

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
ENGENHARIA MECÂNICA

ANÁLISE DE SENSIBILIDADE TOPOLÓGICA
APLICADA EM PROBLEMA INVERSO DE CONDUTIVIDADE

Dissertação submetida à

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

para a obtenção do grau de

MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA

THIAGO GUINZANI FELIPE

FLORIANÓPOLIS, SC - BRASIL

Julho de 2006

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

ANÁLISE DE SENSIBILIDADE TOPOLÓGICA
APLICADA EM PROBLEMA INVERSO DE CONDUTIVIDADE

THIAGO GUINZANI FELIPE

Esta dissertação foi julgada adequada para obtenção do título de

MESTRE EM ENGENHARIA

ESPECIALIDADE ENGENHARIA MECÂNICA

sendo aprovada em sua forma final.

Prof. Eduardo Alberto Fancello, D.Sc. - Orientador

Prof. Antonio André Novotny, D.Sc. - Orientador

Prof. Fernando Cabral, Ph.D. - Coordenador do Curso

BANCA EXAMINADORA:

Prof. António Fábio Carvalho da Silva, Dr.Eng. - Presidente

Prof. Marcelo José Colaço, D.Sc.

Prof. Lauro Cesar Nicolazzi, Dr.Eng.

”Abra seus braços para mudança,
mas não abra mão de seus valores.”

(Dalai Lama)

À minha mãe, com muito amor.

Agradecimentos

Aos meus orientadores e amigos, Fancello e Novotny, toda minha admiração e gratidão pela sabedoria transmitida, confiança depositada e incentivo na realização deste trabalho.

Aos Profs. do GRANTE, Lauro Cesar Nicolazzi, Edison da Rosa, Paulo de Tarso R. Mendonça e José Carlos Pereira pelas contribuições indispensáveis à minha formação.

Aos Profs. Edgardo O. Taroco e Raúl A. Feijóo, do Laboratório Nacional de Computação Científica (LNCC), pela oportunidade e principalmente pelos conhecimentos transmitidos.

À minha mãe, por todo o seu amor e exemplo de determinação e competência, e a toda família Guinzani, em especial, meu avô Antônio e minha avó Pedra (in memoriam).

À tia Nira, pelo carinho e exemplo de amizade e coragem, e a toda família Pelegrin.

À Daniela Matschulat Ely, por todo amor, carinho e compreensão, e a toda sua família, Gastão, Leonor, Maira e Lelo.

Aos amigos do GRANTE, Rodrigo Roesler, Daniela A. Bento, André Labanowski Jr., Henrique Odam, Luciano Fedalto, Cleber Pagliosa, Lobão, Cristian Mangoni (in memoriam), Pedrão, Renato Rafaelli, Jorge Luiz Erthal, Pablo, Antonio Brito, Enildo, Guilherme e Baiano, pelo exemplo de dedicação, alegria e companheirismo nos momentos mais difíceis.

Aos grandes amigos Jeandré, Mano, Mateus Motta, Betina, Mônica, Diego Dall’Agnol, Lucas Antonio, Chieh, Alberto, Celo, Gilberto, Carlão Judô, Daniel Barni, Isaac Newton, Nuno, Tarifa, Chico Onzi, Rodrigo Seguezzi, Cleber Izidoro, Fabio Veronez, Banana, Thiago Daminelli e Marcelo Leite, por tudo que vocês representam para mim.

A todos os alunos e funcionários do LNCC, em especial, Paulo César, Marcelo Barros, Michael Souza, Loreci, Magno, Bidu, Jairo, Ignacio, Sebastián, Pablo, Claudia, Paula, Rosa, Cristiane, Gazoni, Arthur, Bárbara e Aline Vaz, pela grande amizade e hospitalidade.

Um agradecimento especial a André Novotny e Vanessa Seguezzi, por deixarem eu fazer parte da família.

Sumário

Lista de Figuras	vii
Simbologia	ix
Resumo	xiv
Abstract	xv
1 Introdução	1
1.1 Problemas Inversos	1
1.2 Análise de Sensibilidade Topológica	4
1.3 Objetivos do Trabalho	7
2 Análise de Sensibilidade Topológica	9
2.1 Problema Variacional	9
2.2 Definição de Derivada Topológica	11
2.3 Derivada Topológica via Análise de Sensibilidade à Mudança de Forma	12
3 Formulação do Problema Inverso e Cálculo da Derivada Topológica	15
3.1 Formulação do Problema	15
3.2 Critério de Kohn-Vogelius	18
3.3 Cálculo da Derivada Topológica	18
3.4 Derivada Topológica para Vários Experimentos	34
3.5 Formulação do Problema \mathcal{P}_2 sem Condição de Contorno Mista	34
4 Algoritmo de Reconstrução e Aspectos Computacionais	37
4.1 Formulação do Problema \mathcal{P}^*	37

4.2	Método dos Elementos Finitos	39
4.3	Algoritmo de Reconstrução	40
4.4	Aspectos Computacionais	42
5	Resultados Numéricos	43
5.1	Derivada Topológica	43
5.1.1	Exemplo 1	43
5.1.2	Exemplo 2	47
5.2	Derivada Topológica com Função Peso	52
5.2.1	Exemplo 3	54
5.2.2	Exemplo 4	56
5.2.3	Exemplo 5	59
5.3	Estimativa do Volume da Inclusão	62
5.3.1	Exemplo 6	63
6	Considerações Finais	66
6.1	Trabalhos Futuros	68
	Referências Bibliográficas	69
A	Prova do Teorema 2.1	74
B	Cálculo Tensorial e Conceitos de Mecânica do Contínuo	76
B.1	Álgebra Tensorial	76
B.2	Gradiente, Divergente e Rotacional	77
B.3	Descrição Material e Espacial	77
B.4	Definição de Velocidade	79
B.5	Derivadas Materiais	80
B.6	Teorema da Divergência	81
B.7	Teorema do Transporte de Reynolds	82
C	Análise Assintótica	84
C.1	Equação de Poisson com Fonte Constante	84
C.2	Equação de Poisson com Fonte Harmônica	88

Lista de Figuras

1.1	Mudança de Forma.	5
1.2	Mudança na Topologia.	5
2.1	Domínio original Ω (sem inclusão).	10
2.2	Domínio perturbado $\Omega_\varepsilon \cup B_\varepsilon$ (com inclusão).	11
2.3	Conceito de derivada topológica em sua versão original.	11
2.4	Conceito de derivada topológica em sua versão modificada.	12
5.1	Exemplo 1 - Fluxos de calor e corrente de convecção ao longo da fronteira $\partial\Omega$	44
5.2	Exemplo 1 - Domínio Ω^* desejado.	44
5.3	Exemplo 1 - Malha com 9394 elementos finitos.	45
5.4	Exemplo 1 - Comportamento da função de desempenho normalizada ao longo das 49 iterações.	45
5.5	Exemplo 1 - Representação 2D da $D_T(\hat{\mathbf{x}})$ na primeira iteração.	46
5.6	Exemplo 1 - Representação 3D da $D_T(\hat{\mathbf{x}})$ na primeira iteração.	46
5.7	Exemplo 1 - Distribuição de material obtida para as iterações $j = 1, 16, 32, 49$	47
5.8	Exemplo 2 - Combinação de pares de fluxos de calor \bar{q} ao longo da fronteira $\partial\Omega$	48
5.9	Exemplo 2 - Domínio Ω^* desejado.	48
5.10	Exemplo 2 - Malha com 9390 elementos finitos.	49
5.11	Exemplo 2 - Comportamento da função de desempenho normalizada ao longo das 75 iterações.	49
5.12	Exemplo 2 - Representação 2D da $D_T(\hat{\mathbf{x}})$ na primeira iteração.	50
5.13	Exemplo 2 - Representação 3D da $D_T(\hat{\mathbf{x}})$ na primeira iteração.	50
5.14	Exemplo 2 - Distribuição de material obtida para as iterações $j = 1, 25, 50, 75$	51
5.15	Função Peso $\omega(x, y)$	52

5.16 Fluxos de calor e corrente de convecção ao longo da fronteira $\partial\Omega$	53
5.17 Exemplo 3 - Domínio Ω^* desejado.	54
5.18 Exemplo 3 - Malha com 9394 elementos finitos.	54
5.19 Exemplo 3 - Comportamento da função de desempenho normalizada ao longo das 21 iterações.	55
5.20 Exemplo 3 - $D_T^\omega(\hat{\mathbf{x}})$ na primeira iteração.	55
5.21 Exemplo 3 - Distribuição de material obtida para as iterações $j = 1, 7, 14, 21$	56
5.22 Exemplo 4 - Domínio Ω^* desejado.	57
5.23 Exemplo 4 - Malha com 9370 elementos finitos.	57
5.24 Exemplo 4 - Comportamento da função de desempenho normalizada ao longo das 18 iterações.	58
5.25 Exemplo 4 - $D_T^\omega(\hat{\mathbf{x}})$ na primeira iteração.	58
5.26 Exemplo 4 - Distribuição de material obtida para as iterações $j = 1, 6, 12, 18$	59
5.27 Exemplo 5 - Domínio Ω^* desejado.	60
5.28 Exemplo 5 - Malha com 9400 elementos finitos.	60
5.29 Exemplo 5 - Comportamento da função de desempenho normalizada ao longo das 33 iterações.	61
5.30 Exemplo 5 - $D_T^\omega(\hat{\mathbf{x}})$ na primeira iteração.	61
5.31 Exemplo 5 - Distribuição de material obtida para as iterações $j = 1, 11, 22, 33$	62
5.32 Exemplo 6 - Inclusões de raio $R = 0.056, R = 0.100, R = 0.126, R = 0.149$ e $R = 0.169$, representando respectivamente, 1%, 3%, 5%, 7% e 9% do volume total de Ω^*	64
5.33 Exemplo 6 - Comportamento da função de desempenho em relação à parcela percentual de material que é transformada em inclusão.	64
5.34 Exemplo 6 - Comportamento da função de desempenho entre 0 e 10%.	65

Simbologia

$a(\cdot, \cdot)$	Operador bilinear contínuo e coersivo tal que $a(\cdot, \cdot) : \mathcal{U} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$
\mathcal{A}_1	Problema Adjunto associado ao problema \mathcal{P}_1
$\mathcal{A}_1^\varepsilon$	Problema Adjunto associado ao problema $\mathcal{P}_1^\varepsilon$
\mathcal{A}_1^τ	Problema Adjunto associado ao problema \mathcal{P}_1^τ
\mathcal{A}_2	Problema Adjunto associado ao problema \mathcal{P}_2
$\mathcal{A}_2^\varepsilon$	Problema Adjunto associado ao problema $\mathcal{P}_2^\varepsilon$
\mathcal{A}_2^τ	Problema Adjunto associado ao problema \mathcal{P}_2^τ
\mathcal{A}_N	Problema Adjunto associado ao problema \mathcal{P}_N
b	Excitação distribuída no interior do domínio (fonte de calor)
B	Representação do corpo físico real
B_ε	Região que representa a inclusão na configuração material $\Omega_\varepsilon \cup B_\varepsilon$
B_{ε_τ}	Região que representa a inclusão na configuração espacial Ω_τ
c	Constante usada para satisfazer a condição de compatibilidade no problema \mathcal{A}_N
$\text{div}(\cdot)$	Divergente de um campo escalar definido na configuração material
$\text{div}_\tau(\cdot)$	Divergente de um campo escalar definido na configuração espacial
$\text{div}_{\partial\Omega_\varepsilon}(\cdot)$	Divergente superficial de um campo escalar definido na configuração material
$\text{div}_{\partial\Omega_\tau}(\cdot)$	Divergente superficial de um campo escalar definido na configuração espacial
$d\mathbf{x}$	Diferencial material (definido em Ω)
$d\mathbf{x}_\tau$	Diferencial espacial (definido em Ω_τ)
$d\mathbf{v}_m$	Diferencial total da descrição material do campo de velocidade \mathbf{v}_m
$d\mathbf{v}_s$	Diferencial total da descrição espacial do campo de velocidade \mathbf{v}_s
$D_T^*(\hat{\mathbf{x}})$	Derivada topológica em sua versão original
$D_T(\hat{\mathbf{x}})$	Derivada topológica em sua versão modificada
$D_T^\omega(\hat{\mathbf{x}})$	Derivada topológica com a função peso incorporada

$\mathbf{f}_{h,p}$	Vetor carregamento nodal generalizado
$f(\varepsilon)$	Função regularizadora positiva, monotônica e decrescente, tal que $f(\varepsilon) \rightarrow 0$, com $\varepsilon \rightarrow 0$
\bar{h}	Coefficiente de transferência de calor por convecção
h	Tamanho relativo dos elementos finitos da malha, tal que $h \in (0, 1] \subset \mathbb{R}$
\mathbf{I}	Tensor identidade
j	j -ésima iteração do algoritmo de reconstrução
\mathbf{J}	Tensor jacobiano da transformação de Ω para Ω_τ
\mathcal{J}	Função de desempenho definida no domínio original Ω
\mathcal{J}_ε	Função de desempenho definida na configuração material $\Omega_\varepsilon \cup B_\varepsilon$
\mathcal{J}_τ	Função de desempenho definida na configuração espacial Ω_τ
k^e	Coefficiente de condutividade térmica da matriz
k^i	Coefficiente de condutividade térmica da inclusão
$\mathbf{K}_{h,p}$	Matriz de rigidez global
$l(\cdot)$	Operador linear contínuo tal que $l(\cdot) : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$
L_x	Dimensão do domínio Ω na direção x
L_y	Dimensão do domínio Ω na direção y
\mathbf{L}	Gradiente do campo de velocidade definido na configuração material
\mathbf{L}_τ	Gradiente do campo de velocidade definido na configuração espacial
\mathcal{L}_τ	Lagrangiano definido na configuração espacial
M	Número total de experimentos realizados em laboratório
\mathbf{n}	Vetor normal unitário saliente a $\partial\Omega_\varepsilon = \partial\Omega \cup \partial B_\varepsilon$
n	n -ésima solução da equação de estado
$\mathcal{O}(f(\varepsilon))$	Termos de ordem superior a $f(\varepsilon)$
p	Ordem polinomial das funções base que geram o espaço de elementos finitos
\mathcal{P}^*	Problema associado ao domínio Ω^* que possui um conjunto de inclusões
\mathcal{P}_1	Problema definido no domínio original Ω em que $u^D _{\partial\Omega} = u^*$
$\mathcal{P}_1^\varepsilon$	Problema definido na configuração material $\Omega_\varepsilon \cup B_\varepsilon$ em que $u_\varepsilon^D _{\partial\Omega} = u^*$
\mathcal{P}_1^τ	Problema definido na configuração espacial Ω_τ em que $u_\tau^D _{\partial\Omega} = u^*$
\mathcal{P}_2	Problema definido em Ω submetido à mesma excitação imposta em \mathcal{P}^*
$\mathcal{P}_2^\varepsilon$	Problema definido em $\Omega_\varepsilon \cup B_\varepsilon$ submetido à mesma excitação imposta em \mathcal{P}^*

\mathcal{P}_2^τ	Problema definido em Ω_τ submetido à mesma excitação imposta em \mathcal{P}^*
\mathcal{P}_N	Problema de Neumann definido em Ω submetido à mesma excitação imposta em \mathcal{P}^*
\bar{q}	Fluxo de calor prescrito sobre a fronteira de Neumann Γ_N
\mathbf{t}	Vetor tangente unitário
u	Solução da equação de estado definida em Ω
u^*	Campo de temperatura medido experimentalmente sobre a fronteira $\partial\Omega$ do corpo B
u_ε	Solução da equação de estado definida em $\Omega_\varepsilon \cup B_\varepsilon$
u_∞	Temperatura do meio exterior
u^D	Solução da equação de estado definida no Problema \mathcal{P}_1
u_ε^D	Solução da equação de estado definida no Problema $\mathcal{P}_1^\varepsilon$
u_τ^D	Solução da equação de estado definida no Problema \mathcal{P}_1^τ
\bar{u}^D	Valor médio da solução do Problema \mathcal{P}_1
u^N	Solução da equação de estado definida no Problema \mathcal{P}_2
u_ε^N	Solução da equação de estado definida no Problema $\mathcal{P}_2^\varepsilon$
u_τ^N	Solução da equação de estado definida no Problema \mathcal{P}_2^τ
\bar{u}^N	Valor médio da solução do Problema \mathcal{P}_2
$\bar{\mathbf{u}}_{h,p}$	Vetor de incógnitas nodais generalizado
\mathcal{U}	Conjunto das funções admissíveis definido em Ω
\mathcal{U}^*	Conjunto das funções admissíveis definido em Ω^* no Problema \mathcal{P}^*
\mathcal{U}_ε	Conjunto das funções admissíveis definido em $\Omega_\varepsilon \cup B_\varepsilon$
\mathcal{U}^D	Conjunto das funções admissíveis definido em Ω no Problema \mathcal{P}_1
$\mathcal{U}_\varepsilon^D$	Conjunto das funções admissíveis definido em $\Omega_\varepsilon \cup B_\varepsilon$ no Problema $\mathcal{P}_1^\varepsilon$
\mathcal{U}_τ^D	Conjunto das funções admissíveis definido em Ω_τ no Problema \mathcal{P}_1^τ
\mathcal{U}^N	Conjunto das funções admissíveis definido em Ω no Problema \mathcal{P}_2
$\mathcal{U}_\varepsilon^N$	Conjunto das funções admissíveis definido em $\Omega_\varepsilon \cup B_\varepsilon$ no Problema $\mathcal{P}_2^\varepsilon$
\mathcal{U}_τ^N	Conjunto das funções admissíveis definido em Ω_τ no Problema \mathcal{P}_2^τ
$\mathcal{U}_{h,p}$	Subespaço de dimensão finita das funções admissíveis ($\mathcal{U}_{h,p} \subset \mathcal{U}$)
\mathbf{v}_m	Campo de velocidade na configuração material $\Omega_\varepsilon \cup B_\varepsilon$
\mathbf{v}_s	Campo de velocidade na configuração espacial Ω_τ
\mathcal{V}	Conjunto das variações admissíveis definido em Ω
\mathcal{V}^*	Conjunto das variações admissíveis definido em Ω^* no Problema \mathcal{P}^*

\mathcal{V}_ε	Conjunto das variações admissíveis definido em $\Omega_\varepsilon \cup B_\varepsilon$
\mathcal{V}^D	Conjunto das variações admissíveis definido em Ω no Problema \mathcal{P}_1
$\mathcal{V}_\varepsilon^D$	Conjunto das variações admissíveis definido em $\Omega_\varepsilon \cup B_\varepsilon$ no Problema $\mathcal{P}_1^\varepsilon$
\mathcal{V}_τ^D	Conjunto das variações admissíveis definido em Ω_τ no Problema \mathcal{P}_1^τ
\mathcal{V}^N	Conjunto das variações admissíveis definido em Ω no Problema \mathcal{P}_2
$\mathcal{V}_\varepsilon^N$	Conjunto das variações admissíveis definido em $\Omega_\varepsilon \cup B_\varepsilon$ no Problema $\mathcal{P}_2^\varepsilon$
\mathcal{V}_τ^N	Conjunto das variações admissíveis definido em Ω_τ no Problema \mathcal{P}_2^τ
$\mathcal{V}_{h,p}$	Subespaço de dimensão finita das variações admissíveis ($\mathcal{V}_{h,p} \subset \mathcal{V}$)
\mathbf{x}	Ponto qualquer do domínio definido na configuração material
\mathbf{x}_τ	Ponto qualquer do domínio definido na configuração espacial
$\hat{\mathbf{x}}$	Centro da inclusão B_ε
$\mathcal{X}(\cdot, \cdot)$	Mapeamento suave e inversível

Alfabeto Grego:

Γ_D	Fronteira de Dirichlet
Γ_M	Fronteira de Robin
Γ_N	Fronteira de Neumann
δ_ε	Expansão uniforme imposta sobre B_ε
$\Delta(\cdot)$	Laplaceano de um campo escalar qualquer definido na configuração material
$\Delta_\tau(\cdot)$	Laplaceano de um campo escalar qualquer definido na configuração espacial
ε	Raio da inclusão na configuração material
ε_τ	Raio da inclusão na configuração espacial
λ^D	Solução da equação adjunta definida no Problema \mathcal{A}_1
λ_ε^D	Solução da equação adjunta definida no Problema $\mathcal{A}_1^\varepsilon$
λ_τ^D	Solução da equação adjunta definida no Problema \mathcal{A}_1^τ
λ^N	Solução da equação adjunta definida no Problema \mathcal{A}_2
λ_ε^N	Solução da equação adjunta definida no Problema $\mathcal{A}_2^\varepsilon$
λ_τ^N	Solução da equação adjunta definida no Problema \mathcal{A}_2^τ
Σ_ε	Tensor momento energia generalizado de Eshelby definido na configuração material
Σ_τ	Tensor momento energia generalizado de Eshelby definido na configuração espacial
τ	Parâmetro que governa a expansão uniforme δ_ε

ϕ	Campo escalar qualquer
ϕ_m	Campo escalar ϕ descrito na sua configuração material
ϕ_s	Campo escalar ϕ descrito na sua configuração espacial
$\psi(\cdot)$	Função de desempenho dependente explicitamente de um certo domínio (\cdot)
Ω	Domínio original sem inclusão
Ω^*	Região ocupada pelo corpo físico real B
Ω_ε	Região que representa a matriz na configuração material $\Omega_\varepsilon \cup B_\varepsilon$
$\Omega_{\varepsilon\tau}$	Região que representa a matriz na configuração espacial Ω_τ
Ω_τ	Domínio perturbado ou configuração espacial tal que $\Omega_\tau = \Omega_{\varepsilon\tau} \cup B_{\varepsilon\tau}$
ϖ^*	Região ocupada pelas inclusões no corpo real B
$\omega(x, y)$	Função Peso

Outros Símbolos:

$(\cdot) _e$	Termo associado ao material da matriz
$(\cdot) _i$	Termo associado ao material da inclusão
$[[\cdot]]$	Representação do salto de um certo campo (\cdot) sobre ∂B_ε , ou seja, $[[\cdot]] = (\cdot) _e - (\cdot) _i$
$\nabla(\cdot)$	Gradiente de um campo escalar qualquer definido na configuração material
$\nabla_\tau(\cdot)$	Gradiente de um campo escalar qualquer definido na configuração espacial
∂B_ε	Contorno da inclusão B_ε na configuração material $\Omega_\varepsilon \cup B_\varepsilon$
$\partial B_{\varepsilon\tau}$	Contorno da inclusão $B_{\varepsilon\tau}$ na configuração espacial Ω_τ
$\partial\Omega$	Contorno externo no domínio original Ω
$\partial\Omega_\varepsilon$	Contorno de $\Omega_\varepsilon \cup B_\varepsilon$ tal que $\partial\Omega_\varepsilon = \partial\Omega \cup \partial B_\varepsilon$
$\partial\Omega_\tau$	Contorno de Ω_τ tal que $\partial\Omega_\tau = \partial\Omega \cup \partial B_{\varepsilon\tau}$
$\partial\varpi^*$	Contorno da região ocupada pelas inclusões no corpo real B

Resumo

THIAGO GUINZANI FELIPE (2006), **Análise de Sensibilidade Topológica Aplicada em Problema Inverso de Condutividade**. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis (S.C.), Brasil.

Orientadores: Eduardo Alberto Fancello, *D.Sc.*

Antonio André Novotny, *D.Sc.*

Considera-se um problema de condução de calor em regime estacionário, caracterizado por um corpo constituído de um dado material e que apresenta em seu interior um conjunto de inclusões compostas por outro material, de modo que ambos os materiais, matriz e inclusão, possuem coeficientes de condutividade térmica diferentes. Caso este corpo seja submetido a um conjunto de excitações térmicas conhecidas, é possível medir a distribuição de temperatura desenvolvida sobre sua fronteira em cada experimento. A partir dessas distribuições de temperatura, pretende-se encontrar a posição, forma e topologia do conjunto de inclusões distribuídas no interior do corpo, caracterizando assim um Problema Inverso de Condutividade.

Este trabalho tem como principal objetivo, aplicar o conceito de Derivada Topológica em problemas inversos de caracterização de propriedades em meios heterogêneos. Esta derivada para o problema inverso em questão é calculada via Análise de Sensibilidade à Mudança de Forma tomando como função de desempenho o Critério de Kohn-Vogelius. A sensibilidade quanto à introdução de uma inclusão, obtida através da derivada topológica é então utilizada para propor um método iterativo de reconstrução que seja capaz de identificar inclusões no interior de um domínio.

Abstract

THIAGO GUINZANI FELIPE (2006), **Topological Sensitivity Analysis Applied to Inverse Conductivity Problem**. Master Dissertation. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis (S.C.), Brazil.

Advisors: Eduardo Alberto Fancello, *D.Sc.*

Antonio André Novotny, *D.Sc.*

Let us consider a steady-state heat conduction problem characterized by a body constituted by a specific material, that has in its interior a set of inclusions composed of another material, so that both materials, bulk material and inclusion, have different thermal conductivity coefficients. In the case of this body be submitted to a set of specific thermal excitations, it is possible to measure the distribution of temperature developed on its boundary in each laboratory experiment. From these temperature measurements, it is intended to find the position, shape and topology of the set of inclusions distributed inside the body, thus characterizing an Inverse Conductivity Problem.

The main goal of this work is applying the concept of Topological Derivative in Inverse Problems of characterization of properties in heterogeneous media. This derivative is calculated by the Topological-Shape Sensitivity Method taking the Kohn-Vogelius Criterion as a performance function. The sensitivity of the problem by the introduction of an inclusion, obtained through the topological derivative then is used to propose an iterative reconstruction method that is able to identify inclusions inside a domain.

Capítulo 1

Introdução

O cálculo da sensibilidade ou Análise de Sensibilidade de uma função de desempenho associada a um modelo significa avaliar a variação desta função quando seu domínio de definição, sua fronteira ou algum parâmetro que o controla sofre alguma perturbação. Este tipo de cálculo é objeto de estudo em várias áreas de pesquisa como Otimização Topológica, Otimização de Forma, Problemas Inversos, entre outros. Este trabalho focaliza dois assuntos citados acima: Problemas Inversos e Análise de Sensibilidade, cujas idéias são apresentadas a seguir.

1.1 Problemas Inversos

Fenômenos físicos governados por conjuntos de equações são chamados de **problemas diretos** quando, através de suas causas, deseja-se encontrar os efeitos produzidos. Uma análise direta da distribuição de uma quantidade ϕ em um domínio Ω só é possível, quando as seguintes informações forem conhecidas:

- O domínio Ω e sua fronteira $\partial\Omega$;
- Sistema de equações que governa o fenômeno, ou seja, a distribuição do campo ϕ ,

$$L(k)\phi = f ,$$

sendo que L , k e f denotam respectivamente, o operador, as propriedades materiais e a excitação distribuída em Ω ou sobre $\partial\Omega$;

- Distribuição das propriedades materiais k ;
- Excitações f distribuídas no domínio Ω ;
- Condições de contorno sobre a fronteira $\partial\Omega$ e condições iniciais, se necessário.

Quando todas estas informações forem disponíveis, a distribuição do campo ϕ pode ser obtida resolvendo o sistema de equações. Porém, caso um dos item descritos anteriormente não seja conhecido, o problema deixa de ser bem definido, isto é, obter a distribuição do campo ϕ ou garantir que esta distribuição seja única pode se tornar impossível.

Considera-se agora um outro problema onde, a partir de informações do próprio campo ϕ , busca-se encontrar o conjunto de equações que governam o fenômeno físico ou estimar um dos parâmetros que o descreve, tais como a forma ou a topologia do domínio Ω , a distribuição das propriedades materiais k , condições de contorno sobre $\partial\Omega$ ou condições iniciais. A resolução desse tipo de problema é, em geral, mais complicada que a do problema direto pois sua incógnita é justamente uma informação necessária para que o modelo do fenômeno seja completamente definido. Esta é a principal característica de uma classe de problemas denominada de **problemas inversos**, nos quais deseja-se encontrar as causas de um dado fenômeno, através de observações dos efeitos produzidos (ver, por exemplo, Bertero & Boccacci [4], Isakov [28], Ramm [42], Santamarina & Fratta [43], Tarantola [49], entre outros).

Em geral, um problema inverso não possui informação suficiente capaz de descrevê-lo completamente, podendo lhe faltar condições que garantam a existência, unicidade ou estabilidade de solução, tornando-o um problema mal-posto. Deste modo, informações adicionais a respeito da distribuição do campo ϕ , geralmente obtidas através de experimentos em laboratório, devem ser acrescentadas à análise inversa para permitir encontrar sua solução. Porém, existência e/ou unicidade desta só são recuperadas com uma quantidade suficiente de informação adicional. Mesmo quando isto acontece, o problema pode sofrer de falta de estabilidade: a solução obtida é muito sensível à perturbações nas informações adicionadas ao problema. Em outras palavras, um pequeno ruído incorporado à informação adicional, produz respostas diferentes da solução correta.

Embora o interesse pelo estudo de problemas inversos seja relativamente antigo, importantes avanços foram alcançados nos últimos anos tanto em aspectos teóricos quanto em suas

possíveis aplicações. Existem inúmeros exemplos de problemas inversos em diversas áreas de pesquisa em ciência e engenharia, e a resolução de problemas desta natureza contribui significativamente para o desenvolvimento dessas áreas.

Seja uma onda acústica propagando-se em um meio elástico onde um obstáculo é capaz de provocar sua dispersão. Este campo de ondas dispersas pode ser medido distante desse obstáculo. Neste caso, o problema inverso consiste em encontrar a forma e as propriedades materiais do obstáculo através de observações do campo de ondas dispersas, juntamente com informações sobre a fonte de emissão dessas ondas. Este tipo de problema torna-se interessante na identificação de aeronaves e mísseis, objetos imersos na água como submarinos e cardumes, entre outros. De maneira semelhante, em geofísica, pode-se emitir ondas em vários pontos da superfície terrestre e colher o campo das ondas dispersas na mesma superfície para encontrar algum tipo de anomalia no subsolo, como poços de petróleo, lençóis freáticos, minas, cavernas e jazidas minerais.

Em medicina, é de fundamental interesse distinguir diferentes tipos de tecidos, órgãos e ossos, bem como encontrar nódulos, tumores e outras anomalias dentro do corpo humano, sem o paciente precisar ser submetido a algum procedimento cirúrgico. A tomografia computadorizada utiliza a emissão de raio-X na geração de imagens tridimensionais do interior do corpo humano, a partir do processamento de imagens bidimensionais capturadas por sensores de radiação posicionados no lado oposto à fonte de raio-X. O problema inverso neste caso é, justamente, encontrar a distribuição tridimensional de órgãos e tecidos no interior do corpo que produzem as imagens planas capturadas pelos sensores de radiação.

De forma semelhante, a tomografia por impedância elétrica produz imagens de órgãos e tecidos no interior do corpo humano, utilizando eletrodos colados sobre a pele, que emitem corrente elétrica e capturam o potencial elétrico resultante, partindo do princípio que tecidos orgânicos diferentes possuem impedância e condutividade elétrica diferentes. A formulação matemática deste problema foi proposta em 1980 por Calderón [6].

O que torna o estudo de problemas inversos interessante é a possibilidade de encontrar obstáculos, anomalias, propriedades no interior de um determinado meio sem precisar invadi-lo, bem como descobrir a origem de fenômenos ocorridos no passado.

1.2 Análise de Sensibilidade Topológica

Diversos fenômenos físicos são caracterizados por alterações na configuração de seu domínio. É possível observar em um simples ensaio de tração de um corpo de prova, mudanças nas propriedades do material, na sua forma e também na sua topologia. Por exemplo, quando este corpo é solicitado acima de seu limite de escoamento, o material começa a plastificar modificando suas propriedades físicas (encruamento ou amolecimento). O início da estricção é caracterizado pela modificação na forma do corpo causada por uma instabilidade na sua microestrutura que gera uma plastificação localizada na peça. Aumentando a solicitação, pode-se notar também a formação de pequenos vazios e posteriormente seus coalescimentos, representando assim, mudanças na sua topologia.

No início dos anos 70 o estudo da sensibilidade em relação a perturbações na fronteira do domínio (mudança na sua forma) tornou-se área de pesquisa da escola matemática francesa. A publicação da *Thèse d'état, Sur le Contrôle par un Domaine Géométrique*, de Murat & Simon [31] forneceu as bases matemáticas para a Análise de Sensibilidade à Mudança de Forma que permite calcular a sensibilidade de um problema quando o contorno do domínio em questão é modificado. Embora tendo suas bases matemáticas bem postas (ver, por exemplo, Céa [8]; Fancello [13]; Haug, Choi & Komkov [25]; Haug & Céa [26]; Pironneau [40]; Sokolowski & Zolésio [47]; Taroco, Buscaglia & Feijóo [48] e Zolésio [51]) a Análise de Sensibilidade à Mudança de Forma possui o inconveniente de permitir mudanças apenas na fronteira da sua configuração inicial, exigindo hipóteses prévias sobre a topologia do domínio em estudo, tornando-a assim restritiva em muitas aplicações. Esta característica pode ser observada de maneira esquemática na Fig. (1.1), onde é tomado como exemplo um processo de modificação de forma, no qual é possível perceber claramente a mudança na forma do domínio preservando sua topologia.

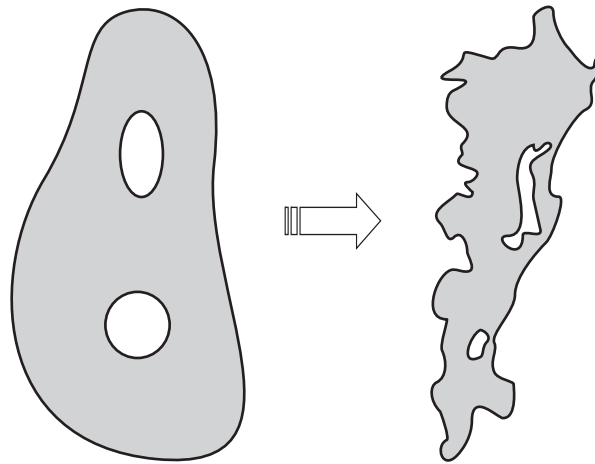


Figura 1.1: Mudança de Forma.

O estudo do problema quando o próprio domínio sofre algum tipo de perturbação teve um grande salto na década de 80. Através de modificações na topologia, o controle por um domínio geométrico é realizado de maneira mais flexível, o que permite obter a configuração desejada mesmo partindo-se de uma morfologia inicial grosseira, sensivelmente distante da ótima. Isto pode ser visto na Fig. (1.2), onde é mostrado um processo no qual percebe-se uma modificação tanto na forma quanto na topologia do domínio em estudo. Neste caso, esta modificação é caracterizada pela introdução de furos não existentes na sua configuração original.

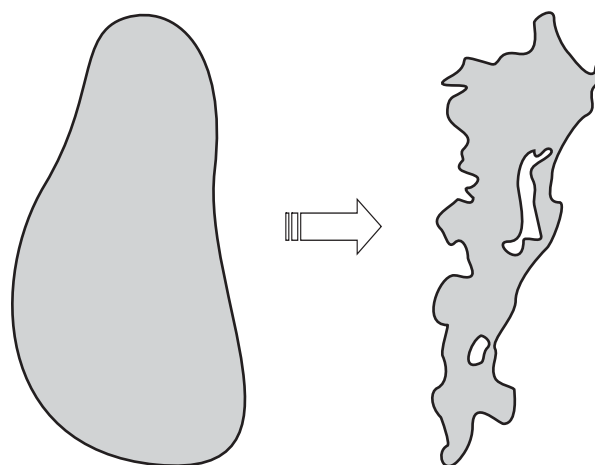


Figura 1.2: Mudança na Topologia.

Mais recentemente, nos trabalhos de Cέα et al. [9], Eschenauer et al. [11], Garreau

et al. [18] e [19], Lewiński & Sokolowski [30], Schumacher [44] e Sokolowski & Zochowski [45] e [46], foi apresentada uma maneira possível de obter em problemas de otimização, tanto a forma quanto a topologia desejada através da Análise de Sensibilidade Topológica. Esta sensibilidade resulta em uma função escalar, denominada **Derivada Topológica** que, para cada ponto do domínio de definição do problema, fornece a sensibilidade da função de desempenho quando um orifício infinitesimal é criado.

Embora este conceito seja extremamente geral, suas aplicações podem tornar-se de certa forma restritivas devido à dificuldade matemática de se obter a derivada topológica, segundo as abordagens propostas nos trabalhos antes mencionados.

No trabalho de Novotny [32] foi proposta uma definição alternativa para a derivada topológica que permite utilizar corretamente os resultados da análise de sensibilidade à mudança de forma, estabelecendo a relação entre ambos os conceitos. Esta relação, formalmente demonstrada através de um teorema, conduz a uma nova forma de calcular a derivada topológica (ver trabalhos de Novotny et al. [34, 35] e Feijóo et al. [16, 17]), utilizando o ferramental matemático desenvolvido no início para a Mecânica do Contínuo e mais recentemente para a Análise de Sensibilidade à Mudança de Forma. A partir desta nova definição, o cálculo da derivada topológica resulta mais simples e geral que as demais encontradas na literatura.

