

**Método dos Elementos Livres de  
Galerkin Aplicado à Espumas  
Poliméricas**

Universidade Federal de Santa Catarina  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica

**Método dos Elementos Livres de Galerkin Aplicado à  
Espumas Poliméricas**

Dissertação Submetida à Universidade Federal de Santa  
Catarina como parte dos requisitos para a obtenção do grau de  
mestre em Engenharia Mecânica

Guilherme da Costa Machado

Florianópolis, Setembro de 2006

Universidade Federal de Santa Catarina  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica

**Método dos Elementos Livres de Galerkin Aplicado à Espumas  
Poliméricas**

Guilherme da Costa Machado

Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de  
**Mestre em Engenharia**  
Especialidade Engenharia Mecânica, sendo aprovada em sua forma final

---

Marcelo Krajnc Alves, Ph.D.

Orientador

---

Rodrigo Rossi, Dr.

Orientador

---

Fernando Cabral, Ph.D.

Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica

Banca Examinadora

---

Hazim Ali Al-Qureshi, Ph.D.

Presidente da banca examinadora

---

José Carlos Pereira, Dr.

Membro da banca examinadora

---

Arcanjo Lenzi, Ph.D.

Membro da banca examinadora

*"Svabhavo vijayati iti shauryam."*  
*O verdadeiro heroísmo está em conquistar sua própria natureza.*  
*Rig Veda*

# Dedicatória

*aos meus amados pais.*

# Agradecimentos

Ao professor, orientador e amigo Marcelo Krajnc por sua capacidade científica incomparável, ou talvez, comparável apenas a sua extraordinária maneira de ser, a qual o sucesso da conclusão desse trabalho é compartilhado;

Ao orientador e amigo Rodrigo Rossi, por sua hospitalidade e por sua enorme disposição em ajudar;

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior- CAPES pelo fomento concedido;

À Whirlpool S.A. Joinville pelo apoio financeiro concedido;

Aos meus colegas e amigos de laboratório pelos bons momentos que passamos juntos;

E por fim, a minha querida família, Sr. Lupércio, Sr. Teresa, Mteza, Netoouoo, Lora<sup>†</sup> e Dete.

# Conteúdo

<b>Lista de Figuras</b>	<b>vii</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>vii</b>
<b>Nomenclatura</b>	<b>viii</b>
<b>Resumo</b>	<b>xiv</b>
<b>Abstract</b>	<b>xv</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Objetivo . . . . .	1
1.2 Materiais celulares . . . . .	3
1.2.1 O sólido celular . . . . .	3
1.2.2 A densidade relativa . . . . .	5
1.2.3 Tipos de espumas . . . . .	6
1.2.4 Propriedades físicas . . . . .	8
1.2.5 Propriedades mecânicas . . . . .	10
<b>2 Mecânica e Termodinâmica dos Meios Contínuos</b>	<b>13</b>
2.1 Introdução . . . . .	13
2.2 Cinemática da deformação de partículas . . . . .	14
2.2.1 Corpos e suas configurações . . . . .	14
2.2.2 Movimento e Deformação do corpo $\mathfrak{B}$ . . . . .	15
2.2.3 Cinemática da deformação de um corpo . . . . .	15
2.3 Leis de conservação . . . . .	21
2.3.1 Conservação da massa . . . . .	21
2.3.2 Conservação do Momento Linear . . . . .	21
2.3.3 Primeiro e Segundo tensor de Piola-Kirchhoff . . . . .	23
2.3.4 A Equação de equilíbrio na configuração de referência . . . . .	25
2.4 Medidas de deformação $E(\vec{X}, t)$ e $E^*(\vec{x}, t)$ . . . . .	26
2.4.1 Linearização: deslocamentos e deformações infinitesimais . . . . .	28
2.5 O problema de valor de contorno . . . . .	29
2.5.1 Deslocamentos Virtuais . . . . .	30

2.5.2	Princípio dos Trabalhos Virtuais . . . . .	31
2.6	Termodinâmica dos Meios Contínuos . . . . .	32
2.6.1	Conservação da Energia . . . . .	32
2.6.2	Primeira Lei . . . . .	32
2.6.3	Segunda Lei e a desigualdade de Clausius-Duhem . . . . .	33
<b>3</b>	<b>Análise elastoplástica em grandes deformações</b>	<b>35</b>
3.1	Introdução à plasticidade . . . . .	35
3.1.1	Aspecto Fenomenológico Elastoplástico . . . . .	36
3.1.2	Critérios e Superfícies de Escoamento . . . . .	37
3.1.3	Leis de Encruamento . . . . .	37
3.2	Modelos constitutivos elastoplásticos . . . . .	38
3.2.1	Decomposição multiplicativa do tensor gradiente de deformação . . . . .	38
3.2.2	Pares conjugados de tensão e deformação . . . . .	40
3.2.3	Potencial de energia livre e dissipação . . . . .	41
3.2.4	Relação constitutiva hiperelástica . . . . .	42
3.2.5	Taxa de deformação plástica modificada . . . . .	43
3.2.6	Função de escoamento . . . . .	44
3.2.7	Potencial de dissipação e leis de evolução . . . . .	44
3.3	Problema de valor de contorno global . . . . .	45
3.3.1	Formulação forte: Configuração de referência. . . . .	45
3.3.2	Formulação fraca: Configuração de referência . . . . .	46
3.4	Formulação incremental . . . . .	47
3.4.1	Linearização e método de Newton . . . . .	48
3.4.2	Notas sobre a determinação de $\mathbb{A}$ . . . . .	48
3.5	O problema de valor inicial elastoplástico - Aproximação pela metodologia <i>operator split</i> . . . . .	50
3.5.1	Predição elástica . . . . .	50
3.5.2	A correção plástica . . . . .	51
3.6	Aspectos computacionais . . . . .	54
3.6.1	Forças internas e externas . . . . .	57
3.7	A equação de equilíbrio . . . . .	58
3.7.1	Linearização e método de Newton . . . . .	58
<b>4</b>	<b>O modelo elastoplástico para espumas poliméricas</b>	<b>61</b>
4.1	Modelo elastoplástico baseados na formulação hiperelástica . . . . .	61
4.1.1	Definição da superfície de escoamento . . . . .	61
4.1.2	Descrição do modelo . . . . .	68
4.1.3	Leis de evolução . . . . .	73
4.2	O problema de valor inicial elastoplástico - Aproximação pela metodologia <i>operator split</i> . . . . .	74
4.2.1	Predição elástica . . . . .	74



4.2.2	A correção plástica . . . . .	76
4.3	Problema de valor de contorno global . . . . .	79
4.3.1	Formulação forte: Configuração de referência. . . . .	79
4.3.2	Formulação fraca: Configuração de referência . . . . .	79
4.4	Formulação incremental . . . . .	80
4.4.1	Linearização e método de Newton . . . . .	80
4.4.2	Notas sobre a determinação de $\mathbb{A}$ . . . . .	81
4.5	Procedimento de Solução . . . . .	83
4.5.1	Problema local . . . . .	83
4.6	Exemplos . . . . .	85
<b>5</b>	<b>O método de Galerkin livre de elementos</b>	<b>92</b>
5.1	Introdução . . . . .	92
5.2	Aproximação por Mínimos Quadrados Móveis . . . . .	94
5.2.1	Método dos Mínimos Quadrados Móveis . . . . .	97
5.2.2	A ordem de consistência . . . . .	99
5.3	Definição e distribuição da função peso . . . . .	100
5.4	Imposição das condições essenciais . . . . .	103
<b>6</b>	<b>Contato Unilateral</b>	<b>105</b>
6.1	Definição do problema . . . . .	106
6.1.1	Formulação forte . . . . .	106
6.1.2	Definição da função <i>gap</i> . . . . .	108
6.1.3	Formulação fraca . . . . .	109
6.1.4	Método de Newton . . . . .	111
6.2	Imposição das condições de contorno essenciais . . . . .	111
6.2.1	Procedimento de discretização via EFG . . . . .	111
6.3	Imposição dos termos de contato e atrito . . . . .	112
6.3.1	Contato Normal - condição de impenetrabilidade . . . . .	113
6.3.2	Contato Tangencial . . . . .	114
6.3.3	Procedimento de discretização via EFG . . . . .	117
6.4	Algoritmo geral . . . . .	118
6.5	Exemplos . . . . .	120
	<b>Conclusão</b>	<b>134</b>
	Sugestões para trabalhos futuros . . . . .	136
<b>A</b>	<b>Considerções a respeito de EDOs</b>	<b>141</b>
<b>B</b>	<b>Considerações sobre o modelo para espumas</b>	<b>143</b>
B.1	Computo do parâmetro $\beta$ . . . . .	143
B.2	O teste de compressão uniaxial . . . . .	145

# Lista de Figuras

1.1	Materiais celulares bidimensionais: (a) colméia em alumínio; (b) colméia em papel com resina fenólica; (c) colméia cerâmica com células quadradas; (d) colméia cerâmica com células triangulares. GIBSON & ASHBY (1997). . . . .	4
1.2	Espuma em poliuretano com células abertas. (© DoITPoMS Micrograph Library, University of Cambridge). . . . .	5
1.3	Espuma em alumínio com células fechadas. (© DoITPoMS Micrograph Library, University of Cambridge). . . . .	5
1.4	Espuma em Poliuretano com células abertas. (© DoITPoMS Micrograph Library, University of Cambridge). . . . .	6
1.5	Espuma em alumínio com células abertas. (© DoITPoMS Micrograph Library, University of Cambridge). . . . .	7
1.6	Espuma em alumínio com células fechadas e abertas, produzida por injeção de gás. (© DoITPoMS Micrograph Library, University of Cambridge). . . . .	7
1.7	Espuma em alumínio com células abertas, produzida por sal sinterizado infiltrado. (© DoITPoMS Micrograph Library, University of Cambridge). . . . .	8
1.8	Espuma cerâmica em Alumina. (© IPTME - Loughborough University) . . . . .	9
1.9	Espuma em Carbono. ROY & CAMPING (2003). . . . .	9
1.10	Algumas propriedades dos sólidos celulares. . . . .	10
1.11	Representação esquemática para o comportamento de espumas sujeitas à carregamentos de compressão e tração. . . . .	11
1.12	Modelo mecânico tridimensional de uma célula aberta cúbica sob um estado de tensões triaxial, GIBSON & ASHBY (1988). . . . .	12
1.13	Modelo mecânico de um célula fechada. (a) configuração inicial; (b) configuração deformada. DI LANDRO <i>et al.</i> (2001). . . . .	12
2.1	Configuração do Corpo $\mathfrak{B}$ . . . . .	14
2.2	Configuração de Referência. . . . .	14
2.3	Cinemática genérica para a deformação de um corpo $\mathfrak{B}$ . . . . .	16
2.4	Rotação pura. . . . .	18
2.5	Deformação pura. . . . .	18
2.6	Superfície de tração e forças em $\mathfrak{B}$ . . . . .	22
2.7	Representação da mesma força $d\vec{F}$ nas diferentes configurações. . . . .	23

3.1	Leis de encruamento . . . . .	38
3.2	Modelo cinemático de deformação. . . . .	39
3.3	Vetores tração e normais em $\Omega_o$ e $\Omega_t$ . . . . .	46
3.4	Descrição incremental. . . . .	47
3.5	Configurações de deformações entre o incremento $t_n$ e $t_{n+1}$ . . . . .	53
4.1	Função de escoamento e potencial de fluxo representados no plano $p - q$ . . . . .	62
4.2	Encruamento volumétrico. . . . .	63
4.3	Resposta tensão-deformação sob compressão uniaxial. Espuma em poliuretano 6,9 kg/m <sup>3</sup> . . . . .	65
4.4	Resposta tensão-deformação sob compressão uniaxial. Espuma em polipropileno 4,9 kg/m <sup>3</sup> . . . . .	65
4.5	Resposta tensão-deformação sob compressão uniaxial. Espuma em poliestireno 1,6 kg/m <sup>3</sup> . . . . .	65
4.6	Resposta tensão-deformação sob compressão hidrostática. Espuma em poliuretano 6,9 kg/m <sup>3</sup> . . . . .	66
4.7	Resposta tensão-deformação sob compressão hidrostática. Espuma polipropileno 4,9 kg/m <sup>3</sup> . . . . .	66
4.8	Resposta tensão-deformação sob tração uniaxial. Espuma em poliuretano 6,9 kg/m <sup>3</sup> . . . . .	67
4.9	Resposta tensão-deformação sob cisalhamento puro. Espuma em poliestireno 1,6 kg/m <sup>3</sup> . . . . .	67
4.10	Dependência do módulo de Young, $E(\rho^*) = E/E_s$ , com respeito a densidade relativa, $\rho^* = \rho/\rho_s$ . GIBSON & ASHBY(1997). . . . .	70
4.11	Ensaio de compressão uniaxial. ZHANG, J. <i>et al.</i> (1998). . . . .	72
4.12	Ensaio de compressão uniaxial. GONG & KYRIAKIDES (2004). . . . .	73
4.13	Corpo de prova para compressão uniaxial. . . . .	85
4.14	Resposta tensão-deformação, experimental ( $8,0 \cdot 10^{-2}$ 1/s) e numérica (FEM), sob compressão uniaxial. Espuma em polipropileno 49,0 Kg/m <sup>3</sup> . . . . .	86
4.15	Visualização, para o caso uniaxial, dos deslocamentos nas direções $x$ , $y$ e da deformação plástica volumétrica $\varepsilon_v^p$ . . . . .	87
4.16	Tronco de cone axissimétrico e modelo com 60 elementos Tri6. . . . .	88
4.17	Deslocamento na direção $x$ . . . . .	88
4.18	Deslocamento na direção $y$ . . . . .	89
4.19	Tensão de Cauchy na direção $x$ . . . . .	89
4.20	Tensão de Cauchy na direção $y$ . . . . .	89
4.21	Tensão de Cauchy na direção $z$ . . . . .	90
4.22	Tensão cisalhante no plano $xy$ . . . . .	90
4.23	Evolução da deformação plástica volumétrica, $\varepsilon_v^p$ . . . . .	91
5.1	Partição do domínio em subdomínios . . . . .	96
5.2	Método dos mínimos quadrados móveis. . . . .	97

5.3	Domínios de influência retangulares e circulares. . . . .	98
5.4	Ilustração dos domínios de influência nodal 2D e a malha de fundo. . . . .	102
5.5	Raio da função de peso $w$ . . . . .	102
6.1	Comparação entre os métodos EFG e Elementos Finitos. LI & LIU 2002. . . . .	106
6.2	Modelo de contato em grandes deformações - problema de Signorini. . . . .	109
6.3	Força normal $\vec{Q}_v^c$ e tangencial $\vec{Q}_T^c$ que surgem no contato. . . . .	110
6.4	Representação esquemática das condições de <i>Kuhn-Tucker</i> . . . . .	114
6.5	Regularização do modelo de Coulomb via penalidade. A linha tracejada representa a regularização enquanto que a linha contínua refere a representação clássica. . . . .	116
6.6	Corpo de prova compressão uniaxial. Dimensões em $mm$ . . . . .	121
6.7	Resposta tensão-deformação, experimental ( $8,0 \cdot 10^{-2}$ 1/s) e numérica (FEM e EFG), sob compressão uniaxial. Espuma em polipropileno $49,0 \text{ Kg/m}^3$ . . . . .	121
6.8	Processo de densificação . . . . .	122
6.9	Tronco de cone axissimétrico. Dimensões em $mm$ . . . . .	122
6.10	Deslocamento na direção $x$ . . . . .	123
6.11	Deslocamento na direção $y$ . . . . .	123
6.12	Deformação plástica volumétrica $\varepsilon_v^p$ . . . . .	124
6.13	Deformação plástica volumétrica $\varepsilon_v^p$ em função do deslocamento vertical $u_y$ . . . . .	124
6.14	Tensão de Cauchy na direção $x$ . (MPa) . . . . .	125
6.15	Tensão de Cauchy na direção $y$ . (MPa) . . . . .	125
6.16	Tensão de Cauchy na direção $z$ . (MPa) . . . . .	126
6.17	Tensão cisalhante de Cauchy no plano $xy$ . (MPa) . . . . .	126
6.18	Densidade relativa $\rho^*$ . . . . .	127
6.19	Variação da densidade relativa $\rho^*$ com relação a deformação plástica volumétrica $\varepsilon_v^p$ no ponto crítico. . . . .	127
6.20	Bucha axissimétrica. Dimensões em $mm$ . . . . .	128
6.21	Deslocamento na direção $x$ . . . . .	129
6.22	Deslocamento na direção $y$ . . . . .	129
6.23	Deformação plástica volumétrica $\varepsilon_v^p$ . . . . .	130
6.24	Densidade relativa $\rho^*$ . . . . .	130
6.25	Modelo de indentação. Dimensões em $mm$ . . . . .	131
6.26	Magnitude dos deslocamentos. . . . .	131
6.27	Deformação plástica volumétrica $\varepsilon_v^p$ . . . . .	132
6.28	Densidade relativa $\rho^*$ . . . . .	132
6.29	Tensão equivalente de von Mises. . . . .	133
A.1	Representação esquemática do processo evolutivo. . . . .	142
B.1	Esquema ilustrativo do ensaio de compressão uniaxial. . . . .	146

# Lista de Tabelas

3.1	Cômputos requeridos em cada ponto de integração . . . . .	55
3.2	Método de Newton para o problema global . . . . .	59
3.3	Determinação do módulo tangente global $\mathbb{A}$ . . . . .	60
4.1	Algoritmo de mapeamento de retorno . . . . .	78
4.2	Algoritmo de Newton aplicado ao sistema de equações locais . . . . .	84
6.1	Algoritmo para o modelo de Coulomb regularizado . . . . .	117
6.2	Algoritmo geral . . . . .	119

# Nomenclatura

- $\vec{a}$  vetor de coeficientes a determinar  
 $\vec{b}$  força de corpo  
 $\vec{\bar{b}}$  força de corpo prescrita  
 $c$  constante material  
 $c_f$  coeficiente de fricção  
 $\vec{e}_T$  vetor tangente  
 $\vec{f}^{int}$  vetor de forças internas  
 $\vec{f}^{ext}$  vetor de forças externas  
 $\vec{f}_T^c$  força desenvolvida na imposição do termo de atrito  
 $\vec{f}_\nu^c$  força desenvolvida na imposição do contato normal  
 $\vec{f}^{\lambda_u}, \vec{f}^u$  forças desenvolvidas na imposição das condições de contorno essenciais  
 $\vec{g}$  gap function  
 $k$  ordem de consistência  $C$  ou incremento do algoritmo iterativo  
 $l$  comprimento de arco  
 $\vec{l}_I$  autovetores relacionados a configuração de referência de  $\mathbf{C}$   
 $n$  número de partículas pertencentes ao suporte da função peso  
 $u^h$  função de aproximação  
 $u_I$  dados discretos  
 $m$  massa do corpo  
 $n_T$  número total de partículas ou nós  
 $\vec{n}$  normal externa a  $\Gamma_N$   
 $p$  parcela hidrostática de tensão  
 $p_c, p_t$  compressão e tração hidrostática  
 $\vec{p}$  base intrínseca  
 $q$  tensão de von Mises efetiva  
 $\vec{q}$  base de aproximação  
 $r$  raio parametrizado, entre  $[0, 1]$ , da função peso  $w$   
 $r_{I_{max}}$  máximo raio entre as partículas da lista  $\vec{L}_I$   
 $\bar{r}_I$  raio que define o suporte da função  $w$  centrada em  $\vec{x}_I$   
 $\vec{r}$  vetor resíduo problema global  
 $s$  entropia específica (Cap. 2)

$s$  multiplicador que regula o tamanho do suporte (Cap. 5)

$t$  tempo

$\vec{t}$  força de superfície

$\vec{\bar{t}}$  tração prescrita

$\vec{u}$  deslocamento prescrito

$\vec{u}$  campo de deslocamentos

$\vec{u}^g$  vetor de deslocamentos global

$u_T$  projeção de  $\vec{u}$  em  $\vec{e}_T$

$\delta\vec{u}$  campo de deslocamentos virtuais

$\delta\vec{u}^g$  vetor de deslocamentos virtuais global

$\vec{v}$  vetor velocidade

$\vec{\nu}$  normal externa ao obstáculo

$w$  função peso

$\vec{x}$  vetor posição espacial

$\vec{x}_I$  partícula

**A** matriz de momento ou forma matricial de  $\mathbb{A}$

$\mathbb{A}$  tensor de quarta ordem associado ao módulo tangente global

$dA$  elemento de área

$A, B$  comprimentos da elipse de escoamento

**B** tensor de Cauchy-Green à esquerda (Cap. 2)

**B** matriz deslocamento-deformação derivadas das funções de forma

$\mathbb{B}$  tensor de quarta ordem associado relacionado variação da parte material

$\mathfrak{B}$  copo contínuo

**C** tensor de Cauchy-Green à direita

$C$  consistência de aproximação

$\mathcal{C}$  energia cinética

**D** tensor taxa de deformação

$\bar{\mathbf{D}}$  taxa de deformação modificada-rotacionada

$\vec{D}$  vetor próprio

$\mathbb{D}$  tensor relação constitutiva elástica de quarta ordem

$\tilde{\mathbb{D}}$  tensor de quarta ordem associado relacionado com a parte material de  $\mathbb{A}$

$\mathbb{D}^{ep}$  tensor de quarta ordem módulo tangente consistente elastoplástico

$\mathcal{D}$  dissipação associada ao problema puramente mecânico

$E$  módulo de elasticidade longitudinal

$E_M$  módulo de elasticidade do material completamente denso

**E** tensor deformação de Hencky

$\mathcal{E}$  espaço das tensões admissíveis

$d\vec{F}$  elemento de força

**F** tensor gradiente de deformação

$\dot{\mathbf{F}}$  taxa de variação do gradiente de deformações

- $\mathcal{F}$  função de escoamento  
 $F$  trabalho virtual do problema de grandes deformações  
 $\tilde{F}$  trabalho virtual do problema de grandes deformações com contato e atrito  
 $F^u$  trabalho virtual referente a imposição das condições de contorno essenciais  
 $F^c$  trabalho virtual referente a imposição do contato e atrito  
 $F_u$  decomposição de deformação configuração de deformação  
 $F_\nu^c$  trabalho virtual referente a imposição do contato normal  
 $F_T^c$  trabalho virtual referente a imposição do atrito  
 $G$  módulo de cisalhamento  
 $\mathbf{G}^g$  matriz global dos gradientes das funções de forma para o caso axissimétrico  
 $\mathbf{G}$  matriz gradiente da função de forma para o caso axissimétrico  
 $\mathcal{G}$  fluxo plástico  
 $\mathbb{G}, \mathbb{H}$  tensores de quarta ordem relacionadas com a parte geométrica de  $\mathbb{A}$   
 $\mathbb{I}$  tensor identidade de quarta ordem  
 $\mathbf{I}$  tensor identidade de segunda ordem  
 $J$  jacobiano de deformação  
 $J(\vec{a})$  norma ponderada  
 $J_2$  segundo invariante do tensor deviatórico  
 $\vec{J}$  erro residual das trações prescritas  
 $K$  módulo volumétrico  
 $\mathbf{K}$  matriz de rigidez  
 $\mathbb{K}$  matriz de rigidez de quarta ordem  
 $\mathbf{K}^u$  matriz de rigidez oriunda da imposição das condições de contorno essenciais via Lagrangeano aumentado  
 $\mathcal{K}^h, \mathcal{V}^h$  espaços de aproximação  
 $\mathcal{K}$  espaço dos deslocamentos admissíveis  
 $\mathbf{K}_T^c$  matriz de rigidez oriunda da imposição do termo de atrito  
 $\mathbf{K}_\nu^c$  matriz de rigidez oriunda da imposição do contato normal  
 $\mathbf{L}$  gradiente espacial de velocidades  
 $\vec{L}_I$  lista de partículas associadas as partículas  
 $L_p$  espaço das funções integráveis  
 $\mathbf{N}^g$  matriz global das funções de forma oriundas de uma aproximação linear  
 $\mathcal{O}$  termos de ordem superior  
 $P$  partícula do corpo  $\mathfrak{B}$   
 $\mathbf{P}$  primeiro tensor tensão de Piola-Kirchoff (PK1)  
 $Q$  partícula do corpo  $\mathfrak{B}$   
 $\vec{Q}^u$  força desenvolvida na imposição das condições de contorno essenciais  
 $\vec{Q}^c$  força desenvolvida na imposição do contato e atrito  
 $Q_T^c$  módulo da força desenvolvida na imposição do atrito  
 $Q_\nu^c$  módulo da força desenvolvida na imposição do contato normal  
 $\mathcal{Q}$  fluxo de energia térmica



- $\vec{R}$  vetor resíduo problema local  
 $\mathbf{R}$  tensor de rotação pura  
 $\mathbf{S}$  segundo tensor tensão de Piola-Kirchoff (PK2)  
 $S$  entropia  
 $\mathbf{U}$  tensor estiramento definido à direita  
 $\mathcal{U}$  energia interna  
 $\mathcal{V}$  espaço dos deslocamentos virtuais  
 $V_o$  volume na configuração de referência  
 $V_t$  volume na configuração atual  
 $W_p^k$  espaço de Sobolev  
 $\vec{\mathbf{W}}$  taxa de giro modificada-rotacionada  
 $\dot{\mathcal{W}}$  taxa de trabalho por unidade de massa  
 $\delta\mathcal{W}^{ext}$  trabalho virtual das forças externas  
 $\delta\mathcal{W}^{int}$  trabalho virtual das forças internas  
 $\vec{X}$  ponto material vetor posição material  
 $\vec{X}_I$  partícula
- $\alpha$  formas da elipse de  $\mathcal{F}$   
 $\beta$  forma da elipse de  $\mathcal{G}$   
 $\delta_{ij}$  delta de kronecker  
 $\epsilon_u$  penalidade associada a imposição das condições de contorno essenciais  
 $\epsilon_\nu$  penalidade associada a imposição do termo de contato normal  
 $\epsilon_T$  penalidade associada a imposição do termo de atrito  
 $\epsilon$  tensor deformação infinitesimal  
 $\epsilon_v^p$  deformação plástica volumétrica  
 $\epsilon_a^p$  deformação plástica axial  
 $\phi_k$  variáveis internas  
 $\vec{\varphi}$  função movimento  
 $\gamma$  constante material  
 $\dot{\gamma}$  multiplicador da lei de atrito  
 $\kappa$  coeficiente de Lamé  
 $\vec{\lambda}_u$  multiplicador de Lagrange associado a imposição das condições de contorno essenciais  
 $\vec{\lambda}_u^h$  aproximação para  $\vec{\lambda}_u$   
 $\vec{\lambda}_u^g$  vetor global dos multiplicadores de Lagrange associado a imposição das condições de contorno essenciais
- $\lambda_\nu$  multiplicador de Lagrange a imposição do termo de contato normal  
 $\lambda_\nu^h$  aproximação para  $\lambda_\nu$   
 $\lambda_I$  autovalores relacionados a configuração de referência de  $C$   
 $\dot{\lambda}$  multiplicador plástico  
 $\Delta\lambda$  incremento do multiplicador plástico  
 $\psi$  potencial de energia livre  
 $\mu$  coeficiente de Lamé

$\omega$  tensor rotação infinitesimal pura  
 $\nu$  coeficiente de Poisson  
 $\rho_m$  densidade de massa do material totalmente denso  
 $\rho_o$  densidade de massa na configuração de referência  
 $\rho$  densidade de massa na configuração corrente  
 $\rho^*$  densidade relativa  
 $\varrho$  proporção de compressão hidrostática  
 $\theta$  temperatura absoluta  
 $\sigma$  tensor tensão de Cauchy  
 $\sigma_y$  tensão de escoamento inicial  
 $\tau$  tensor tensão de Kirchoff  
 $\bar{\tau}$  tensor tensão de Kirchoff rotacionada  
 $\xi$  estado local não tencionado  
 $\zeta$  pseudo-potencial de dissipação associada ao problema puramente mecânico

$\Gamma_o^u$  contorno inicial com condições de deslocamentos prescritos  
 $\Gamma_o^t$  contorno inicial com condições de trações prescritas  
 $\Gamma_o^c$  contorno inicial com condições de contato prescritas  
 $\Gamma_N$  contorno com condições naturais prescritas  
 $\Gamma_E$  contorno com condições essenciais prescritas  
 $\Gamma_u$  contorno com condições de deslocamentos prescritos  
 $\Gamma_t$  contorno com condições de trações prescritas  
 $\Gamma_c$  fronteira de contato  
 $\Gamma_{obs}$  fronteira do obstáculo  
 $\Lambda$  valor próprio  
 $\Phi_I$  função de forma  
 $\Phi^g$  matriz global das funções de forma  
 $\Omega$  domínio  
 $\Omega_o$  configuração de referência  
 $\Omega_t$  configuração corrente  
 $\Omega_{obs}$  corpo obstáculo  
 $\partial\Omega$  contorno ou fronteira do domínio  
 $\Theta$  conjunto aberto  
 $\Upsilon$  função de escorregamento  
 $\Upsilon_k$  forças termodinâmicas associadas as  $\phi_k$

$(\bullet)^{teste}$  valor avaliado no estado teste  
 $(\bullet)^D$  parte deviatórica de  $\bullet$   
 $(\bullet)^e$  parte elástica de  $\bullet$   
 $(\bullet)^p$  parte plástica de  $\bullet$

- $(\bullet)_{n+1}, (\bullet)_n$  valor avaliado no instante  $n + 1$  e  $n$
- $H(\bullet)$  função de Heaviside
- $\langle \bullet \rangle$  produto interno
- $\langle \bullet \rangle$  operador de Macauley (Cap. 5)
- $\text{sym}(\bullet)$  parte simétrica de  $\bullet$
- $\text{skew}(\bullet)$  parte antissimétrica de  $\bullet$

# Resumo

Neste trabalho são apresentadas algumas propostas e aplicações, dentro da área da *mecânica computacional*, no que diz respeito a problemas que envolvem grandes deformações de espumas poliméricas. Entende-se por espumas como um termo genérico que caracteriza diferentes tipos de sólidos celulares tridimensionais. Quando se trata de materiais celulares, principalmente as espumas absorvedoras de impacto, ou *crushable foams*, aparecem em aplicações de engenharia como excelentes absorvedores de energia e possuem uma enorme área de aplicação. Outro fator que desperta o interesse nesse tipo de material é a capacidade de aliar boa resistência mecânica com baixa densidade podendo essa característica ser explorada em aplicações onde a redução de peso é uma necessidade.

Assim, é proposto um modelo constitutivo para esse tipo de material, considerando um comportamento elastoplástico. A fase elástica é dada por um modelo de *Hencky* modificado de tal forma que o efeito da densidade relativa seja incorporado. Tal medida torna-se importante devido a grande redução de volume experimentada nesse tipo de material sob processos compressivos. Já a fase plástica é dada por um modelo de plasticidade von Mises não associativo modificado, com uma lei de encruamento volumétrica não-linear onde a evolução da superfície de escoamento é controlada pela deformação plástica volumétrica sofrida pelo material.

A formulação adotada considera uma *descrição Lagrangeana total*, a decomposição multiplicativa do gradiente de deformação e que as equações constitutivas serão dadas em termos da *medida logarítmica de deformação* e a *tensão rotacionada de Kirchhoff*. O uso deste par conjugado, definido na chamada configuração não tencionada, torna possível a utilização do mapeamento exponencial que, por sua vez, proporciona o uso dos algoritmos de mapeamento de retorno para a integração das equações evolutivas no mesmo formato que os utilizados para pequenas deformações.

Este trabalho apresenta uma investigação da aplicação do *método de elementos finitos* (MEF) e do *método de Galerkin livre de elementos* (EFG), ambos sob deformações finitas, na simulação do processo de compactação de espumas. No escopo do método de Galerkin livre de elementos a imposição das condições de contorno essenciais como também as condições de contato unilateral com atrito são feitas aplicando o *método do Lagrangeano aumentado*.

Alguns resultados numéricos são apresentados sob a condição axissimétrica e de estado plano de deformações, de maneira a se avaliar a performance do esquema numérico proposto.

# Abstract

In this work some propositions and applications in *computational mechanics* relative to polymeric foams are presented, within a finite deformation scope. Here, polymeric foam is a generic term to describe the behavior of a tridimensional cellular solid. These materials are also named as crushable foams and are typically used in energy absorption structures, involving a large range of applications. Other characteristic of these materials is its good mechanical strength associated with a low density, which can be explored in the development of light weight structures.

A constitutive model is proposed for modelling crushable foam materials assuming an elastoplastic behaviour. The elastic response of the material is modelled by *Hencky's* model, which is modified in order to include the dependency of relative density of the polymeric foam, motivated by the large volume reductions experienced by these materials in a compression loading process. The plastic behaviour of the material is modelled by a modified non associative von Mises plasticity model that incorporates the influence of the hydrostatic pressure and accounts for a non-linear isotropic and kinematic hardening law that governs the evolution of the yield surface.

The problem is formulated within the framework of a *total Lagrange description*, where a multiplicative decomposition of the deformation gradient is assumed and the constitutive relations is given in terms of the *rotated Kirchhoff stress* and the *logarithm strain measurement*. The advantage of choosing this conjugate stress-strain pair in the formulation of the constitutive relation, is that it leads to a return mapping whose form is the same as the one derived in the small deformation plasticity problem.

This work investigates the application of both the *Finite element method* (FEA) and also the *element-free Galerkin* (EFG) method to the simulation of crushable foams compaction processes. In the element-free Galerkin scope, the imposition of the essential boundary condition and also of the unilateral contact with friction condition are made by the application of the *Augmented Lagrangian method*.

Some numerical results are presented, under axisymmetric and plane strain assumption, in order to attest the performance of the proposed numerical scheme.

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Objetivo

Neste trabalho são propostos modelos constitutivos e métodos computacionais para a análise de problemas de grandes deformações envolvendo espumas poliméricas. Entende-se por espumas como um termo genérico que caracteriza diferentes tipos de sólidos celulares tridimensionais. As espumas poliméricas, ou *crushable foams*, são amplamente utilizadas na engenharia como absorvedores de energia em problemas de impacto e absorvedores de ruído em problemas de acústica. Outro fator que desperta o interesse nesse tipo de material é a capacidade de aliar boa resistência mecânica com baixa densidade podendo essa característica ser explorada em aplicações onde a redução de peso é uma prioridade.

O modelo constitutivo proposto modela a espuma como tendo um comportamento elasto-plástico o qual é dependente da pressão hidrostática. A resposta elástica é baseada no modelo de *Hencky*, o qual é modificado de tal forma a incorporar o efeito da densidade relativa na resposta do corpo. Esta dependência da densidade relativa é amplamente comprovada em ensaios experimentais, em testes de compressão hidrostática. A resposta plástica considera um modelo não associativo baseado no modelo de plasticidade de von Mises em que é incorporado o efeito da pressão hidrostática na resposta do material. O modelo considera uma lei de encruamento não-linear tanto isotrópico quanto cinemático em que a evolução da superfície de escoamento é controlada pela deformação plástica volumétrica sofrida pelo material.

O objetivo do trabalho consiste também em propor um método numérico capaz de simular problemas de deformações finitas de espumas poliméricas sujeito às condições de contato unilateral com atrito. Neste contexto são aplicados o método dos elementos finitos e o método de Galerkin livre de elementos (Element free Galerkin). mais especificamente, o procedimento considera:

- Uma descrição Lagrangeana total, para o problema de deformação finita sujeito a condições de contato unilateral com atrito;
- Uma decomposição multiplicativa do gradiente da deformação, em uma parte elástica e uma plástica;

- Uma relação constitutiva em termos da deformação logarítmica e do tensor de Kirchhoff rotacionado. O modelo elastoplástico é não associativo e incorpora a influência da pressão hidrostática;
- Um modelo de contato unilateral com atrito baseado nas hipóteses de Signorini e que utiliza uma regularização da lei de fricção de Coulomb;
- A imposição das condições de contorno essenciais e das condições de contato com atrito, no caso do método de Galerkin livre de elementos, pela aplicação do método do Lagrangeano aumentado.
- A solução de alguns problemas básicos visando a validação dos procedimentos e modelos propostos neste trabalho.

A fim de orientar o leitor e contextualizar este trabalho de uma forma mais ampla, é apresentado um breve resumo de cada um dos capítulos.

O **Capítulo 2** trata-se de uma revisão bibliográfica da mecânica e termodinâmica dos meios contínuos. Nele, questões fundamentais são revisadas de modo a se ter uma base conceitual para se atacar os problemas propostos no decorrer do trabalho. Dentre eles pode-se citar a cinemática da deformação dos corpos onde o entendimento de deformações não-homogêneas e homogêneas é abordado; os tipos de decomposição da deformação, i.e., aditiva e multiplicativa; as leis de conservação do momento linear e da energia, algumas medidas de deformação, o conceito de pares conjugados tensão deformação, o problema de valor no contorno em diferentes configurações; e por fim o método do estado local.

O **Capítulo 3** trata de maneira generalizada o enfoque de grandes deformações. A formulação apresentada considera uma descrição Lagrangiana total, a decomposição multiplicativa do gradiente de deformação em uma parte plástica e uma parte elástica. Ainda, utilizando-se o conceito de par conjugado, utiliza-se a medida logarítmica de deformação, também denominada medida de *Hencky*, e a tensão rotacionada de *Kirchhoff*. O uso deste par conjugado torna possível a utilização do chamado mapeamento exponencial que, por sua vez, proporciona o uso dos algoritmos de mapeamento de retorno no mesmo formato do que os encontrados na literatura para problemas de pequenas deformações. Ainda, alguns aspectos computacionais são abordados ao final deste capítulo.

O **Capítulo 4** se apresenta dentro da mesma formulação do Capítulo 3, ou seja, descrição Lagrangiana total, a decomposição multiplicativa do gradiente de deformação e o uso do mesmo par conjugado de modo a se utilizar o mesmo mapeamento do tipo exponencial. Porém o material tratado nesse capítulo trata-se dos sólidos celulares, o qual se apresenta em diferentes configurações quanto se trata da disposição geométrica de suas estruturas. Propõe-se então um modelo elastoplástico o qual também considera uma fase elástica, hiperelástica, e outra plástica do tipo  $J_2$ . Porém a lei constitutiva hiperelástica leva em consideração a dependência da densidade relativa, acrescentando dessa forma mais uma não-linearidade a ser considerada. O modelo para esse tipo de material, também adota uma lei de encruamento volumétrico, motivada nos estudos de estruturas em espuma, as quais apresentam respostas diferentes para compressão e tração. Alguns exemplos utilizando o método de elementos finitos (MEF) são apresentados.

O método de Galerkin livre de elementos (EFG) é apresentado no **Capítulo 5**, sendo explorado principalmente a construção das funções de forma a partir do método de mínimos quadrados móveis (MLSA). Também neste capítulo é abordada a definição das funções peso bem como a definição de como se apresentam os novos espaços de aproximação quando se utiliza o EFG. Ainda é apresentada a maneira adotada para se impor as condições de contorno essenciais do problema de valor no contorno.

Por fim no **Capítulo 6** é apresentada a formulação de contato e atrito. Tal formulação é implementada visando a simulação de processos onde o obstáculo seja um corpo indeformável, i.e., hipótese de *Signorini*, sendo este ainda composto apenas pela união de segmentos de reta. A implementação do contato é feita dentro do enfoque de deformações finitas apresentado no Capítulo 3 e os exemplos levam em consideração o modelo para espumas poliméricas já apresentado no Capítulo 4, resolvidos pelo método de Galerkin livre de elementos.

Alguns detalhes referentes a implementação e algumas características do modelo constitutivo são encontrados nos apêndices.

## 1.2 Materiais celulares

Quando se trata de materiais celulares, principalmente as espumas absorvedoras de impacto, ou *crushable foams*, aparecem em aplicações de engenharia como excelentes absorvedores de energia e possuem uma enorme área de aplicação, podendo-se citar entre outras áreas a indústria automotiva, indústria de componentes aeroespaciais, indústria de embalagens e a de construção civil. Em todas essas áreas, critérios de segurança a cada dia mais rigorosos devem ser atendidos. Nas indústrias de embalagens e transporte nota-se um permanente esforço na redução dos custos de produção, isso inclui custos e cuidados com a embalagem e o transporte, porém mantendo-se sempre a integridade do produto. Um outro fator que desperta o interesse nesse tipo de material é a capacidade de aliar boa resistência mecânica com baixa densidade podendo essa característica ser explorada em aplicações onde a redução de peso é uma necessidade.

### 1.2.1 O sólido celular

Um sólido celular trata-se de um material constituído por uma rede interconectada de suportes sólidos os quais formam as bordas e placas que constituem as paredes das células. Tipicamente esse tipo de material pode ser classificado em três configurações quanto a disposição geométrica de sua estrutura. A configuração mais simples é composta por uma disposição bidimensional de polígonos de modo a se preencher uma área plana, como exemplo células hexagonais similares às produzidas pelas abelhas. Por essa razão esse tipo de configuração é comumente chamada de *honeycombs*, ver Fig. 1.1. A configuração mais comum são as espumas<sup>1</sup>, nas quais células poliédricas preenchem um espaço tridimensional. Entende-se espuma como um termo genérico para qualquer tipo de material que apresenta essa configuração independentemente da origem do material. As espumas podem ser tanto de origem natural, como madeiras, cortiças e corais;

---

<sup>1</sup>Do inglês *foam*.



como as de origem manufaturada como espumas poliméricas, espumas metálicas, espumas em cerâmica ou vidro.

Se o sólido da qual a espuma é feita for composto apenas por bordas conectadas entre si, isto é, sem faces, a espuma é dita como sendo de célula aberta como exemplo os materiais mostrados nas Figs. 1.2, 1.4, 1.5, 1.7, 1.8 e 1.9. Caso contrário, se as faces também forem sólidas, a espuma é dita como sendo de célula fechada, como materiais mostrados nas Figs. 1.3 e 1.6. Ainda, algumas espumas são compostas parcialmente por células abertas e parcialmente por células fechadas. Dessa forma a geometria e as características das células são de grande importância na análise desse tipo de material.

O teor de células fechadas afeta diversas propriedades físicas importantes como a condutividade térmica, permeabilidade ao vapor d'água e absorção de água. A estrutura celular, bem como a formação de células transversas, tamanho das células e distribuição de tamanhos, influencia significativamente as propriedades das espumas. Uma estimativa do número de células por unidade de comprimento pode ser feita com o uso de um microscópio. Para a caracterização da anisotropia da espuma são medidos os valores paralelos e perpendiculares ao sentido da espumação. Uma melhor visão do interior da estrutura celular é obtida com o emprego da microscopia de varredura eletrônica que reproduz as relações tridimensionais das células transversas e membranas celulares.

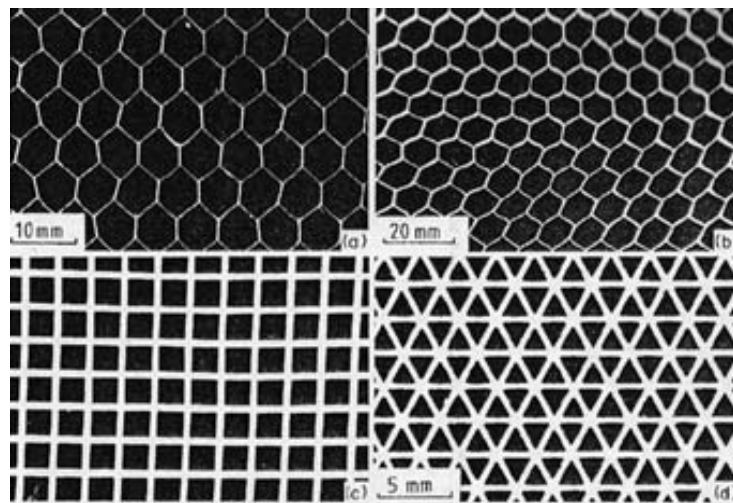


Figura 1.1: Materiais celulares bidimensionais: (a) colméia em alumínio; (b) colméia em papel com resina fenólica; (c) colméia cerâmica com células quadradas; (d) colméia cerâmica com células triangulares. GIBSON & ASHBY (1997).

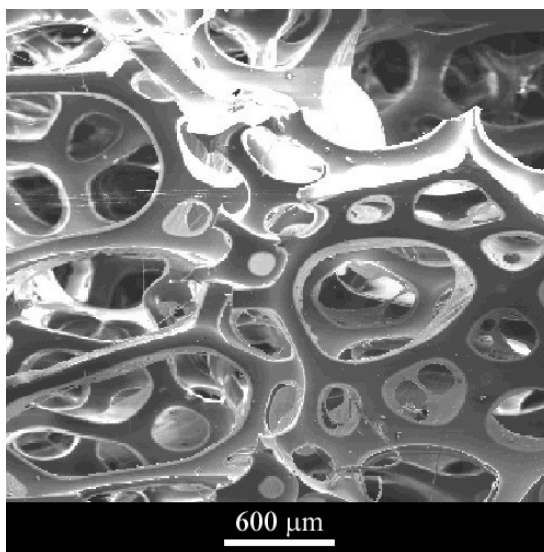


Figura 1.2: Espuma em poliuretano com células abertas. (© DoITPoMS Micrograph Library, University of Cambridge).

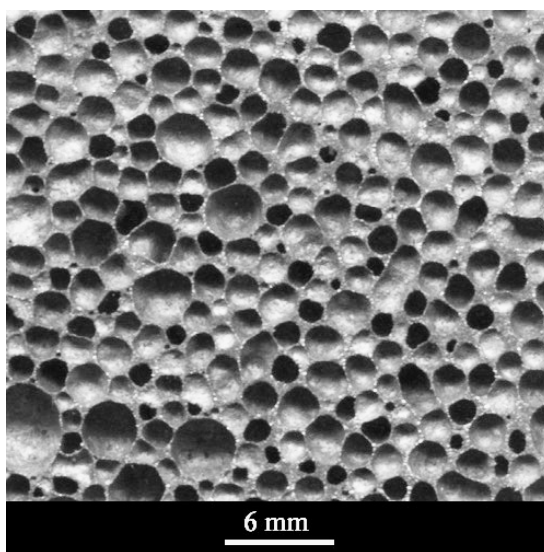


Figura 1.3: Espuma em alumínio com células fechadas. (© DoITPoMS Micrograph Library, University of Cambridge).

### 1.2.2 A densidade relativa

Os materiais celulares são caracterizados pela sua densidade relativa  $\rho^* = \rho/\rho_m$  e pelas suas propriedades. O termo densidade relativa, ou aparente, é usado para os materiais celulares devido ao fato de sua densidade ser calculada com o volume do material expandido e não somente o volume do polímero sólido (ASTM D 792). Assim  $\rho$  é a densidade do material celular e  $\rho_m$  a densidade do sólido da qual as paredes da célula são feitas. Espumas especiais de baixíssima densidade relativa podem ser produzidas, com valores da ordem de 0,001. Espumas poliméricas

convencionais, como exemplo as utilizadas em revestimentos e embalagens, possuem densidade relativas na ordem de 0,05 à 0,20; cortiças em torno de 0,14 e madeira na ordem de 0,15 à 0,40. À medida que a densidade relativa cresce as paredes da célula aumentam e o espaço poroso diminui. O valor de densidade relativa 0,3 é considerado um valor de transição. Materiais celulares são considerados tais que seu valor de densidade relativa seja inferior a 0,3. Materiais com valores superiores a 0,3 são considerados como sólidos contendo poros isolados.

### 1.2.3 Tipos de espumas

Quase todo material pode ser produzido na forma de espuma, porém os polímeros são os mais utilizados. Contudo, metais, cerâmicas, vidros e alguns compósitos podem ser fabricados de forma celular.

#### Espumas Poliméricas

Espumas poliméricas tratam-se de espumas sólidas, podendo ser flexíveis ou rígidas, produzidas a partir de materiais poliméricos. Como já dito, têm aplicações industriais como na embalagem de produtos frágeis, onde são utilizadas como material absorvedor de impacto. Podem ainda serem aplicadas como isolante térmico e/ou acústico, e no caso de polímero rígido podem ser utilizadas em sistemas de filtração. As desvantagens das espumas poliméricas estão relacionadas à baixa estabilidade térmica e química, o que limita as áreas de aplicação desses materiais.

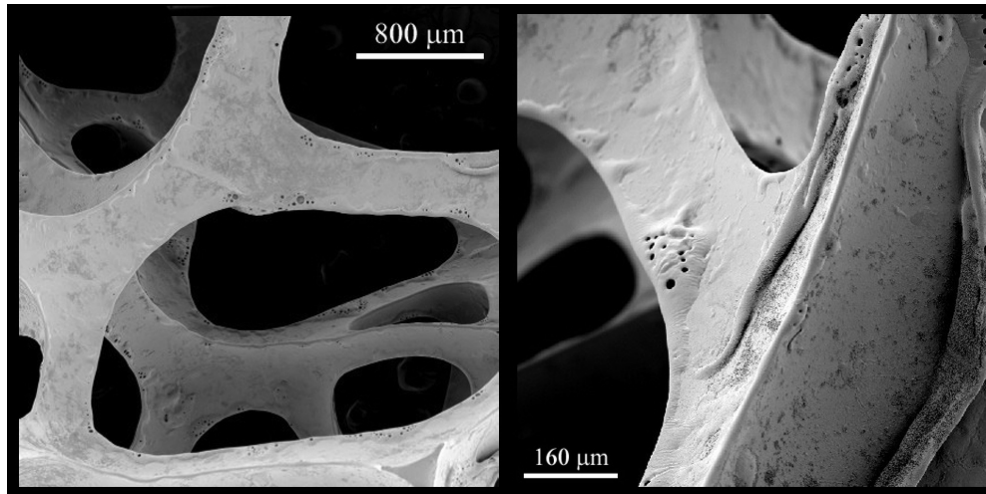


Figura 1.4: Espuma em Poliuretano com células abertas. (© DoITPoMS Micrograph Library, University of Cambridge).

#### Espumas Metálicas

As primeiras espumas metálicas foram fabricadas há mais de quarenta anos e atualmente são utilizados três processos básicos para sua produção: fusão, sinterização de pós metálicos e deposição de vapores metálicos. Uma das técnicas mais utilizadas é a dissolução de gás hidrogênio em metal fundido, onde a micro estrutura é controlada a partir do processo de resfriamento

e solidificação do material. Os materiais mais utilizados na produção de espumas metálicas são alumínio, cobre, estanho, ferro, níquel, titânio e zinco. São utilizadas em absorvedores de impacto, em processos de filtração como catalisadores e ainda em dissipadores de calor.

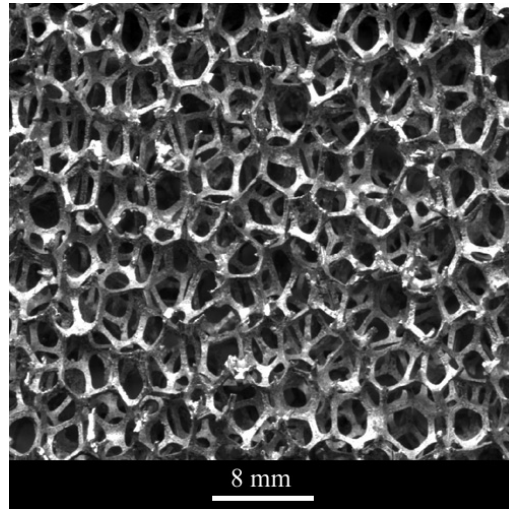


Figura 1.5: Espuma em alumínio com células abertas. (© *DoITPoMS Micrograph Library, University of Cambridge*).

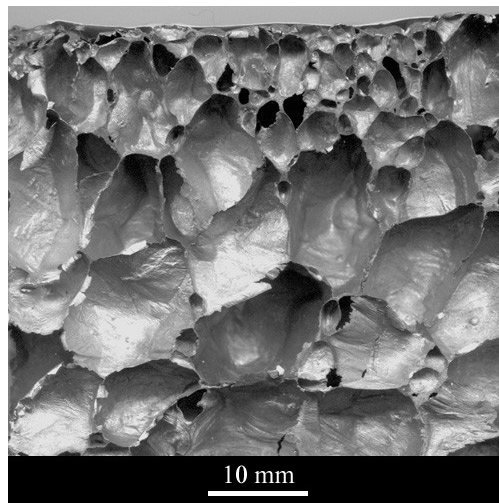


Figura 1.6: Espuma em alumínio com células fechadas e abertas, produzida por injeção de gás. (© *DoITPoMS Micrograph Library, University of Cambridge*).

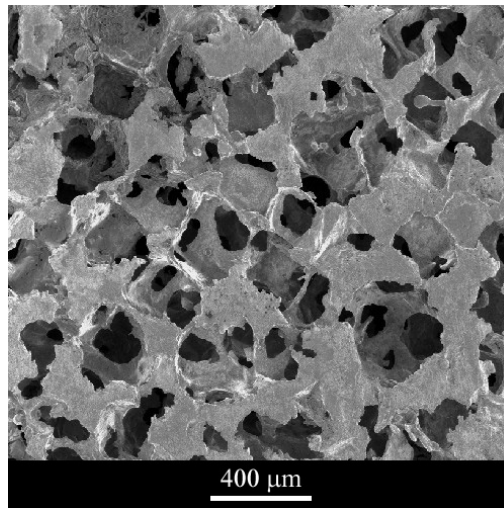


Figura 1.7: Espuma em alumínio com células abertas, produzida por sal sinterizado infiltrado. (© DoITPoMS Micrograph Library, University of Cambridge).

### Espumas Cerâmicas

Pode-se definir espumas cerâmicas como sendo o material sólido cerâmico, contendo cavidades de ar dispersas em suas estruturas possuindo uma elevada porosidade. Esses materiais possuem como características básicas a baixa densidade, como também uma baixa condutividade térmica e acústica inferiores aos materiais cerâmicos convencionais. São produzidas utilizando-se uma grande variedade de materiais cerâmicos, porém óxidos e não-óxidos são considerados os grandes potenciais em aplicações. As estruturas normalmente encontradas nesse tipo de espuma, apresentam células abertas, interconectadas com células vizinhas através de grandes canais. Atualmente tem crescido o interesse pelas aplicações desse tipo de espumas em isolamentos térmicos, assim como em filtros refratários para purificação de metais fundidos, filtros catalisadores e em componentes de aplicação biomédica.

#### 1.2.4 Propriedades físicas

Os sólidos celulares possuem propriedades físicas, mecânicas e térmicas as quais são mensuradas seguindo os mesmos métodos utilizados para os sólidos completamente densos. A Fig. 1.10 mostra algumas faixas de três propriedades: módulo de Young, densidade e esforço em compressão.

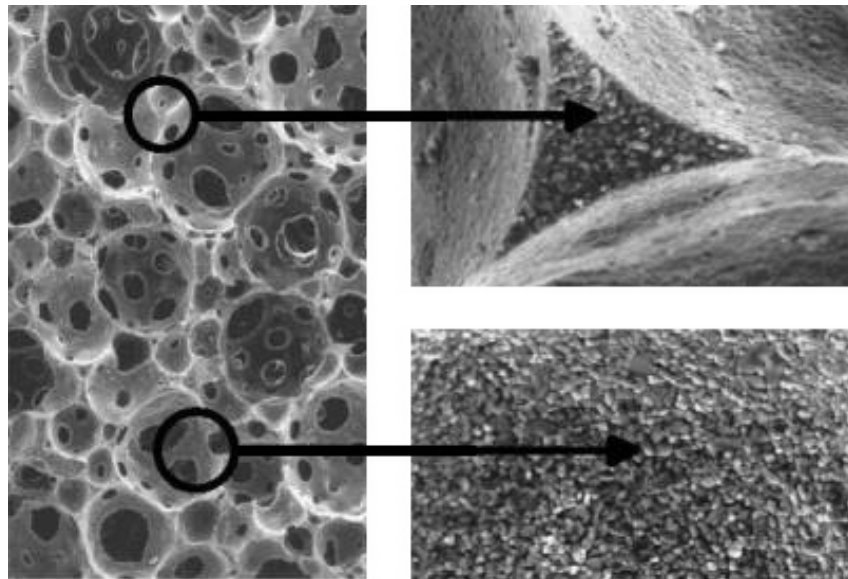


Figura 1.8: Espuma cerâmica em Alumina. (© IPTME - Loughborough University)

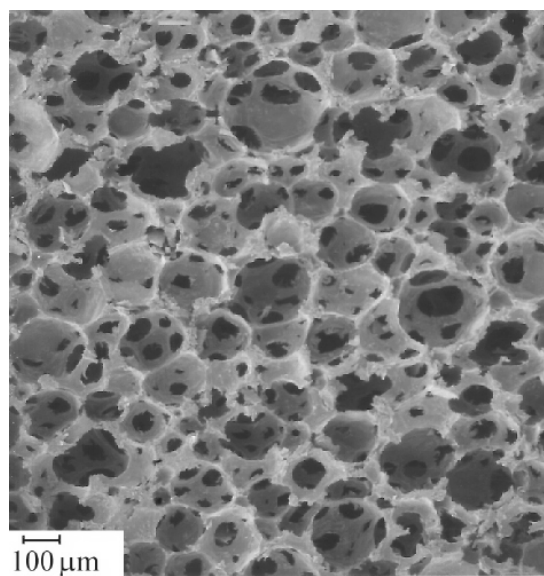


Figura 1.9: Espuma em Carbono. ROY & CAMPING (2003).

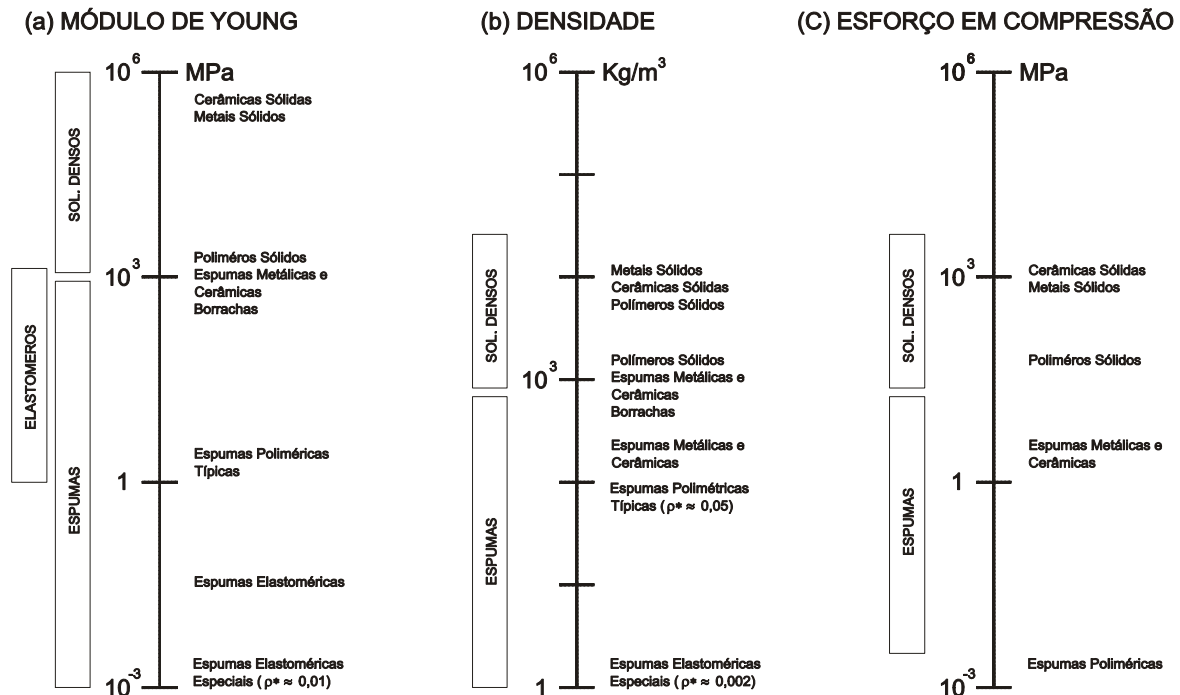


Figura 1.10: Algumas propriedades dos sólidos celulares.

### 1.2.5 Propriedades mecânicas

Em uma fase de desenvolvimento de produto onde o comportamento desses materiais é simulado, diversas análises numéricas são realizadas, porém muitas vezes os modelos constitutivos utilizados em programas comerciais não respondem de maneira adequada em aplicações onde a espuma está sujeita à grandes deformações. A sensibilidade à taxa de deformação é observada em SONG *et al.* (2004) e implica na necessidade de um modelo material sensível a taxa de deformação. GILCHRIS & MILLS (2001) em seus estudos constataram que os resultados obtidos utilizando-se modelos materiais de programas comerciais para o poliestireno de baixa densidade, diferem dos dados experimentais, especialmente quando as amostras foram sujeitas à grandes deformações, principalmente para carregamentos de tração e cisalhamento. HANSSEN *et al.* (2001) formularam um programa de validação de nove modelos constitutivos para espumas em alumínio, incluindo modelos implementados em softwares comerciais, e quando comparados com os resultados experimentais, nenhum dos modelos foi capaz de ser representativo de maneira a se ter uma precisão convincente para todos os casos de carregamento. Uma razão muito provável para isto é que nenhum deles considera os mecanismos de falha local e/ou global simultaneamente.

