

ROQUE BRINCKMANN

A AVALIAÇÃO FORMATIVA DA APRENDIZAGEM ATRAVÉS DA
MATEMÁTICA NEBULOSA – UMA PROPOSTA METODOLÓGICA

FLORIANÓPOLIS

2004

ROQUE BRINCKMANN

A AVALIAÇÃO FORMATIVA DA APRENDIZAGEM ATRAVÉS DA
MATEMÁTICA NEBULOSA – UMA PROPOSTA METODOLÓGICA

Tese apresentada como requisito parcial à
obtenção do grau de Doutor.
Curso de Pós-graduação em Engenharia de
Produção e Sistemas, Universidade Federal
de Santa Catarina.
Orientador: Prof. Jürgen Philips

FLORIANÓPOLIS
2004

A AVALIAÇÃO FORMATIVA DA APRENDIZAGEM ATRAVÉS DA
MATEMÁTICA NEBULOSA – UMA PROPOSTA METODOLÓGICA

ROQUE BRINCKMANN

Tese submetida à Universidade Federal de Santa Catarina para obtenção
do título de **Doutor em Engenharia de Produção e Sistemas**

Coordenador:

Prof. Édson Pacheco Paladini, Dr.

BANCA EXAMINADORA:

Orientador:

Prof. Jürgen Philips, Dr.-Ing.
UFSC / ECV

Moderador:

Prof. Luiz Fernando Gonçalves de Figueiredo, Dr.
UFSC / CCE

Examinadora externa:

Prof^a . Eliete Auxiliadora Assumpção Ourives, Dra.
UFSC / Externo

Examinador:

Prof. Francisco Antônio Pereira Fialho Dr.
UFSC / EPS

Examinador externo:

Prof. Francisco Henrique de Oliveira, Dr.
UDESC

Examinador externo:

Prof. José Luiz Portugal, Dr.
UFPE

A minha esposa Cláudia, aos meus filhos Francine e Gabriel, a minha netinha Maria Cláudia e aos meus pais Pésio e Maria de Lourdes,

dedico esta obra.

Agradecimentos

Em ordem alfabética,

- Professor Jürgen Philips, orientador, por mais que a orientação, por uma lição de vida.
- Secretaria da EPS, pelo modo fraterno de lidar com a sua clientela.
- UFSC, em especial a EPS, por ter me recebido como doutorando.

Em especial,

- DEUS, pois sem a Presença *d'Ele(a)* nada vale a pena.
- FAMÍLIA, por Tudo e pela Fé e Esperança em dias sempre melhores.
- Professor Luiz Fernando Gonçalves de Figueiredo, co-orientador, pelo apoio e conhecimento alcançados.

MUITO OBRIGADO,

Roque Brinckmann

11 de março de 2004

"Declaramos para os devidos fins que ROQUE BRINCKMANN cursou a disciplina MEN3111-Metodologia do Ensino Superior, 04 créditos, ministrada pela Profa. Dra. Maria Conceição Manhães, no semestre 95.2, obtendo 'NOTA 10,0.'"

UFSC / CCE-PPE

RESUMO

É incontestável a importância assumida pela educação na sociedade contemporânea. Essa influência decorreu do seu papel como formadora para o mercado, para o exercício da cidadania e para a auto-realização humana. Inerente ao processo educativo, a avaliação da aprendizagem tem recebido atenção renovada de pesquisadores das mais variadas áreas do conhecimento, dado seu caráter de mediadora na síntese educacional. Em atendimento às exigências do mercado, a prática da avaliação adquiriu o contorno definitivo de medição. Por outro lado, avanços na área da pedagogia apontam para uma nova visão da avaliação, chamada avaliação formativa, pela qual o processo avaliatório também deve contribuir para a formação integral do aluno. Tais avanços na ótica avaliativa não encontraram, até então, um instrumental matemático que pudesse emprestar consistência ao ajuizamento de valor. Os métodos tradicionais, que vão desde médias simples até o uso da estatística descritiva, são incapazes de atender às novas demandas. Esses métodos não alcançam um poder de análise mais amplo, que, de forma inata, inclua aspectos qualitativos, quantitativos e um inseparável elemento psicológico de que se reveste a avaliação do desempenho escolar. Além disso, todos eles só se aplicam ao passado, carecendo de um poder formador que sustente a melhoria contínua da aprendizagem. Neste trabalho, consegue-se resolver essas restrições e dispor de uma solução ampla que equacione a questão. Para tanto, apresenta-se uma proposta metodológica para aplicação da matemática nebulosa com o objetivo de fornecer instrumental para uma avaliação da aprendizagem holística, ou seja, pela qual a aprendizagem seja tratada na sua totalidade, a qual não pode ser explicada pelos seus distintos componentes considerados separadamente. O resultado final constitui-se numa nova instrumentação para a avaliação formativa, que permite juízo de valor semântico e numérico da aprendizagem, por meio de uma metáfora intuitiva que amplia a capacidade de cognição e negociação da medida do desempenho. Sob os auspícios desta metodologia inovadora, professor e aluno são naturalmente remetidos à busca conjunta pela formação.

PALAVRAS-CHAVE: educação; métodos quantitativos; matemática nebulosa.

ABSTRACT

The importance of education in contemporary society is unquestionable. This influence roots in its formative role for the market, for the exercise of citizenship and for self-accomplishment. Inherent to the educative process, learning assessment has gained renewed attention from researchers of the most varied areas of knowledge, given its mediating character in the educational synthesis. In order to fulfil market requirements, assessment practice acquired the definitive contour of measurement. On the other hand, advances in the education sciences point to a new vision of assessment, the so-called formative assessment, which considers that the evaluation process must also contribute to the student's thorough formation. These evaluation improvements have not found yet a mathematical tool that could lead to a sound valuation process. Traditional methods, which range from simple averages to descriptive statistics, are unable to presenting a solution to these new demands. Such methods do not present a wide range of analysis, as to include qualitative and quantitative aspects as well as an inseparable psychological element, which characterizes school performance evaluation. Besides, all these methods only apply to the past, lacking a formative capacity that should sustain the continuous improvement of learning. With a view to solving these problems, this paper presents a methodological proposal for the application of a fuzzy logic model as a tool to the evaluation of holistic learning, i.e., the learning process considered in its totality, which cannot be explained by its distinct components considered separately. The final result constitutes a new instrumentation for formative assessment that allows for semantic and numerical valuation of learning, by means of an intuitive metaphor that extends the capacity of cognition and negotiation of performance measuring. Under the auspices of this innovative methodology, professor and student are naturally driven to joint formative learning.

KEYWORDS: education; quantitative methods; fuzzy logic.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	—	Esquemático do conceito de avaliação	30
Figura 2	—	Ensino – Aprendizagem	31
Figura 3	—	Técnicas e vieses.....	36
Figura 4		Avaliação Formativa / Avaliação Somativa	43
Figura 5	—	Coeficiente de Correlação Momento-Produto de Pearson	52
Figura 6	—	Coeficiente de Spearman-Brown.....	52
Figura 7	—	Kuder-Richardson / fórmula 20	53
Figura 8	—	Kuder-Richardson / fórmula 21	53
Figura 9	—	Erro Padrão de Mensuração – EPM	53
Figura 10	—	Intervalo de sobreposição	55
Figura 11	—	Classificação normalmente distribuída dos EPM em relação à Média "M"	55
Figura 12	—	Níveis de suporte lógico ao raciocínio por aproximação	58
Figura 13	—	Gráfico do exemplo	58
Figura 14	—	Tabela do Exemplo 5.1	59
Figura 15	—	Diagramas de Venn.....	59
Figura 16	—	Função de pertencimento <i>booleana</i>	61
Figura 17	—	Gráfico do Exemplo 5.2	62
Figura 18	—	Expressão do Exemplo 5.3	63
Figura 19	—	Definição de conjunto	63
Figura 20	—	Intersecção entre conjuntos.....	64
Figura 21	—	Intersecção entre funções.....	65
Figura 22	—	Intersecção pelo Mínimo.....	65
Figura 23	—	Gráfico do Exemplo 5.4	65

Figura 24 — União entre conjuntos.....	66
Figura 25 — União entre funções	66
Figura 26 — União pelo Máximo	66
Figura 27 — Gráfico modificado para o Exemplo 5.2	68
Figura 28 — O "Meio Excluído"	70
Figura 29 — Função de pertencimento difusa	71
Figura 30 — Tabela do Exemplo 5.6	72
Figura 31 — Tabela das funções de pertinência para o Exemplo 5.6	73
Figura 32 — Tabela dos graus de pertinência para o Exemplo 5.6	74
Figura 33 — Funções de satisfação	75
Figura 34 — Fórmula para o cálculo do número de inferências	78
Figura 35 — Memória de Associação Difusa.....	79
Figura 36 — Sobreposição de regiões difusas.....	80
Figura 37 — <i>Singleton</i>	81
Figura 38 — Número nebuloso	81
Figura 39 — Conjuntos e subconjuntos nebulosos	83
Figura 40 — Comparação entre a Distribuição de Possibilidade e a Distribuição de Probabilidade.....	86
Figura 41 — Notação binária do produto cartesiano	89
Figura 42 — Intersecção pela norma-t.....	89
Figura 43 — União pela norma-s.....	90
Figura 44 — Fluxo básico de um sistema difuso.....	93
Figura 45 — Sistema inferencial baseado em regras	93
Figura 46 — Representação gráfica do produto cartesiano	97
Figura 47 — Notação do produto cartesiano de uma relação qualquer	98
Figura 48 — Grau de possibilidade numa relação.....	98

Figura 49 — Relacionamento entre os graus de pertinência	99
Figura 50 — Matriz de resultados.....	99
Figura 51 — Forma gráfica da função de pertinência.....	100
Figura 52 — Composição de relações.....	100
Figura 53 — Métodos <i>max-min</i> e <i>max-produto</i>	101
Figura 54 — Raciocínio Aproximado	104
Figura 55 — Gráfico para o Exemplo 6.2	107
Figura 56 — Processo difuso de tomada de decisão	111
Figura 57 — Referências para Conhecimento, Habilidades e Atitudes	122
Figura 58 — Justaposição de conceitos	123
Figura 59 — Equação semântica	123
Figura 60 — Termos Lingüísticos do modelo	124
Figura 61 — Funções de Pertinência do modelo	125
Figura 62 — Valores com grau de pertinência igual a " 1 ".....	125
Figura 63 — A interface gráfica do modelo.....	126
Figura 64 — Seqüência de implicações do modelo difuso	129
Figura 65 — Estrutura para pontuação dos critérios.....	134
Figura 66 — Exemplo de pontuação pelos critérios	135
Figura 67 — Configuração do modelo para um primeiro momento de avaliação	136
Figura 68 — Saídas geradas pelo modelo para um primeiro momento de avaliação.....	137
Figura 69 — Valores de referência	137
Figura 70 — Parâmetros para tomada de decisão.....	138

SUMÁRIO

CAPÍTULO I – INTRODUÇÃO

1.1 CONSIDERAÇÕES GERAIS	15
1.1.1 Breve sinopse histórica da ação de avaliar	15
1.1.2 A Docimologia	16
1.1.2.1 Categorias de fatores para baixa objetividade da estimação.....	17
1.1.2.2 Princípios direcionadores da avaliação	17
1.2 OBJETIVOS	18
1.2.1 Objetivo geral	18
1.2.2 Objetivos específicos	18
1.3 JUSTIFICATIVA	18
1.3.1 Relevância do tema abordado.....	18
1.3.2 Avaliação: o atual estado da arte	19
1.4 DEFINIÇÃO DO PROBLEMA.....	20

CAPÍTULO II – APRENDIZAGEM E AVALIAÇÃO

2.1 INTRODUÇÃO	22
2.2 DIMENSÃO HISTÓRICA.....	22
2.2.1 Dos Egípcios e Chineses à Era da Informação.....	22
2.2.2 O momento atual.....	26
2.3 RESUMO E CONCLUSÕES	26

CAPÍTULO III – AVALIAÇÃO

3.1 INTRODUÇÃO	28
3.2 O QUE É AVALIAR	28
3.2.1 Amplitude do termo avaliar	28
3.2.2 Conceituação	29
3.2.3 Ensino – Aprendizagem.....	31
3.2.4 Dirimentes	32
3.3 A AVALIAÇÃO E O ENSINO	33

3.3.1	Avaliação burocrática.....	34
3.3.2	Avaliação regulação.....	34
3.3.3	Avaliação de relações.....	35
3.3.4	Avaliação de métodos e atitudes	36
3.3.5	Avaliação multilateral.....	36
3.3.6	Avaliação multidimensional.....	37
3.4	AVALIAÇÃO FORMATIVA.....	38
3.4.1	Avaliação Formativa – MEC – IES.....	40
3.4.2	Diferenças entre avaliar e avaliar	42
3.5	RESUMO E CONCLUSÕES	44
CAPÍTULO IV – A CIÊNCIA DA AVALIAÇÃO		
4.1	INTRODUÇÃO	45
4.2	DIRETRIZES DA DOCIMOLOGIA	45
4.3	INSTÂNCIAS DA AVALIAÇÃO.....	48
4.3.1	Requisitos da Avaliação	48
4.3.1.1	Características dos requisitos	48
4.3.1.2	Exatidão na medida dos requisitos.....	49
4.3.2	Ferramentas da Avaliação	49
4.4	RESUMO E CONCLUSÕES	56
CAPÍTULO V – LÓGICA DIFUSA (FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA)		
5.1	INTRODUÇÃO	57
5.2	LÓGICA DIFUSA, RACIOCÍNIO POR APROXIMAÇÃO E TEORIA CLÁSSICA DOS CONJUNTOS	57
5.3	TEORIA CLÁSSICA DOS CONJUNTOS (CONJUNTOS <i>CRISP</i>).....	58
5.3.1	Conjuntos <i>Crisp</i>	60
5.3.2	Função de Pertinência e operações com Conjuntos <i>Crisp</i>	62
5.3.2.1	Função de Pertinência	62
5.3.2.2	Operações com Conjuntos <i>Crisp</i>	64
5.4	LÓGICA DIFUSA	67

5.4.1	Função de Pertinência em Conjuntos Difusos (<i>Fuzzy</i>)	68
5.4.1.1	Notação da Função de Pertinência <i>Fuzzy</i>	69
5.4.1.2	Implicações: " <i>O Meio Excluído</i> "	69
5.4.1.3	Função de Pertinência <i>Fuzzy</i> e o Meio Excluído.....	70
5.4.2	Operações entre Conjuntos Difusos (<i>Fuzzy</i>).....	71
5.4.2.1	Intersecção entre conjuntos <i>fuzzy</i>	71
5.4.2.2	União entre conjuntos <i>fuzzy</i>	74
5.4.2.3	Outras atividades com conjuntos <i>fuzzy</i>	74
5.4.3	Formas de função de pertinência difusas (<i>fuzzy</i>)	75
5.4.3.1	Número de funções de pertinência difusas e grau de sobreposição.....	78
5.4.4	Variáveis Lingüísticas e Termos Lingüísticos	80
5.4.4.1	Números Difusos ou Nebulosos (<i>Fuzzy</i>).....	80
5.4.4.2	Variáveis Lingüísticas e Números Nebulosos	82
5.4.5	Sobre o que é Possibilidade.....	83
5.4.5.1	Possibilidade e Probabilidade	84
5.5	RESUMO E CONCLUSÕES	87
CAPÍTULO VI – MATEMÁTICA NEBULOSA (FUNDAMENTAÇÃO PRÁTICA)		
6.1	INTRODUÇÃO	88
6.2	MATEMÁTICA NEBULOSA.....	88
6.2.1	Operações nebulosas	88
6.2.1.1	Normas.....	89
6.2.1.2	Operadores	90
6.2.1.3	Outros Operadores.....	92
6.2.2	Relações nebulosas	92
6.2.2.1	As partes de um sistema inferencial baseado em regras	93
6.2.2.2	A abordagem matricial.....	94
6.2.3	Composição de relações difusas.....	95
6.2.4	Raciocínio <i>Fuzzy</i>	103
6.2.5	"Defuzificação" e Tomada de Decisão.....	110

6.2.5.1 Tomada de decisão difusa.....	110
6.2.5.2 "Defuzificação".....	112
6.3 RESUMO E CONCLUSÕES	117
CAPÍTULO VII – A AVALIAÇÃO FORMATIVA DA APRENDIZAGEM ATRAVÉS DA MATEMÁTICA NEBULOSA	
7.1 INTRODUÇÃO	118
7.2 AVALIAÇÃO: APROXIMAÇÃO E INCERTEZA	118
7.3 DIMENSÕES DA AVALIAÇÃO.....	120
7.3.1 A avaliação na atualidade	120
7.3.2 Dimensões a avaliar.....	120
7.4 PROPOSTA METODOLÓGICA	124
7.4.1 Formatação das Variáveis e Termos Lingüísticos.....	124
7.4.2 A metáfora do modelo.....	127
7.4.3 Quanto às formas das funções do modelo	128
7.4.4 Formatação do Modelo Difuso	129
7.4.5 Ferramentas	129
7.4.6 Operacionalização.....	132
7.4.7 Estudo de Caso	132
7.4.7.1 Pontuação para <i>fuzificação</i> das entradas	134
7.4.7.2 Exemplo de pontuação para <i>fuzificação</i> das entradas.....	135
7.4.7.3 Análise das saídas e tomada de decisão	137
7.4.7.4 Análise final do estudo de caso	138
7.5 CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES	140
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	142

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

1.1 CONSIDERAÇÕES GERAIS

A problemática da avaliação humana tem recebido atenção renovada de pesquisadores das mais variadas áreas do conhecimento. A magnitude da complexidade desta matéria certamente está conectada à importância capital que a educação e seus corolários assumiram no contexto contemporâneo.

Definitivamente, a educação tornou-se mercadoria de alto valor agregado, seja pelo leque de possibilidades que abre a quem a compra, seja pela gorda conta bancária de quem a vende. No entanto, é preciso deixar claro que se está referindo aqui à educação como sinônimo de instrução, e não naquele contexto romântico e ultrapassado de sabedoria, no sentido de erudição, retidão ou justiça.

E assim deve ser interpretado o presente trabalho: restrito no que tange à abordagem pragmática e material que melhor descreve a cena escolar no Brasil. Pois que os objetivos educacionais agora estão voltados para um algo invisível – mas nem por isto menos formatador do "homo sociosapiens" – chamado *mercado*.

Então, como todo o sistema educacional tornou-se atrelado ao mercado, a prática da avaliação, inerente ao processo educacional, adquiriu o contorno de medição em definitivo.

1.1.1 Breve sinopse histórica da ação de avaliar

Depresbiteris (1989) menciona que a realização de provas remonta ao tempo do imperador chinês conhecido como o *Grande Shun*, em 2205 a.C. Naquele estado os oficiais do exército imperial eram avaliados de forma sistemática, com o objetivo claro de manter somente os mais capacitados à frente da segurança do Estado Imperial.

A autora ainda continua, citando outras situações históricas cuja importância ora reside no aspecto do pioneirismo local, ora no ineditismo:

- a) Nos Estados Unidos, já no Século XIX, Horace Mann torna-se pioneiro na criação de um sistema de testes. Na verdade, Mann fez muito mais do que isto, sendo considerado o "Pai da Educação Pública" nos Estados Unidos. Sua filosofia altruísta pode ser resumida em sua célebre frase: "Be ashamed to die until you have won some victory for humanity", que pode ser livremente traduzida assim: "Tenha vergonha de morrer até que você possa ter obtido alguma vitória para a humanidade".
- b) A partir do Século XX, em França e Portugal desenvolve-se a Docimologia¹ com o objetivo maior de sistematizar a atribuição de notas ou graus aos estudantes.

1.1.2 A Docimologia

O início do Século XX marca o princípio das primeiras pesquisas científicas no campo do ensino, entabuladas por Henri Pieron a partir de 1928. Esta nova Ciência dos Testes (Docimologia) empresta ao exame um caráter de "avaliação para a sociedade", pela qual o término de certo período de aprendizagem e a aprovação em um teste final fornecem ao indivíduo o direito de ocupar um "papel social". (STRUGĂ apud. GĂLĂPANU & BĂRBIERU, 2003).

Neste mesmo *paper*, Gălăpanu & Bărbieru apresentam as considerações do eminente psicólogo Vasile Pavelcu, que mostra a faceta dramática da vida de um indivíduo qualquer, submetido a uma perpétua sucessão de exames. A importância da dramaticidade deste aspecto, segundo Pavelcu, repousa na *quase inexistência de instrumentos de avaliação realmente apropriados* e no *alto grau de subjetivismo* envolvido nos processos avaliativos.

Ainda sobre estes métodos avaliativos, pesquisadores do assunto apresentam uma extensa gama de fatores, propositais ou não, que resultam numa baixa objetividade da estimação dos resultados que se propõem obter. Estes fatores podem ser agrupados numa série de categorias.

¹procedente do grego *dokimé*, que quer dizer *nota*, e *logos*, que significa *ciência*

1.1.2.1 Categorias de fatores para baixa objetividade da estimação

- a) Quanto ao professor: generosidade, influência da personalidade, erros de tendência central, percepção unilateral.
- b) Quanto à matéria em análise: Física, Matemática e Química podem ser avaliadas com mais objetividade do que Filosofia e Literatura, por exemplo.
- c) Quanto ao aluno: particularidades da personalidade, temperamento, atitudes.
- d) Quanto às circunstâncias do meio: pressão exercida pelas lideranças estudantis, pela classe, por alguns pais.

1.1.2.2 Princípios direcionadores da avaliação

Além disso, certos princípios devem ser atendidos a fim de evitar maior desvirtuamento do resultado da avaliação.

- a) Princípio da Avaliação Objetiva: refere-se à estrutura e organização da avaliação, de forma tal que esta possa ser um reflexo real e relevante da performance do aluno, limitando, tanto quanto possível, a influência de fatores externos.
- b) Princípio da Avaliação Interativa: expressa o fato de que tanto a avaliação da aprendizagem como a aprendizagem em si, estão ambas conectadas e determinadas pela avaliação feita pelo professor e pela auto-avaliação feita pelo próprio aluno.
- c) Princípio da Contextualização: que diz respeito ao fato de que as tarefas de avaliação de performance devem refletir situações do mundo real, proporcionando ao aluno a criação de capacidade de adaptação do conhecimento a várias situações.

(STAN apud. GĂLĂPANU & BĂRBIERU, op. cit.)

Como se percebe, a enumeração de tais fatores poderia ser bem maior, mas já há suficiência para perceber que se está diante de dois problemas fundamentais, um que diz respeito à objetividade do processo avaliativo e outro que se refere à configuração dos instrumentos à disposição.

1.2 OBJETIVOS

1.2.1 Objetivo geral

O desenvolvimento de uma proposta metodológica para a instrumentação de processos avaliativos, com a finalidade de introduzir a matemática nebulosa como meio complementar de apoio aos professores na formação de juízo de valor.

1.2.2 Objetivos específicos

- a) Introduzir novas formas de análise de agregação de valor pessoal durante o processo de aquisição de conhecimento.
- b) Suprir os professores de ferramental lógico aplicável tanto às avaliações de cunho formativo como às seletivas.
- c) Validar a metodologia através de um estudo de caso.
- d) Estabelecer as diretrizes para o desenvolvimento de um sistema informatizado que aplique a metodologia estabelecida.

1.3 JUSTIFICATIVA

1.3.1 Relevância do tema abordado

Embora o processo avaliativo não seja um tema novo no meio acadêmico - e concernente literatura -, a operacionalização deste processo, mormente no que tange à *tomada de decisão final*, ainda apresenta enorme dificuldade de realização.

A experiência de grande parte dos docentes aponta para a dificuldade no acordo sobre o grau, entendido comumente como "nota", a ser estabelecido em cada situação particular.

Varandas (2002) mostra esta problemática através de um breve histórico. Nas primeiras décadas do século, as avaliações baseavam-se fundamentalmente em aplicações de testes, possuindo então a especialidade da mensuração. O autor apresenta Ralph Tyler, um dos pioneiros neste assunto nos Estados Unidos, nos anos 30. Tyler, em sua obra intitulada *Eight Year Study* ("Estudo dos oito anos"), inova os procedimentos avaliativos existentes à época, apresentando tipos de testes variados e escalas de atitude, que atendiam à dimensão quantitativa; e inventários, questionários e fichas de registro de comportamento, entre outras, para obtenção de informações qualitativas. Dois aspectos merecem atenção:

- a) de que os objetivos curriculares ainda continuavam a ser atendidos somente numa *perspectiva longitudinal*;
- b) e de que também ainda prevalecia o aspecto de *mensuração*.

Paulatinamente os estudiosos em avaliação perceberam a necessidade de estabelecer diferenças entre *avaliar* e *medir*. Esta percepção torna-se mais clara a partir da década de 80. Os teóricos consideravam que a medição devia fazer parte do processo avaliativo, no entanto também entendiam que ela atenderia somente à dimensão quantitativa, sendo ineficaz na identificação do *valor* que determinada habilidade agrega ao sujeito. Evolutivamente, esta percepção levou à idéia de que o método avaliativo não poderia prescindir da criação de *critérios iniciais*, que passaram então a servir de referência para o julgamento e orientação da aprendizagem.

1.3.2 Avaliação: o atual estado da arte

Os anos 90 são marcados pela busca de um processo que tornasse a avaliação uma ferramenta de aprendizagem. Os estudiosos fundamentam então o que se passou a chamar de *avaliação formativa*.

Conforme Fleury (2002), os métodos de aprendizagem ultrapassaram o estado de simples transmissão de conhecimentos, devendo emprestar ao aprendiz um papel ativo dentro do próprio processo de aprendizado. Desta forma, o educador é remetido a

promover uma ligação direta entre o conhecimento e as competências que se procura desenvolver no aluno, ligação esta que seja passível de ser avaliada. Trata-se de um procedimento sistêmico e contínuo, em que o constante *feedback* acrescenta à didática uma *dimensão transversal* até então inexistente como *praxis* disseminada. Diz-se assim, porque Freire (1999), ao longo de toda a sua obra "Pedagogia da Autonomia – Saberes Necessários à Prática Educativa", mostra a importância da rigorosidade metódica e de que a educação é uma forma de intervenção no mundo.

1.4 DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

O século XX sabidamente foi de revolução nos costumes, valores pessoais e modos de vida, implicando modificações políticas e institucionais jamais vistas. Mais do que a obviedade desta constatação, interessa que são as pessoas os agentes de transformação dos fenômenos sociais. Do nível pessoal, psíquico, dos indivíduos, chegamos às grandes mudanças na sociedade. Neste contexto, a educação adquiriu papel de importância primária, dado o contributo da vida escolar na formação dos indivíduos. Mas a educação é adimensional, sendo o fenômeno educacional dialético: indivíduos interagem, de forma tal que a iteração de prática e teoria associada, promova a retroalimentação dos sistemas individual e coletivo. A maioria dos teóricos é unânime quanto à necessidade de aferição do sistema, o que deve ser feito tanto ao nível de célula, como do todo orgânico. O mecanismo de aferição se coaduna com o procurado hibridismo ótimo entre o ato de educar (valores e sentimentos) associado ao ato de instruir (capacidades e habilidades), definidos por Vieira (2000), provendo o sistema global de mecanismo com forte poder administrativo e gerencial.

Posta a necessidade por seu contorno geral, resta a análise do que ocorre nos dias de hoje no âmbito particular. Neste ponto, chega-se por inerência ao decurso da aprendizagem como produto alquímico do binômio educação – instrução . Qual o valor da apreciação do professor sobre a aprendizagem do aluno? Numa escala de 0 a 10, por que este valor em dada circunstância seria, por exemplo, 6,5 e não 6,6, ou 6,4? Como justificar a um aluno uma reprovação por 0,5 ponto ou até menos?

Métodos de condução do processo de avaliação e mesmo ferramentas estatísticas avançadas têm sido utilizados na busca por resultados satisfatórios. No entanto as questões colocadas no parágrafo anterior até hoje remanescem no dia-a-dia

dos professores. Isso porque, quanto aos métodos, estes divergem da possibilidade prática de aplicação alcançada aos mestres no seu cotidiano pedagógico; já quanto à aplicação das ferramentas estatísticas, há o esquecimento de que, para poder fazer certas operações com números atribuídos a observações, a própria estrutura de aplicação do método deve ser isomorfa à estrutura numérica que inclua estas operações (SIEGEL, 1999).

Para mais além e quanto à avaliação em si, fazendo-se uma leitura assídua de Manhães (1998), percebe-se que a burocracia da pedagogia vem criando um *status* regulamentar no ambiente educacional, que ao final nunca contempla uma ferramenta adequada ao mesmo nível de ambição do que exige. A distância entre o receituário normativo produzido nos planos estatal e institucional (este sem dúvida afiliado àquele), até a prática docente, constitui-se num hiato jamais preenchido. Por que? As razões são muitas, interessando a este trabalho a que diz respeito à inexistência de *metodologia matemática configurada para a instrumentação de processos avaliativos, que contemple os objetivos da aprendizagem*.

CAPÍTULO II APRENDIZAGEM E AVALIAÇÃO

2.1 INTRODUÇÃO

Mesmo na mais elementar atividade humana, sempre os indivíduos defrontam-se com a aplicação de um conhecimento adquirido². Embora a aquisição do conhecimento possa ocorrer de maneira não formal, em algum momento o resultado da ação humana implicará conseqüências e estas conseqüências serão objeto de apreciação pelos demais.

Como visto no Capítulo I, a avaliação remonta a tempos imemoriais. Isso decorre da própria forma como os seres humanos se organizam em sociedade, quando ocorre a divisão de tarefas e conseqüente atribuição de responsabilidades.

2.2 DIMENSÃO HISTÓRICA

É bem provável que o processo de avaliar de alguma forma tenha sempre existido. Ocorre aqui um remetimento ontológico que abrange as relações do indivíduo com seu meio e entre os indivíduos na coletividade.

A história da avaliação confunde-se com a própria história da aprendizagem formal, cujo início, a exemplo da citação de Depresbiteris (1989) no Capítulo I, costuma ser atribuído aos chineses. Clark (2000), em seu *A time capsule of training and learning*, delinea os egípcios como iniciadores e faz um breve histórico sobre a educação e suas metodologias, cujo resumo é apresentado na seção 2.2.1 a seguir.

2.2.1 Dos Egípcios e Chineses à Era da Informação

- a) Egípcios (2100 AC): promoviam a *educação para o trabalho*, através de *organizações de aprendizes* (ou para a aprendizagem), que se assemelhavam ao que mais tarde (séculos XII a XV) ficou conhecido como *guildas*.

- b) Chineses (500 AC): observação do fenômeno estudado; semelhante ao que mais tarde foi chamado de *estudo de caso*, metodologia criada por *Christopher Langdell* em 1880³.
- c) Escola Grega (300 AC) – *Sócrates*, seguido por *Platão* e depois *Aristóteles*: sistema baseado em perguntas e respostas (conhecido como *Método Socrático* ou *Dialético*). *Platão* criou os *Diálogos* (o processo dialético em si), que dava ênfase ao coletivo em detrimento ao individual. A academia que criou é considerada como a *primeira universidade* da história e seus métodos estão associados ao que mais tarde se chamou de *construtivismo* de *Jean Piaget*. A prática foi aprimorada por *Aristóteles*, que utilizava a *livre associação de idéias*. Para este, a compreensão estava garantida pela contigüidade, sucessão, similaridade, e contraste.
- d) Surgimento do ensino em escolas formais (Século X): transmissão de conteúdo de um professor para alunos ouvintes. O professor *preenche* os alunos que estão *vazios* de conhecimento. É o surgimento da *pedagogia*, cujo significado literal é *líder de crianças* (do grego *paid* = criança; *agogus* = líder de). O professor passa a ser o responsável por todas as decisões em classe.
- e) Em 1560 os *Jesuítas* dão começo ao ensino eminentemente voltado para o público masculino. Em 1599 os *Jesuítas* se norteiam pelo *Ratio Studiorum* (FERTÉ, 1892), um manual de procedimentos que estabeleceu os padrões para aferir e medir o aproveitamento de alunos, tornando provas e exames sinônimos de avaliação. O processo de aprendizagem é pautado pela memorização e sua expressão oral. Entre outras, o *Ratio* indicava a disposição dos alunos em sala nos dias de exame e o tempo disponível para cada resposta. De certa forma, muitas destas práticas ainda estão vigendo até os dias atuais.

O contraponto vem em seguida: o desenvolvimento do senso das crianças em lugar da memorização (Século XVII) – *John Comenius* (*Jan Komensky*) cria o *Pansofismo*. Através de suas obras, publicadas entre 1631 e 1659,

² Aqui se está propositalmente restringindo a questão à ação decorrente do aprendizado.

³ Ver item f adiante.

Comenius lança um olhar holístico sobre o processo educacional, pensando na formação de indivíduos críticos para com o mundo. A passagem do Século XVII para o XVIII é marcada pelas idéias de *Johann Heinrich Pestalozzi* e John Locke, basicamente calcadas sobre o aprendizado através da aquisição gradual de experiência sobre o que é concreto e próximo do aluno. Ficam assim abertas as condições para que, em meados do Século XVIII, *Jean Jacques Rousseau* crie a filosofia do *Contrato Social*, que classicamente introduz os ideais democráticos vigentes até os dias atuais.

- f) Já em pleno Século XVII, *Johann Friedrich Herbart* introduz a necessidade última de testar os alunos para assegurar-se de que realmente aprenderam os conteúdos.

No Brasil, a primeira escola para meninas surgiu em 1818, criada por D. João VI. Os colégios mistos públicos apareceram durante o Império, em 1876, todos com rígida divisão de espaço entre homens e mulheres. Se, por falta de espaço, em algum momento houvesse a necessidade de reunião de ambos os sexos numa mesma sala, a mesma era dividida por um muro, sendo possível avistar somente a mesa do professor (LEAL, 2003).

Em 1880, *Christopher Langdell* cria a metodologia de *estudos de casos*, voltada principalmente para as escolas de Direito, Medicina e Negócios. Nos séculos que se seguem, os estudiosos voltam-se para os aspectos psicológicos do aprendizado, como a metafísica, a lógica e a estética - dimensão mental - e as aptidões, habilidades e os interesses dos estudantes – dimensão física.

- g) Sem dúvida, as três primeiras décadas do Século XX estão voltadas para a aferição da aprendizagem, em vista de que o conhecimento passa a ter relação cada vez mais direta com eficácia de resultados. Em 1917, *Charles R. Allen* adapta a metodologia de *Herbart* (ver seção f retro), dividindo o processo de aprendizagem para o trabalho em cinco passos intitulados *Mostrar, Falar, Fazer e Checar* – este último passo refere-se ao teste do aprendizado do operário pela aferição da sua performance.

