

**ANÍBAL ALEXANDRE CAMPOS BONILLA**

**CINEMÁTICA DIFERENCIAL DE MANIPULADORES  
EMPREGANDO CADEIAS VIRTUAIS**

**FLORIANÓPOLIS**

**2004**

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA**  
**CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**CINEMÁTICA DIFERENCIAL DE MANIPULADORES**  
**EMPREGANDO CADEIAS VIRTUAIS**

Tese submetida à  
Universidade Federal de Santa Catarina  
como parte dos requisitos para a  
obtenção do grau de Doutor em Engenharia Mecânica.

**ANÍBAL ALEXANDRE CAMPOS BONILLA**

Florianópolis, março de 2004.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

# **CINEMÁTICA DIFERENCIAL DE MANIPULADORES EMPREGANDO CADEIAS VIRTUAIS**

**ANÍBAL ALEXANDRE CAMPOS BONILLA**

Esta tese foi julgada adequada para a obtenção do título de **Doutor em Engenharia**, especialidade **Engenharia Mecânica**, sendo aprovada em sua forma final.

---

Prof. Raul Guenther, D.Sc.  
Orientador

---

Prof. José A. Bellini da Cunha Neto, Dr.  
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica

## **BANCA EXAMINADORA:**

---

Prof. Raul Guenther, D.Sc.  
Presidente

---

Prof. Glauco Caurin, Dr.

---

Prof. Fernando Lizarralde, Dr. Eng.

---

Prof. Edson Roberto de Pieri, Dr.

---

Prof. Daniel Martins, Dr.

*Ao nosso Senhor e Salvador Jesus Cristo quem nos justifica com Deus pela Sua graça  
irresistível.*

## **AGRADECIMENTOS**

A minha esposa Yenis pela perfeita idoneidade na ajuda a ela encarregada, pelo seu tempo, seu cuidado, seu amor e sua vida.

Aos meus filhos Lucía Magdalena e Leonardo Henrique pelo presente que de Deus eles são para mim e pela sua paciência durante este anos.

Aos meus pais Aníbal e Helena, e irmãs, Johanna e Martha Patricia pelo carinho.

Ao Prof. Raul Guenther pela paciência e auto-crítica e ao Prof. Daniel Martins pelas mudanças de paradigmas e valiosas conversas.

Ao pessoal do laboratório de robótica da Universidade Federal de Santa Catarina: Antônio, Carlos Henrique, Humberto, Issopo, Júlio, Simas, Valdiero e outros, pelas discussões e conversas conclusivas ou não.

À CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo da Tese apresentada à UFSC como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Doutor em Engenharia Mecânica.

## **CINEMÁTICA DIFERENCIAL DE MANIPULADORES EMPREGANDO CADEIAS VIRTUAIS**

**Aníbal Alexandre Campos Bonilla**

Março/2004

Orientador: Raul Guenther D.Sc.

Área de Concentração: Robótica

Palavras-chave: Cinemática diferencial, Cadeia Cinemática Virtual, Manipuladores Seriais e Paralelos, Método de Kirchhoff-Davies, Teoria de Helicóides e Teoria de Grafos

Esta tese apresenta um método sistemático para calcular a cinemática diferencial de manipuladores por meio da extensão do método de Kirchhoff-Davies, usando o conceito de cadeia cinemática virtual.

As cadeias cinemáticas virtuais são adicionadas convenientemente à cadeia cinemática do manipulador para obter informações do movimento relativo entre elos do manipulador ou do movimento absoluto de um elo particular, por exemplo o efetuador do manipulador. Adicionalmente, as cadeias cinemáticas virtuais podem impor movimentos à cadeia cinemática do manipulador através da introdução de restrições cinemáticas. O conjunto da cadeia cinemática do manipulador e da cadeia cinemática virtual é denominada cadeia cinemática modificada.

A aplicação do método de Kirchhoff-Davies à cadeia cinemática modificada permite estabelecer a sua equação de restrição. Esta equação de restrição relaciona as velocidades das juntas da cadeia cinemática modificada e, portanto, permite calcular as velocidades de um conjunto de juntas em função das velocidades de outro conjunto de juntas cujas velocidades são dadas.

A partir do método apresentado é possível obter um enfoque unificado para calcular a cinemática diferencial direta e inversa de manipuladores seriais e paralelos, mediante um mesmo procedimento. Adicionalmente, abre-se uma nova possibilidade de enfrentar questões como o desvio ou a ultrapassagem de singularidades, a detecção e o desvio de colisões e a cinemática inversa de robôs redundantes.



# *Sumário*

## **Lista de Figuras**

<b>Nomenclatura</b>	p. 16
<b>1 Introdução</b>	p. 19
1.1 Classificação dos manipuladores . . . . .	p. 20
1.1.1 Estrutura da cadeia cinemática . . . . .	p. 20
1.1.2 Número de graus de liberdade . . . . .	p. 22
1.2 Cinemática diferencial de manipuladores . . . . .	p. 23
1.2.1 Cinemática diferencial para manipuladores seriais . . . . .	p. 23
1.2.2 Cinemática diferencial para manipuladores paralelos . . . . .	p. 29
1.2.3 Cinemática diferencial para manipuladores redundantes . . . . .	p. 31
1.3 Objetivo da tese . . . . .	p. 31
1.4 Estrutura da tese . . . . .	p. 31
<b>2 Ferramentas básicas</b>	p. 33
2.1 Representação do movimento instantâneo por helicóides . . . . .	p. 34
2.2 Método de Kirchhoff-Davies: exemplo de malha única . . . . .	p. 38
2.3 Representação da cadeia cinemática por grafos . . . . .	p. 41
2.3.1 Exemplo espacial . . . . .	p. 48



2.4	Cinemática diferencial no espaço das juntas . . . . .	p. 51
2.5	Transformação de coordenadas de helicóides . . . . .	p. 52
<b>3</b>	<b>Cadeia cinemática virtual</b>	p. 60
3.1	Cadeia virtual: definição . . . . .	p. 60
3.2	Cadeias virtuais planas . . . . .	p. 61
3.2.1	Cadeia virtual <i>PPR</i> ortogonal . . . . .	p. 62
3.2.2	Cadeia virtual <i>RPR</i> . . . . .	p. 64
3.3	Cadeia virtual espacial . . . . .	p. 66
3.3.1	Cadeia virtual <i>PPPS</i> ortogonal . . . . .	p. 67
3.3.2	Cadeia virtual <i>RPPS</i> . . . . .	p. 69
3.3.3	Cadeia virtual <i>RRPS</i> . . . . .	p. 71
<b>4</b>	<b>Cadeia Cinemática Modificada</b>	p. 75
4.1	Definição . . . . .	p. 75
4.2	Manipulador PUMA com uma cadeia virtual <i>RPPS</i> . . . . .	p. 82
4.3	Manipulador paralelo <i>3RRR</i> com uma cadeia virtual <i>RPR</i> . . . . .	p. 90
4.4	Manipulador paralelo <i>3PPSR</i> com uma cadeia virtual <i>PPPS</i> . . . . .	p. 94
4.5	Conclusão . . . . .	p. 98
<b>5</b>	<b>Cinemática diferencial de manipuladores empregando cadeias virtuais</b>	p. 99
5.1	Cinemática diferencial do PUMA . . . . .	p. 100
5.1.1	Cinemática diferencial direta . . . . .	p. 100
5.1.2	Cinemática diferencial inversa . . . . .	p. 102
5.1.3	Cinemática diferencial inversa nas singularidades . . . . .	p. 104

5.1.4	Observações . . . . .	p. 106
5.2	Cinemática diferencial do manipulador paralelo 3RRR . . . . .	p. 107
5.2.1	Cinemática diferencial direta . . . . .	p. 108
5.2.2	Cinemática diferencial inversa . . . . .	p. 110
5.2.3	Observações . . . . .	p. 112
5.3	Cinemática diferencial do manipulador paralelo 3PPSR . . . . .	p. 112
5.3.1	Cinemática diferencial direta . . . . .	p. 113
5.3.2	Cinemática diferencial inversa . . . . .	p. 114
5.4	Manipulador redundante <i>RRRR</i> . . . . .	p. 115
5.4.1	Cinemática diferencial direta . . . . .	p. 116
5.4.2	Detecção de colisão . . . . .	p. 117
5.4.3	Cinemática diferencial inversa . . . . .	p. 118
5.4.4	Desvio de colisão . . . . .	p. 124
5.5	Conclusões . . . . .	p. 128
<b>6</b>	<b>Conclusões</b>	p. 131
	<b>Apêndice A - Jacobiano para manipuladores paralelos</b>	p. 134
A.1	Heliforças: helicóides de força . . . . .	p. 134
A.2	Reciprocidade e taxa de trabalho . . . . .	p. 137
A.3	Jacobiano por eliminação das juntas passivas . . . . .	p. 138
	<b>Apêndice B - Inversa generalizada e jacobiano estendido</b>	p. 148
B.0.1	Inversa generalizada . . . . .	p. 148
B.0.2	Jacobiano estendido . . . . .	p. 151



## *Lista de Figuras*

1	Cadeia cinemática serial . . . . .	p. 21
2	Cadeia cinemática paralela . . . . .	p. 21
3	Cadeia cinemática híbrida: seqüência de cadeias abertas e fechadas . . . . .	p. 22
4	Cadeia cinemática híbrida: seqüência de cadeias fechadas . . . . .	p. 22
5	Manipulador plano $RRR$ . . . . .	p. 27
6	Extensão fictícia do elo 1 . . . . .	p. 27
7	Extensão fictícia do elo 2 . . . . .	p. 28
8	Extensão fictícia do elo 3 . . . . .	p. 28
9	Movimento combinado de rotação e translação: heligiro . . . . .	p. 35
10	Componentes do heligiro para uma junta em geral . . . . .	p. 36
11	Mecanismo de quatro barras plano . . . . .	p. 39
12	Manipulador paralelo $3RRR$ no plano $XY$ . . . . .	p. 42
13	Digrafo de acoplamento $G_C$ do manipulador paralelo $3RRR$ . . . . .	p. 43
14	Digrafo de movimento $G_M$ do manipulador paralelo $3RRR$ . . . . .	p. 43
15	Cadeia cinemática espacial com múltiplas malhas $SSCCE$ (DAVIES, 1981) . . . . .	p. 48
16	Digrafo de acoplamento $G_C$ da cadeia cinemática $SSCCE$ . . . . .	p. 49
17	Digrafo de movimento $G_M$ da cadeia cinemática $SSCCE$ . . . . .	p. 49
18	Sistemas de coordenadas $j$ . . . . .	p. 53
19	Sistemas de coordenadas $j$ e $i$ com a mesma origem e orientações diferentes . . . . .	p. 54

20	Sistemas de coordenadas $j, i$ e $k$ . . . . .	p. 55
21	Cadeia virtual $PPR$ ortogonal . . . . .	p. 62
22	Digrafo de acoplamento $G_C$ e de movimento $G_M$ de uma cadeia virtual $PPR$ ortogonal . . . . .	p. 63
23	Cadeia virtual $RPR$ . . . . .	p. 64
24	Digrafo de acoplamento $G_C$ e de movimento $G_M$ da cadeia virtual $RPR$ . . .	p. 65
25	Cadeia virtual $PPPS$ . . . . .	p. 67
26	Grafo de acoplamento $G_C$ da cadeia virtual $PPPS$ . . . . .	p. 68
27	Grafo de movimento $G_M$ da cadeia virtual $PPPS$ . . . . .	p. 68
28	Cadeia virtual $RPPS$ . . . . .	p. 69
29	Grafo de acoplamento $G_C$ da cadeia virtual $RPPS$ . . . . .	p. 70
30	Grafo de movimento $G_M$ da cadeia virtual $RPPS$ . . . . .	p. 70
31	Cadeia virtual $RRPS$ . . . . .	p. 72
32	Grafo de acoplamento $G_C$ da cadeia virtual $RRPS$ . . . . .	p. 72
33	Grafo de movimento $G_M$ da cadeia virtual $RRPS$ . . . . .	p. 72
34	Manipulador serial plano $RRRR$ . . . . .	p. 76
35	Digrafo $G_C/G_M$ do manipulador serial plano $RRRR$ . . . . .	p. 76
36	Cadeia modificada $RRRR + PPR$ . . . . .	p. 77
37	Digrafo $G_C/G_M$ da cadeia modificada $RRRR + PPR$ . . . . .	p. 77
38	Manipulador redundante $RRRR$ no espaço limitado por um obstáculo . . . .	p. 79
39	Cadeia modificada $RRRR + PPR$ mais a cadeia $RPR$ para desviar o obstáculo do elo 3 . . . . .	p. 80
40	Grafo $G_C/G_M$ da cadeia modificada $RRRR + PPR$ mais a cadeia virtual $RPR$ para desviar o obstáculo do elo 3 . . . . .	p. 80

41	O manipulador PUMA . . . . .	p. 83
42	Grafo $G_C/G_M$ da cadeia cinemática do PUMA . . . . .	p. 83
43	Posição de referência do manipulador PUMA . . . . .	p. 84
44	Esquema da cadeia cinemática modificada do manipulador PUMA + $RPPS$ .	p. 87
45	Grafo de acoplamento $G_C$ da cadeia modificada do PUMA + $RPPS$ . . . . .	p. 87
46	Grafo de movimento $G_M$ da cadeia modificada do PUMA + $RPPS$ . . . . .	p. 87
47	Manipulador paralelo $3RRR$ no plano $XY$ . . . . .	p. 90
48	Cadeia cinemática modificada do manipulador paralelo $3RRR + RPR$ . . . . .	p. 91
49	Grafo de movimento $G_M$ da cadeia modificada $3RRR + RPR$ . . . . .	p. 92
50	Manipulador paralelo $3PPSR$ . . . . .	p. 94
51	Perna do manipulador paralelo $3PPSR$ . . . . .	p. 95
52	Grafo de acoplamento $G_C$ do $3PPSR$ . . . . .	p. 95
53	Grafo de movimento $G_M$ do $3PPSR$ . . . . .	p. 95
54	Cadeia cinemática modificada do manipulador paralelo $3PPSR + PPPS$ . .	p. 96
55	Grafo de acoplamento $G_C$ da cadeia modificada $3PPSR + PPPS$ . . . . .	p. 97
56	Grafo de movimento $G_M$ da cadeia modificada $3PPSR + PPPS$ . . . . .	p. 97
57	Cadeia cinemática modificada do manipulador redundante $RRRR$ no espaço operacional cartesiano restringindo (ou monitorando) a velocidade na direção do eixo $Y$ entre a base e o elo 2 . . . . .	p. 119
58	Grafos $G_C/G_M$ da cadeia modificada redundante $RRRR$ restringindo (ou monitorando) a velocidade entre a base e o elo 2 na direção do eixo $Y$ . . . . .	p. 119
59	Cadeia modificada do manipulador redundante $RRRR$ no espaço operacional cartesiano restringindo o movimento do elo 3 em relação ao obstáculo (base) em coordenadas polares . . . . .	p. 124

60	Grafos $G_C/G_M$ da cadeia modificada redundante $RRRR$ restringindo o movimento entre o elo 3 e o obstáculo . . . . .	p. 125
61	Componentes de uma heliforça . . . . .	p. 136
62	Manipulador paralelo $3RRR$ no plano $XY$ . . . . .	p. 139
63	Digrafo $G_M$ do manipulador paralelo $3RRR$ . . . . .	p. 139
64	Manipulador redundante $RRRP$ . . . . .	p. 150

## *Nomenclatura*

$\$$	Heligiro
$\dot{q}_i$	Magnitude da velocidade na junta $i$
$\dot{\theta}_i$	Taxa de rotação da $i$ -ésima junta, magnitude da velocidade angular
$\dot{d}_i$	Taxa de translação angular da $i$ -ésima junta, magnitude da velocidade linear
$\dot{q}$	Vetor de magnitudes das velocidades nas juntas
$\dot{x}$	Velocidade do efetuador final
$\hat{\$}_i$	Helicóide normalizado correspondente a junta $i$
$\mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N}$	Componentes da velocidade angular
$\mathcal{P}^*, \mathcal{Q}^*, \mathcal{R}^*$	Componentes da velocidade linear
$\mathcal{S}(p)$	Matriz anti-simétrica correspondente ao vetor $p$
$\omega$	Vetor de velocidade angular
$\Psi_i$	Magnitude do helicóide correspondente a junta $i$
$\Psi_p$	Vetor de magnitudes primárias
$\Psi_s$	Vetor de magnitudes secundárias
$\theta_i$	Deslocamento angular da $i$ -ésima junta
${}^{i-1}A_i$	Matriz de transformação homogênea do elo $i$ para o $i - 1$
${}^{i-1}A_i$	Matriz de transformação homogênea do elo $i$ para o elo $i - 1$



---

${}^{i-1}d_i$	Vetor de posição da origem do sistema de coordenadas $i$ para a origem do sistema de coordenadas $i - 1$
${}^{i-1}R_i$	Matriz de rotação do sistema de coordenadas $i$ para o $i - 1$
$B$	Matriz de malhas do digrafo
$B_i$	Matriz diagonal correspondente à $i$ -ésima linha de $B$
$D$	Matriz de helicóides diretos
$d$	Ordem mínima do sistema de helicoides
$d_i$	Deslocamento linear da $i$ -ésima junta
$e$	Número de arestas do digrafo
$f$	Número de graus de liberdade de cada junta
$F_b$	Número de graus de liberdade bruto
$F_N$	Número de graus de liberdade líquido
$G_C$	Digrafo de acoplamento
$G_M$	Digrafo de movimento
$h$	Passo do helicóide
$J$	Jacobiano
$J_{L_i}$	Contribuição da junta $i$ à velocidade linear do efetuador
$J_{R_i}$	Contribuição da junta $i$ à velocidade angular do efetuador
$l$	Número de malhas independentes do digrafo
$L, M, N, P^*, Q^*, R^*$	Componentes do helicóide normalizado
$M_i$	Malha $i$ -ésima do digrafo
$N$	Matriz de rede

$n$	Número de elos do manipulador
$N_p$	Matriz de rede primária
$N_s$	Matriz de rede secundária
$S$	Vetor normalizado paralelo ao eixo de helicóide
$S_o$	Vetor posição de qualquer ponto no eixo de helicóide
$T$	Matriz de transformação de coordenadas de helicóides

# 1 *Introdução*

Esta tese trata da cinemática diferencial de manipuladores ou seja, do cálculo das relações entre velocidades em manipuladores.

A cinemática é a parte da mecânica que trata dos movimentos geometricamente possíveis de um corpo ou de um sistema de corpos desconsiderando as causas que geram o movimento (IFTOMM, 2003).

O manipulador é um sistema de corpos, chamados *elos* conectados por meio de juntas. Este sistema forma uma *cadeia cinemática* que contém um elo fixo chamado *base* e um elo de saída, no qual é fixada uma ferramenta, chamado *efetuador*.

A cinemática de manipuladores trata dos movimentos do efetuador e de como realizá-los através dos movimentos coordenados das juntas. Os movimentos do efetuador são definidos no espaço denominado *operacional* ou espaço da *tarefa*. O espaço operacional pode ser descrito convenientemente por diferentes tipos de sistemas de coordenadas, tais como, *cartesiano*, *polar*, *esférico* e *cilíndrico*. Por outro lado, o *espaço das juntas* representa o espaço no qual o vetor das variáveis de juntas é definido. A essência do problema da cinemática de manipuladores é a coordenação dos movimentos individuais das juntas no *espaço das juntas* e o movimento do efetuador no *espaço operacional*.

Dois problemas comuns na cinemática de manipuladores são a cinemática direta e a cinemática inversa. Na cinemática *direta* os movimentos das juntas são conhecidos e os movimentos do efetuador são calculados. Na cinemática *inversa*, o movimento do efetuador é dado e os movimentos das juntas individuais são calculados.

O movimento de um corpo é definido pela sua posição e orientação (nível de posição) assim como pelas suas derivadas (nível diferencial), tais como a velocidade e a aceleração.

A cinemática inversa diferencial permite especificar a velocidade do efetuador ao longo da trajetória desejada, como requerido para algumas aplicações como pintura e solda, e calcula as velocidades requeridas nas juntas do manipulador. Além disso, como para certos manipuladores a cinemática inversa de posição não possui forma fechada, as posições das juntas podem ser obtidas aproximadamente integrando as suas velocidades a partir de uma posição inicial conhecida. Por esta razão, a solução da cinemática no nível diferencial de primeira ordem, é bastante usada.

Até a presente data, o cálculo da cinemática diferencial de manipuladores é feito empregando métodos específicos para cada tipo de estrutura de cadeia cinemática. Com o objetivo de organizar uma revisão bibliográfica dos métodos empregados no cálculo da cinemática diferencial de cada classe particular de manipuladores, apresentam-se a seguir os tipos de manipuladores classificados de acordo com a estrutura de sua cadeia cinemática e com o número de graus de liberdade.

## 1.1 Classificação dos manipuladores

Os manipuladores podem ser classificados de acordo com várias características. As que afetam o cálculo da cinemática diferencial são a estrutura da cadeia e o número de graus de liberdade.

### 1.1.1 Estrutura da cadeia cinemática

De acordo com a cadeia cinemática, os manipuladores são classificados em *seriais*, *paralelos* e *híbridos*.

Os manipuladores seriais são caracterizados por possuírem uma cadeia cinemática *aberta*, *i.e.* dois elos quaisquer da cadeia se conectam somente por meio de um percurso, ver Fig. 1. Todas as juntas do manipulador serial são atuadas e a velocidade de cada junta é determinada por um atuador externo (elétrico, hidráulico, pneumático etc.).

Os manipuladores seriais são atualmente os mais empregados como robôs industriais.

Os manipuladores paralelos têm pelo menos uma cadeia cinemática *fechada*, *i.e.* dois elos quaisquer da cadeia devem ser conectados por meio de, no mínimo, dois percursos diferentes,

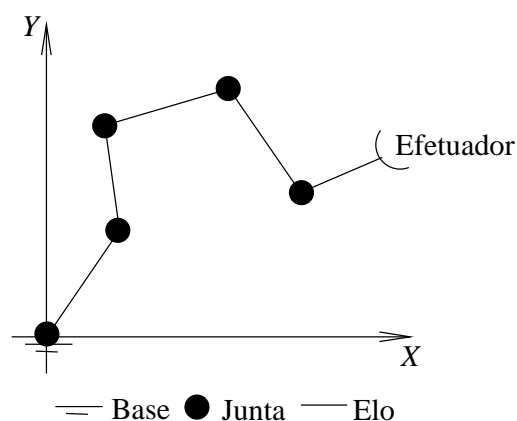


Figura 1: Cadeia cinemática serial

ver Fig. 2. As cadeias seriais que unem a base com o efetuador, em um manipulador paralelo, são chamadas *pernas*.

Os manipuladores paralelos contém tanto juntas *atuadas* como juntas *passivas*. A velocidade em uma junta passiva é função das velocidades nas juntas atuadas devido à restrição imposta pela cadeia fechada. Os manipuladores paralelos tem sido objeto de muitas pesquisas nos

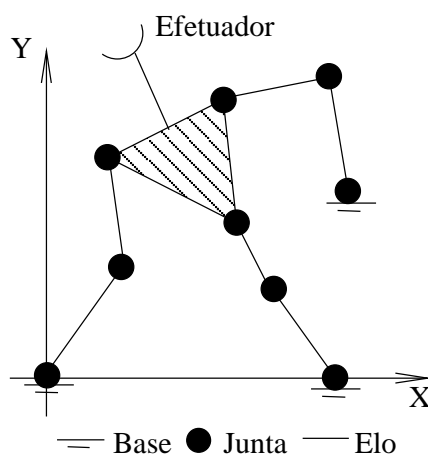


Figura 2: Cadeia cinemática paralela

últimos anos, tanto do ponto de vista teórico como de aplicações práticas (MERLET, 1996). Os manipuladores paralelos, como mecanismos de cadeia cinemática fechada, são estruturalmente mais fortes que os manipuladores seriais devido a que a carga é distribuída entre todas as pernas do manipulador, as quais em geral suportam somente cargas axiais. Adicionalmente, os manip-

Manipuladores paralelos são mais precisos por causa da sua maior rigidez e de que o cálculo do erro das pernas é obtido através da média em vez da soma dos erros de cada perna (BONEV, 2002). Cabe destacar que os manipuladores paralelos são mais rápidos pois, em geral, os motores mais pesados do manipulador são montados na base. As desvantagens do manipulador paralelo, em comparação ao manipulador serial, são o volume de trabalho reduzido e as dificuldades de projeto devido à arquitetura mais complexa das cadeias cinemáticas fechadas.

Um manipulador pode, também, ser composto de cadeias cinemáticas abertas e fechadas ou pela combinação sequencial (em série) de manipuladores paralelos (ver Fig. 3 e Fig. 4) (TANEV, 2000). Neste caso sua cadeia cinemática é dita *híbrida* e busca reunir as vantagens dos manipuladores seriais e dos manipuladores paralelos.

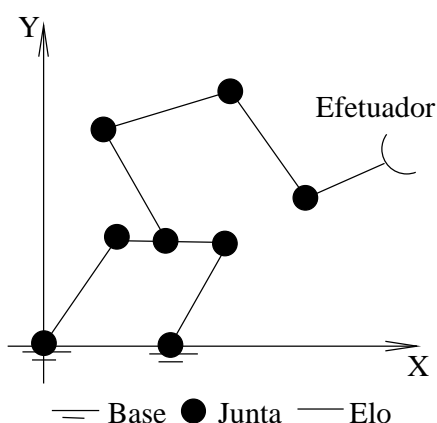


Figura 3: Cadeia cinemática híbrida: sequência de cadeias abertas e fechadas

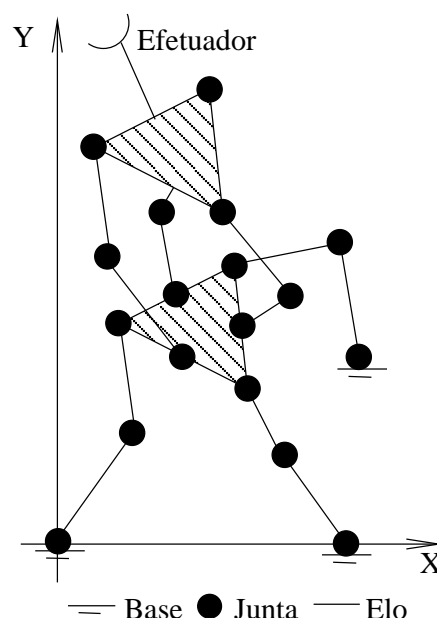


Figura 4: Cadeia cinemática híbrida: sequência de cadeias fechadas

### 1.1.2 Número de graus de liberdade

O número de graus de liberdade de um manipulador indica o número de parâmetros independentes necessários para especificar completamente a configuração do manipulador (TSAI, 1999). De acordo com o número de graus de liberdade do manipulador e com o espaço operacional, os

manipuladores são classificados em *redundantes*, *não redundantes* e *sub-atuados*. Um manipulador é dito redundante quando o seu número de graus de liberdade excede o número de variáveis independentes necessárias para definir a tarefa no espaço operacional. Um manipulador é dito não redundante quando o seu número de graus de liberdade é igual ao número de variáveis independentes necessárias para definir a tarefa no espaço operacional. Caso o número de graus de liberdade do manipulador seja menor que o número de variáveis independentes necessárias para definir a tarefa, o manipulador é dito sub-atuado.

O número de grau de liberdade de um mecanismo pode ser estabelecido por meio do critério de Grübler-Kutzbach (TSAI, 1999) em função dos graus de liberdade do espaço da tarefa, do número de elos do mecanismo, do número de juntas do mecanismo e do número de graus de liberdade permitidos por junta.

## 1.2 Cinemática diferencial de manipuladores

A cinemática diferencial de manipuladores é atualmente, calculada através de diversos métodos, todos eles desenvolvidos para uma classe específica de manipuladores. Nesta seção apresenta-se uma revisão bibliográfica destes métodos.

### 1.2.1 Cinemática diferencial para manipuladores seriais

A relação que a cinemática diferencial estabelece entre as velocidades das juntas e a velocidade do efetuador pode ser representada por meio de uma matriz denominada *jacobiano* ( $J$ ) que depende da configuração instantânea do manipulador.

O jacobiano para manipuladores seriais é obtido comumente através de dois métodos: um baseado na convenção de Denavit-Hartenberg, aqui denominado método convencional, e outro fundamentado na teoria de helicóides (TSAI, 1999).

O método convencional parte da fixação de um sistema de coordenadas em cada elo do manipulador seguindo as regras da convenção de Denavit-Hartenberg. Com isto a relação cinemática entre dois sistemas de coordenadas consecutivos pode ser estabelecida através de quatro parâmetros, denominados parâmetros de Denavit-Hartenberg.

Com base nestes parâmetros são obtidas as matrizes de transformação de homogênea  $A$  entre sistemas de coordenadas adjacentes:

$${}^{i-1}A_i = \left[ \begin{array}{c|c} {}^{i-1}R_i & {}^{i-1}d_i \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right] \quad (1.1)$$

onde  ${}^{i-1}R_i$  é a matriz de rotação do sistema de coordenadas  $i$  para o  $i - 1$  e  ${}^{i-1}d_i$  é o vetor de posição da origem do sistema de coordenadas  $i$  representado no sistema de coordenadas  $i - 1$ .

A velocidade do movimento relativo entre dois elos adjacentes pode ser representada por (ver detalhes (TSAI, 1999))

$$\left[ \begin{array}{c|c} {}^{i-1}\Omega_i & {}^{i-1}v_{io} \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right] = {}^{i-1}\dot{A}_i {}^{i-1}A_1^{-1} \quad (1.2)$$

onde  ${}^{i-1}v_{io}$  é o vetor  $(3 \times 1)$  da velocidade linear em relação ao elo  $i - 1$  de um ponto do elo  $i$ , que coincide instantaneamente com a origem do sistema de coordenadas fixo na base, e  ${}^{i-1}\Omega_i$  é a matriz  $(3 \times 3)$  anti-simétrica

$${}^{i-1}\Omega_i = \begin{bmatrix} 0 & -{}^{i-1}\omega_{iz} & {}^{i-1}\omega_{iy} \\ {}^{i-1}\omega_z & 0 & -{}^{i-1}\omega_{ix} \\ -{}^{i-1}\omega_y & {}^{i-1}\omega_{ix} & 0 \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

sendo  ${}^{i-1}\omega_i = [{}^{i-1}\omega_{ix} \ {}^{i-1}\omega_{iy} \ {}^{i-1}\omega_{iz}]$  a velocidade angular do elo  $i$  em relação ao elo  $i - 1$ .

Conseqüentemente a matriz de transformação homogênea entre o efetuador (elo  $n$ ) e a base (elo 0) pode ser dada por

$${}^0A_n = {}^0A_1 {}^1A_2 \cdots {}^{n-1}A_n \quad (1.4)$$

Assim, a velocidade do movimento relativo do efetuador em relação à base pode ser representada por

$$\left[ \begin{array}{c|c} \Omega_n & v_{no} \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right] = \dot{A}_n A_n^{-1} \quad (1.5)$$

onde  $v_{no}$  é o vetor  $(3 \times 1)$  da velocidade linear em relação à base de um ponto do efetuador que coincide instantaneamente com a origem do sistema de coordenadas fixo na base e  $\Omega_n$  é a matriz



(3 × 3) anti-simétrica

$$\Omega_n = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{nz} & \omega_{ny} \\ \omega_{nz} & 0 & -\omega_{nx} \\ -\omega_{ny} & \omega_{nx} & 0 \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

sendo  $\omega_n = [\omega_{nx} \ \omega_{ny} \ \omega_{nz}]$  a velocidade angular do efetuador em relação à base.

Considerando as regras da convenção de Denavit-Hartenberg para gerar as matrizes de transformação homogênea e os produtos  ${}^{i-1}\dot{A}_i {}^{i-1}A_1^{-1}$  é possível definir a velocidade angular  $\omega_n$  e velocidade linear  $v_n$  do efetuador em relação à base como (TSAI, 1999)

$$\begin{aligned} v_n &= \sum_{i=1}^n \left[ \dot{\theta}_i (z_{i-1} \times {}^{i-1}p_n^*) + z_{i-1} \dot{d}_i \right] \\ \omega_n &= \sum_{i=1}^n \dot{\theta}_i z_{i-1} \end{aligned} \quad (1.7)$$

onde  $\dot{\theta}_i$  e  $\dot{d}_i$  são as taxas de rotação e translação na direção do eixo da  $i$ -ésima junta,  $z_{i-1}$  é o vetor unitário ao longo do eixo da  $i$ -ésima junta e  ${}^{i-1}p_n^*$  é o vetor da origem do sistema fixo no elo  $i - 1$  para a origem do sistema fixo no efetuador. As expressões da Eq. (1.7) representam os somatórios das contribuições de cada junta, ou seja

$$v_n = \sum_{i=1}^n J_{L_i} \dot{q}_i \quad (1.8)$$

$$\omega_n = \sum_{i=1}^n J_{R_i} \dot{q}_i \quad (1.9)$$

onde  $J_{L_i}$  é a contribuição da junta  $i$  à velocidade linear do efetuador,  $J_{R_i}$  é a contribuição da junta  $i$  à velocidade angular do efetuador e  $\dot{q}_i$  é a magnitude da velocidade na junta (translacional ou angular).

No jacobiano calculado de acordo com o método convencional a velocidade do efetuador  $\dot{x}$  é expressa em termos da velocidade linear da origem do sistema de coordenadas fixo ao efetuador em relação ao sistema da base  $v_n$ , e da velocidade angular do efetuador em relação ao sistema da base  $\omega_n$ . Assim,

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} v_n \\ \omega_n \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

Reunindo as expressões das Eqs. (1.8)-(1.10) obtém-se

$$\dot{x} = J\dot{q} \quad (1.11)$$

onde  $J$  é o jacobiano do manipulador definido por

$$J \triangleq \begin{bmatrix} J_{L_1} & \cdots & J_{L_n} \\ J_{R_1} & \cdots & J_{R_n} \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

e  $\dot{q} \triangleq [\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n]$  representa as magnitudes das velocidades nas juntas 1, 2,  $\dots$ ,  $n$ .

O método convencional restringe a representação da velocidade do efetuador no sistema de coordenadas da base. Este fato pode resultar em um jacobiano com termos complicados e difícil de ser invertido para o cálculo da cinemática inversa. Cabe destacar que se o manipulador está em uma singularidade o jacobiano não pode ser invertido, pois neste caso o determinante do jacobiano é nulo.

Outro método utilizado para calcular o jacobiano para manipuladores seriais é o baseado na *teoria de helicóides* (HUNT, 1978)( TSAI, 1999). Um helicóide é um elemento geométrico (BALL, 1900) que pode ser utilizado para representar o movimento combinado de translação e rotação de um corpo em relação a um sistema inercial, este movimento combinado é denominado *heligiro* (§).

O heligiro § é composto por um par de vetores, *i.e.*  $\$ = [\omega; v_p]$ , onde o vetor  $\omega$  representa a velocidade angular do corpo em relação ao sistema de coordenadas escolhido, fixo a qualquer corpo, e o vetor  $v_p$  representa a velocidade linear de um ponto  $p$  do corpo. O ponto  $p$  do corpo está instantaneamente na origem do sistema e se move junto com o corpo, no caso em que nenhum ponto do corpo coincida com a origem é preciso imaginar uma extensão fictícia do corpo que tenha um ponto  $p$  coincidente com a origem do sistema.

Seja o manipulador plano  $RRR$  com o sistema de coordenadas escolhido para representar os heligiros fixo à base (elo 0), como mostrado na Fig.5.

Neste caso, o heligiro correspondente a primeira junta (01) é  $\$_{01} = [\omega_{01}; v_{p_{01}}]^T$  onde o ponto  $p_{01}$  coincide com a origem e pertence a extensão fictícia do corpo 1,  $\omega_{01}$  é a velocidade angular do corpo 1 em relação ao corpo 0 e  $v_{p_{01}}$  é a velocidade linear do ponto  $p$  em relação ao corpo 0, como mostrado na Fig.6.

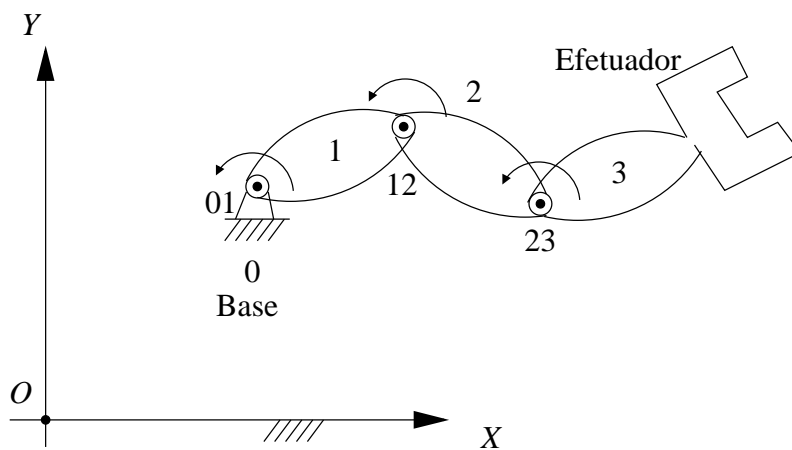
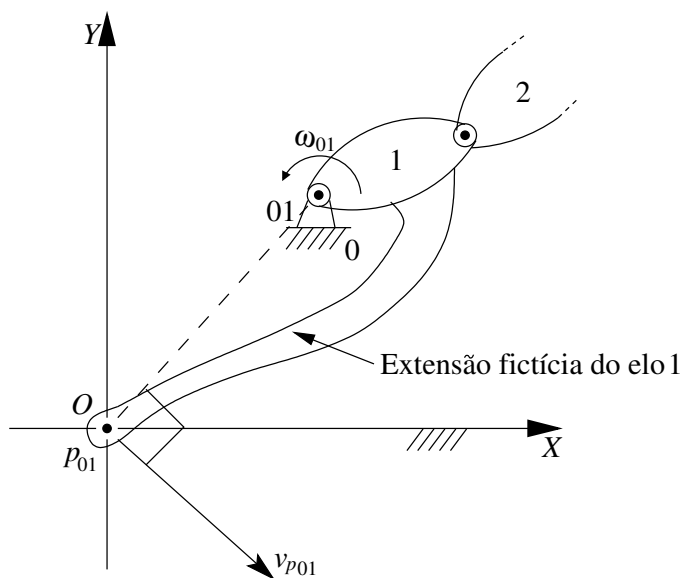
Figura 5: Manipulador plano  $RRR$ 

Figura 6: Extensão fictícia do elo 1

Similarmente, as Figs.7 e 8, respectivamente, mostram os pontos  $p_{12}$  e  $p_{23}$  pertencentes as extensões fictícias dos corpos 2 e 3, as velocidades angulares  $\omega_{12}$  e  $\omega_{23}$  e as velocidades lineares  $v_{p_{12}}$  e  $v_{p_{23}}$ , que formam os heligiros  $\$_{12} = [\omega_{12}; v_{p_{12}}]^T$  e  $\$_{23} = [\omega_{23}; v_{p_{23}}]^T$  correspondentes as juntas (12) e (23).

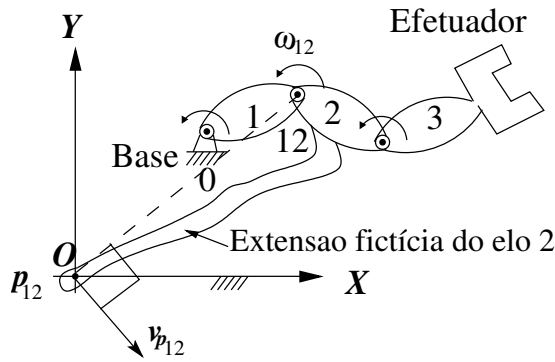


Figura 7: Extensão fictícia do elo 2

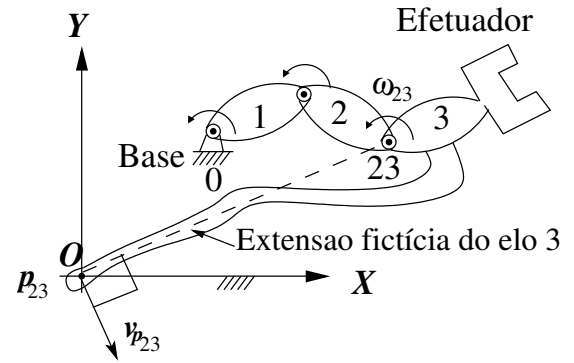


Figura 8: Extensão fictícia do elo 3

Desta forma o heligiro do corpo 3 com relação ao corpo 0 (base)  $\$_{03} = [\omega_{03}; v_{p_{03}}]^T$  obtém-se somado  $\$_{01} + \$_{12} + \$_{23} = \$_{03}$ , onde  $v_{p_{03}}$  é a velocidade em relação à base de um ponto que coincide com a origem e pertence à extensão fictícia do elo 3 (uma descrição mais detalhada é apresentada na seção 2.1).

Assim, para um manipulador com  $n$  elos escolhe-se um sistema de referência e representa-se o movimento instantâneo de cada elo  $i$  em relação ao elo adjacente  $i - 1$  por um heligiro  $\$_i$  neste sistema. O movimento do efetuador em relação à base, representado pelo heligiro  $\$_e$  no sistema escolhido, é o somatório dos heligiros, ou seja

$$\$_e = \sum_{i=1}^n \$_i \quad (1.13)$$

Este heligiro pode ser escrito como  $\$_e = [\omega_n; v_o]$  em que  $\omega_n$  é a velocidade angular do efetuador em relação à base representada no sistema de coordenadas escolhido e  $v_o$  é a velocidade linear de um ponto do efetuador instantaneamente coincidente com a origem em relação à base representada no sistema de coordenadas escolhido. Assim pode-se escrever

$$\dot{x} = \$_e = \begin{bmatrix} \omega_n \\ v_o \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n \$_i \quad (1.14)$$

onde  $\dot{x}$  representa a velocidade do efetuador. Cabe observar que a velocidade do efetuador  $\dot{x}$  no método convencional e no método baseado nos helicóides também são diferentes na disposição dos vetores de velocidade linear e angular de efetuador (TSAI, 1999).

Considerando que cada heligiro  $\$i$  pode ser escrito como o produto do helicóide normalizado  $\hat{\$}_i$  pela magnitude do heligiro  $\Psi_i$ , ou seja  $\$i = \hat{\$}_i \Psi_i$  (veja uma descrição mais detalhada na seção 2.1 e referências), a expressão da Eq. (1.14) pode ser escrita como

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^n \hat{\$}_i \dot{\Psi}_i = J \dot{q} \quad (1.15)$$

onde cada coluna do jacobiano  $J$  é um *helicóide normalizado*  $\hat{\$}_i$  e  $\dot{\Psi}_i = \dot{q}_i$  é a magnitude do heligiro.