A definição de derivada topológica pode ser estendida para o cálculo da sensibilidade de um problema ao introduzir não mais um furo, mas sim uma pequena inclusão sobre uma matriz originalmente homogênea. Esta abordagem permite que a derivada topológica, além de ser utilizada como ferramenta de otimização topológica (ver, por exemplo, Eschenauer & Olhoff [10]) possa ser aplicada também no contexto de problemas inversos, sobretudo na identificação de falhas em componentes mecânicos e caracterização de propriedades em meios heterogêneos (ver, por exemplo, Amstutz, Horchani & Masmoudi [1], Bui [5], Feijóo [14], Guinzani et al. [22] e Novotny et al. [36]), onde o próprio domínio de definição do problema, bem como os parâmetros distribuídos ao longo do mesmo, são as incógnitas. Em outras palavras, pretende-se encontrar a distribuição de um dado material sobre uma matriz composta de outro material, de modo que a função de desempenho atinja um extremo, satisfazendo as restrições convenientes.

1.3 Objetivos do Trabalho

Este trabalho tem como principal objetivo aplicar o conceito de derivada topológica em problemas inversos de caracterização de propriedades em meios heterogêneos. Seja um problema de condução de calor em regime estacionário, caracterizado por um corpo constituído de um certo material e que apresenta em seu interior um conjunto de inclusões formadas por outro material, de modo que ambos os materiais apresentam coeficientes de condutividade térmica diferentes. Caso este corpo seja submetido a um conjunto de excitações térmicas conhecidas, é possível medir a distribuição de temperatura desenvolvida sobre sua fronteira em cada experimento. A partir dessas distribuições de temperatura, deseja-se portanto encontrar a posição, forma e topologia do conjunto de inclusões distribuídas no interior do corpo em estudo, caracterizando assim um Problema Inverso de Condutividade.

A derivada topológica para o problema em estudo será calculada via Análise de Sensibilidade à Mudança de Forma tomando como função de desempenho o Critério de Kohn-Vogelius (Kohn & Vogelius [29]). A sensibilidade quanto à introdução de uma inclusão, obtida através da derivada topológica, será então utilizada para propor um método iterativo de reconstrução que seja capaz de identificar um conjunto de inclusões no interior de um domínio, a partir de informações de temperatura colhidas sobre a fronteira deste domínio.

A análise de sensibilidade topológica será apresentada no Capítulo 2, no contexto de problemas variacionais lineares. A derivada topológica será então definida na sua forma original e de maneira alternativa, via análise de sensibilidade à mudança de forma permitindo assim estabelecer a relação entre esses dois conceitos. A seguir, no Capítulo 3, será apresentada a formulação do problema inverso em estudo, bem como o Critério de Kohn-Vogelius, utilizado como função de desempenho. Em seguida, será realizada a análise de sensibilidade à mudança de forma para o cálculo da derivada topológica no problema de condução de calor em regime estacionário. No Capítulo 4, é mostrado o algoritmo iterativo de reconstrução, que visa minimizar o Critério de Kohn-Vogelius utilizando a derivada topológica como direção de descida e assim, encontrar a solução do problema inverso. São também discutidos nesse capítulo alguns aspectos computacionais referente à construção do algoritmos tais como, método numérico e ambiente de programação utilizados. No Capítulo 5, são apresentados alguns experimentos numéricos, mostrando que a metodologia desenvolvida é capaz

de identificar a posição e a forma de um conjunto desconhecido de inclusões no interior de um domínio, a partir de informações de temperatura obtidas sobre a fronteira deste domínio. No Capítulo 6, são mostradas as conclusões do trabalho sendo discutidas as contribuições do mesmo para a área de modelagem computacional. Também são apresentados nesse capítulo, problemas em aberto a serem estudados em trabalhos futuros.

Capítulo 2

Análise de Sensibilidade Topológica

Como já mencionado, a derivada topológica é uma função escalar definida em todo o domínio que fornece a sensibilidade do problema quando um pequeno furo é criado. Esta definição, como apresentada neste capítulo, pode ser estendida para o cálculo da sensibilidade do problema quando seu domínio, constituído por um material homogêneo, é perturbado pela introdução de uma inclusão de material diferente. No entanto, é importante ressaltar que ambas as definições, embora apresentem formalismos matemáticos análogos, diferem em suas interpretações físicas e sobretudo em suas possíveis aplicações.

2.1 Problema Variacional

A modelagem matemática de fenômenos físicos é usualmente formulada por equações diferenciais parciais (problema de valor no contorno) ou por equações variacionais (problema variacional) definidas em um certo domínio. Esta última maneira de escrever as equações permite trabalhar em espaços de funções com exigências mais fracas de regularidade e estabelecer mais facilmente condições de existência e unicidade da solução do problema. De fato, nos trabalhos de Oden & Reddy [39] e Quarteroni & Valli [41], por exemplo, são tratadas as questões de equivalência entre formulações diferenciais e variacionais, bem como as questões de existência e unicidade da solução das equações escritas na forma abstrata.

Perturbações introduzidas no domínio onde as equações variacionais estão definidas provocam alterações tanto nos termos integrandos quanto no próprio domínio de integração. A análise de sensibilidade topológica, através do cálculo da derivada topológica, permite de-

terminar a sensibilidade associada à função de desempenho, restrições e à própria equação de estado, quando o referido domínio sofre mudanças em sua topologia.

Seja, portanto, um problema físico descrito através de uma equação de estado definida em um domínio aberto e limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Esta equação de estado representa um corpo submetido a uma excitação b distribuída em seu domínio Ω e a condições de contorno sobre sua fronteira $\partial\Omega$, suficientemente regular. Deseja-se então, encontrar uma função u que satisfaça tal equação de estado, bem como as condições de contorno do problema (ver Fig. (2.1)).

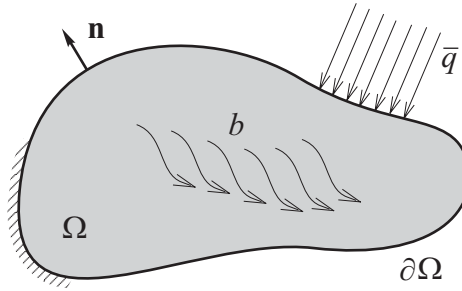


Figura 2.1: Domínio original Ω (sem inclusão).

Em particular, admite-se que a equação de estado deste problema pode ser escrita na seguinte forma variacional: determinar $u \in \mathcal{U}(\Omega)$, tal que

$$a(u, \eta) = l(\eta) \quad \forall \eta \in \mathcal{V}(\Omega), \quad (2.1)$$

onde $a(\cdot, \cdot) : \mathcal{U} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ é um operador bilinear contínuo e coercivo enquanto $l(\cdot) : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ é um funcional linear contínuo sendo $\mathcal{U} \subset H^1(\Omega)$ e $\mathcal{V} \subset H^1(\Omega)$, os conjuntos das funções e das variações admissíveis definidos no domínio Ω , respectivamente.

Perturbando o domínio Ω com a introdução de uma inclusão B_ε que consiste em uma bola de raio ε centrada no ponto $\hat{\mathbf{x}} \in \Omega$, tem-se um novo domínio $\Omega_\varepsilon \cup B_\varepsilon \subset \mathbb{R}^N$, tal que $\Omega_\varepsilon = \Omega - B_\varepsilon$ e cujo contorno é dado por $\partial\Omega_\varepsilon = \partial\Omega \cup \partial B_\varepsilon$, como mostrado na Fig. (2.2), onde Ω_ε representa a matriz e B_ε representa a inclusão. Da mesma forma que em Ω , tem-se agora um problema definido em $\Omega_\varepsilon \cup B_\varepsilon$ cuja equação de estado pode ser escrita na seguinte maneira: determinar $u_\varepsilon \in \mathcal{U}_\varepsilon(\Omega_\varepsilon \cup B_\varepsilon)$ tal que

$$a_\varepsilon(u_\varepsilon, \eta) = l_\varepsilon(\eta) \quad \forall \eta \in \mathcal{V}_\varepsilon(\Omega_\varepsilon \cup B_\varepsilon). \quad (2.2)$$

Os conjuntos $\mathcal{U}_\varepsilon \subset H^1(\Omega_\varepsilon \cup B_\varepsilon)$ e $\mathcal{V}_\varepsilon \subset H^1(\Omega_\varepsilon \cup B_\varepsilon)$ contém, respectivamente, as funções e as variações admissíveis definidos no domínio com inclusão $\Omega_\varepsilon \cup B_\varepsilon$.

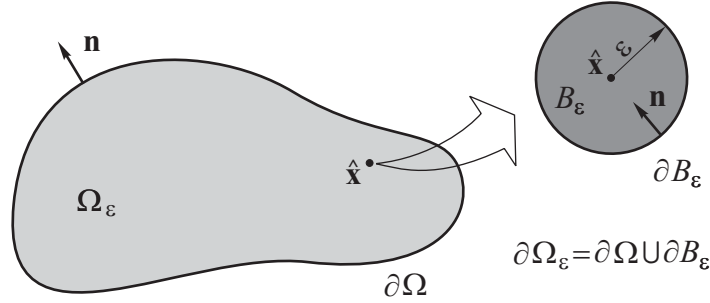


Figura 2.2: Domínio perturbado $\Omega_\varepsilon \cup B_\varepsilon$ (com inclusão).

2.2 Definição de Derivada Topológica

Observando as Eqs. (2.1) e (2.2), tem-se dois problemas definidos respectivamente nos domínios Ω e $\Omega_\varepsilon \cup B_\varepsilon$. Considerando agora uma função de desempenho $\psi(\cdot)$ definida tanto em Ω quanto em $\Omega_\varepsilon \cup B_\varepsilon$, como visto na Fig. (2.3), a derivada topológica pode ser definida da seguinte maneira (ver, por exemplo, Garreau et al. 1998 [18]):

$$D_T^*(\hat{\mathbf{x}}) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\psi(\Omega_\varepsilon \cup B_\varepsilon) - \psi(\Omega)}{f(\varepsilon)}, \quad (2.3)$$

onde $f(\varepsilon)$ é uma função regularizadora positiva, monotônica e decrescente, tal que $f(\varepsilon) \rightarrow 0$ com $\varepsilon \rightarrow 0$ ($0 \leq \varepsilon \leq 1$) e que depende do problema em análise.

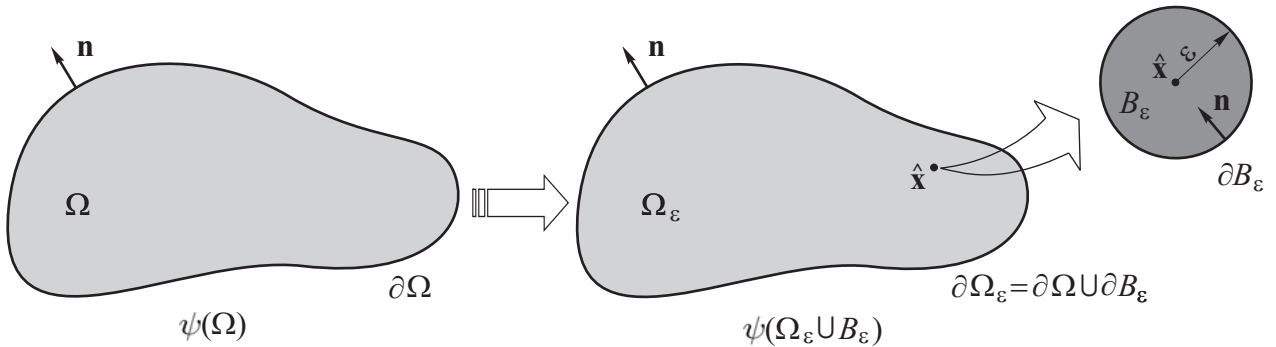


Figura 2.3: Conceito de derivada topológica em sua versão original.

O grande inconveniente de trabalhar com a Eq. (2.3) é que não é possível estabelecer um homeomorfismo entre os domínios Ω e $\Omega_\varepsilon \cup B_\varepsilon$ quando uma inclusão é introduzida. Em outras

palavras, como estes domínios não possuem a mesma topologia, não se pode construir um mapeamento um para um contínuo e inversível entre eles. Sendo assim, a derivada topológica não pode ser calculada de forma convencional. No entanto, na seção seguinte é apresentada uma maneira alternativa de definir a derivada topológica capaz de contornar este problema.

2.3 Derivada Topológica via Análise de Sensibilidade à Mudança de Forma

No trabalho de Novotny et al. [34] foi proposto um novo método de cálculo da derivada topológica denominado *Topological-Shape Sensitivity Method*, que permite utilizar os resultados da análise de sensibilidade à mudança de forma, e assim, estabelecer a relação entre ambos os conceitos: análise de sensibilidade à mudança de forma e a derivada topológica. Este trabalho possibilitou o cálculo da derivada topológica de forma mais simples, fazendo uso de todo um ferramental matemático clássico e amplamente disponível na literatura corrente.

A idéia principal do trabalho citado anteriormente é partir de um problema em que a inclusão B_ε já exista e perturbá-la mediante uma expansão uniforme δ_ε originando um novo domínio $\Omega_{\varepsilon+\delta_\varepsilon} \cup B_{\varepsilon+\delta_\varepsilon}$, com contorno denotado por $\partial\Omega_{\varepsilon+\delta_\varepsilon} = \partial\Omega \cup \partial B_{\varepsilon+\delta_\varepsilon}$ (ver Fig. (2.4)). Assim, a derivada topológica pode ser redefinida da seguinte maneira:

$$D_T(\hat{\mathbf{x}}) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \lim_{\delta_\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\psi(\Omega_{\varepsilon+\delta_\varepsilon} \cup B_{\varepsilon+\delta_\varepsilon}) - \psi(\Omega_\varepsilon \cup B_\varepsilon)}{f(\varepsilon + \delta_\varepsilon) - f(\varepsilon)} \right\}. \tag{2.4}$$

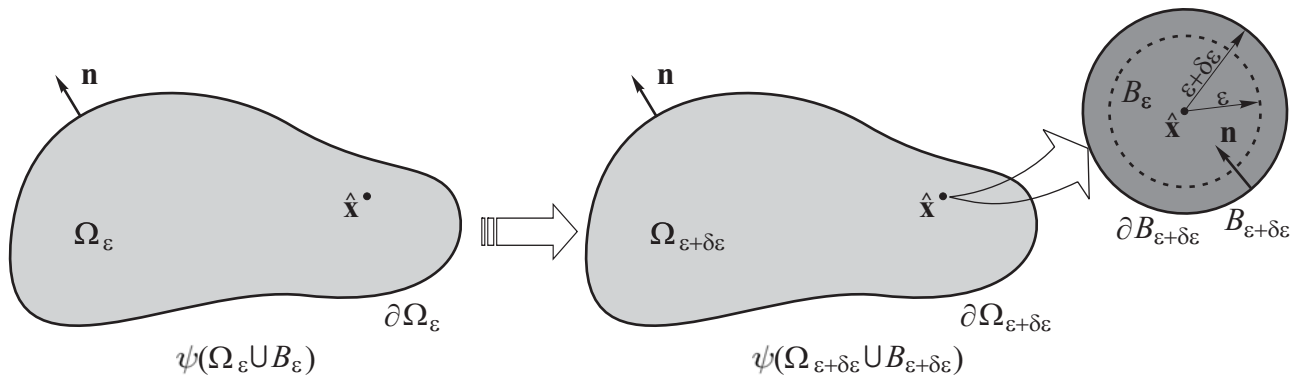


Figura 2.4: Conceito de derivada topológica em sua versão modificada.

Observa-se que o termo entre chaves na Eq. (2.4), fornece apenas a sensibilidade do problema quando a inclusão B_ε aumenta de tamanho. Por outro lado, o limite que leva o raio $\varepsilon \rightarrow 0$, incorpora o conceito de criação desta inclusão no ponto $\widehat{\mathbf{x}}$.

A grande vantagem de se trabalhar com essa última definição da derivada topológica é que, através dela, pode-se estabelecer um homeomorfismo entre $\Omega_{\varepsilon+\delta_\varepsilon} \cup B_{\varepsilon+\delta_\varepsilon}$ e $\Omega_\varepsilon \cup B_\varepsilon$, e conseqüentemente, empregar os conceitos de análise de sensibilidade à mudança de forma nesse contexto. De fato, a perturbação sofrida por $\Omega_\varepsilon \cup B_\varepsilon$ é dada por uma expansão uniforme δ_ε na inclusão B_ε , que preserva sua topologia. Desta forma, o domínio $\Omega_{\varepsilon+\delta_\varepsilon} \cup B_{\varepsilon+\delta_\varepsilon}$, bem como seu contorno $\partial\Omega_{\varepsilon+\delta_\varepsilon}$, podem ser escritos através de um parâmetro de controle $\tau \in \mathbb{R}^+$ da seguinte maneira (ver apêndice B, seção B.3)

$$\Omega_\tau = \Omega_{\varepsilon+\delta_\varepsilon} \cup B_{\varepsilon+\delta_\varepsilon} \quad \text{e} \quad \partial\Omega_\tau = \partial\Omega_{\varepsilon+\delta_\varepsilon} = \partial\Omega \cup \partial B_{\varepsilon+\delta_\varepsilon} . \quad (2.5)$$

No trabalho de Zolésio [51] foi demonstrado que nos cálculos de sensibilidade, apenas a componente da velocidade \mathbf{v}_m na direção normal à fronteira $\partial\Omega_\varepsilon = \partial\Omega \cup \partial B_\varepsilon$ produz uma mudança efetiva na forma do corpo. Sendo assim, considerando que \mathbf{v}_m define uma *ação de mudança de forma* representada pela expansão uniforme δ_ε , como indicado na Fig. (2.4), este campo de velocidade pode ser definido como

$$\begin{cases} \mathbf{v}_m = -\mathbf{n} & \text{sobre } \partial B_\varepsilon \\ \mathbf{v}_m = \mathbf{0} & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} , \quad (2.6)$$

onde \mathbf{n} é o vetor normal unitário saliente a $\partial\Omega_\varepsilon = \partial\Omega \cup \partial B_\varepsilon$ (ver Fig. (2.2)). De acordo com a escolha do campo de velocidade descrita na Eq. (2.6), o mapeamento suave e inversível $\mathcal{X}(\mathbf{x}, \tau)$ pode ser explicitado da seguinte forma

$$\mathbf{x}_\tau = \mathcal{X}(\mathbf{x}, \tau) = \mathbf{x} + \tau \mathbf{v}_m \quad \implies \quad \mathbf{x}_\tau = \mathbf{x} - \tau \mathbf{n} \quad \forall \mathbf{x} \in \partial B_\varepsilon . \quad (2.7)$$

Considerando que $\delta_\varepsilon = \|\mathbf{x}_\tau - \mathbf{x}\|$ com $\mathbf{x} \in \partial B_\varepsilon$ e $\mathbf{x}_\tau \in \partial B_{\varepsilon+\delta_\varepsilon}$ e observando as Eqs. (2.5) e (2.7), é possível associar a perturbação δ_ε com o parâmetro de controle τ como segue

$$\delta_\varepsilon = \|\tau \mathbf{n}\| = \tau , \quad (2.8)$$

e reescrever a Eq. (2.5) da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \Omega_\tau &= \Omega_{\varepsilon+\delta_\varepsilon} \cup B_{\varepsilon+\delta_\varepsilon} = \Omega_{\varepsilon+\tau} \cup B_{\varepsilon+\tau} = \Omega_{\varepsilon_\tau} \cup B_{\varepsilon_\tau} \quad \text{e} \\ \partial\Omega_\tau &= \partial\Omega \cup \partial B_{\varepsilon+\delta_\varepsilon} = \partial\Omega \cup \partial B_{\varepsilon+\tau} = \partial\Omega \cup \partial B_{\varepsilon_\tau} , \end{aligned} \quad (2.9)$$

onde

$$\begin{aligned} \Omega_{\varepsilon\tau}|_{\tau=0} = \Omega_\varepsilon \quad \text{e} \quad B_{\varepsilon\tau}|_{\tau=0} = B_\varepsilon &\implies \Omega_\tau|_{\tau=0} = \Omega_\varepsilon \cup B_\varepsilon \\ \partial B_{\varepsilon\tau}|_{\tau=0} = \partial B_\varepsilon &\implies \partial\Omega_\tau|_{\tau=0} = \partial\Omega_\varepsilon = \partial\Omega \cup \partial B_\varepsilon \end{aligned}, \quad (2.10)$$

O principal resultado obtido em [34] é dado pelo teorema mostrado a seguir, que demonstra a equivalência entre as definições de derivada topológica dadas pelas Eqs. (2.3) e (2.4) (para maiores detalhes sobre Análise de Sensibilidade Topológica e suas aplicações, ver [32]):

Teorema 2.1 *Seja $f(\varepsilon)$ uma função regularizadora escolhida de modo que $0 < |D_T^*(\hat{\mathbf{x}})| < \infty$. Então as definições de derivada topológica dadas pelas Eqs. (2.3) e (2.4) são equivalentes, podendo ainda ser escrita como*

$$D_T^*(\hat{\mathbf{x}}) = D_T(\hat{\mathbf{x}}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{f'(\varepsilon)} \frac{D}{D\tau} \psi(\Omega_\tau) \Big|_{\tau=0}, \quad (2.11)$$

sendo $f'(\varepsilon)$ a derivada da função $f(\varepsilon)$ em relação a ε e

$$\frac{D}{D\tau} \psi(\Omega_\tau) \Big|_{\tau=0} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\psi(\Omega_\tau) - \psi(\Omega_\varepsilon \cup B_\varepsilon)}{\tau} \quad (2.12)$$

a sensibilidade da função de desempenho em relação à perturbação do domínio caracterizada pelo campo de velocidade \mathbf{v} definido através da Eq. (2.6).

Prova. A prova deste teorema está dividida em duas partes:

$$\text{Parte 1 : } D_T^*(\hat{\mathbf{x}}) = D_T(\hat{\mathbf{x}}),$$

$$\text{Parte 2 : } D_T(\hat{\mathbf{x}}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{f'(\varepsilon)} \frac{D}{D\tau} \psi(\Omega_\tau) \Big|_{\tau=0},$$

e ambas são apresentadas no Apêndice A deste trabalho ■

Este teorema mostra que a derivada topológica pode ser obtida através de duas operações. A primeira consiste na análise de sensibilidade à mudança de forma da função de desempenho (*Topological-Shape Sensitivity Method*) dada pela Eq. (2.12). A segunda operação consiste em fazer a Análise Assintótica em relação ao parâmetro ε , ou seja, tomar o limite do raio $\varepsilon \rightarrow 0$ na Eq. (2.11).

Estas operações serão particularizadas no próximo capítulo para o problema de condução de calor em regime estacionário, tomando como função de desempenho o Critério de Kohn-Vogelius.

Capítulo 3

Formulação do Problema Inverso e Cálculo da Derivada Topológica

A análise de sensibilidade topológica pode ser naturalmente aplicada em problemas inversos de identificação de falhas em componentes mecânicos, caracterização de propriedades em meios heterogêneos ou, ainda, na modelagem de fenômenos físicos onde há uma mudança nas propriedades do material: processos de danificação, plasticidade, cavitação, mudança de fase, etc. Em outras palavras, a aplicação deste conceito em problemas inversos torna-se particularmente interessante quando se deseja calcular a sensibilidade do problema devido a mudanças nas propriedades físicas do meio.

Neste capítulo, a análise de sensibilidade topológica é aplicada no problema de condução estacionária de calor em sólidos bidimensionais considerando o Critério de Kohn-Vogelius como função de desempenho. A derivada topológica é calculada via análise de sensibilidade à mudança de forma, utilizando conceitos de mecânica do contínuo tais como derivada material de campos espaciais e o Teorema do Transporte de Reynolds. São apresentadas também, algumas características interessantes do Critério de Kohn-Vogelius e como este pode ser adotado como função de desempenho na resolução de uma vasta classe de problemas inversos.

3.1 Formulação do Problema

Considere um corpo físico real B , ocupando uma região Ω^* com fronteira $\partial\Omega$, que possui um conjunto desconhecido de inclusões ϖ^* no seu interior, submetido a uma excitação b

distribuída em Ω^* , a um fluxo de calor \bar{q} na fronteira de Neumann Γ_N e a uma temperatura do meio exterior u_∞ prescrita na fronteira Mista Γ_M , sendo \bar{h} o coeficiente de transferência de calor por convecção e $\Gamma_N \cup \Gamma_M = \partial\Omega$. Este corpo desenvolve um campo de temperatura u^* que pode ser medido experimentalmente sobre a fronteira $\partial\Omega$ em situações práticas. Este problema é denominado \mathcal{P}^* e a partir de seus dados, resolve-se dois problemas auxiliares:

Problema \mathcal{P}_1

Seja um sólido com coeficiente de condutividade térmica k^e constante, que ocupa uma região Ω no espaço com fronteira $\partial\Omega$, submetido a uma excitação b distribuída em Ω e a um valor de temperatura prescrita u^* sobre toda a fronteira $\partial\Omega$. A forma variacional deste problema pode ser escrita da seguinte maneira: determinar a solução $u^D \in \mathcal{U}^D$, tal que

$$\int_{\Omega} k^e \nabla u^D \cdot \nabla \eta^D d\Omega = \int_{\Omega} b \eta^D d\Omega \quad \forall \eta^D \in \mathcal{V}^D, \quad (3.1)$$

sendo os conjuntos das funções e das variações admissíveis definidos, respectivamente, por:

$$\mathcal{U}^D = \{u^D \in H^1(\Omega) : u^D|_{\partial\Omega} = u^*\} \quad \text{e} \quad \mathcal{V}^D = \{\eta^D \in H_0^1(\Omega)\}. \quad (3.2)$$

Observa-se que a condição de contorno de Dirichlet imposta ao longo de toda fronteira $\partial\Omega$ deste problema é a distribuição de temperatura u^* , medida experimentalmente em laboratório sobre a fronteira $\partial\Omega$ do corpo B no problema \mathcal{P}^* .

A Eq. (3.1) pode ser reescrita na forma abstrata,

$$a^D(u^D, \eta^D) = l^D(\eta^D), \quad (3.3)$$

na qual a forma bilinear $a^D(u^D, \eta^D)$ e o funcional linear $l^D(\eta^D)$ são definidos, respectivamente, como:

$$\begin{aligned} a^D(u^D, \eta^D) &= \int_{\Omega} k^e \nabla u^D \cdot \nabla \eta^D d\Omega, \\ l^D(\eta^D) &= \int_{\Omega} b \eta^D d\Omega. \end{aligned} \quad (3.4)$$

A equação de Euler-Lagrange associada ao problema variacional enunciado através da Eq. (3.1) resulta em um problema de valor no contorno dado pelo seguinte sistema de equações:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Determinar } u^D, \text{ tal que} \\ -k^e \Delta u^D = b \quad \text{em } \Omega \\ u^D = u^* \quad \text{sobre } \partial\Omega \end{array} \right. . \quad (3.5)$$

Problema \mathcal{P}_2

Seja um sólido com coeficiente de condutividade térmica k^e constante, ocupando uma região Ω no espaço com fronteira $\partial\Omega = \Gamma_N \cup \Gamma_M$, submetido a uma excitação b distribuída em Ω , um fluxo de calor \bar{q} em Γ_N e a temperatura do meio exterior u_∞ em Γ_M . A forma variacional deste problema pode ser escrita como segue: determinar a solução $u^N \in \mathcal{U}^N$, tal que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} k^e \nabla u^N \cdot \nabla \eta^N d\Omega + \int_{\Gamma_M} \bar{h} u^N \eta^N d\partial\Omega &= \int_{\Omega} b \eta^N d\Omega - \int_{\Gamma_N} \bar{q} \eta^N d\partial\Omega \\ + \int_{\Gamma_M} \bar{h} u_\infty \eta^N d\partial\Omega \quad \forall \eta^N \in \mathcal{V}^N. & \end{aligned} \quad (3.6)$$

Neste caso, os conjuntos das funções e das variações admissíveis são dados, respectivamente, por:

$$\mathcal{U}^N = \{u^N \in H^1(\Omega)\} \quad \text{e} \quad \mathcal{V}^N = \{\eta^N \in H^1(\Omega)\}. \quad (3.7)$$

Vale ressaltar que a excitação b , o fluxo de calor \bar{q} , o coeficiente de transferência de calor por convecção \bar{h} e a temperatura do meio exterior u_∞ são os mesmos impostos ao corpo B no problema \mathcal{P}^* , do qual o campo de temperatura u^* é obtido.

A Eq. (3.6) pode ser reescrita na forma abstrata,

$$a^N(u^N, \eta^N) = l^N(\eta^N), \quad (3.8)$$

sendo

$$\begin{aligned} a^N(u^N, \eta^N) &= \int_{\Omega} k^e \nabla u^N \cdot \nabla \eta^N d\Omega + \int_{\Gamma_M} \bar{h} u^N \eta^N d\partial\Omega, \\ l^N(\eta^N) &= \int_{\Omega} b \eta^N d\Omega - \int_{\Gamma_N} \bar{q} \eta^N d\partial\Omega + \int_{\Gamma_M} \bar{h} u_\infty \eta^N d\partial\Omega. \end{aligned} \quad (3.9)$$

A equação de Euler-Lagrange associada ao problema variacional enunciado através da Eq. (3.6) resulta em um problema de valor no contorno dado da seguinte forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Determinar } u^N, \text{ tal que} \\ \begin{array}{ll} -k^e \Delta u^N = b & \text{em } \Omega \\ -k^e \frac{\partial u^N}{\partial n} = \bar{q} & \text{sobre } \Gamma_N \\ -k^e \frac{\partial u^N}{\partial n} = \bar{h}(u^N - u_\infty) & \text{sobre } \Gamma_M \end{array} \end{array} \right. \quad (3.10)$$

3.2 Critério de Kohn-Vogelius

A partir de u^D e u^N , soluções dos problemas auxiliares \mathcal{P}_1 e \mathcal{P}_2 enunciados respectivamente pelas Eqs. (3.1) e (3.6), é possível introduzir o Critério de Kohn-Vogelius (Kohn & Vogelius [29]), adotado neste trabalho como função de desempenho. A idéia por trás deste critério é minimizar uma medida da diferença entre as soluções dos dois problemas auxiliares, e o mesmo é definido pelo seguinte funcional \mathcal{J} :

$$\mathcal{J}(u^D, u^N) := \psi(\Omega) = \int_{\Omega} (u^D - u^N)^2 d\Omega. \quad (3.11)$$

Observando os problemas auxiliares, pode-se verificar que suas soluções serão iguais em todo o domínio somente quando $\Omega = \Omega^*$. Quando isso acontece, o funcional $\mathcal{J}(u^D, u^N)$ torna-se nulo. Por isso, encontrar o domínio tal que faça com que a função de desempenho dada pela Eq. (3.11) vá a zero, é de fato, encontrar o conjunto desconhecido de inclusões ϖ^* existente no interior de Ω^* .

Assim, conhecida a distribuição de temperatura u^* ao longo da fronteira $\partial\Omega$ (medida experimentalmente) e as excitações que a provocou no corpo real, as soluções dos problemas auxiliares \mathcal{P}_1 e \mathcal{P}_2 fornecem uma diferença nula no funcional $\mathcal{J}(u^D, u^N)$, somente quando a configuração Ω^* for identificada.

A análise de sensibilidade topológica é então utilizada para resolver este problema inverso, isto é, tentar encontrar um conjunto desconhecido de inclusões, a partir de observações de temperatura u^* obtidas sobre a fronteira do corpo B .

3.3 Cálculo da Derivada Topológica

Nesta seção, a derivada topológica é calculada no problema de condução de calor em regime estacionário via análise de sensibilidade à mudança de forma. Para isto, em primeiro lugar, é preciso escrever as equações de estado dos problemas auxiliares \mathcal{P}_1 e \mathcal{P}_2 no domínio $\Omega_\varepsilon \cup B_\varepsilon$ onde já existe uma inclusão B_ε , como apresentado no capítulo anterior. Assim sendo, os problemas auxiliares, formulados na configuração material $\Omega_\varepsilon \cup B_\varepsilon$, ficam:

Problema $\mathcal{P}_1^\varepsilon$

Determinar a solução $u_\varepsilon^D \in \mathcal{U}_\varepsilon^D$, tal que

$$a_\varepsilon^D(u_\varepsilon^D, \eta^D) = l_\varepsilon^D(\eta^D) \quad \forall \eta^D \in \mathcal{V}_\varepsilon^D, \quad (3.12)$$

sendo

$$\begin{aligned} a_\varepsilon^D(u_\varepsilon^D, \eta^D) &= \int_{\Omega_\varepsilon} k^e \nabla u_\varepsilon^D \cdot \nabla \eta^D d\Omega_\varepsilon + \int_{B_\varepsilon} k^i \nabla u_\varepsilon^D \cdot \nabla \eta^D dB_\varepsilon, \\ l_\varepsilon^D(\eta^D) &= \int_{\Omega_\varepsilon \cup B_\varepsilon} b\eta^D d(\Omega_\varepsilon \cup B_\varepsilon). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Os conjuntos das funções e das variações admissíveis são definidos, respectivamente, por:

$$\mathcal{U}_\varepsilon^D = \{u_\varepsilon^D \in H^1(\Omega_\varepsilon \cup B_\varepsilon) : u_\varepsilon^D|_{\partial\Omega} = u^*\} \quad \text{e} \quad \mathcal{V}_\varepsilon^D = \{\eta^D \in H_0^1(\Omega_\varepsilon \cup B_\varepsilon)\}, \quad (3.14)$$

e as constantes k^e e k^i são respectivamente os coeficientes de condutividade térmica da matriz (representado por Ω_ε) e da inclusão (representado por B_ε).

A equação de Euler-Lagrange associada ao problema variacional definido pela Eq. (3.12) resulta em um problema de valor no contorno dado pelo seguinte sistema de equações:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Determinar } u_\varepsilon^D, \text{ tal que} & \\ -k^e \Delta u_\varepsilon^D = b & \text{em } \Omega_\varepsilon \\ -k^i \Delta u_\varepsilon^D = b & \text{em } B_\varepsilon \\ u_\varepsilon^D|_e = u_\varepsilon^D|_i & \text{sobre } \partial B_\varepsilon \\ k^e \frac{\partial u_\varepsilon^D}{\partial n}|_e = k^i \frac{\partial u_\varepsilon^D}{\partial n}|_i & \text{sobre } \partial B_\varepsilon \\ u_\varepsilon^D = u^* & \text{sobre } \partial\Omega \end{array} \right\}, \quad (3.15)$$

sendo que, nas condições de continuidade e salto da derivada, o termo $(\cdot)|_e$ é associado ao material da matriz, representado por Ω_ε , enquanto que $(\cdot)|_i$ é associado à inclusão, representada por B_ε .

Problema $\mathcal{P}_2^\varepsilon$

Determinar a solução $u_\varepsilon^N \in \mathcal{U}_\varepsilon^N$, tal que

$$a_\varepsilon^N(u_\varepsilon^N, \eta^N) = l_\varepsilon^N(\eta^N) \quad \forall \eta^N \in \mathcal{V}_\varepsilon^N, \quad (3.16)$$

sendo

$$\begin{aligned} a_\varepsilon^N(u_\varepsilon^N, \eta^N) &= \int_{\Omega_\varepsilon} k^e \nabla u_\varepsilon^N \cdot \nabla \eta^N d\Omega_\varepsilon + \int_{B_\varepsilon} k^i \nabla u_\varepsilon^N \cdot \nabla \eta^N dB_\varepsilon + \int_{\Gamma_M} \bar{h} u_\varepsilon^N \eta^N d\partial\Omega, \\ l_\varepsilon^N(\eta^N) &= \int_{\Omega_\varepsilon \cup B_\varepsilon} b\eta^N d(\Omega_\varepsilon \cup B_\varepsilon) - \int_{\Gamma_N} \bar{q}\eta^N d\partial\Omega + \int_{\Gamma_M} \bar{h} u_\infty \eta^N d\partial\Omega. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Os conjuntos das funções e das variações admissíveis são dados respectivamente por:

$$\mathcal{U}_\varepsilon^N = \{u_\varepsilon^N \in H^1(\Omega_\varepsilon \cup B_\varepsilon)\} \quad \text{e} \quad \mathcal{V}_\varepsilon^N = \{\eta^N \in H^1(\Omega_\varepsilon \cup B_\varepsilon)\}, \quad (3.18)$$

e as constantes k^e e k^i representam respectivamente, da mesma forma que na formulação anterior, os coeficientes de condutividade térmica da matriz Ω_ε e da inclusão B_ε .

A equação de Euler-Lagrange associada ao problema variacional enunciado através da Eq. (3.16) resulta em um problema de valor no contorno dado da seguinte forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Determinar } u_\varepsilon^N, \text{ tal que} \\ -k^e \Delta u_\varepsilon^N = b \quad \text{em } \Omega_\varepsilon \\ -k^i \Delta u_\varepsilon^N = b \quad \text{em } B_\varepsilon \\ u_\varepsilon^N|_e = u_\varepsilon^N|_i \quad \text{sobre } \partial B_\varepsilon \\ k^e \frac{\partial u_\varepsilon^N}{\partial n} \Big|_e = k^i \frac{\partial u_\varepsilon^N}{\partial n} \Big|_i \quad \text{sobre } \partial B_\varepsilon \\ -k^e \frac{\partial u_\varepsilon^N}{\partial n} = \bar{q} \quad \text{sobre } \Gamma_N \\ -k^e \frac{\partial u_\varepsilon^N}{\partial n} = \bar{h}(u_\varepsilon^N - u_\infty) \quad \text{sobre } \Gamma_M \end{array} \right. . \quad (3.19)$$

O Critério de Kohn-Vogelius definido na configuração material $\Omega_\varepsilon \cup B_\varepsilon$ torna-se:

$$\mathcal{J}_\varepsilon(u_\varepsilon^D, u_\varepsilon^N) := \psi(\Omega_\varepsilon \cup B_\varepsilon) = \int_{\Omega_\varepsilon \cup B_\varepsilon} (u_\varepsilon^D - u_\varepsilon^N)^2 d(\Omega_\varepsilon \cup B_\varepsilon), \quad (3.20)$$

sendo u_ε^D e u_ε^N respectivamente soluções dos problemas auxiliares $\mathcal{P}_1^\varepsilon$ e $\mathcal{P}_2^\varepsilon$ descritos pelas Eqs. (3.12) e (3.16).

