

BRUNO CESAR POCKSZEWNICKI

**ANÁLISE DE MATERIAIS EM REGIME ELASTO –
PLÁSTICO USANDO MODELO J_2 COM DANO E
MODELO DE "CAP" SUAVER**

Florianópolis – SC

2004

Universidade Federal de Santa Catarina
Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica

ANÁLISE DE MATERIAIS EM REGIME ELASTO –
PLÁSTICO USANDO MODELO J_2 COM DANO E
MODELO DE "CAP" SUAVE

Dissertação submetida à

Universidade Federal de Santa Catarina

para a obtenção do grau de

Mestre em Engenharia Mecânica

BRUNO CESAR POCKSZEVNICKI

Florianópolis, maio de 2004.

Universidade Federal de Santa Catarina

Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica

**ANÁLISE DE MATERIAIS EM REGIME ELASTO –
PLÁSTICO USANDO MODELO J_2 COM DANO E
MODELO DE "CAP" SUAVE**

BRUNO CESAR POCKSZEVNICKI

Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de

Mestre em Engenharia

Especialidade Engenharia Mecânica, sendo aprovada em sua forma final.

Marcelo Krajnc Alves, Ph.D.
Orientador

José Antônio Bellini da Cunha Neto, Dr.
Coordenador do Programa de Pós-grad. em Eng. Mecânica

Banca Examinadora:

Edison da Rosa, Dr.Eng.
Presidente da Banca Examinadora

Henriette Lebre La Rovere, Ph.D.
Membro da Banca Examinadora

José Carlos Pereira, Ph.D.
Membro da Banca Examinadora

Epígrafe

"A mente que se abre
a uma nova idéia
jamais volta ao seu
tamanho original."

Albert Einstein

Dedicatória

Dedicado a todo aquele que aceita o desafio
de pelo menos tentar a realizar algo
que a princípio parece impossível,

E também, aos amores de minha vida:
meus pais Bruno e Hélia,
meu irmão Breno,
e minha esposa Gislene.

Agradecimentos

Quando tento pensar a quem agradecer e expressar minha gratidão, percebo que a lista é enorme.

Primeiro agradeço a pessoa que me auxiliou diretamente neste trabalho, por ter me acolhido e me aceito para esta realização – meu orientador dedicado e amigo –, professor Marcelo Krajnc Alves.

Agradeço também ao CNPQ e ao Pósmeq pelo fomento, aprovação e credibilidade fornecida para a realização do trabalho.

À minha família, (papai Bruno, mamãe Hélia e irmão Breno), pelo apoio e compreensão. Agradeço a minha namorada Gis, que torna minha vida mais plena, e aos seus pais Sueli e Carlos Rigo por criarem pessoa tão maravilhosa.

Aos professores do Grante, José Carlos Pereira, Edison da Rosa, Eduardo Fancello, Paulo de Tarso e Lauro César Nicolazzi pelos ensinamentos. Aos professores da Eng^a Civil da UFSC em geral, e em especial à professora Henriette Lebre La Rovere e ao professor Daniel Loríggio pela confiança depositada. Aos professores Marcelo Macarini e Ronaldo Ferreira pelas orientações quanto ao trabalho com solo.

Aos irmãos que ganhei na vida, grandes amigos, conselheiros e confidentes, Maurício Centeno Lobão, Rodrigo Perito Cardoso (mungo) e a Gustavo Rodrigo Werner de Castro (forest). Ao grande amigo Luciano Fedalto, parceiro de bar e de sofrimento do mestrado, "Trabalharei hoje só até a meia noite" – frase inúmeras vezes dita. Ao futuro colega de consultorias/sócio André Labanowski.

Aos colegas de convívio e "guerreiros" do Grante, Kleber, Yoshe, Fábio, Hilbeth, Lindaura, Rodrigo, Márcio, Antônio, Raimundo, Carlos, Linhares, Cláudio, Pedro, Jean e Chico, pela amizade, apoio e descontração.

Aos quase co-orientadores: pessoas incríveis, como o doutor "tio" João pela grande ajuda com o Gid, Fortran e outros softwares mais, a Rodrigo Rossi, sempre pronto para sanar dúvidas: tensoriais, computacionais e discussões polêmicas sobre assuntos diversificados.

Aos amigos Raphael, Caio e Ju, Felipe, pelos "happy hours".

A moçada da LUMICE que de certa forma acabaram impulsionando-me a encarar o desafio do mestrado, meus colegas de profissão Fabiano Zemiani e Paulo Pamplona.

Enfim, a todos aqueles que contribuíram direta ou indiretamente para a realização deste trabalho.

Conteúdo

Notação	viii
Resumo	xiv
Abstract	xv
Introdução	xvi
1 Mecânica e Termodinâmica dos Meios Contínuos	1
1.1 Introdução	1
1.2 Cinemática da Deformação de Partículas	2
1.2.1 Corpos e Configurações	2
1.2.2 Movimento de Deformação do Corpo \mathfrak{B}	3
1.2.3 Cinemática da Deformação de um Corpo	4
1.3 Leis da Conservação	10
1.3.1 Conservação da Massa	10
1.3.2 Conservação de Momentos Linear e Angular	10
1.4 Princípio das Potências Virtuais	12
1.4.1 Potência Virtual dos Esforços Internos	13
1.4.2 Potência Virtual dos Esforços Externos	13
1.4.3 Potência Virtual dos Esforços de Inércia	13
1.4.4 Equação de Equilíbrio	14
1.4.5 Hipóteses de Deformações e Deslocamentos Infinitesimais	14
1.5 Termodinâmica dos Meios Contínuos	15
1.5.1 Leis de Conservação	15
1.6 Método do Estado Local	18
1.6.1 Potencial Termodinâmico	18
1.6.2 Potencial Termodinâmico de Dissipação	19
2 Plasticidade	20
2.1 Teoria da Plasticidade	20
2.1.1 Aspecto Fenomenológico Elasto-Plástico	21

2.1.2	Critérios e Superfícies de Escoamento	21
2.1.3	Leis de Encruamento	26
2.1.4	Problemas Bi-dimensionais	27
2.2	Introdução à Mecânica do Dano	28
2.2.1	Princípios Elementares do Dano	28
2.2.2	Aspectos Fenomenológicos do Dano	28
2.2.3	Representação Mecânica do Dano	30
2.2.4	Conceito da Tensão Efetiva	31
2.2.5	Princípio da Deformação Equivalente (J. Lemaitre,1971)	32
2.2.6	Dano Material	33
2.3	Teoria de Dano Elasto-Plástico de Lemaitre	34
2.3.1	Formulação Termodinâmica e Potenciais de Estado	34
2.3.2	Potencial de Dano Elástico	35
2.3.3	Potencial de encruamento plástico	37
2.3.4	Desigualdade de Clausius-Duhem obtida no tempo	37
2.3.5	Potencial de Dissipação	39
2.3.6	Lei de Evolução do Dano	39
2.4	Modelo de Encruamento Isotrópico com Dano	40
2.4.1	Descrição do Algoritmo do Tipo Previsor Elástico com Corretor Plástico e Dano	40
2.4.2	Estados Planos de Deformação e Axissimétrico	42
2.4.3	Esquema do Corretor Plástico com Dano	43
2.4.4	Estado Plano de Tensão	46
2.4.5	Determinação do Módulo Tangente Consistente	51
3	Análise de Elementos Finitos Incremental	52
3.1	Definição do Problema	52
3.1.1	Descrição do Algoritmo do Método de Newton	54
3.2	Problemas 2D	54
3.2.1	Problemas Planos e Axissimétricos	54
3.3	Discretização do Elemento Finito de Galerkin	55
3.3.1	Determinação da Rigidez Tangente	57
3.3.2	Determinação das Forças Internas Nodais	58
3.3.3	Contribuição das Forças de Corpo	58
3.3.4	Contribuição das Forças de Superfície	58
3.4	Montagem do Problema Não Linear Global	59
4	Modelo Geomecânico	60
4.1	Modelo de "Cap"	60
4.1.1	Histórico	60

4.1.2	Características do Modelo de "Cap"Não Suave	62
4.1.3	Pontos de Quinas - Operador Tangente Singular	64
4.2	Modelo de "Cap"Suave Elásto-Plástico	65
4.2.1	Forma Básica e Equações em Taxa	65
4.2.2	Determinação do Raio do "Cap"de Compressão	67
4.2.3	Atualização das Tensões e Determinação das Superfícies de Escoa- mento	69
4.2.4	Algoritmos de Integração das Superfícies de Escoamento	74
4.3	Propriedades Materiais para o "Cap"	83
4.3.1	Modelo de Mohr-Coulomb	83
4.3.2	Modelo Linear de Drucker-Prager	84
4.3.3	Relação entre as Propriedades	84
4.3.4	Modelo de "Cap"Suave	85
4.3.5	Valores Iniciais das Variáveis Internas	86
5	Resultados	88
5.1	Exemplos Numéricos do Modelo J_2 com Dano Isotrópico	89
5.1.1	Exemplo Uniaxial (EPT)	89
5.1.2	Problemas Testados	92
5.2	Exemplos Numéricos do Modelo de "Cap"Suave	110
5.2.1	Capacidade de Carga	110
5.2.2	Parâmetros dos Materiais	110
5.2.3	Modelagem da Fundação	111
5.2.4	Análises para Carregamento Prescrito	112
5.2.5	Análises para Deslocamento Prescrito	117
6	Conclusões e Sugestões	122
A	Integração Numérica	127
A.1	Regra da Quadratura Gaussiana	127
A.1.1	Caso Estado Plano de Deformação e Tensão	128
A.1.2	Caso Axissimétrico	128
B	Algoritmos do Modelo de "Cap" Suave	129
B.1	Algoritmo do cálculo de I_1	129
B.2	Algoritmo Verificação das Funções de Escoamento	130
B.3	Algoritmo do cálculo de k	130
B.4	Algoritmo Determinação do Valor da Superfície de Escoamento Ativa	131
B.5	Algoritmo do cálculo de $\Delta\gamma_3$	132
B.6	Algoritmo do cálculo de $\bar{\kappa}_{n+1}$	132
B.7	Procedimento da Diferença Finita	133

Lista de Figuras

1.1	Configurações Ω_o e Ω_t do corpo \mathfrak{B}	2
1.2	Mapeamento da deformação dos pontos P e Q	4
1.3	Rotação pura	5
1.4	Estiramento puro - Deformação pura	6
1.5	Campo de deslocamento do corpo \mathfrak{B} dado por \vec{u}	8
1.6	Superfície de tração e forças no corpo \mathfrak{B}	11
1.7	Momento em \mathfrak{B} na configuração deformada	11
1.8	Elemento material isolado	12
1.9	Campo de deslocamento da partícula M	14
2.1	a)Superfícies de escoamento de Tresca e von Mises num plano $\sigma_3 = 0$. b)Superfícies de escoamento de Tresca e von Mises no espaço de tensões principais.	23
2.2	Critério de escoamento de Mohr-Coulomb: com a linha da envoltória de falha.	24
2.3	Representação Geométrica das superfícies de escoamento de Mohr-Coulomb e Drucker-Prager no espaço de tensões principais.	25
2.4	Modelo de Drucker-Prager com "Cap".	25
2.5	Leis de encruamento.	26
2.6	Aplicações em 2-dimensões mostrando o sistema de coordenadas empregado.	27
2.7	Deformação Plástica elementar por escorregamento devido ao movimento de discordância.	29
2.8	Dano elementar por nucleação da microtrinca devido ao acúmulo de discordâncias.	29
2.9	Definição de dano.	31
2.10	Processo de instabilidade.	31
2.11	a e b) Relação entre módulos elásticos. c) Esquema da evolução do critério de escoamento com dano.	33
3.1	Problema discretizado nas configurações deformada e de referência.	53
3.2	Mapeamento dentro do elemento Ω_e	55
3.3	Mapeamento do elemento finito.	55

4.1	Superfícies de escoamento não suaves do modelo de "Cap" com 2 regiões de quina.	61
4.2	Três superfícies suaves e dois invariantes da função de escoamento do modelo "Cap".	66
4.3	Solução ótima para raio do "Cap" de compressão.	68
4.4	Determinação da superfície de escoamento ativa na atualização de tensões do estado elástico teste.	71
4.5	Pontos que violam f_1 , e, por conseqüência podem violar f_2 e f_3	72
4.6	Pontos que violam f_2 e f_3	73
4.7	Solução do caso 1 - cômputo do primeiro invariante	74
4.8	Critério de Drucker-Prager.	84
5.1	Exemplo Uniaxial – Estado Uniaxial de Tensões.	89
5.2	Deslocamentos U_x e U_y – Exemplo Uniaxial.	90
5.3	Gráficos : σ_x & ε_x^p e D & ε_x^p – Exemplo Uniaxial.	91
5.4	Gráfico : R & ε_x^p – Exemplo Uniaxial.	91
5.5	Viga em balanço (EPT).	92
5.6	Evolução de U_y ao longo do carregamento – Viga em flexão.	93
5.7	Evolução de σ_x ao longo do carregamento – Viga em flexão.	94
5.8	Distribuição da deformação plástica ε_x^p , do encruamento R e do Dano D – Viga em flexão.	94
5.9	Gráfico: Carga & Deslocamento – Viga em flexão.	95
5.10	Gráficos : σ_x & ε_x^p e D & ε_x^p – Viga em flexão.	95
5.11	Placa em flexão.	97
5.12	Evolução de U_y ao longo do carregamento – Placa em flexão.	97
5.13	Evolução de σ_x ao longo do carregamento – Placa em flexão.	98
5.14	Distribuição da deforma plástica ε_x^p , do encruamento R e do Dano D – Placa em flexão.	98
5.15	Gráficos : σ_x & ε_x^p e D & ε_x^p – Placa em flexão.	99
5.16	Eixo chanfrado (axissimétrico).	100
5.17	Distribuição de σ_y , ε_x^p , R e D – Eixo chanfrado.	101
5.18	Gráficos : σ_x & ε_x^p e D & ε_x^p – Eixo chanfrado.	101
5.19	Placa com furo.	102
5.20	Deslocamentos U_x e U_y – Placa com furo.	103
5.21	Deformações plásticas ε_x^p e ε_y^p – Placa com furo.	103
5.22	Tensões σ_x e σ_y – Placa com furo.	103
5.23	Encruamento isotrópico R e dano D – Placa com furo.	104
5.24	Gráficos : σ_x & ε_x^p e D & ε_x^p – Placa com furo.	104
5.25	Sapata retangular (EPD).	106
5.26	Evolução das tensões σ_x , σ_y , σ_{xy} e do dano D – Sapata retangular (EPD).	106

5.27 Sapata circular (Axissimétrico).	107
5.28 Deslocamento na direção de z chamado de U_y e a evolução da deformação plástica ε_y^p – Sapata circular.	108
5.29 Evolução das tensões $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}$ e do dano D – Sapata circular.	108
5.30 Gráficos : σ_x & ε_x^p e D & ε_x^p – Sapata circular.	109
5.31 Fundação típica em sapata corrida analisada no modelo de "Cap".	111
5.32 Distribuições de tensões σ_x e σ_y em solo de areia densa.	112
5.33 Evoluções dos deslocamentos U_y e do encruamento κ em solo de areia densa.	113
5.34 Distribuições de tensões σ_x e σ_y em solo de areia fofa.	114
5.35 Evoluções dos deslocamentos U_y e do encruamento κ em solo de areia fofa.	114
5.36 Distribuições de tensões σ_x e σ_y em solo argiloso.	115
5.37 Evoluções dos deslocamentos U_y e do encruamento κ em solo argiloso.	115
5.38 Distribuições de tensões σ_x e σ_y em solo de areia densa – deslocamento prescrito.	117
5.39 Distribuições de tensões σ_x e σ_y em solo de areia fofa – deslocamento prescrito.	118
5.40 Distribuições de tensões σ_x e σ_y em solo argiloso – deslocamento prescrito.	118
5.41 Evoluções dos parâmetros de encruamento κ – deslocamento prescrito.	119
5.42 Evoluções dos deslocamentos U_y – deslocamento prescrito.	120
A.1 Pontos de integração do elemento finito	127
B.1 Procedimento da Diferença Finita Central.	133

Lista de Tabelas

2.1	Resumo do princípio da Deformação Equivalente	32
5.1	Propriedades físicas e geométricas: Exemplo Uniaxial	89
5.2	Propriedades físicas e geométricas: Viga Plana em flexão.	92
5.3	Propriedades físicas e geométricas: Placa em flexão.	96
5.4	Comparativo entre estados planos de tensão e deformação.	99
5.5	Propriedades físicas e geométricas: Eixo cilíndrico chanfrado.	100
5.6	Propriedades físicas e geométricas: Placa com furo.	102
5.7	Propriedades físicas e geométricas: Sapata (EPD).	105
5.8	Propriedades físicas e geométricas: Sapata (Axissimétrica).	107
5.9	Propriedades físicas conforme Dickran (2000).	111
5.10	Propriedades físicas e geométricas usadas no modelo de "Cap".	111
5.11	Comparação de resultados entre solos: areia densa, areia fofa e argila - carregamento prescrito.	116
5.12	Comparação de resultados entre solos: areia densa, areia fofa e argila - deslocamento prescrito.	121
5.13	Comparação entres os parâmetros de encruamento.	121

Notação

Nesta seção é apresentada uma lista dos principais símbolos utilizados. Procurou-se manter os símbolos de acordo com a maneira mais usual nas formulações clássicas já publicadas e sedimentadas no meio literário.

Convenciona-se que:

Campos escalares são representados por letras de fonte itálica e símbolos, ex. t, r, σ ;

Campos vetoriais são representados por letras da fonte itálica e símbolos sobrescritos por \rightarrow , ex. \vec{v}, \vec{n} ;

Campos tensoriais são representados por letras e símbolos em negrito, ex. $\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}$;

Funções são identificadas por apresentarem parênteses $()$, ex. $f(\sigma)$;

Matrizes e tensores são identificadas por colchetes, ex. $[\]$, ex. $[\mathbf{F}]$;

Termos matemáticos são separados por chaves $\{ \}$, ex. $\sigma^D = \{ \sigma + \sigma^H I \}$;

Variáveis, funções e símbolos mencionados na notação de um dos capítulos, não são mencionados em outro.

Capítulo 1

Ω_o – configuração de referência indeformada, instante de tempo $t = 0$.

Ω_t – configuração de referência deformada, instante de tempo $t \neq 0$.

t – tempo.

\vec{X} – posição do corpo ou partícula na configuração indeformada Ω_o .

\vec{x} – posição do corpo ou partícula no instante de tempo t , na configuração deformada.

φ, χ – funções movimento/deformação, ex: $\varphi(\vec{X}, t)$.

\vec{u} – vetor deslocamento de uma partícula.

$\vec{v}, \dot{\vec{x}}$ – vetor velocidade de uma partícula.

\vec{a} – vetor aceleração de uma partícula.

J – jacobiano da transformação.

V_o – volume do corpo na configuração indeformada Ω_o .

V – volume do corpo no instante de tempo t , na configuração deformada.

\mathbf{F} – tensor deformação.

\mathbf{R} – tensor rotação.

\mathbf{U}, \mathbf{V} – tensores alongação.

- \mathbf{I} – tensor identidade.
 \vec{D} – vetor próprio de \mathbf{U} .
 Λ – valor próprio de \mathbf{U} .
 ϱ – vetor próprio de \mathbf{C} .
 \mathbf{E} –denota a deformação infinitesimal pura
 \mathbf{W} –a rotação infinitesimal pura
 \mathbf{H} – gradiente de \vec{u} .
 \mathbf{C}, \mathbf{B} –tensores de Cauchy-Green direito e esquerdo.
 M_o – massa do corpo na configuração indeformada Ω_o .
 M – massa do corpo no instante de tempo t , na configuração deformada.
 ρ_o – densidade do corpo na configuração indeformada Ω_o .
 ρ – densidade do corpo no instante de tempo t , na configuração deformada.
 σ – tensão.
 $\delta F, \vec{F}$ – força.
 S – área da superfície.
 \vec{b} – forças de corpo: forças por unidade de massa.
 \vec{T} – forças de superfície $\vec{T} = \sigma \vec{n}$: tração prescrita numa superfície.
 \vec{n} – vetor normal.
 P_a – potência virtual dos esforços de inércia.
 P_i – potência virtual dos esforços internos.
 P_e – potência virtual dos esforços externos.
 σ – tensor simétrico.
 Γ – tensor anti-simétrico.
 \mathbf{D} – tensor taxa de deformação de segunda ordem.
 $\mathbf{\Omega}$ – tensor taxa de rotação de segunda ordem.
 \vec{f} – vetor de força.
 K – energia cinética.
 E_i – energia interna .
 P_{ex} – taxa de trabalho das forças externas.
 Q – fluxo de energia térmica entrando ou saindo do sistema.
 e – energia interna específica.
 \vec{q} – vetor fluxo de calor.
 \mathfrak{r} – densidade em volume de produção interna de calor.
 S_e – entropia.
 s – a entropia específica.
 T – temperatura absoluta.
 Ψ – potencial de energia livre de Helmholtz.
 ε – deformação total.
 ε^e – deformação elástica.

ε^p – deformação plástica.

$\vec{\alpha}, \alpha_k$ – variáveis internas.

\vec{A}, A_k – variáveis termodinâmicas associadas às variáveis internas α_k .

Φ, F – potenciais ou pseudo-potenciais.

$\dot{\gamma}$ – multiplicador plástico.

Capítulo 2

f – função de escoamento.

σ_y – variável escalar interna relacionada com a tensão de escoamento do material.

τ_y – tensão de escoamento ao cisalhamento.

σ^D – tensão deviatória.

σ^H – tensão hidrostática.

J_2 – segundo invariant do tensor.

\mathcal{R} – valor crítico função das variáveis internas de encruamento \vec{A} , no critério de von Mises.

σ_n – tensão normal.

c – parâmetro material que indica a coesão.

ϕ – parâmetro material que indica o ângulo de atrito interno.

θ – constante material relacionadas com o ângulo de atrito ϕ .

ς – constante material relacionada com a coesão c e o ângulo de atrito ϕ .

β – constante material que indica a inclinação do cone de Drucker-Prager.

p_t – constante material que indica o limite de escoamento inferior de pressão de tração hidrostática pura.

p_c – pressão de compactação, constante material que indica o limite de escoamento inferior da pressão de compressão hidrostática pura.

k – variável usada para representar o tamanho da superfície de escoamento.

\mathbb{D} – matriz constitutiva.

E – módulo elástico.

\tilde{E} – módulo elástico para material danificado.

ν – constante de poisson.

F – força.

D – variável escalar interna relacionada com o dano isotrópico.

$\tilde{\sigma}$ – tensão efetiva.

S – área da superfície.

S_D – área da superfície danificada.

\mathcal{F} – indica uma função, ex: $\varepsilon = \mathcal{F}(\sigma, D)$.

R – variável escalar interna relacionada com encruamento isotrópico.

\mathbf{X} – variável interna relacionada com o encruamento cinemático.

- σ_∞ – valor crítico da tensão efetiva agindo sobre uma área resistente.
 D_c – corresponde ao valor crítico do dano.
 σ_u – tensão limite de resistência.
 σ_R – tensão nominal de fratura do material.
 ε_D^p – valor crítico de deformação plástica para que ocorra dano.
 r – deformação plástica acumulada associada ao encruamento isotrópico.
 \varkappa – tensor deviatórico da deformação associado ao encruamento cinemático.
 ψ – potencial de energia livre.
 we – densidade de energia de deformação elástica.
 Y – taxa de densidade de energia de deformação elástica liberada.
 σ_{eq} – tensão de von Mises.
 $\tilde{\sigma}_{eq}$ – tensão de dano equivalente.
 a – constante material obtida a partir do módulo de encruamento cinemático linear.
 Δ – potencial de dissipação interna.
 μ, λ – constantes de Lamé.
 R_∞, b – parâmetros materiais que caracterizam o fenômeno do encruamento isotrópico.
 X_∞, Υ – parâmetros materiais que caracterizam o fenômeno não linear do encruamento cinemático.
 \mathbb{I}, \mathbb{I} – tensores identidades de 4^a e 2^a respectivamente.
 S_∞, s_∞ – parâmetros materiais de dano dútil.
 p – deformação plástica acumulada.
 p_D – deformação plástica acumulada crítica, na qual inicia o dano.
 \mathcal{H} – função peso $\mathcal{H}(a)$, 1 para $a \geq 0$, e, 0 para $a < 0$.
 K – módulo volumétrico.
 G – módulo de cisalhamento.
 $\Delta\gamma$ – multiplicador plástico.

Variáveis usadas para facilitar o desenvolvimento do cálculo e da implementação numérica.

- \mathcal{F}_i com $i=1..k$, φ – funções de $\Delta\gamma$ e D .
 β – função de G e $\bar{\sigma}^D$.
 \mathbb{N} – tensor função da deformação elástica.
 \mathbb{P} – matriz de valores constantes.
 $\vec{\sigma}$ – vetor de tensões usual em engenharia, ex: $\vec{\sigma} = \{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}, \sigma_{zz}\}$.
 \mathcal{G} – função de $\vec{\sigma}$.

Capítulo 3

- \mathbb{C} – módulo tangente consistente.

\bar{A} – indica a montagem dos elementos nas matrizes.

$\{r, z, \theta\}$ – variáveis do sistema de coordenadas cilíndricas.

$\varepsilon_{rr}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{\theta\theta}$ e γ_{rz} – componentes do vetor deformação no sistema de coordenadas cilíndricas.

$G(\vec{u}_{n+1}, \vec{v})$ – desequilíbrio.

\mathbb{N} – função de interpolação de elementos finitos.

\vec{q}_e^T – vetor deslocamento nodal.

$\mathcal{F}(r, z)$ – função das coordenadas de área.

$f(\xi, \eta)$ – domínio de coordenadas paramétricas.

$[\mathbb{K}_T^e]$ – matriz de rigidez

$[\mathcal{B}(\xi, \eta)]^T$ – matriz de funções de elementos finitos.

Le – tamanho do elemento finito.

\vec{U} – vetor de deslocamentos global.

\vec{F}_e^{ext} – vetor de esforços externos.

\vec{R} – vetor de forças residuais.

Capítulo 4

C – tensor de quarta ordem elástico.

\mathbb{I}_{dev} – operador que gera a parte deviatória de (\mathfrak{N}) .

\mathbb{I} – tensor identidade de quarta ordem, aplicado no espaço de matrizes simétricas.

I – matriz identidade.

I_1 – primeiro invariante.

σ^D – parte deviatória do tensor tensão σ .

F_e – função de escoamento da envoltória de Drucker-Prager.

F_c – função de escoamento do "Cap" de compressão.

F_t – função de escoamento do "Cap" de tração.

θ e ς – constantes relacionadas com o ângulo de atrito ϕ e coesão c .

R_c – raio do "Cap" elíptico de compressão.

R_T – raio do "Cap" circular de tração.

λ, w, β – constantes materiais

χ – ápice da superfície do "Cap" no eixo I_1 .

ε_v^p – deformação plástica volumétrica do solo, medido em relação ao estado virgem completamente descarregado.

W – representa a máxima deformação plástica volumétrica possível com referência ao estado virgem descarregado.

D_I – valor absoluto de I_1 .

h – módulo de encruamento tangente.

κ – posição variável ao longo do eixo I_1 .

\mathcal{X}^D – denota a tensão deviatórica de "*back stress*" associada com o encruamento cinemático.

η – função de σ^D e \mathcal{X}^D .

I_1^T – denota um ponto limite fixo entre o "Cap" de tração e a envoltória de Drucker-Prager.

I_1^c – denota um ponto delimitador para o movimento entre a envoltória de Drucker-Prager e o "Cap" de compressão.

H – constante plástica do módulo de encruamento cinemático.

g – função de I_1 .

P – função de κ .

$\bar{\phi}$ – ângulo de dilatância.

Resumo

Neste trabalho são apresentados dois modelos para análise plana de materiais em regime elasto-plástico. Um modelo é chamado de plasticidade J_2 , baseado na teoria de von Mises com dano isotrópico para análise do comportamento plástico de metais, e o outro modelo, chamado de "Cap"Suave, é baseado nas teorias de Drucker-Prager e Mohr-Coulomb para análise do comportamento de solos. Todas análises e conceitos desenvolvidos são averiguados no âmbito de carregamentos monotônicos.

No modelo J_2 pode-se avaliar com maior rigor o fenômeno plástico que ocorre nos metais. Dessa forma, torna-se possível avaliar o comportamento material e estrutural de componentes mecânicos que sofrem efeitos de concentração de tensão devidos a: alterações em sua geometria, alterações nas propriedades elásticas ou cargas concentradas. Além do mais, nesse modelo é também implementada uma teoria capaz de analisar o fenômeno do dano, que permite identificar valores de tensões de ruptura do material. A teoria de dano utilizada é fundamentada dentro do enfoque da termodinâmica dos processos irreversíveis e foi desenvolvida basicamente por Lemaitre (1992).

No modelo de "Cap"Suave o objetivo principal é avaliar o comportamento de solos, tais como: areias, siltes e argilas. O interesse nesse tipo de avaliação é importante na elaboração de projetos de fundações em geral, principalmente para se estimar capacidades de carga de fundações rasas e na análise de estabilidade de taludes.

A resolução dos problemas formulados com esses modelos de plasticidade é incremental, e utiliza um algoritmo da classe de mapeamento de retorno para integrar as equações elasto-plásticas. Como o problema torna-se não linear devido a decomposição aditiva da deformação – problemas de pequena deformação –, faz-se uso também do método de Newton-Raphson para solução do conjunto de equações não lineares locais e globais. Na discretização do domínio sólido o método de elementos finitos é utilizado com um elemento finito quadrático triangular de 6 nós.

São mostrados alguns exemplos em estados planos de tensão, deformação e axis-simétrico para validação dos modelos plásticos:

- Para o modelo J_2 com dano isotrópico, exemplos como: placa com furo (EPT), placa em flexão (EPD) e eixo cilíndrico chanfrado (Axis).
- Para o "Cap"Suave são apresentadas fundações rasas em sapata rígida (EPD) e em sapata rígida circular (Axis), contemplando solos arenosos à argilosos.

Abstract

In this work, two models for plane analysis of materials in elasto-plastic domain are presented. One model, termed J_2 plasticity, based on von Mises theory with isotropic damage is applied to analyze metals plastic behavior, and the another model, termed Smooth Cap model is based on Drucker-Prager and Mohr-Coloumb theories, with application in soil behavior analysis. Every analysis and concepts developed are evaluated to sphere of action monotonic loads.

In J_2 plasticity model, the plastic phenomenon can be better evaluated. Therefore, come possible evaluate the material and structural behavior of components where occurs stress concentration effects due to change in yours geometry, change in elastics properties or concentrate loads. Moreover, in this model a theory able to analyze the damage phenomenon is implemented, allowing to identify values of material fracture stresses. The damage theory used is wellfounded in framework of thermodynamics of irreversible process and was proposed by Lemaitre (1992).

In the Smooth Cap model, the main objective is evaluated the soil behavior such as: sands, silts and clays. The interest in this type of evaluation is important to foundations designs, mainly for estimate the bearing capacity of shallow foundations and slopes stability analysis.

Resolution of problems formulated with these plasticity's models is incremental, and to make use of one return mapping algorithm to integrated the elasto-plastic equations. How the problem becomes non-linear because of additive decomposition's deformation – small strains problems –, the Newton-Raphson method also is employed to solve the set of local and global non-linear equations.

To validate these plastic models, some examples are displayed in plane stress, plane strain and axisymmetric.

- To J_2 model with isotropic damage, examples as: plate with hole (EPT), bending plate (EPD) and cylindrical notched specimen (Axis).
- To Smooth Cap model are displayed foundations shallows in stiffness footing (EPD) and in stiffness circular footing (Axis), contemplating sands until clays soils.

Introdução

Um dos grandes desafios, do engenheiro de análise e de projetos, é estabelecer até que ponto pode-se confiar em simplificações físicas representadas por modelos matemáticos tanto no regime elástico quanto no regime plástico.

Dessa forma, um dos principais objetivos deste trabalho é a busca de modelos elasto-plásticos para metais e solos, os quais permitam ao engenheiro analista/projetista estabelecer critérios eficientes quando houver a necessidade de análises mais sofisticadas que as análises usuais de dimensionamento no domínio elástico.

