$$

aplicando a definição no domínio complexo que  $\mathcal{L}[J].\mathcal{L}[Y] = s^{-2}$  em Eq. 3.18, o módulo de relaxação deviatórico no domínio de Laplace apresenta-se como:

$$\mathcal{L}[G] = \frac{3K_{el}}{s(s\mathcal{L}[J]9K_{el} - 1)} \quad (3.19)$$

sendo  $\mathcal{L}[J]$  é o modulo de fluência no domínio de Laplace determinado experimentalmente. A Eq. 3.19 fornece o módulo de relaxação deviatórico no domínio de Laplace, que será decomposto na forma de frações parciais para facilitar o processo de inversão para o domínio do tempo, conforme exposto no item 2.12. Finalmente através destas operações pode-se obter as constantes do módulo de relaxação deviatórico que serão implementadas para a realização das simulações numéricas a partir do módulo de fluência determinado experimentalmente.

### 3.4.3 Implementação numérica do comportamento viscoelástico

Dentro do contexto da teoria de pequenas deformações, a equação constitutiva na forma integral para um material viscoelástico isotrópico pode ser escrita da seguinte forma:

$$\sigma = \int_0^t 2G(t - \tau) \frac{de}{d\tau} d\tau + I \int_0^t K(t - \tau) \frac{d\Delta}{d\tau} d\tau \quad (3.20)$$

$\sigma$  : tensão.

$G$  : módulo de relaxação deviatórico.

$e$  : parcela deviatórica da deformação.

$\Delta$  : parcela volumétrica da deformação.

$I$  : tensor unitário.

$t$  : tempo atual.

$\tau$  : variável de integração.

Para o elemento Visco89, disponível no software Ansys utilizado neste trabalho para analisar numericamente o comportamento viscoelástico, as propriedades do material são expressas pelas funções do módulo de relaxação deviatórico e volumétrico na forma de séries de Prony para o modelo de Maxwell generalizado:

$$G(t) = R_0 + \sum_i^{n_G} R_i e^{-\frac{t}{\beta_i}} \quad (3.21)$$

$$K(t) = A_0 + \sum_i^{n_K} A_i e^{-\frac{t}{\alpha_i}} \quad (3.22)$$

$$R_i = \Phi_i (G_0 - G_\infty) \quad (3.23)$$

$$A_i = \Psi_i (K_0 - K_\infty) \quad (3.24)$$

$t$  : tempo.

$G(t)$  : módulo de relaxação deviatórico.

$K(t)$  : módulo de relaxação volumétrico.

$n_G$  : número de elementos de Maxwell utilizados para aproximar a função módulo de relaxação deviatórico.

$n_K$  : número de elementos de Maxwell utilizados para aproximar a função módulo de relaxação volumétrico.

$\Phi_i$  : constantes associadas ao módulo de relaxação deviatórico.

$\Psi_i$  : constantes associadas ao módulo de relaxação volumétrico.

$G(0)$  : módulo de relaxação deviatórico em  $t = 0$ .

$G(\infty)$  : módulo de relaxação deviatórico em  $t = \infty$ .

$K(0)$  : módulo de relaxação volumétrico em  $t = 0$ .

$K(\infty)$  : módulo de relaxação volumétrico em  $t = \infty$ .

$\beta_i$  : tempos de relaxação deviatórico.

$\alpha_i$  : tempos de relaxação volumétrico.

Para exemplificar a implementação destas propriedades, considera-se o módulo de relaxação deviatórico obtido através do ensaio de fluência sob tração, Eq. 3.25.

$$G(t) = 4,436.10^8 + 3,346.10^7 e^{\frac{-t}{244,522}} + 8,114.10^7 e^{\frac{-t}{4606,367}} + 1,591.10^8 e^{\frac{-t}{51353,457}} + 1,398.10^8 e^{\frac{-t}{432890,067}} + 4,895.10^7 e^{\frac{-t}{1331408,986}} \quad (3.25)$$

A Eq. 3.25 pode ser representada simbolicamente por:

$$G(t) = R_0 + R_1 e^{\frac{-t}{\beta_1}} + R_2 e^{\frac{-t}{\beta_2}} + R_3 e^{\frac{-t}{\beta_3}} + R_4 e^{\frac{-t}{\beta_4}} + R_5 e^{\frac{-t}{\beta_5}} \quad (3.26)$$

Para as simulações realizadas, considerou-se o módulo de relaxação volumétrico constante,  $K(t) = cte$ . Sendo assim o número de parâmetros a serem implementados é reduzido, conforme verifica-se a seguir:

Elemento viscoelástico 3-D de 20 nós

et,1,visco89

Cria tabela de propriedades materiais

tb,visc,1

tbdata,46, $G(0) = 9,061.10^8 Pa$  - Módulo de relaxação deviatórico em  $t = 0$ .

tbdata,47, $G(\infty) = 4,436.10^8 Pa$ .- Módulo de relaxação deviatórico em  $t = \infty$ .

tbdata,48, $K(0) = 5,361.10^9 Pa$  - Módulo de relaxação volumétrico em  $t = 0$ .

tbdata,49, $K(\infty) = 5,361.10^9 Pa$  - Módulo de relaxação volumétrico em  $t = \infty$ .

tbdata,50,5 - Número de elementos de Maxwell utilizados para ajustar o módulo de relaxação deviatórico,  $n=5$ .

tbdata,51, $\Phi_1 = 0,072362$  -  $\Phi_1 = R_1/(G_0 - G_{inf})$ .

tbdata,52, $\Phi_2 = 0,175459$  -  $\Phi_2 = R_2/(G_0 - G_{inf})$ .

tbdata,53, $\Phi_3 = 0,344067$  -  $\Phi_3 = R_3/(G_0 - G_{inf})$ .

tbdata,54, $\Phi_4 = 0,302250$  -  $\Phi_4 = R_4/(G_0 - G_{inf})$ .

tbdata,55, $\Phi_5 = 0,105862$  -  $\Phi_5 = R_5/(G_0 - G_{inf})$ .

tbdata,61, $\beta_1 = 244,522s$  - tempo de relaxação deviatórico.

tbdata,62, $\beta_2 = 4606,367s$  - tempo de relaxação deviatórico.

tbdata,63, $\beta_3 = 51353,457s$  - tempo de relaxação deviatórico.

tbdata,64, $\beta_4 = 432890,067s$  - tempo de relaxação deviatórico.

tbdata,65, $\beta_5 = 1331408,986s$  - tempo de relaxação deviatórico.

tbdata,71,0 - número de elementos de Maxwell utilizados para ajustar o módulo de relaxação volumétrico,  $n=0$ ,  $K(t) = \text{constante}$ .

### Resultados das simulações numéricas

A determinação das propriedades viscoelásticas através de ensaios de fluência sob tração e flexão fornece os dados suficientes para a implementação numérica do modelo viscoelástico. Caracterizando o material a partir dos ensaios de fluência sob tração a  $40^\circ\text{C}$ , simulou-se no Ansys uma barra tracionada e o anel sob compressão diametral conforme Fig. 3.20. Na sequência, a partir das propriedades viscoelásticas determinadas pelos ensaios de fluência sob flexão a  $40^\circ\text{C}$ , repetiu-se as simulações mencionadas como visto na Fig. 3.21.

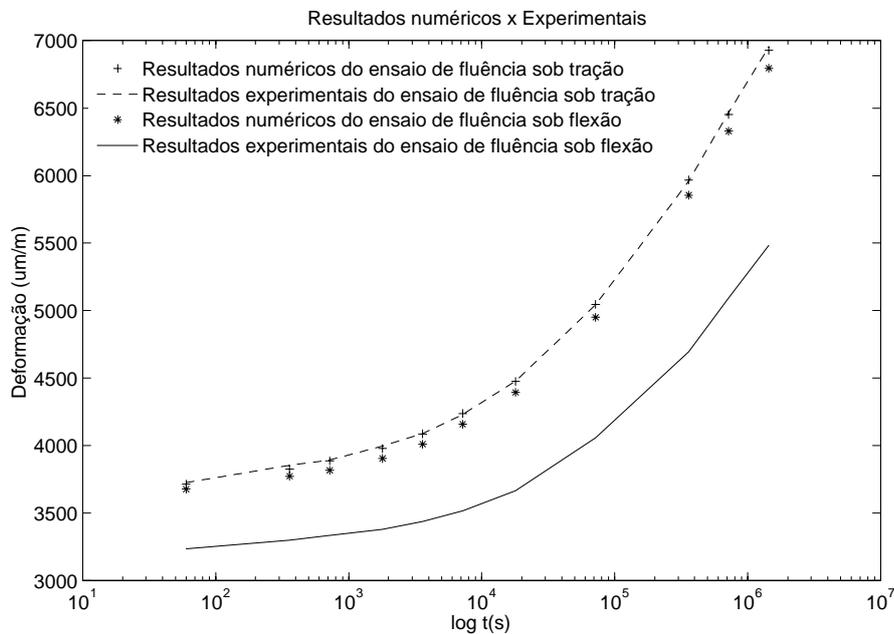


Figura 3.20: Resultados numéricos e experimentais com propriedades viscoelásticas obtidas através de ensaio de fluência sob tração em PVC a  $40^\circ\text{C}$ .