O método para calcular o jacobiano baseado na teoria de helicóides permite representar os helicóides normalizados referentes às juntas do manipulador em qualquer sistema de coordenadas. Esta característica permite escolher convenientemente o sistema de coordenadas no qual os helicóides normalizados resultam mais simples e o jacobiano mais esparso e mais fácil de ser invertido no cálculo da cinemática inversa (HUNT, 1987).

## 1.2.2 Cinemática diferencial para manipuladores paralelos

A construção do jacobiano para manipuladores paralelos, comparado aos manipuladores seriados, é mais complexo devido à presença de cadeias fechadas no manipulador (TSAI, 1999).

Um procedimento comum é construir o jacobiano a partir da malha de posição (DANIALI; ZSOMBOR-MURRAY; ANGELES, 1995)(TSAI, 1999)(SLUTSKI; ANGELES, 1999)(YANG et al., 2001). Este procedimento envolve três passos:

1. Estabelecer uma equação vetorial que represente a malha fechada de posição do efetuador e de cada perna do manipulador em relação a um sistema de coordenadas fixo à base.
2. Encontrar a posição do efetuador em relação à base em função das variáveis de junta das pernas, tanto atuadas como passivas.
3. Obter a equação restrição de velocidade da malha através da derivação em relação ao tempo

da posição do efetuador.

Outro procedimento particular consiste em estabelecer diretamente a equação restrição de velocidade da malha do manipulador, em geral através da teoria de helicóides, igualando a velocidade do efetuador obtida individualmente por meio de cada uma das pernas seriais (KUMAR, 1992)(LING; HUANG, 1995)( TSAI, 1999)(VALDIERO et al., 2001)(DASH; CHEN; YANG, 2001).

Adicionalmente, os algoritmos para resolver a cinemática diferencial de manipuladores paralelos podem ser divididos em: aqueles baseados na eliminação das velocidades nas juntas passivas e aqueles baseados no cálculo das velocidades nas juntas passivas.

Os algoritmos baseados na eliminação suprimem os efeitos de todas as juntas passivas. Um destes algoritmos utiliza helicóides para representar o movimento e o princípio da *reciprocidade*, igualando a soma da taxa do trabalho realizada pelas juntas atuadas e pelo efetuador. Para a eliminação das juntas passivas é preciso encontrar um helicóide que seja recíproco a todos os helicóides das juntas passivas de cada perna mas que não seja recíproco ao helicóide de uma das juntas atuadas da perna. Isto geralmente é realizado por inspeção (KUMAR, 1992)(LING; HUANG, 1995) ou pela intersecção de sistemas de helicóides recíprocos associados com as juntas passivas de cada perna ( TSAI, 1999)(DASH; CHEN; YANG, 2001)(VALDIERO et al., 2001). Outro método calcula determinados vetores que ao operar (produto vetorial) com vetores associados à estrutura do manipulador elimina as variáveis das velocidades das juntas passivas, *i.e.* eliminação geométrica, (DANIALI; ZSOMBOR-MURRAY; ANGELES, 1995)( TSAI, 1999)(SLUTSKI; ANGELES, 1999).

Os algoritmos baseados no cálculo das velocidades nas juntas passivas substituem estas velocidades na equação de restrição para encontrar a velocidade do efetuador. Porém, este método é restrito a certos tipos de manipuladores paralelos; por exemplo, o manipulador paralelo de três pernas que possui juntas esféricas para unir a perna ao efetuador (YANG et al., 2001) e manipuladores cujas pernas são limitadas a possuir no máximo seis juntas (DUTRÉ; BRUYNINCKX; SCHUTTER, 1997).

### 1.2.3 Cinemática diferencial para manipuladores redundantes

Os manipuladores redundantes aumentam a flexibilidade e a versatilidade de sistemas robotizados, incrementando a capacidade de desempenho de tais sistemas. Além de realizar a trajetória desejada do efetuador final, os manipuladores redundantes permitem otimizar vários *critérios de desempenho*, como desvio da colisão, desvio da singularidade, desvio do limite de juntas, minimização das velocidades das juntas, minimização da energia etc.

Quando o manipulador é redundante, o jacobiano tem mais colunas que linhas e é impossível resolver diretamente a cinemática diferencial. Existem dois pontos de vista principais para resolver a cinemática diferencial de manipuladores redundantes: uso de uma solução particular por meio da inversa generalizada (KLEIN; HUANG, 1983)(NAKAMURA; HANAFUSA, 1986)(SCIAVICCO; SICILIANO, 1996) ou por meio de um sistema não redundante como o jacobiano estendido (BAILLIEUL, 1985)(CHANG, 1986)(NENCHEV, 1989)(KLEIN; CHU-JENQ; AHMED, 1993). Para maiores detalhes veja o apêndice B.

## 1.3 Objetivo da tese

Esta tese tem como objetivo propor um enfoque unificado para calcular a cinemática diferencial de robôs manipuladores, desenvolvido a partir da sugestão apresentada em (DAVIES, 2000).

Objetiva-se propor um enfoque que possibilite o cálculo da cinemática diferencial direta e inversa de robôs seriais e paralelos, mediante um mesmo procedimento.

## 1.4 Estrutura da tese

O enfoque unificado resulta do conceito de cadeia virtual introduzido no capítulo 3, através do qual são construídas as cadeias cinemáticas modificadas apresentadas no capítulo 4.

O capítulo 2 apresenta uma breve fundamentação das ferramentas básicas a serem utilizadas na análise das cadeias cinemáticas modificadas, a saber, o *método de Kirchhoff-Davies* que relaciona os movimentos das juntas de uma cadeia cinemática fechada através de uma analogia elétrico/mecânica, representando os movimentos das juntas do manipulador através da *teoria de*

---

*helicóides* e a cadeia cinemática do manipulador por meio da *teoria de grafos*. Adicionalmente é apresentada a *transformação das coordenadas de helicóides* entre sistemas de coordenadas.

No capítulo 5 calcula-se a *cinemática diferencial*, direta e inversa, empregando cadeias virtuais para manipuladores seriais, paralelos e redundantes, com base na equação de restrição da cadeia cinemática modificada do manipulador. Adicionalmente, neste capítulo são propostas soluções para o desvio de singularidades e de colisões, dois problemas tradicionais em robótica.

O capítulo 6 apresenta as conclusões desta tese e propõe perspectivas para trabalhos futuros.



## 2 *Ferramentas básicas*

A cinemática diferencial de manipuladores empregando cadeias virtuais utiliza como ferramenta básica o método *Kirchhoff-Davies*. Adicionalmente, utiliza-se também a *transformação de coordenadas de helicóides*.

Por meio do método de Kirchhoff-Davies é estabelecida a relação instantânea entre as velocidades, representadas por helicóides, de todas as juntas de uma cadeia cinemática fechada. Tal relação é chamada *equação de restrição* da cadeia cinemática do manipulador. Assim, dadas as magnitudes das velocidades em um determinado número de juntas, as magnitudes das velocidades das demais juntas são encontradas através da equação de restrição. Este procedimento é denominado *cinemática diferencial no espaço das juntas*.

A transformação de coordenadas de helicóides permite representar helicóides em diferentes sistemas de coordenadas operando apenas um produto matricial. Esta transformação é útil para simplificar o cálculo da cinemática diferencial empregando cadeias virtuais apresentado no capítulo 5.

Este capítulo apresenta brevemente os fundamentos das ferramentas utilizadas. Inicialmente é apresentada a representação do movimento instantâneo por helicóides empregado no método de Kirchhoff-Davies. Na seqüência, através de um exemplo simples, é apresentado o método de Kirchhoff-Davies(DAVIES, 1981): obtenção da equação de restrição da cadeia cinemática e cálculo das velocidades incógnitas da cadeia. Na continuação mostra-se como obter de forma simples a equação de restrição de uma cadeia cinemática representada por meio de grafos. Na seqüência, o cálculo das velocidades incógnitas da cadeia é apresentado como a cinemática diferencial no espaço das juntas. Finalmente é apresentada a transformação de coordenadas de helicóides entre diferentes sistemas de coordenadas(TSAI, 1999).

## 2.1 Representação do movimento instantâneo por helicóides

A teoria de helicóides é uma importante ferramenta na análise cinemática e estática de mecanismos. A primeira formulação rigorosa da teoria e o estudo do eixo de helicóide foram realizados por Mozzi em 1763 (MOZZI, 1763). Tal formulação foi sistematizada por Ball em 1900 (BALL, 1900). Um desenvolvimento da teoria em aspectos da geometria cinemática foi realizado por Hunt (HUNT, 1978)( TSAI, 1999).

Nesta tese é proposto o termo *helicóide* para traduzir o termo em inglês *screw* quando este representa um elemento geométrico. Nesta seção é mostrado que o movimento de um corpo pode ser representado por um helicóide e uma magnitude. O *helicóide* é um elemento geométrico composto por uma reta direcionada (*eixo*) e por um parâmetro escalar com unidades de comprimento  $h$  (*passo*). Se a reta direcionada é representada por um vetor normalizado, o helicóide é chamado *helicóide normalizado* e é representado pelo símbolo  $\hat{\$}$ .

Assim como um ponto (elemento geométrico) pode ser utilizado para representar uma partícula de massa, e uma reta direcionada (elemento geométrico) pode ser usada para representar um momento, um helicóide (elemento geométrico) também pode ser útil na representação de grandezas mecânicas.

O movimento geral de um corpo rígido em relação a um sistema inercial, *i.e.* o movimento combinado de rotação e translação, é designado nesta tese pelo termo *heligiro*  $\$$  que corresponde ao termo em inglês *twist* utilizado em cinemática (HUNT, 2000). Um heligiro pode ser representado por um escalar  $\Psi$  que representa a magnitude do movimento e por um helicóide normalizado  $\hat{\$}$ . Por exemplo, o movimento instantâneo de uma porca, que enrosca em um parafuso, em relação ao parafuso (sistema inercial) pode ser definido por um escalar corresponde a magnitude da velocidade angular da porca ( $\Psi$ ) e por um helicóide normalizado composto pelo vetor normalizado na direção do eixo (reta) do parafuso e pelo passo  $h$ , dado pela razão entre a componente axial (na direção do eixo) e a componente angular (em torno do eixo) do movimento da porca em relação ao parafuso

$$h = \frac{\text{velocidade axial da porca}}{\text{velocidade angular da porca}} \quad (2.1)$$

Na seqüência mostra-se o significado físico e geométrico das componentes do heligiro para um caso geral.

O teorema de Mozzi (citação do original e comentários históricos em (CECCARELLI, 2000)) estabelece que as velocidades dos pontos de um corpo rígido em relação a um sistema de referência inercial  $O(X, Y, Z)$  podem ser representadas por uma rotação diferencial  $\omega$ , em torno de um eixo fixo determinado, e uma translação diferencial  $\tau$  ao longo do mesmo eixo agindo, simultaneamente, *i.e.* podem ser representadas por um heligiro. Adicionalmente o teorema de Chasles estabelece que o deslocamento de um corpo rígido pode ser representado por uma rotação em torno de um eixo fixo determinado e uma translação ao longo do mesmo eixo e que este deslocamento pode ser representado por um helicóide finito (HUNT, 1978)(MURRAY; LI; SASSTRY, 1994).

Um corpo com movimento em torno de um eixo instantaneamente fixo em relação a um sistema de referência inercial  $O$  é mostrado na Fig. 9. Este eixo instantâneo é denominado *eixo de helicóide* e a razão das magnitudes da velocidade translacional e angular é denominada *passo do helicóide*  $h = \|\tau\|/\|\omega\|$ .

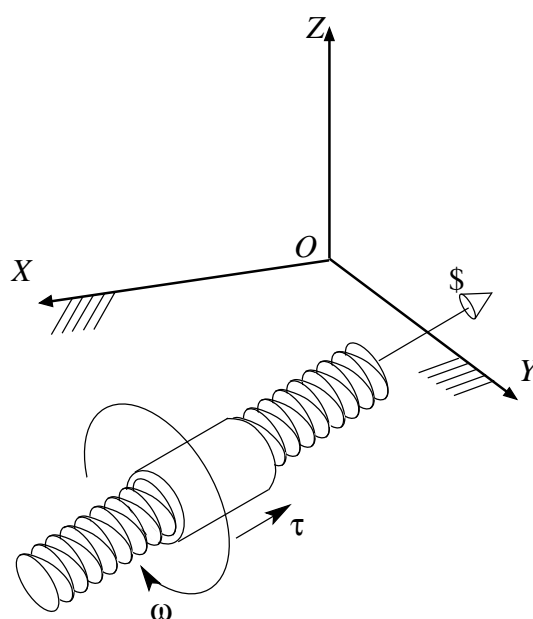


Figura 9: Movimento combinado de rotação e translação: heligiro

O movimento instantâneo completo de um corpo rígido em relação a um sistema inercial se representado por um heligiro é composto por um par de vetores, *i.e.*  $\$ = (\omega; V_p)^T$ , ou em coordenadas de helicóide  $(\mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N}; \mathcal{P}^*, \mathcal{Q}^*, \mathcal{R}^*)^T$  (HUNT, 2000). O vetor  $\omega = (\omega_x, \omega_y, \omega_z) =$

$(\mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N})$  representa a velocidade angular do corpo em relação ao sistema inercial. O vetor  $V_p = (v_{px}, v_{py}, v_{pz})^T = (\mathcal{P}^*, \mathcal{Q}^*, \mathcal{R}^*)^T$  representa a velocidade linear de um ponto  $p$  que se move com o corpo e que coincide instantaneamente com a origem  $O$ , em relação ao sistema inercial (e.g. Fig. 6).

Se nenhum ponto do corpo coincide com a origem  $O$ , como na Fig. 9, pode-se adicionar uma extensão fictícia ao corpo de forma que um ponto nesta extensão, chamado ponto  $P$ , coincida com a origem  $O$ , veja a Fig. 10.

O vetor  $(V_p)$  é formado por duas componentes de velocidade: a) a componente de velocidade paralela ao eixo de helicóide representada por  $\tau = h\omega$ ; e b) a componente de velocidade normal ao eixo de helicóide representada por  $S_o \times \omega$  onde  $S_o$  é a posição de qualquer ponto no eixo de helicóide representada vetorialmente no sistema de referência (Fig. 10).

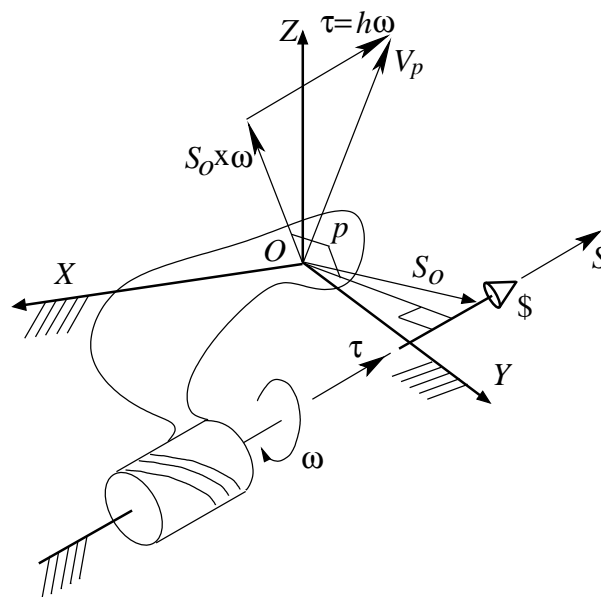


Figura 10: Componentes do heligiro para uma junta em geral

Um heligiro pode ser representado pela sua magnitude  $\Psi$  e pelo seu helicóide normalizado  $\hat{\$}$  por meio de

$$\$ = \hat{\$}\Psi \quad (2.2)$$

A magnitude  $\Psi$  do heligiro é a magnitude da velocidade angular do corpo  $\|\omega\|$ , se seu movi-

mento é de rotação, ou a magnitude da velocidade linear  $\|V_p\|$  do corpo se seu movimento é só de translação. Quando o movimento do corpo combina rotação e translação a magnitude do heligiro é a magnitude da velocidade angular do corpo  $\|\omega\|$ . Considerando um heligiro dado por  $\$ = (\omega; V_p)^T = (\mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N}; \mathcal{P}^*, \mathcal{Q}^*, \mathcal{R}^*)^T$ , o seu correspondente helicóide normalizado  $\hat{\$}$  é definido por um par de vetores,  $(L, M, N)$  e  $(P^*, Q^*, R^*)$  assim:

$$\hat{\$} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}/\Psi \\ \mathcal{M}/\Psi \\ \mathcal{N}/\Psi \\ \mathcal{P}^*/\Psi \\ \mathcal{Q}^*/\Psi \\ \mathcal{R}^*/\Psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L \\ M \\ N \\ P^* \\ Q^* \\ R^* \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

sendo

$$\begin{bmatrix} L \\ M \\ N \\ P^* \\ Q^* \\ R^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S \\ S_o \times S + hS \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

onde  $S$  é o vetor normalizado paralelo ao eixo de helicóide. Cabe destacar que o vetor  $(S_o \times S)$  determina o momento do eixo de helicóide em torno da origem do sistema de referência.

O movimento entre dois elos adjacentes, pertencentes a uma cadeia cinemática, pode ser representado por um heligiro. Neste caso o heligiro representa o movimento do elo  $i$  em relação ao elo  $(i - 1)$ .

Em robótica, em geral, a cinemática diferencial entre um par de elos é determinada ou por uma junta rotativa ou por uma junta prismática.

O passo do helicóide normalizado que representa o movimento de um corpo determinado por uma junta rotativa é nulo  $h = 0$ . Assim, o helicóide normalizado para uma junta rotativa é dado por

$$\hat{\$} = \begin{bmatrix} S \\ S_o \times S \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

O passo do helicóide normalizado que representa o movimento de um corpo determinado por uma junta prismática é infinito  $h = \infty$  e o helicóide normalizado para uma junta prismática é reduzido a

$$\hat{\$} = \begin{bmatrix} 0 \\ S \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

As componentes de um heligiros são função do sistema de coordenadas onde este é representado. Com frequência é útil representar um heligiros em diferentes sistemas de coordenadas, para isto é utilizada, como ferramenta, a transformação de coordenadas de helicóide. Esta ferramenta é apresentada na seção 2.5

## 2.2 Método de Kirchhoff-Davies: exemplo de malha única

Davies adapta a lei das malhas de Kirchhoff (DAVIES, 1981) para formular e resolver a cinemática diferencial no espaço das juntas da cadeia cinemática fechada, esta adaptação é denominada *método de Kirchhoff-Davies*. A lei das malhas de Kirchhoff estabelece que a soma algébrica das diferenças de potencial ao longo de qualquer circuito elétrico é nula. Similarmente, o método de Kirchhoff-Davies estabelece que o somatório das velocidades relativas entre elos adjacentes ao longo de uma cadeia cinemática fechada é nula.

O método de Kirchhoff-Davies permite estabelecer a *equação de restrição* para a cadeia cinemática fechada. Esta equação relaciona as velocidades das juntas da cadeia cinemática.

A partir da equação de restrição é possível expressar as magnitudes das velocidades de um determinado número de juntas, chamadas juntas secundárias, em função das magnitudes das velocidades das demais juntas, chamadas juntas primárias.

O método de Kirchhoff-Davies é ilustrado nesta seção por meio de um exemplo simples. Seja o mecanismo de quatro barras plano da Fig. 11, com movimento no plano  $XY$ , composto pelos elos 1, 2, 3 e 4 e pelas juntas rotativas  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ , onde a junta  $A$  é atuada externamente.

Considere que o heligiros  $\$A$  descreve a cinemática diferencial da junta  $A$ , *i.e.*  $\$A$  representa o movimento do elo 2 em relação ao elo 1. Similarmente, os heligiros  $\$B$ ,  $\$C$  e  $\$D$  representam os movimentos nas juntas  $B$ ,  $C$  e  $D$ , respectivamente.

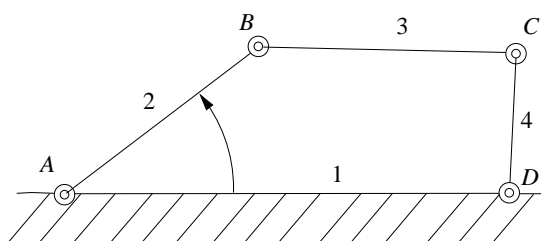


Figura 11: Mecanismo de quatro barras plano

O movimento do elo 2 em relação ao elo 1 é  $\$A$ . O movimento do elo 3 em relação ao elo 1 é  $\$A + \$B$  e o movimento do elo 4 em relação ao elo 1 é  $\$A + \$B + \$C$ .

O movimento do elo 1 em relação a si mesmo é nulo e pode ser expresso pelo somatório das velocidades de todas as juntas na cadeia fechada, ou seja

$$\$A + \$B + \$C + \$D = \vec{0} \quad (2.7)$$

onde  $\vec{0}$  é um vetor de zeros cuja dimensão ( $6 \times 1$ ) corresponde a dimensão dos helicóides  $\$A$ ,  $\$B$ ,  $\$C$  e  $\$D$ .

A equação (2.7) expressa a lei das malhas de circuitos elétricos adaptada para cadeias cinemáticas fechadas. Esta equação pode ser reescrita como

$$\hat{\$}_A \Psi_A + \hat{\$}_B \Psi_B + \hat{\$}_C \Psi_C + \hat{\$}_D \Psi_D = \vec{0} \quad (2.8)$$

onde  $\Psi_A$  representa a magnitude da velocidade (angular neste caso) da junta  $A$  e  $\hat{\$}_A$  representa o helicóide normalizado do heligiro  $\$A$  e  $\vec{0}$  é um vetor nulo de dimensão  $3 \times 1$ . A mesma representação é usada para as juntas  $B$ ,  $C$  e  $D$ .

A equação (2.8) é denominada *equação de restrição* e, matricialmente, pode ser expressa por

$$\begin{bmatrix} \hat{\$}_A & \hat{\$}_B & \hat{\$}_C & \hat{\$}_D \end{bmatrix}_{(3 \times 4)} \begin{bmatrix} \Psi_A \\ \Psi_B \\ \Psi_C \\ \Psi_D \end{bmatrix}_{(4 \times 1)} = \vec{0}_{(3 \times 1)} \quad (2.9)$$

A cadeia cinemática do mecanismo de quatro barras plano se estende no plano  $XY$ , assim

todos os heligiros da cadeia ( $\$A, \$B, \$C$  e  $\$D$ ) possuem somente as três componentes  $\mathcal{N}$ ,  $\mathcal{P}$  e  $\mathcal{Q}$ , *i.e.* a velocidade angular na direção do eixo  $Z$  ( $\omega_z$ ), a velocidade linear na direção do eixo  $X$  ( $v_x$ ) e a velocidade linear na direção do eixo  $Y$  ( $v_y$ ), respectivamente. Portanto, após a eliminação das linhas triviais correspondentes as componentes  $L$ ,  $M$  e  $R$  dos helicóides normalizados, a Eq. (2.9) é reduzida a

$$\begin{bmatrix} \hat{\$}_A & \hat{\$}_B & \hat{\$}_C & \hat{\$}_D \end{bmatrix}_{(3 \times 4)} \begin{bmatrix} \Psi_A \\ \Psi_B \\ \Psi_C \\ \Psi_D \end{bmatrix}_{(4 \times 1)} = \vec{0}_{(3 \times 1)} \quad (2.10)$$

De uma forma geral a equação de restrição é

$$N\Psi = \vec{0} \quad (2.11)$$

onde  $N$  é a matriz de *rede* que contém os helicóides normalizados sem linhas triviais e  $\Psi$  é o vetor das magnitudes dos heligiros.

A Eq. (2.10) estabelece três restrições para a cadeia cinemática com quatro variáveis ( $\Psi_A, \Psi_B, \Psi_C$  e  $\Psi_D$ ), isto significa que apenas  $(4 - 3) = 1$  destas variáveis é independente. Assim, o mecanismo de quatro barras, Fig. 11, contém somente uma junta atuada ou independente, *e.g.* a junta  $A$ , e três juntas passivas, *e.g.* as juntas  $B, C$  e  $D$ . A magnitude da velocidade  $\Psi_A$  da junta  $A$  é determinada pelo atuador externo e as magnitudes das velocidades das juntas passivas,  $\Psi_B, \Psi_C$  e  $\Psi_D$ , são funções da magnitude  $\Psi_A$ .

Reorganizando a Eq. (2.9) é possível resolver a cinemática diferencial no espaço das juntas para o mecanismo de quatro barras, *i.e.* encontrar as magnitudes das velocidades das juntas passivas  $\Psi_B, \Psi_C$  e  $\Psi_D$  em função da magnitude da velocidade da junta atuada  $\Psi_A$ . Neste caso,

$$\begin{bmatrix} \hat{\$}_B & \hat{\$}_C & \hat{\$}_D \end{bmatrix}_{(3 \times 3)} \begin{bmatrix} \Psi_B \\ \Psi_C \\ \Psi_D \end{bmatrix}_{(3 \times 1)} = - \begin{bmatrix} \hat{\$}_A \end{bmatrix}_{(3 \times 1)} [\Psi_A]_{(1 \times 1)} \quad (2.12)$$

ou

$$N_s \Psi_s = -N_p \Psi_p \quad (2.13)$$



onde  $N_s = [\hat{\$}_B \hat{\$}_C \hat{\$}_D]$  é a matriz que contém os helicóides normalizados correspondentes às juntas cujas magnitudes são incógnitas, estas juntas são denominadas *secundárias*;  $\Psi_s = [\Psi_B \Psi_C \Psi_D]^T$  é o vetor que contém as magnitudes das velocidades das juntas secundárias;  $N_p$  é a matriz que contém os helicóides normalizados correspondentes às juntas cujas magnitudes são conhecidas, estas juntas são denominadas *primárias*, e  $\Psi_p = \Psi_A$  é o vetor que contém as magnitudes das velocidades das juntas primárias.

Se a matriz  $N_s$  admite inversa, *i.e.* se a matriz  $N_s$  é quadrada e tem posto completo, é possível calcular as magnitudes das velocidades das juntas secundárias  $\Psi_s$  por meio de

$$\Psi_s = -N_s^{-1}N_p\Psi_p$$

$$\begin{bmatrix} \Psi_B \\ \Psi_C \\ \Psi_D \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \hat{\$}_B & \hat{\$}_C & \hat{\$}_D \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{\$}_A \end{bmatrix} \Psi_A \quad (2.14)$$

Se existem colunas de  $N_s$  linearmente dependentes ( $\det(N_s) = 0$ ),  $N_s$  não admite inversa; assim o manipulador está em uma *singularidade*.

A relação entre as velocidades das juntas atuadas e passivas de uma cadeia cinemática fechada, Eq. (2.14), é obtida diretamente da equação de restrição. A construção da equação de restrição para cadeias cinemáticas com múltiplas malhas é, com frequência, um trabalho difícil e pode ser facilitado por meio da teoria de grafos (DAVIES, 1981)(DAVIES, 2000). Na seqüência mostra-se, por meio de um exemplo, a representação da cadeia cinemática por meio de grafos e a obtenção da equação de restrição a partir da lei das malhas aplicada ao grafo da cadeia cinemática.

## 2.3 Representação da cadeia cinemática por grafos

Nesta seção é apresentado um marco geral para representar, de forma abstrata, cadeias cinemáticas fechadas por meio de grafos. Esta representação auxilia visualizar a construção da equação de restrição para cadeias cinemáticas complexas. Adicionalmente, a equação de restrição é obtida sistematicamente através da matriz de incidência do grafo da cadeia.

O grafo é um sistema de linhas interconectados por meio de nós (SESHU; REED, 1961).

Seja uma cadeia cinemática constituída de elos com movimento relativo entre si conectados por juntas (DAVIES, 1995). Adicionalmente, uma cadeia cinemática *fechada* contém uma ou mais *malhas* de elos e juntas, como por exemplo a cadeia do manipulador paralelo  $3RRR$  da Fig. 12. Em geral, as letras usadas nos nomes dos manipuladores correspondem aos tipos de junta que formam a cadeia cinemática, por exemplo, rotativa ( $R$ ), prismática ( $P$ ), esférica ( $S$ ), cilíndrica ( $C$ ), plana ( $E$ ) etc..

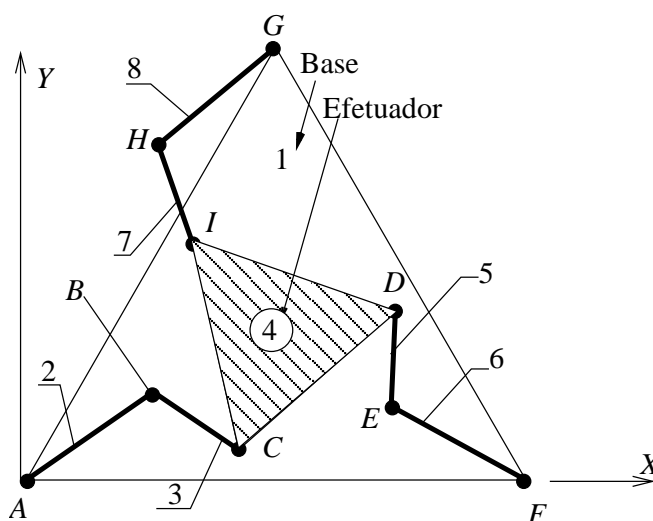


Figura 12: Manipulador paralelo  $3RRR$  no plano  $XY$

O manipulador paralelo plano  $3RRR$  é composto por três juntas rotativas  $A$ ,  $F$  e  $G$ , que definem a geometria da base, três juntas rotativas  $C$ ,  $D$  e  $I$ , que definem a geometria do efetuador, e três pernas que conectam o efetuador, nas juntas  $C$ ,  $D$  e  $I$ , à base, nas juntas  $A$ ,  $F$  e  $G$ , respectivamente. Cada perna possui dois elos conectados por uma junta rotativa, juntas  $B$ ,  $E$  e  $H$  (TSAI, 1999). No manipulador  $3RRR$  o heligiro  $\$A$  está associado a junta  $A$ , *i.e.*  $\$A$  representa o movimento do elo 2 em relação ao elo 1. Similarmente,  $\$B$ ,  $\$C$ ,  $\$D$ ,  $\$E$ ,  $\$F$ ,  $\$G$ ,  $\$H$  e  $\$I$  são os heligiros associados às juntas  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$ ,  $F$ ,  $G$ ,  $H$  e  $I$ , respectivamente.

O grafo de uma cadeia cinemática fechada é uma ferramenta para obter mais facilmente a relação entre as velocidades das juntas pertencentes a uma malha. O conjunto de tais relações, uma para cada malha, é denominada *equação de restrição* da cadeia cinemática. Cabe observar que é possível obter diferentes equações de restrição para uma cadeia cinemática, porém estas equações são linearmente dependentes. Isto é consequência direta da aplicação dos princípios

básicos da lei das malhas de Kirchhoff.

Nesta tese, utilizam-se as noções de *grafo de acoplamento* e de *grafo de movimento*. O grafo de acoplamento  $G_C$  de uma cadeia cinemática representa cada elo da cadeia por meio de um *nó*, identificado por um número, e cada junta por meio de uma *aresta*, identificada por uma letra. Seja  $n$  o número total de nós e  $e$  o número total de arestas.

Os nós são ligados por arestas. Se as arestas de um grafo são orientadas, as arestas são chamadas *arcos* e o grafo é denominado *digrafo* (grafo direcionado). Um arco representa a velocidade relativa entre dois elos; por exemplo, o arco  $A$  do nó 1 para o nó 2 representa a velocidade do elo 2 em relação ao elo 1. A Fig. 13 mostra o digrafo  $G_C$  do manipulador paralelo 3RRR, com  $n = 8$  e  $e = 9$ .

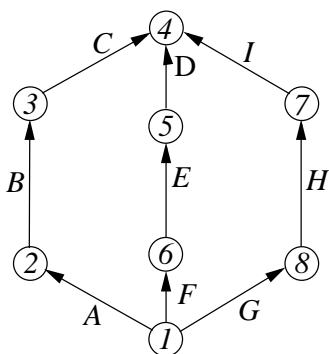


Figura 13: Digrafo de acoplamento  $G_C$  do manipulador paralelo 3RRR

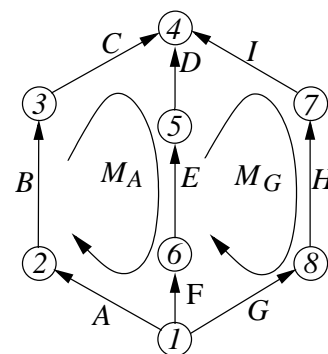


Figura 14: Digrafo de movimento  $G_M$  do manipulador paralelo 3RRR

O digrafo de movimento  $G_M$  descreve o grau de liberdade de cada junta da cadeia. No digrafo de movimento  $G_M$ , as arestas representam somente juntas que permitem um grau de liberdade. O digrafo de movimento é construído trocando cada junta original por uma ou mais juntas substitutas de um grau de liberdade. Assim, considerando  $f$  o número de graus de liberdade de cada junta, cada um dos arcos de  $G_C$  é substituída por  $f$  arestas em  $G_M$ . Os arcos substitutos são colocadas em série e com o mesmo sentido do arco original. Entre as arestas substitutas aparecem  $f - 1$  nós (elos) virtuais com o objetivo de mediar os  $f$  arcos (juntas) substitutos (DAVIES, 1981).

Cada conjunto de  $f$  arcos de  $G_M$ , que representam um arco de  $G_C$ , define o movimento de um par cinemático original. Cada um dos  $f$  arcos destes conjuntos define um movimento simples

(um grau de liberdade). Tais movimentos, em conjunto, determinam o movimento permitido pelo par cinemático original, representado pelo arco do digrafo  $G_C$ .

Seja o grau de liberdade *bruto* da cadeia cinemática  $F_b$  o somatório dos graus de liberdade de todas as juntas da cadeia. Assim, o número de arcos de  $G_M$  indica o grau de liberdade bruto  $F_b$  da cadeia cinemática. Todos os  $F_b$  heligiros da cadeia são gerados por  $d$  heligiros linearmente independentes, onde  $d$  ( $1 \leq d \leq 6$ ) é a ordem mínima do sistema de helicóides (HUNT, 1978).

No manipulador  $3RRR$  da Fig. 12, todas as juntas permitem um grau de liberdade, conseqüentemente, não se realizam substituições de arcos. Assim, o digrafo de acoplamento  $G_C$  da Fig. 13 e o digrafo de movimento  $G_M$  da Fig. 14 são iguais. O grau de liberdade bruto do manipulador  $3RRR$  é  $F_b = 9$ , dado que  $e = 9$ , e a ordem do sistema de helicóides é  $d = 3$ , dado que o manipulador é plano.

O digrafo de movimento  $G_M$  permite visualizar facilmente as malhas da cadeia. A Fig. 14 mostra o digrafo  $G_M$  com  $l = 2$  malhas independentes:  $M_A$  e  $M_G$ .

A velocidade de qualquer elo na malha  $M_A$  em relação a si mesmo é nula. Esta velocidade pode ser expressa como função de todas as juntas pertencentes a  $M_A$ , gerando a equação

$$\$A + \$B + \$C - \$D - \$E - \$F = \vec{0} \quad (2.15)$$

onde  $\$i$  ( $i = A, \dots, F$ ) e  $\vec{0}$  possuem dimensão  $3 \times 1$  devido a que os movimentos do manipulador  $3RRR$  se estendem no plano  $XY$ .

A equação (2.15) pode ser expressa como

$$\hat{\$}_A \Psi_A + \hat{\$}_B \Psi_B + \hat{\$}_C \Psi_C - \hat{\$}_D \Psi_D - \hat{\$}_E \Psi_E - \hat{\$}_F \Psi_F = \vec{0} \quad (2.16)$$

onde  $\hat{\$}_i$  é o helicóide normalizado da junta  $i$  e  $\Psi_i$  é a magnitude do heligiro da junta  $i$ . Como as juntas são rotativas estas magnitudes possuem unidade de velocidade angular.

Similarmente, a velocidade de qualquer elo em relação a si mesmo na malha  $M_G$  pode ser expressa como

$$\begin{aligned} \$D + \$E + \$F - \$G - \$H - \$I &= \vec{0} \\ \hat{\$}_D \Psi_D + \hat{\$}_E \Psi_E + \hat{\$}_F \Psi_F - \hat{\$}_G \Psi_G - \hat{\$}_H \Psi_H - \hat{\$}_I \Psi_I &= \vec{0} \end{aligned} \quad (2.17)$$

O manipulador  $3RRR$  é plano ( $d = 3$ ) e contém  $l = 2$  duas malhas independentes, assim a lei das malhas fornece duas equações, Eq. (2.16) e Eq. (2.17), de dimensão três cada uma, ou seja seis equações. A combinação matricial destas seis equações, Eqs. (2.16) e (2.17), pode ser expressa como a *equação de restrição* do manipulador  $3RRR$  (CAMPOS; MARTINS; GUENTHER, 2002a)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \hat{\$}_A \hat{\$}_B \hat{\$}_C - \hat{\$}_D - \hat{\$}_E - \hat{\$}_F & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} \\ \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \hat{\$}_D & \hat{\$}_E & \hat{\$}_F & -\hat{\$}_G - \hat{\$}_H - \hat{\$}_I \end{bmatrix}}_{N_{(d \times F_b) = (6 \times 9)}} \underbrace{\begin{bmatrix} \Psi_A \\ \Psi_B \\ \Psi_C \\ \Psi_D \\ \Psi_E \\ \Psi_F \\ \Psi_G \\ \Psi_H \\ \Psi_I \end{bmatrix}}_{\Psi_{(F_b \times 1) = (9 \times 1)}} = \begin{bmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

onde  $N$  é a matriz de *rede*,  $\Psi$  é o vetor das magnitudes dos heligiros.

Adicionalmente, a velocidade de qualquer elo pode ser expressa na malha definida pelos nós  $1 - 2 - 3 - 4 - 7 - 8 - 1$ , mas a equação de restrição resultante é linearmente dependente ao conjunto das equações (2.16) e (2.15).

A equação de restrição é facilmente estabelecida para cadeias de múltiplas malhas utilizando a matriz de *incidência* da teoria de grafos, como é apresentado na seqüência.

Os digrafos de acoplamento e de movimento de uma cadeia cinemática podem ser representados por meio de *matrizes de incidência* as quais indicam a presença dos arcos em cada percurso fechado do digrafo. As matrizes incidência chamadas aqui *matrizes de malhas* são usadas por Davies (DAVIES, 1981) para facilitar a extensão do seu método a cadeias com malhas múltiplas.

O digrafo de movimento  $G_M$  pode ser representado pela matriz de malhas  $B_{(l \times e)}$ , onde  $l$  indica o número de malhas (linhas de  $B$ ) e  $e$  é o número de arcos (colunas de  $B$ ). Cada elemento ( $b_{ij}$ ) de  $B_{(l \times e)}$  é:

- 0, se a malha  $i$  não inclui o arco  $j$ ,

- +1, se a orientação da malha  $i$  coincide com a orientação do arco  $j$ ,
- -1, se a orientação da malha  $i$  e a orientação do arco  $j$  são opostas.

De acordo com a Fig. 14, o manipulador  $3RRR$  contém  $l = 2$  malhas, por exemplo  $M_A$  e  $M_G$ . Assim, a representação matricial de  $M_A$  e  $M_G$  de  $G_M$  é

$$B = \begin{bmatrix} A & B & C & D & E & F & G & H & I \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} M_A \\ M_G \end{matrix} \quad (2.19)$$

A matriz de malhas  $B$  é usada para obter a equação de restrição da cadeia de múltiplas malhas de forma sistemática.

Seja  $B_{i(F_b \times F_b)}$ ,  $i = 1, 2, \dots, l$  uma matriz diagonal cujos elementos não nulos são os elementos da linha  $i$  da matriz  $B$ . Seja  $D$  a matriz de helicóides *diretos* que contém os helicóides normalizados correspondentes a todos os arcos de  $G_M$ .

Assim, a matriz de rede  $N$  da equação de restrição (Eq. (2.18)) é obtida por (DAVIES, 1981):

$$N_{(dl \times F_b)} = \begin{bmatrix} DB_1 \\ DB_2 \\ DB_3 \\ \dots \\ DB_l \end{bmatrix}_{(dl \times F_b)} \quad (2.20)$$

Para o manipulador  $3RRR$  as matrizes  $B_i$  são obtidas a partir da matriz de malhas da Eq. (2.19) assim

$$\begin{aligned} B_1 &= \text{diag} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \\ B_2 &= \text{diag} \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \right\} \end{aligned} \quad (2.21)$$

e a matriz de helicóides *diretos*  $D_{(d \times F_b)}$  é dada por

$$D = \begin{bmatrix} \hat{\$}_A & \hat{\$}_B & \hat{\$}_C & \hat{\$}_D & \hat{\$}_E & \hat{\$}_F & \hat{\$}_G & \hat{\$}_H & \hat{\$}_I \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

Portanto,

$$N = \begin{bmatrix} \hat{\$}_A \hat{\$}_B \hat{\$}_C - \hat{\$}_D - \hat{\$}_E - \hat{\$}_F & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} \\ \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \hat{\$}_D & \hat{\$}_E & \hat{\$}_F - \hat{\$}_G - \hat{\$}_H - \hat{\$}_I \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

O vetor  $\Psi$  está composto pelas magnitudes dos heligiros que descrevem as juntas do manipulador

$$\Psi = [\Psi_A \Psi_B \Psi_C \Psi_D \Psi_E \Psi_F \Psi_G \Psi_H \Psi_I] \quad (2.24)$$

Assim, de acordo com a Eq. (2.11), a equação de restrição do manipulador  $3RRR$  é expressa da mesma forma que a Eq. (2.18), ou seja,

$$\begin{bmatrix} \hat{\$}_A \hat{\$}_B \hat{\$}_C - \hat{\$}_D - \hat{\$}_E - \hat{\$}_F & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} \\ \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \hat{\$}_D & \hat{\$}_E & \hat{\$}_F - \hat{\$}_G - \hat{\$}_H - \hat{\$}_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_A \\ \Psi_B \\ \Psi_C \\ \Psi_D \\ \Psi_E \\ \Psi_F \\ \Psi_G \\ \Psi_H \\ \Psi_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

A equação (2.20) estabelece a matriz de rede  $N$  para qualquer cadeia cinemática fechada, conseqüentemente, facilita a montagem da equação de restrição para cadeias com múltiplas malhas

$$N_{dl \times F_b} \Psi_{F_b \times 1} = 0 \quad (2.26)$$

Cabe observar que todos os heligiros da equação de restrição, Eq. (2.18) ou Eq. (2.25), devem ser expressos no mesmo sistema de coordenadas. Para este propósito é útil a transformação de coordenadas de helicóide da seção 2.5.