Um senso habitual nos projetos de cálculo estrutural é a redução de custos utilizando métodos de otimização, e não o uso do material além da tensão de escoamento. Contudo, em alguns casos é interessante se conhecer não só as deformações plásticas, mas também a que nível de tensão ocorrerá a ruptura material. Isso permite por exemplo, a realização de cálculos de flechas no escoamento e que ainda assim respeitem critérios normativos. Por isso, modelos elasto-plásticos com dano acoplado são fundamentais para descrever efeitos como: a deformação plástica e o amolecimento material.

Além do que, há uma grande quantidade de peças e componentes mecânicos que apresentam concentração de tensão, e que podem ser melhores capturados e analisados numa análise elasto-plástica.

Já em solos, o simples fato de se conseguir mapear a evolução plástica das variáveis internas: deformações plásticas e tensões, pode-se levar a obtenção de projetos geotécnicos de fundação onde os fatores de segurança poderão ser menores, principalmente devido ao maior controle e rigor embutidos na análise. O modelamento de materiais geológicos – solos e rochas, é de grande valor para inúmeras obras civis, como: fundações de edificações e rodovias, muros de arrimo, estabilidade de encostas, barragens e escavações de túneis. Portanto, a análise desses projetos requer um conhecimento dos materiais geológicos empregados e da forma com que a estrutura de sustentação da obra civil se comporta, ou seja, requer um estudo minucioso das deformações.

O trabalho de pesquisa visa realizar um aprimoramento não somente do entendimento dos fenômenos que ocorrem em solos e rochas, mas também nos modelos constitutivos utilizados para a caracterização de alguns efeitos: distribuição de tensões (bulbos de pressões), que possibilitam o cálculo da capacidade de carga de fundações e a determinação adequada do campo de deformações e tensões nesses materiais.

Assim, a proposta do trabalho consiste no desenvolvimento teórico e computacional objetivando a determinação dos campos de deformação e tensão que ocorrem em metais e em solos drenados granulares do tipo areias e não-granulares drenados do tipo argilas e siltes.

Em geral os modelos constitutivos utilizados para a determinação do comportamento de solos ou rochas são bastante sofisticados devido à: não-linearidade acentuada, histerese e resposta elasto-plástica dos materiais geológicos.

Em vista disso, pretende-se buscar modelos que atendam a este comportamento, como os modelos de plasticidade com critérios de escoamento e de estado limite, dentre eles: Plasticidade J_2 , e "Cap" Suave, os quais associados ao método dos elementos finitos para simulação e análise numérica podem ser empregados na resolução dos problemas geotécnicos supracitados e nos projetos de estruturas metálicas.

Este último com alguns efeitos já bastante estudados, porém de suma importância para o trabalho, já que os modelos para solos são uma evolução dos modelos para metais. Diferente do J_2 o modelo de "Cap" ainda é algo a ser explorado, assim como as formulações tratando de dano de materiais.

Capítulo 1

Mecânica e Termodinâmica dos Meios Contínuos

1.1 Introdução

O objetivo deste capítulo é apresentar os conceitos básicos da teoria utilizada para modelar os fenômenos da deformação e da ruptura de um meio contínuo. Para simulação desses fenômenos emprega-se a mecânica do contínuo, que possibilita a modelagem do comportamento de sólidos submetidos a solicitações mecânicas resultando em um conjunto de equações diferenciais cuja solução, em geral, é obtida numericamente.

No estudo do comportamento mecânico de um corpo contínuo são necessários algumas determinações: a cinemática da deformação, os esforços atuantes sobre o corpo e também a evolução das variáveis internas utilizadas para a caracterização do fenômeno de dano e ruptura do material Malvern (1969), Germain et al (1983) e de Lemaitre & Caboche (1994).

Assim, a base deste capítulo está fundamentada no Princípio das Potências Virtuais (PPV) idealizado por d'Alembert (1750), que obteve utilização sistemática a partir de 1970, devido ao desenvolvimento dos métodos variacionais e da análise funcional. Através do PPV e da escolha de um conjunto de movimentos virtuais compatíveis com o corpo em análise obtém-se uma definição coerente: das deformações, das equações de equilíbrio de forças e das condições de contorno apropriadas. Conforme Spencer (1980), as equações governantes do comportamento mecânico de um corpo contínuo são dadas a partir dos conceitos da cinemática dos meios contínuos, da conservação da massa, da conservação do momento, i.e, das equações de equilíbrio, do primeiro e segundo princípios da termodinâmica e das leis constitutivas.

Afim de se introduzir as variáveis utilizadas na caracterização dos fenômenos estudados, emprega-se o enfoque da termodinâmica dos processos irreversíveis. A escolha de Potenciais Termodinâmicos e a utilização do Método do Estado Local é que permitem a definição das variáveis associadas a partir das variáveis de estado, observáveis e internas,

escolhidas em função dos fenômenos que se desejam modelar – conduzindo naturalmente às equações de estado. O pseudo potencial de dissipação fornece as leis complementares ou leis de evolução necessárias para descrição dos processos irreversíveis considerados.

1.2 Cinemática da Deformação de Partículas

A cinemática é o estudo do movimento sem considerar as forças que o produzem. Com intuito de se estudar a cinemática da deformação de um corpo contínuo pode-se estudar individualmente o movimento de uma partícula deste corpo. A deformação, ou mudança de forma de um corpo depende da relação de vizinhança entre cada partícula do corpo.

1.2.1 Corpos e Configurações

Um corpo é o conjunto de partículas, que pode ser visualizado/idealizado através de sua configuração (figura 1.1) – região ocupada em \mathfrak{R}^3 pelas partículas no instante considerado.

Seja \mathfrak{B} um corpo considerado, onde Ω_o denota a região ocupada pelo corpo em $t = 0$ e Ω_t a região ocupada em um instante t qualquer.

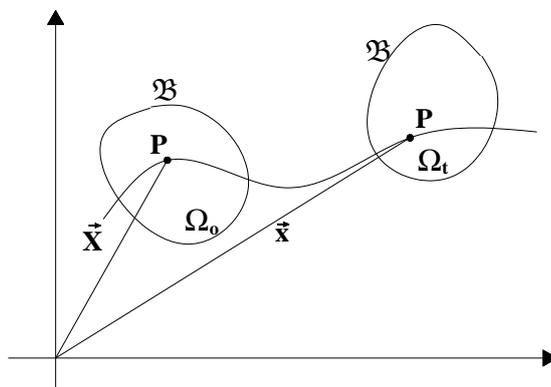


Figura 1.1: Configurações Ω_o e Ω_t do corpo \mathfrak{B}

Cada posição espacial de uma configuração é ocupada por uma partícula. Note que o corpo consiste sempre das mesmas partículas, sua configuração é que varia com o tempo.

Seja P uma partícula de \mathfrak{B} . Para se determinar o movimento desse corpo é necessário acompanhar a trajetória de cada uma de suas partículas. Com o escopo de se identificar cada partícula P de \mathfrak{B} , utiliza-se uma configuração de referência que associa a cada partícula a sua posição ocupada nessa configuração.

1.2.2 Movimento de Deformação do Corpo \mathfrak{B}

O movimento do corpo \mathfrak{B} é descrito através de um vetor posição \vec{x} do ponto X que cada partícula ocupa no instante de tempo t .

$$\vec{x} = \chi(\vec{X}, t) \quad (1.1)$$

Já que esta função vetorial \vec{x} descreve como o corpo \mathfrak{B} muda ou deforma de uma configuração para a outra, ela é denominada função deformação. Considerando um dado instante t fixo, se a posição \vec{X} de uma partícula P na configuração de referência Ω_o é especificada, então a relação da equação 1.1 fornece a posição \vec{x} de P em Ω_t . Desta forma, tem-se:

$$\Omega_t = \chi(\Omega_o, t) \quad (1.2)$$

Sendo P uma partícula de \mathfrak{B} que ocupa a posição \vec{X} em Ω_o (fixa), a trajetória/caminho da partícula P ao longo do tempo é dada pela relação 1.1, onde, \vec{x} – representa o lugar geométrico ocupado pela partícula P no instante t .

Assim surgem duas formas clássicas de descrição do movimento de um corpo. A descrição "material" ou Lagrangeana e a descrição "espacial" ou Euleriana.

- Descrição Material: É a descrição do movimento/deformação no qual a posição \vec{X} de uma partícula P em Ω_o é uma variável independente.
- Descrição Espacial: É a descrição do movimento/deformação no qual a posição \vec{x} de uma partícula P em Ω_t é uma variável independente.

A relação entre a posição espacial \vec{x} no instante t de uma partícula material P cuja posição \vec{X} na configuração de referência é dada pela função movimento/deformação $\varphi(\vec{X}, t)$, onde \vec{X} e o tempo t são as variáveis independentes. Esta função indica a posição final das partículas (pontos) materiais com uma função do tempo, logo:

$$\vec{x} = \varphi(\vec{X}, t) \quad (1.3)$$

O vetor deslocamento \vec{u} de uma partícula na posição \vec{X} da configuração de referência para a posição \vec{x} na configuração deformada (em Ω_t) é a diferença entre a posição atual e sua posição inicial, sendo dado por,

$$\vec{u}(\vec{X}, t) = \varphi(\vec{X}, t) - \vec{X} \quad (1.4)$$

O vetor velocidade \vec{v} de uma partícula, que é a taxa de variação do deslocamento, ou seja, é dado pela derivada do movimento no tempo com a coordenada material fixa:

$$\vec{v}(\vec{X}, t) = \frac{\partial \vec{u}(\vec{X}, t)}{\partial t} = \frac{\partial \varphi(\vec{X}, t)}{\partial t} \quad (1.5)$$

O vetor aceleração \vec{a} de uma partícula, que é dado pela taxa de variação da velocidade, ou seja, pela derivada material da velocidade, é descrito por:

$$\vec{a}(\vec{X}, t) = \frac{\partial \vec{v}(\vec{X}, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 \vec{x}(\vec{X}, t)}{\partial t^2} \quad (1.6)$$

Após descrita a cinemática do movimento do corpo é necessário ainda estabelecer sua cinemática de deformação.

1.2.3 Cinemática da Deformação de um Corpo

"Diz-se que um corpo sofre um deslocamento de corpo rígido, se a distância entre todas as suas partículas não sofre mudança, do contrário o corpo é dito deformado", Lubliner (1990). O mecanismo de deformação pode ocorrer de várias formas, podendo ser dada por deformação homogênea ou não-homogênea. Na figura 1.2 a seguir é mostrado como se dá o mapeamento de deformação não-homogênea, entretanto para deformação homogênea pode-se fazer o mesmo por analogia, mas somente o mapeamento do ponto P.

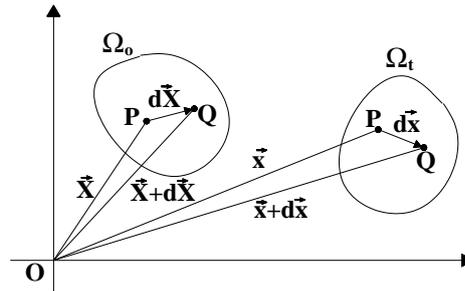


Figura 1.2: Mapeamento da deformação dos pontos P e Q

Deformação Homogênea

Um corpo é sujeito a uma deformação homogênea se o mapeamento da deformação tem a seguinte forma:

$$\vec{x} = \varphi(\vec{X}, t) = [\mathbf{F}(t)]\vec{X} \quad (1.7)$$

Note que o mapeamento da deformação neste caso é dado por uma função linear. O tensor $[\mathbf{F}(t)]$ também é uma função somente de t . Na forma de componentes pode-se escrever o mapeamento da seguinte forma:

$$x_i = F_{ij}X_j \quad (1.8)$$

o qual na forma expandida é expresso como:

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix}. \quad (1.9)$$

A relação do mapeamento da deformação é bijetiva, i.e, inversível. Então a equação linear 1.9 também deve ter solução.

$$\vec{x} = [\mathbf{F}(t)]^{-1} \vec{X} \tag{1.10}$$

Assim, $[\mathbf{F}(t)]$ não é singular e tem-se que o determinante de \mathbf{F} é diferente de zero, $\det(\mathbf{F}(t)) \neq 0$.

Deformação Não-Homogênea

Um corpo é sujeito à uma deformação não homogênea se o mapeamento da deformação tem a seguinte forma:

$$d\vec{x} = \mathbf{F}(\vec{X}, t) d\vec{X} \tag{1.11}$$

sendo o tensor gradiente de deformação \mathbf{F} é denotado por,

$$\mathbf{F}(\vec{X}, t)_{ij} = \frac{\partial \varphi_i(\vec{X}, t)}{\partial X_j} \tag{1.12}$$

O determinante do gradiente de deformação, $\det(\mathbf{F})$, é também conhecido como Jacobiano da deformação J , e representa localmente a relação entre o volume atual V e o volume inicial V_o :

$$J = \det(\mathbf{F}) = \frac{V}{V_o} \tag{1.13}$$

Quando o Jacobiano da deformação é igual a 1, a deformação é denominada isocórica, indicando que ocorreu deformação com volume constante.

Decomposição da Deformação

A deformação pode ser decomposta como sendo a composição de uma deformação pura seguida de uma rotação pura.

- **Rotação Pura:** Ocorre quando, no movimento de um corpo, cada linha de um elemento do corpo não sofre alteração em seu tamanho, somente uma alteração na sua orientação, como mostra a figura 1.3.

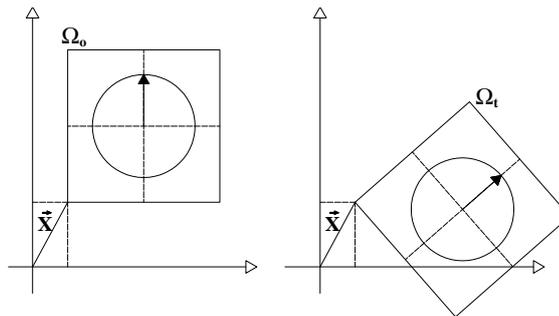


Figura 1.3: Rotação pura

O movimento/deformação representando uma rotação pura tem a seguinte forma:

$$\begin{aligned}\vec{x} &= [\mathbf{R}(t)]\vec{X} \\ x_i &= R_{ij}X_j\end{aligned}\quad (1.14)$$

sendo, $\mathbf{R} = \mathbf{R}(t)$, não depende de \vec{X} e é tal que :

$$[\mathbf{R}]^T[\mathbf{R}] = [\mathbf{R}][\mathbf{R}]^T = [\mathbf{I}] \quad (1.15)$$

Note que $\det[\mathbf{R}] = \pm 1$, quando $\det[\mathbf{R}] = 1$ a rotação é dita ser própria. No caso em que $\det[\mathbf{R}] = -1$ temos uma reflexão, i.e., a deformação não representa uma rotação pura.

- **Deformação Pura:** Ocorre quando, no movimento de um corpo, cada linha de um elemento do corpo sofre alteração em seu tamanho, sem uma alteração na sua orientação, como mostra a figura abaixo. Um movimento/deformação homogênea é

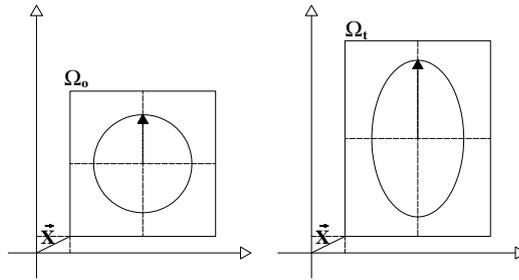


Figura 1.4: Estiramento puro - Deformação pura

pura quando tem a seguinte forma.

$$\begin{aligned}\vec{x} &= [\mathbf{U}(t)]\vec{X} \\ x_i &= \mathbf{U}_{ij}X_j\end{aligned}\quad (1.16)$$

sendo, $\mathbf{U} = \mathbf{U}(t)$ não depende de X , e é tal que :

$$[\mathbf{U}(t)] = [\mathbf{U}(t)]^T \quad (1.17)$$

Note que, como \mathbf{U} é simétrico, \mathbf{U} é diagonalizável e $\det(\mathbf{U}) > 0$, esta forma de mapeamento de deformação tem a propriedade de que se existe uma linha de elementos \underline{D} em Ω_o , qual é estirada, mas não rotacionada dentro do estado \underline{d} na configuração atual Ω_t . Dessa forma tem-se,

$$\vec{d} = [\mathbf{U}]\vec{D} = \lambda\vec{D} \quad (1.18)$$

i.e.,

$$\begin{aligned} [\mathbf{U}]\vec{D} &= \Lambda[\mathbf{I}]\vec{D} \\ 0 &= ([\mathbf{U}] - \Lambda[\mathbf{I}])\vec{D} \end{aligned} \quad (1.19)$$

sendo \vec{D} é o vetor próprio e Λ é o valor próprio. Os elementos da linha \vec{D} na direção de um vetor próprio são estendidos de Λ e não sofrem rotação.

Decomposição Polar da Deformação

Uma deformação genérica pode ser decomposta por:

b) uma deformação/estiramento puro seguida de uma rotação pura:

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} \quad (1.20)$$

b) uma rotação pura seguida de uma deformação/estiramento puro:

$$\mathbf{F} = \mathbf{V}\mathbf{R} \quad (1.21)$$

sendo:

\mathbf{R} – tensor rotação;

\mathbf{U} e \mathbf{V} – tensores alongações (estiramentos) direito e esquerdo respectivamente.

A noção de superposição de uma rotação e um estiramento como usado em elasticidade linear não é usada em problemas de grandes deformações.

Observação:

- Em grandes deformações, duas deformações devem ser combinadas seqüencialmente por composição, i.e., tem-se uma decomposição multiplicativa.
- Em pequenas deformações (escopo do presente trabalho), as deformações são combinadas por adição, i.e., tem-se uma decomposição aditiva.

Do teorema da decomposição polar no qual os tensores \mathbf{U} e \mathbf{V} são calculados a partir dos tensores \mathbf{C} e \mathbf{B} chamados tensores de Cauchy-Green direito e esquerdo, tem-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \mathbf{U}^2 = \mathbf{F}^T \mathbf{F} \\ \mathbf{B} &= \mathbf{V}^2 = \mathbf{F} \mathbf{F}^T \end{aligned} \quad (1.22)$$

Medidas de Deformação

O gradiente da deformação \mathbf{F} ou \mathbf{F}^{-1} contém todas as informações a respeito da deformação em uma vizinhança de P . Como o teorema da decomposição polar mostra

que a informação de uma rotação e de uma deformação pura de um corpo podem ser separadas, pode-se dessa forma, tomar como medida da deformação – os estiramentos \mathbf{U} ou \mathbf{V} da deformação.

Entretanto, \mathbf{U} é de difícil determinação, mas sabe-se que seus autovalores podem ser obtidos a partir dos autovalores de \mathbf{C} , dados por,

$$\Lambda = \sqrt{\rho} \quad (1.23)$$

Assim o tensor \mathbf{C} fornece as mesmas informações geométricas relativas à deformação quanto a \mathbf{U} . Logo, \mathbf{C} representa uma medida de deformação pura do corpo, e como é de fácil determinação, sendo usado nas equações constitutivas apresentadas a seguir.

Deformações Infinitesimais

Neste momento se buscará identificar a maneira de como se pode medir as deformações de acordo com o proposto pela teoria de decomposição do gradiente de deformação \mathbf{F} . Considerando o movimento ilustrado abaixo: O campo de deslocamento das partículas de

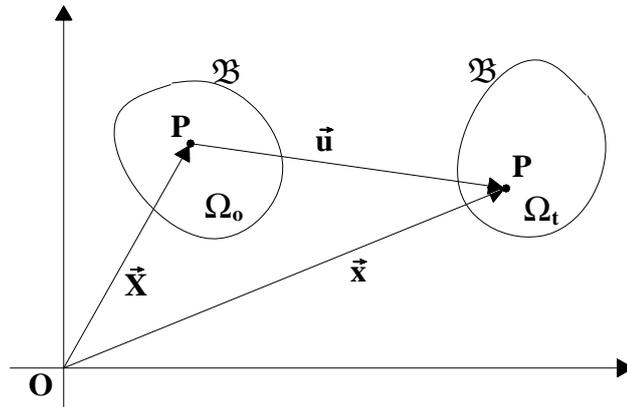


Figura 1.5: Campo de deslocamento do corpo \mathfrak{B} dado por \vec{u}

\mathfrak{B} relativas à configuração de referência Ω_0 são representadas por \vec{u} e dado pela equação abaixo.

$$\vec{x} = \vec{X} + \vec{u}(\vec{X}, t) \quad (1.24)$$

Da descrição do gradiente da deformação tem-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{X}} = \frac{\partial \vec{X}}{\partial \vec{X}} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{X}} = \mathbf{I} + \nabla_X \vec{u} \\ F_{ij} &= \frac{\partial x_i}{\partial X_j} = \frac{\partial X_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j} = \delta_{ij} + u_{i,j} \end{aligned} \quad (1.25)$$

Denotando,

$$\mathbf{H} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{X}} = \nabla_X \vec{u} \quad (1.26)$$

Pode-se reescrever o tensor deformação \mathbf{F} da seguinte forma,

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \mathbf{H} \quad (1.27)$$

No caso de deformações infinitesimais, assume-se que $\max_{\forall \vec{X} \in \Omega_o} \|\nabla_X \vec{u}\| \ll 1$.

Então, escrevendo \mathbf{C} em função de \mathbf{I} e \mathbf{H} e aplicando na equação 1.22, chega-se a,

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \{\mathbf{I} + \mathbf{H}\}^T \{\mathbf{I} + \mathbf{H}\} \\ \mathbf{C} &= \mathbf{I} + \mathbf{H} + \mathbf{H}^T + \mathbf{H}^T \mathbf{H} = \mathbf{I} + \mathbf{H} + \mathbf{H}^T + \theta \{\mathbf{H}^2\} \\ \mathbf{U} &= [\mathbf{C}]^{\frac{1}{2}} = [\mathbf{I} + \mathbf{H} + \mathbf{H}^T + \theta \{\mathbf{H}^2\}]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (1.28)$$

Fazendo por analogia com a equação de segundo grau, $(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \theta(|x|^2)$, $|x| \ll 1$, tem-se:

$$\mathbf{U} = \mathbf{I} + \frac{1}{2} \{\mathbf{H} + \mathbf{H}^T\} + \theta \{\mathbf{H}^2\} \quad (1.29)$$

porém, $\{1+x\}^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x + \theta\{|x|^2\}$, assim,

$$\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{I} - \frac{1}{2} \{\mathbf{H} + \mathbf{H}^T\} + \theta \{\mathbf{H}^2\} \quad (1.30)$$

Como $\mathbf{R} = \mathbf{F}\mathbf{U}^{-1}$ obtém-se:

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} + \frac{1}{2} \{\mathbf{H} - \mathbf{H}^T\} + \theta \{\mathbf{H}^2\} \quad (1.31)$$

Finalmente, definindo os tensores \mathbf{E} e \mathbf{W} abaixo

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{1}{2} \{\mathbf{H} + \mathbf{H}^T\} \therefore E_{ij} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right\} \therefore \mathbf{E} = \frac{1}{2} \{\nabla \vec{u} + \nabla \vec{u}^T\} \\ \mathbf{W} &= \frac{1}{2} \{\mathbf{H} - \mathbf{H}^T\} \therefore W_{ij} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial u_i}{\partial X_j} - \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right\} \therefore \mathbf{W} = \frac{1}{2} \{\nabla \vec{u} - \nabla \vec{u}^T\} \end{aligned} \quad (1.32)$$

onde \mathbf{E} denota a deformação infinitesimal pura e \mathbf{W} a rotação infinitesimal pura, obtém-se:

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \mathbf{E} + \mathbf{W} + \theta \{\mathbf{H}^2\}. \quad (1.33)$$

A partir disto, pode-se verificar que a hipótese de deformação infinitesimal – pequena deformação, leva à decomposição aditiva da deformação, i.e., a deformação infinitesimal pode ser decomposta em uma superposição linear de uma deformação infinitesimal e de uma rotação infinitesimal.

1.3 Leis da Conservação

1.3.1 Conservação da Massa

A massa total de um corpo nas configurações de referência e atual são dadas respectivamente por,

$$M_o = \int_{\Omega_o} \rho_o(\vec{X}) dV_o \quad (1.34)$$

$$M = \int_{\Omega_t} \rho(\vec{x}, t) dV \quad (1.35)$$

No caso em que o movimento ocorre sem variação de massa, a relação entre as densidades de referência e atual é dada por:

$$\int_{\Omega_o} \rho_o(\vec{X}) dV_o = \int_{\Omega_t} \rho(\vec{x}, t) dV \quad (1.36)$$

Da equação 1.13, tem-se que o volume atual pode ser escrito em função do volume inicial, $dV = J dV_o$, e sendo assim a expressão 1.36 fica,

$$\int_{\Omega_o} \rho_o(\vec{X}) dV_o = \int_{\Omega_t} \rho(\vec{x}, t) J dV_o \quad (1.37)$$

Logo a equação 1.37, implica em,

$$\rho_o = J \rho \quad (1.38)$$

1.3.2 Conservação de Momentos Linear e Angular

Diante da descrição das leis de conservação dos momentos, cabe atentar para a definição de tensão, que será inserida nas formulações, devido ao fato das forças internas de um corpo serem apresentadas em função da tensão.

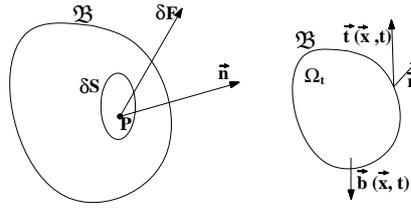
Definição de Tensão

Sabe-se intuitivamente que forças aplicadas na superfície de um meio são transmitidas de alguma maneira através desse meio. O problema é de que maneira essas forças são transmitidas. Usando o conceito de tensão esta ação pode ser perfeitamente entendida. Deste modo, se a distribuição de tensão em um meio é conhecida, pode-se perfeitamente descrever a maneira pela qual a força é transmitida através do meio. Assim, a tensão em um ponto é definida por:

$$\sigma = \lim_{\delta S \rightarrow 0} \frac{\delta F}{\delta S} \quad (1.39)$$

sendo, δS é um elemento de área, ao redor de um ponto P , sobre a qual atua a força δF como indicado na figura 1.6.

A resultante de forças/momento atuando num corpo \mathfrak{B} num instante de tempo t é igual à taxa de variação do momento linear/angular no mesmo instante.


 Figura 1.6: Superfície de tração e forcas no corpo \mathfrak{B} .

 a) Forças atuando em \mathfrak{B}

- Forças de corpo $\vec{b}(\vec{x}, t)$: forcas por unidade de massa, dadas por,

$$\vec{F}_b(\vec{x}, t) = \int_{\Omega_t} \rho \vec{b} dV \quad (1.40)$$

- Forças de superfície $\vec{T}(\vec{x}, t) = \sigma \vec{n}$: tração prescrita na superfície $\partial\Omega_t$, dada por,

$$\vec{F}_t(\vec{x}, t) = \int_{\partial\Omega_t} \vec{T}(\vec{x}, t, \vec{n}) dS \quad (1.41)$$

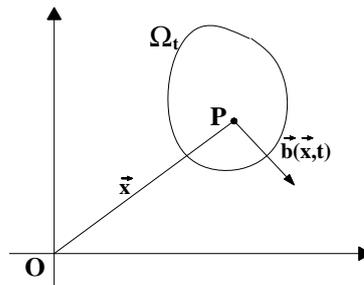
 b) Momentos atuando em \mathfrak{B}

- Momentos resultantes de forcas de corpo com relação à origem O como mostrado na figura 1.7,

$$\int_{\Omega_t} \vec{x} \times \rho \vec{b} dV \quad (1.42)$$

- Momentos resultantes de forcas de superfície de tração com relação à origem O , análogamente como mostrado na figura 1.7 para força de corpo,

$$\int_{\partial\Omega_t} \vec{x} \times \vec{T} dS \quad (1.43)$$


 Figura 1.7: Momento em \mathfrak{B} na configuração deformada

Destas relações de momento, pode-se expressar as leis da conservação do momento linear e angular respectivamente, como:

$$\int_{\Omega_t} \rho \vec{b} dV + \int_{\partial\Omega_t} \vec{T} dS = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho \vec{x} dV \quad (1.44)$$

e

$$\int_{\Omega_t} \vec{x} \times \rho \vec{b} dV + \int_{\partial\Omega_t} \vec{x} \times \vec{T} dS = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \vec{x} \times \rho \vec{x} dV \quad (1.45)$$

Com estes conceitos em mente, pode-se agora buscar uma formulação para as equações de equilíbrio para a resolução de problemas da mecânica do contínuo. Dentre as formas de solução pode-se empregar a formulação do princípio das potências virtuais que será descrita a seguir.

1.4 Princípio das Potências Virtuais

Segundo Sampaio (1982), o Princípio das Potências Virtuais (PPV) consiste em descrever os movimentos possíveis de um sistema mecânico por um espaço virtual ϑ , denominado espaço dos movimentos virtuais. A escolha desse espaço reflete o grau de detalhe com o qual se quer descrever o sistema mecânico em questão. As forças aplicadas no sistema mecânico são então descritas pela prescrição de um funcional linear contínuo em ϑ .

Os conjuntos desses funcionais lineares constitui o espaço \mathfrak{F} das forças. Assim, o significado das forças é dado através da potência que essa força realiza em um movimento virtual qualquer. Nesta seção a figura 1.8 representa um elemento diferencial do meio material.

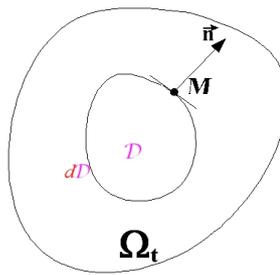


Figura 1.8: Elemento material isolado

O PPV é baseado em dois axiomas básicos, o axioma da invariância dos esforços internos e o axioma de equilíbrio.

Axioma da Invariância dos Esforços Internos

Este primeiro axioma diz que a potência virtual dos esforços internos associada a um movimento de corpo rígido é nula.

Axioma de Equilíbrio

Para todo o meio material, relacionado a um referencial absoluto, a cada instante de tempo e para todo o movimento virtual, a potência virtual dos esforços de inércia P_a é igual a soma das potências virtuais dos esforços internos P_i e das potências virtuais dos esforços externos P_e , i.e.,

$$P_a = P_i + P_e \quad (1.46)$$

1.4.1 Potência Virtual dos Esforços Internos

Supõe-se que a potência virtual dos esforços internos está definida por uma integral sobre o domínio $\mathcal{D} \subset \Omega_t$ que a priori contém os três termos $\vec{v}(M)$, \mathbf{D} e $\mathbf{\Omega}$ associados respectivamente a um vetor $\vec{f} = \rho \vec{b}$ e aos tensores $\boldsymbol{\sigma}$, simétrico e $\boldsymbol{\Gamma}$, anti-simétrico. Assim,

$$P_i = - \int_{\mathcal{D}} \left\{ \vec{v} \cdot \vec{f} + \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{\Omega} \cdot \boldsymbol{\Gamma} \right\} d\mathcal{D} \quad (1.47)$$

o sinal negativo é introduzido por convenção, para ser usado mais tarde no desenvolvimento termodinâmico. Do primeiro axioma do PPV pode-se chegar que a Eq.(1.47) reduz-se a:

$$P_i = - \int_{\mathcal{D}} \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\sigma} d\mathcal{D}. \quad (1.48)$$

1.4.2 Potência Virtual dos Esforços Externos

Os esforços externos são divididos em esforços de ação a distância e esforços de contato. Os esforços de ação a distância são devidos à ação do exterior sobre o sistema, atuando no volume do corpo \mathcal{D} , e são tais como o campo gravitacional e os campos eletromagnéticos. Estes esforços são representados por uma densidade de forças \vec{f} . O segundo termo é devido aos esforços de contato que atuam na superfície do corpo $\partial\mathcal{D}$ e são representados pelo vetor densidade de forças de superfície \vec{T} . Assim, a potência virtual dos esforços externos é definida como

$$P_e = \int_{\mathcal{D}} \vec{f} \cdot \vec{v} d\mathcal{D} + \int_{\partial\mathcal{D}} \vec{T} \cdot \vec{v} d\partial\mathcal{D}. \quad (1.49)$$

1.4.3 Potência Virtual dos Esforços de Inércia

Se \vec{a} é o vetor aceleração em cada ponto M e ρ é a massa específica, a potência das quantidades de aceleração é definida como

$$P_a = \int_{\mathcal{D}} \rho \vec{a} \cdot \vec{v} d\mathcal{D}. \quad (1.50)$$

1.4.4 Equação de Equilíbrio

Substituindo as equações integrais encontradas para cada um dos termos de potência na Eq.(1.46) chega-se a

$$\int_{\mathcal{D}} \rho \vec{a} \cdot \vec{v} d\mathcal{D} = - \int_{\mathcal{D}} \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\sigma} d\mathcal{D} + \int_{\mathcal{D}} \vec{f} \cdot \vec{v} d\mathcal{D} + \int_{\partial\mathcal{D}} \vec{T} \cdot \vec{v} d\partial\mathcal{D}. \quad (1.51)$$

A partir do teorema da divergência¹ para um campo vetorial e de algumas propriedades de derivação pode-se chegar a seguinte equação integral :

$$\int_{\mathcal{D}} \left\{ \text{div } \boldsymbol{\sigma} + \vec{f} - \rho \vec{a} \right\} \cdot \vec{v} d\mathcal{D} = 0 \quad \forall \vec{v}, \quad (1.52)$$

assim,

$$\text{div } \boldsymbol{\sigma} + \vec{f} - \rho \vec{a} = 0 \quad \text{em } \mathcal{D}, \quad (1.53)$$

que é a clássica equação de equilíbrio dinâmico (1ª Equação de Cauchy). Se o corpo estiver em equilíbrio estático então a potência devida à quantidade de aceleração P_a é nula e a Eq.(1.53) torna-se:

$$\text{div } \boldsymbol{\sigma} + \vec{f} = 0 \quad \text{em } \mathcal{D}, \quad (1.54)$$

que é a conhecida equação de equilíbrio estático. Tem-se ainda que $\vec{T} = \boldsymbol{\sigma} \vec{n}$, (2ª Equação de Cauchy), sobre $\partial\mathcal{D}$.

