

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA**

**CONTROLE DE OSCILAÇÕES EM SISTEMAS COMUTADOS
COM APLICAÇÕES EM ELETRÔNICA DE POTÊNCIA**

Tese de doutorado submetida à
Universidade Federal de Santa Catarina
como parte dos requisitos para a
obtenção do grau de Doutor em Engenharia Elétrica

Mauricio dos Santos Kaster

Florianópolis, setembro de 2006.

CONTROLE DE OSCILAÇÕES EM SISTEMAS COMUTADOS COM APLICAÇÕES EM ELETRÔNICA DE POTÊNCIA

Mauricio dos Santos Kaster

Esta Tese de Doutorado foi julgada adequada, servindo como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica, Área de Concentração em *Automação e Sistemas*, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Santa Catarina.

Prof. Dr. Daniel Juan Pagano
Orientador

Prof. Dr. Nelson Sadowski
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

Banca Examinadora:

Prof. Ricardo Takahashi, Dr. - UFMG

Prof. José Roberto Piqueira, Dr. - USP

Prof. Edson R. de Pieri, Dr. - UFSC

Prof. Samir Ahmad Mussa, Dr. - UFSC

Agradecimentos

Agradeço acima de tudo a Deus, que criou o homem e a natureza. Sem o Seu amoroso desejo de criar as coisas e os seres nada haveria para agradecer.

Agradeço especialmente à minha esposa pelo apoio e dedicação à nossa família;

Agradeço a meus sogros pelo apoio, esforço e renúncias.

Agradeço ao prof. Daniel Pagano pela orientação e dedicação em todos os trabalhos.

Agradeço ao prof. Arnaldo Perín, Clovis Petry, Carlos Illa Font, João Américo, Claudinor, pelo auxílio no desenvolvimento dos trabalhos e pelos bons momentos vividos entre amigos.

Agradeço ao prof. Ivo Barbi, por colocar toda a excelente estrutura do INEP à minha disposição, para a realização dos trabalhos de desenvolvimento dos protótipos de laboratório.

Agradeço a Luis Gomez Palacín pela amizade e pelo acolhimento em várias estadias em Florianópolis.

Também agradeço à Universidade Tecnológica Federal do Paraná, pela concessão de meu afastamento para a realização do curso.

Resumo da Tese de Doutorado apresentada à UFSC como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Doutor em Engenharia Elétrica.

CONTROLE DE OSCILAÇÕES EM SISTEMAS COMUTADOS COM APLICAÇÕES EM ELETRÔNICA DE POTÊNCIA

Mauricio dos Santos Kaster

Setembro/2006

Orientador: prof. Dr. Daniel Juan Pagano

Área de Concentração: Automação e Sistemas

Palavras-chave: controle não linear, controle de oscilações, sistemas comutados, eletrônica de potência.

Número de Páginas: 156

Este trabalho apresenta uma proposta para controle (geração) de oscilações em sistemas comutados. Baseado na forma de um oscilador não linear, é proposta uma metodologia de projeto de controladores para a obtenção de oscilações autônomas estáveis em sistemas dinâmicos (sem uso de sinais de referência externos). Os resultados obtidos através de simulações sobre os conversores buck, boost, duplo boost e inversor demonstram a validade do método proposto. Resultados experimentais obtidos em laboratório sobre o inversor e o conversor boost permitem validar a metodologia proposta.

Abstract of the Thesis presented to UFSC as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor in Electrical Engineering.

**CONTROL OF OSCILLATIONS ON SWITCHED SYSTEMS
WITH APPLICATIONS IN POWER ELECTRONICS**

Mauricio dos Santos Kaster

Setembro/2006

Advisor: prof. Daniel Juan Pagano, Dr. Eng.

Area of Concentration: Automation and Systems

Keywords: nonlinear control, control of oscillations, switched systems, power electronics.

Number of Pages: 156

This work presents a proposal for control (generation) of oscillations on switched systems. Based in a nonlinear oscillator form, a controller design methodology is proposed to obtain stable autonomous oscillations in dynamic systems (without using external reference signals). The results obtained by means of simulation of buck, boost and double boost converters and an inverter demonstrate the proposed method validity. Experimental results concerning the inverter and the boost converter permits to validate the proposed methodology.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Estabilização de Oscilações	3
1.2	Sistemas comutados	4
1.3	Sistemas de eletrônica de potência	6
1.4	Objetivos do trabalho	7
1.5	Organização do trabalho	8
2	Geração de oscilações autônomas em sistemas dinâmicos	9
2.1	Introdução	9
2.2	Oscilações em sistemas dinâmicos não-lineares	9
2.3	Geração de oscilações autônomas	16
2.4	Geração de oscilações autônomas por modos deslizantes	23
2.5	Grau de atratividade das trajetórias	25
2.6	Análise dos diferentes tipos de osciladores propostos	27
2.7	Método de projeto para controle de oscilações	29
	2.7.1 Método por realimentação de estado	29
	2.7.2 Método baseado no gradiente de velocidade	32
2.8	Conclusão do capítulo	33
3	Aplicações em eletrônica de potência	34
3.1	Introdução	34
3.2	Controle do Conversor Buck usando i_c e v_c como estados	35
	3.2.1 Análise dos equilíbrios	36
	3.2.2 Modelo normalizado	37
	3.2.3 Equivalência com a forma canônica de um oscilador não-linear plano	37
	3.2.4 Resultados de simulação	39
3.3	Controle do conversor Buck usando i_L e v_c como estados	42
	3.3.1 Análise dos equilíbrios	43
	3.3.2 Modelo normalizado	44
	3.3.3 Equivalência com a forma canônica de um oscilador não-linear plano	45
	3.3.4 Projeto de controle	47

3.3.5	Resultados de simulação	48
3.3.6	Método do gradiente de velocidade para gerar oscilações	50
3.3.7	Resultados de simulação	53
3.4	Controle de oscilações no conversor boost	53
3.4.1	Análise dos equilíbrios	55
3.4.2	Modelo normalizado	56
3.4.3	Análise da dinâmica interna	56
3.4.4	Controle indireto da tensão y_2 através da corrente	59
3.4.5	Forma canônica de controle	62
3.4.6	Troca de variáveis do sistema sem normalização	65
3.4.7	Resultados de simulação	68
3.5	Controle de oscilações em um inversor	70
3.5.1	Objetivo e lei de controle	71
3.5.2	Resultados de simulação	73
3.6	Controle de oscilações em um conversor duplo boost	74
3.6.1	Modelo do circuito duplo-boost	74
3.6.2	Projeto do controlador	77
3.6.3	Resultados de simulação	81
3.7	Conclusões do capítulo	84
4	Resultados experimentais	86
4.1	Introdução	86
4.2	Inversor	87
4.2.1	Implementação do controle	87
4.2.2	Considerações sobre o valor da indutância	90
4.2.3	Considerações sobre amostragem dos sinais	92
4.2.4	Operação em malha aberta	94
4.2.5	Operação a 20 KHz com filtro anti-aliasing	95
4.2.6	Operação a 33 KHz sem filtro anti-aliasing	96
4.2.7	Perturbações de carga	99
4.3	Conversor boost	101
4.4	Conclusão do capítulo	107
5	Conclusões	108
A	Sistemas comutados	112
A.1	Introdução	112
A.2	Sistemas comutados ou de estrutura variável	112
A.3	Modos deslizantes em sistemas comutados	113
A.3.1	Definições	113

A.3.2	Existência dos modos deslizantes	113
A.3.3	Dinâmica na superfície de comutação	114
A.3.4	Método do controle equivalente	115
A.3.5	A frequência de comutação	117
B	Modelagem de conversores de eletrônica de potência	120
B.1	Tipo do modelo	120
B.2	Conversor buck	120
B.2.1	Equações de estado	121
B.2.2	Carga resistiva	122
B.2.3	Equilíbrios	123
B.2.4	Trajетórias naturais do conversor buck	125
B.2.5	Modelo por valores médios	126
B.2.6	Modelo linearizado	128
B.3	Conversor boost	130
B.3.1	Equações de estado	130
B.3.2	Carga resistiva	131
B.3.3	Equilíbrios	132
B.3.4	Trajетórias naturais do conversor boost	134
B.3.5	Modelo por valores médios	135
B.3.6	Modelo linearizado	138
C	Diagramas esquemáticos	141
C.1	Conversor boost	142
C.1.1	Etapa de potência	142
C.1.2	Circuito de acionamento	143
C.1.3	Circuito de tratamento do sinal dos sensores	144
C.2	Inversor monofásico	145
C.2.1	Fontes de alimentação	145
C.2.2	Etapa de potência	146
C.2.3	Circuito de acionamento	147
C.2.4	Circuito de condicionamento do sinal dos sensores	148
C.3	Conversor duplo boost	149
C.3.1	Etapa de potência	149
C.3.2	Circuito de acionamento	150
C.3.3	Circuito de condicionamento do sinal dos sensores	151

Lista de Figuras

1.1	Comportamento da informação de fase da trajetória no modo de seguimento de referência (a), comparado com o modo de geração de oscilações autônomo (b).	4
2.1	Exemplos de ciclos-limite.	10
2.2	Estrutura de centro.	12
2.3	Diagrama de estados da equação de Van der Pol.	14
2.4	Elipse definida pelos estados v e \dot{v} no espaço de estados (v, \dot{v})	17
2.5	Gráficos de $V(\sigma)$	19
2.6	Bifurcação de Hopf supercrítica.	19
2.7	Evolução do parâmetro μ e o aparecimento do ciclo limite para o sistema (2.14) com $k = 1$. O valor $\mu = 0$ marca o aparecimento do ciclo limite. Para facilitar a visualização, foram traçadas apenas as trajetórias externas.	20
2.8	Gráficos da função de Lyapunov. As funções estão limitadas e, por este motivo, aparecem na figura os planos limitadores.	21
2.9	Curvas de dinâmica nula para vários valores de k	21
2.10	Curvas de dinâmica nula e comportamento das linhas de convergência.	22
2.11	Gráficos de $V(\sigma)$	24
2.12	Gráficos da função de Lyapunov. Ambas as funções estão limitadas e, por este motivo, aparecem na figura os planos limitadores.	24
2.13	Curvas de dinâmica nula para vários valores de k	25
2.14	Curvas de dinâmica nula e comportamento das linhas de convergência.	25
2.15	Detalhe do diagrama de estados (x_1, x_2) na proximidade de $x_2 = 0$	26
2.16	Curvas de dinâmica nula para diferentes estratégias de controle.	27
2.17	Traçado das curvas de dinâmica nula para os casos do (a) oscilador 1, (b) oscilador 2, (c) oscilador 3, (d) oscilador 4.	28
2.18	Formas de onda dos estados (x_1, x_2) dos osciladores considerando a condição inicial $(0, 1; 0, 1)$	29
2.19	Formas de onda dos estados (x_1, x_2) dos osciladores considerando a condição inicial $(3, 3; 0, 1)$	30

2.20	Diagrama de estados para condição inicial $x_1 = 0, 1$ (a)(b)(c)(d) e para uma condição inicial $x_1 = 3, 3$ (e)(f)(g)(h).	30
3.1	Conversor buck utilizando i_c e v_c como variáveis de estado.	35
3.2	Sinal PWM e a razão cíclica.	36
3.3	Curva de equilíbrios para o conversor buck.	36
3.4	Formas de onda de x_1 e de x_2 no tempo geradas utilizando-se o controle contínuo sobre o sistema normalizado.	40
3.5	Diagrama de estados (x_1, x_2) utilizando-se o controle contínuo sobre o sistema normalizado.	40
3.6	Sinal de controle e valor da função $P = \sigma(z)$	41
3.7	Formas de onda de x_1 e de x_2 utilizando modulação PWM com $f_s = 15$ KHz.	41
3.8	Diagrama de estados (x_1, x_2) (a) trajetória de inicialização e (b) trajetória em regime de oscilação.	42
3.9	Sinal de controle e valor da função $P = \sigma(z)$	42
3.10	Conversor buck utilizando i_L e v_c como variáveis de estado.	43
3.11	Curva de equilíbrios para o conversor buck.	44
3.12	Formas de onda de x_1 (i_L) e x_2 (v_c) no tempo.	49
3.13	Diagrama de estados (x_1, x_2)	50
3.14	Diagrama de estados de (z_1, z_2)	50
3.15	Formas de onda do sinal de controle u e o valor retornado pela função $P = \sigma(z)$ responsável por guiar as trajetórias em torno da elipse.	51
3.16	Oscilação no modelo normalizado do conversor buck a partir de condições iniciais nulas. (a) Sinais y_1 e y_2 no tempo, (b) sinal de controle u , (c) diagrama de estados (y_1, y_2) , (d) diagrama de estados (y_2, \dot{y}_2)	53
3.17	Oscilação no modelo desnormalizado do conversor buck a partir de condições iniciais nulas. (a) Sinais x_1 e x_2 no tempo, (b) sinal de controle u , (c) evolução da trajetória dos estados no diagrama de estados (x_1, x_2) a partir de uma condição inicial interna, (d) idem, para uma condição inicial externa.	54
3.18	Topologia do conversor boost.	55
3.19	Curva dos pontos de equilíbrio para o conversor boost. A curva é traçada no plano (x_1, x_2) apresentando a localização de alguns pontos para algumas razões cíclicas.	56
3.20	Dinâmica interna do boost controlado a partir da imposição de x_{2r} . (a) Evoluções de 3 sinais de $x_1(t)$ com condições iniciais ligeiramente diferentes, (b) evolução da trajetória dos estados no espaço de estados (x_1, x_2)	59
3.21	Formas de onda das expressões de $g(t)$ e $h(t)$ referentes à equação da dinâmica interna e o erro resultante.	61

3.22	(a) Formas de onda da corrente no indutor (x_1) e da tensão de saída (x_2) no tempo. (b) Diagrama de estados (x_1, x_2) mostrando a trajetória inicial e a elipse formada pela oscilação dos estados centrada na curva de equilíbrios.	69
3.23	Diagrama de estados (z_1, z_2).	70
3.24	Evolução do sinal de controle u e da função $\sigma(z)$.	70
3.25	Circuito inversor em ponte completa.	71
3.26	Formas de onda de tensão e corrente considerando diferentes frequências e modos de operação.	73
3.27	Topologia do conversor duplo-boost com a carga em ponte.	74
3.28	Elipse.	80
3.29	Variáveis de estado do primeiro boost: Tensão v_{c1} e corrente i_{L1} .	81
3.30	Formas de onda de v_{c1} , v_{c2} e $v_{out} = v_{c1} - v_{c2}$.	82
3.31	Evolução das saídas v_{c1} e v_{c2} , da tensão sobre a carga v_{out} e da variação da frequência $\Delta\omega_n = \omega_{n,2} - \omega_{n,1}$ do segundo boost em relação ao primeiro, controlada pelo PLL.	82
3.32	Diagramas de estados de: (a) (z_1, z_2), (b) (z_3, z_4), (c) (i_{L1}, v_{c1}) e (d) (i_{L2}, v_{c2}).	83
4.1	Diagrama de blocos do sistema inversor controlado.	88
4.2	Diagrama de blocos do controlador implementado em um DSP.	88
4.3	Os instantes de amostragem estão representados por linhas pontilhadas, pouco antes das transições do sinal PWM.	93
4.4	Protótipo do inversor buck com controle baseado no DSP TMS320LF2407.	94
4.5	Sistema operando em malha aberta a 20KHz. Valores filtrados através de amostragem pouco antes das transições do sinal PWM. (a) tensão (v_{adc}) e corrente (i_{adc}) no capacitor. (b) Plano de fase.	95
4.6	Sistema operando em malha fechada a 20 KHz utilizando filtro anti-aliasing. (a) v_{adc} e i_{adc} . (b) Plano de fase.	95
4.7	Sistema operando em malha fechada a 20 KHz utilizando filtro anti-aliasing. (a) Valores da função P . (b) Variação da razão cíclica dd .	96
4.8	Sistema operando em malha fechada a 33 KHz. (a) Formas de onda da tensão e corrente medidas nos sensores e convertidas pelo conversor A/D do DSP (Obs.: As escalas de tensão e corrente não são as mesmas). (b) Plano de fase da tensão e corrente convertidos pelo conversor A/D do DSP ($v_{adc} \times i_{adc}$).	98
4.9	Formas de onda do sinal de controle ajustado para o comparador do <i>timer</i> do DSP responsável por gerar o sinal PWM. Para o sistema operando a 33 KHz, os valores correspondentes a $0 \leq d \leq 1$ correspondem a $0 \leq dd \leq 1200$.	98
4.10	Cargas usadas para teste de robustez. (a) Carga resistiva com variação entre 25Ω e 50Ω . (b) Carga não linear com $C_L = 47\mu\text{F}$ e $R_L = 180\Omega$.	99

4.11	Formas de onda de tensão (onda senoidal de maior amplitude) e corrente (onda senoidal de menor amplitude) na carga para uma variação de carga resistiva de 50Ω para 25Ω	99
4.12	Formas de onda de tensão V_o (onda senoidal de maior amplitude) e corrente i_o na carga não linear (onda não senoidal de menor amplitude).	100
4.13	Diagrama de estados (v_c, i_c) do sistema submetido a variações de carga entre 25Ω e 50Ω	100
4.14	Diagrama de estados (v_{ck}, i_{ck}) do sistema operando com a carga não-linear. v_{ck} e i_{ck} representam as amostras de v_c e i_c lidas pelo DSP através do conversor A/D.	101
4.15	Diagrama de blocos do sistema conversor boost.	101
4.16	Diagrama de blocos do controlador implementado em um DSP. No diagrama, as siglas referem-se a: “tr1” equivale à eq. (4.4), “tr2” à eq. (4.5) e “tr3” às eqs. (4.6)-(4.7).	102
4.17	Protótipo do conversor boost.	103
4.18	(a) Formas de onda dos valores de v_{ck} e i_{lk} que correspondem aos valores lidos pelo conversor A/D dos estados v_c e i_L . A escala de tempo é $t[s] \cong \frac{2/60}{800} \cdot t_p$; (b) Diagrama de estados (i_{lk}, v_{ck}).	104
4.19	Diagrama de estados (z_1, z_2).	105
4.20	Forma de onda do sinal de controle. A faixa de valores $0 \leq u \leq 1$ equivale a $0 \leq dd \leq 750$. A escala de tempo é $t[s] \cong \frac{2/60}{800} \cdot t_p$	105
4.21	Formas de onda da tensão de saída (a) Medição DC com 20V/div vertical e 10ms/div horizontal; (b) Medição AC com 10V/div vertical e 4ms/div horizontal.	106
4.22	Conteúdo harmônico da tensão senoidal de saída. Obs.: percentuais relativos à fundamental.	106
A.1	Efeito do comparador com histerese na comutação dos estados em torno da superfície de deslizamento.	118
B.1	Fluxograma das técnicas de modelagem.	121
B.2	Conversor buck.	121
B.3	Curva dos pontos de equilíbrio do conversor buck, usando-se $E = 48V$ e três valores para a resistência de carga: 50Ω , 100Ω e 150Ω	124
B.4	Família de curvas do conversor buck. Foram usados: $R = 25\Omega$, $L = 1\text{ mH}$, $C = 10\mu\text{F}$ e $E = 48\text{ V}$	126
B.5	Valores de x_1 e x_2 em função da razão cíclica d para as equações simplificadas. Foram usados: $L = 1\text{ mH}$, $C = 10\mu\text{F}$ e $E = 48\text{ V}$	128

B.6	Valores de x_1 e x_2 em função da razão cíclica d para o modelo realístico. Para sua obtenção foram usados $r_c = 0.01 \Omega$, $r_L = 0.01 \Omega$, $r_{ds} = 0.1 \Omega$, $v_{do} = 0.7 \text{ V}$ e $E = 48 \text{ V}$	128
B.7	Conversor Boost.	130
B.8	Curva dos pontos de equilíbrio (a) ideal (b) real do conversor boost. Foram usados $E = 48 \text{ V}$, $L = 1 \text{ mH}$, $C = 10 \mu\text{F}$, $r_L = r_c = 0,01 \Omega$, $r_{ds} = 0,1 \Omega$, $v_{do} = 0,7 \text{ V}$ e três diferentes cargas: $R = 25 \Omega$, 50Ω e 100Ω	134
B.9	Família de curvas do conversor Boost.	136
B.10	Valores de (a) x_1 e (b) x_2 em função da razão cíclica para as equações simplificadas.	137
B.11	Valores de (a) x_1 e (b) x_2 em função da razão cíclica para o modelo realístico. Para sua obtenção foram usados $r_c = 0.01 \Omega$, $r_L = 0.01 \Omega$, $r_{ds} = 0.1 \Omega$, $v_{do} = 0.7 \text{ V}$ e $E = 48 \text{ V}$	138

Simbologia usada neste trabalho

símbolo	significado
$P(x)$	função dos estados usada no controle.
$\sigma(x)$	função dos estados usada no controle (forma normalizada).
μ_s	constante que define a escala da elipse $P(x) = 0$.
μ	constante que define a escala da elipse $\sigma(x) = 0$, equivale a $(\mu_s A \omega)^2$.
u	sinal de controle.
d	razão cíclica usada em um modulador PWM; deve ser $0 \leq d \leq 1$.
dd	valor a ser colocado no registrador CMP1 do DSP; define a razão cíclica correspondente a d .
ω_0	freqüência natural de oscilação do sistema.
ω	freqüência angular.
λ	autovalor.
$J(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$	jacobiano calculado no ponto (\bar{x}_1, \bar{x}_2) .
A	amplitude da oscilação de saída.
B	nível contínuo somado à oscilação de saída.
k	constante de ajuste do ganho do termo de amortecimento.
ρ	constante de ajuste do ganho do termo de amortecimento quando este é independente do valor de x_2 .
$V(\sigma)$	função de Lyapunov.
$\dot{V}(\sigma)$	derivada da função de Lyapunov.
v_c	tensão sobre o capacitor de saída.
i_c	corrente através do capacitor de saída.
i_L	corrente através do indutor-série.
v_{ck} ou v_{adc}	valor obtido de v_c após a leitura do sensor ser convertida pelo conversor A/D do DSP.
i_{ck} ou i_{adc}	valor obtido de i_c após a leitura do sensor ser convertida pelo conversor A/D do DSP.

símbolo	significado
ilk ou i_{adc}	valor obtido de i_L após a leitura do sensor ser convertida pelo conversor A/D do DSP.
α	termo constante da corrente usada no controle indireto da tensão no conversor boost.
β_1	constante que multiplica o termo $\sin \omega t$ da corrente usada no controle indireto da tensão no conversor boost.
β_2	constante que multiplica o termo $\cos \omega t$ da corrente usada no controle indireto da tensão no conversor boost.

Capítulo 1

Introdução

Tradicionalmente no projeto de sistemas de controle são considerados dois objetivos principais: (i) *regulação* ou estabilização e (ii) *seguimento de referências* ou “*tracking*”. O primeiro deles consiste em conduzir o vetor de estados $x(t)$ do sistema mediante uma ação de controle para um ponto de equilíbrio x^* (ou ponto fixo). Equivalentemente o objetivo de regulação pode ser alcançado sobre a variável de saída do sistema $y(t)$. Formalmente

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x^* \quad \text{ou} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y^*.$$

A ação reguladora do controlador deve levar o estado (ou a saída do sistema) para o estado de equilíbrio (ou para o valor de saída desejado) na presença de perturbações (rejeição de perturbações).

O segundo objetivo consiste em controlar a variável $x(t)$ do sistema de forma a seguir uma trajetória de referência desejada $x(t)^*$, i.e.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [x(t) - x(t)^*] = 0 \quad \text{ou} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} [y(t) - y(t)^*] = 0,$$

se desejamos que a variável de saída do sistema siga uma dada função de referência, comumente denominada *referência*, $y(t)^*$. Esta referência pode ser definida como uma função do tempo ou como a solução de um sistema auxiliar denominado de *modelo de referência*. Claramente o caso do seguimento de referências denota um modo de funcionamento do sistema, denominado na literatura de *sistema forçado*, onde um estado ou a saída do sistema é forçada a seguir um sinal de referência no tempo.

Em algumas situações práticas podemos considerar

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [x(t) - x(t)^*] \leq \Delta, \quad \text{ou} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} [y(t) - y(t)^*] \leq \Delta,$$

onde Δ representa um certo erro admissível definido pelo projetista do controle.

Tanto no caso da regulação como do seguimento de referências a *Estabilidade* do sistema dinâmico sob controle deve ser garantida.

Para estes dois objetivos são definidas especificações sobre a resposta do sistema no domínio do tempo, tanto para o regime permanente como para o regime transitório.

A especificação da resposta em regime permanente é definida em termos do erro admissível (Δ). Para a resposta transitória do sistema, no domínio do tempo, definem-se parâmetros tais como amortecimento, máximo sobressinal permitido, máximo tempo de estabelecimento, etc. Também para alguns sistemas podem ser definidas especificações no domínio da frequência.

Um terceiro objetivo a ser considerado no projeto de um sistema de controle está relacionado com a *robustez* do sistema. O controlador deve ser projetado levando em consideração as possíveis variações ou incertezas nos parâmetros do processo. Neste caso, o controlador deve manter a estabilidade do sistema garantindo um certo desempenho definido pelo projetista do sistema, para toda uma família de modelos gerados pela incerteza paramétrica.

Em geral, os sistemas de controle são projetados para estabilizar o sistema em pontos de equilíbrio (também denominados pontos de operação) ou no seguimento de sinais de referência. Por exemplo, em controle de processos, controlar a temperatura de um sistema em um determinado ponto de operação ou seguir um determinado sinal de referência pré-estabelecido. Entretanto quando tratamos com sistemas dinâmicos não lineares, que podem apresentar outros tipos de comportamento como: oscilações periódicas (ciclos limites) e oscilações aperiódicas (atratores estranhos), podem ser definidos outros objetivos de controle tais como:

- Controle de oscilações: consiste na geração de oscilações estáveis e robustas de forma autônoma ou na supressão ou controle da amplitude das mesmas.
- Controle de bifurcações: tem por objetivo a alteração do comportamento dinâmico de um sistema, como por exemplo, mudança da estabilidade de equilíbrios, atrasar o ponto de bifurcação de um sistema, etc.
- Sincronização: o objetivo consiste na sincronização de variáveis em dois ou mais sistemas dinâmicos.

O objetivo deste trabalho é estudar a *geração* e a *estabilização de oscilações autosustentadas* em sistemas dinâmicos, particularmente aplicado à classe dos *sistemas comutados* ou *sistemas de estrutura variável*. Não é objetivo do trabalho estudar a supressão de oscilações.

Os primeiros trabalhos que resultaram em uma maior formalização da teoria na área de controle de oscilações provem da escola russa (Andronov et al., 1987; Tsytkin, 1984). Estes trabalhos foram continuados por Fradkov e Pogromski. Uma excelente introdução ao controle de oscilações e caos pode ser encontrada em (Fradkov and Pogromsky, 1998). Estudos sobre oscilações em sistemas mecânicos sub-atuados, em particular aplicados a

robôs bípedes que imitam o caminhar humano (Urrea et al., 2002; Canudas de Wit et al., 2002), e em pêndulos invertidos (Aracil et al., 2002a; Vivas-Venegas and Rubio, 2003) abordam as características de geração de oscilações autônomas estáveis. A abordagem por funções de energia tem sido estudada por (Gomez-Estérn et al., 2001; Aracil et al., 2002b) utilizando funções Hamiltonianas.

A aplicação destas técnicas a sistemas de eletrônica de potência realizadas a partir dos estudos previamente citados podem ser encontradas em (Biel et al., 1998; Takahashi et al., 1999; Biel et al., 2001b,a, 2003)

Em (Carpita and Marchesioni, 1996) explora-se o uso técnicas de controle por seguimento de referência utilizando uma superfície de comutação baseada no sinal de erro e em sua derivada, para obter um sistema robusto com boa dinâmica de resposta.

Várias formas de controle por *tracking* têm sido propostas na literatura para conversão CC-CA, dependendo de qual processamento é aplicado ao sinal de erro (Colling, 2000; Kawamura and Hoft, 1984; Maussion et al., 1989; Jezernik et al., 1989; Batistela, 1994; Filho, 1995; Cáceres, 1997; Cáceres and Barbi, 1999). Em todos estes casos, o projeto de controle é baseado em um modelo de estágio de potência conduzindo a formas de onda de saída sensíveis às variações nos parâmetros do estágio de potência, tais como variações de carga.

O projeto dos sistemas baseados no esquema de controle por *tracking* também irá exigir a implementação de um gerador senoidal programável de baixa potência atuando como sinal de referência. Como uma alternativa, partindo do esquema de controle por *tracking*, alguns trabalhos apresentam uma metodologia que conduz a uma lei de controle de modo deslizante para a geração de um sinal AC onde nenhum sinal de referência externo é necessário. Devido à ausência de um sinal de referência, esta modalidade de controle autônomo tem sido referida como um esquema de controle de “geração” de oscilações auto-sustentadas (Takahashi et al., 1999; Biel et al., 2001b).

Em (Biel et al., 2001b; Takahashi et al., 1999) apresentam-se métodos de geração de oscilações aplicados ao inversor tipo buck monovariável.

Neste trabalho estamos interessados em estudar a *geração* e a *estabilização de oscilações auto-sustentadas* em sistemas dinâmicos. Em particular, o seu estudo aplicado à classe dos *sistemas comutados* ou *sistemas de estrutura variável*.

1.1 Estabilização de Oscilações

Como comentado na seção anterior, a maior parte das técnicas de controle desenvolvidas nas últimas décadas abordam o problema da estabilização assintótica de pontos de equilíbrio e o seguimento de trajetórias. Entretanto, em alguns sistemas, incluindo conversores de corrente alternada (Gordillo et al., 2004) e robôs bípedes com capacidade de caminhar autonomamente (Canudas de Wit et al., 2002; Urrea et al., 2002), o objetivo consiste

na geração de oscilações estáveis. A estabilização de oscilações é um problema que tem sido considerado na literatura utilizando diferentes metodologias (Bloch et al., 2000; Fradkov and Pogromsky, 1998; Sira-Ramírez, 1999; Gomez-Estérn et al., 2001; Gómez-Estern, 2002; Aracil et al., 2002b).

As vantagens principais de uma lei de estabilização de oscilações, mediante realimentação de estado, como será apresentado no decorrer deste trabalho, perante a possibilidade alternativa de utilizar seguimento de trajetórias de referência senoidais são:

- não depender de sinais variantes no tempo o que dificulta a implementação assim como as provas de estabilidade e robustez;
- não depender da informação de fase da trajetória. O sistema pode entrar em oscilação desde qualquer ponto da órbita e portanto o erro de seguimento é uma medida da distância ao ponto mais próximo da órbita. No caso tradicional do seguimento, a referência possui informação da fase, o que obriga o sistema a incorporar-se à órbita em um ponto exato (figura 1.1). Isto pode produzir um erro maior e atrasar o transitório da trajetória dos estados até a convergência ao regime permanente.

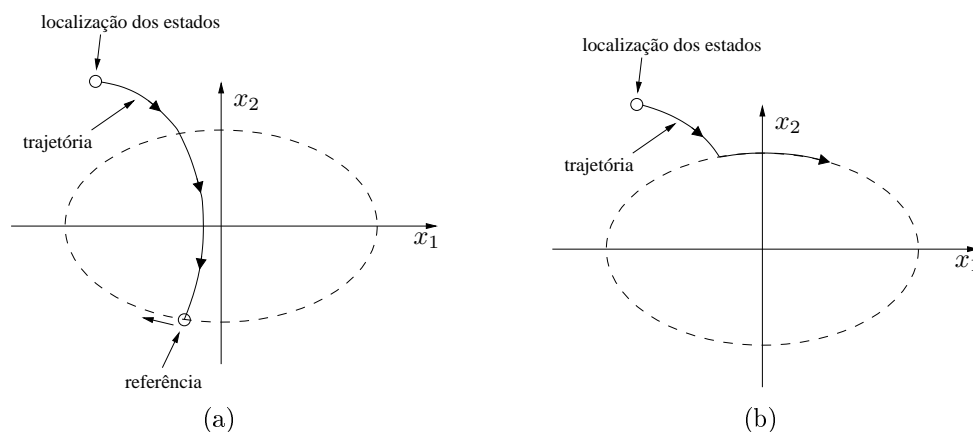


FIGURA 1.1: Comportamento da informação de fase da trajetória no modo de seguimento de referência (a), comparado com o modo de geração de oscilações autônomo (b).

Entretanto, como desvantagem, nesta técnica não há garantia de manutenção da fase do sinal gerado. Isso representa realmente um problema em aplicações onde seja necessária a sincronização com um sinal externo, como, por exemplo, a rede elétrica.

1.2 Sistemas comutados

Os sistemas comutados denotam sistemas que, do ponto de vista físico, têm uma estrutura variável. Tais sistemas têm um comportamento híbrido no que diz respeito à natureza das suas variáveis: contínuas ou discretas. Cada estrutura individual possui sua própria

dinâmica contínua, mas, a transição entre uma estrutura e outra se dá por um processo discreto. Os processos discretos podem ser completamente descritos por condições algébricas envolvendo funções das variáveis contínuas. Para modelar esta classe de sistemas, devem ser identificados todos os possíveis estados discretos do sistema. Cada um deles representa uma diferente estrutura da dinâmica contínua e cada uma dessas dinâmicas é modelada por uma equação de estados associada à respectiva estrutura. O modelo resultante pode ser expresso na forma

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x(t), u(t, x)) \\ y = h(t, x(t), u(t, x)), \end{cases} \quad (1.1)$$

em que $f : D_f \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função vetorial contínua em seus argumentos t , x e u , sendo que $t \in \mathbb{R}$ é a variável independente (em geral o tempo), $x \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados, e $u \in \mathbb{R}^m$ é uma função vetorial tal que as descontinuidades do sistema ficam todas agrupadas em u segundo a expressão

$$u : D_u \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$u_i(t, x) = \begin{cases} u_i^+(t, x) & \text{se } \sigma_i(x) > 0 \\ u_i^-(t, x) & \text{se } \sigma_i(x) < 0 \end{cases} \quad i = 1, \dots, m \quad (1.2)$$

com

$$\sigma(x) = [\sigma_1(x) \quad \sigma_2(x) \quad \dots \quad \sigma_m(x)]^T \quad (1.3)$$

sendo

$$\sigma_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}.$$

Neste caso, u apenas funciona como “*recipiente*” das descontinuidades do sistema para que f esteja livre de tais descontinuidades. Porém, u também pode ser entendida como uma variável de controle implementando uma realimentação estática¹ descontínua em relação ao estado x ou ao tempo t . A diferença básica entre estes dois casos é que, sendo u uma realimentação, as descontinuidades são introduzidas pelo controle deliberadamente para se atingir algum objetivo específico, o que torna o caráter descontínuo uma opção do projetista. No outro caso, quando u for apenas um repositório das descontinuidades inerentes ao sistema, não há como evitá-las, e o projeto de controladores para tais sistemas tem obrigatoriamente que lidar com essas descontinuidades.

O controle de estrutura variável é um tipo de controle onde o comportamento dinâmico do sistema é imposto através de comutação (Morvan et al., 2004). A idéia central deste método consiste em utilizar as próprias trajetórias naturais do sistema para alcançar um equilíbrio com objetivo previamente definido mediante comutação dos interruptores

¹O caso da realimentação dinâmica pode ser reduzido a uma realimentação estática desde que algumas condições sejam satisfeitas. A demonstração deste resultado não faz parte do escopo deste trabalho.

(idealmente a frequência infinita). O controle por modo deslizante pode ser representado por uma superfície de comutação (que no caso de n dimensões resulta em uma hipersuperfície no espaço de estados) e por uma lei de realimentação de estados que tem uma ação restringida devido às características da própria função de comutação.

Este tipo de controle opera em todo o espaço de estados, diferentemente dos controladores convencionais, classicamente projetados a partir de modelos lineares, que operam nos modos de: inicialização (*start-up*), regime permanente e de proteção do sistema.

1.3 Sistemas de eletrônica de potência

A maioria dos sistemas de eletrônica de potência na atualidade são sistemas comutados, ou seja, operam por comutação de interruptores. Estes sistemas podem estar formados por um ou mais conversores eletrônicos de potência que utilizam dispositivos semicondutores controlados. Existem diferentes critérios para classificar os conversores usados em eletrônica de potência: tipo dos dispositivos, função, conexões entre as diferentes partes do conversor etc. Entre eles encontram-se os conversores comutados: eles possuem interruptores eletrônicos que, adequadamente comandados (em frequências bem maiores que a frequência de linha CA), produzem tensões de saída CC ou CA.

Atualmente, a conversão CC-CA possui importantes aplicações práticas como os Sistemas de Fornecimento Ininterrupto de Energia (*Uninterruptible Power Supply*) e os inversores de frequência que acionam máquinas CA. Outra importante aplicação que começa a ganhar espaço está na área da geração distribuída de energia, onde realiza-se a geração de energia a partir de fontes naturais, como a energia solar gerada através de células solares, e injeta-se esta energia na rede elétrica convencional.

Os conversores comutados CC-CC básicos (buck, boost, buck-boost) possuem uma estrutura bastante simples. Durante os últimos 15 anos, um considerável esforço de pesquisa tem sido empregado para estudar a possibilidade de usá-los para geração de tensões de saída CA (Olm, 2003).

A implementação de controladores por superfície de comutação, para esta classe de sistemas comutados, tem a desvantagem de operar a frequência variável. Isto representa, do ponto de vista do projetista do sistema de eletrônica de potência, um problema pois todos os elementos do sistema (capacitores, indutores etc.) foram projetados para uma frequência de operação fixa. Esta frequência fixa é conseguida através do acionamento do interruptor utilizando uma modulação por largura de pulsos (PWM). A operação do sistema utilizando controle por superfície de comutação em frequência fixa é outro dos objetivos deste trabalho.

Em geral, este tipo de controle apresenta características de robustez e menor tempo de resposta a perturbações. Entretanto, possui a desvantagem de operar em frequência variável e poder apresentar *chattering* de alta frequência. Sistemas operando em frequências

muito variáveis possuem uma distribuição espectral do sinal muito irregular, dificultando a aplicação de filtros. Por sua vez, o *chattering* de alta frequência pode contribuir para a diminuição da vida útil dos interruptores além de poder inviabilizar a comutação, pois os interruptores possuem limitações de frequência de operação e necessidade de aplicação de um tempo morto.

Controladores de modo deslizante baseados no método do controle equivalente fazem uso de um modulador PWM que opera de forma linear quando a trajetória dos estados encontra-se próxima à superfície de comutação. Isto limita a frequência de comutação dos interruptores enquanto agrega características de robustez e desempenho do controle de modo deslizante (DeCarlo et al., 1988).

Por outro lado, a migração dos controladores analógicos para os digitais neste tipo de aplicações, a partir do aparecimento de sistemas microprocessados de alto desempenho e poder de cálculo, relativamente baixo custo e disponíveis comercialmente, como são os dispositivos DSP (*Digital Signal Processors*), possibilita a implementação de algoritmos de controle totalmente impraticáveis com os antigos controladores analógicos baseados em circuitos integrados, capacitores e resistências. Nesta nova tecnologia de controle baseada em DSP, os algoritmos de controle são implementados em forma discreta mediante códigos de programa, o que resulta em uma menor dispersão nos parâmetros de controle que passam a ser valores definidos por constantes no programa. Desta forma, o *hardware* passa a ser fixo e o que muda é o programa que implementa a lei de controle.

1.4 Objetivos do trabalho

Constituem-se objetivos deste trabalho:

- Realizar um estudo de geração de oscilações em sistemas dinâmicos;
- Desenvolver uma técnica de síntese de controle para sistemas de estrutura variável (sistemas comutados), de modo a gerar oscilações estáveis nestes sistemas, com ênfase em aplicações na área de eletrônica de potência (conversores CC-CA);
- Realizar a verificação do funcionamento da técnica aplicada a conversores buck, boost, duplo-boost e inversor monofásico através de simulação computacional;
- Realizar a implementação prática em laboratório de circuitos conversores em que sejam empregadas as técnicas de controle propostas no trabalho utilizando dispositivos DSP (*Digital Signal Processor*).

1.5 Organização do trabalho

O trabalho está organizado da seguinte maneira: No capítulo 2 estudam-se as características dos sistemas dinâmicos que apresentam oscilações e a geração de oscilações autônomas estáveis através da determinação de uma lei de controle que permita ao sistema assumir o comportamento similar ao oscilador não-linear. No capítulo 3 são realizadas aplicações do método proposto na área de eletrônica de potência. São apresentadas estratégias de controle que permitem a geração de oscilações estáveis para os conversores buck, boost, duplo boost e um inversor. Também são apresentados resultados de simulação que permitem validar o método proposto. No capítulo 4 apresentam-se a implementação e os resultados obtidos sobre os protótipos de um inversor monofásico e um conversor boost. No caso do inversor, são apresentadas as formas de onda de tensão e corrente sobre a carga juntamente com os diagramas de estados com a utilização de uma carga resistiva. Para testar a robustez do sistema, são mostrados também os resultados obtidos com o uso de uma carga não linear. No caso do conversor boost, são apresentadas as formas de onda da tensão de saída e o diagrama das variáveis de estados. Finalmente, no capítulo 5 são comentados os resultados, os problemas, as contribuições do trabalho e as perspectivas de trabalhos futuros.

Capítulo 2

Geração de oscilações autônomas em sistemas dinâmicos

2.1 Introdução

Neste capítulo estudam-se as características dos sistemas dinâmicos que apresentam oscilações amortecidas, não amortecidas e periódico-estáveis, através de suas equações diferenciais lineares e não-lineares. Também estuda-se a geração de oscilações estáveis (ou auto-sustentadas) a partir da definição de uma função não linear de uma elipse no espaço de estados parametrizada em termos da amplitude e frequência de um sinal periódico oscilatório. Esta função é utilizada como superfície de comutação para gerar oscilações em um sistema dinâmico. A estabilidade das oscilações é estudada a partir da definição de uma função de Lyapunov que permite projetar uma lei de controle que gera o comportamento oscilatório no sistema dinâmico.

Entende-se aqui por autônomas, oscilações geradas a partir dos estados apenas, sem a dependência de referências externas (o uso de sinais externos configura um sistema forçado).

2.2 Oscilações em sistemas dinâmicos não-lineares

Os sistemas dinâmicos não-lineares nem sempre atingem estados estacionários (equilíbrios), também podem apresentar oscilações periódicas, quase-periódicas ou aperiódicas. Exemplos deste tipo de comportamento podem surgir nas equações diferenciais que modelam um sistema. Oscilações deste tipo foram denominadas por Poincaré (1854-1912) de *ciclos limites*. As oscilações em sistemas não-lineares estão associadas a atratores do tipo ciclo limite. Um ciclo limite é uma trajetória ou órbita fechada isolada que pode aparecer no espaço ou diagrama de estados de sistemas não-lineares. O fato da órbita ser isolada implica não poderem existir outras órbitas fechadas infinitesimalmente próximas. As tra-

jetórias próximas de um ciclo limite se aproximam ou se afastam assintoticamente dele. Os ciclos limites podem ser de três tipos: (i) estáveis; (ii) instáveis; (iii) semi-estáveis. A figura 2.1 ilustra estas possibilidades.

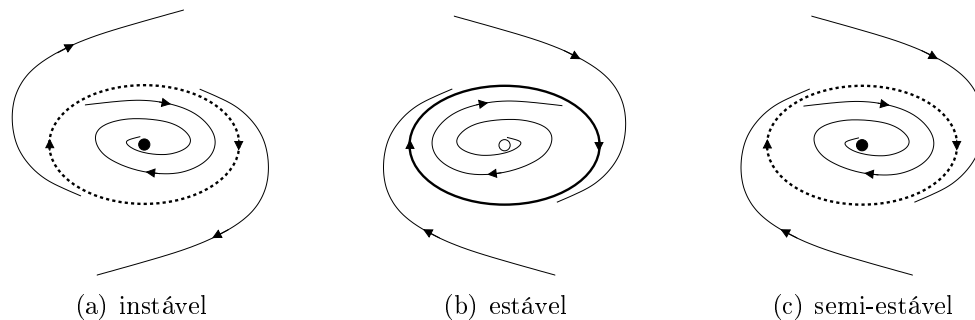


FIGURA 2.1: Exemplos de ciclos-limite.

Em geral, utilizam-se equações diferenciais não-lineares *autônomas* para descrever sistemas que apresentam oscilações auto-sustentadas, i.e., sistemas que apresentam comportamento oscilatório mesmo na ausência de sinais periódicos externos forçados. Um exemplo comum a todos é o coração humano que funciona como um oscilador auto-sustentado. Outro exemplo clássico e amplamente estudado, ao longo dos últimos 400 anos, é o pêndulo. Este sistema talvez tenha sido o sistema físico responsável pelo nascimento da teoria dos sistemas dinâmicos. “*Em 1581, no interior da catedral de Pisa, Galileu (1564-1642) se surpreendeu observando um candelabro que oscilava e teve a idéia de estimar o período da oscilação contando o seu próprio batimento cardíaco. Após realizar diversos experimentos em sua casa usando pedras amarradas em barbante, concluiu que o período das pequenas oscilações não dependia nem da amplitude do movimento, nem da massa m da pedra, apenas do comprimento l do barbante.*” (Monteiro, 2002)

Da mesma forma, a teoria das oscilações está associada, em suas origens, a princípios do século XX, aos nomes de Poincaré, Rayleigh (1842-1919) e de Van der Pol (1889-1959). É especialmente destacável a contribuição deste último inspirada em aplicações na engenharia elétrica e de radiocomunicações. Além dos trabalhos pioneiros destes cientistas, se desenvolveram nos anos 30 e 40 as escolas russas de Andronov (1901-1952) e de Krylov-Bogoliubov. Corresponde a Andronov a caracterização das oscilações periódicas autônomas como atratores do tipo ciclo limite (Andronov et al., 1987). Andronov estabelece as bases da teoria das oscilações não-lineares mediante a confluência da Teoria da Estabilidade de Lyapunov (1857-1918), a Teoria Qualitativa das equações diferenciais de Poincaré e a classificação de Birkhof (1884-1944) dos possíveis tipos de comportamento dinâmico. Mais recentemente podemos encontrar os trabalhos de Fradkov e Pogromsky (Fradkov and Pogromsky, 1998) no campo da engenharia, sobre controle de oscilações. Estes autores introduzem o controle nas equações matemáticas que representam esta classe de sistemas dinâmicos com o objetivo de controlar a amplitude dos ciclos limites.

Os ciclos limites não são possíveis em sistemas modelados por equações diferenciais ordinárias unidimensionais ou em sistemas lineares. É realmente notável o fato de que os comportamentos oscilatórios somente podem produzir-se, de uma forma estruturalmente estável, em sistemas não-lineares. Isto significa que o estudo das oscilações só pode realizar-se no contexto da teoria dos sistemas dinâmicos não-lineares. Portanto, é importante diferenciar os ciclos limites do comportamento de centro que pode ser encontrado nos sistemas lineares, comumente denominado de *oscilador harmônico* ou *linear*. Os sistemas lineares que apresentam um equilíbrio do tipo *centro*, caracterizado por ter um *jacobiano* com autovalores complexos conjugados com parte real nula, é envolvido por trajetórias fechadas, infinitesimalmente próximas e determinadas pelas condições iniciais. Estas órbitas fechadas são estruturalmente instáveis e não são isoladas. Qualquer mínima perturbação faz mudar a trajetória para outra órbita do sistema, variando conseqüentemente a amplitude da oscilação (a freqüência não varia). No caso não-linear também pode manifestar-se um comportamento do tipo centro, neste caso tanto a amplitude da oscilação como a sua freqüência são determinadas pelas condições iniciais. No caso do ciclo limite, a amplitude, o período e a forma deste são determinados pelos parâmetros das equações não-lineares; as condições iniciais não afetam as características do ciclo limite (Monteiro, 2002).

Os seguintes exemplos permitem mostrar melhor as diferenças entre um ciclo limite e um centro.

Exemplo 2.2.1 *Pêndulo simples*

O caso particular do pêndulo linear não amortecido e não forçado é comumente descrito pela equação

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0 \quad (2.1)$$

sendo ω_0 uma constante positiva. Essa equação pode ser escrita em termos de variáveis de estado como

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\omega_0^2 x_1. \end{cases}$$

cujos autovalores são $\lambda_{1,2} = \pm j\omega_0$, complexos conjugados com parte real nula. Assim, o ponto de equilíbrio $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = (0, 0)$ é um centro e ω_0 a freqüência de oscilação. Observe aqui que a equação (2.1) é denominada na literatura clássica como oscilador linear. Entretanto, este sistema é estruturalmente instável pois qualquer perturbação produz uma mudança de órbita. A análise deste sistema demonstra tratar-se de uma estrutura de centro, onde a trajetória de estados pode estar sobre qualquer elipse centrada na origem onde a razão entre os semi-eixos seja ω_0 , conforme mostrado na figura 2.2. Nos sistemas reais a implementação deste tipo de “oscilador linear” se torna impraticável devido ao fato

de não se poder garantir que os autovalores do sistema tenham parte real nula e, caso isto fosse possível, o sistema seria estruturalmente instável, o que não representa nenhum interesse prático.

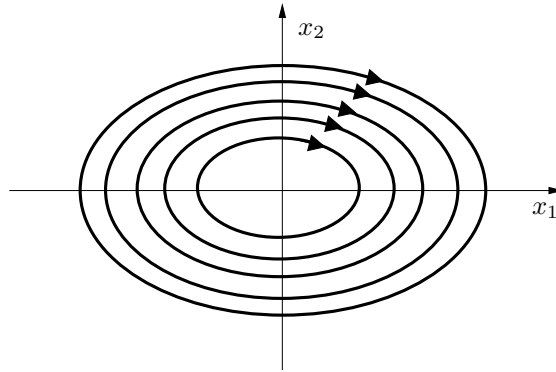


FIGURA 2.2: Estrutura de centro.

É interessante mostrar que se for adicionado amortecimento no sistema (2.1) pode-se quebrar a estrutura de centro, passando a se ter um pêndulo linear amortecido (e não forçado). Este sistema é comumente descrito pela equação

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\sigma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \quad (2.2)$$

que pode ser escrita em termos de variáveis de estado como

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\omega_0^2 x_1 - 2\sigma x_2, \end{cases}$$

cujos autovalores são $\lambda_{1,2} = -\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 - \omega_0^2}$. Sempre que $\sigma > 0$ temos um movimento com amortecimento, enquanto que quando $\sigma < 0$ o movimento apresenta amplificação.

Além disso, há outros três comportamentos possíveis:

- Movimento super-amortecido: $|\sigma| > |\omega_0|$. Os autovalores são reais e diferentes e a solução da eq. (2.2) é

$$x_h(t) = A_1 e^{(-\sigma + \sqrt{\sigma^2 - \omega_0^2})t} + A_2 e^{(-\sigma - \sqrt{\sigma^2 - \omega_0^2})t}.$$

- Movimento sub-amortecido: $|\sigma| < |\omega_0|$. Os autovalores são complexos conjugados e a solução da eq. (2.2) é

$$x_h(t) = e^{-\sigma t} \left[A_1 \cos \left(\sqrt{\omega_0^2 - \sigma^2} t \right) + A_2 \sin \left(\sqrt{\omega_0^2 - \sigma^2} t \right) \right].$$

- Movimento criticamente amortecido: $|\sigma| = |\omega_0|$. Os autovalores são reais e iguais e a solução da eq. (2.2) é

$$x_h(t) = e^{-\sigma t}(A_1 + A_2 t).$$

Nos três casos anteriores, as constantes A_1 e A_2 são determinadas em termos das condições iniciais. \triangle

O interesse de estudo da equação (2.2) se dá quando σ é uma função não-linear dos estados do sistema, definida como $\sigma(x_1, x_2)$ ou simplesmente como $\sigma(x)$. Neste caso, escolhendo apropriadamente esta função pode-se introduzir amortecimento no sistema, que pode ser negativo ou positivo dependendo do estado do mesmo. Se o amortecimento for negativo, tem-se um efeito de amplificação sobre as trajetórias dos estados. Caso contrário, se o amortecimento for positivo, o efeito é de atenuação.

Usando-se apropriadamente esta característica, de poder causar amplificação ou atenuação nas trajetórias do sistema, pode-se projetar um oscilador de forma a gerar oscilações estáveis. A amplitude do movimento oscilatório desejado (ciclo limite estável) se consegue quando as trajetórias do sistema convergem para a superfície $\sigma(x) = 0$. Quando a amplitude das oscilações for menor, devemos ter $\sigma(x) < 0$ para causar amplificação e, caso contrário, devemos ter $\sigma(x) > 0$ para causar atenuação sobre as trajetórias do sistema. Vamos mostrar este aspecto através de um exemplo.

Exemplo 2.2.2 Oscilador de Van der Pol

Um exemplo clássico de oscilador não-linear onde σ é uma função dos estados é a equação de Van der Pol. A seguinte equação, onde μ é um parâmetro positivo, representa um oscilador harmônico simples, com “atrito” que depende da posição x de maneira não-linear

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \mu(x^2 - 1)\frac{dx}{dt} + x = 0. \quad (2.3)$$

A função $\sigma(x) = \mu(x^2 - 1)$ age como amortecimento para $x^2 > 1$, mas como amplificador para $x^2 < 1$. Assim, o termo que contém $\sigma(x)$ faz com que oscilações com grande amplitude decaiam e que oscilações com pequena amplitude cresçam. Isso leva o sistema a uma oscilação auto-sustentada (um ciclo limite), em que a energia dissipada e a energia ganha, em um período, se equivalem.

Os autovalores associados ao ponto de equilíbrio (0,0) são

$$\lambda_{1,2} = \frac{\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4}}{2}$$

o que mostra que este ponto é um foco instável para $0 < \mu < 2$ (figura 2.3-c), um nó instável para $\mu > 2$ (figura 2.3-d), um foco assintoticamente estável para $-2 < \mu < 0$ (figura 2.3-b) e um nó assintoticamente estável para $\mu < -2$ (figura 2.3-a).

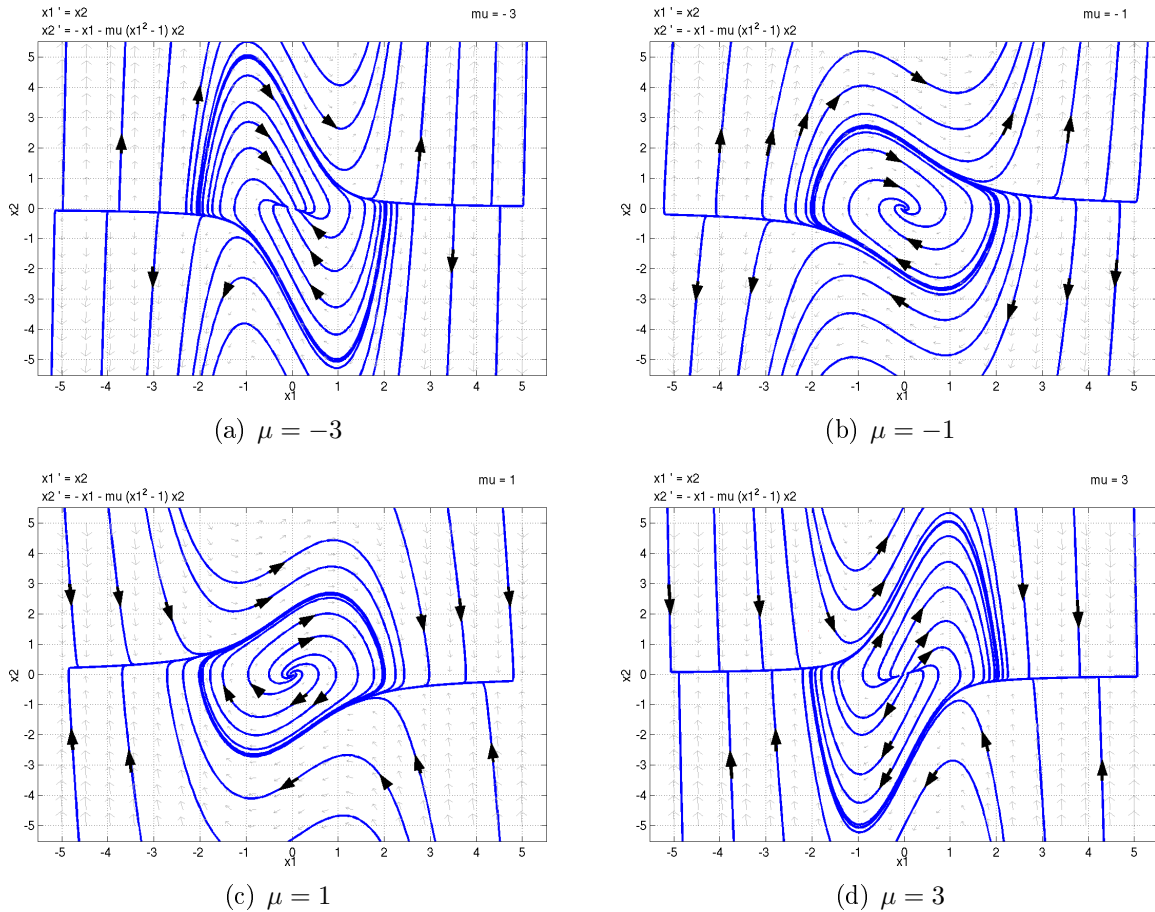


FIGURA 2.3: Diagrama de estados da equação de Van der Pol.

É interessante destacar que no caso da Eq.(2.3), o termo $\sigma(x)$, relacionado com o amortecimento, depende somente do estado x do sistema. Este termo muda de sinal quando $x = \pm 1$, alterando o sinal do amortecimento do sistema. As retas $x = \pm 1$ definem uma região aberta no plano (x, \dot{x}) .