De acordo com o Teorema 2.1, a primeira operação para o cálculo da derivada topológica é determinar a sensibilidade do problema quando o raio ε da inclusão definida em $\Omega_\varepsilon \cup B_\varepsilon$ sofre um aumento de tamanho $\varepsilon_\tau = \varepsilon + \tau$, segundo as Eqs. (2.6) e (2.7). Esta mudança de forma em $\Omega_\varepsilon \cup B_\varepsilon$ deve ser verificada para todo τ ($\forall \tau \geq 0$), e define um domínio perturbado $\Omega_\tau = \Omega_{\varepsilon_\tau} \cup B_{\varepsilon_\tau}$, como indicado na Eq. (2.9). Assim, os problemas $\mathcal{P}_1^\varepsilon$ e $\mathcal{P}_2^\varepsilon$, definidos na configuração material $\Omega_\varepsilon \cup B_\varepsilon$ (Eqs. (3.12) e (3.16) respectivamente), podem ser escritos na configuração espacial Ω_τ e suas soluções correspondentes u_τ^D e u_τ^N satisfazem os seguintes problemas variacionais:

Problema \mathcal{P}_1^τ

Determinar a solução $u_\tau^D \in \mathcal{U}_\tau^D$, tal que

$$a_\tau^D(u_\tau^D, \eta^D) = l_\tau^D(\eta^D) \quad \forall \eta^D \in \mathcal{V}_\tau^D, \quad (3.21)$$

na qual

$$\begin{aligned} a_\tau^D(u_\tau^D, \eta^D) &= \int_{\Omega_{\varepsilon_\tau}} k^e \nabla_\tau u_\tau^D \cdot \nabla_\tau \eta^D d\Omega_{\varepsilon_\tau} + \int_{B_{\varepsilon_\tau}} k^i \nabla_\tau u_\tau^D \cdot \nabla_\tau \eta^D dB_{\varepsilon_\tau}, \\ l_\tau^D(\eta^D) &= \int_{\Omega_\tau} b\eta^D d\Omega_\tau. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Os conjuntos das funções e das variações admissíveis, ambos definidos no domínio perturbado Ω_τ , são descritos respectivamente por:

$$\mathcal{U}_\tau^D = \{u_\tau^D \in H^1(\Omega_\tau) : u_\tau^D|_{\partial\Omega} = u^*\} \quad \text{e} \quad \mathcal{V}_\tau^D = \{\eta^D \in H_0^1(\Omega_\tau)\}. \quad (3.23)$$

A equação de Euler-Lagrange associada ao problema variacional enunciado através da Eq. (3.21) é dada pelo seguinte problema de valor no contorno:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Determinar } u_\tau^D, \text{ tal que} \\ -k^e \Delta_\tau u_\tau^D = b & \text{em } \Omega_{\varepsilon_\tau} \\ -k^i \Delta_\tau u_\tau^D = b & \text{em } B_{\varepsilon_\tau} \\ u_\tau^D|_e = u_\tau^D|_i & \text{sobre } \partial B_{\varepsilon_\tau} \\ k^e \frac{\partial u_\tau^D}{\partial n}|_e = k^i \frac{\partial u_\tau^D}{\partial n}|_i & \text{sobre } \partial B_{\varepsilon_\tau} \\ u_\tau^D = u^* & \text{sobre } \partial\Omega \end{array} \right. \quad (3.24)$$

Problema \mathcal{P}_2^τ

Determinar a solução $u_\tau^N \in \mathcal{U}_\tau^N$, tal que

$$a_\tau^N(u_\tau^N, \eta^N) = l_\tau^N(\eta^N) \quad \forall \eta^N \in \mathcal{V}_\tau^N, \quad (3.25)$$

na qual

$$\begin{aligned} a_\tau^N(u_\tau^N, \eta^N) &= \int_{\Omega_{\varepsilon_\tau}} k^e \nabla_\tau u_\tau^N \cdot \nabla_\tau \eta^N d\Omega_{\varepsilon_\tau} + \int_{B_{\varepsilon_\tau}} k^i \nabla_\tau u_\tau^N \cdot \nabla_\tau \eta^N dB_{\varepsilon_\tau} + \int_{\Gamma_M} \bar{h} u_\tau^N \eta^N d\partial\Omega, \\ l_\tau^N(\eta^N) &= \int_{\Omega_\tau} b\eta^N d\Omega_\tau - \int_{\Gamma_N} \bar{q}\eta^N d\partial\Omega + \int_{\Gamma_M} \bar{h} u_\infty \eta^N d\partial\Omega. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Os conjuntos das funções e das variações admissíveis são dados respectivamente por:

$$\mathcal{U}_\tau^N = \{u_\tau^N \in H^1(\Omega_\tau)\} \quad \text{e} \quad \mathcal{V}_\tau^N = \{\eta^N \in H^1(\Omega_\tau)\}. \quad (3.27)$$

A equação de Euler-Lagrange associada ao problema variacional enunciado através da Eq. (3.25) resulta em um problema de valor no contorno dado pelo seguinte sistema de

equações:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Determinar } u_\tau^N, \text{ tal que} \\ -k^e \Delta_\tau u_\tau^N = b \quad \text{em } \Omega_{\varepsilon_\tau} \\ -k^i \Delta_\tau u_\tau^N = b \quad \text{em } B_{\varepsilon_\tau} \\ u_\tau^N|_e = u_\tau^N|_i \quad \text{sobre } \partial B_{\varepsilon_\tau} \\ k^e \frac{\partial u_\tau^N}{\partial n} \Big|_e = k^i \frac{\partial u_\tau^N}{\partial n} \Big|_i \quad \text{sobre } \partial B_{\varepsilon_\tau} \\ -k^e \frac{\partial u_\tau^N}{\partial n} = \bar{q} \quad \text{sobre } \Gamma_N \\ -k^e \frac{\partial u_\tau^N}{\partial n} = \bar{h}(u_\tau^N - u_\infty) \quad \text{sobre } \Gamma_M \end{array} \right. \quad (3.28)$$

Da mesma forma que os problemas auxiliares, a função de desempenho escrita na configuração perturbada Ω_τ torna-se

$$\mathcal{J}_\tau(u_\tau^D, u_\tau^N) := \psi(\Omega_\tau) = \int_{\Omega_\tau} (u_\tau^D - u_\tau^N)^2 d\Omega_\tau, \quad (3.29)$$

sendo u_τ^D e u_τ^N respectivamente soluções dos dois problemas auxiliares descritos pelas Eqs. (3.21) e (3.25).

Observando a Eq. (2.12), a derivada total da função de desempenho \mathcal{J}_τ (Eq. 3.29) em relação ao parâmetro τ , em $\tau = 0$, considerando que as equações de estado dos problemas \mathcal{P}_1^τ e \mathcal{P}_2^τ sejam satisfeitas, pode ser formalmente escrita da seguinte maneira:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{D}{D\tau} \mathcal{J}_\tau(u_\tau^D, u_\tau^N) \Big|_{\tau=0} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \left(\frac{\mathcal{J}_\tau(u_\tau^D, u_\tau^N) - \mathcal{J}_\varepsilon(u_\varepsilon^D, u_\varepsilon^N)}{\tau} \right) \quad (a) \\ a_\tau^D(u_\tau^D, \eta^D) = l_\tau^D(\eta^D) \quad \forall \eta^D \in \mathcal{V}_\tau^D \quad (b) \\ a_\tau^N(u_\tau^N, \eta^N) = l_\tau^N(\eta^N) \quad \forall \eta^N \in \mathcal{V}_\tau^N \quad (c) \end{array} \right. \quad (3.30)$$

O cálculo da derivada total na Eq. (3.30) pode ser formulado com o auxílio da definição do Lagrangeano \mathcal{L}_τ (ver, por exemplo, Fancello [13] e Guillaume [20]), onde as restrições (Eqs. (3.30b) e (3.30c) que vinculam τ às soluções u_τ^D e u_τ^N são relaxadas e adicionadas à função de desempenho. Assim, o Lagrangeano \mathcal{L}_τ pode ser escrito da seguinte maneira

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\tau(v^D, v^N; \mu^D, \mu^N) &= \mathcal{J}_\tau(v^D, v^N) + a_\tau^D(v^D, \mu^D) - l_\tau^D(\mu^D) + a_\tau^N(v^N, \mu^N) - l_\tau^N(\mu^N) \\ &\quad \forall \mu^D \in \mathcal{V}_\tau^D, \forall v^D \in \mathcal{U}_\tau^D, \forall \mu^N \in \mathcal{V}_\tau^N \text{ e } \forall v^N \in \mathcal{U}_\tau^N, \end{aligned} \quad (3.31)$$

no qual v^D, v^N, μ^D e μ^N são funções arbitrárias e independentes do parâmetro τ .

A derivada total do Lagrangeano $\mathcal{L}_\tau(v^D, v^N; \mu^D, \mu^N)$ para uma direção $[\tilde{v}^D, \tilde{v}^N; \tilde{\mu}^D, \tilde{\mu}^N]$ é dada por

$$D\mathcal{L}_\tau = \frac{\partial}{\partial \tau} \mathcal{L}_\tau + \left\langle \frac{\partial}{\partial v^D} \mathcal{L}_\tau, \tilde{v}^D \right\rangle + \left\langle \frac{\partial}{\partial \mu^D} \mathcal{L}_\tau, \tilde{\mu}^D \right\rangle + \left\langle \frac{\partial}{\partial v^N} \mathcal{L}_\tau, \tilde{v}^N \right\rangle + \left\langle \frac{\partial}{\partial \mu^N} \mathcal{L}_\tau, \tilde{\mu}^N \right\rangle. \quad (3.32)$$

Os cinco termos do lado direito da Eq. (3.32) são dados respectivamente por

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \mathcal{L}_\tau (v^D, v^N; \mu^D, \mu^N) &= \frac{\partial}{\partial \tau} \mathcal{J}_\tau (v^D, v^N) + \frac{\partial}{\partial \tau} a_\tau^D (v^D, \mu^D) - \frac{\partial}{\partial \tau} l_\tau^D (\mu^D) \\ &+ \frac{\partial}{\partial \tau} a_\tau^N (v^N, \mu^N) - \frac{\partial}{\partial \tau} l_\tau^N (\mu^N) , \end{aligned} \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial}{\partial v^D} \mathcal{L}_\tau, \tilde{v}^D \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial}{\partial v^D} \mathcal{J}_\tau (v^D, v^N), \tilde{v}^D \right\rangle + \left\langle \frac{\partial}{\partial v^D} a_\tau^D (v^D, \mu^D), \tilde{v}^D \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial}{\partial v^D} \mathcal{J}_\tau (v^D, v^N), \tilde{v}^D \right\rangle + a_\tau^D (\tilde{v}^D, \mu^D) , \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial}{\partial \mu^D} \mathcal{L}_\tau, \tilde{\mu}^D \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial}{\partial \mu^D} a_\tau^D (v^D, \mu^D), \tilde{\mu}^D \right\rangle - \left\langle \frac{\partial}{\partial \mu^D} l_\tau^D (\mu^D), \tilde{\mu}^D \right\rangle \\ &= a_\tau^D (v^D, \tilde{\mu}^D) - l_\tau^D (\tilde{\mu}^D) , \end{aligned} \quad (3.35)$$

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial}{\partial v^N} \mathcal{L}_\tau, \tilde{v}^N \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial}{\partial v^N} \mathcal{J}_\tau (v^D, v^N), \tilde{v}^N \right\rangle + \left\langle \frac{\partial}{\partial v^N} a_\tau^N (v^N, \mu^N), \tilde{v}^N \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial}{\partial v^N} \mathcal{J}_\tau (v^D, v^N), \tilde{v}^N \right\rangle + a_\tau^N (\tilde{v}^N, \mu^N) , \end{aligned} \quad (3.36)$$

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial}{\partial \mu^N} \mathcal{L}_\tau, \tilde{\mu}^N \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial}{\partial \mu^N} a_\tau^N (v^N, \mu^N), \tilde{\mu}^N \right\rangle - \left\langle \frac{\partial}{\partial \mu^N} l_\tau^N (\mu^N), \tilde{\mu}^N \right\rangle \\ &= a_\tau^N (v^N, \tilde{\mu}^N) - l_\tau^N (\tilde{\mu}^N) . \end{aligned} \quad (3.37)$$

É possível verificar que tomando $v^D = u_\tau^D$ solução da Eq. (3.21), a Eq. (3.35) se anula. Em outras palavras, tornar a derivada parcial (3.35) nula equivale a recuperar a equação de estado do problema \mathcal{P}_1^τ . De forma similar, tomando $v^N = u_\tau^N$ solução da Eq. (3.25), a Eq. (3.37) se anula recuperando a equação de estado do problema \mathcal{P}_2^τ :

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial}{\partial \mu^D} \mathcal{L}_\tau, \tilde{\mu}^D \right\rangle &= a_\tau^D (u_\tau^D, \tilde{\mu}^D) - l_\tau^D (\tilde{\mu}^D) = 0 \quad \forall \tilde{\mu}^D \in \mathcal{V}_\tau^D , \\ \left\langle \frac{\partial}{\partial \mu^N} \mathcal{L}_\tau, \tilde{\mu}^N \right\rangle &= a_\tau^N (u_\tau^N, \tilde{\mu}^N) - l_\tau^N (\tilde{\mu}^N) = 0 \quad \forall \tilde{\mu}^N \in \mathcal{V}_\tau^N . \end{aligned} \quad (3.38)$$

Observa-se ainda que, para u_τ^D e u_τ^N , soluções das equações de estado dos problemas \mathcal{P}_1^τ e \mathcal{P}_2^τ (restrições 3.30b e 3.30c), o Lagrangeano \mathcal{L}_τ dado pela Eq. (3.31) torna-se

$$\mathcal{L}_\tau (u_\tau^D, u_\tau^N; \mu^D, \mu^N) = \mathcal{J}_\tau (u_\tau^D, u_\tau^N) \quad \forall \mu^D \in \mathcal{V}_\tau^D \text{ e } \forall \mu^N \in \mathcal{V}_\tau^N . \quad (3.39)$$

Assim, a sensibilidade da função de desempenho \mathcal{J}_τ em relação ao parâmetro τ , é obtida calculando a derivada total do Lagrangeano \mathcal{L}_τ também em relação a τ , isto é,

$$\frac{D}{D\tau} \mathcal{L}_\tau (u_\tau^D, u_\tau^N; \mu^D, \mu^N) = \frac{D}{D\tau} \mathcal{J}_\tau (u_\tau^D, u_\tau^N) \quad \forall \mu^D \in \mathcal{V}_\tau^D \text{ e } \forall \mu^N \in \mathcal{V}_\tau^N . \quad (3.40)$$

Por outro lado, $\mu^D \in \mathcal{V}_\tau^D$ e $\mu^N \in \mathcal{V}_\tau^N$ são arbitrários. Escolhendo μ^D e μ^N de modo a anular as Eqs. (3.34) e (3.36) respectivamente, tem-se:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial}{\partial u_\tau^D} \mathcal{L}_\tau, \tilde{v}^D \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial}{\partial u_\tau^D} \mathcal{J}_\tau (u_\tau^D, u_\tau^N), \tilde{v}^D \right\rangle + a_\tau^D (\tilde{v}^D, \mu^D) = 0 \quad \forall \tilde{v}^D \in \mathcal{V}_\tau^D, \\ \left\langle \frac{\partial}{\partial u_\tau^N} \mathcal{L}_\tau, \tilde{v}^N \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial}{\partial u_\tau^N} \mathcal{J}_\tau (u_\tau^D, u_\tau^N), \tilde{v}^N \right\rangle + a_\tau^N (\tilde{v}^N, \mu^N) = 0 \quad \forall \tilde{v}^N \in \mathcal{V}_\tau^N. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Assim, considerando, por hipótese, que a forma bilinear $a_\tau(\cdot, \cdot)$ seja simétrica, toma-se $\mu^D = \lambda_\tau^D$, solução da Eq. (3.41a) definindo a equação adjunta do problema \mathcal{P}_1^τ , ou seja: determinar $\lambda_\tau^D \in \mathcal{V}_\tau^D$ tal que

$$a_\tau^D (\lambda_\tau^D, \eta^D) = - \left\langle \frac{\partial}{\partial u_\tau^D} \mathcal{J}_\tau (u_\tau^D, u_\tau^N), \eta^D \right\rangle \quad \forall \eta^D \in \mathcal{V}_\tau^D. \quad (3.42)$$

Da mesma forma, escolhendo $\mu^N = \lambda_\tau^N$, solução da Eq. (3.41b) define-se a equação adjunta do problema \mathcal{P}_2^τ , isto é: determinar $\lambda_\tau^N \in \mathcal{V}_\tau^N$ tal que

$$a_\tau^N (\lambda_\tau^N, \eta^N) = - \left\langle \frac{\partial}{\partial u_\tau^N} \mathcal{J}_\tau (u_\tau^D, u_\tau^N), \eta^N \right\rangle \quad \forall \eta^N \in \mathcal{V}_\tau^N, \quad (3.43)$$

sendo $\lambda_\tau^D \in \mathcal{V}_\tau^D$ e $\lambda_\tau^N \in \mathcal{V}_\tau^N$ denominados multiplicadores de Lagrange, soluções das equações adjuntas.¹

Assim, considerando a Eq. (3.40), a derivada da função de desempenho $\mathcal{J}_\tau (u_\tau^D, u_\tau^N)$ resulta em

$$\begin{aligned} \frac{D}{D\tau} \mathcal{J}_\tau (u_\tau^D, u_\tau^N) &= \frac{\partial}{\partial \tau} \mathcal{L}_\tau (u_\tau^D, u_\tau^N; \lambda_\tau^D, \lambda_\tau^N) = \frac{\partial}{\partial \tau} \mathcal{J}_\tau (u_\tau^D, u_\tau^N) + \frac{\partial}{\partial \tau} a_\tau^D (u_\tau^D, \lambda_\tau^D) \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial \tau} l_\tau^D (\lambda_\tau^D) + \frac{\partial}{\partial \tau} a_\tau^N (u_\tau^N, \lambda_\tau^N) - \frac{\partial}{\partial \tau} l_\tau^N (\lambda_\tau^N). \end{aligned} \quad (3.44)$$

A Eq. (3.44) mostra que para u_τ^D e u_τ^N , soluções das equações de estado (Eqs. (3.21) e (3.25) respectivamente), e para λ_τ^D e λ_τ^N , soluções das equações adjuntas (Eqs. (3.42) e (3.43) respectivamente), basta calcular a derivada parcial do Lagrangeano em relação a τ para obter a sensibilidade da função de desempenho em relação à mudança de forma (Eq. 3.30).

Considerando, portanto, o Teorema do Transporte de Reynolds (Apêndice B, Seção B.7), pode-se calcular os termos do lado direito da Eq. (3.44), isto é, a derivada parcial em relação a τ , da função de desempenho e também das formas bilineares e dos funcionais lineares dos problemas \mathcal{P}_1^τ e \mathcal{P}_2^τ .

¹Deve-se destacar que as Eqs. (3.38) e (3.41) são as condições de estacionariedade do Lagrangeano em relação às variáveis μ^D , μ^N , u_τ^D e u_τ^N respectivamente.

No caso particular da função de desempenho dada pelo Critério de Kohn-Vogelius, as equações adjuntas associadas aos problemas \mathcal{P}_1^τ e \mathcal{P}_2^τ podem ser escritas, respectivamente, da seguinte forma:

Problema Adjunto \mathcal{A}_1^τ

Determinar a solução $\lambda_\tau^D \in \mathcal{V}_\tau^D$ tal que

$$a_\tau^D(\lambda_\tau^D, \eta^D) = -2 \int_{\Omega_\tau} (u_\tau^D - u_\tau^N) \eta^D d\Omega_\tau \quad \forall \eta^D \in \mathcal{V}_\tau^D. \quad (3.45)$$

A equação de Euler-Lagrange associada ao problema variacional (3.45) é dada pelo seguinte problema de valor no contorno:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Determinar } \lambda_\tau^D, \text{ tal que} & \\ -k^e \Delta_\tau \lambda_\tau^D = -2(u_\tau^D - u_\tau^N) & \text{em } \Omega_{\varepsilon_\tau} \\ -k^i \Delta_\tau \lambda_\tau^D = -2(u_\tau^D - u_\tau^N) & \text{em } B_{\varepsilon_\tau} \\ \lambda_\tau^D|_e = \lambda_\tau^D|_i & \text{sobre } \partial B_{\varepsilon_\tau} \\ k^e \frac{\partial \lambda_\tau^D}{\partial n} \Big|_e = k^i \frac{\partial \lambda_\tau^D}{\partial n} \Big|_i & \text{sobre } \partial B_{\varepsilon_\tau} \\ \lambda_\tau^D = 0 & \text{sobre } \partial \Omega \end{array} \right. \quad (3.46)$$

Problema Adjunto \mathcal{A}_2^τ

Determinar a solução $\lambda_\tau^N \in \mathcal{V}_\tau^N$ tal que

$$a_\tau^N(\lambda_\tau^N, \eta^N) = +2 \int_{\Omega_\tau} (u_\tau^D - u_\tau^N) \eta^N d\Omega_\tau \quad \forall \eta^N \in \mathcal{V}_\tau^N. \quad (3.47)$$

A equação de Euler-Lagrange associada ao problema variacional (3.47) resulta em um problema de valor no contorno dado pelo seguinte sistema de equações:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Determinar } \lambda_\tau^N, \text{ tal que} & \\ -k^e \Delta_\tau \lambda_\tau^N = 2(u_\tau^D - u_\tau^N) & \text{em } \Omega_{\varepsilon_\tau} \\ -k^i \Delta_\tau \lambda_\tau^N = 2(u_\tau^D - u_\tau^N) & \text{em } B_{\varepsilon_\tau} \\ \lambda_\tau^N|_e = \lambda_\tau^N|_i & \text{sobre } \partial B_{\varepsilon_\tau} \\ k^e \frac{\partial \lambda_\tau^N}{\partial n} \Big|_e = k^i \frac{\partial \lambda_\tau^N}{\partial n} \Big|_i & \text{sobre } \partial B_{\varepsilon_\tau} \\ -k^e \frac{\partial \lambda_\tau^N}{\partial n} = 0 & \text{sobre } \Gamma_N \\ -k^e \frac{\partial \lambda_\tau^N}{\partial n} = \bar{h} \lambda_\tau^N & \text{sobre } \Gamma_M \end{array} \right. \quad (3.48)$$

A derivada parcial da função de desempenho $\mathcal{J}_\tau(u_\tau^D, u_\tau^N)$, descrita pela Eq. (3.29), em relação ao parâmetro τ resulta em

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \mathcal{J}_\tau(u_\tau^D, u_\tau^N) &= \int_{\Omega_\tau} \left(\frac{\partial}{\partial \tau} (u_\tau^D - u_\tau^N)^2 + (u_\tau^D - u_\tau^N)^2 \operatorname{div}_\tau \mathbf{v}_s \right) d\Omega_\tau \\ &= \int_{\Omega_\tau} (u_\tau^D - u_\tau^N)^2 \mathbf{I} \cdot \mathbf{L}_\tau d\Omega_\tau, \end{aligned} \quad (3.49)$$

considerando que $\operatorname{div}_\tau \mathbf{v}_s = \mathbf{I} \cdot \nabla_\tau \mathbf{v}_s = \mathbf{I} \cdot \mathbf{L}_\tau$ (ver apêndice B, seção B.4).

De forma análoga, a derivada parcial da forma bilinear $a_\tau^D(u_\tau^D, \lambda_\tau^D)$ associada ao problema \mathcal{P}_1^τ (Eq. 3.22) é escrita por

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} a_\tau^D(u_\tau^D, \lambda_\tau^D) &= \int_{\Omega_{\varepsilon_\tau}} \left(\frac{\partial}{\partial \tau} (k^e \nabla_\tau u_\tau^D \cdot \nabla_\tau \lambda_\tau^D) + k^e \nabla_\tau u_\tau^D \cdot \nabla_\tau \lambda_\tau^D \operatorname{div}_\tau \mathbf{v}_s \right) d\Omega_{\varepsilon_\tau} \\ &+ \int_{B_{\varepsilon_\tau}} \left(\frac{\partial}{\partial \tau} (k^i \nabla_\tau u_\tau^D \cdot \nabla_\tau \lambda_\tau^D) + k^i \nabla_\tau u_\tau^D \cdot \nabla_\tau \lambda_\tau^D \operatorname{div}_\tau \mathbf{v}_s \right) dB_{\varepsilon_\tau}, \end{aligned} \quad (3.50)$$

na qual

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} (\nabla_\tau u_\tau^D \cdot \nabla_\tau \lambda_\tau^D) &= -(\mathbf{L}_\tau)^T \nabla_\tau u_\tau^D \cdot \nabla_\tau \lambda_\tau^D - \nabla_\tau u_\tau^D \cdot (\mathbf{L}_\tau)^T \nabla_\tau \lambda_\tau^D \\ &= -(\nabla_\tau u_\tau^D \otimes \nabla_\tau \lambda_\tau^D + \nabla_\tau \lambda_\tau^D \otimes \nabla_\tau u_\tau^D) \cdot \mathbf{L}_\tau. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Substituindo o resultado da Eq. (3.51) na Eq. (3.50), tem-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} a_\tau^D(u_\tau^D, \lambda_\tau^D) &= \int_{\Omega_{\varepsilon_\tau}} k^e [(\nabla_\tau u_\tau^D \cdot \nabla_\tau \lambda_\tau^D) \mathbf{I} - (\nabla_\tau u_\tau^D \otimes \nabla_\tau \lambda_\tau^D \\ &+ \nabla_\tau \lambda_\tau^D \otimes \nabla_\tau u_\tau^D)] \cdot \mathbf{L}_\tau d\Omega_{\varepsilon_\tau} + \int_{B_{\varepsilon_\tau}} k^i [(\nabla_\tau u_\tau^D \cdot \nabla_\tau \lambda_\tau^D) \mathbf{I} \\ &- (\nabla_\tau u_\tau^D \otimes \nabla_\tau \lambda_\tau^D + \nabla_\tau \lambda_\tau^D \otimes \nabla_\tau u_\tau^D)] \cdot \mathbf{L}_\tau dB_{\varepsilon_\tau}. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Da mesma forma, a derivada parcial do funcional linear $l_\tau^D(\lambda_\tau^D)$, também associado ao problema \mathcal{P}_1^τ (Eq. 3.22) é dada por

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} l_\tau^D(\lambda_\tau^D) &= \int_{\Omega_\tau} \left(\frac{\partial}{\partial \tau} (b\lambda_\tau^D) + b\lambda_\tau^D \operatorname{div}_\tau \mathbf{v}_s \right) d\Omega_\tau \\ &= \int_{\Omega_\tau} (b\lambda_\tau^D) \mathbf{I} \cdot \mathbf{L}_\tau d\Omega_\tau. \end{aligned} \quad (3.53)$$

A derivada parcial da forma bilinear $a_\tau^N(u_\tau^N, \lambda_\tau^N)$ associada ao problema \mathcal{P}_2^τ (Eq. 3.26) fica

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} a_\tau^N(u_\tau^N, \lambda_\tau^N) &= \int_{\Omega_{\varepsilon_\tau}} \left(\frac{\partial}{\partial \tau} (k^e \nabla_\tau u_\tau^N \cdot \nabla_\tau \lambda_\tau^N) + k^e \nabla_\tau u_\tau^N \cdot \nabla_\tau \lambda_\tau^N \operatorname{div}_\tau \mathbf{v}_s \right) d\Omega_{\varepsilon_\tau} \\ &+ \int_{B_{\varepsilon_\tau}} \left(\frac{\partial}{\partial \tau} (k^i \nabla_\tau u_\tau^N \cdot \nabla_\tau \lambda_\tau^N) + k^i \nabla_\tau u_\tau^N \cdot \nabla_\tau \lambda_\tau^N \operatorname{div}_\tau \mathbf{v}_s \right) dB_{\varepsilon_\tau} \\ &+ \int_{\Gamma_M} \left(\frac{\partial}{\partial \tau} (\bar{h} u_\tau^N \lambda_\tau^N) + \bar{h} u_\tau^N \lambda_\tau^N \operatorname{div}_{\partial\Omega_\tau} \mathbf{v}_s \right) d\partial\Omega, \end{aligned} \quad (3.54)$$

na qual

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} (\nabla_\tau u_\tau^N \cdot \nabla_\tau \lambda_\tau^N) &= -(\mathbf{L}_\tau)^T \nabla_\tau u_\tau^N \cdot \nabla_\tau \lambda_\tau^N - \nabla_\tau u_\tau^N \cdot (\mathbf{L}_\tau)^T \nabla_\tau \lambda_\tau^N \\ &= -(\nabla_\tau u_\tau^N \otimes \nabla_\tau \lambda_\tau^N + \nabla_\tau \lambda_\tau^N \otimes \nabla_\tau u_\tau^N) \cdot \mathbf{L}_\tau . \end{aligned} \quad (3.55)$$

Substituindo o resultado da Eq. (3.55) na Eq. (3.54), tem-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} a_\tau^N (u_\tau^N, \lambda_\tau^N) &= \int_{\Omega_{\varepsilon_\tau}} k^e [(\nabla_\tau u_\tau^N \cdot \nabla_\tau \lambda_\tau^N) \mathbf{I} - (\nabla_\tau u_\tau^N \otimes \nabla_\tau \lambda_\tau^N + \nabla_\tau \lambda_\tau^N \otimes \nabla_\tau u_\tau^N)] \cdot \mathbf{L}_\tau d\Omega_{\varepsilon_\tau} \\ &+ \int_{B_{\varepsilon_\tau}} k^i [(\nabla_\tau u_\tau^N \cdot \nabla_\tau \lambda_\tau^N) \mathbf{I} - (\nabla_\tau u_\tau^N \otimes \nabla_\tau \lambda_\tau^N + \nabla_\tau \lambda_\tau^N \otimes \nabla_\tau u_\tau^N)] \cdot \mathbf{L}_\tau dB_{\varepsilon_\tau} \\ &+ \int_{\Gamma_M} (\bar{h} u_\tau^N \lambda_\tau^N \operatorname{div}_{\partial\Omega_\tau} \mathbf{v}_s) d\partial\Omega . \end{aligned} \quad (3.56)$$

De igual modo, a derivada parcial do funcional linear $l_\tau^N (\lambda_\tau^N)$, associado ao problema \mathcal{P}_2^r (Eq. 3.26) resulta em

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} l_\tau^N (\lambda_\tau^N) &= \int_{\Omega_\tau} \left(\frac{\partial}{\partial \tau} (b\lambda_\tau^N) + b\lambda_\tau^N \operatorname{div}_\tau \mathbf{v}_s \right) d\Omega_\tau - \int_{\Gamma_N} \left(\frac{\partial}{\partial \tau} (\bar{q}\lambda_\tau^N) + \bar{q}\lambda_\tau^N \operatorname{div}_{\partial\Omega_\tau} \mathbf{v}_s \right) d\partial\Omega \\ &+ \int_{\Gamma_M} \left(\frac{\partial}{\partial \tau} (\bar{h} u_\infty \lambda_\tau^N) + \bar{h} u_\infty \lambda_\tau^N \operatorname{div}_{\partial\Omega_\tau} \mathbf{v}_s \right) d\partial\Omega \\ &= \int_{\Omega_\tau} (b\lambda_\tau^N) \mathbf{I} \cdot \mathbf{L}_\tau d\Omega_\tau - \int_{\Gamma_N} (\bar{q}\lambda_\tau^N \operatorname{div}_{\partial\Omega_\tau} \mathbf{v}_s) d\partial\Omega \\ &+ \int_{\Gamma_M} (\bar{h} u_\infty \lambda_\tau^N \operatorname{div}_{\partial\Omega_\tau} \mathbf{v}_s) d\partial\Omega . \end{aligned} \quad (3.57)$$

Substituindo as Eqs. (3.49), (3.52), (3.53), (3.56) e (3.57) na Eq. (3.44), a derivada da função de desempenho torna-se

$$\begin{aligned} \frac{D}{D\tau} \mathcal{J}_\tau (u_\tau^D, u_\tau^N) &= \int_{\Omega_\tau} \boldsymbol{\Sigma}_\tau \cdot \mathbf{L}_\tau d\Omega_\tau + \int_{\Gamma_N} (\bar{q}\lambda_\tau^N \operatorname{div}_{\partial\Omega_\tau} \mathbf{v}_s) d\partial\Omega \\ &+ \int_{\Gamma_M} (\bar{h} (u_\tau^N - u_\infty) \lambda_\tau^N \operatorname{div}_{\partial\Omega_\tau} \mathbf{v}_s) d\partial\Omega , \end{aligned} \quad (3.58)$$

na qual $\boldsymbol{\Sigma}_\tau$ pode ser interpretado como uma generalização do tensor momento energia de Eshelby (ver, por exemplo, Eshelby 1975 [12] e Taroco, Buscaglia & Feijóo 1998 [48]) que, para o problema em estudo, resulta em um tensor simétrico de segunda ordem, que pode ser decomposto da seguinte maneira

$$\boldsymbol{\Sigma}_\tau|_e := \boldsymbol{\Sigma}_\tau|_{\Omega_{\varepsilon_\tau}} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\Sigma}_\tau|_i := \boldsymbol{\Sigma}_\tau|_{B_{\varepsilon_\tau}} , \quad (3.59)$$

sendo o termo $(\cdot)|_e$ associado ao material da matriz, representado por $\Omega_{\varepsilon_\tau}$, enquanto que $(\cdot)|_i$ é associado à inclusão, representada por B_{ε_τ} . Em particular, $\boldsymbol{\Sigma}_\tau|_e$ e $\boldsymbol{\Sigma}_\tau|_i$ são dados

respectivamente por

$$\begin{aligned} \Sigma_\tau|_e &= [(u_\tau^D - u_\tau^N)^2 + k^e(\nabla_\tau u_\tau^D \cdot \nabla_\tau \lambda_\tau^D + \nabla_\tau u_\tau^N \cdot \nabla_\tau \lambda_\tau^N) - b(\lambda_\tau^D + \lambda_\tau^N)]|_e \mathbf{I} \\ &- k^e (\nabla_\tau u_\tau^D \otimes \nabla_\tau \lambda_\tau^D + \nabla_\tau \lambda_\tau^D \otimes \nabla_\tau u_\tau^D + \nabla_\tau u_\tau^N \otimes \nabla_\tau \lambda_\tau^N + \nabla_\tau \lambda_\tau^N \otimes \nabla_\tau u_\tau^N)|_e, \end{aligned} \quad (3.60)$$

$$\begin{aligned} \Sigma_\tau|_i &= [(u_\tau^D - u_\tau^N)^2 + k^i(\nabla_\tau u_\tau^D \cdot \nabla_\tau \lambda_\tau^D + \nabla_\tau u_\tau^N \cdot \nabla_\tau \lambda_\tau^N) - b(\lambda_\tau^D + \lambda_\tau^N)]|_i \mathbf{I} \\ &- k^i (\nabla_\tau u_\tau^D \otimes \nabla_\tau \lambda_\tau^D + \nabla_\tau \lambda_\tau^D \otimes \nabla_\tau u_\tau^D + \nabla_\tau u_\tau^N \otimes \nabla_\tau \lambda_\tau^N + \nabla_\tau \lambda_\tau^N \otimes \nabla_\tau u_\tau^N)|_i. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Lembrando que $\Omega_\tau|_{\tau=0} = \Omega_\varepsilon \cup B_\varepsilon$, a Eq. (3.58) avaliada em $\tau = 0$ é dada pela seguinte expressão

$$\begin{aligned} \frac{D}{D\tau} \mathcal{J}_\tau(u_\tau^D, u_\tau^N) \Big|_{\tau=0} &= \frac{D}{D\tau} \mathcal{J}_\varepsilon(u_\varepsilon^D, u_\varepsilon^N) = \int_{\Omega_\varepsilon \cup B_\varepsilon} \Sigma_\varepsilon \cdot \mathbf{L} d(\Omega_\varepsilon \cup B_\varepsilon) + \int_{\Gamma_N} (\bar{q} \lambda_\varepsilon^N \operatorname{div}_{\partial\Omega_\varepsilon} \mathbf{v}_m) d\partial\Omega \\ &+ \int_{\Gamma_M} (\bar{h} (u_\varepsilon^N - u_\infty) \lambda_\varepsilon^N \operatorname{div}_{\partial\Omega_\varepsilon} \mathbf{v}_m) d\partial\Omega, \end{aligned} \quad (3.62)$$

com

$$\begin{aligned} \Sigma_\varepsilon|_e &= [(u_\varepsilon^D - u_\varepsilon^N)^2 + k^e(\nabla u_\varepsilon^D \cdot \nabla \lambda_\varepsilon^D + \nabla u_\varepsilon^N \cdot \nabla \lambda_\varepsilon^N) - b(\lambda_\varepsilon^D + \lambda_\varepsilon^N)]|_e \mathbf{I} \\ &- k^e (\nabla u_\varepsilon^D \otimes \nabla \lambda_\varepsilon^D + \nabla \lambda_\varepsilon^D \otimes \nabla u_\varepsilon^D + \nabla u_\varepsilon^N \otimes \nabla \lambda_\varepsilon^N + \nabla \lambda_\varepsilon^N \otimes \nabla u_\varepsilon^N)|_e, \end{aligned} \quad (3.63)$$

$$\begin{aligned} \Sigma_\varepsilon|_i &= [(u_\varepsilon^D - u_\varepsilon^N)^2 + k^i(\nabla u_\varepsilon^D \cdot \nabla \lambda_\varepsilon^D + \nabla u_\varepsilon^N \cdot \nabla \lambda_\varepsilon^N) - b(\lambda_\varepsilon^D + \lambda_\varepsilon^N)]|_i \mathbf{I} \\ &- k^i (\nabla u_\varepsilon^D \otimes \nabla \lambda_\varepsilon^D + \nabla \lambda_\varepsilon^D \otimes \nabla u_\varepsilon^D + \nabla u_\varepsilon^N \otimes \nabla \lambda_\varepsilon^N + \nabla \lambda_\varepsilon^N \otimes \nabla u_\varepsilon^N)|_i, \end{aligned} \quad (3.64)$$

sendo λ_ε^D e λ_ε^N as soluções das equações adjuntas associadas aos problemas $\mathcal{P}_1^\varepsilon$ e $\mathcal{P}_2^\varepsilon$ definidos na configuração material $\Omega_\varepsilon \cup B_\varepsilon$, ou seja:

