

Universidade Federal de Santa Catarina  
Curso de Pós-Graduação em Matemática e  
Computação Científica

Método de Galerkin Descontínuo  
de Elementos Finitos para  
Equações Elípticas

André Krindges  
Orientador: Prof. Dr. Igor Mozolevski

Florianópolis  
Fevereiro de 2004

Universidade Federal de Santa Catarina  
Curso de Pós-Graduação em Matemática e  
Computação Científica

Método de Galerkin Descontínuo de Elementos  
Finitos para Equações Elípticas

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica, do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina, para a obtenção do grau de Mestre em Matemática, com Área de Concentração em Matemática Aplicada.

André Krindges  
Florianópolis  
Fevereiro de 2004

# Método de Galerkin Descontínuo de Elementos Finitos para Equações Elípticas

por

André Krindges

Esta Dissertação foi julgada para a obtenção do Título de “Mestre”,  
Área de Concentração em Matemática Aplicada, e aprovada em sua forma  
final pelo Curso de Pós-Graduação em Matemática e  
Computação Científica.

Comissão Examinadora:

---

Prof. Dr. Igor E. Mozolevski  
Coordenador

---

Prof. Dr. Igor E. Mozolevski (UFSC-Orientador)

---

Prof. Dr. Mário César Zambaldi (UFSC)

---

Prof. Dr. Álvaro Luiz de Bortoli (UFRGS)

---

Prof. Dr. Jauber Cavalcante de Oliveira (UFSC)

**Florianópolis, fevereiro de 2004.**

À Deus, o maior matemático.

# Agradecimentos

Acima de qualquer coisa agradeço a Deus. Não somente por interceder diretamente a meu favor, mas principalmente por abençoar e guiar minha família que por sua vez esteve muito presente nesta caminhada e é sem dúvida meu suporte. Assim manifesto aqui meu mais profundo agradecimento a meus pais Ademir e Marta, a meus irmãos Rodrigo e Cristina e a meus avós Nelson e Ilda e Eugênio e Nelita (*in memoriam*) pelo apoio e aconchego.

Agradeço de forma carinhosa a Roselyy, que mesmo a distância esteve sempre a par do meu trabalho e em muitos momentos foi responsável pela minha estimulação quando esta faltava.

A todos os amigos da Pós-Graduação, meus sinceros agradecimentos pela agradável convivência. Com isso registro aqui a grande consideração que tenho por vocês a qual nunca esquecerei. Em especial destaco por cultivar grande amizade: Anderson, Claires, Cláudio, Cleuzir, Cleverson, Danilo, Edson, Everaldo, Franco, Hilbeth, Jocemar, Lúcia, Maicon, Melissa, Ronie e Vanderlei.

Agradeço também pela atenção e amizade aos professores com os quais convivi no curso, em especial: Fermin Bazan, Ruy Charão, Daniel Kozakevich e Gustavo Costa.

Agradeço ao CNPq pelo suporte financeiro.

Por último, mas de forma especial, deixo minha eterna gratidão e revelação de profunda estima ao meu orientador Igor Mozolevski que entendeu e me orientou em todos os meus problemas e dificuldades conduzindo-me a este grau.

# Sumário

<b>RESUMO</b>	<b>vii</b>
<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Introdução: notações e preliminares</b>	<b>4</b>
1.1 Espaços de funções . . . . .	4
1.1.1 Espaços de funções contínuas . . . . .	4
1.1.2 Espaços de funções integráveis . . . . .	5
1.1.3 Espaços de Sobolev . . . . .	7
1.2 Solução fraca para problemas elípticos . . . . .	12
<b>2 Espaço particionado de Sobolev</b>	<b>22</b>
2.1 Partição de Elementos Finitos . . . . .	22
2.2 Espaço particionado de Sobolev . . . . .	23
<b>3 Formulação fraca em espaço particionado de Sobolev. Método de Galerkin Descontínuo de Elementos Finitos</b>	<b>30</b>
3.1 Problema Modelo . . . . .	31
3.2 Formulações fracas e discretização por elementos finitos . . . . .	36
3.2.1 Método de Elemento Global - GEM . . . . .	37
3.2.2 Método de Galerkin Simétrico com Penalização Interior - SIPG	37
3.2.3 hp-Método de Galerkin Descontínuo de Elementos Finitos - DG	38
3.2.4 Método de Galerkin Não-Simétrico com Penalização Interior - NIPG . . . . .	38
3.3 Equivalência entre os problemas forte e fraco. . . . .	39

3.4	Propriedades das formas bilineares . . . . .	41
3.4.1	Normas que dependem da malha . . . . .	41
3.4.2	Continuidade das formas bilineares . . . . .	41
3.4.3	Coercividade das formas bilineares . . . . .	44
<b>4</b>	<b>Estimativas <i>a priori</i> de erro</b>	<b>49</b>
4.1	Estimativa de erro para os métodos SIPG e NIPG na norma de energia	49
4.2	Estimativa de erro para o método DG na norma de energia . . . . .	52
4.3	Estimativa de erro para o método NIPG na norma de $L_2$ . . . . .	56
4.4	Estimativa de erro para o método SIPG na norma de $L_2$ . . . . .	63
<b>5</b>	<b>Experiências numéricas</b>	<b>65</b>
5.1	Implementação do método de Galerkin descontínuo . . . . .	65
5.2	Problema teste . . . . .	66
5.3	Estudo de taxas de convergência . . . . .	67
5.4	Conclusões . . . . .	75
	<b>Referências bibliográficas</b>	<b>81</b>

# RESUMO

Neste trabalho trataremos do método de Galerkin Descontínuo de Elementos Finitos para equações elípticas.

Vamos apresentar definições e discussões de quatro variações do método de Galerkin Descontínuo e formular estimativas a priori de erro para três delas na norma de energia e em norma de  $L_2$ .

Com o intuito de comprovação das estimativas formuladas, trabalhamos com um exemplo destacando com gráficos a eficácia do método.



# Introdução

As equações em derivadas parciais aparecem na modelagem matemática em várias áreas das ciências, tais como Física, Química e Biologia passando por aplicações em dinâmica dos fluídos, eletromagnetismo, engenharia de materiais, astrofísica, economia, etc. No caso geral, essas equações são muito complicadas de tal modo que encontrar uma solução analítica ou resolver-las usando somente métodos analíticos (por exemplo, aplicando transformada de Laplace e Fourier ou procurando soluções em série de potências) é impossível ou impraticável computacionalmente. Portanto, para resolver equações desse tipo só resta uma única maneira: tentar encontrar a solução numérica que aproxima a desconhecida solução analítica do problema. O método dos Elementos Finitos é uma classe particular dos métodos numéricos que nas últimas décadas ficou muito popular na aproximação de solução de equações em derivadas parciais. Esse método foi introduzido na década de 40 e desde já se desenvolveu numa classe mais geral e mais poderosa de técnicas para solução numérica de equações em derivadas parciais que são amplamente usadas nas engenharias e na matemática.

Recentemente, o método de Galerkin Descontínuo está atraindo cada vez mais o interesse da comunidade científica na área de métodos numéricos. O método de Galerkin Descontínuo de Elementos Finitos (DGFEM) foi introduzido no início dos anos 70 para solução numérica de sistemas hiperbólicos de 1<sup>a</sup> ordem. Ao mesmo tempo, mas de forma independente, este método foi introduzido como um esquema não convencional para aproximação de equações elípticas de 2<sup>a</sup> ordem.

Na última década o DGFEM ganhou um interesse novo estimulado pelas várias vantagens que possui em comparação com o tradicional método de Galerkin de

Elementos Finitos. O DGFEM é conservativo elemento por elemento, suporta facilmente aproximação local de alta ordem, visto que a ordem de aproximação pode variar sobre a malha, abrindo vantagem para a geração de métodos *hp*–adaptativos. Estes métodos também são muito apropriados na aproximação de problemas de advecção-difusão no caso de advecção predominante. Estas e várias outras propriedades do DGFEM, o tornam um forte candidato para um ampla quantidade de problemas que aparecem nas aplicações.

Atualmente, podemos encontrar várias publicações contendo estimativas do tipo *a priori* para vários DGFEMs para problemas de difusão. Estimativas de erro para vários tipos de DGFEMs e para os métodos de Galekin com penalização interior são apresentados na dissertação de Rivière [17] e na publicação de Rivière, Wheeler e Girault [18]. Recentemente, vários outros estudos em estimativas de erro tipo *a priori* para DGFEMs tem aparecido. Temos, por exemplo, os trabalhos de Chen [9] e a análise de Süli, Schawb e Houston [12]. A análise de convergência de outras variantes de DGFEMs, bem como uma revisão histórica destes métodos, pode ser encontradas em [10]. Mais recente e específica, temos a publicação de Arnold, Brezzi, Cockburn e Marini [1] que apresenta uma análise unificada de todos os DGFEMs para equações elípticas de 2<sup>a</sup> ordem.

Neste trabalho, apresentamos uma derivação detalhada de várias *hp*–versões de DGFEM para equações lineares elípticas de 2<sup>a</sup> ordem em domínios de duas dimensões (consideramos como modelo um problema de Poisson para a equação de Laplace). Para todos esses métodos, apresentamos uma análise detalhada das propriedades da forma bilinear associada e apresentamos a derivação de estimativas tipo *a priori* do erro de aproximação do método.

A estrutura do trabalho é a seguinte: no Capítulo 1, faremos uma construção dos espaços de funções que utilizaremos ao longo do trabalho, que vão de espaços de funções contínuas, funções integráveis até espaços de Sobolev. Também definimos a forma fraca de problemas elípticos, bem como o teorema de existência e unicidade de solução. No Capítulo 2, definimos o espaço particionado de Sobolev e enunciamos vários teoremas e lemas relativos a estes espaços passando pela Desigualdade

Multiplicativa de Traço, pela Desigualdade Inversa e Lemas de Aproximação Polinomial. Já no Capítulo 3, construiremos a formulação fraca de problema elíptico em espaços particionados de Sobolev e definiremos o método de Galerkin Descontínuo de Elementos Finitos bem como quatro de suas variantes, duas delas com a introdução de termos de penalização interior. Enunciamos um importante teorema sobre equivalência de forma fraca e forte e por fim mostramos algumas propriedades das formas bilineares associadas a cada método. Estimativa de erro do tipo *a priori*, é o assunto do Capítulo 4. Nesta fase, derivamos estimativas de erro para os métodos estudados na norma de energia e na norma de  $L_2$ . Para finalizar o trabalho, colocamos um capítulo onde estão expostos resultados de experimentações numéricas feitas em um problema modelo. Essas experiências foram feitas com algoritmos implementados em linguagem C++ e tem a finalidade de mostrar, na prática, as taxas de convergência derivadas teoricamente.

# Capítulo 1

## Introdução: notações e preliminares

### 1.1 Espaços de funções

#### 1.1.1 Espaços de funções contínuas

Nesta seção apresentamos os espaços das funções contínuas. Por uma questão de simplificação da notação, vamos introduzir o conceito de multi-índice.

Seja  $\mathbb{N}$  o conjunto dos números inteiros positivos. Chamamos de **multi-índice** a  $n$ -úpla  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ . Também definimos o inteiro positivo  $|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n$  como sendo o tamanho do multi-índice  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ . Assim, usando o multi-índice, podemos simplificar a notação do operador de derivada de alta ordem assim:

$$\frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} = D^\alpha$$

Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto aberto e limitado e seja  $k \in \mathbb{N}$ . Seja também  $\bar{\Omega}$  o fecho de  $\Omega$ . Denotamos por  $C^k(\Omega)$  o conjunto de todas as funções reais contínuas definidas em  $\Omega$  tal que  $D^\alpha u$  é contínua em  $\Omega$  para todo  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  com  $|\alpha| \leq k$ . Assumindo que  $\Omega$  é um conjunto limitado,  $C^k(\bar{\Omega})$  denotará o conjunto de todas as

funções  $u \in C^k(\Omega)$  tal que  $D^\alpha u$  pode ser estendida de forma contínua de  $\Omega$  para  $\bar{\Omega}$ .  $C^k(\bar{\Omega})$  pode ser equipado com a norma:

$$\|u\|_{C^k(\bar{\Omega})} := \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in \Omega} |D^\alpha u(x)|$$

**Observação 1** *Daqui para frente, sempre que fizermos menção a  $\Omega$ ,  $k$  e a  $\alpha$ , estes devem ser entendidos da maneira como foram definidos acima*

**Definição 1.1** *Chamamos de **suporte** de uma função real contínua  $u$  definida em  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ao fecho em  $\Omega$  do conjunto  $\{x \in \Omega : u(x) \neq 0\}$ . Se esse conjunto é compacto e é um subconjunto do interior de  $\Omega$ , então dizemos que  $u$  tem suporte compacto em relação a  $\Omega$ . Usamos a notação  $\text{supp } u$  para designar o suporte compacto de  $u$ .*

Denotamos por  $C_0^k(\Omega)$  o conjunto de todas as  $u \in C^k(\Omega)$  que possuem suporte compacto em  $\Omega$ . Para o caso de  $k = \infty$ , temos:

$$C_0^\infty(\Omega) = \bigcap_{k \geq 0} C_0^k(\Omega) = \mathcal{D}(\Omega)$$

### 1.1.2 Espaços de funções integráveis

Consideraremos agora espaços de funções que são Lebesgue-integráveis. Seja  $p \in \mathbb{R}$ ,  $p \geq 1$ , seja também  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  aberto. Denotamos por  $\tilde{L}_p(\Omega)$  o conjunto das funções reais definidas em  $\Omega$  tal que:

$$\int_{\Omega} |u(x)|^p dx < \infty$$

Consideramos também o conjunto:

$$N = \{u \in \tilde{L}_p(\Omega) : u(x) = 0 \text{ quase sempre em } \Omega\}$$

Pode-se verificar que  $\tilde{L}_p(\Omega)$  é um espaço vetorial e  $N$  é um subespaço vetorial em  $\tilde{L}_p(\Omega)$ . Assim, faz sentido a seguinte definição:

**Definição 1.2**  $L_p(\Omega) = \tilde{L}_p(\Omega)/N$ .

Ou seja,  $L_p(\Omega)$  é o conjunto quociente de  $\tilde{L}_p(\Omega)$  por  $N$ . Entendemos aqui a seguinte relação de equivalência:  $f, g$  pertencem a uma mesma classe de equivalência, se e somente se,  $f - g \in N$ , ou seja  $f - g = 0$  q.s. (quase sempre) em  $\Omega$ , o que implica  $f = g$  q.s. em  $\Omega$ . Em resumo,  $L_p(\Omega)$  é o conjunto das classes de equivalência de funções que são iguais quase sempre.  $L_p(\Omega)$  equipado com a norma

$$\|u\|_{L_p(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

é um espaço de Banach.

Quando  $p = \infty$  temos o espaço  $L_{\infty}(\Omega)$  que consiste de funções  $u$  tal que  $|u(x)|$  tem supremo essencial em  $\Omega$ . Ou seja, existe  $M \geq 0$  tal que  $|u(x)| \leq M$  quase sempre em  $\Omega$ .  $L_{\infty}(\Omega)$  equipado com a norma:

$$\|u\|_{L_{\infty}(\Omega)} = \text{ess. sup}_{x \in \Omega} |u(x)|$$

é um espaço de Banach.

Um caso especial é quando  $p = 2$ . O espaço  $L_2(\Omega)$  pode ser equipado com o produto interno

$$(u, v)_{L_2(\Omega)} = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx;$$

evidentemente,  $\|u\|_{L_2(\Omega)} = \sqrt{(u, u)_{L_2(\Omega)}}$ .

**Lema 1.1 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz)** *Sejam  $u, v \in L_2(\Omega)$ , então  $uv \in L_1(\Omega)$  e*

$$|(u, v)| \leq \|u\|_{L_2(\Omega)} \|v\|_{L_2(\Omega)}.$$

**Corolário 1.1 (Desigualdade triangular)** *Sejam  $u, v \in L_2(\Omega)$ , então  $u + v \in L_2(\Omega)$  e*

$$\|u + v\|_{L_2(\Omega)} \leq \|u\|_{L_2(\Omega)} + \|v\|_{L_2(\Omega)}$$

**Observação 2**  $L_2(\Omega)$  equipado com o produto interno  $(\cdot, \cdot)$  é um espaço de Hilbert.

Vamos colocar aqui um lema sobre desigualdade discreta de Cauchy-Schwarz, que será de grande utilidade no decorrer do trabalho.

**Lema 1.2 (Desigualdade discreta de Cauchy-Schwarz)** *Seja  $\{a_i\}$  e  $\{b_i\}$  duas seqüências de  $N$  números reais. Então é válida a desigualdade:*

$$\sum_{i=1}^N a_i b_i \leq \left( \sum_{i=1}^N a_i^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{i=1}^N b_i^2 \right)^{1/2} \quad (1.1)$$

### 1.1.3 Espaços de Sobolev

Nesta seção introduzimos os espaços de Sobolev. Antes de dar-lhes uma definição precisa, introduzimos o conceito de *derivada fraca*.

**Proposição 1.1 (Fórmula de integração por partes)** *Para quaisquer  $u, v \in C^1(\bar{\Omega})$ , vale*

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = - \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x_i} u dx + \int_{\partial\Omega} \eta_i u v ds, \quad i = 1, \dots, n$$

onde  $\eta_i$  é a  $i$ -ésima componente do vetor  $\eta$ , normal unitário exterior a  $\partial\Omega$ .

**Proposição 1.2 (1ª Fórmula de Green)** *Sejam  $u \in C^2(\bar{\Omega})$  e  $v \in C^1(\bar{\Omega})$ , então vale a fórmula:*

$$\int_{\Omega} (-\Delta u) v dx = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx - \int_{\partial\Omega} (\eta \cdot \nabla u) v ds$$

**Proposição 1.3** *Suponha que  $u \in C^k(\Omega)$  e seja  $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ , então vale a fórmula:*

$$\int_{\Omega} D^{\alpha} u(x) v(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u(x) D^{\alpha} v(x) dx, \quad |\alpha| \leq k, \quad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega)$$

*Demonstração:* Podemos supor, sem perda de generalidade, que  $\alpha_1 \neq 0$ . Usando a fórmula de integração por partes dada acima e o fato de  $v \in \mathcal{D}(\Omega)$  temos,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} v(x) dx &= \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial^{(\alpha_1 - 1) + \dots + \alpha_n} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1 - 1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \right) v(x) dx \\ &= - \int_{\Omega} \left( \frac{\partial^{(\alpha_1 - 1) + \dots + \alpha_n} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1 - 1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \right) \frac{\partial v(x)}{\partial x_1} dx \end{aligned}$$

assim procedendo  $\alpha_1$  vezes a integração por partes em relação a  $x_1$ , temos:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} v(x) dx = (-1)^{\alpha_1} \int_{\Omega} \left( \frac{\partial^{\alpha_2 + \dots + \alpha_n} u(x)}{\partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \right) \frac{\partial^{\alpha_1} v(x)}{\partial x_1^{\alpha_1}} dx$$

fazendo o mesmo processo para todos os  $\alpha_i$ s que são diferentes de 0, teremos que

$$\int_{\Omega} \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} v(x) dx = (-1)^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} \int_{\Omega} u(x) \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} v(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} dx$$

□

**Definição 1.3** O conjunto das funções localmente integráveis,  $L^1_{loc}(\Omega)$  é definido por:

$$L^1_{loc}(\Omega) = \{f : f \in L_1(K) \ \forall \text{ compacto } K \subset \text{int}(\Omega)\}$$

**Definição 1.4** Supomos agora que  $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ . Supomos também que exista uma função  $w_\alpha \in L^1_{loc}(\Omega)$  que satisfaça

$$\int_{\Omega} w_\alpha v(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u(x) D^\alpha v(x) dx, \quad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Então dizemos que  $w_\alpha$  é  $\alpha$ -ésima derivada fraca da função  $u$ . Escrevemos  $w_\alpha = D^\alpha u$ .

Se  $u$  é suficientemente suave, por exemplo  $u \in C^k(\Omega)$ , então sua derivada fraca  $D^\alpha u$  para  $|\alpha| \leq k$  coincide com a derivada parcial no sentido clássico.

**Lema 1.3 (du Bois-Reymond)** Suponha que  $w \in L^1_{loc}(\Omega)$ . Se

$$\int_{\Omega} w(x)v(x) dx = 0 \quad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega)$$

então  $w(x) = 0$  q.s. em  $\Omega$ .

*Demonstração:* Veja [13], página 10.

Para ver que a definição de derivada fraca está correta, devemos mostrar que dada uma função localmente integrável, devemos ter que sua derivada fraca, se existir, é única. Essa constatação é direta usando o lema de du Bois Reymond. Suponha que para uma  $u \in L^1_{loc}(\Omega)$  existam duas derivadas fracas,  $\dot{u}_1$  e  $\dot{u}_2$ . Ou seja,

$$\int_{\Omega} \dot{u}_1 v(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u(x) D^\alpha v(x) dx, \quad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega) \quad (1.2)$$

e

$$\int_{\Omega} \dot{u}_2 v(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u(x) D^\alpha v(x) dx, \quad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega) \quad (1.3)$$

Subtraindo a equação (1.3) da equação (1.2), temos

$$\int_{\Omega} (\dot{u}_1 - \dot{u}_2)v(x) dx = 0,$$

o que implica, pelo lema, que  $\dot{u}_1 - \dot{u}_2 = 0$  q.s. em  $\Omega \implies \dot{u}_1 = \dot{u}_2$  q.s. em  $\Omega$



**Definição 1.5** Seja  $k \in \mathbb{N}$  e  $p \in [1, \infty]$ . Definimos

$$W_p^k(\Omega) = \{u \in L_p(\Omega) : D^\alpha u \in L_p(\Omega), |\alpha| \leq k\}$$

$W_p^k(\Omega)$  é chamado de **Espaço de Sobolev de ordem  $k$**

O espaço  $W_p^k(\Omega)$  é equipado com a norma de Sobolev:

$$\|u\|_{W_p^k(\Omega)} = \left( \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L_p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}} \text{ quando } 1 \leq p < \infty$$

e

$$\|u\|_{W_\infty^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L_\infty(\Omega)} \text{ quando } p = \infty.$$

Consideramos também a semi-norma,

$$|u|_{W_p^k(\Omega)} = \left( \sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha u\|_{L_p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}} \text{ quando } 1 \leq p < \infty,$$

assim podemos escrever a norma da forma:

$$\|u\|_{W_p^k(\Omega)} = \left( \sum_{j=0}^k |u|_{W_p^j(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Da mesma maneira,

$$|u|_{W_\infty^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha u\|_{L_\infty(\Omega)}$$

o que permite escrever,

$$\|u\|_{W_\infty^k(\Omega)} = \sum_{j=0}^k |u|_{W_\infty^j(\Omega)}$$

Um caso especial é quando  $p = 2$ , o espaço  $W_2^k(\Omega)$  é um espaço de Hilbert com o produto interno:

$$(u, v)_{W_2^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} (D^\alpha u, D^\alpha v).$$

Para este caso usamos uma notação especial,  $H^k(\Omega) = W_2^k(\Omega)$ . Com maior freqüência utilizaremos os espaços  $H^1(\Omega)$  e  $H^2(\Omega)$ . Usando as definições de norma e semi-norma em  $W_2^1(\Omega)$ , temos

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L_2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_j} \in L_2(\Omega), j = 1, \dots, n \right\}$$

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left\{ \|u\|_{L_2(\Omega)}^2 + \sum_{j=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 \right\}^{1/2}$$

$$|u|_{H^1(\Omega)} = \left\{ \sum_{j=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 \right\}^{1/2}$$

Da mesma forma,

$$H^2(\Omega) = \left\{ u \in L_2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_j} \in L_2(\Omega), \quad j = 1, \dots, n, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in L_2(\Omega), \quad i, j = 1, \dots, n \right\}$$

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} = \left\{ \|u\|_{L_2(\Omega)}^2 + \sum_{j=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 + \sum_{i,j=1}^n \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 \right\}^{1/2}$$

$$|u|_{H^2(\Omega)} = \left\{ \sum_{i,j=1}^n \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 \right\}^{1/2}$$

**Definição 1.6** Chamaremos de  $H_0^1(\Omega)$  o fecho de  $C_0^\infty(\Omega)$  na norma de  $H^1(\Omega)$ .

Pode-se mostrar também que sendo  $\partial\Omega$  a fronteira de  $\Omega$  suficientemente suave, então  $H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) : u = 0 \text{ em } \partial\Omega\}$ . Observamos que  $H_0^1(\Omega)$  é um espaço de Hilbert com a mesma norma e produto interno de  $H^1(\Omega)$ .

**Definição 1.7** Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto aberto, conexo e limitado e seja  $\partial\Omega$  sua fronteira. Se  $n \geq 2$ , dizemos que  $\partial\Omega$  é uma fronteira **Lipschitziana**, se existe uma cobertura aberta finita  $U_1, \dots, U_m$  de  $\partial\Omega$  tal que para  $j = 1, \dots, m$ , temos:

1.  $\partial\Omega \cap U_j$  é o gráfico de uma função Lipschitz  $g_j$  e,
2.  $\Omega \cap U_j$  está em um lado desta curva.

**Lema 1.4 (Desigualdade de Poincaré-Friedrich)** Suponha  $\partial\Omega$  Lipschitziana e seja  $u \in H_0^1(\Omega)$ . Então existe uma constante  $c_\star(\Omega)$ , independente de  $u$ , tal que

$$\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \leq c_\star \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right|^2 dx \quad (1.4)$$

ou de outra forma:

$$\|u\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq c_\star |u|_{H^1(\Omega)}^2$$

*Demonstração:* Devido ao fato de  $C_0^\infty(\Omega)$  ser denso em  $H_0^1(\Omega)$ , basta mostrar que a desigualdade vale para  $u \in C_0^\infty(\Omega)$ . Para simplificar ainda mais, vamos considerar  $\Omega = (a, b) \times (c, d) \subset \mathbb{R}^2$ , visto que sempre podemos ter  $a, b, c$  e  $d \in \mathbb{R}$  tais que  $\Omega \subset (a, b) \times (c, d)$ . A demonstração para o caso geral ( $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ) é análoga. É verdade que:

$$u(x, y) = u(a, y) + \int_a^x \frac{\partial u}{\partial x}(\xi, y) d\xi = \int_a^x \frac{\partial u}{\partial x}(\xi, y) d\xi, \quad c < y < d.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |u(x, y)|^2 dx dy &= \int_a^b \int_c^d |u(x, y)|^2 dx dy \\ &= \int_a^b \int_c^d \left| \int_a^x \frac{\partial u}{\partial x}(\xi, y) d\xi \right|^2 dx dy \quad \text{Usando Cauchy-Schwarz,} \\ &\leq \int_a^b \int_c^d (x - a) \left( \int_a^x \left| \frac{\partial u}{\partial x}(\xi, y) \right|^2 d\xi \right) dx dy \\ &\leq \int_a^b \int_c^d (x - a) \left( \int_a^b \left| \frac{\partial u}{\partial x}(\xi, y) \right|^2 d\xi \right) dx dy \\ &= \int_a^b (x - a) dx \left( \int_c^d \int_a^b \left| \frac{\partial u}{\partial x}(\xi, y) \right|^2 d\xi dy \right) \\ &= \frac{1}{2}(b - a)^2 \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) \right|^2 dx dy \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\frac{2}{(b - a)^2} \int_{\Omega} |u(x, y)|^2 dx dy \leq \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) \right|^2 dx dy$$

Analogamente,

$$\frac{2}{(d - c)^2} \int_{\Omega} |u(x, y)|^2 dx dy \leq \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \right|^2 dx dy$$

Agora somando as duas equações acima:

$$\left( \frac{2}{(d - c)^2} + \frac{2}{(b - a)^2} \right) \int_{\Omega} |u(x, y)|^2 dx dy \leq \int_{\Omega} \left( \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^2 \right) dx dy,$$

o que implica

$$\int_{\Omega} |u(x, y)|^2 dx dy \leq c_{\star} \int_{\Omega} \left( \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^2 \right) dx dy,$$

onde  $c_{\star} = \left( \frac{2}{(d - c)^2} + \frac{2}{(b - a)^2} \right)^{-1}$ .