Curvas experimentais típicas para uma espuma polimérica sob compressão são apresentadas na Fig. 1.11, de maneira esquemática. Três regimes de comportamento podem ser identificados. Em um primeiro instante um regime elástico linear, com níveis de tensão relativamente baixos, devido à flexão das paredes celulares, seguido por um longo platô de colapso e por fim um regime de encruamento devido a um processo de densificação do material, onde o nível de tensões cresce

bruscamente.

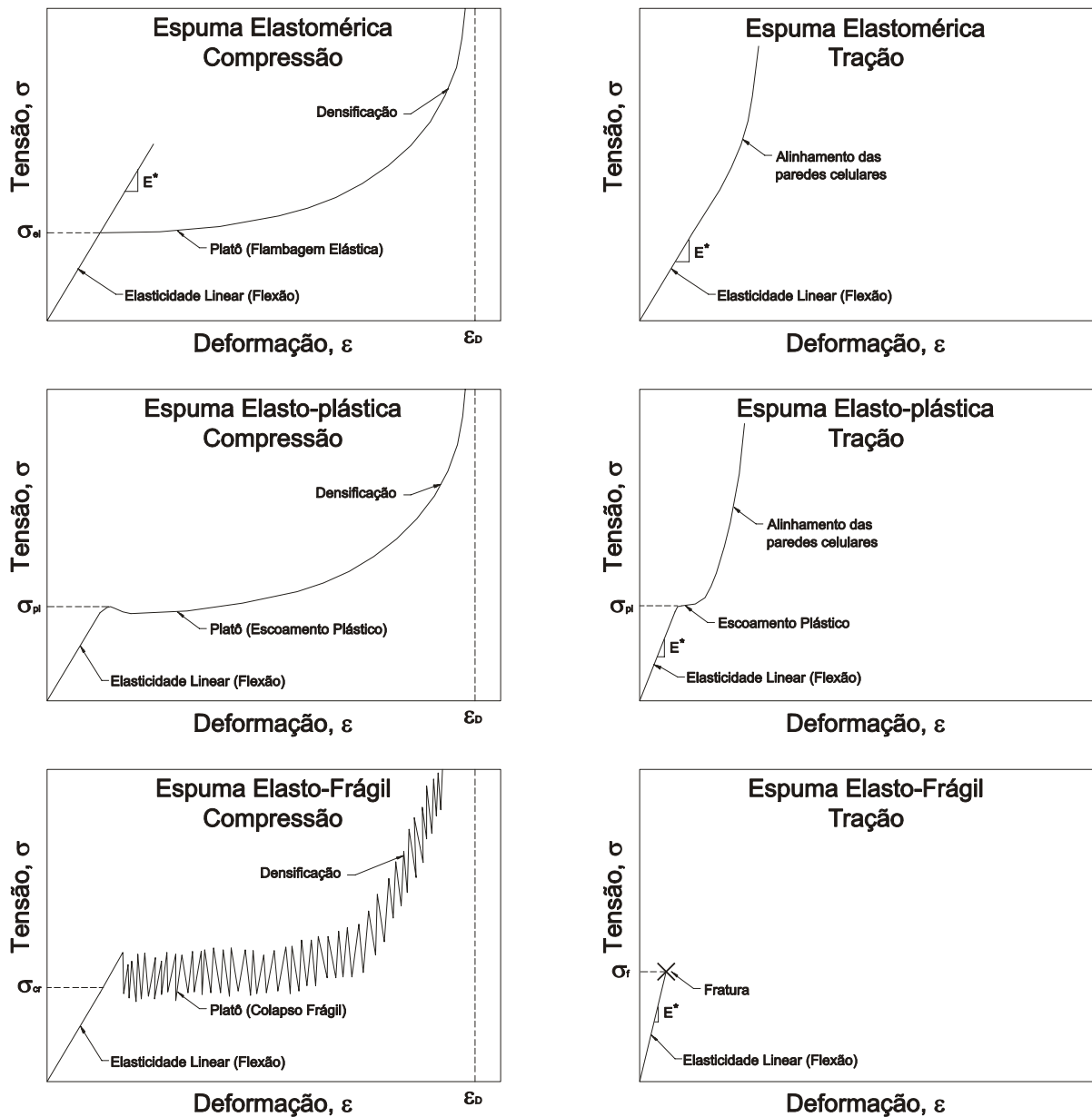


Figura 1.11: Representação esquemática para o comportamento de espumas sujeitas à carregamentos de compressão e tração.

Os mecanismos associados ao platô de colapso são diferentes visto que são dependentes das propriedades das paredes das células do material. Para espumas flexíveis esse platô é atribuído à flambagem elástica das paredes celulares. Para espumas rígidas e frágeis, o escoamento plástico e a fratura frágil são os principais mecanismos de falha, respectivamente. Por outro lado, sob tração, o comportamento das espumas, logo após o regime elástico é controlado pelo alinhamento das células na direção do carregamento e a curva tensão-deformação é finalmente truncada pela fratura dúctil ou frágil, conforme mostrado na Fig. 1.11.

A sensibilidade à taxa de deformação, à pressão hidrostática e aos efeitos de variação de



temperatura são importantes aspectos a serem considerados nas aplicações de espumas. As características da microestrutura como exemplo a configuração celular, o tamanho da célula e a espessura das paredes entre outras, conduzem a uma maior complexidade na caracterização das propriedades materiais das espumas, GIBSON & ASHBY (1988).

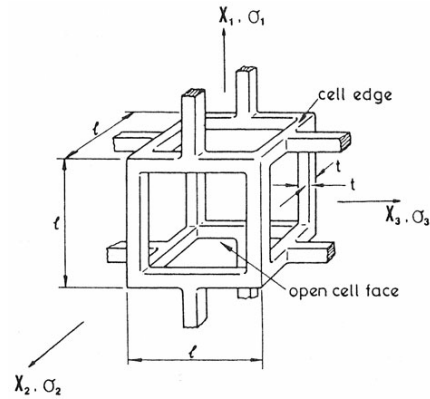


Figura 1.12: Modelo mecânico tridimensional de uma célula aberta cúbica sob um estado de tensões triaxial, GIBSON & ASHBY (1988).

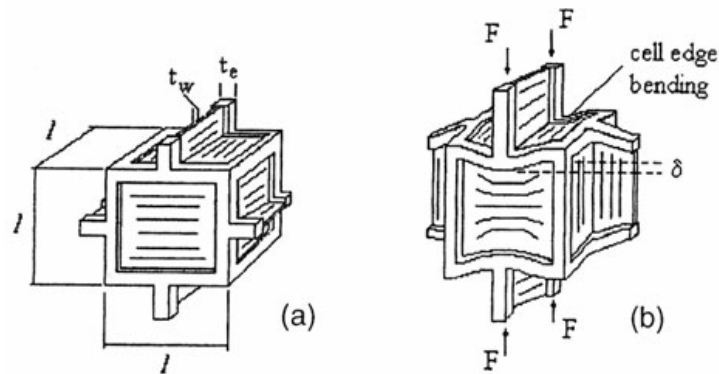


Figura 1.13: Modelo mecânico de um célula fechada. (a) configuração inicial; (b) configuração deformada. DI LANDRO *et al.* (2001).

## Capítulo 2

# Mecânica e Termodinâmica dos Meios Contínuos

### 2.1 Introdução

Este capítulo tem como objetivo apresentar conceitos básicos das teorias utilizadas para modelar os fenômenos de deformação e de ruptura de um meio contínuo. Para tal modelamento faz-se uso de simulações numéricas, as quais exigem um conhecimento mínimo de modelos matemáticos e métodos numéricos envolvidos no processo de resolução. Assim, a mecânica dos meios contínuos trata-se da base conceitual para a modelagem do comportamento de sólidos submetidos a solicitações mecânicas, resultando em um conjunto de equações diferenciais cuja solução, em geral, é obtida numericamente. O texto deste capítulo está baseado principalmente nos trabalhos de MALVERN (1969), LUBLINER(1990) e LEMAITRE(1992).

Nesse capítulo é também apresentado o Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV). Idealizado por D'Alembert (1750), o PTV obteve utilização sistemática somente a partir de 1970 devido ao desenvolvimento dos métodos variacionais e da análise funcional. Através do PTV e da escolha de um conjunto de movimentos virtuais compatíveis com o corpo em análise obtêm-se uma definição coerente das deformações, das equações de equilíbrio de forças e das condições de contorno apropriadas.

A fim de introduzir as variáveis utilizadas na caracterização dos fenômenos estudados, utiliza-se o enfoque da termodinâmica dos processos irreversíveis. A escolha de *Potenciais Termodinâmicos* e a utilização do *Método do Estado Local* permite a definição das variáveis associadas a partir das variáveis de estado, observáveis e internas, escolhidas em função dos fenômenos que se deseja modelar, conduzindo naturalmente às equações de estado. O pseudo potencial de dissipação fornece as leis complementares ou leis de evolução necessárias para a descrição dos processos irreversíveis considerados.

## 2.2 Cinemática da deformação de partículas

A cinemática trata-se do estudo do movimento, sem considerar as forças que o produz. Com intuito de se estudar a cinemática de deformação de um corpo<sup>1</sup> pode-se estudar individualmente o movimento de uma partícula pertencente a este corpo, visto que as deformações dependem da relação de vizinhança entre cada partícula do corpo.

### 2.2.1 Corpos e suas configurações

Um corpo pode ser considerado como sendo um conjunto de partículas, e que pode ser visualizado através de sua configuração, ou seja, a região ocupada em  $\mathfrak{R}^3$  pelas partículas no instante considerado.

Seja  $\mathfrak{B}$  o corpo considerado, onde  $\Omega_o$  denota o domínio do corpo, i.e., a região ocupada pelo corpo em  $t = 0$  e  $\Omega_t$  a região ocupada em um instante  $t$  qualquer, conforme mostrado na Fig. 2.1. Note que o corpo consiste sempre das mesmas partículas, sua configuração é que varia com o tempo.

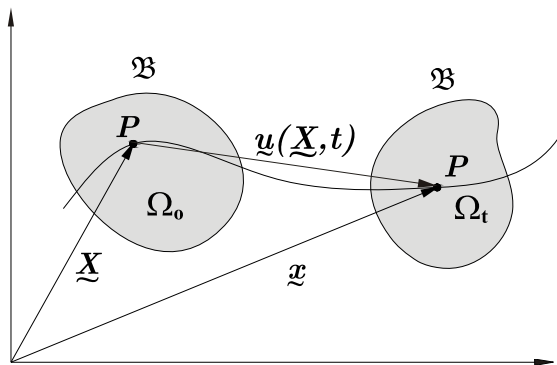


Figura 2.1: Configuração do Corpo  $\mathfrak{B}$ .

Seja  $P$  uma partícula de  $\mathfrak{B}$ . Para se determinar o movimento deste corpo é necessário acompanhar a trajetória de cada uma de suas partículas. Com objetivo de identificar cada partícula  $P$  de  $\mathfrak{B}$ , define-se uma configuração de referência que associa a cada partícula a sua posição ocupada nessa configuração, como mostra a Fig. 2.2.

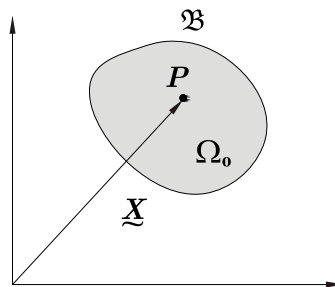


Figura 2.2: Configuração de Referência.

<sup>1</sup>Daqui em diante considera-se que toda vez que citada a palavra corpo, este trata-se de um corpo contínuo.

### 2.2.2 Movimento e Deformação do corpo $\mathfrak{B}$

O movimento do corpo  $\mathfrak{B}$  é descrito pelo vetor posição  $\vec{x} = \varphi(\vec{X}, t)$  do ponto, ocupado por cada partícula  $P$  de  $\mathfrak{B}$ , a cada instante de tempo  $t$ .

$$\vec{x} = \varphi(\vec{X}, t) = \varphi_t(\vec{X}). \quad (2.1)$$

Uma vez que essa função vetorial descreve como o corpo  $\mathfrak{B}$  muda ou deforma de uma configuração para outra, ela então é denotada como *função deformação*.

Considerando um dado instante  $t$  fixo, se a posição  $\vec{X}$  de uma partícula  $P$  na configuração de referência  $\Omega_o$  é especificada, então Eq.(2.1) fornece a posição  $\vec{x}$  de  $P$  em  $\Omega_t$ . Assim, tem-se que

$$\Omega_t = \varphi(\Omega_o, t) = \varphi_t(\Omega_o). \quad (2.2)$$

Sendo  $P$  uma partícula de  $\mathfrak{B}$  que ocupa a posição  $\vec{X}$  em  $\Omega_o$  (fixa), a trajetória da partícula  $P$  ao longo do tempo é dada pela Eq.(2.1), onde  $\vec{x}$  representa o lugar geométrico ocupado pela partícula  $P$  no instante  $t$ .

Assim surgem duas formas clássicas de descrição do movimento de um corpo. A descrição *material* ou *Lagrangeana* e a descrição *espacial* ou *Euleriana*. A descrição material trata do movimento/deformação na qual a posição  $\vec{X}$  de uma partícula  $P$  em  $\Omega_o$  é uma variável independente. Assume-se que o mapeamento  $\vec{x} = \varphi_t(\vec{X})$ , para cada  $t$ , é um para um, i.e., para cada  $t$ , o mapeamento inverso existe e é denotado por  $\varphi_t^{-1}(\cdot)$ . Assim,

$$\vec{X} = \varphi_t^{-1}(\vec{x}). \quad (2.3)$$

Já na descrição espacial do movimento/deformação a posição  $\vec{x}$ , de uma partícula  $P$  em  $\Omega_t$ , é que é uma variável independente. Desta forma

$$\vec{v}(\vec{x}, t) = \vec{v}(\varphi_t(\vec{X}), t) = \vec{V}(\vec{X}, t) \quad (2.4)$$

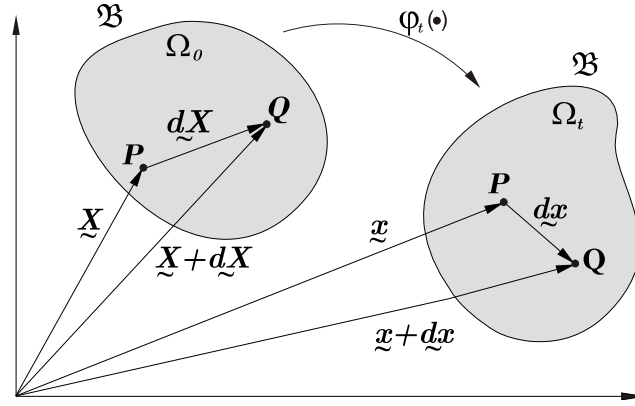
ou

$$\vec{V}(\vec{X}, t) = \vec{V}(\varphi_t^{-1}(\vec{x}), t) = \vec{v}(\vec{x}, t). \quad (2.5)$$

Após descrito a cinemática do movimento do corpo é necessário ainda estabelecer sua cinemática de deformação.

### 2.2.3 Cinemática da deformação de um corpo

"Diz-se que um corpo sofre um deslocamento de corpo rígido, se a distância entre todas as suas partículas não sofre mudança, do contrário o corpo é dito deformado.", LUBLINER (1990). O mecanismo de deformação pode ocorrer de várias formas, podendo ser dada por deformação homogênea ou não-homogênea. A Fig. 2.3 abaixo mostra como se dá o mapeamento de deformação não-homogênea, entretanto para deformação homogênea pode-se fazer o mesmo por analogia, mas somente o mapeamento do ponto  $P$ .


 Figura 2.3: Cinemática genérica para a deformação de um corpo  $\mathfrak{B}$ .

### Deformação Não Homogênea

Considere um movimento genérico, conforme ilustrado na Fig. 2.3, e um conjunto de partículas  $P$  e  $Q$  do corpo  $\mathfrak{B}$  onde  $\vec{X}$  e  $\vec{X} + d\vec{X}$  são os vetores posição de  $P$  e  $Q$  respectivamente, na configuração de referência. Na configuração atual,  $P$  e  $Q$  ocupam as posições  $\vec{x}$  e  $\vec{x} + d\vec{x}$  respectivamente. Agora para as partículas  $P$  e  $Q$ , tem-se a partir da Eq.(2.2) que

$$\vec{x} + d\vec{x} = \varphi \left( \vec{X} + d\vec{X}, t \right). \quad (2.6)$$

Assumindo que, para cada  $t$ , o mapeamento  $\varphi_t(\cdot)$  é suave, pode-se então expandir a Eq.(2.2) em uma série de Taylor e obter-se

$$x_i + dx_i = \varphi_i \left( \vec{X}, t \right) + \frac{\partial \varphi_i \left( \vec{X}, t \right)}{\partial X_j} dX_j + \mathcal{O} \left( dX_j^2 \right) \quad (2.7)$$

no qual

$$\lim_{dX_j \rightarrow 0} \frac{\mathcal{O} \left( dX_j^2 \right)}{dX_j} = 0. \quad (2.8)$$

Subtraindo-se a Eq.(2.7) da Eq.(2.1), e negligenciando os termos de ordem superior, obtém-se

$$dx_i = \frac{\partial \varphi_i \left( \vec{X}, t \right)}{\partial X_j} dX_j, \quad (2.9)$$

que pode ser escrito na forma compacta

$$d\vec{x} = \mathbf{F} \left( \vec{X}, t \right) d\vec{X}, \quad (2.10)$$

em que

$$\mathbf{F} \left( \vec{X}, t \right)_{ij} = \frac{\partial \varphi_i \left( \vec{X}, t \right)}{\partial X_j} \quad (2.11)$$

ou

$$\mathbf{F}(\vec{X}, t) = \nabla_{\vec{X}} \varphi_t(\vec{X}), \quad (2.12)$$

O determinante do gradiente da deformação,  $\det(\mathbf{F})$ , também conhecido como Jacobiano da deformação  $J$ , representa *localmente*, a relação entre o volume atual  $V_t$  e o volume inicial  $V_o$ , i.e.,

$$J = \det(\mathbf{F}) = \frac{V_t}{V_o}. \quad (2.13)$$

Quando o Jacobiano da deformação é igual a 1, a deformação é denominada isocórica, indicando que ocorreu deformação à volume constante.

### Deformação Homogênea

Um corpo é sujeito a uma deformação homogênea se o mapeamento da deformação tem a seguinte forma:

$$\vec{x} = \varphi(\vec{X}, t) = [\mathbf{F}(t)]\vec{X} \quad (2.14)$$

Note que o mapeamento da deformação neste caso é dado por uma função linear. O tensor  $[\mathbf{F}(t)]$  é uma função somente de  $t$ . Na forma de componentes, pode-se escrever o mapeamento na forma,

$$x_i = F_{ij}X_j \quad (2.15)$$

Como a relação do mapeamento da deformação é bijetiva e sobrejetiva, admite inversa. Então a equação linear Eq.(2.15) tem solução

$$\vec{X} = [\mathbf{F}(t)]^{-1}\vec{x}. \quad (2.16)$$

Assim,  $[\mathbf{F}(t)]$  não é singular e tem-se que o determinante de  $\mathbf{F}$  é diferente de zero, i.e.,  $\det[\mathbf{F}(t)] \neq 0$ .

### Decomposição da Deformação

A deformação pode ser decomposta como sendo a composição de uma deformação pura seguida de uma rotação pura. A rotação pura ocorre quando cada linha de um elemento do corpo não sofre alteração em seu tamanho, somente uma alteração na sua orientação, como mostra a Fig. 2.4.

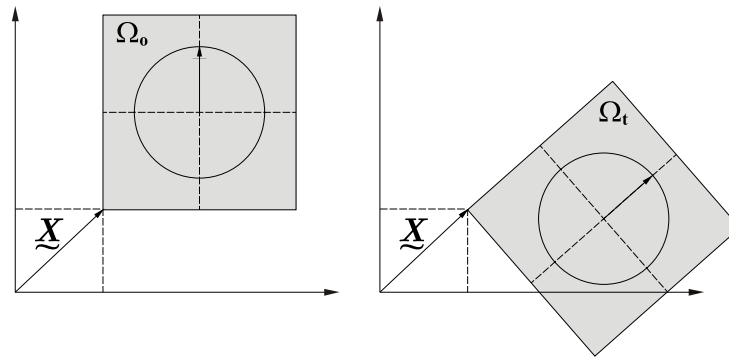


Figura 2.4: Rotação pura.

O movimento/deformação representando uma rotação pura tem a seguinte forma:

$$\vec{x} = [\mathbf{R}(t)]\vec{X} \quad (2.17)$$

ou

$$x_i = R_{ij}X_j, \quad (2.18)$$

onde  $\mathbf{R} = \mathbf{R}(t)$  não depende de  $\vec{X}$  e é tal que

$$[\mathbf{R}]^T[\mathbf{R}] = [\mathbf{R}][\mathbf{R}]^T = [\mathbf{I}]. \quad (2.19)$$

Note que  $\det[\mathbf{R}] = \pm 1$ , quando  $\det[\mathbf{R}] = 1$  a rotação é dita ser própria. No caso em que  $\det[\mathbf{R}] = -1$  temos uma reflexão, i.e., a deformação não representa uma rotação pura.

Já a deformação pura, ocorre quando existem linhas de elemento do corpo que sofrem alteração em seu tamanho, sem que ocorra uma alteração em sua orientação, como mostra a Fig. 2.5.

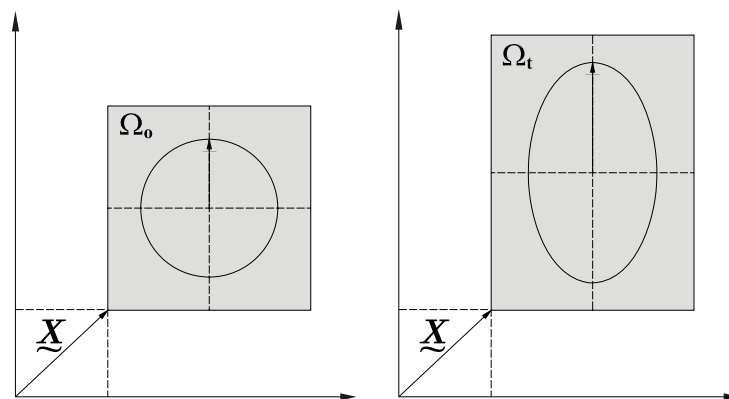


Figura 2.5: Deformação pura.

Um movimento/deformação homogênea é pura quando tem a seguinte forma.

$$\vec{x} = [\mathbf{U}(t)]\vec{X} \quad (2.20)$$

$$x_i = U_{ij} X_j, \quad (2.21)$$

em que  $\mathbf{U} = \mathbf{U}(t)$  não depende de  $\vec{X}$ , e é tal que :

$$[\mathbf{U}(t)] = [\mathbf{U}(t)]^T. \quad (2.22)$$

Note que, como  $\mathbf{U}$  é simétrico,  $\mathbf{U}$  é diagonalizável e, como  $\det[\mathbf{F}] > 0$ ,  $\det(\mathbf{U}) > 0$ . Esta forma de mapeamento da deformação tem a propriedade de que se existe uma linha de elementos  $\vec{D}$  em  $\Omega_o$  a qual é estirada mas não rotacionada dentro do estado  $\vec{d}$  na configuração atual  $\Omega_t$ , tem-se

$$\vec{d} = [\mathbf{U}]\vec{D} = \lambda\vec{D} \quad (2.23)$$

i.e.,

$$\begin{aligned} [\mathbf{U}]\vec{D} &= \lambda[\mathbf{I}]\vec{D} \\ 0 &= ([\mathbf{U}] - \lambda[\mathbf{I}])\vec{D} \end{aligned} \quad (2.24)$$

sendo  $\vec{D}$  é o vetor próprio e  $\lambda$  o valor próprio. Logo, os elementos da linha  $\vec{D}$  na direção de um vetor próprio são estendidos de  $\lambda$  e não sofrem rotação.

### Decomposição Polar da Deformação

Uma deformação genérica pode ser decomposta por uma deformação/estiramento puro seguida de uma rotação pura,

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} \quad (2.25)$$

ou uma rotação pura seguida de uma deformação/estiramento puro

$$\mathbf{F} = \mathbf{V}\mathbf{R} \quad (2.26)$$

na qual  $\mathbf{R}$  é o tensor rotação;  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{V}$  são os tensores alongações (estiramentos) direito e esquerdo respectivamente.

A noção de superposição de uma rotação e um estiramento como usado em elasticidade linear não é usada em problemas de grandes deformações. Em pequenas deformações, as deformações são combinadas por adição, i.e., tem-se uma decomposição aditiva. Em grandes deformações, duas deformações devem ser combinadas sequencialmente por composição, i.e., tem-se uma decomposição multiplicativa.

Do teorema da decomposição polar no qual os tensores  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{V}$  são calculados a partir dos tensores  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{B}$  chamados tensores deformação de *Cauchy-Green* direito e esquerdo, tem-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \mathbf{U}^2 = \mathbf{F}^T\mathbf{F} \\ \mathbf{B} &= \mathbf{V}^2 = \mathbf{F}\mathbf{F}^T \end{aligned} \quad (2.27)$$



Entretanto, já que  $\varphi_t(\cdot)$  é invertível e suave, pode-se escrever

$$d\vec{X} = \mathbf{F}(\vec{x}, t)^{-1} d\vec{x}, \quad (2.28)$$

em que

$$\mathbf{F}^{-1}(\vec{x}, t)_{ij} = \frac{\partial \varphi_i^{-1}(\vec{x}, t)}{\partial x_j} \quad (2.29)$$

ou na forma compacta

$$\mathbf{F}^{-1}(\vec{x}, t) = \nabla_x \varphi_t^{-1}(\vec{x}). \quad (2.30)$$

Nota-se que

$$\begin{aligned} d\vec{v} &= \frac{d}{dt} \{d\vec{x}\} = \frac{d}{dt} \left\{ \mathbf{F}(\vec{X}, t) d\vec{X} \right\} \\ &= \dot{\mathbf{F}}(\vec{X}, t) d\vec{X}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Entretanto, para cada  $t$ ,

$$\begin{aligned} \vec{v}(\vec{x} + d\vec{x}, t) &= \vec{v}(\vec{x}, t) + \nabla_x v(\vec{x}, t) d\vec{x} + \mathcal{O}(dx^2) \\ &= \vec{v}(\vec{x}, t) + d\vec{v}(\vec{x}, t). \end{aligned} \quad (2.32)$$

Negligenciando os termos de ordem superior,  $\mathcal{O}$ , tem-se

$$d\vec{v} = \nabla_x \vec{v}(\vec{x}, t) d\vec{x}. \quad (2.33)$$

Define-se então a função  $\mathbf{L}(\vec{x}, t)$

$$\mathbf{L}(\vec{x}, t) = \nabla_x \vec{v}(\vec{x}, t), \quad (2.34)$$

pode-se então escrever

$$d\vec{v} = \mathbf{L} d\vec{x}. \quad (2.35)$$

Igualando as Eqs.(2.35) e (2.31) e usando a Eq.(2.28), deriva-se

$$d\vec{v} = \mathbf{L} d\vec{x} = \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} d\vec{x} \quad (2.36)$$

i.e.

$$\left[ \mathbf{L} - \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} \right] d\vec{x} = 0. \quad (2.37)$$

Sabendo que a Eq.(2.37) deve ser respeitada para todo  $d\vec{x}$ , finalmente obtém-se

$$\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} \quad (2.38)$$

ou a forma equivalente,

$$\dot{\mathbf{F}} = \mathbf{L} \mathbf{F}. \quad (2.39)$$

na qual  $\dot{\mathbf{F}}$  é a taxa de variação do gradiente da deformação e  $\mathbf{L}$  o gradiente espacial do campo de velocidades.

## 2.3 Leis de conservação

### 2.3.1 Conservação da massa

A massa do corpo  $\mathfrak{B}$  é dada, na configuração inicial, como

$$m_o = \int_{\Omega_o} \rho_o(\vec{X}) d\Omega_o \quad (2.40)$$

e, na configuração atual como sendo

$$m_t = \int_{\Omega_t} \rho(\vec{x}, t) d\Omega_t. \quad (2.41)$$

Admitindo que a massa é conservada pode-se escrever que  $m_o = m_t$ , i.e.,

$$\int_{\Omega_o} \rho_o(\vec{X}) d\Omega_o = \int_{\Omega_t} \rho(\vec{x}, t) d\Omega_t. \quad (2.42)$$

Todavia, do calculo integral, para uma mudança de variável, da forma,  $\vec{x} = \varphi_t(\vec{X})$ , e seguindo a Eq.(2.13), obtém-se

$$d\Omega_t = J(\vec{X}, t) d\Omega_o. \quad (2.43)$$

Como resultado, da Eq.(2.41), deriva-se

$$\int_{\Omega_t} \rho(\vec{x}, t) d\Omega_t = \int_{\Omega_o} \rho(\varphi_t(\vec{X}), t) J(\vec{X}, t) d\Omega_o. \quad (2.44)$$

Substituindo a Eq.(2.44) na Eq.(2.42), e isolando os termos, obtém-se

$$\int_{\Omega_o} \rho_o(\vec{X}) - \rho(\varphi_t(\vec{X}), t) J(\vec{X}, t) d\Omega_o = 0. \quad (2.45)$$

Como  $\Omega_o$  é arbitrário

$$\rho_o(\vec{X}) = \rho(\varphi_t(\vec{X}), t) J(\vec{X}, t), \quad \forall \vec{X} \in \Omega_o \text{ e tempo } t. \quad (2.46)$$

### 2.3.2 Conservação do Momento Linear

A resultante das forças atuando num corpo  $\mathfrak{B}$  num instante de tempo  $t$  é igual à taxa de variação do momento linear no mesmo instante. O mesmo se estende para os momentos atuantes com relação à conservação do momento angular. Ante, a descrição das leis de conservação do momento, cabe atentar para a definição de tensão devido ao fato de que as forças internas de um corpo serem apresentadas em função da tensão.

Sabe-se intuitivamente que forças aplicadas na superfície de um meio são transmitidas de alguma maneira através desse meio. A questão é de que maneira essas forças são transmitidas. Usando o conceito de tensão esta ação pode ser perfeitamente entendida. Deste modo, se a distribuição de tensão em um meio é conhecida, pode-se perfeitamente descrever a maneira pela

qual a força é transmitida através do meio. Assim, a tensão em um ponto é definida por

$$\boldsymbol{\sigma} = \lim_{\delta A \rightarrow 0} \frac{d\vec{F}}{dA} \quad (2.47)$$

em que  $dA$  é um elemento de área, entorno de um ponto  $P$ , sobre a qual atua a força  $d\vec{F}$  como indicado na Fig. 2.6. Como  $P$  está definido na configuração atual,  $\boldsymbol{\sigma}$  é o tensor tensão de *Cauchy*.

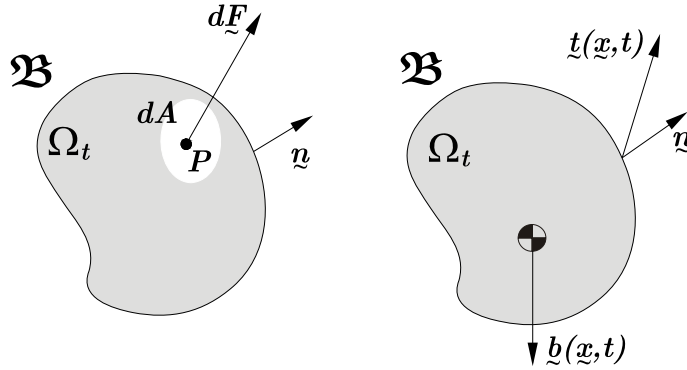


Figura 2.6: Superfície de tração e forças em  $\mathfrak{B}$ .

Agora assim pode-se então descrever as forças atuantes no corpo. Tem-se então as *forças de corpo*,  $\vec{b}(\vec{x}, t)$ , expressas por unidade de massa,

$$\int_{\Omega_t} \rho(\vec{x}, t) \vec{b}(\vec{x}, t) d\Omega_t \quad (2.48)$$

e as *forças de superfície*,  $\vec{t}(\vec{x}, t, \vec{n})$ , provenientes de trações prescritas no contorno e das reações nos apoios, assim tem-se

$$\vec{t}(\vec{x}, t, \vec{n}) = \boldsymbol{\sigma}(\vec{x}, t) \vec{n}(\vec{x}, t) \quad (2.49)$$

com

$$\int_{\partial\Omega_t} \vec{t}(\vec{x}, t, \vec{n}) dA_t = \int_{\partial\Omega_t} \boldsymbol{\sigma}(\vec{x}, t) \vec{n}(\vec{x}, t) dA_t. \quad (2.50)$$

Com as definições acima, a conservação do momento linear pode ser escrita como

$$\int_{\Omega_t} \rho(\vec{x}, t) \vec{b}(\vec{x}, t) d\Omega_t + \int_{\partial\Omega_t} \boldsymbol{\sigma}(\vec{x}, t) \vec{n}(\vec{x}, t) dA_t = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho(\vec{x}, t) \vec{x}(\vec{x}, t) d\Omega_t. \quad (2.51)$$

Todavia, fazendo uso do Teorema da Divergência, deriva-se:

$$\int_{\partial\Omega_t} \boldsymbol{\sigma}(\vec{x}, t) \vec{n}(\vec{x}, t) dA_t = \int_{\Omega_t} \text{div}[\boldsymbol{\sigma}(\vec{x}, t)] d\Omega_t. \quad (2.52)$$

Agora, substituindo a Eq.(2.52) na Eq.(2.51), obtém-se

$$\int_{\Omega_t} \rho(\vec{x}, t) \vec{b}(\vec{x}, t) d\Omega_t + \int_{\Omega_t} \text{div}[\boldsymbol{\sigma}(\vec{x}, t)] d\Omega_t = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho(\vec{x}, t) \vec{x}(\vec{x}, t) d\Omega_t. \quad (2.53)$$

Porém,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho \dot{\vec{x}} d\Omega_t &= \frac{d}{dt} \int_{\Omega_o} \rho \dot{\vec{x}} J d\Omega_o = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_o} \rho_o \dot{\vec{x}} d\Omega_o \\ &= \int_{\Omega_o} \rho_o \ddot{\vec{x}} d\Omega_o = \int_{\Omega_t} \rho \ddot{\vec{x}} d\Omega_t. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Como consequência,

$$\int_{\Omega_t} \left[ \rho \vec{b} + \text{div} [\boldsymbol{\sigma}] - \rho \ddot{\vec{x}} \right] d\Omega_t = 0. \quad (2.55)$$

Agora, sabendo que  $\Omega_t$  é arbitrário, finalmente obtém-se a equação de movimento:

$$\text{div} [\boldsymbol{\sigma}] + \rho \vec{b} = \rho \ddot{\vec{x}} \text{ para } \forall \vec{x} \in \Omega_t \text{ e tempo } t. \quad (2.56)$$

### 2.3.3 Primeiro e Segundo tensor de Piola-Kirchhoff

A equação de equilíbrio de movimento, Eq.(2.56), é definida na configuração de atual, i.e., em  $\Omega_t$ . Esta equação de equilíbrio pode ser descrita de maneira análoga na configuração de referência, usando o primeiro e o segundo tensor de *Piola-Kirchhoff*.

Considere  $d\vec{F}$  como sendo a força que atua no elemento de área deformado  $dA_t$  no tempo  $t$ , ou seja na configuração atual. O primeiro tensor tensão de *Piola-Kirchhoff*,  $\mathbf{P}$ , expressa a força  $d\vec{F}$  porém por unidade de área não deformada  $dA_o$ , sendo expresso em termos da normal  $\vec{N}$  de  $dA_o$  em  $\vec{X}$ , ou seja, na configuração de referência, conforme mostra a Fig. 2.7.

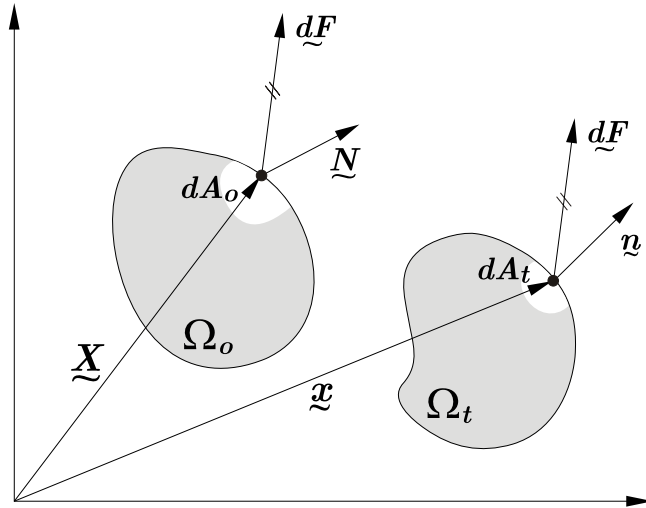


Figura 2.7: Representação da mesma força  $d\vec{F}$  nas diferentes configurações.

Assim,

$$d\vec{F} = P \vec{N} dA_o = \boldsymbol{\sigma} \vec{n} dA_t. \quad (2.57)$$

O segundo tensor tensão de *Piola-Kirchhoff*,  $\mathbf{S}$ , denota a força  $d\vec{F}$  relacionada com a força  $d\vec{F}$  da mesma maneira que o vetor material  $d\vec{X}$  em  $X$  é relacionado pela deformação de modo

a ser correspondente ao vetor espacial  $d\vec{x}$  em  $x$ , i.e.,

$$\overrightarrow{d\vec{F}} = \mathbf{F}^{-1}d\vec{F}. \quad (2.58)$$

Assim,

$$\mathbf{S} \vec{N} dA_o = \overrightarrow{d\vec{F}}. \quad (2.59)$$

Contudo,

$$\mathbf{S} \vec{N} dA_o = \mathbf{F}^{-1}d\vec{F} = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{P} \vec{N} dA_o \quad (2.60)$$

i.e.

$$[\mathbf{S} - \mathbf{F}^{-1}\mathbf{P}] \vec{N} dA_o = 0, \quad (2.61)$$

o qual deve se conservar para qualquer direção  $\vec{N} dA_o$ . Então

$$\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{P} \quad (2.62)$$

ou

$$\mathbf{P} = \mathbf{F}\mathbf{S}. \quad (2.63)$$

Utilizando a relação entre os vetores normais, nas configurações atual e de referência, dada pela *relação de áreas*

$$\vec{n} dA_t = \det[\mathbf{F}] \mathbf{F}^{-T} \vec{N} dA_o, \quad (2.64)$$

pode-se então relacionar o primeiro e o segundo tensor tensão de *Piola-Kirchhoff* com o tensor tensão de *Cauchy*, assim

$$\mathbf{S} \vec{N} dA_o = \det[\mathbf{F}] \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T} \vec{N} dA_o \quad (2.65)$$

i.e.

$$[\mathbf{S} - \det[\mathbf{F}] \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T}] \vec{N} dA_o = 0. \quad (2.66)$$

Sabendo que o resultado acima deve se conservar para qualquer direção  $\vec{N}$ , pode-se então concluir que

$$\mathbf{S} = \det[\mathbf{F}] \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T} \quad (2.67)$$

ou

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{\det[\mathbf{F}]} \mathbf{F} \mathbf{S} \mathbf{F}^T. \quad (2.68)$$

Por outro lado,  $d\vec{F} = P \vec{N} dA_o = \boldsymbol{\sigma} \vec{n} dA_t$ . Então

$$\mathbf{P} \vec{N} dA_o = \det[\mathbf{F}] \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T} \vec{N} dA_o \quad (2.69)$$

i.e.

$$[\mathbf{P} - \det[\mathbf{F}] \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T}] \vec{N} dA_o = 0 \quad (2.70)$$

o que implica em

$$\mathbf{P} = \det[\mathbf{F}] \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T} \quad (2.71)$$

ou

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{\det[\mathbf{F}]} \mathbf{P} \mathbf{F}^T. \quad (2.72)$$

### 2.3.4 A Equação de equilíbrio na configuração de referência

A equação do movimento definida na configuração de referência é derivada da condição de que o vetor soma das forças externas atuando no material em  $\Omega_t$ , o qual inicialmente ocupava  $\Omega_o$  em  $t = 0$ , é igual à taxa de variação do momento. Contudo, na configuração atual,  $\Omega_t$ , tem-se que

$$\int_{\Omega_t} \rho \vec{b} d\Omega_t + \int_{\partial\Omega_t} \vec{t} dA_t = \int_{\Omega_t} \rho \ddot{\vec{x}} d\Omega_t, \quad (2.73)$$

onde  $\vec{t} = \boldsymbol{\sigma} \vec{n}$  é a tração de superfície aplicada na fronteira  $\partial\Omega_t$ , capaz de descrever as superfícies tracionadas e as reações nos apoios. Note que,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}(\vec{x}, t) \vec{n}(\vec{x}, t) dA_t &= \vec{t}(\vec{x}, t) dA_t \\ &= \mathbf{P}(X, t) \vec{N}(X, t) dA_o \\ &= \vec{t}_o(X, t) dA_o \end{aligned} \quad (2.74)$$

e

$$\rho(\vec{x}, t) d\Omega_t = \rho_o(\vec{X}) d\Omega_o. \quad (2.75)$$

Contudo, a força de corpo por unidade de massa, pode ser expressa, na configuração de referência, como sendo

$$\vec{b}(\vec{x}, t) = \vec{b}(\varphi_t(\vec{X}), t) = \vec{b}_o(\vec{X}, t). \quad (2.76)$$

O campo de deslocamento, como mostrado na Fig. 2.1, é definido como

$$\vec{u}(\vec{X}, t) = \vec{x} - \vec{X} = \varphi_t(\vec{X}) - \vec{X}. \quad (2.77)$$

O gradiente do campo de deslocamentos é dado por

$$\nabla_{\vec{X}} \vec{u} = \nabla_{\vec{X}} \vec{x} - \nabla_{\vec{X}} \vec{X} \quad (2.78)$$

i.e.

$$\nabla_{\vec{X}} \vec{u} = \mathbf{F} - \mathbf{I} \quad (2.79)$$

ou

$$\mathbf{F} = \nabla_{\vec{X}} \vec{u} + \mathbf{I}. \quad (2.80)$$

A descrição espacial do campo de deslocamentos é dada por

$$\vec{u}_t(\vec{x}, t) = \vec{u}_t(\varphi_t(\vec{X}), t) = \vec{u}(\vec{X}, t) \quad (2.81)$$

ou

$$\vec{u}(\vec{X}, t) = \vec{u}(\varphi_t^{-1}(\vec{x}), t) = \vec{u}_t(\vec{x}, t). \quad (2.82)$$

Considerando a mudança de variável,  $\vec{x} = \varphi_t(\vec{X})$ , a equação do momento pode ser escrita na configuração de referência como sendo

$$\int_{\Omega_o} \rho_o \vec{b}_o \, d\Omega_o + \int_{\partial\Omega_o} \mathbf{P} \vec{N} \, dA_o = \int_{\Omega_o} \rho_o \ddot{\vec{x}} \, d\Omega_o. \quad (2.83)$$

Agora, aplicando o teorema da divergência, em que

$$\int_{\partial\Omega_o} \mathbf{P} \vec{N} \, dA_o = \int_{\Omega_o} \text{div} [\mathbf{P}] \, d\Omega_o, \quad (2.84)$$

tem-se

$$\int_{\Omega_o} \left\{ \rho_o \vec{b}_o + \text{div} [\mathbf{P}] - \rho_o \ddot{\vec{x}} \right\} d\Omega_o = 0. \quad (2.85)$$

Sabendo que o resultado deve se conservar para qualquer parte do corpo, obtém-se então a equação de equilíbrio do movimento referente à configuração inicial, escrita em função do primeiro tensor tensão de *Piola-Kirchhoff*:

$$\text{div} [\mathbf{P}] + \rho_o \vec{b}_o = \rho_o \ddot{\vec{x}}, \quad \forall \vec{X} \in \Omega_o \text{ e tempo } t, \quad (2.86)$$

Sabendo que  $\mathbf{P} = \mathbf{FS}$ , e  $\ddot{\vec{x}} = \ddot{\vec{u}}$ , pode-se ainda reescrever a equação acima como sendo

$$\text{div} [\mathbf{FS}] + \rho_o \vec{b}_o = \rho_o \ddot{\vec{u}}, \quad \forall \vec{X} \in \Omega_o \text{ e tempo } t. \quad (2.87)$$

Nesse ponto é importante notar que como o tensor tensão de *Cauchy* é simétrico, i.e.,  $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T$ , veja Eq.(2.67), o segundo tensor de *Piola-Kirchhoff* também o é ( $\mathbf{S} = \mathbf{S}^T$ ). Contudo, o primeiro tensor de *Piola-Kirchhoff* não é simétrico ( $\mathbf{P} \neq \mathbf{P}^T$ ).

## 2.4 Medidas de deformação $E(\vec{X}, t)$ e $E^*(\vec{x}, t)$

O gradiente da deformação  $\mathbf{F}$  ou  $\mathbf{F}^{-1}$  contém todas as informações a respeito da deformação em uma vizinhança de  $P$ . E, como o teorema da decomposição polar mostra que as informações de uma rotação e de uma deformação pura de um corpo podem ser separadas, pode-se então tomar como medida da deformação os estiramentos  $\mathbf{U}$  ou  $\mathbf{V}$  da deformação.

Porém,  $\mathbf{U}$  é de difícil determinação, mas é fácil verificar que os autovetores de  $\mathbf{U}$  são idênticos aos de  $\mathbf{C}$  e que os autovalores de  $\mathbf{U}$  são obtidos dos autovalores de  $\mathbf{C}$  por

$$\lambda^U = \sqrt{\lambda^C}. \quad (2.88)$$

Desta forma, o tensor  $\mathbf{C}$  fornece as mesmas informações geométricas relativas à deformação quanto a  $\mathbf{U}$ . Logo,  $\mathbf{C}$  representa uma medida de deformação pura do corpo, e é de fácil determinação.

Introduz-se agora,  $E(\vec{X}, t)$  como sendo a medida de deformação de *Green-Lagrange*, definida

em  $\Omega_o$  e  $E^*(\vec{x}, t)$  a medida de deformação de *Almansi*, definida em  $\Omega_t$ , as quais são dadas por

$$ds^2 - ds_o^2 = 2 \mathbf{E} d\vec{X} \cdot d\vec{X} \quad (2.89)$$

e

$$ds^2 - ds_o^2 = 2 \mathbf{E}^* d\vec{x} \cdot d\vec{x}, \quad (2.90)$$

em que  $ds^2 = d\vec{x} \cdot d\vec{x}$  e  $ds_o^2 = d\vec{X} \cdot d\vec{X}$ .

Sabendo que o comprimento de arco  $ds$  é dado por

$$\begin{aligned} ds^2 &= d\vec{x} \cdot d\vec{x} = \mathbf{F} d\vec{X} \cdot \mathbf{F} d\vec{X} \\ &= d\vec{X} \cdot \mathbf{F}^T \mathbf{F} d\vec{X} = \mathbf{C} d\vec{X} \cdot d\vec{X} \end{aligned} \quad (2.91)$$

Então,

$$ds_o^2 = d\vec{X} \cdot d\vec{X} = d\vec{X} \cdot \mathbf{I} d\vec{X} \quad (2.92)$$

onde  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade. Das relações acima, pode-se então obter  $ds^2 - ds_o^2$  o que implica em

$$[\mathbf{C} - \mathbf{I}] d\vec{X} \cdot d\vec{X} = 2 \mathbf{E} d\vec{X} \cdot d\vec{X}, \quad (2.93)$$

o qual deve se conservar para qualquer  $d\vec{X}$ , assim tem-se que

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{I}). \quad (2.94)$$

Agora, expandindo a relação acima tem-se

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{1}{2} \{ \mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I} \} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ [(\nabla_{\vec{X}} \vec{u})^T + \mathbf{I}] [\nabla_{\vec{X}} \vec{u} + \mathbf{I}] - \mathbf{I} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \nabla_{\vec{X}} \vec{u} + [\nabla_{\vec{X}} \vec{u}]^T + [\nabla_{\vec{X}} \vec{u}]^T \nabla_{\vec{X}} \vec{u} \right\} \end{aligned} \quad (2.95)$$

Entretanto,

$$\begin{aligned} ds_o^2 &= d\vec{X} \cdot d\vec{X} = \mathbf{F}^{-1} d\vec{x} \cdot \mathbf{F}^{-1} d\vec{x} \\ &= d\vec{x} \cdot \mathbf{F}^{-T} \mathbf{F}^{-1} d\vec{x} = d\vec{x} \cdot \mathbf{B}^{-1} d\vec{x} \end{aligned} \quad (2.96)$$

Como resultado,

$$\begin{aligned} ds^2 - ds_o^2 &= 2 \mathbf{E}^* (\vec{u}_t) d\vec{x} \cdot d\vec{x} \\ &= d\vec{x} \cdot d\vec{x} - d\vec{x} \cdot \mathbf{B}^{-1} d\vec{x} \end{aligned} \quad (2.97)$$

i.e

$$[2 \mathbf{E}^* - (\mathbf{I} - \mathbf{B}^{-1})] d\vec{x} \cdot d\vec{x} = 0 \quad (2.98)$$



o qual deve se conservar para todo  $d\vec{x}$ , o que implica em

$$\mathbf{E}^* = \frac{1}{2} (\mathbf{I} - \mathbf{B}^{-1}). \quad (2.99)$$

Fazendo uso do gradiente com respeito a  $\vec{x}$ , obtém-se

$$\nabla_{\vec{x}} \vec{u} = \mathbf{I} - \mathbf{F}^{-1} \quad (2.100)$$

i.e

$$\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{I} - \nabla_{\vec{x}} \vec{u}. \quad (2.101)$$

$$\mathbf{E}^* = \frac{1}{2} (\mathbf{I} - \mathbf{F}^{-T} \mathbf{F}^{-1}) \quad (2.102)$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \mathbf{I} - \left[ \mathbf{I} - (\nabla_{\vec{x}} \vec{u})^T \right] \left[ \mathbf{I} - \nabla_{\vec{x}} \vec{u} \right] \right\} \quad (2.103)$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \nabla_{\vec{x}} \vec{u} + (\nabla_{\vec{x}} \vec{u})^T - (\nabla_{\vec{x}} \vec{u})^T \nabla_{\vec{x}} \vec{u} \right\}$$

#### 2.4.1 Linearização: deslocamentos e deformações infinitesimais

O campo de deslocamento das partículas de  $\mathfrak{B}$  relativas à configuração de referência  $\Omega_o$  são representadas por  $\vec{u}$  e dado pela equação abaixo.

$$\vec{x} = \vec{X} + \vec{u}(\vec{X}, t) \quad (2.104)$$

Da descrição do gradiente da deformação tem-se

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{X}} = \frac{\partial \vec{X}}{\partial \vec{X}} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{X}} = \mathbf{I} + \nabla_{\vec{X}} \vec{u} \quad (2.105)$$

ou

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} = \frac{\partial X_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j} = \delta_{ij} + u_{i,j}. \quad (2.106)$$

Denotando,

$$\mathbf{H} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{X}} = \nabla_{\vec{X}} \vec{u}, \quad (2.107)$$

pode-se reescrever o tensor deformação  $\mathbf{F}$  da seguinte forma,

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \mathbf{H} \quad (2.108)$$

No caso de deformações infinitesimais, assume-se que  $\max_{\forall \vec{X} \in \Omega_o} \|\nabla_{\vec{X}} \vec{u}\| \ll 1$ .

Então, escrevendo  $\mathbf{C}$  em função de  $\mathbf{I}$  e  $\mathbf{H}$ , chega-se a,

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \{\mathbf{I} + \mathbf{H}\}^T \{\mathbf{I} + \mathbf{H}\} \quad (2.109)$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{I} + \mathbf{H} + \mathbf{H}^T + \mathbf{H}^T \mathbf{H} = \mathbf{I} + \mathbf{H} + \mathbf{H}^T + \mathcal{O}\{\mathbf{H}^2\}$$

$$\mathbf{U} = [\mathbf{C}]^{\frac{1}{2}} = [\mathbf{I} + \mathbf{H} + \mathbf{H}^T + \mathcal{O}\{\mathbf{H}^2\}]^{\frac{1}{2}}$$

Fazendo por analogia com a equação de segundo grau,  $(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \mathcal{O}(|x|^2)$ ,  $|x| \ll 1$ , tem-se:

$$\mathbf{U} = \mathbf{I} + \frac{1}{2} \{ \mathbf{H} + \mathbf{H}^T \} + \mathcal{O} \{ \mathbf{H}^2 \} \quad (2.110)$$

porém,  $\{1+x\}^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x + \mathcal{O}\{|x|^2\}$ , assim,

$$\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{I} - \frac{1}{2} \{ \mathbf{H} + \mathbf{H}^T \} + \mathcal{O} \{ \mathbf{H}^2 \} \quad (2.111)$$

Como  $\mathbf{R} = \mathbf{F}\mathbf{U}^{-1}$  obtém-se:

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} + \frac{1}{2} \{ \mathbf{H} - \mathbf{H}^T \} + \mathcal{O} \{ \mathbf{H}^2 \} \quad (2.112)$$

Finalmente, definindo os tensores  $\varepsilon$  e  $\omega$  abaixo

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{1}{2} \{ \mathbf{H} + \mathbf{H}^T \} = \frac{1}{2} \{ \nabla_{\vec{X}} \vec{u} + \nabla_{\vec{X}} \vec{u}^T \} \\ \omega &= \frac{1}{2} \{ \mathbf{H} - \mathbf{H}^T \} = \frac{1}{2} \{ \nabla_{\vec{X}} \vec{u} - \nabla_{\vec{X}} \vec{u}^T \} \end{aligned} \quad (2.113)$$

ou em coordenadas

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right\} \\ \omega_{ij} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial u_i}{\partial X_j} - \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right\} \end{aligned} \quad (2.114)$$

onde  $\varepsilon$  denota uma deformação infinitesimal pura e  $\omega$  uma rotação infinitesimal pura, determina-se:

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \varepsilon + \omega + \mathcal{O} \{ \mathbf{H}^2 \}. \quad (2.115)$$

A partir deste resultado, pode-se verificar que a hipótese de deformação infinitesimal, leva à decomposição aditiva da deformação, i.e., a deformação infinitesimal pode ser decomposta em uma superposição linear de uma deformação infinitesimal e de uma rotação infinitesimal.

## 2.5 O problema de valor de contorno

O clássico problema de valor de contorno na mecânica dos sólidos, aqui descrito na configuração atual, é formulado como: encontrar os campos deslocamento  $\vec{u}$  e tensão  $\sigma$  sobre o domínio  $\Omega$  tal que esses campos sejam consistentes com relação às forças de corpo  $\vec{b}$  em  $\Omega$  e às condições de contorno em  $\partial\Omega$ . Pode-se dividir  $\partial\Omega$  em duas partes, uma em que a tração é prescrita  $\Gamma^t$  e outra na qual o deslocamento é prescrito  $\Gamma^u$ . Assim,

$$\sigma \vec{n} = \vec{t} \quad \text{em } \Gamma^t \quad (2.116)$$

$$\vec{u} = \vec{u} \quad \text{em } \Gamma^u. \quad (2.117)$$

As condições então podem ser divididas como mostrado, porém essa divisão pode se sobrepor em pontos onde possa existir uma tração prescrita em uma direção e um deslocamento prescrito em outra.

As forças de corpo  $\vec{b}$  e as trações  $\vec{t}$  são denominadas como sendo as *cargas*, enquanto que geralmente as trações de superfícies  $\vec{t}$  desconhecidas são denominadas como *reações* em  $\Gamma^u$ . Quando todo deslocamento é prescrito o corpo é dito estar sujeito a uma *restrição externa*<sup>2</sup>. Pode ainda existir uma *restrição interna*, no caso de uma restrição no interior de  $\Omega$  como exemplo uma imposição de incompressibilidade.

Um campo de deslocamento é cinematicamente admissível, se matematicamente ele for suficientemente regular e satisfazer as condições de contorno essenciais.

O problema de valor de contorno é dito *estático* quando apresenta-se independente do tempo e as acelerações são assumidas como nulas. O problema ainda pode ser *quasi-estático* se os termos de aceleração forem negligenciados, entretanto existe a dependência do pseudo-tempo (parâmetro de carregamento). Assim nos problemas estáticos e quasi-estáticos, a equação de movimento, Eq.(2.56), é substituída pela equação de equilíbrio: para todo  $t \in [0, t_f]$ , determinar  $\vec{u}(t)$  cinematicamente admissível tal que

$$\operatorname{div} [\boldsymbol{\sigma}(\vec{u})] + \rho \vec{b} = 0, \quad \forall \vec{x} \in \Omega. \quad (2.118)$$

### 2.5.1 Deslocamentos Virtuais

O campo de *deslocamentos virtuais*  $\delta \vec{u}$  é definido como sendo a diferença entre dois campos deslocamentos cinematicamente admissíveis. Em outras palavras, vetor  $\delta \vec{u}$  é tal que, se  $\vec{u}$  é cinematicamente admissível então  $\vec{u} + \delta \vec{u}$  também será. Como o objetivo é utilizar uma medida de deformação logarítmica,  $E = \ln(\mathbf{U})$ , definem-se os espaços dos deslocamentos admissíveis  $\mathcal{K}$  e virtuais  $\mathcal{V}$ , como

$$\mathcal{K} = \{ \vec{u} \mid u_i \in W_p^1(\Theta), \vec{u} = \vec{u} \text{ em } \Gamma^u \} \quad (2.119)$$

e

$$\mathcal{V} = \{ \delta \vec{u} \mid \delta u_i \in W_p^1(\Theta), \delta \vec{u} = 0 \text{ em } \Gamma^u \}. \quad (2.120)$$

em que  $W_p^k(\Theta)$  é o espaço de *Sobolev para p* suficientemente grande.

Seja um conjunto aberto  $\Theta \subset \mathfrak{R}^n$ , então para  $1 \leq p \leq \infty$ , o espaço de *Sobolev*  $W_p^k(\Theta)$ , é definido como

$$W_p^k(\Theta) = \{ u \in L_p(\Theta) \mid \partial^\alpha u \in L_p(\Theta), |\alpha| \leq k \}.$$

No espaço  $W_p^k(\Theta)$  a norma é dada por

$$\|u\|_{W_p^k(\Theta)} = \left( \sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha u\|_{L_p(\Theta)}^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (2.121)$$

---

<sup>2</sup>Do inglês *external constraints*.

para  $1 \leq p \leq \infty$ , e com norma

$$\|u\|_{W_\infty^k(\Theta)} = \max_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha u\|_{L_\infty(\Theta)} \quad (2.122)$$

em que  $L_p$  denota o espaço das funções integráveis com norma

$$\|u\|_{L_p(\Omega)} = \left( \int_\Omega |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (2.123)$$

### 2.5.2 Princípio dos Trabalhos Virtuais

Dado um conjunto de forças e um campo de deslocamento virtual  $\delta \vec{u}$ , pode-se então definir o *trabalho virtual das forças externas* como

$$\delta \mathcal{W}^{ext} = \int_\Omega \rho \vec{b} \delta \vec{u} dV + \int_{\partial\Omega} \vec{t} \delta \vec{u} dA. \quad (2.124)$$

O *trabalho virtual das forças internas* é definido como

$$\delta \mathcal{W}^{int} = \int_\Omega \boldsymbol{\sigma} \delta \boldsymbol{\varepsilon} dV. \quad (2.125)$$

Sendo  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$  tem-se que  $\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} = \sigma_{ij} \delta u_{i,j}$ , dessa forma obtém-se  $\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} = (\sigma_{ij} \delta u_i)_{,j} - \sigma_{ij} \delta u_i$ . Utilizando o teorema da divergência, obtém-se a seguinte forma para o trabalho virtual das forças internas:

$$\delta \mathcal{W}^{int} = \int_{\partial\Omega} n_j \sigma_{ij} \delta u_i dA + \int_\Omega \sigma_{ij} \delta u_i dV. \quad (2.126)$$

Sabendo que  $\delta u_i = 0$ , em  $\Gamma^u$  a integral de superfície fica restrita a  $\Gamma^t$ . Assim segue que

$$\delta \mathcal{W}^{ext} - \delta \mathcal{W}^{int} = \int_\Omega (\sigma_{ij} + \rho b_i) \delta u_i dV + \int_{\Gamma^t} (n_j \sigma_{ij} - \bar{t}_i) \delta u_i dA. \quad (2.127)$$

Todo o lado direito da Eq.(2.127) desaparece para todo campo  $\delta \vec{u}$  se e somente se as quantidades multiplicadas por  $\delta u_i$  em ambas as integrais tenderem a desaparecer de forma idêntica, ou seja, isso ocorre se e somente se as condições de equilíbrio, Eq.(2.118), e a condição de tração prescrita na fronteira, Eq.(2.116), forem ambas satisfeitas. Dessa forma, pode-se então dizer que um corpo está em equilíbrio sob forças aplicadas se e somente se o *princípio dos trabalhos virtuais*, mais especificamente,

$$\delta \mathcal{W}^{ext} = \delta \mathcal{W}^{int}, \quad (2.128)$$

for satisfeito.

