

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
ENGENHARIA MECÂNICA**

**SOBRE AS FUNÇÕES MITTAG -LEFFLER E O MODELO FRACIONÁRIO DE
MATERIAIS VISCOELÁSTICOS**

Tese submetida à

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

para a obtenção do grau de

DOUTOR EM ENGENHARIA MECÂNICA

IZOLDA DEL CORNO MOSCHEN

Florianópolis, dezembro de 2006

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
ENGENHARIA MECÂNICA

**SOBRE AS FUNÇÕES MITTAG -LEFFLER E O MODELO FRACIONÁRIO DE
MATERIAIS VISCOELÁSTICOS**

Izolda Del Corno Moschen

Esta tese foi julgada adequada para a obtenção do título de
Doutor

ESPECIALIDADE ENGENHARIA MECÂNICA
sendo aprovada em sua forma final.

Prof. José João de Espíndola, PhD – Orientador

Prof. Fernando Cabral, PhD – Coordenador do Curso

BANCA EXAMINADORA

Prof. Carlos Alberto Bavastri, Dr. Eng. – Presidente

Prof. Eduardo Márcio de Oliveira Lopes, PhD.

Prof. Paulo de Tarso Rocha Mendonça, PhD.

Prof. Fermin Bázan, Dr. Ing.

“Comece fazendo o que é necessário, depois o que é possível,
de repente você está fazendo o impossível”.

São Francisco de Assis

AGRADECIMENTOS

Ao Professor José João de Espíndola, pela constante orientação e pelo valioso conhecimento transmitido durante o trabalho.

Ao marido Florêncio, aos filhos Patrícia e Rafael, ao genro Di Huri e a nora Melissa, pelo amor, carinho, apoio e dedicação.

Aos companheiros de trabalho: João Neto, Gilberto, Geraldo, Petroneo, Wagner, Gustavo, João Marra e Cleber, pela amizade, troca de idéias e contribuição.

À Servidora Adriana C. Vieira, PISA-LVA, pela disponibilidade, auxílio e amizade durante todo esse período.

Ao Engenheiro Eduardo Márcio de Oliveira Lopes, pelas sugestões, discussões e esclarecimentos ao longo do trabalho.

Ao Rafael de Espíndola e Rafael Machado Casali, pelo auxílio na parte computacional.

À Universidade Federal de Santa Catarina, por permitir realizar esse trabalho.

A Deus, por permitir-me mais essa oportunidade.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS.....	viii
LISTA DE TABELAS.....	xi
SIMBOLOGIA	xii
RESUMO.....	xv
ABSTRACT.....	xvi
1 INTRODUÇÃO.....	1
1.1 Materiais viscoelásticos.....	1
1.2 Pesquisas desenvolvidas no PISA-LVA.....	3
1.3 Estado da arte.....	5
1.4 Estrutura de tese.....	7
2 MODELOS MECÂNICOS A DERIVADAS INTEIRAS.....	9
2.1.Viscoelasticidade linear.....	9
2.1.1 Creep.....	9
2.1.2 Relaxação de tensão.....	11
2.1.3 Fenômeno creep e relaxação de tensão.....	12
2.2 Modelando o comportamento viscoelástico.....	15
2.3 Os Modelos mecânicos clássicos de viscoelasticidade.....	17
2.3.1 Modelo clássico de Maxwell.....	18
2.3.2 Modelo clássico de Kelvin (ou Voigt).....	20
2.3.3 Modelo clássico Linear Padrão (ou Zener).....	22
3 MODELOS MECÂNICOS A DERIVADAS FRACIONÁRIAS	26
3.1 Aplicação do cálculo fracionário.....	26
3.2 Equações constitutivas viscoelásticas fracionárias.....	26
3.3 Modelos fracionários.....	28
3.3.1 Modelo fracionário de Maxwell.....	28
3.3.2 Modelo fracionário de Kelvin (ou Voigt).....	33
3.3.3 Modelo Fracionário Linear Padrão (ou Zener).....	37
4 RELAÇÕES CONSTITUTIVAS HEREDITÁRIAS VISCOELÁSTICAS.....	44
4.1 Derivação da relação constitutiva linear viscoelástica para relaxação de tensão....	44
4.2 Separação do módulo de equilíbrio.....	47

4.3 A Transformada de Laplace da relação constitutiva.....	48
4.4 Equações constitutivas de materiais viscoelásticos.....	50
4.4.1 Modelo de derivadas inteiras.....	51
4.4.2 Modelo de derivadas fracionárias.....	52
4.5 Dedução de $G(t)$ por divisão longa.....	53
4.6 Dedução de $J(t)$ por divisão longa.....	57
5 OBTENÇÃO APROXIMADA DA FUNÇÃO RELAXAÇÃO DE TENSÃO.....	62
5.1 Introdução.....	62
5.2 Inversão aproximada da transformada de Laplace.....	63
5.2.1 Princípio do método.....	64
5.2.2 Algoritmo FFT e quociente diferença.....	65
5.3 Processo de deconvolução.....	69
6 CONCLUSÕES. E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....	76
6.1 Conclusões relatadas para o presente trabalho.....	76
6.2 Sugestões para trabalhos futuros.....	77
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	78
APÊNDICES	86
A Cálculo Fracionário.....	87
A.1 Introdução.....	87
A.2 Operadores de ordem fracionária	88
A.3 Equações diferenciais fracionárias.....	88
A.4 Transformada de Laplace da derivada fracionária.....	89
B Função Mittag-Leffler.....	91
B.1 Referência histórica.....	91
B.2 Funções Mittag-Leffler e suas generalizações.....	92
B.3 Representação integral da função Mittag-Leffler e expansão assintótica.	93
B.4 A transformada de Laplace relacionada com a função Mittag-Leffler.....	94
B.5 Propriedades analíticas da função Mittag-Leffler.....	95
C Identificação de Parâmetros Viscoelásticos	99
C.1 Pesquisas desenvolvidas no Pisa-Lva.....	99
C.2 Equação constitutiva a derivadas fracionária.....	99
C.3 Sistema para identificação experimental	102
C.4 Modelo experimental	103
C.5 Conclusão.....	105

D	Convolução no Domínio do Tempo.....	107
D.1	O teorema da convolução.....	107
E	Relação Freqüência–Temperatura das Propriedades Dinâmicas dos Materiais	
	Viscoelásticos.....	109
E.1	Dependência em freqüência e temperatura.....	109
E.2	Caracterização dinâmica dos materiais viscoelásticos.....	111
E.3	- Princípio de superposição freqüência –temperatura.....	112

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Creep.....	10
Figura 2.2 - Variação da função creep com o tempo.....	10
Figura 2.3 - Relaxação de tensão.....	11
Figura 2.4 - Variação do módulo relaxação de tensão com o tempo	12
Figura 2.5 - Comportamento da curva creep	13
Figura 2.6 - Mola linear.....	16
Figura 2.7 - Amortecedor linear.....	16
Figura 2.8 - Mola clássica e amortecedor viscoso em série.....	18
Figura 2.9 - Representação da solução (2.10).....	19
Figura 2.10 - Função creep para o modelo clássico de Maxwell.....	19
Figura 2.11 - Função Relaxação de tensão para o modelo clássico de Maxwell.....	20
Figura 2.12 - Mola clássica e amortecedor viscoso em paralelo.....	20
Figura 2.13 - Representação da solução (2.12).....	21
Figura 2.14 - Função creep para o modelo clássico de Kelvin.....	22
Figura 2.15 - Função relaxação de tensão para o modelo clássico de Kelvin.....	22
Figura 2.16 - Mola clássica em série com uma unidade Kelvin.....	23
Figura 2.17 - Representação da solução (2.16).....	23
Figura 2.18 - Função creep para o modelo clássico Linear Padrão.....	24
Figura 2.19 - Função relaxação de tensão para o modelo clássico Linear Padrão	24
Figura. 3.1 - Elementos reológicos de viscoelasticidade.....	27
Figura 3.2 - Mola clássica e mola generalizada em série.....	29
Figura 3.3 - Função creep para o modelo fracionário de Maxwell.....	30
Figura 3.4 - Função creep para o modelo fracionário de Maxwell, com valores de p nas temperaturas 20 C, 30 C, 40	31
Figura 3.5 - Função relaxação de tensão para o modelo fracionário de Maxwell.....	32
Figura 3.6 - Função relaxação de tensão para o modelo fracionário de Maxwell, com valores de p nas temperaturas 20 C, 30 C, 40 C.....	33
Figura 3.7 - Mola clássica e mola generalizada em paralelo.....	33

Figura 3.8 - Função creep para o modelo fracionário de Kelvin.....	35
Figura. 3.9 - Função creep para o modelo fracionário de Kelvin, com valores de p nas temperaturas 20 C, 30 C, 40 C.....	35
Figura 3.10 - Função relaxação de tensão para o modelo fracionário de Kelvin.....	36
Figura. 3.11 - Função relaxação de tensão para o modelo fracionário de Kelvin, com valores de p nas temperaturas 20 C, 30 C, 40 C.....	37
Figura 3.12 - Mola clássica em série com uma unidade Kelvin.....	37
Figura 3.13 - Função creep para o modelo fracionário Linear Padrão.....	39
Figura. 3.14 - Função creep para o modelo fracionário Linear Padrão, com valores de p nas temperaturas 20 C, 30 C, 40 C	40
Figura 3.15 - Função relaxação de tensão para o modelo fracionário Linear Padrão.....	42
Figura 3.16 - Função relaxação de tensão para o modelo fracionário Linear Padrão, com valores de p nas temperaturas 20 C, 30 C, 40 C	42
Figura 4.1 - (a) Sistema de tensão deformação unidimensional; (b) Sistema físico com uma entrada e uma saída.....	44
Figura 4.2 - Derivação da integral hereditária.....	46
Figura 4.3 - Função relaxação de tensão para o modelo fracionário Linear Padrão	56
Figura 4.4 - Sistema físico com uma entrada e uma saída.....	57
Figura 4.5 - Função creep para o modelo fracionário Linear Padrão.....	60
Figura 5.1 - Função relaxação de tensão para o modelo fracionário Linear Padrão (Eq (4.36)) através do método da inversão aproximada da transformada de Laplace.	68
Figura 5.2 - Função relaxação de tensão para o modelo fracionário Linear Padrão (Eq (4.40)) através do método da inversão exata, Mittag-Leffler.	68
Figura 5.3 - Função relaxação de tensão para o modelo fracionário Linear Padrão (Eq (4.40)), através do método da inversão exata, Mittag-leffler (Eq (4.36)) e através do método da inversão aproximada da transformada de Laplace.....	69
Figura 5.4 - Função relaxação de tensão para o modelo fracionário Linear Padrão, partindo da função creep, Mittag-leffler (Eq (4.48)) e pelo uso do método da deconvolução (Eq (5.5)).....	73

Figura 5.5 - Função relaxação de tensão para o modelo fracionário Linear Padrão (Eq (4.36)) através do método da inversão aproximada da transformada de Laplace	73
Figura 5.6 - Função relaxação de tensão para o modelo fracionário Linear Padrão (Eq (5.5)), através do método da deconvolução e (Eq (4.36)) através do método da inversão aproximada da transformada de Laplace.....	74
Figura 5.7 - Função relaxação de tensão para o modelo fracionário Linear Padrão (Eq (4.40)) através do método da inversão exata, Mittag-Leffler.....	75
Figura B.1- Função Mittag-Leffler $E_{\alpha,\beta}(-z^\alpha)$ para $\beta = 1$ e $\alpha \in (0, 2)$	98
Figura B.2 - Função Mittag-Leffler $E_{\alpha,\beta}(-z^\alpha)$ para $\alpha = 1$ $\beta \in (0, 2)$	98
Figura C.1 - Modelo para determinação do módulo complexo de cisalhamento.....	102
Figura C.2 – Representação esquemática da cadeia de medição das transmissibilidades	103
Figura E.1 - Variação das propriedades dinâmicas com a temperatura.....	109
Figura E.2 - Variação das propriedades dinâmicas com a frequência.....	110
Figura E.3 - Gráficos de propriedades dinâmicas medidas: (a) módulo real, (b) fator de perda. (fontes: Nashif <i>et alii</i> , 1985; Espindola,1990).....	112
Figura E.4 - Fator de deslocamento versus temperatura (fontes: ISO 10112, 1991; Espindola 1990	113
Figura E.5 - Nomograma de frequência reduzida (fontes: ISSO 10112,1991; Espindola, 1990)	114

LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1 - Identificação dos parâmetros no domínio do tempo.....	40
Tabela 4.1- Identificação dos parâmetros no domínio do tempo.....	56

SIMBOLOGIA

Letras Romanas

$J(t)$	função creep.
$E(t)$	modulo de relaxação de tensão.
$E_c(s)$	o módulo complexo de Young
$E(s)$	parte real do módulo
$E'(s)$	parte imaginária do módulo
$E_c(\Omega)$	módulo complexo de elasticidade
E_1	parâmetro do material viscoelástico
E_0	parâmetro do material viscoelástico
k	rigidez da mola
c	viscosidade do amortecedor.
t	tempo em segundos.
s	variável de Laplace.
$G(t)$	função relaxação de tensão.
D^α	Operador linear da derivada fracionária, com parâmetro α .
D^β	Operador linear da derivada fracionária, com parâmetro β
P	fator de proporcionalidade
k_1	rigidez da mola 1.
k_2	rigidez da mola 2.
$k_c(\Omega)$	rigidez complexa do elemento
ℓ	comprimento da haste.
L	operador linear
b_m	parâmetro do material
E_0	parâmetro do material
E_m	parâmetro do material de ordem m
$h(t)$	constante dependente do tempo
G_0	parâmetro fracionário

- $G_c(\Omega)$ módulo complexo de cisalhamento.
 $G_e(s)$ módulo do material no domínio de Laplace
 $G_e(\Omega)$ módulo dinâmico complexo do material
 G_∞ parâmetro fracionário
 G_1 parâmetro fracionário
 b tempo de relaxação
 b_0 é uma constante na temperatura absoluta T_0
 b_1 representa o tempo de relaxamento, isto é tem dimensão de $(tempo)^\alpha$
 J_0 compliância do equilíbrio.
 $E_\alpha(x)$ função Mittag-Leffler
 u número real
 $F[h(t)]$ transformada de Fourier
 T temperatura de referência em escala absoluta
 T_0 temperatura de referência
 $S(T)$ função deslocamento
 A_v área lateral carregada
 h_v espessura do espécime viscoelástico.
 $T_c(\Omega)$ transmissibilidade sendo uma função da frequência e de seis ou cinco parâmetros
 $\tilde{T}_c(\Omega_j)$ transmissibilidade experimental
 $S_{xy}(\Omega_j)$ espectro cruzado de potência de $x(t)$ e $y(t)$
 $S_{yy}(\Omega_j)$ auto espectro de sinal de entrada $y(t)$
 $f(x)$ função custo
 e_j vetor que define o erro complexo
 e^H vetor de erro transposto conjugado
 x^T vetor de projeto transposto

Letras Gregas

- $\varepsilon(t)$ deformação dependente do tempo
 σ_0 tensão constante aplicada.

$\sigma(t)$	tensão dependente do tempo
ε_0	deformação constante aplicada.
$\dot{\varepsilon}$	derivada de 1ª ordem da deformação
$\dot{\varepsilon}_2$	taxa de deformação.
σ	tensão
ε	deslocamento total
ε_1	deslocamentos da mola e amortecedor viscoso
ε_2	deslocamento do amortecedor viscoso
$\mu(t)$	função degrau unitário (Heaviside)
$\delta(t)$	função delta de Dirac
τ	tempo de relaxação
τ'	tempo de retardo
σ_1	tensão na mola
σ_2	tensão amortecedor viscoso
α	ordem da derivada.
β	ordem da derivada
Γ	função Gamma
$\Delta\tau$	pequeno intervalo de tempo τ
$\eta(\Omega)$	fator de perda do material
ν	razão de Poisson
θ_1	constante obtida experimentalmente
θ_2	constante obtida experimentalmente
Ω	freqüência
$\Omega_{N/2}$	freqüência de Nyquist
ω	freqüência
ω_r	freqüência reduzida
ρ	densidade
ρ_0	densidade para a temperatura de referência

RESUMO

Materiais viscoelásticos são hoje largamente aplicados em vários ramos da engenharia, com destaque para a mecânica e aeroespacial. Uma das razões para tal popularidade reside na facilidade com que os materiais viscoelásticos são vulcanizados nas mais diferentes formas. Outra, é o fato de que inúmeros materiais básicos podem ter suas propriedades dinâmicas adequadas, mediante introdução de aditivos, às várias aplicações específicas.

O Grupo PISA-LVA os vem estudando, bem como suas aplicações, há cerca de quinze anos, tendo já granjeado reputação internacional. Dentre as suas conquistas, cite-se, por importante no presente trabalho, o desenvolvimento de técnica para a identificação dos parâmetros do modelo fracionário dos materiais viscoelásticos. Esta técnica, já difundida internacionalmente, acabou por substituir, no âmbito do Grupo, com enormes vantagens, a da norma ASTM E 756 98. Esta técnica é toda estabelecida no domínio da frequência.

Surge naturalmente a questão: se esses parâmetros representam o material viscoelástico com excelente precisão, não seria correto utilizá-los para o cômputo de propriedades importantes, definidas no domínio do tempo, como *creep*, *compression set* e outras? Este trabalho pretende ser um passo inicial para responder a essas questões, entre outras. Revê os modelos de Maxell, Kelvin-Voigt e Linear Padrão (ou Zener), primeiro na forma clássica, a derivadas inteiras. Repete-se este estudo, agora permitindo que as derivadas tenham ordem fracionária. As equações resultantes são tratadas pela via da Transformada de Laplace. As soluções das equações resultantes envolvem as funções de Mittag-Leffler, notórias pelas dificuldades computacionais que apresentam, em certas circunstâncias. Embora inúmeros estudos e algoritmos tenham vindo recentemente à luz, parece, entretanto, que um algoritmo absolutamente robusto, infenso a toda e qualquer circunstância, ainda está para ser escrito. Como a função de creep é bem comportada para o computo numérico, procura-se calcular a função de relaxação de tensão por deconvolução. Uma outra saída, também aqui apresentada, é a da inversão numérica da transformada de Laplace. Os resultados dessas técnicas são cotejados com aqueles obtidos pelo cômputo direto da função de Mittag-Leffler, em casos em que há convergência.

ABSTRACT

Viscoelastic materials are widely used in engineering, mainly in the mechanical and aerospace branches. One of the reasons for such a wide popularity is its ability to conform to any shape in the vulcanized form. Another is the fact that viscoelastic materials can have its dynamical properties tailored by additives, to match almost all practical specifications.

The PISA-LVA group has been studying and applying viscoelastic materials for about fifteen years, having already gained an international reputation. Amongst its achievements it is fair to quote the development of a numerical-experimental technique for the identification of the parameters for the fractional model for viscoelastic materials. This technique, already published internationally, has become standard in PISA-LVA, displacing the one described in the ASTM E 756 98.

This brings about the question: since these fractional parameters describe the viscoelastic behaviour so accurately, why not to use them to compute some time domain properties such as creep, compression sets and others? This work sets out to give a first step to answering this question. The Maxwell, Kelvin-Voigt Standard-Linear (or Zener) models are reviewed, first in the classical formulation with derivatives of integer orders. Then it is reviewed in the fractional derivative form. The resulting equations are treated in the Laplace domain and its time domain solutions contain the so called Mittag-Leffler functions. These functions are notorious for being particularly difficult in computations, under certain circumstances. Although various algorithms have come to light in recent years it seems that a definitive, general and robust algorithm is still to be written. Since the creep function is well behaved and ease to compute with the Mittag-Leffler functions, it is proposed to compute this function and then computed stress relaxation function via de-convolution. Also this function is computed by numerically inverting the Laplace transform of its form in the Laplace domain. Results are presented and assessed as far as computing time and accuracy.

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1.1 Materiais viscoelásticos

O controle de ruídos e vibrações, pela introdução de amortecimento e flexibilidade, é uma prática importante e cada vez mais comum. Os materiais viscoelásticos são usados como um meio de suprir o amortecimento a estruturas, bem como suavizar a resposta de vibração ressonante.

Pode-se descrever o comportamento dos materiais como: elástico, viscoso, e viscoelástico. Materiais elásticos são os que se deformam sob tensão, mas retornam ao tamanho e forma originais quando a carga for removida. Para materiais completamente elásticos, a tensão é diretamente proporcional à deformação (lei de Hooke). Um material é viscoso quando deforma constantemente sob tensão. Os materiais viscoelásticos caracterizam-se por possuírem ambos os comportamentos, viscoso e elástico. O comportamento viscoso está relacionado à dissipação de energia vibrante, e o comportamento elástico ao armazenamento de energia. Segundo Lakes (1999), materiais viscoelásticos são aqueles em que as relações entre tensão e deformação dependem do tempo. De maneira geral, um material viscoelástico pode ser pensado como algo entre o sólido elástico hookeano e o fluido viscoso newtoniano.

A utilização de materiais viscoelásticos tem sido crescente quando se trata de controlar vibrações e ruídos, nas diversas áreas de engenharia, em especial nas áreas aeroespacial e naval. Dispositivos feitos com materiais viscoelásticos, tais como: isoladores, neutralizadores dinâmicos, painéis sanduíches e ligações estruturais podem ser projetados para se alcançar um controle altamente eficaz.

Para projetos eficientes, o comportamento dinâmico, ou caracterização dinâmica dos materiais viscoelásticos, necessita ser conhecido. A determinação desse comportamento é o objetivo primordial de diversos métodos (métodos da viga vibrante, método da rigidez direta, método de caracterização via transmissibilidade, entre outros), cada qual com suas vantagens e limitações. Assim sendo, é conveniente descrever seu comportamento em termos de módulos complexos.

As propriedades dinâmicas mostram dependência em relação à frequência de excitação, temperatura ambiente, magnitude da carga dinâmica e pré-carga estática, efeitos tais como creep e relaxamento, radiação ultravioleta, ozônio e outros. Na faixa linear, frequência e temperatura são usualmente consideradas como as duas variáveis mais importantes (ver Apêndice E).

Várias técnicas têm sido usadas para medir as propriedades dinâmicas dos materiais viscoelásticos, incluindo a técnica da viga vibrante (Lopes, 1989, 1998), a técnica da impedância, da transmissibilidade (Espíndola *et alii*, 2004 e 2005), e as técnicas de relaxação e creep. Ambas as técnicas da viga vibrante e impedância são usadas para medir, no domínio da frequência, em diferentes temperaturas, as propriedades dinâmicas. As técnicas de creep e relaxação são usadas para medir o módulo de relaxação e creep como funções no domínio do tempo sob diferentes condições de carregamento (Nashif *et alii*, 1985).

Em materiais viscoelásticos a tensão é geralmente uma função da deformação, e das derivadas temporais da deformação. Da aplicação de um conjunto de forças de carregamento resulta a deformação e a mesma dependerá das propriedades do material. Isso pode ser reversível (deformação elástica ou recuperável) ou irreversível (deformação viscosa, plástica, permanente) ou compreender ambas as partes recuperável ou permanente. O comportamento do material será representado na forma de uma equação constitutiva ou equação de estado reológico (Tschoegl, 1989), isto é, uma equação que especifique as propriedades do material, independentemente do tamanho ou forma do corpo feito com tal material.

Se a deformação for muito pequena e a equação constitutiva puder ser expressa como uma equação diferencial linear com coeficientes constantes, o material é dito viscoelástico linear. Para se ter viscoelasticidade linear é necessário que a resposta da deformação, para um dado instante, seja proporcional ao carregamento. Quando a tensão é muito pequena, o material se comporta como linear.

O material, nos modelos viscoelásticos, se comporta como se tivesse memória; os princípios elementares e comportamento desses modelos no tempo foram apresentados por Christensen (1982).

A teoria mais geral de viscoelasticidade linear foi formulada por Boltzmann em 1894. Essa teoria está baseada no princípio de Superposição de Boltzmann. Ele propôs: “O creep é uma função da história completa do carregamento; cada etapa do carregamento faz a contribuição independente para totalizar a história do carregamento; a deformação final e total é a soma de cada contribuição”. Ou seja, a tensão atual é determinada pela superposição das

respostas ao conjunto completo dos incrementos das deformações. Duas hipóteses são usadas: a invariância no tempo e a causalidade.

A caracterização das propriedades dinâmicas no domínio do tempo pode ser feita por duas formas, entre outras. Uma envolve a determinação indireta do módulo de relaxação no domínio do tempo a partir do módulo complexo no domínio da frequência de um material viscoelástico, através do uso da transformada de Fourier. Outra envolve a determinação direta das propriedades dinâmicas do material viscoelástico, no domínio do tempo, pelo uso das técnicas de creep e relaxação de tensão (Oyadiji *et alii*, 1997).

O uso de derivadas generalizadas para modelagem matemática de materiais viscoelásticos tem sido difundido nas últimas décadas (Bagley e Torvik, 1979, 1986; Bagley, 1990; Padovan e Guo, 1988; Pritz, 1998). Nessa abordagem, as relações entre tensão e deformação são expressas através de derivadas de ordem não inteira, denominada derivadas fracionárias ou generalizadas. Com apenas cinco ou quatro parâmetros é possível representar certos materiais, enquanto que para derivadas de ordem inteiras, são necessários inúmeros parâmetros para identificar as propriedades dinâmicas dos materiais, naquelas relações (Jones, 1980).

Os modelos mecânicos clássicos em viscoelasticidade linear a serem estudados serão: unidimensionais, quase estáticos no domínio do tempo e no domínio de Laplace.

1.2 Pesquisas desenvolvidas no PISA-LVA

O grupo de pesquisa Integrada em Sistemas Vibrantes e Acústicos, PISA-LVA, está ligado ao Departamento de Engenharia Mecânica. Desenvolve pesquisas que muito contribuem para a caracterização das propriedades dos materiais viscoelásticos e são apresentadas nas formas de estudos de iniciação científica, dissertações, teses de doutorados, relatórios técnicos e artigos publicados em anais de congressos e revistas indexadas.

As linhas de pesquisa já consolidadas são:

- Caracterização dinâmica de materiais viscoelásticos;
- Controle de vibrações e som por neutralizadores (absorvedores) dinâmicos;
- Controle de vibrações por isoladores viscoelásticos;
- Controle de vibrações e som e identificação de parâmetros de materiais viscoelásticos por via do cálculo fracionário;
- Dinâmica de estruturas compostas metal-material viscoelástico;
- Identificação de parâmetros estruturais;

- Controle misto, passivo-ativo, por meios de algoritmos LMS- filtrados.

As pesquisas já consolidadas referem-se ao controle de vibração e som por dispositivos feitos de materiais viscoelásticos, tais como isoladores neutralizadores dinâmicos de vibração, painéis sanduíches, ligações estruturais que podem ser projetados por controle de vibrações altamente eficientes (Espíndola e Bavastri, 1995a, 1995b, 1997a, 1997b, 1997c, 1999; Espíndola e Floody, 1999).

Um modelo complexo e realístico para a viga vibrante foi desenvolvido, com sucesso, por (Lopes *et alii*, 1996; Brandon *et alii*, 1999).

Espíndola *et alii*, (2004) apresentaram uma nova abordagem para a identificação de materiais viscoelásticos, baseada no modelo a derivadas fracionárias. Um sistema viscoelástico de um único grau de liberdade (e sua transmissibilidade) é usado para identificar tais propriedades em uma banda larga de frequências e temperaturas. Foi desenvolvida uma técnica para a identificação dos parâmetros fracionários de materiais viscoelásticos diretamente do experimento.

O conceito de derivada fracionária foi usado para representar o modelo matemático da transmissibilidade. Então, os parâmetros do material viscoelástico foram obtidos, fato que, possibilitou a identificação do módulo complexo do material viscoelástico.

Espíndola *et alii*, (2005) apontaram um procedimento para a caracterização dinâmica integrada de elastômeros, aplicado em exemplares de borracha butílica e silicone. Mostram-se na modelagem proposta, as várias funções de transmissibilidade obtidas nas várias temperaturas de ensaio, que podem ser utilizadas de forma simultânea para caracterização integrada do material de interesse (ver Apêndice C).

A área de Vibrações e Acústica do curso de pós-graduação em Engenharia Mecânica da UFSC está harmonizada com a necessidade de pesquisas das empresas mistas, privadas e de órgãos públicos.

1.3 Estado da arte

Um estudo sobre a relação entre a teoria molecular descrevendo o comportamento microscópico de determinados meios viscoelásticos e do modelo empírico de viscoelasticidade foi desenvolvido por Bagley e Torvik (1983). Os autores mostram que as relações constitutivas, se escritas em termos de cálculo fracionário, tem resultados equivalentes aos da teoria molecular da viscoelasticidade. Tschoegl (1989) apresenta um

estudo detalhado da teoria viscoelástica linear, com ênfase nas equações constitutivas de derivadas inteiras.

Lakes (1999) apresenta a teoria de sólidos viscoelásticos, incluindo os efeitos transitórios e dinâmicos, com ênfase sobre a viscoelasticidade linear e métodos experimentais para caracterização de materiais viscoelásticos. Ferry (1980) proporciona trabalhos que tratam das propriedades viscoelásticas de classes particulares dos materiais, introduzindo aspectos estruturais dos polímeros, teorias moleculares, e muitos resultados experimentais que dão forma à relaxação viscoelástica e dielétrica nos polímeros. Christensen (1982) apresenta a teoria linear, em seu livro *Theory of Viscoelasticity*, incluindo soluções de problemas avançados de interesse da pesquisas em relação às leis constitutivas tensão deformação, no tempo. Os trabalhos Flugge (1975) são introduções adiantadas da teoria linear, que enfatizam modelos mecânicos com molas e amortecedores.

As notas de aula da Universidade de Auckland (Archer, 2003a, 2003b) em viscoelasticidade sobre modelos mecânicos dão ênfase à resposta de elementos mola-amortecedor e usam o método de transformada de Laplace para solução das equações constitutivas com derivadas inteiras. Tem-se também uma abordagem de modelos mecânicos com destaque para os resultados gráficos nas notas de aulas da universidade de Nottingham (Long, 2002) sobre viscoelasticidade.

Pritz (1996, 2003) relata que a imprecisão dos modelos mecânicos acima citados pode estar na relação tensão deformação definida no domínio do tempo, apresentada por uma equação diferencial linear de ordem inteira. Essa equação diferencial pode ser generalizada, substituindo-se as derivadas de ordem inteira por derivadas de ordem fracionária (Caputo e Mainardi, 1971; Bagley *et alii*, 1979). Os novos modelos são denominados generalizados, ou modelos a derivadas fracionárias; sendo uma ferramenta importante para descrever o comportamento dinâmico de vários materiais.

Koeller (1984) mostra a conexão do cálculo fracionário com a teoria da viscoelasticidade linear. Generaliza alguns conceitos da teoria de Rabotnov da mecânica e mostra o seu relacionamento com o cálculo fracionário. São obtidas expressões para as funções creep e relaxação em termos da função Mittag-Leffler sobre o parâmetro de derivada fracionária β . As equações constitutivas obtidas estão dentro da moderna teoria de materiais com memória. Nos modelos mecânicos de Maxwell e Kelvin-Voigt substituiu-se o amortecedor viscoso pela mola generalizada como elemento base para o cálculo fracionário, permitindo uma transição continua do estado fluido para o estado sólido, quando o parâmetro da memória variar de zero a um. A mola-generalizada é combinada com a mola clássica e

suas equações constitutivas são representadas por equações diferenciais fracionárias. Koeller, 1984, Schmidt *et alii*, 2001 apresentam modelos envolvendo derivada fracionária no tempo, fornecendo boas propriedades de ajuste de curvas, sendo requeridos poucos parâmetros.

Welch *et alii*, (1999) analisam a resposta viscoelástica quase-estática de materiais poliméricos utilizando modelos constitutivos baseados no cálculo fracionário e no domínio do tempo. Destaca-se a habilidade de avaliar a função Mittag-Leffler para o ajuste de modelos fracionários aos dados de creep estático e relaxação. A habilidade desses modelos de representar adequadamente o comportamento viscoelástico sobre muitas décadas de tempo com poucos parâmetros é uma predição para seu uso continuado em modelagem viscoelástica.

Para que sejam obtidas soluções das equações diferenciais de ordem fracionária nos modelos mecânicos estudados, foram utilizados os resultados obtidos em Hartley *et alii*, (1998) e Ortigueira (2000), em termos da derivada da função exponencial, da transformada de Laplace e transformada inversa dessas funções.

Mainardi (2004) apresenta um estudo dos aspectos físicos e matemáticos do cálculo fracionário em viscoelasticidade linear. Destaca o processo de relaxação no modelo sólido linear padrão em viscoelasticidade linear, aplicado ao cálculo fracionário, com o uso da função Mittag-Leffler. Um algoritmo para computação da função Mittag-Leffler usando o cálculo fracionário é apresentado em Diethelm *et alii*, (2003) e Gorenflo *et alii*, (2002). Um programa em C⁺⁺, baseado neste algoritmo, foi escrito e implementado, no PISA-LVA, por Rafael A. de Espíndola.

Como a convergência da função relaxação de tensão é muito difícil através da função Mittag-Leffler, faz-se uso do método da inversão aproximada da transformada de Laplace. Segundo Cheng *et alii*, (1994), a inversão exata é normalmente difícil de se realizar; devem-se então usar técnicas de inversão aproximada. É necessário ter uma idéia do comportamento da função para poder escolher o método adequado.

Christensen (1982) apresenta o uso da inversão aproximada da transformada de Laplace para problemas quase estáticos, com a sugestão de uma simulação numérica. Abate e Whitt (1992, 1995), usam o método da série de Fourier para obter a transformação inversa de Laplace. Brancik (1998, 1999a, 1999b, 2001) apresenta vários algoritmos para simulação numérica para inversão aproximada da transformada de Laplace.

Press *et alii*, (1992), fazem um estudo do processo de convolução e deconvolução e mostram que o seu cômputo torna-se eficiente com o uso do algoritmo FFT. Magain *et alii*, (1998), apresenta um novo método para recuperação de imagens astronômica, possuindo

aplicações em várias áreas, salienta ainda os problemas da deconvolução por métodos tradicionais.

Problemas encontrados no processo de deconvolução são devido à presença de ruídos na transformada de Fourier, associados às medições práticas ou do próprio processo de deconvolução (Smith, 1990). Haykin (2005), diz que os métodos de Fourier fornecem um poderoso conjunto de ferramentas analíticas e numéricas, para resolver problemas que envolvem sinais e sistemas e, para o estudo e processamento de imagem através da deconvolução.

Andrews (2004) apresenta um estudo do processo de deconvolução para sistemas lineares invariantes no tempo, nos domínios do tempo e da frequência, com o uso de algoritmos FFT e IFFT. Enfatiza a necessidade do uso de um filtro passa baixa para regularizar o resultado da deconvolução e diz que o conhecimento exato da deconvolução de sinais não é possível, e aproximações têm que ser assumidas.