## 1.2 Solução fraca para problemas elípticos

Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto aberto e limitado. Considere a equação diferencial parcial linear de segunda ordem:

$$-\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left( a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u = f(x), \quad x \in \Omega, \quad (1.5)$$

onde os coeficientes  $a_{ij}$ ,  $b_i$ ,  $c$  e  $f$  devem satisfazer:

$$\begin{aligned} a_{ij} &\in C^1(\overline{\Omega}), \quad ij = 1, \dots, n; \\ b_i &\in C(\overline{\Omega}), \quad i = 1, \dots, n; \\ c &\in C(\overline{\Omega}); \\ f &\in C(\overline{\Omega}), \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \tilde{c} \sum_{i=1}^n \xi_i^2, \quad \forall \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n, \quad x \in \overline{\Omega}; \quad (1.7)$$

onde  $\tilde{c}$  é uma contante positiva que não depende de  $x$  e  $\xi$ . A condição (1.7) é usualmente referida como *Elípticidade uniforme* e (1.5) é chamado de *Equação elíptica*.

A equação (1.5) associada a alguma aplicação, geralmente aparece junto com algumas das seguintes condições de fronteira:

1.  $u = g$  em  $\partial\Omega$  (Condição de Dirichlet);
2.  $\frac{\partial u}{\partial \eta} = g$ , onde  $\eta$  denota o vetor normal unitário exterior a  $\partial\Omega$  (Condição de Neumann),

sendo  $g$  uma função definida em  $\partial\Omega$ .

Na maioria das aplicações físicas aparecem as duas condições, parte da fronteira com condição de Dirichlet e parte com condição de Neumann.

Consideraremos para análise o problema de valor de fronteira homogêneo de Dirichlet:

$$-\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left( a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u = f(x), \quad x \in \Omega, \quad (1.8)$$

$$u = 0 \text{ em } \partial\Omega \quad (1.9)$$

com  $a_{ij}$ ,  $b_i$ ,  $c$  e  $f$  satisfazendo (1.6)

Uma função  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$  satisfazendo (1.8) e (1.9) é chamada de **Solução Clássica** para o problema. A teoria das equações diferenciais parciais garante que (1.8) e (1.9) tem uma única solução clássica contanto que os coeficientes envolvidos sejam suficientemente suaves. Sabemos que em muitas aplicações esta suavidade nem sempre é garantida, o que torna a teoria clássica insuficiente. Para contornar essa insuficiência, vamos usar o conceito de derivada fraca em  $u$  para generalizar a noção de solução. Suponha que  $u$  é uma solução clássica de (1.8) e (1.9). Então multiplicando (1.8) por uma  $v \in C_0^1(\Omega)$  qualquer e integrando sobre  $\Omega$ , temos:

$$-\sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) v dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx + \int_{\Omega} c(x) u v dx = \int_{\Omega} f(x) v dx \quad (1.10)$$

A integral que está dentro do primeiro somatório, usando uma integração por partes se torna:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) v dx = - \int_{\Omega} \left( a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \frac{\partial v}{\partial x_j} dx + \int_{\partial\Omega} \eta_i a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx,$$

mas  $v \in C_0^1(\Omega)$ , então a integral sobre  $\partial\Omega$  se anula, assim retornando na equação, chegamos a:

$$\sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx + \int_{\Omega} c(x) u v dx = \int_{\Omega} f(x) v dx \quad (1.11)$$

$$\forall v \in C_0^1(\Omega)$$

Observamos agora que para essa igualdade estar bem definida, não há a necessidade de  $u \in C^2(\Omega)$ : basta que  $u$  e  $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L_2(\Omega)$  para  $i = 1, \dots, n$ . Desta forma, seria razoável esperar que  $u$  pertença a  $H^1(\Omega)$ . Mas devemos lembrar que  $u$  deverá satisfazer a condição de Dirichlet imposta no problema, assim procuraremos uma  $u$  que esteja em  $H_0^1(\Omega)$ . Com esta consideração, vamos reformular o problema: encontrar  $u \in H_0^1(\Omega)$  que verifique (1.11). Observe que a igualdade acima continua fazendo sentido se ao invés de tomarmos  $v \in C_0^1(\Omega)$  tomarmos  $v \in H_0^1(\Omega)$  ainda que só temos:  $C_0^1(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$ . Também,  $a_{ij}$ ,  $b_i$  e  $c$  podem ter relaxadas as condições neles impostas anteriormente. É suficiente que estes pertençam à  $L_{\infty}(\Omega)$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ .

**Definição 1.8** *Seja  $a_{ij}, b_i, c \in L_\infty(\Omega)$ ,  $i, j = 1, \dots, n$  e seja  $f \in L_2(\Omega)$ . Uma função  $u \in H_0^1(\Omega)$  que satisfaz*

$$\sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx + \int_{\Omega} c(x)uv dx = \int_{\Omega} f(x)v dx \quad (1.12)$$

$$\forall v \in H_0^1(\Omega)$$

é chamada **Solução Fraca** de (1.8), (1.9). Todas as derivadas em (1.12) são entendidas no sentido fraco.

**Observação 3** *Se  $u$  é uma solução clássica de (1.8), (1.9), então  $u$  é também uma solução fraca de (1.8), (1.9). Mas a recíproca não é verdadeira. Discutiremos esta questão mais adiante.*

A título de conveniência para com as construções que se seguem e também por simplificação, usaremos a notação:

$$a(w, v) = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij}(x) \frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} b_i(x) \frac{\partial w}{\partial x_i} v dx + \int_{\Omega} c(x)wv dx \quad (1.13)$$

$$l(v) = \int_{\Omega} f(x)v(x) dx. \quad (1.14)$$

Agora o problema envolvendo a equação (1.12) pode ser escrito como:

$$\text{Encontrar } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tal que } a(u, v) = l(v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad (1.15)$$

A existência de única solução para este problema é estabelecida usando o seguinte teorema:

**Teorema 1.1 (Lax - Milgram)** *Seja  $V$  espaço de Hilbert equipado com a norma  $\|\cdot\|_V$ . Seja  $a(\cdot, \cdot)$  um funcional bilinear em  $V \times V$  tal que:*

(i)  $\exists c_0 > 0$  tal que  $\forall v \in V$ ,  $a(v, v) \geq c_0 \|v\|_V^2$ ; (*Propriedade Coerciva*)

(ii)  $\exists c_1 > 0$  tal que  $\forall v, w \in V$ ,  $|a(w, v)| \leq c_1 \|w\|_V \|v\|_V$ ; (*Continuidade*) e

(iii) seja  $l(v)$  um funcional linear em  $V$  que satisfaça:  $\exists c_2 > 0$  tal que  $\forall v \in V$ ,

$$l(v) \leq c_2 \|v\|_V.$$

Então existe único  $u \in V$  tal que:

$$a(u, v) = l(v) \quad \forall v \in V.$$

*Demonstração:* Veja [7], página 60.

Vamos usar este teorema para mostrar a existência e unicidade de solução para (1.15). Devemos então, verificar se nosso problema satisfaz as hipóteses do teorema.

Já observamos anteriormente que  $H_0^1(\Omega)$  é espaço de Hilbert com produto interno:

$$(w, v)_{H^1(\Omega)} = \int_{\Omega} wv \, dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx,$$

com norma associada:  $\|w\|_{H^1(\Omega)} = (w, w)_{H^1(\Omega)}^{1/2}$ . Assim, fazendo  $V = H_0^1(\Omega)$ , devemos verificar se  $a(\cdot, \cdot)$  e  $l(\cdot)$  satisfazem as hipóteses do teorema.

Primeiro vamos mostrar a bilinearidade de  $a(\cdot, \cdot)$  e a linearidade de  $l(\cdot)$  em  $H_0^1(\Omega)$ . Para qualquer  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $w_1, w_2$  e  $v \in H_0^1(\Omega)$ , temos:

$$\begin{aligned} a(\alpha w_1 + \beta w_2, v) &= \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij}(x) \frac{\partial(\alpha w_1 + \beta w_2)}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} \, dx + \\ &+ \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} b_i(x) \frac{\partial(\alpha w_1 + \beta w_2)}{\partial x_i} v \, dx + \int_{\Omega} c(x)(\alpha w_1 + \beta w_2)v \, dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a(\alpha w_1 + \beta w_2, v) &= \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \left( \alpha a_{ij}(x) \frac{\partial w_1}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + \beta a_{ij}(x) \frac{\partial w_2}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} \right) \, dx + \\ &+ \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left( \alpha b_i(x) \frac{\partial w_1}{\partial x_i} v + \beta b_i(x) \frac{\partial w_2}{\partial x_i} v \right) \, dx + \\ &+ \int_{\Omega} (\alpha c(x)w_1v + \beta c(x)w_2v) \, dx \\ &= \alpha a(w_1, v) + \beta a(w_2, v). \end{aligned}$$

Analogamente, se mostra que  $a(\cdot, \cdot)$  é linear na segunda entrada fixando a primeira. É fácil ver também que  $l(\cdot)$  é linear. Vamos agora mostrar a continuidade de  $a(\cdot, \cdot)$

em  $H_0^1(\Omega)$ . Aplicando a desigualdade de Cauchy - Schwarz, temos:

$$\begin{aligned}
|a(w, v)| &\leq \left| \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij}(x) \frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx \right| + \left| \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} b_i(x) \frac{\partial w}{\partial x_i} v dx \right| + \left| \int_{\Omega} c(x) w v dx \right| \\
&\leq \sum_{i,j=1}^n \max_{x \in \bar{\Omega}} |a_{ij}(x)| \left| \int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx \right| + \\
&+ \sum_{i=1}^n \max_{x \in \bar{\Omega}} |b_i(x)| \left| \int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial x_i} v dx \right| + \max_{x \in \bar{\Omega}} |c(x)| \left| \int_{\Omega} w(x) v(x) dx \right| \\
&\leq \max_{1 \leq i, j \leq n} \{ \max_{x \in \bar{\Omega}} |a_{ij}(x)| \} \sum_{i,j=1}^n \left| \int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx \right| + \\
&+ \max_{1 \leq i \leq n} \{ \max_{x \in \bar{\Omega}} |b_i(x)| \} \sum_{i=1}^n \left| \int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial x_i} v dx \right| + \\
&+ \max_{x \in \bar{\Omega}} |c(x)| \left| \int_{\Omega} w(x) v(x) dx \right| \\
&\leq \hat{c} \left\{ \sum_{i,j=1}^n \left| \int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx \right| + \sum_{i=1}^n \left| \int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial x_i} v dx \right| + \left| \int_{\Omega} w(x) v(x) dx \right| \right\} \\
&\leq \hat{c} \left\{ \sum_{i,j=1}^n \left( \int_{\Omega} \left| \frac{\partial w}{\partial x_i} \right|^2 dx \right)^{1/2} \left( \int_{\Omega} \left| \frac{\partial v}{\partial x_j} \right|^2 dx \right)^{1/2} + \right. \\
&+ \sum_{i=1}^n \left( \int_{\Omega} \left| \frac{\partial w}{\partial x_i} \right|^2 dx \right)^{1/2} \left( \int_{\Omega} |v(x)|^2 dx \right)^{1/2} + \\
&+ \left. \left( \int_{\Omega} |w(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left( \int_{\Omega} |v(x)|^2 dx \right)^{1/2} \right\}.
\end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{aligned}
|a(w, v)| &\leq \hat{c} \left\{ \sum_{i=1}^n \left( \int_{\Omega} \left| \frac{\partial w}{\partial x_i} \right|^2 dx \right)^{1/2} \sum_{j=1}^n \left( \int_{\Omega} \left| \frac{\partial v}{\partial x_j} \right|^2 dx \right)^{1/2} + \right. \\
&+ \sum_{i=1}^n \left( \int_{\Omega} \left| \frac{\partial w}{\partial x_i} \right|^2 dx \right)^{1/2} \left( \int_{\Omega} |v(x)|^2 dx \right)^{1/2} + \\
&+ \left( \int_{\Omega} |w(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left( \int_{\Omega} |v(x)|^2 dx \right)^{1/2} + \\
&+ \left. \left( \int_{\Omega} |w(x)|^2 dx \right)^{1/2} \sum_{j=1}^n \left( \int_{\Omega} \left| \frac{\partial v}{\partial x_j} \right|^2 dx \right)^{1/2} \right\} \\
&\leq \hat{c} \left\{ \left( \int_{\Omega} |w(x)|^2 dx \right)^{1/2} + \sum_{i=1}^n \left( \int_{\Omega} \left| \frac{\partial w}{\partial x_i} \right|^2 dx \right)^{1/2} \right\} \\
&\times \left\{ \left( \int_{\Omega} |v(x)|^2 dx \right)^{1/2} + \sum_{j=1}^n \left( \int_{\Omega} \left| \frac{\partial v}{\partial x_j} \right|^2 dx \right)^{1/2} \right\}, \quad (1.16)
\end{aligned}$$



onde  $\hat{c} = \max \left\{ \max_{1 \leq i, j \leq n} \{ \max_{x \in \Omega} |a_{ij}(x)| \}, \max_{1 \leq i \leq n} \{ \max_{x \in \Omega} |b_i(x)| \}, \max_{x \in \Omega} |c(x)| \right\}$ .

Vamos usar a proposição seguinte para fechar a demonstração da continuidade da forma bilinear  $a(\cdot, \cdot)$ .

**Proposição 1.4** *Seja  $d \in \mathbb{N}$ . Então  $\forall x \in \mathbb{R}^d$ ,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_d)$ , temos:*

$$\sum_{i=1}^d |x_i| \leq \sqrt{d} \left( \sum_{i=1}^d |x_i|^2 \right)^{1/2}$$

*Demonstração:* Usando desigualdade discreta de Cauchy-Schwarz, temos:

$$\sum_{i=1}^d |x_i| = \sum_{i=1}^d 1 \cdot |x_i| \leq \left( \sum_{i=1}^d 1^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{i=1}^d |x_i|^2 \right)^{1/2} = \sqrt{d} \left( \sum_{i=1}^d |x_i|^2 \right)^{1/2}$$

□

Agora usando a proposição acima em (1.16) com  $d = n + 1$ , temos:

$$\begin{aligned} |a(w, v)| &\leq \hat{c}(n+1) \left\{ \int_{\Omega} |w(x)|^2 dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial w}{\partial x_i} \right|^2 dx \right\}^{1/2} \\ &\times \left\{ \int_{\Omega} |v(x)|^2 dx + \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial v}{\partial x_j} \right|^2 dx \right\}^{1/2} \end{aligned}$$

Desta forma, fazendo  $c_1 = \hat{c}(n+1)$ , chegamos que:  $|a(w, v)| \leq c_1 \|w\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}$ , o que corresponde ao item (ii).

Vamos agora mostrar a continuidade de  $l(\cdot)$ . Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} |l(v)| &= \left| \int_{\Omega} f(x)v(x) dx \right| \leq \left( \int_{\Omega} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left( \int_{\Omega} |v(x)|^2 dx \right)^{1/2} \\ &\leq \left( \int_{\Omega} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left( \int_{\Omega} |v(x)|^2 dx + \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial v}{\partial x_j} \right|^2 dx \right)^{1/2} \\ &= \|f\|_{L_2(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \end{aligned}$$

para toda  $v \in H_0^1(\Omega)$ . Fazendo  $c_2 = \|f\|_{L_2(\Omega)}$ , temos (iii).

Resta somente verificar a coercividade de  $a(\cdot, \cdot)$ . A partir de (1.7), obtemos que:

$$a(v, v) \geq \tilde{c} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^2 dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} b_i \frac{\partial v}{\partial x_i} v dx + \int_{\Omega} c(x)|v|^2 dx.$$

Note que  $\frac{\partial v}{\partial x_i} v = \frac{1}{2} \frac{\partial(v^2)}{\partial x_i}$ , assim fazendo esta substituição na segunda integral do lado direito na desigualdade acima, chegamos:

$$a(v, v) \geq \tilde{c} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^2 dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} b_i \frac{1}{2} \frac{\partial(v^2)}{\partial x_i} dx + \int_{\Omega} c(x) |v|^2 dx,$$

integrando por partes esta mesma integral, obtemos:

$$a(v, v) \geq \tilde{c} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^2 dx - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial b_i}{\partial x_i} |v|^2 dx + \int_{\Omega} c(x) |v|^2 dx,$$

observe que esta integração por partes envolveu derivada de  $b_i$ , por isso vamos fortalecer um pouco o assumido em  $b_i$ , ou seja, vamos pedir que  $b_i \in W_{\infty}^1(\Omega)$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Continuando,

$$a(v, v) \geq \tilde{c} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^2 dx + \int_{\Omega} \left( c(x) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial b_i}{\partial x_i} \right) |v|^2 dx.$$

Suponha que  $b_i$  e  $c(x)$  satisfaçam:

$$c(x) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial b_i}{\partial x_i} \geq 0, \quad x \in \bar{\Omega} \quad (1.17)$$

Com isso, temos:

$$a(v, v) \geq \tilde{c} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^2 dx \quad (1.18)$$

Devido ao lema de Poincaré-Friedrich, chegamos:

$$\begin{aligned} a(v, v) &\geq \tilde{c} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^2 dx \geq \tilde{c} \frac{1}{c_{\star}} \int_{\Omega} |v|^2 dx \\ a(v, v) &\geq \frac{\tilde{c}}{c_{\star}} \int_{\Omega} |v|^2 dx \end{aligned} \quad (1.19)$$

Somando (1.18) e (1.19), obtemos:

$$a(v, v) \geq c_0 \left( \int_{\Omega} |v|^2 dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^2 dx \right) = c_0 \|v\|_{H^1(\Omega)}^2,$$

onde  $c_0 = \frac{\tilde{c}}{1+c_{\star}}$ . Verificadas as hipóteses do teorema de Lax-Milgram, podemos afirmar que o problema (1.15) possui única solução  $u \in H_0^1(\Omega)$ , ou seja, o problema (1.8) - (1.9) tem única solução fraca. O teorema a seguir resume todas essas considerações:

**Teorema 1.2** *Seja  $a_{ij}(x) \in L_\infty(\Omega)$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ ;  $b_i(x) \in W_\infty^1(\Omega)$ ,  $i = 1, \dots, n$ ;  $c(x) \in L_\infty(\Omega)$ ,  $f(x) \in L_2(\Omega)$ . Suponha que valem (1.7) e (1.17). Então o problema de valor de fronteira (1.8) - (1.9) tem única solução fraca  $u \in H_0^1(\Omega)$ . Além disso, vale também:*

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{1}{c_0} \|f\|_{L_2(\Omega)} \quad (1.21)$$

*Demonstração:* A existência e unicidade já foi mostrada utilizando o teorema de Lax-Milgram, resta somente demonstrar a desigualdade acima. Pela coercividade de  $a(\cdot, \cdot)$  e desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos

$$\begin{aligned} c_0 \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 &\leq a(u, u) = l(u) = (f, u)_{L_2(\Omega)} \\ &\leq |(f, u)_{L_2(\Omega)}| \leq \|f\|_{L_2(\Omega)} \|u\|_{L_2(\Omega)} \\ &\leq \|f\|_{L_2(\Omega)} \|u\|_{H^1(\Omega)}, \end{aligned}$$

ou seja,  $c_0 \|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L_2(\Omega)}$

□

O teorema anterior menciona também sobre a dependência contínua da solução do problema com o lado direito da equação. De fato, sendo  $u_1$  e  $u_2$  soluções fracas em  $H_0^1(\Omega)$  de (1.8), (1.9) com respectivos lados direitos:  $f_1$  e  $f_2$  em  $L_2(\Omega)$ , então  $u_1 - u_2$  é solução fraca de (1.8), (1.9) com lado direito  $f_1 - f_2 \in L_2(\Omega)$ . Agora usando (1.21), temos que:

$$\|u_1 - u_2\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{1}{c_0} \|f_1 - f_2\|_{L_2(\Omega)}$$

**Teorema 1.3 (Desigualdade de Sobolev)** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  com  $\partial\Omega$  Lipchitziana, seja  $k$  um inteiro positivo e seja  $p \in \mathbb{R}$  com  $1 \leq p \leq \infty$  tal que*

$$k \geq n \quad \text{quando } p = 1$$

$$k > n/p \quad \text{quando } p > 1$$

*Então existe uma constante  $C$  tal que para toda  $u \in W_p^k(\Omega)$*

$$\|u\|_{L_\infty(\Omega)} \leq C \|u\|_{W_p^k(\Omega)}$$

*Além disso, existe uma função contínua em  $L_\infty(\Omega)$  na classe de equivalência de  $u$ .*

*Demonstração:* Veja [7], página 32

**Corolário 1.2** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  com  $\partial\Omega$  Lipschitziana, sejam  $k$  e  $m$  inteiros positivos satisfazendo  $m < k$  e seja  $p \in \mathbb{R}$  com  $1 \leq p \leq \infty$  tal que*

$$k - m \geq n \quad \text{quando} \quad p = 1$$

$$k - m > n/p \quad \text{quando} \quad p > 1$$

*Então, existe uma constante  $C$  tal que para toda  $u \in W_p^k(\Omega)$*

$$\|u\|_{W_\infty^m(\Omega)} \leq C \|u\|_{W_p^k(\Omega)}$$

*Alem disso, existe uma função que é  $C^m(\Omega)$  em  $L_p(\Omega)$  na classe de equivalência de  $u$ .*

*Demonstração:* Veja [7], página 32

Constantemente estamos nos deparando com funções avaliadas na fronteira dos domínios onde elas estão definidas, ou seja a restrição dessas funções a fronteira. Ao longo do trabalho vamos precisar muito de resultados sobre o comportamento de funções nessas condições, e é assim que introduzimos a idéia de *Traço de uma função*.

Seja  $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$  então o traço de  $u$  é definido como:

$$\gamma u = u|_{\partial\Omega}$$

Como  $C^\infty(\overline{\Omega})$  é denso em  $H^1(\Omega)$ , podemos estender a aplicação  $\gamma$  de forma contínua para  $H^1(\Omega)$ .

**Teorema 1.4 (Traço)** *Seja  $\Omega$  um domínio com fronteira Lipschitziana e  $p$  satisfazendo  $1 \leq p \leq \infty$ . Então existe uma constante  $C$  tal que:*

$$\|u\|_{L_p(\partial\Omega)} \leq C \|u\|_{L_p(\Omega)}^{1/p} \|u\|_{W_p^1(\Omega)}^{1/p}, \quad \forall u \in W_p^1(\Omega).$$

Usaremos com bastante freqüência um caso particular do teorema, quando  $p = 2$ .

Assim a desigualdade acima se torna:

$$\|u\|_{L_2(\partial\Omega)} \leq C \|u\|_{L_2(\Omega)}^{1/2} \|u\|_{H^1(\Omega)}^{1/2}, \quad \forall u \in H^1(\Omega).$$

É fácil ver que  $\|u\|_{L_2(\Omega)} \leq \|u\|_{H^1(\Omega)}$ . Por fim temos:

$$\|u\|_{L_2(\partial\Omega)} \leq C\|u\|_{H^1(\Omega)}, \quad \forall u \in H^1(\Omega).$$

Agora vamos colocar um resultado sobre regularidade de solução da equação elíptica de segunda ordem.

**Teorema 1.5** *Seja  $L$  um operador da forma,*

$$Lu = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial (b_i(x)u)}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^n c_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + d(x)u.$$

*Suponha que vale (1.7). Seja  $u \in H^1(\Omega)$  uma solução fraca do problema  $Lu = f$  em  $\Omega$ , onde  $a_{ij}, b_i, c_i, d \in L_\infty(\Omega)$ ,  $i, j = 1, \dots, n$  são uniformemente Lipschitz contínuas em  $\Omega$ ,  $i = 1, \dots, n$  e  $f \in L_2(\Omega)$ . Então para qualquer subdomínio  $\Omega' \subset\subset \Omega$  tem-se  $u \in H^2(\Omega')$  e existe uma constante  $C$  que depende de  $n, \tilde{c}, \Omega', a_{ij}, b_i, c_i$  e  $d$ , tal que*

$$\|u\|_{H^2(\Omega')} \leq C(\|u\|_{H^1(\Omega)} + \|f\|_{L_2(\Omega)})$$

*Alem disso,  $u$  satisfaz quase sempre em  $\Omega$  a equação,*

$$Lu = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial a_{ji}}{\partial x_j} + b_i + c_i \right) \frac{\partial u}{\partial x_i} + \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial b_i}{\partial x_i} + d \right) u = f$$

*Demonstração:* Veja [11], página 183.

# Capítulo 2

## Espaço particionado de Sobolev

### 2.1 Partição de Elementos Finitos

No decorrer deste capítulo consideraremos um domínio  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , aberto e limitado com fronteira  $\partial\Omega$  Lipchitziana. Denotamos por  $\Gamma_D$  a parte da fronteira sobre a qual temos condições de Dirichlet e  $\Gamma_N$  onde temos condições de Neumann. Essa divisão da fronteira deve ser tal que  $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$  e  $\bar{\Gamma}_D \cup \bar{\Gamma}_N = \partial\Omega$ .

Seja  $\mathcal{P}_h$  uma partição de  $\Omega$ , ou seja,  $\mathcal{P}_h$  é um conjunto finito de subdomínios  $K$  tal que:

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{K_i \in \mathcal{P}_h} \bar{K}_i, \quad \text{e} \quad K_i \cap K_j = \emptyset, \quad i \neq j$$

Vamos definir agora dois coeficientes que conterão informações sobre a forma e tamanho de um elemento  $K$  da partição  $\mathcal{P}_h$ . São eles:  $h_K$  e  $\rho_K$ , cuja definição é:

$$h_K = \text{diâmetro de } K$$

$$\rho_K = \sup\{\text{diâmetro de } \mathcal{B}; \mathcal{B} \text{ é bola contida em } K\}$$

É importante observar que estas bolas mencionadas na definição de  $\rho_K$  são em relação a norma Euclidiana.

Assim, cada elemento  $K$  tem seu  $h_K$  e seu  $\rho_K$ . Pelo fato de  $\mathcal{P}_h$  possuir número finito de elementos  $K$ , vamos chamar de  $h$  o maior dos  $h_K$  em  $\mathcal{P}_h$ , ou seja:

$$h = \max_{K \in \mathcal{P}_h} h_K$$

Para evitar a degeneração de elementos  $K$  de uma partição  $\mathcal{P}_h$  quando  $h$  tende para zero, faz-se necessário a definição:

**Definição 2.1** A família  $\{\mathcal{P}_h\}$  de partições  $\mathcal{P}_h$  é dita ter **Forma regular** quando  $h \rightarrow 0$ , se existe um número  $\varrho > 0$  que independe de  $h$  e de  $K$  tal que:

$$\frac{h_K}{\rho_K} \leq \varrho, \quad \forall K \in \mathcal{P}_h.$$

Assume-se que todas as partições deste trabalho tem Forma regular.

Com cada elemento  $K$  associamos a sua fronteira  $\partial K$  e, nesta fronteira, associamos o vetor unitário exterior que será denotado por  $\mathbf{n}$ .

Dada uma partição  $\mathcal{P}_h$ , denotaremos o conjunto das arestas em  $\mathcal{P}_h$  por  $\mathcal{E}_h = \{\gamma_l\}$  com  $l = 1, \dots, N_h$ , onde  $N_h$  é um inteiro que depende de  $h$ . Essas arestas podem estar em  $\partial\Omega$  ou no interior de  $\Omega$ , assim tem sentido a definição:  $\Gamma_{int} = \left( \bigcup_{l=1}^{N_h} \gamma_l \right) \setminus \partial\Omega$ , ou seja, as arestas que estão no interior de  $\Omega$ .

Na Figura 2.1 podemos ver  $K_i$  e  $K_j$  contidos no interior de  $\Omega$  e também um  $K$  adjacente a  $\partial\Omega$ . Vemos também  $\gamma_{ij} \subset \Gamma_{int}$  denotando a aresta localizada entre os elementos  $K_i$  e  $K_j$ , onde por convenção temos  $i > j$ . Em cada aresta  $\gamma$ , associamos o vetor normal unitário exterior  $\mathbf{n}$ . Se  $\gamma$  estiver associado com  $K_i$  adjacente a  $\partial\Omega$ , ou seja,  $\gamma \subset \Gamma_D \cup \Gamma_N$ , então o vetor normal unitário é definido como  $\mathbf{n} = \mathbf{n}|_i$ . Para um  $\gamma_{ij} \subset \Gamma_{int}$ , usando a convenção  $i > j$ ,  $\mathbf{n}$  é escolhido como o vetor normal unitário exterior a  $K_i$ , ou seja  $\mathbf{n}|_i$ . Observando ainda a Figura 2.1, observa-se que  $\mathbf{n}|_i = -\mathbf{n}|_j$ .