Problema Adjunto $\mathcal{A}_1^\varepsilon$

Determinar a solução $\lambda_\varepsilon^D \in \mathcal{V}_\varepsilon^D$ tal que

$$a_\varepsilon^D(\lambda_\varepsilon^D, \eta^D) = -2 \int_{\Omega_\varepsilon \cup B_\varepsilon} (u_\varepsilon^D - u_\varepsilon^N) \eta^D d(\Omega_\varepsilon \cup B_\varepsilon) \quad \forall \eta^D \in \mathcal{V}_\varepsilon^D. \quad (3.65)$$

A equação de Euler-Lagrange associada ao problema variacional (3.65), em $\tau = 0$, é dada pelo seguinte problema de valor no contorno:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Determinar } \lambda_\varepsilon^D, \text{ tal que} \\ -k^e \Delta \lambda_\varepsilon^D = -2(u_\varepsilon^D - u_\varepsilon^N) \quad \text{em } \Omega_\varepsilon \\ -k^i \Delta \lambda_\varepsilon^D = -2(u_\varepsilon^D - u_\varepsilon^N) \quad \text{em } B_\varepsilon \\ \lambda_\varepsilon^D|_e = \lambda_\varepsilon^D|_i \quad \text{sobre } \partial B_\varepsilon \\ k^e \frac{\partial \lambda_\varepsilon^D}{\partial n} \Big|_e = k^i \frac{\partial \lambda_\varepsilon^D}{\partial n} \Big|_i \quad \text{sobre } \partial B_\varepsilon \\ \lambda_\varepsilon^D = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega \end{array} \right. \quad (3.66)$$

Problema Adjunto $\mathcal{A}_2^\varepsilon$

Determinar a solução $\lambda_\varepsilon^N \in \mathcal{V}_\varepsilon^N$ tal que

$$a_\varepsilon^N(\lambda_\varepsilon^N, \eta^N) = +2 \int_{\Omega_\varepsilon \cup B_\varepsilon} (u_\varepsilon^D - u_\varepsilon^N) \eta^N d(\Omega_\varepsilon \cup B_\varepsilon) \quad \forall \eta^N \in \mathcal{V}_\varepsilon^N. \quad (3.67)$$

A equação de Euler-Lagrange associada ao problema variacional (3.67), também avaliada em $\tau = 0$, resulta em um problema de valor no contorno dado pelo seguinte sistema de equações:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Determinar } \lambda_\varepsilon^N, \text{ tal que} \\ -k^e \Delta \lambda_\varepsilon^N = 2(u_\varepsilon^D - u_\varepsilon^N) \quad \text{em } \Omega_\varepsilon \\ -k^i \Delta \lambda_\varepsilon^N = 2(u_\varepsilon^D - u_\varepsilon^N) \quad \text{em } B_\varepsilon \\ \lambda_\varepsilon^N|_e = \lambda_\varepsilon^N|_i \quad \text{sobre } \partial B_\varepsilon \\ k^e \frac{\partial \lambda_\varepsilon^N}{\partial n} \Big|_e = k^i \frac{\partial \lambda_\varepsilon^N}{\partial n} \Big|_i \quad \text{sobre } \partial B_\varepsilon \\ -k^e \frac{\partial \lambda_\varepsilon^N}{\partial n} = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_N \\ -k^e \frac{\partial \lambda_\varepsilon^N}{\partial n} = \bar{h} \lambda_\varepsilon^N \quad \text{sobre } \Gamma_M \end{array} \right. \quad (3.68)$$

Considerando a definição dada pela Eq. (B.18) e a relação tensorial dada pela Eq. (B.2g), e aplicando o Teorema da Divergência (apêndice B, seção B.6), a derivada de forma da função de desempenho dada pela Eq. (3.62) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \frac{D}{D\tau} \mathcal{J}_\tau(u_\tau^D, u_\tau^N) \Big|_{\tau=0} &= \int_{\partial\Omega} \Sigma_\varepsilon \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_m d\partial\Omega + \int_{\partial B_\varepsilon} [\Sigma_\varepsilon \mathbf{n}] \cdot \mathbf{v}_m d\partial B_\varepsilon \\ &- \int_{\Omega_\varepsilon \cup B_\varepsilon} \text{div} \Sigma_\varepsilon \cdot \mathbf{v}_m d(\Omega_\varepsilon \cup B_\varepsilon) + \int_{\Gamma_N} \bar{q} \lambda_\varepsilon^N \text{div}_{\partial\Omega_\varepsilon} \mathbf{v}_m d\partial\Omega \\ &+ \int_{\Gamma_M} \bar{h} (u_\varepsilon^N - u_\infty) \lambda_\varepsilon^N \text{div}_{\partial\Omega_\varepsilon} \mathbf{v}_m d\partial\Omega, \end{aligned} \quad (3.69)$$

onde $[\cdot]$ é usado para denotar

$$[\cdot] := (\cdot)|_e - (\cdot)|_i, \quad (3.70)$$

lembrando que \mathbf{n} é o vetor normal unitário saliente a $\partial\Omega_\varepsilon = \partial\Omega \cup \partial B_\varepsilon$ (ver Fig. (2.2)).

Neste caso particular, pode-se mostrar que a sensibilidade à mudança de forma do problema depende apenas do campo de velocidade definido sobre a fronteira $\partial\Omega_\varepsilon = \partial\Omega \cup \partial B_\varepsilon$, não importando sua escolha definida no domínio $\Omega_\varepsilon \cup B_\varepsilon$. De fato, pode-se demonstrar que o tensor Σ_ε possui divergência nula, isto é:

$$\int_{\Omega_\varepsilon \cup B_\varepsilon} \text{div} \Sigma_\varepsilon \cdot \mathbf{v}_m d(\Omega_\varepsilon \cup B_\varepsilon) = 0 \quad \forall \mathbf{v}_m \Leftrightarrow \text{div} \Sigma_\varepsilon = \mathbf{0}. \quad (3.71)$$

Proposição 3.1 *Sejam u_ε^D e u_ε^N soluções das equações de Euler-Lagrange dos problemas $\mathcal{P}_1^\varepsilon$ e $\mathcal{P}_2^\varepsilon$ (Eqs. (3.15) e (3.19) respectivamente), e λ_ε^D e λ_ε^N soluções das equações adjuntas (Eqs. (3.66) e (3.68) respectivamente), então*

$$\operatorname{div} \Sigma_\varepsilon = \mathbf{0} . \quad (3.72)$$

Prova. *Calculando a divergência do tensor de Eshelby dado pelas Eqs. (3.63) e (3.64), tem-se*

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \Sigma_\varepsilon|_e &= k^e [\nabla (\nabla \lambda_\varepsilon^D) \nabla u_\varepsilon^D + \nabla (\nabla u_\varepsilon^D) \nabla \lambda_\varepsilon^D + \nabla (\nabla \lambda_\varepsilon^N) \nabla u_\varepsilon^N + \nabla (\nabla u_\varepsilon^N) \nabla \lambda_\varepsilon^N] \\ &\quad - k^e [\nabla \lambda_\varepsilon^D \Delta u_\varepsilon^D + \nabla (\nabla \lambda_\varepsilon^D) \nabla u_\varepsilon^D + \nabla u_\varepsilon^D \Delta \lambda_\varepsilon^D + \nabla (\nabla u_\varepsilon^D) \nabla \lambda_\varepsilon^D] \\ &\quad - k^e [\nabla \lambda_\varepsilon^N \Delta u_\varepsilon^N + \nabla (\nabla \lambda_\varepsilon^N) \nabla u_\varepsilon^N + \nabla u_\varepsilon^N \Delta \lambda_\varepsilon^N + \nabla (\nabla u_\varepsilon^N) \nabla \lambda_\varepsilon^N] \\ &\quad - b (\nabla \lambda_\varepsilon^D + \nabla \lambda_\varepsilon^N) + 2(u_\varepsilon^D - u_\varepsilon^N)(\nabla u_\varepsilon^D - \nabla u_\varepsilon^N) \\ &= - (k^e \Delta u_\varepsilon^D + b) \nabla \lambda_\varepsilon^D - k^e [\Delta \lambda_\varepsilon^D - 2(u_\varepsilon^D - u_\varepsilon^N)] \nabla u_\varepsilon^D \\ &\quad - (k^e \Delta u_\varepsilon^N + b) \nabla \lambda_\varepsilon^N - k^e [\Delta \lambda_\varepsilon^N + 2(u_\varepsilon^D - u_\varepsilon^N)] \nabla u_\varepsilon^N , \end{aligned} \quad (3.73)$$

e de forma análoga

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \Sigma_\varepsilon|_i &= - (k^i \Delta u_\varepsilon^D + b) \nabla \lambda_\varepsilon^D - k^i [\Delta \lambda_\varepsilon^D - 2(u_\varepsilon^D - u_\varepsilon^N)] \nabla u_\varepsilon^D \\ &\quad - (k^i \Delta u_\varepsilon^N + b) \nabla \lambda_\varepsilon^N - k^i [\Delta \lambda_\varepsilon^N + 2(u_\varepsilon^D - u_\varepsilon^N)] \nabla u_\varepsilon^N . \end{aligned} \quad (3.74)$$

Assim, considerando as Eqs. (3.15), (3.19), (3.66) e (3.68) observa-se que $\operatorname{div} \Sigma_\varepsilon = \mathbf{0}$ ■

Observação 3.2 *É interessante notar que o resultado da Proposição 3.1 (Eq. 3.72) pode ser interpretado como uma generalização do **balanço configuracional** apresentado por Gurtin 2000 [24], isto é,*

$$\operatorname{div} \Sigma_\varepsilon = \mathbf{0} \quad \text{em} \quad \Omega_\varepsilon \cup B_\varepsilon . \quad (3.75)$$

Logo, verifica-se que existe uma estreita relação entre a Análise de Sensibilidade à Mudança de Forma e o conceito de **forças configuracionais** discutido no trabalho ora mencionado. Tal fato abre caminho para a unificação destas idéias, o que permitirá interpretar a Derivada Topológica no contexto de Modelagem Mecânica.

Substituindo o resultado da proposição 3.1 (Eq. 3.72) na Eq. (3.69) e considerando a definição do campo de velocidade dado pela Eq. (2.6), observa-se que a derivada de forma

da função de desempenho reduz-se a uma integral sobre ∂B_ε , isto é

$$\frac{D}{D\tau} \mathcal{J}_\tau(u_\tau^D, u_\tau^N) \Big|_{\tau=0} = - \int_{\partial B_\varepsilon} \llbracket \Sigma_\varepsilon \mathbf{n} \rrbracket \cdot \mathbf{n} \, d\partial B_\varepsilon. \quad (3.76)$$

O gradiente de um campo escalar qualquer $\nabla\phi$ definido no contorno ∂B_ε pode ser decomposto em uma componente normal $(\nabla\phi \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}$ e outra tangencial $(\nabla\phi \cdot \mathbf{t}) \mathbf{t}$, isto é,

$$\nabla\phi = (\nabla\phi \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} + (\nabla\phi \cdot \mathbf{t}) \mathbf{t} = \frac{\partial\phi}{\partial n} \mathbf{n} + \frac{\partial\phi}{\partial t} \mathbf{t} \quad \text{sobre} \quad \partial B_\varepsilon. \quad (3.77)$$

Assim, considerando a notação introduzida pela Eq. (3.70), o integrando da Eq. (3.76), fica

$$\begin{aligned} \Sigma_\varepsilon|_e \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} &= (u_\varepsilon^D - u_\varepsilon^N)^2|_e - b(\lambda_\varepsilon^D + \lambda_\varepsilon^N)|_e \\ &+ k^e \left(\frac{\partial u_\varepsilon^D}{\partial t} \frac{\partial \lambda_\varepsilon^D}{\partial t} - \frac{\partial u_\varepsilon^D}{\partial n} \frac{\partial \lambda_\varepsilon^D}{\partial n} + \frac{\partial u_\varepsilon^N}{\partial t} \frac{\partial \lambda_\varepsilon^N}{\partial t} - \frac{\partial u_\varepsilon^N}{\partial n} \frac{\partial \lambda_\varepsilon^N}{\partial n} \right) \Big|_e, \end{aligned} \quad (3.78)$$

$$\begin{aligned} \Sigma_\varepsilon|_i \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} &= (u_\varepsilon^D - u_\varepsilon^N)^2|_i - b(\lambda_\varepsilon^D + \lambda_\varepsilon^N)|_i \\ &+ k^i \left(\frac{\partial u_\varepsilon^D}{\partial t} \frac{\partial \lambda_\varepsilon^D}{\partial t} - \frac{\partial u_\varepsilon^D}{\partial n} \frac{\partial \lambda_\varepsilon^D}{\partial n} + \frac{\partial u_\varepsilon^N}{\partial t} \frac{\partial \lambda_\varepsilon^N}{\partial t} - \frac{\partial u_\varepsilon^N}{\partial n} \frac{\partial \lambda_\varepsilon^N}{\partial n} \right) \Big|_i. \end{aligned} \quad (3.79)$$

Utilizando as condições de continuidade das soluções u_ε^D , u_ε^N , λ_ε^D e λ_ε^N sobre a fronteira da inclusão ∂B_ε , tem-se

$$(\cdot)|_e = (\cdot)|_i \Rightarrow \frac{\partial(\cdot)}{\partial t} \Big|_e = \frac{\partial(\cdot)}{\partial t} \Big|_i \quad \text{e} \quad \frac{\partial(\cdot)}{\partial n} \Big|_e = \frac{k^i}{k^e} \frac{\partial(\cdot)}{\partial n} \Big|_i, \quad (3.80)$$

onde as condições de salto associadas à derivada normal das soluções u_ε^D , u_ε^N , λ_ε^D e λ_ε^N surgem de suas respectivas formulações variacionais. Desta forma, o integrando da Eq. (3.76) pode ser escrito apenas em termos da solução associada à inclusão, ou seja,

$$\begin{aligned} \llbracket \Sigma_\varepsilon \mathbf{n} \rrbracket \cdot \mathbf{n} &= (\Sigma_\varepsilon|_e - \Sigma_\varepsilon|_i) \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} \\ &= (k^e - k^i) \left[\frac{\partial u_\varepsilon^D}{\partial t} \frac{\partial \lambda_\varepsilon^D}{\partial t} + \frac{\partial u_\varepsilon^N}{\partial t} \frac{\partial \lambda_\varepsilon^N}{\partial t} + \frac{k^i}{k^e} \left(\frac{\partial u_\varepsilon^D}{\partial n} \frac{\partial \lambda_\varepsilon^D}{\partial n} + \frac{\partial u_\varepsilon^N}{\partial n} \frac{\partial \lambda_\varepsilon^N}{\partial n} \right) \right] \Big|_i. \end{aligned} \quad (3.81)$$

É importante observar que os dois primeiros termos de ambas as Eqs. (3.78) e (3.79) se anulam quando substituídos na equação anterior, devido a hipótese de continuidade das soluções u_ε^D , u_ε^N , λ_ε^D e λ_ε^N sobre a fronteira da inclusão ∂B_ε . Considerando a Eq. (3.81), a derivada de forma da função de desempenho é escrita como segue

$$\begin{aligned} \frac{D}{D\tau} \mathcal{J}_\tau(u_\tau^D, u_\tau^N) \Big|_{\tau=0} &= - \int_{\partial B_\varepsilon} (k^e - k^i) \left[\frac{\partial u_\varepsilon^D}{\partial t} \frac{\partial \lambda_\varepsilon^D}{\partial t} + \frac{\partial u_\varepsilon^N}{\partial t} \frac{\partial \lambda_\varepsilon^N}{\partial t} \right. \\ &\quad \left. + \frac{k^i}{k^e} \left(\frac{\partial u_\varepsilon^D}{\partial n} \frac{\partial \lambda_\varepsilon^D}{\partial n} + \frac{\partial u_\varepsilon^N}{\partial n} \frac{\partial \lambda_\varepsilon^N}{\partial n} \right) \right] \Big|_i \, d\partial B_\varepsilon. \end{aligned} \quad (3.82)$$

Substituindo a Eq. (3.82) no resultado do Teorema 2.1, a Derivada Topológica resulta em

$$D_T(\hat{\mathbf{x}}) = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{k^e - k^i}{f'(\varepsilon)} \int_{\partial B_\varepsilon} \left[\frac{\partial u_\varepsilon^D}{\partial t} \frac{\partial \lambda_\varepsilon^D}{\partial t} + \frac{\partial u_\varepsilon^N}{\partial t} \frac{\partial \lambda_\varepsilon^N}{\partial t} + \frac{k^i}{k^e} \left(\frac{\partial u_\varepsilon^D}{\partial n} \frac{\partial \lambda_\varepsilon^D}{\partial n} + \frac{\partial u_\varepsilon^N}{\partial n} \frac{\partial \lambda_\varepsilon^N}{\partial n} \right) \right] \Big|_i d\partial B_\varepsilon. \quad (3.83)$$

Para obter a expressão final da Derivada topológica, é necessário conhecer explicitamente o comportamento das soluções u_ε^D , u_ε^N , λ_ε^D e λ_ε^N , quando $\varepsilon \rightarrow 0$, bem como de suas respectivas derivadas normais e tangenciais. Assim, uma Análise Assintótica deve ser realizada. Dessa forma, adotando-se um sistema polar de coordenadas (r, θ) cuja origem está posicionada sobre o centro $\hat{\mathbf{x}}$ da bola B_ε , tem-se as seguintes expansões assintóticas para os campos u_ε^D , u_ε^N , λ_ε^D e λ_ε^N , considerando $\delta > 0$ (ver apêndice C):

$$u_\varepsilon^D(r, \theta) \Big|_i = u^D(\hat{\mathbf{x}}) + 2r \frac{k^e}{k^e + k^i} (\varphi_1^D(\hat{\mathbf{x}}) \cos \theta + \varphi_2^D(\hat{\mathbf{x}}) \sin \theta) + \mathcal{O}(\varepsilon^{3-\delta}), \quad (3.84)$$

$$u_\varepsilon^N(r, \theta) \Big|_i = u^N(\hat{\mathbf{x}}) + 2r \frac{k^e}{k^e + k^i} (\varphi_1^N(\hat{\mathbf{x}}) \cos \theta + \varphi_2^N(\hat{\mathbf{x}}) \sin \theta) + \mathcal{O}(\varepsilon^{3-\delta}), \quad (3.85)$$

$$\lambda_\varepsilon^D(r, \theta) \Big|_i = \lambda^D(\hat{\mathbf{x}}) + 2r \frac{k^e}{k^e + k^i} (\mu_1^D(\hat{\mathbf{x}}) \cos \theta + \mu_2^D(\hat{\mathbf{x}}) \sin \theta) + \mathcal{O}(\varepsilon^{3-\delta}), \quad (3.86)$$

$$\lambda_\varepsilon^N(r, \theta) \Big|_i = \lambda^N(\hat{\mathbf{x}}) + 2r \frac{k^e}{k^e + k^i} (\mu_1^N(\hat{\mathbf{x}}) \cos \theta + \mu_2^N(\hat{\mathbf{x}}) \sin \theta) + \mathcal{O}(\varepsilon^{3-\delta}), \quad (3.87)$$

onde foi introduzida a seguinte notação:

$$\nabla u^D(\hat{\mathbf{x}}) = (\varphi_1^D(\hat{\mathbf{x}}), \varphi_2^D(\hat{\mathbf{x}}))^T \quad \text{e} \quad \nabla u^N(\hat{\mathbf{x}}) = (\varphi_1^N(\hat{\mathbf{x}}), \varphi_2^N(\hat{\mathbf{x}}))^T, \quad (3.88)$$

$$\nabla \lambda^D(\hat{\mathbf{x}}) = (\mu_1^D(\hat{\mathbf{x}}), \mu_2^D(\hat{\mathbf{x}}))^T \quad \text{e} \quad \nabla \lambda^N(\hat{\mathbf{x}}) = (\mu_1^N(\hat{\mathbf{x}}), \mu_2^N(\hat{\mathbf{x}}))^T. \quad (3.89)$$

Através das expansões assintóticas, escolhe-se apropriadamente uma função $f(\varepsilon)$ que satisfaça as hipóteses do Teorema 2.1. Neste caso particular, a função $f(\varepsilon)$ é definida da seguinte forma

$$f(\varepsilon) = |B_\varepsilon| = \pi \varepsilon^2 \quad \text{sendo} \quad f'(\varepsilon) = 2\pi \varepsilon. \quad (3.90)$$

Calculando o limite $\varepsilon \rightarrow 0$ na Eq. (3.83), obtém-se a expressão final da derivada topológica, dada por

$$D_T(\hat{\mathbf{x}}) = -2k^e \frac{k^e - k^i}{k^e + k^i} (\nabla u^D(\hat{\mathbf{x}}) \cdot \nabla \lambda^D(\hat{\mathbf{x}}) + \nabla u^N(\hat{\mathbf{x}}) \cdot \nabla \lambda^N(\hat{\mathbf{x}})) \quad \forall \hat{\mathbf{x}} \in \Omega. \quad (3.91)$$

As funções $u^D(\hat{\mathbf{x}})$ e $u^N(\hat{\mathbf{x}})$ são, respectivamente, as soluções dos problemas auxiliares \mathcal{P}_1 e \mathcal{P}_2 (Eqs. (3.1) e (3.6)) ambas definidas no domínio original Ω (sem inclusão) e avaliadas

no ponto $\hat{\mathbf{x}} \in \Omega$. Por outro lado, $\lambda^D(\hat{\mathbf{x}})$ e $\lambda^N(\hat{\mathbf{x}})$ são respectivamente, as soluções das equações adjuntas associadas aos problemas $\mathcal{A}_1^\varepsilon$ e $\mathcal{A}_2^\varepsilon$, porém, definidas no domínio original Ω e avaliadas no ponto $\hat{\mathbf{x}} \in \Omega$. Isto é, λ^D e λ^N são as soluções dos seguintes problemas variacionais:

Problema Adjunto \mathcal{A}_1

Determinar a solução $\lambda^D \in \mathcal{V}^D$ tal que

$$\int_{\Omega} k^e \nabla \lambda^D \cdot \nabla \eta^D d\Omega = -2 \int_{\Omega} (u^D - u^N) \eta^D d\Omega \quad \forall \eta^D \in \mathcal{V}^D. \quad (3.92)$$

A equação de Euler-Lagrange associada ao problema variacional dado pela Eq. (3.92), é dada pelo seguinte problema de valor no contorno:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Determinar } \lambda^D, \text{ tal que} \\ -k^e \Delta \lambda^D = -2(u^D - u^N) \quad \text{em } \Omega \\ \lambda^D = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega \end{array} \right. \quad (3.93)$$

Problema Adjunto \mathcal{A}_2

Determinar a solução $\lambda^N \in \mathcal{V}^N$ tal que

$$\int_{\Omega} k^e \nabla \lambda^N \cdot \nabla \eta^N d\Omega + \int_{\Gamma_M} \bar{h} \lambda^N \eta^N d\partial\Omega = +2 \int_{\Omega} (u^D - u^N) \eta^N d\Omega \quad \forall \eta^N \in \mathcal{V}^N. \quad (3.94)$$

A equação de Euler-Lagrange associada ao problema variacional dado pela Eq. (3.94), resulta em um problema de valor no contorno dado pelo seguinte sistema de equações:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Determinar } \lambda^N, \text{ tal que} \\ -k^e \Delta \lambda^N = 2(u^D - u^N) \quad \text{em } \Omega \\ -k^e \frac{\partial \lambda^N}{\partial n} = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_N \\ -k^e \frac{\partial \lambda^N}{\partial n} = \bar{h} \lambda^N \quad \text{sobre } \Gamma_M \end{array} \right. \quad (3.95)$$

É importante observar, que da definição original da derivada topológica dada pela Eq. (2.3), como é tomado o limite $\varepsilon \rightarrow 0$, a inclusão é colapsada a um ponto e a sua expressão final, para o caso em estudo (Eq. 3.91), depende apenas das soluções u^D , u^N , λ^D e λ^N definidas no domínio original sem inclusão Ω , ou seja, das soluções das Eqs. (3.1), (3.6), (3.92) e (3.94) respectivamente.

3.4 Derivada Topológica para Vários Experimentos

Como já mencionado, a existência e a unicidade da solução de um problema inverso, são garantidas somente mediante um número suficiente de informações disponível. Geralmente, são necessários vários experimentos em laboratório para colher uma quantidade de informações que seja capaz de resolver o problema inverso.

No caso de vários experimentos em laboratório a função de desempenho pode ser definida como uma soma do Critério de Kohn-Vogelius calculado para cada experimento, isto é,

$$\mathcal{J}(u^D, u^N) := \psi(\Omega) = \sum_{n=1}^M \int_{\Omega} (u_n^D - u_n^N)^2 d\Omega, \quad (3.96)$$

sendo u_n^D e u_n^N , respectivamente, as n -ésimas soluções das equações de estado dos problemas \mathcal{P}_1 e \mathcal{P}_2 , ambas definidas no domínio original Ω e M o número total de experimentos realizados em laboratório. Neste caso, a derivada topológica também pode ser reescrita como uma soma das derivadas calculadas para cada experimento, ou seja,

$$D_T(\hat{\mathbf{x}}) = -2k^e \frac{k^e - k^i}{k^e + k^i} \sum_{n=1}^M (\nabla u_n^D(\hat{\mathbf{x}}) \cdot \nabla \lambda_n^D(\hat{\mathbf{x}}) + \nabla u_n^N(\hat{\mathbf{x}}) \cdot \nabla \lambda_n^N(\hat{\mathbf{x}})), \quad (3.97)$$

onde u_n^D , u_n^N , λ_n^D e λ_n^N são, respectivamente, as soluções dos problemas \mathcal{P}_1 , \mathcal{P}_2 , \mathcal{A}_1 e \mathcal{A}_2 , todas definidas no domínio original Ω , para o n -ésimo experimento.

3.5 Formulação do Problema \mathcal{P}_2 sem Condição de Contorno Mista

A derivada de forma da função de desempenho (Eq. 3.82) realizada para calcular a derivada topológica via análise de sensibilidade à mudança de forma, considerando o campo de velocidade definido pela Eq. (2.6), reduz-se a uma integral apenas sobre ∂B_ε (Eq. 3.76). Desta forma, é possível observar que, modificações nas condições de contorno impostas sobre a fronteira externa $\partial\Omega$, não alteram o resultado da análise de sensibilidade à mudança de forma e tampouco da análise assintótica, embora contribuam para a quantidade de informação disponível no problema inverso.

Em particular, o problema \mathcal{P}_2 pode ser formulado sem a condição de contorno mista (convecção) sobre a fronteira $\partial\Omega$. Isto o transforma em um problema de Neumann que pode ser escrito da seguinte maneira:

Problema \mathcal{P}_N

Seja um sólido com coeficiente de condutividade térmica k^e , que ocupa uma região Ω no espaço com fronteira $\partial\Omega$, submetido a uma excitação b distribuída em Ω e a um fluxo de calor \bar{q} em toda fronteira $\partial\Omega$. A forma variacional deste problema pode ser escrita da seguinte maneira: determinar a solução $u^N \in \mathcal{U}^N$, tal que

$$a^N(u^N, \eta^N) = l^N(\eta^N) \quad \forall \eta^N \in \mathcal{V}^N, \quad (3.98)$$

onde

$$a^N(u^N, \eta^N) = \int_{\Omega} k^e \nabla u^N \cdot \nabla \eta^N d\Omega, \quad (3.99)$$

$$l^N(\eta^N) = \int_{\Omega} b \eta^N d\Omega - \int_{\partial\Omega} q \eta^N d\partial\Omega. \quad (3.100)$$

Neste caso, os conjuntos das funções e das variações admissíveis são definidos, respectivamente, por:

$$\mathcal{U}^N = \{u^N \in H^1(\Omega) : \int_{\Omega} u^N d\Omega = 0\} \quad \text{e} \quad \mathcal{V}^N = \{\eta^N \in H^1(\Omega) : \int_{\Omega} \eta^N d\Omega = 0\}. \quad (3.101)$$

A equação de Euler-Lagrange associada ao problema variacional enunciado através da Eq. (3.98) resulta em um problema de valor no contorno dado da seguinte forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Determinar } u^N, \text{ tal que} \\ -k^e \Delta u^N = b \quad \text{em } \Omega \\ -k^e \frac{\partial u^N}{\partial n} = \bar{q} \quad \text{sobre } \partial\Omega \\ \int_{\Omega} u^N d\Omega = 0 \end{array} \right., \quad (3.102)$$

sendo a última condição acrescentada ao problema de Neumann para garantir que sua solução seja única.

Vale ressaltar que, da mesma forma como o problema \mathcal{P}_2 , tanto a excitação b quanto o fluxo de calor \bar{q} neste problema são os mesmos impostos ao corpo B no problema \mathcal{P}^* , do qual os campos de temperatura u^* são obtido.

O problema adjunto associado ao problema \mathcal{P}_N é enunciado como segue:

Problema Adjunto \mathcal{A}_N

Determinar a solução $\lambda^N \in \mathcal{V}^N$ tal que

$$\int_{\Omega} k^e \nabla \lambda^N \cdot \nabla \eta^N d\Omega = 2 \int_{\Omega} (u^D - u^N) \eta^N d\Omega \quad \forall \eta^N \in \mathcal{V}^N. \quad (3.103)$$

O problema descrito pela equação anterior corresponde ao princípio dos trabalhos virtuais aplicado ao problema de condução de calor. De acordo com este princípio, a condição de compatibilidade deve ser satisfeita pelo termo fonte. Isto significa, do ponto de vista da mecânica, que a fonte de calor no interior do domínio Ω deve ser auto-equilibrada. Como isso só ocorre quando $\Omega = \Omega^*$, então o termo do lado direito da Eq. (3.103) deve ser redefinido de modo a satisfazer a condição de compatibilidade. De fato, como o problema dado pela Eq. (3.103) está definido a menos de uma constante, pode-se somar uma constante $c \in \mathbb{R}$ da seguinte maneira,

$$\int_{\Omega} k^e \nabla \lambda^N \cdot \nabla \eta^N d\Omega = 2 \int_{\Omega} [(u^D - u^N) + c] \eta^N d\Omega \quad \forall \eta^N \in \mathcal{V}^N, \quad (3.104)$$

desde que

$$\int_{\Omega} c \eta^N d\Omega = 0 \quad \forall \eta^N \in \mathcal{V}^N. \quad (3.105)$$

Pode-se agora encontrar o valor da constante c de modo a satisfazer a condição de compatibilidade. Então

$$\int_{\Omega} [(u^D - u^N) + c] d\Omega = 0, \quad (3.106)$$

logo

$$c = -\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u^D d\Omega + \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u^N d\Omega = -\bar{u}^D + \bar{u}^N, \quad (3.107)$$

onde \bar{u}^D e \bar{u}^N são respectivamente os valores médios das soluções u^D e u^N . Porém, de acordo com a Eq. (3.102) o valor médio $\bar{u}^N = 0$ e a constante c resulta em:

$$c = -\bar{u}^D. \quad (3.108)$$

Com a constante c definida, a Eq. (3.103) pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\int_{\Omega} k^e \nabla \lambda^N \cdot \nabla \eta^N d\Omega = 2 \int_{\Omega} (u^D - u^N - \bar{u}^D) \eta^N d\Omega \quad \forall \eta^N \in \mathcal{V}^N. \quad (3.109)$$

A equação de Euler-Lagrange associada ao problema variacional dado pela Eq. (3.109), resulta em um problema de valor no contorno dado pelo seguinte sistema de equações:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Determinar } \lambda^N, \text{ tal que} \\ -k^e \Delta \lambda^N = 2(u^D - u^N - \bar{u}^D) \quad \text{em } \Omega \\ k^e \frac{\partial \lambda^N}{\partial n} = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega \\ \int_{\Omega} \lambda^N d\Omega = 0 \end{array} \right., \quad (3.110)$$

onde a última condição vem da definição do conjunto das variações admissíveis \mathcal{V}^N dado pela Eq. (3.101).

Capítulo 4

Algoritmo de Reconstrução e Aspectos Computacionais

No capítulo anterior, o problema inverso foi formulado e a derivada topológica foi calculada no problema de condução estacionária de calor em sólidos bidimensionais, via análise de sensibilidade à mudança de forma, considerando o Critério de Kohn-Vogelius como função de desempenho. Neste capítulo, a sensibilidade obtida através da derivada topológica é, então, utilizada no desenvolvimento de um método de reconstrução para resolver o problema inverso de condutividade proposto neste trabalho. O problema, como mencionado anteriormente, consiste em identificar um conjunto desconhecido de inclusões ϖ^* no interior de um corpo B que ocupa uma região Ω^* , a partir de observações de temperatura u^* obtidas ao longo da fronteira $\partial\Omega$ deste corpo.

4.1 Formulação do Problema \mathcal{P}^*

Em situações práticas, as observações da temperatura u^* são obtidas através de experimentos e medições em laboratório. Contudo, devido a não disponibilidade de realização de tais experimentos, a distribuição de temperatura u^* ao longo da fronteira $\partial\Omega$, utilizada nos exemplos numéricos deste trabalho, representa a solução de um problema \mathcal{P}^* puramente numérico associado ao domínio Ω^* que possui um conjunto de inclusões conhecidas ϖ^* e que devem ser identificadas. O campo de temperatura u^* é, então, a solução do problema variacional \mathcal{P}^* , que pode ser enunciado da seguinte forma: determinar a solução $u^* \in \mathcal{U}^*$,

tal que

$$a^*(u^*, \eta) = l^*(\eta) \quad \forall \eta \in \mathcal{V}^*, \quad (4.1)$$

onde

$$\begin{aligned} a^*(u^*, \eta) &= \int_{\Omega^* - \varpi^*} k^e \nabla u^* \cdot \nabla \eta d(\Omega^* - \varpi^*) + \int_{\varpi^*} k^i \nabla u^* \cdot \nabla \eta d\varpi^* + \int_{\Gamma_M} \bar{h} u^* \eta d\partial\Omega, \\ l^*(\eta) &= \int_{\Omega^*} b\eta d\Omega^* - \int_{\Gamma_N} \bar{q}\eta d\partial\Omega + \int_{\Gamma_M} \bar{h} u_\infty \eta d\partial\Omega, \end{aligned} \quad (4.2)$$

sendo que k^e e k^i representam respectivamente, os coeficientes de condutividade térmica da matriz (denotado por $\Omega^* - \varpi^*$) e da inclusão (denotado por ϖ^*), \bar{q} é o fluxo de calor prescrito na fronteira Γ_N , b é a excitação distribuída em Ω^* , \bar{h} é o coeficiente de transferência de calor por convecção e u_∞ é a temperatura do meio exterior prescrito em Γ_M , onde $\partial\Omega = \Gamma_N \cup \Gamma_M$.

Os conjuntos das funções e das variações admissíveis são dados respectivamente por:

$$\mathcal{U}^* = \{u^* \in H^1(\Omega^*)\} \quad \text{e} \quad \mathcal{V}^* = \{\eta \in H^1(\Omega^*)\}. \quad (4.3)$$

A equação de Euler-Lagrange associada ao problema variacional enunciado através da Eq. (4.1) resulta em um problema de valor no contorno dado da seguinte forma:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Determinar } u^*, \text{ tal que} & \\ -k^e \Delta u^* = b & \text{em } \Omega^* - \varpi^* \\ -k^i \Delta u^* = b & \text{em } \varpi^* \\ u^*|_e = u^*|_i & \text{sobre } \partial\varpi^* \\ k^e \frac{\partial u^*}{\partial n}|_e = k^i \frac{\partial u^*}{\partial n}|_i & \text{sobre } \partial\varpi^* \\ -k^e \frac{\partial u^*}{\partial n} = \bar{q} & \text{sobre } \Gamma_N \\ -k^e \frac{\partial u^*}{\partial n} = \bar{h}(u^* - u_\infty) & \text{sobre } \Gamma_M \end{array} \right. . \quad (4.4)$$

Da mesma forma como o problema \mathcal{P}_2 , o problema enunciado acima pode ser formulado sem a condição de contorno mista (convecção) sobre a fronteira $\partial\Omega$ (ver Seção 3.5). Isto o transforma em um problema de Neumann dado como segue: determinar a solução $u^* \in \mathcal{U}^*$, tal que

$$a^*(u^*, \eta) = l^*(\eta) \quad \forall \eta \in \mathcal{V}^*, \quad (4.5)$$

onde

$$a^*(u^*, \eta) = \int_{\Omega^* - \varpi^*} k^e \nabla u^* \cdot \nabla \eta d(\Omega^* - \varpi^*) + \int_{\varpi^*} k^i \nabla u^* \cdot \nabla \eta d\varpi^*, \quad (4.6)$$

$$l^*(\eta) = \int_{\Omega^*} b\eta d\Omega^* - \int_{\Gamma_N} \bar{q}\eta d\partial\Omega. \quad (4.7)$$

Neste caso, os conjuntos das funções e das variações admissíveis são definidos, respectivamente, por:

$$\mathcal{U}^* = \{u^* \in H^1(\Omega^*) : \int_{\Omega^*} u^* d\Omega^* = 0\} \quad \text{e} \quad \mathcal{V}^* = \{\eta \in H^1(\Omega^*) : \int_{\Omega^*} \eta d\Omega^* = 0\}. \quad (4.8)$$

A equação de Euler-Lagrange associada ao problema variacional enunciado através da Eq. (4.5) resulta em um problema de valor no contorno dado da seguinte forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Determinar } u^*, \text{ tal que} \\ -k^e \Delta u^* = b \quad \text{em } \Omega^* - \varpi^* \\ -k^i \Delta u^* = b \quad \text{em } \varpi^* \\ u^*|_e = u^*|_i \quad \text{sobre } \partial\varpi^* \\ k^e \frac{\partial u^*}{\partial n}|_e = k^i \frac{\partial u^*}{\partial n}|_i \quad \text{sobre } \partial\varpi^* \\ -k^e \frac{\partial u^*}{\partial n} = \bar{q} \quad \text{sobre } \partial\Omega \\ \int_{\Omega^*} u^* d\Omega^* = 0 \end{array} \right. , \quad (4.9)$$

sendo a última condição acrescentada para garantir unicidade da solução u^* .