Uma escolha mais interessante é definir uma função $\sigma(x, \dot{x})$, isto é, dependente tanto de x como da sua derivada \dot{x} . Desta forma, se consegue operar com uma região fechada no plano (x, \dot{x}) , por exemplo, um círculo ou uma elipse, mas poderia ser qualquer outra função previamente escolhida. Voltaremos a abordar este aspecto na seção 2.3, onde definimos um oscilador baseado na função $\sigma(x, \dot{x})$ representando uma elipse. \triangle

Podemos expressar os resultados anteriormente colocados de uma forma mais geral. Uma classe de osciladores em \mathbb{R}^2 pode ser representada mediante a seguinte equação matemática

$$\ddot{x} + \sigma(x, \dot{x}) + g(x) = 0 \tag{2.4}$$

onde $\sigma(x, \dot{x})$ representa o amortecimento do sistema. Para simplificar podemos definir $\sigma(x, \dot{x}) = f(x)\dot{x}$, então

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0 \tag{2.5}$$

ou em coordenadas de Liénard (Monteiro, 2002) como

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y - F(x) \\ \dot{y} &= -g(x)\end{aligned}\tag{2.6}$$

onde $F(x) = \int_0^x f(\xi)d\xi$.

Note que $\frac{dF(x)}{dt} = \frac{\partial F(x)}{\partial x} \frac{dx}{dt} = f(x)\dot{x}$. Portanto define-se $y = \dot{x} + F(x)$, $\dot{y} = \ddot{x} + \dot{x}f(x)$ e como $\dot{y} = -g(x)$ então obtém-se a Eq.(2.5). Assumindo que $g(0) = 0$, então $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 0)$ é o único ponto de equilíbrio. A estabilidade do equilíbrio é determinada a partir dos autovalores da matriz jacobiana do sistema calculada em $(0, 0)$

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} -f(0) & 1 \\ -\frac{\partial g(0)}{\partial x} & 0 \end{pmatrix}.\tag{2.7}$$

As raízes da equação $\lambda^2 + f(0)\lambda + \frac{\partial g(0)}{\partial x} = 0$ são

$$\lambda_{1,2} = \frac{-f(0) \pm \sqrt{f(0)^2 - 4\frac{\partial g(0)}{\partial x}}}{2}.$$

É fácil mostrar que $(0, 0)$ é instável se $f(0) < 0$ ou $\frac{\partial g(0)}{\partial x} < 0$. Caso contrário, o equilíbrio é estável.

Liénard provou em 1928, que no sistema da Eq.(2.5) existe um único ciclo limite assintoticamente estável se as funções $f(x)$ e $g(x)$ satisfazem as seguintes condições (Monteiro, 2002)

1. $f(x)$ e $g(x)$ são continuamente diferenciáveis em x ;
2. $g(-x) = -g(x)$, $\forall x$ ($g(x)$ é uma função ímpar);
3. $g(x) > 0$, $\forall x > 0$;
4. $f(-x) = f(x)$, $\forall x$ ($f(x)$ é uma função par);
5. $F(x) = \int_0^x f(\xi)d\xi$ deve ter uma raiz positiva para $x = a$, negativa para $0 < x < a$ e positiva para $x > a$, e $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) \rightarrow \infty$.

No caso do oscilador de Van der Pol, a Eq.(2.3) satisfaz todas as condições de Liénard, portanto, tem um único ciclo limite assintoticamente estável para $\mu > 0$.

Novamente para simplificar o nosso estudo dos osciladores, assumimos que $g(x) = \omega_0^2 x$, sendo ω_0 definida como a frequência natural do sistema. Até aqui os osciladores estudados são do tipo autônomo (não forçados). Entretanto existe uma classe muito interessante de

osciladores denominados *forçados*. Seja

$$\ddot{x} + \sigma(x, \dot{x}) + \omega_0^2 x = p(t) \quad (2.8)$$

onde $p(t)$ é o termo forçado, que pode ser definido, por exemplo, como $p(t) = \delta \cos(\omega_d t)$, onde ω_d é a frequência do termo forçado. A análise matemática da Eq.(2.8) é realmente muito complexa e transcende o objetivo deste trabalho. Entretanto alguns comentários são interessantes. Em (2.8) existem duas frequências competindo neste sistema: (i) a frequência natural ω_0 e (ii) a frequência ω_d do sistema forçado. Isto pode dar lugar ao fenômeno conhecido como *ressonância*. O fenômeno de ressonância foi responsável pelo colapso de várias pontes no mundo ao longo da história. Em 1850, uma ponte na França caiu ao passo de uma tropa de soldados. Em 1940 a ponte Tacoma, localizada no EUA se quebrou e caiu devido também a um problema de ressonância quando excitada por fortes rajadas de vento (Monteiro, 2002). Estudos sobre os osciladores forçados podem ser encontrados nas referências (Andronov et al., 1987), (Guckenheimer and Holmes, 1986), (Jordan and Smith, 1977) e (Glendinning, 1994).

2.3 Geração de oscilações autônomas

O objetivo que procura-se alcançar é a obtenção de um sistema oscilatório na forma

$$v = A \sin \omega t \quad (2.9)$$

cuja derivada é

$$\dot{v} = A\omega \cos \omega t. \quad (2.10)$$

Tendo-se um sistema onde v e \dot{v} sejam os estados, para o objetivo apresentado em (2.9), a trajetória dos estados (v, \dot{v}) no gráfico do plano de estados apresenta a forma de uma elipse, como mostrado na figura 2.4. A equação desta elipse é

$$\frac{v^2}{A^2} + \frac{\dot{v}^2}{(\omega A)^2} = 1$$

e pode ser estabelecida como o objetivo de um sistema de controle.

Neste sentido, define-se a função parametrizada da elipse

$$P(x_1, x_2) = \left(\frac{x_1}{A}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{B}\right)^2 - \mu_s^2 \quad (2.11)$$

onde $x_1 = v$ e $x_2 = \dot{v}$ representam os estados e A , B e μ_s são os parâmetros da elipse, com μ_s positivo. Tal elipse possui como semi-eixos $\mu_s A$ e $\mu_s B$. Deste modo, o parâmetro μ_s pode ser visto como fator de escala da elipse em questão. Por simplicidade, denotaremos

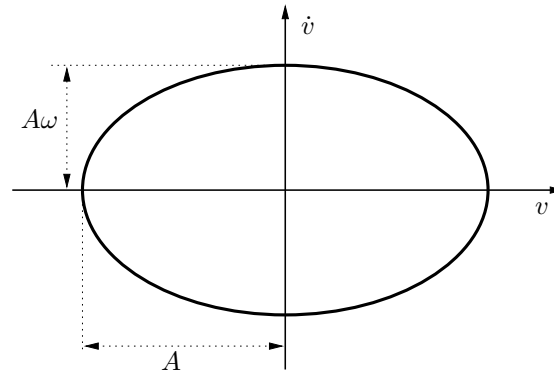


FIGURA 2.4: Elipse definida pelos estados v e \dot{v} no espaço de estados (v, \dot{v}) .

a função como $P(x)$, onde x é o vetor de estado.

Em um dado instante, se fizermos a leitura dos estados x_1 e x_2 e aplicarmos à eq. (2.11) poderemos ter os seguintes casos:

- $P(x) > 0$: a trajetória dos estados está em algum lugar “fora” da elipse;
- $P(x) = 0$: a trajetória dos estados está sobre a elipse;
- $P(x) < 0$: a trajetória dos estados está em algum lugar “dentro” da elipse.

Estes resultados podem ser usados para guiar a trajetória dos estados para a obtenção do objetivo $P(x) = 0$ que representa uma condição fundamental para obter o sistema oscilatório desejado.

Esta função pode ser manipulada para uma forma mais conveniente definindo $\sigma(x) = B^2P(x)$ resultando em

$$\sigma(x) = \omega^2 x_1^2 + x_2^2 - \mu \quad (2.12)$$

onde

$$\omega = \frac{B}{A} \quad \text{e} \quad \mu = (\mu_s B)^2.$$

Esta forma evidencia que a frequência angular ω é dada pela razão entre os semi-eixos da elipse.

As equações (2.9) e (2.10) representam as soluções da equação diferencial

$$\ddot{v} + \omega^2 v = 0$$

e, definindo $x_1 = v$ e $x_2 = \dot{v}$, pode ser escrito na forma de equações de estado

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\omega^2 x_1. \end{cases} \quad (2.13)$$

A introdução de um termo $-k\sigma(x)x_2$ no sistema (2.13), onde k é um valor positivo, permite a obtenção de um sistema que possua um ciclo limite cuja amplitude e frequência correspondem às equações (2.9) e (2.10). O lugar geométrico do ciclo-limite no espaço de estados (x_1, x_2) está representado na figura 2.4. Desta maneira, a forma normalizada de um oscilador não-linear pode ser expressa como (Aracil and Gordillo, 2002)(Gómez-Estern, 2002)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\omega^2 x_1 - k\sigma(x)x_2 \end{cases} \quad (2.14)$$

ou na forma da equação (2.4) como

$$\ddot{x} + k\sigma(x)\dot{x} + \omega^2 x = 0.$$

Aqui se podem aplicar as condições de Liénard da seção anterior para verificar a existência de um ciclo-limite estável para $\sigma(x) = 0$, tendo como soluções $x_1 = A \sin \omega t$ e $x_2 = A\omega \cos \omega t$. De fato, sempre que a trajetória encontra-se “fora” da elipse, $\sigma(x) > 0$ e o termo $-k\sigma(x)$ é negativo causando um efeito de amortecimento; por sua vez, quando a trajetória encontra-se “dentro” da elipse, $\sigma(x) < 0$ e o termo $-k\sigma(x)$ passa a ser positivo causando um efeito de amplificação. Percebe-se que a trajetória dos estados é forçada em direção à elipse e o parâmetro $k > 0$ permite ajustar a intensidade de atração da trajetória em sua direção.

Para verificar a estabilidade do ciclo-limite, define-se a seguinte função de Lyapunov

$$V(\sigma) \triangleq \frac{\sigma(x)^2}{4} \quad (2.15)$$

$$= \frac{1}{4} [(\omega^2 x_1^2 + x_2^2)^2 - 2\mu(\omega^2 x_1^2 + x_2^2) + \mu^2] \quad (2.16)$$

tal que

$$V(\sigma) > 0 \quad \forall \sigma(x) \neq 0.$$

A equação (2.15) terá seu mínimo alcançado quando $\sigma(x) = 0$. Dependendo dos valores do parâmetro μ , a função $V(\sigma)$ possui formas geométricas bastante diferentes. Existem duas situações possíveis para o sistema:

1. Para $\mu < 0$ o valor mínimo de $V(\sigma)$ ocorre em um único ponto, na origem do espaço de estados (x_1, x_2) (figura 2.5-a).
2. Para $\mu > 0$ o valor mínimo de $V(\sigma)$ ocorre sobre a curva fechada $\omega^2 x_1^2 + x_2^2 = \mu$ formando uma trajetória elíptica em torno da origem (figura 2.5-b).

O valor $\mu = 0$ corresponde a uma bifurcação de Hopf. A varredura do parâmetro de bifurcação μ evidencia tratar-se de uma bifurcação de Hopf supercrítica. Este é um caso

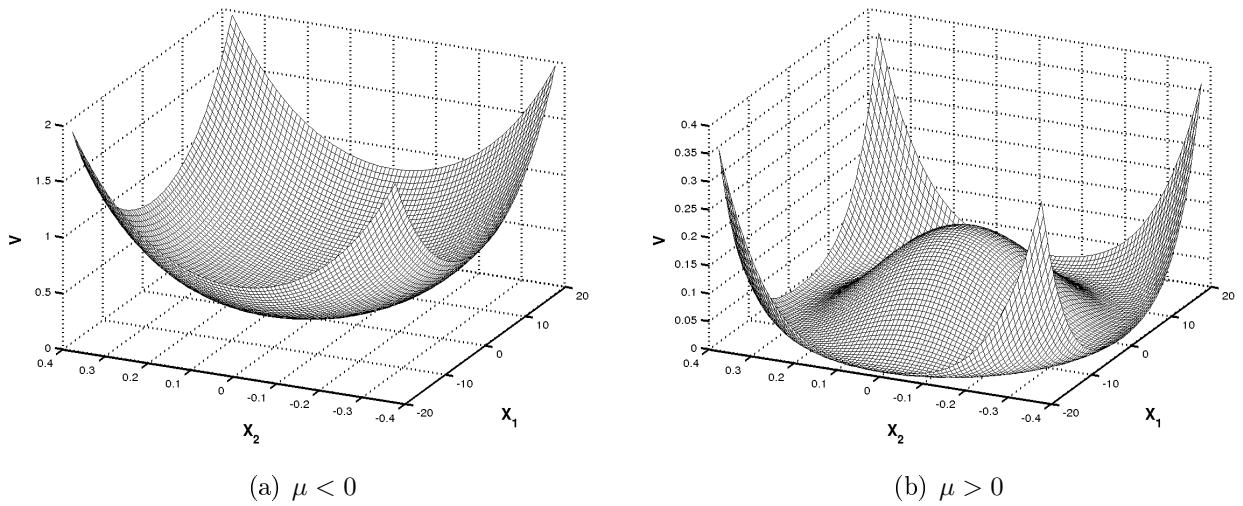


FIGURA 2.5: Gráficos de $V(\sigma)$.

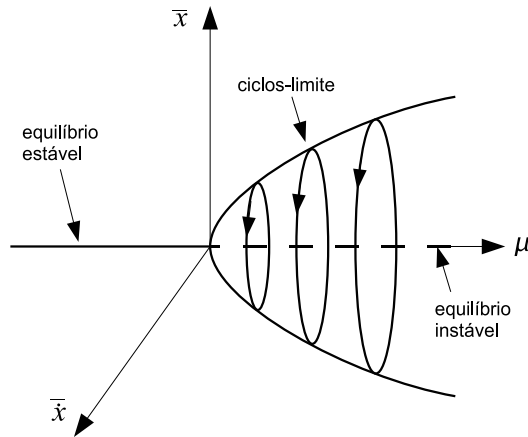


FIGURA 2.6: Bifurcação de Hopf supercrítica.

particular da bifurcação de Hopf onde o equilíbrio $(0,0)$ passa de estável ($\mu < 0$) a instável e surge um ciclo limite estável ($\mu > 0$), como mostrado na figura 2.6. A figura 2.7 mostra um exemplo dessa bifurcação considerando o sistema (2.14). O interesse de nosso estudo se dá nos casos onde o parâmetro μ torna o sistema resultante oscilatório estável, ou seja, existe um ciclo limite estável (Gómez-Estern, 2002).

A figura 2.5-b mostra a função $V(\sigma)$ quando $\mu > 0$. Da figura tem-se que o conjunto $\Gamma = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / \sigma(x) = 0\}$ descreve uma elipse cujos semi-eixos são dados por A e ωA .

A derivada da função $V(\sigma)$ é dada por

$$\dot{V}(\sigma) = -k\sigma(x)^2 x_2^2 \tag{2.17}$$

de modo que

$$\dot{V}(\sigma) \leq 0 \quad \forall \sigma(x) \neq 0; \quad k > 0.$$

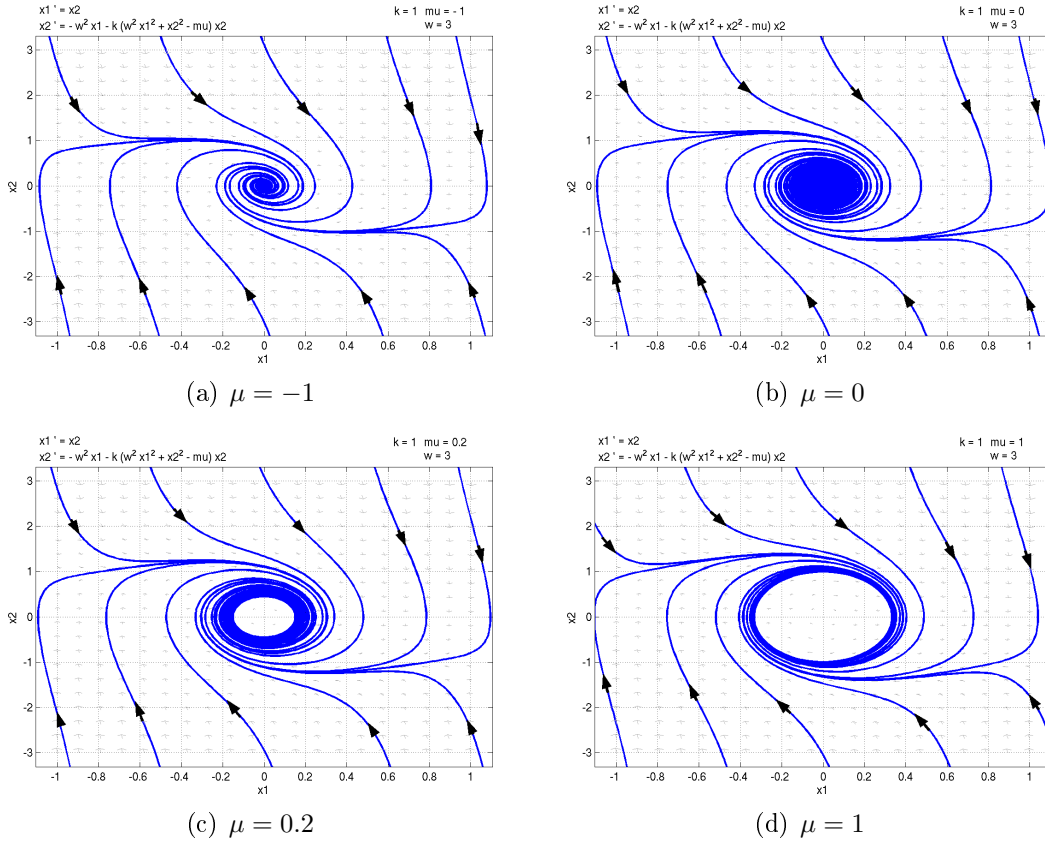


FIGURA 2.7: Evolução do parâmetro μ e o aparecimento do ciclo limite para o sistema (2.14) com $k = 1$. O valor $\mu = 0$ marca o aparecimento do ciclo limite. Para facilitar a visualização, foram traçadas apenas as trajetórias externas.

Aqui se verifica uma limitação deste sistema nos pontos onde $x_2 = 0$, pois nestes pontos temos $\dot{V}(\sigma) = 0$ enquanto $\sigma(x) \neq 0$ e $V(\sigma) \neq 0$, o que contraria o teorema de Lyapunov pois para se ter uma estabilidade assintótica deve-se ter $\dot{V}(\sigma) < 0$ para todo $\sigma(x) \neq 0$. Entretanto, uma análise mais detalhada aplicando o teorema de LaSalle e a determinação dos conjuntos invariantes (Monteiro, 2002)(Khalil, 1996) permite concluir que o ciclo-limite é assintoticamente estável. Na figura 2.8 são mostradas as funções $V(\sigma)$ e $\dot{V}(\sigma)$ para os casos em que $\mu < 0$ e $\mu > 0$. Particularmente nas figuras 2.8-b e 2.8-d ficam evidentes as regiões onde $\dot{V}(\sigma) = 0$.

Analisando o caso particular onde $x_2 = 0$, a partir das equações (2.14), temos

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = -\omega^2 x_1. \end{cases}$$

Isto nos diz que nesta região não há dinâmica em x_1 mas a dinâmica de x_2 não é nula, exceto em $x_1 = 0$. Assim, apesar de $\dot{V}(\sigma) = 0$ em $x_2 = 0$ com $x_1 \neq 0$, a dinâmica existente em x_2 conduz a trajetória “para fora” desta região.

O comportamento do sistema também varia com o valor da constante k que, a princípio, define o grau de atratividade da superfície $\sigma(x) = 0$. Uma análise deste com-

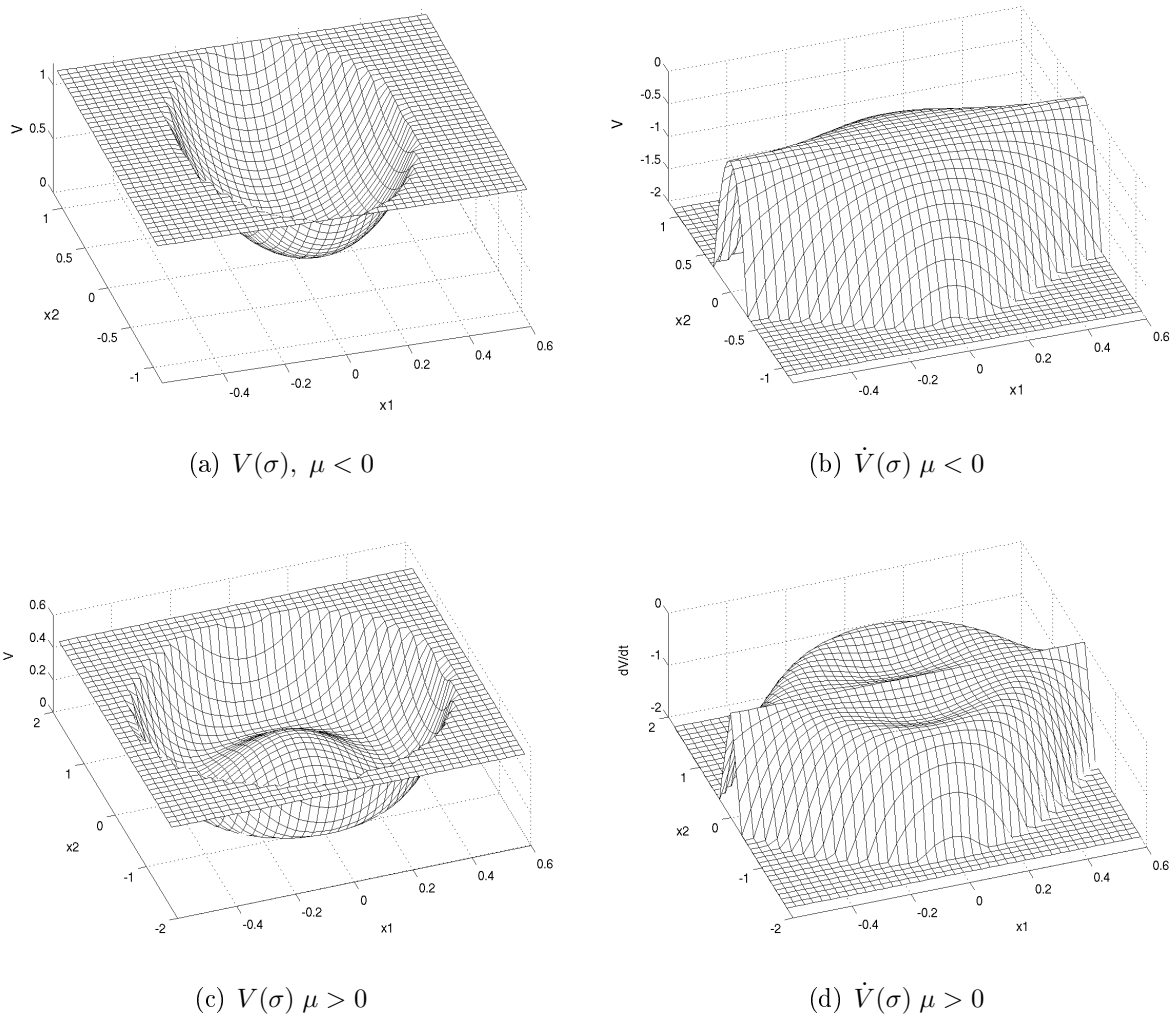


FIGURA 2.8: Gráficos da função de Lyapunov. As funções estão limitadas e, por este motivo, aparecem na figura os planos limitadores.

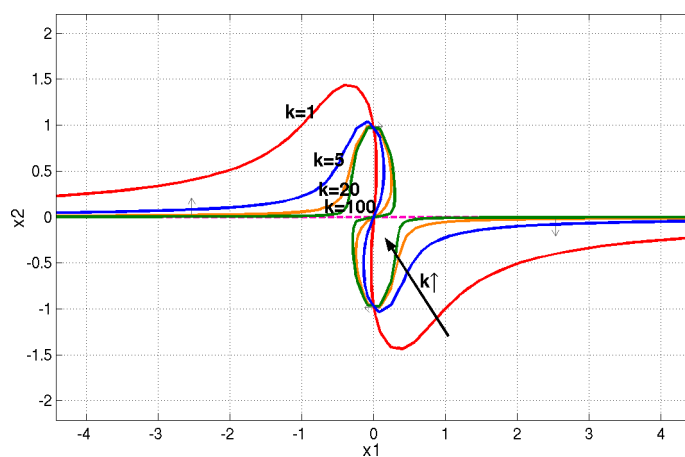


FIGURA 2.9: Curvas de dinâmica nula para vários valores de k .

portamento pode ser feita mediante o traçado das curvas de dinâmica nula. Estas curvas correspondem às equações algébricas obtidas ao igualar a zero as derivadas das eqs. (2.14),

obtendo $x_2 = 0$ e $x_2 = -\frac{\omega^2 x_1}{k\sigma(x)}$. É evidente que as intersecções destas curvas correspondem aos equilíbrios do sistema. A figura 2.9 mostra o traçado destas curvas para diferentes valores de k .

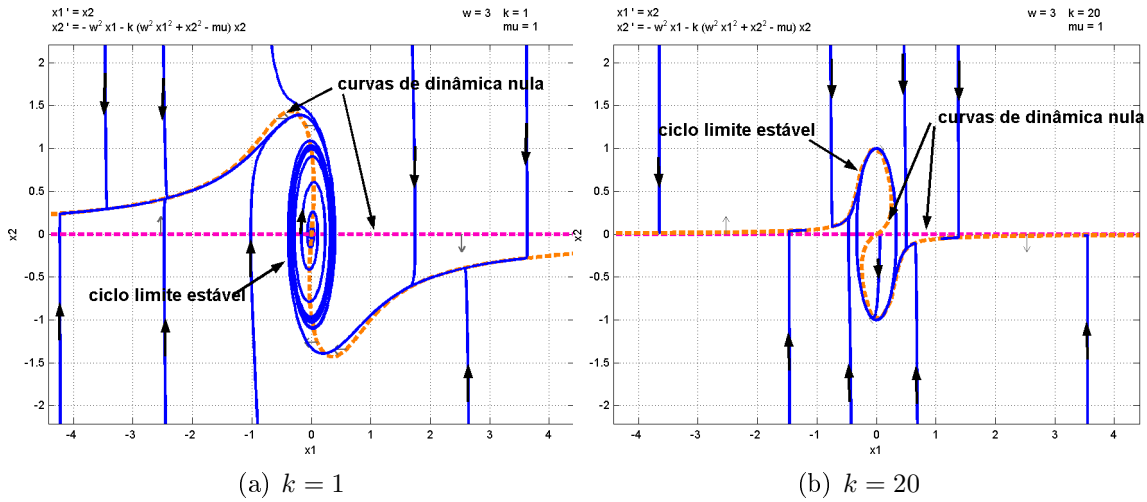


FIGURA 2.10: Curvas de dinâmica nula e comportamento das linhas de convergência.

A figura 2.10 mostra a evolução dos estados do sistema a partir de diferentes condições iniciais. Nota-se que a convergência das trajetórias externas em direção ao ciclo-limite é maior para valores pequenos de k , como se vê na figura 2.10-a. Já para valores mais elevados de k as curvas de dinâmica nula se aproximam e a convergência das trajetórias externas reduz-se muito.

A figura 2.10-a refere-se a um sistema onde $k = 1$ e mostra que as curvas de dinâmica nula se cruzam na origem e se aproximam à medida que $|x_1|$ cresce. Isto mostra que a origem é um equilíbrio do sistema e que regiões onde $x_2 = 0$ com $|x_1|$ elevado apresentam dinâmica muito reduzida.

Já a figura 2.10-b mostra o mesmo sistema com $k = 20$. De fato, a convergência das trajetórias em direção à elipse é bem mais acentuada. Em contrapartida, as curvas de dinâmica nula também se aproximam de forma muito mais acentuada. Isto significa que a dinâmica é bastante reduzida em pontos onde $x_2 = 0$ bastante próximos da elipse.

Em condições normais, o sistema oscila como esperado. Entretanto, para condições iniciais com $|x_1|$ elevado ou na ocorrência de perturbações, a trajetória pode alcançar pontos externos à elipse onde $x_2 = 0$. Dependendo do valor de k , o sistema poderá levar um tempo muito grande para o retorno ao regime oscilatório.

Este comportamento também foi verificado nos experimentos de laboratório.

2.4 Geração de oscilações autônomas por modos deslizantes

Um método alternativo para a obtenção de um sistema oscilatório consiste em adicionar-se um termo $-k \operatorname{sgn}(\sigma(x))x_2$ ao sistema (2.13), o que também permite a obtenção de um sistema que possui um ciclo limite. Desta maneira, a forma normalizada do oscilador não-linear pode ser expressa como

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\omega^2 x_1 - k \operatorname{sgn}(\sigma(x))x_2. \end{cases} \quad (2.18)$$

De maneira similar ao sistema (2.14), o sistema (2.18) conduz a trajetória dos estados em direção à elipse. Quando a trajetória dos estados encontra-se “fora” da elipse, $\sigma(x) > 0$, o termo $-k \operatorname{sgn}(\sigma(x))$ é negativo e ocorre um efeito de amortecimento. Quando a trajetória dos estados encontra-se “dentro” da elipse, $\sigma(x) < 0$, o termo $-k \operatorname{sgn}(\sigma(x))$ passa a ser positivo e ocorre um efeito de amplificação. Entretanto, a função $\operatorname{sgn}(\sigma(x))$ é descontínua em $\sigma(x) = 0$ e pode assumir apenas dois valores $\{-1, 1\}$. Em regime permanente, a trajetória de estados encontra-se literalmente sobre a superfície e $\operatorname{sgn}(\sigma(x)) = 0$ como resultado da comutação do sinal de $\sigma(x)$ a uma frequência idealmente infinita. Em sistemas físicos reais, dado que a frequência de comutação de $\operatorname{sgn}(\sigma(x))$ é limitada, o que se verifica é que $\sigma(x)$ oscila em torno de zero trocando de sinal continuamente configurando um modo deslizante.

Para verificar a estabilidade do ciclo-limite, define-se a função de Lyapunov V como sendo

$$V(\sigma) \triangleq \frac{|\sigma(x)|}{2} = \frac{\sigma(x) \cdot \operatorname{sgn}(\sigma(x))}{2} \quad (2.19)$$

de onde se pode concluir que

$$V(\sigma) > 0 \quad \forall \sigma(x) \neq 0.$$

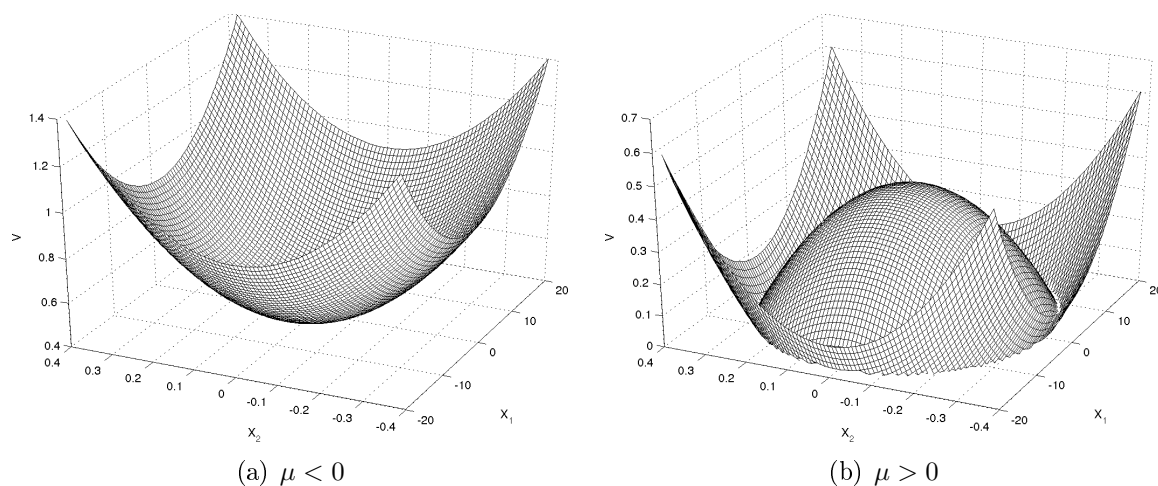
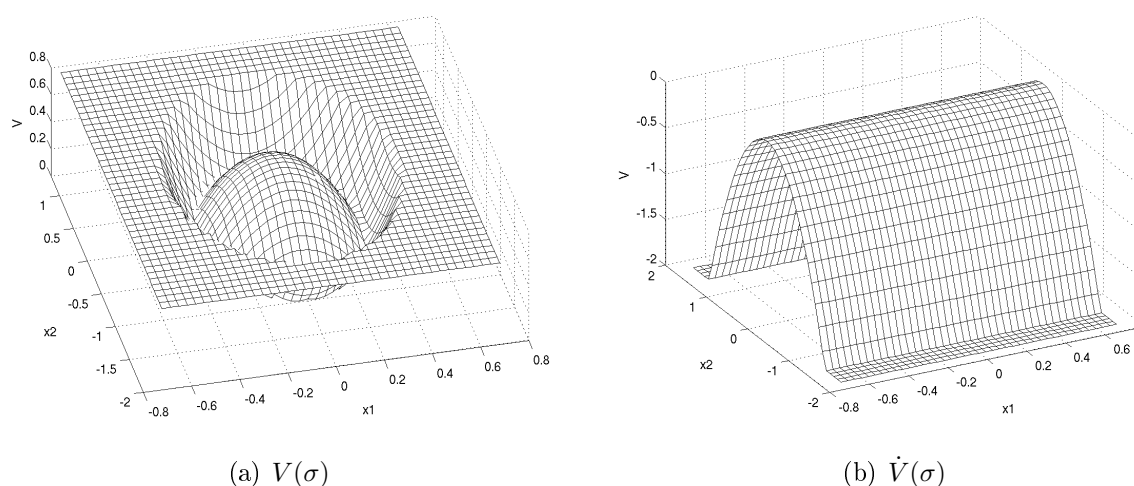
De forma análoga ao sistema obtido de (2.15), há duas situações possíveis para o sistema, uma para $\mu < 0$ como mostrado na figura 2.11-a e outra para $\mu > 0$ como mostrado na figura 2.11-b, com a ocorrência de uma bifurcação de Hopf em $\mu = 0$. Neste segundo caso, o valor mínimo de $V(\sigma)$ ocorre sobre a curva fechada $\omega^2 x_1^2 + x_2^2 = \mu$ que é o ciclo-limite do sistema.

A derivada de $V(\sigma)$ resulta

$$\dot{V}(\sigma) = -kx_2^2 \quad (2.20)$$

de modo que

$$\dot{V}(\sigma) \leq 0 \quad \forall \sigma(x) \neq 0.$$


FIGURA 2.11: Gráficos de $V(\sigma)$.

FIGURA 2.12: Gráficos da função de Lyapunov. Ambas as funções estão limitadas e, por este motivo, aparecem na figura os planos limitadores.

De maneira similar ao que se obteve com o oscilador visto na seção anterior, aqui também se nota uma limitação do sistema nos pontos onde $x_2 = 0$, pois nestes pontos temos $\dot{V}(\sigma) = 0$ enquanto $\sigma(x) \neq 0$ e $V(\sigma) \neq 0$, o que contraria o teorema de Lyapunov pois para se ter estabilidade assintótica seria necessário ter $\dot{V}(\sigma) < 0$ para todo $\sigma(x) \neq 0$.

A análise das curvas de dinâmica nula também auxilia na compreensão do comportamento do sistema. A figura 2.13 mostra os traçados das curvas de dinâmica nula para diferentes valores de k . De forma similar às curvas de dinâmica nula do oscilador da seção anterior, pode-se notar que à medida que cresce o valor de k as curvas se aproximam, entretanto, o comportamento das trajetórias externas é bastante diferente. Aqui se observa a natureza da atratividade constante ao longo da trajetória do ciclo-limite expressa também na orientação linear da curva de dinâmica nula $\dot{x}_2 = 0$. Na figura 2.14-a se nota que o ângulo percorrido por diferentes trajetórias desde uma curva de dinâmica nula até

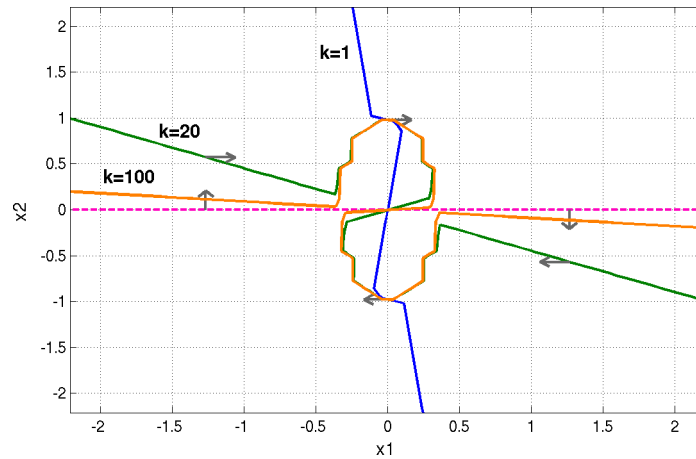


FIGURA 2.13: Curvas de dinâmica nula para vários valores de k .

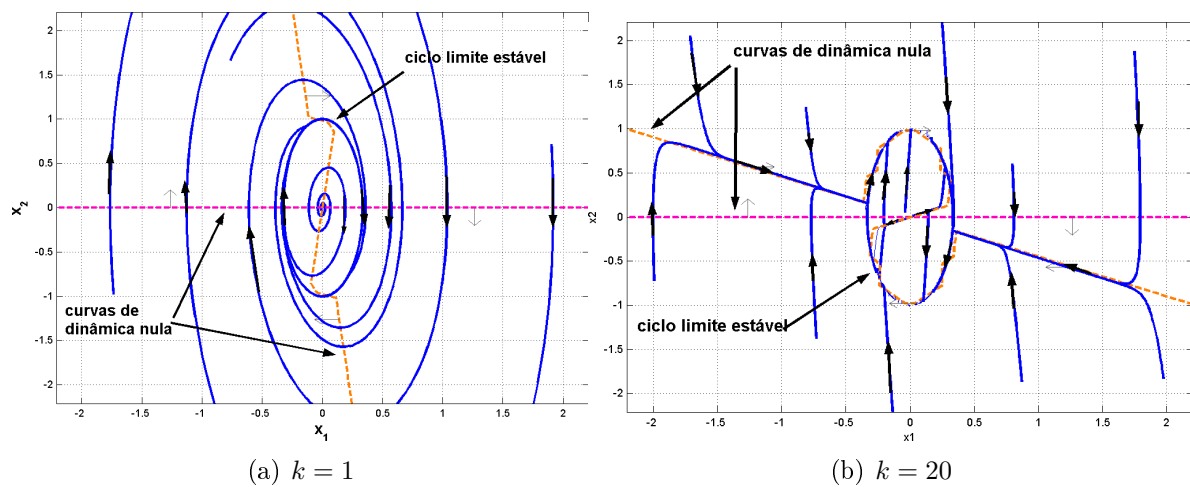


FIGURA 2.14: Curvas de dinâmica nula e comportamento das linhas de convergência.

a outra é o mesmo e, portanto, consomem o mesmo tempo.

Mas o detalhe mais importante é que as duas curvas não se aproximam à medida que $|x_1|$ cresce. Ao contrário, se afastam. Isto garante que qualquer trajetória externa alcance o ciclo-limite.

2.5 Grau de atratividade das trajetórias

Os osciladores contínuo e por modo deslizante são capazes de gerar a oscilação de saída desejada. Entretanto, foi verificado um problema de seguimento da trajetória da elipse $\sigma(x) = 0$ nas proximidades de $x_2 = 0$. Nesta seção apresenta-se este problema de convergência à elipse e se propõe uma solução, que será descrita a seguir.

Lembrando que as equações do oscilador são dadas por

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\omega^2 x_1 - k \sigma(x) x_2, \end{cases} \quad (2.21)$$

observa-se que no regime de oscilação ocorre o seguimento ideal de $\sigma(x) = 0$ em toda a trajetória. A atratividade desta curva $\sigma(x) = 0$, neste caso particular, é proporcional ao ganho de $\sigma(x)$. Na equação (2.21) esse ganho é dado por kx_2 . Como k é constante, a curva tende a apresentar baixa atratividade para valores pequenos de x_2 . Uma proposta para contornar este problema consiste em definir k como função de x_2 tal que

$$k(x_2) = \frac{\rho}{|x_2|},$$

resultando que

$$-k(x_2)x_2\sigma(x) = -\rho \frac{x_2}{|x_2|}\sigma(x) = -\rho \operatorname{sgn}(x_2)\sigma(x).$$

Pode-se agora observar que ρ passa a ser a constante de ganho e que a atratividade não depende mais do valor de x_2 , apenas de seu sinal. Em outras palavras, a atratividade se torna constante ao longo da trajetória $\sigma(x) = 0$.

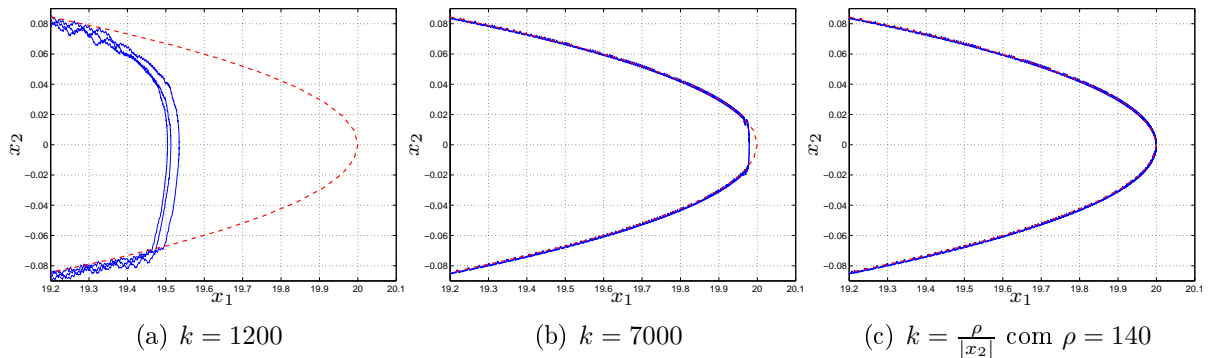


FIGURA 2.15: Detalhe do diagrama de estados (x_1, x_2) na proximidade de $x_2 = 0$.

A figura 2.15 mostra o detalhe do diagrama de estados nas proximidades de $x_2 = 0$ de um sistema em regime de oscilação para três casos particulares. Na figura 2.15-a utiliza-se $k = 1200$. Observa-se que, para este caso, na região da elipse com baixos valores para x_2 , o termo $k \sigma(x) x_2$ não é capaz de impor a trajetória desejada aos estados. Na figura 2.15-b utiliza-se $k = 7000$, o que ajuda a melhorar o seguimento da trajetória, entretanto, para pontos da trajetória onde x_2 é grande, o termo de amortecimento assume valores elevados. Finalmente, na figura 2.15-c utiliza-se a estratégia proposta, com $\rho = 140$. Observa-se que o seguimento da trajetória supera os dois casos anteriores pois, neste caso, a atratividade deixa de depender do valor de x_2 .

2.6 Análise dos diferentes tipos de osciladores propostos

Nas seções anteriores foram apresentadas quatro estruturas diferentes de osciladores, dadas por

$$\begin{aligned} \text{oscilador 1:} & \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\omega^2 x_1 - k \sigma(x) x_2, \end{cases} \\ \text{oscilador 2:} & \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\omega^2 x_1 - k \operatorname{sgn}(\sigma(x)) x_2, \end{cases} \\ \text{oscilador 3:} & \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\omega^2 x_1 - \rho \sigma(x) \operatorname{sgn}(x_2), \end{cases} \\ \text{oscilador 4:} & \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\omega^2 x_1 - \rho \operatorname{sgn}(\sigma(x)) \operatorname{sgn}(x_2). \end{cases} \end{aligned}$$

Os osciladores 2 e 4 operam em modos deslizantes enquanto os dois últimos tiveram a constante k substituída por $k = \frac{\rho}{|x_2|}$. Esta combinação resulta em osciladores com comportamentos distintos.

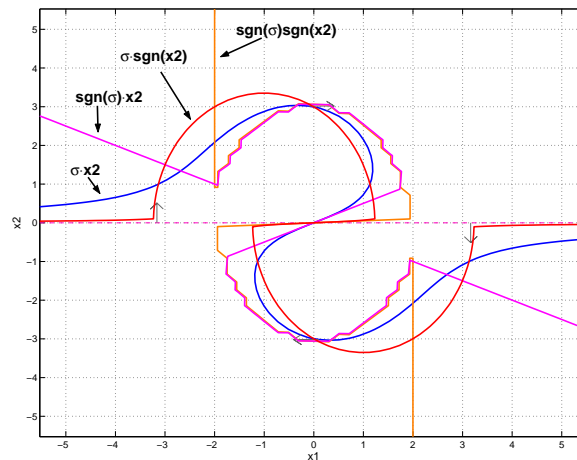


FIGURA 2.16: Curvas de dinâmica nula para diferentes estratégias de controle.

Na figura 2.16 se observa os diferentes traçados das curvas de dinâmica nula para cada um dos casos, usando k (ou ρ) = 4, 5 para todos os osciladores. Observando a figura, pode-se notar que os osciladores de modo deslizante possuem a vantagem de permitir a convergência de qualquer trajetória ao ciclo-limite num tempo muito menor que no caso contínuo.

Na figura 2.17 são apresentadas as curvas de dinâmica nula de cada oscilador considerando alguns valores de k (ou ρ). Em todos os casos, fica evidente que quando se adotam valores elevados para k (ou ρ) aparece o problema da dinâmica reduzida nas proximidades

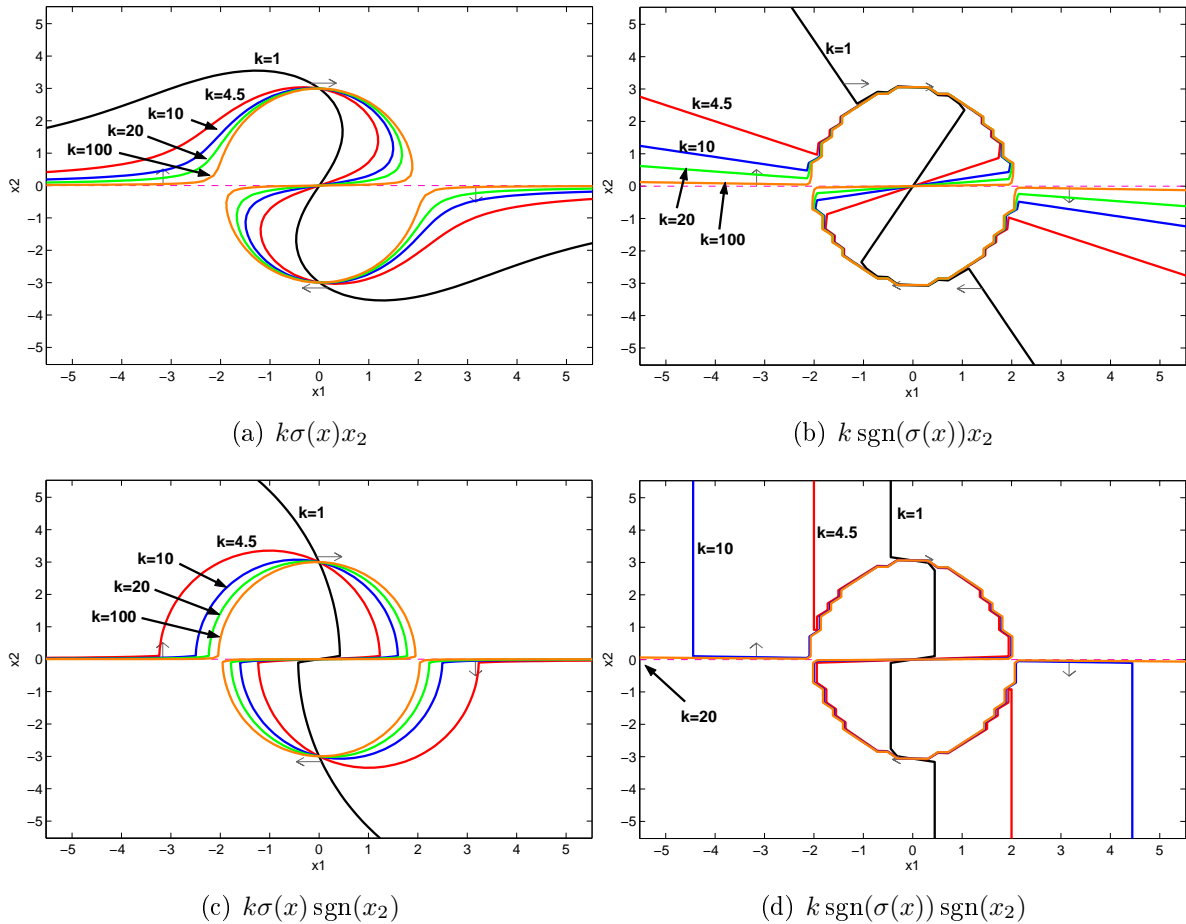


FIGURA 2.17: Traçado das curvas de dinâmica nula para os casos do (a) oscilador 1, (b) oscilador 2, (c) oscilador 3, (d) oscilador 4.

de $x_2 = 0$.

Nas figuras 2.18 e 2.19 encontramos as formas de onda dos estados x_1 e x_2 e também a forma de onda de \dot{x}_2 , que corresponde a $-\omega^2 x_1 - k\sigma(x)x_2$, considerando primeiramente uma condição inicial localizada no interior da elipse e depois considerando uma outra condição inicial localizada externamente à elipse, ambas nas proximidades de $x_2 = 0$. Nestas simulações foi usado k (ou ρ) = 4, 5.

Na figura 2.20 são apresentados os respectivos diagramas de estados dos quadro osciladores, na mesma ordem das dos gráficos das figuras 2.18 e 2.19.

No caso da primeira condição inicial, todos os osciladores foram capazes de conduzir a trajetória dos estados ao ciclo-limite e nele permanecer. No caso da segunda condição inicial, à exceção do terceiro oscilador, os outros três conseguiram levar a trajetória de estados até o ciclo-limite e nele permanecer. O oscilador 1 levou um tempo maior que os osciladores 2 e 4 para alcançar o ciclo-limite.

Esta análise nos mostra que os osciladores que operam por modos deslizantes apresentam resposta mais rápida em relação aos outros osciladores, entretanto apresentam um sinal de controle bastante descontínuo, o que pode significar uma fonte de ruído no sis-

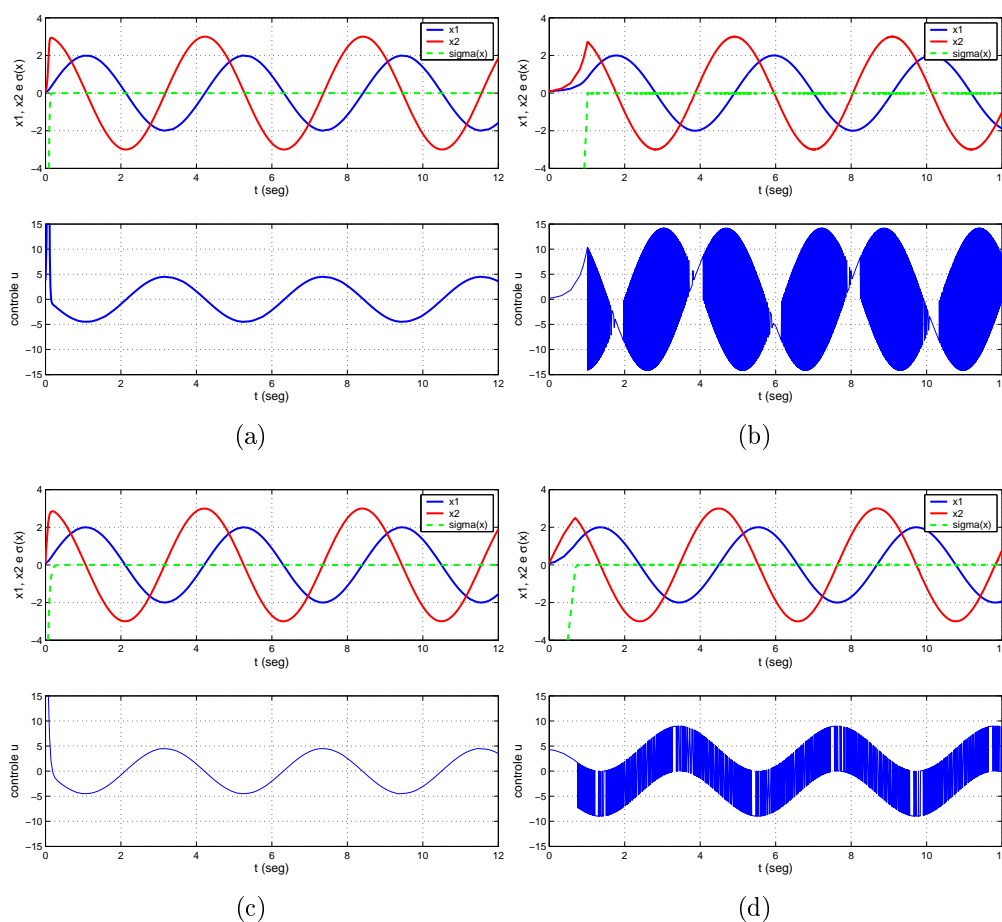


FIGURA 2.18: Formas de onda dos estados (x_1, x_2) dos osciladores considerando a condição inicial $(0, 1; 0, 1)$.

tema. Também apresentam recuperação mais rápida em relação a perturbações bem como menor susceptibilidade a variações paramétricas do sistema, o que os tornam mais robustos que os outros osciladores. Estas conclusões foram tiradas após um grande número de simulações e experimentos não mostrados neste trabalho.

2.7 Método de projeto para controle de oscilações

Nesta seção são apresentados dois métodos de projeto para controle de oscilações em sistemas dinâmicos.

2.7.1 Método por realimentação de estado

A idéia deste método é transformar uma classe de sistemas dinâmicos em outro, dado pela equação (2.14) ou (2.18) através da ação de controle para que o sistema dinâmico controlado assuma um comportamento oscilatório estável.

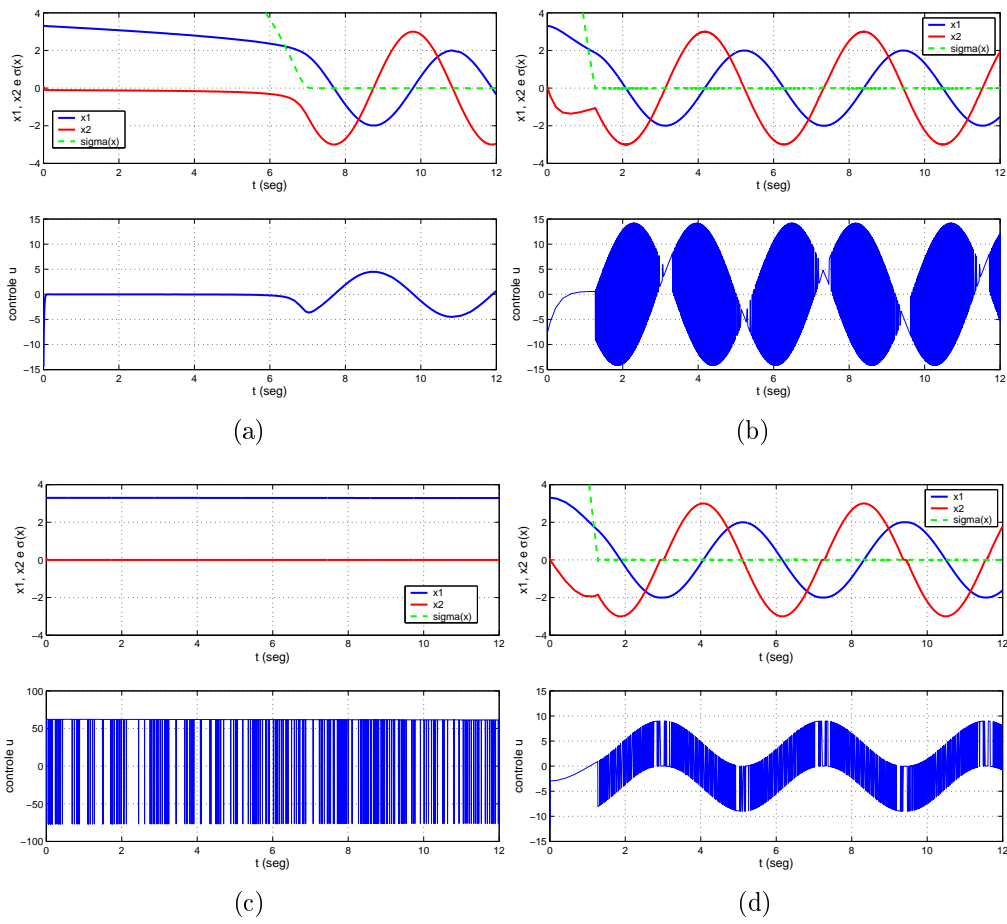


FIGURA 2.19: Formas de onda dos estados (x_1, x_2) dos osciladores considerando a condição inicial $(3, 3; 0, 1)$.

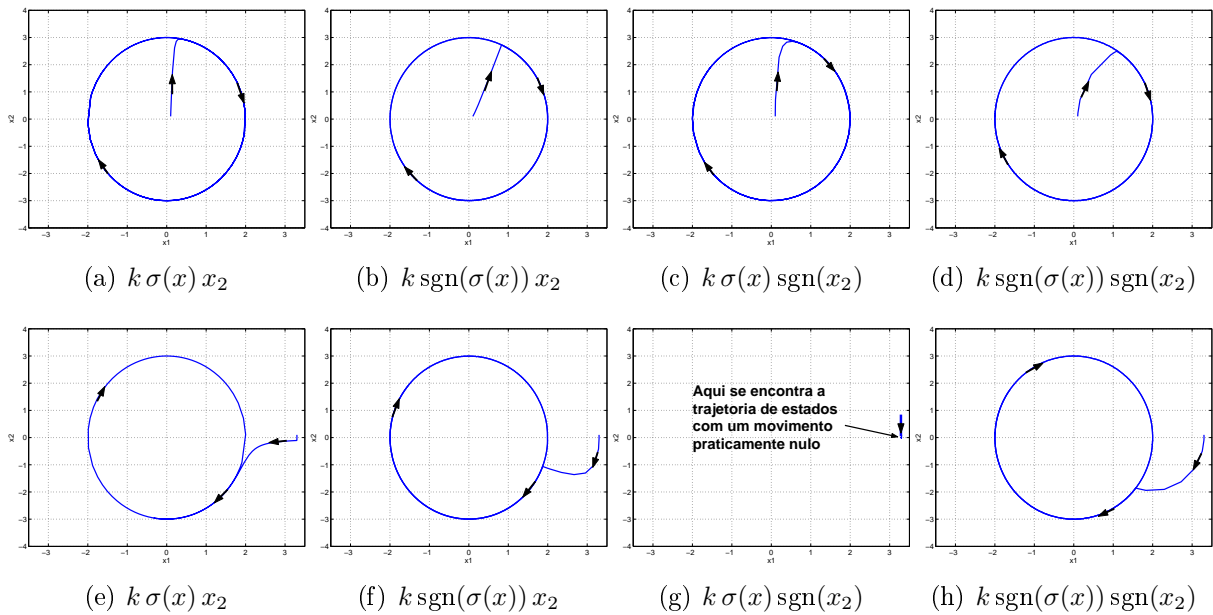


FIGURA 2.20: Diagrama de estados para condição inicial $x_1 = 0, 1$ (a)(b)(c)(d) e para uma condição inicial $x_1 = 3, 3$ (e)(f)(g)(h).