Módulo de relaxação deviatório obtido por ensaio de fluência sob tração a  $40^\circ\text{C}$ , e implementado na simulação:

$$G(t) = 4,436 \cdot 10^8 + 3,346 \cdot 10^7 e^{\frac{-t}{244,22}} + 8,114 \cdot 10^7 e^{\frac{-t}{4606,367}} + 1,591 \cdot 10^8 e^{\frac{-t}{51353,457}} + 1,398 \cdot 10^8 e^{\frac{-t}{432890,067}} + 4,895 \cdot 10^7 e^{\frac{-t}{1331408,986}} \quad (3.27)$$

Módulo de relaxação deviatório obtido por ensaio de fluência sob flexão a  $40^\circ\text{C}$ , e implementado na simulação::

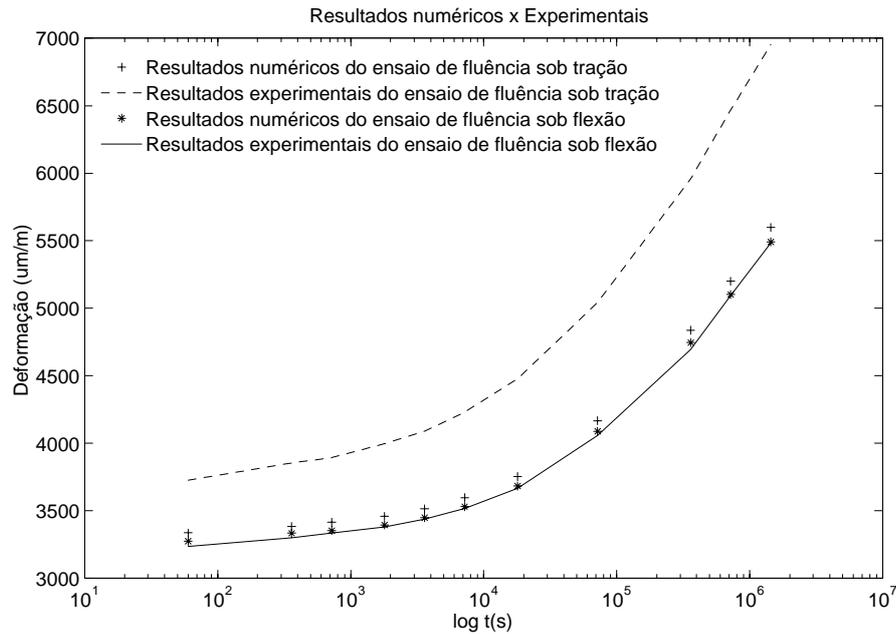


Figura 3.21: Resultados numéricos e experimentais com propriedades viscoelásticas obtidas através de ensaio de fluência sob flexão em PVC a 40°C.

$$G(t) = 5,402 \cdot 10^8 + 2,411 \cdot 10^7 e^{\frac{-t}{315,287}} + 4,697 \cdot 10^7 e^{\frac{-t}{5128,397}} + 1,737 \cdot 10^8 e^{\frac{-t}{53625,521}} + 1,309 \cdot 10^8 e^{\frac{-t}{463283,724}} + 9,761 \cdot 10^7 e^{\frac{-t}{1245973,267}} \quad (3.28)$$

O efeito da temperatura é modelado numericamente obtendo as constantes do módulo de relaxação deviatório a partir dos dados dos ensaio fluência sob tração a 40°C, Eq. 3.27. Através da implementação das constantes da Eq. 2.90 determinadas experimentalmente,  $C_1 = 9,360$  e  $C_2 = 90,367$  K, simulou-se numericamente a barra tracionada a 50°C, comparando com o resultados experimentais do ensaio de fluência sob tração a 50°C. Convém ressaltar que em ambos os ensaios de fluência em temperatura distintas, os corpos de prova foram submetidos ao mesmo nível de tensão. A Fig. 3.4.3 ilustra o comparativo dos resultados numéricos e experimentais para o ensaio de fluência sob tração a 50°C.

### 3.4.4 Ensaios dinâmicos

Para realizar os cálculos especificados pela norma ASTM D 4065-01 necessita-se mensurar a força e deslocamento para cada frequência do ensaio. Através das curvas deslocamento e força em função do tempo para cada frequência, pode-se determinar o ângulo de fase a partir do ajuste dos dados dados experimentais a funções senoidais. Este procedimento é ilustrado na Fig. 3.23.

Para determinada frequência os dados de força e deslocamento em função do tempo

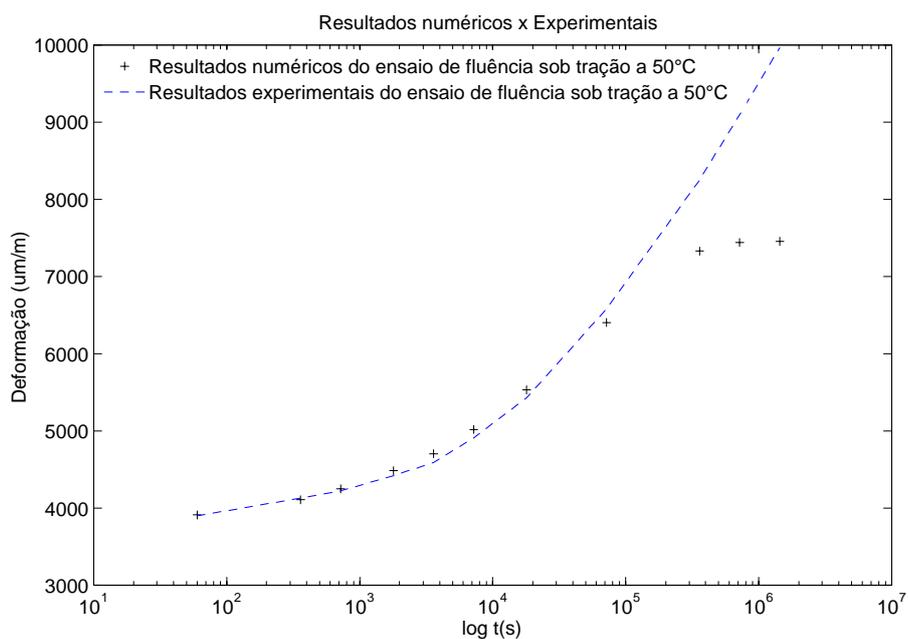


Figura 3.22: Resultados numéricos e experimentais para ensaio de fluência sob tração em PVC a 50°C.

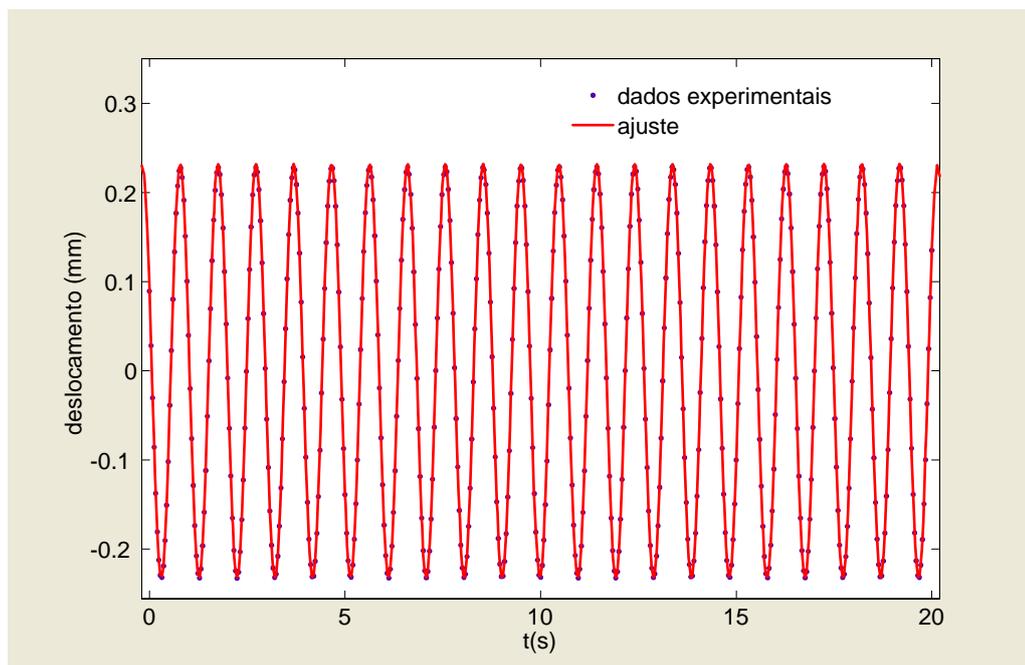


Figura 3.23: Ajuste dos dados experimentais para cálculo do ângulo de fase.

são ajustados a funções senoidais:

$$y = a \operatorname{sen}(\omega t + c) \quad (3.29)$$

$a$  : amplitude

$\omega$  : frequência

$c$  : ângulo de fase

Desta forma obtém-se uma função força,  $F = a \text{sen}(\omega t + c)$  e outra deslocamento,  $u = b \text{sen}(\omega t + d)$ . Efetuando a subtração  $c - d$  obtém-se o ângulo de fase,  $\varphi$ , que representa o atraso do deslocamento em relação a força.

Este processo de ajuste repetiu-se para os dados experimentais de força e deslocamento para as frequências de 1, 5, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80 e 90 Hz. Obtidos os parâmetros experimentais necessários, calculou-se para cada frequência as propriedades mecânicas viscoelásticas com base na formulação apresentada na norma ASTM D 4065-01 [11], Eq. 3.30 e Eq. 3.31.

O módulo complexo de armazenamento,  $E'$ , e o módulo complexo de dissipação,  $E''$ , para corpo de prova de seção retangular submetido a flexão em três pontos foi calculado respectivamente por:

$$E' = \frac{NL^3 \cos \varphi}{2bt^3a} \quad (3.30)$$

$$E'' = \frac{NL^3 \text{sen} \varphi}{2bt^3a} \quad (3.31)$$

$N$  : amplitude de força

$L$  : distância entre apoios

$\varphi$  : ângulo de fase

$b$  : largura do corpo de prova

$t$  : espessura do corpo de prova

$a$  : amplitude de deslocamento

Esquemáticamente pode-se ilustrar pela Fig. 3.24 o sistema de medição utilizado para obter as propriedades dinâmicas viscoelásticas.

