

MARCELO DOS SANTOS COUTINHO

**Projeto via LMI de Sistemas de Controle Comutado
para um Motor de Indução**

**FLORIANÓPOLIS
2006**

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

**Projeto via LMI de Sistemas de Controle Comutado
para um Motor de Indução**

Dissertação submetida à
Universidade Federal de Santa Catarina
como parte dos requisitos para a
obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica.

MARCELO DOS SANTOS COUTINHO

Florianópolis, 22 de junho de 2006.

Projeto via LMI de Sistemas de Controle Comutado para um Motor de Indução

MARCELO DOS SANTOS COUTINHO

‘Esta Dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica, Área de Concentração em *Controle*, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Santa Catarina.’

Alexandre Trofino Neto
Orientador

Nelson Sadowski
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

Banca Examinadora:

Alexandre Trofino Neto
Presidente

Daniel Juan Pagano

Daniel Ferreira Coutinho

À meus pais Neli e Guilherme...

AGRADECIMENTOS

Agradeço em primeiro lugar à Deus pela vida maravilhosa que ele tem me proporcionado.

Ao professor Alexandre Trofino pela orientação, incentivo e paciência neste tempo de trabalho.

À cada membro da minha família: Guilherme, Neli, Patricia, Leticia e “Gui”.

À Gisele “Sweetie”, pelo incentivo e contribuições.

Aos colegas de mestrado.

Resumo da Dissertação apresentada à UFSC como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica.

Projeto via LMI de Sistemas de Controle Comutado para um Motor de Indução

MARCELO DOS SANTOS COUTINHO

Junho/2006

Orientador: Alexandre Trofino Neto

Área de Concentração: Controle

Palavras-chave: LMIs, Motor de Indução, Comutação

Número de Páginas: 61

Este trabalho apresenta uma estratégia de controle para o motor de indução trifásico via abordagem LMI. O projeto faz uso de um modelo comutado do motor de indução que é obtido considerando o acionamento do motor através de um inversor de tensão.

O objetivo que se deseja alcançar é projetar leis de controle para comandar as chaves do inversor, de forma a garantir estabilidade e desempenho do motor. Para isso, usaremos uma metodologia que consiste em descrever as condições do problema como Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs). O ponto de partida do projeto é baseado na teoria de Lyapunov para estabilidade de sistemas.

Inicialmente, é apresentado a modelagem do motor de indução, bem como, comentários sobre o acionamento via inversor de tensão. Na seqüência do trabalho se define LMI e suas principais propriedades e ainda são apresentados alguns exemplos de aplicação de LMIs na busca de soluções de problemas simples. Ao final, é realizado o projeto de controle para o motor de indução trifásico e os resultados atingidos são apresentados.

Abstract of Dissertation presented to UFSC as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master in Electrical Engineering.

Design Based on LMI of Switched Control Systems to an Induction Motor

MARCELO DOS SANTOS COUTINHO

June/2006

Advisor: Alexandre Trofino Neto

Area of Concentration: Control

Key words: LMIs, Induction Motor, Switching

Number of Pages: 61

This work presents a strategy of control for the three-phase induction motor based on LMI. The design uses a switched model of induction motor which is obtained considering the feeding of the motor through a three-phase voltage inverter.

The target to be reached is to design control laws for controlling the switches of the inverter, in order to guarantee stability and performance of the motor. To do that, we will use a methodology which consists in describing the conditions of the problem as Linear Matrix Inequalities (LMIs). The beginning of the design is based on the Lyapunov's theory for the stability of systems.

Initially, the modeling of the induction motor is presented, as well as, commentaries about the feeding of the motor by voltage inverter. After that, it is defined LMI and its main properties and also is developed some examples of application of LMIs to solve simple problems. At the end, it is accomplished the design of control for the three-phase induction motor and the results reached are presented.

Sumário

1	Introdução Geral	2
2	Motor de Indução e Acionamento	4
2.1	Introdução	4
2.2	Modelagem do Motor de Indução	5
2.2.1	Modelo trifásico	5
2.3	Sistema de Coordenadas	10
2.3.1	Transformação geral trifásica–bifásica	11
2.4	Modelos Bifásicos	13
2.4.1	Transformação do sistema de coordenadas trifásico para o sistema de coordenadas estacionário ($\alpha\beta$)	13
2.4.2	Transformação do sistema de coordenadas trifásico para o sistema de coordenadas síncrono (dq)	14
2.4.3	Transformação entre os sistemas de coordenadas síncrono e estacionário	15
2.4.4	Modelo no sistema de coordenadas síncrono	16
2.4.5	Modelo no sistema de coordenadas estacionário	19
2.5	Acionamento	22
2.5.1	Inversor trifásico 180°	23
2.6	Modelo Comutado	26
2.7	Comentários	29

3	Conceitos Preliminares	31
3.1	Introdução	31
3.2	Estabilidade e Desempenho	31
3.2.1	Região de Atração	33
3.3	Desigualdade Matricial Linear - LMI	35
3.3.1	Introdução	35
3.3.2	Definição	36
3.3.3	Propriedades de LMI	36
3.4	Politopo	38
3.5	Exemplos	39
3.5.1	Exemplo 1	40
3.5.2	Exemplo 2	43
3.6	Comentários	44
4	Projeto do Controlador	45
4.1	Introdução	45
4.2	Projeto para um Sistema Comutado	46
4.3	Projeto para o Motor de Indução	50
4.3.1	Preliminares	51
4.3.2	Resultados principais	54
4.3.3	O sistema de controle	56
4.3.4	Simulação das LMIs	57
4.3.5	Comentários	58
5	Conclusões	59
A	Dados de Simulação	62

Lista de Figuras

2.1	Esquema da máquina trifásica.	6
2.2	Representação dos circuitos do estator e rotor.	7
2.3	Representação de um sistema trifásico e de um sistema bifásico.	11
2.4	Representação dos sistemas de coordenadas síncrono (dq) e estacionário ($\alpha\beta$).	15
2.5	Inversor trifásico de tensão.	22
2.6	Inversor trifásico 180°	23
2.7	Diagrama de comando do inversor de tensão trifásico 180°	24
2.8	Formas de onda.	24
2.9	Circuito de potência do estator de um motor de indução.	26
2.10	Os 8 possíveis sinais de tensões de estator do motor no sistema de coordenadas estacionário ($\alpha\beta$).	27
2.11	Entrada e saída da tabela (2.1).	28
3.1	Plano de fase do exemplo 1.	34
3.2	Plano de fase do exemplo 2.	35
3.3	Politopo \mathfrak{X}	39
3.4	Curva de nível de $V(x)$ com $c = 0.3$ e politopo \mathfrak{X} para $\alpha = 0.491$	42
3.5	Curva de nível de $V(x)$ com $c = 0.4$ e politopo \mathfrak{X} para $\alpha = 0.584$	42
4.1	Sistema comutado (4.9) e lógica de comutação dada em (4.10).	47
4.2	Trajatórias do sistema (4.9) com a lógica de comutação dada em (4.10).	49
4.3	Diagrama de blocos do sistema de controle do motor de indução trifásico.	57

Lista de Tabelas

2.1	Definição da posição das chaves do inversor.	28
-----	--	----

Notação

\mathbb{R}^n	espaço euclidiano de ordem n .
$\mathbb{R}^{n \times m}$	espaço das matrizes reais de dimensão $n \times m$.
C^1	espaço das funções continuamente diferenciáveis.
$\lambda(A)$	conjunto dos autovalores de A .
C^-	conjunto dos números complexos negativos.
$0_{n \times n}$	matriz de zeros de dimensão $n \times n$.
$I_{n \times n}$	matriz identidade de dimensão $n \times n$.
A'	matriz transposta de A .
V^T	vetor transposto de V .
A^{-1}	matriz inversa de A .
$A > 0$	matriz simétrica, positiva definida.
$diag\{.\}$	matriz bloco diagonal formada com elementos em $\{.\}$.
LMI	desigualdade matricial linear.
\underline{x}, \bar{x}	valores mínimos e máximos da variável x .

Capítulo 1

Introdução Geral

Este trabalho apresenta uma metodologia de controle para sistemas comutados. Esses tipos de sistemas variam a sua estrutura em decorrência de eventos, por exemplo, o abrir e fechar de uma chave. Exemplos de sistemas comutados podem ser encontrados em [Lib]. O estudo aqui é dedicado para sistemas não lineares, onde optou-se por escolher como processo a ser controlado, o motor de indução trifásico. O motor de indução é um sistema de grande interesse para pesquisadores da área de controle, por ser um sistema de elevada complexidade e de vasta aplicação na indústria. Assim, existem hoje na literatura muitos problemas relacionados ao motor de indução para os quais já se conhece solução e outros que estão em aberto.

O controle do motor de indução por campo orientado, introduzido em 1972 por Felix Blaschke, é uma técnica que permite a utilização do motor para aplicações de alto desempenho. A idéia central da técnica é buscar o desacoplamento das componentes da corrente do estator que produzem o fluxo e o torque do motor, permitindo o controle independente destas variáveis, de forma análoga ao motor *cc* com excitação independente. Com o controle por campo orientado, é possível controlar o torque eletromagnético do motor, diretamente e instantaneamente, através da componente de eixo em quadratura da corrente do estator; supondo operação com fluxo constante e controle instantâneo da corrente aplicada ao motor, [Reg93].

A implementação do controle por campo orientado do motor de indução tornou-se possível somente com os avanços nas áreas de Eletrônica de Potência e Microeletrônica decorridos nas últimas décadas. Atualmente, várias implementações dessa técnica de controle do motor de indução estão disponíveis. Contudo, problemas como a sensibilidade às variações paramétricas, por exemplo, ainda é um assunto de constante pesquisa. O desacoplamento dos controles de torque e fluxo é bastante dependente da constante rotórica do motor. O desconhecimento deste parâmetro pode levar à perda da orientação do campo, [PB97].

A abordagem que se adotou neste trabalho, consiste em descrever o problema em forma de LMIs, ou seja, desigualdades matriciais lineares. Até o momento em que este trabalho teve início, é possível dizer que não existia na literatura um estudo similar de controle do motor de indução via LMI. De fato, a falta de bibliografia relacionada ao assunto, foi constante durante o desenvolvimento deste estudo. As LMIs se mostram como uma ferramenta muito prática e robusta, dependendo dos requisitos desejados para um sistema. Um bom resultado pode ser conferido no trabalho [CTSS05], onde o estudo é dedicado à sistemas lineares. Uma das motivações para o uso da abordagem LMI, se deve à facilidade com que esta técnica permite a incorporação de incertezas nos parâmetros do sistema. No caso do motor de indução, podemos considerar incertezas na constante rotórica e construir um controlador que garante, por exemplo, seguimento de referência para qualquer valor da constante rotórica prevista. Neste trabalho é considerado o problema de projetar um controlador que possua uma lógica de comutação para um inversor de tensão, que será usado para atuar no motor de indução, tal que ocorra seguimento de referência para as correntes do estator, fluxos no rotor e velocidade.

Um problema quase nunca aparece originalmente na forma de uma LMI. A tarefa de representá-lo como uma LMI, ou um conjunto de LMIs, muitas vezes, requer experiência e bom domínio da técnica. Para sistemas lineares se conhece hoje muitos recursos que facilitam o problema, porém, em se tratando de sistemas não lineares, esse problema não está completamente resolvido. No trabalho [Tro04], o autor apresenta soluções para o problema de estabilidade de sistemas não lineares e incertos. Uma vez que o problema esteja colocado como LMIs, a solução, se existir, pode ser obtida através de pacotes computacionais que possuem algoritmos dedicados na busca das possíveis soluções.

A dissertação está organizada da seguinte maneira:

O capítulo (2) apresenta uma modelagem da máquina de indução e ilustra o funcionamento básico de um inversor de tensão, que será usado no acionamento da máquina. Assim, entendemos ser de importância a compreensão do funcionamento desse dispositivo. O capítulo é encerrado apresentando o modelo comutado para o motor de indução. O capítulo (3) é dedicado na discussão sobre estabilidade e desempenho de sistemas e na definição de LMI e suas propriedades. Ainda nesse capítulo são desenvolvidos alguns exemplos para ilustrar como representar um problema em forma de LMIs. O capítulo (4) apresenta a metodologia de projeto proposta nesse trabalho, aplicada primeiramente em um sistema comutado mais simples, para que o leitor possa melhor compreendê-la. Após isso, o projeto de controle é então realizado para o motor de indução trifásico. No apêndice (A) fornecemos os dados do motor usados em simulações.

Capítulo 2

Motor de Indução e Acionamento

2.1 Introdução

O motor de indução ou motor assíncrono é o dispositivo de conversão eletromecânica em corrente alternada mais largamente usado, devido à sua simples estrutura, baixo custo e alta confiabilidade. O seu controle é significativamente mais desafiador, se comparado ao controle do motor de corrente contínua. Isso se deve ao fato da estrutura ser não-linear e multivariável.

Assim, os motores de indução foram utilizados durante muito tempo, em acionamentos de baixo desempenho. Os acionamentos de alto desempenho eram dominados pelas máquinas de corrente contínua (*dc*), devido à possibilidade de obtenção de modelos lineares para longas faixas em torno de um ponto de operação, e a estrutura bastante simples, facilitando o projeto e a implementação de controladores.

Entretanto, as máquinas *dc* possuem desvantagens como, custos elevados, necessidade de manutenção mais freqüente e utilização restrita para alguns ambientes. Por outro lado, os motores de indução são mais baratos, necessitam de muito pouca manutenção e podem ser usados em ambientes diversos.

Somente com o surgimento, na década de 70, da teoria de controle vetorial, é que se teve ferramentas para um controle preciso das máquinas de corrente alternada. Adicionalmente, a partir da década de 80, com o desenvolvimento dos componentes eletrônicos, o motor de indução começou a surgir como uma alternativa em aplicações de alto desempenho dinâmico.

Este capítulo apresenta a modelagem de um motor de indução trifásico. Nessa modelagem, inclui-se a transformação de coordenadas, usada para se chegar no modelo do motor por representação de estados, que será usada no presente trabalho. Em seguida é apresentado

o inversor de tensão, que é usado no acionamento do motor de indução. O capítulo encerra apresentando o modelo final do motor, considerando o acionamento.

2.2 Modelagem do Motor de Indução

O motor de indução, devido às suas características construtivas e sua natureza de funcionamento, é um sistema de significativa complexidade em termos de análise e de modelagem.

Entretanto, diversos estudos relacionados ao controle do motor de indução já foram feitos. Na literatura, pode-se encontrar diversas formas distintas da modelagem desta máquina para o propósito de controle. Obviamente que essas diferentes formas de representação do modelo relacionam-se entre si por mudanças de variáveis.

2.2.1 Modelo trifásico

O modelo trifásico é desenvolvido baseado nas equações de circuitos da máquina. Mais tarde serão obtidos modelos bifásicos através do uso de uma transformação trifásica-bifásica geral, que muda o sistema de representação trifásica, estabelecido em dois referenciais distintos, para uma representação bifásica num único referencial.

O modelo apresentado aqui foi obtido através de uma compilação das referências [Bar85] e [dSM96] e é válido para as seguintes hipóteses simplificadoras:

- enrolamentos estáticos idênticos e igualmente defasados entre si;
- enrolamentos rotóricos idênticos e igualmente defasados entre si;
- entreferro constante;
- material ferromagnético imune à saturação;
- densidade de fluxo magnético no entreferro só apresenta componente radial e sua distribuição espacial é senoidal;
- sem perdas magnéticas.

A figura (2.1) ilustra uma representação do motor de indução trifásico.

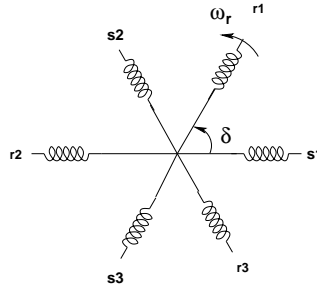


Figura 2.1: Esquema da máquina trifásica.

Onde $s1$, $s2$ e $s3$ representam as fases do estator; $r1$, $r2$ e $r3$ as fases do rotor e ω_r é a velocidade angular mecânica do rotor. A posição angular elétrica do rotor é dada por

$$\delta = \int v\omega_r dt + \delta_0$$

onde v é o número de pares de pólos da máquina e δ_0 é a posição inicial.

As hipóteses simplificativas adotadas anteriormente, permite escrever as seguintes relações sobre os parâmetros do motor,

$$L_{s1}^{123} = L_{s2}^{123} = L_{s3}^{123} = L_s^{123}$$

$$L_{r1}^{123} = L_{r2}^{123} = L_{r3}^{123} = L_r^{123}$$

$$M_{s12} = M_{s13} = M_{s23} = M_s$$

$$M_{r12} = M_{r13} = M_{r23} = M_r$$

$$R_{s1} = R_{s2} = R_{s3} = R_s$$

$$R_{r1} = R_{r2} = R_{r3} = R_r$$

onde

L_s^{123} = indutância do estator por fase;

L_r^{123} = indutância do rotor por fase;

M_s = indutância mútua entre duas fases do estator;

M_r = indutância mútua entre duas fases do rotor;

R_s = resistência do estator por fase;

R_r = resistência do rotor por fase;

As indutâncias mútuas entre estator e rotor são funções senoidais da posição angular δ , como segue:

$$\begin{aligned}
M_{s1r1} &= M_{sr} \cos \delta & M_{s1r2} &= M_{sr} \cos(\delta + \frac{2\pi}{3}) & M_{s1r3} &= M_{sr} \cos(\delta - \frac{2\pi}{3}) \\
M_{s2r1} &= M_{sr} \cos(\delta - \frac{2\pi}{3}) & M_{s2r2} &= M_{sr} \cos \delta & M_{s2r3} &= M_{sr} \cos(\delta + \frac{2\pi}{3}) \\
M_{s3r1} &= M_{sr} \cos(\delta + \frac{2\pi}{3}) & M_{s3r2} &= M_{sr} \cos(\delta - \frac{2\pi}{3}) & M_{s3r3} &= M_{sr} \cos \delta
\end{aligned}$$

Aplicando as leis da física nos circuitos elétricos do estator e rotor, figura (2.2), chega-se nas seguintes equações em forma matricial:

$$\mathbf{V}_s = \mathbf{R}_s \mathbf{I}_s + \dot{\Phi}_s \quad (2.1)$$

$$\mathbf{V}_r = \mathbf{R}_r \mathbf{I}_r + \dot{\Phi}_r \quad (2.2)$$

onde

$$\mathbf{V}_s = [V_{s1} \quad V_{s2} \quad V_{s3}]^T \quad \mathbf{V}_r = [V_{r1} \quad V_{r2} \quad V_{r3}]^T \quad (2.3)$$

$$\mathbf{I}_s = [i_{s1} \quad i_{s2} \quad i_{s3}]^T \quad \mathbf{I}_r = [i_{r1} \quad i_{r2} \quad i_{r3}]^T \quad (2.4)$$

$$\Phi_s = [\Phi_{s1} \quad \Phi_{s2} \quad \Phi_{s3}]^T \quad \Phi_r = [\Phi_{r1} \quad \Phi_{r2} \quad \Phi_{r3}]^T \quad (2.5)$$

$$\mathbf{R}_s = \begin{bmatrix} R_s & 0 & 0 \\ 0 & R_s & 0 \\ 0 & 0 & R_s \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_r = \begin{bmatrix} R_r & 0 & 0 \\ 0 & R_r & 0 \\ 0 & 0 & R_r \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

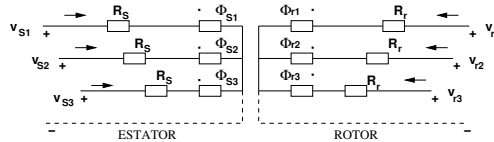


Figura 2.2: Representação dos circuitos do estator e rotor.