## 2.2 Espaço particionado de Sobolev

De maneira análoga como fizemos com  $H^1(\Omega)$  e  $H^2(\Omega)$ , definimos  $H^s(\Omega)$  com  $s$  um inteiro positivo. Definimos também  $H^s(S)$ , onde  $S$  é um aberto e  $S \subset \Omega$  pode ser todo  $\Omega$ ,  $K \in \mathcal{P}_h$  ou mesmo um  $\gamma \in \mathcal{E}_h$ . O espaço  $H^s(S)$  denotará o usual espaço de Sobolev com norma respectiva  $\|\cdot\|_{H^s(S)}$ . Definimos também o espaço:

$$H(\text{div}, S) = \{v \in (L_2(S))^2; \nabla \cdot v \in L_2(S)\}.$$

E por fim, definimos o **Espaço particionado de Sobolev**:

$$H^s(\mathcal{P}_h) = \{v \in L_2(\Omega); v|_K \in H^s(K), \forall K \in \mathcal{P}_h\}$$

cuja norma associada é dada por,

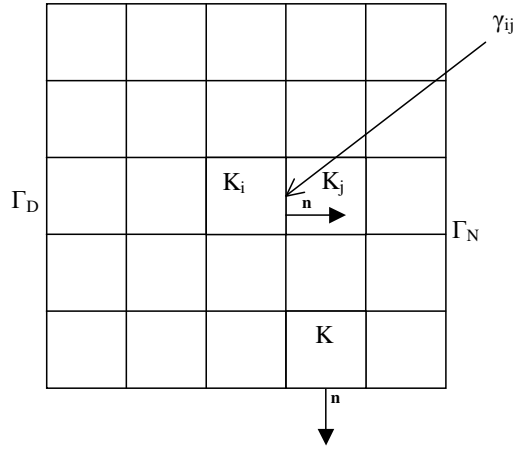


Figura 2.1: Aresta e vetor unitário

$$\|v\|_{H^s(\mathcal{P}_h)} = \left( \sum_{K \in \mathcal{P}_h} \|v\|_{H^s(K)}^2 \right)^{1/2}.$$

Consideramos também o espaço de elementos finitos  $\mathcal{V}^{hp}$  de funções polinomiais, possivelmente descontínuas na junção de elementos  $K$  da partição  $\mathcal{P}_h$ . Definimos  $\mathcal{V}^{hp}$  como:

$$\mathcal{V}^{hp} = \{v \in L_2(\Omega) ; v|_K = \hat{v} \circ F_K^{-1}, \hat{v} \in P_p(\hat{K}) \forall K \in \mathcal{P}_h\}$$

onde  $F_K$  é a aplicação afim  $F_K : \hat{K} \rightarrow K$  do elemento mestre  $\hat{K}$  no elemento  $K$  da partição  $\mathcal{P}_h$  e  $P_p(\hat{K})$  é o espaço de funções polinomiais sobre  $\hat{K}$  com grau no máximo  $p$ .

Podemos observar que o grau máximo das funções polinomiais pode mudar de elemento para elemento, assim representando por  $p_K$  o grau máximo das funções polinomiais sobre  $K$ , podemos definir um valor global para  $p$  em uma partição  $\mathcal{P}_h$ :

$$p = \min_{K \in \mathcal{P}_h} p_K$$

Na seqüência colocaremos alguns resultados teóricos que serão de fundamental utilidade no decorrer do trabalho.



**Lema 2.1** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  um domínio Estrelado (Star-shaped) com fronteira suave  $\partial\Omega$ . Então para qualquer  $v \in H^1(\Omega)$ , vale:*

$$\|v\|_{L_2(\partial\Omega)}^2 \leq \frac{2}{\inf_{x \in \partial\Omega} |x|} \left( \|v\|_{L_2(\Omega)}^2 + \sup_{x \in \Omega} |x| \|v\|_{L_2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L_2(\Omega)} \right) \quad (2.1)$$

*Demonstração:* Seja  $O \in \Omega$  a origem e seja  $\mathbf{n}$  o vetor unitário exterior normal a  $\partial\Omega$ . A partir da definição de domínio Estrelado, existe uma constante positiva  $\beta$  tal que:

$$\beta|x| \leq x \cdot \mathbf{n} \quad (2.2)$$

Aplicando o teorema de Green para o campo vetorial  $v^2x$ , temos:

$$\int_{\partial\Omega} v^2x \cdot \mathbf{n} \, ds = \int_{\Omega} \nabla \cdot (v^2x) \, dx \quad (2.3)$$

Usando (2.2), a primeira integral em (2.3) pode ser limitada por baixo:

$$\int_{\partial\Omega} v^2x \cdot \mathbf{n} \, ds \geq \beta \inf_{x \in \partial\Omega} |x| \int_{\partial\Omega} v^2 \, ds \geq \beta \inf_{x \in \partial\Omega} |x| \|v\|_{L_2(\partial\Omega)}^2$$

A segunda integral em (2.3) pode ser limitada por cima:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla \cdot (v^2x) \, dx &= \int_{\Omega} (v^2 \nabla \cdot x + x \cdot \nabla v^2) \, dx \\ &= \int_{\Omega} 2v^2 \, dx + \int_{\Omega} 2vx \cdot \nabla v \, dx \\ &\leq 2\|v\|_{L_2(\Omega)}^2 + 2 \int_{\Omega} |vx \cdot \nabla v| \, dx \\ &\leq 2\|v\|_{L_2(\Omega)}^2 + 2 \int_{\Omega} |v| |x| |\nabla v| \, dx \\ &\leq 2\|v\|_{L_2(\Omega)}^2 + 2 \sup_{x \in \Omega} |x| \int_{\Omega} |v| |\nabla v| \, dx \\ &\leq 2\|v\|_{L_2(\Omega)}^2 + 2 \sup_{x \in \Omega} |x| \|v\|_{L_2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L_2(\Omega)} \end{aligned}$$

Usando agora as duas estimativas, temos,

$$\|v\|_{L_2(\partial\Omega)}^2 \leq \frac{2}{\inf_{x \in \partial\Omega} |x|} \left( \|v\|_{L_2(\Omega)}^2 + \sup_{x \in \Omega} |x| \|v\|_{L_2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L_2(\Omega)} \right)$$

□

**Lema 2.2 (Desigualdade Multiplicativa do Traço)** *Seja  $K$  um triângulo ou um quadrilátero tal que  $h_K \leq \varrho \rho_K$  (Forma regular). Então, para toda  $v \in H^1(K)$ ,*

$$\|v\|_{L_2(\partial K)}^2 \leq C \left( \frac{1}{h_K} \|v\|_{L_2(K)}^2 + \|v\|_{L_2(K)} \|\nabla v\|_{L_2(K)} \right)$$

onde  $C$  é uma constante positiva.

*Demonstração:* Seja a origem  $O$  o centro do círculo inscrito em  $K$  com raio  $\rho_K/2$ .

Assim temos,

$$\begin{aligned} \sup_{x \in K} |x| &\leq h_K \\ \inf_{x \in \partial K} |x| &\geq \frac{\rho_K}{2} \geq \frac{h_K}{2\varrho} \end{aligned}$$

Usando esses dados no lema anterior, temos:

$$\begin{aligned} \|v\|_{L_2(\partial K)}^2 &\leq \frac{4\varrho}{h_K} \left( \|v\|_{L_2(K)}^2 + h_K \|v\|_{L_2(K)} \|\nabla v\|_{L_2(K)} \right) \\ &\leq 4\varrho \left( \frac{1}{h_K} \|v\|_{L_2(K)}^2 + \|v\|_{L_2(K)} \|\nabla v\|_{L_2(K)} \right) \end{aligned}$$

Agora escolhendo  $C = 4\varrho$ , chegamos no resultado pretendido. □

No Capítulo 1, colocamos um lema que mostra a desigualdade de Poincaré-Friedrich, lema este é de suma importância para mostrar a coercividade da forma bilinear envolvida. Colocaremos aqui uma outra versão do mesmo lema que será útil em considerações futuras.

**Lema 2.3** *Seja  $\Omega$  um domínio aberto, limitado e conexo em  $\mathbb{R}^2$  com fronteira Lipschitziana. Seja  $v \in H^1(\Omega)$  tal que*

$$\int_{\Omega} v \, dx = 0.$$

Então

$$\|v\|_{L_2(\Omega)} \leq C \|\nabla v\|_{L_2(\Omega)}, \tag{2.4}$$

onde  $C = C(\Omega)$  é uma constante positiva.

*Demonstração:* Veja [20], página 350 e [7], página 102. □

**Lema 2.4 (Desigualdade Inversa)** *Seja  $z \in P_{p_K}$ , então*

$$\|\nabla z\|_{L_2(K)} \leq C \frac{p_K^2}{h_K} \|z\|_{L_2(K)} \quad (2.5)$$

*Demonstração:* Faremos a demonstração para o caso  $n = 1$ , ou seja  $\hat{K} \subset \mathbb{R}$ , sendo que para o caso de  $n > 1$  é utilizado o mesmo argumento.

Vamos considerar primeiro um elemento da forma  $\hat{K} = (-1, 1)$ , assim  $h_{\hat{K}} = 2$ . Sendo  $L_i(x)$  o polinômio de Legendre de ordem  $i$ . Temos para todo  $i \geq 1$  que:

$$\int_{-1}^1 (L'_i(x))^2 dx = i(i+1). \quad (2.6)$$

Para ver isso, usamos integração por partes e propriedades de ortogonalidade dos polinômios de Legendre:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (L'_i(x))^2 dx &= - \int_{-1}^1 L_i(x) L''_i(x) dx + (L_i L'_i) \Big|_{-1}^1 \\ &= L'_i(1) - (-1)^i L'_i(-1). \end{aligned}$$

Desde que  $L'_i(\pm 1) = \pm \frac{i(i+1)}{2}$ , temos (2.6).

Todo  $\hat{v} \in P_{p_{\hat{K}}}$  pode ser expandido por uma série de Legendre (para mais detalhes veja [20], capítulo 3 seção 3.3):

$$\hat{v}(x) = \sum_{i=0}^{p_{\hat{K}}} a_i L_i(x)$$

Onde,

$$\|\hat{v}\|_{L_2(\hat{K})}^2 = \sum_{i=0}^{p_{\hat{K}}} \frac{2}{2i+1} |a_i|^2.$$

Usando (2.6), temos:

$$\begin{aligned} \|\hat{v}'\|_{L_2(\hat{K})} &\leq \sum_{i=0}^{p_{\hat{K}}} |a_i| \|L'_i(x)\|_{L_2(\hat{K})} \\ &\leq \sum_{i=0}^{p_{\hat{K}}} |a_i| (i(i+1))^{1/2}. \end{aligned}$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos:

$$\begin{aligned}
\|\hat{v}'\|_{L_2(\hat{K})}^2 &\leq \left( \sum_{i=0}^{p_{\hat{K}}} \frac{2}{2i+1} |a_i|^2 \right) \left( \sum_{i=0}^{p_{\hat{K}}} \frac{2i+1}{2} i(i+1) \right) \\
&\leq \|\hat{v}\|_{L_2(\hat{K})}^2 p_{\hat{K}} \max_{1 \leq i \leq p_{\hat{K}}} \frac{2i+1}{2} i(i+1) \\
&= \|\hat{v}\|_{L_2(\hat{K})}^2 p_{\hat{K}} \frac{2p_{\hat{K}}+1}{2} p_{\hat{K}}(p_{\hat{K}}+1) \\
&= \|\hat{v}\|_{L_2(\hat{K})}^2 p_{\hat{K}}^2 (p_{\hat{K}}+1) \left( p_{\hat{K}} + \frac{1}{2} \right) \\
&\leq C \|\hat{v}\|_{L_2(\hat{K})}^2 p_{\hat{K}}^4
\end{aligned}$$

Ou seja,  $\|\hat{v}'\|_{L_2(\hat{K})} \leq C p_{\hat{K}}^2 \|\hat{v}\|_{L_2(\hat{K})}$ .

O  $h_K$  que está no enunciado do lema, aparece por um argumento de escala.

Basta observar que:

$$\begin{aligned}
\|\hat{v}'\|_{L_2(\hat{K})} &= h_K^{1/2} \|v'\|_{L_2(K)} \quad \text{e} \\
\|\hat{v}\|_{L_2(\hat{K})} &= h_K^{-1/2} \|v\|_{L_2(K)}
\end{aligned}$$

□

**Lema 2.5 (Lema de Aproximação Polinomial)** *Seja  $K$  um elemento de uma partição  $\mathcal{P}_h$  (triângulo ou paralelogramo) e  $u$  uma função em  $H^s(K)$ . Existe uma constante positiva  $C$  que depende de  $s$  e  $\varrho$  mas independe de  $u$ ,  $p_K$  e  $h_K$  e uma seqüência  $z_p \in P_{p_K}$ ,  $p_K = 1, 2, \dots$ , tal que para todo  $q$ ,  $0 \leq q \leq s$ ,*

$$\begin{aligned}
i) \quad \|u - z_p\|_{H^q(K)} &\leq C \frac{h_K^{\mu-q}}{p_K^{s-q}} \|u\|_{H^s(K)} \quad s \geq 0 \\
ii) \quad \|u - z_p\|_{L_2(\gamma)} &\leq C \frac{h_K^{\mu-1/2}}{p_K^{s-1/2}} \|u\|_{H^s(K)} \quad s \geq 1/2 \\
iii) \quad \|u - z_p\|_{H^1(\gamma)} &\leq C \frac{h_K^{\mu-3/2}}{p_K^{s-3/2}} \|u\|_{H^s(K)} \quad s \geq 3/2
\end{aligned}$$

onde  $\mu = \min(p_K + 1, s)$ ,  $h_K = \text{diâmetro de } K$  e  $\gamma \subset \partial K$ .

*Demonstração:* Os itens (i) e (ii) são demonstrados em [3] e [4] e o item (iii) é mostrado em [19].

□

Como um corolário do resultado acima, obtemos a seguinte propriedade de aproximação global. Seja  $\phi \in H^s(\Omega)$  e seja  $\mathcal{P}_h$  uma partição de  $\Omega$  em triângulos. Existe  $\phi^* \in \mathcal{V}^{hp} \cap C^0(\overline{\Omega})$  tal que para qualquer  $q$ ,  $0 \leq q \leq s$ , satisfaz:

$$\|\phi - \phi^*\|_{H^q(\mathcal{P}_h)} \leq C \frac{h^{\mu-q}}{p^{s-q}} \|\phi\|_{H^s(\Omega)}, \quad (2.7)$$

onde  $\mu = \min(p+1, s)$  e  $C$  independe de  $\phi$ ,  $p$ ,  $h$  e  $\mathcal{P}_h$ . Observe que este resultado também vale se  $\phi \in \mathcal{V}^{hp}$ .

# Capítulo 3

## Formulação fraca em espaço particionado de Sobolev. Método de Galerkin Descontínuo de Elementos Finitos

Iniciamos este capítulo apresentando o problema modelo e sua formulação fraca sobre a qual manteremos nossas atenções no desenvolvimento dos métodos de Galerkin Descontínuos. Esses métodos, por sua vez, serão também definidos neste capítulo. Trabalharemos com três métodos que provêm de uma mesma formulação fraca, mas diferem entre si. Estas diferenças modificam as taxas de convergência das estimativas de erro *a priori* que serão discutidas no capítulo 4 deste trabalho.

Estabeleceremos também teoremas que discutem sobre a equivalência entre a solução fraca e forte do problema modelo. Por fim, definiremos algumas normas dependentes de malha e apresentamos a demonstração da coercividade e continuidade da forma bilinear da formulação fraca em relação a essas normas.

### 3.1 Problema Modelo

Como problema modelo, trabalharemos com a seguinte equação:

$$-\Delta u + cu = f, \quad \text{em } \Omega, \quad (3.1)$$

considerando como condições de fronteira:

$$\begin{aligned} u &= u_0, & \text{em } \Gamma_D, \\ \mathbf{n} \cdot \nabla u &= g, & \text{em } \Gamma_N. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Assim, nosso problema modelo é estabelecido da seguinte forma:

Encontrar a função  $u$  que é solução de (3.1) e está sujeita as condições de fronteira (3.2).

Aqui  $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$ ,  $\mathbf{n} \cdot \nabla u = \mathbf{n}_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + \mathbf{n}_2 \frac{\partial u}{\partial x_2}$  e  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  aberto, limitado e com fronteira  $\partial\Omega$  Lipschitziana. Temos também que  $f \in L_2(\Omega)$ ,  $g \in H^{+1/2}(\Gamma_N)$  e  $c$  é uma constante positiva. Para mais detalhes sobre  $H^{+1/2}(\Gamma_N)$ , veja [7].

Estabelecido o problema, construiremos agora sua formulação fraca em espaços descontínuos. Consideremos  $u$  inicialmente suficientemente suave a ponto de permitir as operações necessárias para esta construção (a suavidade de  $u$  será discutida logo em seguida). Multiplicando (3.1) por uma  $v \in H^2(\mathcal{P}_h)$  e integrando sobre  $\Omega$ , chegamos:

$$-\int_{\Omega} (\nabla \cdot \nabla u - cu)v \, dx = \int_{\Omega} fv \, dx.$$

Ao contrário do método de elementos finitos clássico, aqui primeiro decompomos a integral acima em integrais sobre os elementos de  $\mathcal{P}_h$ :

$$\sum_{K \in \mathcal{P}_h} -\int_K (\nabla \cdot \nabla u)v \, dx + \sum_{K \in \mathcal{P}_h} \int_K cuv \, dx = \sum_{K \in \mathcal{P}_h} \int_K fv \, dx.$$

Agora, depois da decomposição é que vamos integrar por partes a primeira integral na equação acima. Usando a fórmula de Green:

$$\begin{aligned} \sum_{K \in \mathcal{P}_h} \int_K \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \sum_{K \in \mathcal{P}_h} \int_{\partial K} (\mathbf{n} \cdot \nabla u)v \, ds + \sum_{K \in \mathcal{P}_h} \int_K cuv \, dx &= \sum_{K \in \mathcal{P}_h} \int_K fv \, dx \\ \sum_{K \in \mathcal{P}_h} \int_K (\nabla u \cdot \nabla v + cuv) \, dx - \sum_{K \in \mathcal{P}_h} \int_{\partial K} (\mathbf{n} \cdot \nabla u)v \, ds &= \sum_{K \in \mathcal{P}_h} \int_K fv \, dx \end{aligned} \quad (3.3)$$

A segunda integral no primeiro membro de (3.3), é uma integral sobre a fronteira de cada elemento da malha  $\mathcal{P}_h$ . Sendo assim, podemos separar essa integral conforme o tipo de elemento de fronteira:

$$\begin{aligned} \sum_{K \in \mathcal{P}_h} \int_{\partial K} (\mathbf{n} \cdot \nabla u) v \, ds &= \sum_{\gamma \subset \Gamma_D} \int_{\gamma} (\mathbf{n} \cdot \nabla u) v \, ds \\ &+ \sum_{\gamma \subset \Gamma_N} \int_{\gamma} (\mathbf{n} \cdot \nabla u) v \, ds \\ &+ \sum_{\gamma_{ij} \subset \Gamma_{int}} \int_{\gamma_{ij}} (\mathbf{n} \cdot \nabla u)_i v_i + (\mathbf{n} \cdot \nabla u)_j v_j \, ds \end{aligned} \quad (3.4)$$

com  $v_i$  e  $v_j$  representando a restrição de  $v$  sobre os elementos  $K_i$  e  $K_j$  respectivamente. Também,  $(\mathbf{n} \cdot \nabla u)_i$  e  $(\mathbf{n} \cdot \nabla u)_j$  denotam a restrição do *fluxo*  $\mathbf{n} \cdot \nabla u$  em  $K_i$  e  $K_j$ .

Os somatórios que envolvem integrais sobre elementos de fronteira onde prescrevem as condições de Dirichlet e Neumann serão denotados mais simplificadaamente:

$$\begin{aligned} \sum_{\gamma \subset \Gamma_D} \int_{\gamma} (\mathbf{n} \cdot \nabla u) v \, ds &= \int_{\Gamma_D} (\mathbf{n} \cdot \nabla u) v \, ds \\ \sum_{\gamma \subset \Gamma_N} \int_{\gamma} (\mathbf{n} \cdot \nabla u) v \, ds &= \int_{\Gamma_N} (\mathbf{n} \cdot \nabla u) v \, ds \end{aligned}$$

Vamos agora tratar das integrais envolvendo elementos de fronteira internos a  $\Omega$ . Dado a aresta  $\gamma_{ij} \subset \Gamma_{int}$  que é formada por dois elementos adjacentes,  $K_i$  e  $K_j$ ,  $i > j$ , notamos que:

$$(\mathbf{n} \cdot \nabla u)_i v_i + (\mathbf{n} \cdot \nabla u)_j v_j = \mathbf{n} \cdot (\nabla u)_i v_i - \mathbf{n} \cdot (\nabla u)_j v_j, \quad (3.5)$$

isto se deve ao fato de que o normal a  $K_i$  em  $\gamma_{ij}$  é o oposto do normal a  $K_j$  em  $\gamma_{ij}$ . Sendo  $a, b, c$  e  $d$  números reais, é válida a identidade:

$$ac - bd = \frac{1}{2}(a+b)(c-d) + \frac{1}{2}(a-b)(c+d). \quad (3.6)$$

De fato,  $\frac{1}{2}(a+b)(c-d) + \frac{1}{2}(a-b)(c+d) = \frac{1}{2}(ac - ad + bc - bd) + \frac{1}{2}(ac + ad - bc - bd) = \frac{1}{2}(ac - ad + bc - bd + ac + ad - bc - bd) = ac - bd$ .

Usando a identidade acima, podemos reescrever (3.5) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot (\nabla u)_i v_i - \mathbf{n} \cdot (\nabla u)_j v_j &= \\ &= \frac{1}{2} \left( \mathbf{n} \cdot (\nabla u)_i + \mathbf{n} \cdot \nabla u_j \right) (v_i - v_j) + \frac{1}{2} \left( \mathbf{n} \cdot (\nabla u)_i - \mathbf{n} \cdot \nabla u_j \right) (v_i + v_j) \\ &= \langle \mathbf{n} \cdot \nabla u \rangle [v] + [\mathbf{n} \cdot \nabla u] \langle v \rangle \end{aligned}$$



Usamos acima uma notação para compactar as expressões. Desta forma, definimos  $[v]$  e  $\langle v \rangle$  como sendo, respectivamente, o salto e a média de  $v$  sobre um  $\gamma_{ij} \subset \Gamma_{int}$  com  $i > j$ , para qualquer  $v \in H^s(K_i) \times H^s(K_j)$ ,  $s > 1/2$ , ou seja:

$$\begin{aligned} [v] &= v_i - v_j \\ \langle v \rangle &= \frac{1}{2}(v_i + v_j) \end{aligned}$$

Para  $\gamma \subset \Gamma_D$ , estendemos convenientemente a definição de  $[v]$  e  $\langle v \rangle$  como:

$$\begin{aligned} [v] &= v \\ \langle v \rangle &= v \end{aligned}$$

Com esta extensão da definição, temos:

$$\int_{\Gamma_D} (\mathbf{n} \cdot \nabla u) v \, ds = \int_{\Gamma_D} \langle \mathbf{n} \cdot \nabla u \rangle [v] \, ds$$

**Lema 3.1** *Seja  $H(\Delta, \Omega) = \{u \in L_2(\Omega) : \nabla \cdot \nabla u \in L_2(\Omega)\}$ . Então  $\forall u \in H(\Delta, \Omega)$  temos que  $u$  e  $(\mathbf{n} \cdot \nabla u)$  são fracamente contínuos sobre  $\Gamma_{int}$ .*

*Demonstração:* Tomamos dois elementos vizinhos  $K_i$  e  $K_j$  em  $\mathcal{P}_h$  e introduzimos  $\tilde{K} = int(\overline{K_i \cup K_j})$ . Para mostrar a continuidade de  $u$ , nós tomamos uma função teste arbitrária  $v \in C_0^\infty(\tilde{K})$  e consideramos o produto interno local  $(\nabla u, v)_{L_2(\tilde{K})}$ . Separando o produto interno em dois termos sobre  $K_i$  e  $K_j$  e usando a fórmula de Green, obtemos:

$$\begin{aligned} (\nabla u, \nabla v)_{L_2(\tilde{K})} &= (\nabla u, \nabla v)_{L_2(K_i)} + (\nabla u, \nabla v)_{L_2(K_j)} \\ &= -(u, \Delta v)_{L_2(K_i)} - (u, \Delta v)_{L_2(K_j)} \\ &\quad + \int_{\partial K_i} u_i \nabla v \cdot \mathbf{n} \, ds + \int_{\partial K_j} u_j \nabla v \cdot (-\mathbf{n}) \, ds \\ (\nabla u, \nabla v)_{L_2(\tilde{K})} &= -(u, \Delta v)_{L_2(K_i)} - (u, \Delta v)_{L_2(K_j)} \\ &\quad + \int_{\gamma} u_i \nabla v \cdot \mathbf{n} \, ds - \int_{\gamma} u_j \nabla v \cdot \mathbf{n} \, ds \\ &= -(u, \Delta v)_{L_2(K_i)} - (u, \Delta v)_{L_2(K_j)} + \int_{\gamma} [u] \nabla v \cdot \mathbf{n} \, ds \\ &= -(u, \Delta v)_{L_2(\tilde{K})} + \int_{\gamma} [u] \nabla v \cdot \mathbf{n} \, ds, \end{aligned}$$

ou seja:

$$(\nabla u, \nabla v)_{L_2(\tilde{K})} = -(u, \Delta v)_{L_2(\tilde{K})} + \int_{\gamma} [u] \nabla v \cdot \mathbf{n} \, ds,$$

onde  $\gamma = \partial K_i \cap \partial K_j$  e  $\mathbf{n}$  denota o vetor exterior normal em  $\gamma$ . Agora usando outra vez a fórmula de Green na primeira parcela do lado direito da equação acima, temos:

$$(\nabla u, \nabla v)_{L_2(\tilde{K})} = (\nabla u, \nabla v)_{L_2(\tilde{K})} + \int_{\gamma} [u] \nabla v \cdot \mathbf{n} \, ds,$$

o que implica que:

$$\int_{\gamma} [u] \nabla v \cdot \mathbf{n} \, ds = 0,$$

para toda  $v \in C_0^\infty(\tilde{K})$ . Para verificar a continuidade de  $(\mathbf{n} \cdot \nabla u)$  procedemos de forma parecida:

$$\begin{aligned} (\Delta u, v)_{L_2(\tilde{K})} &= (\Delta u, v)_{L_2(K_i)} + (\Delta u, v)_{L_2(K_j)} \\ &= -(\nabla u, \nabla v)_{L_2(K_i)} - (\nabla u, \nabla v)_{L_2(K_j)} \\ &\quad + \int_{\partial K_i} (\nabla u \cdot \mathbf{n})_i v \, ds + \int_{\partial K_j} (\nabla u \cdot \mathbf{n})_j v \, ds \\ &= -(\nabla u, \nabla v)_{L_2(K_i)} - (\nabla u, \nabla v)_{L_2(K_j)} \\ &\quad + \int_{\partial K_i} (\nabla u)_i \cdot \mathbf{n} v \, ds - \int_{\partial K_j} (\nabla u)_j \cdot \mathbf{n} v \, ds \\ &= -(\nabla u, \nabla v)_{L_2(K_i)} - (\nabla u, \nabla v)_{L_2(K_j)} \\ &\quad + \int_{\gamma} (\nabla u)_i \cdot \mathbf{n} v \, ds - \int_{\gamma} (\nabla u)_j \cdot \mathbf{n} v \, ds \\ &= -(\nabla u, \nabla v)_{L_2(\tilde{K})} + \int_{\gamma} [\nabla u \cdot \mathbf{n}] v \, ds, \end{aligned}$$

ou seja:

$$(\Delta u, v)_{L_2(\tilde{K})} = -(\nabla u, \nabla v)_{L_2(\tilde{K})} + \int_{\gamma} [\nabla u \cdot \mathbf{n}] v \, ds,$$

agora, usando fórmula de Green na primeira parcela da equação acima, chegamos a:

$$(\Delta u, v)_{L_2(\tilde{K})} = (\Delta u, v)_{L_2(\tilde{K})} + \int_{\gamma} [\nabla u \cdot \mathbf{n}] v \, ds,$$

o que implica que:

$$\int_{\gamma} [\nabla u \cdot \mathbf{n}] v \, ds = 0$$

□

Observe que  $H^2(\Omega) \subset H(\Delta, \Omega)$ . Assim, se  $u \in H^2(\Omega)$ , a integral sobre  $\Gamma_{int}$  torna-se:

$$\begin{aligned} \sum_{\gamma_{ij} \subset \Gamma_{int}} \int_{\gamma_{ij}} \left( (\mathbf{n} \cdot \nabla u)_i v_i + (\mathbf{n} \cdot \nabla u)_j v_j \right) ds &= \sum_{\gamma_{ij} \subset \Gamma_{int}} \int_{\gamma_{ij}} \left( \langle \mathbf{n} \cdot \nabla u \rangle [v] + [\mathbf{n} \cdot \nabla u] \langle v \rangle \right) ds \\ &= \int_{\Gamma_{int}} \left( \langle \mathbf{n} \cdot \nabla u \rangle [v] + [\mathbf{n} \cdot \nabla u] \langle v \rangle \right) ds \\ &= \int_{\Gamma_{int}} \langle \mathbf{n} \cdot \nabla u \rangle [v] ds \end{aligned}$$

Assim, a integral sobre fronteira em (3.4) torna-se:

$$\begin{aligned} \sum_{K \in \mathcal{P}_h} \int_{\partial K} (\mathbf{n} \cdot \nabla u) v ds &= \int_{\Gamma_D} \langle \mathbf{n} \cdot \nabla u \rangle [v] ds \\ &+ \int_{\Gamma_N} (\mathbf{n} \cdot \nabla u) v ds \\ &+ \int_{\Gamma_{int}} \langle \mathbf{n} \cdot \nabla u \rangle [v] ds \\ &= \int_{\Gamma_{int} \cup \Gamma_D} \langle \mathbf{n} \cdot \nabla u \rangle [v] ds + \int_{\Gamma_N} gv ds, \end{aligned}$$

onde unimos o que se refere a  $\Gamma_{int}$  e  $\Gamma_D$  e introduzimos aqui as condições de Neumann dadas no problema. Por fim, (3.3) pode ser reescrita como:

$$\sum_{K \in \mathcal{P}_h} \int_K (\nabla u \cdot \nabla v + cuv) dx - \int_{\Gamma_{int} \cup \Gamma_D} \langle \mathbf{n} \cdot \nabla u \rangle [v] ds = \sum_{K \in \mathcal{P}_h} \int_K fv dx + \int_{\Gamma_N} gv ds$$

Vamos agora, de forma análoga ao feito no capítulo 1, introduzir uma forma bilinear e uma linear, definidas em  $H^2(\mathcal{P}_h) \times H^2(\mathcal{P}_h)$  e  $H^2(\mathcal{P}_h)$ , respectivamente.

$$\mathcal{B}(u, v) = \sum_{K \in \mathcal{P}_h} \int_K (\nabla u \cdot \nabla v + cuv) dx \quad (3.7)$$

$$\mathcal{F}(v) = \sum_{K \in \mathcal{P}_h} \int_K fv dx + \int_{\Gamma_N} gv ds \quad (3.8)$$

Definimos também uma outra forma bilinear definida em  $H^2(\mathcal{P}_h) \times H^2(\mathcal{P}_h)$ :

$$J(u, v) = \int_{\Gamma_{int} \cup \Gamma_D} \langle \mathbf{n} \cdot \nabla u \rangle [v] ds \quad (3.9)$$

Desta forma, uma formulação fraca descontínua para a equação (3.1) será: encontrar  $u \in H^2(\mathcal{P}_h)$  tal que:

$$\mathcal{B}(u, v) - J(u, v) = \mathcal{F}(v), \quad \forall v \in H^2(\mathcal{P}_h). \quad (3.10)$$

A formulação fraca acima constitui o ponto de partida para a derivação de vários Métodos de Galerkin descontínuo de elementos finitos (Discontinuous Galerkin Finite Element Methods - DGFEM), em particular, os que veremos neste trabalho.