Conforme literatura, a função relaxação de tensão é uma função extremamente difícil de ser computada (o mesmo não ocorre com a função creep), sendo necessário o uso de algoritmos robustos para que sua convergência ocorra. O grau de dificuldade da computação numérica da função relaxação de tensão é proveniente da função exponencial generalizada ou função Mittag-Leffler.

O propósito deste trabalho é a simulação numérica para o cômputo da função relaxação de tensão por dois métodos: inversão aproximada da transformada de Laplace; deconvolução entre uma função de tempo preestabelecida e a função creep, obtida pelo método da inversão exata (Mittag-Leffler). Pretende-se preencher, assim, uma lacuna existente nos atuais procedimentos utilizados para o cômputo da função relaxação de tensão.

Será usado o modelo padrão (ou Zener), a derivadas fracionárias, com quatro parâmetros, aplicados em material viscoelástico.

Espera-se conseguir boa precisão numérica, estabilidade e convergência da função relaxação de tensão com menos esforço computacional. Para validar esse procedimento, deve-se estabelecer uma comparação entre o método de deconvolução e pelo método da inversão aproximada da transformada de Laplace, da função relaxação de tensão.

1.4 Estrutura de tese

Além do presente capítulo, o trabalho será estruturado em mais cinco outros e quatro apêndices.

No capítulo 2, faz-se uma referência a viscoelasticidade linear, enfatizando os fenômenos de creep, relaxação de tensão e os dois elementos básicos dos modelos mecânicos lineares, que são a mola e o amortecedor. Apresenta-se um estudo de três modelos mecânicos clássicos em viscoelasticidade linear, que serão modelos quase estáticos, unidimensionais e no domínio do tempo. Com o uso de derivadas inteiras, e no domínio de Laplace, serão apresentadas as equações constitutivas de cada modelo, bem como sua representação gráfica.

No capítulo 3, nos modelos mecânicos estudados anteriormente será substituído o amortecedor viscoso por uma mola generalizada, fazendo-se uma adaptação das equações constitutivas dos modelos de derivadas inteiras para equações com derivadas fracionárias.

No capítulo 4, apresenta-se o modelo mecânico fracionário linear padrão, através das relações constitutivas hereditárias viscoelásticas. Serão obtidas as funções relaxação de tensão e creep por divisão longa e, com o auxílio da função exponencial generalizada ou função Mittag-Leffler, faz-se uma análise do cômputo da função Mittag-Leffler utilizadas nas funções acima citadas.

No capítulo 5, apresenta-se o resultado da simulação numérica do método de Inversão Aproximada da Transformada de Laplace e do método da Deconvolução, pois os mesmos serão utilizados no cálculo numérico da função relaxação de tensão. Pretende-se preencher, assim, uma lacuna existente nos atuais procedimentos no cômputo dessa função.

No capítulo 6, relatam-se as conclusões do trabalho de tese e sugestões para futuros trabalhos.

As referências bibliográficas e os cinco apêndices utilizados para a presente pesquisa encontram-se no final do trabalho.

CAPÍTULO 2

MODELOS MECÂNICOS A DERIVADAS INTEIRAS

2.1 Viscoelasticidade linear

Materiais viscoelásticos são aqueles para os quais a relação entre tensão e deformação depende do tempo. Viscoelasticidade linear é uma teoria que descreve o comportamento de materiais por equações lineares, a derivadas inteiras ou fracionárias.

A teoria mais geral de viscoelasticidade linear foi formulada por Boltzmann, em 1894, Ferry (1980), Tschoegl (1989). Esta teoria é baseada no princípio de superposição de Boltzmann. Ele propôs: “O creep é uma função da história completa do carregamento; cada etapa do carregamento faz uma contribuição independente para totalizar a história do carregamento; a deformação final e total é a soma de cada contribuição”. Ou seja, a deformação atual é determinada pela superposição das respostas ao conjunto completo dos incrementos de tensão. Duas hipóteses são usadas: a invariância no tempo e a casualidade.

Um material elástico possui sempre alguma inelasticidade, mesmo em deformações muito baixas. Os fenômenos de creep e relaxação são efeitos importantes da inelasticidade e podem ser estudados mediante modelos viscoelásticos, os quais diferem dos modelos elásticos, já que dependem de toda história da deformação. Assim, o material viscoelástico comporta-se como se tivesse memória.

O comportamento viscoelástico de materiais depende do tempo e mostra que as manifestações de creep (incluindo recuperação de creep) e relaxação de tensão são particularmente importantes em projetos.

2.1.1 Creep

Creep é uma deformação lenta, progressiva do material sob tensão constante, isto é, há uma deformação elástica instantânea seguida pela deformação dependente do tempo. Ao remover a carga, o processo reverso ocorre. A recuperação instantânea é seguida da recuperação dependente do tempo, ou seja, a recuperação do creep (ver Fig. 2.1).

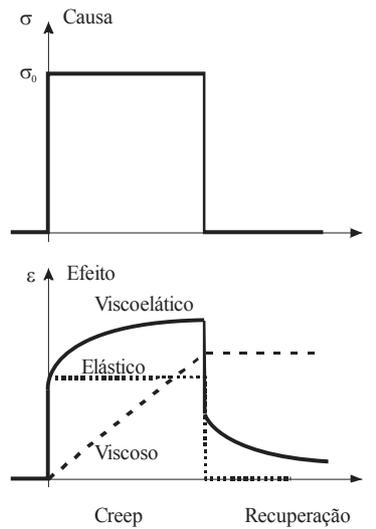


Figura 2.1 - Creep

A deformação por creep denotada por $\varepsilon(t)$, pode ser representada pela equação $\varepsilon(t) = \sigma_0 J(t)$, para um estado unidimensional de tensão e deformação (Long, 2002; Archer, 2003a, 2003b; Lakes, 1999).

Em materiais viscoelásticos, a função creep é independente do nível de tensão e a deformação $\varepsilon(t)$ aumentará com o tempo, conforme a relação

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 J(t), \tag{2.1}$$

onde σ_0 é a tensão constante aplicada e $J(t)$ é a função creep.

A dependência do tempo da função creep, $J(t)$, pode ser representada em escala log-log (ver Fig. 2.2) e é expressa através da relação entre o tempo de aplicação do carregamento e um parâmetro característico do material. Em creep este parâmetro característico é chamado tempo de retardo, τ' , e varia para diferentes materiais dependendo da estrutura molecular.

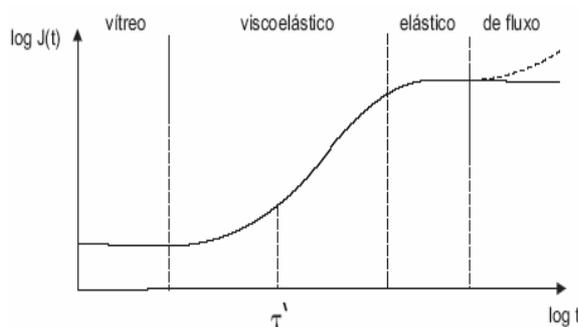


Figura 2.2 - Variação da função creep com o tempo

Para intervalo curto de tempo a função creep é constante com valor relativamente baixo, e o material encontra-se em estado vítreo. A função creep aumenta com o tempo para um valor constante quando o material é elástico. Alguns materiais não alcançam um estado relaxado, mas continuam a fluir até que os mesmos falhem. Entre o estado vítreo e elástico, isto é, para um período de tempo intermediário, o material comporta-se como sendo viscoelástico (Archer, 2003a, 2003b).

2.1.2 Relaxação de tensão

Relaxação de tensão é o decréscimo gradual da tensão quando o material é mantido a uma deformação constante, ou seja, a tensão aumenta instantaneamente e diminui gradualmente ao longo de um período de tempo para um valor finito. A tensão $\sigma(t)$ em materiais viscoelásticos decrescerá lentamente, como mostra a Fig. 2.3.

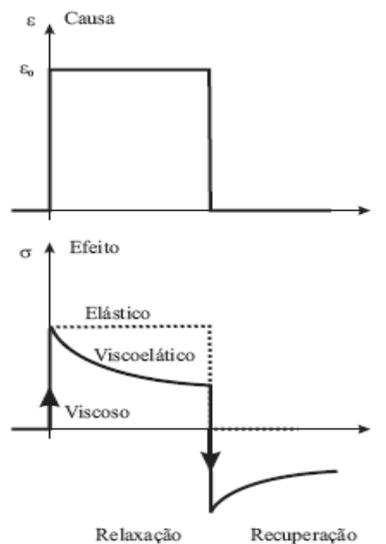


Figura 2.3 - Relaxação de tensão

A variação de tensão dependente do tempo pode ser representada pela equação $\sigma(t) = \epsilon_0 E(t)$, para um estado unidimensional de tensão e deformação (Long, 2002; Archer, 2003a; Lakes, 1999).

Em materiais viscoelásticos, o módulo de relaxação de tensão é uma característica do material e independente do nível de tensão. $E(t)$ é uma função dependente do tempo e decrescerá com o tempo, conforme a relação,

$$E(t) = \frac{\sigma(t)}{\varepsilon_0}, \tag{2.2}$$

onde ε_0 é a deformação constante aplicada, $\sigma(t)$ é a tensão dependente do tempo e $E(t)$ é o módulo de relaxação. Uma expressão análoga à (2.2) vale para o módulo de relaxação ao cisalhamento $G(t)$.

Na relaxação de tensão existem as mesmas regiões de comportamento (ver Fig. 2.4), como ocorre no creep. O tempo de duração da relaxação depende da estrutura molecular do material e é caracterizado como tempo de relaxação, τ .

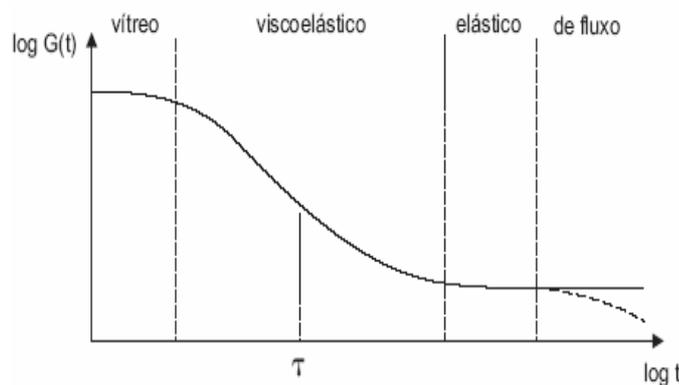


Figura 2.4 - Variação do módulo relaxação de tensão com o tempo

No estado vítreo, para tempos curtos, o material tem um módulo alto de cisalhamento e é rígido. Para longos tempos o módulo é baixo e o material comporta-se como sendo elástico. A presença de fluxo viscoso afeta o valor limite para o módulo. Se o fluxo existe, o módulo se reduz ao longo do tempo para um valor infinitesimal e a tensão no material cai para zero. Quando não há fluxo, após certo período de tempo o módulo de relaxação atinge um valor constante. Para tempos intermediários o material comporta-se viscoelasticamente com o módulo dependente do tempo (Long, 2002).

Embora o processo molecular que governa o creep seja similar ao que governa a relaxação, em geral, o tempo de retardo e relaxação tem valores diferentes.

2.1.3 Fenômenos creep e relaxação de tensão

Creep e relaxação de tensão são dois processos cujos modelos fenomenológicos são dos mais utilizados para prever o comportamento de elastômeros. Eles são freqüentemente

tratados como dois fenômenos separados, embora considerações físicas sugiram que um processo possa influenciar no outro (Borja, 1992).

Fenômeno creep

Creep é o aumento da deformação, ao longo do tempo, sob tensão constante (Fig. 2.1).

O estudo do fenômeno creep permite o uso do projeto operacional por um período longo. Historicamente o estudo do fenômeno creep foi dirigido pela necessidade de se avaliar o desempenho dos metais em temperaturas elevadas. Tal fenômeno tem ampla e diversificada ocorrência, ou seja, na temperatura da sala pode ocorrer em: plásticos, sólidos, vidros. e em outras variedades de materiais, incluindo metais com baixo ponto de fusão. O fenômeno creep torna-se um problema particularmente importante onde altas temperaturas são encontradas como, por exemplo, em turbinas de aviões e reatores nucleares (Gent, 2001; Boresi *et alii*, 1993; Archer, 2003b).

Nos materiais poliméricos o creep pode ser examinado segundo a teoria de viscoelasticidade linear. Ele é fundamental nas aplicações de montagem com elastômeros tais como isoladores para motores, neutralizadores e “links” viscoelásticos.

O creep pode ser medido em tensão, compressão ou cisalhamento simples. Os testes de creep são executados com o objetivo de predizer o comportamento do material testado. A duração do teste creep pode estar numa faixa de menos do que um minuto a vários anos. São, geralmente, executados medindo-se a deformação em temperatura constante. A curva creep padrão pode ser obtida em um gráfico de deformação versus tempo.

Curvas creep são similares e geralmente se apresentam conforme Fig. 2.5

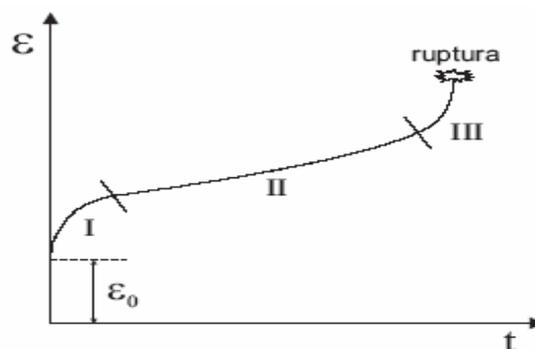


Figura 2.5 - Comportamento da curva creep.

Para o tempo $t=0$, a deformação ε_0 é devida ao carregamento inicial e é a quantidade de deformação instantânea, independente do tempo, sofrida pelo material. Pode-se incluir a deformação elástica e plástica. É interessante dividir a curva creep em três estágios. O primeiro estágio (I) é chamado creep primário (ou creep transitório), onde a taxa de deformação aumenta rapidamente e, após, decai lentamente com o decorrer do tempo. Inicia-se então o segundo estágio (II), conhecido como creep secundário (ou creep em estado permanente). Nesta fase a taxa da deformação é aproximadamente constante. Finalmente tem-se o terceiro estágio (III), conhecido como creep terciário (ou creep instável). Agora deformação novamente aumenta de forma rápida até uma eventual ruptura do material (Archer, 2003a, 2003b; Boresi *et alii*, 1993).

Há sempre alguma dúvida em extrapolar dados em laboratório para o desempenho em serviço, ou seja, para aplicação em campo. Isto é de grande interesse no caso do fenômeno de creep, onde medições são feitas em intervalos de tempo muito mais curtos do que a vida útil do material.

Fenômeno relaxação de tensão

Relaxação de tensão é o decaimento da tensão em função do tempo sob condição de deformação constante (ver Fig. 2.3). Tem elevada importância em processos de impermeabilização, por exemplo, em produtos de borracha tais como anéis-O e as gaxetas (vedações, calafetagem).

Relaxação de tensão é mais freqüentemente medida, em elastômeros, no modo compressivo. Os testes de relaxação de tensão são planejados para medir tensão residual, depois de o elastômero ter sido mantido deformado por períodos de tempo prolongados (Gent, 2001; Archer, 2003a).

Pode-se, ainda, afirmar que:

Os testes de relaxação e creep fornecem um meio simples e mais direto de se obter as propriedades mecânicas, envolvendo a teoria de viscoelasticidade linear. Tais testes são geralmente aplicados para condição uniaxial de deformação e tensão, de acordo com as relações constitutivas apropriadas.

Os fenômenos creep e relaxação de tensão são importantes devido às falhas, que eventualmente podem ocorrer, nos componentes fabricados com elastômeros. As taxas de creep e relaxação de tensão podem ser determinadas experimentalmente, permitindo a escolha correta do polímero e do projeto.

Ambos os fenômenos são devidos aos processos simultâneos de relaxação físico e químico. Efeitos físicos predominam para tempos curtos e em temperaturas baixas e ambientais. Efeitos químicos são mais significantes para tempos longos, tornam-se mais importantes em temperaturas mais altas.

Embora os testes de relaxação e creep tenham a vantagem da simplicidade, há também algumas desvantagens associadas. A primeira desvantagem é que os procedimentos de teste uniaxial de relaxação e creep supõem que a tensão seja uniformemente distribuída através da secção reta do material, com as superfícies laterais livres para expansão e contração. Essa condição não pode ser satisfeita nas extremidades do material, dada à conexão com a máquina de teste. Naturalmente esse efeito torna-se inteiramente insignificante enquanto o material é feito para aproximar a geometria dos filamentos. A segunda dificuldade envolve os efeitos dinâmicos, que são encontrados na obtenção de dados em curto espaço de tempo. As funções de relaxação e de creep supõem o desaparecimento de todos os transitórios excitados com a resposta dinâmica no material na máquina de teste (Christensen, 1982).

Creep e relaxação de tensão são processos que em certas regiões da escala do tempo são difíceis de se realizar.

A utilidade das funções relaxação de tensão e creep está na determinação das deformações, quando as tensões são conhecidas e, na determinação das tensões quando as deformações são conhecidas. As mesmas podem ser usadas no lugar das equações diferenciais, muito mais difíceis de serem manipuladas que as funções acima citadas (Flugge, 1975).

2.2 Modelando o comportamento viscoelástico

Numerosos modelos clássicos têm sido usados no estudo do comportamento elástico de materiais (Hooke, Newton, Kelvin etc.). Esses modelos aproximam a relação entre a força e a deformação do material, através de uma equação diferencial ordinária (Flugge, 1975; Lakes, 1999; Tschoegl, 1989; Long, 2002; Archer, 2003a; Hammerand, 1999).

Classicamente, o comportamento elástico do material viscoelástico é modelado usando-se molas, enquanto que os amortecedores viscosos são usados para modelar o comportamento viscoso de tais materiais. Usando várias combinações de elementos molas e amortecedores viscosos em série e/ou paralelos, uma grande variedade de materiais viscoelásticos pode ser modelada. Embora os modelos sejam puramente fenomenológicos, eles são particularmente úteis para predizer a resposta do material sob condições de creep e

relaxação, e até sob situações de carregamento complexo. Uma desvantagem é que só em faixa estreita de frequência eles podem dar uma boa percepção da natureza geral da resposta viscoelástica.

A seguir será analisada a resposta de três modelos mecânicos sob condições de tensão e deformação constante. Todos os modelos são lineares, isto é, para algum instante no tempo, a tensão é proporcional à deformação.

Os dois elementos básicos dos modelos mecânicos lineares a serem analisados são:

1. O componente elástico é a mola linear

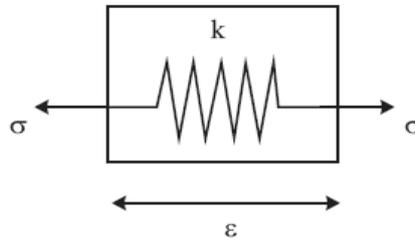


Figura. 2.6 - Mola linear

$$\sigma = k\varepsilon \tag{2.3}$$

que é a Lei de Hooke, onde k é a rigidez da mola.

A equação constitutiva para o sólido linear elástico é $\varepsilon = \sigma/k$. Para uma carga aplicada repentinamente, a mola, (Fig. 2.6), reage deformando-se instantaneamente, e quando a carga é removida reage outra vez instantaneamente, recuperando as dimensões originais. A resposta pode ser escrita da forma $\varepsilon = \sigma_0 J$, onde J é conhecida como a função creep. Uma grande faixa de materiais em engenharia pode ser representada como elástico linear. Neste caso simples $J = \frac{1}{k}$

2. O componente viscoso é o amortecedor linear

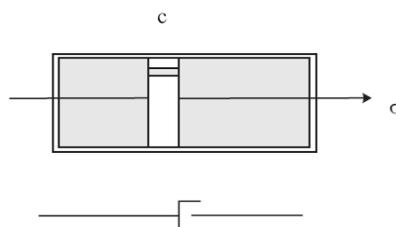


Figura 2.7 - Amortecedor linear

$$\sigma = c\dot{\varepsilon} \tag{2.4}$$

que é a Lei de Newton onde c é a constante do amortecedor.

A equação constitutiva do amortecedor, (Fig. 2.7), que assume o comportamento de um fluido ideal é $\dot{\varepsilon} = \sigma / c$. A deformação devido à carga aplicada repentinamente σ_0 pode ser obtida pela integração da expressão acima. Considerando a deformação inicial como sendo zero tem-se $\varepsilon = (\sigma_0 / c)t$.

A deformação aumenta de forma linear e sem limites, enquanto a tensão é aplicada.

Nota-se que a deformação é proporcional à tensão, como deve ser para um material linear viscoelástico. A relação entre tensão e deformação pode ser escrita na forma

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 J(t) \tag{2.5}$$

sendo

$$J(t) = \frac{t}{c}, \tag{2.6}$$

onde $J(t)$ é a função creep.

2.3 Os modelos mecânicos clássicos de viscoelasticidade

No trabalho a ser desenvolvido, neste capítulo e nos subseqüentes, supõe-se que o corpo viscoelástico esteja em repouso para todos os tempos anteriores, e para o instante inicial torna-se, sem perda da generalidade, $t = 0$. Para $t \geq 0$ supõe-se que o corpo viscoelástico esteja sujeito a uma tensão $\sigma(t)$ e deformação $\varepsilon(t)$ uniaxial. Considera-se a função resposta para uma excitação expressa pela função degrau unitário (Heaviside), a qual representa um papel fundamental do ponto de vista matemático e físico.

Denota-se por $J(t)$ a resposta da deformação para uma unidade de tensão para o teste creep, e $G(t)$ a resposta da tensão para uma unidade de deformação para o teste de relaxação. As funções $J(t)$ e $G(t)$ são denominadas função creep e função relaxação de tensão respectivamente, ou apenas, as funções materiais do corpo viscoelástico. Ambas as funções são causais, isto é desaparecem para $t < 0$.

Os valores limitados das funções materiais para $t \rightarrow 0^+$ e $t \rightarrow +\infty$ são relacionados aos comportamentos instantâneos e do equilíbrio do corpo viscoelástico, respectivamente.

Ambas as funções materiais são não-negativas. Além disso, para $0 < t < +\infty$, $G(t)$ é uma função não crescente e $J(t)$ uma função não decrescente. A propriedade de monotonicidade de $J(t)$ e $G(t)$ é relatada, respectivamente, para o fenômeno físico de creep e relaxação de tensão.

Nos três modelos a tensão σ_0 e a deformação ε_0 são aplicadas repentinamente na equação governante:

$$\sigma(t) = \sigma_0 \mu(t) \quad \text{carregamento pulso salto unitário para } t = 0;$$

$$\sigma(t) = -\sigma_0 \mu(t - \tau) \quad \text{descarregamento pulso salto unitário para } t = \tau;$$

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \mu(t) \quad \text{deslocamento pulso salto unitário para } t = 0;$$

para obter-se a função creep, a recuperação creep e a função relaxação de tensão, respectivamente.

A função resposta a uma excitação é expressa pela função degrau unitário

$$\mu(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{se } t < 0 \end{cases} \quad \mu(t) \text{ é a função degrau unitário, Heaviside}$$

$$\frac{d\mu(t)}{dt} = \delta(t) \quad \text{é a função delta de Dirac}$$

2.3.1 Modelo clássico de Maxwell

O modelo clássico de Maxwell consiste de uma mola clássica e um amortecedor em série, representando o comportamento de um fluido, como mostra a Fig. 2.8.

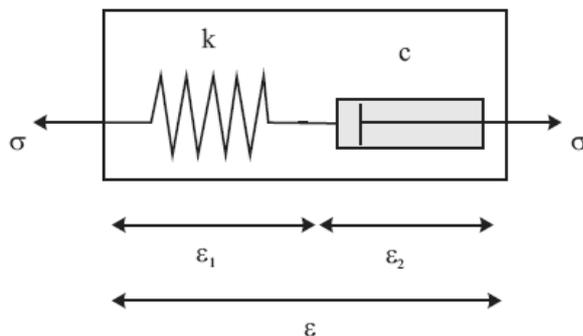


Figura 2 8 - Mola clássica e amortecedor viscoso em série

O equilíbrio deste modelo é dado por $\sigma = \sigma_1 = \sigma_2$, sua deformação compatível é $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ e as relações de tensão-deformação são $\varepsilon_1 = \frac{1}{k} \sigma$, $\dot{\varepsilon}_2 = \frac{1}{c} \sigma$.

A equação governante será:

$$\sigma + \frac{c}{k} \dot{\sigma} = c \dot{\epsilon} \tag{2.7}$$

Utilizando dois intervalos, $0 \leq t < \tau$ e $\tau \leq t$, obtém-se a resposta para ambos os carregamentos, dados o creep completo, e a resposta de recuperação (ver Fig. 2.9). Então, o resultado esperado será:

$$\epsilon(t) = \begin{cases} \frac{\sigma_0}{k} + \frac{\sigma_0}{c} t, & 0 \leq t < \tau \\ \frac{\sigma_0}{c} \tau, & \tau \leq t \end{cases} \tag{2.8}$$

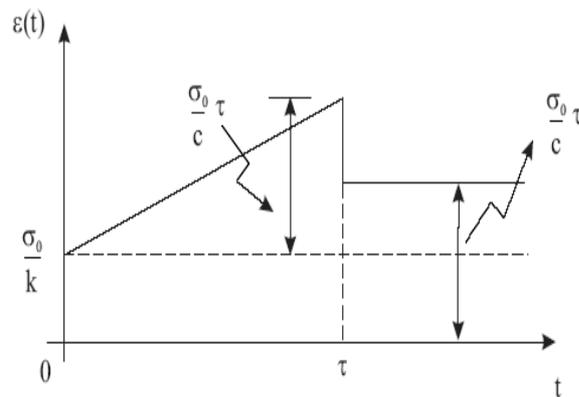


Figura 2.9 - Representação da solução (2.8)

A função Creep, $J(t)$, para o modelo Maxwell é dada pela Eq.(2.9) e na Fig. (2.10) tem-se a representação gráfica.

$$J(t) = \frac{1}{k} \mu(t) + \frac{1}{c} t \tag{2.9}$$

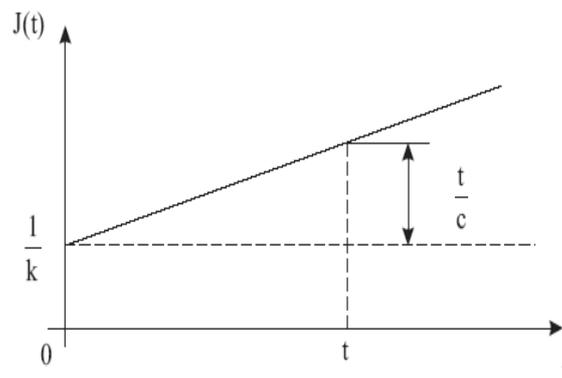


Figura 2.10 - Função creep para o modelo clássico de Maxwell.

A solução do modelo clássico de Maxwell para relaxação de tensão, $G(t)$, é dada pela Eq. (2.10), ver Fig. 2.11.

$$G(t) = k e^{-\frac{t}{\tau}}, \tag{2.10}$$

onde $\tau = c/k$ e $G(t) = \sigma(t)/\epsilon_0$.

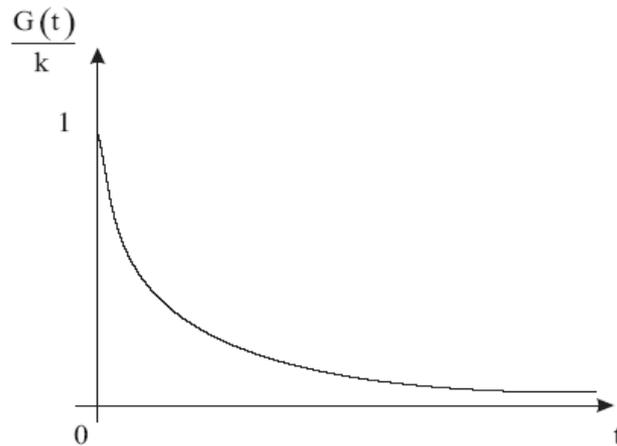


Figura 2.11 - Função relaxação de tensão para o modelo clássico de Maxwell

2.3.2 Modelo clássico de Kelvin (ou Voigt)

No modelo sólido de Kelvin, a mola é conectada ao amortecedor em paralelo como mostra a Fig. 2.12.

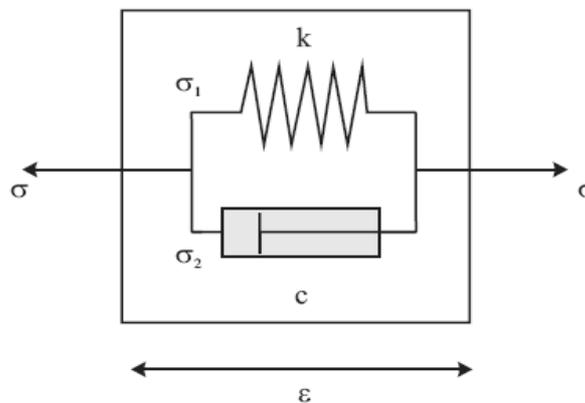


Figura 2.12 - Mola clássica e amortecedor viscoso em paralelo

A deformação compatível para o modelo clássico de Kelvin é $\varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2$, sendo $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$ o equilíbrio deste modelo e as relações de tensão-deformação são $\varepsilon = \frac{1}{k}\sigma_1$, $\dot{\varepsilon} = \frac{1}{c}\sigma_2$.

A sua equação governante é dada por

$$\sigma = k\varepsilon + c\dot{\varepsilon}. \tag{2.11}$$

A resposta para ambos os carregamentos, o creep e a de recuperação é obtida da adição das equações nos intervalos, $0 \leq t < \tau$ e $\tau \leq t$, ver Fig. 2.13. O resultado esperado é

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{\sigma_0}{k} (1 - e^{-(k/c)t}), & 0 \leq t < \tau \\ \frac{\sigma_0}{k} e^{-(k/c)t} (e^{(k/c)\tau} - 1), & \tau \leq t \end{cases} \tag{2.12}$$

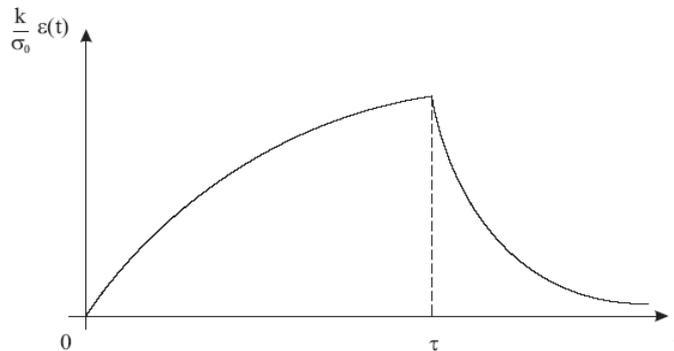


Figura 2.13 - Representação da solução (2.12).

A solução do modelo clássico de Kelvin para a função creep, $J(t)$, é dada pela equação

$$J(t) = \frac{1}{k} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau'}} \right). \tag{2.13}$$

Sendo $J(t) = \varepsilon(t)/\sigma_0$ e $\tau' = c/k$ é o tempo de retardo (ver Fig. 2.14). Note-se que

$$\lim_{t \rightarrow 0} J(t) = 0 \text{ e } \lim_{t \rightarrow \infty} J(t) = \frac{1}{k}.$$

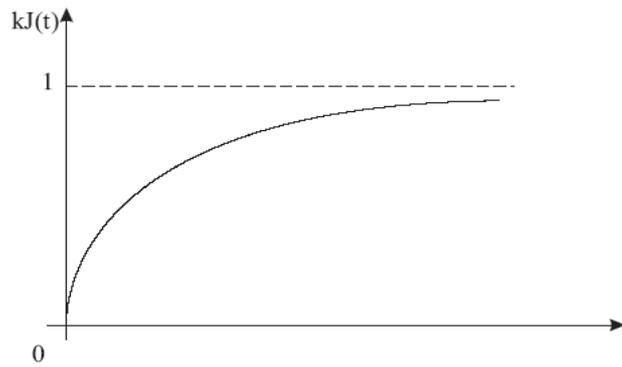


Figura 2.14 - Função creep para o modelo clássico de Kelvin

A função relaxação de tensão, $G(t)$, é dada pela Eq.(2.14) (ver Fig.2.15).

$$G(t) = k\mu(t) + c\delta(t) \tag{2,14}$$

onde $\mu(t)$ é a função degrau unitário e $\delta(t)$ é a função impulso de Dirac.

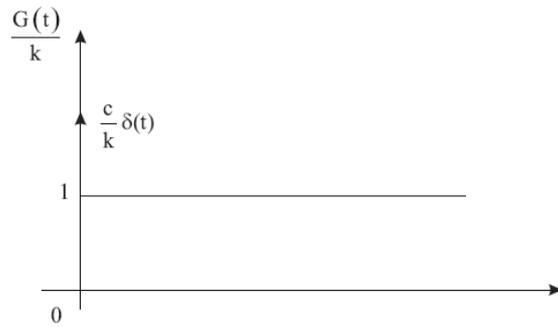


Figura 2.15 - Função relaxação de tensão para o modelo clássico de Kelvin

Nenhum dos modelos, fluido de Maxwell e sólido de Kelvin, são eficientes para descrever com precisão a resposta de um sólido ou fluido viscoelástico linear real. O modelo fluido Maxwell não mostra um decréscimo da razão de deformação sob uma tensão constante e não exibe a recuperação dependente do tempo após ser descarregado. Por outro lado, o modelo sólido de Kelvin não deforma instantaneamente sob a aplicação de uma tensão aplicada repentinamente. Particularmente, esses modelos estão aqui presentes para se examinar algumas de suas características de viscoelasticidade linear e podem ser usados como molas e amortecedores viscosos para construir modelos mais complexos e mais precisos.

2.3.3 Modelo clássico Linear Padrão (ou Zener)

O modelo clássico linear padrão é uma combinação do modelo de Kelvin, mais uma mola clássica para melhor descrição dos efeitos de creep, recuperação do creep e relaxação de tensão (ver Fig. 2.16).

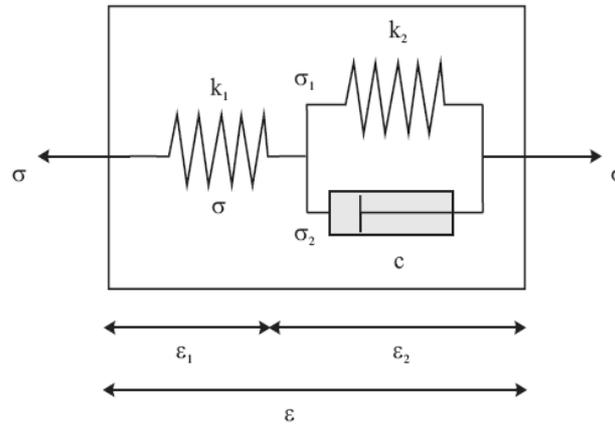


Figura 2.16 - Mola clássica em série com uma unidade Kelvin

As equações para esse modelo, conforme Fig. 2.16, são: equilíbrio $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$, deformação compatível $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ e relações de tensão-deformação $\varepsilon_1 = \frac{1}{k_1} \sigma$, $\dot{\varepsilon}_2 = \frac{1}{c} \sigma_2$, $\varepsilon_2 = \frac{1}{k_2} \sigma_1$.