O sinal senoidal para cada frequência é obtido através do gerador de sinal alimentado pela fonte de energia. Este sinal é amplificado e alimenta o oscilador mecânico, conforme Apêndice A, que apresenta transdutores e força e deslocamento. As informações captadas pelos transdutores são adquiridas pela placa de aquisição. Na Fig. 3.6 visualiza-se os transdutores de força e deslocamento do oscilador mecânico.

Utilizando blocos padrões e massas com incrementos de 0,1 mm e 200 g, realizou-se a calibração dos transdutores de deslocamento e força respectivamente conforme Fig. 3.25 e 3.26.

Com a finalização das calibrações dos transdutores, parte-se para a execução dos ensaios. Apresenta-se os resultados do módulo de armazenamento dinâmico, módulo de dissipação dinâmico e ângulo de fase em função da frequência respectivamente nas Fig. 3.28, 3.29 e 3.30 para dois corpos de prova conforme especificado por norma. As dimensões dos corpos de prova são apresentadas na Fig 3.27 e Tab 3.16. Com o objetivo de verificar o comportamento da força em função do deslocamento para a faixa de frequência

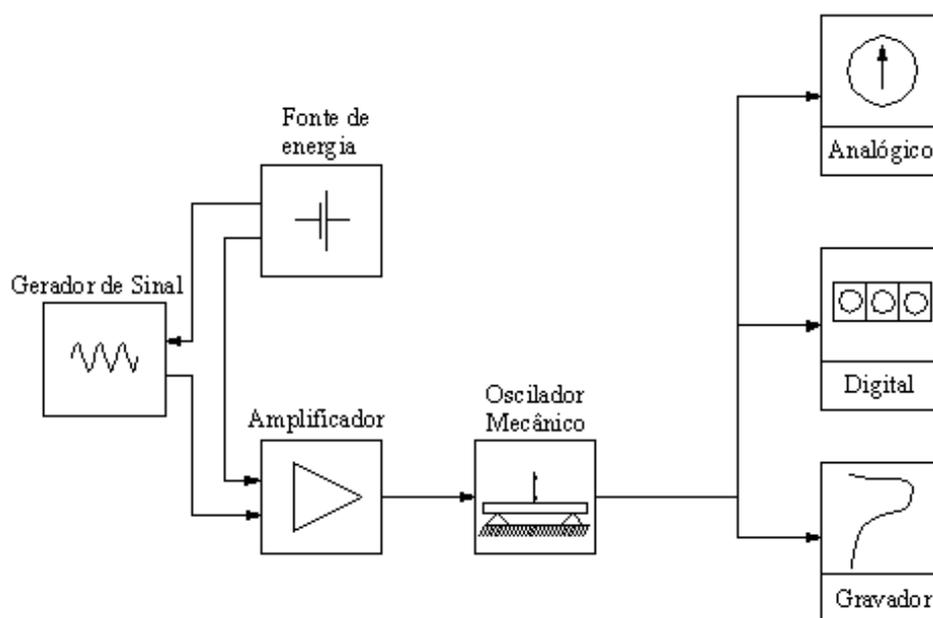


Figura 3.24: Sistema de medição para ensaio dinâmico.

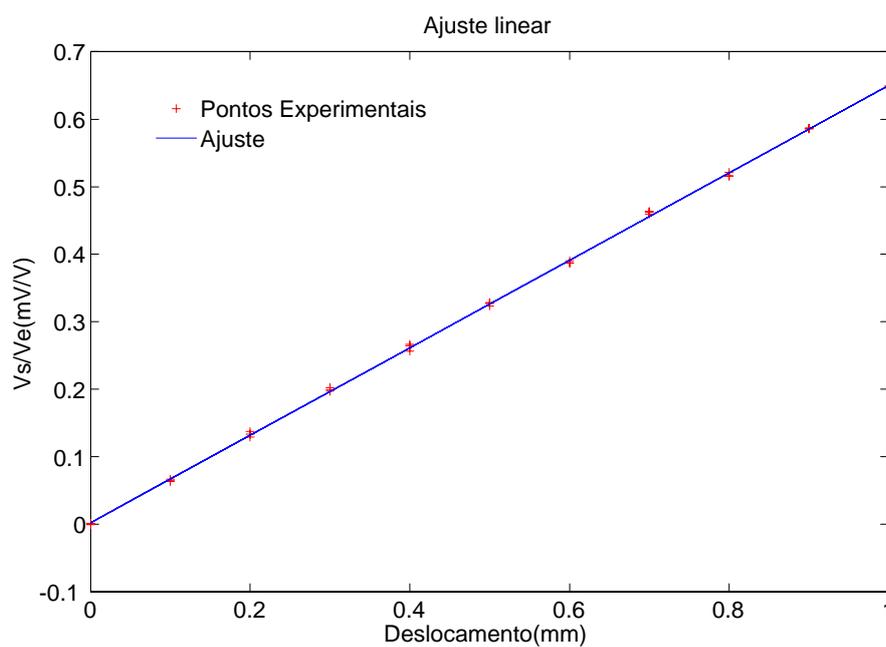


Figura 3.25: Dados de calibração do transdutor de deslocamento para ensaio dinâmico.

utilizada no ensaio, apresenta-se por final estes resultados para as frequências de 5, 50 e 90 Hz conforme observa-se nas Fig. 3.31, 3.32 e 3.33.

#### Dados do ensaio dinâmico

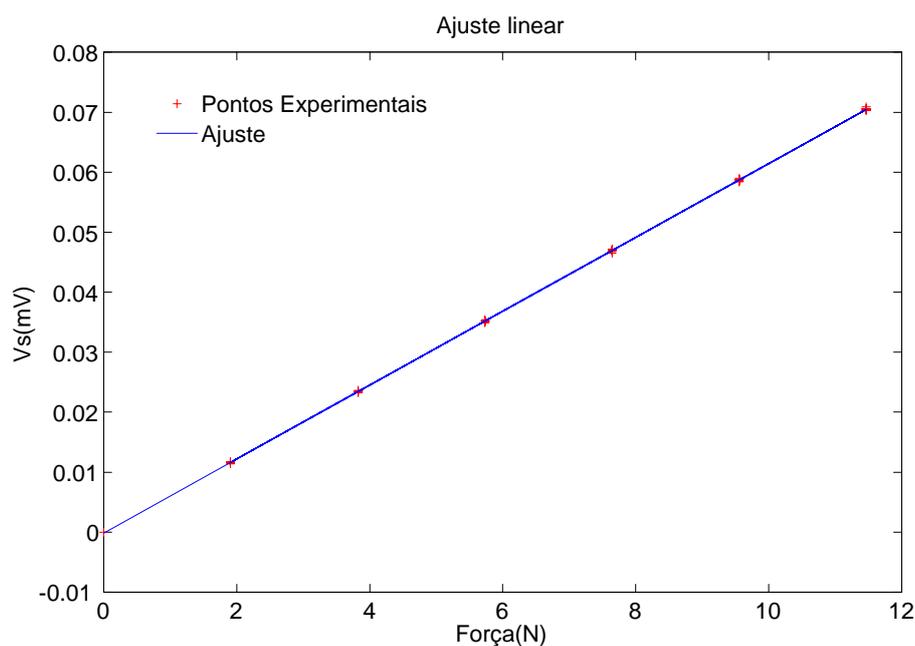


Figura 3.26: Dados de calibração do transdutor de força para ensaio dinâmico.

Tabela 3.15: Condições para ensaio de dinâmico sob flexão em PVC.

Temperatura: 25°C
Frequência variável de 1 a 90 Hz.

Tabela 3.16: Dimensões dos corpos de prova de PVC para ensaio dinâmico sob flexão conforme Fig. 3.27.

	$a(mm)$	$b(mm)$	$L(mm)$	distância entre apoios
Corpos de prova n° 1	7,728	2,641		58
Corpos de prova n° 2	7,749	2,660		58

O módulo de relaxação  $Y(t)$  e o módulo de fluência  $J(t)$  são relacionados com o módulo de armazenamento dinâmico  $E'(\omega)$  e o módulo de dissipação dinâmico  $E''(\omega)$  através de uma transformada de Laplace inversa. A inversão desta transformada pode ser um processo complicado, porém uma boa aproximação é dada pela regra de Ninomiya-Ferry

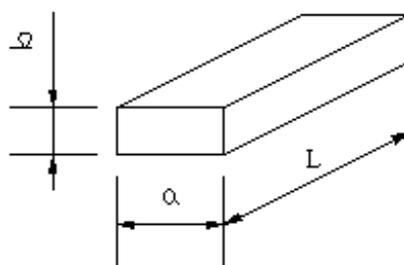


Figura 3.27: Dimensões do corpo de prova para ensaio dinâmico.