## 3.2 Formulações fracas e discretização por elementos finitos

Neste parágrafo, definiremos as formulações cujas estimativas de erro serão discutidas no capítulo 4. O lema (3.1) diz que se  $u \in H^2(\Omega)$  então  $[u]$  e  $[\mathbf{n} \cdot \nabla u]$  se anulam sobre cada elemento  $\gamma_{ij} \subset \Gamma_{int}$ . Usando este resultado, juntamente com o Teorema (1.5), que trata da regularidade de solução, obtemos que: se  $u \in H^1(\Omega) \cap H^2(\mathcal{P}_h)$  é solução do problema (3.1) - (3.2), então  $[u] = 0$  em cada  $\gamma_{ij} \subset \Gamma_{int}$ . As formulações que iremos construir se apoiarão nesse fato:

$$\int_{\gamma_{ij}} v[u] ds = 0 \quad \forall v \in L_2(\gamma_{ij}). \quad (3.11)$$

Mas isso acarreta que:

$$\int_{\Gamma_{int}} \langle \mathbf{n} \cdot \nabla v \rangle [u] ds = 0 \quad \forall v \in H^2(\mathcal{P}_h). \quad (3.12)$$

Além disso, podemos aplicar as condições de fronteira de Dirichlet da seguinte maneira fraca:

$$\int_{\Gamma_D} (\mathbf{n} \cdot \nabla v)u ds = \int_{\Gamma_D} (\mathbf{n} \cdot \nabla v)u_0 ds \quad \forall v \in H^2(\mathcal{P}_h). \quad (3.13)$$

O segundo membro na igualdade anterior é uma forma linear em  $v$ , iremos nomeá-la como  $J_0(\cdot)$ , portanto:

$$J_0(v) = \int_{\Gamma_D} (\mathbf{n} \cdot \nabla v)u_0 ds \quad \forall v \in H^2(\mathcal{P}_h) \quad (3.14)$$

Portanto, se  $u \in H^1(\Omega) \cap H^2(\mathcal{P}_h)$  temos que vale (3.12) e fazendo  $u = u_0$  em  $\Gamma_D$ , chegamos que:

$$J(v, u) = J_0(v) \quad \forall v \in H^2(\mathcal{P}_h) \quad (3.15)$$

### 3.2.1 Método de Elemento Global - GEM

Introduzimos agora a forma bilinear  $\mathcal{B}_-(\cdot, \cdot)$  e a forma linear  $\mathcal{F}_-(\cdot)$ . O sinal no índice das formas refere-se ao fato de subtrairmos o termo  $J(v, u)$  em ambos os membros de (3.10).

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_-(u, v) &= \mathcal{B}(u, v) - J(u, v) - J(v, u), \\ \mathcal{F}_-(v) &= \mathcal{F}(v) - J_0(v).\end{aligned}\tag{3.16}$$

O GEM consiste em encontrar  $u$  tal que:

$$\mathcal{B}_-(u, v) = \mathcal{F}_-(v) \quad \forall v \in H^2(\mathcal{P}_h).\tag{3.17}$$

A correspondente discretização por elementos finitos do problema acima consiste em encontrar  $u_h \in \mathcal{V}^{hp}$  tal que:

$$\mathcal{B}_-(u_h, v) = \mathcal{F}_-(v) \quad \forall v \in \mathcal{V}^{hp}\tag{3.18}$$

### 3.2.2 Método de Galerkin Simétrico com Penalização Interior - SIPG

Para forçarmos a continuidade da solução pelo método descontínuo sobre as arestas dos elementos de malha, introduzimos um termo de penalização na formulação. A idéia da introdução desse termo foi proposta por Arnold em [2] e por Wheeler em [21]. Introduziremos o seguinte termo de penalização:

$$J^\sigma(u, v) = \sum_{\gamma_{ij} \subset \Gamma_{int}} \int_{\gamma_{ij}} \sigma[u][v] ds + \sum_{\gamma \subset \Gamma_D} \int_{\gamma} \sigma uv ds = \int_{\Gamma_{int} \cup \Gamma_D} \sigma[u][v] ds$$

e também:

$$J_0^\sigma(v) = \sum_{\gamma \subset \Gamma_D} \int_{\gamma} \sigma u_0 v ds = \int_{\Gamma_D} \sigma u_0 v ds,$$

onde  $\sigma$  representa o parâmetro de penalidade que depende do tamanho de  $\gamma_{ij}$  e  $\gamma$  e do grau polinomial usado sobre o elemento de malha, ou seja,  $\sigma = \sigma(h, p)$ . Desta forma SIPG difere de GEM somente pela adição de um termo de penalização. Assim as novas formas bilinear e linear, ficam:

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_-^\sigma(u, v) &= \mathcal{B}(u, v) - J(u, v) - J(v, u) + J^\sigma(u, v), \\ \mathcal{F}_-^\sigma(v) &= \mathcal{F}(v) - J_0(v) + J_0^\sigma(v).\end{aligned}\tag{3.19}$$

SIPG consiste em encontrar  $u$  tal que:

$$\mathcal{B}_-(u, v) = \mathcal{F}_-(v), \quad \forall v \in H^2(\mathcal{P}_h) \quad (3.20)$$

A correspondente discretização por elementos finitos do problema acima consiste em encontrar  $u_h \in \mathcal{V}^{hp}$  tal que:

$$\mathcal{B}_-(u_h, v) = \mathcal{F}_-(v), \quad \forall v \in \mathcal{V}^{hp} \quad (3.21)$$

### 3.2.3 hp-Método de Galerkin Descontínuo de Elementos Finitos - DG

O método DG difere de GEM somente pela troca de um sinal. Desta vez, somamos ao invés de subtrair o termo  $J(v, u)$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_+(u, v) &= \mathcal{B}(u, v) - J(u, v) + J(v, u), \\ \mathcal{F}_+(v) &= \mathcal{F}(v) + J_0(v). \end{aligned} \quad (3.22)$$

A formulação para DG é então encontrar  $u$  tal que:

$$\mathcal{B}_+(u, v) = \mathcal{F}_+(v), \quad \forall v \in H^2(\mathcal{P}_h) \quad (3.23)$$

Para a respectiva discretização por elementos finitos teremos que encontrar  $u_h \in \mathcal{V}^{hp}$  tal que:

$$\mathcal{B}_+(u_h, v) = \mathcal{F}_+(v), \quad \forall v \in \mathcal{V}^{hp} \quad (3.24)$$

### 3.2.4 Método de Galerkin Não-Simétrico com Penalização Interior - NIPG

Usando o termo de penalização definido em SIPG, e somando em ambos os membros da formulação do método DG, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_+^\sigma(u, v) &= \mathcal{B}(u, v) - J(u, v) + J(v, u) + J^\sigma(u, v), \\ \mathcal{F}_+^\sigma(v) &= \mathcal{F}(v) + J_0(v) + J_0^\sigma(v). \end{aligned} \quad (3.25)$$

O método NIPG consiste então em encontrar  $u$  tal que:

$$\mathcal{B}_+^\sigma(u, v) = \mathcal{F}_+^\sigma(v), \quad \forall v \in H^2(\mathcal{P}_h). \quad (3.26)$$

A discretização por elementos finitos do problema acima consiste em encontrar  $u_h \in \mathcal{V}^{hp}$  tal que:

$$\mathcal{B}_+^\sigma(u_h, v) = \mathcal{F}_+^\sigma(v), \quad \forall v \in \mathcal{V}^{hp}. \quad (3.27)$$

Observe que podemos entender GEM como um caso especial de SIPG, quando  $\sigma = 0$  e também DG como caso especial de NIPG fazendo  $\sigma = 0$ .

### 3.3 Equivalência entre os problemas forte e fraco.

Nesta seção, mostraremos um teorema que trata da equivalência entre as formulações forte e fraca. Ele mostrará essa equivalência usando o método GEM. Com relação aos outros métodos, SIPG, DG e NIPG, os resultados são idênticos. Com este teorema garantimos, de certa forma, a existência de solução em formulações descontínuas. Observe a seguir que o teorema não estabelece a unicidade de solução.

**Teorema 3.1 (GEM)** *Seja  $u \in C^2(\bar{\Omega})$  solução do problema (3.1) - (3.2). Então  $u$  satisfaz a formulação fraca (3.17). Reciprocamente, se  $u \in H^1(\Omega) \cap H^2(\mathcal{P}_h)$  é solução de (3.17), então  $u$  satisfaz a equação diferencial parcial (3.1) juntamente com as condições de fronteira (3.2).*

*Demonstração:* A primeira parte do teorema já foi mostrada ao longo da derivação de GEM. De fato, se  $u \in C^2(\bar{\Omega})$  é solução do problema (3.1) - (3.2), então  $u$  satisfaz (3.10) e também (3.17).

Para a recíproca, seja  $v \in C_0^\infty(K)$ , então por (3.17) é verdade que:

$$\int_K (\nabla u \cdot \nabla v + cuv) dx = \int_K fv dx$$

Integrando por partes a equação acima, temos:

$$\int_K (-\Delta uv + cuv) dx = \int_K fv dx$$

Pelo fato de  $v$  ser arbitrário em  $C_0^\infty(K)$ , temos pelo lema de *du Bois-Reymond* o seguinte:

$$-\Delta u + cu = f \quad \text{quase sempre em } K \quad (3.28)$$

Continuando, consideramos uma aresta interior  $\gamma_{ij}$  formada pelos elementos  $K_i$  e  $K_j$ . Seja  $v$  uma função em  $H_0^2(K_i \cup K_j) \subset H^2(K_i) \times H^2(K_j)$ , estendida por 0 fora de  $K_i \cup K_j$ . Então os termos  $J(u, v)$  e  $J(v, u)$  se anulam pois  $[u] = [v] = 0$  em  $\gamma_{ij}$  e a formulação fraca (3.17) reduz-se a:

$$\int_{K_i \cup K_j} (\nabla u \cdot \nabla v + cuv) dx = \int_{K_i \cup K_j} fv dx \quad (3.29)$$

Por outro lado, multiplicando (3.28) por  $v$ , integrando em  $K_i$  e  $K_j$  e usando fórmula de Green, temos:

$$\begin{aligned} \int_{K_i} (\nabla u \cdot \nabla v + cuv) dx - \int_{\gamma_{ij}} (\mathbf{n} \cdot \nabla u)_i v ds &= \int_{K_i} fv dx \\ \int_{K_j} (\nabla u \cdot \nabla v + cuv) dx - \int_{\gamma_{ij}} (\mathbf{n} \cdot \nabla u)_j v ds &= \int_{K_j} fv dx \end{aligned}$$

Somando as equações acima:

$$\int_{K_i \cup K_j} (\nabla u \cdot \nabla v + cuv) dx - \int_{\gamma_{ij}} [\mathbf{n} \cdot \nabla u] v ds = \int_{K_i \cup K_j} fv dx \quad (3.30)$$

Comparando (3.29) e (3.30), vemos que:

$$\int_{\gamma_{ij}} [\mathbf{n} \cdot \nabla u] v ds = 0 \quad \forall v \in H_0^2(K_i \cup K_j).$$

Então temos que  $[\mathbf{n} \cdot \nabla u] = 0$  para todo  $\gamma_{ij}$ . Isso implica que  $\nabla u \in H(\text{div}, \Omega)$ . O que permite concluir que  $u$  satisfaz a equação (3.1) globalmente em  $\Omega$ , isto é:

$$-\Delta u + cu = f \quad \text{quase sempre em } \Omega \quad (3.31)$$

Para verificar que  $u$  satisfaz a condição de fronteira de Dirichlet, consideramos agora uma função  $v \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ . Multiplicando por  $v$  e integrando por partes (3.31), temos:

$$\int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v + cuv) dx = \int_{\Omega} fv dx$$

Uma vez que (3.17) produz:

$$\int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v + cuv) dx - \int_{\Gamma_D} (\mathbf{n} \cdot \nabla v) u ds = \int_{\Omega} fv dx - \int_{\Gamma_D} (\mathbf{n} \cdot \nabla v) u_0 ds$$

Subtraindo as duas equações acima, chegamos em:

$$\int_{\Gamma_D} (\mathbf{n} \cdot \nabla v) (u - u_0) ds = 0 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega),$$



e assim concluímos que  $u = u_0$  q.s. em  $\Gamma_D$ . Da mesma forma, escolhendo  $v \in H^2(\Omega) \subset H^2(\mathcal{P}_h)$  tal que  $v = 0$  em  $\Gamma_D$  chegamos que:

$$\int_{\Gamma_N} (\mathbf{n} \cdot \nabla u - g)v \, ds = 0 \quad \forall v \in H^2(\Omega) \text{ tal que } v = 0 \text{ em } \Gamma_D,$$

o que implica que  $\mathbf{n} \cdot \nabla u = g$  em  $\Gamma_N$ . □

**Observação 4** *Note que se  $c = 0$ ,  $C^2(\bar{\Omega})$  pode ser substituída no teorema anterior por  $H^1(\Omega) \cap H^2(\mathcal{P}_h)$  desde que  $\nabla u \in H(\text{div}, \Omega)$ .*

## 3.4 Propriedades das formas bilineares

Nesta seção apresentaremos algumas normas que dependem da malha e depois mostraremos coercividade e continuidade das formas bilineares envolvidas em GEM, SIPG, DG e NIPG em relação a essas normas.

### 3.4.1 Normas que dependem da malha

1. *Norma de energia:*

$$\|v\|_{e, \mathcal{P}_h}^2 = \mathcal{B}(v, v) = \sum_{K \in \mathcal{P}_h} \left( \|\nabla v\|_{L_2(K)}^2 + c\|v\|_{L_2(K)}^2 \right) \quad (3.32)$$

2. *Norma proposta por Süli em [12]:*

$$\|v\|_{\mathcal{P}_h}^2 = \mathcal{B}(v, v) + J^\sigma(v, v) = \|v\|_{e, \mathcal{P}_h}^2 + \int_{\Gamma_{int} \cup \Gamma_D} \sigma[v]^2 \, ds \quad (3.33)$$

3. *Norma proposta por Baumann em [6] e por Baker e Karakashian em [5]:*

$$\|v\|_{\mathcal{P}_h}^2 = \|v\|_{\mathcal{P}_h}^2 + \int_{\Gamma_{int} \cup \Gamma_D} \frac{1}{\sigma} \langle \mathbf{n} \cdot \nabla v \rangle^2 \, ds \quad (3.34)$$

### 3.4.2 Continuidade das formas bilineares

Mostraremos a continuidade das formas bilineares  $\mathcal{B}_\pm(\cdot, \cdot)$  e  $\mathcal{B}_\pm^\sigma(\cdot, \cdot)$  em relação a norma  $\|\cdot\|_{\mathcal{P}_h}$  em  $H^2(\mathcal{P}_h)$ .

**Teorema 3.2 (GEM e DG)** *Seja  $\mathcal{B}_\pm(\cdot, \cdot)$  a forma bilinear definida em (3.22) e (3.16). Então,*

$$|\mathcal{B}_\pm(u, v)| \leq \|u\|_{\mathcal{P}_h} \|v\|_{\mathcal{P}_h}, \quad \forall u, \forall v \in H^2(\mathcal{P}_h). \quad (3.35)$$

*Demonstração:* A partir da definição de  $\mathcal{B}_\pm(u, v)$ , temos:

$$\begin{aligned} |\mathcal{B}_\pm(u, v)| &= |\mathcal{B}(u, v) - J(u, v) \pm J(v, u)| \\ &\leq |\mathcal{B}(u, v)| + |J(u, v)| + |J(v, u)| \end{aligned}$$

Podemos majorar  $|\mathcal{B}(u, v)|$  da forma:

$$\begin{aligned} |\mathcal{B}(u, v)| &\leq \sum_{K \in \mathcal{P}_h} \int_K |\nabla u \cdot \nabla v + cuv| \, dx \\ &= \sum_{K \in \mathcal{P}_h} \int_K \sqrt{|\nabla u \cdot \nabla v + cuv|^2} \, dx \\ &\leq \sum_{K \in \mathcal{P}_h} \int_K \sqrt{(\nabla u \cdot \nabla v)^2 + 2(\nabla u \cdot \nabla v)cuv + c^2u^2v^2} \, dx \\ &\leq \sum_{K \in \mathcal{P}_h} \int_K \sqrt{|\nabla u|^2|\nabla v|^2 + 2|\nabla u||\nabla v|cuv + c^2u^2v^2} \, dx. \end{aligned}$$

Sabemos que  $(|\nabla u|\sqrt{c}v - |\nabla v|\sqrt{c}u)^2 \geq 0$  e isso implica que  $2|\nabla u||\nabla v|cuv \leq |\nabla u|^2cv^2 + |\nabla v|^2cu^2$ . Usando essa desigualdade, temos:

$$\begin{aligned} |\mathcal{B}(u, v)| &\leq \sum_{K \in \mathcal{P}_h} \int_K \sqrt{|\nabla u|^2|\nabla v|^2 + |\nabla u|^2cv^2 + |\nabla v|^2cu^2 + c^2u^2v^2} \, dx \\ &= \sum_{K \in \mathcal{P}_h} \int_K \sqrt{(|\nabla u|^2 + cu^2)(|\nabla v|^2 + cv^2)} \, dx \\ &= \sum_{K \in \mathcal{P}_h} \int_K \sqrt{(|\nabla u|^2 + cu^2)} \sqrt{(|\nabla v|^2 + cv^2)} \, dx \end{aligned}$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz e Cauchy-Schwarz discreta, temos:

$$\begin{aligned} |\mathcal{B}(u, v)| &\leq \sum_{K \in \mathcal{P}_h} \left( \int_K (|\nabla u|^2 + cu^2) \, dx \right)^{1/2} \left( \int_K (|\nabla v|^2 + cv^2) \, dx \right)^{1/2} \\ &\leq \left( \sum_{K \in \mathcal{P}_h} \int_K (|\nabla u|^2 + cu^2) \, dx \right)^{1/2} \left( \sum_{K \in \mathcal{P}_h} \int_K (|\nabla v|^2 + cv^2) \, dx \right)^{1/2} \\ &= \|u\|_{e, \mathcal{P}_h} \|v\|_{e, \mathcal{P}_h}, \end{aligned} \quad (3.36)$$

Para estimarmos  $|J(u, v)|$ , procedemos:

$$\begin{aligned} |J(u, v)| &\leq \int_{\Gamma_{int} \cup \Gamma_D} |\langle \mathbf{n} \cdot \nabla u \rangle [v]| ds \\ &\leq \sqrt{\int_{\Gamma_{int} \cup \Gamma_D} \sigma^{-1} \langle \mathbf{n} \cdot \nabla u \rangle^2 ds} \sqrt{\int_{\Gamma_{int} \cup \Gamma_D} \sigma [v]^2 ds} \end{aligned}$$

Da mesma forma,

$$\begin{aligned} |J(v, u)| &\leq \int_{\Gamma_{int} \cup \Gamma_D} |\langle \mathbf{n} \cdot \nabla v \rangle [u]| ds \\ &\leq \sqrt{\int_{\Gamma_{int} \cup \Gamma_D} \sigma [u]^2 ds} \sqrt{\int_{\Gamma_{int} \cup \Gamma_D} \sigma^{-1} \langle \mathbf{n} \cdot \nabla v \rangle^2 ds} \end{aligned}$$

Agora, usando as três estimativas encontradas e a desigualdade de Cauchy-Schwarz discreta, temos:

$$\begin{aligned} |\mathcal{B}_{\pm}(u, v)| &\leq \|u\|_{e, \mathcal{P}_h} \|v\|_{e, \mathcal{P}_h} \\ &+ \sqrt{\int_{\Gamma_{int} \cup \Gamma_D} \sigma^{-1} \langle \mathbf{n} \cdot \nabla u \rangle^2 ds} \sqrt{\int_{\Gamma_{int} \cup \Gamma_D} \sigma [v]^2 ds} \\ &+ \sqrt{\int_{\Gamma_{int} \cup \Gamma_D} \sigma [u]^2 ds} \sqrt{\int_{\Gamma_{int} \cup \Gamma_D} \sigma^{-1} \langle \mathbf{n} \cdot \nabla v \rangle^2 ds} \\ &\leq \sqrt{\|u\|_{e, \mathcal{P}_h}^2 + \int_{\Gamma_{int} \cup \Gamma_D} \sigma [u]^2 ds + \int_{\Gamma_{int} \cup \Gamma_D} \sigma^{-1} \langle \mathbf{n} \cdot \nabla u \rangle^2 ds} \\ &\times \sqrt{\|v\|_{e, \mathcal{P}_h}^2 + \int_{\Gamma_{int} \cup \Gamma_D} \sigma [v]^2 ds + \int_{\Gamma_{int} \cup \Gamma_D} \sigma^{-1} \langle \mathbf{n} \cdot \nabla v \rangle^2 ds} \\ &= \|u\|_{\mathcal{P}_h} \|v\|_{\mathcal{P}_h} \end{aligned}$$

□

**Teorema 3.3 (SIPG e NIPG)** *Seja  $\mathcal{B}_{\pm}^{\sigma}(\cdot, \cdot)$  a forma bilinear definida em (3.25) e (3.19). Então,*

$$|\mathcal{B}_{\pm}^{\sigma}(u, v)| \leq C \|u\|_{\mathcal{P}_h} \|v\|_{\mathcal{P}_h}, \quad \forall u, \forall v \in H^2(\mathcal{P}_h), \quad (3.37)$$

onde  $C$  é uma constante e  $C \leq 2$ .

*Demonstração:* Como no teorema anterior, fazemos:

$$\begin{aligned} |\mathcal{B}_{\pm}^{\sigma}(u, v)| &= |\mathcal{B}(u, v) - J(u, v) \pm J(v, u) + J^{\sigma}(u, v)| \\ &\leq |\mathcal{B}(u, v)| + |J(u, v)| + |J(v, u)| + |J^{\sigma}(u, v)| \\ &\leq \|u\|_{\mathcal{P}_h} \|v\|_{\mathcal{P}_h} + |J^{\sigma}(u, v)|, \end{aligned}$$

vamos agora trabalhar com  $|J^\sigma(u, v)|$ :

$$|J^\sigma(u, v)| \leq \int_{\Gamma_{int} \cup \Gamma_D} |\sigma[u][v]| ds \leq \sqrt{\int_{\Gamma_{int} \cup \Gamma_D} \sigma[u]^2 ds} \sqrt{\int_{\Gamma_{int} \cup \Gamma_D} \sigma[v]^2 ds}$$

Juntando essas estimativas e usando novamente Cauchy-Schwarz discreta, obtemos:

$$\begin{aligned} |\mathcal{B}_\pm^\sigma(u, v)| &\leq \|u\|_{\mathcal{P}_h} \|v\|_{\mathcal{P}_h} + \sqrt{\int_{\Gamma_{int} \cup \Gamma_D} \sigma[u]^2 ds} \sqrt{\int_{\Gamma_{int} \cup \Gamma_D} \sigma[v]^2 ds} \\ &\leq \sqrt{\|u\|_{\mathcal{P}_h}^2 + \int_{\Gamma_{int} \cup \Gamma_D} \sigma[u]^2 ds} \sqrt{\|v\|_{\mathcal{P}_h}^2 + \int_{\Gamma_{int} \cup \Gamma_D} \sigma[v]^2 ds} \\ &\leq \sqrt{\|u\|_{\mathcal{P}_h}^2 + \|u\|_{\mathcal{P}_h}^2} \sqrt{\|v\|_{\mathcal{P}_h}^2 + \|v\|_{\mathcal{P}_h}^2} \\ &= \sqrt{2\|u\|_{\mathcal{P}_h}^2} \sqrt{2\|v\|_{\mathcal{P}_h}^2} \\ &= 2\|u\|_{\mathcal{P}_h} \|v\|_{\mathcal{P}_h}. \end{aligned}$$

Vemos que  $C$  é no máximo igual a 2. □

### 3.4.3 Coercividade das formas bilineares

Nesta seção, o intuito seria mostrar a coercividade das formas bilineares  $\mathcal{B}_\pm(\cdot, \cdot)$  e  $\mathcal{B}_\pm^\sigma(\cdot, \cdot)$  em relação a norma  $\|\cdot\|_{\mathcal{P}_h}$  em  $H^2(\mathcal{P}_h)$  para que pudessemos aplicar os teoremas clássicos de existência e unicidade de soluções dos métodos descontínuos. Mas infelizmente até a atualidade só podemos mostrar esta coercividade no espaço discreto descontínuo  $\mathcal{V}^{hp}$  e mesmo assim, só para os métodos SIPG e NIPG.