O método de Kirchhoff-Davies para estabelecer a equação de restrição de cadeias cinemáticas também se aplica a cadeias espaciais como é mostrado através de um exemplo na seção 2.3.1.

### 2.3.1 Exemplo espacial

O método de Kirchhoff-Davies pode ser aplicado a cadeias cinemáticas espaciais assim como a cadeias cinemáticas planas sem considerações adicionais. Nesta seção a equação de restrição para a cadeia cinemática espacial *SSCCE* da Fig. 15 é apresentada com o objetivo de mostrar a versatilidade do método (DAVIES, 1981).

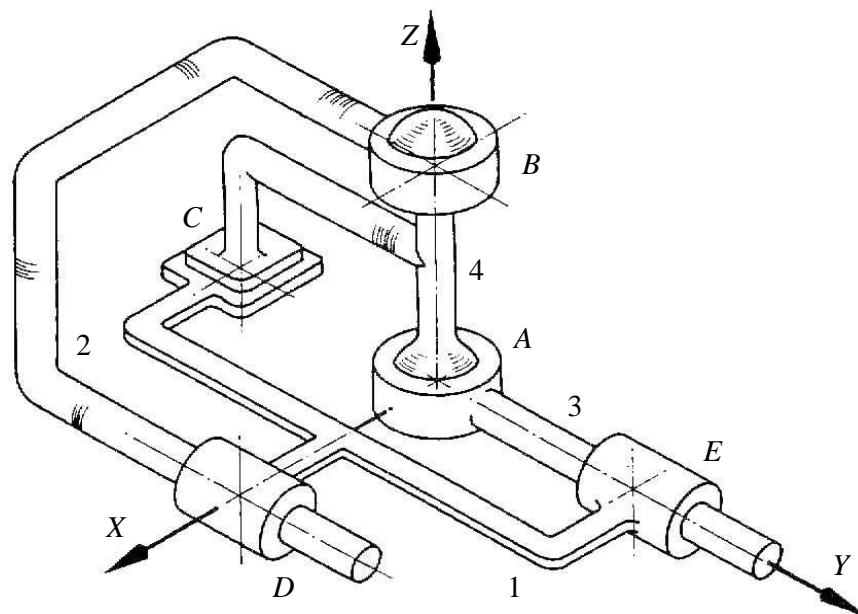


Figura 15: Cadeia cinemática espacial com múltiplas malhas *SSCCE* (DAVIES, 1981)

A cadeia *SSCCE* é composta por cinco juntas: duas juntas esféricas (*A* e *B*), duas juntas cilíndricas (*D* e *E*) e uma junta plana (*C*). O digrafo de acoplamento  $G_C$ , mostrado na Fig. 16, correspondente a esta cadeia é obtido considerando a disposição das juntas na cadeia.

Neste exemplo, todas as juntas permitem mais de um grau de liberdade, portanto é preciso realizar substituições em todos os arcos de  $G_C$  para obter  $G_M$ , onde os arcos permitem somente um grau de liberdade.

Cada junta esférica (*A* e *B*) é substituída por três juntas rotativas ortogonais em série ( $A_1, A_2, A_3$  e  $B_1, B_2, B_3$ ), alinhadas aos três eixos *X*, *Y* e *Z*, respectivamente. Cada junta cilíndrica (*D* e *E*) é substituída por uma junta rotativa ( $D_1$  e  $E_1$ ) e por uma junta prismática ( $D_2$  e  $E_2$ ), tanto o eixo da junta rotativa como a direção da junta prismática coincidem com o eixo da junta



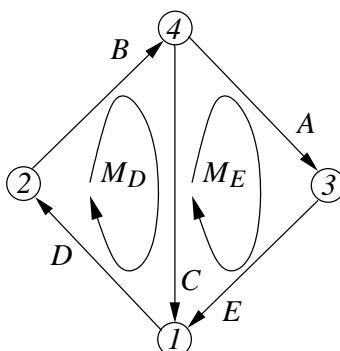


Figura 16: Digrafo de acoplamento  $G_C$  da cadeia cinemática  $SSCCE$

cilíndrica original. A junta plana ( $C$ ) é substituída por uma junta rotativa ( $C_1$ ) e duas juntas prismáticas ortogonais ( $C_2$  e  $C_3$ ), cujos eixos são paralelos ao eixo  $X$  e  $Y$ , respectivamente.

No mecanismo da Fig. 15 o heligiro  $\$_{A_1}$  está associado a junta  $A_1$ . Similarmente,  $\$_{A_2}$ ,  $\$_{A_3}$ ,  $\$_{B_1}$ ,  $\$_{B_2}$ ,  $\$_{B_3}$ ,  $\$_{C_1}$ ,  $\$_{C_2}$ ,  $\$_{C_3}$ ,  $\$_{D_1}$ ,  $\$_{D_2}$ ,  $\$_{E_1}$  e  $\$_{E_2}$ , são os heligiros associados às juntas  $A_2$ ,  $A_3$ ,  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$ ,  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ ,  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $E_1$  e  $E_2$ , respectivamente.

A Fig. 17 mostra o digrafo de movimento  $G_M$  da cadeia  $SSCCE$  com duas malhas individuais  $M_D$  e  $M_E$

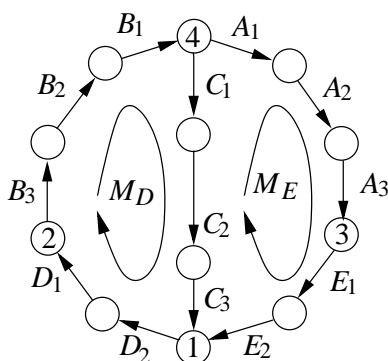


Figura 17: Digrafo de movimento  $G_M$  da cadeia cinemática  $SSCCE$

A matriz de malhas  $B$  da cadeia cinemática é obtida com base no digrafo de movimento da

Fig. 17, considerando as malhas  $M_D$  e  $M_E$

$$B = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & B_1 & B_2 & B_3 & C_1 & C_2 & C_3 & D_1 & D_2 & E_1 & E_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

e as matrizes diagonais  $B_i$  são

$$\begin{aligned} B_1 &= \text{diag} \left\{ \left[ \begin{array}{cccccccccccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \right\} \\ B_2 &= \text{diag} \left\{ \left[ \begin{array}{cccccccccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.28)$$

Neste caso, a matriz de helicóides diretos é

$$D = \left[ \begin{array}{cccccccccccc} \hat{\$}_{A_1} & \hat{\$}_{A_2} & \hat{\$}_{A_3} & \hat{\$}_{B_1} & \hat{\$}_{B_2} & \hat{\$}_{B_3} & \hat{\$}_{C_1} & \hat{\$}_{C_2} & \hat{\$}_{C_3} & \hat{\$}_{D_1} & \hat{\$}_{D_2} & \hat{\$}_{E_1} & \hat{\$}_{E_2} \end{array} \right] \quad (2.29)$$

Assim, a equação de restrição da cadeia cinemática  $SSCCE$  é encontrada por meio da substituição da Eq. (2.29) e da Eq. (2.27) na Eq. (2.20)

$$\left[ \begin{array}{cccccccccccc} 0 & 0 & 0 & \hat{\$}_{B_1} & \hat{\$}_{B_2} & \hat{\$}_{B_3} & \hat{\$}_{C_1} & \hat{\$}_{C_2} & \hat{\$}_{C_3} & \hat{\$}_{D_1} & \hat{\$}_{D_2} & 0 & 0 \\ \hat{\$}_{A_1} & \hat{\$}_{A_2} & \hat{\$}_{A_3} & 0 & 0 & 0 & -\hat{\$}_{C_1} & -\hat{\$}_{C_2} & -\hat{\$}_{C_3} & 0 & 0 & \hat{\$}_{E_1} & \hat{\$}_{E_2} \end{array} \right]_{(12 \times 13)} \begin{bmatrix} \Psi_{A_1} \\ \Psi_{A_2} \\ \Psi_{A_3} \\ \Psi_{B_1} \\ \Psi_{B_2} \\ \Psi_{B_3} \\ \Psi_{C_1} \\ \Psi_{C_2} \\ \Psi_{C_3} \\ \Psi_{D_1} \\ \Psi_{D_2} \\ \Psi_{E_1} \\ \Psi_{E_2} \end{bmatrix}_{(13 \times 1)} = 0_{(12 \times 1)} \quad (2.30)$$

## 2.4 Cinemática diferencial no espaço das juntas

Nesta seção apresenta-se a solução da cinemática diferencial para as juntas passivas de uma cadeia fechada por meio da reorganização da equação de restrição. As velocidades das juntas secundárias são função das velocidades das juntas primárias devido às restrições impostas pela cadeia fechada (SUGIMOTO, 2001)(CAMPOS; MARTINS; GUENTHER, 2002a).

Observa-se que a Eq. (2.26) estabelece  $dl$  restrições para uma cadeia cinemática com grau de liberdade bruto  $F_b \leq dl$ . Isto significa que existem apenas  $F_N \leq F_b$  variáveis independentes na equação de restrição, sendo

$$F_N = F_b - dl \quad (2.31)$$

onde  $F_N$  é o grau de liberdade *líquido* da cadeia cinemática também chamado *mobilidade*.

O grau de liberdade líquido para o manipulador  $3RRR$  é  $F_N = 9 - 6 = 3$ . Assim, é possível expressar a Eq. (2.26) como função de três variáveis primárias, as quais determinam o valor das magnitudes das seis juntas secundárias restantes.

A cinemática diferencial no espaço de juntas consiste em reescrever o vetor  $\Psi$  separando as  $dl$  magnitudes secundárias  $\Psi_s$  e as  $F_N$  magnitudes primárias  $\Psi_p$ , ou seja,  $\Psi = [\Psi_s; \Psi_p]^T$ . Reorganizando a matriz  $[N]_{(dl \times F_b)}$  de forma coerente com a separação efetuada nas magnitudes, pode-se particioná-la em uma matriz  $[N_s]_{(dl \times dl)}$  referente as juntas secundárias e  $[N_p]_{(dl \times F_N)}$  referente as juntas primárias, ou seja,  $[N]_{(dl \times F_b)} = \begin{bmatrix} [N_s]_{(dl \times dl)} & [N_p]_{(dl \times F_N)} \end{bmatrix}$ . Com essa reorganização a Eq. (2.26) resulta

$$\begin{bmatrix} [N_s]_{(dl \times dl)} & [N_p]_{(dl \times F_N)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\Psi_s]_{(dl \times 1)} \\ \cdots \\ [\Psi_p]_{(F_N \times 1)} \end{bmatrix} = [0]_{(dl \times 1)} \quad (2.32)$$

e esta equação pode ser reescrita como

$$N_s \Psi_s = -N_p \Psi_p \quad (2.33)$$

ou

$$\Psi_s = -N_s^{-1} N_p \Psi_p \quad (2.34)$$

onde  $-N_s^{-1} N_p$  pode ser considerado como o jacobiano entre os espaços das juntas primárias e

secundárias.

No manipulador  $3RRR$  se, por exemplo, as juntas  $A$ ,  $F$  e  $G$  são escolhidas como juntas primárias do manipulador  $3RRR$ , a Eq. (2.34) resulta em:

$$\begin{bmatrix} \Psi_B \\ \Psi_C \\ \Psi_D \\ \Psi_E \\ \Psi_H \\ \Psi_I \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \hat{\$}_B \hat{\$}_C - \hat{\$}_D - \hat{\$}_E & \vec{0} & \vec{0} \\ \vec{0} & \vec{0} & \hat{\$}_D \hat{\$}_E - \hat{\$}_H - \hat{\$}_I \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{\$}_A - \hat{\$}_F & \vec{0} \\ \vec{0} & \hat{\$}_F - \hat{\$}_G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_A \\ \Psi_F \\ \Psi_G \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

A equação (2.35) estabelece a relação entre as magnitudes das velocidades nas juntas do manipulador  $3RRR$ .

## 2.5 Transformação de coordenadas de helicóides

Um helicóide pode ser expresso em diferentes sistemas de coordenadas. A alteração das componentes de um helicóide devido a uma mudança de sistema de coordenadas é realizada através de uma transformação linear. Nesta seção, esta transformação é apresentada para um caso genérico, no qual os sistemas de coordenadas estão dispostos arbitrariamente.

Na seqüência é mostrada a obtenção da matriz de transformação de coordenadas de helicóides para um caso genérico. Esta transformação é obtida a partir da combinação de dois casos de transformação de coordenadas particulares na cinemática instantânea.

Seja o helígrafo  $\$$  de um corpo expresso no sistema inercial  $j$ , com a origem no ponto  $J$ ,

$${}^j\$ = \begin{bmatrix} {}^j\omega \\ {}^jv_J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^j\mathcal{L} \\ {}^j\mathcal{M} \\ {}^j\mathcal{N} \\ {}^j\mathcal{P}^* \\ {}^j\mathcal{Q}^* \\ {}^j\mathcal{R}^* \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

onde o superíndice anterior  $j$  representa o sistema de referência no qual as variáveis são dadas, Fig. 18.

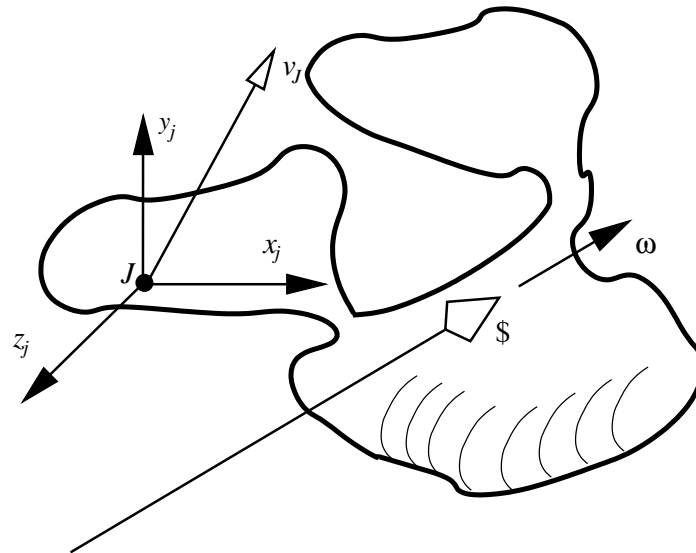


Figura 18: Sistemas de coordenadas  $j$

Seja outro sistema de coordenadas inercial, denominado sistema  $i$ , cuja origem  $I$  está localizada na mesma posição da origem  $J$  do sistema  $j$  (Fig. 19).

Considere que a diferença de orientação entre o sistema  $i$  e o sistema  $j$  seja dada pela matriz de rotação  ${}^i R_j$

$${}^i R_j = \begin{bmatrix} x' & y' & z' \end{bmatrix}_{[3 \times 3]} \quad (2.37)$$

onde  $x'$ ,  $y'$  e  $z'$  são os vetores unitários na direção  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente, do sistema de coordenadas  $j$  descritos no sistema de coordenadas  $i$  (SCIAVICCO; SICILIANO, 1996).

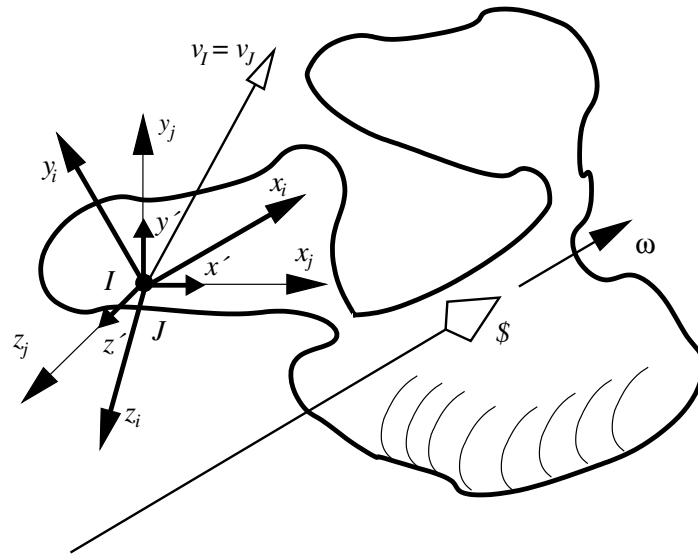


Figura 19: Sistemas de coordenadas  $j$  e  $i$  com a mesma origem e orientações diferentes

Neste caso o heligiro do corpo no sistema  $i$  é dado por

$${}^i\mathcal{S} = \begin{bmatrix} {}^i\omega \\ {}^i v_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^i\omega \\ {}^i v_J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [{}^i R_j] {}^j\omega \\ [{}^i R_j] {}^j v_J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [{}^i R_j] \begin{bmatrix} {}^j\mathcal{L} \\ {}^j\mathcal{M} \\ {}^j\mathcal{N} \end{bmatrix} \\ [{}^i R_j] \begin{bmatrix} {}^j\mathcal{P}^* \\ {}^j\mathcal{Q}^* \\ {}^j\mathcal{R}^* \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

ou seja,

$$\begin{bmatrix} {}^i\mathcal{L} \\ {}^i\mathcal{M} \\ {}^i\mathcal{N} \\ {}^i\mathcal{P}^* \\ {}^i\mathcal{Q}^* \\ {}^i\mathcal{R}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [{}^iR_j]_{3 \times 3} & [0]_{3 \times 3} \\ [0]_{3 \times 3} & [{}^iR_j]_{3 \times 3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^j\mathcal{L} \\ {}^j\mathcal{M} \\ {}^j\mathcal{N} \\ {}^j\mathcal{P}^* \\ {}^j\mathcal{Q}^* \\ {}^j\mathcal{R}^* \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

$${}^i\mathcal{S} = [{}^iT_j] {}^j\mathcal{S}$$

onde  $[{}^iT_j]$  é a matriz de transformação de helicóides do sistema de coordenadas  $j$  para o sistema de coordenadas  $i$ .

Seja outro sistema de coordenadas inercial, denominado sistema  $k$ , paralelo (mesma orientação) ao sistema  $i$ , cuja origem  $K$  está deslocada de  $I$ , de modo que o ponto  $K$  expresso no sistema  $i$  é denotado pelo vetor  $p \equiv {}^ip_K = [x, y, z]^T$  (Fig. 20).

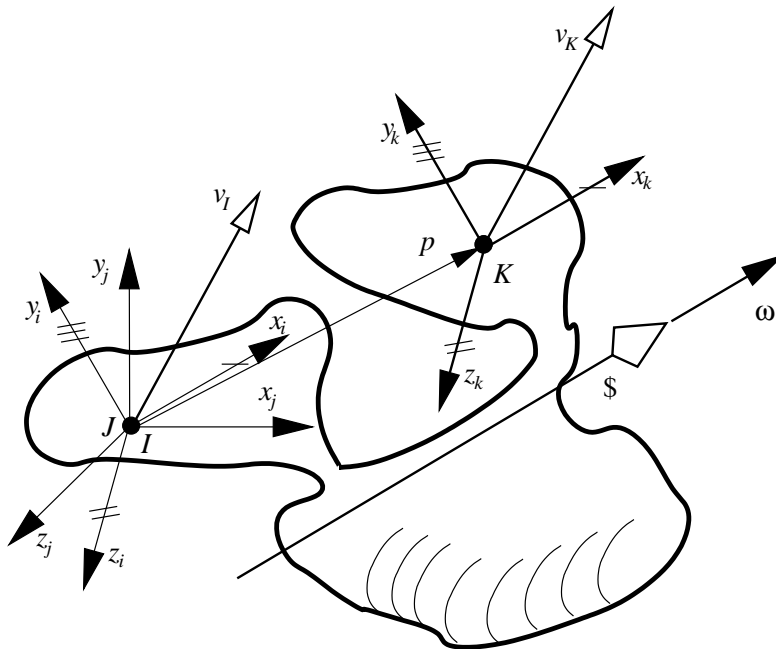


Figura 20: Sistemas de coordenadas  $j$ ,  $i$  e  $k$

Para expressar o heligiro  ${}^i\omega$  no sistema de coordenadas  $k$  é necessário encontrar a transformação do sistema  $i$  para o sistema de coordenadas  $k$ . No sistema  $k$  as componentes da velocidade angular do corpo não são alteradas pois as razões diretoras do eixo da velocidade angular permanecem iguais, ou seja,  ${}^k\omega = {}^i\omega$ . As componentes da velocidade translacional de um ponto do corpo instantaneamente em  $K$  expressas no sistema  $k$ ,  ${}^k v_K$ , são dependentes da localização da origem  $K$  e requerem outro procedimento.

Considerando a característica de vetor livre da velocidade translacional é possível afirmar que as componentes da velocidade translacional de um ponto qualquer do corpo são as mesmas se representadas em sistemas de coordenadas paralelos.

Assim, dado o paralelismo entre os sistemas de coordenadas  $i$  e  $k$ , a velocidade translacional de um ponto do corpo instantaneamente em  $K$  é

$$\begin{aligned}
 {}^k v_K &= {}^i v_K \\
 &= {}^i v_I + {}^i \omega \times {}^i P_K \\
 &= {}^i v_I + (-{}^i P_K) \times {}^i \omega \\
 &= {}^i v_I + {}^k p_I \times {}^i \omega \\
 &= {}^i v_I + \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \times {}^i \omega \\
 &= {}^i v_I + \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix} {}^i \omega \\
 &= {}^i v_I + \mathcal{S}({}^k p_I) {}^i \omega
 \end{aligned} \tag{2.40}$$

onde  $\mathcal{S}({}^k p_I)$  é a matriz anti-simétrica, com os elementos de  ${}^k p_I$ , que operando sobre o vetor  ${}^i \omega$  fornece o mesmo resultado que o produto vetorial  ${}^k p_I \times {}^i \omega$  (SCIATICCO; SICILIANO, 1996).



Portanto, o heligiro do corpo pode ser representado no sistema  $k$  como

$${}^k\mathcal{S} = \begin{bmatrix} {}^k\omega \\ {}^k\nu_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^i\omega \\ {}^i\nu_I + \mathcal{S}({}^k p_I) {}^i\omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^i\mathcal{L} \\ {}^i\mathcal{M} \\ {}^i\mathcal{N} \\ \begin{bmatrix} {}^i\mathcal{P}^* \\ {}^i\mathcal{Q}^* \\ {}^i\mathcal{R}^* \end{bmatrix} + \mathcal{S}({}^k p_I) \begin{bmatrix} {}^i\mathcal{L} \\ {}^i\mathcal{M} \\ {}^i\mathcal{N} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

ou seja,

$$\begin{bmatrix} {}^k\mathcal{L} \\ {}^k\mathcal{M} \\ {}^k\mathcal{N} \\ {}^k\mathcal{P}^* \\ {}^k\mathcal{Q}^* \\ {}^k\mathcal{R}^* \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{c|c} [I]_{3 \times 3} & [0]_{3 \times 3} \\ \hline [\mathcal{S}({}^k p_I)]_{3 \times 3} & [I] \end{array} \right] \begin{bmatrix} {}^i\mathcal{L} \\ {}^i\mathcal{M} \\ {}^i\mathcal{N} \\ {}^i\mathcal{P}^* \\ {}^i\mathcal{Q}^* \\ {}^i\mathcal{R}^* \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

$${}^k\mathcal{S} = [{}^k T_i] {}^i\mathcal{S}$$

onde

$$[{}^k T_i] = \left[ \begin{array}{c|c} [I]_{3 \times 3} & [0]_{3 \times 3} \\ \hline [\mathcal{S}({}^k p_I)]_{3 \times 3} & [I] \end{array} \right] \quad (2.43)$$

é a matriz de transformação de helicóides do sistema de coordenadas  $i$  para o sistema de coordenadas  $k$ .

A transformação de coordenadas de helicóide entre um sistema  $j$  e um sistema  $k$ , entre os quais existe uma rotação e uma translação, é obtida através da combinação das matrizes obtidas

nas eqs. (2.39) e (2.42), ou seja,

$$\begin{aligned} {}^k\mathcal{S} &= [{}^kT_i] {}^i\mathcal{S} \\ &= [{}^kT_i] [{}^iT_j] {}^j\mathcal{S} \end{aligned} \quad (2.44)$$

considerando que  $I$  e  $J$  são localizados no mesmo ponto tem-se que  ${}^k p_I = {}^k p_J$ . Assim, a expressão da eq. (2.44) pode ser dada por

$$\begin{bmatrix} {}^k\mathcal{L} \\ {}^k\mathcal{M} \\ {}^k\mathcal{N} \\ {}^k\mathcal{P}^* \\ {}^k\mathcal{Q}^* \\ {}^k\mathcal{R}^* \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{c|c} & \\ \hline [{}^kR_j]_{3 \times 3} & [0]_{3 \times 3} \\ \hline [S({}^k p_J)]_{3 \times 3} [{}^kR_j]_{3 \times 3} & [{}^kR_j]_{3 \times 3} \end{array} \right] \begin{bmatrix} {}^j\mathcal{L} \\ {}^j\mathcal{M} \\ {}^j\mathcal{N} \\ {}^j\mathcal{P}^* \\ {}^j\mathcal{Q}^* \\ {}^j\mathcal{R}^* \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

$${}^k\mathcal{S} = [{}^kT_j] {}^j\mathcal{S}$$

onde

$$[{}^kT_j] = \left[ \begin{array}{c|c} & \\ \hline [{}^kR_j]_{3 \times 3} & [0]_{3 \times 3} \\ \hline [S({}^k p_J)]_{3 \times 3} [{}^kR_j]_{3 \times 3} & [{}^kR_j]_{3 \times 3} \end{array} \right] \quad (2.46)$$

é a matriz de transformação de helicóides do sistema de coordenadas  $j$  para o  $k$ , dois sistemas são dispostos arbitrariamente no espaço.

A matriz de transformação de helicóides do sistema  $k$  para o sistema  $j$  é encontrada invertendo a matriz  $[{}^kT_j]$ . Dado que  $[{}^kR_j]$  é ortogonal e  $[S({}^k p_J)]$  é anti-simétrica, a inversa da matriz

$[{}^k T_j]$  corresponde a (TSAI, 1999)

$$[{}^k T_j]^{-1} \triangleq [{}^j T_k] \triangleq \left[ \begin{array}{c|c} [{}^j R_k]_{3 \times 3} & [0]_{3 \times 3} \\ \hline \mathcal{S}({}^j p_K)_{3 \times 3} [{}^j R_k]_{3 \times 3} & [{}^j R_k]_{3 \times 3} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} [{}^k R_j]^T_{3 \times 3} & [0]_{3 \times 3} \\ \hline [[\mathcal{S}({}^k p_J)] [{}^k R_j]]^T_{3 \times 3} & [{}^k R_j]^T_{3 \times 3} \end{array} \right] \quad (2.47)$$

Assim, o movimento de um corpo representado por um heligiro pode ser representado em qualquer sistema de coordenadas por meio de uma multiplicação matricial.

## 3 *Cadeia cinemática virtual*

A abordagem da cinemática diferencial de manipuladores, proposta nesta tese, está baseada em uma modificação virtual da cadeia cinemática original. A cadeia original é modificada através da adição de uma ou mais *cadeias virtuais* ao manipulador. Neste capítulo é apresentado o conceito de cadeia virtual e os tipos de cadeias virtuais mais utilizados na solução da cinemática diferencial de manipuladores.

### 3.1 Cadeia virtual: definição

Dada uma cadeia cinemática pode-se obter informações acerca do seu movimento ou introduzir características a seu movimento utilizando *cadeias cinemáticas virtuais* adicionadas à cadeia cinemática do mecanismo ou manipulador, denominada cadeia cinemática *real*.

Para tanto propõe-se nesta tese cadeias cinemáticas virtuais com as seguintes propriedades:

- A cadeia virtual é uma cadeia cinemática serial aberta composta por elos e juntas, denominados *elos virtuais* e *juntas virtuais*;
- Os heligiros que representam o movimento das juntas virtuais são *linearmente independentes* e;
- A cadeia virtual não altera o grau de liberdade da cadeia cinemática real.

Como conseqüência, o grau de liberdade da cadeia virtual deve ser igual à ordem do sistema de helicóides ao qual pertence a cadeia cinemática real.

Quando as juntas virtuais tem apenas um grau de liberdade o número de juntas virtuais é igual à ordem  $d$  do sistema de helicóides. Se a cadeia virtual contém juntas com mais de um

grau de liberdade, ou seja  $f > 1$ , estas juntas podem ser substituídas por  $f$  juntas de um grau de liberdade em série.

Usando heligiros pode-se selecionar diferentes sistemas de coordenadas para representar o movimento entre corpos. Assim, é possível representar os movimentos das juntas virtuais em um sistema de coordenadas conveniente para obter heligiros mais simples. O elo onde um sistema de coordenadas é fixo é denominado *elo de suporte* do sistema de coordenadas.

Nesta tese, as juntas virtuais são identificadas através de duas letras. A primeira define o tipo de junta, *prismática* ( $p$ ) ou *rotativa* ( $r$ ), e a segunda está associada ao eixo coordenado paralelo ao eixo da junta.

Cabe destacar que a cadeia virtual, considerando suas características, pode ser classificada como um *grupo de Assur*, definido como um conjunto de elos e juntas aberto, *i.e.* com algumas juntas de ligação que pode ser adicionada a uma cadeia cinemática (dita real) sem afetar a sua mobilidade (ASSUR, 1952) (MANOLESCU; MANAFU, 1963)(TISCHLER, 1995).

Todas as cadeias cinemáticas que cumprem as três condições apresentadas nesta seção podem ser consideradas cadeias virtuais. Na seqüência são apresentadas algumas cadeias virtuais planas e espaciais consideradas úteis em robótica.

## 3.2 Cadeias virtuais planas

Em cadeias cinemáticas planas a ordem do sistema de helicóides é  $d = 3$  e, conseqüentemente, a cadeia virtual deve ter três graus de liberdade.

São bastante úteis as cadeias cinemáticas virtuais com duas juntas *prismáticas* e uma junta *rotativa* ( $PPR$ ) e as cadeias virtuais com uma junta *rotativa*, uma *prismática* e outra junta *rotativa* ( $RPR$ ). As cadeias virtuais com estrutura  $PPR$  podem ser associadas a um sistema de coordenadas cartesiano, e as cadeias virtuais  $RPR$  a um sistema de coordenadas polar.

Descreve-se a seguir a cadeia virtual  $PPR$  e a cadeia virtual  $RPR$ .

Considere-se que em ambos os casos o movimento ocorre em um plano descrito pelo sistema  $XY$ , chamado sistema- $B$ . Desta forma todos os heligiros das cadeias cinemáticas possuem apenas três componentes:  $\mathcal{N}$ ,  $\mathcal{P}^*$  e  $\mathcal{Q}^*$ .

### 3.2.1 Cadeia virtual $PPR$ ortogonal

Uma cadeia virtual  $PPR$  bastante útil é a formada por duas juntas prismáticas cujos movimentos ocorrem na direção de dois eixos ortogonais  $X$  e  $Y$ , e uma junta rotativa cujo movimento ocorre na direção de um eixo  $Z$  ortogonal a  $X$  e  $Y$ , mostrado na Fig. 21. Pela nomenclatura adotada, as juntas prismáticas são  $px$  e  $py$  e seus movimentos são descritos pelos heligiros  $\$_{px}$  e  $\$_{py}$ , e a junta rotativa é chamada  $rz$  e seu movimento é descrito pelo heligiro  $\$_{rz}$ .

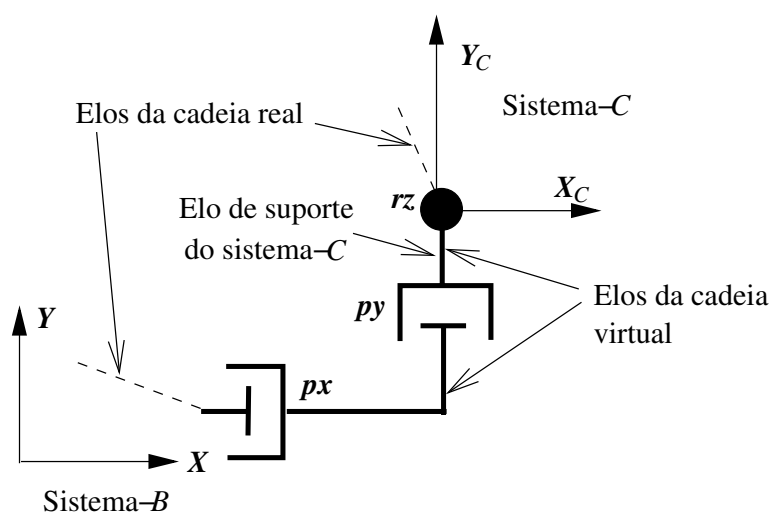


Figura 21: Cadeia virtual  $PPR$  ortogonal

Esta cadeia virtual começa na junta de ligação  $px$  (que propicia o movimento entre um elo da cadeia cinemática real e o primeiro elo virtual) e termina com a junta de ligação rotativa  $rz$ , através da qual ocorre o movimento entre o último elo virtual e um elo da cadeia cinemática real.

Os digrafos de acoplamento ( $G_C$ ) e de movimento ( $G_M$ ) correspondentes a esta cadeia virtual são iguais uma vez que todas as juntas têm apenas um movimento. Sua representação esquemática está apresentada na Fig. 22.

A representação dos heligiros ( $\$_{px}$ ,  $\$_{py}$  e  $\$_{rz}$ ) pode ser feita em um sistema de coordenadas conveniente à análise. Uma representação simplificada é conseguida escolhendo o sistema- $C$  com origem na junta  $rz$ , cujo elo de suporte está entre as juntas  $py$  e  $rz$ , e os eixos  $X_C$  e  $Y_C$  paralelos aos eixos  $X$  e  $Y$ , respectivamente. Assim, o sistema- $C$  pode se transladar em relação ao sistema- $B$  ( $XY$ ) mas não rotacionar em relação a ele.

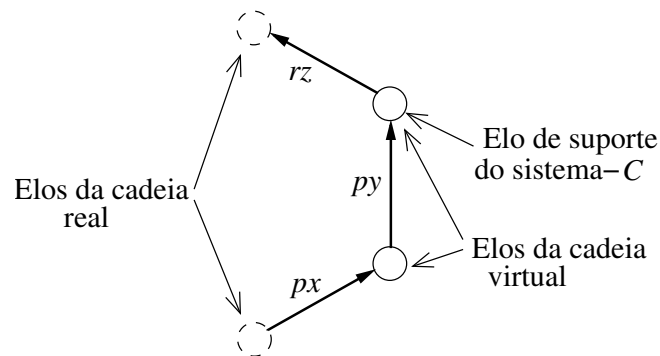


Figura 22: Digrafo de acoplamento  $G_C$  e de movimento  $G_M$  de uma cadeia virtual  $PPR$  ortogonal

Considerando os eixos dos helicóides das juntas na direção positiva dos eixos do sistema- $C$ , tem-se que os termos  $S$  e  $S_o$  (detalhes na seção 2.1) representados no sistema- $C$ , correspondentes a cada junta, são

$${}^C S_{px} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad {}^C S_{py} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad {}^C S_{rz} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad {}^C S_{or_z} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

onde o super-índice anterior  $C$  indica o sistema no qual o heligiro é representado.

Portanto, de acordo com a Eq. (2.5) e a Eq. (2.6), a representação dos helicóides normalizados das juntas virtuais no sistema- $C$  resulta:

$${}^C \hat{\$}_{px} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad {}^C \hat{\$}_{py} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad {}^C \hat{\$}_{rz} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Considerando que a cadeia  $PPR$  se estende no plano  $XY$  os helicóides normalizados da

Eq. (3.2) podem ser reduzidos através da eliminação dos termos triviais  $L$ ,  $M$  e  $R$  (ver Eq. (2.3))

$$C_{\hat{\$}_{px}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad C_{\hat{\$}_{py}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad C_{\hat{\$}_{rz}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Cabe observar que a cadeia  $PPR$  representa um sistema cartesiano no plano.

### 3.2.2 Cadeia virtual $RPR$

Outra cadeia virtual útil na análise de cadeias cinemáticas no plano  $XY$  é a cadeia  $RPR$ , formada por duas juntas rotativas  $rz1$  e  $rz2$  cujos movimentos ocorrem na direção do eixo  $Z$  e uma junta prismática  $pr$  com movimento na direção radial definida pela coordenada de azimute ( $\alpha$ ), como mostrado na Fig. 23. Cabe observar que quando a distância instantânea entre as juntas rotativas é nula, os helicóides destas juntas tornam-se linearmente dependentes e conseqüentemente, neste caso, a cadeia  $RPR$  não é uma cadeia virtual.

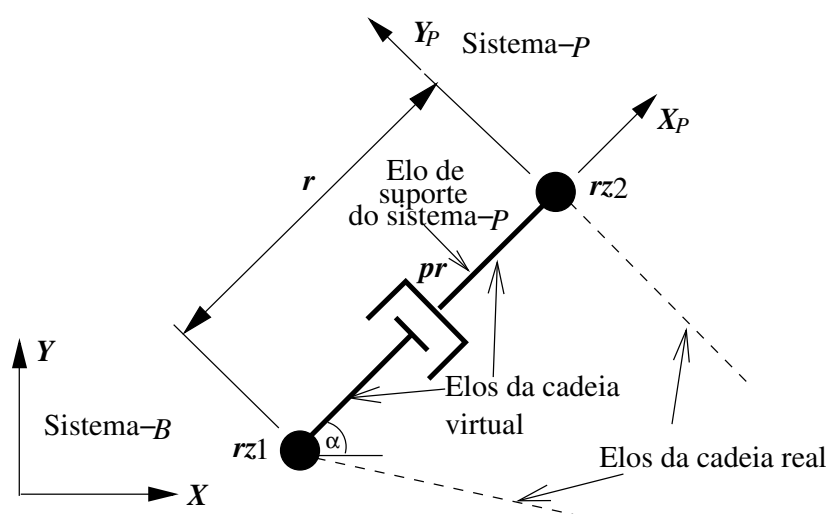


Figura 23: Cadeia virtual  $RPR$

Pela nomenclatura adotada os helicóides que representam os movimentos das juntas  $rz1$ ,  $pr$  e  $rz2$  são denominados  $\$_{rz1}$ ,  $\$_{pr}$  e  $\$_{rz2}$ , respectivamente.

A cadeia  $RPR$  começa na junta de ligação  $rz1$  (que propicia o movimento entre um elo da



cadeia cinemática real e o primeiro elo virtual) e termina com a junta de ligação  $rz2$ , através da qual ocorre o movimento entre o último elo virtual e um elo da cadeia real.

Como todas as juntas tem apenas um movimento, os digrafos de acoplamento  $G_C$  e de movimento  $G_M$  correspondentes a esta cadeia virtual são iguais. Sua representação esquemática está apresentada na Fig. 24.

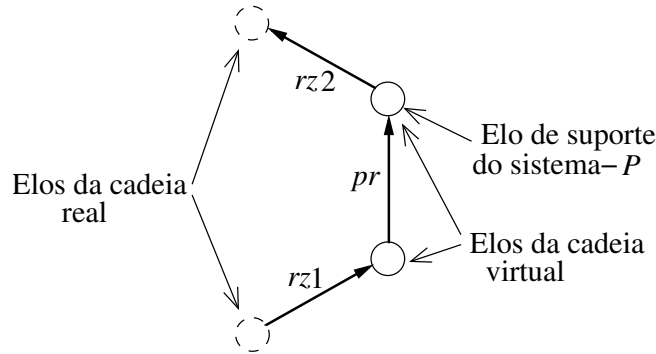


Figura 24: Digrafo de acoplamento  $G_C$  e de movimento  $G_M$  da cadeia virtual  $RPR$

Uma representação simplificada dos helicóides  $\$_{rz1}$ ,  $\$_{pr}$  e  $\$_{rz2}$  é conseguida escolhendo o sistema- $P$  com origem na junta  $rz2$ , cujo elo de suporte está entre as juntas  $pr$  e  $rz2$ , onde a direção do eixo  $X_P$  é coincidente com a direção radial definida por  $\alpha$  na Fig. 23. O sistema- $P$  pode ter translação e rotação em relação ao sistema- $B$ .

Considerando  $r$  como a distância instantânea entre a junta  $rz1$  e a origem do sistema- $P$  e os eixos dos helicóides das juntas na direção positiva dos eixos do sistema- $P$ , tem-se que os termos  $S$  e  $S_o$  representados no sistema- $P$ , correspondentes a cada junta, são

$${}^P S_{rz1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad {}^P S_{pr} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad {}^P S_{rz2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad {}^P S_{o_{rz1}} = \begin{bmatrix} -r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad {}^P S_{o_{rz2}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Portanto, de acordo com a Eq. (2.5) e a Eq. (2.6), a representação dos helicóides normaliza-

dos das juntas virtuais no sistema- $P$  resulta:

$${}^P\hat{\$}_{rz1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ r \\ 0 \end{bmatrix}; \quad {}^P\hat{\$}_{pr} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad {}^P\hat{\$}_{rz2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Considerando que a cadeia  $PPR$  se estende no plano  $XY$  os helicóides normalizados da Eq. (3.5) podem ser reduzidos através da eliminação dos termos triviais  $L$ ,  $M$  e  $R$

$${}^P\hat{\$}_{rz1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ r \end{bmatrix}; \quad {}^P\hat{\$}_{pr} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad {}^P\hat{\$}_{rz2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

A cadeia virtual  $RPR$  representa um sistema de coordenadas polar.

### 3.3 Cadeia virtual espacial

Em cadeias cinemáticas espaciais a ordem do sistema de helicóides é  $d = 6$  e, conseqüentemente, a cadeia virtual deve ter seis graus de liberdade.

São bastante úteis as cadeia cinemáticas virtuais com três juntas prismáticas e uma junta esférica ( $PPPS$ ), as cadeias virtuais com uma junta rotativa, duas juntas prismáticas e uma junta esférica ( $RPPS$ ) e as cadeias virtuais com duas juntas rotativas, uma junta prismática e uma junta esférica ( $RRPS$ ). As cadeias virtuais com estrutura  $PPPS$  podem ser associadas a um sistema de coordenadas cartesiano, as cadeias virtuais com estrutura  $RPPS$  podem ser associadas a um sistema de coordenadas cilíndrico e as cadeias virtuais com estrutura  $RRPS$  podem ser associadas a um sistema de coordenadas esférico.

Descrevem-se a seguir as cadeias virtuais  $PPPS$ ,  $RPPS$  e  $RRPS$ .

Considere-se que em todos os casos o movimento ocorre no espaço 3D descrito pelo sistema  $XYZ$ , chamado sistema- $B$ . Desta forma todos os heligiros das cadeias cinemáticas possuem

seis componentes:  $\mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N}, \mathcal{P}^*, \mathcal{Q}^*$  e  $\mathcal{R}^*$ .