Para um sistema de segunda ordem

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = f(x_1, x_2) + g(x_1, x_2)u. \end{cases} \quad (2.22)$$

onde $g^{-1}(x_1, x_2)$ existe sobre um domínio de interesse D , isto é, $g(x_1, x_2) \neq 0, \forall (x_1, x_2) \in D$, os resultados das seções anteriores permitem tratar o projeto de uma lei de controle para que a saída do sistema seja oscilatória. O sistema (2.22) pode ser transformado através da ação de controle de modo a se obter o comportamento em malha fechada dado pelo oscilador não-linear (2.14) ou oscilador não-linear por modos deslizantes (2.18). Por simplicidade, $f(x_1, x_2)$ e $g(x_1, x_2)$ serão denominadas apenas como $f(x)$ e $g(x)$, onde x representa o vetor de estados.

No caso do oscilador não-linear, utilizando a lei de controle por realimentação de estados dada por

$$u = g^{-1}(x) [v(x) - f(x)] \quad (2.23)$$

onde

$$v(x) = -\omega^2 x_1 - k\sigma(x)x_2 \quad (2.24)$$

com $\sigma(x)$ sendo uma função dos estados dada por

$$\sigma(x) = \omega^2 x_1^2 + x_2^2 - \mu, \quad (2.25)$$

onde ω é a frequência de oscilação desejada e μ_s é um parâmetro associado à escala das amplitudes de oscilação de x_1 e x_2 , podemos transformar a equação (2.22) na equação (2.14). De uma maneira direta, estabelecendo-se como objetivo a função $x_1(t) = A \sin \omega t$ obtém-se que $x_2(t) = A\omega \cos \omega t$ e $\mu = (A\omega\mu_s)^2$ onde μ_s é diretamente o fator de escala, normalmente escolhido como positivo e unitário.

Em geral $f(x)$ e $g(x)$ possuem termos relacionados aos parâmetros do modelo, como por exemplo no caso de conversores de eletrônica de potência, L , C e R . Para este exemplo, a dependência da carga é o fator mais crítico, pois condiciona a lei de controle ao seu prévio conhecimento. Entretanto, o ajuste do ganho k pode garantir a robustez do sistema compensando a variação da carga em torno de uma faixa de valores aceitáveis como condição de projeto. O mesmo se aplica ao uso de cargas não-lineares.

No caso do oscilador não-linear por modos deslizantes, utilizando-se a lei de controle

$$u = g^{-1}(x) [v(x) - f(x)] \quad (2.26)$$

onde

$$v(x) = -\omega^2 x_1 - k \operatorname{sgn}(\sigma(x))x_2 \quad (2.27)$$

com $\sigma(x)$ sendo o mesmo da equação (2.25), onde os parâmetros ω e μ_s tem o mesmo significado descrito anteriormente, podemos transformar a equação (2.22) na equação (2.18).

Entre as leis de controle definidas em (2.24) e (2.27), a segunda é mais robusta e permite uma compensação mais eficiente da variação dos parâmetros do modelo. Por este motivo, foi a técnica utilizada para o projeto que será apresentado na seção 3.5 e no capítulo 4. Entretanto, apesar da robustez, possui a desvantagem de gerar muitas descontinuidades na lei de controle causando ruídos no sistema.

O método apresentado nesta seção pode estender-se a sistemas de dimensão maior que 2 aplicando-se a técnica de *Backstepping* (Aracil et al., 2002b, 2004).

2.7.2 Método baseado no gradiente de velocidade

Uma forma alternativa de projeto aplicado a sistemas não-lineares é o método do gradiente de velocidade, proposto por Fradkov and Pogromsky (1998). Este é um método que consiste em encontrar a função de controle que estabiliza o sistema através da análise da função de Lyapunov.

Dado o seguinte sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = f(x_1, x_2) + g(x_1, x_2)u. \end{cases} \quad (2.28)$$

define-se a seguinte função como objetivo de controle (Fradkov and Pogromsky, 1998)

$$\sigma = \omega^2 x_1^2 + x_2^2 - \mu.$$

Para este objetivo, propõe-se a seguinte função de Lyapunov

$$V = \frac{1}{4}\sigma^2 \geq 0$$

sendo

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{1}{2}\sigma\dot{\sigma} \\ &= \frac{1}{2}\sigma(2\omega^2 x_1 \dot{x}_1 + 2x_2 \dot{x}_2) \\ &= \sigma[\omega^2 x_1 x_2 + x_2(f(x_1, x_2) + g(x_1, x_2)u)]. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Para que $\dot{V} < 0$ a ação de controle deve ser

$$u = \frac{1}{g(x_1, x_2)} [-f(x_1, x_2) - \omega^2 x_1 - k\sigma x_2]. \quad (2.30)$$

onde $k > 0$. De (2.30) em (2.29) temos que $\dot{V} = -k\sigma^2 x_2^2$. Note que, em (2.30), a ação de controle está definida para $g(x_1, x_2) \neq 0$.

Observe que através deste método obtém-se uma expressão para \dot{V} igual à da equação (2.17) resultando em um sistema igual ao sistema (2.14).

De maneira similar, para o caso do oscilador não-linear por modos deslizantes, propõe-se a seguinte função de Lyapunov

$$V = \frac{1}{2} |\sigma| = \frac{1}{2} \sigma \operatorname{sgn}(\sigma) \geq 0$$

sendo

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{1}{2} \dot{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma) \\ &= [\omega^2 x_1 x_2 + x_2 (f(x_1, x_2) + g(x_1, x_2)u)] \operatorname{sgn}(\sigma). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Para que $\dot{V} < 0$ a ação de controle deve ser

$$u = \frac{1}{g(x_1, x_2)} [-f(x_1, x_2) - \omega^2 x_1 - k \operatorname{sgn}(\sigma)x_2]. \quad (2.32)$$

onde $k > 0$. De (2.32) em (2.29) temos que $\dot{V} = -kx_2^2$.

Através deste método obtém-se uma expressão para \dot{V} igual à da equação (2.20) resultando em um sistema igual ao sistema (2.18).

2.8 Conclusão do capítulo

No presente capítulo foram abordados conceitos sobre a geração de oscilações em sistemas dinâmicos não-lineares, mostrados através dos exemplos do pêndulo simples e do oscilador de Van der Pol. Foram apresentados aspectos gerais de osciladores não-lineares em \mathbb{R}^2 , onde o termo ligado ao amortecimento do sistema assume um papel importante. Associada a este termo, foi definida uma função que delimita uma trajetória elíptica fechada no espaço de estados. A análise de estabilidade do sistema dinâmico proposto como oscilador foi realizada através do método de Lyapunov e da análise das curvas de dinâmica nula, as quais nos revelam alguns detalhes adicionais sobre o comportamento do sistema. Também foi apresentada a proposta de um oscilador por modos deslizantes que apresentou maior robustez em relação ao oscilador contínuo. Foi apresentado também um método de projeto para controle de oscilações em sistemas dinâmicos que consiste na determinação de uma lei de controle que transforma o sistema dado em um oscilador não-linear. No capítulo seguinte são aplicadas estas técnicas na obtenção de oscilações para os casos dos clássicos conversores monofásicos buck e boost, geralmente utilizados como conversores CC-CC. A idéia é utilizá-los como conversores CC-CA, como será visto no capítulo 3.

Capítulo 3

Aplicações em eletrônica de potência

3.1 Introdução

Neste capítulo são aplicadas as técnicas apresentadas nos capítulos anteriores à geração de oscilações em circuitos de eletrônica de potência. Para tal, quatro conversores foram escolhidos: buck, boost, duplo boost e inversor.

No capítulo anterior se mostrou que o oscilador de modo deslizante é mais indicado nos casos em que se deseja maior robustez. Entretanto, em muitos casos das aplicações de eletrônica de potência é preferível utilizar o oscilador contínuo, por ter um controle suave e que não apresenta variações bruscas. Estas variações bruscas provocam efeitos indesejados (ruído audível no indutor, geração de harmônicos etc).

No caso particular do conversor boost, estuda-se também a dinâmica interna responsável pelo comportamento do conversor. Esta dinâmica interna gera importantes informações sobre o seu funcionamento que são utilizadas na síntese da lei de controle.

Resultados de simulações, realizadas em ambiente *Simulink*, permitem comparar a eficiência do método proposto.

Tanto o conversor buck como o conversor boost são utilizados comumente em conversões CC-CC. Entretanto, o objetivo aqui é utilizá-los em conversores CC-CA somado a um nível contínuo. O inversor monofásico representa uma variação do conversor buck possuindo a ligação da fonte em ponte completa e, com isso, não há nível contínuo somado ao sinal CA de saída. Da mesma forma, o conversor duplo boost também permite obter uma tensão senoidal de saída sobre a carga sem nível contínuo somado a esta tensão.

Nas figuras 3.1 e 3.10 é mostrado o circuito básico do conversor buck ideal utilizando carga resistiva. Para simplificar a análise, considera-se o caso idealizado onde são desprezadas as resistências associadas aos elementos que armazenam energia assim como as resistências associadas aos semicondutores.

No caso particular do conversor buck, há duas escolhas possíveis para as variáveis de estado. A primeira define as variáveis de estado sobre os dois elementos armazenadores

de energia, a saber, a corrente no indutor i_L e a tensão sobre o capacitor v_c (figura 3.10). A segunda define as variáveis de estado somente no elemento de saída, ou seja, a tensão v_c e a corrente i_c sobre o capacitor (figura 3.1).

Antes de prosseguir com a análise de ambos os casos, cabe ressaltar que esta segunda forma de definição das variáveis de estado do sistema apresenta vantagens importantes em relação à primeira forma. A principal vantagem relaciona-se com a invariabilidade do objetivo de controle em relação a variações de carga. Em outras palavras, isto significa dizer que o controle não é afetado pela variação da carga.

Uma segunda vantagem desta segunda forma é que o sistema com as variáveis de estado assim definidas apresenta-se na forma canônica $\dot{x}_1 = kx_2$. Sistemas assim definidos não necessitam sofrer troca de variáveis e podem diretamente tirar proveito da técnica de controle proposta neste trabalho.

3.2 Controle do Conversor Buck usando i_c e v_c como estados

Na figura 3.1 aparece o diagrama esquemático do conversor buck em malha fechada. O sistema de controle utiliza as medições de tensão e de corrente no capacitor, usadas como as variáveis de estado do sistema.

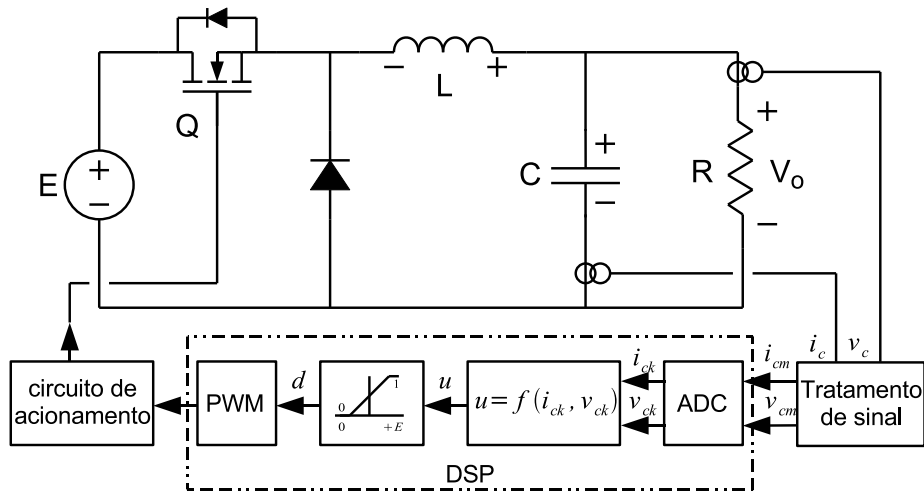


FIGURA 3.1: Conversor buck utilizando i_c e v_c como variáveis de estado.

Definindo a tensão v_c e a corrente i_c sobre o capacitor de saída como as variáveis de estado x_1 e x_2 , respectivamente, obtemos o seguinte modelo para o conversor (vide apêndice B):

$$\begin{cases} C\dot{x}_1 = x_2 \\ L\dot{x}_2 = -x_1 - \frac{L}{RC}x_2 + uE \end{cases} \quad (3.1)$$

onde R é a carga e u é a ação de controle.

A variável de estado x_1 possui restrição tal que $0 \leq x_1 < E$. A variável de estado x_2 é dependente da derivada de x_1 e sua restrição depende das taxas de variação máximas de x_1 .

O conversor opera em modo de condução contínua (MCC) se o estado equivalente à tensão x_1 não se anular durante o ciclo de operação do conversor. Caso se torne nulo durante o ciclo de operação, o conversor passa a operar em modo de condução descontínua (MCD). A análise subsequente é feita considerando o conversor operando em MCC.

No modelo instantâneo, a ação de controle é discreta descrita por $u = q \in \{0, 1\}$. No modelo por valores médios, a ação de controle é contínua tomada como a média da ação de controle discreta durante um período de comutação. Na modulação PWM ela é referida como razão cíclica, dada por $u = d = \frac{t_{on}}{T}$ tal que $0 \leq d \leq 1$ (figura 3.2).

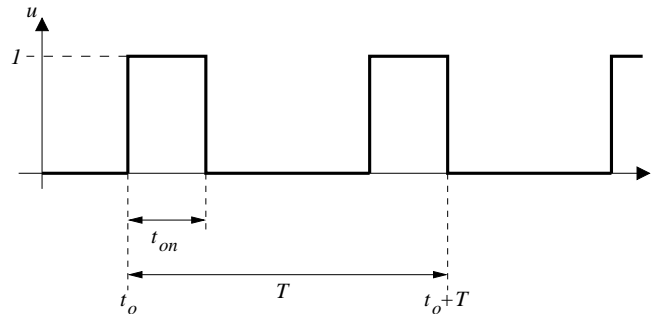


FIGURA 3.2: Sinal PWM e a razão cíclica.

3.2.1 Análise dos equilíbrios

Os equilíbrios do sistema (3.1) são obtidos impondo $\dot{x}_1 = 0$ e $\dot{x}_2 = 0$ no modelo de valores médios onde a entrada de controle é considerada contínua. O conjunto dos equilíbrios é

$$\Gamma = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \bar{x}_2 = 0, \bar{x}_1 = uE \right\} \quad (3.2)$$

que corresponde a uma variedade unidimensional no espaço de estados (figura 3.3).

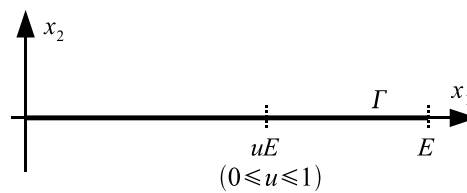


FIGURA 3.3: Curva de equilíbrios para o conversor buck.

Considerando $d = D$, onde D é um valor constante, o equilíbrio está sobre a variedade Γ de forma que

$$\bar{X}_1 = DE ; \quad \bar{X}_2 = 0. \quad (3.3)$$

3.2.2 Modelo normalizado

Fazendo a seguinte mudança de variáveis

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 \\ y_2 &= \frac{1}{C}x_2 \end{aligned} \quad (3.4)$$

ao sistema (3.1), chega-se a

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = -\frac{1}{LC}y_1 - \frac{1}{RC}y_2 + \frac{E}{LC}u. \end{cases} \quad (3.5)$$

Agora queremos que o sistema oscile em torno do ponto $(B, 0)$, onde $0 \leq B < E$, com amplitude A e frequência ω . Fazemos mais uma troca de variáveis:

$$\begin{aligned} z_1 &= y_1 - B \\ z_2 &= y_2 \end{aligned} \quad (3.6)$$

obtendo

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = -\frac{1}{LC}z_1 - \frac{1}{RC}z_2 + \frac{E}{LC}u - \frac{B}{LC}. \end{cases} \quad (3.7)$$

Tanto o sistema (3.5) quanto o sistema (3.7) encontram-se na forma canônica de controle, permitindo a aplicação da técnica proposta.

3.2.3 Equivalência com a forma canônica de um oscilador não-linear plano

Recordando de (2.14) que a forma canônica de um oscilador não-linear plano é

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = -\omega^2 z_1 - kz_2\sigma(z_1, z_2) \end{cases} \quad (3.8)$$

com

$$\sigma(z_1, z_2) = b_1 z_1^2 + b_2 z_2^2 - \mu,$$

a resposta do sistema (3.8) é uma oscilação estável que corresponde a um ciclo limite no espaço de estados (z_1, z_2) e tem a forma de uma elipse centrada em $(0, 0)$ cuja equação é

$$\frac{z_1^2}{\frac{\mu}{b_1}} + \frac{z_2^2}{\frac{\mu}{b_2}} = 1$$

com semi-eixos $\left(\sqrt{\frac{\mu}{b_1}}, \sqrt{\frac{\mu}{b_2}}\right)$. A curva fechada descrita por $\sigma(z_1, z_2)$ é o lugar geométrico que deve guiar as trajetórias dos estados z_1 e z_2 . O parâmetro μ permite controlar a amplitude das oscilações.

No seguimento ideal, $\sigma(z_1, z_2) = 0$ em toda a trajetória. A atratividade desta curva, neste caso particular, é proporcional ao ganho de $\sigma(z_1, z_2)$, ou seja kz_2 , como visto na seção 2.5 do capítulo 2. Nesta seção mostra-se que a definição de k como

$$k(z_2) = \frac{\rho}{|z_2|},$$

resulta um melhor desempenho no seguimento da trajetória $\sigma(z_1, z_2) = 0$ causando uma mudança no termo $-kz_2\sigma(z_1, z_2)$ para $-\rho \operatorname{sgn}(z_2)\sigma(z_1, z_2)$ na equação (3.8). Pode-se agora observar que ρ passa a ser a constante de ganho e que a atratividade não depende mais do valor de z_2 , apenas de seu sinal.

Para fazer com que o sistema buck normalizado dado por (3.7) tenha o comportamento do oscilador não-linear plano dado por (3.8) necessitamos que

$$-\frac{1}{LC}z_1 - \frac{1}{RC}z_2 - \frac{B}{LC} + \frac{E}{LC}u \triangleq -\omega^2 z_1 - \rho \operatorname{sgn}(z_2)(b_1 z_1^2 + b_2 z_2^2 - \mu)$$

de onde se deduz que

$$u \triangleq \frac{LC}{E} \left[\frac{1}{LC}z_1 + \frac{1}{RC}z_2 + \frac{B}{LC} - \omega^2 z_1 - \rho \operatorname{sgn}(z_2)(b_1 z_1^2 + b_2 z_2^2 - \mu) \right]. \quad (3.9)$$

Desfazendo agora as mudanças de variáveis realizadas, de (3.6) em (3.9), temos que

$$u \triangleq \frac{1}{E} \left[y_1 + \frac{L}{R}y_2 - LC\omega^2 (y_1 - B) - LC\rho \operatorname{sgn}(y_2) (b_1 (y_1 - B)^2 + b_2 y_2^2 - \mu) \right] \quad (3.10)$$

e de (3.4) em (3.10) obtemos

$$u \triangleq \frac{1}{E} \left[x_1 + \frac{L}{RC}x_2 - LC\omega^2 (x_1 - B) - LC\rho \operatorname{sgn}(x_2) \left(b_1 (x_1 - B)^2 + \frac{b_2}{C^2}x_2^2 - \mu \right) \right]. \quad (3.11)$$

Portanto, para o sistema original (3.1), a lei de controle (3.11) gerará oscilações estáveis auto-sustentadas em um conversor buck sem a necessidade de utilizar técnicas de controle por seguimento (“tracking”) de referências geradas externamente.

3.2.4 Resultados de simulação

Para a simulação foram utilizados os parâmetros $L = 30$ mH, $C = 50\mu\text{F}$, $R = 25\Omega$ e $V_i = 30$ V para o conversor buck. Os parâmetros adotados para a oscilação de saída desejada são: valor médio $B = 15$, amplitude $A = 5$ com uma frequência de 60 Hz. Os parâmetros do controlador são: $\rho = 1 \cdot 10^6$ e $\mu = 1$.

É bem conhecido que quando a tensão de saída sai fora dos limites de operação

$$v_c < V_{min} = B - A \quad \text{ou} \quad v_c > V_{max} = B + A \quad (3.12)$$

o controlador, apenas com a lei de controle proposta, tem dificuldade em fazer o sistema voltar a oscilar, isto porque, no momento em que a trajetória de estados atinge o ponto em que $x_2 = i_c = 0$ este estado permanece com valor nulo e, como consequência, o estado $x_1 = v_c$ praticamente não se altera, visto que $\frac{dv_c}{dt} = \frac{i_c}{C}$. Observa-se que, na prática, com o uso de modulação PWM, o estado x_2 assume valores bem pequenos, próximos de zero, o que resulta uma pequena variação do estado x_1 em direção à elipse. Somente quando o estado x_1 atinge a elipse o sistema volta a oscilar.

No capítulo anterior, este problema foi identificado e mostrado que ele se agrava com o aumento no valor da constante k (ou ρ). O conversor usado nesta simulação usa o valor $\rho = 1 \cdot 10^6$, que é bastante elevado. Neste caso, as linhas de dinâmica nula externamente à elipse $\sigma(x)$ quase se tocam e ocorre este comportamento.

Para contornar este problema, foi incluído na lei de controle um acionamento alternativo em malha aberta tal que quando a condição (3.12) for verdadeira, usa-se

$$u = f_d(B) \quad (3.13)$$

onde $f_d: v_o \rightarrow u$ é uma função derivada da curva de equilíbrios. De (3.2) tem-se que

$$u = f_d(X_1) = \frac{X_1}{E}.$$

Adota-se $X_1 = B$ por ser a tensão equivalente ao ponto médio da oscilação.

O gráfico superior da figura 3.4 mostra a oscilação desejada da tensão de saída do conversor buck com valor médio de 15V e amplitude de 5V, conforme estabelecido nos parâmetros da lei de controle. Na figura 3.5 aparece o diagrama de estados (x_1, x_2) . Nele se pode ver que, para uma condição inicial dos estados localizada em um ponto próximo ao centro da elipse, o controle conduz a trajetória de estados até a elipse e nela permanece, gerando a oscilação desejada. Como a constante ρ foi ajustada para um valor convenientemente elevado, a atratividade da superfície delineada pela elipse é grande e praticamente não se percebem os mínimos desvios de trajetória representados pelos valores da função $P = \sigma(z)$ mostrados no gráfico inferior da figura 3.6. Finalmente, o controle

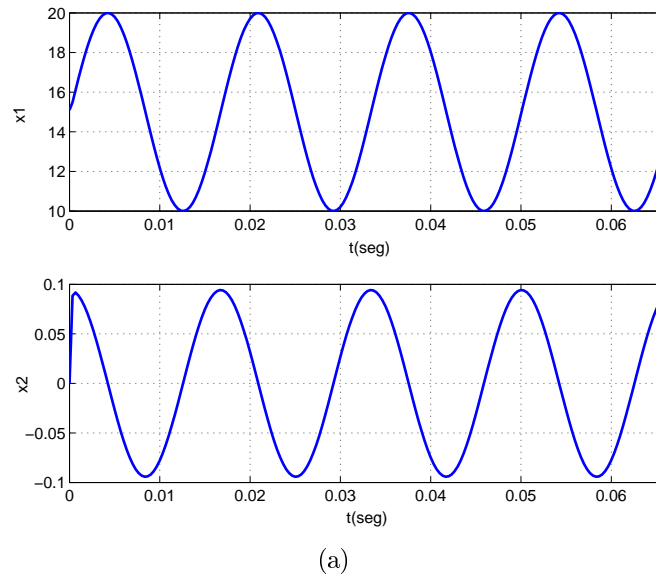


FIGURA 3.4: Formas de onda de x_1 e de x_2 no tempo geradas utilizando-se o controle contínuo sobre o sistema normalizado.

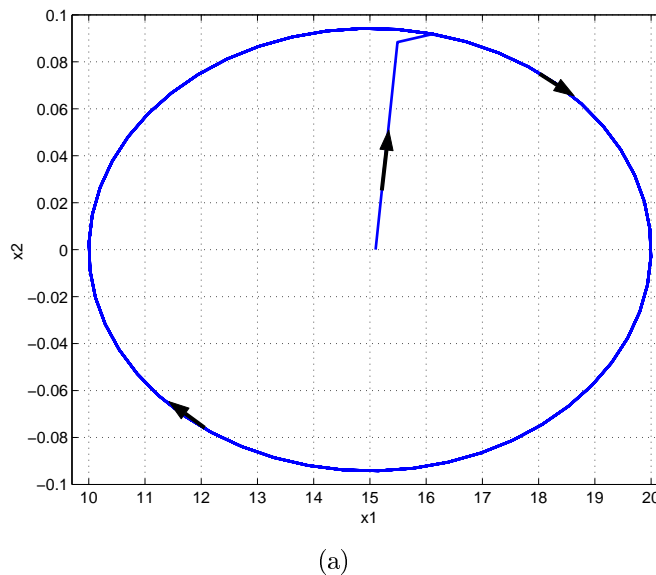


FIGURA 3.5: Diagrama de estados (x_1, x_2) utilizando-se o controle contínuo sobre o sistema normalizado.

está representado no gráfico superior desta mesma figura.

Nos experimentos de simulação, os valores da constante ρ foram obtidos empiricamente. Observa-se que há uma faixa de valores ideal. Valores muito baixos deixam a resposta do controle lenta quando a trajetória dos estados estiver fora da elipse além de permitir a deformação da forma de onda de saída devido à influência das trajetórias naturais do sistema. Valores muito altos tendem a deixar o controle instável. Esta instabilidade é mais perceptível se o controle não for perfeitamente contínuo, como é o caso do uso de modulação PWM ou modos deslizantes com limitação da frequência de comutação.

O controle contínuo serve para dar uma idéia do funcionamento ideal do sistema. Uma

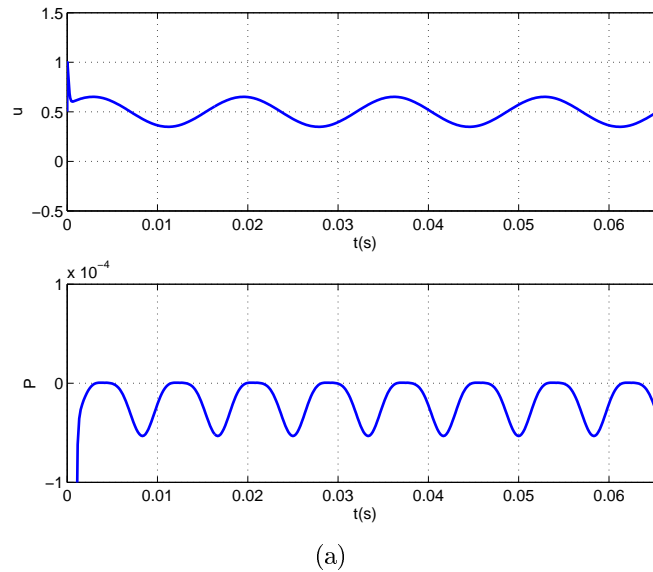


FIGURA 3.6: Sinal de controle e valor da função $P = \sigma(z)$.

situação real usa alguma forma de comutação das chaves com limitação da frequência de comutação. Neste sentido, foram realizadas também simulações com modulação PWM do sinal de controle. O gráfico superior da figura 3.7 mostra a forma de onda da tensão de saída (x_1) enquanto o gráfico inferior mostra a forma de onda da corrente sobre o capacitor de saída (x_2). Neste último gráfico pode-se perceber a ondulação de alta frequência devido à comutação.

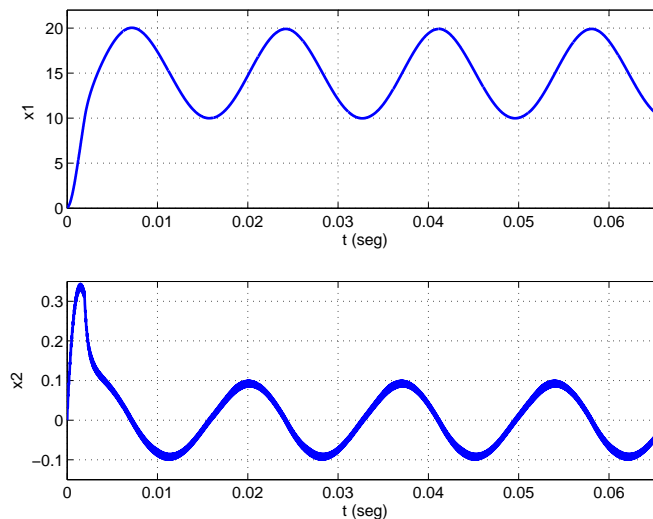


FIGURA 3.7: Formas de onda de x_1 e de x_2 utilizando modulação PWM com $f_s = 15$ KHz.

A figura 3.8-a mostra o diagrama de estados (x_1, x_2) com a trajetória de *start-up* do conversor até alcançar o regime oscilatório e nele permanecer. Como mencionado anteriormente, como inicialmente o estado x_1 encontra-se fora dos limites, é utilizado o acionamento alternativo em malha aberta $u = \frac{B}{E}$ até $x_1 = 10$. A partir daí, o controle em

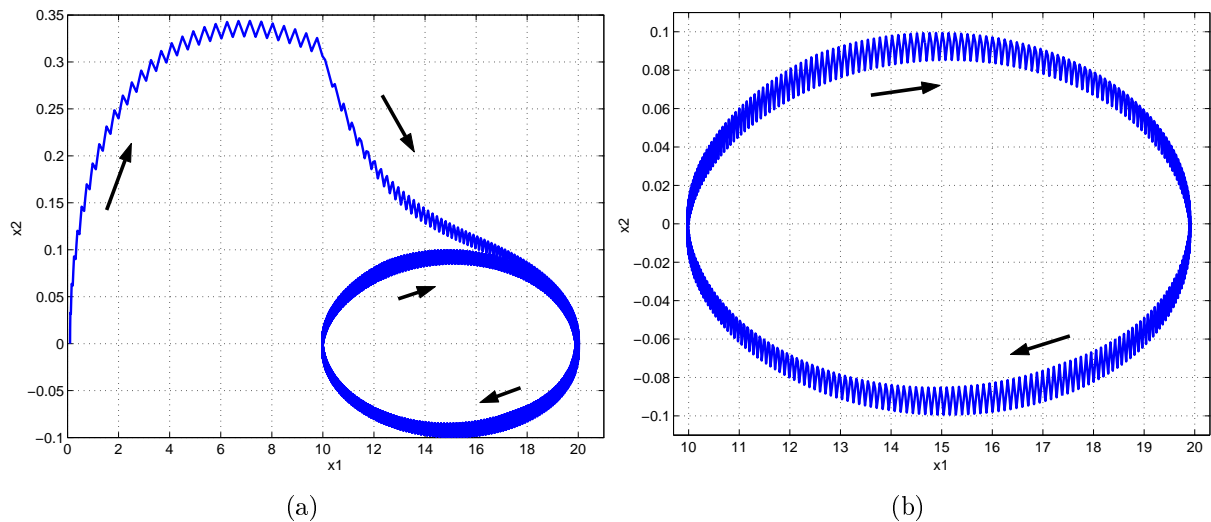


FIGURA 3.8: Diagrama de estados (x_1, x_2) (a) trajetória de inicialização e (b) trajetória em regime de oscilação.

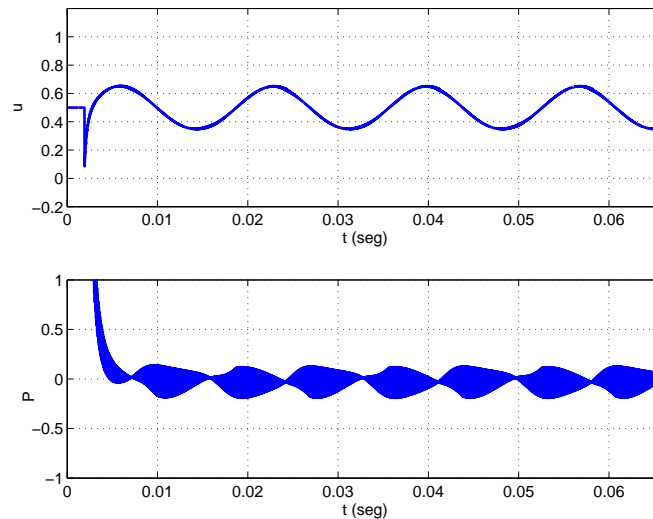


FIGURA 3.9: Sinal de controle e valor da função $P = \sigma(z)$.

malha fechada entra em funcionamento. Na figura 3.8-b aparece o detalhe do diagrama de estados para o sistema funcionando em seu regime de oscilação.

Finalmente, o gráfico superior da figura 3.9 mostra a evolução da ação de controle enquanto o gráfico inferior mostra o sinal $P = \sigma(z)$.

3.3 Controle do conversor Buck usando i_L e v_C como estados

Na figura 3.10 aparece o diagrama esquemático do conversor buck que possui o seu controle realizado através da corrente no indutor e da tensão no capacitor, usadas como as variáveis de estado do sistema.

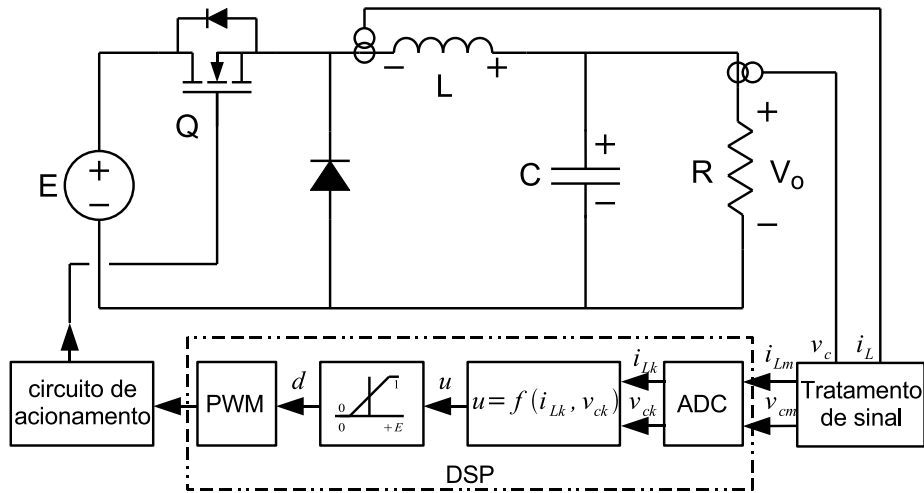


FIGURA 3.10: Conversor buck utilizando i_L e v_c como variáveis de estado.

Definindo a corrente sobre o indutor i_L e a tensão sobre o capacitor v_c como as variáveis de estado x_1 e x_2 obtemos o seguinte modelo para o conversor (vide apêndice B):

$$\begin{cases} L\dot{x}_1 = -x_2 + uE \\ C\dot{x}_2 = x_1 - \frac{x_2}{R} \end{cases} \quad (3.14)$$

onde R é a carga e u é a ação de controle.

As restrições sobre as variáveis de estado do sistema são: $0 \leq x_2 < E$ e $x_1 \geq 0$.

Da mesma forma como foi feito na seção 3.2, a análise subsequente é feita considerando o conversor operando em MCC.

No modelo instantâneo, a ação de controle é discreta descrita por $u = q \in \{0, 1\}$. No modelo por valores médios, a ação de controle é contínua, tomada como a média da ação de controle discreta durante um período de comutação.

3.3.1 Análise dos equilíbrios

Os equilíbrios do sistema (3.14) são obtidos impondo $\dot{x}_1 = 0$ e $\dot{x}_2 = 0$ no modelo de valores médios onde a entrada de controle é considerada contínua. O conjunto dos equilíbrios é

$$\Gamma = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \bar{x}_1 = \frac{\bar{x}_2}{R}, \bar{x}_2 = uE \right\}$$

que corresponde a uma variedade unidimensional no espaço de estados (figura 3.11).

Considerando $d = D$, onde D é um valor constante, o equilíbrio está sobre a variedade Γ de forma que

$$\bar{X}_1 = \frac{DE}{R}; \quad \bar{X}_2 = DE. \quad (3.15)$$

É importante observar que a inclinação de Γ depende de E e R .

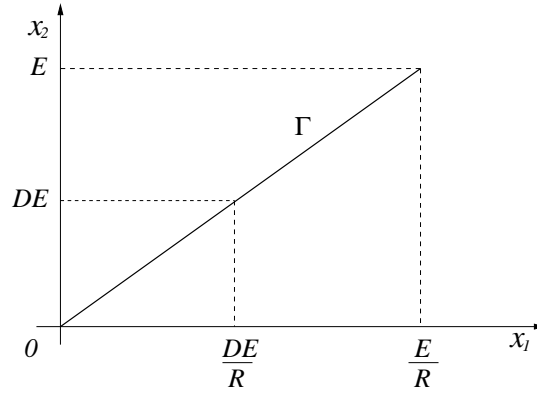


FIGURA 3.11: Curva de equilíbrios para o conversor buck.

3.3.2 Modelo normalizado

Fazendo a seguinte mudança de variáveis

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{L}{RCE}x_1 \\ y_2 &= \frac{x_2}{E} \end{aligned} \quad (3.16)$$

ao sistema (3.14), chega-se a

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \frac{1}{RC}(u - y_2) \\ \dot{y}_2 = \frac{R}{L}y_1 - \frac{1}{RC}y_2. \end{cases}$$

Aplicando uma mudança na escala de tempo com $\tau = \frac{1}{RC}t$, obtemos

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = u - y_2 \\ \dot{y}_2 = ay_1 - y_2 \end{cases} \quad (3.17)$$

onde $a = \frac{R^2C}{L}$. O sistema (3.17), que agora possui apenas um parâmetro, é linear e afim em u .

Comparando os sistemas (3.14) com (3.17) se tem que os limites são respectivamente

$$0 < x_2 < E \quad ; \quad 0 < x_1 < \frac{E}{R} \quad (3.18)$$

$$0 < y_2 < 1 \quad ; \quad 0 < y_1 < \frac{1}{a}. \quad (3.19)$$

Agora queremos que o sistema oscile em torno do ponto (m, am) ¹, com $0 \leq m \leq \frac{1}{a}$.

¹Não se deve esquecer que o ponto (m, am) está definido no sistema de coordenadas (y_1, y_2) do sistema normalizado que deve ser transformado pelas equações (3.16) e escala de tempo para o sistema de coordenadas original.

Fazemos mais uma troca de variáveis:

$$\begin{aligned} y_1^* &= y_1 - m \\ y_2^* &= y_2 - am \end{aligned} \quad (3.20)$$

obtendo

$$\begin{cases} \dot{y}_1^* = -y_2^* - am + u \\ \dot{y}_2^* = ay_1^* - y_2^*. \end{cases}$$

Finalmente, para obtermos um modelo na forma canônica de controle, realizamos mais uma mudança de variáveis

$$\begin{aligned} z_1 &= y_2^* \\ z_2 &= ay_1^* - y_2^* \end{aligned} \quad (3.21)$$

chegando a

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = -az_1 - z_2 - a^2m + au \end{cases} \quad (3.22)$$

cujos limites são

$$-am < z_1 < 1 - am \quad ; \quad -1 < z_2 < 1.$$

3.3.3 Equivalência com a forma canônica de um oscilador não-linear plano

Considerando a forma de um oscilador não-linear plano

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = -\omega^2 z_1 - kz_2\sigma(z_1, z_2) \end{cases} \quad (3.23)$$

com

$$\sigma(z_1, z_2) = b_1 z_1^2 + b_2 z_2^2 - \mu. \quad (3.24)$$

A resposta do sistema (3.23) é uma oscilação estável que corresponde a um ciclo limite no espaço de estados (z_1, z_2) e tem a forma de uma elipse centrada em $(0, 0)$ cuja equação é

$$\frac{z_1^2}{\frac{\mu}{b_1}} + \frac{z_2^2}{\frac{\mu}{b_2}} = 1$$

com semi-eixos $(\sqrt{\frac{\mu}{b_1}}, \sqrt{\frac{\mu}{b_2}})$. A curva fechada descrita por $\sigma(z_1, z_2) = 0$ é o lugar geométrico que deve guiar as trajetórias dos estados z_1 e z_2 .

No seguimento ideal, $\sigma(z_1, z_2) = 0$ em toda a trajetória. A atratividade desta curva,

neste caso particular, é proporcional ao ganho de $\sigma(z_1, z_2)$, ou seja kz_2 , como visto na seção 2.5 do capítulo 2. Nesta seção mostra-se que a definição de k por

$$k(z_2) = \frac{\rho}{|z_2|},$$

resulta um melhor desempenho no seguimento da trajetória $\sigma(z_1, z_2) = 0$ causando uma mudança no termo $-kz_2\sigma(z_1, z_2)$ para $-\rho \operatorname{sgn}(z_2)\sigma(z_1, z_2)$ na equação (3.23). Pode-se agora observar que ρ passa a ser a constante de ganho e que a atratividade não depende mais do valor de z_2 , apenas de seu sinal.

Fazendo a equivalência de (3.22) com (3.23) resulta que

$$-az_1 - z_2 - a^2m + au \triangleq -\omega^2 z_1 - \rho \operatorname{sgn}(z_2)(b_1 z_1^2 + b_2 z_2^2 - \mu)$$

de onde se deduz que

$$u \triangleq \frac{1}{a} [az_1 + z_2 + a^2m - \omega^2 z_1 - \rho \operatorname{sgn}(z_2)(b_1 z_1^2 + b_2 z_2^2 - \mu)]. \quad (3.25)$$

Desfazendo agora as mudanças de variáveis realizadas, de (3.21) em (3.25), temos que

$$u \triangleq \frac{1}{a} [(ay_1^* - y_2^*) + ay_2^* + a^2m - \omega^2 y_2^* - \rho \operatorname{sgn}(ay_1^* - y_2^*) (b_1 y_2^{*2} + b_2 (ay_1^* - y_2^*)^2 - \mu)] \quad (3.26)$$

de (3.20) em (3.26)

$$u \triangleq \frac{1}{a} \left[a(y_1 - m) + (y_2 - am)(a - 1) + a^2m - \omega^2 (y_2 - am) - \rho \operatorname{sgn}(a(y_1 - m) - (y_2 - am)) (b_1 (y_2 - am)^2 + b_2 (a(y_1 - m) - (y_2 - am))^2 - \mu) \right]$$

$$u \triangleq \left[\left(y_1 - \frac{y_2}{a} \right) + y_2 - \omega^2 \left(\frac{y_2}{a} + m \right) - \frac{\rho}{a} \operatorname{sgn}(ay_1 - y_2) (b_1 (y_2 - am)^2 + b_2 (ay_1 - y_2)^2 - \mu) \right] \quad (3.27)$$

de (3.16) em (3.27)

$$u \triangleq \frac{L}{RCE} x_1 + \frac{1}{aE} x_2 (a - 1) - \omega^2 \left(\frac{1}{aE} x_2 + m \right) - \frac{\rho}{a} \operatorname{sgn} \left(\frac{aL}{RCE} x_1 - \frac{1}{E} x_2 \right) \left[b_1 \left(\frac{1}{E} x_2 - am \right)^2 + b_2 \left(\frac{aL}{RCE} x_1 - \frac{1}{E} x_2 \right)^2 - \mu \right]. \quad (3.28)$$

Portanto, para o sistema original (3.14), a lei de controle (3.28) gerará oscilações estáveis auto-sustentadas em um conversor buck sem a necessidade de utilizar técnicas de controle por seguimento (“tracking”) de referências geradas externamente.

3.3.4 Projeto de controle

Supondo que desejamos a seguinte forma de onda de saída:

$$x_2 = A \sin \omega t + B \quad (3.29)$$

Da segunda equação do sistema (3.14) temos que

$$C\dot{x}_2 = x_1 - \frac{x_2}{R}$$

portanto,

$$\begin{aligned} x_1 &= C\dot{x}_2 + \frac{x_2}{R} \\ &= CA\omega \cos \omega t + \frac{A}{R} \sin \omega t + \frac{B}{R} \\ &= \sqrt{(CA\omega)^2 + \left(\frac{A}{R}\right)^2} \sin \left(\omega t + \arcsin \left(\frac{CA\omega}{\sqrt{(CA\omega)^2 + \left(\frac{A}{R}\right)^2}} \right) \right) + \frac{B}{R} \end{aligned} \quad (3.30)$$

o que significa dizer que a forma de onda de corrente possui um nível médio $\frac{B}{R}$ e uma amplitude de oscilação de $\sqrt{(CA\omega)^2 + (A/R)^2}$.

Isolando-se o termo ωt na equação (3.29)

$$\omega t = \arcsin \left(\frac{x_2 - B}{A} \right)$$

e substituindo-o na equação (3.30) chega-se a

$$x_1 = CA\omega \sqrt{1 - \frac{(x_2 - B)^2}{A^2}} + \frac{x_2 - B}{R} + \frac{B}{R}$$

que realizando-se alguns rearranjos resulta na expressão da elipse no diagrama de estados (x_1, x_2)

$$\frac{\left(x_1 - \frac{x_2}{R}\right)^2}{C^2 A^2 \omega^2} + \frac{(x_2 - B)^2}{A^2} = 1. \quad (3.31)$$

Como se sabe que $C\dot{x}_2 = x_1 - \frac{x_2}{R}$, substituindo na equação anterior chega-se a

$$\frac{(\dot{x}_2)^2}{A^2 \omega^2} + \frac{(x_2 - B)^2}{A^2} = 1.$$

Esta equação representa uma elipse não rotacionada, pois as variáveis de estado (x_2, \dot{x}_2) estão em quadratura.

Analisando agora o processo de obtenção das equações do sistema buck na forma normalizada e canônica, deve-se primeiramente observar que na obtenção da expressão de

x_1 é necessário considerar a mudança na escala de tempo, de sorte que

$$x_1(t) = C\dot{x}_2(t) + \frac{1}{R}x_2(t)$$

$$\tau = \frac{1}{RC}t$$

$$x_1(\tau) = C\frac{1}{RC}\dot{x}_2(\tau) + \frac{1}{R}x_2(\tau).$$

Os sistemas normalizado (y_1, y_2) e canônico (z_1, z_2) vistos anteriormente são funções na escala de tempo da variável τ . Levando-se isto em consideração, aplica-se então a troca de variáveis (3.16) às equações (3.29) e (3.30) obtendo o sistema na forma normalizada (Nas expressões a seguir aparece a constante $[RC]$; para usar a escala de tempo τ considerar a constante $[RC]$; para usar a escala de tempo t , retirar esta constante)

$$y_1 = \frac{L \left(\frac{RCA\omega}{[RC]} \cos \omega\tau + A \sin \omega\tau + B \right)}{R^2CE}$$

$$y_2 = \frac{A}{E} \sin \omega\tau + \frac{B}{E}$$

e as trocas (3.20) e (3.21) para obter o sistema na forma canônica:

$$z_1 = \frac{A}{E} \sin \omega\tau + \frac{B}{E} - am$$

$$z_2 = \frac{[RC]A\omega}{E} \cos \omega\tau.$$

A função da elipse usada no controle está definida como

$$\sigma(z) = b_1 z_1^2 + b_2 z_2^2 - \mu.$$

Considerando $\mu = 1$ e considerando a equação parametrizada da elipse (2.11), teremos que $b_1^{-1/2}$ corresponde à amplitude de oscilação de z_1 e $b_2^{-1/2}$ à amplitude de oscilação de z_2 . Assim,

$$b_1 = \left(\frac{E}{A} \right)^2$$

$$b_2 = \left(\frac{E}{[RC]A\omega} \right)^2.$$

3.3.5 Resultados de simulação

Foi usado um conversor com os parâmetros $L = 30 \text{ mH}$, $C = 50 \text{ } \mu\text{F}$, $E = 30 \text{ V}$ e $R = 25 \text{ } \Omega$. O objetivo é a geração de uma forma de onda senoidal na saída, com nível médio $B = 15 \text{ V}$, amplitude $A = 5 \text{ V}$ e frequência de 60 Hz. A frequência de comutação do modulador PWM

foi fixada em $f_s = 15 \text{ KHz}$ e a constante $\mu = 1$. A partir destes parâmetros obtém-se que $a = 1,042$, $m = 0,48$, $b_1 = 36$ e $b_2 = 2,53 \cdot 10^{-4}$. Encontrou-se que o valor $\rho = 1 \cdot 10^5$ faz com que a elipse usada no controle tenha a atratividade necessária para um bom desempenho do sistema.

No instante em que o conversor é energizado, os elementos armazenadores de energia (capacitor e indutor) estão descarregados, o que significa $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$. A simulação mostrou que o período necessário para que a trajetória de estados alcance a elipse é muito grande. Em alguns casos, dependendo dos parâmetros utilizados, isto nem chega a acontecer, pois a trajetória permanece “estacionada” sobre algum ponto da curva de equilíbrios distante da elipse.

Para resolver este problema, assim como já visto na seção anterior com a função (3.13), foi adotada uma rotina de inicialização que opera da seguinte maneira:

$$u_c = \begin{cases} f_d(B) & \text{se } v_c < B - A - \delta \text{ ou } v_c > B + A + \delta \\ u & \text{se } B - A - \delta \leq v_c \leq B + A + \delta \end{cases}$$

onde $f_d(B) = \frac{B}{E}$ é um valor constante correspondente à razão cíclica que conduz a saída ao valor constante B , que é o nível médio da oscilação e δ corresponde a uma margem constante em relação aos limites superior e inferior. No caso desta simulação, esta margem foi ajustada em $\delta = 2 \text{ V}$ e $f_d(B) = 0,5$.

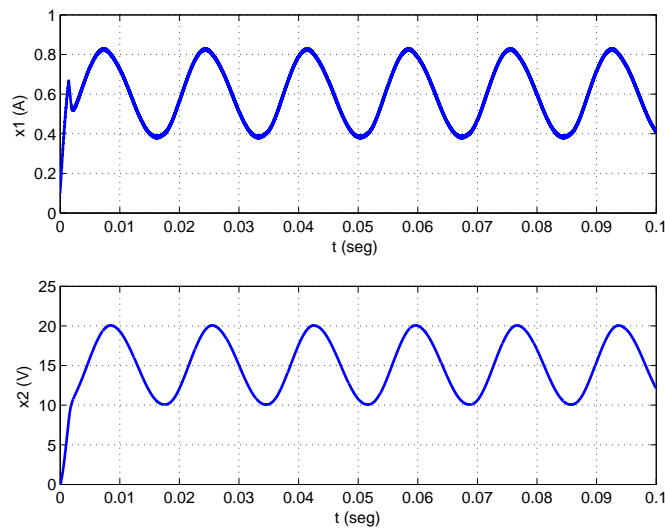


FIGURA 3.12: Formas de onda de x_1 (i_L) e x_2 (v_c) no tempo.

A figura 3.12 mostra as formas de onda dos estados x_1 e x_2 no tempo. O diagrama de estados (x_1, x_2) é mostrado na figura 3.13. Nele se nota que no plano (x_1, x_2) a elipse aparece rotacionada, com seu centro sobre a curva de equilíbrios do conversor, de acordo com a eq. (3.31). Além disso, também fica evidente a trajetória devido à rotina de inicialização. Com a troca de variáveis, obtém-se os estados z_1 e z_2 , mostrados na forma

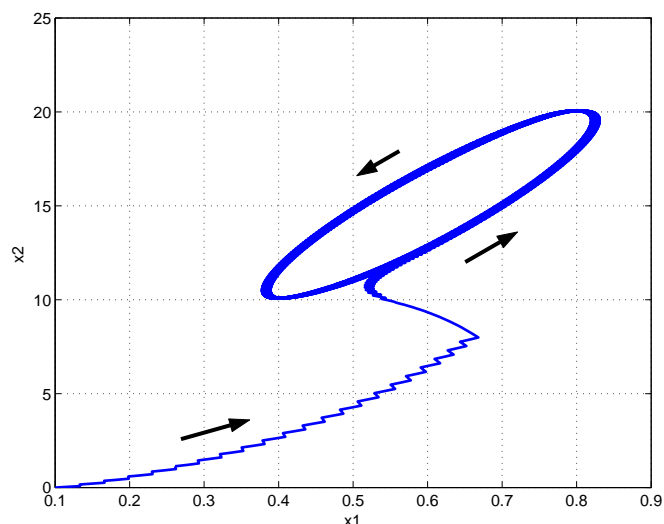


FIGURA 3.13: Diagrama de estados (x_1, x_2) .

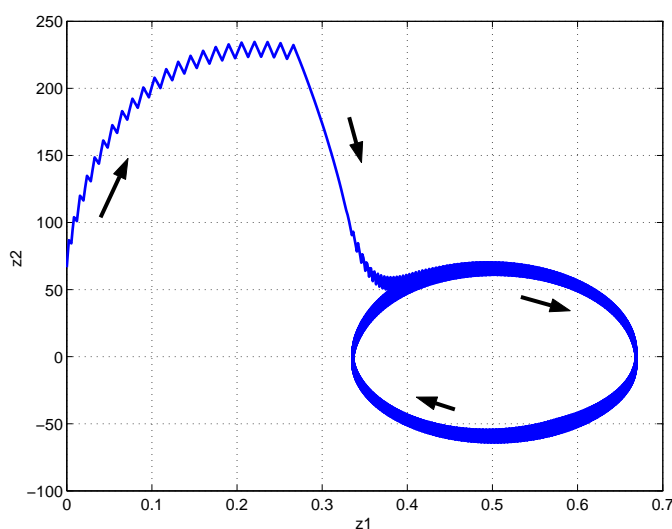


FIGURA 3.14: Diagrama de estados de (z_1, z_2) .

de diagrama de estados na figura 3.14. Finalmente, a figura 3.15 mostra a forma de onda do controle u e do valor da função $\sigma(z)$, como visto na equação (3.24), que é responsável por guiar as trajetórias dos estados z_1 e z_2 em torno desta elipse.

3.3.6 Método do gradiente de velocidade para gerar oscilações

Uma forma alternativa de projeto aplicado a sistemas não-lineares é o método do gradiente de velocidade, proposto por Fradkov and Pogromsky (1998). Este é um método que consiste em encontrar a função de controle que estabiliza o sistema através da análise da função de Lyapunov. Este método está descrito na seção 2.7.2 do capítulo 2.

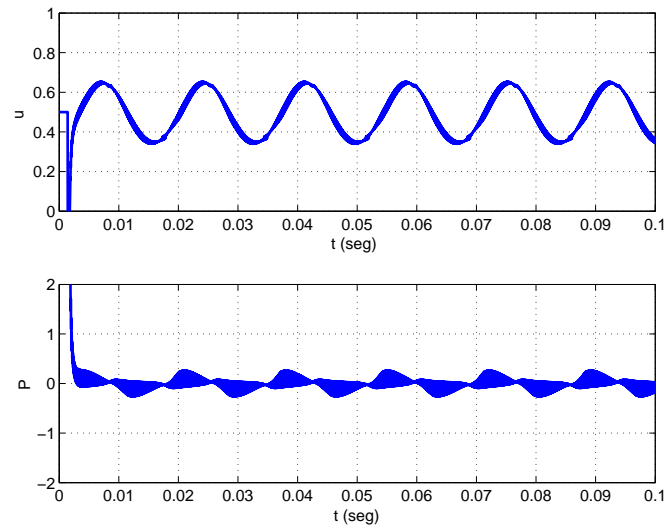


FIGURA 3.15: Formas de onda do sinal de controle u e o valor retornado pela função $P = \sigma(z)$ responsável por guiar as trajetórias em torno da elipse.