## 2.6 Termodinâmica dos Meios Contínuos

### 2.6.1 Conservação da Energia

Uma das leis fundamentais da natureza é o princípio da conservação da energia. Afirma-se simplesmente que durante uma interação, a energia pode mudar de uma forma para outra, contudo, a quantidade de energia mantém-se constante. A Primeira Lei da Termodinâmica é simplesmente uma expressão do princípio da conservação da energia, i.e., a energia é uma propriedade termodinâmica. A segunda Lei da Termodinâmica estabelece que a energia tem qualidade bem como quantidade, e os processos existentes ocorrem na direção de decréscimo da energia. Em um sistema termomecânico, um corpo  $\mathfrak{B}$  pode armazenar energia de duas formas: Energia Cinética,  $\mathcal{C}$ , e Energia Interna,  $\mathcal{U}$ .

Assim, a taxa de variação da energia total de uma parte da  $\Omega$  de um corpo  $\mathfrak{B}$  é igual à soma da taxa de trabalho das forças externas,  $\dot{\mathcal{W}}^{ext}$ , e do fluxo de energia,  $\mathcal{Q}$ , térmica entrando no sistema.

### 2.6.2 Primeira Lei

$$\dot{\mathcal{C}} + \dot{\mathcal{U}} = \dot{\mathcal{W}}^{ext} + \mathcal{Q} \quad (2.129)$$

Sabendo que a energia cinética é dada por

$$\mathcal{C} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho_t \dot{\vec{x}} \cdot \dot{\vec{x}} dV, \quad (2.130)$$

e a energia interna dada por

$$\mathcal{U} = \int_{\Omega} \rho_t e dV, \quad (2.131)$$

em que  $e$  é a energia interna específica. Ainda a taxa de trabalho das forças externas é dada por

$$\dot{\mathcal{W}}^{ext} = \int_{\Omega} \rho_t \vec{b} \cdot \dot{\vec{x}} dV + \int_{\partial\Omega} \rho_t \vec{t} \cdot \dot{\vec{x}} dA, \quad (2.132)$$

e o fluxo de energia térmica entrando no sistema é dado por

$$\mathcal{Q} = \int_{\Omega} \rho r dV + \int_{\partial\Omega} q(\vec{n}) dA \quad (2.133)$$

onde  $r$  é a densidade por unidade de volume da produção interna de calor e  $\vec{q}$  é o fluxo de calor que entra ou sai por  $dA$ .

Substituindo as Eqs.(2.130), (2.131), (2.132) e (2.133) na Eq.(2.129) tem-se:

$$\left( \int_{\Omega} \rho_t \dot{\vec{x}} \cdot \ddot{\vec{x}} dV \right) + \left( \int_{\Omega} \rho_t \dot{e} dV \right) = \left( \int_{\Omega} \rho_t \vec{b} \cdot \dot{\vec{x}} dV + \int_{\partial\Omega} \rho_t \vec{t} \cdot \dot{\vec{x}} dA \right) + \left( \int_{\Omega} \rho_t r dV + \int_{\partial\Omega} q(\vec{n}) dA \right) \quad (2.134)$$

Sabendo que

$$\int_{\partial\Omega} \vec{t} \cdot \dot{\vec{x}} dA = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\vec{n}) \dot{\vec{x}} dA = \int_{\Omega} \text{div}(\boldsymbol{\sigma}^T \cdot \dot{\vec{x}}) dV = \int_{\Omega} \text{div}(\boldsymbol{\sigma}^T) \cdot \dot{\vec{x}} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \text{grad}(\dot{\vec{x}}) dV \quad (2.135)$$

e que o gradiente espacial de velocidades pode se decomposto da seguinte forma  $\text{grad}(\dot{\vec{x}}) = \mathbf{L} = \mathbf{D} + \mathbf{W}$ , assim

$$\int_{\Omega} \dot{\vec{x}} \left[ \rho_t \ddot{\vec{x}} - \vec{b} \cdot \dot{\vec{x}} - \text{div}(\boldsymbol{\sigma}^T) \right] dV + \int_{\Omega} \rho_t \dot{e} dV = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{L} dV + \int_{\Omega} \rho_t r dV - \int_{\partial\Omega} q(\vec{n}) dA \quad (2.136)$$

sabendo que  $\boldsymbol{\sigma}$  é simétrico e  $\mathbf{W}$  antissimétrico tem-se ainda que o primeiro termo da Eq.(2.136) desaparece visto que o momento linear se conserva. Assim tem-se então a Primeira Lei na forma integral

$$\int_{\Omega} \rho_t \dot{e} dV = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D} dV + \int_{\Omega} \rho_t r dV - \int_{\Omega} \text{div}(\vec{q}) dV. \quad (2.137)$$

### 2.6.3 Segunda Lei e a desigualdade de Clausius-Duhem

A segunda lei da termodinâmica é expressa por uma desigualdade que relaciona duas novas variáveis, a temperatura absoluta  $\theta$  e a entropia  $S$  que é definida como sendo

$$S = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho s dV \quad (2.138)$$

onde  $s$  é a entropia específica.

Esta desigualdade é tal que a taxa de produção de entropia é sempre superior, ou no caso extremo igual, à taxa de calor  $Q$  recebida por  $\Omega$ , dividida pela temperatura absoluta  $\theta$ . Assim,

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho s dV \geq \int_{\Omega} \rho \frac{r}{\theta} dV - \int_{\partial\Omega} \frac{q(n)}{\theta} dA, \quad (2.139)$$

ainda aplicando o teorema da divergência obtém-se

$$\rho \dot{s} \geq \rho \frac{r}{\theta} - \text{div} \left( \frac{\vec{q}}{\theta} \right). \quad (2.140)$$

Usando a relação

$$\text{div} \left( \frac{\vec{q}}{\theta} \right) = \frac{1}{\theta} \text{div}(\vec{q}) + \vec{q} \cdot \text{grad} \left( \frac{1}{\theta} \right) \quad (2.141)$$

e ao se substituir a Eq.(2.141) na Eq.(2.140) obtém-se

$$\rho \dot{s} \theta \geq \rho r - \text{div}(\vec{q}) - \frac{1}{\theta} \vec{q} \cdot \text{grad}(\theta) \quad (2.142)$$

Com base na primeira lei, onde  $\rho \dot{e} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D} = \rho r - \text{div}(\vec{q})$ , obtém-se:

$$\rho(\dot{s}\theta - \dot{e}) + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D} \geq \frac{1}{\theta} \vec{q} \cdot \text{grad}(\theta). \quad (2.143)$$

Introduzindo o potencial livre de *Helmholtz*,

$$\psi = e - s\theta, \quad (2.144)$$

e a sua derivada no tempo

$$\dot{\psi} = \dot{e} - \dot{s}\theta - s\dot{\theta}, \quad (2.145)$$

obtém-se então a desigualdade de *Clausius-Duhem*:

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D} - \rho(\dot{\psi} + s\dot{\theta}) - \frac{1}{\theta} \vec{q} \cdot \nabla_{\vec{x}}\theta \geq 0 \quad (2.146)$$

## Capítulo 3

# Análise elastoplástica em grandes deformações

Neste capítulo serão apresentados aspectos genéricos da formulação adotada para resolver problemas de elastoplasticidade em grandes deformações. Mais especificamente, a formulação apresentada irá considerar: uma descrição *Lagrangiana Total*, a decomposição *multiplicativa* do gradiente da deformação em uma parte plástica e uma parte elástica e, por fim, que as equações constitutivas serão dadas em termos da medida logarítmica de deformação e a tensão rotacionada de *Kirchhoff*. O uso deste par conjugado, cuja medida de tensão é definida na chamada configuração não tencionada, torna possível a utilização do mapeamento exponencial que, por sua vez, proporciona o uso dos algoritmos de mapeamento de retorno no mesmo formato que os utilizados para pequenas deformações.

Uma justificativa para a escolha de uma descrição *Lagrangeana Total* é que a conservação da massa pode ser estabelecida localmente de forma fechada sem aumentar o número de equações a serem resolvidas em cada ponto. Já no caso de uma descrição *Euleriana* a conservação da massa deve ser imposta pela equação da continuidade, a qual deve ser resolvida para cada ponto juntamente com o conjunto de equações não lineares.

O uso da medida de tensão rotacionada de *Kirchhoff* e da medida de deformação logarítmica,  $\ln(\mathbf{U})$ , foi primeiro descrita por ETEROVIC & BATHE (1990) e WEBER & ANAND (1990). Nestes trabalhos os autores fizeram uso da medida logarítmica da deformação juntamente com o mapeamento exponencial para obter o algoritmo de mapeamento de retorno de forma bastante similar aos encontrados em problemas de pequenas deformações. Tal configuração foi também estudada e implementada por ROSSI (2005).

### 3.1 Introdução à plasticidade

O objetivo da teoria da plasticidade é prover uma teoria capaz de descrever o comportamento de materiais que apresentam uma resposta elastoplástica quando submetidos a carregamentos. Todo corpo quando submetido a um carregamento externo apresenta uma resposta/deformação, que pode ser: *Elástica*, quando o corpo é submetido a um carregamento no qual, depois de



cessada a carga, a configuração deformada retorna à configuração de referência sem apresentar nenhuma deformação residual. Diz-se então que o material apresentou uma resposta elástica (reversível); ou *Plástica*, quando um corpo apresenta uma resposta/deformação que mesmo quando cessado o carregamento a deformação não se desfaz sendo, portanto irreversível ou permanente, OWEN&HINTON (1980), DESAI (1984), CHEN & HAN (1988) e LEMAITRE & CHABOCHE (1994).

Assim, no estudo da plasticidade cabe alguns conceitos de deformações, tais como:

- *Deformações Reversíveis/Elásticas*: Ocorrem a nível atômico, seus efeitos são observáveis numa escala macroscópica, e são resultantes da variação do espaço interatômico necessário para balancear as cargas externas.
- *Deformações Irreversíveis/Permanentes*: Podem ser deformações plásticas ou viscosas, ocorrem a nível cristalino em adição à parcela de deformação elástica. Correspondem ao deslocamento atômico relativo que permanece alterado após a remoção da carga.

Mesmo após definir as diferenças entre deformação elástica e plástica, necessita-se formular um modelo material de comportamento elastoplástico de deformação, e para tal são requeridas as seguintes especificações:

- Um critério de escoamento indicando em qual nível de tensão o fluxo plástico se inicia;
- Uma relação entre tensão e deformação que descreva o comportamento material sob condições elásticas, i.e., antes de iniciar a deformação plástica;
- Uma relação entre tensão e deformação para o comportamento plástico, i.e., a definição das regras de encruamento do material e das leis de evolução da deformação plástica, também denominadas de regras do fluxo plástico.

### 3.1.1 Aspecto Fenomenológico Elastoplástico

Algumas propriedades importantes comuns podem ser identificadas neste tipo de comportamento. Primeiramente a existência de um domínio elástico, i.e., uma região dentro da qual o material se comporta como sendo puramente elástico, sem a evolução de deformações permanentes. O domínio elástico é delimitado por uma função de escoamento, e pela tensão limite de escoamento do material. No caso de alguns materiais, a função de escoamento pode ser composta por uma ou mais superfícies de falha, o que torna o tratamento destes materiais mais complexo. Em seguida, a ocorrência de deformações inelásticas cuja evolução pode ser descrita por uma regra de escoamento. Adicionalmente à regra de escoamento, são descritas as condições de carregamento e descarregamento de modo a possibilitar a diferenciação da resposta do material nestas duas situações. E por fim, a ocorrência de encruamento do material, i.e., a possibilidade de haver um endurecimento ou um amolecimento do material, acompanhando a evolução da deformação plástica. Este encruamento é dividido em geral como sendo isotrópico ou cinemático. No caso do encruamento isotrópico a tensão de escoamento muda em função

da deformação plástica acumulada. No caso do encruamento cinemático, ocorre uma translação da função de escoamento com relação ao espaço das tensões, SOUZA NETO *et al.* (2002) e LUBLINER(1990).

### 3.1.2 Critérios e Superfícies de Escoamento

Quando os problemas analisados envolvem mais de uma dimensão, como em problemas planos ou tridimensionais, a definição de um critério de escoamento torna-se dependente de várias variáveis, i.e., das componentes de tensão entre outras. Vários critérios foram propostos na literatura, conforme a classe de materiais a serem analisadas, sendo os mais comuns o de Tresca, von Mises, Mohr Coulomb, Drucker-Prager e Cap-Model.

Todo critério de escoamento determina o nível de tensão no qual a deformação plástica inicia e pode ser escrito da seguinte forma

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\Upsilon}_k) = 0 \quad (3.1)$$

em que  $\mathcal{F}$  é uma função de escoamento escalar, função de uma medida de tensão  $\boldsymbol{\sigma}$  e de um conjunto de variáveis termodinâmicas  $\boldsymbol{\Upsilon}_k$ .

### 3.1.3 Leis de Encruamento

O encruamento é caracterizado pelo fato de que para muitos materiais reais, a tensão limite de escoamento do material é dependente da deformação plástica acumulada. Assim, a superfície de escoamento pode variar em cada estágio do processo, pois é dependente da história da deformação. Algumas formas de modelos propostos para captar tal fenômeno podem ser formuladas, como exemplo

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma}, p, k) = f(\boldsymbol{\sigma}, p) - k^2(p) = 0 \quad (3.2)$$

em que  $k^2$  representa o tamanho da superfície de escoamento,  $p$  uma medida da deformação plástica acumulada, e a função  $f(\boldsymbol{\sigma}, p)$  define a forma da superfície.

Um modelo de plasticidade sem encruamento é chamado de modelo de “plasticidade perfeita”, este assume que a tensão limite de escoamento do material é mantida constante no decorrer do carregamento. Quando se admite a possibilidade da variação da tensão de escoamento em função de deformações inelásticas, o problema é dito ser de plasticidade com encruamento.

De acordo com o nível de carregamento a que o material é submetido e pela ocorrência de carregamento/descarregamento, é possível que o limite elástico, ou seja, o limite de escoamento ou o critério de escoamento, possa variar: aumentando no caso de encruamento (ou consolidação) ou diminuindo para o caso de um amolecimento.

Dentro deste contexto, surgem vários modelos para tratarem destes comportamentos, representados por uma superfície de escoamento, sendo os principais mostrados na Fig. 3.1.

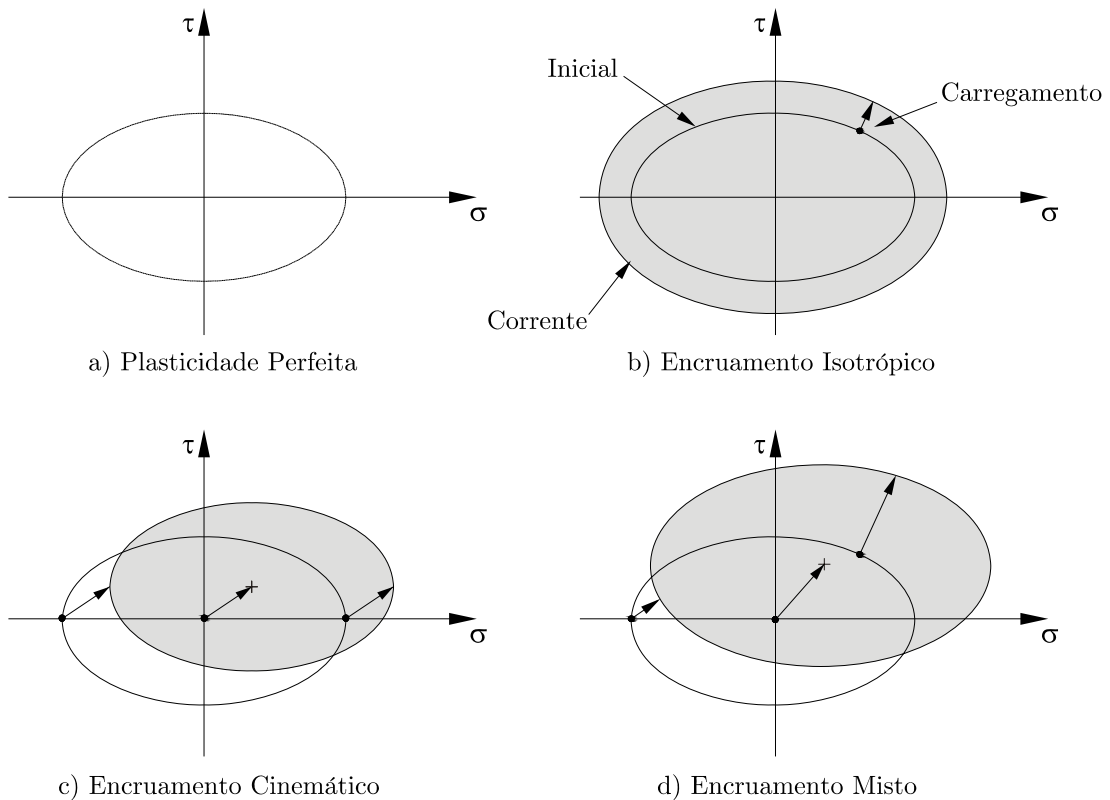


Figura 3.1: Leis de encruamento

## 3.2 Modelos constitutivos elastoplásticos

### 3.2.1 Decomposição multiplicativa do tensor gradiente de deformação

A principal hipótese adotada na formulação elastoplástica de grandes deformações aqui apresentada trata-se da decomposição multiplicativa do gradiente de deformação,  $\mathbf{F}$ , em duas parcelas, sendo uma de contribuição plástica e outra de contribuição elástica, ou seja,

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^p \quad (3.3)$$

em que  $\mathbf{F}^e$  é a parte elástica e  $\mathbf{F}^p$  a parte plástica.

Essa hipótese supõe a existência de um estado local não tensionado, ou seja, livre de tensões definido por  $\mathbf{F}^p$ . A Fig. 3.2 mostra esse estado, referenciado pelo índice  $\xi$ . Ainda na Fig. 3.2  $\Omega_o$  representa a configuração de referência e  $\Omega_t$  a configuração atual.

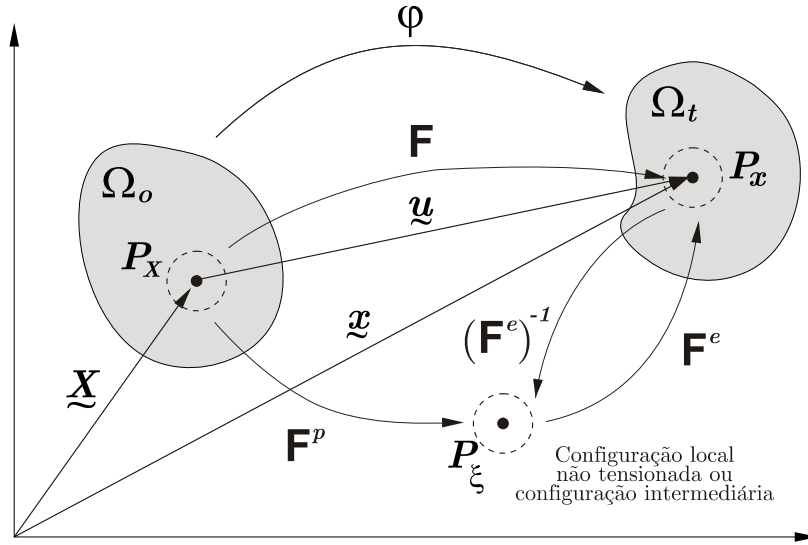


Figura 3.2: Modelo cinemático de deformação.

A função movimento  $\varphi$  que leva um ponto  $\vec{X} \in \Omega_o$  para um ponto  $\vec{x} \in \Omega_t$  é definida como sendo

$$\vec{x} = \varphi(\vec{X}, t) = {}^t\varphi(\vec{X}) = {}^t\varphi^e({}^t\varphi^p(\vec{X})) = {}^t\varphi^e \circ {}^t\varphi^p \quad (3.4)$$

onde

$$\varphi(\vec{X}, t) = \vec{x} = \vec{X} + \vec{u}. \quad (3.5)$$

Já o gradiente de deformação, conforme visto no Cap. 2, é dado por

$$\mathbf{F} = \nabla_{\vec{X}} \varphi(\vec{X}, t) = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{X}} \quad (3.6)$$

Ao se adotar a decomposição multiplicativa do gradiente da deformação,  $\mathbf{F}$ , alguns resultados importantes decorrem a respeito da cinemática de deformação do corpo. Sabendo que o gradiente espacial de velocidade é escrito como

$$\mathbf{L}(\vec{x}, t) = \nabla_{\vec{x}} \vec{v}(\vec{x}, t) = \mathbf{D} + \mathbf{W} = \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1}$$

na qual  $\vec{v}(\vec{x}, t) = \frac{d\vec{x}}{dt}$  é a descrição espacial da velocidade,  $\mathbf{D}$  o tensor taxa de deformação que corresponde à parte simétrica do gradiente da velocidade,  $\mathbf{D} = \text{sym}(\mathbf{L})$ , e  $\mathbf{W}$  o tensor rotação que por sua vez corresponde à parte antissimétrica do gradiente de velocidade,  $\mathbf{W} = \text{skew}(\mathbf{L})$ . O tensor gradiente de velocidade pode ainda ser decomposto em uma parte elástica e outra plástica da seguinte forma

$$\mathbf{L}(\vec{\varphi}(\vec{X}, t), t) = \dot{\mathbf{F}}(\vec{X}, t) \mathbf{F}^{-1}(\vec{X}, t) = \mathbf{L}^e + \mathbf{L}^p \quad (3.7)$$

com  $\mathbf{L}^e = \dot{\mathbf{F}}^e (\mathbf{F}^e)^{-1}$  e  $\mathbf{L}^p = \mathbf{F}^e \dot{\mathbf{F}}^p (\mathbf{F}^p)^{-1} (\mathbf{F}^e)^{-1}$ .

O tensor taxa de deformação  $\mathbf{D}$  pode então ser decomposto na forma

$$\mathbf{D} = \text{sym}(\mathbf{L}^e) + \text{sym}(\mathbf{L}^p) = \mathbf{D}^e + \mathbf{D}^p. \quad (3.8)$$

Sabendo  $\det(\mathbf{F}) = \frac{dV}{dV_0}$ , uma condição imposta sobre as deformações é que  $\det(\mathbf{F}) > 0$ , o que implica em  $\det(\mathbf{F}^p) > 0$  e  $\det(\mathbf{F}^e) > 0$ . Deste modo, cada um dos termos do gradiente da deformação admite decomposição polar, assim tem-se que

$$\mathbf{F}^p = \mathbf{R}^p \mathbf{U}^p \quad (3.9)$$

$$\mathbf{F}^e = \mathbf{R}^e \mathbf{U}^e \quad (3.10)$$

onde  $\mathbf{R}^p$  e  $\mathbf{R}^e$  são tensores ortogonais próprios e  $\mathbf{U}^p$  e  $\mathbf{U}^e$  são tensores simétricos positivos definidos, i.e, seus autovalores são maiores que zero.

Pode-se ainda escrever que

$$\mathbf{U}^e = \sqrt{\mathbf{C}^e} \quad (3.11)$$

na qual  $\mathbf{C}^e$  é o tensor de *Cauchy-Green à direita* dado por  $\mathbf{C}^e = \mathbf{F}^{eT} \mathbf{F}^e$ .

Como dito inicialmente, a medida de deformação adotada neste trabalho é a medida de deformação logarítmica, também conhecida como medida de deformação de *Hencky*, neste caso, dada por

$$\mathbf{E}^{e0} = \ln(\mathbf{U}^e). \quad (3.12)$$

É possível ainda definir a chamada família *Lagrangeana* de deformações dada por

$$\mathbf{E}^{e^m} = \begin{cases} \frac{1}{m} (\mathbf{U}^{e^m} - \mathbf{I}) & \text{para } m \neq 0 \\ \ln(\mathbf{U}^e) & \text{para } m = 0 \end{cases}$$

De modo a não sobrecarregar a notação será desprezado o sobrescrito  $\mathbf{E}^{e0}$  optando apenas por  $\mathbf{E}^e$ , quando se fizer referência à deformação logarítmica *Lagrangeana*.

### 3.2.2 Pares conjugados de tensão e deformação

O tensor tensão de *Kirchhoff* é dado por

$$\boldsymbol{\tau} = J \boldsymbol{\sigma} \quad (3.13)$$

em que  $\boldsymbol{\sigma}$  é o tensor tensão de *Cauchy*, com

$$J = \det(\mathbf{F}) = \frac{\rho_o}{\rho} \quad (3.14)$$

na qual  $\rho_o$  e  $\rho$  são as densidades de massa da configuração de referência e corrente respectivamente.

Entretanto, como colocado por HILL (1978), os pares de tensão-deformação devem ser tais

que a taxa de trabalho por unidade de massa  $\dot{\mathcal{W}}$  seja invariante, ou seja,

$$\dot{\mathcal{W}} = \frac{1}{\rho} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{\rho_o} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{\rho_o} \mathbf{P} \cdot \dot{\mathbf{F}} = \frac{1}{2\rho_o} \mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{C}} = \frac{1}{\rho_o} \bar{\boldsymbol{\tau}} \cdot \dot{\mathbf{E}}, \quad (3.15)$$

onde  $\mathbf{P}$  é o primeiro tensor tensão de *Piola-Kirchhoff* (PK1),  $\mathbf{S}$  é o segundo tensor tensão de *Piola-Kirchhoff* (PK2) e  $\bar{\boldsymbol{\tau}}$  é o tensor tensão rotacionado de *Kirchhoff*, dado por

$$\bar{\boldsymbol{\tau}} = (\mathbf{R}^e)^T \boldsymbol{\tau} \mathbf{R}^e. \quad (3.16)$$

O tensor  $\mathbf{C}^e$ , simétrico, admite decomposição espectral (Teorema da Decomposição Espectral), ou seja,

$$\mathbf{C}^e = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \left( \vec{l}_i \otimes \vec{l}_i \right), \quad (3.17)$$

onde  $\lambda_i$  são os autovalores e  $\vec{l}_i$  são os autovetores de  $\mathbf{C}^e$ . Isto implica que  $\mathbf{U}^e$  possui os mesmos autovalores de  $\mathbf{C}^e$ , isto é,

$$\mathbf{U}^e = \sum_{i=1}^3 \sqrt{\lambda_i} \left( \vec{l}_i \otimes \vec{l}_i \right). \quad (3.18)$$

Como  $\ln(\mathbf{U}^e)$  é uma função tensorial isotrópica, ROSSI(2005), pode-se então reescrever a medida de deformação logarítmica na forma espectral

$$\mathbf{E}^e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \ln(\lambda_i) \left( \vec{l}_i \otimes \vec{l}_i \right).$$

### 3.2.3 Potencial de energia livre e dissipação

Dentro do enfoque da termodinâmica dos processos irreversíveis, o potencial de energia livre  $\psi$  é construído de forma a ter a seguinte forma geral

$$\psi = \psi(\mathbf{E}^e, \boldsymbol{\phi}_k), \quad (3.19)$$

tendo como taxa

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{E}^e} \cdot \dot{\mathbf{E}}^e + \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\phi}_k} \cdot \dot{\boldsymbol{\phi}}_k, \quad (3.20)$$

em que  $\boldsymbol{\phi}$  é o conjunto de variáveis internas associadas com os mecanismos dissipativos envolvidos no processo irreversível.

A inequação fundamental de *Clausius-Duhem*, conforme descrita no Cap. 2 é dada por:

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D} - \rho \left( \dot{\psi} + s\dot{\theta} \right) - \vec{q} \cdot \frac{1}{\theta} \nabla_{\vec{x}} \theta \geq 0 \quad (3.21)$$

na qual  $s$  é a entropia específica,  $\theta$  é a temperatura absoluta e  $\vec{q}$  é o vetor fluxo de calor. Agora, considerando Eq.(3.8)

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{D}^e + \mathbf{D}^p) - \rho \left( \dot{\psi} + s\dot{\theta} \right) - \vec{q} \cdot \frac{1}{\theta} \nabla_{\vec{x}} \theta \geq 0 \quad (3.22)$$

e multiplicando esta última equação por  $J$ , Eq.(3.14), obtém-se então

$$\boldsymbol{\tau} \cdot (\mathbf{D}^e + \mathbf{D}^p) - \rho_o \left( \dot{\psi} + s\dot{\theta} \right) - J\bar{q} \cdot \frac{1}{\theta} \nabla_{\bar{x}} \theta \geq 0 \quad (3.23)$$

e pela imposição de *Hill* da conservação da taxa de trabalho elástica,

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{D}^e = \bar{\boldsymbol{\tau}} \cdot \dot{\mathbf{E}}^e$$

pode-se então reescrever a Eq. 3.23 na forma

$$\bar{\boldsymbol{\tau}} \cdot \dot{\mathbf{E}}^e + \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{D}^p - \rho_o \left( \dot{\psi} + s\dot{\theta} \right) - J\bar{q} \cdot \frac{1}{\theta} \nabla_{\bar{x}} \theta \geq 0. \quad (3.24)$$

Tomando agora a taxa  $\dot{\psi}$ , Eq.(3.20), juntamente com a consideração de que o processo seja isotérmico, a Eq.(3.24) fica

$$\bar{\boldsymbol{\tau}} \cdot \dot{\mathbf{E}}^e + \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{D}^p - \rho_o \left( \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{E}^e} \cdot \dot{\mathbf{E}}^e + \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\phi}_k} \cdot \dot{\boldsymbol{\phi}}_k \right) \geq 0,$$

e colocando os termos em evidência

$$\left( \bar{\boldsymbol{\tau}} - \rho_o \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{E}^e} \right) \cdot \dot{\mathbf{E}}^e + \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{D}^p - \rho_o \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\phi}_k} \cdot \dot{\boldsymbol{\phi}}_k \geq 0. \quad (3.25)$$

Contudo, sabendo que a Eq.(3.25) deve ser satisfeita para todos os processos reais resulta então que

$$\bar{\boldsymbol{\tau}} = \rho_o \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{E}^e}. \quad (3.26)$$

Definindo

$$\boldsymbol{\Upsilon}_k = \rho_o \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\phi}_k}, \quad (3.27)$$

em que  $\boldsymbol{\Upsilon}_k$  são as chamadas forças termodinâmicas, i.e., o conjunto de pares associados às variáveis internas  $\boldsymbol{\phi}_k$ , podemos escrever a Eq.(3.25) como

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{D}^p - \boldsymbol{\Upsilon}_k \cdot \dot{\boldsymbol{\phi}}_k \geq 0. \quad (3.28)$$

### 3.2.4 Relação constitutiva hiperelástica

A equação constitutiva hiperelástica é dada por

$$\bar{\boldsymbol{\tau}} = \mathbb{D} \mathbf{E}^e \quad (3.29)$$

em que

$$\mathbb{D} = 2\mu \mathbb{I} + \left( K - \frac{2}{3}\mu \right) (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}) \quad (3.30)$$

na qual  $\mathbb{D}$  é o tensor relação constitutiva hiperelástica de quarta ordem,  $\mathbb{I}$  é o tensor identidade de quarta ordem,  $\mathbf{I}$  é o tensor identidade de segunda ordem,  $K$  é o módulo volumétrico e  $\mu$  é

um dos coeficiente de *Lamé* ou módulo de cisalhamento,  $\mu = G$ . Sendo,  $\mathbb{I}$  e  $(\mathbf{I} \otimes \mathbf{I})$  dados por

$$\mathbb{I}_{ijkl} = \frac{1}{2} (\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \quad (3.31)$$

$$(\mathbf{I} \otimes \mathbf{I})_{ijkl} = \delta_{ij}\delta_{kl}. \quad (3.32)$$

Contudo a, Eq.(3.29) pode ser reescrita na forma:

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{\tau}} &= \left[ 2\mu\mathbb{I} + \left( K - \frac{2}{3}\mu \right) \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right] \mathbf{E}^e \\ &= 2\mu\mathbf{E}^e + \left( K - \frac{2}{3}\mu \right) \text{tr}(\mathbf{E}^e) \mathbf{I}. \end{aligned}$$

Assim, a última equação pode então ser escrita na forma

$$\bar{\boldsymbol{\tau}} = 2G\mathbf{E}^e + \kappa \text{tr}(\mathbf{E}^e) \mathbf{I}. \quad (3.33)$$

onde  $\kappa = (K - \frac{2}{3}\mu)$  representa outro coeficiente de *Lamé*.

### 3.2.5 Taxa de deformação plástica modificada

É conveniente introduzir a contribuição plástica modificada, ou taxa de distorção plástica de *Mendel*, LUBLINER(1990), para o gradiente da velocidade como

$$\bar{\mathbf{L}}^p = (\mathbf{F}^e)^{-1} \mathbf{L}^p \mathbf{F}^e = \dot{\mathbf{F}}^p (\mathbf{F}^p)^{-1}. \quad (3.34)$$

$\bar{\mathbf{L}}^p$  é obtida pelo transporte de  $\mathbf{L}^p$  para a configuração local não tencionada, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} \\ &= \left( \dot{\mathbf{F}}^e \mathbf{F}^p + \mathbf{F}^e \dot{\mathbf{F}}^p \right) (\mathbf{F}^p)^{-1} (\mathbf{F}^e)^{-1} \\ &= \dot{\mathbf{F}}^e \mathbf{F}^p (\mathbf{F}^p)^{-1} (\mathbf{F}^e)^{-1} + \mathbf{F}^e \dot{\mathbf{F}}^p (\mathbf{F}^p)^{-1} (\mathbf{F}^e)^{-1} \\ &= \dot{\mathbf{F}}^e (\mathbf{F}^e)^{-1} + \mathbf{F}^e \dot{\mathbf{F}}^p (\mathbf{F}^p)^{-1} (\mathbf{F}^e)^{-1} \\ &= \dot{\mathbf{F}}^e (\mathbf{F}^e)^{-1} + \mathbf{F}^e \bar{\mathbf{L}}^p (\mathbf{F}^e)^{-1} \\ &= \mathbf{L}^e + \mathbf{L}^p. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Pode-se ainda decompor  $\bar{\mathbf{L}}^p$  em sua parte simétrica  $\bar{\mathbf{D}}^p$ , associada ao estiramento plástico, e antissimétrica  $\bar{\mathbf{W}}^p$ , associada à rotação plástica, isto é,

$$\bar{\mathbf{L}}^p = \text{sym}(\bar{\mathbf{L}}^p) + \text{skew}(\bar{\mathbf{L}}^p) = \bar{\mathbf{D}}^p + \bar{\mathbf{W}}^p. \quad (3.37)$$

Considerado que o sólido elastoplástico é isotrópico em cada configuração local não tencionada, o termo de rotação plástica é tomado como nulo, WEBER & ANAND (1992) e SOUZA NETO *et al.* (2002), isto é,

$$\bar{\mathbf{W}}^p = 0. \quad (3.38)$$



Desta forma, a Eq.(3.28) pode ser reescrita como

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{F}^e \bar{\mathbf{D}}^p (\mathbf{F}^e)^{-1} - \boldsymbol{\Upsilon}_k \cdot \dot{\boldsymbol{\phi}}_k \geq 0 \quad (3.39)$$

ou ainda

$$(\mathbf{F}^e)^T \boldsymbol{\tau} (\mathbf{F}^e)^{-T} \cdot \bar{\mathbf{D}}^p - \boldsymbol{\Upsilon}_k \cdot \dot{\boldsymbol{\phi}}_k \geq 0. \quad (3.40)$$

e fazendo uso da decomposição polar

$$(\mathbf{R}^e \mathbf{U}^e)^T \boldsymbol{\tau} (\mathbf{R}^e \mathbf{U}^e)^{-T} \cdot \bar{\mathbf{D}}^p - \boldsymbol{\Upsilon}_k \cdot \dot{\boldsymbol{\phi}}_k \geq 0 \quad (3.41)$$

$$\mathbf{U}^e (\mathbf{R}^e)^T \boldsymbol{\tau} \mathbf{R}^e (\mathbf{U}^e)^{-1} \cdot \bar{\mathbf{D}}^p - \boldsymbol{\Upsilon}_k \cdot \dot{\boldsymbol{\phi}}_k \geq 0 \quad (3.42)$$

$$\mathbf{U}^e \bar{\boldsymbol{\tau}} (\mathbf{U}^e)^{-1} \cdot \bar{\mathbf{D}}^p - \boldsymbol{\Upsilon}_k \cdot \dot{\boldsymbol{\phi}}_k \geq 0. \quad (3.43)$$

Agora, como a relação constitutiva, Eq.(3.30), é isotrópica, e os tensores simétricos  $\mathbf{U}^e$  e  $\bar{\boldsymbol{\tau}}$  comutam, a inequação fundamental de *Clausius-Duhem* reduz-se à

$$\bar{\boldsymbol{\tau}} \cdot \bar{\mathbf{D}}^p - \boldsymbol{\Upsilon}_k \cdot \dot{\boldsymbol{\phi}}_k \geq 0. \quad (3.44)$$

### 3.2.6 Função de escoamento

O domínio elástico, nos modelos constitutivos propostos neste trabalho, é definido por uma função de escoamento do tipo

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \boldsymbol{\Upsilon}_k), \quad (3.45)$$

que expressa a dependência da função de escoamento em termos da tensão rotacionada de *Kirchhoff* ( $\bar{\boldsymbol{\tau}}$ ) e das forças termodinâmicas ( $\boldsymbol{\Upsilon}_k$ ). Assim pode-se então definir o conjunto das tensões admissíveis  $\mathcal{E}$ , como sendo

$$\mathcal{E} = \{\bar{\boldsymbol{\tau}} \mid \mathcal{F}(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \boldsymbol{\Upsilon}_k) \leq 0\}. \quad (3.46)$$

### 3.2.7 Potencial de dissipação e leis de evolução

Uma vez considerado que o processo seja isotérmico, a dissipação associada ao problema puramente mecânico é dada por

$$\mathcal{D} = \bar{\boldsymbol{\tau}} \cdot \bar{\mathbf{D}}^p - \boldsymbol{\Upsilon}_k \cdot \dot{\boldsymbol{\phi}}_k \geq 0. \quad (3.47)$$

Nesse momento é postulado a existência de um potencial de dissipação  $\zeta$ , ou pseudo-potencial de dissipação, a fim de se definir as leis complementares de evolução do processo dissipativo,

$$\zeta = \zeta(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \boldsymbol{\Upsilon}_k; \mathbf{E}^e, \boldsymbol{\phi}_k) \quad (3.48)$$

em que  $\zeta$  é uma função escalar, convexa e nula na origem, com relação às variáveis  $(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \boldsymbol{\Upsilon}_k)$ . Pela

aplicação da hipótese de dissipação normal obtém-se

$$\bar{\mathbf{D}}^p = \frac{\partial \zeta}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} \quad (3.49)$$

$$\dot{\boldsymbol{\phi}}_k = -\frac{\partial \zeta}{\partial \mathbf{\Upsilon}_k}. \quad (3.50)$$

No caso do modelo de plasticidade ser considerado associativo, o potencial de dissipação é tomado como sendo a função indicadora do conjunto convexo  $\mathcal{E}$ . Neste caso, como resultado da aplicação da hipótese de dissipação normal, obtém-se  $(\bar{\mathbf{D}}^p, \dot{\boldsymbol{\phi}}_k) \in \partial \zeta$ , i.e.,  $(\bar{\mathbf{D}}^p, \dot{\boldsymbol{\phi}}_k)$  pertence ao conjunto dos subgradientes de  $\zeta$  em  $(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \mathbf{\Upsilon}_k; \boldsymbol{\phi}_k)$ . A determinação deste subgradiente permite determinar que a evolução da taxa de deformação plástica modificada  $\bar{\mathbf{D}}^p$  é dada por

$$\bar{\mathbf{D}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} \quad (3.51)$$

e que a evolução das forças termodinâmicas podem ser determinadas por

$$\dot{\boldsymbol{\phi}}_k = -\dot{\lambda} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{\Upsilon}_k}, \quad (3.52)$$

na qual  $\dot{\lambda}$ , denominado por multiplicador plástico, satisfaz as condições de *Karush-Kuhn-Tucker* (KKT)

$$\mathcal{F} \leq 0 \quad \dot{\lambda} \geq 0 \quad \dot{\lambda} \mathcal{F} = 0, \quad (3.53)$$

e a condição de consistência  $\dot{\lambda} \dot{\mathcal{F}} = 0$  em  $\mathcal{F} = 0$ .

### 3.3 Problema de valor de contorno global

Uma vez definido o modelo constitutivo e a estratégia de atualização das variáveis em  $t_{n+1}$ , o que define o chamado *problema local*, é possível agora resolver o *problema clássico de valor de contorno global* associado ao deslocamento  $\vec{u}$ , porém formulado em termos da configuração de referência.

A configuração adotada neste trabalho é a chamada *Lagrangeana Total*. Dentro deste enfoque o problema de valor de contorno, *formulação forte*, e a sua equivalente formulação integral, *formulação fraca*, serão discretizados a seguir.

#### 3.3.1 Formulação forte: Configuração de referência.

O problema chamado de *formulação forte* pode ser enunciado como:

- Para cada  $t \in [t_o, t_f]$ , determine  $\vec{u}(\vec{X}, t)$  solução do seguinte problema de valor de contorno

$$\operatorname{div} \mathbf{P}(\vec{X}, t) + \rho_o(\vec{X}) \vec{b}(\vec{X}, t) = 0 \quad \text{em } \Omega_o \quad (3.54)$$

$$\mathbf{P}(\vec{X}, t) \vec{N}(\vec{X}, t) = \vec{t}(\vec{X}, t) \quad \text{em } \Gamma_o^t \quad (3.55)$$

$$\vec{u}(\vec{X}, t) = \vec{u}(\vec{X}) \quad \text{em } \Gamma_o^u, \quad (3.56)$$

em que  $\vec{N}$  é a normal externa na configuração de referência, conforme mostrado na Fig. 3.3.

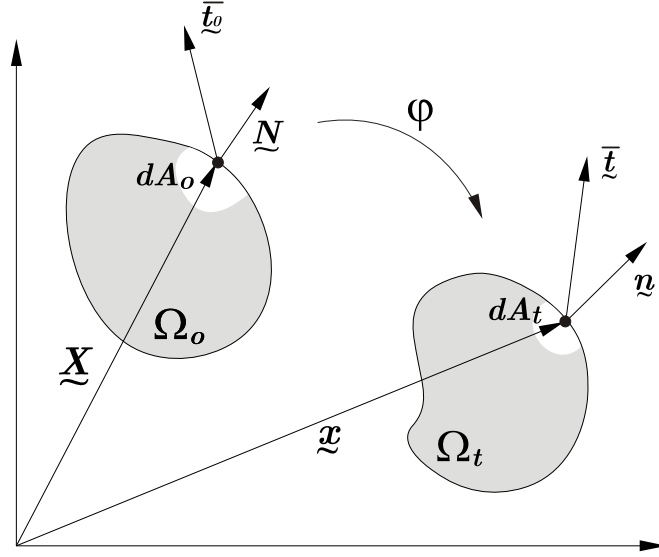


Figura 3.3: Vetores tração e normais em  $\Omega_o$  e  $\Omega_t$ .

### 3.3.2 Formulação fraca: Configuração de referência

A *formulação fraca* do problema pode ser enunciado como:

- Determine  $\vec{u}(\vec{X}, t) \in \mathcal{K}$ , para cada  $t \in [t_o, t_f]$ , tal que

$$\int_{\Omega_o} \mathbf{P} \cdot \nabla_{\vec{X}} \delta \vec{u} \, d\Omega_o = \int_{\Omega_o} \rho_o \vec{b} \cdot \delta \vec{u} \, d\Omega_o + \int_{\Gamma_o^t} \vec{t} \cdot \delta \vec{u} \, dA_o \quad \forall \delta \vec{u} \in \mathcal{V}. \quad (3.57)$$

Aqui  $\mathcal{K}$  é o espaço dos deslocamentos admissíveis dado por

$$\mathcal{K} = \{ \vec{u} \mid u_i \in W_p^1(\Theta), \vec{u} = \vec{u} \text{ em } \Gamma_o^u \}, \quad (3.58)$$

para  $p$  suficientemente grande, e  $\mathcal{V}$  é o espaço dos deslocamentos virtuais, dado por

$$\mathcal{V} = \{ \delta \vec{u} \mid \delta u_i \in W_p^1(\Theta), \delta \vec{u} = 0 \text{ em } \Gamma_o^u \}, \quad (3.59)$$

no qual  $W_p^1(\Theta)$  é o espaço de *Sobolev*.

Ou denotando, para cada  $t \in [t_o, t_f]$ ,

$$F(\vec{u}; \delta \vec{u}) = \int_{\Omega_o} \mathbf{P} \cdot \nabla_{\vec{X}} \delta \vec{u} \, d\Omega_o - \int_{\Omega_o} \rho_o \vec{b} \cdot \delta \vec{u} \, d\Omega_o - \int_{\Gamma_o^t} \vec{t} \cdot \delta \vec{u} \, dA_o \quad (3.60)$$

o problema pode ser reescrito como: Determine  $\vec{u}(\vec{X}, t) \in \mathcal{K}$  tal que, para cada  $t \in [t_o, t_f]$ ,

$$F(\vec{u}; \delta \vec{u}) = 0 \quad \forall \delta \vec{u} \in \mathcal{V}. \quad (3.61)$$

### 3.4 Formulação incremental

A formulação incremental entre o instante  $t_n$  e  $t_{n+1}$ , ilustrado na Fig. 3.4, considera que a configuração e as variáveis de estado sejam conhecidas em  $\Omega_n$  e as equações de equilíbrio sejam escritas em  $\Omega_{n+1}$ . Assim, o campo de deslocamentos será representado por

$$\vec{u}_n = \vec{u}(\vec{X}, t_n) = \vec{x}_n - \vec{X} \quad (3.62)$$

$$\vec{u}_{n+1} = \vec{u}(\vec{X}, t_{n+1}) = \vec{x}_{n+1} - \vec{X} \quad (3.63)$$

e deste modo pode-se então escrever o gradiente de deformações para os instantes  $t_n$  e  $t_{n+1}$  como

$$\mathbf{F}_n = \mathbf{I} + \nabla_{\vec{X}} \vec{u}_n \quad (3.64)$$

$$\mathbf{F}_{n+1} = \mathbf{I} + \nabla_{\vec{X}} \vec{u}_{n+1}. \quad (3.65)$$

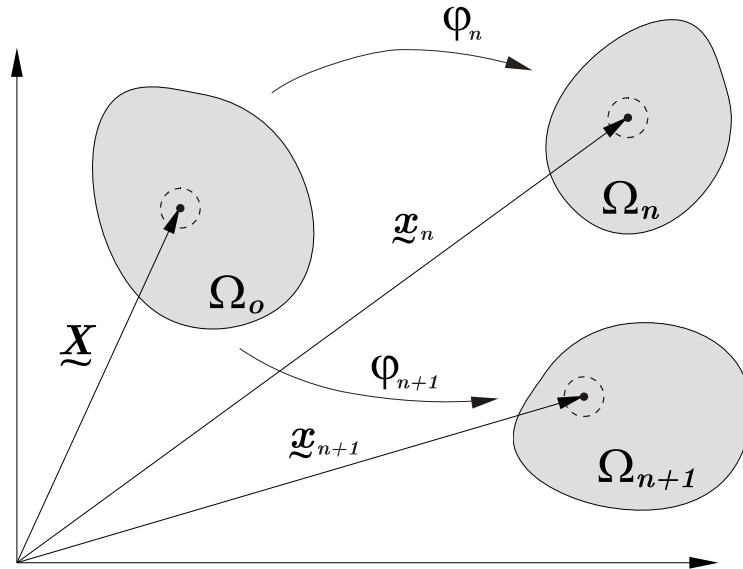


Figura 3.4: Descrição incremental.

Desta forma, em  $t_{n+1}$ , a forma fraca do problema pode ser expressa como:

- Encontre  $\vec{u}_{n+1} \in \mathcal{K}$  tal que

$$F(\vec{u}_{n+1}; \delta \vec{u}) = 0 \quad \forall \delta \vec{u} \in \mathcal{V}, \quad (3.66)$$

em que

$$F(\vec{u}_{n+1}; \delta \vec{u}) = \int_{\Omega_o} \mathbf{P}(\vec{u}_{n+1}) \cdot \nabla_{\vec{X}} \delta \vec{u} \, d\Omega_o - \int_{\Omega_o} \rho_o \vec{b}_{n+1} \cdot \delta \vec{u} \, d\Omega_o - \int_{\Gamma_o^t} \vec{t}_{n+1} \cdot \delta \vec{u} \, dA_o.$$

Como o problema acima é não linear com relação a  $\vec{u}_{n+1}$ , é proposto o método de Newton para a sua solução.

### 3.4.1 Linearização e método de Newton

Seja

$$\vec{u}_{n+1}^0 = \vec{u}_n, \quad k = 0 \quad (3.67)$$

em que  $k$  denota a iteração no processo de Newton e  $\vec{u}_n$  o valor convergido obtido em  $t_n$ . Deste modo, para a  $k$ -ésima iteração, no instante  $t_{n+1}$ , temos

$$\vec{u}_{n+1}^{k+1} = \vec{u}_{n+1}^k + \Delta \vec{u}_{n+1}^k. \quad (3.68)$$

Com o objetivo de determinar  $\Delta \vec{u}_{n+1}^k$  é imposta a condição

$$F(\vec{u}_{n+1}^{k+1}; \delta \vec{u}) = 0 \quad \forall \delta \vec{u} \in \mathcal{V}, \quad (3.69)$$

i.e,

$$F(\vec{u}_{n+1}^{k+1}; \delta \vec{u}) = F(\vec{u}_{n+1}^k + \Delta \vec{u}_{n+1}^k; \delta \vec{u}) = 0 \quad \forall \delta \vec{u} \in \mathcal{V}. \quad (3.70)$$

Considerando  $F(\cdot, \cdot)$  como sendo suficientemente regular, e expandindo  $F(\vec{u}_{n+1}^k + \Delta \vec{u}_{n+1}^k; \delta \vec{u})$  em uma série de *Taylor* em  $\vec{u}_{n+1}^k$ , obtemos, para uma aproximação de primeira ordem,

$$F(\vec{u}_{n+1}^k + \Delta \vec{u}_{n+1}^k; \delta \vec{u}) = F(\vec{u}_{n+1}^k; \delta \vec{u}) + DF(\vec{u}_{n+1}^k; \delta \vec{u}) [\Delta \vec{u}_{n+1}^k]. \quad (3.71)$$

Agora, pela Eq.(3.70) é possível escrever

$$DF(\vec{u}_{n+1}^k; \delta \vec{u}) [\Delta \vec{u}_{n+1}^k] = -F(\vec{u}_{n+1}^k; \delta \vec{u}). \quad (3.72)$$

com

$$DF(\vec{u}_{n+1}^k; \delta \vec{u}) [\Delta \vec{u}_{n+1}^k] = \int_{\Omega_o} [\mathbb{A}(\vec{u}_{n+1}^k)] \nabla_{\vec{X}}(\Delta \vec{u}_{n+1}^k) \cdot \nabla_{\vec{X}} \delta \vec{u} \, d\Omega_o \quad (3.73)$$

em que  $[\mathbb{A}]$  é um tensor de quarta ordem representando o módulo tangente global, o qual é dado por

$$[\mathbb{A}(\vec{u}_{n+1}^k)]_{ijkl} = \left. \frac{\partial P_{ij}}{\partial F_{kl}} \right|_{\vec{u}_{n+1}^k} = \frac{\partial \tau_{ip}}{\partial F_{kl}} F_{jp}^{-1} - \tau_{ip} F_{jk}^{-1} F_{lp}^{-1}. \quad (3.74)$$

### 3.4.2 Notas sobre a determinação de $\mathbb{A}$

O computo de  $\mathbb{A}$  requer a determinação da derivada da tensão de *Kirchhoff* com relação ao gradiente da deformação. Porém, é possível escrever  $\boldsymbol{\tau}$  como função da tensão rotacionada de *Kirchhoff*,  $\bar{\boldsymbol{\tau}}$ .

$$\bar{\boldsymbol{\tau}} = (\mathbf{R}^e)^T \boldsymbol{\tau} \mathbf{R}^e$$

então

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{R}^e \bar{\boldsymbol{\tau}} (\mathbf{R}^e)^T.$$

Assim a derivada da tensão de *Kirchhoff* com relação ao gradiente da deformação é dada por

$$\frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial \mathbf{F}} = \frac{\partial \mathbf{R}^e}{\partial \mathbf{F}} \bar{\boldsymbol{\tau}} (\mathbf{R}^e)^T + (\mathbf{R}^e) \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}}{\partial \mathbf{F}} (\mathbf{R}^e)^T + (\mathbf{R}^e) \bar{\boldsymbol{\tau}} \frac{\partial (\mathbf{R}^e)^T}{\partial \mathbf{F}},$$

podendo ser escrita na forma indicial

$$\frac{\partial \tau_{ip}}{\partial F_{kl}} = \frac{\partial}{\partial F_{kl}} (R_{im} \bar{\tau}_{ms} R_{ps}^e) = \frac{\partial R_{im}^e}{\partial F_{kl}} \bar{\tau}_{ms} R_{ps}^e + R_{im}^e \frac{\partial \bar{\tau}_{ms}}{\partial F_{kl}} R_{ps}^e + R_{im}^e \bar{\tau}_{ms} \frac{\partial R_{ps}^e}{\partial F_{kl}}.$$

Desta forma será necessário determinar a derivada de  $\bar{\tau}$  com relação a  $\mathbf{F}_{n+1}$ . Porém como

$$\bar{\tau}_{n+1} = \hat{\tau}_{n+1} \left( \mathbf{E}_{n+1}^{e^{teste}}, (\cdot)_n \right),$$

aplicando a regra da cadeia, temos

$$\hat{\mathbb{D}} = \frac{\partial \bar{\tau}_{n+1}}{\partial \mathbf{F}_{n+1}} = \frac{\partial \bar{\tau}_{n+1}}{\partial \mathbf{E}_{n+1}^{e^{teste}}} \frac{\partial \mathbf{E}_{n+1}^{e^{teste}}}{\partial \mathbf{C}_{n+1}^{e^{teste}}} \frac{\partial \mathbf{C}_{n+1}^{e^{teste}}}{\partial \mathbf{F}_{n+1}}. \quad (3.75)$$

Denotando

$$\tilde{\mathbb{D}} = \frac{\partial \bar{\tau}_{n+1}}{\partial \mathbf{E}_{n+1}^{e^{teste}}} \quad (3.76)$$

$$\mathbb{G} = \frac{\partial \mathbf{E}_{n+1}^{e^{teste}}}{\partial \mathbf{C}_{n+1}^{e^{teste}}} \quad (3.77)$$

e

$$\mathbb{H} = \frac{\partial \mathbf{C}_{n+1}^{e^{teste}}}{\partial \mathbf{F}_{n+1}} \quad (3.78)$$

pode-se reescrever a Eq.(3.75) como

$$\hat{\mathbb{D}} = \tilde{\mathbb{D}} \mathbb{G} \mathbb{H}, \quad (3.79)$$

a qual em componentes é dada por

$$\hat{D}_{ijkl} = \tilde{D}_{ijrs} G_{rspq} H_{pqkl}. \quad (3.80)$$

### Determinação de $\mathbb{G}$

$$\mathbb{G} = \frac{\partial \mathbf{E}_{n+1}^{e^{teste}}}{\partial \mathbf{C}_{n+1}^{e^{teste}}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{C}_{n+1}^{e^{teste}}} \ln \left( \mathbf{U}_{n+1}^{e^{teste}} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{C}_{n+1}^{e^{teste}}} \ln \left( \mathbf{C}_{n+1}^{e^{teste}} \right). \quad (3.81)$$

Perceba que a determinação de  $\mathbb{G}$  requer uma derivada do tipo  $\frac{\partial \ln(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}}$ . Este tipo de derivada é uma derivada de uma função isotrópica. Esta classe de derivadas foi investigada em detalhes por SOUZA NETO *et al.* (1998) e ORTIZ *et al.* (2001). Neste trabalho foi implementada a proposta apresentada por ORTIZ *et al.* (2001).

### Determinação de $\tilde{\mathbb{D}}$

A determinação do tensor de quarta ordem  $\tilde{\mathbb{D}}$  é a única contribuição oriunda da relação constitutiva do material, no módulo tangente consistente  $\mathbb{A}$ . As demais contribuições são todas relacionadas à parte geométrica.

De fato,  $\tilde{\mathbb{D}}$  depende se o estado é elástico ou elastoplástico. Se  $\mathcal{F} \leq 0$ ,  $\tilde{\mathbb{D}}$  é assumido como o módulo elástico  $\mathbb{D}$ , e se  $\mathcal{F} > 0$  então  $\tilde{\mathbb{D}}$  é o módulo tangente consistente elastoplástico  $\mathbb{D}^{ep}$ , que deve ser determinado pela solução do sistema de equações Eq.(4.71).

### 3.5 O problema de valor inicial elastoplástico - Aproximação pela metodologia *operator split*

Na formulação incremental, utilizada para a integração das leis de evolução, considera-se que as variáveis de estado são conhecidas no instante  $t_n$ . O problema de valor inicial constitutivo consiste então na determinação das variáveis de estado em  $t_{n+1}$ , em que a história do gradiente de deformação,  $\mathbf{F}(t)$ ,  $t \in [t_n, t_{n+1}]$  é conhecida.

No presente contexto, as variáveis desconhecidas do problema de valor inicial elastoplástico são o gradiente da deformação plástica  $\mathbf{F}^p$  e o conjunto de variáveis internas  $\phi$ .

Assim, tem-se como condições iniciais:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}^p(t_n) &= \mathbf{F}_n^p, \\ \phi(t_n) &= \phi_n.\end{aligned}\tag{3.82}$$

O problema de valor inicial constitutivo consiste então na determinação de  $\mathbf{F}^p$  e  $\phi$  tais que as equações constitutivas dadas pelas Eq.(3.29), (3.51), (3.52) e Eq.(3.53) sejam satisfeitas para todo  $t \in [t_n, t_{n+1}]$ .

O uso da metodologia de aproximação baseada na decomposição de operadores, resulta em um algoritmo que consiste em duas etapas básicas:

1. Predição elástica: o problema é assumido como puramente elástico entre  $t_n$  e  $t_{n+1}$ .
2. Correção plástica: solução de um sistema de equações discretizadas não lineares, englobando:
  - a lei da elasticidade;
  - o fluxo plástico;
  - a evolução das variáveis internas;
  - o critério de carregamento/descarregamento;

tendo esta etapa como condições iniciais os resultados obtidos na solução do problema de predição elástico.

#### 3.5.1 Predição elástica

Neste estágio assume-se que

$$\dot{\mathbf{F}}^p = \mathbf{0}\tag{3.83}$$

$$\dot{\phi} = \mathbf{0}.\tag{3.84}$$

Inicialmente, supõe-se que a solução seja puramente elástica. Tal consideração é conhecida como sendo o *estado elástico teste*<sup>1</sup>, dado por

$$\mathbf{F}_{n+1}^{p\,teste} = \mathbf{F}_n^p \quad (3.85)$$

$$\phi_{n+1}^{teste} = \phi_n. \quad (3.86)$$

O gradiente da deformação elástica teste,  $\mathbf{F}_{n+1}^{e\,teste}$ , correspondente à solução acima, é determinado por

$$\mathbf{F}_{n+1}^{e\,teste} = \mathbf{F}_{n+1} (\mathbf{F}_n^p)^{-1}. \quad (3.87)$$

Uma vez que a lei elástica é dada em termos da deformação logarítmica  $\mathbf{E}^e$ , torna-se preciso calcular

$$\mathbf{C}_{n+1}^{e\,teste} = \left( \mathbf{F}_{n+1}^{e\,teste} \right)^T \mathbf{F}_{n+1}^{e\,teste}, \quad (3.88)$$

para então se calcular a deformação logarítmica teste  $\mathbf{E}_{n+1}^{e\,teste}$ , como

$$\mathbf{E}_{n+1}^{e\,teste} = \frac{1}{2} \ln \left( \mathbf{C}_{n+1}^{e\,teste} \right). \quad (3.89)$$

Uma vez que  $\mathbf{E}_{n+1}^{e\,teste}$  é calculado, é possível determinar a tensão rotacionada de *Kirchhoff* teste  $\bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}^{teste}$ , pela lei hiperelástica expressa pela Eq.(3.29), ou seja

$$\bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}^{teste} = 2\mu \mathbf{E}_{n+1}^{e\,teste} + \left( K - \frac{2}{3}\mu \right) \text{tr} \left( \mathbf{E}_{n+1}^{e\,teste} \right) \mathbf{I} \quad (3.90)$$

### 3.5.2 A correção plástica

O procedimento adotado para a correção plástica corresponde à classe dos chamados algoritmos de *mapeamento de retorno*<sup>2</sup>, já extensivamente utilizados por muitos autores. Para uma visão mais atualizada veja SIMO & HUGHES (1998) e SOUZA NETO *et al.* (2002).