### 3.3.1 Cadeia virtual $PPPS$ ortogonal

Uma cadeia virtual bastante útil é a formada por três juntas prismáticas ortogonais ( $PPP$ ) e uma junta esférica ( $S$ ).

Nesta cadeia os movimentos das juntas prismáticas ocorrem nas direções dos eixos ortogonais  $X$  (junta  $px$ ),  $Y$  (junta  $py$ ) e  $Z$  (junta  $pz$ ) e são representados pelos heligiros  $\$_{px}$ ,  $\$_{py}$  e  $\$_{pz}$ , respectivamente. A junta esférica  $S$  pode ser substituída instantaneamente por três juntas rotativas ortogonais em série,  $rx$ ,  $ry$  e  $rz$ , com movimentos em torno dos eixos  $X$ ,  $Y$  e  $Z$ , representados pelos heligiros  $\$_{rx}$ ,  $\$_{ry}$  e  $\$_{rz}$ , respectivamente, como mostra a Fig. 25.

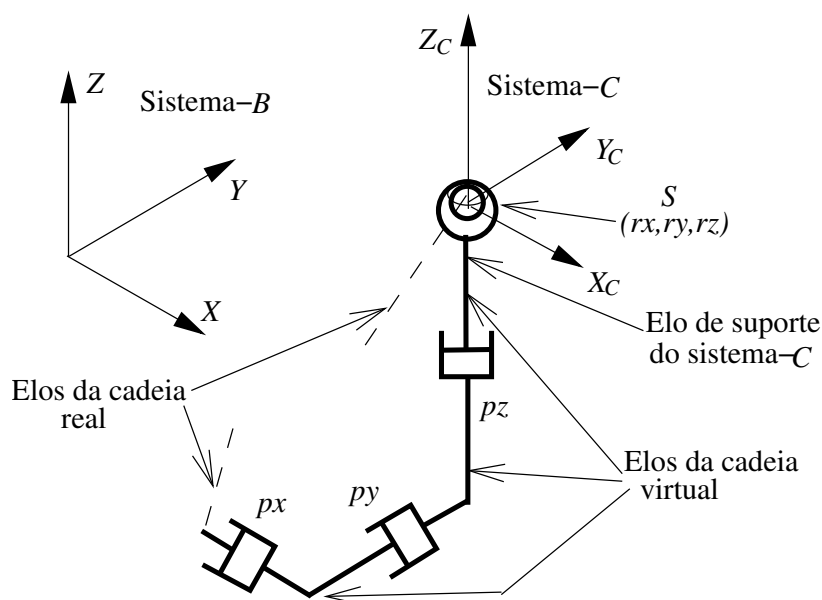


Figura 25: Cadeia virtual  $PPPS$

Esta cadeia virtual começa na junta de ligação  $px$  (que possibilita o movimento entre um elo da cadeia cinemática real e o primeiro elo da cadeia virtual) e termina com a junta de ligação esférica  $S$  (através da qual ocorre o movimento entre o último elo virtual e um elo da cadeia real).

O digrafo de acoplamento  $G_C$  da cadeia  $PPPS$  está mostrado na Fig. 26 e o digrafo de

movimento está mostrado na Fig. 27.

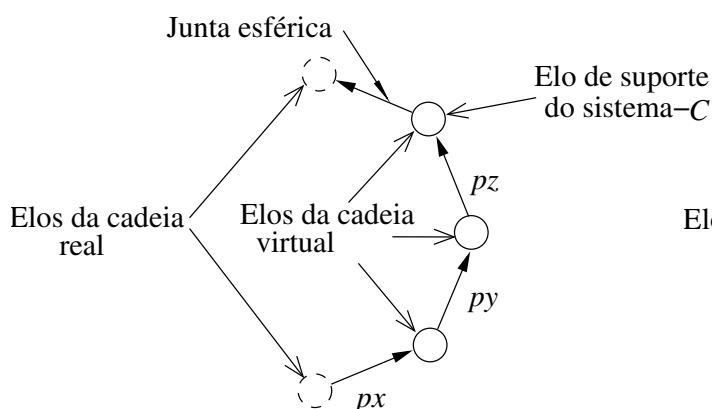


Figura 26: Grafo de acoplamento  $G_C$  da cadeia virtual  $PPPS$

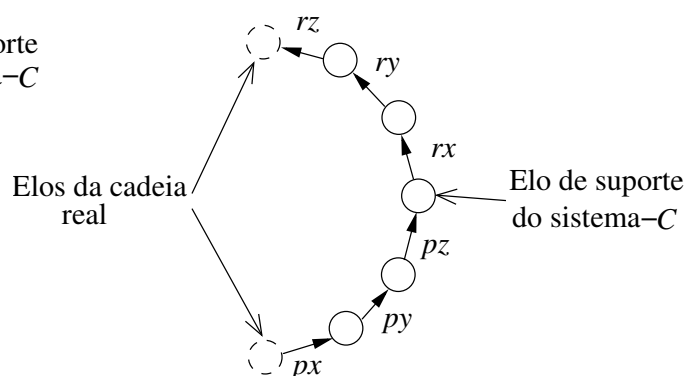


Figura 27: Grafo de movimento  $G_M$  da cadeia virtual  $PPPS$

Cabe destacar a substituição do arco que representa a junta esférica em  $G_C$  pelos três arcos em série que representam as juntas rotativas em  $G_M$ , como apresentado na seção 2.3.

Uma representação simplificada dos heligiros da cadeia virtual é conseguida escolhendo um sistema- $C$  com origem na junta esférica  $S$ , cujo elo de suporte está entre as juntas  $p_z$  e  $S$ , com os eixos  $X_C$ ,  $Y_C$  e  $Z_C$  paralelos aos eixos  $X$ ,  $Y$  e  $Z$ , respectivamente (Fig. 25).

O sistema- $C$  pode ter translação em relação ao sistema- $B$  mas não rotação.

Considerando os eixos dos helicóides das juntas na direção positiva dos eixos do sistema- $C$ , tem-se que os helicóides normalizados das juntas virtuais no sistema- $C$  são

$${}^C\hat{\$}_{rx} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; {}^C\hat{\$}_{ry} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; {}^C\hat{\$}_{rz} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; {}^C\hat{\$}_{px} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; {}^C\hat{\$}_{py} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; {}^C\hat{\$}_{pz} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Cabe observar que a cadeia  $PPPS$  representa um sistema cartesiano no espaço 3D.

### 3.3.2 Cadeia virtual $RPPS$

A cadeia  $RPPS$  é formada por uma junta rotativa ( $rz$ ) na direção do eixo  $Z$ , uma junta prismática ( $pz$ ) na direção do eixo  $Z$ , uma junta prismática ( $pr$ ) em uma direção ortogonal ao eixo  $Z$ , aqui denominada radial, e uma junta esférica ( $S$ ), como mostrado na Fig. 28. A cadeia  $RPPS$  perde um grau de liberdade quando a junta esférica está sobre o eixo da junta  $rz$  devido a dependência linear entre os helicóides destas duas juntas, neste caso a cadeia  $RPPS$  não cumpre as condições de uma cadeia virtual.

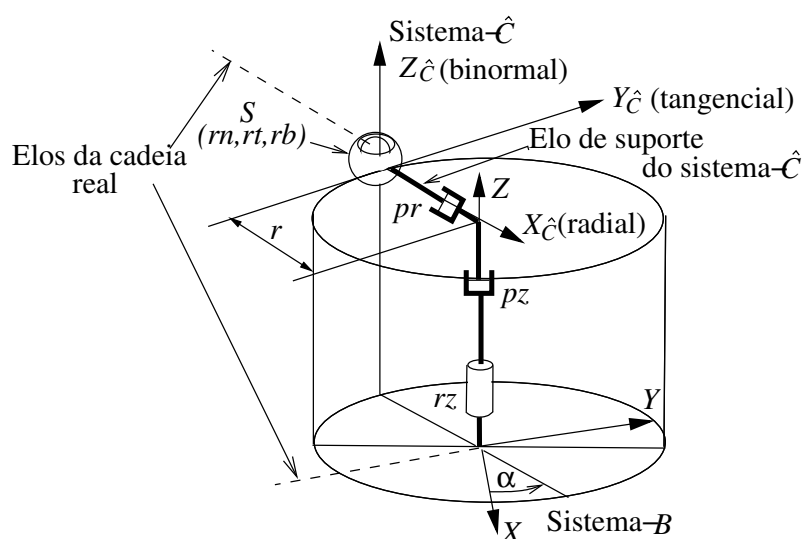


Figura 28: Cadeia virtual  $RPPS$

Nessa cadeia  $RPPS$  as três primeiras juntas ( $rz$ ,  $pz$  e  $pr$ ) realizam movimentos dentro de um cilindro e o movimento de cada uma delas é descrito pelos helicóides  $\$_{rz}$ ,  $\$_{pz}$  e  $\$_{pr}$ , respectivamente. A junta esférica pode ser substituída instantaneamente por três juntas rotativas ortogonais com movimentos nas direções normal ao cilindro ( $rn$ ), tangencial ao cilindro ( $rt$ ) e binormal ao cilindro ( $rb$ ), representadas pelos helicóides  $\$_{rn}$ ,  $\$_{rt}$  e  $\$_{rb}$ , respectivamente.

Esta cadeia virtual começa na junta de ligação  $rz$  (que possibilita o movimento entre um elo da cadeia cinemática real e o primeiro elo virtual) e termina com a junta de ligação esférica  $S$  através da qual ocorre o movimento entre o último elo virtual e um elo da cadeia real.

O digrafo de acoplamento  $G_C$  da cadeia virtual  $RPPS$  está mostrado na Fig. 29 e o digrafo de movimento  $G_M$  da cadeia virtual  $RPPS$  está mostrado na Fig. 30.

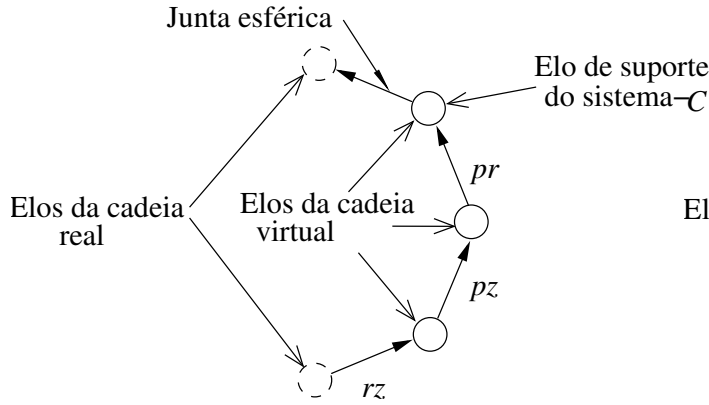


Figura 29: Grafo de acoplamento  $G_C$  da cadeia virtual  $RPPS$

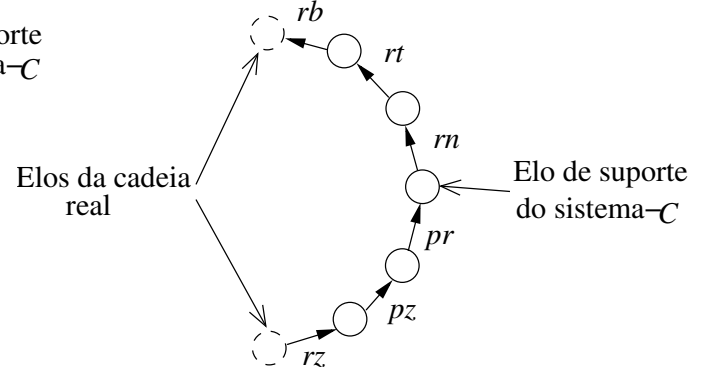


Figura 30: Grafo de movimento  $G_M$  da cadeia virtual  $RPPS$

Uma representação simplificada dos heligiros da cadeia virtual é conseguida escolhendo um sistema- $\hat{C}$  com origem na junta esférica  $S$ , cujo elo de suporte é o elo virtual entre as juntas  $pr$  e  $S$ , com o eixo  $X_{\hat{C}}$  na direção radial (normal) do cilindro, o eixo  $Y_{\hat{C}}$  na direção tangencial ao cilindro e o eixo  $Z_{\hat{C}}$  na direção da binormal ao cilindro, como mostrado na Fig. 28.

Cabe ressaltar que o sistema- $\hat{C}$  pode ter translação em relação ao sistema- $B$  (definida pelos movimentos das juntas  $pz$ ,  $pr$  e  $rz$ ) assim como rotação.

Considerando  $r$  como a distância radial instantânea entre o eixo da junta  $rz$  e a origem do sistema- $\hat{C}$  e os eixos dos helicóides das juntas na direção positiva dos eixos do sistema- $\hat{C}$ , tem-se que os termos  $S$  e  $S_o$  representados no sistema- $P$ , correspondentes a cada junta, são

$$\begin{aligned} \hat{c}S_{rn} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; & \hat{c}S_{rt} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; & \hat{c}S_{rb} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; & \hat{c}S_{pr} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; & \hat{c}S_{pz} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \hat{c}S_{rz} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; & \hat{c}S_{orn} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; & \hat{c}S_{ort} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; & \hat{c}S_{orb} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; & \hat{c}S_{orz} &= \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Portanto, de acordo com a Eq. (2.5) e a Eq. (2.6), a representação dos helicóides normaliza-

dos das juntas virtuais no sistema- $\hat{C}$  resulta:

$$\hat{C}\hat{\$}_{rn} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \hat{C}\hat{\$}_{rt} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \hat{C}\hat{\$}_{rb} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \hat{C}\hat{\$}_{pr} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \hat{C}\hat{\$}_{pz} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \hat{C}\hat{\$}_{rz} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -r \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

A cadeia virtual  $RRPS$  representa um sistema de coordenadas cilíndrico.

### 3.3.3 Cadeia virtual $RRPS$

A cadeia  $RRPS$  é formada por uma junta rotativa na direção  $Z$  ( $rz$ ), uma junta rotativa em uma direção ortogonal ao eixo  $Z$  ( $ro$ ), definida pelo ângulo  $\alpha$  (veja Fig. 31), uma junta prismática na direção radial ( $pr$ ), direção ortogonal ao eixo de  $ro$ , estabelecida através do ângulo  $\beta$  (Fig. 31), e por uma junta esférica  $S$ . Observa-se que a cadeia  $RRPS$  não cumpre as condições de uma cadeia virtual quando a junta esférica está sobre o eixo da junta  $rz$  devido a dependência linear dos helicóides destas juntas nesta configuração.

Nesta cadeia  $RRPS$  as três primeiras juntas  $rz$ ,  $ro$  e  $pr$  realizam movimentos dentro de uma esfera, cuja origem coincide com a origem do sistema- $B$  ( $XYZ$ ) fixo à base, e o movimento de cada uma delas é descrito pelos heligiros  $\$_{rz}$ ,  $\$_{ro}$  e  $\$_{pr}$ , respectivamente. A junta esférica pode ser substituída instantaneamente por três juntas rotativas ortogonais com movimentos na direção normal à esfera ( $rn$ ), tangencial à esfera ( $rt$ ) e binormal à esfera ( $rb$ ), representados pelos heligiros  $\$_{rn}$ ,  $\$_{rt}$  e  $\$_{rb}$ , respectivamente.

Esta cadeia virtual começa na junta de ligação  $rz$  (que possibilita o movimento entre um elo da cadeia cinemática real e o primeiro elo virtual) e termina com a junta de ligação esférica  $S$  através da qual ocorre o movimento entre o último elo virtual e um elo da cadeia real.

O digrafo de acoplamento  $G_C$  da cadeia virtual  $RRPS$  está mostrado na Fig. 32 e o digrafo de movimento  $G_M$  da cadeia virtual  $RRPS$  está mostrado na Fig. 33.

Uma representação simplificada dos heligiros da cadeia virtual é conseguida escolhendo um

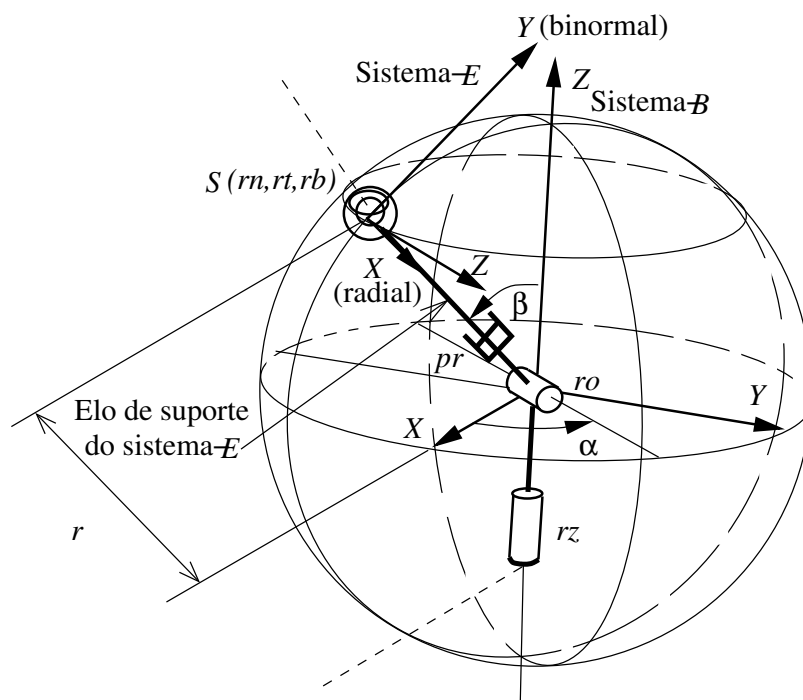


Figura 31: Cadeia virtual  $RRPS$

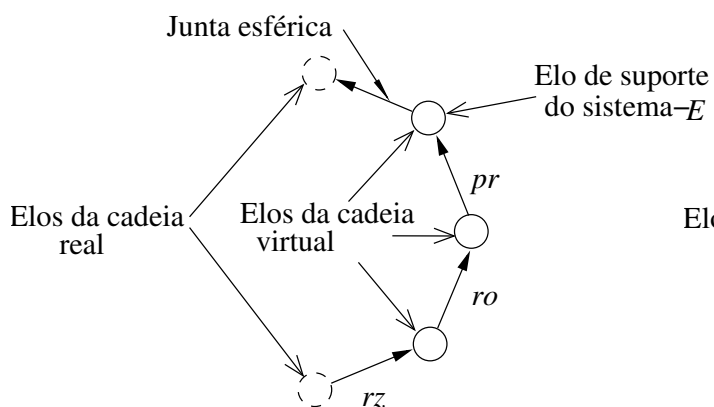


Figura 32: Grafo de acoplamento  $G_C$  da cadeia virtual  $RRPS$

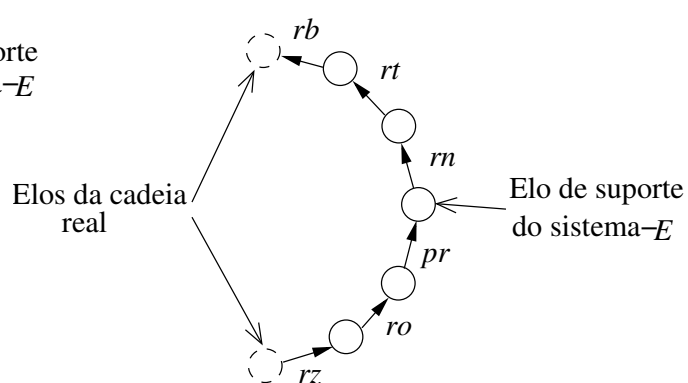


Figura 33: Grafo de movimento  $G_M$  da cadeia virtual  $RRPS$



sistema- $E$  com origem na junta esférica  $S$ , cujo elo de suporte é o elo virtual entre  $pr$  e  $S$ , com o eixo  $X_E$  na direção da normal à esfera (direção radial), o eixo  $Y_E$  na direção da tangente à esfera e o eixo  $Z_E$  na direção da binormal à esfera, como apresentado na Fig. 31.

O sistema- $E$  pode ter translação e rotação em relação ao sistema- $B$ .

Considerando  $r$  como a distância instantânea entre as origens do sistema- $E$  e do sistema- $B$  (distância radial),  $\beta$  como o ângulo instantâneo entre o eixo da junta  $ro$  e a junta prismática  $pr$  e os eixos dos helicóides das juntas na direção positiva dos eixos do sistema- $E$ , tem-se que os termos  $S$  e  $S_o$  representados no sistema- $E$ , correspondentes a cada junta, são

$$\begin{aligned}
 {}^E S_{rn} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; & {}^E S_{rt} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; & {}^E S_{rb} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; & {}^E S_{pr} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; & {}^E S_{ro} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
 {}^E S_{rz} &= \begin{bmatrix} -\cos \beta \\ \sin \beta \\ 0 \end{bmatrix}; & {}^E S_{orn} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; & {}^E S_{ort} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; & {}^E S_{orb} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; & {}^E S_{oro} &= \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 {}^E S_{orz} &= \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

Portanto, de acordo com a Eq. (2.5) e a Eq. (2.6), a representação dos helicóides normalizados das juntas virtuais no sistema- $E$  resulta:

$$\begin{aligned}
 {}^E \hat{\$}_{rn} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; & {}^E \hat{\$}_{rt} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; & {}^E \hat{\$}_{rb} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; & {}^E \hat{\$}_{pr} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; & {}^E \hat{\$}_{ro} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ r \\ 0 \end{bmatrix}; & {}^E \hat{\$}_{rz} &= \begin{bmatrix} -\cos \beta \\ \sin \beta \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ r \sin \beta \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Na tabela 1 são resumidas as cadeias virtuais apresentadas nesta seção.

Espaço Operacional	Sist. de Coord.	Estrutura	Sist. de Ref.
Plano	cartesiano	PPR	$C$
	polar	RPR	$P$
Espacial	cartesiano	PPPS	$C$
	cilíndrico	RPPS	$\hat{C}$
	esférico	RRPS	$E$

Tabela 1: Cadeias virtuais apresentadas nesta seção

As cadeias virtuais são adicionadas a uma cadeia cinemática de forma a obter a cadeia cinemática modificada com uma ou mais malhas fechadas.

Da equação de restrição da cadeia cinemática modificada constroem-se a relação de velocidades entre as juntas desta cadeia.

No capítulo 4 apresentam-se as cadeias cinemáticas modificadas para alguns exemplos.

## 4 *Cadeia Cinemática Modificada*

Neste capítulo define-se a *cadeia cinemática modificada* e mostra-se a obtenção da equação de restrição a partir do digrafo de movimento correspondente. A definição é aplicada a exemplos de robôs seriais e paralelos.

### 4.1 Definição

Nesta tese, a *cadeia cinemática modificada* é definida como a cadeia fechada obtida por meio da adição de uma ou mais cadeias virtuais à cadeia cinemática real.

De acordo com o conceito apresentado no capítulo 3, as cadeias virtuais são utilizadas para obter informações ou introduzir características relativas ao movimento das cadeias cinemáticas. A escolha da cadeia virtual depende das informações que se desejam obter ou introduzir entre os dois elos da cadeia cinemática aos quais a cadeia virtual é conectada.

Considere, por exemplo, a cadeia cinemática do manipulador serial plano  $RRRR$  com quatro juntas rotativas  $(A, B, C, D)$  mostrado na Fig. 34. Os digrafos de acoplamento  $G_C$  e de movimento  $G_M$  desta cadeia cinemática, mostrados na Fig. 35, são iguais pois o manipulador apresenta juntas com apenas um grau de liberdade.

Para obter ou introduzir informações relativas ao movimento do efetuador em relação à base adiciona-se uma cadeia virtual entre a base e o efetuador. Se, por exemplo, essas informações necessitam ser em coordenadas cartesianas, escolhe-se a cadeia virtual  $PPR$ , descrita na seção 3.2.1. A cadeia modificada resultante  $RRRR + PPR$  é mostrada na Fig. 36. Os digrafos  $G_C$  e  $G_M$  desta cadeia modificada são iguais, pois não existem juntas com mais de um grau de liberdade na cadeia modificada, veja a Fig. 37.

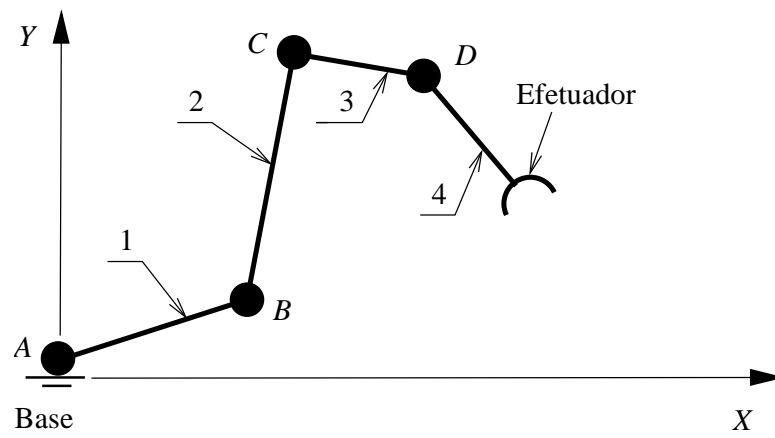


Figura 34: Manipulador serial plano  $RRRR$

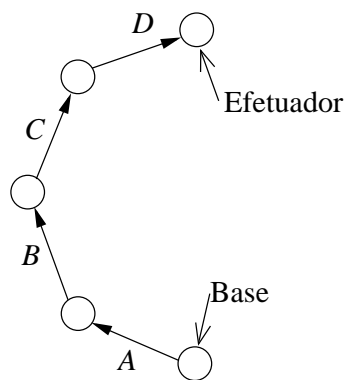


Figura 35: Digrafo  $G_C/G_M$  do manipulador serial plano  $RRRR$

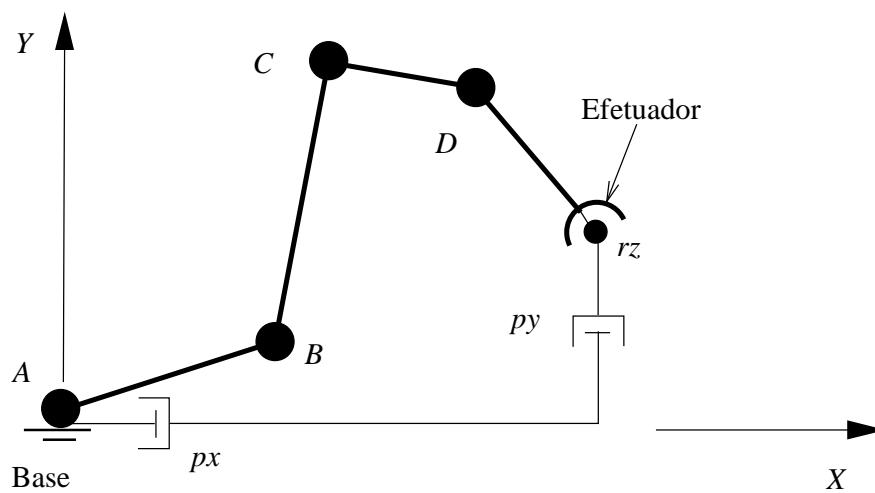


Figura 36: Cadeia modificada  $RRRR + PPR$

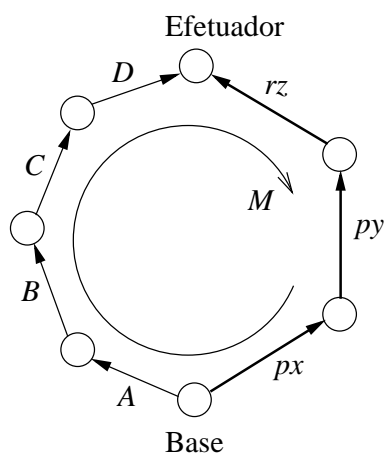


Figura 37: Digrafo  $G_C/G_M$  da cadeia modificada  $RRRR + PPR$

A matriz de helicóides diretos  $D$  e a matriz de malhas  $B$  da cadeia modificada são formadas com base no digrafo de movimento  $G_M$  da Fig. 37. A matriz  $D$  de helicóides diretos da cadeia modificada é

$$D = \begin{bmatrix} \hat{\$}_A & \hat{\$}_B & \hat{\$}_C & \hat{\$}_D & \hat{\$}_{px} & \hat{\$}_{py} & \hat{\$}_{rz} \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

onde todos os helicóides normalizados da cadeia cinemática modificada devem estar representados em um mesmo sistema de coordenadas.

Com base no sentido da malha  $M$  do digrafo  $G_M$  a matriz de malhas  $B$  é

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

e, desta forma a matriz diagonal  $B_1$  definida na seção 2.3 resulta

$$B_1 = \text{diag} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \right\} \quad (4.3)$$

Portanto, através da Eq. (2.20), a matriz de rede da cadeia modificada  $N$  é

$$N = \begin{bmatrix} \hat{\$}_A & \hat{\$}_B & \hat{\$}_C & \hat{\$}_D & -\hat{\$}_{px} & -\hat{\$}_{py} & -\hat{\$}_{rz} \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

O vetor das magnitudes dos heligiros  $\Psi$  é formado pela magnitude da velocidade de cada junta da cadeia modificada

$$\Psi = \begin{bmatrix} \Psi_A & \Psi_B & \Psi_C & \Psi_D & \Psi_{px} & \Psi_{py} & \Psi_{rz} \end{bmatrix}^T \quad (4.5)$$

Assim, de acordo com a Eq. (2.26), a equação de restrição da cadeia modificada  $RRRR + PPR$  é

$$\begin{bmatrix} \hat{\$}_A & \hat{\$}_B & \hat{\$}_C & \hat{\$}_D & -\hat{\$}_{px} & -\hat{\$}_{py} & -\hat{\$}_{rz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_A \\ \Psi_B \\ \Psi_C \\ \Psi_D \\ \Psi_{px} \\ \Psi_{py} \\ \Psi_{rz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Esta equação será utilizada no capítulo 5 no cálculo da cinemática diferencial do manipu-

lador  $RRRR$  empregando cadeias virtuais.

Seja o elo 3 do  $RRRR$  o elo em perigo de colisão com o obstáculo. Para obter ou introduzir informações relativas ao movimento do elo 3 do manipulador  $RRRR$  mostrado na Fig. 34 em relação a um obstáculo fixo à base (Fig. 38) adiciona-se uma cadeia virtual entre o elo 3 e o obstáculo.

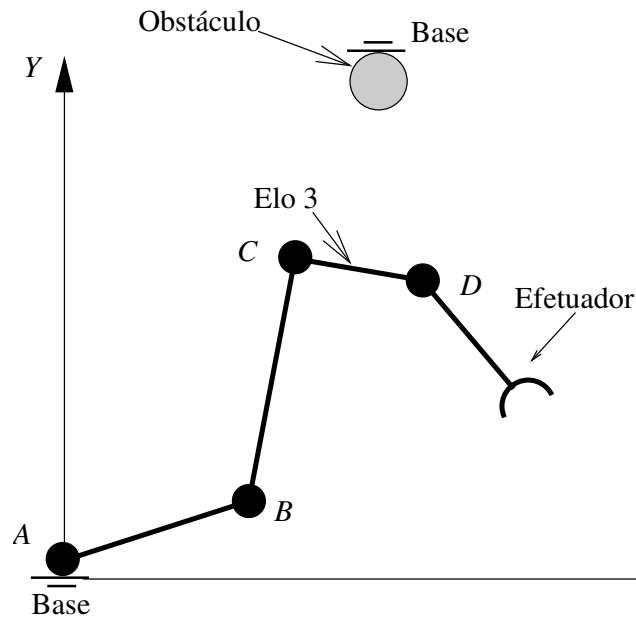


Figura 38: Manipulador redundante  $RRRR$  no espaço limitado por um obstáculo

Se, por exemplo, for mais conveniente que essas informações estejam em coordenadas polares, escolhe-se a cadeia virtual  $RPR$  descrita na seção 3.2.2. A cadeia modificada resultante é mostrada na Fig. 39 e o grafo  $G_M/G_C$  correspondente é mostrado na Fig. 40.

A partir do digrafo de movimento  $G_M$  da Fig. 40 formam-se a matriz de helicóides diretos  $D$  e a matriz de malhas  $B$  da cadeia modificada. A matriz  $D$  de helicóides diretos da cadeia modificada é

$$D = \left[ \begin{array}{ccccccc} \hat{\$}_A & \hat{\$}_B & \hat{\$}_C & \hat{\$}_D & \hat{\$}_{rz1} & \hat{\$}_{pr} & \hat{\$}_{rz2} \end{array} \right] \quad (4.7)$$

Com base no sentido da malha  $M$  do digrafo  $G_M$  é obtida a matriz de malhas  $B$  como

$$B = \left[ \begin{array}{ccccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{array} \right] \quad (4.8)$$

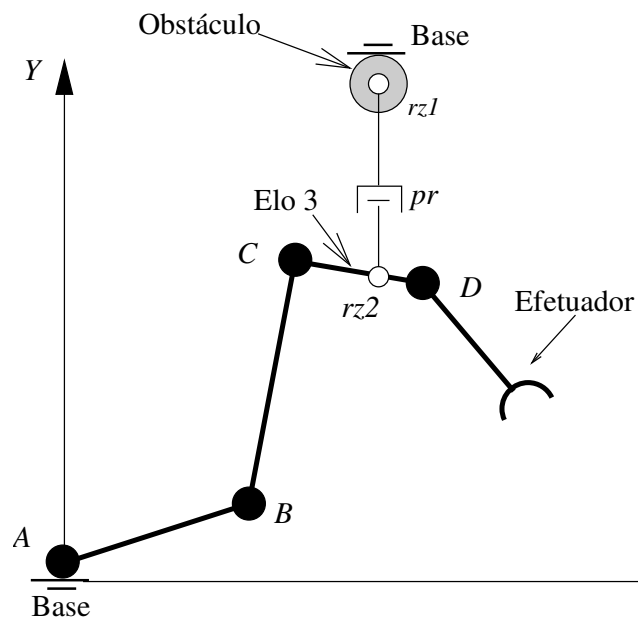


Figura 39: Cadeia modificada  $RRRR + PPR$  mais a cadeia  $RPR$  para desviar o obstáculo do elo 3

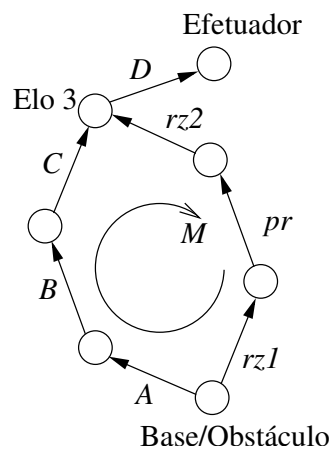


Figura 40: Grafo  $G_C/G_M$  da cadeia modificada  $RRRR + PPR$  mais a cadeia virtual  $RPR$  para desviar o obstáculo do elo 3



e, assim a matriz diagonal  $B_1$  definida na seção 2.3 é

$$B_1 = \text{diag} \left\{ \left[ \begin{array}{ccccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{array} \right] \right\} \quad (4.9)$$

A matriz de rede da cadeia modificada  $N$  é obtida através da Eq. (2.20) como

$$N = \left[ \begin{array}{ccccccc} \hat{\$}_A & \hat{\$}_B & \hat{\$}_C & \vec{0} & -\hat{\$}_{rz1} & -\hat{\$}_{pr} & -\hat{\$}_{rz2} \end{array} \right] \quad (4.10)$$

onde  $\vec{0}$  é um vetor nulo de dimensão  $3 \times 1$ .

O vetor das magnitudes dos heligiros  $\Psi$  é formado pela magnitude da velocidade de cada junta da cadeia modificada

$$\Psi = \left[ \begin{array}{ccccccc} \Psi_A & \Psi_B & \Psi_C & \Psi_D & \Psi_{rz1} & \Psi_{pr} & \Psi_{rz2} \end{array} \right]^T \quad (4.11)$$

A equação de restrição da cadeia modificada  $RRRR + PPR$  obtém-se a partir da Eq. (2.26)

$$\left[ \begin{array}{ccccccc} \hat{\$}_A & \hat{\$}_B & \hat{\$}_C & \vec{0} & -\hat{\$}_{rz1} & -\hat{\$}_{pr} & -\hat{\$}_{rz2} \end{array} \right] \begin{bmatrix} \Psi_A \\ \Psi_B \\ \Psi_C \\ \Psi_D \\ \Psi_{rz1} \\ \Psi_{pr} \\ \Psi_{rz2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

No capítulo 5 utiliza-se esta equação para calcular a cinemática diferencial do manipulador  $RRRR$  empregando cadeias virtuais.

A obtenção de informações do movimento do efetuador em relação à base a partir do movimento das juntas do manipulador, conhecida como *cinemática direta*, é um problema comum em manipuladores seriais e paralelos. Da mesma forma é comum o problema da *cinemática inversa* em que um movimento é imposto ao efetuador, em relação à base, e deseja-se determinar os movimentos das juntas do manipulador (serial ou paralelo).

Apresentam-se a seguir alguns exemplos de cadeias cinemáticas modificadas aplicadas a robôs seriais e paralelos.

## 4.2 Manipulador PUMA com uma cadeia virtual *RPPS*

Neste exemplo discute-se a cadeia modificada para a cinemática direta e a cinemática inversa de um manipulador serial. Para tanto a cadeia virtual é adicionada entre a base do manipulador e um ponto de referência do seu efetuador.

Considera-se que na cinemática direta deseja-se obter a velocidade do efetuador em coordenadas cilíndricas e que na cinemática inversa deseja-se fornecer a velocidade do efetuador em coordenadas cilíndricas. Por isso escolhe-se uma cadeia virtual *RPPS*, descrita na seção 3.3.2.

Se, para a realização da tarefa, fosse mais conveniente tratar a velocidade do efetuador em coordenadas cartesianas, escolher-se-ia a cadeia virtual *PPPS* descrita na seção 3.3.1. Caso a velocidade do efetuador fosse tratada diretamente em coordenadas esféricas, a cadeia virtual escolhida seria a *RRPS* descrita na seção 3.3.3.

Deseja-se destacar que o procedimento independe da estrutura da cadeia virtual que, portanto, pode ser escolhida de acordo com a conveniência.

O manipulador PUMA e suas variantes tem diversos usos em tarefas industriais. A configuração do PUMA é uma das mais encontradas e por isso foi escolhida como um exemplo da aplicação da cinemática diferencial de manipuladores utilizando cadeias virtuais.

O PUMA é um manipulador serial espacial com seis graus de liberdade. Todas suas juntas são rotativas. Suas três últimas juntas formam um *punho esférico* e se intersectam em um ponto denominado centro do punho esférico. Nesta tese considera-se que o ponto de referência do efetuador é localizado no centro do punho esférico.

Os ângulos de posição  $\theta_i$  ( $i = A, B, C, D, E$  e  $F$ ) das juntas rotativas do PUMA são mostrados na Fig. 41. Os heligiros  $\$i$  que representam os movimentos das juntas são alinhados ao eixo das juntas e simbolizados por meio de setas cônicas na figura.

O digrafo de acoplamento  $G_C$  e de movimento  $G_M$  da cadeia cinemática do PUMA são iguais uma vez que todas as juntas do manipulador possuem apenas um grau de liberdade. O digrafo  $G_C/G_M$  da cadeia cinemática do PUMA é mostrado na Fig. 42.

Considerando a arquitetura do manipulador PUMA e visando a simplicidade nos termos dos helicóides normalizados que representam as suas juntas, alguns autores (HUNT, 1987)(MAR-

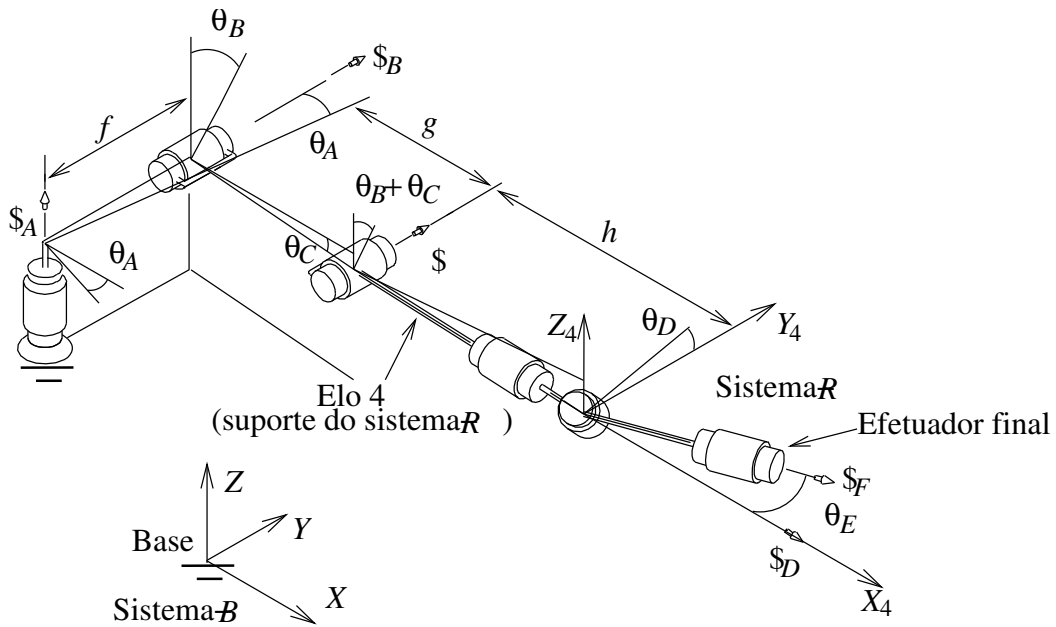


Figura 41: O manipulador PUMA

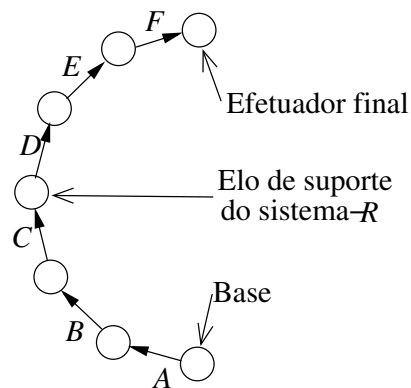


Figura 42: Grafo  $G_C/G_M$  da cadeia cinemática do PUMA

TINS; GUENTHER, 2003) usam um sistema de coordenadas fixo ao elo 4 no centro do punho esférico para representar estes helicóides, ver Fig. 42.