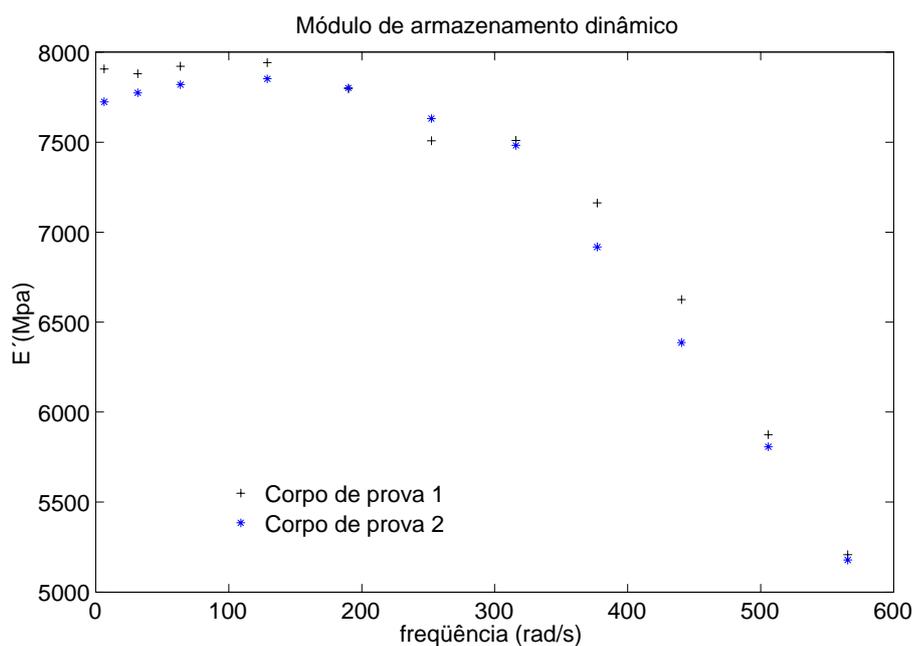


Figura 3.28: Módulo de armazenamento dinâmico para o PVC em função da frequência.

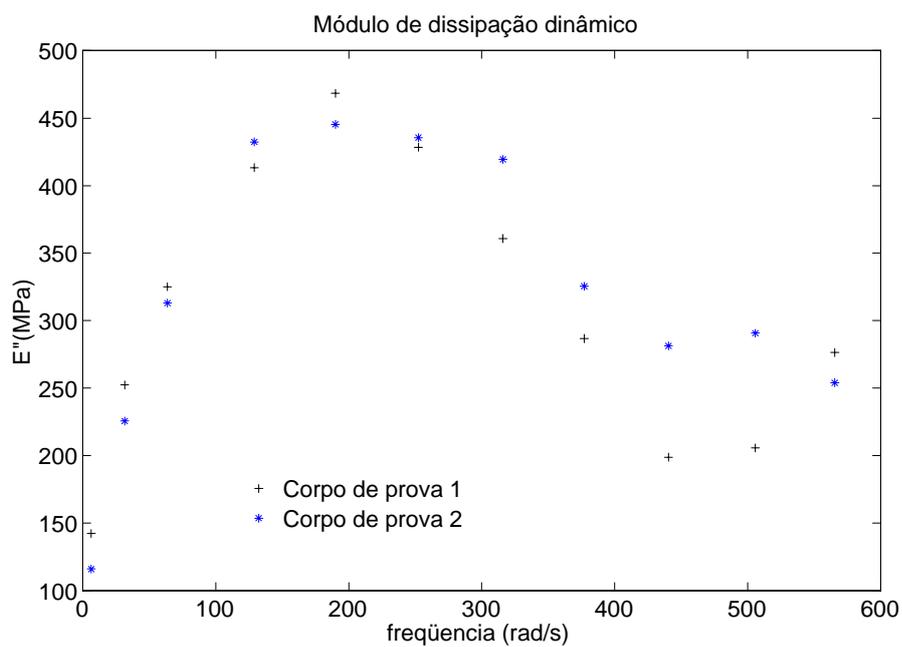


Figura 3.29: Módulo de dissipação dinâmico para o PVC em função da frequência.

[18]:

$$Y(t) = E'(1/t) - 0,4E''(0,4/t) + 0,014E'(10/t) \quad (3.32)$$

Observando a Eq. 3.32, verifica-se que o primeiro termo após a igualdade é dominante. Desta forma, pode-se escrever:

$$Y(t) = E'(1/t) \quad (3.33)$$

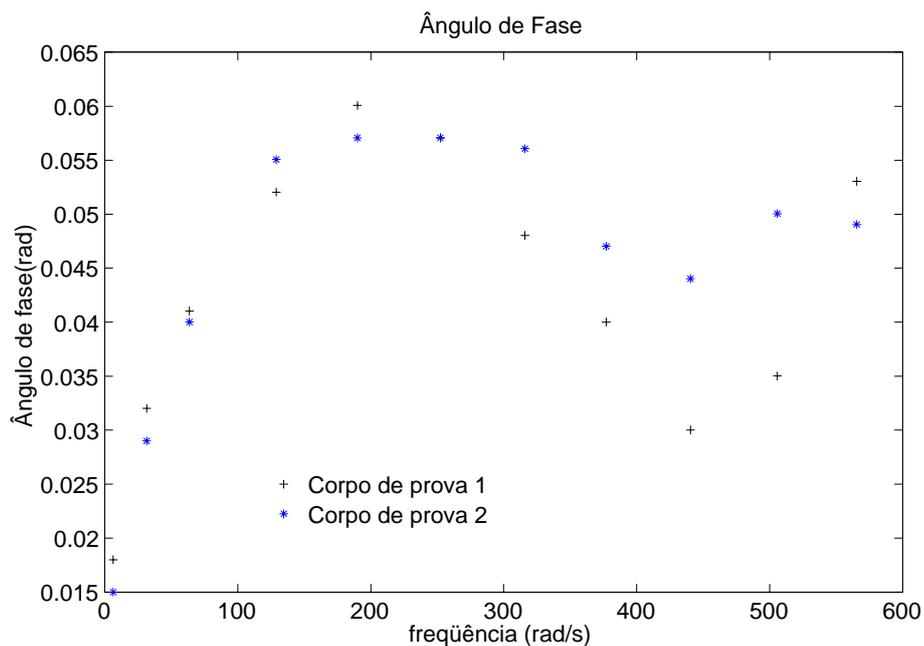


Figura 3.30: Ângulo de fase para o PVC em função da frequência.

Pela Eq. 3.33, o módulo de relaxação  $Y(1s) = E'(1Hz)$ . Para o ensaio dinâmico a 1Hz e  $25^{\circ}C$ , o valor do módulo de armazenamento dinâmico médio dos dois corpos ensaiados,  $E' = 7815,482$  MPa. Em caráter comparativo determina-se o módulo de relaxação para o ensaio de fluência sob tração a  $40^{\circ}C$ ,  $Y(10s) = 2691,220$  MPa, revelando grande diferença entre as propriedades viscoelásticas obtidas através de ensaios dinâmicos e de fluência estáticos.

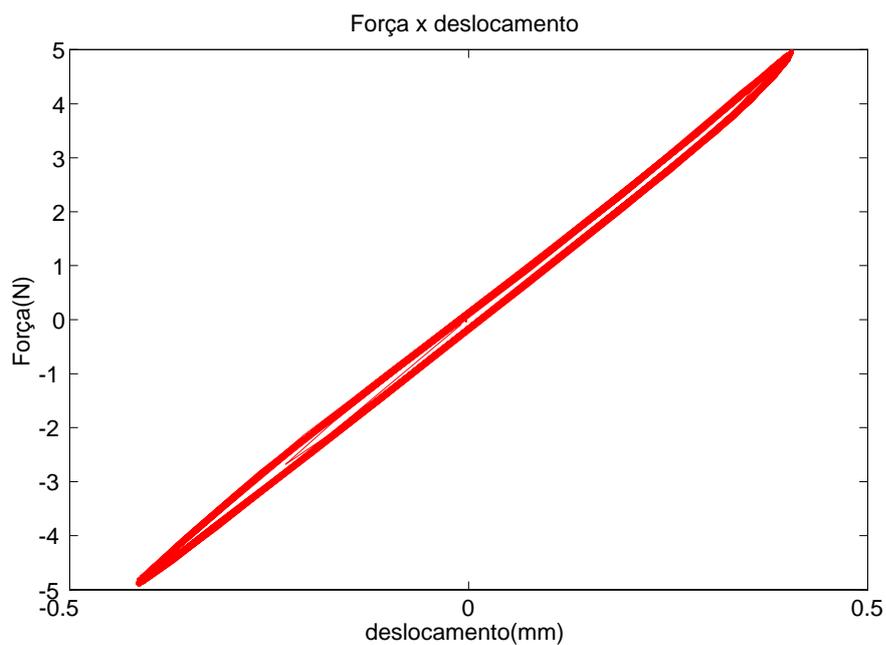


Figura 3.31: Força em função do deslocamento para ensaio dinâmico em PVC a 5 Hz.

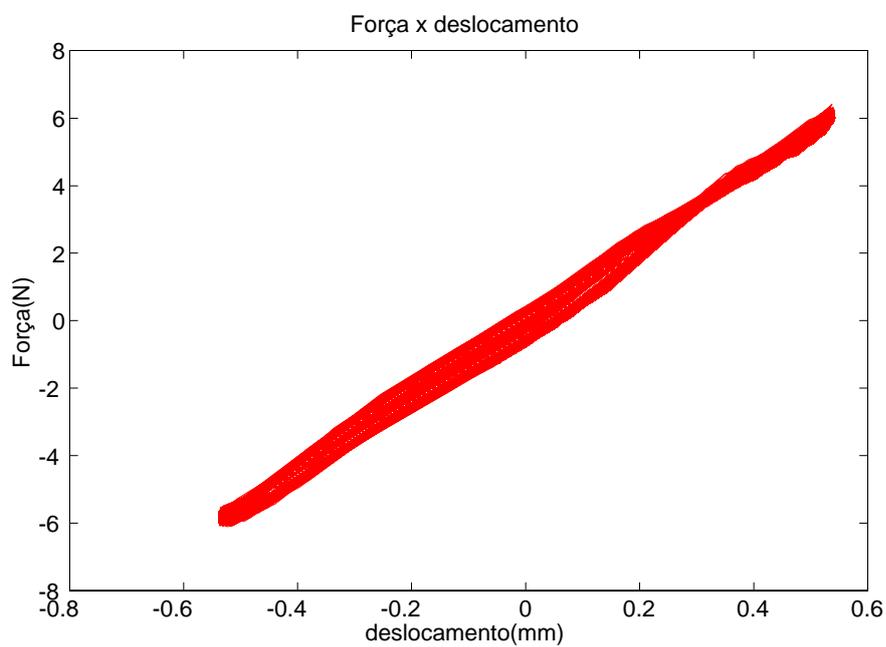


Figura 3.32: Força em função do deslocamento para ensaio dinâmico em PVC a 50 Hz.