Entretanto, diferentemente dos trabalhos que envolvem pequenas deformações nos quais é comumente adotado o método implícito de Euler ("*backward Euler method*") para a solução do problema elastoplástico inicial, aqui é utilizado a aproximação "*backward*" exponencial. Pela hipótese da decomposição multiplicativa do gradiente da deformação, do uso da medida de deformação logarítmica juntamente com o uso da aproximação "*backward*" exponencial, o algoritmo de mapeamento de retorno resulta em um procedimento equivalente ao utilizado em pequenas deformações.

#### Verificação do critério de escoamento

Uma vez que o estado teste proporcione uma tensão que não pertença ao conjunto  $\mathcal{E}$ , i.e.,  $\bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}^{teste} \notin \mathcal{E}$ , em outras palavras se o estado violar o critério de escoamento

$$\mathcal{F} \left( \bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}^{teste}, \phi_{n+1}^{teste} \right) > 0,$$

<sup>1</sup>do inglês *trial elastic state*.

<sup>2</sup>do inglês *returning mapping*.



o procedimento de correção plástica deve ser efetuada.

### Correção plástica - Algoritmo de mapeamento de retorno exponencial

Nesta etapa do algoritmo, a regra de fluxo plástica e as leis de evolução das variáveis internas são discretizadas. Para discretizar a regra de fluxo plástico,

$$\dot{\mathbf{F}}^p = \bar{\mathbf{D}}^p \mathbf{F}^p, \quad (3.91)$$

é utilizada uma abordagem conveniente, proposta por ETEROVIC & BATHE (1990) e WEBER & ANAND (1990), que consiste no emprego de uma aproximação *backward* exponencial.

Com  $\mathbf{F}_n^p$  como condição inicial, a discretização resultante é dada por

$$\mathbf{F}_{n+1}^p = \exp \left( \Delta \lambda \left. \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \bar{\boldsymbol{\Upsilon}}} \right|_{n+1} \right) \mathbf{F}_n^p. \quad (3.92)$$

O uso da aproximação "backward" exponencial, segundo ROSSI (2005), propicia uma precisão de primeira ordem e preserva a incompressibilidade plástica, no caso do uso de modelos do tipo  $J_2$ .

A discretização das leis de evolução das variáveis internas é feita pelo método clássico de Euler implícito. Assim,

$$\phi_{k_{n+1}} = \phi_{k_n} + \Delta \lambda \left. \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\Upsilon}_k} \right|_{n+1} \quad (3.93)$$

e o incremento plástico  $\Delta \lambda$  deve ser estritamente positivo, i.e.,  $\Delta \lambda > 0$ .

### Mapeamento pela integração exponencial

O procedimento de atualização pode ser escrito no mesmo formato que no caso dos algoritmos clássicos de mapeamento de retorno aplicados a problemas elastoplásticos em pequenas deformações. Para tanto, partindo da Eq.(3.92) e após uma manipulação algébrica extensa pode-se chegar à seguinte regra de evolução escrita em termos da deformação logarítmica, assim

$$\mathbf{E}_{n+1}^e = \mathbf{E}_{n+1}^{e^{teste}} - \Delta \lambda \left. \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \bar{\boldsymbol{\Upsilon}}} \right|_{n+1}. \quad (3.94)$$

### Sistema de equações locais

O algoritmo de mapeamento de retorno consiste então na solução do seguinte sistema de equações não lineares,

$$\begin{cases} \mathbf{E}_{n+1}^e - \mathbf{E}_{n+1}^{e^{teste}} + \Delta \lambda \left. \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \bar{\boldsymbol{\Upsilon}}} \right|_{n+1} \\ \phi_{k_{n+1}} - \phi_{k_n} - \Delta \lambda \left. \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\Upsilon}_k} \right|_{n+1} \\ \mathcal{F}(\bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}, \phi_{k_{n+1}}) \end{cases} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.95)$$

para  $\Delta \lambda > 0$ .

Ainda como resultado da manipulação algébrica é possível mostrar que

$$\mathbf{R}_{n+1}^e = \mathbf{R}_{n+1}^{e\text{teste}}. \quad (3.96)$$

A Fig. 3.5 mostra com mais detalhes as configurações de deformação entre o incremento  $t_n$  e  $t_{n+1}$ . Ainda na Fig. 3.5,

$$\mathbf{F}_u = \mathbf{F}_{n+1} \mathbf{F}_n^{-1}. \quad (3.97)$$

Como

$$\mathbf{F}_n = \mathbf{F}_n^e \mathbf{F}_n^p \quad (3.98)$$

tem-se então que

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{n+1}^{e\text{teste}} &= \mathbf{F}_u \mathbf{F}_n^e \\ &= \mathbf{F}_{n+1} \mathbf{F}_n^{-1} \mathbf{F}_n^e \\ &= \mathbf{F}_{n+1} (\mathbf{F}_n^p)^{-1} (\mathbf{F}_n^e)^{-1} \mathbf{F}_n^e \\ &= \mathbf{F}_{n+1} (\mathbf{F}_n^p)^{-1}, \end{aligned} \quad (3.99)$$

o que, de fato, reproduz a Eq.(3.87).

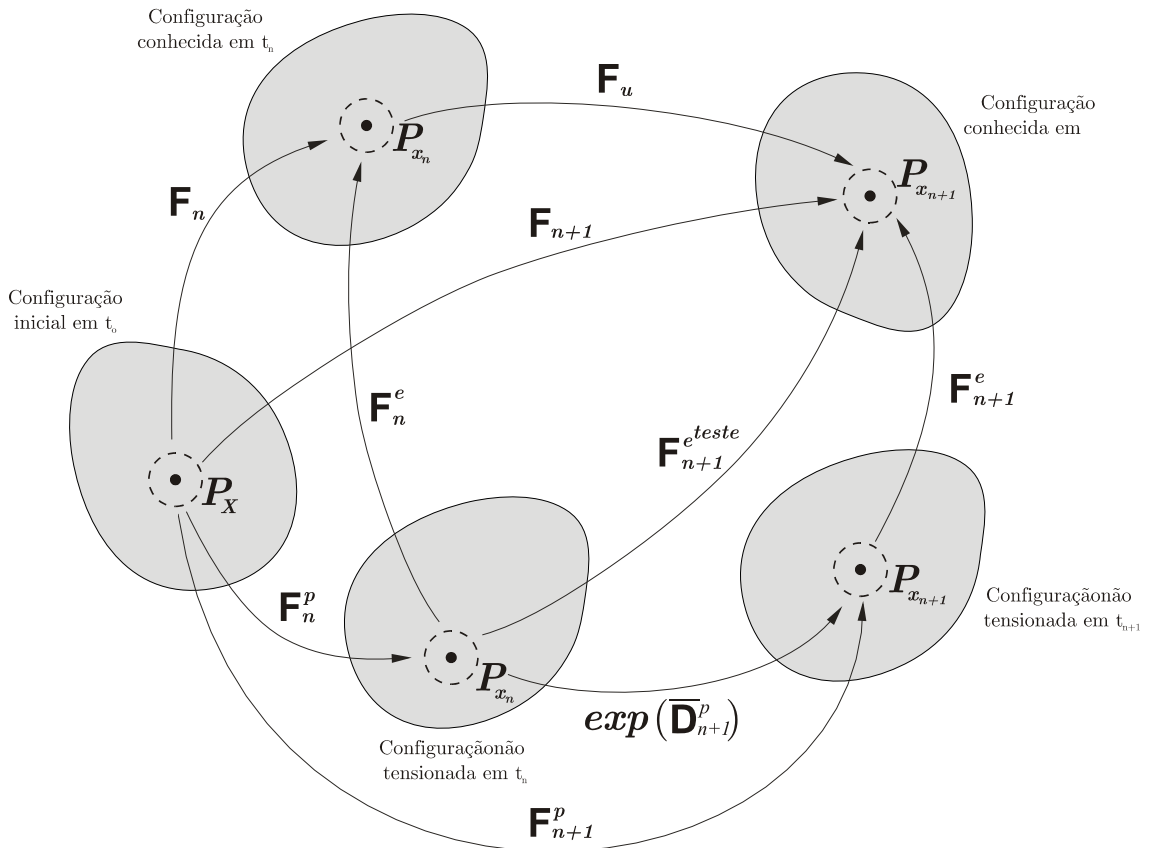


Figura 3.5: Configurações de deformações entre o incremento  $t_n$  e  $t_{n+1}$ .

### 3.6 Aspectos computacionais

Considerando o tensor gradiente da deformação escrito de maneira completa onde nenhuma hipótese geométrica é imposta, têm-se que

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \nabla_{\vec{X}} \vec{u}$$

em que

$$\nabla_{\vec{X}} \vec{u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & \frac{\partial u_1}{\partial X_2} & \frac{\partial u_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial X_1} & \frac{\partial u_2}{\partial X_2} & \frac{\partial u_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial X_1} & \frac{\partial u_3}{\partial X_2} & \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \end{bmatrix}.$$

Para cada ponto de integração da forma fraca discretizada, precisam ser feitas uma série de cálculos antes de verificar se este ponto pertence ou não ao domínio elástico. Esses cálculos requeridos para cada ponto de integração estão descritos na tabela de procedimentos 3.1.

O campo de deslocamento é aproximado por

$$\vec{u}^h(\vec{X}) = \sum_{I=1}^n \Phi_I(\vec{X}) \vec{u}_I$$

e

$$\delta \vec{u}^h(\vec{X}) = \sum_{I=1}^n \Phi_I(\vec{X}) \delta \vec{u}_I.$$

no qual o índice  $h$  denota discretização.

Pode-se então escrever a forma discreta do problema pela introdução das funções de forma associadas ao MEF. Assim, o problema fica reescrito como:

- Encontre  $\vec{u}_{n+1}^h \in \mathcal{K}^h$  tal que

$$F(\vec{u}_{n+1}^h; \delta \vec{u}^h) = 0 \quad \forall \delta \vec{u}^h \in \mathcal{V}^h, \quad (3.100)$$

em que

$$F(\vec{u}_{n+1}^h; \delta \vec{u}) = \int_{\Omega_o} \mathbf{P}(\vec{u}_{n+1}^h) \cdot \nabla_{\vec{X}} \delta \vec{u} \, d\Omega_o - \int_{\Omega_o} \rho_o \vec{b}_{n+1} \cdot \delta \vec{u} \, d\Omega_o - \int_{\Gamma_o^t} \vec{t}_{n+1} \cdot \delta \vec{u} \, dA_o.$$

Porém a forma discreta oriunda deste problema recai na manipulação de tensores de quarta e segunda ordem. Porém tal forma não se demonstra atraente para a implementação numérica. A fim de manipular somente com vetores e tensores de segunda utiliza-se um mapeamento. Com base neste mapeamento, defini-se então os vetores *força interna* e *externa*, os quais serão utilizados na iteração de Newton do problema global.

O gradiente de  $\vec{u}^h$  em componentes, dada a sua discretização espacial, é escrito como

Tabela 3.1: Cômputos requeridos em cada ponto de integração

(i) Dado $\vec{u}_{n+1}$ compute:
$\mathbf{F}_{n+1} = \mathbf{I} + \nabla_{\vec{X}} \vec{u}_{n+1}.$
(ii) Determine $\mathbf{F}_{n+1}^{e^{teste}}$ por
$\mathbf{F}_{n+1}^{e^{teste}} = \mathbf{F}_{n+1} (\mathbf{F}_n^p)^{-1}.$
(iii) Determine $\mathbf{C}_{n+1}^{e^{teste}}$ .
$\mathbf{C}_{n+1}^{e^{teste}} = \left( \mathbf{F}_{n+1}^{e^{teste}} \right)^T \mathbf{F}_{n+1}^{e^{teste}}$
(iv) Realize a decomposição espectral de $\mathbf{C}_{n+1}^{e^{teste}}$
$\mathbf{C}_{n+1}^{e^{teste}} = \sum \lambda_i \left( \vec{l}_i \otimes \vec{l}_i \right).$
(v) Compute $\mathbf{U}_{n+1}^{e^{teste}}$
$\mathbf{U}_{n+1}^{e^{teste}} = \left( \mathbf{C}_{n+1}^{e^{teste}} \right)^{\frac{1}{2}} = \sum \lambda_i^{\frac{1}{2}} \left( \vec{l}_i \otimes \vec{l}_i \right)$
(vi) Compute as deformações logarítmicas
$\mathbf{E}_{n+1}^{e^{teste}} = \ln \left( \mathbf{U}_{n+1}^{e^{teste}} \right)$
(vii) Tome a inversa de $\left( \mathbf{U}_{n+1}^{e^{teste}} \right)^{-1}$
(viii) Compute
$\mathbf{R}_{n+1}^{e^{teste}} = \mathbf{F}_{n+1}^{e^{teste}} \left( \mathbf{U}_{n+1}^{e^{teste}} \right)^{-1}.$

$$\nabla_{\vec{X}} \vec{u}^h = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1^h}{\partial X_1} & \frac{\partial u_1^h}{\partial X_2} & \frac{\partial u_1^h}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_2^h}{\partial X_1} & \frac{\partial u_2^h}{\partial X_2} & \frac{\partial u_2^h}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_3^h}{\partial X_1} & \frac{\partial u_3^h}{\partial X_2} & \frac{\partial u_3^h}{\partial X_3} \end{bmatrix} = \sum_{I=1}^n \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_I}{\partial X_1} u_{1I} & \frac{\partial \Phi_I}{\partial X_2} u_{1I} & \frac{\partial \Phi_I}{\partial X_3} u_{1I} \\ \frac{\partial \Phi_I}{\partial X_1} u_{2I} & \frac{\partial \Phi_I}{\partial X_2} u_{2I} & \frac{\partial \Phi_I}{\partial X_3} u_{2I} \\ \frac{\partial \Phi_I}{\partial X_1} u_{3I} & \frac{\partial \Phi_I}{\partial X_2} u_{3I} & \frac{\partial \Phi_I}{\partial X_3} u_{3I} \end{bmatrix}. \quad (3.101)$$

Utilizando o mapeamento entre a forma matricial de  $\nabla_{\vec{X}} \vec{u}^h$  em forma vetorial, pode-se então escrever

$$\begin{bmatrix} (\nabla_{\vec{X}} \vec{u}^h)_{11} \\ (\nabla_{\vec{X}} \vec{u}^h)_{12} \\ (\nabla_{\vec{X}} \vec{u}^h)_{13} \\ (\nabla_{\vec{X}} \vec{u}^h)_{21} \\ (\nabla_{\vec{X}} \vec{u}^h)_{22} \\ (\nabla_{\vec{X}} \vec{u}^h)_{23} \\ (\nabla_{\vec{X}} \vec{u}^h)_{31} \\ (\nabla_{\vec{X}} \vec{u}^h)_{32} \\ (\nabla_{\vec{X}} \vec{u}^h)_{33} \end{bmatrix} = \sum_{I=1}^n \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_I}{\partial X_1} & 0 & 0 \\ \frac{\partial \Phi_I}{\partial X_2} & 0 & 0 \\ \frac{\partial \Phi_I}{\partial X_3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial \Phi_I}{\partial X_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \Phi_I}{\partial X_2} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \Phi_I}{\partial X_3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial \Phi_I}{\partial X_1} \\ 0 & 0 & \frac{\partial \Phi_I}{\partial X_2} \\ 0 & 0 & \frac{\partial \Phi_I}{\partial X_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1I} \\ u_{2I} \\ u_{3I} \end{bmatrix}. \quad (3.102)$$

Denotando agora

$$\mathbf{G}_I^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_I}{\partial X_1} & \frac{\partial \Phi_I}{\partial X_2} & \frac{\partial \Phi_I}{\partial X_3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial \Phi_I}{\partial X_1} & \frac{\partial \Phi_I}{\partial X_2} & \frac{\partial \Phi_I}{\partial X_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial \Phi_I}{\partial X_1} & \frac{\partial \Phi_I}{\partial X_2} & \frac{\partial \Phi_I}{\partial X_3} \end{bmatrix} \quad (3.103)$$

e

$$\vec{I}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.104)$$

é possível escrever o vetor gradiente de deformação como

$$\vec{F}^h = \vec{I} + \vec{G}_u^h \quad (3.105)$$

com

$$\vec{G}_u^h = \sum_{I=1}^n \mathbf{G}_I \vec{u}_I \quad (3.106)$$

ou ainda

$$\begin{aligned} \mathbf{G}^g &= [\mathbf{G}_1 | \mathbf{G}_2 | \cdots | \mathbf{G}_n]. \\ \vec{G}_u^h &= \mathbf{G}^g \vec{u}^g \end{aligned} \quad (3.107)$$

com  $\vec{u}^g$  dado por

$$\vec{u}^{gT} = \left[ u_{1_1} \quad u_{2_1} \quad u_{3_1} \mid u_{1_2} \quad u_{2_2} \quad u_{3_2} \mid \cdots \mid u_{1_n} \quad u_{2_n} \quad u_{3_n} \right] \quad (3.108)$$

e

$$\mathbf{G}^g = [\mathbf{G}_1 | \mathbf{G}_2 | \cdots | \mathbf{G}_n].$$

A forma linearizada do vetor gradiente de deformações é tal que

$$\delta \vec{F}(\vec{u}^h) = \delta \vec{I} + \delta \vec{G}_u^h = \delta \vec{G}_u^h = \mathbf{G}^g \delta \vec{u}^g. \quad (3.109)$$

Da mesma forma irá se escrever o vetor PK1 como

$$\vec{P}^T = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & P_{21} & P_{22} & P_{23} & P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{bmatrix}. \quad (3.110)$$

### 3.6.1 Forças internas e externas

O princípio do trabalho virtual, conforme descrito no Cap. 2, na ausência de forças inerciais, estabelece que

$$\delta \mathcal{W}^{int} = \delta \mathcal{W}^{ext}. \quad (3.111)$$

Deste resultado é possível determinar os vetores de força interna e externa. O vetor de esforços internos  $\vec{f}^{int}$  é

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{W}^{int} &= \vec{f}^{int} \cdot \delta \vec{u}^g \\ &= \int_{\Omega_o} \vec{P} \cdot \delta \vec{F} \, d\Omega_o \\ &= \int_{\Omega_o} \vec{P} \cdot \mathbf{G}^g \delta \vec{u}^g \, d\Omega_o \\ &= \int_{\Omega_o} (\mathbf{G}^g)^T \vec{P} \, d\Omega_o \cdot \delta \vec{u}^g. \end{aligned}$$

Assim,

$$\vec{f}^{int} = \int_{\Omega_o} (\mathbf{G}^g)^T \vec{P} \, d\Omega_o. \quad (3.112)$$

De maneira similar, o vetor de forças externas  $\vec{f}^{ext}$  é dado por

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{W}^{ext} &= \vec{f}^{ext} \cdot \delta \vec{u}^g \\ &= \int_{\Omega_o} \rho_o \vec{b}_o \cdot \delta \vec{u} \, d\Omega_o + \int_{\Gamma_o^t} \vec{t}_o \cdot \delta \vec{u} \, dA_o \\ &= \int_{\Omega_o} \rho_o \vec{b}_o \cdot \mathbf{\Phi}^g \delta \vec{u}^g \, d\Omega_o + \int_{\Gamma_o^t} \vec{t}_o \cdot \mathbf{\Phi}^g \delta \vec{u}^g \, dA_o \\ &= \left[ \int_{\Omega_o} \rho_o (\mathbf{\Phi}^g)^T \vec{b}_o \, d\Omega_o + \int_{\Gamma_o^t} (\mathbf{\Phi}^g)^T \vec{t}_o \, dA_o \right] \cdot \delta \vec{u}^g. \end{aligned}$$

Assim,

$$\vec{f}^{ext} = \int_{\Omega_o} \rho_o (\mathbf{\Phi}^g)^T \vec{b}_o \, d\Omega_o + \int_{\Gamma_o^t} (\mathbf{\Phi}^g)^T \vec{t}_o \, dA_o. \quad (3.113)$$

A Eq.(3.111) implica em

$$\vec{f}^{int} = \vec{f}^{ext}.$$

### 3.7 A equação de equilíbrio

O problema não linear global será agora descrito em termos da equação de equilíbrio residual. Tal equação referencia as forças internas e externas do problema, Eq.(3.112) e Eq.(3.113). Nos problemas estudados ao longo deste trabalho será considerado que as forças externas não sejam dependentes da configuração. O problema discreto em termos da equação de equilíbrio residual pode ser posto da seguinte forma: Encontre  $\vec{u}_{n+1}^h$  que satisfaça a equação de equilíbrio residual

$$\vec{r}\left(\vec{u}_{n+1}^h\right) = \vec{f}^{int}\left(\vec{u}_{n+1}^h\right) - \vec{f}_{n+1}^{ext} = 0 \quad (3.114)$$

no qual

$$\begin{aligned} \vec{f}^{int}\left(\vec{u}_{n+1}^h\right) &= \int_{\Omega_o} (\mathbf{G}^g)^T \vec{P}\left(\vec{u}_{n+1}^h\right) d\Omega_o \\ \vec{f}_{n+1}^{ext} &= \int_{\Omega_o} \rho_o (\mathbf{\Phi}^g)^T \vec{b}_o d\Omega_o + \int_{\Gamma_o^t} (\mathbf{\Phi}^g)^T \vec{t}_{o_{n+1}} dA_o. \end{aligned}$$

#### 3.7.1 Linearização e método de Newton

Seja

$$\vec{u}_{n+1}^{g^0} = \vec{u}_n^g, \quad k = 0 \quad (3.115)$$

em que  $k$  denota a iteração do processo de Newton. Para a  $k$ -ésima iteração

$$\vec{u}_{n+1}^{g^{k+1}} = \vec{u}_{n+1}^{g^k} + \Delta\vec{u}_{n+1}^{g^k}. \quad (3.116)$$

Para determinar  $\Delta\vec{u}_{n+1}^{g^k}$  é necessário impor

$$\vec{r}\left(\vec{u}_{n+1}^{h^{k+1}}\right) = \vec{0} \quad \therefore \quad \vec{u}_{n+1}^{h^{k+1}} = \mathbf{\Phi}^g \vec{u}_{n+1}^{g^{k+1}}. \quad (3.117)$$

Considerando  $\vec{r}$  suficientemente regular, expandindo  $\vec{r}\left(\vec{u}_{n+1}^{h^k} + \Delta\vec{u}_{n+1}^{h^k}\right)$  em uma série de *Taylor* em  $\vec{u}_{n+1}^{h^k}$  obtêm-se, para a aproximação de primeira ordem,

$$\vec{r}\left(\vec{u}_{n+1}^{h^k} + \Delta\vec{u}_{n+1}^{h^k}\right) = \vec{r}\left(\vec{u}_{n+1}^{h^k}\right) + D\vec{r}\left(\vec{u}_{n+1}^{h^k}\right) \left[\Delta\vec{u}_{n+1}^{h^k}\right] \quad (3.118)$$

o que implica em

$$D\vec{r}\left(\vec{u}_{n+1}^{h^k}\right) \left[\Delta\vec{u}_{n+1}^{h^k}\right] = -\vec{r}\left(\vec{u}_{n+1}^{h^k}\right), \quad (3.119)$$

em que

$$\begin{aligned} D\vec{r}\left(\vec{u}_{n+1}^{h^k}\right) \left[\Delta\vec{u}_{n+1}^{h^k}\right] &= \int_{\Omega_o} (\mathbf{G}^g)^T \mathbf{A} \mathbf{G}^g \Delta\vec{u}_{n+1}^{g^k} d\Omega_o \\ &= \int_{\Omega_o} (\mathbf{G}^g)^T \mathbf{A} \mathbf{G}^g d\Omega_o \Delta\vec{u}_{n+1}^{g^k}. \\ &= \mathbf{K} \Delta\vec{u}_{n+1}^{g^k} \end{aligned}$$

Tabela 3.2: Método de Newton para o problema global

<p>(i) Inicie o contador: <math>k \leftarrow 0</math></p> <p>(ii) Inicialize <math>\vec{u}_{n+1}^0 = \vec{u}_{n+1}</math></p> <p>(iii) Compute as informações da tabela 3.1</p> <p>(iv) Compute o resíduo <math>\vec{r}^0 = \vec{r}(\vec{u}_{n+1}^0)</math> por <math>\vec{r}^0 = \vec{f}^{int}(\vec{u}_{n+1}^0) - \vec{f}^{ext}</math> e o erro por <math>erro = \ \vec{r}^0\ </math></p> <p>(v) Faça enquanto (<math>\ \vec{r}^k\  &gt; tol</math> ou <math>k &lt; k_{max}</math>)</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Monte a matriz de rigidez <math>\mathbf{K} = \mathbf{K}(\vec{u}_{n+1}^k)</math></li> <li>• Resolva o sistema de equações para <math>\Delta \vec{u}_{n+1}^{g^k}</math></li> </ul> $\Delta \vec{u}_{n+1}^k = \mathbf{K}^{-1} \vec{r}^k$ <ul style="list-style-type: none"> <li>• Atualize os deslocamentos <math>\vec{u}_{n+1}^{k+1}</math></li> </ul> $\vec{u}_{n+1}^{g^{k+1}} = \vec{u}_{n+1}^{g^k} + \Delta \vec{u}_{n+1}^{g^k}$ <ul style="list-style-type: none"> <li>• Compute os novos valores da tabela 3.1</li> <li>• Compute <math>\vec{r}^{k+1}</math> e então <math>erro = \ \vec{r}^{k+1}\ </math></li> <li>• Atualize <math>\vec{r}^k \leftarrow \vec{r}^{k+1}</math> e <math>k \leftarrow k + 1</math></li> </ul> <p>fim</p> <p>onde <math>k_{max}</math> é o número máximo de iterações permitidas.</p>
---

com

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega_o} (\mathbf{G}^g)^T \mathbf{A} \mathbf{G}^g d\Omega_o \quad (3.120)$$

na qual  $\mathbf{A}$  é a forma matricial do tensor de quarta ordem do módulo tangente consistente  $\mathbb{A}$  definido na Eq.(4.97).

Baseado neste resultado o sistema de equações da Eq.(3.119) pode ser escrito como

$$\mathbf{K} \Delta \vec{u}_{n+1}^{g^k} = -\vec{r}(\vec{u}_{n+1}^k) \quad (3.121)$$

e deve ser resolvido para  $\Delta \vec{u}_{n+1}^{g^k}$ .

O algoritmo global do método de Newton é descrito na tabela de procedimentos 3.2.

A tabela 3.3 mostra uma seqüência de procedimentos para a determinação do módulo tan-



Tabela 3.3: Determinação do módulo tangente global  $\mathbb{A}$ 

<p>(i) Compute <math>\mathbb{G}</math> pela Eq.(3.81)</p> <p>(ii) Compute <math>\mathbb{H}</math> pela Eq.(3.78)</p> <p>(iii) Compute <math>\tilde{\mathbb{D}}</math></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Se <math>\mathcal{F}(\bar{\tau}_{n+1}^{teste}, k_{n+1}^{teste}) \leq 0</math> então</li> </ul> $\tilde{\mathbb{D}} = \mathbb{D}$ <ul style="list-style-type: none"> <li>• senão</li> </ul> $\tilde{\mathbb{D}} = \mathbb{D}^{ep}$ <ul style="list-style-type: none"> <li>• fim</li> </ul> <p>(v) Compute <math>\hat{\mathbb{D}}</math> pela Eq.(3.80)</p> <p>(vi) Compute <math>\mathbb{A}</math> pela Eq.(3.74)</p> <p>(vii) Identificar <math>\mathbf{A}</math></p> $\mathbf{A} \xleftarrow{\text{forma matricial}} \mathbb{A}$
--

gente  $\mathbf{A}$ .

## Capítulo 4

# O modelo elastoplástico para espumas poliméricas

### 4.1 Modelo elastoplástico baseados na formulação hiperelástica

#### 4.1.1 Definição da superfície de escoamento

O modelo elastoplástico para espumas, aqui proposto, é baseado em uma lei de encruamento volumétrico. Tal embasamento tem como motivação a observação experimental da deformação de estruturas em espuma, as quais apresentam respostas diferentes para compressão e tração. Em compressão a capacidade do material de se deformar volumetricamente é ampliada pelo processo de flambagem das paredes celulares, como descrito por GIBSON & ASHBY (1982), e MAITI *et al.* (1984). Assume-se que o processo de recuperação das deformações nas células não ocorre de maneira instantânea e, portanto, pode ser considerado plástico para um evento de curta duração. Por outro lado, como visto, sob tração, as paredes celulares entram em colapso rapidamente, como resultado a capacidade de suportar cargas trativas para esse tipo de material é menor quando comparada à capacidade de carga a compressão.

O encruamento volumétrico assume um comportamento plástico ideal/perfeito sob tração hidrostática e a evolução da superfície de escoamento, em situações de carregamento complexo, é controlada pela deformação plástica volumétrica sofrida pelo material.

Diferentes leis de encruamento são propostas na literatura. Como exemplo, DESHPANDE & FLECK (2000) propuseram uma lei de encruamento isotrópica, para modelos originalmente desenvolvidos para espumas metálicas, que assume um comportamento simétrico entre tensão e compressão, sendo a evolução da superfície de escoamento governada por uma deformação plástica equivalente, a qual possui contribuições da deformação plástica volumétrica e da deformação plástica deviatória.

De modo a se definir então a superfície de escoamento para o modelo elastoplástico proposto, faz-se necessária a revisão de alguns conceitos introdutórios. Primeiramente, introduz-se a tensão deviatória rotacionada de *Kirchhoff*, dada por

$$\bar{\tau}^D = \bar{\tau} - \frac{1}{3} \text{tr}(\bar{\tau}) \mathbf{I}. \quad (4.1)$$

Em seguida, a tensão de von Mises efetiva, escrita em termos do tensor de *Kirchhoff* rotacionado

$$q = \sqrt{\frac{3}{2} \bar{\tau}^D \cdot \bar{\tau}^D}. \quad (4.2)$$

Por fim a parcela hidrostática da tensão dada por

$$p = -\frac{1}{3} \text{tr}(\bar{\tau}). \quad (4.3)$$

Dessa forma, das Eqs.(4.1) e (4.3), pode-se então expressar o tensor tensão rotacionada de *Kirchhoff* como

$$\bar{\tau} = \bar{\tau}^D - p\mathbf{I}. \quad (4.4)$$

Neste trabalho define-se a função de escoamento para espumas em termos da tensão rotacionada de *Kirchhoff* sendo dada pela expressão

$$\mathcal{F}(q, p) = \sqrt{q^2 + \alpha(\phi_k)^2(p - p_o(\phi_k))^2} - B(\phi_k), \quad (4.5)$$

na qual  $\alpha = \alpha(\phi_k)$  e  $p_o = p_o(\phi_k)$  são funções das variáveis internas  $\phi_k$  e do potencial de fluxo dado por

$$\mathcal{G}(q, p) = \sqrt{q^2 + \beta^2 p^2}. \quad (4.6)$$

É importante observar que, nas análises experimentais desenvolvidas por BILKHU (1987) e BILKHU *et al.* (1993) citados por ZHANG, J. *et al.* (1998), o carregamento em qualquer direção principal causa deformações insignificantes em outras direções. Como resultado o fluxo plástico é não associativo.

A função de escoamento  $\mathcal{F}$  e o potencial de fluxo  $\mathcal{G}$  podem ser representados como elipses no plano  $p - q$  como mostra a Fig. 4.1, em que  $\alpha(\phi_k)$  e  $\beta$  representam as formas da elipse da função de escoamento e do potencial de fluxo, respectivamente;  $p_o(\phi_k)$  é o centro da elipse de escoamento e  $B$  é o comprimento vertical da mesma. Ainda, o potencial de fluxo trata-se de uma elipse centrada na origem.

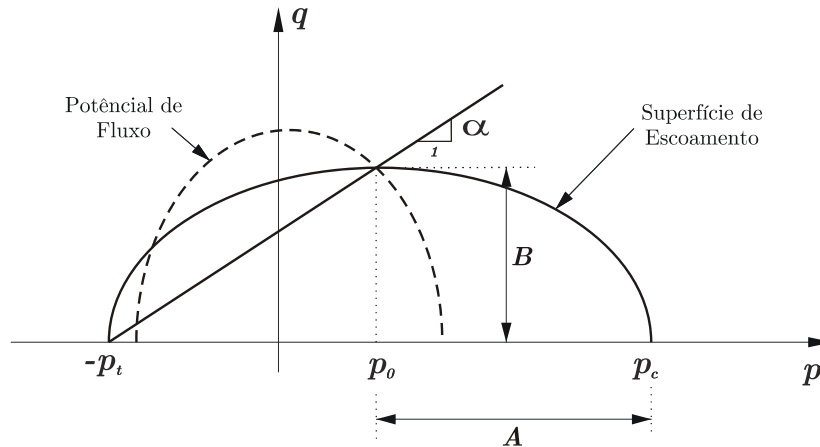


Figura 4.1: Função de escoamento e potencial de fluxo representados no plano  $p - q$ .

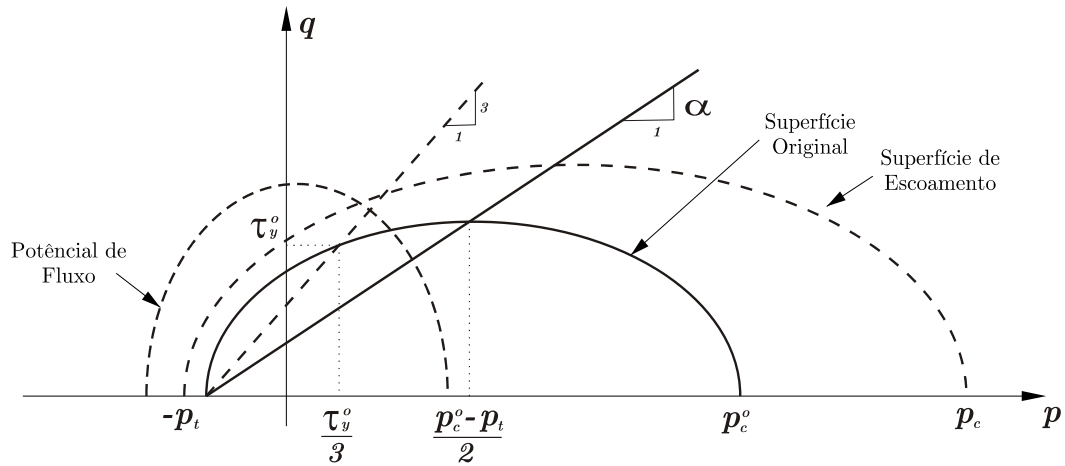


Figura 4.2: Encruamento volumétrico.

Os parâmetros  $p_o$  e  $B$  são relacionados aos esforços que desencadeiam o processo de escoamento  $p_c$  e  $p_t$  na compressão e tração hidrostática, respectivamente, dados por

$$p_o = \frac{p_c - p_t}{2} \quad (4.7)$$

e

$$B = \alpha A \quad (4.8)$$

com

$$A = \frac{p_c + p_t}{2} \quad (4.9)$$

em que  $p_c$  e  $p_t$  são números positivos e  $A$  é o comprimento horizontal da elipse de escoamento com relação ao eixo  $p$ .

A evolução da superfície de escoamento é controlada pelas variáveis internas  $\phi_1 \equiv \varepsilon_v^p$  e  $\phi_2 \equiv \varepsilon_a^p$ . A primeira medida de deformação plástica,  $\varepsilon_v^p$ , é conhecida com sendo a *deformação plástica volumétrica*, definida como

$$\varepsilon_v^p = -\ln(J^p) \quad (4.10)$$

na qual  $J^p = \det(\mathbf{F}^p)$ , utilizada no modelo de encruamento volumétrico. A segunda medida,  $\varepsilon_a^p$ , é a *deformação plástica axial*, que pode ser obtida através de um ensaio de compressão uniaxial, dada por

$$\varepsilon_a^p = -\ln\left(\frac{L^p}{L_o}\right), \quad (4.11)$$

sendo  $L^p$  o comprimento da amostra após a deformação ter sido aplicada, porém já com o carregamento cessado, e  $L_o$  o comprimento inicial da amostra na configuração de referência. Ver detalhes no **Apêndice B**.

A caracterização do encruamento do material requer a realização de alguns testes experimentais, sendo esses: o teste de compressão uniaxial e o teste de compressão hidrostática. Desta forma, é necessário o levantamento experimental destas curvas de encruamento para a completa identificação da resposta de encruamento do material.

Na situação de carregamento monotônico proporcional, pode-se considerar que a tração hidrostática de escoamento,  $p_t$ , varie proporcionalmente com a compressão hidrostática de escoamento,  $p_c$ , ou seja

$$p_t = \varrho p_c, \quad (4.12)$$

sendo  $\varrho$  a constante de proporcionalidade. Entretanto, assume-se que a compressão hidrostática de escoamento,  $p_c$ , seja proveniente do resultado da compactação (aumento da densidade) ou dilatação (redução da densidade) do material, ou seja

$$p_c = p_c(\varepsilon_v^p). \quad (4.13)$$

O parâmetro  $\alpha$ , em (4.8), é considerado como sendo dependente da deformação plástica volumétrica de compactação,  $\varepsilon_v^p$ , e da deformação plástica axial,  $\varepsilon_a^p$ , i.e.,

$$\alpha = \alpha(\varepsilon_v^p, \varepsilon_a^p). \quad (4.14)$$

Logo, para um dado  $\varrho$ , os parâmetros  $p_c(\varepsilon_v^p)$  e  $\alpha(\varepsilon_v^p, \varepsilon_a^p)$  são suficientes para definir o centro e os comprimentos dos eixos maior  $A$  e menor  $B$  da elipse de escoamento. Esses parâmetros são funções da deformação plástica volumétrica de compactação  $\varepsilon_v^p$ , que descreve o fenômeno de consolidação e da deformação plástica axial efetiva  $\varepsilon_a^p$ , como mostra ZHANG, J. *et al.* (1998). Conseqüentemente, a elipse de escoamento não só translada sobre o eixo  $p$  como também se estende no plano  $p - q$ , à medida que os espaços vazios vão se consolidando sob compressão. Dessa forma, as variáveis  $\alpha$  e  $p_c$ , são denominadas como *variáveis de consolidação*, as quais são parâmetros materiais determinados pelos testes experimentais de compressão uniaxial e compressão hidrostática.

Como resultado, pode-se escrever a função de escoamento em termos dos parâmetros materiais  $\alpha$  e  $p_c$ , i.e.

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(\alpha, p_c). \quad (4.15)$$

Alguns exemplos dos testes experimentais são mostrados nas Figs. 4.3, 4.4 e 4.5 para compressão uniaxial e Figs. 4.6 e 4.7, para compressão hidrostática, veja ZHANG, J. *et al.* (1998).

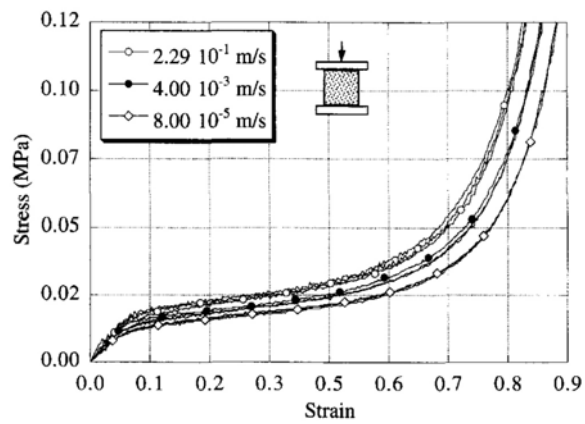


Figura 4.3: Resposta tensão-deformação sob compressão uniaxial. Espuma em poliuretano 6,9 kg/m<sup>3</sup>.

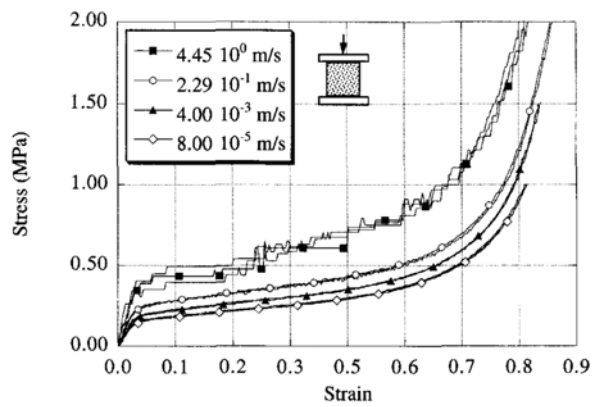


Figura 4.4: Resposta tensão-deformação sob compressão uniaxial. Espuma em polipropileno 4,9 kg/m<sup>3</sup>.

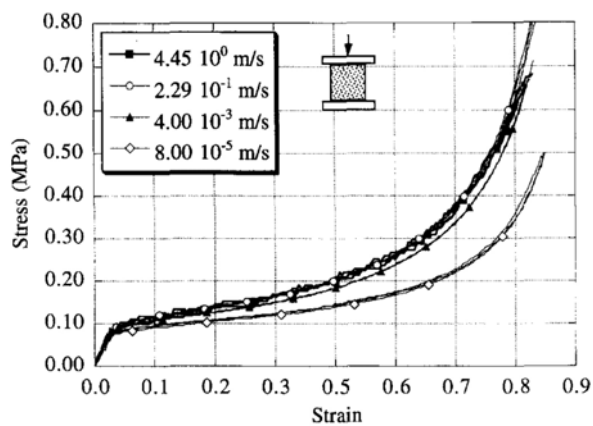


Figura 4.5: Resposta tensão-deformação sob compressão uniaxial. Espuma em poliestireno 1,6 kg/m<sup>3</sup>.

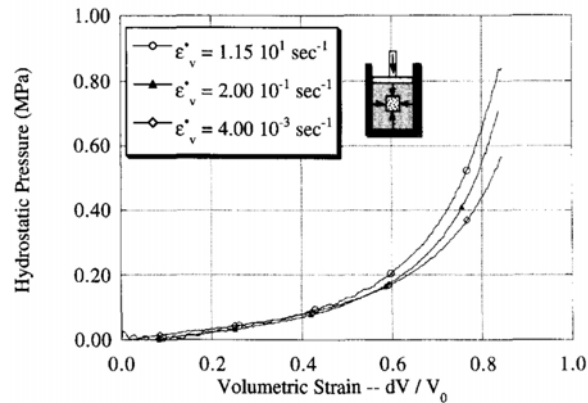


Figura 4.6: Resposta tensão-deformação sob compressão hidrostática. Espuma em poliuretano 6,9 kg/m<sup>3</sup>.

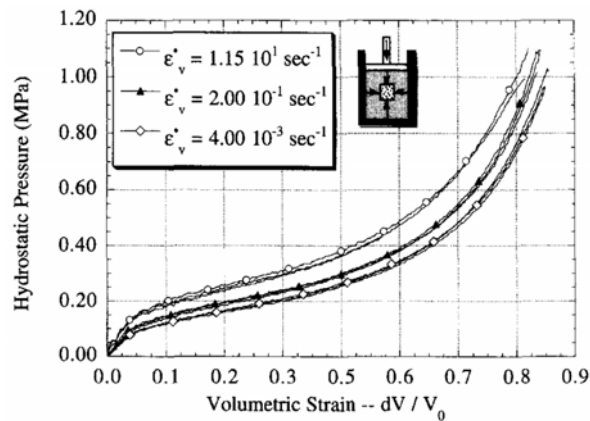


Figura 4.7: Resposta tensão-deformação sob compressão hidrostática. Espuma polipropileno 4,9 kg/m<sup>3</sup>.

É importante notar que a determinação de  $p_c(\varepsilon_v^p)$  e  $\alpha(\varepsilon_v^p, \varepsilon_a^p)$  requer a realização de dois testes experimentais independentes. Do teste de compressão hidrostática pode-se computar diretamente a lei de encruamento associada ao problema, de tal forma que

$$p_c = p_c^o + H_p(\varepsilon_v^p) \quad (4.16)$$

sendo  $p_c^o$  a compressão hidrostática de escoamento inicial e  $H_p(\varepsilon_v^p)$  a lei de encruamento volumétrico associada a  $p_c$ , dada em termos de  $\varepsilon_v^p$ , como mostrado nas Figs. 4.6 e 4.7.

De maneira a se computar o parâmetro  $\alpha(\varepsilon_v^p, \varepsilon_a^p)$  necessita-se de um outro teste experimental independente. Neste trabalho considerou-se o teste de compressão uniaxial como conhecido, conforme mostrado nas Figs. 4.3, 4.4 e 4.5, para diferentes materiais. Entretanto, outros testes podem ser considerados, como ilustrado nas Figs. 4.8 e 4.9.

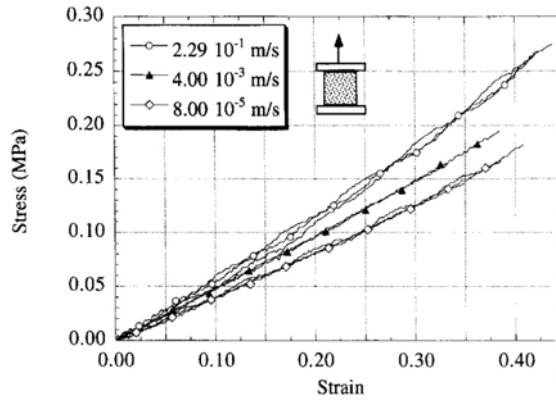


Figura 4.8: Resposta tensão-deformação sob tração uniaxial. Espuma em poliuretano 6,9 kg/m<sup>3</sup>.

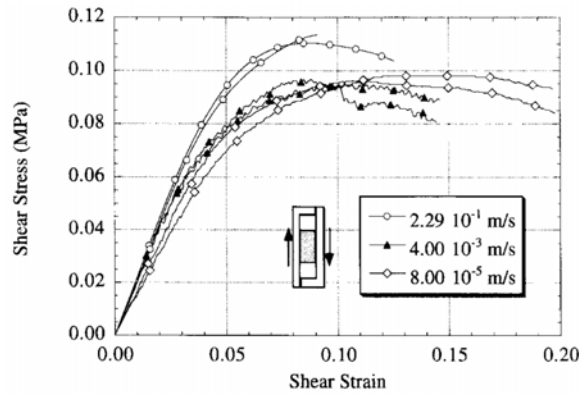


Figura 4.9: Resposta tensão-deformação sob cisalhamento puro. Espuma em poliestireno 1,6 kg/m<sup>3</sup>.

Note que se o corpo a ser analisado estiver sujeito a esforços de tração então, para uma melhor representação da resposta sob de tração, será recomendada a utilização do ensaio de tração uniaxial. Por outro lado, se os esforços aplicados forem de origem cisalhante tende-se a obter uma melhor representatividade dos resultados, utilizando-se as informações obtidas em um teste de cisalhamento, conforme mostrado na Fig. 4.9, de maneira a se computar a lei de encruamento visando a determinação do parâmetro  $\alpha (\varepsilon_v^p, \varepsilon_a^p)$ .

Sabendo que os problemas estruturais envolvendo espumas têm predominantemente um domínio de esforços de compressão (problemas de impacto), espera-se que o uso dos dados obtidos do ensaio uniaxial de compressão possa produzir o melhor resultado para a determinação do parâmetro material  $\alpha (\varepsilon_v^p, \varepsilon_a^p)$ .

Do ensaio de compressão uniaxial, pode-se obter

$$\bar{\tau}_y (\varepsilon_a^p) = \bar{\tau}_y^o + H (\varepsilon_a^p), \quad (4.17)$$

sendo  $\bar{\tau}_y^o$  a tensão de escoamento inicial em compressão e  $H (\varepsilon_a^p)$  a função de encruamento axial, dada em termos da deformação plástica axial efetiva  $\varepsilon_a^p$ .



A tensão de escoamento  $\bar{\tau}_y$ , medida de tensão rotacionada de *Kirchhoff*, é relacionada, no ensaio de compressão uniaxial com a tensão dada em termos do primeiro tensor tensão de *Piola-Kirchhoff* (PK1). Para maiores detalhes ver **Apêndice B**.

#### 4.1.2 Descrição do modelo

Utilizando os conceitos apresentados no Cap. 3, em que foi abordado de maneira detalhada a descrição do modelo elastoplástico, e a definição da função de escoamento e dos parâmetros materiais necessários para a caracterização da resposta de espumas, pode-se descrever completamente o modelo elastoplástico para espumas.

Novamente, o gradiente de deformação pode ser decomposto na forma multiplicativa como

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^p \quad (4.18)$$

em que

$$\mathbf{F}^e = \mathbf{R}^e \mathbf{U}^e. \quad (4.19)$$

#### Relação constitutiva hiperelástica

Dada a relação constitutiva hiperelástica

$$\bar{\boldsymbol{\tau}} = \mathbb{D} \mathbf{E}^e \quad (4.20)$$

na qual a medida de deformação logarítmica, ou de *Hencky*, é utilizada e dada por

$$\mathbf{E}^e = \ln(\mathbf{U}^e) = \frac{1}{2} \ln(\mathbf{C}^e), \quad (4.21)$$

sendo  $\bar{\boldsymbol{\tau}}$  o tensor tensão rotacionada de *Kirchhoff* dado por

$$[\bar{\boldsymbol{\tau}}] = [\mathbf{R}^e]^T [\boldsymbol{\tau}] [\mathbf{R}^e] \quad (4.22)$$

em que  $\boldsymbol{\tau}$  representa o tensor tensão de *Kirchhoff*

$$\boldsymbol{\tau} = J \boldsymbol{\sigma}, \quad (4.23)$$

expresso em termos do tensor tensão de *Cauchy*,  $\boldsymbol{\sigma}$ , e de  $J = \det[\mathbf{F}]$ .

#### Efeito da densidade relativa

Dados experimentais mostram ser expressiva a dependência da resposta do material com relação à densidade relativa do material. Desta forma, são efetuadas modificações nas relações constitutivas acima visando a inclusão do efeito da densidade relativa na resposta do material.

De fato, isto se torna importante devido à grande redução de volume experimentada em processos de deformação por impacto.

Assim, retorna-se então a equação da continuidade

$$\rho_o = \det [\mathbf{F}] \rho \quad (4.24)$$

em que  $\rho_o = \rho_o(\vec{X})$  denota a densidade inicial, definida na configuração de referência, e  $\rho = \rho(\vec{X}, t)$  denota a densidade atual, definida na configuração de referência. Dividindo a equação da continuidade pela densidade do material denso  $\rho_m$  tem-se que

$$\rho_o^* = \det [\mathbf{F}] \rho^* \quad (4.25)$$

na qual  $\rho_o^* = \frac{\rho_o}{\rho_m}$  e  $\rho^* = \frac{\rho}{\rho_m}$ .

Dessa forma pode-se então se reescrever a lei hiperelástica, agora expressando a dependência da densidade relativa

$$\bar{\boldsymbol{\tau}} = \mathbb{D}(\rho^*) \mathbf{E}^e \quad (4.26)$$

em que

$$\mathbb{D}(\rho^*) = 2\mu(\rho^*) \mathbb{I} + \left( K(\rho^*) - \frac{2}{3}\mu(\rho^*) \right) (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}) \quad (4.27)$$

na qual  $\mathbb{D}$  é o tensor de elasticidade de quarta ordem,  $\mathbb{I}$  é o tensor identidade de quarta ordem,  $\mathbf{I}$  é o tensor identidade de segunda ordem,  $\kappa(\rho^*)$  é o módulo volumétrico e  $\mu(\rho^*)$  (constante de Lamé) é o módulo de cisalhamento,  $\mu(\rho^*) = G(\rho^*)$ . Os tensores  $\mathbb{I}$  e  $(\mathbf{I} \otimes \mathbf{I})$  são dados por

$$\mathbb{I}_{ijkl} = \frac{1}{2} (\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \quad (4.28)$$

$$(\mathbf{I} \otimes \mathbf{I})_{ijkl} = \delta_{ij}\delta_{kl}. \quad (4.29)$$

Analogamente, a Eq.(4.26) pode ser escrita como

$$\bar{\boldsymbol{\tau}} = 2G(\rho^*) \mathbf{E}^e + \kappa(\rho^*) \text{tr}(\mathbf{E}^e) \mathbf{I}. \quad (4.30)$$

Baseado nas observações experimentais de ZHANG, J. *et al.* (1998), considera-se, neste trabalho, que o coeficiente de Poisson,  $\nu$ , seja independente da densidade relativa, i.e.,

$$\nu(\rho^*) \simeq \nu = \text{cte}. \quad (4.31)$$

Entretanto o módulo de Young  $E$ , é observado como sendo fortemente dependente da densidade relativa, como mostra o gráfico da Fig. 4.10. Desta forma, é proposto neste trabalho uma relação constitutiva para  $E(\rho^*)$  dada por

$$E(\rho^*) = c (\rho^*)^\gamma E_M, \quad (4.32)$$

sendo  $E_M^1$  o módulo de Young do material completamente denso. Assim,  $\nu$ ,  $c$ ,  $E_M$  e  $\gamma$  são parâmetros materiais os quais devem ser identificados experimentalmente.

---

<sup>1</sup>  $E_M = \frac{9\kappa_M\mu_M}{3\kappa_M + \mu_M}$ .

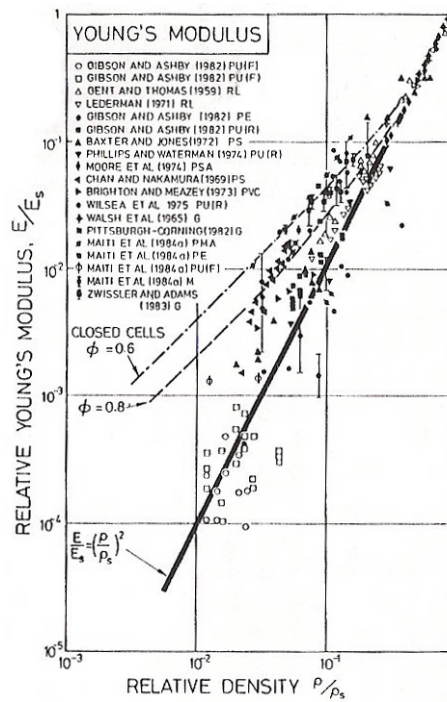


Figura 4.10: Dependência do módulo de Young,  $E(\rho^*) = E/E_s$ , com respeito a densidade relativa,  $\rho^* = \rho/\rho_s$ . GIBSON & ASHBY(1997).

Devido à descrição *Lagrangiana Total* adotada, não há maiores mudanças a serem feitas no algoritmo de mapeamento de retorno, além do computo da densidade relativa  $\rho^*$  juntamente com os demais valores nos pontos de integração. Isso ocorre devido ao fato de que o mapeamento de retorno acontece para um  $\vec{u}$  fixo e, portanto, para um gradiente de deformação  $\mathbf{F}$  fixo em cada ponto.

Porém, o mesmo não acontece quando na determinação dos módulos tangentes consistentes do problema. Aqui, a dependência da densidade relativa deverá ser levada em consideração de modo a preservar a taxa de convergência do algoritmo resultante da aplicação do método de Newton. A derivação dos módulos tangentes será abordada em uma seção específica, em que será descrito o procedimento de maneira que efeito de dependência da densidade relativa seja considerado.

**Definição da função de escoamento**

Como já visto, a função escoamento é dada por

$$\mathcal{F}(q, p) = \sqrt{q^2 + \alpha^2 \left( p - \left[ \frac{p_c - p_t}{2} \right] \right)^2} - \alpha \left[ \frac{p_c + p_t}{2} \right] \leq 0 \tag{4.33}$$

em que

$$p = -\frac{1}{3} tr[\boldsymbol{\tau}] \tag{4.34}$$

$$q = \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\tau}^D \cdot \boldsymbol{\tau}^D} \tag{4.35}$$

$$p_t = \varrho p_c, \quad (4.36)$$

e

$$\alpha = \frac{\bar{\tau}_y}{\left\{ p_t p_c - \frac{1}{3} \bar{\tau}_y (p_t - p_c) - \frac{1}{9} \bar{\tau}_y^2 \right\}^{\frac{1}{2}}}. \quad (4.37)$$

Ainda,  $\bar{\tau}_y = \bar{\tau}_y(\varepsilon_a^p)$  é a tensão de escoamento obtida no ensaio uniaxial e  $p_c = p_c(\varepsilon_v^p)$  é a tensão de escoamento obtida no ensaio de compressão hidrostática. Entretanto,  $p_t$  é a tensão de escoamento que deveria ser obtida em um ensaio de tensão hidrostática, porém aqui é considerada como sendo proporcional à  $p_c$ .

Tal consideração se faz pertinente uma vez que o tipo de material tratado é raramente ensaiado sob tração. A escolha do valor de  $\varrho$  não deve propiciar forte influência nos resultados numéricos, a menos que o carregamento seja de tração hidrostática. Uma aproximação comum para  $p_t$ , trata-se de algo em torno de 5% à 10% do valor da tensão de compressão hidrostática  $p_c$ , ver HANSSEN *et al.* (2001) e HALLQUIST(1998).

### Potencial de dissipação

No caso do modelo de plasticidade ser não associativo, a determinação da evolução da taxa de deformação plástica modificada  $\bar{\mathbf{D}}^p$  é dada por

$$\bar{\mathbf{D}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} \quad (4.38)$$

em que o multiplicador plástico  $\dot{\lambda}$ , satisfaz as condições de *Karush-Kuhn-Tucker* (KKT)

$$\mathcal{F} \leq 0 \quad \dot{\lambda} \geq 0 \quad \dot{\lambda} \mathcal{F} = 0, \quad (4.39)$$

e a condição de consistência  $\dot{\lambda} \dot{\mathcal{F}} = 0$  em  $\mathcal{F} = 0$ . Ainda, de acordo com a consideração de que o tensor rotação é nulo, uma vez que se considera a compatibilidade com a plasticidade isotrópica, tem-se que

$$\bar{\mathbf{W}}^p = \mathbf{0}, \quad (4.40)$$

resultando em uma evolução da deformação plástica dada por

$$\dot{\mathbf{F}}^p = \bar{\mathbf{D}}^p \mathbf{F}^p. \quad (4.41)$$

O potencial de fluxo plástico, com já dito, é dado por

$$\mathcal{G}(q, p) = \sqrt{q^2 + \beta^2 p^2}, \quad (4.42)$$

em que  $\beta$  é relacionado com o coeficiente de Poisson plástico  $\nu_p$ , sendo esta relação, descrita com detalhes no **Apêndice B**, dada por

$$\beta = \frac{3}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1 - 2\nu_p}{1 + \nu_p}}. \quad (4.43)$$

Baseado nos trabalhos de GIBSON & ASHBY(1997) e GILCHRIST & MILLS(2001) o poisson plástico, que é o coeficiente que relaciona a deformação plástica longitudinal com a transversal sob compressão uniaxial, pode, dependendo do material, variar entre  $-1$  a  $0,5$ , i.e.,  $\nu_p \in [-1; 0,5]$ . O limite superior,  $\nu_p = 0,5$ , corresponde ao fluxo plástico incompressível. Usualmente para espumas poliméricas considera-se  $\nu_p = 0$  o que reduz a Eq.(4.43) a

$$\beta = \frac{3}{\sqrt{2}}. \tag{4.44}$$

Tal hipótese para o coeficiente de poisson plástico para espumas poliméricas é considerada razoável como mostra os ensaios nas Figs. 4.11 e 4.12.

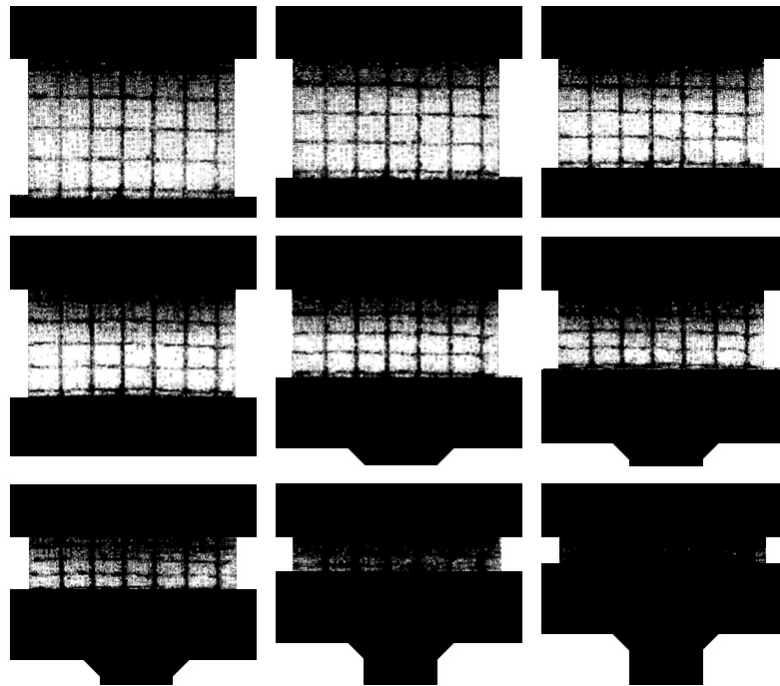


Figura 4.11: Ensaio de compressão uniaxial. ZHANG, J. *et al.* (1998).