Os helicóides normalizados correspondentes as juntas do PUMA podem ser calculados a partir de uma posição de referência para o manipulador e de um sistema de coordenadas fixo a cada elo, a saber  $1, 2, \dots, 6$ , (o elo 1 corresponde à base). Uma posição de referência pode ser escolhida arbitrariamente, porém usualmente é escolhida uma posição onde, se possível, os eixos das juntas do manipulador sejam paralelos ou ortogonais. Uma posição de referência para o PUMA e os sistemas de coordenadas  $1, 2, \dots, 6$  fixos aos respectivos elos são mostrados na Fig. 43 onde todos os ângulos das juntas ( $\theta_i$ ) são nulos e os sistemas de coordenadas são paralelos.

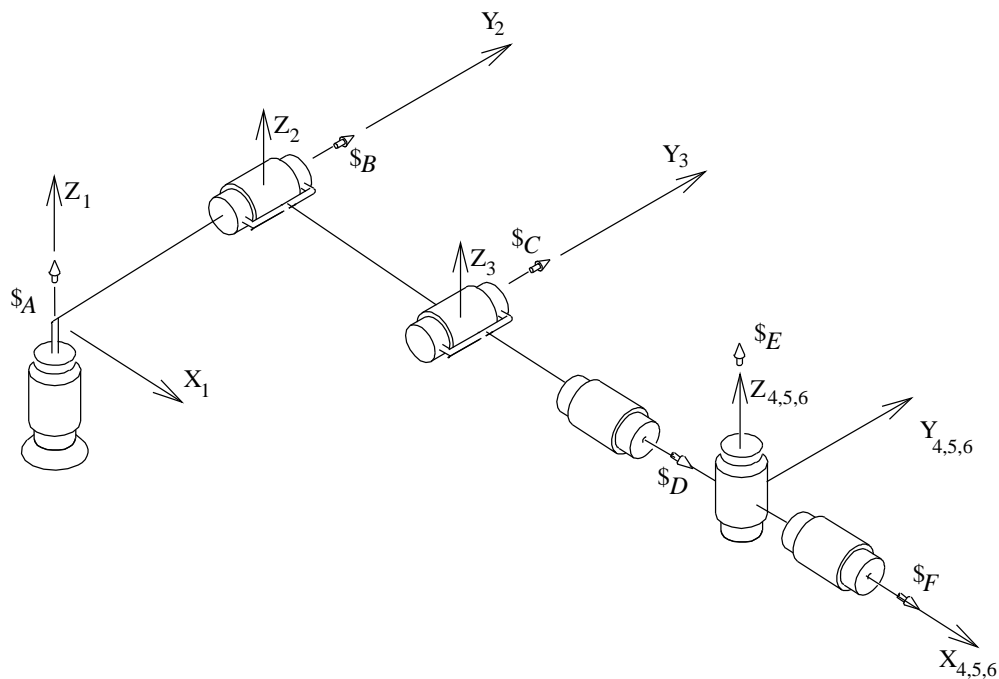


Figura 43: Posição de referência do manipulador PUMA

Os helicóides normalizados das juntas  $A, B, C, D, E$  e  $F$  são identificados facilmente nos

seus respectivos sistemas de coordenadas 1, 2,  $\dots$ , 6, de acordo com a Eq. (2.5), como

$${}^1\hat{\$}_A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; {}^2\hat{\$}_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; {}^3\hat{\$}_C = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; {}^4\hat{\$}_D = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; {}^5\hat{\$}_E = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; {}^6\hat{\$}_F = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

Considerando os sistemas de coordenadas da Fig. 43, as matrizes de rotação  ${}^{i-1}R_i$  são

$${}^1R_2 = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; {}^2R_3 = \begin{bmatrix} c\theta_2 & 0 & s\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\theta_2 & 0 & c\theta_2 \end{bmatrix}; {}^3R_4 = \begin{bmatrix} c\theta_3 & 0 & s\theta_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\theta_3 & 0 & c\theta_3 \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

$${}^4R_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta_4 & -s\theta_4 \\ 0 & s\theta_4 & c\theta_4 \end{bmatrix}; {}^5R_6 = \begin{bmatrix} c\theta_5 & -s\theta_5 & 0 \\ s\theta_5 & c\theta_5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e os vetores entre as origens de sistemas adjacentes  ${}^{i-1}p_i$  são

$${}^1p_2 = \begin{bmatrix} -fs\theta_1 \\ fc\theta_1 \\ 0 \end{bmatrix}; {}^2p_3 = \begin{bmatrix} gc\theta_2 \\ 0 \\ -gs\theta_2 \end{bmatrix}; {}^3p_4 = \begin{bmatrix} hc\theta_3 \\ 0 \\ -hs\theta_3 \end{bmatrix}; {}^4p_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; {}^5p_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

onde,  $s_i = \sin(\theta_i)$ ,  $c_i = \cos(\theta_i)$  e as letras  $f$ ,  $g$  e  $h$  são as distâncias mostradas na Fig. 41.

Os helicóides normalizados, correspondentes as juntas do PUMA, representados no sistema de referência fixo no elo 4 são obtidos utilizando a matriz de transformação de coordenadas de

helicóides  $T$  (ver Eq. (2.46) e Eq. (2.47)) por meio de

$$\begin{aligned}
 {}^4\hat{\mathcal{S}}_A &= {}^4T_3 {}^3T_2 {}^2T_1 {}^1\hat{\mathcal{S}}_A \\
 {}^4\hat{\mathcal{S}}_B &= {}^4T_3 {}^3T_2 {}^2\hat{\mathcal{S}}_B \\
 {}^4\hat{\mathcal{S}}_C &= {}^4T_3 {}^3\hat{\mathcal{S}}_C \\
 {}^4\hat{\mathcal{S}}_E &= {}^4T_5 {}^5\hat{\mathcal{S}}_E \\
 {}^4\hat{\mathcal{S}}_F &= {}^4T_5 {}^5T_6 {}^6\hat{\mathcal{S}}_F
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

O sistema de referência fixo ao elo 4 é chamado sistema- $R$  (Fig. 41), assim os helicóides normalizados correspondentes as juntas do PUMA, representados no sistema- $R$  são (HUNT, 1987)

$${}^R\hat{\mathcal{S}}_A = \begin{bmatrix} -s_{BC} \\ 0 \\ c_{BC} \\ -f c_{BC} \\ x_{AD} \\ -f s_{BC} \end{bmatrix}; \quad {}^R\hat{\mathcal{S}}_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ g s_C \\ 0 \\ x'_{DA} \end{bmatrix}; \quad {}^R\hat{\mathcal{S}}_C = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -h \end{bmatrix}; \quad {}^R\hat{\mathcal{S}}_D = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad {}^R\hat{\mathcal{S}}_E = \begin{bmatrix} 0 \\ -s_D \\ c_D \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad {}^R\hat{\mathcal{S}}_F = \begin{bmatrix} c_E \\ c_D s_E \\ s_D s_E \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.17}$$

onde  $s_{ik} = \sin(\theta_i + \theta_k)$ ,  $c_{ik} = \cos(\theta_i + \theta_k)$  etc.,  $x_{AD} = g c_B + h c_{BC}$  e  $x'_{DA} = -(g c_C + h)$ .

Adicionando a cadeia virtual  $RPPS$  à cadeia cinemática do manipulador PUMA entre a base e o efetuador obtém-se a cadeia modificada para este caso.

O sistema  $XYZ$  da base, chamado sistema- $B$ , é escolhido convenientemente com a tarefa a ser desenvolvida e, para este exemplo, está localizado sobre o eixo do cilindro definido pelo sistema  $RPPS$ .

A cadeia cinemática modificada PUMA +  $RPPS$  está mostrada na Fig. 44, seu digrafo de acoplamento está apresentado na Fig. 45 e seu digrafo de movimento na Fig. 46.

Cabe destacar que para esta cadeia modificada, tanto os arcos correspondentes aos elos reais do PUMA ( $A, B, C, D, E$  e  $F$ ) como os arcos correspondentes aos elos virtuais ( $rz, pz, pr, rn, rt$  e  $rb$ ) no digrafo de movimento, representam a velocidade do efetuador em relação à base.

A matriz de helicóides diretos  $D$  e a matriz de malhas  $B$  da cadeia modificada são formadas com base no digrafo de movimento  $G_M$  da Fig. 46. Lembrando que todos os heligiros da cadeia

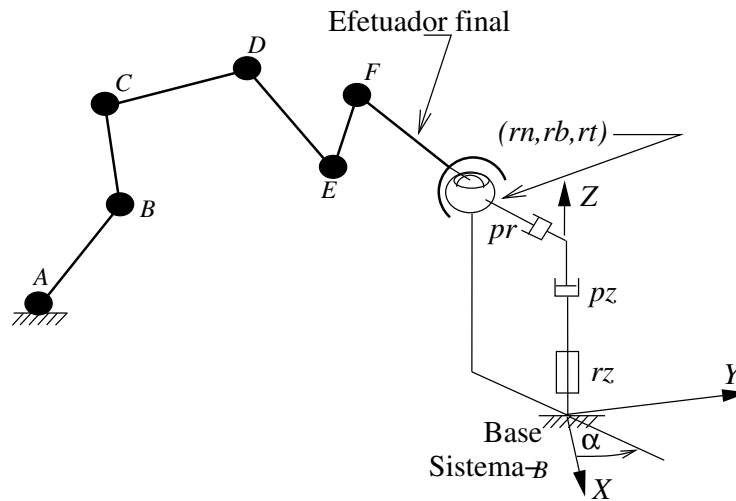


Figura 44: Esquema da cadeia cinemática modificada do manipulador PUMA + RPPS

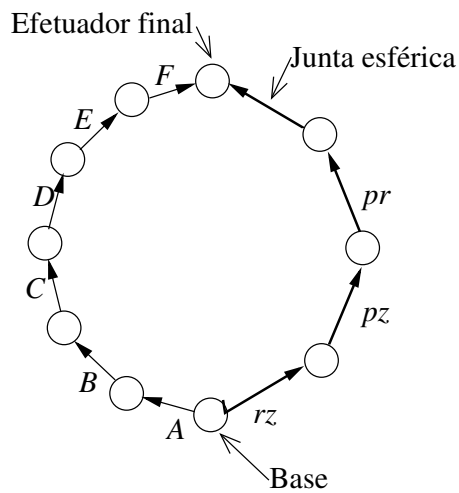


Figura 45: Gráfico de acoplamento  $G_C$  da cadeia modificada do PUMA + RPPS

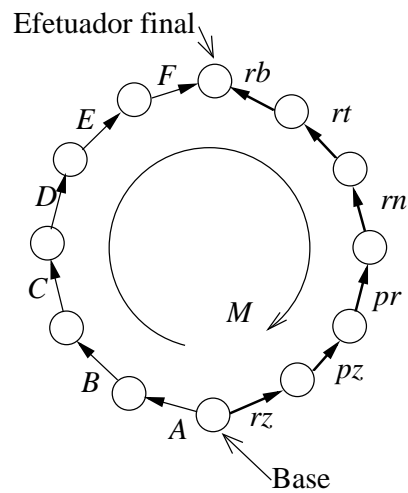


Figura 46: Gráfico de movimento  $G_M$  da cadeia modificada do PUMA + RPPS





Esta equação será utilizada no capítulo 5, no cálculo da cinemática diferencial do manipulador PUMA empregando cadeias virtuais.

Cabe observar que na Eq. (4.17) os helicóides normalizados das juntas do PUMA estão representados no sistema- $R$  fixo no centro do punho localizado no elo 4 do manipulador. Os helicóides normalizados das juntas virtuais dados pela Eq. (3.9) estão representados no sistema- $\hat{C}$  (ver Fig. 28). Como a equação de restrição deve ser escrita com os heligiros definidos em um mesmo sistema de coordenadas, é necessário representar os heligiros em um sistema de coordenadas conveniente.

Escolhendo o sistema- $R$  para representar todos heligiros, deve-se transformar os heligiros correspondentes à cadeia virtual para o sistema- $R$  através da matriz de transformação de helicóides  ${}^R T_{\hat{C}}$ , lembrando que um helicóide normalizado dado nos sistema- $\hat{C}$  ( $\hat{C}\hat{\$}$ ) é dado no sistema- $R$  através de

$${}^R \hat{\$} = {}^R T_{\hat{C}} \hat{C} \hat{\$} \quad (4.24)$$

Como a cadeia RPPS é adicionada no centro do punho, as origens dos sistemas  $\hat{C}$  e  $R$  coincidem no ponto de referência do efetuador, portanto não existe translação entre estes sistemas e a matriz  ${}^R T_{\hat{C}}$  é expressa com base na Eq. (2.39) como

$${}^R T_{\hat{C}} = \begin{bmatrix} {}^R R_{\hat{C}(3 \times 3)} & [0]_{(3 \times 3)} \\ [0]_{(3 \times 3)} & {}^R R_{\hat{C}(3 \times 3)} \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

onde  ${}^R R_{\hat{C}}$  é a matriz de rotação do sistema  $\hat{C}$  para o sistema  $R$ . A matriz  ${}^R R_{\hat{C}}$  pode ser expressa através da matriz de rotação entre os sistemas  $\hat{C}$  e  $B$  e da matriz de rotação entre os sistemas  $B$  e  $R$

$${}^R R_{\hat{C}} = {}^R R_B {}^B R_{\hat{C}} \quad (4.26)$$

sendo (HUNT, 1987)

$${}^R R_B = {}^4 R_1 = {}^4 R_3 {}^3 R_2 {}^2 R_1 = \begin{bmatrix} c_A c_{BC} & s_A c_{BC} & -s_{BC} \\ -s_A & c_A & 0 \\ c_A s_{BC} & s_A s_{BC} & c_{BC} \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

e da Fig. 28 obtém-se a matriz de rotação

$${}^B R_{\hat{C}} = \begin{bmatrix} c_\alpha & s_\alpha & 0 \\ -s_\alpha & c_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

onde  $\alpha$  é o ângulo de rotação entre os sistema- $B$  e o sistema- $\hat{C}$ .

Escolhendo o sistema- $\hat{C}$  para representar todos os heligiros, a matriz de transformação de helicóides do sistema- $R$  para o sistema- $\hat{C}$  pode ser obtida por meio da Eq. (2.47).

$${}^{\hat{C}} T_R = [{}^R T_{\hat{C}}]^T \quad (4.29)$$

Assim, todos os heligiros da cadeia modificada podem ser representados no sistema- $\hat{C}$  ou no sistema- $R$ .

### 4.3 Manipulador paralelo 3RRR com uma cadeia virtual RPR

O manipulador paralelo plano 3RRR descrito na seção 2.3 está mostrado na Fig. 12, repetida na Fig. 47 por conveniência.

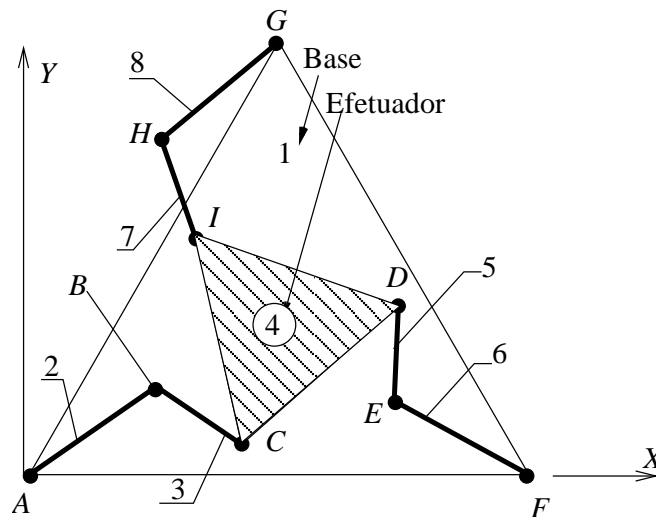


Figura 47: Manipulador paralelo 3RRR no plano  $XY$

Considerando que o interesse é impor ou monitorar movimentos entre a base e o efetuador (plataforma móvel) diretamente em coordenadas polares, a cadeia virtual  $RPR$ , descrita na seção 3.2.2, é adicionada entre o ponto de referência do efetuador e um ponto da base, escolhido convenientemente com a tarefa a ser desenvolvida.

Se a obtenção das informações ou a introdução das características ao movimento do efetuador fosse desejada diretamente em coordenadas cartesianas, seria escolhida a cadeia virtual  $PPR$ , descrita na seção 3.2.1.

Deseja-se destacar que o procedimento independe da estrutura da cadeia virtual, a qual pode ser escolhida de acordo com a conveniência.

A cadeia cinemática modificada  $3RRR + RPR$  é mostrada na Fig. 48 e seu digrafo de movimento correspondente é obtido pela adição do digrafo de movimento da cadeia virtual  $RPR$  (veja Fig. 24) ao digrafo de movimento da cadeia cinemática  $3RRR$  (veja Fig. 14). O digrafo de movimento da cadeia cinemática modificada está apresentado na Fig. 49

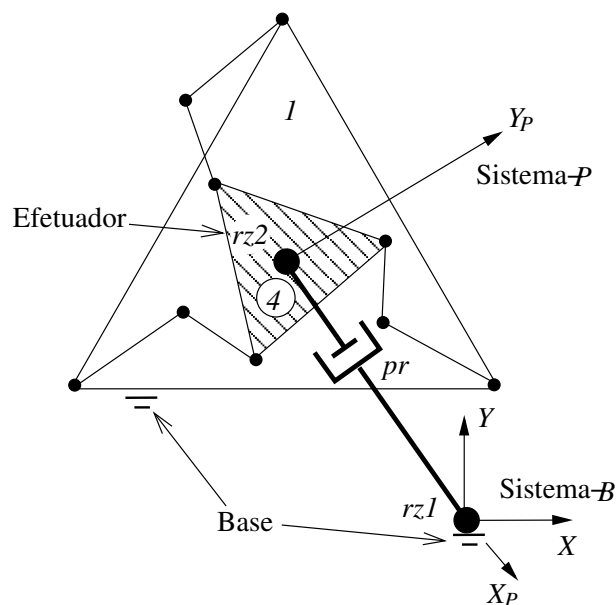
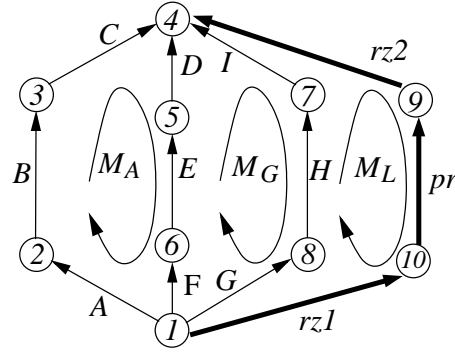


Figura 48: Cadeia cinemática modificada do manipulador paralelo  $3RRR + RPR$

Considerando todos os heligiros da cadeia cinemática modificada (arcos de  $G_M$ ) representados em um mesmo sistema de coordenadas a matriz de helicóides diretos  $D$  da cadeia modificada

Figura 49: Grafo de movimento  $G_M$  da cadeia modificada 3RRR + RPR

é

$$D = \left[ \hat{\$}_A \quad \hat{\$}_B \quad \hat{\$}_C \quad \hat{\$}_D \quad \hat{\$}_E \quad \hat{\$}_F \quad \hat{\$}_G \quad \hat{\$}_H \quad \hat{\$}_I \quad \hat{\$}_{rz1} \quad \hat{\$}_{pr} \quad \hat{\$}_{rz2} \right] \quad (4.30)$$

O digrafo de movimento tem três malhas fechadas ( $M_A$ ,  $M_G$  e  $M_L$ ), desta forma, considerando o sentido escolhido para as malhas fechadas, a matriz de malhas  $B$  resulta

$$B = \begin{bmatrix} A & B & C & D & E & F & G & H & I & rz1 & pr & rz2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} M_A \\ M_G \\ M_L \end{matrix} \quad (4.31)$$

e, desta forma, as matrizes diagonais  $B_i$  definidas na seção 2.3 são

$$\begin{aligned} B_1 &= \text{diag} \left\{ \left[ 1 \quad 1 \quad 1 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right] \right\} \\ B_2 &= \text{diag} \left\{ \left[ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right] \right\} \\ B_3 &= \text{diag} \left\{ \left[ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.32)$$

A matriz de rede  $N$  da cadeia modificada, calculada através da Eq. (2.20), é

$$N = \begin{bmatrix} \hat{\$}_A & \hat{\$}_B & \hat{\$}_C & -\hat{\$}_D & -\hat{\$}_E & -\hat{\$}_F & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} \\ \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \hat{\$}_D & \hat{\$}_E & \hat{\$}_F & -\hat{\$}_G & -\hat{\$}_H & -\hat{\$}_I & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} \\ \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \hat{\$}_G & \hat{\$}_H & \hat{\$}_I & -\hat{\$}_{rz1} & -\hat{\$}_{pr} & -\hat{\$}_{rz2} \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

onde  $\vec{0}$  é um vetor nulo de dimensão  $3 \times 1$ .

O vetor das magnitudes dos heligios  $\Psi$  é formado pela magnitude da velocidade de cada junta da cadeia modificada, ou seja

$$\Psi = \left[ \Psi_A \quad \Psi_B \quad \Psi_C \quad \Psi_D \quad \Psi_E \quad \Psi_F \quad \Psi_G \quad \Psi_H \quad \Psi_I \quad \Psi_{rz1} \quad \Psi_{pr} \quad \Psi_{rz2} \right]^T \quad (4.34)$$

Assim, de acordo com a Eq. (2.18), a equação de restrição da cadeia modificada 3RRR + RPR é

$$\begin{bmatrix} \hat{\$}_A \hat{\$}_B \hat{\$}_C - \hat{\$}_D - \hat{\$}_E - \hat{\$}_F & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} \\ \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \hat{\$}_D & \hat{\$}_E & \hat{\$}_F & -\hat{\$}_G - \hat{\$}_H - \hat{\$}_I & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} \\ \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \hat{\$}_G & \hat{\$}_H & \hat{\$}_I & -\hat{\$}_{rz1} - \hat{\$}_{pr} - \hat{\$}_{rz2} & \vec{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_A \\ \Psi_B \\ \Psi_C \\ \Psi_D \\ \Psi_E \\ \Psi_F \\ \Psi_G \\ \Psi_H \\ \Psi_I \\ \Psi_{rz1} \\ \Psi_{pr} \\ \Psi_{rz2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \\ \vec{0} \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

onde  $\vec{0}$  é um vetor nulo de dimensão  $3 \times 1$ .

Esta equação será utilizada no capítulo 5 para calcular a cinemática diferencial do manipulador 3RRR empregando cadeias virtuais.

O desenvolvimento apresentado nesta seção é geral e pode ser aplicado a manipuladores paralelos com movimentos no espaço tridimensional sem nenhuma dificuldade adicional. Esta afirmação é demonstrada no exemplo da seção 4.4.

## 4.4 Manipulador paralelo 3PPSR com uma cadeia virtual PPS

O manipulador paralelo 3PPSR é composto por um efetuador (plataforma móvel), uma base (plataforma fixa) e três pernas (cadeias cinemáticas seriais), como mostra a Fig. 50 (TSAI; TAHMASEBI, 1993).

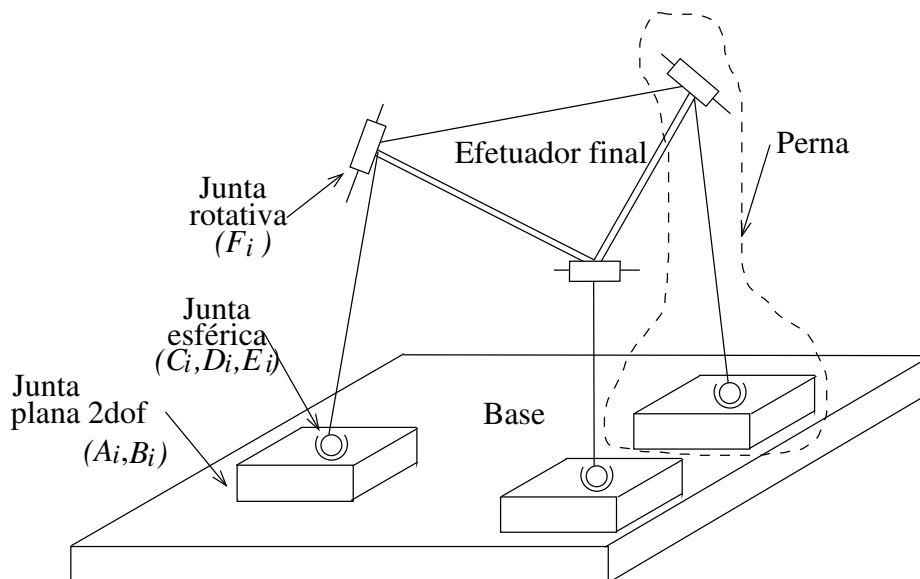


Figura 50: Manipulador paralelo 3PPSR

As pernas do manipulador paralelo 3PPSR ligam o efetuador com a base, veja a Fig. 51. Cada perna  $i$  ( $i = 1, 2$  e  $3$ ) do manipulador contém uma junta rotativa  $F_i$ , um atuador plano de dois graus de liberdade de translação ortogonais, que pode ser representado por duas juntas prismáticas ortogonais  $A_i$  e  $B_i$ , e uma junta esférica, aqui representada instantaneamente por três juntas rotativas ortogonais  $C_i$ ,  $D_i$  e  $E_i$ .

Cada perna é conectada ao efetuador através da junta rotativa  $F_i$  e à base por meio da junta planar  $A_i B_i$ . O movimento do manipulador é obtido através do movimento dos atuadores prismáticos  $A_i$  e  $B_i$ . Os movimentos das juntas do manipulador paralelo  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_i$ ,  $D_i$ ,  $E_i$  e  $F_i$  são representadas, respectivamente pelos heligios  $\$A_i$ ,  $\$B_i$ ,  $\$C_i$ ,  $\$D_i$ ,  $\$E_i$  e  $\$F_i$ .

O digrafo de acoplamento  $G_C$  e o digrafo de movimento  $G_M$  da cadeia cinemática do

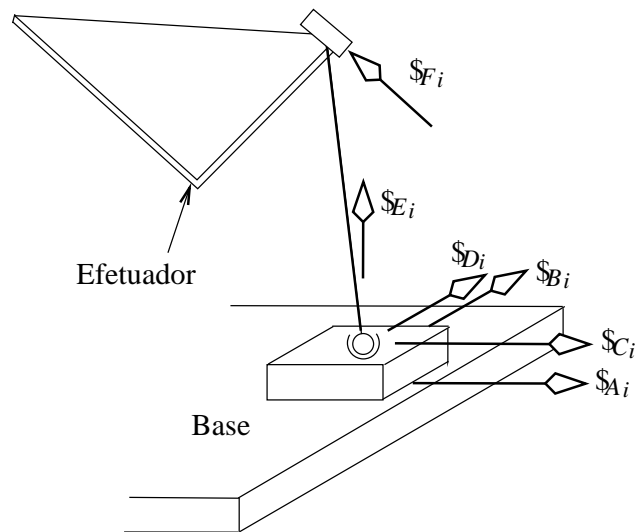


Figura 51: Perna do manipulador paralelo 3PPSR

3PPSR da Fig. 50 são apresentados na Fig. 52 e Fig. 53.

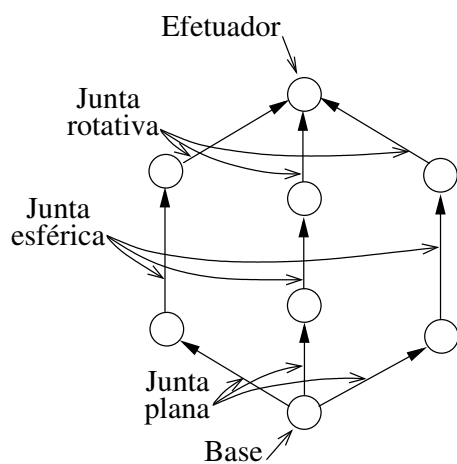


Figura 52: Grafo de acoplamento  $G_C$  do 3PPSR

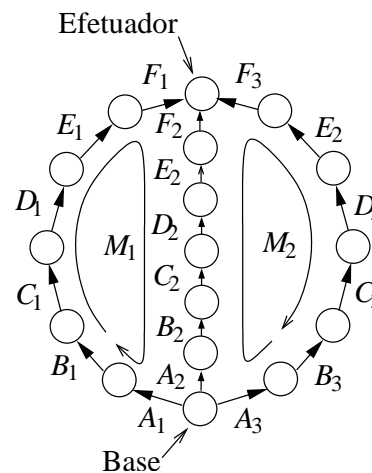


Figura 53: Grafo de movimento  $G_M$  do 3PPSR

Considere que neste exemplo a obtenção das informações ou a introdução das características relativas ao movimento do efetuador é desejada diretamente em coordenadas cartesianas. Assim, a cadeia virtual PPS, descrita na seção 3.3.1, é adicionada entre a base e o ponto de referência do efetuador ou plataforma móvel.

Se a obtenção das informações ou a introdução das características relativas ao movimento do

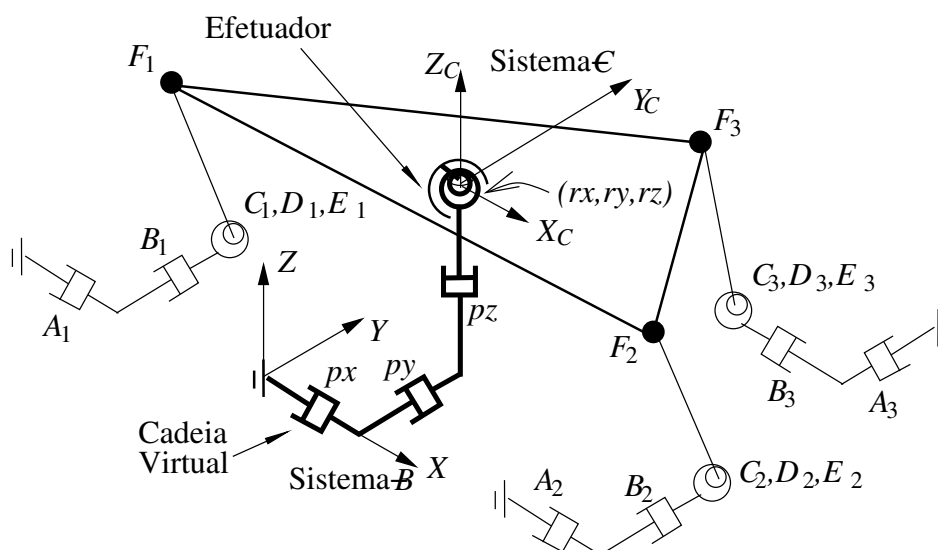


Figura 54: Cadeia cinemática modificada do manipulador paralelo 3PPSR + PPS

efetuador fosse desejada diretamente em coordenadas cilíndricas, a cadeia virtual utilizada seria uma cadeia *RPPS*, descrita na seção 3.3.2, e se as informações ou características do movimento do efetuador fossem desejadas diretamente em coordenadas esféricas, a cadeia virtual utilizada seria uma cadeia *RRPS*, descrita na seção 3.3.3.

Destaca-se mais uma vez que o procedimento independe da estrutura da cadeia virtual que, portanto, pode ser escolhida de acordo com a conveniência.

A cadeia cinemática modificada 3PPSR + PPS é mostrada na Fig. 54 onde cada perna é representada por duas juntas prismáticas ortogonais e uma junta esférica.

O digrafo de acoplamento correspondente à cadeia modificada é obtido pela adição do digrafo de acoplamento da cadeia virtual PPS (veja Fig. 26) ao digrafo de acoplamento da cadeia cinemática 3PPSR (veja Fig. 52) e está apresentado na Fig. 55.

O digrafo de movimento correspondente à cadeia modificada é obtido pela adição do digrafo de movimento da cadeia virtual PPS (veja Fig. 27) ao digrafo de movimento da cadeia cinemática 3PPSR (veja Fig. 53) e está apresentado na Fig. 56.

Considerando todos os heligiros da cadeia cinemática modificada (arestas de  $G_M$ ) representados em um mesmo sistema de coordenadas a matriz de helicóides diretos  $D$  da cadeia



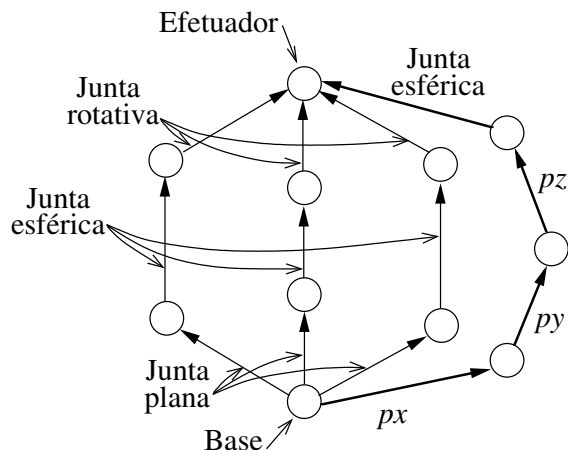


Figura 55: Grafo de acoplamento  $G_C$  da cadeia modificada 3PPSR + PPRS

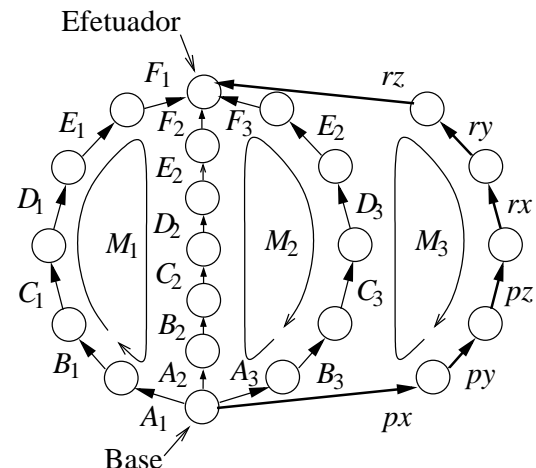


Figura 56: Grafo de movimento  $G_M$  da cadeia modificada 3PPSR + PPRS

modificada é

$$D = \left[ \hat{\$}_{A_1} \hat{\$}_{B_1} \hat{\$}_{C_1} \hat{\$}_{D_1} \hat{\$}_{E_1} \hat{\$}_{F_1} \hat{\$}_{A_2} \hat{\$}_{B_2} \hat{\$}_{C_2} \hat{\$}_{D_2} \hat{\$}_{E_2} \hat{\$}_{F_2} \hat{\$}_{A_3} \hat{\$}_{B_3} \hat{\$}_{C_3} \hat{\$}_{D_3} \hat{\$}_{E_3} \hat{\$}_{F_3} \hat{\$}_{px} \hat{\$}_{py} \hat{\$}_{pz} \hat{\$}_{rx} \hat{\$}_{ry} \hat{\$}_{rz} \right] \quad (4.36)$$

O digrafo de movimento tem três malhas fechadas ( $M_1$ ,  $M_2$  e  $M_3$ ). Desta forma, considerando o sentido escolhido para as malhas fechadas, a matriz de malhas  $B$  resulta

$$B = \begin{bmatrix} A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1 A_2 B_2 C_2 D_2 E_2 F_2 A_3 B_3 C_3 D_3 E_3 F_3 px py pz rx ry rz \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{matrix} \quad (4.37)$$

e as matrizes diagonais  $B_i$  definidas na seção 2.3 são

$$\begin{aligned} B_1 &= \text{diag}\{[1111111-1-1-1-1-1-1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]\} \\ B_2 &= \text{diag}\{[000000 1 1 1 1 1 1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 0 0 0 0 0 0 0]\} \\ B_3 &= \text{diag}\{[000000 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 -1 -1 -1 -1 -1 -1]\} \end{aligned} \quad (4.38)$$

A matriz de rede  $N$  da cadeia modificada, calculada através da Eq. (2.20), é

$$N = \begin{bmatrix} \hat{\$}_{A_1} & \hat{\$}_{B_1} & \hat{\$}_{C_1} & \hat{\$}_{D_1} & \hat{\$}_{E_1} & \hat{\$}_{F_1} & -\hat{\$}_{A_2} & -\hat{\$}_{B_2} & -\hat{\$}_{C_2} & -\hat{\$}_{D_2} & -\hat{\$}_{E_2} & -\hat{\$}_{F_2} & & \\ \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \hat{\$}_{A_2} & \hat{\$}_{B_2} & \hat{\$}_{C_2} & \hat{\$}_{D_2} & \hat{\$}_{E_2} & \hat{\$}_{F_2} & \cdots & \\ \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & & \\ & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \\ \cdots & -\hat{\$}_{A_3} & -\hat{\$}_{B_3} & -\hat{\$}_{C_3} & -\hat{\$}_{D_3} & -\hat{\$}_{E_3} & -\hat{\$}_{F_3} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \\ & \hat{\$}_{A_3} & \hat{\$}_{B_3} & \hat{\$}_{C_3} & \hat{\$}_{D_3} & \hat{\$}_{E_3} & \hat{\$}_{F_3} & -\hat{\$}_{px} & -\hat{\$}_{py} & -\hat{\$}_{pz} & -\hat{\$}_{rx} & -\hat{\$}_{ry} & -\hat{\$}_{rz} & \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

onde  $\vec{0}$  é o vetor nulo de dimensão  $6 \times 1$ .

O vetor das magnitudes dos heligiros  $\Psi$  é formado pela magnitude da velocidade de cada junta da cadeia modificada

$$\Psi = \begin{bmatrix} \Psi_{A_1} \Psi_{B_1} \Psi_{C_1} \Psi_{D_1} \Psi_{E_1} \Psi_{F_1} \Psi_{A_2} \Psi_{B_2} \Psi_{C_2} \Psi_{D_2} \Psi_{E_2} \Psi_{F_2} \Psi_{A_3} \Psi_{B_3} \Psi_{C_3} \Psi_{D_3} \Psi_{E_3} \Psi_{F_3} \cdots \\ \cdots \Psi_{px} \Psi_{py} \Psi_{pz} \Psi_{rx} \Psi_{ry} \Psi_{rz} \end{bmatrix}^T \quad (4.40)$$

A equação de restrição da cadeia modificada do 3PPSR no espaço operacional cartesiano 3D é calculada substituindo as Eqs. (4.39) e (4.40) na Eq.(2.26)

$$N\Psi = \begin{bmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \\ \vec{0} \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

Esta equação será utilizada no capítulo 5 para calcular a cinemática diferencial do manipulador 3PPSR usando cadeias virtuais.

## 4.5 Conclusão

A definição da cadeia cinemática modificada pode ser empregada para obter de forma sistemática a equação de restrição de robôs seriais e paralelos utilizando a mesma metodologia.

## 5 *Cinemática diferencial de manipuladores empregando cadeias virtuais*

Neste capítulo calcula-se a cinemática diferencial de manipuladores empregando o conceito de cadeia cinemática virtual proposto no capítulo 3 e a definição de cadeia cinemática modificada introduzida no capítulo 4 desta tese.

Aplicando o método de Kirchhoff-Davies descrito no capítulo 2 à cadeia cinemática modificada obtém-se a equação de restrição a partir da qual a cinemática diferencial é calculada (CAMPOS; MARTINS; GUENTHER, 2002b, 2003).

Esta metodologia é empregada para calcular a cinemática diferencial de manipuladores seriais e paralelos, que podem ser redundantes ou não. A cinemática direta e a cinemática inversa são calculadas escolhendo as juntas primárias e as juntas secundárias de forma adequada na equação de restrição.

De acordo com a seção 2.4 as juntas cujos heligiros possuem magnitude conhecida são chamadas de juntas primárias e as juntas cujos heligiros têm magnitude a ser determinada são chamadas de juntas secundárias. As magnitudes dos heligiros correspondentes as juntas secundárias são calculadas através da Eq. (2.34) aqui repetida por conveniência

$$\Psi_s = -N_s^{-1}N_p\Psi_p \quad (5.1)$$

Na seqüência é apresentada a cinemática diferencial utilizando cadeias virtuais para diferentes tipos de manipulador, a saber: o manipulador serial PUMA, o manipulador paralelo plano  $3RRR$ , o manipulador paralelo espacial  $3PPSR$  e o manipulador redundante  $RRRR$ .

## 5.1 Cinemática diferencial do PUMA

A cinemática diferencial do PUMA pode ser obtida a partir da equação de restrição de sua cadeia cinemática modificada (CAMPOS; MARTINS; GUENTHER, 2002b). No caso em que se deseja obter informações ou introduzir características relativas ao movimento do efetuador do manipulador, sua cadeia cinemática pode ser modificada pela introdução de uma cadeia virtual entre a base e o efetuador. Considerando que as informações do movimento do efetuador estão em coordenadas cilíndricas, utiliza-se uma cadeia  $RRPPS$  (seção 4.2). A cadeia modificada do manipulador é mostrada na Fig. 44. A equação de restrição correspondente é a Eq. (4.23).

### 5.1.1 Cinemática diferencial direta

Empregando esta equação pode-se obter informações do movimento do efetuador no sistema de coordenadas cilíndrico, definido pela cadeia virtual  $RRPPS$ , a partir do movimento nas juntas do manipulador, escolhendo as juntas do manipulador como primárias e as da cadeia virtual como secundárias. Assim,

$$\Psi_p = \left[ \Psi_A \Psi_B \Psi_C \Psi_D \Psi_E \Psi_F \right]^T \quad (5.2)$$

$$\Psi_s = \left[ \Psi_{rz} \Psi_{pz} \Psi_{pr} \Psi_{rn} \Psi_{rt} \Psi_{rb} \right]^T \quad (5.3)$$

$$N_p = \left[ \hat{\$}_A \hat{\$}_B \hat{\$}_C \hat{\$}_D \hat{\$}_E \hat{\$}_F \right] \quad (5.4)$$

$$N_s = \left[ -\hat{\$}_{rz} - \hat{\$}_{pz} - \hat{\$}_{pr} - \hat{\$}_{rn} - \hat{\$}_{rt} - \hat{\$}_{rb} \right] \quad (5.5)$$

e o cálculo das magnitudes das velocidades do efetuador no sistema cilíndrico a partir das magnitudes das velocidades nas juntas do manipulador (cinemática diferencial direta) é feito através da Eq. (5.1).