A equação governante para este modelo é dada por

$$\sigma + \frac{c}{k_1 + k_2} \dot{\sigma} = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} \varepsilon + \frac{k_1 c}{k_1 + k_2} \dot{\varepsilon} . \tag{2.15}$$

A resposta completa para creep e recuperação do creep será obtida nos intervalos $0 \leq t < \tau$ e $\tau \leq t$. Então, pode-se escrever:

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{\sigma_0}{k_1} \left(1 + \frac{k_1}{k_2} \left(1 - e^{-(k_2/c)t} \right) \right) , & 0 \leq t < \tau \\ -\frac{\sigma_0}{k_2} e^{-(k_2/c)t} \left(e^{(k_2/c)\tau} - 1 \right) , & \tau \leq t \end{cases} \tag{2.16}$$

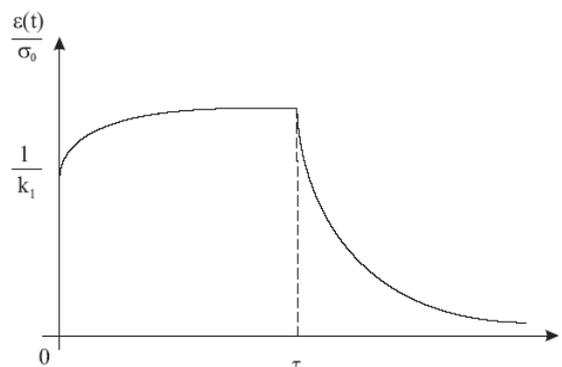


Figura 2.17 - Representação da solução (2.16)

A função creep para o modelo clássico linear padrão (ver Fig. 2.18) é dada por:

$$J(t) = \frac{1}{k_1} \left(1 + \frac{k_1}{k_2} (1 - e^{-t/\tau'}) \right), \quad (2.17)$$

onde $\tau' = c/k_2$.

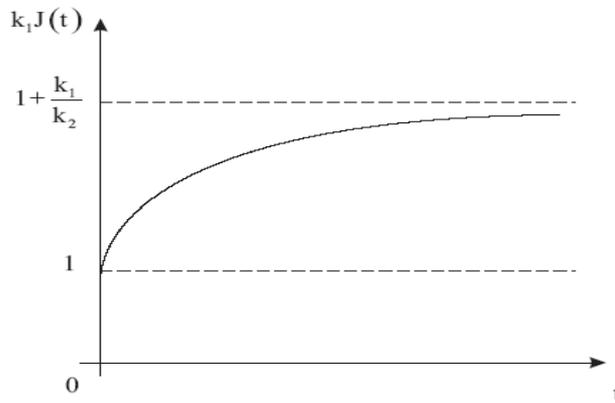


Figura 2.18 - Função creep para o modelo clássico Linear Padrão.

A solução para a função relaxação de tensão, $G(t)$, (ver Fig. 2.19) é dada por:

$$G(t) = \frac{k_1}{k_1 + k_2} \left(k_2 + k_1 e^{-t/\tau} \right), \quad (2.18)$$

sendo $\tau = c/(k_1 + k_2)$ é o tempo de relaxação e $G(t) = \sigma(t)/\epsilon_0$.

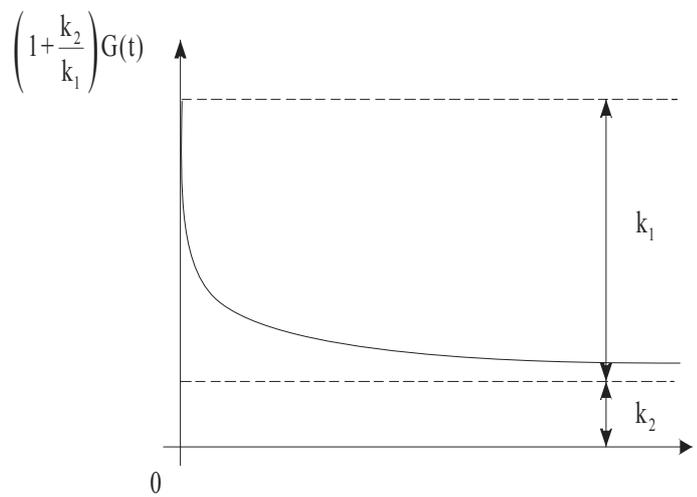


Figura 2.19 - Função relaxação de tensão para o modelo clássico Linear Padrão

Os modelos mecânicos a derivadas inteiras, independentemente do número de parâmetros, não explicam a convergência da função relaxação de tensão para um valor finito, com o tempo tendendo ao infinito. Nestes modelos tem-se somente o comportamento local da função acima citada

No próximo capítulo, serão deduzidos os modelos mecânicos a derivadas fracionárias que, entre outras vantagens, pode-se obter um melhor comportamento qualitativo da função relaxação de tensão.

CAPÍTULO 3

MODELOS MECÂNICOS A DERIVADAS FRACIONÁRIAS

3.1 Aplicação do cálculo fracionário

As modificações de modelos clássicos podem ser obtidas propondo uma relação entre a tensão e a deformação no material, por meio das equações diferenciais fracionárias, usando derivadas de ordem não inteira, isto é, o cálculo fracionário. As derivadas de ordem inteira dependem somente do comportamento local da função, enquanto que o cálculo fracionário depende de toda a história da função.

Modelos de ordem fracionária de viscoelasticidade linear (isto é, viscoelasticidade linear em combinação com operador de ordem fracionária) têm provado ser útil para modelagem de polímeros sujeitos a pequenas deformações (Bagley e Torvik, 1983; Welch. *et alii*, 1999; Lion, 1997; Friedrich *et alii*, 1999).

O uso do modelo constitutivo, baseado no cálculo fracionário, é motivado, em parte, pelo fato de que poucos parâmetros são necessários para representar o comportamento do material viscoelástico. A aplicação de derivadas fracionárias na viscoelasticidade foi estudada por Caputo e Mainardi (1971) e é fundamentada fisicamente por Bagley e Torvik (1983). Os modelos fracionários são facilmente analisados usando a transformada de Fourier ou Laplace.

As equações constitutivas baseadas em cálculo fracionário podem ser descritas no domínio do tempo, de Laplace e da frequência. As representações no domínio do tempo, para uso na teoria quase estática, são as mais apropriadas. A análise de dados de teste quase estático para creep e relaxação que utilizam modelos fracionários necessita do uso de funções especiais, como as funções do tipo Mittag-Leffler (Erdélyi *et alii*, 1954).

3.2 Equações constitutivas viscoelásticas fracionárias

Os modelos reológicos de viscoelasticidade linear, normalmente, consistem de molas e amortecedores. Suas equações constitutivas podem ser escritas na forma generalizada utilizando derivadas fracionárias (ver Fig. 3.1).

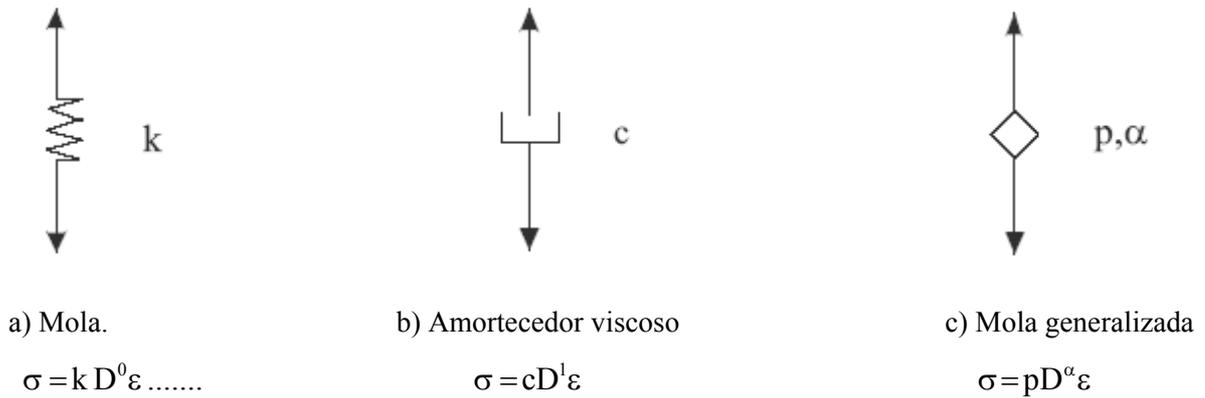


Figura 3.1 - Elementos reológicos de viscoelasticidade

Na Fig. 3.1 D^0 e D^1 representam operadores diferenciais de ordem zero e um respectivamente. D^α representa um operador diferencial de ordem α (fracionário), ver Apêndice A. A equação constitutiva fracionária resultante é:

$$\sigma = p D^\alpha \varepsilon, \tag{3.1}$$

onde p é um fator de proporcionalidade, α a ordem da derivada, tal que $0 \leq \alpha \leq 1$.

A relação constitutiva (3.1), quando $\alpha = 0$ descreve o comportamento da mola e p especifica a rigidez da mola k . Se $\alpha = 1$, resulta na equação constitutiva do amortecedor e p define a constante c , que depende da viscosidade. Assim, quando $0 < \alpha < 1$, a mola generalizada (“spring-pot”) exibe características da mola e do amortecedor. O elemento reológico generalizado para viscoelasticidade é a mola generalizada, e se refere à equação (3.1), introduzido por Koeller (1984) como um “spring-pot” e é representada por um losango (ver Fig. 3 1). Para estudo complementar ver Caputo e Mainardi (1966).

O elemento reológico fracionário é caracterizado pelo fato de a tensão ser proporcional à derivada fracionária da deformação. Para solicitações harmônicas e periódicas, a análise mostra que o elemento reológico fracionário não é somente um elemento dissipativo, mas também elástico (Moreau *et alii*, 2004).

Se os amortecedores viscosos em modelos reológicos tradicionais forem substituídos por molas generalizadas, modelos generalizados de viscoelasticidade linear serão derivados. As equações constitutivas desses elementos serão equações diferenciais de ordem fracionária.

A seguir serão derivados os modelos reológicos fracionários no tempo, para um estado unidimensional de tensão e deformação, substituindo o amortecedor viscoso nos modelos reológicos clássicos, pela mola generalizada.

3.3 Modelos fracionários

Os modelos fracionários são baseados em uma modificação da equação geral dada previamente. É possível ter uma equação de ordem não inteira, para o estudo do comportamento de materiais viscoelásticos.

Com o objetivo de simplificar a solução das equações diferenciais lineares de ordem fracionária, aplica-se a transformada de Laplace. Para obtenção das transformadas inversas de Laplace de ordem fracionária expande-se o resultado obtido por meio de uma divisão longa,

fazendo uso da expressão $\frac{1}{s^\alpha} = \mathcal{L} \left[\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right]$ para $\alpha > 0$. Γ é a função gama. Pode-se, então,

construir uma série de potências (Hartley *et alii*, 1998).

Aplica-se a transformada inversa de Laplace na série de potências e coletam-se os dados na forma de um somatório. Define-se então uma função exponencial generalizada conhecida como de Mittag-Leffler (Mittag-Leffler 1902, 1903, 1904, 1905), para uso com a equação diferencial fracionária. A função Mittag-Leffler é definida como

$$E_\alpha(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(n\alpha + 1)}, \quad \alpha > 0 \text{ (Erdélyi, 1954). Se } z = -at^\alpha, \text{ tem-se}$$

$$E_\alpha[-at^\alpha] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-a)^n t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha + 1)}, \quad \alpha > 0 \tag{3.2}$$

Funções do tipo Mittag-Leffler foram introduzidas dentro da viscoelasticidade linear por Rabotnov (1980) e a conexão com o uso do operador derivativo fracionário em equações constitutivas de viscoelasticidade linear foi estabelecida por Koeller (1984). Esse operador foi utilizado nos modelos mecânicos clássicos de Maxwell, de Kelvin (ou Voigt) e Linear Padrão (ou Zenner), entre outros.

3.3.1 Modelo fracionário de Maxwell

O modelo fracionário de Maxwell envolve a associação em série de dois elementos, uma mola clássica e uma mola generalizada (ver Fig. 3.2). Compare-se a Fig. 3.2 com a Fig. 2.8.

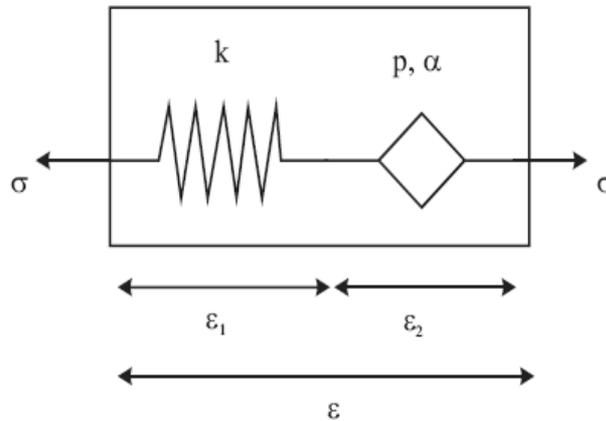


Figura 3.2 - Mola clássica e mola generalizada em série

A tensão σ é a mesma em ambos os elementos e suas respectivas relações de tensão-deformação são dadas pelas equações $\epsilon_1 = \frac{\sigma}{k}$, $D^\alpha \epsilon_2 = \frac{\sigma}{p}$, sendo ϵ_1 e ϵ_2 os deslocamentos da mola clássica e da mola generalizada, respectivamente. Devido à construção do modelo generalizado Maxwell, tem-se $\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2$, e daqui segue a equação governante:

$$\sigma + \frac{p}{k} D^\alpha \sigma = p D^\alpha \epsilon, \tag{3.3}$$

onde α é o parâmetro fracionário e assume valores no intervalo $0 < \alpha < 1$ (comparar com equação (2.7)).

Solução do modelo fracionário de Maxwell para creep

Pode-se encontrar a solução Maxwell para creep aplicando-se um carregamento $\sigma(t) = \sigma_0 \mu(t)$ repentino na equação (3.3), para $t = 0$, onde $\mu(t)$ é a função degrau unitário (Heaviside). Tem-se, então $\sigma_0 \mu(t) + \frac{p}{k} D^\alpha \sigma_0 \mu(t) = p D^\alpha \epsilon$.

Aplicando a transformada de Laplace na equação diferencial de ordem fracionária (Apêndice A), tem-se $\sigma_0 \frac{1}{s} + \frac{p}{k} \sigma_0 s^\alpha \frac{1}{s} = p s^\alpha \epsilon(s)$, de onde se tira: $\epsilon(s) = \frac{\sigma_0}{k} \frac{1}{s} + \frac{\sigma_0}{p} \frac{1}{s^{\alpha+1}}$ e a

sua transformada inversa, dividida por σ_0 (Hartley *et alii*, 1998) é a função creep, ver Fig. 3.3, dada por

$$J(t) = \frac{1}{k} \left[1 + \frac{k}{p} \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \right], t \geq 0 \tag{3.4}$$

sabendo-se que $J(t) = \varepsilon(t) / \sigma_0$ e Γ é a função Gama.

Note-se que $\lim_{t \rightarrow \infty} J(t) = \infty$ e $\lim_{t \rightarrow 0} J(t) = \frac{1}{k}$ (ver Fig. 3.3).

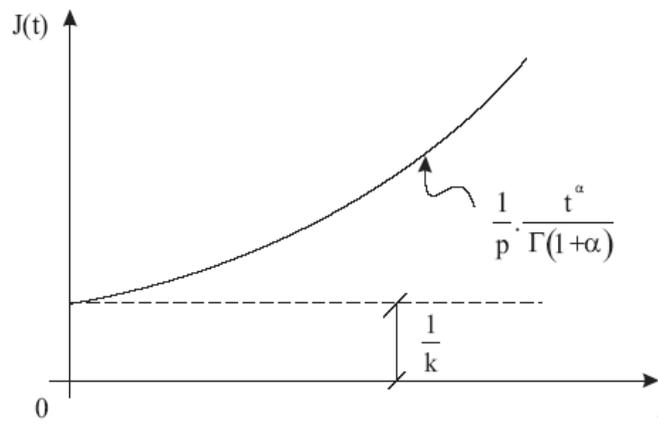


Figura 3.3 - Função creep para o modelo fracionário de Maxwell

O comportamento da função creep, Fig. 3.3, é um comportamento inadequado para a representação de um sólido viscoelástico, porque $J(t) \rightarrow \infty$, com $t \rightarrow \infty$.

Entretanto, este modelo parece adequado para representar um líquido viscoso (newtoniano). Um gráfico computado numericamente a partir da expressão (3.4) é apresentado na Fig. 3.4 para os valores de $\alpha=0,359$, $k=5,52 \times 10^8 \text{ N/m}^2$ e $p=[4,29; 2,61; 1,84] \times 10^5 \text{ N s}^\alpha / \text{m}$.

Os parâmetros p e k foram fornecidos pelo Laboratório de experimentos em Materiais Viscoelásticos PISA-LVA (Apêndice C). Esses valores de p correspondem a três temperaturas.

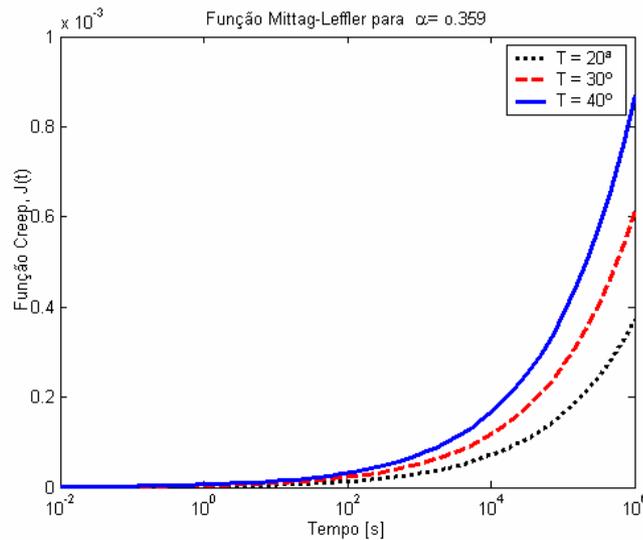


Figura 3.4 - Função creep para o modelo fracionário de Maxwell, com valores de p nas temperaturas 20 C, 30 C, 40 C.

A Fig. 3.4 mostra que a variação da inclinação das curvas depende do valor da temperatura.

Solução do modelo fracionário de Maxwell para relaxação de tensão

A solução do modelo fracionário de Maxwell para relaxação de tensão pode ser obtido aplicando-se um deslocamento $\epsilon(t) = \epsilon_0 \mu(t)$ na equação (3.3) resultando em

$$\sigma + \frac{p}{k} D^\alpha \sigma = p D^\alpha \epsilon_0 \mu(t).$$

É usada a transformada de Laplace para resolver a equação diferencial linear de (Apêndice A). Assim, obtém-se $p \epsilon_0 s^\alpha \frac{1}{s} = \frac{p}{k} s^\alpha \sigma(s) + \sigma(s)$, resultando em

$$\sigma(s) \left(1 + \frac{p}{k} s^\alpha \right) = p \epsilon_0 s^{\alpha-1}; \text{ que após algumas manipulações, fornece:}$$

$$\sigma(s) = k \epsilon_0 \left[\frac{s^{\alpha-1}}{(s^\alpha + k/p)} \right].$$

A transformada inversa de Laplace, dividida por ϵ_0 , será a função relaxação de tensão (ver Fig. 3.5), dada por

$$G(t) = k \left[E_\alpha \left(-\frac{k}{p} t^\alpha \right) \right] \mu(t) \tag{3.5}$$

onde $G(t) = \sigma(t) / \epsilon_0$, sendo $E_\alpha \left[\left(-\frac{k}{p} t^\alpha \right) \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{k}{p} \right)^n t^{n\alpha}}{\Gamma(1 - \alpha n)}$, $\alpha > 0$.

Esta é uma exponencial generalizada ou função Mittag-Leffler, como já se viu em (3.2).

Em Friedrich (1991) tem-se um estudo complementar sobre o comportamento da função relaxação de tensão para o modelo de Maxwell no domínio do tempo, mostrando que é uma função fortemente monotônica, ver também Friedrich *et alii*, (1999). Resultados gráficos são encontrados em Koeller (1984).

É fácil demonstrar, pelos teoremas dos valores final e inicial que $\lim_{t \rightarrow 0} G(t) = k$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} G(t) = 0$.

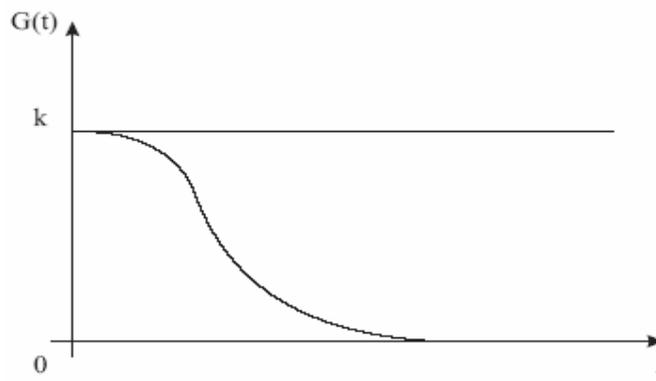


Figura 3.5 - Função relaxação de tensão para o modelo fracionário de Maxwell

A Fig. 3.5 representa $G(t)$ para o modelo fracionário de Maxwell.

Uma computação numérica da função relaxação de tensão é apresentada na Fig. 3.6, com o uso da equação (3.5), onde os valores do parâmetro $p = [4,29; 2,61; 1,84] \times 10^5 \text{ N s}^\alpha / \text{m}$ foram obtidos nas temperaturas de 20 C, 30 C e 40 C, respectivamente. Sendo $\alpha = 0,359$ e $k = 5,51 \times 10^9 \text{ N/m}^2$. Dados dos parâmetros p e k ver Apêndice C.

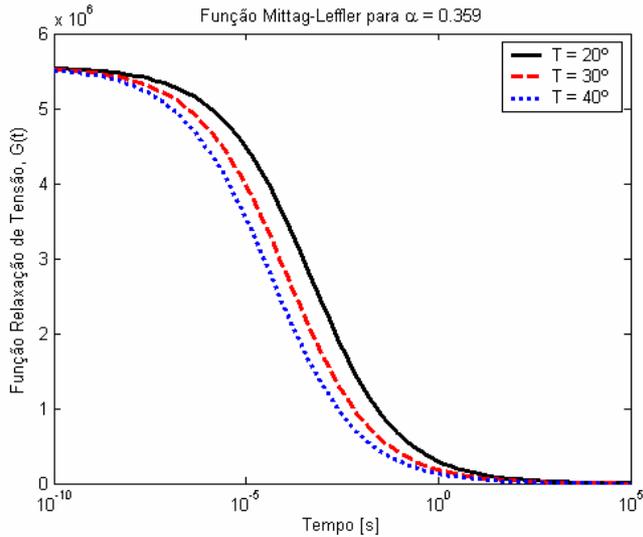


Figura 3.6- Função relaxação de tensão para o modelo fracionário de Maxwell, com valores de p nas temperaturas 20 C, 30 C, 40 C.

Pode-se observar na Fig. 3.6, que a variação da inclinação das curvas torna-se mais suave com o aumento do valor da temperatura.

3.3.2 Modelo Fracionário de Kelvin (ou Voigt)

No modelo fracionário de Kelvin, a mola clássica conectada na mola generalizada em paralelo como mostra na Fig. 3.7 (comparem-se a Fig. 3.7 com a Fig. 2.12). A tensão total σ é a soma das tensões nos elementos mola clássica e mola generalizada e a deformação ε é a mesma em ambos os elementos.

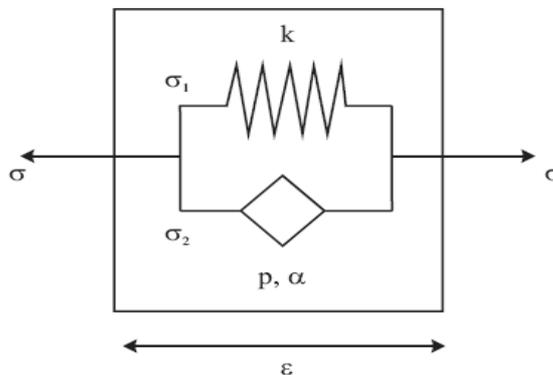


Figura 3.7 - Mola clássica e mola generalizada em paralelo

Para descrever o modelo fracionário de Kelvin tem-se três equações: $\varepsilon = \frac{\sigma_1}{k}$, $D^\alpha \varepsilon = \frac{\sigma_2}{p}$, $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$. Eliminando σ_1 e σ_2 forma-se então a lei constitutiva

$$\sigma = k\varepsilon + pD^\alpha \varepsilon. \tag{3.6}$$

Comparar a equação (3.6) com a equação (2.7).

Solução do modelo fracionário de Kelvin para creep

Considerar agora que o modelo fracionário de Kelvin está sujeito a um carregamento para teste de creep, $\sigma(t) = \sigma_0 \mu(t)$ no qual a tensão σ_0 é aplicada repentinamente em $t = 0$ e então mantida constante. Aplicando o carregamento em (3.6), $\sigma_0 \mu(t) = k\varepsilon + pD^\alpha \varepsilon$ e com o uso da transformada de Laplace, tem-se $\sigma_0 \frac{1}{s} = k\varepsilon(s) + ps^\alpha \varepsilon(s)$.

Segue
$$\varepsilon(s) = \sigma_0 \frac{1}{s} \left[\frac{1}{p(s^\alpha + k/p)} \right].$$

A sua transformada inversa de Laplace resulta na função creep (ver Fig. 3.8) e será

$$J(t) = \frac{1}{k} \left[1 - E_\alpha \left(-\frac{k}{p} t^\alpha \right) \right] \mu(t) \tag{3.7}$$

onde $E_\alpha \left[\left(-\frac{k}{p} t^\alpha \right) \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{k}{p} \right)^n t^{n\alpha}}{\Gamma(1 + \alpha n)}$ é a função Mittag-leffler (ver equação (3.2)) e

$$J(t) = \sigma(t) / \varepsilon_0.$$

Como pesquisa complementar, para o modelo Kelvin, ver Eldred *et alii*, (1995) e Friedrich *et alii*, (1999).

É fácil demonstrar que $\lim_{t \rightarrow 0} J(t) = 0$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} J(t) = \frac{1}{k}$, independentemente do valor de

α .

A Fig. 3.8 representa $J(t)$ para o modelo fracionário de Kelvin.

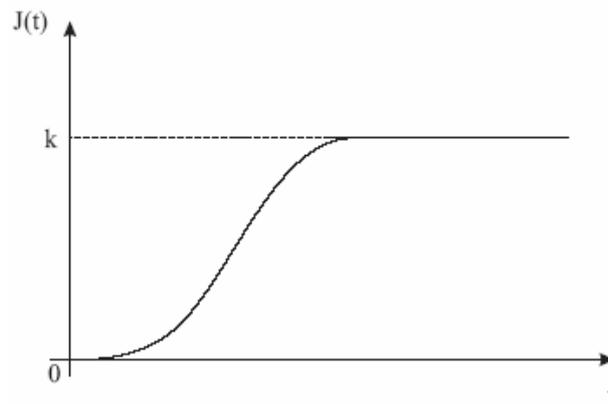


Figura 3.8 - Função creep para o modelo fracionário de Kelvin

Se uma carga inicial repentina σ_0 for aplicada no modelo Kelvin (ver Fig. 3.7), a mola generalizada irá, num primeiro instante, se contrapor a esta carga (efeito similar ao amortecedor viscoso). Num segundo instante, esta força será transferida, gradualmente, para a mola clássica k , tendo em vista que $\lim_{t \rightarrow 0} J(t) = 0$.

A Fig. 3.9 mostra o comportamento da função creep (equação (3.7)), para valores de $\alpha = 0,359$, $k = 5,52 \times 10^8 \text{ N/m}^2$ e $p = [4,29; 2,61; 1,84] \times 10^5 \text{ N s}^\alpha / \text{m}$, obtidos na temperatura de 20 C, 30 C e 40 C respectivamente. Os parâmetros p e k foram fornecidos pelo Laboratório de Experimentos em Materiais Viscoelásticos PISA-LVA (Apêndice C),

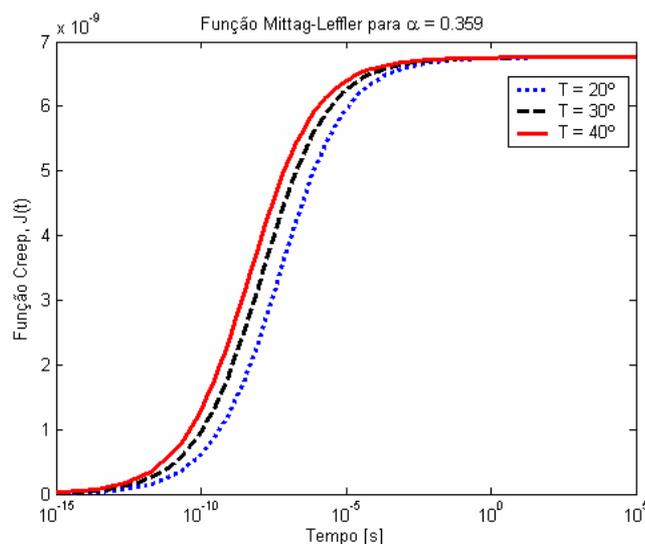


Figura. 3.9- Função Creep para o modelo fracionário de Kelvin, com valores de p nas temperaturas 20 C, 30 C, 40 C.

Na função creep do modelo de Kelvin a derivadas fracionárias (Fig. 3.9), pode-se observar que a variação da inclinação das curvas depende do valor da temperatura.

Solução do modelo fracionário de Kelvin para relaxação de tensão

Para obter-se a função relaxação de tensão aplica-se na equação (3.6) um deslocamento $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \mu(t)$ repentinamente para $t=0$ resultando em $\sigma = k\varepsilon_0 \mu(t) + pD^\alpha \varepsilon_0 \mu(t)$.

Sua transformada de Laplace é $\sigma(s) = k\varepsilon_0 \frac{1}{s} + ps^\alpha \varepsilon_0 \frac{1}{s}$, e reorganizando a equação tem-se $\sigma(s) = \varepsilon_0 \left(k \frac{1}{s} + p \frac{1}{s^{1-\alpha}} \right)$.

Aplicando a transformada inversa de Laplace a função relaxação de tensão (ver Fig. 3.10), será

$$G(t) = k\mu(t) + p \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} \tag{3.8}$$

É fácil de mostrar que $\lim_{t \rightarrow 0} G(t) = \infty$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} G(t) = k$.

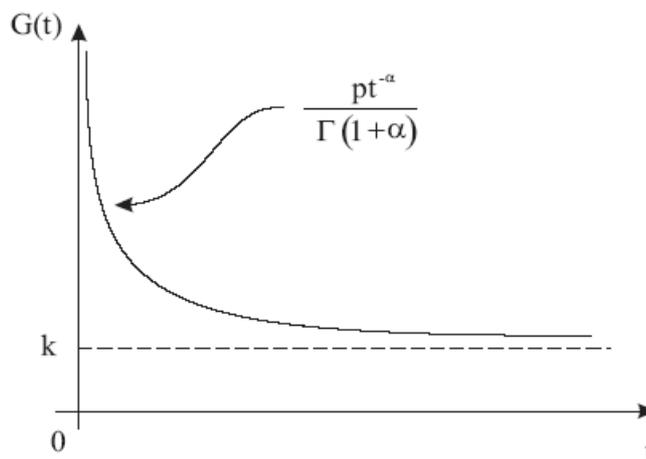


Figura 3.10 - Função relaxação de tensão para o modelo fracionário de Kelvin

A Fig. 3.10 mostra o aspecto geral de $G(t)$ para este modelo. O modelo Kelvin não é realista para a relaxação de tensão dependente do tempo, pois $\lim_{t \rightarrow 0} G(t) = \infty$.

Segundo a equação (3.8) pode-se gerar o gráfico 3.11 para os parâmetros $\alpha = 0,359$,

$k=1,48 \times 10^8 \text{ N/m}^2$ e $p=[4,29; 2,61; 1,84] \times 10^5 \text{ N s}^\alpha / \text{m}$ (nas temperaturas de 20 C, 30 C e 40 C, respectivamente (ver Apêndice C),

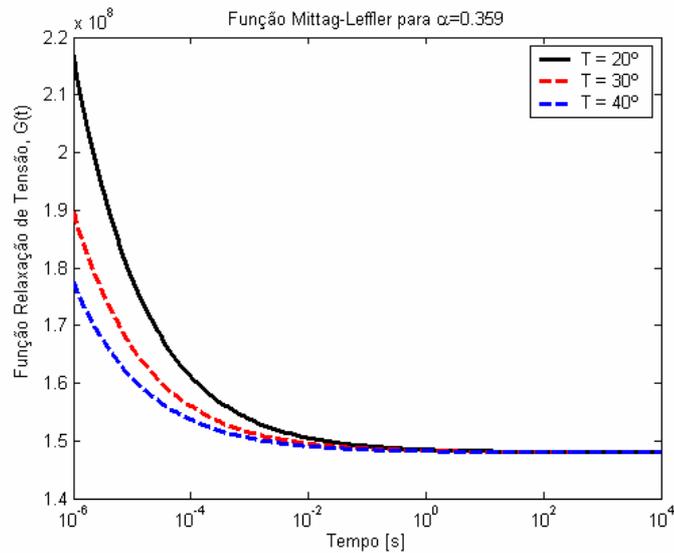


Figura. 3.11 - Função relaxação de tensão para o modelo fracionário de Kelvin, com valores de p nas temperaturas 20 C, 30 C, 40 C.

A Fig. 3.11 mostra que o comportamento da inclinação das curvas, para a função relaxação de tensão, depende do valor da temperatura.

3.3.3 Modelo Fracionário Linear Padrão (ou Zener)

Este modelo consiste de uma mola clássica em série com o modelo fracionário de Kelvin como mostra a Fig. 3.12. Examine-se simultaneamente a Fig. 3.12 e a Fig. 2.16

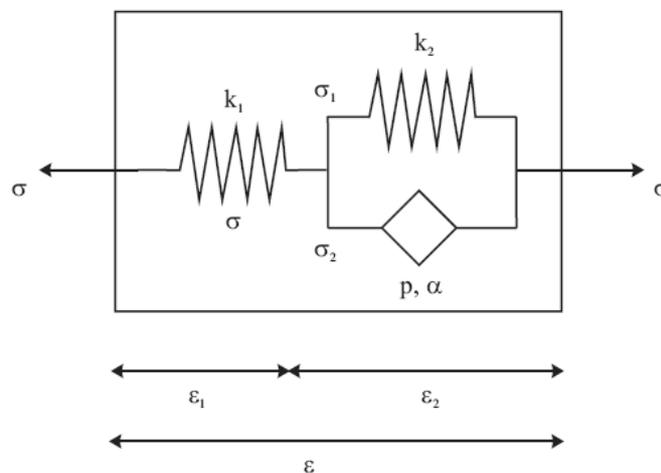


Figura. 3.12 - Mola clássica em série com uma unidade Kelvin.