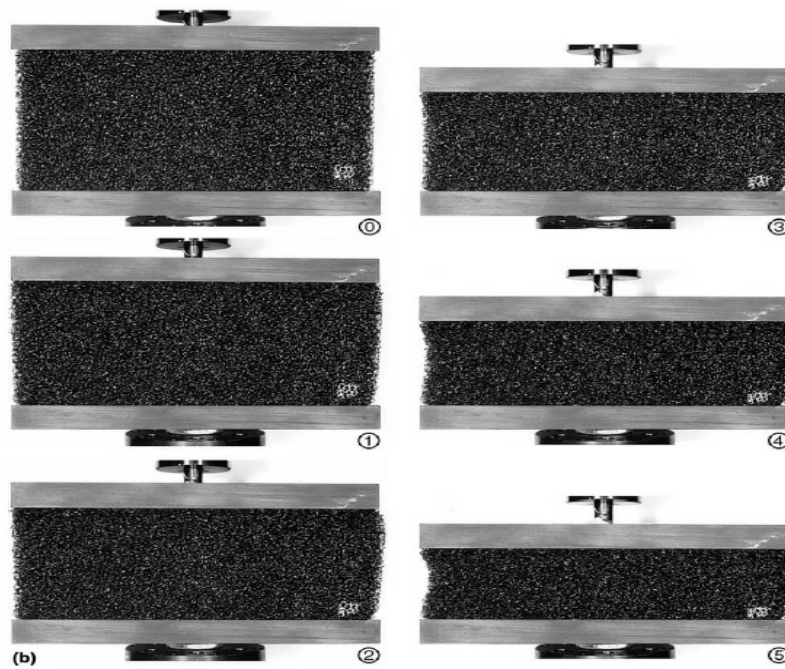


Figura 4.12: Ensaio de compressão uniaxial. GONG & KYRIAKIDES (2004).

### 4.1.3 Leis de evolução

A lei de encruamento axial é dada por

$$\bar{\tau}_y = \bar{\tau}_y^o + H(\varepsilon_a^p) \quad (4.45)$$

com

$$\varepsilon_a^p = -\ln\left(\frac{L^p}{L_o}\right), \quad (4.46)$$

sendo  $\bar{\tau}_y^o$  a tensão inicial de escoamento e  $H(\varepsilon_a^p)$  uma função escalar de encruamento. Ambas são obtidas do teste de compressão uniaxial. Note que para um caso de carregamento tridimensional, não se faz possível a identificação de  $\varepsilon_a^p$ , já que não se pode computar  $\varepsilon_a^p$ , i.e., não se consegue obter uma relação entre o comprimento inicial  $L_o$  e o comprimento final na configuração não tencionada  $L^p$ . Contudo, a medida de deformação plástica axial pode ser dada em termos da deformação volumétrica, no caso de um ensaio de compressão uniaxial, como mostrado no **Apêndice B**, por

$$\varepsilon_a^p = \frac{\varepsilon_v^p}{(1 - 2\nu_p)}. \quad (4.47)$$

Apesar desta relação ser válida apenas em um ensaio uniaxial de compressão, utiliza-se esta relação de forma a incorporar a influência do encruamento axial em uma situação de carregamento multiaxial. Desta forma, visando a inclusão do encruamento uniaxial de compressão, na resposta do material é proposta a seguinte modificação

$$\bar{\tau}_y = \bar{\tau}_y^o + H\left(\frac{\varepsilon_v^p}{(1 - 2\nu_p)}\right). \quad (4.48)$$

Por fim, a lei de encruamento volumétrico é dada por

$$p_c = p_c^o + H_p(\varepsilon_v^p) \quad (4.49)$$

com

$$\varepsilon_v^p = -\ln(J^p) \quad (4.50)$$

sendo  $p_c^o$  a tensão de escoamento inicial obtida em um teste de compressão hidrostática e  $H_p(\varepsilon_v^p)$  a função escalar de encruamento obtida neste mesmo teste. Ainda,  $J^p = \det[F^p]$ .

## 4.2 O problema de valor inicial elastoplástico - Aproximação pela metodologia *operator split*

No contexto desta seção, a variável desconhecida do problema de valor inicial elastoplástico é somente o gradiente da deformação plástica  $\mathbf{F}^p$ . Em um procedimento de tempo incremental, com  $t \in [t_n, t_{n+1}]$ , a condição inicial é dada por

$$\mathbf{F}^p(t_n) = \mathbf{F}_n^p \quad (4.51)$$

em que o problema está sujeito à história prescrita do gradiente da deformação,  $\mathbf{F}(t)$ ,  $t \in [t_n, t_{n+1}]$ . O problema constitutivo de valor inicial consiste em encontrar  $\mathbf{F}^p$  tal que satisfaça as equações constitutivas e as relações acima, dadas pelas Eqs.(4.26), (4.38), e (4.39), para todo  $t \in [t_n, t_{n+1}]$ .

Como já visto, o uso da metodologia de aproximação baseada na decomposição de operadores resulta em um algoritmo que consiste em duas etapas básicas: predição elástica e correção plástica.

### 4.2.1 Predição elástica

Neste estágio, considera-se que

$$\dot{\mathbf{F}}^p = \mathbf{0} \quad (4.52)$$

o que equivale à suposição de que a solução seja puramente elástica. Esta hipótese inicial possibilita a determinação do *estado elástico teste*, dado por

$$\mathbf{F}_{n+1}^{p^{teste}} = \mathbf{F}_n^p.$$

O gradiente da deformação elástica teste,  $\mathbf{F}_{n+1}^{p^{teste}}$ , correspondente à solução acima, é determinado por

$$\mathbf{F}_{n+1}^{p^{teste}} = \mathbf{F}_{n+1} (\mathbf{F}_n^p)^{-1} \quad (4.53)$$

e a densidade relativa,  $\rho_{n+1}^*$ , é dada por

$$\rho_{n+1}^* = \frac{\rho_o^*}{\det[\mathbf{F}_{n+1}]} \quad (4.54)$$

Uma vez que a lei elástica é dada em termos da deformação logarítmica  $\mathbf{E}^e$ , torna-se preciso calcular

$$\mathbf{C}_{n+1}^{e\,teste} = \left( \mathbf{F}_{n+1}^{e\,teste} \right)^T \mathbf{F}_{n+1}^{e\,teste}, \quad (4.55)$$

para então se calcular a deformação logarítmica teste  $\mathbf{E}_{n+1}^{e\,teste}$ , como

$$\mathbf{E}_{n+1}^{e\,teste} = \frac{1}{2} \ln \left( \mathbf{C}_{n+1}^{e\,teste} \right). \quad (4.56)$$

Uma vez que  $\mathbf{E}_{n+1}^{e\,teste}$  é calculado, é possível determinar a tensão rotacionada de *Kirchhoff* teste  $\bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}^{e\,teste}$ , pela lei hiperelástica expressa pela Eq.(4.26), ou seja

$$\bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}^{e\,teste} = 2\mu(\rho_{n+1}^*) \mathbf{E}_{n+1}^{e\,teste} + \left( K(\rho_{n+1}^*) - \frac{2}{3}\mu(\rho_{n+1}^*) \right) \text{tr} \left( \mathbf{E}_{n+1}^{e\,teste} \right) \mathbf{I}.$$

Aplicando o operador traço na expressão acima, e com algumas manipulações algébricas determina-se ainda

$$p_{n+1}^{e\,teste} = -K(\rho_{n+1}^*) \text{tr} \left[ \mathbf{E}_{n+1}^{e\,teste} \right]. \quad (4.57)$$

Agora, sabendo que

$$\bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}^{e\,teste} = \bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}^{D\,teste} - p_{n+1}^{e\,teste} \mathbf{I} \quad (4.58)$$

e

$$\mathbf{E}_{n+1}^{e\,teste} = \mathbf{E}_{n+1}^{D\,teste} + \frac{1}{3} \text{tr} \left( \mathbf{E}_{n+1}^{e\,teste} \right) \mathbf{I} \quad (4.59)$$

pode-se então determinar

$$\bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}^{D\,teste} = 2\mu(\rho_{n+1}^*) \mathbf{E}_{n+1}^{D\,teste} \quad (4.60)$$

e conseqüentemente

$$q_{n+1}^{e\,teste} = \sqrt{\frac{3}{2} \bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}^{D\,teste} \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}^{D\,teste}}. \quad (4.61)$$

Por fim, a determinação da função de escoamento dentro do teste elástico, é computado por

$$\mathcal{F}_{n+1}^{e\,teste} = \sqrt{(q_{n+1}^{e\,teste})^2 + (\alpha_{n+1}^{e\,teste})^2 \left( p_{n+1}^{e\,teste} - \left[ \frac{p_{c_{n+1}}^{e\,teste} - p_t}{2} \right] \right)^2} - (\alpha_{n+1}^{e\,teste}) \left[ \frac{p_{c_{n+1}}^{e\,teste} + p_t}{2} \right] \quad (4.62)$$

em que

$$\varepsilon_{v_{n+1}}^{p\,teste} = -\ln \left( J_{n+1}^{p\,teste} \right), \quad (4.63)$$

$$J_{n+1}^{p\,teste} = \det \left[ \mathbf{F}_{n+1}^{p\,teste} \right] = \det \left[ \mathbf{F}_n^{p\,teste} \right], \quad (4.64)$$

$$\bar{\boldsymbol{\tau}}_{y_{n+1}}^{e\,teste} = \bar{\boldsymbol{\tau}}_y^o + H \left( \frac{\varepsilon_{v_{n+1}}^{p\,teste}}{(1 - 2\nu_p)} \right), \quad (4.65)$$

$$p_{c_{n+1}}^{e\,teste} = p_c^o + H_p \left( \varepsilon_{v_{n+1}}^{p\,teste} \right), \quad (4.66)$$



e

$$\alpha_{n+1}^{teste} = \frac{\bar{\tau}_{y_{n+1}}^{teste}}{\left\{ p_t p_{c_{n+1}}^{teste} - \frac{1}{3} \bar{\tau}_{y_{n+1}}^{teste} \left( p_t - p_{c_{n+1}}^{teste} \right) - \frac{1}{9} \left( \bar{\tau}_{y_{n+1}}^{teste} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}}. \quad (4.67)$$

### 4.2.2 A correção plástica

O procedimento adotado para a correção plástica corresponde ao algoritmo de *mapeamento de retorno*, utilizando-se a aproximação *backward exponencial* para a solução do problema elasto-plástico inicial. Assim, pela hipótese da decomposição multiplicativa do gradiente da deformação, do uso da medida de deformação logarítmica juntamente com o uso da aproximação *backward exponencial*, o algoritmo de mapeamento de retorno resulta em expressões idênticas às obtidas pelo mesmo modelo constitutivo obtidas no escopo de deformações infinitesimais.

#### Verificação do critério de escoamento

Caso o estado de tensão elástico teste viole o critério de escoamento, i.e.,

$$\mathcal{F}(\bar{\tau}_{n+1}^{teste}) > 0,$$

então a hipótese de deformação inicial é violada. Neste caso é requerido a efetuação da correção plástica.

#### Correção plástica - Algoritmo de mapeamento de retorno exponencial

Nesta etapa do algoritmo, a regra de fluxo plástico

$$\dot{\mathbf{F}}^p = \bar{\mathbf{D}}^p \mathbf{F}^p,$$

é discretizada utilizando-se a aproximação "*backward exponencial*", com  $\mathbf{F}_n^p$  como condição inicial, resultando em

$$\mathbf{F}_{n+1}^p = \exp \left( \Delta \lambda \left. \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \bar{\tau}} \right|_{n+1} \right) \mathbf{F}_n^p \quad (4.68)$$

em que o incremento plástico  $\Delta \lambda$  deve ser estritamente positivo, i.e.,  $\Delta \lambda > 0$ .

A equação discretizada acima é complementada pelo requisito de consistência plástica, i.e.,

$$\mathcal{F}(\bar{\tau}_{n+1}, \varepsilon_{v_{n+1}}^p) = 0. \quad (4.69)$$

#### Mapeamento pela integração exponencial

Partindo da Eq.(4.68), pode-se chegar à regra de evolução escrita em termos da deformação logarítmica,

$$\mathbf{E}_{n+1}^e = \mathbf{E}_{n+1}^{e_{teste}} - \Delta \lambda \left. \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \bar{\tau}} \right|_{n+1}. \quad (4.70)$$

### Sistema de equações locais

O algoritmo de mapeamento de retorno consiste então na solução do seguinte sistema de equações não-lineares,

$$\begin{cases} \mathbf{E}_{n+1}^e - \mathbf{E}_{n+1}^{e^{teste}} + \Delta\lambda \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} \Big|_{n+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathcal{F}(\bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}, \varepsilon_{v_{n+1}}^p) \end{cases} \quad (4.71)$$

para  $\Delta\lambda > 0$ .

Porém é conveniente reescrever as equações do sistema acima em termos de  $q_{n+1}$ ,  $p_{n+1}$ , e  $\Delta\lambda$ . Substituindo-se a relação constitutiva hiperelástica, dada pela Eq.(4.26), na Eq.(4.70) e após uma extensa manipulação algébrica pode-se obter

$$\begin{cases} \left[ 1 + \frac{\kappa\beta^2\Delta\lambda}{\mathcal{G}(p_{n+1}, q_{n+1})} \right] p_{n+1} - p_{n+1}^{teste} \\ \left[ 1 + \frac{3\mu\Delta\lambda}{\mathcal{G}(p_{n+1}, q_{n+1})} \right] q_{n+1} - q_{n+1}^{teste} \\ \mathcal{F}(q_{n+1}, p_{n+1}, \Delta\lambda) \end{cases} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.72)$$

Como resultado dessa mesma manipulação obtém-se também que

$$\bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}^{D^{teste}} = \left[ 1 + \frac{3\mu\Delta\lambda}{\mathcal{G}(p_{n+1}, q_{n+1})} \right] \bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}^D \quad (4.73)$$

e

$$\varepsilon_{v_{n+1}}^p = \varepsilon_{v_n}^p + \frac{\Delta\lambda}{G_{n+1}} \beta^2 p_{n+1}. \quad (4.74)$$

Tendo em mente as Eqs.(4.73) e (4.58) e sabendo que  $\mathbf{R}_{n+1}^e = \mathbf{R}_{n+1}^{e^{teste}}$  e que a Eq.(4.22) pode ser escrita no estado  $n + 1$  como

$$\boldsymbol{\tau}_{n+1} = [\mathbf{R}_{n+1}^e] [\bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}] [\mathbf{R}_{n+1}^e]^T \quad (4.75)$$

pode-se computar a tensão de *Cauchy*,  $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ , como

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \frac{\boldsymbol{\tau}_{n+1}}{\det(\mathbf{F}_{n+1})}. \quad (4.76)$$

### Algoritmo do mapeamento de retorno

Sabendo que

$$\mathbf{F}_{n+1} = \mathbf{I} + \nabla_{\bar{\mathbf{X}}} \vec{u}_{n+1}$$

em que

$$\nabla_{\bar{\mathbf{X}}} \vec{u}_{n+1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & \frac{\partial u_1}{\partial X_2} & \frac{\partial u_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial X_1} & \frac{\partial u_2}{\partial X_2} & \frac{\partial u_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial X_1} & \frac{\partial u_3}{\partial X_2} & \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \end{bmatrix}_{n+1},$$

o algoritmo de mapeamento de retorno pode então ser sumarizado como mostra a Tabela 4.1.

Tabela 4.1: Algoritmo de mapeamento de retorno

(i) Dado  $\mathbf{F}_{n+1}$ , leia  $\mathbf{F}_n^p$  compute:

$$\mathbf{F}_{n+1}^{e^{teste}} = \mathbf{F}_{n+1} [\mathbf{F}_n^p]^{-1}$$

$$\mathbf{C}_{n+1}^{e^{teste}} = \left( \mathbf{F}_{n+1}^{e^{teste}} \right)^T \left( \mathbf{F}_{n+1}^{e^{teste}} \right)$$

$$\mathbf{E}_{n+1}^{e^{teste}} = \frac{1}{2} \ln(\mathbf{C}_{n+1}^{e^{teste}})$$

$$\rho_{n+1}^* = \frac{\rho_o^*}{\det[\mathbf{F}_{n+1}]}$$

$$\varepsilon_{v_{n+1}}^{p^{teste}} = \varepsilon_{v_n}^p - \ln[\det(\mathbf{F}_n^p)]$$

$$p_{n+1}^{teste} = -\kappa(\rho_{n+1}^*) \text{tr} \left( \mathbf{E}_{n+1}^{e^{teste}} \right)$$

$$\bar{\tau}_{n+1}^{D teste} = 2\mu(\rho_{n+1}^*) \mathbf{E}_{n+1}^{e^{teste}}$$

$$q_{n+1}^{teste} = \sqrt{\frac{3}{2} \bar{\tau}_{n+1}^{D teste} \cdot \bar{\tau}_{n+1}^{D teste}}$$

(ii) Teste do estado elástico teste:

- Se  $\mathcal{F}(q_{n+1}^{teste}, p_{n+1}^{teste}, \varepsilon_{v_{n+1}}^{p^{teste}}) \leq 0$  então

passo elástico: atualize  $(\cdot)_{n+1} = (\cdot)_{n+1}^{teste}$

$$\mathbf{F}_{n+1}^p = \mathbf{F}_{n+1}^{p^{trial}} = \mathbf{F}_n^p$$

$$\bar{\tau}_{n+1} = \bar{\tau}_{n+1}^{trial}$$

- caso contrário

passo elastoplástico: resolva o seguinte sistema de equações para  $q_{n+1}$ ,  $p_{n+1}$  e  $\Delta\lambda$ .

$$\begin{cases} \left[ 1 + \frac{\kappa\beta^2 \Delta\lambda}{\mathcal{G}(p_{n+1}, q_{n+1})} \right] p_{n+1} - p_{n+1}^{teste} \\ \left[ 1 + \frac{3\mu\Delta\lambda}{\mathcal{G}(p_{n+1}, q_{n+1})} \right] q_{n+1} - q_{n+1}^{teste} \\ \mathcal{F}(q_{n+1}, p_{n+1}, \Delta\lambda) \end{cases} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Atualize as variáveis

$$\mathbf{F}_{n+1}^p = \exp \left( \Delta\lambda \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \bar{\tau}} \Big|_{n+1} \right) \mathbf{F}_n^p$$

- fim

### 4.3 Problema de valor de contorno global

Analogamente, como mostrado no Cap. 3, uma vez definido o modelo constitutivo e a estratégia de atualização das variáveis em  $t_{n+1}$ , o que define o chamado *problema local*, é possível agora resolver o clássico *problema de valor de contorno global* associado ao deslocamento  $\vec{u}$ , porém formulado em termos da configuração de referência.

Novamente a configuração adotada é a *Lagrangeana Total*. Assim, neste enfoque, o problema de valor de contorno (*formulação forte*), e a sua equivalente formulação integral (*formulação fraca*), são discretizados.

#### 4.3.1 Formulação forte: Configuração de referência.

Seja  $\Omega \subset \mathfrak{R}^2$  um domínio limitado de contorno *Lipschitz*  $\partial\Omega$ , sujeito a uma força de corpo  $\vec{b}$  prescrita em  $\Omega$ , a uma tração prescrita  $\vec{t}$  definida em  $\Gamma_o^t$  e a um deslocamento prescrito  $\vec{u}$  definido em  $\Gamma_o^u$ . O problema de valor de contorno pode ser enunciado como:

- **Problema 3.1:** Para cada  $t \in [t_o, t_f]$ , determine  $\vec{u}(\vec{X}, t)$ , solução do seguinte problema de valor de contorno:

$$\operatorname{div} \mathbf{P}(\vec{X}, t) + \rho_o(\vec{X}) \vec{b}(\vec{X}, t) = 0 \quad \text{em } \Omega_o \quad (4.77)$$

$$\mathbf{P}(\vec{X}, t) \vec{N}(\vec{X}, t) = \vec{t}(\vec{X}, t) \quad \text{em } \Gamma_o^t \quad (4.78)$$

$$\vec{u}(\vec{X}, t) = \vec{u}(\vec{X}) \quad \text{em } \Gamma_o^u, \quad (4.79)$$

em que  $\vec{N}$  é a normal externa à configuração de referência.

#### 4.3.2 Formulação fraca: Configuração de referência

- **Problema 3.2:** Determine  $\vec{u}(\vec{X}, t) \in \mathcal{K}$ , para cada  $t \in [t_o, t_f]$ , tal que

$$\int_{\Omega_o} \mathbf{P} \cdot \nabla_{\vec{X}} \delta \vec{u} \, d\Omega_o = \int_{\Omega_o} \rho_o \vec{b} \cdot \delta \vec{u} \, d\Omega_o + \int_{\Gamma_o^t} \vec{t} \cdot \delta \vec{u} \, dA_o \quad \forall \delta \vec{u} \in \mathcal{V}. \quad (4.80)$$

Aqui  $\mathcal{K}$  é o espaço dos deslocamentos admissíveis dado por

$$\mathcal{K} = \{ \vec{u} \mid u_i \in W_p^1(\Omega), \vec{u} = \vec{u} \text{ em } \Gamma_o^u \}, \quad (4.81)$$

para  $p$  suficientemente grande, e  $\mathcal{V}$  é o espaço dos deslocamentos virtuais, dado por

$$\mathcal{V} = \{ \delta \vec{u} \mid \delta u_i \in W_p^1(\Omega), \delta \vec{u} = 0 \text{ em } \Gamma_o^u \}. \quad (4.82)$$

Ou denotando, para cada  $t \in [t_o, t_f]$ ,

$$F(\vec{u}; \delta \vec{u}) = \int_{\Omega_o} \mathbf{P} \cdot \nabla_{\vec{X}} \delta \vec{u} \, d\Omega_o - \int_{\Omega_o} \rho_o \vec{b} \cdot \delta \vec{u} \, d\Omega_o - \int_{\Gamma_o^t} \vec{t} \cdot \delta \vec{u} \, dA_o \quad (4.83)$$

o problema pode ser reescrito como: Determine  $\vec{u}(\vec{X}, t) \in \mathcal{K}$  tal que, para cada  $t \in [t_o, t_f]$ ,

$$F(\vec{u}; \delta\vec{u}) = 0 \quad \forall \delta\vec{u} \in \mathcal{V}. \quad (4.84)$$

## 4.4 Formulação incremental

A formulação incremental entre o instante  $t_n$  e  $t_{n+1}$  considera que a configuração e as variáveis de estado sejam conhecidas em  $\Omega_n$  e que as equações de equilíbrio sejam impostas em  $t_{n+1}$ . Assim, o campo de deslocamentos será representado por

$$\vec{u}_n = \vec{u}(\vec{X}, t_n) = \vec{x}_n - \vec{X} \quad (4.85)$$

$$\vec{u}_{n+1} = \vec{u}(\vec{X}, t_{n+1}) = \vec{x}_{n+1} - \vec{X} \quad (4.86)$$

e deste modo pode-se então escrever o gradiente de deformações para os instantes  $t_n$  e  $t_{n+1}$  como

$$\mathbf{F}_n = \mathbf{I} + \nabla_{\vec{X}} \vec{u}_n \quad (4.87)$$

$$\mathbf{F}_{n+1} = \mathbf{I} + \nabla_{\vec{X}} \vec{u}_{n+1}. \quad (4.88)$$

Assim, em  $t_{n+1}$ , a forma fraca do problema pode ser escrita como:

- **Problema 3.3:** Encontre  $\vec{u}_{n+1} \in \mathcal{K}$  tal que

$$F(\vec{u}_{n+1}; \delta\vec{u}) = 0 \quad \forall \delta\vec{u} \in \mathcal{V}, \quad (4.89)$$

sendo

$$F(\vec{u}_{n+1}; \delta\vec{u}) = \int_{\Omega_o} \mathbf{P}(\vec{u}_{n+1}) \cdot \nabla_{\vec{X}} \delta\vec{u} \, d\Omega_o - \int_{\Omega_o} \rho_o \vec{b}_{n+1} \cdot \delta\vec{u} \, d\Omega_o - \int_{\Gamma_o^t} \vec{t}_{n+1} \cdot \delta\vec{u} \, dA_o.$$

Como o problema acima é não linear com relação a  $\vec{u}_{n+1}$ , é proposto o método de Newton para a sua solução.

### 4.4.1 Linearização e método de Newton

Seja

$$\vec{u}_{n+1}^0 = \vec{u}_n, \quad k = 0 \quad (4.90)$$

na qual  $k$  denota a iteração no processo de Newton. Deste modo, para a  $k$ -ésima iteração temos

$$\vec{u}_{n+1}^{k+1} = \vec{u}_{n+1}^k + \Delta \vec{u}_{n+1}^k. \quad (4.91)$$

Com o objetivo de determinar  $\Delta \vec{u}_{n+1}^k$  é imposta a condição

$$F(\vec{u}_{n+1}^{k+1}; \delta\vec{u}) = 0 \quad \forall \delta\vec{u} \in \mathcal{V}, \quad (4.92)$$

i.e,

$$F(\vec{u}_{n+1}^{k+1}; \delta\vec{u}) = F(\vec{u}_{n+1}^k + \Delta\vec{u}_{n+1}^k; \delta\vec{u}) = 0 \quad \forall \delta\vec{u} \in \mathcal{V}. \quad (4.93)$$

Considerando  $F(\cdot, \cdot)$  como sendo suficientemente regular, e expandindo  $F(\vec{u}_{n+1}^k + \Delta\vec{u}_{n+1}^k; \delta\vec{u})$  em uma série de *Taylor* em  $\vec{u}_{n+1}^k$ , obtém-se, para uma aproximação de primeira ordem,

$$F(\vec{u}_{n+1}^k + \Delta\vec{u}_{n+1}^k; \delta\vec{u}) = F(\vec{u}_{n+1}^k; \delta\vec{u}) + DF(\vec{u}_{n+1}^k; \delta\vec{u}) [\Delta\vec{u}_{n+1}^k]. \quad (4.94)$$

Agora, pela Eq.(4.93) é possível escrever

$$DF(\vec{u}_{n+1}^k; \delta\vec{u}) [\Delta\vec{u}_{n+1}^k] = -F(\vec{u}_{n+1}^k; \delta\vec{u}). \quad (4.95)$$

com

$$DF(\vec{u}_{n+1}^k; \delta\vec{u}) [\Delta\vec{u}_{n+1}^k] = \int_{\Omega_o} \mathbb{A}(\vec{u}_{n+1}^k) \cdot \nabla_{\vec{X}}(\Delta\vec{u}_{n+1}^k) \cdot \nabla_{\vec{X}}\delta\vec{u} \, d\Omega_o \quad (4.96)$$

sendo  $\mathbb{A}$  o módulo tangente global, o qual é dado por

$$\left[ \mathbb{A}(\vec{u}_{n+1}^k) \right]_{ijkl} = \left. \frac{\partial P_{ij}}{\partial F_{kl}} \right|_{\vec{u}_{n+1}^k} = \frac{\partial \tau_{ip}}{\partial F_{kl}} F_{jp}^{-1} - \tau_{ip} F_{jk}^{-1} F_{lp}^{-1}. \quad (4.97)$$

#### 4.4.2 Notas sobre a determinação de $\mathbb{A}$

Conforme descrito no Cap. 3 o cômputo de  $\mathbb{A}$  requer a determinação da derivada da tensão de *Kirchhoff* com relação ao gradiente da deformação. Porém, é possível escrever  $\boldsymbol{\tau}$  como função da tensão rotacionada de *Kirchhoff*,  $\bar{\boldsymbol{\tau}}$ . Sabe-se então que a derivada da tensão de *Kirchhoff* com relação ao gradiente da deformação é dada por

$$\frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial \mathbf{F}} = \frac{\partial \mathbf{R}^e}{\partial \mathbf{F}} \bar{\boldsymbol{\tau}} (\mathbf{R}^e)^T + (\mathbf{R}^e) \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}}{\partial \mathbf{F}} (\mathbf{R}^e)^T + (\mathbf{R}^e) \bar{\boldsymbol{\tau}} \frac{\partial (\mathbf{R}^e)^T}{\partial \mathbf{F}},$$

e que

$$\frac{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}_{ms}}{\partial F_{kl}} = D_{mskl}^{ep} = \hat{\mathbb{D}}.$$

Conforme visto, existe uma dependência do módulo de elasticidade com relação a densidade relativa o que embute mais uma não-linearidade da lei hiperelástica de tal forma que torna-se necessário levar em consideração o efeito da variação do tensor relação constitutiva hiperelástica de quarta ordem  $\mathbb{D}$ , com relação ao gradiente de deformação. Para tal, pode-se separar  $\hat{\mathbb{D}}$  em duas parcelas. A primeira refere-se à variação dos parâmetros materiais com relação ao gradiente de deformação. Na segunda os parâmetros materiais são conservados fixos com relação ao gradiente de deformações. Assim,

$$\hat{\mathbb{D}} = \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}}{\partial \mathbf{F}_{n+1}} = \left( \frac{\partial \mathbb{D}(\rho^*)}{\partial \mathbf{F}_{n+1}} \mathbf{E}_{n+1}^e \right) + \left( \mathbb{D}(\rho^*) \frac{\partial \mathbf{E}_{n+1}^e}{\partial \mathbf{F}_{n+1}} \right) \quad (4.98)$$

em que

$$\left( \frac{\partial \mathbb{D}(\rho^*)}{\partial \mathbf{F}_{n+1}} \mathbf{E}_{n+1}^e \right) = \mathbb{B} \quad (4.99)$$

$$\left( \mathbb{D}(\rho^*) \frac{\partial \mathbf{E}_{n+1}^e}{\partial \mathbf{F}_{n+1}} \right) = \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}}{\partial \mathbf{E}_{n+1}^{e\text{teste}}} \frac{\partial \mathbf{E}_{n+1}^{e\text{teste}}}{\partial \mathbf{C}_{n+1}^{e\text{teste}}} \frac{\partial \mathbf{C}_{n+1}^{e\text{teste}}}{\partial \mathbf{F}_{n+1}} = \tilde{\mathbb{D}}\text{GH}. \quad (4.100)$$

Dessa forma a parcela onde os parâmetros materiais são conservados fixos com relação ao gradiente de deformações, ou seja,  $\tilde{\mathbb{D}}\text{GH}$  pode ser determinada da mesma forma como mostra o Cap. 3, bem como o termo  $\frac{\partial \mathbf{R}^e}{\partial \mathbf{F}}$ . Assim requer-se então apenas a determinação da parcela  $\mathbb{B}$ .

### Determinação de $\mathbb{B}$

Sabendo que

$$\mathbb{D}(\rho^*) = 2\mu(\rho^*) \mathbb{I} + \left( K(\rho^*) - \frac{2}{3}\mu(\rho^*) \right) (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I})$$

e

$$\bar{\boldsymbol{\tau}} = 2\mu(\rho^*) \mathbf{E}_{n+1}^e + \left[ K(\rho^*) - \frac{2}{3}\mu(\rho^*) \right] \text{tr}(\mathbf{E}_{n+1}^e) \mathbf{I},$$

pode-se então operar a derivada  $\frac{\partial \mathbb{D}(\rho^*)}{\partial \mathbf{F}_{n+1}}$ , e se reescrever a Eq.(4.99)

$$\mathbb{B} = \frac{\partial \mathbb{D}(\rho^*)}{\partial \mathbf{F}_{n+1}} \mathbf{E}_{n+1}^e = \left\{ 2 \frac{\partial \mu(\rho^*)}{\partial \mathbf{F}_{n+1}} \mathbb{I} + \left[ \frac{\partial K(\rho^*)}{\partial \mathbf{F}_{n+1}} - \frac{2}{3} \frac{\partial \mu(\rho^*)}{\partial \mathbf{F}_{n+1}} \right] (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}) \right\} \mathbf{E}_{n+1}^e. \quad (4.101)$$

Apos se determinar os termos

$$\frac{\partial \mu(\rho^*)}{\partial \mathbf{F}_{n+1}} = -\frac{E_M}{2(1+\nu)} \gamma(\rho^*)^\gamma [\mathbf{F}_{n+1}^T]^{-1} \quad (4.102)$$

e

$$\frac{\partial K(\rho^*)}{\partial \mathbf{F}_{n+1}} = \frac{E_M}{3(1-2\nu)} \gamma(\rho^*)^\gamma [\mathbf{F}_{n+1}^T]^{-1}. \quad (4.103)$$

pode-se finalmente escrever que

$$\mathbb{B} = \left[ 2 \frac{\partial \mu(\rho^*)}{\partial F_{ij}} E_{ij}^e \right] \mathbb{I}_{ijkl} + \left[ \frac{\partial K(\rho^*)}{\partial F_{ij}} - \frac{2}{3} \frac{\partial \mu(\rho^*)}{\partial F_{ij}} \right] E_{ij}^e (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I})_{ijkl},$$

ou na forma indicial

$$\mathbb{B} = \left[ \frac{\partial \mu(\rho^*)}{\partial F_{ij}} E_{ij}^e \right] (\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + \left[ \frac{\partial K(\rho^*)}{\partial F_{ij}} - \frac{2}{3} \frac{\partial \mu(\rho^*)}{\partial F_{ij}} \right] E_{ij}^e \delta_{ij} \delta_{kl}.$$

## 4.5 Procedimento de Solução

### 4.5.1 Problema local

Como visto, a solução do passo elastoplástico consiste na solução, para  $(q_{n+1}, p_{n+1}, \Delta\lambda)$ , do conjunto de equações não-lineares, dado por

$$\begin{aligned} R_1(q_{n+1}, p_{n+1}, \Delta\lambda) &= \mathcal{F}(q_{n+1}, p_{n+1}, \Delta\lambda) = 0 \\ R_2(q_{n+1}, p_{n+1}, \Delta\lambda) &= \left[ 1 + \frac{\kappa\beta^2\Delta\lambda}{\mathcal{G}(p_{n+1}, q_{n+1})} \right] p_{n+1} - p_{n+1}^{teste} = 0 \\ R_3(q_{n+1}, p_{n+1}, \Delta\lambda) &= \left[ 1 + \frac{3\mu\Delta\lambda}{\mathcal{G}(p_{n+1}, q_{n+1})} \right] q_{n+1} - q_{n+1}^{teste} = 0 \end{aligned} \quad (4.104)$$

A próxima etapa consiste então em linearizar o problema, ou seja, resolver o sistema de equações não-lineares utilizando-se o método de Newton identificando o operador tangente  $\mathbb{K}$ , de maneira consistente. Para que haja solução  $\mathbb{K}$  não pode ser singular. Uma condição suficiente para existência e unicidade de solução é  $\mathbb{K}$  ser positiva-definida. Porém esta condição não é dita necessária, já que o sistema pode ter infinitas soluções. O que se tem interesse é não ter nenhum autovalor nulo, i.e.,  $\mathbb{K}$  pode ser indefinido no seguinte sentido: autovalores exclusivamente positivos ou negativos, ou seja, nenhum nulo. Isso garante que o operando representado por  $\mathbb{K}$  seja bijetivo resultando na existência de um operador inverso o qual será único, resultando na unicidade da solução.

$$[\mathbb{K}(\vec{q}_{n+1})] = \begin{bmatrix} \frac{\partial R_1}{\partial q_{n+1}} & \frac{\partial R_1}{\partial p_{n+1}} & \frac{\partial R_1}{\partial \Delta\lambda} \\ \frac{\partial R_2}{\partial q_{n+1}} & \frac{\partial R_2}{\partial p_{n+1}} & \frac{\partial R_2}{\partial \Delta\lambda} \\ \frac{\partial R_3}{\partial q_{n+1}} & \frac{\partial R_3}{\partial p_{n+1}} & \frac{\partial R_3}{\partial \Delta\lambda} \end{bmatrix} \quad (4.105)$$

O algoritmo do método de Newton, para o problema local, está esquematicamente mostrado na tabela abaixo.



Tabela 4.2: Algoritmo de Newton aplicado ao sistema de equações locais

<p>(i) Inicialize o contador de iteração: <math>k \leftarrow 0</math></p> <p>(ii) Inicialize <math>\vec{q}_{n+1}^o = \vec{q}_{n+1}^{teste}</math>, ou seja,</p> $\vec{q}_{n+1}^{(o)} = (q_{n+1}^{(o)}, p_{n+1}^{(o)}, \Delta\lambda^{(o)}) = (q_{n+1}^{teste}, p_{n+1}^{teste}, 0)$ <p>(iii) Compute o resíduo <math>\vec{R}^o = \vec{R}(\vec{q}_{n+1}^o)</math>, <math>erro = \ \vec{R}^o\ </math>.</p> <p>(v) Faça enquanto (<math>erro &gt; tol</math> ou <math>k &lt; k_{max}</math>)</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Determine a matriz tangente <math>\mathbb{K} = \mathbb{K}(\vec{q}_{n+1}^k)</math></li> <li>• Resolva o sistema linear para <math>\Delta\vec{q}_{n+1}^k</math></li> </ul> $[\mathbb{K}(\vec{q}_{n+1}^k)] \{\Delta\vec{q}_{n+1}^k\} = -\vec{R}(\vec{q}_{n+1}^k)$ <ul style="list-style-type: none"> <li>• Atualize <math>\vec{q}_{n+1}^{k+1}</math></li> </ul> $\vec{q}_{n+1}^{k+1} = \vec{q}_{n+1}^k + \Delta\vec{q}_{n+1}^k$ <ul style="list-style-type: none"> <li>• Compute <math>erro = \ \vec{R}^{k+1}\ </math></li> <li>• Atualize <math>\vec{R}^k \leftarrow \vec{R}^{k+1}</math> e <math>k \leftarrow k + 1</math></li> </ul> <p>fim</p> <p>onde e <math>k_{max}</math> máximo número de iterações permitido.</p>
---

## 4.6 Exemplos

Nesta seção serão apresentados alguns resultados numéricos a fim de avaliar os aspectos referentes à performance da implementação do modelo constitutivo para espumas utilizando o MEF em grandes deformações. Entre os tópicos que serão avaliados estão os seguintes:

- performance da estratégia de solução através da formulação de grandes deformações proposta e também do algoritmo elastoplástico quanto à sua robustez, ou seja, da avaliação da sua estabilidade ao longo das simulações;
- dependência de malha;
- condições da resposta limite e da localização da deformação.

A fim de proporcionar uma base comparativa foram selecionados alguns exemplos na literatura da área para a verificação dos aspectos relacionados acima. Utilizou-se um elemento triangular de 6 nós, chamado comumente de  $\text{Tri6}^2$ , quadrático e isoparamétrico. Este elemento foi escolhido por não apresentar o efeito de travamento volumétrico.

### • Exemplo 3.1 - Compressão Uniaxial

Uma análise simples de compressão unidimensional é realizada agora de forma a verificar a relação tensão deformação com resposta hiperelástica não linear dependente da densidade relativa. A Fig. 4.13 mostra as dimensões do corpo de prova o qual possui  $50\text{mm}$  de altura com uma área inicial de  $2500\text{mm}^2$ . Ainda na mesma figura, o modelo axissimétrico, construído utilizando-se dois elementos, onde um deslocamento  $\bar{u} = -30\text{mm}$  é prescrito.

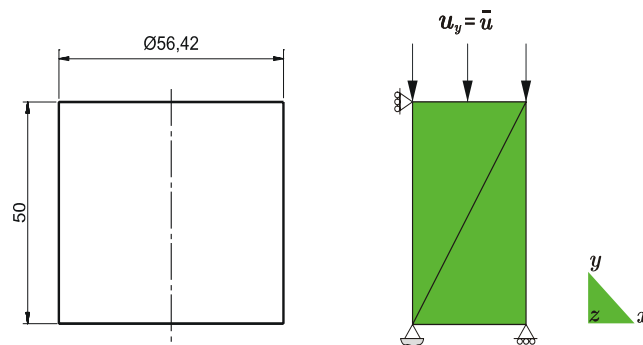


Figura 4.13: Corpo de prova para compressão uniaxial.

Na Fig. 4.14 é mostrado o comparativo entre a tensão obtida experimentalmente por ZHANG, J. *et al.* (1998) e o resultado numérico da análise realizada com 500 passos de carregamento e com tolerância de convergência global de  $10^{-6}$ . Os parâmetros  $c$  e  $\gamma$  foram adotados

<sup>2</sup>A extrapolação, dos pontos de integração para os nós dos elementos, é feita considerando apenas os nós dos vértices no que diz respeito a visualização dos resultados, devido a uma limitação do programa de pós-processamento.

baseados nos estudos de ROBERTS & GARBOCZI (2000). Neste gráfico é plotada a tensão de Cauchy versus a deformação logarítmica com os seguintes parâmetros materiais:

$$\begin{aligned} \tau_y^o &= 0,082034 \text{ Mpa} \\ p_c^o &= 0,040470 \text{ MPa} \\ \rho &= 0,10 \\ E_m &= 928,09288 \text{ MPa} \\ \rho_o^* &= 0,049000 \\ \nu_p &= 0,00 \\ \nu &= 0,25 \\ \gamma &= 1,54 \\ c &= 0,30 . \end{aligned}$$

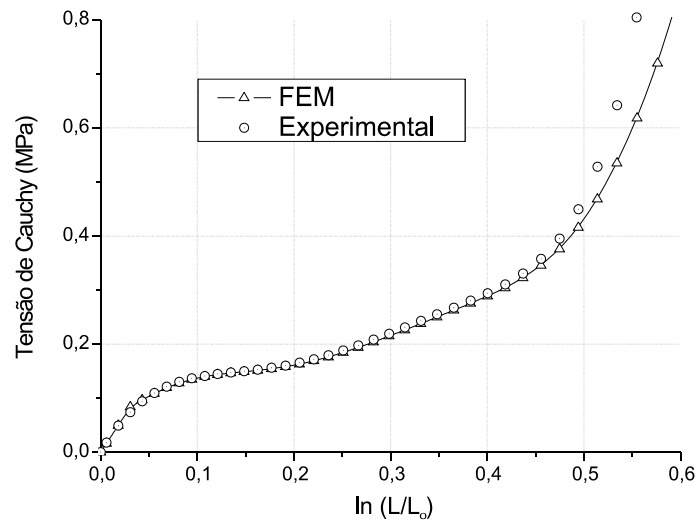


Figura 4.14: Resposta tensão-deformação, experimental ( $8,0 \cdot 10^{-2} \text{ 1/s}$ ) e numérica (FEM), sob compressão uniaxial. Espuma em polipropileno  $49,0 \text{ Kg/m}^3$ .

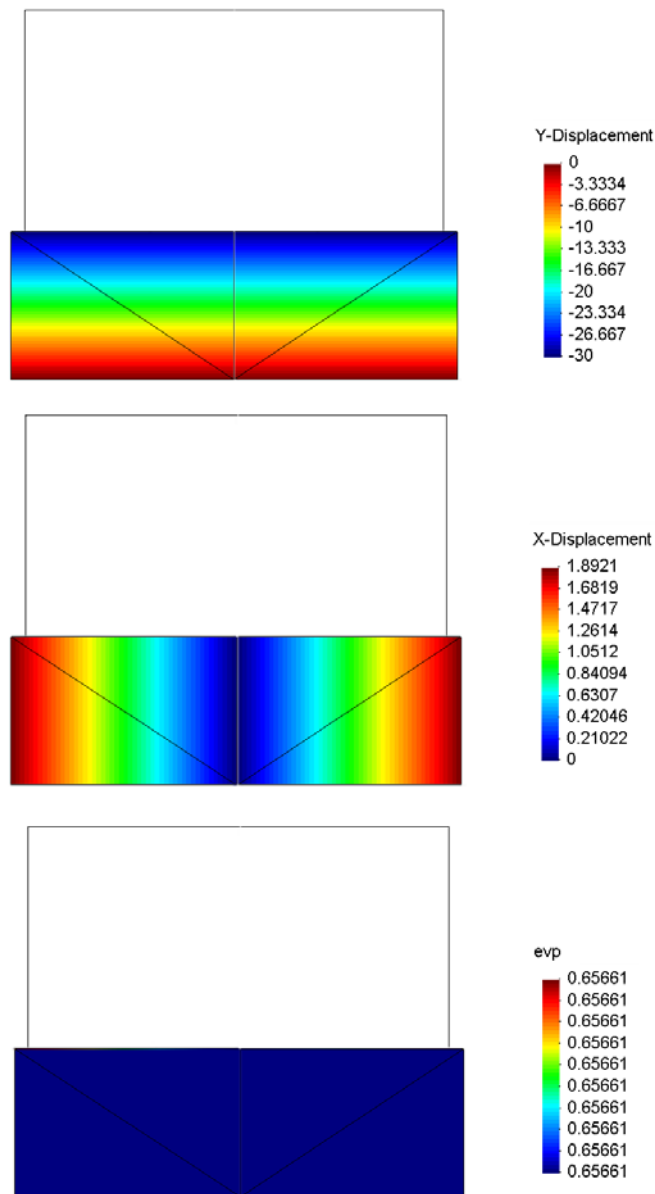


Figura 4.15: Visualização, para o caso uniaxial, dos deslocamentos nas direções  $x$ ,  $y$  e da deformação plástica volumétrica  $\varepsilon_v^p$ .

A Fig.4.14 mostra a curva tensão-deformação para o problema de compressão uniaxial. A resposta produzida utilizando-se o MEF, para o modelo de espumas celulares com encruamento volumétrico apresenta boa concordância com os valores experimentais obtidos por ZHANG, J. *et al.* (1998) para a espuma em polipropileno com densidade nominal de  $49,0 \text{ Kg/m}^3$ . A Fig.4.15 mostra os deslocamentos nas direções  $x$  e  $y$ , bem como a deformação plástica volumétrica no caso limite, ou seja, quando o processo de deformação do material ultrapassa o platô de colapso e atinge o regime de densificação, onde o nível de tensões cresce bruscamente. Pode-se notar que nessa etapa a deformação volumétrica mantém-se constante em todo o domínio, como era de se esperar, para o caso de compressão uniaxial pura.

**• Exemplo 3.2 - Caso multiaxial**

É proposto agora a análise de um corpo de prova em forma de um tronco de cone onde deseja-se verificar a evolução da deformação plástica como também problemas relacionados com a dependência de malha. Para tanto, é considerado o problema ilustrado na Fig. 4.16 que consiste em um modelo axissimétrico cujas dimensões são indicadas na figura. O modelo discretizado utiliza 60 elementos do tipo Tri6, e é submetido a um deslocamento prescrito  $\bar{u} = -80mm$ . Tal carregamento é obtido por uma rampa de carregamento linear onde 4000 incrementos são considerados. Os parâmetros materiais adotados são os mesmos utilizados na análise do caso uniaxial.

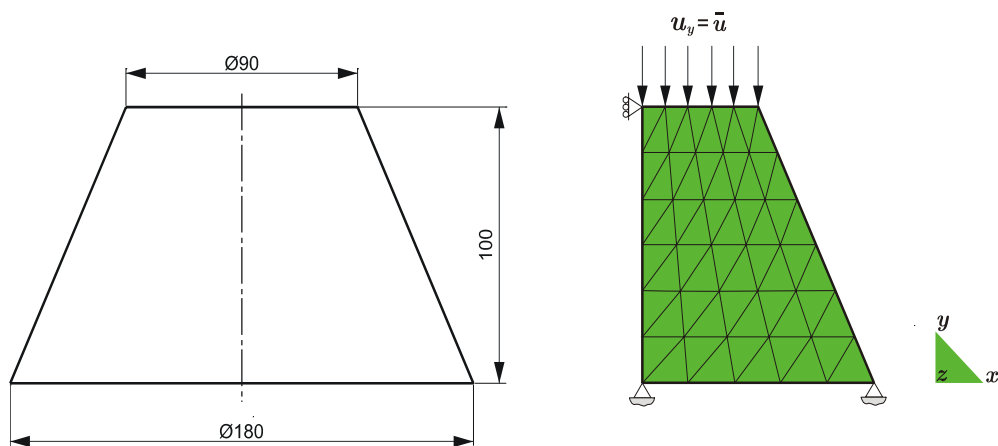


Figura 4.16: Tronco de cone axissimétrico e modelo com 60 elementos Tri6.

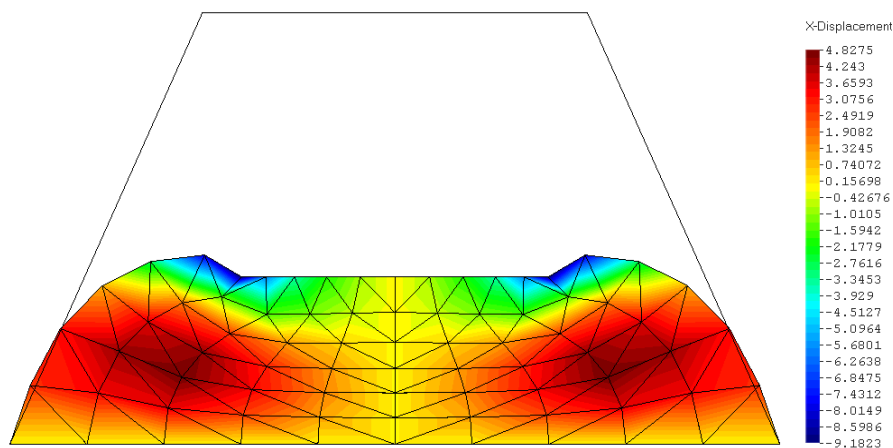


Figura 4.17: Deslocamento na direção x.

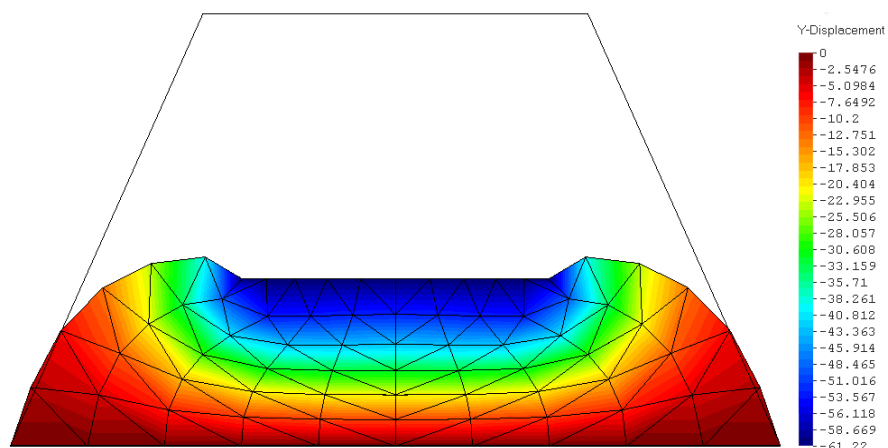


Figura 4.18: Deslocamento na direção  $y$ .

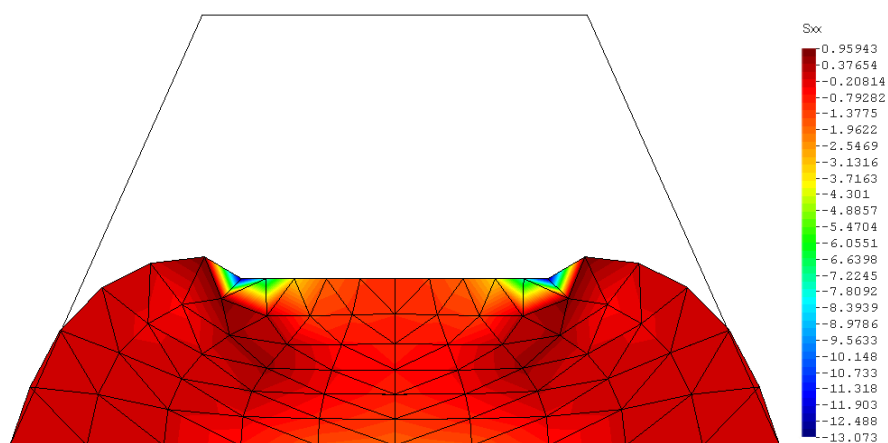


Figura 4.19: Tensão de Cauchy na direção  $x$ .

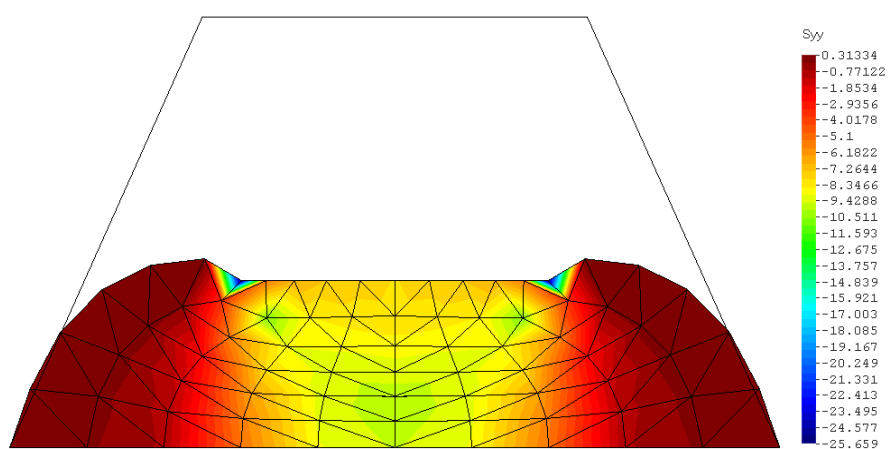
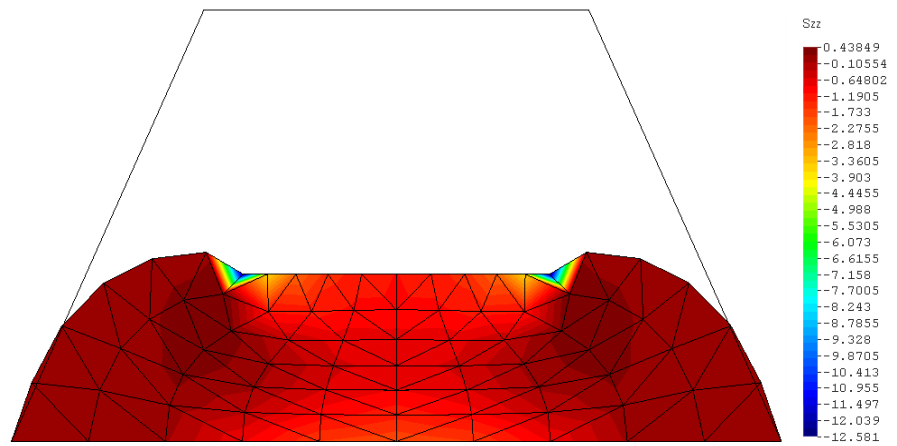
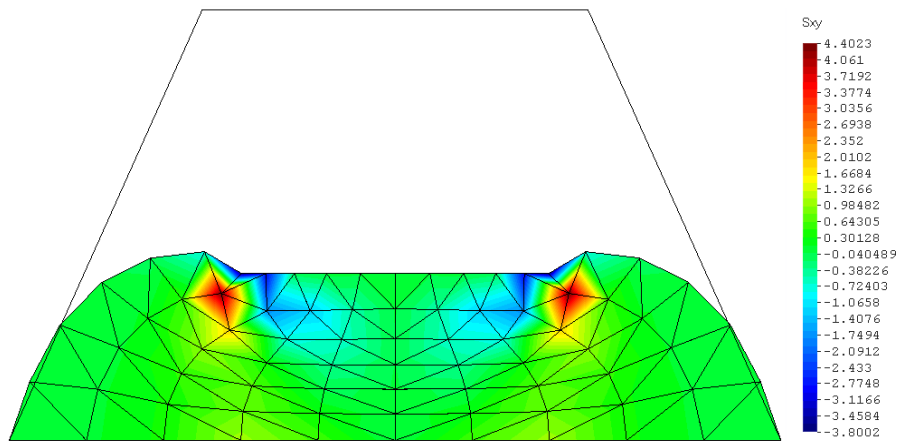


Figura 4.20: Tensão de Cauchy na direção  $y$ .

Figura 4.21: Tensão de Cauchy na direção  $z$ .Figura 4.22: Tensão cisalhante no plano  $xy$ .

Os campos de deformação e deslocamento demonstram como a resposta do material varia conforme a geometria do corpo, bem como, pode-se ter uma avaliação qualitativa das distribuições de tensões em seu interior. Nota-se a existência de uma forte concentração de tensão no canto superior do tronco de cone devido principalmente a tensões compressivas e cisalhantes, conforme mostrado nas Figs 4.19, 4.20, 4.22. Tal concentração move-se para baixo a medida que todo o material sofre uma redução. A Fig. 4.18 mostra que deslocamento máximo atingido foi de  $61,22\text{mm}$  na direção  $y$ , i.e., mais de 75% do valor inicialmente prescrito, o que confere um caráter extremamente robusto ao algoritmo de solução dentro do contexto de grandes deformações, assegurando uma tolerância de convergência de  $10^{-5}$ . Após esse limite ocorre um forte gradiente de deformação na região de concentração de tensões acarretando em um mau condicionamento numérico fazendo com que o algoritmo seja interrompido. Uma melhora do resultado poderia ser obtido com a implementação de uma estratégia de refinamento adaptativo.

A Fig. 4.23 mostra a evolução da deformação plástica volumétrica no interior do corpo, que como intuitivamente era esperado, se desenvolve como na forma de um bulbo pelo interior do

corpo.

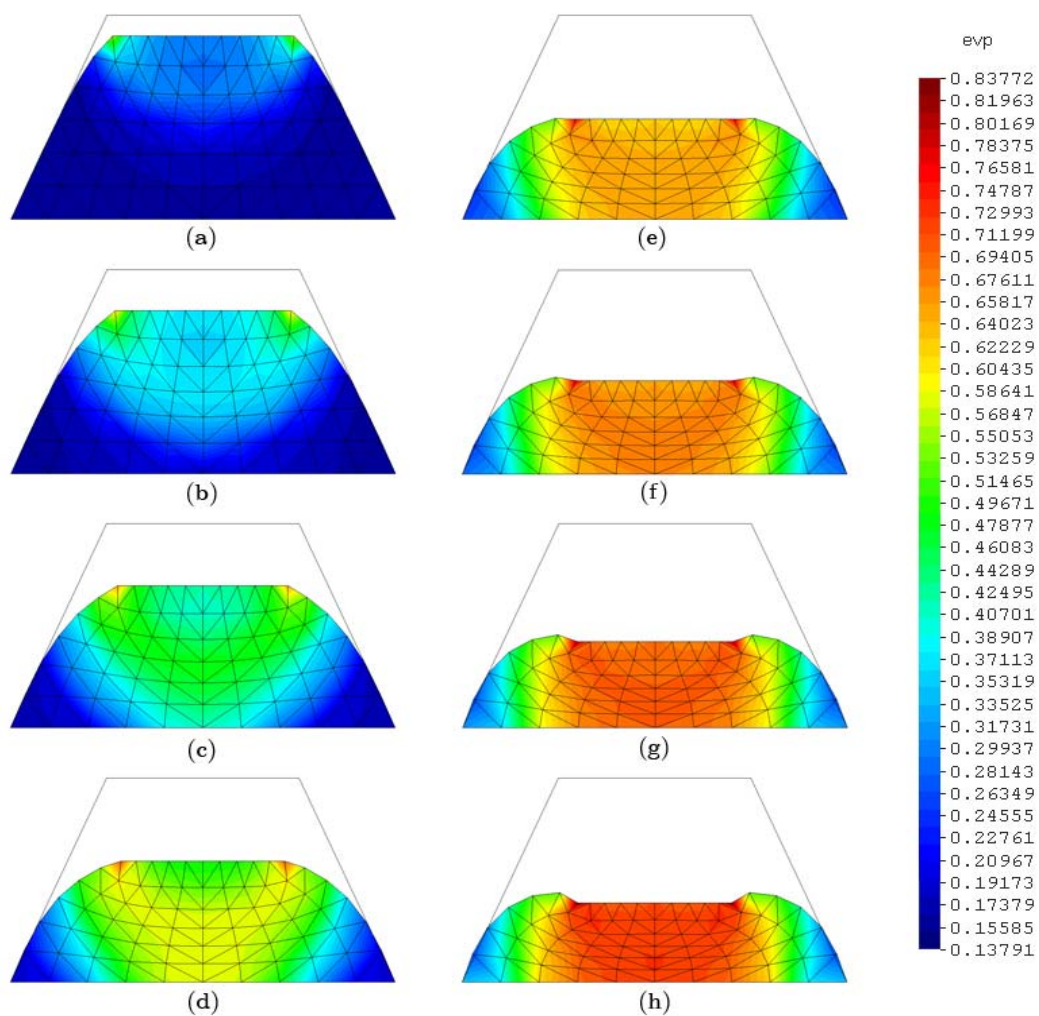


Figura 4.23: Evolução da deformação plástica volumétrica,  $\epsilon_v^p$ .