John Dewey é considerado o criador da educação progressista, que enfatizava a *experiência do aluno* e a *crítica inquisitiva* como componentes fundamentais da aprendizagem. Para Dewey "qualquer teoria e conjunto de práticas são dogmáticos, já que não se baseiam num exame crítico dos próprios princípios que lhes dão existência".⁴

- h) Em 1959 *Don Kirkpatrick* introduz um método de avaliação em quatro níveis. Nível de reação: mede como os alunos reagem ao aprendizado. Nível de aprendizado: o quanto que os alunos mudam de atitude, incrementam seu conhecimento e melhoram suas habilidades em função do curso. Nível comportamental: o quanto que os alunos mudam no seu comportamento em função do aprendizado. Nível de resultados: os resultados obtidos pelo atendimento ao programa de instruções.
- i) Em 1960, *Albert Bandura* introduz o *Aprendizado Observacional*, que necessariamente não possui relação com o ato de imitar. Interessa aqui a concepção de *Bandura* sobre a avaliação: ele apregoa a auto-avaliação, em que o indivíduo avalia-se pela observação de si mesmo, mais ainda, do que o indivíduo sabe que pode fazer com o conhecimento adquirido. *Bandura* entende que quanto maior o poder de auto-análise, maior o controle do indivíduo sobre o meio em que se insere.
- j) Em 1962, *Robert Glaser* introduz o conceito de *design instrucional*. Ele cria a *Prescrição de Instrução Individual*, pela qual o aluno redireciona seu aprendizado pela análise de resultados que obtém em sucessivos testes. *Glaser* é pioneiro no uso de medidas referenciadas a critérios pré-estabelecidos.
- k) Em 1968, *Fred Keller* cria o chamado *Plano Keller*, que consistia numa aprendizagem composta por pequenas unidades modulares de instrução, conduzidas no tempo pelo próprio aluno. Os estudantes eram apenas direcionados durante os estudos, havendo aulas somente em casos de necessidade de motivação. Testes eram aplicados sobre cada módulo, e para aprovação havia a necessidade de obtenção de um escore mínimo de

⁴ Tradução livre pelo autor do presente trabalho.

90% (noventa por cento). Os módulos eram compostos de forma variada, indo desde a leitura de textos, filmes, áudio, trabalhos externos, condução de experimentos, condução de entrevistas etc. Já as avaliações podiam ser na forma de ensaios, testes de múltipla escolha, exames orais, relatórios escritos etc. Um aspecto interessante é o de que bônus especiais eram dados àqueles estudantes que cumpriam as tarefas em tempo reduzido. Este dado é importante, porque existe uma tendência à procrastinação quando o aluno conduz o tempo do processo de aprendizagem, fato hoje em dia bastante comum no *ensino à distância*.

2.2.2 O momento atual

Para além de 1970 até os dias de hoje, as implementações se deram na aplicação de testes prévios e *a posteriori* ao processo instrucional, testes seqüenciais, compilação de evidências sobre a incorporação de atitudes específicas, mensuração da qualidade do trabalho em sala de aula, auto-avaliação associada à avaliação formativa, entre outras.

A auto-avaliação está na ordem do dia, associada à análise de obras escritas pelo estudante, que também deve submeter-se à apresentação das mesmas. O professor atua como um provedor quanto aos pontos fracos e como um direcionador quanto aos pontos fortes de cada aluno.

A ênfase tem recaído sobre o que se convencionou chamar de *avaliação formativa* na aprendizagem. Nas palavras de Perrenoud (1999), a avaliação formativa "está no âmago das tentativas de pedagogia diferenciada e de individualização dos percursos de formação". Neste trabalho, a avaliação formativa consiste no alvo principal da metodologia criada.

2.3 RESUMO E CONCLUSÕES

A breve incursão histórica apresentada, apesar de parcial pela limitação física evidente, sintetiza o percurso seguido pelo processo humano da aprendizagem. Percebe-se um aspecto cíclico, não exatamente recursivo, da relação bipolar entre comunicador e aprendiz. Modificam-se essencialmente a forma de comunicar e o

direcionamento da postura que o aprendiz adota diante de si mesmo. Assim, depois de anos de autoritarismo na educação – *Ratio Studiorum* – volta-se a uma dinâmica mais assemelhada à dialética das Escolas Grega e Chinesa.

Em *Techniques for Authentic Assessment*, Kerka (2003) apresenta o fenômeno da aprendizagem como um processo dinâmico pelo qual o estudante constrói seu conhecimento de forma ativa. À aquisição da informação segue-se a sua organização de forma seriada, que permita o entendimento da complexidade de forma incremental, sempre influenciada pelo contexto em que se insere o aprendiz e o próprio comunicador (KERKA, 2003 apud HOLT, 1992).

Deseja-se concluir este capítulo sublinhando certos aspectos que devem servir de matéria-prima a este trabalho.

- a) O primeiro ponto de vista refere-se ao fato de que sempre houve pouca ou nenhuma atenção à arbitrariedade de que se reveste o ato de *atribuir uma nota*. É preciso deixar claro que neste trabalho abordar-se este assunto de forma bastante focada, i. é, a teoria e prática da avaliação terão papel secundário, enquanto o ato de formalização do juízo de valor será o principal objeto de estudo.
- b) O segundo ponto de vista diz respeito à organização do processo de avaliação. Neste trabalho, o planejamento para a avaliação assume papel fundamental, porque é nele que se fixarão os parâmetros que nortearão avaliador e avaliado.

CAPÍTULO III AVALIAÇÃO

3.1 INTRODUÇÃO

A fim de que se possa estabelecer qualquer proposta metodológica para a avaliação da aprendizagem, deve-se em primeiro lugar divisar conceitualmente o ato de avaliar, tanto na sua forma ampla como na forma de elemento inerente à aprendizagem. A complexidade do ato de avaliar pode ser explicada por sua íntima relação com a sobrevivência em si, pois os indivíduos originalmente avaliam para fazer escolhas, *tomar decisões*. Assim, avaliar bem é fundamental para fazer *melhores escolhas*. Uma avaliação mal feita implica más escolhas e, portanto, *resultados indesejados* ou *aquém do esperado*.

3.1 O QUE É AVALIAR?

O termo *avaliar* possui largueza conceitual, já que pode classificar-se de muitas formas, como quanto à *natureza*, quanto ao *objeto* ou quanto à *relação*, entre outras.

3.2.1 Amplitude do termo avaliar

Conforme a classificação esboçada.

- a) Quanto à natureza: por um lado o ato de avaliar pode se constituir num processo meramente intuitivo, natural e intrínseco ao ser humano; mas também pode obedecer a uma ritualística logicamente estruturada, cujo principal efeito é o de dar sustentação a algum *sistema de regulação*.

Importante salientar que não constitui objetivo desta obra a discussão de epistemologias de temas adjacentes, como a regulação na educação, políticas educacionais, ou contradições internas e externas da burocracia escolar. Para que se possa chegar à viabilidade da proposta inicial, é preciso manter o rumo na direção do equacionamento operacional do ato de avaliar.

- b) Quanto ao objeto: é o mais usual, pois se trata de atitude que os indivíduos promovem continuamente, avaliando pessoas ou cousas (cousas aqui como complementar de pessoas, i. é, seres, abstrações, idéias etc). A caracterização do objeto geralmente está ligada à natureza do parâmetro. Isto faz com que os indivíduos normalmente associem a avaliação de pessoas à apreciação de aspectos qualitativos, enquanto às cousas ao exame de características que sejam quantificáveis.

No entanto, qualquer objeto, e sob determinadas condicionantes, pode ser avaliado tanto qualitativa como quantitativamente. A dificuldade costuma estar na avaliação qualitativa, porque, se pela metafísica tradicional a qualidade está associada ao modo como as coisas são - estanque e aparentemente sem relação com o estado do avaliador -, pela dialética ela designa a diversidade de relações que moldam cada coisa, somadas a um constante câmbio temporal. Esta visão é importante para o tratamento que se dará ao ato de avaliar, mais adiante neste trabalho.

- c) Quanto à relação: avaliar se constitui num ato em que podem ocorrer conflitos de interesse. Geralmente esta é a tônica da relação entre os participantes de um processo estimatório. Portanto, tanto melhor será o resultado de uma apreciação, quanto mais a sua operacionalização estiver próxima da *linguagem natural* dos indivíduos participantes. Esta condição empresta ao processo avaliatório uma possibilidade de troca, de diálogo, na direção da harmonização e do consenso. Não se trata aqui de acomodar conveniências, mas de propiciar ao mecanismo a possibilidade de ser evolucionário. Este traço também se reveste de grande importância nesta obra.

3.2.2 Conceituação

Aproveitando as abordagens antecedentes, tenta-se aqui chegar a uma conceituação que seja ampla o suficiente para abranger os propósitos ali implícitos.

"Avaliar é obter juízo de percepção sobre um objetivo de avaliação, a partir de referenciais previamente estabelecidos."

Estendendo o conceito anterior, pode-se identificar quatro componentes básicos, a saber,

- a) o avaliador,
- b) um objetivo de avaliação,
- c) os referenciais, e
- d) o juízo de percepção.

É evidente que se poderia arrumar outros termos e outras classificações, mas preferiu-se esta por contemplar *um objetivo de avaliação* (item "b" anterior) que tanto serve de sujeito como de objeto. Na definição há também uma elasticidade proposital quanto ao resultado, já que o *juízo de percepção* (item "d" anterior) abrange qualquer aplicação pretendida com o produto fruto da apreciação.

O fato de se utilizar o singular para descrever *o avaliador* (item "a" anterior), ou o plural para *os referenciais* (item "c" anterior), não significa um dogma de quantificação. Entenda-se bem que, por exemplo, no caso do presente trabalho, *o avaliador* poderá ser *o professor, o aluno, ou ambos, ou até mais concertantes*, bem como seja possível a ocorrência de uma avaliação monovalente.

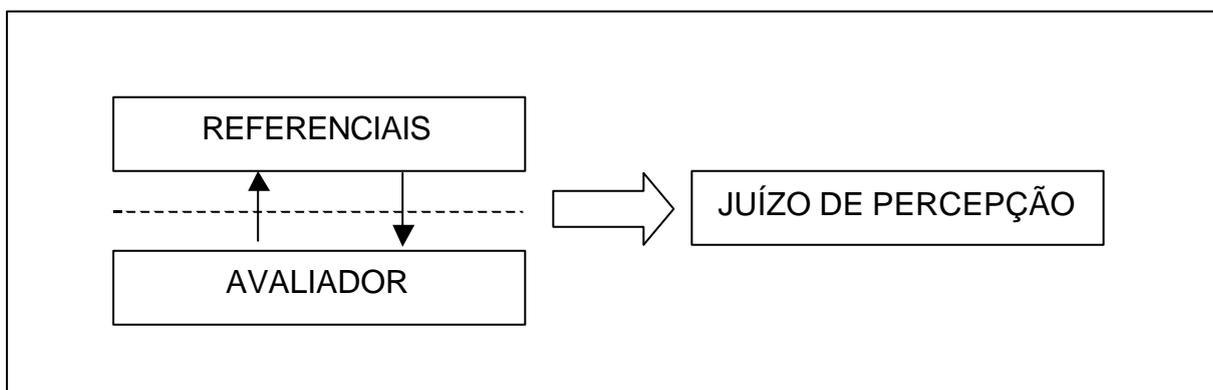


Figura 1 – Esquemático do conceito de avaliação

A Figura 1 apresenta uma concepção esquemática que propositalmente não apresenta o *objetivo de avaliação* (item "b" anterior) como uma entidade isolada, porque se deseja passar a idéia de que este se manifesta na forma de consenso, como resposta às nuances, às buscas, progressões e oposições intervenientes. O objetivo, antes de ser um alvo, um resultado, ou simplesmente um *objetivo "da" avaliação*, passa a ser oportunamente *composto* pela avaliação em si. O objetivo, quando encarado

como mero produto final, oculta toda a informação contida na dinâmica do processo, além do que não agrega real valor ao avaliando, porque resulta numa resposta dicotômica vazia de sentido: aprovado *versus* reprovado.

3.2.3 Ensino–Aprendizagem

O ato de avaliar não pode ser visto como um fenômeno isolado do ou no processo ensino–aprendizagem. O papel da avaliação se insere no contexto do planejamento global do desenvolvimento físico, intelectual e moral do ser humano.

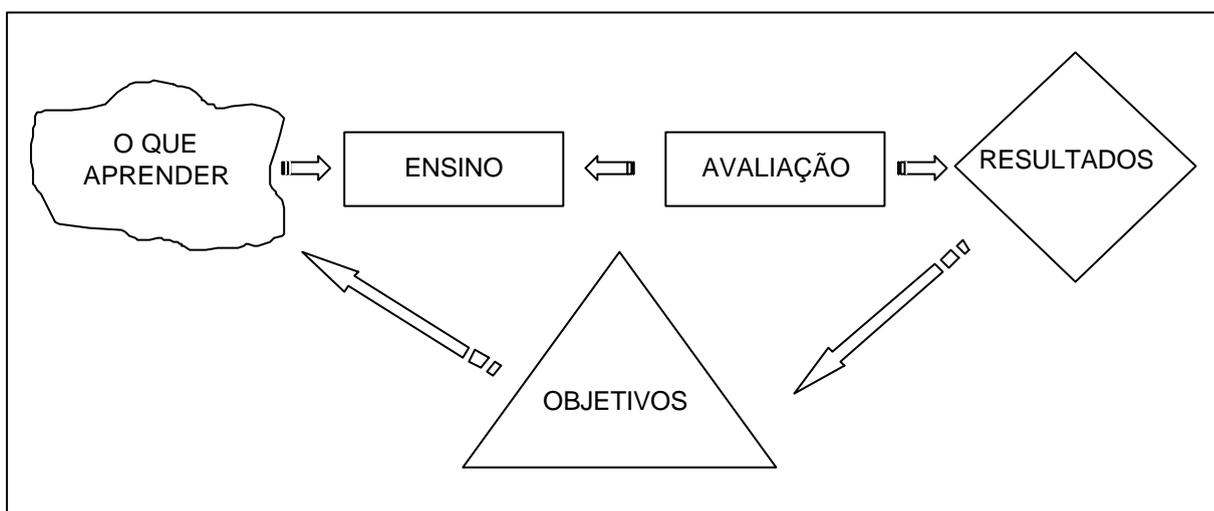


Figura 2 - Ensino – Aprendizagem

A Figura 2 apresenta um esquemático pelo qual se pretende salientar graficamente os papéis e as relações dos elementos básicos constituintes do processo ensino–aprendizagem.

- a) A figura triangular e central dos "objetivos" passa a idéia de que eles possuem o papel de iniciadores do processo. As setas representativas das relações mostram que estes objetivos servem também como mecanismo de controle da aprendizagem, pois é através da análise dos resultados comparados que se dará a atividade de inferência decisória educacional.
- b) "O que aprender" possui formato irregular, para lembrar que o conteúdo deve ser perenemente dinâmico, adaptável no tempo e no espaço, não limitado, útil e desejado.

- c) O "ensino" atinge os "objetivos" através da "avaliação" e dos "resultados" apresentados por esta última. A forma retangular representa o aspecto formal, estruturado, técnico e científico que o ensino deve possuir.
- d) A "avaliação" também deve ser formal, estruturada, técnica e científica, além de servir como elemento chave de vinculação entre o que é ensinado e o que é aprendido. É o elemento de ligação heteropolar entre educador e educando.
- e) A figura losângica dos "resultados" aproveita o conceito de que apesar de um losango possuir os quatro lados iguais, seus quatro ângulos internos são diferentes dois a dois. Isto passa a idéia de que, se por um lado os resultados podem bem espelhar o conseguimento dos objetivos, por outro jamais devem ser considerados como um fim em si mesmos, i. é, eles não são a avaliação, mas produto desta.

3.2.4 Dirimentes

A avaliação escolar costuma ser alvo de acirrada controvérsia quanto à sua aplicação, eficiência e eficácia. Muitos são os argumentos, mas certamente a causa está na falibilidade humana em julgar e no aspecto de distinção de que a avaliação se circunscreve. A falibilidade se refere à aceitação ou recusa do avaliando como oficialmente apto ou não a fazer algo, enquanto a distinção imputa ao avaliando, sempre de forma silenciosa, oculta e simbólica, supostos traços intelectuais ou comportamentais que moldariam os resultados obtidos pelo indivíduo.

Popham (1998) justifica e dirime o ato de avaliar, subdividindo sua argumentação em uma série de motivos objetivos e razoáveis.

Em relação ao professor e à escola

- a) O processo de avaliação deve oferecer transparência sobre os propósitos de ensino do professor associado, portanto servindo como guia ideológico e prático.
- b) Através da comparação do estado prévio à avaliação com o estado posterior, o rendimento do aluno serve como critério de aferição da efetividade do

professor. Se o estudante atinge os resultados de referência, significa que o ensino está em conformidade, do contrário há a necessidade de releitura.

- c) A escola também pode ser avaliada pelo público, quando este tem acesso pleno aos resultados do rendimento alcançado pelos alunos.

Em relação ao aluno

- a) O acompanhamento do desenvolvimento do estudante através da avaliação dá ao professor a oportunidade de determinar se o aluno está ou não evoluindo através dos objetivos traçados, permitindo assim convenientes correções de rumo na aprendizagem.
- b) A avaliação fornece um diagnóstico dos pontos fracos e fortes do estudante, o que abastece a ambos, professor e aluno, de informação sobre os conhecimentos e conteúdos que devem ser incrementados ou minimizados em importância e substância.
- c) A avaliação valida e gradua o processo de ensino-aprendizagem, o que empresta dignidade ou privilégio ao aluno e o impele na busca pela melhora de performance.

Como se infere da leitura acima, Popham oferece uma visão mais ajustada da condução e efeitos do processo avaliativo, desmistificando a idéia de avaliação como instrumento de reprovação ou de segregação.

3.3 A AVALIAÇÃO E O ENSINO

A fim de poder-se traçar um paralelo sobre as concepções até aqui apresentadas, adiante são expostas algumas abordagens sobre avaliação que evidenciam forte correlação com as formulações já estabelecidas neste trabalho. Não se quer aqui traçar um panorama completo sobre o tema, mas evidenciar ângulos de visualização sobre o assunto. O objetivo é segmentar a matéria, sem perder o senso de síntese.

3.3.1 Avaliação burocrática

O representante por excelência da avaliação burocrática é o histórico *boletim escolar*. O boletim escolar existe há muitos séculos, sendo de difícil precisão o início do seu uso. No Brasil, até a década de 60, este instrumento servia como suporte à memória e veículo oficial de divulgação, também emprestando veracidade aos dados. Era um instrumento eminentemente certificador. Também costumava trazer informações sobre o desempenho comportamental, nas dimensões ética e social, na tentativa de conformar o indivíduo dentro do que se entendia como desejável.

A partir da década de 80, o boletim passa a dar maior enfoque na atuação eficiente do estudante. Procura medir o desenvolvimento de competências, aferindo a *quantidade de conhecimento adquirido*. Passa a trazer informações de caráter geral aos pais, na tentativa de estreitar as relações entre a família e escola. Serve ainda ao planejamento mínimo da disciplina.

Surpreende que no ensino superior praticamente não haja mais o boletim escolar. Mais ainda, o que o aluno deste nível possui hoje, é algo em pequena parte semelhante ao que existia no início, i. é, simples apontamentos (geralmente eletrônicos) de notas obtidas.

O que deve ficar evidente é que, no ensino superior, toda a instrumentação criada para o disciplinamento da relação professor – aluno, não serve para a operacionalização da avaliação. Por exemplo, os chamados *planos de ensino, ementas de disciplina* e mesmo *planos de aula*, são oriundos de uma eterna e renitente mesmice burocrática no ensino, já que apenas formalizam intenções, estabelecendo protocolos cujo cumprimento não guarda relação de causa e efeito com a aprendizagem em si.

Em síntese, a avaliação burocrática apresenta-se desconecta do ato pedagógico.

3.3.2 Avaliação regulação

A avaliação regulação se refere à avaliação como instrumento de medida. Esta feição da avaliação tem sido causa de acirrada controvérsia, pois enquanto muitos teóricos entendem que a medição é imprescindível no processo educacional, outros questionam o caráter arbitrário, às vezes autoritário, de que comumente se reveste.

A avaliação regulação nasce com a docimologia (ver Capítulo I, seção 1.1.2), respaldada pelo modelo psicométrico que ganhava força na década de 20. O aspecto de mensuração remanesce até hoje, mas os detratores apontam para a insegurança quanto à isenção do professor. Assoma-se novamente aqui o caráter puramente material em que a atribuição de nota funciona como moeda de troca.

O questionamento é o de como dar à matemática, necessária ao processo de mensuração, uma amplitude de aplicação em que o instrumento de aferição contribua para o direcionamento e auto-reflexão do aluno, potencializando a aprendizagem. Esta amplificação da ferramenta deve ainda permitir ao professor a transmutação de quantidades e qualidades percebidas, em diretivas de aprendizagem definidas a partir de parâmetros pré-estabelecidos.

3.3.3 Avaliação de relações

Este enfoque se contrapõe à ênfase na memorização como veículo monovalente de aprendizagem, quando o professor atua como transmissor do conhecimento. Neste tipo de avaliação prestigia-se as relações que os alunos fazem, tendo os conteúdos como matéria-prima. Por sua vez, os conteúdos são alcançados através do entendimento conceitual das partes que o compõe, permitindo ao aluno desenvolver a capacidade de descrever e explicar a matéria estudada.

A avaliação de relações atua no sentido de que o aluno possa desenvolver a capacidade de dar nexos às partes de um todo aprendido: a construção do conhecimento. Daí que a técnica de avaliação utilizada deve estar afinada com o resultado esperado. Zabala (1998) apresenta alguns exemplos em que podem ocorrer vieses quanto ao tipo de técnica adotada (Figura 3).

Na avaliação de relações, o professor observa o incremento das relações entre os conteúdos administrados e estudados, e mesmo destes com relação aos conteúdos já suportados pelo aluno quando do início da aprendizagem.

TÉCNICA	POSSÍVEIS VIESES
O aluno é solicitado a enunciar e interpretar os atributos essenciais e específicos de um assunto	<ul style="list-style-type: none"> • Leva a conclusões enganosas • A base de regras da correção tem de ser minuciosa • Dificuldade de interpretar as considerações do aluno
Múltipla escolha	<ul style="list-style-type: none"> • Memorização / ausência de reflexão • Conhecimento fragmentado
Narrativa de tema	<ul style="list-style-type: none"> • Reprodução do original • Desestruturação da própria expressão

Figura 3 – Técnicas e vieses

3.3.4 Avaliação de métodos e atitudes

Trata-se de avaliar as ações do aluno quanto aos procedimentos que adota na realização dos estudos. Deve-se procurar identificar possíveis deficiências no modo como o aluno trabalha com a aquisição e processamento do conhecimento (leitura, redação, pesquisa, crítica etc).

Examinados os métodos, através da observação o professor busca perceber como o aluno cria a sua própria experimentação dos conteúdos. Aqui reside também a atitude do aluno para com esta aplicação, porque a sua postura estará embasada na forma como o estudante se relaciona com o mundo. Os valores do educando estarão tacitamente colocados na forma como irá atuar e interagir.

Num primeiro momento o professor fornece conteúdos e diretrizes. Em seguida cria as condições para que surjam situações de interação entre os alunos, quando poderá observar a desenvoltura e os propósitos de cada um.

3.3.5 Avaliação multilateral

Avaliar é próprio do ser humano e transcende estratégias, técnicas ou procedimentos (SÁTIRO, 2002). A mesma autora conclui que avaliar é um atributo do

pensamento humano e portanto racional. Decorre daí a noção de aperfeiçoamento do próprio ato de pensar. Para o caso presente: *avaliação da aprendizagem*, e lembrando Freire, Sático mostra como esta atividade deve também ser provida aos alunos, de forma tal que os mesmos sejam parte ativa do processo educativo, passando a agentes de transformação do sistema. Esta intenção pode ser resumida no que se convencionou chamar de avaliação de *habilidades e atitudes*, elementos *ativos*, portanto transformadores, complementando a avaliação de uma terceira dimensão, passiva por natureza, a avaliação do *conhecimento*.

Este último registro é de suma importância para o presente trabalho, porque a metodologia que aqui se desenvolve serve de forma multilateral aos agentes envolvidos no processo de aprendizado.

3.3.6 Avaliação multidimensional

Segundo Bonniol e Vial (2001), a avaliação deve ser analisada da maneira como é concebida. Conforme os autores, há três grandes concepções, concordes com o campo de avaliação escolhido e sua respectiva postura epistemológica (chamada de *epistème*), a saber:

- a) avaliar é *mensurar* ⇒ modelo histórico: métrica, docimologia;
- b) avaliar é *gerir* ⇒ modelo contemporâneo: avaliação como auxiliar na tomada de decisão – cibernética (comunicação e controle);
- c) avaliar é *sentir* ⇒ modelo sensorial: dialética (a apreensão da verdade em sua essência / definição marxista) – hermenêutica.

De fato, esta forma de agrupar é apenas uma das maneiras. Segundo VIAL (1999):

"Quand on étudie les recherches et les pratiques d'évaluation depuis le début du siècle (Vial, 1997), on constate que chaque courant définit l'évaluation de façon différente. En fait chaque modèle d'évaluation délimite son champ et posant sa définition."

"Quando se estudam as pesquisas e práticas de avaliação desde o início do século, se constata que cada corrente define a avaliação de diferentes modos. De fato, cada modelo de avaliação delimita sua abrangência e propõe sua definição." (TRADUÇÃO NOSSA)

A fim de facilitar o entendimento da proposição de cada modelo, Vial utiliza-se das representações de pensamento disponíveis: determinística, funcional, estrutural e sistêmica. Então, para Vial os modelos de avaliação terminam por obedecer ao funcionamento do *sistema de idéias* hegemônico no tempo e no espaço de sua aplicação. Fica aqui um questionamento sobre se Vial entende a avaliação como um fenômeno supracultural.

Voltando ao início, na visão de mundo de Bonniol e Vial, as três *epistêmes* estão relacionadas a *produtos*, *técnicas* e *processos*, respectivamente e pela ordem. Mais adiante, os autores colocam que não se tratam de *modelos de avaliação*, e sim a reunião estrutural de pretensos modelos. Sobressai nos textos destes autores a visão de um conflito incessante entre duas lógicas de avaliação: o *controle* e o restante (entendendo-se por restante, tudo o que não for controle e que vem sendo chamado de *avaliação formativa*). A avaliação adquire um duplo caráter: uma face mecanicista e outra de articulação entre contrários.

Este raciocínio interessa a este estudo, pois se tem o objetivo de estruturar um *ferramental lógico aplicável tanto às avaliações de cunho formativo como às seletivas*.

3.4 AVALIAÇÃO FORMATIVA

O que vem sendo chamado na literatura de *avaliação formativa*, poderia ser acrescentado como mais um subtítulo à seção precedente. No entanto, dada a importância e atualidade de que se reveste o assunto, além de ser peça importante na metodologia aqui exposta, o mesmo recebeu hierarquia maior no corpo do presente trabalho.

Perrenoud (1999) comenta sobre a inevitável e negativa transmutação da avaliação em mecanismo de hierarquização de conhecimentos, competências e mesmo valores do aluno. Esta hierarquização impacta na progressão dos estudos do aluno, nas seleções em que irá participar e mesmo na certificação que validará sua entrada no mercado de trabalho. Perrenoud trata aqui do fenômeno educacional recorrente em nosso ensino, que cerceia o espírito criativo e a imaginação do estudante. Deste modo o estudante torna-se um autômato, replicando o espírito carreirista burocrático institucionalizado na sociedade. Por sua vez, este espírito parece conectado ao sistema do capital, que prima pela comprovação da propriedade - aqui do conhecimento - como

simples *commoditie*, desprivilegiando desde cedo a inovação (conseqüentemente a pesquisa, que a precede).

O alto grau de utilitarismo desta conformação gera efeitos indesejados, como o fato de colocar professor e aluno em oposição, pois o processo avaliatório se torna um processo de negociação (novamente a idéia de *commoditie*). O aluno se esforça na preparação para medida de seu desempenho futuro, pensando exclusivamente na obtenção de uma nota que o recompense. Em troca oferece sua *presença* em sala, *viabilizando* o sistema estabelecido. Segundo Perrenoud, esta é a *lógica da seleção*.

Significa que os conteúdos perdem seu referencial e relevância, tornando a formação dos indivíduos carente de sentido existencial. Não é por acaso a situação recorrente em que os jovens dizem *não saber o que querem da vida*. Geralmente pensam no *quê se formar*, em detrimento de *em quem se tornar – instrução vs. educação?*

No plano do conjunto da sociedade, tem-se como agravante o prolongamento demasiado da reciclagem dos papéis sociais, pois a medida do conhecimento como padrão privilegia atividades cujo *contrato de valor* esteja protegido por *reserva de mercado*, em prejuízo de uma desejada *engenhosidade modificadora*.

Em contraposição a esta *lógica da seleção*, surge a *avaliação formativa*, cujo mote é melhor servir à aprendizagem como *processo*. Na avaliação formativa a ênfase se estabelece no raciocínio do aluno, i. é, na maneira como este acessa, adquire e aproveita o conhecimento.

Numa primeira apreciação, a avaliação formativa parece excluir a mensuração como instrumento avaliatório. Não é verdade. Outrossim, modifica-se a aplicação e o porquê da medição. Aqui os resultados servirão ao aluno como guia, num processo teleológico que favorece a trajetória, a busca, a descoberta, enfim, que conecta o sentido da instrução presente com a formação futura.

No processo tradicional existe a problemática da violência simbólica, visionada por *Pierre Bourdieu*. Bourdieu (1998) comenta

"[...] a violência simbólica impõe uma coerção que se institui por intermédio do reconhecimento extorquido que o dominado não pode deixar de outorgar ao dominante quando somente dispõe, para pensá-lo e para pensar a si mesmo, de instrumentos de conhecimento que tem em comum com o dominante e que constituem a forma incorporada da relação de dominação" (apud SANTOS, 2003).

Bourdieu desnuda a manipulação fetichista que assombra as relações sociais de dominação. Neste caso, os sistemas são criados por quem exerce ou exercerá a violência simbólica. Neste caso, a avaliação formativa desempenha o papel de elemento de disrupção, em que o sistema serve como *meio* e o *salto quântico da aprendizagem* do aluno, como *fim*.

3.4.1 Avaliação Formativa – MEC – IES

A posição do *Ministério da Educação e Cultura-MEC* sobre a avaliação é:

"[...] a matéria é institucional e estará normatizada no *Regimento Interno* da instituição de ensino superior. Os critérios de avaliação utilizados pelas instituições de ensino deverão ser estabelecidos antes de cada período letivo, conforme preconiza o art. 47, § 1o, da Lei no 9.394/96 (*Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional-LDBEN*)" (MEC, 2003).

No entanto, no mesmo endereço, <http://www.mec.gov.br/Sesu/diretriz.shtm>, nos *objetivos e metas*, o MEC se propõe a "Contribuir para a inovação e a qualidade do projeto pedagógico do ensino de graduação, norteando os instrumentos de avaliação" (grifo nosso). Aqui se inicia uma grande confusão, porque o único norte propiciado pelo MEC é o que diz respeito às avaliações das instituições de ensino. Para o ensino superior causa bastante impacto o assim chamado - e famigerado - *Provão*. Ora, o *Provão*, como o próprio nome diz, se constitui num teste supostamente longo, com questões de múltipla escolha e discursivas; e só. Portanto, a partir daí tudo o mais é avaliado.

A implicação deste fato faz com que as instituições voltem todo o seu planejamento pedagógico para a *excelência* no *Provão*. E quem "paga"? O professor, porque se vê entre as *duas lógicas* de Perrenoud: em um certo momento é cobrado sobre a aplicação de todos os preceitos *top de linha* em termos de avaliação; em outro é obrigado a avaliar seletivamente para o *Provão*.

O fenômeno descrito acima não ocorre nos IES em seus primeiros semestres de vida, quando seus alunos ainda não são submetidos ao *Provão*. Nestes casos os professores são "*subliminarmente convidados*" a facilitarem ao máximo a aprovação. Isto se deve à forte concorrência, posto que os indivíduos acorrem para aquelas instituições em que podem se formar de maneira "*mais tranqüila*". Para a instituição significa a sofreguidão para obter retorno sobre o capital investido o mais rápido

possível, dando em troca o que todos querem mas, obviamente, ninguém explicita. Ou seja, somente quando o "amanhã" chegar haverá alguma preocupação com o *Provão*, entretanto o foco estará na necessidade de lucro, nivelando a Escola ao mesmo patamar de uma empresa qualquer. Em muitos casos o resultado pode ser um jogo de cena em que os alunos fingem que aprendem e os professores fingem que ensinam.

Portanto, pelo MEC, a avaliação se constitui realmente na medição sobre a hierarquização de conhecimentos do aluno de graduação brasileiro. Soma-se a este fato a imobilidade das instituições na real melhoria de condições aos professores em sala. É curiosa a distância entre o que é apregoado como *caminho* e a verdadeira situação em sala, ou mesmo fora dela. Alguns exemplos:

- a) os cursos estão a ter sua carga horária em sala brutalmente reduzida, fazendo com que professores disponham de 60 a 70 horas para lecionar densos conteúdos em apenas um semestre;
- b) alunos de período noturno geralmente trabalham durante o dia, apresentando-se cansados durante as aulas;
- c) os alunos na mesma condição anterior, não se colocam disponíveis para tarefas durante o dia, como trabalhos de campo etc;
- d) a facilidade de ingresso existente atualmente traz alunos com base extremamente fraca, inviabilizando um avanço efetivo dentro das condições de tempo existentes;
- e) colocam-se *laboratórios de informática* (nem sempre em quantidade suficiente) à disposição, mas grande parte dos alunos não possui a menor condição básica de conhecimento prévio para operação da máquina e dos aplicativos;
- f) os professores são remunerados (e diga-se mal remunerados) pelas horas em sala; e só; todo o restante, como elaboração de aulas, testes, trabalhos, correções, orientações, entre tantas, são fornecidas *de graça*; e os professores ainda são cobrados quanto à produção científica [!];
- g) direitos autorais não são respeitados, maiormente no *Ensino à Distância – EaD*;

- h) o MEC, em seu regramento, não especifica o número máximo de alunos em sala, havendo escolas que colocam 40, 50, 60, ou às vezes mais alunos dentro de um único espaço;
- i) muitas vezes os professores devem tirar de seu próprio bolso (ou a tem muito limitada) a verba para confecção de material didático, como transparências etc;
- j) em que pese haver vistorias, as instalações físicas muitas vezes apresentam graves equívocos de iluminância, acesso inadequado e mau divisão do espaço físico, equipamentos mal adaptados, terrenos inapropriados (próximos a fontes de ruído, sobre charcos etc);
- k) bibliotecas muito aquém do desejável (há casos em que os professores são convidados a doar os livros que recebem como cortesia das editoras [!]); entretanto, a listagem seguramente é bem maior, mas claro está a imensa barreira institucional que se ergue diante de professores e alunos quando adentram a sala de aula. Neste contexto é evidente a franca dificuldade em materializar a sonhada avaliação formativa. O mais grave é que os insucessos e dificuldades são imputados imediatamente aos professores, que, é óbvio, se constituem no elo mais fraco desta corrente de mentalidades dissociadas. Como toda a corrente é proporcionalmente tão forte quanto seu elo mais fraco, decorre daí uma ausência política, um vazio crítico cujo silêncio colaboracionista perpetua uma *práxis* eminentemente voltada à instrução, em detrimento da verdadeira educação.

3.4.2 Diferenças entre avaliar e avaliar

A língua inglesa apresenta duas palavras que significam *avaliar*: *assessment* e *evaluate*. Nos países saxões, e no terreno da educação, estas palavras designam diferentes abordagens da avaliação. Como esta configuração serve bem ao presente raciocínio, vai-se tomar como equivalentes as palavras *avaliar* e *estimar* na língua portuguesa, observando que tal situação restringe-se somente ao presente subtítulo.

Estas duas abordagens estão relacionadas com o que se convencionou chamar na literatura como *avaliação formativa* e *avaliação somativa*. A Figura 4 apresenta os dois tipos de condução da avaliação e suas respectivas características.