Conforme a figura acima, as equações para esse modelo são: $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$, $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$
 $\sigma = k_1 \varepsilon_1$, $\sigma_1 = k_2 \varepsilon_2$, e $\sigma_2 = p D^\alpha \varepsilon_2$. Considerando o equilíbrio da tensão e a compatibilidade da deformação, a equação para o modelo em estudo será

$$(k_1 + k_2) \sigma + p D^\alpha \sigma = k_1 k_2 \varepsilon + k_1 p D^\alpha \varepsilon . \quad (3.9)$$

Sua forma padrão será dada por

$$\sigma + \frac{p}{k_1 + k_2} D^\alpha \sigma = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} \varepsilon + \frac{k_1 p}{k_1 + k_2} D^\alpha \varepsilon . \quad (3.10)$$

É uma equação constitutiva fracionária, unidimensional, que contém quatro parâmetros p , k_1 , k_2 e α . Para estudo complementar, ver Schmidt *et alii*, (2001). Comparar a equação (3.10) com equação (2.20).

A expressão (3.10) é equivalente àquela reproduzida por Espindola *et alii*, (2005), exceto pelo fato de que a derivada do primeiro membro é de ordem β , não necessariamente igual a α . No modelo a quatro parâmetros, entretanto, toma-se $\alpha = \beta$.

Solução do modelo fracionário linear padrão para creep

Aplicando um carregamento $\sigma(t) = \sigma_0 \mu(t)$ na equação constitutiva (3.10), com a finalidade de obter a resposta creep, tem-se

$$\sigma_0 \mu(t) + \frac{p}{k_1 + k_2} D^\alpha \sigma_0 \mu(t) = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} \varepsilon + \frac{p k_1}{k_1 + k_2} D^\alpha \varepsilon . \quad (3.11)$$

Usando a transformada de Laplace resulta:

$$\sigma_0 \frac{1}{s} + \frac{p \sigma_0}{k_1 + k_2} s^\alpha \frac{1}{s} = \frac{p k_1}{k_1 + k_2} s^\alpha \varepsilon(s) + \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} \varepsilon(s), \text{ ou}$$

$$\sigma_0 \left[\frac{1}{s} + \frac{p}{(k_1 + k_2) s^{1-\alpha}} \right] = \varepsilon(s) \left[\frac{p k_1}{k_1 + k_2} s^\alpha + \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} \right]$$

$$\sigma_0 \left[\frac{1}{s} + \frac{p}{(k_1 + k_2)s^{1-\alpha}} \right] = \varepsilon(s) \frac{pk_1}{(k_1 + k_2)} \left[s^\alpha + \frac{k_2}{p} \right]. \text{ Finalmente,}$$

$$\frac{\varepsilon(s)}{\sigma_0} = \frac{(k_1 + k_2)}{pk_1} \left[\frac{1}{s(s^\alpha + k_2/p)} \right] + \frac{1}{k_1} \left[\frac{s^{\alpha-1}}{(s^\alpha + k_2/p)} \right].$$

Tomando a transformada inversa de Laplace, a função creep (ver Fig. 3.14) será dada por

$$J(t) = \frac{1}{k_1} \left\{ 1 + \frac{k_1}{k_2} \left(1 - E_\alpha \left(-\frac{k_2}{p} t^\alpha \right) \right) \right\} \mu(t) \tag{3.12}$$

Desta expressão, pode-se verificar que $\lim_{t \rightarrow 0} J(t) = \frac{1}{k_1} \mu(t)$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} J(t) = \frac{k_1 + k_2}{k_1 k_2} = \frac{1}{k} \mu(t)$,

independente de α , onde $\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$. k é a constante de molas equivalente a k_1 e k_2 .

sendo $E_\alpha \left[\left(-\frac{k_2}{p} t^\alpha \right) \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{k_2}{p} \right)^n t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha + 1)}$ a função Mittag-Leffler (ver equação (3.2)) e

$$J(t) = \varepsilon(t) / \sigma_0.$$

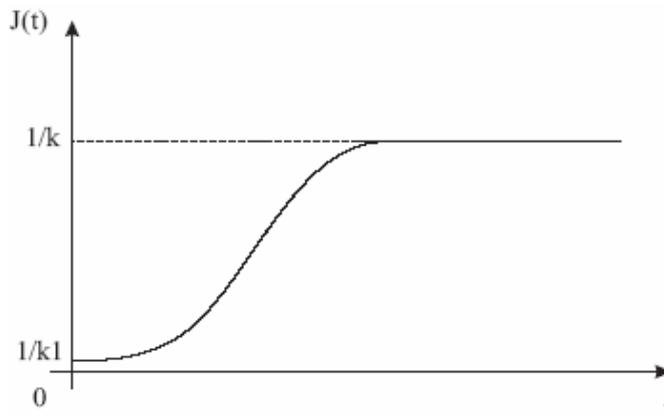


Figura 3.13 - Função creep para o modelo fracionário Linear Padrão

A Fig. 3.13 representa $J(t)$ para este modelo.

O cômputo de (3.12) é mostrado na Fig. 3.14, com o uso dos parâmetros da tabela 3.1 abaixo. Valores de p obtidos nas temperaturas de 20 C, 30 C e 40 C, respectivamente (Laboratório de Experimentos em Materiais Viscoelásticos PISA-LVA, Apêndice C).

Tabela 3.1 - Identificação dos parâmetros no domínio do tempo.

Parâmetros	Valores	Dimensão
k_1	$1,48 \times 10^6$	N/m^2
k_2	$5,51 \times 10^6$	N/m^2
P	$4,29 \times 10^5$	Ns^α/m
	$2,61 \times 10^5$	
	$1,84 \times 10^5$	

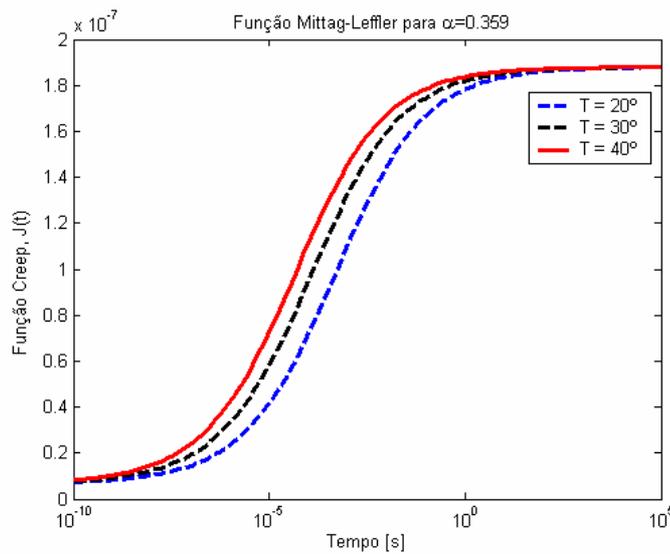


Figura. 3.14 - Função creep para o modelo fracionário Linear Padrão, com valores de p nas temperaturas 20 C, 30 C, 40 C

O modelo fracionário linear padrão mostra boa descrição qualitativa das curvas, para a função creep, geradas pela equação (3.12). Portanto, sua capacidade de avaliar o comportamento real do material é significativa.

Solução do modelo fracionário linear padrão para relaxação de tensão

Será considerado um deslocamento $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \mu(t)$, aplicado repentinamente em $t = 0$,

com a finalidade de se obter a função relaxação de tensão, que substituído na equação constitutiva (3.10), resulta em

$$\sigma + \frac{p}{k_1 + k_2} D^\alpha \sigma = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} \varepsilon_0 \mu(t) + \frac{k_1 p}{k_1 + k_2} D^\alpha \varepsilon_0 \mu(t) . \quad (3.13)$$

Usando o método da transformada de Laplace tem-se

$$\sigma(s) + \frac{p}{k_1 + k_2} s^\alpha \sigma(s) = \frac{\varepsilon_0 k_1 k_2}{k_1 + k_2} \frac{1}{s} + \frac{\varepsilon_0 k_1 p}{k_1 + k_2} s^\alpha \frac{1}{s}, \quad (3.13a)$$

$$\sigma(s) = \frac{\varepsilon_0 k_1 k_2}{p} \left[\frac{1}{s(s^\alpha + (k_1 + k_2)/p)} \right] + \varepsilon_0 k_1 \left[\frac{s^{\alpha-1}}{(s^\alpha + (k_1 + k_2)/p)} \right]$$

A função relaxação de tensão será obtida aplicando-se transformada inversa de Laplace na equação acima (ver Fig. 3.16).

$$G(t) = \frac{k_1^2}{k_1 + k_2} \left[E_\alpha \left(-\frac{k_1 + k_2}{p} t^\alpha \right) + \frac{k_2}{k_1} \right] \mu(t) \quad (3.14)$$

sendo

$$E_\alpha \left[\left(-\frac{k_1 + k_2}{p} t^\alpha \right) \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-(k_1 + k_2)/p \right)^n t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha + 1)} \text{ a função Mittag-Leffler (ver equação (3.2)) e}$$

$$G(t) = \sigma(t) / \varepsilon_0 .$$

Desta expressão conclui-se que $\lim_{t \rightarrow 0} G(t) = k_1$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} G(t) = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} = k$. Note-se que $k < k_1$.

Como pesquisa complementar, do modelo fracionário linear padrão (ou Zener), ver Schmidt *et alii*, (2001), Friedrich *et alii*, (1999) e Enelund *et alii*, (1998).

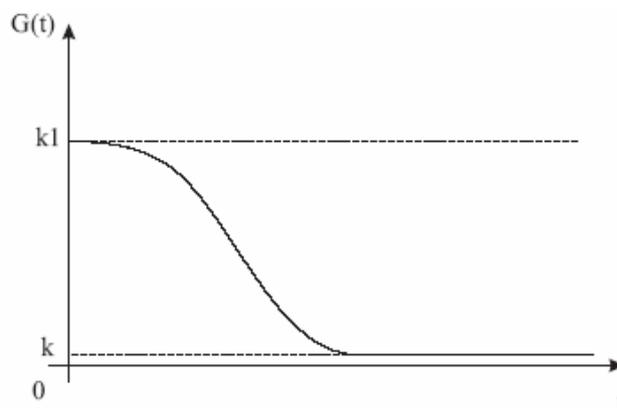


Figura 3.15 - Função relaxação de tensão para o modelo fracionário Linear Padrão

O aspecto geral de $G(t)$ para este modelo pode ser observado na Fig. 3.15.

A Fig. 3.16 é a representação gráfica da função relaxação de tensão para o modelo fracionário linear padrão, equação (3.14), com o uso dos parâmetros da tabela 3.1. Dados obtidos nas temperaturas de 20 C, 30 C e 40 C, respectivamente (ver Apêndice C).

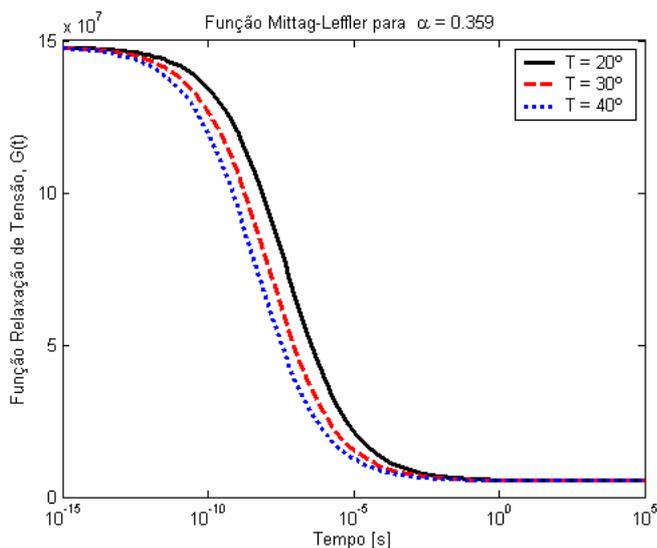


Figura. 3.16 - Função relaxação de tensão para o modelo fracionário Linear Padrão, com valores de p nas temperaturas 20 C, 30 C, 40 C

Nota-se que o “tempo” para aproximar o valor assintótico da função relaxação de tensão, à medida que $t \rightarrow \infty$ é fortemente dependente da ordem de diferenciação que está implícita no comportamento constitutivo. A variação da inclinação das curvas torna-se mais suave com o aumento do valor da temperatura.

Notas:

1. O número de termos das séries e, conseqüentemente as Fig. 3.6, 3.9, 3.14 e 3.16 geradas pelas equações (3.5), (3.7), (3.12) e (3.14), respectivamente, varia de acordo com o parâmetro p . Exemplo: O número de termos da série $E_\alpha \left[\left(-\frac{k_1 + k_2}{p} t^\alpha \right) \right]$ utilizados para gerar a Fig. 3.16 (equação (3.14)) para os valores de $p = [4,29; 2,61; 1,84] 10^5 \text{ (Ns}^\alpha / \text{m)}$ é de 87, 93 e 96 respectivamente.
2. O erro relativo residual (equação (3.14)) é de 0.036%, 0.052% e 0.085%, segundo a ordem dos valores de p utilizados no item 1.
3. Quanto ao critério de parada para a série exponencial (função Mittag-Leffler) ver Diethelm *et alii*, (2003), e Gorenflo *et alii*, (2002 e 2003). Ou seja, a tolerância do erro é igual à precisão de máquina.

Em geral, os modelos fracionários fazem um trabalho substancialmente melhor de capturar o comportamento real do material sobre uma larga faixa de frequência ou tempo. Identificações de parâmetros no domínio do tempo demonstram melhor a representação gráfica das curvas geradas pelas equações constitutivas fracionárias.

Pode-se observar que a função relaxação de tensão é monotônica decrescente, e a função creep é monotônica crescente.

A eficácia dos modelos de cálculo fracionários é dependente de sua habilidade para ajustar adequadamente os dados experimentais. Em nossos modelos mecânicos, as expressões creep e relaxação de tensão foram expressas em termos de equações constitutivas e função Mittag-Leffler. Essencialmente, para que a descrição qualitativa das curvas seja bem sucedida no domínio do tempo, requer-se simplesmente a habilidade de avaliar a função de Mittag-Leffler.

Embora o modelo fracionário linear padrão possua só um parâmetro adicional em relação aos modelos fracionários de Maxwell e de Kelvin, sua capacidade de representar o comportamento real do material é significativa.

No capítulo subsequente, será apresentado um estudo para o modelo fracionário linear padrão de quatro parâmetros, através de relações constitutivas hereditárias viscoelásticas. Via de regra, as funções creep e relaxação de tensão não têm que ser derivadas de modelos particulares de molas clássicas, generalizadas ou amortecedores viscosos. Então, pode-se obter estas funções através de dados experimentais ou de integrais hereditárias.

CAPÍTULO 4

RELAÇÕES CONSTITUTIVAS HEREDITÁRIAS VISCOELÁSTICAS

4.1 Derivação da relação constitutiva linear viscoelástica para relaxação de tensão

Suponha-se que em uma seção reta do elemento unidimensional da Fig. 4.1 (a) seja aplicada uma deformação relativa $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \mu(t)$. A resposta correspondente será $\sigma(t) = \varepsilon_0 G(t)$. Portanto, $G(t)$ representa a resposta a $\varepsilon(t)$, quando ε_0 for igual a um. $G(t)$ é uma característica do material.

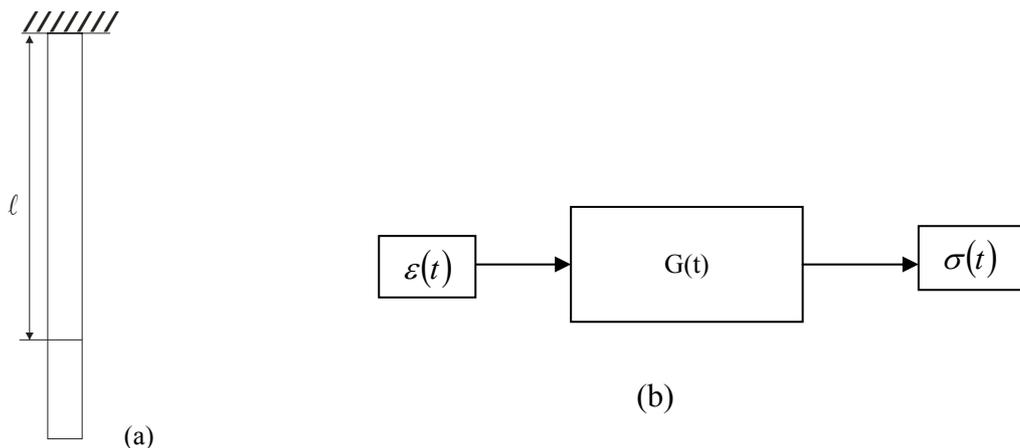


Figura 4.1- (a) Sistema de tensão deformação unidimensional; (b) Sistema físico com uma entrada e uma saída.

A dependência do tempo da função relaxação $G(t)$ descreve a memória do material para deformações passadas, figura 4.1 b, $\sigma(t)$ e $\varepsilon(t)$ são, respectivamente, tensão e deformação do sistema.

Pode-se, simbolicamente, escrever

$$L[\mu(t)] = G(t), \quad (4.1)$$

onde L é um operador linear que atuando na deformação unitária $\mu(t)$, reproduz $G(t)$. $G(t)$ é chamado módulo de relaxação. A resposta a uma função $\varepsilon(t)$ qualquer será apresentada a seguir.

Qualquer que seja $\varepsilon(t)$, esta função pode ser escrita assim:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon(-\infty) + \int_{-\infty}^t \dot{\varepsilon}(\tau) d\tau \quad \text{ou} \quad (4.2)$$

$$\varepsilon(t) = \varepsilon(-\infty) + \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{\varepsilon}(\tau) \mu(t-\tau) d\tau, \quad (4.3)$$

já que $\mu(t-\tau) = \begin{cases} 1, & \text{se } \tau \leq t \\ 0, & \tau > t \end{cases}$.

Chamando $L[\varepsilon(t)] = \sigma(t)$, tem-se $\sigma(t) = L[\varepsilon(-\infty)] + \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{\varepsilon}(\tau) L[\mu(t-\tau)] d\tau$.

Pela invariância de L , resulta em

$$\sigma(t) = \varepsilon(-\infty)H(0) + \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{\varepsilon}(\tau)G(t-\tau) d\tau. \quad (4.4)$$

Na expressão acima, fez-se $G(t-\tau) = L[\mu(t-\tau)]$, tendo como hipótese de que o sistema (material) é invariante.

A primeira parcela da equação (4.4), é obtida do fato de que a resposta a uma constante c é igual a $cH(0)$, onde $H(\Omega) = \mathcal{F}[h(t)]$ e $\mathcal{F}[h(t)]$ é a transformada de Fourier de $H(\Omega)$.

Na derivação acima, não se fez uso da causalidade do sistema (material), apenas de sua invariância. Portanto, este resultado é geral. A expressão (4.4) é válida mesmo que $\varepsilon(t)$ seja descontínua, desde que as descontinuidades sejam saltos.

Suponha-se que $\varepsilon(t) = 0$, para $t < 0$ e $\lim_{t \rightarrow 0^+} \varepsilon(t) = \varepsilon(0^+)$. Ou seja:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon(0^+) \mu(t) + \varepsilon_0(t), \quad (4.5)$$

onde $\varepsilon_0(t) = 0$, para $t < 0$. A derivada no tempo da história da deformação será:

$$\dot{\varepsilon}(t) = \varepsilon(0^+) \delta(t) + \dot{\varepsilon}_0(t), \tag{4.6}$$

lembrando que $\dot{\mu}(\tau) = \delta(\tau)$.

Substituindo-se a expressão (4.6) em (4.3), que pode ser avaliada explorando-se as propriedades da função degrau unitário e a função Delta de Dirac, obtém-se:

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} [\varepsilon_0 \delta(t) + \dot{\varepsilon}_0(t)] G(t-\tau) d\tau. \text{ Segue que}$$

$$\sigma(t) = \varepsilon(0^+) \int_{-\infty}^{+\infty} G(t-\tau) \delta(t) d\tau + \int_0^{\infty} \dot{\varepsilon}_0(\tau) G(t-\tau) d\tau, \text{ ou}$$

$$\sigma(t) = \varepsilon(0^+) G(t) + \int_0^t \dot{\varepsilon}(\tau) G(t-\tau) d\tau, \tag{4.7}$$

que é a relação constitutiva linear viscoelástica para relaxação de tensão.

Na expressão (4.7) o limite de integração foi feito igual a t, supondo-se a causalidade do sistema, isto é, que $G(t-\tau) = 0$, se $\tau > t$. Na mesma expressão o sub-índice zero em $\dot{\varepsilon}_0$ foi eliminado, por ser desnecessário (ver Espíndola, 2003; McTavish, 1988; Flugge, 1975).

Note que a primeira parcela de (4.7) é a resposta a $\varepsilon(0^+) \mu(t)$, como foi visto anteriormente.

A fórmula (4.5) pode ser interpretada à luz da Fig. 4.2

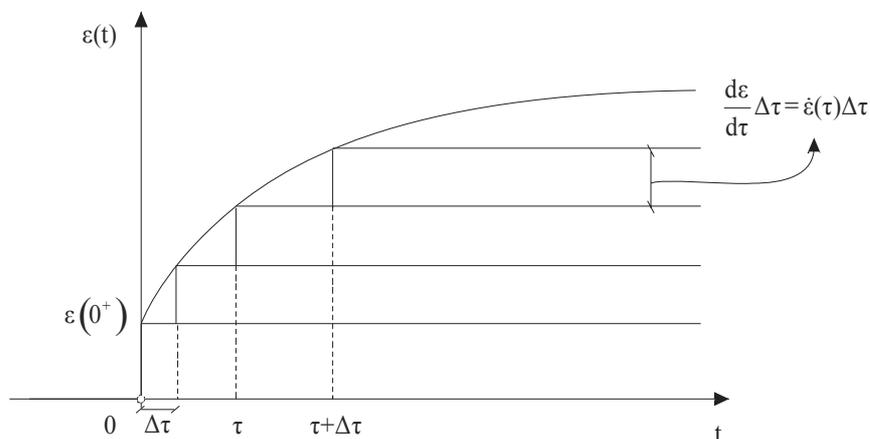


Figura 4.2 - Derivação da integral hereditária.

Considere-se uma função de entrada tal que $\varepsilon(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \varepsilon(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \varepsilon(t) \\ \text{contínua para } t > 0 \end{cases}$

Portanto, $\varepsilon(t)$ pode ser aproximada por uma seqüência das funções degrau do tipo $\dot{\varepsilon}(\tau)\Delta\tau\mu(t-\tau)$. Ou seja $L[\varepsilon(t)] = \varepsilon(0^+)L[\mu(t)] + \lim_{\Delta\varepsilon \rightarrow 0} \sum \dot{\varepsilon}(\tau)\Delta\tau L[\mu(t-\tau)]$ como a resposta ao degrau unitário $\mu(t)$ é $G(t)$, tem-se $\sigma(t) = \varepsilon(0^+)G(t) + \lim_{\Delta\varepsilon \rightarrow 0} \sum \dot{\varepsilon}(\tau)\Delta\tau G(t-\tau)$, supondo o sistema invariante. Ou ainda,

$$\sigma(t) = \varepsilon(0^+)G(t) + \int_{0^+}^t \dot{\varepsilon}(\tau)G(t-\tau)d\tau, \tag{4.8}$$

resultando na relação constitutiva linear viscoelástica para relaxação de tensão, através da integral de Duhamel.

Note-se que a relação constitutiva linear viscoelástica (4.8) é equivalente à (4.7), que se refere a relaxação de tensão.

4.2 Separação do módulo de equilíbrio

O módulo de relaxação pode ser escrito como a soma de uma constante e uma parte dependente do tempo,

$$G(t) = G_0\mu(t) + H(t). \tag{4.9}$$

A constante $G_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} G(t)$ é referida como o módulo de equilíbrio elástico. Para um sólido, G_0 é diferente de zero e para líquido G_0 é zero.

A expressão (4.9) substituída na relação constitutiva (4.8) produz

$$\sigma(t) = [G_0\mu(t) + H(t)]\varepsilon(0) + \int_0^t [G_0\mu(t-\tau) + H(t-\tau)] \frac{d}{d\tau} \varepsilon(\tau) d\tau, \text{ que se reduz a}$$

$$\sigma(t) = G_0\varepsilon(t) + \varepsilon(0)H(t) + \int_0^t H(t-\tau) \frac{d}{d\tau} \varepsilon(\tau) d\tau \tag{4.10}$$

Para um material verdadeiramente elástico $H(t) = 0$, para $t \geq 0$, resultando em

$$\sigma(t) = G_0 \varepsilon(t), \tag{4.11}$$

que é a clássica lei de Hooke.

4.3 A transformada de Laplace da relação constitutiva

Aplicando-se a transformada de Laplace na relação constitutiva (4.8) produz-se $\sigma(s) = G(s)\varepsilon(0) + sG(s)\varepsilon(s) - G(s)\varepsilon(0)$ (Espíndola, 2003; McTavish, 1988). Logo:

$$\sigma(s) = sG(s)\varepsilon(s), \tag{4.12}$$

vê-se, por esta expressão, que

$$G_e(s) = sG(s), \tag{4.13}$$

onde $G_e(s)$ é o módulo de elasticidade do material, expresso no domínio de Laplace.

Se na forma (4.9) é aplicada a transformada de Laplace, tem-se

$$G(s) = G_0 \frac{1}{s} + H(s). \tag{4.14}$$

Substituindo (4.14) em (4.12) obtém-se

$$\sigma(s) = [G_0 + sH(s)]\varepsilon(s). \tag{4.15}$$

De (4.15) pode-se escrever:

$$G_e(s) = G_0 + sH(s), \tag{4.16}$$

esta última expressão mostra que

$$G_e(t) = G_0 \delta(t) + \dot{H}(t). \tag{4.17}$$

Onde $\dot{H}(t) = \frac{d}{dt} H(t)$.

Da mesma forma, de (4.13) tira-se

$$G_e(t) = \dot{G}(t). \tag{4.18}$$

Portanto, o módulo de elasticidade, no domínio do tempo é a derivada da função de relaxação.

Tome-se agora a expressão imediatamente posterior à (3.13a) referente ao módulo linear generalizado. Escrevendo $G(s) = \sigma(s) / \epsilon_0$, aquela expressão pode ser colocada na forma

$$sG(s) = \frac{\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} + \frac{k_1 p}{k_1 + k_2} s^\alpha}{1 + \frac{p}{k_1 + k_2} s^\alpha}, \tag{4.19}$$

Ou

$$G_e(s) = \frac{G_0 + G_1 s^\alpha}{1 + b_1 s^\alpha}, \tag{4.20}$$

onde

$$G_0 = \frac{k_1 k_2}{(k_1 + k_2)}; \quad G_1 = \frac{k_1 p}{k_1 + k_2} \quad \text{e} \quad b_1 = \frac{p}{k_1 + k_2}.$$

É possível ainda escrever:

$$G_e(s) = \frac{G_0 + (bs)^\alpha G_\infty}{1 + (bs)^\alpha}, \tag{4.21}$$

onde $b = b_1^{\frac{1}{\alpha}}$ e $G_\infty = \frac{G_1}{b_1}$.

Note-se que $b = \left(\frac{p}{k_1 + k_2} \right)^{\frac{1}{\alpha}}$ para este modelo, b é o chamado tempo de relaxamento.

A expressão (4.21) é importante na literatura técnica (Bagley e Torvik, 1979, 1986; Padovan e Guo, 1988; Pritz, 1998) e tem sido usada na identificação dos parâmetros fracionários G_0 , G_∞ , b e α (Espindola *et alii*, 2003, 2005).

Note-se que b é proporcional à potência $1/\alpha$ de p. G_0 e G_∞ , neste modelo, não dependem de p.

A expressão (4.12) mostra que $G_c(s) = sG(s)$ é uma função de transferência, ligando $\varepsilon(s)$ como entrada, no domínio de Laplace, a $\sigma(s)$ como saída. Portanto, é legítimo substituir s por $i\Omega$ para obter-se a resposta em frequência correspondente:

$$\sigma(\Omega) = i\Omega G(\Omega) \varepsilon(\Omega) \tag{4.22}$$

onde

$$G_c(\Omega) = i\Omega G(\Omega) \tag{4.23}$$

É o chamado módulo complexo de elasticidade. Pela Eq. (4.21), tem-se:

$$G_c(\Omega) = \frac{G_0 + (ib\Omega)^\alpha G_\infty}{1 + (ib\Omega)^\alpha} \tag{4.24}$$

Que é a expressão usada em dinâmica de estática sobre materiais viscoelásticos.

Observação: Resumido o que se viu, linhas atrás, tem-se $G_0 = k_1 k_2 / (k_1 + k_2)$,

$$G_\infty = k_1, \quad b = \left(\frac{p}{k_1 + k_2} \right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

Em laboratório, os parâmetros a se medir são G_0 , G_∞ , b e α (Espindola *et alii*, 2005). Conhecendo-se essas grandezas, k_1 , k_2 e p podem ser computados. De fato, $k_1 = G_\infty$,

$$k_2 = \frac{G_0}{1 - G_0 / G_\infty} \quad \text{e} \quad p = 10^x, \quad \text{onde} \quad x = \log b^\alpha \frac{G_\infty}{1 - G_0 / G_\infty} \approx \log b^\alpha G_\infty.$$

α , evidentemente é o mesmo medido, ou seja, a ordem da derivação.

Essas considerações foram usadas nos cálculos de k_1 , k_2 e p , nos exemplos anteriores.

4.4 Equações constitutivas diferenciais de materiais viscoelásticos

Outra abordagem das equações constitutivas de materiais viscoelásticos, baseada em modelos a derivadas inteiras e derivadas fracionárias, da equação diferencial linear, será apresentada a seguir. Pretende-se, com isto, tornar mais geral os modelos até aqui abordados.

4.4.1 Modelo de derivadas inteiras

A equação constitutiva unidimensional para o modelo viscoelástico linear padrão é dada pela equação diferencial (Jones, 1980; Nashif *et alii*, 1985; Espindola *et alii*, 2003):

$$\sigma(t) + \sum_{m=1}^M b_m \frac{d^m \sigma(t)}{dt^m} = E_0 \varepsilon(t) + \sum_{n=1}^N E_n \frac{d^n \varepsilon(t)}{dt^n}, \tag{4.25}$$

onde b_m , $m = 1, M$, E_0 e E_n , $n = 1, N$ são constantes, ou parâmetros do material, $\sigma(t)$ e $\varepsilon(t)$ são, respectivamente, tensão e deformação. Aplicando a transformada de Laplace em ambos os lados da equação (4.25) tem-se

$$\sigma(s) \left[1 + \sum_{m=1}^M (s)^m b_m \right] = \varepsilon(s) \left[E_0 + \sum_{n=1}^N E_n (s)^n \right], \tag{4.26}$$

sabe-se que: $\varepsilon(s) = \mathcal{L}[\varepsilon(t)]$ e $\sigma(s) = \mathcal{L}[\sigma(t)]$. O módulo de Young será

$$E_e(s) = \frac{\sigma(s)}{\varepsilon(s)} = \frac{E_0 + \sum_{n=1}^N E_n (s)^n}{1 + \sum_{m=1}^M (s)^m b_m}. \tag{4.27}$$

O segundo membro da equação (4.27) é uma função complexa na variável s de Laplace e pode-se escrever

$$E_e(s) = E(s) + iE'(s). \tag{4.28}$$

Nesta expressão tem-se: $E_e(s)$ é o módulo complexo de Young, $E(s)$ é a parte real do módulo complexo de elasticidade e representa o comportamento elástico do material e $E'(s)$ é a parte imaginária e representa o comportamento viscoso do material, que está associado à dissipação de energia mecânica interna do material.

A expressão (4.28) pode ser colocada na forma

$$E_e(s) = E(s)(1 + i\eta(s)) \tag{4.29}$$

onde $\eta(s) = \frac{E'(s)}{E(s)}$ é o fator de perda do material.

4.4.2 Modelo de Derivadas Fracionárias

A equação constitutiva unidimensional de derivadas fracionárias é (Jones, 1980; Bagley e Torvik, 1983; Nashif *et alii*, 1985; Espíndola *et alii*, 2003, 2005).

$$\sigma(t) + \sum_{m=1}^M b_m D^{\beta_m} [\sigma(t)] = E_0 \varepsilon(t) + \sum_{n=1}^N E_n D^{\alpha_n} [\varepsilon(t)], \quad (4.30)$$

onde b_m , E_0 , E_m , β_m e α_n são parâmetros do material.

A equação (4.30) nada mais é do que a extensão da equação (3.9) referente ao módulo linear padrão.

A derivada fracionária é definida (Ross, 1974) pela expressão

$$D^\alpha [x(t)] = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \cdot \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{x(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau, \quad 0 < \alpha < 1 \quad (4.31)$$

onde $D^\alpha [x(t)]$ é a derivada de $x(t)$ de ordem α e Γ é a função gama.

Na prática, o modelo fracionário na forma (4.30) representa o comportamento dinâmico de materiais viscoelásticos sendo suficiente tomar $M = N = 1$. Assim procedendo, a equação (4.30) torna-se:

$$\sigma(t) + b_1 D^\beta [\sigma(t)] = E_0 \varepsilon(t) + E_1 D^\alpha [\varepsilon(t)]. \quad (4.32)$$

O material fica caracterizado por cinco parâmetros: b_1 , β , E_0 , E_1 e α . Note-se que, se for considerado $\alpha = \beta$, a equação (3.9) será reproduzida.

Aplicando a transformada de Laplace em ambos os membros da equação (4.32) resulta

$$\left[1 + b_1(s)^\beta \right] \sigma(s) = \left[E_0 + E_1(s)^\alpha \right] \varepsilon(s) \text{ ou}$$

$$E_e(s) = \frac{\sigma(s)}{\varepsilon(s)} = \frac{E_0 + E_1(s)^\beta}{1 + b_1(s)^\alpha} \quad (4.33)$$

onde $\sigma(s) = E_e(s) \varepsilon(s)$.

Este é o modelo ideal para materiais viscoelásticos.

Note-se que em todas as expressões acima o E pode ser trocado por G, o módulo de cisalhamento.