Nas equações acima, Φ_s e Φ_r são os vetores de fluxo enlaçado com os enrolamentos do estator e do rotor, respectivamente. \mathbf{V}_s e \mathbf{V}_r são os vetores de tensão no estator e rotor, respectivamente. \mathbf{I}_s e \mathbf{I}_r , os vetores de corrente no estator e no rotor. \mathbf{R}_s é a matriz de resistências do estator e \mathbf{R}_r é a matriz de resistências do rotor.

Os vetores do fluxo podem ser escritos como

$$\Phi_s = \mathbf{L}_{ss} \mathbf{I}_s + \mathbf{M}_{sr} \mathbf{I}_r \quad (2.7)$$

$$\Phi_r = \mathbf{L}_{rr} \mathbf{I}_r + \mathbf{M}_{rs} \mathbf{I}_s \quad (2.8)$$

onde \mathbf{L}_{ss} e \mathbf{L}_{rr} são as matrizes de indutâncias do estator e rotor, respectivamente. Essas matrizes são conhecidas como matrizes circulantes simétricas.

$$\mathbf{L}_{ss} = \begin{bmatrix} L_s^{123} & M_s & M_s \\ M_s & L_s^{123} & M_s \\ M_s & M_s & L_s^{123} \end{bmatrix} \quad \mathbf{L}_{rr} = \begin{bmatrix} L_r^{123} & M_r & M_r \\ M_r & L_r^{123} & M_r \\ M_r & M_r & L_r^{123} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

$\mathbf{M}_{rs} = \mathbf{M}_{sr}^T$ são as matrizes de indutâncias mútuas—rotor-estator, estator-rotor.

$$\mathbf{M}_{sr} = M_{sr} \begin{bmatrix} \cos \delta & \cos(\delta + \frac{2\pi}{3}) & \cos(\delta - \frac{2\pi}{3}) \\ \cos(\delta - \frac{2\pi}{3}) & \cos \delta & \cos(\delta + \frac{2\pi}{3}) \\ \cos(\delta + \frac{2\pi}{3}) & \cos(\delta - \frac{2\pi}{3}) & \cos \delta \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Derivando no tempo as equações (2.7) e (2.8), vem

$$\dot{\Phi}_s = \mathbf{L}_{ss}\dot{\mathbf{I}}_s + \mathbf{M}_{sr}\dot{\mathbf{I}}_r + \dot{\delta} \frac{\partial \mathbf{M}_{sr}}{\partial \delta} \mathbf{I}_r \quad (2.11)$$

$$\dot{\Phi}_r = \mathbf{L}_{rr}\dot{\mathbf{I}}_r + \mathbf{M}_{rs}\dot{\mathbf{I}}_s + \dot{\delta} \frac{\partial \mathbf{M}_{rs}}{\partial \delta} \mathbf{I}_s \quad (2.12)$$

Substituindo (2.11) em (2.1) e (2.12) em (2.2), vem

$$\mathbf{V}_s = \mathbf{R}_s \mathbf{I}_s + \mathbf{L}_{ss}\dot{\mathbf{I}}_s + \mathbf{M}_{sr}\dot{\mathbf{I}}_r + \dot{\delta} \frac{\partial \mathbf{M}_{sr}}{\partial \delta} \mathbf{I}_r \quad (2.13)$$

$$\mathbf{V}_r = \mathbf{R}_r \mathbf{I}_r + \mathbf{L}_{rr}\dot{\mathbf{I}}_r + \mathbf{M}_{rs}\dot{\mathbf{I}}_s + \dot{\delta} \frac{\partial \mathbf{M}_{rs}}{\partial \delta} \mathbf{I}_s \quad (2.14)$$

A dinâmica mecânica do sistema é modelada por:

$$\tau_m = b\omega_r + J\dot{\omega}_r + \tau_c \quad (2.15)$$

onde τ_m é o torque eletromagnético, $b\omega_r$ é o torque associado às perdas mecânicas do motor, $J\dot{\omega}_r$ é o torque acelerante— J é o momento de inércia e τ_c é o torque de carga.

A potência total que o sistema absorve pode ser dada por

$$P_t = \mathbf{I}_s^T \mathbf{V}_s + \mathbf{I}_r^T \mathbf{V}_r \quad (2.16)$$

Substituindo as equações das tensões, (2.13) e (2.14), em (2.16), resulta

$$\begin{aligned} P_t = & \mathbf{I}_s^T \mathbf{R}_s \mathbf{I}_s + \mathbf{I}_s^T \mathbf{L}_{ss} \dot{\mathbf{I}}_s + \mathbf{I}_s^T \mathbf{M}_{sr} \dot{\mathbf{I}}_r + \mathbf{I}_s^T \frac{\partial \mathbf{M}_{sr}}{\partial \delta} \mathbf{I}_r \dot{\delta} + \\ & + \mathbf{I}_r^T \mathbf{R}_r \mathbf{I}_r + \mathbf{I}_r^T \mathbf{L}_{rr} \dot{\mathbf{I}}_r + \mathbf{I}_r^T \mathbf{M}_{rs} \dot{\mathbf{I}}_s + \mathbf{I}_r^T \frac{\partial \mathbf{M}_{rs}}{\partial \delta} \mathbf{I}_s \dot{\delta} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Da potência total que o motor absorve, uma parte é dissipada em calor, outra fica armazenada no campo magnético e o restante se transforma em torque eletromagnético. As partes correspondentes às perdas joule são identificadas pelos termos $\mathbf{I}_s^T \mathbf{R}_s \mathbf{I}_s$. A energia armazenada no campo magnético pode ser escrita como:

$$W = \frac{1}{2} \mathbf{I}_s^T \mathbf{L}_{ss} \mathbf{I}_s + \frac{1}{2} \mathbf{I}_r^T \mathbf{L}_{rr} \mathbf{I}_r + \frac{1}{2} \mathbf{I}_s^T \mathbf{M}_{sr} \mathbf{I}_r + \frac{1}{2} \mathbf{I}_r^T \mathbf{M}_{rs} \mathbf{I}_s \quad (2.18)$$

Assim, a parcela da potência de entrada que é utilizada para armazenar energia no campo magnético, é dada por

$$\begin{aligned} \dot{W} = & \mathbf{I}_s^T \mathbf{L}_{ss} \dot{\mathbf{I}}_s + \mathbf{I}_r^T \mathbf{L}_{rr} \dot{\mathbf{I}}_r + \frac{1}{2} \mathbf{I}_s^T \mathbf{M}_{sr} \dot{\mathbf{I}}_r + \frac{1}{2} \mathbf{I}_r^T \mathbf{M}_{rs} \dot{\mathbf{I}}_s + \frac{1}{2} \mathbf{I}_s^T \frac{\partial \mathbf{M}_{sr}}{\partial \delta} \mathbf{I}_r \dot{\delta} + \\ & + \frac{1}{2} \mathbf{I}_r^T \mathbf{M}_{rs} \dot{\mathbf{I}}_s + \frac{1}{2} \mathbf{I}_s^T \mathbf{M}_{sr} \dot{\mathbf{I}}_r + \frac{1}{2} \mathbf{I}_r^T \frac{\partial \mathbf{M}_{rs}}{\partial \delta} \mathbf{I}_s \dot{\delta} \end{aligned} \quad (2.19)$$

e a equação (2.17) pode ser reescrita como

$$P_t = \mathbf{I}_s^T \mathbf{R}_s \mathbf{I}_s + \mathbf{I}_r^T \mathbf{R}_r \mathbf{I}_r + \dot{W} + \frac{1}{2} \mathbf{I}_s^T \frac{\partial \mathbf{M}_{sr}}{\partial \delta} \mathbf{I}_r \dot{\delta} + \frac{1}{2} \mathbf{I}_r^T \frac{\partial \mathbf{M}_{rs}}{\partial \delta} \mathbf{I}_s \dot{\delta} \quad (2.20)$$

Como

$$\mathbf{I}_s^T \frac{\partial \mathbf{M}_{sr}}{\partial \delta} \mathbf{I}_r \dot{\delta} = \mathbf{I}_r^T \frac{\partial \mathbf{M}_{rs}}{\partial \delta} \mathbf{I}_s \dot{\delta}, \quad (2.21)$$

a equação da potência absorvida toma a forma

$$P_t = \mathbf{I}_s^T \mathbf{R}_s \mathbf{I}_s + \mathbf{I}_r^T \mathbf{R}_r \mathbf{I}_r + \dot{W} + \mathbf{I}_s^T \frac{\partial \mathbf{M}_{sr}}{\partial \delta} \mathbf{I}_r \dot{\delta} \quad (2.22)$$

de onde se identifica que o termo

$$\mathbf{I}_s^T \frac{\partial \mathbf{M}_{sr}}{\partial \delta} \mathbf{I}_r \dot{\delta}, \quad (2.23)$$

corresponde à potência mecânica, P_m , associada ao torque eletromagnético. Como o torque é relacionado com a potência por

$$\tau_m = \frac{P_m}{\omega_r}, \quad (2.24)$$

logo

$$\tau_m = \frac{\mathbf{I}_r^T \frac{\partial \mathbf{M}_{rs}}{\partial \delta} \mathbf{I}_s \dot{\delta}}{\omega_r} \quad (2.25)$$

Usando agora a equação que define a posição angular elétrica do rotor, colocada abaixo,

$$\omega_r = \frac{\dot{\delta}}{\nu} \quad (2.26)$$

pode-se obter uma outra expressão para o torque, como segue:

$$\tau_m = \nu \mathbf{I}_s^T \frac{\partial \mathbf{M}_{sr}}{\partial \delta} \mathbf{I}_r \quad (2.27)$$

Substituindo (2.27) em (2.15), a dinâmica mecânica agora é dada por

$$\nu \mathbf{I}_s^T \frac{\partial \mathbf{M}_{sr}}{\partial \delta} \mathbf{I}_r = b\omega_r + J\dot{\omega}_r + \tau_c \quad (2.28)$$

Enfim, o modelo do motor de indução trifásico é dado pelas equações (2.13), (2.14) e (2.28), agrupadas abaixo :

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_s &= \mathbf{R}_s \mathbf{I}_s + \mathbf{L}_{ss} \dot{\mathbf{I}}_s + \mathbf{M}_{sr} \dot{\mathbf{I}}_r + \dot{\delta} \frac{\partial \mathbf{M}_{sr}}{\partial \delta} \mathbf{I}_r \\ \mathbf{V}_r &= \mathbf{R}_r \mathbf{I}_r + \mathbf{L}_{rr} \dot{\mathbf{I}}_r + \mathbf{M}_{rs} \dot{\mathbf{I}}_s + \dot{\delta} \frac{\partial \mathbf{M}_{rs}}{\partial \delta} \mathbf{I}_s \\ \nu \mathbf{I}_s^T \frac{\partial \mathbf{M}_{sr}}{\partial \delta} \mathbf{I}_r &= b\omega_r + J\dot{\omega}_r + \tau_c \end{aligned} \quad (2.29)$$

2.3 Sistema de Coordenadas

O modelo trifásico desenvolvido na seção anterior é bastante complexo. Isto se deve principalmente pelo fato da indutância mútua estator-rotor ser dependente da posição do rotor, a qual varia no tempo.

Porém, essa inconveniente dependência temporal pode ser eliminada pelo uso de transformações de sistema de coordenadas, isto é, uma transformação de variáveis. Quem primeiro realizou uma transformação de variável para análise de motores foi R.H. Park. Em seu artigo, Park apresentou uma transformação que relacionava variáveis associadas aos enrolamentos do estator (tensão, corrente e fluxo) de uma máquina síncrona com variáveis associadas à enrolamentos fictícios girando com o rotor. Esse estudo, que revolucionou o conhecimento sobre os motores elétricos, tinha como propriedade a eliminação das indutâncias variantes no tempo que aparecem nas equações.

Vários estudos se sucederam, sempre na tentativa de eliminar a dependência temporal das indutâncias mútuas. Mas P. C. Krause mostrou que todas as transformações feitas até então, eram casos particulares de uma transformação geral onde o referencial está girando arbitrariamente.

2.3.1 Transformação geral trifásica–bifásica

A figura (2.3) mostra uma representação de um sistema trifásico (123) e de um sistema bifásico ($d_g q_g$).

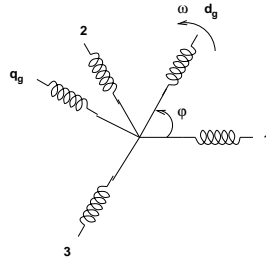


Figura 2.3: Representação de um sistema trifásico e de um sistema bifásico.

A transformação trifásica–bifásica consiste em referenciar as variáveis do sistema trifásico, tanto do estator como do rotor, em um mesmo sistema de coordenadas composto de dois eixos em quadratura e de um eixo chamado eixo de sequência zero. As variáveis nesse novo sistema são referenciadas pelos índices d_g , q_g e o representando os eixos direto, de quadratura e de sequência zero, respectivamente. O eixo de sequência zero é omitido devido ao fato de as tensões de alimentação do motor terem sido supostas simétricas, assim, as tensões em tal eixo são nulas.

O ângulo elétrico, φ , da posição do eixo direto em relação ao eixo 1 do sistema trifásico é dado por:

$$\varphi = \int v\omega dt + \varphi_0$$

onde φ_0 é a posição inicial do sistema bifásico em relação ao sistema trifásico e ω é a velocidade angular mecânica entre os sistemas.

Será estabelecida uma transformação que permita encontrar F_{d_g} e F_{q_g} em função de F_1, F_2 e F_3 , de sorte que a estrutura bifásica produza uma força magnetomotriz resultante com efeito semelhante à resultante da estrutura trifásica. Decompondo-se vetorialmente F_1, F_2 e F_3 segundo os eixos d_g e q_g , chega-se em:

$$\begin{bmatrix} F_{d_g} \\ F_{q_g} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \cos(\varphi - \frac{2\pi}{3}) & \cos(\varphi + \frac{2\pi}{3}) \\ -\sin \varphi & -\sin(\varphi - \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\varphi + \frac{2\pi}{3}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

A força magnetomotriz do sistema bifásico é

$$\begin{bmatrix} F_{d_g} \\ F_{q_g} \end{bmatrix} = n_2 \begin{bmatrix} i_{d_g} \\ i_{q_g} \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

onde n_2 é o número de espiras e i_{d_g} e i_{q_g} são as correntes bifásicas. A força magnetomotriz gerada pelo sistema trifásico é

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = n_3 \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

onde n_3 representa o número de espiras e i_1, i_2 e i_3 as correntes trifásicas. Com isso pode-se definir a transformação das correntes de um sistema para outro como:

$$\begin{bmatrix} i_{d_g} \\ i_{q_g} \end{bmatrix} = \frac{n_3}{n_2} \begin{bmatrix} \cos \varphi & \cos(\varphi - \frac{2\pi}{3}) & \cos(\varphi + \frac{2\pi}{3}) \\ -\sin \varphi & -\sin(\varphi - \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\varphi + \frac{2\pi}{3}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

Para fins de inversão dessa transformação, define-se uma corrente, i_0 como sendo

$$i_0 = a \times \frac{n_3}{n_2} (i_1 + i_2 + i_3) \quad (2.34)$$

onde a é uma constante a ser definida.

Substituindo (2.34) em (2.33), vem

$$\begin{bmatrix} i_{d_g} \\ i_{q_g} \\ i_0 \end{bmatrix} = \frac{n_3}{n_2} \begin{bmatrix} \cos \varphi & \cos(\varphi - \frac{2\pi}{3}) & \cos(\varphi + \frac{2\pi}{3}) \\ -\sin \varphi & -\sin(\varphi - \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\varphi + \frac{2\pi}{3}) \\ a & a & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

Logo, a transformação geral trifásica–bifásica fica:

$$\mathbf{K} = \frac{n_3}{n_2} \begin{bmatrix} \cos \varphi & \cos(\varphi - \frac{2\pi}{3}) & \cos(\varphi + \frac{2\pi}{3}) \\ -\sin \varphi & -\sin(\varphi - \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\varphi + \frac{2\pi}{3}) \\ a & a & a \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

Ainda resta determinar os valores de a e a relação $\frac{n_3}{n_2}$. Conforme colocado em [Bar85], para que a transformação seja invariante em potência é necessário que seja ortogonal ($\mathbf{K}^{-1} = \mathbf{K}^T$). Então,

$$\left(\frac{n_3}{n_2}\right)^2 \begin{bmatrix} \cos \varphi & \cos(\varphi - \frac{2\pi}{3}) & \cos(\varphi + \frac{2\pi}{3}) \\ -\sin \varphi & -\sin(\varphi - \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\varphi + \frac{2\pi}{3}) \\ a & a & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & a \\ \cos(\varphi - \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\varphi - \frac{2\pi}{3}) & a \\ \cos(\varphi + \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\varphi + \frac{2\pi}{3}) & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Desta forma, os valores da relação $\frac{n_3}{n_2}$ e de a são

$$\left(\frac{n_3}{n_2}\right)^2 \frac{3}{2} = 1 \implies \frac{n_3}{n_2} = \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad a = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Finalmente, a transformação geral trifásica–bifásica fica:

$$\mathbf{K} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos \varphi & \cos(\varphi - \frac{2\pi}{3}) & \cos(\varphi + \frac{2\pi}{3}) \\ -\sin \varphi & -\sin(\varphi - \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\varphi + \frac{2\pi}{3}) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

Existem três sistemas de coordenadas bifásicos usuais, os quais são conhecidos como, o sistema de coordenadas estacionário, síncrono e o que gira com o rotor. Assim, a partir do modelo trifásico, pode-se chegar em modelos simplificados em qualquer um dos sistemas de coordenadas bifásicos. E ainda, pode-se fazer transformações entre os sistemas bifásicos.