Formativa (Avaliar)	Somativa (Estimar)
<i>I. Quanto ao Tempo</i>	
<ul style="list-style-type: none"> • <u>Continuada</u>: traduz-se em melhoria constante da aprendizagem <i>ex ante</i>, antecipando-se ao erro e corrigindo-o 	<ul style="list-style-type: none"> • <u>No Final</u>: para aferir e calibrar a qualidade <i>ex post</i>, identificando o erro e punindo-o
<i>II. Quanto ao Foco do Dimensionamento</i>	
<ul style="list-style-type: none"> • <u>Processual</u>: orientada à condução da aprendizagem; ao "como" ela está atendendo os objetivos 	<ul style="list-style-type: none"> • <u>Produtividade</u>: orientada à quantificação da aprendizagem, ao "quê" está sendo aprendido
<i>III. Relacionamento Professor – Aluno</i>	
<ul style="list-style-type: none"> • <u>Reflexiva</u>: introjeta os critérios de avaliação definidos, a fim de buscar o alcance dos objetivos 	<ul style="list-style-type: none"> • <u>Prescritiva</u>: padrões são impostos de fora para dentro, servindo como referência na avaliação
<i>IV. Propósito</i>	
<ul style="list-style-type: none"> • <u>Diagnóstica</u>: identifica o que pode ser melhorado 	<ul style="list-style-type: none"> • <u>Crítica (Julgar)</u>: chega a um grau (escore) final
<i>V. Discernimento quanto aos Critérios</i>	
<ul style="list-style-type: none"> • <u>Flexível</u>: ajusta à medida que os problemas são esclarecidos 	<ul style="list-style-type: none"> • <u>Fixa</u>: recompensa o sucesso e pune o fracasso
<i>VI. Padrões de Medida</i>	
<ul style="list-style-type: none"> • <u>Absoluta</u>: o esforço está voltado à cognição ampla 	<ul style="list-style-type: none"> • <u>Comparativa</u>: o esforço está voltado à diferenciação entre o melhor e o pior
<i>VII. Relacionamento Professor – Aluno quanto ao Objeto</i>	
<ul style="list-style-type: none"> • <u>Cooperativo</u>: aprendizagem mútua 	<ul style="list-style-type: none"> • <u>Competitivo</u>: aprendizagem concorrente

Figura 4 – Avaliação Formativa / Avaliação Somativa (STRAIGHT, 2002)

Cabe mencionar que os autores são unânimes em afirmar que, em termos da *práxis* docente, sucede melhor um híbrido dos dois tipos de avaliação. É bem provável que esta atitude esteja relacionada com o que Vygotsky (LEV SEMENOVICH VYGOTSKY - 1896-1934) chamou de *zona de desenvolvimento proximal*, ou seja, a visão sócio-construtivista em que o professor, como articulador e mediador, avança para além da mera replicação do conhecimento ou, de forma oposta, cria uma base conceitual mínima que propicie a dialética do conhecimento, i. é, o ato de mediação em sua pureza. (COLE & WERTSCH, 2000)

3.5 RESUMO E CONCLUSÕES

Avaliar é também fazer escolhas, podendo ser um ato intuitivo ou revestido de técnica. Pode-se avaliar objetos ou pessoas, o que nem sempre significa avaliar quantidade ou qualidade, nesta ordem. O resultado de uma avaliação se traduz num juízo de percepção, que poderá desencadear um processo de tomada de decisão.

No terreno da educação, o tema costumava ser considerado de forma isolada do processo de ensino-aprendizagem. Nas últimas décadas desenvolveu-se a percepção de que a avaliação possuía papel relevante de ligação entre os objetivos de aprendizagem procurados e o seu alcance. Ainda assim muitos mitos e preconceitos permanecem em relação à avaliação escolar, provavelmente devido à ignorância a respeito da correta operacionalização desta tarefa, o que dificulta a criação de ambientes propícios à sua consecução.

A atualidade do tema remete à denominada *avaliação formativa*, cujo escopo maior é o de dar à avaliação o formato de processo e não de ultimação. No entanto ainda se está muito longe de poder realizar esta tarefa na plenitude, visto os impedimentos logísticos e ideológicos que nosso sistema educacional arcaico ainda antepõe.

Por outro lado, o fato de haver dificuldades institucionais não pode impedir que se desenvolvam instrumentos e métodos que venham a inovar o processo de avaliação. Este é o objetivo do presente trabalho, que terá como base um método de avaliação híbrida que leva em conta tanto aspectos da *avaliação formativa* como da *avaliação somativa*.

CAPÍTULO IV **A CIÊNCIA DA AVALIAÇÃO**

4.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo pretende-se identificar algumas ferramentas utilizadas em processos de avaliação da aprendizagem. A motivação aqui é a de dar uma noção do tema, portanto sem esgotar ou rever o assunto na íntegra. Primeiramente será feita uma revisão sobre a Docimologia. Em seguida, será realizada uma breve análise crítica do instrumental lógico-matemático mais comumente utilizado no tipo de avaliação em estudo neste trabalho.

4.2 DIRETRIZES DA DOCIMOLOGIA

Conforme visto no Capítulo I, a Docimologia (do grego *dokime* = experimentação, teste; *logos* = ciência), *Ciência dos Testes*, surgiu dando nome aos estudos sobre a avaliação da aprendizagem. Estes estudos, iniciados nos anos 20 (Século XX), ganharam robustez ao longo do tempo, tendo-se nos dias de hoje uma sólida base teórica e prática sobre o assunto.

Para a Docimologia, o aspecto de *objetividade* da avaliação da aprendizagem constitui-se em pressuposto que deve ser rigorosamente observado nos testes aplicados. A fim de favorecer esta qualificação, os testes devem fundamentar-se numa base de *princípios docimológicos*. Estes princípios acabam por se constituir em verdadeiros pressupostos que embasam regras descritivas e normatizadoras dos projetos de avaliação (sua organização e desenvolvimento), garantindo então desejáveis consistência e eficiência científicas.

Segue aqui uma reprise da citação destes princípios realizada no Capítulo 1, seção 1.1.2.2 (itens de "a" a "c"), com maior grau de aprofundamento na análise.

- a) Princípio da Avaliação Objetiva: refere-se à estrutura e organização da avaliação, de forma tal que esta possa ser um reflexo real e relevante da performance do aluno, limitando tanto quanto possível a influência de fatores externos.

Referente à circunstancialidade da avaliação no que concerne aos referenciais a serem utilizados, este princípio confia ao avaliador o discernimento do que pertence e não pertence aos protocolos estabelecidos *a priori* com o avaliando.

Mais ainda, não se deve confundir *fatores externos* com qualquer parâmetro que exceda a própria figura do aluno. Nada deve obstar que sejam protocolados referenciais desconectados do psicológico ou intelectual do aluno, desde que acordados previamente. A problemática existirá se houver tolerância com a ocorrência de influências estranhas ao acerto existente entre professor e aluno, deixando claro que todos os protocolos podem ser objeto de revisão a qualquer tempo e de comum acordo entre as partes.

- b) Princípio da Avaliação Interativa: expressa o fato de que tanto a avaliação da aprendizagem como a aprendizagem em si, estão ambas conectadas e determinadas pela avaliação feita pelo professor e pela auto-avaliação feita pelo próprio aluno.

Este princípio traz reflexão sobre a valência do processo de *avaliação com aprendizagem*, quando avaliações pró-ativas são aquelas em que a reciprocidade assume papel técnico. A técnica consiste primordialmente em transcender o estado informacional unívoco e provocar a reflexão sobre o direcionamento do conhecimento apresentado. Esta disposição enseja a necessidade de ampla comunicação entre professor e aluno, preferencialmente em linguagem natural. Em termos de avaliação, significa constatar a importância de um instrumento avaliativo que traduza em advérbios e adjetivos o juízo de valor do professor em relação aos referenciais protocolados.

O avaliando deve ser capaz de ultrapassar o estado de modo, ou seja, o *quomodo* - evidentemente válido como primeira instância; eminentemente

técnico e utilitário -, e atingir a razão e seu tempo, i. é, o *por quê e quando*. Filosoficamente, trata-se da realização em um ser pela ação que sobre ele exerce outro ser visando ao fim considerado: é a *finalidade transcendente* da aprendizagem materializando-se pela avaliação. Talvez não haja mais o que acrescentar ao se vislumbrar plena convergência entre este princípio docimológico e a *avaliação formativa* (ver Capítulo 3, seção 3.4).

- c) Princípio da Contextualização: que diz respeito ao fato de que as tarefas de avaliação de performance devem refletir situações do mundo real, proporcionando ao aluno a criação de capacidade de adaptação do conhecimento à várias situações.

Este princípio remete o professor à busca pela avaliação das habilidades e competências do aluno, que devem ser alcançadas ao longo do curso. A prática demonstra que recorrentemente o aluno adquire suas aptidões de forma gradual, havendo condicionantes que podem acelerar ou retardar o aprendizado, quanto melhor os conhecimentos alcançados forem conectados à realidade. Esta situação costuma ser confundida com a aprendizagem por replicação exaustiva, i. é, o aluno procurar solução para problemas criados por adaptação do conteúdo ministrado, o que apenas se constitui num verniz do antigo processo de memorização por repetição, já preceituado no *Ratio Studiorum* (op. cit.). Sendo este o procedimento, o aluno, e mesmo o professor, permanecem dissociados do objetivo maior da aprendizagem: o indivíduo tornar-se capaz de solucionar novos problemas, o que exige a capacidade de dispor soluções materiais e abstratas para as questões que se avizinharão no futuro, as quais certamente diferem dos modelos apresentados em sala de aula.

Desta forma, a avaliação deve ser formativa no sentido de que a solução do problema se dê através de um processo de busca em que o aluno reúna todos os subsídios que lhe são alcançados para a resolução. A avaliação assim adquire uma dimensão instrutiva, proporcionando ao aluno o uso de sua inteligência: o enfrentamento de situações adversas e a busca por solução para resolver estas situações. Para que a avaliação seja plenamente formativa, os problemas apresentados ou sugeridos devem conter valores que permitam ao aluno sentir e identificar uma forte finalidade social no que

faz, permitindo-lhe desenvolver convicções sobre o que aprende, dando ao ato de cognição o sentido da própria existência do indivíduo (SIEVERS, 1986; grifo nosso).

4.3 INSTÂNCIAS DA AVALIAÇÃO

Segundo a teoria docimológica, deve haver extrema objetividade no dimensionamento do valor dos resultados obtidos pelo aluno. Este dimensionamento deve possuir a característica de informação, que por sua vez deve possuir alto teor de qualidade.

4.3.1 Requisitos da Avaliação

4.3.1.1 Características dos requisitos

- a) Psicopedagógico: a avaliação deve ser específica e detalhada. Específica quanto ao que se pretende avaliar e detalhada quanto a minuciosidade a ser adotada. Evita-se assim as generalizações e a perda de referência funcional do conhecimento trabalhado, obtendo-se substância na qualidade da informação que estará traduzida na resposta dada pelo aluno.
- b) Medida: a avaliação deve ser um instrumento com alto grau de precisão de medida. Isto se deve ao fato de que se está a comparar uma grandeza com outra, com o objetivo de associar à primeira, um número característico do seu valor em face da grandeza com a qual foi comparada. Ou seja, de um lado está o aluno testado, i. é, seu conhecimento, suas habilidades, suas atitudes, e do outro, o nível de acerto ou precisão traduzido em valor.

Portanto, da medida são esperadas exatidão e validade. Exatidão quanto à ordem de grandeza da precisão do valor e validade quanto à legitimidade desse valor como representativo institucional.

4.3.1.2 Exatidão na medida dos requisitos

É sobre esta característica de medida da avaliação que se pretende debruçar neste ponto do trabalho. Na Docimologia, a exatidão da medida assume papel capital para o sucesso da avaliação. A exatidão deve se manter, mesmo diante de situações de forte variação, como por exemplo:

- a) mesmo aluno avaliado por diferentes professores que não conheçam os resultados alcançados;
- b) modificações nas condições físicas ou psicológicas às quais o aluno está submetido;
- c) mudanças na aparência da avaliação, como na gramática etc;

4.3.2 Ferramentas da Avaliação

Para além dos requisitos mencionados na seção precedente, a consecução da avaliação deve ainda contemplar certos aspectos, citando-se três deles como de maior importância. (POPHAM, op. cit.)

- a) Congruência e Imparcialidade: a avaliação não pode conter distorções no tratamento que dispensa aos estudantes. A avaliação deve ser convenientemente entabulada para manter o nível ético no grau correto.

Por exemplo, a avaliação não pode ofender o aluno, causando algum tipo de ressentimento, dor, desconforto ou embaraço. Também devem ser evitadas penalidades infundadas, que advém de percepções preconceituosas do aluno quanto ao seu *status* socioeconômico, raça, sexo etc.

Deve-se ter cuidado ao se utilizar a média como comparação entre diferentes grupos, visto que, se há congruência na avaliação, qualquer diferença deve ser atribuída a reais dissimilitudes de rendimento entre os grupos comparados.

A interpretação dos resultados obtidos em testes deve estar restrita ao que se pretendeu avaliar. Inferências para além do escopo do teste devem ser evitadas.

O conteúdo de uma avaliação deve ser compatível com as experiências de vida dos indivíduos avaliados, bem como quem a aplica não pode passar algum tipo de ansiedade ao avaliando.

Checklist para testar a congruência e imparcialidade.

- Existe pouca familiaridade com o assunto avaliado ou está havendo muita diferença de abordagem de conteúdo entre diferentes grupos?
- Os membros de diferentes grupos responderam a algum item de forma correta ou incorreta por alguma razão específica alheia ao conteúdo avaliado?
- O conteúdo avaliado está perfeitamente relacionado com a informação objeto de ensino ou com as habilidades desenvolvidas no curso?
- As palavras utilizadas são conhecidas / familiares em significado? O vocabulário utilizado está compatível? Existem termos muito específicos e de difícil compreensão pelo grupo?
- Existe algum indício de que algum grupo possa ser favorecido em detrimento de outro?
- Existem inadequações ou ambigüidades nas instruções de comando da avaliação? A natureza da tarefa a ser cumprida foi bem entendida por indivíduos de diferentes grupos?

b) Validez (Legitimidade): conforme GRONLUND (1998), o valimento da avaliação se dá quando está plenamente evidenciada a legitimidade do seu conteúdo, dos seus critérios e dos seus constructos.

- Conteúdo: de forma adequada, o contido na avaliação precisa representar exatamente o domínio⁵ do assunto avaliado, devendo atender aos objetivos informacional e de cognição.
- Crítérios: significa que os critérios utilizados na avaliação devem permanecer no tempo e no espaço. No tempo, no sentido de que, mais tarde, em outra avaliação, o estudante deve apresentar o mesmo grau de performance (predição: característica preditiva); e no espaço, no sentido

⁵ Domínio: o conjunto de conhecimentos e habilidades

de que o grau de desempenho deve continuar mesmo que se modifique a tarefa utilizada para avaliar (característica de concorrência).

- Constructos: um constructo é uma característica psicológica hipotética que se presume existir, e que explicaria padrões de comportamento e de pensamento. Então, a performance do estudante na avaliação deve possuir um grau que reflita a presença ou ausência dos constructos.

Gronlund cita um quarto aspecto da validade da avaliação, ao qual chama de *Face da Validade*. Como Face da Validade, Gronlund entende ser a *aparência* da performance do aluno, i. é, o quanto o desempenho do estudante realmente *parece* estar representado pelo escore obtido na avaliação; o quanto este escore é verossímil com a competência, a eficiência e o comportamento do avaliando.

No entanto, Gronlund afirma que o aspecto de Face da Validade não se constitui numa medida da validade em si, sendo apenas uma aparência dela, e portanto geralmente enganosa. É preciso deixar este fato assente, pois a proposta metodológica que aqui se irá desenvolver, pretende justamente criar a condição de medida a este tipo de dimensão de análise.

- c) Confiabilidade: a confiabilidade é basicamente obtida através de ferramentas de estatística inferencial (KAZMIER, 1982), essencialmente pelo cálculo do coeficiente de confiabilidade, que mede a consistência interna da avaliação. Esta medição é geralmente realizada por dois diferentes métodos. (WIGDOR & GREEN JR, 1991)
- Partido ao Meio: neste método a avaliação é dividida em duas metades que contenham o mesmo grau de dificuldade. Ordinariamente se escolhe a divisão entre questões de número par e questões de número ímpar. Feita a partição, a confiabilidade é determinada pelo cálculo da correlação entre os dois conjuntos de dados, finalizando com o ajuste para o tamanho da avaliação.

Passo 1 – Cálculo do *Coefficiente de Correlação Momento-Produto de Pearson* (r_{xy})

$$r_{xy} = \frac{\sum xy}{(n-1)(s_x)(s_y)}$$

Figura 5 - Coeficiente de Correlação Momento-Produto de Pearson

Em que :

x = a distância entre o escore do estudante e a média obtida pela metade par

y = a distância entre o escore do estudante e a média obtida pela metade ímpar

n = número de estudantes

s_x e s_y = os respectivos desvios padrão

Ou seja, está-se medindo a percentagem de variação dos escores verdadeiros em relação aos escores observados, obtendo-se o montante da variabilidade devida a erros de mensuração (erros aleatórios).

Correntemente o cálculo da covariância (numerador) leva em consideração o número total de elementos "n", mas aqui é introduzida uma correção já que se está trabalhando com a noção de amostra de pequeno tamanho (o mesmo ocorrendo no cálculo dos desvios padrão).

Passo 2 – Aplicação da *Fórmula de Spearman-Brown* (\tilde{r}) para refinamento da correlação entre as duas metades (correlação calculada no passo precedente).

$$\rho = \frac{2r_{xy}}{1+r_{xy}}$$

Figura 6 – Coeficiente de Spearman-Brown

Agora, com a duplicação propiciada pela fórmula, obtém-se a confiabilidade para a estimativa do número total de itens existente na avaliação, pois o cálculo anterior havia considerado cada metade como uma avaliação distinta.

- Kuder-Richardson / fórmulas 20 e 21: a vantagem deste segundo método sobre o anterior, é que este realiza o cálculo da correlação entre todos os

itens, item a item. Existem duas fórmulas de Kuder-Richardson que fornecem a confiabilidade quanto à consistência interna da avaliação.

Fórmula 20: nesta formulação a proporção de estudantes que acertam ou erram as questões é relacionada com a variância em torno da média (corrigida); em seguida toma-se o complementar desta relação e compara-se com o número total de questões (também corrigido).

$$\rho_{KR20} = \frac{k}{k-1} \left(1 - \frac{\sum pq}{s_{xx}^2} \right)$$

Figura 7 – Kuder-Richardson / fórmula 20

Em que :

k = o número total de questões

p = a proporção de estudantes que acertou determinada questão

q = a proporção de estudantes que errou determinada questão

s_{xx}^2 = a variância em torno da média (corrigida)

x = a distância entre o escore de cada estudante e a média

sendo, $s_{xx}^2 = \frac{\sum x^2}{n-1}$

Fórmula 21: a "Fórmula 20" exige algum esforço computacional, daí ser possível a utilização da "Fórmula 21", pois a mesma não considera as proporções de erros e acertos, supondo então que todas as questões apresentaram grau de dificuldade semelhante. Como se vê, trata-se de uma aproximação da fórmula anterior, o que leva a um menor grau de estimativa da confiabilidade em relação à "Fórmula 20".

$$\rho_{KR21} = \frac{k}{k-1} \left(1 - \frac{M(k-M)}{ks_{xx}^2} \right)$$

Figura 8 - Kuder-Richardson / fórmula 21

Em que :

M = média dos escores obtidos pelos alunos

- O Erro Padrão de Mensuração (EPM): nos cálculos de confiabilidade o EPM é utilizado para obter um *intervalo de confiança* na interpretação do escore específico de um aluno.

$$EPM = s_{xx} \times \sqrt{1 - r_{xy}}$$

Figura 9 – Erro Padrão de Mensuração

Cabe aqui esclarecer que o EPM possui diferente abordagem em relação ao *desvio padrão de escores em uma avaliação*.

O *desvio padrão de escores em uma avaliação* refere-se ao desvio (ou "erro") em torno da média "M" obtida por um *grupo de estudantes em uma única avaliação*. Portanto, ele é uma medida do *espalhamento* dos escores *entre os estudantes* em relação à média "M" de determinada avaliação.

Já o EPM se refere ao *desvio padrão de escores estimado* ("erro estimado") que *seria obtido por um estudante específico*, caso este estudante fosse submetido *múltiplas vezes à mesma avaliação*. Portanto, ele é uma medida do *espalhamento* dos escores obtidos por *um estudante* que foi avaliado várias vezes quanto à determinada avaliação.

Portanto, conceitualmente o EPM é uma *estimação* e se refere ao fato de um determinado estudante que realizaria a mesma avaliação repetidas vezes, *sem qualquer nova aquisição de conhecimento* entre as avaliações e *sem nenhuma memória residual* das questões propostas. (TEC, 2002)

Dando continuidade ao raciocínio, uma vez calculado, adiciona-se ou subtrai-se este EPM do escore obtido por um determinado estudante, obtendo-se *limites* razoáveis de abrangência do escore calculado. Este fato permite *comparar escores de alunos diferentes* e determinar *quanto eles diferem*. Este aspecto desta medida pode revelar se há *diferenças significativas* entre escores. Por exemplo, suponhamos que o aluno "Alfa" obteve o escore 7,4 e o aluno "Beta" o escore 6,9. Suponhamos também que o EPM calculado seja de 0,4. Para uma certeza de 68%, o intervalo de confiança para o aluno "Alfa" vai de 7,0 a 7,8 e o do aluno "Beta" de 6,5 a 7,3. Visualizando o Grafo 4.1 percebemos como não há diferença significativa entre os escores obtidos pelos alunos "Alfa" e "Beta", pois a região mais escura, que representa o *intervalo de sobreposição* dos dois escores, é significativamente ampla.

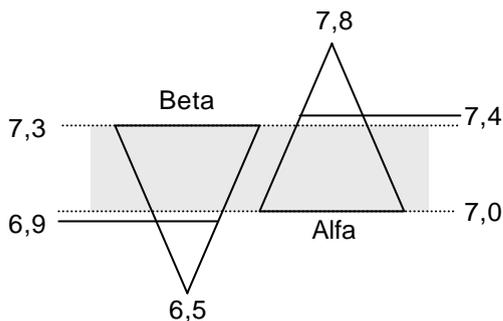


Figura 10 – Intervalo de sobreposição

Neste ponto do presente trabalho, esta consideração é de suma importância porque evidencia um aspecto de *difícil sustentação* nos protocolos concertados entre professores e alunos, no que diz respeito à *atribuição de notas* aos estudantes.

O que está claro até aqui é que a nota atribuída pelo professor ao aluno contém erro. O comportamento deste erro pode ser mais bem compreendido ao se usar a *curva normal padronizada dos erros* para análise e enquadramento. Para tanto, utiliza-se o número de desvios padrão com o respectivo percentual de probabilidade associado. (FREUND & SIMON, 2001)

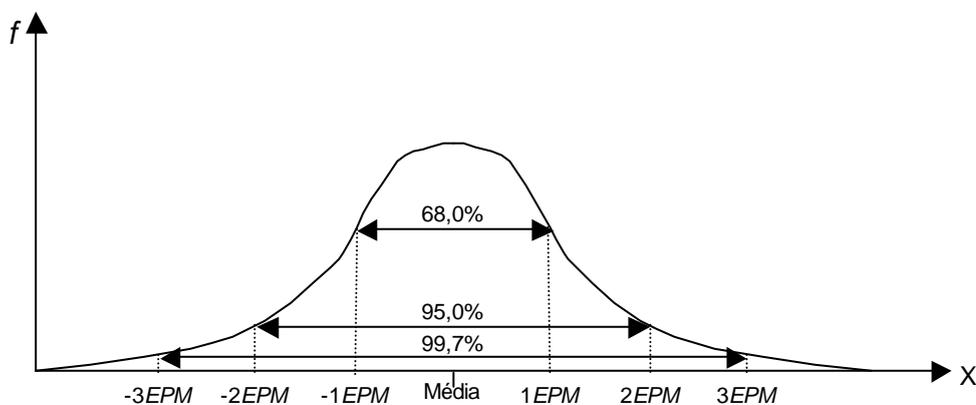


Figura 11 – Classificação normalmente distribuída dos EPM em relação à Média "M"

Exemplificando, quanto ao aluno "Alfa" se tem:

- a) 68% de certeza que a verdadeira nota do aluno está entre

$$\left\{ \begin{array}{l} 7,0 = 7,4 - 0,4 \\ e \\ 7,8 = 7,4 + 0,4 \end{array} \right.$$

b) 95% de certeza que a verdadeira nota do aluno está entre

$$\begin{cases} 6,6 = 7,4 - 0,4 \times 2 \\ e \\ 8,2 = 7,4 + 0,4 \times 2 \end{cases}$$

c) 99,7% de certeza que a verdadeira nota do aluno está entre

$$\begin{cases} 6,2 = 7,4 - 0,4 \times 3 \\ e \\ 8,6 = 7,4 + 0,4 \times 3 \end{cases}$$

Quanto ao aluno "Beta" basta usar os mesmos procedimentos.

4.4 RESUMO E CONCLUSÕES

A Docimologia prevê alguns pressupostos que devem ser observados para que a avaliação produza resultados sãos e confiáveis. Estes pressupostos estão instanciados em requisitos cujo foco é o atendimento à complexidade dos aspectos psicopedagógico e de medida que revestem a avaliação da aprendizagem.

O exercício da docência possui muitos aspectos de forte dificuldade, mas sem dúvida pode-se afirmar que a avaliação se constitui no seu ponto crítico de administração.

A Docimologia trata da avaliação no seu conjunto, estabelecendo orientações para seu planejamento e controle. Dentro desta temática da avaliação, em particular interessa a este trabalho o seu aspecto de medida. A medida da avaliação, e mesmo a própria avaliação da medida, são realizadas através de instrumental estatístico inferencial. Contudo, o ferramental estatístico utilizado, apesar da amplitude e correção, oferece a medida de desempenho *a posteriori*, além de pouco possibilitar poder de explicação sobre o fenômeno representado no escore obtido pelo aluno. Para maiores detalhes consultar Doolittle (2002).

CAPÍTULO V

LÓGICA DIFUSA

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

5.1 INTRODUÇÃO

A *Lógica Difusa* foi concebida em 1965 pelo Professor Dr. Lotfi Zadeh, da Universidade de Berkeley (Califórnia, Estados Unidos). Àquela época o Professor Zadeh percebeu que grande parte dos fenômenos do mundo real não obedece à lógica tradicional do verdadeiro ou falso (*Lógica Booleana* ou *Lógica Dicotômica*), mas apresentam uma gama infinita de possibilidades entre os dois extremos. No presente capítulo pretende-se apresentar a lógica difusa, dando ênfase aos aspectos matemáticos mais inteligíveis. Isto porque se pretende criar a condição de uso dos instrumentos adiante descritos aos educadores e todas as demais pessoas envolvidas com o ensino e a aprendizagem.

5.2 LÓGICA DIFUSA, RACIOCÍNIO POR APROXIMAÇÃO E TEORIA CLÁSSICA DOS CONJUNTOS

A lógica difusa (*fuzzy logic*) decorre da *Teoria dos Conjuntos Difusos*. Não se trata de um método para resolver qualquer problema particular, da mesma forma que, por exemplo, a *Teoria das Probabilidades* não serve tão somente a questões singulares. A teoria dos conjuntos difusos sustenta tanto a teoria da lógica difusa como os próprios *cálculos difusos*. Isto permite que se criem construções lógicas que podem ser utilizadas nas mais variadas áreas do conhecimento humano. Comumente esta utilização se dá no chamado *raciocínio por aproximação* (*approximate reasoning*), o qual permite o processamento de expressões imprecisas ou a estimação de conceitos e seus relacionamentos (COX, 1999). A Figura 12 apresenta a estratificação que representa a interligação hierárquica destes conceitos.

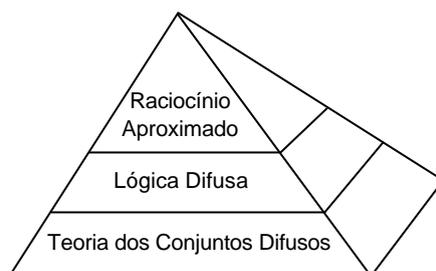


Figura 12 – Níveis de suporte lógico ao raciocínio por aproximação

(Fonte: COX, Earl, p. 7, op. cit)

5.3 TEORIA CLÁSSICA DOS CONJUNTOS (CONJUNTOS *CRISP*)

A *Teoria Clássica dos Conjuntos* foi criada pelo matemático russo Georg F. L. P. Cantor (1845-1918). Uma das qualidades desta teoria é permitir uma fácil visualização do fenômeno lógico que ocorre quando as coisas do mundo real interagem. Ela também permite perceber melhor o funcionamento das *funções*.

Exemplo 5.1: digamos que um pai deseje incentivar seu filho a estudar mais Filosofia e para tanto propõe uma mesada fixa de R\$ 5, mais R\$ 3 por cada ponto acima da nota mensal 6 até o máximo possível que é a nota 10.

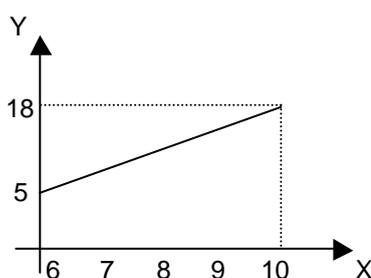


Figura 13 – Gráfico do exemplo

O gráfico da Figura 13 pode ser obtido através da construção da tabela da Figura 14, bastando ir calculando os valores de "Y" conforme "X" cresce. Portanto se vê que "Y" *depende do crescimento de "X"*, i. é, quanto maior a nota do aluno, maior será sua mesada. É desta maneira que as *funções* são criadas, ou seja, uma variável (o "Y") modificando seu valor em *função* de outra variável (o "X"), o que pode ser escrito através de uma *Lei* (notar que a palavra "variável" é utilizada justamente porque o "X" e o "Y" podem *variar* seus valores). Seguindo o raciocínio, cada caso terá sua lei, sendo que no exemplo dado se pode escrever a seguinte lei:

$$Y = 3X + 5 \quad \text{e} \quad X = \{1, 2, 3, 4\}$$

Eixo X: "Notas"	Eixo Y: "Mesada (R\$)"
6	5
7	$5 + 3 \times 1 = 8$
8	$5 + 3 \times 2 = 11$
9	$5 + 3 \times 3 = 15$
10	$5 + 3 \times 4 = 18$

Figura 14 – Tabela do Exemplo 5.1

Então, à medida que a variável "X" varia de 1 até 4, a variável "Y" varia de 6 até 10.

Quanto à teoria clássica dos conjuntos, o fenômeno deste exemplo também pode ser apresentado na forma de diagramas chamados de *Diagramas de Venn*, introduzidos em 1880 pelo filósofo John Venn (1834 – 1923); ver Figura 15.

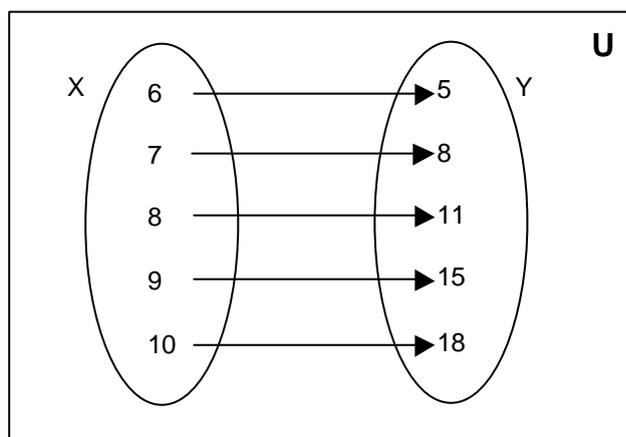


Figura 15 – Diagramas de Venn

Na Figura 15 estão representados o *conjunto X*, o *conjunto Y* e os elementos que pertencem a estes conjuntos (ver também a tabela da Figura 14), bem como as relações entre os elementos, representadas pelas setas que mostram que cada elemento de "X" *implica* um elemento em "Y".

Uma das regras mais importantes da teoria clássica dos conjuntos e funções é a de que *a cada elemento do conjunto X pode corresponder somente um único elemento no conjunto Y*. No Exemplo 5.1, se o aluno tirar nota 7 na disciplina, ele só poderá ganhar R\$ 8. Não há como o aluno tirar nota 7 e receber outro valor. Se esta regra não se cumprir, então não se está diante de uma função.

Como se percebe, todos os fenômenos com os quais se lida diariamente podem ser tratados como funções que relacionam conjuntos de variáveis que se influenciam, obtendo-se daí controle, resultados, projeções etc.

5.3.1 Conjuntos *Crisp*

Para manter a integralidade da leitura deste capítulo, cabe lembrar que se está aos poucos introduzindo os *conjuntos difusos (fuzzy)* como forma ampla de lidar com incerteza e informação. Para melhor compreensão deste assunto e sua potencialidade, torna-se oportuno uma breve abordagem sobre os *conjuntos crisp*. (KLIR & FOLGER, 1988)

Os conjuntos *crisp* são justamente aqueles que não são conjuntos *fuzzy*. São os conjuntos comumente conhecidos e usados na *matemática tradicional*⁶, conforme se viu na Figura 15.

Relembrando, neste trabalho quer-se evitar ao máximo entrar em explanações de teorias matemáticas, peculiaridades ou minúcias. A idéia é a de permitir aos profissionais das ciências humanas uma compreensão fácil e a utilização da lógica difusa. Por isso, quanto aos conjuntos *crisp*, cabe ressaltar que a grande maior parte dos conceitos e cálculos utilizados na teoria tradicional dos conjuntos (conforme visto na seção 5.2.1), também são válidos nos conjuntos *fuzzy* (difusos).

Por outro lado, vale aqui comentar sobre o pertencimento de elementos a um determinado conjunto *crisp*. O processo pelo qual os indivíduos de um conjunto *crisp* são determinados como *sendo* ou *não sendo* membros de um conjunto, é definido da seguinte maneira:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \notin A, \\ 1 & \text{se } x \in A. \end{cases}$$

Em que:

$\mu_A(x)$ é dita ser uma *função característica* de um conjunto genérico ("universo") que aqui foi chamado de "A".

⁶ O termo *matemática tradicional* está sendo usado em contraposição ao termo *matemática nebulosa*, esta última nada mais sendo do que os processos de cálculos matemáticos que lidam com os *números nebulosos*, que por sua vez se originam nos conjuntos *fuzzy* (difusos).

O que está sendo informado, é que toda a vez que se tiver um elemento "x" qualquer, que *não* pertença a um conjunto genérico "A", então se considera isto como *valendo* "0"; mas toda a vez que se tiver um elemento "x" qualquer, que *pertença* a um conjunto genérico "A", então se considera isto como *valendo* "1".

Portanto, a função $\mu_A(x)$ também se constitui num conjunto com dois elementos, o valor "0" e o valor "1", sendo isto matematicamente notado da seguinte maneira:

$$\mu_A(x): X \rightarrow \{0,1\}$$

Para ilustrar melhor, conforme o Exemplo 5.1 se teria:

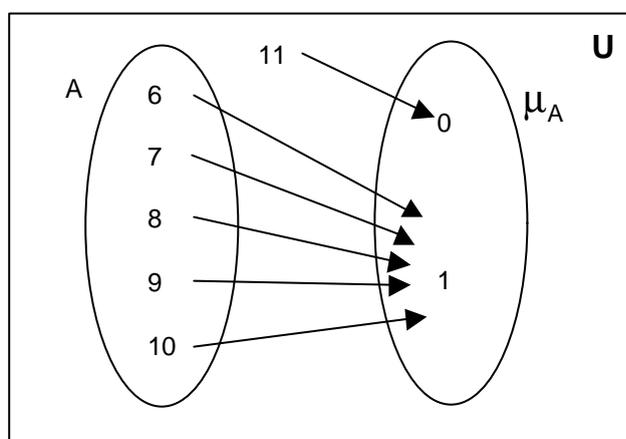


Figura 16 – Função de pertinência *booleana*

As notas de 6 a 10, por serem pertencentes ao conjunto "A", correspondem, pela função $\mu_A(x)$, ao valor "1", enquanto a nota 11, que não pertence ao conjunto "A", possui como correspondente o valor "0".