Portanto de (4.33) trocando E por G tem-se

$$G_e(s) = \frac{G_0 + G_1 s^\beta}{1 + b_1 s^\alpha} \quad (4.34)$$

Se $\alpha = \beta$ resulta em

$$G_e(s) = \frac{G_0 + G_1 s^\alpha}{1 + b_1 s^\alpha} \quad (4.35)$$

A equação (4.35) é equivalente equação (4.20) que se refere ao modelo linear padrão.

4.5 Dedução de G(t) por divisão longa

As equações constitutivas viscoelásticas para o modelo linear padrão foram deduzidas no capítulo 2 item 2.2 para derivada de ordem inteira e no capítulo 3 item 3.3 para derivada de ordem fracionária.

A seguir obtém-se a dedução da função relaxação de tensão por divisão longa. Partindo das equações (4.13) e (4.35) pode-se escrever:

$$G_e = sG(s) = \frac{G_0 + G_1 s^\alpha}{1 + b_1 s^\alpha} \quad (4.36)$$

A transformada inversa de Laplace da Eq.(4.36) será obtida através da divisão longa. Efetuando-se a primeira divisão tem-se:

$$sG(s) = G_0 + (G_1 - G_0 b_1) \left(\frac{s^\alpha}{1 + b_1 s^\alpha} \right)$$

A partir da fração $\left(\frac{s^\alpha}{1+b_1s^\alpha}\right)$ efetua-se a segunda divisão, com a troca de posição das parcelas do denominador. Fazendo uso da expressão $\frac{1}{s^\alpha} = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right]$ para $\alpha > 0$. Γ é a função gama. Pode-se então, construir uma série de potências (Hartley *et alii*, 1998).

$$\left(\frac{s^\alpha}{b_1s^\alpha + 1}\right) = \left(\frac{1}{b_1} - \frac{1}{b_1^2s^\alpha} + \frac{1}{b_1^3s^{2\alpha}} - \frac{1}{b_1^4s^{3\alpha}} + \frac{1}{b_1^5s^{4\alpha}} - \dots\right).$$

Com o resultado da primeira e da segunda divisão longa tem-se:

$$G(s) = \frac{G_0}{s} + \left[(G_1 - b_1G_0)\left(\frac{1}{b_1s} - \frac{1}{b_1^2s^{1+\alpha}} + \frac{1}{b_1^3s^{1+2\alpha}} - \frac{1}{b_1^4s^{1+3\alpha}} + \frac{1}{b_1^5s^{1+4\alpha}} - \dots\right)\right].$$

Ordenando-se a expressão resulta em:

$$G(s) = \frac{G_0}{s} + \left[\left(\frac{G_1 - b_1G_0}{b_1}\right)\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{b_1s^{1+\alpha}} + \frac{1}{b_1^2s^{1+2\alpha}} - \frac{1}{b_1^3s^{1+3\alpha}} + \frac{1}{b_1^4s^{1+4\alpha}} - \dots\right)\right].$$

Organizando a série de potência em forma de um somatório obtém-se:

$$G(s) = \frac{G_0}{s} + \frac{G_1 - b_1G_0}{b_1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n b_1^{-n}}{s^{1+n\alpha}}$$

e aplicando a transformada inversa de Laplace

$$\mathcal{L}^{-1}G(s) = G_0 \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + \frac{G_1 - b_1G_0}{b_1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_1^{-n} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^{1+n\alpha}}\right\}, \text{ onde } \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^x}\right\} = \frac{t^{x-1}}{\Gamma(x)}.$$

Assim:

$$G(t) = G_0\mu(t) + \frac{G_1 - b_1G_0}{b_1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_1^{-n} \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(1+n\alpha)}. \tag{4.37}$$

Caso a expressão (4.21) tivesse sido usada, o resultado seria

$$G(t) = G_0\mu(t) + (G_\infty - G_0) \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{(t/b)^{j\alpha}}{\Gamma(1+j\alpha)}. \tag{4.38}$$

Por definição, a expressão

$$E_\alpha(x) \triangleq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{\Gamma(1+j\alpha)} \tag{4.39}$$

é a exponencial generalizada, ou a função Mittag-Leffler. Portanto, as expressões (4.37) e (4.38) podem ser escritas:

$$G(t) = G_0 \mu(t) + \left(\frac{G_1 - b_1 G_0}{b_1} \right) E_\alpha \left(-\frac{t^\alpha}{b_1} \right) \tag{4.40}$$

ou

$$G(t) = G_0 \mu(t) + (G_\infty - G_0) E_\alpha \left[(-t/b)^\alpha \right]. \tag{4.41}$$

Portanto, o módulo de relaxação pode ser escrito em função de uma exponencial generalizada, ou função de Mittag-Leffler. É conveniente comparar (4.41) com (3.14), para ver que eles são equivalentes, desde que se considere $G_0 = \frac{k_1 k_2}{(k_1 + k_2)}$; $G_\infty = k_1$ e $b = \frac{p}{k_1 + k_2}$.

Os valores limites da função relaxação de tensão para $t \rightarrow 0^+$ e $t \rightarrow +\infty$ são relacionados aos comportamentos instantâneo e de equilíbrio do corpo viscoelástico, respectivamente. Os limites podem ser determinados com a aplicação do teorema do valor inicial e teorema do valor final em (4.36) para a representação no domínio de Laplace tem-se:

- $\lim_{s \rightarrow \infty} s G(s) = G_1 / b_1$ e por conseqüência $\lim_{t \rightarrow 0} G(t) = G_1 / b_1$,
- se $\lim_{s \rightarrow 0} s G(s) = G_0$ e por conseqüência $\lim_{t \rightarrow \infty} G(t) = G_0$.

Isso implica que $\lim_{t \rightarrow \infty} E_\alpha(-t^\alpha / b_1) = 0$ e $\lim_{t \rightarrow 0} E_\alpha(-t^\alpha / b_1) = 1$.

Com relação à expressão (4.41), tem-se: $\lim_{t \rightarrow \infty} G(t) = G_0$ e $\lim_{t \rightarrow 0} G(t) = G_\infty$.

A função $E_\alpha(-t^\alpha / b_1)$ ou $E_\alpha[(-t/b)^\alpha]$ é de difícil computação numérica quando b_1 ou b são menores do que 1. A computação de $E_\alpha(-u t^\alpha)$, quando $|u| < 1$ é trivial. Para que a descrição qualitativa das curvas seja bem sucedida no domínio do tempo, requer-se a habilidade para avaliar a função Mittag-Leffler. Muito se tem publicado sobre o cômputo

numérico de $E_\alpha(-ut^\alpha)$, para qualquer u . Este assunto é abordado no Apêndice B (ver também Diethelm *et alii*, 2003; Gorenflo *et alii*, 2002, 2003).

O gráfico da função relaxação de tensão (equação 4.40) será obtido com os parâmetros da tabela abaixo e o tempo é em segundos, Espíndola (2003).

Tabela 4.1- Identificação dos parâmetros no domínio do tempo.

Parâmetros	Valores	Dimensão
G_0	$1,53 \times 10^6$	N/m^2
G_1	$1,11 \times 10^8$	$(N/m^2)s^\alpha$
b_1	$1,34 \times 10^{-2}$	s^α

Esses são valores de um particular elastômero medido no laboratório PISA-LVA.

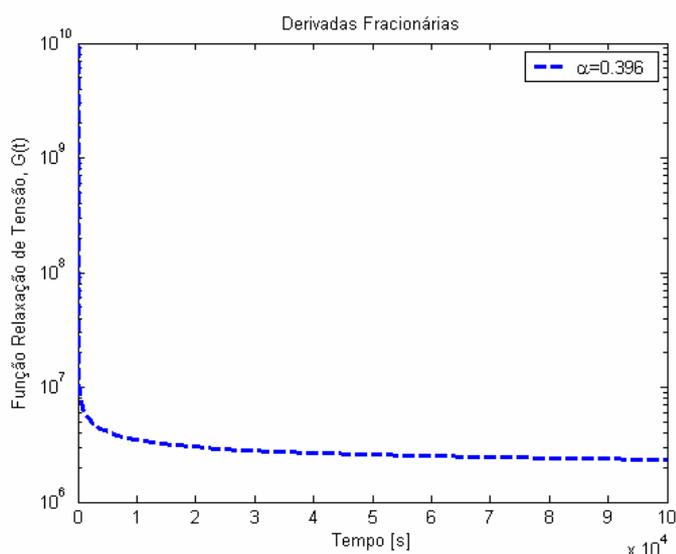


Figura 4.3 - Função relaxação de tensão para o modelo fracionário Linear Padrão

Pode-se observar que a função relaxação de tensão é monotônica decrescente, tendendo para G_0 à medida que o tempo tende para o infinito. O gráfico da função relaxação de tensão, equação (4.40), apresenta boa descrição qualitativa da curva no domínio do tempo através função de Mittag-Leffler.

4.6 Dedução de $J(t)$ por divisão longa

A relação constitutiva para um material viscoelástico foi escrita na forma da rigidez usando a função relaxação de tensão. Agora, de maneira análoga, uma representação da flexibilidade é dada, visando à dedução da relação constitutiva linear viscoelástica para a função creep (Espíndola, 2003; Mc Tavish, 1988; Flugge, 1975).

A dependência do tempo da função creep $J(t)$ descreve a memória do material para tensões passadas (Fig. 4.4).

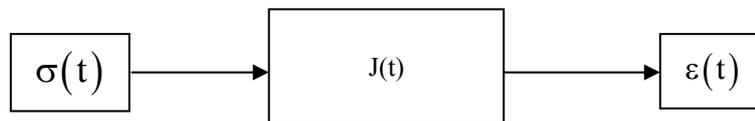


Figura 4.4 - Sistema físico com uma entrada e uma saída

Um raciocínio análogo àquele exposto no item 4.1 pode demonstrar que

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^t J(t - \tau) \frac{d}{d\tau} \sigma(\tau) d\tau, \tag{4.42}$$

$J(t)$ é a função material creep continua em $t \in [0, \infty)$ e identicamente nula para $t < 0$.

Explorando as propriedades das funções Delta de Dirac e degrau unitário pode-se escrever

$$\varepsilon(t) = J(t)\sigma(0) + \int_{-\infty}^t J(t - \tau) \frac{d}{d\tau} \sigma(\tau) d\tau. \tag{4.43}$$

A sua transformada de Laplace é

$$\varepsilon(s) = sJ(s)\sigma(s). \tag{4.44}$$

Com a combinação das relações (4.12) e (4.44) obtém-se

$$J(s)G(s) = \frac{1}{s^2}. \tag{4.45}$$

Aplicando a transformada inversa de Laplace na equação (4.45) resulta em

$$J(t) * G(t) = t\mu(t). \tag{4.46}$$

Onde o símbolo * significa a convolução de J(t) com G(t).

A compliância de equilíbrio J_0 é definida por $J_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} J(t)$ e usando o teorema do valor final para a representação no domínio de Laplace tem-se:

$$J_0 = \lim_{s \rightarrow 0} sJ(s) \rightarrow J_0 = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{sG(s)} \rightarrow J_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{G(t)}. \text{ Então } J_0 = \frac{1}{G_0}.$$

A relação recíproca existe entre os valores iniciais de G_0 e J_0 das funções de relaxação de tensão e creep. Sendo J_0 compliance equilíbrio e G_0 valor do equilíbrio do módulo.

O modelo fracionário para função creep pode ser deduzido a partir das equações (4.12) (4.35) e (4.45), então:

$$sJ(s) = \frac{1}{sG(s)} = \frac{1 + b_1 s^\alpha}{G_0 + G_1 s^\alpha}. \tag{4.47}$$

Faz-se uso do processo de divisão longa para obter a transformada inversa de Laplace (Eq. (4.47)). Efetuando-se a primeira divisão na Eq.(4.47), tem-se:

$$sJ(s) = \frac{1}{G_0} - \left(\frac{1}{G_0} - \frac{b_1}{G_1} \right) \left(\frac{G_1 s^\alpha}{G_0 + G_1 s^\alpha} \right).$$

A segunda divisão será efetuada no termo $\left(\frac{G_1 s^\alpha}{G_1 s^\alpha + G_0} \right)$, com a troca de posição das parcelas no divisor, resultando em uma série de potências, com o uso da expressão

$$\frac{1}{s^\alpha} = \mathcal{L} \left[\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right] \text{ para } \alpha > 0. \Gamma \text{ é a função gama (Hartley et alii, 1998).}$$

$$\left(\frac{G_1 s^\alpha}{G_1 s^\alpha + G_0} \right) = \left[1 - \left(\frac{G_0}{G_1} \right) \frac{1}{s^\alpha} + \left(\frac{G_0}{G_1} \right)^2 \frac{1}{s^{2\alpha}} - \left(\frac{G_0}{G_1} \right)^3 \frac{1}{s^{3\alpha}} + \left(\frac{G_0}{G_1} \right)^4 \frac{1}{s^{4\alpha}} - \dots \right].$$

Adicionando-se os resultados da primeira e da segunda divisão tem-se:

$$sJ(s) = \frac{1}{G^0} - \left(\frac{1}{G_0} - \frac{b_1}{G_1} \right) \left[1 - \left(\frac{G_0}{G_1} \right) \frac{1}{s^\alpha} + \left(\frac{G_0}{G_1} \right)^2 \frac{1}{s^{2\alpha}} - \left(\frac{G_0}{G_1} \right)^3 \frac{1}{s^{3\alpha}} + \left(\frac{G_0}{G_1} \right)^4 \frac{1}{s^{4\alpha}} - \dots \right].$$

A expressão acima resulta em:

$$J(s) = \frac{1}{sG^0} - \left(\frac{1}{G_0} - \frac{b_1}{G_1} \right) \left[\frac{1}{s} - \left(\frac{G_0}{G_1} \right) \frac{1}{s^{1+\alpha}} + \left(\frac{G_0}{G_1} \right)^2 \frac{1}{s^{1+2\alpha}} - \left(\frac{G_0}{G_1} \right)^3 \frac{1}{s^{1+3\alpha}} + \left(\frac{G_0}{G_1} \right)^4 \frac{1}{s^{1+4\alpha}} - \dots \right].$$

Coletando-se, então, os dados em forma de um somatório obtêm-se

$$J(s) = \frac{1}{sG_0} - \left(\frac{1}{G_0} - \frac{b_1}{G_1} \right) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{G_0}{G_1} \right)^n \frac{1}{s^{1+n\alpha}}, \text{ e aplicando-se a transformada inversa de}$$

Laplace na equação diferencial fracionária tem-se:

$$\mathfrak{L}^{-1} \{ J(s) \} = \frac{1}{G_0} \mathfrak{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \right\} - \left(\frac{1}{G_0} - \frac{b_1}{G_1} \right) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{G_0}{G_1} \right)^n \mathfrak{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^{1+n\alpha}} \right\}, \text{ resultando em}$$

$$J(t) = \frac{1}{G_0} \mu(t) - \left(\frac{1}{G_0} - \frac{b_1}{G_1} \right) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{G_0}{G_1} \right)^n \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(1+n\alpha)}.$$

Ou, ainda:

$$J(t) = \frac{1}{G_0} \mu(t) - \left(\frac{1}{G_0} - \frac{b_1}{G_1} \right) E_\alpha \left(-\frac{G_0}{G_1} t^\alpha \right), \tag{4.48}$$

onde $J(t)$ é a função creep (ver figura (4.5)) e $E_\alpha \left(-\frac{G_0}{G_1} t^\alpha \right)$ é uma função Mittag-Leffler.

O cômputo da função $E_\alpha \left(-\frac{G_0}{G_1} t^\alpha \right)$ é bastante simples e robusto, já que $\frac{G_0}{G_1} < 1$. Já o

cômputo direto de $E_\alpha \left(-\frac{t^\alpha}{b_1} \right)$ encontra imensas dificuldades numéricas, visto que $\frac{1}{b_1} \gg 1$.

Inúmeros trabalhos têm sido desenvolvidos para o cômputo numérico de $E_\alpha(x)$, em todos os casos. O mais recente, mas aparentemente não definitivo, é o de Diethelm *et alii*, (2003), onde um algoritmo é proposto (Apêndice B).

Rafael A. de Espíndola elaborou um programa em C++ baseado no pseudo-código ali descrito. Entretanto, o próprio Rafael A. de Espíndola, 2005, adiantou possíveis dificuldades numéricas. Ou seja, para determinados valores dos parâmetros, em situações particulares, não se obtém $G(t)$ com o algoritmo proposto. Parece, então, que o problema do cômputo de $E_\alpha(x)$ ainda não é uma questão fechada e que um algoritmo robusto que se adapte a quaisquer circunstâncias ainda está por ser escrito.

Esta é a razão de se propor, neste trabalho, o cômputo numérico de $G(t)$ pelos métodos da inversão aproximada da transformada de Laplace e por deconvolução das Eq. (4.36) e (4.46), respectivamente.

A Fig. 4.5 foi computada diretamente da série (4.48) sem recorrência ao programa acima citado. Já a curva 4.3, bem como as curvas 3.6 e 3.16 foram computadas usando-se a sub-rotina acima referida.

Os valores limites da função creep para $t \rightarrow 0^+$ e $t \rightarrow +\infty$ podem ser determinados com a aplicação do teorema do valor inicial, e do teorema do valor final em (4.47) para a representação no domínio de Laplace tem-se:

- Se $\lim_{t \rightarrow \infty} J(t) = J_0 = \frac{1}{G_0}$, por conseqüência tem-se que $\lim_{t \rightarrow \infty} E_\alpha \left(-\frac{G_0}{G_1} t^\alpha \right) = 0$.
- Sabe-se que $\lim_{t \rightarrow 0} J(t) = \frac{b_1}{G_1}$; então conclui-se que $\lim_{t \rightarrow 0} E_\alpha \left(-\frac{G_0}{G_1} t^\alpha \right) = 1$

A figura 4.5 foi gerada com os parâmetros da tabela 4.1, página 56

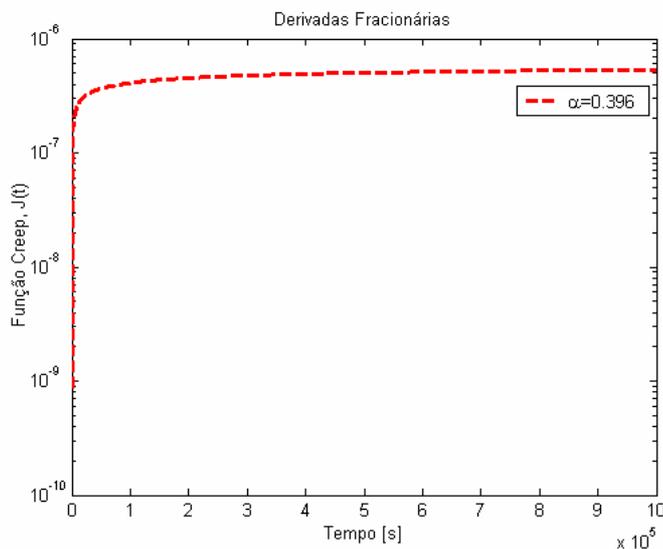


Figura 4.5 - Função creep para o modelo fracionário Linear Padrão

A função creep é monotônica crescente, isto é, tende para um valor constante ($1/G_0$) à medida que o tempo tende para o infinito. A simulação numérica da função creep fará parte do processo de deconvolução, no próximo capítulo.

No Apêndice B, apresenta-se um estudo da função Mittag-Leffler, com indicação de algoritmo para o cômputo numérico da referida função.

CAPÍTULO 5

OBTENÇÃO APROXIMADA DA FUNÇÃO RELAXAÇÃO DE TENSÃO

5.1 Introdução

Este capítulo apresenta o resultado da simulação numérica do método de inversão aproximada da transformada de Laplace, baseado no paper de Brancik, 2001, e no método da deconvolução, pois os mesmos serão utilizados no cálculo numérico da função relaxação de tensão.

De acordo com a revisão bibliográfica apresentada no capítulo 1, observam-se os modelos mecânicos em materiais viscoelásticos, unidimensionais para tensão deformação, lineares, no domínio do tempo, com derivadas inteiras e fracionárias.

Sabe-se que a função relaxação de tensão é uma função extremamente difícil de ser computada (o mesmo não ocorre com a função creep). O grau de dificuldade da computação numérica da função relaxação de tensão é proveniente da função exponencial generalizada ou função Mittag-Leffler (Eq (4.39)), pois a mesma depende, basicamente, dos valores numéricos dos parâmetros fracionários. O propósito deste trabalho é complementar a lacuna existente nos atuais procedimentos no cômputo dessa função.

Será usado o modelo mecânico padrão de derivadas fracionárias, com quatro parâmetros em material viscoelástico, deduzido no capítulo 4.

Este trabalho será desenvolvido da seguinte forma:

- 1) Obter a função relaxação de tensão, $G(t)$, pelo método da inversão aproximada da transformada de Laplace, a partir da função $G(s)$ (Eq (4.36)).
- 2) Obter a função relaxação de tensão, $G(t)$, pelo método de deconvolução. Conhecida a função $J(t)$ (Eq (4.48)), obtida pelo método da inversão exata (Mittag-Leffler), pode-se, então, deconvoluir (4.46) com o objetivo de determinar $G(t)$, em materiais viscoelásticos.

Espera-se obter boa precisão numérica, estabilidade e convergência da função relaxação de tensão com menos esforço computacional. Para isto, deve-se estabelecer uma comparação entre os processos que serão aplicados para obtenção da função relaxação de

tensão: método da deconvolução aplicada à função creep pela inversão exata (Mittag-Leffler) e método da inversão aproximada da transformada de Laplace, em materiais viscoelásticos.

5.2 Inversão aproximada da transformada de Laplace

A transformada de Laplace é uma poderosa ferramenta para resolver equações diferenciais ordinárias, parciais e lineares. Possui aplicabilidade em várias áreas, incluindo o fenômeno de relaxação. Tem um papel importante em automação e teoria de controle de vibrações (Milovanovic *et alii*, 2005).

Muitos problemas de Matemática podem ser transformados em problemas algébricos, usando a transformada de Laplace. Para obter a solução procurada é suficiente inverter a transformada de Laplace. Porém, a inversão exata é normalmente difícil de ser realizada; assim, técnicas de inversão aproximada são usadas, pois são mais simples para implementar.

Além disso, quando os problemas algébricos obtidos têm graus elevados, a função que precisamos inverter é uma aproximação. Assim sendo, se a inversa não puder ser calculada facilmente, não faz muito sentido calcular uma inversa exata de uma solução aproximada. Calcula-se, neste caso, uma solução numérica da transformada inversa procurada.

Funções de natureza periódica, em formas de pontos, e que contenham singularidades na transformada de Laplace, são normalmente difíceis de tratar. Com estas limitações em mente, o usuário deverá ter uma idéia do comportamento da função para poder escolher o método apropriado.

Quando houver dúvida no resultado obtido, múltiplos algoritmos devem ser usados e seus resultados comparados (Christensen, 1982; Brancik, 1998, 1999, 1999, 2001; Cheng *et alii*, 1994).

Tipicamente, usa-se o método de Fourier para inversão aproximada da transformada de Laplace. Para uma revisão completa, ver Abate e Whitt (1992, 1995). O método de Fourier via FFT permite obter com eficiência a função original em pontos discretos sobre todo o intervalo desejado. Pode-se ainda, obter resultados precisos para os pontos de descontinuidade na derivada, potencialmente problemáticos (Shortle *et alii*, 2003).

Vários métodos foram desenvolvidos para o cálculo numérico da inversão aproximada da transformada de Laplace. É conveniente, que o método escolhido forneça tanto velocidade no processamento dos dados quanto uma precisão nos resultados obtidos. O método desenvolvido por Brancik (2001) refere-se ao que foi dito acima.

Brancik (2001) mostra que a inversão numérica da transformada de Laplace pode ser baseada na aplicação do algoritmo da transformada rápida de Fourier (FFT). O algoritmo pode assegurar a alta velocidade de computação, mas não garante uma precisão adequada devido ao número limitado de termos que são considerados na prática, quando uma série complexa de Fourier é avaliada.

Para assegurar uma precisão adequada é utilizado o algoritmo quociente-diferença de Rutishauser, que faz esta aceleração substituindo a parte da série de Fourier complexa por uma fração continuada, que conduz a uma aproximação racional da série original (Rutishauser, 1957).

Será utilizado o algoritmo acima citado no método numérico ILT, baseado na FFT. Ele permite inverter a transformada de Laplace numericamente com suficiente rapidez, estabilidade e precisão.

5.2.1 Princípio do método

Para obter-se a função $f(t)$ da transformada de $F(s)$, a fórmula da definição da transformada inversa de Laplace (ILT) é considerada como:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)e^{st} ds, \tag{5.1}$$

supondo que $|f(t)| \leq Ke^{\alpha t}$, K é um número real positivo, α é a ordem exponencial de uma função real $f(t)$, $t \geq 0$, e $F(s)$ definida por $\text{Re}[s] > \alpha$. Deve-se avaliar a integral numericamente no intervalo $[0; t_m]$ com suficiente rapidez e precisão. Aplicando as regras de integração e, depois de algumas manipulações, uma fórmula aproximada na forma discreta $\tilde{f}_k = \tilde{f}(kT)$ pode ser escrita como (Brancik, 1999 a)

$$\tilde{f}_k = C_k \left\{ 2 \text{Re} \left[\sum_{n=0}^{\infty} F_n z_k^n \right] - F_0 \right\}, \tag{5.2}$$

onde $k=0,1,\dots,N-1$; $C_k = \frac{\Omega}{2\pi} e^{ckT}$; $F_n = F(c - jn\Omega)$; $z_k = e^{jkTn\Omega}$, sabendo que $\Omega = 2\pi / NT$ e T

são períodos amostrados no domínio do tempo e freqüência respectivamente. A Eq (5.2) é a aproximação da série de Fourier da função original $f(t)$ quando o erro pode ser controlado, teoricamente, no intervalo $t \in [0; NT)$. Para evitar o aumento do erro, na prática computacional, considera-se no intervalo acima um tempo máximo, isto é, $t_m = (M-1)T$ com $M = N/2$ como o número de pontos computados. A análise do erro pode ser dada pelo coeficiente c , determinado aproximadamente da seguinte forma:

$$c \approx \alpha - \frac{\Omega}{2\pi \ln E_r}, \tag{5.3}$$

onde E_r é o erro relativo desejado.

5.2.2 Algoritmo FFT e quociente-diferença

Pode-se reescrever a Eq.(5.2) na forma

$$\tilde{f}_k = C_k \left\{ 2 \operatorname{Re} \left[\sum_{n=0}^{N-1} F_n z_k^n + \sum_{n=0}^{\infty} F_{N+n} z_k^{N+n} \right] - F_0 \right\}, \tag{5.4}$$

e $k=0, \dots, N-1$. A soma finita é avaliada pelo algoritmo FFT - supor $N=2^m$, m é um número inteiro. Isso permite obter o conjunto de pontos N numa única etapa do cálculo e, então, serão usados os primeiros pontos de M , como indicado acima. A soma infinita pode ser escrita como:

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_{N+n} z_k^{N+n} = \sum_{n=0}^{\infty} F_{N+n} z_k^n = \sum_{n=0}^{\infty} G_n z_k^n ; \tag{5.5}$$

onde $k=0, \dots, M-1$ e foi considerando que $z_k^N = e^{-j2\pi k} = 1$, para $\forall k$. A convergência da soma infinita na Eq.(5.5) pode ser acelerada usando o algoritmo q-d (quociente-diferença) de Rutishauser substituindo a parte da série complexa de Fourier por uma fração continuada (Rutishauser, 1957) dada por

$$v(z_k) = d_0 / \left(1 + d_1 z_k / \left(1 + d_2 z_k / \left(1 + \dots \right) \right) \right), \quad (5.6)$$

para $\forall k$. Na prática somente $2P+1$ termos são considerados para computação, ou seja, tomando a série de potência

$$u(z_k, P) = \sum_{n=0}^{2P} G_n z_k^n, \quad (5.7)$$

constrõe-se então a fração continuada para $\forall k$

$$v(z_k) = d_0 / \left(1 + d_1 z_k / \left(1 + \dots + d_{2P} z_k \right) \right). \quad (5.8)$$

Os coeficientes d_n , $n = 0, \dots, 2P$, são calculados usando o algoritmo q-d (Rutishauser, 1957).

Pode-se então escrever a fórmula do vetor NILT como:

$$\hat{f}^M = C^M \circ \left\{ 2 \operatorname{Re} \left[R^M \left\{ \operatorname{FFT} \left(F^N \right) \right\} + V_p^M \right] - F_0^M \right\}. \quad (5.9)$$

O comprimento do vetor acima é indicado em Brancik, 1999a, ou seja, para $k=0, \dots, M-1$, e $n=0, \dots, N-1$. F_0^M é um vetor constante de valores $F(c)$, V_p^M é o vetor resultante da aplicação do algoritmo q-d, $R^M \{ \cdot \}$ denota o operador $N \rightarrow M$ e o símbolo \circ significa o produto de matrizes.

Implementação no Matlab

O método NILT foi programado na linguagem Matlab na forma de uma função M- file apresentada a seguir:

```
function [ft,t]=nilt(F,tm);
alfa=0; M=256; P=3; Er=1e-10; % ajustável
N=2*M; qd=2*P+1; t=linspace(0,tm,M); NT=2*tm*N/(N-2);
omega=2*pi/NT; c=alfa-log(Er)/NT; s=c-i*omega*(0:N+qd-1);
```

```

Fsc=feval(F,s); ft=fft(Fsc(1:N)); ft=ft(1:M);
q=Fsc(N+2:N+qd)/Fsc(N+1:N+qd-1); d=zeros(1,qd); e=d;
d(1)=Fsc(N+1); d(2)=-q(1); z=exp(-i*omega*t);
for r=2:2:qd-
w=qd-r; e(1:w)=q(2:w+1)-q(1:w)+e(2:w+1); d(r+1)=e(1);
if r>2
q(1:w-1)=q(2:w).*e(2:w)./e(1:w-1); d(r)=-q(1);
end
end
A2=zeros(1,M); B2=ones(1,M); A1=d(1)*B2; B1=B2;
for n=2:qd
A=A1+d(n)*z.*A2; B=B1+d(n)*z.*B2;
A2=A1; B2=B1; A1=A; B1=B;
end
ft=exp(c*t)/NT.*(2*real(ft+A./B)-Fsc(1)); t(1)=2*ft(1);
plot(t,ft); xlabel('t'); ylabel('f'); grid on;

```

Definição da Sub-função F

Function f=F (s); % a sub-função F é chamada desta forma: nilt ('F'; tm) no Matlab;

f=F(s); % F(s) avaliação da transformada;

A função nilt é chamada com dois parâmetros. O F tem a forma de um string expressando o nome da função em que a transformada de Laplace é definida (ver Brancik, 1999 a) e o tm definido como tempo máximo.

A inversão numérica da Transformada de Laplace está baseada no algoritmo de FFT. Segue a descrição dos argumentos:

F é a transformada de Laplace escrita como um string;

tmin e o tmax são os limites do intervalo da solução;

alfa é a ordem exponencial da função real f(t) (ordem zero são problema);

N é escolhido de...-2,-1,0,1,2,.....(zero é problema - são usados $2^{(12+N)}$ termos).

Com o objetivo de comparar os resultados obtidos pela simulação numérica da função relaxação de tensão utilizando o método exato, através da Eq (4.40), far-se-á uma simulação numérica da função relaxação de tensão (Eq (4.36)), no domínio de Laplace, utilizando-se o método da inversão aproximada da transformada de Laplace (Brancik, 2001).

Nota: Os parâmetros utilizados para gerar os gráficos são os constantes na tabela 3.1, página 40.

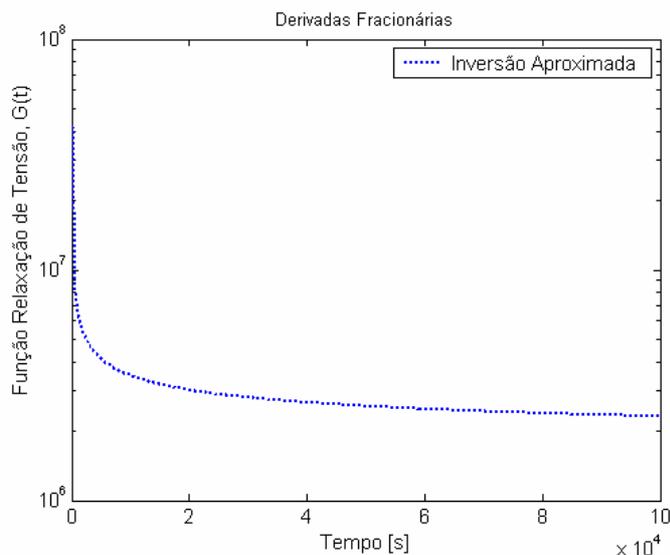


Figura 5.1 - Função relaxação de tensão para o modelo fracionário Linear Padrão (Eq (4.36)) através do método da inversão aproximada da transformada de Laplace.

O gráfico (Fig.5.1) foi computado com um tempo de 0.3443 s no PC, com processador AMD Sempron (TM) XP 3.000 + 1.8 GHz, 512 MB de RAM.

A Fig.5.2 mostra a simulação numérica da Eq (4.40) através do método da inversão exata, Mittag-Leffler. É possível, assim, a comparação com o método da inversão aproximada da transformada de Laplace.

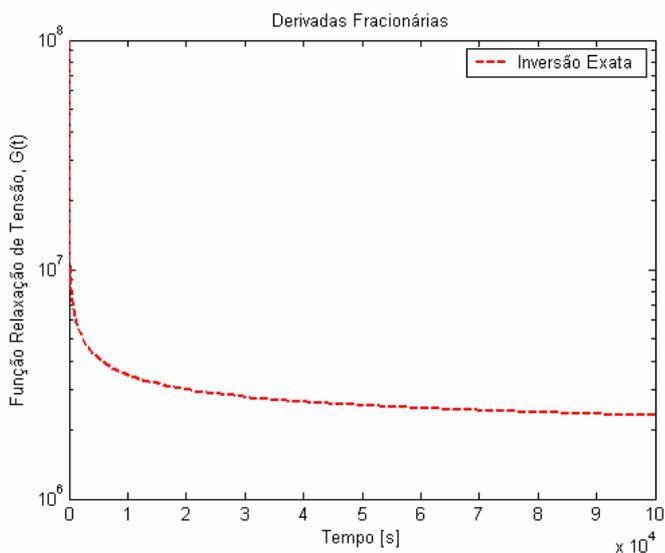


Figura 5.2 - Função relaxação de tensão para o modelo fracionário Linear Padrão (Eq (4.40)) através do método da inversão exata, Mittag-Leffler.

O gráfico (Fig.5.2) foi computado com um tempo de 0.4267 s no PC, com processador AMD Sempron (TM) XP 3.000 + 1.8 GHz, 512 MB de RAM

A função relaxação de tensão (método inversão exata), Fig. 5.2, necessita de um tempo computacional maior se comparado com o tempo computacional gasto para obter-se um ajuste de curva para a função relaxação de tensão (método da inversão aproximada), Fig. 5.1.