Seja o modelo normalizado do conversor buck

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = u - y_2 \\ \dot{y}_2 = ay_1 - y_2 \end{cases} \quad (3.32)$$

onde y_1 é a corrente normalizada sobre o indutor e y_2 é a tensão de saída normalizada. O objetivo de controle consiste em que a variável y_2 oscile com uma amplitude A e frequência ω previamente definidos

$$\begin{aligned} y_2(t) &= A \sin(\omega t) + B \\ \dot{y}_2(t) &= \omega A \cos(\omega t). \end{aligned} \quad (3.33)$$

De (3.32) se tem que

$$y_1 = \frac{1}{a}(\dot{y}_2 + y_2).$$

Substituindo as expressões y_2 e \dot{y}_2 na equação anterior, se tem que

$$y_1 = \frac{1}{a}[\omega A \cos(\omega t) + A \sin(\omega t) + B].$$

De (3.33) isolando a variável de tempo t se chega a

$$\omega t = \arcsin\left(\frac{y_2 - B}{A}\right).$$

Substituindo esta última expressão na anterior,

$$y_1 = \frac{1}{a} \left[\omega A \cos\left(\arcsin\left(\frac{y_2 - B}{A}\right)\right) + y_2 \right]. \quad (3.34)$$

Aplicando a seguinte identidade trigonométrica

$$\cos \left(\arcsin \left(\frac{y_2 - B}{A} \right) \right) = \sqrt{1 - \left(\frac{y_2 - B}{A} \right)^2}$$

em (3.34) se tem

$$y_1 = \frac{1}{a} \left[\omega A \sqrt{1 - \left(\frac{y_2 - B}{A} \right)^2} + y_2 \right]$$

de onde

$$\begin{aligned} \frac{(ay_1 - y_2)^2}{(\omega A)^2} + \frac{(y_2 - B)^2}{A^2} &= 1 \\ \frac{(\dot{y}_2)^2}{(\omega A)^2} + \frac{(y_2 - B)^2}{A^2} &= 1 \end{aligned} \quad (3.35)$$

que é a equação de uma elipse no plano (y_2, \dot{y}_2) , centrada em $(B, 0)$ com semi-eixos $(A, \omega A)$. A equação (3.35) pode ser escrita como

$$\sigma = \dot{y}_2^2 + \omega^2(y_2 - B)^2 - \omega^2 A^2 = 0$$

no plano (\dot{y}_2, y_2) ou no plano (y_1, y_2) como

$$\sigma = (ay_1 - y_2)^2 + \omega^2(y_2 - B)^2 - \omega^2 A^2 = 0 \quad (3.36)$$

de onde

$$\dot{\sigma} = 2(ay_1 - y_2) [au + (1 + \omega^2 - a)y_2 - ay_1 - \omega^2 B]. \quad (3.37)$$

Definindo a função

$$V = \frac{1}{4} \sigma^2 \geq 0$$

se tem que

$$\dot{V} = \frac{1}{2} \sigma \dot{\sigma}. \quad (3.38)$$

Substituindo (3.36) e (3.37) em (3.38) chega-se a

$$\dot{V} = \frac{1}{2} [(ay_1 - y_2)^2 + \omega^2(y_2 - B)^2 - \omega^2 A^2] [2(ay_1 - y_2) (au + (1 + \omega^2 - a)y_2 - ay_1 - \omega^2 B)].$$

Para que V seja uma função de Lyapunov deve-se verificar que $V \geq 0$ e $\dot{V} < 0$. Portanto, para que isto se cumpra, a ação de controle deve ser

$$u = \frac{1}{a} [ay_1 - (1 + \omega^2 - a)y_2 + \omega^2 B - k(ay_1 - y_2)\sigma]$$

com o qual se chega a

$$\dot{V} = -(ay_1 - y_2)^2 \sigma^2 \leq 0.$$

Note que uma parte do controle u cancela termos da expressão de \dot{V} e a outra parte garante que $\dot{V} < 0$.

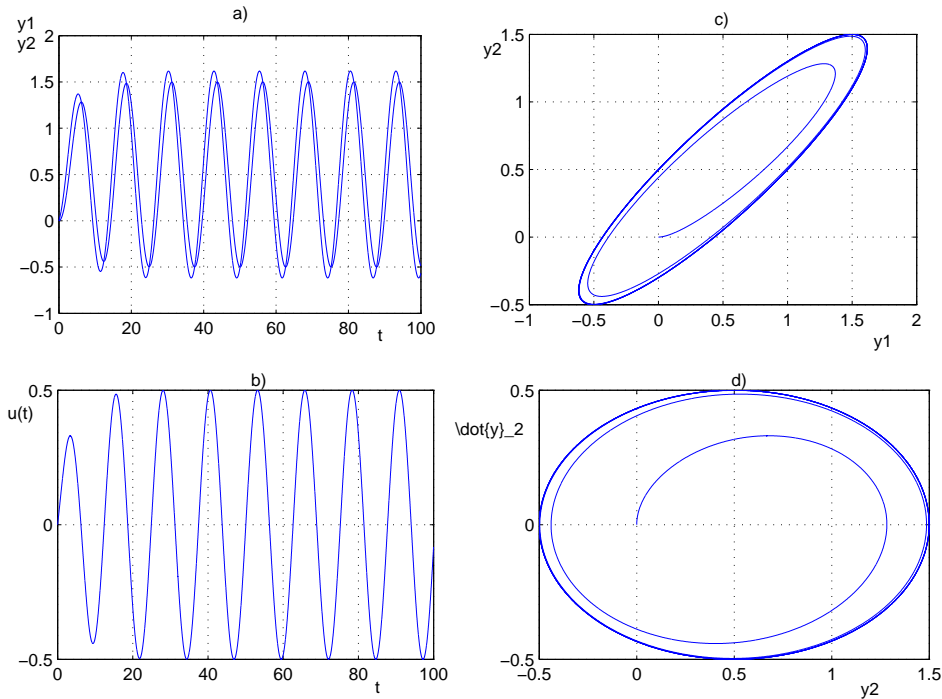


FIGURA 3.16: Oscilação no modelo normalizado do conversor buck a partir de condições iniciais nulas. (a) Sinais y_1 e y_2 no tempo, (b) sinal de controle u , (c) diagrama de estados (y_1, y_2) , (d) diagrama de estados (y_2, \dot{y}_2) .

3.3.7 Resultados de simulação

Primeiro é apresentada a simulação do conversor buck normalizado com controle. Os parâmetros da elipse são $A = 0,2$, $B = 0,5$, $\omega = 1$ e $\mu = 0,1$ e o ganho do controlador $k = 2$. Na figura 3.16 pode-se ver os resultados obtidos partindo da condição inicial $(y_1, y_2) = (0, 0)$.

Na seqüência, são apresentados os resultados de simulação sobre o modelo desnormalizado do conversor buck com modulador PWM e o controle proposto. Os parâmetros do conversor buck são $L = 1,4$ mH, $C = 1$ μ F, $E = 48$ V, $a = \frac{R^2 C}{L} = 1 \Rightarrow R = \sqrt{\frac{L}{C}} = 37,4$ Ω . A frequência de comutação do modulador PWM foi fixada em $f_s = 100$ KHz. Observa-se na figura 3.17 que a saída do sistema oscila descrevendo um ciclo limite estável no diagrama de estados (x_1, x_2) .

3.4 Controle de oscilações no conversor boost

A função do conversor boost é elevar a tensão contínua oriunda de uma fonte de energia elétrica, obtendo uma tensão maior na saída. Em geral, este conversor é usado em con-

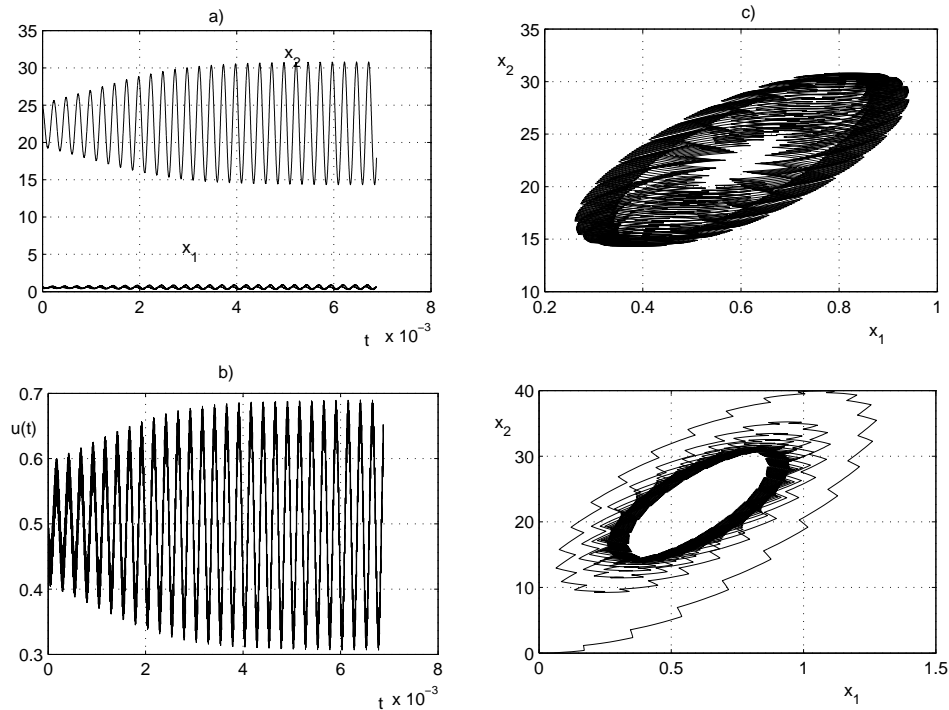


FIGURA 3.17: Oscilação no modelo desnormalizado do conversor buck a partir de condições iniciais nulas. (a) Sinais x_1 e x_2 no tempo, (b) sinal de controle u , (c) evolução da trajetória dos estados no diagrama de estados (x_1, x_2) a partir de uma condição inicial interna, (d) idem, para uma condição inicial externa.

versões CC-CC. Nosso objetivo é gerar na saída uma tensão CA representada por uma onda senoidal somada a um nível contínuo. Não há como evitar este nível contínuo pois a tensão mínima de saída deste conversor é igual à tensão da fonte CC, assim que este conversor não resulta muito interessante do ponto de vista prático. Entretanto, este estudo serve de base para a implementação de um outro tipo de conversor, o duplo boost, apresentado na seção 3.6, o qual se mostra interessante na prática, pois não apresenta o nível contínuo somado ao sinal.

Na figura 3.18 é mostrado um diagrama esquemático da topologia básica deste conversor composta por um indutor de entrada L , um conjunto de comutação formado por um diodo e um transistor MOSFET operando como interruptor, e um capacitor de saída C . Da mesma forma que no caso do conversor buck, consideraremos que todos os elementos são ideais e que o conversor opera em modo MCC. As mesmas restrições sobre as variáveis de estado são válidas para este circuito elétrico, isto é, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$. No circuito da figura 3.18, R representa a resistência de carga, $E > 0$ representa uma fonte de tensão contínua e a tensão v_{out} sobre R representa a tensão de saída que deve ser regulada para obter $v_{out} = v_c \geq E$.

Definindo a corrente sobre o indutor i_L e a tensão sobre o capacitor v_c como as variáveis

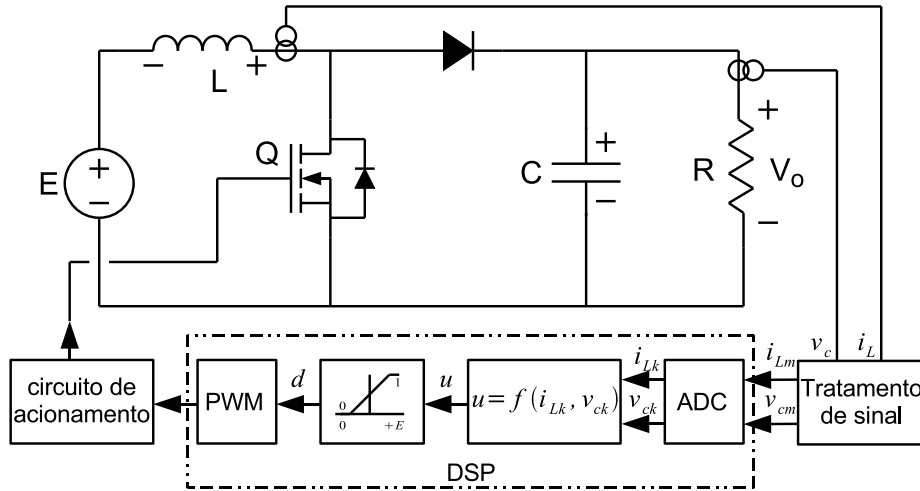


FIGURA 3.18: Topologia do conversor boost.

de estado x_1 e x_2 , obtemos o seguinte modelo para o conversor (vide apêndice B):

$$\begin{cases} L\dot{x}_1 = -ux_2 + E \\ C\dot{x}_2 = ux_1 - \frac{x_2}{R} \end{cases} \quad (3.39)$$

onde $x_1 = i_L$, $x_2 = v_c$ e $u = 1 - q$ é a ação de controle com $q \in \{0, 1\}$ representando o estado discreto do interruptor de comutação. Como no caso do conversor buck, podemos trabalhar com o modelo instantâneo do circuito boost ou com o modelo por valores médios onde a ação de controle passa a ser $u = 1 - d$, com d sendo a razão cíclica de um sinal do tipo PWM de alta frequência (Cunha, 2002).

3.4.1 Análise dos equilíbrios

Todos os equilíbrios possíveis de (3.39) deverão pertencer ao conjunto

$$\Gamma = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \bar{x}_1 = \frac{\bar{x}_2^2}{RE} \right\} \quad (3.40)$$

obtido a partir da aplicação da condição de equilíbrio sobre (3.39), utilizando o modelo por valores médios e eliminando a variável $u = 1 - d$ do sistema algébrico resultante (Cunha and Pagano, 2002c,a). Notar que a equação da curva de equilíbrios Γ depende explicitamente de R e E . Utilizando o modelo por valores médios pode-se afirmar que Γ é uma curva parametrizada na razão cíclica d , como mostrado na figura 3.19. A partir de (3.40) pode-se obter outras relações como

$$\bar{X}_1 = \frac{E}{R(1-D)^2} \quad ; \quad \bar{X}_2 = \frac{E}{(1-D)}$$

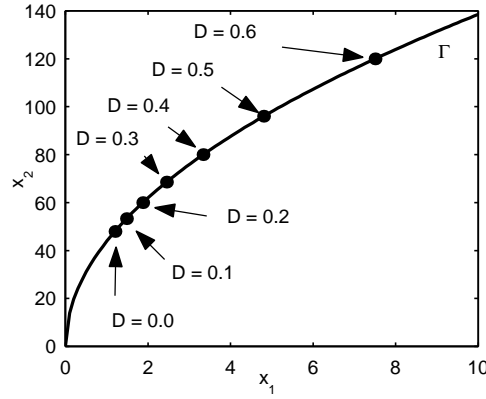


FIGURA 3.19: Curva dos pontos de equilíbrio para o conversor boost. A curva é traçada no plano (x_1, x_2) apresentando a localização de alguns pontos para algumas razões cíclicas.

que permitem compreender melhor o funcionamento do circuito.

3.4.2 Modelo normalizado

Para simplificar o estudo do conversor boost aplicamos a seguinte mudança de variáveis:

$$y_1 = \frac{1}{E} \sqrt{\frac{L}{C}} x_1 \tag{3.41}$$

$$y_2 = \frac{x_2}{E} \tag{3.42}$$

Aplicando esta mudança de variáveis à equação (3.39) se tem que

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -\frac{1}{\sqrt{LC}} u y_2 + \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ \dot{y}_2 = \frac{1}{\sqrt{LC}} u y_1 - \frac{1}{RC} y_2. \end{cases}$$

Utilizando como novo tempo $\tau = \frac{1}{\sqrt{LC}} t$, o modelo normalizado do conversor boost é

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = 1 - u y_2 \\ \dot{y}_2 = -a y_2 + u y_1 \end{cases} \tag{3.43}$$

onde $a = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$.

3.4.3 Análise da dinâmica interna

A análise da dinâmica interna de um sistema pode apontar muita informação sobre ele, como mostrado em (Olm, 2003) para o caso do conversor boost. Aqui resgatamos alguns dos resultados apresentados em seu trabalho.

A partir de (3.43), eliminando o controle u se tem que

$$y_1(1 - \dot{y}_1) = y_2(\dot{y}_2 + ay_2). \quad (3.44)$$

A equação (3.44) expressa uma relação diferencial entre as duas variáveis de estado e suas derivadas que não depende da entrada de controle. Notar que em (3.44), se $\dot{y}_1 = \dot{y}_2 = 0$ então temos que $y_1 = ay_2^2$, que corresponde à curva de equilíbrios do sistema (parábola). Esta equação representa a dinâmica interna do sistema e nos dá informações sobre como se comportam as variáveis de estado quando tentamos impor a trajetória de uma delas. De certa forma podemos dizer que a dinâmica interna do sistema (3.43) dada pela expressão (3.44) atua como uma restrição sobre o estado do sistema. Para entender melhor isto devemos estudar a equação (3.44) considerando:

1. $y_1(t) = f(t)$ como sendo uma função periódica definida de período T , determinar a dinâmica resultante em y_2 ;
2. para $y_2(t) = f(t)$ também periódica de período T , determinar qual é a dinâmica resultante em y_1 .

Por exemplo, a função $f(t)$ pode ser um sinal senoidal periódico como

$$\begin{aligned} f(t) &= A \sin(\omega t) + B \\ \dot{f}(t) &= A\omega \cos(\omega t). \end{aligned} \quad (3.45)$$

Caso (1): seja $y_1(t) = f(t)$, com $f(t)$ um sinal periódico, e

$$h(t) = f(t)(1 - \dot{f}(t)) = y_2(\dot{y}_2 + ay_2) \quad (3.46)$$

aplicando a seguinte mudança de variáveis

$$z = \frac{y_2^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \dot{z} = y_2 \dot{y}_2$$

e substituindo na equação (3.46) se tem que

$$\dot{z} + \frac{a}{2}z = h(t) \quad \Rightarrow \quad \dot{z} = -\frac{a}{2}z + h(t)$$

nesta última expressão se $a > 0$ e $h(t)$ é periódica, então o sistema é estável. A conclusão é que controlando y_1 se obtém y_2 desejada mantendo o sistema estável. Δ

Caso (2): Seja $y_2(t) = f(t)$, com $f(t)$ um sinal periódico. Substituindo (3.45) na equação

(3.44) se tem que

$$y_1(1 - \dot{y}_1) = f(t)(\dot{f}(t) + af(t))$$

esta equação é do tipo

$$x(1 - \dot{x}) = g(t) \quad (3.47)$$

com $g(t) = f(t)(\dot{f}(t) + af(t))$.

Como hipótese, consideraremos que $f(t)$ é uma função contínua suave, e como consequência também o será a sua derivada $\dot{f}(t)$ e $g(t)$. De (3.47) temos que

$$\dot{x} = 1 - \frac{g(t)}{x} = h_1(x).$$

No equilíbrio, temos $\dot{x} = 0$ resultando $\bar{x} = g(t)$. Se $g(t) = C$ com C constante, então $\dot{x} = 1 - \frac{C}{x}$ e $\bar{x} = C$ é uma solução. Para analisar a estabilidade desta solução utilizamos a derivada de $h_1(x)$ em relação a x

$$h_1'(x) = \frac{C}{x^2}.$$

No ponto de interesse $\bar{x} = C$ temos que

$$\text{se } \begin{cases} C < 0 & h_1'(\bar{x}) < 0 & \therefore \bar{x} = C \text{ é estável} \\ C > 0 & h_1'(\bar{x}) > 0 & \therefore \bar{x} = C \text{ é instável.} \end{cases}$$

Considerando agora $g(t)$ uma função periódica definida como $g(t) = A \sin \omega t + B$ podemos estender os casos anteriores para

$$\text{se } \begin{cases} B + A < 0 & h_1'(\bar{x}) < 0 & \therefore \bar{x} = g(t) \text{ é estável} \\ B - A > 0 & h_1'(\bar{x}) > 0 & \therefore \bar{x} = g(t) \text{ é instável.} \end{cases}$$

Na figura 3.20 se pode observar uma única solução que corresponde a um ciclo limite instável. Notar que as trajetórias para diferentes condições iniciais se cortam no espaço de estados pois o sistema é forçado. Na figura 3.20-a é mostrada a resposta do sistema no domínio do tempo para diferentes condições iniciais junto com o sinal $g(t)$. Como conclusão, pode-se afirmar que a tentativa de controlar o boost impondo uma onda de tensão x_{2r} (seguimento de uma tensão de referência com erro nulo) deixa o sistema instável devido a que a corrente $x_1 = i_L$ estará fora de controle. Δ

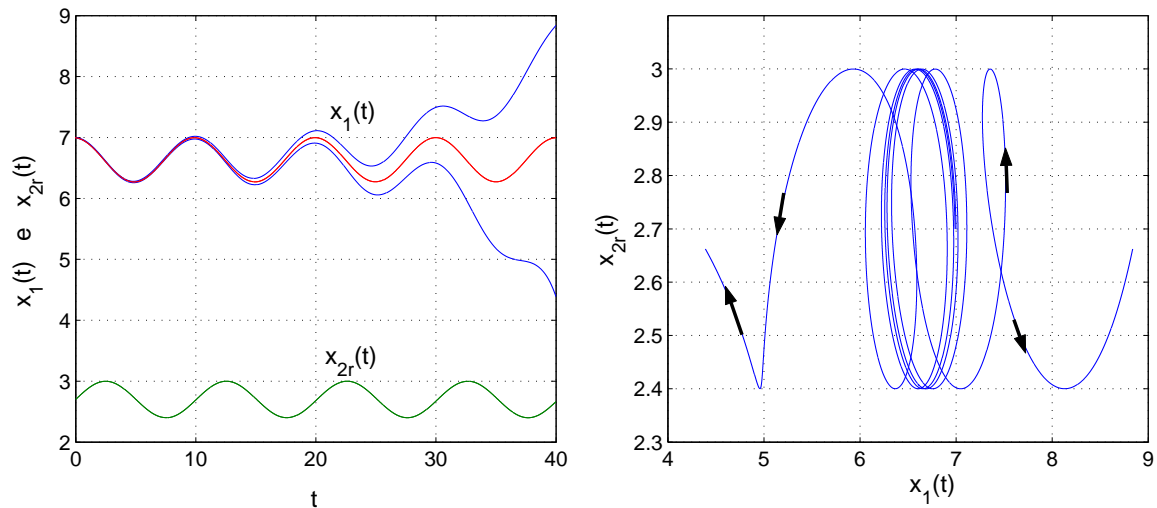


FIGURA 3.20: Dinâmica interna do boost controlado a partir da imposição de x_{2r} . (a) Evoluções de 3 sinais de $x_1(t)$ com condições iniciais ligeiramente diferentes, (b) evolução da trajetória dos estados no espaço de estados (x_1, x_2) .

3.4.4 Controle indireto da tensão y_2 através da corrente

O objetivo de controle é gerar uma tensão de saída y_2 através do controle da corrente y_1 . Para isto deve-se determinar a expressão matemática da corrente que gerará o sinal de tensão desejada y_2 .

Seja então

$$y_2^* = A \sin(\omega t) + B \quad (3.48)$$

o objetivo a ser alcançado, a expressão matemática do lado direito da equação da dinâmica interna (3.44) é

$$g(t) = y_2^*(\dot{y}_2^* + ay_2^*). \quad (3.49)$$

É importante observar que A e B são constantes normalizadas da amplitude e do nível médio da oscilação de saída, respectivamente. Estas constantes podem ser obtidas a partir de suas respectivas grandezas desnormalizadas através das trocas de variáveis (3.41) e (3.42).

Substituindo (3.48) em (3.49) chega-se a

$$g(t) = 2ABa \sin \omega t + AB\omega \cos \omega t + \frac{1}{2}A^2\omega \sin 2\omega t - \frac{1}{2}A^2a \cos 2\omega t + \frac{1}{2}A^2a + B^2a. \quad (3.50)$$

Vamos supor que

$$y_1^* = \alpha + \beta_1 \sin \omega t + \beta_2 \cos \omega t \quad (3.51)$$

que corresponde aos termos constante e primeiro termo da série de Fourier. Para calcular

o lado esquerdo da equação (3.44) fazemos

$$h(t) = y_1^*(1 - \dot{y}_1^*) = \alpha + (\alpha\beta_2\omega + \beta_1) \sin \omega t + (\beta_2 - \alpha\beta_1\omega) \cos \omega t + \frac{1}{2}\omega(\beta_2^2 - \beta_1^2) \sin 2\omega t - \beta_1\beta_2\omega \cos 2\omega t. \quad (3.52)$$

Igualando as equações (3.50) e (3.52), termo a termo, se tem que

- temos contínuos

$$\alpha - \frac{A^2a}{2} - B^2a = 0$$

- termos $\sin \omega t$

$$\alpha\beta_2\omega + \beta_1 - 2ABa = 0$$

- termos $\cos \omega t$

$$\beta_2 - \alpha\beta_1\omega - AB\omega = 0$$

- termos $\sin 2\omega t$

$$\frac{1}{2}\omega(\beta_2^2 - \beta_1^2) - \frac{1}{2}A^2\omega = 0$$

- termos $\cos 2\omega t$

$$-\beta_1\beta_2\omega + \frac{1}{2}A^2a = 0$$

Considerando apenas os termos contínuos, $\sin \omega t$ e $\cos \omega t$, com A , B e ω conhecidos e α , β_1 e β_2 como incógnitas do problema, tem-se que

$$\alpha = aB^2 + \frac{aA^2}{2} \quad (3.53)$$

$$\beta_1 = \frac{Aa(\omega A^3a + 8B + 2AB^2a\omega)}{4 + 4a^2B^4\omega^2 + 4a^2A^2B^2\omega^2 + a^2\omega^2A^4} \quad (3.54)$$

$$\beta_2 = \frac{2Aa(2A^2Ba\omega + 4Ba\omega - A)}{4 + 4a^2B^4\omega^2 + 4a^2A^2B^2\omega^2 + a^2\omega^2A^4}. \quad (3.55)$$

Desta forma se obtém uma aproximação de $y_1^* = \alpha + \beta_1 \sin \omega t + \beta_2 \cos \omega t$ que permite obter a tensão $y_2^* = A \sin \omega t + B$ desejada. O resultado anterior é aproximado já que foram desprezados os termos de maior ordem.

A condição básica que permite avaliar o efeito de se desprezar os termos de segunda ordem é que a relação das amplitudes de oscilação destes termos em relação aos de primeira ordem seja pequena, ou seja, a partir da expressão (3.50), devemos ter que

$$\underbrace{\sqrt{(2ABa)^2 + (AB\omega)^2}}_{\text{amplitude de oscilação dos termos de 1a ordem}} \gg \underbrace{\sqrt{\left(\frac{A^2\omega}{2}\right)^2 + \left(\frac{A^2a}{2}\right)^2}}_{\text{amplitude de oscilação dos termos de 2a ordem}}.$$

Pode-se verificar que a relação entre estas amplitudes é diretamente proporcional à quantidade de segunda harmônica introduzida na forma de onda de saída.

Na figura 3.21 estão representadas as formas de onda referentes ao termo esquerdo ($h(t)$) e direito ($g(t)$) da equação da dinâmica interna (3.44) onde se pode visualizar o erro devido aos termos em $\sin(2\omega t)$ e $\cos(2\omega t)$ não considerados na aproximação de y_1 . A forma de onda do erro possui uma frequência de $2\omega t$.

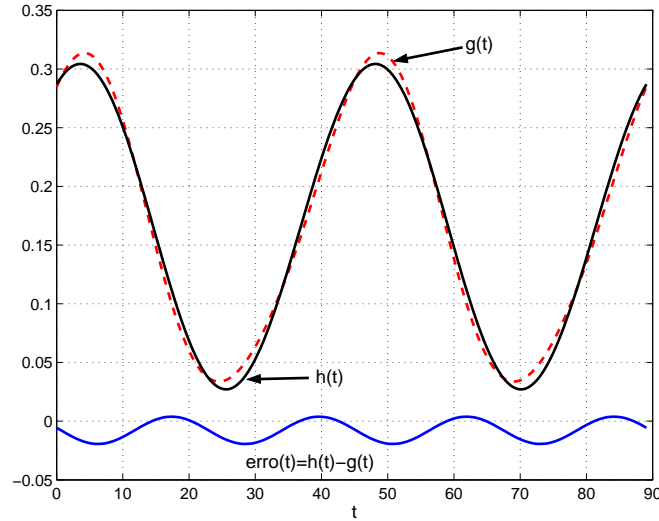


FIGURA 3.21: Formas de onda das expressões de $g(t)$ e $h(t)$ referentes à equação da dinâmica interna e o erro resultante.

As expressões (3.48) e (3.51) definem uma trajetória fechada no espaço de estados. Nos interessa determinar esta órbita periódica. Para isto, de (3.48) isola-se ωt :

$$\omega t = \arcsin\left(\frac{y_2^* - B}{A}\right). \quad (3.56)$$

Substituindo (3.56) na equação (3.51) se tem que

$$y_1^* = \alpha + \beta_1 \left(\frac{y_2^* - B}{A}\right) + \beta_2 \cos\left[\arcsin\left(\frac{y_2^* - B}{A}\right)\right]. \quad (3.57)$$

Aplicando a seguinte identidade trigonométrica em (3.57)

$$\cos[\arcsin(\gamma)] = \sqrt{1 - \gamma^2}$$

chega-se a

$$\cos\left[\arcsin\left(\frac{y_2^* - B}{A}\right)\right] = \sqrt{1 - \left(\frac{y_2^* - B}{A}\right)^2}. \quad (3.58)$$

Substituindo (3.58) em (3.57) e fazendo algumas operações matemáticas chega-se a

$$\frac{(y_1^* - \alpha)^2}{\beta_2^2} + \frac{(y_2^* - B)^2}{\frac{A^2\beta_2^2}{\beta_1^2 + \beta_2^2}} - \frac{2\beta_1}{A\beta_2^2}(y_1^* - \alpha)(y_2^* - B) = 1 \quad (3.59)$$

que é a equação de uma elipse centrada em (α, B) , com semi-eixos rotacionados.

Até este ponto, temos calculadas as constantes α , β_1 e β_2 que determinam a expressão da corrente y_1 que permite a obtenção da tensão de saída y_2 desejada. Entretanto, para se poder utilizar o método proposto no capítulo 2, é necessário aplicar algumas mudanças de variável de modo a conduzir o sistema à forma canônica de controle.

3.4.5 Forma canônica de controle

Seja o modelo normalizado do conversor boost

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = 1 - uy_2 \\ \dot{y}_2 = -ay_2 + uy_1 \end{cases} \quad (3.60)$$

com $y_1 = i_L \geq 0$, $y_2 = v_c \geq 0$ e $a = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$.

Busca-se, então, encontrar uma troca de variáveis que conduza o sistema (3.60) à forma

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= g(z_1, z_2) \\ \dot{z}_2 &= h(z_1, z_2) \end{aligned}$$

de maneira que a variável de controle u não apareça na função $g(z_1, z_2)$. Supondo que possamos escrever z_1 como uma combinação de duas funções, uma de y_1 e outra de y_2 , define-se

$$z_1 = \alpha_1 f_1(y_1) + \alpha_2 f_2(y_2).$$

Por simplicidade, $f_1(y_1)$ e $f_2(y_2)$ serão chamadas de f_1 e f_2 . Assim, a derivada de z_1 será

$$\dot{z}_1 = \alpha_1 \frac{\partial f_1}{\partial y_1} - \alpha_1 \frac{\partial f_1}{\partial y_1} uy_2 - \alpha_2 \frac{\partial f_2}{\partial y_2} ay_2 + \alpha_2 \frac{\partial f_2}{\partial y_2} uy_1.$$

Para eliminar o controle da função $g(z_1, z_2)$, os termos em u devem se anular. Isto implica que

$$\alpha_1 y_2 \frac{\partial f_1}{\partial y_1} = \alpha_2 y_1 \frac{\partial f_2}{\partial y_2}. \quad (3.61)$$

Fazendo $\frac{\partial f_1}{\partial y_1} = \alpha_2 y_1$ e $\frac{\partial f_2}{\partial y_2} = \alpha_1 y_2$ a identidade (3.61) se verifica. A integração destas soluções resulta

$$f_1 = \alpha_2 \frac{y_1^2}{2} + c_1 \quad \text{e} \quad f_2 = \alpha_1 \frac{y_2^2}{2} + c_2$$

onde o caso mais simples ocorre quando as constantes c_1 e c_2 são nulas e $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$. Deste modo, a troca de variável

$$z_1 = \frac{y_1^2 + y_2^2}{2} \quad (3.62)$$

resulta uma função $\dot{z}_1 = g(z_1, z_2)$ que não contém a variável u .

A mudança de variável que nos permite encontrar z_2 deriva desta primeira. Fazendo-se

$$\dot{z}_1 = z_2$$

e usando a eq. (3.62) obteremos

$$z_2 = y_1 - ay_2^2. \quad (3.63)$$

Realizando as mudanças de variáveis (3.62) e (3.63) pode-se levar o sistema à forma canônica de controle:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = 1 + 2a^2y_2^2 - y_2(1 + 2ay_1)u \end{cases} \quad (3.64)$$

onde

$$y_1 = f(z_1, z_2) = \frac{\sqrt{1 + 8a^2z_1 + 4az_2} - 1}{2a}$$

$$y_2 = \sqrt{\frac{y_1 - z_2}{a}}.$$

Mediante esta mudança de variáveis conseguimos eliminar a ação de controle da primeira equação.

Agora vamos encontrar a expressão de controle u que transforma o sistema (3.64) em um oscilador não-linear na forma

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 - \bar{z}_2 \\ \dot{z}_2 = -\omega^2(z_1 - \bar{z}_1)^2 - k\sigma(z)(z_2 - \bar{z}_2) \end{cases} \quad (3.65)$$

com $\sigma(z) = \omega^2(z_1 - \bar{z}_1)^2 + (z_2 - \bar{z}_2)^2 - \mu$.² Para isto, igualando-se as expressões de \dot{z}_2 de (3.64) e (3.65), obtém-se que

$$u = \frac{1 + 2a^2y_2^2 + k\sigma(z)(z_2 - \bar{z}_2) + \omega^2(z_1 - \bar{z}_1)^2}{y_2(1 + 2ay_1)} \quad (3.66)$$

sendo k um parâmetro de ajuste de convergência das trajetórias em torno do ciclo limite gerado.

Assim como visto na seção 3.2.3, observa-se que este grau de convergência é dependente do valor de $z_2 - \bar{z}_2$. A substituição $k = \rho/|z_2 - \bar{z}_2|$ ajuda a melhorar o desempenho do

²Aqui, por simplicidade, usa-se $\sigma(z)$ em lugar de $\sigma(z_1, z_2)$.

sistema nas regiões onde o valor de $z_2 - \bar{z}_2$ é pequeno e a manter um grau de convergência constante ao longo do ciclo limite.

Observa-se que a função $\sigma(z)$ ainda necessita da determinação da constante μ que é dependente das amplitudes das oscilações de z_1^* e z_2^* , conforme visto nas expressões (2.11) e (2.12) do capítulo 2. As expressões das oscilações de z_1^* e z_2^* podem ser obtidas aplicando-se as trocas de variáveis (3.62)-(3.63) ao objetivo de controle.

O objetivo de controle (3.48) foi definido para o sistema (3.60) no espaço de estados (y_1, y_2) . Portanto, deve-se aplicar a mudança de variáveis (3.62)-(3.63) a

$$\begin{aligned} y_2^* &= A \sin \omega t + B \\ y_1^* &= \alpha + \beta_1 \sin \omega t + \beta_2 \cos \omega t. \end{aligned} \quad (3.67)$$

Como resultado, obtém-se

$$\begin{aligned} z_2^* &= \alpha + \beta_1 \sin \omega t + \beta_2 \cos \omega t - a(A \sin \omega t + B)^2 \\ z_1^* &= \frac{1}{2} [(\alpha + \beta_1 \sin \omega t + \beta_2 \cos \omega t)^2 + (A \sin \omega t + B)^2] \end{aligned}$$

ou de forma expandida

$$\begin{aligned} z_1^* &= (\alpha\beta_1 + AB) \sin(\omega t) + \alpha\beta_2 \cos(\omega t) + \frac{\beta_1\beta_2}{2} \sin(2\omega t) + \frac{\beta_2^2 - \beta_1^2 - A^2}{4} \cos(2\omega t) \\ &\quad + \frac{2\alpha^2 + \beta_2^2 + A^2 + \beta_1^2 + 2B^2}{4} \end{aligned} \quad (3.68)$$

$$z_2^* = (\beta_1 - 2aAB) \sin(\omega t) + \beta_2 \cos(\omega t) + \frac{aA^2}{2} \cos(2\omega t) + \alpha - \frac{aA^2}{2} - aB^2. \quad (3.69)$$

Vale lembrar que os valores das constantes α , β_1 e β_2 são dados pelas expressões (3.53), (3.54) e (3.55). Desprezando-se os termos de segunda ordem, nota-se que as expressões de z_1^* e z_2^* estão na forma

$$z = a_0 + a_1 \sin \omega t + a_2 \cos \omega t$$

que pode ser reescrita na forma

$$z = a_0 + A_z \sin(\omega t + \varphi)$$

com $A_z = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.

Os termos contínuos das expressões (3.68)-(3.69) equivalem ao deslocamento do centro da elipse no espaço de estados (z_1, z_2) . São determinados por

$$\begin{aligned}\bar{z}_1 &= \frac{2\alpha^2 + \beta_2^2 + A^2 + \beta_1^2 + 2B^2}{4} \\ \bar{z}_2 &= \alpha - \frac{aA^2}{2} - aB^2.\end{aligned}\quad (3.70)$$

A amplitude de oscilação da forma de onda de z_1^* equivale a

$$A_z = \sqrt{(\alpha\beta_1 + AB)^2 + (\alpha\beta_2)^2}$$

e o valor da constante μ pode ser obtida de

$$\mu = \omega^2 A_z^2.$$

É útil verificar o grau do erro introduzido ao se desprezar os termos de segunda ordem comparando a amplitude de oscilação destes termos em relação aos termos de primeira ordem. Em outras palavras, a partir da equação (3.68), verificar que

$$\sqrt{(\alpha\beta_1 + AB)^2 + (\alpha\beta_2)^2} \gg \sqrt{\left(\frac{\beta_1\beta_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{\beta_2^2 - \beta_1^2 - A^2}{4}\right)^2}.$$

Agora que se tem a elipse $\sigma(z)$, se pode usar a entrada de controle u dada pela equação (3.66).

3.4.6 Troca de variáveis do sistema sem normalização

Uma outra forma de se obter os mesmos resultados de uma forma mais direta consiste em realizar a troca de variáveis sem passar pela etapa da normalização. Esta é uma forma que possibilita um número menor de cálculos em um microprocessador, caso este seja utilizado na implementação desta técnica de controle. Além disso, embora gere expressões um pouco maiores, ajuda a evitar problemas de má interpretação dos conceitos das seções anteriores principalmente devido à alteração na escala do tempo realizada na normalização.

Seja o sistema

$$\begin{cases} L\dot{x}_1 = -ux_2 + E \\ C\dot{x}_2 = ux_1 - \frac{x_2}{R} \end{cases}\quad (3.71)$$

onde $x_1 = i_L$ e $x_2 = v_c$ são os estados. Partindo-se do objetivo

$$x_2^* = A \sin \omega t + B \quad (3.72)$$

pode-se encontrar a expressão da corrente na forma

$$x_1^* = \alpha + \beta_1 \sin \omega t + \beta_2 \cos \omega t \quad (3.73)$$

onde α , β_1 e β_2 são coeficientes determinados a partir da equação da dinâmica interna, aqui representada por³

$$Rx_1 (E - L\dot{x}_1) = x_2 (x_2 + RC\dot{x}_2). \quad (3.74)$$

Substituindo-se (3.72) e (3.73) na equação (3.74), expandindo-a e agrupando os termos em seno e cosseno chega-se a

$$\begin{aligned} 0 = & (2AB - RE\beta_1 - RL\alpha\beta_2\omega) \sin(\omega t) + (RCAB\omega - RE\beta_2 + RL\alpha\beta_1\omega) \cos(\omega t) \\ & + \left(\frac{RCA^2\omega}{2} - \frac{RL\beta_2^2\omega}{2} + \frac{RL\beta_1^2\omega}{2} \right) \sin(2\omega t) + \left(RL\beta_1\beta_2\omega - \frac{A^2}{2} \right) \cos(2\omega t) \\ & + B^2 + \frac{A^2}{2} - RE\alpha. \end{aligned}$$

Desprezando-se os termos de segunda ordem, a resolução do sistema formado pelos termos constante, seno e cosseno conduz às soluções:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{A^2 + 2B^2}{2RE} \\ \beta_1 &= \frac{2REAB(2LCB^2\omega^2 + LCA^2\omega^2 - 4E^2)}{4R^2E^4 + 4L^2\omega^2B^4 + 4L^2\omega^2B^2A^2 + L^2\omega^2A^4} \\ \beta_2 &= \frac{4EAB\omega(R^2CE^2 + LA^2 + 2LB^2)}{4R^2E^4 + 4L^2\omega^2B^4 + 4L^2\omega^2B^2A^2 + L^2\omega^2A^4}. \end{aligned}$$

A condição básica que nos permite avaliar o erro introduzido ao se desprezar os termos de segunda ordem é

$$\sqrt{(2AB)^2 + (RCAB\omega)^2} \gg \sqrt{\left(\frac{RCA^2\omega}{2}\right)^2 + \left(\frac{A^2}{2}\right)^2}.$$

A mudança de variáveis proposta é

$$z_1 = \frac{Lx_1^2 + Cx_2^2}{2C} \quad (3.75)$$

$$z_2 = \frac{REx_1 - x_2^2}{RC}. \quad (3.76)$$

³A obtenção desta expressão consiste em isolar o controle u em uma das expressões de (3.71) e substituir na outra, como foi feito na seção 3.4.3.

Esta mudança nos permite transformar o sistema (3.71) em outro sistema na forma

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = \frac{(2Lx_1 - RCE) Rux_2 + R^2CE^2 + 2Lx_2^2}{R^2C^2L} \end{cases}$$

Esta é a forma canônica de controle. A equivalência deste sistema com o oscilador não-linear

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 - \bar{z}_2 \\ \dot{z}_2 = -\omega^2(z_1 - \bar{z}_1)^2 - k\sigma(z)(z_2 - \bar{z}_2) \end{cases}$$

com

$$\sigma(z) = \frac{(z_1 - \bar{z}_1)^2}{A_{z1}^2} + \frac{(z_2 - \bar{z}_2)^2}{A_{z2}^2} - 1$$

nos possibilita obter a expressão do controle

$$u = \frac{R^2E^2C + 2Lx_2^2 + R^2C^2L [\omega^2(z_1 - \bar{z}_1) + k\sigma(z)(z_2 - \bar{z}_2)]}{Rx_2(REC + 2Lx_1)}$$

Assim como visto na seção 3.2.3, observa-se que este grau de convergência é dependente do valor de $z_2 - \bar{z}_2$. A substituição $k = \rho/|z_2 - \bar{z}_2|$ ajuda a melhorar o desempenho do sistema nas regiões onde o valor de $z_2 - \bar{z}_2$ é pequeno e a manter um grau de convergência constante ao longo do ciclo limite.

A_{z1} e A_{z2} representam as amplitudes das oscilações de z_1^* e z_2^* . Estas amplitudes podem ser obtidas tomando-se os objetivos de controle (3.72) e (3.73) e realizando as trocas de variáveis (3.75)-(3.76). Fazendo isto, obtemos

$$\begin{aligned} z_1^* &= \frac{L\alpha\beta_1 - CAB}{C} \sin(\omega t) + \frac{L\alpha\beta_2}{C} \cos(\omega t) + \frac{L\beta_1\beta_2}{C} \sin(2\omega t) + \frac{L\beta_2^2 - L\beta_1^2 - A^2C}{4C} \cos(2\omega t) \\ &\quad + \frac{2L\alpha^2 + \beta_2^2L + A^2C + L\beta_1^2 + 2B^2C}{4C} \\ z_2^* &= \frac{2RE\beta_1 - 4AB}{2RC} \sin(\omega t) + \frac{E\beta_2}{C} \cos(\omega t) + \frac{A^2}{2RC} \cos(2\omega t) + \frac{2RE\alpha - A^2 - 2B^2}{2RC} \end{aligned}$$

Desprezando os termos de segunda ordem, nota-se que as expressões estão na forma

$$\begin{aligned} z_1^* &= a_0 + a_1 \sin \omega t + a_2 \cos \omega t \\ z_2^* &= b_0 + b_1 \sin \omega t + b_2 \cos \omega t. \end{aligned}$$

Pode-se, então, verificar que as amplitudes de oscilação de z_1 e z_2 são dadas por

$$A_{z_1}^2 = a_1^2 + a_2^2 = \left(\frac{L\alpha\beta_1 - CAB}{C} \right)^2 + \left(\frac{L\alpha\beta_2}{C} \right)^2$$

$$A_{z_2}^2 = b_1^2 + b_2^2 = \left(\frac{2RE\beta_1 - 4AB}{2RC} \right)^2 + \left(\frac{E\beta_2}{C} \right)^2$$

e os níveis contínuos somados às oscilações por

$$\bar{z}_1 = \frac{2L\alpha^2 + \beta_2^2 L + A^2 C + L\beta_1^2 + 2B^2 C}{4C}$$

$$\bar{z}_2 = \frac{2RE\alpha - A^2 - 2B^2}{2RC}.$$

3.4.7 Resultados de simulação

Os parâmetros do conversor boost são $L = 1,4 \text{ mH}$, $C = 100 \mu\text{F}$, alimentado por uma tensão de entrada $E = 48 \text{ V}$ com uma carga $R = 100 \Omega$. Disto resulta que $a = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = 0,0374$.

O objetivo é gerar uma tensão de saída senoidal, com amplitude $A = 20 \text{ V}$ somada a um nível contínuo $B = 100 \text{ V}$ com frequência $f = 60 \text{ Hz}$. Isto deverá ser obtido através do controle indireto da tensão a partir do controle da corrente, cujos parâmetros foram calculados como sendo $\alpha = 2,125$, $\beta_1 = 0,7962$ e $\beta_2 = 1,5894$. Deste modo, temos

$$x_2^* = 20 \sin(377t) + 100$$

$$x_1^* = 2,125 + 0,7962 \sin(377t) + 1,5894 \cos(377t).$$

No controlador, a função $\sigma(z)$ está definida como

$$\sigma(z) = \frac{(z_1 - \bar{z}_1)^2}{A_{z_1}^2} + \frac{(z_2 - \bar{z}_2)^2}{A_{z_2}^2} - \mu$$

com

$$A_{z_1}^2 = \left(\frac{L\alpha\beta_1 + CAB}{C} \right)^2 + \left(\frac{L\alpha\beta_2}{C} \right)^2 = 4,0975 \cdot 10^6$$

$$A_{z_2}^2 = \left(\frac{2RE\beta_1 - 4AB}{2RC} \right)^2 + \left(\frac{E\beta_2}{C} \right)^2 = 5,8235 \cdot 10^{11}$$

$$\bar{z}_1 = \frac{2L\alpha^2 + L\beta_2^2 + A^2 C + L\beta_1^2 + 2B^2 C}{4C} = 5142,7$$

$$\bar{z}_2 = 0$$

$$\mu = 1$$

e a lei de controle definida como

$$u = \frac{R^2 E^2 C + 2Lx_2^2 + R^2 C^2 L [\omega^2 (z_1 - \bar{z}_1) + \rho \sigma(z) \operatorname{sgn}(z_2 - \bar{z}_2)]}{Rx_2 (REC + 2Lx_1)}$$

A constante que estabelece o grau de atratividade da elipse $\sigma(z) = 0$ foi definida como $\rho = 1 \cdot 10^9$.

Para que o erro seja pequeno ao se desprezar os termos de segunda ordem, a amplitude de oscilação dada pelos termos de primeira ordem deve ser bem maior que a amplitude de oscilação dos termos de segunda ordem

$$\sqrt{(2AB)^2 + (RCAB\omega)^2} \gg \sqrt{\left(\frac{RCA^2\omega}{2}\right)^2 + \left(\frac{A^2}{2}\right)^2}$$

O lado esquerdo resulta no valor 8535 e o direito no valor 780. Isto significa que a amplitude dos termos de segunda ordem desprezados representam 9,1% da amplitude dos termos de primeira ordem. Esta é a ordem de magnitude que se pode esperar da segunda harmônica presente no sinal de tensão de saída.

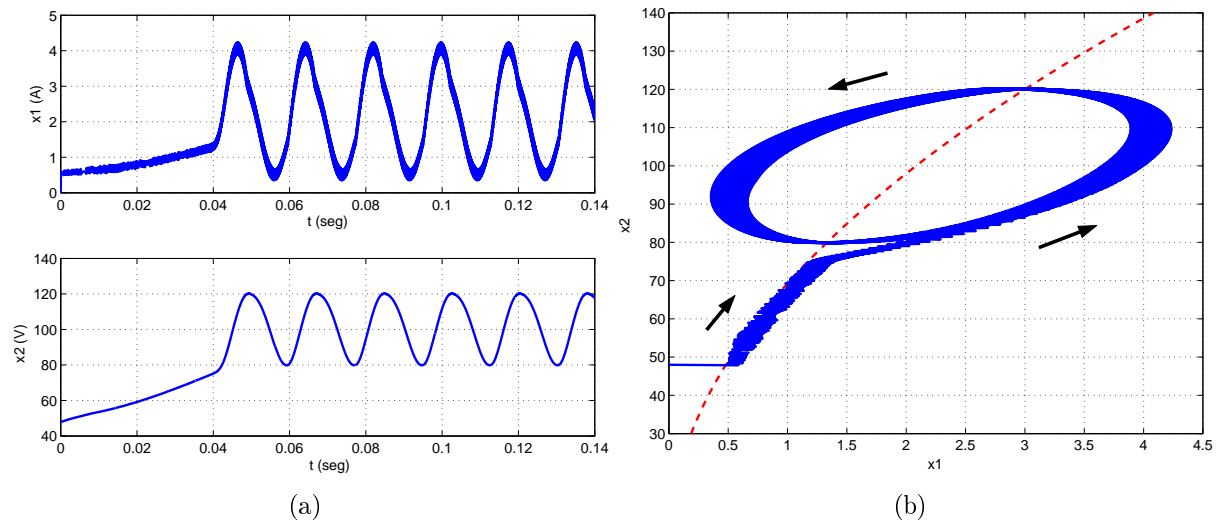


FIGURA 3.22: (a) Formas de onda da corrente no indutor (x_1) e da tensão de saída (x_2) no tempo. (b) Diagrama de estados (x_1, x_2) mostrando a trajetória inicial e a elipse formada pela oscilação dos estados centrada na curva de equilíbrios.

Como resultados da simulação, as formas de onda dos estados representados pela corrente no indutor (x_1) e pela tensão de saída (x_2) são mostradas na figura 3.22-a. Pode-se notar que a forma de onda de tensão aparece um pouco deformada em razão da presença de uma segunda harmônica que é conseqüência dos termos de segunda ordem desprezados. Na figura 3.22-b é mostrado o diagrama de estados formado por estes dois estados. Pode-se notar o ciclo limite gerado pela ação de controle, que no plano (x_1, x_2) apresenta uma forma um pouco deformada pelo fato de que a relação entre os estados não

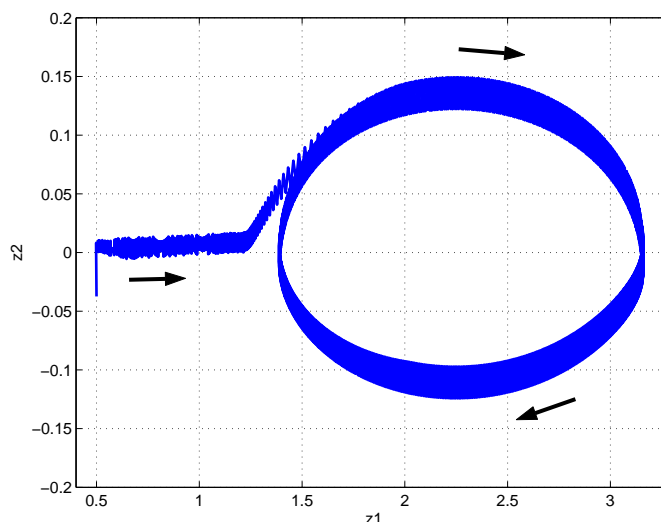


FIGURA 3.23: Diagrama de estados (z_1, z_2) .

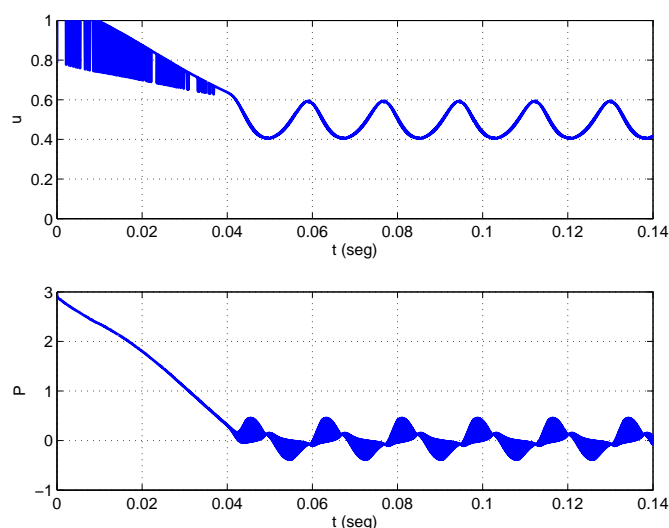


FIGURA 3.24: Evolução do sinal de controle u e da função $\sigma(z)$.

é linear. Já no plano (z_1, z_2) , como mostrado na figura 4.19, a relação entre os estados é linear e, por isto, o ciclo limite apresenta a forma de uma elipse não deformada e não rotacionada.

Finalmente, na figura 3.24 são apresentadas as formas de onda do sinal de controle responsável por gerar a oscilação senoidal de saída assim como da função $\sigma(z)$, que faz parte do controle e deve tender a zero.

3.5 Controle de oscilações em um inversor

Nesta seção será aplicado o método proposto no capítulo 2 para a geração de uma saída oscilatória em um inversor monofásico. Esta geração é obtida sem a utilização de nenhum sinal de referência. O modelo do inversor é igual ao modelo do conversor buck, com a

diferença de que aqui a variável de controle discreta pode assumir os valores $q \in \{-1, 1\}$ (vide apêndice B).

A figura 3.25 mostra o circuito de um inversor monofásico ponte completa. Nesta configuração é possível gerar uma tensão de saída entre $-E < V_o < +E$.

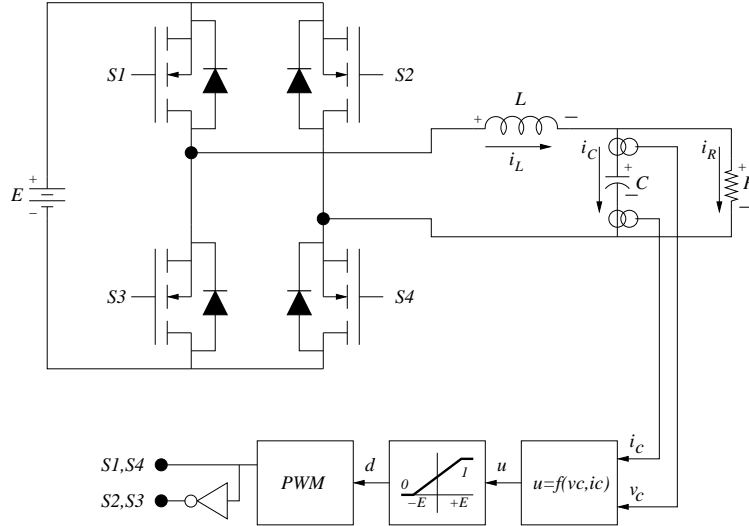


FIGURA 3.25: Circuito inversor em ponte completa.

O sistema deste inversor é descrito pelas equações:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{1}{LC}x_1 - \frac{1}{RC}x_2 + \frac{1}{LC}u. \end{cases} \quad (3.77)$$

onde $x_1 = v_c$ é a tensão no capacitor, $x_2 = i_c/C$ é a corrente no capacitor (dividida pela capacitância C) e $u = qE$ com $q \in \{-1; 1\}$ é o controle. A variável q é definida como

$$\begin{aligned} q &= -1 && \text{quando } S1, S4:\text{OFF e } S2, S3:\text{ON} \\ q &= 1 && \text{quando } S1, S4:\text{ON e } S2, S3:\text{OFF}. \end{aligned}$$

O motivo de escolher a corrente sobre o capacitor como o estado x_2 se deve ao fato desta variável não depender da carga, além de manter uma relação direta com a derivada da tensão de saída.

3.5.1 Objetivo e lei de controle

O objetivo é gerar uma tensão de saída senoidal com amplitude A e frequência ω pré-estabelecidos dada por

$$v_c = A \sin \omega t.$$

Sua derivada é proporcional à corrente no capacitor e deve ser

$$\frac{i_c}{C} = \frac{dv_c}{dt} = \omega A \cos \omega t.$$

Sendo $x_1 = v_c$ e $x_2 = \frac{i_c}{C}$ as variáveis de estado, o seu traçado no plano de estados corresponde à elipse

$$\frac{x_1^2}{A^2} + \frac{x_2^2}{\omega^2 A^2} = 1.$$

A partir disto, define-se a função $P(x)$ como sendo

$$P(x) = \frac{x_1^2}{A^2} + \frac{x_2^2}{\omega^2 A^2} - 1, \quad (3.78)$$

ou, de forma normalizada,

$$\sigma(x) = \omega^2 x_1^2 + x_2^2 - \omega^2 A^2.$$

Definindo-se, agora, uma função $g(u)$ de modo que, a partir do sistema (3.77), se tenha

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{1}{LC}x_1 + g(u) \end{cases}$$

pode-se obter uma expressão para a entrada de controle u que permita obter um oscilador não-linear similar ao sistema (2.14). Para isso, faz-se

$$u = LC \left[\frac{1}{RC}x_2 - k\sigma(x)x_2 \right]. \quad (3.79)$$

Pode-se, também, obter uma expressão para u de modo a obter um oscilador em modos deslizantes similar ao sistema (2.18), fazendo

$$u = LC \left[\frac{1}{RC}x_2 - k \operatorname{sgn}(\sigma(x))x_2 \right]. \quad (3.80)$$

Observa-se que a diferença entre as duas formas de controle é que no oscilador não-linear usa-se $\sigma(x)$ e no oscilador por modos deslizantes usa-se $\operatorname{sgn}(\sigma(x))$. Observa-se, também, que o primeiro termo desta lei de controle $LC \frac{1}{RC}x_2$ é um termo de cancelamento e tem a função de anular o termo $-\frac{1}{RC}x_2$ de \dot{x}_2 do sistema (3.77).