O fato relevante desta observação é o de que o elemento "11" se encontra fora dos limites do conjunto "A", porque há um "degrau" no comportamento da pertinência do conjunto "A". Significa que se o elemento "11" cai em uma unidade, passando a valer "10", ele atravessa abruptamente a fronteira de *não-membro* para *membro* do conjunto "A".

Além disto, qualquer elemento do conjunto "A" que viesse a se localizar exatamente *sobre a fronteira* do conjunto, teria a sua pertinência *indeterminada*. Em termos da lógica convencional (booleana; dicotômica), diz-se que nestes casos a função de pertinência $\mu_A(x)$ é *bivalente*. (SHAW & SIMÕES, 1999)

Os mesmos autores apresentam um exemplo clarificador.

Exemplo 5.2: trata-se da aplicação de multas sobre quem ultrapassa o limite de velocidade. (SHAW & SIMÕES, op. cit.)

Shaw e Simões, através deste exemplo, questionam se é realista a transição brusca entre a pertinência de ser *infrator* ($\mu = 1$) e a *não*-pertinência de ser infrator, ou seja, *não*-infrator ($\mu = 0$). Afinal, quem andar a 80,5 km/h, por exemplo, será infrator; já quem andar a 79,9 não será [!], conforme Figura 17.

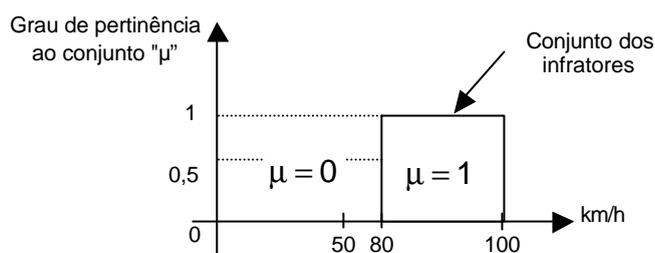


Figura 17 – Gráfico do Exemplo 5.2

Este conhecimento é de suma importância no presente trabalho, porque ele tornará mais fácil o entendimento dos conjuntos *fuzzy*.

5.3.2 Função de Pertinência e operações com Conjuntos *Crisp*

Neste trabalho pretende-se oferecer maneira de avaliar a aprendizagem, o que envolve o professor, o aluno e a relação entre ambos. Há uma interação entre professor e aluno que deve se dar de forma sistematizada, mas que assume diferentes e variados graus. A interação, bem como suas regras e os diferentes graus, podem ser expressos numericamente e na forma de conjuntos.

A *relação professor – aluno* se constitui numa via de mão de dupla. Nesta via de mão dupla há um movimento constante de entradas e saídas, às quais pode-se atribuir variáveis de discurso. Variável de discurso é o termo técnico para o conjunto de dados trocado numa operação de entrada ou saída de dados num sistema, neste caso, um sistema de comunicação.

5.3.2.1 Função de Pertinência

Conforme apresentada anteriormente, a *função de pertinência* associa um grau de pertencimento de um elemento a um determinado conjunto. No caso dos conjuntos

crisp, ela vale "0" ou "1", conforme o elemento não pertença ou pertença ao conjunto de dados.

Exemplo 5.3: aproveitando os dados do Exemplo 5.1, imagine-se que o conjunto de todas as notas possíveis do aluno seja $C=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$. Suponha-se que o conjunto de notas que o aluno realmente obtenha seja dado por $A=\{8,9,10\}$, i. é, o aluno não tirou nenhuma nota abaixo de 8.

Como foi dito ao aluno que ele receberia algum dinheiro a partir da nota 6, então se pode escrever,

$$A=\{(x_1,0), (x_2,0), (x_3,1), (x_4,1), (x_5,1)\}$$

Figura 18 – Expressão do Exemplo 5.3

A expressão da Figura 18 está informando o grau de pertencimento de cada variável nota; por exemplo, " x_1 ", que representa a nota 6, possui grau de pertencimento "0", porque o aluno *não* obteve nota 6.

Também se pode escrever o *vetor de pertinência* da função do exemplo dado, bastando reescrever a expressão da Figura 18 omitindo-se os símbolos " x_i " que representam a variável nota, obtendo-se:

$$A=\{0, 0, 1, 1, 1\}$$

Este fato possui importância porque os conjuntos podem então ser definidos por seu vetor de pertinências. Portanto, quando se deseja determinar um conjunto basta calcular cada valor individual de seu vetor de pertinências. (SHAW & SIMÕES, op. cit.) Assim, os valores da variável " x " e a função de pertinência podem ser usados para melhor definir um conjunto " C ", conforme a expressão da Figura 19.

$$\{[x, \mu_A(x)], \forall x \in C\}$$

Figura 19 – Definição de conjunto

A partir destas definições e considerações tem-se a base para as operações com conjuntos de dados, que permitem resolver a maior parte dos problemas nas mais variadas áreas, como na Economia, na Física, no tratamento da informação etc.

5.3.2.2 Operações com Conjuntos *Crisp*

Entender a funcionalidade das operações entre conjuntos permite clareza na aplicação dos cálculos referentes às regras de interação, às quais afetam os vetores de pertinência dos conjuntos de dados que estão interagindo.

Por enquanto aqui, em que se está tratando somente dos conjuntos *crisp*, vai-se apresentar as três principais operações referentes a estes tipos de conjunto. Estas operações são " E ", " OU " e " NÃO ", chamadas também de operações *booleanas* porque envolvem o trabalho com valores de pertinência "0" ou "1".

- a) Intersecção " E ": a *intersecção* é a operação entre dois ou mais conjuntos, que forma um novo conjunto que contém somente os elementos que *pertencem simultaneamente* a todos os conjuntos operados.

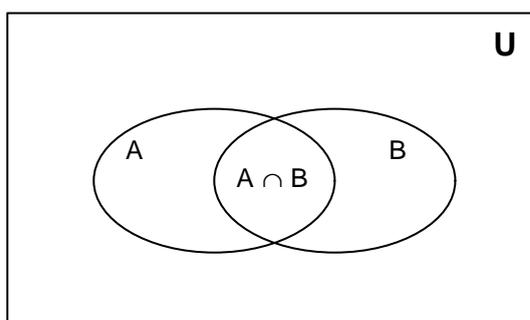


Figura 20 – Intersecção entre conjuntos

Exemplificando, para dois conjuntos "A" e "B", a função de pertinência dos elementos que compõe o conjunto $A \cap B$ (Figura 20), irá informar o valor "0" para os elementos de "A" ou de "B" que *não* estejam na intersecção, bem como irá informar o valor "1" para os elementos de "A" ou de "B" que *estejam* na intersecção, notando-se da seguinte maneira:

$$\mu_{A \cap B}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \notin A \cap B, \\ 1 & \text{se } x \in A \cap B. \end{cases}$$

Esta operação é matematicamente notada pelo símbolo " . " (um pequeno ponto), indicando a intersecção entre as funções de pertinência dos conjuntos operados (Figura 21).

$$\mu_{A \cap B}(x) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(x)$$

Figura 21 – Intersecção entre funções

De forma bastante intuitiva, a Figura 20 deixa perceber que o conjunto $A \cap B$ é sempre menor do que os conjuntos "A" ou "B" tomados isoladamente, o que é matematicamente notado conforme a expressão da Figura 22.

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min [\mu_A(x), \mu_B(x)]$$

Figura 22 – Intersecção pelo Mínimo

Exemplo 5.4: suponha dois conjuntos "A" e "B" das notas de um aluno em dois momentos diferentes: $A = \{4, 6, 7, 5, 8\}$ e $B = \{9, 2, 7, 3, 8\}$. O conjunto do *universo de discurso* é formado pelas notas de "0" a "10". O conjunto intersecção resultante é $X = \{7, 8\}$ (Figura 23).

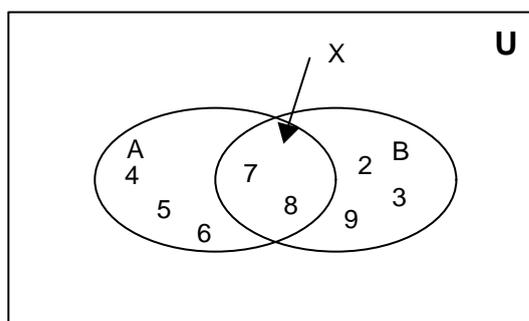


Figura 23 – Gráfico do Exemplo 5.4

Cada conjunto pode ser escrito na sua forma vetorial de pertinência, daí ser possível operar a intersecção dos pares de pertinência. Em seguida pode-se escrever a função de pertinência da intersecção na sua forma vetorial.

$$A = \{4, 6, 7, 5, 8\} \Rightarrow A = \{0, 1, 1, 0, 1\}$$

$$B = \{9, 2, 7, 3, 8\} \Rightarrow B = \{1, 0, 1, 0, 1\}$$

$$A \cap B = \{(0 \bullet 1), (1 \bullet 0), (1 \bullet 1), (0 \bullet 0), (1 \bullet 1)\}$$

Re sul tando :

$$\mu_{A \cap B}(x) = \{0, 0, 1, 0, 1\}, \text{ que veio de } \mu_{A \cap B}(x) = \min [\mu_A(x), \mu_B(x)]$$

b) União " OU ": a *união* é a operação entre dois ou mais conjuntos, que forma um novo conjunto que contém todos os elementos que *pertençam* a todos os conjuntos operados.

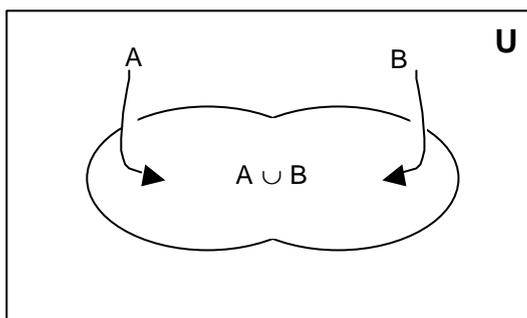


Figura 24 – União entre conjuntos

Exemplificando, para dois conjuntos "A" e "B", a função de pertinência dos elementos que compõe o conjunto $A \cup B$ (Figura 24), irá informar o valor "0" para os elementos que *não* pertençam à "A" ou "B", bem como irá informar o valor "1" para os elementos que compõe o conjunto $A \cup B$:

$$\mu_{A \cup B}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \notin A \cup B, \\ 1 & \text{se } x \in A \cup B. \end{cases}$$

Esta operação é matematicamente notada pelo símbolo " + ", indicando a união entre as funções de pertinência dos conjuntos operados (Figura 25).

$$\mu_{A \cup B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x)$$

Figura 25 – União entre funções

De forma bastante intuitiva, a Figura 24 deixa perceber que o conjunto $A \cup B$ é sempre maior do que os conjuntos "A" ou "B" tomados isoladamente, o que é matematicamente notado conforme a Figura 26.

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max [\mu_A(x), \mu_B(x)]$$

Figura 26 – União pelo Máximo

Exemplo 5.5: suponha-se os mesmos dados do Exemplo 5.4. Cada conjunto pode ser escrito na sua forma vetorial de pertinência, daí ser possível operar a união dos pares de pertinência. Em seguida pode-se escrever a função de pertinência da união na sua forma vetorial.

$$A = \{4,6,7,5,8\} \Rightarrow A = \{0,1,1,0,1\}$$

$$B = \{9,2,7,3,8\} \Rightarrow B = \{1,0,1,0,1\}$$

$$A \cup B = \{(0+1), (1+0), (1+1), (0+0), (1+1)\}$$

Re sul tan do :

$$\mu_{A \cup B}(x) = \{1,1,1,0,1\}, \text{ que veio de } \mu_{A \cup B}(x) = \max[\mu_A(x), \mu_B(x)]$$

- c) Negação " NÃO " / Complementar: o complementar " A' " de um conjunto " A " em relação ao seu universo de discurso "U", é o conjunto dos elementos que de "U" que *não* são membros de " A ".

As funções de pertinência são notadas da seguinte forma:

$$\begin{cases} \text{Conjunto " A " } \rightarrow \mu_A(x); \text{ valendo " 1 " } \\ \text{Conjunto " A' " } \rightarrow \mu'_A(x) = 1 - \mu_A(x); \text{ valendo " 0 " } \end{cases}$$

Como visto nos exemplos anteriores, o conjunto "A" contém os elementos 4, 6, 7, 5 e 8. Seu vetor de pertinência é $\mu_A(x) = \{0,1,1,0,1\}$. Então seu complementar, ou " NÃO 'A' ", tem como vetor de pertinência $\mu'_A(x) = \{1,0,0,1,0\}$.

5.4 LÓGICA DIFUSA

Como visto, a *Teoria Clássica dos Conjuntos* estabelece relações sistemáticas tanto entre elementos de um conjunto, como entre elementos de diferentes conjuntos. (Lembrando-se que um conjunto é uma coleção numericamente definida de objetos, chamados de *elementos*, cujas características são perfeitamente definidas e compartilhadas). Em um determinado conjunto *crisp*, qualquer objeto pertence ou não pertence *totalmente* ao conjunto, i. é, não há como o objeto pertencer *mais ou menos* ao conjunto. De uma forma técnica: se "A" é um conjunto e "x" é um elemento deste conjunto, então "x" pertence à "A" (notando-se " $x \hat{I} A$ "), se e somente se "x" satisfaz todos os requerimentos da função de pertinência de "A"; do contrário "x" não pertence à "A" (notando-se " $x \check{I} A$ "). (SCHNEIDER et al, 1996)

Schneider et al exemplificam a pertinência em conjuntos *crisp* da seguinte maneira: se o conjunto "A" é o conjunto das pessoas com 40 anos de idade, então para uma pessoa "x" pertencer a este conjunto, ela terá que possuir necessariamente 40 anos de idade. Então uma pessoa com 39,9 anos está excluída deste conjunto "A";

mais ainda, uma criança com 5 anos será rejeitada do conjunto exatamente como o cidadão de 39,9 anos.

É plausível enxergar-se uma certa dose de inconsistência associada à teoria clássica dos conjuntos, a qual serve a um bom trabalho quando as medições podem ser feitas com grande acurácia. No entanto, sob condições desfavoráveis que não refletem com exatidão o domínio do problema, a teoria clássica não oferece boa condição para lidar com distorções na interpretação da informação e do conhecimento. Além disto, em muitas situações uma função de pertinência apresenta a transição de uma pertinência para outra de *forma gradual, não repentina*. Também podem ocorrer casos em que a informação que se possui para tomar uma decisão, não permite uma formulação matemática precisa, fazendo com que se tenha que decidir baseado em dados contendo algum grau de erro.

5.4.1 Função de Pertinência em Conjuntos Difusos (*Fuzzy*)

Para ilustrar melhor o pensamento precedente e mantendo-se o Exemplo 5.2 apresentado anteriormente, veja-se o gráfico da Figura 27. (SHAW & SIMÕES, op. cit.)

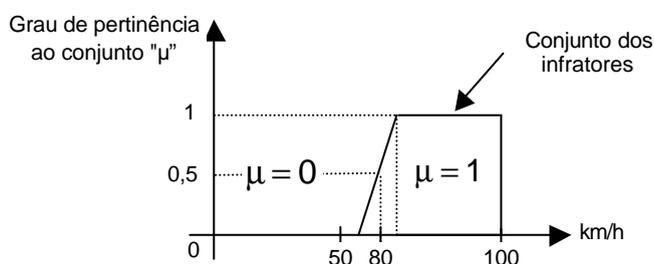


Figura 27 – Gráfico modificado para o Exemplo 5.2

Por exemplo, até a velocidade de $x_1 = 75$ km/h, a função de pertinência $\mu_A(x_1)$ vale "0,0", ou seja, não há qualquer *possibilidade* de infração. Já a uma velocidade de $x_2 = 80$ km/h existe um *grau de pertinência* $\mu_A(x_2)$ de "0,5", o que significa que um veículo a esta velocidade passa a pertencer ao conjunto dos infratores, *mas não totalmente*. Esta consideração poderia ser utilizada na formatação de uma política de trânsito bastante diferenciada e mais racional.

5.4.1.1 Notação da Função de Pertinência *Fuzzy*

Diferentemente dos conjuntos *crisp*, a notação para a função de pertinência de conjuntos *fuzzy* é:

$$\mu_A(x): X \rightarrow [0,1]$$

A diferença entre a notação dada acima e aquela apresentada na seção 5.3.1, está na representação dos limites inferior e superior, pois enquanto nos conjuntos *crisp* se usam " { " e " } ", aqui nos conjuntos *fuzzy* se usam " [" e "] ". A idéia na notação dada acima é a de que a função de pertinência *fuzzy* admite todas as possibilidades de valor entre "0" e "1" (os *graus de pertinência que um elemento "x" pode assumir*), ao contrário da função de pertinência *crisp*, que admite somente o valor "0" ou o valor "1" (ou seja, *pertence* ou *não pertence*).

Pode-se abstrair desta representação, a constatação de que a teoria dos conjuntos difusos é uma teoria que generaliza a teoria dos conjuntos, tornando a teoria clássica (*crisp*) um caso particular.

Acrescentando, as funções de pertinência difusas podem ser vistas como uma distribuição do *grau de verdade* de uma variável, de tal modo que o grau de pertinência costuma ser chamado de "*grau de confiança com que uma asseveração vai se cumprir*"; ou "*grau de certeza de uma afirmativa*"; ou "*possibilidade de ocorrência de um evento*"; ou "*propensão em acreditar numa afirmativa*" etc. (JANTZEN, 1999)

5.4.1.2 Implicações: "O Meio Excluído"

Aristóteles (384 AC – 322 AC), ao criar a lógica clássica, utilizada até os nossos dias, disponibilizou somente duas opções de pertencimento. Na operação de negação vista antes (seção 5.3.2.2, letra c), esta situação é bastante clara, i. é, qualquer elemento pertencente a um determinado conjunto "A" recebe o valor "1", se *não* pertence, valor "0". Esta relação pode ser perfeitamente visualizada quando se compara o conjunto "A" com seu complementar "A' ". Isto porque a intersecção entre o conjunto "A" e seu complementar "A' " é o conjunto vazio " \emptyset " (Figura 21).

Pela Figura 28 vê-se que não há elementos que pertençam tanto ao conjunto "A" como ao seu conjunto complementar "A' ". De forma mais ampla, significa afirmar que *nunca haverá membros em comum entre um determinado conjunto e seu complementar*. A este fenômeno dá-se o nome de "*meio excluído*". Acrescentando, no que tange à união entre um determinado conjunto e seu complementar, o resultado é o próprio conjunto universo (universo de discurso).

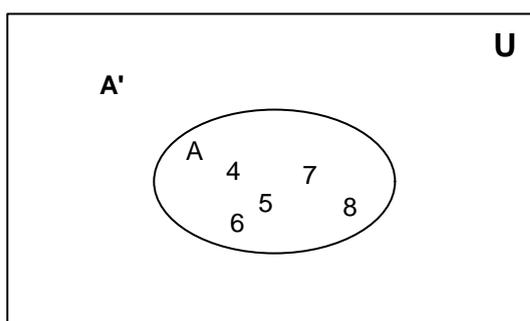


Figura 28 – O "Meio Excluído"

5.4.1.3 Função de Pertinência *Fuzzy* e o Meio Excluído

Na teoria dos conjuntos *fuzzy* não há meio excluído. Esta é provavelmente a diferenciação mais importante entre conjuntos *fuzzy* e conjuntos *crisp* (clássicos).

Do enunciado acima se obtém uma ponderação razoável sobre o funcionamento da lógica difusa, ou seja, a de que um elemento de um conjunto difuso pode pertencer *mais*, ou *menos*, ou *não* pertencer, ou mesmo *pertencer totalmente* ao conjunto difuso.

Os *Diagramas de Venn* não são apropriados para descrever a função de pertinência difusa. Uma interpretação geométrica apresenta melhor o pertencimento de um elemento a um conjunto difuso.

Na Figura 29 tem-se o caso de um elemento "e", cujo grau de pertencimento é de 0,8. Perceba-se que o tratamento da lógica clássica faria com que este elemento "e" somente pudesse situar sua pertinência nos vértices [0,0] ou [1,1] do quadrado do gráfico. Mas o tratamento da lógica difusa faz com que o elemento "e" pertença parcialmente ao seu universo de discurso: segue uma escala que vai de "0 a U" no eixo "X" (U=universo de discurso da variável) e de "0 a 1" no eixo "Y" (portanto, no eixo "Y" não há diferença em relação à escala do conjunto clássico).

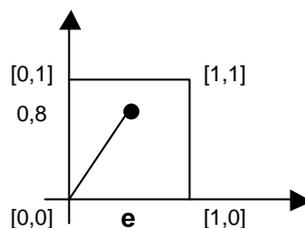


Figura 29 – Função de pertinência difusa

No Exemplo 5.4 viu-se que um estudante nada receberia caso obtivesse a nota 5. Mas sendo utilizada a lógica difusa, talvez este aluno conseguisse receber alguma quantia caso obtivesse, por exemplo, nota 5,9.

5.4.2 Operações entre Conjuntos Difusos (*Fuzzy*)

As operações entre conjuntos difusos seguem basicamente o mesmo raciocínio utilizado para os conjuntos clássicos (ver seção 5.3.2.2). Aquelas operações obedecem às chamadas *normas e co-normas triangulares*, cujos conceitos foram mais bem desenvolvidos por Menger (1942), Schwizer e Sklar (1983), e atualmente por Butnario et al. (1993). (GÓMEZ, 1999)

Conforme Gómez, estas normas estabelecem modelos genéricos para as operações de intersecção e união, as quais devem cumprir certas propriedades básicas: a comutativa, a associativa, a monotônica e as condições de contorno. Segundo Simões & Shaw, as normas e co-normas são produtos cartesianos materializados em operações binárias, cujos operadores indicam um mapeamento entre duas funções de pertinência *fuzzy*, cada uma no intervalo $[0,1]$, sendo cada operação executada de acordo com o formato das funções, ponto a ponto.

Para obter profundidade neste assunto, basta consultar Gómez e Simões & Shaw, p. 31-34, conforme bibliografia. Neste trabalho serão contempladas as normas triangulares "t" e as co-normas triangulares "s" de forma restrita e nas operações descritas adiante.

5.4.2.1 Intersecção entre conjuntos *fuzzy*

Sejam U o universo de discurso, $x \in U$, $\mu = [0,1]$, $A \subset B$, $A \subset U$; então a intersecção $A \cap B$ é o maior subconjunto do universo de discurso U , o qual é ao mesmo

tempo parte de A e também parte de B . Já a intersecção é a *parte comum* dos conjuntos A e B , e portanto sempre menor que qualquer um dos conjuntos individuais A e B . Assim, os graus de pertinência que compõem o vetor de pertinência da intersecção, são obtidos tomando-se os mínimos dos valores individuais de A e B :

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min [\mu_A(x), \mu_B(x)]$$

Exemplo 5.6:⁷ tome-se os dados da tabela da Figura 30.

	Nome	Idade (x)		Altura (y)	
		A	B	A	B
1	Nome1	36		1,70	
2	Nome2	58		1,75	
3	Nome3	64		1,65	
4	Nome4	32		1,78	
5	Nome5	40		1,77	
6	Nome6	22		1,60	
7	Nome7	47		1,73	
8	Nome8	25		1,75	

Figura 30 – Tabela do Exemplo 5.6

Considere-se que as pessoas que pertencem ao conjunto das pessoas *altas* são as que têm altura superior a 1,75 metros, e que as pessoas que pertencem ao conjunto das pessoas de *meia-idade* são as que têm entre 35 e 45 anos. A tabela da Figura 31 apresenta as funções de pertinência *crisp* de cada elemento de cada conjunto, bem como as funções de pertinência dos elementos do conjunto das pessoas *altas* E *de meia-idade*.

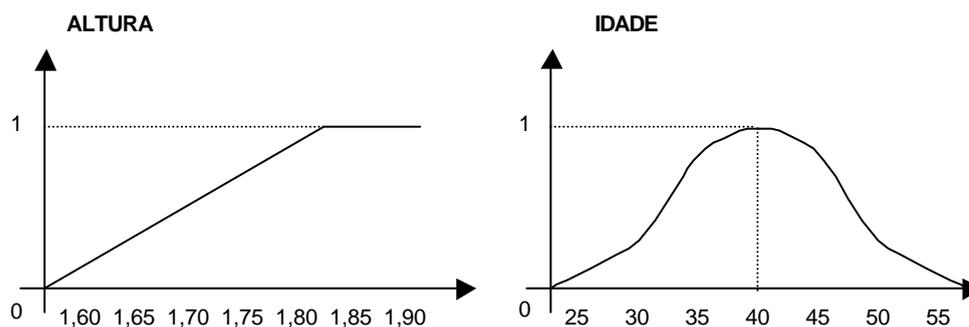
Examinado a última coluna da tabela da Figura 31, se vê que somente a pessoa com nome de Nome5 reúne ambas as condições estabelecidas, devendo as demais ser sumariamente descartadas.

⁷ Este exemplo foi obtido de transparências de curso oferecido pelo *Departamento de Engenharia Elétrica da PUC-Rio*, do qual não foi possível alcançar a referência bibliográfica completa.

	Nome	Idade (x) A	$\mu_{\text{IDADE}}(x)$	Altura (y) B	$\mu_{\text{ALTURA}}(y)$	$\mu_{A \cap B}(x, y) = \min [\mu_A(x), \mu_B(y)]$ Pessoas altas E de meia-idade
1	Nome1	36	1	1,70	0	0
2	Nome2	58	0	1,75	1	0
3	Nome3	64	0	1,65	0	0
4	Nome4	32	0	1,78	1	0
5	Nome5	40	1	1,77	1	1
6	Nome6	22	0	1,60	0	0
7	Nome7	47	0	1,73	0	0
8	Nome8	25	0	1,75	1	0

Figura 31 – Tabela das funções de pertinência para o Exemplo 5.6

Continuando com o mesmo exemplo, descrevam-se agora duas funções de pertinência difusa, uma para cada conjunto considerado: altura e idade.



A tabela da Figura 32 apresenta os graus de pertinência, aqui *arbitrados*, para cada elemento de cada conjunto difuso.

A mudança no resultado procurado é bastante radical, pois agora se têm 5 pessoas selecionadas, ao invés de somente uma, como no caso *crisp*. Dependendo do propósito daquela seleção, talvez somente 3 ou 2 pessoas venham a ser finalmente selecionadas, conforme qualquer critério que venha a ser estabelecido para avaliar as pertinências finais.

	Nome	Idade (x) A	$\mu_{\text{IDADE}}(x)$	Altura (y) B	$\mu_{\text{ALTURA}}(y)$	$\mu_{A \cap B}(x, y) = \min [\mu_A(x), \mu_B(y)]$ Pessoas altas E de meia-idade
1	Nome1	36	0,92	1,70	0,84	0,84
2	Nome2	58	0	1,75	0,92	0
3	Nome3	64	0	1,65	0,68	0
4	Nome4	32	0,47	1,78	0,96	0,47
5	Nome5	40	1	1,77	0,94	0,94
6	Nome6	22	0	1,60	0,39	0
7	Nome7	47	0,74	1,73	0,90	0,74
8	Nome8	25	0,10	1,75	0,92	0,10

Figura 32 – Tabela dos graus de pertinência para o Exemplo 5.6

5.4.2.2 União entre conjuntos *fuzzy*

Sejam U o universo de discurso, $x \in U$, $\mu = [0,1]$, $A \subset B$, $A \subset U$; então a união $A \cup B$ é o menor subconjunto do universo de discurso U , o qual inclui ambos os conjuntos A e B . Já a união é o *contorno* dos conjuntos A e B , e, portanto, é sempre maior que qualquer um dos conjuntos individuais A e B . Assim, os graus de pertinência que compõem o vetor de pertinência da união, são obtidos tomando-se os máximos dos valores individuais de A e B :

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max [\mu_A(x), \mu_B(x)]$$

Utilizando todas as informações do Exemplo 5.6, mas agora aplicando a operação de união, se obtêm 5 pessoas selecionadas para o caso *crisp* e todas as 8 pessoas selecionadas para o caso *fuzzy*.

5.4.2.3 Outras atividades com conjuntos *fuzzy*

Resta salientar que existem outras operações *fuzzy*, como o *complemento*, bem como o estudo da *não* aplicação da *Lei da Não Contradição* e da *Lei da Exclusão Mútua* aos conjuntos difusos. Existem também outros operadores, chamados de *compensatórios*, como é o caso do *operador produto*, o *operador média*, a *soma limitada*, a *diferença limitada de Lukasiewicz*, o *operador de Yager*, entre outros. No

entanto, para o cumprimento dos objetivos traçados para o presente trabalho, se faz satisfatório o entendimento das operações vistas nas seções precedentes.

5.4.3 Formas de função de pertinência difusas (*fuzzy*)

Existem variadas formas que podem ser assumidas pelas funções de pertinência *fuzzy*. Isto se deve ao fato de que a forma provém da superfície da curva originada da função difusa que conecta cada elemento do domínio ao seu grau de pertinência (em que o *domínio* é composto pelos elementos constantes no eixo "X", estando os *graus de pertinência* assinalados no eixo "Y").

Significa dizer que não existem regras plenamente definidas para a escolha destas funções. Elas podem, por exemplo, representar o conhecimento de um ou mais especialistas na matéria objeto de estudo, ou podem ser formatadas utilizando-se informações obtidas de um banco de dados. (FALCÃO, 2002)

O mesmo autor apresenta alguns exemplos retirados do manual do *Fuzzy Logic Toolbox* do *MatLab* (Figura 33). O exemplo mostra as funções de satisfação da clientela de um restaurante e da gorjeta a ser dada conforme esta satisfação.

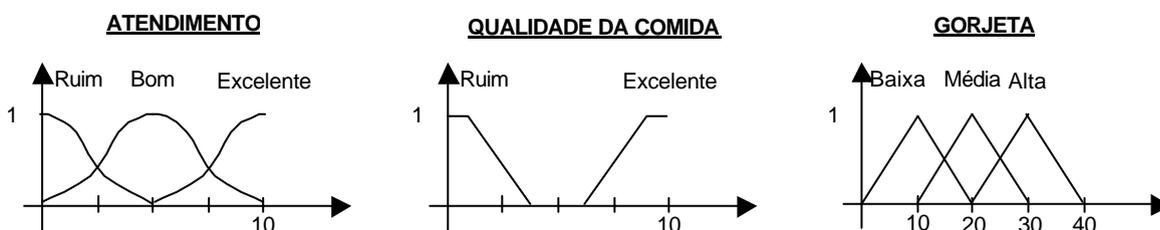


Figura 33 – Funções de satisfação

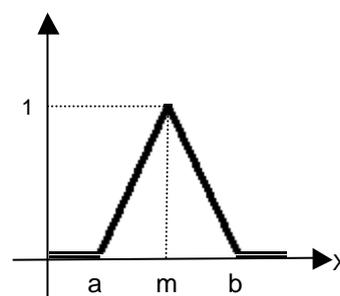
Perceba-se que as formas são as mais variadas e que, no caso do exemplo da Figura 33, a escolha não está baseada em outra perspectiva do que a de juízo de percepção. Klir & Folger (op. cit.) ratificam que os métodos propostos têm sido baseados no empirismo e usualmente envolvem o desenho (*design*) de experimentos em uma população teste, a fim de mensurar percepções subjetivas dos graus de pertinência das classes conceituais estudadas. Estes autores ensinam que há vários meios de implementar as mensurações, como, por exemplo, o caso em que o próprio objeto em análise possui graus de pertinência reais, ou quando se obtém um padrão estatístico de resposta para uma amostra de questões do tipo verdadeiro / falso, ou mesmo o tempo de resposta para este tipo de questão (verdadeiro / falso) pode ser utilizado, onde então

menores tempos de resposta atribuiriam maiores graus de subjetividade às pertinências etc.

Por outro lado, algumas *funções padronizadas* costumam ser utilizadas na maioria dos casos. Este fato se assemelha aos procedimentos utilizados quando se fazem ajustamentos de curvas a distribuições de dados em análises numéricas. Entre várias possibilidades, apresentam-se aqui as seguintes funções definidas para o caso geral $\mu_A(x) : X \rightarrow [0,1]$: (GÓMEZ, op. cit.)

- a) Triangular: definida por seus limites inferior " a ", superior " b " e pelo valor modal " m ", tal que $a < m < b$.

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq a \\ \frac{(x-a)}{(m-a)} & \text{se } x \in (a,m] \\ \frac{(b-x)}{(b-m)} & \text{se } x \in (m,b) \\ 0 & \text{se } x \geq b \end{cases}$$



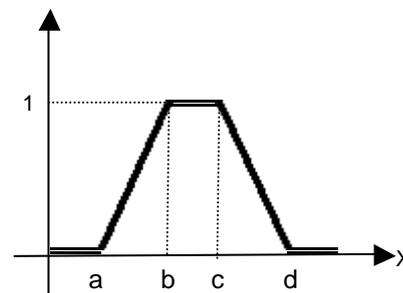
Também pode ser apresentada na forma de expressão:

$$\mu_A(x; a, m, b) = \max\left(\min\left(\frac{x-a}{m-a}, \frac{b-x}{b-m}\right), 0\right)$$

Esta forma de pertinência difusa está entre as mais utilizadas e será a escolhida no presente trabalho.

- b) Trapezoidal: definida por seus limites inferior " a ", superior " d " e pelos limites de seu suporte " b " (inferior) e " c " (superior), tal que $a < b < c < d$.

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } (x \leq a) \text{ ou } (x \geq d) \\ \frac{(x-a)}{(b-a)} & \text{se } x \in (a,b] \\ 1 & \text{se } x \in (b,c) \\ \frac{(d-x)}{(d-c)} & \text{se } x \in (c,d) \end{cases}$$

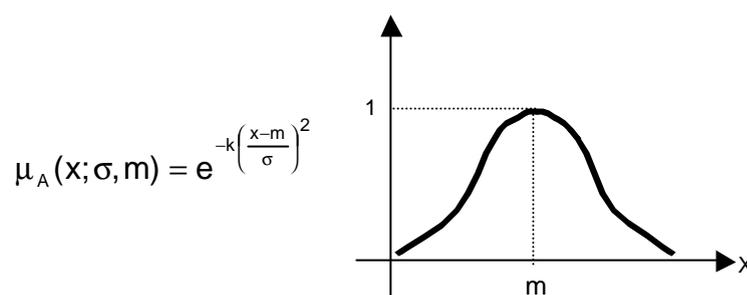


Também pode ser apresentada na forma de expressão:

$$\mu_A(x; a, b, c, d) = \max\left(\min\left(\frac{x-a}{b-a}, 1, \frac{d-x}{d-c}\right), 0\right)$$

- c) Gaussiana: definida por seu valor médio " m " e pelo parâmetro $k > 0$, esta função é a típica função em forma de sino (concebida pelo matemático *Johann Carl Friedrich Gauss*, 1777-1885), em que quanto maior é o valor de " k ", mais *estrito* é o *sino* delineado pela função, porém, normalmente é tomado como padrão valendo $\frac{1}{2}$ (*meio*).

Sua expressão e gráfico são:



Existe uma gama bastante variada de funções que podem e são utilizadas para representar as funções de pertinência difusas. Conforme SAZONOV (2003), qualquer tipo de distribuição de probabilidade contínua pode ser usada como uma função de pertinência difusa. Seguem aqui citados alguns nomes de funções que podem ser encontradas na bibliografia deste trabalho.