## Capítulo 5

# O método de Galerkin livre de elementos

### 5.1 Introdução

Nas últimas décadas, o método dos elementos finitos (MEF), bem como o método das diferenças finitas (MDF), têm se mostrado como uma das principais ferramentas utilizadas na mecânica computacional na solução dos mais diversos tipos de fenômenos físicos que recaem na solução de sistemas diferenciais, ou parcialmente diferenciais, complexos que governam boa parte dos problemas modelados na engenharia. Pode-se citar com sendo uma das principais vantagens do MEF a simplicidade na construção das funções de forma, base do processo de discretização das variáveis de estado, através de uma divisão do domínio do problema em subdomínios, i.e., em elementos formando uma malha de discretização. Por outro lado esta estrutura inerente ao MEF é também uma das principais fontes de dificuldades no seu emprego, quando se trata da simulação da evolução temporal da geometria ou de condições de contorno móveis. Exemplos típicos destes problemas envolvem, entre outros, grandes deformações, propagação de trincas na mecânica da fratura, escoamentos bifásicos, e ainda a transferência de calor em meios sujeitos à mudança de fase. Nestes casos, o acompanhamento das modificações de geometria, dos deslocamentos nas interfaces e da presença de grandes gradientes a serem representadas pela malha de elementos finitos implica em modificações da discretização inicial para cada passo da análise. Isso requer o emprego de procedimentos de adaptação ou de reconstrução da malha os quais constituem um importante percentual no esforço computacional total requerido na análise numérica além de envolverem perda de precisão de resultados.

Um caminho adotado para a construção de discretizações sem malha é o uso da aproximação por mínimos quadrados móveis (AMQM), *moving least square approximation* (MLSA), LANCASTER & SALKAUSKAS (1981), que é a base de muitos métodos livres de malha para o ajuste de curvas a partir dos valores da variável de estado associados a um conjunto de nós irregularmente distribuídos no domínio. NAYROLES *et al.* (1992) foram os primeiros a utilizar esta técnica (MLSA), para a formulação de um método, denominado método dos elementos difusos, *diffuse elements method* (DEM). Posteriormente BELYTSCHKO *et al.* (1994) empregaram

esta mesma técnica no contexto de método sem malha, formulando o método de galerkin livre de elementos (MGLE), *element-free Galerkin* (EFG). Outros métodos denominados sem malha são propostos na literatura como exemplo *meshless local Petrov-Galerkin* (MLPG), *point interpolation method* (PIM), *point assembly method* (PAM), *hp-clouds*, *smooth particle hydrodynamics* (SPH), entre vários outros. Devido ao fato da metodologia se encontrar em um rápido estágio de desenvolvimento, dessa forma novos nomes são constantemente propostos, ver LIU (2002).

As principais características do EFG são:

- A construção das funções base, utilizadas na construção do espaço de aproximação, a partir do método de mínimos quadrados móveis (MLSA);
- Ausência da conectividade nodal pré-definida associada ao emprego de elementos;
- A utilização da formulação fraca de Galerkin, na discretização do sistema de equações diferenciais;
- A integração numérica realizada com o emprego de uma estrutura de células ou de uma malha de fundo.

A malha de fundo é uma malha típica de elementos finitos usada apenas durante o procedimento da integração numérica, não contribuindo na definição dos graus de liberdade de discretização, assim, diz-se apenas que a malha de fundo *representa* o domínio, porém não o discretiza. O EFG é um dos métodos sem malha de emprego mais freqüente na literatura. Esta vasta gama de aplicações é uma conseqüência do enorme potencial que o método oferece para a análise de problemas mecânicos. As principais vantagens estão associadas à simplicidade na definição da discretização e a flexibilidade para modificações desta discretização, dispensando o uso de estratégias sofisticadas de geração de malha. As desvantagens do seu emprego são principalmente:

- A necessidade do uso de uma integração numérica apropriada, i.e., de uma quadratura de pontos de integração que seja suficiente de modo a se garantir uma integração precisa com baixo custo computacional. Este é um problema ainda não adequadamente resolvido na literatura;
- Desenvolvimento de uma estrutura de dados efetiva e também de procedimentos numéricos para a redução do custo computacional uma vez que há uma demanda significativa no que diz respeito ao esforço computacional para a construção das funções de forma;
- A necessidade do uso de procedimentos especiais para a imposição das condições de contorno essenciais.

A necessidade de procedimentos especiais para a imposição das condições de contorno essenciais surge do fato que, geralmente, as funções de forma finais oriundas dos métodos livres de malha não representam uma interpolação do campo desejado, mas sim uma aproximação. Deste

modo, as funções de forma resultantes não satisfazem a propriedade de delta de kronecker, propriedade esta vastamente explorada no caso do MEF. Na literatura, várias são as abordagens implementadas para superar este problema. Dentre elas pode-se citar o uso de: Multiplicadores de Lagrange, Métodos de colocação, Princípios variacionais modificados, Combinação com o MEF, Funções de peso singulares e ainda o Método de penalidade. Cada um destes métodos apresenta vantagens e obviamente desvantagens conforme apontado por ROSSI (2005).

Por simplicidade, optou-se nesta dissertação a utilização de malha de integração composta por células/elementos de integração triangulares do tipo Tri3. Esta malha é então utilizada para a realização da integração, bem como, para definir o suporte para as funções de peso de modo a satisfazer as condições de estabilidade e cobertura do MELG, a ser explicado.

## 5.2 Aproximação por Mínimos Quadrados Móveis

O método EFG consiste basicamente na construção de um conjunto de funções de forma globais, que definem o espaço de aproximação, que são posteriormente empregadas em um procedimento de aproximação de Galerkin. Tais funções de forma são construídas através do MLSA.

O MLSA trata-se de um método de construção de aproximações, o qual, inicialmente foi utilizado por LANCASTER & SALKAUSKAS (1981) na construção de superfícies suaves. Através dele procura-se encontrar uma função que melhor se ajuste a um conjunto de dados, associados aos pontos nodais. O MLSA tornou-se popular devido ao fato da função aproximação ser contínua e suave em todo o domínio do problema e ainda, a capacidade de se produzir uma aproximação com a ordem de consistência desejada.

Para melhor entendermos o MLSA, vamos inicialmente descrever o procedimento clássico do método dos mínimos quadrados MMQ. Assim, no caso do MMQ, dado um conjunto de dados discretos é possível construir uma função de aproximação  $u^h$  que se ajusta, no sentido dos mínimos quadrados.

Mais especificamente, dado um conjunto de dados discretos  $\{u_I, I = 1, 2, \dots, n_T\}$ , onde  $n_T$  é o número total de nós, em um domínio  $\Omega$ . A função de aproximação  $u^h(\vec{x})$  é definida como

$$u^h(\vec{x}) = \sum_{j=1}^m p_j(\vec{x}) a_j = \langle \vec{p}, \vec{a} \rangle \quad (5.1)$$

em que  $\vec{p}(\vec{x})$  representa a base intrínseca empregada no MMQ e  $\vec{a}$  é o conjunto de coeficientes a ser determinado de modo a se caracterizar completamente a função de aproximação  $u^h$ . Entretanto, para se determinar esse conjunto de coeficientes quando se utiliza uma aproximação por mínimos quadrados uma medida de erro  $J(\vec{a}^*)$  deve ser introduzida de forma que a determinação de  $\vec{a}$  seja tal que minimize essa medida. Assim, sabendo que a medida de erro é mínima, os coeficientes devem satisfazer a condição necessária de otimalidade. Tem-se então que

$$J(\vec{a}^*) = \sum_{I=1}^n \left\{ u^h(x_I) - u_I \right\}^2 = \sum_{I=1}^n \left\{ \langle \vec{p}, \vec{a}^* \rangle - u_I \right\}^2. \quad (5.2)$$

A determinação de  $\vec{a}$  é obtida pela imposição de que  $J(\vec{a}) \leq J(\vec{a}^*) \quad \forall \vec{a}^* \in \mathbb{R}^m$ . Assim tem-se então o seguinte problema de mínimo:

$$\vec{a} = \arg \min_{\forall \vec{a}^* \in \mathbb{R}^m} \{J(\vec{a}^*)\}. \quad (5.3)$$

Agora, da condição necessária de otimalidade como critério de mínimo de  $\vec{a}$ , tem-se então

$$\left. \frac{\partial J(\vec{a}^*)}{\partial a_k^*} \right|_{\vec{a}} = 0, \quad k = 1 \dots m \quad (5.4)$$

i.e.

$$2 \sum_{I=1}^n \{ \langle \vec{p}, \vec{a}^* \rangle - u_I \} \left. \frac{\partial \langle \vec{p}, \vec{a}^* \rangle}{\partial a_k^*} \right|_{\vec{a}} = 0, \quad k = 1 \dots m. \quad (5.5)$$

Entretanto,

$$\frac{\partial \langle \vec{p}, \vec{a}^* \rangle}{\partial a_k^*} = \frac{\partial}{\partial a_k^*} \left\{ \sum_{j=1}^m p_j a_j^* \right\} = \sum_{j=1}^m p_j(x_I) \delta_{jk} = p_k(x_I). \quad (5.6)$$

Substituindo a Eq.(5.6) na Eq.(5.5), tem-se então que

$$\sum_{I=1}^n \{ \langle \vec{p}(x_I), \vec{a} \rangle - u_I \} p_k(x_I) = 0, \quad k = 1 \dots m. \quad (5.7)$$

Consequentemente,

$$\sum_{I=1}^n \left\{ \sum_{j=1}^m p_j(x_I) p_k(x_I) a_j - u_I p_k(x_I) \right\} = 0, \quad k = 1 \dots m, \quad (5.8)$$

o que permite se escrever a forma compacta

$$\sum_{I=1}^n [\vec{p}(x_I) \otimes \vec{p}(x_I)] \vec{a} = \sum_{I=1}^n u_I \vec{p}(x_I). \quad (5.9)$$

Denotando,

$$[\mathbf{A}] = \sum_{I=1}^n [\vec{p}(x_I) \otimes \vec{p}(x_I)] \quad (5.10)$$

e

$$\vec{b}_I = \vec{p}(x_I), \quad (5.11)$$

obtem-se então o sistema, substituindo as Eq.(5.10) e (5.11) na Eq.(5.9). Assim

$$[\mathbf{A}] \vec{a} = \sum_{I=1}^n u_I \vec{b}_I. \quad (5.12)$$

Note que, a fim de se obter uma solução única para  $\vec{a}$ , a matriz  $[\mathbf{A}]$ , denominada matriz momento, deve ser não-singular, i.e.,  $\det[\mathbf{A}] \neq 0$ . Assim, uma vez conhecido os coeficientes  $\vec{a}$  pode-se então determinar a função de aproximação  $u^h(x)$  que não necessariamente passa pelos

valores nodais, ou seja,  $u^h(x)$  não se trata de uma função de interpolação. Os coeficientes  $a_j$  são influenciados por todos os valores de  $u_I$ ,  $I = 1, \dots, n$ , conhecidos para os  $n$  pontos discretos. Dessa forma a aproximação  $u^h(x)$  em um dado ponto  $x$  é afetada pelo valor de  $u(x)$  nos pontos  $x_I$  que podem estar afastados de  $x$ . Esta aproximação pode ser melhorada fazendo-se uma partição do domínio em subdomínios. Particionando o domínio em subdomínios  $[x_k, x_{k+1}]$ ,  $k = 1, \dots, q$ , onde  $q$  é o número total de partições, pode-se então se reescrever a aproximação como sendo

$$u_{[k]}^h(x) = \sum_{j=1}^m p_j(x) a_j^{[k]}, \quad k = 1, \dots, q \quad (5.13)$$

Dessa forma pontos fora do intervalo  $[x_k, x_{k+1}]$  não irão afetar a determinação dos coeficientes  $a_j$  para um dado  $x$  pertencente ao intervalo  $[x_k, x_{k+1}]$ , como mostra a Fig. 5.1.

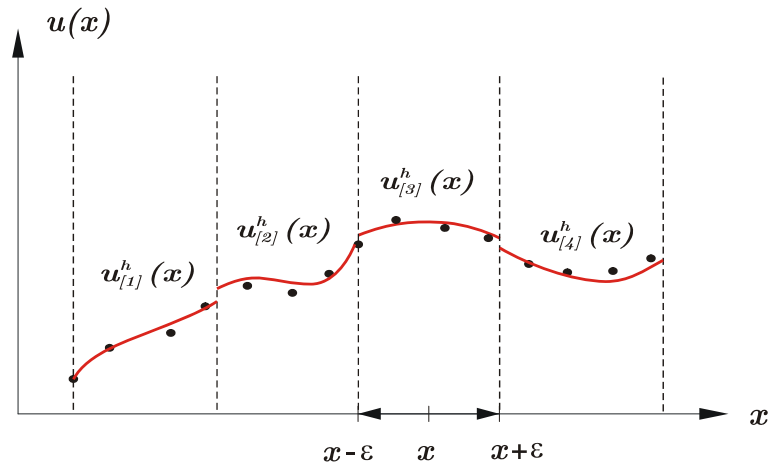


Figura 5.1: Partição do domínio em subdomínios

Porém, em geral, as funções  $u_{[k]}^h(x)$  podem não ser contínuas nos limites de cada intervalo. Assim para se obter a aproximação global ao longo de todo o domínio  $u^h(x)$ ,  $x \in \Omega$ , deve-se então impor condições de contorno para cada subdomínio de maneira a se obter continuidade. Como exemplo, sendo  $\Omega = [0, L]$  e  $k = 3$ :

- $u^h(x) \in C^0[0, L]$

$$\begin{aligned} u_{[1]}^h(x_2) &= u_{[2]}^h(x_2) \\ u_{[2]}^h(x_3) &= u_{[3]}^h(x_3) \end{aligned} \quad (5.14)$$

- $u^h(x) \in C^1[0, L]$

$$\begin{aligned} u_{[1]}^h(x_2) &= u_{[2]}^h(x_2) & \text{e} & \quad \frac{d}{dx} u_{[1]}^h(x_2) = \frac{d}{dx} u_{[2]}^h(x_2) \\ u_{[2]}^h(x_3) &= u_{[3]}^h(x_3) & \text{e} & \quad \frac{d}{dx} u_{[2]}^h(x_3) = \frac{d}{dx} u_{[3]}^h(x_3) \end{aligned} \quad (5.15)$$

O principal problema na utilização do MMQ, mesmo utilizando-se uma partição em intervalos

los, é a grande dificuldade de implementação do método para se obter aproximações com ordem  $C^k[0, L]$  com  $k$  arbitrário e o fato da ordem de aproximação não ser homogêneo em todo o domínio.

### 5.2.1 Método dos Mínimos Quadrados Móveis

Para obter-se uma aproximação com ordem de aproximação homogênea em todo o domínio, que seja fácil de ser implementado para aproximações com regularidade arbitrária, o MLSA faz uso de uma base  $\vec{p}(\vec{x})$  e de uma função peso  $w(\vec{x})$ , a qual determina a influência de quantas partículas serão consideradas na determinação de  $\vec{a}(\vec{x})$ . O critério utilizado para a determinação de  $\vec{a}(\vec{x})$  é a minimização de seguinte norma ponderada

$$J(\vec{a}) = \sum_{I=1}^n w(\vec{x} - \vec{x}_I) [\langle \vec{p}(\vec{x}_I), \vec{a}(\vec{x}) \rangle - u_I]^2 \quad (5.16)$$

em que  $n$  é o número de partículas na vizinhança de  $\vec{x}$  para os quais a função peso  $w_I = w(\vec{x} - \vec{x}_I) \geq 0 \forall \vec{x} \in \Omega_I$ , ou seja, é o número de partículas pertencentes ao suporte da função peso, e  $u_I$  é o dado discreto em  $\vec{x} = \vec{x}_I$ . Por construção, a função peso possui valores não nulos positivos apenas no subdomínio  $\Omega_I$  definido para cada  $i$ -ésimo nó, também chamado domínio de influência.

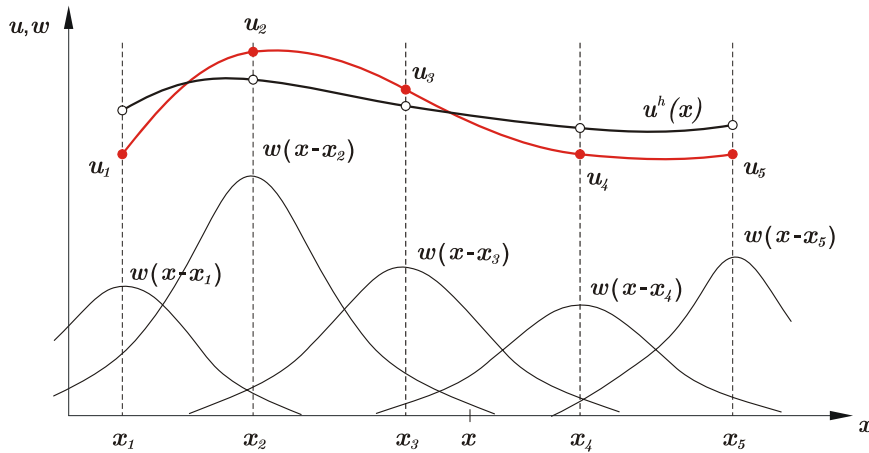


Figura 5.2: Método dos mínimos quadrados móveis.

Cada subdomínio identifica o suporte da função peso sendo referenciado ainda como o domínio de influência de cada nó. Este pode, no caso de uma análise bidimensional, e de acordo com a conveniência, ter formas circulares ou retangulares, conforme mostrado na Fig. 5.3. E, no caso tridimensional, pode ainda ser definido por esferas ou cubos.

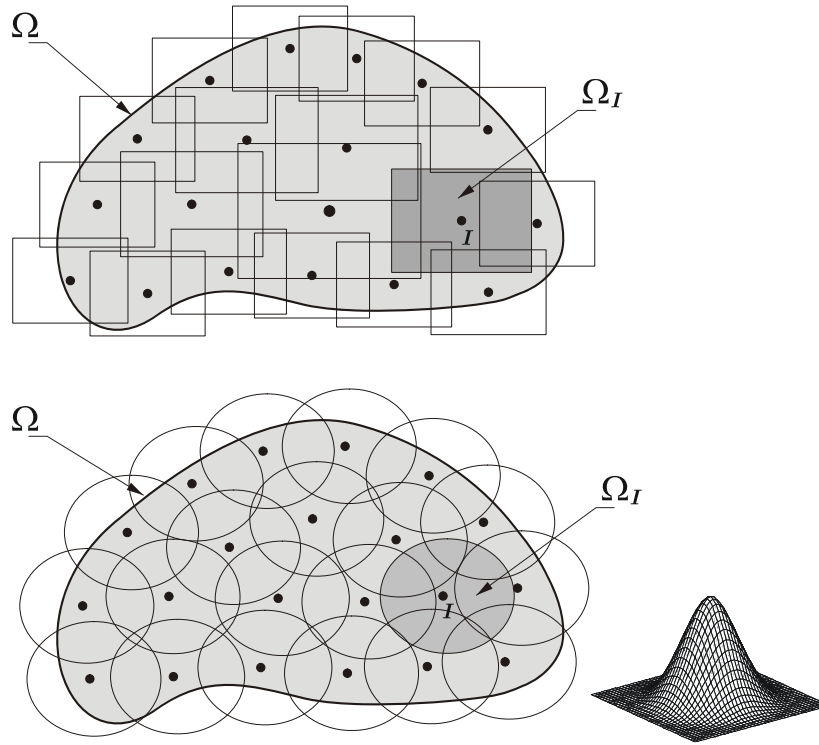


Figura 5.3: Domínios de influência retangulares e circulares.

Novamente, da condição necessária de otimalidade de modo que  $\vec{a}(x)$  seja mínimo, tem-se então como resultado da minimização de  $J(\vec{a})$  que

$$[\mathbf{A}(x)] = \sum_{I=1}^n w(x - x_I) [\vec{p}(x_I) \otimes \vec{p}(x_I)] \quad (5.17)$$

e

$$\vec{b}_I = w(x - x_I) \vec{p}(x_I), \quad (5.18)$$

assim

$$[\mathbf{A}(x)] \vec{a}(x) = \sum_{I=1}^n u_I \vec{b}_I \quad (5.19)$$

i.e.

$$\vec{a}(x) = [\mathbf{A}(x)]^{-1} \left\{ \sum_{I=1}^n u_I \vec{b}_I \right\}. \quad (5.20)$$

Contudo,

$$u^h(x) = \langle \vec{p}(x), \vec{a}(x) \rangle = \sum_{I=1}^n u_I \langle \vec{p}(x), [\mathbf{A}(x)]^{-1} \vec{b}_I \rangle = \sum_{I=1}^n u_I \Phi_I(x). \quad (5.21)$$

na qual

$$\Phi_I(x) = \langle \vec{p}(x), [\mathbf{A}(x)]^{-1} \vec{b}_I \rangle = \vec{p}(x) \cdot \mathbf{A}(x)^{-1} \vec{b}_I(x). \quad (5.22)$$

$\Phi_I(\vec{x})$  é denominada função de forma global e  $\mathbf{A}(\vec{x})$  como já visto é comumente chamada de matriz de momento, que deve ser computada, bem como sua inversa, de modo a se determinar

$\vec{a}(\vec{x})$ . Já as derivadas parciais de  $\Phi_I(\vec{x})$  com relação às componentes de  $\vec{x}$  são dadas por

$$\frac{\partial \Phi_I(\vec{x})}{\partial x_i} = \frac{\partial \vec{p}(\vec{x})}{\partial x_i} \cdot \mathbf{A}(\vec{x})^{-1} \vec{b}_I(\vec{x}) + \vec{p}(\vec{x}) \cdot \frac{\partial \mathbf{A}(\vec{x})^{-1}}{\partial x_i} \vec{b}_I(\vec{x}) + \vec{p}(\vec{x}) \cdot \mathbf{A}(\vec{x})^{-1} \frac{\partial \vec{b}_I(\vec{x})}{\partial x_i} \quad (5.23)$$

sendo

$$\frac{\partial \mathbf{A}(\vec{x})^{-1}}{\partial x_i} = -\mathbf{A}(\vec{x})^{-1} \frac{\partial \mathbf{A}(\vec{x})}{\partial x_i} \mathbf{A}(\vec{x})^{-1}. \quad (5.24)$$

### 5.2.2 A ordem de consistência

A ordem de consistência de uma aproximação,  $C^k$ , é definida como a ordem arbitrária polinomial que pode ser representada exatamente pelo processo de ajuste ou aproximação. Uma das propriedades importantes do MLSA é a de que o método é capaz de representar exatamente combinações das funções da base intrínseca  $\vec{p}(\vec{x})$ , ou seja, a consistência da aproximação depende da ordem monomial utilizada para definir  $\vec{p}(\vec{x})$ . Se a ordem completa for  $k$ , a função aproximação gerada terá consistência  $C^k$ . Assim, é possível alcançar uma consistência de ordem  $k$  através do uso de

$$\vec{p}^T(\vec{x}) = [1, x, y, x^2, xy, y^2, \dots, x^k, \dots, xy^{k-1}, y^k]. \quad (5.25)$$

Deste modo, para satisfazer a consistência linear é necessário apenas utilizar  $\vec{p}^T(\vec{x}) = [1, x, y]$ , onde  $m = 3$ . Neste caso são obtidas as seguintes relações

$$\sum_{I=1}^{n_T} \Phi_I(\vec{x}) = 1; \quad (5.26)$$

$$\sum_{I=1}^{n_T} \Phi_I(\vec{x}) x_I = x; \quad (5.27)$$

$$\sum_{I=1}^{n_T} \Phi_I(\vec{x}) y_I = y. \quad (5.28)$$

De acordo com a Eq.(5.26) o conjunto  $\{\Phi_I(\vec{x}), I = 1, 2, \dots, n_T\}$  define uma *partição da unidade*.

Como comentado em BELYTSCHKO *et al.* (1994), as funções de forma oriundas do EFG,  $\Phi_I(\vec{x})$ , não satisfazem, em geral, a condição de delta de kronecker, isto é  $\Phi_I(\vec{x}_J) \neq \delta_{IJ}$ . Isto infelizmente complica a imposição das condições de contorno essenciais já que estas condições não podem ser impostas diretamente pela prescrição dos valores nodais.

Note que a Eq.(5.16) é positiva definida, uma vez que as funções peso são escolhidas positivas. Como resultado tal mínimo é não-negativo. Considere um campo dado por

$$u(\vec{x}) = \sum_{j=1}^k p_j(\vec{x}) \alpha_j(\vec{x}), \quad k \leq m. \quad (5.29)$$

Considerando que  $\alpha_j = 0$  para  $k < j$ , pode-se então reescrever o campo dado como sendo

$$u(\vec{x}) = \sum_{j=1}^m p_j(\vec{x}) \alpha_j(\vec{x}). \quad (5.30)$$



Então fazendo  $a_j(\vec{x}) = \alpha_j(\vec{x})$ , a norma  $J$  tende a zero o que é necessariamente um mínimo, o que leva a

$$u^h(\vec{x}) = \sum_{j=1}^k p_j(\vec{x}) \alpha_j(\vec{x}) = u(\vec{x}). \quad (5.31)$$

Isso prova que qualquer campo dado pela Eq.(5.29) irá ser exatamente representado ou reproduzido pelo MLSA. A prova acima ainda implica em dizer que qualquer função pertencente à base é reproduzida de maneira exata. Em outras palavras, sabendo que o MLSA busca um conjunto de coeficientes  $\vec{a}(\vec{x})$  o qual possa produzir uma função  $u(\vec{x}) = \sum_{j=1}^m p_j(\vec{x}) \alpha_j(\vec{x})$  com uma mínima distância normalizada com relação a função atual. Se a função atual pertencer à base de  $\vec{p}(\vec{x})$ , a aproximação obtida pelo MLSA simplesmente será a base porque a distância normalizada é zero, o qual é claramente um mínimo. A prova de consistência é válida para provar outra característica importante: se uma função aparece na base ela é reproduzida de maneira exata. Uma vez mostrada a consistência linear, tudo que se tem a fazer é incluir constantes e monômios lineares na base de forma a se obter funções capazes de representar singularidades, como é apresentado nos trabalhos de LIU(2002) e BELYTSCHKO & FLEMING(1999). Entretanto, deve-se ater para que matriz momento continue invertível, quando esses tipos funções base são incluídos.

### 5.3 Definição e distribuição da função peso

A definição adequada da função peso é de extrema importância de modo a se obter uma boa performance do método. Ela deve ser construída de tal forma que:

- seja positiva;
- gere uma única solução para  $\vec{a}(\vec{x})$ ;
- ser grade para um ponto  $x_I$  próximo de  $x$  e ser relativamente pequena para o  $x_I$  mais distante de  $x$ , i.e., ela deve apresentar um decréscimo em sua magnitude a medida que a distância de  $x$  com relação  $x_I$  aumenta.

Será considerado apenas funções peso as quais dependam apenas da distância, i.e. o raio  $r$ , entre dois pontos, como segue:

$$w(\vec{x} - \vec{x}_I) = w_I(r) = w(r_I) \quad (5.32)$$

em que

$$r_I = \|\vec{x} - \vec{x}_I\|. \quad (5.33)$$

Mais especificamente, funções peso na forma:

$$w_I(r(\vec{x})) = w_I\left(r^{(2k)}(\vec{x})\right) \quad (5.34)$$

onde  $w_I(r^{(2k)}(\vec{x}))$  é assumido ser contínuo juntamente com as  $m - derivadas$  com relação a  $r$ . Considera-se então condições que o termo  $k$  deve satisfazer de maneira a garantir que as primeiras  $n - ésimas$  derivadas de  $w_I(r^{(2k)})$  com relação a  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, 2$ , existam para cada ponto  $x$ . Dessa forma

$$\frac{\partial w_I}{\partial x_j} = 2 k r^{(2k-1)} \frac{\partial w_I}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_j} = 2 k (\vec{x} - \vec{x}_I)_j r^{(2k-2)} \frac{\partial w_I}{\partial r}, \quad (5.35)$$

onde  $(\vec{x} - \vec{x}_I)_j = \langle (\vec{x} - \vec{x}_I), e_j \rangle$ , sendo  $e_j$  o  $j - ésimo$  vetor base cartesiana.

Note que o limite de  $\frac{(\vec{x} - \vec{x}_I)_j}{r}$ , quando  $\vec{x} \rightarrow \vec{x}_I$ , não existe. Todavia as derivadas acima existirão apenas se  $k > \frac{1}{2}$ . Ainda, analisando a segunda derivada,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w_I}{\partial x_j^2} &= 2 k (2k - 2) (\vec{x} - \vec{x}_I)_j^2 r^{(2k-4)} \frac{\partial w_I}{\partial r} + \\ &+ 2 k r^{(2k-2)} \frac{\partial w_I}{\partial r} + 4 k^2 (\vec{x} - \vec{x}_I)_j^2 r^{(4k-4)} \frac{\partial^2 w_I}{\partial r^2}, \end{aligned} \quad (5.36)$$

apenas se  $k \geq 1$ . Calculando a  $n - ésima$  derivada da função peso  $w_I(r^{(2k)})$  com relação a  $x_j$  para o caso de problemas bidimensionais, pode-se dizer que: se  $k$  é um inteiro positivo, a derivada de função peso  $w_I(r^{(2k)})$  com relação a  $x_j$  existirá até a  $m - ésima$  ordem,  $m = 2k$ . Caso  $k$  não seja um inteiro positivo, porém  $k > \frac{n}{2}$ , a derivada de função peso  $w_I(r^{(2k)})$  com relação a  $x_j$  existirá até a  $n - ésima$  ordem.

Assim a escolha adequada das funções peso é mais ou menos arbitrária a medida que a função seja positiva e contínua, juntamente com suas derivadas até o grau desejado. A escolha do tamanho do suporte da função peso deve garantir que a matriz momento  $\mathbf{A}(\vec{x})$ , definida na Eq.(5.17), seja invertível. De acordo com as referências LIU *et al.* (1996), BEISSEL & BELYTSCHKO (1996) e HUERTA & MÉNDEZ (2000) a distribuição de partículas deve satisfazer uma condição de estabilidade para que exista a inversa de  $\mathbf{A}(\vec{x})$ . Esta condição de estabilidade pode ser enunciada como

$$\text{card} \{ \vec{x}_i | \Phi_i(\vec{x}) \neq 0 \} \geq \dim [\mathbf{A}(\vec{x})]. \quad (5.37)$$

Para um domínio de maior influência em  $\vec{x}_I$ , requer-se então um maior número de nós inclusos e, portanto, maior quantidade de informação disponível para o processo de MLSA. Por exemplo, para  $\bar{\Omega} \in \mathfrak{R}^2$  e  $\vec{p}^T(\vec{x}) = [1, x, y]$  a distribuição de partículas deve ser tal que para todo  $\vec{x} \in \bar{\Omega}$  deva existir o suporte de pelo menos três partículas com um *valor* diferente de zero em  $\vec{x}$ , i.e.,  $\vec{x}$  deve estar incluído no suporte efetivo (não nulo) de pelo menos três partículas. Ainda, em problemas 2D não basta apenas observar a cardinalidade de partículas cujo suporte efetivo contenha  $\vec{x}$ , mas também se estas partículas formam um triângulo com área não nula.

Como exemplo, na Fig. 5.4, note que a vizinhança para os cálculos no ponto  $\vec{x}$ , inclui os nós 1, 2 e 3 uma vez que seus domínios de influência, i.e., suporte efetivo, contêm o ponto  $\vec{x}$ . O nó 4 foi excluído da vizinhança de  $\vec{x}$  já que seu suporte efetivo não contém o ponto  $\vec{x}$ .

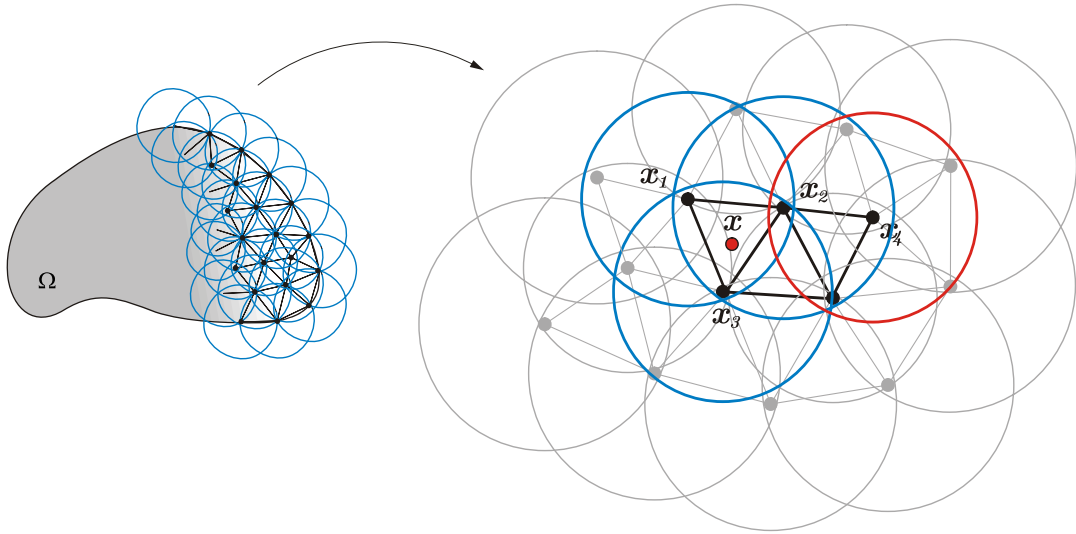


Figura 5.4: Ilustração dos domínios de influência nodal 2D e a malha de fundo.

Assim, considere uma partícula genérica tal que  $\vec{x}_I \in \Omega$  da malha de integração, como ilustrado na Fig. 5.5.

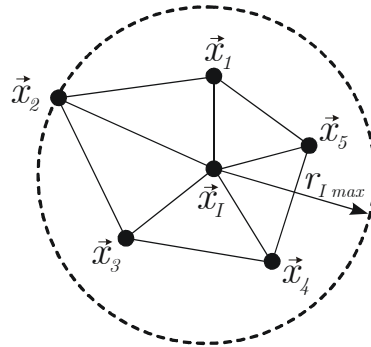


Figura 5.5: Raio da função de peso  $w$ .

O raio,  $\bar{r}_I$ , que define o suporte da função  $w$  centrada em  $\vec{x}_I$ , utilizado nesta dissertação, é determinado por

$$\bar{r}_I = s \cdot r_{I_{\max}} \quad (5.38)$$

onde  $s > 1$ , com  $s \in R$ , e  $r_{I_{\max}}$  é a máxima distância dentre as partículas que compõem a lista de nós adjacentes,  $\vec{L}_I$ , associada à  $\vec{x}_I$ , i.e.,

$$r_{I_{\max}} = \max_i \|\vec{x}_i - \vec{x}_I\|, \quad i \in \vec{L}_I. \quad (5.39)$$

Várias são as funções peso utilizadas na literatura. Como exemplos de funções peso mais utilizadas pode-se citar as seguintes:

- Função peso *spline* cúbica

$$w(r) = \begin{cases} \frac{2}{3} - 4r^2 + 4r^3 & \text{para } r \leq 0.5 \\ \frac{4}{3} - 4r + 4r^2 - \frac{4}{3}r^3 & \text{para } 0.5 < r \leq 1 \text{ ;} \\ 0 & \text{para } r > 1 \end{cases} \quad (5.40)$$

- Função peso *spline* quártica

$$w(r) = \begin{cases} 1 - 6r^2 + 8r^3 - 3r^4 & \text{para } r \leq 1 \\ 0 & \text{para } r > 1 \end{cases} \quad (5.41)$$

- Função peso gaussiana

$$w(r) = \begin{cases} \frac{e^{-\left(\frac{r\bar{r}_I}{c}\right)^2} - e^{-\left(\frac{\bar{r}_I}{c}\right)^2}}{1 - e^{-\left(\frac{\bar{r}_I}{c}\right)^2}} & \text{para } r \leq 1 \\ 0 & \text{para } r > 1 \end{cases} .$$

Nas equações acima

$$r = \frac{r_I}{\bar{r}_I} = \frac{\|\vec{x} - \vec{x}_I\|}{s \cdot r_{I_{\max}}} \quad (5.42)$$

sendo o raio parametrizado, entre  $[0, 1]$ , da função peso  $w$ .

Portanto, quanto maior a dimensão na escolha da base  $\vec{p}^T(\vec{x})$ , maior será a quantidade de partículas/nós cujo suporte efetivo contenha todos os pontos do domínio. Note que a condição de cardinalidade em 5.37 deve ser válida em todos os pontos do domínio. Ainda os nós inclusos no domínio de influência, em problemas bidimensionais, não se faz suficiente apenas observar a quantidade de nós em uma única direção pois também esses não devem ser colineares. Por serem muitas as possíveis configurações para uma distribuição nodal arbitrária é necessário ter-se cuidado no critério a utilizar para a escolha do fator de influência  $s$  e uma forma de implementação mais robusta pode contemplar testes de condicionamento da matriz  $\mathbf{A}(\vec{x})$ .

## 5.4 Imposição das condições essenciais

Como citado, há uma extensa discussão de como se impor as condições essenciais propostas por vários autores, não só utilizadas para o EFG mas também para a maioria dos métodos livres de malha.

Multiplicadores de Lagrange, geralmente usados em procedimentos numéricos, são um modo efetivo para impor restrições em problemas de otimização e têm sua implementação considerada de baixa complexidade. O método obriga que as imposições se verifiquem de forma exata, através dos multiplicadores de lagrange. Entretanto, como mencionado em BELYTSCHKO *et al.* (1995), princípios variacionais modificados não impõem, de forma geral, as condições de contorno essenciais com um alto grau de precisão. O método ainda apresenta algumas desvantagens, como exemplo, o aumento no número de incógnitas, conseqüentemente levando a um aumento no tamanho do problema e ainda um mau condicionamento da matriz de rigidez associada aos

multiplicadores de Lagrange devido ao aparecimento de zeros na diagonal principal.

O método de penalidade impõe que as condições de contorno se verifiquem de forma aproximada, por meio de um fator de penalização. O uso do fator de penalização não acarreta em um aumento do número de graus de liberdade, contudo pode levar a um mau condicionamento do sistema de equações algébrico resultante, caso a penalidade escolhida ser muito elevada. Por outro lado, caso a penalidade escolhida seja fraca, ocorrerá uma violação indesejada da condição de contorno essencial que se quer impor. Do ponto de vista pragmático, o problema fundamental do método de penalidade está na escolha de um fator de penalização adequado.

Neste trabalho as condições de contorno essenciais são impostas através do método do Lagrangeano aumentado o qual se trata de uma combinação natural dos métodos dos multiplicadores de Lagrange e da penalidade exterior como observou ROSSI (2005). Assim, este método trata de um compromisso entre a representação exata da condição imposta e a facilidade ocasionada pelos termos de penalidade ao processo de iteração.

A imposição das condições de contorno essenciais via o método do Lagrangeano aumentado implica em que

$$\vec{Q}^u(\vec{u}, \epsilon_u, \vec{\lambda}_u) = - \left[ \vec{\lambda}_u + \frac{1}{\epsilon_u} (\vec{u} - \vec{\bar{u}}) \right] \quad em \Gamma_o^u \quad (5.43)$$

onde  $\vec{\lambda}_u$  é o multiplicador de Lagrange para e  $\epsilon_u$  é o parâmetro de penalidade. Ainda, o trabalho virtual das forças  $\vec{Q}^u$  referentes à imposição das condições de contorno essenciais do problema é dado por

$$F^u(\vec{u}, \delta\vec{u}) = - \int_{\Gamma_o^u} \vec{Q}^u(\vec{u}, \epsilon_u, \vec{\lambda}_u) \cdot \delta\vec{u} \, dA_o. \quad (5.44)$$

A implementação das condições de contorno essenciais dentro do processo iterativo bem como sua discretização serão mostradas no capítulo seguinte, onde um novo problema é formulado contemplado ainda contato unilateral.

## Capítulo 6

# Contato Unilateral

Neste capítulo são abordados aspectos gerais no que diz respeito ao problema de contato unilateral, dentro do escopo de grandes deformações. Mais especificamente o problema de contato aqui abordado é descrito sob a hipótese de *Signorini*, ou seja, que o obstáculo, ou corpo alvo, seja indeformável. Os problemas dessa natureza, envolvendo contato e atrito, são de considerável complexidade e têm grande importância dentro da mecânica do contínuo. Atualmente uma vasta literatura apresenta-se disponível sobre esta área de conhecimento, vide os trabalhos de SIMO & LAURSEN (1992), LAURSEN (2002) e WRIGGERS (2002).

No caso de espumas poliméricas, estas são comumente sujeitas à problemas de contato e atrito sob grandes deformações, principalmente em aplicações que envolvem absorção de impacto. Assim, freqüentes testes são realizados de modo a se caracterizar o comportamento desse tipo de material sob tais condições. Como exemplo o teste de indentação, que consiste basicamente no uso de um objeto (indentador) forçado contra a superfície de uma amostra.

Neste capítulo utiliza-se o método livre de malha (EFG) para a solução de problemas relacionados com contato em espumas poliméricas, utilizando-se o modelo constitutivo para sólidos celulares, proposto no Cap. 4. O uso do EFG para se atacar esse tipo de problema deve-se principalmente ao fato do EFG ser mais robusto que o FEM quando na solução de problemas com grandes deformações e gradientes. Veja a Fig. 6.1.

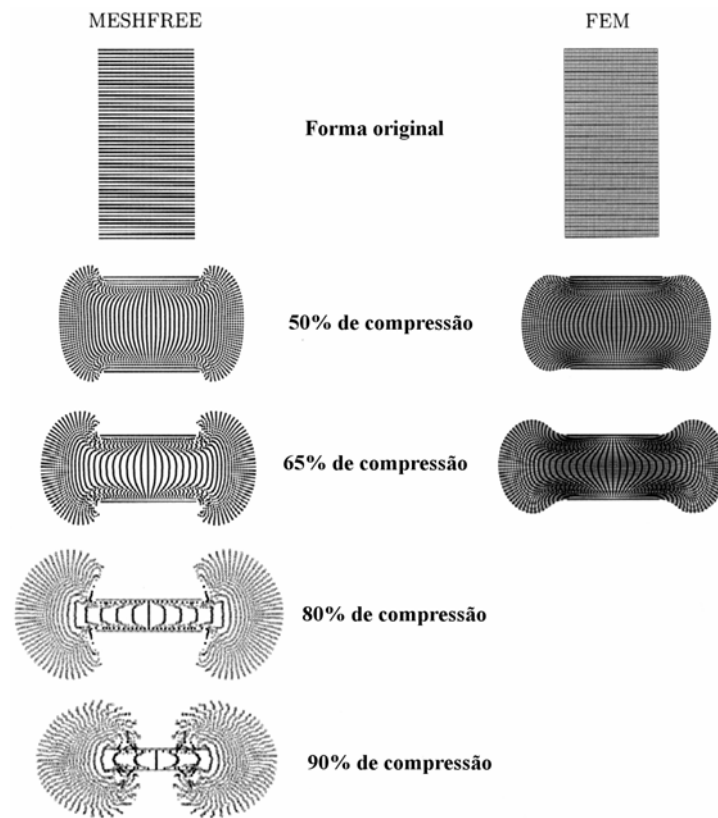


Figura 6.1: Comparação entre os métodos EFG e Elementos Finitos. LI & LIU 2002.

Adicionalmente, como os métodos mais robustos para a incorporação da condição de contato unilateral com atrito são o *método da penalidade* ou ainda o *método do Lagrangeano aumentado*, pode-se utilizar estes métodos para simultaneamente impor as condições de contorno essenciais. Dessa forma a imposição das condições de contorno essenciais do problema pode ser imposta juntamente com as condições de contato com atrito, aproveitando o mesmo processo iterativo.

Alguns exemplos numéricos, considerando a hipótese axissimétrica e de estado plano de deformações, serão também apresentados nesta seção visando avaliar o desempenho da metodologia proposta.

## 6.1 Definição do problema

### 6.1.1 Formulação forte

Seja  $\Omega_o$  a configuração do corpo no instante inicial, com contorno  $\partial\Omega_o$ , sujeita a uma força de corpo  $\vec{b}$  definida em  $\Omega_o$ , a uma tração  $\vec{t}$  prescrita em  $\Gamma_o^t$ , ao deslocamento prescrito  $\vec{u}$  definido em  $\Gamma_o^u$  e a uma condição de contato com atrito definida em  $\Gamma_o^c$ . Seja ainda o contorno dado por  $\partial\Omega_o = \Gamma_o^t \cup \Gamma_o^u \cup \Gamma_o^c$  com  $\Gamma_o^t \cap \Gamma_o^u = \emptyset$ ,  $\Gamma_o^t \cap \Gamma_o^c = \emptyset$  e  $\Gamma_o^u \cap \Gamma_o^c = \emptyset$ . A forma forte do problema de contato com atrito quase-estático em grandes deformações pode ser enunciada como:

- **Problema 6.1:** Encontre  $\vec{u}$ , para cada  $t$ , tal que

$$\operatorname{div} \mathbf{P} + \rho_o \vec{b} = 0 \quad \text{em } \Omega_o \quad (6.1)$$

com

$$\mathbf{P} \vec{m} = \vec{t} \quad \text{em } \Gamma_o^t \quad (6.2)$$

$$\vec{u} = \vec{u} \quad \text{em } \Gamma_o^u \quad (6.3)$$

satisfazendo as condições de *Kuhn-Tucker*

$$Q_\nu^c \geq 0, \quad g_\nu \leq 0 \quad \text{e} \quad Q_\nu^c g_\nu = 0 \quad (6.4)$$

sendo

$$\vec{Q}_T^c = \begin{cases} -c_f |Q_\nu^c| \frac{\vec{g}_T}{\|\vec{g}_T\|}, & \text{se } \|\vec{Q}_T^c\| > c_f |Q_\nu^c| \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad \text{em } \Gamma_o^c \quad (6.5)$$

Aqui,  $\vec{Q}^c = \mathbf{P} \vec{m}$  é o vetor tração na superfície de  $\Gamma_o^c$  e  $\vec{g}$  é a função vetorial folga ("gap") a qual ainda será definida na próxima seção. Os termos  $\vec{Q}^c$  e  $\vec{g}$  são decompostos aditivamente da seguinte forma:

$$\vec{Q}^c = \vec{Q}_T^c + Q_\nu^c \vec{\nu} \quad (6.6)$$

na qual a parcela normal e tangencial são dadas respectivamente por<sup>1</sup>

$$Q_\nu^c = \vec{Q}^c \cdot \vec{\nu} \quad (6.7)$$

$$\vec{Q}_T^c = [\mathbf{I} - \vec{\nu} \otimes \vec{\nu}] \vec{Q}^c. \quad (6.8)$$

De maneira análoga ao vetor tração a função vetorial "gap" também é decomposta aditivamente como sendo

$$\vec{g} = \vec{g}_T + g_\nu \vec{\nu} \quad (6.9)$$

sendo

$$g_\nu = \vec{g} \cdot \vec{\nu} \quad (6.10)$$

$$\vec{g}_T = [\mathbf{I} - \vec{\nu} \otimes \vec{\nu}] \vec{g}. \quad (6.11)$$

Nas equações acima  $\vec{\nu}$  é a normal externa ao obstáculo no ponto de contato, como mostra a Fig. 6.2, e a Eq.(6.5) representa a lei de atrito de Coulomb clássica descrita com mais detalhes adiante.

---

<sup>1</sup>Análoga a definição do deslizamento tangencial  $\vec{u}_T$ . Para  $\vec{x} \in \Gamma_o^c$ ,  $\vec{u}_T$  é dado por:  $\vec{u}_T(\vec{x}) = \vec{u}(\vec{x}) - (\vec{u}(\vec{x}) \cdot \vec{\nu}) \vec{\nu} = [\mathbf{I} - \vec{\nu} \otimes \vec{\nu}] \vec{u}(\vec{x})$ .



### 6.1.2 Definição da função *gap*

Supõe-se que para cada ponto  $\vec{x} = \vec{\varphi}(\vec{X}, t)$ ,  $\vec{X} \in \Gamma_o^c$ , possa ser identificado um ponto correspondente  $\vec{Y} \in \Gamma_{obs}$ , definido como sendo a projeção mais próxima de  $\Gamma_{obs}$  para  $\vec{x} \in \mathfrak{R}^2$ . Ao se parametrizar a fronteira  $\Gamma_{obs}$  pelo comprimento de arco  $l$ ,  $l \in [0, 1]$ , pode-se então formular um problema de mínimo, o qual deve ser global, de maneira a se encontrar a projeção ortogonal. Dessa forma:

- **Problema 6.2:** Encontre  $l^*$  tal que

$$l^* = \arg \min_{l \in [0,1]} \left\| \vec{\varphi}(\vec{X}, t) - \vec{Y}(l) \right\| \quad (6.12)$$

$$= \arg \min_{l \in [0,1]} \left\| \vec{X} + \vec{u}(\vec{X}, t) - \vec{Y}(l) \right\| \quad (6.13)$$

sendo a menor distância dada por  $\vec{Y}(\vec{X}, t) = \vec{Y}(l^*(\vec{X}, t))$ . Supõe-se aqui a existência de uma correspondência bijetiva entre os pontos  $\vec{X} \in \Gamma_o^c$  e  $\vec{Y} \in \Gamma_{obs}$ . Assim, em cada instante  $t$ , e para todo  $\vec{X} \in \Gamma_o^c$  é necessário determinar a projeção mais próxima  $\vec{Y}(\vec{X}, t) = \vec{Y}(l^*(\vec{X}, t))$  e a normal  $\vec{\nu}(\vec{X}, t)$  para  $\Gamma_{obs}$  em  $\vec{Y}(\vec{X}, t)$ .

Com estes resultados torna-se possível definir a função vetorial "gap" como sendo

$$\vec{g} = - \left[ \vec{X} + \vec{u}(\vec{X}, t) - \vec{Y}(\vec{X}, t) \right] \quad (6.14)$$

com a componente normal,  $g_\nu(\vec{X}, t) : \Gamma_o^c \rightarrow R$ , dada por

$$g_\nu = - \left[ \vec{X} + \vec{u}(\vec{X}, t) - \vec{Y}(\vec{X}, t) \right] \cdot \vec{\nu}(\vec{X}, t) \quad (6.15)$$

A Fig. 6.2 mostra, de forma esquemática, o problema de contato com relação a um obstáculo fixo, indeformável,  $\Omega_{obs}$  de fronteira  $\Gamma_{obs}$  a qual está parametrizada pelo comprimento de arco  $l$ ,  $l \in [0, 1]$ . A fronteira  $\Gamma_{obs}$  separa o espaço em uma região admissível onde  $g_\nu < 0$ , em uma região de contato para a qual  $g_\nu = 0$  e, por fim, em uma região inadmissível onde  $g_\nu > 0$  uma vez que não se considera penetração entre os corpos.

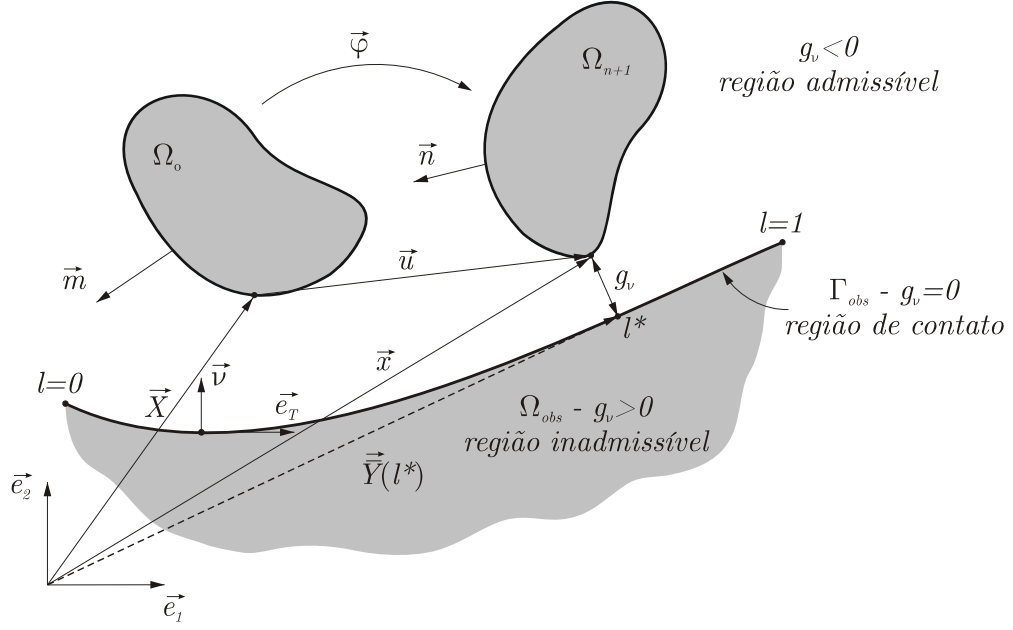


Figura 6.2: Modelo de contato em grandes deformações - problema de Signorini.

### 6.1.3 Formulação fraca

Utilizando-se a descrição *Lagrangeana Total* na forma incremental, e aplicando o método do Lagrangeano Aumentado, o problema de contato com atrito de Signorini pode ser determinado pela resolução do seguinte conjunto de problemas:

- **Problema 6.3:** Dado  $\epsilon_u > 0$ ,  $\bar{\lambda}_{u_{n+1}}^o$ ,  $\epsilon_\nu > 0$  e  $\lambda_{\nu_{n+1}}^o$  encontre  $\vec{u}_{n+1}$  tal que

$$\vec{u}_{n+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \vec{u}_{n+1}^k$$

em que  $\vec{u}_{n+1}^k$  é a solução de: Encontre  $\vec{u}_{n+1}^k \in \mathcal{K}$  tal que

$$\tilde{F}(\vec{u}_{n+1}^k, \delta \vec{u}) = 0 \quad \forall \delta \vec{u} \in \mathcal{V}, \quad (6.16)$$

onde

$$\tilde{F}(\vec{u}_{n+1}^k, \delta \vec{u}) = F(\vec{u}_{n+1}^k, \delta \vec{u}) + F^u(\vec{u}_{n+1}^k, \delta \vec{u}) + F^c(\vec{u}_{n+1}^k, \delta \vec{u}) \quad (6.17)$$

na qual

$$F(\vec{u}_{n+1}^k, \delta \vec{u}) = \int_{\Omega_o} \mathbf{P}(\vec{u}_{n+1}^k) \cdot \nabla_{\vec{X}} \delta \vec{u} \, d\Omega_o - \int_{\Omega_o} \rho_o \vec{b}_{n+1} \cdot \delta \vec{u} \, d\Omega_o - \int_{\Gamma_o^t} \vec{t}_{n+1} \cdot \delta \vec{u} \, dA_o, \quad (6.18)$$

$$F^u(\vec{u}_{n+1}^k, \delta \vec{u}) = - \int_{\Gamma_o^u} \vec{Q}_{n+1}^u(\vec{u}_{n+1}^k, \epsilon_u, \bar{\lambda}_{u_{n+1}}^k) \cdot \delta \vec{u} \, dA_o \quad (6.19)$$

e

$$F^c(\vec{u}_{n+1}^k, \delta \vec{u}) = - \int_{\Gamma_o^c} \vec{Q}_{n+1}^c(\vec{u}_{n+1}^k, \epsilon_\nu, \lambda_{\nu_{n+1}}^k) \cdot \delta \vec{u} \, dA_o, \quad (6.20)$$

sendo

$$\vec{Q}_{n+1}^u = \mathbf{P}_{n+1} \vec{m} \quad \text{em } \Gamma_o^u \quad (6.21)$$

$$\vec{Q}_{n+1}^c = Q_{\nu_{n+1}}^c \vec{\nu} + Q_{T_{n+1}}^c \vec{e}_T \quad \text{em } \Gamma_o^c. \quad (6.22)$$

Os *multiplicadores de Lagrange* são atualizados no mesmo processo iterativo, através das seguintes relações:

$$\vec{\lambda}_{u_{n+1}}^{k+1} = - \left[ \vec{\lambda}_{u_{n+1}}^k + \frac{1}{\epsilon_u} (\vec{u}_{n+1}^k - \vec{u}_{n+1}) \right] \quad (6.23)$$

$$\lambda_{\nu_{n+1}}^{k+1} = \left\langle \lambda_{\nu_{n+1}}^k + \frac{1}{\epsilon_\nu} g_\nu (\vec{u}_{n+1}^k) \right\rangle. \quad (6.24)$$

Note que na Eq.(6.23),  $\vec{\lambda}_u$  e  $\epsilon_u$  são respectivamente o multiplicador de *Lagrange* e a *penalidade exterior* associados à imposição da condição de contorno essencial, da mesma forma que na Eq.(6.24)<sup>2</sup>,  $\lambda_\nu$  e  $\epsilon_\nu$  são as mesmas entidades, porém associadas à imposição do contato normal.

Ao observar o **Problema 6.3** pode-se notar duas novas parcelas adicionadas ao trabalho virtual do problema de grandes deformações,  $F$ . Essas novas parcelas são, respectivamente, o trabalho das forças referentes à imposição das condições de contorno essenciais do problema,  $F^u$  dada pela Eq.(6.19), e o trabalho das forças de contato,  $F^c$  dada pela Eq.(6.20).

A parcela  $Q_\nu^c$  é referente à contribuição normal do contato e  $Q_T^c$  é referente à contribuição tangencial, i.e., do atrito a qual dependerá da formulação de atrito adotada, a ser discutida com maiores detalhes ainda neste capítulo. A Fig. 6.3 mostra as forças que surgem no contato.

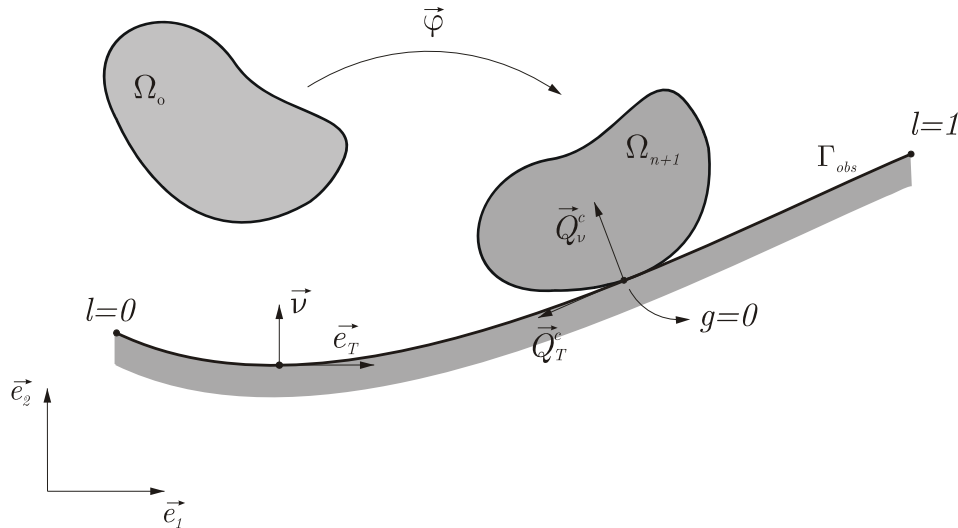


Figura 6.3: Força normal  $\vec{Q}_\nu^c$  e tangencial  $\vec{Q}_T^c$  que surgem no contato.

Ao se incluir parcelas  $F^u$  e  $F^c$ , novas não linearidades são incorporadas ao problema, o que recai no uso de métodos numéricos apropriados para a busca de sua solução.

<sup>2</sup>Aqui,  $\langle \cdot \rangle$  é o operador de *Macaulay*, definido por  $\langle x \rangle = \frac{1}{2} (x + |x|)$ , o qual retorna a parte positiva do argumento  $x$ .