A matriz a ser invertida é definida pelos heligiros das juntas da cadeia virtual ( $rz$ ,  $pz$ ,  $pr$ ,  $rn$ ,  $rt$  e  $rb$ ) cuja representação é mais simples no sistema- $\hat{C}$ . Isto pode ser observado da definição dos helicóides normalizados desta cadeia virtual dados na Eq. (3.9) que substituídos na Eq. (5.5)

forneem

$$N_s = - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

Por isto transformam-se os helicóides normalizados das juntas do manipulador para o sistema- $\hat{C}$  empregando a Eq. (2.46). Assim, a expressão da Eq. (5.1) resulta em

$$\begin{bmatrix} \Psi_{rz} \\ \Psi_{pz} \\ \Psi_{pr} \\ \Psi_{rn} \\ \Psi_{rt} \\ \Psi_{rb} \end{bmatrix} = \left[ \hat{C}_{\$_{rz}} \hat{C}_{\$_{pz}} \hat{C}_{\$_{pr}} \hat{C}_{\$_{rn}} \hat{C}_{\$_{rt}} \hat{C}_{\$_{rb}} \right]^{-1} \left[ \hat{C}_{T_R} \right] \left[ {}^R\hat{\$}_A {}^R\hat{\$}_B {}^R\hat{\$}_C {}^R\hat{\$}_D {}^R\hat{\$}_E {}^R\hat{\$}_F \right] \begin{bmatrix} \Psi_A \\ \Psi_B \\ \Psi_C \\ \Psi_D \\ \Psi_E \\ \Psi_F \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

Observa-se que a matriz  $N_s$  composta pelos helicóides normalizados virtuais sempre é inversível dado que uma das propriedades da cadeia virtual, apresentada no capítulo 3, é a independência linear entre os heligiros das juntas virtuais.

Cabe destacar que a cinemática direta do manipulador PUMA dada na Eq. (5.7) fornece as magnitudes da velocidade do efetuador diretamente no sistema cilíndrico caracterizado como sistema- $\hat{C}$ .

As magnitudes da velocidade do efetuador no sistema cartesiano, sistema- $C$  apresentado na seção 3.3.1, podem ser obtidas adicionando a cadeia virtual  $PPPS$  ortogonal descrita na seção 3.3.1 à cadeia cinemática do PUMA entre a base e o efetuador seguindo o mesmo procedimento. Neste caso, a partir da Eq. (3.7), pode-se observar que a matriz a ser invertida  $N_s$  é a matriz identidade.

Da mesma forma, adicionando a cadeia virtual  $RRPS$ , descrita na seção 3.3.3, entre a base e o efetuador, pode-se calcular a cinemática direta no sistema de coordenadas esférico (sistema- $E$  apresentado na seção 3.3.3) utilizando o mesmo procedimento. Neste caso a matriz a ser

invertida  $N_s$ , formada a partir dos helicóides normalizados da Eq. (3.11), é

$$N_s = - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\cos \beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \sin \beta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r \sin \beta \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

A metodologia proposta possibilita, portanto, obter a cinemática direta em um sistema de coordenadas conveniente à aplicação.

### 5.1.2 Cinemática diferencial inversa

Empregando a equação de restrição, Eq. (4.23) pode-se também calcular as magnitudes das velocidades nas juntas do manipulador PUMA a partir das magnitudes das velocidades no efetuador dadas em coordenadas cilíndricas definidas pela cadeia virtual *RPPS* (cinemática diferencial inversa). Para tanto escolhem-se as juntas da cadeia virtual como primárias e as juntas do manipulador como secundárias. Neste caso

$$\Psi_p = \left[ \Psi_{rz} \Psi_{pz} \Psi_{pr} \Psi_{rn} \Psi_{rt} \Psi_{rb} \right]^T \quad (5.9)$$

$$\Psi_s = \left[ \Psi_A \Psi_B \Psi_C \Psi_D \Psi_E \Psi_F \right]^T \quad (5.10)$$

$$N_p = \left[ -\hat{\$}_{rz} - \hat{\$}_{pz} - \hat{\$}_{pr} - \hat{\$}_{rn} - \hat{\$}_{rt} - \hat{\$}_{rb} \right] \quad (5.11)$$

$$N_s = \left[ \hat{\$}_A \hat{\$}_B \hat{\$}_C \hat{\$}_D \hat{\$}_E \hat{\$}_F \right] \quad (5.12)$$

O cálculo das magnitudes das velocidades das juntas do manipulador é feito usando a Eq. (5.1) com as definições das Eqs. (5.9)- (5.12). A matriz a ser invertida é dada pela Eq. (5.12) e suas colunas são os helicóides normalizados das juntas do manipulador, cuja representação é mais simples no sistema-*R* fixo ao elo 4 do manipulador. Isto se observa na esparcidade e simplicidade dos termos dos helicóides normalizados dados na Eq. (4.17) que substituídos na Eq. (5.12)

resulta

$$N_s = \begin{bmatrix} -s_{BC} & 0 & 0 & 1 & 0 & c_E \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -s_D & c_D s_E \\ c_{BC} & 0 & 0 & 0 & c_D & s_D s_E \\ -f c_{BC} & g s_C & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_{AD} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -f s_{BC} & x'_{DA} & -h & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

Por isso, neste caso transforma-se os helicóides normalizados das juntas virtuais para o sistema- $R$  empregando a Eq. (2.46). Assim, a expressão da Eq. (5.1) resulta

$$\begin{bmatrix} \Psi_A \\ \Psi_B \\ \Psi_C \\ \Psi_D \\ \Psi_E \\ \Psi_F \end{bmatrix} = \left[ {}^R\hat{\$}_A {}^R\hat{\$}_B {}^R\hat{\$}_C {}^R\hat{\$}_D {}^R\hat{\$}_E {}^R\hat{\$}_F \right]^{-1} [{}^R T_{\hat{C}}] \begin{bmatrix} \hat{C}\hat{\$}_{rz} \\ \hat{C}\hat{\$}_{pz} \\ \hat{C}\hat{\$}_{pr} \\ \hat{C}\hat{\$}_{rn} \\ \hat{C}\hat{\$}_{rt} \\ \hat{C}\hat{\$}_{rb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_{rz} \\ \Psi_{pz} \\ \Psi_{pr} \\ \Psi_{rn} \\ \Psi_{rt} \\ \Psi_{rb} \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

A Eq. (5.14) expressa a cinemática diferencial inversa do manipulador PUMA com as magnitudes da velocidade do efetuador dadas no sistema cilíndrico definido pela cadeia virtual  $RPPS$  apresentada na seção 3.3.2.

Utilizando o mesmo procedimento podem ser obtidas as magnitudes das velocidades nas juntas do manipulador PUMA a partir das magnitudes da velocidade do efetuador no sistema cartesiano, sistema- $C$  apresentado na seção 3.3.1, adicionando a cadeia virtual  $PPPS$  ortogonal descrita na na seção 3.3.1 à cadeia cinemática do PUMA entre a base e o efetuador.

Da mesma forma, adicionando a cadeia virtual  $RRPS$ , descrita na seção 3.3.3, entre a base e o efetuador, pode-se calcular a cinemática inversa a partir da velocidade do efetuador no sistema de coordenadas esférico (sistema- $E$  apresentado na seção 3.3.3) utilizando o mesmo procedimento.

### 5.1.3 Cinemática diferencial inversa nas singularidades

A utilização de cadeias virtuais possibilita também calcular a cinemática inversa nas configurações singulares em que as colunas da matriz  $N_s$  são linearmente dependentes.

Para um manipulador ocorre uma configuração singular quando a matriz  $N_s$  definida na Eq. (5.13) tem colunas linearmente dependentes. Neste caso a matriz  $N_s$  perde posto e não pode ser invertida. O manipulador perde ao menos um grau de liberdade e a trajetória especificada para o efetuador não pode ser integralmente realizada.

A metodologia proposta nesta tese permite fazer com que uma vez detectada a proximidade de uma singularidade e uma vez identificados tanto os heligiros que se tornam linearmente dependentes como os heligiros que causam a dependência linear, uma das juntas secundárias seja removida do conjunto de juntas secundárias (com magnitudes de heligiros a serem determinadas) e seja incluída no conjunto de juntas primárias (com magnitudes de heligiros especificadas). Com isso a matriz  $N_s$  perde uma coluna e há necessidade de escolher uma das juntas primárias (neste caso juntas virtuais) para especificar o movimento do efetuador para ser incluída entre as juntas secundárias, para que a matriz  $N_s$  seja quadrada e possa ser invertida.

A seleção da junta a ser removida do conjunto de juntas secundárias depende da ação a ser tomada frente a singularidade: evitar ou eliminar a singularidade. No caso em que se deseja evitar que o manipulador atinja a singularidade impõem-se uma velocidade conveniente na junta cuja variável causa a singularidade, para isto esta junta deve ser removida do conjunto de juntas secundárias. Já quando se deseja eliminar a singularidade da matriz  $N_s$ , é preciso remover do conjunto de juntas secundárias uma das juntas cujo heligiro irá se tornar linearmente dependente na singularidade. Neste caso o manipulador pode ou evitar ou ultrapassar a singularidade.

A junta a ser removida do conjunto de juntas primárias e incluída no conjunto de juntas secundárias corresponde ao movimento (grau de liberdade) do efetuador escolhido para não ser especificado pela trajetória desejada durante a singularidade.

Cabe destacar que a coluna correspondente a nova junta secundária não pode ser linearmente dependente as outras colunas de  $N_s$  de modo que a matriz  $N_s$  possua posto completo e possa ser invertida.

As singularidades da cadeia cinemática do PUMA são definidas por  $\det(N_s) = 0$ , onde  $N_s$



é definida pela Eq. (5.13). Disto resulta que as singularidades ocorrem para  $gh\ x_{AD} s_C s_E = 0$ . Cabe destacar que as singularidades do PUMA representam configurações nas quais a mobilidade do manipulador é reduzida, *i.e.* não é possível impor um movimento arbitrário ao efetuador do PUMA. Adicionalmente, na proximidade de uma singularidade, pequenas velocidades do efetuador no espaço operacional podem causar grandes velocidades no espaço das juntas (SCI-AVICCO; SICILIANO, 1996).

Considere a singularidade que ocorre quando  $s_E = 0$ . Portanto a junta  $E$  causa a dependência linear em  $N_s$ . Da expressão da Eq. (5.13) observa-se facilmente que com  $s_E = 0$  os heligiros  $\$D$  e  $\$F$ , correspondentes as colunas 4 e 6 de  $N_s$ , ficam linearmente dependentes. Em alguns casos não é trivial determinar as colunas linearmente dependentes em uma determinada singularidade apenas pela observação de  $N_s$ , nestes casos é utilizada a forma hierárquica do jacobiano apresentada em (MARTINS; GUENTHER, 2003) para identificar as colunas linearmente dependentes em cada singularidade.

Assim para evitar a singularidade, *i.e.* afastar  $\theta_E$  de zero, a junta  $E$  é removida das juntas secundárias e incluída nas juntas primárias, onde a magnitude  $\Psi_E$  é especificada convenientemente para não alcançar  $\theta_E = 0$ . No caso em que se deseja eliminar a singularidade devido a  $s_E = 0$ , é possível escolher entre remover a junta  $D$  ou a junta  $F$  dentre as juntas secundárias devido a que as colunas correspondentes a estas juntas (colunas 4 e 6) se tornam linearmente dependentes quando  $s_E = 0$ . Considerando que se deseja eliminar a singularidade, é escolhida a junta  $D$  para ser removida do conjunto de juntas secundárias e incluída no conjunto de juntas primárias.

Considerando, por exemplo, que o grau de liberdade do efetuador escolhido para não ser especificado durante a singularidade é o movimento angular na direção normal ao cilindro, correspondente a junta virtual  $rn$ , então a junta a ser removida do conjunto de juntas primárias e incluída no conjunto de juntas secundárias é a junta  $rn$ .

Neste caso

$$\Psi_p = \left[ \Psi_{rz} \Psi_{pz} \Psi_{pr} \Psi_D \Psi_{rt} \Psi_{rb} \right]^T \quad (5.15)$$

$$\Psi_s = \left[ \Psi_A \Psi_B \Psi_C \Psi_{rn} \Psi_E \Psi_F \right]^T \quad (5.16)$$

$$N_p = \left[ -\hat{\$}_{rz} - \hat{\$}_{pz} - \hat{\$}_{pr} \hat{\$}_D - \hat{\$}_{rt} - \hat{\$}_{rb} \right] \quad (5.17)$$

$$N_s = \left[ \hat{\$}_A \hat{\$}_B \hat{\$}_C - \hat{\$}_{rn} \hat{\$}_E \hat{\$}_F \right] \quad (5.18)$$

E substituindo as Eq. (5.15) - (5.18) na Eq. (5.1) resulta

$$\begin{bmatrix} \Psi_A \\ \Psi_B \\ \Psi_C \\ \Psi_{rn} \\ \Psi_E \\ \Psi_F \end{bmatrix} = \left[ {}^R\hat{\$}_A {}^R\hat{\$}_B {}^R\hat{\$}_C - {}^R\hat{\$}_{rn} {}^R\hat{\$}_E {}^R\hat{\$}_F \right]^{-1} \left[ {}^R T_{\hat{C}} \right] \begin{bmatrix} \hat{C}\hat{\$}_{rz} \hat{C}\hat{\$}_{pz} \hat{C}\hat{\$}_{pr} - \hat{C}\hat{\$}_D \hat{C}\hat{\$}_{rt} \hat{C}\hat{\$}_{rb} \\ \Psi_{rz} \\ \Psi_{pz} \\ \Psi_{pr} \\ \Psi_D \\ \Psi_{rt} \\ \Psi_{rb} \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

Cabe observar que se o heligiro  $\$_{rn}$  é linearmente dependente a um ou mais heligiros de  $N_s$ ,  $N_s$  não pode ser invertida e é necessário escolher outra junta primária para ser convertida em secundária ou outra junta secundária para ser convertida em primária, *e.g.* a junta  $F$ .

A Eq. (5.19) expressa a cinemática diferencial inversa do manipulador PUMA desconsiderando a velocidade angular na direção normal ao cilindro do efetuador e impondo a magnitude da velocidade na junta  $D$  de forma conveniente. No momento em que a cadeia cinemática do PUMA esteja fora desta singularidade ( $s_E \neq 0$ ) retorna-se a Eq. (5.14) para continuar calculando a cinemática inversa do manipulador com todas as velocidades desejadas do efetuador especificadas. O valor da magnitude da velocidade na junta  $D$  e a transição entre as soluções da cinemática inversa: Eq. (5.14) e Eq. (5.19) estão fora do escopo desta tese.

### 5.1.4 Observações

Neste exemplo fica evidenciado que a metodologia proposta possibilita obter a cinemática direta e a cinemática inversa no sistema de coordenadas mais conveniente à aplicação (cilíndrico, cartesiano etc.). Esta facilidade não é tão evidente no método convencional utilizado para a cinemática diferencial, que emprega os parâmetros Denavit-Hartenberg, nem no método baseado na teoria dos helicóides, mencionados na seção 1.2.1.

A metodologia proposta possibilita também a escolha do sistema de coordenadas no qual a representação da parcela secundária da matriz de rede ( $N_s$ ) é mais simples e mais fácil de ser invertida. Esta possibilidade está relacionada com a representação dos movimentos das juntas

por meio de helicóides. Outros métodos para o cálculo da cinemática diferencial que utilizam helicóides tem a mesma possibilidade.

A possibilidade de seleção das juntas primárias e secundárias permite evitar ou ultrapassar configurações singulares do manipulador, através da permutação entre juntas do conjunto de juntas primárias e secundárias. Neste caso, não é possível especificar um ou mais graus de liberdade do efetuador. Em geral, os graus de liberdade do efetuador que não podem ser especificados podem ser escolhidos a conveniência.

Cabe destacar que utilizando o conceito de cadeia virtual, o método de Kirchhoff-Davies é estendido para resolver a cinemática diferencial direta e inversa de manipuladores seriais empregando a mesma metodologia, *i.e.* convertendo a cadeia serial do manipulador em uma cadeia fechada. Esta é uma característica do método que se opõem a idéia usual de separar os manipuladores com cadeias cinemáticas fechadas em cadeias cinemáticas seriais para a sua análise cinemática diferencial, *i.e.* converter a cadeia paralela do manipulador em várias cadeias seriais.

## 5.2 Cinemática diferencial do manipulador paralelo 3RRR

Seja o manipulador paralelo 3RRR da Fig. 47.

Considere que as juntas atuadas deste manipulador são  $A, F$  e  $G$ . Neste caso as juntas passivas são  $B, C, D, E, H$  e  $I$ . Considere que as informações do movimento do efetuador estão em coordenadas polares, assim, a cadeia modificada do manipulador corresponde à apresentada na seção 4.3.

A equação de restrição resultante desta cadeia modificada ( $3RRR + RPR$ ) é dada pela Eq. (4.35).

Utilizando essa equação de restrição pode-se obter a velocidade do efetuador (correspondente as juntas da cadeia virtual  $RPR$ , que representa um sistema de coordenadas polar, veja seção 3.2.2) a partir das velocidades das juntas atuadas, *i.e.* a cinemática diferencial direta, e a cinemática diferencial inversa na qual as velocidades das juntas atuadas são calculadas a partir da especificação das velocidades do efetuador.

No cálculo da cinemática diferencial inversa, a metodologia possibilita também a seleção do

sistema de coordenadas no qual a representação da parcela secundária da matriz de rede ( $N_s$ ) seja mais esparsa e, portanto, neste sistema é mais fácil de inverter a matriz que em um sistema onde  $N_s$  seja menos esparsa (HUNT, 1987).

### 5.2.1 Cinemática diferencial direta

Na cinemática direta obtém-se informações do movimento do efetuador no sistema de coordenadas polar, definido pela cadeia virtual  $RPR$ , a partir do movimento nas juntas atuadas do manipulador, escolhendo as juntas atuadas do manipulador como primárias e as juntas passivas do manipulador e as da cadeia virtual ( $rz1$ ,  $pr$  e  $rz2$ ) como secundárias. Assim,

$$\Psi_p = \left[ \Psi_A \quad \Psi_F \quad \Psi_G \right]^T \quad (5.20)$$

$$\Psi_s = \left[ \Psi_B \Psi_C \Psi_D \Psi_E \Psi_H \Psi_I \Psi_{rz1} \Psi_{pr} \Psi_{rz2} \right]^T \quad (5.21)$$

$$N_p = \begin{bmatrix} \hat{\$}_A - \hat{\$}_F & \vec{0} \\ \vec{0} & \hat{\$}_F - \hat{\$}_G \\ \vec{0} & \vec{0} & \hat{\$}_G \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

$$N_s = \begin{bmatrix} \hat{\$}_B \hat{\$}_C - \hat{\$}_D - \hat{\$}_E & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} \\ \vec{0} & \vec{0} & \hat{\$}_D & \hat{\$}_E & -\hat{\$}_H - \hat{\$}_I & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} \\ \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \hat{\$}_H & \hat{\$}_I & -\hat{\$}_{rz1} - \hat{\$}_{pr} - \hat{\$}_{rz2} \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

e o cálculo das magnitudes das velocidades no sistema polar a partir das magnitudes das velocidades nas juntas atuadas do manipulador (cinemática diferencial direta) é feito através da Eq. (5.1).

Representando todos os helicóides normalizados da cadeia modificada do  $3RRR + RPR$  no

mesmo sistema de coordenadas, as magnitudes das velocidades das juntas secundárias resultam

$$\begin{bmatrix} \Psi_B \\ \Psi_C \\ \Psi_D \\ \Psi_E \\ \Psi_H \\ \Psi_I \\ \Psi_{rz1} \\ \Psi_{pr} \\ \Psi_{rz2} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \hat{\$}_B \hat{\$}_C - \hat{\$}_D - \hat{\$}_E & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} \\ \vec{0} & \vec{0} & \hat{\$}_D & \hat{\$}_E & -\hat{\$}_H - \hat{\$}_I & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} \\ \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \hat{\$}_H & \hat{\$}_I & -\hat{\$}_{rz1} - \hat{\$}_{pr} - \hat{\$}_{rz2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{\$}_A - \hat{\$}_F & \vec{0} \\ \vec{0} & \hat{\$}_F - \hat{\$}_G \\ \vec{0} & \vec{0} & \hat{\$}_G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_A \\ \Psi_F \\ \Psi_G \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

Cabe destacar que a cinemática direta do manipulador paralelo 3RRR dada na Eq. (5.24) fornece as magnitudes da velocidade do efetuador no sistema polar caracterizado como sistema- $P$  na seção 3.2.2.

As magnitudes da velocidade do efetuador no sistema cartesiano, sistema- $C$  apresentado na seção 3.2.1, podem ser obtidas adicionando a cadeia virtual  $PPR$  ortogonal descrita na seção 3.2.1 à cadeia cinemática do 3RRR entre a base e o efetuador seguindo o mesmo procedimento.

A metodologia proposta possibilita, portanto, obter a cinemática direta em um sistema de coordenadas conveniente à aplicação.

Da Eq. (5.24) observa-se que na cinemática diferencial direta de manipuladores paralelos a matriz a ser invertida  $N_s$  é formada pelos helicóides normalizados das juntas passivas e pelos helicóides normalizados das juntas da cadeia virtual.

Nem sempre é possível escolher um sistema de coordenadas de forma que a representação dos helicóides das juntas passivas seja simples e, simultaneamente, a representação dos helicóides das juntas virtuais seja simples também. Por isso a inversão da matriz  $N_s$  pode não ser simples.

Algumas vezes não é necessário calcular o valor das magnitudes dos heli-giros das juntas passivas. Neste caso elas podem ser eliminadas por meio do método desenvolvido nesta tese e apresentado no apêndice A.

Este método de eliminação consiste em igualar a taxa de trabalho realizada pelo efetuador e pelas pernas do manipulador, em uma direção determinada, com base no cálculo analítico de um dos helicóides *recíprocos* aos heligiros que representam as juntas passivas de cada perna. Este helicóide recíproco é calculado de forma fechada por meio da condição de taxa de trabalho não nulo das juntas atuadas sobre ele. Assim, o helicóide recíproco é calculado diretamente através de uma equação matricial sem necessidade de resolvê-la por partes como em (KIM; CHUNG; YOUM, 2000).

Na maioria dos métodos de eliminação das velocidades das juntas passivas baseados em helicóides, os helicóides recíprocos são obtidos por inspeção usando relações geométricas do manipulador (KUMAR, 1992)(LING; HUANG, 1995) ou pela intersecção de sistemas de helicóides recíprocos associados com as juntas passivas de cada perna (TSAI, 1999)(DASH; CHEN; YANG, 2001)(VALDIERO et al., 2001), o que torna difícil a sua obtenção para manipuladores complexos. Outros métodos realizam a eliminação por meio de produtos vetoriais com elementos geométricos encontrados por inspeção (DANIALI; ZSOMBOR-MURRAY; ANGELES, 1995)(SLUTSKI; ANGELES, 1999)(TSAI, 1999).

O método proposto no apêndice A desta tese tem a vantagem de realizar a eliminação através de um cálculo direto, que não envolve escolhas realizadas por inspeção.

## 5.2.2 Cinemática diferencial inversa

Empregando a equação de restrição, Eq. (4.35) pode-se também calcular as magnitudes das velocidades nas juntas atuadas do manipulador 3RRR a partir das magnitudes das velocidades no efetuador dadas em coordenadas polares, definidas pela cadeia virtual RPR (cinemática diferencial inversa). Para tanto escolhe-se as juntas da cadeia virtual como primárias e as juntas atuadas e passivas do manipulador como secundárias. Neste caso

$$\Psi_p = \left[ \Psi_{rz1} \quad \Psi_{pr} \quad \Psi_{rz2} \right]^T \quad (5.25)$$

$$\Psi_s = \left[ \Psi_A \quad \Psi_B \quad \Psi_C \quad \Psi_D \quad \Psi_E \quad \Psi_F \quad \Psi_G \quad \Psi_H \quad \Psi_I \right]^T \quad (5.26)$$

$$N_p = \begin{bmatrix} \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} \\ \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} \\ -\hat{\$}_{rz1} - \hat{\$}_{pr} - \hat{\$}_{rz2} \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

$$N_s = \begin{bmatrix} \hat{\$}_A \hat{\$}_B \hat{\$}_C - \hat{\$}_D - \hat{\$}_E - \hat{\$}_F & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} \\ \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \hat{\$}_D & \hat{\$}_E & \hat{\$}_F & -\hat{\$}_G - \hat{\$}_H - \hat{\$}_I \\ \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \hat{\$}_G & \hat{\$}_H & \hat{\$}_I \end{bmatrix} \quad (5.28)$$

O cálculo das magnitudes das velocidades das juntas atuadas do manipulador é feito usando a Eq. (5.1) com as definições das Eqs. (5.25)- (5.28).

A matriz a ser invertida é definida pelos heligiros das juntas da cadeia real, assim representando todos os helicóides normalizados da cadeia modificada do 3RRR em um sistema de coordenadas calculam-se as magnitudes dos heligiros das juntas do manipulador a partir da Eq. (5.1).

$$\begin{bmatrix} \Psi_A \\ \Psi_B \\ \Psi_C \\ \Psi_D \\ \Psi_E \\ \Psi_F \\ \Psi_G \\ \Psi_H \\ \Psi_I \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \hat{\$}_A \hat{\$}_B \hat{\$}_C - \hat{\$}_D - \hat{\$}_E - \hat{\$}_F & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} \\ \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \hat{\$}_D & \hat{\$}_E & \hat{\$}_F & -\hat{\$}_G - \hat{\$}_H - \hat{\$}_I \\ \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \hat{\$}_G & \hat{\$}_H & \hat{\$}_I \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} \\ \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} \\ -\hat{\$}_{rz} - \hat{\$}_{pr} - \hat{\$}_{az} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_{az} \\ \Psi_{pr} \\ \Psi_{rz} \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

Pode-se observar da Eq. (5.29) que para a cinemática inversa todas as colunas de  $N_s$  correspondem aos heligiros atuados e passivos do manipulador. Por isso é possível escolher um sistema de coordenadas no qual os helicóides normalizados da cadeia cinemática real sejam mais simples, e a matriz  $N_s$  mais fácil de ser invertida.

A Eq. (5.29) expressa a cinemática diferencial inversa do manipulador paralelo 3RRR com as magnitudes da velocidade do efetuador dadas no sistema polar definido pela cadeia virtual RPR apresentada na seção 3.2.2.

Utilizando o mesmo procedimento podem ser obtidas as magnitudes das velocidades nas

juntas atuadas do manipulador paralelo 3RRR a partir das magnitudes da velocidade do efetuador no sistema cartesiano, sistema- $C$  apresentado na seção 3.2.1, adicionando a cadeia virtual PPR ortogonal descrita na seção 3.2.1 à cadeia cinemática do 3RRR entre a base e o efetuador.

### 5.2.3 Observações

A metodologia apresentada possibilita, no caso da cinemática inversa, a escolha do sistema de coordenadas no qual a representação da parcela secundária da matriz de rede ( $N_s$ ) é mais simples e mais fácil de ser invertida. Esta característica do método relaciona-se com a representação dos movimentos das juntas por meio de helicóides portanto é também característica do método baseado na teoria de helicóides mas não do método baseado na derivação da equação de posição de malha, veja seção 1.2.2.

Pelo método descrito calculam-se as velocidades das juntas passivas, tanto na cinemática direta como na cinemática inversa. Se as velocidades das juntas passivas não são de interesse, estas podem ser eliminadas sistematicamente como apresentado no procedimento do apêndice A. Portanto, pode ser estabelecida uma relação somente entre as velocidades das juntas atuadas e as velocidades das juntas virtuais.

Fica evidenciado que, também para manipuladores paralelos, a metodologia proposta possibilita obter a cinemática direta e a cinemática inversa escolhendo o sistema de coordenadas (cartesiano, polar, cilíndrico etc.) mais conveniente à aplicação. Esta característica não é evidente no método baseado na derivação da equação de posição nem no método baseado na teoria de helicóides mencionados na seção 1.2.2.

Observa-se que utilizando o conceito de cadeia virtual o método de Kirchhoff-Davies é estendido para resolver a cinemática diferencial direta e inversa de manipuladores paralelos e não somente a cinemática no espaço das juntas como apresentado na seção 2.4.

## 5.3 Cinemática diferencial do manipulador paralelo 3PPSR

Nesta seção é apresentada a aplicação do método de cálculo da cinemática diferencial a um manipulador espacial sem a perda das vantagens apresentadas por manipuladores de cadeias



cinemáticas mais simples.

### 5.3.1 Cinemática diferencial direta

Seja o manipulador paralelo 3PPSR da Fig. 50. Considere que as juntas atuadas deste manipulador são  $A_i$  e  $B_i$ . Neste caso as juntas passivas são  $C_i$ ,  $D_i$ ,  $E_i$  e  $F_i$ . Considere que as informações do movimento do efetuador estão em coordenadas cartesianas, assim a cadeia modificada do manipulador corresponde à apresentada na seção 4.4.

A equação de restrição resultante desta cadeia modificada (3PPSR + PPS) é dada na Eq. (4.41).

A partir da equação de restrição pode-se obter a velocidade do efetuador (correspondente as juntas da cadeia virtual PPS, que representa um sistema de coordenadas cartesiano, veja seção 3.3.1) a partir das velocidades das juntas atuadas (cinemática diferencial direta), e a cinemática diferencial inversa na qual as velocidades das juntas atuadas são calculadas a partir da especificação das velocidades do efetuador.

Na cinemática direta escolhe-se as juntas atuadas do manipulador como primárias e as juntas passivas do manipulador e as da cadeia virtual ( $px$ ,  $py$ ,  $pz$ ,  $rx$ ,  $ry$  e  $rz$ ) como secundárias. Assim,

$$\begin{aligned}
 \Psi_s &= [\Psi_{C_1} \Psi_{D_1} \Psi_{E_1} \Psi_{F_1} \Psi_{C_2} \Psi_{D_2} \Psi_{E_2} \Psi_{F_2} \Psi_{C_3} \Psi_{D_3} \Psi_{E_3} \Psi_{F_3} \Psi_{px} \Psi_{py} \Psi_{pz} \Psi_{rx} \Psi_{ry} \Psi_{rz}]^T \\
 \Psi_p &= [\Psi_{A_1} \Psi_{B_1} \Psi_{A_2} \Psi_{B_2} \Psi_{A_3} \Psi_{B_3}]^T \\
 N_s &= \begin{bmatrix} \hat{\$}_{C_1} \hat{\$}_{D_1} \hat{\$}_{E_1} \hat{\$}_{F_1} - \hat{\$}_{C_2} - \hat{\$}_{D_2} - \hat{\$}_{E_2} - \hat{\$}_{F_2} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} \\ \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \hat{\$}_{C_2} & \hat{\$}_{D_2} & \hat{\$}_{E_2} & \hat{\$}_{F_2} & -\hat{\$}_{C_3} - \hat{\$}_{D_3} - \hat{\$}_{E_3} - \hat{\$}_{F_3} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} \\ \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \hat{\$}_{C_3} & \hat{\$}_{D_3} & \hat{\$}_{E_3} & \hat{\$}_{F_3} & -\hat{\$}_{px} - \hat{\$}_{py} - \hat{\$}_{pz} - \hat{\$}_{rx} - \hat{\$}_{ry} - \hat{\$}_{rz} & & & \end{bmatrix} \\
 N_p &= \begin{bmatrix} \hat{\$}_{A_1} \hat{\$}_{B_1} - \hat{\$}_{A_2} - \hat{\$}_{B_2} & \vec{0} & \vec{0} \\ \vec{0} & \vec{0} & \hat{\$}_{A_2} & \hat{\$}_{B_2} & -\hat{\$}_{A_3} - \hat{\$}_{B_3} \\ \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \hat{\$}_{A_3} & \hat{\$}_{B_3} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{5.30}$$

onde  $\vec{0}$  é o vetor nulo de dimensão  $6 \times 1$ .

O cálculo das magnitudes das velocidades no sistema cartesiano a partir das magnitudes das velocidades nas juntas atuadas do manipulador (cinemática diferencial direta) é feito através da

Eq. (5.1) onde todos os helicóides normalizados da cadeia modificada 3PPSR + PPS são representados no mesmo sistema de coordenadas.

Cabe destacar que a cinemática direta do manipulador paralelo 3PPSR fornece as magnitudes da velocidade do efetuador no sistema cartesiano caracterizado como sistema- $C$ . É possível obter as magnitudes da velocidade do efetuador final no sistema de coordenadas cilíndrico ou esférico adicionando a cadeia virtual RPPS, descrita na seção 3.3.2, ou a cadeia virtual RRPS, apresentada na seção 3.3.3, respectivamente, entre a base e o efetuador seguindo o mesmo procedimento.

### 5.3.2 Cinemática diferencial inversa

Empregando a equação de restrição, Eq. (4.41) pode-se também calcular as magnitudes das velocidades nas juntas atuadas do manipulador 3PPSR a partir das magnitudes das velocidades no efetuador dadas em coordenadas cartesianas, definidas pela cadeia virtual PPS (cinemática diferencial inversa). Para tanto escolhe-se as juntas da cadeia virtual como primárias e as juntas atuadas e passivas do manipulador como secundárias. Neste caso

$$\begin{aligned}
 \Psi_s &= [\Psi_{A_1} \Psi_{B_1} \Psi_{C_1} \Psi_{D_1} \Psi_{E_1} \Psi_{F_1} \Psi_{A_2} \Psi_{B_2} \Psi_{C_2} \Psi_{D_2} \Psi_{E_2} \Psi_{F_2} \Psi_{A_3} \Psi_{B_3} \Psi_{C_3} \Psi_{D_3} \Psi_{E_3} \Psi_{F_3}]^T \\
 \Psi_p &= [\Psi_{px} \Psi_{py} \Psi_{pz} \Psi_{rx} \Psi_{ry} \Psi_{rz}]^T \\
 N_s &= \begin{bmatrix} \hat{\$}_{A_1} \hat{\$}_{B_1} \hat{\$}_{C_1} \hat{\$}_{D_1} \hat{\$}_{E_1} \hat{\$}_{F_1} - \hat{\$}_{A_2} - \hat{\$}_{B_2} - \hat{\$}_{C_2} - \hat{\$}_{D_2} - \hat{\$}_{E_2} - \hat{\$}_{F_2} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} \\ \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \hat{\$}_{A_2} & \hat{\$}_{B_2} & \hat{\$}_{C_2} & \hat{\$}_{D_2} & \hat{\$}_{E_2} & \hat{\$}_{F_2} & -\hat{\$}_{A_3} - \hat{\$}_{B_3} - \hat{\$}_{C_3} - \hat{\$}_{D_3} - \hat{\$}_{E_3} - \hat{\$}_{F_3} \\ \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \hat{\$}_{A_3} & \hat{\$}_{B_3} & \hat{\$}_{C_3} & \hat{\$}_{D_3} & \hat{\$}_{E_3} & \hat{\$}_{F_3} \end{bmatrix} \\
 N_p &= \begin{bmatrix} \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} \\ \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} \\ -\hat{\$}_{px} - \hat{\$}_{py} - \hat{\$}_{pz} - \hat{\$}_{rx} - \hat{\$}_{ry} - \hat{\$}_{rz} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{5.31}$$

O cálculo das magnitudes das velocidades das juntas atuadas do manipulador é feito usando a Eq. (5.1) com as definições da Eq. (5.31), onde todos os helicóides normalizados da cadeia modificada 3PPSR + PPS são representados no mesmo sistema de coordenadas.

Esta equação expressa a cinemática diferencial inversa do manipulador paralelo 3PPSR

com as magnitudes da velocidade do efetuador dadas no sistema cartesiano definido pela cadeia virtual *PPPS* apresentada na seção 3.3.1. Similarmente, é possível obter as magnitudes das velocidades nas juntas atuadas do manipulador a partir das magnitudes da velocidade do efetuador no sistema cilíndrico, apresentado na seção 3.3.2, ou no sistema esférico, descrito na seção 3.3.3, adicionando a cadeia virtual *RPPS* ou a cadeia virtual *RRPS*, respectivamente.

Novamente, se as velocidades das juntas passivas não são de interesse podem ser eliminadas sistematicamente, tanto para a cinemática inversa como para a cinemática direta, através do procedimento apresentado no apêndice A.

Fica evidenciado que o procedimento para manipuladores paralelos espaciais é o mesmo, ou seja, segue-se o mesmo método sistemático que possibilita a escolha do sistema de coordenadas (cartesiano, cilíndrico etc.) mais conveniente à aplicação. Observa-se também que neste caso as matrizes são de ordem maior que no caso plano e que nem sempre é possível obter uma matriz simples para inverter na cinemática direta.

## 5.4 Manipulador redundante *RRRR*

Nesta seção é apresentada a cinemática diferencial do manipulador redundante plano *RRRR*, mostrado na Fig. 34.

No caso em que se deseja obter informações ou introduzir características no movimento do efetuador do manipulador, sua cadeia cinemática pode ser modificada pela introdução de uma cadeia virtual entre a base e o efetuador.

Na seqüência é apresentada a cinemática diferencial direta para o manipulador redundante *RRRR* usando cadeias virtuais, a possibilidade de monitorar a colisão deste manipulador com um obstáculo e a cinemática diferencial inversa do manipulador através da imposição de restrições cinemáticas por meio de cadeias virtuais, que podem ser usadas por exemplo para evitar uma colisão.

### 5.4.1 Cinemática diferencial direta

Considerando que as informações do movimento do efetuador estão em coordenadas cartesianas, a cadeia virtual escolhida é a  $PPR$  que representa um sistema de coordenadas cartesiano como apresentado na seção 3.2.1. Assim, a cadeia modificada do manipulador corresponde à apresentada na seção 4.1. A equação de restrição relativa a esta cadeia modificada ( $RRRR+PPR$ ) é a Eq. (4.6).

Empregando esta equação pode-se obter informações do movimento do efetuador no sistema de coordenadas cartesiano, definido pela cadeia virtual  $PPR$ , a partir do movimento nas juntas do manipulador, escolhendo as juntas do manipulador como primárias e as da cadeia virtual como secundárias. Assim,

$$\Psi_p = [\Psi_A \Psi_B \Psi_C \Psi_D]^T \quad (5.32)$$

$$\Psi_s = [\Psi_{px} \Psi_{py} \Psi_{rz}]^T \quad (5.33)$$

$$N_p = [\hat{\$}_A \hat{\$}_B \hat{\$}_C \hat{\$}_D] \quad (5.34)$$

$$N_s = [-\hat{\$}_{px} -\hat{\$}_{py} -\hat{\$}_{pz}] \quad (5.35)$$

e o cálculo das magnitudes das velocidades no sistema cartesiano a partir das magnitudes das velocidades nas juntas do manipulador (cinemática diferencial direta) é feito através da Eq. (5.1).

Representando todos os helicóides normalizados da cadeia modificada do  $RRRR+PPR$  no mesmo sistema de coordenadas calculam-se as magnitudes das velocidades no efetuador através de

$$\begin{bmatrix} \Psi_{px} \\ \Psi_{py} \\ \Psi_{rz} \end{bmatrix} = - \left[ -\hat{\$}_{px} -\hat{\$}_{py} -\hat{\$}_{pz} \right]^{-1} \left[ \hat{\$}_A \hat{\$}_B \hat{\$}_C \hat{\$}_D \right] \begin{bmatrix} \Psi_A \\ \Psi_B \\ \Psi_C \\ \Psi_D \end{bmatrix} \quad (5.36)$$

A Eq. (5.36) fornece as magnitudes da velocidade do efetuador no sistema cartesiano. Estas magnitudes podem também ser obtidas diretamente no sistema polar se a cadeia virtual adicionada entre a base e o efetuador fosse a cadeia  $RPR$ .

### 5.4.2 Detecção de colisão

A cadeia virtual pode ser usada também para detectar a possibilidade de colisão de um elo do manipulador com um obstáculo fixo à base como mostrado na Fig. 38.

Considere que o interesse esteja em detectar uma colisão do elo 3 com o obstáculo. Para tanto é preciso monitorar o movimento entre eles. Isso pode ser feito através de uma cadeia *RPR* conectada entre o elo 3 e o obstáculo como apresentado na cadeia modificada da Fig. 39, cujos grafos  $G_C$  e  $G_M$  estão mostrados na Fig. 40.

A equação de restrição desta cadeia modificada esta expressa na Eq. (4.12).

Neste caso, resolvendo a cinemática diferencial direta do manipulador é possível monitorar o movimento linear entre o elo 3 e o obstáculo. Para isto, escolhem-se as juntas reais do manipulador (juntas atuadas):  $A, B, C$  e  $D$ , como primárias e as juntas virtuais:  $rz1, pr, rz2$ , que definem o movimento entre o elo 3 e o obstáculo, como secundárias. Assim,

$$\begin{aligned} \Psi_p &= \begin{bmatrix} \Psi_A & \Psi_B & \Psi_C & \Psi_D \end{bmatrix} \\ \Psi_s &= \begin{bmatrix} \Psi_{rz1} & \Psi_{pr} & \Psi_{rz2} \end{bmatrix} \\ N_p &= \begin{bmatrix} \hat{\$}_A & \hat{\$}_B & \hat{\$}_C & \vec{0} \end{bmatrix} \\ N_s &= \begin{bmatrix} -\hat{\$}_{rz1} - \hat{\$}_{pr} - \hat{\$}_{rz2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.37)$$

onde  $\vec{0}$  é o vetor nulo de dimensão  $3 \times 1$ .

As magnitudes das velocidades das juntas virtuais são calculadas com as definições da Eq. (5.37) substituídas na Eq. (5.1), representando todos os helicóides normalizados em um mesmo sistema de coordenadas, assim

$$\begin{bmatrix} \Psi_{rz1} \\ \Psi_{pr} \\ \Psi_{rz2} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} -\hat{\$}_{rz1} - \hat{\$}_{pr} - \hat{\$}_{rz2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{\$}_A & \hat{\$}_B & \hat{\$}_C & \vec{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_A \\ \Psi_B \\ \Psi_C \\ \Psi_D \end{bmatrix} \quad (5.38)$$

onde  $\Psi_{pr}$  é a variável que indica o movimento linear na direção da colisão entre o elo 3 e o obstáculo e pode ser usada para calcular a distância entre eles em qualquer momento através da

integração desta variável.

### 5.4.3 Cinemática diferencial inversa

Usando a mesma cadeia modificada da Fig. 36, poder-se-ia pensar em impor o movimento do efetuador selecionando as juntas virtuais como primárias e as juntas reais do manipulador como secundárias, *i.e.* a cinemática diferencial inversa, assim

$$\Psi_p = \left[ \Psi_{px} \Psi_{py} \Psi_{pz} \right]^T \quad (5.39)$$

$$\Psi_s = \left[ \Psi_A \Psi_B \Psi_C \Psi_D \right]^T \quad (5.40)$$

$$N_p = \left[ -\hat{\$}_{px} - \hat{\$}_{py} - \hat{\$}_{pz} \right] \quad (5.41)$$

$$N_s = \left[ \hat{\$}_A \hat{\$}_B \hat{\$}_C \hat{\$}_D \right] \quad (5.42)$$

Porém, nestas circunstâncias a Eq. (5.1) não pode ser usada devido a  $N_s$ , Eq. (5.42), ser uma matriz  $3 \times 4$  e não possuir inversa. Isto é uma consequência direta da redundância do manipulador RRRR. Portanto, para resolver a cinemática diferencial inversa de manipuladores redundantes é preciso impor restrições adicionais à cadeia cinemática. Isso pode ser feito mediante a adição de cadeias virtuais.