1.4.5 Hipóteses de Deformações e Deslocamentos Infinitesimais

Quando os deslocamentos, $\vec{u}(M)$ e as deformações ε , forem de pequena magnitude, as variáveis de Lagrange definidas na configuração indeformada Ω_o , ver figura 1.9, e as variáveis de Euler, definidas na configuração atual Ω_t , se confundem.

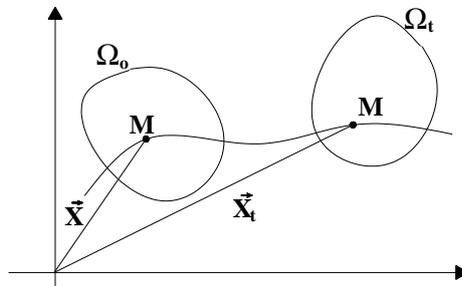


Figura 1.9: Campo de deslocamento da partícula M .

¹Teorema da Divergência:

Campo escalar: $\int_{\partial a} \varphi \vec{n} d\partial a = \int_a \nabla \varphi da$

Campo vetorial: $\int_{\partial a} \vec{v} \cdot \vec{n} d\partial a = \int_a \text{div } \vec{v} da$

Campo tensorial: $\int_{\partial a} \mathbf{A} \vec{n} d\partial a = \int_a \text{div } \mathbf{A} da$

Desta forma, pode-se escrever que

$$\vec{u}(M) = \int_0^t \vec{v}(M) dt \quad (1.55)$$

e

$$\varepsilon = \int_0^t \mathbf{D} dt \quad (1.56)$$

e por conseqüência

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \left\{ \nabla_X \vec{u}(M) + [\nabla_X \vec{u}(M)]^T \right\}. \quad (1.57)$$

1.5 Termodinâmica dos Meios Contínuos

1.5.1 Leis de Conservação

Uma das leis fundamentais da natureza é o princípio da conservação da energia, qual afirma simplesmente, que durante uma interação, a energia pode mudar de uma forma para outra contudo a quantidade de energia mantém-se constante.

A Primeira Lei da Termodinâmica é simplesmente uma expressão do princípio da conservação da energia, i.e., a energia é uma propriedade termodinâmica.

A segunda Lei da Termodinâmica estabelece que a energia tem qualidade bem como quantidade, e os processos existentes ocorrem na direção de decréscimo da energia.

Em um sistema termo-mecânico, um corpo \mathfrak{B} pode armazenar energia de duas formas:

- Energia Cinética $\{K\}$
- Energia Interna $\{E_i\}$

Assim, a taxa de variação da energia total de uma parte \mathcal{D} do corpo \mathfrak{B} é igual à soma:

- (1) Da taxa de trabalho das forças externas $\{P_{ex}\}$
- (2) Do fluxo de energia térmica entrando ou saindo do sistema $\{Q\}$

Logo,

$$\frac{d}{dt} (K + E_i) = P_{ex} + Q \quad (1.58)$$

sendo:

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}} \rho \vec{v} \cdot \vec{v} dV \\ E_i &= \int_{\mathcal{D}} \rho e dV \\ P_{ex} &= \int_{\mathcal{D}} \rho \vec{b} \cdot \vec{v} dx + \int_{\partial \mathcal{D}} \rho \vec{T} \cdot \vec{v} dA \\ Q &= \int_{\mathcal{D}} \rho \mathfrak{r} dV + \int_{\partial \mathcal{D}} q(\vec{n}) dA \end{aligned}$$

Dessa forma serão apresentadas as leis de conservação da energia.

i) Conservação da Quantidade de Movimento:

A equação de equilíbrio Eq.(1.53) pode ser interpretada como um balanço de quantidade de movimento, ou seja,

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} \rho \vec{v} d\mathcal{D} - \int_{\partial\mathcal{D}} \vec{T} d\partial\mathcal{D} = \int_{\mathcal{D}} \vec{f} d\mathcal{D} \quad (1.59)$$

ii) Conservação da Massa:

A segunda lei de conservação é a lei de conservação da massa que é expressa por

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} \rho d\mathcal{D} = 0. \quad (1.60)$$

iii) Primeira Lei da Termodinâmica:

A terceira, e mais famosa lei de conservação é a lei da conservação de energia. Ela exprime que a taxa de variação de energia interna, definida como

$$\frac{d}{dt} (E_i) = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} \rho e d\mathcal{D} \quad (1.61)$$

na qual e é a energia interna específica, mais a taxa de variação da energia cinética, definida como

$$\frac{d}{dt} (K) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} \rho \vec{v} \cdot \vec{v} d\mathcal{D} \quad (1.62)$$

deve ser igual à taxa de calor recebida pelo corpo mais a potência externa definida pela Eq.(1.49), isto é

$$\frac{d}{dt} (E_i + K) = P_{ex} + Q. \quad (1.63)$$

A taxa de calor recebida pelo corpo compreende duas partes, uma devida ao calor gerado no interior do corpo \mathcal{D} pela ação das forças externas e a outra pelo calor recebido através da fronteira $\partial\mathcal{D}$. Assim a taxa de calor pode ser escrita como

$$Q = \int_{\mathcal{D}} \mathfrak{r} d\mathcal{D} - \int_{\partial\mathcal{D}} \vec{q} \cdot \vec{n} d\partial\mathcal{D} \quad (1.64)$$

na qual \mathfrak{r} é a densidade, em volume, de produção interna de calor, \vec{q} é o vetor fluxo de calor e \vec{n} é a normal exterior a $\partial\mathcal{D}$ já definida anteriormente.

Com a manipulação matemática destas definições apresentadas até aqui, pode-se escrever a primeira lei da termodinâmica da seguinte forma

$$\rho \dot{e} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D} + \mathfrak{r} + \text{div}(\vec{q}) \quad (1.65)$$

ou

$$\rho \dot{e} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \mathfrak{r} + \text{div}(\vec{q}) \quad (1.66)$$

utilizando a hipótese de pequenos deslocamentos.

iv) Segunda Lei da Termodinâmica - Entropia

A segunda lei da termodinâmica é expressa por uma desigualdade equação 1.68, que relaciona duas novas variáveis, a temperatura absoluta T e a entropia S_e , esta definida como:

$$S_e = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} \rho s \, d\mathcal{D}, \quad (1.67)$$

s é a entropia específica. A desigualdade em questão é dada pela taxa de produção de entropia – que é sempre superior, ou no caso extremo, igual à taxa de calor recebida por \mathcal{D} , definida pela Eq.(1.64), dividida pela temperatura absoluta T . Assim,

$$\frac{dS}{dt} \geq \int_{\mathcal{D}} \frac{\mathfrak{r}}{T} \, d\mathcal{D} - \int_{\partial\mathcal{D}} \frac{\vec{q} \cdot \vec{n}}{T} \, d\partial\mathcal{D} \quad (1.68)$$

Através desta desigualdade pode-se então excluir os processos físicos não factíveis, i.e., processos que possuem taxa de entropia negativa. A aplicação do teorema da divergência na Eq.(1.68) permite-nos escrever

$$\int_{\mathcal{D}} \left\{ \rho \frac{ds}{dt} + \text{div} \left(\frac{\vec{q}}{T} \right) - \frac{\mathfrak{r}}{T} \right\} \, d\mathcal{D} \geq 0 \quad (1.69)$$

ou em sua forma local

$$\rho \frac{ds}{dt} + \text{div} \left(\frac{\vec{q}}{T} \right) - \frac{\mathfrak{r}}{T} \geq 0 \quad (1.70)$$

Com base na primeira lei da termodinâmica expressa pela Eq.(1.65), pode-se escrever

$$\rho \left\{ T \frac{ds}{dt} - \frac{de}{dt} \right\} + \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\sigma} - \vec{q} \cdot \frac{\nabla_X T}{T} \geq 0. \quad (1.71)$$

Introduzindo o potencial de energia livre de Helmlhotz

$$\Psi = e - Ts \quad (1.72)$$

chega-se a

$$\mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\sigma} - \rho \left\{ \frac{d\Psi}{dt} + s \frac{dT}{dt} \right\} - \vec{q} \cdot \frac{\nabla_X T}{T} \geq 0 \quad (1.73)$$

que é a desigualdade de Clausius-Duhem. Admitindo agora a hipótese de pequenos deslocamentos e pequenas deformações, a desigualdade descrita pela Eq.(1.73) pode ser expressa por:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \boldsymbol{\sigma} - \rho \left\{ \frac{d\Psi}{dt} + s \frac{dT}{dt} \right\} - \vec{q} \cdot \frac{\nabla_X T}{T} \geq 0 \quad (1.74)$$

1.6 Método do Estado Local

O axioma do método do estado local considera que o estado termodinâmico de um meio contínuo pode ser definido através do conhecimento de valores de um certo número de variáveis definidas em um instante t fixo. Essa hipótese implica que a evolução de um meio contínuo pode então ser considerada como a sucessão de vários estados de equilíbrio, ou termoestáticos. Estas variáveis são denominadas variáveis de estado local. Assim, o sucesso da representação do fenômeno físico em questão depende da boa escolha das variáveis de estado. Os processos serão termodinamicamente admissíveis se para cada instante t da evolução, a equação de Clausius-Duhem for satisfeita. As variáveis de estado local são classificadas segundo Lemaitre (1992) por variáveis observáveis e variáveis internas.

Variáveis Observáveis: As variáveis observáveis que interagem dentro dos fenômenos de elasticidade, viscoelasticidade, plasticidade, viscoplasticidade, dano e ruptura são a temperatura T e a deformação total ε . Os fenômenos reversíveis ou elásticos são completamente definidos pelas variáveis observáveis.

Variáveis Internas: Para o caso de deformações plásticas é necessário a introdução da variável irreversível, deformação plástica, representada por ε^p . Deste modo, no escopo de deformações infinitesimais, a deformação total pode ser expressa decomposta como:

$$\varepsilon = \varepsilon^p + \varepsilon^e \quad (1.75)$$

Os outros fenômenos, tais como dano e o encruamento por exemplo, podem ser incluídos através da introdução de variáveis internas que os representem. Estas variáveis serão definidas aqui por α_k , $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\}$, e dependendo do fenômeno estas variáveis podem ser de natureza escalar, vetorial ou tensorial.

1.6.1 Potencial Termodinâmico

Postula-se a existência de um potencial termodinâmico Ψ do qual pode-se obter as leis de estado. Este potencial tem as seguintes características: $\Psi : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$, é côncavo com relação a T e convexo com relação às demais variáveis de estado. O potencial termodinâmico escolhido para o trabalho é a energia livre de Helmholtz, definido pela Eq.(1.72), e representado, através das variáveis de estado, como

$$\Psi = \Psi \left(\varepsilon, \varepsilon^p, \varepsilon^e, T, \vec{V} \right) \quad (1.76)$$

No caso da elastoelasticidade infinitesimal o potencial Ψ normalmente é função apenas da diferença $\varepsilon^e = \varepsilon - \varepsilon^p$ o que nos leva à seguinte representação:

$$\Psi = \Psi(\varepsilon^e, T, \vec{\alpha}) \quad (1.77)$$

Introduzindo a Eq.(1.77) na desigualdade de Clausius Duhem, Eq.(1.74), pode-se determinar as seguintes equações de estado:

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon^e} \quad (1.78)$$

$$s = -\frac{\partial \Psi}{\partial T} \quad (1.79)$$

$$A_k = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha_k} \quad (1.80)$$

sendo:

a tensão $\boldsymbol{\sigma}$, a variável associada à ε^e ;

a entropia específica s , a variável associada à T ;

e A_k as variáveis termodinâmicas associadas às variáveis internas α_k .

1.6.2 Potencial Termodinâmico de Dissipação

Com intuito de se determinar as leis complementares ou leis de evolução, para o processo dissipativo, postula-se a existência de um potencial ou pseudo-potencial com as seguintes características: $F : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$, contínuo, convexo com relação às variáveis de fluxo $\{\boldsymbol{\sigma}, \vec{A}\}$, e nulo na origem. No caso de um problema isotérmico,

$$F = F\left(\{\boldsymbol{\sigma}, \vec{A}\}; \{\varepsilon^e, \vec{\alpha}\}\right). \quad (1.81)$$

As leis de evolução são determinadas utilizando a propriedade da normalidade ou da dissipação normal, com relação às variáveis de fluxo,

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\gamma} \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad \text{e} \quad \dot{V}_k = -\dot{\gamma} \frac{\partial F}{\partial A_k}. \quad (1.82)$$

A primeira equação conduz às leis de evolução da plasticidade e da viscoplasticidade e a segunda relação exprime a evolução das variáveis internas do problema. Os potenciais de dissipação podem ainda depender das variáveis de estado $\{\varepsilon^e, \vec{\alpha}\}$ que fazem o papel de parâmetros.

Com este procedimento, todo o problema de modelamento dos fenômenos físicos reduz-se à determinação da expressão analítica dos potenciais termodinâmicos descritos acima e da identificação dos parâmetros materiais através de testes experimentais.

Capítulo 2

Plasticidade

Neste capítulo será considerada a análise de tensão de problemas elasto-plásticos sujeitos à estados planos de tensão, de deformação e problemas axissimétricos. A análise desse tipo de comportamento do material é complexa devido ao fato de que diferentes materiais requerem diferentes modelos constitutivos para sua adequada caracterização. Dessa forma, serão apresentados modelos elasto-plásticos para os materiais mais habitualmente utilizados na engenharia tais como: metais, solos, rocha e concreto. Neste trabalho é considerada apenas a cinemática de pequenos deslocamentos e deformações.

2.1 Teoria da Plasticidade

O objetivo da teoria da plasticidade é prover um princípio capaz de descrever o comportamento da relação tensão-deformação para materiais que apresentam uma resposta elasto-plástica quando submetidos a carregamentos externos. Esta resposta pode ser:

Elástica: quando após cessada a carga o corpo não apresenta deformações residuais.

As deformações que ocorrem são reversíveis e a nível atômico. Os efeitos dessas deformações são observáveis numa escala macroscópica, resultantes da variação do espaço interatômico para balancear as cargas externas, e também dos movimentos reversíveis de deslocamento.

Plástica: quando após cessado o carregamento a deformação não se desfaz, sendo portanto irreversível ou permanente, Owen & Hinton (1980), Desai (1984), Chen & Han (1988) e Lemaitre & Chaboche (1994). Essas deformações irreversíveis podem ser plásticas ou viscosas, ocorrem a nível cristalino em adição a parcela de deformação elástica. Correspondem ao relativo deslocamento atômico que permanece após a remoção da carga.

Para se escrever um modelo do comportamento elasto-plástico de deformação, não basta apenas diferenciar as deformações, são necessárias ainda as seguintes formulações:

- Um critério de escoamento indicando em qual nível de tensão o fluxo plástico se inicia;
- Uma relação entre tensão e deformação que descreva o comportamento do material sob condições elásticas, i.e., antes de iniciar a deformação plástica;
- Uma relação entre tensão e deformação para o comportamento plástico, i.e., quando a deformação é composta por deformação elástica e plástica, Spencer (1980).

2.1.1 Aspecto Fenomenológico Elasto-Plástico

Algumas propriedades importantes podem ser identificadas neste tipo de comportamento.

1. A existência de um domínio elástico, uma região de tensões dentro da qual o material se comporta como sendo puramente elástico, sem a evolução de deformações permanentes. O domínio elástico é delimitado por uma função de escoamento, e pela tensão limite de escoamento. No caso de materiais geológicos, a função de escoamento pode ser composta por uma ou mais superfícies de falha, o que torna o tratamento destes materiais mais complexo.
2. A ocorrência de deformações inelásticas cuja evolução pode ser descrita por uma regra de escoamento, descrevendo a evolução da deformação plástica ε^p . Adicionalmente à regra de escoamento, são descritas as condições de carregamento e descarregamento de modo a possibilitar a diferenciação da resposta do material nestas duas situações.
3. A ocorrência de encruamento do material, i.e., a possibilidade de haver endurecimento ou amolecimento do material acompanhando a evolução da deformação plástica. Esse encruamento é dividido em geral como: isotrópico e cinemático. No caso do encruamento isotrópico a tensão de escoamento σ_y muda em função da deformação plástica acumulada. No caso do encruamento cinemático, ocorre uma translação da função de escoamento com relação ao espaço das tensões, Souza Neto (2000).

2.1.2 Critérios e Superfícies de Escoamento

Quando os problemas analisados envolvem mais de uma dimensão, problemas planos ou tridimensionais, a definição de um critério de escoamento torna-se dependente de inúmeras variáveis, i.e., das componentes de tensão. Vários critérios foram propostos na literatura conforme a classe de materiais a serem analisadas. Os critérios mais conhecidos são:

- a) Tresca
- b) von Mises
- c) Mohr-Coulomb
- d) Drucker-Prager
- e) Modelo de "Cap"

Todo critério de escoamento determina o nível de tensão no qual a deformação plástica inicia e pode ser escrito da seguinte forma:

$$f(\sigma, \vec{A}) = 0 \quad (2.1)$$

sendo f é uma função de escoamento escalar, função do tensor tensão σ e do conjunto de variáveis termodinâmicas \vec{A} .

Critério de Escoamento de Tresca

Este critério, também chamado de teoria da máxima tensão cisalhante (materiais dúcteis), estabelece que o escoamento inicia quando a máxima tensão cisalhante atinge um valor crítico. Sua função de escoamento pode ser representada por:

$$f(\sigma) = \{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}\} - \sigma_y \quad (2.2)$$

sendo:

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= \max(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}) \\ \sigma_{\min} &= \min(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}) \end{aligned} \quad (2.3)$$

$\sigma_{ii}, i = 1..3$ - são as tensões principais

σ_y - tensão de escoamento

τ_y - tensão de escoamento ao cisalhamento;

- A figura 2.1 ilustra a forma desse critério de escoamento. Note que o critério de Tresca é insensível à pressão hidrostática, já que a função de escoamento é tal que $f(\sigma^D + \sigma^H I) = f(\sigma^D)$, para qualquer pressão hidrostática $\sigma^H = \frac{1}{3}tr(\sigma)$.

Critério de Escoamento de von Mises

Este critério descrito por von Mises (1913), estabelece que a plastificação inicia quando o invariante J_2 da tensão deviatórica atinge um valor crítico.

$$J_2(\sigma^D) = \mathcal{R}(\vec{A}) \quad (2.4)$$

e o critério de von Mises pode ser definido como:

$$f(\sigma^D) = \sqrt{3J_2(\sigma^D)} - \sigma_y = \sqrt{3 \left\{ \frac{1}{2} \{ \sigma^D \cdot \sigma^D \} \right\}} - \sigma_y \quad (2.5)$$

O valor crítico assumido como \mathcal{R} é uma função das variáveis internas de encruamento \vec{A} . O critério de von Mises será mais explorado posteriormente, pois se trata de um dos principais modelos abordados neste trabalho. Na figura 2.1 ele é mostrado com uma representação planimétrica e tridimensional da sua superfície de escoamento.

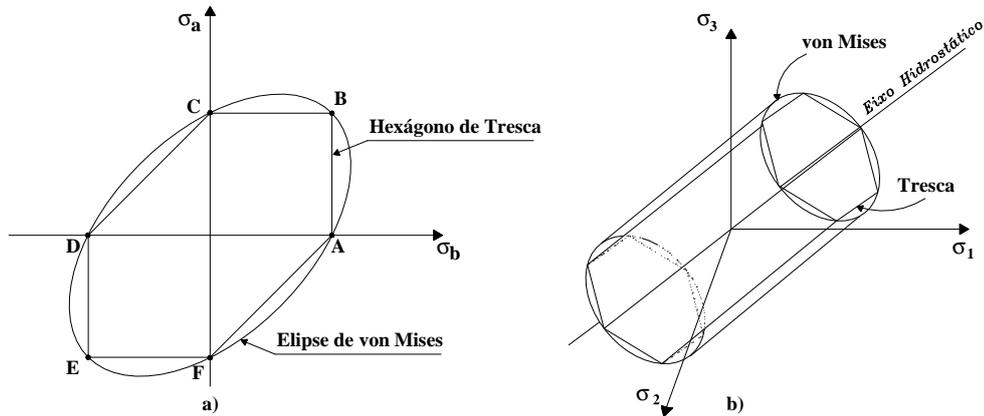


Figura 2.1: a) Superfícies de escoamento de Tresca e von Mises num plano $\sigma_3 = 0$. b) Superfícies de escoamento de Tresca e von Mises no espaço de tensões principais.

Critério de Escoamento de Mohr-Coulomb

O critério de Mohr-Coulomb pode ser considerado como uma versão generalizada do critério de Tresca. Ambos são baseados na hipótese da máxima tensão cisalhante, para início do escoamento. Porém no critério de Tresca a tensão máxima de cisalhamento é dada por uma constante, diferentemente do critério de Mohr-Coulomb, o qual considera a tensão limite de cisalhamento τ_y num plano, função da tensão normal σ_n neste mesmo plano, i.e.,

$$|\tau_y| = f(\sigma_n) \quad (2.6)$$

Em contraste com o critério de Tresca, o critério de Coulomb é sensível à pressão hidrostática. É baseado na hipótese de que o fenômeno de escoamento plástico é macroscópico, resultante do escorregamento friccional/atrito entre as partículas materiais. Generalizando a lei de atrito de Coulomb, estabelece-se que o escoamento plástico inicia quando, num plano do corpo, a tensão limite de cisalhamento, τ_y , e a tensão normal, σ_n atingem uma combinação crítica.

$$\tau = c - \sigma_n \operatorname{tg} \phi \quad (2.7)$$

onde c é a coesão e ϕ o ângulo de atrito interno.

A forma simplificada da envoltória $f(\sigma_n)$ de Mohr-Coulomb é uma linha reta, ilustrada na figura abaixo.

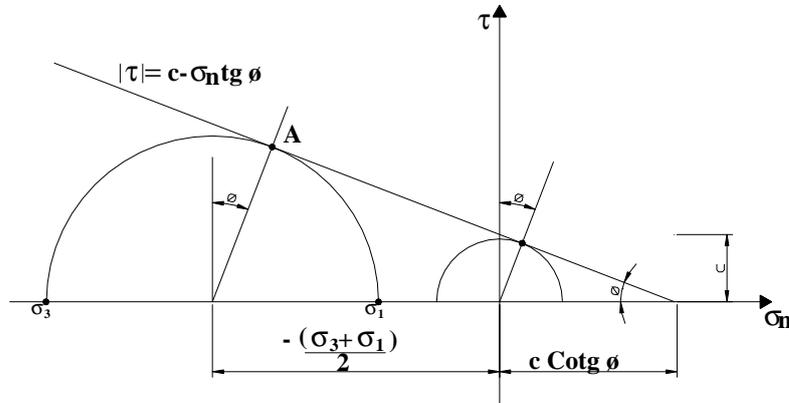


Figura 2.2: Critério de escoamento de Mohr-Coulomb: com a linha da envoltória de falha.

Critério de Escoamento de Drucker-Prager

Assim como visto no critério de Mohr-Coulomb, o qual faz-se uma generalização do critério de Tresca inserindo o efeito da pressão hidrostática no modelo, o critério proposto por Drucker-Prager em 1952, faz uma generalização do critério de von Mises. Ele consiste numa modificação do critério de von Mises no qual um termo extra é incluído para que o modelo se torne sensível ao efeito da pressão hidrostática.

O critério de Drucker-Prager impõe que o escoamento plástico ocorre quando o invariante J_2 da tensão deviatórica e a tensão hidrostática σ^H atingem uma combinação crítica, sendo: $\sigma^H = \frac{1}{3}I_1$, pois $I_1 = tr(\sigma)$.

$$f(\sigma^D, \sigma^H) = \sqrt{J_2(\sigma^D)} + \theta I_1 = \varsigma \quad (2.8)$$

sendo ς e θ , constantes materiais, relacionadas com a coesão c e o ângulo de atrito ϕ .

$$\theta = \frac{tg \phi}{\{9 + 12 tg^2 \phi\}^{\frac{1}{2}}} \quad (2.9)$$

$$\varsigma = \frac{3c}{\{9 + 12 tg^2 \phi\}^{\frac{1}{2}}} \quad (2.10)$$

O local de escoamento no espaço de tensões principais é representado por um cone circular cujo eixo de simetria é a linha hidrostática, conforme mostra a figura 2.3, e quando $\theta = 0$, o modelo se reduz ao critério de von Mises.

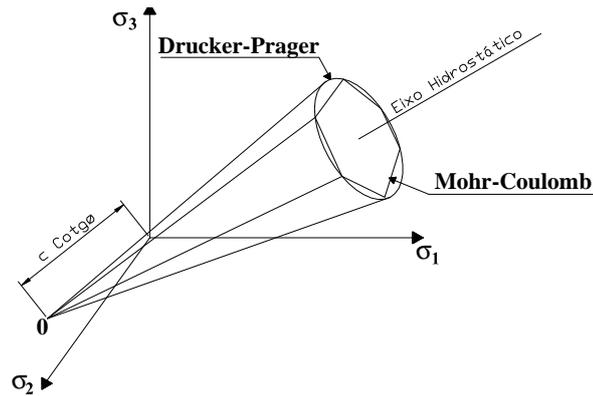


Figura 2.3: Representação Geométrica das superfícies de escoamento de Mohr-Coulomb e Drucker-Prager no espaço de tensões principais.

Critério de Escoamento do Modelo de "Cap"

O critério de escoamento para os chamados modelos de "Cap" são dados por mais de uma função/superfície de escoamento. Assim diversos modelos podem ser criados usando diferentes regras para escoamento do material em tração e em compressão.

Uma possível forma para o "Cap" é apresentada abaixo:

$$\begin{aligned}
 f_1(\sigma) &= \sqrt{J_2(\sigma^D)} + \theta \{ \sigma^H - p_t \} \\
 f_2(\sigma, p) &= \sqrt{J_2(\sigma^D)} - \beta \{ \sigma^H + p_c \}
 \end{aligned}
 \tag{2.11}$$

onde θ e p_t são constantes, indicando a inclinação do cone de Drucker-Prager e limite de escoamento inferior de pressão de tração hidrostática pura. Já β e p_c são a inclinação do "Cap" cônico e a pressão de compactação. Notar que a coesão c descrita como constante de material é mostrada na equação 2.10, porém relacionada com p_t . Sua representação geométrica é mostrada na figura 2.4.

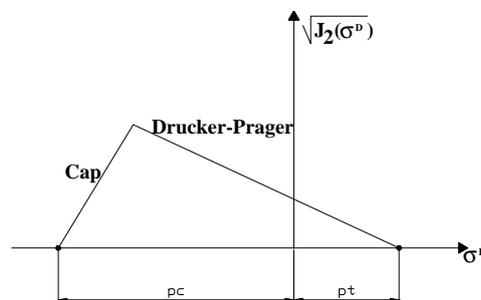


Figura 2.4: Modelo de Drucker-Prager com "Cap".

No próximo capítulo será apresentado um modelo de "Cap" mais detalhado, objetivo do estudo do trabalho, para se poder modelar materiais geológicos, solos, rocha e até concreto.

2.1.3 Leis de Encruamento

O encruamento é caracterizado pelo fato de que para muitos materiais reais, a tensão limite de escoamento do material é dependente de uma medida de tensão plástica acumulada. Assim a superfície de escoamento pode variar em cada estágio de deformação plástica, pois é dependente da história da deformação. Algumas formas de modelos propostos para captar tal fenômeno podem ser formuladas e ilustradas abaixo.

$$f(\sigma, \varepsilon^p, k) = F(\sigma, \varepsilon^p) - k^2(\varepsilon^p) = 0 \quad (2.12)$$

onde k^2 representa o tamanho da superfície de escoamento, e a função $F(\sigma, \varepsilon^p)$ define a forma da superfície.

Um modelo de plasticidade sem encruamento é chamado de modelo de "plasticidade perfeita", esse assume que no limite de escoamento o critério de escoamento é mantido constante no decorrer da análise de carregamento. Quando se admite a possibilidade da variação desse limite, então o problema não é mais de plasticidade perfeita e sim de plasticidade com encruamento. De acordo com o nível de carregamento a que o material é submetido e pela ocorrência de carregamento/descarregamento, é possível que o limite elástico, limite de escoamento ou critério de escoamento, possa variar aumentando no caso de endurecimento/compactação ou diminuindo para o caso de amolecimento.

Diante disto, surgem modelos para tratarem esses comportamentos, tais como:

- a) Sem encruamento ou plasticidade perfeita – figura 2.5 a;
- b) Encruamento Isotrópico – figura 2.5 b;
- c) Encruamento Cinemático – figura 2.5 c;
- d) Encruamento Misto – figura 2.5 d.

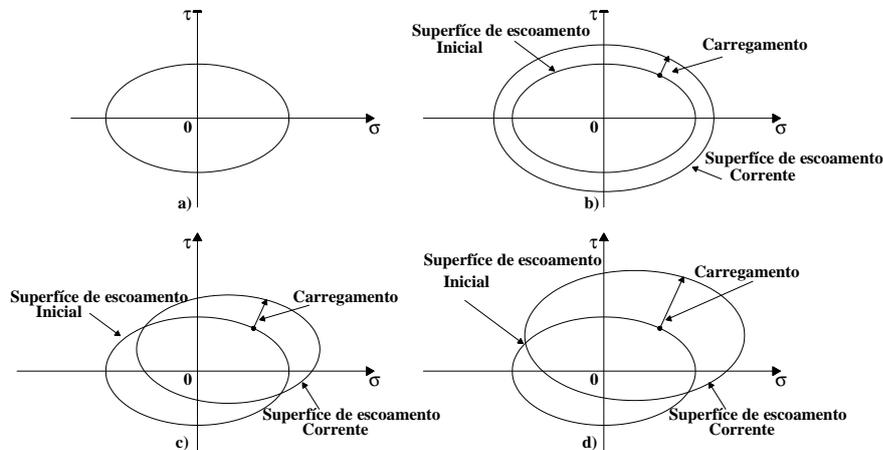


Figura 2.5: Leis de encruamento.

2.1.4 Problemas Bi-dimensionais

Com intuito de se trabalhar no modelamento de problemas planos, será mostrada nesta seção a forma de como se devem reduzir os tensores tensão e deformação para que se tornem planimétricos.