2.4 Modelos Bifásicos

2.4.1 Transformação do sistema de coordenadas trifásico para o sistema de coordenadas estacionário ($\alpha\beta$)

O objetivo aqui é apresentar a transformação do sistema trifásico para o sistema de coordenadas estacionário. Neste sistema, a velocidade angular do referencial bifásico, ω , é nula. Assim, com $\varphi_0 = 0$, resulta $\varphi = 0$ na transformação das variáveis do estator. Logo, a transformação passa a ser

$$\mathbf{K}_{\alpha\beta}^s = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & -\sqrt{\frac{3}{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

As variáveis se relacionam da seguinte maneira:

$$\mathbf{I}_{\alpha\beta}^s = \mathbf{K}_{\alpha\beta}^s I_s \quad (2.39)$$

$$\mathbf{V}_{\alpha\beta}^s = \mathbf{K}_{\alpha\beta}^s V_s \quad (2.40)$$

$$\phi_{\alpha\beta}^s = \mathbf{K}_{\alpha\beta}^s \phi_s \quad (2.41)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{\alpha\beta}^s &= [i_{\alpha}^s \quad i_{\beta}^s \quad i_0^s]^T \\ \mathbf{V}_{\alpha\beta}^s &= [v_{\alpha}^s \quad v_{\beta}^s \quad v_0^s]^T \\ \phi_{\alpha\beta}^s &= [\phi_{\alpha}^s \quad \phi_{\beta}^s \quad \phi_0^s]^T \end{aligned}$$

Para a transformação das variáveis do rotor, o ângulo da posição entre os referenciais, φ , toma o valor $-\varphi_r$. A matriz de transformação fica

$$\mathbf{K}_{\alpha\beta}^r = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos(-\varphi_r) & \cos(-\varphi_r - \frac{2\pi}{3}) & \cos(-\varphi_r + \frac{2\pi}{3}) \\ -\sin(-\varphi_r) & -\sin(-\varphi_r - \frac{2\pi}{3}) & -\sin(-\varphi_r + \frac{2\pi}{3}) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

As variáveis do rotor se relacionam por

$$\mathbf{I}_{\alpha\beta}^r = \mathbf{K}_{\alpha\beta}^r I_r \quad (2.43)$$

$$\mathbf{V}_{\alpha\beta}^r = \mathbf{K}_{\alpha\beta}^s V_r \quad (2.44)$$

$$\phi_{\alpha\beta}^r = \mathbf{K}_{\alpha\beta}^r \phi_r \quad (2.45)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{\alpha\beta}^r &= [i_{\alpha}^r \quad i_{\beta}^r \quad i_0^r]^T \\ \mathbf{V}_{\alpha\beta}^r &= [v_{\alpha}^r \quad v_{\beta}^r \quad v_0^r]^T \\ \phi_{\alpha\beta}^r &= [\phi_{\alpha}^r \quad \phi_{\beta}^r \quad \phi_0^r]^T \end{aligned}$$

2.4.2 Transformação do sistema de coordenadas trifásico para o sistema de coordenadas síncrono (dq)

Nesse sistema, o referencial bifásico gira na velocidade do campo síncrono. Assim, tem-se $\omega = \omega_s$, onde ω_s é a velocidade síncrona mecânica. Na transformação das grandezas associadas ao estator, considerando $\varphi_0 = 0$, o ângulo elétrico da posição entre os referenciais, φ , assume o valor $\varphi_s = \int v \omega_s dt$. A transformação fica:

$$\mathbf{K}_{dq}^s = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos(\varphi_s) & \cos(\varphi_s - \frac{2\pi}{3}) & \cos(\varphi_s + \frac{2\pi}{3}) \\ -\sin(\varphi_s) & -\sin(\varphi_s - \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\varphi_s + \frac{2\pi}{3}) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

As variáveis se relacionam da seguinte maneira:

$$\mathbf{I}_{dq}^s = \mathbf{K}_{dq}^s I_s \quad (2.47)$$

$$\mathbf{V}_{dq}^s = \mathbf{K}_{dq}^s V_s \quad (2.48)$$

$$\phi_{dq}^s = \mathbf{K}_{dq}^s \phi_s \quad (2.49)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{dq}^s &= [i_d^s \quad i_q^s \quad i_0^s]^T \\ \mathbf{V}_{dq}^s &= [v_d^s \quad v_q^s \quad v_0^s]^T \\ \phi_{dq}^s &= [\phi_d^s \quad \phi_q^s \quad \phi_0^s]^T \end{aligned}$$

Para a transformação das variáveis do rotor, o ângulo da posição entre os referenciais, φ , toma o valor $\varphi = \varphi_s - \varphi_r$, pois ω assume o valor $\omega = \omega_s - \omega_r$. A matriz de transformação fica portanto,

$$\mathbf{K}_{dq}^r = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos(\varphi_s - \varphi_r) & \cos[(\varphi_s - \varphi_r) - \frac{2\pi}{3}] & \cos[(\varphi_s - \varphi_r) + \frac{2\pi}{3}] \\ -\sin(\varphi_s - \varphi_r) & -\sin[(\varphi_s - \varphi_r) - \frac{2\pi}{3}] & -\sin[(\varphi_s - \varphi_r) + \frac{2\pi}{3}] \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

As variáveis do rotor se relacionam por

$$\mathbf{I}_{dq}^r = \mathbf{K}_{dq}^r I_r \quad (2.51)$$

$$\mathbf{V}_{dq}^r = \mathbf{K}_{dq}^s V_r \quad (2.52)$$

$$\phi_{dq}^r = \mathbf{K}_{dq}^r \phi_r \quad (2.53)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{dq}^r &= [i_d^r \quad i_q^r \quad i_0^r]^T \\ \mathbf{V}_{dq}^r &= [v_d^r \quad v_q^r \quad v_0^r]^T \\ \phi_{dq}^r &= [\phi_d^r \quad \phi_q^r \quad \phi_0^r]^T \end{aligned}$$

2.4.3 Transformação entre os sistemas de coordenadas síncrono e estacionário

A figura (2.4) mostra uma representação dos sistemas de coordenadas síncrono e estacionário. O primeiro possui velocidade angular ω_s com relação ao segundo. O ângulo entre os dois sistemas é $\theta_s = \int v\omega_s dt + \theta_{s0}$, onde θ_{s0} é a posição angular inicial.

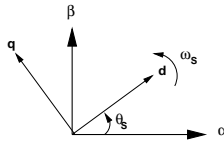


Figura 2.4: Representação dos sistemas de coordenadas síncrono (dq) e estacionário ($\alpha\beta$).

A relação entre as variáveis nos dois sistemas é dada por

$$f_\alpha = f_d \cos \theta_s - f_q \sin \theta_s \quad (2.54)$$

$$f_\beta = f_d \sin \theta_s + f_q \cos \theta_s \quad (2.55)$$

$$f_0^{\alpha\beta} = f_0^{dq} \quad (2.56)$$

o que permite escrever,

$$\mathbf{F}_{\alpha\beta} = \mathbf{K}_{\alpha\beta}^{\text{dq}} \mathbf{F}_{\text{dq}}$$

onde $\mathbf{F}_{\text{dq}} = [f_d \ f_q \ f_0]^T$ representa o vetor de variáveis genéricas no sistema de coordenadas síncrono. E a matriz de transformação do sistema de coordenadas síncrono para o sistema de coordenadas estacionário é

$$\mathbf{K}_{\alpha\beta}^{\text{dq}} = \begin{bmatrix} \cos \theta_s & -\sin \theta_s & 0 \\ \sin \theta_s & \cos \theta_s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

2.4.4 Modelo no sistema de coordenadas síncrono

Este modelo é obtido pela aplicação das transformações

$$\mathbf{K}_{\text{dq}}^{\text{s}}, \quad \mathbf{K}_{\text{dq}}^{\text{r}}, \quad (\mathbf{K}_{\text{dq}}^{\text{s}})^{-1}, \quad (\mathbf{K}_{\text{dq}}^{\text{r}})^{-1}$$

às equações do modelo trifásico.

Aplicando a transformação na equação do fluxo do estator, vem

$$\mathbf{K}_{\text{dq}}^{\text{s}} \Phi_s = \mathbf{K}_{\text{dq}}^{\text{s}} \mathbf{L}_{\text{ss}} \mathbf{I}_s + \mathbf{K}_{\text{dq}}^{\text{s}} \mathbf{M}_{\text{sr}} \mathbf{I}_r \quad (2.58)$$

Sabendo que

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_s &= (\mathbf{K}_{\text{dq}}^{\text{s}})^{-1} \mathbf{I}_{\text{dq}}^{\text{s}} \\ \mathbf{I}_r &= (\mathbf{K}_{\text{dq}}^{\text{r}})^{-1} \mathbf{I}_{\text{dq}}^{\text{r}} \end{aligned}$$

onde $\mathbf{I}_{\text{dq}}^{\text{s}}$ e $\mathbf{I}_{\text{dq}}^{\text{r}}$ representam os vetores das correntes do estator e do rotor no sistema de coordenadas estacionário, respectivamente. Substituindo em (2.58), vem

$$\Phi_{dq}^{\text{s}} = \mathbf{K}_{\text{dq}}^{\text{s}} \mathbf{L}_{\text{ss}} (\mathbf{K}_{\text{dq}}^{\text{s}})^{-1} \mathbf{I}_{\text{dq}}^{\text{s}} + \mathbf{K}_{\text{dq}}^{\text{s}} \mathbf{M}_{\text{sr}} (\mathbf{K}_{\text{dq}}^{\text{r}})^{-1} \mathbf{I}_{\text{dq}}^{\text{r}} \quad (2.59)$$

A matriz de indutâncias do estator transformada para o referencial síncrono, é dada por:

$$\mathbf{K}_{\text{dq}}^{\text{s}} \mathbf{L}_{\text{ss}} (\mathbf{K}_{\text{dq}}^{\text{s}})^{-1} = \begin{bmatrix} L_s^{123} - M_s & 0 & 0 \\ 0 & L_s^{123} - M_s & 0 \\ 0 & 0 & L_s^{123} + 2M_s \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

e a matriz de indutâncias mútuas estator-rotor por

$$\mathbf{K}_{\text{dq}}^{\text{s}} \mathbf{M}_{\text{sr}} (\mathbf{K}_{\text{dq}}^{\text{r}})^{-1} = \frac{3}{2} M_{sr} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

Assim, os fluxos do estator ficam

$$\begin{bmatrix} \phi_d^s \\ \phi_q^s \\ \phi_0^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_s^{123} - M_s & 0 & 0 \\ 0 & L_s^{123} - M_s & 0 \\ 0 & 0 & L_s^{123} + 2M_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d^s \\ i_q^s \\ i_0^s \end{bmatrix} + \frac{3}{2}M_{sr} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d^r \\ i_q^r \\ i_0^r \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

Para o caso de alimentação do estator simétrica, tem-se $i_0^s = 0$ e $i_0^r = 0$. Os fluxos do rotor são obtidos pelo mesmo procedimento, através da aplicação da transformação \mathbf{K}_{dq}^r . O resultado final é apresentado abaixo:

$$\begin{bmatrix} \phi_d^r \\ \phi_q^r \\ \phi_0^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_r^{123} - M_r & 0 & 0 \\ 0 & L_r^{123} - M_r & 0 \\ 0 & 0 & L_r^{123} + 2M_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d^r \\ i_q^r \\ i_0^r \end{bmatrix} + \frac{3}{2}M_{sr} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d^s \\ i_q^s \\ i_0^s \end{bmatrix} \quad (2.63)$$

As equações de tensões são obtidas de (2.1) e (2.2). Para o estator tem-se

$$\mathbf{K}_{dq}^s \mathbf{V}_s = \mathbf{K}_{dq}^s \mathbf{R}_s \mathbf{I}_s + \mathbf{K}_{dq}^s \dot{\phi}_s \quad (2.64)$$

reescrevendo

$$\mathbf{V}_{dq}^s = \mathbf{K}_{dq}^s \mathbf{R}_s (\mathbf{K}_{dq}^s)^{-1} \mathbf{I}_{dq}^s + \mathbf{K}_{dq}^s \dot{\phi}_s \quad (2.65)$$

onde $\mathbf{K}_{dq}^s \mathbf{R}_s (\mathbf{K}_{dq}^s)^{-1} = \mathbf{R}_s$.

A transformação da derivada temporal do fluxo do estator é

$$\mathbf{K}_{dq}^s \dot{\phi}_s = \frac{d}{dt} (\mathbf{K}_{dq}^s \phi_s) - \phi_s \frac{d}{dt} \mathbf{K}_{dq}^s \quad (2.66)$$

onde

$$\phi_s \frac{d}{dt} \mathbf{K}_{dq}^s = \begin{bmatrix} \phi_q^s \\ -\phi_d^s \\ 0 \end{bmatrix} v \omega_s \quad (2.67)$$

Assim, fazendo as substituições, obtêm-se a equação de tensão do estator no referencial síncrono,

$$\mathbf{V}_{dq}^s = \mathbf{R}_s \mathbf{I}_{dq}^s + \dot{\phi}_{dq}^s - \begin{bmatrix} \phi_q^s \\ -\phi_d^s \\ 0 \end{bmatrix} v \omega_s \quad (2.68)$$

Para se obter a equação de tensão do rotor, aplica-se o mesmo procedimento, com o cuidado de substituir ω por $\omega_s - \omega_r$. O resultado final é apresentado abaixo:

$$\mathbf{V}_{dq}^r = \mathbf{R}_r \mathbf{I}_{dq}^r + \dot{\phi}_{dq}^r - \begin{bmatrix} \phi_q^r \\ -\phi_d^r \\ 0 \end{bmatrix} v (\omega_s - \omega_r) \quad (2.69)$$

Resta agora determinar a equação do torque eletromagnético no referencial síncrono. Para isso, aplica-se a transformação na equação (2.28),

$$v(\mathbf{I}_{dq}^s)^T [(\mathbf{K}_{dq}^s)^{-1}]^T \frac{\partial \mathbf{M}_{sr}}{\partial \delta} (\mathbf{K}_{dq}^r)^{-1} \mathbf{I}_{dq}^r = b\omega_r + J\dot{\omega}_r + \tau_c \quad (2.70)$$

mas \mathbf{K}_{dq}^s é ortogonal, logo

$$v(\mathbf{I}_{dq}^s)^T \mathbf{K}_{dq}^s \frac{\partial \mathbf{M}_{sr}}{\partial \delta} (\mathbf{K}_{dq}^r)^{-1} \mathbf{I}_{dq}^r = b\omega_r + J\dot{\omega}_r + \tau_c \quad (2.71)$$

onde

$$\mathbf{K}_{dq}^s \frac{\partial \mathbf{M}_{sr}}{\partial \delta} (\mathbf{K}_{dq}^r)^{-1} = \frac{3}{2} M_{sr} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Assim, a equação do torque fica

$$v \frac{3}{2} M_{sr} \begin{bmatrix} i_d^s & i_q^s & i_0^s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d^r \\ i_q^r \\ i_0^r \end{bmatrix} = b\omega_r + J\dot{\omega}_r + \tau_c \quad (2.72)$$

Por fim, as equações que definem o modelo dinâmico do motor de indução simétrico no referencial síncrono, com alimentação equilibrada, estão agrupadas abaixo:

- Dinâmica Elétrica

$$\begin{bmatrix} v_d^s \\ v_q^s \\ v_d^r \\ v_q^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d^s \\ i_q^s \\ i_d^r \\ i_q^r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\phi}_d^s \\ \dot{\phi}_q^s \\ \dot{\phi}_d^r \\ \dot{\phi}_q^r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\phi_q^s v \omega_s \\ \phi_d^s v \omega_s \\ -\phi_q^r v (\omega_s - \omega_r) \\ \phi_d^r v (\omega_s - \omega_r) \end{bmatrix} \quad (2.73)$$

- Dinâmica Mecânica

$$v \frac{3}{2} M_{sr} (i_q^s i_d^r - i_d^s i_q^r) = b\omega_r + J\dot{\omega}_r + \tau_c \quad (2.74)$$

2.4.5 Modelo no sistema de coordenadas estacionário

Este modelo pode ser obtido pela aplicação da transformação que rotaciona o sistema de coordenadas síncrono para o sistema de coordenadas estacionário, $\mathbf{K}_{\alpha\beta}^{\text{dq}}$ (ver subseção (2.4.3)), nas equações (2.62), (2.63), (2.73) e (2.74). Para as tensões têm-se,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\alpha\beta}^{\text{dq}} & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & \mathbf{K}_{\alpha\beta}^{\text{dq}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{\text{dq}}^{\text{s}} \\ \mathbf{V}_{\text{dq}}^{\text{r}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\alpha\beta}^{\text{dq}} & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & \mathbf{K}_{\alpha\beta}^{\text{dq}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{\text{s}} & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & \mathbf{R}_{\text{r}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\mathbf{K}_{\alpha\beta}^{\text{dq}})^{-1} & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & (\mathbf{K}_{\alpha\beta}^{\text{dq}})^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{\alpha\beta}^{\text{s}} \\ \mathbf{I}_{\alpha\beta}^{\text{r}} \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\alpha\beta}^{\text{dq}} & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & \mathbf{K}_{\alpha\beta}^{\text{dq}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi}_{dq}^{\text{s}} \\ \dot{\phi}_{dq}^{\text{r}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\alpha\beta}^{\text{dq}} & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & \mathbf{K}_{\alpha\beta}^{\text{dq}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\phi_q^{\text{s}} \nu \omega_{\text{s}} \\ \phi_d^{\text{s}} \nu \omega_{\text{s}} \\ -\phi_q^{\text{r}} \nu (\omega_{\text{s}} - \omega_{\text{r}}) \\ \phi_d^{\text{r}} \nu (\omega_{\text{s}} - \omega_{\text{r}}) \end{bmatrix} \quad (2.75) \end{aligned}$$

Tendo em vista que,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\alpha\beta}^{\text{dq}} & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & \mathbf{K}_{\alpha\beta}^{\text{dq}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{\text{dq}}^{\text{s}} \\ \mathbf{V}_{\text{dq}}^{\text{r}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{\alpha\beta}^{\text{s}} \\ \mathbf{V}_{\alpha\beta}^{\text{r}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\alpha\beta}^{\text{dq}} & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & \mathbf{K}_{\alpha\beta}^{\text{dq}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{\text{s}} & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & \mathbf{R}_{\text{r}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\mathbf{K}_{\alpha\beta}^{\text{dq}})^{-1} & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & (\mathbf{K}_{\alpha\beta}^{\text{dq}})^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{\text{s}} & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & \mathbf{R}_{\text{r}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\alpha\beta}^{\text{dq}} & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & \mathbf{K}_{\alpha\beta}^{\text{dq}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi}_{dq}^{\text{s}} \\ \dot{\phi}_{dq}^{\text{r}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\phi}_{\alpha\beta}^{\text{s}} \\ \dot{\phi}_{\alpha\beta}^{\text{r}} \end{bmatrix} - \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\alpha\beta}^{\text{dq}} & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & \mathbf{K}_{\alpha\beta}^{\text{dq}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{dq}^{\text{s}} \\ \phi_{dq}^{\text{r}} \end{bmatrix}$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\alpha\beta}^{\text{dq}} & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & \mathbf{K}_{\alpha\beta}^{\text{dq}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{dq}^{\text{s}} \\ \phi_{dq}^{\text{r}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ a_{41} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\alpha\beta}^{\text{dq}} & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & \mathbf{K}_{\alpha\beta}^{\text{dq}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\phi_q^{\text{s}} \nu \omega_{\text{s}} \\ \phi_d^{\text{s}} \nu \omega_{\text{s}} \\ -\phi_q^{\text{r}} \nu (\omega_{\text{s}} - \omega_{\text{r}}) \\ \phi_d^{\text{r}} \nu (\omega_{\text{s}} - \omega_{\text{r}}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \\ b_{41} \end{bmatrix}$$

onde

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= -[\cos(\theta_s)\phi_q^s + \sin(\theta_s)\phi_d^s]v\omega_s \\
 a_{21} &= [-\sin(\theta_s)\phi_q^s + \cos(\theta_s)\phi_d^s]v\omega_s \\
 a_{31} &= -[\cos(\theta_s)\phi_q^r + \sin(\theta_s)\phi_d^r]v\omega_s \\
 a_{41} &= [-\sin(\theta_s)\phi_q^r + \sin(\theta_s)\phi_d^r]v\omega_s \\
 b_{11} &= a_{11} \\
 b_{21} &= a_{21} \\
 b_{31} &= -[\cos(\theta_s)\phi_q^r + \sin(\theta_s)\phi_d^r]v(\omega_s - \omega_r) \\
 b_{41} &= [-\sin(\theta_s)\phi_q^r + \sin(\theta_s)\phi_d^r]v(\omega_s - \omega_r)
 \end{aligned}$$

a equação das tensões no referencial estacionário fica,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_{\alpha\beta}^s \\ \mathbf{V}_{\alpha\beta}^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_s & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & \mathbf{R}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{\alpha\beta}^s \\ \mathbf{I}_{\alpha\beta}^r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\phi}_{\alpha\beta}^s \\ \dot{\phi}_{\alpha\beta}^r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \phi_{\beta}^r v \omega_r \\ -\phi_{\alpha}^r v \omega_r \end{bmatrix} \quad (2.76)$$

Para o fluxo, o resultado é

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\alpha\beta}^{dq} & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & \mathbf{K}_{\alpha\beta}^{dq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{dq}^s \\ \phi_{dq}^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\alpha\beta}^{dq} & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & \mathbf{K}_{\alpha\beta}^{dq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{L}_s & \mathbf{L}_{sr} \\ \mathbf{L}_{sr} & \mathbf{L}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\mathbf{K}_{\alpha\beta}^{dq})^{-1} & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & (\mathbf{K}_{\alpha\beta}^{dq})^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{\alpha\beta}^s \\ \mathbf{I}_{\alpha\beta}^r \end{bmatrix} \quad (2.77)$$

Dado que,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\alpha\beta}^{dq} & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & \mathbf{K}_{\alpha\beta}^{dq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{dq}^s \\ \phi_{dq}^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{\alpha\beta}^s \\ \phi_{\alpha\beta}^r \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\alpha\beta}^{dq} & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & \mathbf{K}_{\alpha\beta}^{dq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{L}_s & \mathbf{L}_{sr} \\ \mathbf{L}_{sr} & \mathbf{L}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\mathbf{K}_{\alpha\beta}^{dq})^{-1} & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & (\mathbf{K}_{\alpha\beta}^{dq})^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_s & \mathbf{L}_{sr} \\ \mathbf{L}_{sr} & \mathbf{L}_r \end{bmatrix}$$

o fluxo no referencial estacionário fica,

$$\begin{bmatrix} \phi_{\alpha\beta}^s \\ \phi_{\alpha\beta}^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_s & \mathbf{L}_{sr} \\ \mathbf{L}_{sr} & \mathbf{L}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{\alpha\beta}^s \\ \mathbf{I}_{\alpha\beta}^r \end{bmatrix} \quad (2.78)$$

o que permite escrever,

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi}_{\alpha\beta}^s \\ \dot{\phi}_{\alpha\beta}^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_s & \mathbf{L}_{sr} \\ \mathbf{L}_{sr} & \mathbf{L}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{I}}_{\alpha\beta}^s \\ \dot{\mathbf{I}}_{\alpha\beta}^r \end{bmatrix} \quad (2.79)$$

onde

$$\mathbf{L}_{s(r)} = \begin{bmatrix} L_{s(r)} & 0 \\ 0 & L_{s(r)} \end{bmatrix} \quad L_{s(r)} = L_{s(r)}^{123} - M_{s(r)}$$

$$\mathbf{L}_{sr} = \begin{bmatrix} L_{sr} & 0 \\ 0 & L_{sr} \end{bmatrix} \quad L_{sr} = \frac{3}{2} M_{sr}$$

A equação mecânica do sistema no referencial estacionário é obtida de (2.72),

$$vL_{sr}(\mathbf{I}_{\alpha\beta}^s)^T \mathbf{K}_{\alpha\beta}^{dq} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} (\mathbf{K}_{\alpha\beta}^{dq})^T \mathbf{I}_{\alpha\beta}^r = b\omega_r + J\dot{\omega}_r + \tau_c \quad (2.80)$$

portanto

$$vL_{sr}(i_{\beta}^s i_{\alpha}^r - i_{\alpha}^s i_{\beta}^r) = b\omega_r + J\dot{\omega}_r + \tau_c \quad (2.81)$$

O modelo completo do motor de indução no referencial estacionário, sob alimentação equilibrada, é dado pelas equações: (2.76), (2.78), (2.79) e (2.81).