Considere que a restrição cinemática adicional ao manipulador RRRR seja impor a velocidade na direção do eixo  $Y$  entre a base e um ponto de referência do elo 2. Isto pode ser feito adicionando outra cadeia virtual PPR, cujas juntas virtuais são  $px'$ ,  $py'$  e  $rz'$ , entre a base e o ponto de referência do elo 2. A cadeia modificada resultante é mostrada na Fig. 57

O digrafo de acoplamento correspondente a esta cadeia modificada é obtido pela adição do digrafo de acoplamento da cadeia virtual PPR (Fig. 21) ao digrafo de acoplamento da cadeia modificada RRRR + PPR (Fig. 37) entre a base e o elo 2. O digrafo de acoplamento da cadeia cinemática modificada da Fig. 57 e o seu digrafo de movimento correspondente são iguais pois as juntas da cadeia modificada apresentam apenas um grau de liberdade. Os digrafos  $G_C/G_M$  desta cadeia modificada são apresentados na Fig. 58.

Considerando todos os heligiros da cadeia cinemática modificada (arcos de  $G_M$ ) representa-

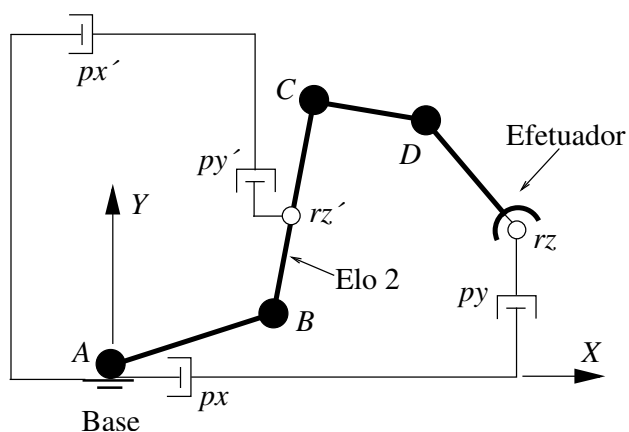


Figura 57: Cadeia cinemática modificada do manipulador redundante  $RRRR$  no espaço operacional cartesiano restringindo (ou monitorando) a velocidade na direção do eixo  $Y$  entre a base e o elo 2

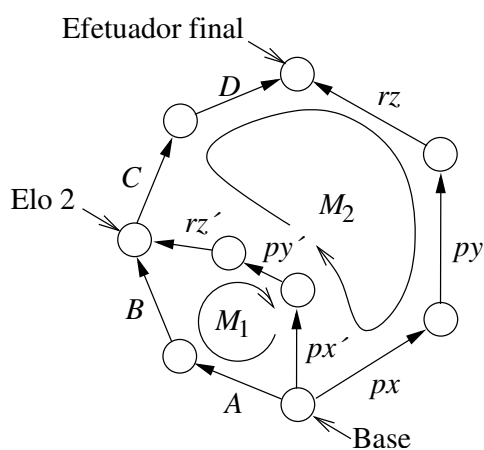


Figura 58: Grafos  $G_C/G_M$  da cadeia modificada redundante  $RRRR$  restringindo (ou monitorando) a velocidade entre a base e o elo 2 na direção do eixo  $Y$

dos em um mesmo sistema de coordenadas obtém-se a matriz de helicóides diretos  $D$  da cadeia modificada.

$$D = \begin{bmatrix} \hat{\$}_A & \hat{\$}_B & \hat{\$}_C & \hat{\$}_D & \hat{\$}_{px'} & \hat{\$}_{py'} & \hat{\$}_{rz'} & \hat{\$}_{px} & \hat{\$}_{py} & \hat{\$}_{rz} \end{bmatrix} \quad (5.43)$$

A matriz de malhas  $B$ , com base no sentido das malhas  $M_1$  e  $M_2$  do digrafo  $G_M$ , é

$$B = \begin{bmatrix} & A & B & C & D & px' & py' & rz' & px & py & rz \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} M_1 \\ M_2 \end{matrix} \quad (5.44)$$

A matriz de rede  $N$  da cadeia modificada, calculada através da Eq. (2.20), é

$$N = \begin{bmatrix} \hat{\$}_A & \hat{\$}_B & 0 & \vec{0} & -\hat{\$}_{px'} & -\hat{\$}_{py'} & -\hat{\$}_{rz'} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} \\ \vec{0} & \vec{0} & \hat{\$}_C & \hat{\$}_D & \hat{\$}_{px'} & \hat{\$}_{py'} & \hat{\$}_{rz'} & -\hat{\$}_{px} & -\hat{\$}_{py} & -\hat{\$}_{rz} \end{bmatrix} \quad (5.45)$$

onde  $\vec{0}$  é o vetor nulo de dimensão  $3 \times 1$ .

O vetor das magnitudes dos heligiros  $\Psi$  é formado pela magnitude da velocidade de cada junta da cadeia modificada

$$\Psi = \begin{bmatrix} \Psi_A & \Psi_B & \Psi_C & \Psi_D & \Psi_{px'} & \Psi_{py'} & \Psi_{rz'} & \Psi_{px} & \Psi_{py} & \Psi_{rz} \end{bmatrix}^T \quad (5.46)$$

A equação de restrição da cadeia modificada do manipulador redundante RRRR no espaço operacional cartesiano 2D, visando impor a velocidade entre a base e o elo 2 é calculada substi-



tuindo as Eqs. (5.45) e (5.46) na Eq.(2.26) e resulta

$$\begin{bmatrix} \hat{\$}_A & \hat{\$}_B & \vec{0} & \vec{0} & -\hat{\$}_{px'} & -\hat{\$}_{py'} & -\hat{\$}_{rz'} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} \\ \vec{0} & \vec{0} & \hat{\$}_C & \hat{\$}_D & \hat{\$}_{px'} & \hat{\$}_{py'} & \hat{\$}_{rz'} & -\hat{\$}_{px} & -\hat{\$}_{py} & -\hat{\$}_{rz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_A \\ \Psi_B \\ \Psi_C \\ \Psi_D \\ \Psi_{px'} \\ \Psi_{py'} \\ \Psi_{rz'} \\ \Psi_{px} \\ \Psi_{py} \\ \Psi_{rz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{bmatrix} \quad (5.47)$$

Na cinemática inversa do manipulador redundante RRRR são conhecidas as componentes da velocidade do efetuador e a velocidade na direção do eixo  $Y$  entre a base e o elo 2. Deseja-se calcular as magnitudes das velocidades nas juntas do manipulador. Cabe observar que a magnitude da velocidade  $\Psi_{py'}$ , da junta prismática virtual na direção do eixo  $Y$  entre a base e o elo 2 é imposta de acordo com um critério conveniente.

Para a estabelecer a cinemática inversa do RRRR escolhem-se as juntas reais da cadeia modificada (juntas atuadas do manipulador):  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  e as juntas virtuais  $px'$  e  $rz'$  como secundárias, e as juntas virtuais da cadeia adicionada entre a base e o efetuador:  $px$ ,  $py$  e  $rz$ , que determinam a velocidade do efetuador no espaço operacional, e a junta virtual  $py'$ , que determina o movimento entre a base e o elo 2, como primárias. Neste caso

$$\begin{aligned} \Psi_p &= \begin{bmatrix} \Psi_{py'} & \Psi_{px} & \Psi_{py} & \Psi_{rz} \end{bmatrix} \\ \Psi_s &= \begin{bmatrix} \Psi_A & \Psi_B & \Psi_C & \Psi_D & \Psi_{px'} & \Psi_{rz'} \end{bmatrix} \\ N_p &= \begin{bmatrix} -\hat{\$}_{py'} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} \\ \hat{\$}_{py'} & -\hat{\$}_{px} & -\hat{\$}_{py} & -\hat{\$}_{rz} \end{bmatrix} \\ N_s &= \begin{bmatrix} \hat{\$}_A & \hat{\$}_B & \vec{0} & \vec{0} & -\hat{\$}_{px'} & -\hat{\$}_{rz'} \\ \vec{0} & \vec{0} & \hat{\$}_C & \hat{\$}_D & \hat{\$}_{px'} & \hat{\$}_{rz'} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.48)$$

As magnitudes das velocidades das juntas atuadas do manipulador são calculadas com as

definições da Eq. (5.48) substituídas na Eq. (5.1) onde todos os helicóides normalizados são representados em um mesmo sistema de coordenadas. Assim, as magnitudes das velocidades das juntas reais do manipulador, componentes de  $\Psi_s$ , são calculadas como

$$\begin{bmatrix} \Psi_A \\ \Psi_B \\ \Psi_C \\ \Psi_D \\ \Psi_{px'} \\ \Psi_{rz'} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \hat{\$}_A & \hat{\$}_B & \vec{0} & \vec{0} & -\hat{\$}_{px'} & -\hat{\$}_{rz'} \\ \vec{0} & \vec{0} & \hat{\$}_C & \hat{\$}_D & \hat{\$}_{px'} & \hat{\$}_{rz'} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -\hat{\$}_{py'} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} \\ \hat{\$}_{py'} & -\hat{\$}_{px} & -\hat{\$}_{py} & -\hat{\$}_{rz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_{py'} \\ \Psi_{px} \\ \Psi_{py} \\ \Psi_{rz} \end{bmatrix} \quad (5.49)$$

Da Eq. (5.49) observa-se que a matriz  $N_s$  é quadrada e conseqüentemente pode ser invertida a menos que exista dependência linear entre algumas de suas colunas.

Dado que a cadeia virtual  $PPR$ , que condiciona o movimento entre a base e o elo 2, é adicionada em paralelo à cadeia cinemática modificada  $RRRR + PPR$ , conseqüentemente as arestas correspondentes às suas juntas ( $px'$ ,  $py'$  e  $rz'$ ) não compartilham as mesmas malhas com as arestas correspondentes às outras juntas da cadeia modificada no grafo de movimento  $G_M$  da Fig. 58.

Assim, na matriz de malhas  $B$  (Eq. (5.44)), as colunas correspondentes às juntas da cadeia virtual  $PPR$  ( $px'$ ,  $py'$  e  $rz'$ ) são linearmente independentes às colunas correspondentes as outras juntas da cadeia modificada. Portanto, também na matriz de rede  $N$  (Eq. (5.45)), as colunas correspondentes as juntas virtuais da cadeia  $PPR$  ( $px'$ ,  $py'$  e  $rz'$ ), por definição linearmente independentes entre si (ver seção 3.1), são linearmente independentes às outras colunas desta matriz. Conseqüentemente, as colunas correspondentes às juntas virtuais da cadeia  $PPR$  ( $px'$ ,  $py'$  e  $rz'$ ) não introduzem singularidades adicionais à cadeia cinemática modificada.

Portanto, a cinemática inversa de manipuladores redundantes por meio da adição de cadeias virtuais, apresentada nesta seção, não introduz singularidades algorítmicas na sua solução. As singularidades algorítmicas são aquelas adicionadas pelo método e que não estão relacionadas com a configuração do manipulador.

De uma forma geral, a cinemática diferencial inversa de manipuladores redundantes requer uma condição adicional para ser resolvida. Neste método esta condição é uma restrição de movi-

mento imposta de acordo com a conveniência através da adição de uma cadeia virtual à cadeia do manipulador. A seleção desta restrição de movimento é baseada na tarefa e na geometria do manipulador.

O método apresentado nesta tese para calcular a cinemática diferencial de manipuladores redundantes usando cadeias virtuais possui as mesmas características do método aplicado a manipuladores não redundantes no que diz respeito a seleção do sistema de coordenadas mais conveniente para a representação do espaço operacional.

A metodologia apresentada para resolver a cinemática diferencial inversa para manipuladores redundantes apresentado nesta tese, não apresenta as inconsistências dimensionais que aparecem nos métodos clássicos principais, sinalizadas por (HUNT, 2000)(DOWNING, 2002), a saber: a inversa generalizada e o jacobiano estendido, veja mais detalhes no apêndice B.

Nesta seção fica evidenciado que a matriz a ser invertida é uma matriz quadrada e que, portanto, não requer pseudo-inversa para a sua inversão. Os métodos baseados na inversa generalizada (KLEIN; HUANG, 1983) (veja apêndice B) para resolver a cinemática diferencial de manipuladores redundantes usam a pseudo-inversa da matriz jacobiana para a sua inversão (NENCHEV, 1989). A pseudo-inversa apresenta inconvenientes enquanto que não é garantido o movimento conservativo (KLEIN; HUANG, 1983), *i.e.* movimentos repetitivos do efetuador não resultam necessariamente em movimentos repetitivos nas juntas, e, adicionalmente, o manipulador pode entrar em regiões próximas das singularidades do jacobiano onde a mínima norma que deseja-se minimizar tende a infinito (HOLLERBACH; SUH, 1986)(BAKER; WAMPLER, 1988)(NENCHEV, 1989).

Destaca-se que usando cadeias virtuais para resolver a cinemática diferencial de manipuladores redundantes não são introduzidas singularidades algorítmicas, como acontece na solução por meio da inversa generalizada (CHIAVERINI, 1997) e do jacobiano estendido (NENCHEV, 1989)(KLEIN; CHU-JENQ; AHMED, 1993).

A condição cinemática adicional imposta pelo método descrito nesta seção mapeia uma restrição do espaço operacional para o espaço das juntas do manipulador e não considera processos de minimização ou funções de restrição a nível de posição como os métodos baseados na inversa generalizada e no jacobiano estendido.

### 5.4.4 Desvio de colisão

A restrição cinemática imposta por uma cadeia virtual no cálculo da cinemática diferencial inversa de manipuladores redundantes pode ser utilizada para evitar a colisão entre o manipulador e um obstáculo.

Seja o elo 3 do manipulador  $RRRR$ , no espaço operacional cartesiano, em risco de colisão com um obstáculo como mostrado na Fig. 38. Assim, é preciso adicionar uma cadeia virtual  $PPR$  entre a base e o efetuador para impor a trajetória desejada ao efetuador, como mostrado na Fig. 36, e outra cadeia virtual  $RPR$  para impor uma velocidade linear na direção de colisão definida pelo elo 3 e o obstáculo, como mostrado na Fig. 39, simultaneamente. Ou seja, neste caso, o movimento entre o elo 3 e o obstáculo é a restrição adicional para resolver a cinemática diferencial inversa do manipulador redundante  $RRRR$ .

A cadeia modificada do manipulador e seus grafos  $G_C/G_M$  correspondentes são apresentados na Fig. 59 e na Fig. 60.

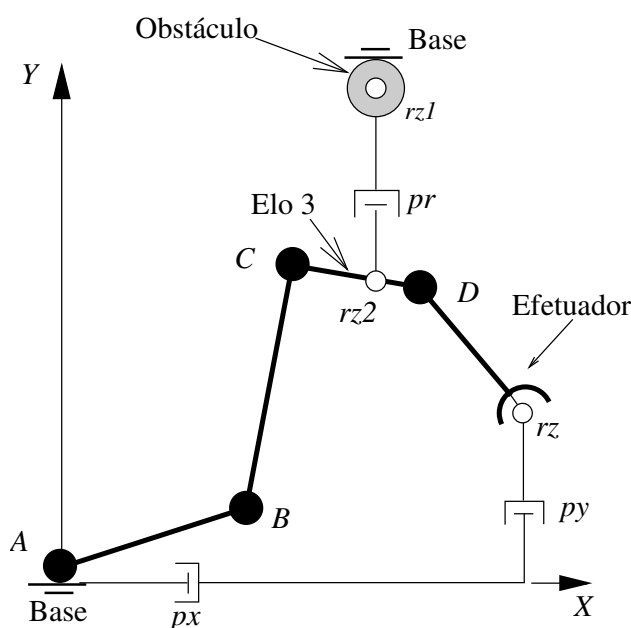


Figura 59: Cadeia modificada do manipulador redundante  $RRRR$  no espaço operacional cartesiano restringindo o movimento do elo 3 em relação ao obstáculo (base) em coordenadas polares

A equação de restrição da cadeia modificada é baseada no digrafo de movimento da Fig. 60.

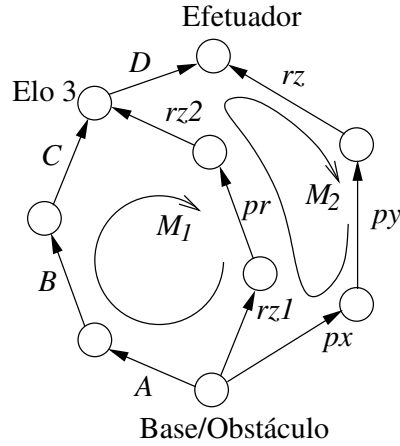


Figura 60: Grafos  $G_C/G_M$  da cadeia modificada redundante RRRR restringindo o movimento entre o elo 3 e o obstáculo

A matriz de helicóides diretos  $D$  contém os helicóides normalizados correspondentes a todos os arcos de  $G_M$ , assim

$$D = \begin{bmatrix} \hat{\$}_A & \hat{\$}_B & \hat{\$}_C & \hat{\$}_D & \hat{\$}_{rz1} & \hat{\$}_{pr} & \hat{\$}_{rz2} & \hat{\$}_{px} & \hat{\$}_{py} & \hat{\$}_{rz} \end{bmatrix} \quad (5.50)$$

A matriz de malhas  $B$ , com base no sentido das malhas  $M_1$  e  $M_2$  do digrafo  $G_M$ , é

$$B = \begin{bmatrix} & A & B & C & D & rz1 & pr & rz2 & px & py & rz \\ \begin{matrix} M_1 \\ M_2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (5.51)$$

A matriz de rede da cadeia modificada  $N$ , calculada através da Eq. (2.20), é

$$N = \begin{bmatrix} \hat{\$}_A & \hat{\$}_B & \hat{\$}_C & \vec{0} & -\hat{\$}_{rz1} & -\hat{\$}_{pr} & -\hat{\$}_{rz2} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} \\ \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \hat{\$}_D & \hat{\$}_{rz1} & \hat{\$}_{pr} & \hat{\$}_{rz2} & -\hat{\$}_{px} & -\hat{\$}_{py} & -\hat{\$}_{rz} \end{bmatrix} \quad (5.52)$$

onde  $\vec{0}$  é o vetor nulo de dimensão  $3 \times 1$ .

O vetor das magnitudes dos heligiros  $\Psi$  é formado pela magnitude da velocidade de cada junta da cadeia modificada

$$\Psi = \left[ \Psi_A \quad \Psi_B \quad \Psi_C \quad \Psi_D \quad \Psi_{rz1} \quad \Psi_{pr} \quad \Psi_{rz2} \quad \Psi_{px} \quad \Psi_{py} \quad \Psi_{rz} \right]^T \quad (5.53)$$

A equação de restrição da cadeia modificada do manipulador redundante RRRR no espaço operacional cartesiano 2D, visando evitar a colisão entre o obstáculo e o elo 3 é calculada substituindo as Eqs. (5.52) e (5.53) na Eq.(2.26)

$$\begin{bmatrix} \hat{\$}_A & \hat{\$}_B & \hat{\$}_C & \vec{0} & -\hat{\$}_{rz1} & -\hat{\$}_{pr} & -\hat{\$}_{rz2} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} \\ \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \hat{\$}_D & \hat{\$}_{rz1} & \hat{\$}_{pr} & \hat{\$}_{rz2} & -\hat{\$}_{px} & -\hat{\$}_{py} & -\hat{\$}_{rz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_A \\ \Psi_B \\ \Psi_C \\ \Psi_D \\ \Psi_{rz1} \\ \Psi_{pr} \\ \Psi_{rz2} \\ \Psi_{px} \\ \Psi_{py} \\ \Psi_{rz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{bmatrix} \quad (5.54)$$

Na cinemática inversa do manipulador redundante RRRR são conhecidas as componentes da velocidade do efetuador, no sistema cartesiano, e a velocidade na direção da junta prismática virtual  $pr$  entre o elo 3 e o obstáculo e deseja-se calcular as magnitudes das velocidades nas juntas do manipulador. Cabe observar que a magnitude da velocidade  $\Psi_{pr}$ , da junta prismática virtual na direção da colisão entre o obstáculo e o elo 3, é imposta de acordo com um critério conveniente.

Para a estabelecer a cinemática inversa do RRRR, conforme a Eq. (5.1), escolhem-se as juntas reais da cadeia modificada (juntas atuadas do manipulador):  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  e as juntas virtuais  $rz1$  e  $rz2$  como secundárias, e as juntas virtuais da cadeia adicionada entre a base e o efetuador:  $px$ ,  $py$  e  $rz$ , que determinam a velocidade do efetuador no espaço operacional, e a junta virtual  $pr$ , que determina o movimento entre o obstáculo e o elo 3, como primárias. Neste

caso

$$\begin{aligned}
 \Psi_p &= \begin{bmatrix} \Psi_{pr} & \Psi_{px} & \Psi_{py} & \Psi_{rz} \end{bmatrix}^T \\
 \Psi_s &= \begin{bmatrix} \Psi_A & \Psi_B & \Psi_C & \Psi_D & \Psi_{rz1} & \Psi_{rz2} \end{bmatrix}^T \\
 N_p &= \begin{bmatrix} -\hat{\$}_{pr} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} \\ \hat{\$}_{pr} & -\hat{\$}_{px} & -\hat{\$}_{py} & -\hat{\$}_{rz} \end{bmatrix} \\
 N_s &= \begin{bmatrix} \hat{\$}_A & \hat{\$}_B & \hat{\$}_C & \vec{0} & -\hat{\$}_{rz1} & -\hat{\$}_{rz2} \\ \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \hat{\$}_D & \hat{\$}_{rz1} & \hat{\$}_{rz2} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{5.55}$$

onde  $\vec{0}$  é o vetor nulo de dimensão  $3 \times 1$ .

As magnitudes das velocidades das juntas atuadas do manipulador são calculadas com as definições da Eq. (5.55) substituídas na Eq. (5.1) onde todos os helicóides normalizados são representados em um mesmo sistema de coordenadas. Assim, as magnitudes das velocidades das juntas reais do manipulador, componentes de  $\Psi_s$  são dadas por

$$\begin{bmatrix} \Psi_A \\ \Psi_B \\ \Psi_C \\ \Psi_D \\ \Psi_{rz1} \\ \Psi_{rz2} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \hat{\$}_A & \hat{\$}_B & \hat{\$}_C & \vec{0} & -\hat{\$}_{rz1} & -\hat{\$}_{rz2} \\ \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \hat{\$}_D & \hat{\$}_{rz1} & \hat{\$}_{rz2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -\hat{\$}_{pr} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} \\ \hat{\$}_{pr} & -\hat{\$}_{px} & -\hat{\$}_{py} & -\hat{\$}_{rz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_{pr} \\ \Psi_{px} \\ \Psi_{py} \\ \Psi_{rz} \end{bmatrix} \tag{5.56}$$

A partir da Eq. (5.56) calculam-se as magnitudes das velocidades das juntas reais para que, simultaneamente, o efetuador realize a tarefa desejada no espaço operacional e o elo 3 se afaste do obstáculo com a velocidade especificada para a magnitude do heligiro correspondente a junta virtual  $pr$ .

Para isto inverte-se a matriz quadrada  $N_s$  da Eq. (5.56) a menos que as colunas correspondentes a juntas reais  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ , estejam em uma configuração singular, pois as colunas correspondentes às juntas virtuais  $rz1$  e  $rz2$  da cadeia adicionada para evitar a colisão são linearmente independentes às das juntas reais e entre si como apresentado na seção 5.4.3.

No momento em que o elo 3 e o obstáculo não estejam em risco de colisão é possível trocar a

condição de desvio da colisão imposta pela cadeia virtual  $RPR$  para outra condição conveniente, por exemplo a condição de velocidade entre a base e o elo 2, apresentada na seção 5.4.3. A seleção conveniente destas condições e a transição entre elas esta fora do escopo desta tese.

O uso do método sistemático apresentado nesta tese para resolver a cinemática diferencial inversa de manipuladores redundantes usando cadeias virtuais para evitar a colisão possui as mesmas características do método aplicado a manipuladores não redundantes no que diz respeito a seleção do sistema de coordenadas mais convenientes para a representação do espaço operacional.

Similarmente ao exemplo da seção 5.4.3, não é requerido o uso da pseudo-inversa, não existem inconsistências dimensionais e não são introduzidas singularidades algorítmicas na solução da cinemática inversa do manipulador redundante quando se requer evitar a colisão entre o manipulador e um obstáculo.

## 5.5 Conclusões

A cinemática diferencial empregando cadeias virtuais foi apresentada neste capítulo para resolver a cinemática diferencial direta e inversa de manipuladores seriais, paralelos e redundantes, através da seleção apropriada das juntas primárias e secundárias da cadeia cinemática modificada, como apresentado na tabela 2.

Manipulador	Cinemática	Juntas Primárias	Juntas Secundárias
Paralelo	direta	atuadas	virtuais/passivas
	inversa	virtuais	atuadas/passivas
Serial	direta	atuadas	virtuais
	inversa	virtuais	atuadas
Redundante	direta	atuadas	virtuais
	inversa	virtuais	atuadas/virtuais

Tabela 2: Cinemática

Adicionalmente, a cinemática diferencial empregando cadeias virtuais permite enfrentar condições especiais dos manipuladores como o desvio ou a ultrapassagem de singularidades e a detecção ou o desvio de colisões, através da seleção de cadeias virtuais, juntas primárias e juntas secundárias convenientes. onde a junta de informação e a junta de restrição é a junta virtual que



Condição	Ação	Juntas Primárias	Juntas Secundárias
Singularidade	desvio	atuadas/virtuais	atuadas/virtuais
	ultra-passagem	atuadas/virtuais	atuadas/virtuais
Colisão	detecção	atuadas/virtuais	junta de informação + atuadas/virtuais
	desvio	junta de restrição + atuadas/virtuais	atuadas/virtuais

Tabela 3:

corresponde ao movimento do qual se quer obter informação ou impor restrição.

Neste capítulo foi calculada a cinemática diferencial de manipuladores utilizando cadeias cinemáticas virtuais. Os exemplos apresentados permitem concluir que:

1. A adição da cadeia virtual a um manipulador serial resulta em uma cadeia cinemática modificada fechada, com isto a aplicação do método de Kirchhoff-Davies é estendida também a manipuladores seriais.
2. A adição da cadeia virtual a um manipulador paralelo estende a aplicação do método de Kirchhoff-Davies, originalmente aplicado só na cinemática diferencial no espaço da juntas, para calcular a cinemática diferencial direta e inversa de interesse em robótica.
3. A cinemática diferencial direta e a cinemática diferencial inversa de manipuladores seriais ou paralelos empregando cadeias virtuais somente se diferenciam na seleção do conjunto das juntas primárias e das juntas secundárias. Para resolver a cinemática direta, as juntas primárias correspondem às juntas atuadas do manipulador e as juntas secundárias correspondem às juntas virtuais e, em caso de manipuladores paralelos, às juntas passivas do manipulador. Para resolver a cinemática inversa as juntas primárias correspondem às juntas virtuais e as juntas secundárias correspondem às juntas reais do manipulador: juntas atuadas e, em caso de manipuladores paralelos, juntas passivas.
4. O uso da metodologia permite evitar ou ultrapassar configurações singulares do manipulador, perdendo o controle sobre um ou mais grau de liberdade do efetuador, através da

permutação entre juntas do conjunto de juntas primárias e secundárias. Em geral, os graus de liberdade sobre o quais se perde o controle podem ser escolhidos a conveniência.

5. O uso das cadeias virtuais permite resolver outros problemas relacionados com o movimento de cadeias cinemáticas, como a cinemática inversa de manipuladores redundantes.
6. A cinemática diferencial de manipuladores utilizando cadeias virtuais permite ter um enfoque unificado e sistemático para a solução da cinemática diferencial direta e inversa de manipuladores seriais, paralelos e redundantes.

## 6 *Conclusões*

A principal contribuição desta tese é a introdução do conceito de *cadeia virtual* útil para obter informações ou introduzir restrições cinemáticas ao movimento de um corpo.

A metodologia apresentada nesta tese possibilita o cálculo da cinemática diferencial de robôs manipuladores mediante um enfoque unificado.

A base desta metodologia é o conceito de *cadeia virtual* introduzido no capítulo 3: a cadeia virtual é uma cadeia cinemática serial aberta composta por elos e juntas virtuais, onde os heligiro que representam os movimentos das juntas virtuais são linearmente independentes. Adicionalmente, a cadeia virtual não altera a mobilidade da cadeia cinemática à qual é adicionada.

De uma forma sintética a metodologia consiste em:

1. Escolher uma cadeia virtual de acordo com o movimento que se deseja monitorar ou impor entre um par de elos da cadeia cinemática do manipulador.
2. Construir a cadeia cinemática modificada com a cadeia virtual escolhida.
3. Obter a equação de restrição da cadeia cinemática modificada aplicando o método de Kirchhoff-Davies.
4. Escolher como primárias as juntas as quais se impõem o movimento e como secundárias as juntas cujo movimento é obtido do movimento das juntas primárias.
5. Calcular as velocidades das juntas secundárias em função das juntas primárias (cinemática diferencial).

Este enfoque é unificado porque possibilita o cálculo da cinemática diferencial de robôs

seriais e paralelos (em ambos casos a cadeia cinemática modificada é fechada), seja ela direta ou inversa (pela escolha adequada das juntas primárias e secundárias).

Como a cadeia virtual pode ser adicionada entre qualquer par de elos, o enfoque possibilita a construção de formas simples de monitorar ou impor o movimento entre qualquer par de elos. Abre-se, desta forma, uma nova possibilidade de enfrentar questões como o desvio ou a ultrapassagem de singularidades, a detecção e o desvio de colisões e a cinemática inversa de robôs redundantes.

A cinemática diferencial empregando cadeias virtuais é um enfoque analítico e completamente geral que permite uma percepção maior dos aspectos geométricos do problema.

Adicionalmente, nesta tese é sistematizado o método de Davies para resolver a cinemática no espaço das juntas de mecanismos e são estabelecidos termos em português correspondentes aos utilizados no desenvolvimento da teoria de helicóides.

Esta tese apresenta a solução analítica da cinemática diferencial usando cadeias virtuais para alguns manipuladores, sugere-se no futuro a implementação experimental do método através de simulações computacionais e exemplos numéricos.

Como perspectivas para trabalhos futuros de aplicação do método sugere-se a solução da cinemática diferencial de manipuladores híbridos e de manipuladores cooperativos.

Os manipuladores híbridos contêm cadeias seriais e paralelas acopladas, porém, após a adição de uma cadeia virtual conveniente, a equação de restrição de sua cadeia cinemática modificada pode ser resolvida seguindo a mesma metodologia proposta nesta tese.

Os manipuladores cooperativos consistem em vários manipuladores seriais que suportam um mesmo objeto nos seus efetuadores. Para representar o contato entre o efetuador e o objeto podem ser adicionadas juntas virtuais passivas entre eles. Portanto, um sistema de manipuladores cooperativos pode ser considerado como uma cadeia cinemática fechada (manipulador paralelo) e o método apresentado nesta tese pode ser aplicado diretamente.

O desenvolvimento desta tese deixa em aberto alguns problemas que requerem um estudo mais detalhado, como a implementação da transição contínua entre modelos da cinemática diferencial obtidos com diferentes conjuntos de juntas primárias e secundárias, como no desvio da singularidade e da colisão. Adicionalmente, é necessário estabelecer critérios de manipulabil-

---

idade de manipuladores redundantes que indiquem como atuar o grau de liberdade adicional quando o manipulador opera fora do risco de colisão.

Considerando a analogia entre cinemática diferencial e estática, evidenciada na representação destas grandezas através de helicóides, sugere-se o estudo da implementação do uso de cadeias virtuais na solução da estática de manipuladores em geral, usando helicóides para representar forças e momentos e aplicando a lei dos nós de Kirchhoff adaptada por Davies para estática.

## ***APÊNDICE A - Jacobiano para manipuladores paralelos***

O jacobiano de manipuladores paralelos, como em manipuladores seriais, relaciona somente as magnitudes das velocidades das juntas atuadas e as magnitudes das velocidades das juntas virtuais, *i.e.* as velocidades do efetuador no espaço operacional.

Por outro lado a cinemática diferencial usando cadeias virtuais de manipuladores paralelos, obtida através da equação de restrição, inclui termos correspondentes às juntas passivas do manipulador.

O jacobiano do manipulador paralelo pode ser obtido eliminando as juntas passivas da equação de restrição. Esta eliminação é realizada com base no princípio da *reciprocidade* entre helicóides.

Neste apêndice é apresentado um método para estabelecer o jacobiano de um manipulador paralelo a partir da equação de restrição obtida da cinemática diferencial utilizando cadeias virtuais. Inicialmente, é apresentada uma breve introdução ao *helicóide de força* ou *heliforça* e ao conceito de reciprocidade. Na seqüência, é exposto e aplicado o procedimento a um manipulador paralelo *3RRR* no plano cartesiano.

### **A.1 Heliforças: helicóides de força**

Nesta seção é mostrado que a ação (forças e momentos) sobre um corpo pode ser representada por um helicóide (screw) e uma magnitude. O *helicóide* é um elemento geométrico composto por uma reta direcionada (*eixo*) e por um parâmetro escalar com unidades de cumpri-

mento  $h$  (*passo*). Se a reta direcionada é representada por um vetor normalizado, o helicóide é chamado *helicóide normalizado* e é representado pelo símbolo  $\hat{\$}$ .

A ação geral sobre um corpo rígido em relação a um sistema de coordenadas, *i.e.* a ação combinada de força e binário, é designado nesta tese pelo termo *heliforça*  $\$_r$  que corresponde ao termo em inglês *wrench* utilizado na estática (HUNT, 2000). Qualquer sistema de forças e binários atuando em um corpo rígido (estática) podem ser reduzidos a uma força resultante  $f$  e um binário resultante  $C_O$  em relação à origem  $O$  do um sistema de coordenadas de interesse, ou seja podem ser reduzidos a uma heliforça. Em geral, o vetor de força resultante e o binário resultante não são colineares. Porém, pode-se demonstrar que existe um eixo único com respeito ao qual o sistema de forças e binários podem ser reduzidos a uma força resultante  $f$  atuando ao longo do eixo e um binário  $C_{\parallel}$  em torno do mesmo eixo (reta) (POINSOT, 1806).

Uma heliforça pode ser representada por um escalar  $\Psi_r$  que representa a magnitude da ação e por um helicóide normalizado  $\hat{\$}_r$  definido pelo vetor normalizado na direção do eixo único e pelo passo  $h_r$  definido por

$$h_r = \frac{C_{\parallel}}{f} \quad (\text{A.1})$$

Por exemplo, seja uma porca estática suportando um binário (*e.g.* aplicado por uma chave de boca) em torno do seu eixo, eixo do parafuso correspondente, e adicionalmente suportando a força induzida pelo binário na direção axial do parafuso. A ação sobre a porca pode ser definida pelo escalar correspondente a magnitude da força ( $\Psi_r$ ) e por um helicóide normalizado composto pelo vetor normalizado na direção do eixo (reta) do parafuso e pelo passo  $h_r$ , dado pela razão entre o binário e a força sobre a porca.

A ação sobre um corpo rígido em relação a um sistema de coordenadas se representada por uma heliforça é composta por um par de vetores, *i.e.*  $\$ = (f; C_O)^T$ , ou em coordenadas de helicóide  $(\mathcal{L}_r, \mathcal{M}_r, \mathcal{N}_r; \mathcal{P}_r^*, \mathcal{Q}_r^*, \mathcal{R}_r^*)^T$  (HUNT, 2000). O vetor  $f = (f_x, f_y, f_z) = (\mathcal{L}_r, \mathcal{M}_r, \mathcal{N}_r)$  representa a força resultante sobre o corpo. O vetor  $C_O = (C_{Ox}, C_{Oy}, C_{Oz})^T = (\mathcal{P}_r^*, \mathcal{Q}_r^*, \mathcal{R}_r^*)^T$  representa o momento resultante sobre o corpo em relação à origem  $O$  do sistema de coordenadas. O vetor  $C_O$  é formado por duas componentes de momento: a) a componente de momento paralela ao eixo de helicóide representada por  $C_{\parallel} = h_r f$ ; e b) a componente de momento normal ao eixo de helicóide representada por  $C_{\perp} = S_{O_r} \times f$  onde  $S_{O_r}$  é o vetor posição de qualquer ponto no eixo de helicóide, ver Fig. 61.

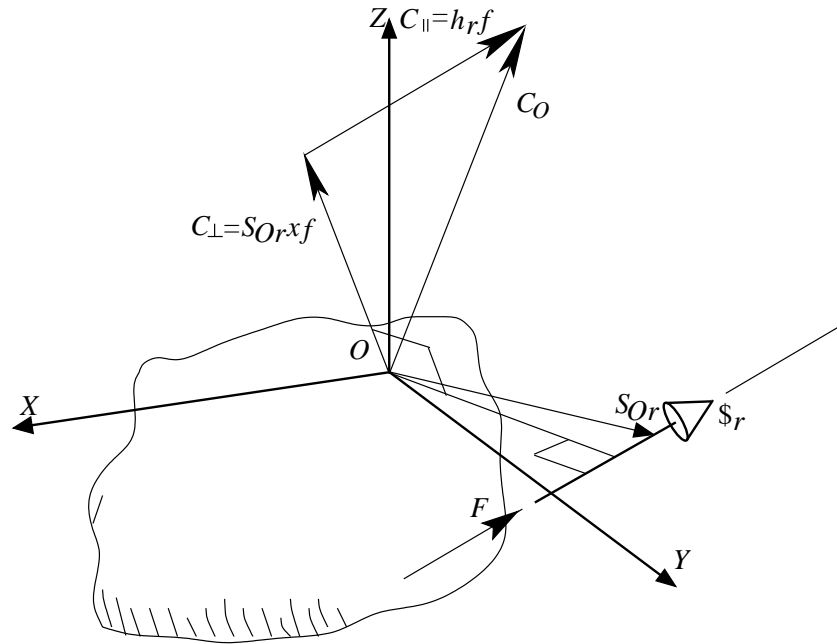


Figura 61: Componentes de uma heliforça

Uma heliforça pode ser representada pela sua magnitude  $\Psi_r$  e pelo seu helicóide normalizado  $\hat{\$}_r$  por meio de

$$\$ _r = \hat{\$}_r \Psi_r \quad (\text{A.2})$$

A magnitude  $\Psi_r$  da heliforça é a magnitude da força sobre o corpo  $\|f\|$ , se a ação é uma força pura, ou a magnitude do momento sobre o corpo  $\|C_O\|$  se a ação é um momento puro. Quando a ação sobre o corpo combina força e momento a magnitude da heliforça é a magnitude da força sobre o corpo  $\|f\|$ . Considerando uma heliforça dada por  $\$ _r = (f; C_O)^T = (\mathcal{L}_r, \mathcal{M}_r, \mathcal{N}_r; \mathcal{P}_r^*, \mathcal{Q}_r^*, \mathcal{R}_r^*)^T$ , o seu correspondente helicóide normalizado  $\hat{\$}_r$  é definido por um par de vetores,  $(L_r, M_r, N_r)$  e  $(P_r^*, Q_r^*, R_r^*)$  assim:

$$\hat{\$}_r = \begin{bmatrix} \mathcal{L}_r / \Psi_r \\ \mathcal{M}_r / \Psi_r \\ \mathcal{N}_r / \Psi_r \\ \mathcal{P}_r^* / \Psi_r \\ \mathcal{Q}_r^* / \Psi_r \\ \mathcal{R}_r^* / \Psi_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_r \\ M_r \\ N_r \\ P_r^* \\ Q_r^* \\ R_r^* \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$



sendo

$$\begin{bmatrix} L_r \\ M_r \\ N_r \\ P_r^* \\ Q_r^* \\ R_r^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_r \\ S_{O_r} \times S_r + h_r S_r \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

onde  $S_r$  é o vetor normalizado paralelo ao eixo de helicóide. Cabe destacar que o vetor  $(S_{O_r} \times S_r)$  determina o momento do eixo de helicóide em torno da origem do sistema de referência.

## A.2 Reciprocidade e taxa de trabalho

Se uma heliforça não nula ( $\Psi_r \neq 0$ ) atua em um corpo rígido de tal forma que não produz trabalho enquanto o corpo se move sob um heligiros infinitesimal ( $\Psi \neq 0$ ), os dois helicóides (heligiros e heliforça) são chamados *recíprocos* (BALL, 1900) (HUNT, 2000).

Seja um corpo rígido suportando uma heliforça ( $\$ _r = [f; C_O] = \Psi_r \hat{\$}_r$ ) enquanto se move sob um heligiros infinitesimal ( $\$ = [\omega; V_p] = \Psi \hat{\$}$ ), mais detalhes sobre heligiros na seção 2.1.

Assim, a taxa de trabalho realizada é dada por:

$$\delta W = C \cdot \omega_n + f \cdot V_p \quad (\text{A.5})$$

Por conveniência, define-se a transposta de um helicóide normalizado em coordenadas axiais de Plücker (TSAI, 1999), como

$$\begin{aligned} \hat{\$}^T &= [P^* \ Q^* \ R^* \ L \ M \ N] \\ \hat{\$}_r^T &= [P_r^* \ Q_r^* \ R_r^* \ L_r \ M_r \ N_r] \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Assim, a taxa de trabalho realizada é dada por:

$$\delta W = \hat{\$}_r^T \$ = \$^T \hat{\$}_r \quad (\text{A.7})$$

Portanto, a condição de reciprocidade pode ser expressa como

$$\delta W = \hat{\$}_r^T \$ = \$^T \$_r = 0 \quad (\text{A.8})$$

Adicionalmente, a Eq. (A.7) pode ser dada por

$$\begin{aligned} \delta W &= (\hat{\$}^T \Psi) \$_r \\ \delta W &= (\hat{\$}^T \$_r) \Psi \Rightarrow \frac{\delta W}{\Psi} = \hat{\$}^T \$_r \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

e a condição de reciprocidade pode ser dada por

$$\frac{\delta W}{\Psi} = 0 \quad (\text{A.10})$$

dado que  $\Psi \neq 0$ , a condição de reciprocidade resulta em

$$\hat{\$}^T \$_r = 0 \quad (\text{A.11})$$

### A.3 Jacobiano por eliminação das juntas passivas

Em manipuladores paralelos, diferentemente dos manipuladores seriais, nem todas as juntas são atuadas. A equação de restrição obtida através da cinemática diferencial unificada contém termos referentes as juntas reais atuadas e passivas e termos referentes as juntas virtuais (correspondentes a velocidades do efetuador). É possível obter o jacobiano, relação entre as juntas reais atuadas e as juntas virtuais, eliminando as juntas passivas da equação de restrição, como apresentado na seqüência.