Tem-se para tensão, $\vec{\sigma}$, e deformação, $\vec{\varepsilon}$, quatro componentes, e os problemas podem ser tratados em três casos conforme figura 2.6 e suas descrições constitutivas abaixo:

1. Estado Plano de Tensão – $\sigma^T = \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \sigma_z\}$, com $\sigma_z = 0$;
2. Estado Plano de Deformação – $\sigma^T = \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \sigma_z\}$, com $\varepsilon_z = 0$;
3. Axissimétrico – $\sigma^T = \{\sigma_r, \sigma_z, \tau_{rz}, \sigma_\theta\}$. As formas explícitas das matrizes constitu-

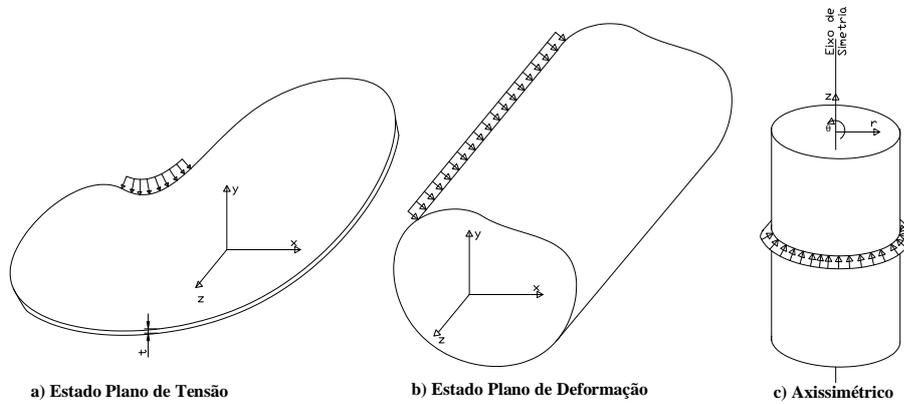


Figura 2.6: Aplicações em 2-dimensões mostrando o sistema de coordenadas empregado.

tivas \mathbb{D} para os problemas 1,2 e 3 podem ser escritas como nas equações 2.13 e 2.14:

$$\mathbb{D} = \frac{E \{1 - \nu\}}{\{1 + \nu\} \{1 - 2\nu\}} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{\{1-\nu\}} & 0 & \frac{\nu}{\{1-\nu\}} \\ \frac{\nu}{\{1-\nu\}} & 1 & 0 & \frac{\nu}{\{1-\nu\}} \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2\{1-\nu\}} & 0 \\ \frac{\nu}{\{1-\nu\}} & \frac{\nu}{\{1-\nu\}} & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{problemas 2 e 3} \quad (2.13)$$

$$\mathbb{D} = \frac{E}{\{1 - \nu^2\}} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{problema 1} \quad (2.14)$$

Com o intuito de não apenas se restringir ao fenômeno elasto-plástico mapeando as deformações, pretende-se buscar um nível de sollicitação tal que se possa identificar a resposta material até sua ruptura. Assim é necessário a apresentação de um modelo de dano e de sua generalização como fenômeno físico.

2.2 Introdução à Mecânica do Dano

Na tentativa de se conseguir mapear a história de deformação e de tensão de um material até sua ruptura, ou até a sua incapacidade de suportar carga, é necessário buscar uma variável de dano. Entretanto, a caracterização de um processo físico progressivo até a ruptura material é uma operação delicada que depende da escala de avaliação da análise. O fenômeno do dano pode ser descrito de um ponto de vista físico como a representação de: descontinuidades na superfície na forma de microtrincas ou descontinuidades do volume na forma de vazios (cavidades), e, por esta razão, envolve processos reológicos completamente diferentes da deformação.

2.2.1 Princípios Elementares do Dano

Descrever a evolução do dano, nem sempre é de fácil distinção, pois o fenômeno de evolução de um estado virgem do material até o início macroscópico de uma trinca acontece acompanhado de outros mecanismos de deformação. E como exposto antes, o dano depende da escala de estudo e observação. Assim, na tentativa de se analisar o fenômeno, três distintos níveis são apresentados segundo sua forma de deterioração material.

1. Nível da microescala:

- O acúmulo de microtensões na vizinhança de defeitos ou nas interfaces;
- A ruptura de ligações;
- Aumento plástico de microcavidades.

2. Nível da mesoescala:

- Nível de um elemento representativo de volume, isto é, crescimento e coalescência de microtrincas ou microvazios que juntos iniciam uma trinca.

3. Nível da macroescala:

- Esse nível é que ocorre o crescimento de uma trinca, usualmente estudado na mecânica da fratura.

2.2.2 Aspectos Fenomenológicos do Dano

Todo material é composto por um arranjo de átomos que se mantêm unidos (colados) por ligações resultantes de campos eletromagnéticos. Quando ocorre o descolamento dessas ligações durante um processo de deformação, o novo arranjo interatômico apresenta microtrincas ou microvazios, indicando que o processo de dano foi iniciado.

Por exemplo em metais, que são organizados por cristais ou grãos, há um arranjo atômico regular, exceto nas linhas de discordâncias onde faltam átomos. Se uma tensão de cisalhamento é aplicada, as discordâncias podem mover-se, e, criar uma deformação plástica por escorregamento sem qualquer descolamento como mostrado nas figuras abaixo. Entretanto, se as discordâncias são paradas por um microdefeito ou uma concen-

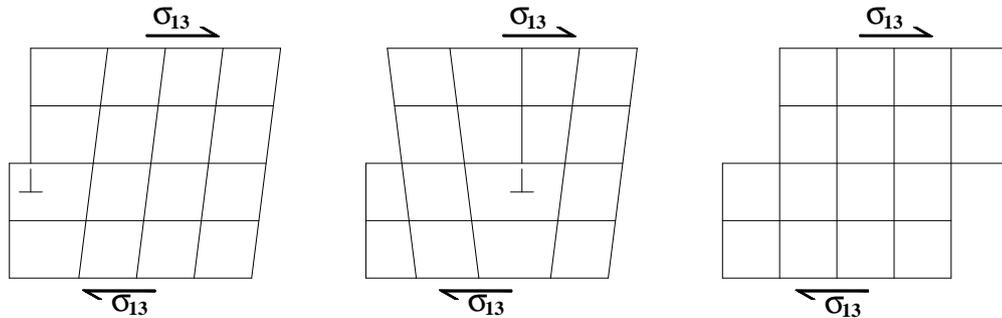


Figura 2.7: Deformação Plástica elementar por escorregamento devido ao movimento de discordância.

tração de microtensão, elas criam uma zona de impedimento na qual outras discordâncias podem ser barradas. Esse segundo processo não pode ocorrer sem um rompimento ou uma formação de um microvazio, acarretando em dano, como mostrado na figura 2.8.

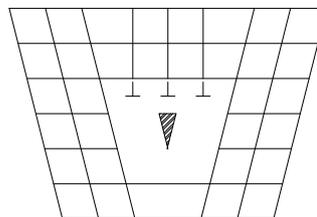


Figura 2.8: Dano elementar por nucleação da microtrinca devido ao acúmulo de discordâncias.

Outros mecanismos de dano em metais são descolamentos intergranulares e separação entre inclusões da matriz. Todos estes mecanismos criam micro deformações plásticas.

- Nos polímeros, o dano ocorre por rompimento da ligação que existe entre a longa cadeia molecular;
- Nos materiais compostos, o dano é o desprendimento entre as fibras e a matriz polimérica;
- Nas cerâmicas, ocorre principalmente micro separação entre as inclusões e a matriz;
- No concreto, o mecanismo de dano é também uma separação (fragmentação) entre agregados e o cimento com uma complexa influência da água;

- Na madeira, o ponto fraco onde o dano ocorre é na ligação das células celulósicas.

Em todos os casos a elasticidade é influenciada diretamente pelo dano, desde que o número das ligações atômicas responsáveis pela elasticidade diminua com o dano. Este acoplamento, que ocorre no nível do estado do material, definido pela deformação elástica e o dano, é chamado de "estado de acoplamento".

2.2.3 Representação Mecânica do Dano

Na mesoescala, o número de ligações quebradas ou microcavidades do modelo pode ser aproximado em qualquer plano pela área das interseções de todas as falhas com esse plano.

A fim de se manipular uma quantidade de dimensão menor, essa área é dimensionada pelo tamanho de um elemento representativo do volume. Esse tamanho é de importância primordial na definição de uma variável contínua na percepção da mecânica do contínuo.

Um elemento de volume representativo possui dimensões suficientemente grandes para que se possa admitir homogeneidade para a distribuição dos defeitos nele contidos, mas ao mesmo tempo suficientemente pequenas para que se evitem gradientes elevados de grandezas locais de interesse, como a deformação. Dessa forma, pode-se admitir continuidade para as funções representativas dos fenômenos que ocorrem no elemento e as propriedades nele medidas são valores médios que podem ser associados a um ponto material.

Seja considerado um corpo danificado e um elemento representativo do volume (**RVE**) em um ponto M orientado por um plano definido por sua normal \vec{n} e por sua coordenada \vec{x} ao longo da direção \vec{n} , veja figura 2.9

- Seja δS a área da interseção do plano com o **RVE**;
- Seja δS_{Dx} a área formada pela união das áreas de todas as micro trincas ou micro cavidades que se encontram em δS .
- O valor do dano $D(M, \vec{n}, \vec{x})$ unido ao ponto M na direção \vec{n} e na coordenada \vec{x} é mostrado na equação 2.15 :

$$D(M, \vec{n}, \vec{x}) = \frac{\delta S_{Dx}}{\delta S} \quad (2.15)$$

Isto segue da definição que o valor da variável escalar D , que depende de (M, \vec{n}) , é limitado por $0 \leq D(M, \vec{n}) \leq 1$. onde:

$D = 0 \rightarrow$ Volume representativo (**RVE**) não danificado;

$D = 1 \rightarrow$ Volume representativo (**RVE**) totalmente danificado, ruptura do material em duas partes.

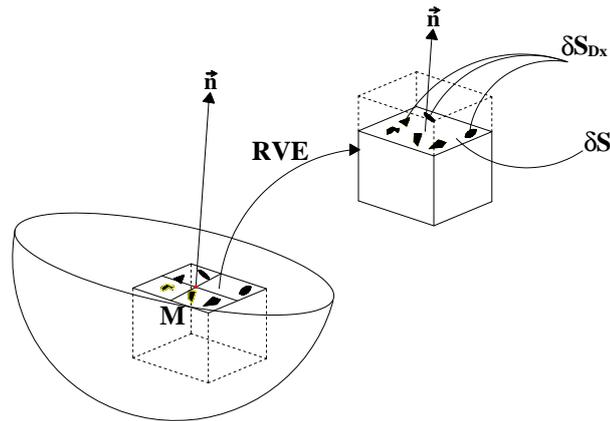


Figura 2.9: Definição de dano.

Observação:

- No caso particular de dano isotrópico, $D(M, \vec{n})$ não depende de \vec{n} , resultando $D(M)$.
- De fato, a falha ocorre para $D < 1$ através de um processo de instabilidade.

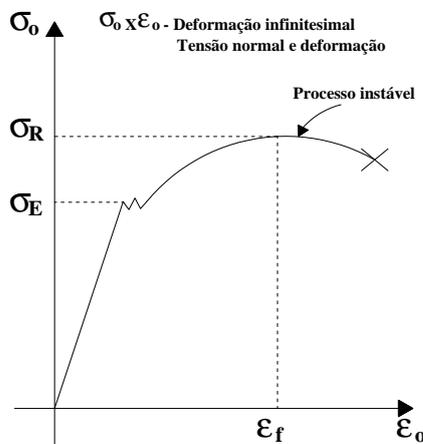


Figura 2.10: Processo de instabilidade.

2.2.4 Conceito da Tensão Efetiva

Se o **RVE** for carregado por uma força $F = \vec{n}F$, a tensão uniaxial usual é:

$$\sigma = \frac{F}{S} \tag{2.16}$$

Se todos os defeitos estiverem abertos, de tal maneira que nenhuma micro força esteja agindo nas superfícies das micro trincas ou das micro cavidades representadas por S_D ,

então, a tensão real atuante é dada pela tensão efetiva $\tilde{\sigma}$, i.e., a tensão obtida considerando apenas a superfície $\{S - S_D\}$ que resiste efetivamente a carga, é definida por:

$$\tilde{\sigma} = \frac{F}{S - S_D} \quad (2.17)$$

Introduzindo a variável de dano, dada por 2.18:

$$D = \frac{S_D}{S} \quad (2.18)$$

Conclui-se que a tensão efetiva fica sendo apresentada como sendo:

$$\tilde{\sigma} = \frac{F}{S \left\{1 - \frac{S_D}{S}\right\}} \quad \therefore \tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{\{1 - D\}} \quad (2.19)$$

Nota: Na compressão, alguns defeitos podem se fechar resultando numa mudança do dano efetivo. Todavia, o efeito do fechamento de micro trincas não será considerado neste trabalho.

2.2.5 Princípio da Deformação Equivalente (J. Lemaitre, 1971)

Um princípio postulado na mesoescala é usado com o intuito de se evitar análises micromecânicas para cada tipo de defeito e para cada tipo de mecanismo de dano. Assim, Lemaitre propôs em 1971, o seguinte:

"Qualquer equação constitutiva de deformação para um material danificado pode ser obtido da mesma forma para um material virgem, exceto que a tensão usual é substituída pela tensão efetiva."

No nível da mesoescala, esse princípio implica que a equação constitutiva para a deformação de um elemento de micro volume, não é modificado por sua vizinhança contendo uma microtrinca.

Resumo:

<i>Estado Material</i>	<i>Princípio da deformação equivalente</i>		<i>Acoplamento entre deformação elástica e dano</i>	
Não danificado	$D = 0$	$\varepsilon = \mathcal{F}(\sigma, D)$	$D = 0$	$\varepsilon^e = \frac{\sigma}{E}$
Danificado	$0 < D < 1$	$\varepsilon = \mathcal{F}(\tilde{\sigma}, D)$ $\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{\{1-D\}}$	$0 < D < 1$	$\varepsilon^e = \frac{\tilde{\sigma}}{\tilde{E}} = \frac{\sigma}{E\{1-D\}}$ $\varepsilon^e = \frac{\sigma}{\tilde{E}}$

Tabela 2.1: Resumo do princípio da Deformação Equivalente

E = Módulo de elástico - material não danificado

$\tilde{E} = E \{1 - D\}$ = Módulo elástico para material danificado

A variação do módulo elástico para dano dútil progressivo pode ser ilustrada pelas figuras 2.11 a e 2.11 b, a seguir.

2.2.6 Dano Material

Quando o dano ocorre, de acordo com o princípio da deformação equivalente, a função de escoamento e a equação constitutiva Tensão-Deformação devem ser escritas como:

$$f = f(\sigma, R, \mathbf{X}, D) = \left| \frac{\sigma}{\{1 - D\}} - X \right| - \{R + \sigma_y\} \leq 0 \quad (2.20)$$

$$\varepsilon^e = \frac{\sigma}{E \{1 - D\}} \therefore \sigma = E \{1 - D\} \varepsilon^e \quad (2.21)$$

f : função de escoamento;

ε : deformação total;

ε^e e ε^p : deformação elástica e plástica respectivamente;

R : variável escalar interna relacionada com encruamento isotrópico;

\mathbf{X} : variável interna relacionada com o encruamento cinemático;

D : variável escalar interna relacionada com o dano isotrópico;

σ_y : variável escalar interna relacionada com a tensão de escoamento do material.

Critério de Ruptura

A ruptura na mesoescala é a iniciação de uma trinca que ocupa toda a superfície do **RVE**, i.e., $D = 1$. Em muitos casos isto é causado por um processo de instabilidade que induz repentinamente na separação atômica da área restante resistente. Isto corresponde ao valor crítico do dano D_c , que depende do material e das condições de carregamentos.

O final da separação atômica é caracterizado pelo valor crítico da tensão efetiva agindo sobre a área resistente, denominada por σ_∞ , ver figura 2.11 c).

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{\{1 - D_c\}} = \sigma_\infty \quad (2.22)$$

Praticamente σ_∞ pode ser aproximado pela tensão limite de resistência σ_u , que é fácil de

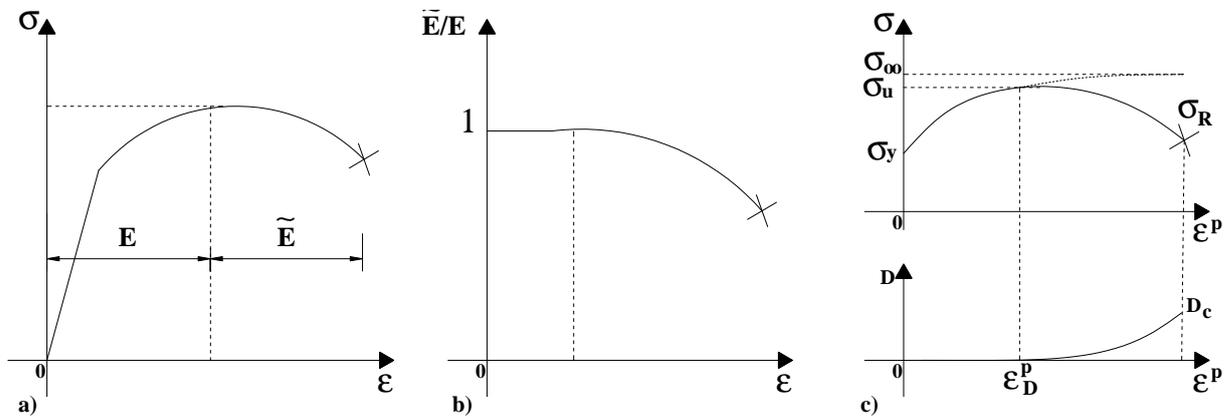


Figura 2.11: a e b) Relação entre módulos elásticos. c) Esquema da evolução do critério de escoamento com dano.

identificar. Já o dano crítico pode ser aproximado por:

$$D_c \simeq 1 - \left\{ \frac{\sigma}{\sigma_u} \right\} \quad (2.23)$$

No caso de metais dúteis, o valor de $D_c \in [0.2, 0.5]$, e, esta relação, aplicada para um teste de tração pura, monotônico, é tomado como referência para a definição do dano crítico D_{c1} , considerado como uma característica do material:

$$D_{c1} = 1 - \left\{ \frac{\sigma_R}{\sigma_u} \right\} \quad (2.24)$$

sendo σ_R a tensão nominal de fratura do material.

Dano Crítico

Antes que a micro trinca inicie, criando um dano representado por D , a trinca deve ser nucleada por:

- Acúmulo de micro tensões acompanhadas de incompatibilidades de micro deformações;
- Acúmulo de discordâncias em metais;
- Acúmulo de micro descolamentos em solos.

Isto corresponde, no caso de tração pura, a um certo valor de deformação plástica ε^p crítico, abaixo da qual o dano por micro trinca não ocorre:

$$\varepsilon^p < \varepsilon_D^p \rightarrow D = 0. \quad (2.25)$$

2.3 Teoria de Dano Elasto-Plástico de Lemaitre

2.3.1 Formulação Termodinâmica e Potenciais de Estado

Dentro da hipótese de pequenas deformações e pequenos deslocamentos, as variáveis de estado (mesoescala) são divididas em:

1. Variáveis observáveis:
 - ε → Deformação total;
 - T → Temperatura

2. Variáveis internas:

- ε^e → Parcela elástica da deformação;
- ε^p → Parcela plástica da deformação;
- D → Dano interno;
- r → Deformação plástica acumulada associada ao encruamento isotrópico;
- \varkappa → Tensor deviatórico da deformação associado ao encruamento cinemático.

A teoria considera um potencial de energia livre que é função de um conjunto $\{\varepsilon^e, R, \mathbf{X}, D\}$ de variáveis de estado:

$$\psi = \psi(\varepsilon^e, R, \mathbf{X}, D) \quad (2.26)$$

sendo:

ε^e : tensor deformação elástica;

R : variável escalar interna relacionada com encruamento isotrópico;

\mathbf{X} : tensor de segunda ordem que representa a variável interna relacionada com o encruamento cinemático;

D : variável escalar interna relacionada com o dano isotrópico.

O escopo deste trabalho é limitado apenas ao processo termodinâmico para deformações isotérmicas, e se vale do princípio que a deformação total pode ser usada como na teoria da plasticidade associativa, escrevendo a deformação total como na equação abaixo:

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p \quad (2.27)$$

Da desigualdade de Clausis-Duhem, para processos isotérmicos, obtém-se :

$$-\rho\dot{\psi} + \sigma \cdot \dot{\varepsilon} \geq 0 \quad (2.28)$$

Sob a hipótese de desacoplamento entre o dano elástico e o encruamento isotrópico, a energia livre assume ser dada pela soma dos potenciais de dano elástico e de encruamento plástico, como mostrado abaixo:

$$\psi = \psi^{ed}(\varepsilon^e, D) + \psi^p(\mathbf{X}, R) \quad (2.29)$$

2.3.2 Potencial de Dano Elástico

O potencial de dano elástico é postulado como:

$$\psi^{ed}(\varepsilon^e, D) = \frac{1}{2} \{1 - D\} \mathbb{D}^e : \varepsilon^e : \varepsilon^e \quad (2.30)$$

onde \mathbb{D}^e é o tensor elástico isotrópico padrão, e a lei de elasticidade é descrita como:

$$\sigma = \bar{\rho} \frac{\partial \psi^{ed}}{\partial \sigma} = \{1 - D\} \mathbb{D}^e : \varepsilon^e \quad (2.31)$$

A força termodinâmica conjugada com a variável de dano interno é dada por:

$$Y = \bar{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial D} = -\frac{1}{2} \varepsilon^e : \mathbb{D}^e : \varepsilon^e = \frac{we}{\{1 - D\}} \quad (2.32)$$

onde we é a densidade de energia de deformação elástica e a variável Y chamada de taxa de densidade de energia de deformação elástica liberada, é a principal variável que governa o fenômeno de dano. Assim é de interesse expressar uma tensão equivalente, como por exemplo a tensão de von Mises.

Decompondo-se a energia de deformação elástica em parte deviatórica e parte hidrostática, denotadas respectivamente por σ^D e σ^H , pode-se escrever we como sendo:

$$we = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\{1 + \nu\}}{E} \frac{\sigma^D \cdot \sigma^D}{\{1 - D\}} + \frac{3\{1 - 2\nu\}}{E} \frac{\sigma^{H^2}}{\{1 - D\}} \right\} \quad (2.33)$$

$$\sigma^H = \frac{1}{3} tr(\sigma) \quad (2.34)$$

$$\sigma^D = \sigma - \sigma^H I \quad (2.35)$$

Da definição de tensão de von Mises σ_{eq} , onde:

$$\sigma_{eq} = \left\{ \frac{3}{2} \sigma^D \cdot \sigma^D \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (2.36)$$

pode-se expressar Y por:

$$Y = \frac{1}{2} \frac{\sigma_{eq}^2}{E \{1 - D\}^2} \left\{ \frac{2}{3} \{1 + \nu\} + 3 \{1 - 2\nu\} \left\{ \frac{\sigma^H}{\sigma_{eq}} \right\}^2 \right\}$$

definindo Rv :

$$Rv = \left\{ \frac{2}{3} \{1 + \nu\} + 3 \{1 - 2\nu\} \left\{ \frac{\sigma^H}{\sigma_{eq}} \right\}^2 \right\} \quad (2.37)$$

tem-se:

$$Y = \frac{1}{2} \frac{\tilde{\sigma}_{eq}^2}{E} Rv \quad (2.38)$$

com

$$\tilde{\sigma}_{eq} = \frac{\sigma_{eq}}{\{1 - D\}} \quad (2.39)$$

Observação:

1. Um importante parâmetro na falha de um material, observado na fratura, é o fator de triaxilidade $\left\{ \frac{\sigma^H}{\sigma_{eq}} \right\}$, pois enquanto a ductilidade do material diminui o fator de triaxilidade aumenta.
2. A tensão de dano equivalente $\tilde{\sigma}_{eq}$ difere da tensão equivalente de von Mises devido ao fator de triaxilidade. Isto ocorre em acordo com o processo físico descrito: A plasticidade se deve principalmente aos cisalhamentos/distorções que não dependem da pressão hidrostática, Lemaitre & Caboche (1994). Já o dano, é a separação influenciada pela pressão hidrostática ou o fator de triaxilidade. Este fenômeno é governado e influenciado pelo coeficiente de poisson.

2.3.3 Potencial de encruamento plástico

O potencial de encruamento plástico é postulado como:

$$\rho \psi^p(r, \varkappa) = \rho \psi^I(r) + \frac{a}{2} \varkappa : \varkappa \quad (2.40)$$

$\psi^I(r)$: está relacionado com encruamento isotrópico;

a : constante material obtida a partir do módulo de encruamento cinemático linear.

A força termodinâmica associada com o encruamento isotrópico é definida, como:

$$R \equiv \rho \frac{\partial \psi^p(r, \varkappa)}{\partial r} = \rho \frac{\partial \psi^I(r)}{\partial r} = R(r) \quad (2.41)$$

A força termodinâmica associada com o encruamento cinemático é definida, como :

$$X \equiv \rho \frac{\partial \psi}{\partial \varkappa} = a \varkappa \quad (2.42)$$

Note que $tr(\varkappa) = 0$, como consequência, $tr(X) = 0$.

2.3.4 Desigualdade de Clausius-Duhem obtida no tempo

Para que esta desigualdade seja satisfeita para todo processo físico admissível tem-se:

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon^e} \cdot \dot{\varepsilon}^e + \frac{\partial \psi}{\partial r} \dot{r} + \frac{\partial \psi}{\partial \varkappa} \cdot \dot{\varkappa} + \frac{\partial \psi}{\partial D} \dot{D} \quad (2.43)$$

assim,

$$\Delta = \sigma \cdot \dot{\varepsilon}^p - \rho \frac{\partial \psi}{\partial r} \dot{r} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \varkappa} \cdot \dot{\varkappa} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial D} \dot{D} \geq 0 \quad (2.44)$$

sendo Δ o potencial de dissipação interna.

Neste ponto, pode-se definir as seguintes variáveis associadas:

$$R = \rho \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad X^D = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \varkappa} \quad e \quad \bar{Y} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial D}$$

Como resultado a expressão da dissipação interna Δ fica sendo:

$$\Delta = \sigma \cdot \dot{\varepsilon}^p - R\dot{r} - X^D \cdot \dot{\varkappa} - \bar{Y} \dot{D} \geq 0 \quad (2.45)$$

Neste ponto, considera-se uma expressão particular para o potencial de densidade de energia livre, o qual é dado por:

$$\rho \psi = \frac{1}{2} \mathbb{D} \dot{\varepsilon}^e \cdot \dot{\varepsilon}^e \{1 - D\} + R_\infty \left\{ r + \frac{1}{b} e^{-[br]} \right\} + \frac{X_\infty \Upsilon}{3} \varkappa \cdot \varkappa \geq 0 \quad (2.46)$$

sendo:

$$\mathbb{D} = 2\mu \mathbb{I} + \lambda I \otimes I \quad (2.47)$$

μ, λ são constantes de Lamé, com:

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_{ijrs} &= \frac{\delta_{ir}\delta_{js} + \delta_{is}\delta_{jr}}{2} \\ (I \otimes I)_{ijrs} &= \delta_{ij}\delta_{rs} \\ 2\mu &= \frac{E}{1 + \nu} \\ \lambda &= \frac{\nu E}{\{1 + \nu\} \{1 - 2\nu\}} \end{aligned}$$

Aqui, \mathbb{I} e I , são denotados tensores identidades de 4ª e 2ª ordem respectivamente.

A lei de elasticidade acoplada com dano é dada por:

$$\begin{aligned} \varepsilon^e &= \frac{1 + \nu}{E} \frac{\sigma}{\{1 - D\}} - \frac{\nu \text{tr}(\sigma) I}{E \{1 - D\}} \\ \text{ou} \\ \sigma &= \rho \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon^e} = \{1 - D\} \mathbb{D} \varepsilon^e \end{aligned} \quad (2.48)$$

O encruamento escalar de deformação isotrópica é dado por:

$$R = \rho \frac{\partial \psi}{\partial r} = R_\infty \{1 - e^{-[b\varepsilon^p]}\} \quad (2.49)$$

R_∞ e b são parâmetros materiais que caracterizam o fenômeno do encruamento isotrópico.

O "back stress" é dado por:

$$X^D = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \varkappa} = \frac{2}{3} X_\infty \Upsilon \varkappa \quad (2.50)$$

X_∞ e Υ são parâmetros materiais que caracterizam o fenômeno não linear do encruamento cinemático.

A variável dual \bar{Y} associada com D , é dada por:

$$\bar{Y} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial D} = -\frac{1}{2} \mathbb{D} \dot{\varepsilon}^e \cdot \dot{\varepsilon}^e \quad (2.51)$$

Por conveniência, define-se : $Y = -\bar{Y}$.

Função de Escoamento

Para uma função de escoamento f o seguinte modelo de von Mises é adotado:

$$f(\sigma, R, \mathbf{X}, D) = \left\{ \frac{3}{2} \{\sigma^D - X\} : \{\sigma^D - X\} \right\}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\{1 - D\}} - \{R + \sigma_y\} \quad (2.52)$$

2.3.5 Potencial de Dissipação

Para a descrição da evolução das variáveis internas, é necessário a introdução do potencial de dissipação o qual é dado por:

$$F(\sigma, R, X^D, Y; \varepsilon^e, r, \varkappa, D) = F_p(\sigma, R, X^D; \varepsilon^e, r, \varkappa, D) + F_D(Y; \varepsilon^e, r, \varkappa, D) \quad (2.53)$$

sendo:

$$F_p(\sigma, R, X^D, Y; \varepsilon^e, r, \varkappa, D) = f(\sigma, R, X^D, D) = \tilde{\sigma}_{eq}^D - \{R + \sigma_y\} \quad (2.54)$$

$$F_D(\sigma, R, X^D, Y; \varepsilon^e, r, \varkappa, D) = \frac{\mathcal{H}(p - p_D)}{\{1 - D\} \{s_\infty + 1\}} \left\{ \frac{Y}{S_\infty} \right\}^{s_\infty + 1}. \quad (2.55)$$

S_∞, s_∞ -são parâmetros materiais de dano dútil. A aplicação do critério de dissipação normal nos fornece:

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\gamma} \frac{\partial F_p}{\partial \sigma} \quad (2.56)$$

$$\dot{r} = -\dot{\gamma} \frac{\partial F_p}{\partial R} \quad (2.57)$$

$$\dot{D} = \dot{\gamma} \frac{\partial F_D}{\partial Y} \quad (2.58)$$

2.3.6 Lei de Evolução do Dano

Para pequenos valores de deformação plástica acumulada, p , onde

$$\dot{p} = \left\{ \frac{2}{3} \dot{\varepsilon}^p \cdot \dot{\varepsilon}^p \right\}^{\frac{1}{2}} = \left\{ \frac{2}{3} \|\dot{\varepsilon}^p\| \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (2.59)$$

a degradação do módulo elástico é muito pequena e conseqüentemente de difícil obtenção em experimentos. Assim, admite-se que o crescimento do dano inicia num valor crítico,

denotado p_D . Este efeito pode ser incluído na lei de evolução do dano como:

$$\dot{D} = \frac{\dot{\gamma}}{\{1 - D\}} \left\{ \frac{Y}{S_\infty} \right\}^{s_\infty} \mathcal{H}(p - p_D) \quad (2.60)$$

onde \mathcal{H} é definida por:

$$\mathcal{H}(a) \equiv \begin{cases} 1 & \text{se } a \geq 0 \\ 0 & \text{se } a < 0 \end{cases} \quad (2.61)$$

e p pode ser determinado por:

$$\dot{p} = \frac{\dot{\gamma}}{\{1 - D\}} \quad (2.62)$$

2.4 Modelo de Encruamento Isotrópico com Dano

Neste ponto, o modelo será restringido à solução de problemas elastoplásticos com dano. A teoria de dano a ser considerada é a de ruptura dútil. O modelo elastoplástico considerará apenas o encruamento isotrópico, já que se está interessado somente na análise de carregamentos monotônicos. A resolução do problema será obtida numericamente usando o método de Newton para a solução do problema global e o método do Previsor Elástico com Corretor Plástico e dano para a solução dos problemas locais de elasto-plasticidade com dano.