- Função Pseudo-Exponencial; Quadrática; Gaussiana Generalizada (na verdade são variantes sobre uma mesma base)
- Bell ou Função π (Pi)
- Função Gama; Sigmoidal (variantes)
- Função S (que se constitui numa interpolação linear de uma função discreta num universo de discurso finito)
- $\text{Cos}^2(x)$

A escolha da função a ser utilizada costuma recair nas funções triangulares e trapezoidais, em função das facilidades que apresentam, como um pequeno esforço computacional de cálculo, se comparadas com as outras funções citadas, mesmo a de *Gauss*. Já as demais funções oferecem melhor desempenho quando a *suavidade* é desejada, i. é, quando o comportamento da variável nebulosa apresenta modificações substanciais de grau de pertinência diante de variações muito pequenas no seu valor, provocando forte impacto nos resultados procurados.

5.4.3.1 Número de funções de pertinência difusas e grau de sobreposição

Como dito anteriormente, não existem regras específicas para criação e modelagem de funções de pertinência difusas. Porém, algumas considerações adicionais podem auxiliar nestas tarefas.

A primeira delas diz respeito ao número de funções de pertinência, que empiricamente costuma situar-se entre 2 e 7 funções. Se por um lado, quanto maior o número destas funções, maior a precisão obtida nos resultados, por outro lado ocorre uma demanda computacional consideravelmente maior. Segundo Shaw & Simões (op. cit.), experiências comprovaram que uma mudança de 5 conjuntos de pertinência triangulares para 7, aumenta a precisão em torno de 15%, sendo que a partir de valores maiores o incremento é praticamente insignificante.

Cox (op. cit.) faz uma explanação esclarecedora sobre este tema. Aquele autor apresenta uma fórmula para o cálculo do número de *inferências* (*regras*) que resultam da combinação entre as variáveis difusas independentes, conforme o número de funções de pertinência de cada uma.

$$r_v^k = \prod_{i=1}^N f_i$$

Figura 34 – Fórmula para o cálculo do número de inferências

Para exemplificar, presumir a criação de três variáveis independentes difusas X, Y, W, e uma variável dependente difusa Z. Agora supor que cada uma das três variáveis independentes esteja subdividida em cinco conjuntos difusos de pertinência. Esta configuração gerará uma quantidade de inferências (regras) possíveis, conforme calculado na solução a seguir:

$$r_v^k = \prod_{i=1}^3 f_i = 5_x \times 5_y \times 5_w = 125$$

A Figura 35 mostra a *Memória de Associação Difusa*, formada pelos relacionamentos das três variáveis independentes X, Y, e W ("variáveis de entrada" de informação) e as respectivas matrizes dos relacionamentos que contêm as 125 combinações possíveis, sendo que cada combinação significa uma *regra de inferência* para o sistema difuso do exemplo dado.

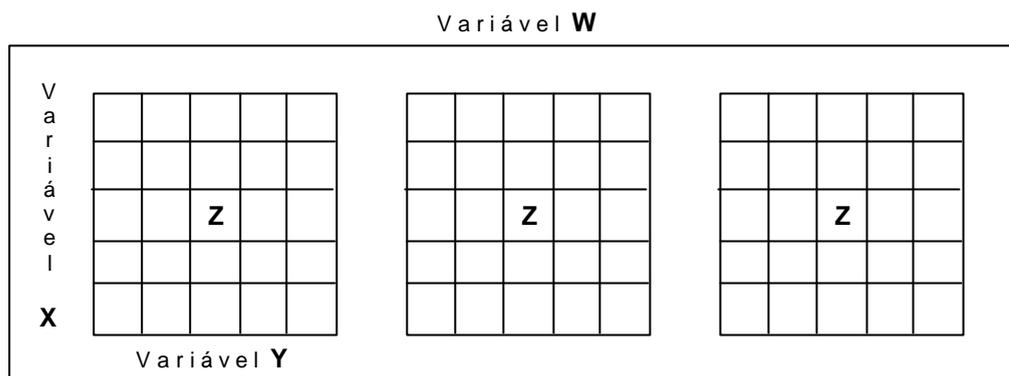


Figura 35 – Memória de Associação Difusa

Cabe ainda ressaltar que a quantidade de conjuntos difusos de pertinência da variável dependente Z ("variável de saída" de informação) *não* afeta a quantidade de regras.

O problema da "*explosão de regras*" vai-se tornando grave à medida que se adicionam variáveis independentes difusas de entrada. Por exemplo, no presente caso, se for adicionada mais uma variável independente difusa, com três conjuntos difusos de pertinência, a *memória de associação difusa* aumentará para uma matriz com 375 regras de inferência ($5 \times 5 \times 5 \times 3$).

Os autores apontam que um crescimento exacerbado do número de regras de inferência faz com que a ênfase da direção do sistema se "desloque" para a matriz da memória de associação difusa, enquanto seria mais inteligente que o comando do sistema se desse por uma otimização da *engenharia de regras de inferência*.

A segunda consideração diz respeito à sobreposição entre as funções de pertinência. Esta sobreposição, embora não obrigatória, é sempre utilizada, pois converte uma série de regiões difusas (*subconjuntos difusos*) individuais numa superfície contínua e conseqüentemente torna-as melhor representativas do caráter difuso e ambíguo da segmentação da variável difusa.

Do mesmo modo como não há regras explícitas para a determinação do número de regiões de uma variável difusa (conforme visto na seção precedente), também aqui é a *experiência* mencionada na literatura que recomenda uma sobreposição média entre o ponto central da *região difusa* e um de seus limites com a região vizinha (à direita ou à esquerda), num tanto da ordem de 25% a 50%.

A Figura 36 mostra a sobreposição entre regiões difusas (*subconjuntos difusos*) de uma variável. Observe-se que neste exemplo tem-se cinco regiões e quatro áreas de sobreposição, sendo que a primeira e a última região correspondem somente à metade das três regiões intermediárias.

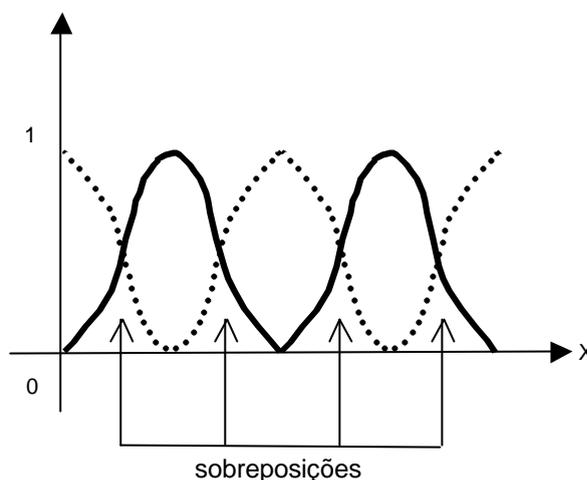


Figura 36 – Sobreposição de regiões difusas

5.4.4 Variáveis Lingüísticas e Termos Lingüísticos

Pode-se afirmar que a principal vantagem proporcionada por uma modelagem difusa é o uso de *variáveis lingüísticas*. Facilitando o entendimento, o nome que se atribui a um conjunto difuso é a própria variável lingüística como, por exemplo, os substantivos *idade*, *força*, *ângulo*, *beleza*, *conhecimento*, *habilidade* etc. Já os *termos lingüísticos* serão as graduações de cada variável lingüística como, por exemplo, os adjetivos *ruim*, *médio*, *fraco* etc.

5.4.4.1 Números Difusos ou Nebulosos (*Fuzzy*)

Conforme salientado anteriormente, um conjunto difuso é formado por regiões difusas (*subconjuntos difusos*: ver 5.4.3.1, II), as quais se constituem nos *números difusos* ou *nebulosos*. A Figura 37 apresenta um pequeno segmento dos *números reais acima de zero*, estando o número real "2" especialmente assinalado por uma seta voltada para cima (chamada de *singleton* na teoria *fuzzy*). Esta seta para cima estende-se desde o eixo "X", onde estão todos os números reais, inclusive o "2", e vai até atingir o valor "1" no eixo "Y". Este valor "1" relacionado ao número real "2" é o seu

valor de pertinência, i. é, o número real " 2 " *pertence totalmente* ao conjunto dos números reais. Portanto, o conjunto dos números reais é um conjunto *crisp*, em que cada número real ou pertence ou não pertence a ele.

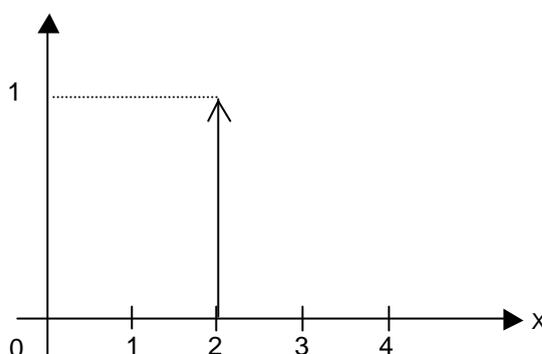


Figura 37 - Singleton

Agora se observe a Figura 38, nela o número real " 2 " não possui mais o único valor de pertinência igual a " 1 ". Associada ao número " 2 " está uma função de pertinência do tipo triangular. No presente exemplo, a função de pertinência triangular faz com que o número " 2 " possa ser "mais ou menos 2", conforme esteja mais próximo do número " 3 " ou do número " 1 ". Note-se que para um valor de pertinência de 0,5 (*meio*), ao número real " 2 " poder-se-á atribuir a expressão "quase 2". Ainda na Figura 38 há uma outra função triangular associada ao número real " 2 ", estendendo-se de " 0 " até " 4 " (feita com traços duplos para diferenciar melhor). A esta função de pertinência triangular poder-se-á atribuir a expressão "próximo de 2".

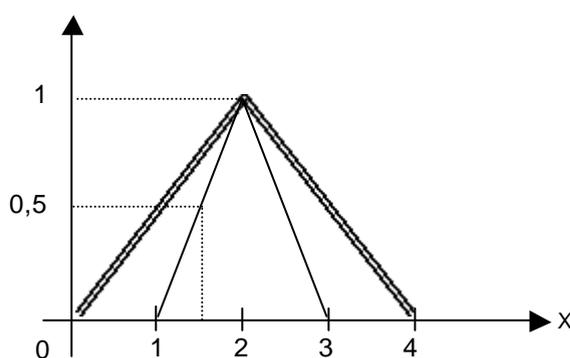


Figura 38 – Número nebuloso

No exemplo dado, o conjunto difuso utilizado possui somente uma região difusa. De qualquer forma, a partir do que foi apresentado nas Figuras 37 e 38, diz-se que o número "2" é um *número nebuloso*. Ainda mais, a nebulosidade do número " 2 " é variável, sendo maior quanto maior for a base da função de pertinência associada a ele.

No exemplo dado, "próximo de 2" (entre " 0 " e " 4 ") possui maior nebulosidade do que "quase 2" (entre " 1 " e " 3 ").

Um número nebuloso deve preencher certos requisitos, entre os quais: (KLIR & FOLGER, op. cit.)

- a) O conjunto difuso em que se constitui o número nebuloso deve ser *convexo*, i. é, deve haver *somente um ponto de máximo no conjunto*. A convexidade informa sobre o *formato* do número nebuloso, bem como seu *interior*, pois a exigência de haver somente um ponto de máximo faz com que não haja *buracos* ou *baías* nos limites do conjunto. (SIMÕES & SHAW, op. cit.)
- b) O conjunto difuso em que se constitui o número nebuloso deve ser *normal (normalizado)*, i. é, *pelo menos um de seus elementos* deve possuir função de pertinência com *grau máximo* (comumente se utiliza o valor " 1 " como grau máximo de pertinência).
- c) O conjunto difuso em que se constitui o número nebuloso deve ser *contínuo*.

5.4.4.2 Variáveis Lingüísticas e Números Nebulosos

Normalmente um conjunto difuso é composto por várias regiões difusas (*subconjuntos difusos*). Por sua vez, cada região difusa de um conjunto difuso é representada por uma função de pertinência do número nebuloso associado àquela região. Para simplificar, a expressão "região difusa" é sinônimo de "número nebuloso", que em suma é um "subconjunto difuso" de um "conjunto difuso".

A Figura 38 apresenta um conjunto nebuloso, seus subconjuntos (ou regiões) e a terminologia comumente associada a cada componente. Na Figura 39, a representação pretendida é a da opinião dos freqüentadores de um restaurante quanto à qualidade percebida do atendimento.

- a) Variável Lingüística "ATENDIMENTO": é como se chama ao *conjunto difuso* criado para representar a qualidade percebida do *atendimento* prestado no restaurante.
- b) Termos da Variável Lingüística "RUIM" "REGULAR" "BOM": são as *variáveis difusas* (também são chamadas de *subconjuntos difusos*, *números nebulosos*;

regiões difusas) criadas para representar as *possibilidades* que podem ser assumidas pela *variável lingüística* "ATENDIMENTO". No exemplo da Figura 39, cada *possibilidade* do "ATENDIMENTO" corresponde a um dos três subconjuntos difusos – "RUIM", "REGULAR", "BOM" –, cada um deles configurado por uma *função de pertinência* do tipo *triangular* (ver seção 5.4.3, "a").

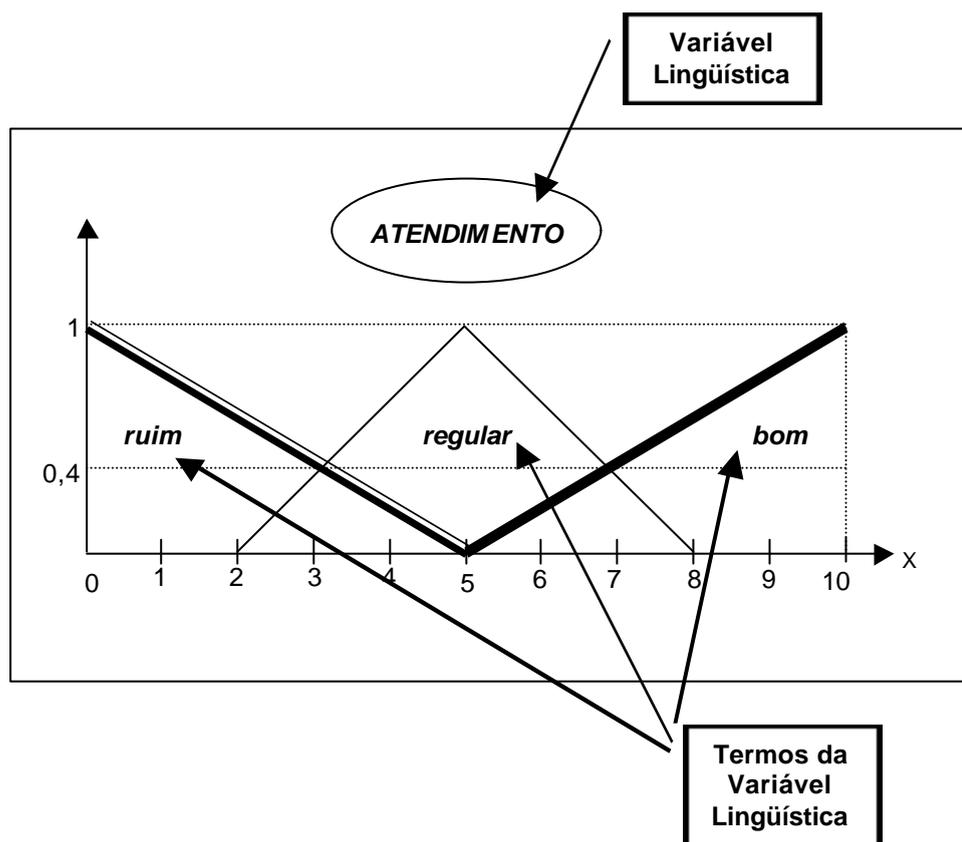


Figura 39 – Conjuntos e subconjuntos nebulosos

5.4.5 Sobre o que é Possibilidade

Na lógica difusa, a *possibilidade* mede: (ROSCA, 2001)

- a) o grau pelo qual uma pessoa considera que um evento pode ocorrer; ou
- b) o grau pelo qual uma evidência disponível é convincente em relação à ocorrência de um evento.

Assim, uma possibilidade com valor " 1 ", significa que não há razão para se acreditar que um evento não *possa* ocorrer. Por outro lado, se há a crença de que existem impedimentos à ocorrência do evento, então graus menores do que " 1 " (por

exemplo, " 0,2 ", " 0,4 " etc) podem ser assinalados para a possibilidade de que o evento venha a ocorrer.

Rosca lembra que foi Zadeh (ver seção 5.1), em 1978, quem pela primeira vez utilizou os conjuntos difusos como base para a determinação da possibilidade. Conforme Zadeh, uma proposição que associe a um conjunto difuso uma variável real que carregue incerteza, provoca a indução de uma distribuição de possibilidades da variável, a qual fornece informações sobre os valores que esta variável pode assumir. Isto também pode ser verificado na Figura 38 anteriormente apresentada, onde se tem o número nebuloso representado pela declaração "X é *quase* 2", o que faz com que "X" tenha sua função de pertinência denotando uma interpretação subjetiva daquela declaração que limita os possíveis valores dentro do intervalo "(1,3)". Exemplificando, há uma possibilidade que vale " 0,5 " de o número "X" assumir o valor " 1,5 " ou " 2,5 ".

5.4.5.1 Possibilidade e Probabilidade

Conforme visto ao longo do Capítulo 4, especificamente na seção 4.3.2 – "Ferramentas da Avaliação", a probabilística é amplamente utilizada como apoio à validação dos resultados da aferição da aprendizagem.

Cox (op. cit.) apresenta algumas considerações importantes a respeito das diferenças entre *possibilidade* e *probabilidade*. Primeiramente o autor delinea as duas correntes da probabilística: a *Freqüentista* e a *Subjetivista*.

- a) Freqüentista: nesta, faz-se predições sobre o futuro baseando-se no passado, i. é, analisa-se o comportamento de uma determinada população e, a partir das freqüências obtidas das medições, constrói-se sua função de densidade de probabilidade. Para obtenção de projeções, compara-se esta função a alguma outra função padronizada, cujas estatísticas já estejam tabeladas (ou se calcula), obtendo-se as estimativas desejadas.
- b) Subjetivista: esta combina a anterior com estimativas subjetivas sobre a ocorrência provável de um evento. Para tanto é utilizado o Teorema de Bayes (concebido por Thomas Bayes, 1702 – 1761), que essencialmente permite fazer estimativas sobre a freqüência relativa da ocorrência de um determinado evento "A", uma vez que tenha ocorrido outro determinado

evento "B". Uma das vantagens desta consideração é a de que não se precisa ter dados históricos massivos sobre o objeto de estudo, podendo-se trabalhar com poucos dados de referência. No entanto, este fato eventualmente tem levado analistas a conclusões indesejadas ou sem fundamento. Cox cita como exemplo a NASA, onde os técnicos subjetivamente superestimaram a taxa contra falhas da nave espacial *Challenger*.

Postos estes conceitos, e pelo que já foi visto até este ponto, pode-se traçar algumas diferenças capitais entre a teoria *fuzzy* e a teoria das probabilidades.

- Enquanto a *teoria probabilística* acumula evidência a favor ou contra a ocorrência de um evento, a *teoria fuzzy* acumula evidência para os graus de pertinência em um conjunto de eventos.
- Na *teoria probabilística* a soma das probabilidades associadas a eventos mutuamente excludentes deve ser igual " 1 " ("100%"), o que se constitui no chamado requisito de *aditividade*. Na *teoria fuzzy* não se tem esta restrição, embora seja válido desenvolver funções de pertinência utilizando funções de densidade de probabilidade (ver seção 5.4.3, citação de Sazonov).
- Uma proposição probabilística sobre um evento informa de maneira *inequívoca* se ele vai ou não ocorrer, enquanto uma proposição *fuzzy* informa o *nível* em que um evento ocorre ou a *extensão* em que ele ocorreu, o que pressupõe certo *grau* de incerteza ou ambigüidade.

Significa dizer que a probabilidade atua sobre as chances baseadas em freqüências, entre 0% e 100%, de um evento ocorrer ou não, enquanto a possibilidade expressa uma representação da ambigüidade na forma de medida, i. é, o *grau de compatibilidade de um determinado conceito associado a um evento*.

- Na probabilidade, a incerteza está associada ao acontecimento ou não de um evento, baseada na freqüência com que ele ocorre, portanto, a probabilística depende da variável *tempo*. Este aspecto faz com que depois que o evento ocorra, toda a *noção* de probabilidade associada a ele se desvaneça. Sob o enfoque *fuzzy*, a possibilidade está conectada à representação de um conceito, o que permite a atribuição semântica aos graus de possibilidade,

bem como sua perpetuidade no tempo. Embora também se possa atribuir termos lingüísticos a probabilidades, estes nada mais serão do que meros intervalos puramente aritméticos, nada informando sobre o grau semântico de cada termo. Exemplificando, estas diferenças podem ser notadas entre as seguintes afirmações:

"João é *alto* com probabilidade de 50%"

Neste caso, a partir do momento em que se mede João e se chega à conclusão de que ele é *alto*, a afirmação perde todo o seu significado.

"João é alto com grau de pertinência de '0,5' "

Neste outro caso, a partir do momento em que se mede João e se chega à conclusão de que ele é *alto*, porém num grau de pertinência de "0,5", a afirmação em si permanece válida, podendo ainda ser utilizada em conjunto com outras pertinências conectadas à *variável lingüística "Altura"*.

A possibilidade pode ser vista como um limite superior da probabilidade (GILES, 1982, apud ROSCA, op.cit.). Exemplificando, quanto mais um evento seja provável de ocorrer, menos apostas contra sua ocorrência irá receber, até um ponto em que haverá um mínimo a ser apostado contra, ao qual corresponderá o limite superior da probabilidade estimada para a ocorrência do evento. Assim, a possibilidade é: pode ser inferior, igual ou mesmo *superior* à probabilidade, fazendo com que todo o evento provável seja também possível, mas nem todo o evento possível seja provável.

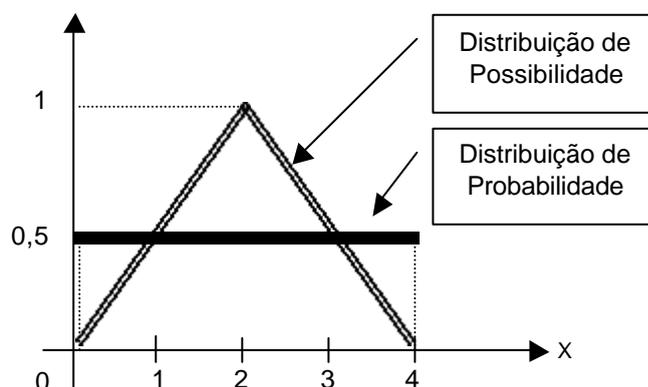


Figura 40 – Comparação entre a Distribuição de Possibilidade e a Distribuição de Probabilidade

A Figura 40 mostra como funciona a problemática intervalar meramente aritmética da probabilidade. A *Distribuição de Probabilidade* para a afirmação "É provável que X seja *quase* 2", com probabilidade de 50%, é uma linha reta que alcança

o intervalo de "0" a "4", mostrando bem a dificuldade de aplicação semântica na probabilística. Por outro lado, a *Distribuição de Possibilidades* incorpora o termo *quase* de maneira plena e apropriada, pois para um *grau de possibilidade* de " 0,5 ", "X é *quase* 2" pode assumir os valores " 1 " ou " 3 ". A Figura 5.29 também deixa evidente o fato de que a possibilidade de "X ser *quase* 2" se constitui num *limite superior* da probabilidade associada.

5.5 RESUMO E CONCLUSÕES

A Lógica de Aristóteles (384 A.C. – 322 A.C) tem prevalecido como base para o julgamento humano, atribuindo combinações de valores *verdade* ou *falso* (vislumbrados por Parmênides : 530 A.C. – 460 A.C) aplicados em sistemas de análise. Seus maiores opositores nunca conseguiram encontrar solução alternativa válida. Ao longo da história o raciocínio lógico aristotélico seguiu então impregnando o desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático. Entre muitas contribuições, Georg Boole (1815 – 1864), desenvolve a *lógica simbólica*, a qual atribui valores " 0 " ou " 1 " às relações entre variáveis, conforme as afirmações às quais se referem sejam *falsas* ou *verdadeiras*.

A complexidade da sociedade se incrementa e os problemas a resolver passam a incluir graus de incerteza e ambigüidade. Já dentro do Século XX começam a surgir estudos com vistas a soluções lógicas para estas situações, a exemplo dos estudos de Jan Luckasiewicz (1878 – 1956), entre outros. Finalmente, o engenheiro e professor Lotfi A. Zadeh concebe a lógica difusa em 1965 e inaugura a era do raciocínio aproximado.

A lógica difusa, entre outras importantes funcionalidades, permite a atribuição de valores à linguagem natural, bem como a combinação destes valores por sobreposição. Mais ainda, a conferição de graus de pertinência aos termos das variáveis lingüísticas, permite abordagens de análise de *causa e efeito* não amparadas pela teoria probabilística no campo do raciocínio aproximado.

CAPÍTULO VI MATEMÁTICA NEBULOSA FUNDAMENTAÇÃO PRÁTICA

6.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo se estudará a *Matemática Nebulosa* e sua aplicação na *avaliação da aprendizagem*.

6.1 MATEMÁTICA NEBULOSA

O termo *matemática nebulosa* está associado ao conjunto de operações atualmente conhecidas e que podem ser aplicadas aos números nebulosos. Semelhantemente à *matemática tradicional*, que está associada ao conjunto de operações que podem ser aplicadas aos números *crisp*, através da matemática nebulosa se pode efetuar somas, diferenças e produtos entre conjuntos e subconjuntos nebulosos.

6.2.1 Operações nebulosas

No Capítulo 5 se viu o embasamento lógico da formação dos conjuntos difusos e como eles podem ser operados. Também naquele capítulo se estabeleceu que as operações resultantes da interação entre os conjuntos difusos obedecem a regras definidas *a priori* (*inferências*), conforme o número de funções de pertinência de cada conjunto. As combinações resultantes das interações são possíveis pela aplicação de *implicações lógicas* do tipo *SE ... ENTÃO* como, por exemplo, "SE João é *alto* ENTÃO João é *pesado*".

Por sua vez, as implicações lógicas são efetuadas por *operadores lógicos*. Como se viu, na *lógica tradicional* as operações com conjuntos se constituem em operações *booleanas* obtidas pelos conectivos E, OU e NÃO (ver Capítulo 5, seção 5.3.2.2). Quanto à *lógica fuzzy*, existem vários operadores que podem ser utilizados nas

implicações lógicas. Estes operadores são apresentados em dois *grupos*, também chamados de *classes* ou, mais comumente ainda, de *normas*.

6.2.1.1 Normas

- a) Normas Triangulares (normas-t): o "operador t" associado a esta norma de operação entre conjuntos, possibilita um mapeamento entre duas funções de pertinência *fuzzy* em que (I) a operação se processa em conformidade com o *formato* das funções envolvidas e (II) considera ambas *ponto a ponto*.

Os "operadores t" representam uma *intersecção generalizada* entre conjuntos e se referem ao *produto cartesiano* entre os *valores* de duas *funções de pertinência* dos conjuntos operados, valores estes contidos num intervalo $\mu = [0,1]$. A expressão na Figura 41 apresenta a notação genérica (*binária*) do produto cartesiano resultante de uma operação do tipo norma-t.

$$t : [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$$

Figura 41 – Notação binária do produto cartesiano

Exatamente como ocorre com os conjuntos *crisp*, a operação do tipo norma-t comumente utilizada para combinar ou modificar conjuntos *fuzzy*, conforme definida por Lotfi Zadeh, é a *intersecção* definida pela expressão na Figura 42.

$$A \cap B = \min[\mu_A(x), \mu_B(x)]$$

Figura 42 – Intersecção pela norma-t

- b) Normas Duais (normas-s ou co-normas-t): pela *lei da dualidade*, para cada norma-t existe uma norma-s (simétrica). O "operador s" associado a esta norma de operação entre conjuntos também possibilita um mapeamento entre duas funções de pertinência *fuzzy* em que (I) a operação se processa em conformidade com o *formato* das funções envolvidas e (II) considera ambas *ponto a ponto*.

Os "operadores s" representam uma *união generalizada* entre conjuntos e se referem ao *produto cartesiano* entre os *valores* de duas *funções de*

pertinência dos conjuntos operados, valores estes contidos num intervalo $\mu = [0, 1]$.

Exatamente como ocorre com os conjuntos *crisp*, a operação do tipo norma-s (também chamada co-norma-t) comumente utilizada para combinar ou modificar conjuntos *fuzzy*, conforme definida por Lotfi Zadeh, é a *união* definida pela expressão na Figura 43.

$$A \cup B = \max[\mu_A(x), \mu_B(x)]$$

Figura 43 – União pela norma-s

6.2.1.2 Operadores

Como nos conjuntos *crisp*, aqui os operadores *min* e *max* também devem satisfazer determinadas condições e propriedades. Sendo "t" o *operador de interseção* e "s" o *operador de união*, tem-se:

a) Condições de contorno:

Intersecção (min)	
$x \ t 0 = 0, \forall u \in [0,1], e$	"a intersecção de qualquer conjunto <i>fuzzy</i> com o conjunto vazio é o próprio conjunto vazio"
$x \ t 1 = x, \forall u \in [0,1]$	"a intersecção de qualquer conjunto <i>fuzzy</i> com o conjunto universo é o próprio conjunto <i>fuzzy</i> "
União (max)	
$x \ s 0 = u, \forall u \in [0,1], e$	"a união (contorno comum) de qualquer conjunto <i>fuzzy</i> com o conjunto vazio é o próprio conjunto <i>fuzzy</i> "
$x \ s 1 = 1, \forall u \in [0,1]$	"a união (contorno comum) de qualquer conjunto <i>fuzzy</i> com o conjunto universo é o próprio conjunto universo"

b) Condições monotônicas:

Intersecção (min)	
$se\ x \leq y\ e\ w \leq z, então\ x \wedge w \leq y \wedge z$	"uma diminuição dos valores de pertinência em X e Y, não pode produzir um incremento no valor de pertinência da intersecção dos conjuntos X e Y"
União (max)	
$se\ x \leq y\ e\ w \leq z, então\ x \vee w \leq y \vee z$	"uma diminuição dos valores de pertinência em X e Y, não pode produzir um incremento no valor de pertinência da união dos conjuntos X e Y"

c) Propriedade comutativa:

Intersecção (min)	
$x \wedge y = y \wedge x$	"a operação de intersecção independe da ordem em que os conjuntos <i>fuzzy</i> aparecem combinados"
União (max)	
$x \vee y = y \vee x$	"a operação de união independe da ordem em que os conjuntos <i>fuzzy</i> aparecem combinados"

d) Propriedade associativa:

Intersecção (min)	
$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$	"é possível tomar a intersecção de qualquer número de conjuntos <i>fuzzy</i> agrupados aos pares em qualquer ordem"
União (max)	
$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$	"é possível tomar a união de qualquer número de conjuntos <i>fuzzy</i> agrupados aos pares em qualquer ordem"

O operador de mínimo "*min*" está associado ao conectivo lógico *E*, que em inglês é *AND*. Já o operador de máximo "*max*" está associado ao conectivo lógico *OU*, que em inglês é *OR*. Neste trabalho serão utilizados apenas estes operadores.

Do exposto pode-se perceber que as formas como os conjuntos *fuzzy* são combinados, definem os limites e a própria mecânica de aplicação da lógica difusa (rever o Exemplo 5.6, no Capítulo 5). As concepções apresentadas são devidas a Lotfi Zadeh, no entanto, cabe mencionar a existência de uma larga gama de outros

operadores. Estes outros operadores são chamados de *operadores compensatórios*, devido ao fato de que atuam na compensação de certos efeitos extremos indesejados que podem ocorrer com os operadores *AND* ou *OR*.

6.2.1.3 Outros Operadores

Assim, muitas outras normas-t e normas-s têm sido sugeridas na literatura. Apenas para ilustrar melhor, estes operadores definidos pertencem a dois tipos genéricos de classes, a saber:

- a) Operadores baseados em transformações aritméticas simples: também chamados de operadores *não-compensatórios*, porque fundamentalmente estão também determinados por *mínimos* e *máximos*. São exemplos os operadores *Média*, *Produto Algébrico*, *Produto de Einstein*, *Produto de Hamacher*, *Produto Drástico (ou Intersecção Drástica)* e *Diferença Limitada (ou Diferença Restrita)*, para a *Intersecção*; *Média Ponderada*, *Soma de Einstein*, *Soma de Hamacher*, *Soma Algébrica (ou Produto Probabilístico, ou Soma Probabilística)* e *Soma Limitada (ou Soma Restrita)*, para a *União*.
- b) Operadores baseados em transformações complexas de funções: estes operadores possuem melhor desempenho do que o processo dicotômico *mínimo / máximo*, no sentido de que estes últimos costumam apresentar um comportamento errático quando os dados recaem próximos dos extremos do suporte do conjunto *fuzzy*⁸ (COX, op. cit.), daí também serem chamados de *compensatórios*. Alguns exemplos são o *Operador de Yager* e o de *Sugeno*.

6.2.2 Relações nebulosas

Uma vez conhecidas as formas de promover combinações entre conjuntos difusos, pode-se estabelecer regras que servirão de base para o funcionamento destas combinações. Em outros termos, o que se deseja obter é um sistema através do qual se possa entrar com dados de diferentes universos de discurso (conforme regras

⁸ Suporte de um conjunto "A" é o conjunto *crisp* que contém todos os elementos de "A" com grau de pertinência diferente de zero.

estabelecidas), processar cada entrada de dados através de *agregação* e obter *uma saída* que seja representativa da *combinação* destas agregações (Figura 44).

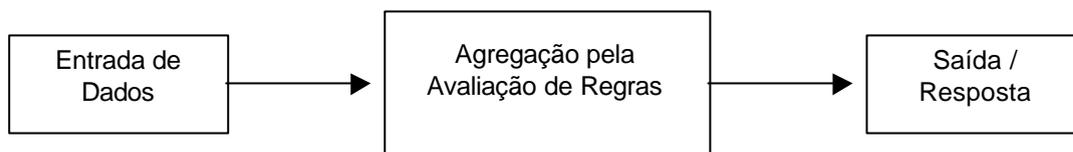


Figura 44 – Fluxo básico de um sistema difuso

6.2.2.1 As partes de um sistema inferencial baseado em regras

De uma forma geral pode haver múltiplas entradas e respectivas saídas, formando um sistema inferencial baseado em regras que pode ser escrito conforme o quadro da Figura 45 (adaptado de Shaw & Simões, op. cit.).