**Teorema 3.4 (NIPG)** *Seja  $\sigma = kp^2/h$ ,  $k$  sendo um número positivo. Então, para qualquer  $k > 0$ , existe uma constante positiva,  $\alpha > 0$ , tal que:*

$$\mathcal{B}_+^\sigma(z, z) \geq \alpha \|z\|_{\mathcal{P}_h}^2, \quad \forall z \in \mathcal{V}^{hp}, \quad (3.38)$$

onde  $\alpha$  independe de  $h$  e  $p$ .

*Demonstração:* Seja  $\alpha \in \mathbb{R}$  e  $z \in \mathcal{V}^{hp}$ . Então

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_+^\sigma(z, z) - \alpha \|z\|_{\mathcal{P}_h}^2 &= \mathcal{B}(z, z) + J^\sigma(z, z) \\ &\quad - \alpha \left( \mathcal{B}(z, z) + J^\sigma(z, z) + \int_{\Gamma_{int} \cup \Gamma_D} \frac{1}{\sigma} \langle \mathbf{n} \cdot \nabla z \rangle^2 ds \right) \\ &= (1 - \alpha) \mathcal{B}(z, z) + (1 - \alpha) J^\sigma(z, z) \\ &\quad - \alpha \int_{\Gamma_{int} \cup \Gamma_D} \frac{1}{\sigma} \langle \mathbf{n} \cdot \nabla z \rangle^2 ds. \end{aligned}$$

Sendo  $\langle \mathbf{n} \cdot \nabla z \rangle$  a média do fluxo sobre a aresta que separa dois elementos  $K_i$  e  $K_j$ , a correspondente integral pode ser separada em duas integrais com integrando  $(\mathbf{n} \cdot \nabla z)_i^2/\sigma$  e  $(\mathbf{n} \cdot \nabla z)_j^2/\sigma$  cada um associado com os elementos  $K_i$  e  $K_j$ , respectivamente. De fato podemos abrir o integrando da forma:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{n} \cdot \nabla z \rangle^2 &= \left( \frac{(\mathbf{n} \cdot \nabla z)_i + (\mathbf{n} \cdot \nabla z)_j}{2} \right)^2 \\ &\leq \frac{1}{2}(\mathbf{n} \cdot \nabla z)_i^2 + \frac{1}{2}(\mathbf{n} \cdot \nabla z)_j^2 \\ &= \frac{1}{2} \left( (\mathbf{n} \cdot \nabla z)_i^2 + (\mathbf{n} \cdot \nabla z)_j^2 \right) \end{aligned} \quad (3.39)$$

Para a última desigualdade foi usado o fato:  $(a + b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$ .

Vamos tratar separadamente  $\Gamma_D$  e  $\Gamma_{int}$ . Portanto, seja  $\gamma \subset \Gamma_D$  e considere a integral associada ao elemento  $K$  cuja fronteira contém  $\gamma$ . Relembrando a definição de média sobre  $\Gamma_D$ :  $\langle v \rangle = v$  e usando a Desigualdade Multiplicativa de Traço (Lema (2.2)) e a Desigualdade Inversa (Lema (2.5)), teremos:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{1}{\sigma} \langle \mathbf{n} \cdot \nabla z \rangle^2 ds &= \int_{\gamma} \frac{1}{\sigma} (\mathbf{n} \cdot \nabla z)^2 ds \\ &\leq \int_{\gamma} \frac{1}{\sigma} |\mathbf{n}|^2 |\nabla z|^2 ds = \int_{\gamma} \frac{1}{\sigma} |\nabla z|^2 ds \\ &= \frac{1}{\sigma} \|\nabla z\|_{L_2(\gamma)}^2 \\ &\leq \frac{1}{\sigma} \|\nabla z\|_{L_2(\partial K)}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{1}{\sigma} \langle \mathbf{n} \cdot \nabla z \rangle^2 ds &\leq \frac{C}{\sigma} \left( \frac{1}{h_K} \|\nabla z\|_{L_2(K)}^2 + \|\nabla z\|_{L_2(K)} \|\nabla^2 z\|_{L_2(K)} \right) \\ &\leq \frac{C}{\sigma} \left( \frac{1}{h_K} \|\nabla z\|_{L_2(K)}^2 + \|\nabla v\|_{L_2(K)} C_0 \frac{p_K^2}{h_K} \|\nabla z\|_{L_2(K)} \right) \\ &= \frac{C}{\sigma} \frac{p_K^2}{h_K} \|\nabla z\|_{L_2(K)}^2, \end{aligned}$$

fazendo agora  $\sigma = kp_K^2/h_K$ , obtemos:

$$\int_{\gamma} \frac{1}{\sigma} (\mathbf{n} \cdot \nabla z)^2 ds \leq \frac{C}{k} \|\nabla z\|_{L_2(K)}^2$$

Vamos agora considerar  $\Gamma_{int}$ . Seja  $\gamma_{ij} \subset \Gamma_{int}$ . Observe que quando o tamanho do elemento de malha  $h_{K_i}$  e  $h_{K_j}$  e o grau polinomial  $p_{K_i}$  e  $p_{K_j}$  são diferentes nos

elementos  $K_i$  e  $K_j$  que compartilham a aresta  $\gamma_{ij}$ , podemos escolher  $\sigma$  como:

$$\sigma = k \frac{\max(p_{K_i}^2, p_{K_j}^2)}{\min(h_{K_i}, h_{K_j})}.$$

Assim, usando a mesma análise feita para  $\Gamma_D$  teremos:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_{ij}} \frac{1}{\sigma} (\mathbf{n} \cdot \nabla z)_i^2 ds &\leq \frac{C p_{K_i}^2}{\sigma h_{K_j}} \|\nabla z\|_{L_2(K_i)}^2 \\ &\leq \frac{C \min(h_{K_i}, h_{K_j}) p_{K_i}^2}{k \max(p_{K_i}^2, p_{K_j}^2) h_{K_i}} \|\nabla z\|_{L_2(K_i)}^2 \\ &\leq \frac{C}{k} \|\nabla z\|_{L_2(K_i)}^2 \end{aligned}$$

Resumindo essas observações, para  $\gamma_{ij} \subset \Gamma_{int}$ :

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_{ij}} \frac{1}{\sigma} \langle \mathbf{n} \cdot \nabla z \rangle^2 ds &\leq 1/2 \int_{\gamma_{ij}} \frac{1}{\sigma} \left( (\mathbf{n} \cdot \nabla z)_i^2 + (\mathbf{n} \cdot \nabla z)_j^2 \right) ds \\ &= 1/2 \left( \int_{\gamma_{ij}} \frac{1}{\sigma} (\mathbf{n} \cdot \nabla z)_i^2 ds + \int_{\gamma_{ij}} \frac{1}{\sigma} (\mathbf{n} \cdot \nabla z)_j^2 ds \right) \\ &\leq \frac{C}{k} \left( \|\nabla z\|_{L_2(K_i)}^2 + \|\nabla z\|_{L_2(K_j)}^2 \right), \end{aligned}$$

e isto acarreta:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{int} \cup \Gamma_D} \frac{1}{\sigma} \langle \mathbf{n} \cdot \nabla z \rangle^2 ds &\leq \frac{C}{k} \sum_{K \in \mathcal{P}_h} \|\nabla z\|_{L_2(K)}^2 \\ &\leq \frac{C}{k} \sum_{K \in \mathcal{P}_h} \left( \|\nabla z\|_{L_2(K)}^2 + \|z\|_{L_2(K)}^2 \right) \\ &= \frac{C}{k} \mathcal{B}(z, z), \end{aligned} \tag{3.40}$$

também,

$$-\alpha \int_{\Gamma_{int} \cup \Gamma_D} \frac{1}{\sigma} \langle \mathbf{n} \cdot \nabla z \rangle^2 ds \geq -\alpha \frac{C}{k} \mathcal{B}(z, z).$$

Por fim, chegamos que:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_+^\sigma(z, z) - \alpha \|z\|_{\mathcal{P}_h}^2 &= (1 - \alpha) \mathcal{B}(z, z) + (1 - \alpha) J^\sigma(z, z) - \alpha \int_{\Gamma_{int} \cup \Gamma_D} \frac{1}{\sigma} \langle \mathbf{n} \cdot \nabla z \rangle^2 ds \\ &\geq (1 - \alpha - \alpha C/k) \mathcal{B}(z, z) + (1 - \alpha) J^\sigma(z, z) \end{aligned}$$

Para garantir que  $\mathcal{B}_+^\sigma(z, z) - \alpha \|z\|_{\mathcal{P}_h}^2 \geq 0$ , precisamos que:

$$0 < \alpha \leq \frac{1}{1 + C/k} \quad \text{e} \quad 1 - \alpha \geq 0$$

Observando a primeira inequação, vemos que dado  $k$  é sempre possível escolher  $\alpha$  de modo que ela seja satisfeita. E com esse  $\alpha$  escolhido, se verifica automaticamente a segunda desigualdade. Concluindo, vemos que  $\mathcal{B}_+^\sigma(\cdot, \cdot)$  é coerciva em  $\mathcal{V}^{hp}$  para qualquer valor de  $k > 0$ .

□

**Teorema 3.5 (SIPG)** *Seja  $\sigma = kp^2/h$ ,  $k$  sendo um número positivo. Então, para qualquer  $k > k_0$ , existe uma constante positiva,  $\alpha > 0$ , tal que:*

$$\mathcal{B}_-^\sigma(z, z) \geq \alpha \|z\|_{\mathcal{P}_h}^2, \quad \forall z \in \mathcal{V}^{hp}, \quad (3.41)$$

onde  $\alpha$  independe de  $h$  e  $p$ .

*Demonstração:* Seja  $\alpha \in \mathbb{R}$  e  $z \in \mathcal{V}^{hp}$ . Então

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_-^\sigma(z, z) - \alpha \|z\|_{\mathcal{P}_h}^2 &= (1 - \alpha)\mathcal{B}(z, z) + (1 - \alpha)J^\sigma(z, z) \\ &\quad - 2 \int_{\Gamma_{int} \cup \Gamma_D} \langle \mathbf{n} \cdot \nabla z \rangle [z] \, ds - \alpha \int_{\Gamma_{int} \cup \Gamma_D} \frac{1}{\sigma} \langle \mathbf{n} \cdot \nabla z \rangle^2 \, ds \end{aligned}$$

Usando que  $\left(\sqrt{\varepsilon}a - \frac{b}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^2 \geq 0$  implica que  $2ab \leq \varepsilon a + \frac{b}{\varepsilon}$ , temos que existe um  $\varepsilon$  tal que para toda aresta  $\gamma \subset \Gamma_{int} \cup \Gamma_D$ :

$$\begin{aligned} 2 \int_{\gamma} \langle \mathbf{n} \cdot \nabla z \rangle [z] \, ds &\leq 2 \sqrt{\int_{\gamma} \frac{1}{\sigma} \langle \mathbf{n} \cdot \nabla z \rangle^2 \, ds} \sqrt{\int_{\gamma} \sigma [z]^2 \, ds} \\ &\leq \varepsilon \int_{\gamma} \frac{1}{\sigma} \langle \mathbf{n} \cdot \nabla z \rangle^2 \, ds + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\gamma} \sigma [z]^2 \, ds \\ &= \varepsilon \int_{\gamma} \frac{1}{\sigma} \langle \mathbf{n} \cdot \nabla z \rangle^2 \, ds + \frac{1}{\varepsilon} J^\sigma(z, z) \end{aligned}$$

Colocando esta estimativa, temos:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_-^\sigma(z, z) - \alpha \|z\|_{\mathcal{P}_h}^2 &\geq (1 - \alpha)\mathcal{B}(z, z) + (1 - \alpha - \frac{1}{\varepsilon})J^\sigma(z, z) \\ &\quad - (\varepsilon + \alpha) \int_{\Gamma_{int} \cup \Gamma_D} \frac{1}{\sigma} \langle \mathbf{n} \cdot \nabla z \rangle^2 \, ds \\ &\geq \left(1 - \alpha - (\varepsilon + \alpha)\frac{C}{k}\right) \mathcal{B}(z, z) + (1 - \alpha - \frac{1}{\varepsilon})J^\sigma(z, z) \end{aligned}$$

Nesta última desigualdade usamos um resultado do teorema anterior, veja (3.40).

Vemos que para garantir  $\mathcal{B}_-^\sigma(z, z) - \alpha \|z\|_{\mathcal{P}_h}^2 \geq 0$  precisamos encontrar  $\alpha$  tal que sejam satisfeitas:

$$\left(1 - \alpha - (\varepsilon + \alpha)\frac{C}{k}\right) \geq 0 \quad \text{e} \quad \left(1 - \alpha - \frac{1}{\varepsilon}\right) \geq 0$$

A segunda inequação requer que:

$$0 < \alpha \leq 1 - \frac{1}{\varepsilon},$$

como precisamos ter  $\alpha > 0$ , deduz-se que  $\varepsilon > 1$ .

Já a primeira inequação requer que:

$$0 < \alpha \leq \frac{1 - \varepsilon C/k}{1 + C/k} \leq \frac{1 - C/k}{1 + C/k} = \frac{k - C}{k + C}$$

Assim, fazendo  $k$  suficientemente grande,  $k > k_0$ , temos satisfeitas as duas exigências feitas sobre  $\alpha$  (Devemos ter no mínimo  $k > C$ ).

□

**Observação 5** Observamos que  $\mathcal{B}_+^\sigma(\cdot, \cdot)$  (Método NIPG) é coerciva em  $H^2(\mathcal{P}_h)$  em relação a norma  $\|\cdot\|_{\mathcal{P}_h}$ . De fato, para qualquer  $v \in H^2(\mathcal{P}_h)$ , temos:

$$\mathcal{B}_+^\sigma(v, v) = \mathcal{B}(v, v) - J(v, v) + J(v, v) + J^\sigma(v, v) = \|v\|_{\mathcal{P}_h}^2 \quad (3.42)$$

É direto também mostrar que  $\mathcal{B}_+(\cdot, \cdot)$  (DG) é coerciva em  $H^2(\mathcal{P}_h)$  em relação à norma de energia  $\|\cdot\|_{e, \mathcal{P}_h}$ :

$$\mathcal{B}_+(v, v) = \mathcal{B}(v, v) - J(v, v) + J(v, v) = \mathcal{B}(v, v) = \|v\|_{e, \mathcal{P}_h}^2 \quad (3.43)$$



# Capítulo 4

## Estimativas *a priori* de erro

### 4.1 Estimativa de erro para os métodos SIPG e NIPG na norma de energia

Nesta primeira seção colocamos teoremas que estabelecem estimativas do tipo *a priori* para os métodos SIPG e NIPG na norma de energia, levando em consideração taxas de convergência em  $p$  e  $h$ .

**Teorema 4.1 (SIPG e NIPG)** *Seja  $u \in H^1(\Omega) \cap H^s(\mathcal{P}_h)$ ,  $s \geq 2$  a solução de (3.20) (SIPG) ou (3.26) (NIPG) e seja  $u_h$  solução discreta descontínua de*

$$\mathcal{B}_{\pm}^{\sigma}(u_h, v) = \mathcal{F}_{\pm}^{\sigma}(v), \quad \forall v \in \mathcal{V}^{hp}. \quad (4.1)$$

*Então, escolhendo  $\sigma = kp^2/h$ , ( $k > 0$  para NIPG e  $k > k_0$  para SIPG), o erro  $e = u - u_h$  satisfaz:*

$$\|e\|_{e, \mathcal{P}_h} \leq C \frac{h^{\mu-1}}{p^{s-3/2}} \|u\|_{H^s(\mathcal{P}_h)}, \quad (4.2)$$

*onde  $\mu = \min(p+1, s)$ ,  $p \geq 1$ .*

*Demonstração:* Por definição de norma, temos que  $\|e\|_{e, \mathcal{P}_h} \leq \|e\|_{\mathcal{P}_h}$ . Isto significa que podemos demonstrar a estimativa do teorema em termos do norma  $\|\cdot\|_{\mathcal{P}_h}$ . Seja  $z_p$  um interpolante de  $u$  em  $\mathcal{V}^{hp}$ . Usando uma notação:  $\eta = u - z_p$  e  $\xi = u_h - z_p$  temos que  $e = u - u_h = \eta - \xi$ . Pela desigualdade triangular, temos:

$$\|e\|_{\mathcal{P}_h} = \|u - u_h\|_{\mathcal{P}_h} = \|\eta - \xi\|_{\mathcal{P}_h} \leq \|\eta\|_{\mathcal{P}_h} + \|\xi\|_{\mathcal{P}_h}$$

Demonstramos que  $\mathcal{B}_{\pm}^{\sigma}(\cdot, \cdot)$  é coerciva em  $\mathcal{V}^{hp}$ . Assim, tendo em vista que  $\xi \in \mathcal{V}^{hp}$ , temos:

$$\|\xi\|_{\mathcal{P}_h}^2 \leq C_1 \mathcal{B}_{\pm}^{\sigma}(\xi, \xi).$$

Subtraindo (3.20) de (3.21) ou então (3.26) de (3.27), chegamos que:

$$\mathcal{B}_{\pm}^{\sigma}(u - u_h, v) = 0, \quad \forall v \in \mathcal{V}^{hp}$$

esta propriedade é conhecida como **Ortogonalidade de Galerkin**. Usando esta propriedade e lembrando que  $u - u_h = \eta - \xi$ , temos:

$$\mathcal{B}_{\pm}^{\sigma}(\eta - \xi, v) = 0, \quad \forall v \in \mathcal{V}^{hp},$$

em particular para  $v = \xi$ :

$$\mathcal{B}_{\pm}^{\sigma}(\eta - \xi, \xi) = 0$$

e isto implica que:

$$\mathcal{B}_{\pm}^{\sigma}(\xi, \xi) = \mathcal{B}_{\pm}^{\sigma}(\eta, \xi)$$

Pela continuidade de  $\mathcal{B}_{\pm}^{\sigma}(\cdot, \cdot)$ , temos:

$$\mathcal{B}_{\pm}^{\sigma}(\eta, \xi) \leq C_2 \|\eta\|_{\mathcal{P}_h} \|\xi\|_{\mathcal{P}_h} \implies \mathcal{B}_{\pm}^{\sigma}(\xi, \xi) \leq C_2 \|\eta\|_{\mathcal{P}_h} \|\xi\|_{\mathcal{P}_h}$$

Agora, usando a coercividade acima, chegamos em:

$$\frac{\|\xi\|_{\mathcal{P}_h}^2}{C_1} \leq C_2 \|\eta\|_{\mathcal{P}_h} \|\xi\|_{\mathcal{P}_h} \implies \|\xi\|_{\mathcal{P}_h} \leq C \|\eta\|_{\mathcal{P}_h}$$

Com esta desigualdade, estimamos o erro somente em função de  $\eta$ :

$$\|e\|_{\mathcal{P}_h} \leq \|\eta\|_{\mathcal{P}_h} + \|\xi\|_{\mathcal{P}_h} \leq \|\eta\|_{\mathcal{P}_h} + C \|\eta\|_{\mathcal{P}_h} = (1 + C) \|\eta\|_{\mathcal{P}_h} = C \|\eta\|_{\mathcal{P}_h} \quad (4.3)$$

Note que  $C$  é uma constante genérica que independe de  $h$  e  $p$  e absorve outras constantes que aparecem.

Pela definição da norma  $\|\cdot\|_{\mathcal{P}_h}$ , temos:

$$\|\eta\|_{\mathcal{P}_h}^2 = \sum_{K \in \mathcal{P}_h} \int_K (|\nabla \eta|^2 + c\eta^2) dx + \int_{\Gamma_{int} \cup \Gamma_D} \frac{1}{\sigma} \langle \mathbf{n} \cdot \nabla \eta \rangle^2 ds + \int_{\Gamma_{int} \cup \Gamma_D} \sigma [\eta]^2 ds \quad (4.4)$$

Escolheremos agora o interpolante  $z_p$ , como no Lema (2.5). Considerando este interpolante e usando o ítem (i) deste lema, temos:

$$\int_K |\nabla \eta|^2 dx \leq \|\eta\|_{H^1(K)} \leq C \left( \frac{h_K^{\mu-1}}{p_K^{s-1}} \right)^2 \|u\|_{H^s(K)}^2 \quad s \geq 1$$

$$\int_K c\eta^2 dx = c \int_K \eta^2 dx = c \|\eta\|_{L_2(K)}^2 \leq cC \left( \frac{h_K^\mu}{p_K^s} \right)^2 \|u\|_{H^s(K)}^2 \quad s \geq 0$$

Somando estas duas expressões, chegamos a

$$\int_K (|\nabla \eta|^2 + c\eta^2) dx \leq C \frac{h_K^{2\mu-2}}{p_K^{2s-2}} \|u\|_{H^s(K)}^2 \quad s \geq 1. \quad (4.5)$$

Para fazer a estimativa da segunda integral em (4.4), procedemos como em (3.39). Assim, resumindo a análise feita na seqüência de (3.39), chegamos que: seja  $\gamma \subset \Gamma_{int} \cup \Gamma_D$ , considere a integral sobre  $K \in \mathcal{P}_h$  associado a este  $\gamma$ , então,

$$\begin{aligned} \int_\gamma \frac{1}{\sigma} (\mathbf{n} \cdot \nabla \eta)^2 ds &\leq \int_\gamma \frac{1}{\sigma} |\mathbf{n}|^2 |\nabla \eta|^2 ds = \int_\gamma \frac{1}{\sigma} |\nabla \eta|^2 ds \\ &= \frac{1}{\sigma} \|\nabla \eta\|_{L_2(\gamma)}^2 \leq \frac{1}{\sigma} \|\nabla \eta\|_{L_2(\partial K)}^2 \\ &\leq \frac{C}{\sigma} \left( \frac{1}{h_K} \|\nabla \eta\|_{L_2(K)}^2 + \|\nabla \eta\|_{L_2(K)} \|\nabla^2 \eta\|_{L_2(K)} \right) \\ &\leq \frac{C}{\sigma} \left( \frac{1}{h_K} \|\eta\|_{H^1(K)}^2 + \|\eta\|_{H^1(K)} \|\eta\|_{H^2(K)} \right) \\ &\leq \frac{C}{\sigma} \left( \frac{1}{h_K} \left( \frac{h_K^{\mu-1}}{p_K^{s-1}} \right)^2 + \frac{h_K^{\mu-1}}{p_K^{s-1}} \frac{h_K^{\mu-2}}{p_K^{s-2}} \right) \|u\|_{H^s(K)}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_\gamma \frac{1}{\sigma} (\mathbf{n} \cdot \nabla \eta)^2 ds &\leq \frac{C}{\sigma} \left( \frac{h_K^{2\mu-3}}{p_K^{2s-2}} + \frac{h_K^{2\mu-3}}{p_K^{2s-3}} \right) \|u\|_{H^s(K)}^2 \\ &\leq \frac{C}{\sigma} \frac{h_K^{2\mu-3}}{p_K^{2s-3}} \|u\|_{H^s(K)}^2 \\ &\leq \frac{C}{k} \frac{h_K^{2\mu-2}}{p_K^{2s-1}} \|u\|_{H^s(K)}^2, \quad s \geq 2. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Para estimar a terceira integral em (4.4), usaremos novamente o argumento de associar a um  $\gamma \subset \Gamma_D$  o elemento  $K \in \mathcal{P}_h$  e também um  $\gamma_{ij} \subset \Gamma_{int}$  aos elementos  $K_i, K_j \in \mathcal{P}_h$  que compartilham  $\gamma_{ij}$ . Mas desta vez, usaremos a desigualdade:

$$(a - b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2 :$$

$$\int_{\gamma_{ij}} \sigma[\eta]^2 ds = \int_{\gamma_{ij}} \sigma(\eta_i - \eta_j)^2 ds \leq 2 \int_{\gamma_{ij}} \sigma\eta_i^2 ds + 2 \int_{\gamma_{ij}} \sigma\eta_j^2 ds$$

Usando o Lema de Aproximação Polinomial (2.5)(ii):

$$\int_{\gamma} \sigma(\eta)^2 ds \leq C\sigma \frac{h_K^{2\mu-1}}{p_K^{2s-1}} \|u\|_{H^s(K)}^2 \leq Ck \frac{h_K^{2\mu-2}}{p_K^{2s-3}} \|u\|_{H^s(K)}^2 \quad (4.7)$$

Voltando em (4.4), temos:

$$\begin{aligned} \|\eta\|_{\mathcal{P}_h}^2 &\leq \sum_{K \in \mathcal{P}_h} \left( C \frac{h_K^{2\mu-2}}{p_K^{2s-2}} + \frac{C}{k} \frac{h_K^{2\mu-2}}{p_K^{2s-1}} + Ck \frac{h_K^{2\mu-2}}{p_K^{2s-3}} \right) \|u\|_{H^s(K)}^2 \\ &\leq C \sum_{K \in \mathcal{P}_h} \left( \frac{h_K^{2\mu-2}}{p_K^{2s-2}} + \frac{h_K^{2\mu-2}}{p_K^{2s-1}} + \frac{h_K^{2\mu-2}}{p_K^{2s-3}} \right) \|u\|_{H^s(K)}^2 \\ &\leq C \sum_{K \in \mathcal{P}_h} \frac{h_K^{2\mu-2}}{p_K^{2s-3}} \|u\|_{H^s(K)}^2 \\ &\leq C \frac{h^{2\mu-2}}{p^{2s-3}} \sum_{K \in \mathcal{P}_h} \|u\|_{H^s(K)}^2 \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\|\eta\|_{\mathcal{P}_h} \leq C \frac{h^{\mu-1}}{p^{s-3/2}} \left( \sum_{K \in \mathcal{P}_h} \|u\|_{H^s(K)}^2 \right)^{1/2} = C \frac{h^{\mu-1}}{p^{s-3/2}} \|u\|_{H^s(\mathcal{P}_h)}.$$

Usando (4.3), chegamos que:

$$\|e\|_{\mathcal{P}_h} \leq C \|\eta\|_{\mathcal{P}_h} \leq C \frac{h^{\mu-1}}{p^{s-3/2}} \|u\|_{H^s(\mathcal{P}_h)}$$

□

## 4.2 Estimativa de erro para o método DG na norma de energia

Nesta seção construiremos uma estimativa de erro para o método DG na norma de energia. Relembramos que o método DG pode ser deduzido de NIPG fazendo  $\sigma = 0$ . Essa mudança, porém, faz com que não consigamos mostrar continuidade e coercividade de  $\mathcal{B}_+(\cdot, \cdot)$  em relação a uma mesma norma. O que mostramos para DG foi:

$$\mathcal{B}_+(v, v) = \|v\|_{e, \mathcal{P}_h}^2, \quad \forall v \in H^2(\mathcal{P}_h)$$

e também:

$$\mathcal{B}_+(u, v) \leq \|u\|_{\mathcal{P}_h} \|v\|_{\mathcal{P}_h}, \quad \forall u, v \in H^2(\mathcal{P}_h)$$

Sendo a coercividade de  $\mathcal{B}_+(\cdot, \cdot)$  em relação a norma  $\|\cdot\|_{\mathcal{P}_h}$  fundamental na demonstração da estimativa de NIPG, vemos que não podemos usar esta mesma estimativa para DG. Temos então uma estimativa exclusiva para DG.

**Teorema 4.2** *Seja  $u \in H^1(\Omega) \cap H^s(\mathcal{P}_h)$ ,  $s \geq 2$  a solução de (3.23) com  $c > 0$  e seja  $u_h$  solução discreta descontínua de (3.24). Então, o erro  $e = u - u_h$  satisfaz a seguinte desigualdade:*

$$\|e\|_{e, \mathcal{P}_h} \leq C \frac{h^{\mu-2}}{p^{s-3/2}} \|u\|_{H^s(\mathcal{P}_h)}, \quad (4.8)$$

onde  $\mu = \min(p+1, s)$ ,  $p \geq 1$ .