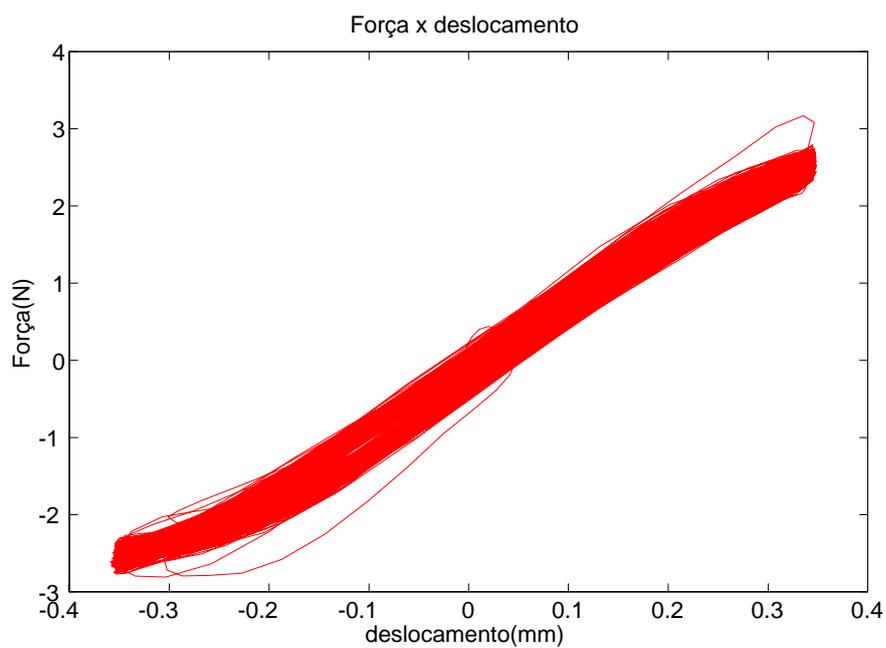


Figura 3.33: Força em função do deslocamento para ensaio dinâmico em PVC a 90 Hz.

# Capítulo 4

## Discussão dos resultados

Diferentes técnicas de medições podem ser empregadas para caracterizar os materiais viscoelásticos, dentre elas pode-se citar: a extensometria, transdutores de deslocamentos mecânicos e o emprego de transformadores diferenciais (LVDT). Dentro do contexto deste trabalho, a evolução do tema baseou-se no emprego das técnicas de extensometria, seja através de extensômetros fixados diretamente nos corpos de prova ou através da construção e calibração de transdutores eletrônicos de força e deslocamento. Para reforçar e validar o emprego desta técnica em ensaios de fluência, realizou-se na máquina de tração disponível no laboratório do fabricante Emic modelo DL 3000, colando dois extensômetros de fabricantes e dimensões diferentes em um mesmo corpo de prova, juntamente acopla-se o transdutor de deslocamento conforme exposto pela Fig. 4.1.



Figura 4.1: Ensaio de tração em PVC realizado na máquina Emic modelo DL3000.

Aplicando um incremento de carga de 1N/s, a força do ensaio atinge 80 N e se mantém

constante por determinado tempo até voltar a posição inicial. Pode-se observar pela Fig. 4.2 os dados de deformação obtido através dos extensômetros e do transdutor de deslocamento. O principal objetivo deste ensaio foi verificar se os dados de deformação obtidos através dos extensômetros fornecem valores corretos e variações aceitáveis em relação ao transdutor de deslocamento. Como pode-se observar na Fig. 4.2 o extensômetro do fabricante Excel apresentou dados de deformação 15% e 7% superiores aos medidos pelo extensômetro do fabricante HBM e pelo transdutor de deslocamento respectivamente. Esta diferença era esperada devido a espessura do extensômetro HBM ser quatro vezes maior que a do extensômetro Excel. A opção pelo emprego dos extensômetros Excel nos ensaios de fluência deveu-se principalmente a esta diferença de espessura, devido o extensômetro tender a enrijecer localmente o material plástico na posição onde for realizada a sua fixação [14].

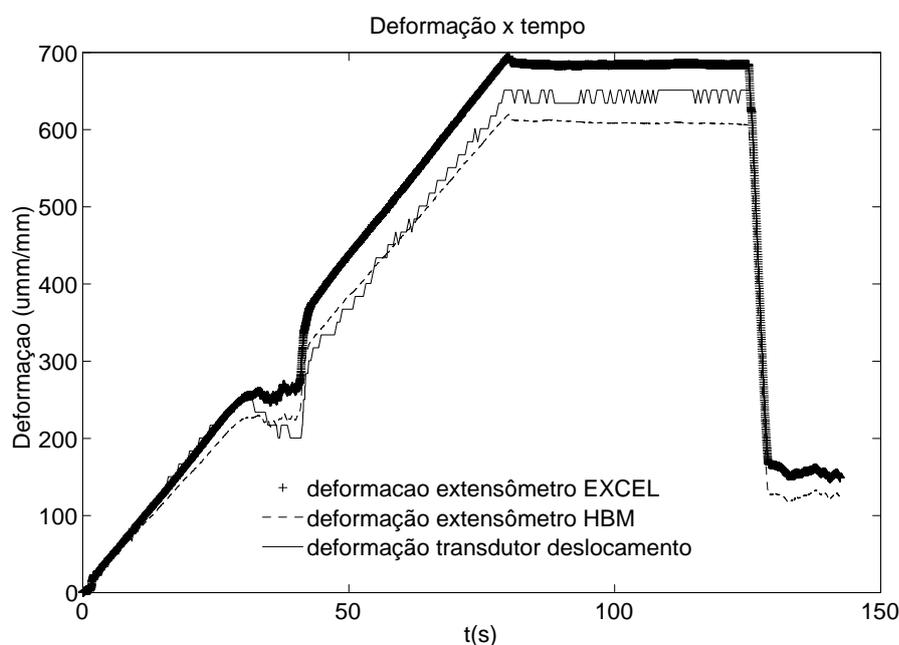


Figura 4.2: Resultados de deformação do ensaio de tração em PVC obtidos através de extensômetros e transdutor de deslocamento eletrônico.

Através do confronto entre os dados experimentais obtidos através do ensaio de fluência sob tração, em condições equivalentes de carregamento e temperatura, por [19], onde utilizou-se de transdutores de deslocamento mecânicos com relógio comparador para monitorar a resposta ao longo do tempo do material, e aqueles obtidos neste trabalho através da fixação de extensômetros Excel nos corpos de prova, verificou-se que a maior diferença entre os resultados obtidos de ambos os ensaios é de 11%. A Fig 4.3 ilustra os módulos de fluência obtidos pelo emprego dessas técnicas distintas de medição e representados matematicamente por:

$$J_{tração} [19] = 1,1 \cdot 10^{-3} - 1,2 \cdot 10^{-4} e^{\frac{-t}{580424,74}} - 3,2 \cdot 10^{-4} e^{\frac{-t}{116207,17}} - 3,6 \cdot 10^{-5} e^{\frac{-t}{11201,59}} - \\ 1,0 \cdot 10^{-4} e^{\frac{-t}{3486,62}} - 1,2 \cdot 10^{-4} e^{\frac{-t}{18624,13}}$$

$$J_{tração} \text{ extensômetro Excel} = 1,102 \cdot 10^{-3} - 9,164 \cdot 10^{-6} e^{\frac{-t}{667,155}} - 1,249 \cdot 10^{-4} e^{\frac{-t}{4818,092}} - \\ 5,651 \cdot 10^{-6} e^{\frac{-t}{9169,214}} - 1,956 \cdot 10^{-4} e^{\frac{-t}{56003,620}} - 3,374 \cdot 10^{-4} e^{\frac{-t}{550899,157}}$$

Esta variação está dentro das expectativas, as amostras dos materiais utilizados para confronto dos dados são de lotes de fabricação distintos. Pode-se observar que o efeito do enrijecimento ocasionado pelo extensômetro Excel não ocasionou diferenças substanciais entre os dados experimentais para o polivinil clorídrico rígido.