O segundo termo da lei de controle u é dependente de x_2 , o que não é desejável, pois a atratividade da superfície fica muito pequena quando x_2 é pequeno. Se, então, considerarmos $k = \frac{\rho}{LC|x_2|}$, como visto na seção 2.5 do capítulo 2, obtém-se um melhor desempenho no seguimento da trajetória $\sigma(x) = 0$. Pode-se agora observar que ρ passa a ser a constante de ganho e que a atratividade não depende mais do valor de x_2 . Deste

modo, obteremos

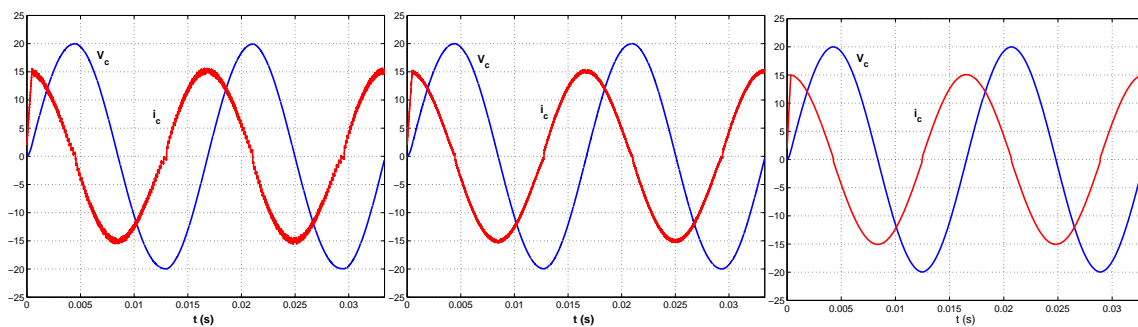
$$u = \frac{L}{RC}Cx_2 - \rho \sigma(x)\text{sgn}(x_2) \quad (\text{p/ osc. não linear}) \quad (3.81)$$

$$u = \frac{L}{RC}Cx_2 - \rho \text{sgn}(\sigma(x))\text{sgn}(x_2) \quad (\text{p/ osc. modo deslizante}) \quad (3.82)$$

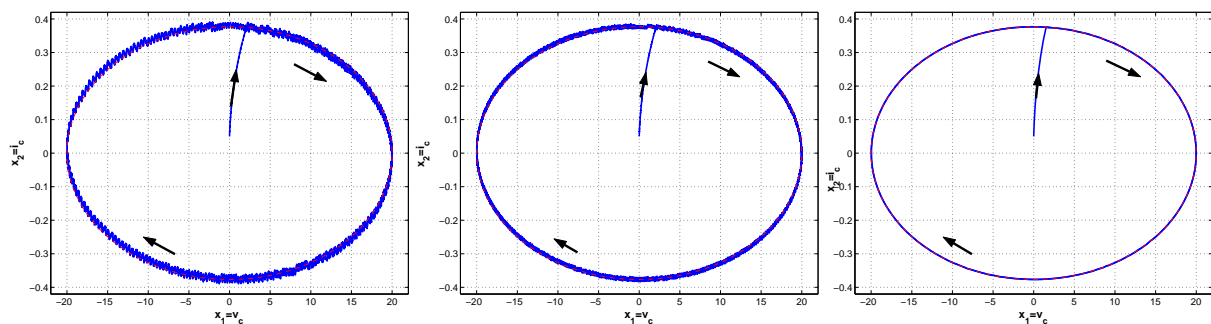
lembrando que $Cx_2 = i_c$ e $\text{sgn}(x_2) = \text{sgn}(i_c)$. Desta maneira, o segundo termo da lei de controle não é mais dependente do valor de x_2 , apenas do seu sinal.

3.5.2 Resultados de simulação

As especificações do projeto são a obtenção de uma saída oscilatória com amplitude 20V e frequência de 60Hz. Os parâmetros do inversor buck considerado são: $E = 30\text{V}$, $L = 30\mu\text{H}$, $C = 50\mu\text{F}$. As simulações foram realizadas para diferentes frequências de operação: PWM a 50 KHz, PWM a 100 KHz e modo deslizante a aproximadamente 1 MHz. Durante a simulação foi realizada uma variação de carga de 30% sobre a carga nominal $R = 100\Omega$. Os resultados são mostrados na figura 3.26.



(a) v_c e i_c com PWM a 50 KHz. (b) v_c e i_c com PWM a 100 KHz. (c) v_c e i_c em modos deslizantes a 1 MHz.



(d) $v_c \times i_c$ com PWM a 50 KHz. (e) $v_c \times i_c$ com PWM a 100 KHz. (f) $v_c \times i_c$ em modos deslizantes a 1 MHz.

FIGURA 3.26: Formas de onda de tensão e corrente considerando diferentes frequências e modos de operação.

Apesar da lei de controle utilizada possuir a informação da carga $R = 100\Omega$, o sistema é capaz de operar satisfatoriamente com uma carga diferente ($R = 70\Omega$) e de se recuperar

das perturbações de carga representadas pelas transições da mesma.

Os resultados também demonstram que, para frequências de operação mais altas, a resposta do sistema controlado fica mais próxima do ideal.

3.6 Controle de oscilações em um conversor duplo boost

Um único conversor boost só pode gerar uma tensão de saída positiva e maior que a tensão de entrada. Com estas características este conversor não pode ser usado como inversor pois, mesmo que se consiga gerar uma saída oscilatória senoidal, haveria sempre um nível de tensão contínuo somado a esta senoidal. Uma possível solução para este problema do nível contínuo consiste em usar um conversor duplo boost com a carga conectada em ponte entre as saídas de cada conversor, onde a tensão de saída sobre a carga não possui o nível contínuo. A tensão oscilante máxima sobre a carga é obtida com uma defasagem de 180 graus entre as saídas dos conversores (Cáceres and Barbi, 1999). Entretanto, a obtenção desta defasagem não é uma tarefa trivial. Uma das maneiras de se obter esta defasagem é através do emprego de uma malha de sincronismo de fase (PLL) (Hsieh and Hung, 1996).

3.6.1 Modelo do circuito duplo-boost

A topologia do conversor é apresentada na figura 3.27. O seu comportamento dinâmico

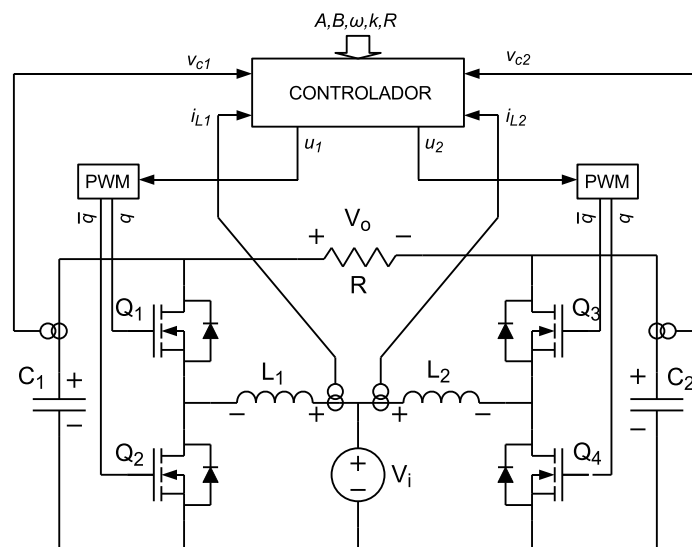


FIGURA 3.27: Topologia do conversor duplo-boost com a carga em ponte.

pode ser descrito pelo modelo por variáveis médias dado por

$$L_1 \dot{x}_1 = -u_1 x_2 + V_{in} \quad (3.83)$$

$$C_1 \dot{x}_2 = u_1 x_1 - \frac{1}{R} (x_2 - x_4) \quad (3.84)$$

$$L_2 \dot{x}_3 = -u_2 x_4 + V_{in} \quad (3.85)$$

$$C_2 \dot{x}_4 = u_2 x_3 - \frac{1}{R} (x_4 - x_2) \quad (3.86)$$

onde $x_1 = i_{L_1}$, $x_2 = v_{C_1}$, $x_3 = i_{L_2}$ e $x_4 = v_{C_2}$ são os estados e $u_i = \frac{1}{T} \int_{kT}^{(k+1)T} [1 - q_i(t)] dt$, com $i = 1, 2$, são as entradas de controle considerado o valor médio em relação às variáveis discretas q_i em cada período de comutação T , de modo que $0 \leq u_i \leq 1$ são entradas contínuas e $q_i \in \{0, 1\}$ são entradas discretas que podem assumir apenas dois valores. Observe que o modelo do conversor duplo boost é baseado nas equações do conversor boost (apêndice B).

Das equações (3.83) e (3.84) pode-se eliminar o controle u_1 conduzindo a

$$x_1 (-L_1 \dot{x}_1 + V_{in}) = x_2 \left(C_1 \dot{x}_2 + \frac{x_2 - x_4}{R} \right). \quad (3.87)$$

Do mesmo modo, de (3.85) e (3.86) pode-se eliminar u_2 e chegar a

$$x_3 (-L_2 \dot{x}_3 + V_{in}) = x_4 \left(C_2 \dot{x}_4 + \frac{x_4 - x_2}{R} \right). \quad (3.88)$$

A equação (3.87) estabelece uma relação diferencial entre as variáveis de estado x_1 e x_2 que descreve o comportamento intrínseco do sistema independentemente do controle aplicado, também conhecida como *equação da dinâmica interna do sistema*, como já visto na seção 3.4.3. O mesmo ocorre com a equação (3.88) para as variáveis de estado x_3 e x_4 .

Como simplificação, serão adotados a partir de agora que $L_1 = L_2$, sendo referido apenas como L , assim como $C_1 = C_2$, sendo referido apenas como C .

A seguir, busca-se uma troca de variáveis que permita conduzir o sistema (3.83)-(3.84) à forma

$$\dot{z}_1 = g(z_1, z_2)$$

$$\dot{z}_2 = h(z_1, z_2)$$

de maneira que a variável de controle u_1 não apareça na função $g(z_1, z_2)$. Aqui não é necessário analisar todas as quatro equações do duplo boost, apenas as duas primeiras, que descrevem o comportamento do primeiro boost, pois a conclusão será válida para ambos. Supondo, então, que possamos escrever z_1 como uma combinação de duas funções,

uma de x_1 e outra de x_2 , define-se

$$z_1 = \alpha_1 f_1(x_1) + \alpha_2 f_2(x_2).$$

Por simplicidade, $f_1(x_1)$ e $f_2(x_2)$ serão chamadas de f_1 e f_2 . Assim, a derivada de z_1 será

$$\dot{z}_1 = -\frac{\alpha_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} u_1 x_2}{L} + \frac{\alpha_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} V_{in}}{L} + \frac{\alpha_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_2} u_1 x_1}{C} - \frac{\alpha_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_2} (x_2 - x_4)}{RC}$$

Os termos em u_1 devem se anular. Isto implica que

$$\frac{\alpha_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} x_2}{L} = \frac{\alpha_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_2} x_1}{C}. \quad (3.89)$$

Fazendo $\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = \alpha_2 L x_1$ e $\frac{\partial f_2}{\partial x_2} = \alpha_1 C x_2$ a identidade (3.89) se verifica. A simples integração de destas soluções resulta

$$f_1 = \frac{\alpha_2 L (x_1)^2}{2} + c_1 \quad \text{e} \quad f_2 = \frac{\alpha_1 C (x_2)^2}{2} + c_2$$

onde o caso mais simples ocorre quando as constantes são nulas e $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$. Deste modo, a transformação

$$z_1 = \frac{L (x_1)^2 + C (x_2)^2}{2} \quad (3.90)$$

não conterá a variável u_1 .

A mudança de variável que nos permite encontrar z_2 deriva desta primeira. Fazendo-se

$$\dot{z}_1 = z_2$$

e usando a eq. (3.90) obteremos

$$z_2 = V_{in} x_1 - \frac{1}{R} (x_2 - x_4) x_2. \quad (3.91)$$

Derivando-se esta expressão tem-se

$$\begin{aligned} \dot{z}_2 = & \left[(-V_{in} R^2 C x_2 - 2RLx_1 x_2 + RLx_1 x_2) u_1 + 2Lx_2^2 - 3Lx_2 x_4 + Lx_4^2 \right. \\ & \left. + RLCx_2 \dot{x}_4 + V_{in}^2 R^2 C \right] \cdot \frac{1}{R^2 LC} \end{aligned}$$

Da mesma forma, repetimos os procedimentos anteriores para obter \dot{z}_3 e \dot{z}_4 . O sistema

resultante fica sendo

$$\dot{z}_1 = z_2 \quad (3.92)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_2 = & \left[(-V_{in}R^2Cx_2 - 2RLx_1x_2 + RLx_1x_4)u_1 + 2Lx_2^2 - 3Lx_2x_4 + Lx_4^2 \right. \\ & \left. + RLCx_2\dot{x}_4 + V_{in}^2R^2C \right] \cdot \frac{1}{R^2LC} \end{aligned} \quad (3.93)$$

$$\dot{z}_3 = z_4 \quad (3.94)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_4 = & \left[(-V_{in}R^2Cx_4 - 2RLx_3x_4 + RLx_3x_2)u_2 + 2Lx_4^2 - 3Lx_2x_4 + Lx_2^2 \right. \\ & \left. + RLCx_4\dot{x}_2 + V_{in}^2R^2C \right] \cdot \frac{1}{R^2LC}. \end{aligned} \quad (3.95)$$

A idéia básica consiste em transformar o sistema (3.92)-(3.95) através das ações de controle u_1 e u_2 em um oscilador não-linear autônomo (Pagano et al., 2005) dado por

$$\dot{z}_1 = z_2 \quad (3.96)$$

$$\dot{z}_2 = -\omega^2(z_1 - \bar{z}_1) - kS_1(z_2 - \bar{z}_2) \quad (3.97)$$

$$\dot{z}_3 = z_4 \quad (3.98)$$

$$\dot{z}_4 = -\omega^2(z_3 - \bar{z}_3) - kS_2(z_4 - \bar{z}_4) \quad (3.99)$$

onde as funções S_1 e S_2 são elipses que determinam o objetivo desejado, as quais são dadas por

$$S_1 = \omega^2(z_1 - \bar{z}_1)^2 + (z_2 - \bar{z}_2)^2 - \mu \quad (3.100)$$

$$S_2 = \omega^2(z_3 - \bar{z}_3)^2 + (z_4 - \bar{z}_4)^2 - \mu \quad (3.101)$$

onde ω é a frequência de oscilação, k é um parâmetro que define o grau de atratividade das trajetórias em torno das elipses e μ determina a escala das elipses.

As funções S_i , com $i = 1, 2$, são funções tais que

- em $S_i = 0$ descrevem uma elipse, que é o objetivo de oscilação do sistema;
- em $S_i > 0$ a trajetória de estados encontra-se fora da elipse. De acordo com as eqs. (3.97) e (3.99), isto provoca a atenuação da amplitude de oscilação;
- em $S_i < 0$ a trajetória de estados encontra-se dentro da elipse, o que provoca o incremento da amplitude de oscilação.

3.6.2 Projeto do controlador

As ações de controle u_1 e u_2 permitem que o sistema (3.92)-(3.95) se comporte dinamicamente como o sistema (3.96)-(3.99). Estas ações de controle são obtidas igualando-se as

eqs. (3.97) e (3.93), resultando

$$u_1 = \left\{ R^2 LC [-\omega^2 (z_1 - \bar{z}_1) - kS_1 (z_2 - \bar{z}_2)] - 2Lx_2^2 + 3Lx_2x_4 - Lx_4^2 - RLCx_2\dot{x}_4 - V_{in}^2 R^2 C \right\} / \left(-V_{in} R^2 C x_2 - 2RLx_1x_2 + RLx_1x_4 \right) \quad (3.102)$$

e, da mesma forma, igualando-se (3.99) e (3.95), resultando

$$u_2 = \left\{ R^2 LC [-\omega^2 (z_3 - \bar{z}_3) - kS_2 (z_4 - \bar{z}_4)] - 2Lx_4^2 + 3Lx_2x_4 - Lx_2^2 - RLCx_4\dot{x}_2 - V_{in}^2 R^2 C \right\} / \left(-V_{in} R^2 C x_4 - 2RLx_3x_4 + RLx_3x_2 \right). \quad (3.103)$$

Em uma segunda etapa do projeto, é necessário definir as elipses S_1 e S_2 . Para isto, os objetivos de controle são definidos como

$$x_2^* = A \sin(\omega t) + B \quad (3.104)$$

$$x_4^* = A \sin(\omega t + \pi) + B. \quad (3.105)$$

Olm (2003) mostra que o controle da tensão de saída deve ser realizado de forma indireta sobre a corrente. Desta forma, se busca encontrar a forma de onda de corrente apropriada que seja capaz de gerar tais objetivos através da relação entre tensão e corrente em cada boost dadas pelas equações da dinâmica interna (3.87) e (3.88). Entretanto, a solução destas equações não é trivial. Uma solução prática consiste em supor que estas correntes tenham as seguintes expressões:

$$x_1^* = \alpha + \beta_1 \sin \omega t + \beta_2 \cos \omega t \quad (3.106)$$

$$x_3^* = \alpha + \beta_1 \sin(\omega t + \pi) + \beta_2 \cos(\omega t + \pi). \quad (3.107)$$

O controle da fase entre as duas formas de onda é feito através de um PLL Hsieh and Hung (1996).

Substituindo (3.104) e (3.106) em (3.87) tem-se

$$(A \sin \omega t + B) (2A \sin \omega t + RCA\omega \cos \omega t) = R[-L(\beta_1 \omega \cos \omega t - \beta_2 \omega \sin \omega t) + V_{in}] \cdot (\alpha + \beta_1 \sin \omega t + \beta_2 \cos \omega t).$$

Desenvolvendo esta expressão, igualando os termos constante, $\sin \omega t$ e $\cos \omega t$ e desprezando

os termos de segunda ordem se pode determinar os coeficientes α , β_1 e β_2 :

$$\alpha = \frac{A^2}{RV_{in}} \quad (3.108)$$

$$\beta_1 = \frac{V_{in}AB\omega(R^2CV_{in}^2 + 2LA^2)}{R^2V_{in}^4 + L^2A^4\omega^2} \quad (3.109)$$

$$\beta_2 = \frac{RV_{in}AB(2V_{in}^2 - LCA^2\omega^2)}{R^2V_{in}^4 + L^2A^4\omega^2}. \quad (3.110)$$

A substituição de (3.105) e (3.107) em (3.88) leva ao mesmo resultado, com senos e cossenos defasados 180 graus.

Tomando-se as formas de onda desejadas (3.104), (3.105), (3.106) e (3.107), realizando as operações de troca de variáveis (3.90) e (3.91) e desprezando os termos de segunda ordem, chega-se a

$$z_1^* = (L\alpha\beta_1 + CAB) \sin(\omega t) + L\alpha\beta_2 \cos(\omega t) + \frac{2L\alpha^2 + L\beta_2^2 + CA^2 + L\beta_1^2 + 2CB^2}{4} \quad (3.111)$$

$$z_2^* = \frac{RV_{in}\beta_1 - 2BA}{R} \sin(\omega t) + V_{in}\beta_2 \cos(\omega t) + \frac{RV_{in}\alpha - A^2}{R} \quad (3.112)$$

$$z_3^* = (L\alpha\beta_1 + CAB) \sin(\omega t + \pi) + L\alpha\beta_2 \cos(\omega t + \pi) + \frac{2L\alpha^2 + L\beta_2^2 + CA^2 + L\beta_1^2 + 2CB^2}{4} \quad (3.113)$$

$$z_4^* = \frac{RV_{in}\beta_1 - 2BA}{R} \sin(\omega t + \pi) + V_{in}\beta_2 \cos(\omega t + \pi) + \frac{RV_{in}\alpha - A^2}{R}. \quad (3.114)$$

Cada uma das expressões acima possui um termo contínuo constante somado aos termos puramente oscilatórios em seno e cosseno, que equivale a

$$\begin{aligned} \bar{z}_1 &= \frac{2L\alpha^2 + L\beta_2^2 + CA^2 + L\beta_1^2 + 2CB^2}{4} \\ \bar{z}_2 &= \frac{RV_{in}\alpha - A^2}{R} \\ \bar{z}_3 &= \frac{2L\alpha^2 + L\beta_2^2 + CA^2 + L\beta_1^2 + 2CB^2}{4} \\ \bar{z}_4 &= \frac{RV_{in}\alpha - A^2}{R}. \end{aligned}$$

Resta ainda a determinação de μ , que faz parte das expressões de S_1 e S_2 .

A equação (3.111) está na forma

$$z_1^* = a_0 + a_1 \sin \omega t + a_2 \cos \omega t$$

e, através de operações trigonométricas, pode ser expressa como

$$z_1^* = a_0 + A_z \sin(\omega t + \varphi)$$

onde

$$A_z = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \quad \text{e} \quad \varphi = \arcsin\left(\frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}\right).$$

Como se sabe que $\dot{z}_1 = z_2$, isto resulta que

$$z_2^* = A_z \omega \cos(\omega t + \varphi).$$

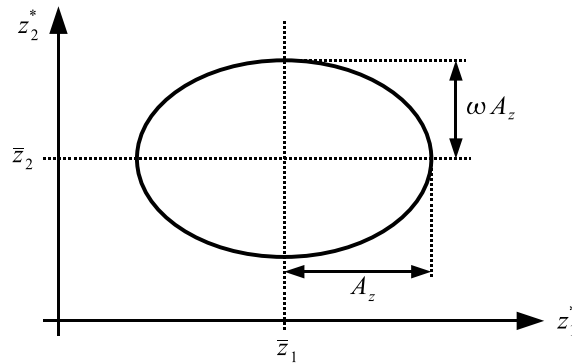


FIGURA 3.28: Elipse.

Observando o diagrama de estados (z_1^*, z_2^*) , como mostrado na figura 3.28, nota-se que a elipse proposta como trajetória desejada para o sistema deriva da expressão

$$\left(\frac{z_1^* - \bar{z}_1}{A_z}\right)^2 + \left(\frac{z_2^* - \bar{z}_2}{A_z \omega}\right)^2 - 1 = 0$$

onde a relação entre os semi-eixos da elipse equivale a ω . Multiplicando-se esta equação por $A_z^2 \omega^2$ obtemos

$$\omega^2 (z_1^* - \bar{z}_1)^2 + (z_2^* - \bar{z}_2)^2 - A_z^2 \omega^2 = 0.$$

Comparando com a equação (3.100) vemos que

$$\mu = A_z^2 \omega^2 = \omega^2 [(L\alpha\beta_1 + CAB)^2 + (L\alpha\beta_2)^2]. \quad (3.115)$$

Agora que se têm as elipses S_1 e S_2 , se pode usar as entradas de controle u_1 e u_2 dadas pelas equações (3.102) e (3.103).

3.6.3 Resultados de simulação

Para os conversores foram adotados $L = 2$ mH e $C = 100\mu F$, lembrando que $L = L_1 = L_2$ e $C = C_1 = C_2$. Os conversores devem gerar uma saída senoidal com nível médio 110 V, amplitude de oscilação 50 V e frequência de 60 Hz, dadas por

$$v_{c_1}^* = 50 \sin(2\pi 60t) + 110$$

$$v_{c_2}^* = 50 \sin(2\pi 60t + \pi) + 110.$$

Como a carga está conectada às saídas dos conversores, sobre ela deverá haver uma forma de onda senoidal sem o nível médio e com 100 V de amplitude. A frequência de comutação PWM é de 40 KHz e a carga utilizada é de 30Ω , o que faz com que a amplitude de oscilação da corrente em cada indutância esteja em torno de 10 A.

Na figura 3.29 pode-se ver um detalhe das formas de onda da tensão de saída e a corrente no indutor do primeiro boost.

Na figura 3.30 pode-se observar um detalhe das formas de onda das tensões de saída de cada um dos boosts onde se pode ver que o objetivo de oscilação dos conversores gera uma forma de onda um pouco deformada mas com a amplitude desejada de 50 V. Entretanto, a forma de onda da tensão v_{out} sobre a carga, que equivale a $v_{c_1} - v_{c_2}$ é uma onda senoidal sem deformação. A explicação para esta deformação na forma de onda de

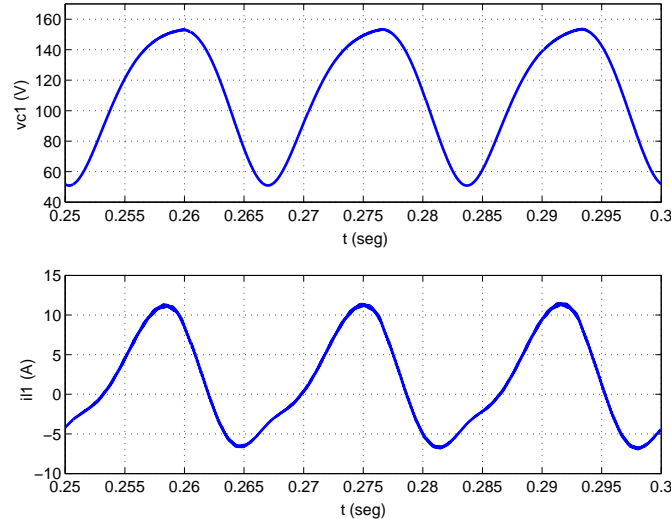


FIGURA 3.29: Variáveis de estado do primeiro boost: Tensão v_{c_1} e corrente i_{L_1} .

saída de cada boost é devida aos termos de segunda ordem em seno e cosseno que foram desprezados nos cálculos. Uma análise preliminar mostra a presença de uma segunda harmônica considerável na forma de onda de saída de cada boost. No entanto, estas harmônicas se anulam na tensão sobre a carga, que se encontra entre as saídas de ambos. Isto pode ser facilmente verificado considerando que para a componente fundamental da

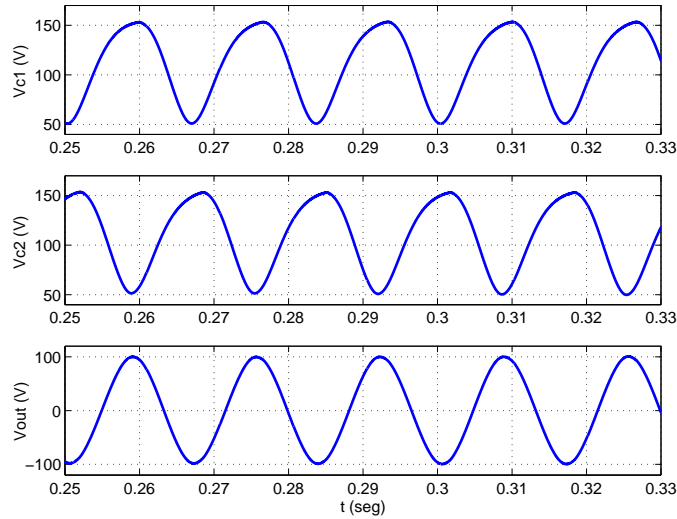


FIGURA 3.30: Formas de onda de v_{c1} , v_{c2} e $v_{out} = v_{c1} - v_{c2}$.

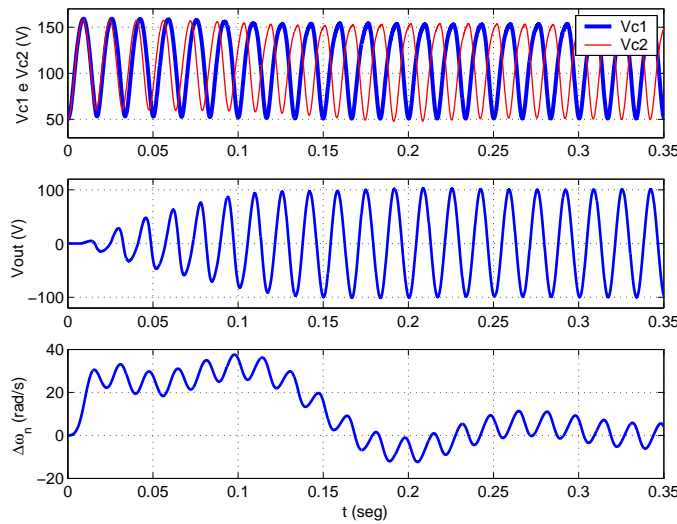


FIGURA 3.31: Evolução das saídas v_{c1} e v_{c2} , da tensão sobre a carga v_{out} e da variação da frequência $\Delta\omega_n = \omega_{n,2} - \omega_{n,1}$ do segundo boost em relação ao primeiro, controlada pelo PLL.

tensão sobre a carga temos

$$[A_1 \sin(\omega t) + B] - [A_1 \sin(\omega t + \pi) + B] = 2A_1 \sin(\omega t)$$

e para a segunda harmônica temos

$$[A_2 \sin(2\omega t) + B] - [A_2 \sin(2\omega t + \pi) + B] = 0.$$

Logo que o sistema entra em funcionamento, ambos os boosts estão com suas oscilações em fase, resultando uma tensão de saída nula sobre a carga. Mas à medida que diferença de fase aumenta devido à atuação do PLL, a tensão sobre a carga também aumenta, até atingir o seu valor máximo, quando a fase alcança 180 graus, como é mostrado na figura

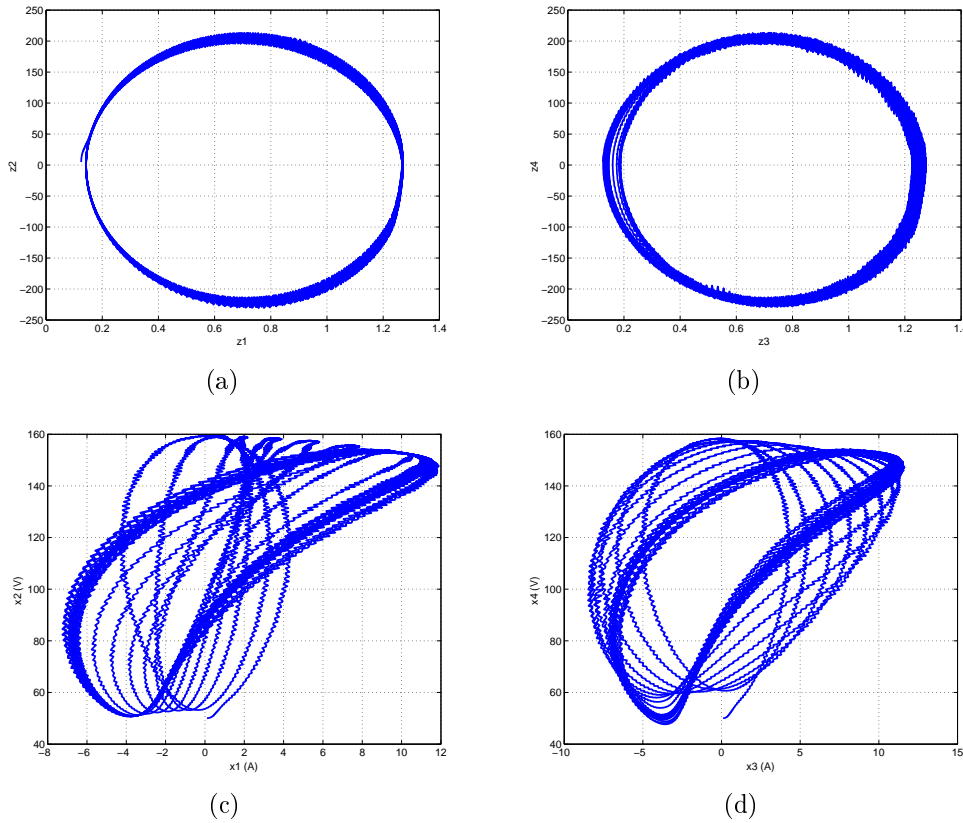


FIGURA 3.32: Diagramas de estados de: (a) (z_1, z_2) , (b) (z_3, z_4) , (c) (i_{L_1}, v_{c_1}) e (d) (i_{L_2}, v_{c_2}) .

3.31. O PLL controla a variação da frequência $\omega_{n,2}$ da saída do segundo boost em relação à frequência $\omega_{n,1}$ da saída do primeiro, que é fixa, buscando obter a defasagem necessária entre estas saídas, como é mostrado no gráfico inferior da figura 3.31. Observa-se que existe uma pequena oscilação de amplitude 5 rad/s sobreposta à envoltória de $\Delta\omega_n$ que causa um ligeiro avanço de fase em um semi-ciclo e um retrocesso equivalente no semi-ciclo seguinte. O avanço de fase gerado em um semi-ciclo é dado por

$$\Delta\theta = \int_0^{\pi/\omega} 5 \sin(\omega t) dt = 0,0265 \text{ rad.}$$

Isto corresponde a uma variação de 0,4% na fase, que é considerada muito pequena e não causa problemas.

Na figura 3.32-a se pode observar o diagrama de estados (z_1, z_2) onde aparece delimitada a elipse que representa o objetivo do sistema controlado. Esta elipse deve ser um ciclo-limite estável, ou seja, todas as trajetórias dos estados devem convergir para a elipse, cuja frequência de oscilação é dada pela relação entre os seus semi-eixos. Na figura 3.32-b pode-se notar a variação de um dos semi-eixos da elipse causada pelo PLL que significa uma pequena variação da frequência de oscilação do segundo boost de modo a fazer com que sua oscilação esteja com um deslocamento de fase de 180 graus em relação ao primeiro

boost. Nas figuras 3.32-c e 3.32-d são mostrados os diagramas de estados (i_L, v_c) de cada um dos boosts. As variações de trajetória correspondem ao tempo de acomodação inicial, quando as tensões e correntes vão sendo afetadas pelo controle até que sejam alcançados os valores de regime, juntamente com a variação na fase do segundo boost causada pelo PLL.

3.7 Conclusões do capítulo

Neste capítulo foram utilizadas as técnicas descritas no capítulo 2 aplicadas a sistemas de eletrônica de potência. Particularmente, foram analisados os comportamentos dos conversores buck, boost e duplo boost e de um inversor submetidos a esta técnica de controle.

Os conversores baseados na topologia buck (isto inclui o inversor), além de serem lineares, admitem um controle realizado sobre a tensão de saída, o que torna o controle mais simples. Foram analisados dois casos possíveis no que se refere às variáveis de estado utilizadas para o controle:

1. tensão de saída (v_c) e corrente sobre o capacitor de saída (i_c);
2. tensão de saída (v_c) e corrente sobre o indutor (i_L);

O primeiro caso apresenta a vantagem de permitir um controle que depende pouco do valor da carga, o que torna o sistema robusto a perturbações de carga.

O controle do conversor boost é um pouco mais complexo por se tratar de um sistema com resposta de fase não mínima⁴, além de necessitar ser controlado pela variável de corrente de modo a gerar indiretamente a tensão de saída desejada.

O conversor duplo boost apresenta um controle bastante similar ao de um conversor boost simples. A dificuldade reside na sincronização das fases das oscilações de saída de ambos os boosts. Isto foi realizado mediante o emprego de uma malha de sincronismo de fase (PLL). O tempo de resposta da malha utilizada foi considerado lento tornando necessária a busca por alternativas melhores. Este conversor, entretanto, mostrou uma vantagem em relação ao boost simples: Sabe-se que a tensão de saída no conversor boost tende a apresentar uma componente de segunda harmônica. Esta componente acaba se anulando sobre a carga, pois sobre esta incide a diferença entre as tensões de saída de cada boost. Como resultado, a forma de onda sobre a carga não apresenta deformações.

⁴O termo “fase não-mínima” é em geral utilizado no contexto de sistemas lineares significando a presença de um zero fora do círculo unitário (no caso discreto). Essa noção foi aqui extrapolada utilizando-se o termo “resposta com fase não-mínima” pois a resposta do sistema apresenta um comportamento similar ao que se observaria em um sistema linear com fase não-mínima. É possível encontrar na literatura o termo “resposta inversa” com o mesmo significado. (Isidori, 1989)

O estudo considerou os modelos ideais dos conversores citados anteriormente. A sua extensão aos modelos realísticos pode ser feita, gerando, entretanto, um equacionamento bem mais complexo.

No próximo capítulo será apresentada a implementação prática em laboratório e os resultados experimentais de um inversor tipo buck e do conversor boost utilizando controle baseado em microprocessador.

Capítulo 4

Resultados experimentais

4.1 Introdução

Neste capítulo são apresentados resultados experimentais do método proposto obtidos a partir de um inversor e de um conversor boost. Neste último, é explorada a geração de um sinal senoidal de saída somado a um nível contínuo de tensão. Em uma implementação futura, serão utilizados os conhecimentos do conversor boost na implementação do inversor duplo boost apresentado no capítulo 3.

Nestas implementações, verifica-se que a realização do controle em um microprocessador é conveniente, dada a facilidade de alteração do algoritmo e a necessidade de realização de operações quadráticas. Tem-se como limitação a necessidade de se trabalhar exclusivamente com números e operações inteiras, pois a performance do DSP neste caso é muito superior que quando se usam números e operações de ponto flutuante. Como parte da implementação, são apresentados os procedimentos para a obtenção dos coeficientes da lei de controle.

Como alternativa ao uso de microprocessadores, existe ainda a possibilidade da realização do controle através do uso de componentes eletrônicos analógicos graças à existência atualmente de circuitos multiplicadores analógicos. Neste caso, a dificuldade repousa em que a alteração de parâmetros do controlador implica a mudança e/ou ajuste de componentes eletrônicos.

No caso do protótipo do inversor, são apresentadas as formas de onda e o diagrama de estado e as formas de onda de tensão e corrente sobre a carga. A robustez do algoritmo de controle proposto é testada através (i) da variação de carga resistiva e (ii) de uma carga não linear.

No caso do conversor boost, são apresentadas as formas de onda e o diagrama de estado e as formas de tensão e corrente sobre a carga.

4.2 Inversor

Nesta seção são apresentadas as especificações do projeto, os diagramas de funcionamento do sistema e alguns detalhes da implementação do protótipo. Também são mostrados alguns detalhes da implementação do algoritmo de controle no DSP. São feitas algumas considerações a respeito da escolha do valor da indutância e sobre a amostragem dos sinais dos sensores, que ajudam a compreender o motivo de algumas escolhas de projeto. Finalmente, são apresentados os resultados obtidos em malha aberta e em malha fechada com carga resistiva e também mostrados os resultados obtidos submetendo o circuito a perturbações de carga e com carga não linear.

4.2.1 Implementação do controle

Os parâmetros do inversor utilizado são: $E = 30V$, $L = 30mH$ e $C = 50\mu F$. A carga resistiva nominal usada como parâmetro do algoritmo de controle implementado é $R = 25\Omega$. As especificações do projeto são: oscilação de saída com amplitude de 20V e frequência de 60Hz, com potência máxima de 50W.

A escolha do valor da indutância levou em consideração a ondulação de alta frequência percentual máxima da onda de corrente em relação à corrente máxima no indutor. Foi adotado o valor limite de 20% para este item. Algumas considerações a este respeito são feitas na seção 4.2.2.

O sistema composto pelo inversor juntamente com o controlador é apresentado na figura 4.1. Idealmente, a única variável a ser lida do inversor seria a tensão de saída v_c , visto que a corrente no capacitor i_c poderia ser obtida matematicamente a partir de v_c . Entretanto, existem algumas restrições: (i) i_c representa grandezas muito pequenas quando comparadas à escala de medição de v_c , (ii) o microprocessador DSP necessita trabalhar unicamente com valores inteiros devido a restrições de desempenho. Devido a estas restrições, a resolução de i_{adc} (corrente i_c convertida pelo conversor A/D) acaba sendo muito baixa, em geral, restrita a apenas 5 valores. Isto é insuficiente para um controle satisfatório. Por este motivo, foi incluído um sensor de corrente que possui uma escala própria, independente da escala de v_c e, com isso, pode-se aproveitar melhor a faixa de valores convertidos pelo A/D do DSP garantindo uma boa resolução para i_{adc} . O DSP TMS320LF2407 possui um conversor A/D de 10 bits e admite em sua entrada sinais analógicos entre 0 e 3,3V, o que significa uma resolução de 3,22mV.

A estratégia de controle de geração de oscilações autônomas possui operações quadráticas, o que justifica o uso de controle microprocessado. O controle foi implementado em um microprocessador DSP TMS320LF2407 da Texas Instruments. O diagrama em blocos do controlador é apresentado na figura 4.2.

É muito importante observar que os valores numéricos obtidos pelo conversor A/D para cada uma das grandezas estão relacionados às grandezas verdadeiras de tensão e

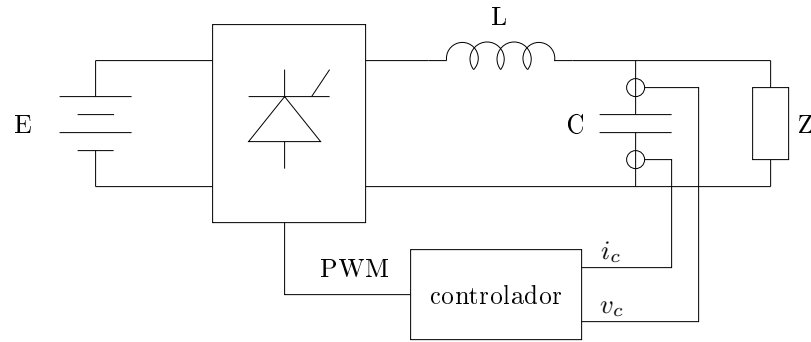


FIGURA 4.1: Diagrama de blocos do sistema inversor controlado.

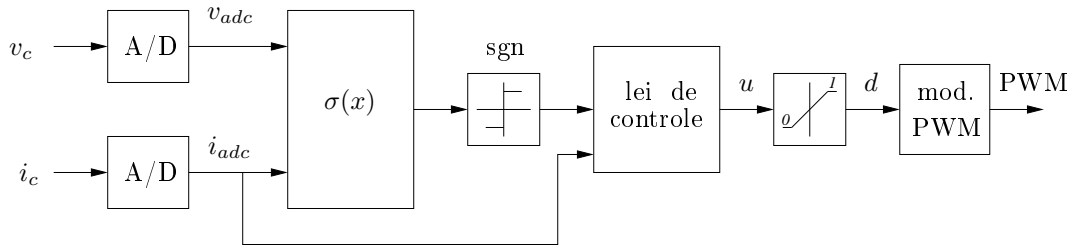


FIGURA 4.2: Diagrama de blocos do controlador implementado em um DSP.

corrente dadas pelas equações

$$\begin{aligned} v_c[k] &= k_v v_{adc}[k] & \text{com} & & v_{adc} &= v_{adc}^*[k] - v_m \\ i_c[k] &= k_i i_{adc}[k] & \text{com} & & i_{adc} &= i_{adc}^*[k] - i_m \end{aligned} \quad (4.1)$$

onde v_{adc}^* e i_{adc}^* são os valores numéricos de tensão e corrente convertidos pelo conversor A/D e disponíveis ao DSP para o processamento de controle, v_m e i_m são os valores numéricos do conversor A/D que correspondem a $v_c = 0$ e $i_c = 0$, k_v e k_i são fatores de escala e v_c e i_c são os valores discretizados da tensão e da corrente sobre o capacitor de saída.

Os valores convertidos pelo A/D são dependentes de ajustes de ganho e *offset*, portanto, são obtidos experimentalmente. Para isso, faz-se um acionamento em malha aberta que gere uma tensão senoidal sobre a carga com amplitude de 20V. Neste momento, ajusta-se primeiro o *offset* e depois o ganho. O ajuste de *offset* é necessário para posicionar o ponto de tensão zero e corrente zero no meio da faixa de conversão do A/D. Para o DSP TMS320LF2407, essa faixa vai de zero a 3,3V. O ganho deve ser ajustado de modo a maximizar a faixa de conversão do A/D, o que nos garante maior resolução da medição dos sensores. Finalmente, obtém-se os valores numéricos de pico e médio das formas de onda de tensão e corrente.

No inversor construído, após os ajustes citados acima, foram obtidos $V_{adc}^+ = 980$ e $V_{adc}^- = 86$ (por conseqüência, $v_m = 533$) para tensão e $I_{adc}^+ = 705$ e $I_{adc}^- = 124$ (resultando $i_m = 415$) para corrente. Foi observado que esses valores podem sofrer pequenas alterações

após um certo período de tempo, o que pode representar um problema para o controle.

Deve-se lembrar que o valor máximo da tensão $v_c = V_c$ corresponde ao valor $v_{adc}^* = V_{adc}^+$ lido pelo A/D. Considerando então $V_{ppadc} = V_{adc}^+ - V_{adc}^-$ e $I_{ppadc} = I_{adc}^+ - I_{adc}^-$, a partir de (4.1) os fatores de escala podem ser obtidos a partir dos valores máximo e mínimo da respectiva forma de onda:

$$\begin{aligned} k_v &= \frac{V_c}{V_{adc}^* - v_m} &\Rightarrow & k_v = \frac{2V_c}{V_{ppadc}} \\ k_i &= \frac{C\omega V_c}{I_{adc}^* - i_m} &\Rightarrow & k_i = \frac{2C\omega V_c}{I_{ppadc}} \end{aligned}$$

Para a função (3.78), lembrando que $x_2 = i_c/C$, temos

$$P(x) = \frac{v_c^2}{V_c^2} + \frac{(i_c/C)^2}{\omega^2 V_c^2} - 1,$$

substituindo pelos valores lidos pelo conversor A/D

$$P(x) = \frac{k_v^2}{V_c^2} v_{adc}^2 + \frac{k_i^2}{C^2 \omega^2 V_c^2} i_{adc}^2 - 1$$

finalmente, chega-se a

$$P(x) = \frac{4}{V_{ppadc}^2} v_{adc}^2 + \frac{4}{I_{ppadc}^2} i_{adc}^2 - 1.$$

Sabendo que $\text{sgn}(P(x)) = \text{sgn}(k_1 P(x))$, a constante k_1 pode ser escolhida livremente, desde que seja positiva e não nula. Se fizermos $k_1 = \frac{V_{ppadc}^2}{4}$ obteremos

$$k_1 P(x) = v_{adc}^2 + \frac{V_{ppadc}^2}{I_{ppadc}^2} i_{adc}^2 - \frac{V_{ppadc}^2}{4}. \quad (4.2)$$

Nesta expressão, apenas o termo $\frac{V_{ppadc}^2}{I_{ppadc}^2}$ pode não ser inteiro. Como no DSP os cálculos estão sendo feitos usando-se apenas operações inteiras, pois operações usando ponto flutuante podem fazer o processamento se tornar até 10 vezes mais lento, deve-se usar um multiplicador inteiro k_2 tal que o termo $k_2 \frac{V_{ppadc}^2}{I_{ppadc}^2}$ seja suficientemente próximo de um número inteiro. Desta forma chega-se a

$$k_2 k_1 P(x) = k_2 v_{adc}^2 + k_2 \frac{V_{ppadc}^2}{I_{ppadc}^2} i_{adc}^2 - k_2 \frac{V_{ppadc}^2}{4}.$$

Usando-se os valores obtidos experimentalmente (citados anteriormente) na equação (4.2) observou-se a necessidade de um multiplicador $k_2 = 8$ resultando em

$$k_2 k_1 P(x) = 8v_{adc}^2 + 19i_{adc}^2 - 1820232.$$

Para a lei de controle (3.82), considerando que $\sigma(x) = \omega^2 V_c^2 P(x)$ e, por conseguinte, $\text{sgn}(\sigma(x)) = \text{sgn}(P(x))$, temos

$$\begin{aligned} u &= \frac{L}{RC} i_c - \rho \text{sgn}(P) \text{sgn}(i_c) \\ &= \frac{L}{RC} k_i i_{adc} - \rho \text{sgn}(P) \text{sgn}(k_i i_{adc}) \\ &= \frac{2L\omega CV_c}{RC I_{ppadc}} i_{adc} - \rho \text{sgn}(P) \text{sgn}(k_i i_{adc}). \end{aligned}$$

considerando que essa lei de controle deve ser normalizada para valores de razão cíclica $0 \leq d \leq 1$, onde $d = 0$ corresponda a uma tensão sobre a carga igual a $-E$ e $d = 1$ a uma tensão igual a $+E$, faz-se

$$d = \frac{u + E}{2E}.$$

No DSP, isso equivale a colocar no registrador comparador CMP1 os valores mínimo e máximo de contagem para a frequência de operação do PWM escolhida. Como foi adotado que o PWM opera a 33 KHz, o valor de contagem máximo é 1200. Assim, o valor da razão cíclica no DSP será

$$\begin{aligned} dd &= 1200 \left(\frac{u + E}{2E} \right) \\ &= \frac{600}{E} \left[\frac{2L\omega CV_c}{RC I_{ppadc}} i_{adc} - \rho \text{sgn}(P) \text{sgn}(k_i i_{adc}) \right] + 600 \\ &= \left[\frac{1200L\omega CV_c}{E RC I_{ppadc}} i_{adc} - \frac{600\rho}{E} \text{sgn}(P) \text{sgn}(k_i i_{adc}) \right] + 600 \end{aligned} \quad (4.3)$$

Adotando-se $\rho = 20$ e usando-se os valores obtidos experimentalmente, citados anteriormente, tem-se

$$dd = 0.625 i_{adc} - 400 \text{sgn}(P) \text{sgn}(i_{adc}) + 600$$

multiplicando cada termo por 8 e dividindo por 8 ao final tem-se somente números inteiros

$$dd = \frac{1}{8} [5i_{adc} - 3200 \text{sgn}(P) \text{sgn}(i_{adc}) + 4800].$$

4.2.2 Considerações sobre o valor da indutância

A escolha do valor da indutância, em geral, deve levar em consideração (i) a ondulação de alta frequência percentual máxima da onda de corrente em relação à corrente máxima no indutor e (ii) a frequência de corte do filtro LC formado pelo indutor e o capacitor do conversor. No caso da ondulação percentual máxima da corrente no indutor adota-se o valor limite de 20%. O atendimento desta especificação em conversores de baixa potência pode resultar em valores consideravelmente grandes para a indutância e uma

baixa frequência de corte.

Com respeito à ondulação de alta frequência algumas considerações se fazem necessárias:

1. O valor da indutância utilizado no inversor pode ser considerado demasiado alto levando em conta sistemas de potência comerciais, por resultar um indutor muito volumoso. A verdade é que o projeto visou a construção de um protótipo de laboratório de baixa potência com a finalidade de testar a validade da técnica de controle proposta neste trabalho. Não havia interesse em utilizar potências mais elevadas pois imporiam dificuldades adicionais tais como a exigência de fonte de alimentação mais potente, necessidade de uso de IGBT's ao invés de MOSFET's, maior geração de ruídos nos sensores, maior atenção à isolamento etc.
2. Para a determinação da indutância, foi usada como item de projeto a ondulação percentual máxima, que, no caso, foi adotada como 20% da corrente nominal máxima. A determinação de L vem de

$$L = \frac{(V_i - V_o) \frac{V_o T_s}{V_i}}{m I_L}$$

onde V_i é a tensão de alimentação de entrada, V_o é a tensão máxima de saída do conversor, T_s é o período de comutação, I_L é a corrente máxima sobre o indutor e m é o percentual da corrente total (no caso, 20%).

3. Muitos projetistas também levam em consideração como item de projeto a frequência de corte do filtro passa-baixas representado pelo conjunto indutor-capacitor do conversor. Neste caso, tal frequência é obtida de

$$f_c = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Este item é importante no sentido de que nas frequências próximas e superiores a esta frequência de corte ocorre atenuação da tensão de saída no filtro e pode ser necessário o aumento da margem $V_i - V_o$ para que seja possível obter a tensão de saída desejada. Isto pode significar aumento dos custos do projeto.

4. A fórmula que relaciona a obtenção de L como função da potência P do inversor e da frequência de comutação f_s é dada por

$$L = \frac{\left(1 - \frac{V_o}{V_i}\right) V_o^2}{m P f_s}.$$

Em conversores de baixa potência, o atendimento da especificação de variação percentual máxima da corrente no indutor resulta um valor de indutância relativamente

alto para o uso do mesmo período de comutação. Como consequência, isto reduz a frequência de corte, que pode estar se aproximando muito da frequência de operação da tensão de saída. A solução que permite manter a variação percentual máxima sem aumentar o valor da indutância é o aumento da frequência de comutação. Deve-se atentar para o fato de que também os dispositivos de comutação possuem suas limitações quanto à frequência de comutação.

4.2.3 Considerações sobre amostragem dos sinais

Um problema detectado neste protótipo é conseguir realizar o controle apesar da presença de ruídos nos sinais v_c e i_c lidos pelos sensores. Colocando o osciloscópio na escala de tempo próxima à frequência de comutação das chaves, percebe-se que o ruído ocorre logo após as transições de comutação das chaves. O circuito de tratamento dos sinais dos sensores inclui um filtro anti-aliasing de segunda ordem com os dois pólos em 10 KHz que se mostrou pouco eficaz na eliminação do ruído. Posteriormente verificou-se que o ruído está presente na própria fonte de potência de entrada, pois quando submetida às transições bruscas da comutação das chaves não consegue manter-se completamente estável. Verificou-se a geração de pequenas perturbações impulsivas da ordem de 700 mV no instante das comutações com rápida atenuação.

Além disso, foi observado que o filtro anti-aliasing causa um atraso no sinal lido dos sensores. Para leis de controle lineares, esse atraso pode até ser tolerado considerando o tempo de resposta da dinâmica de controle, cujo objetivo é regular a geração de uma forma de onda senoidal de 60 Hz. Entretanto, a lei de controle aqui utilizada possui um termo descontínuo de alta relevância que pode comutar em torno da superfície de comutação a 33 KHz. Neste caso, o atraso do sinal dos sensores acaba mascarando a real localização dos estados no plano de fase e a ação de controle descontínua acaba sendo realizada com um pequeno atraso. Como em controle por modo deslizante quanto mais alta a frequência de comutação menor a amplitude do *chattering* em torno da superfície e mais perfeita a forma de onda de saída, esse atraso equivale à diminuição da frequência efetiva de comutação. Portanto, o filtro anti-aliasing foi retirado melhorando sensivelmente a velocidade de resposta do controle.

Entretanto, a retirada deste filtro permite a propagação do ruído da comutação para os sensores. A maneira de resolver este problema foi a realização da amostragem $2.25 \mu s$ antes de cada uma das transições do PWM, conforme mostrado na figura 4.3. Neste instante, a princípio, garante-se um sinal livre do ruído.

No DSP, a geração do sinal PWM utiliza um princípio semelhante à geração PWM convencional, onde o sinal a ser modulado é comparado com uma forma de onda triangular. A geração da forma de onda triangular é realizada por um *timer* que faz uma contagem de zero até o seu valor de período e recomeça automaticamente. O sinal PWM é

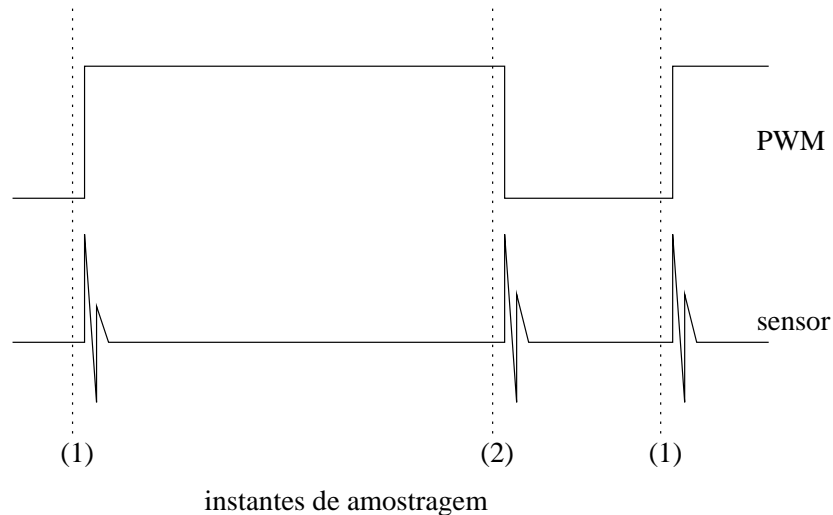


FIGURA 4.3: Os instantes de amostragem estão representados por linhas pontilhadas, pouco antes das transições do sinal PWM.

gerado a partir da comparação desta contagem com um valor de comparação (registrador comparador). Neste projeto são utilizados três comparadores (CMP1, CMP2 e CMP3). O primeiro (CMP1) é usado para gerar o sinal PWM; o segundo (CMP2) é ajustado com $CMP2 = CMP1 - 90$; e o terceiro (CMP3) é ajustado com $CMP3 = \text{período} - 90$.

Durante um período de contagem, o *timer* alcança primeiro um valor igual ao contido em CMP2 e, neste instante, faz uma amostragem dos sensores. Passados $2,25\mu s$, alcança um valor igual ao contido em CMP1 e realiza uma das transições do sinal PWM. Quando estiver a $2,25\mu s$ do final do período, alcança um valor igual ao contido em CMP3 e realiza a segunda amostragem do período. Finalmente, ao final do período, realiza a outra transição do sinal PWM e recomeça o ciclo. Para ser usada como uma variável no algoritmo de controle, é tomada a média dessas duas amostras. Essa média visa fazer com que o ponto médio da ondulação do *chattering* acompanhe a superfície de comutação.

É importante observar que as amostras tomadas em um período do PWM são usadas pelo algoritmo no DSP para a obtenção do sinal de controle que só terá efeito no período seguinte. Portanto, há um atraso de um período.

Sempre que é necessário alterar a razão cíclica, o algoritmo de controle altera conjuntamente CMP1 e CMP2, sempre mantendo a diferença entre ambos.

Embora teoricamente a razão cíclica possa assumir seus valores mínimo e máximo como $d = 0$ e $d = 1$, na prática foi estipulado que as razões cíclicas mínima e máxima correspondentes seriam $d = 0.05$ e $d = 0.95$. Esta pequena margem é necessária para o correto funcionamento do sistema de acionamento das chaves devido à existência do tempo morto, um tempo de segurança onde nenhuma das chaves está acionada, evitando o risco de curto-circuito.

Para poder verificar a eficácia do controle proposto, é importante visualizar os dados pela ótica do DSP. Por este motivo, foram definidos *buffers* de armazenamento das variá-

veis v_c , i_c , P e dd . A profundidade do buffer é limitada pela memória externa disponível no DSP. Foi definida uma profundidade de 4440 amostras, equivalente a 8 períodos do sinal senoidal de 60 Hz de saída.

Desta maneira, o sinal lido em qualquer osciloscópio é muito diferente do sinal visto pelo DSP pois este último realiza suas aquisições sincronizadas com as transições do PWM, o que não é possível com o osciloscópio.

A figura 4.4 mostra o protótipo do inversor buck.