As soluções u_n^D e u_n^N das equações de estado e as soluções λ_n^D e λ_n^N das equações adjuntas, todas definidas no domínio original Ω sem inclusão, assim como a solução u_n^* , todas utilizadas para o cálculo da derivada topológica, são obtidas de maneira aproximada via Método de Elementos Finitos [2, 3, 27, 38, 50].

4.2 Método dos Elementos Finitos

Obter soluções analíticas de situações físicas reais é na maioria das vezes impraticável devido às complexidades de geometria, excitação, condições de contorno, etc. Por isso, o uso de métodos numéricos para a obtenção das soluções aproximadas desses problemas torna-se a única alternativa. O Método dos Elementos Finitos, consiste em construir famílias de subespaços de dimensão finita das funções admissíveis $\mathcal{U}_{h,p} \subset \mathcal{U}$ e das variações admissíveis $\mathcal{V}_{h,p} \subset \mathcal{V}$, onde $h \in (0, 1] \subset \mathbb{R}$ e $p \in \mathbb{N}$ denotam, respectivamente, a dependência da aproximação com o tamanho dos elementos da malha e a ordem polinomial das funções base utilizadas para gerar o espaço de elementos finitos. A partir destas aproximações, a equação de estado é redefinida de forma a determinar a solução aproximada $u_{h,p} \in \mathcal{U}_{h,p} \subset \mathcal{U}$ tal que

$$a(u_{h,p}, \eta_{h,p}) = l(\eta_{h,p}) \quad \forall \eta_{h,p} \in \mathcal{V}_{h,p} \subset \mathcal{V}. \quad (4.10)$$

Esta forma de apresentar o problema conduz a um sistema de equações linearmente independentes, de dimensão finita que, de maneira geral, pode ser escrito como

$$\mathbf{K}_{h,p} \bar{\mathbf{u}}_{h,p} = \mathbf{f}_{h,p} \quad (4.11)$$

sendo $\mathbf{K}_{h,p}$ a matriz de rigidez global, $\bar{\mathbf{u}}_{h,p}$ o vetor de incógnitas nodais generalizado e $\mathbf{f}_{h,p}$ o vetor carregamento nodal generalizado. Admitindo-se que $\mathcal{U}_{h,p}$ e $\mathcal{V}_{h,p}$ sejam equivalentes, pode-se utilizar a mesma base para gerar ambos os espaços. Esta aproximação, conhecida como Método de Bubnov-Galerkin, resulta em um sistema de equações cuja matriz de rigidez é simétrica, facilitando a resolução da Eq. (4.11).

4.3 Algoritmo de Reconstrução

Reescrevendo a Eq. (2.3) na forma de uma expansão em série de Taylor, tem-se que

$$\psi(\Omega_\varepsilon \cup B_\varepsilon) = \psi(\Omega) + D_T^*(\hat{\mathbf{x}}) f(\varepsilon) + \mathcal{O}(f(\varepsilon)), \quad (4.12)$$

onde $\mathcal{O}(f(\varepsilon))$ é utilizado para denotar os termos de ordem superior a $f(\varepsilon)$, ou seja,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{O}(f(\varepsilon))}{f(\varepsilon)} = 0. \quad (4.13)$$

Assim, lembrando que $f(\varepsilon)$ é uma função positiva, a derivada topológica $D_T(\hat{\mathbf{x}})$ pode ser vista como uma correção de primeira ordem de $\psi(\Omega)$ para obter $\psi(\Omega_\varepsilon \cup B_\varepsilon)$. Esta última interpretação da derivada topológica pode ser utilizada para propor um método alternativo de reconstrução: os maiores decréscimos na função de desempenho ocorrem nos pontos onde a derivada topológica atinge seus menores valores (números negativos de maior valor absoluto), logo, esses pontos indicam onde as inclusões estão localizadas.

É importante mencionar que os coeficientes de condutividade térmica da matriz e da inclusão, denotados respectivamente por k^e e k^i , são considerados conhecidos *a priori*. Contudo, a posição e o tamanho do conjunto de inclusões representado por ϖ^* são desconhecidos. Por isso, encontrar este conjunto desconhecido de inclusões, a partir de observações de temperatura u_n^* obtidas sobre a fronteira do domínio $\partial\Omega$, é o problema inverso em questão.

A idéia central do método iterativo de reconstrução é justamente utilizar a informação obtida através da derivada topológica para indicar os pontos do domínio em estudo onde o coeficiente de condutividade térmica deve ser modificado.

A partir de um domínio homogêneo Ω sem inclusões e das informações sobre a distribuição de temperatura $u_n^*|_{\partial\Omega}$ ao longo da fronteira $\partial\Omega$, pode-se calcular as soluções $u_n^D, u_n^N, \lambda_n^D, \lambda_n^N$ e a derivada topológica para cada experimento n . Todas essas n derivadas podem ser adicionadas para obter a soma total da derivada topológica (ver Eq. (3.97)). Em seguida, é escolhido o tamanho do passo, ou seja, a quantidade de material no interior do domínio que terá sua condutividade térmica modificada na região onde $D_T(\hat{\mathbf{x}})$ atinge seus valores **mais negativos** (isto é, o conjunto de pontos onde a função de desempenho é **mais sensível**). Finalmente, o coeficiente de condutividade térmica dos pontos daquela região são modificados de acordo com a seguinte regra:

$$k(\hat{\mathbf{x}}) : \begin{cases} \text{se } k(\hat{\mathbf{x}}) = k^e & \text{então } k^e \leftarrow k^i \\ \text{se } k(\hat{\mathbf{x}}) = k^i & \text{então } k^i \leftarrow k^e \end{cases} . \quad (4.14)$$

Isto significa que quando se está na matriz, deve-se calcular a sensibilidade deste material tornar-se inclusão. Por outro lado, quando se está na inclusão, deve-se calcular a sensibilidade deste material tornar-se matriz novamente. Estas operações são realizadas seqüencialmente buscando minimizar o valor da função de desempenho.

O critério de parada adotado é a oscilação da função de desempenho em torno de um determinado patamar, ou seja, o algoritmo pára quando os valores da função de desempenho não diminuírem mais.

O resumo do algoritmo iterativo de reconstrução proposto é descrito a seguir:

1. **Fornecer** a configuração inicial Ω ;
2. **Obter** as observações de temperatura $u_n^*|_{\partial\Omega}$;
3. **Enquanto** $D_T^j(\hat{\mathbf{x}}) < 0$ **do**:
 - **Resolver** os problemas $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{A}_1$ e \mathcal{A}_2 na configuração Ω^j para cada experimento;
 - **Calcular** a derivada topológica para cada experimento n ;
 - **Realizar** a soma total da derivada topológica $D_T^j(\hat{\mathbf{x}})$;
 - **Efetuar** a troca dos materiais de acordo com a Eq. (4.14);
 - **Estabelecer** a nova configuração $\Omega^{j+1} = \Omega^j$;
 - **Fazer** $j \leftarrow j + 1$;

4.4 Aspectos Computacionais

Com relação aos aspectos computacionais, neste trabalho, são exploradas as potencialidades da programação orientada a objetos utilizando recursos já existentes no ACDPOOP, ACDPFEM e 2DARANHA. Em particular, foram desenvolvidos dois códigos computacionais utilizados nos experimentos numéricos apresentados: o *SolStar2D* e o *ACDPCIP*. Os códigos computacionais mencionados consistem em:

- **ACDPOOP:** o *Ambiente Computacional para Desenvolvimento de Programas Orientados a Objetos* possui procedimentos específicos para gerenciamento de objetos, em memória e em arquivos, facilitando a construção de um banco de dados para utilizar a máquina de forma racional (Guimarães & Feijóo [21]).
- **ACDPFEM:** o *Ambiente Computacional para Desenvolvimento de Programas de Elementos Finitos* fornece algumas facilidades ao programador no desenvolvimento de novos elementos finitos e procedimentos associados a estes (Feijóo et al. [15]).
- **2DARANHA:** gerador de malha para triangularização dos domínios bidimensionais, baseado em técnicas não estruturadas frontais (Fancello [13]).
- **SolStar2D:** Como já mencionado, neste trabalho as observações de temperatura, utilizadas como informações adicionais no problema inverso, são calculadas numericamente via Método dos Elementos Finitos. O *SolStar2D* resolve problemas de condução estacionária de calor em sólidos bidimensionais, modelando numericamente corpos com inclusões e calculando as distribuições de temperatura u_n^* ao longo da fronteira deste corpo.
- **ACDPCIP:** o *Ambiente Computacional para Desenvolvimento de Programas em Problemas Inversos de Condutividade* recolhe as informações a respeito das excitações impostas em cada experimento feito e as respectivas observações de temperatura obtidas sobre a fronteira do corpo em estudo, fornecidas pelo *SolStar2D*, e aplica o algoritmo iterativo de reconstrução descrito na seção anterior.

Capítulo 5

Resultados Numéricos

Este capítulo é dedicado aos experimentos numéricos realizados utilizando o algoritmo iterativo de reconstrução proposto, mostrando que o mesmo permite identificar inclusões no interior de um corpo através da distribuição de temperatura obtida na fronteira deste corpo. Primeiramente são mostrados exemplos numéricos utilizando diretamente a expressão da derivada topológica dada pela Eq. (3.91). Na seção seguinte são apresentados alguns resultados obtidos introduzindo uma função peso à expressão da derivada topológica, ressaltando seus valores no interior do domínio. Finalmente é realizado um estudo sobre a estimativa do volume da inclusão no interior do corpo, mostrando que ele pode ser obtido observando-se o valor da função de desempenho.

Vale ressaltar que todos os exemplos numéricos apresentados neste capítulo são discretizados via Método dos Elementos Finitos adotando-se o elemento triangular linear.

5.1 Derivada Topológica

5.1.1 Exemplo 1

Neste exemplo é considerado um domínio com geometria quadrada $\Omega = (0, 1.0) \times (0, 1.0)$ e contorno denotado por $\partial\Omega = \Gamma_N \cup \Gamma_M$. Este domínio é submetido a um conjunto de fluxos de calor $\bar{q} = 1.0$, impostos ao longo de $\partial\Omega$, totalizando 16 experimentos ($M = 16$), como visto na Fig. (5.1). Em cada experimento, a região da fronteira onde não há fluxo de calor prescrito está exposta a uma corrente de convecção definida por $\bar{h} = 0.8$ e $u_\infty = 200$. A excitação no domínio vale $b = 0$ e o coeficiente de condutividade térmica da matriz vale

$k_e = 1.0.$

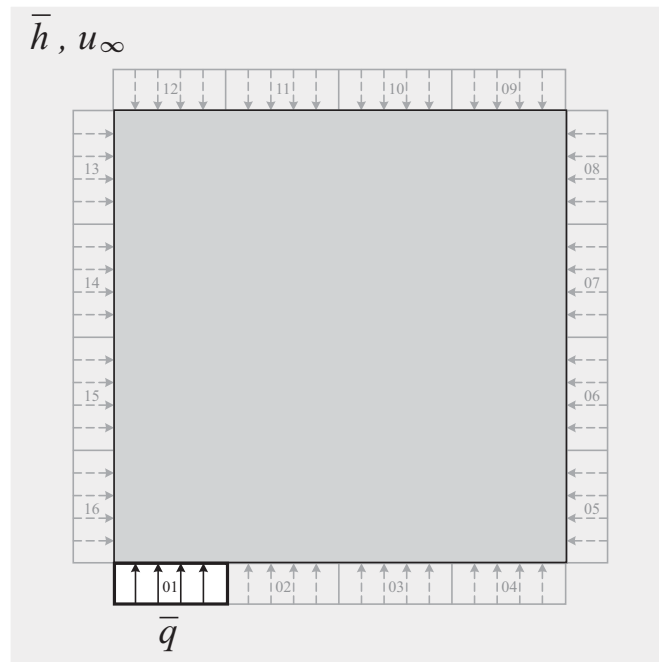


Figura 5.1: Exemplo 1 - Fluxos de calor e corrente de convecção ao longo da fronteira $\partial\Omega$.

As mesmas excitações descritas anteriormente são usadas também para obter as distribuições de temperatura u_n^* , para $n = 1, \dots, 16$, em um domínio que possui uma inclusão com formato circular, com raio $R = 0.1$, que pode ser vista na Fig. (5.2). O coeficiente de condutividade térmica da inclusão vale $k_i = 2.0$.

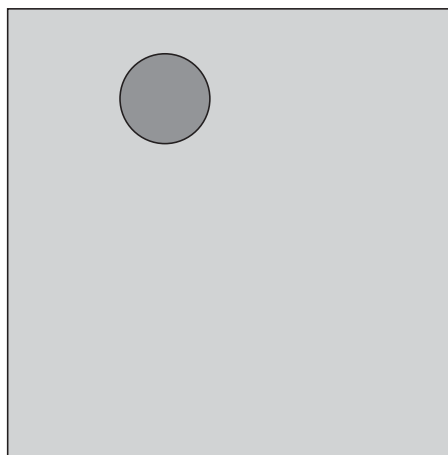


Figura 5.2: Exemplo 1 - Domínio Ω^* desejado.

A malha utilizada neste exemplo para discretizar Ω contém 9394 elementos e pode ser

vista na Fig. (5.3). Esta malha é a mesma utilizada para discretizar Ω^* e obter as distribuições de temperatura u_n^* .

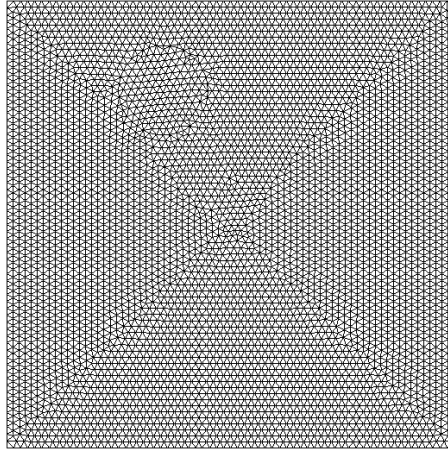


Figura 5.3: Exemplo 1 - Malha com 9394 elementos finitos.

Na Fig. (5.4) são mostrados os valores de convergência do Critério de Kohn-Vogelius (ver Eq. 3.96).

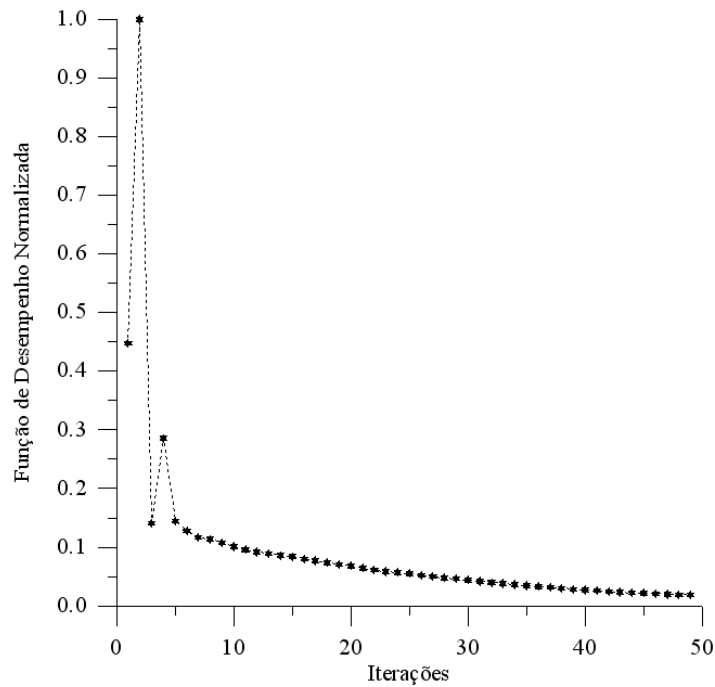


Figura 5.4: Exemplo 1 - Comportamento da função de desempenho normalizada ao longo das 49 iterações.

O passo utilizado neste exemplo, ou seja, a quantidade de material que é modificada em cada iteração, diminui gradativamente ao longo do processo iterativo até atingir um valor mínimo especificado. A oscilação da função de desempenho nas primeiras iterações, observada na Fig. (5.4), é explicada pelo fato do tamanho do passo inicial ser grande. A medida que o processo iterativo avança e o passo diminui, observa-se que a função de desempenho passa a ter um comportamento monotônico decrescente.

A soma de todas as derivadas topológicas obtidas para cada experimento n na primeira iteração do algoritmo de reconstrução é representada em 2D e 3D, respectivamente, pelas Figs. (5.5) e (5.6).

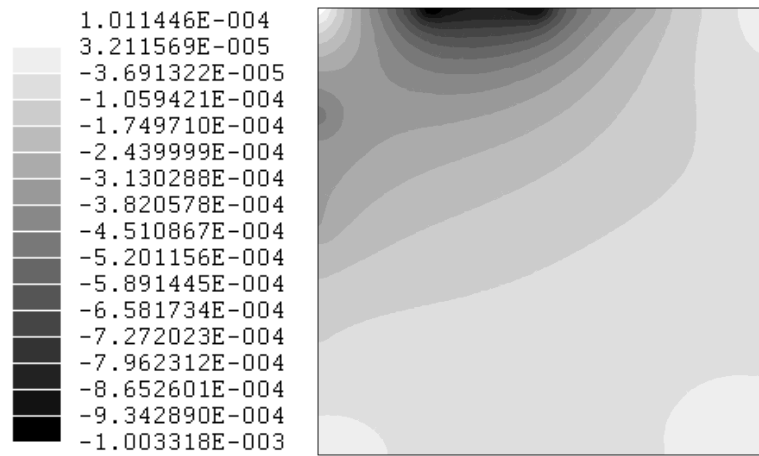


Figura 5.5: Exemplo 1 - Representação 2D da $D_T(\hat{\mathbf{x}})$ na primeira iteração.

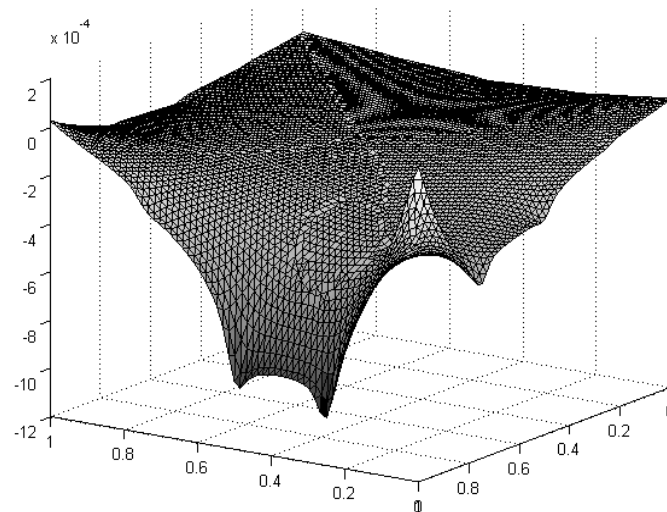
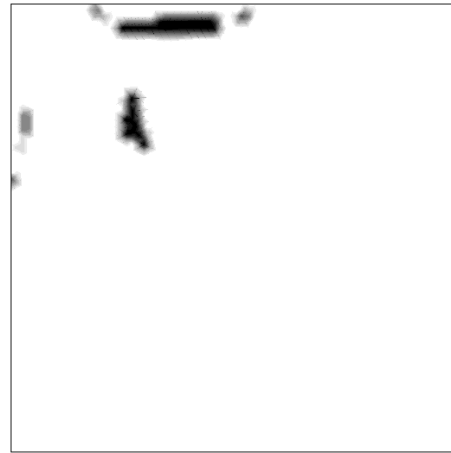


Figura 5.6: Exemplo 1 - Representação 3D da $D_T(\hat{\mathbf{x}})$ na primeira iteração.

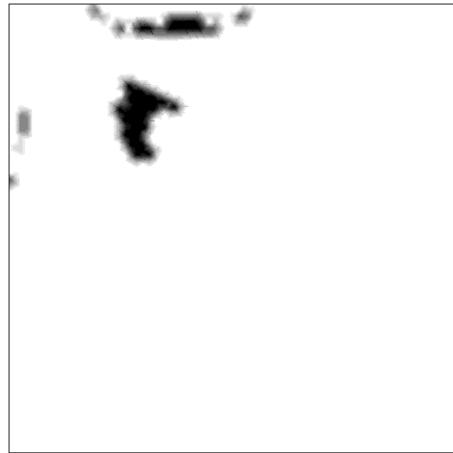
Na Fig. (5.7) é mostrada a distribuição de material no interior do domínio, para $j = 1, 16, 32, 49$, respectivamente.



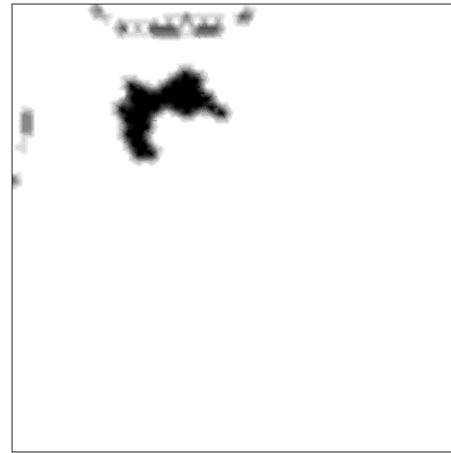
(a) Distribuição de material na iteração $j = 1$.



(b) Distribuição de material na iteração $j = 16$.



(c) Distribuição de material na iteração $j = 32$.



(d) Distribuição de material na iteração $j = 49$.

Figura 5.7: Exemplo 1 - Distribuição de material obtida para as iterações $j = 1, 16, 32, 49$.

5.1.2 Exemplo 2

Neste exemplo o domínio $\Omega = (0, 1.0) \times (0, 1.0)$ possui contorno denotado por $\partial\Omega = \Gamma_N$. Combinações aos pares de fluxos de calor $\bar{q} = 1.0$ são impostos ao longo da fronteira $\partial\Omega$, como visto na Fig. (5.8), totalizando 32 experimentos ($M = 32$) isto é, 16 experimentos com fluxos de calor na direção horizontal e mais 16 na direção vertical. Em cada experimento

realizado, a região da fronteira onde não há fluxo de calor prescrito é considerada adiabática. Para este exemplo, a excitação no domínio vale $b = 0$ e o coeficiente de condutividade térmica da matriz é $k_e = 1.0$.

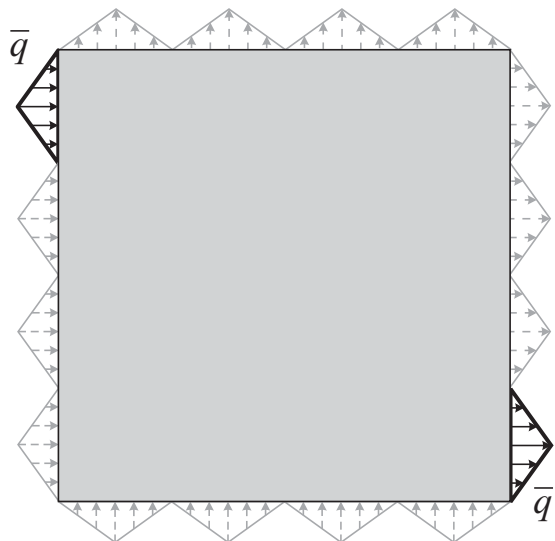


Figura 5.8: Exemplo 2 - Combinação de pares de fluxos de calor \bar{q} ao longo da fronteira $\partial\Omega$.

As mesmas excitações são usadas para obter as distribuições de temperatura u_n^* , em um domínio que possui uma inclusão circular, com raio $R = 0.1$, que pode ser vista na Fig. (5.9). O coeficiente de condutividade térmica da inclusão vale $k_i = 2.0$.

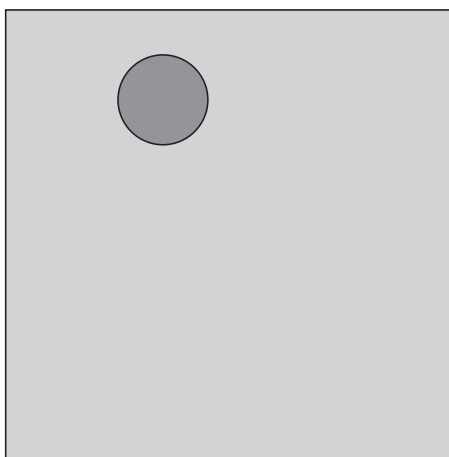


Figura 5.9: Exemplo 2 - Domínio Ω^* desejado.

A malha utilizada neste exemplo contém 9390 elementos e pode ser vista na Fig. (5.10).

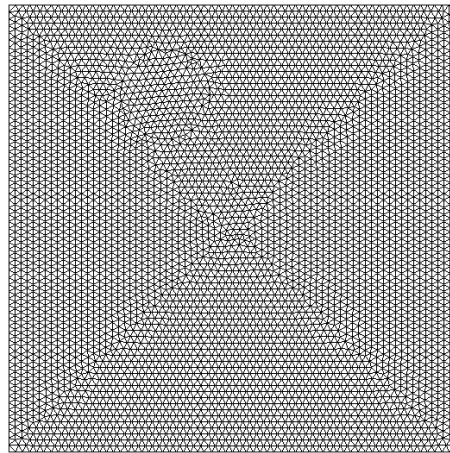


Figura 5.10: Exemplo 2 - Malha com 9390 elementos finitos.

Na Fig. (5.11) são mostrados os valores de convergência do Critério de Kohn-Vogelius. Pode-se observar um comportamento monotônico decrescente da função de desempenho ao longo do processo iterativo. Isto se deve ao passo utilizado neste exemplo ser pequeno e constante.

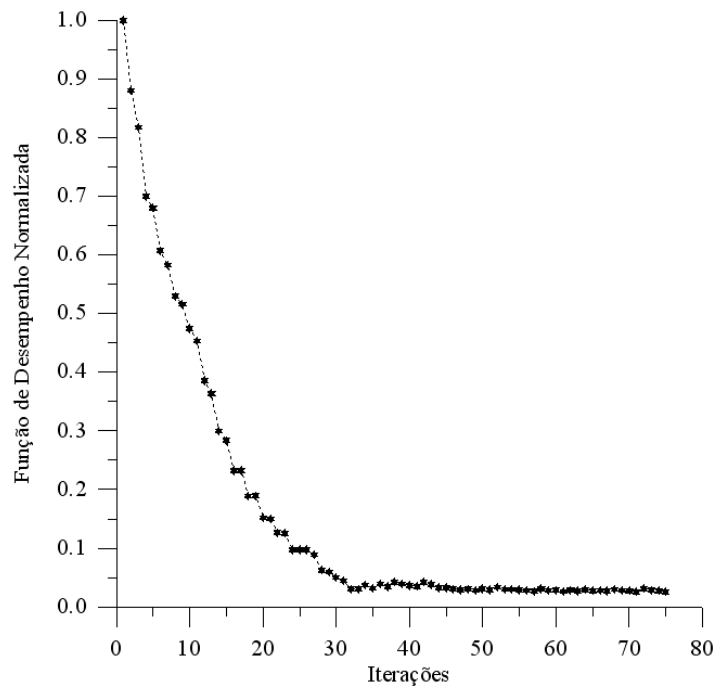


Figura 5.11: Exemplo 2 - Comportamento da função de desempenho normalizada ao longo das 75 iterações.

A soma de todas as derivadas topológicas obtidas para cada experimento n na primeira iteração do algoritmo de reconstrução pode ser vista em 2D e 3D, respectivamente, nas Figs. (5.12) e (5.13).

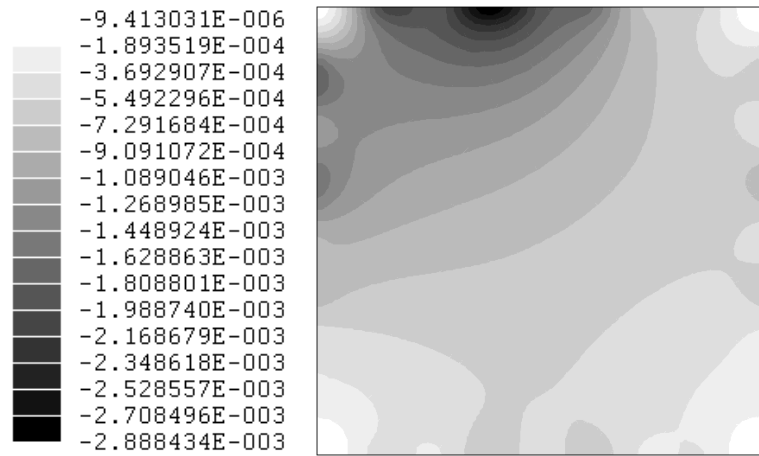


Figura 5.12: Exemplo 2 - Representação 2D da $D_T(\hat{\mathbf{x}})$ na primeira iteração.

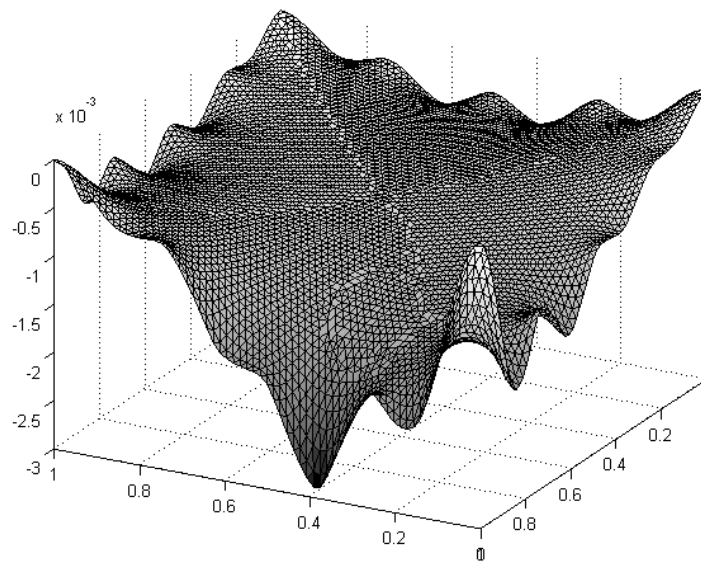


Figura 5.13: Exemplo 2 - Representação 3D da $D_T(\hat{\mathbf{x}})$ na primeira iteração.

Na Fig. (5.14) podem ser vistos a distribuição de material no interior do domínio, para $j = 1, 25, 50, 75$, respectivamente.

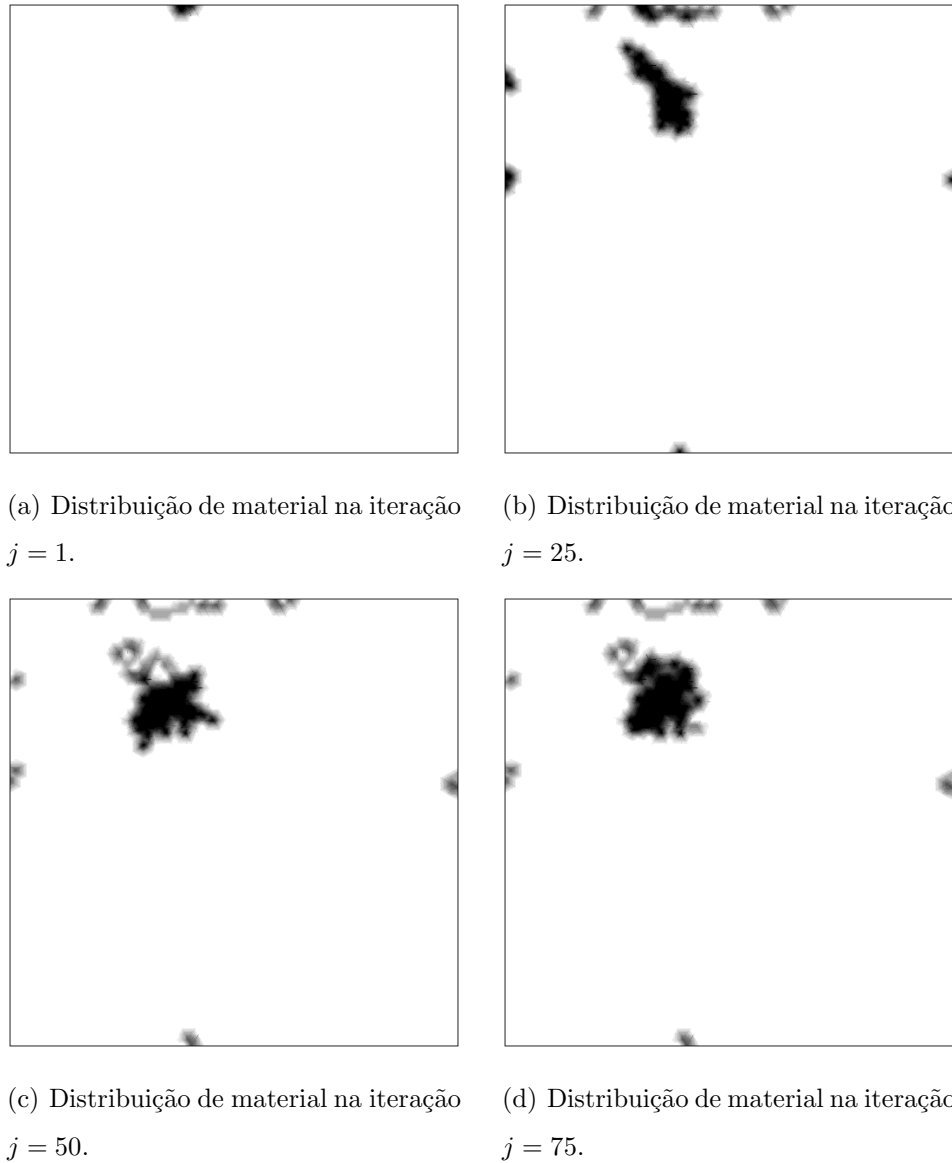


Figura 5.14: Exemplo 2 - Distribuição de material obtida para as iterações $j = 1, 25, 50, 75$.

Observa-se que o resultado obtido neste exemplo é mais preciso que aquele obtido no Exemplo 1. Isto se deve à forma como o fluxo de calor e demais condições de contorno são impostos ao longo de $\partial\Omega$. Impondo a entrada de fluxo de calor em uma face e sua saída na face oposta, mantendo o restante do contorno isolado, faz com que o fluxo de calor seja obrigado a atravessar o domínio Ω , levando a informação a respeito da inclusão para o contorno $\partial\Omega$ onde o campo de temperatura u_n^* é obtido. Esta característica é mais difícil de ocorrer quando são impostos fluxo de calor e condição de convecção ao longo de $\partial\Omega$. De fato, nesse último caso, o fluxo de calor no interior do domínio é disperso, sendo mais

difícil transmitir as informações para $\partial\Omega$. Contudo, é importante mencionar que, embora o Exemplo 2 tenha dado resultado melhor que o Exemplo 1, suas condições de contorno e excitações são mais difíceis de se reproduzir em laboratório.