2.4.5.1 Representação no modelo de estados

Representação por correntes no estator, fluxos do rotor e velocidade angular do rotor

O vetor de estados é dado por:

$$\mathbf{x} = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5]^T = [i_{\alpha}^s \quad i_{\beta}^s \quad \phi_{\alpha}^r \quad \phi_{\beta}^r \quad \omega_r]^T$$

Para a obtenção do modelo usa-se as seguintes transformações de variáveis:

$$i_{\alpha}^r = \frac{1}{L_r} \phi_{\alpha}^r - \frac{L_{sr}}{L_r} i_{\alpha}^s \quad (2.82)$$

$$i_{\beta}^r = \frac{1}{L_r} \phi_{\beta}^r - \frac{L_{sr}}{L_r} i_{\beta}^s \quad (2.83)$$

$$\phi_{\alpha}^s = \sigma L_s i_{\alpha}^s + \frac{L_{sr}}{L_r} \phi_{\alpha}^r \quad (2.84)$$

$$\phi_{\beta}^s = \sigma L_s i_{\beta}^s + \frac{L_{sr}}{L_r} \phi_{\beta}^r \quad (2.85)$$

onde $\sigma = 1 - \frac{(L_{sr})^2}{L_s L_r}$.

Assumindo que o motor tem o rotor em curto-circuito, obtemos de (2.76)

$$\frac{d}{dt} \phi_{\alpha}^r = -R_r \left(\frac{1}{L_r} \phi_{\alpha}^r - \frac{L_{sr}}{L_r} i_{\alpha}^s \right) - v\omega_r \phi_{\beta}^r$$

$$\frac{d}{dt}\phi_{\beta}^r = -R_r\left(\frac{1}{L_r}\phi_{\beta}^r - \frac{L_{sr}}{L_r}i_{\beta}^s\right) + v\omega_r\phi_{\beta}^r$$

e

$$\frac{d}{dt}i_{\alpha}^s = -\left(\frac{R_sL_r^2 + R_rL_{sr}^2}{\sigma L_sL_r^2}\right)i_{\alpha}^s + \frac{R_rL_{sr}}{\sigma L_sL_r^2}\phi_{\alpha}^r + \frac{L_{sr}}{\sigma L_sL_r}v\omega_r\phi_{\beta}^r + \frac{1}{\sigma L_s}V_{\alpha}^s$$

$$\frac{d}{dt}i_{\beta}^s = -\left(\frac{R_sL_r^2 + R_rL_{sr}^2}{\sigma L_sL_r^2}\right)i_{\beta}^s + \frac{R_rL_{sr}}{\sigma L_sL_r^2}\phi_{\alpha}^r - \frac{L_{sr}}{\sigma L_sL_r}v\omega_r\phi_{\beta}^r + \frac{1}{\sigma L_s}V_{\beta}^s$$

Substituindo (2.82) e (2.83) em (2.81), se obtêm a equação de estado do sistema mecânico,

$$\dot{\omega}_r = \frac{vL_{sr}}{JL_r}(i_{\beta}^s\phi_{\alpha}^r - i_{\alpha}^s\phi_{\beta}^r) - \frac{b}{J}\omega_r - \frac{\tau_c}{J} \quad (2.86)$$

O modelo de estado do sistema é dado por:

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_{\alpha}^s \\ \dot{i}_{\beta}^s \\ \dot{\phi}_{\alpha}^r \\ \dot{\phi}_{\beta}^r \\ \dot{\omega}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & \frac{K}{T_r} & 0 & v\phi_{\beta}^r K \\ 0 & -\lambda & 0 & \frac{K}{T_r} & -v\phi_{\alpha}^r K \\ \frac{L_{sr}}{T_r} & 0 & -\frac{1}{T_r} & 0 & -v\phi_{\beta}^r \\ 0 & \frac{L_{sr}}{T_r} & 0 & -\frac{1}{T_r} & v\phi_{\alpha}^r \\ -\frac{vL_{sr}}{JL_r}\phi_{\beta}^r & \frac{vL_{sr}}{JL_r}\phi_{\alpha}^r & 0 & 0 & -\frac{b}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{\alpha}^s \\ i_{\beta}^s \\ \phi_{\alpha}^r \\ \phi_{\beta}^r \\ \omega_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma L_s} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma L_s} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{\alpha}^s \\ V_{\beta}^s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{J} \end{bmatrix} \tau_c \quad (2.87)$$

onde

$$T_r = \frac{L_r}{R_r}, \quad K = \frac{L_{sr}}{\sigma L_sL_r}, \quad \lambda = \frac{R_sL_r^2 + R_rL_{sr}^2}{\sigma L_sL_r^2}$$

2.5 Acionamento

A figura (2.5) apresenta de forma simplificada o esquema de um inversor trifásico de tensão, alimentando uma carga trifásica.

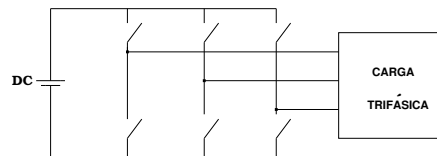


Figura 2.5: Inversor trifásico de tensão.

Os inversores, que são também chamados de conversores *cc-ca*, possuem especial aplicação em acionamento de máquinas alternadas. A função básica de um inversor de tensão é, a partir de um sinal contínuo de tensão, aplicado na sua entrada, transformá-lo em um sinal alternado na sua saída com frequência desejada.

Os níveis de tensão de saída podem ser fixos ou variáveis, assim como a frequência de operação. As formas de onda na saída dos inversores são normalmente ondas quadradas. Para certas aplicações esse tipo de forma de onda pode ser aceitável. Contudo, na maioria dos casos deseja-se formas de onda senoidais.

Para ilustrar o funcionamento básico de um inversor de tensão trifásico, a subseção (2.5.1) apresenta o inversor trifásico 180° . Não é o objetivo aqui esgotar o assunto. Para maiores detalhes, ver [BM01].

2.5.1 Inversor trifásico 180°

Seja o inversor mostrado na figura (2.6).

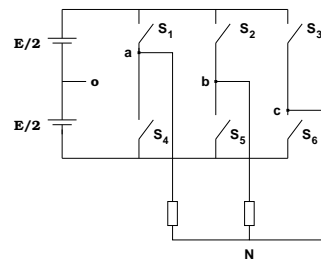


Figura 2.6: Inversor trifásico 180° .

Neste caso, cada chave comandada é mantida em condução por 180° , dos 360° do ciclo completo de operação. Os comandos das duas chaves de um mesmo braço inversor são complementares, ou seja, quando uma está conduzindo, a outra está bloqueada. Os comandos das chaves de um braço estão defasados de 120° em relação aos comandos das chaves do braço vizinho.

Desse modo, as chaves semicondutoras são comandadas segundo o diagrama representado na figura (2.7), onde percebe-se seis seqüências distintas de operação em cada período de funcionamento. Em cada seqüência, existem sempre três chaves em condução, duas no grupo positivo (S_1, S_2 e S_3) e uma no grupo negativo (S_4, S_5 e S_6), ou vice-versa.

Admitindo a fase *a* como referência do sistema trifásico, tem-se a fase *b* atrasada de 120° em relação à fase *a*, e a fase *c* atrasada de 240° em relação à fase *a*; para uma seqüência de fases positiva. Como regra geral é possível afirmar o seguinte: sempre que uma chave

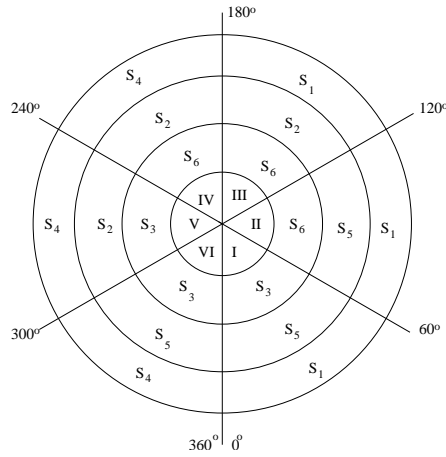


Figura 2.7: Diagrama de comando do inversor de tensão trifásico 180°.

comandada do grupo positivo estiver em condução, a tensão de saída da fase correspondente à essa chave será $+E/2$ em relação à referência o . E sempre que uma chave comandada do grupo negativo estiver em condução, a tensão de saída da fase correspondente à essa chave será $-E/2$ em relação à referência o .

Baseado no enunciado, a tensão das fases a, b e c em relação à referência o , V_{ao} , V_{bo} e V_{co} , será uma forma de onda quadrada com pico positivo de $+E/2$ e negativo de $-E/2$ e defasada uma em relação à outra de 120° ; conforme está apresentado na figura (2.8).

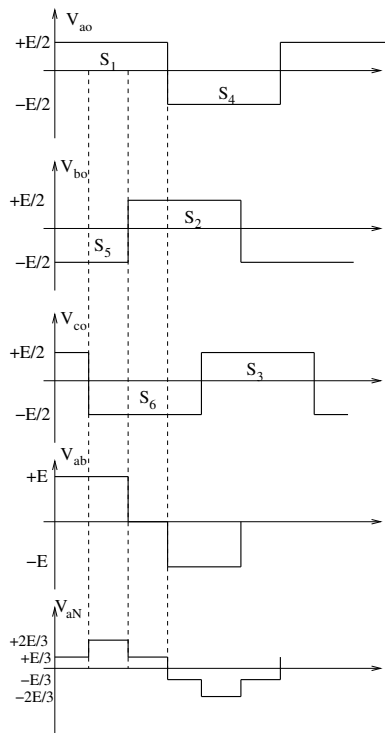


Figura 2.8: Formas de onda.

As tensões de linha V_{ab} , V_{bc} e V_{ca} são dadas por:

$$\begin{aligned} V_{ab} &= V_{ao} - V_{bo} \\ V_{bc} &= V_{bo} - V_{co} \\ V_{ca} &= V_{co} - V_{ao} \end{aligned} \quad (2.88)$$

O formato das tensões de linha são iguais. São formas de onda retangulares com nível zero entre os intervalos positivos e negativos, com duração de 60° . Tal forma de onda é conhecida na literatura como forma de onda *quase-retangular*. Por conveniência, mostrou-se apenas a forma de onda relativo às fases a e b .

As tensões de fase na carga são obtidas como se segue. As tensões das fases do inversor também podem ser obtidas a partir das seguintes relações,

$$\begin{aligned} V_{ao} &= V_{aN} + V_{No} \\ V_{bo} &= V_{bN} + V_{No} \\ V_{co} &= V_{cN} + V_{No} \end{aligned} \quad (2.89)$$

onde V_{No} é a tensão entre o terminal neutro da conexão Y e o terminal de referência o .

De (2.89) tira-se que,

$$V_{ao} + V_{bo} + V_{co} = (V_{aN} + V_{bN} + V_{cN}) + 3V_{No} \quad (2.90)$$

Considerando o sistema balanceado, vale a seguinte relação:

$$V_{aN} + V_{bN} + V_{cN} = 0 \quad (2.91)$$

logo

$$V_{No} = \frac{1}{3}(V_{ao} + V_{bo} + V_{co}) \quad (2.92)$$

Substituindo (2.92) em (2.89), vem

$$\begin{aligned} V_{aN} &= \frac{1}{3}(2V_{ao} - V_{bo} - V_{co}) \\ V_{bN} &= \frac{1}{3}(-V_{ao} + 2V_{bo} - V_{co}) \\ V_{cN} &= \frac{1}{3}(-V_{ao} - V_{bo} + 2V_{co}) \end{aligned} \quad (2.93)$$

É importante ressaltar que as formas de onda apresentadas na figura (2.8) são válidas para qualquer tipo de carga trifásica balanceada conectada em Y , como por exemplo, um motor de indução.

2.6 Modelo Comutado

O modelo do motor de indução apresentado pela equação (2.87) possui como entrada, as tensões no estator. Essas tensões possuem valores constantes para cada uma das seqüências de operação do inversor. Assim podemos dizer que, para cada configuração das chaves do inversor, existe um modelo para o sistema.

O objetivo aqui é apresentar o que chamamos de *modelo comutado* do motor. Para isso, considere a figura (2.9), que ilustra o circuito de potência do estator de um motor de indução, alimentado por um inversor de tensão.

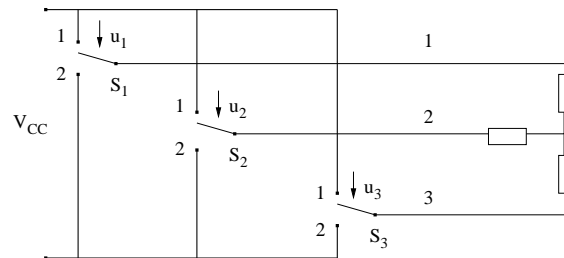


Figura 2.9: Circuito de potência do estator de um motor de indução.

A relação entre as tensões de carga V_j , e as tensões de saída do inversor U_j , na figura (2.9), é dada por:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} \quad (2.95)$$

onde

$$U_j = V_{cc} u_j \quad (j = 1, 2, 3) \quad (2.96)$$

As componentes u_j do vetor de comando das chaves u , são definidas como:

$$u_j = \begin{cases} 1 & \text{chave } S_j \text{ na posição 1} \\ 0 & \text{chave } S_j \text{ na posição 2} \end{cases}$$

e indicam os modos de operação do inversor.

Com o propósito de trabalhar com o modelo do motor de indução no sistema de coordenadas estacionário, é preciso obter uma expressão que relacione as tensões de saída do inversor com as tensões do estator no modelo estacionário, $V_{\alpha\beta}^s$. Para isso, aplica-se a trans-

formação $\mathbf{K}_{\alpha\beta}^s$ na equação (2.95) que resulta em,¹

$$\begin{bmatrix} V_{\alpha}^s \\ V_{\beta}^s \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix}$$

ou seja,

$$\begin{bmatrix} V_{\alpha}^s \\ V_{\beta}^s \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{3} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} \quad (2.97)$$

O inversor de tensão possui ao total 8 situações de comutação definidas pelas posições das chaves, de modo que, essas 8 situações definem 8 possíveis tensões de estator do motor no sistema estacionário, $V_{\alpha\beta}^s$. Essas tensões podem ser representadas como vetores no espaço em um plano fixo com o sistema de coordenadas estacionário, de acordo com a ilustração mostrada na figura (2.10). Na figura, as tensões $V_{\alpha\beta}^s$ foram denotadas como sendo v_1, \dots, v_8 . Os correspondentes valores dos sinais de comando das chaves u , para cada valor de v_i ($i = 1, \dots, 8$), se encontram na tabela (2.1). Essa tabela possui entrada v_i e saída u , conforme indicado na figura (2.11).

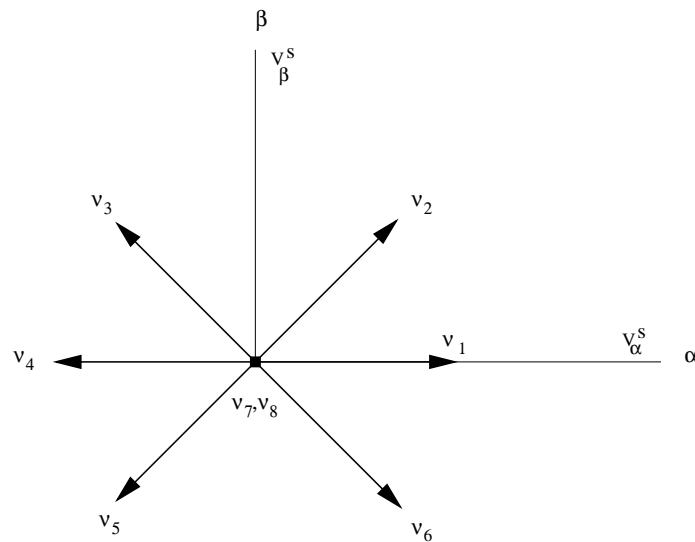


Figura 2.10: Os 8 possíveis sinais de tensões de estator do motor no sistema de coordenadas estacionário ($\alpha\beta$).

Contudo, pode-se perceber pela figura (2.10) que as tensões v_7 e v_8 apresentam o mesmo valor. Portanto, são possíveis apenas 7 diferentes sinais de tensões de estator do motor no sistema estacionário. Daqui para frente então, usaremos o índice i da forma ($i = 1, \dots, 7$).

¹Lembrar que a componente de seqüência zero no sistema $\alpha\beta$ é nula, ou seja, $V_1 + V_2 + V_3 = 0$, o que resulta num sistema bifásico de tensões $V_{\alpha\beta}^s$.

Tabela 2.1: Definição da posição das chaves do inversor.

v_i	u_1	u_2	u_3
v_1	1	0	0
v_2	1	1	0
v_3	0	1	0
v_4	0	1	1
v_5	0	0	1
v_6	1	0	1
v_7	1	1	1
v_8	0	0	0

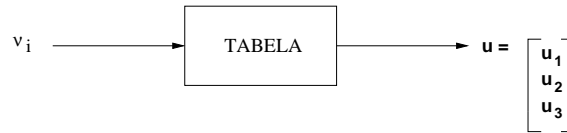


Figura 2.11: Entrada e saída da tabela (2.1).