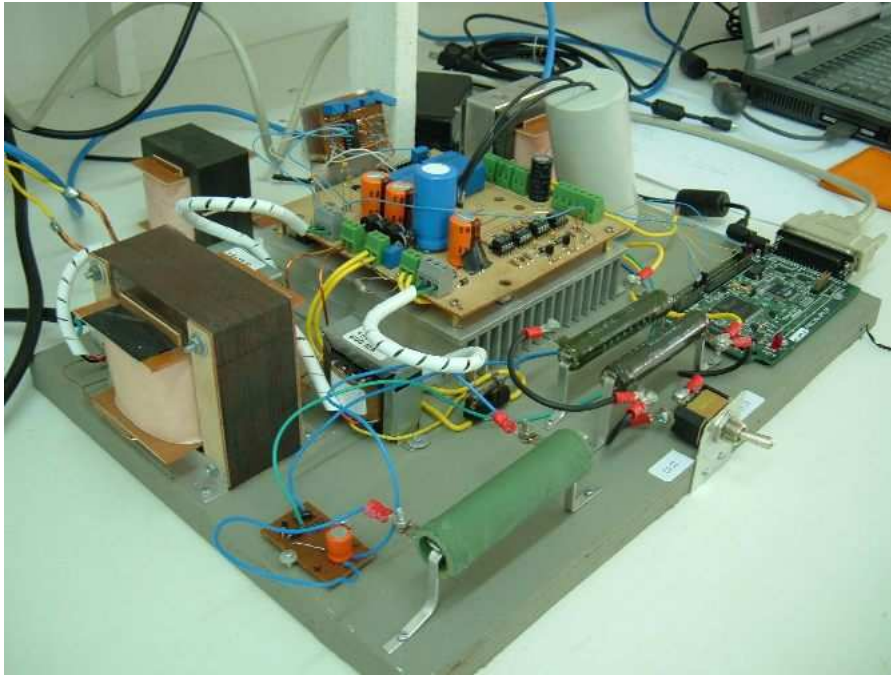


FIGURA 4.4: Protótipo do inversor buck com controle baseado no DSP TMS320LF2407.

4.2.4 Operação em malha aberta

A figura 4.5 mostra os sinais adquiridos pelo DSP obtidos a cada período do PWM, armazenados em sua memória e depois transferidos para o computador PC e importados no *Matlab*.

Inicialmente foi testado o funcionamento do sistema em malha aberta através da variação senoidal da razão cíclica. A amplitude desta variação foi determinada analiticamente e ajustada empiricamente de modo a obter uma forma de onda senoidal com 20 V de pico sobre a carga. A figura 4.5 mostra o sistema operando desta forma.

Esses resultados foram usados para a determinação e calibração dos valores de conversão A/D para o sensor de corrente.

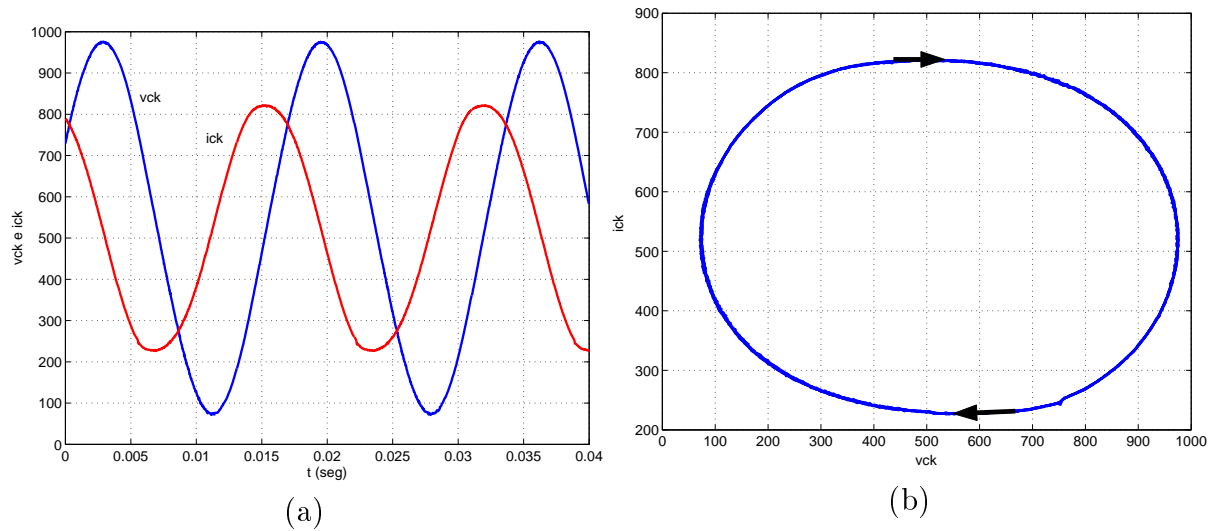


FIGURA 4.5: Sistema operando em malha aberta a 20KHz. Valores filtrados através de amostragem pouco antes das transições do sinal PWM. (a) tensão (v_{adc}) e corrente (i_{adc}) no capacitor. (b) Plano de fase.

4.2.5 Operação a 20 KHz com filtro anti-aliasing

Utilizando a lei de controle constante na seção 4.2.1 o sistema é agora colocado para funcionar em malha fechada.

O sinal de corrente do capacitor foi alterado no programa dado que o sensor é atravessado pela corrente no sentido inverso.

Com essa modificação, mas ainda com a presença do filtro anti-aliasing, o sistema passou a se comportar conforme mostrado nas figuras 4.6 e 4.7 para uma frequência de operação de 20 KHz. Observa-se que ainda há um erro muito grande de seguimento da referência elíptica mas o seu seguimento foi obtido, conforme mostra a figura 4.6-b.

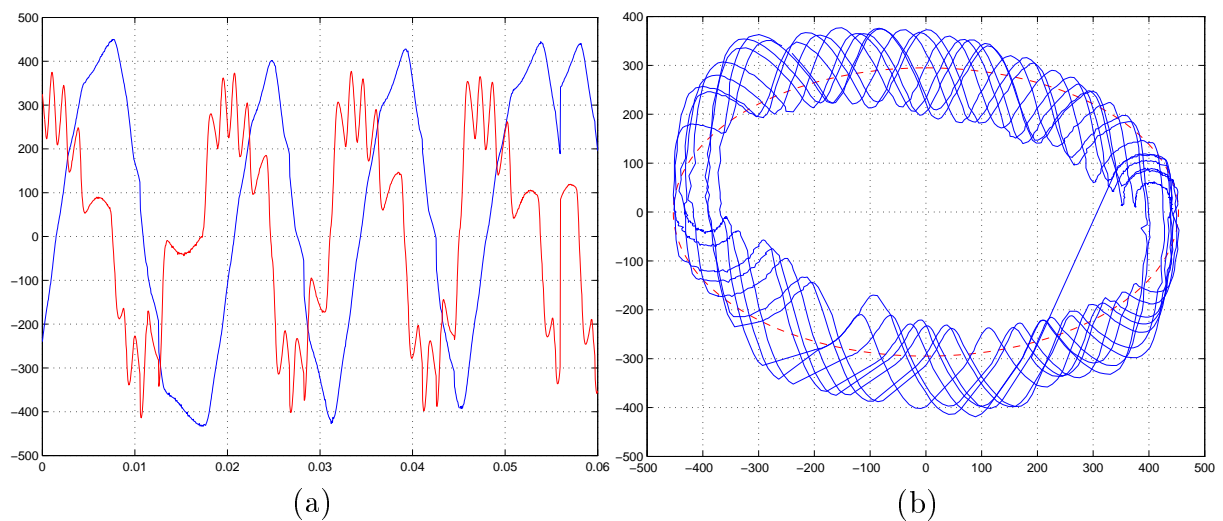


FIGURA 4.6: Sistema operando em malha fechada a 20 KHz utilizando filtro anti-aliasing. (a) v_{adc} e i_{adc} . (b) Plano de fase.

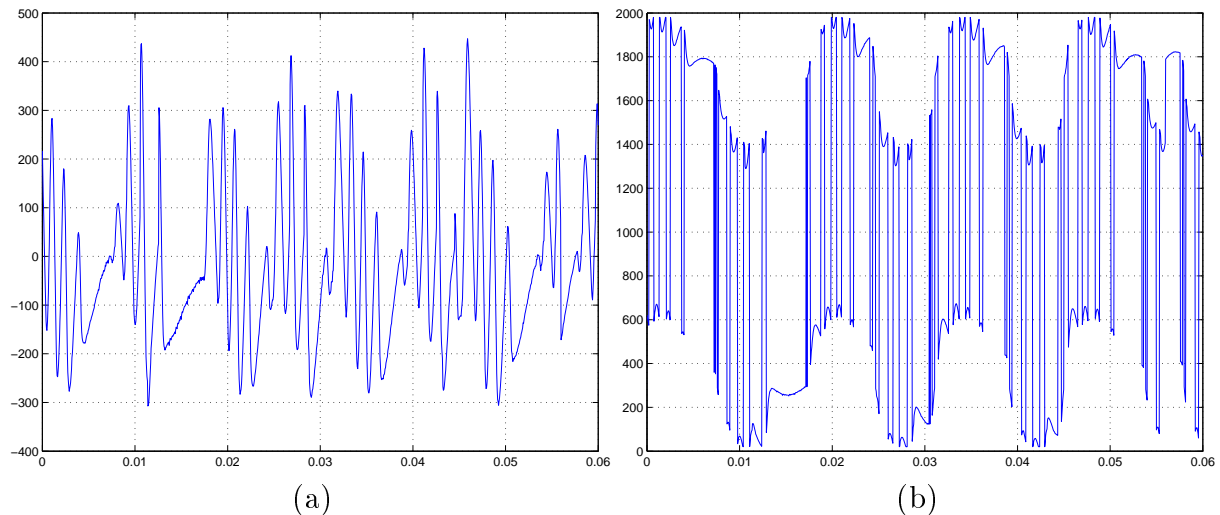


FIGURA 4.7: Sistema operando em malha fechada a 20 KHz utilizando filtro anti-aliasing. (a) Valores da função P . (b) Variação da razão cíclica dd .

O filtro adiciona um atraso na leitura do sinal medido dos sensores e, devido a este atraso, o controle acaba demorando a agir sobre a trajetória dos estados causando uma oscilação grande em torno da superfície de comutação. A solução para este problema consistiu na elevação da frequência de comutação e na retirada do filtro anti-aliasing. A retirada do filtro faz aumentar o ruído da leitura dos sensores. Para compensar esta deficiência, foi adotada uma nova estratégia de amostragem do sinal dos sensores, sincronizada com as bordas do sinal PWM, como mostrado na seção 4.2.3.

4.2.6 Operação a 33 KHz sem filtro anti-aliasing

Nesta seção são apresentados os resultados obtidos com o mesmo conversor da seção anterior, com algumas modificações: foi retirado o filtro anti-aliasing e elevada a frequência de operação do conversor para 33 KHz. O tempo de execução de um ciclo da lei de controle é de $21,8\mu s$, que possibilitaria operação a uma frequência máxima de 40,9 KHz. A elevação na frequência de operação afeta quase todos os valores das constantes da lei de controle. Para levantar os novos parâmetros foi necessário:

1. Recalcular o período do contador do *timer* para gerar PWM a 33 KHz. Foi usado o valor de contagem 1200 para o período do PWM, conforme mostrado na tabela 4.1.
2. Levantar os valores de contagem do *timer* 1 que geram uma razão cíclica correspondente a 0V, +20V e -20V. Foram obtidas as contagens 110 correspondendo a +20V e 1080 correspondendo a -20V. O valor de contagem intermediário 600 corresponde a 0V.
3. Re-gerar uma tabela de seno no DSP para a geração de um sinal de controle senoidal em malha aberta. O objetivo é a obtenção de um sinal de tensão e corrente

perfeitamente senoidais com as amplitudes desejadas. A tabela de senos foi gerada a partir de

$$s_k = 440 \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + 600, \quad k = 0 \dots n$$

onde

$$n = \frac{f_a}{60 \text{ Hz}}.$$

Nesta frequência ($f_a = 33 \text{ KHz}$), $n = 555$. A geração em malha aberta permite medir o sinal de corrente e determinar a sua escala, pois $I_c = \omega CV_c$.

4. Encontrar os valores lidos pelos sensores de corrente e tensão e convertidos pelo conversor A/D do DSP. As escalas de tensão e corrente são independentes. A variação destes valores é bem pequena, quando não nula, em relação aos valores obtidos quando o conversor operava a 20 KHz.
5. Refazer os cálculos das constantes da lei de controle conforme descrito na seção 4.2.1.

Contagem <i>timer</i>	freqüência de operação
2000	20 KHz
1500	26,7 KHz
1200	33,3 KHz
1100	36,7 KHz
1000	40 KHz

TABELA 4.1: Valores do período do contador do *timer* e freqüência resultante do modulador PWM do DSP.

Um dos problemas verificados refere-se aos pontos da trajetória de estados onde $x_2 = 0$ externos à elipse, ou seja, quando $x_1 < v_{c,min}$ ou $x_1 > v_{c,max}$. Como já visto na seção 2.3 do capítulo 2, quando a trajetória dos estados alcança um destes pontos, tende a permanecer estacionada sobre ele. O que se observa no conversor é que a tensão permanece fixa em algum valor fora dos limites máximos de oscilação e a corrente é nula, interrompendo o processo de geração da oscilação.

A forma utilizada para resolver este problema é o uso de uma estratégia de controle alternativa. Nesta estratégia, altera-se o comportamento do termo $\text{sgn}(x_2)$ da lei de controle de forma que:

caso $x_1 < v_{c,min}$ então força-se que o termo $\text{sgn}(x_2) = 1$

caso $x_1 > v_{c,max}$ então força-se que o termo $\text{sgn}(x_2) = -1$.

Isto evita a troca de sinal constante que ocorreria nas proximidades de $x_2 = 0$ quando a trajetória estiver “fora” da elipse possibilitando o rápido retorno ao regime oscilatório. Em

geral, a trajetória de estados somente alcança tal situação quando o sistema é submetido a perturbações. Esta estratégia está descrita em (Takahashi et al., 1999).

As formas de onda da tensão e da corrente, bem como o plano de fase são mostrados na figura 4.8. A simples comparação com a forma de onda mostrada na figura 4.6 nos permite concluir que o aumento da frequência de operação tende a melhorar ainda mais a forma de onda, principalmente da corrente.

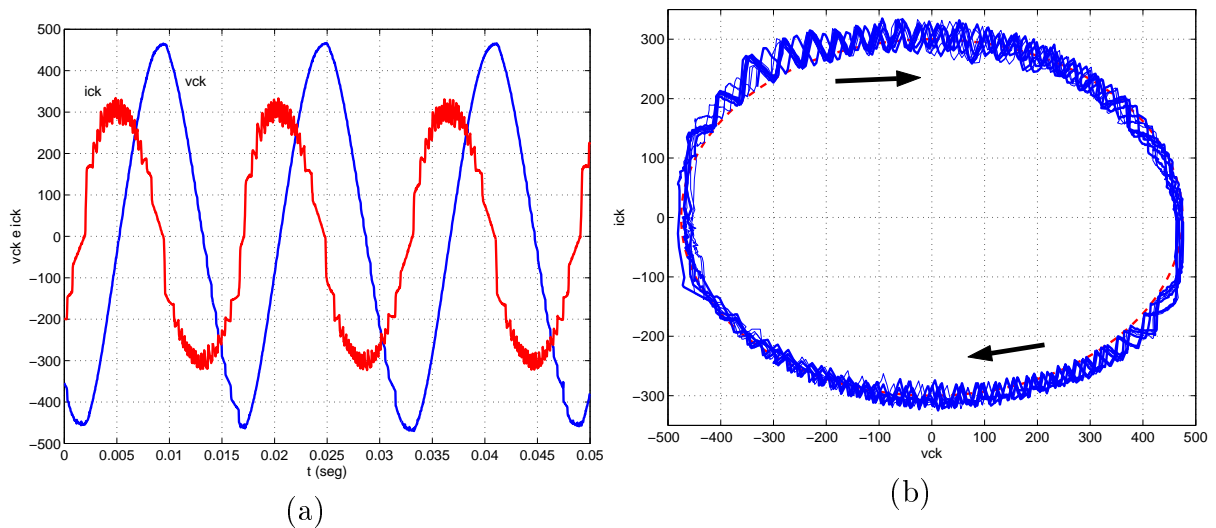


FIGURA 4.8: Sistema operando em malha fechada a 33 KHz. (a) Formas de onda da tensão e corrente medidas nos sensores e convertidas pelo conversor A/D do DSP (Obs.: As escalas de tensão e corrente não são as mesmas). (b) Plano de fase da tensão e corrente convertidos pelo conversor A/D do DSP ($v_{adc} \times i_{adc}$).

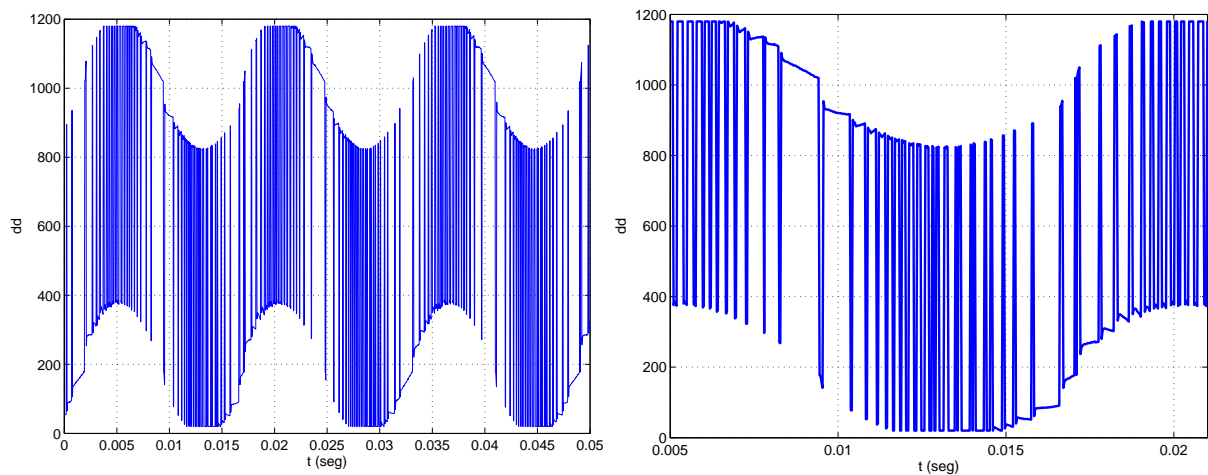


FIGURA 4.9: Formas de onda do sinal de controle ajustado para o comparador do *timer* do DSP responsável por gerar o sinal PWM. Para o sistema operando a 33 KHz, os valores correspondentes a $0 \leq d \leq 1$ correspondem a $0 \leq dd \leq 1200$.

O sinal de controle é mostrado na figura 4.9 de onde se pode verificar a sobreposição de um sinal contínuo de formato senoidal proporcional à corrente (referente ao termo $\frac{L}{RC}i_c$

da lei de controle) com um sinal descontínuo representativo do modo deslizante (referente ao termo $-\alpha \text{sgn}(P(x))\text{sgn}(i_c)$ da lei de controle). A descontinuidade ocorre quando a trajetória dos estados cruza a superfície de comutação $P(x) = 0$. É essa componente descontínua a responsável pela robustez do sistema às variações de carga. Entretanto, também é responsável pela geração de ruído audível no indutor.

4.2.7 Perturbações de carga

De modo a testar a robustez do sistema, foram usadas as cargas mostradas na figura 4.10. Para a carga mostrada na figura 4.10-a foram usados $R_1 = R_2 = 25\Omega$. Para a carga mostrada na figura 4.10-b foram usados $C_L = 47\mu\text{F}$ e $R_L = 180\Omega$. As formas de onda

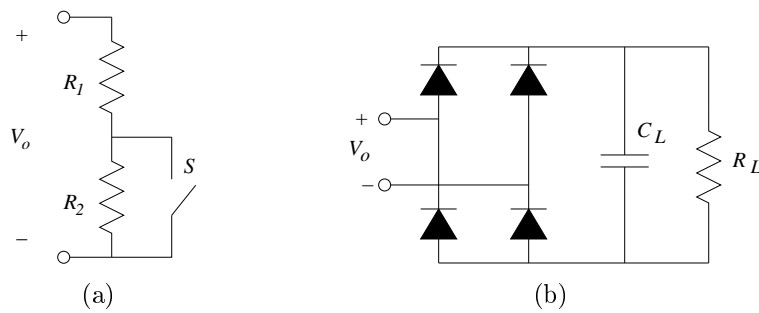


FIGURA 4.10: Cargas usadas para teste de robustez. (a) Carga resistiva com variação entre 25Ω e 50Ω . (b) Carga não linear com $C_L = 47\mu\text{F}$ e $R_L = 180\Omega$.

resultantes do sistema submetido a uma variação de carga resistiva de 50Ω para 25Ω são mostradas na figura 4.11. As formas de onda do sistema sobre a carga (V_o, i_o) operando

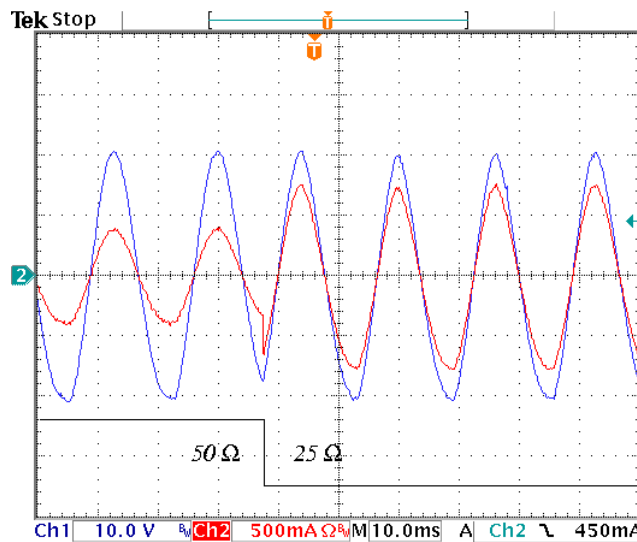


FIGURA 4.11: Formas de onda de tensão (onda senoidal de maior amplitude) e corrente (onda senoidal de menor amplitude) na carga para uma variação de carga resistiva de 50Ω para 25Ω .

com uma carga não-linear são mostradas na figura 4.12.

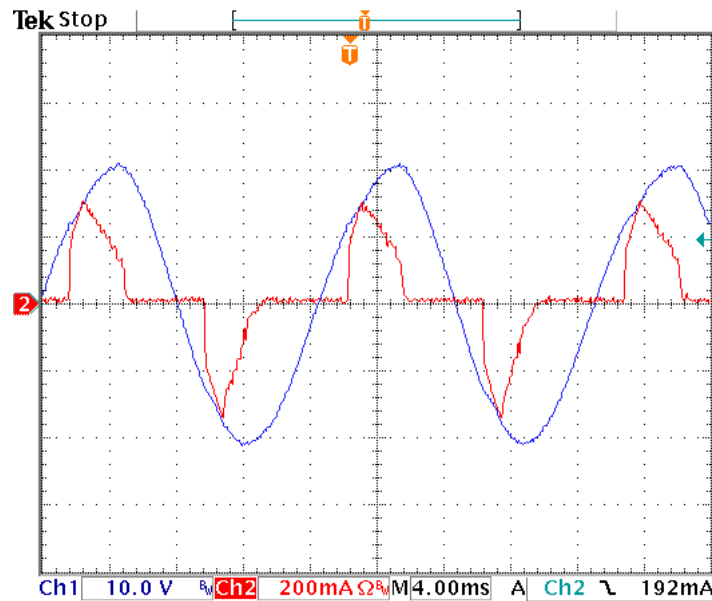


FIGURA 4.12: Formas de onda de tensão V_o (onda senoidal de maior amplitude) e corrente i_o na carga não linear (onda não senoidal de menor amplitude).

As formas de onda mostradas referem-se à tensão sobre a carga e à corrente de saída. Destas somente a tensão corresponde a um estado. Tomando-se, então, amostras dos estados v_c e i_c , a figura 4.14 mostra o diagrama de estados do sistema operando com a carga não-linear. Note que as variáveis mostradas no diagrama de estados referem-se aos sinais v_c e i_c medidos sobre o capacitor, diferentes dos valores V_o e i_o medidos sobre a carga.

Para ilustrar o efeito da variação de carga entre 25Ω e 50Ω no diagrama de estados do sistema, foi incluída a figura 4.13, que foi obtida por simulação ante a dificuldade de registrar o transitório dos estados do sistema (aprox. 33ms) a partir da leitura dos valores dos estados lidos pelo conversor A/D no DSP.

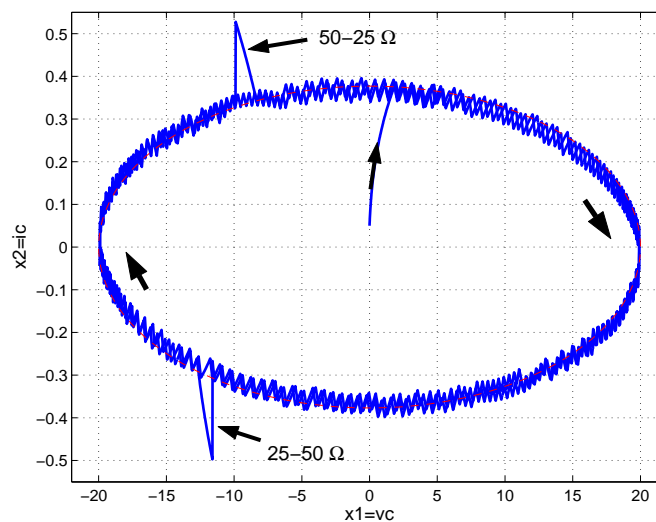


FIGURA 4.13: Diagrama de estados (v_c, i_c) do sistema submetido a variações de carga entre 25Ω e 50Ω .

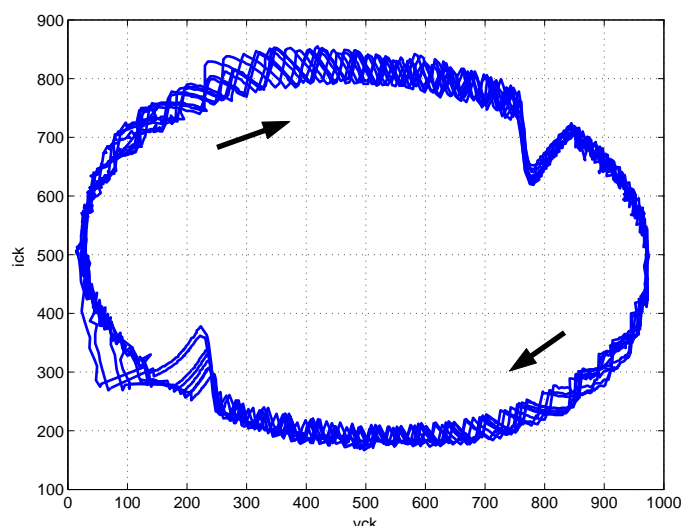


FIGURA 4.14: Diagrama de estados (vck, ick) do sistema operando com a carga não-linear. vck e ick representam as amostras de v_c e i_c lidas pelo DSP através do conversor A/D.

Como visto no capítulo anterior, a resposta do sistema se aproxima do ideal à medida que se usam frequências mais altas. Entretanto, no projeto apresentado, a limitação está no DSP utilizado, que trabalha a 40MHz. Com a mudança para o DSP TMS320C2812, que opera a 150MHz, espera-se obter melhores resultados.

4.3 Conversor boost

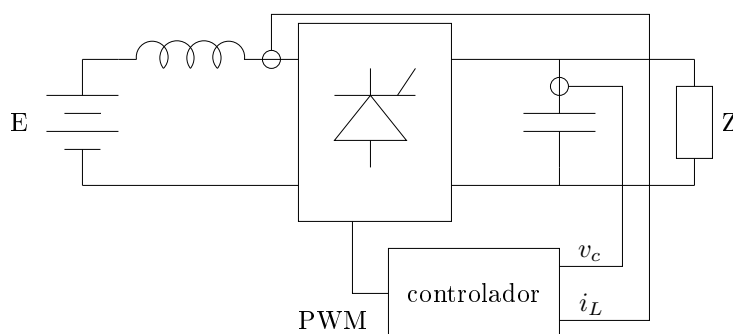


FIGURA 4.15: Diagrama de blocos do sistema conversor boost.

A implementação do protótipo do conversor boost está baseada na simulação mostrada na seção 3.4 do capítulo anterior. O diagrama em blocos do conversor está mostrado na figura 4.15 e o diagrama de blocos do controle implementado no DSP mostrado na figura 4.16.

As variáveis de interesse mostradas no diagrama referem-se à tensão de saída v_c e à corrente sobre o indutor i_L . A tensão de saída é monitorada através de um sensor de tensão de efeito Hall modelo LV25P que apresenta em sua saída uma corrente proporcional

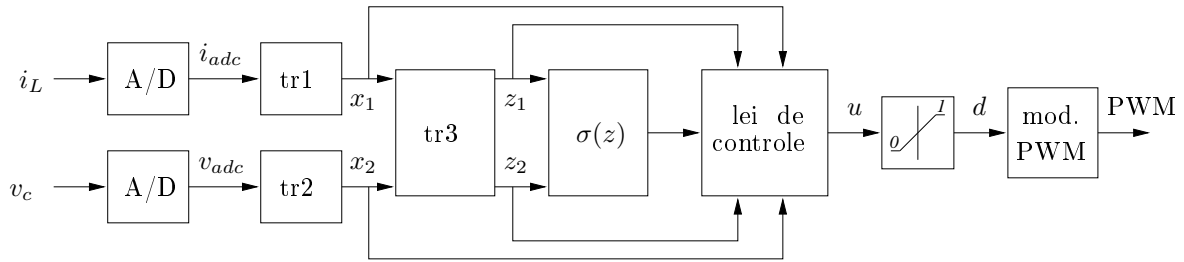


FIGURA 4.16: Diagrama de blocos do controlador implementado em um DSP. No diagrama, as siglas referem-se a: “tr1” equivale à eq. (4.4), “tr2” à eq. (4.5) e “tr3” às eqs. (4.6)-(4.7).

à tensão lida. A corrente do indutor é monitorada por um sensor de efeito Hall modelo LA25NP, configurado para uma relação 5:1000, que apresenta em sua saída uma corrente proporcional à corrente lida. A natureza dos sensores estabelece um isolamento entre o lado da potência (entrada do sensor) e o lado da resposta da medição (saída do sensor).

Os estados lidos pelos sensores são convertidos por um conversor A/D já no DSP e passam a assumir uma faixa de valores entre 0 e 4095 (12 bits) correspondente a faixa de valores de tensão de entrada entre 0 e 3V na entrada do A/D. Neste ponto, os estados são referidos como i_{adc} ou ilk para a corrente do indutor e v_{adc} ou vck para a tensão de saída. Neste projeto foi utilizado um kit de desenvolvimento eZdspTMF2812 baseado no processador DSP TMS320F2812, da empresa Texas Instruments.

É necessário obter uma relação entre estes valores lidos pelo A/D e os valores reais de tensão e corrente presentes no conversor. Considerando que o erro de linearidade dos sensores seja irrelevante, esta relação é dada por

$$x_1 = \frac{ilk}{k_1} - k_2 \quad (4.4)$$

$$x_2 = \frac{vck}{k_3} - k_4 \quad (4.5)$$

onde os valores das constantes k_1 , k_2 , k_3 e k_4 foram obtidos experimentalmente através da comparação dos valores lidos de i_L e v_c através de instrumentos e de ilk e vck lidos pelo conversor A/D do DSP em duas situações distintas: uma com a tensão de saída em 80V e outra com a mesma em 120V.

Os parâmetros do conversor utilizado são: $E = 48\text{V}$, $L = 1.4\text{mH}$ e $C = 100\mu\text{F}$. A carga resistiva utilizada é $R = 100\Omega$. O objetivo de controle foi determinado como sendo

$$v_c = x_2 = A \sin \omega t + B$$

com $B = 100$, $A = 20$ e $\omega = 2\pi 60$.

Para executar o controle, é necessário realizar a seguinte troca de variáveis:

$$z_1 = \frac{Lx_1^2 + Cx_2^2}{2C} = (7.0)x_1x_1 + (0.5)x_2x_2 \quad (4.6)$$

$$z_2 = \frac{REx_1 - x_2^2}{RC} = (4.8e5)x_1 - (100.0)x_2x_2. \quad (4.7)$$

A função $\sigma(z)$ usada no controle é

$$\sigma(z) = \left(\frac{z_1 - \bar{z}_1}{A_{z1}} \right)^2 + \left(\frac{z_2 - \bar{z}_2}{A_{z2}} \right)^2 - 1$$

com $\bar{z}_1 = 5142.67$, $\bar{z}_2 = 0$, $A_{z1} = 2024.24$ e $A_{z2} = 763120.2$.

A lei de controle obtida é

$$u = \frac{R^2E^2C + 2Lx_2^2 + R^2C^2L [\omega^2 (z_1 - \bar{z}_1) + \alpha\sigma(z) \operatorname{sgn}(z_2 - \bar{z}_2)]}{Rx_2 (REC + 2Lx_1)}$$

$$= \frac{2304.0 + (0.28e - 2)x_2x_2 + (0.19897e - 1)(z_1 - \bar{z}_1) + (0.14e - 6)\alpha\sigma(z) \operatorname{sgn}(z_2 - \bar{z}_2)}{100.0x_2 (0.48 + (0.28e - 2)x_1)}.$$

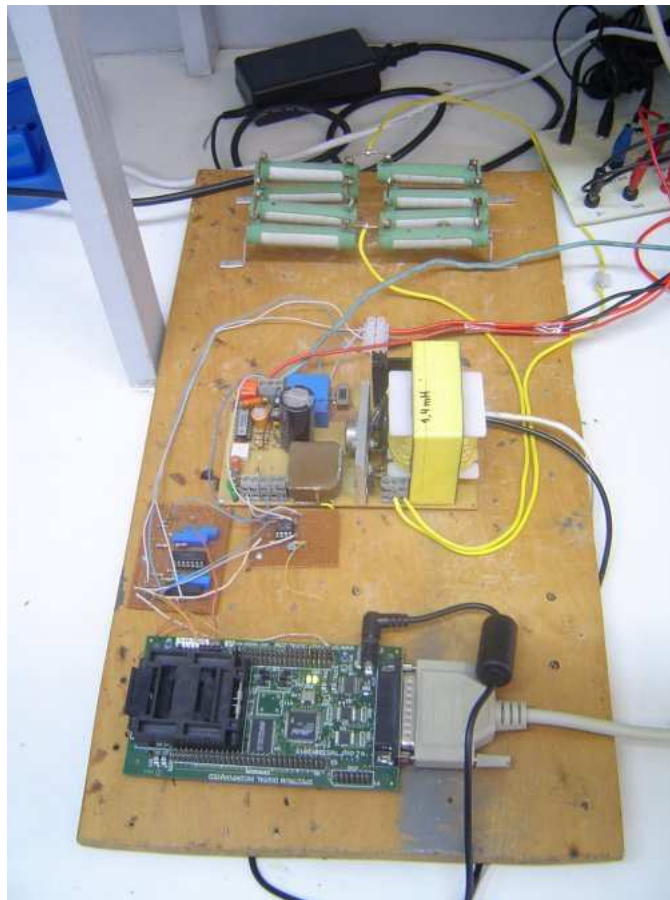


FIGURA 4.17: Protótipo do conversor boost.

Na figura 4.17 é apresentado o protótipo do conversor boost utilizado nos experimentos

de laboratório. A programação do DSP é realizada através da plataforma de desenvolvimento *Code Composer Studio*.

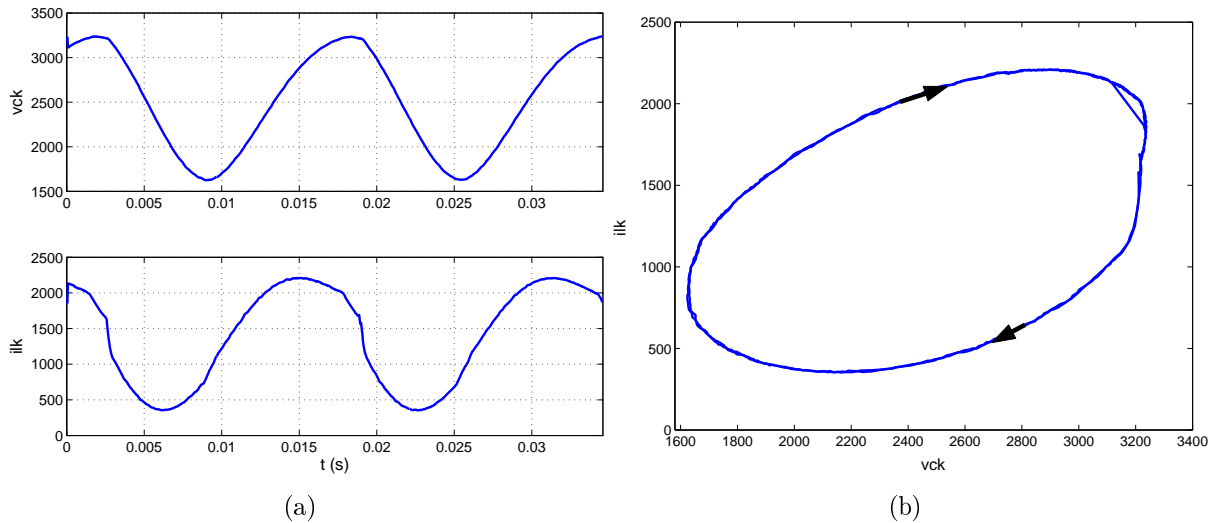


FIGURA 4.18: (a) Formas de onda dos valores de v_{ck} e i_{lk} que correspondem aos valores lidos pelo conversor A/D dos estados v_c e i_L . A escala de tempo é $t[s] \cong \frac{2/60}{800} \cdot t_p$; (b) Diagrama de estados (i_{lk}, v_{ck}).

As formas de onda de v_{ck} e i_{lk} , que correspondem aos valores lidos pelos sensores e convertidos pelo conversor A/D, são mostradas na figura 4.18-a e o diagrama de estados formado por estes dois estados, mostrado na figura 4.18-b. A forma de onda de tensão possui leves diferenças nas inclinações de subida e de descida da onda senoidal. Além disso, a crista superior está um pouco abaixo do esperado.

Este tipo de deformação também foi observada nas saídas do inversor duplo boost, como mostrado na figura 3.30 da seção 3.6.3 do capítulo anterior, ocorrendo basicamente devido uma componente de segunda harmônica, mas que a composição das duas saídas sobre a carga resulta uma forma de onda senoidal sem deformação.

A figura 4.19 mostra o diagrama de estados das variáveis (z_1, z_2) obtidas a partir das variáveis x_1 e x_2 mediante a troca de variáveis (4.6)-(4.7). A elipse formada neste diagrama corresponde ao objetivo de controle. Entretanto, ela aparece um pouco deformada na extremidade direita. Uma análise um pouco mais criteriosa nos mostra que a forma de onda de corrente, em geral, apresenta uma inclinação de descida bem mais acentuada que a inclinação de subida, como mostrado na figura 3.29. Neste trecho da trajetória a variação de corrente é bastante rápida, não sendo acompanhada apropriadamente pelo controle.

O processamento de um ciclo de cálculo da lei de controle consome $42\mu s$. Este período de processamento é suficiente para a maior parte do ciclo da oscilação senoidal da saída, mas insuficiente em um pequeno intervalo. Na implementação deste conversor, o DSP 2812 mostrou um desempenho bem melhor que o esperado utilizando cálculos em ponto flutuante e não se julgou necessária a conversão do algoritmo de controle para utilização

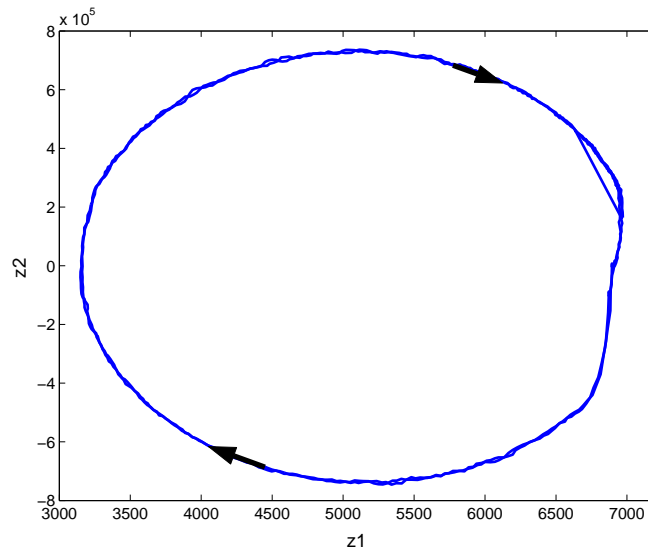


FIGURA 4.19: Diagrama de estados (z_1, z_2).

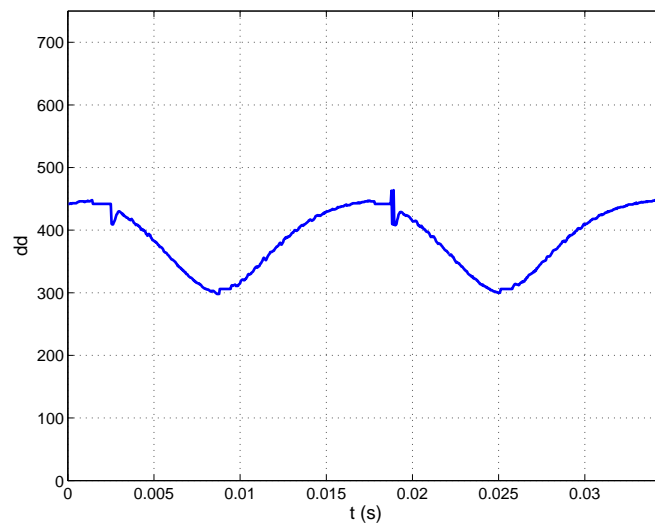


FIGURA 4.20: Forma de onda do sinal de controle. A faixa de valores $0 \leq u \leq 1$ equivale a $0 \leq dd \leq 750$. A escala de tempo é $t[s] \cong \frac{2/60}{800} \cdot t_p$.

de cálculos em ponto fixo. Futuramente, pretende-se adaptar o algoritmo de controle para a realização dos cálculos em ponto fixo onde espera-se melhorar o desempenho do sistema.

O modulador PWM opera a uma frequência de 50KHz. Escolheu-se esta frequência relativamente alta para ter-se um baixo *ripple* na corrente do indutor. Assim, verifica-se que o período de cálculo da malha de controle é diferente do período PWM e o atraso entre a amostragem e a ação de controle é de 3 a 4 períodos PWM (60 a 80 μ s).

O sinal de controle é apresentado na figura 4.20. A faixa de valores da razão cíclica $0 \leq d \leq 1$ assume o valor final (que será escrito no registrador CMP2 do DSP) na faixa $0 \leq dd \leq 749$, como aparece na figura.

A figura 4.21 mostra as formas de onda de saída medidas em osciloscópio, primeiramente com acoplamento DC, que nos permite visualizar o nível contínuo de 100V que está

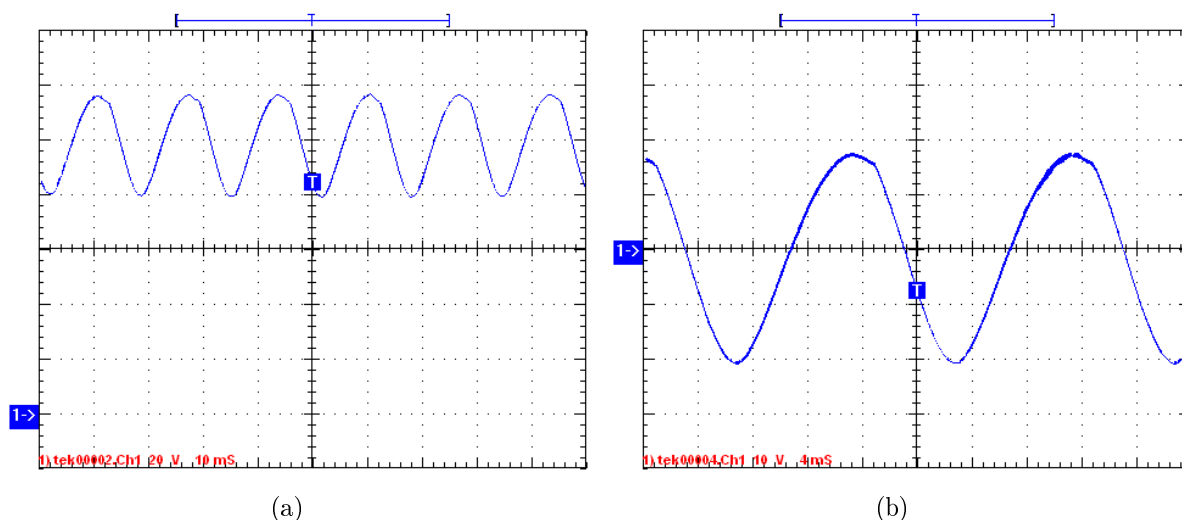


FIGURA 4.21: Formas de onda da tensão de saída (a) Medição DC com 20V/div vertical e 10ms/div horizontal; (b) Medição AC com 10V/div vertical e 4ms/div horizontal.

somado à onda senoidal de saída; depois, utilizando acoplamento AC, onde se pode ver em maior detalhe a forma de onda.

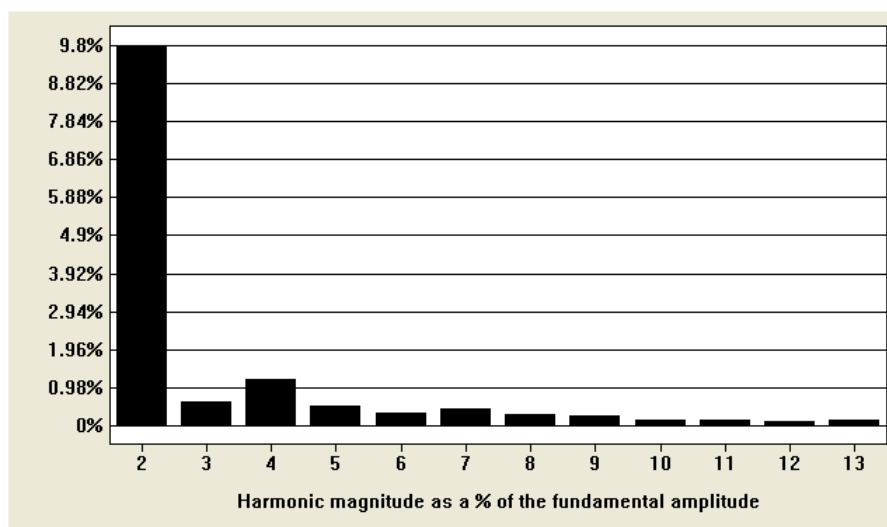


FIGURA 4.22: Conteúdo harmônico da tensão senoidal de saída. Obs.: percentuais relativos à fundamental.

A figura 4.22 apresenta o espectro de frequências da tensão senoidal de saída. Nele se pode notar a presença de uma segunda harmônica considerável, da ordem de 9,8%, o que justifica a deformação apresentada pela forma de onda da tensão mostrada na figura 4.21. Esta segunda segunda harmônica não deve estar presente na saída do conversor duplo-boost devido ao cancelamento desta harmônica, como mostrado na seção 3.6.3 do capítulo anterior.

4.4 Conclusão do capítulo

Neste capítulo foram apresentadas as implementações dos protótipos de um inversor e de um conversor boost.

No caso do inversor foram apresentados alguns passos construtivos, bem como os procedimentos de obtenção dos coeficientes da lei de controle e as formas de onda obtidas das variáveis de estado e da tensão e corrente sobre a carga.

Foi observada uma limitação do sistema nos pontos $x_2 = 0$ externos à elipse, ou seja, quando $x_1 < v_{c,min}$ ou $x_1 > v_{c,max}$. Neste caso, utilizou-se uma estratégia adicional de controle que resolveu satisfatoriamente o problema.

A robustez do inversor foi verificada através da variação de uma carga resistiva ($R = 25 - 50\Omega$) e de uma carga não linear.

O emprego de modo deslizante sobre a função $\sigma(x)$, que passa então a ser vista como uma superfície de comutação, garante maior robustez ao sistema, permitindo uma rápida recuperação em caso de perturbações. Entretanto, causa um ruído considerável (audível no indutor).

As constantes k e ρ permitem o ajuste da convergência da superfície de comutação, onde o grau de convergência está relacionado com a robustez. Portanto, para se ter um sistema mais robusto, eleva-se o valor destas constantes, mas, como conseqüência, também se terá um sistema que gere mais ruídos.

No caso do conversor boost, foi apresentada a sua implementação, os procedimentos para a obtenção da lei de controle e as formas de onda obtidas das variáveis de estado, o diagrama de estados das variáveis do sistema z e as formas de onda de tensão de saída sobre a carga.

Observou-se a ocorrência de uma deformação causada por uma componente de segunda harmônica na saída senoidal. Isto aparece claramente no diagrama de estados de (z_1, z_2) . No entanto, esta deformação desaparece no conversor duplo boost, como foi mostrado na seção 3.6.3 do capítulo 3.

A lei de controle apresentada possui a desvantagem de ser dependente do valor da carga. Isto torna o sistema deficiente diante de perturbações de carga. Será necessário desenvolver novos métodos que resolvam este problema.

No próximo capítulo são feitas considerações a respeito do estudo realizado neste trabalho, as contribuições realizadas, bem como a descrição das perspectivas para a sua continuação.

Capítulo 5

Conclusões

Neste trabalho foi apresentado um método para geração de oscilações estáveis e auto-sustentadas em uma classe de sistemas não-lineares (sistemas comutados). Foi, também, realizada a sua aplicação aos conversores buck, boost, duplo boost e a um inversor. Comparando suas características às de um controlador por seguimento de referência (“tracking”) podem ser destacados os seguintes pontos:

- O método de controle utilizado (de geração de oscilações autônomas) possui a vantagem de não necessitar utilizar nenhuma referência externa.
- Ele também não depende da informação de fase da trajetória. O sistema pode entrar em oscilação desde qualquer ponto da órbita e portanto o erro de seguimento é uma medida da distância ao ponto mais próximo da órbita. No caso tradicional do seguimento, a referência possui informação da fase, o que obriga o sistema a incorporar-se à órbita em um ponto exato (figura 1.1). Isto pode produzir um erro maior e atrasar o transitório da trajetória dos estados até a convergência ao regime permanente.
- Como desvantagem, não garante a manutenção precisa da frequência devido a pequenos deslocamentos de fase, mais acentuados quando o sistema opera com uma baixa frequência de comutação dos interruptores e na ocorrência de perturbações. Na técnica de seguimento de referência (“tracking”) isso não acontece pois o sinal externo fornece a garantia de manutenção da frequência e da fase.
- Uma outra desvantagem ocorre devido a uma maior dificuldade na geração dos defasamentos necessários nas saídas do duplo boost e em conversores trifásicos.
- O não uso de referências externas torna esta técnica, tal como foi proposta, inadequada para sistemas de co-geração.
- No caso dos conversores boost e duplo boost, a lei de controle é dependente do

valor da carga e métodos adaptativos dos parâmetros da lei de controle devem ser empregados em futuros trabalhos.

Como foi visto no capítulo 3, a resposta do sistema se aproxima da ideal à medida que se usam frequências de comutação dos interruptores mais altas. Entretanto, nos projetos apresentados, a limitação está no DSP utilizado. No caso do inversor, foi utilizado um DSP TMS320C2407 que trabalha a 40MHz e no caso do conversor boost, um DSP TMS320C2812, que opera a 150MHz. Este último apresenta um desempenho bastante satisfatório, entretanto, ambos os DSPs realizam operações ponto flutuante por software, que consomem muito tempo de processamento. Na maioria dos casos, o uso de operações em ponto fixo é necessário.

No decorrer do trabalho, foram realizadas as implementações de dois protótipos em laboratório, uma de um inversor e outra de um conversor boost, ambas utilizando a estratégia de controle de oscilações explorada no trabalho. Como resultado, foram produzidos três trabalhos para congressos:

- “Geração de oscilações auto-sustentadas em inversores monofásicos tipo buck”, *XV Congresso Brasileiro de Automática* (CBA 2004);
- “Control of autonomous oscillations in buck-based inverters”, *Power Electronics Specialists Conference* (PESC 2005);
- “Inversor monofásico auto-oscilante baseado na topologia duplo-boost”, *XVI Congresso Brasileiro de Automática* (CBA 2006);

uma publicação em periódico especializado nacional:

- “Geração de oscilações auto-sustentadas em inversores monofásicos”, *Revista Controle e Automação*, Sociedade Brasileira de Automática, vol. 17, num. 1, 2006, (aceito, aguardando publicação);

e a submissão de um artigo para publicação em periódico internacional indexado:

- “On DC to AC conversion in two boost self-oscillating structures based on non-linear control techniques”, *IEEE Transactions on Power Electronics*, (aguardando resposta sobre a aceitação).

Contribuições do trabalho

Este trabalho traz como principais contribuições:

- O estudo de uma classe de sistemas dinâmicos não-lineares visando a obtenção de osciladores autônomos. Para isto, no contexto da equação de Liénard, define-se o termo de amortecimento como uma função de um estado e de sua derivada, resultando um tipo de sistema ainda pouco estudado;

- A análise de tal sistema usando o método das curvas de dinâmica nula, associada à função de Lyapunov, de modo a obter mais detalhes a respeito do comportamento do sistema dinâmico em questão;
- A proposta de um método de síntese de controladores para geração de oscilações autônomas baseada no oscilador não linear. Essa geração apresenta o diferencial de não utilizar nenhuma referência externa. A utilização desta metodologia pode se dar em diversos tipos de aplicações, entre as quais estão os conversores de eletrônica de potência. O método proposto pode ser adaptado para a supressão de oscilações em sistemas dinâmicos atuando sobre o amortecimento do sistema;
- A aplicação deste método a conversores de eletrônica de potência com a finalidade de realizar conversão CC-CA.

Continuidade do trabalho

Na implementação prática, pretende-se adaptar o algoritmo de controle para a realização dos cálculos em ponto fixo onde espera-se melhorar o desempenho do sistema.

Busca-se também o estudo de formas de eliminação das limitações desta técnica. A principal delas está na falta da informação de fase da oscilação de saída. O uso de detectores de passagem por zero, por exemplo, apresenta-se como uma das alternativas para possibilitar o sincronismo de fase com outras fontes, necessário em várias aplicações, como no caso da co-geração.

A forma da implementação do controle de fase entre as saídas no caso do inversor duplo boost não apresenta bom desempenho. No caso, foi usada uma PLL com controle de fase linear. O uso de uma PLL de mais alta ordem e/ou não linear, de um outro tipo de controle de fase não linear e, até, por modos deslizantes pode trazer grandes benefícios ao desempenho do sincronismo de fase.

O controle por modo deslizante, na maioria dos casos, auxilia na obtenção de melhores resultados quanto à rapidez na recuperação de perturbações e no incremento da robustez. O efeito indesejado da geração de ruídos devido ao *chattering* pode ser compensado e até eliminado com o uso de superfícies de comutação de ordem mais elevada (Leung et al., 2005).

Outra alternativa ao uso de dispositivos DSP consiste no emprego de dispositivos digitais programáveis do tipo FPGA (*Field Programmable Gate Array*) e CPLD (*Complex Programmable Logic Device*). Este tipo de dispositivos permite a redução dos tempos de execução dos algoritmos de controle. A síntese dos algoritmos de controle, assim como do acionamento PWM, são implementados mediante programação de hardware, baseado em uma lógica combinatória (contendo milhares de portas lógicas) e em outra lógica seqüencial de características similares. Este procedimento realiza-se através de linguagens tipo HDL (*Hardware Description Language*). Além de ser programável (embora um pouco

mais difícil que um microcontrolador), sua vantagem consiste no uso do paralelismo das estruturas lógicas, o que permite atingir altas velocidades de processamento e conseqüente redução do tempo de execução do algoritmo de controle. Cabe destacar que, com este tipo de dispositivos programáveis, pode-se alcançar freqüências de operação dos conversores muito mais altas que utilizando processadores DSP. Tais dispositivos constituem-se em uma importante ferramenta para a implementação de algoritmos de controle não linear, dada a sua capacidade de realizar operações complexas, o que se pretende explorar como continuidade deste trabalho de pesquisa.

Na seqüência do trabalho está prevista a implementação das técnicas aqui apresentadas a um protótipo de laboratório de um conversor duplo boost, que, em grande parte, baseia-se no conversor boost simples. A utilização de dois conversores boost com a carga conectada em ponte entre as saídas de ambos demonstra uma aplicação prática de grande interesse onde é possível obter um inversor que atue como abaixador ou elevador de tensão (Cáceres and Barbi, 1999). Com a sua implementação, busca-se a confrontação dos resultados práticos com os resultados obtidos através de simulação apresentados no capítulo 3.

Apêndice A

Sistemas comutados

A.1 Introdução

O interesse visado neste trabalho é a aplicação das técnicas de controle para geração de oscilações baseadas no oscilador não linear e no oscilador não linear por modos deslizantes a sistemas comutados, onde a lei de controle é por estrutura variável.

Neste sentido, são apresentados aqui alguns fundamentos teóricos a respeito dos sistemas comutados, também chamados de sistemas de estrutura variável. São apresentados também os fundamentos teóricos a respeito de operação em modos deslizantes, que representa uma forma de operação muito utilizada através de controladores não-lineares, dada a sua excelente característica de robustez e desempenho. Apresenta-se também um resumo dos principais resultados da teoria dos sistemas de estrutura variável e seus regimes deslizantes associados. Recomenda-se ao leitor os excelentes livros de (Utkin, 1992) e os tutoriais (DeCarlo et al., 1988) e (Sira-Ramírez, 1988) para maiores referências sobre o assunto.

A.2 Sistemas comutados ou de estrutura variável

A classe de sistemas comutados ou de estrutura variável a ser considerada neste trabalho pode ser descrita na forma

$$\dot{x} = f(x, u, q)$$

onde q é uma função de comutação vetorial com $q \in \{0, 1\}$, x representa o vetor de estado do sistema e u é a entrada de controle. O vetor q tem a dimensão igual ao número total das possíveis configurações do sistema. Por exemplo, se existem N chaves no sistema, a dimensão de q pode alcançar 2^N embora algumas configurações não sejam permitidas. As superfícies de comutação definem-se como

$$\sigma_i(x) = 0$$

podendo ser cada uma destas do tipo plano, curva ou também como uma curva que varia no tempo $\sigma_i(x, t) = 0$ (Cunha, 2002)(DeCarlo et al., 1988)(Utkin, 1978).