2.4.1 Descrição do Algoritmo do Tipo Previsor Elástico com Corretor Plástico e Dano

O algoritmo geral de Previsor Elástico com Corretor Plástico e dano pode ser descrito pelo seguinte procedimento:

Previsor Elástico

O problema do Previsor Elástico pode ser formulado como: Dada a história de deformação $\varepsilon(t)$, $t \in [t_n, t_{n+1}]$, o problema consiste em encontrar $\varepsilon_{n+1}^{e \text{ trial}}$ e α_{n+1}^{trial} .

$\alpha_{n+1}^{trial} = \left\{ \varepsilon_{n+1}^{p \text{ trial}}, R_{n+1}^{trial}, D_{n+1}^{trial} \right\}$, tal que:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}^{e \text{ trial}} &= \dot{\varepsilon} \\ \dot{\alpha}^{trial} &= 0 \end{aligned} \quad (2.63)$$

sendo $\dot{\alpha}^{trial} = \left\{ \dot{\varepsilon}^{p \text{ trial}}, \dot{R}^{trial}, \dot{D}^{trial} \right\} = 0$.

As condições iniciais, associadas ao problema evolutivo, são dadas pelas condições das

variáveis de estado obtidas em t_n , i.e.,

$$\begin{aligned}\varepsilon^{e \text{ trial}}(t_n) &= \varepsilon_n^e \\ \boldsymbol{\alpha}^{\text{trial}}(t_n) &= \boldsymbol{\alpha}_n^{\text{trial}}\end{aligned}\quad (2.64)$$

Fazendo $\dot{\varepsilon}^{\text{trial}} = \dot{\varepsilon}$, tem-se:

$$\varepsilon_{n+1}^{e \text{ trial}} = \varepsilon_n^e + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \dot{\varepsilon} dt = \varepsilon_n^e + \{\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n\} = \varepsilon_n^e + \Delta\varepsilon. \quad (2.65)$$

O tensor deformação elástica ε^e pode ser decomposto em uma parte volumétrica, dada por:

$$\varepsilon_{v \ n+1}^{e \text{ trial}} = \text{tr}(\varepsilon_{n+1}^{e \text{ trial}}) \quad (2.66)$$

e em uma parte deviatórica, dada por:

$$\varepsilon_{n+1}^{e \ D \ \text{trial}} = \varepsilon_{n+1}^{e \ \text{trial}} - \frac{1}{3} \{\varepsilon_{v \ n+1}^{e \ \text{trial}}\} I. \quad (2.67)$$

O estado de tensão elástico teste, pode então ser determinado como:

$$\sigma_{n+1}^{D \ \text{trial}} = 2G \{1 - D_{n+1}^{\text{trial}}\} \varepsilon_{n+1}^{e \ D \ \text{trial}} \quad (2.68)$$

$$\sigma_{n+1}^{H \ \text{trial}} = \{1 - D_{n+1}^{\text{trial}}\} K \varepsilon_{v \ n+1}^{e \ \text{trial}} \quad (2.69)$$

sendo:

$$G = \frac{E}{2\{1 + \nu\}} \quad (2.70)$$

$$K = \frac{E}{3\{1 - 2\nu\}}. \quad (2.71)$$

K - representa o módulo volumétrico e G o módulo de cisalhamento. A solução do problema de valor inicial do Previsor Elástico é dada por:

$$\sigma_{n+1}^{\text{trial}} = \sigma_{n+1}^{D \ \text{trial}} + \sigma_{n+1}^{H \ \text{trial}} I \quad (2.72)$$

$$D_{n+1}^{\text{trial}} = D_n \quad (2.73)$$

$$\varepsilon_{n+1}^{p \ \text{trial}} = \varepsilon_n^p \quad (2.74)$$

$$R_{n+1}^{\text{trial}} = R_n \quad (2.75)$$

A solução do problema do Previsor Elástico no tempo t_{n+1} , denotado por $\varepsilon_{n+1}^{e \ \text{trial}}$ e $\boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{\text{trial}}$ define o chamado "Estado Elástico Teste".

Corretor Plástico com Dano

Neste caso o problema é formulado da seguinte forma:

Encontrar $\alpha = \{\varepsilon^p, R, D\}$ e ε^e que satisfazem as seguintes equações:

$$\dot{\varepsilon}^e + \dot{\varepsilon}^p = 0 \quad (2.76)$$

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\gamma} \frac{\partial F_p}{\partial \sigma} \quad (2.77)$$

$$\dot{R} = b \{R_\infty - R\} \dot{\gamma} \quad (2.78)$$

$$\dot{D} = \frac{Y}{S} \frac{\dot{\gamma}}{\{1 - D\}} \mathcal{H}(p - p_d) \quad (2.79)$$

com

$$\dot{\gamma} \geq 0, \quad f \leq 0 \quad \text{e} \quad \dot{\gamma} f = 0 \quad (2.80)$$

Para a determinação do multiplicador plástico $\dot{\gamma}$ é imposta a condição de consistência, que assegura, para $f = 0$, a condição de consistência: $\dot{\gamma} \dot{f} = 0$ deve ser satisfeita.

No problema do corretor plástico, as condições iniciais são:

$$\begin{aligned} \varepsilon^e(t_n) &= \varepsilon_{n+1}^{e \text{ trial}} \\ \alpha(t_n) &= \alpha_{n+1}^{\text{trial}} \end{aligned} \quad (2.81)$$

A solução obtida no tempo t_{n+1} , denotada por $\{\sigma_{n+1}, \varepsilon_{n+1}^e, \varepsilon_{n+1}^p, R_{n+1}, D_{n+1}\}$ é a solução final do atual problema de valor inicial elasto-plástico com dano em t_{n+1} .

2.4.2 Estados Planos de Deformação e Axissimétrico

Resumo:

1. Decomposição aditiva elasto-plástica

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p \quad (2.82)$$

2. Lei elástica com dano acoplado

$$\sigma = \{1 - D\} \mathbb{D} \varepsilon^e \quad (2.83)$$

3. Função de escoamento

$$f = \tilde{\sigma}_{eq}^D - \{R + \sigma_y\} \quad (2.84)$$

sendo:

$$\tilde{\sigma}_{eq}^D = \left\{ \frac{3}{2} \tilde{\sigma}^D \cdot \tilde{\sigma}^D \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (2.85)$$

$$\tilde{\sigma}^D = \frac{1}{\{1 - D\}} \{\sigma - \sigma^H I\} \quad (2.86)$$

$$\sigma^H = \frac{1}{3} tr(\sigma) \quad (2.87)$$

4. Fluxo plástico e equações de encruamento e evolução do dano

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \frac{3}{2} \frac{\dot{\gamma}}{\{1 - D\}} \frac{\sigma_{ij}^D}{\sigma_{eq}^D} \quad (2.88)$$

$$\dot{R} = b \{R_\infty - R\} \dot{\gamma} \quad (2.89)$$

$$\dot{D} = \frac{Y}{S} \dot{p} \mathcal{H}(p - p_d) \quad (2.90)$$

sendo,

$$\dot{p} = \frac{\dot{\gamma}}{\{1 - D\}} \quad (2.91)$$

$$Y = \frac{\{\tilde{\sigma}_{eq}^D\}^2}{2E} \left\{ \frac{2}{3} \{1 + \nu\} + 3 \{1 - 2\nu\} \left\{ \frac{\sigma^H}{\sigma_{eq}^D} \right\}^2 \right\} \quad (2.92)$$

5. O critério de carga e descarga

$$\dot{\gamma} \geq 0, \quad f \leq 0 \quad \text{e} \quad \dot{\gamma} f = 0 \quad (2.93)$$

6. Condição consistente para $f = 0$

$$\dot{\gamma} \dot{f} = 0 \quad (2.94)$$

2.4.3 Esquema do Corretor Plástico com Dano

O esquema de integração usado é o método de Euler implícito, "*Backward Euler*". Neste caso a deformação elástica advinda da plasticidade associativa $\varepsilon_{n+1}^e = \varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+1}^p$, pode ser escrita como:

$$\varepsilon_{n+1}^e = \varepsilon_{n+1}^{e \text{ trial}} - \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\Delta\gamma}{\{1 - D_{n+1}\}} \frac{\sigma_{n+1}^D}{\|\sigma_{n+1}^D\|}. \quad (2.95)$$

E, calculando a decomposição de ε_{n+1}^e e $\varepsilon_{n+1}^{e \text{ trial}}$ dentro da parte volumétrica e deviatórica, e usando operador traço, têm-se que

$$\varepsilon_{v \ n+1}^e = \varepsilon_{v \ n+1}^{e \text{ trial}} \quad (2.96)$$

$$\varepsilon_{n+1}^{e \ D} = \varepsilon_{n+1}^{e \ D \ \text{trial}} - \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\Delta\gamma}{\{1 - D_{n+1}\}} \frac{\sigma_{n+1}^D}{\|\sigma_{n+1}^D\|}. \quad (2.97)$$

Já as tensões hidrostática e deviatórica ficam definidas por:

$$\bar{\sigma}_{n+1}^{H \ \text{trial}} = K \varepsilon_{v \ n+1}^{e \ \text{trial}} \quad (2.98)$$

$$\bar{\sigma}_{n+1}^{D \text{ trial}} = 2G\varepsilon_{n+1}^{e D \text{ trial}} \quad (2.99)$$

e pode-se escrever então, as equações de evolução destas tensões para $n + 1$.

$$\sigma_{n+1}^H = \{1 - D_{n+1}\} \bar{\sigma}_{n+1}^{H \text{ trial}} \quad (2.100)$$

$$\sigma_{n+1}^D = \left\{ 1 - D_{n+1} - \frac{2G}{\|\bar{\sigma}_{n+1}^{D \text{ trial}}\|} \sqrt{\frac{3}{2}} \Delta\gamma \right\} \bar{\sigma}_{n+1}^{D \text{ trial}} \quad (2.101)$$

Com os resultado acima pode-se integrar o encruamento isotrópico e a equação de evolução do dano, que ficam da seguinte forma:

$$R_{n+1} = \frac{R_n + bR_\infty \Delta\gamma}{\{1 + b\Delta\gamma\}}. \quad (2.102)$$

$$D_{n+1} \simeq D_n + \left\{ \frac{Y_{n+1}}{S_\infty} \right\}^{s_\infty} \frac{\Delta\gamma}{\{1 - D_{n+1}\}} \mathcal{H}(p_{n+1} - p_d). \quad (2.103)$$

sendo:

$$p_{n+1} = p_n + \frac{\Delta\gamma}{\{1 - D_{n+1}\}} \quad (2.104)$$

$$Y_{n+1} = \frac{3}{4E} \|\bar{\sigma}_{n+1}^{D \text{ trial}}\|^2 \left\{ \frac{2}{3} \{1 + \nu\} \varphi^2 + 2(1 - 2\nu) \frac{\{\bar{\sigma}_{n+1}^{H \text{ trial}}\}^2}{\|\bar{\sigma}_{n+1}^{D \text{ trial}}\|^2} \right\}. \quad (2.105)$$

e definindo:

$$\varphi(\Delta\gamma, D_{n+1}) = \frac{|1 - D_{n+1} - \beta\Delta\gamma|}{\{1 - D_{n+1}\}} \quad (2.106)$$

$$\beta = \frac{2G}{\|\bar{\sigma}_{n+1}^{D \text{ trial}}\|} \sqrt{\frac{3}{2}} \quad (2.107)$$

Finalmente, do critério de escoamento, obtém-se:

$$f_{n+1} = \{\tilde{\sigma}_{n+1}^D\}_{eq} - \{\sigma_y + R_{n+1}\} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\|\sigma_{n+1}^D\|}{\{1 - D_{n+1}\}} - \{\sigma_y + R_{n+1}\} = 0. \quad (2.108)$$

Que pode ser escrito como:

$$\sqrt{\frac{3}{2}} \varphi \|\bar{\sigma}_{n+1}^{D \text{ trial}}\| - \left\{ \sigma_y + \frac{R_n + bR_\infty \Delta\gamma}{\{1 + b\Delta\gamma\}} \right\} = 0. \quad (2.109)$$

uma vez que,

$$\sigma_{n+1}^D = \{1 - D_{n+1} - \beta\Delta\gamma\} \bar{\sigma}_{n+1}^{D \text{ trial}} \quad (2.110)$$

Das equações 2.109, 2.103, 2.105 e 2.106 pode-se formular o mapeamento de retorno elasto-plástico com dano como sendo:

Encontrar $\{\Delta\gamma, D_{n+1}\}$ que

$$\mathcal{F}_1 = \sqrt[2]{\frac{3}{2}} \varphi \|\bar{\sigma}_{n+1}^{D \text{ trial}}\| - \left\{ \sigma_y + \frac{R_n + bR_\infty \Delta\gamma}{\{1 + b\Delta\gamma\}} \right\} = 0 \quad (2.111)$$

e

$$\mathcal{F}_2 = D_{n+1} - D_n - \left\{ \frac{Y_{n+1}}{S_\infty} \right\}^{s_\infty} \frac{\Delta\gamma}{\{1 - D_{n+1}\}} \mathcal{H}(p_{n+1} - p_d) = 0 \quad (2.112)$$

Notar que, uma vez que $\{\Delta\gamma, D_{n+1}\}$ são calculados, determina-se:

- $\varepsilon_{n+1}^{e \text{ trial}} = \varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n^p$;
- $\varepsilon_{v \ n+1}^{e \text{ trial}} = \text{tr}(\varepsilon_{n+1}^{e \text{ trial}})$; $\varepsilon_{n+1}^{e \ D \ \text{trial}} = \varepsilon_{n+1}^{e \ \text{trial}} - \frac{1}{3} \{\varepsilon_{v \ n+1}^{e \ \text{trial}}\} I$;
- $\sigma_{n+1}^H = \{1 - D_{n+1}\} K \varepsilon_{v \ n+1}^{e \ \text{trial}}$;
- $\bar{\sigma}_{n+1}^{D \ \text{trial}} = 2G \varepsilon_{n+1}^{e \ D \ \text{trial}}$;
- $\sigma_{n+1}^D = \{1 - D_{n+1} - \beta \Delta\gamma\} \bar{\sigma}_{n+1}^{D \ \text{trial}}$; $\beta = \frac{2G}{\|\bar{\sigma}_{n+1}^{D \ \text{trial}}\|} \sqrt[2]{\frac{3}{2}}$;
- $\sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^D + \{\sigma_{n+1}^H\} I$;
- $R_{n+1} = \frac{\{R_n + bR_\infty \Delta\gamma\}}{\{1 + b\Delta\gamma\}}$;
- $p_{n+1} = p_n + \frac{\Delta\gamma}{\{1 - D_{n+1}\}}$;
- $\varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n^p + \sqrt[2]{\frac{3}{2}} \frac{\Delta\gamma}{\{1 - D_{n+1}\}} \frac{\sigma_{n+1}^D}{\|\sigma_{n+1}^D\|}$.

Determinação do Módulo Tangente Consistente

O módulo tangente consistente é dado por:

$$\mathbb{D}_{n+1}^{ep} (ijkl) = \frac{\partial \sigma_{n+1} (ij)}{\partial \varepsilon_{n+1} (kl)} \quad (2.113)$$

e pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} \mathbb{D}_{n+1}^{ep} (ijkl) &= 2G \{1 - D_{n+1} - \beta \Delta\gamma\} \left[\mathbb{I} - \frac{1}{3} (I \otimes I) \right]_{(ijkl)} + 2G \beta \Delta\gamma \mathbb{N}_{(ij)} \mathbb{N}_{(rs)} \\ &\quad - 2G \varepsilon_{n+1}^{e \ D \ \text{trial}} (ij) \left\{ \frac{\partial D_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}^{e \ D \ \text{trial}} (kl)} - \frac{1}{3} \text{tr} \left(\frac{\partial D_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}^{e \ D \ \text{trial}}} \right) \delta_{(kl)} \right\} \\ &\quad - 2G \sqrt[2]{\frac{3}{2}} \mathbb{N}_{(ij)} \left\{ \frac{\partial \Delta\gamma}{\partial \varepsilon_{n+1}^{e \ D \ \text{trial}} (kl)} - \frac{1}{3} \text{tr} \left(\frac{\partial \Delta\gamma}{\partial \varepsilon_{n+1}^{e \ D \ \text{trial}}} \right) \delta_{(kl)} \right\} \\ &\quad + \left\{ \{1 - D_{n+1}\} K - \frac{\partial D_{n+1}}{\partial \varepsilon_{v \ n+1}^{e \ \text{trial}}} K \varepsilon_{v \ n+1}^{e \ \text{trial}} \right\} \delta_{(ij)} \delta_{(kl)} \end{aligned} \quad (2.114)$$

sendo:

$$N_{n+1} = \frac{\varepsilon_{n+1}^e D^{trial}}{\|\varepsilon_{n+1}^e D^{trial}\|} \quad (2.115)$$

Neste ponto, pode-se definir, para análises de estados planos de deformação e axisimétrico, um vetor de deformação $\vec{\varepsilon} = \{\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \gamma_{xy}, \varepsilon_{zz}\}$, onde $\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy}$. Também, pode-se definir $\vec{\sigma} = \{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}, \sigma_{zz}\}$.

2.4.4 Estado Plano de Tensão

Usando as mesmas condições anunciadas no resumo do modelo elasto-plástico para estados planos de deformação e axissimétricos, as equações para estado plano de tensão são complementadas com as seguintes restrições:

$$\sigma_{(13)}(\varepsilon^e) = 0, \quad \sigma_{(23)}(\varepsilon^e) = 0, \quad \text{e} \quad \sigma_{(33)}(\varepsilon^e) = 0. \quad (2.116)$$

Para se obter a tensão projetada de von Mises, necessita-se derivar explicitamente a relação das componentes de deformação elástica e plástica fora do plano com as componentes no plano. Para o comportamento elástico linear isotrópico tem-se:

$$\begin{aligned} \sigma_{(13)}(\varepsilon^e) = 0 &\implies \varepsilon_{(13)}^e = 0 \\ \sigma_{(23)}(\varepsilon^e) = 0 &\implies \varepsilon_{(23)}^e = 0 \\ \sigma_{(33)}(\varepsilon^e) = 0 &\implies \varepsilon_{(33)}^e = -\frac{\nu}{\{1-\nu\}} \{\varepsilon_{(11)}^e + \varepsilon_{(22)}^e\} \end{aligned} \quad (2.117)$$

$$\dot{\varepsilon}_{(ij)}^p = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\dot{\gamma}}{\{1-D\}} \frac{\sigma_{(ij)}^D}{\|\sigma^D\|} \quad (2.118)$$

$\varepsilon_{(ij)}^p(0) = 0$, como condição inicial, e $\sigma^D = \sigma - \sigma^H \quad I$, i.e.,

$$\sigma^D = \begin{bmatrix} \sigma_{(11)} - \sigma^H & \sigma_{(12)} & 0 \\ \sigma_{(12)} & \sigma_{(22)} - \sigma^H & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma^H \end{bmatrix} \quad (2.119)$$

com $\sigma^H = \frac{1}{3} \{\sigma_{(11)} + \sigma_{(22)}\}$, consegue-se:

$$\begin{aligned} \varepsilon_n^p &= \int_0^{t_n} \dot{\varepsilon}^p dt \\ &= \int_0^{t_n} \begin{bmatrix} \sigma_{(11)} - \sigma^H & \sigma_{(12)} & 0 \\ \sigma_{(12)} & \sigma_{(22)} - \sigma^H & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma^H \end{bmatrix} \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\dot{\gamma}}{\{1-D\}} \frac{1}{\|\sigma^D\|} dt \end{aligned} \quad (2.120)$$

o que permite concluir que :

$$\varepsilon_{(13)}^p = 0 \quad \text{e} \quad \varepsilon_{(23)}^p = 0. \quad (2.121)$$

Como $\varepsilon^p(0) = 0$ que implica $tr(\varepsilon^p(0)) = 0$, após integração de 0 a t_n

$$tr(\varepsilon_n^p) = 0$$

i.e.

$$\varepsilon_{n(33)}^p = - \left\{ \varepsilon_{n(11)}^p + \varepsilon_{n(22)}^p \right\}. \quad (2.122)$$

As relações acima definem completamente as componentes de deformação fora do plano como uma função das componentes no plano. Assim, no estado plano de tensão, a história de deformação das componentes fora do plano são automaticamente prescritas como:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{(13)}(t) &= \varepsilon_{(13)}^e(t) + \varepsilon_{(13)}^p(t) = 0 \\ \varepsilon_{(23)}(t) &= \varepsilon_{(23)}^e(t) + \varepsilon_{(23)}^p(t) = 0 \end{aligned} \quad (2.123)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{(33)}(t) &= \varepsilon_{(33)}^e(t) + \varepsilon_{(33)}^p(t) \\ \varepsilon_{(33)}(t) &= - \left\{ \varepsilon_{(11)}^p + \varepsilon_{(22)}^p \right\} - \frac{\nu}{\{1 - \nu\}} \left\{ \varepsilon_{(11)}^e + \varepsilon_{(22)}^e \right\}. \end{aligned} \quad (2.124)$$

A matriz constitutiva \mathbb{D} para o Estado Plano de Tensão (EPT) é dada pela equação 2.14.

A função de escoamento pode ser escrita como:

$$f = \tilde{\sigma}_{eq}^D - \{1 - D_{n+1}\} = \left\{ \frac{3}{2} \tilde{\sigma}^D \cdot \tilde{\sigma}^D \right\}^{\frac{1}{2}} - \{R + \sigma_y\} \quad (2.125)$$

Porém, $\tilde{\sigma}^D = \tilde{\sigma} - \tilde{\sigma}^H I$ e $\tilde{\sigma}^H = \frac{1}{3} tr(\tilde{\sigma})$, assim têm-se:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}^D \cdot \tilde{\sigma}^D &= \{ \tilde{\sigma} - \tilde{\sigma}^H I \} \cdot \{ \tilde{\sigma} - \tilde{\sigma}^H I \} \\ \tilde{\sigma}^D \cdot \tilde{\sigma}^D &= \tilde{\sigma} \cdot \tilde{\sigma} - \frac{1}{3} tr(\tilde{\sigma})^2 \end{aligned} \quad (2.126)$$

Uma conveniente e compacta representação das equações do plano de tensão projetado de von Mises pode ser obtido pelas seguintes definições:

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}^T &= \{ \sigma_{(11)}, \sigma_{(22)}, \sigma_{(12)} \} \\ \vec{\varepsilon}^T &= \{ \varepsilon_{(11)}, \varepsilon_{(22)}, 2\varepsilon_{(12)} \} \\ \vec{\varepsilon}^e{}^T &= \{ \varepsilon_{(11)}^e, \varepsilon_{(22)}^e, 2\varepsilon_{(12)}^e \} \\ \vec{\varepsilon}^p{}^T &= \{ \varepsilon_{(11)}^p, \varepsilon_{(22)}^p, 2\varepsilon_{(12)}^p \} \end{aligned} \quad (2.127)$$

Notar que:

$$\begin{aligned}\sigma^D \cdot \sigma^D &= \left\{ \frac{2}{3} (\sigma_{(11)}^2 + \sigma_{(22)}^2 - \sigma_{(11)}\sigma_{(22)}) + 2\sigma_{(12)}^2 \right\} \\ \sigma^D \cdot \sigma^D &= [\mathbb{P}] \vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma}\end{aligned}\quad (2.128)$$

sendo:

$$[\mathbb{P}] = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} . \quad (2.129)$$

Com a notação matricial acima, o resumo de equações elasto-plástica para o estado plano de tensões, pode ser reformulado.

Resumo:

1. Decomposição aditiva elasto-plástica

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p$$

2. Lei elástica com dano acoplado

$$\vec{\sigma} = \{1 - D\} [\mathbb{D}] \vec{\varepsilon}^e$$

3. Função de Escoamento

$$f = \tilde{\sigma}_{eq}^D - \{R + \sigma_y\}$$

$$f = \left\{ \frac{3}{2} \frac{1}{\{1 - D\}^2} [\mathbb{P}] \vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma} \right\}^{\frac{1}{2}} - \{R + \sigma_y\} \quad (2.130)$$

sendo:

$$\tilde{\sigma}_{eq}^D = \frac{1}{\{1 - D\}} \left\{ \frac{3}{2} [\mathbb{P}] \vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma} \right\}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \|\tilde{\sigma}^D\| \quad (2.131)$$

$$\|\tilde{\sigma}^D\| = \frac{1}{\{1 - D\}} \{[\mathbb{P}] \vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma}\}^{\frac{1}{2}} \quad (2.132)$$

$$\sigma^H = \frac{1}{3} tr(\sigma) \quad (2.133)$$

4. Fluxo Plástico

$$\dot{\vec{\varepsilon}}^p = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\dot{\gamma}}{\{1 - D\}} \frac{[\mathbb{P}] \vec{\sigma}}{\|\sigma^D\|} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\dot{\gamma}}{\{1 - D\}} \frac{[\mathbb{P}] \vec{\sigma}}{\sqrt{\langle [\mathbb{P}] \vec{\sigma}, \vec{\sigma} \rangle}} \quad (2.134)$$

A condição de carga e descarga é dada por:

$$\dot{\gamma} \geq 0, \quad f \leq 0 \quad \text{e} \quad \dot{\gamma} f = 0. \quad (2.135)$$

5. Equações de evolução do encruamento e do dano

$$\begin{aligned}
\dot{R} &= b \{R_\infty - R\} \dot{\gamma} \\
\dot{D} &= \left\{ \frac{Y}{S_\infty} \right\}^{s_\infty} \dot{p} \mathcal{H}(p - p_d) \\
\dot{p} &= \frac{\dot{\gamma}}{\{1 - D\}} \\
Y &= \frac{\frac{3}{2} \langle [\mathbb{P}] \vec{\sigma}, \vec{\sigma} \rangle}{2E \{1 - D\}^2} \left\{ \frac{2}{3} \{1 + \nu\} + 3 \{1 - 2\nu\} \frac{\{\sigma^H\}^2}{\frac{3}{2} \langle [\mathbb{P}] \vec{\sigma}, \vec{\sigma} \rangle} \right\}
\end{aligned} \tag{2.136}$$

Sendo,

$$\sigma^H = \frac{1}{3} \{ \sigma_{(11)} + \sigma_{(22)} \} = \langle \vec{e}, \vec{\sigma} \rangle \tag{2.137}$$

com: $\vec{e} = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0)$.

Deste resultado obtém-se :

$$Y = \frac{\langle [\mathbb{P}] \vec{\sigma}, \vec{\sigma} \rangle}{2E \{1 - D\}^2} \left\{ \{1 + \nu\} + 3 \{1 - 2\nu\} \frac{\langle \vec{e}, \vec{\sigma} \rangle^2}{\langle [\mathbb{P}] \vec{\sigma}, \vec{\sigma} \rangle} \right\}. \tag{2.138}$$

$$\langle \vec{e}, \vec{\sigma} \rangle^2 = [\vec{e} \otimes \vec{e}] \vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma}. \tag{2.139}$$

Previsor Elástico (EPT)

Assim como para estado plano de deformação e axissimétrico, o Previsor Elástico é determinado de forma análoga como:

$$\vec{\varepsilon}_{n+1}^{trial} = \vec{\varepsilon}_{n+1} - \vec{\varepsilon}_n^p. \tag{2.140}$$

$$\vec{\sigma}_{n+1}^{trial} = \{1 - D_{n+1}^{trial}\} [\mathbb{D}] \vec{\varepsilon}_{n+1}^{trial}. \tag{2.141}$$

$$D_{n+1}^{trial} = D_n \tag{2.142}$$

$$\vec{\varepsilon}_{n+1}^{p, trial} = \vec{\varepsilon}_n^p \tag{2.143}$$

$$R_{n+1}^{trial} = R_n. \tag{2.144}$$

O critério de escoamento também é verificado. Se $f(\vec{\sigma}_{n+1}^{trial}, R_{n+1}^{trial}, D_{n+1}^{trial}) \leq 0$, então o estado em t_{n+1} é de fato elástico. Neste caso a atualização das variáveis é dado por:

$$\vec{\sigma}_{n+1} = \vec{\sigma}_{n+1}^{trial} \tag{2.145}$$

$$D_{n+1} = D_{n+1}^{trial} \tag{2.146}$$

$$\vec{\varepsilon}_{n+1}^p = \vec{\varepsilon}_{n+1}^{p, trial} \tag{2.147}$$

$$R_{n+1} = R_{n+1}^{trial} \quad (2.148)$$

Caso contrário, deve-se resolver o mapeamento de retorno plástico com dano.