*Demonstração:* Usando o mesmo procedimento e notação que antes, temos:  $\|e\|_{e, \mathcal{P}_h} = \|u - u_h\|_{e, \mathcal{P}_h} = \|\eta - \xi\|_{e, \mathcal{P}_h} \leq \|\eta\|_{e, \mathcal{P}_h} + \|\xi\|_{e, \mathcal{P}_h}$ . Usando a coercividade de  $\mathcal{B}_+(\cdot, \cdot)$  na norma de energia (veja (3.43)) e pela ortogonalidade de Galerkin, temos:

$$\begin{aligned} \|\xi\|_{e, \mathcal{P}_h}^2 &= \mathcal{B}_+(\xi, \xi) \\ &= \mathcal{B}_+(\eta, \xi) \\ &= \mathcal{B}(\eta, \xi) - J(\eta, \xi) + J(\xi, \eta) \\ &\leq |\mathcal{B}(\eta, \xi)| + |J(\eta, \xi)| + |J(\xi, \eta)| \end{aligned}$$

Já fizemos em (3.36) a estimativa seguinte para  $\mathcal{B}(\cdot, \cdot)$ :

$$|\mathcal{B}(\eta, \xi)| \leq \|\eta\|_{e, \mathcal{P}_h} \|\xi\|_{e, \mathcal{P}_h},$$

também temos por (4.5):

$$\|\eta\|_{e, \mathcal{P}_h} \leq C \frac{h^{\mu-1}}{p^{s-1}} \|u\|_{H^s(\mathcal{P}_h)}.$$

Desta maneira, estimamos  $|\mathcal{B}(\cdot, \cdot)|$  da seguinte forma:

$$|\mathcal{B}(\eta, \xi)| \leq C \frac{h^{\mu-1}}{p^{s-1}} \|u\|_{H^s(\mathcal{P}_h)} \|\xi\|_{e, \mathcal{P}_h}.$$

Usando desigualdade de Cauchy-Schwarz sobre  $J(\xi, \eta)$ , chegamos:

$$\begin{aligned} |J(\xi, \eta)| &= \left| \int_{\Gamma_{int} \cup \Gamma_D} \langle \mathbf{n} \cdot \nabla \xi \rangle [\eta] ds \right| \\ &\leq \sqrt{\int_{\Gamma_{int} \cup \Gamma_D} \langle \mathbf{n} \cdot \nabla \xi \rangle^2 ds} \sqrt{\int_{\Gamma_{int} \cup \Gamma_D} [\eta]^2 ds} \end{aligned}$$

Quando  $\gamma \subset \Gamma_{int} \cup \Gamma_D$  e lembrando que  $\xi \in \mathcal{V}^{hp}(K)$ , podemos usar a estimativa demonstrada em (3.40):

$$\int_{\Gamma_{int} \cup \Gamma_D} \langle \mathbf{n} \cdot \nabla \xi \rangle^2 ds \leq C \frac{p^2}{h} \|\xi\|_{e, \mathcal{P}_h}^2$$

A partir do Lema de Aproximação Polinomial (2.5)(ii) e da discussão feita em (4.7), temos:

$$\int_{\Gamma_{int} \cup \Gamma_D} [\eta]^2 ds \leq C \frac{h^{2\mu-1}}{p^{2s-1}} \|u\|_{H^s(\mathcal{P}_h)}^2$$

Assim  $|J(\xi, \eta)|$  pode ser estimado por:

$$\begin{aligned} |J(\xi, \eta)| &\leq C \sqrt{\frac{p^2}{h} \|\xi\|_{e, \mathcal{P}_h}^2} \sqrt{\frac{h^{2\mu-1}}{p^{2s-1}} \|u\|_{H^s(\mathcal{P}_h)}^2} \\ &= C \frac{h^{\mu-1}}{p^{s-3/2}} \|u\|_{H^s(\mathcal{P}_h)} \|\xi\|_{e, \mathcal{P}_h} \end{aligned}$$

Por último, falta considerar o termo  $|J(\eta, \xi)|$ , o qual é o responsável pela piora na taxa de convergência. Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos:

$$|J(\eta, \xi)| \leq \sqrt{\int_{\Gamma_{int} \cup \Gamma_D} \langle \mathbf{n} \cdot \nabla \eta \rangle^2 ds} \sqrt{\int_{\Gamma_{int} \cup \Gamma_D} [\xi]^2 ds}$$

Novamente, como foi feito em (4.6) usando Lema de Aproximação Polinomial, temos:

$$\int_{\Gamma_{int} \cup \Gamma_D} \langle \mathbf{n} \cdot \nabla \eta \rangle^2 ds \leq C \frac{h^{2\mu-3}}{p^{2s-3}} \|u\|_{H^s(\mathcal{P}_h)}^2.$$

Pela Desigualdade Multiplicativa de Traço (Lema (2.2)), temos:

$$\|\xi\|_{L_2(\gamma)}^2 \leq C \left( \frac{1}{h_K} \|\xi\|_{L_2(K)}^2 + \|\xi\|_{L_2(K)} \|\nabla \xi\|_{L_2(K)} \right)$$

Sendo  $a, b \geq 0, t \in \mathbb{R}^*$ , então  $ab \leq 2ab \leq \frac{a^2}{t} + tb^2$ . Assim, usando esta desigualdade elementar, temos:

$$\begin{aligned} \|\xi\|_{L_2(\gamma)}^2 &\leq C \left( \frac{1}{h_K} \|\xi\|_{L_2(K)}^2 + \frac{1}{h_K} \|\xi\|_{L_2(K)}^2 + h_K \|\nabla \xi\|_{L_2(K)}^2 \right) \\ &\leq C \left( \frac{1}{h_K} \|\xi\|_{L_2(K)}^2 + h_K \|\nabla \xi\|_{L_2(K)}^2 \right) \end{aligned}$$

Agora, usando que:

$$\|\xi\|_{L_2(K)}^2 = \int_K \xi^2 ds = \frac{1}{c} \int_K c\xi^2 ds \leq \frac{1}{c} \int_K (|\nabla \xi|^2 + c\xi^2) ds = \frac{1}{c} \|\xi\|_{e,K}^2$$

e também que

$$\|\nabla \xi\|_{L_2(K)}^2 = \int_K |\nabla \xi|^2 ds \leq \int_K (|\nabla \xi|^2 + c\xi^2) ds = \|\xi\|_{e,K}^2,$$

Chegamos na expressão:

$$\begin{aligned} \|\xi\|_{L_2(\gamma)}^2 &\leq C \left( \frac{1}{ch_K} \|\xi\|_{e,K}^2 + h_K \|\xi\|_{e,K}^2 \right) \\ &\leq \frac{C}{ch_K} \|\xi\|_{e,K}^2 \end{aligned} \tag{4.9}$$

Desta forma, estimamos  $|J(\eta, \xi)|$  como segue:

$$|J(\eta, \xi)| \leq C \frac{h^{\mu-2}}{p^{s-3/2}} \|u\|_{H^s(\mathcal{P}_h)} \|\xi\|_{e,\mathcal{P}_h}$$

Assim, estimamos  $\|\xi\|_{e,\mathcal{P}_h}^2$  da forma:

$$\begin{aligned} \|\xi\|_{e,\mathcal{P}_h}^2 &\leq C \left( \frac{h^{\mu-1}}{p^{s-1}} + \frac{h^{\mu-1}}{p^{s-3/2}} + \frac{h^{\mu-2}}{p^{s-3/2}} \right) \|\xi\|_{e,\mathcal{P}_h} \|u\|_{H^s(\mathcal{P}_h)} \\ &\leq C \frac{h^{\mu-2}}{p^{s-3/2}} \|\xi\|_{e,\mathcal{P}_h} \|u\|_{H^s(\mathcal{P}_h)}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\|\xi\|_{e,\mathcal{P}_h} \leq C \frac{h^{\mu-2}}{p^{s-3/2}} \|u\|_{H^s(\mathcal{P}_h)}$$

Falta agora somente fazer a estimativa para  $\|\eta\|_{e,\mathcal{P}_h}$ . Mas isso já fizemos em (4.5);

de lá, temos que:

$$\|\eta\|_{e,\mathcal{P}_h} \leq C \frac{h^{\mu-1}}{p^{s-1}} \|u\|_{H^s(\mathcal{P}_h)}$$

Finalmente, juntando os resultados acima para  $\|\eta\|_{e, \mathcal{P}_h}$  e  $\|\xi\|_{e, \mathcal{P}_h}$ , chegamos ao resultado esperado:

$$\begin{aligned} \|e\|_{e, \mathcal{P}_h} &\leq \|\eta\|_{e, \mathcal{P}_h} + \|\xi\|_{e, \mathcal{P}_h} \leq C \left( \frac{h^{\mu-1}}{p^{s-1}} + \frac{h^{\mu-2}}{p^{s-3/2}} \right) \|u\|_{H^s(\mathcal{P}_h)} \\ &\leq C \frac{h^{\mu-2}}{p^{s-3/2}} \|u\|_{H^s(\mathcal{P}_h)} \end{aligned}$$

□

Note que temos em (4.9) a dependência de  $c \neq 0$ , assim a estimativa precisa ser revista para o caso de  $c = 0$ . A análise para esta estimativa pode ser encontrada em [15] onde o autor constrói um interpolante especial e para este, um novo Lema de Aproximação Polinomial. Com estas considerações, ele chega a seguinte estimativa:

$$\|e\|_{e, \mathcal{P}_h} = \|\nabla e\|_{L_2(\mathcal{P}_h)} \leq C \frac{h^{\mu-1}}{p^{s-5/2}} \|u\|_{H^s(\mathcal{P}_h)}$$

Percebe-se uma melhora na taxa de convergência em  $h$  e uma piora em relação a  $p$ .

### 4.3 Estimativa de erro para o método NIPG na norma de $L_2$ .

Na definição dos métodos SIPG e NIPG, consideramos um termo que chamamos de  $J^\sigma(\cdot, \cdot)$  e que tinha a seguinte forma:

$$J^\sigma(u, v) = \sum_{\gamma_{ij} \subset \Gamma_{int}} \int_{\gamma_{ij}} \sigma[u][v] ds + \sum_{\gamma \subset \Gamma_D} \int_{\gamma} \sigma uv ds = \int_{\Gamma_{int} \cup \Gamma_D} \sigma[u][v] ds$$

Para demonstrar a estimativa do tipo *a priori* em  $L_2$  para NIPG, vamos usar um valor especial para  $\sigma$ :

$$\sigma = k \frac{p}{|\gamma|^\beta}, \quad \beta \geq 1/2,$$

onde  $k$  é um parâmetro cuja variação será explicado no Capítulo 5 e  $|\gamma|$  representa a medida de  $\gamma$ . No nosso caso, como  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , temos que  $|\gamma|$  é o comprimento da aresta  $\gamma \subset \Gamma_{int} \cup \Gamma_D$ . Com este valor para  $\sigma$ , vamos definir um novo termo de penalização:

$$J^{\sigma, \beta}(u, v) = \sum_{\gamma_{ij} \subset \Gamma_{int}} k \frac{p}{|\gamma_{ij}|^\beta} \int_{\gamma_{ij}} [u][v] ds + \sum_{\gamma \subset \Gamma_D} k \frac{p}{|\gamma|^\beta} \int_{\gamma} uv ds, \quad (4.10)$$



Sendo  $u^{NIPG}$  a solução do problema (3.27), formulação esta que utiliza o novo termo de penalização que acabamos de definir, e sendo também  $u$  solução do problema (3.1)-(3.2), vamos enunciar um teorema que auxiliará na estimativa que faremos em  $L_2$ :

**Teorema 4.3** *Se  $u$  descrita acima satisfaz  $u \in H^s(\mathcal{P}_h)$ , com  $\beta = 1/3$ , temos o seguinte:*

*Se  $c = 0$ , então:*

$$\|\nabla(u^{NIPG} - u)\|_{L_2(\mathcal{P}_h)} \leq C \frac{h^{\mu-1}}{p^{s-1-\delta}} \|u\|_{H^s(\mathcal{P}_h)}$$

*Se  $c > 0$ , então:*

$$\|u^{NIPG} - u\|_{H^1(\mathcal{P}_h)} \leq C \frac{h^{\mu-1}}{p^{s-1-\delta}} \|u\|_{H^s(\mathcal{P}_h)}$$

$$J^{\sigma,\beta}(u^{NIPG} - u, u^{NIPG} - u) \leq C \frac{h^{2\mu-2}}{p^{2s-2-2\delta}} \|u\|_{H^s(\mathcal{P}_h)}^2, \quad (4.11)$$

onde  $\mu = \min(p+1, s)$ ,  $p \geq 1$ ,  $s \geq 2$  e  $\delta = 0$  no caso de triângulos e  $|\Gamma_D| = 0$ . No caso geral,  $\delta = 1/2$ . Para problemas onde temos somente condições de Neumann, com triângulos, estes resultados são válidos para qualquer  $\beta \geq 1/3$ .

A demonstração pode ser encontrada em Rivièri [19]

Agora vamos enunciar um teorema que mostra a dependência contínua da solução.

**Teorema 4.4** *Seja  $\Omega$  um domínio convexo em  $\mathbb{R}^n$ , então  $\forall f \in L_2(\Omega)$  a solução  $\varphi$  do problema de Neumann:*

$$-\Delta\varphi + c\varphi = f \text{ em } \Omega$$

$$\mathbf{n} \cdot \nabla\varphi = 0 \text{ em } \partial\Omega$$

*pertence ao espaço  $H^2(\Omega)$  e existe uma constante  $c \geq 0$  que depende somente de  $\Omega$ , tal que:*

$$\|\varphi\|_{H^2(\Omega)} \leq c \|f\|_{L_2(\Omega)}.$$

*Demonstração:* veja [19]

Finalmente, vamos colocar aqui umas estimativas com respeito a  $h$  que será útil na demonstração do teorema a seguir. Mais detalhes sobre essas estimativas podem ser encontrados em [2] nas expressões (2.4) e (2.5):

$$\forall \phi \in H^1(K), \quad \|\phi\|_{L_2(\gamma)}^2 \leq C \left( \frac{1}{h_K} \|\phi\|_{L_2(K)}^2 + h_K |\phi|_{H^1(K)}^2 \right), \quad (4.12)$$

$$\forall \phi \in H^2(K), \quad \|\nabla \phi \cdot \mathbf{n}\|_{L_2(\gamma)}^2 \leq C \left( \frac{1}{h_K} |\phi|_{H^1(K)}^2 + h_K |\phi|_{H^2(K)}^2 \right). \quad (4.13)$$

**Teorema 4.5** *Seja  $\Omega$  um domínio convexo em  $\mathbb{R}^2$ . Seja  $f \in L_2(\Omega)$  e  $\phi$  a solução do problema dual:*

$$-\Delta \phi + c\phi = f \text{ em } \Omega$$

$$\mathbf{n} \cdot \nabla \phi = 0 \text{ em } \partial\Omega.$$

Então, no caso de uma malha de triângulos, para qualquer  $\beta \geq 1$ ,

$$\|u^{NIPG} - u\|_{L_2(\Omega)} \leq C \frac{h^{\min(\mu, \mu - \frac{3}{2} + \frac{\beta}{2})}}{p^{s - \frac{1}{2}}} \|u\|_{H^s(\mathcal{T}_h)}$$

onde  $\mu = \min(p + 1, s)$  para  $p \geq 1$ ,  $s \geq 2$  e  $c$  é independente de  $h$ ,  $p$  e  $u$ .

*Demonstração:* Na demonstração deste teorema, vamos usar o *Princípio de dualidade*, que é bem conhecido na teoria do método de elementos finitos.

Considere o problema dual:

$$-\Delta \phi + c\phi = u^{NIPG} - u \text{ em } \Omega$$

$$\mathbf{n} \cdot \nabla \phi = 0 \text{ em } \partial\Omega$$

Sendo  $\phi$  solução do problema acima, então pelo Teorema 4.4 de dependência contínua de solução, temos que  $\phi \in H^2(\Omega)$  e existe uma constante  $C$  dependente somente em  $\Omega$  tal que:

$$\|\phi\|_{H^2(\Omega)} \leq C \|u^{NIPG} - u\|_{L_2(\Omega)} \quad (4.14)$$

Denotando  $e = u^{NIPG} - u$ , então:

$$\|e\|_{L_2(\Omega)}^2 = (e, e)_{L_2(\Omega)} = (-\Delta \phi + c\phi, e)_{L_2(\Omega)}$$

Integrando por partes em cada elemento, temos:

$$\begin{aligned}
\|e\|_{L_2(\Omega)}^2 &= \sum_{K \in \mathcal{P}_h} \int_K (\nabla \phi \cdot \nabla e + c\phi e) dx - \sum_{K \in \mathcal{P}_h} \int_{\partial K} (\nabla \phi \cdot \mathbf{n}) e ds \\
&= \sum_{K \in \mathcal{P}_h} \int_K (\nabla \phi \cdot \nabla e + c\phi e) dx - \sum_{\gamma_{ij} \subset \Gamma_{int}} \int_{\gamma_{ij}} \left( \langle \nabla \phi \cdot \mathbf{n} \rangle [e] + [\nabla \phi \cdot \mathbf{n}] \langle z \rangle \right) ds \\
&= \sum_{K \in \mathcal{P}_h} \int_K (\nabla \phi \cdot \nabla e + c\phi e) dx - \sum_{\gamma_{ij} \subset \Gamma_{int}} \int_{\gamma_{ij}} \langle \nabla \phi \cdot \mathbf{n} \rangle [e] ds \\
&= \mathcal{B}(\phi, e) - J(\phi, e),
\end{aligned}$$

devido ao fato de que  $\phi \in H^2(\Omega)$ , temos que  $[\nabla \phi \cdot \mathbf{n}] = 0$  sobre  $\gamma_{ij}$ ,  $\forall \gamma_{ij} \subset \Gamma_{int}$ . Também desapareceu o termo que envolve  $\Gamma_N$ , pelo fato que  $\nabla \phi \cdot \mathbf{n} = 0$  em  $\Gamma_N = \partial\Omega$ .

Pela ortogonalidade de Galerkin, temos para qualquer  $\phi^* \in \mathcal{V}^{hp}$ :

$$\mathcal{B}(e, \phi^*) - J(e, \phi^*) + J(\phi^*, e) + J^{\sigma, \beta}(e, \phi^*) = 0$$

Usando a regularidade de  $\phi$  e escolhendo para  $\phi^*$  um interpolante contínuo de  $\phi$  (veja (2.7)) satisfazendo o Lema de Aproximação Polinomial 2.5-i e 2.5-ii, obtemos:

$$\begin{aligned}
\|e\|_{L_2(\Omega)}^2 &= \mathcal{B}(\phi, e) - J(\phi, e) - 0 \\
&= \mathcal{B}(\phi, e) - J(\phi, e) - (\mathcal{B}(e, \phi^*) - J(e, \phi^*) + J(\phi^*, e) + J^{\sigma, \beta}(e, \phi^*)) \\
&= \mathcal{B}(\phi - \phi^*, e) - J(\phi, e) - J(\phi^*, e) \\
&= \mathcal{B}(\phi - \phi^*, e) - J(\phi, e) + J(\phi, e) - J(\phi, e) - J(\phi^*, e) \\
&= \mathcal{B}(\phi - \phi^*, e) + J(\phi - \phi^*, e) - 2J(\phi, e)
\end{aligned}$$

Usando (4.14), Lema de Aproximação Polinomial 2.5 e Cauchy-Schwarz, estimamos  $\mathcal{B}(\phi - \phi^*, e)$ .

$$|\mathcal{B}(\phi - \phi^*, e)| \leq \left| \sum_{K \in \mathcal{P}_h} \int_K \nabla(\phi - \phi^*) \cdot \nabla e dx \right| + \left| \sum_{K \in \mathcal{P}_h} \int_K c(\phi - \phi^*) e dx \right|$$

Vamos estimar cada parcela como:

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{K \in \mathcal{P}_h} \int_K \nabla(\phi - \phi^*) \cdot \nabla e \, dx \right| &\leq \sum_{K \in \mathcal{P}_h} \left| \int_K \nabla(\phi - \phi^*) \cdot \nabla e \, dx \right| \\
&\leq \sum_{K \in \mathcal{P}_h} \left( \int_K |\nabla(\phi - \phi^*)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_K |\nabla e|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \sum_{K \in \mathcal{P}_h} \|\phi - \phi^*\|_{H^1(K)} \|\nabla e\|_{L_2(\Omega)} \\
&\leq C \sum_{K \in \mathcal{P}_h} \frac{h_K}{p_K} \|\phi\|_{H^2(K)} \|\nabla e\|_{L_2(\Omega)} \\
&\leq C \frac{h}{p} \sum_{K \in \mathcal{P}_h} \|\phi\|_{H^2(K)} \|\nabla e\|_{L_2(\Omega)} \\
&\leq C \frac{h}{p} \left( \sum_{K \in \mathcal{P}_h} \|\phi\|_{H^2(K)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{K \in \mathcal{P}_h} \|\nabla e\|_{L_2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C \frac{h}{p} \|\phi\|_{H^2(\Omega)} \|\nabla e\|_{H^0(\mathcal{P}_h)} \\
&\leq C \frac{h}{p} \|e\|_{L_2(\Omega)} \|\nabla e\|_{H^0(\mathcal{P}_h)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{K \in \mathcal{P}_h} \int_K c(\phi - \phi^*)e \, dx \right| &\leq c \sum_{K \in \mathcal{P}_h} \left( \int_K |\phi - \phi^*|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_K e^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= c \sum_{K \in \mathcal{P}_h} \|\phi - \phi^*\|_{L_2(K)} \|e\|_{L_2(K)} \\
&\leq C \frac{h^2}{p^2} \sum_{K \in \mathcal{P}_h} \|\phi\|_{H^2(K)} \|e\|_{L_2(K)} \\
&= C \frac{h^2}{p^2} \|\phi\|_{H^2(\Omega)} \|e\|_{H^0(\mathcal{P}_h)} \\
&\leq C \frac{h^2}{p^2} \|e\|_{L_2(\Omega)} \|e\|_{H^0(\mathcal{P}_h)}
\end{aligned}$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, pelo Teorema 4.3 com  $\beta \geq 1$ , pelo Lema

2.5-iii e Teorema 4.14, temos:

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{\gamma_{ij} \subset \Gamma_{int}} \int_{\gamma_{ij}} \langle \nabla(\phi - \phi^*) \cdot \mathbf{n} \rangle [e] ds \right| &\leq \sum_{\gamma_{ij} \subset \Gamma_{int}} \left( \frac{|\gamma_{ij}|^\beta}{kp} \right)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}} \|\langle \nabla(\phi - \phi^*) \cdot \mathbf{n} \rangle\|_{L_2(\gamma_{ij})} \| [e] \|_{L_2(\gamma_{ij})} \\
&\leq J^{\sigma, \beta}(e, e)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{\gamma_{ij} \subset \Gamma_{int}} \frac{|\gamma_{ij}|^\beta}{kp} \|\langle \nabla(\phi - \phi^*) \cdot \mathbf{n} \rangle\|_{L_2(\gamma_{ij})}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C \frac{h^{\mu-1}}{p^{s-1}} \|u\|_{H^s(\mathcal{P}_h)} k \frac{h^{\frac{\beta}{2}}}{p^{\frac{1}{2}}} \left( \sum_{\gamma_{ij} \subset \Gamma_{int}} \|\langle \nabla(\phi - \phi^*) \cdot \mathbf{n} \rangle\|_{L_2(\gamma_{ij})}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C \frac{h^{\mu-1+\frac{\beta}{2}}}{p^{s-\frac{1}{2}}} \|u\|_{H^s(\mathcal{P}_h)} \left( \sum_{\gamma_{ij} \subset \Gamma_{int}} \|\langle (\phi - \phi^*) \cdot \mathbf{n} \rangle\|_{H^1(\gamma_{ij})}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C \frac{h^{\mu-1+\frac{\beta}{2}}}{p^{s-\frac{1}{2}}} \|u\|_{H^s(\mathcal{P}_h)} \left( \sum_{K \in \mathcal{P}_h} \frac{h_K^{2.2-3}}{p_K^{2.2-3}} \|\phi\|_{H^2(K)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C \frac{h^{\mu-1+\frac{\beta}{2}}}{p^{s-\frac{1}{2}}} \|u\|_{H^s(\mathcal{P}_h)} \frac{h^{\frac{1}{2}}}{p^{\frac{1}{2}}} \left( \sum_{K \in \mathcal{P}_h} \|e\|_{L_2(K)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C \frac{h^{\mu-\frac{1}{2}+\frac{\beta}{2}}}{p^s} \|u\|_{H^s(\mathcal{P}_h)} \|e\|_{L_2(\Omega)}
\end{aligned}$$

Similarmente, por Cauchy-Schwarz e Teoremas 4.3 e 4.13, temos:

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{\gamma_{ij} \subset \Gamma_{int}} \int_{\gamma_{ij}} \langle \nabla \phi \cdot \mathbf{n} \rangle [e] ds \right| &\leq \sum_{\gamma_{ij} \subset \Gamma_{int}} \left( \frac{|\gamma_{ij}|^\beta}{kp} \right)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}} \|\langle \nabla \phi \cdot \mathbf{n} \rangle\|_{L_2(\gamma_{ij})} \| [e] \|_{L_2(\gamma_{ij})} \\
&\leq J^{\sigma, \beta}(e, e)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{\gamma_{ij} \subset \Gamma_{int}} \frac{|\gamma_{ij}|^\beta}{kp} \|\langle \nabla \phi \cdot \mathbf{n} \rangle\|_{L_2(\gamma_{ij})}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C \frac{h^{\mu-1}}{p^{s-1}} \|u\|_{H^s(\mathcal{P}_h)} k \frac{h^{\frac{\beta}{2}}}{p^{\frac{1}{2}}} \left( \sum_{\gamma_{ij} \subset \Gamma_{int}} \|\langle \nabla \phi \cdot \mathbf{n} \rangle\|_{L_2(\gamma_{ij})}^2 \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{\gamma_{ij} \subset \Gamma_{int}} \int_{\gamma_{ij}} \langle \nabla \phi \cdot \mathbf{n} \rangle [e] ds \right| &\leq C \frac{h^{\mu-1+\frac{\beta}{2}}}{p^{s-\frac{1}{2}}} \|u\|_{H^s(\mathcal{P}_h)} \left( \sum_{\gamma_{ij} \subset \Gamma_{int}} \|\langle \nabla \phi \cdot \mathbf{n} \rangle\|_{L_2(\gamma_{ij})}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C \frac{h^{\mu-1+\frac{\beta}{2}}}{p^{s-\frac{1}{2}}} \|u\|_{H^s(\mathcal{P}_h)} \left( \sum_{K \in \mathcal{P}_h} \left( \frac{1}{h_K} |\phi|_{H^1(K)}^2 + h_K |\phi|_{H^2(K)}^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C \frac{h^{\mu-1+\frac{\beta}{2}}}{p^{s-\frac{1}{2}}} \|u\|_{H^s(\mathcal{P}_h)} \frac{1}{h^{\frac{1}{2}}} \left( \sum_{K \in \mathcal{P}_h} \left( |\phi|_{H^1(K)}^2 + |\phi|_{H^2(K)}^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C \frac{h^{\mu-\frac{3}{2}+\frac{\beta}{2}}}{p^{s-\frac{1}{2}}} \|u\|_{H^s(\mathcal{P}_h)} \left( \sum_{K \in \mathcal{P}_h} \|\phi\|_{H^2(K)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= C \frac{h^{\mu-\frac{3}{2}+\frac{\beta}{2}}}{p^{s-\frac{1}{2}}} \|u\|_{H^s(\mathcal{P}_h)} \|\phi\|_{H^2(\Omega)} \\
&\leq C \frac{h^{\mu-\frac{3}{2}+\frac{\beta}{2}}}{p^{s-\frac{1}{2}}} \|u\|_{H^s(\mathcal{P}_h)} \|z\|_{L_2(\Omega)}
\end{aligned}$$

Juntando todas as estimativas feitas acima, temos:

$$\begin{aligned}
\|e\|_{L_2(\Omega)} &\leq C \left( \frac{h}{p} \|\nabla e\|_{H^0(\mathcal{P}_h)} + \frac{h^2}{p^2} \|e\|_{H^0(\mathcal{P}_h)} + \frac{h^{\mu-\frac{1}{2}+\frac{\beta}{2}}}{p^s} \|u\|_{H^s(\mathcal{P}_h)} + \frac{h^{\mu-\frac{3}{2}+\frac{\beta}{2}}}{p^{s-\frac{1}{2}}} \|u\|_{H^s(\mathcal{P}_h)} \right) \\
&\leq C \left( \frac{h}{p} \|\nabla e\|_{H^0(\mathcal{P}_h)} + \frac{h^2}{p^2} \|e\|_{H^0(\mathcal{P}_h)} + 2 \frac{h^{\mu-\frac{3}{2}+\frac{\beta}{2}}}{p^{s-\frac{1}{2}}} \|u\|_{H^s(\mathcal{P}_h)} \right) \\
&\leq 2C \left( \frac{h}{p} \|\nabla e\|_{H^0(\mathcal{P}_h)} + \frac{h^2}{p^2} \|e\|_{H^0(\mathcal{P}_h)} + \frac{h^{\mu-\frac{3}{2}+\frac{\beta}{2}}}{p^{s-\frac{1}{2}}} \|u\|_{H^s(\mathcal{P}_h)} \right)
\end{aligned}$$