A.3 Modos deslizantes em sistemas comutados

Essencialmente, um controle de estrutura variável usa a lei de controle para direcionar as trajetórias do sistema em direção a uma determinada variedade do plano de fases chamada de superfície de deslizamento ou de comutação e, uma vez nela, mantém a evolução do sistema restrita à variedade, dando origem ao que é conhecido como modo deslizante ou regime deslizante.

A.3.1 Definições

Considere um sistema dinâmico não linear com uma única entrada como

$$\dot{x} = f(x, t) + g(x, t)u(x, t) \quad (\text{A.1})$$

onde o vetor de estados x pertence a um subconjunto aberto $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Além disso, $f, g : D \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ são campos vetoriais contínuos com $g(x, t) \neq 0, \forall (x, t) \in D \times \mathbb{R}$. O controle comutado $u : D \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ atua como

$$u(x, t) = \begin{cases} u^+(x, t) & \text{se } \sigma(x, t) > 0 \\ u^-(x, t) & \text{se } \sigma(x, t) < 0 \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

com u^+, u^- sendo campos escalares reais e contínuos em $D \times \mathbb{R}$; sem perda de generalidade pode-se considerar $u^+(x, t) > u^-(x, t)$ localmente em $D \times \mathbb{R}$. Também, o campo escalar $\sigma : D \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ refere-se a uma função contínua com gradiente não nulo em D . O conjunto

$$S = \{(x, t) \in D \times \mathbb{R}, \sigma(x, t) = 0\}$$

define uma variedade $n - 1$ dimensional em $D \times \mathbb{R}$ chamada de superfície de comutação. As superfícies de comutação são projetadas de tal modo que o movimento dos estados do sistema restritos a S exibem o comportamento desejado, de regulação ou *tracking*.

A.3.2 Existência dos modos deslizantes

Suponha que, em uma vizinhança da superfície de comutação, os vetores tangentes da trajetória dos estados sempre apontam para S , resultando, portanto, que o sistema evolua em direção à superfície. Isto assegura o cruzamento da superfície em cada lado da mesma.

Definição A.1 Diz-se que um modo deslizante ou regime deslizante existe localmente em S se existir uma vizinhança aberta Ω de S , $\Omega \cap S \neq \emptyset$, tal que

$$\frac{d}{dt}\sigma^2(x, t) < 0, \quad \forall (x, t) \in \Omega \cap S$$

onde a derivada é calculada ao longo das trajetórias de $f + gu^+$ quando $\sigma > 0$ e $f + gu^-$ quando $\sigma < 0$. S é então chamada de superfície de comutação ou superfície de deslizamento. \triangle

Modos deslizantes puros aparecem apenas quando $x \in S$, $\forall t \geq 0$ na região Ω , o que demanda uma frequência de comutação infinitamente alta, não atingível em sistemas reais. A limitação de frequência resulta em um movimento dentro de uma vizinhança da superfície de comutação, o chamado fenômeno do *chattering*. Em uma primeira abordagem, contudo, desprezam-se os efeitos do *chattering* e considera-se a dinâmica idealmente restrita à superfície de comutação.

Observação A.1 A definição dos modos deslizantes em sistemas SISO dados pela definição A.1 é um tanto intuitiva e atualmente útil. Contudo, sua extensão para sistemas de múltiplas entradas precisa ser cuidadosamente realizada. Ver, por exemplo, o capítulo 4 de (Utkin, 1992), que contém exemplos esclarecedores. Uma definição alternativa pode ser encontrada em (DeCarlo et al., 1988). \triangle

A.3.3 Dinâmica na superfície de comutação

O método de Filippov (Filippov, 1988) para determinar a dinâmica ideal do sistema (A.1) em regime de deslizamento, ou seja, sobre a superfície $\sigma(x, t) = 0$, conhecido como *dinâmica de deslizamento ideal* (DDI), consiste em computar uma média da dinâmica do sistema em ambos os lados da superfície. Considerando

$$\dot{x} = \begin{cases} h^+(x, t) = f(x, t) + g(x, t)u^+(x, t) & \text{se } \sigma(x, t) > 0 \\ h^-(x, t) = f(x, t) + g(x, t)u^-(x, t) & \text{se } \sigma(x, t) < 0 \end{cases}$$

como os vetores de velocidade para $\sigma > 0$ e $\sigma < 0$, respectivamente. Assume-se que um regime de deslizamento tenha sido estabelecido para o sistema (A.1) com uma política de controle dada por (A.2). Em modo deslizante, o vetor velocidade da trajetória h^0 é sempre tangente à superfície de deslizamento S :

$$\dot{x} = h^0(x, t)$$

de modo que o vetor velocidade h^0 e o vetor gradiente do campo escalar $\nabla\sigma$ são sempre ortogonais

$$\langle \nabla\sigma; h^0 \rangle = \left(\frac{\partial\sigma}{\partial x} \right)^T h^0 = 0$$

O campo médio na superfície deslizante $h^0(x, u)$ é proposto como sendo a combinação convexa dos valores de campo em cada lado:

$$h^0(x, t) = \alpha h^+(x, t) + (1 - \alpha) h^-(x, t).$$

O parâmetro α é facilmente obtido como sendo

$$\alpha = \frac{\langle \nabla\sigma; h^- \rangle}{\langle \nabla\sigma; h^- - h^+ \rangle},$$

por ser exigido que as trajetórias do sistema sejam tangentes à superfície $\sigma(x, t) = 0$. Então, resolvendo a equação

$$\frac{\partial\sigma}{\partial x} \cdot h_0 + \frac{\partial\sigma}{\partial t} = 0$$

para α resulta:

$$\alpha = \frac{\frac{\partial\sigma}{\partial x} \cdot h^- + \frac{\partial\sigma}{\partial t}}{\frac{\partial\sigma}{\partial x} \cdot (h^- - h^+)} = \frac{\frac{\partial\sigma}{\partial x} \cdot h^- + \frac{\partial\sigma}{\partial t}}{\frac{\partial\sigma}{\partial x} \cdot g(u^- - u^+)}.$$

A dinâmica $\dot{x}(t) = h^0(x, t)$ sobre a superfície de deslizamento então se torna

$$\dot{x}(t) = f(x, t) - g(x, t) \frac{\frac{\partial\sigma}{\partial x} \cdot f + \frac{\partial\sigma}{\partial t}}{\frac{\partial\sigma}{\partial x} \cdot g} \quad (\text{A.3})$$

A.3.4 Método do controle equivalente

O método do controle equivalente constitui uma alternativa à técnica de Filippov, facilmente aplicável ao caso de sistema com múltiplas entradas e com resultados coincidentes para sistemas de entrada única.

A dinâmica ideal de um sistema em modo deslizante implica na existência de um controle u_{eq} contínuo, chamado de *controle equivalente* que mantém o sistema sobre a superfície de comutação uma vez que ela seja atingida. Formalmente, deve-se demandar que $\sigma(x, t) = 0$ e $\dot{\sigma}(x, t) = 0$. Desta última,

$$0 = \frac{\partial\sigma}{\partial x} \cdot \dot{x} + \frac{\partial\sigma}{\partial t} = \frac{\partial\sigma}{\partial x} \cdot (f + gu_{eq}) + \frac{\partial\sigma}{\partial t},$$

que resulta em

$$u_{eq} = -\frac{\frac{\partial\sigma}{\partial x} \cdot f + \frac{\partial\sigma}{\partial t}}{\frac{\partial\sigma}{\partial x} \cdot g}, \quad \forall (x, t) \in S. \quad (\text{A.4})$$

O sistema dinâmico

$$\dot{x} = f(x, t) + g(x, t)u_{eq}, \quad \forall (x, t) \in S \quad (\text{A.5})$$

descreve a DDI e a substituição de u_{eq} por sua expressão (A.6) conduz diretamente ao modelo de movimento de Filippov sobre a superfície de deslizamento (A.3). A expressão (A.5) pode ser escrita como

$$\dot{x} = F \cdot f - g \cdot \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} \cdot g \right)^{-1} \frac{\partial \sigma}{\partial t}$$

com

$$F = \left[I - g \cdot \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} \cdot g \right)^{-1} \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right].$$

Uma generalização pode ser realizada para a obtenção do controle equivalente para um conjunto de superfícies de comutação σ_i , $i = 1 \dots m$. Neste caso, a demanda $\dot{\sigma} = 0$ deve ser

$$0 = J_x \sigma \cdot \dot{x} + J_t \sigma = J_x \sigma \cdot (f + gu_{eq}) + J_t \sigma,$$

onde

$$J_x \sigma = \begin{bmatrix} \frac{\partial \sigma_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \sigma_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \sigma_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \sigma_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \sigma_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \sigma_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \sigma_m}{\partial x_1} & \frac{\partial \sigma_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \sigma_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad J_t \sigma = \begin{bmatrix} \frac{\partial \sigma_1}{\partial t} \\ \frac{\partial \sigma_2}{\partial t} \\ \vdots \\ \frac{\partial \sigma_m}{\partial t} \end{bmatrix}$$

que resulta em

$$u_{eq} = - (J_x \sigma \cdot g)^{-1} J_x \sigma \cdot f - (J_x \sigma \cdot g)^{-1} J_t \sigma, \quad \forall (x, t) \in S. \quad (\text{A.6})$$

O sistema dinâmico pode ser escrito como

$$\dot{x} = F \cdot f - g \cdot (J_x \sigma \cdot g)^{-1} J_t \sigma$$

com

$$F = [I - g \cdot (J_x \sigma \cdot g)^{-1} J_x \sigma].$$

Teorema A.1 (Olm, 2003) *Considere o sistema (A.1) controlado com a lei de controle de estrutura variável (A.2) e sendo S a superfície de comutação. Então,*

1. *O controle equivalente é definido se a condição de transversalidade*

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} \cdot g \neq 0$$

é satisfeita localmente em S .

2. É uma condição necessária para a existência do regime de deslizamento em S que

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} \cdot g < 0$$

3. Existe movimento de deslizamento localmente em S se

$$u^-(x, t) < u_{eq}(x, t) < u^+(x, t), \quad (\text{A.7})$$

localmente $\forall (x, t) \in S$. △

Observar, pelo teorema (A.1), que:

1. O primeiro item verifica se o campo vetorial g não é tangencial à variedade de deslizamento S .
2. O sinal da condição de transversalidade, exigido como negativo pelo segundo item é um tanto arbitrária e depende da orientação dada a S e ao sinal de $u^+ - u^-$.
3. Caso a consideração $u^+ < u^-$ seja feita na definição da política de controle, as inequações (A.7) podem apresentar sentido contrário. Esta é a razão pela qual tal condição é geralmente expressa como (Utkin, 1992)

$$\inf\{u^+, u^-\} < u_{eq} < \sup\{u^+, u^-\}.$$

4. No caso de (A.7) não satisfazer $\forall (x, t) \in S$ mas em uma certa região $\Omega \subset S$, irá existir regime de deslizamento em tal subconjunto, conhecido como *domínio de deslizamento* ou *zona de deslizamento*.
5. Isto condiciona a existência de movimento de deslizamento sobre uma certa superfície para um dado sistema com ganhos u^+ , u^- . Notar, contudo, que se os ganhos de controle puderem assumir valores arbitrários, a verificação da condição de transversalidade é necessária e suficiente para a existência de um regime de deslizamento.

A.3.5 A frequência de comutação

O regime de deslizamento ideal pressupõe a operação em frequência infinita. Sistemas reais possuem limitações na frequência máxima de operação e, por este motivo, a tentativa de fazê-los operar em modo deslizante induzirá o aparecimento do fenômeno do *chattering*. Tal fenômeno é comumente modelado como um comparador com histerese.

Em (Fadel et al., 1995) é demonstrado o cálculo da frequência máxima de comutação que pode ser alcançada em um sistema do tipo (A.1) comandado por uma lei de controle

dada por (A.2) assumindo a existência de uma faixa de histerese no comparador equivalente a $2\Delta\sigma_h$ e supondo um comportamento linear para a superfície de deslizamento em torno dos estados de comutação, como mostrado na figura A.1.

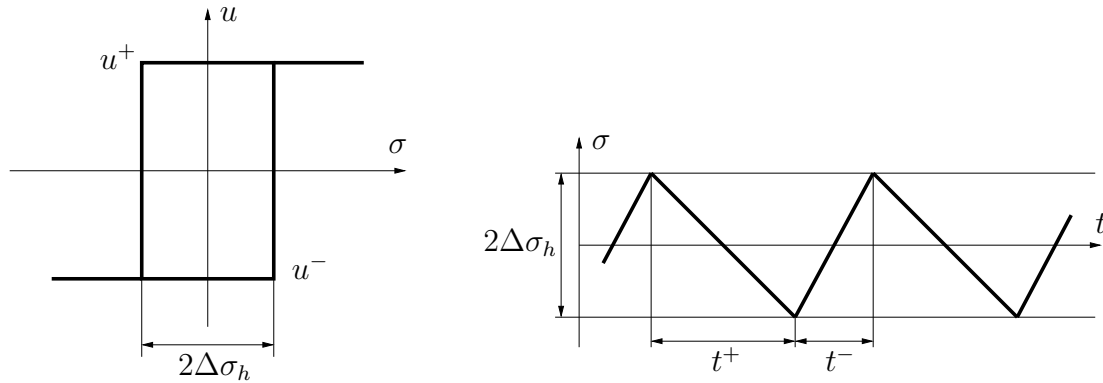


FIGURA A.1: Efeito do comparador com histerese na comutação dos estados em torno da superfície de deslizamento.

Note que

$$\dot{\sigma}(x, t) = \frac{\partial \sigma}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial x} f + \frac{\partial \sigma}{\partial t} + u \frac{\partial \sigma}{\partial x} g$$

quando o sistema evolui em modo deslizante com frequência infinita e ocorre que $\dot{\sigma}(x, t) = 0$. Assim, a partir de (A.6) tem-se

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} f + \frac{\partial \sigma}{\partial t} = -u_{eq} \frac{\partial \sigma}{\partial x} g.$$

Isto permite escrever

$$\dot{\sigma}(x, t) = (u - u_{eq}) \frac{\partial \sigma}{\partial x} g.$$

Assumindo para a superfície de deslizamento uma evolução linear em torno de $\sigma(x, t) = 0$, isto resulta

$$\dot{\sigma}(x, t; u^+) = -\frac{2\Delta\sigma_h}{t^+}, \quad \dot{\sigma}(x, t; u^-) = \frac{2\Delta\sigma_h}{t^-}.$$

Deste modo, a frequência de comutação é

$$f_s = \frac{1}{t^+ + t^-} = \frac{(u^+ - u_{eq})(u_{eq} - u^-) \left| \frac{\partial \sigma}{\partial x} g \right|}{2\Delta\sigma_h(u^+ - u^-)},$$

onde foi assumida a hipótese usual sobre negatividade de $\frac{\partial \sigma}{\partial x} g$ e $u^- - u^+$.

Em uma análise simplificada, assumindo ganhos fixos e $\left| \frac{\partial \sigma}{\partial x} g \right| = 1$, reduz-se o problema à otimização de

$$f_s = f_s(u_{eq}) = \frac{(u^+ - u_{eq})(u_{eq} - u^-)}{2\Delta\sigma_h(u^+ - u^-)}$$

para $f_s \in [0, +\infty)$. Vê-se que $f_s(u_{eq})$ é uma parábola invertida com $f_s(u^+) = f_s(u^-) = 0$, tendo seu máximo em

$$u_{eq} = \frac{u^+ + u^-}{2}$$

onde alcança o valor

$$f_{sM} = \frac{u^+ - u^-}{8\Delta\sigma_h}.$$

Apêndice B

Modelagem de conversores de eletrônica de potência

Neste apêndice são desenvolvidos os modelos matemáticos por variáveis de estado correspondentes aos conversores básicos buck, boost e buck-boost. Um certo esforço é dedicado a levantar os modelos realístico e idealizado, por valores instantâneos e por valores médios. Também, apesar de não ser interesse deste trabalho, são apresentados os modelos lineares destes conversores.

B.1 Tipo do modelo

O melhor modelo depende do grau de exatidão que se deseja em relação ao sistema físico real. Em geral, quanto mais exato é o modelo, maior é a complexidade de implementação. Por este motivo, pode-se adotar simplificações, como a idealização do modelo pela não consideração de parâmetros menos significativos (até certo ponto), como as resistências intrínsecas dos componentes semicondutores, indutor e capacitor e a queda de tensão direta dos diodos. Além disso, pode-se considerar o valor médio das variáveis do modelo, o que lhe confere uma característica de operação contínua. Uma simplificação adicional pode ser obtida pela linearização do modelo, possibilitando o uso das técnicas de projeto e controle lineares. A figura B.1 mostra um fluxograma de procedimentos da construção do modelo de um sistema.

B.2 Conversor buck

Diagrama esquemático do conversor buck:

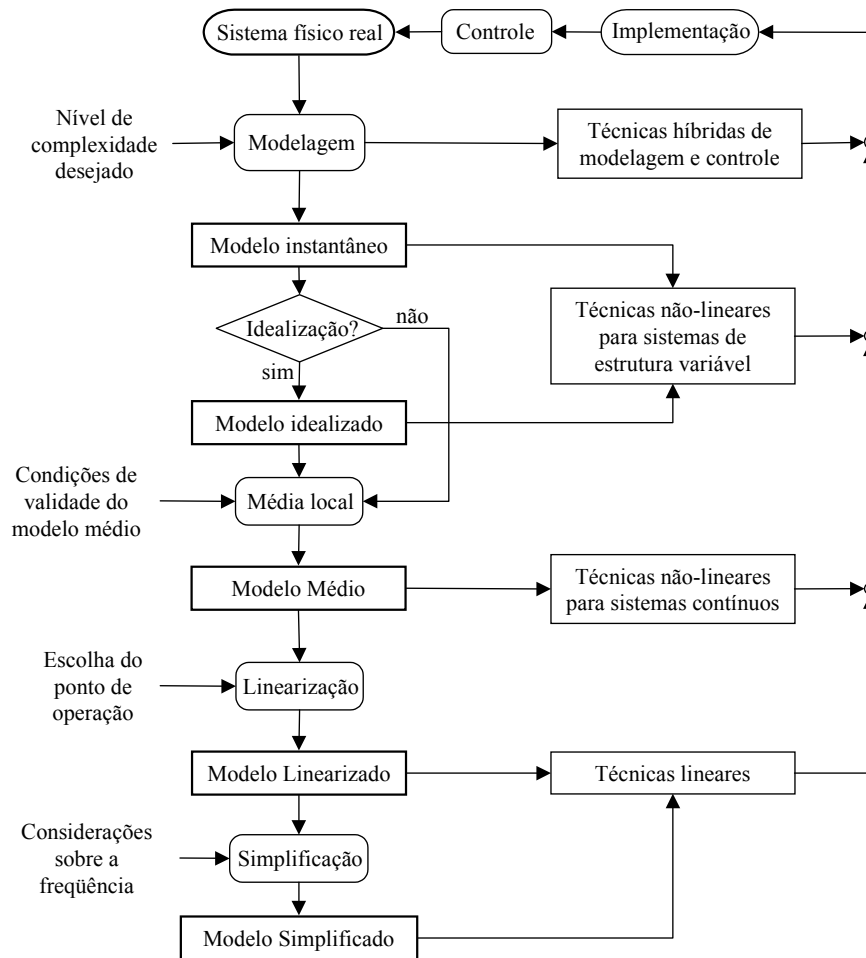


FIGURA B.1: Fluxograma das técnicas de modelagem.

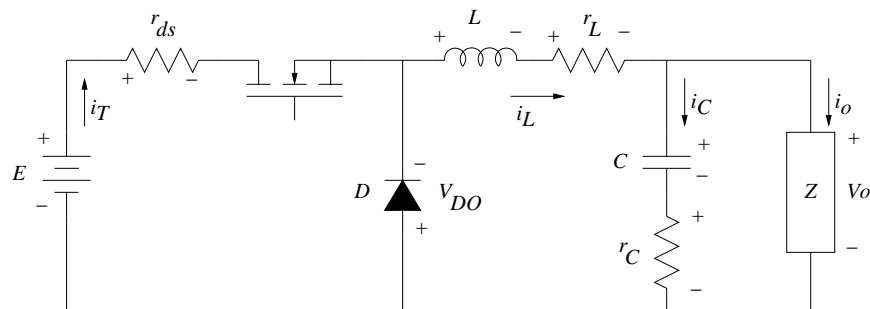


FIGURA B.2: Conversor buck.

B.2.1 Equações de estado

Considerando a variável de controle q como $q = 0$ quando a chave encontra-se aberta e $q = 1$ quando a chave encontra-se fechada chega-se às equações dinâmicas do conversor:

$$L \frac{di_L}{dt} = (-r_L - r_{ds}q)i_L - (1 - q)v_{do} - v_o + Eq$$

$$C \frac{dv_c}{dt} = \frac{v_o - v_c}{r_c}$$

Considerando os estados $x_1 = i_L$ e $x_2 = v_c$ obtemos as equações de estado

$$\begin{aligned} L\dot{x}_1 &= (-r_L - r_{ds}q)x_1 - (1 - q)v_{do} - v_o + Eq \\ C\dot{x}_2 &= \frac{v_o - x_2}{r_c} \end{aligned}$$

agrupando os termos sensíveis ao controle q :

$$\begin{aligned} L\dot{x}_1 &= -r_Lx_1 - v_{do} - v_o + (v_{do} - r_{ds}x_1 + E)q \\ C\dot{x}_2 &= \frac{v_o - x_2}{r_c} \end{aligned} \tag{B.1}$$

O sistema (B.1) é genérico pois a tensão de saída v_o ainda deve ser resolvida como função das variáveis de estado e das demais variáveis dependendo da carga que for acoplada ao sistema.

Esta forma das equações do sistema é particularmente útil quando a tensão de saída é conhecida, como em cargas ativas. Aqui cita-se o exemplo de sistemas regenerativos onde a partir de uma fonte de energia CC gera-se uma saída CA que injeta energia na rede elétrica.

B.2.2 Carga resistiva

O sistema de equações (B.1) descreve o comportamento do conversor buck para qualquer tipo de carga. Entretanto, sua determinação somente é possível quando se conhece o comportamento da tensão de saída v_o , que pode ser ativa (quando a saída do conversor é ligada a uma fonte) ou passiva. Mesmo nas cargas passivas, a determinação do sistema pode não ser tão trivial considerando a dificuldade de modelagem da carga. Cargas não lineares são muito comuns e de modelagem complexa.

Para o caso particular do uso de uma carga resistiva R , temos

$$v_o = R(i_L - i_c).$$

Substituindo nas expressões das equações de estado (B.1) obtém-se:

$$\begin{aligned} L\dot{x}_1 &= -\frac{r_Lr_c + r_cR + r_LR}{r_c + R}x_1 - \frac{R}{r_c + R}x_2 - v_{do} + (-r_{ds}x_1 + v_{do} + E)q \\ C\dot{x}_2 &= \frac{R}{r_c + R}x_1 - \frac{1}{r_c + R}x_2 \end{aligned} \tag{B.2}$$

Para um sistema idealizado, ou seja, com $r_L = r_c = r_{ds} = 0$

$$\begin{aligned} L\dot{x}_1 &= -x_2 - v_{do} + (E + v_{do})q \\ C\dot{x}_2 &= x_1 - \frac{1}{R}x_2 \end{aligned}$$

e caso a tensão de trabalho seja grande, v_{do} também poderia ser desprezado. Assim:

$$\begin{aligned} L\dot{x}_1 &= -x_2 + Eq \\ C\dot{x}_2 &= x_1 - \frac{1}{R}x_2 \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Alternativamente, pode-se escolher as variáveis de estado como sendo $x_1 = v_c$ e $x_2 = i_c$. Uma das equações dinâmicas deriva da relação entre tensão e corrente no capacitor, dada por

$$C \frac{dv_c}{dt} = i_c.$$

Considerando a variável de controle q como $q = 0$ quando a chave encontra-se aberta e $q = 1$ quando a chave encontra-se fechada, tem-se que

$$\begin{aligned} L \frac{di_L}{dt} &= -v_c + qE \\ L \frac{d}{dt} (i_c + i_R) &= -v_c + qE \\ L \frac{di_c}{dt} &= -\frac{L}{RC}i_c - v_c + qE. \end{aligned}$$

de onde se chega às equações dinâmicas do conversor:

$$\begin{aligned} C\dot{x}_1 &= x_2 \\ L\dot{x}_2 &= -x_1 - \frac{L}{RC}x_2 + qE. \end{aligned}$$

B.2.3 Equilíbrios

Considerando o conversor com uma carga genérica (não conhecida), dado o sistema de equações (B.1), o equilíbrio pode ser obtido fazendo $\dot{x}_1 = 0$ e $\dot{x}_2 = 0$

$$0 = -r_L x_1 - v_{do} - v_o + (v_{do} - r_{ds} x_1 + E)q \quad (\text{B.4})$$

$$0 = \frac{v_o - x_2}{r_c} \quad (\text{B.5})$$

Resolvendo (B.5) para v_o , substituindo em (B.4) e resolvendo para cada um dos estados

obtemos

$$x_1 = \frac{-x_2 - v_{do} + (v_{do} + E)q}{r_L + r_{ds}q}$$

$$x_2 = -r_L x_1 - v_{do} + (-r_{ds}x_1 + v_{do} + E)q$$

O desconhecimento da carga não nos permite obter expressões para os equilíbrios que sejam independentes da entrada de controle q .

Para o caso de carga resistiva, tomando-se o sistema de equações (B.2), o equilíbrio pode ser obtido fazendo $\dot{x}_1 = 0$ e $\dot{x}_2 = 0$

$$0 = -\frac{r_L r_c + r_c R + r_L R}{r_c + R} x_1 - \frac{R}{r_c + R} x_2 - v_{do} + (-r_{ds}x_1 + v_{do} + E)q$$

$$0 = \frac{R}{r_c + R} x_1 - \frac{1}{r_c + R} x_2$$

a segunda equação do sistema resulta em

$$x_2 = R x_1 \quad (\text{B.6})$$

A equação (B.6) descreve uma reta que contém os pontos de equilíbrio $\bar{x}_1 \times \bar{x}_2$ como função apenas de R . Isto significa que apenas a perturbação da carga pode alterar o ponto de equilíbrio.

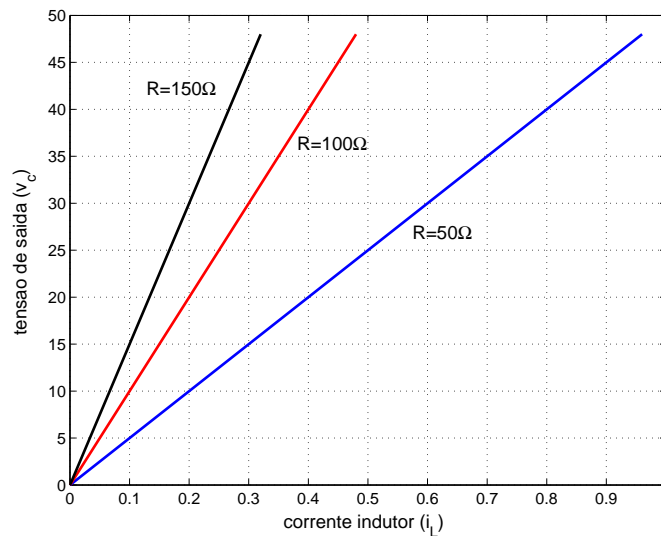


FIGURA B.3: Curva dos pontos de equilíbrio do conversor buck, usando-se $E = 48V$ e três valores para a resistência de carga: 50Ω , 100Ω e 150Ω .

A figura B.3 mostra a curva dos pontos de equilíbrio dos estados.

B.2.4 Trajetórias naturais do conversor buck

No caso particular de carga resistiva R , a partir do sistema (B.2) para o subsistema $q = 0$ obtém-se

$$\begin{aligned} L\dot{x}_1 &= \left(-\frac{r_c R}{r_c + R} - r_L \right) x_1 - \frac{R}{r_c + R} x_2 - v_{do} \\ C\dot{x}_2 &= \frac{R}{r_c + R} x_1 - \frac{1}{r_c + R} x_2 \end{aligned}$$

e para o subsistema $q = 1$

$$\begin{aligned} L\dot{x}_1 &= \left(-\frac{r_c R}{r_c + R} - r_L - r_{ds} \right) x_1 - \frac{R}{r_c + R} x_2 + E \\ C\dot{x}_2 &= \frac{R}{r_c + R} x_1 - \frac{1}{r_c + R} x_2 \end{aligned}$$

As equações se tornam mais simples se considerarmos o caso idealizado, onde $r_c = r_{ds} = r_L = 0$ e $v_{do} = 0$:

Para o subsistema $q = 0$ obtém-se

$$\begin{aligned} L\dot{x}_1 &= -x_2 \\ C\dot{x}_2 &= x_1 - \frac{1}{R}x_2 \end{aligned}$$

e para o subsistema $q = 1$

$$\begin{aligned} L\dot{x}_1 &= -x_2 + E \\ C\dot{x}_2 &= x_1 - \frac{1}{R}x_2 \end{aligned}$$

Os sistemas descritos acima nos permitem fazer um traçado das famílias de curvas no espaço de estados que relacionam x_1 com x_2 : Para isso, adotou-se: $R = 25 \Omega$, $L = 1 \text{ mH}$, $C = 10 \mu\text{F}$ e $E = 48 \text{ V}$. Deste modo, obtém-se a família de curvas do sistema $q = 0$, mostrada na figura B.4-a, a família de curvas do sistema $q = 1$, mostrada na figura B.4-b e finalmente uma composição das duas famílias de curvas, mostrada na figura B.4-c.

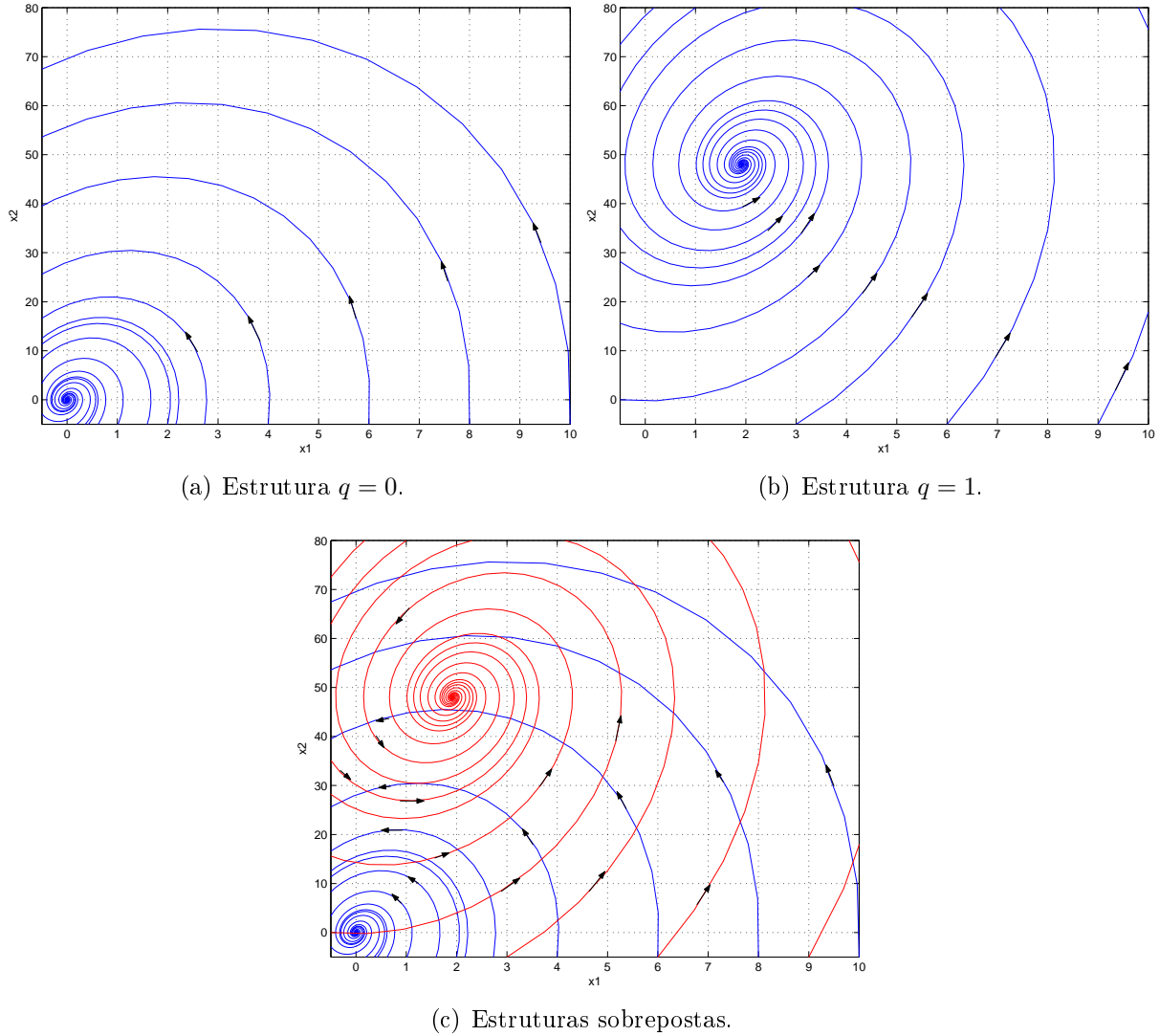


FIGURA B.4: Família de curvas do conversor buck. Foram usados: $R = 25 \Omega$, $L = 1 \text{ mH}$, $C = 10 \mu\text{F}$ e $E = 48 \text{ V}$.

B.2.5 Modelo por valores médios

Tomando-se as equações discretas (B.2), trabalhando-as, tem-se

$$L\dot{x}_1 = \left(-\frac{r_c R}{r_c + R} - r_L - r_{ds} q \right) x_1 - \frac{R}{r_c + R} x_2 - v_{do} + q v_{do} + E q$$

$$C\dot{x}_2 = \frac{R}{r_c + R} x_1 - \frac{1}{r_c + R} x_2$$

Aplicando-se as variáveis médias:

$$L\dot{\hat{x}}_1 = \left(-\frac{r_c R}{r_c + R} - r_L \right) \hat{x}_1 - r_{ds} \hat{q} \hat{x}_1 - \frac{R}{r_c + R} \hat{x}_2 - v_{do} (1 - \hat{q}) + E \hat{q}$$

$$C\dot{\hat{x}}_2 = \frac{R}{r_c + R} \hat{x}_1 - \frac{1}{r_c + R} \hat{x}_2$$

Assumindo que $\widehat{q\hat{x}} = \hat{q}\hat{x}$ tem-se

$$\begin{aligned} L\dot{\hat{x}}_1 &= \left[-\frac{r_c R}{r_c + R} - r_L - r_{ds}\hat{q} \right] \hat{x}_1 - \left[\frac{R}{r_c + R} \right] \hat{x}_2 - v_{do}(1 - \hat{q}) + E\hat{q} \\ C\dot{\hat{x}}_2 &= \left[\frac{R}{r_c + R} \right] \hat{x}_1 - \left[\frac{1}{r_c + R} \right] \hat{x}_2 \end{aligned}$$

tornando o sistema discreto em contínuo tem-se $\hat{q} = D$, onde D corresponde à razão cíclica. Então:

$$L\dot{\hat{x}}_1 = \left[-\frac{r_c R}{r_c + R} - r_L - r_{ds}D \right] \hat{x}_1 - \left[\frac{R}{r_c + R} \right] \hat{x}_2 - v_{do}(1 - D) + ED \quad (\text{B.7})$$

$$C\dot{\hat{x}}_2 = \left[\frac{R}{r_c + R} \right] \hat{x}_1 - \left[\frac{1}{r_c + R} \right] \hat{x}_2 \quad (\text{B.8})$$

O equilíbrio no modelo pela média realístico pode ser obtido anulando as derivadas do sistema anterior. De (B.8) temos que

$$R\hat{x}_1 = \hat{x}_2.$$

Substituindo esta relação em (B.7) obtemos os valores de equilíbrio de ambos os estados em função da razão cíclica dados por

$$\bar{\hat{x}}_1 = \frac{ED - v_{do}(1 - D)}{r_L + r_{ds}D + R} \quad (\text{B.9})$$

$$\bar{\hat{x}}_2 = \frac{R[ED - v_{do}(1 - D)]}{r_L + r_{ds}D + R} \quad (\text{B.10})$$

Considerando $r_c = r_{ds} = r_L = 0$ e $v_{do} = 0$, obtemos o equilíbrio no modelo pela média ideal:

$$\bar{\hat{x}}_1 = D\frac{E}{R} \quad (\text{B.11})$$

$$\bar{\hat{x}}_2 = DE \quad (\text{B.12})$$

A partir destas equações podem ser traçadas as curvas dos valores de equilíbrio dos estados em função da razão cíclica, mostradas nas figuras B.5 e B.6.

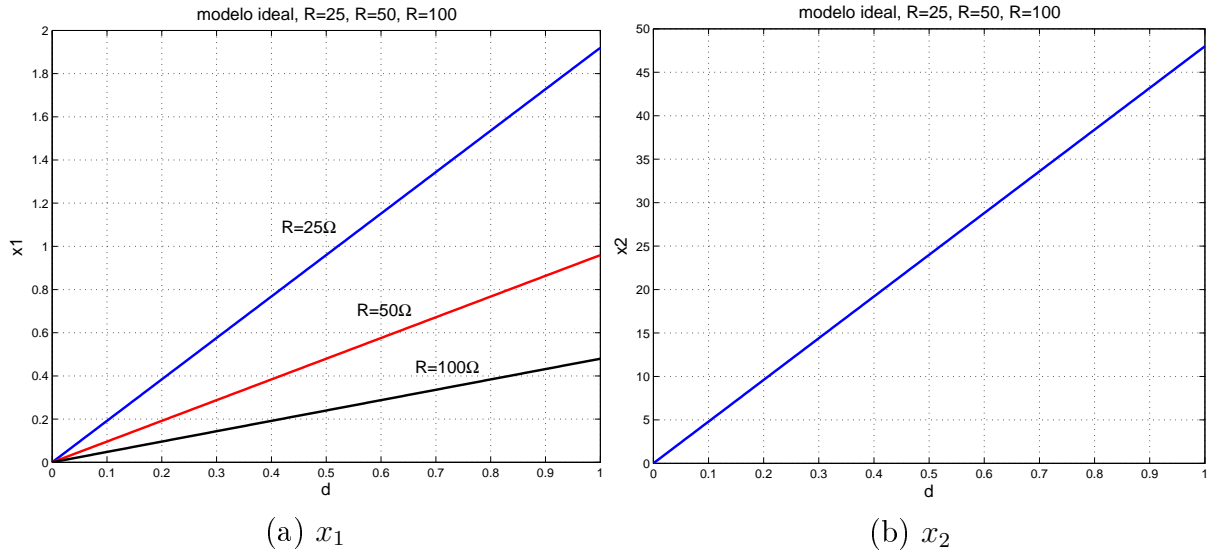


FIGURA B.5: Valores de x_1 e x_2 em função da razão cíclica d para as equações simplificadas. Foram usados: $L = 1 \text{ mH}$, $C = 10 \mu\text{F}$ e $E = 48 \text{ V}$.

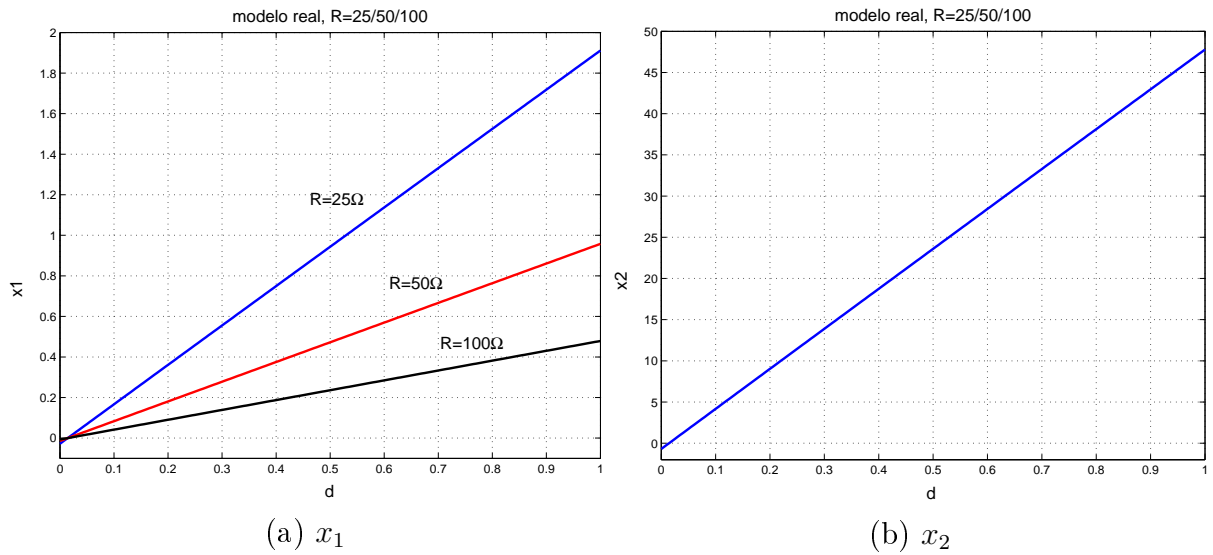


FIGURA B.6: Valores de x_1 e x_2 em função da razão cíclica d para o modelo realístico. Para sua obtenção foram usados $r_c = 0.01 \Omega$, $r_L = 0.01 \Omega$, $r_{ds} = 0.1 \Omega$, $v_{do} = 0.7 \text{ V}$ e $E = 48 \text{ V}$.

B.2.6 Modelo linearizado

Definindo

$$\Delta x_1 = \tilde{x}_1 = x_1 - X_{1op} \Rightarrow x_1 = \tilde{x}_1 + X_{1op}$$

$$\Delta x_2 = \tilde{x}_2 = x_2 - X_{2op} \Rightarrow x_2 = \tilde{x}_2 + X_{2op}$$

$$\Delta d = \tilde{d} = d - D \Rightarrow d = \tilde{d} + D$$

$$\Delta v_i = \tilde{v}_i = v_i - E \Rightarrow v_i = \tilde{v}_i + E$$

$$\dot{x}_1 = \dot{\tilde{x}}_1$$

$$\dot{x}_2 = \dot{\tilde{x}}_2$$

Substituindo nas equações (B.7) e (B.8) tem-se

$$L\dot{\tilde{x}}_1 = \left[-r_L - r_{ds}(\tilde{d} + D) - \frac{r_c R}{r_c + R} \right] (\tilde{x}_1 + X_{1op}) + \left[-\frac{R}{r_c + R} \right] (\tilde{x}_2 + X_{2op}) - v_{do}(1 - \tilde{d} - D) + (\tilde{v}_i + E)(\tilde{d} + D)$$

$$C\dot{\tilde{x}}_2 = \left[\frac{R}{r_c + R} \right] (\tilde{x}_1 + X_{1op}) - \left[\frac{1}{r_c + R} \right] (\tilde{x}_2 + X_{2op})$$

Expandindo a primeira equação:

$$L\dot{\tilde{x}}_1 = -r_L\tilde{x}_1 - r_L X_{1op} - r_{ds}\tilde{d}\tilde{x}_1 - r_{ds}D\tilde{x}_1 - r_{ds}\tilde{d}X_{1op} - r_{ds}DX_{1op} - \frac{r_c R}{r_c + R}\tilde{x}_1 - \frac{r_c R}{r_c + R}X_{1op} - \frac{R}{r_c + R}\tilde{x}_2 - \frac{R}{r_c + R}X_{2op} - (1 - D)v_{do} + v_{do}\tilde{d} + \tilde{v}_i\tilde{d} + E\tilde{d} + \tilde{v}_i D + ED$$

$$C\dot{\tilde{x}}_2 = \frac{R}{r_c + R}\tilde{x}_1 + \frac{R}{r_c + R}X_{1op} - \frac{1}{r_c + R}\tilde{x}_2 - \frac{1}{r_c + R}X_{2op}$$

eliminando termos de 2ª ordem e agrupando

$$L\dot{\tilde{x}}_1 = \left[-r_L - r_{ds}D - \frac{r_c R}{r_c + R} \right] \tilde{x}_1 - \frac{R}{r_c + R}\tilde{x}_2 + [-r_{ds}X_{1op} + v_{do} + E]\tilde{d} + D\tilde{v}_i + \left[-r_L - r_{ds}D - \frac{r_c R}{r_c + R} \right] X_{1op} - \frac{R}{r_c + R}X_{2op} - (1 - D)v_{do} + ED$$

$$C\dot{\tilde{x}}_2 = \frac{R}{r_c + R}\tilde{x}_1 - \frac{1}{r_c + R}\tilde{x}_2 + \frac{R}{r_c + R}X_{1op} - \frac{1}{r_c + R}X_{2op}$$

Se considerarmos o ponto de operação (X_{1op}, X_{2op}) como equilíbrio, transladarmos os eixos das abscissas e das ordenadas de modo que o ponto de operação esteja sobre a origem encontra-se

$$\dot{\tilde{x}}_1 = \frac{1}{L} \left\{ \left[-r_L - r_{ds}D - \frac{r_c R}{r_c + R} \right] \tilde{x}_1 - \frac{R}{r_c + R}\tilde{x}_2 + [-r_{ds}X_{1op} + v_{do} + E]\tilde{d} + D\tilde{v}_i - \right. \tag{B.13}$$

$$\left. (1 - D)v_{do} + ED \right\} \tag{B.14}$$

$$\dot{\tilde{x}}_2 = \frac{1}{C} \left\{ \frac{R}{r_c + R}\tilde{x}_1 - \frac{1}{r_c + R}\tilde{x}_2 \right\} \tag{B.15}$$

O sistema de estados fica

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_1 \\ \dot{\tilde{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ 0 \end{bmatrix} \tilde{d} + \begin{bmatrix} \frac{D}{L} \\ 0 \end{bmatrix} \tilde{v}_i$$

onde

$$\begin{aligned}
 a &= -\frac{r_L + r_{ds}D}{L} - \frac{r_c R}{L(r_c + R)} \\
 b &= -\frac{R}{L(r_c + R)} \\
 c &= \frac{R}{C(r_c + R)} \\
 d &= -\frac{1}{C(r_c + R)} \\
 e &= \frac{1}{L} [-r_{ds}X_{1op} + v_{do} + E]
 \end{aligned}$$

B.3 Conversor boost

Diagrama esquemático do conversor boost:

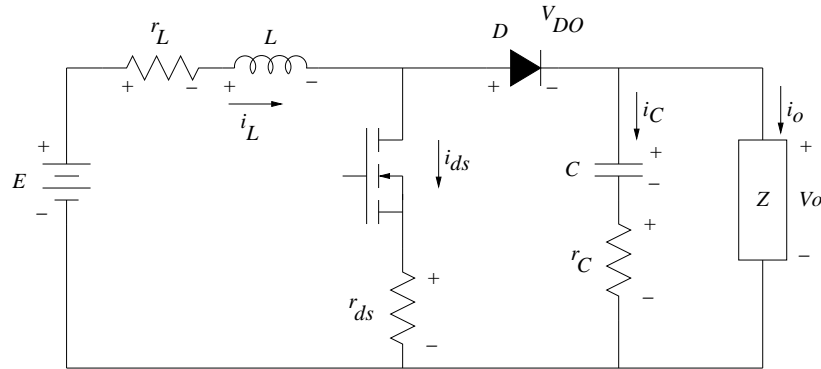


FIGURA B.7: Conversor Boost.

B.3.1 Equações de estado

Considerando a variável de controle q como $q = 0$ quando a chave encontra-se aberta e $q = 1$ quando a chave encontra-se fechada chega-se às equações dinâmicas do conversor:

$$\begin{aligned}
 L \frac{di_L}{dt} &= (-r_L - r_{ds}q)i_L - (1 - q)v_{do} - (1 - q)v_o + E \\
 C \frac{dv_c}{dt} &= \frac{v_o - v_c}{r_c}
 \end{aligned}$$

Considerando os estados $x_1 = i_L$ e $x_2 = v_c$ obtemos as equações de estado

$$\begin{aligned}
 L \dot{x}_1 &= (-r_L - r_{ds}q)x_1 - (1 - q)v_{do} - (1 - q)v_o + E \\
 C \dot{x}_2 &= \frac{v_o - x_2}{r_c}
 \end{aligned}$$

agrupando os termos sensíveis ao controle q :

$$\begin{aligned} L\dot{x}_1 &= -r_L x_1 - v_{do} - v_o + E + (v_{do} + v_o - r_{ds} x_1)q \\ C\dot{x}_2 &= \frac{v_o - x_2}{r_c} \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

O sistema (B.16) é genérico pois a tensão de saída v_o ainda deve ser resolvida como função das variáveis de estado e das demais variáveis dependendo da carga que for acoplada ao sistema.

Esta forma das equações do sistema é particularmente útil quando a tensão de saída é conhecida, como em cargas ativas. Aqui cita-se o exemplo de sistemas regenerativos onde a partir de uma fonte de energia CC gera-se uma saída CA que injeta energia na rede elétrica.

B.3.2 Carga resistiva

O sistema de equações (B.16) descreve o comportamento do conversor boost para qualquer tipo de carga. Entretanto, sua determinação somente é possível quando se conhece o comportamento da tensão de saída v_o , que pode ser ativa (quando a saída do conversor é ligada a uma fonte) ou passiva. Mesmo nas cargas passivas, a determinação do sistema pode não ser tão trivial considerando a dificuldade de modelagem da carga. Cargas não lineares são muito comuns e de modelagem complexa.

Para o caso particular do uso de uma carga resistiva R , temos

$$v_o = R [i_L(1 - q) - i_c]$$

Substituindo nas expressões das equações de estado (B.16) obtém-se:

$$\begin{aligned} L\dot{x}_1 &= -\frac{r_L r_c + r_c R + r_L R}{r_c + R} x_1 - \frac{R}{r_c + R} x_2 - v_{do} + E + \left(\frac{r_c R - r_{ds} r_c - r_{ds} R}{r_c + R} x_1 + \right. \\ &\quad \left. \frac{R}{r_c + R} x_2 + v_{do} \right) q \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

$$C\dot{x}_2 = \frac{R}{r_c + R} x_1 - \frac{1}{r_c + R} x_2 + \left(-\frac{R}{r_c + R} x_1 \right) q \quad (\text{B.18})$$

Para um sistema idealizado, ou seja, com $r_L = r_c = r_{ds} = 0$

$$\begin{aligned} L\dot{x}_1 &= -x_2 - v_{do} + E + (x_2 + v_{do})q \\ C\dot{x}_2 &= x_1 - \frac{1}{R} x_2 + -x_1 q \end{aligned}$$

e caso a tensão de trabalho seja grande, v_{do} também poderia ser desprezado. Assim:

$$\begin{aligned} L\dot{x}_1 &= -(1-q)x_2 + E \\ C\dot{x}_2 &= (1-q)x_1 - \frac{1}{R}x_2 \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

B.3.3 Equilíbrios

Considerando o conversor com uma carga genérica (não conhecida), dado o sistema de equações (B.16), o equilíbrio pode ser obtido fazendo $\dot{x}_1 = 0$ e $\dot{x}_2 = 0$

$$0 = -r_L x_1 - v_{do} - v_o + E + (v_{do} + v_o - r_{ds} x_1)q \quad (\text{B.20})$$

$$0 = \frac{v_o - x_2}{r_c} \quad (\text{B.21})$$

Resolvendo (B.21) para v_o , substituindo em (B.20) e resolvendo para cada um dos estados obtemos

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-x_2 - v_{do} + E + (x_2 + v_{do})q}{r_L + r_{ds}q} \\ x_2 &= \frac{-r_L x_1 - v_{do} + E + (-r_{ds} x_1 + v_{do})q}{1 - q} \end{aligned}$$

O desconhecimento da carga não nos permite obter expressões para os equilíbrios que sejam independentes da entrada de controle q .

Para o caso de carga resistiva, tomando-se o sistema de equações (B.18), o equilíbrio pode ser obtido fazendo $\dot{x}_1 = 0$ e $\dot{x}_2 = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{r_L r_c + r_c R + r_L R}{r_c + R} x_1 - \frac{R}{r_c + R} x_2 - v_{do} + E + \left(\frac{r_c R - r_{ds} r_c - r_{ds} R}{r_c + R} x_1 + \right. \\ &\quad \left. \frac{R}{r_c + R} x_2 + v_{do} \right) q \\ 0 &= \frac{R}{r_c + R} x_1 - \frac{1}{r_c + R} x_2 + \left(-\frac{R}{r_c + R} x_1 \right) q \end{aligned}$$

isolando q em ambas as equações:

$$\begin{aligned} q &= \frac{(r_L r_c + r_L R + r_c R)x_1 + R x_2 + (r_c + R)(v_{do} - E)}{(r_c R - r_{ds} r_c - r_{ds} R)x_1 + R x_2 + (r_c + R)v_{do}} \\ q &= \frac{R x_1 - x_2}{R x_1} \end{aligned}$$

igualando ambas temos

$$\frac{R x_1 - x_2}{R x_1} = \frac{(r_L r_c + r_L R + r_c R)x_1 + R x_2 + (r_c + R)(v_{do} - E)}{(r_c R - r_{ds} r_c - r_{ds} R)x_1 + R x_2 + (r_c + R)v_{do}}$$

e com algumas simplificações chega-se a

$$(r_L r_c + r_L R + r_{ds} R + r_{ds} r_c) R x_1^2 + R x_2^2 + (r_c R - r_{ds} r_c - r_{ds} R) x_1 x_2 - (r_c + R) R E x_1 + (r_c + R) v_{do} x_2 = 0 \quad (\text{B.22})$$

A equação (B.22) descreve a curva dos pontos de equilíbrio $\bar{x}_1 \times \bar{x}_2$ como função de E , v_{do} , r_{ds} , r_c , r_L e R . Sua solução não é trivial. Com auxílio do software Maple foram obtidas as soluções

$$x_1 = \frac{\alpha \pm \sqrt{\beta_2 x_2^2 + \beta_1 x_2 + \beta_0}}{\gamma}$$

com

$$\begin{aligned} \alpha &= (r_{ds} R + r_{ds} r_c - R r_c) x_2 + R E (R + r_c) \\ \beta_2 &= -4R^2 (R + r_c) (r_L + r_{ds}) + [R(r_c - r_{ds}) - r_c r_{ds}]^2 \\ \beta_1 &= -4R v_{do} (R + r_c)^2 (r_L + r_{ds}) + 2R E (R r_{ds} + r_c r_{ds} - R r_c) (R + r_c) \\ \beta_0 &= (R + r_c)^2 R^2 E^2 \\ \gamma &= 2R (R + r_c) (r_L + r_{ds}) \end{aligned}$$

ou

$$x_2 = \frac{\alpha \pm \sqrt{\beta_2 x_1^2 + \beta_1 x_1 + \beta_0}}{\gamma}$$

com

$$\begin{aligned} \alpha &= (r_{ds} R + r_{ds} r_c - R r_c) x_1 - (R + r_c) v_{do} \\ \beta_2 &= -4R^2 (R + r_c) (r_L + r_{ds}) + [R(r_c - r_{ds}) - r_c r_{ds}]^2 \\ \beta_1 &= -2(r_c + R) [(r_{ds} R + r_{ds} r_c - R r_c) v_{do} - 2R^2 E] \\ \beta_0 &= (r_c + R)^2 v_{do}^2 \\ \gamma &= 2R \end{aligned}$$

Conhecendo a pequena influência de r_c , r_{ds} e r_L , pode-se obter uma boa aproximação da curva exata desprezando estes termos. Da mesma forma, para o conversor trabalhando em tensões não muito baixas, v_{do} também exerce pouca influência e pode ser desprezado. Portanto, para o caso idealizado temos $r_c = r_{ds} = r_L = 0$ e $v_{do} = 0$. Desta forma, a equação (B.22) se torna

$$R x_2^2 - R^2 E x_1 = 0$$

e a solução é

$$x_1 = \frac{x_2^2}{R E} \quad (\text{B.23})$$

ou então em uma outra forma, com x_2 como função de x_1 :

$$x_2 = \sqrt{REx_1}$$

É interessante observar que os equilíbrios não dependem de L e de C , mas basicamente da carga R e da tensão de alimentação E .

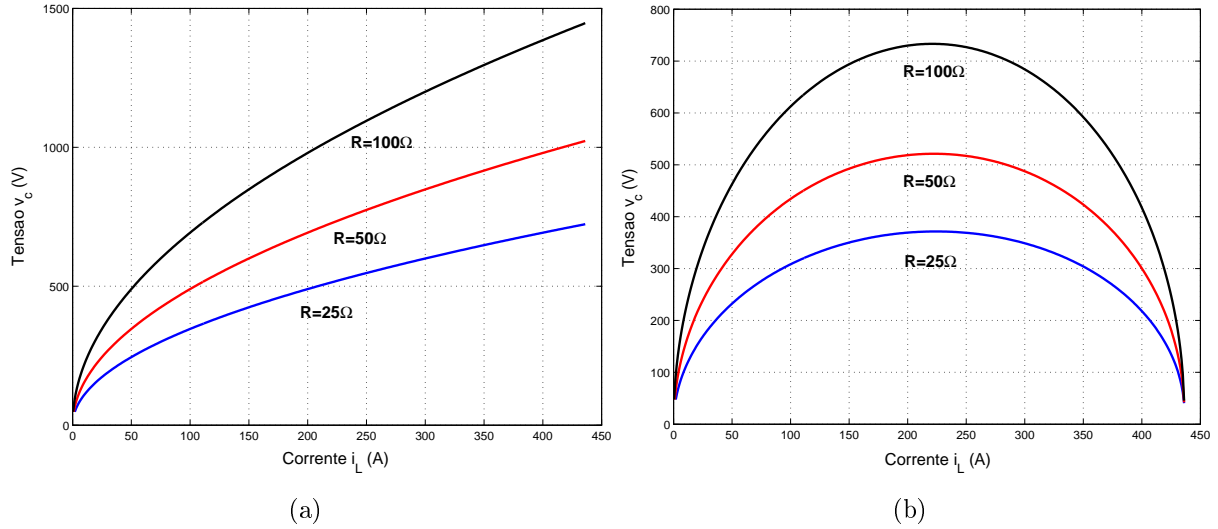


FIGURA B.8: Curva dos pontos de equilíbrio (a) ideal (b) real do conversor boost. Foram usados $E = 48\text{V}$, $L = 1\text{mH}$, $C = 10\mu\text{F}$, $r_L = r_c = 0,01\Omega$, $r_{ds} = 0,1\Omega$, $v_{do} = 0,7\text{V}$ e três diferentes cargas: $R = 25\Omega$, 50Ω e 100Ω .