Corretor Plástico com Dano

Usando o método de integração implícita de Euler, "*backward Euler*", tem-se:

$$\bar{\epsilon}_{n+1}^e = \bar{\epsilon}_{n+1}^{e^{trial}} - \Delta \bar{\epsilon}_{n+1}^p \quad (2.149)$$

sendo:

$$\Delta \bar{\epsilon}_{n+1}^p = \tilde{\epsilon}_{n+1}^p - \tilde{\epsilon}_n^p \quad (2.150)$$

assim,

$$\Delta \bar{\epsilon}_{n+1}^p = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\Delta \gamma}{\{1 - D_{n+1}\}} \frac{[\mathbb{P}] \bar{\sigma}_{n+1}}{\sqrt{\langle [\mathbb{P}] \bar{\sigma}_{n+1}, \bar{\sigma}_{n+1} \rangle}} \quad (2.151)$$

$$\bar{\epsilon}_{n+1}^e = \bar{\epsilon}_{n+1}^{e^{trial}} - \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\Delta \gamma}{\{1 - D_{n+1}\}} \frac{[\mathbb{P}] \bar{\sigma}_{n+1}}{\sqrt{\langle [\mathbb{P}] \bar{\sigma}_{n+1}, \bar{\sigma}_{n+1} \rangle}} \quad (2.152)$$

que resulta em:

$$\bar{\sigma}_{n+1} = \{1 - D_{n+1}\} [\mathbb{D}] \bar{\epsilon}_{n+1}^e \quad (2.153)$$

$$\bar{\sigma}_{n+1} = \{1 - D_{n+1}\} [\mathbb{D}] \bar{\epsilon}_{n+1}^{e^{trial}} - \sqrt{\frac{3}{2}} \Delta \gamma \frac{[\mathbb{D}] [\mathbb{P}] \bar{\sigma}_{n+1}}{\sqrt{\langle [\mathbb{P}] \bar{\sigma}_{n+1}, \bar{\sigma}_{n+1} \rangle}}$$

As equações de evolução do encruamento isotrópico e do dano são dadas por:

$$R_{n+1} = \frac{\{R_n + bR_\infty \Delta \gamma\}}{\{1 + b \Delta \gamma\}} \quad (2.154)$$

$$D_{n+1} = D_n + \left\{ \frac{Y_{n+1}}{S_\infty} \right\}^{s_\infty} \frac{\Delta \gamma}{\{1 - D_{n+1}\}} \mathcal{H}(p_{n+1} - p_d) \quad (2.155)$$

sendo:

$$p_{n+1} = p_n + \frac{\Delta \gamma}{\{1 - D_{n+1}\}} \quad (2.156)$$

$$Y_{n+1} = \frac{1}{2E \{1 - D_{n+1}\}^2} \left\{ \{1 + \nu\} \langle [\mathbb{P}] \bar{\sigma}_{n+1}, \bar{\sigma}_{n+1} \rangle + 3 \{1 - 2\nu\} \langle \bar{\epsilon}, \bar{\sigma}_{n+1} \rangle^2 \right\}. \quad (2.157)$$

O critério de escoamento pode ser escrito como :

$$f = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{\{1 - D_{n+1}\}} \sqrt{\langle [\mathbb{P}] \bar{\sigma}_{n+1}, \bar{\sigma}_{n+1} \rangle} - \left\{ \frac{\{R_n + bR_\infty \Delta \gamma\}}{\{1 + b \Delta \gamma\}} + \sigma_y \right\} \quad (2.158)$$

Aqui, deve-se resolver o seguinte sistema de equações não lineares, formulado como:

Determinar $\{\vec{\sigma}_{n+1}, D_{n+1}, \Delta\gamma\}$, solução de

$$\vec{\mathcal{F}}_{1..3} = \vec{\sigma}_{n+1} - \{1 - D_{n+1}\} [\mathbb{D}] \vec{\varepsilon}_{n+1}^{trial} + \sqrt{\frac{3}{2}} \Delta\gamma \frac{[\mathbb{D}] [\mathbb{P}] \vec{\sigma}_{n+1}}{\sqrt{\langle [\mathbb{P}] \vec{\sigma}_{n+1}, \vec{\sigma}_{n+1} \rangle}} = 0 \quad (2.159)$$

$$\mathcal{F}_4 = D_{n+1} - D_n - \left\{ \frac{\mathcal{G}_{n+1}}{S_\infty} \right\}^{s_\infty} \frac{\Delta\gamma}{\{1 - D_{n+1}\}^3} \mathcal{H}(p_{n+1} - p_d) = 0 \quad (2.160)$$

$$\mathcal{F}_5 = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{\{1 - D_{n+1}\}} \sqrt{\langle [\mathbb{P}] \vec{\sigma}_{n+1}, \vec{\sigma}_{n+1} \rangle} - \frac{\{R_n + b R_\infty \Delta\gamma\}}{\{1 + b \Delta\gamma\}} - \sigma_y = 0 \quad (2.161)$$

sendo:

$$\mathcal{G}_{n+1} = \frac{\{1 + \nu\}}{2E} \langle [\mathbb{P}] \vec{\sigma}_{n+1}, \vec{\sigma}_{n+1} \rangle + \frac{3\{1 - 2\nu\}}{2E} \langle \vec{e}, \vec{\sigma}_{n+1} \rangle^2 \quad (2.162)$$

2.4.5 Determinação do Módulo Tangente Consistente

O módulo tangente consistente pode ser expresso por:

$$\mathbb{D}_{(ij)}^{ep} = \frac{\partial \sigma_i}{\partial \varepsilon_j}. \quad (2.163)$$

Sabendo que a evolução da deformação total é dada por $\vec{\varepsilon}_{n+1} = \vec{\varepsilon}_{n+1}^{trial} + \vec{\varepsilon}_n^p$. Então:

$$\frac{\partial (\mathfrak{N})}{\partial \varepsilon_j} = \frac{\partial (\mathfrak{N})}{\partial \varepsilon_j^{trial}}. \quad (2.164)$$

Pode-se escrever então:

$$\mathbb{D}_{(ij)}^{ep} = \frac{\partial \sigma_i}{\partial \varepsilon_j^{trial}} \quad (2.165)$$

A solução deste conjunto de equações para $j = 1, 3$ permite calcular as derivadas de σ_i com relação ε_j^{trial} , dado por

$$\mathbb{D}^{ep} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \sigma_1}{\partial \varepsilon_1^{trial}} & \frac{\partial \sigma_1}{\partial \varepsilon_2^{trial}} & \frac{\partial \sigma_1}{\partial \varepsilon_3^{trial}} \\ \frac{\partial \sigma_2}{\partial \varepsilon_1^{trial}} & \frac{\partial \sigma_2}{\partial \varepsilon_2^{trial}} & \frac{\partial \sigma_2}{\partial \varepsilon_3^{trial}} \\ \frac{\partial \sigma_3}{\partial \varepsilon_1^{trial}} & \frac{\partial \sigma_3}{\partial \varepsilon_2^{trial}} & \frac{\partial \sigma_3}{\partial \varepsilon_3^{trial}} \end{bmatrix}. \quad (2.166)$$

Capítulo 3

Análise de Elementos Finitos Incremental

No caso de materiais elasto-plásticos, a determinação do campo de tensão depende do conhecimento da história da deformação, durante todo o processo de carga. A determinação do campo de tensão requer a solução de um problema de valor inicial. No caso de problemas incrementais, considera-se que o estado do corpo é inteiramente conhecido no instante t_n . O problema consiste então na determinação do estado do corpo em t_{n+1} resultante da aplicação da história da deformação $\varepsilon(t)$, para $t \in [t_n, t_{n+1}]$.

Assim, definindo-se como α_n um vetor que representa as variáveis de estado em t_n , $\alpha_n^T = (\sigma_n, \varepsilon_n^p, R_n, X_n^D, D_n, \varepsilon_n)$, usa-se de um algoritmo implícito para a integração das equações de evolução para o cálculo de forma única da tensão σ_{n+1} em t_{n+1} .

Tal algoritmo define uma função constitutiva de aproximação incremental, $\sigma(\bullet)$, para o tensor tensão:

$$\sigma_{n+1} = \sigma(\alpha_n, \varepsilon_{n+1}) \quad (3.1)$$

Assim, dentro de cada incremento, σ_{n+1} é função de ε_{n+1} apenas, e o argumento α_n , que representa a condição inicial do problema de valor inicial constitutivo dentro do intervalo $[t_n, t_{n+1}]$, é constante.

Com isto, em $t \in [t_n, t_{n+1}]$, o estado de tensão pode ser escrito como:

$$\sigma(t) = \sigma(\alpha_n, \varepsilon(u(t)) - \varepsilon_n) \quad (3.2)$$

3.1 Definição do Problema

O problema é discretizado no âmbito de deformações infinitesimais, onde as configurações $\Omega_0 \simeq \Omega_n \simeq \Omega_{n+1}$, conforme figura abaixo. Também é considerada em sua discretização o fato de se restringir a problemas quase-estáticos, portanto pode-se desprezar os termos de inércia.

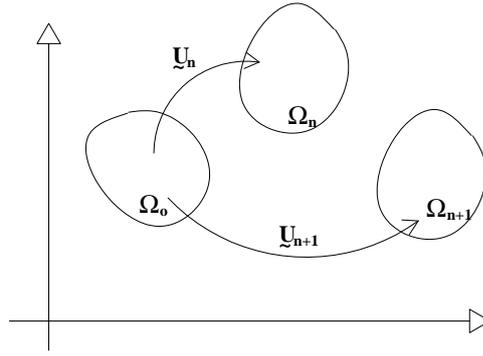


Figura 3.1: Problema discretizado nas configurações deformada e de referência.

Dessa forma, a equação de equilíbrio em t_{n+1} , pode ser escrita como:

$$\operatorname{div}(\sigma_{n+1}) + \vec{f}_{n+1} = 0 \quad (3.3)$$

sendo:

$$\sigma_{(n+1)} \cdot \vec{n} = \vec{T}_{n+1} \text{ em } \Gamma t$$

$$\vec{u}_{n+1} = \vec{u}_{n+1} \text{ em } \Gamma u$$

Com as seguintes condições iniciais:

$$\vec{u}(0) = 0$$

$$\alpha(0) = 0$$

Derivando a formulação fraca do problema usando os conjuntos $Kin u$ e $Var u$, respectivamente, conjuntos dos campos de deslocamentos cinematicamente admissíveis e das variações, o problema se resume em:

Determinar $\vec{u}(t) \in Kin u \forall t \in [0, t_f]$, com isto a equação de equilíbrio é dada por:

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \sigma(t) \cdot \vec{v} d\Omega + \int_{\Omega} \bar{b}(t) \cdot \vec{v} d\Omega = 0, \forall \vec{v} \in Var u \quad (3.4)$$

Definindo um desequilíbrio como sendo $G(\vec{u}_{n+1}, \vec{v})$, e após isto, aplicar o teorema da divergência na equação 3.4, obtém-se:

$$G(\vec{u}_{n+1}, \vec{v}) = \int_{\Omega} \sigma(t) \cdot \varepsilon(\vec{v}) d\Omega - \int_{\Omega} \vec{f}(t) \cdot \vec{v} d\Omega - \int_{\Gamma_t} \vec{T}(t) \cdot \vec{v} d\Gamma \quad (3.5)$$

Desta forma, o problema de equilíbrio global pode ser formulado como:

Determinar $\vec{u}_{n+1} \in Kin_u$, tal que:

$$G(u_{n+1}, \vec{v}) = 0, \forall \vec{v} \in Var_u \quad (3.6)$$

A solução deste sistema de equações não lineares é obtida pela aplicação do método de Newton e através da solução de uma sequência de problemas lineares, onde $\vec{u}_{n+1}^{(0)} = \vec{u}_n$. A

seguir é mostrada a forma do algoritmo do método de Newton empregado.

3.1.1 Descrição do Algoritmo do Método de Newton

Dado $\vec{u}_{n+1}^{(0)} = \vec{u}_n$

Encontrar \vec{u}_{n+1} solução do problema iterativo:

$$DG(\vec{u}_{n+1}^{(i)}, \vec{v})\varepsilon(\Delta\vec{u}_{n+1}^{(i)}) = -G(\vec{u}_{n+1}^{(i)}, \vec{v}) \quad (3.7)$$

$$\vec{u}_{n+1}^{(i+1)} = \vec{u}_{n+1}^{(i)} + \Delta\vec{u}_{n+1}^{(i)} \quad (3.8)$$

com:

$$G(\vec{u}_{n+1}^{(i)}, \vec{v}) = \int_{\Omega} \sigma(\vec{u}_{n+1}^{(i)}) \cdot \varepsilon(\vec{v}) d\Omega - \int_{\Omega} \vec{f}_{n+1}^{(i)} \cdot \vec{v} d\Omega - \int_{\Gamma_t} \vec{T}_{n+1}^{(i)} \cdot \vec{v} d\Gamma \quad (3.9)$$

$$DG(\vec{u}_{n+1}^{(i)}, \vec{v})\varepsilon(\Delta\vec{u}_{n+1}^{(i)}) = \int_{\Omega} \mathbb{C}_{n+1}^{(i)} \varepsilon(\Delta\vec{u}_{n+1}^{(i)}) \varepsilon(\vec{v}) d\Omega, \quad \forall \vec{v} \in Var_u \quad (3.10)$$

\mathbb{C} : módulo tangente consistente.

3.2 Problemas 2D

3.2.1 Problemas Planos e Axissimétricos

No caso de problemas axissimétricos admite-se que as propriedades do material, carregamentos e condições de contorno sejam independente de θ , num sistema de coordenadas cilíndricas $\{r, z, \theta\}$.

No caso de deformação plana, pode-se avaliar os casos axissimétricos como sendo:

Sólido de Revolução – campo de deslocamentos dados por:

$$u_r = u_r(r, z)$$

$$u_{\theta} = 0$$

$$u_z = u_z(r, z)$$

As componentes do tensor deformação de engenharia são dadas por:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r} & \gamma_{r\theta} &= 0 \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{\partial u_r}{\partial r} & \gamma_{z\theta} &= 0 \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z} & \gamma_{rz} &= \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Observação:

- Em $r = 0$, deve-se impor que $u_r = 0$ – caso de sólidos materiais não sendo tubos.

- Para estado plano de deformação (EPD) faz-se a seguinte substituição:

$$\begin{aligned} r &\leftrightarrow x & \varepsilon_{\theta\theta} &= 0 \\ z &\leftrightarrow y & \sigma_{\theta\theta} &\neq 0 \\ \theta &\leftrightarrow z \end{aligned}$$

Destas considerações tem-se:

$$G(\vec{u}, \vec{v}) = \int_{\Omega} \sigma(\vec{u}) \cdot \varepsilon(\vec{v}) d\Omega - \int_{\Omega} \vec{f} \cdot \vec{v} d\Omega - \int_{\Gamma_t} \vec{T} \cdot \vec{v} d\Gamma \quad (3.12)$$

3.3 Discretização do Elemento Finito de Galerkin

A fim de aplicar o método de elementos finitos, faz-se uma partição do domínio Ω , dentro do elemento Ω_e .

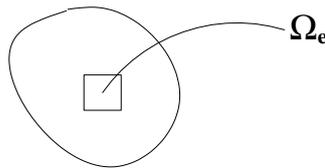


Figura 3.2: Mapeamento dentro do elemento Ω_e .

É utilizado um elemento triangular de 6 nós – tri6, pois se no futuro houver interesse em se trabalhar com refinamentos h-adaptativos, essa implementação será respaldada pela existência de rotinas que já existem e estão funcionando em outros trabalhos. O mapeamento do elemento tri6 é mostrado conforme a figura abaixo:

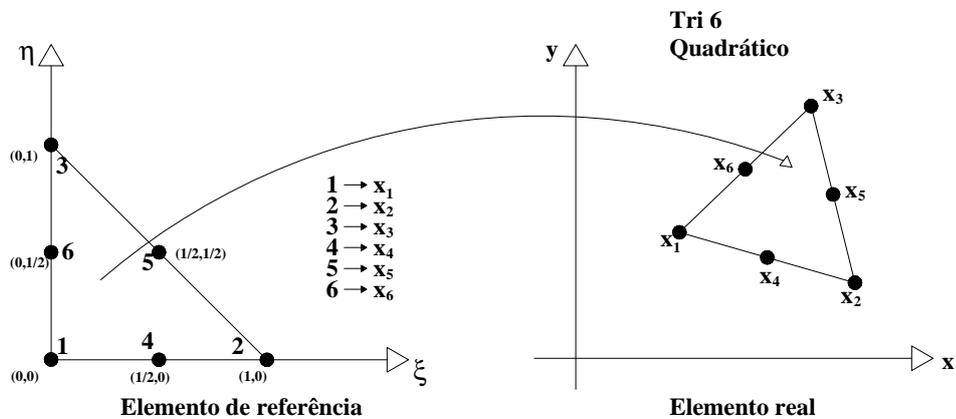


Figura 3.3: Mapeamento do elemento finito.

A discretização do elemento finito será apresentada para os problemas planos e axis-simétricos, segundo seus domínios de integração:

- Problemas axissimétricos : $d\Omega = 2\pi r dr dz = 2\pi dA$
- Problemas Estados Planos (EPT) e (EPD): $d\Omega = dx dy$

Como conseqüência da partição do domínio, tem-se:

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} \sigma(\vec{u}) \cdot \varepsilon(\vec{v}) d\Omega &= \bar{A}_e \int_{\Omega_e} \sigma(\vec{u}) \cdot \varepsilon(\vec{v}) d\Omega & (3.13) \\
 \int_{\Omega} \vec{f}(t) \cdot \vec{v} d\Omega &= \bar{A}_e \int_{\Omega_e} \vec{f}(t) \cdot \vec{v} d\Omega \\
 \int_{\Gamma_t} \vec{T}(t) \cdot \vec{v} d\Gamma &= \bar{A}_e \int_{\partial\Omega_e \cap \Gamma_t} \vec{T}(t) \cdot \vec{v} d\Gamma \\
 \int_{\Omega} [\mathbf{C}_{n+1}^{(i)}] \varepsilon(\Delta \vec{u}_{n+1}^{(i)}) \cdot \varepsilon(\vec{v}) d\Omega &= \bar{A}_e \int_{\Omega_e} [\mathbf{C}_{n+1}^{(i)}] \varepsilon(\Delta \vec{u}_{n+1}^{(i)}) \cdot \varepsilon(\vec{v}) d\Omega
 \end{aligned}$$

\bar{A}_e : indica a montagem dos elementos nas matrizes.

Assim, basicamente precisa-se determinar a contribuição dos seguintes elementos para resolução do problema:

$$a) \int_{\Omega_e} [\mathbf{C}_{n+1}^{(i)}] \varepsilon(\Delta \vec{u}_{n+1}^{(i)}) \cdot \varepsilon(\vec{v}) d\Omega, \quad b) \int_{\Omega_e} \sigma \cdot \varepsilon(\vec{v}) d\Omega, \quad c) \int_{\Omega_e} \vec{f} \cdot \vec{v} d\Omega, \quad e) \int_{\partial\Omega_e \cap \Gamma_t} \vec{T} \cdot \vec{v} d\Gamma \quad (3.14)$$

Nas integrações acima, empregam-se mudanças convenientes das variáveis, dadas por:

$$\begin{aligned}
 r &= r(\xi, \eta) = r_i \mathbb{N}_i(\xi, \eta) \\
 z &= z(\xi, \eta) = z_i \mathbb{N}_i(\xi, \eta)
 \end{aligned} \quad (3.15)$$

onde, $\mathbb{N}_i(\xi, \eta)$ são as funções de interpolação de elementos finitos (FEM), Gouri Dhatt and Gilbert Touzot (1984).

As componentes dos campos de deslocamentos são aproximadas em Ω_e como:

$$\begin{aligned}
 u_r(\xi, \eta) &= u_{r_i} \mathbb{N}_i(\xi, \eta) \\
 u_z(\xi, \eta) &= u_{z_i} \mathbb{N}_i(\xi, \eta)
 \end{aligned} \quad (3.16)$$

Denotando $\vec{q}_e^T = \{u_{r_1}, u_{z_1}, u_{r_2}, u_{z_2}, \dots\}$, onde (u_{r_i}, u_{z_i}) são os i -ésimos deslocamentos nodais, que podem ser expressos como:

$$\left\{ \begin{array}{c} u_r \\ u_z \end{array} \right\} = [\mathbf{N}] \vec{q}_e = [[\mathbf{N}_a] \mid a = 1, \dots, n \text{ ós}] \vec{q}_e \quad (3.17)$$

com

$$[\mathbb{N}_a] = \begin{bmatrix} \mathbb{N}_a(\xi, \eta) & 0 \\ 0 & \mathbb{N}_a(\xi, \eta) \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

E as componentes do vetor deformação são dadas por:

$$\left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{rz} \\ \dots \\ \varepsilon_{\theta\theta} \end{array} \right\} = [\mathbb{B}] \vec{q}_e = [[\mathbb{B}_a] \mid a = 1, \dots, n \text{ ós}] \vec{q}_e \quad (3.19)$$

com

$$[\mathbb{B}_a] = \begin{bmatrix} \mathbb{N}_{a,r} & 0 \\ 0 & \mathbb{N}_{a,z} \\ \mathbb{N}_{a,z} & \mathbb{N}_{a,r} \\ \dots & \dots \\ \mathbb{N}_{a,r} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

Definição das $\mathbb{N}_{a,r}$ e $\mathbb{N}_{a,z}$

$$\langle \mathbb{N}_{a,r} \mid \mathbb{N}_{a,z} \rangle = \frac{1}{J} \langle \mathbb{N}_{a,\xi} \mid \mathbb{N}_{a,\eta} \rangle \begin{bmatrix} z_{,\eta} & -r_{,\eta} \\ -z_{,\xi} & r_{,\xi} \end{bmatrix}$$

com

$$J = r_{,\xi} z_{,\eta} - r_{,\eta} z_{,\xi} \quad (3.21)$$

Para o elemento triangular, a integral de $\mathcal{F}(r, z)$, função das coordenadas de área que pode ser efetuada no domínio de coordenadas paramétricas $f(\xi, \eta)$, torna-se:

- Caso axissimétrico:

$$\int_{\Omega_e} \mathcal{F}(r, z) dA = 2\pi \int_{\xi=0}^1 \int_{\eta=0}^{1-\xi} \mathcal{F}[r(\xi, \eta), z(\xi, \eta)] J(\xi, \eta) r(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (3.22)$$

- Caso plano:

$$\int_{\Omega_e} \mathcal{F}(r, z) dA = \int_{\xi=0}^1 \int_{\eta=0}^{1-\xi} \mathcal{F}[r(\xi, \eta), z(\xi, \eta)] J(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (3.23)$$

3.3.1 Determinação da Rigidez Tangente

A contribuição da rigidez tangente de cada elemento é dada por:

- estado plano de deformação:

$$(a) = \int_{\xi=0}^1 \int_{\eta=0}^{1-\xi} [\mathbb{C}_{(\xi,\eta)}^{(i)}] [\mathbb{B}(\xi, \eta)] \Delta \vec{q}_e^{(i)} \cdot [\mathbb{B}(\xi, \eta)] \hat{\vec{q}}_e J(\xi, \eta) d\xi d\eta = [\mathbb{K}_T^e] \Delta \vec{q}_e^{(i)} \cdot \hat{\vec{q}}_e \quad (3.24)$$

$$[\mathbb{K}_T^e] = \int_{\xi=0}^1 \int_{\eta=0}^{1-\xi} [\mathbb{B}(\xi, \eta)]^T [\mathbb{C}_{(\xi,\eta)}^{(i)}] [\mathbb{B}(\xi, \eta)] J(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (3.25)$$

- axissimétrico:

$$[\mathbb{K}_T^e] = 2\pi \int_{\xi=0}^1 \int_{\eta=0}^{1-\xi} [\mathbb{B}(\xi, \eta)]^T [\mathbb{C}_{(\xi,\eta)}^{(i)}] [\mathbb{B}(\xi, \eta)] J(\xi, \eta) r(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (3.26)$$

3.3.2 Determinação das Forças Internas Nodais

- estado plano de deformação:

$$[F_e^{int}] = \int_0^1 \int_0^{1-\xi} [\mathbb{B}(\xi, \eta)]^T [\sigma(\xi, \eta)] J(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (3.27)$$

- axissimétrico:

$$[F_e^{int}] = 2\pi \int_0^1 \int_0^{1-\xi} [\mathbb{B}(\xi, \eta)]^T [\sigma(\xi, \eta)] J(\xi, \eta) r(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (3.28)$$

3.3.3 Contribuição das Forças de Corpo

- estado plano de deformação:

$$\vec{F}_e^b = \int_0^1 \int_0^{1-\xi} [\mathbb{N}(\xi, \eta)]^T \vec{f} J(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (3.29)$$

- axissimétrico:

$$\vec{F}_e^b = 2\pi \int_0^1 \int_0^{1-\xi} [\mathbb{N}(\xi, \eta)]^T \vec{f} r(\xi, \eta) J(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (3.30)$$

3.3.4 Contribuição das Forças de Superfície

- estado plano de deformação:

$$\vec{F}_e^t = \int_0^1 [\mathbb{N}(s)]^T \vec{T} \frac{Le}{2} ds \quad (3.31)$$

- axissimétrico:

$$\vec{F}_e^t = 2\pi \int_0^1 [\mathbb{N}(s)]^T \vec{T} \frac{Le}{2} r(s) ds \quad (3.32)$$

3.4 Montagem do Problema Não Linear Global

O método de integração utilizado é o método de Gauss, e seu desenvolvimento é feito no apêndice A deste trabalho.

Seja \vec{U} o vetor de deslocamentos global na i -ésima iteração:

$$\vec{U}^{(i)} = U \vec{q}_e^{(i)} \quad (3.33)$$

Por definição:

$$\begin{aligned} \vec{F}^{int}(\vec{U}^{(i)}) &= A \vec{F}_e^{int}(\vec{q}_e^{(i)}) \\ \vec{F}^b &= A \vec{F}_e^b \\ \vec{F}^t &= A \vec{F}_e^t \\ \mathbb{K}_T(\vec{U}^{(n)}) &= A \mathbb{K}_T^e(\vec{q}_e^{(i)}) \end{aligned} \quad (3.34)$$

Então, o problema não linear pode ser declarado como:

Admite-se que o estado é conhecido no intervalo $[0, t_n]$. O problema consiste em determinar as variáveis de estado no tempo t_{n+1} . Assim seja:

Resumo:

$$\vec{U}_{n+1}^{(i)} = \vec{U}_n$$

Encontrar $\vec{U}_{n+1}^{(i+1)}$ tal que $\|\vec{F}_e^{ext}\| \leq tol$, onde:

$$\begin{aligned} \left[\mathbb{K}_T(\vec{U}_{n+1}^{(i)}) \right] \Delta \vec{U}_{n+1}^{(i)} &= -R_{n+1}^{(i)} \\ \vec{U}_{n+1}^{(i+1)} &= \vec{U}_{n+1}^{(i)} + \Delta \vec{U}_{n+1}^{(i)} \end{aligned} \quad (3.35)$$

sendo:

$$\begin{aligned} \vec{R}_{n+1}^{(i+1)} &= \vec{R}(\vec{U}_{n+1}^{(i)}) \\ \vec{R}(\vec{U}_{n+1}^{(i)}) &= \vec{F}^{int}(\vec{U}_{n+1}^{(i)}) - \vec{F}^b - \vec{F}^t \end{aligned}$$

sendo:

\vec{F}_e^{ext} : vetor de esforços externos;

\vec{R} : vetor de forças residuais.

Capítulo 4

Modelo Geomecânico

4.1 Modelo de "Cap"

4.1.1 Histórico

Na busca de modelos mais eficientes para se simular com maior rigor a realidade física que ocorre com uma estrutura geomecânica (uma estrutura em solo), foi proposto o modelo do "Cap"Isotrópico, o qual é definido por três superfícies de escoamento. Este modelo têm-se mostrado adequado para a análise de taludes e para a determinação da capacidade de carga, Swan e Seo (2000).

Um desafio em problemas de geomecânica computacional é o desenvolvimento de equações constitutivas para solos, relacionando tensão à deformação, capazes de representarem adequadamente o comportamento físico da resposta de solos quando sujeitos à carregamentos.

Assim, a classe de modelos materiais elasto-plásticos do tipo "Cap" pode ser uma forma de se conseguir tanto realidade física quanto alta performance numérica. Uma vantagem destes modelos é que eles foram idealizados a partir da teoria de plasticidade em metais, a qual já está bem fundamentada.

Uma das extensões pioneiras da teoria da plasticidade em metais para solos foi realizada por Drucker-Prager, quando eles estenderam o critério de escoamento de von Mises para quantificar um meio granular confinado.

Em 1957, Drucker *et al.*, propuseram que o comportamento volumétrico plástico de solos poderia ser modelado em função da deformação e de uma regra de encruamento utilizando uma superfície de "Cap"de compressão fechada e um envelope de falha de Drucker-Prager.

Em 1971, DiMaggio e Sandler propuseram um modelo de "Cap"elasto-plástico específico com sua implementação numérica. Esse modelo foi apresentado de modo a ser usado em diferença finita explícita ou em elementos finitos, implementado no âmbito de pequenas deformações.

Enquanto que o modelo de "Cap", desenvolvido inicialmente para areias, não contemplava outros materiais, este último de DiMaggio e Sandler obteve sucesso também no emprego de argilas e concreto.

Esses modelos são baseados na teoria clássica da elasto-plasticidade isotrópica, e com acoplamento da envoltória de Drucker-Prager usando uma lei de encruamento do "Cap" de compressão. No "Cap" de DiMaggio e Sandler, o "Cap" de encruamento é uma superfície elíptica com uma razão constante entre os raios da elipse, e ele intercepta a envoltória de falha numa forma não suave.

O "Cap" de compressão move-se ao longo do eixo de deformação volumétrica plástica:

- Quando o material sofre expansão, no caso de carregamento de tração, o "Cap" de compressão move-se para o interior da envoltória;
- Quando o material sofre compactação/adensamento, o "Cap" de compressão move-se para fora da envoltória.

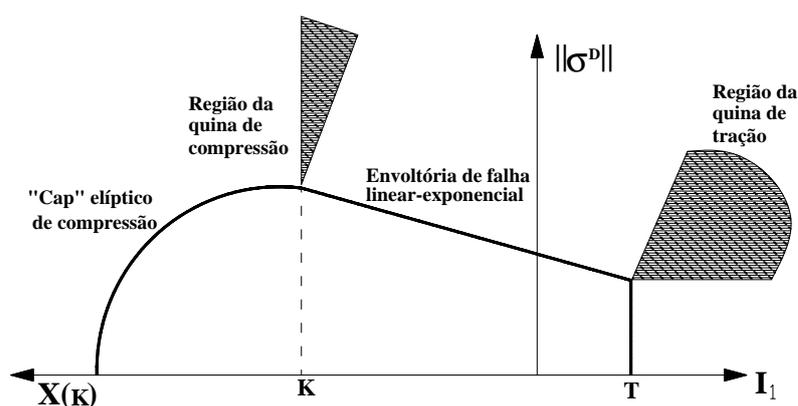


Figura 4.1: Superfícies de escoamento não suaves do modelo de "Cap" com 2 regiões de quina.

Uma das dificuldades que se tem de enfrentar nesse modelo é o tratamento do problema da singularidade, que ocorre na interseção das superfícies de escoamento, entre o "Cap" de compressão elíptico e o envelope de falha de Drucker-Prager.

Usando uma elegante teoria de integração para múltiplas superfícies plásticas não suaves, baseados no algoritmo de projeção de um ponto, da classe dos algoritmos de mapeamento de retorno, Simo *et al.* (1988) desenvolveram uma implementação numérica robusta do "Cap" em termos de um algoritmo para determinar funções de escoamento ativas baseado nas condições de Karush-Kuhn-Tucker.

Como parte dessa implementação, propuseram uma lei de encruamento modificada, na qual impede-se o amolecimento, evitando-se assim o problema de singularidade na quina de interseção das superfícies de escoamento.

Outras maneiras de se evitar estas singularidades que ocorrem com os operadores tangentes, tanto na região do "Cap" de compressão quanto no "Cap" de tração, é a introdução de uma rigidez material artificial nas quinas.

Devido a essas dificuldades foi proposto por Swan e Seo (2000), um "Cap" Suave definido por três superfícies de escoamento: uma envoltória de falha de Drucker-Prager, um "Cap" circular de compressão e um "Cap" fixo circular de tração.

O algoritmo de integração é baseado no *Backward Euler Method* das equações constitutivas em taxa, e utiliza o método de *operator-split*, que consiste em um previtor elástico seguido, se necessário, por um corretor plástico (mapeamento de retorno) para a atualização das variáveis de estado.

4.1.2 Características do Modelo de "Cap" Não Suave

As equações constitutivas elasto-plásticas referentes ao "Cap" Não Suave, definido por três superfícies, são consideradas no escopo de pequenas deformações. O tensor de deformação é decomposto aditivamente como:

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p.$$

A resposta elástica do material, na forma de taxa, é dada por

$$\dot{\sigma} = C : \dot{\varepsilon}^e \quad (4.1)$$

sendo $C = K(I \otimes I) + 2\mu\mathbb{I}_{dev}$ é o tensor de quarta ordem elástico, associado a um material isotrópico linear.

O operador $\mathbb{I}_{dev}(\mathfrak{X})$ gera a parte deviatórica de (\mathfrak{X}) . Assim, $\mathbb{I}_{dev} = \mathbb{I} - \frac{1}{3}[I \otimes I]$, sendo \mathbb{I} é o tensor identidade de quarta ordem, aplicado no espaço de matrizes simétricas, e I é a matriz identidade.

No espaço de tensões, o domínio elástico fica limitado por três superfícies distintas de escoamento que são funções dos invariantes I_1 e $\|\sigma^D\|$, onde σ^D é a parte deviatórica do tensor tensão σ , com:

$$\begin{aligned} I_1 &= tr(\sigma) \\ \sigma^D &= \mathbb{I}_{dev} : \sigma \end{aligned}$$

As três superfícies de escoamento podem ser expressas como f_m , $m = 1..3$, onde

$$f_1(\sigma) = \|\sigma^D\|^2 - F_e^2(I_1) \leq 0, \quad (4.2)$$

$$f_2(\sigma, \kappa) = \|\sigma^D\|^2 - F_c^2(I_1, \kappa) \leq 0, \quad (4.3)$$

$$f_3(\sigma) = I_1 - R_T \leq 0, \quad (4.4)$$

sendo:

$$F_e(I_1) = \varsigma - \theta I_1 - \lambda e^{(wI_1)}, \quad (4.5)$$

$$F_c(I_1, \kappa) = F_e^2(\kappa) - \left\{ \frac{I_1 - \kappa}{R_c} \right\}^2. \quad (4.6)$$

As constantes dos materiais são da seguinte forma:

$$\varsigma \geq 0, \quad \lambda \geq 0, \quad w \geq 0, \quad \theta \geq 0, \quad \text{e } R_c > 0.$$

Na função F_e , as constantes θ e ς estão relacionadas com o ângulo de atrito ϕ e coesão c . R_c é o raio do "Cap"elíptico de compressão. O "Cap"permite ser transladado ao longo do eixo I_1 da seguinte forma:

- move-se para direita $\{\dot{k} > 0\}$ durante a dilatação plástica;
- move-se para esquerda $\{\dot{k} < 0\}$.

A lei de encruamento do modelo deriva do fato de que a curva de compressão volumétrica é admitida ser de forma exponencial.

$$\varepsilon_v^p = -W \{1 - e^{[D_I \chi(k)]}\} \quad (4.7)$$

sendo:

$\chi(k) = k - R_c F_e(k)$ é o ápice da superfície do "Cap"no eixo I_1 .