A Fig. 5.3 será obtida pela simulação numérica da função relaxação de tensão através das equações (4.36) e (4.40), para comparação das curvas geradas.

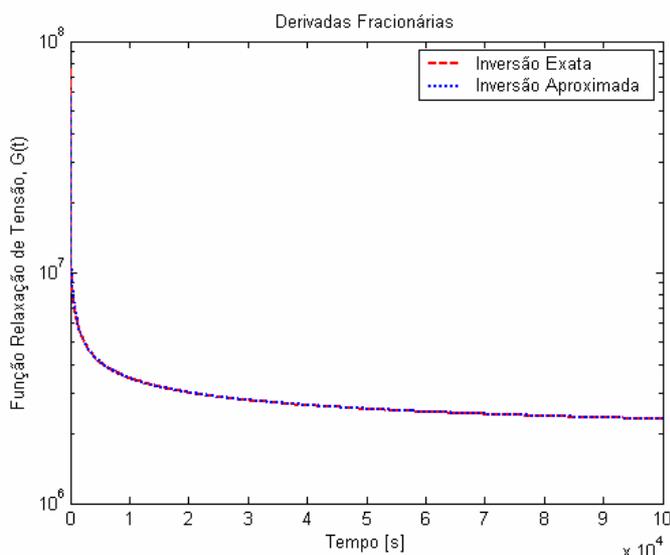


Figura 5.3 - Função relaxação de tensão para o modelo fracionário Linear Padrão (Eq (4.40)), através do método da inversão exata, Mittag-Leffler (Eq (4.36)) e através do método da inversão aproximada da transformada de Laplace.

Pode-se observar (Fig. 5.3) que as curvas geradas pelas equações (4.36) e (4.40) praticamente se sobrepõem. Com isso, pode-se concluir que o método da inversão aproximada da transformada de Laplace é um método com boa precisão e com um tempo computacional menor que o método da inversão exata. Isto para o cômputo de $G(t)$.

5.3 Processo de deconvolução

O processo de deconvolução é usado para inverter os efeitos da convolução. Isto significa que, em vez de misturar dois sinais como na convolução, os mesmos serão isolados. O conceito de deconvolução é usado extensivamente nas técnicas para processamento de sinais e imagens. Estas técnicas, por sua vez, são usadas em muitas disciplinas e em Engenharia, onde a deconvolução encontra muitas aplicações.

Em aplicações práticas, o problema da deconvolução é matematicamente classificado como um problema mal condicionado (Civanlar *et alii*, 1985). A operação de deconvolução, executada no domínio do tempo ou da frequência, é sensível a erros de dados (em particular ao dividir-se por valores pequenos) e ruído associado com medições práticas. O conhecimento exato da deconvolução de sinais não é possível, e aproximações têm que ser assumidas (Artacho *et alii*, 1995; Andrews, 2004).

Deconvolução é um método em engenharia que se refere ao aprimoramento da fidelidade em um sinal eletrônico, ou seja, voz, música, radar, entre outros. É um método linear que necessita de um tempo computacional curto. Sinais podem ser deconvoluídos a fim de se obter outras respostas desejadas (Press *et alii*, 1992; Magain *et alii*, 1998; Liu *et alii*, 2005; Andrews, 2004).

Com o uso do método de deconvolução espera-se obter boa precisão numérica, estabilidade e convergência da função relaxação de tensão com menos esforço computacional. Para isto, deve-se estabelecer uma comparação entre os processos que serão aplicados para obtenção da função relaxação de tensão: método da deconvolução aplicada à função creep pela inversão exata (Mittag-Leffler) e método da inversão aproximada da transformada de Laplace, em materiais viscoelásticos.

A operação de convolução, representada por *, é um operador linear entre duas funções, $f_1(t)$ e $f_2(t)$, que pode ser denotada por:

$$f(t) = f_1(t) * f_2(t) \tag{5.1}$$

e definida através de:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) f_2(t - \tau) d\tau, \tag{5.2}$$

onde $f(t)$ é a convolução das funções $f_1(t)$ e $f_2(t)$, e t é uma variável independente que se refere ao tempo. Como a deconvolução é o processo inverso da convolução, conhecidas as funções $f_2(t)$ e $f(t)$, é possível determinar $f_1(t)$, ou seja, é possível deconvoluir $f(t)$ (ver Apêndice D).

Os métodos de Fourier fornecem um poderoso conjunto de ferramentas analíticas e numéricas para resolver problemas que envolvem sinais e sistemas e, também, para o estudo e

processamento de imagem através da deconvolução. Portanto, para realizar o processo de deconvolução utilizam-se as transformações de Fourier, com as sub-rotinas do Matlab FFT e IFFT, ambas baseadas em um algoritmo numericamente eficiente e rápido, como sugere o próprio nome “Fast Fourier Transform”.

A essência do cálculo da Transformada Rápida de Fourier (FFT) é uma série de operações matemáticas conhecida como Transformada Discreta de Fourier (DFT), que é um conjunto **m** de variáveis no domínio da frequência a partir de um conjunto **n** de amostras no domínio do tempo. Os algoritmos de FFT funcionam melhor quando o número de pontos da amostra for uma potência inteira de 2. Para um estudo complementar ver as seguintes referências: Espindola, 2006; Brigham, 1998; Bracewell, 2000; Haykin *et alii*, 2005; Press *et alii*, 1992; Holmes *et alii*, 2002, entre outras.

As propriedades de representação de Fourier relacionam o efeito de uma ação sobre um sinal no domínio do tempo com a correspondente alteração desse sinal no domínio da frequência (Haykin *et alii*, 2005).

Partindo da equação $J(t) * G(t) = t\mu(t)$ (4.46) realiza-se o processo da deconvolução no domínio do tempo, que envolve a separação de dois sinais anteriormente combinados através da convolução, com o auxílio dos algoritmos FFT e IFFT, implementados no Matlab.

Uma propriedade importante da operação de convolução é que seu operador correspondente no domínio da frequência é, simplesmente, uma multiplicação:

$$J(\Omega) \cdot G(\Omega) = \mathfrak{F}(t\mu(t)) \tag{5.3}$$

onde $J(\Omega)$ e $G(\Omega)$ são as transformada de Fourier de $J(t)$ e $G(t)$, respectivamente e Ω é a frequência. Na prática, a versão discreta da transformada de Fourier, ou DFT é usada, pois, com o algoritmo FFT, passa-se do domínio do tempo para o domínio da frequência.

A maioria dos algoritmos de deconvolução conhecidos apresenta algumas limitações. Os métodos de deconvolução tradicionais tendem gerar distorções em alguns instantes. Para evitar essas possíveis distorções da FFT (executada como parte do processo de deconvolução), os dados convoluídos devem ser preenchidos com zeros até que o número de pontos seja igual a uma potência inteira de dois. Aplicando-se FFT na equação (5.3) e isolando-se $G(\Omega)$ tem-se

$$G(\Omega) = \frac{\text{FFT}[t\mu(t)]}{\text{FFT}[J(t)]} \tag{5.4}$$

Pela definição de deconvolução, tomando-se a equação (5.4) e usando-se o algoritmo IFFT, para retornar para o domínio do tempo, determina-se a função G(t), ou seja:

$$G(t) = \text{IFFT}[G(\Omega)] \tag{5.5}$$

Conceitualmente as equações (5.3) e (5.4) parecem ser simples e fáceis para se implementar. Na prática, entretanto, não é tão simples assim. O problema reside na operação de divisão no domínio da frequência, equação (5.4). Quando o denominador torna-se muito pequeno, quase zero, ou há um ruído associado a medições práticas, a operação de divisão cresce e vai para o infinito. Do mesmo modo, se ambos, numerador e denominador, tornam-se muito pequenos, ou há um ruído associado a medições práticas, então o resultado é uma indeterminação (Andrews, 2004).

A pior questão reside no fato de que $t\mu(t)$ não é Fourier transformável, pois não é absolutamente integrável. Fazendo o uso de funções generalizadas, tem-se:

$$\mathfrak{T}(t\mu(t)) = \frac{i}{2\pi} \delta(\Omega) - \frac{1}{2\pi\Omega^2} \tag{5.6}$$

A primeira parcela de (5.6) pode ser ignorada se ao invés de $t\mu(t)$, tomar-se $t[\mu(t) - \mu(t-T)]$, onde T é um valor elevado de T. Em outras palavras, limita-se a função $t\mu(t)$ ao que for visto através de uma janela que vai de $t = 0$ a $t = T$. No domínio da frequência, esta janela representa um filtro.

Os programas que executam a deconvolução requerem a introdução de um filtro adicional para manter sob controle a operação de divisão, impedindo a instabilidade numérica. O filtro passa baixa (low-pass) "estabiliza" o resultado de deconvolução, ou seja, remove os componentes de alta frequência de entrada e deixa passar componentes de baixa frequência relativamente intactos. Para tanto, a resposta impulsiva do filtro deverá ser de duração finita (Raid, 1986, Smith, 1990; Saberi *et alii*, 1999; Andrews, 2004; Artacho *et alii*, 1995).

Para gerar os gráficos da deconvolução foram utilizados os algoritmos FFT e IFFT, com a adição de um filtro passa baixa, ambos disponíveis no Matlab, com o comando Filter.

Segundo Rafaja (2000), a deconvolução com o uso da expansão de Fourier utiliza um pequeno número de coeficientes para representar a operação.

A Fig. 5.4 representa graficamente o resultado da operação acima. Os parâmetros utilizados para gerar o gráfico são os constantes na tabela 3.1, página 40.

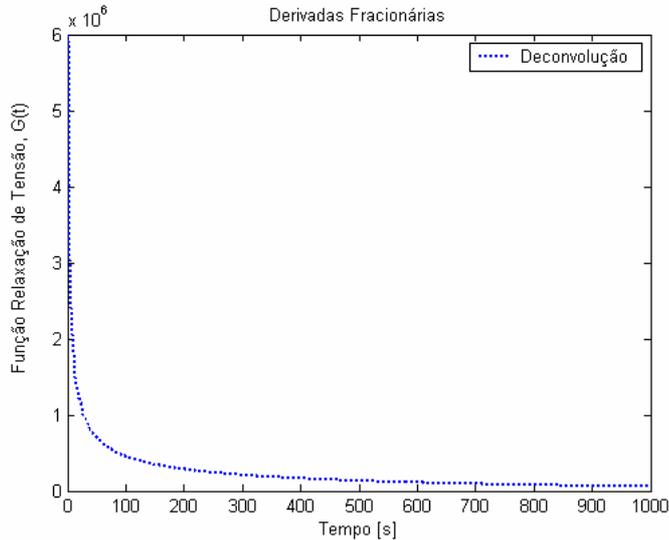


Figura 5.4 - Função relaxação de tensão para o modelo fracionário Linear Padrão, partindo da função creep, Mittag-leffler (Eq (4.48)) e pelo uso do método da deconvolução (Eq (5.5)).

O gráfico (Fig.5.4) foi computado com um tempo de 0.1560 s no PC, com processador AMD Sempron (TM) XP 3.000 + 1.8 GHz, 512 MB de RAM

A Fig. 5.5, Eq (4.36), será gerada com o mesmo intervalo da Fig 5.4. Os parâmetros utilizados são os constantes na tabela 3.1, página 40.

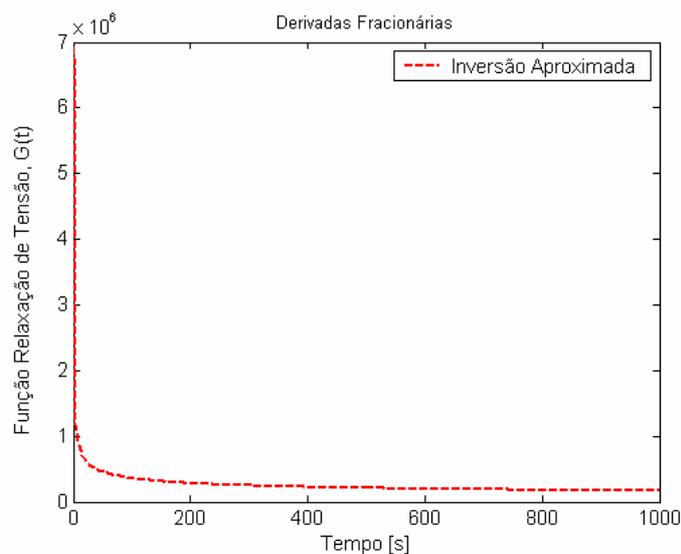


Figura 5.5 - Função relaxação de tensão para o modelo fracionário Linear Padrão (Eq (4.36)) através do método da inversão aproximada da transformada de Laplace

A simulação numérica da Fig.5.5, foi obtida com um tempo computacional de 0.3280 s no PC, com processador AMD Sempron (TM) XP 3.000 + 1.8 GHz, 512 MB de RAM

Na Fig. 5.6 tem-se a simulação numérica das equações (4.36) e (5.5). Os parâmetros utilizados para gerar o gráfico são os constantes na tabela 3.1, página 40.

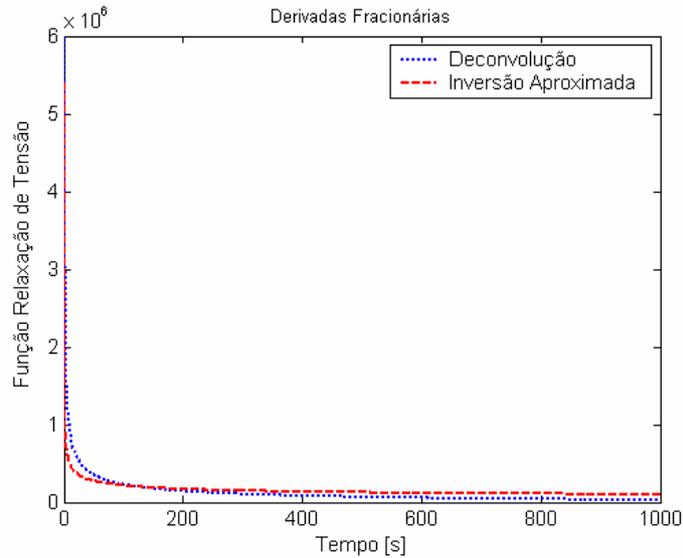


Figura 5.6 - Função relaxação de tensão para o modelo fracionário Linear Padrão (Eq (5.5)), através do método da deconvolução e (Eq (4.36)) através do método da inversão aproximada da transformada de Laplace.

Observa-se na Fig. 5.6 que a curva gerada pela (Eq (5.5)), processo da deconvolução, se comparado com a curva gerada pela (Eq (4.36)), apresenta uma aproximação dentro do esperado para o processo de deconvolução, com os algoritmos utilizados. As duas curvas são similares, mas não idênticas. Pode-se então concluir que o processo de deconvolução permite determinar um sinal de entrada desconhecido, em um sistema linear invariante no tempo, de modo aproximado.

Será apresentada a seguir a simulação numérica da função relaxação de tensão pelo método da inversão exata (Mittag-Leffler), Eq. (4.40), com o mesmo intervalo de tempo e os mesmos parâmetros utilizados para obterem-se as Figs. 5.4 e 5.5. Far-se-á, então, a comparação do tempo computacional e análise do erro absoluto.

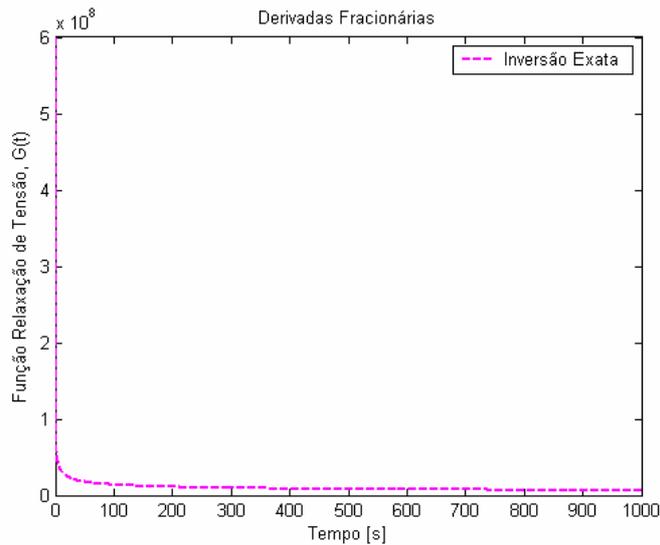


Figura 5.7 - Função relaxação de tensão para o modelo fracionário Linear Padrão (Eq (4.40)) através do método da inversão exata, Mittag-Leffler.

O gráfico (Fig.5.7) foi computado com um tempo de 0.4063 s no PC, com processador AMD Sempron (TM) XP 3.000 + 1.8 GHz, 512 MB de RAM

A função relaxação de tensão foi gerada por três métodos: inversão exata (Eq (4.40)), inversão aproximada (Eq (4.36)) e deconvolução (Eq (5.5)). O tempo computacional gasto no processo de deconvolução é menor.

O erro absoluto entre o processo da inversão exata e o da inversão aproximada da transformada de Laplace é de 0.000918, o qual pode ser considerado um erro muito pequeno. Porém, o erro absoluto entre o processo da inversão exata e o da deconvolução é de 0.9648, decorrente da instabilidade e limitações que a maioria dos algoritmos conhecidos de deconvolução apresentam.

CAPÍTULO 6

CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

6.1 Conclusões relatadas para o presente trabalho

As conclusões relatadas para o presente trabalho são as seguintes:

- Modelos mecânicos viscoelásticos a derivadas inteiras

O modelo fluido Maxwell não mostra um decréscimo da razão de deformação sob uma tensão constante e não exibe a recuperação instantânea, dependente do tempo, após o descarregamento. O modelo Kelvin não deforma instantaneamente sob a aplicação de uma tensão repentina. Nos dois modelos pode-se examinar algumas de suas características de viscoelasticidade linear. Os mesmos podem ser usados, como molas e amortecedores, para construir modelos mais complexos e precisos. O modelo linear padrão representa adequadamente, de forma qualitativa, ambas as funções $G(t)$ e $J(t)$ observadas na maioria dos sólidos viscoelásticos.

- Modelos mecânicos viscoelásticos a derivadas fracionárias

Em geral, os modelos fracionários fazem um trabalho substancialmente melhor de capturar o comportamento real do material, sobre uma larga faixa de frequência ou tempo, pois nos mesmos tem-se toda a história da função. Pode-se observar que a função relaxação de tensão é monotônica decrescente e a função creep é monotônica crescente. Em nossos modelos mecânicos as equações creep e relaxação de tensão foram expressas em termos de equações constitutivas e funções Mittag-Leffler. O grau de dificuldade da computação numérica da função relaxação de tensão é proveniente da função exponencial generalizada ou função Mittag-Leffler, pois a mesma depende basicamente dos valores numéricos dos parâmetros fracionários, fornecidos pelo Laboratório de Experimentos em Materiais Viscoelásticos PISA-LVA (Apêndice C).

Embora o modelo fracionário linear padrão possua só um parâmetro adicional, em relação aos modelos fracionários de Maxwell e de Kelvin, sua capacidade de avaliar o comportamento real do material é significativa.

- Relações constitutivas hereditárias viscoelásticas

Obteve-se as funções relaxação de tensão e creep por divisão longa e, com o auxílio da função exponencial generalizada ou função Mittag-leffler, fez-se uma análise do cômputo da função Mittag-Leffler utilizada nas funções acima citadas. Pôde-se constatar, então, que a função relaxação de tensão é uma função difícil de ser computada, o mesmo não ocorrendo com a função creep. O cômputo da função Mittag-Leffler (equação (4.48) função creep) é bastante simples, já que $(G_0/G_1) < 1$. Mas, o compute direto da função Mittag-Leffler (equação (4.40), função relaxação de tensão $G(t)$), encontra dificuldades numéricas, pois $(1/b_1) \gg 1$.

- Obtenção da função relaxação de tensão

Obteve-se a função relaxação de tensão pelo método da inversão aproximada da transformada de Laplace a partir da função $G(s)$ (equação (4.36)) e pelo método da inversão exata de Mittag-Leffler (equação (4.40)). Através da equação (4.48) e com o uso do método da inversão exata conseguiu-se a simulação numérica da função creep, $J(t)$. Assim foi possível o cômputo da função relaxação de tensão, através do processo de deconvolução (equação (5.5)), conhecidos $t_{\mu}(t)$, uma função de tempo pré-estabelecida, e $J(t)$.

Conseguiu-se boa precisão numérica, estabilidade e convergência da função relaxação de tensão, com menos esforço computacional. Atingiu-se o objetivo principal deste trabalho que consistia em complementar a lacuna existente nos atuais procedimentos no cômputo da função relaxação de tensão através dos processos de inversão aproximada da transformada de Laplace e deconvolução. Para isso foi utilizado o modelo mecânico linear padrão a derivadas fracionárias, com quatro parâmetros em material viscoelástico, deduzido no capítulo 4.

6.2 Sugestões para trabalhos futuros

Implementar a simulação numérica da deconvolução com algoritmos mais robustos para tornar o processo mais exato.

Fazer experimentos no domínio do tempo para corroborar os resultados obtidos. Esses experimentos são de longo prazo.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABATE, J.; WHITT, W. Numerical inversion of Laplace transforms of probability distributions, **ORSA. Journal on Computing**, v.7, 1995, p.36-43.

_____. The Fourier-Series Method for Inverting Transforms of Probability distributions. **Queuing Systems**, v.10, 1992, p.5-88.

ANDREWS, J. R. Deconvolution of System impulse Response and Time Domain Waveforms, **Pico second Pulse Labs**, 2004, p.1-6.

ARCHER, R. Polymer Engineering Viscoelasticity Department of Engineering Science the University of Auckland, Nova Zelandia, **notas de aula**, 2003a.

_____. Creep, **Department of Engineering Science the University of Auckland**, Nova Zelandia, **notas de aula**, 2003b.

ARTACHO, J. M.; MARQUINA-FORNIÉS, J. M.; LETOSA, J.; GARCIA M., BOTTREAU, A. M., Direct Deconvolution Signal in Time Domain Refectometry, **IEEE transactions on magnetic**, v. 31. n. 3, 1995

BAGLEY, R. L. On the Fractional Order Initial Value Problem and its Engineering Applications, **Proceeding of the International Conference on Fractional Calculus and its applications**, Tokio: College of Engineering, Nihon University, 1990, p. 12-20.

BAGLEY, R. L.; TORVIK, P. J. A theoretical basic for the application of fractional calculus to Viscoelasticity. **Journal of Rheology** 27, n.3, 1983, p.201-210.

_____. On the Fractional Calculus Model of Viscoelastic Behavior, **Journal of Rheology**, v.30, n.1, 1986, p.133-155.

_____. A Generalized Derivative Model for an Elastomer Damper, **Shock an Vibration Bulletin**, v.49, 1979, p.135-143.

BARRET, J. H. Differential Equations of Non-Integer Order, **Canad. J. Math**, v. 6, 1954, p.529-541.

BORESI, A. P.; SCHMIDT, R. J.; SIDEBOTTOM, O. M. **Advanced Mechanics of Materials**, 1ªed Editora John Wiley & Sons, Inc., 1993.

BORJA, R. J. Generalized Creep and Stress Relaxation Model for Clays, **Journal of Geotechnical Engineering**, v. 118, n. 11, 1992, p. 1765-1786.

BRACEWELL R. N. **The Fourier Transform and its Applications**, 3º Edition, Tata McGraw-Hill, 2000.

BRANCIK, L. The Fast Computing Method of Numerical Inversion of Laplace Transforms Using FFT Algorithm. In: **PROC.OF 5TH EDS 98 INT. CONF.**, Brno, Czech Republic, June 1998, p.97-100.

_____. Programs for Fast Numerical Inversion of Laplace Transforms. In: **Matlab Language Environment Inkonference Matlab '99-Praha**, 1999a, p.27-39.

_____. An Improvement of FFT-Based Numerical ILT Procedure by Application of ε – Algorithm. In: **Sbornik Prednasek Moderni Smery Vyuky Eletroniky a Elektoniky STO - 7**, Brno, Zari, 1999b, p.196-199.

_____. Utilization of Quocient-Difference Algorithm in FFT- Based Numerical ILT Method. In **Proceedings of the 11th International Czech-Slovak Scientific Conference Radioelektronika**, Brno Czech Republic, 2001, p. 352- 355.

BRANDON, J. A.; LOPES, E. M. O.; ESPINDOLA, J. J. Some Aspects of Experimental and Rhetorical Reanalysis Using Polymeric Materials, **Proceedings of the Second International Conference on Identification in Engineering Systems**, Swansea, UK, 1999, p. 141-149.

BRIGHAM E. O. **The Fast Fourier Transform and its Applications**, by Prentice-Hall, Inc. 1988.

CAPUTO, M.; MAINARDI, F., Linear models of dissipation in anelastic solids., **Rivista del Nuovo Cimento** 1, n. 2, 1971, p.161-198.

_____. A new Dissipation Model Based on Memory Mechanism, **Pure and Applied Geophysics**, v.91, 1966, p.134-147.

_____. Linear Models of Dissipation in Anelastic Solids, Riv. **Nuovo Cimento (Ser.II)**, v.1, 1971, p.161-198.

CHENG, A. H. D.; SIDAURUK, P. Approximate Inversion of the Lapalce Transform. **The Matematica Journak**, v.4, 1994, p. 76-92.

CHRISTENSEN, M. R. **Theory of Viscoelasticity**. 2. ed. London: Editora Academic Press, 1982.

CIVANLAR, M. R.; TRUSSELL, H. J. Signal Deconvolution using Fuzzy Sets, **Acoustics, Speech, and Signal Processing, IEEE international**, CH21 188/85I0000-0457, 1985.

COLE, K. S. Electrical Conductance of Biological Systems, **Proceedings of the Symposium on Quantitative Biology**, New York: Cild Spring Harbor, 1933, p.107-116,

CRUZ, G. A. M. **Projeto Ótimo de Neutralizadores Viscoelásticos Baseado no Modelo a Derivadas fracionárias**, Tese (Doutorado). Universidade Federal de Santa Catarina, 2004.

DAVIS, H.T. The Theory of linear Operators, **Principia Press**, Bloomington, 1936

DIETHELM, K.; FORD, N. J.; FREED, A. D.; LUCHKO, YU. Algorithms for the Fractional Calculus: A Selection of Numerical Methods, **Applied Mechanics and Engineering**, 2003.

DZHERBASHIAN, M. M. **Integral Transforms and Representations of Functions in the Complex plane**, Nauka, Moscow, 1966.

ELDRED, L. B.; BAKER W. P.; PALZOTTO, A. N. Kelvin. Voigt vs Fractional Derivative Model as Constitutive Relations for Viscoelastic Materials, **AIAA Journal**, v.33, n. 3, 1995, p. 547-550.

ENELUND, M.; OLSSON, P. Damping Described by Fading Memory-Analysis and Application to Fractional Derivative Models, **International Journal of Solids and Structures** **36**, 1998, p. 939–970.

EDÉRLYI, A.; MAGNUS, W.; OBERHELTINGER, F.; TRICOMI, F. G. **Higher Transcendental Functions**, New York: McGraw-Hill, v.3, 1954, p. 206-209.

ERDÉLYI, A.; MAGNUS, W.; OBERHETTINGER, F.; TRICOMI, F. G., (Eds.). **Higher Transcendental Functions, Bateman manuscript project**. New York: McGraw-Hill, v.2, 1955.

ESPINDOLA, J. J. “Projetos de Isoladores Aeronáuticos”, **Relatório final à Fundação Banco do Brasil**. Florianópolis: Universidade Federal de Santa Catarina, 1990.

_____. **A Fractional Calculus Approach to Viscoelastic Materials Dynamic Properties Measurements**, PASI, 2003.

ESPINDOLA, J. J. **Apostila de fundamentos de vibrações**. Curso de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica. Florianópolis: UFSC, 2006.

ESPINDOLA, J. J.; BAVASTRI, C. A. Reduction of Vibration in Complex Structures with Viscoelastic Neutralizer: A Generalized Approach, **Proceeding ASME Design Engineering Technical Conferences**, Boston, v.3, Part C, 1995a, p. 761-766.

_____. Modal Reduction of Vibrations by Dynamic Neutralizers in Frequency Range - A Generalized Approach, **Proceedings of Diname’95**, Caxambú, Brasil, 1995b, p. 214-217.

_____. Reduction of Vibration in Complex Structures with Viscoelastic Neutralizer: A Generalized Approach and a Physical Realization, **Proceedings ASME Design Engineering Technical Conferences**, Sacramento, Paper DETC97/VIB - 4187, in **CD ROM**, 199a.

_____. An Efficient Definition of Transmissibility for a General Equipment Isolation System, **Proceedings ASME Design Engineering Technical Conferences**, Sacramento, USA paper DET97/VIB-4120, in **CD-ROM**, 1997b.

_____. Viscoelastic Neutralizers in Vibration Abatement: A Nonlinear Optimization Approach, **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences**, v. XIX, n. 2 (indexed by Applied Mechanics Reviews and Engineering Information, Inc.), 1997c, p. 154-163.

_____. Optimum Conceptual Design of Viscoelastic Dynamic Neutralizer for Low Frequency Complex Structures, **Proceedings of Eurodiname’99**, Ulm, Germany, 1999, p.251-258.

ESPINDOLA, J. J.; FLOODY, S. E. On the Modeling of Metal – Elastomer Composite Structures: A Finite Element Method Approach, **Proceedings of the Applied Mechanics in the Americas**, v. 8, Rio de Janeiro, Brazil, 1999, p. 1335-1345.

ESPINDOLA, J. J.; SILVA NETO, J. M.; LOPES, E. M. O. On the Measurement of Dynamic Properties of Viscoelastic Materials, **Anais do 2^o DINCON**. São José dos Campos: Ed: J. M. Balthazar *et alii*, v.2, 2003, p.2452-2464.

_____. A New Approach Fractional Parameters Identification of Viscoelastic Materials, 1st IFAC International Federation of Automatic Control) **Workshop on Fractional, Differentiation and Its Applications**, Bordeaux, France, July 19-21,2004, Editors: A. Le Mehauté, J.A. Tenreiro Machado, J. C. Trigeassou, J. Sabatier, pp. 271-276, 2004.

_____. “A Generalized Fractional Derivative Approach to Viscoelastic Material Properties Measurement”. **Applied Mathematics and computation**, 2005, p.493-506.

ESPINDOLA, J. J.; BAVASTRI, C. A.; SILVA NETO, J. M.; LOPES, E. M. O. Caracterização Dinâmica Integrada de Elastômeros por Derivadas Generalizadas. In: III **Congresso Nacional de Engenharia Mecânica**, Anais do congresso em CD –ROM, 2004.

FERRY, J. D. **Viscoelastic Properties of Polymers**. New York: John Wiley, 1980.

FLUGGE, W. **Viscoelasticity**. New York: Springer-Verlag, 1975.

FRIEDRICH, C. Relaxation and Retardation functions of the Maxwell Model with Fractional Derivatives, **Rheol. Acta**, v.30, 1991, p.151-158.

FRIEDRICH, C.; SCHISSEL, H.; BLUMEN, A. Constitutive Behavior Modeling and Fractional Derivatives, **Advances in the Flow and Rheology of non-Newtonian Fluids-Part**, 1999, p. 429-466.

GENT, A. N. **Engineering with Rubber**, How to Design Rubber Components, 2nd edition 2001.

GORENFLO, R.; YAMAMOTO, M. On Regularized inversion of Abel Integral Operators, in: ABH, N.H. *et alii*, (Eds.). **Analysis and mechanics of Continuous Media**, Publications of the Ho Chi Minh City Mathematical Society, v.3, 1995, p.162-182.

GORENFLO, R.; MAINARDI, F. Fractional Calculus: Integral and Differential Equations of Fractional order, **Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanicals**. Wien and New York: Springer Verlag, 1997, p. 223-276.

GORENFLO, R.; LOUTCHKO, J.; LUCHKO, Y. Computation of the Mittag-Leffler Function $E_{\alpha,\beta}(z)$ and its Derivative, **Fractional Calculus & Applied Analysis**, n.5, 2002, p. 491-518.

_____. Corrections to the paper “Computation of the Mittag-Leffler Function $E_{\alpha,\beta}(z)$ and its Derivative”, **Fractional Calculus & Applied Analysis**, v.6, n.1, 2003, p.111-112.

GROSS, B. On Creep and relaxation. **J. Appl. Phys**, v.18, 1947, p.212-221.

HAMMERAND, D. C. **Geometrically- Linear and Nonlinear Analysis of Linear Viscoelastic Composites Using the Finite Element Method**, Thesis (of doctor of Philosophy in Aerospace Engineering), Faculty of Virginia Polytechnic Institute and State University, 1999.

HARTLEY, T. T.; LORENZO, C. F. A Solution to the Fundamental Linear Fractional Order Differential Equation, **NASA/TP**, 1998.

HAYKIN, S.; VEEN. B. V. **Sinais e sistemas**. Bookman: John Wiley & Sons, Inc., 2005.

HEYMANS, N. Fractional Order Constitutive Equations for Viscoelasticity: Sensitivity to Initial State. In: **1st Ifac International Federation of Automatic Control) Workshop on Fractional**, Differentiation and Its Applications, Bordeaux, France, 2004, p. 19-21.

HILLE, E.; TAMARKIN, J. D. On the theory of Linear Integra Equations, **Ann. Math**, v.31, 1930, p. 479-528.

HOLMES, A. D.; LU, W. W.; LUK, K. D. K.; LEONG, J. C. Y. A Comparison of Deconvolution Techniques for Stress Relaxation, **Journal of Biomechanics**, v.35, 2002, p.1485-1489.

JONES, D. I. G. **Viscoelastic Materials for Damping Applications**, ASME/AMD “Damping Applications for Vibrations Control”. Torvik: Ed. Peter J., v. 38, 1980, p.27-51.

_____. On Temperature-Frequency Analysis of Polymer Dynamic Mechanical Behaviour, **Journal of Sound and Vibration**, v.140, n. 1, 1990, p. 85-102.

KOELLER, R. C. Applications of Fractional Calculus to the Theory of Viscoelasticity, **Journal of Applied Mechanics**, v. 51, 1984, p. 299-307.

KOELLER, R. C.; RAJ, R. Diffusing Relaxation of Stress Concentration at Second Phase Particles, **Acta Metallurgic**, v.26, 1978, p.1551-1558.

LAKES, R. S. **Viscoelastic Solids**, CRC Press LLC, 1999.

LION, A., **On the Thermodynamics of Fracional Damping Elements**, Verlag: Springer, v.9, 1997, p. 83-96.

LIU, Q.; SUBHASH, G.; EVESEN, H. A. Behavior of a Novel Iterative Deconvolution Algorithm for System identification, **Journal of Vibration and Control**, v.11, 2005, p.985-1003.

LONG, A. C. Viscoelasticity, University of Nottingham School of Mechanical, Materials, manufacturing Engineering & management Polymer Engineering, **notas de aula**, 2002.