5.2 Derivada Topológica com Função Peso

Nesta seção são apresentados alguns exemplos numéricos introduzindo uma função peso à expressão da derivada topológica, fazendo com que seus valores no interior do domínio Ω sejam realçados, dando a eles maior peso que àqueles próximo à fronteira $\partial\Omega$. Esta função, representada na Fig. (5.15), é escrita da seguinte maneira:

$$\omega(x, y) = \sin\left(\frac{x\pi}{L_x}\right) \sin\left(\frac{y\pi}{L_y}\right), \quad (5.1)$$

onde L_x e L_y representam as dimensões do domínio Ω nas respectivas direções. Assim, a nova expressão da derivada topológica resulta em:

$$D_T^\omega(\hat{\mathbf{x}}) = \omega D_T(\hat{\mathbf{x}}). \quad (5.2)$$

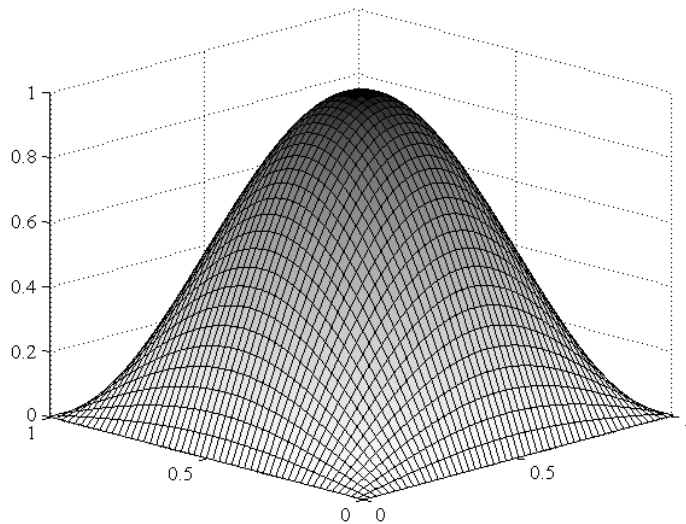
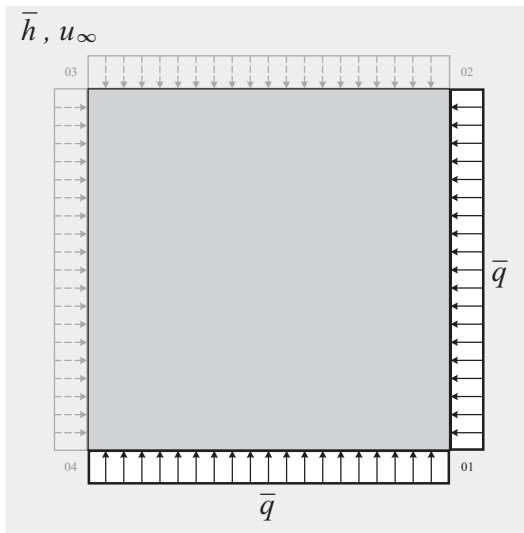


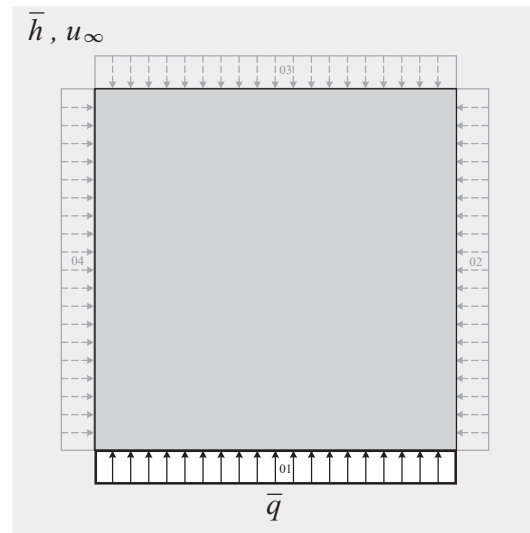
Figura 5.15: Função Peso $\omega(x, y)$

Todos os exemplos a seguir possuem um domínio com geometria quadrada $\Omega = (0, 1.0) \times (0, 1.0)$ e contorno denotado por $\partial\Omega = \Gamma_N \cup \Gamma_M$, submetido a um conjunto de 32 experimentos ($M = 32$), como mostrado na Fig. (5.16). Estes experimentos são caracterizados por

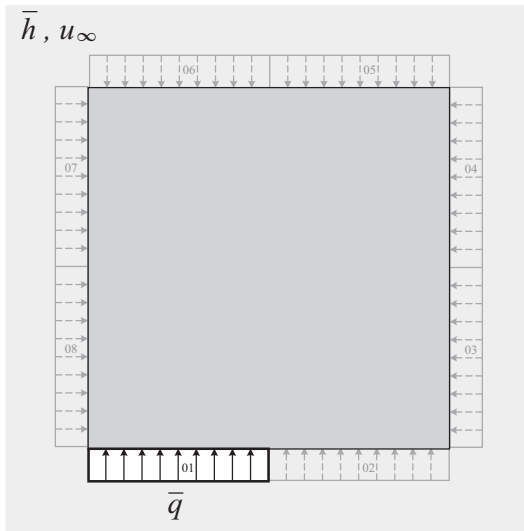
diferentes formas de impor fluxo de calor ao longo de $\partial\Omega$, isto é: 4 experimentos com fluxo de calor $\bar{q} = 0.25$ prescrito ao longo de duas faces adjacentes do quadrado (Fig. (5.16a)); 4 experimentos com fluxo $\bar{q} = 0.50$ prescrito ao longo de uma face do quadrado (Fig. (5.16b)); 8 experimentos com fluxo $\bar{q} = 0.75$ sobre a metade de uma face do quadrado (Fig. (5.16c)); 16 experimentos com fluxo $\bar{q} = 1.00$ sobre 1/4 de uma face do quadrado (Fig. (5.16d)). Em cada experimento, a região da fronteira onde não há fluxo de calor prescrito está exposta a uma corrente de convecção definida por $\bar{h} = 0.8$ e $u_\infty = 200$. A excitação no domínio vale $b = 0$ e o coeficiente de condutividade térmica da matriz vale $k_e = 1.0$.



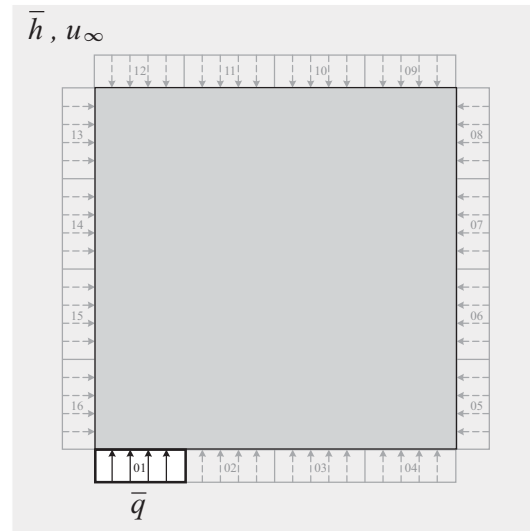
(a) 4 experimentos com $\bar{q} = 0.25$.



(b) 4 experimentos com $\bar{q} = 0.50$.



(c) 8 experimentos com $\bar{q} = 0.75$.



(d) 16 experimentos com $\bar{q} = 1.00$.

Figura 5.16: Fluxos de calor e corrente de convecção ao longo da fronteira $\partial\Omega$.

Vale ressaltar que, nos exemplos desta seção, da mesma forma que no Exemplo 1, o passo utilizado diminui ao longo do processo iterativo até atingir um valor mínimo especificado.

5.2.1 Exemplo 3

Neste exemplo, as distribuições de temperatura u_n^* , para $n = 1, \dots, 32$, são obtidas impondo as mesmas excitações mostradas na Fig. (5.16) em um domínio que possui uma inclusão circular, com raio $R = 0.1$, como mostra a Fig. (5.17). O coeficiente de condutividade térmica da inclusão vale $k_i = 2.0$.

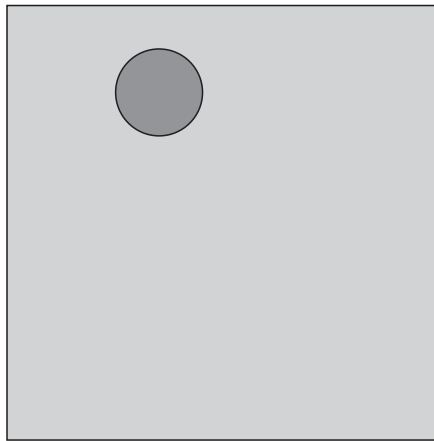


Figura 5.17: Exemplo 3 - Domínio Ω^* desejado.

A malha utilizada neste exemplo para discretizar Ω contém 9394 elementos e pode ser vista na Fig. (5.18).

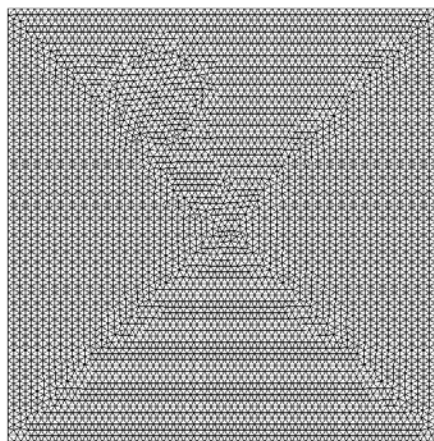


Figura 5.18: Exemplo 3 - Malha com 9394 elementos finitos.

Na Fig. (5.19) são mostrados os valores de convergência do Critério de Kohn-Vogelius.

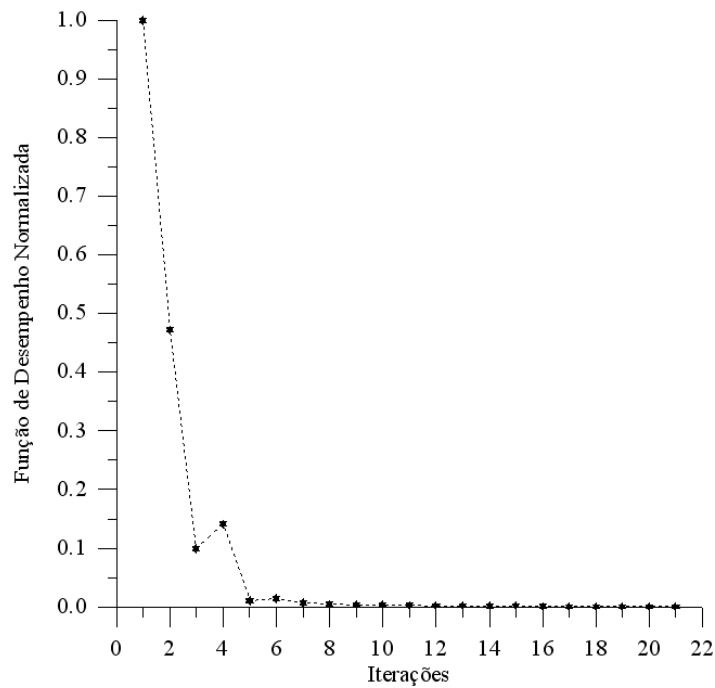


Figura 5.19: Exemplo 3 - Comportamento da função de desempenho normalizada ao longo das 21 iterações.

A soma de todas as derivadas topológicas obtidas para cada experimento n na primeira iteração do algoritmo de reconstrução é mostrada na Fig. (5.20).

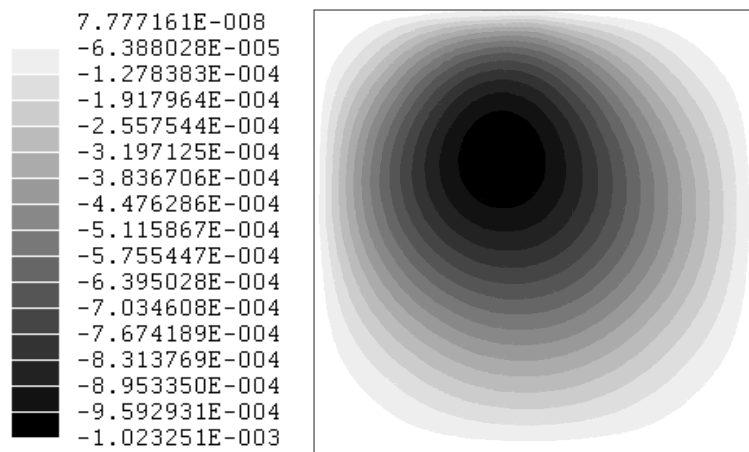
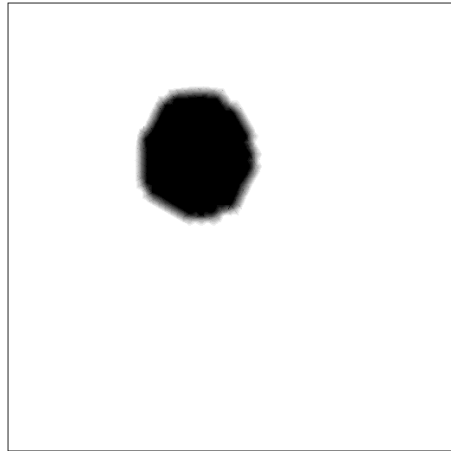


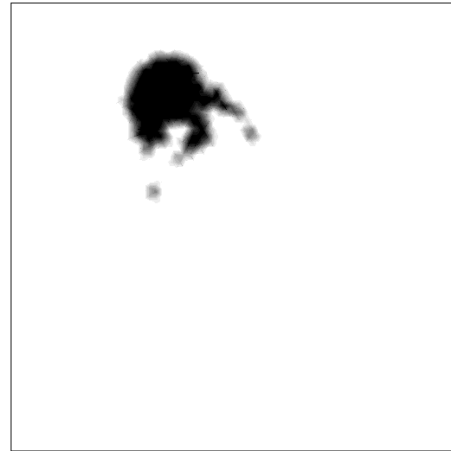
Figura 5.20: Exemplo 3 - $D_T^\omega(\hat{\mathbf{x}})$ na primeira iteração.

Na Fig. (5.21) podem ser vistos a distribuição de material no interior do domínio, para

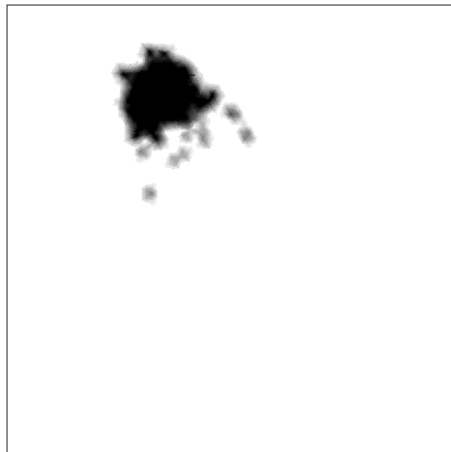
$j = 1, 7, 14, 21$, respectivamente.



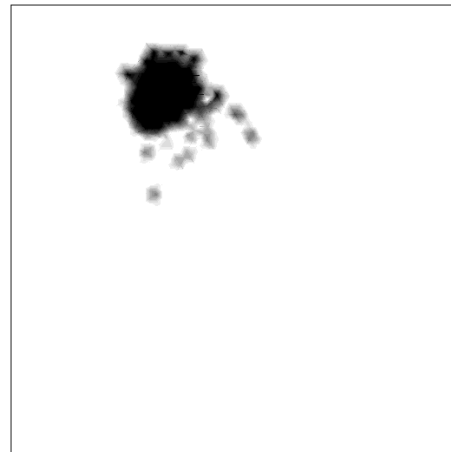
(a) Distribuição de material na iteração $j = 1$.



(b) Distribuição de material na iteração $j = 7$.



(c) Distribuição de material na iteração $j = 14$.



(d) Distribuição de material na iteração $j = 21$.

Figura 5.21: Exemplo 3 - Distribuição de material obtida para as iterações $j = 1, 7, 14, 21$.

5.2.2 Exemplo 4

Este exemplo, da mesma forma que o anterior, mostra o comportamento do algoritmo de reconstrução introduzindo a função peso ω à expressão da derivada topológica, no entanto, em um domínio que possui uma inclusão com geometria mais complexa. Neste exemplo, as distribuições de temperatura u_n^* são obtidas impondo as mesmas excitações vistas na Fig. (5.16) em um domínio que possui uma inclusão em forma de L , como pode ser visto na Fig.

(5.22). O coeficiente de condutividade térmica da inclusão vale $k_i = 2.0$.

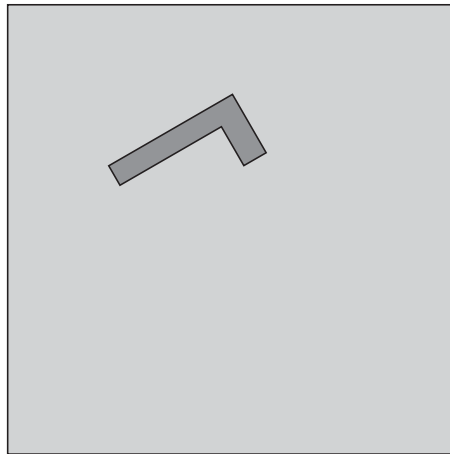


Figura 5.22: Exemplo 4 - Domínio Ω^* desejado.

A malha utilizada neste exemplo para discretizar Ω contém 9370 elementos e pode ser vista na Fig. (5.23).

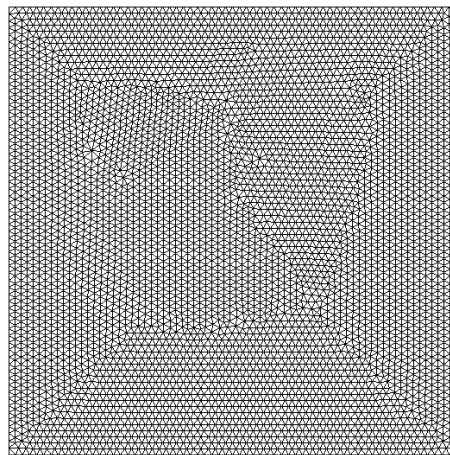


Figura 5.23: Exemplo 4 - Malha com 9370 elementos finitos.

Na Fig. (5.24) são mostrados os valores de convergência do Critério de Kohn-Vogelius.

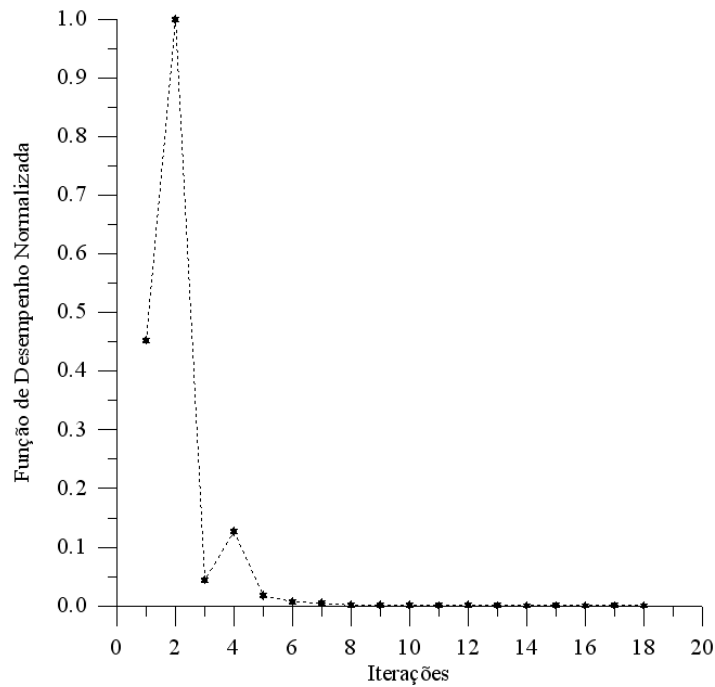


Figura 5.24: Exemplo 4 - Comportamento da função de desempenho normalizada ao longo das 18 iterações.

A soma de todas as derivadas topológicas obtidas para cada experimento n na primeira iteração do algoritmo de reconstrução é mostrada na Fig. (5.25).

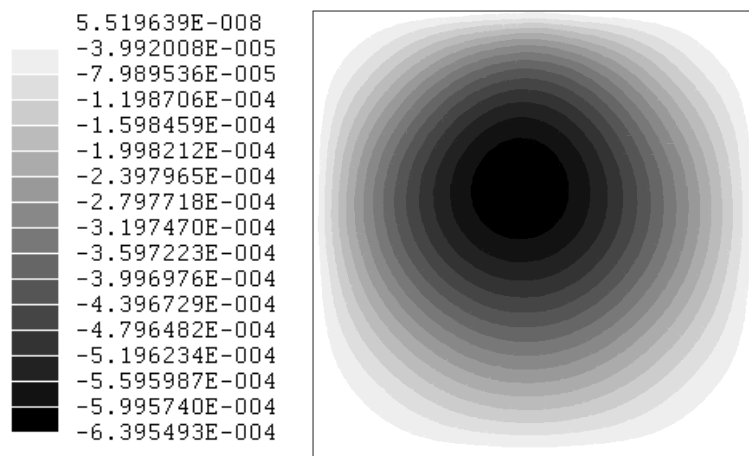


Figura 5.25: Exemplo 4 - $D_T^\varphi(\hat{\mathbf{x}})$ na primeira iteração.

Na Fig. (5.26) podem ser vistos a distribuição de material no interior do domínio, para $j = 1, 6, 12, 18$, respectivamente.



Figura 5.26: Exemplo 4 - Distribuição de material obtida para as iterações $j = 1, 6, 12, 18$.

5.2.3 Exemplo 5

Este exemplo mostra o comportamento do algoritmo de reconstrução em um problema que possui uma inclusão próxima à fronteira do domínio. O objetivo aqui é encontrar uma inclusão que está localizada em uma região onde a expressão da derivada topológica, com a função peso incorporada $D_T^\omega(\hat{\mathbf{x}})$ (Eq. 5.2), possui seus menores valores.

As distribuições de temperatura u_n^* são obtidas neste exemplo em um domínio que possui uma inclusão em forma de L , como visto na Fig. (5.22). O coeficiente de condutividade

térmica da inclusão vale $k_i = 2.0$.

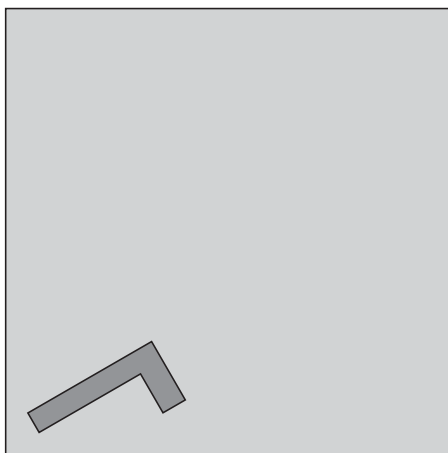


Figura 5.27: Exemplo 5 - Domínio Ω^* desejado.

A malha utilizada neste exemplo para discretizar Ω contém 9400 elementos e pode ser vista na Fig. (5.28).

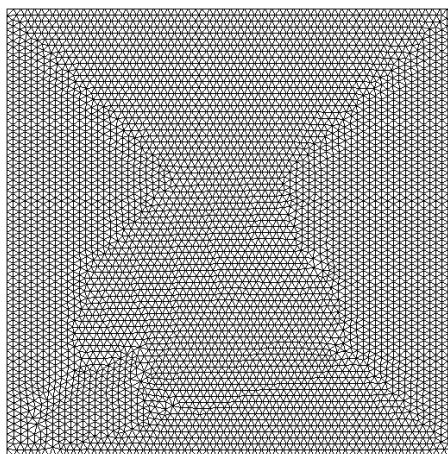


Figura 5.28: Exemplo 5 - Malha com 9400 elementos finitos.

Na Fig. (5.29) são mostrados os valores de convergência do Critério de Kohn-Vogelius.

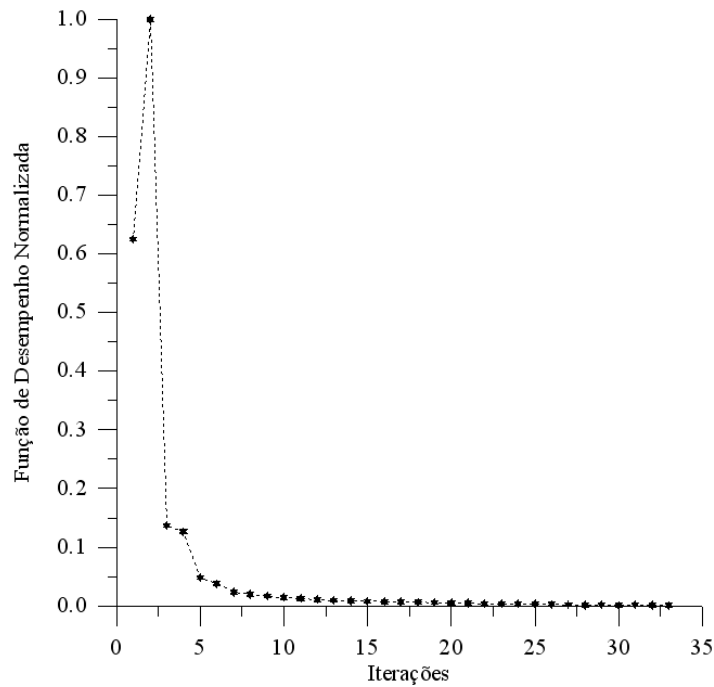


Figura 5.29: Exemplo 5 - Comportamento da função de desempenho normalizada ao longo das 33 iterações.

A soma de todas as derivadas topológicas obtidas para cada experimento n na primeira iteração do algoritmo de reconstrução é mostrada na Fig. (5.30).

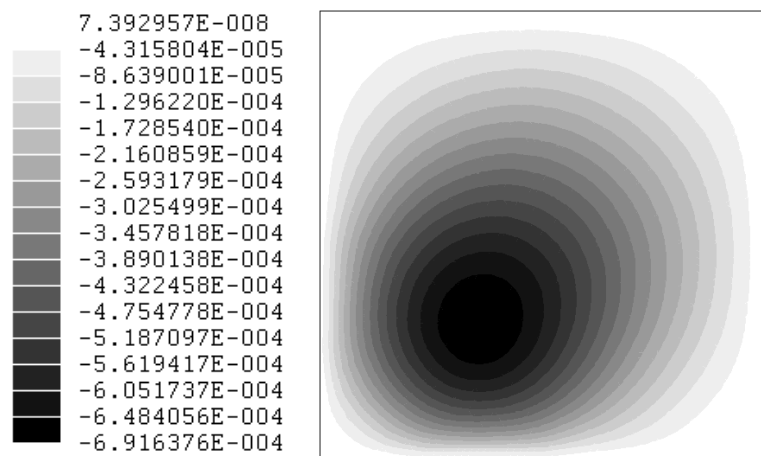


Figura 5.30: Exemplo 5 - $D_T^\varphi(\hat{\mathbf{x}})$ na primeira iteração.

Na Fig. (5.31) podem ser vistos a distribuição de material no interior do domínio, para $j = 1, 11, 22, 33$, respectivamente.

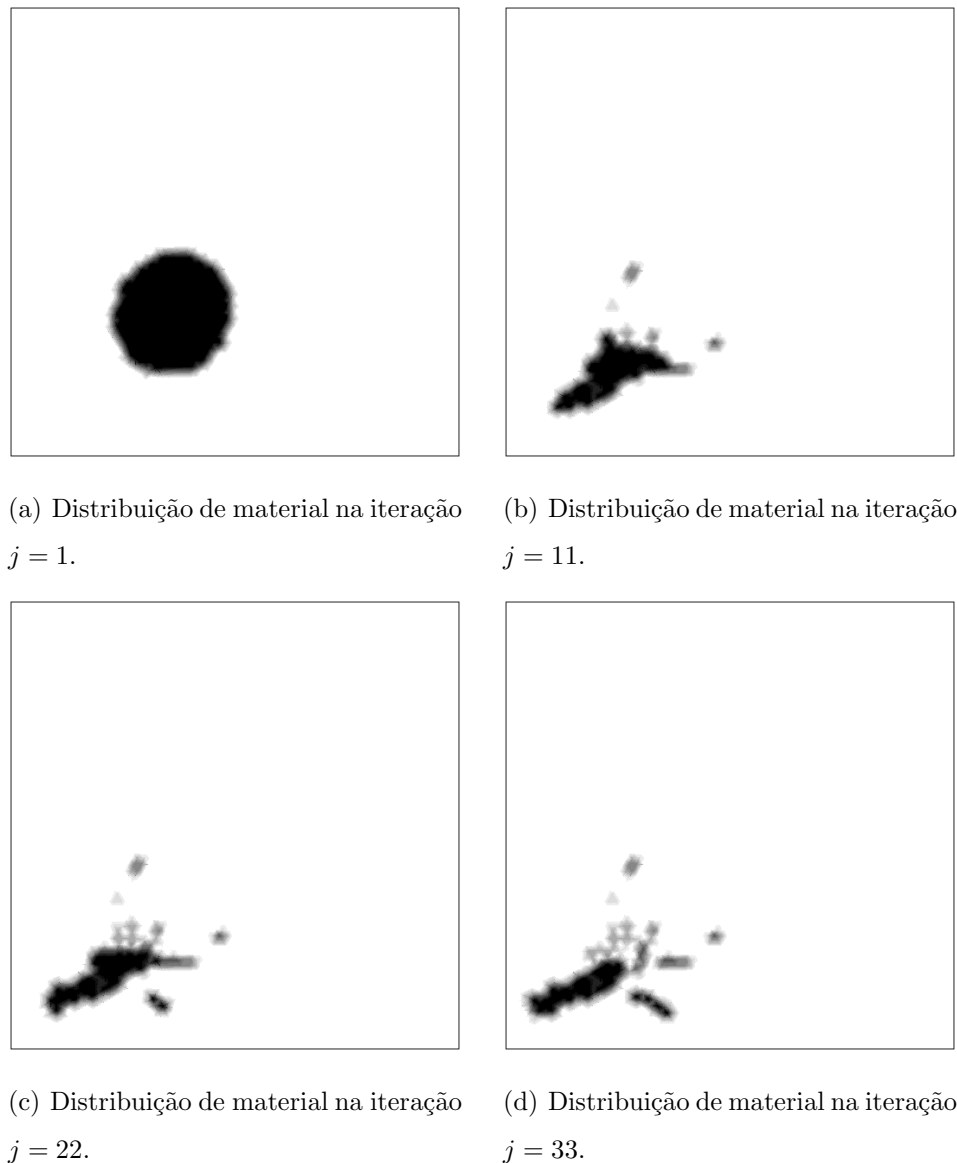


Figura 5.31: Exemplo 5 - Distribuição de material obtida para as iterações $j = 1, 11, 22, 33$.

5.3 Estimativa do Volume da Inclusão

Embora a derivada topológica indique a região do domínio onde a função de desempenho é mais sensível à introdução de uma inclusão, é importante mencionar que, o tamanho do passo, ou seja, a quantidade de material que realmente é modificada em cada iteração do algoritmo de reconstrução proposto, fica a cargo do usuário, no início do processo iterativo. Entretanto, conhecer o volume ocupado por essa inclusão antes de iniciar o processo de mudança das propriedades materiais, ajudaria bastante na busca pelo domínio desejado

Ω^* . De fato, essa informação indica a quantidade de material no interior do domínio que, ao final do processo iterativo, deverá possuir as propriedades da inclusão. Nesta seção é realizado um pequeno estudo sobre a estimativa do volume da inclusão no interior de um corpo, mostrando que o mesmo pode ser obtido, observando o comportamento da função de desempenho quando o tamanho do passo for modificado.

De acordo com o algoritmo de reconstrução proposto, para um problema qualquer, o processo iterativo é iniciado com um domínio Ω homogêneo, livre de inclusões. A derivada topológica obtida neste domínio, utilizando a função peso definida pela Eq. (5.2), indica a região da matriz que deve tornar-se inclusão. Essa região indica os pontos para os quais uma mudança nas propriedades materiais ocasiona uma maior diminuição da função de desempenho. Mudando as propriedades materiais nessa região, é possível calcular a função de desempenho neste novo domínio. Quando a quantidade de material que se transforma em inclusão é modificada, o domínio obtido é outro, e conseqüentemente, o valor da função de desempenho também muda.

A idéia principal deste estudo está no fato de que o valor mínimo da função de desempenho encontrado, ocorre quando a porcentagem de material transformado em inclusão no algoritmo coincide com a porcentagem volumétrica que esta ocupa, de fato, no interior do corpo. Esta característica pode ser vista no Exemplo 6 apresentado a seguir, onde são realizados alguns experimentos com inclusões circulares de diferentes tamanhos. Em cada um dos experimentos, é possível observar que, qualquer distribuição de material dentro do domínio, que tenha uma inclusão com proporções volumétricas diferentes da inclusão real, produziu uma função de desempenho maior que aquela obtida quando estas ocupam o mesmo volume, mesmo estando as duas em diferentes posições.

5.3.1 Exemplo 6

Neste exemplo, foi utilizado o mesmo domínio definido na Seção 5.2 deste capítulo, ou seja, um domínio $\Omega = (0, 1.0) \times (0, 1.0)$ com contorno $\partial\Omega = \Gamma_N \cup \Gamma_M$ e coeficiente de condutividade térmica $k_e = 1.0$. Este domínio foi submetido às mesmas excitações e condições de contorno descritas naquela seção, totalizando 32 experimentos ($M = 32$). As distribuições de temperatura são obtidas em cinco domínios distintos, cada um contendo uma inclusão circular de raio diferente, como mostra a Fig. (5.32). O coeficiente de condutividade térmica

da inclusão para todos os cinco casos vale $k_i = 2.0$.

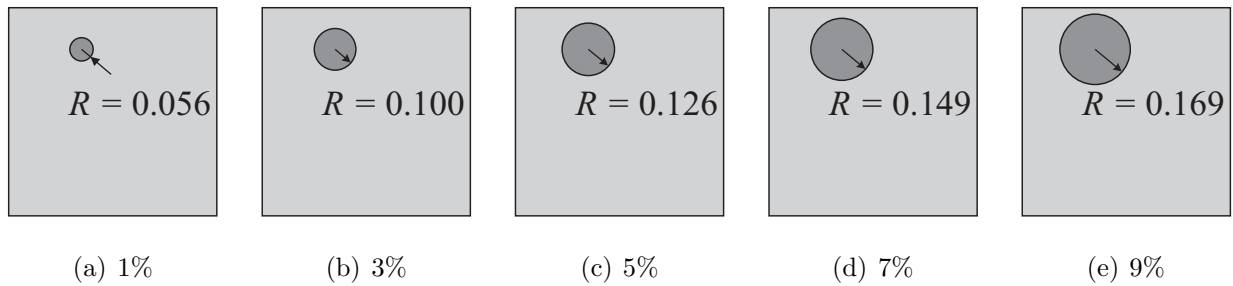


Figura 5.32: Exemplo 6 - Inclusões de raio $R = 0.056$, $R = 0.100$, $R = 0.126$, $R = 0.149$ e $R = 0.169$, representando respectivamente, 1%, 3%, 5%, 7% e 9% do volume total de Ω^* .

O comportamento da função de desempenho em relação ao tamanho do passo, para os cinco experimentos realizados, pode ser visto nas Figs. (5.33) e (5.34). Observando a Fig. (5.34), é possível observar que o mínimo da função de desempenho é atingido quando a troca de material em termos volumétricos coincide com o tamanho real da inclusão.

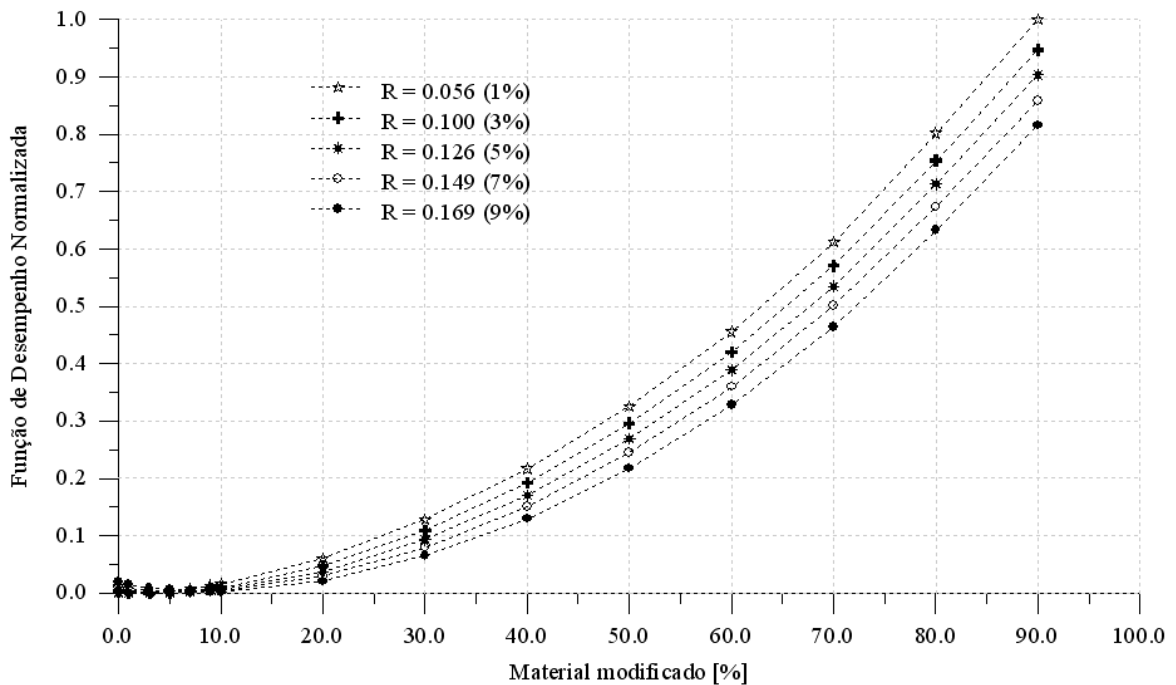


Figura 5.33: Exemplo 6 - Comportamento da função de desempenho em relação à parcela percentual de material que é transformada em inclusão.