ε_v^p – a deformação plástica volumétrica do solo, medido em relação ao estado virgem completamente descarregado.

W – representa a máxima deformação plástica volumétrica possível com referência ao estado virgem descarregado.

$D_I^{-1} = I_1^{ref}$ – valor absoluto de I_1 .

R_c – raio do "Cap"elíptico de compressão.

Diferenciando a equação 4.7 com respeito a k , pode-se obter o módulo de encruamento tangente h .

$$h'(k) = \frac{dk}{d\varepsilon_v^p} = \frac{e^{[-D_I \chi]}}{W D_I \chi'}, \quad (4.8)$$

$$\chi' = 1 - R_c F_e'(k). \quad (4.9)$$

Assim, quando:

$$\chi \rightarrow \infty, \text{ então}$$

$$h(k) \rightarrow \infty, \text{ e}$$

$$\varepsilon_v^p \rightarrow -W$$

Este módulo $h(k)$ é usado para estabelecer uma lei de evolução não linear governada pelo movimento do parâmetro do "Cap", \dot{k} .

$$\dot{k} = h(k)tr(\dot{\varepsilon}^p). \quad (4.10)$$

A regra de fluxo para o modelo de "Cap"Não Suave é associativa, e mesmo tendo múltiplas superfícies de escoamento ativa em qualquer instante, Koiter generalizou-a da seguinte forma:

$$\dot{\varepsilon}^p = \sum_m \dot{\gamma}^m \frac{\partial f_m}{\partial \sigma} \quad (4.11)$$

Os multiplicadores plásticos denotados por $\{\dot{\gamma}^m, m = 1..3\}$ e suas derivadas no tempo são proporcionais à magnitude da deformação plástica instantânea num ponto material fixo com respeito a cada uma das três funções de escoamento. Os critérios de carga e descarga são especificados segundo as condições de Karush-Khun-Tucker (KKT):

$$f_m \leq 0, \quad \dot{\gamma}^m \geq 0, \quad f_m \dot{\gamma}^m = 0, \quad \text{e a condição de consistência } \dot{f}_m \dot{\gamma}^m = 0 \quad (4.12)$$

De acordo com as condições de KKT, tem-se seis diferentes possibilidades para este modelo constitutivo elasto-plástico.

1. Tensão no ponto está dentro das superfícies de escoamento $f_m < 0, \{m = 1..3\}$. Neste caso a resposta material é elástica.
2. Carregamento está ocorrendo na superfície 1, assim $\rightarrow f_1 = 0, \quad \dot{\gamma}^1 > 0$;
3. Carregamento está ocorrendo na superfície 2, assim $\rightarrow f_2 = 0, \quad \dot{\gamma}^2 > 0$;
4. Carregamento está ocorrendo na superfície 3, assim $\rightarrow f_3 = 0, \quad \dot{\gamma}^3 > 0$;
5. Superfícies 1 e 2 estão simultaneamente ativadas, assim $\rightarrow f_1 = f_2 = 0, \quad \dot{\gamma}^1 > 0, \quad \dot{\gamma}^2 > 0$;
6. Superfícies 1 e 3 estão simultaneamente ativadas, assim $\rightarrow f_1 = f_3 = 0, \quad \dot{\gamma}^1 > 0, \quad \dot{\gamma}^3 > 0$.

4.1.3 Pontos de Quinas - Operador Tangente Singular

Devido à singularidade que ocorre nos pontos de quina, definida pelas interseções entre as superfícies de escoamento, é oneroso se trabalhar com esse modelo mesmo buscando algumas formas para se evitar ou contornar o problema.

O problema basicamente ocorre com a degeneração do posto da matriz de rigidez tangente global, com severas dificuldades ao se tentar resolver o balanço de força global das equações – em elementos finitos.

Existem inúmeras formas de se tentar solucionar este problema de mau condicionamento da matriz, em particular alguns autores empregam as seguintes formas:

- introdução de uma rigidez volumétrica artificial – porém pequeno.
- introdução de um modelo visco-plástico, que permite ao operador tangente permanecer não singular, mesmo na região de quina.

Entretanto, nenhum desses tipos de recursos solucionam a degeneração. A introdução de uma rigidez volumétrica artificial, na região de quina, pode deixar o operador tangente inconsistente com respeito ao algoritmo de atualização da tensão, resultando num lento processo de convergência quando da solução do sistema de equações não lineares. Já a introdução do comportamento visco-plástico, faz que o problema de análise estrutural seja mais intrínseco, com um número maior de passos no tempo, além de se induzir efeitos físicos obscuros.

Por esta razão, Swan e Seo (2000), propuseram um modelo de "Cap"Suave no qual se evita esse problema de singularidade do operador tangente.

4.2 Modelo de "Cap"Suave Elásto-Plástico

4.2.1 Forma Básica e Equações em Taxa

Para se tratar a dificuldade associada à não suavidade das superfícies de escoamento, é considerada uma superfície de escoamento conforme figura 4.2 composta por três funções com interseções suaves, dadas por:

$$f_1(\sigma, \mathcal{X}^D) = \|\eta\| - F_e(I_1) \leq 0 \quad (4.13)$$

$$f_2(\sigma, \mathcal{X}^D, \kappa) = \|\eta\|^2 - F_c(I_1, \kappa) \leq 0 \quad (4.14)$$

$$f_3(\sigma, \mathcal{X}^D) = \|\eta\|^2 - F_t(I_1) \leq 0. \quad (4.15)$$

Essas funções de escoamento, $\{f_m, m = 1..3\}$ são especificadas em termos das funções F_e , F_c e F_t que são chamadas, respectivamente de função envoltória de Drucker-Prager, função do "Cap"de compressão e função do "Cap"de tração. Notar que: $\eta = \sigma^D - \mathcal{X}^D$, sendo $\|\eta\| = \sqrt{\langle \eta, \eta \rangle}$, σ^D – denota a tensão deviatórica e \mathcal{X}^D – denota a tensão deviatórica de *back stress* associada com o encruamento cinemático.

As formas específicas de F_e , F_c e F_t são definidas como:

$$F_e(I_1) = \varsigma + \lambda \{1 - e^{(\beta I_1)}\}, \quad \text{com } I_1^c(\kappa) \leq I_1 \leq I_1^T, \quad (4.16)$$

$$F_c(I_1, \kappa) = R_c^2(\kappa) - \{I_1 - \kappa\}^2, \quad \text{com } I_1 \leq I_1^c(\kappa), \quad (4.17)$$

$$F_t(I_1) = R_T^2 - I_1^2, \quad \text{com } I_1 \geq I_1^T. \quad (4.18)$$

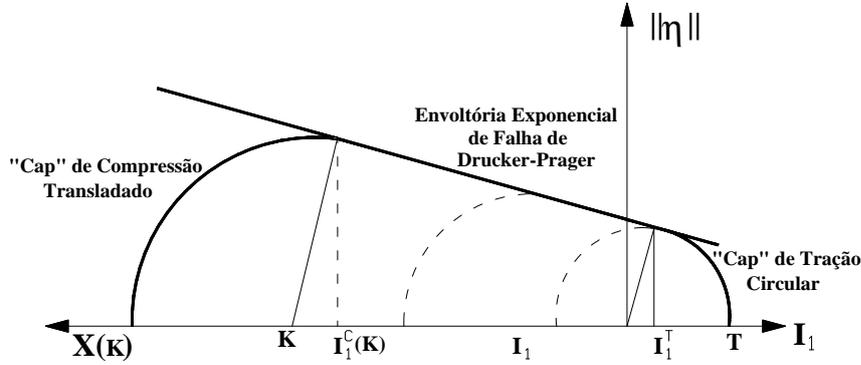


Figura 4.2: Três superfícies suaves e dois invariantes da função de escoamento do modelo "Cap".

ς , λ e β são constantes materiais.

I_1^T – denota um ponto limite fixo entre o "Cap" de tração e a envoltória de Drucker-Prager.

$I_1^c(\kappa)$ – denota um ponto delimitador para o movimento entre a envoltória de Drucker-Prager e o "Cap" de compressão.

A regra para o fluxo plástico desse modelo é associativa, e dada por:

$$\dot{\epsilon}^p = \sum_j \dot{\gamma}^j \frac{\partial f_j}{\partial \sigma}. \quad (4.19)$$

As condições de carga/descarga de Karush-Kuhn-Tucker são:

$$f_j \leq 0, \quad \dot{\gamma}^j \geq 0 \quad \text{e} \quad f_j \dot{\gamma}^j = 0, \quad \text{para } j = 1 \dots 3. \quad (4.20)$$

A condição de consistência plástica, para um modelo de "Cap" Suave, é expressa como:

$$\dot{f}_j \dot{\gamma}^j = 0, \quad \text{para } j = 1 \dots 3. \quad (4.21)$$

Assim, de acordo com essas condições, tem-se os seis casos de possibilidade de carregamento já descritos antes.

Em suma, esse modelo compreende cinco subcasos elasto-plásticos. Na forma de taxa, a lei de encruamento não associativa para o modelo é dada por:

$$\dot{\kappa} = h'(\kappa) \text{tr}(\dot{\epsilon}^p) \quad (4.22)$$

sendo, $h'(\kappa)$ o módulo tangente de encruamento para o parâmetro do "Cap":

$$h'(\kappa) = \frac{e^{[-D_I \chi(\kappa)]}}{W D_I \chi'(\kappa)}, \quad (4.23)$$

D_I e W são parâmetros materiais. Notar que:

$$h' = \frac{d h(\kappa)}{d \kappa}. \quad (4.24)$$

O máximo valor do parâmetro do κ está no intervalo: $\kappa \in (-\infty, 0]$. O parâmetro $\chi(\kappa)$ define a interseção do "Cap" com o eixo de tensão hidrostático, dado por uma função de encruamento do parâmetro κ :

$$\chi(\kappa) = \kappa - R_c(\kappa) \quad (4.25)$$

sendo, $\kappa < 0$ e $R_c(\kappa) > 0$, então $\chi(\kappa) = \kappa - R_c(\kappa) < 0$.

A lei de encruamento cinemático empregado nesse modelo é dada por:

$$\dot{\chi}^D = H \mathbb{I}_{dev} \dot{\epsilon}^P \quad (4.26)$$

onde H é uma constante plástica do módulo de encruamento cinemático.

4.2.2 Determinação do Raio do "Cap" de Compressão

Neste modelo, o raio do "Cap" circular é determinado de maneira que o "Cap" fique centrado em $(I_1 = \kappa, \|\eta\| = 0)$, e tangencie a envoltória exponencial de Drucker-Prager.

A idéia essencial do algoritmo computacional de $R_c(\kappa)$ é que se:

$$d^*(I_1, \kappa) = F_e^2(I_1) + \{I_1 - \kappa\}^2 \quad (4.27)$$

é a distância de mínimos quadrados Euclidiana de $(\kappa, 0)$ até a superfície $f_2 = 0$, então

$$\left. \frac{\partial d^*(I_1, \kappa)}{\partial I_1} \right|_{I_1^c} = 0. \quad (4.28)$$

Então, o objetivo é encontrar o valor $I_1^* = I_1^c(\kappa)$ para o qual esta condição seja satisfeita. Uma vez encontrada, i.e. $I_1^* = I_1^c$ então

$$R_c(\kappa) = \{d^*(I_1^c, \kappa)\}^{\frac{1}{2}}. \quad (4.29)$$

Assim, o quadrado da distância, do ponto P, pertencente à envoltória não linear de Drucker-Prager ver figura 4.3, até o par $(\kappa, 0)$ é dado por:

$$d(I_1, \kappa) = F_e^2(I_1) + \{I_1 - \kappa\}^2. \quad (4.30)$$

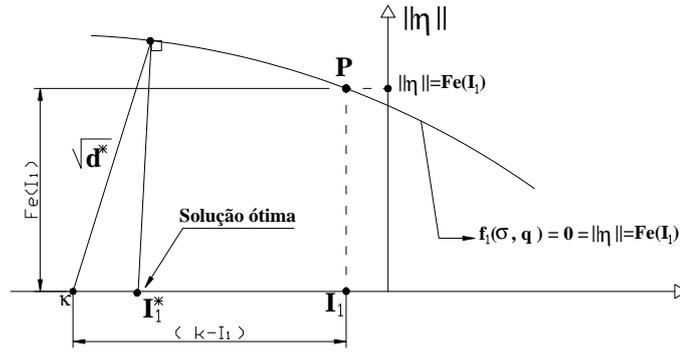


Figura 4.3: Solução ótima para raio do "Cap" de compressão.

Nota-se que: para cada κ , computa-se um ótimo I_1^c , i.e. $I_1^c = I_1^c(\kappa)$. E do critério de otimalidade, tem-se:

$$\left. \frac{\partial d}{\partial I_1} \right|_{I_1^c} = 0 \quad (4.31)$$

que é,

$$\{2\{I_1 - \kappa\} + 2F_e(I_1)F'_e(I_1)\}|_{I_1^c} = 0. \quad (4.32)$$

Dessa forma, o problema consiste em determinar o I_1^c que resolve o problema não linear: Encontrar I_1 solução de

$$g(I_1) = 0, \quad (4.33)$$

sendo:

$$g(I_1) = 2F_e(I_1)F'_e(I_1) + 2\{I_1 - \kappa\} \quad (4.34)$$

e

$$F_e(I_1) = \varsigma + \lambda \{1 - e^{(\beta I_1)}\}, \quad \text{com } I_1^c(\kappa) \leq I_1 \leq I_1^T, \quad (4.35)$$

$$F'_e(I_1) = -\lambda\beta e^{(\beta I_1)} \quad (4.36)$$

$$F''_e(I_1) = -\lambda\beta^2 e^{(\beta I_1)} \quad (4.37)$$

Conseqüentemente:

$$g'(I_1) = 2\{F'_e(I_1)F'_e(I_1) + F_e(I_1)F''_e(I_1) - 1\} \quad (4.38)$$

Assim, pode-se aplicar o método de Newton para obter I_1 . No apêndice B é mostrado o algoritmo usado para o cálculo dos I_1 e I_1^T . Para a superfície do "Cap" de tração, de raio fixo R^T , é necessário encontrar a abscissa I_1^T que delimita o ponto entre o "Cap" de tração e a envoltória de falha de Drucker-Prager. Esse ponto é facilmente encontrado pela aplicação do algoritmo I_1 , com o valor de $\kappa = 0$.

4.2.3 Atualização das Tensões e Determinação das Superfícies de Escoamento

O problema básico de integração das equações constitutivas elasto-plástica, num ponto material fixo, considera um intervalo de interesse $[0, t]$, e assume que no tempo $t_n \in [0, t]$ os tensores de deformação total e plástica são conhecidos, assim como as variáveis de encruamento – $\{\varepsilon_n, \varepsilon_n^p, \sigma_n, \kappa_n, \mathcal{X}_n^D\}$.

A deformação incremental $\Delta\varepsilon_{n+1}$ referente ao passo de tempo $[t_n, t_{n+1}]$ é prescrita. O problema consiste então na determinação das variáveis de estado, $\{\varepsilon_{n+1}^p, \sigma_{n+1}, \kappa_{n+1}, \mathcal{X}_{n+1}^D\}$, definidas no tempo t_{n+1} , que devem ser obtidas pela integração das equações constitutivas, na forma de taxas.

Algoritmo de Decomposição do Operador – (*operator split*)

O algoritmo geral do *operator split* para o problema elasto-plástico pode ser descrito em dois sub-problemas:

- 1. Previsor Elástico;
- 2. Corretor Plástico.

Dessa forma, eles são apresentados a seguir.

1. Previsor Elástico (elastic predictor)

Dada a história de deformação $\varepsilon(t)$, $t \in [t_n, t_{n+1}]$.

Encontrar $\varepsilon_{n+1}^{e\,trial}$ e $\vec{\alpha}_{n+1}^{trial}$, $\vec{\alpha}_{n+1}^{trial} = \{\varepsilon_{n+1}^{p\,trial}, \kappa_{n+1}^{trial}, \mathcal{X}_{n+1}^{D\,trial}\}$, solução de:

$$\dot{\varepsilon}^{e\,trial} = \dot{\varepsilon} \quad (4.39)$$

$$\vec{\alpha}^{trial} = 0. \quad (4.40)$$

As condições de estado iniciais são computadas do problema elasto-plástico em t_n , i.e.,

$$\varepsilon^{e\,trial}(t_n) = \varepsilon_n^e \quad (4.41)$$

$$\vec{\alpha}^{trial} = \vec{\alpha}_n. \quad (4.42)$$

A solução do previsor elástico no tempo t_{n+1} , denotado $\varepsilon_{n+1}^{e\,trial}$ e $\vec{\alpha}_{n+1}^{trial}$ define o chamado estado elástico teste (*elastic trial state*).

2. Corretor Plástico (plastic corrector problem)

Quando ocorre o escoamento o problema é elasto-plástico, e é formulado como sendo:
Encontrar $\vec{\alpha} = \{\varepsilon^p, \kappa, \mathcal{X}^D\}$ e ε^e que satisfazem as seguintes equações:

$$\dot{\varepsilon}^e + \dot{\varepsilon}^p = 0, \quad (4.43)$$

$$\dot{\varepsilon}^p = \sum_j \dot{\lambda}^j \frac{\partial f_j}{\partial \sigma}, \quad (4.44)$$

$$\dot{\kappa} = h'(\kappa) \text{tr}(\dot{\varepsilon}^p), \quad (4.45)$$

$$\dot{\mathcal{X}}^D = H \mathbb{I}_{dev} \dot{\varepsilon}^p, \quad (4.46)$$

com $\sigma = \mathbb{D}\varepsilon^e$.

Definindo as condições de carga/descarga, descritas por:

$$\dot{\lambda}^j \geq 0 \quad f_j \leq 0 \quad \text{e} \quad \dot{\lambda}^j f_j = 0, \quad \text{para} \quad j = 1...3 \quad (4.47)$$

e para $f_j = 0$, a condição de consistência:

$$\dot{\lambda}^j \dot{f}_j = 0 \quad (4.48)$$

No problema do corretor plástico, as condições iniciais são:

$$\varepsilon^e(t_n) = \varepsilon_{n+1}^{e\,trial} \quad (4.49)$$

$$\vec{\alpha}(t_n) = \vec{\alpha}_{n+1}^{trial}. \quad (4.50)$$

Verificação das Funções de Escoamento

A verificação das funções de escoamento é analisada segundo o algoritmo no quadro abaixo, e consiste na determinação de $f_{(j)}^{trial}$, $j = 1...3$, i.e.:

```

if { ( {f1}n+1trial > tol ) .or. ( {f2}n+1trial > tol ) .or. ( {f3}n+1trial > tol ) } then
  O incremento é elasto-plástico calculado no algoritmo plastic return mapping
  b) Resolver o plastic corrector
else
  a) Resolver o elastic predictor
  O incremento é elástico e o conjunto das variáveis de estado são:
  σn+1 = σn+1trial
  εn+1p = εn+1p,trial
  κn+1 = κn+1trial
  Xn+1D = Xn+1D,trial
end if

```

Analisadas e identificadas as funções de escoamento, deve-se proceder de acordo com

o problema em que se encontra a análise. Por isso são mostrados os esquemas para os algoritmos quando o problema é elástico e quando o problema é elasto-plástico.

Na figura 4.4 são mostrados os possíveis casos que podem ocorrer.

- Na figura 4.4a, a função de escoamento f_1 é violada pois $f_1 \leq 0$, e assim também são violadas $f_2 \leq 0$ e $f_3 \leq 0$;
- Na figura 4.4b, há o retorno do ponto para a superfície de Drucker-Prager, que fica no domínio do "Cap" de tração;
- Na figura 4.4c, há o retorno do ponto para a superfície de Drucker-Prager, que fica no domínio do "Cap" de compressão.

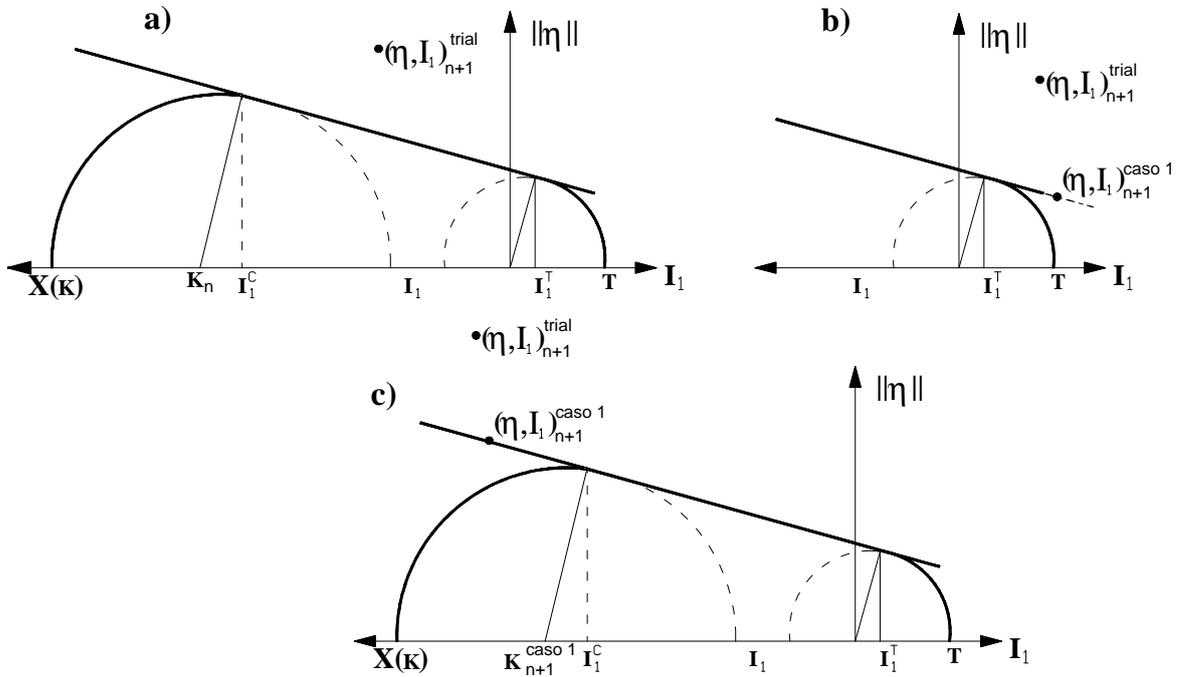


Figura 4.4: Determinação da superfície de escoamento ativa na atualização de tensões do estado elástico teste.

A seguir são mostrados os esquemas dos sub-problemas do *operator split*.

a) Esquema do Previsor Elástico

$$\varepsilon_{n+1}^{e^{trial}} = \varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n^p \quad (4.51)$$

A tensão elástica teste pode ser computada como:

$$\sigma_{n+1}^{trial} = \mathbb{D}\varepsilon_{n+1}^{e^{trial}}, \quad (4.52)$$

conseqüentemente,

$$\{I_1\}_{n+1}^{trial} = tr(\sigma_{n+1}^{trial}) \quad (4.53)$$

e a tensão deviatórica fica sendo:

$$\sigma_{n+1}^{D \text{ trial}} = \sigma_{n+1}^{\text{trial}} - \frac{1}{3} \text{tr}(\sigma_{n+1}^{\text{trial}}) I. \quad (4.54)$$

No passo do *elastic predictor*, o valor teste do parâmetro de encruamento do "Cap" κ e o tensor *back stress* \mathcal{X}^D permanecem inalterados durante o passo, pois:

$$\kappa_{n+1}^{\text{trial}} = \kappa_n \quad e \quad (4.55)$$

$$\mathcal{X}_{n+1}^{D \text{ trial}} = \mathcal{X}_n^D. \quad (4.56)$$

b) Esquema do Corretor Plástico

No esquema do corretor plástico (*plastic corrector*) usa-se o método de integração *implicit backward Euler*. Deve-se notar a maneira na qual o corretor plástico é calculado, pois ele dependerá de qual das superfícies de restrição foi ativada no escoamento.

Determinação da Superfície de Escoamento Ativa

Quando violada a superfície da envoltória de Drucker-Prager, conforme a figura 4.5, pode-se dizer que ambas as superfícies de escoamento do "Cap" de tração f_3 e do "Cap" de compressão f_2 são violadas, pois a superfície de Drucker-Prager f_1 envolve as superfícies desses "Cap". O conceito fundamental do algoritmo –Verificação das Funções de Escoamento é mostrado no apêndice B.

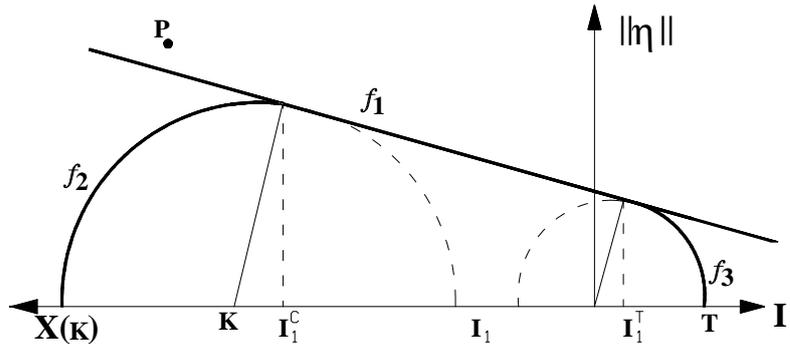
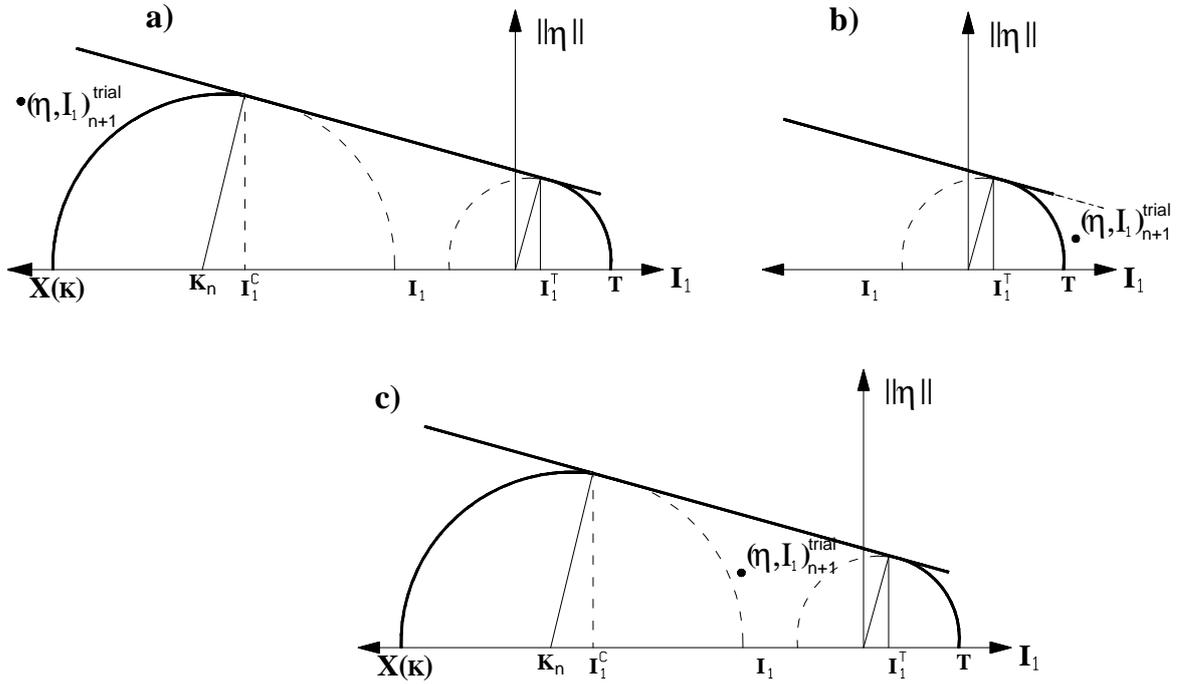


Figura 4.5: Pontos que violam f_1 , e, por consequência podem violar f_2 e f_3 .

Assim, quando $\{f_1\}_{n+1}^{\text{trial}} > \text{tol}$, qualquer uma das três superfícies poderá estar ativa. Devido à não linearidade da lei de encruamento de κ , não existe a priori um critério simples para determinação de qual das três restrições de escoamento estará ativa, baseado no estado de tensão elástico teste.

Entretanto, quando a superfície de escoamento f_1 não é violada, pode-se ter ainda a violação apenas de f_2 e f_3 . Na figura 4.6 são mostrados esses casos, dados por:

- Na figura 4.6a, são pontos de tensões teste que violam $f_2 \leq 0$ e ficam no domínio do "Cap" de compressão;
- Na figura 4.6b, são pontos de tensões teste que violam $f_3 \leq 0$ e ficam no domínio do "Cap" de tração;
- Na figura 4.6c, são pontos que violam $f_2 \leq 0$ e $f_3 \leq 0$ e ainda ficam no domínio elástico.


 Figura 4.6: Pontos que violam f_2 e f_3 .

No estado de tensão teste não é possível se determinar qual superfície de escoamento está ativa, faz-se tal determinação no estado de tensões atualizado.

Conseqüentemente, a projeção do ponto mais próximo à superfície de Drucker-Prager no mapeamento de retorno com tensão elástica teste é realizada e atualizada de κ de forma consistente, com a aplicação do mapeamento de retorno (deixando o valor denotado por $\kappa_{n+1}^{caso(1)}$), como mostrado na figura 4.4.

A solução do caso (1) figura 4.7, resulta em: $\{\varepsilon_{n+1}^{p(1)}, \sigma_{n+1}^{(1)}, \kappa_{n+1}^{(1)}, \mathcal{X}_{n+1}^{D(1)}\}$. Com $\kappa_{n+1}^{(1)}$ pode-se resolver I_1^c . Além do mais, com $\sigma_{n+1}^{(1)}$ pode-se computar o primeiro invariante $\{I_1\}_{n+1}^{(1)}$, i.e.

$$\{I_1\}_{n+1}^{(1)} = tr(\sigma_{n+1}^{(1)}) \quad (4.57)$$

É importante notar, correspondentemente à figura 4.6, que é possível para o estado de tensão elástica teste σ_{n+1}^{trial} violar uma ou ambas $f_2 \leq 0$ e $f_3 \leq 0$ mas não violar $f_1 \leq 0$.

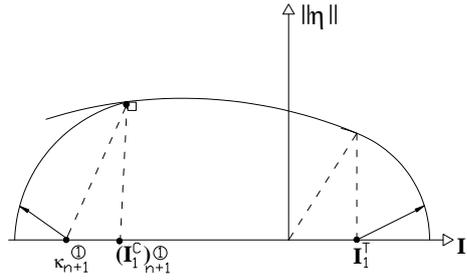


Figura 4.7: Solução do caso 1 - cômputo do primeiro invariante

Nesse caso, deve-se determinar se o caso (2) ou o caso (3) está ativo. Um critério baseado na localização do valor do ponto da tensão teste de $\{I_1\}_{n+1}^{trial}$ com respeito a I_1^T e $I_1^c(\kappa_n)$ é também fornecido.

Enfim, para verificação da superfície de escoamento, deve ser analisado se existe superfície de escoamento ativa e qual delas está ativa. Assim é formulado um algoritmo capaz de analisar essas superfícies levando em conta seus valores, e que é mostrado no apêndice B.

A seguir são apresentados as descrições de cada algoritmo utilizado nos casos 1, 2 e 3.