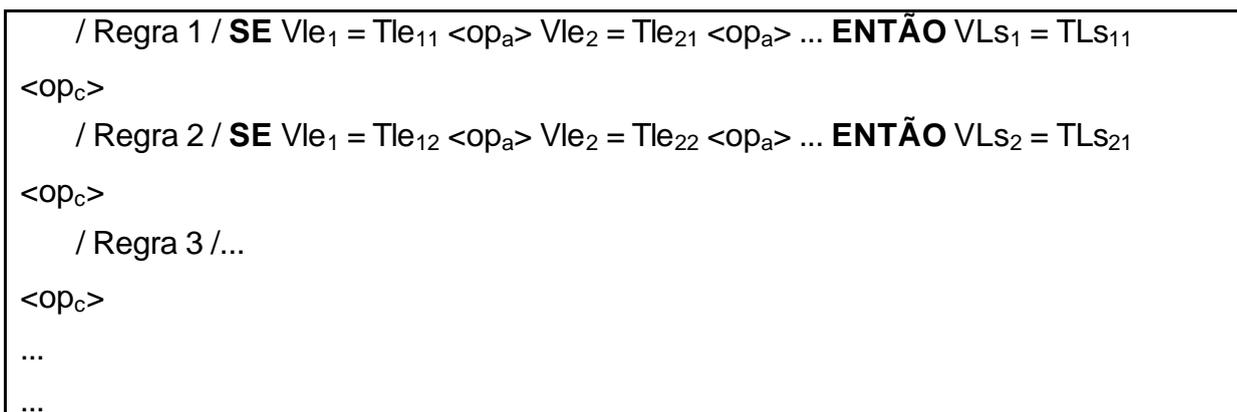


Figura 45 – Sistema inferencial baseado em regras

Analisando o quadro da Figura 45, vem:

- VLe_i , VLs_i são respectivamente as *Variáveis Lingüísticas* de entrada e saída
- TLe_{ij} , TLs_{ij} são os *Termos Lingüísticos* das variáveis lingüísticas
Lembrando que as variáveis lingüísticas são conjuntos *fuzzy* e os termos lingüísticos são subconjuntos *fuzzy*. A este respeito pode ser consultado o Capítulo 5, seção 5.4.4 .
- $<op_a>$ e $<op_c>$ são respectivamente os operadores de agregação e combinação

Os operadores funcionam como *conectivos* que combinam os conjuntos *fuzzy*. Quando combinam os conjuntos *fuzzy* "dentro" de uma regra

(conjuntos de entrada), a operação é chamada de *agregação*, na qual será utilizado o operador *AND* (conforme visto anteriormente). Por outro lado, quando combinam conjuntos *fuzzy* resultantes da aplicação de uma regra (conjuntos de saída), a operação é chamada de *combinação*, na qual será utilizado operador *OR* (conforme visto anteriormente).

d) *Antecedentes e Conseqüentes*

As variáveis lingüísticas de entrada que são os argumentos condicionais do formulador *SE*, constituem os *antecedentes*. Já as variáveis lingüísticas de saída do formulador *ENTÃO*, constituem os *conseqüentes*.

Assim, o bloco de regras serve a um sistema inferencial pelo qual se consegue operar as implicações entre antecedentes (ou seja, a agregação através do operador *AND* "dentro" de cada regra), obtendo-se os conseqüentes resultantes. Após a aplicação das regras cabíveis, promove-se então a combinação destes conseqüentes resultantes através do operador *OR* (portanto agora "entre" as regras), chegando-se ao *vetor de possibilidades* final para uma inferência específica.

6.2.2.2 A abordagem matricial

As inferências obtidas pela aplicação das regras resultam das *relações* entre os conjuntos *fuzzy* eventualmente envolvidos. Segundo Klir & Folger (op. cit.), quanto aos conjuntos *crisp*, uma relação representa a presença ou ausência de associação, interação ou interconexão entre os elementos de dois ou mais conjuntos *crisp*. Este conceito pode ser generalizado para o caso difuso, onde esta presença ou ausência pode ser objeto de *gradação* (figurativamente, é como se estes graus se referissem a níveis de "força" da relação entre os elementos dos conjuntos envolvidos).

Ainda segundo aqueles autores, em uma relação difusa estes graus costumam ser representados por *graus de pertinência*, analogamente aos graus de pertinência de elementos em um conjunto nebuloso. Comparativamente, assim como um conjunto *crisp* é visto como um caso particular de conjuntos *fuzzy*, a relação *crisp* é vista como um caso particular das relações *fuzzy*.

De forma geral, uma relação entre "*n*" conjuntos é um *subconjunto* do *produto cartesiano* destes conjuntos (isto é comumente chamado de *relação n-ária* ou *n-*

dimensional). A importância desta situação reside no fato de que, já que as relações também são conjuntos (no caso, subconjuntos), então todos os conceitos relacionados a conjuntos se aplicam, como é o caso da *união* e da *intersecção*. De forma particular, uma relação entre *dois* conjuntos difusos é chamada de *binária*; entre *três*, *ternária*; entre *quatro*, *quaternária* etc.

Mais ainda, a relação entre conjuntos propiciada pelo produto cartesiano faz com que os graus de pertinência dos elementos sejam agrupados na forma de *tuplas*, as quais, portanto, irão conter informação sobre a maneira como os elementos estão relacionados ou associados. Como estas tuplas podem ser ajuntadas e ordenadas na forma de matrizes de relacionamento, este procedimento agiliza em muito o processamento computacional. Além disto, a representação matricial dos graus de pertinência que constituem as tuplas, facilita a visualização e compactação do fenômeno operado.

Então, a relação de uma série de diferentes conjuntos é regida por uma determinada função que mapeia, ponto a ponto, através das normas e co-normas triangulares (ver também Capítulo 5, seção 5.4.2), as tuplas de graus de pertinência dos elementos, tuplas estas formadas a partir dos diferentes conjuntos operados. Indo além, a função de mapeamento da relação gerará as tuplas obedecendo às *regras* estabelecidas.

6.2.3 Composição de relações difusas

Como se vê, as relações entre conjuntos difusos provêm dos produtos cartesianos entre estes conjuntos. Vários produtos cartesianos podem ser aplicados em cadeia, sendo que cada *composição* cartesiana resulta numa nova relação. Assim, vários produtos cartesianos podem ser combinados entre si, o que pode ser feito de várias maneiras.

A *composição* possui um papel importante nos procedimentos de inferência usados nas descrições lingüísticas de sistemas baseados em regras. Como as regras são entabuladas por composições do tipo "SE...ENTÃO" (ver seção 6.2.3.1), um conjunto de regras assim descritas é matematicamente equivalente às relações difusas, fazendo com que a estrutura lógica da inferência seja matematicamente equivalente à da *composição*.

De forma ampla, o *espaço de implicação* gerado pelas regras de inferência gerais de composição, deriva da *agregação* e *correlação* dos espaços difusos produzidos pela interação das declarações das diversas regras envolvidas. Além disto, todas as proposições são ativadas "em paralelo", criando um *espaço de saída* que acaba por sintetizar toda a informação contida nas proposições relacionadas. (Cox, op. cit.)

Apesar de existir uma boa variedade de métodos de inferência, dois *tipos* principais são considerados mais freqüentemente: o tipo *min-max* e o tipo *aditivo*. A diferença entre os dois reside na forma como a *região de saída* é conformada, pois enquanto o tipo *min-max* *trunca* o valor *conseqüente* ao nível do valor mais alto da saída difusa, o método *aditivo* permite que todas as regras contribuam na solução final (neste caso, a soma dos graus de pertinência pode resultar maior que "1", devendo-se então promover a normalização do resultado).

Neste trabalho será usado o tipo *min-max*. Para exemplificar, será apresentada a notação para o caso de relações binárias compostas, pois na prática costumam ser os casos mais freqüentes. Além disto, mesmo que as notações se refiram a relações *crisp*, todas elas são analogamente aplicáveis ao caso *difuso*.

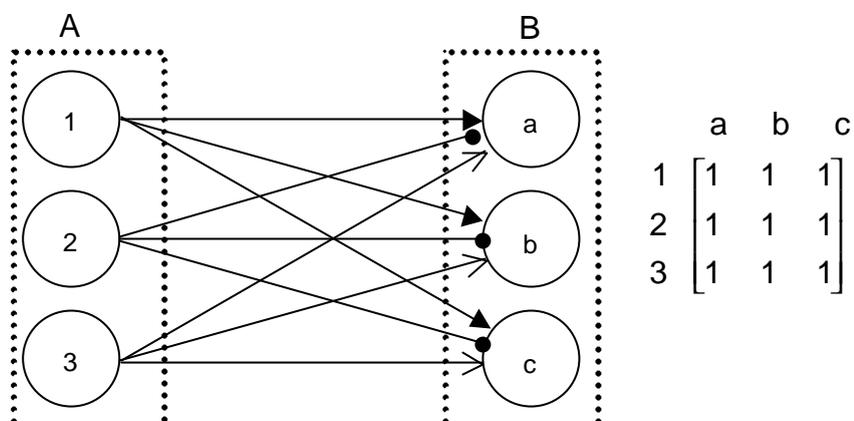
- a) Caso Crisp: primeiramente, a notação para uma relação *irrestrita* entre dois conjuntos *crisp* "A" e "B" pode ser a do *produto cartesiano*:

$$A \times B = \{(x, y) / x \in A, y \in B\} \Rightarrow \text{Produto Cartesiano}$$

Observação: *irrestrita* no sentido funcional de que há mínimo(s) local(is) $f(x') \leq f(x)$ para todo o "x" próximo de "x'".

Ou seja, pelo produto cartesiano existe alguma *propriedade específica* entre os elementos "x" de "A" e "y" de "B", a qual se pode *descrever* utilizando os pares ordenados "(x, y)", de tal forma que o conjunto destes pares ordenados se constitui exatamente na relação entre os conjuntos "A" e "B".

Supondo que os conjuntos "A" e "B" possuam dimensão de tamanho três, as notações sagital e matricial para o caso seriam:



O produto cartesiano também pode ser apresentado através de um gráfico cartesiano, ou mesmo através do conjunto de pares ordenados.

Como pares ordenados:

$$A \times B = \{(1,a), (1,b), (1,c), (2,a), (2,b), (2,c), (3,a), (3,b), (3,c)\}$$

Através de um gráfico cartesiano:

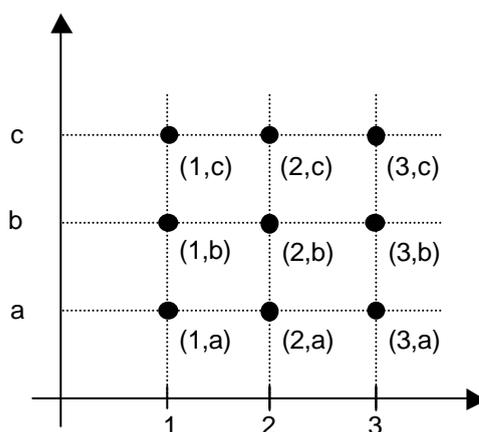


Figura 46 - Representação gráfica do produto cartesiano

O que se vê na forma gráfica é uma *partição clássica (crisp)* do espaço de entrada da função de mapeamento, que em síntese é uma coleção de subespaços disjuntos cuja união resulta no espaço inteiro ou total. Para o caso *fuzzy* há uma generalização deste caso *clássico*, de tal forma que a

transição de um subespaço para o seu subespaço vizinho se dá de maneira mais suave.

- b) Caso Fuzzy: Agora, o produto cartesiano entre conjuntos *fuzzy* é apresentado pelos graus de pertinências das n-tuplas envolvidas na agregação dos vários conjuntos envolvidos no produto cartesiano em questão. Então, uma dada relação *fuzzy* qualquer, também se constitui num mapeamento entre conjuntos no espaço cartesiano, mas dentro do intervalo [0, 1].

Para uma relação qualquer entre dois conjuntos *fuzzy* "A" e "B", a notação do *produto cartesiano* pode ser a seguinte:

$$A \times B = \{((x, y), \mu_R(x, y)) / \mu_R(x, y) \geq 0, x \in A, y \in B\} \Rightarrow \text{Produto Cartesiano}$$

Figura 47 – Notação do produto cartesiano de uma relação qualquer

Na Figura 47, $\mu_R: A \times B \rightarrow [0, 1]$, ou seja, todos os valores reais entre "0" e "1" podem ser assumidos pela função de pertinência " μ_R " da relação. Quanto aos valores " μ_R " a serem considerados num produto cartesiano qualquer, eles deverão corresponder aos *mínimos* entre os graus de pertinência operados entre os conjuntos envolvidos. Em outras palavras, os graus de pertinência mínimos tomados como resultado do produto cartesiano, representam a *possibilidade* de qualquer n-tupla estar envolvida numa dada relação. De forma genérica se pode escrever:

$$\mu_{A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \min[\mu_{A_1}(x_1), \mu_{A_2}(x_2), \dots, \mu_{A_n}(x_n)]$$

Figura 48 – Grau de possibilidade numa relação

Esclarecimento: na Figura 48, para a representação dos "n" conjuntos utilizou-se "A₁", "A₂" etc, até "A_n", ao invés de "A", "B" etc, pela razão óbvia da limitação do alfabeto em 24 letras.

Na forma matricial, os valores "x" do domínio de cada conjunto submetido ao produto cartesiano não costumam ser apresentados, mas apenas seus graus de pertinência. Por outro lado, quando se deseja apresentá-los, coloca-se uma barra divisória que deixa o "grau de pertinência" à sua *esquerda* e o valor "x" do domínio à sua *direita*. Por exemplo, supor os seguintes conjuntos "A" e "B":

$$A = 0,2 / x_1 + 0,5 / x_2 + 1 / x_3$$

$$B = 0,3 / x_1 + 0,9 / x_2 + 1 / x_3$$

Considere-se agora uma relação $R = A \times B$ entre estes conjuntos, de forma que $\mu_R: A \times B \rightarrow [0,1]$ relaciona os graus de pertinência entre os "x" pertencentes aos domínios de cada conjunto, da seguinte maneira:

$$A \times B = \{(0,2 \wedge 0,3), (0,2 \wedge 0,9), (0,2 \wedge 1), (0,5 \wedge 0,3), (0,5 \wedge 0,9), (0,5 \wedge 1), (1 \wedge 0,3), (1 \wedge 0,9), (1 \wedge 1)\}$$

Figura 49 – Relacionamento entre os graus de pertinência

Esclarecimento: na Figura 49, para a representação da intersecção obtida pelo conectivo "E" (AND, em inglês) utiliza-se o símbolo " \wedge ".

A matriz resultante pode ser apresentada como na Figura 50. Orientando-se pela expressão indicada na Figura 49, percebe-se que há um *confronto* entre os elementos de cada conjunto em relação ao seu grau de pertinência. Como resultado, a matriz apresentada traz o resultado de cada uma das confrontações, sendo que o grau de pertinência resultante de cada comparação será o menor – ou o *mínimo* – dentre os graus comparados entre si (segundo a regra geral mostrada na Figura 48).

$$A \times B = R = \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \begin{array}{ccc} y_1 & y_2 & y_3 \\ \left[\begin{array}{ccc} 0,2 & 0,2 & 0,2 \\ 0,3 & 0,5 & 0,5 \\ 0,3 & 0,9 & 1 \end{array} \right] \end{array}$$

Figura 50 – Matriz de resultados

O mapeamento da relação difusa a partir do espaço Cartesiano "X x Y" (aqui constituído pelos conjuntos "A" e "B"), projetado no intervalo "[0,1]", é então expresso pela função de pertinência da relação $\mu_R(x,y)$, cuja forma gráfica pode ser vista na Figura 51.

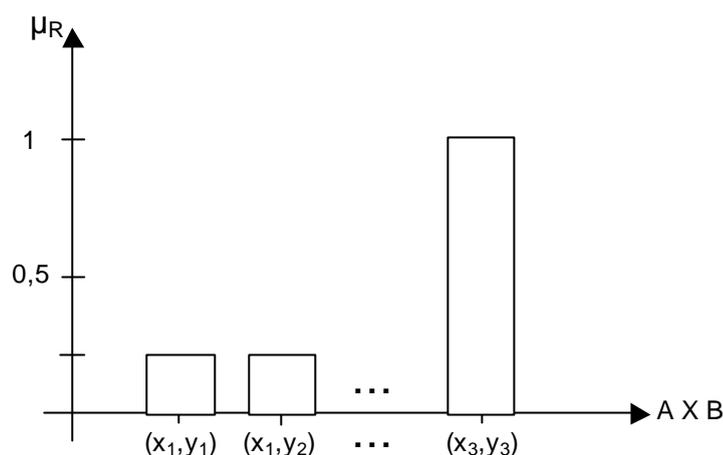


Figura 51 – Forma gráfica da função de pertinência

Dadas as ponderações precedentes, pode-se definir o comportamento de uma *composição de relações difusas*. Traduzindo através de uma exemplificação, suponha-se duas relações dadas por $R_1(A \times B)$ e $R_2(B \times C)$, as quais, como se percebe, possuem o conjunto "B" em comum. A *composição* destas duas relações poderá ser escrita conforme a expressão na Figura 52, na qual, o símbolo " \circ " denota exatamente o fato de haver uma composição entre as duas relações, de tal forma que se pode dizer que, "se 'A' implica 'B' e 'B' por sua vez implica 'C', então 'A' também implica 'C'".

$$R(A,C) = R_1(A,B) \circ R_2(B,C)$$

Figura 52 – Composição de relações

Como se viu anteriormente, a relação "R" resultante também se constitui num subconjunto de um produto cartesiano (observar que, no exemplo dado, o produto cartesiano envolve duas relações). No caso da expressão na Figura 52, "R(A,C)" é um subconjunto de "A X C". Este fato implica que, se $x \in A$, $y \in B$ e $z \in C$, ocorrerá $(x, z) \in R$ se e somente se existir pelo menos um $y \in B$, sendo que, para tanto, também $(x, y) \in R_1$ e $(y, z) \in R_2$. Estas composições binárias, quando ocorrem de maneira efetiva, satisfazem certas propriedades as quais são muito úteis no processo de inferência, entre as principais:

- $(R_1 \circ R_2) \circ R = R_1 \circ (R_2 \circ R)$
- $R_1 \circ R_2 \neq R_2 \circ R_1$

Existem várias formas de *operar* uma composição como, por exemplo, os *métodos max-min e max-produto*, entre outros. A forma de notação destes métodos pode ser apontada como no quadro da Figura 53.

$\mu_{R_1 \circ R_2}(x, z) = \max_{y \in B} \{ \min[\mu_{R_1}(x, y); \mu_{R_2}(x, z)] \} \Rightarrow \textit{max-min}$
$\mu_{R_1 \circ R_2}(x, z) = \max_{y \in B} \{ \mu_{R_1}(x, y) * \mu_{R_2}(x, z) \} \Rightarrow \textit{max-produto}$
<p>Ambos os métodos são válidos para $x \in A, y \in B$ e $z \in C$</p>

Figura 53 – Métodos *max-min* e *max-produto*

A diferença fundamental entre os dois métodos reside no fato de que o método *max-produto* envolve o tratamento matemático do produto dos graus de pertinência das proposições *antecedentes*, enquanto o método *max-min* apenas toma o *mínimo* destes graus.

Neste trabalho será utilizado o método *max-min* de composição, cuja seqüência mínima de ações é a que segue:

- primeiramente atribui-se o *mínimo* dos graus de pertinência ao resultado da aplicação de cada regra, ou seja, o processo de agregação dos antecedentes já descrito anteriormente neste capítulo;
- em seguida atribui-se o *máximo* dos graus de pertinência ao resultado da combinação de várias regras, ou seja, o processo de combinação dos conseqüentes como visto anteriormente;
- em paralelo com as ações anteriores, atribui-se valor de pertinência zero quando nenhum elemento do conjunto de partida estiver relacionado a algum elemento do conjunto de chegada.

A fim de melhor clarear as considerações expostas, será utilizado o Exemplo 6.1.

Exemplo 6.1 – Supor as seguintes considerações:

- Está-se desejando tomar a *Temperatura de cura do Produto "A"* num processo industrial de alta pressão e pretendendo *relacionar* esta temperatura com o *Tempo* de cura a uma determinada condição de *Pressão*.
- Os conjuntos difusos envolvidos são os seguintes:

Temperatura = {55, 110, 120}, pela ordem, *baixa, média e alta*

✓ medida em graus Celsius

✓ símbolos: C; Cb, Cm, Ca

Pressão = {10, 15, 30}, pela ordem, *fraca, mediana e forte*

✓ medida em Pascal, lembrando que 1 Pa = 1 N/m²

✓ símbolos: P; Pfr, Pm, Pft

Tempo = {30, 60, 90}, pela ordem, *pouco, médio e muito*

✓ medido em minutos

✓ símbolos: T; Tp, Tmd, Tmt

- As relações conhecidas são:

$$R_1 = C \times P \text{ e } R_2 = P \times T$$

Estas relações possuem as seguintes conformações matriciais, nas quais podem ser acessados os graus de pertinência resultantes da intersecção entre os termos lingüísticos das variáveis lingüísticas envolvidas em cada relação.

Para uma idéia de como se processaram as relações R_1 e R_2 , o leitor pode consultar os cálculos apresentados anteriormente nas Figuras 49 e 50.

$$\begin{array}{l}
 CXP=R_1= \\
 \begin{array}{c}
 Cb \\
 Cm \\
 Ca
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 Pfr \\
 Pm \\
 Pmt
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 1 & 0,5 & 0,2 \\
 0,3 & 1 & 0,5 \\
 0,3 & 0,5 & 1
 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 PXT=R_2= \\
 \begin{array}{c}
 Pfr \\
 Pm \\
 Pmt
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 Tp \\
 Tmd \\
 Tmt
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 0,2 & 0,5 & 1 \\
 0,5 & 1 & 0,3 \\
 1 & 0,5 & 0,3
 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

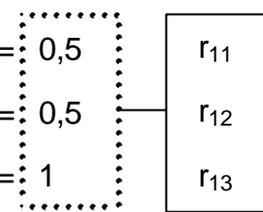
r_{11}, r_{12}, r_{13}
em
C X T

Agora, através da composição max-min pode-se obter a relação entre *Temperatura* e *Tempo de cura*, o que significa estruturar a seguinte relação: $R_3 = C \times T$. O resultado possui a seguinte conformação matricial:

$$\begin{array}{l}
 CXT=R_3= \\
 \begin{array}{c}
 Tp \\
 Tmd \\
 Tmt
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 Cb \\
 Cm \\
 Ca
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 0,5 & 0,5 & 1 \\
 0,5 & 1 & 0,3 \\
 1 & 0,5 & 0,3
 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

r_{11}, r_{12}, r_{13}

A fim de possibilitar melhor compreensão sobre o processo de obtenção da matriz referente à relação R_8 , serão apresentadas as operações internas que levaram à primeira linha da matriz $C \times T$, " r_{11} ", " r_{12} " e " r_{13} ":

$$\begin{array}{l}
 r_{11} = \max [\min(1;0,2), \min(0,5;0,5), \min(0,2; 1)] = 0,5 \\
 r_{12} = \max [\min(1;0,5), \min(0,5; 1), \min(0,2;0,5)] = 0,5 \\
 r_{13} = \max [\min(1; 1), \min(0,5;0,3), \min(0,2;0,2)] = 1 \\
 \text{etc...}
 \end{array}$$


Continuando com o exemplo, supor agora que se deseje saber qual a *distribuição de possibilidade* para uma *Temperatura baixa*, considerando um *Tempo de cura médio "em torno de 60 minutos"*, dado pela seguinte distribuição de possibilidade: $T_{md\text{em torno de } 60'} = \{0/30'; 0,8/60'; 0,7/90'\}$.

Solução:

$$\Pi_{\text{temperatura baixa } C_b (55^\circ) = (0 \wedge 0,5) \vee (0,8 \wedge 0,5) \vee (0,7 \wedge 1) = 0,7$$

Para as outras temperaturas se obtém:

$$\Pi_{\text{temperatura média } C_m (110^\circ) = (0 \wedge 0,5) \vee (0,8 \wedge 1) \vee (0,7 \wedge 0,5) = 0,8$$

$$\Pi_{\text{temperatura alta } C_a (120^\circ) = (0 \wedge 1) \vee (0,8 \wedge 0,3) \vee (0,7 \wedge 0,3) = 0,3$$

Resultando finalmente:

$$\Pi_{\text{temperatura}} = \{0,7; 0,8; 0,3\}$$

6.2.4 Raciocínio *Fuzzy*

O *Raciocínio Fuzzy*, também chamado de *Raciocínio Aproximado*, ou ainda *Raciocínio por Aproximação* (ver Capítulo 5, seção 5.2), é um procedimento de inferência que permite obter conclusões a partir de um conjunto de regras difusas do tipo "SE – ENTÃO", as quais por sua vez se baseiam em fatos conhecidos.

Portanto, o raciocínio aproximado dá-se através da indução de conclusões a partir de declarações sobre fatos conhecidos, cujas implicações são expressões da relação entre os conjuntos difusos envolvidos no raciocínio.

De uma maneira formal, pode-se apresentar esta conceituação através da seguinte declaração:

Sejam A , A' e B conjuntos difusos pertencentes aos espaços X , X e Y , respectivamente. Assumindo que a implicação difusa $A \Rightarrow B$ se constitui na expressão de uma relação difusa R no produto cartesiano $X \times Y$, então o conjunto difuso B , induzido pela asserção " x é A' ", mais a regra difusa " $\text{se } x \text{ é } A \text{ então } y \text{ é } B$ ", é definido por:

$$\mu_{B'}(y) = \max_{x \in A} \{ \min[\mu_{A'}(x); \mu_R(x, y)] \}$$

Figura 54 – Raciocínio Aproximado

A formulação apresentada na Figura 54 possui variantes, quais sejam:

a) Uma única regra e um único antecedente:

Fato (antecedente / premissa 1): x é A'

Regra (premissa 2): se x é A então y é B

Conclusão: y é B' , com

$$\mu_{B'}(y) = \max_{x \in A} \{ \min[(\mu_{A'}(x); \mu_A(x)); \mu_B(y)] \}$$

b) Uma única regra com múltiplos antecedentes:

Fato (antecedente / premissa 1): x é A' e y é B'

Regra (premissa 2): se x é A e y é B então z é C

Conclusão: z é C' , com

$$\mu_{C'}(z) = \max_{\substack{x \in A \\ y \in B}} \{ \min[(\mu_{A'}(x); \mu_{B'}(y)); (\mu_A(x); \mu_B(y)); \mu_C(z)] \}$$

c) Múltiplas regras com múltiplos antecedentes:

Fato (antecedente / premissa 1): x é A' e y é B'

Regra 1 (premissa 2): se x é A_1 e y é B_1 então z é C_1

Regra 2 (premissa 3): se x é A_2 e y é B_2 então z é C_2

Conclusão: z é C'

Neste caso, a saída final se constitui da composição das várias saídas de cada regra, cujos graus de pertinência provêm da agregação dos respectivos antecedentes, ou seja, a combinação final dos conseqüentes é formada pela união das pertinências de saída.

Assim, cada regra " R_i " possui um conseqüente " C_i " resultante das operações de agregação "*" dos respectivos antecedentes:

$$R_1 = A_1 * B_1 \Rightarrow C_1$$

$$R_2 = A_2 * B_2 \Rightarrow C_2$$

Agora, aplicando sobre os conseqüentes o operador de composição max-min "o", que possui a propriedade distributiva sobre o operador de união, obtém-se:

$$C' = (A' * B') \circ (R_1 \cup R_2) \therefore$$

$$C' = [(A' * B') \circ R_1] \cup [(A' * B') \circ R_2] \therefore$$

$$C' = C'_1 \cup C'_2$$

Em que:

C'_1 = conseqüente obtido pela aplicação de R_1

C'_2 = conseqüente obtido pela aplicação de R_2

C'_3 = conseqüente final obtido pela composição de R_1 com R_2

Importante salientar que as entradas podem se constituir tanto de conjuntos, como de valores *crisp*.

Observação: este será o modelo adotado no presente trabalho.

Exemplo 6.2 – Supor as seguintes considerações:

- Está-se desejando tomar a *Temperatura de cura do Produto "B"* num processo industrial de alta pressão e pretendendo *relacionar* esta temperatura com o *Tempo* de cura a uma determinada condição de *Pressão*.
- Os conjuntos difusos envolvidos são os seguintes:

Temperatura = {*baixa, média, alta*}

- ✓ medida em graus Celsius, numa escala de 0 a 100
- ✓ símbolos: C; C_b, C_m, C_a

Pressão = {*fraca, mediana, forte*}

- ✓ medida em Pascal, numa escala de 0 a 100
- ✓ símbolos: P; P_{fr}, P_m, P_{ft}

Tempo = {*curto, médio e longo*}

- ✓ medido em minutos, numa escala de 0 a 100
- ✓ símbolos: T; T_c, T_m, T_l

Assim, o problema proposto se apresenta com duas Variáveis Lingüísticas de *entrada*, Temperatura e Pressão, e uma Variável Lingüística de *saída*, Tempo. Por sua vez, cada uma possui seus próprios Termos Lingüísticos, também chamados na literatura de Variáveis Difusas. Para os termos das três variáveis lingüísticas, a forma da função de pertinência escolhida foi a Triangular. Em resumo, se tem:

Variável Lingüística	Termo 1	Termo 2	Termo 3
Temperatura	baixa	média	alta
Pressão	fraca	mediana	forte
Tempo	curto	médio	longo

São os seguintes os dados de entrada:

- uma Temperatura de 55° e
- uma Pressão de 90 Pa

Deseja-se saber qual o Tempo a ser adotado, uma vez conhecidas as entradas mencionadas acima.

A Figura 55 a seguir, apresenta os gráficos das variáveis de entrada e de saída envolvidas.

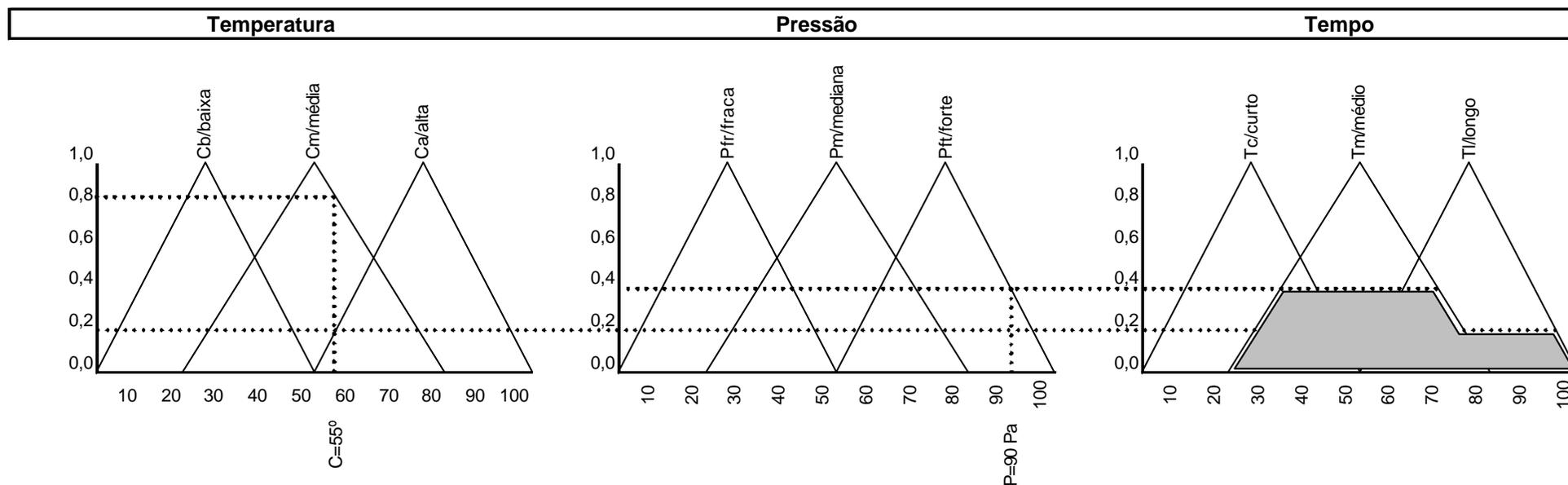


Figura 55 – Gráfico para o Exemplo 6.2

Solução

Como se viu, o raciocínio aproximado é elaborado a partir da aplicação de *regras de inferência*. Estas regras de inferência costumam compor a chamada *base de regras difusas*. Através das regras estabelecidas *a priori*, se pode computar a inferência e determinar quais conjuntos estão envolvidos no raciocínio e em que grau se dá este envolvimento. Subseqüentemente, através da aplicação dos operadores se promove a agregação dos antecedentes das regras. Em seguida, uma vez esgotadas todas as regras "disparadas" no processo, conclui-se com a composição dos conseqüentes obtidos, chegando-se a uma constituição final, resultado da união das saídas geradas.

Será feita aqui uma análise passo a passo da Figura 55.

- Primeiramente, percebe-se que a entrada de uma Temperatura de 55° tanto pode ser considerada como uma temperatura média como uma temperatura alta. Isto porque no primeiro gráfico, gráfico da Temperatura, partindo-se do Eixo X (das Temperaturas) com uma linha vertical na marca de 55°, esta linha tanto corta o lado direito do conjunto *Temperatura Média*, como também corta o lado esquerdo do conjunto *Temperatura Alta*. Ora, a partir destes pontos de encontro, tirando-se as correspondentes linhas horizontais até o Eixo Y (dos Graus de Pertinência), consegue-se obter os correspondentes graus, a saber,

$$\checkmark \quad C=55^\circ \Rightarrow \mu(C_m)=0,83$$

$$\checkmark \quad C=55^\circ \Rightarrow \mu(C_a)=0,20$$

Estes valores demonstram bem a forma difusa de raciocinar de maneira aproximada, pois uma Temperatura de 55° pode tanto ser considerada uma temperatura *média* como uma temperatura *alta*! Além disto, outra grande vantagem do tratamento *fuzzy* é a da possibilidade de se tratar quantidades numerais específicas com termos lingüísticos qualitativos.

Ainda para ilustrar, apresenta-se o cálculo dos graus de pertinência. O cálculo é realizado a partir do enquadramento do valor $C=55^\circ$ nas funções com as quais se relaciona. (Para maiores detalhes ver Capítulo 5, seção 5.4.3, letra "a").

$$\mu_c(55) = \begin{cases} \mu_{Cm} = \frac{55 - 50}{75 - 50} = 0,20 \\ \mu_{Ca} = \frac{80 - 55}{80 - 50} = 0,83 \end{cases}$$

Agora se deve calcular o grau de pertinência, ou os graus de pertinência, para a Pressão de entrada de 90 Pa. No gráfico da Pressão, partindo-se do Eixo X (das Pressões) com uma linha vertical na marca de 90 Pa, esta linha corta somente o lado direito do conjunto *Pressão Forte*. Ora, a partir deste ponto de encontro, tirando-se a correspondente linha horizontal até o Eixo Y (dos Graus de Pertinência), consegue-se obter o correspondente grau, a saber,

$$\checkmark P=90 \text{ Pa} \Rightarrow \mu(\text{Pft})=0,40$$

Ainda para ilustrar, apresenta-se o cálculo deste grau de pertinência. O cálculo é realizado a partir do enquadramento do valor Pft=90 Pa na função com a qual se relaciona.

$$\mu_p(90) = \begin{cases} \mu_{Pft} = \frac{100 - 90}{100 - 75} = 0,40 \end{cases}$$

- Neste momento, já se está apto a verificar quais regras da base de regras irão "disparar". A seguir estão as duas regras que são acionadas pelos resultados das entradas de dados obtidos acima. Observação: como Temperatura e Pressão possuem 3 Termos cada, o total de regras para o caso deverá ser de 9 (ver Capítulo 5, seção 5.4.3.1).

Regra 1

SE Cm=0,83 E Pft=0,40 ENTÃO Tm=0,40

Regra 2

SE Ca=0,20 E Pft=0,40 ENTÃO TI=0,20

O resultado da combinação dos conseqüentes está apresentado no gráfico do Tempo, na Figura 55.

6.2.5 "Defuzificação" e Tomada de Decisão

Uma vez realizado o ciclo completo do raciocínio aproximado, se obtém uma composição de conjuntos que fornece uma saída *fuzzy*, a qual é utilizada para *tomada de decisão*.

Não concerne ao presente trabalho qualquer discussão detalhada sobre este assunto, no entanto cabe citar que existe mais de um método clássico de decisão, como *a teoria estatística de decisão, a programação matemática (linear e não linear) e as teorias de decisão multicritério*.