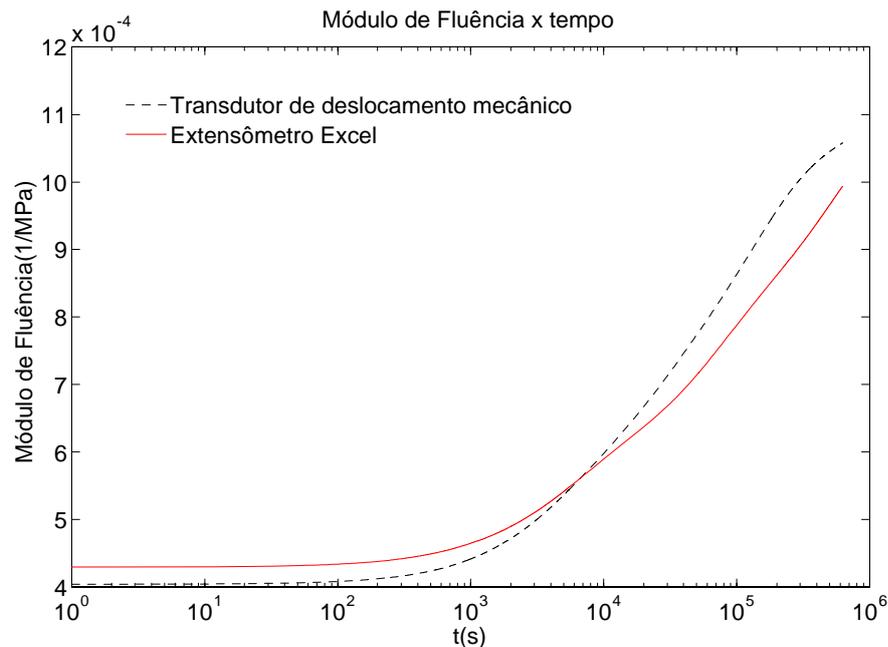


Figura 4.3: Módulos de fluência sob tração para o PVC obtidos de dados de deformações por extensômetros do fabricante Excel e transdutor de deslocamento mecânico [19].

A realização de ensaios de fluência em temperaturas distintas é outro ponto importante a ser destacado. Os equipamentos para controle de temperatura disponíveis no laboratório exigem que a temperatura mínima de trabalho seja pelo menos  $10^{\circ}C$  superior a temperatura ambiente. A temperatura de transição vítrea de  $57^{\circ}C$  [19] surge como limitante superior para caracterização do material. Diante disto, ensaios de longa duração foram realizados nas temperaturas de  $40^{\circ}C$  e  $50^{\circ}C$ , permitindo através do princípio da equivalência tempo-temperatura, que a translação da curva obtida na temperatura superior forneça um segmento da curva na temperatura de referência,  $40^{\circ}C$ . A comparação da

curva obtida por este procedimento e a curva completa na temperatura de referência pode ser visualizada na Fig. 4.4. Verifica-se diferenças de inclinação entre a curva transladada e a curva completa na temperatura de referência, que podem ser ocasionadas por deficiências no sistema de medição, manifestação de efeitos de envelhecimento ou ainda pelo comportamento viscoelástico não linear do material. A realização de ensaios de curta duração em uma faixa de temperatura de  $0^{\circ}C$  a  $50^{\circ}C$  seria ideal para a utilização do princípio de equivalência tempo e temperatura, permitindo consequentemente uma melhor extrapolação dos resultados na temperatura de referência. Simulando numericamente

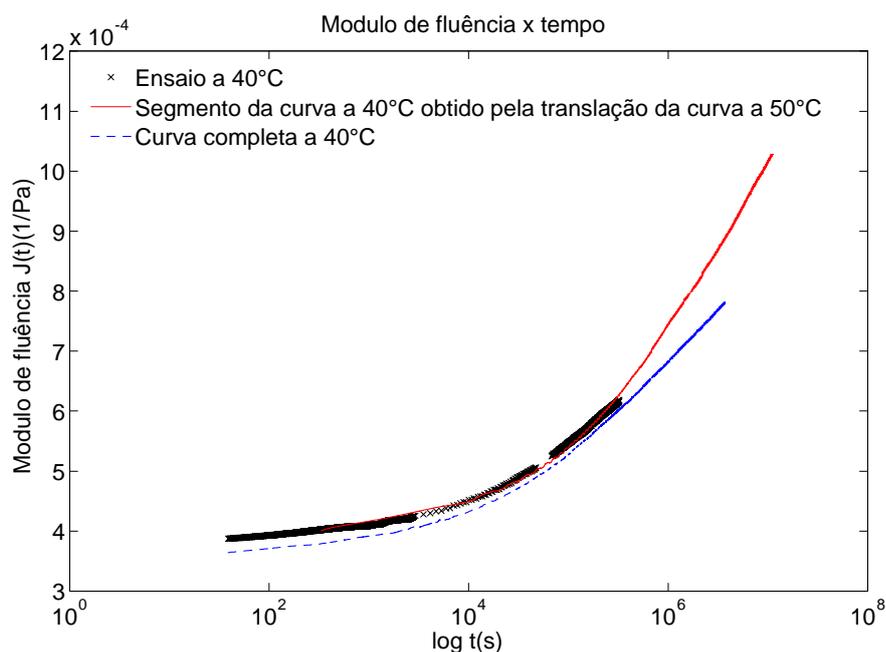


Figura 4.4: Módulo de fluência sob tração para o PVC obtido na temperatura de referência,  $40^{\circ}C$ , pela translação da curva em temperatura superior,  $50^{\circ}C$ , e por ensaio de longa duração a  $40^{\circ}C$ .

o efeito da temperatura sobre as propriedades viscoelásticas através da implementação no Ansys das constantes  $C_1$  e  $C_2$  obtidas experimentalmente, verifica-se pela Fig. 3.22 que os resultados numéricos e experimentais apresentaram concordância até certo tempo de simulação. Isto ocorre devido o ensaio a  $40^{\circ}C$ , utilizado para caracterizar o material, apresentar 500 h de duração. Este tempo final é transladado pelo fator  $a(T)$ , sendo  $0 < a(T) < 1$ . Por isso, para a simulação numérica na temperatura de  $50^{\circ}C$  a partir deste tempo final,  $t_f = 500.a(T)$ , a curva assume o patamar mostrado na Fig. 3.22.

Os ensaios de fluência sob flexão em corpos de prova anelar pretendem estabelecer uma maneira alternativa para caracterizar o material viscoelástico, substituindo os ensaios de fluência sob tração. Observa-se que para carregamentos e temperaturas elevadas o corpo de prova anelar rompe, devido aos altos deslocamentos compreendidos e possíveis pontos de concentração de tensão provenientes do processo de fabricação dos corpos de prova.

Para contornar este problema, os níveis de carga foram reduzidos, sendo que para o ensaio a  $40^{\circ}\text{C}$  o corpo anelar permaneceu intacto para ensaios com duração superior a 1000 horas. Isso não ocorre para o ensaio a  $50^{\circ}\text{C}$  com carga reduzida, cujo rompimento do corpo de prova anelar ocorre após 4 dias de ensaio conforme Fig. 4.5. Além deste fator agravante, os dados experimentais de deformação obtidos através da imposição de carregamentos que submetessem o corpo de prova de tração e flexão ao mesmo nível de tensão na região onde foi posicionado o extensômetro apresentaram diferenças na ordem de 27% conforme Fig. 3.20 e 3.21, demonstrando a necessidade de determinação da influência do tipo de carregamento nas propriedades do material. Para validar o cálculo da tensão,  $\sigma_{o \text{ flexão}}$ , pela Eq. 3.3, simulou-se numericamente o anel sob compressão diametral implementando as propriedades viscoelásticas do material obtidas pelos ensaios de fluência sob tração a  $40^{\circ}\text{C}$ . O cálculo da tensão,  $\sigma_{o \text{ flexão}}$ , através da solução elástica da Eq. 3.3 apresentou o valor de 9,306 MPa, resultado muito próximo ao valor obtido pela a simulação viscoelástica do anel sob compressão diametral para tempo de  $1,44 \cdot 10^5 \text{ s}$  de 9,363 MPa. Evidencia-se nas Fig. 3.20 e 3.21 que os resultados experimentais de fluência sob flexão anelar quando comparados com os resultados de fluência sob tração não se mostram adequados mas na simulação apresentam-se próximos.

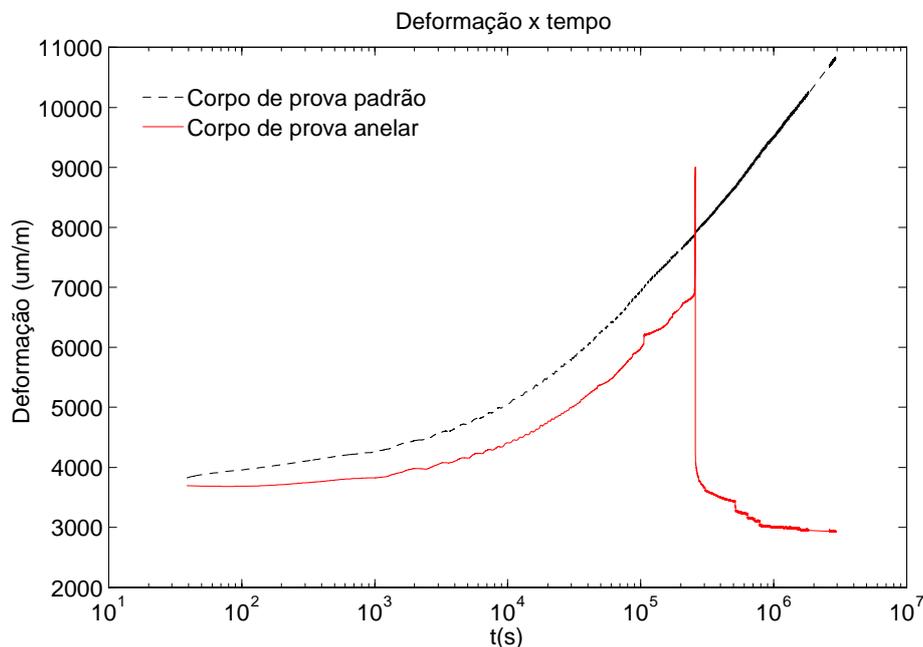


Figura 4.5: Módulo de fluência obtido por ensaio sob tração e flexão anelar em PVC a  $50^{\circ}\text{C}$ .