Agora, usando teorema (4.3), chegamos que:

$$\begin{aligned}
\|e\|_{L_2(\Omega)} &\leq 2C \left( \frac{h}{p} \frac{h^{\mu-1}}{p^{s-1}} \|u\|_{H^s(\mathcal{P}_h)} + \frac{h^2}{p^2} \frac{h^{\mu-1}}{p^{s-1}} \|u\|_{H^s(\mathcal{P}_h)} + \frac{h^{\mu-\frac{3}{2}+\frac{\beta}{2}}}{p^{s-\frac{1}{2}}} \|u\|_{H^s(\mathcal{P}_h)} \right) \\
&= 2C \left( \frac{h^\mu}{p^s} \|u\|_{H^s(\mathcal{P}_h)} + \frac{h^{\mu+1}}{p^{s+1}} \|u\|_{H^s(\mathcal{P}_h)} + \frac{h^{\mu-\frac{3}{2}+\frac{\beta}{2}}}{p^{s-\frac{1}{2}}} \|u\|_{H^s(\mathcal{P}_h)} \right) \\
&\leq 4C \left( \frac{h^\mu}{p^s} + \frac{h^{\mu-\frac{3}{2}+\frac{\beta}{2}}}{p^{s-\frac{1}{2}}} \right) \|u\|_{H^s(\mathcal{P}_h)} \\
&\leq 4C \frac{h^{\min(\mu, \mu-\frac{3}{2}+\frac{\beta}{2})}}{p^{s-\frac{1}{2}}} \|u\|_{H^s(\mathcal{P}_h)}
\end{aligned}$$

□

## 4.4 Estimativa de erro para o método SIPG na norma de $L_2$ .

**Teorema 4.6** *Seja  $\Omega$  convexo em  $\mathbb{R}^2$ . Seja  $f \in L_2(\Omega)$  e  $\phi$  a solução do problema dual:*

$$-\Delta\phi + c\phi = f \text{ em } \Omega$$

$$\mathbf{n} \cdot \nabla\phi = 0 \text{ em } \partial\Omega$$

*Então, no caso de malha de triângulos, temos:*

$$\|u^{SIPG} - u\|_{L_2(\Omega)} \leq C \frac{h^\mu}{p^{s-1/2}} \|u\|_{H^s(\mathcal{P}_h)}$$

*onde  $\mu = \min(p+1, s)$  para  $p \geq 1$ ,  $s \geq 2$  e  $C$  é independente de  $h$ ,  $p$  e  $u$ . Sendo  $u^{SIPG}$  a solução do problema (3.21) e  $u$  solução do problema (3.1)-(3.2).*

*Demonstração:* Nesta demonstração, usaremos também o princípio de dualidade. De forma parecida como no teorema anterior para NIPG, vamos considerar o problema dual:

$$-\Delta\phi + c\phi = u^{SIPG} - u \text{ em } \Omega$$

$$\mathbf{n} \cdot \nabla\phi = 0 \text{ em } \partial\Omega$$

Devido ao Teorema 4.4 sobre a dependência contínua da solução, temos que  $\phi \in H^2(\Omega)$  e existe uma constante  $C$  dependente somente em  $\Omega$  tal que:

$$\|\phi\|_{H^2(\Omega)} \leq C \|u^{SIPG} - u\|_{L_2(\Omega)} \quad (4.15)$$

Usando que  $\phi$  é solução do problema dual proposto no início desta demonstração e também a simetria de  $\mathcal{B}_+^\sigma(\phi, v)$ , temos que:

$$\mathcal{B}_+^\sigma(v, \phi) = (v, u^{SIPG} - u)_{L_2(\Omega)} \quad \forall v \in H^2(\mathcal{P}_h)$$

Denotando  $e = u^{SIPG} - u$  e escolhendo  $v = e$  chegamos em:

$$\|e\|_{L_2(\Omega)}^2 = \mathcal{B}_+^\sigma(e, \phi)$$

Usando ortogonalidade de Galerkin, temos que para qualquer  $\phi^* \in \mathcal{V}^{hp}$  a seguinte igualdade:

$$\|e\|_{L_2(\Omega)}^2 = \mathcal{B}_+^\sigma(e, \phi) = \mathcal{B}_+^\sigma(e, \phi - \phi^*)$$

Agora pela continuidade de  $\mathcal{B}_+^\sigma(\cdot, \cdot)$  em relação a norma  $\|\cdot\|_{\mathcal{P}_h}$ , temos:

$$\|e\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq C \|e\|_{\mathcal{P}_h} \|\phi - \phi^*\|_{\mathcal{P}_h} \quad (4.16)$$

Tomando  $\phi^*$  como um interpolante contínuo de  $\phi$  que satisfaça o Lema de Aproximação Polinomial (2.5) e observando que  $\phi \in H^2(\Omega)$  por hipótese, chegamos que  $J^\sigma(\phi - \phi^*, \phi - \phi^*) = 0$ . Assim, da definição da norma  $\|\cdot\|_{\mathcal{P}_h}$ , Lema de Aproximação Polinomial (2.5)(i) e (iii) e dependência contínua de solução (4.15), temos:

$$\begin{aligned} \|\phi - \phi^*\|_{\mathcal{P}_h} &= \sqrt{\|\phi - \phi^*\|_{e, \mathcal{P}_h}^2 + \int_{\Gamma_{int} \cup \Gamma_D} \frac{1}{\sigma} \langle \mathbf{n} \cdot \nabla(\phi - \phi^*) \rangle^2 ds} \\ &\leq C \sqrt{\frac{h^2}{p^2} \|\phi\|_{H^2(\Omega)}^2 + \frac{h}{k p^2} \frac{h}{p} \|\phi\|_{H^2(\Omega)}^2} \\ &\leq C \frac{h}{p} \|\phi\|_{H^2(\Omega)} \\ &\leq C \frac{h}{p} \|e\|_{L_2(\Omega)} \end{aligned}$$

Na seção onde tratamos sobre estimativas na norma de energia, chegamos, para SIPG, na seguinte estimativa (veja (4.2)):

$$\|e\|_{e, \mathcal{P}_h} \leq C \frac{h^{\mu-1}}{p^{s-3/2}} \|u\|_{H^s(\mathcal{P}_h)}$$

A demonstração dessa estimativa foi feita para norma  $\|\cdot\|_{\mathcal{P}_h}$  e depois usando que  $\|e\|_{e, \mathcal{P}_h} \leq \|e\|_{\mathcal{P}_h}$  chegou-se ao resultado. Assim, podemos usar que:

$$\|e\|_{\mathcal{P}_h} \leq C \frac{h^{\mu-1}}{p^{s-3/2}} \|u\|_{H^s(\mathcal{P}_h)}$$

Por fim, juntando esses resultados em (4.16), chegamos a:

$$\|e\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq C \frac{h^{\mu-1}}{p^{s-3/2}} \|u\|_{H^s(\mathcal{P}_h)} \frac{h}{p} \|e\|_{L_2(\Omega)} = C \frac{h^\mu}{p^{s-1/2}} \|u\|_{H^s(\mathcal{P}_h)}$$

□



# Capítulo 5

## Experiências numéricas

### 5.1 Implementação do método de Galerkin descontínuo

Para comparar os resultados teóricos apresentados nos capítulos anteriores, foi realizada uma implementação do método de Galerkin descontínuo no caso das formulações simétrica e não simétrica. A implementação foi realizada em linguagem de programação C++ para um sistema hierárquico de funções de forma baseada no sistema de polinômios de Legendre. Mais explicitamente, consideramos para cada elemento retangular  $K$  da malha, um espaço de polinômios  $Q_{p_K}(K)$ , cuja ordem em cada variável é menor ou igual a  $p_K$ . Nesse espaço consideramos como base um sistema de produtos tensoriais de polinômios de Legendre em cada variável. A dimensão do espaço  $Q_{p_K}(K)$  é igual a  $(p_K + 1)^2$  e a base considerada nesse espaço tem a forma seguinte:

$$\{L_j(x)L_i(y); j = 0, \dots, p_K, i = 0, \dots, p_K\}$$

O cálculo dos elementos da matriz de rigidez foi realizado a partir de fórmulas para a forma bilinear para cada um dos métodos. Para o cálculo numérico das integrais, foram usadas quadraturas de Gauss de ordem  $p_K$  que garantem cálculo exato do produto de funções de forma e suas derivadas. O mesmo procedimento foi realizado para o cálculo do vetor que corresponde a parte direita do problema. O

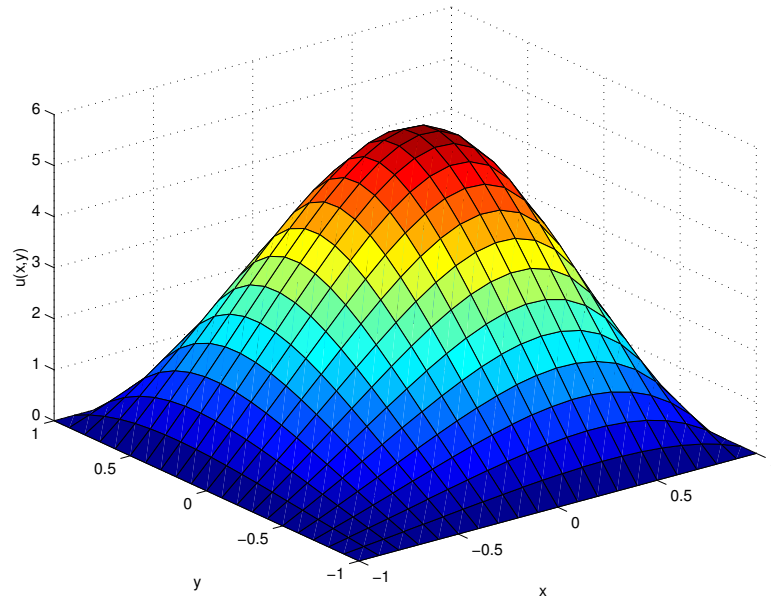


Figura 5.1: Gráfico da solução exata  $u(x, y)$ .

sistema linear global respectivo foi resolvido usando o método LU decomposição de Gauss, que permite tratar matrizes que não são simétricas.

## 5.2 Problema teste

Para estudar as taxas de convergência dos métodos, consideramos o seguinte problema modelo:

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f & \text{em } \Omega \\ u &= 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{5.1}$$

sendo  $\Omega = (-1, 1) \times (-1, 1)$  e o termo fonte,  $f(x, y)$  foi escolhida de forma que este possua a solução analítica seguinte:

$$u(x, y) = 4(1 - x^2)(1 - y^2)e^{0,75(x+y)}$$

O gráfico da solução exata  $u(x, y)$  e do termo fonte  $f(x, y)$  são apresentadas nas Figuras 5.1 e 5.2 respectivamente:

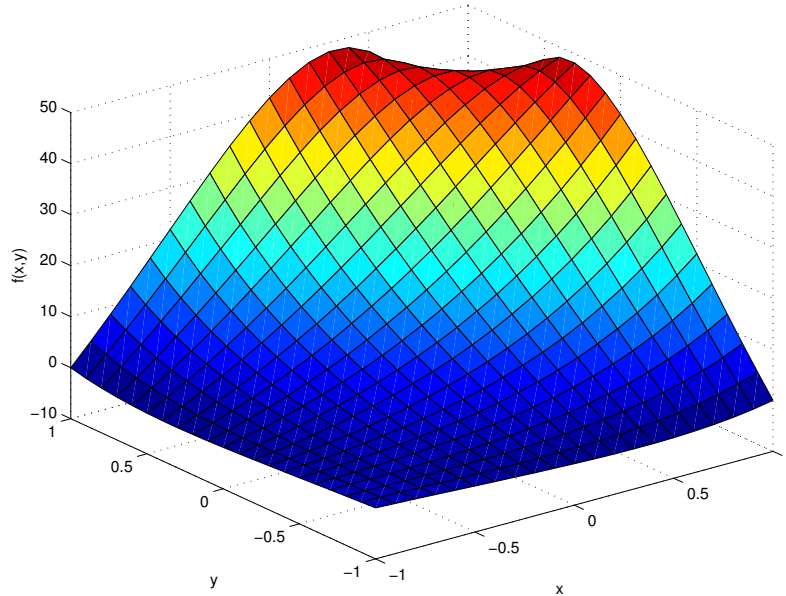


Figura 5.2: Gráfico do termo fonte  $f(x, y)$ .

Vale salientar que escolhemos as condições de fronteira de Dirichlet homogênea para evitar que os erros na integração numérica provenientes das integrais de fronteira que aparecem, se a condição de Dirichlet não é homogênea, interfiram nas taxas de convergência.

### 5.3 Estudo de taxas de convergência

Para estudar as taxas de convergência realizamos uma série de cálculos no problema teste (5.1) numa família de malhas estruturadas de quadriláteros com lado  $h = 1, 1/2, 1/4, 1/8, 1/16$  e para a ordem de aproximação polinomial uniforme  $p = 1, 2, 3, 4$ .

Esses testes foram realizados para a formulação simétrica e não simétrica do método de Galerkin descontínuo.

O parâmetro de penalização  $\sigma$  foi escolhido de acordo com a fórmula  $\sigma_\gamma = k \frac{p}{h_\gamma^\beta} \quad \forall \gamma \in \Gamma_{int} \cup \Gamma_D$ , sendo  $\beta = 1$  ou  $3$ . No caso do método simétrico usamos  $\beta = 1$  e no caso de não simétrico usamos  $\beta = 1$  (NIPG1) para comprovar taxa de convergência na norma de energia e  $\beta = 3$  (NIPG3) para garantir a ótima taxa de convergência na norma  $L_2$ .

Nas Figuras 5.3 e 5.4 são apresentados os gráficos da norma de erro do SIPG nas normas de energia e  $L_2$ , respectivamente. Como pode-se observar, esses gráficos comprovam a ótima ordem de convergência do SIPG na norma de energia  $O(h^p)$  e ótima ordem de convergência em  $L_2$   $O(h^{p+1})$ .

Nas figuras (5.5)-(5.8) apresentamos os gráficos de erro do método NIPG1 e NIPG3. Como pode-se observar nos gráficos (5.5) e (5.7) ambos os métodos NIPG1 e NIPG3 claramente mostram a ótima ordem de convergência  $O(h^p)$  na norma de energia. O comportamento do erro na norma  $L_2$  é diferente. O método NIPG1 apresenta ótima ordem de convergência  $O(h^{p+1})$  só para  $p$  ímpares, e para  $p$  pares a ordem de convergência é de  $O(h^p)$ . Este efeito já foi observado anteriormente no trabalho de Baumann [14].

O método NIPG3, que usa a super-penalização nos termos que estabilizam a forma bilinear, corrige esse defeito e mostra a convergência de ordem  $O(h^{p+1})$  para todos os valores de  $p$ .

Finalmente nas figuras (5.9)-(5.12), apresentamos os gráficos de estudos da comparação dos métodos não simétrico e simétrico na norma de energia em termos de valor do parâmetro de penalização  $k$  que aparece em  $\sigma_\gamma = k \frac{p}{h_\gamma^\beta}$  e que em nossos experimentos, variou no intervalo  $[10^{-5}, 10^3]$ . Como foi demonstrado anteriormente, a estabilidade dos métodos não simétrico NIPG1 e NIPG3 não depende do parâmetro de penalização, enquanto que SIPG é estável só para grandes valores de  $k$ . Entretanto, como mostram os resultados apresentados, o comportamento do erro dos métodos é o mesmo, seja para  $k$  grande ou pequeno. Como o aumento do parâmetro de estabilização aumenta o número de condicionamento da matriz (veja [8]), o que pode ser observado por exemplo, no último gráfico na figura (5.12)), os métodos não simétricos apresentam uma certa vantagem em relação aos métodos simétricos, já que estes necessitam de grandes valores de parâmetro de penalização para garantir estabilidade. Por outro lado, métodos simétricos apresentam melhor desempenho na norma de  $L_2$  e não precisam de super-penalização para apresentar taxa de convergência ótima nesta norma.

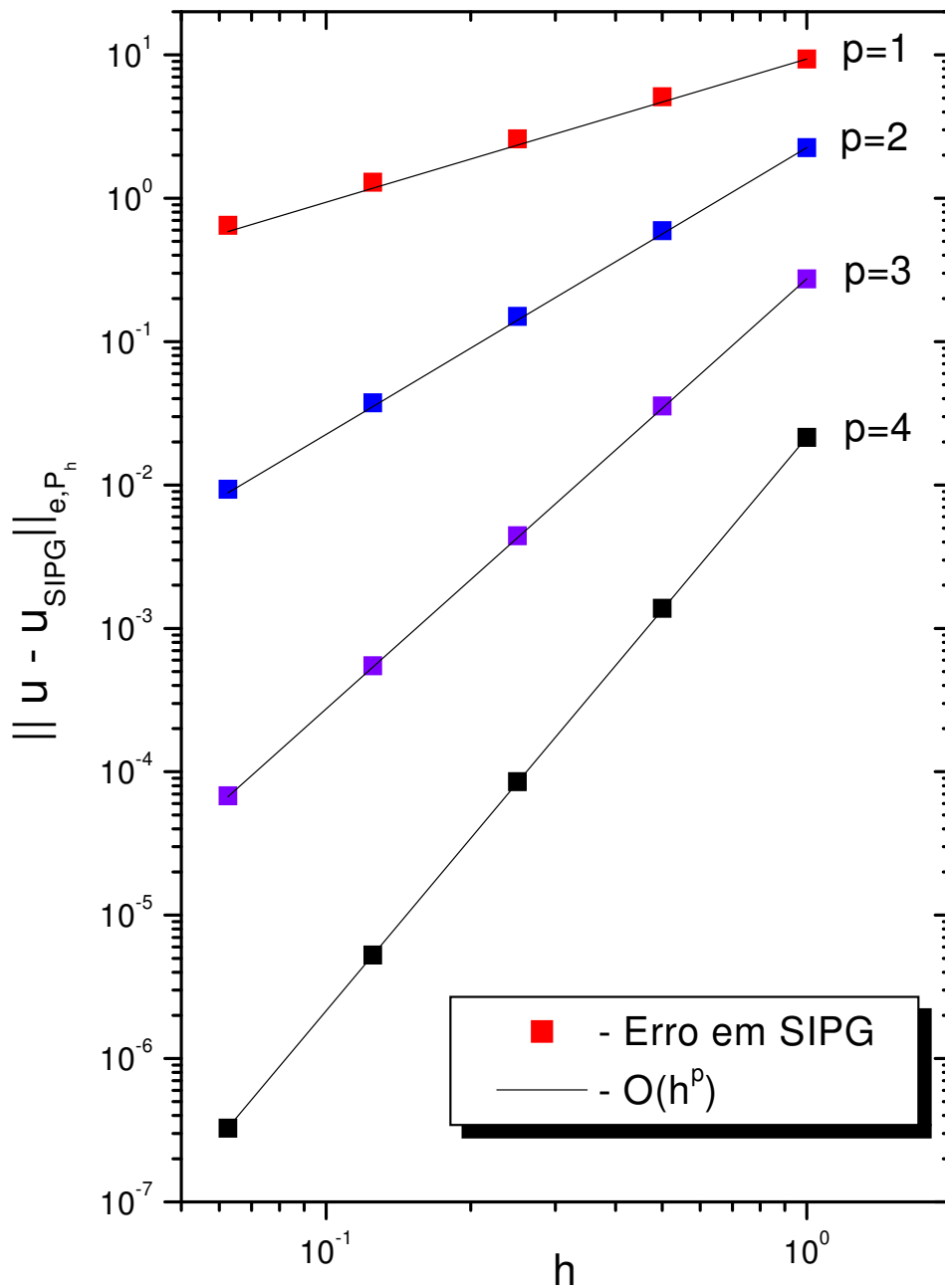


Figura 5.3: Gráfico do erro de SIPG na norma de energia para vários valores de  $p$ .

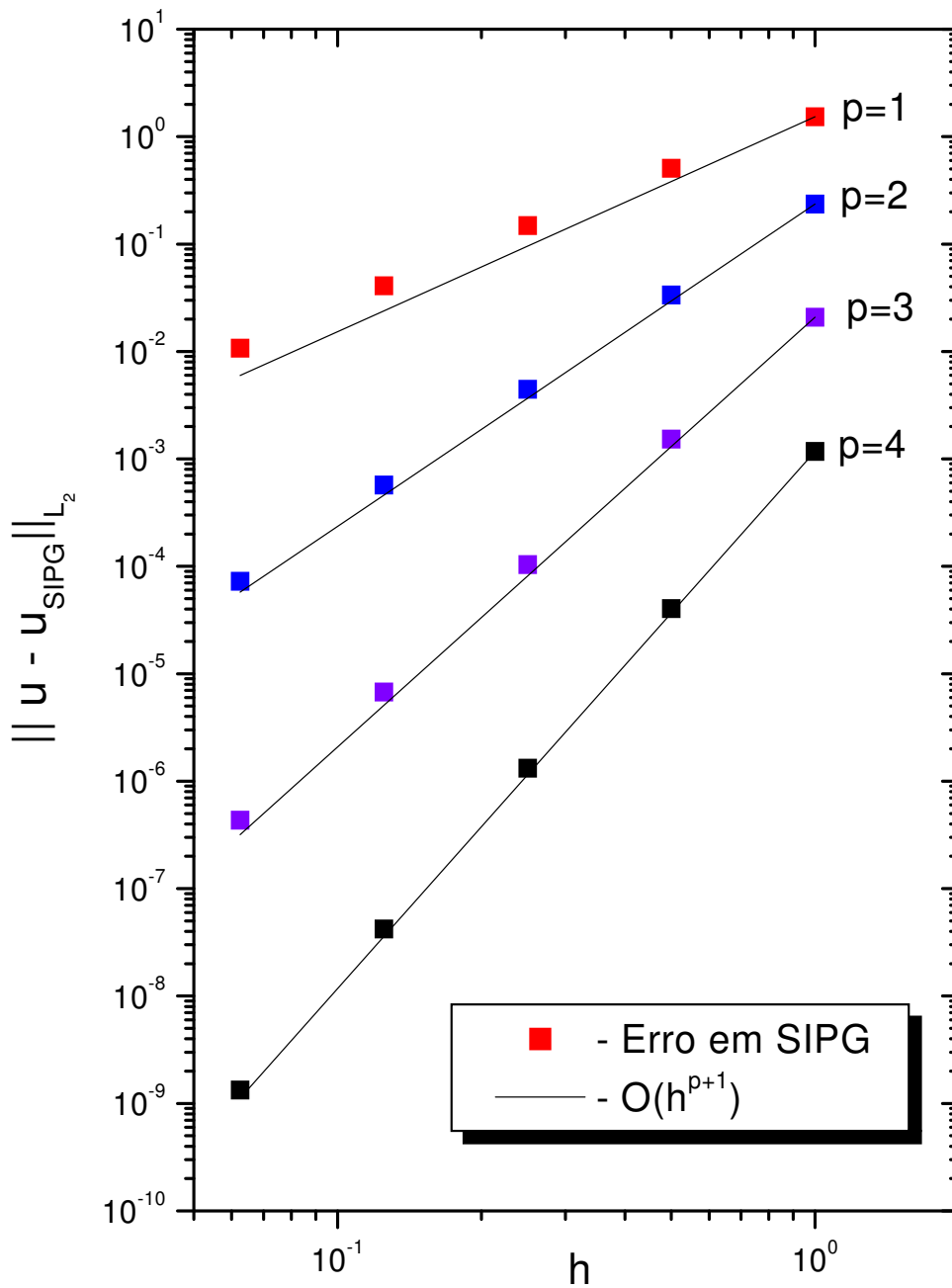


Figura 5.4: Gráfico do erro de SIPG na norma  $L_2$  para vários valores de  $p$ .

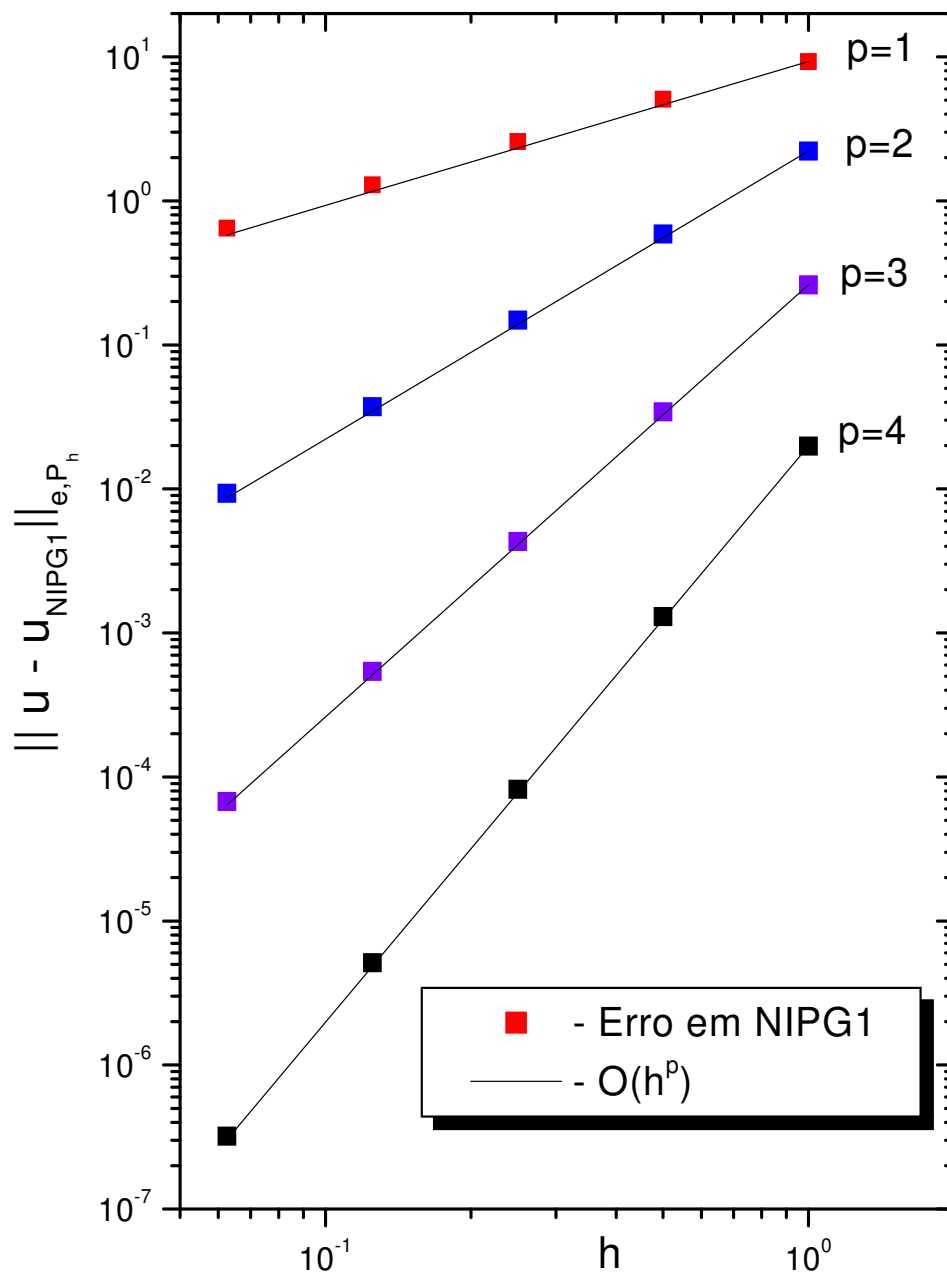


Figura 5.5: Gráfico do erro de NIPG1 na norma de energia para vários valores de  $p$ .