Consideremos agora o modelo do sistema indicado em (2.87), representado de maneira genérica e admitindo os 7 distintos sinais de controle²:

$$\dot{x} = Ax + B_v v_i + B_w w \quad (i = 1, \dots, 7) \quad (2.98)$$

onde A, B_v, B_w são as matrizes do sistema, x representa os estados, $w = \tau_c$ é o torque de carga e v_i representa o i -ésimo sinal de controle.

Comparando (2.98) e (2.87), vem

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & \frac{K}{T_r} & 0 & v\phi_\beta^r K \\ 0 & -\lambda & 0 & \frac{K}{T_r} & -v\phi_\alpha^r K \\ \frac{L_{sr}}{T_r} & 0 & -\frac{1}{T_r} & 0 & -v\phi_\beta^r \\ 0 & \frac{L_{sr}}{T_r} & 0 & -\frac{1}{T_r} & v\phi_\alpha^r \\ -\frac{vL_{sr}}{JL_r}\phi_\beta^r & \frac{vL_{sr}}{JL_r}\phi_\alpha^r & 0 & 0 & -\frac{b}{J} \end{bmatrix} \quad (2.99)$$

$$\mathbf{B}_v = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma L_s} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma L_s} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

²O índice i é usado para indicar que o sistema é comutado.

$$\mathbf{B}_w = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{J} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}_i = \begin{bmatrix} V_{\alpha_i}^s \\ V_{\beta_i}^s \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{3} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{cc}u_1 \\ V_{cc}u_2 \\ V_{cc}u_3 \end{bmatrix}$$

Portanto a representação (2.98) com a notação (2.99) define o modelo comutado do motor de indução trifásico no sistema de coordenadas estacionário. Por comodidade, vamos definir as seguintes constantes:

$$a_0 = v, \quad a_1 = \frac{K}{T_r}, \quad a_2 = a_0 K, \quad a_3 = \lambda, \quad a_4 = \frac{1}{\sigma L_s}$$

$$a_5 = \frac{1}{T_r}, \quad a_6 = \frac{L_{sr}}{T_r}, \quad a_7 = \frac{a_0 L_{sr}}{J L_r}, \quad a_8 = \frac{1}{J}, \quad a_9 = b$$

e representar o sistema como segue abaixo:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -a_3 x_1 + a_1 x_3 + a_2 x_4 x_5 + a_4 V_{\alpha_i}^s \\ \dot{x}_2 &= -a_3 x_2 + a_1 x_4 - a_2 x_3 x_5 + a_4 V_{\beta_i}^s \\ \dot{x}_3 &= a_6 x_1 - a_5 x_3 - a_0 x_5 x_4 \\ \dot{x}_4 &= a_6 x_2 - a_5 x_4 + a_0 x_5 x_3 \\ \dot{x}_5 &= -a_7 x_1 x_4 + a_7 x_2 x_3 - a_8 a_9 x_5 - a_8 \tau_c \end{aligned} \tag{2.100}$$

$$(i = 1, \dots, 7)$$

2.7 Comentários

Este capítulo apresentou a modelagem matemática do motor de indução trifásico simétrico. O modelo trifásico, onde as variáveis do estator são projetadas num referencial estacionário e as variáveis do rotor num referencial girante com o rotor, não é conveniente, principalmente por causa da dependência temporal das indutâncias mútuas entre enrolamentos do estator e do rotor.

Esse problema pode ser superado com o emprego de modelos bifásicos projetados em um único referencial e obtidos através de uma transformação de variáveis. Essa transformação possui ainda a propriedade de reduzir a ordem do sistema de sete para cinco, quando o motor é alimentado simetricamente.

A escolha do referencial no qual se deseja trabalhar, depende dos objetivos particulares e condições da máquina. Através da literatura relacionada ao assunto sabe-se que, no caso das tensões do estator serem desbalanceadas ou descontínuas e as tensões do rotor serem balanceadas ou nulas, o referencial estacionário se mostra mais adequado. Este é o referencial do modelo usado neste trabalho, já que as tensões do estator são assumidas serem descontínuas.

Na representação por variáveis de estado, as escolhas dos estados foi baseada em objetivos particulares que desejamos para o sistema de controle e que serão esclarecidos mais tarde. A escolha das correntes estatóricas se justifica pelo fato de serem mensuráveis.

Capítulo 3

Conceitos Preliminares

3.1 Introdução

Este capítulo apresenta de maneira sucinta, alguns conceitos e definições que se fazem necessários para o desenvolvimento do trabalho. Inicialmente é apresentado alguns conceitos de estabilidade e desempenho de sistemas. Na seção seguinte é apresentado a definição de *desigualdade matricial linear* (LMI)¹ e algumas de suas propriedades mais importantes. Na seqüência, dois exemplos foram desenvolvidos para ilustrar a abordagem LMI na solução de problemas.

3.2 Estabilidade e Desempenho

Estabilidade é um requisito fundamental na teoria de sistemas de controle. Existem diferentes tipos de problemas de estabilidade que surgem no estudo de sistemas dinâmicos e geralmente, a análise é feita para se estudar a estabilidade de pontos de equilíbrio do sistema. Segundo [Kha96], um ponto de equilíbrio é estável se todas as soluções que partem de pontos próximos, permanecem próximas; em caso contrário, é instável. Um ponto de equilíbrio é assintoticamente estável se todas as soluções partindo de pontos próximos não somente permanecem próximas, mas também convergem ao ponto de equilíbrio quando o tempo tende ao infinito.

Um método amplamente utilizado que fornece condições suficientes para estabilidade é o método de Lyapunov. Em 1892, o matemático e engenheiro russo Lyapunov, mostrou que certas funções poderiam ser usadas para determinar estabilidade de um ponto de equilíbrio.

¹Do Inglês *Linear Matrix Inequality*.

Para ilustrar a idéia do método, seja $D \in \mathbb{R}^n$ um domínio que contém a origem e $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções com $V \in C^1$. Então a derivada temporal de V ao longo das trajetórias do sistema $\dot{x} = f(x)$, denotada por $\dot{V}(x)$, é dada por:

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} \dot{x} = \frac{\partial V}{\partial x} f(x) \quad (3.1)$$

Uma forma alternativa de representar a derivada de V é indicada abaixo.

$$\dot{V}(x) = \frac{d}{dt} V(\psi(t, x_0)) \quad (3.2)$$

onde $\psi(t, x_0)$ é a solução de $\dot{x} = f(x)$ para a condição inicial $x_0 = x(t_0)$.

A vantagem da expressão indicada em (3.1) é o fato de não se ter que conhecer a solução de $\dot{x} = f(x)$, para se obter a expressão da derivada de $V(x)$. A seguir apresentamos o teorema de estabilidade de Lyapunov.

Teorema 3.2.1 (Lyapunov) *Seja $x = 0$ um ponto de equilíbrio do sistema $\dot{x} = f(x)$ e $D \subset \mathbb{R}^n$ um domínio contendo $x = 0$. Seja $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ pertencente ao C^1 tal que*

$$\begin{aligned} V(0) = 0 \quad e \quad V(x) > 0 \quad em \quad D - \{0\} \\ \dot{V}(x) \leq 0 \quad em \quad D \end{aligned} \quad (3.3)$$

então, $x = 0$ é estável. Além disso, se

$$\dot{V}(x) < 0 \quad em \quad D - \{0\} \quad (3.4)$$

então $x = 0$ é assintoticamente estável.

O teorema acima é uma versão simplificada de vários resultados que caracterizam a teoria de estabilidade de Lyapunov. A prova e outras versões deste teorema podem ser encontradas em [Kha96]. A idéia central da estabilidade segundo Lyapunov é encontrar uma função $V(x)$ que seja nula na origem, positiva fora dela e decrescente para as trajetórias do sistema. Quando isso ocorre, pode-se concluir que as trajetórias convergem para a origem, indicando estabilidade assintótica. Uma dificuldade dessa teoria é a não existência de um método sistemático para encontrar uma função de Lyapunov que se mostre adequada para provar estabilidade de um sistema. Em alguns casos, existem funções naturais candidatas à função de Lyapunov, como funções de energia em sistemas elétricos ou mecânicos. Existem técnicas para construção da função $V(x)$, mas que são eficientes apenas para classes especiais de sistemas, como por exemplo os sistemas lineares invariantes no tempo.

Em se tratando de desempenho, existem vários índices importantes num sistema de controle que podem ser obtidos com o auxílio da função de Lyapunov. Este é o caso, por

exemplo, das normas H_2 e H_∞ de sistemas, [BGFB94]. Tipicamente aborda-se o uso de normas de sistemas como forma de medir o grau de influência de perturbações externas sobre as saídas de interesse. A norma H_∞ , por exemplo, representa o maior ganho que o sistema oferece à um sinal de perturbação de energia limitada. O problema de controle H_∞ , que pode ser visto como um problema de otimização, consiste em determinar uma lei de controle que minimiza a norma H_∞ do sistema em malha fechada.

3.2.1 Região de Atração

No estudo de estabilidade de sistemas, freqüentemente não é suficiente determinar que o sistema tenha um ponto de equilíbrio assintoticamente estável. Muitas vezes se torna importante encontrar a região de atração daquele ponto, ou ao menos, uma estimativa dela. Para entendermos a necessidade de determinar a região de atração, vamos supor um sistema não linear com um ponto de equilíbrio assintoticamente estável X_{pr} , operando em regime permanente. Num dado instante t_0 ocorre um distúrbio que modifica a estrutura do sistema. Supondo nessa condição que o sistema não possui pontos de equilíbrio em X_{pr} ou nas suas vizinhanças, a trajetória do sistema divergirá do ponto X_{pr} . Suponha ainda que o distúrbio é cessado no instante t_1 e o sistema agora possui um ponto de equilíbrio assintoticamente estável X_{ps} , onde a operação do sistema em regime permanente é aceitável, por estar X_{ps} suficientemente próximo à X_{pr} . Porém, no instante t_1 o estado do sistema $X(t_1)$ poderia estar distante do equilíbrio X_{ps} . O retorno da operação do sistema em regime permanente em X_{ps} irá depender de $X(t_1)$ pertencer à região de atração de X_{ps} .

Seja a origem $x = 0$ um ponto de equilíbrio assintoticamente estável para o sistema não linear

$$\dot{x} = f(x) \quad (3.5)$$

com $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $D \subset \mathbb{R}^n$ um domínio contendo a origem. Seja $\psi(t, x)$ a solução de (3.5) que parte do estado inicial x no instante $t = 0$. A região de atração da origem, denotada por R_A , é definida segundo [Kha96] por

$$R_A = \{x \in D \mid \psi(t, x) \text{ é definida para } \forall t \geq 0 \text{ e } \psi(t, x) \rightarrow 0 \text{ quando } t \rightarrow \infty\}$$

Para exemplificar a idéia de região de atração, seguem dois exemplos abaixo. No primeiro caso, a origem é um ponto de equilíbrio estável e o sistema possui um ciclo limite instável que é a fronteira da região de atração daquele ponto. No caso seguinte, temos um sistema que possui dois pontos de equilíbrio em $(1, 0)$ e $(-1, 0)$.

3.2.1.1 Exemplo 1

O sistema de segunda ordem

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_1 + (x_1^2 - 1)x_2 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

é a equação de Van der Pol em tempo reverso. A figura (3.1) mostra o plano de fase do sistema (3.6). Note que qualquer trajetória que parte no interior do ciclo limite, converge para a origem que é o ponto de equilíbrio. A região de atração nesse caso é limitada, pois qualquer trajetória que parte em um ponto fora do ciclo limite, não consegue atravessá-lo para alcançar a origem.

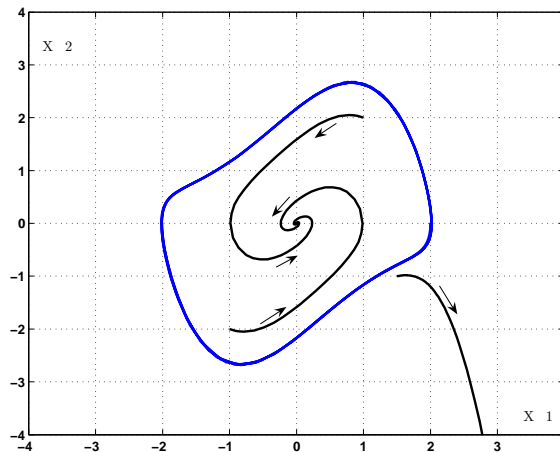


Figura 3.1: Plano de fase do exemplo 1.

3.2.1.2 Exemplo 2

O sistema de segunda ordem

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - x_1^2 \\ -x_2 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

possui plano de fase indicado na figura (3.2). O plano de fase desse sistema mostra que o ponto \$(1,0)\$ é estável e que o outro ponto de equilíbrio do sistema \$(-1,0)\$ é instável. Note ainda que a região de atração nesse caso é ilimitada.

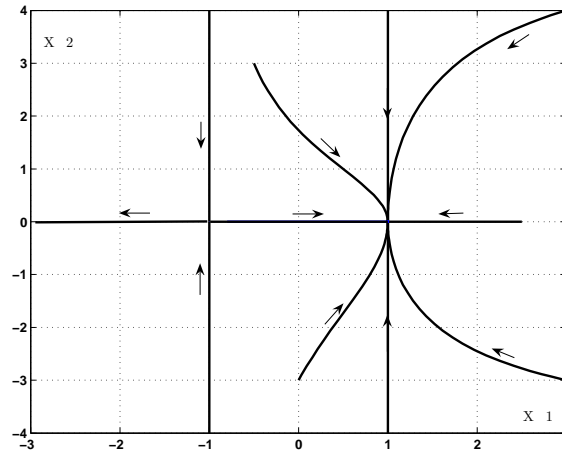


Figura 3.2: Plano de fase do exemplo 2.

3.3 Desigualdade Matricial Linear - LMI

3.3.1 Introdução

O histórico de LMIs na análise de sistemas dinâmicos, por exemplo, possui mais de 100 anos. A história começou próximo à 1890, quando Lyapunov publicou um trabalho introduzindo o que chamamos hoje de teoria de Lyapunov. Ele mostrou que a equação diferencial

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$

que pode representar um sistema dinâmico, é assintoticamente estável (ou seja, todas trajetórias convergem para zero) se e somente se, existe uma matriz P positiva definida tal que

$$A'P + PA < 0.$$

Os requisitos $P > 0$, $A'P + PA < 0$ são o que atualmente chamamos de desigualdades de Lyapunov e são exemplos de LMIs. Um resumo dos principais eventos históricos sobre LMIs na teoria de controle é apresentado abaixo:

1890 Aparecimento da primeira LMI; solução analítica da LMI de Lyapunov via equação de Lyapunov.

1940-1950 Aplicação do método de Lyapunov à um problema de engenharia de controle real. Uma LMI simples foi resolvida “na mão”.

Começo dos anos 60 “Positive Real Lemma” permite técnicas gráficas para soluções de uma certa família de LMIs.

Fim dos anos 60 Observação de que a mesma família de LMIs podem ser resolvidas via equação de Riccati algébrica.

Começo dos anos 80 Reconhecimento de que muitas LMIs podem ser resolvidas por computador via programação convexa.

Fim dos anos 80 Desenvolvimento de algoritmos para LMIs.

3.3.2 Definição

Uma LMI é uma desigualdade matricial do tipo $F(g) > 0$, na qual $F(g) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{q \times q}$ é simétrica e afim nas variáveis de busca que são representadas pelo vetor g . Assim uma LMI pode ser genericamente representada na forma:

$$F(g) \triangleq F_0 + \sum_{i=1}^m g_i F_i > 0 \quad (3.8)$$

onde $F_i = F_i' \in \mathbb{R}^{q \times q}$ são matrizes constantes e $g \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de variáveis com elementos escalares a ser determinado de forma a satisfazer, quando possível, a desigualdade (3.8). Quando existe uma solução para $F(g) > 0$, dizemos que a LMI é factível. A LMI $F(g) > 0$ indica que a matriz $F(g)$ deve ser positiva definida, e portanto, $F(g) > 0$ é uma restrição sobre os autovalores de $F(g)$. Assim, $F(g) > 0$ implica que todos os autovalores de $F(g)$ são positivos.

3.3.3 Propriedades de LMI

Inúmeros problemas em diferentes áreas do conhecimento podem ser reformulados e numericamente resolvidos através de LMIs. Alguns exemplos podem ser encontrados em [BGFB94]. Tipicamente um problema de controle não aparece naturalmente na forma de uma LMI. Assim, algumas ferramentas matemáticas e propriedades de LMI são bastante úteis na tarefa de escrever o problema original em forma de LMIs.

3.3.3.1 Um conjunto de LMIs é uma LMI

Uma grande vantagem de escrever problemas na forma de LMI é a possibilidade de resolvê-los simultaneamente, ou seja, encontrar soluções, se possível, comuns a todos os problemas. Se possuímos k desigualdades do tipo (3.8), que denotaremos por

$$B_1(g) > 0, \dots, B_k(g) > 0$$

poderemos representar esse conjunto de desigualdades na forma de uma única desigualdade do tipo (3.8), como:

$$B(g) = \text{diag}\{B_1(g), \dots, B_k(g)\} > 0 \quad (3.9)$$

3.3.3.2 Convexidade

Uma importante propriedade de LMI é a de que o conjunto de soluções de uma LMI, é um conjunto convexo. A prova é como segue: sejam y e z dois pontos que satisfazem a inequação (3.8), ou seja, $F(y) > 0$ e $F(z) > 0$. Seja $g = \alpha y + (1 - \alpha)z$, uma combinação convexa qualquer desses dois pontos obtida com algum $\alpha : 0 \leq \alpha \leq 1$.

Substituindo na definição temos,

$$\begin{aligned} F(g) = F(\alpha y + (1 - \alpha)z) &= F_o + \sum_{i=1}^m g_i F_i = F_o + \sum_{i=1}^m F_i(\alpha y_i + (1 - \alpha)z_i) = & (3.10) \\ & F_o + \sum_{i=1}^m F_i z_i + \alpha \sum_{i=1}^m F_i (y_i - z_i) = \\ (1 - \alpha)(F_o + \sum_{i=1}^m F_i z_i) + \alpha(F_o + \sum_{i=1}^m F_i y_i) &= (1 - \alpha)F(z) + \alpha F(y) \end{aligned}$$

assim, g também é solução da LMI para todo $\alpha : 0 \leq \alpha \leq 1$ e vice-versa.

Esta propriedade é interessante do ponto de vista numérico pois temos garantia que o problema de encontrar solução qualquer de uma LMI, consiste na busca de um elemento qualquer num conjunto convexo. Problema que pode ser resolvido de forma eficiente, com convergência global e tempo polinomial. A convexidade é bem utilizada no tratamento de sistemas incertos. Estes sistemas possuem parâmetros não conhecidos precisamente, mas a faixa de seus valores admissíveis é conhecida e pode ser definida por um conjunto convexo fechado chamado Politopo². Como o politopo é obtido pela combinação convexa de seus vértices, temos por convexidade que, se uma dada condição estiver satisfeita em todos os vértices, então ela também estará satisfeita para qualquer ponto pertencente ao politopo.

3.3.3.3 Lema de Finsler

Este lema é muito útil pois permite que restrições de igualdade sejam incorporadas nas desigualdades através da inserção de variáveis de escalonamento.

²Ver seção 3.4.

Lema 3.3.1 (Lema de Finsler) *Seja $C \in \mathbb{R}^{n \times m}$ uma matriz dada. Seja $F(g)$ uma função afim em g com $F(g) = F(g)' \in \mathbb{R}^{m \times m}$. As seguintes condições são equivalentes:*

$$\begin{aligned} a) \exists g : x'F(g)x < 0, \forall x \in \mathbb{R}^m : Cx = 0, x \neq 0 \\ b) \exists g, L : F(g) + LC + C'L' < 0, \quad L \in \mathbb{R}^{m \times n} \end{aligned} \quad (3.11)$$

A matriz L é chamada de variável de escalonamento de Finsler e seu papel é tornar a desigualdade $x'(F(g) + LC + C'L')x < 0$ possível para todo $x : Cx \neq 0$.