A construção de um oscilador mecânico com base em informações normalizadas tem como objetivo determinar propriedades mecânicas viscoelásticas como função da frequência e correlacioná-las com aquelas obtidas pelos ensaios de fluência estáticos. A resposta de armazenamento dinâmico do material viscoelástico em determinada frequência pode

ser aproximada a resposta obtida em um ensaio de fluência estático conforme [18]. A correlação dos dados de ambos apresentaram divergências significativas, que podem ser ocasionadas devido as condições de calibração dos transdutores diferenciadas em relação as apresentadas na execução dos ensaios ou por a regra de Nynomia- Ferry não apresentar resultados válidos para o PVC. Além disso, a dificuldade em obter dados experimentais na literatura para o material específico ensaiado, não permitiram que comparações representativas fossem realizadas para estabelecer conclusões coerentes sobre os resultados experimentais dinâmicos.

# Capítulo 5

## Conclusão

### 5.1 Comentários

A execução de experimentos utilizando técnicas de medição por extensometria com referência em recomendações normalizadas, permite a aquisição dos dados experimentais necessários para caracterizar o comportamento viscoelástico. Adicionalmente, a aplicação dessas técnicas, facilita consideravelmente a automação do processo de medição, permitindo desta forma o melhor acompanhamento dos ensaios pela aquisição dos dados de deformação em tempos sucessivos.

Os experimentos de fluência sob tração e flexão anelar são simulados numericamente no software comercial Ansys. Esta abordagem numérica e experimental, permite que os resultados experimentais sejam comparados com os resultados numéricos conforme Fig. 3.20 e Fig. 3.21. e os dados disponíveis na literatura conforme Fig. 4.3.

As ferramentas da teoria da viscoelasticidade linear e a aplicação da metodologia experimental expostas, possibilita que dados dos ensaios de fluência uniaxiais sejam utilizados para analisar numericamente o comportamento de fluência ou relaxação de componente viscoelástico submetido a solicitações mecânicas tridimensionais. Conseqüentemente o projeto de um componente estrutural viscoelástico é amparada pelos conceitos numéricos e experimentais apresentados. Ressalta-se que nos experimentos de fluência instrumentou-se apenas um corpo de prova para cada ensaio em diferentes temperaturas, em virtude disto a representatividade estatística dos resultados torna-se limitada.

Para o ajuste das curvas experimentais obtidas pelos ensaios de fluência sob tração e flexão os algoritmos de otimização necessitam de estimativas iniciais para os valores das constantes e dos tempos de fluência. O procedimento adotado para avaliar estas estimativas iniciais é apresentado no item 3.4.1, conforme [20].

Os ensaios de fluência sob flexão anelar apresentaram resultados experimentais de deformação diferenciados em relação aos obtidos através dos ensaios de fluência sob tração, lembrando que o mesmo nível de tensão é aplicado nos corpos de prova onde fixa-se os

extensômetros e ambos os ensaios são submetidos a temperaturas equivalentes,  $40^{\circ}\text{C}$ . Sugere-se que a região de aplicação de carregamento no corpo de prova de flexão sofra deformações localizadas reduzindo a parcela de deformação da região de medição e ocasionando as diferenças encontradas. Além disso, para os ensaios de flexão à temperatura de  $50^{\circ}\text{C}$  ocorre o rompimento do anel após 4 dias de ensaio, invalidando os objetivos experimentais de conhecer o comportamento do material para solicitações de longa duração.

A aplicação do princípio de equivalência entre tempo e temperatura demonstra a viabilidade de conhecer o comportamento viscoelástico à carregamentos de longa duração, pela realização de ensaios de curta duração em temperaturas elevadas. No entanto, os resultados experimentais para a aplicação desse princípio foram obtidos apenas em dois níveis de temperatura,  $40^{\circ}\text{C}$  e  $50^{\circ}\text{C}$ , e com duração de aproximadamente 20 dias, podendo ser influenciados pelo efeito do envelhecimento conforme comentado no item 2.8.2 e verificado na Fig. 2.21. O procedimento adotado para a determinação das constantes da função de translação, Eq. 2.90, exige estimativas iniciais que foram definidas a partir dos valores apresentados para um grande conjunto de materiais poliméricos de acordo com a literatura e expostos no item 2.8.1.

Com a finalidade de abreviar o número de parâmetros a ser implementando para simular o comportamento viscoelástico, considera-se o comportamento elástico em dilatação. A determinação do coeficiente de Poisson para o cálculo do módulo volumétrico,  $K$ , é realizada pela fixação de extensômetros tipo roseta  $90^{\circ}$  nos corpos provas de prova ensaiados. Inclui-se também como hipóteses para as simulações numéricas considera-se o coeficiente de Poisson constante e o material isotrópico e linearmente viscoelástico. A concordância entre os resultados numéricos e experimentais quando a geometria simulada coincide com a utilizada para caracterizar o material, evidencia a validade do procedimento numérico adotado para as simulações.

Os resultados experimentais dos ensaios dinâmicos retrataram divergências significativas pela aplicação da Eq. 3.33 em relação aos obtidos pelos ensaios de fluência sob tração. Convém lembrar que os ensaios dinâmicos foram realizados a temperatura de  $25^{\circ}\text{C}$  e os ensaios de fluência a  $40^{\circ}\text{C}$ . Reforçando a necessidade de execução dos mesmos ensaios dinâmicos na mesma temperatura dos ensaios de fluência ou vice-versa, e em equipamento que permita obter a resposta do material para níveis de frequência abaixo de 1Hz, o que equivaleria a ensaios de fluência com duração acima de 1 s, estabelecendo desta forma melhor comparativo entre as propriedades viscoelásticas correspondentes obtidas por ambos os ensaios.

Em [14] são descritos os procedimentos para obter os dados de fluência como uma função da temperatura e do estado de envelhecimento físico. Inclui-se também um método para analisar estes dados e definir os parâmetros para um modelo que tem a capacidade de prever a resposta ao longo do tempo para baixos níveis de tensão em várias faixas de tempo e temperatura, oferecendo ferramentas complementares para o procedimento

experimental adotado no trabalho.

## **5.2 Propostas para futuros trabalhos**

1. Ensaios de fluência sob flexão tracionando diametralmente o anel ao invés de comprimí-lo.
2. Aplicação da teoria da viscoelasticidade não linear para caracterizar o material a níveis elevados de carga e temperatura.
3. Desenvolver transdutor de deslocamento eletrônico com aplicação direta nos corpos de prova de tração, como realizado neste trabalho nos ensaios de fluência sob flexão.
4. Simular numericamente considerando o comportamento volumétrico viscoelástico.
5. Considerar efeito do envelhecimento na caracterização do material.

# Referências Bibliográficas

- [1] FINDLEY, W.N., LAI, J.S., ONARAN, K. Creep and relaxation of nonlinear viscoelastic materials - with an introduction to linear viscoelasticity. Dover publications, 1989.
- [2] WINEMAN, A.S., RAJAGOPAL, K.R. Mechanical response of polymers. Cambridge University Press, 2000.
- [3] BERINS, M. L.. Plastics engineering handbook of the society of the plastic industry, Inc., 5th edition. Chapman & Hall, New York, 1991.
- [4] TRES, P. A. Designing plastics parts for assembly, 3rd edition. Carl Hanser Verlag, Munchen, Germany, 1988.
- [5] FLUGGE, W. Viscoelasticity, 2nd ed., Springer-Verlag, Berlin, 1975
- [6] CRAWFORD, R. J. Plastics engineering, 2nd edition., Pergamon Press, 1989.
- [7] BLASS, A. Processamento de polímeros, 2º edição, 313 p., Editora da UFSC, 1998, Florianópolis, SC, Brasil.
- [8] SULLIVAN, R. W., JOHNSON, D. P., Method for determination of viscoelastic parameters using the principle of correspondence, AIAA Journal, Vol. 40, No. 9, pp. 1907-1909, 2002.
- [9] WILLIAN, M.L., LANDEL, R. F., FERRY, J. D. The temperature dependence of relaxation mechanisms in amorphous polymers and other glass-forming liquids, J. Am. Chem. Soc., 1955, Vol. 77, pp; 3701-3706.
- [10] ANSI/ASTM D 2990-01, Standard test methods for tensile, compressive, and flexural creep and creep-rupture of plastics. Annual Book of ASTM Standards, 2001
- [11] ANSI/ASTM D 4065-01, Plastics: Dinamical mechanical properties: Determination and report procedures. Annual Book of ASTM Standards, 2001.
- [12] ANSI/ASTM D 5023-02, Plastics: Dinamical mechanical properties: In flexure (three-point bending). Annual Book of ASTM Standards, 2001.