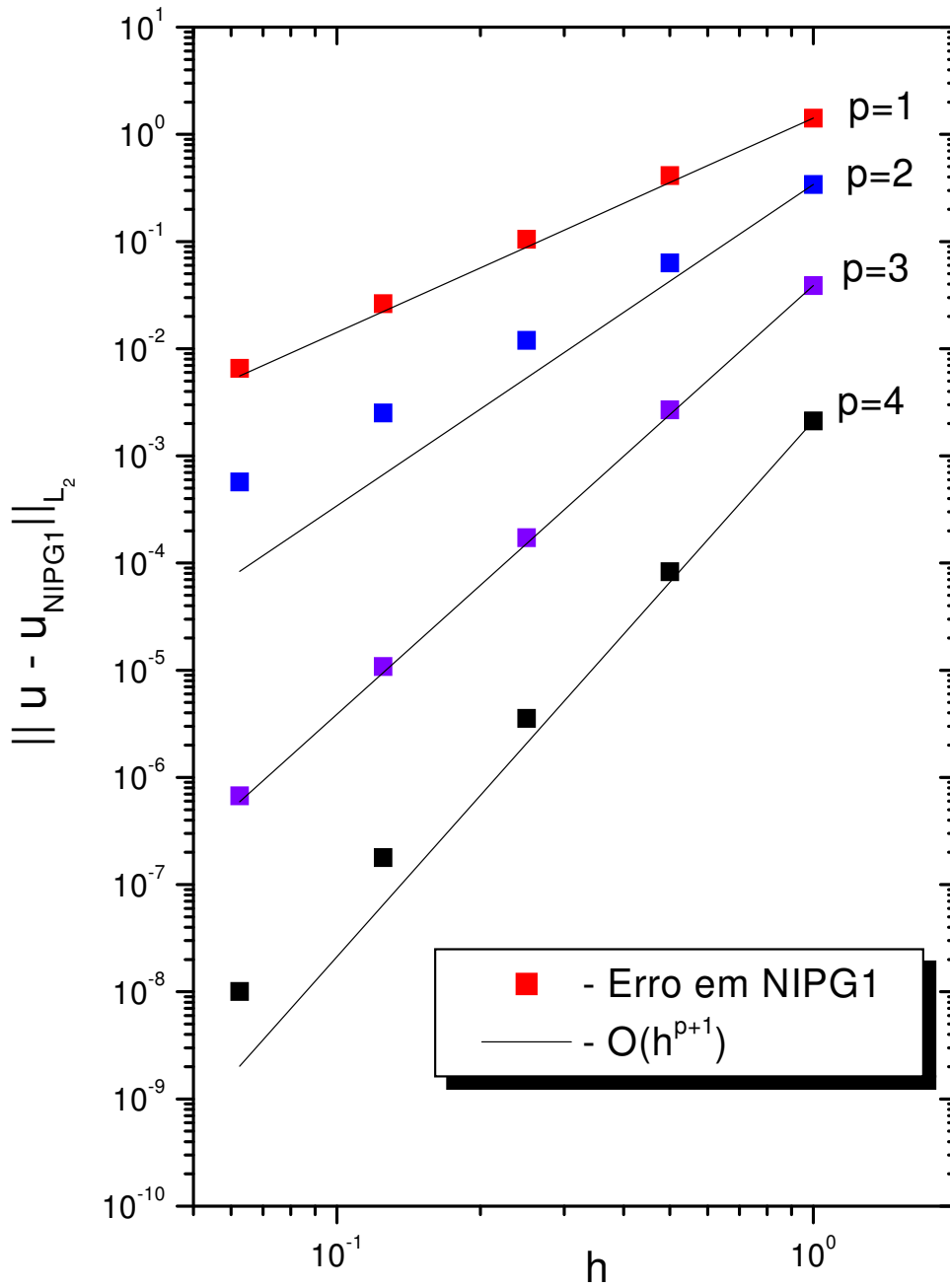


Figura 5.6: Gráfico do erro de NIPG1 na norma  $L_2$  para vários valores de  $p$ .



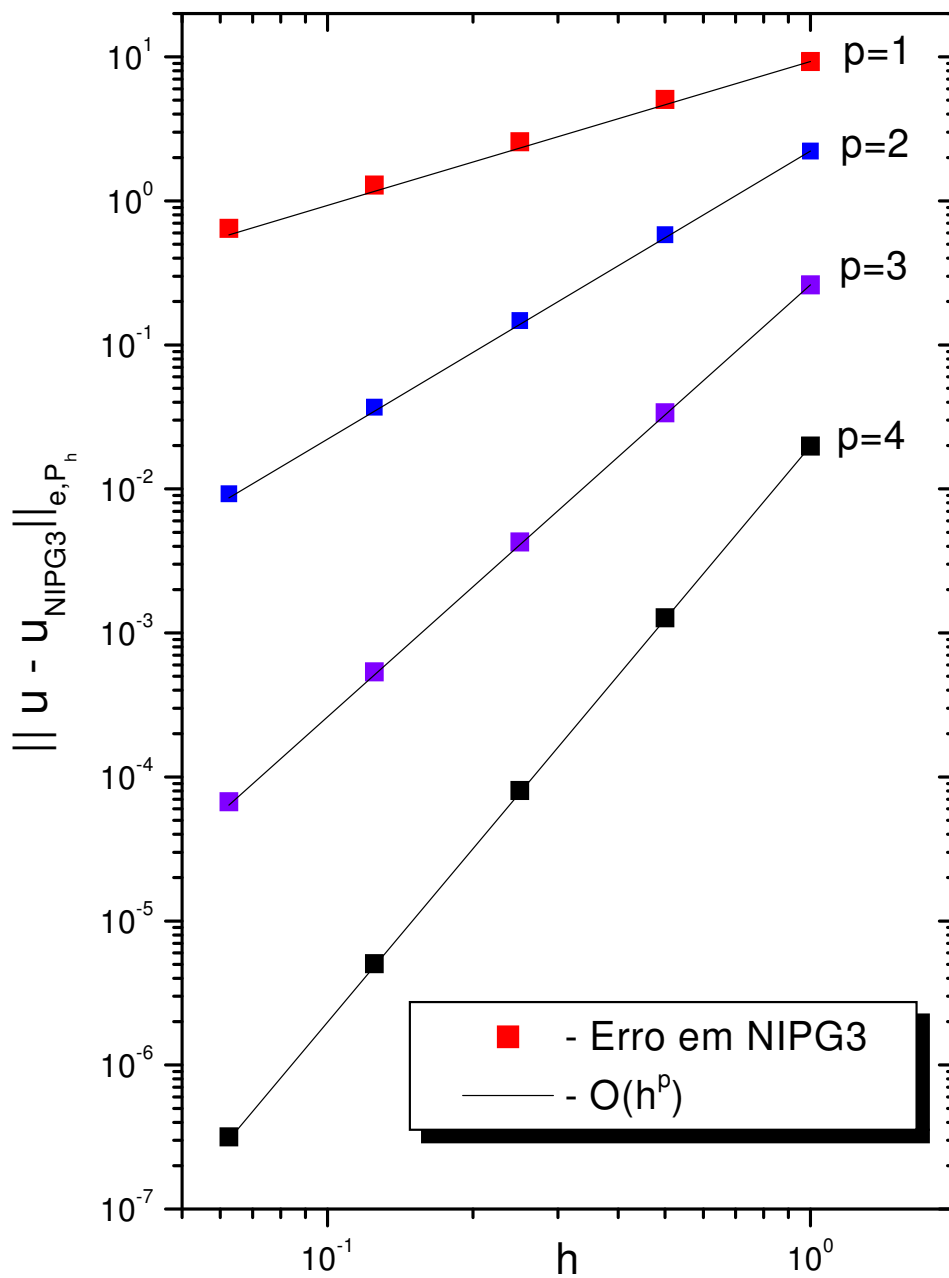


Figura 5.7: Gráfico do erro de NIPG3 na norma energia para vários valores de  $p$ .

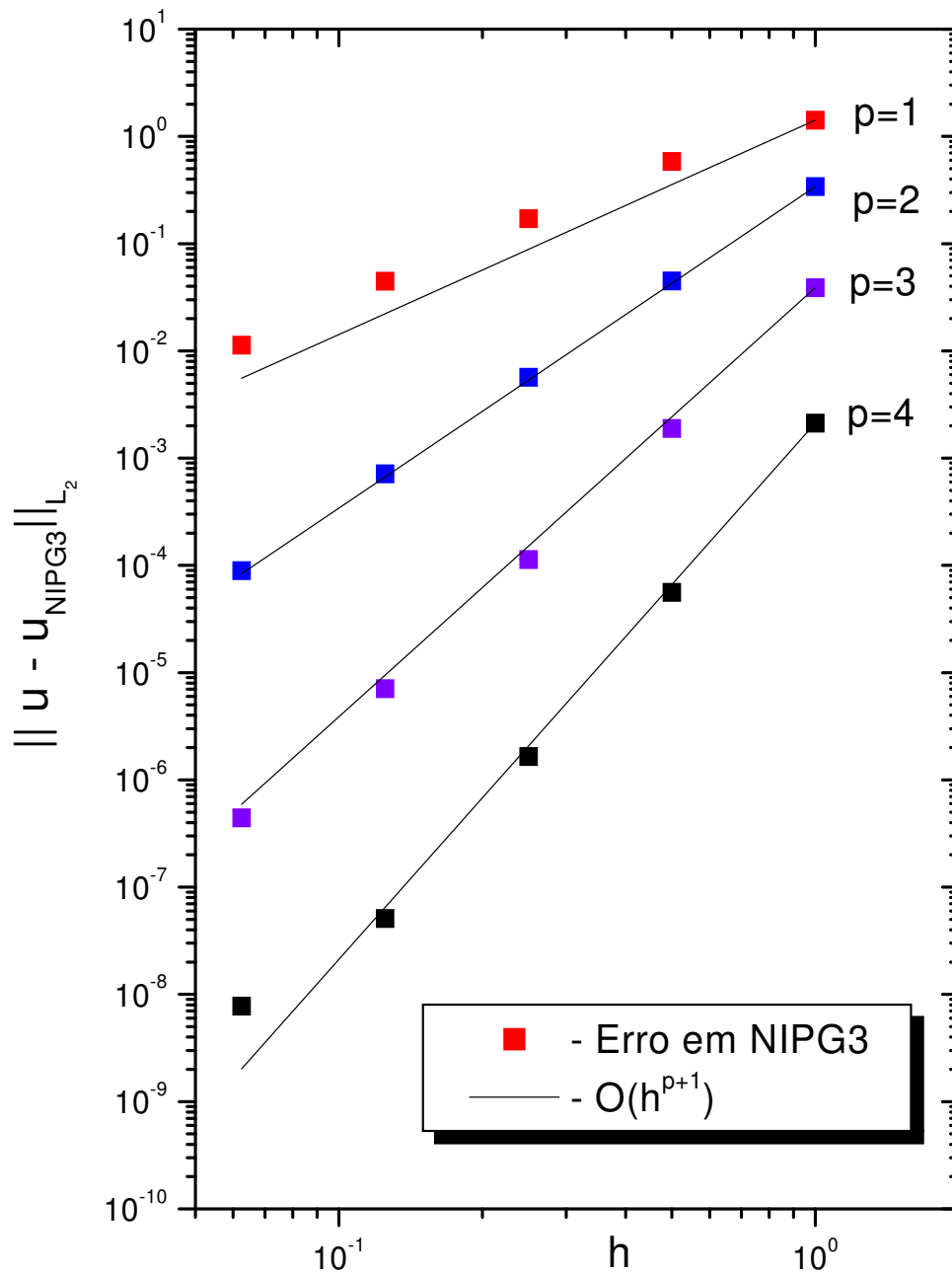


Figura 5.8: Gráfico do erro de NIPG3 na norma  $L_2$  para vários valores de  $p$ .

## 5.4 Conclusões

Na análise dos experimentos numéricos apresentados neste capítulo, podemos concluir o seguinte:

- 1) Ambos os métodos, simétrico e não simétrico, mostram uma ótima taxa de convergência na norma de energia de ordem  $O(h^p)$ .
- 2) O método simétrico apresenta também ótima taxa de convergência na norma em  $L_2$ , entretanto, como foi demonstrado, o método é garantidamente estável somente para grandes valores do parâmetro de estabilização. Isso, na prática, se torna um agravante devido à necessidade de se obter esse valor para garantir convergência do método.
- 3) Como o número de condicionamento da matriz de rigidez do método aumenta a medida que aumenta o parâmetro de penalização, o desempenho do método simétrico pode ser drasticamente prejudicado para grandes valores do parâmetro de penalização.
- 4) O método não simétrico apresenta a ótima taxa de convergência em  $L_2$ ,  $O(h^{p+1})$ , só para valores ímpares de ordem de aproximação polinomial. Usando o método com super-penalização pode-se corrigir esse defeito e garantir uma ótima taxa de convergência para todos os valores de  $p$ . Só que no caso de super-penalização, o parâmetro de penalização  $\sigma$  contém o termo  $h^{-3}$  em vez de  $h^{-1}$ , o que aumenta o valor do termo de penalização, e pode em princípio, aumentar o número de condicionamento da matriz. Isso de fato, tem impacto negativo na solução do sistema linear.
- 5) Para grandes valores de penalização  $k$ , o comportamento assintótico do erro dos dois métodos (SIPG e NIPG) é o mesmo, mas como o método não simétrico é estável para qualquer valor de parâmetro de penalização, ele pode apresentar uma certa vantagem do ponto de vista de eficiência computacional.
- 6) Em princípio, o método simétrico deveria ficar menos estável quando o parâmetro de estabilização aproxima-se de zero. Mas mesmo assim, em nossas experiências,

o método mostrou a mesma taxa de convergência que o NIPG tanto na norma de energia quanto na norma de  $L_2$ .

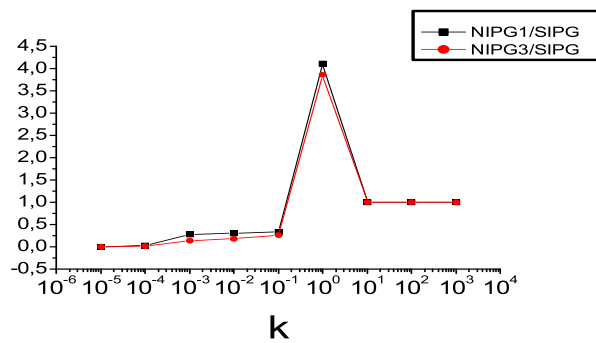
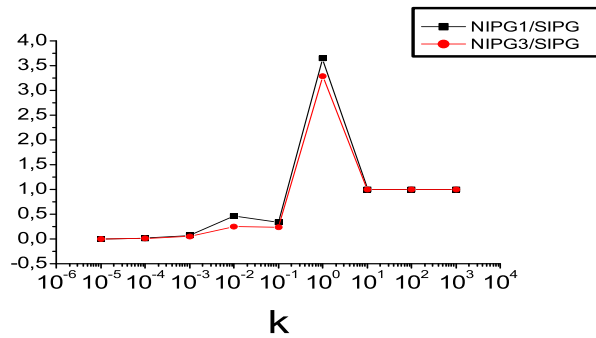
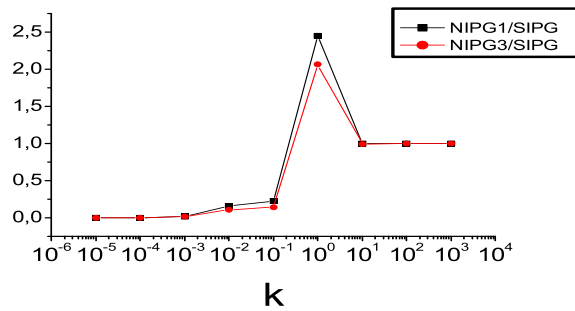
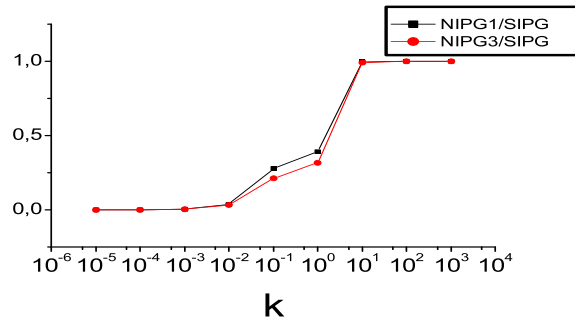


Figura 5.9: Gráficos de razão de NIPG1/SIPG e NIPG3/SIPG na norma de energia para  $p = 1$ .

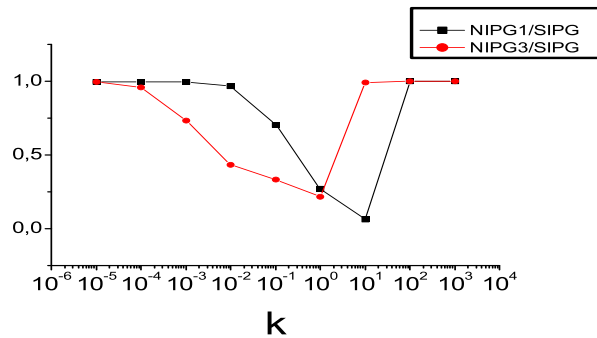
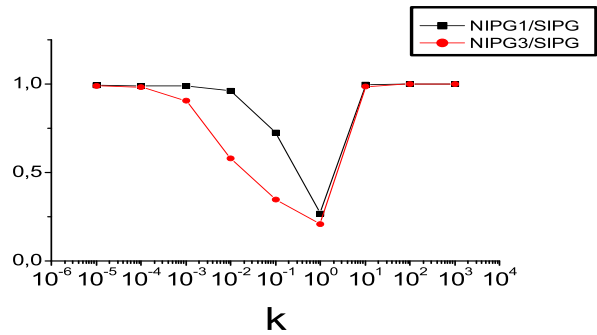
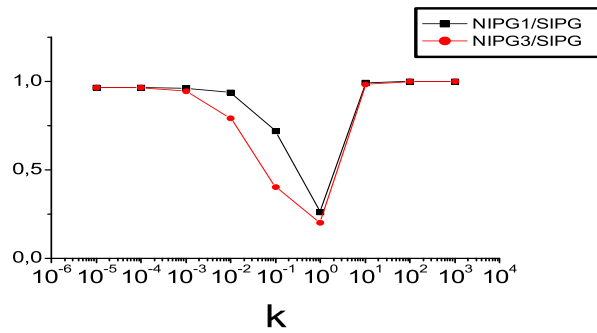
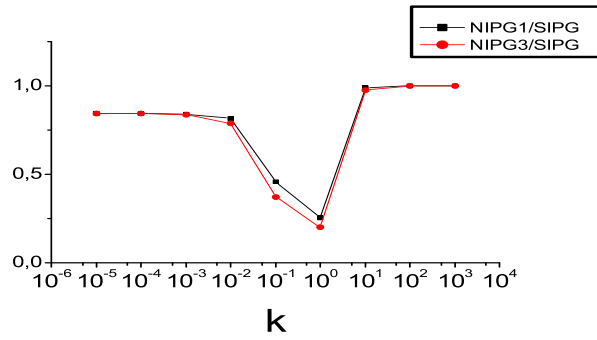


Figura 5.10: Gráficos de razão de NIPG1/SIPG e NIPG3/SIPG na norma de energia para  $p = 2$ .

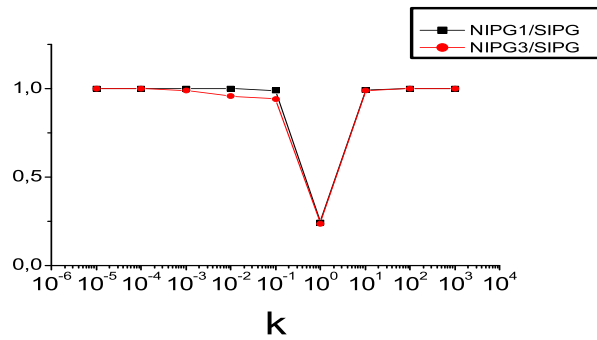
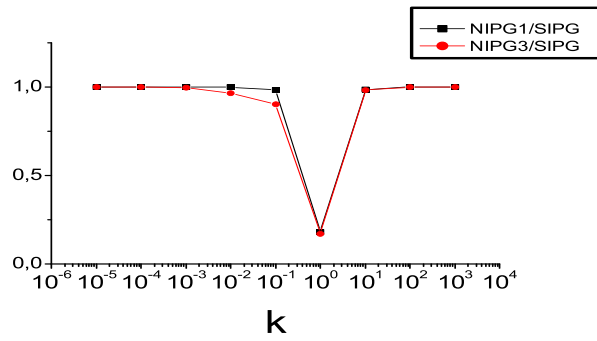
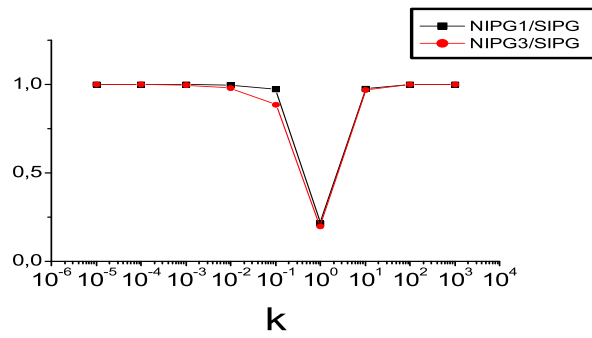
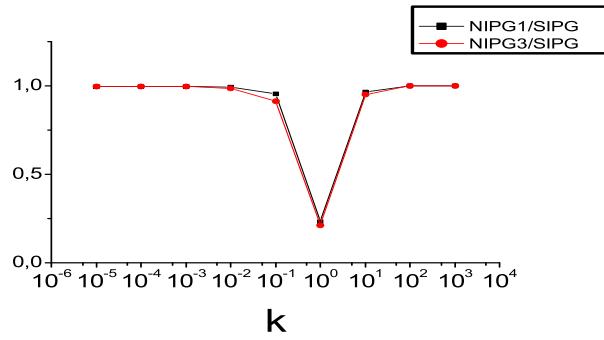


Figura 5.11: Gráficos de razão de NIPG1/SIPG e NIPG3/SIPG na norma de energia para  $p = 3$ .

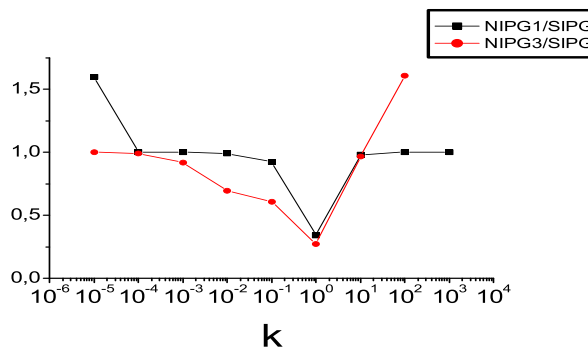
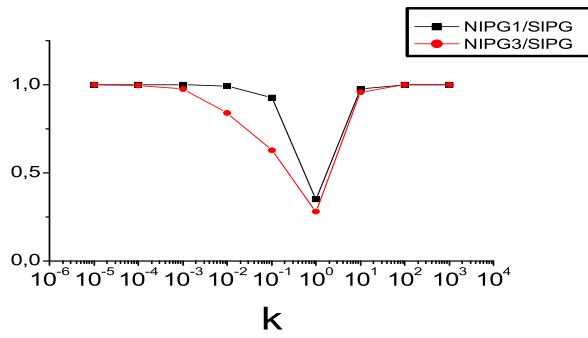
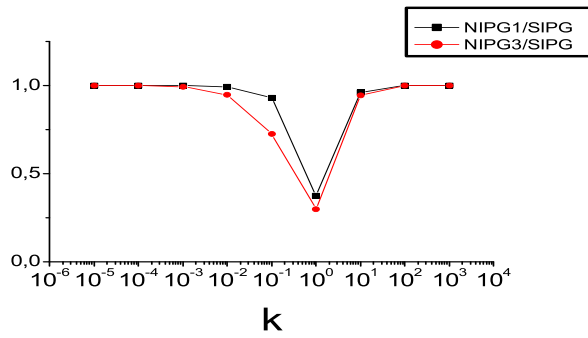
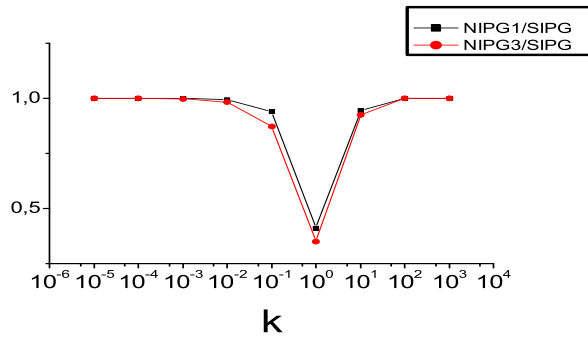


Figura 5.12: Gráficos de razão de NIPG1/SIPG e NIPG3/SIPG na norma de energia para  $p = 4$ .



# Referências Bibliográficas

- [1] Arnold, D.N.; Brezzi, F.; Cockburn, B; Marini, L.D. **Unified analysis of Discontinuous Galerkin Methods for elliptic problems**, SIAM J Numer. Anal.39(5):1749-1779, 2001.
- [2] Arnold, D.N. **An interior penalty finite element method with discontinuous elements**, SIAM J. Numer. anal., 19:742-,1978.
- [3] Babuška, I.; Suri, M. **The h-p version of the finite element method with quasiuniform meshes**. Mathematical Modeling and Numerical Analysis, 21(2):199-283, 1987.
- [4] Babuška, I.; Suri, M. **The optimal convergence rate of the p-version of the finite element method**. SIAM J. Numer. Anal., 24(4), 1987.
- [5] Baker, G. A.; Jureidini, W. N.; Karakashian, O. A. **Piecewise solenoidal vector fields and the Stokes problem**. SIAM J. Numer. Anal., 27(6):1466.1485, 1990.
- [6] Baumann, C. E. **An h-p adaptive discontinuous finite element method for computational fluid dynamics**. PhD thesis, The University of Texas at Austin, 1997.
- [7] Brenner, S. C.; Scott, L.R. **The Mathematical Theory of Finite Element Methods**. New York. Springer-Verlang. 1994.
- [8] Castilho, P. **Performance of discontinuous Galerkin methods for elliptic PDE's**, SIAM J. Scientific Computing, 2002, vol 24,No 2, pp.524-547

- [9] Chen, Z. **On the relationship of various discontinuous finite element methods for second-order elliptic equations.** SMU Math Report 2000-02, Southern Methodist University, 2000.
- [10] Cockburn, B.; Karniadakis, G.E.; Shu, C.W. **Discontinuous Galerkin Methods - Theory, Computation and Applications**, volume 11 de *Lectures Notes in Computational Science and Engineering*. Springer, Berlin, 2000.
- [11] Gilbart, D.; Trudinger, N.S. **Elliptic Partial Differential Equations of Second Order.** Berlin Heidelberg. Springer-Verlang. 1977, 1983.
- [12] Houston, P.; Schawb, C.; Süli, E. **Discontinuous  $hp$ -finite element methods for advection-diffusion problems.** Technical Report no. 00/15, Oxford University Computing Laboratory, 2000.
- [13] Medeiros, L.A.; Miranda, M.M., **Espaços de Sobolev.** Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro. 2000.
- [14] Oden, J.T.; Babuška, I.; Baumann C.E., **A discontinuous  $hp$  finite element method for diffusion problems**, Journal of Computational Physics 146 (1998) 491-519.
- [15] Prudhomme, S.; Oden, J. T.; Romkes, A.; Pascal, F. **Review of A Priori Error Estimation for Discontinuous Galerkin Methods.** TICAM REPORT 00-27, 2000.
- [16] Prudhomme, S.; Oden, J. T.; Romkes, A. **A Priori Error Analysis of a Stabilized Discontinuous Galerkin Method.** Texas Institute for Computational and Applied Mathematics. The University of Texas at Austin. 2002.
- [17] Rivière, B. **Discontinuous Galerkin Method for solving the Miscible Displacement Problem in Porous Media.** PhD thesis, The University of Texas at Austin, Maio 2000.

- [18] Rivièri, B.; Wheeler, F. e Girault, V. **Improved energy estimates for interior penalty, constrained and discontinuous Galerkin Method for elliptic problems. Part I.** *Computacional Geosciences*, 3-4:337-360, 1999.
- [19] Rivièri, B.; Wheeler, F. e Girault, V. **A priori error estimates for finite element methods based on discontinuous approximation spaces for elliptic problems.** *SIAM J. Numer. Anal.*, vol. 39, N°3, pp. 902-931,2001.
- [20] Schwab, C. **p- and hp-Finite Element Methods. Theory and Applications in Solid and Fluid Mechanics.** Oxford, New York, 1998.
- [21] Wheeler, M. F. **An elliptic collocation-finite element method com interior penalties.** *SIAM J. Numer. Anal.*, 15:152-,1978.