Neste campo, de certa forma as aplicações da lógica difusa consistem em uma extensão, ou "fuzificação", das teorias clássicas de tomada de decisão. Assim, enquanto a tomada de decisão sob *risco* e *incerteza* costuma ser modelada pelas *teorias probabilísticas* de decisão e *teoria dos jogos*, as teorias *fuzzy* de decisão procuram lidar com a *imprecisão* e a *nebulosidade* inerentes à determinação de preferências ou objetivos *imprecisos* (no sentido de *indeterminados, vagos, difusos*) ou *subjetivos*.

Segundo Klir (1988, op. cit), uma tomada de decisão deve incluir, de maneira ampla, qualquer opção ou seleção de alternativas. Na tomada de decisão clássica geralmente se lida com um espaço de decisão de alternativas conhecidas, que constituem o conjunto de estados da natureza deste espaço decisório. Por meio de uma função de utilidade, ou função de preferência, relações possibilitam a obtenção de saídas esperadas para cada alternativa acionada, e, no final, uma determinada função objetivo ordena as saídas obtidas de acordo com o grau de preferência envolvido no processo em seu conjunto.

6.2.5.1 Tomada de decisão difusa

No processo difuso de tomada de decisão, as etapas fundamentais a serem cumpridas estão esboçadas de forma seqüencial na Figura 56 a seguir.

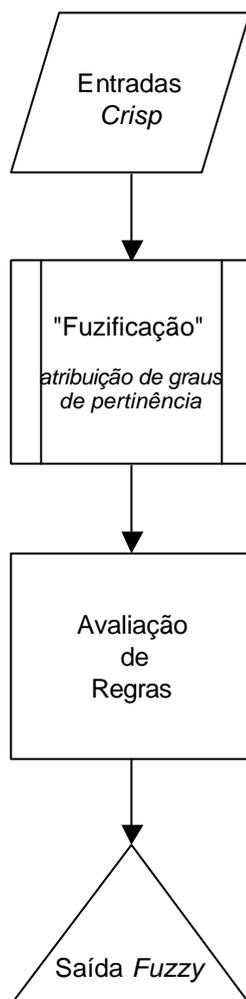


Figura 56 – Processo difuso de tomada de decisão

Este processo pode ser descrito conforme cada etapa do fluxo da Figura 56.

- Entradas Crisp: são os valores " $x \in \mathfrak{X}$ " de entrada de dados, como por exemplo, " Temperatura=55° ", " Pressão=90 Pa " etc.
- "Fuzificação": refere-se à atribuição de graus de pertinência aos valores "x" de entrada de dados, conforme a função escolhida para representar as variáveis difusas (=termos lingüísticos); assim, no Exemplo 6.2, à entrada *crisp* de " 55° " para a *temperatura*, correspondeu um grau de pertinência calculado em "0,83" se considerado o termo *temperatura média*.
- Avaliação de Regras: é a fase em que se acessa o banco de regras, estabelecidas *ex ante*, e verificam-se quais as regras que se aplicam aos conjuntos que foram sensibilizados pela entrada *crisp* em questão.
- Saída Fuzzy: após a avaliação anterior é realizada a composição das regras "disparadas" pelo processo de inferência, obtendo-se o conjunto de saída

que, na maior parte das vezes, constitui-se da união dos vários conjuntos de saída inferidos.

6.2.5.2 "Defuzificação"

No Português, os termos *Defuzificação* e seu contrário *Fuzificação* são neologismos que procuram representar as transformações difusas aplicadas às saídas *fuzzy* e às entradas *crisp*, respectivamente.

O processo de *fuzificação* foi visto ao longo do Exemplo 6.2, restando concluir este capítulo com alguns comentários a respeito do processo de *defuzificação*.

- O objetivo da defuzificação é transformar a composição gerada pelos conjuntos de saída *fuzzy* (ou seja, as variáveis lingüísticas, ou termos lingüísticos, ou *termos de saída*) em números *crisp*. A idéia é a de que, em muitas situações, o tomador de decisões, ou analista, prefere trabalhar *também* com um valor específico a fazer avaliações amparando-se em valorações puramente qualitativas. Portanto, a defuzificação traduz em um único valor discreto a *distribuição de possibilidades* obtida. Trata-se de uma transformação inversa àquela realizada no início pela fuzificação.
- A defuzificação implica em perda, porque, rigorosamente, (I) se por um lado a fuzificação aproveita toda a topologia matemática aplicada desde o início do processo, ou seja, os processos matemáticos que promoveram o *relacionamento espacial* entre os valores unidimensionais que adquiriram *forma* pelo processo de fuzificação (i. é, aspectos de conectividade, contigüidade, ordem e concentração da informação), (II) por outro, a defuzificação sacrifica toda a composição das funções de saída a fim de obter um único valor representativo, o que provoca principalmente a perda propiciada pela concentração de informação.
- Existem muitos métodos para determinação do valor esperado de uma solução que vem na forma de uma região difusa. Estes métodos também são chamados de *Métodos de Decomposição* (como sinônimo para *Defuzificação*). Até o presente momento, o entendimento que se tem sobre a

defuzificação possui como base mais a heurística do que os rigores metodológicos. Significa que são mais utilizados os algoritmos fundamentados em processos que aproveitam mais o conhecimento humano para obter algum resultado satisfatório.

De forma geral, existem duas modalidades mais utilizadas na defuzificação:

a) Centro da Área (ou Centro de Gravidade, ou Centróide, ou Momentos Compostos) / C-o-A, C-o-G

Esta técnica consiste em calcular o centróide da área composta pela *figura* que representa o *termo de saída*, o qual, lembrando mais uma vez, é composto pela união de todas as contribuições das regras "disparadas" no processo de inferência. Geometricamente, o centróide é um ponto que divide a área da figura em duas partes iguais. Aritmeticamente, o centróide consiste na média dos "n" valores da região *fuzzy* de saída, ponderada pelos "n" graus de pertinência de cada valor, sendo este valor correspondente então à abscissa do centro de gravidade da área formada sob a curva que define a figura.

A fórmula geral para o caso contínuo é:

$$\text{CoG} = \frac{\int_{x_0}^{x_n} x \cdot f(x) dx}{\int_{x_0}^{x_n} f(x) dx}$$

Com o propósito de simplificar o cálculo, costuma-se utilizar a fórmula na sua configuração amostrada:

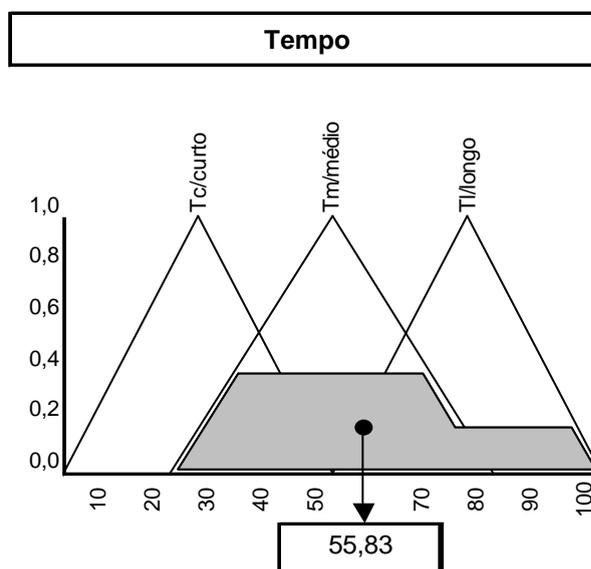
$$\text{CoG} = \frac{\sum_{i=0}^n d_i \cdot \mu_A(d_i)}{\sum_{i=0}^n \mu_A(d_i)}$$

Em que:

$d_i =$	os valores "x" do domínio da função modificada, ou seja, a posição discreta ⁹ do centróide em cada ponto em particular
$\mu A(d_i) =$	os valores de pertinência de cada "x" do domínio, ou seja, é a parte calculada da área da função de pertinência, modificada ("truncada") pela inferência no ponto específico

Analisando a fórmula dada, percebe-se que o numerador se constitui no *momento da curva f(x)*.

A figura do C-o-G para o Exemplo 6.2 é a seguinte:



O cálculo do C-o-G é realizado da seguinte maneira:

$$\text{CoG} = \frac{0 \times 20 + 0,40 \times 30 + 0,40 \times 40 + 0,40 \times 50 + 0,40 \times 60 + 0,40 \times 70 + 0,20 \times 80 + 0,20 \times 90 + 0 \times 100}{0 + 0,40 + 0,40 + 0,40 + 0,40 + 0,40 + 0,20 + 0,20 + 0}$$

$$\text{CoG} = 55,83 \text{ minutos}$$

Esta técnica do *centróide* é largamente utilizada porque os valores de saída se modificam de forma suave e são relativamente fáceis de calcular. Por outro lado, as desvantagens são que não possuem significado físico quando as funções de saída não possuem sobreposição e se uma mesma regra possui a mesma saída *fuzzy*, ocorre então uma sobreposição de áreas que não é computada.

⁹ Discreto: que não está em continuidade com a vizinhança; separado, distinto (Matemático)

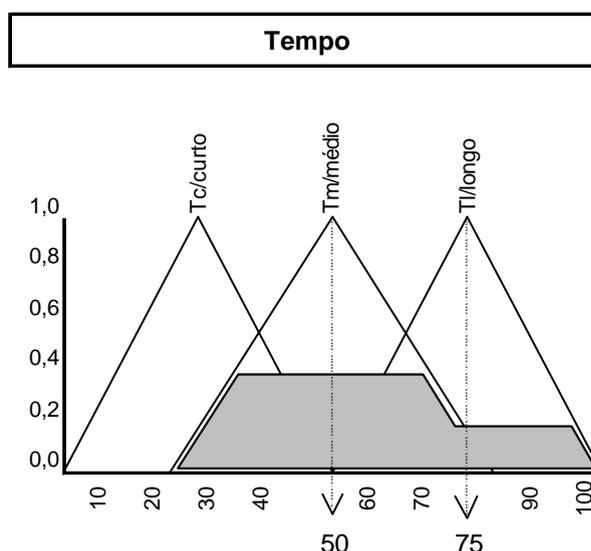
b) Máximos Compostos

Geralmente esta técnica divide-se em dois métodos:

1) Centro do Máximo / C-o-M

Esta técnica pode ser utilizada quando existem regiões difusas com múltiplos patamares. Todos os patamares existentes são identificados, em seguida é calculado o *ponto intermediário entre os centros destes patamares*. Em suma, o resultado obtido é a média ponderada dos máximos de cada patamar, cujos pesos são os graus de pertinência envolvidos.

No caso do Exemplo 6.2, a figura é a seguinte:



O cálculo do C-o-M é realizado da seguinte maneira:

$$\text{CoM} = \frac{(0,40 \cdot 1 \cdot 50) + (0,20 \cdot 1 \cdot 75)}{0,40 + 0,20}$$

$$\text{CoM} = 58,33 \text{ minutos}$$

A diferença fundamental entre esta técnica e a do método C-o-G, é a de que aqui não são as áreas de pertinência, mas os máximos que são utilizados.

2) Média do Máximo / M-o-M

Por esta técnica é calculado o *valor máximo médio* da região fuzzy de saída. Se este valor máximo é apenas um ponto, então é ele o valor adotado; mas se houver mais de um valor, ou seja, quando ocorre um

patamar, então a média dos valores é calculada e, neste caso, corresponde à média dos valores do próprio suporte.

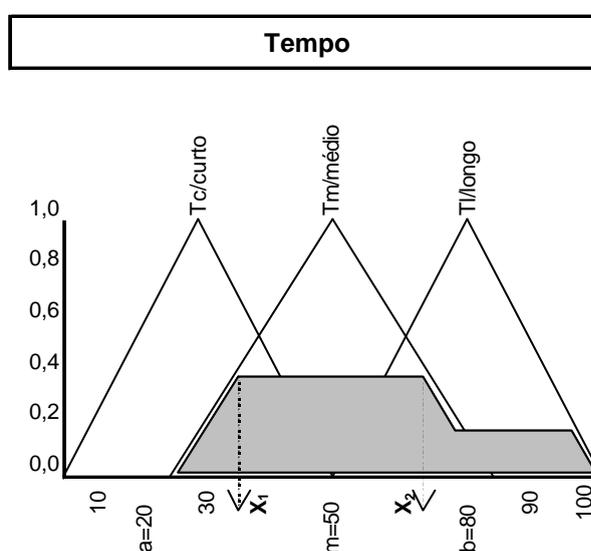
Para o cálculo no caso de dois valores, usa-se:

$$x_1 = a + (m - a) \cdot \mu$$

$$x_2 = b - (b - m) \cdot \mu$$

$$\text{MoM} = \frac{X_1 + X_2}{2}$$

No caso do Exemplo 6.2, a figura é a seguinte:



O cálculo do M-o-M é realizado da seguinte maneira:

$$\text{MoM} = \frac{[20 + (50 - 20) \cdot 0,40] + [80 - (80 - 50) \cdot 0,40]}{2}$$

$$\underline{\text{MoM}=50,00 \text{ minutos}}$$

Não se pode dizer que algum destes métodos é absolutamente o melhor. Conforme os efeitos previstos se escolhe o método a utilizar. Por exemplo, o método C-o-G apresenta resposta mais suave às mudanças nas entradas, mas o M-o-M possui melhor desempenho quando a região de saída apresenta muitos picos ou patamares.

6.3 RESUMO E CONCLUSÕES

A literatura em língua inglesa comumente conhece o tema como *Fuzzy Logic* (Lógica Difusa), conforme visto no capítulo anterior. Por outro lado, no Brasil e em países de língua hispânica, utiliza-se também o termo *Matemática Borrosa* (*Matemática Nebulosa*) para tratar do assunto.

Não há uma distinção específica entre os dois termos quanto ao objeto em si, porém, neste trabalho, convencionou-se atribuir ao termo Matemática Nebulosa os aspectos que dizem respeito às operações matemáticas que são utilizadas quando da aplicação do processo de raciocínio difuso. Então, através dos exemplos anteriores, pretendeu-se dar uma mostra de como funcionam estas operações difusas. Perceba o leitor que estes exemplos se referem a aplicações industriais, isto porque o emprego mais intenso da lógica difusa tem recaído sobre atividades desta natureza. Dentre as principais razões, tal fato decorre de que a lógica difusa permite acrescentar aos processos decisórios o juízo de valor semântico atribuído pelo ser humano na condição de observador do fenômeno avaliado.

De modo geral, a valoração semântica é alcançada através de pesquisa e tabulação de dados junto a expertos ou consultando convenções ou fórmulas preestabelecidas. Assim, obtidas as valorações semânticas pode-se iniciar o trabalho matemático que operará estes valores sob determinadas circunstâncias, disparando regras que, posteriormente agregadas, irão oferecer uma saída na forma do resultado esperado.

CAPÍTULO VII

A AVALIAÇÃO FORMATIVA DA APRENDIZAGEM ATRAVÉS DA MATEMÁTICA NEBULOSA

7.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo será aplicado o raciocínio aproximado à avaliação da aprendizagem. Para tanto serão utilizados os preceitos da *avaliação formativa* (ver Capítulo 2, seção 2.2.2 e Capítulo 4, seção 4.2) e da *matemática nebulosa*, esta baseada na *lógica difusa* (ver Capítulos 5 e 6).

Importante ressaltar que o objetivo aqui é o de apresentar uma proposta metodológica de avaliação não convencional. Não se pretende esgotar o assunto, pelo contrário, deseja-se dar margem a que maiores e melhores trabalhos possam se desenvolver a partir deste ponto inicial.

Nas seções seguintes serão apresentados as técnicas e recursos para promoção da avaliação da aprendizagem. As situações serão todas de cunho hipotético, porém corresponderão à realidade encontrada por alunos e professores no dia-a-dia escolar. Haverá maior enfoque nos rituais e procedimentos comumente adotados nas universidades, portanto, a base deste estudo está no ensino superior. Não obstante, no que concerne à avaliação da aprendizagem, são notórias as poucas e pequenas diferenças entre as situações encontradas no ensino superior e as existentes nos outros níveis, até mesmo no ensino não oficial.

7.2 AVALIAÇÃO: APROXIMAÇÃO E INCERTEZA

Nos primeiros capítulos da presente obra, viu-se como é complexa a tarefa de avaliar a aprendizagem, tanto pela dimensão humana envolvida, quanto pelo aspecto técnico de que se reveste uma avaliação desta natureza.

Pelo lado humano, professores e alunos possuem uma dificuldade inata em encarar a questão de forma objetiva, uma vez que há um juízo pessoal envolvido. Neste sentido, determinar a qualificação de alguém através de um número, deixa ambas as

partes aprisionadas em um momento no tempo, pois há uma desconexão com o passado e uma ausência de rumo para o futuro.

Pelo aspecto técnico, tanto alunos como professores não conseguem encontrar justificativa plausível para a atribuição de uma nota numérica. Até mesmo a atribuição de conceitos puros não encontrou força de sentido, visto que não se pode "misturar" conceitos de objetos diferentes entre si, nem mesmo operá-los.

Decorre daí toda uma gama de questionamentos.

Alunos:

- Será que a minha nota 5 significa que só sei a metade do que foi ensinado?
- Será que a minha nota 5 significa que só sei a metade do que foi perguntado?
- Será que a minha nota 5 significa que deverei me esforçar em dobro daqui para frente?
- Será que a minha nota 5 significa o que sei, ou também significa o que não sei?
- Será que a minha nota 5 significa que não estou qualificado? Ou que estou medianamente qualificado? Ou até estou qualificado mas careço de melhor conhecimento?
- Como argumentar sobre notas e médias com o professor?

Professores:

- Como atribuir nota a estas questões? Em quanto?
- Qual a medida do conhecimento? E das habilidades e atitudes do aluno?
- Como julgar um aluno no final do curso? Fazer uma média aritmética? Ou quem sabe uma média ponderada?
- Como "arredondar" uma nota? Ou uma "média"?
- Como argumentar sobre notas e médias com os alunos?
- Como fazer se eu sei que o aluno "A" possui média 6 e o aluno "B" também possui média 6, mas também sei que o aluno "B" é *qualitativamente* superior?

Certamente o rol de questionamentos excede a estas poucas declarações, mas o objetivo aqui é somente o de fazer um prólogo convincente sobre o fato de que, se há o firme desejo de revolucionar a educação, certamente esta mudança começa por uma nova forma de avaliar.

7.3 DIMENSÕES DA AVALIAÇÃO

Conforme visto em capítulos anteriores, a avaliação formativa corresponde a uma diferenciação e a uma individualização da formação. Por seu intermédio pretende-se que o aluno perceba o conhecimento como algo mais do que técnico ou utilitário. Além disto, sabe-se que a aquisição do conhecimento se dá no decurso do tempo, não sendo instantânea nem estanque (para maiores e melhores detalhes ver Capítulo 3, seção 3.4).

7.3.1 A avaliação na atualidade

Em capítulos anteriores foram estudados os tipos de avaliação sob suas múltiplas abordagens. Assim, entre outras classificações, foram mencionadas como principais a *Avaliação Formativa* e a *Avaliação Somativa*, tendo sido estabelecidas diferenças e propósitos de e entre ambas (ver capítulo 3). Bonniol e Vial (2001, op. cit.) não consideram estas duas técnicas auto-excludentes, pelo contrário, como ambas abrangem a avaliação como gestão e como medida, se complementam de forma satisfatória.

Em toda a literatura são encontradas as mais diversas teorizações sobre o processo de avaliar. De forma bastante ampla e incisiva, são estabelecidas as dimensões a serem avaliadas, seus subgrupos, os tratamentos psicossocial e material da avaliação etc. No entanto, em nenhum momento se consegue estabelecer uma conexão plausível entre a atribuição de um valor numérico à avaliação e a sua significância para o aluno e o professor, seja ela psíquica ou material. É evidente que aí se cria um hiato no processo educativo, em que é perdido o próprio encadeamento temporal tão importante na construção do conhecimento.

7.3.2 Dimensões a avaliar

O eixo deste trabalho irá situar-se na avaliação de três dimensões, consideradas pela moderna pedagogia como sendo integrantes principais dos princípios estabelecidos nas diretrizes epistemológicas da docimologia. Estas três dimensões são: (ver também Capítulo 4, seção 4.2 e 4.7)

a) Conhecimento

A palavra costuma possuir muitos entendimentos. *Materialmente* pode ser o ato ou efeito de conhecer, a idéia, a noção, a informação, a notícia, a experiência, o discernimento. *No plural* pode significar instrução, erudição, cultura. Segundo a Filosofia, corresponde à noção normalmente oposta à afetividade e à atividade, designando a função teórica do espírito assim como o resultado dessa função, cujo fim é tornar um objeto presente aos sentidos ou à inteligência, de modo a obter dele um entendimento ou uma representação adequada.

b) Habilidades

Habilidade é uma palavra derivada do Latim, que significa qualidade de quem é hábil, aptidão, inteligência, engenho, destreza, manipulação.

c) Atitudes

Atitude é uma palavra derivada do Francês, que pode se referir à posição ou modo do corpo humano, o propósito implícito numa ação, uma forma de proceder.

A tabela esboçada na Figura 57 foi obtida a partir da sumarização baseada em trechos dispersos pela literatura indicada nas referências bibliográficas. O por quê de não ser feita uma referência explícita às obras se deve ao fato de que os significados foram estabelecidos de forma indireta. Portanto, os enquadramentos da tabela se constituem em obra de interpretação deste autor, eles não estão sistematizados na bibliografia.

Conhecimento	Habilidades	Atitudes
<i>Processo pelo qual o sujeito se coloca no mundo e estabelece uma relação com ele. "O Saber".</i>	<i>É a operacionalização do conhecimento construído. "O Saber Fazer"</i>	<i>É o conjunto de valores, crenças e princípios formados ao longo da vida. "O Saber Ser para Conviver"</i>
<i>A base é a medida</i>	<i>A base é a medida e/ou o valor</i>	<i>A base é o valor</i>
<i>Quantitativa</i>	<i>Quantitativa / Qualitativa</i>	<i>Qualitativa</i>
<i>Ênfase na regra</i>	<i>Ênfase no raciocínio</i>	<i>Ênfase na atuação</i>
<ul style="list-style-type: none"> • Resolve problemas • Responde perguntas com conteúdo • Apresenta bom desempenho em testes e trabalhos • Apresenta boa memória • Sabe <i>como</i> fazer • Aplica o planejamento • Apresenta precisão • Apresenta encadeamento lógico do conhecimento • Apresenta coerência nas respostas sobre a matéria • Apresenta concisão nas análises sobre a matéria • Apresenta domínio do conhecimento nas produções orais e escritas • Consegue relacionar teoria e prática 	<ul style="list-style-type: none"> • Aplica técnicas adequadas na solução de problemas • Promove o encadeamento adequado de idéias nas explicações (expressão oral) • Promove o encadeamento adequado de idéias nos textos (expressão escrita) • Consegue auto-avaliar sua qualidade • Apresenta ordens superiores de raciocínio (raciocínio avançado) / argumentações objetivas e subjetivas • Apresenta pensamento crítico / argumentações objetivas e subjetivas • Consegue estabelecer conexões e gerar idéias • Saber realizar • Autosuficiência 	<ul style="list-style-type: none"> • Procura demonstrar bom desempenho • Procura demonstrar criatividade • Demonstra compromisso com sua auto-avaliação • Quais valores estão em construção • Capacidade de lidar com as normas • Demonstra organização • Postura • Equilíbrio • Zelo • Liderança emergencial • Diálogo • Disciplina • Autoconhecimento / Autoconsciência

Figura 57 – Referências para Conhecimento, Habilidades e Atitudes

Evidentemente este assunto não se exaure aqui, nem a listagem esboçada necessariamente restringe-se tão somente aos componentes apresentados na tabela da Figura 57.

Já em relação à interpretação conceitual dos termos *conhecimento*, *habilidades* e *atitudes*, embora as diferenças pareçam claras, costuma-se encontrar alguma mistura de classes entre estas três concepções, principalmente no que concerne ao *Conhecimento* e às *Habilidades*, como por exemplo:

	Conhecimento	Habilidades	Atitudes
Consciência de si mesmo / Autoconsciência	X		X
Perícia	X	X	
Capacidade	X	X	
Competência	X	X	

Figura 58 – Justaposição de conceitos

A tabela da Figura 58 mostra a justaposição de conceitos em relação ao que eles representam, i. é, pode-se encontrar autores que interpretam a "Consciência de si mesmo / Autoconsciência" como uma exteriorização de "Conhecimento", enquanto para outros é um atributo "Atitudinal".

Como qualquer discussão sobre tais considerações poderia levar a peças sem conclusão, prefere-se aqui raciocinar no sentido de que o enquadramento deve ser proposto pelo professor e negociado com os alunos, dentro da perspectiva atual do professor como um *mediador* (CHIOVATTO, 2000).

Outra menção importante é a de que a maioria dos autores entende que as três dimensões aqui descritas são as variáveis de uma equação cuja igualdade é a *Competência*. Na presente obra assume-se esta igualdade, i. é:

$\text{Competência} = \text{Conhecimento} + \text{Habilidades} + \text{Atitudes}$

Figura 59 – Equação semântica

Um excelente detalhamento desta matéria pode ser encontrado em Lazzarotto (2001) e no endereço www.mec.gov.br.

7.4 PROPOSTA METODOLÓGICA

O grande desafio que se põe à avaliação da aprendizagem é o melhor casamento entre *avaliar como medida* e *avaliar como orientação* ao estudante (ver Capítulo 3, seção 3.3.6). Certamente estas duas concepções necessitam caminhar juntas e, mais do que isto, servir como *instrumento de referência* para o professor e para o aluno.

7.4.1 Formatação das Variáveis e Termos Lingüísticos

O modelo aqui adotado considerará a equação semântica

Competência = Conhecimento + Habilidades + Atitudes

como a norteadora do *juízo de valor*.

O modelo geral é o apresentado nos quadros das Figuras 60, 61 e 62 a seguir. O modelo contém as *Variáveis Lingüísticas* e seus respectivos *Termos Lingüísticos*.

<i>Variáveis</i>	<i>Termo 1</i>		<i>Termo 2</i>			<i>Termo 3</i>	
<i>Conhecimento</i>	Vermelho		Verde			Azul	
<i>Habilidade</i>	Vermelha		Verde			Azul	
<i>Atitude</i>	Vermelha		Verde			Azul	
<i>Competência</i>	<i>Termo 1</i>	<i>Termo 2</i>	<i>Termo 3</i>	<i>Termo 4</i>	<i>Termo 5</i>	<i>Termo 6</i>	<i>Termo 7</i>
	Vermelha	Laranja	Amarela	Verde	Azul	Roxa	Branca

Figura 60 – Termos Lingüísticos do modelo

Variáveis	Termo 1		Termo 2			Termo 3	
	Forma Suporte		Forma Suporte			Forma Suporte	
Conhecimento	triangular 0 a 5		trapezoidal 2,5 a 5-6,5 a 8,5			triangular 5 a 10	
Habilidade	triangular 0 a 5		trapezoidal 2,5 a 5-6,5 a 8,5			triangular 5 a 10	
Atitude	triangular 0 a 5		trapezoidal 2,5 a 5-6,5 a 8,5			triangular 5 a 10	
Competência	Termo 1	Termo 2	Termo 3	Termo 4	Termo 5	Termo 6	Termo 7
	triangular 0 a 2	triangular 1 a 3	triangular 2 a 5	triangular 3 a 6	triangular 5 a 7	trapezoidal 6 a 7-8 a 9	triangular 7 a 10

Figura 61 – Funções de Pertinência do modelo

Variáveis	Termo 1		Termo 2			Termo 3	
Conhecimento	2,5		5-6,5			10	
Habilidade	2,5		5-6,5			10	
Atitude	2,5		5-6,5			10	
Competência	Termo 1	Termo 2	Termo 3	Termo 4	Termo 5	Termo 6	Termo 7
	1	2	3	5	6	7-8	10

Figura 62 – Valores com grau de pertinência igual a " 1 "

Os *Termos Lingüísticos* (ou *Variáveis Difusas*) estão definidos na tabela da Figura 60. Os termos lingüísticos aparecem na forma de cores. Cada uma das três variáveis de entrada possui três termos, enquanto a variável de saída possui sete termos.

A tabela da Figura 61 apresenta as formas adotadas para as *Funções de Pertinência* de cada um dos termos. As formas são predominantemente triangulares, sendo trapezoidais onde é necessário o cruzamento em $\mu = 0,5$.

A tabela da Figura 62 apresenta os valores onde o *grau de pertinência* vale exatamente " 1 ", que é o valor máximo possível de ser assumido. Desta forma, todas as funções estão normalizadas.

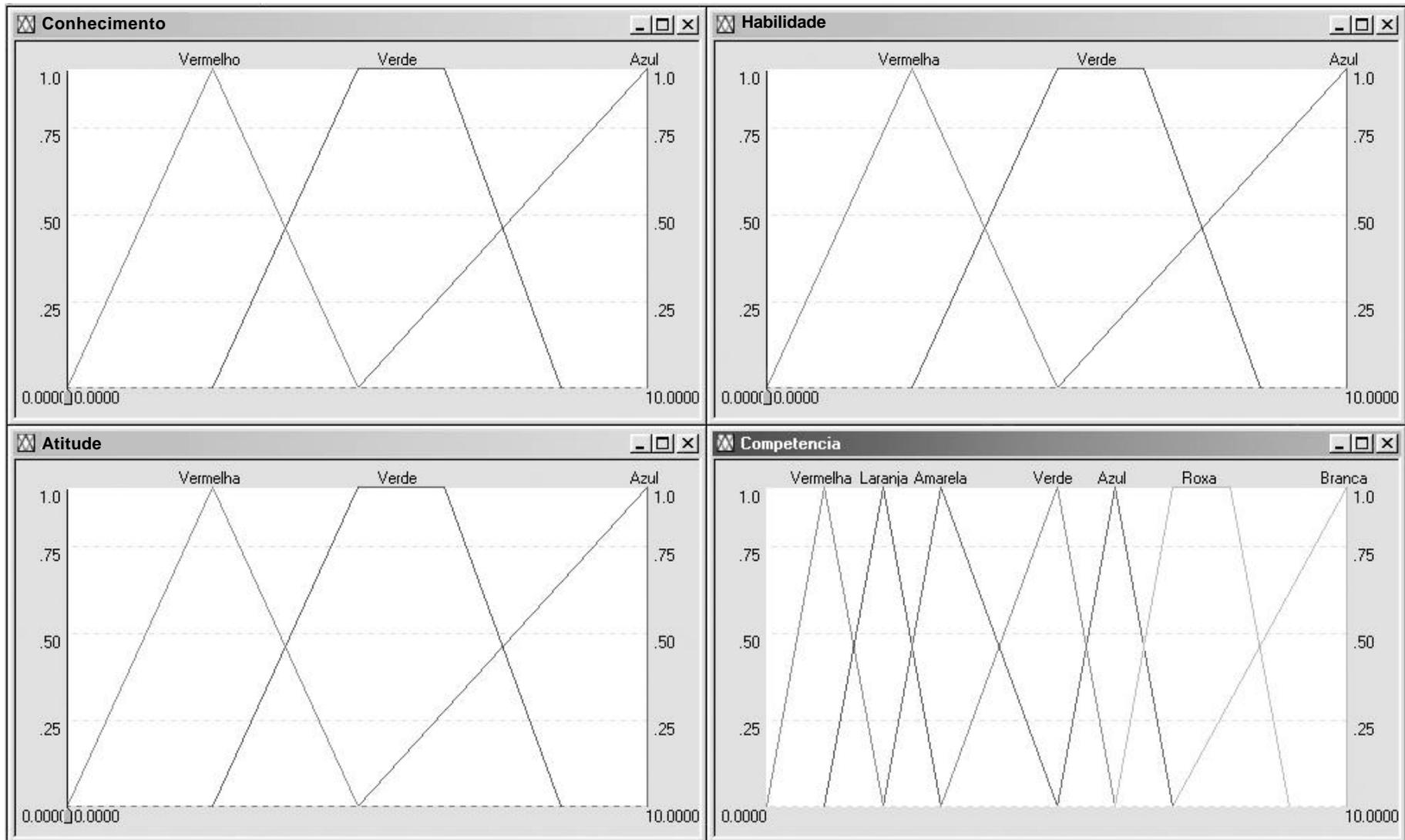


Figura 63 – A interface gráfica do modelo

7.4.2 A metáfora do modelo

A idéia central contida na formatação do modelo é a de fazê-lo representar a noção de valor como uma combinação de cores. Parte-se do princípio que esta figuração facilita a percepção das grandezas representadas pelos números e, mais ainda, a combinação dos vários valores atribuídos ao aluno como sendo o resultado de seu desempenho.

Para alcançar este intento foi utilizada a concepção de combinação das três cores básicas *Vermelho*, *Verde* e *Azul*, que reunidas em doses variadas nos permitem obter todas as cores do espectro visível. Além disto elas também trazem a intuição de dois pólos opostos, representados pelo vermelho e o azul, e o verde como um termo médio entre estes dois extremos.

Esta idéia central se constitui na *configuração metafórica* do modelo, que aproveita assim todo o potencial da ferramenta matemática em auxílio à compreensão plena da formação e ajuizamento do valor, tanto pelo professor como pelo aluno, além de escapar ao lugar comum de expressões antipedagógicas como "Fraco", "Incapaz" ou "Insuficiente", entre outras. Assim, o desempenho do aluno em cada uma das dimensões antecedentes, como entradas do sistema – *Conhecimento*, *Habilidade* e *Atitude* –, "será vermelho" quando possuir um valor "baixo", "verde" quando "médio" e "azul" quando "alto". Da mesma maneira, o desempenho final do aluno, como resultado ou saída do sistema, representado pela dimensão conseqüente *Competência*, será mostrado na forma de uma das sete cores de saída, ou pela combinação de até quatro destas cores.

Alcançando então todas estas possibilidades, esta *metáfora* bem fundamenta a relação de semelhança subentendida entre o sentido próprio e o figurado do desempenho do aluno. As translações resultantes se apresentam na forma de sete cores, propositalmente escolhidas em analogia com o arco-íris, mantendo o eixo de fazer a metáfora tornar o modelo amplamente intuitivo e tolerável.

7.4.3 Quanto às formas das funções do modelo

Como se percebe, duas são as formas utilizadas, a *Triangular* e a *Trapezoidal*. Esta escolha se deve ao fato de que estas formas são largamente utilizadas com êxito, além do que permitem cálculos mais simples em relação a outros tipos de função, como por exemplo a *Sigmoidal*.

Na Figura 61 são apresentados os *suportes* das funções. A expressão "suporte" é utilizada em referência à extensão do domínio de cada *termo*, ou seja, a palavra *suporte* define os limites inferiores e superiores de cada *termo* no Eixo "X", ou seja, é o conjunto *crisp* que contém todos os elementos do conjunto considerado, cujo grau de pertinência seja diferente de zero (ver também a seção 5.4.3). A notação matemática do suporte para um conjunto " A " qualquer é:

$$\text{sup}(A) = \{ x \in X \mid \mu_A(x) > 0 \}$$

Mais ainda, como todos os termos lingüísticos possuem, no mínimo, um ponto onde seu valor é 1, então se diz que estes conjuntos são *normais*. Esta situação é importante na medida em que garante a inexistência de problemas de escala de valor entre as variáveis.

A formatação criada trabalha então com quatro variáveis lingüísticas, cada uma com sua forma, suporte e termos peculiares. Porém, faz-se importante salientar que há total coincidência entre os parâmetros e formas das *variáveis antecedentes* *Conhecimento*, *Habilidade* e *Atitude*. Portanto há também total equivalência nas combinações de implicações de valores destas *variáveis antecedentes* sobre a *variável conseqüente* *Competência*. Este fato faz com que a sensibilidade do operador em relação à intensidade do julgamento de valor esteja sempre equilibrada, ou seja, sua influência no resultado não é afetada por qualquer função antecedente em si, pois não há qualquer precedência de uma função antecedente sobre outra.