3.3.3.4 Procedimento-S

Essa propriedade permite concatenar várias restrições escalares de desigualdade em uma única.

Sejam $T_1, \dots, T_p \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrizes simétricas dadas e $F(g) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma função afim em g . Considere o seguinte problema: encontrar g , se possível, tal que

$$\xi'F(g)\xi > 0 \quad \forall \xi \neq 0 : \xi'T_i\xi \geq 0, \quad i = 1, \dots, p \quad (3.12)$$

Não é difícil perceber que, se existem escalares $\tau_i \geq 0, i = 1, \dots, p$ e algum g tais que

$$F(g) - \sum_{i=1}^p \tau_i T_i > 0 \quad (3.13)$$

então (3.12) está satisfeita. Notar que (3.13) é uma LMI nas variáveis (g, τ_i) , e portanto, pode ser facilmente resolvida, o que não é o caso de (3.12).

3.4 Politopo

O conceito de politopo³ será utilizado neste trabalho para descrever um conjunto de possíveis condições iniciais para os estados do sistema. Será considerado um intervalo de valores para cada estado, delimitado por seu valor mínimo e máximo.

³Politopo é um conjunto convexo fechado, que pode ser representado pela combinação convexa dos vértices.

Seja

$$x \in \mathfrak{X} = \{x_i : \underline{\alpha}_i \leq x_i \leq \overline{\alpha}_i \quad , \quad i = 1, \dots, q\} \quad (3.14)$$

onde \mathfrak{X} representa um politopo com 2^q vértices, x representa os estados, q é o número de estados e $\underline{\alpha}_i, \overline{\alpha}_i$ são os extremos conhecidos dos intervalos.

Para ilustrar o conceito, suponha que queiramos construir um politopo de condições iniciais para um sistema com 2 estados. Então temos $-\alpha_1 < x_1 < \alpha_1$ e $-\alpha_2 < x_2 < \alpha_2$, e o politopo fica representado pela figura (3.3).

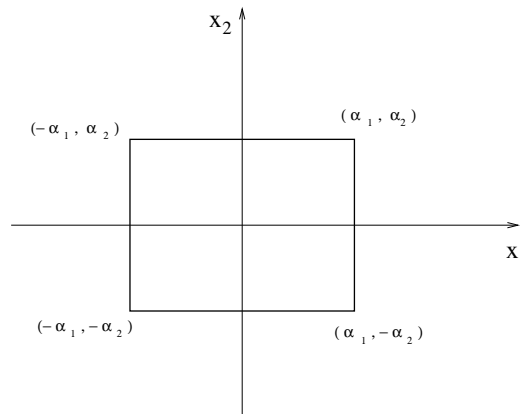


Figura 3.3: Politopo \mathfrak{X} .

Um ponto importante desta abordagem é o fato de que, a LMI $F(g, x) > 0$ para $\forall x \in \mathfrak{X}$, pode ser numericamente testada utilizando apenas os vértices do politopo \mathfrak{X} . Denotando os vértices de \mathfrak{X} por $\{v_1, \dots, v_{2^q}\}$, a LMI acima é equivalente a $\text{diag}\{F(g, v_1), \dots, F(g, v_{2^q})\} > 0$. Entretanto, surge o problema da explosão exponencial da dimensão da condição a ser testada. Para um sistema de 5 estados, testar uma determinada condição nos vértices do politopo formado pelos estados, implica em uma condição de dimensão 2^5 vezes maior (se comparado com um teste realizado em um ponto qualquer do politopo).

3.5 Exemplos

O objetivo da presente seção é ilustrar o procedimento de obtenção de LMIs na solução de alguns problemas. Uma vez obtidas as LMIs, estas serão resolvidas utilizando um pacote computacional.

Como se sabe, problemas dificilmente se apresentam na forma de uma LMI. Para transformá-los numa LMI, quando isto é possível, deve-se reescrever a função de Lyapunov e sua derivada na forma abaixo, respectivamente:

$$\begin{aligned} V(x) &= \xi(x)'M(x)\xi(x) \\ \dot{V}(x) &= \phi(x)'N(x)\phi(x) \end{aligned} \quad (3.15)$$

onde $\xi(x)$, $\phi(x)$ são vetores que representam funções não lineares que devem ser escolhidos convenientemente, conforme ilustrado no exemplo 2. As matrizes $M(x)$ e $N(x)$ são simétricas e afins nos estados do sistema. Nas expressões acima, $V(x)$ é positiva definida se $M(x) > 0$, ou seja, quando os autovalores de $M(x)$ são positivos, e $\dot{V}(x)$ é negativa definida se $N(x) < 0$. As desigualdades $M(x) > 0$ e $N(x) < 0$ são duas LMIs que devem ser testadas na região do espaço de estado onde se deseja operar o sistema. Na obtenção das expressões (3.15), o *lema de Finsler* e o *procedimento-S* são ferramentas essenciais. Isso se tornará claro nos dois exemplos didáticos desenvolvidos em seguida.

3.5.1 Exemplo 1

Esse exemplo trata do problema de estabilidade de um sistema para uma dada região de interesse. Seja o sistema não linear:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_1 - x_2 + x_1^2 - x_2^2 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

e a função de Lyapunov

$$V(x) = x'Px \quad , \quad P > 0 \quad (3.17)$$

Para garantir que $V(x)$ seja positiva definida deve-se impor que

$$P > 0 \quad (3.18)$$

que é uma LMI.

Desejamos agora escrever $\dot{V}(x)$ como em (3.15). Para isso fazemos,

$$\dot{V}(x) = 2x'P\dot{x} = 2x'P(Ax + B(x)x)$$

$$\text{onde } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, B(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ x_1 & -x_2 \end{bmatrix}.$$

Logo temos,

$$\dot{V}(x) = x'(P(A + B(x)) + (A + B(x))'P)x = x'N(x)x$$

com $N(x) = P(A + B(x)) + (A + B(x))'P$.

Como N depende de x , a condição

$$N(x) < 0 \quad (3.19)$$

pode ser conservadora para garantir $\dot{V}(x) < 0$, mas pode-se utilizar o lema de Finsler para introduzir novos graus de liberdade na expressão $\dot{V}(x) < 0$; que serão úteis para diminuir o conservadorismo, [Tro04]. Para isso, notar que

$$\mathfrak{N}(x) = \begin{bmatrix} x_2 & -x_1 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

satisfaz $\mathfrak{N}(x)x = 0$. Assim, combinando a condição $\dot{V}(x) < 0$ com $\mathfrak{N}(x)x = 0$ e aplicando Finsler, chega-se em

$$\dot{V}(x) = x'(P(A+B(x)) + (A+B(x))'P + L\mathfrak{N}(x) + \mathfrak{N}(x)'L')x$$

e tem-se agora a nova condição:

$$N(x) + L\mathfrak{N}(x) + \mathfrak{N}(x)'L' < 0 \quad (3.21)$$

que é uma LMI onde L é uma matriz auxiliar a ser determinada juntamente com P .

Notar que a expressão (3.19) pode ser recuperada de (3.21), com a escolha de $L = 0$. Assim, tem-se que a expressão em (3.21) é menos conservadora que a (3.19). Para ilustrar esse fato numericamente, consideraremos a seguinte região de interesse do espaço de estado:

$$\mathfrak{X} = \{x : |x_i| \leq \alpha, \quad i = 1, 2\} \quad (3.22)$$

onde α é um escalar a ser maximizado. Abaixo se encontra as LMIs que serão resolvidas:

$$N(x) < 0, \quad P > 0 \quad \forall x \in \mathfrak{X} \quad (3.23)$$

e para comparar (3.19) com (3.21), consideramos também

$$N(x) + L\mathfrak{N}(x) + \mathfrak{N}(x)'L' < 0, \quad P > 0 \quad \forall x \in \mathfrak{X} \quad (3.24)$$

Para um dado α , as LMIs em (3.23) e (3.24) estão satisfeitas para $\forall x \in \mathfrak{X}$ se estiverem satisfeitas nos vértices do polítopo \mathfrak{X} . Este é um problema que pode ser resolvido de maneira eficiente com ferramentas numéricas. Resolvendo as LMIs em (3.23) temos que a estabilidade quadrática⁴ do sistema é garantida para todo $x \in \mathfrak{X} = \{x : |x_i| \leq 0.491, i = 1, 2\}$. Para valores maiores que $\alpha = 0.491$ as condições em (3.23) não são satisfeitas e não podemos concluir sobre a estabilidade quadrática do sistema. Como esperado, a solução das LMIs em (3.24) levou a um resultado menos conservador, pois as LMIs (3.24) estão satisfeitas para todo $x \in \mathfrak{X} = \{x : |x_i| \leq 0.584, i = 1, 2\}$.

⁴Quando as condições (3.3) e (3.4) são satisfeitas para uma função de Lyapunov da forma como indicada em (3.17), onde P é constante, dizemos que o sistema é quadraticamente estável.

O conjunto de todos os vetores x tais que $V(x) = c$, onde c é uma constante positiva, formam uma elipse quando $P > 0$. Para cada valor de c obtém-se diferentes curvas, que são as curvas de nível da $V(x)$. Se uma curva de nível de $V(x)$ representa a fronteira de um subconjunto invariante de \mathfrak{X} , denotaremos esse conjunto por \mathfrak{X}_I . A invariância é devido ao fato de que, qualquer condição inicial $x_0 = x(t_0)$ pertencente à \mathfrak{X}_I , define uma trajetória do sistema $x(t) \in \mathfrak{X}_I$ para todo instante $t \geq t_0$. Com a condição $\dot{V}(x) < 0$ satisfeita, temos ainda que $x(t)$ converge para a origem quando $t \rightarrow \infty$. Nessas condições, \mathfrak{X}_I é uma região de atração do sistema não linear (3.16).

A seguir apresentamos a maior curva de nível da função de Lyapunov $V(x)$ que pertence à \mathfrak{X} ; obtida para os 2 casos analisados. Juntamente, está o politopo \mathfrak{X} que delimita a região de análise de estabilidade.

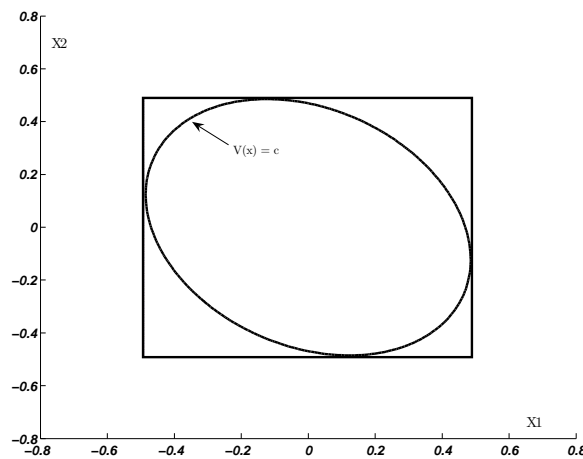


Figura 3.4: Curva de nível de $V(x)$ com $c = 0.3$ e politopo \mathfrak{X} para $\alpha = 0.491$.

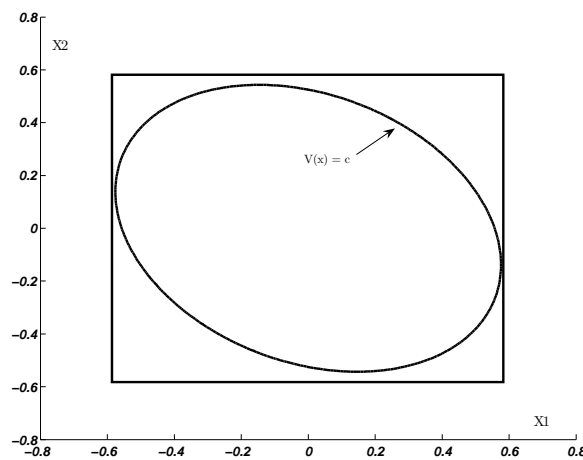


Figura 3.5: Curva de nível de $V(x)$ com $c = 0.4$ e politopo \mathfrak{X} para $\alpha = 0.584$.

A região \mathfrak{X}_I é uma região de atração para o sistema (3.16) que foi obtida a partir da função $V(x)$. Um problema interessante seria estimar uma região de atração a partir de uma função

de Lyapunov, tal que sua maior curva de nível contida em um politopo, seja maximizada em algum sentido. Desse modo, a melhor região de atração estimada estará tão próxima quanto possível do politopo. Algumas formas de como maximizar a região de atração são apresentadas em [BGFB94]. Em [Tro04] é possível encontrar um método bastante eficiente para maximizar uma estimativa da região de atração para classes de sistemas não lineares incertos.

3.5.2 Exemplo 2

Esse exemplo procura ilustrar como escolher os vetores $\xi(x)$ e $\phi(x)$ na obtenção da função de Lyapunov e sua derivada como indicada em (3.15). Considere o seguinte sistema:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_1 - x_2 + x_1^2 + x_2^3 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

e a função de Lyapunov

$$V(x) = x'Px \quad , \quad P > 0 \quad (3.26)$$

Seja a seguinte mudança de variável: $\pi = x_2^2$. Com essa mudança, podemos representar o sistema (3.25) da seguinte forma:

$$\dot{x} = Ax + B(x)x + D(x)\pi \quad (3.27)$$

$$\text{onde } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, B(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ x_1 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } D(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Para representar $\dot{V}(x)$ como em (3.15), fazemos

$$\dot{V}(x) = 2x'P\dot{x} = 2x'P(Ax + B(x)x + D(x)\pi)$$

Agora reescrevemos a expressão acima da seguinte forma,

$$\dot{V}(x) = \begin{bmatrix} x \\ \pi \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} P(A + B(x)) + (A + B(x))'P & PD(x) \\ D(x)'P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \pi \end{bmatrix}$$

Como $\pi = x_2^2$ e $\mathfrak{N}(x)x = 0$ (conforme em (3.20)), temos

$$\begin{bmatrix} 0 & x_2 & -1 \\ -x_2 & -x_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \pi \end{bmatrix} = 0 \quad , \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Combinando a condição $\dot{V}(x) < 0$ com $\dot{V}(x)$ dada logo acima e aplicando lema de Finsler, temos

$$\dot{V}(x) = \begin{bmatrix} x \\ \pi \end{bmatrix}' (M_1(x) + L_1 C_1(x) + C_1(x)' L_1') \begin{bmatrix} x \\ \pi \end{bmatrix} < 0 \quad (3.28)$$

$$\text{onde } M_1(x) = \begin{bmatrix} P(A+B(x)) + (A+B(x))'P & PD(x) \\ D(x)'P & 0 \end{bmatrix} \text{ e } C_1(x) = \begin{bmatrix} 0 & x_2 & -1 \\ -x_2 & -x_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Comparando (3.28) com (3.15) temos:

$$\phi = \begin{bmatrix} x \\ \pi \end{bmatrix}, \quad N = M_1(x) + L_1 C_1(x) + C_1(x)' L_1' \quad (3.29)$$

Assim, se as LMIs

$$M_1(x) + L_1 C_1(x) + C_1(x)' L_1' < 0, \quad P > 0 \quad (3.30)$$

forem factíveis para $\forall x \in \mathfrak{X}$, então $\dot{V}(x)$ é definida negativa e $V(x)$ é definida positiva. Resolvendo as LMIs acima obtemos factibilidade para todo $x \in \mathfrak{X} = \{x : |x_i| < 0.618, i = 1, 2\}$.

3.6 Comentários

Este capítulo apresentou as definições e conceitos que estarão inseridos no desenvolvimento do trabalho. As ferramentas matemáticas aqui apresentadas, auxiliarão para representar o problema em forma de LMI.

A seção (3.2) apresentou uma definição de estabilidade de sistemas através de uma função $V(x)$ que deve satisfazer algumas condições. Essa função é a função de Lyapunov que deve ser determinada pelo projetista. As funções quadráticas do tipo $V(x) = x'Px$ com $x \in \mathbb{R}^n$ e $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simétrica, candidatas a serem uma função de Lyapunov, são interessantes para a análise de estabilidade porque são simples e possuem as seguintes propriedades:

- Toda matriz simétrica possui autovalores reais;
- A função $V(x)$ é positiva para todo $x \neq 0$ se, e somente se, os autovalores da matriz P são todos positivos, ou seja, $P > 0$. Assim, para garantirmos que $V(x)$ seja positiva, temos que garantir que P é positiva definida, $P > 0$; que é uma LMI fácil de ser resolvida.

Um grande problema que surge quando se deseja formular um problema em termos de LMIs para sistemas não-lineares, é o fato das expressões não se apresentarem originalmente afim nas variáveis de estado. É no sentido de torná-las afim que tais propriedades se tornam essenciais.

Capítulo 4

Projeto do Controlador

4.1 Introdução

Neste capítulo apresentamos uma técnica para a determinação da lei de comutação em um sistema comutado. Um sistema comutado é um sistema cuja estrutura varia de acordo com regras de comutação que são definidas para se atingir algum objetivo de controle. O sistema inversor-motor indicado em (2.98) e (2.100) é um exemplo desse tipo de sistema. Esse sistema possui 7 modos de operação e cada modo corresponde à uma configuração diferente das chaves do inversor.

Um sistema comutado pode ser representado por

$$\dot{x} = f(x, i) \quad (4.1)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ é o estado contínuo do sistema e $i \in \{1, \dots, m\}$ representa os modos de operação.

Os modos de operação do sistema são definidos em função dos estados contínuos medidos y , pois dessa forma a lógica de comutação pode ser obtida através de operações algébricas feitas em tempo real. Nesse trabalho assumiremos que essa lógica será definida a partir de funções quadráticas da forma

$$S_i(y) = y' \mathbf{Q}_i y + y' \mathbf{q}_i + \mathbf{c}_i \quad , \quad \sum_{i=1}^m S_i(y) = 0 \quad (4.2)$$

onde \mathbf{Q}_i é uma matriz simétrica, \mathbf{q}_i é um vetor e \mathbf{c}_i um escalar; a serem determinados. Para um dado vetor de medidas y o modo de operação será escolhido de acordo com o seguinte critério:

$$\text{modo de operação} = \arg \max_i \{S_i(y)\} \quad , \quad (i = 1, \dots, m) \quad (4.3)$$

Quando o $\arg \max_i \{S_i(y)\}$ não for único, adotaremos o seu maior valor.¹

¹Note que qualquer outro critério de eliminação da não unicidade poderia ser adotado.

Observe que o modo de operação assim escolhido será único e além disso, como $S_1(y) + \dots + S_m(y) = 0$, então o maior valor do conjunto $\{S_i(y)\}$ ($i = 1, \dots, m$) será positivo e o definiremos por:

$$S_i(y)^* = \max_i \{S_i(y)\} \quad , \quad (i = 1, \dots, m) \quad (4.4)$$

Para determinar as funções $S_i(y)$ em (4.2) que definem de maneira única os modos de operação do sistema através de (4.3) e ainda garantem estabilidade e desempenho do sistema comutado, iremos utilizar uma função de Lyapunov como indicado em (3.15) e reescrita a seguir:

$$\begin{aligned} V(x) &= \xi(x)' M(x) \xi(x) \\ \dot{V}(x) &= \phi(x)' N_i(x) \phi(x) \end{aligned} \quad (4.5)$$

onde $N_i(x)$ são as matrizes obtidas a partir do modelo do sistema para cada modo de operação. Como $S_i(y)^*$ é positivo, iremos impor $\dot{V}(x) < 0$ da seguinte forma:

$$\dot{V}(x) + S_i(y)^* = \phi(x)' N_i(x) \phi(x) + S_i(y)^* < 0 \quad (4.6)$$

Para resolver (4.6) por LMIs, as funções $S_i(y)$ precisam ser escritas na forma:

$$S_i(y) = \phi(x)' Q_i \phi(x) \quad (4.7)$$

e assim (4.6) nos leva à LMI,

$$N_i(x) + Q_i < 0 \quad , \quad \sum_{i=1}^m Q_i = 0 \quad (4.8)$$

Mostraremos uma aplicação do método aqui introduzido, através de um sistema comutado de segunda ordem. Em seguida estendemos o método para ser utilizado no controle do motor de indução.