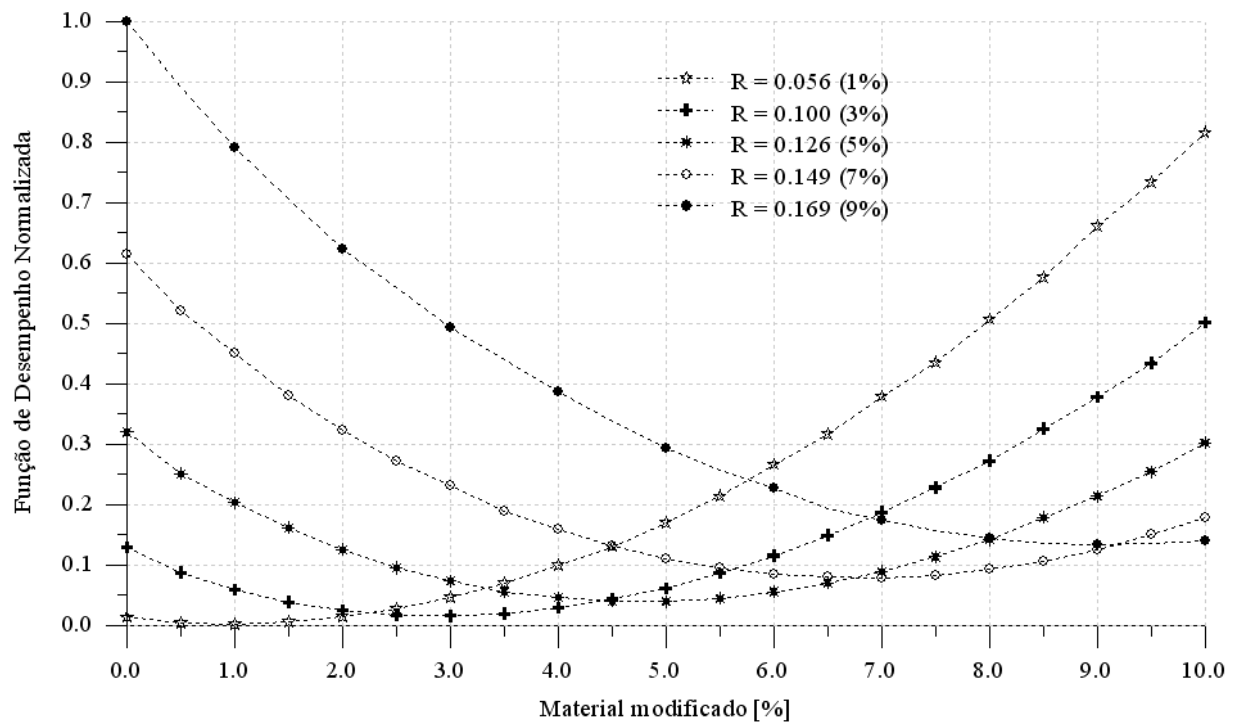


Figura 5.34: Exemplo 6 - Comportamento da função de desempenho entre 0 e 10%.

Capítulo 6

Considerações Finais

Este trabalho teve como principal objetivo aplicar o conceito de Derivada Topológica em problemas inversos de caracterização de propriedades em meios heterogêneos, estendendo-o para o cálculo da sensibilidade de um problema ao se introduzir uma pequena inclusão sobre uma matriz originalmente homogênea. Analisando o problema de condução de calor em regime estacionário, foi mostrado que a derivada topológica é capaz de identificar inclusões no interior de uma matriz a partir de observações de temperatura obtidas sobre a fronteira do domínio em estudo, levando em conta que matriz e inclusão possuem condutividade térmica diferentes.

Muitos problemas inversos podem ser resolvidos sem a necessidade de inverter seus operadores. De fato, é comum encontrar problemas inversos formulados através de algoritmos evolutivos de otimização, cuja idéia é minimizar funcionais, satisfazendo um determinado conjunto de restrições. O problema inverso discutido neste trabalho é formulado de maneira semelhante a um problema de otimização, possuindo entretanto, algumas características específicas e interessantes que merecem ser ressaltadas.

Em problemas típicos de otimização estrutural, dificilmente se tem disponível uma função de desempenho explícita em relação aos parâmetros de projeto, o mínimo não é conhecido *a priori* e as técnicas de programação matemática apontam para mínimos locais, sem garantia de minimização global. Desta forma, a solução encontrada, muitas vezes não representa a solução ótima do problema, mas sim uma melhoria do projeto inicial. Analisando o Critério de Kohn-Vogelius, utilizado neste trabalho como função de desempenho, é possível observar claramente que o seu mínimo é conhecido, e ocorre quando a solução dos dois problemas

auxiliares \mathcal{P}_1 e \mathcal{P}_2 é a mesma em todo o domínio em estudo, ou seja, quando seu valor se reduz a zero. Embora o ponto de mínimo do Critério de Kohn-Vogelius seja conhecido, o problema inverso aqui discutido possui complicações peculiares à sua formulação, o que torna sua análise mais difícil e complexa.

Foi observado numericamente que quanto mais informação for incluída na análise do problema inverso, mais a função de desempenho se aproxima de zero e conseqüentemente mais precisa é a solução. Porém, é importante ressaltar que um número maior de experimentos realizados em laboratório não implica necessariamente em uma maior quantidade de informação disponível. De fato, as informações a respeito da anomalia precisam ser capturadas na fronteira do domínio em estudo para que o problema seja resolvido. Caso algum experimento não consiga transmitir a presença da anomalia ao contorno do domínio, as medições realizadas não contribuem em nada para a análise do problema. Por isso, pode-se dizer que a "qualidade" das informações colhidas em cada experimento é de fundamental importância para encontrar a solução do problema inverso.

Observando a expressão final da derivada topológica dada pela Eq. (3.91), observa-se que basta calcular as soluções dos problemas \mathcal{P}_1 , \mathcal{P}_2 , \mathcal{A}_1 e \mathcal{A}_2 , definidos no domínio original Ω livre de inclusões, para obter a sensibilidade da função de desempenho quando uma inclusão é introduzida em um ponto arbitrário $\hat{\mathbf{x}} \in \Omega$. Em outras palavras, a derivada topológica pode ser obtida com o custo computacional necessário para determinar apenas as soluções u^D , u^N , λ^D e λ^N e seus respectivos gradientes.

A informação obtida da análise de sensibilidade topológica foi utilizada para propor um método iterativo de reconstrução que visa resolver o problema inverso proposto. A metodologia desenvolvida é baseada no fato de que a derivada topológica $D_T(\hat{\mathbf{x}})$ atinge seus menores valores onde a função de desempenho é mais sensível à mudança de material. Dessa forma, a derivada topológica pode atuar como uma função indicadora do conjunto de pontos onde as anomalias devem ser incluídas no interior do domínio.

O processo iterativo inicia-se modificando o coeficiente de condutividade térmica em cada iteração de acordo com os valores da derivada topológica. No início deste, a derivada topológica indica a presença de inclusões na fronteira. Isto acontece, provavelmente, devido à grande diferença entre as soluções dos problemas \mathcal{P}_1 e \mathcal{P}_2 naquela região. Ao longo das sucessivas iterações e, conseqüentemente, depois de várias mudanças de propriedade, é possível

observar que a derivada topológica trabalha como uma direção de descida possibilitando a identificação de inclusões desconhecidas.

Os resultados numéricos apresentados neste trabalho mostram que a técnica proposta para resolver o problema inverso em questão foi bem sucedida, produzindo resultados satisfatórios com custos computacionais relativamente baixos. No entanto, a qualidade geométrica da identificação ainda é possível de ser melhorada e, portanto, ser assunto de novas pesquisas.

Enfim, a derivada topológica é uma área de pesquisa promissora, com potencial aplicações em otimização topológica, problemas inversos de identificação de falhas em componentes mecânicos ou caracterização de propriedades em meios heterogêneos, além de poder ser empregada na modelagem de fenômenos que experimentam mudanças nas propriedades físicas do meio, como cavitação, mudanças de fase, plasticidade, fratura dúctil, dano entre outros.

6.1 Trabalhos Futuros

A seguir, são listadas algumas questões que ainda se encontram em aberto e que podem ser objetivo de pesquisas futuras:

- Realizar experimentos numéricos cujas observações de temperatura obtidas, sofrem a influência de ruídos, e com isso, analisar a estabilidade do método na sua presença;
- Aprimorar o método iterativo de reconstrução, para melhor utilizar as informações contidas na derivada topológica, na caracterização da topologia e forma de um campo de inclusões, bem como de suas propriedades materiais;
- Buscar uma prova matemática que justifique a aplicação da derivada topológica em problemas inversos;
- Aplicar o conceito de derivada topológica para várias outras classes de problemas inversos tais como: Problema Inverso do Potencial, com aplicação em geologia; Problema Inverso do Espalhamento, com aplicação em medicina (tomografia); entre outros;
- Realizar a Análise de Sensibilidade Topológica em problemas inversos não-lineares e transientes;
- Aplicar a derivada topológica em métodos *level-set* para resolver problemas inversos.

Referências Bibliográficas

- [1] S. Amstutz, I. Horchani and M. Masmoudi. Crack detection by the topological gradient method. To appear on *Control and Cybernetics*, 2005.
- [2] I. Babuška & T. Strouboulious. *The Finite Element Method and its Reliability*. Clarendon Press, 2001.
- [3] E.B. Becker, G.F. Carey & J.T. Oden, *Finite Elements: An Introduction*. Prentice-Hall, vol. **1**, 1981.
- [4] M. Bertero & P. Boccacci. *Introduction to Inverse Problems in Imaging*. IOP, 1998.
- [5] H.D. Bui. *Inverse Problems in the Mechanics of Materials: an Introduction*. CRC Press, 1994.
- [6] A.P. Calderón. On a Inverse Boundary Value Problem. *Seminar on Numerical Analysis and Its Applications to Continuum Physics*, Laboratório Nacional de Computação Científica LNCC/MCT, Rio de Janeiro, 65-73, 1980.
- [7] G.F. Carey & J.T. Oden, *Finite Elements: A Second Course*. Prentice-Hall, vol. **2**, 1983.
- [8] J. Céa. Problems of Shape Optimal Design. Haug & Céa [26].
- [9] J. Céa, S. Garreau, Ph. Guillaume & M. Masmoudi. The Shape and Topological Optimizations Connection. Relatório de Pesquisa, UFR MIG, Université Paul Sabatier, Toulouse, França, 1998. Também publicado na revista *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **188**:713-726, 2000.

- [10] H.A. Eschenauer & N. Olhoff. Topology Optimization of Continuum Structures: A Review. *Applied Mechanics Review*, **54**:331-390, 2001.
- [11] H.A. Eschenauer, V.V. Kobelev & A. Schumacher. Bubble Method for Topology and Shape Optimization of Structures. *Structural Optimization*, **8**:42-51, 1994.
- [12] J.D. Eshelby. The Elastic Energy-Momentum Tensor. *Journal of Elasticity*, **5**:321-335, 1975.
- [13] E.A. Fancello. *Análise de Sensibilidade, Geração Adaptativa de Malhas e o Método dos Elementos Finitos na Otimização de Forma em Problemas de Contato e Mecânica da Fratura*. Tese de Doutorado, COPPE-UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil, 1993.
- [14] G. R. Feijóo. An Imaging Method in Diffraction Tomography Based on the Topological Derivative. IEEE Symposium, 2004.
- [15] R.A. Feijóo, A.C.S. Guimarães & E.A. Fancello. *Algunas Experiencias en la Programación Orientada por Objetos y su Aplicación en el Método de los Elementos Finitos*. Relatório de Pesquisa 15/1991, LNCC-CNPq, Rio de Janeiro, Brasil, 1991.
- [16] R.A. Feijóo, A.A. Novotny, C. Padra & E. Taroco. The Topological Derivative for the Poisson's Problem. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, **13-12**:1-20, 2003.
- [17] R.A. Feijóo, A.A. Novotny, C. Padra & E. Taroco. The Topological-Shape Sensitivity Method and its Application in 2D Elasticity. *Journal of Computational Methods in Sciences and Engineering*, 2005.
- [18] S. Garreau, Ph. Guillaume & M. Masmoudi. *The Topological Gradient*. Relatório de Pesquisa, UFR MIG, Université Paul Sabatier, Toulouse, França, 1998.
- [19] S. Garreau, Ph. Guillaume & M. Masmoudi. The Topological Asymptotic for PDE Systems: The Elasticity Case. *SIAM Journal on Control and Optimization*, **39**:1756-1778, 2001.

- [20] Ph. Guillaume. *Dérivée d'Ordre Supérieur en Conception Optimale de Forma*. Tese de Doutorado, Université Paul Sabatier, Toulouse, França, 1994.
- [21] A.C.S. Guimarães & R.A. Feijóo. *O Sistema ACDP*. Relatório de Pesquisa 27/1989, LNCC-CNPq, Rio de Janeiro, Brasil, 1989.
- [22] T. Guinzani F., E. A. Fancello, A.A. Novotny. An Iterative Reconstruction Method Based on the Topological Derivative for Solving an Inverse Conductivity Problem. *XXVI Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering - CILAMCE*. Guarapari, Brasil, 2005.
- [23] M.E. Gurtin. *An Introduction to Continuum Mechanics*. Mathematics in Science and Engineering vol. 158. Academic Press, 1981.
- [24] M.E. Gurtin. *Configurational Forces as Basic Concept of Continuum Physics*. Applied Mathematical Sciences vol. 137. Springer-Verlag, 2000.
- [25] E.J. Haug, K.K. Choi & V. Komkov. *Design Sensitivity Analysis of Structural Systems*. Academic Press, 1986.
- [26] E.J. Haug & J. Cea. Proceedings: *Optimization of Distributed Parameters Structures*, Iowa, EUA, 1981.
- [27] T.J.R. Hughes. *The Finite Element Method - Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. Prentice-Hall, 1987.
- [28] V. Isakov. *Inverse Problems for Partial Differential Equations*. Springer, 1998.
- [29] R. Kohn & M. Vogelius, Relaxation of a Variational Method for Impedance Computed Tomography. *Comm. Pure Appl. Math.*, **40**: 745-777, 1987.
- [30] T. Lewiński & J. Sokolowski. Energy change due to the appearance of cavities in elastic solids. *Int. J. Solids Struct.*, **40**:1765-1803, 2003.
- [31] F. Murat & J. Simon. *Sur le Contrôle par un Domaine Géométrique*. Tese de Doutorado, Université Pierre et Marie Curie, Paris VI, França, 1976.

- [32] A.A. Novotny. *Análise de Sensibilidade Topológica*. Tese de Doutorado, LNCC-MCT, Petrópolis, Brasil, 2003 (<http://www.lncc.br/~novotny/principal.htm>).
- [33] A.A. Novotny, R.A. Feijóo & E. Taroco. *Análise de Sensibilidade Contínua*. LNCC-MCT, Petrópolis, Brasil, 2005.
- [34] A.A. Novotny, R.A. Feijóo, C. Padra & E. Taroco. Topological Sensitivity Analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **192**:803-829, 2003.
- [35] A.A. Novotny, R.A. Feijóo, C. Padra & E. Taroco. Derivada Topológica via Análise de Sensibilidade à Mudança de Forma na Otimização Topológica. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, **18-4**:499-519, 2002.
- [36] A.A. Novotny, T. Guinzani F., R.A. Feijóo, C. Padra & E. Taroco. Topological-Shape Sensitivity Method Applied to Inverse Poisson's Conductivity Problem. Anais: *Inverse Problems, Design and Optimization - IPDO Symposium*, Rio de Janeiro, Brasil, 2004.
- [37] L. Obert & W.I. Duvall. *Rock mechanics and the design of structures in rock*. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1967.
- [38] J.T. Oden & G.F. Carey, *Finite Elements Mathematical Aspects*. Prentice-Hall, vol. 4, 1983.
- [39] J.T. Oden & J.N. Reddy. *Variational Methods in Theoretical Mechanics*. Springer-Verlag, 1976.
- [40] O. Pironneau. *Optimal Shape Design for Elliptic Systems*. Springer-Verlag, 1984.
- [41] A. Quarteroni & A. Valli. *Numerical Approximation of Partial Differential Equations*. Springer-Verlag, 1997.
- [42] A. G. Ramm. *Inverse Problems - Mathematical and Analytical Techniques with Applications to Engineering*. Springer, 2005.

- [43] J. C. Santamarina & D. Fratta. *Discrete Signals and Inverse Problems - An Introduction for Engineers and Scientists*. John Wiley & Sons, 2005.
- [44] A. Schumacher. *Topologieoptimierung von Bauteilstrukturen unter Verwendung von Lochpositionierungskriterien*. Tese de Doutorado, FOMMAS-Report Nr T09-01.96. Universität der Siegen, Siegen, Alemanha, 1996.
- [45] J. Sokolowski & A. Żochowski. On the Topological Derivative in Shape Optimization. Relatório de Pesquisa 3170, INRIA-Lorraine, França, 1997. Também publicado na revista *SIAM Journal on Control and Optimization*, **37**:1251-1272, 1999.
- [46] J. Sokolowski & A. Żochowski. Topological Derivatives for Elliptic Problems. *Inverse Problems*, **15**:123-134, 1999.
- [47] J. Sokolowski & J.-P. Zolésio. *Introduction to Shape Optimization - Shape Sensitivity Analysis*. Springer-Verlag, 1992.
- [48] E. Taroco. G.C. Buscaglia & R.A. Feijóo, Second-Order Shape Sensitivity Analysis for Nonlinear Problems. *Structural Optimization*, **15**:101-113, 1998.
- [49] A. Tarantola. *Inverse Problem - Theory and Methods for Model Parameter Estimation*. SIAM, 2005.
- [50] O.C. Zienkiewicz & R.L. Taylor. *The Finite Element Method*. McGraw Hill, 1989.
- [51] J.-P. Zolésio. The Material Derivative (or Speed) Method for Shape Optimization. Haug & Cea [26].

Apêndice A

Prova do Teorema 2.1

Neste apêndice, é apresentada a prova do Teorema 2.1, que estabelece formalmente a relação entre a derivada topológica e os conceitos de análise de sensibilidade à mudança de forma, tal como intuído por Sokolowski & Żochowski [45] e mais tarde por Céia et al. [9].

Teorema 2.1 *Seja $f(\varepsilon)$ uma função regularizadora escolhida de modo que $0 < |D_T^*(\hat{\mathbf{x}})| < \infty$. Então as definições de derivada topológica dadas pelas Eqs. (2.3) e (2.4) são equivalentes, podendo ainda ser escrita como*

$$D_T^*(\hat{\mathbf{x}}) = D_T(\hat{\mathbf{x}}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{f'(\varepsilon)} \frac{D}{D\tau} \psi(\Omega_\tau) \Big|_{\tau=0}. \quad (\text{A.1})$$

Prova. *A prova deste teorema está dividida em duas partes:*

$$\text{Parte 1 : } D_T^*(\hat{\mathbf{x}}) = D_T(\hat{\mathbf{x}}),$$

$$\text{Parte 2 : } D_T(\hat{\mathbf{x}}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{f'(\varepsilon)} \frac{D}{D\tau} \psi(\Omega_\tau) \Big|_{\tau=0}.$$

Prova da Parte 1: *Reescrevendo de forma análoga a uma expansão em série de Taylor, a Eq. (2.3) fica*

$$\psi(\Omega_\varepsilon \cup B_\varepsilon) = \psi(\Omega) + D_T^*(\hat{\mathbf{x}}) f(\varepsilon) + \mathcal{O}(f(\varepsilon)), \quad (\text{A.2})$$

onde $\mathcal{O}(f(\varepsilon))$ é utilizado para denotar os termos de ordem superior a $f(\varepsilon)$, ou seja,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{O}(f(\varepsilon))}{f(\varepsilon)} = 0. \quad (\text{A.3})$$

Da mesma maneira,

$$\psi(\Omega_{\varepsilon+\delta_\varepsilon} \cup B_{\varepsilon+\delta_\varepsilon}) = \psi(\Omega) + D_T^*(\hat{\mathbf{x}}) f(\varepsilon + \delta_\varepsilon) + \mathcal{O}(f(\varepsilon + \delta_\varepsilon)). \quad (\text{A.4})$$

Subtraindo a Eq. (A.2) da Eq. (A.4) tem-se

$$\psi(\Omega_{\varepsilon+\delta_\varepsilon} \cup B_{\varepsilon+\delta_\varepsilon}) - \psi(\Omega_\varepsilon \cup B_\varepsilon) = D_T^*(\hat{\mathbf{x}}) [f(\varepsilon + \delta_\varepsilon) - f(\varepsilon)] + \mathcal{O}(f(\varepsilon + \delta_\varepsilon)) - \mathcal{O}(f(\varepsilon)). \quad (\text{A.5})$$

Dividindo ambos os lados por $f(\varepsilon + \delta_\varepsilon) - f(\varepsilon)$, obtém-se

$$\frac{\psi(\Omega_{\varepsilon+\delta_\varepsilon} \cup B_{\varepsilon+\delta_\varepsilon}) - \psi(\Omega_\varepsilon \cup B_\varepsilon)}{f(\varepsilon + \delta_\varepsilon) - f(\varepsilon)} = D_T^*(\hat{\mathbf{x}}) + \frac{\mathcal{O}(f(\varepsilon + \delta_\varepsilon)) - \mathcal{O}(f(\varepsilon))}{f(\varepsilon + \delta_\varepsilon) - f(\varepsilon)}. \quad (\text{A.6})$$

Tomando o limite duplo como indicado na Eq. (2.4), observa-se que

$$\begin{aligned} D_T(\hat{\mathbf{x}}) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \lim_{\delta_\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\psi(\Omega_{\varepsilon+\delta_\varepsilon} \cup B_{\varepsilon+\delta_\varepsilon}) - \psi(\Omega_\varepsilon \cup B_\varepsilon)}{f(\varepsilon + \delta_\varepsilon) - f(\varepsilon)} \right\} \\ &= D_T^*(\hat{\mathbf{x}}) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \lim_{\delta_\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{O}(f(\varepsilon + \delta_\varepsilon)) - \mathcal{O}(f(\varepsilon))}{f(\varepsilon + \delta_\varepsilon) - f(\varepsilon)} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Aplicando o teorema de L'Hôpital no segundo termo da Eq. (A.7)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \lim_{\delta_\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{O}(f(\varepsilon + \delta_\varepsilon)) - \mathcal{O}(f(\varepsilon))}{f(\varepsilon + \delta_\varepsilon) - f(\varepsilon)} \right\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{O}'(f(\varepsilon)) = 0 \quad (\text{A.8})$$

e substituindo este último resultado na Eq. (A.7), obtém-se a prova da primeira parte deste teorema, isto é,

$$D_T^*(\hat{\mathbf{x}}) = D_T(\hat{\mathbf{x}}). \quad (\text{A.9})$$

Prova da Parte 2: A Eq. (2.4) pode ser escrita da seguinte maneira:

$$D_T(\hat{\mathbf{x}}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \lim_{\delta_\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\psi(\Omega_{\varepsilon+\delta_\varepsilon} \cup B_{\varepsilon+\delta_\varepsilon}) - \psi(\Omega_\varepsilon \cup B_\varepsilon)}{\frac{f(\varepsilon+\delta_\varepsilon)-f(\varepsilon)}{\delta_\varepsilon} \delta_\varepsilon} \right\}. \quad (\text{A.10})$$

Sabendo-se que

$$\lim_{\delta_\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(\varepsilon + \delta_\varepsilon) - f(\varepsilon)}{\delta_\varepsilon} = f'(\varepsilon) \quad (\text{A.11})$$

e substituindo este resultado na Eq. (A.10) tem-se que

$$D_T(\hat{\mathbf{x}}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{f'(\varepsilon)} \left[\lim_{\delta_\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\psi(\Omega_{\varepsilon+\delta_\varepsilon} \cup B_{\varepsilon+\delta_\varepsilon}) - \psi(\Omega_\varepsilon \cup B_\varepsilon)}{\delta_\varepsilon} \right]. \quad (\text{A.12})$$

Considerando a Eq. (2.5) e levando em conta que $\delta_\varepsilon = \tau$ (Eq. 2.8) a equação acima pode ser reescrita, obtendo assim, a prova da segunda parte deste teorema:

$$D_T(\hat{\mathbf{x}}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{f'(\varepsilon)} \left[\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\psi(\Omega_\tau) - \psi(\Omega_\varepsilon \cup B_\varepsilon)}{\tau} \right] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{f'(\varepsilon)} \frac{D}{D\tau} \psi(\Omega_\tau) \Big|_{\tau=0}. \quad (\text{A.13})$$

Finalmente, das Eqs. (A.9) e (A.13) verifica-se que

$$D_T^*(\hat{\mathbf{x}}) = D_T(\hat{\mathbf{x}}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{f'(\varepsilon)} \frac{D}{D\tau} \psi(\Omega_\tau) \Big|_{\tau=0}, \quad (\text{A.14})$$

e o teorema está demonstrado ■

Apêndice B

Cálculo Tensorial e Conceitos de Mecânica do Contínuo

Este apêndice apresenta alguns resultados básicos de cálculo tensorial, para um melhor entendimento das operações realizadas ao longo de todo o texto, e conceitos de mecânica do contínuo utilizados no cálculo da derivada topológica via análise de sensibilidade à mudança de forma.

B.1 Álgebra Tensorial

Sejam $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d} \in \mathbb{R}^3$ e $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, então

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} \\ \text{(b)} \quad & \mathbf{a} \cdot \mathbf{A}\mathbf{b} = \mathbf{A}^T \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \\ \text{(c)} \quad & \text{tr}(\mathbf{A}) = \mathbf{I} \cdot \mathbf{A} \\ \text{(d)} \quad & \mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a} \\ \text{(e)} \quad & (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})\mathbf{c} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a} \\ \text{(f)} \quad & (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})^T = (\mathbf{b} \times \mathbf{a}) \quad . \\ \text{(g)} \quad & (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})(\mathbf{c} \otimes \mathbf{d}) = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{a} \otimes \mathbf{d}) \\ \text{(h)} \quad & (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \otimes \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) \\ \text{(i)} \quad & \text{tr}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \\ \text{(j)} \quad & \mathbf{a} \cdot \mathbf{A}\mathbf{b} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \\ \text{(k)} \quad & \mathbf{A}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = (\mathbf{A}\mathbf{a}) \otimes \mathbf{b} \end{aligned} \tag{B.1}$$

B.2 Gradiente, Divergente e Rotacional

Considerando ϕ um campo escalar; \mathbf{u} e \mathbf{w} campos vetoriais; \mathbf{T} e \mathbf{S} campos tensoriais, todos suficientemente regulares, tem-se as seguintes identidades (Gurtin [23]):

$$\begin{aligned}
\text{(a)} \quad & \nabla(\phi\mathbf{u}) = \phi\nabla\mathbf{u} + \mathbf{u}\otimes\nabla\phi \\
\text{(b)} \quad & \text{div}(\phi\mathbf{u}) = \phi\text{div}\mathbf{u} + \nabla\phi \cdot \mathbf{u} \\
\text{(c)} \quad & \text{rot}(\phi\mathbf{u}) = \phi\text{rot}\mathbf{u} + \nabla\phi \times \mathbf{u} \\
\text{(d)} \quad & \nabla(\mathbf{w} \cdot \mathbf{u}) = (\nabla\mathbf{w})^T \mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T \mathbf{w} \\
\text{(e)} \quad & \text{div}(\mathbf{w} \times \mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot \text{rot}\mathbf{w} - \mathbf{w} \cdot \text{rot}\mathbf{u} \\
\text{(f)} \quad & \text{div}(\mathbf{w} \otimes \mathbf{u}) = \mathbf{w}\text{div}\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{w})\mathbf{u} \quad . \quad \text{(B.2)} \\
\text{(g)} \quad & \text{div}(\mathbf{T}^T \mathbf{u}) = \text{div}\mathbf{T} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{T} \cdot \nabla\mathbf{u} \\
\text{(h)} \quad & \text{div}(\phi\mathbf{T}) = \phi\text{div}\mathbf{T} + \mathbf{T} \cdot \nabla\phi \\
\text{(i)} \quad & \text{div}(\nabla\mathbf{u}^T) = \nabla(\text{div}\mathbf{u}) \\
\text{(j)} \quad & \text{div}(\mathbf{T}\mathbf{S}) = (\nabla\mathbf{T})\mathbf{S} + \mathbf{T}\text{div}\mathbf{S} \\
\text{(k)} \quad & \nabla(\mathbf{T}\mathbf{S}) = (\nabla\mathbf{T})^T \mathbf{S} + (\nabla\mathbf{S})^T \mathbf{T}
\end{aligned}$$

B.3 Descrição Material e Espacial

Seja Ω um domínio aberto e limitado pelo contorno $\partial\Omega$ suficientemente regular. Este domínio, ao sofrer uma perturbação caracterizada pela sua mudança de forma, origina um outro domínio, denotado por Ω_τ e limitado por $\partial\Omega_\tau$. Utilizando a nomenclatura clássica de mecânica do contínuo (Gurtin [23]), Ω e Ω_τ representam respectivamente as configurações material e espacial do domínio de definição do problema em estudo.

A perturbação provocada em Ω (mantendo sua topologia preservada) originando Ω_τ pode ser representada por um mapeamento suave e inversível $\mathbf{x}_\tau = \mathcal{X}(\mathbf{x}, \tau)$ com $\mathbf{x}_\tau \in \Omega_\tau$, $\mathbf{x} \in \Omega$ e $\tau \in \mathbb{R}^+$, ou seja,

$$\mathcal{X} : \Omega \times \tau \rightarrow \Omega_\tau \quad \text{e} \quad \mathcal{X}^{-1} : \Omega_\tau \times \tau \rightarrow \Omega, \quad \text{(B.3)}$$

e a dependência completa dos pontos espacial $\mathbf{x}_\tau \in \Omega_\tau$ e material $\mathbf{x} \in \Omega$ em relação ao parâmetro τ é dada, respectivamente, por

$$\mathcal{X}(\mathcal{X}^{-1}(\mathbf{x}_\tau, \tau), \tau) = \mathbf{x}_\tau \quad \text{e} \quad \mathcal{X}^{-1}(\mathcal{X}(\mathbf{x}, \tau), \tau) = \mathbf{x}. \quad \text{(B.4)}$$

A relação entre o diferencial espacial $d\mathbf{x}_\tau$ (definido em Ω_τ) e o diferencial material $d\mathbf{x}$

(definido em Ω) é descrita da seguinte maneira

$$\mathbf{x}_\tau = \mathcal{X}(\mathbf{x}, \tau) \implies d\mathbf{x}_\tau = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathcal{X}(\mathbf{x}, \tau) d\mathbf{x} = \nabla \mathcal{X}(\mathbf{x}, \tau) d\mathbf{x}, \quad (\text{B.5})$$

que de forma compacta fica

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}, \tau) = \nabla \mathcal{X}(\mathbf{x}, \tau) \implies d\mathbf{x}_\tau = \mathbf{J} d\mathbf{x}, \quad (\text{B.6})$$

onde \mathbf{J} pode ser interpretado como o tensor jacobiano da transformação de Ω para Ω_τ .

Considerando agora um campo escalar ϕ descrito nas suas configurações material ϕ_m e espacial ϕ_s . Então, de acordo com a Eq. (B.4) a descrição espacial do campo material ϕ_m é definida como

$$[\phi_m]_s(\mathbf{x}_\tau, \tau) := \phi_m(\mathcal{X}^{-1}(\mathbf{x}_\tau, \tau), \tau), \quad (\text{B.7})$$

e de forma análoga, a descrição material do campo espacial ϕ_s é dada por

$$[\phi_s]_m(\mathbf{x}, \tau) := \phi_s(\mathcal{X}(\mathbf{x}, \tau), \tau). \quad (\text{B.8})$$

As Eqs. (B.7) e (B.8) combinadas resultam em

$$\begin{aligned} \phi_m(\mathbf{x}, \tau) &= [\phi_s(\mathbf{x}_\tau, \tau)]_m = \phi_s(\mathbf{x}_\tau, \tau)|_{\mathbf{x}_\tau = \mathcal{X}(\mathbf{x}, \tau)} \implies \phi_m = [\phi_s]_m = \{[\phi_m]_s\}_m, \\ \phi_s(\mathbf{x}_\tau, \tau) &= [\phi_m(\mathbf{x}, \tau)]_s = \phi_m(\mathbf{x}, \tau)|_{\mathbf{x} = \mathcal{X}^{-1}(\mathbf{x}_\tau, \tau)} \implies \phi_s = [\phi_m]_s = \{[\phi_s]_m\}_s. \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Os gradientes de ϕ_m e ϕ_s são definidos, respectivamente, como

$$\nabla \phi_m(\mathbf{x}, \tau) := \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \phi_m(\mathbf{x}, \tau) \quad \text{e} \quad \nabla_\tau \phi_s(\mathbf{x}_\tau, \tau) := \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_\tau} \phi_s(\mathbf{x}_\tau, \tau). \quad (\text{B.10})$$

A relação entre $\nabla \phi_m$ e $\nabla_\tau \phi_s$ pode ser obtida a partir do diferencial total de ϕ_m e ϕ_s , dados respectivamente por

$$d\phi_m = \nabla \phi_m \cdot d\mathbf{x} \quad \text{e} \quad d\phi_s = \nabla_\tau \phi_s \cdot d\mathbf{x}_\tau. \quad (\text{B.11})$$

Desta forma, considerando a Eq. (B.6) tem-se

$$\begin{aligned} [d\phi_s]_m &= [\nabla_\tau \phi_s \cdot d\mathbf{x}_\tau]_m = [\nabla_\tau \phi_s]_m \cdot \mathbf{J} d\mathbf{x} = \mathbf{J}^T [\nabla_\tau \phi_s]_m \cdot d\mathbf{x} \\ \implies \nabla \phi_m &= \mathbf{J}^T [\nabla_\tau \phi_s]_m. \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

B.4 Definição de Velocidade

A derivada do mapeamento $\mathcal{X}(\mathbf{x}, \tau)$ em relação a τ é dada por

$$\mathbf{x}_\tau = \mathcal{X}(\mathbf{x}, \tau) \implies \dot{\mathbf{x}}_\tau = \frac{\partial}{\partial \tau} \mathcal{X}(\mathbf{x}, \tau) = \mathbf{v}_m(\mathbf{x}, \tau), \quad (\text{B.13})$$

onde \mathbf{v}_m representa a descrição material da velocidade, que caracteriza a mudança de forma do corpo.