- [13] SULLIVAN, J. L., BLAIS, E.J., HOUSTON, D. Physical aging in the creep behavior of thermosetting and thermoplastic composites, *Comp. Sci. Tech.*, 1993, Vol. 47, pp. 389-403.
- [14] TOMLINS, P. E. Measurement and analysis of creep in plastics - measurement good practice guide n° 2, National physical laboratory, 1995.
- [15] CHRISTENSEN, R. M. Theory of viscoelasticity, 2nd edition, Academic Press, 1982.
- [16] ROYLANCE, D. Engineering Viscoelasticity, Department of Materials Science and Engineering Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, 2001.
- [17] MCCRUM N.G., BUCKLEY C.P, BUCKNALL C. B. Principles of polymer engineering. Oxford science publications, 1997.
- [18] ALOISIO. C.J., BROCKWAY, G.S. DMA viscoelastic analysis of two cross-linked and one thermoplastic rubber. *Antec plastics vol.3*, 2003.
- [19] PAGLIOSA, C., Determinação experimental de propriedades viscoelásticas de material polimérico, Dissertação, Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico. Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica Florianópolis, 101p., 2004.
- [20] GERLACH S., MATZENMILLER, A. Comparison of numerical methods for identification of viscoelastic line spectra from static test data. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 63, pp. 428-454, 2005.
- [21] KHAZAN A. D. Transducer e their elements, Prentice Hall, 1994.
- [22] BORESI, A.P., SCHMIDT R. J., SIDEBOTTOM, O.M. Advanced mechanics of materials, 5th edition, John Wiley & Sons, 1993.
- [23] BEER, F.B., JOHNSTON, E.R. Resistência dos materiais, 2° edição, McGraw-Hill, 1989.
- [24] LEE, Y., PAN, J., HATAWHAY, R.B., BARKEY, M. E. Fatigue testing and analysis. Butterworth-Heinemann publications, 2005.

# Apêndice A

## Projeto do oscilador mecânico

Um excitador eletrodinâmico de baixa capacidade foi desenvolvido para realizar os ensaios dinâmicos de flexão em corpo de prova, conforme item 3.5.4. Foi utilizado um alto falante de doze polegadas com potência de 200 W/RMS e 4 *Ohms* de resistência como base para o excitador, sendo desenvolvido o suporte para o corpo de prova, a conexão com a bobina móvel, um transdutor de deslocamento e uma célula de carga conforme Fig. A.1.

O objetivo é submeter o componente viscoelástico a oscilações senoidais, armazenando os dados de força e deslocamento para cada frequência de ensaio. Como transdutor de deslocamento é utilizado um chapa de inox de 0,5 mm de espessura por 10 mm de largura. Foram fixados na parte inferior e superior desta chapa, extensômetros tipo roseta dupla 90° em configuração de ponte completa, conforme exposto na Fig. A.2.

O transdutor de força, fabricado em aço 4140, é fixado no componente que faz a conexão com a bobina móvel do alto falante conforme visualizado na Fig. 3.6. Esta fixação ocasiona tensões trativas na região próxima ao engaste e compressivas na região central e vice-versa dependendo da direção do carregamento. A simulação estática deste transdutor, Fig. A.3, demonstra a distribuição de tensões na região onde será colado o extensômetro modelo diafragma ilustrado na Fig. A.4. A configuração em ponte completa oferecida por esse extensômetro é apresentada na Fig. A.4, onde os extensômetros externos são representados pelas letras A e C e os internos B e D. Quando A e C estiverem sobre compressão D e C estarão sobre tração, fazendo que o sinal medido seja a soma de todas as deformações conforme Eq. A.1

$$\frac{V_s}{V_e} = \frac{S}{4}(\varepsilon_A - \varepsilon_B + \varepsilon_C - \varepsilon_D) \quad (\text{A.1})$$

A calibração dos dois transdutores está mostrada nas Fig. 3.28 e Fig. 3.29.

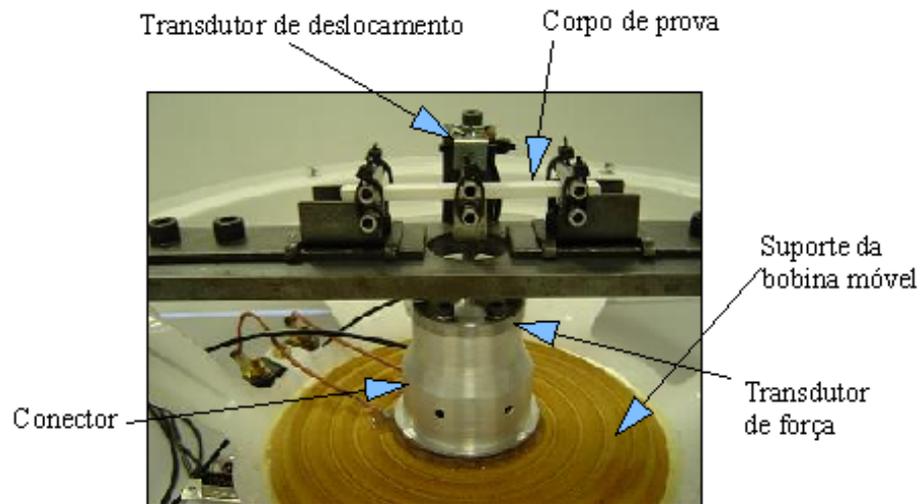


Figura A.1: Oscilador mecânico para ensaio dinâmico

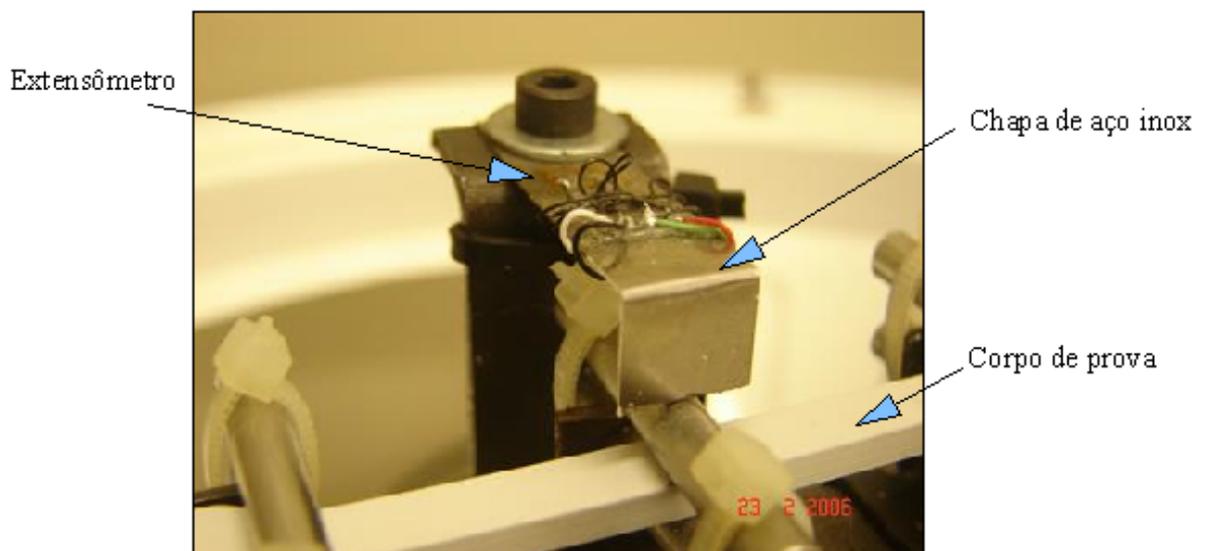


Figura A.2: Transdutor de deslocamento para ensaio dinâmico.

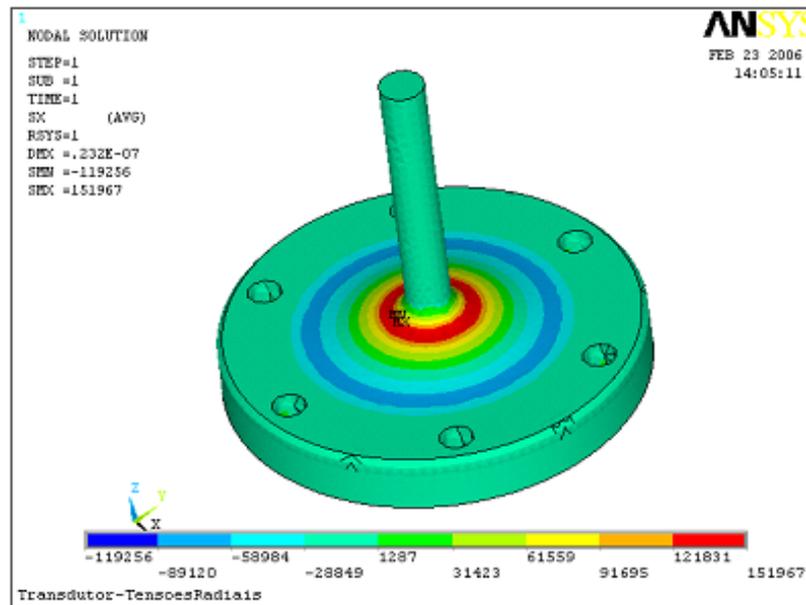


Figura A.3: Distribuição de tensões trativas e compressivas no transdutor de força sob carregamento estático.

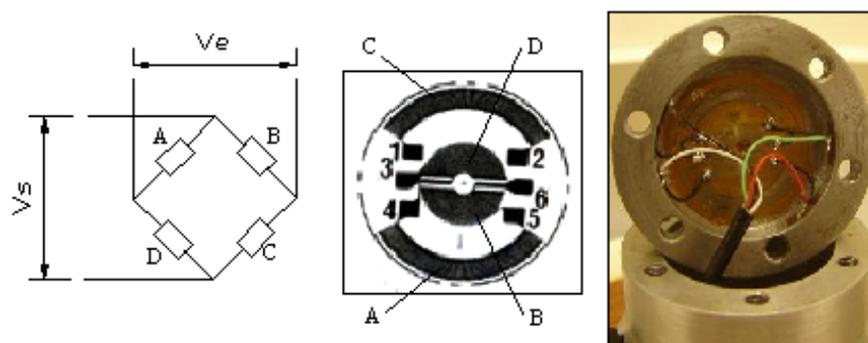


Figura A.4: Extensômetro modelo diafragma para transdutor de força.