LOPES, E. M. O. **Um estudo da Previsão do Método da Viga Vibrante aplicado à determinação das Propriedades Dinâmicas de Elastômeros**. Dissertação (Mestrado em Engenharia). Florianópolis: Universidade Federal de santa Catarina, 1989.

_____. **On The Experimental Response Reanalysis of Structures With Elastomeric materials.** Tese (Doutorado), University of Wales Cardiff, 1998.

LOPES, E. M. O.; ESPINDOLA, J. J.; BRANDON, J. A. On the use of SVD for Solving Inverse Problem. In: **Sandwich Beams, Proceedings of the International Conference on Identification In Engineering Systems**, Swansea, UK, 1996, p.184-193.

LORENZO, C. E.; HARTLEY, T. T. Generalized Functions for the Fractional Calculus, **NASA/TP -209424/REV1-** 1999.

_____. Initialized Fractional Calculus, **NASA/TP -209943-** 2000.

LOVERRO, A. Fractional Calculus: History, Definitions and Applications for the Engineer, Department of Aerospace and Mechanical Engineering University of Notre Dame Notre Dame, **IN 46556, U.S.A**, 2004.

LUCHKO, Y. "Computation of the Mittag-Leffler function $E_{\alpha, \beta}(z)$ and its derivative", **fractional Calculus & Applied Analysis**, v.5, n. 4, 2002, p.491-518.

MAGAIN, P.; COURBIN, F.; SOHY, S. Deconvolution with Correct Sampling, **The Astrophysical Journal**, v. 494, 1998, p. 472-477.

MAINARDI, F. Physical and Mathematical Aspects of Fractional Calculus in Linear Viscoelasticity, 1st IFAC International Federation of Automatic Control) **Workshop on Fractional, Differentiation and Its Applications**, Bordeaux, France, July 19-21, Editors: A.Le Mehauté, J.A. Tenreiro Machado, J.C. Trigeassou, J. Sabatier, 2004, p.62-67.

MAINARDI, F.; GORENFLO, R. On Mittag-Leffler –type functions in fractional evolution process, **Journal of Computational and Applied Mathematics**, v.118, 2000, p.283-299.

McTAVISH, D. J. The Mini-Oscillator Technique: A finite Element Method for the Modeling of Linear Viscoelastic Structures, **UTIAS Report 323**, Institute for Aerospace Studies, University of Toronto, 1988.

MILLER, K. S.; ROSS, B. **An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations.** New York: John Willey & Sons, Inc., 1993.

MILOVANOVIC V. G.; CVETKOVIC, S. A. Numerical Inversion of the Laplace Transform, **Ser.: Elec. Energ.**, v.18, n. 3, 2005, p. 515-530.

MITTAG-LEFFLER, G. M. Sur l'Intégrale de Laplace Abel, **C.R. Acad. Sci. Paris (Ser.II)**, v.136, 1902, p.937-939.

_____. "Sur la nouvelle fonction $E_{\alpha}(x)$." **Comptes Rendus Acad. Sci. Paris (ser. II)** v.137, 1903, p. 554-558.

_____. Sopra la Funzione $E_{\alpha}(x)$, **R. Accad. Lincei, Rend.** (ser. V) v.13, 1904, p. 3-5.

_____. "Sur la representation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène." **Acta Math.**, v.29, 1905, p.101-181.

MOREAU, X.; ALTET, O.; OUSTALOUP, A. Phenomenological description of the fractional differentiation in Rheology, 1st IFAC International Federation of Automatic Control) **Workshop on Fractional, Differentiation and Its Applications**, Bordeaux, France, July 19-21, Editors: A. Le Mehauté, J.A., Tenreiro Machado, J.C., Trigeassou, J. Sabatier, 2004, p.74-79.

NASHIF, A. D.; JONES, D .I. G.; HENDERSON, J. P. **Vibration Damping**, USA: John Wiley & Sons, Inc., 1985.

NASHIF, A. D.; LEWIS, T. M. Data Base of the Dynamic Properties of materials, **Journal Sounds an Vibrations**, v. 25 n. 7, 1991, p. 14-25.

OLDHAM, K. B.; SPANIER, J. **The Fractional Calculus**, New York: Springer-Verlag, 1973.

ORTIGUEIRA, M. D. Introduction to Fractional Linear Systems I, Continuous-Time case **IEE Proceedings Vision**, Image and Signal Processing, v. 147, n. 1, 2000.

OYADIJI, S. O; CHU, L. Time Dominion Characterization of the Dynamic Properties of Viscoelastic Materials, **SPIE** v. 3045. 1997, p .204-212.

PANDOVAN, J.; GUO Y. General Response of Viscoelastic Systems modeled by Fractional Operators, **J. Franklin Institute**, v. 352(2), 1988, p 247-275.

PARIS, R. B. Exponential Asymptotics of the Mittag-Leffler Function, **Division of Mathematical Sciences**, University of Abertay Dundee, Dundee DD1 1HG, Uk, 10.1098/rspa.2002.0977.

PODLUBNY, I. **Fractional Differential Equations**. San Diego: Academic Press, 1999.

POLLARD, H. The completely monotonic character of the Mittag-Leffler function $E_{\alpha}(-x)$, **Bull. Amer. Math. Soc.**, v. 54, 1948, p.1115-1116.

PRESS, W. H.; TEUKOLSKY, S. A.; VETTERLING, W.T.; FLANNERY, B.P. **Numerical Recipes in C**. 2.ed. The art of Scientific Computing, 1992, p.538-545.

PRITZ, T. Analysis of Four-Parameter Fractional Derivative Model of Real Solid Material, **Journal Sound and Vibration**, v.195, n. 91, 1996, p. 103-115.

_____. Frequency Dependencies of Complex Moduli and Complex Poisson's Ratio of Real Solid Materials, **Journal Sound And Vibration**, v.214. n.1, 1998, p. 83 -104.

_____. Five-Parameter Fractional Derivative Model for Polymeric Damping Materials, **Journal of Sound And Vibration**, v.265, 2003, p.935-952.

RABOTNOV, Y.N. **Elements of Hereditary Solid Mechanics**, Mir Publishers, Moscow, 1980.

RAFAJA, D. Deconvolution versus Convolution – A Comparison for Materials with concentration Gradient, **Materials Structure**, v.7, n. 2, 2000.

RAID, S. M., The Deconvolution Problem: **An Overview, Proceedings of the IEEE**, v.74, n. 1, 1986, p.82-85.

ROSS, B. Fractional Calculus and its Applications, Lecture notes in Mathematics n° 457, **Springer Verlag, Berlin** (proc. Int. Conf. held at Univ. of New Haven, USA, 1974), 1975.

RUTISHAUSER, H. Der Quotienten-Differenzen-Algorithmus, **Birkhauser Verlag**, Basel, 1957.

SABERI, A.; STOORVOGEL, A.; SANNUTI, P. Inverse Filtering and Deconvolution, **Proceedings of the American Control Conference**, San Diego, California, June 1999.

SCHIMIDT, A.; GAUL, L. Implementation of Viscoelastic Constitutive Stress-Strain Relation Involving Fractional Time Derivatives, **Proceedings of the 2nd European Conference on Constitutive Models for Rubber (NECCMR)**, Hannover, September 10-12, 2001, p. 79-89.

SCHNEIDER, W. R. Complete monotone generalized Mittag-Leffler functions, **Expositiones Mathematicae**, v. 14, 1996, p. 3-16.

SHORTLE, J. F.; FISCHER, M. J.; GROSS, D.; MASI, D. Numerical Methods for Analyzing Queues with Heavy-Tailed Distributions, In: **Telecommunications Network Design: G Anandalingan, S. Raghavan** (eds) Kulwer Academic Publishers, 2003, p.193-206.

SMITH, P. L. Obtaining meaningful Results from Fourier Deconvolution of Reaction Time Data, **Psychological Bulletin**, v.108, n. 3, 1990, p 533-550.

SNOWDON, J. C. **Vibration and Shock in Damped Mechanical Systems**, John Wiley & Sons, 1968.

SURGULADZE, T. A. On Certain Applications of Fractional Calculus to Viscoelasticity, **Journal of Mathematical Sciences**, v.112, n. 5, 2002.

TSCHOEGL, N. T. **The Phenomenological Theory of Linear Viscoelastic Behavior**. 2^o ed. Berlin Heidelberg: Editor Springer-Verlag, 1989.

WELCH, S. W. J.; RORRE, R. A. L.; DUREN, R. G. JR. Application of time-Based Fractional Calculus Methods to Viscoelastic Creep and Stress Relation of Materials, **Mechanic 423s of time- Dependent Materials**, v.3, 1999, p. 279-303.

WIKIPÉDIA, a enciclopédia livre, [pt.wikipedia.org/wiki/ convolução](http://pt.wikipedia.org/wiki/convolução), 23/01/2006.

WITTE, G. Die analytische und die numerische Behandlung einer Klasse Von Volterraschen Integralgleichungen, **Hilbertraum**, Berlin, 1997.

APÊNDICES

APÊNDICE A

CÁLCULO FRACIONÁRIO

A.1 Introdução

Cálculo fracionário é a generalização da diferenciação ordinária e integração para ordem (não inteira) arbitrária. O uso de operadores de ordem fracionária nas últimas décadas tem se tornado popular entre pesquisadores de muitas áreas. O interesse teórico e prático desses operadores está bem estabelecido e sua aplicabilidade à ciência e engenharia pode ser considerada com o surgimento de novos tópicos. São ferramentas para descrição de uma realidade mais complexa, e a ampliação da aplicabilidade prática de operadores comuns de ordem inteira. O assunto tem uma longa história na matemática, tendo sido discutido pela primeira vez em 1690, por G.W. Leibniz. O cálculo diferencial é da mesma época do cálculo fracionário e ambos resultam de pesquisas de Leibniz e Newton (Surguladze, 2002; Schmidt *et alii*, 2001; Loverro, 2004; Lorenzo *et alii*, 2000; Gorenflo *et alii*, 1995, 1997).

A história de derivadas fracionárias inicia-se por volta de 1695. Os pesquisadores L'Hospital e Leibniz se comunicaram dizendo que fazia sentido definir um operador fracionário igual $\frac{1}{2}$. A questão levantada por Leibniz, para a derivada fracionária, foi um tópico de estudos nos últimos 300 anos. As maiores contribuições históricas ao cálculo fracionário cabem aos pesquisadores como Liouville, Riemann, e Weyl. A história sobre o cálculo fracionário continua com as contribuições de Fourier, Abel, Lacroix, Grunwald e Leitnikov. Uma revisão histórica pode ser obtida nos livros Oldham e Spanier, 1973; Miller e Ross, 1993; Friedrich *et alii*, 1999.

O desenvolvimento histórico culmina em dois cálculos baseados sobre o trabalho de Riemann e Liouville (RL), e o trabalho de Grunwald e Letnikov, introduzidas a seguir.

A unificação dos conceitos e notação do cálculo fracionário permite uma simplificação da solução de certas equações diferenciais parciais (sistemas distribuídos). Talvez a forte motivação para o desenvolvimento do cálculo fracionário seja a crença em que grande variedade de problemas físicos e disciplinas de engenharia que resistem à descrição e a solução compacta do cálculo de ordem inteira se renderão aos métodos de cálculo fracionário (ver o capítulo de cálculo fracionário na tese de Cruz, 2004).

A.2 Operadores de ordem fracionária

O cálculo fracionário é uma generalização da integração e diferenciação para o operador ${}_a D_t^\alpha$ de ordem não inteira (fracionária), onde **a** e **t** são os limites de integração e α , é a ordem da derivada. As duas definições usadas para a operação fracionária integram o diferencial geral, que é a definição de Riemann-Liouville (RL), bem como a definição de Grünwald-Letnikov (GL), como será apresentado a seguir (Podlubny, 1999).

A definição de Riemann-Liouville para a derivada de ordem α é dada por

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau \quad (n-1 < \alpha < n), \tag{A.1}$$

onde $\Gamma(\cdot)$ é a função Gama.

A definição de Grunwald-Letnikov é

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{\left[\frac{t-a}{h} \right]} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t-jh)$$

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \Delta_h^\alpha f(t). \tag{A.2}$$

Onde $\left[\frac{t-a}{h} \right]$ é a função maior inteiro contida no somatório, t e a são os limites superior e inferior da diferenciação, respectivamente e h é o incremento de tempo. As definições de Riemann - Liouville e Grunwald-Letnikov são equivalentes a uma grande classe de funções que aparecem em aplicações reais em Engenharia e Física.

A notação no domínio de Laplace é usada para descrever a operação fracionária íntegro-diferencial. A transformação de Laplace da RL derivativa fracionária/integral (A.2), com condição inicial zero para a ordem α , ($0 < \alpha < 1$), é dada por

$$\mathcal{L} \{ {}_a D_t^{\pm\alpha} f(t); s \} = s^{\pm\alpha} F(s) \tag{A.3}$$

A.3 Equações diferenciais fracionárias

Equações diferenciais fracionárias podem ser expressas na forma

$$a_{n \cdot 0} D_t^{\alpha_n} y(t) + \dots + a_{1 \cdot 0} D_t^{\alpha_1} y(t) + a_{0 \cdot 0} D_t^{\alpha_0} y(t) = u(t) \tag{A.4}$$

onde α_k , ($k = 0, 1, \dots, n$) são geralmente números reais, e $a_n > \dots > a_1 > a_0 > 0$ em geral são constantes arbitrárias.

A.4 Transformada de Laplace da derivada fracionária

A transformada de Laplace é definida como

$$\mathcal{L}[f(t)](s) = \int_{0^+}^{\infty} f(t)e^{st} dt. \tag{A.5}$$

Onde $f(t)$ ou sua derivada tem singularidade para $t=0$ é necessário escolher entre 0^+ ou 0^- como limite inferior da integral na equação (A.5). A transformada de Laplace da derivada de ordem fracionária (ordinária) é

$$\mathcal{L}[D^\alpha f(t)] = s^\alpha \mathcal{L}[f(t)] - \sum_{k=0}^{n-1} s^k D^{\alpha-1-k} f(0^+) \tag{A.6}$$

(ver Oldham e Spanier, 1973), onde n é um inteiro tal que $1 < \alpha \leq n$. Note-se que existe a necessidade da condição inicial na equação (A.6), isto é, $D^{\alpha-1-k} f(0^+) = 0$ para $k \in [0, n-1]$.

A transformada de Laplace do operador derivativo é de forma simples

$$\mathcal{L}[D^\alpha f(t)] = s^\alpha \mathcal{L}[f(t)] \tag{A.7}$$

ou

$$\mathcal{L}[D^\alpha f(t)] = s^\alpha F(s), \alpha \in \mathfrak{R}, \tag{A.8}$$

onde D significa derivada, $f(t)$ é um sinal com a transformada de Laplace $F(s)$. Se $\alpha > 0$ tem-se a derivada fracionária, quando $\alpha < 0$ será uma integral fracionária. (Ortigueira, 2000)

As soluções, de equações diferenciais de derivadas fracionárias, podem ser obtidas pela aplicação das condições iniciais de ordem fracionárias apropriadas. Considera-se a estrutura viscoelástica completamente relaxada antes de iniciar o carregamento; depois do tempo $t=0$ toda a história da deformação é tomada em conta. A interpretação física para o

tempo $t=0$ é onde inicia o processo sob consideração, quando o material é completamente relaxado e, portanto, as condições iniciais são zero.

APÊNDICE B

FUNÇÃO MITTAG-LEFFLER

B.1 Referência histórica

Desde os tempos de Mittag-Leffler vários cientistas têm reconhecido a importância das funções do tipo Mittag-Leffler, 1903, a, b, fornecendo aplicações matemáticas e físicas (ver Mainardi *et alii*, 2000). O interesse nas funções Mittag-Leffler e sua popularidade aumentaram por causa da sua importância e aplicação no cálculo fracionário e as equações diferenciais e integrais de ordem fracionária (não inteira) e as equações integrais do tipo Abel (ver Gorenflo *et alii*, 2002, 2003). Assim como a natureza da função exponencial é a solução de equações diferenciais de ordem inteira, a função Mittag-Leffler tem um papel análogo para solução de equações diferenciais de ordem não inteira.

Pode-se citar como trabalhos pioneiros de natureza matemática no campo de integral fracionária e equações diferenciais os trabalhos desenvolvidos por Hille e Tamarkin, (1930). Esses trabalhos provaram a solução da equação integral de Abel da segunda espécie, em termos da função de Mittag-Leffler, enquanto que em Barret (1954) expressou a solução geral da equação diferencial linear fracionária com coeficientes constantes em termo da função Mittag-Leffler (ver também Lorenzo *et alii*, 1999).

Como aplicações na Física pode-se citar as contribuições de Cole (1933), em conexão com a condição de impulsos nervosos, ver também Davis (1936) e Gross (1947) em conexão com a mecânica de relaxação. Caputo e Mainardi (1971) mostraram que funções Mittag-Leffler estão presentes sempre que derivadas de ordem fracionária são introduzidas nas equações constitutivas de um corpo viscoelástico linear. Rabotnov (1980) também introduziu, na viscoelasticidade linear, as funções tipo Mittag-leffler; a conexão para o uso de operadores de derivada fracionária em equações constitutivas de viscoelasticidade linear foi estabelecida por Koeller (1978, 1984). Desde então, diversos outros autores indicaram a relevância dessas funções para modelos viscoelásticos fracionários.

As propriedades assintóticas da função Mittag-Leffler foram estudadas por Gorenflo e Yamamoto (1995), levando em consideração a equação integral de Abel. Enquanto que em

aplicações de funções Mittag-Leffler ocorrem usualmente com argumentos reais, Witte (1997) explorou suas propriedades no domínio dos complexos e desenvolveu diferentes esquemas para seu tratamento numérico.

A mais simples função do tipo Mittag-Leffler, $E_\alpha(z)$ depende de duas variáveis: o argumento complexo z e um parâmetro real α . A forma generalizada necessita pelo menos de mais um argumento, e α pode ser complexo. Experiência em computação de funções especiais na Matemática Física ensina que em distintas partes de um plano complexo devem ser usadas técnicas numéricas diferentes.

B.2 Funções Mittag-Leffler e suas generalizações

A definição da função Mittag-Leffler é dada por

$$E_\alpha(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(1+\alpha n)}, \quad \alpha > 0, z \in \mathbb{C}, \tag{B.1}$$

e foi introduzida por Mittag-Leffler, em 1902, em conexão com seu método do somatório de séries divergentes, válida no plano complexo. Enfatiza-se que $E_\alpha(z)$ é uma função de ordem completa $1/\alpha$. Se $\alpha \in \mathbb{C}$, então tem-se $\frac{1}{\text{Re } \alpha}$.

A função Mittag-Leffler é uma generalização da função exponencial tendo em vista a substituição de $n! = \Gamma(n+1)$ com $(\alpha n)! = \Gamma(\alpha n + 1)$, onde Γ é a função gamma. Seguem de (B.1) as seguintes relações:

$$\begin{cases} E_1(z) = e^z; E_2(z^2) = \cosh z; E_2(-z^2) = \cos z, \\ E_{1/2}(\pm z^{1/2}) = e^z [1 + \text{erf}(\pm z^{1/2})] = e^z \text{erfc}(\mp z^{1/2}), \quad Z \in \mathbb{C} \end{cases} \tag{B.2}$$

onde erfc é a função erro complementar e erf é o erro da função assim definido:

$$\text{erf}(z) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-u^2} du, \quad \text{erf}(z) := 1 - \text{erf}(z), \quad Z \in \mathbb{C}$$

É também comum a representação da função Mittag-Leffler em dois parâmetros, α e β , da seguinte forma:

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + \beta)}. \quad \alpha \in \mathfrak{R}_+, \beta \in \mathfrak{R}, Z \in \mathbb{C} \quad (\text{B.3})$$

Esta é a forma mais generalizada da função $E_{\alpha,\beta}(z)$, isto é, uma função de ordem completa $1/\alpha$. É definida por uma série de potência (Erdélyi *et alii*, 1955; Loverro, 2004; Surguladze, 2002).

O estudo proposto neste trabalho depende somente do parâmetro α ; portanto, usa-se somente a função Mittag-Leffler original (B.1). Pode-se obter uma pesquisa mais completa da função generalizada Mittag-leffler (B.3), que envolve ambos os parâmetros α e β , nas seguintes referências: Dzherbashian, 1966; Erdélyi, 1955; Mainardi, 2000; Gorenflo *et alii*, 1997; Loverro, 2004.

B.3 Representação integral da função Mittag-Leffler e expansão assintótica

Muitas das propriedades da função $E_{\alpha}(z)$ são obtidas pela representação integral da função Mittag-Leffler:

$$E_{\alpha}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{Ha} \frac{\zeta^{\alpha-1} e^{\zeta}}{\zeta^{\alpha} - z} d\zeta, \quad \alpha > 0, \quad Z \in \mathbb{C}, \quad (\text{B.5})$$

onde Ha é o caminho de integração (o caminho de Hankel); é um laço que começa e termina em $-\infty$ e incluindo o disco circular $|\zeta| \leq |z|^{1/\alpha}$ na direção positiva : $-\pi \leq \arg \sigma \leq \pi$ sobre Ha (Mainardi, 2000; Paris, 2002; Gorenflo *et alii*, 1997, 2002, 2003).

A representação integral da função generalizada Mittag-Leffler torna-se

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{Ha} \frac{\zeta^{\alpha-\beta} e^{\zeta}}{\zeta^{\alpha} - z} d\zeta, \quad \alpha, \beta > 0, \quad Z \in \mathbb{C} \quad (\text{B.6})$$

Muitas propriedades importantes da função Mittag-leffler estão associadas com suas expansões assintóticas, com $z \rightarrow \infty$, em vários setores do plano complexo. Essas propriedades podem ser resumidas da forma como segue.

Para $0 < \alpha < 2$, as seguintes fórmulas assintóticas são válidas:

$$E_{\alpha}(z) \cong \frac{1}{\alpha} \exp(z^{1/\alpha}) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{-n}}{\Gamma(1-\alpha n)}, \quad |z| \rightarrow \infty, \quad |\arg z| < \alpha\pi/2, \quad (\text{B.7})$$

$$E_{\alpha}(z) \cong - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{-n}}{\Gamma(1-\alpha n)}. \quad |z| \rightarrow \infty, \quad \frac{\alpha\pi}{2} < \arg z < 2\pi - \frac{\alpha\pi}{2}. \quad (\text{B.8})$$

Para $\alpha \geq 2$, tem-se

$$E_{\alpha}(z) \cong \frac{1}{\alpha m} \sum \exp\left(z^{1/\alpha} e^{2\pi i m/\alpha}\right) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{-n}}{\Gamma(1-n\alpha)}, \quad |z| \rightarrow \infty, \quad (\text{B.9})$$

onde m assume valores inteiros tais que $-\alpha\pi/2 < \arg z + 2\pi m < \alpha\pi/2$, o $\arg z$ pode assumir algum valor entre $-\pi$ e $+\pi$.

Das propriedades assintóticas (B.7), (B.8), (B.9) e a definição de uma função da ordem inteira, conclui-se que a função Mittag-Leffler é uma função de ordem completa $1/\alpha$ para $\alpha > 0$.

B.4 A Transformada de Laplace relacionada com a função Mittag-Leffler

As funções de Mittag-Leffler são conectadas com a integral de Laplace através da equação (Gorenflo *et alii*, 1997)

$$\int_0^{\alpha} e^{-u} E_{\alpha}\left(u^{\alpha} z\right) du = \frac{1}{1-z} = \int_0^{\infty} e^{-u} u^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}\left(u^{\alpha} z\right) du, \quad \alpha, \beta > 0 \quad (\text{B.10})$$

A integral acima foi avaliada por Mittag-Leffler, que mostrou que a região de sua convergência contém o círculo unitário e é delimitado por $\text{Re } z^{1/\alpha} = 1$.

Para avaliação da transformada de Laplace de $E_{\alpha}(-\lambda t^{\alpha})$ e $E_{\alpha,\beta}(-\lambda t^{\alpha})$ com $\alpha, \beta > 0$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ é fundamental a integral acima.

Substituindo na equação (B.10) $u = st$ e $u^{\alpha} z = -\lambda t^{\alpha}$ com $t \geq 0$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, com o uso do sinal de divisão para a justaposição de uma função dependente de t com sua transformada de Laplace dependendo de s , tem-se então a transformada de Laplace ou seja,

$$e_{\alpha}(t; \lambda) = E_{\alpha}(-\lambda t^{\alpha}) / \left(\frac{s^{\alpha-1}}{s^{\alpha} + \lambda} \right), \quad \text{Re } s > |\lambda|^{1/\alpha} \quad (\text{B.11})$$

e

$$e_{\alpha, \beta}(t; \lambda) = t^{\beta-1} E_{\alpha, \beta}(-\lambda t^{\alpha}) / \left(\frac{s^{\alpha-\beta}}{s^{\alpha} + \lambda} \right), \quad \text{Re } s > |\lambda|^{1/\alpha} \quad (\text{B.12})$$

As equações (B.11) e (B.12) podem ser também obtidas formalmente por Laplace transformando termo a termo a série (B.1) e (B.3) com $z = -\lambda t^{\alpha}$, respectivamente, e somando a série resultante.

Uma propriedade satisfeita pela função $e_{\alpha}(t; \lambda)$; $e_{\alpha, \beta}(t; \lambda)$ quando α é positivo e $0 < \alpha \leq 1$, $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$, respectivamente, deverá ser completamente monotônica para $t > 0$.

Historicamente, a completa monotonicidade da função Mittag-Leffler no eixo real negativo, isto é, de $E_{\alpha}(-z)$, para $z \in \mathfrak{R}^+$ quando $0 < \alpha < 1$, foi pela primeira vez conjecturada por Feller, usando o método probabilístico e rigorosamente provado por Pollard, em 1948 ver também Gorenflo *et alii*, 1997.

Recentemente, Schneider (1996) provou o teorema da completa monotonicidade da função generalizada de Mittag-Leffler no eixo real negativo. Ele provou que $E_{\alpha, \beta}(-z)$, para $z \in \mathfrak{R}^+$, é completamente monotônica se $0 < \alpha \leq 1$ e $\beta \geq \alpha$.

B. 5 Propriedades analíticas da função Mittag-Leffler

As aplicações usuais para equações diferenciais de ordem fracionária da função Mittag-Leffler são normalmente no plano real. Entretanto, são também necessárias algumas propriedades no plano complexo. A principal razão é por causa do algoritmo que avalia numericamente a função Mittag-Leffler para os valores de $\alpha \leq 1$ e $\alpha > 1$, que necessita fórmulas especiais definidas no plano complexo. Essas fórmulas são dadas pôr

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \frac{1}{2m+1} \sum_{h=-m}^m E_{\alpha/(2m+1), \beta} \left(z^{1/(2m+1)} e^{i2\pi h/(2m+1)} \right), \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (\text{B.12})$$

e

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \frac{1}{m} \sum_{h=0}^{m-1} E_{\alpha/m,\beta} \left(z^{1/m} e^{i2\pi h/m} \right), \quad m=1,2,\dots, \quad (B.13)$$

sabendo que i é a unidade imaginária (0,1). Se $\alpha > 1$ e se z é um número real, necessita-se avaliar numericamente a função Mittag-Leffler com um argumento complexo ($\alpha \leq 1$).

Nas referências Erdélyi *et alii*, (1955) e Mainardi *et alii*, (2000) pode-se fazer uma análise mais completa das propriedades da função Mittag-Leffler.

Um pseudo-código para o computo numérico das variantes da função Mittag-Leffler $E_{\alpha,\beta}(-z^\alpha)$, as quais aparecem nas soluções de equações diferenciais lineares de ordem fracionárias, foi apresentado por Diethelm *et alii*, (2003) e Gorenflo *et alii*, (2002, 2003) e reproduzido abaixo. Resultando num método robusto para computar a função Mittag-Leffler.

Algoritmo para a função Mittag-Leffler $E_{\alpha,\beta}(z) + \mu(z), |\mu(z)| < \varepsilon$:

Dado $\alpha > 0, \beta \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C}, \varepsilon > 0, 0 < \varsigma < 1$

if $z = 0$

$$E_{\alpha,\beta}(z) = 1 / \Gamma(\beta)$$

elsif $\alpha \leq 1$

if $|z| < \varsigma$

$$k_0 = \max \left\{ \lceil (1-\beta) / \alpha \rceil, \lceil \ln[\varepsilon(1-|z|)] / \ln(|z|) \rceil \right\}$$

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{k_0} z^k / \Gamma(\beta + \alpha k)$$

elsif $|z| < \lfloor 10 + 5\alpha \rfloor$

$$\chi_0 = \begin{cases} \max \left\{ 1, 2|z|, (-\ln(\varepsilon\pi/6))^\alpha \right\}, & \beta \geq 0 \\ \max \left\{ (|\beta|+1)^\alpha, 2|z|, \left(-2 \ln \left(\varepsilon\pi / \left[6(|\beta|+2)(2|\beta|)^{|\beta|} \right] \right) \right)^\alpha \right\}, & \beta < 0 \end{cases}$$

$$K(\alpha, \beta, \mathfrak{N}, z) = \frac{1}{\alpha\pi} \chi^{(1-\beta)/\alpha} \exp(-\chi^{1/\alpha}) \frac{\chi \sin[\pi(1-\beta)] - z \sin[\pi(1-\beta+\alpha)]}{\chi^2 - 2\chi z \cos(\alpha\pi) + z^2}$$

$$\omega = \phi \lceil 1 + (1-\beta) / \alpha \rceil + \rho^{1/\alpha} \sin(\phi / \alpha)$$

$$P(\alpha, \beta, \rho, \phi, z) = \frac{1}{2\alpha\pi} \rho^{1+(1-\beta)/\alpha} \exp[\rho^{1/\alpha} \cos(\phi / \alpha)] \frac{\cos(\omega) + i \sin(\omega)}{\rho \exp(i\phi) - z}$$

if $|\arg z| > \alpha\pi$ and $||\arg z| - \alpha\pi| > \varepsilon$

if $\beta < 1 + \alpha$

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \int_0^{\chi_0} K(\alpha, \beta, \chi, z) d\mathfrak{N}$$

else

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \int_1^{\chi_0} K(\alpha, \beta, \chi, z) d\chi + \int_{-\alpha\pi}^{\alpha\pi} P(\alpha, \beta, 1, \phi, z) d\phi$$

elseif $|\arg z| < \alpha\pi$ e $||\arg z| - \alpha\pi| > \varepsilon$

if $\beta < 1 + \alpha$

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \int_0^{\chi_0} K(\alpha, \beta, \chi, z) d\chi + \frac{1}{\alpha} z^{(1-\beta)/\alpha} e^{z^{1/\alpha}}$$

else

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \int_{|z|/2}^{\chi_0} K(\alpha, \beta, \chi, z) d\chi + \int_{-\alpha\pi}^{\alpha\pi} P\left(\alpha, \beta, \frac{1}{2}|z|, \phi, z\right) d\phi + \frac{1}{\alpha} z^{\frac{(1-\beta)}{\alpha}} e^{z^{1/\alpha}}$$

else

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \int_{|z|+1/2}^{\chi_0} K(\alpha, \beta, \chi, z) d\chi + \int_{-\alpha\pi}^{\alpha\pi} P\left(\alpha, \beta, |z| + \frac{1}{2}, \phi, z\right) d\phi$$

else

$$k_0 = \lfloor -\ln(\varepsilon) / \ln(|z|) \rfloor$$

if $|\arg z| < 3\alpha\pi/4$

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \frac{1}{\alpha} z^{\frac{(1-\beta)}{\alpha}} e^{z^{1/\alpha}} - \sum_{k=1}^{k_0} \frac{z^{-k}}{\Gamma(\beta - \alpha k)}$$

else

$$E_{\alpha,\beta}(z) = - \sum_{k=1}^{k_0} \frac{z^{-k}}{\Gamma(\beta - \alpha k)}$$

elseif $1 < \alpha < 2$

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \left[E_{\alpha/2,\beta}(\sqrt{z}) + E_{\alpha/2,\beta}(-\sqrt{z}) \right] / 2$$

else

$$k_0 = \lfloor \alpha/2 \rfloor + 1$$

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{k_0-1} E_{\alpha/k_0,\beta} \left[z^{1/k_0} \exp(i2\pi k/k_0) \right] / k_0$$

end

O uso da função generalizada de Mittag-Leffler em cálculos numéricos é dificultado devido à convergência, às vezes lenta, da série na equação (B.1).

As variantes da função Mittag-Leffler $E_{\alpha,\beta}(-z^\alpha)$ surgem naturalmente nas soluções de equações diferenciais lineares, de ordem fracionária. Na figura B.1 os plotes desta função são obtidos com os valores de $\beta = 1$ e $\alpha \in (0, 2)$, enquanto na figura (B.2) os plotes são dados para $\alpha = 1$ e $\beta \in (0, 2)$. Lembrando que $E_{1,1}(-x) = e^{-x}$.

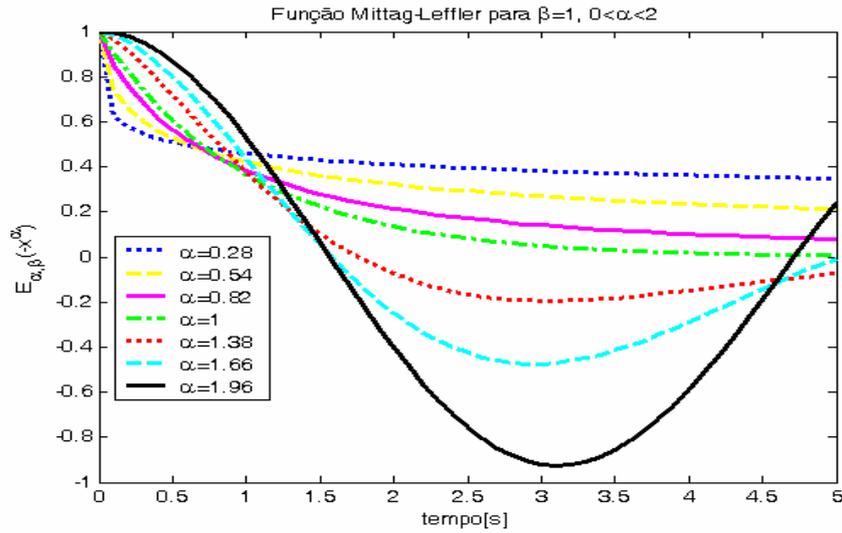


Figura B.1 - Função Mittag-Leffler $E_{\alpha,\beta}(-z^\alpha)$ para $\beta = 1$ e $\alpha \in (0, 2)$.