### 6.1.4 Método de Newton

A fim de determinar a solução  $\vec{u}_{n+1}^k$  da Eq. (6.16) é utilizado o *método de Newton*. Dada a solução inicial  $\vec{u}_{n+1}^{k(0)} = \vec{u}_n$ ,  $\vec{u}_n$  denota a solução convergida em  $t_n$ , encontre a estimativa  $\vec{u}_{n+1}^k$ ,

$$\vec{u}_{n+1}^k = \lim_{i \rightarrow \infty} \vec{u}_{n+1}^{k(i)}, \quad (6.25)$$

na qual  $\vec{u}_{n+1}^{k(i)}$  é calculado, da iteração anterior, por

$$\vec{u}_{n+1}^{k(i)} = \vec{u}_{n+1}^{k(i-1)} + \Delta \vec{u}_{n+1}^{k(i-1)}. \quad (6.26)$$

O incremento  $\Delta \vec{u}_{n+1}^{k(i-1)}$  é determinado impondo-se a condição

$$\tilde{F} \left( \vec{u}_{n+1}^{k(i)}; \delta \vec{u} \right) = \tilde{F} \left( \vec{u}_{n+1}^{k(i-1)} + \Delta \vec{u}_{n+1}^{k(i-1)}; \delta \vec{u} \right) = 0 \quad \forall \delta \vec{u} \in \mathcal{V}. \quad (6.27)$$

Novamente, considerando  $\tilde{F}(\cdot, \cdot)$  como sendo suficientemente regular, e expandindo a Eq.(6.27) em uma série de *Taylor* em  $\vec{u}_{n+1}^{k(i)}$ , obtém-se, para uma aproximação de primeira ordem,

$$D\tilde{F} \left( \vec{u}_{n+1}^{k(i-1)}, \delta \vec{u} \right) \left[ \Delta \vec{u}_{n+1}^{k(i-1)} \right] = -\tilde{F} \left( \vec{u}_{n+1}^{k(i-1)}; \delta \vec{u} \right) \quad \forall \delta \vec{u} \in \mathcal{V}. \quad (6.28)$$

Dessa forma  $\Delta \vec{u}_{n+1}^{k(i-1)}$  é determinado pela solução do problema linear acima, na qual  $D\tilde{F}$  pode ser encontrada através da derivada de *Gateaux*

$$D\tilde{F} \left( \vec{u}_{n+1}^{k(i-1)}, \delta \vec{u} \right) \left[ \Delta \vec{u}_{n+1}^{k(i-1)} \right] = \left. \frac{d}{d\epsilon} \tilde{F} \left( \vec{u}_{n+1}^{k(i-1)} + \epsilon \Delta \vec{u}_{n+1}^{k(i-1)}, \delta \vec{u} \right) \right|_{\epsilon=0}. \quad (6.29)$$

## 6.2 Imposição das condições de contorno essenciais

A imposição das condições de contorno essenciais via o método do Lagrangeano aumentado, vista no Cap. 4, pode ser reescrita de acordo com o processo iterativo na forma

$$\vec{Q}_{n+1}^u \left( \vec{u}_{n+1}^{k(i)}, \epsilon_u, \vec{\lambda}_{u_{n+1}}^k \right) = - \left[ \vec{\lambda}_{u_{n+1}}^k + \frac{1}{\epsilon_u} \left( \vec{u}_{n+1}^{k(i)} - \vec{u}_{n+1} \right) \right] \quad em \Gamma_o^u \quad (6.30)$$

em que  $\vec{\lambda}_{u_{n+1}}^k$  é o multiplicador de Lagrange para a  $k$ -ésima itero, em  $t_{n+1}$ , e  $\epsilon_u$  é o parâmetro de penalidade referente a  $\vec{Q}^u$ . A derivada de Gateaux de  $F^u$  é dada por

$$DF^u \left( \vec{u}_{n+1}^{k(i)}, \delta \vec{u} \right) \left[ \Delta \vec{u}_{n+1}^{k(i)} \right] = -\frac{1}{\epsilon_u} \int_{\Gamma_o^u} \Delta \vec{u}_{n+1}^{k(i)} \cdot \delta \vec{u} \, d\Gamma_o^u. \quad (6.31)$$

### 6.2.1 Procedimento de discretização via EFG

Considerando a aproximação por funções do tipo EFG é possível escrever a Eq.(6.30) da seguinte maneira

$$\vec{Q}_{n+1}^u = - \left[ \vec{\lambda}_{u_{n+1}}^{hk} + \frac{1}{\epsilon_u} \left( \vec{u}_{n+1}^{hk(i)} - \vec{u}_{n+1} \right) \right] \quad em \Gamma_o^u, \quad (6.32)$$

em que

$$\vec{u}_{n+1}^{hk(i)} = \mathbf{\Phi}^g \vec{u}_{n+1}^{gk(i)} \quad (6.33)$$

e

$$\delta \vec{u}^h = \mathbf{\Phi}^g \delta \vec{u}^g. \quad (6.34)$$

Nas Eq.(6.33) e Eq.(6.34)  $\mathbf{\Phi}^g$  é a matriz global das funções de forma provenientes do método EFG. Já o termo de aproximação associado ao multiplicador de Lagrange,  $\vec{\lambda}_{u_{n+1}}^{hk}$ , é computado supondo uma interpolação linear, isto é,

$$\vec{\lambda}_{u_{n+1}}^{hk} = \mathbf{N}^g \vec{\lambda}_{u_{n+1}}^{gk}. \quad (6.35)$$

Substituindo as Eqs.(6.33), (6.34) e (6.35) na Eq.(6.32) e esta em Eq.(6.19) produz a seguinte expressão, para o trabalho das forças referentes à imposição das condições de contorno essenciais,

$$\begin{aligned} F^u \left( \vec{u}_{n+1}^{hk(i)}, \delta \vec{u}^h \right) &= - \int_{\Gamma_o^u} \vec{Q}_{n+1}^{u^{k(i)}} \cdot \delta \vec{u}^h \, d\Gamma_o^u \\ &= \vec{f}_{n+1}^{\lambda_u^k} \cdot \delta \vec{u}^g + \vec{f}_{n+1}^{u^{k(i)}} \cdot \delta \vec{u}^g \end{aligned} \quad (6.36)$$

na qual as forças são dadas pelas seguintes expressões:

$$\vec{f}_{n+1}^{\lambda_u^k} = \int_{\Gamma_o^u} (\mathbf{\Phi}^g)^T \mathbf{N}^g \vec{\lambda}_{u_{n+1}}^{gk} \, d\Gamma_o^u \quad (6.37)$$

$$\vec{f}_{n+1}^{u^{k(i)}} = \frac{1}{\epsilon_u} \int_{\Gamma_o^u} (\mathbf{\Phi}^g)^T \mathbf{\Phi}^g \left( \vec{u}_{n+1}^{gk(i)} - \vec{u}^g \right) \, d\Gamma_o^u. \quad (6.38)$$

Ainda, ao substituir as Eqs.(6.33) e (6.34) na Eq.(6.31) produz

$$DF^u \left( \vec{u}_{n+1}^{hk(i)}, \delta \vec{u}^h \right) \left[ \Delta \vec{u}_{n+1}^{hk(i)} \right] = \mathbf{K}_{n+1}^{u^{k(i)}} \Delta \vec{u}_{n+1}^{gk(i)} \cdot \delta \vec{u}^g \quad (6.39)$$

em que

$$\mathbf{K}_{n+1}^{u^{k(i)}} = -\frac{1}{\epsilon_u} \int_{\Gamma_o^u} (\mathbf{\Phi}^g)^T \mathbf{\Phi}^g \, d\Gamma_o^u. \quad (6.40)$$

### 6.3 Imposição dos termos de contato e atrito

Os termos de imposição de contato,  $\vec{Q}_{n+1}^c$ , são divididos em contato normal,  $Q_{\nu_{n+1}}^c$ , e contato tangencial ou de atrito,  $Q_{T_{n+1}}^c$ , conforme ilustrado na Fig. 6.3 e são decompostos aditivamente como mostrado na Eq.(6.22). Analogamente, a fim de simplificar a derivação de cada termo é feita uma decomposição aditiva do trabalho das forças de contato, i.e.,

$$F^c \left( \vec{u}_{n+1}, \delta \vec{u} \right) = F_{\nu}^c \left( \vec{u}_{n+1}^{k(i)}, \delta \vec{u} \right) + F_T^c \left( \vec{u}_{n+1}^{k(i)}, \delta \vec{u} \right) \quad (6.41)$$

em que

$$F_\nu^c \left( \vec{u}_{n+1}^{k(i)}, \delta \vec{u} \right) = - \int_{\Gamma_o^c} Q_{\nu_{n+1}}^c \left( \vec{u}_{n+1}^{k(i)}, \epsilon_\nu, \lambda_{\nu_{n+1}}^k \right) \vec{\nu}_{n+1}^{k(i)} \cdot \delta \vec{u} \, d\Gamma_o^c \quad (6.42)$$

$$F_T^c \left( \vec{u}_{n+1}^{k(i)}, \delta \vec{u} \right) = - \int_{\Gamma_o^c} Q_{T_{n+1}}^c \left( \vec{u}_{n+1}^{k(i)}, Q_{\nu_{n+1}}^c, \epsilon_T \right) \vec{e}_{T_{n+1}}^{k(i)} \cdot \delta \vec{u} \, d\Gamma_o^c \quad (6.43)$$

são, respectivamente, o trabalho das forças de contato normal e o trabalho das forças de atrito.

### 6.3.1 Contato Normal - condição de impenetrabilidade

Uma das grandes dificuldades associadas aos métodos numéricos que tentam descrever o problema de contato encontra-se na discretização espacial da interação de contato. De maneira geral a interação de contato entre dois corpos envolve a transmissão de forças entre malhas não exatamente conformes com a geometria destas interfaces.

No caso da imposição dos termos de contato normal a escolha do fator de penalidade dever ser suficientemente grande de forma a garantir um bom condicionamento da matriz rigidez para um dado número de condição. Por outro lado fatores pouco elevados podem levar a uma penetração inaceitável de um sólido no outro.

Neste trabalho adota-se a hipótese das paredes do obstáculo serem compostas apenas por segmentos de retas, o que implica em dizer que:

- o problema da mínima distância entre o corpo e o obstáculo fica simplificado;
- os termos referentes à curvatura, que aparecem na linearização do problema, tornam-se nulos.

Seguindo a proposta apresentada inicialmente em SIMO & LAURSEN (1992) e implementada em ROSSI(2005), a qual apresenta uma metodologia baseada no método do Lagrangeano aumentado, o termo de contato normal referente ao processo iterativo é escrito como

$$Q_{\nu_{n+1}}^c \left( \vec{u}_{n+1}^{k(i)}, \epsilon_\nu, \lambda_{\nu_{n+1}}^k \right) = \left\langle \lambda_{\nu_{n+1}}^k + \frac{1}{\epsilon_\nu} g \left( \vec{u}_{n+1}^{k(i)} \right) \right\rangle \quad (6.44)$$

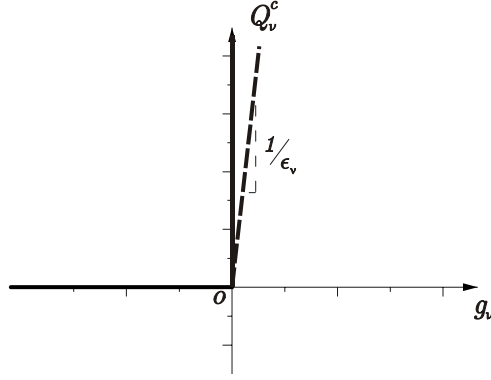
em que  $\lambda_{\nu_{n+1}}^k$  e  $\epsilon_\nu$  são, respectivamente, o multiplicador de *Lagrange* e a *penalidade* referentes à *k-ésima* iteração, para o instante  $t_{n+1}$ .

A derivada de Gateaux de  $F_\nu^c$  é dada por

$$DF_\nu^c \left( \vec{u}_{n+1}^{k(i)}, \delta \vec{u} \right) \left[ \Delta \vec{u}_{n+1}^{k(i)} \right] = \frac{1}{\epsilon_\nu} \int_{\Gamma_o^c} H \left( Q_{\nu_{n+1}}^{c^{k(i)}} \right) \left( \vec{\nu}_{n+1}^{k(i)} \otimes \vec{\nu}_{n+1}^{k(i)} \right) \Delta \vec{u}_{n+1}^{k(i)} \cdot \delta \vec{u} \, d\Gamma_o^c. \quad (6.45)$$

Na Eq.(6.45)  $H(\cdot)$  é a função de Heaviside, a qual é 1 quando o argumento é positivo e 0 caso contrário.

A Fig. 6.4 ilustra de maneira esquemática a aproximação das condições da Eq.(6.4). A linha contínua representa as combinações da força de contato versus "gap" para uma aproximação pelo método dos multiplicadores de Lagrange, enquanto que a linha tracejada representa a mesma aproximação pelo método de penalidade.


 Figura 6.4: Representação esquemática das condições de *Kuhn-Tucker*.

### Procedimento de discretização via EFG

Considerando a aproximação por funções do tipo EFG, é possível escrever a Eq.(6.44) da seguinte maneira

$$Q_{\nu_{n+1}}^{c^{k(i)}} = \left\langle \lambda_{\nu_{n+1}}^{hk} + \frac{1}{\epsilon_\nu} g \left( \vec{u}_{n+1}^{hk(i)} \right) \right\rangle. \quad (6.46)$$

Mantendo as Eq.(6.33), Eq.(6.34) em mente e também que o multiplicador de Lagrange,  $\lambda_{N_{n+1}}^{hk}$ , é computado supondo uma interpolação linear, de modo idêntico ao feito anteriormente, temos

$$\lambda_{N_{n+1}}^{hk} = \mathbf{N}^g \vec{\lambda}_{N_{n+1}}^{gk}. \quad (6.47)$$

Agora, substituindo as Eq.(6.46), Eq.(6.33), Eq.(6.34) e Eq.(6.47) na Eq.(6.42) produz

$$\begin{aligned} F_\nu^c \left( \vec{u}_{n+1}^{hk(i)}, \delta \vec{u}^h \right) &= - \int_{\Gamma_o^c} Q_{\nu_{n+1}}^{c^{k(i)}} \vec{\nu}_{n+1}^{k(i)} \cdot \delta \vec{u}^h \, d\Gamma_o^c \\ &= \vec{f}_{\nu_{n+1}}^{c^{k(i)}} \cdot \delta \vec{u}^g \end{aligned} \quad (6.48)$$

com

$$\vec{f}_{\nu_{n+1}}^{c^{k(i)}} = - \int_{\Gamma_o^c} \left\langle \lambda_{\nu_{n+1}}^{hk} + \frac{1}{\epsilon_\nu} g \left( \vec{u}_{n+1}^{hk(i)} \right) \right\rangle (\Phi^g)^T \vec{\nu}_{n+1}^{k(i)} \, d\Gamma_o^c. \quad (6.49)$$

Ainda, ao substituir as Eq.(6.33) e Eq.(6.34) na Eq.(6.45) produz

$$DF_\nu^c \left( \vec{u}_{n+1}^{hk(i)}, \delta \vec{u}^h \right) \left[ \Delta \vec{u}_{n+1}^{hk(i)} \right] = \mathbf{K}_{\nu_{n+1}}^{c^{k(i)}} \Delta \vec{u}_{n+1}^{gk(i)} \cdot \delta \vec{u}^g \quad (6.50)$$

na qual

$$\mathbf{K}_{\nu_{n+1}}^{c^{k(i)}} = \frac{1}{\epsilon_\nu} \int_{\Gamma_o^c} H \left( Q_{\nu_{n+1}}^{c^{k(i)}} \right) \left[ (\Phi^g)^T \vec{\nu}_{n+1}^{k(i)} \right] \otimes \left[ (\Phi^g)^T \vec{\nu}_{n+1}^{k(i)} \right] \, d\Gamma_o^c. \quad (6.51)$$

### 6.3.2 Contato Tangencial

A completa determinação do termo de contato tangencial, atrito ou ainda fricção, depende do modelo ou lei utilizada. Várias regras têm sido empregadas para descrever estes efeitos. Dentre as quais pode-se citar as seguintes, BELYTSCHKO *et al.* (2000):

- modelos baseados na lei de atrito de Coulomb, os quais são baseados nas leis clássicas de atrito;
- modelos baseados em equações constitutivas de interface, nas quais as forças tangenciais são derivadas de uma relação constitutiva semelhante às usadas para materiais inelásticos;
- modelos rugosidade-lubrificação, os quais consideram o comportamento físico da interface e são geralmente postos na microescala.

Neste trabalho será utilizado um modelo de atrito de Coulomb regularizado. Este tipo de modelo incorpora características das duas primeiras regras apresentadas anteriormente e tem sido amplamente utilizado na literatura.

### Lei de atrito de Coulomb regularizada - Regularização com uso de penalidade

A lei de Coulomb clássica pode ser enunciada pela introdução do coeficiente de fricção  $c_f$  e das seguintes condições com relação ao deslizamento tangencial  $\vec{u}_T$ , em acordo com as condições de *Kuhn-Tucker* sumarizadas na Eq.(6.4), assim

$$\|\vec{Q}_T^c\| \leq c_f Q_\nu^c \vec{\nu} \quad (6.52)$$

e

$$\vec{u}_T = \lambda \vec{Q}_T^c, \text{ em que } \begin{cases} \lambda = 0, \text{ se } \|\vec{Q}_T^c\| < c_f Q_\nu^c \vec{\nu} \\ \lambda \geq 0, \text{ se } \|\vec{Q}_T^c\| = c_f Q_\nu^c \vec{\nu} \end{cases} \text{ em } \Gamma_o^c. \quad (6.53)$$

A Eq.(6.52) implica em dizer que a magnitude da força tangencial não excede o *limite de Coulomb*, ou seja, tantas vezes o valor do coeficiente de fricção aplicado a força de contato. Pode-se ainda inferir que o valor do deslizamento tangencial é colinear com relação à força de fricção exercida por um ponto  $\vec{x}$  em oposição à superfície em  $\Gamma_{obs}$  e zero para valores menores que o limite de Coulomb. A linha cheia da Fig. 6.5, representa este conceito para um caso unidimensional. Ainda na mesma figura pode ser feita uma analogia a um modelo material rígido-plástico perfeito onde a tensão de escoamento seria análogo ao limite de Coulomb,  $c_f Q_\nu^c \vec{\nu}$ .

A fim de superar as dificuldades numéricas associadas à natureza multivalor da lei de Coulomb apresentada na Eq.(6.5) é proposto o uso de uma lei de atrito de Coulomb regularizada. Esta pode ser obtida através da introdução de um parâmetro de penalidade  $\epsilon_T$ , veja LAURSEN (2002), o qual não é necessariamente igual ao parâmetro  $\epsilon_\nu$  introduzido anteriormente na discussão do contato normal, na lei de Coulomb clássica de forma a ter a sua evolução governada pelo seguinte conjunto de equações simultâneas

$$\Upsilon \left( Q_{T_{n+1}}^{c^{k(i)}}, Q_{\nu_{n+1}}^{c^{k(i)}} \right) = \left| Q_{T_{n+1}}^{c^{k(i)}} \right| - c_f Q_{\nu_{n+1}}^{c^{k(i)}} \quad (6.54)$$

$$\dot{Q}_{T_{n+1}}^{c^{k(i)}} = -\frac{1}{\epsilon_T} \left( \dot{u}_{T_{n+1}}^{k(i)} + \dot{\gamma} \frac{Q_{\nu_{n+1}}^{c^{k(i)}}}{\left| Q_{\nu_{n+1}}^{c^{k(i)}} \right|} \right) \quad (6.55)$$

$$\dot{\gamma} \geq 0 \quad (6.56)$$

$$\dot{\gamma} \Upsilon = 0 \quad (6.57)$$



na qual  $\Upsilon$  é denominada função de escorregamento<sup>3</sup> que faz o papel análogo à função de escoamento no caso de plasticidade,  $c_f$  é o coeficiente de fricção e  $\dot{u}_T$  é a velocidade tangencial dada, no caso bidimensional, por

$$\dot{u}_{T_{n+1}}^{k(i)} = \dot{u}_{n+1}^{k(i)} \cdot e_{T_{n+1}}^{k(i)}. \quad (6.58)$$

Uma idéia do modelo de Coulomb regularizado é apresentada na Fig. 6.5.

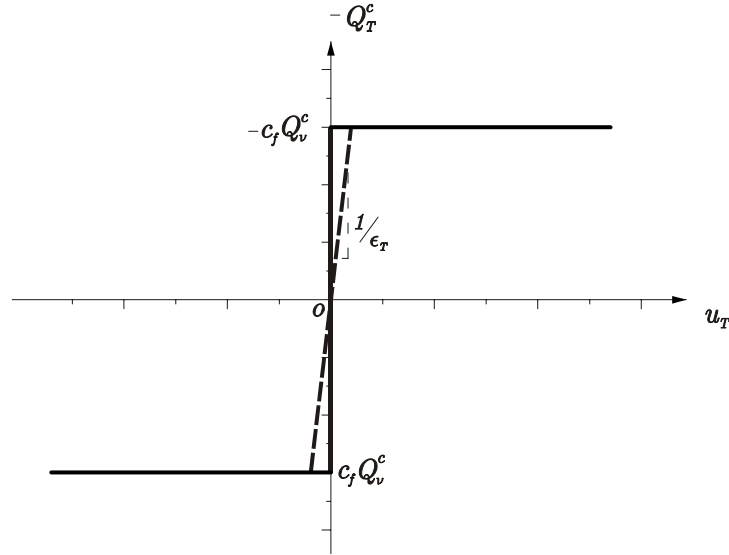


Figura 6.5: Regularização do modelo de Coulomb via penalidade. A linha tracejada representa a regularização enquanto que as linha contínua refere a representação clássica.

Note que, diferentemente da Eq.(6.53), agora a colinearidade entre o deslizamento tangencial  $\vec{u}_T$  e a força de fricção  $\vec{Q}_T^c$  é escrita na forma de taxa, dando um caráter evolutivo para a determinação da força de fricção, i.e., sua determinação depende de maneira incremental da taxa de variação de  $\vec{u}_T$  requisitando uma integração da história com relação ao tempo. A analogia com o modelo de plasticidade fica ainda mais evidenciado ao perceber no modelo regularizado que a função de escorregamento  $\Upsilon$  separa o efeito do atrito em duas fases, que são:

- condição de adesão, que acontece para  $\Upsilon \leq 0$ . Neste caso não existe movimento relativo da região de contato do corpo com relação ao obstáculo;
- condição de escorregamento, que acontece para  $\Upsilon > 0$ . Neste caso há movimento relativo da região de contato do corpo com relação ao obstáculo.

Assim, a integração da Eq.(6.54) produz um estado teste seguido de um mapeamento de retorno. Na Tabela 6.1 são apresentados os aspectos gerais do algoritmo utilizado para o modelo de Coulomb regularizado apresentado nesta seção.

Uma vez definido o modelo de atrito a ser adotado, pode-se partir para a identificação dos termos do funcional  $F_T^c$  quanto a sua discretização e linearização.

<sup>3</sup>do inglês *slip function*

Tabela 6.1: Algoritmo para o modelo de Coulomb regularizado

<p>(1) Dado <math>Q_{T_n}^c</math>, <math>Q_{\nu_{n+1}}^{c^{k(i)}}</math>, <math>u_{T_n}</math> e <math>u_{T_{n+1}}^{k(i)}</math>, compute:</p> $Q_{T_{n+1}}^{c^{teste^{k(i)}}} = Q_{T_n}^c - \frac{1}{\epsilon_T} \left( u_{T_{n+1}}^{k(i)} - u_{T_n} \right)$ <p>(2) Teste do estado:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Se <math>\Upsilon \left( Q_{T_{n+1}}^{c^{teste^{k(i)}}}, Q_{\nu_{n+1}}^{c^{k(i)}} \right) \leq 0</math> então condição de adesão:  <math display="block">Q_{T_{n+1}}^{c^{k(i)}} = Q_{T_{n+1}}^{c^{teste^{k(i)}}}</math> </li> <li>• caso contrário condição de escorregamento:  <math display="block">Q_{T_{n+1}}^{c^{k(i)}} = c_f Q_{\nu_{n+1}}^{c^{k(i)}} \frac{Q_{T_{n+1}}^{c^{teste^{k(i)}}}}{\left  Q_{T_{n+1}}^{c^{teste^{k(i)}}} \right }</math> </li> <li>• fim</li> </ul>
---

### 6.3.3 Procedimento de discretização via EFG

Novamente, através da discretização por funções de forma (EFG), pode-se escrever

$$\begin{aligned} F_T^c \left( \bar{u}_{n+1}^{h^{k(i)}}, \delta \bar{u}^h \right) &= - \int_{\Gamma_o^c} Q_{T_{n+1}}^{c^{k(i)}} \bar{e}_{T_{n+1}}^{k(i)} d\Gamma_o^c \quad em \quad \Gamma_o^c \\ &= \vec{f}_{T_{n+1}}^c \cdot \delta \bar{u}^g \end{aligned} \quad (6.59)$$

em que as forças de contato referentes ao atrito são dadas por

$$\vec{f}_{T_{n+1}}^{c^{k(i)}} = - \int_{\Gamma_o^c} Q_{T_{n+1}}^{c^{k(i)}} (\Phi^g)^T \bar{e}_{T_{n+1}}^{k(i)} d\Gamma_o^c. \quad (6.60)$$

A linearização do termo referente à imposição do contato tangencial é dada pela derivada de Gateaux de  $F_T^c$ ,

$$DF_T^c \left( \bar{u}_{n+1}^{h^{k(i)}}, \delta \bar{u}^h \right) \left[ \Delta \bar{u}_{n+1}^{h^{k(i)}} \right] = \frac{d}{d\epsilon} F_T^c \left( \bar{u}_{n+1}^{h^{k(i)}} + \epsilon \Delta \bar{u}_{n+1}^{h^{k(i)}}, \delta \bar{u}^h \right) \Big|_{\epsilon=0}. \quad (6.61)$$

De acordo com o algoritmo, apresentado na de Tabela 6.1, esta linearização considera:

- A condição de adesão:

$$DF_T^c \left( \bar{u}_{n+1}^{h^{k(i)}}, \delta \bar{u}^h \right) \left[ \Delta \bar{u}_{n+1}^{h^{k(i)}} \right] = \mathbf{K}_{T_{n+1}}^{c^{ad^{k(i)}}} \Delta \bar{u}_{n+1}^{g^{k(i)}} \cdot \delta \bar{u}^g \quad (6.62)$$

com

$$\mathbf{K}_{T_{n+1}}^{c^{Ad^{k(i)}}} = \frac{1}{\epsilon_T} \int_{\Gamma_o^c} \left[ (\Phi^g)^T \bar{e}_{T_{n+1}}^{k(i)} \otimes (\Phi^g)^T \bar{e}_{T_{n+1}}^{k(i)} \right] d\Gamma_o^c; \quad (6.63)$$

- A condição de escorregamento:

$$DF_T^c \left( \vec{u}_{n+1}^{hk(i)}, \delta \vec{u}^h \right) \left[ \Delta \vec{u}_{n+1}^{hk(i)} \right] = \mathbf{K}_{T_{n+1}}^{cEs^k(i)} \Delta \vec{u}_{n+1}^{gk(i)} \cdot \delta \vec{u}^g \quad (6.64)$$

com

$$\mathbf{K}_{T_{n+1}}^{cEs^k(i)} = \frac{c_f}{\epsilon_\nu} \int_{\Gamma_o^c} H \left( Q_{\nu_{n+1}}^{c^k(i)} \right) \frac{Q_{T_{n+1}}^{c^k(i)}}{\left| Q_{T_{n+1}}^{c^k(i)} \right|} \left[ (\Phi^g)^T \vec{e}_{T_{n+1}}^{k(i)} \otimes (\Phi^g)^T \vec{e}_{T_{n+1}}^{k(i)} \right] d\Gamma_o^c. \quad (6.65)$$

## 6.4 Algoritmo geral

Na Tabela 6.2 estão apresentados os aspectos gerais do algoritmo utilizado para resolver o problema da imposição das condições de contorno essenciais bem com o problema de contato e atrito descritos nesta seção.

Neste algoritmo é apresentada apenas as iterações externas  $n$  e  $k$ . A iteração  $i$  é realizada ao resolver o problema de valor de contorno não linear.

Tabela 6.2: Algoritmo geral

(1) Dado o incremento de carregamento para  $t_{n+1}$ , inicialize  $k = 0$  e  $\epsilon_\nu$ ,  $\epsilon_T$  e  $\epsilon_u$ ;

(2) Inicialize os multiplicadores e o deslocamento com os valores convergidos da última iteração:

$$\lambda_{N_{n+1}}^{g^k} = \lambda_{N_n}^g, \quad \bar{\lambda}_{u_{n+1}}^{g^k} = \bar{\lambda}_{u_n}^g \quad e \quad \bar{u}_{n+1}^g = \bar{u}_n^g;$$

(3) Faça enquanto  $\left( \left\| \bar{u}_{n+1}^{h^k} - \bar{u}_{n+1}^h \right\|_\infty > tol_1 \text{ ou } \left\| \left\langle g \left( \bar{u}_{n+1}^{h^k} \right) \right\rangle \right\|_\infty > tol_2 \right) \forall \bar{x} \in \Gamma_u \text{ e } \Gamma_c$

(3.1) Obtenha a solução  $\bar{u}_{n+1}^{h^k} \in \mathcal{K}^h$  do seguinte problema não linear  $\forall \delta \bar{u}^h \in \mathcal{V}^h$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_o} P \left( \bar{u}_{n+1}^{h^k} \right) \cdot \nabla_{\bar{x}} \delta \bar{u}^h \, d\Omega_o = \\ & = \int_{\Omega_o} \rho_o \bar{b}_{n+1} \cdot \delta \bar{u}^h \, d\Omega_o + \int_{\Gamma_o^t} \bar{t}_{n+1} \cdot \delta \bar{u}^h \, dA_o + \int_{\Gamma_o^u} \bar{Q}_{n+1}^{u^k} \cdot \delta \bar{u}^h \, dA_o + \int_{\Gamma_o^c} \bar{Q}_{n+1}^c \cdot \delta \bar{u}^h \, dA_o \end{aligned}$$

Este problema não linear é resolvido iterativamente, para a  $k$ -ésima iteração, de modo a fornecer estimas para a configuração do corpo em  $\Omega_{n+1}^k$ . Note que,

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{n+1}^{u^k} &= - \left[ \bar{\lambda}_{u_{n+1}}^{h^k} + \frac{1}{\epsilon_u} \left( \bar{u}_{n+1}^{h^k} - \bar{u}_{n+1}^h \right) \right], \quad Q_{\nu_{n+1}}^c = \left\langle \lambda_{N_{n+1}}^{h^k} + \frac{1}{\epsilon_\nu} g \left( \bar{u}_{n+1}^{h^k} \right) \right\rangle \\ & \text{e } Q_{T_{n+1}}^{c^{teste^k}} = Q_{T_n}^c - \frac{1}{\epsilon_T} \left( u_{T_{n+1}}^{h^k} - u_{T_n}^h \right) \end{aligned}$$

$$\text{sendo } Q_{T_{n+1}}^c = \begin{cases} Q_{T_{n+1}}^{c^{teste^k}} & \text{se } \Upsilon \left( Q_{T_{n+1}}^{c^{teste^k}}, Q_{\nu_{n+1}}^c \right) \leq 0 \\ c_f Q_{\nu_{n+1}}^c \frac{Q_{T_{n+1}}^{c^{teste^k}}}{|Q_{T_{n+1}}^{c^{teste^k}}|} & \text{se } \Upsilon \left( Q_{T_{n+1}}^{c^{teste^k}}, Q_{\nu_{n+1}}^c \right) > 0 \end{cases}$$

$$\text{com } \Upsilon \left( Q_{T_{n+1}}^{c^{teste^k}}, Q_{\nu_{n+1}}^c \right) = \left| Q_{T_{n+1}}^{c^{teste^k}} \right| - c_f Q_{\nu_{n+1}}^c;$$

(3.2) Uma vez obtida a solução  $\bar{u}_{n+1}^{h^k}$  para o problema em (a) atualize as variáveis:

$$\begin{aligned} \text{Multiplicadores de Lagrange: } \lambda_{N_{n+1}}^{g^{k+1}} &= \left\langle \lambda_{N_{n+1}}^{g^k} + \frac{1}{\epsilon_\nu} g \left( \bar{u}_{n+1}^{h^k} \right) \right\rangle \\ \bar{\lambda}_{u_{n+1}}^{g^{k+1}} &= - \left[ \bar{\lambda}_{u_{n+1}}^{g^k} + \frac{1}{\epsilon_u} \left( \bar{u}_{n+1}^{h^k} - \bar{u}_{n+1}^h \right) \right] \end{aligned}$$

$$\text{Deslocamento global: } \bar{u}_{n+1}^{g^{k+1}} = \bar{u}_{n+1}^{g^k}$$

$$\text{Atualiza a iteração } k: \quad k \leftarrow k + 1;$$

(4) Uma vez que a condição para o passo (3) foi satisfeita atualize todas as variáveis internas referentes ao problema elastoplástico juntamente com

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{n+1}^u &\leftarrow \bar{Q}_{n+1}^{u^k} & Q_{T_{n+1}}^c &\leftarrow Q_{T_{n+1}}^{c^k} & Q_{\nu_{n+1}}^c &\leftarrow Q_{\nu_{n+1}}^{c^k} \\ \bar{Q}_{n+1}^c &\leftarrow Q_{\nu_{n+1}}^c \bar{\nu} + Q_{T_{n+1}}^c \bar{e}_T & \bar{u}_{n+1}^h &\leftarrow \bar{u}_{n+1}^{h^k} \end{aligned}$$

(5) Realize as operações para pós-processamento;

(6) Atualize a iteração  $n$ :  $n \leftarrow n + 1$ ;

(7) Proceda ao novo incremento de carregamento e reinicie o algoritmo em (i).

## 6.5 Exemplos

A fim de validar a formulação proposta para o problema de deformações finitas em espumas poliméricas sujeitas à condição de contato unilateral com atrito, considerando o modelo constitutivo do material apresentado no Cap. 4, são resolvidos alguns exemplos básicos. Estes exemplos serviram também para verificar a robustez dos algoritmos propostos, baseados no método de Galerkin livre de elementos (EFG).

Os problemas considerados estão sujeitos a um estado plano de deformações ou são axisimétricos e utilizam uma malha de fundo composta por células de integração triangulares tipo Tri3, com um suporte de influência de  $s = 1,5$ . Foram utilizados os seguintes parâmetros materiais:

$$\begin{aligned}\tau_y^o &= 0,082034 \text{ Mpa} \\ p_c^o &= 0,040470 \text{ MPa} \\ \varrho &= 0,50 \\ E_m &= 928,09288 \text{ MPa} \\ \rho_o^* &= 0,049 \\ \nu_p &= 0,00 \\ \nu &= 0,25 \\ \gamma &= 1,54 \\ c &= 0,30\end{aligned}$$

bem como as tolerâncias  $tol_1 = 10^{-6}$  e  $tol_2 = 10^{-6}$ .

- **Exemplo 6.1 - Compressão Uniaxial**

A mesma análise de compressão unidimensional, mostrada no **Exemplo 4.1**, é realizada agora de forma a verificar a relação tensão/deformação, porém utilizando o método EFG. A Fig. 6.6 mostra as dimensões do corpo de prova e o modelo axisimétrico, construído utilizando-se uma malha de integração contendo 4 células. De modo a se preservar o mesmo número de graus de liberdade do exemplo do Cap. 4, utilizou-se uma malha com 9 partículas EFG. Novamente o deslocamento prescrito é de  $\bar{u} = -30mm$ . A análise é realizada utilizando 100 passos de carregamento com uma regra de integração de *Gauss-Legendre* de 7 pontos de integração. Utilizou-se  $\epsilon_u = 10^{-6}$  como penalidade exterior associada à imposição das condições de contorno essenciais.

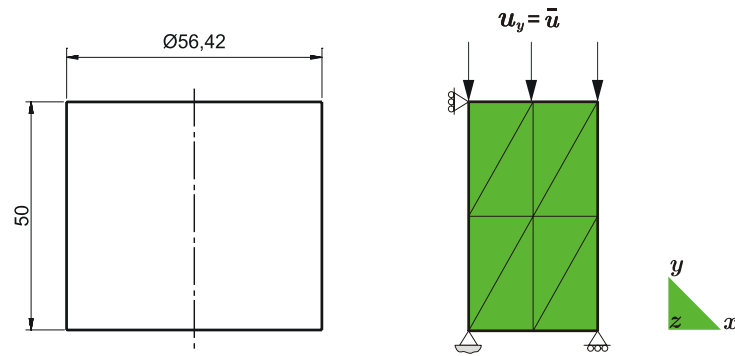


Figura 6.6: Corpo de prova compressão uniaxial. Dimensões em *mm*.

Nota-se uma boa concordância entre os valores obtidos experimentalmente, ZHANG, J. *et al.* (1998), e os valores obtidos pela solução numérica via EFG bem como a solução obtida por elementos finitos, conforme mostra a Fig. 6.7. Para valores de deformação logarítmica superiores a 0,50 nota-se uma tendência para a perda de concordância entre os valores experimentais e os valores numéricos obtidos por ambos os métodos. Isso se justifica pelo fato das curvas de encruamento, da compressão uniaxial e da compressão hidrostática, serem aproximadas por polinômios. Assim para valores superiores a 0,60 o processo de deformação é descrito por uma extrapolação numérica das grandezas envolvida nas leis de encruamento. Ainda tem-se nessa região uma forte densificação do material fazendo com que o nível de tensões cresça bruscamente, como mostra a Fig. 6.8.

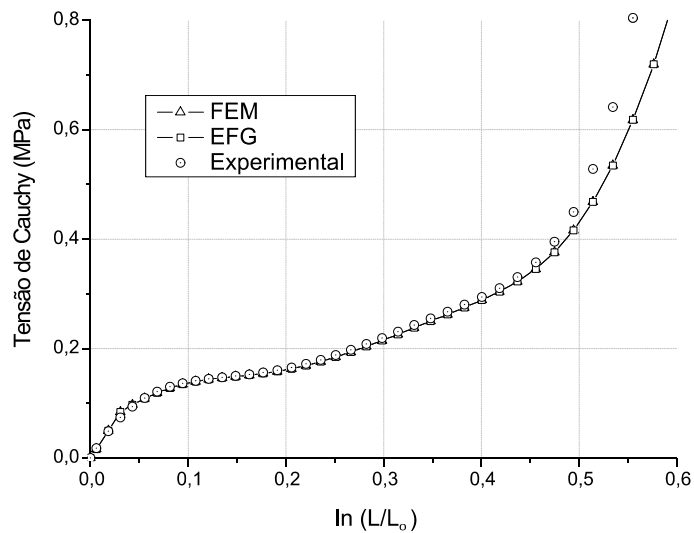


Figura 6.7: Resposta tensão-deformação, experimental ( $8,0 \cdot 10^{-2} \text{ 1/s}$ ) e numérica (FEM e EFG), sob compressão uniaxial. Espuma em polipropileno  $49,0 \text{ Kg/m}^3$ .

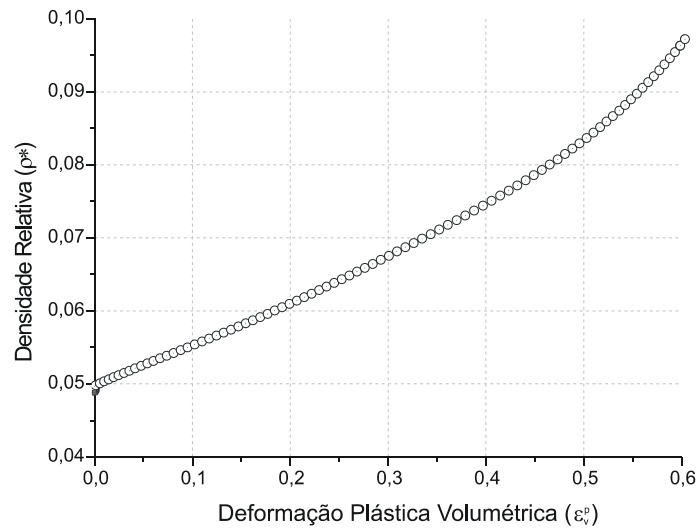
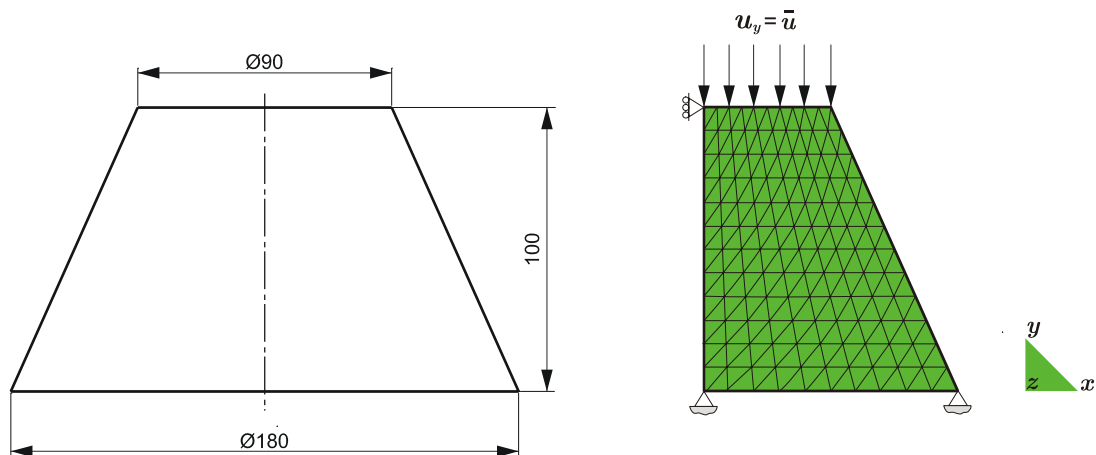


Figura 6.8: Processo de densificação

- **Exemplo 6.2 - Tronco de cone**

Novamente efetua-se a análise de um corpo de prova em forma de um tronco com as mesmas características geométricas do **Exemplo 4.2**. Considera-se novamente o modelo axissimétrico da Fig. 6.9, utilizando-se uma malha de integração contendo 240 células com 143 partículas EFG, submetido a um carregamento de deslocamento de  $\bar{u} = -80mm$ . Tal carregamento é obtido por uma rampa de carregamento linear onde 1000 passos de carregamento são considerados, utilizando-se 7 pontos de integração e com  $\epsilon_u = 10^{-6}$ .

Figura 6.9: Tronco de cone axissimétrico. Dimensões em  $mm$ .

As Figs. 6.10 e 6.11 mostram respectivamente os deslocamentos na direção  $x$  e  $y$ . Nota-se que a base do corpo, i.e., a região do raio maior inferior, não possui deslocamento zero absoluto, como mostrado no **Exemplo 4.2** uma vez que as condições de contorno essenciais são impostas pelo método do Lagrangeano aumentado, contudo um valor da ordem de  $10^{-10}$  foi obtido. Ainda na Fig. 6.11 nota-se que o deslocamento máximo atingido foi de  $71,28mm$  na direção  $y$ , i.e.,

mais de 89% do valor inicialmente prescrito e cerca de 14% a mais do que o mesmo problema quando resolvido por MEF com o mesmo número de graus de liberdade.

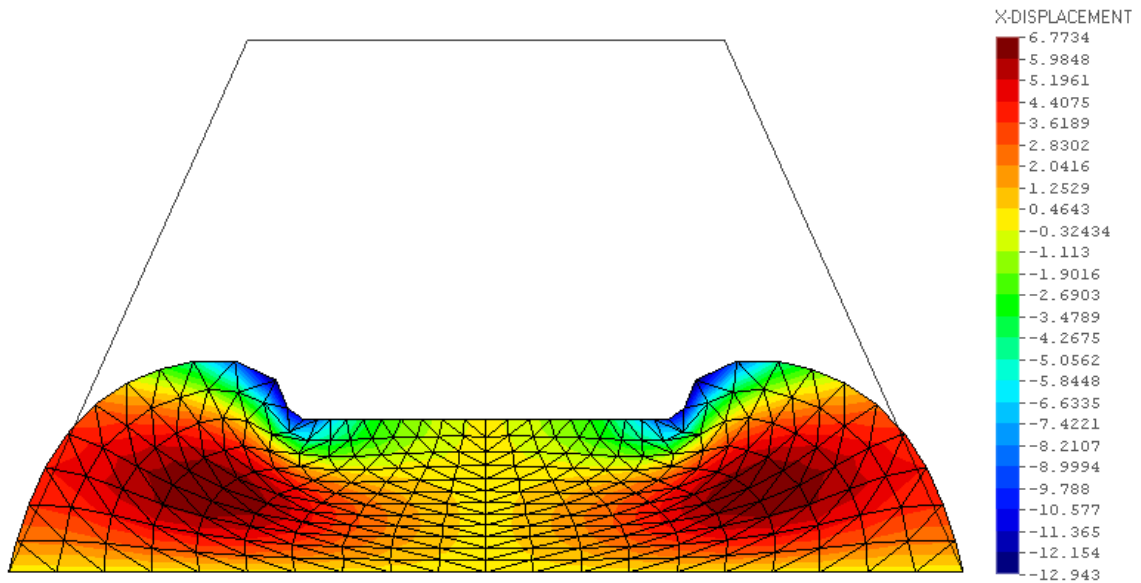


Figura 6.10: Deslocamento na direção  $x$ .

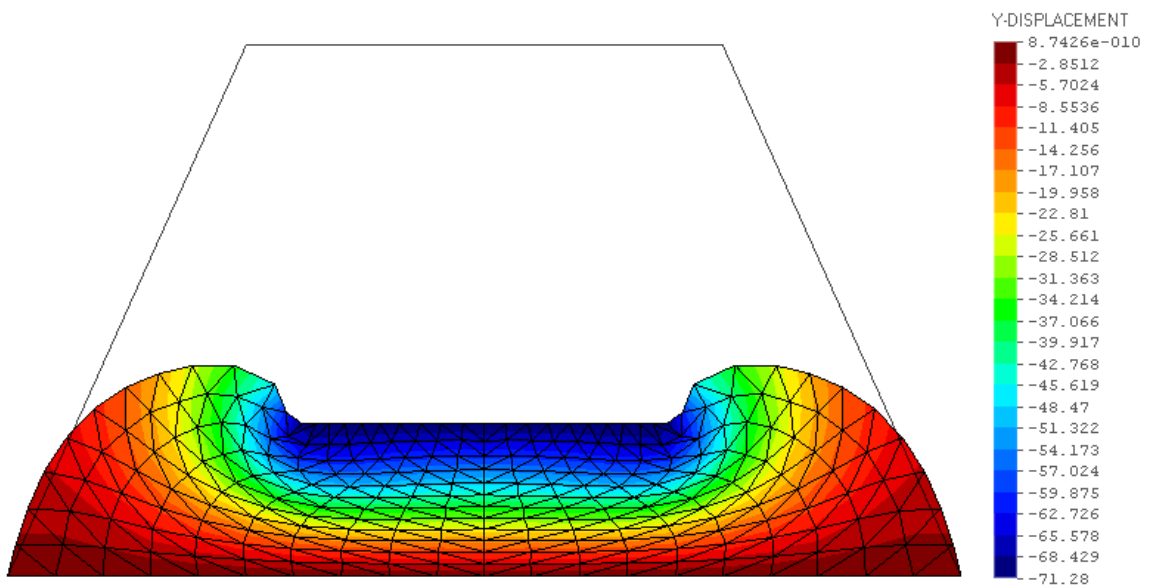


Figura 6.11: Deslocamento na direção  $y$ .

Nota-se na Fig. 6.12 que os valores da deformação plástica volumétrica  $\varepsilon_v^p$ , calculada pelo EFG mantém-se em concordância com os valores calculados pelo MEF como mostra também o conjunto de curvas A da Fig. 6.13 as quais mostram a variação de  $\varepsilon_v^p$  para os incrementos de carregamento  $u_y$  para o nó localizado no centro do raio menor superior. Contudo nota-se uma grande concentração de tensões ao longo de todo o perímetro computado sob este mesmo raio.



Nesta região, representada pelo conjunto de curvas B da Fig. 6.13, pode-se observar que além de se alcançar um maior avanço no que diz respeito ao nível de carga aplicada, nota-se também que os valores de  $\varepsilon_v^p$  diferem entre um método e outro. Isso deve-se ao fato de que a malha de elementos, utilizada no procedimento de integração numérica no EFG, não contribui na definição dos graus de liberdade de discretização fazendo com que as funções base, de certa forma, sejam mais adequadas para representar elevados gradientes do campo aproximado. Este mesmo tipo de comportamento pode ser observado no cálculo das tensões, como mostra as Figs. 6.14, 6.15 e 6.16. Pode-se notar que ao utilizar a aproximação via EFG, obtém-se uma melhor capacidade de se capturar elevados gradientes, como no caso em questão, concentrações de tensão.

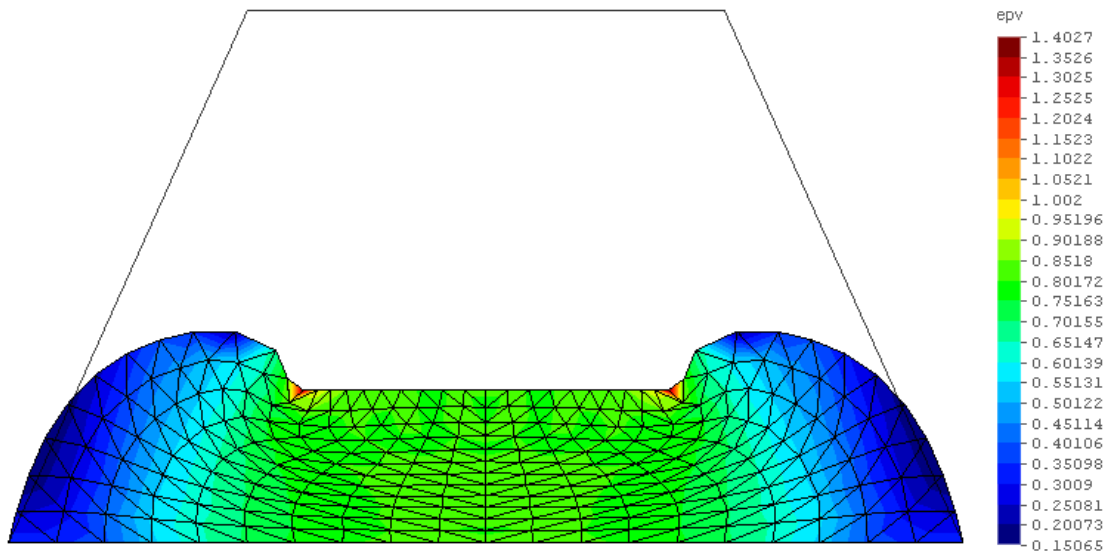


Figura 6.12: Deformação plástica volumétrica  $\varepsilon_v^p$ .

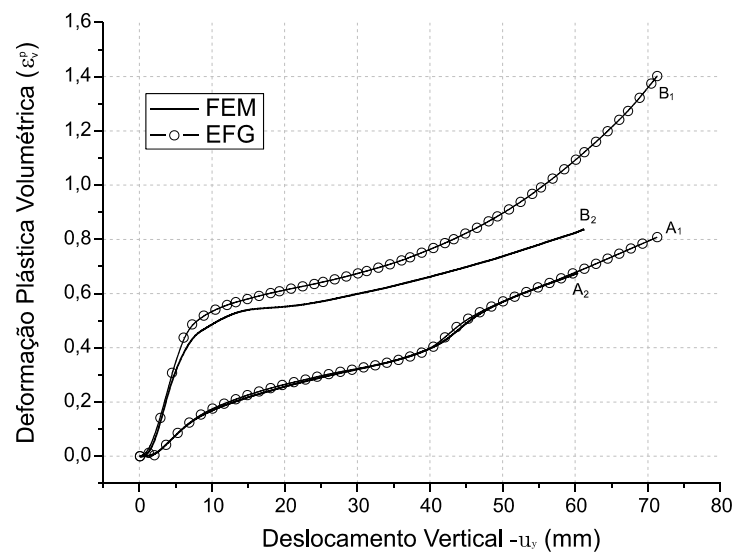


Figura 6.13: Deformação plástica volumétrica  $\varepsilon_v^p$  em função do deslocamento vertical  $u_y$ .

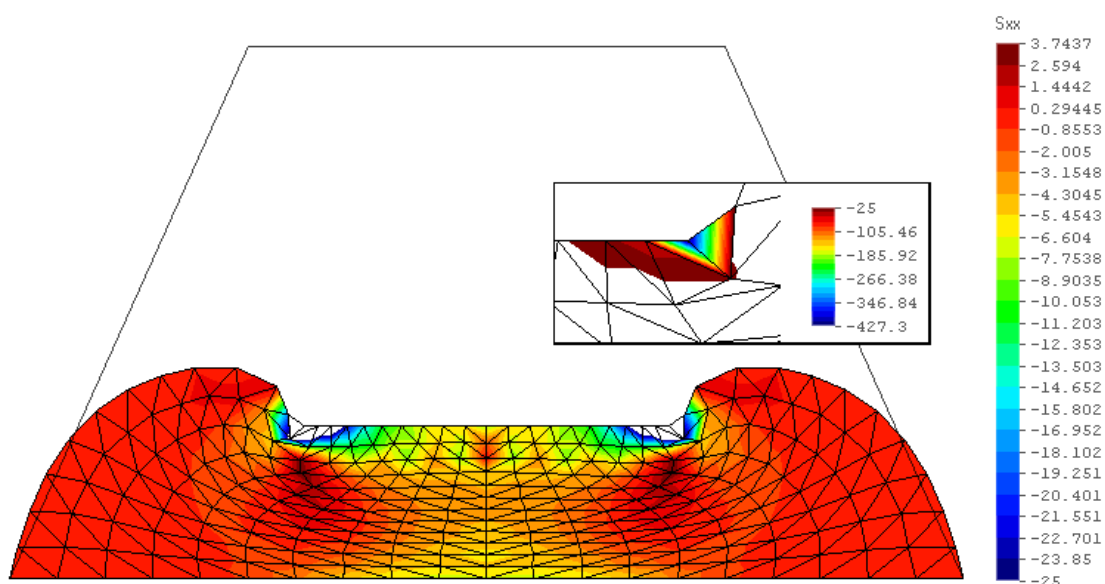


Figura 6.14: Tensão de Cauchy na direção  $x$ . (MPa)

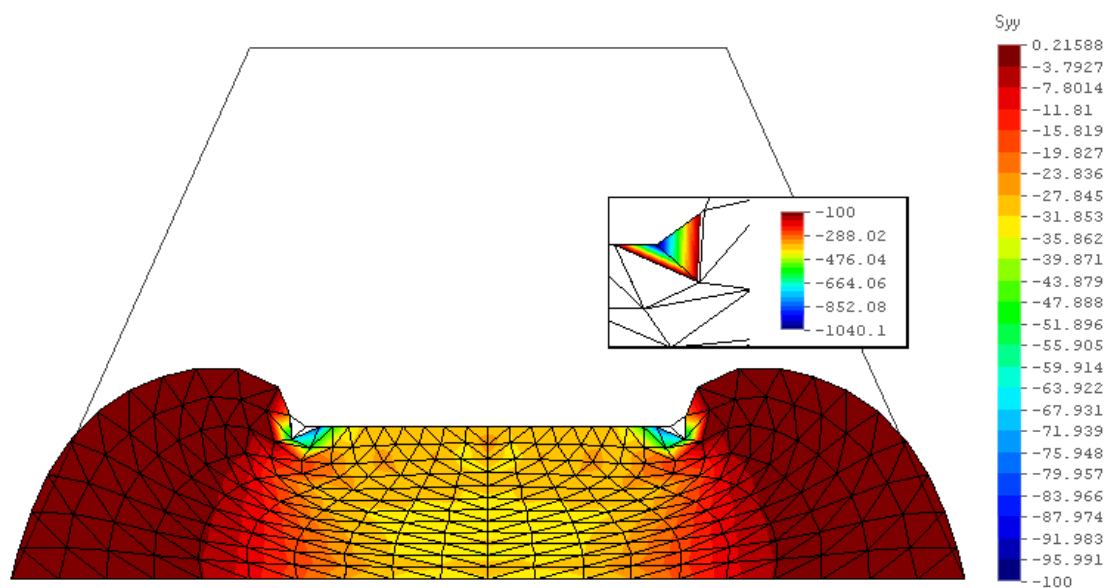


Figura 6.15: Tensão de Cauchy na direção  $y$ . (MPa)

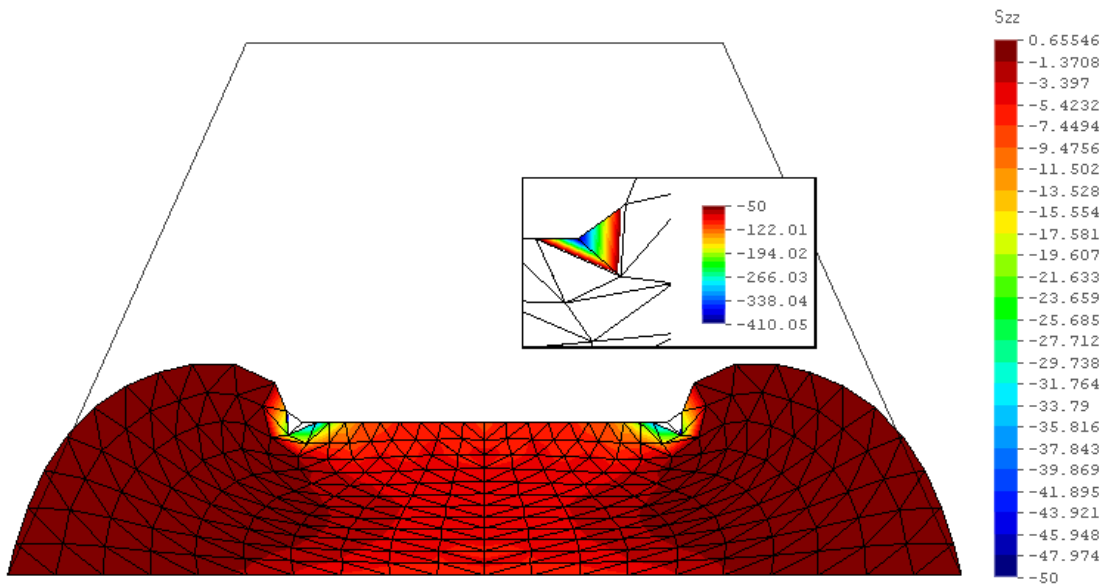


Figura 6.16: Tensão de Cauchy na direção  $z$ . (MPa)

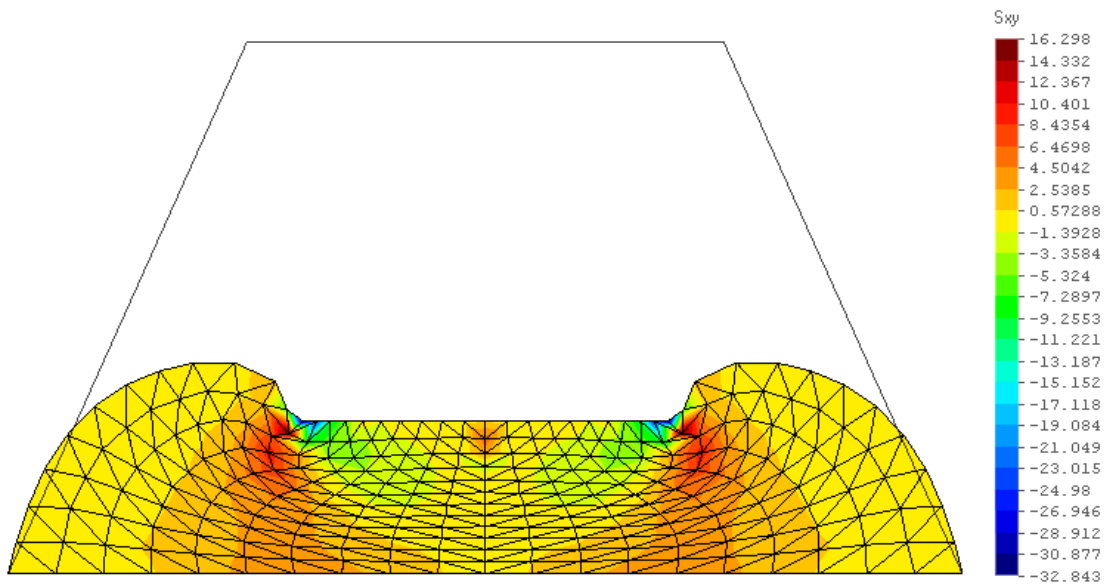


Figura 6.17: Tensão cisalhante de Cauchy no plano  $xy$ . (MPa)

Uma vez que se conseguiu atingir elevados valores de deformação, obteve-se naturalmente elevados valores da densidade relativa uma vez que esta cresce bruscamente a partir de valores superiores a 60% de deformação, como mostram as Figs. 6.18 e 6.19.

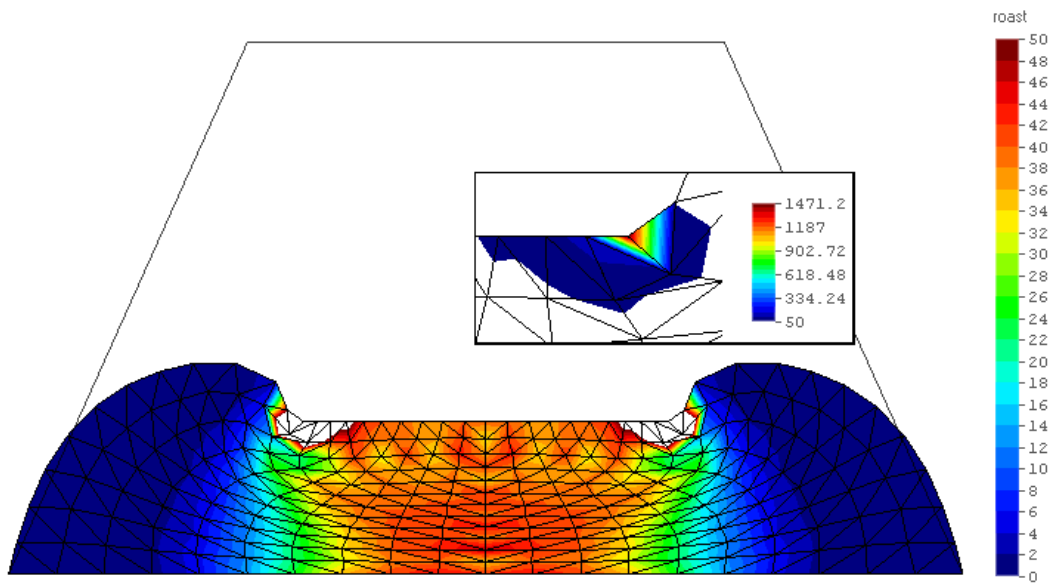


Figura 6.18: Densidade relativa  $\rho^*$ .