4.2 Projeto para um Sistema Comutado

Nesse exemplo trataremos do seguinte sistema:

$$\dot{x} = A_i x \quad , \quad i = \{1, 2\} \quad (4.9)$$

onde $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$ e $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$.

Quando opera no *modo1*, este sistema é estável pois $\lambda(A_1) \in C^-$. Já no *modo2* o sistema é instável. Deseja-se projetar uma lógica de comutação que garanta a estabilidade do sistema comutado. Podemos representar esse sistema conforme indicado na figura (4.1).

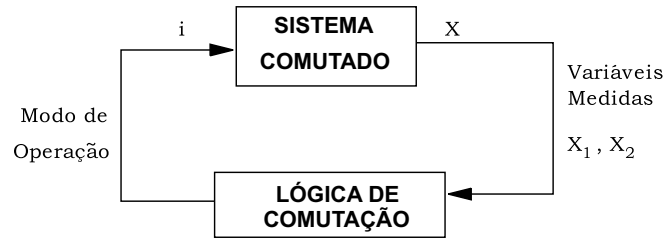


Figura 4.1: Sistema comutado (4.9) e lógica de comutação dada em (4.10).

Para determinar a lógica de comutação iremos supor que esta é definida da seguinte forma:

$$i = \begin{cases} 1 & \text{se } S(x) > 0 \\ 2 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (4.10)$$

onde $S(x) = q_1x_1^2 + q_2x_2^2 + 2q_3x_1x_2$ é uma função quadrática cujos coeficientes q_i deseja-se determinar.

Utilizando a função de Lyapunov,

$$V(x) = x'Px \quad , \quad P > 0 \quad (4.11)$$

temos,

$$\dot{V}(x) = 2x'P\dot{x} = 2x'PA_ix = x'(A_i'P + PA_i)x \quad (4.12)$$

Levando em consideração que no modo de operação 1 tem-se $S(x) > 0$, vem

$$\dot{V}(x) = x'(A_1'P + PA_1)x < 0 \quad , \quad \forall x : S(x) > 0 \quad (4.13)$$

e para o modo 2 tem-se,

$$\dot{V}(x) = x'(A_2'P + PA_2)x < 0 \quad , \quad \forall x : S(x) < 0 \quad (4.14)$$

Aplicando o *procedimento-S* às condições acima temos $\dot{V}(x) < 0$ nos dois modos de operação, se as seguintes condições se verificarem:

$$\begin{aligned} x'(A_1'P + PA_1)x + S(x) &< 0 \\ x'(A_2'P + PA_2)x - S(x) &< 0 \end{aligned} \quad (4.15)$$

Podemos reescrever as expressões acima, considerando que a função $S(x)$ pode ser escrita como

$$S(x) = x'Qx \quad , \quad Q = \begin{bmatrix} q_1 & q_3 \\ q_3 & q_2 \end{bmatrix}. \quad (4.16)$$

E portanto,

$$\begin{aligned} x'(A_1'P + PA_1 + Q)x &< 0 \\ x'(A_2'P + PA_2 - Q)x &< 0 \end{aligned} \quad (4.17)$$

As condições acima estão satisfeitas se as LMIs seguintes são factíveis:

$$\begin{aligned} A_1'P + PA_1 + Q &< 0 \\ A_2'P + PA_2 - Q &< 0 \\ P &> 0 \end{aligned} \quad (4.18)$$

Resolvendo essas LMIs para o sistema (4.9), encontramos:

$$P = \begin{bmatrix} 535.2863 & 173.2731 \\ 173.2731 & 297.6962 \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} 693.0926 & 508.7559 \\ 508.7559 & -297.6962 \end{bmatrix}$$

e portanto $V(x) = x'Px$ mostra a estabilidade do sistema com a lógica indicada em (4.10). Com isso, a função $S(x)$ pode ser calculada e a lógica de comutação fica completamente definida. Uma simulação da técnica foi realizada para o sistema (4.9). A figura (4.2) mostra alguns dos resultados, apresentando algumas trajetórias do sistema para dadas condições iniciais. A função $S(x) = 0$ é a fronteira que separa os modos de operação do sistema e pode ser determinada da seguinte forma. Seja a decomposição,

$$Q = T^{-1} \text{diag}\{\lambda_i\}T \quad (4.19)$$

onde λ_i são os autovalores de Q . Definindo $z = Tx = [z_1 \ z_2]'$, podemos escrever,

$$x'Qx = \lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 \quad (4.20)$$

com

$$T = \begin{bmatrix} 0.3888 & -0.9213 \\ -0.9213 & -0.3888 \end{bmatrix} \quad e \quad \text{diag}\{\lambda_i\} = \begin{bmatrix} -512.4042 & 0 \\ 0 & 907.8042 \end{bmatrix}$$

A região de comutação é dada por $x'Qx = 0$, ou seja,

$$\frac{-\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{z_2^2}{z_1^2} = 0.5644 \quad (4.21)$$

Tomando a raiz quadrada da expressão acima temos,

$$z_2 = \pm \sqrt{0.5644}z_1 \quad (4.22)$$

que nos leva às seguintes retas de comutação:

$$-0.9213x_1 - 0.3888x_2 \pm \sqrt{0.5644}(0.3888x_1 - 0.9213x_2) = 0 \quad (4.23)$$

ou

$$x_2 = -0.5821x_1 \quad (4.24)$$

$$x_2 = +4.0007x_1$$

A solução de $S(x) = 0$ define retas que se cruzam na origem e podem ser visualizadas na figura (4.2). Pela figura é possível perceber uma mudança no comportamento da trajetória que atravessa $S(x) = 0$. Um aspecto particular do sistema é o fato de que apenas uma das retas é atrativa. Quando a trajetória alcança a reta que é atrativa, ela não mais se afasta da mesma e “deslizará” sobre a superfície (reta) até a origem que é um ponto de equilíbrio. Esse método de controle é conhecido na literatura como *Controle por Modos Deslizantes*².

A abordagem de controle aqui apresentada difere da técnica de controle por modos deslizantes clássico, ou *sliding mode*, em alguns pontos. No que diz respeito à superfície de deslizamento, temos que para a abordagem apresentada, a mesma não precisa ser definida previamente pois ela é parte da solução do problema. O leitor pode notar que os coeficientes da superfície $S(x)$, usada no exemplo, são os elementos da matriz Q , que é uma das variáveis determinadas pelo método. No *sliding mode* há a necessidade de definição de uma superfície na etapa inicial do projeto, sendo que não existe uma metodologia sistemática para encontrá-la. Note que a estabilidade do sistema depende da escolha da superfície de comutação. A factibilidade das LMIs em (4.18) garante as condições de estabilidade de Lyapunov para todo o espaço de estados, ou seja, a estabilidade é global. Maiores detalhes sobre o controle por modos deslizantes podem ser encontrados em [Kha96], [SB89] e [Edw03].

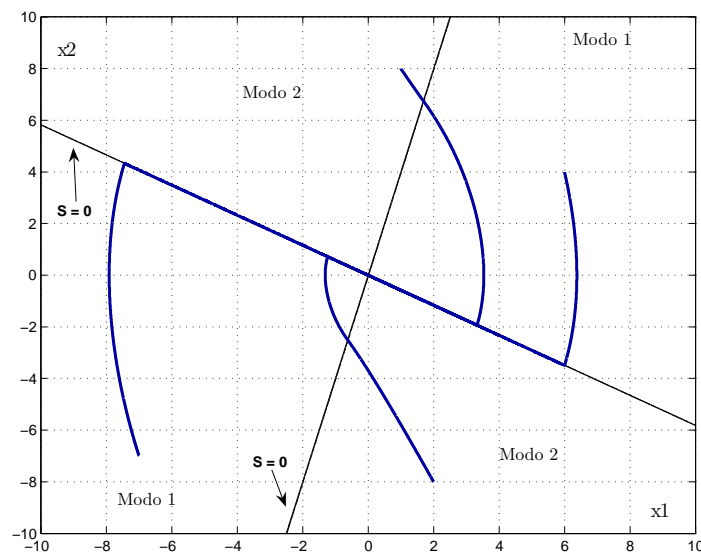


Figura 4.2: Trajetórias do sistema (4.9) com a lógica de comutação dada em (4.10).

²Ou *Sliding Mode Control*, do Inglês.

Interessante notar que a condição para haver comutação entre os modos de operação do sistema (4.9) é obtida de (4.16) e consiste em se obter uma matriz Q que possua autovalores com sinais opostos. Isso equivale a dizer que Q não é definida positiva e nem definida negativa. No caso de se ter $Q > 0$ ou $Q < 0$, a função $S(x)$ seria definida positiva e definida negativa para todo $x \neq 0$, respectivamente; situação na qual não existe comutação.

4.3 Projeto para o Motor de Indução

Nesta seção o projeto de controle do motor de indução trifásico é apresentado. A metodologia utilizada consiste em escrever as condições do problema em forma de LMIs, como indicado em (3.15). A teoria de estabilidade de Lyapunov será usada para garantir o requisito de desempenho de controle, que é o seguimento de referências para as seguintes grandezas: módulo das correntes do estator e módulo dos fluxos do rotor no sistema de coordenadas estacionário, e velocidade do rotor, ou seja, $(i_\alpha^s{}^2 + i_\beta^s{}^2)$, $(\phi_\alpha^r{}^2 + \phi_\beta^r{}^2)$, ω_r ; respectivamente.

Assim, a saída a ser regulada do sistema é dada pela expressão abaixo.

$$Y = C_r(x)x = \begin{bmatrix} x_1^2 + x_2^2 \\ x_3^2 + x_4^2 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

onde $C_r(x) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 & x_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

O vetor de referências constantes a serem seguidas, é dado por:

$$Y_r = \begin{bmatrix} Y_{r1} \\ Y_{r2} \\ Y_{r3} \end{bmatrix}. \quad (4.26)$$

E vamos ainda considerar o seguinte vetor de medidas do sistema:

$$y = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix}. \quad (4.27)$$

O problema a ser resolvido é encontrar condições de comutação para o inversor, tal que o erro de seguimento de referência $E(x) = Y - Y_r$ convirja para *zero*, para um conjunto de condições iniciais delimitado por um dado politopo \mathfrak{X} . Para atingir esse objetivo iremos utilizar a função de Lyapunov indicada pela expressão (4.28) e buscar condições de comutação do inversor que leve a ter $\dot{V}(x) < 0, \forall x \in \mathfrak{X}$.

$$V(x) = E(x)'PE(x) \quad (4.28)$$

onde $P > 0$ é uma matriz constante a ser determinada e $E(x) = Y - Y_r$ é o erro de seguimento de referência.

Isto permitirá afirmar que para toda condição inicial pertencente à \mathfrak{X} , tem-se

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E(x(t)) = 0$$

que é a situação desejada de erro nulo de seguimento de referência em regime permanente. Além disso, com módulo de correntes e fluxos e velocidade constantes em regime permanente, pode-se afirmar que todas as variáveis de estado do motor são limitadas; garantindo estabilidade do sistema.

4.3.1 Preliminares

Desejamos encontrar a derivada da função de Lyapunov em uma forma similar àquela apresentada em (3.15). Para fazer isso começamos derivando (4.28).

$$\dot{V}(x) = 2\dot{E}(x)'PE(x) \quad (4.29)$$

Expandindo o termo $\dot{E}(x)$, temos

$$\dot{E}(x) = \begin{bmatrix} 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 \\ 2x_3\dot{x}_3 + 2x_4\dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \end{bmatrix}$$

e aplicando as equações do sistema apresentadas em (2.100),

$$\dot{E}(x) = \begin{bmatrix} 2x_1(-a_3x_1 + a_1x_3 + a_2x_4x_5 + a_4V_{\alpha_i}^s) + 2x_2(-a_3x_2 - a_2x_3x_5 + a_1x_4 + a_4V_{\beta_i}^s) \\ 2x_3(a_6x_1 - a_5x_3 - a_0x_4x_5) + 2x_4(a_6x_2 + a_0x_3x_5 - a_5x_4) \\ a_7(x_2x_3 - x_1x_4) - a_8a_9x_5 - a_8\tau_c \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

Com a seguinte mudança de variáveis,

$$\pi_1 = x_4x_5 \quad (4.31)$$

$$\pi_2 = x_3x_5$$

podemos definir a seguinte variável:

$$\xi = \begin{bmatrix} D_1 & D_2 & D_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ x \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

onde

$$D_1 = \begin{bmatrix} a_2x_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad D_2 = \begin{bmatrix} -a_2x_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

$$D_3 = \begin{bmatrix} -a_3x_1 + a_1x_3 + a_4V_{\alpha_i}^s & -a_3x_2 + a_1x_4 + a_4V_{\beta_i}^s & 0 & 0 & 0 \\ a_6x_3 & a_6x_4 & -a_5x_3 & -a_5x_4 & 0 \\ -\frac{a_7x_4}{2} & \frac{a_7x_3}{2} & 0 & 0 & -\frac{a_8a_9}{2} \end{bmatrix}.$$

$$\text{Assim temos, } \dot{E}(x) = 2\xi + C_0, \text{ onde } C_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -a_8\tau_c \end{bmatrix}.$$

Voltando à função (4.29), podemos reescrevê-la como

$$\dot{V}(x) = 2(2\xi + C_0)'P(Y - Y_r) = 2(2\xi' + C_0')P(C_r(x)x - Y_r)$$

Com (4.32) e a expressão acima, podemos escrever a condição $\dot{V}(x) < 0$ da seguinte maneira:

$$\dot{V}(x) = 2 \begin{bmatrix} \xi \\ \pi_1 \\ \pi_2 \\ x \\ 1 \end{bmatrix}' M(x) \begin{bmatrix} \xi \\ \pi_1 \\ \pi_2 \\ x \\ 1 \end{bmatrix} < 0 \quad (4.34)$$

$$\forall \begin{bmatrix} \xi \\ \pi_1 \\ \pi_2 \\ x \end{bmatrix} : N(x) \begin{bmatrix} \xi \\ \pi_1 \\ \pi_2 \\ x \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\text{onde } M(x) = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} & 0 & 0 & 2PC_r(x) & -2PY_r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0_{5 \times 5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_0'PC_r(x) & -C_0'PY_r \end{bmatrix}, N(x) = \begin{bmatrix} -I_{3 \times 3} & D_1 & D_2 & D_3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & D_4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & D_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_{5 \times 5} & x \\ 0 & 0 & 0 & \mathfrak{K}(x) & 0_{10 \times 1} \end{bmatrix},$$

$$D_4 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ x_4],$$

$$D_5 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ x_3].$$

Note que as linhas da matriz $N(x)$ definem as variáveis ξ em (4.32) e π_1 e π_2 em (4.31).

A matriz $\mathfrak{N}(x)$ é o anulador linear das variáveis x e está indicado a seguir.

$$\mathfrak{N}(x) = \begin{bmatrix} x_2 & -x_1 & 0 & 0 & 0 \\ x_3 & 0 & -x_1 & 0 & 0 \\ x_4 & 0 & 0 & -x_1 & 0 \\ x_5 & 0 & 0 & 0 & -x_1 \\ 0 & x_3 & -x_2 & 0 & 0 \\ 0 & x_4 & 0 & -x_2 & 0 \\ 0 & x_5 & 0 & 0 & -x_2 \\ 0 & 0 & x_4 & -x_3 & 0 \\ 0 & 0 & x_5 & 0 & -x_3 \\ 0 & 0 & 0 & x_5 & -x_4 \end{bmatrix}$$

O papel do anulador é reduzir o conservadorismo das LMIs no caso de sistemas não lineares. Veja o exemplo 1 do capítulo anterior.

A lei de comutação do inversor será dependente dos estados do sistema motor, no seguinte sentido: o controle v_i ($i = 1, \dots, 7$) em (2.98), que é constante para cada modo de operação, é escolhido baseado na localização dos estados do sistema. Para cada modo de operação do inversor será atribuída uma função dependente de estados contínuos x , que chamaremos de função de comutação e denotaremos $S_i(x)$ com ($i = 1, \dots, 7$). Em cada instante de amostragem as funções $S_i(x)$ são computadas e o modo de operação do sistema será definido a partir do maior valor de $S_i(x)$ entre $\{S_1(x), \dots, S_7(x)\}$. Para garantir que $\max_i \{S_i(x)\} = S_i(x)^*$ seja positivo, introduzimos a condição

$$\sum_{i=1}^7 S_i(x) = 0 \quad (4.35)$$

Assim o sinal de controle do motor será $v = v_i$, onde i é o índice da maior função de comutação (dentre as 7 possíveis) naquele instante de amostragem e o modo de operação do inversor é definido pelo sinal de comando u que é determinado através da tabela (2.1). Para serem computadas a cada instante, as funções $S_i(x)$ devem depender apenas das variáveis medidas, pois somente estas estarão disponíveis em tempo real. Sabendo que as variáveis medidas estão representadas pelo vetor de medidas y , ver expressão (4.27), podemos escrever as funções de comutação como $S_i(y)$.

Pensou-se então em utilizar funções quadráticas. A expressão para tais funções estão colocadas abaixo³.

$$S_i(y) = q_{i1}x_1 + q_{i2}x_2 + q_{i3}x_1^2 + q_{i4}x_2^2 + q_{i5}x_5^2 + q_{i6} + q_{i7}x_5 + q_{i8}x_1x_2 + q_{i9}x_1x_5 + q_{i10}x_2x_5 \quad i = (1, \dots, 7) \quad (4.36)$$

onde as constantes q_{ij} ($j = 1, \dots, 10$) serão determinadas juntamente com a matriz P . Note que devido (4.35), temos

$$S_7(y) = - \sum_{i=1}^6 S_i(y) \quad (4.37)$$

Escrevendo matricialmente temos,

$$S_i(y) = \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}' Q_i \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

onde $Q_i = \begin{bmatrix} Q_{i1} & 0 & Q_{i2} \\ 0 & 0_{2 \times 2} & 0 \\ Q_{i2}' & 0 & Q_{i3} \end{bmatrix}$ com Q_{i1}, Q_{i3} simétricas e Q_{i2} livre. As constantes q_{ij} de (4.36) são os elementos das matrizes $Q_{i1}, Q_{i2}, Q_{i3} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$.

É de interesse que se reescreva a expressão matricial acima em termos das variáveis que foi escrita a derivada de $V(x)$ em (4.34). A expressão desejada fica,

$$S_i(y) = \begin{bmatrix} \xi \\ \pi_1 \\ \pi_2 \\ x \\ 1 \end{bmatrix}' \Phi_i \begin{bmatrix} \xi \\ \pi_1 \\ \pi_2 \\ x \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

onde $\Phi_i = \left[\begin{array}{c|c} 0_{5 \times 5} & 0 \\ \hline 0 & Q_i \end{array} \right]$.

4.3.2 Resultados principais

Observando a função $\dot{V}(x)$ em (4.34), nota-se que ela pode ser escrita como,

$$\dot{V}(x) = \zeta' (M(x) + M(x)') \zeta < 0 \quad , \quad \zeta = \begin{bmatrix} \xi \\ \pi_1 \\ \pi_2 \\ x \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

³A notação S_i foi usada aqui, para indicar *uma* função para cada configuração do inversor.