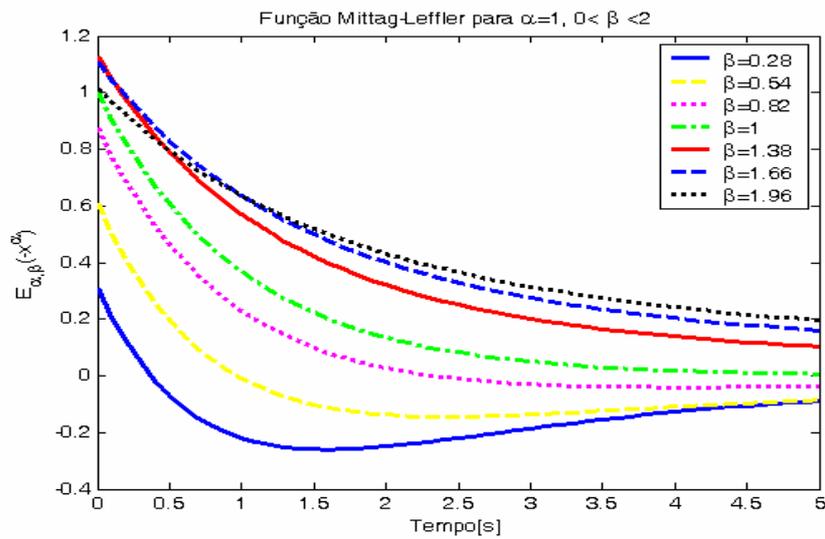


Figura B.2 - Função Mittag-Leffler $E_{\alpha,\beta}(-z^\alpha)$ para $\alpha = 1$ $\beta \in (0, 2)$

Pode-se observar, nas Figs B.1 e B.2, que a variação da inclinação das curvas dependem dos valores dos parâmetros α ou β , respectivamente.

Atualmente, a atenção de pesquisadores para funções do tipo Mittag-Leffler tem aumentado, tanto do ponto de vista analítico quanto numérico, por causa da sua relação com o cálculo fracionário, já que o cálculo fracionário tem um amplo interesse para suas aplicações em diferentes áreas da Física, Engenharia, entre outras.

APÊNDICE C

IDENTIFICAÇÃO DE PARÂMETROS VISCOELÁSTICOS

C.1 Pesquisas desenvolvidas no PISA-LVA

Muitos são os métodos apresentados na literatura com a finalidade de obter as características dinâmicas (módulo de cisalhamento e fator de perda) de um material viscoelástico, na forma experimental. As pesquisas desenvolvidas no PISA-LVA, grupo de Pesquisa Integrada em Sistemas Vibrantes e Acústicos, muito contribuem para a caracterização das propriedades dos materiais viscoelásticos e são apresentadas nas formas de estudos em iniciação científica, dissertações, teses de doutorados, relatórios técnicos e artigos publicados em anais de congressos e revistas indexadas.

Recentemente Espindola *et alii*, 2005, introduziram uma nova abordagem para caracterização de materiais viscoelásticos, usando derivadas fracionárias, no domínio da frequência. Um corpo de prova viscoelástico simples (ver figura C.1) e sua função transmissibilidade são utilizados na identificação das propriedades dinâmicas, em amplas faixas de frequência e temperatura, através do uso de câmara de temperatura controlada.

C.2 Equação constitutiva a derivadas fracionárias.

A equação constitutiva unidimensional a derivadas fracionárias é (Jones, 1980):

$$\sigma(t) + \sum_{m=1}^M b_m D^{\beta_m} [\sigma(t)] = E_0 \varepsilon(t) + \sum_{n=1}^N E_n D^{\alpha_n} [\varepsilon(t)], \quad (C.1)$$

É um modelo fracionário que representa o comportamento dinâmico de materiais viscoelásticos.

Onde: b_m , β_m , $m=1, M$, E_0 , e E_m , α_n , $n=1, N$ são constantes, no tempo, do material viscoelástico. D^{β_m} e D^{α_n} são derivadas fracionárias ou derivadas generalizadas.

A derivada fracionária é definida (Ross, 1975) pela expressão:

$$D[x(t)] = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \cdot \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{x(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau, \quad 0 < \alpha < 1 \quad (C.2)$$

onde D é o operador fracionário , α é a ordem da derivada e Γ é a função gama.

$$\sigma(t) + b_1 D^\beta [\sigma(t)] = E_0 \varepsilon(t) + E_1 D^\alpha [\varepsilon(t)], \quad (C.3)$$

sabendo que $x(\Omega) = \mathfrak{F}(D^\alpha [x(t)]) = (i\Omega)^\alpha \mathfrak{F}(x(t))$, e \mathfrak{F} representa a transformada de Fourier.

A expressão (C.1) em termos de cinco parâmetros pode ser escrita desta forma $\sigma(t) + b_1 D^\beta [\sigma(t)] = E_0 \varepsilon(t) + E_1 D^\alpha [\varepsilon(t)]$, aplicando a transformada de Fourier nos dois lados da igualdade tem-se $[1 + b_1 (i\Omega)^\beta] \sigma(\Omega) = [E_0 + E_1 (i\Omega)^\alpha] \varepsilon(\Omega)$ ou

$$E_c(\Omega) = \frac{\sigma(\Omega)}{\varepsilon(\Omega)} = \frac{E_0 + E_1 (i\Omega)^\alpha}{1 + b_1 (i\Omega)^\beta}, \quad (C.4)$$

onde $\sigma(\Omega) = E_c(\Omega) \varepsilon(\Omega)$.

Este é o modelo ideal para materiais viscoelásticos. Para cada temperatura, o material viscoelástico é representado por cinco parâmetros ($b_1, \alpha, \beta, E_0, E_1$).

Uma correspondente expressão da equação (C.4), para o módulo complexo de cisalhamento pode ser escrita:

$$G_c(\Omega) = \frac{G_0 + G_1 (i\Omega)^\alpha}{1 + b_1 (i\Omega)^\beta}. \quad (C.5)$$

Para materiais viscoelásticos $E_0/G_0 \approx 3$ e $E_1/G_1 \approx 3$. Em geral tem-se $E_c(\Omega)/G_c(\Omega) \approx 3$ (Snowdon, 1968). Também, da teoria da viscoelasticidade toma-se a expressão para o módulo de Poisson, ou razão de Poisson como $\nu = (E/2a) - 1$, sendo ν a razão Poisson e é facilmente demonstrado que $\nu \approx 0.5$, para materiais viscoelásticos.

Se α for igual a β tem-se um modelo a quatro parâmetros.

$$G_c(\Omega) = \frac{G_0 + G_1 (i\Omega)^\alpha}{1 + b_1 (i\Omega)^\alpha} \tag{C.6}$$

Onde:

$G_c(\Omega)$ é o módulo complexo de cisalhamento para um material viscoelástico

Pode-se fazer a identificação numérica /experimental desses parâmetros a partir da (C.6) e reescrita na seguinte forma:

$$G_c(\Omega) = G(\Omega) + iG'(\Omega) \tag{C.7}$$

ou

$$G_c(\Omega) = G(\Omega)(1 + i\eta(\Omega)) \tag{C.8}$$

onde: $\eta(\Omega) = \frac{G'(\Omega)}{G(\Omega)}$ é o fator de perda do material.

Na equação (C.6) fazendo $b_1 = b^\alpha$ e $G_1 = G_\infty b^\alpha$ tem-se:

$$G_c(\Omega) = \frac{G_0 + G_\infty (ib\Omega)^\alpha}{(ib\Omega)^\alpha} \tag{C.9}$$

ou

$$G_c(\Omega) = \frac{G_0 + (ib_0\Omega s(T))^\alpha G_\infty}{(ib_0\Omega s(T))^\alpha}, \tag{C.10}$$

onde:

b_0 é a constante $b = b_0 s(T)$ na temperatura absoluta T_0

$$s(T_0) = 1$$

$s(\bullet)$ é a função deslocamento, dada por $\log_{10} [s(T)] = \frac{-\theta_1 \times (T - T_0)}{\theta_2 + (T - T_0)}$.

Nota: $b = b_1^{1/\alpha}$ e θ_1 e θ_2 são constantes obtidas exponencialmente.

A expressão (C.9) é importante na literatura técnica (Bagley e Torvik, 1979, 1986; Padovan e Guo, 1988; Pritz, 1998) e tem sido usada na identificação dos parâmetros fracionários G_0 , G_∞ , b e α (Espindola *et alii*, 2005).

C.3 Sistema para identificação experimental

O sistema (Fig. C.1) consiste em uma massa m , conectada a base rígida vibrante através do elemento flexível, cuja flexibilidade é fornecida por sua porção viscoelástica. insertos ou outras partes metálicas do dispositivo são consideradas rígidas.

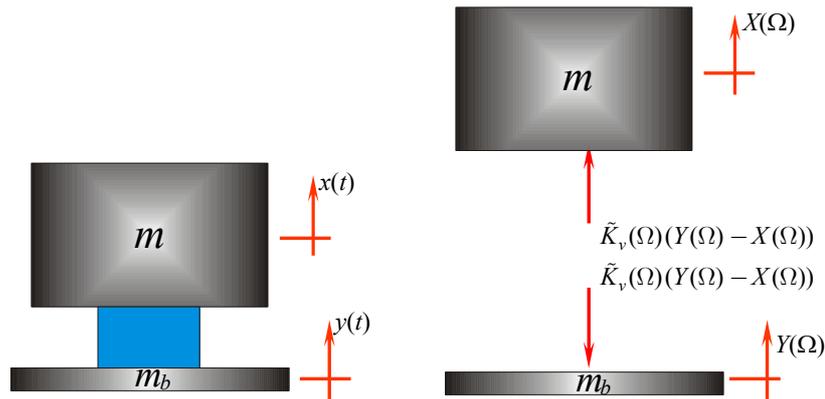


Figura C.1 – Modelo para determinação do módulo complexo de cisalhamento.

Onde $y(t)$ é o movimento da base do dispositivo é imposto ou prescrito, $x(t)$ é o movimento da massa rígida tomado como resposta.

Sob essa hipótese, a rigidez deste elemento pode ser escrita como:

$$k_c(\Omega) = \nu G_e(\Omega) \tag{C.11}$$

onde ν é uma constante que só depende da geometria do elemento flexível (ou isolador viscoelástico) e suas inserções metálicas, $k_c(\Omega)$ é a rigidez complexa do elemento e $G_e(\Omega)$ o módulo dinâmico complexo do material.

O equilíbrio dinâmico da massa m (figura 1) é expresso por $k_c(\Omega)(Y(\Omega) - X(\Omega)) = -m(\Omega)^2 X(\Omega)$ e a transmissibilidade, $T_c(\Omega)$, resultante é;

$$T_c(\Omega) = \frac{X(\Omega)}{Y(\Omega)} = \frac{k_c(\Omega)}{k_c(\Omega) - m\Omega^2}, \tag{C.12}$$

onde $X(\Omega)$ e $Y(\Omega)$ são as transformadas de Fourier de $x(t)$ e $y(t)$, respectivamente.

A equação (1.14) pode ser escrita da forma:

$$T_c(\Omega) = \frac{G_c(\Omega)}{G_c(\Omega) - m\nu\Omega^2} \tag{C.13}$$

$G_c(\Omega)$ é dado pela equação (C.9) e $m_\nu = m/\nu$. O fator de forma ν é relativo a um material em cisalhamento puro dado por $\nu = A_\nu/h_\nu$. As constantes A_ν e h_ν são respectivamente área lateral carregada e espessura do espécime viscoelástico.

O modelo viscoelástico de transmissibilidade $T_c(\Omega)$ é uma função da frequência e de seis (ou cinco se $\alpha = \beta$) parâmetros, ou seja:

$$T_c(\Omega) = f(G_0, G_1, \alpha, \beta, m_\nu, \Omega). \tag{C.14}$$

A equação (C.14) tem como referencia a equação (C.9). O conjunto de parâmetros (equação (C.14)) é o que se deseja para identificar o material viscoelástico em uma certa temperatura. O processo deve ser repetido para várias temperaturas.

C.4 Modelo experimental

A Fig. C.2 descreve a cadeia experimental utilizada para obtenção das transmissibilidades.

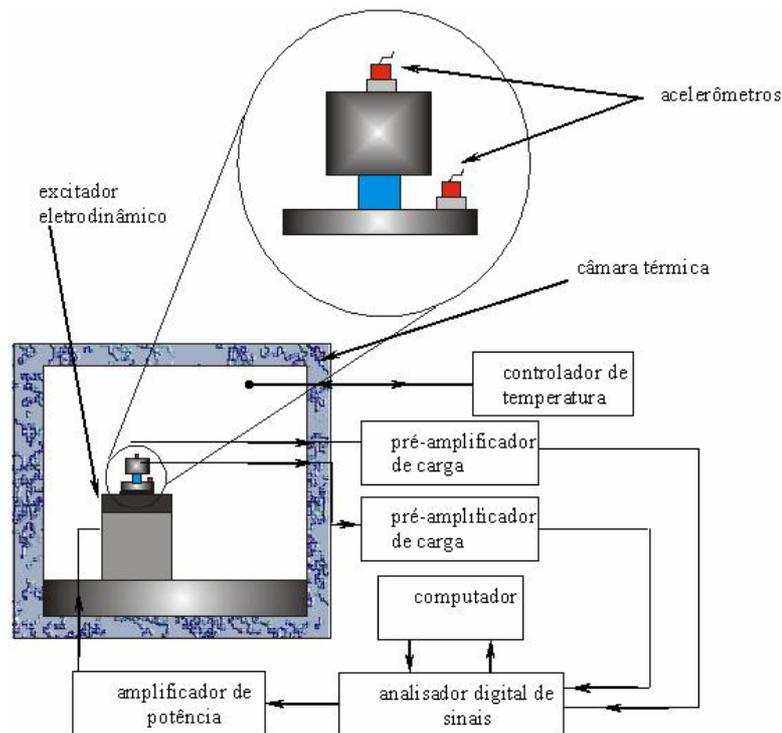


Figura C. 2- Representação esquemática da cadeia de medição das transmissibilidades

Assume-se que $y(t)$ e $x(t)$ são digitalmente mensurados em instantes t_j , sendo $j = 1, 2, \dots, N$. N é um número da forma $N=2^n$ e n é um inteiro. Para as duas séries de tempo, a transmissibilidade experimental é computada como:

$$\tilde{T}_c(\Omega_j) = \frac{S_{xy}(\Omega_j)}{S_{yy}(\Omega_j)}, \quad j=1, \dots, p, \quad (C.15)$$

onde: p é um inteiro $p \leq N/2$, $\Omega_{N/2}$ é a frequência de Nyquist, $S_{xy}(\Omega_j)$ é o espectro cruzado de potência de $x(t)$ e $y(t)$ e $S_{yy}(\Omega_j)$ é o auto espectro de potência de sinal de entrada $y(t)$.

O vetor \mathbf{e} define o erro complexo, cujo as componentes de entrada deste vetor são $e_j = T_c(\Omega_j) - \tilde{T}_c(\Omega_j)$, $e_j = 1, \dots, p$.

A função custo é então definida como

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{e}^H \mathbf{e}, \quad (C.16)$$

onde \mathbf{x} é um vetor definido na expressão abaixo

$$\mathbf{x}^T = [G_0, G_1, \alpha, \beta, b, m_v] \quad (C.17)$$

Na expressão (C.16) o H representa o vetor transposto complexo conjugado do vetor \mathbf{e} e para a expressão (C.17) representa o transposto.

O vetor \mathbf{x} será computado de tal forma que a função custo $f(\mathbf{x})$ seja mínima, isto é o erro médio quadrático é mínimo.

O processo de minimização é realizado com algumas restrições sobre as coordenadas do vetor \mathbf{x} , que são

$$\Omega_1 \leq \Omega \leq \Omega_p, \quad G_0^{(a)} \leq G_0 \leq G_0^{(b)}, \quad G_1^{(a)} \leq G_1 \leq G_1^{(b)}, \quad 0 < \alpha < 1, \quad 0 < \beta < 1, \quad 0 < b < b^{(b)}, \quad 0 < m_v < 10.$$

As restrições acima são baseadas em requerimentos físicos, obtidos na literatura (Bagley e Torvik, 1986; Snowdon, 1968; Ferry 1980; Nashif e Lewis, 1991) e da experiência dos próprios autores (Espindola *et alii*, 2005).

Os valores Ω_1 e Ω_p , são escolhidos em concordância com a temperatura de medição.

C. 5 Conclusão

A idéia de identificação de parâmetros viscoelásticos consiste na caracterização de materiais viscoelásticos através de funções resposta em frequência, por meio de uma resposta em frequência muito particular (FRF), a transmissibilidade. A transmissibilidade, dada pela equação (C.13), é a de um sistema com um grau de liberdade excitado pela base (Fig. C.1), em que o elemento de rigidez é feito de um material elastomérico. O elemento é responsável pela parte elástica e dissipativa do sistema.

A originalidade do procedimento reside no levantamento concomitante das dependências em frequência e temperatura dos materiais ensaiados, tal como elas se manifestam nos dados experimentais.

Sua transmissibilidade é medida em uma câmara de temperatura controlada, para várias temperaturas previamente determinadas. A câmara do grupo PISA/LVA da UFSC permite uma faixa que varia de -30°C a $+60^{\circ}\text{C}$.

Uma equação constitutiva viscoelástica (equações (C.5) e (C.6)) a derivadas fracionárias é empregada na modelagem do material, isto é uma expressão fracionária, no domínio da frequência, representa o módulo complexo. A identificação dos parâmetros que representa o modelo é feita com base nos erros médio quadrático, proveniente do modelo matemático e das transmissibilidades experimentais.

A FRF é uma característica do sistema linear, independente do tipo de excitação a que este foi submetido. Sendo assim, as suas propriedades estão contidas na FRF. Tendo-se a função resposta em frequência de um sistema linear qualquer, tem-se também a informação do seu comportamento dinâmico.

O modelo matemático utilizado para a transmissibilidade foi de um modelo com quatro parâmetros a derivadas fracionárias, equação (3.10), para um material viscoelástico linear. Medida a real transmissibilidade o modelo matemático será ajustado, tem-se então, os parâmetros do modelo do material viscoelástico. Com esses parâmetros, o módulo complexo do material viscoelástico estará determinado.

APÊNDICE D

CONVOLUÇÃO NO DOMÍNIO DO TEMPO

D.1 Teorema da convolução

Para a convolução de duas funções no domínio do tempo $f_1(t)$ e $f_2(t)$

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau. \quad (\text{D.1})$$

Pode ser facilmente demonstrado que pela permutação das variáveis que a convolução é uma operação simétrica de modo que

$$f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t) \quad (\text{D.2})$$

ou

$$\int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau = \int_0^t f_2(\tau) f_1(t - \tau) d\tau. \quad (\text{D.3})$$

A seguir mostrar-se que a convolução de duas funções originais corresponde à multiplicação das transformadas

$$\mathcal{L}\{f_1(t) * f_2(t)\} = F_1(s)F_2(s). \quad (\text{D.4})$$

A transformada de Laplace da equação (D.4) é dada por

$$\mathcal{L}\{f_1(t) * f_2(t)\} = \mathcal{L}\left\{\int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau\right\} \text{ ou}$$

$$\mathcal{L}\{f_1(t) * f_2(t)\} = \int_{t=0}^{\infty} \int_0^t e^{-st} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau dt.$$

Substituindo $\sigma = t - \tau$ e $d\sigma = dt$ respectivamente e usando a extensão válida para o limite superior de integração para $\tau \rightarrow \infty$ produz

$$\mathcal{L}\{f_1(t) * f_2(t)\} = \int_{\sigma=-\tau}^{\infty} \int_{\tau=0}^{\infty} e^{-s(\tau+\sigma)} f_1(\tau) f_2(\sigma) d\tau d\sigma .$$

Ambas as funções $f_1(t)$ e $f_2(t)$ tem valores zero para $t < 0$, e o limite inferior de integração será

$$\mathcal{L}\{f_1(t) * f_2(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-s\tau} f_1(\tau) d\tau \int_0^{\infty} e^{-s\sigma} f_2(\sigma) d\sigma. \quad (D.5)$$

Nota:

O lado direito da equação(D.5) é justamente o produto $F_1(s)F_2(s)$.

A transformada de Laplace da convolução é o produto das transformadas de $f_1(t)$ e, $f_2(t)$ sendo útil na construção de inversas de operadores diferenciais lineares com coeficientes constantes (Bracewell, 2000; Wikipédia, A Enciclopédia Livre, [pt.wikipedia.org/wiki / Convolução](http://pt.wikipedia.org/wiki/Convolução), 23/01/2006).

APÊNDICE E

RELAÇÃO FREQUÊNCIA-TEMPERATURA DAS PROPRIEDADES DINÂMICAS DOS MATERIAIS VISCOELÁSTICOS

E.1 Dependência em frequência e temperatura

As propriedades dinâmicas de materiais viscoelásticos - módulo dinâmico e fator de perda - variam em função de temperatura, frequência e amplitude de deformação. Quando os materiais comportam-se linearmente, ressaltam-se as variáveis temperatura e frequência.

A temperatura é um fator importante, numa faixa estreita, na variação do comportamento do módulo de Young E , módulo de cisalhamento G e fator de perda η_E ou η_G , e com baixo ciclo de amplitude de deformação, como pode ser observada na Fig.E.1. A frequência deve ser constante.

Há três regiões distintas a serem observadas:

- a) Vítreo E ou G é alto e η é baixo;
- b) Transição E ou G varia rapidamente com a temperatura e η é alto;
- c) Elástica E ou G variação mais lenta com a temperatura e η é menor do que a região de transição.

Para temperatura muito alta, a decomposição térmica ocorre usualmente.

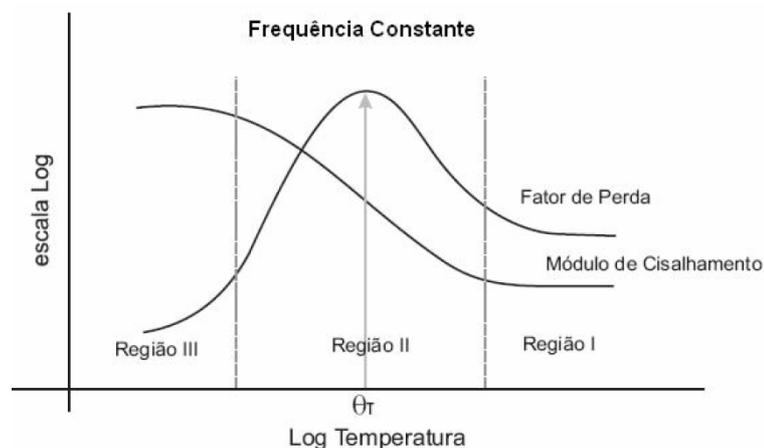


Figura E.1 - Variação das propriedades dinâmicas com a temperatura

Embora a variação do módulo complexo com a frequência seja menos drástica do que com a temperatura, é também importante. Se o teste é conduzido sobre uma larga faixa de frequência, o comportamento para alguma dada temperatura tenderá para a seguinte, em oposto à dependência da temperatura (Fig. E.2). A temperatura deve ser constante.

Há três regiões distintas a serem observadas:

- a) Vítrea E ou G aumenta continuamente com a frequência e η cresce até o máximo, e começa a diminuir;
- b) Transição E ou G varia rapidamente com a frequência de transição e η é alto;
- c) Elástica E ou G variação mais rapidamente com a frequência e η é menor do que a região de transição.

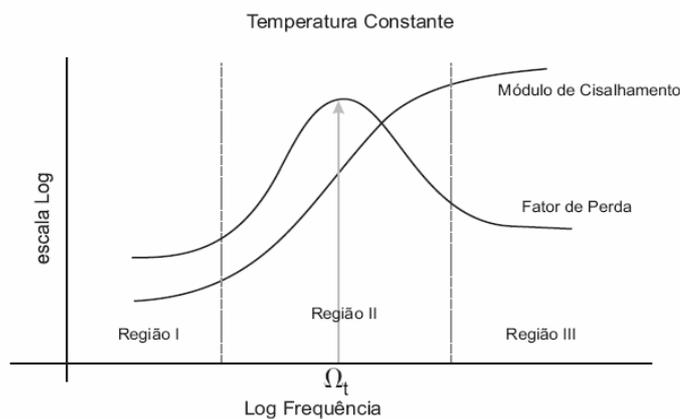


Figura E.2 - Variação das propriedades dinâmicas com a frequência.

A frequência influi qualitativamente de maneira inversa à temperatura sobre as propriedades dinâmicas, a menos de um fator de escala, ou seja, é necessária uma larga faixa em frequência para refletir a mesma alteração do comportamento por uma faixa estreita em temperatura.

Esse fenômeno de equivalência dos efeitos em temperatura e frequência (Princípio da Superposição Frequência-Temperatura-PSFT) é fundamental na caracterização de materiais viscoelásticos, permite a transformação das propriedades dinâmicas do domínio da temperatura para o da frequência e vice-versa (Ferry, 1980; Nashif *et alii*, 1985; Jones, 1990).

Nota: Cada região apresenta características próprias, ou seja:

1. Região I apresenta bastante resiliência tanto no módulo como no fator de perda. É importante na redução de vibrações pelo uso de isoladores.
2. Região II é a região de transição o módulo recebe um aumento bastante rápido com a frequência, para o fator de perda o aumento não é tão significativo. É uma região importante para construir neutralizadores dinâmicos ou estruturas sanduíches.
3. Região III não apresenta maiores utilidades, pois o comportamento do material é vítreo, o módulo torna-se muito elevado e assume um valor praticamente constante e menor do que a região de transição.

E.2 – Caracterização dinâmica dos materiais viscoelásticos

A representação por módulos complexos descreve o comportamento de materiais viscoelásticos. A função que o módulo complexo executa é equivalente à do seu correspondente da elasticidade clássica.

O módulo complexo de cisalhamento \bar{G} pode ser escrito, Espindola *et alii*, 2004, como

$$\bar{G} = G_R + iG_I, \quad (E.1)$$

sendo G_R o módulo real de cisalhamento e G_I o módulo imaginário de cisalhamento.

O fator de perda de cisalhamento (η_G) pode ser definido como

$$\eta_G = G_I / G_R \quad (E.2)$$

Então a Eq.(E.1) pode ser reescrita da forma

$$\bar{G} = G_R (1 + i\eta_G) \quad (E.3)$$

Devido à dependência dos materiais viscoelásticos, tanto na frequência como na temperatura, pode-se escrever

$$\bar{G}(\omega, T) = G_R(\omega, T)(1 + i\eta_G(\omega, T)) \quad (E.4)$$

Sabendo que ω representa a frequência e T a temperatura.

E.3 - Princípio de superposição frequência -temperatura

Uma técnica útil para representar os dados experimentais é por meio do princípio de superposição frequência–temperatura para materiais viscoelásticos lineares (Ferry, 1980; Nashif *et alii*, 1985; Espindola, 1990), o qual permite obter uma caracterização dinâmica ampla.

Os dados experimentais podem ser dispostos em curvas parciais, conforme a Fig.E.3.

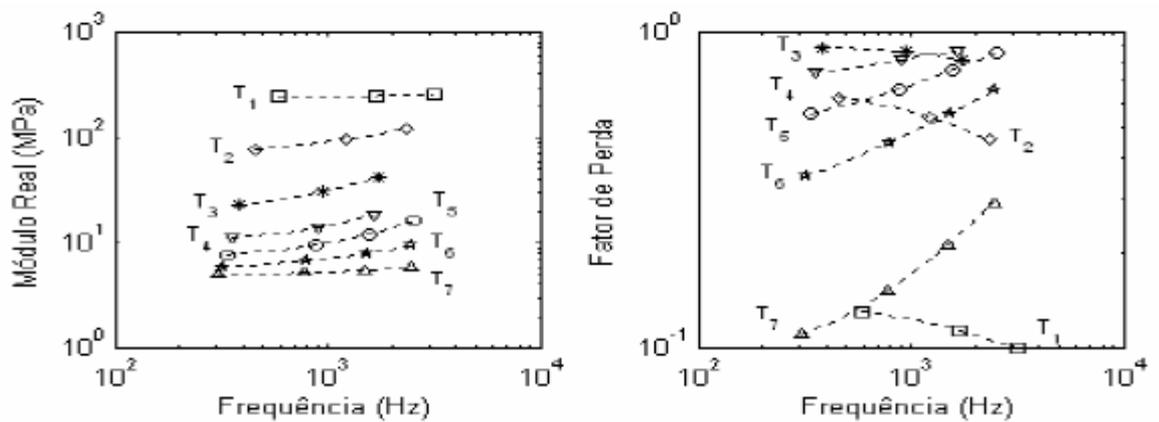


Figura E.3 - Gráficos de propriedades dinâmicas medidas: (a) módulo real, (b) fator de perda. (fontes: Nashif *et alii*, 1985; Espindola, 1990)

Podem-se aplicar as seguintes expressões para as propriedades dinâmicas:

$$G_0(\omega_r) = \left(\frac{T_0 \rho_0}{T \rho} \right) G(\omega, T) \quad (E.5)$$

$$(\eta_G)_0(\omega, T) = \eta_G(\omega, T), \quad (E.6)$$

onde:

ω é a frequência, ω_r é a frequência reduzida, T é a temperatura de referência em escala absoluta, T_0 é a temperatura de referência, ρ é a densidade e ρ_0 é a densidade para a temperatura de referência.

As propriedades dinâmicas obtidas a uma frequência ω na temperatura T são as mesmas obtidas a uma frequência composta ω_r na temperatura T_0 , exceto por um fator

$T_0\rho_0/T\rho$. Segundo Nashif, 1985, as razões T/T_0 e ρ/ρ_0 podem ser consideradas como unitárias ao longo da faixa de temperatura,

Para consolidação das curvas é importante que se determine o fator de deslocamento α_T . Estimam-se então os valores que fazem com que as curvas parciais se desloquem em frequência, e as superposições completas sejam alcançadas na temperatura de referência (Ferry, 1980). O ajuste dos dados obtido, sobre uma base empírica WLF (Williams, Landel e Ferry), é dado pela equação:

$$\log(\alpha_T) = -\frac{\phi_1(T-T_0)}{(\phi_2 + T-T_0)} \quad (E.7)$$

Onde ϕ_1 e ϕ_2 são parâmetros que dependem do material viscoelástico;

α_T é o fator deslocamento cujos valores são:

$$0 < \alpha_T < 1, \text{ para } T > T_0$$

$$\alpha_T = 1, \text{ para } T = T_0$$

$$\alpha_T > 1, \text{ para } T < T_0$$

Na Fig. E.4 tem-se um gráfico do fator de deslocamento versus temperatura absoluta.

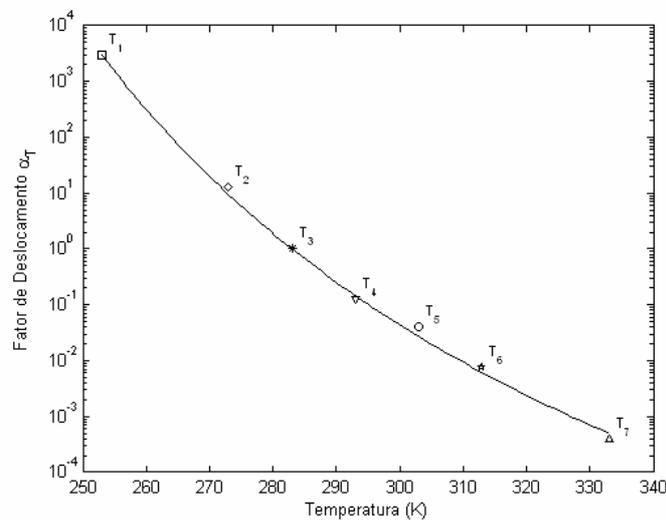


Figura E.4 - Fator de deslocamento versus temperatura (fontes: ISO 10112, 1991; Espindola 1990)

Sabe-se que o comportamento das propriedades dos materiais viscoelásticos - módulo e fator de perda - varia na temperatura e frequência de forma inversa e está baseado no princípio da superposição frequência-temperatura (PSFT), isto é, envolve efeitos combinados da temperatura e frequência. Apresenta as seguintes características:

- a) Quando as assíntotas relativas aos patamares das regiões I e III são independentes da temperatura e não importando a temperatura em que o módulo do material foi obtido, estas assíntotas inferiores e superiores apresentam os mesmos valores.
- b) Se as curvas do módulo e do fator de perda possuem as mesmas formas e estão deslocadas de um valor constante na escala logarítmica da frequência, diz-se então que o material é termo-reologicamente simples.

Obtém-se o conjunto de pontos característicos do material viscoelástico através da função deslocamento, fazendo uso de uma equação WLF (E.7). Seu comportamento é observado em duas etapas, a saber: obter os pontos da função por via experimental, determinando às informações sobre o módulo do material e então os deslocamentos horizontais são medidos em relação a uma temperatura de referência T_0 ; de posse dos valores dos deslocamentos em relação à temperatura de referência, os mesmos são dispostos em um diagrama, com mínima dispersão de pontos, versus à temperatura absoluta. Com isso, um ajuste de pontos é promovido e as propriedades dinâmicas são mostradas em forma de nomogramas, conhecidos como nomogramas de frequência reduzida - ver Fig. E.5.

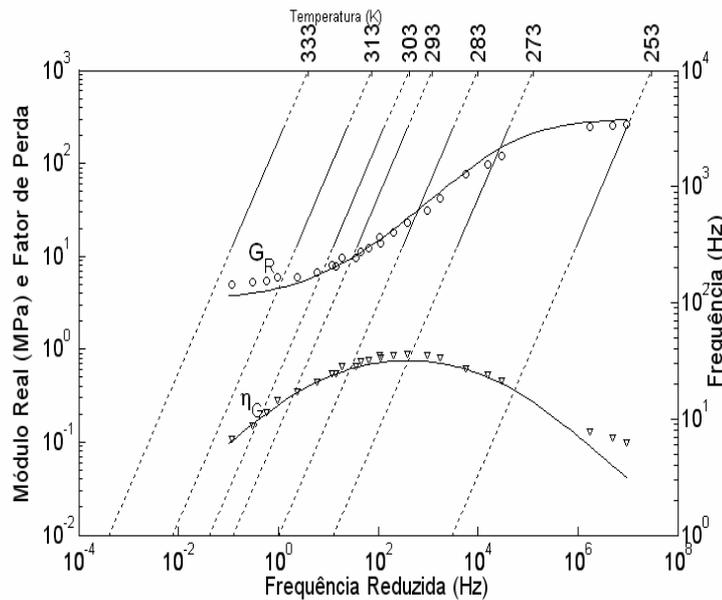


Figura E.5 - Nomograma de frequência reduzida
(fontes: ISSO 10112,1991; Espindola, 1990)

O nomograma permite uma leitura direta fora dos valores do módulo e do fator de perda, para alguma frequência e temperatura desejada, sem a necessidade de especificamente calcular frequência reduzida como um passo intermediário (ver Jones, 1980; 1990; Ferry, 1980; Nashif *et alii*, 1985; Lopes, 1989; Espindola, 1990; Espindola *et alii*, 2004).

Esses nomogramas são largamente utilizados pelos pesquisadores e fabricantes. As expressões paramétricas são usualmente ajustadas para a redução de dados e as propriedades genéricas dos módulos complexos são avaliadas, ambas analiticamente, através de gráficos.