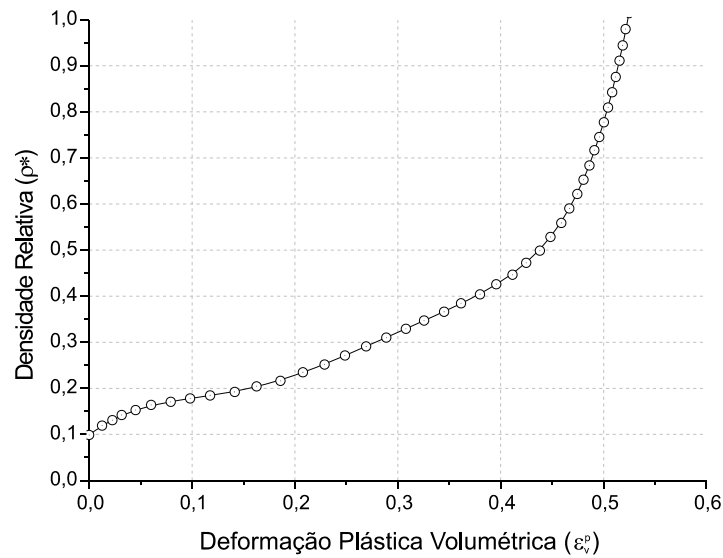


Figura 6.19: Variação da densidade relativa  $\rho^*$  com relação a deformação plástica volumétrica  $\epsilon_v^p$  no ponto crítico.

• **Exemplo 6.3 - Bucha**

Neste exemplo é apresentado o esmagamento de uma bucha anelada. O modelo é considerado axissimétrico e possui as dimensões mostradas na Figura 6.20. Neste caso, não há qualquer imposição de condição de contorno essencial sendo todo o contorno do domínio sujeito à condição de contato com atrito, ou seja, não há imposição de condições de contorno essenciais por meio do termo dado pela Eq.(6.19). Dessa forma a parte superior do corpo indeformável move-se na direção negativa da coordenada  $y$  com  $\bar{u} = -0,9mm$ . A malha de integração contém 196

células triangulares e 120 partículas, com 13 pontos de integração. O carregamento é efetuado utilizando-se 200 passos. Os parâmetros utilizados na formulação do problema de contato e atrito, foram:

$$c_f = 0,15 \quad \epsilon_\nu = 10^{-6} \quad \epsilon_T = 10^{-3}.$$

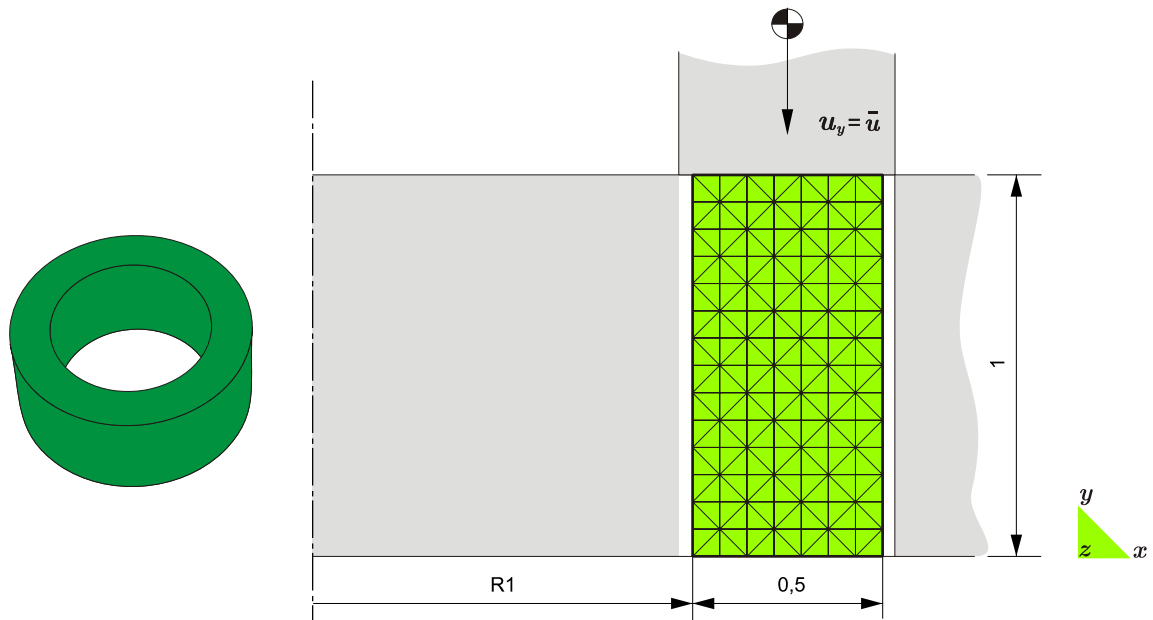
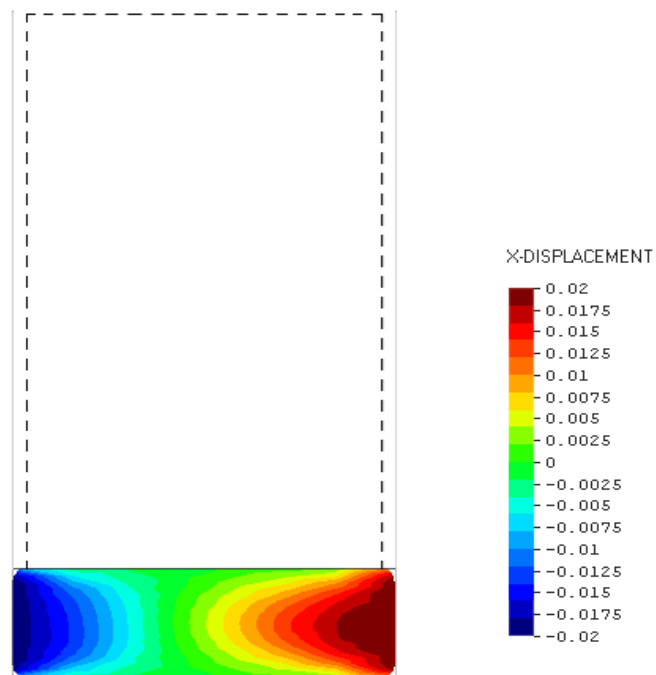
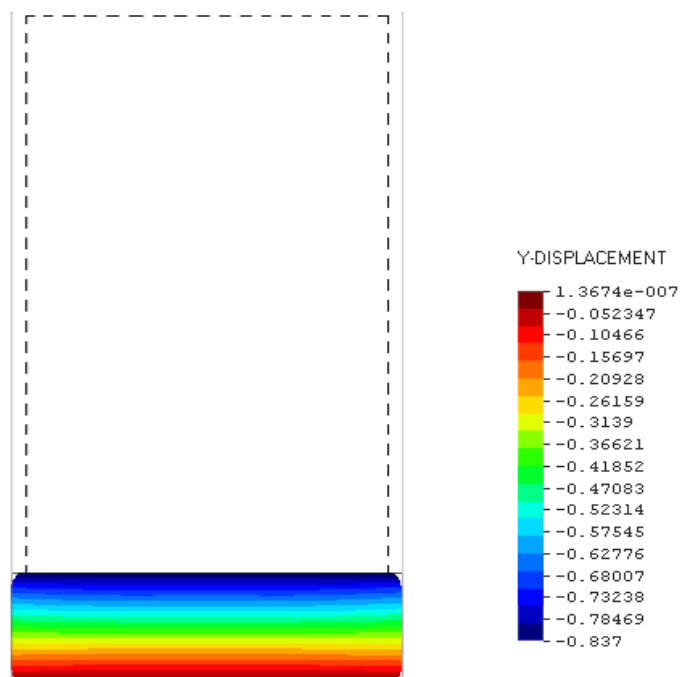


Figura 6.20: Bucha axissimétrica. Dimensões em  $mm$ .

As Figs. 6.21 e 6.22 mostram os campos de deslocamento nas direções  $x$  e  $y$  respectivamente. O máximo deslocamento atingido na direção  $y$  foi de  $-0,837mm$ , i.e., 93% do valor prescrito. Uma vez que o coeficiente de Poisson plástico  $\nu_p = 0$ , e sendo o regime elástico muito curto no histórico de carregamento no tempo, nota-se que tanto na parede superior quanto na parede inferior há um escorregamento na direção  $x$  bem menor do que quando comparado com as paredes laterais.

Figura 6.21: Deslocamento na direção  $x$ .Figura 6.22: Deslocamento na direção  $y$ .

A deformação plástica volumétrica mostrada na Fig. 6.23 tende a ser praticamente a mesma em todo o corpo devido à natureza da deformação. Nota-se que no início do processo de deformação a parede do anel tende a uma leve flambagem caracterizada por uma leve concavidade

da parede com relação ao centro de giro do anel. Por fim, após tocar as paredes o material sofre uma forte compactação contra todas as paredes do corpo indeformável, tendendo a uma distribuição de densidade relativa constante ao longo de todo o domínio como mostra a Fig. 6.24.



Figura 6.23: Deformação plástica volumétrica  $\epsilon_v^p$ .

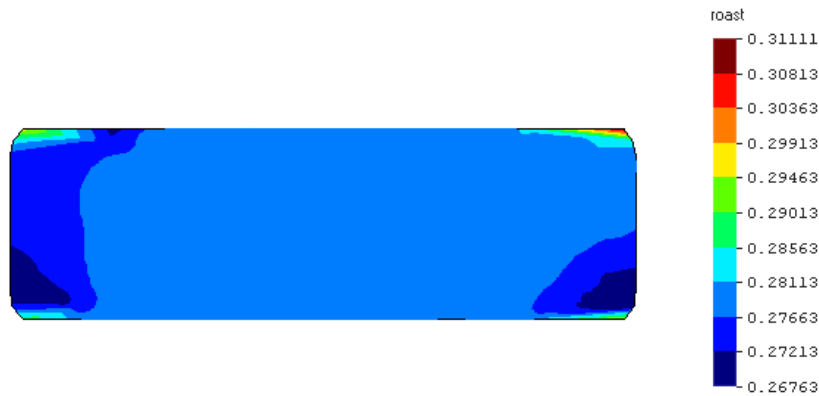


Figura 6.24: Densidade relativa  $\rho^*$ .

#### • Exemplo 6.4 - Indentação

Neste exemplo é apresentada a simulação de um teste de indentação sob a hipótese de estado plano de deformações. As dimensões iniciais do corpo de prova bem como as dimensões do indentador estão mostradas na Fig. 6.25. A simulação consiste no movimento do indentador de  $\bar{u} = -15 \text{ mm}$  em 1000 passos. As superfícies superior e inferior estão sujeitas às condições de contato com atrito. Ainda, de forma a se evitar movimentos de corpo rígido na direção  $x$ , impede-se o movimento apenas nas células centrais que tocam a base inferior. O domínio é representado por 108 células com 76 partículas EFG, utilizando-se 7 pontos de integração. Os dados utilizados nesta análise são:

$$c_f = 0,10 \quad \epsilon_\nu = 10^{-4} \quad \epsilon_T = 10^{-3} \quad \epsilon_u = 10^{-6}.$$

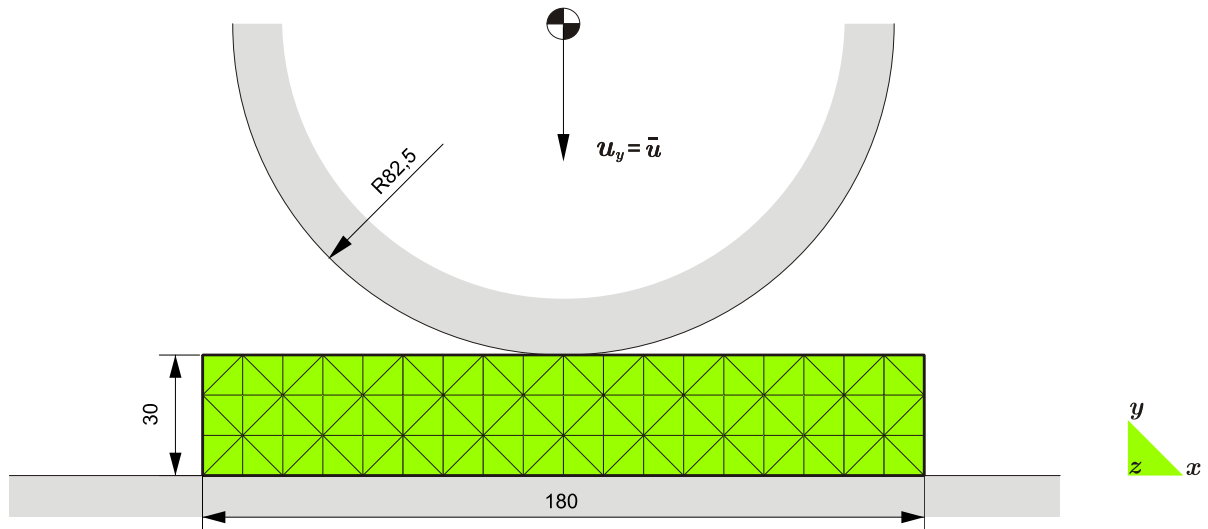


Figura 6.25: Modelo de indentação. Dimensões em *mm*.

Uma vez considerada a hipótese de que as paredes do obstáculo são compostas apenas por segmentos de retas, utilizou-se fatores de penalidade maiores que nos exemplos anteriores visto que a geometria da interface de contato entre o corpo de prova e o indentador é segmentada.

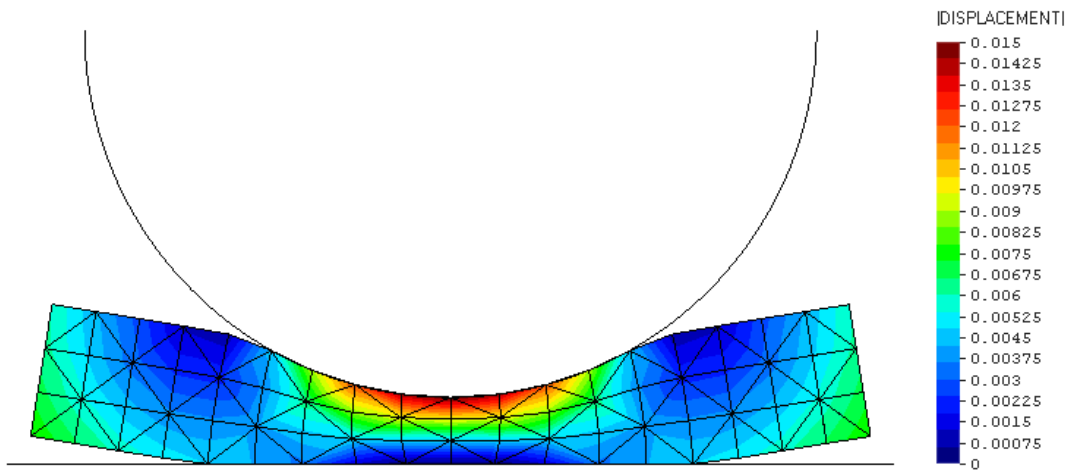


Figura 6.26: Magnitude dos deslocamentos.



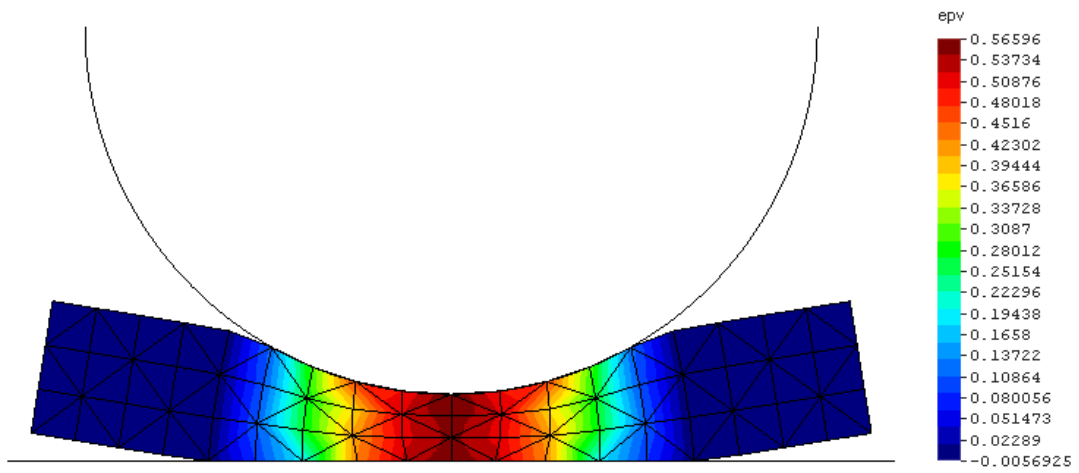


Figura 6.27: Deformação plástica volumétrica  $\varepsilon_v^p$ .

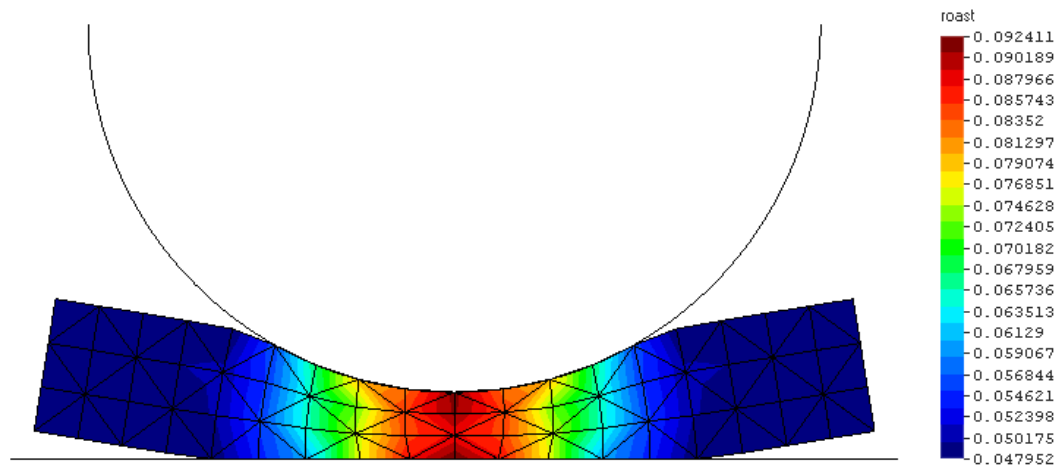


Figura 6.28: Densidade relativa  $\rho^*$ .

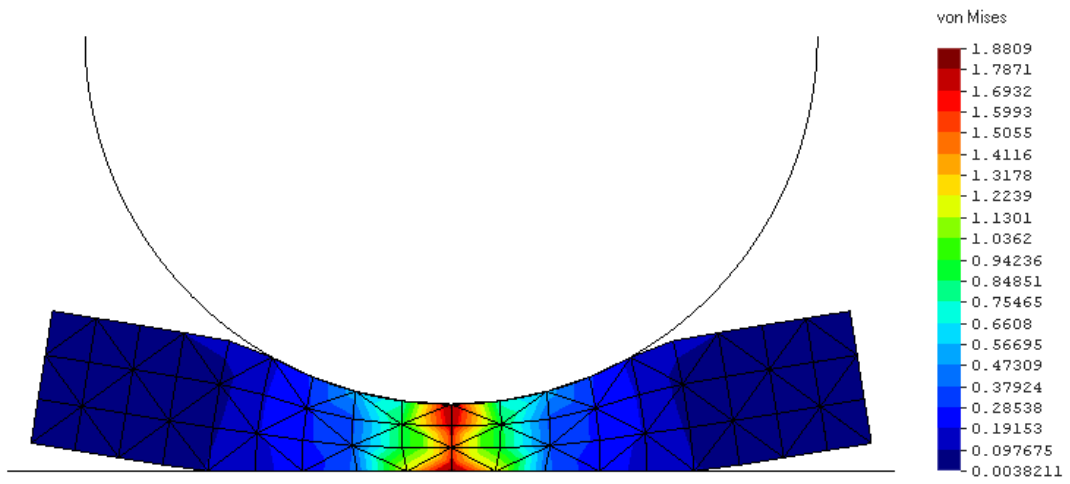


Figura 6.29: Tensão equivalente de von Mises.

# Conclusão

No presente trabalho, foi estudado um modelo elastoplástico baseado em duas leis de encruamento, uma volumétrica e outra de compressão axial, ambas expressas em função da deformação plástica volumétrica. Tal procedimento mostrou-se adequado em descrever a evolução das variáveis internas utilizadas para a modelagem do comportamento elastoplástico de sólidos celulares, mais especificamente as espumas poliméricas. O modelo constitutivo demonstrou-se capaz de refletir a dependência do processo de deformação com relação à densidade relativa, ao longo de todo o carregamento. Nota-se em alguns exemplos que a condição limite da densidade relativa,  $\rho^* \leq 1$ , é violada uma vez que essa condição não foi imposta como uma restrição na formulação do problema.

O uso de uma descrição *Lagrangeana total* juntamente com, o par conjugado (tensão rotacionada de *Kirchoff* e a medida de deformação logarítmica) e do mapeamento exponencial produziu algoritmos relativamente fáceis de se implementar numericamente além de apresentarem boa robustez.

O método de Galerkin livre de elementos (EFG) foi utilizado na análise de grandes deformações, na qual o modelo constitutivo para espumas poliméricas foi considerado. A discretização EFG efetuou a imposição das condições de contorno essenciais pelo método do *Lagrangeano Aumentado*. O obstáculo foi assumido como sendo rígido, hipótese de *Signorini*, e formado apenas por segmentos de retas. Uma formulação de contato com atrito foi implementada na qual a condição de contato normal foi também imposto pelo método do *Lagrangeano Aumentado*. Já o termo de atrito considerou uma lei de Coulomb regularizada. De um modo geral não houveram maiores problemas na resolução dos problemas apresentados senão aqueles já conhecidos da literatura, relacionados à utilização do método do *Lagrangeano Aumentado* ou da *Penalidade exterior* referentes à escolha dos valores das penalidades adequadas. O algoritmo apresentado mostrou-se bastante robusto para uma região bastante ampla sujeita a uma condição de contato unilateral com atrito.

Foi efetuado um ajuste de parâmetros materiais, para o caso de compressão uniaxial, visando calibrar a solução numérica com resultados experimentais. A solução numérica, obtida com o ajuste de parâmetros, mostrou uma boa concordância com os resultados experimentais, tanto qualitativa quanto quantitativa. As propriedades materiais identificadas a partir dessa calibração foram utilizadas nos demais exemplos.

Em geral a literatura aponta os métodos livre de malha como sendo mais caros computacionalmente quando comparados ao MEF. Visando averiguar tal apontamento efetuou-se uma comparação entre as soluções obtidas pelo EFG e o MEF no Exemplo 6.2. Nesse mesmo exemplo

obteve-se uma solução estável utilizando-se o EFG com um tamanho de incremento cerca de dez vezes maior quando comparado ao incremento utilizado no MEF. Assim o custo computacional superior atribuído ao EFG pode ser questionado. Outro ponto que confere o EFG como sendo um método eficiente para a solução de problemas não-lineares envolvendo a análise em grandes deformações é o fato de se conseguir conduzir a análise a um nível maior de deformação, como mostra os exemplos.

## Sugestões para trabalhos futuros

- Uma estratégia de passo variável para os processos iterativos, como exemplo a implementação de algoritmos utilizando *comprimento de arco*;
- Proposição de um modelo viscoplástico para espumas de modo a incorporar o efeito da taxa de deformação na resposta do material;
- Descrição do obstáculo através de splines, pela inclusão dos termos de curvatura no problema de contato;
- Entende-se que além destas sugestões podem existir outros fenômenos que podem ser considerados, enriquecendo o modelo constitutivo e tornando-o ainda mais representativo, porém mais complexo. Como exemplo disso são os efeitos de temperatura, dinâmicos e microestruturais.

# Bibliografia

- [1] ALVES, M.K., ROSSI, R., A modified element-free Galerkin method with essential boundary conditions, enforced by an extended partition of unity finite element weight function, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 57, p. 1523-1552, 2003.
- [2] BEISSEL, S., BELYTSCHKO, T., Nodal integration of the element-free Galerkin method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 139, p. 49-74, 1996.
- [3] BELYTSCHKO, T., KRONGAUZ, Y., ORGAN, D., FLEMING, M., KRYSL, P., Meshless methods: An overview and recent developments, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 139, p. 3-47, 1996.
- [4] BELYTSCHKO, T., LIU, W.K., MORAN, B., *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*, John Wiley & Sons, England, p. xvi+650, 2000.
- [5] BELYTSCHKO, T., LU, Y.Y., GU, L., Element free Galerkin methods, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 37, p. 229-256, 1994.
- [6] BELYTSCHKO, T., ORGAN, D., KRONGAUZ, Y., A coupled finite element-element-free Galerkin method, *Computational Mechanics*, v. 17, p. 186-195, 1995.
- [7] BELYTSCHKO, T., TABBARA, M., Dynamic fracture using element-free Galerkin methods, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 39, p. 923-938, 1996.
- [8] BELYTSCHKO, T., FLEMING, M., Smoothing, enrichment and contact in the element-free Galerkin method, v. 71, p. 173-195, 1999.
- [9] CALLISTER W.D. - *Materials science and engineering: an introduction*. 5th. ed. New York: J. Wiley, 1999.
- [10] DHATT, G. and TOUZOT, G. *The Finite Element Method Displayed* J. Wiley & Sons, New York, 1984.
- [11] DESHPANDE V., FLAKE N.A. - Isotropic constitutive models for metallic foams. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 48(2000) 1253-1283, 1999.
- [12] ETEROVIC A. L., BATHE K. J., A hyperelastic-based large strain elasto-plastic constitutive formulation with combined isotropic-kinematic hardening using the logarithmic stress and strain measures, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 30, p. 1099-1114, 1990.

- [13] GIBSON L.J., ASHBY M.F., - Cellular Solids: Structure and Properties, 2nd ed. Cambridge University Press, 1997.
- [14] GIBSON L.J., ASHBY M.F., ZHANG J., TRIANTAFILLOU T.C. - Failure Surfaces for cellular materials under multiaxial loads I: Modeling. *International Journal of Mechanical Sciences*, 1989;31(9):635-663
- [15] GIBSON L.J., ASHBY M.F., ZHANG J., TRIANTAFILLOU T.C. - Failure Surfaces for cellular materials under multiaxial loads II: Comparisons of models with experiment. *International Journal of Mechanical Sciences*, 1989;31(9):665-678
- [16] GIBSON, L. J., ASHBY, M. F., *The Mechanics of Three-Dimensional Cellular Materials*, *Proceedings of the Royal Society, London, A* 382, pp. 43–59, 1982.
- [17] GIBSON, L. J., M. F. ASHBY F., SCHAJER, G. S., ROBERTSON, C. I., *The Mechanics of Two-Dimensional Cellular Materials*, *Proceedings of the Royal Society, London, A* 382, pp. 25–42, 1982.
- [18] GILCHRIST A., MILLS N.J. - Compressive response of open cell foams. Part II: Initiation and evolution of crushing. *International Journal of Solids and Structures* 42 1381–1399, 2005.
- [19] GILCHRIST A., MILLS N.J. - Impact deformation of rigid polymeric foams: experiments and FEA modeling. *International Journal of Impact Engineering* 25(2001) 767-786, 2001.
- [20] HALLQUIST, J.O., *Theoretical Manual of LsDyna - Livermore Software Technology Corporation*, 1998
- [21] HANSSEN A.G., HOPPERSTAD O.S., LANGSETH H., ILSTAD H. - Validation of constitutive models applicable to aluminium foams. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2001.
- [22] HILL, R., *Aspects of invariance in solid mechanics*, *Advances in Applied Mechanics*, v. 18, p. 1-75, 1978.
- [23] HUERTA, A., MÉNDEZ, S.F., *Enrichment and coupling of the finite element and meshless methods*, *International Journal for Numerical Methods In Engineering*, v. 48, p. 1615-1636, 2000.
- [24] HUERTA, A., FERNÁNDEZ-MÉNDEZ, S., DÍEZ, P., *Enrichment of the finite element interpolation with mesh-free methods*, *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, v. 36, p. 1027-1042, 2002.
- [25] KIKUCHI, N., ODEN, J.T., *Contact Problems in Elasticity: A Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods*. Siam Philadelphia, 1988.
- [26] LANCASTER, P., SALKAUSKAS, K., *Surfaces generated by moving least squares methods*, *Mathematical of Computational*; v. 37, p. 141-158, 1981.

- [27] LANDRO L., SALA G., OLIVIERI D. - Deformation mechanisms and energy absorptin of polystyrene foams for protective helmets. *Polymer Testing* 21(2002) 217-228, 2001
- [28] LAURSEN, T.A., *Computational contact and impact mechanics*, Springer, 2002.
- [29] LEMAITRE, J., *A Course on Damage Mechanics*, Germany, Springer-Verlag, p. 209, 1992.
- [30] LIU, G.R., *Mesh Free Methods: moving beyond the finite element method*, CRC Press, 2002
- [31] LIU, W-K., LI, S., BELYTSCHKO, T., Moving least-square reproducing kernel methods (I) Methodology and convergence, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 147, p. 113-154, 1997.
- [32] LI, S., LIU, W.K., Meshfree and particle methods and their applications, *Applied Mechanics Review*, v. 55, p. 1-34, 2002.
- [33] LIU, G.R., TU, Z.H., An adaptive procedure based on background cells for meshless methods, *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 191, p. 1923-1943, 2002.
- [34] LIU, W-K., LI, S., BELYTSCHKO, T., Moving least-square reproducing kernel methods (I) Methodology and convergence, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 147, p. 113-154, 1997.
- [35] LU, Y.Y., BELYTSCHKO, T., GU, L., A new implementation of the element free Galerkin method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 113, p. 455-471, 1994.
- [36] LUBLINER J. - *Plasticity Theory*. MacMillan, 1990
- [37] Maiti, S. K., L. J. Gibson, and M. F. Ashby, "Deformation and Energy Absorption Diagrams for Cellular Solids," *Acta Metallurgica*, vol.32, no.11, pp. 1963–1975, 1984.
- [38] MALVERN, L. E., *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*, Prentice Hall, p. xiv + 713, 1969.
- [39] MILLER R.E. - A Continuum plasticity model of th constitutive and indentadion behaviour of fomed metals. *Intenational Journal of Mechanical Sciences*, 2000.
- [40] NAYROLES, B., TOUZOT, G., VILLON, P., Generalizing the finite element method: diffuse approximation and diffuse elements, *Computational Mechanics*, v. 10, p. 307-318, 1992.
- [41] ORTIZ, M., RADOVITZKY, R.A., REPETO, E.A., The computation of exponential and logarithmic mappings and their first and second linearizations, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 52, p. 1431-1441, 2001.



- [42] ODEN, J.T., PIRES, B., Algorithms and numerical results for finite element approximations of contact problems with non-classical friction laws, *Computers & Structures*, v. 19, p. 137-147, 1984.
- [43] PERIC D., OWEN D. R. J., Honnor M. E., A model for finite strain elasto-plasticity based on logarithmic strains: Computational issues, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v.94, p. 35-61, 1992.
- [44] ROSSI, R., Proposições e aplicações considerando o Método de Galerkin Livre de Elementos. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2005.
- [45] SIMO, J.C., LAURSEN, T.A., An augmented Lagrangian treatment of contact problems involving friction, *Computers and Structures*, v. 42, p. 97-116, 1992
- [46] SIMO, J.C., HUGHES, T.J.R., *Computational Inelasticity, Interdisciplinary Applied Mathematics*, v. 7 Springer, New York, p. 392, 1998.
- [47] SOUZA NETO, E.A., PERIC, D., DUTKO, M., OWEN, D.R.J., Design of simple low order finite elements for large strain analysis of nearly incompressible solids, *International Journal of Solids and Structures*, v. 33, p. 3277-3296, 1996.
- [48] SOUZA NETO, E.A., PERIC, D., OWEN, D.R.J., *Computational Plasticity: Small and Large Strain Finite Element Analysis of Elastic and Inelastic Solids*, Classroom Notes, University College of Swansea, Wales, 2002.
- [49] SONG B., WEINONG W., CHEN W., DOU S., WINFRE N.A., KANG J.H. - Strain rate effects on elastic and early cell-collapse responses of a polystyrene foam. *International Journal of Impact Engineering* 21(2005) 509-521, 2004.
- [50] VENTURA, G., An augmented Lagrangian approach to essential boundary conditions in meshless methods, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 53, 825-842, 2002.
- [51] WEBER, G., ANAND, L., Finite deformation constitutive equations and a time integration procedure for isotropic, hyperelastic-viscoplastic solids, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 79, p. 173-202, 1990.
- [52] WRIGGERS, P., *Computational contact mechanics*, John Wiley & Sons, 2002.
- [53] ZHANG J., KIKUCHI N., YEE A., NUSHOLTZ G. - Constitutive modeling of polymeric foam material subject to dynamic crash loading. *International Journal of Impact Engineering* 21(5), 369, 1998.
- [54] ZIENKIEWICZ, O.C., *The Finite Element Method*, 4rd edition, v. 1, New York, McGraw-Hill, p. xx + 648,1977.

# Apêndice A

## Considerções a respeito de EDOs

Este anexo trata de algumas considerações a respeito de soluções para Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs).

- **Problema 1:**

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = a(t)y(t) \\ y(t_0) = \eta \end{cases} ; \quad (\text{A.1})$$

Solução 1:

$$y(t) = \eta e^{a(t)-a(t_0)} = \eta e^{a(t)} e^{-a(t_0)}; \quad (\text{A.2})$$

- **Problema 2:**

$$\begin{cases} \dot{\vec{y}}(t) = \mathbf{A}(t)\vec{y}(t) \\ \vec{y}(t_0) = \vec{\eta} \end{cases} ; \quad (\text{A.3})$$

Solução 2:

$$\vec{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \dots \\ y_n(t) \end{bmatrix}; \quad (\text{A.4})$$

$$\vec{y}(t) = \mathbf{\Psi}(t)\mathbf{\Psi}^{-1}(t_0)\vec{\eta} \underset{\text{método da variação dos parâmetros}}{=} \mathbf{e}^{\mathbf{A}(t)}\mathbf{e}^{-\mathbf{A}(t_0)}\vec{\eta} = \exp(\mathbf{A}(t-t_0))\vec{\eta} \quad (\text{A.5})$$

onde  $\mathbf{\Psi}$  é a matriz fundamental do sistema. Somente é possível escrever  $\mathbf{e}^{\mathbf{A}}\mathbf{e}^{\mathbf{B}} = \mathbf{e}^{\mathbf{A}+\mathbf{B}}$ , se  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  comutarem, i.e.,  $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ . Ainda

$$\mathbf{e}^{\mathbf{A}(t)} = \sum_n \frac{(\mathbf{A}(t))^n}{n!} = \mathbf{I} + \mathbf{A}(t) + \frac{(\mathbf{A}(t))^2}{2!} + \dots \quad (\text{A.6})$$

- **Problema 3:**

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{F}}^p(t) = \bar{\mathbf{D}}^p(t)\mathbf{F}^p(t) & \forall t \in \Omega [t_0, t_\infty]; \\ \mathbf{F}^p(t_0) = \boldsymbol{\eta} \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

linearizando para o intervalo  $[t_n, t_{n+1}]$  e sabendo que  $\bar{\mathbf{D}}^p(t_{n+1}) = \bar{\mathbf{D}}^p(t_n)$  o problema, pode ser reescrito da seguinte forma

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{F}}^p(t) = \bar{\mathbf{D}}^p(t_{n+1})\mathbf{F}^p(t) & \forall t \in \hat{\Omega} [t_n, t_{n+1}]; \\ \mathbf{F}^p(t_n) = \hat{\boldsymbol{\eta}} \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

a solução é análoga a Solução 2, para cada coluna de  $\mathbf{F}$  em  $\hat{\Omega}$ , assim, a Solução 3:

$$\mathbf{F}^p(t) = \exp(\bar{\mathbf{D}}^p(t_{n+1})(t - t_n))\hat{\boldsymbol{\eta}} \quad \forall t \in \hat{\Omega} [t_n, t_{n+1}]; \quad (\text{A.9})$$

$$\mathbf{F}^p(t_{n+1}) = \exp(\bar{\mathbf{D}}^p(t_{n+1})(t_{n+1} - t_n))\hat{\boldsymbol{\eta}} \quad (\text{A.10})$$

$$\mathbf{F}_{n+1}^p = \exp(\bar{\mathbf{D}}_{n+1}^p \Delta t)\hat{\boldsymbol{\eta}} \quad (\text{A.11})$$

Como

$$\bar{\mathbf{D}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} \quad (\text{A.12})$$

$$\bar{\mathbf{D}}_{n+1}^p = \bar{\mathbf{D}}_n^p = \dot{\lambda} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} = \frac{\Delta \lambda}{\Delta t} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} \Big|_{n+1} \quad (\text{A.13})$$

Assim

$$\mathbf{F}_{n+1}^p = \exp\left(\Delta \lambda \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} \Big|_{n+1}\right) \mathbf{F}_n^p \quad (\text{A.14})$$

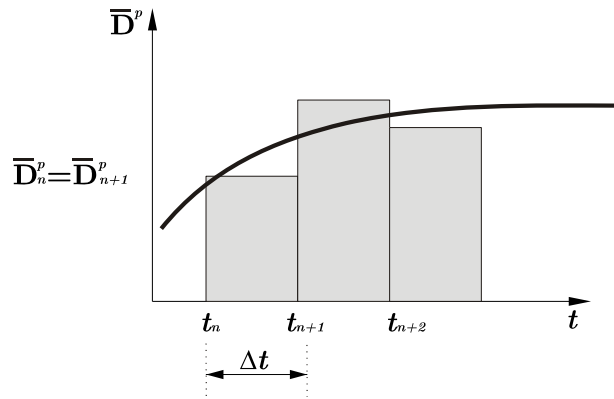


Figura A.1: Representação esquemática do processo evolutivo.

## Apêndice B

# Considerações sobre o modelo para espumas

### B.1 Computo do parâmetro $\beta$

Considerando a definição do Poisson plástico, dada por

$$\nu_p = - \frac{\bar{\mathbf{D}}_{33}^p}{\bar{\mathbf{D}}_{11}^p} \quad (\text{B.1})$$

e a evolução da taxa de deformação plástica modificada  $\bar{\mathbf{D}}^p$  dada por

$$\bar{\mathbf{D}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} \quad (\text{B.2})$$

onde

$$\mathcal{G}(q, p) = \sqrt{q^2 + \beta^2 p^2}. \quad (\text{B.3})$$

pode-se então reescrever a Eq. B.1 como

$$\nu_p = - \frac{\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \bar{\tau}_{33}}}{\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \bar{\tau}_{11}}}. \quad (\text{B.4})$$

Assumindo com  $\beta$  não depende das componentes de tensão pode-se então escrever

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{G}(q, p)}{\partial \bar{\tau}_{ij}} &= \frac{\partial}{\partial \bar{\tau}_{ij}} \{q^2 + \beta^2 p^2\}^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \{q^2 + \beta^2 p^2\}^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial \bar{\tau}_{ij}} \{q^2 + \beta^2 p^2\} \\ &= \frac{1}{\mathcal{G}(q, p)} \left\{ q \frac{\partial q}{\partial \bar{\tau}_{ij}} + \beta^2 p \frac{\partial p}{\partial \bar{\tau}_{ij}} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Tendo em mente que

$$\frac{\partial p}{\partial \bar{\tau}_{ij}} = -\frac{1}{3} \frac{\partial \bar{\tau}_{kk}}{\partial \bar{\tau}_{ij}} = -\frac{1}{3} \delta_{ki} \delta_{kj} = -\frac{1}{3} \delta_{ij} \quad (\text{B.6})$$

e

$$\frac{\partial q}{\partial \bar{\tau}_{ij}^D} = \frac{\partial q}{\partial \bar{\tau}_{rs}^D} \frac{\partial \bar{\tau}_{rs}^D}{\partial \bar{\tau}_{ij}^D}, \quad (\text{B.7})$$

pode-se então expandir os termos de forma a se escrever

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial \bar{\tau}_{rs}^D} &= \frac{\partial}{\partial \bar{\tau}_{rs}^D} \left\{ \frac{3}{2} \bar{\tau}_{lm}^D \bar{\tau}_{lm}^D \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{3}{2} \bar{\tau}_{lm}^D \bar{\tau}_{lm}^D \right\}^{-\frac{1}{2}} \frac{3}{2} 2 \bar{\tau}_{lm}^D \delta_{lr} \delta_{ms} \\ &= \frac{3}{2q} \bar{\tau}_{lm}^D \delta_{lr} \delta_{ms} \\ &= \frac{3}{2q} \bar{\tau}_{rs}^D \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\tau}_{rs}^D}{\partial \bar{\tau}_{ij}^D} &= \frac{\partial}{\partial \bar{\tau}_{ij}^D} \left\{ \bar{\tau}_{rs} - \frac{1}{3} \bar{\tau}_{kk}^D \delta_{rs} \right\} \\ &= \delta_{ri} \delta_{sj} - \frac{1}{3} \delta_{ki} \delta_{kj} \delta_{rs} \\ &= \delta_{ri} \delta_{sj} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{rs}. \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Substituindo as Eqs. B.8 e B.9 na Eq. B.7 obtém-se então

$$\frac{\partial q}{\partial \bar{\tau}_{ij}^D} = \frac{3}{2q} \bar{\tau}_{rs}^D \left( \delta_{ri} \delta_{sj} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{rs} \right) = \frac{3}{2q} \bar{\tau}_{ij}^D, \quad (\text{B.10})$$

o que permite reescrever a Eq. B.5

$$\frac{\partial \mathcal{G}(q, p)}{\partial \bar{\tau}_{ij}^D} = \frac{1}{\mathcal{G}(q, p)} \left\{ \frac{3}{2} \bar{\tau}_{ij}^D - \frac{1}{3} \beta^2 p \delta_{ij} \right\}. \quad (\text{B.11})$$

Agora, escrevendo as componentes na direção 11 e 33 da Eq. B.11

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \bar{\tau}_{11}^D} = \frac{1}{\mathcal{G}} \left\{ \frac{3}{2} \bar{\tau}_{11}^D - \frac{1}{3} \beta^2 p \right\} \quad (\text{B.12})$$

e

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \bar{\tau}_{33}^D} = \frac{1}{\mathcal{G}} \left\{ \frac{3}{2} \bar{\tau}_{33}^D - \frac{1}{3} \beta^2 p \right\}, \quad (\text{B.13})$$

pode-se então escrever o Poisson plástico como sendo

$$\nu_p = - \frac{\left\{ \frac{3}{2} \bar{\tau}_{33}^D - \frac{1}{3} \beta^2 p \right\}}{\left\{ \frac{3}{2} \bar{\tau}_{11}^D - \frac{1}{3} \beta^2 p \right\}}. \quad (\text{B.14})$$

Considerando um teste de compressão uniaxial com onde  $\bar{\tau}_{33}^D = \bar{\tau}_{22}^D$ , e

$$\bar{\tau} = \begin{bmatrix} \bar{\tau}_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.15})$$

onde  $\bar{\tau}_{11} < 0$ , e desde que,  $\bar{\tau}_{rs}^D = \bar{\tau}_{rs} - \frac{1}{3}\bar{\tau}_{kk}\delta_{rs}$ , ou seja

$$\bar{\tau}^D = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}\bar{\tau}_{11} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3}\bar{\tau}_{11} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}\bar{\tau}_{11} \end{bmatrix}, \quad (\text{B.16})$$

assim

$$p = -\frac{1}{3}tr(\bar{\tau}) = -\frac{1}{3}\bar{\tau}_{11}. \quad (\text{B.17})$$

Dessa forma pode-se então escrever

$$\begin{aligned} \nu_p &= -\frac{\left\{\frac{3}{2}\bar{\tau}_{33}^D - \frac{1}{3}\beta^2 p\right\}}{\left\{\frac{3}{2}\bar{\tau}_{11}^D - \frac{1}{3}\beta^2 p\right\}} \\ &= -\frac{\left\{\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{3}\bar{\tau}_{11}\right) - \frac{1}{3}\beta^2\left(-\frac{1}{3}\bar{\tau}_{11}\right)\right\}}{\left\{\frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}\bar{\tau}_{11}\right) - \frac{1}{3}\beta^2\left(-\frac{1}{3}\bar{\tau}_{11}\right)\right\}} \\ &= -\frac{\left\{-\frac{1}{2} + \frac{1}{9}\beta^2\right\}}{\left\{1 + \frac{1}{9}\beta^2\right\}}, \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

i.e.,

$$\nu_p \left[1 + \frac{1}{9}\beta^2\right] + \left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{9}\beta^2\right] = 0, \quad (\text{B.19})$$

que produz

$$\frac{1}{9}[1 + \nu_p]\beta^2 = \frac{1}{2} - \frac{2}{9}\nu_p = \frac{1}{2}[1 - 2\nu_p]. \quad (\text{B.20})$$

Consequentemente,

$$\beta = \pm \frac{3}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{[1 - 2\nu_p]}{[1 + \nu_p]}}. \quad (\text{B.21})$$

Entretanto, sabendo que  $\beta$  deve ser positivo para  $\mathcal{G}$  ser convexo, finalmente se obtém

$$\beta = \frac{3}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{[1 - 2\nu_p]}{[1 + \nu_p]}}. \quad (\text{B.22})$$

## B.2 O teste de compressão uniaxial

De modo a se determinar o parâmetro  $\alpha(\bar{\varepsilon}_v^p, \bar{\varepsilon}_a^p)$  faz-se necessário o entendimento do teste de compressão uniaxial dentro do contexto de grande deformações.

Considere a Figura B.1,

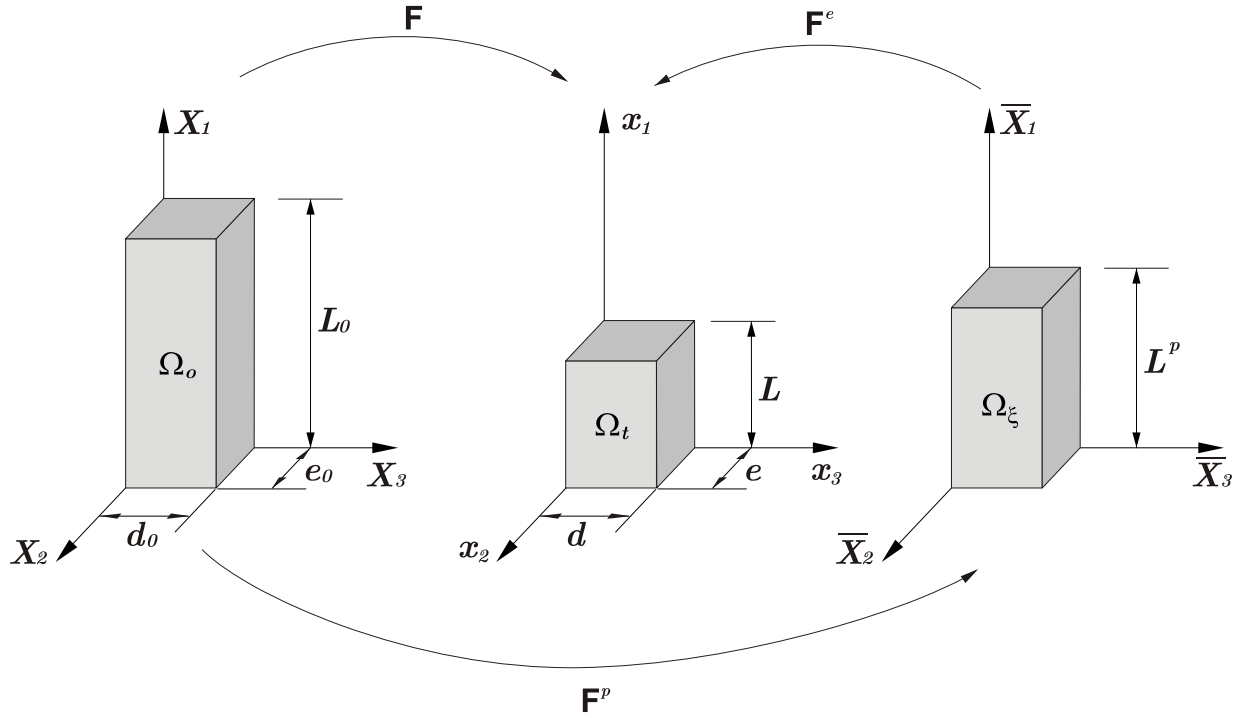


Figura B.1: Esquema ilustrativo do ensaio de compressão uniaxial.

a deformação do corpo pode ser expressa como sendo

$$x_i(t) = \lambda_i(t) X_i, \quad (\text{B.23})$$

onde  $\lambda_i$  é conhecido como a taxa alongamento<sup>1</sup>, dado em cada direção  $x_i$ . A taxa de alongamento é a medida de deformação fundamental no escopo de deformações finitas.

Considerando o material isotrópico tem-se que  $\lambda_2(t) = \lambda_3(t)$ , assim a função de deformação homogênea pode ser escrita como

$$\vec{x} = [F(t)] \vec{X} \quad (\text{B.24})$$

onde

$$[F(t)] = \begin{bmatrix} \lambda_1(t) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2(t) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2(t) \end{bmatrix}. \quad (\text{B.25})$$

Aplicando a deformação homogênea na amostra da Figura B.1, obtém-se

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{L}{L_0} \\ \lambda_2 &= \frac{d}{d_0} \\ \lambda_2 &= \frac{e}{e_0}. \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

<sup>1</sup>do inglês *stretching ratio*.

Como visto no Cap.3 a deformação pode ser decomposta em uma parte elástica e em uma outra parte plástica,

$$[F(t)] = [F^e(t)][F^p(t)], \quad (\text{B.27})$$

assim para o caso particular do ensaio uniaxial pode-se então escrever

$$[F^e(t)] = \begin{bmatrix} \lambda_1^e(t) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^e(t) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2^e(t) \end{bmatrix} \quad (\text{B.28})$$

$$[F^p(t)] = \begin{bmatrix} \lambda_1^p(t) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^p(t) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2^p(t) \end{bmatrix},$$

assim como resultado pode-se então escrever que

$$\lambda_1(t) = \lambda_1^e(t) \lambda_1^p(t) \quad (\text{B.29})$$

$$\lambda_2(t) = \lambda_2^e(t) \lambda_2^p(t). \quad (\text{B.30})$$

Defini-se então a deformação logarítmica axial e a deformação volumétrica, como sendo, respectivamente

$$\bar{\varepsilon}_a = -\ln\left(\frac{L}{L_0}\right) \quad (\text{B.31})$$

$$\bar{\varepsilon}_v = -\ln(J), \quad (\text{B.32})$$

onde  $J = \det[F] = \lambda_1(\lambda_2)^2$ . Tais deformações podem ter suas equações reescritas em função de  $\lambda_i$ , utilizando-se as Eqs. B.29 e B.30, assim

$$\bar{\varepsilon}_a = -[\ln(\lambda_1^e) + \ln(\lambda_1^p)] \quad (\text{B.33})$$

e

$$\bar{\varepsilon}_v = -\{\ln(\lambda_1^e) + \ln(\lambda_1^p) + 2[\ln(\lambda_2^e) + \ln(\lambda_2^p)]\}. \quad (\text{B.34})$$

Ainda do ensaio uniaxial, sabendo que  $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}\boldsymbol{\sigma}$ , e

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} -\tau_a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.35})$$

com  $\tau_a > 0$ . A pressão hidrostática  $p$  e o tensor tensão deviatória  $\boldsymbol{\tau}^D$  são dados por

$$p = -\frac{1}{3}tr[\boldsymbol{\tau}] = \frac{1}{3}\tau_a \quad (\text{B.36})$$



e

$$\boldsymbol{\tau}^D = \boldsymbol{\tau} + p\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3}\tau_a & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}\tau_a & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}\tau_a \end{bmatrix}. \quad (\text{B.37})$$

Contudo,

$$q = \sqrt{\frac{3}{2}\boldsymbol{\tau}^D \cdot \boldsymbol{\tau}^D} = \left\{ \frac{3}{2} \left[ \frac{4}{9}\tau_a^2 + \frac{1}{9}\tau_a^2 + \frac{1}{9}\tau_a^2 \right] \right\}^{\frac{1}{2}} = \tau_a \quad (\text{B.38})$$

então

$$(p, q) = \tau_a \left( \frac{1}{3}, 1 \right) \quad (\text{B.39})$$

o que descreve a direção da carga no ensaio de compressão uniaxial, no gráfico  $p - q$ , como mostrado pela Figura 4.2, onde  $\tau_a \in [0, \tau_y]$ .

Sabendo que

$$[F^e(t)] = \begin{bmatrix} \lambda_1^e(t) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^e(t) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2^e(t) \end{bmatrix} \quad (\text{B.40})$$

pode-se então computar a decomposição

$$[F^e(t)] = [R^e(t)][U^e(t)]. \quad (\text{B.41})$$

Dessa forma, sabendo que a decomposição é única e desde que  $[F^e(t)]$  é diagonal, pode-se então concluir que

$$[R^e(t)] = [I], \quad (\text{B.42})$$

consequentemente

$$[U^e(t)] = [F^e(t)]. \quad (\text{B.43})$$

Como resultado,

$$[U^e(t)] = \begin{bmatrix} \lambda_1^e(t) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^e(t) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2^e(t) \end{bmatrix} \quad (\text{B.44})$$

e sabendo que a medida logarítmica de deformação é dada por  $\mathbf{E}^e = \ln(\mathbf{U}^e)$ , pode-se então escrever

$$\mathbf{E}^e = \begin{bmatrix} \ln(\lambda_1^e(t)) & 0 & 0 \\ 0 & \ln(\lambda_2^e(t)) & 0 \\ 0 & 0 & \ln(\lambda_2^e(t)) \end{bmatrix}. \quad (\text{B.45})$$

Baseando-se na definição acima, pode-se então escrever o tensor de deformação plástica como

$$\mathbf{E}^p = \begin{bmatrix} \ln(\lambda_1^p(t)) & 0 & 0 \\ 0 & \ln(\lambda_2^p(t)) & 0 \\ 0 & 0 & \ln(\lambda_2^p(t)) \end{bmatrix}, \quad (\text{B.46})$$

o qual deriva a forma em taxa dada por

$$\dot{\mathbf{E}}^p = \begin{bmatrix} \frac{\dot{\lambda}_1^p}{\lambda_1^p} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\dot{\lambda}_2^p}{\lambda_2^p} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\dot{\lambda}_2^p}{\lambda_2^p} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.47})$$

De fato, se considerado a definição  $\bar{\mathbf{D}}^p = \dot{\mathbf{F}}^p (\mathbf{F}^p)^{-1}$  tem-se que

$$\bar{\mathbf{D}}^p = \begin{bmatrix} \dot{\lambda}_1^p & 0 & 0 \\ 0 & \dot{\lambda}_2^p & 0 \\ 0 & 0 & \dot{\lambda}_2^p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_1^p} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_2^p} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda_2^p} \end{bmatrix} \quad (\text{B.48})$$

i.e.

$$\bar{\mathbf{D}}^p = \begin{bmatrix} \frac{\dot{\lambda}_1^p}{\lambda_1^p} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\dot{\lambda}_2^p}{\lambda_2^p} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\dot{\lambda}_2^p}{\lambda_2^p} \end{bmatrix}, \quad (\text{B.49})$$

o que permite verificar que de fato  $\bar{\mathbf{D}}^p$  pode ser definido como a taxa de deformação plástica.

#### A relação entre $\bar{\varepsilon}_a^p$ e $\bar{\varepsilon}_v^p$

O coeficiente de Poisson plástico, em um ensaio de compressão uniaxial, e para material isotrópico pode ser definido como sendo

$$\nu_p = -\frac{\mathbf{E}_{22}^p}{\mathbf{E}_{11}^p} = -\frac{\dot{\mathbf{E}}_{22}^p}{\dot{\mathbf{E}}_{11}^p} = -\frac{\bar{\mathbf{D}}_{22}^p}{\bar{\mathbf{D}}_{11}^p} = -\frac{\ln(\lambda_2^p)}{\ln(\lambda_1^p)} \quad (\text{B.50})$$

e a deformação plástica volumétrica e a deformação plástica axial, definidas a partir da parte plástica das Eqs.B.34 e B.33, são dadas respectivamente por

$$\bar{\varepsilon}_v^p = -\{\ln(\lambda_1^p) + 2\ln(\lambda_2^p)\} \quad (\text{B.51})$$

$$\bar{\varepsilon}_a^p = -\ln(\lambda_1^p). \quad (\text{B.52})$$

Substituindo-se as Eqs.B.51 e B.52 no termo final da Eq. B.50, pode-se então obter a relação entre a deformação plástica axial e a deformação plástica volumétrica, dada por

$$\bar{\varepsilon}_a^p = \frac{\varepsilon_v^p}{(1 - 2\nu_p)}$$

Como resultado, a lei de encruamento uniaxial pode ser escrita em função da deformação plástica volumétrica e do coeficiente de Poisson plástico

$$H(\bar{\varepsilon}_a^p) = H\left(\frac{\bar{\varepsilon}_v^p}{1 - 2\nu_p}\right) = \bar{H}(\bar{\varepsilon}_v^p).$$

**Relação entre as tensões de escoamento**

No ensaio de compressão uniaxial, sabendo que  $[R^e(t)] = [I]$ , tem-se então que

$$\bar{\tau} = \tau$$

o mesmo segue para a tensão de escoamento inicial de compressão, assim

$$\bar{\tau}_y^o = \tau_y^o.$$

Entretanto, da relação entre o tensor tensão de *Cauchy* e o tensor tensão de *Kirchhoff*,  $\tau = J\sigma$ , pode ser reescrita em termos da geometria da amostra, i.e,

$$\tau = \det(\mathbf{F}) \sigma = \lambda_1 (\lambda_2)^2 \sigma = \frac{L}{L_o} \frac{A}{A_o} \sigma$$

onde

$$J = \det(\mathbf{F}) = \lambda_1 (\lambda_2)^2 = \frac{L}{L_o} \frac{A}{A_o}$$

e  $A$  é a área da seção deformada e  $A_o$  é a área na configuração de referência. Como resultado,

$$\bar{\tau}_y^o = \frac{L}{L_o} \frac{A}{A_o} \sigma_y^o.$$

Agora, sabendo que  $\mathbf{P} = J\sigma\mathbf{F}^{-T}$ , tem-se então para o ensaio uniaxial que

$$[P] = \frac{AL}{A_o L_o} [\sigma] \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda_2} \end{bmatrix}$$

assim, obtém-se a relação entre as tensões de escoamento

$$P_y^o = \sigma_y^o \left( \frac{A}{A_o} \right) = \bar{\tau}_y^o \left( \frac{L_o}{L} \right) \quad (\text{B.53})$$

**Determinação do parâmetro  $\alpha$  ( $\bar{\varepsilon}_v^p, \bar{\varepsilon}_a^p$ )**

De modo a se determinar o parâmetro material  $\alpha$ , assume-se que o material escoou sob compressão uniaxial, isso implica dizer que

$$\mathcal{F}(q, p) = \sqrt{q^2 + \alpha^2 (p - p_o)^2} - B = 0. \quad (\text{B.54})$$

Entretanto, sabendo que  $B = \alpha A$ ,  $p_o = \frac{p_c - p_t}{2}$  e  $A = \frac{p_c + p_t}{2}$ , manipulando-se algebricamente a expressão dada pela Eq.B.54, coletando os termos e sabendo que  $\alpha > 0$ , obtém-se

$$\alpha = \frac{\bar{\tau}_y}{\left\{ p_t p_c - \frac{1}{3} \bar{\tau}_y (p_t - p_c) - \frac{1}{9} \bar{\tau}_y^2 \right\}^{\frac{1}{2}}} \quad (\text{B.55})$$

onde

$$\bar{\tau}_y = \bar{\tau}_y^o + H(\bar{\varepsilon}_a^p) = \bar{\tau}_y^o + \bar{H}(\bar{\varepsilon}_v^p)$$

e

$$p_c = p_c^o + H_p(\bar{\varepsilon}_v^p).$$