Seja a equação de restrição do manipulador paralelo  $N\Psi = \vec{0}$  separada em juntas reais (atuadas e passivas do manipulador) e juntas virtuais (que definem o espaço operacional do efetuador)

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} N_r \\ \vdots \\ N_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_r \\ \vdots \\ \Psi_v \end{bmatrix} &= \vec{0} \\ N_r \Psi_r + N_v \Psi_v &= \vec{0} \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

onde  $N_r$  e  $N_v$  são as sub-matrizes de  $N$  correspondentes as juntas reais e virtuais, respectivamente, e  $\Psi_r$  e  $\Psi_v$  são as magnitudes das velocidades correspondentes as juntas reais e virtuais, respectivamente.

Um manipulador paralelo em geral é formado por  $n$  pernas, cadeias cinemáticas seriais da base ao efetuador, que contém  $l$  juntas atuadas e  $k$  juntas passivas, como por exemplo o manipulador  $3RRR$  da Fig. 62.

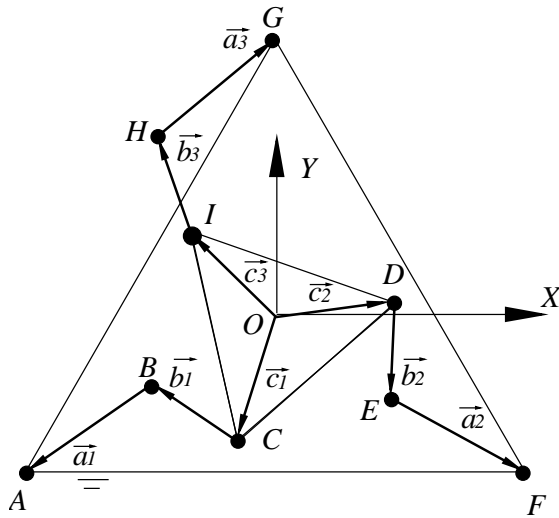


Figura 62: Manipulador paralelo  $3RRR$  no plano  $XY$

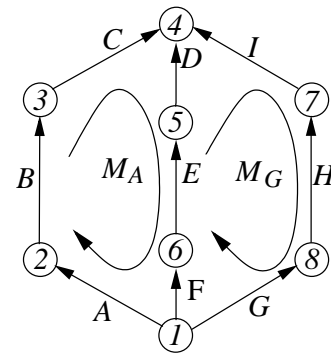


Figura 63: Digrafo  $G_M$  do manipulador paralelo  $3RRR$

Se os grupos de arestas que representam cada perna no grafo de movimento sempre estão direcionados da base para o efetuador, como mostra a Fig. 63, a matriz  $N_r$  da Eq. (A.12) é *banda diagonal*

$$N_r = \begin{bmatrix} \mathbb{A}_1 & -\mathbb{A}_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbb{A}_2 & -\mathbb{A}_3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \cdots & 0 & \ddots & -\mathbb{A}_n \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \mathbb{A}_n \end{bmatrix}_{(n-1) \text{ malhas} \times n \text{ pernas}} \quad (\text{A.13})$$

onde

$$\mathbb{A}_i = \left[ \hat{\$}_{pi,1} \quad \hat{\$}_{pi,2} \quad \cdots \quad \hat{\$}_{pi,n} \quad \hat{\$}_{ai,1} \quad \hat{\$}_{ai,2} \quad \cdots \quad \hat{\$}_{ai,l} \right] \text{ com } i = 1, \dots, n. \quad (\text{A.14})$$

sendo  $\hat{\$}_{pi,j}$  o helicóide normalizado correspondente à junta passiva  $j$  ( $j = 1, \dots, k$ ) da perna  $i$  ( $i = 1, \dots, n$ ), e  $\hat{\$}_{ai,j}$  o helicóide normalizado correspondente à junta atuada  $j$  ( $j = 1, \dots, l$ ) da perna  $i$  ( $i = 1, \dots, n$ ).

Para eliminar as juntas passivas mas não as ativas de cada perna (bloco  $\mathbb{A}_i$ ) da equação de restrição é utilizado o principio da reciprocidade.

Assim, considerando que somente a junta atuada de cada perna realiza trabalho sobre o efetuador, é possível encontrar uma heliforça recíproca a todos os heligiros da perna menos ao heligiro da junta atuada (no caso de manipuladores paralelos com várias juntas atuadas por perna encontra-se uma heliforça para cada junta atuada).

Seja heliforça  $\$_{ri,j}$  recíproca a todos os heligiros da perna  $i$  menos ao heligiro da junta atuada  $\$_{ai,j}$  da perna  $i$ , assim para a primeira junta atuada da perna  $i$ , de acordo com a Eq. (A.7), tem-se

$$\mathbb{A}_i^T \$_{ri,1} = \begin{bmatrix} \hat{\$}_{pi,1}^T \\ \vdots \\ \hat{\$}_{pi,k}^T \\ \hat{\$}_{ai,1}^T \\ \hat{\$}_{ai,2}^T \\ \vdots \\ \hat{\$}_{ai,l}^T \end{bmatrix} \quad \$_{ri,1} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \delta W_{i,1}/\Psi_{i,1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.15})$$

onde  $\delta W_{i,1}$  é a taxa de trabalho realizada pela heliforça  $\$_{ri,1}$  sobre o heligiro  $\$_{ai,1}$ .

Similarmente, as heliforças:  $\$_{ri,1}, \$_{ri,2}, \dots, \$_{ri,l}$ , recíprocas aos  $l$  heligiros das juntas atuadas de cada perna  $\$_{ai,1}, \$_{ai,2}, \dots, \$_{ai,l}$  são calculadas a partir da Eq. (A.15) como

$$\hat{\$}_{ri,1} = [\mathbb{A}_i^T]^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \delta W_{i,1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.16})$$

Considerando que os componentes de  $[\mathbb{A}_i^T]^{-1}$  têm o determinante de  $\mathbb{A}_i$  como denominador comum e que a taxa de trabalho da junta atuada é não nula, para simplificar os termos de  $\$_{ri,j}$  seleciona-se

$$\delta W_{i,j}/\Psi_{i,j} = \det[\mathbb{A}_i] \quad (\text{A.17})$$

O determinante de  $\mathbb{A}_i$  somente é nulo quando as juntas da perna  $i$  esteja em uma configuração singular, caso no qual não é possível calcular a cinemática.

As heliforças recíprocas, uma para cada junta atuada, da perna  $i$  são agrupadas na matriz  $\mathbb{K}_i$

$$\mathbb{K}_i = [\$_{ri,1} \cdots \$_{ri,l}] \quad (\text{A.18})$$

Seja a matriz  $\mathbb{P}_i$  composta pelos heligiros das juntas passivas da perna  $i$  assim

$$\mathbb{P}_i = [\hat{\$}_{pi,1} \cdots \hat{\$}_{pi,k}] \quad (\text{A.19})$$

assim, de acordo com a Eq. (A.8),

$$\mathbb{K}_i^T \mathbb{P}_i = \vec{0} \quad (\text{A.20})$$

Sejam  $\tilde{\mathbb{K}}$  e  $\tilde{\mathbb{P}}$  matrizes blocos diagonais definidas como

$$\tilde{\mathbb{K}} = \begin{bmatrix} \mathbb{K}_1^T & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbb{K}_2^T & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mathbb{K}_n^T \end{bmatrix} \text{ e } \tilde{\mathbb{P}} = \begin{bmatrix} \mathbb{P}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbb{P}_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mathbb{P}_n \end{bmatrix} \quad (\text{A.21})$$

Assim,

$$\tilde{\mathbb{K}}\tilde{\mathbb{P}} = [0] \quad (\text{A.22})$$

Separando as juntas reais da equação de restrição em juntas *reais* e *passivas* obtém-se

$$N_a \Psi_a + N_p \Psi_p + N_v \Psi_v = 0 \quad (\text{A.23})$$

onde  $N_a$  e  $N_p$  são as sub-matrizes de  $N_r$  correspondentes as juntas atuadas e passivas, respectivamente, e  $\Psi_a$  e  $\Psi_p$  são as magnitudes das velocidades correspondentes as juntas atuadas e passivas, respectivamente.

Considerando que  $N_p$  pode ser extraída de  $N_r$ , então,  $N_p$  também possui estrutura de banda diagonal

$$N_p = \begin{bmatrix} \mathbb{P}_1 & -\mathbb{P}_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbb{P}_2 & -\mathbb{P}_3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \cdots & 0 & \ddots & -\mathbb{P}_n \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \mathbb{P}_n \end{bmatrix}_{(n-1) \text{ malhas} \times n \text{ pernas}} \quad (\text{A.24})$$

Os termos  $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2 \dots \mathbb{P}_n$ , podem ser organizados na matriz diagonal  $\tilde{\mathbb{P}}$  por meio de

$$\tilde{\mathbb{P}} = \mathbb{D}N_p \quad (\text{A.25})$$

onde  $\mathbb{D}$  é a matriz bloco triangular cujos blocos são identidades  $I$

$$\mathbb{D} = \begin{bmatrix} I & I & \cdots & I \\ 0 & I & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & I \\ 0 & \cdots & 0 & I \end{bmatrix} \quad (\text{A.26})$$

Portanto, a Eq. (A.22) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{K}}\mathbb{D}N_p &= [0] \\ \tilde{\mathbb{K}}N_p &= [0] \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

onde

$$\tilde{\mathbb{K}} = \tilde{\mathbb{K}}\mathbb{D} \quad (\text{A.28})$$

é a matriz “aniquiladora” das juntas passivas na equação de restrição:

$$\underbrace{\tilde{\mathbb{K}}N_a}_{J_q}\Psi_a + \cancel{\tilde{\mathbb{K}}N_p\Psi_p} + \underbrace{\tilde{\mathbb{K}}N_v}_{J_x}\Psi_v = [0] \quad (\text{A.29})$$

As matrizes  $J_q$  e  $J_x$  são denominados os jacobianos da cinemática direta e inversa, respectivamente, e os seus determinantes quando nulos indicam configurações singulares do manipulador paralelo.

Na seqüência são calculados, a título de exemplo, os jacobianos  $J_q$  e  $J_x$  para o manipulador  $3RRR$  no plano cartesiano, cujas juntas atuadas são  $A$ ,  $F$  e  $G$ .

A equação de restrição da cadeia cinemática modificada do manipulador  $3RRR$  no espaço plano, descrito por um sistema de coordenadas cartesiano, é

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \hat{\$}_A \hat{\$}_B \hat{\$}_C - \hat{\$}_D - \hat{\$}_E - \hat{\$}_F & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} \\ \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \hat{\$}_D & \hat{\$}_E & \hat{\$}_F & -\hat{\$}_G - \hat{\$}_H - \hat{\$}_I & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} \\ \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \hat{\$}_G & \hat{\$}_H & \hat{\$}_I & -\hat{\$}_{px} - \hat{\$}_{py} - \hat{\$}_{rz} \end{bmatrix}}_N \begin{bmatrix} \Psi_A \\ \Psi_B \\ \Psi_C \\ \Psi_D \\ \Psi_E \\ \Psi_F \\ \Psi_G \\ \Psi_H \\ \Psi_I \\ \Psi_{px} \\ \Psi_{py} \\ \Psi_{rz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \\ \vec{0} \end{bmatrix} \quad (\text{A.30})$$

Sejam  $\$A, \$B, \dots, \$I$  os heligros correspondente as juntas reais do manipulador  $A, B, \dots, I$  que possuem três coordenadas referentes ao movimento no plano  $XY$ :  $\mathcal{N}$ ,  $\mathcal{P}^*$  e  $\mathcal{Q}^*$ . Os heligros das juntas reais representados no sistema cartesiano fixo à base da Fig. 62 são

$$\begin{aligned} \hat{\$}_C &= \begin{bmatrix} 1 \\ c1_y \\ -c1_x \end{bmatrix}; & \hat{\$}_B &= \begin{bmatrix} 1 \\ c1_y + b1_y \\ -c1_x - b1_x \end{bmatrix}; & \hat{\$}_A &= \begin{bmatrix} 1 \\ c1_y + b1_y + a1_y \\ -c1_x - b1_y - a1_y \end{bmatrix} \\ \hat{\$}_D &= \begin{bmatrix} 1 \\ c2_y \\ -c2_x \end{bmatrix}; & \hat{\$}_E &= \begin{bmatrix} 1 \\ c2_y + b2_y \\ -c2_x - b2_x \end{bmatrix}; & \hat{\$}_F &= \begin{bmatrix} 1 \\ c2_y + b2_y + a2_y \\ -c2_x - b2_y - a2_y \end{bmatrix} \\ \hat{\$}_I &= \begin{bmatrix} 1 \\ c3_y \\ -c3_x \end{bmatrix}; & \hat{\$}_H &= \begin{bmatrix} 1 \\ c3_y + b3_y \\ -c3_x - b3_x \end{bmatrix}; & \hat{\$}_G &= \begin{bmatrix} 1 \\ c3_y + b3_y + a3_y \\ -c3_x - b3_y - a3_y \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

onde os sub-índices  $x$  e  $y$  representam as componentes do vetor na direção do eixo  $x$  e  $y$  respec-

tivamente.

Sejam  $\$_{px}$ ,  $\$_{py}$  e  $\$_{rz}$  os heligros correspondente as juntas virtuais  $px$ ,  $py$  e  $rz$  da cadeia modificada que representam a velocidade do efetuador no espaço cartesiano  $XY$ , ver seção 3.2.1. Os heligros das juntas virtuais representados no sistema cartesiano fixo à base são

$$\hat{\$}_{px} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \hat{\$}_{py} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \hat{\$}_{rz} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.32})$$

Separando as juntas reais (atuadas e passivas) da equação de restrição, de acordo com Eq. (A.12), tem-se

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \hat{\$}_A \hat{\$}_B \hat{\$}_C - \hat{\$}_D - \hat{\$}_E - \hat{\$}_F & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} \\ \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \hat{\$}_D & \hat{\$}_E & \hat{\$}_F & -\hat{\$}_G & -\hat{\$}_H & -\hat{\$}_I \\ \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \hat{\$}_G & \hat{\$}_H & \hat{\$}_I \end{bmatrix}}_{N_r} \begin{bmatrix} \Psi_A \\ \Psi_B \\ \Psi_C \\ \Psi_D \\ \Psi_E \\ \Psi_F \\ \Psi_G \\ \Psi_H \\ \Psi_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} \\ \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} \\ -\hat{\$}_{px} & -\hat{\$}_{py} & -\hat{\$}_{rz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_{px} \\ \Psi_{py} \\ \Psi_{rz} \end{bmatrix} = \vec{0} \quad (\text{A.33})$$

Reorganizando  $N_r$ , de acordo com a Eq. (A.14) onde as primeiras colunas de  $\mathbb{A}_i$  correspondem as juntas passivas e as últimas colunas (em negrito) correspondem as juntas atuadas ( $A$ ,  $F$  e



Gerada), obtém-se

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \hat{\$}_B \hat{\$}_C \hat{\$}_A - \hat{\$}_D - \hat{\$}_E - \hat{\$}_F & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} \\ \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \hat{\$}_D \hat{\$}_E \hat{\$}_F - \hat{\$}_H - \hat{\$}_I - \hat{\$}_G \\ \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} \hat{\$}_H \hat{\$}_I \hat{\$}_G \end{bmatrix}}_{N_r} \begin{bmatrix} \Psi_B \\ \Psi_C \\ \Psi_A \\ \Psi_D \\ \Psi_E \\ \Psi_F \\ \Psi_H \\ \Psi_I \\ \Psi_G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} \\ \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} \\ -\hat{\$}_{px} & -\hat{\$}_{py} & -\hat{\$}_{rz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_{px} \\ \Psi_{py} \\ \Psi_{rz} \end{bmatrix} = \vec{0} \quad (\text{A.34})$$

portanto,

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_1 &= \begin{bmatrix} \hat{\$}_B & \hat{\$}_C & \hat{\$}_A \end{bmatrix} \\ \mathbb{A}_2 &= \begin{bmatrix} \hat{\$}_D & \hat{\$}_E & \hat{\$}_F \end{bmatrix} \\ \mathbb{A}_3 &= \begin{bmatrix} \hat{\$}_H & \hat{\$}_I & \hat{\$}_G \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

As heliforças recíprocas às juntas passivas de cada perna são calculadas por meio da Eq. (A.16)

$$\begin{aligned} \$_{r1,1} &= [\mathbb{A}_1^T]^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \det[\mathbb{A}_1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{b}_1 \times \vec{c}_1 \\ -b_{1x} \\ -b_{1y} \end{bmatrix} \\ \$_{r2,1} &= [\mathbb{A}_2^T]^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \det[\mathbb{A}_2] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{b}_2 \times \vec{c}_2 \\ -b_{2x} \\ -b_{2y} \end{bmatrix} \\ \$_{r3,1} &= [\mathbb{A}_3^T]^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \det[\mathbb{A}_3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{b}_3 \times \vec{c}_3 \\ -b_{3x} \\ -b_{3y} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

A partir das Eqs. (A.18), (A.21) e (A.26) obtém-se

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{K}} &= \begin{bmatrix} \vec{b}_1 \times \vec{c}_1 & -b_{1x} & -b_{1y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vec{b}_3 \times \vec{c}_2 & -b_{2x} & -b_{2y} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vec{b}_3 \times \vec{c}_3 & -b_{3x} & -b_{3y} \end{bmatrix} \\ \mathbb{D} &= \begin{bmatrix} I & I & I \\ 0 & I & I \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

onde  $I$  é a matriz identidade de dimensão  $3 \times 3$ .

A matriz “aniquiladora”  $\tilde{\mathbb{K}}$  é calculada por meio da Eq. (A.28) e ao eliminar as juntas passivas da equação de restrição tem-se

$$J_q \Psi_a = -J_x \Psi_v \quad (\text{A.38})$$

onde o jacobiano da cinemática direta  $J_x$  é calculado como

$$J_x = \tilde{\mathbb{K}} N_v \quad (\text{A.39})$$

e o jacobiano da cinemática inversa  $J_q$  é dado por

$$J_q = \tilde{\mathbb{K}} N_a \quad (\text{A.40})$$

Quando o determinante de  $J_q$  é nulo, não é possível inverter  $J_q$  para calcular  $\Psi_a$  e a cinemática inversa não tem solução, isto acontece se

$$\begin{aligned} \det [J_q] &= 0 \\ (\vec{b}_1 \times \vec{a}_1) (\vec{b}_2 \times \vec{a}_2) (\vec{b}_3 \times \vec{a}_3) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.41})$$

Com base na Eq. (A.41) observa-se que surgem singularidades na cinemática inversa quando alguma das suas pernas (cadeias seriais) estão em singularidade, ou seja, totalmente esticadas ou contraídas, *i.e.* algum par de vetores  $\vec{a}_i$  e  $\vec{b}_i$  estão paralelos.

Quando o determinante de  $J_x$  é nulo,  $J_x$  é invertível e não existe solução para  $\Psi_v$  na cin-

emática direta, isto aparece se

$$\det [J_x] = 0 \quad (\text{A.42})$$

$$(\vec{b}_1 \times \vec{b}_2) (\vec{b}_3 \times \vec{c}_3) (\vec{b}_3 \times \vec{b}_1) (\vec{b}_2 \times \vec{c}_2) (\vec{b}_2 \times \vec{b}_3) (\vec{b}_1 \times \vec{c}_1) = 0$$

Observam-se configurações singulares na cinemática direta quando os vetores  $\vec{b}_i$  são concorrentes a um ponto ou são paralelos (concorrentes a um ponto no infinito).

As singularidades encontradas para o manipulador paralelo  $3RRR$  são as mesmas encontradas na literatura (TSAI, 1999) (DANIALI; ZSOMBOR-MURRAY; ANGELES, 1995).

## ***APÊNDICE B - Inversa generalizada e jacobiano estendido***

A solução da cinemática inversa de manipuladores redundantes na literatura é resolvida principalmente através de dois enfoques: o uso da inversa generalizada, tal como a pseudo-inversa de Moore-Penrose (KLEIN; HUANG, 1983), e o uso do jacobiano estendido (BAILLIEUL, 1985)(CHANG, 1986)(KLEIN; CHU-JENQ; AHMED, 1993), *i.e.* um jacobiano com linhas adicionais.

Este dois enfoques clássicos, a saber o método do jacobiano estendido e o método inversa generalizada, advém de procedimentos de otimização. No caso do uso da pseudo-inversa é minimizada a norma euclidiana do vetor composto pelas variáveis de juntas, a qual é relacionada estreitamente com a minimização da energia cinética (SICILIANO, 1993). As condições adicionais impostas pelo jacobiano estendido são em geral derivadas de um processo de minimização. Neste apêndice são apresentados brevemente este dois enfoques.

### **B.0.1 Inversa generalizada**

A maioria das pesquisas em controle de manipuladores redundantes desenvolvem a solução cinemática diferencial inversa por meio da pseudo-inversa  $J^\dagger$  da matriz jacobiana  $J$

$$J^\dagger = J^T (J J^T)^{-1} \quad (\text{B.1})$$

Seja  $\dot{x}$  o vetor ( $6 \times 1$ ) da velocidade do efetuador e  $q$  o vetor  $n \times 1$  (com  $n > 6$ ) das

velocidades das juntas, assim

$$\begin{aligned}\dot{x} &= J\dot{q} \\ \dot{q} &= J^\dagger \dot{x} + (I - J^\dagger J) \dot{\phi}\end{aligned}\tag{B.2}$$

onde  $\dot{\phi}$  é um vetor de velocidades arbitrário e  $(I - J^\dagger J) \dot{\phi}$  é a projeção no espaço nulo de  $J$  correspondente ao movimento dos elos do manipulador que não move o efetuador. Se a solução exata não existe, a Eq. (B.2) representa uma solução de mínimos quadrados, minimizando  $\|\dot{x} - J\dot{q}\|$  (NAKAMURA; HANAFUSA, 1986).

Os métodos baseados na pseudo-inversa da matriz jacobiana apresentam problemas enquanto que não é garantido o movimento conservativo (KLEIN; HUANG, 1983), *i.e.* movimentos repetitivos do efetuador não resultam necessariamente em movimentos repetitivos nas juntas, e, adicionalmente, o manipulador pode entrar em regiões próximas das singularidades de  $J$  onde a mínima norma tende a infinito (HOLLERBACH; SUH, 1986) (BAKER; WAMPLER, 1988) (NENCHEV, 1989).

Cabe observar que a utilização da pseudo-inversa para resolver a cinemática diferencial de manipuladores redundantes apresentam problemas dimensionais que restringem o método a manipuladores com somente juntas rotativas ou somente juntas prismáticas (HUNT, 2000) (DOWNING, 2002). Por exemplo para um manipulado redundante de 7 graus de liberdade, a definição da pseudo-inversa requer o seguinte produto de jacobianos

$$JJ^T = \begin{bmatrix} L_1 \cdots & \cdots & \cdots L_7 \\ M_1 \cdots [\text{comprimento}^0] \cdots M_7 \\ N_1 \cdots & \cdots & \cdots N_7 \\ \hline P_1 \cdots & \cdots & \cdots P_7 \\ Q_1 \cdots [\text{comprimento}^1] \cdots Q_7 \\ R_1 \cdots & \cdots & \cdots R_7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1 & M_1 & N_1 & P_1 & Q_1 & R_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & [\text{comprimento}^0] & \vdots & \vdots & [\text{comprimento}^1] & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ L_7 & M_7 & N_7 & P_7 & Q_7 & R_7 \end{bmatrix}\tag{B.3}$$

onde as colunas de  $J$  são os heligiros normalizados de cada junta e  $[ \ ]$  indica o tipo de unidades de cada submatriz.

Os heligiros normalizados, colunas de  $J$ , contém termos adimensionais ( $L, M, N$ ) e termos com unidades de comprimento ( $P, Q, R$ ). Assim, dentro da matriz  $J$  e da matriz  $J^T$  existem

duas submatrizes, uma cujos termos são adimensionais [comprimento<sup>0</sup>] e outra cujos termos tem unidades de comprimento [comprimento<sup>1</sup>]. Conseqüentemente, as unidades dos termos da matriz resultante  $JJ^T$  são

$$\left[ \begin{array}{c|c} [\text{comprimento}^0] & [\text{comprimento}^1] \\ \hline [\text{comprimento}^1] & [\text{comprimento}^2] \end{array} \right] \quad (\text{B.4})$$

Cada elemento pertencente a submatriz (3 × 3) superior esquerda é a soma dos produtos de duas coordenadas dentre os  $L$ 's,  $M$ 's e  $N$ 's, e cada elemento da submatriz (3 × 3) inferior direita é a soma dos produtos de duas coordenadas dentre os  $P$ 's,  $Q$ 's e  $R$ 's. Os elementos das outras duas submatrizes são somatórios de produtos entre uma variável dentre os  $L$ 's,  $M$ 's ou  $N$ 's e outra variável dentre os  $P$ 's,  $Q$ 's ou  $R$ 's.

O produto da Eq. (B.3) somente é significativo quando ou todos os  $P$ 's,  $Q$ 's e  $R$ 's ou todos os  $L$ 's,  $M$ 's e  $N$ 's são nulos, *i.e.* quando todas as juntas dos manipuladores ou são somente rotativas ou somente prismáticas, respectivamente.

Na seqüência, a título de exemplo, é mostrada a inconsistência dimensional de  $JJ^T$  em um manipuladores redundante com três juntas rotativas e uma junta prismática.

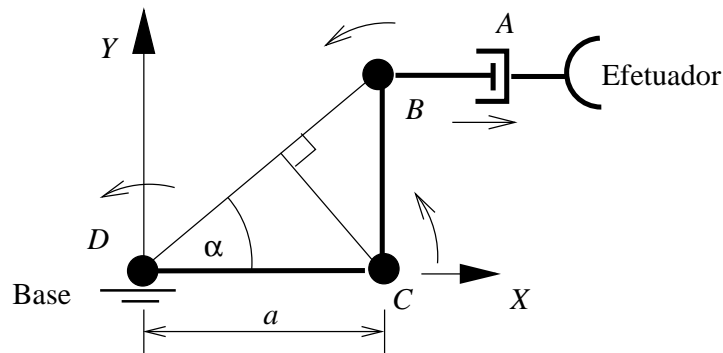


Figura 64: Manipulador redundante  $RRRP$

Considere o manipulador serial  $RRRP$  mostrado na Fig. 64, onde os heligios normalizados da junta prismática  $A$  e das juntas rotativas  $B$ ,  $C$  e  $D$  no instante mostrado são

$$\hat{\$}_A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \hat{\$}_B = \begin{bmatrix} 1 \\ a \tan \alpha \\ -a \end{bmatrix}; \hat{\$}_C = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -a \end{bmatrix}; \hat{\$}_D = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad (\text{B.5})$$

Portanto, o seu jacobiano é definido como (HUNT, 2000)

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a \tan \alpha & 0 & 0 \\ 1 & -a & -a & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow N_i \\ \leftarrow P_i \\ \leftarrow Q_i \end{matrix} \quad (\text{B.6})$$

onde o helicóide normalizado correspondente a junta prismática é obtido normalizando o heligiro da junta prismática, ou seja extraindo a magnitude da velocidade linear da junta, por tanto  $Q_i$  é adimensional.

Para encontrar a pseudo-inversa de  $J$  é preciso calcular  $JJ^T$

$$JJ^T = \left[ \begin{array}{c|cc} 3 & a \tan \alpha & 2 * a \\ \hline a \tan \alpha & a^2 \tan^2 \alpha & -a^2 \tan \alpha \\ -2a & -a^2 \tan \alpha & 1 + 2a^2 \end{array} \right] \quad (\text{B.7})$$

As unidades das quatro submatrizes estão “quase” de conformidade como a expressão da Eq. (B.4) mas o elemento  $1 + 2a^2$  na posição (3, 3) na matriz  $JJ^T$  apresenta inconsistência dimensional, *i.e.*  $1 + 2a^2 = [\text{comprimento}^0] + [\text{comprimento}^2]$ .

## B.0.2 Jacobiano estendido

O método do jacobiano estendido consiste em impor uma função de restrição adicional  $h(q) = 0$  ao jacobiano original (BAILLIEUL, 1985)(CHANG, 1986). Esta condição adicional é usada como uma tarefa secundária a ser cumprida simultaneamente com a posição do efetuador. Este método fornece formulações para converter critérios de minimização em funções de restrição.

Assim, dadas as funções de restrição  $h(q) = 0$  é resolvido o conjunto de equações combinadas

$$\begin{aligned} x &= f(q) \\ 0 &= h(q) \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

onde  $f(q)$  representa a função que relaciona as posições nas juntas ( $q$ ) e a posição do efetuador no espaço operacional ( $x$ ).

A Eq. (B.8) pode ser resolvida numericamente em qualquer ponto (CHANG, 1986) ou, quando  $h$  e  $f$  são diferenciáveis, uma condição inicial para a Eq. (B.8) pode ser propagada ao longo de uma trajetória resolvendo a equação da cinemática diferencial

$$J_e \dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.9})$$

onde  $J_e$  é denominada a matriz jacobiana estendida (BAILLIEUL, 1985) definida como

$$J_e = \begin{bmatrix} J(q) \\ \partial h(q)/\partial q \end{bmatrix} \quad (\text{B.10})$$

A condição para a existência de uma única solução  $\dot{q}$  na Eq. (B.9) é que  $J_e$  seja não singular ao longo da trajetória.

Uma dos inconvenientes deste método é a presença de singularidades algorítmicas (KLEIN; CHU-JENQ; AHMED, 1993). A partir das Eqs. (B.9) e (B.10), observa-se que o  $\det[J_e] = 0$  pode ter soluções relacionadas somente com a linha adicionada  $\partial h(q)/\partial q$  mas não com a cinemática do manipulador propriamente dita. Neste sentido, as vantagens dos manipuladores redundantes podem ser limitadas por falsas singularidades, possivelmente geradas por uma seleção inconveniente da função de restrição  $h(q)$ .

A seleção de um critério objetivo para  $h(q)$  é uma tarefa complexa (KLEIN; CHU-JENQ; AHMED, 1995). A literatura fornece critérios gerais que tendem a ser mais apropriados para determinados problemas. Um dos critérios mais utilizados é

$$h(q) = \sum_{i=1}^n q_i^2 \quad (\text{B.11})$$

onde  $n$  é o número de juntas.

Este critério tende a manter as juntas próximas da sua posição inicial, normalmente no centro do percurso da junta, e afastadas dos seus limites mecânicos. Assim, a última linha da Eq. (B.10), utilizando este critério, torna-se  $2[q_1 \ q_2 \ \cdots \ q_n] = 2q$ .

A equação correspondente a última linha da Eq. (B.10) é

$$\partial h(q)/\partial q = 0 \quad (\text{B.12})$$



Dividindo a Eq. (B.12) por 2 e anexando ao jacobiano original é gerado o jacobiano estendido

$$J_e = \begin{bmatrix} J_{6 \times n}(q) \\ q_1 \ q_2 \ \cdots \ q_n \end{bmatrix} \quad (\text{B.13})$$

A presença das variáveis de todas as juntas na última linha de  $J_e$  é uma forma engenhosa de evitar escolher quais variáveis são importantes para o desempenho do manipulador e quais não, porém esta última linha não esparsa (cheia) aumenta a possibilidade de singularidades algorítmicas no método (MARTINS, 2001).

Cabe observar, que no critério apresentado na Eq. (B.11) existe inconsistência dimensional se o manipulador possui juntas prismáticas e rotativas. Considere que a primeira junta do manipulador, cuja cinemática está representada na Eq. (B.13), é prismática e que as outras  $(n - 1)$  juntas são rotativas. Assim, a equação que representa a linha adicionada ao jacobiano, *i.e.* a última equação da Eq. (B.9) é

$$q_1 \dot{q}_1 + q_2 \dot{q}_2 + \cdots + q_n \dot{q}_n = 0 \quad (\text{B.14})$$

Observa-se que as unidades dos termos da Eq. (B.14) não são consistentes, pois o primeiro termo referente a junta prismática tem unidades de  $[\text{comprimento}^1][\frac{\text{comprimento}^1}{\text{tempo}^1}] = [\frac{\text{comprimento}^2}{\text{tempo}^1}]$  enquanto que os outros termos, referentes às juntas rotativas, possuem unidades de  $[\frac{1}{\text{tempo}^1}]$ .

O método do jacobiano estendido como proposto originalmente, similarmente à solução da pseudo-inversa, pode ser considerado como um caso particular de outras formulações. Por exemplo, pode ser demonstrado que o jacobiano estendido é um caso particular do método de restrição dos mínimos quadrados (NENCHEV, 1989). Ambos métodos estão entrelaçados, por exemplo o problema das singularidades algorítmicas que caracteriza o método do jacobiano estendido é encontrado também nas soluções baseadas na pseudo-inversa, tal como a solução por prioridade de tarefa (task priority) (CHIAVERINI, 1997).

## *Referências*

ASSUR, L. V. Исследование плоских стержневых механизмов с низими парами с точки зрения их структуры и классификации. [S.l.]: Izdat. Akad. Nauk SSSR, 1952. 592 pp. (4 folded insets, 1 plate) p. Editado por I. I. Artobolevskii. Em inglês *Research about the structure and classification of plane mechanisms*.

BAILLIEUL, J. Kinematic programming alternatives for redundant manipulators. Em: *Proc. 1985 IEEE Int. Conf. Robotics & Automation*. 1985. p. 722–728.

BAKER, D.; WAMPLER, C. The inverse kinematics of redundant manipulators. *The International Journal of Robotics Research*, v. 7, n. 2, p. 3–21, março/abril 1988.

BALL, R. S. *A Treatise on the Theory of Screws*. Cambridge: Cambridge University Press, 1900. ISBN 0521636507 -reedição 1998.

BONEV, I. *What's going on with parallel robots*. agosto 2002. Robotics on line. [Http://www.roboticonline.com](http://www.roboticonline.com).

CAMPOS, A.; MARTINS, D.; GUENTHER, R. Parallel manipulator kinematics based on Kirchhoff's circuit law. Em: *Proceedings of the II CONEM - CDROM*. João Pessoa, Brazil: ABCM, 2002. ISBN 85-85769-07-6. Em Português.

CAMPOS, A.; MARTINS, D.; GUENTHER, R. Unified kinematics of serial manipulators. Em: KURKA, P. (Ed.). *Tenth International Symposium on Dynamic Problems in Mechanics -IX DINAME*. Campinas: Brazilian Society of Mechanical Sciences, 2002.

CAMPOS, A.; MARTINS, D.; GUENTHER, R. A unified approach to differential kinematics of nonredundant manipulators. Em: *International Congress on Advanced Robotics, ICAR 2003*. Coimbra: IEEE, 2003.

CECCARELLI, M. Screw axis defined by giulio mozzi in 1763 and early studies on helicoidal motion. *Mechanism and Machine Theory*, v. 35, n. 6, p. 761–770, jun. 2000.

CHANG, P. H. *A Closed Form Solution for Inverse Kinematics of Robot Manipulator with Redundancy*. [S.l.], março 1986.

CHIAVERINI, S. Singularity-robust task-priority redundancy resolution for real-time kinematic control of robot manipulators. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, v. 13, n. 3, p. 398–410, jun. 1997.

- DANIALI, H. R. M.; ZSOMBOR-MURRAY, P. J.; ANGELES, J. Singularity analysis of planar parallel manipulators. *Mechanism and Machine Theory*, v. 30, n. 5, p. 665–678, 1995.
- DASH, A.; CHEN, I.; YANG, G. Instantaneous kinematics and singularity analysis of three-legged parallel manipulators. Em: *Proceedings - RSJ/ICIRS*. Maui: IEEE, 2001. p. 1275–1280.
- DAVIES, T. The 1887 committee meets again. subject: freedom and constraint. Em: HUNT, H. (Ed.). *Ball 2000 Conference*. Trinity College: Cambridge University Press, 2000. p. 1–56.
- DAVIES, T. H. Kirchhoff's circulation law applied to multi-loop kinematic chains. *Mechanism and Machine Theory*, v. 16, p. 171–183, 1981.
- DAVIES, T. H. Couplings, coupling network and their graphs. *Mechanism and Machine Theory*, v. 30, n. 7, p. 991–1000, 1995.
- DOWNING, D. *Quality Indices for Robot Manipulators*. Tese (Doutorado) — University of Melbourne, 2002.
- DUTRÉ, S.; BRUYNINCKX, H.; SCHUTTER, J. D. The analytical Jacobian and its derivative for a parallel manipulator. Em: *Proceedings - ICRA*. albuquerque: IEEE, 1997. p. 2961–2966.
- HOLLERBACH, J. M.; SUH, K. C. *Redundancy Resolution of Manipulators through Torque Optimization*. [S.l.], jan. 1986. 16 p. (AI memo ;, AIM-882).
- HUNT, K. H. *Kinematic Geometry of Mechanisms*. Oxford: Clarendon Press, 1978.
- HUNT, K. H. Robot kinematics—a compact analytic inverse solution for velocities. *Trans. ASME, Journal of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design*, v. 109, p. 42–49, março 1987.
- HUNT, K. H. Don't cross-thread the screw. Em: HUNT, H. (Ed.). *Ball 2000 Conference*. Trinity College: Cambridge University Press, 2000. p. 1–37.
- IFTOMM. Terminology for the mechanism and machine science. *Mechanism and Machine Theory*, v. 38, n. 7-10, p. 597–1111, julho 2003.
- KIM, D.; CHUNG, W.; YOUM, Y. Analytic Jacobian of in-parallel manipulators. Em: *Proceedings - ICRA*. San Francisco: IEEE, 2000. p. 2376–2381.
- KLEIN, C.; CHU-JENQ, C.; AHMED, S. Use of an extended jacobian method to map algorithmic singularities. Em: Werner, Robert; O'Conner, L. (Ed.). *Proceedings of the 1993 IEEE International Conference on Robotics and Automation: Volume 3*. Atlanta, GE: IEEE Computer Society Press, 1993. p. 632–637. ISBN 0-8186-3450-2.
- KLEIN, C.; CHU-JENQ, C.; AHMED, S. *A new formulation of the extended Jacobian method and its use in mapping algorithmic singularities for kinematically redundant manipulators*. 1995.

- KLEIN, C. A.; HUANG, C. H. Review of pseudoinverse control for use with kinematically redundant manipulators. *IEEE Transactions on Systems Man and Cybernetics*, v. 13, n. 3, p. 245–250, 1983.
- KUMAR, V. Instantaneous kinematics of parallel-chain robotic mechanisms. *Trans. ASME, Journal of Mechanical Design*, v. 114, p. 349–358, Sep 1992.
- LING, S.; HUANG, M. Kinestatic analysis of general parallel manipulators. *JOURNAL OF MECHANICAL DESIGN*, v. 117, p. 601–606, dezembro 1995.
- MANOLESCU, N. I.; MANAFU, V. Sur la determination du degré de mobilité des mécanismes. *Bull Polytech. Inst. Bucharest*, v. 25, p. 45–66, 1963.
- MARTINS, D. *Hierarchical Analysis of Robot Manipulators*. Tese (Doutorado) — Univerdidade Federal de Santa Catarina, 2001.
- MARTINS, D.; GUENTHER, R. Hierarchical kinematic analysis of robots. *Mechanism and Machine Theory*, v. 38, n. 6, p. 497 – 518, junio 2003.
- MERLET, J. *Paralle Manipulators: state of the art and perspectives*. 1996.
- MOZZI, G. *Discorso matematico sopra il rotamiendo momentaneo dei corpi*. naples: Stamperia di Donato Campo, 1763.
- MURRAY, R. M.; LI, Z.; SASTRY, S. S. *A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation*. Ann Arbor: CRC Press, 1994.
- NAKAMURA, Y.; HANAFUSA, H. Inverse kinematic solutions with singularity robustness for robot manipulator control. *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, v. 108, p. 163–171, setembro 1986.
- NENCHEV, D. N. Redundancy resolution through local optimization: A review. *J. Robot. Syst.*, v. 6, n. 6, p. 769–798, Dezembro 1989.
- POINSOT, L. Sur la composition des moments et la composition des aires. *J. Éc Polyt. Paris*, v. 6, p. 182–205, 1806.
- SCIAVICCO, L.; SICILIANO, B. *Modeling and Control of Robot Manipulators*. McGraw-Hill, 1996. (Electrical and Computer Engineering). ISBN 0070572178.
- SESHU, S.; REED, M. B. *Linear Graphs and Electrical Networks*. Reading: Addison-Wesley, 1961.
- SICILIANO, B. Closed-loop inverse kinematics algorithms for redundant spacecraft/manipulator systems. Em: Werner, Robert; O’Conner, L. (Ed.). *Proceedings of the 1993 IEEE International Conference on Robotics and Automation: Volume 3*. Atlanta, GE: IEEE Computer Society Press, 1993. p. 95–100. ISBN 0-8186-3450-2.

- SLUTSKI, L.; ANGELES, J. The kinematics of manipulators built from closed planar mechanisms. Em: *Proceedings - ICRA*. Atlanta: IEEE, 1999. p. 531–536.
- SUGIMOTO, K. Kinematic analysis and derivation of equations of motion for mechanisms with loops of different motion spaces. *Japanese Society of Mechanical Engineers International Journal*, v. 44, n. 3, p. 610–617, 2001.
- TANEV, T. Kinematics of a hybrid (parallel-serial) robot manipulator. *Mechanism and Machine Theory*, v. 35, n. 9, p. 1183–1196, setembro 2000.
- TISCHLER, C. R. *Alternative Structures for Robot Hands*. Tese (Ph.D. Dissertation) — University of Melbourne, 1995.
- TSAI, L.-W. *Robot Analysis: the Mechanics of serial and parallel manipulators*. New York: John Wiley & Sons, 1999. ISBN 0-471-32593-7.
- TSAI, L.-W.; TAHMASEBI, F. Synthesis and analysis of a new class of 6-degree-of-freedom parallel minimanipulators. *Journal of Robotic Systems*, v. 10, n. 5, p. 561–580, julho 1993.
- VALDIERO, A. et al. Screw-based Jacobian analysis of a 3-dof parallel manipulator. Em: *Proceedings of the 16th COBEM - CDRM*. Uberlândia, Brazil: ABCM, 2001. ISBN 85-85769-07-6.
- YANG, G. et al. Singularity analysis of three-legged parallel robots based on passive-joint velocities. *IEEE Transactions on Robotics And Automation*, IEEE-inst Electrical Electronics Engineers Inc, 345 e 47th St, New York, ny 10017-2394 Usa, v. 17, p. 413–422, 2001. Re-impressão: Yang GL Gint Inst Mfg Technol, Automat Technol Div, Singapore 638075, Singapore.