Para enfatizar que a matriz $N(x)$ em (4.34) depende das saídas do inversor, pois D_3 é diferente para cada modo de operação do inversor ($i = 1, \dots, 7$), vamos usar a partir de agora a notação $N_i(x)$ para representar $N(x)$ em cada um dos 7 modos do inversor. Como $N_i(x)\zeta = 0$, podemos usar o lema de Finsler dado em (3.11), chegando na expressão abaixo.

$$\dot{V}(x) = \zeta' (M(X) + M(x)' + L_i N_i(x) + N_i(x)' L_i') \zeta < 0 \quad (4.41)$$

Usaremos agora procedimento-S para concatenar duas condições já conhecidas em uma. Sendo $S_i(y)^*$ o maior valor dentre $\{S_1(y), \dots, S_7(y)\}$ e lembrando que $S_i(y)^* > 0$, a condição desejada é dada por

$$\zeta' (M(x) + M(x)' + L_i N_i(x) + N_i(x)' L_i') \zeta < 0 \quad : \quad S_i(y)^* = \zeta' \phi_i \zeta > 0 \quad (4.42)$$

Podemos formalizar o problema da seguinte forma: se a seguinte LMI nas variáveis P, Q_i, L_i

$$M(x) + M(x)' + L_i N_i(x) + N_i(x)' L_i' + \phi_i < 0 \quad \forall x \in \mathfrak{X}, \quad (i = 1, \dots, 7) \quad (4.43)$$

tem solução, então (4.42) está satisfeita. Em (4.43), \mathfrak{X} é o politopo que representa um conjunto de condições iniciais dos estados do sistema.

Quando satisfeita, a expressão acima indica que $\dot{V}(x) < 0, \forall x : S_i(y) > 0$, e portanto, o inversor no modo de operação i , garante decrescimento do erro de seguimento; medido através da função $V(x) = E(x)' P E(x)$. Para escrever a condição (4.35) em termos de LMI, note que

$$\tilde{S}_i(y) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_5 \\ 1 \end{bmatrix} \tilde{Q}_i \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_5 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

onde $\tilde{Q}_i = \left[\begin{array}{c|c} Q_{i1} & Q_{i2} \\ \hline Q'_{i2} & Q_{i3} \end{array} \right]$ e a condição (4.35) se escreve como

$$\sum_{i=1}^7 \tilde{Q}_i = 0 \quad (4.45)$$

Ainda existe uma condição que precisa ser satisfeita, a da positividade da função de Lyapunov $V(x)$. A função $V(x)$ é positiva para todo $(Y - Y_r) \neq 0$ se os autovalores da matriz P forem todos positivos. Logo, a condição em (4.46) garante a positividade da função $V(x)$.

$$P > 0 \quad (4.46)$$

Enfim, o conjunto de LMIs que devem ser resolvidas é dado pelas desigualdades (4.43), (4.45) e (4.46), agrupadas abaixo:

$$M(x) + M(x)' + L_i N_i(x) + N_i(x)' L_i' + \varphi_i < 0 \quad \forall x \in \mathfrak{X} \quad (i = 1, \dots, 7) \quad (4.47)$$

$$\sum_{i=1}^7 \tilde{Q}_i = 0$$

$$P > 0$$

Quando for possível resolver (4.47), obtendo as soluções P, L_i e Q_i , temos garantia que $\dot{V}(x)$ será negativa definida e portanto, podemos concluir que o erro de seguimento para a saída Y será nulo em regime permanente. É importante perceber que esse fato não implica que as variáveis de estado do motor são constantes, e portanto, a situação de regime permanente não caracteriza em geral um ponto de equilíbrio. Na situação típica de equilíbrio obtida com técnicas clássicas baseadas em modulação *PWM*, as correntes e fluxos são senoidais com módulo constante. Com (4.47) não se garante comportamento senoidal dessas variáveis, mas apenas de módulo constante e erro nulo de velocidade.

4.3.3 O sistema de controle

A solução das LMIs (4.47) é um problema de *factibilidade*. Assim, se essas LMIs são factíveis, então elas geram os coeficientes das funções de comutação. Tais coeficientes são necessários para a definição do sinal de comando das chaves do inversor de tensão. A figura (4.3) representa em diagrama de blocos, a estrutura do sistema de controle.

O sistema possui realimentação dos estados medidos, a saber: correntes no estator (I_α^s, I_β^s) e velocidade do rotor (ω_r). Em cada instante de amostragem verifica-se o sinal das funções $S_i(y)$ e seleciona-se entre as positivas (temos garantia que ao menos uma será positiva), qual delas será escolhida para definir a posição das chaves do inversor. O critério de escolha é definido pelo projetista. Por exemplo, pode-se adotar o critério de minimizar o número de chaves a se abrir/fechar em cada instante. Outro critério seria verificar a cada instante qual das funções de comutação promove o maior decaimento da função de Lyapunov, isto é, qual delas possui o maior valor de $S_i(y)$. De (4.43) sabe-se que quanto maior $S_i(y)$, mais negativa deverá ser $\dot{V}(x)$; já que $\dot{V}(x) + S_i(y) < 0$. Esse é o critério adotado nesse trabalho. É importante ressaltar que, qualquer que seja o critério utilizado, sempre teremos $\dot{V}(x) < 0$, e portanto, a estabilidade do sistema fica garantida.

Uma vez definida a posição das chaves do inversor, aguarda-se a próxima medida dos estados e refaz-se os cálculos das funções para atualizar o sinal de comando das chaves do inversor. A lógica do controlador pode ser observada no diagrama de blocos da figura (4.3).

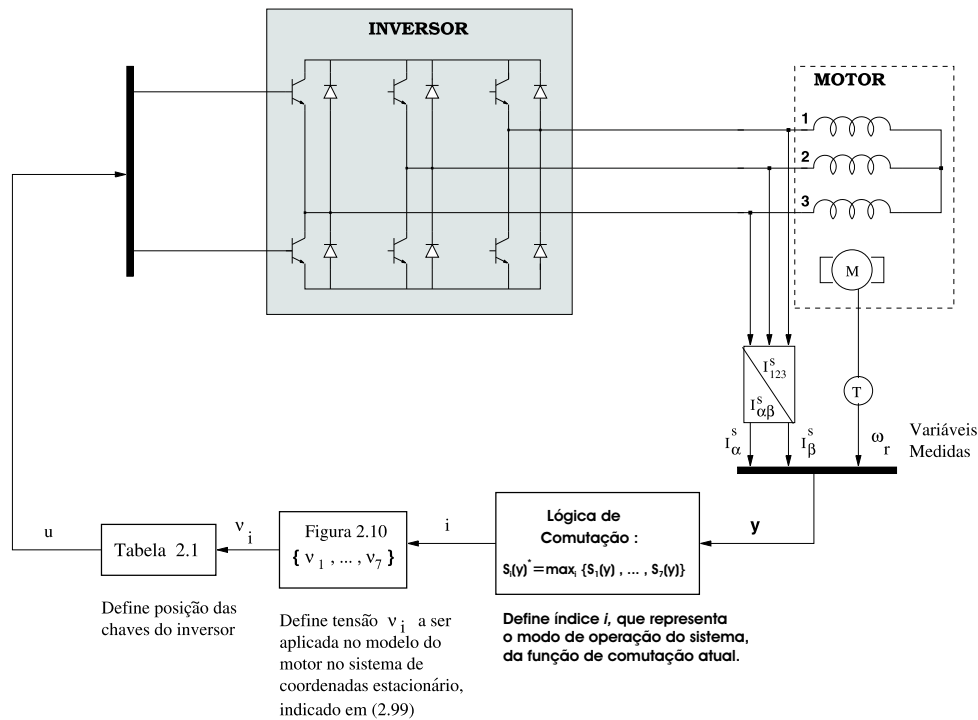


Figura 4.3: Diagrama de blocos do sistema de controle do motor de indução trifásico.

4.3.4 Simulação das LMIs

Existem alguns pacotes computacionais para se resolver problemas de LMI, sendo que a maior parte é comercial. Podemos citar aqui 2 pacotes que são bastante conhecidos mundialmente. O pacote LMI-Lab, que é comercial e pode ser encontrado como *toolbox* do software Matlab, usa o algoritmo projetivo de Nemirovskii — apontado pela referência [BGFB94] como o algoritmo mais eficiente desenvolvido para resolução de LMIs. Um outro pacote computacional que resolve LMI é o LMI-tool, sendo que este possui a vantagem de não ser comercial, de possuir uma interface amigável e pode ser encontrado no programa computacional Scilab, que é um programa do tipo freeware.

Com relação à resolução das LMIs em (4.43), podemos observar alguns pontos importantes. Resolver a LMI (4.43) para $\forall x \in \mathfrak{X}$, significa resolver simultaneamente essa LMI nos vértices de \mathfrak{X} , conforme foi explicado na seção (3.4). Como o sistema possui 5 variáveis de estado, tem-se que o politopo \mathfrak{X} possuirá 2^5 vértices. O politopo \mathfrak{X} foi escolhido através de uma simulação do motor do indução⁴ sendo acionado por inversor de tensão com modulação *PWM*. Dessa simulação foi extraído então os valores mínimos e máximos das variáveis de estado do motor, com os quais se formam os vértices de \mathfrak{X} .

Um aspecto relevante na busca de solução das LMIs (4.43) diz respeito à dimensão da

⁴Os dados numéricos do motor usado neste trabalho, bem como outros dados de simulação se encontram no apêndice (A).

LMI final, que é obtida ao se resolver (4.43) simultaneamente para todo $i = 1, \dots, 7$ em todos os vértices de \mathfrak{X} . Para quantificar esse fato, podemos obter o número de LMIs que devem ser resolvidas. Como já temos 7 LMIs, devido ao sistema ser comutado, teremos ainda mais 32 (2^5) LMIs para cada uma das 7. Somado às outras desigualdades matriciais em (4.47), gera um total de 226 LMIs a serem resolvidas.

4.3.5 Comentários

Este capítulo tratou de apresentar a solução para o problema de controle do motor de indução com seguimento de referência em uma abordagem LMI. Nas LMIs apresentadas em (4.43), pode-se notar que foi usado uma variável de escalonamento de Finsler L_i para cada modo de operação do sistema. Caso L_i fosse fixo, ou seja, o mesmo para todas as situações de comutação, as LMIs implicariam, por convexidade, que $\dot{V}(x) < 0$ estaria satisfeita para qualquer combinação convexa de v_i , o que não se deseja; pois na verdade v_i assume apenas 7 valores possíveis como pode ser visto em (2.98).

O critério de escolha do sinal de comando u aplicado nas chaves do inversor, baseia-se na escolha da função $S_i(y)$ que proporciona um maior decaimento da função de Lyapunov $V(x)$. Para isso, basta escolher a maior função $S_i(y)$ para ($i = 1, \dots, 7$) a cada instante de amostragem. É importante notar que, caso a positividade da função ativa, ou seja, aquela que gerou o sinal de comando das chaves no instante anterior, seja verificada no instante mais atual e ainda, apresentar o maior valor; então não haverá comutação do inversor. Assim, a evolução dos estados no tempo “informará” ao controlador da necessidade de mudança no sinal de controle, de acordo com a estratégia acima.

Um ponto que poderia ser considerado na abordagem é o fato de o torque de carga τ_c e o coeficiente de atrito b , que aparecem em (2.100), poderem sofrer variações durante a operação do motor. Tais variações podem ser levadas em conta em (4.43). Para isso, basta notar que os parâmetros τ_c e b aparecem de forma afim nas LMIs, e então, reescrever (4.43) para os valores mínimos e máximos desses parâmetros. A estratégia assim obtida será robusta para a faixa de valores admitida dos parâmetros.

Com relação aos resultados esperados na resolução das LMIs, foi constatado problemas numéricos por parte do programa computacional usado na implementação das LMIs (4.47). Essa constatação advém do fato de que o problema é factível quando resolvido para *um* vértice qualquer de \mathfrak{X} , ou até mesmo para $x = 0$. No entanto, ele deixa de ser factível quando a mesma LMI é repetida 32 vezes, simulando 32 vértices iguais. Nesse caso, o programa simplesmente não encontra solução; ficando óbvio a existência de uma dificuldade numérica encontrada.

Capítulo 5

Conclusões

O capítulo (2) deste trabalho apresentou o primeiro passo a ser tomado quando se deseja fazer controle do motor de indução, que é fazer a modelagem desse sistema. Ficou estabelecido que os modelos trifásicos, onde as grandezas do estator são referidas à um referencial estacionário e as grandezas do rotor à um referencial girante com o rotor, não são adequados para o uso em controle. De fato, aqueles modelos possuem equações de difícil solução, senão impossível. Por isto, foram desenvolvidas técnicas baseadas em transformações lineares, com o objetivo de estabelecer modelos mais simples a partir do modelo original. O uso dessas transformações permitiu chegar-se em um modelo por representação de estados, modelo este de interesse para o propósito do trabalho.

O capítulo (3) apresentou a base conceitual na qual este trabalho se fundamenta. A teoria de estabilidade de Lyapunov, que é uma teoria largamente utilizada para provar estabilidade de sistemas, se mostra como um conceito de grande relevância neste trabalho. A definição de LMI foi dada, bem como, de algumas propriedades que são úteis quando se deseja colocar um problema na forma de LMI; uma tarefa muitas vezes complexa.

O ponto inicial do projeto de controle de seguimento de referência para o motor de indução, proposto nesse trabalho, foi a escolha da função de Lyapunov. Essa função foi escolhida de tal maneira que fosse possível controlar o módulo das correntes do estator e dos fluxos do rotor e a velocidade do rotor. A partir desse ponto, buscou-se representar as condições que a teoria de estabilidade de Lyapunov exige, em forma de LMIs. Uma vez que as LMIs resultantes fossem factíveis, teria-se garantido que: existiria sempre uma lei de controle para o comando das chaves do inversor, e portanto um sinal de controle para o motor, e ainda, haveria seguimento de referência das grandezas que se deseja regular.

O tamanho das LMIs a serem resolvidas ocasionou problemas numéricos que inviabilizaram a obtenção de uma conclusão a respeito da aplicabilidade do método de projeto aqui apresentado. Para tentar contornar esse problema, uma primeira alternativa seria utilizar

um pacote computacional para solução de LMIs com maior capacidade que aquele utilizado neste trabalho. Este é um ponto a ser verificado com pesquisadores que já utilizam esses pacotes comerciais no exterior.

Existem técnicas que permitem reduzir o crescimento exponencial do número de LMIs, ocasionado pela abordagem politópica. Esta é uma das frentes de trabalho a ser explorada na continuidade deste trabalho. A desvantagem dessas técnicas é que elas introduzem, em geral, um certo grau de conservadorismo. Outro ponto a ser explorado é verificar a possibilidade de utilização de funções de Lyapunov mais ricas que possam levar ao projeto de uma estratégia de comutação que força um comportamento senoidal das correntes e fluxos; como ilustrado na figura (2.8). Isso pode ser possível através do uso de funções de Lyapunov diferentes para cada modo de comutação. A desvantagem é o aumento do número de LMIs que pode agravar os problemas numéricos já encontrados.

Durante o curso de mestrado, realizei alguns outros estudos relacionados à abordagem LMI. Um deles resultou em um artigo que pode ser verificado em [TCBC05]. O referido trabalho se propôs a apresentar uma nova abordagem para o projeto de controle multi-objetivo H_2/H_∞ de sistemas lineares. A metodologia proposta é baseada em uma condição de estabilidade onde a parametrização do controlador não depende explicitamente da matriz da função de Lyapunov, permitindo o uso de múltiplas funções de Lyapunov. Isso leva à resultados menos conservadores, se comparado com o caso usual de controle H_2/H_∞ , o qual considera uma única função de Lyapunov utilizada na parametrização do controlador.

A principal contribuição desse trabalho consiste na apresentação de uma estratégia original de controle para o motor de indução via abordagem LMI. A construção das LMIs foi algo bastante motivante e desafiador, constituindo uma importante etapa do trabalho. Notar ainda que o método poderia se aplicar à outros sistemas que possuam estrutura de comutação, bastando reescrever as LMIs para esse novo sistema. Com relação à resolução das LMIs obtidas, um grande esforço foi feito para a implementação das mesmas; onde buscou-se a solução através de dois pacotes computacionais conhecidos. Outro ponto importante do trabalho foi a obtenção de um modelo do sistema que fosse adequado para o método; o modelo que nos referimos é o modelo comutado mostrado em (2.100), representado no sistema de coordenadas estacionário.

Como perspectivas de trabalhos futuros, podemos indicar:

- Buscar a utilização de um pacote computacional mais eficiente;
- Explorar técnicas que permitam redução do crescimento exponencial das LMIs, provocado pela abordagem politópica;
- Fazer uso de múltiplas funções de Lyapunov, uma para cada modo de comutação do sistema, em contraste ao uso de apenas uma função para qualquer situação.
- Supor que os estados x_3 e x_4 (fluxos no rotor) são mensuráveis, assim, as funções de comutação poderiam assumir outras formas.

Apêndice A

Dados de Simulação

Os parâmetros e valores nominais do motor, adotados nos estudos de simulação, foram extraídos de [dSM96] e se encontram listados abaixo:

Tensão de Linha	220V/380V
Corrente de Linha	4.9A/2.8A
Frequência	60Hz
Potência	2.2kW
Velocidade	1750rpm
Resistência do estator (R_s)	0.687 Ω
Resistência do rotor (R_r)	0.842 Ω
Indutância própria do estator (L_s)	0.08397H
Indutância própria do rotor (L_r)	0.08528H
Indutância mútua estator-rotor (L_{sr})	0.08136H
Momento de inércia (J)	0.03kg.m ²
Coefficiente de atrito (b)	0.01N.M.s/rad
Número de pares de pólos (v)	2
Tensão DC do inversor (V_{cc})	380V
Referência de seguimento (Y_r)	$\begin{bmatrix} 80 \\ 1 \\ 100 \end{bmatrix}$
Politopo (x)	$\underline{x} = \begin{bmatrix} -100 \\ -100 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{x} = \begin{bmatrix} +100 \\ +100 \\ +1 \\ +1 \\ 100 \end{bmatrix}$

Referências Bibliográficas

[Bar85] I. Barbi. *Teoria Fundamental do Motor de Indução*. Editora da UFSC, 1985.

[BGFB94] S. Boyd, L.E. Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory*. Siam books, 1994.

[BM01] I. Barbi and D.C. Martins. *Teoria Fundamental da Eletrônica de Potência*. Editora da UFSC, 2001.

[CTSS05] D.F. Coutinho, A. Trofino, Y. Shrivastava, and S. Sathiakumar. h_∞ sliding surface design for uncertain switched systems. *Relatório Técnico*, 2005.

[dSM96] Luiz Carlos de Souza Marques. *Controle de Torque do Motor de Indução com a Consideração de Incertezas Paramétricas: Abordagem Baseada na Energia*. Dissertação (mestrado em engenharia elétrica), Centro Tecnológico, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 1996.

[Edw03] C. Edwards. A practical method for the design of sliding mode controllers using linear matrix inequalities. *Conference on Decision and Control*, 2003.

[Kha96] H. K. Khalil. *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, 1996.

[Lib] D. Liberzon. *Switching in Systems and Control*. Birkäuser.

[PB97] C. C. Paim and A. S. Bazanella. Métodos de alto desempenho para o controle de motores de indução. *Anais do SIDI 97 - Seminário Interno do Departamento de Engenharia Elétrica e da Instrumentação Eletroeletrônica*, 1997.

[Reg93] Romeu Reginatto. *Controle por Campo Orientado do Motor de Indução com Adaptação de Parâmetros via MRAC*. Dissertação (mestrado em engenharia elétrica), Centro Tecnológico, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 1993.

[SB89] A. Sabanovic and F. Bilalovic. Sliding mode control of ac drives. *IEEE Transactions on Industry Applications*, 25(1):70–75, January/February 1989.

-
- [TCBC05] A. Trofino, M. Coutinho, K. A. Barbosa, and D.F. Coutinho. A new strategy to the multi-objective control of linear systems. *Conference on Decision and Control*, 2005.
- [Tro04] A. Trofino. Local, regional and global stability: An lmi approach for uncertain nonlinear systems. *Relatório Técnico*, 2004.