A figura B.8 mostra a curva dos pontos de equilíbrio dos estados usando $E = 48\text{V}$.

B.3.4 Trajetórias naturais do conversor boost

No caso particular de carga resistiva R , a partir do sistema (B.18) para o subsistema $q = 0$ obtém-se

$$\begin{aligned} L\dot{x}_1 &= -\frac{r_L r_c + r_c R + r_L R}{r_c + R} x_1 - \frac{R}{r_c + R} x_2 - v_{do} + E \\ C\dot{x}_2 &= \frac{R}{r_c + R} x_1 - \frac{1}{r_c + R} x_2 \end{aligned}$$

e para o subsistema $q = 1$

$$\begin{aligned} L\dot{x}_1 &= -(r_{ds} + r_L) x_1 + E \\ C\dot{x}_2 &= -\frac{1}{r_c + R} x_2 \end{aligned}$$

As equações se tornam mais simples se considerarmos o caso idealizado, onde $r_c = r_{ds} = r_L = 0$ e $v_{do} = 0$:

Para o subsistema $q = 0$ obtém-se

$$\begin{aligned} L\dot{x}_1 &= -x_2 + E \\ C\dot{x}_2 &= x_1 - \frac{1}{R}x_2 \end{aligned}$$

e para o subsistema $q = 1$

$$\begin{aligned} L\dot{x}_1 &= E \\ C\dot{x}_2 &= -\frac{1}{R}x_2 \end{aligned}$$

Os sistemas descritos acima nos permitem fazer um traçado das famílias de curvas no espaço de estados que relacionam x_1 com x_2 : Para isso, adotou-se: $R = 25 \Omega$, $L = 1 \text{ mH}$, $C = 10 \mu\text{F}$ e $E = 48 \text{ V}$. Deste modo, obtém-se a família de curvas do sistema $q = 0$, mostrada na figura B.9-a, a família de curvas do sistema $q = 1$, mostrada na figura B.9-b e finalmente uma composição das duas famílias de curvas, mostrada na figura B.9-c.

B.3.5 Modelo por valores médios

Tomando-se as equações discretas (B.18), trabalhando-as, tem-se

$$\begin{aligned} L\dot{x}_1 &= -\frac{r_c R + r_L(r_c + R)}{r_c + R}x_1 + \frac{r_c R - r_{ds}(r_c + R)}{r_c + R}qx_1 - \frac{R}{r_c + R}x_2 + \frac{R}{r_c + R}qx_2 - \\ &\quad v_{do} + qv_{do} + E \\ C\dot{x}_2 &= \frac{R}{r_c + R}x_1 - \frac{R}{r_c + R}qx_1 - \frac{1}{r_c + R}x_2 \end{aligned}$$

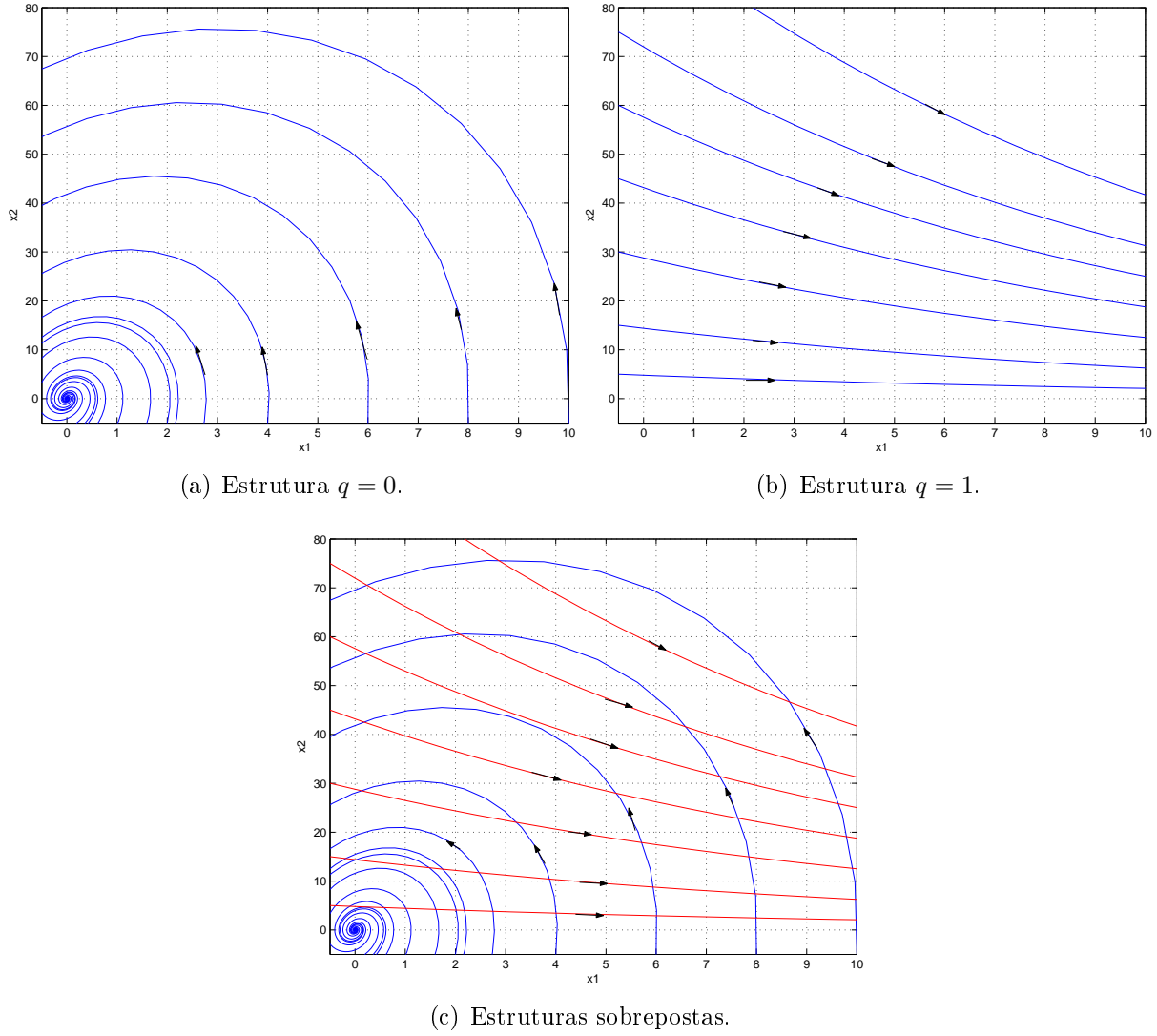
Aplicando-se as variáveis médias:

$$\begin{aligned} L\dot{\hat{x}}_1 &= -\frac{r_c R + r_L(r_c + R)}{r_c + R}\hat{x}_1 + \frac{r_c R - r_{ds}(r_c + R)}{r_c + R}q\hat{x}_1 - \frac{R}{r_c + R}\hat{x}_2 + \frac{R}{r_c + R}q\hat{x}_2 - \\ &\quad v_{do}(1 - \hat{q}) + E \\ C\dot{\hat{x}}_2 &= \frac{R}{r_c + R}\hat{x}_1 - \frac{R}{r_c + R}q\hat{x}_1 - \frac{1}{r_c + R}\hat{x}_2 \end{aligned}$$

Assumindo que $\widehat{qx} = \hat{q}\hat{x}$ tem-se

$$\begin{aligned} L\dot{\hat{x}}_1 &= \left[-r_L - r_{ds}\hat{q} - \frac{r_c R}{r_c + R}(1 - \hat{q}) \right] \hat{x}_1 - \left[\frac{R}{r_c + R}(1 - \hat{q}) \right] \hat{x}_2 - v_{do}(1 - \hat{q}) + E \\ C\dot{\hat{x}}_2 &= \left[\frac{R}{r_c + R}(1 - \hat{q}) \right] \hat{x}_1 - \left[\frac{1}{r_c + R} \right] \hat{x}_2 \end{aligned}$$

tornando o sistema discreto em contínuo tem-se $\hat{q} = D$, onde D corresponde à razão


FIGURA B.9: Família de curvas do conversor Boost.

cíclica. Então:

$$L\dot{\hat{x}}_1 = \left[-r_L - r_{ds}D - \frac{r_c R}{r_c + R}(1 - D) \right] \hat{x}_1 - \left[\frac{R}{r_c + R}(1 - D) \right] \hat{x}_2 - v_{do}(1 - D) + E \quad (\text{B.24})$$

$$C\dot{\hat{x}}_2 = \left[\frac{R}{r_c + R}(1 - D) \right] \hat{x}_1 - \left[\frac{1}{r_c + R} \right] \hat{x}_2 \quad (\text{B.25})$$

O equilíbrio no modelo pela média realístico pode ser obtido anulando as derivadas do sistema anterior. De (B.25) temos que

$$[R(1 - D)] \hat{x}_1 = \hat{x}_2.$$

Substituindo esta relação em (B.24) obtemos os valores de equilíbrio de ambos os estados

em função da razão cíclica dados por

$$\bar{\hat{x}}_1 = \frac{E - v_{do}(1 - D)}{r_L + r_{ds}D + \frac{r_c R}{r_c + R}(1 - D) + \frac{R^2}{r_c + R}(1 - D)^2} \quad (\text{B.26})$$

$$\bar{\hat{x}}_2 = \frac{R(1 - D)[E - v_{do}(1 - D)]}{r_L + r_{ds}D + \frac{r_c R}{r_c + R}(1 - D) + \frac{R^2}{r_c + R}(1 - D)^2} \quad (\text{B.27})$$

Considerando $r_c = r_{ds} = r_L = 0$ e $v_{do} = 0$, obtemos o equilíbrio no modelo pela média ideal:

$$\bar{\hat{x}}_1 = \frac{1}{(1 - D)^2} \frac{E}{R} \quad (\text{B.28})$$

$$\bar{\hat{x}}_2 = \frac{1}{(1 - D)} E \quad (\text{B.29})$$

A partir destas equações podem ser traçadas as curvas dos valores de equilíbrio dos estados em função da razão cíclica, mostradas nas figuras B.10 e B.11.

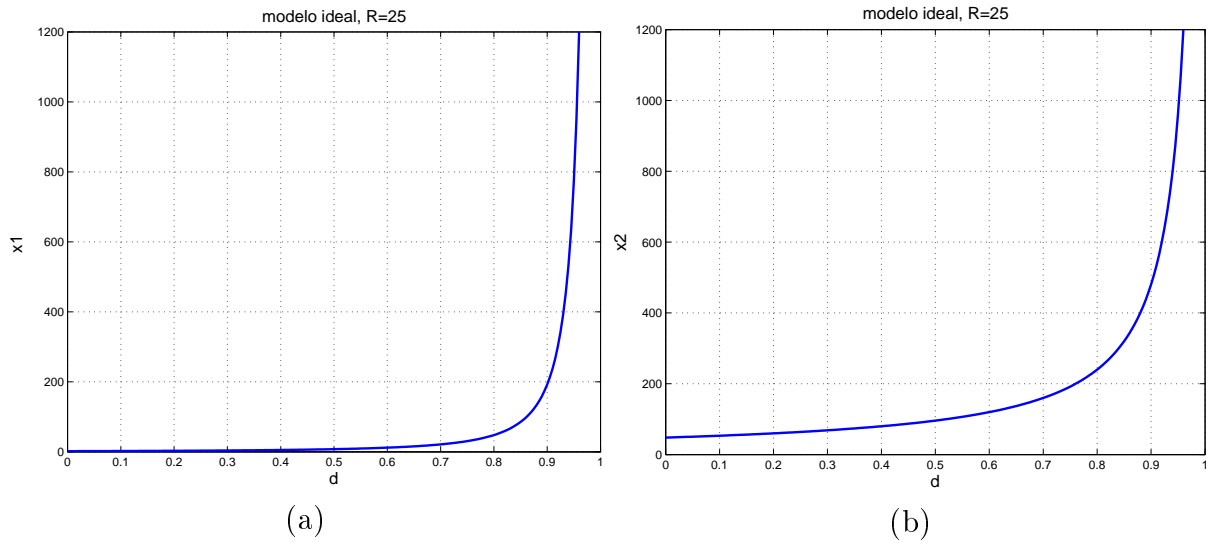


FIGURA B.10: Valores de (a) x_1 e (b) x_2 em função da razão cíclica para as equações simplificadas.

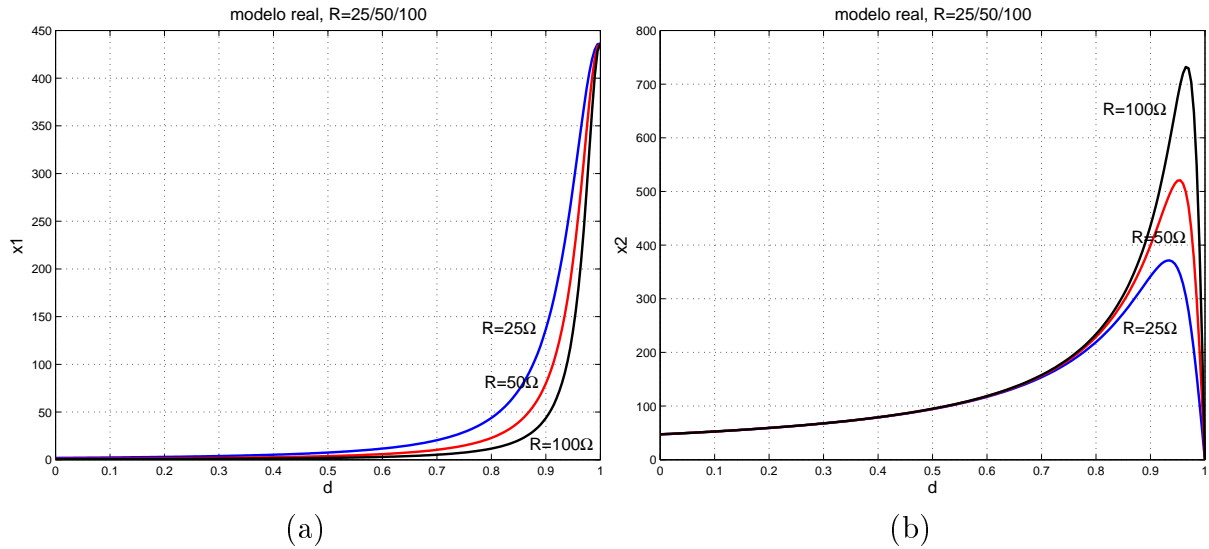


FIGURA B.11: Valores de (a) x_1 e (b) x_2 em função da razão cíclica para o modelo realístico. Para sua obtenção foram usados $r_c = 0.01 \Omega$, $r_L = 0.01 \Omega$, $r_{ds} = 0.1 \Omega$, $v_{do} = 0.7 \text{ V}$ e $E = 48 \text{ V}$.

B.3.6 Modelo linearizado

Definindo

$$\Delta x_1 = \tilde{x}_1 = x_1 - X_{1op} \Rightarrow x_1 = \tilde{x}_1 + X_{1op}$$

$$\Delta x_2 = \tilde{x}_2 = x_2 - X_{2op} \Rightarrow x_2 = \tilde{x}_2 + X_{2op}$$

$$\Delta d = \tilde{d} = d - D \Rightarrow d = \tilde{d} + D$$

$$\Delta v_i = \tilde{v}_i = v_i - E \Rightarrow v_i = \tilde{v}_i + E$$

$$\dot{x}_1 = \dot{\tilde{x}}_1$$

$$\dot{x}_2 = \dot{\tilde{x}}_2$$

Substituindo nas equações (B.24) e (B.25) tem-se

$$L\dot{\tilde{x}}_1 = \left[-r_L - r_{ds}(\tilde{d} + D) - \frac{r_c R}{r_c + R}(1 - \tilde{d} - D) \right] (\tilde{x}_1 + X_{1op}) + \left[-\frac{R}{r_c + R}(1 - \tilde{d} - D) \right] \cdot$$

$$(\tilde{x}_2 + X_{2op}) - v_{do}(1 - \tilde{d} - D) + (\tilde{v}_i + E)$$

$$C\dot{\tilde{x}}_2 = \left[\frac{R}{r_c + R}(1 - \tilde{d} - D) \right] (\tilde{x}_1 + X_{1op}) - \left[\frac{1}{r_c + R} \right] (\tilde{x}_2 + X_{2op})$$

Expandindo a primeira equação:

$$L\dot{\tilde{x}}_1 = -r_L\tilde{x}_1 - r_L X_{1op} - r_{ds}\tilde{d}\tilde{x}_1 - r_{ds}\tilde{d}X_{1op} - r_{ds}D\tilde{x}_1 - r_{ds}DX_{1op} - \frac{r_c R}{r_c + R}(1-D)\tilde{x}_1 - \frac{r_c R}{r_c + R}(1-D)X_{1op} + \frac{r_c R}{r_c + R}\tilde{d}\tilde{x}_1 + \frac{r_c R}{r_c + R}\tilde{d}X_{1op} - \frac{R}{r_c + R}(1-D)\tilde{x}_2 - \frac{R}{r_c + R}(1-D)X_{2op} + \frac{R}{r_c + R}\tilde{d}\tilde{x}_2 + \frac{R}{r_c + R}\tilde{d}X_{2op} - v_{do}(1-D) + v_{do}\tilde{d} + \tilde{v}_i + E$$

eliminando termos de 2ª ordem e agrupando

$$L\dot{\tilde{x}}_1 = \left[-r_L - r_{ds}D - \frac{r_c R}{r_c + R}(1-D) \right] \tilde{x}_1 - \frac{R}{r_c + R}(1-D)\tilde{x}_2 + \left[\left(-r_{ds} + \frac{r_c R}{r_c + R} \right) X_{1op} + \frac{R}{r_c + R}X_{2op} + v_{do} \right] \tilde{d} + \tilde{v}_i + (-r_L - r_{ds}D)X_{1op} - \frac{r_c R}{r_c + R}(1-D)X_{1op} - \frac{R}{r_c + R}(1-D)X_{2op} - v_{do}(1-D) + E$$

Se considerarmos o ponto de operação (X_{1op}, X_{2op}) como equilíbrio, transladarmos os eixos das abscissas e das ordenadas de modo que o ponto de operação esteja sobre a origem encontra-se

$$\dot{\tilde{x}}_1 = \frac{1}{L} \left\{ \left[-r_L - r_{ds}D - \frac{r_c R}{r_c + R}(1-D) \right] \tilde{x}_1 - \frac{R}{r_c + R}(1-D)\tilde{x}_2 + \left[\left(-r_{ds} + \frac{r_c R}{r_c + R} \right) X_{1op} + \frac{R}{r_c + R}X_{2op} + v_{do} \right] \tilde{d} + \tilde{v}_i - v_{do}(1-D) + E \right\} \quad (\text{B.30})$$

Para \tilde{x}_2 :

$$C\dot{\tilde{x}}_2 = \frac{R}{r_c + R}(1-D)\tilde{x}_1 + \frac{R}{r_c + R}(1-D)X_{1op} - \frac{R}{r_c + R}\tilde{d}\tilde{x}_1 - \frac{R}{r_c + R}\tilde{d}X_{1op} - \frac{1}{r_c + R}\tilde{x}_2 - \frac{1}{r_c + R}X_{2op}$$

eliminando termos de 2ª ordem e agrupando

$$\dot{\tilde{x}}_2 = \frac{1}{C} \left\{ \frac{R}{r_c + R}(1-D)\tilde{x}_1 - \frac{1}{r_c + R}\tilde{x}_2 - \frac{R}{r_c + R}X_{1op}\tilde{d} \right\} \quad (\text{B.31})$$

O sistema de estados fica

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_1 \\ \dot{\tilde{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix} \tilde{d} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} \tilde{v}_i$$

onde

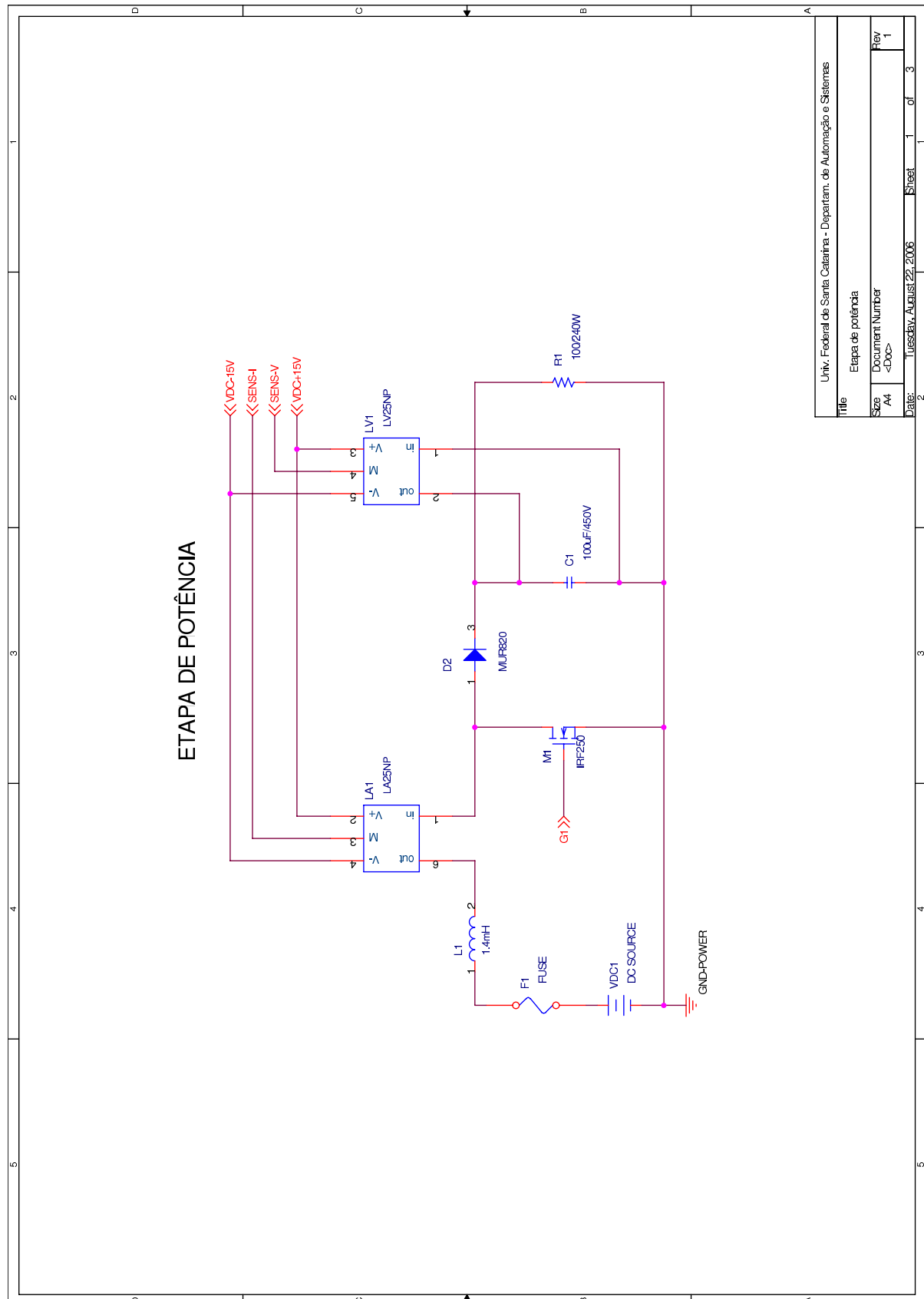
$$\begin{aligned}a &= -\frac{r_L + r_{ds}D}{L} - \frac{r_c R}{L(r_c + R)}(1 - D) \\b &= -\frac{R}{L(r_c + R)}(1 - D) \\c &= \frac{R}{C(r_c + R)}(1 - D) \\d &= -\frac{1}{C(r_c + R)} \\e &= \frac{1}{L} \left[\left(-r_{ds} + \frac{r_c R}{r_c + R} \right) X_{1op} + \frac{R}{r_c + R} X_{2op} + v_{do} \right] \\f &= -\frac{R}{C(r_c + R)} X_{1op}\end{aligned}$$

Apêndice C

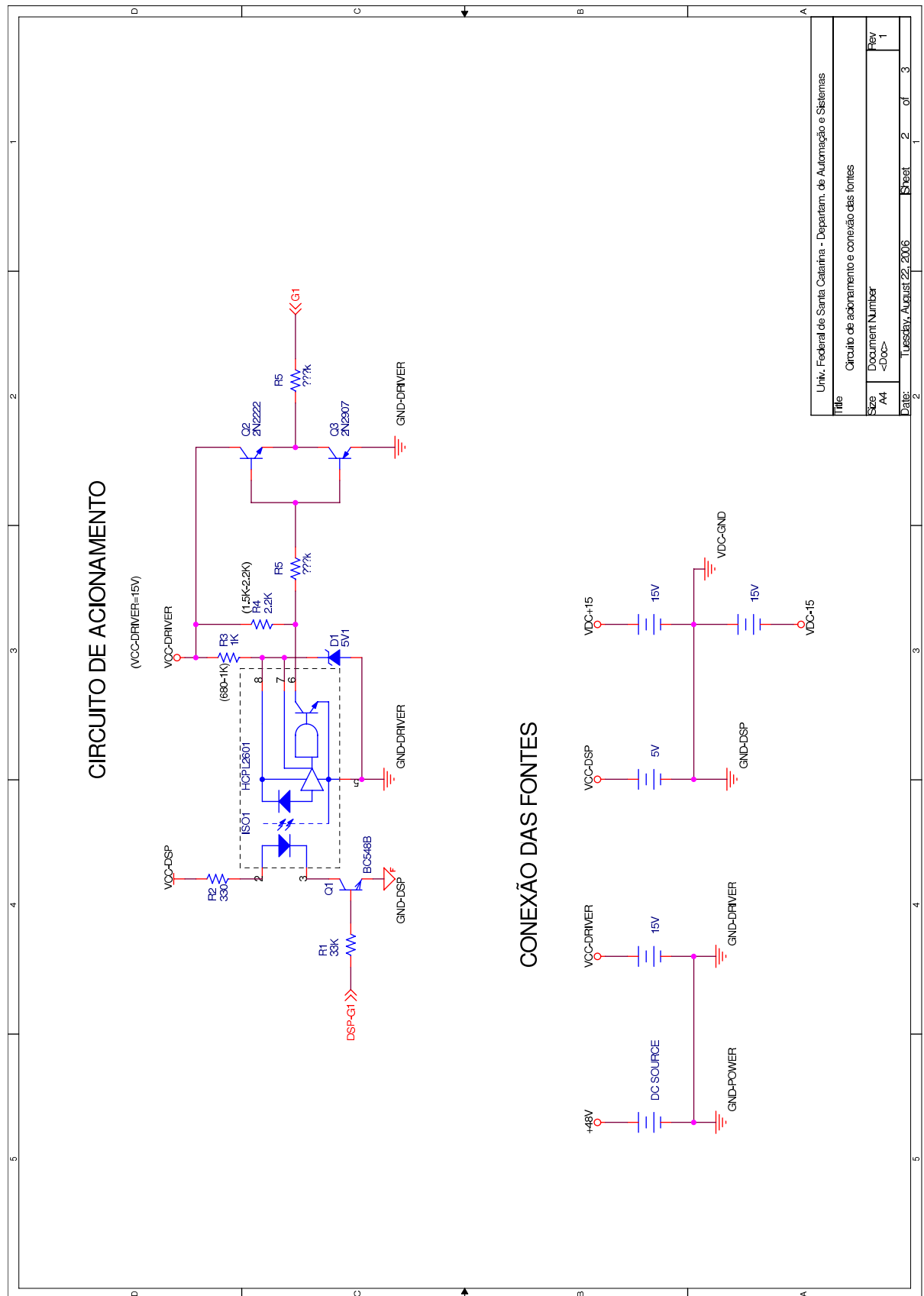
Diagramas esquemáticos

C.1 Conversor boost

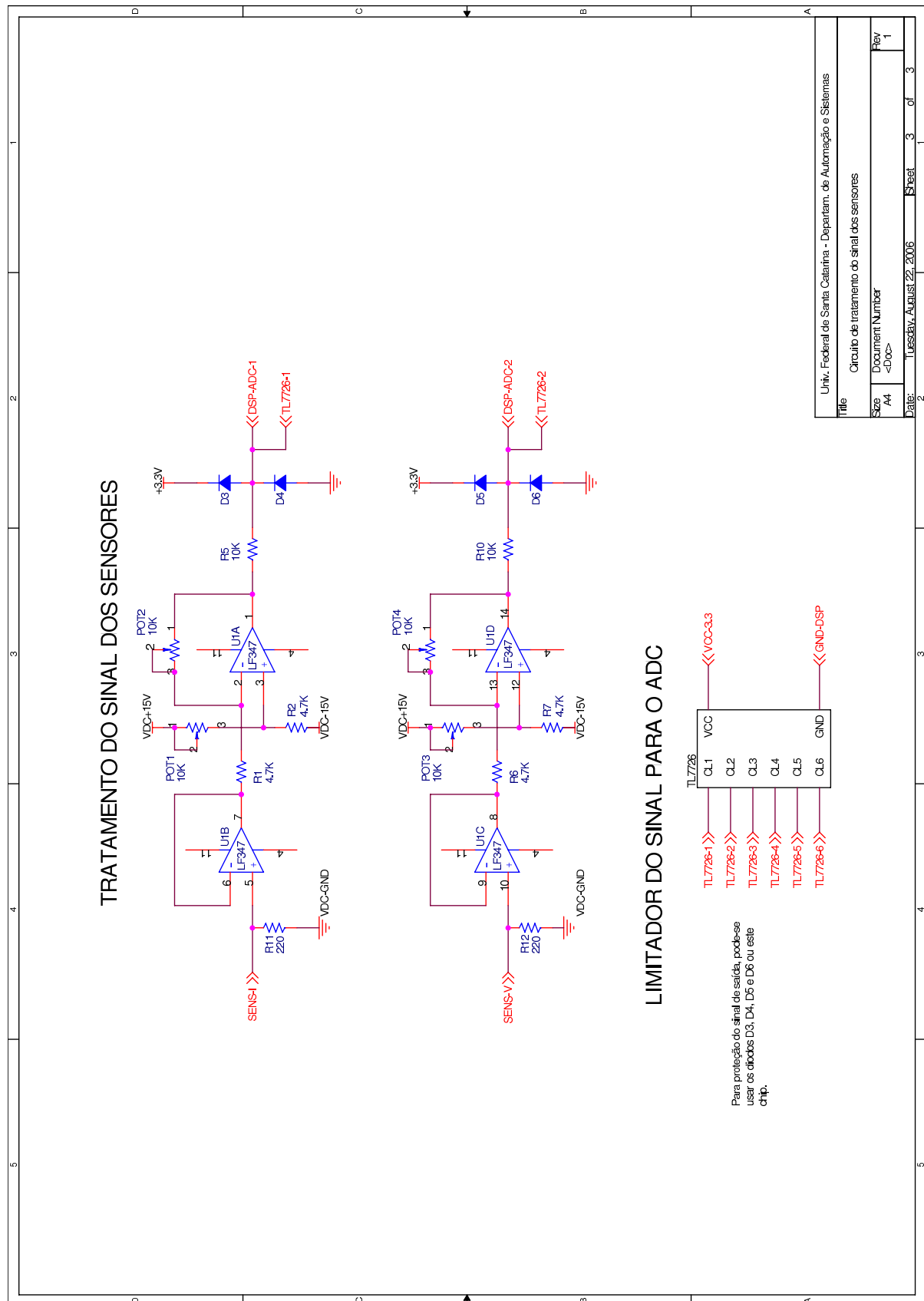
C.1.1 Etapa de potência



C.1.2 Circuito de acionamento



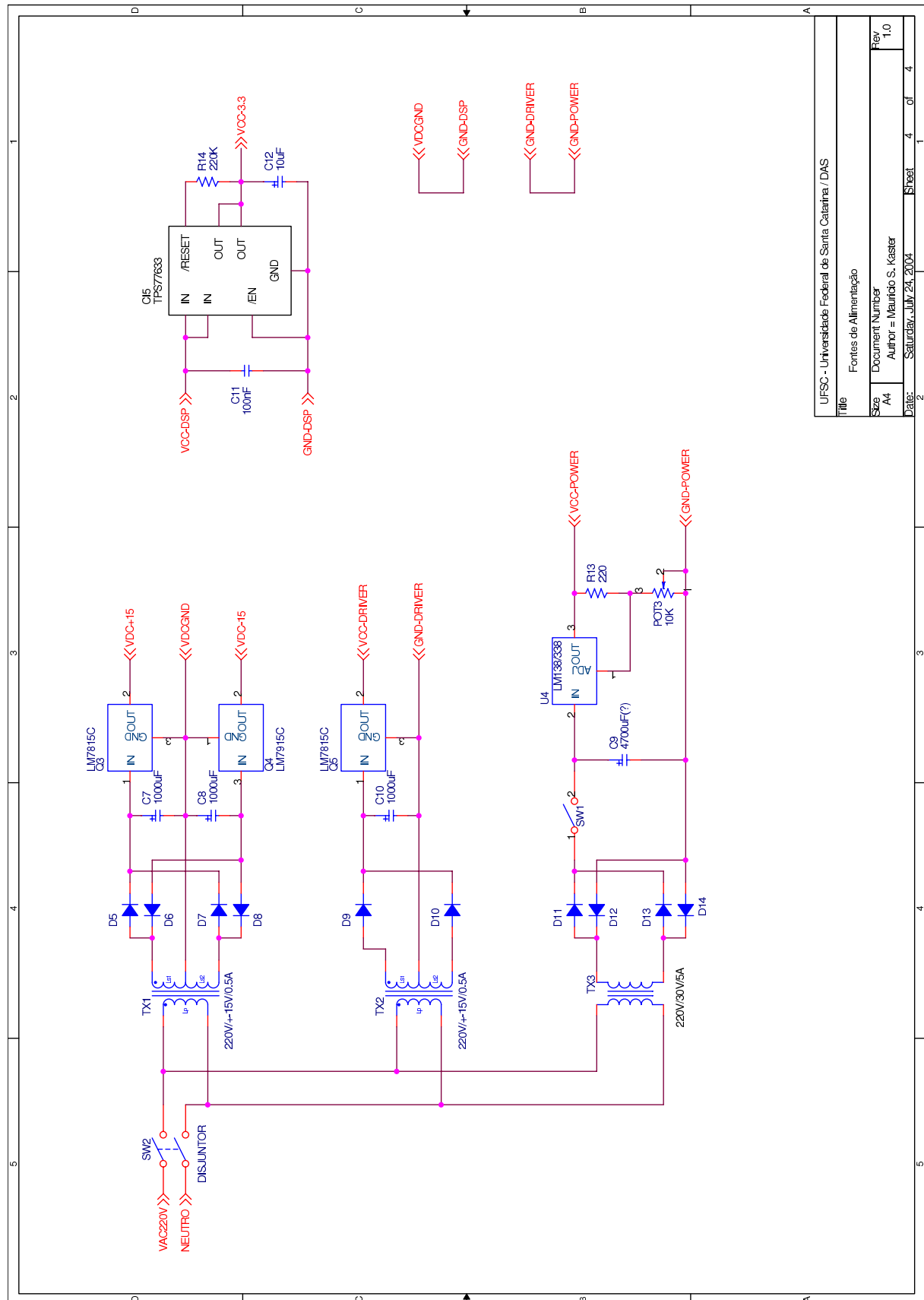
C.1.3 Circuito de tratamento do sinal dos sensores



Univ. Federal de Santa Catarina - Departam. de Automação e Sistemas	
Title: Circuito de tratamento do sinal dos sensores	
Size: 744	Document Number: -Doc-
Date: Tuesday, August 22, 2006	Sheet: 3 of 3
Rev: 1	

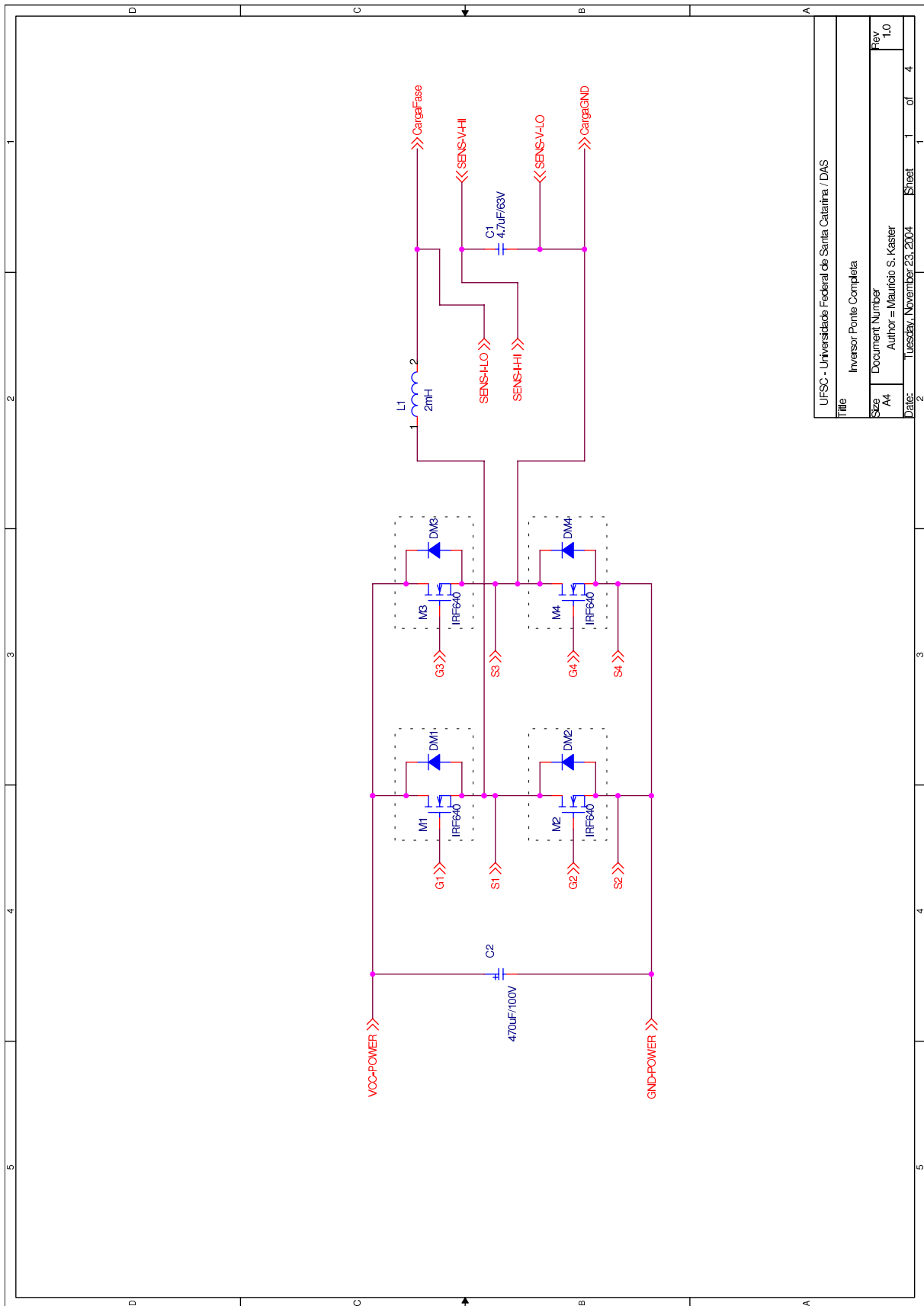
C.2 Inversor monofásico

C.2.1 Fontes de alimentação



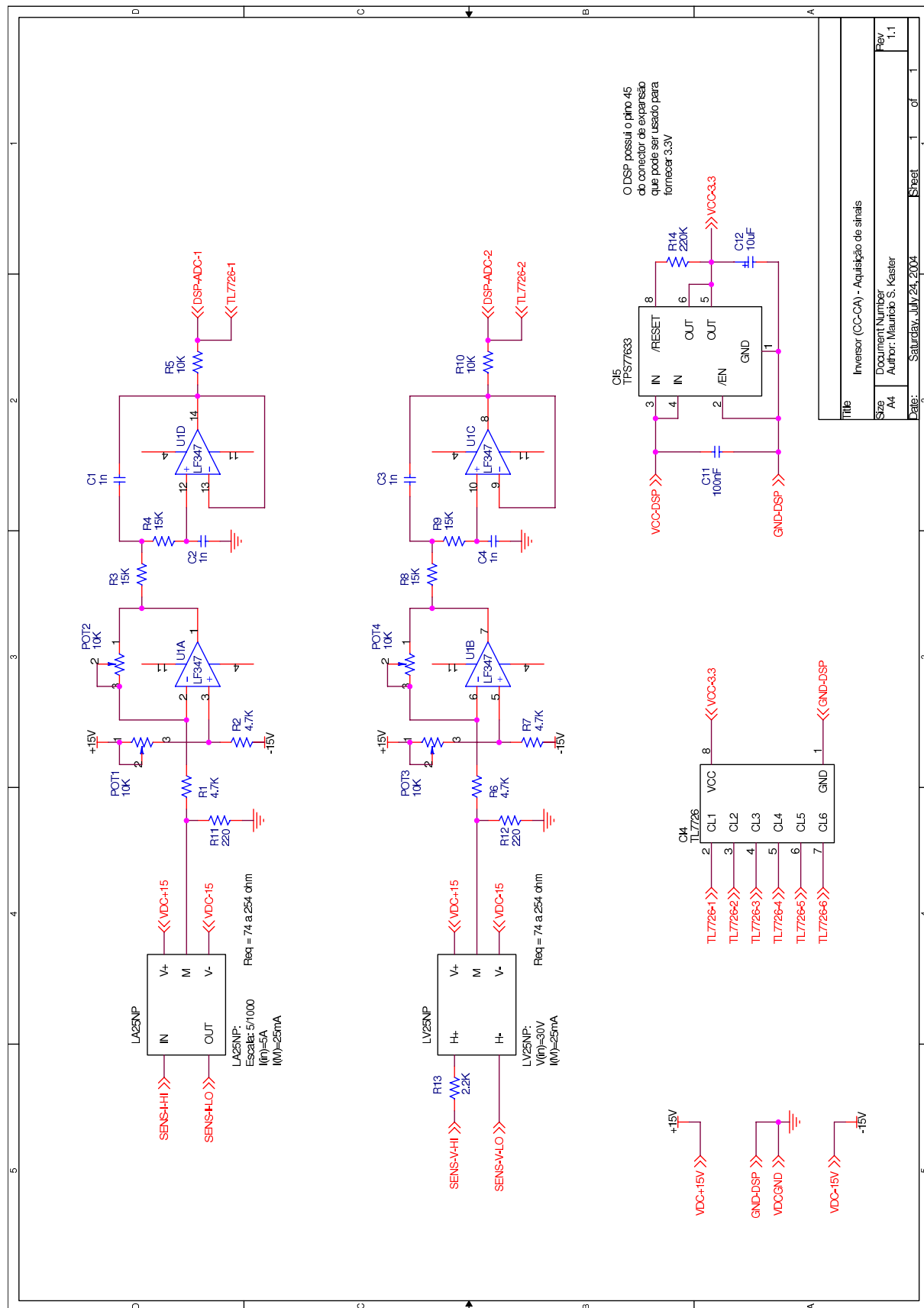
UFSC - Universidade Federal de Santa Catarina / DAS			
Title Fontes de Alimentação			
Size A4	Document Number	Author = Maurício S. Kaster	Rev 1.0
Date: Saturday, July 24, 2004	Sheet 4	of 4	1

C.2.2 Etapa de potência

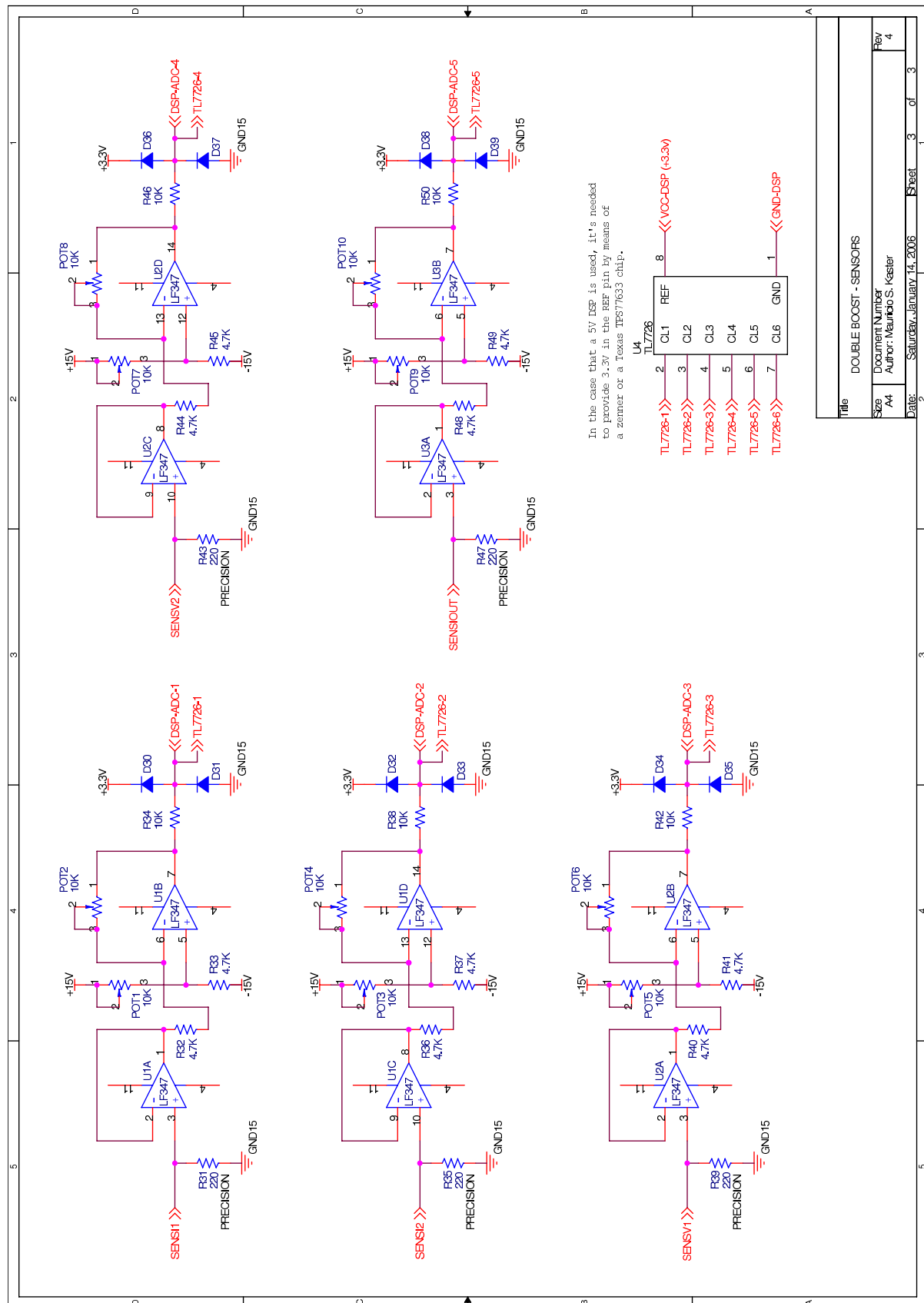


UFSC - Universidade Federal de Santa Catarina / DAS	
Title	Inversor Ponte Completa
Size	Document Number
A4	Author = Mauricio S. Kaster
Date:	Tuesday, November 23, 2004
Sheet	1 of 4
Rev	1.0

C.2.4 Circuito de condicionamento do sinal dos sensores



C.3.3 Circuito de condicionamento do sinal dos sensores



Referências Bibliográficas

- Andronov, A. A., Vitt, A. A., and Khaikin, S. E. (1987). *Theory of oscillators*. Dover Publications Inc., New York, USA. original editor: Pergamon Press, Oxford, UK, 1966.
- Aracil, J. and Gordillo, F. (2002). On the control of oscillations in DC-AC converters. In *Proceedings of International Conference of the IEEE Industrial Electronics Society (IECON'02)*, Sevilla, Spain.
- Aracil, J., Gordillo, F., and Acosta, J. A. (2002a). Stabilization of oscillations in the inverted pendulum.
- Aracil, J., Gordillo, F., and Gomez-Estérn, F. (2002b). Stabilization of autonomous oscillations in cascade nonlinear systems and the hopf bifurcation. Internal procedure, Dep. Ingeniería de Sistemas y Automática, Escuela Superior de Ingenieros, Sevilla, Spain.
- Aracil, J., Gordillo, F., and Ponce, E. (2004). Stabilization of oscillations through backstepping in high-dimensional systems. *Accepted in IEEE Transactions on Automatic Control*.
- Batistela, N. J. (1994). Inversor de tensão com saída senoidal controlado por modo deslizante com frequência fixa. Master's thesis, Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC) - Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica - PPGEEL.
- Biel, D., Fossas, E., Griñó, R., Riera, J., and Sudrià, A. (2001a). Sliding mode control of a single-phase AC/DC/AC converter. In *Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control*, volume 1, pages 903–907.
- Biel, D., Fossas, E., Guinjoan, F., Alarcón, E., and Poveda, A. (2001b). Application of sliding-mode control to the design of a buck-based sinusoidal generator. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 48(3):563–571.
- Biel, D., Fossas, E., Guinjoan, F., and Ramos, R. (1998). Sliding mode control of a buck converter for ac signal generation. In *Proceedings of the IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, volume 6, pages 450–453.

- Biel, D., Fossas, E., Ramos, R. R., and Guinjoan, F. (2003). A fixed frequency quasi-sliding control algorithm: Application to power inverters design by means of FPGA implementation. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 18(1):344–355.
- Bloch, A., Leonard, N., and J.Marsden (2000). Controlled Lagrangians and the stabilization of mechanical systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45(12).
- Canudas de Wit, C., Espiau, B., and Urrea, C. (2002). Orbital stabilization of underactuated mechanical systems. In *IFAC World Congress*, Barcelona, Spain.
- Carpita, M. and Marchesioni, M. (1996). Experimental study of a power conditioning using sliding mode control. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 11:731–742.
- Colling, I. E. (2000). *Conversores CA-CC Monofásicos e Trifásicos Reversíveis com Elevado Fator de Potência*. PhD thesis, Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC) - Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica (PPGEEL), Florianópolis, SC.
- Cunha, F. B. (2002). Análise e controle de sistemas de estrutura variável. Master's thesis, Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC) - Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica (PPGEEL), Florianópolis, Brazil.
- Cunha, F. B. and Pagano, D. J. (2002a). Bifurcations analysis of the Lotka-Volterra model subject to variable structure control. In *15th IFAC World Congress*, volume 1, Barcelona, Spain.
- Cunha, F. B. and Pagano, D. J. (2002b). Conversor CC-CC elevador de tensão controlado por modos deslizantes com auxílio de filtro washout. In *XIV Congresso Brasileiro de Automática*, volume 1, pages 1638–1643, Natal.
- Cunha, F. B. and Pagano, D. J. (2002c). On dynamic phenomena in a DC-DC boost converter subject to variable structure control. In *15th IFAC World Congress*, volume 1, Barcelona, Spain.
- Cunha, F. B. and Pagano, D. J. (2003). On the control constraints of DC-DC boost converters. In *Congresso Brasileiro de Eletrônica de Potência*, volume 1, Fortaleza.
- Cáceres, R. and Barbi, I. (1999). A boost DC-AC converter: Analysis, design and experimentation. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 14(1):134–141.
- Cáceres, R. O. (1997). *Família de Conversores CC-CA*. PhD thesis, Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC) - Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica (PPGEEL), Florianópolis, Brasil.
- DeCarlo, R. A., Zak, S. H., and Matthews, G. P. (1988). Variable structure control of nonlinear multivariable systems: A tutorial. *Proceedings of the IEEE*, 76(3):212–232.

- Fadel, M., Nicolas, B., and Cheron, Y. (1995). Sliding mode control of DC-to-DC converters with input filter based on the lyapunov function approach. In *Proceedings of the European Power Electronic Conference (EPE)*, pages 1338–1343.
- Filho, W. M. P. (1995). Controle por modo deslizante aplicado em inversores de tensão. Master's thesis, Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC) - Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica (PPGEEL).
- Filippov, A. F. (1988). *Differential equations with discontinuous righthand sides*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands.
- Fradkov, A. L. and Pogromsky, A. Y. (1998). Introduction to control of oscillations and chaos. In *World Scientific Series on Nonlinear Science*.
- Glendinning, P. (1994). *Stability, instability and chaos: an introduction to theory of nonlinear differential equations*. Cambridge University Press, Cambridge, UK.
- Gomez-Estérn, F., R. Ortega, F. R., and Aracil, J. (2001). Stabilization of a class of underactuated mechanical systems via total energy shaping. In *IEEE Conference on Decision and Control*, volume 2, pages 1137–1143, Orlando, FL, USA.
- Gordillo, F., Pagano, D. J., and Aracil, J. (2004). Autonomous oscillation generation in electronic converters. In *Proceedings of the IEEE International Workshop on Electronics and System Analysis - IWESA '04*, Bilbao, Spain.
- Guckenheimer, J. and Holmes, P. (1986). *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*. Springer-Verlag, New York.
- Gómez-Estern, F. (2002). *Control de Sistemas no Lineales Basado en la Estructura Hamiltoniana*. PhD thesis, Escuela Superior de Ingenieros de la Universidad de Sevilla, Sevilla.
- Hsieh, G.-C. and Hung, J. C. (1996). Phase-locked loop techniques. a survey. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 43(6):609–615.
- Isidori, A. (1989). *Nonlinear Control Systems*. Springer-Verlag, New York.
- Jezernik, K., Milanovic, M., and Zdravec, D. (1989). Microprocessor control of PWM inverter for sinusoidal output. In *Proceedings of the 3rd European Conference on Power Electronics (EPE'89)*, pages 47–51.
- Jordan, D. W. and Smith, P. (1977). *Nonlinear ordinary differential equations: an introduction to dynamical systems*. Oxford university press, Cambridge, UK.

- Kaster, M. S. and Pagano, D. J. (2004). Geração de oscilações auto-sustentadas em inversores monofásicos tipo buck. In *XV Congresso Brasileiro de Automática*.
- Kaster, M. S. and Pagano, D. J. (2005). Control of autonomous oscillations in buck-based inverters. In *Proceedings of the 36th IEEE Power Electronics Specialists Conference (PESC 2005)*, Recife, Brazil.
- Kaster, M. S. and Pagano, D. J. (2006a). Geração de oscilações auto-sustentadas em inversores monofásicos. *Revista Controle & Automação*, 17:60–69.
- Kaster, M. S. and Pagano, D. J. (2006b). Inversor monofásico auto-oscilante baseado na topologia duplo boost. In *XVI Congresso Brasileiro de Automática*, Salvador, Brazil.
- Kawamura, A. and Hoft, R. G. (1984). Instantaneous feedback controlled PWM inverter with adaptive hysteresis. *IEEE Transactions on Industrial Applications*, IA-20:706–712.
- Khalil, H. K. (1996). *Nonlinear Systems*. Prentice-Hall, New Jersey.
- Leung, K. K. S., Chiu, J. Y. C., and Chung, H. S. H. (2005). Boundary control of inverters using second order switching surface. In *36th IEEE Power Electronic Specialists Conference - PESC'2005*, Recife, Brazil.
- Maussion, P., Grandpierre, M., Faucher, J., and Hapiot, J. C. (1989). Instantaneous feedback control of a single-phase PWM inverter with nonlinear loads by sine wave tracking. In *Proceedings of International Conference of the IEEE Industrial Electronics Society (IECON'89)*, pages 130–135.
- Monteiro, L. H. A. (2002). *Sistemas Dinâmicos*. Ed. Livraria da Física, São Paulo.
- Morvan, C., Richard, P. Y., Cormerais, H., and Buisson, J. (2004). Sliding mode control of switching systems with boolean inputs. In *Proceedings of the 6th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems*, Stuttgart, Germany.
- Olm, J. M. (2003). *Asymptotic Tracking with DC-to-DC Bilinear Power Converters*. PhD thesis, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona.
- Pagano, D., Aracil, J., and Gordillo, F. (2005). Autonomous oscillations generation in the boost converter. In *16th IFAC World Congress*, Prague.
- Sira-Ramírez, H. (1988). Differential geometric methods in variable structure control. *International Journal of Control*, 48(4):1359–1390.
- Sira-Ramírez, H. (1999). On DC to AC power conversion: A differential flatness approach. In *Proceedings of the IEEE International Symposium on Industrial Electronics*, volume 1, pages 362–366.

- Takahashi, R. H. C., Peres, P. L. D., and Barbosa, L. L. S. (1999). A sliding mode controlled sinusoidal voltage source with ellipsoidal switching surface. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 46(6):714–721.
- Tsytkin, Z. Y. (1984). *Relay control systems*. Cambridge University Press, Cambridge-GB.
- Urrea, C., Canudas de Wit, C., and Mahla, I. (2002). Orbital stabilization of an underactuated 3-link planar robot. In *Internal Symposium on Advanced Robot Systems and Virtual Reality*, Bourges.
- Utkin, V. I. (1978). *Sliding Modes and their Application in Variable Structure Systems*. MIR Publishers, Moscow.
- Utkin, V. I. (1992). *Sliding Modes in Control and Optimization*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.
- Vivas-Venegas, C. and Rubio, F. (2003). Improving the performance of orbitally-stabilizing controls for the Furuta pendulum. In *IFAC Workshop on Hamiltonian Systems*, Seville, Spain.