Para obter a descrição espacial da velocidade $\mathbf{v}_s(\mathbf{x}_\tau, \tau)$, basta transportar sua descrição material $\mathbf{v}_m(\mathbf{x}, \tau)$ (Eq. B.13), para a configuração espacial Ω_τ da seguinte forma

$$\mathbf{v}_s(\mathbf{x}_\tau, \tau) := \mathbf{v}_m(\mathcal{X}^{-1}(\mathbf{x}_\tau, \tau), \tau) = \frac{\partial}{\partial \tau} \mathcal{X}(\mathbf{x}, \tau) \Big|_{\mathbf{x}=\mathcal{X}^{-1}(\mathbf{x}_\tau, \tau)}. \quad (\text{B.14})$$

Assim sendo, as descrições material e espacial da velocidade são dadas respectivamente pelas Eqs. (B.13) e (B.14), e seus gradientes podem ser definidos como

$$\nabla \mathbf{v}_m(\mathbf{x}, \tau) := \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{v}_m(\mathbf{x}, \tau) \quad \text{e} \quad \nabla_\tau \mathbf{v}_s(\mathbf{x}_\tau, \tau) := \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_\tau} \mathbf{v}_s(\mathbf{x}_\tau, \tau). \quad (\text{B.15})$$

O diferencial total da descrição material \mathbf{v}_m bem como da descrição espacial \mathbf{v}_s , são dados por

$$d\mathbf{v}_m = (\nabla \mathbf{v}_m) d\mathbf{x} \quad \text{e} \quad d\mathbf{v}_s = (\nabla_\tau \mathbf{v}_s) d\mathbf{x}_\tau. \quad (\text{B.16})$$

Com isso, considerando a Eq. (B.6), a relação entre os gradientes $\nabla \mathbf{v}_m$ e $\nabla_\tau \mathbf{v}_s$ pode ser obtida como segue:

$$\begin{aligned} [d\mathbf{v}_s]_m &= [(\nabla_\tau \mathbf{v}_s) d\mathbf{x}_\tau]_m = [\nabla_\tau \mathbf{v}_s]_m \mathbf{J} d\mathbf{x} \\ \implies \nabla \mathbf{v}_m &= [\nabla_\tau \mathbf{v}_s]_m \mathbf{J}, \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

que de forma mais compacta, introduzindo a notação

$$\mathbf{L} := \nabla \mathbf{v}_m \quad \text{e} \quad \mathbf{L}_\tau := \nabla_\tau \mathbf{v}_s, \quad (\text{B.18})$$

pode ser escrita como

$$\mathbf{L} = [\mathbf{L}_\tau]_m \mathbf{J}. \quad (\text{B.19})$$

B.5 Derivadas Materiais

Seja um campo ϕ e suas descrições material e espacial denotadas respectivamente por ϕ_m e ϕ_s . A derivada material (total) da descrição material ϕ_m do campo ϕ é trivialmente definida por

$$\dot{\phi}_m(\mathbf{x}, \tau) := \frac{D}{D\tau} \phi_m(\mathbf{x}, \tau) = \frac{\partial}{\partial \tau} \phi_m(\mathbf{x}, \tau). \quad (\text{B.20})$$

Por outro lado, a descrição espacial da derivada material (total) do campo ϕ descrito espacialmente ϕ_s pode ser definida como segue:

$$\dot{\phi}_s(\mathbf{x}_\tau, \tau) := \frac{D}{D\tau} \phi_s(\mathbf{x}_\tau, \tau) = \frac{\partial}{\partial \tau} \phi_s(\mathcal{X}(\mathbf{x}, \tau), \tau) \Big|_{\mathbf{x}=\mathcal{X}^{-1}(\mathbf{x}_\tau, \tau)}. \quad (\text{B.21})$$

Colocando em palavras, para obter a descrição espacial da derivada material, em relação ao parâmetro τ de um campo ϕ descrito espacialmente ϕ_s deve-se, em primeiro lugar, transportar o campo ϕ_s para a configuração material Ω ; em seguida, é preciso calcular a derivada e, finalmente, voltar à configuração espacial Ω_τ . Utilizando, a notação introduzida pela Eq. (B.9) tem-se

$$\dot{\phi}_s(\mathbf{x}_\tau, \tau) = \left\{ \frac{\partial}{\partial \tau} [\phi_s(\mathbf{x}_\tau, \tau)]_m \right\}_s = \left[\dot{\phi}_m(\mathbf{x}, \tau) \right]_s \quad \text{onde} \quad \dot{\phi}_m(\mathbf{x}, \tau) = \left[\dot{\phi}_s(\mathbf{x}_\tau, \tau) \right]_m. \quad (\text{B.22})$$

Teorema B.1 *Seja ϕ_s a descrição espacial de um campo escalar ϕ suficientemente regular, então*

$$\dot{\phi}_s = \phi'_s + \nabla_\tau \phi_s \cdot \mathbf{v}_s \quad \text{com} \quad \phi'_s(\mathbf{x}_\tau, \tau) := \frac{\partial}{\partial \tau} \phi_s(\mathbf{x}_\tau, \tau). \quad (\text{B.23})$$

Prova. *Aplicando a regra da cadeia na Eq. (B.21) e utilizando a definição para a descrição espacial da velocidade dada pela Eq. (B.14), tem-se,*

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_s(\mathbf{x}_\tau, \tau) &= \frac{\partial}{\partial \tau} \phi_s(\mathcal{X}(\mathbf{x}, \tau), \tau) \Big|_{\mathbf{x}=\mathcal{X}^{-1}(\mathbf{x}_\tau, \tau)} \\ &= \left\langle \nabla_\tau \phi_s(\mathbf{x}_\tau, \tau), \frac{\partial}{\partial \tau} \mathcal{X}(\mathbf{x}, \tau) \Big|_{\mathbf{x}=\mathcal{X}^{-1}(\mathbf{x}_\tau, \tau)} \right\rangle + \frac{\partial}{\partial \tau} \phi_s(\mathbf{x}_\tau, \tau) \\ &= \nabla_\tau \phi_s(\mathbf{x}_\tau, \tau) \cdot \mathbf{v}_s(\mathbf{x}_\tau, \tau) + \phi'_s(\mathbf{x}_\tau, \tau), \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

e o teorema está demonstrado ■

A descrição espacial da derivada material do gradiente de um campo escalar ϕ descrito espacialmente ϕ_s pode ser obtido derivando-se ambos os lados da Eq. (B.12) em relação ao

parâmetro τ , ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} (\nabla \phi_m) &= \frac{\partial}{\partial \tau} (\mathbf{J}^T [\nabla_\tau \phi_s]_m) \\ &= \frac{\partial \mathbf{J}^T}{\partial \tau} [\nabla_\tau \phi_s]_m + \mathbf{J}^T \frac{\partial}{\partial \tau} ([\nabla_\tau \phi_s]_m) . \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

Pré-multiplicando ambos os lados da equação anterior por \mathbf{J}^{-T} e rearranjando os termos, obtém-se

$$\frac{\partial}{\partial \tau} ([\nabla_\tau \phi_s]_m) = \mathbf{J}^{-T} \frac{\partial}{\partial \tau} (\nabla \phi_m) - \mathbf{J}^{-T} \frac{\partial \mathbf{J}^T}{\partial \tau} [\nabla_\tau \phi_s]_m , \quad (\text{B.26})$$

onde

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (\nabla \phi_m) = \nabla \frac{\partial \phi_m}{\partial \tau} = \nabla \dot{\phi}_m = \nabla [\dot{\phi}_s]_m = \mathbf{J}^T [\nabla_\tau \dot{\phi}_s]_m , \quad (\text{B.27})$$

e da definição do tensor jacobiano dada pela Eq. (B.6) e considerando a Eq. (B.19), tem-se que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial \tau} &= \frac{\partial}{\partial \tau} \nabla \mathcal{X} = \nabla \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial \tau} = \nabla \mathbf{v}_m = [\nabla_\tau \mathbf{v}_s]_m \mathbf{J} \\ \implies \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial \tau} &= \mathbf{L} = [\mathbf{L}_\tau]_m \mathbf{J} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \mathbf{J}^T}{\partial \tau} = \mathbf{L}^T = \mathbf{J}^T [\mathbf{L}_\tau]_m^T . \end{aligned} \quad (\text{B.28})$$

Das Eqs. (B.26), (B.27) e (B.28) observa-se que

$$\frac{\partial}{\partial \tau} ([\nabla_\tau \phi_s]_m) = [\nabla_\tau \dot{\phi}_s]_m - [\mathbf{L}_\tau]_m^T [\nabla_\tau \phi_s]_m , \quad (\text{B.29})$$

e finalmente voltando para a configuração espacial Ω_τ , tem-se

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{\partial}{\partial \tau} ([\nabla_\tau \phi_s]_m) \right\}_s &= \left\{ [\nabla_\tau \dot{\phi}_s]_m \right\}_s - \left\{ [\mathbf{L}_\tau]_m^T [\nabla_\tau \phi_s]_m \right\}_s , \\ (\nabla_\tau \phi_s)' &= \frac{D}{D\tau} (\nabla_\tau \phi_s) = \nabla_\tau \dot{\phi}_s - \mathbf{L}_\tau^T \nabla_\tau \phi_s . \end{aligned} \quad (\text{B.30})$$

B.6 Teorema da Divergência

Nesta seção, é demonstrado o Teorema da Divergência ou Teorema de Gauss que relaciona integrais de domínio com integrais de superfície.

Teorema B.2 *Seja Ω uma região no espaço, limitada por uma superfície fechada $\partial\Omega$ suficientemente regular. Então,*

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{para } \phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R} & \implies \int_\Omega \nabla \phi \, d\Omega = \int_{\partial\Omega} \phi \mathbf{n} \, d\partial\Omega \quad (a) \\ \text{para } \mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3 & \implies \int_\Omega \text{div } \mathbf{u} \, d\Omega = \int_{\partial\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, d\partial\Omega \quad (b) \\ \text{para } \mathbf{T} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \implies \int_\Omega \text{div } \mathbf{T} \, d\Omega = \int_{\partial\Omega} \mathbf{T} \mathbf{n} \, d\partial\Omega \quad (c) \end{array} \right. \quad (\text{B.31})$$

onde ϕ , \mathbf{u} e \mathbf{T} são campos suaves e \mathbf{n} é o vetor normal saliente a $\partial\Omega$.

B.7 Teorema do Transporte de Reynolds

A relação entre as configurações material Ω e espacial Ω_τ pode ser obtida a partir da Eq. (B.6), considerando os elementos diferenciais $d\mathbf{x}_\tau$, $d\mathbf{y}_\tau$ e $d\mathbf{z}_\tau$ definidos em Ω_τ :

$$d\Omega_\tau = d\mathbf{x}_\tau \times d\mathbf{y}_\tau \cdot d\mathbf{z}_\tau = \mathbf{J}d\mathbf{x} \times \mathbf{J}d\mathbf{y} \cdot \mathbf{J}d\mathbf{z} . \quad (\text{B.32})$$

Sabendo-se que $d\Omega = d\mathbf{x} \times d\mathbf{y} \cdot d\mathbf{z}$

$$d\Omega_\tau = \frac{\mathbf{J}d\mathbf{x} \times \mathbf{J}d\mathbf{y} \cdot \mathbf{J}d\mathbf{z}}{d\mathbf{x} \times d\mathbf{y} \cdot d\mathbf{z}} d\Omega \implies d\Omega_\tau = \det \mathbf{J} d\Omega . \quad (\text{B.33})$$

A derivada de $(\det \mathbf{J})$, utilizada mais adiante, pode ser obtida a partir das seguintes proposições (ver, por exemplo, Novotny et al. [33] e Gurtin [23]):

$$\dot{\mathbf{J}} = \nabla_{\mathbf{v}_m} \mathbf{J} = \mathbf{L} \mathbf{J} , \quad (\text{B.34})$$

$$(\det \mathbf{J})' = \text{tr} \left(\dot{\mathbf{J}} \mathbf{J}^{-1} \right) \det \mathbf{J} . \quad (\text{B.35})$$

Substituindo a Eq. (B.34) na Eq. (B.35) tem-se

$$(\det \mathbf{J})' = \text{tr} (\mathbf{L}) \det \mathbf{J} , \quad (\text{B.36})$$

mas da Eq. (B.18) observa-se que

$$\text{tr} (\mathbf{L}) = \text{tr} (\nabla_{\mathbf{v}_m}) = \text{div} \mathbf{v}_m . \quad (\text{B.37})$$

Dessa forma, $(\det \mathbf{J})'$ é escrita da seguinte maneira

$$(\det \mathbf{J})' = \text{div} \mathbf{v}_m (\det \mathbf{J}) = [\text{div}_\tau \mathbf{v}_s]_m (\det \mathbf{J}) . \quad (\text{B.38})$$

Com esses resultados, é possível demonstrar o Teorema do Transporte de Reynolds para integrais de domínio:

Teorema B.3 *Seja um funcional definido através de uma integral na configuração espacial Ω_τ , tendo como integrando a descrição espacial ϕ_s de um campo escalar ϕ suficientemente regular. A descrição espacial da derivada material em relação ao parâmetro τ desse funcional é, então*

$$\begin{aligned} \frac{D}{D\tau} \int_{\Omega_\tau} \phi_s d\Omega_\tau &= \int_{\Omega_\tau} \left(\dot{\phi}_s + \phi_s \text{div}_\tau \mathbf{v}_s \right) d\Omega_\tau \\ &= \int_{\Omega_\tau} \phi'_s d\Omega_\tau + \int_{\partial\Omega_\tau} \phi_s (\mathbf{v}_s \cdot \mathbf{n}_\tau) d\partial\Omega_\tau . \end{aligned} \quad (\text{B.39})$$

Prova. Considerando as Eqs. (B.33) e (B.38) tem-se que

$$\begin{aligned}
 \frac{D}{D\tau} \int_{\Omega_\tau} \phi_s d\Omega_\tau &= \frac{\partial}{\partial\tau} \int_{\Omega} \phi_m \det \mathbf{J} d\Omega \\
 &= \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial\tau} (\phi_m \det \mathbf{J}) d\Omega \\
 &= \int_{\Omega} \left(\dot{\phi}_m \det \mathbf{J} + \phi_m (\det \mathbf{J})' \right) d\Omega \\
 &= \int_{\Omega} \left(\dot{\phi}_m + \phi_m [\operatorname{div}_\tau \mathbf{v}_s]_m \right) \det \mathbf{J} d\Omega \\
 &= \int_{\Omega_\tau} \left(\dot{\phi}_s + \phi_s \operatorname{div}_\tau \mathbf{v}_s \right) d\Omega_\tau .
 \end{aligned} \tag{B.40}$$

Utilizando o resultado do teorema B.1 (Eq. B.23) na Eq. (B.40), observa-se que

$$\frac{D}{D\tau} \int_{\Omega_\tau} \phi_s d\Omega_\tau = \int_{\Omega_\tau} (\phi'_s + \nabla_\tau \phi_s \cdot \mathbf{v}_s + \phi_s \operatorname{div}_\tau \mathbf{v}_s) d\Omega_\tau , \tag{B.41}$$

e considerando a Eq. (B.2b), a equação anterior fica

$$\frac{D}{D\tau} \int_{\Omega_\tau} \phi_s d\Omega_\tau = \int_{\Omega_\tau} \phi'_s d\Omega_\tau + \int_{\Omega_\tau} \operatorname{div}_\tau (\phi_s \mathbf{v}_s) d\Omega_\tau . \tag{B.42}$$

Finalmente, aplicando o teorema da divergência (Eq. B.31b) no segundo termo da equação acima tem-se

$$\frac{D}{D\tau} \int_{\Omega_\tau} \phi_s d\Omega_\tau = \int_{\Omega_\tau} \phi'_s d\Omega_\tau + \int_{\partial\Omega_\tau} \phi_s (\mathbf{v}_s \cdot \mathbf{n}_\tau) d\partial\Omega_\tau , \tag{B.43}$$

que junto da Eq. (B.40) são os resultados desejados ■

Apêndice C

Análise Assintótica

De acordo com o Teorema 2.1, após a análise de sensibilidade à mudança de forma da função de desempenho, é preciso realizar uma Análise Assintótica em relação ao parâmetro ε para conhecer explicitamente o comportamento das soluções u_ε^D , u_ε^N , λ_ε^D e λ_ε^N , bem como de suas respectivas derivadas normais e tangenciais, quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Este apêndice apresenta a análise assintótica para a equação de Poisson com termo fonte constante (seção C.1) e também como uma função harmônica (seção C.2).

C.1 Equação de Poisson com Fonte Constante

Problema de valor no contorno definido no domínio original Ω sem inclusão: determinar u , tal que

$$\begin{cases} -k^e \Delta u = b & \text{em } \Omega \\ +\text{c.c.} & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} . \quad (\text{C.1})$$

Problema de valor no contorno definido no domínio perturbado $\Omega_\varepsilon \cup B_\varepsilon$ com inclusão: determinar u_ε , tal que

$$\begin{cases} -k^e \Delta u_\varepsilon = b & \text{em } \Omega_\varepsilon \\ -k^i \Delta u_\varepsilon = b & \text{em } B_\varepsilon \\ +\text{c.c.} & \text{sobre } \partial\Omega \\ \left. \begin{array}{l} u_\varepsilon|_e = u_\varepsilon|_i \\ k^e \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n}|_e = k^i \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n}|_i \end{array} \right\} & \text{sobre } \partial B_\varepsilon \end{cases} . \quad (\text{C.2})$$

Definindo uma nova função tal que

$$w_\varepsilon = u_\varepsilon - u, \quad (\text{C.3})$$

tem-se um novo problema de valor no contorno escrito como: determinar w_ε , tal que

$$\left. \begin{array}{l} \Delta w_\varepsilon = 0 \\ \Delta w_\varepsilon = 0 \\ +c.c \\ w_\varepsilon|_e = w_\varepsilon|_i \\ k^e \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial n}|_e = k^i \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial n}|_i - (k^e - k^i) \frac{\partial u}{\partial n} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{em } \Omega_\varepsilon \\ \text{em } B_\varepsilon \\ \text{sobre } \partial\Omega \\ \text{sobre } \partial B_\varepsilon \end{array} . \quad (\text{C.4})$$

Com o objetivo de simplificar essa análise, para imposição das condições de contorno sobre ∂B_ε é utilizada a seguinte expansão em torno do centro $\hat{\mathbf{x}}$ da bola B_ε :

$$u(\mathbf{x}) = u(\hat{\mathbf{x}}) + \nabla u(\hat{\mathbf{x}}) \cdot (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) + \dots . \quad (\text{C.5})$$

Dessa forma, a referida condição de contorno é aproximada como,

$$\frac{\partial u}{\partial n} \approx \nabla u(\hat{\mathbf{x}}) \cdot \mathbf{n} \quad \text{sobre } \partial B_\varepsilon . \quad (\text{C.6})$$

Agora, basta resolver o problema de valor no contorno dado pela Eq. (C.4), com a aproximação dada pela Eq. (C.6) para obter o comportamento de $u_\varepsilon = u + w_\varepsilon$ na vizinhança da fronteira da inclusão ∂B_ε .

Além disso, é feita a seguinte mudança de variável

$$\mathbf{y} = \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}, \quad (\text{C.7})$$

o que resulta em um problema exterior equivalente ao dado pela Eq. (C.4), ou seja: determinar φ_ε , tal que

$$\left. \begin{array}{l} \Delta \varphi_\varepsilon = 0 \\ \Delta \varphi_\varepsilon = 0 \\ \varphi_\varepsilon = 0 \\ \varphi_\varepsilon|_e = \varphi_\varepsilon|_i \\ k^e \frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial n}|_e = k^i \frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial n}|_i - \varepsilon(k^e - k^i) \nabla u(\hat{\mathbf{x}}) \cdot \mathbf{n} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{em } \mathbb{R}^2 \setminus B_1 \\ \text{em } B_1 \\ \text{no } \infty \\ \text{sobre } \partial B_1 \end{array} , \quad (\text{C.8})$$

onde pede-se que a função φ_ε seja regular no ∞ . Além do mais, observa-se ainda que

$$\nabla w_\varepsilon = \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \mathbf{x}} = \left\langle \frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial \mathbf{y}}, \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} \right\rangle = \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{I}(\nabla \varphi_\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \nabla \varphi_\varepsilon . \quad (\text{C.9})$$

Dessa forma, pode-se utilizar separação de variáveis para fazer um desenvolvimento em série de Fourier da solução φ_ε . Considerando, portanto, um sistema polar de coordenadas (ρ, θ) cuja origem está posicionada sobre o centro $\hat{\mathbf{y}}$ da bola B_1 , a solução φ_ε , como uma função de ρ e θ , pode ser expressa como

$$\begin{aligned}\varphi_\varepsilon(\rho, \theta)|_e &= \gamma_0^e(\rho) + \gamma_1^e(\rho) \cos \theta + \hat{\gamma}_1^e(\rho) \sin \theta, \\ \varphi_\varepsilon(\rho, \theta)|_i &= \gamma_0^i(\rho) + \gamma_1^i(\rho) \cos \theta + \hat{\gamma}_1^i(\rho) \sin \theta.\end{aligned}\tag{C.10}$$

Além disso, o operador laplaceano Δ em coordenadas polares é dado por

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2},\tag{C.11}$$

então os coeficientes de Fourier γ_0 , γ_1 e $\hat{\gamma}_1$ devem satisfazer o seguinte conjunto de equações diferenciais ordinárias:

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_0^e(\rho)'' + \frac{1}{\rho} \gamma_0^e(\rho)' = 0 \\ \gamma_0^i(\rho)'' + \frac{1}{\rho} \gamma_0^i(\rho)' = 0 \\ \lim_{\rho \rightarrow \infty} \gamma_0^e(\rho) = 0 \\ \gamma_0^e(1) = \gamma_0^i(1) \\ k^e \gamma_0^e(1)' = k^i \gamma_0^i(1)' \end{array} \right.,\tag{C.12}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_1^e(\rho)'' + \frac{1}{\rho} \gamma_1^e(\rho)' - \frac{1}{\rho^2} \gamma_1^e(\rho) = 0 \\ \gamma_1^i(\rho)'' + \frac{1}{\rho} \gamma_1^i(\rho)' - \frac{1}{\rho^2} \gamma_1^i(\rho) = 0 \\ \lim_{\rho \rightarrow \infty} \gamma_1^e(\rho) = 0 \\ \gamma_1^e(1) = \gamma_1^i(1) \\ k^e \gamma_1^e(1)' = k^i \gamma_1^i(1)' - \alpha \varepsilon (k^e - k^i) \end{array} \right.,\tag{C.13}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\gamma}_1^e(\rho)'' + \frac{1}{\rho} \hat{\gamma}_1^e(\rho)' - \frac{1}{\rho^2} \hat{\gamma}_1^e(\rho) = 0 \\ \hat{\gamma}_1^i(\rho)'' + \frac{1}{\rho} \hat{\gamma}_1^i(\rho)' - \frac{1}{\rho^2} \hat{\gamma}_1^i(\rho) = 0 \\ \lim_{\rho \rightarrow \infty} \hat{\gamma}_1^e(\rho) = 0 \\ \hat{\gamma}_1^e(1) = \hat{\gamma}_1^i(1) \\ k^e \hat{\gamma}_1^e(1)' = k^i \hat{\gamma}_1^i(1)' - \beta \varepsilon (k^e - k^i) \end{array} \right.,\tag{C.14}$$

onde $\mathbf{n} = -(\cos \theta, \sin \theta)^T$ e se utilizou a notação

$$\nabla u(\hat{\mathbf{x}}) = (\alpha, \beta)^T.\tag{C.15}$$

Resolvendo as Eqs. (C.12), (C.13) e (C.14), obtém-se

$$\gamma_0^e(\rho) = A_0^e \ln \rho + B_0^e, \quad \gamma_1^e(\rho) = A_1^e \rho + B_1^e \rho^{-1}, \quad \hat{\gamma}_1^e(\rho) = \hat{A}_1^e \rho + \hat{B}_1^e \rho^{-1}, \quad (\text{C.16})$$

$$\gamma_0^i(\rho) = A_0^i \ln \rho + B_0^i, \quad \gamma_1^i(\rho) = A_1^i \rho + B_1^i \rho^{-1}, \quad \hat{\gamma}_1^i(\rho) = \hat{A}_1^i \rho + \hat{B}_1^i \rho^{-1}, \quad (\text{C.17})$$

onde, utilizando as condições de contorno no ∞ , observa-se que as constantes associadas a solução exterior que acompanham as potências positivas de ρ devem ser todas nulas. Da mesma forma, as constantes associadas a solução interior que acompanham as potências negativas de ρ também devem ser nulas. Logo

$$A_0^e = 0, \quad B_0^e = 0, \quad A_1^e = 0, \quad \hat{A}_1^e = 0 \quad \text{e} \quad A_0^i = 0, \quad B_1^i = 0, \quad \hat{B}_1^i = 0. \quad (\text{C.18})$$

Além do mais, da condição de continuidade da solução sobre ∂B_1 , tem-se

$$B_0^i = 0, \quad A_1^i = B_1^e, \quad \hat{A}_1^i = \hat{B}_1^e. \quad (\text{C.19})$$

Finalmente, da condição de salto da derivada normal da solução sobre ∂B_1 , obtém-se

$$-k^e B_1^e = k^i A_1^i - \alpha \varepsilon (k^e - k^i) \quad \text{e} \quad -k^e \hat{B}_1^e = k^i \hat{A}_1^i - \beta \varepsilon (k^e - k^i). \quad (\text{C.20})$$

O que resulta em

$$A_1^i = B_1^e = \alpha \varepsilon \frac{k^e - k^i}{k^e + k^i} \quad \text{e} \quad \hat{A}_1^i = \hat{B}_1^e = \beta \varepsilon \frac{k^e - k^i}{k^e + k^i}. \quad (\text{C.21})$$

Dessa forma, a solução φ_ε do problema exterior dado pela Eq. (C.8) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \varphi_\varepsilon(\rho, \theta)|_i &= \varepsilon \rho \frac{k^e - k^i}{k^e + k^i} (\alpha \cos \theta + \beta \sin \theta), \\ \varphi_\varepsilon(\rho, \theta)|_e &= \frac{\varepsilon}{\rho} \frac{k^e - k^i}{k^e + k^i} (\alpha \cos \theta + \beta \sin \theta), \end{aligned} \quad (\text{C.22})$$

onde da mudança de variável dada pela Eq. (C.7), observa-se que

$$\rho = \frac{r}{\varepsilon}. \quad (\text{C.23})$$

Logo

$$\begin{aligned} w_\varepsilon(r, \theta)|_i &= r \left(\frac{k^e - k^i}{k^e + k^i} \right) (\alpha \cos \theta + \beta \sin \theta), \\ w_\varepsilon(r, \theta)|_e &= \frac{\varepsilon^2}{r} \left(\frac{k^e - k^i}{k^e + k^i} \right) (\alpha \cos \theta + \beta \sin \theta). \end{aligned} \quad (\text{C.24})$$

Agora, basta reconstruir a função $u_\varepsilon = u + w_\varepsilon$ da seguinte forma

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(r, \theta)|_i &= u_0 + 2r \frac{k^e}{k^e + k^i} (\alpha \cos \theta + \beta \sin \theta), \\ u_\varepsilon(r, \theta)|_e &= u_0 + \left(\frac{k^e - k^i}{k^e + k^i} \frac{\varepsilon^2}{r} + r \right) (\alpha \cos \theta + \beta \sin \theta), \end{aligned} \quad (\text{C.25})$$

onde utilizou-se a expansão dada pela Eq. (C.5) que em coordenada polar fica

$$u(r, \theta) \approx u_0 + r(\alpha \cos \theta + \beta \sin \theta), \quad (\text{C.26})$$

sendo $u(\hat{\mathbf{x}}) = u_0$.

C.2 Equação de Poisson com Fonte Harmônica

Problema de valor no contorno definido no domínio original Ω sem inclusão: determinar λ , tal que

$$\begin{cases} -k^e \Delta \lambda = u & \text{em } \Omega \\ +\text{c.c.} & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}. \quad (\text{C.27})$$

Problema de valor no contorno definido no domínio perturbado $\Omega_\varepsilon \cup B_\varepsilon$ com inclusão: determinar λ_ε , tal que

$$\begin{cases} -k^e \Delta \lambda_\varepsilon = u_\varepsilon & \text{em } \Omega_\varepsilon \\ -k^i \Delta \lambda_\varepsilon = u_\varepsilon & \text{em } B_\varepsilon \\ +\text{c.c.} & \text{sobre } \partial\Omega \\ \left. \begin{array}{l} \lambda_\varepsilon|_e = \lambda_\varepsilon|_i \\ k^e \frac{\partial \lambda_\varepsilon}{\partial n}|_e = k^i \frac{\partial \lambda_\varepsilon}{\partial n}|_i \end{array} \right\} & \text{sobre } \partial B_\varepsilon \end{cases}. \quad (\text{C.28})$$

Definindo uma nova função tal que

$$\mu_\varepsilon = \lambda_\varepsilon - \lambda, \quad (\text{C.29})$$

tem-se um novo problema de valor no contorno escrito como: determinar μ_ε , tal que

$$\begin{cases} -k^e \Delta \mu_\varepsilon = u_\varepsilon - u & \text{em } \Omega_\varepsilon \\ -k^i \Delta \mu_\varepsilon = u_\varepsilon - u & \text{em } B_\varepsilon \\ +\text{c.c.} & \text{sobre } \partial\Omega \\ \left. \begin{array}{l} \mu_\varepsilon|_e = \mu_\varepsilon|_i \\ k^e \frac{\partial \mu_\varepsilon}{\partial n}|_e = k^i \frac{\partial \mu_\varepsilon}{\partial n}|_i - (k^e - k^i) \frac{\partial \lambda}{\partial n} \end{array} \right\} & \text{sobre } \partial B_\varepsilon \end{cases}. \quad (\text{C.30})$$

Observando a definição de w_ε dada pela Eq. (C.3) e o problema de valor no contorno dado pela Eq. (C.4), que mostra que w_ε é uma função harmônica ($\Delta w_\varepsilon = 0$ em $\Omega_\varepsilon \cup B_\varepsilon$), conclui-se que μ_ε , na equação anterior, é uma função bi-harmônica, ou seja:

$$\Delta^2 \mu_\varepsilon = 0 \quad \text{em } \Omega_\varepsilon \cup B_\varepsilon. \quad (\text{C.31})$$

Pode-se separar μ_ε em soluções homogênea e particular:

$$\mu_\varepsilon = \mu_\varepsilon^h + \mu_\varepsilon^p, \quad (\text{C.32})$$

e calculá-las separadamente.

Para o cálculo de μ_ε^p , sabendo-se que

$$\Delta\mu_\varepsilon = \Delta\mu_\varepsilon^h + \Delta\mu_\varepsilon^p, \text{ e que } \Delta\mu_\varepsilon^h = 0, \quad (\text{C.33})$$

tem-se

$$\begin{aligned} -k^i \Delta\mu_\varepsilon|_i &= -k^i \Delta\mu_\varepsilon^p|_i = w_\varepsilon|_i, \\ -k^e \Delta\mu_\varepsilon|_e &= -k^e \Delta\mu_\varepsilon^p|_e = w_\varepsilon|_e. \end{aligned} \quad (\text{C.34})$$

Propondo uma solução bi-harmônica para μ_ε^p da seguinte forma (ver, por exemplo, Obert & Duvall [37])

$$\mu_\varepsilon^p = (Cr^3 + Dr \ln r) \cos \theta + (\hat{C}r^3 + \hat{D}r \ln r) \sin \theta, \quad (\text{C.35})$$

e lembrando da definição do operador laplaceano Δ em coordenadas polares dada pela Eq. (C.11) tem-se

$$\frac{\partial\mu_\varepsilon^p}{\partial r} = (3Cr^2 + D(1 + \ln r)) \cos \theta + (3\hat{C}r^2 + \hat{D}(1 + \ln r)) \sin \theta, \quad (\text{C.36})$$

$$\frac{\partial^2\mu_\varepsilon^p}{\partial r^2} = (6Cr + \frac{D}{r}) \cos \theta + (6\hat{C}r + \frac{\hat{D}}{r}) \sin \theta, \quad (\text{C.37})$$

$$\frac{\partial^2\mu_\varepsilon^p}{\partial\theta^2} = -(Cr + \frac{D}{r} \ln r) \cos \theta - (\hat{C}r + \frac{\hat{D}}{r} \ln r) \sin \theta, \quad (\text{C.38})$$

e por fim

$$\Delta\mu_\varepsilon^p = (8Cr + \frac{2D}{r}) \cos \theta + (8\hat{C}r + \frac{2\hat{D}}{r}) \sin \theta, \quad (\text{C.39})$$

sabendo-se que as constantes D e \hat{D} são nulas para a solução interior i e as constantes C e \hat{C} são nulas para a solução exterior e .

Da Eq. (C.34) pode-se igualar as Eqs. (C.24) e (C.39), com $D = \hat{D} = 0$, obtendo-se para a solução interior i

$$\Delta\mu_\varepsilon^p|_i = 8r \left(C \cos \theta + \hat{C} \sin \theta \right) = -\frac{r}{k^i} \left(\frac{k^e - k^i}{k^e + k^i} \right) (\alpha \cos \theta + \beta \sin \theta), \quad (\text{C.40})$$

onde as constantes C e \hat{C} ficam

$$C = -\frac{1}{8k^i} \left(\frac{k^e - k^i}{k^e + k^i} \right) \alpha \quad \text{e} \quad \hat{C} = -\frac{1}{8k^i} \left(\frac{k^e - k^i}{k^e + k^i} \right) \beta, \quad (\text{C.41})$$

resultando em

$$\mu_\varepsilon^p|_i = -\frac{1}{8k^i} \left(\frac{k^e - k^i}{k^e + k^i} \right) r^3 (\alpha \cos \theta + \beta \sin \theta) . \quad (\text{C.42})$$

De forma análoga, igualando-se as Eqs. (C.24) e (C.39), com $C = \hat{C} = 0$, tem-se a solução exterior e

$$\Delta \mu_\varepsilon^p|_e = \frac{2}{r} \left(D \cos \theta + \hat{D} \sin \theta \right) = -\frac{\varepsilon^2}{k^e r} \left(\frac{k^e - k^i}{k^e + k^i} \right) (\alpha \cos \theta + \beta \sin \theta) , \quad (\text{C.43})$$

onde as constantes D e \hat{D} ficam

$$D = -\frac{\varepsilon^2}{2k^e} \left(\frac{k^e - k^i}{k^e + k^i} \right) \alpha \quad \text{e} \quad \hat{D} = -\frac{\varepsilon^2}{2k^e} \left(\frac{k^e - k^i}{k^e + k^i} \right) \beta , \quad (\text{C.44})$$

resultando em

$$\mu_\varepsilon^p|_e = -\frac{\varepsilon^2}{2k^e} \left(\frac{k^e - k^i}{k^e + k^i} \right) r \ln r (\alpha \cos \theta + \beta \sin \theta) . \quad (\text{C.45})$$

O cálculo de μ_ε^h é o mesmo feito para encontrar a solução w_ε na seção anterior. Desta forma, lembrando da definição de ρ dada pela Eq. (C.23), obtém-se

$$\begin{aligned} \mu_\varepsilon^h|_i &= \frac{r}{\varepsilon} \left(A_1^i \cos \theta + \hat{A}_1^i \sin \theta \right) , \\ \mu_\varepsilon^h|_e &= \frac{\varepsilon}{r} \left(B_1^e \cos \theta + \hat{B}_1^e \sin \theta \right) . \end{aligned} \quad (\text{C.46})$$

Da condição de continuidade

$$\mu_\varepsilon|_e = \mu_\varepsilon|_i \quad \implies \quad \mu_\varepsilon^h|_e + \mu_\varepsilon^p|_e = \mu_\varepsilon^h|_i + \mu_\varepsilon^p|_i , \quad (\text{C.47})$$

considerando as Eqs. (C.42), (C.45) e (C.46) e sabendo-se que $r = \varepsilon$, tem-se

$$\begin{aligned} B_1^e - A_1^e &= \varepsilon^3 \left(\frac{k^e - k^i}{k^e + k^i} \right) \left(\frac{\ln \varepsilon}{2k^e} - \frac{1}{8k^i} \right) \alpha , \\ \hat{B}_1^e - \hat{A}_1^e &= \varepsilon^3 \left(\frac{k^e - k^i}{k^e + k^i} \right) \left(\frac{\ln \varepsilon}{2k^e} - \frac{1}{8k^i} \right) \beta . \end{aligned} \quad (\text{C.48})$$

Da condição de salto

$$k^e \frac{\partial \mu_\varepsilon}{\partial n} \Big|_e = k^i \frac{\partial \mu_\varepsilon}{\partial n} \Big|_i - (k^e - k^i) \frac{\partial \lambda}{\partial n} , \quad (\text{C.49})$$

considerando que

$$\frac{\partial}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial r} \quad \text{e} \quad \nabla \lambda(\hat{\mathbf{x}}) = (a, b)^T , \quad (\text{C.50})$$

tem-se

$$\begin{aligned} k^e B_1^e + \frac{\varepsilon^3}{2} \left(\frac{k^e - k^i}{k^e + k^i} \right) (1 + \ln \varepsilon) \alpha &= -k^i A_1^i + \frac{3\varepsilon^3}{8} \left(\frac{k^e - k^i}{k^e + k^i} \right) \alpha + \varepsilon (k^e - k^i) a , \\ k^e \hat{B}_1^e + \frac{\varepsilon^3}{2} \left(\frac{k^e - k^i}{k^e + k^i} \right) (1 + \ln \varepsilon) \beta &= -k^i \hat{A}_1^i + \frac{3\varepsilon^3}{8} \left(\frac{k^e - k^i}{k^e + k^i} \right) \beta + \varepsilon (k^e - k^i) b . \end{aligned} \quad (\text{C.51})$$

Resolvendo as Eqs. (C.48) e (C.51) obtém-se

$$\begin{aligned}
 A_1^i &= -\alpha \varepsilon^3 \left(\frac{k^e - k^i}{k^e + k^i} \right) \left[\frac{\ln \varepsilon}{(k^e + k^i)} - \frac{1}{8k^i} \left(\frac{k^e - k^i}{k^e + k^i} \right) \right] + \varepsilon \left(\frac{k^e - k^i}{k^e + k^i} \right) a , \\
 B_1^e &= -\alpha \varepsilon^3 \left(\frac{k^e - k^i}{k^e + k^i} \right) \left[\frac{1}{4(k^e + k^i)} + \frac{\ln \varepsilon}{2k^e} \left(\frac{k^e - k^i}{k^e + k^i} \right) \right] + \varepsilon \left(\frac{k^e - k^i}{k^e + k^i} \right) a , \\
 \hat{A}_1^i &= -\beta \varepsilon^3 \left(\frac{k^e - k^i}{k^e + k^i} \right) \left[\frac{\ln \varepsilon}{(k^e + k^i)} - \frac{1}{8k^i} \left(\frac{k^e - k^i}{k^e + k^i} \right) \right] + \varepsilon \left(\frac{k^e - k^i}{k^e + k^i} \right) b , \\
 \hat{B}_1^e &= -\beta \varepsilon^3 \left(\frac{k^e - k^i}{k^e + k^i} \right) \left[\frac{1}{4(k^e + k^i)} + \frac{\ln \varepsilon}{2k^e} \left(\frac{k^e - k^i}{k^e + k^i} \right) \right] + \varepsilon \left(\frac{k^e - k^i}{k^e + k^i} \right) b .
 \end{aligned} \tag{C.52}$$

Substituindo a Eq. (C.52) na Eq. (C.46) a solução homogênea μ_ε^h fica

$$\begin{aligned}
 \mu_\varepsilon^h|_i &= r \left(\frac{k^e - k^i}{k^e + k^i} \right) (a \cos \theta + b \sin \theta) + \mathcal{O}(\varepsilon^{3-\delta}) , \\
 \mu_\varepsilon^h|_e &= \frac{\varepsilon^2}{r} \left(\frac{k^e - k^i}{k^e + k^i} \right) (a \cos \theta + b \sin \theta) + \mathcal{O}(\varepsilon^{3-\delta}) .
 \end{aligned} \tag{C.53}$$

Lembrando da definição dada pela Eq. (C.29) e considerando a Eq. (C.32), a expansão assintótica para λ_ε resulta em

$$\begin{aligned}
 \lambda_\varepsilon(r, \theta)|_i &= \lambda_0 + 2r \frac{k^e}{k^e + k^i} (a \cos \theta + b \sin \theta) + \mathcal{O}(\varepsilon^{3-\delta}) , \\
 \lambda_\varepsilon(r, \theta)|_e &= \lambda_0 + \left(\frac{k^e - k^i}{k^e + k^i} \frac{\varepsilon^2}{r} + r \right) (a \cos \theta + b \sin \theta) + \mathcal{O}(\varepsilon^{3-\delta}) ,
 \end{aligned} \tag{C.54}$$

onde utilizou-se a seguinte expansão

$$\lambda(\mathbf{x}) = \lambda(\hat{\mathbf{x}}) + \nabla \lambda(\hat{\mathbf{x}}) \cdot (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) + \dots , \tag{C.55}$$

que em coordenada polar fica

$$\lambda(r, \theta) \approx \lambda_0 + r (a \cos \theta + b \sin \theta) , \tag{C.56}$$

sendo $\lambda(\hat{\mathbf{x}}) = \lambda_0$.