A Figura 63 introduz a interface gráfica do modelo, pela qual pode ser visualizada a metáfora das cores (conforme seção 7.4.2) e as formas das funções antecedentes e função conseqüente descritas aqui e na seção 7.4.4 a seguir.

7.4.4 Formatação do Modelo Difuso

- O modelo difuso considera a seguinte seqüência de implicações:

Antecedentes			Conseqüente
Conhecimento	Habilidade	Atitude	Competência

Figura 64 – Seqüência de implicações do modelo difuso

- Bloco de regras

Foram utilizadas 27 regras, conforme previsto no Capítulo 5, seção 5.4.3.1, fazendo:

$$r_v^k = \prod_{i=1}^3 f_i = 3_x \times 3_y \times 3_z = 27$$

Além disto, para que qualquer regra seja *acionada* é necessário que as três dimensões antecedentes sejam *ativadas* ao mesmo tempo, i. é, não é possível contemplar somente uma ou duas dimensões antecedentes.

- Sistema de inferência

Agregação: operador "AND" / "MIN"

Composição: operador "OR" / "MAX"

- Defuzificador

Centro de Gravidade / C-o-G

7.4.5 Ferramentas

Foi utilizada uma ferramenta de visualização, cuja licença está dentro da filosofia de *software* livre (*free*). A ferramenta *SPARK!Viewer*, versão 2.503, pode ser encontrada no em <http://www.louderthanabomb.com> e dali ser baixada livremente.

Esta ferramenta permite somente a visualização de arquivos produzidos com o *software* *SPARK!* (não *free*), ou através de arquivos programados com a linguagem *Free Fuzzy Logic Library* – *FLL*, que pode ser encontrada em <http://fll.sourceforge.net/downloads.htm> e também pode ser baixada livremente.

Assim, através da *FLL* foi gerado um *script* com as condições dadas em 7.4.1, 7.4.2, 7.4.3 e 7.4.4 . Este *script* pode ser modificado em várias instâncias, conforme se deseje outra adequação. Basicamente, podem ser modificados:

- o número de termos das funções
- a forma dos termos das funções
- o número de regras
- o método de defuzificação

O código utilizado é o seguinte:



```
(* FCL File Created From FLL Model by Brinckmann : Thu Jan 01 10:00:00
2004 *)
FUNCTION_BLOCK

VAR_INPUT
    Conhecimento      REAL; (* RANGE(0 .. 10) *)
    Habilidade        REAL; (* RANGE(0 .. 10) *)
    Atitude           REAL; (* RANGE(0 .. 10) *)
END_VAR

VAR_OUTPUT
    Competencia REAL; (* RANGE(0 .. 10) *)
END_VAR

FUZZIFY Conhecimento
    TERM Vermelho := (0, 0) (2.50, 1) (5, 0) ;
    TERM Verde := (2.50, 0) (5, 1) (6.5, 1) (8.5, 0) ;
    TERM Azul := (5, 0) (10, 1) (10, 0) ;
END_FUZZIFY

FUZZIFY Habilidade
    TERM Vermelha := (0, 0) (2.50, 1) (5, 0) ;
    TERM Verde := (2.50, 0) (5, 1) (6.5, 1) (8.5, 0) ;
    TERM Azul := (5, 0) (10, 1) (10, 0) ;
END_FUZZIFY

FUZZIFY Atitude
    TERM Vermelha := (0, 0) (2.50, 1) (5, 0) ;
    TERM Verde := (2.50, 0) (5, 1) (6.5, 1) (8.5, 0) ;
    TERM Azul := (5, 0) (10, 1) (10, 0) ;
END_FUZZIFY

FUZZIFY Competencia
    TERM Vermelha := (0, 0) (1, 1) (2, 0) ;
    TERM Laranja := (1, 0) (2, 1) (3, 0) ;
    TERM Amarela := (2, 0) (3, 1) (5, 0) ;
    TERM Verde := (3, 0) (5, 1) (6, 0) ;
    TERM Azul := (5, 0) (6, 1) (7, 0) ;
    TERM Roxa := (6, 0) (7, 1) (8, 1) (9, 0) ;
    TERM Branca := (7, 0) (10, 1) (10, 0) ;
END_FUZZIFY
```

```

DEFUZZIFY valve
    METHOD: CoG;
END_DEFUZZIFY

RULEBLOCK first
    AND:MIN;
    ACCUM:MAX;

RULE 1: IF (Conhecimento IS Vermelho) AND (Habilidade IS Vermelha) AND
(Atitude IS Vermelha) THEN (Competencia IS Vermelha);

RULE 2: IF (Conhecimento IS Vermelho) AND (Habilidade IS Vermelha) AND
(Atitude IS Verde) THEN (Competencia IS Laranja);
RULE 4: IF (Conhecimento IS Vermelho) AND (Habilidade IS Verde) AND
(Atitude IS Vermelha) THEN (Competencia IS Laranja);
RULE 10: IF (Conhecimento IS Verde) AND (Habilidade IS Vermelha) AND
(Atitude IS Vermelha) THEN (Competencia IS Laranja);

RULE 3: IF (Conhecimento IS Vermelho) AND (Habilidade IS Vermelha) AND
(Atitude IS Azul) THEN (Competencia IS Amarela);
RULE 7: IF (Conhecimento IS Vermelho) AND (Habilidade IS Azul) AND (Atitude
IS Vermelha) THEN (Competencia IS Amarela);
RULE 19: IF (Conhecimento IS Azul) AND (Habilidade IS Vermelha) AND
(Atitude IS Vermelha) THEN (Competencia IS Amarela);
RULE 5: IF (Conhecimento IS Vermelho) AND (Habilidade IS Verde) AND
(Atitude IS Verde) THEN (Competencia IS Amarela);
RULE 11: IF (Conhecimento IS Verde) AND (Habilidade IS Vermelha) AND
(Atitude IS Verde) THEN (Competencia IS Amarela);
RULE 13: IF (Conhecimento IS Verde) AND (Habilidade IS Verde) AND (Atitude
IS Vermelha) THEN (Competencia IS Amarela);

RULE 6: IF (Conhecimento IS Vermelho) AND (Habilidade IS Verde) AND
(Atitude IS Azul) THEN (Competencia IS Verde);
RULE 8: IF (Conhecimento IS Vermelho) AND (Habilidade IS Azul) AND (Atitude
IS Verde) THEN (Competencia IS Verde);
RULE 12: IF (Conhecimento IS Verde) AND (Habilidade IS Vermelha) AND
(Atitude IS Azul) THEN (Competencia IS Verde);
RULE 16: IF (Conhecimento IS Verde) AND (Habilidade IS Azul) AND (Atitude
IS Vermelha) THEN (Competencia IS Verde);
RULE 20: IF (Conhecimento IS Azul) AND (Habilidade IS Vermelha) AND
(Atitude IS Verde) THEN (Competencia IS Verde);
RULE 22: IF (Conhecimento IS Azul) AND (Habilidade IS Verde) AND (Atitude
IS Vermelha) THEN (Competencia IS Verde);
RULE 14: IF (Conhecimento IS Verde) AND (Habilidade IS Verde) AND (Atitude
IS Verde) THEN (Competencia IS Verde);

RULE 9: IF (Conhecimento IS Vermelho) AND (Habilidade IS Azul) AND (Atitude
IS Azul) THEN (Competencia IS Azul);
RULE 21: IF (Conhecimento IS Azul) AND (Habilidade IS Vermelha) AND
(Atitude IS Azul) THEN (Competencia IS Azul);
RULE 25: IF (Conhecimento IS Azul) AND (Habilidade IS Azul) AND (Atitude IS
Vermelha) THEN (Competencia IS Azul);
RULE 15: IF (Conhecimento IS Verde) AND (Habilidade IS Verde) AND (Atitude
IS Azul) THEN (Competencia IS Azul);
RULE 17: IF (Conhecimento IS Verde) AND (Habilidade IS Azul) AND (Atitude
IS Verde) THEN (Competencia IS Azul);
RULE 23: IF (Conhecimento IS Azul) AND (Habilidade IS Verde) AND (Atitude
IS Verde) THEN (Competencia IS Azul);

RULE 18: IF (Conhecimento IS Verde) AND (Habilidade IS Azul) AND (Atitude
IS Azul) THEN (Competencia IS Roxa);

```

```
RULE 24: IF (Conhecimento IS Azul) AND (Habilidade IS Verde) AND (Atitude
IS Azul) THEN (Competencia IS Roxa);
RULE 26: IF (Conhecimento IS Azul) AND (Habilidade IS Azul) AND (Atitude IS
Verde) THEN (Competencia IS Roxa);

RULE 27: IF (Conhecimento IS Azul) AND (Habilidade IS Azul) AND (Atitude IS
Azul) THEN (Competencia IS Branca);

END_RULEBLOCK

END_FUNCTION_BLOCK
```



7.4.6 Operacionalização

De forma especial, neste trabalho a palavra *Competência* adquire um papel chave. A Competência representará, de forma sintética e sistematizada, a condição atual do avaliando diante do processo de aprendizagem. Por condição atual entende-se a resultante das relações de causa e efeito capazes de serem produzidas pelas variáveis que intervêm em todo o processo. Portanto, a Competência traz consigo uma condição de síntese, cujo significado de seu conteúdo deve ser conhecido, no mínimo, pelo aluno e pelo professor.

É através da aferição e acompanhamento da Competência que, tanto professor como aluno tomarão conhecimento dos reflexos *quantitativo* e *qualitativo* da aprendizagem.

7.4.7 Estudo de Caso

O estudo de caso a seguir foi projetado para prover o leitor com informações práticas de uma forma de *modus faciendi*, tal que se possa obter uma clarificação sobre o uso da metodologia apresentada neste trabalho.

Este estudo de caso se constitui numa prognose sobre a aplicação de uma rotina de trabalho, não tendo absolutamente a pretensão de ser o formato definitivo da execução formal da metodologia em si. Ele não é a metodologia, menos ainda esgota as possibilidades de diferenciação na aplicação da mesma.

Por outro lado, as características da sua estrutura envolvem o uso de ferramentas e ações recomendadas pela boa técnica pedagógica. No entanto, tais ferramentas e

ações não se constituem elemento de estudo deste trabalho, devendo o leitor procurar orientar-se a respeito através de cursos, leituras e profissionais na matéria.

O presente estudo de caso contempla os seguintes elementos principais:

- a) Um aluno avaliado, que será identificado como *Aluno Alfa*.
- b) Um professor, que será identificado aqui como *Professor*.
- c) Uma sala de aula com 30 alunos, cujas condições gerais são consideradas comuns e normais se comparada à maioria das salas de aula encontradas nas universidades brasileiras.
- d) Uma disciplina qualquer, pois a metodologia de avaliação proposta não deve encontrar qualquer restrição de aplicação. Esta disciplina também pode se referir a qualquer turno de trabalho e, no presente estudo, foi levada a cabo no período de um semestre.
- e) Uma *ementa* da disciplina, que se constitui nos *protocolos* fixados *a priori* pelo professor, como: (I) uma apresentação concisa da disciplina; (II) os formatos de dinâmica das aulas; (III) a expectativa quanto aos objetivos a serem alcançados pela disciplina; (IV) a forma de avaliação e suas peculiaridades.
- f) Um *plano de ensino* entregue a cada aluno no início da disciplina, onde constam: (I) os dados cadastrais da disciplina; (II) o cronograma de aplicação dos conteúdos a serem abordados com suas respectivas referências bibliográficas, bem como outras datas relevantes, como horário de atendimento extraclasse, provas, trabalhos, feriados prolongados etc; (III) as referências bibliográficas.
- g) Um documento formatado especialmente para as anotações referentes às avaliações formativas e os respectivos estados de avaliação da Competência. Este documento possui duas vias, uma do aluno e outra do professor. Enquanto as anotações do professor podem ser bastante sucintas, as anotações do aluno devem sempre detalhar as considerações feitas pelo professor. Estas anotações do aluno podem ser consideradas como critério de pontuação no quesito *Atitudinal*.

Os itens de "e" a "g" incluem a estrutura documental da disciplina.

7.4.7.1 Pontuação para *fuzificação* das entradas

Como já salientado anteriormente, este trabalho não visa estabelecer os pormenores de como um professor deve conduzir sua disciplina e, mais especificamente, sua avaliação. Portanto, o sistema a ser utilizado pelo professor para pontuar o desempenho do aluno deve ser aquele que melhor se ajuste ao juízo de cada um. No entanto, vai-se propor aqui uma modalidade que se mostrou adequada, tanto por ser indicada pela moderna pedagogia, como pela praticidade e pela objetividade e clareza de que se reveste.

Seguindo o modelo difuso apresentado nas seções precedentes, mais especificamente a seqüência de implicações mostrada na Figura 64, o professor relaciona os critérios que irão ser os alvos de pontuação. Estes critérios geralmente são aqueles relacionados e comentados na Figura 57, lembrando mais uma vez que a consideração de critérios também se constitui em peça de escolha particular de cada professor.

Antecedentes		
Conhecimento	Habilidade	Atitude
<i>critério 1</i>	<i>critério 1</i>	<i>critério 1</i>
<i>critério 2</i>	<i>critério 2</i>	<i>critério 2</i>
<i>critério 3</i>	<i>critério 3</i>	<i>critério 3</i>
.	.	.
.	.	.
.	.	.
<i>critério n</i>	<i>critério n</i>	<i>critério n</i>

Figura 65 – Estrutura para pontuação dos critérios

A Figura 65 apresenta a estrutura utilizada para pontuação dos critérios. Observe-se que tudo fica sob apreciação de cada professor, que elege tanto a tipificação de cada critério, como o número de critérios a serem considerados em cada antecedente.

A idéia subjacente a este modo de pontuar, é a de que ela se mostra como perfeitamente adequada aos preceitos pedagógicos e à metodologia proposta, pois a um só tempo empresta transparência e objetividade ao processo avaliatório e propicia a formação das entradas *crisp* que serão *fuzificadas* pelo modelo difuso.

7.4.7.2 Exemplo de pontuação para *fuzificação* das entradas

No presente estudo de caso foram utilizados cinco critérios para cada termo antecedente, valendo cada um a quantia de 2 pontos. Exemplificando, num determinado *primeiro momento de avaliação*, o *Aluno Alfa* obteve a pontuação apresentada na tabela da Figura 66 .

<i>Aluno Alfa</i>					
Antecedentes					
Conhecimento		Habilidade		Atitude	
CRITÉRIOS	PONTOS	CRITÉRIOS	PONTOS	CRITÉRIOS	PONTOS
<i>critério 1</i>	0,5	<i>critério 1</i>	2,0	<i>critério 1</i>	2,0
<i>critério 2</i>	0,0	<i>critério 2</i>	0,0	<i>critério 2</i>	2,0
<i>critério 3</i>	1,0	<i>critério 3</i>	0,0	<i>critério 3</i>	2,0
<i>critério 4</i>	0,0	<i>critério 4</i>	0,0	<i>critério 4</i>	2,0
<i>critério 5</i>	1,0	<i>critério 5</i>	2,0	<i>critério 5</i>	2,0
Totais:	2,5		4,0		10,0
Média aritmética: 5,5					

Figura 66 – Exemplo de pontuação pelos critérios

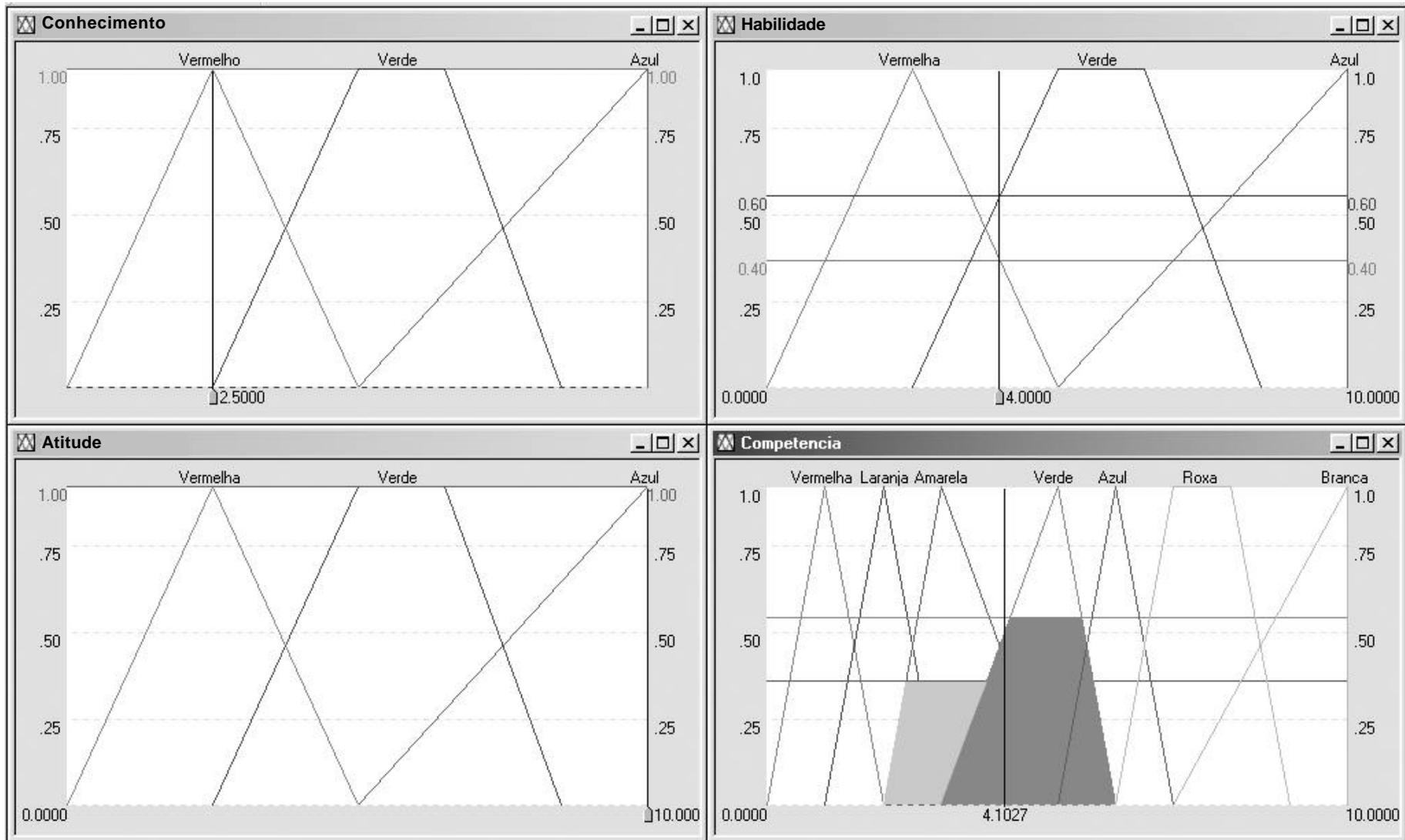


Figura 67 – Configuração do modelo para um primeiro momento de avaliação

A Figura 67 apresenta um primeiro momento de avaliação. Para as notas obtidas pelo Aluno Alfa nas três dimensões antecedentes, o modelo respondeu com as saídas apresentadas na Figura 68.

Cor	Valor da Pertinência	C.o.G
Amarela	0,40	4,1027
Verde	0,60	

Figura 68 – Saídas geradas pelo modelo para um primeiro momento de avaliação

Uma vez obtidas estas saídas, cabe agora ao professor e ao aluno fazerem juntos a análise dos dados, permitindo delinear a conjuntura nascida destes resultados.

7.4.7.3 Análise das saídas e tomada de decisão

Para que um modelo difuso funcione adequadamente, é necessário que se proceda a encaminhamentos com vistas a se adquirir valores de referência e regras para tomada de decisão, obtidas por ajuste do modelo às expectativas do decisor.

- a) Estabelecer um ou mais *valores de referência*.

O modelo aqui elaborado estabelece os seguintes valores de referência:

Pontos Obtidos			Média Aritmética	C.ºG
Vermelho	Verde	Azul		
5,0	5,0	5,0	5,0	4,6643
7,0	7,0	7,0	7,0	6,5690

Figura 69 – Valores de referência

- b) Proceder a uma série de testes para alcançar uma *sintonia fina* entre entradas e saídas de dados, buscando assim valores ou faixa de valores ajustadas que servirão para a tomada de decisão.

Os testes tiveram como foco as médias " 5,0 " e " 7,0 ", pois estes valores são os mais comumente utilizados pela grande maioria dos professores e instituições de ensino, para tomar decisão sobre condição para *prestação de exames, aprovação final* ou *aprovação por média*.

Assim, foram obtidos os seguintes parâmetros para tomada de decisão:

<i>Condição 1</i>	<i>Condição 2</i>	<i>Status</i>
C.o.G < 4,6000	- x -	Reprovado
4,6000 C.o.G < 6,4900	$0 < \mu_{\text{VERDE}} - \mu_{\text{AZUL}} < 0,30$	Exame Final
C.o.G > 6,4900	$ \mu_{\text{AZUL}} - \mu_{\text{VERDE}} \geq 0$	Aprovado por Média

Figura 70 – Parâmetros para tomada de decisão

Os parâmetros apresentados na Figura 70 podem ser substituídos em qualquer outra situação de avaliação, mas jamais dentro de um mesmo período de avaliação (no presente caso, um semestre). Estes parâmetros devem ser apresentados no início do período avaliatório, sendo qualquer mudança neste interregno indesejável por configurar uma quebra nas regras do jogo.

Uma vez tomada a decisão, haverá a necessidade de atribuir uma nota ao aluno. Neste instante já não existem mais os problemas gerados pela média aritmética, ou qualquer outra fórmula de média utilizada, porque todas as inconveniências criadas por estes procedimentos mais simples foram saneadas pelo processo de tomada de decisão difuso. Portanto, a própria média aritmética poderá *representar* o desempenho do aluno.

7.4.7.4 Análise final do estudo de caso

Aplicando os direcionamentos vistos anteriormente ao caso do *Aluno Alfa*, chega-se à conclusão de que o aluno ainda não reúne condições de aprovação, pois, apesar de possuir uma média aritmética normalmente considerada hábil, " 5,5 ", a *defuzificação* apontou um CoG de 4,1027, portanto menor do que o CoG mínimo para ir a exame final, cujo valor é 4,6000.

Aqui já se apresentam algumas inovações propiciadas pelo modelo proposto. A primeira delas é a de mostrar claramente que uma medida *crisp*, no caso a média aritmética, quando aplicada como único juízo de valor, mostra-se insuficiente para tomada de decisão, principalmente em situações de maior nebulosidade, como é o caso dos valores médios relacionados a desempenho escolar. Outra vantagem deste método é a de fornecer subsídios para uma análise *qualitativa* e *intuitiva* do desempenho do

aluno. Por exemplo, no presente estudo de caso, professor e aluno percebem claramente que a presença de amarelo na Competência está a "puxar" o desempenho do aluno para baixo e, mais ainda, que este fato se deve a uma forte quantidade de vermelho no Conhecimento. Tudo isto se deve ao fato de que o modelo "exige" uma forte presença de equilíbrio entre as variáveis antecedentes, Conhecimento, Habilidade e Atitude. Percebe-se este fato mais claramente, ao situarem-se duas notas nos extremos e a terceira bastante baixa, neste caso, a média poderá até ser próxima de "6,0", mas seu CoG denunciará a falta de equilíbrio. Cabe ressaltar que cada professor pode e deve criar o ajuste que entenda mais conveniente, ou até mesmo acrescentar exceções às Condições apresentadas na Figura 70, conforme entenda que determinada configuração atende o desempenho esperado.

Quando observa o comportamento do desempenho do aluno via modelo, o professor, diante da dúvida ou da necessidade de expandir as possibilidades de ajuste, deve olhar para o *threshold* das funções que se apresentarem. O *threshold* é o *nível*, o *patamar* da função, i. é, o grau de pertinência da função para um determinado valor de entrada. Neste modelo, propositalmente todas as funções se cruzam num *threshold* de "0,5", pois assim se tem um termo médio para análise bastante útil como referência.

Todas estas colocações salientam bem que o acompanhamento do desempenho do aluno pode, e deve, ser feito em qualquer instante, com a vantagem de um pronto *feedback* e de funcionar como um mecanismo que transforma a avaliação num facilitador. As possibilidades do modelo são então:

- a negociação do processo avaliativo;
- a mescla de juízo semântico com juízo numérico, através da alegoria das cores;
- a transformação de critérios textuais de avaliação em figuras geométricas dinâmicas, que acumulam o significado analítico dos "n" critérios isolados, projetando resultantes que podem ser literalmente "visualizadas";
- transparência, enriquecimento da relação professor-aluno e variação de abordagens;
- entender melhor as carências, se de conhecimento, habilidades ou atitudes, ou uma mescla destes aspectos;
- referencial individual e do grupo;

- melhor entendimento de pontos fortes e fracos;
- possibilidade real de autogestão e auto-avaliação contínua;
- melhoria permanente da aprendizagem;
- o comprometimento com o resultado da união do conjunto das avaliações, sem perda de continuidade, permitindo uma dinâmica formativa, de progresso, de evolução;
- a cognição do processo como facilitação e não como punição.

Concluindo, o método se aplica sobre uma base preestabelecida que inclui as regras e os parâmetros para decisão. As regras e os parâmetros fundamentam a decisão, enquanto os critérios predispostos sob negociação fornecem os subsídios para a contagem de pontos. A integralidade desta estrutura fornece um apoio completo para o direcionamento ou conclusão da avaliação.

7.5 CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

Relembrando as propostas iniciais deste trabalho, tinha-se como principal objetivo o desenvolvimento de uma proposta metodológica para a instrumentação de processos avaliativos, com a finalidade de introduzir a matemática nebulosa como meio complementar de apoio aos professores na formação de juízo de valor.

Como outros objetivos secundários, eram citados:

- a) Introduzir novas formas de análise de agregação de valor pessoal durante o processo de aquisição de conhecimento.
- b) Suprir os professores de ferramental lógico aplicável tanto às avaliações de cunho formativo como às seletivas.
- c) Validar a metodologia através de um estudo de caso.
- d) Estabelecer as diretrizes para o desenvolvimento de um sistema computacional que aplique a metodologia estabelecida.

Não obstante estes objetivos terem sido contemplados, ainda há muito que fazer para trazer melhorias ao conjunto do método. Como diz o título da presente obra, esta é uma proposta, uma iniciação que pretende despertar a curiosidade dos pesquisadores, pesquisadores estes geralmente ensimesmados com as "questões matemáticas" da avaliação da aprendizagem.

Mas o importante é notar que existe uma ótima alternativa para equacionar o processo da avaliação da aprendizagem, que normalmente se constitui num tabu, tanto para professores como para alunos.

É recomendável que se inicie por uma revisão da cultura da avaliação, a qual ainda coloca este aspecto da educação em segundo plano. Mesmo com os avanços trazidos pelas idéias de uma avaliação formativa, remanesce a dificuldade do ajuizamento.

No entanto, tal revisão só será possível se houver uma conscientização dos "mandatários – gestores" das instituições educacionais, no sentido de prover as escolas das mínimas condições necessárias para uma melhor operacionalização dos trabalhos em sala. Nosso ensino adquiriu uma visão mercantilista tão absurdamente forte que toda a sorte de desatinos vem se consumando em nome, única e exclusivamente, da ganância empresarial.

Não se trata de adotar uma política de "almoço grátis" nas escolas, mas de reformular toda a interação entre governos e escolas. É desejável uma nova parceria que proporcione uma condição financeira adequada ao trabalho prestado pela "escola – empresa", a tal ponto que a mesma possa repassar esta condição ao "chão de aula".

A avaliação pode e deve ser peça chave na aprendizagem, mas não é possível efetivá-la a contento em salas abarrotadas de alunos, com pouco ou nenhum apoio psicopedagógico efetivo e eficaz aos alunos. Isto para falar o menos, já que, no atual momento, as condições materiais alcançadas a professores são as piores possíveis.

Haverá ainda de chegar o tempo em que professores e alunos poderão compartilhar de um ambiente de arcádia, onde haja espaço para ensinar e sonhar... E avaliar, claro.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BONNIOL, Jean-Jacques; VIAL, Michel. **Modelos de avaliação – textos fundamentais**. Porto Alegre: Armed Editora, 2001.

BOURDIEU, Pierre. **La domination masculine**. Paris, Seuil, 1998. Conforme *Jornal da Universidade*, nº 62, ano V, maio/2003, p. 5, matéria assinada por José Vicente Tavares dos Santos. <http://www.ufrgs.br/jornal/maio2003/pag05.html>.

CHIOVATTO, Milene. **O professor mediador**.
<http://www.artenaescola.org.br/artigos/artigo024.html> . 2000.

CLARK, Donald. **A time capsule of training and learning**.
<http://www.nwlink.com/~donclark/hrd/history/history.html>. 2000.

COLE, Mark; WERTSCH, James V. **Beyond the individual-socio antimony in discussions of Piaget and Vygotsky**. Paper, 2000.
<http://www.massey.ac.nz/~alock/virtual/colevyg.htm>

COX, Earl. **Fuzzy Systems Handbook**. San Diego, CA: Academic Press (E.U.A.), 1999, ed. 2.

DEPRESBITERIS, L. **O desafio da avaliação da aprendizagem – dos fundamentos a uma proposta inovadora**. São Paulo: EPU, 1989.

DOOLITTLE, Peter. **Assessment all**.
<http://edpsychserver.ed.vt.edu/resources/presentations.cfm>.

FALCÃO, Djalma Mosqueira. **Conjuntos, lógica e sistemas fuzzy**. COE 765 - Técnicas Inteligentes Aplicadas a Sistemas de Potência, COPPE/UFRJ, 2002.

FERTÉ, H. **La philosophie dans les collèges jésuites - d'après la Ratio Atque Institutio Studiorum Societatis / IESU**. http://www.ac-nancy-metz.fr/enseign/philo/textes_reglementaires/Ratiostudiorum.rtf. Traduzido do Latim para o Francês por Ferté, em 1892.

FLEURY, Jean-Pierre. **Situation d'apprentissage**, 2002. http://www2.ac-lyon.fr/etab/ien/rhone/lyon1/docpdf/peda-generale/situation_apprentissage.pdf.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia da autonomia – saberes necessários à prática educativa**. São Paulo: Paz e Terra, 1999, ed. 13.

FREUND, John E.; SIMON, Gary A. **Estatística aplicada**. Porto Alegre: Bookman, 2001, ed. 9.

GĂLĂPANU, Cătălin Daniel, BĂRBIERU, Elena. **Docimological principles applied to the e-learning tests**, 2003. <http://conference.roedu.net/default.php?t=site&pgid=66>.

GÓMEZ, J. Galindo. **Conjuntos y sistemas difusos (lógica difusa y aplicaciones)**. *Departamento de Lenguajes y Ciencias de la Computación* Universidad de Málaga, 1999. <http://polaris.lcc.uma.es/~ppgg/FSS/FSS2.pdf>.

GRONLUND, Norman Edward. **Assessment of student achievement**. Boston: Pearson Allyn & Bacon, 1998, ed. 6.

HOCHHEIM, Norberto. **Avaliações por inferência estatística**. Florianópolis: IBAPE/SC, set/1999.

JANTZEN, Jan. **Tutorial on fuzzy logic**. *Technical University of Denmark, Department of Automation*, 1999. www.iau.dtu.dk/~jj/pubs/logic.pdf.

KAZMIER, Leonard J. **Estatística aplicada à economia e administração**. São Paulo: Makron Books, 1982.

KERKA, Sandra. **Techniques for Authentic Assessment**. <http://ericacve.org/docs/auth-pab.htm>. 2003.

KLIR, George J.; FOLGER, Tina A. **Fuzzy sets, uncertainty, and information**. New Jersey, NY: Prentice Hall (E.U.A.), 1988.

KOIVO, Heikki. *Helsinki University of Technology – Control Engineering Laboratory*, 2004. <http://www.control.hut.fi/Kurssit/AS-74.115/Material/>.

LAZZAROTTO, Maria Elizabeth. **Competências essenciais requeridas para o gerenciamento de unidades básicas de saúde**. Dissertação de Mestrado. UFSC/EPS, 2001. <http://teses.eps.ufsc.br/defesa/pdf/9108.pdf>.

LEAL, Hyrla Tucci. In: Entre eles e elas, um muro. Revista da Folha, 07/05/2003, por Juliana Doretto. http://www.andes.org.br/Clipping%2007_05_2003.htm.

MANHÃES, Luiz Carlos Lopes. **Implantando a educação básica (orientação e legislação necessárias para atender e aplicar a nova LDB)**. NUP/CED/UFSC, 1998.

MEC, www.mec.gov.br.

PERRENOUD, Philippe. **Avaliação – da excelência à regulação das aprendizagens – Entre duas lógicas**. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 1999.

POPHAM, William J. **Classroom assessment: what teachers need to know**. Boston: Pearson Allyn & Bacon, 1998, ed. 2.

ROSCA, Raluca I. **Use of experimental data in testing methods for design against uncertainty**. University of Florida – *dissertação apresentada para requerimento do grau de Phd*, 2001, <http://www.aero.ufl.edu/~rrosca/dissertation.html>

SANTOS, José Vicente Tavares dos. **A superação da violência na vida de uma juventude fraturada**. *Jornal da Universidade*, nº 62, ano V, maio/2003, p. 5. <http://www.ufrgs.br/jornal/maio2003/pag05.html>.

SÁTIRO, Angélica. **Avaliar : questão humana**. Artigo, 2002. <http://www.cbfc.com.br/biblioteca/biblio3-4.htm>.

SAZONOV, Edward. **Typical membership functions (9)**. *Department of Electrical and Computer Engineering at Clarkson University, NY*, 2003. <http://www.clarkson.edu/~esazonov/classes/ee509/notes.htm>.

SCHNEIDER, Moti et alli. **Fuzzy expert system tools**. W. Sussex: John Wiley & Sons Ltd. (Inglaterra), 1996.

SHAW, Ian S.; SIMÕES, Marcelo Godoy. **Controle e modelagem fuzzy**. São Paulo: Edgard Blücher, 1999, ed. 1.

SIEGEL, Sidney. **Estatística não-paramétrica para as ciências do comportamento**. São Paulo: Makron Books, 1975.

SIEVERS, Burkard. **Beyond the surrogate of motivation**. *Organization Studies*, U.S.A, 7/4, 1986, pp. 335-351.

STRAIGHT, H. Stephen. **The difference between assessment and evaluation**. Apresentação, 2002. provost.binghamton.edu/assessment/assessment_evaluation.ppt

TEC-Texas Education Agency. *State Board of Education Work Session - November 8, 2002*. <http://www.tea.state.tx.us/student.assessment/taks/standards/sem.pdf>.

VARANDAS, José Manuel. **Avaliação de investigações matemáticas: uma experiência**. Tese de Mestrado, 2002. <http://ia.fc.ul.pt/textos/jvarandas/>.

VIAL, Michel. **Modèles et logiques de l'évaluation**. *Colloque international, Ethique et qualité dans l'évaluation, Université de Reims Po'evalue, 25/26 octobre, 1999*. http://lambesc.educaix.com/enseignantS/vial/pdf/COLLOQUE_INTER/vial.V.com.13-1999.pdf.

VIEIRA, Fábila Magali Santos. **Avaliação do processo de ensino-aprendizagem**. Artigo, 2002. <http://www.connect.com.br/~ntemg7/avaproc.htm>.

WIGDOR, Alexandra K.; GREEN JR., Bert F. **Performance assessment for the workplace**. Washington D.C.: National Academy Press, *Committee on the Performance of Military Personnel / Commission on Behavioral and Social Sciences and Education / National Education Council*, USA, 1991.

ZABALA, Antoni. **A prática educativa: como ensinar**. Porto Alegre: Artmed, 1998.