4.2.4 Algoritmos de Integração das Superfícies de Escoamento

Algoritmo de Integração para o Caso (1)

Usando o algoritmo de integração de *Euler backward method*, o novo ponto da tensão teste σ_{n+1}^{trial} é calculado via corretor plástico, retornando à superfície $f_1 = 0$. A taxa de deformação plástica é dada por:

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\gamma}_1 \frac{\partial f_1}{\partial \sigma} \quad (4.58)$$

sendo:

$$f_1(\sigma, \mathcal{X}^D) = \|\eta\| - F_e(I_1), \quad (4.59)$$

$$\eta = \sigma^D - \mathcal{X}^D, \quad (4.60)$$

$$\sigma^D = \sigma - \frac{1}{3} \text{tr}(\sigma) I, \quad (4.61)$$

$$F_e(I_1) = \varsigma + \lambda \{1 - e^{(\beta I_1)}\}. \quad (4.62)$$

e,

$$F_e'(I_1) = \frac{d}{dI_1} (F_e(I_1)) = -\lambda \beta e^{(\beta I_1)}, \quad (4.63)$$

A componente deviatórica normalizada do vetor normal \mathbb{N} à envoltória de Drucker-Prager no espaço de tensões, é dada por:

$$\mathbb{N} = \frac{\eta}{\|\eta\|} \quad (4.64)$$

Assim,

$$\Delta \varepsilon_{n+1}^p = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \dot{\varepsilon}^p dt \simeq \left. \frac{\partial f_1}{\partial \sigma} \right|_{n+1} \Delta \gamma_1, \quad (4.65)$$

$$\Delta \varepsilon_{n+1}^p = \Delta \gamma_1 \{ \mathbb{N} - (F_e') I \} \quad (4.66)$$

Da equação constitutiva tensão-deformação para materiais isotrópicos tem-se:

$$\sigma = \mathbb{D} \varepsilon^e \quad (4.67)$$

sendo:

$$\mathbb{D} = 2G \mathbb{I}_{dev} + K (I \otimes I), \quad (4.68)$$

$$\mathbb{I}_{dev} = \left\{ \mathbb{I} - \frac{1}{3} (I \otimes I) \right\}, \quad (4.69)$$

assim a deformação elástica teste pode ser escrita como:

$$\varepsilon_{n+1}^e = \varepsilon_{n+1}^{e^{trial}} - \Delta \gamma_1 \{ \mathbb{N} - F_e' I \}. \quad (4.70)$$

Desta forma, a tensão atualizada passa a ser dada por:

$$\sigma_{n+1} = \mathbb{D} \varepsilon_{n+1}^e = \mathbb{D} \varepsilon_{n+1}^{e^{trial}} - \Delta \gamma_1 \mathbb{D} \{ \mathbb{N} - (F_e') I \} \quad (4.71)$$

e definindo:

$$\sigma_{n+1}^{trial} = \mathbb{D} \varepsilon_{n+1}^{e^{trial}} \quad (4.72)$$

e sabendo que:

$$\mathbb{D} \mathbb{N} = 2G \mathbb{N} \quad (4.73)$$

$$\mathbb{D} I = 3K I. \quad (4.74)$$

Pode-se ainda reescrever 4.71 como:

$$\sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^{trial} - 2G \Delta \gamma_1 \mathbb{N}_{n+1} + 3K F_e' (\{I_1\}_{n+1}) \Delta \gamma_1 I. \quad (4.75)$$

Similarmente à atualização da tensão σ_{n+1} , a equação de evolução do *backstress*, 4.26, é dada por:

$$\mathcal{X}_{n+1}^D = \mathcal{X}_n^D + \Delta \gamma_1 H \mathbb{N}_{n+1}. \quad (4.76)$$

As porções deviatória e do traço da tensão atualizada são escritas por:

$$(I_1)_{n+1} = \{I_1\}_{n+1}^{trial} + 9K F_e' \Delta \gamma_1 \quad (4.77)$$

$$\sigma_{n+1}^D = \sigma_{n+1}^{D trial} - 2G \mathbb{N}_{n+1} \Delta \gamma_1 \quad (4.78)$$

sendo $G = \mu$, $G -$ é o módulo cisalhante e μ é a constante de Lamé.

Combinando as equações 4.75 e a 4.78 temos uma expressão para a atualização do tensor normal à envoltória:

$$\|\eta_{n+1}\| = \left| \|\eta_{n+1}^{trial}\| - \{2G + H\} \Delta\gamma_1 \right|. \quad (4.79)$$

Para completar a atualização de tensão, o parâmetro de consistência plástico $\Delta\gamma_1$ deve ser calculado tal que as tensões fiquem na superfície de Drucker-Prager $f_1 = 0$.

Resumo

O mapeamento de retorno plástico (*plastic return mapping*) se reduz à solução do seguinte conjunto de equações não lineares:

Encontrar $\{\Delta\gamma_1, \{I_1\}_{n+1}\}$ solução de:

$$F_1(\mathfrak{X}) = - \left| \|\eta_{n+1}^{trial}\| - \{2G + H\} \Delta\gamma_1 \right| + \varsigma + \lambda \left\{ 1 - e^{\beta\{I_1\}_{n+1}} \right\} = 0 \quad (4.80)$$

e

$$F_2(\mathfrak{X}) = \{I_1\}_{n+1} - \{I_1\}_{n+1}^{trial} + 9K \Delta\gamma_1 \lambda \beta e^{\beta\{I_1\}_{n+1}} = 0. \quad (4.81)$$

Uma vez que $\{I_1\}_{n+1}$ e $\Delta\gamma_1$ são calculados, tem-se:

$$\eta_{n+1} = \left\{ 1 - \frac{\{2G + H\} \Delta\gamma_1}{\|\eta_{n+1}^{trial}\|} \right\} \eta_{n+1}^{trial}, \quad (4.82)$$

$$\mathcal{X}_{n+1}^D = \mathcal{X}_n^D + \Delta\gamma_1 H \frac{\eta_{n+1}^{trial}}{\|\eta_{n+1}^{trial}\|}; \quad (4.83)$$

$$\sigma_{n+1}^D = \sigma_{n+1}^{D trial} - 2G \Delta\gamma_1 \frac{\eta_{n+1}^{trial}}{\|\eta_{n+1}^{trial}\|}; \quad (4.84)$$

e assim obtém-se:

$$\sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^D + \frac{1}{3} (\{I_1\}_{n+1}) I. \quad (4.85)$$

Entretanto, conhecendo $\Delta\gamma_1$ e σ_{n+1} , o parâmetro do "Cap" de compressão κ pode ser atualizado resolvendo a equação não linear abaixo:

$$\kappa_{n+1} = \kappa_n - 3\Delta\gamma_1 h'(\kappa_{n+1}) F_e'(\{I_1\}_{n+1}) \quad (4.86)$$

sendo: $h'(\kappa_{n+1})$ dado por:

$$h'(\kappa_{n+1}) = \frac{e^{-[D_I \chi(\kappa_{n+1})]}}{W D_I \chi'(\kappa_{n+1})} \quad (4.87)$$

com

$$\chi(\kappa_{n+1}) = \kappa_{n+1} - R_c(\kappa_{n+1}) \quad (4.88)$$

e

$$\chi'(\kappa_{n+1}) = 1 - R'_c(\kappa_{n+1}) \quad (4.89)$$

$$F'_e(\{I_1\}_{n+1}) = -\lambda \beta e^{\beta\{I_1\}_{n+1}}. \quad (4.90)$$

Afim de resolver a equação não linear, aplica-se o método de Newton. Definindo $P(\kappa)$ tal que:

$$P(\kappa) = \kappa - \kappa_n + 3\Delta\gamma_1 (F'_e)_{n+1} \frac{e^{(-D_I[\kappa - R_c(\kappa)])}}{W D_I [1 - R'_c(\kappa)]}, \quad (4.91)$$

O problema consiste então, na determinação de $\bar{\kappa}$ tal que $|P(\bar{\kappa})| < tol$. A solução do problema não linear é descrito pelo algoritmo cálculo de κ , mostrado no apêndice B. A determinação de $P'(\kappa^i)$ será fundamental para o cálculo de $\bar{\kappa}$, então:

$$P'(\kappa) = 1 + \frac{3\Delta\gamma_1 \{F'_e\}_{n+1}}{W D_I} \left\{ -D_I e^{[-D_I \chi(\kappa)]} + \frac{R''_c(\kappa) e^{[-D_I \chi(\kappa)]}}{\{\chi'(\kappa)\}^2} \right\} \quad (4.92)$$

Determinação da Matriz Tangente Local Caso (1)

Para resolver o sistema não linear é necessária a determinação da matriz tangente local

Definindo $\vec{z} = (\Delta\gamma_1, I_1)$, determina-se $[K_T]_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial z_j}$, i.e.

$$[K_T]_{11} = \frac{\partial F_1}{\partial \Delta\gamma_1} = \begin{cases} 2G + H, & \text{if } (\|\eta_{n+1}^{trial}\| - \{2G + H\} \Delta\gamma_1) > 0 \\ -\{2G + H\}, & \text{if } (\|\eta_{n+1}^{trial}\| - \{2G + H\} \Delta\gamma_1) \leq 0 \end{cases} \quad (4.93)$$

$$[K_T]_{12} = \frac{\partial F_1}{\partial z_2} = \frac{\partial F_1}{\partial I_1} = -\lambda\beta e^{\beta I_1} \quad (4.94)$$

$$[K_T]_{21} = \frac{\partial F_2}{\partial z_1} = \frac{\partial F_2}{\partial \Delta\gamma_1} = 9 K \beta \lambda e^{\beta I_1} \quad (4.95)$$

$$[K_T]_{22} = \frac{\partial F_2}{\partial z_2} = \frac{\partial F_2}{\partial I_1} = 1 + 9 K \beta^2 \lambda e^{\beta I_1} \Delta\gamma_1 \quad (4.96)$$

Algoritmo de Integração para o Caso (2)

No caso do "Cap" de compressão estar ativo, o previsor elástico da tensão deverá retornar à superfície do "Cap" de compressão, pois a superfície é geralmente transladada, aumentando ou diminuindo durante o processo do *return mapping*.

Se I_1 estiver entre $I_1^c(\kappa)$ e $\chi(\kappa)$ a superfície do "Cap" de compressão estará ativa, então no caso do processo de carga acarretar no deslocamento de I_1 em direção à origem, a superfície do "Cap" de compressão será atualizada, movendo-se para dentro do eixo I_1 com o decréscimo do raio. Por outro lado, se I_1 mover em direção contrária à origem, a então a superfície do "Cap" de compressão transladará para fora do eixo de I_1 com incremento do raio $R_c(\kappa)$.

No caso (2) tem-se:

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\gamma}_2 \frac{\partial f_2}{\partial \sigma}, \quad (4.97)$$

assim:

$$\Delta \varepsilon_n^p = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \dot{\varepsilon}^p dt \simeq \Delta \dot{\gamma}_2 \frac{\partial f_2}{\partial \sigma}. \quad (4.98)$$

A função da superfície de escoamento para o caso (2) é dada por

$$f_2 = \|\eta\|^2 - F_c(I_1, \kappa) \quad (4.99)$$

e sua derivada, em relação à tensão, é:

$$\frac{\partial f_2}{\partial \sigma_{ij}} = 2\eta_{ij} - \frac{\partial F_c(I_1, \kappa)}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \sigma_{ij}}. \quad (4.100)$$

Como para o modelo de "Cap"Suave, a função é reescrita como sendo:

$$F_c(I_1, \kappa) = R_c(\kappa)^2 - \{I_1 - \kappa\}^2 \quad (4.101)$$

e,

$$\frac{\partial F_c(I_1, \kappa)}{\partial \sigma_{ij}} = -2\{I_1 - \kappa\} \delta_{ij}. \quad (4.102)$$

Como resultado,

$$\Delta \varepsilon_{n+1}^p = \Delta \gamma_2 \{2\eta + 2\{I_1 - \kappa\} I\}_{n+1} = \Delta \gamma_2 \left\{ 2\eta - \frac{\partial F_c}{\partial I_1} I \right\}_{n+1}. \quad (4.103)$$

Fazendo uso das equações constitutivas da tensão-deformação 4.67 e 4.68, da equação de evolução da deformação 4.51, e das relações obtidas em 4.73 e 4.74 tem-se como resultado, para a equação de evolução da tensão, o seguinte:

$$\sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^{trial} + 3K \Delta \gamma_2 \left. \frac{\partial F_c}{\partial I_1} \right|_{n+1} I - 4G \Delta \gamma_2 \eta_{n+1}. \quad (4.104)$$

Decompondo a tensão, atualizada acima, em componentes deviatórica e volumétrica obtém-se:

$$\sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^D + \frac{1}{3} \{I_1\}_{n+1} I \quad (4.105)$$

assim,

$$\sigma_{n+1}^D + \frac{1}{3} \{I_1\}_{n+1} I = \sigma_{n+1}^{D trial} + \frac{1}{3} \{I_1\}_{n+1}^{trial} I + 3K \Delta \gamma_2 \left. \frac{\partial F_c}{\partial I_1} \right|_{n+1} I - 4G \Delta \gamma_2 \eta_{n+1}. \quad (4.106)$$

Tomando-se o operador traço em ambos lados da equação 4.106, tem-se:

$$\{I_1\}_{n+1} = \{I_1\}_{n+1}^{trial} + 9K \Delta\gamma_2 \left. \frac{\partial F_c}{\partial I_1} \right|_{n+1} \quad (4.107)$$

e, como resultado,

$$\sigma_{n+1}^D = \sigma_{n+1}^{D trial} - 4G \Delta\gamma_2 \eta_{n+1}. \quad (4.108)$$

Similarmente, as equações de evoluções do parâmetro do "Cap" de compressão κ e do tensor *back stress* \mathcal{X}^D são dados por:

$$\dot{\kappa} = h'(\kappa) tr(\dot{\varepsilon}^p), \quad (4.109)$$

$$\dot{\mathcal{X}}^D = H \mathbb{I}_{dev} \dot{\varepsilon}^p. \quad (4.110)$$

Desta forma, integrando 4.109 e 4.110 de t_n a t_{n+1} e empregando o método do *backward Euler*, obtem-se:

$$\kappa_{n+1} = \kappa_n - 3 \{h'(\kappa)\}_{n+1} \Delta\gamma_2 \left. \frac{\partial F_c}{\partial I_1} \right|_{n+1} \quad (4.111)$$

$$\mathcal{X}_{n+1}^D = \mathcal{X}_n^D + 2H \Delta\gamma_2 \eta_{n+1} \quad (4.112)$$

Tomando-se a diferença entre 4.108 e 4.112 resulta em:

$$\eta_{n+1} = \sigma_{n+1}^D - \mathcal{X}_{n+1}^D = \sigma_{n+1}^{D trial} - 4G \Delta\gamma_2 \eta_{n+1} - \mathcal{X}_n^D - 2H \Delta\gamma_2 \eta_{n+1} \quad (4.113)$$

$$\eta_{n+1} = \frac{\eta_{n+1}^{trial}}{\{1 + 2\Delta\gamma_2 \{2G + H\}\}} \quad (4.114)$$

com

$$\eta_{n+1}^{trial} = \sigma_{n+1}^{D trial} - \mathcal{X}_{n+1}^{D trial} \quad e \quad (4.115)$$

$$\|\eta_{n+1}\| = \frac{\|\eta_{n+1}^{trial}\|}{|1 + 2\Delta\gamma_2 \{2G + H\}|}. \quad (4.116)$$

Note que, sendo $F_c(I_1, \kappa) = R_c(\kappa)^2 - \{I_1 - \kappa\}^2$, obtém-se:

$$\frac{\partial F_c(I_1, \kappa)}{\partial I_1} = -2 \{I_1 - \kappa\}. \quad (4.117)$$

O objetivo do corretor plástico, para atualização de tensões no caso (2), consiste na determinação de $\{\Delta\gamma_2, \{I_1\}_{n+1}, \kappa_{n+1}\}$ que satisfazem:

$$F_1(\mathfrak{X}) = \{I_1\}_{n+1} - \{I_1\}_{n+1}^{trial} + 18K \Delta\gamma_2 \{\{I_1\}_{n+1} - \kappa_{n+1}\} = 0 \quad (4.118)$$

$$F_2(\mathfrak{X}) = \kappa_{n+1} - \kappa_n - 6 h'(\kappa_{n+1}) \Delta\gamma_2 \{\{I_1\}_{n+1} - \kappa_{n+1}\} = 0 \quad (4.119)$$

$$F_3(\mathfrak{X}) = \frac{\|\eta_{n+1}^{trial}\|^2}{\{1 + 2\Delta\gamma_2 \{2G + H\}\}^2} - F_c(\{I_1\}_{n+1}, \kappa_{n+1}) = 0 \quad (4.120)$$

Seja $\vec{z} = (\{I_1\}_{n+1}, \kappa_{n+1}, \Delta\gamma_2)$ definido como o vetor de incógnitas. O problema consiste na solução do conjunto de equações não lineares, dados em 4.118, 4.119 e 4.120, definidos em termos de \vec{z} . Aqui, uma vez que $\vec{z} = (\{I_1\}_{n+1}, \kappa_{n+1}, \Delta\gamma_2)$ é computada, determina-se:

$$\varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n^p + \Delta\gamma_2 \left\{ 2\eta_{n+1} - \frac{\partial F_c}{\partial I_1} \Big|_{n+1} I \right\}, \quad (4.121)$$

$$\eta_{n+1} = \frac{\eta_{n+1}^{trial}}{\{1 + 2\Delta\gamma_2 \{2G + H\}\}}, \quad (4.122)$$

$$\mathcal{X}_{n+1}^D = \mathcal{X}_n^D + 2H\Delta\lambda_2 \eta_{n+1}, \quad (4.123)$$

$$\sigma_{n+1}^D = \eta_{n+1} + \mathcal{X}_{n+1}^D = \sigma_{n+1}^{D \text{ trial}} - 4G\Delta\gamma_2 \eta_{n+1} \quad (4.124)$$

e finalmente

$$\sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^D + \frac{1}{3} \{I_1\}_{n+1} I. \quad (4.125)$$

Determinação da Matriz Tangente Local Caso (2)

A matriz tangente local, definida por $[K_T]_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial z_j}$ é dada por:

$$[K_T]_{11} = \frac{\partial F_1}{\partial \{I_1\}_{n+1}} = 1 + 18K \Delta\gamma_2, \quad (4.126)$$

$$[K_T]_{12} = \frac{\partial F_1}{\partial \kappa_{n+1}} = -18K \Delta\gamma_2, \quad (4.127)$$

$$[K_T]_{13} = \frac{\partial F_1}{\partial \Delta\gamma_2} = 18 K \{ \{I_1\}_{n+1} - \kappa_{n+1} \}, \quad (4.128)$$

$$[K_T]_{31} = \frac{\partial F_3}{\partial \{I_1\}_{n+1}} = -\frac{\partial F_c}{\partial \{I_1\}_{n+1}}, \quad (4.129)$$

$$[K_T]_{32} = \frac{\partial F_3}{\partial \kappa_{n+1}} = -\frac{\partial F_c}{\partial \kappa_{n+1}}, \quad (4.130)$$

$$[K_T]_{33} = \frac{\partial F_3}{\partial \Delta\gamma_2} = -4 \frac{\{2G + H\} \|\eta_{n+1}^{trial}\|^2}{\{1 + 2\Delta\gamma_2 \{2G + H\}\}^3}. \quad (4.131)$$

Sendo $F_c = R_c(\kappa_{n+1})^2 - \{ \{I_1\}_{n+1} - \kappa_{n+1} \}^2$, obtém-se:

$$\frac{\partial F_c}{\partial \kappa_{n+1}} = 2 R_c(\kappa_{n+1}) R'_c(\kappa_{n+1}) + 2 \{ \{I_1\}_{n+1} - \kappa_{n+1} \} \quad (4.132)$$

e

$$\frac{\partial F_c}{\partial \{I_1\}_{n+1}} = -2 \{ \{I_1\}_{n+1} - \kappa_{n+1} \}. \quad (4.133)$$

Então as demais componentes da matriz tangente local são dada por :

$$[K_T]_{21} = \frac{\partial F_2}{\partial \{I_1\}_{n+1}} = -6 h'(\kappa_{n+1}) \Delta\gamma_2 \quad (4.134)$$

$$[K_T]_{23} = \frac{\partial F_2}{\partial \Delta\gamma_2} = -6 h'(\kappa_{n+1}) \{ \{I_1\}_{n+1} - \kappa_{n+1} \} \quad (4.135)$$

$$[K_T]_{22} = \frac{\partial F_2}{\partial \kappa_{n+1}} = 1 + 6 h'(\kappa_{n+1}) \Delta\gamma_2 - 6 h''(\kappa_{n+1}) \Delta\gamma_2 \{ \{I_1\}_{n+1} - \kappa_{n+1} \}. \quad (4.136)$$

Algoritmo de Integração para o Caso (3)

Quando a superfície do "Cap" de tração está ativa, ou quando o ponto retorna para o caso (2) ficando no domínio do "Cap" de tração, então a tensão deve ser retornada para a superfície de tração. Nesse caso tem-se:

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\gamma}_3 \frac{\partial f_3}{\partial \sigma} \quad (4.137)$$

assim,

$$\Delta \varepsilon_n^p = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \dot{\varepsilon}^p dt \simeq \Delta \gamma_3 \frac{\partial f_3}{\partial \sigma} \quad (4.138)$$

sendo:

$$f_3 = \|\eta\|^2 - F_t(I_1), \quad (4.139)$$

$$F_t(I_1) = R_T^2 - I_1^2, \quad I_1 > I_1^T. \quad (4.140)$$

Então a derivada de f_3 com relação a σ é dado por:

$$\frac{\partial f_3}{\partial \sigma_{ij}} = 2\eta_{ij} - \frac{\partial F_t(I_1)}{\partial \sigma_{ij}} \quad (4.141)$$

sendo:

$$\frac{\partial F_t(I_1)}{\partial \sigma_{ij}} = -2I_1 \delta_{ij}. \quad (4.142)$$

Deste resultado obtém-se:

$$\Delta \varepsilon_{n+1}^p = \Delta \gamma_3 \left[2\eta_{n+1} - \frac{\partial F_t}{\partial I_1} \Big|_{n+1} I \right] \quad (4.143)$$

e,

$$\sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^{trial} - \Delta \gamma_3 \left\{ 4G\eta_{n+1} - 3K \frac{\partial F_t}{\partial I_1} \Big|_{n+1} I \right\}. \quad (4.144)$$

Da decomposição da tensão em componentes deviatórica e volumétrica tem-se:

$$\sigma_{n+1}^D = \sigma_{n+1}^{D trial} - 4G \Delta \gamma_3 \eta_{n+1}, \quad (4.145)$$

$$\eta_{n+1} = \frac{\eta_{n+1}^{trial}}{\{1 + 2\{2G + H\} \Delta\gamma_3\}}, \quad (4.146)$$

$$\{I_1\}_{n+1} = \{I_1\}_{n+1}^{trial} - 18K \Delta\gamma_3 \{I_1\}_{n+1}, \quad (4.147)$$

e,

$$\{I_1\}_{n+1} = \frac{\{I_1\}_{n+1}^{trial}}{\{1 + 18K \Delta\gamma_3\}}. \quad (4.148)$$

Integrando as equações de evolução para o parâmetro κ do "Cap" e para o *back stress*, no intervalo de t_n a t_{n+1} , tem-se:

$$\kappa_{n+1} = \kappa_n - 3h'(\kappa_{n+1}) \Delta\gamma_3 \left. \frac{\partial F_t}{\partial I_1} \right|_{n+1} \quad (4.149)$$

e,

$$\mathcal{X}_{n+1}^D = \mathcal{X}_n^D + 2H \Delta\gamma_3 \eta_{n+1}. \quad (4.150)$$

O objetivo principal do *return mapping* é assegurar a condição de consistência plástica. Nesse caso, $\Delta\gamma_3 \neq 0$, resolve-se

$$\begin{aligned} f_3(\mathfrak{N})_{n+1} &= \|\eta_{n+1}\|^2 - F_t(\{I_1\}_{n+1}) = 0 \\ &= \frac{\|\eta_{n+1}^{trial}\|^2}{\{1 + 2\{2G + H\} \Delta\gamma_3\}^2} - R_T^2 + \frac{\{\{I_1\}_{n+1}^{trial}\}^2}{\{1 + 18K \Delta\gamma_3\}^2} \\ &= \mathfrak{S}(\Delta\gamma_3) = 0 \end{aligned} \quad (4.151)$$

Assim o problema pode ser formulado como: Encontrar $\Delta\gamma_3$ tal que $\mathfrak{S}(\Delta\gamma_3) = 0$.

Para resolver o problema aplica-se o método de Newton conforme algoritmo cálculo de $\Delta\gamma_3$ descrito no apêndice B.

Sendo:

$$\frac{d\mathfrak{S}}{d\Delta\gamma_3} = -\frac{4[2G + H]\|\eta_{n+1}^{trial}\|^2}{\{1 + 2\{2G + H\} \Delta\gamma_3\}^3} - \frac{36K \{\{I_1\}_{n+1}^{trial}\}^2}{\{1 + 18K \Delta\gamma_3\}^3} \quad (4.152)$$

Uma vez que $\Delta\gamma_3$ é computado, pode-se atualizar:

$$\eta_{n+1} = \frac{\eta_{n+1}^{trial}}{\{1 + 2\{2G + H\} \Delta\gamma_3\}}, \quad (4.153)$$

$$\mathcal{X}_{n+1}^D = \mathcal{X}_n^D + 2H \Delta\gamma_3 \eta_{n+1}, \quad (4.154)$$

$$\sigma_{n+1}^D = \eta_{n+1} + \mathcal{X}_{n+1}^D = \sigma_{n+1}^{D trial} - 4G \Delta\gamma_3 \eta_{n+1}, \quad (4.155)$$

$$\{I_1\}_{n+1} = \frac{\{I_1\}_{n+1}^{trial}}{\{1 + 18K \Delta\gamma_3\}}, \quad (4.156)$$

Resolução do Parâmetro do "Cap" de Compressão Atualizado κ_{n+1} Neste caso é necessário resolver um problema não linear em κ_{n+1} . Seja

$$F(\kappa_{n+1}) = \kappa_{n+1} - \kappa_n + 3 h'(\kappa_{n+1}) \Delta\gamma_3 \left. \frac{\partial F_t}{\partial I_1} \right|_{n+1} = 0 \quad (4.157)$$

tal que

$$\left. \frac{\partial F_t}{\partial I_1} \right|_{n+1} = -2 \{I_1\}_{n+1} \quad (4.158)$$

e,

$$h'(\kappa_{n+1}) = \frac{e^{[-D_I \chi(\kappa_{n+1})]}}{W D_I \chi'(\kappa_{n+1})}. \quad (4.159)$$

O problema consiste então na determinação de $\bar{\kappa}_{n+1}$, solução de $F(\kappa_{n+1}) = 0$, algoritmo também mostrado no apêndice B.

Sendo:

$$F'(\kappa_{n+1}) = 1 + 3h''\kappa_{n+1} \Delta\gamma_3 \left. \frac{\partial F_t}{\partial I_1} \right|_{n+1}. \quad (4.160)$$

4.3 Propriedades Materiais para o "Cap"

O objetivo desta seção é analisar as propriedades materiais para o modelo do "Cap" Suave e identificar suas relações com a geomecânica clássica, tal como as propriedades de Mohr-Coulomb e modelo linear de Drucker-Prager.

4.3.1 Modelo de Mohr-Coulomb

A função de escoamento agregada ao modelo não associativo de Mohr-Coulomb é dada em função das tensões principais, $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.

$$f(\sigma, c) = \{\sigma_1 - \sigma_3\} + \{\sigma_1 + \sigma_3\} \operatorname{sen}(\phi) - 2c \cos(\phi) \quad (4.161)$$

A coesão é assumida dependente do acúmulo de deformação plástica, i.e.,

$$c = c(\bar{\varepsilon}^p) \quad (4.162)$$

sendo $\bar{\varepsilon}^p$ é o acúmulo de deformação plástica.

O potencial de fluxo empregado para este modelo não associativo é dado por :

$$\Psi(\sigma, c) = \{\sigma_1 - \sigma_3\} + \{\sigma_1 + \sigma_3\} \operatorname{sen}(\bar{\phi}) - 2c \cos(\bar{\phi}) \quad (4.163)$$

sendo ϕ ângulo de atrito, e, $\phi \neq \bar{\phi}$, este denota o ângulo de dilatância.

4.3.2 Modelo Linear de Drucker-Prager

Sua função de escoamento é dada por:

$$f(\sigma, c) = \|\eta\| - \{\varsigma - \theta I_1\} \quad (4.164)$$

$$f(\sigma^D, \sigma^H) = \sqrt{J_2(\sigma^D)} + \theta I_1 = \varsigma \quad (4.165)$$

sendo: $I_1 = tr(\sigma)$.

O modelo linear de Drucker-Prager pode ser representado como na figura abaixo. Percebe-se que θ representa a inclinação da envoltória linear de Drucker-Prager, sendo a equação da envoltória dada por:

$$\|\eta\| = \{\varsigma - \theta I_1\} \quad (4.166)$$

com

$$\frac{\partial \|\eta\|}{\partial I_1} = -\theta.$$

O potencial de fluxo, empregado no modelo não associativo é dado por:

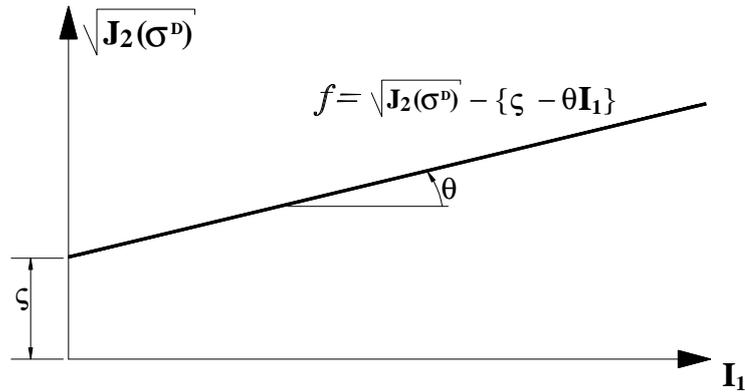


Figura 4.8: Critério de Drucker-Prager.

$$\Psi(\sigma, c) = \|\eta\| + \bar{\theta} I_1. \quad (4.167)$$

4.3.3 Relação entre as Propriedades

Para descrever completamente o modelo de Mohr-Coulomb é necessário identificar os seguintes parâmetros materiais $\{\phi, c, \bar{\phi}\}$. Mais especificamente, a função de escoamento requer o conhecimento de $\{\phi, c\}$. No caso do modelo linear de Drucker-Prager é necessário identificar $\{\theta, \varsigma, \bar{\theta}\}$, sendo necessários para função de escoamento o conhecimento dos valores de $\{\theta, \varsigma\}$.

Com estes casos, pode-se ter a seguinte relação: Chen e Saleeb (1982).

$$\theta = \frac{\sqrt{2c} \operatorname{tg}(\phi)}{3 \left\{1 + \frac{4}{3} \operatorname{tg}^2(\phi)\right\}^{\frac{1}{2}}} \quad (4.168)$$

$$\varsigma = \frac{\sqrt{2c}}{\left\{1 + \frac{4}{3} \operatorname{tg}^2(\phi)\right\}^{\frac{1}{2}}}, \quad (4.169)$$

$$c = \frac{\varsigma}{\sqrt{2}} \left\{1 + \frac{4}{3} \operatorname{tg}^2(\phi)\right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (4.170)$$

$$\operatorname{tg}(\phi) = \frac{3\theta}{\sqrt{2}} \left\{1 - 6\theta^2\right\}^{-\frac{1}{2}}. \quad (4.171)$$

4.3.4 Modelo de "Cap" Suave

No modelo de "Cap" Suave são definidos os seguintes critérios de escoamento:

$$f_1(\sigma, \mathcal{X}^D) = \|\eta\| - F_e(I_1) \leq 0,$$

$$f_2(\sigma, \mathcal{X}^D, \kappa) = \|\eta\|^2 - F_c(I_1, \kappa) \leq 0,$$

$$f_3(\sigma, \mathcal{X}^D) = \|\eta\|^2 - F_t(I_1) \leq 0.$$

As formas específicas de F_e , F_c e F_t são definidas como:

$$F_e(I_1) = \varsigma + \lambda [1 - e^{(\beta I_1)}], \quad \text{com } I_1^c(\kappa) \leq I_1 \leq I_1^T,$$

$$F_c(I_1, \kappa) = R_c^2(\kappa) - \{I_1 - \kappa\}^2, \quad \text{com } I_1 \leq I_1^c(\kappa),$$

$$F_t(I_1) = R_T^2 - I_1^2, \quad \text{com } I_1 \geq I_1^T.$$

No modelo de "Cap" são necessários os seguintes parâmetros materiais:

$$\{\{\varsigma, \lambda, \beta\}, \{W, D_I\}, H\}$$

Os parâmetros $\{\varsigma, \lambda, \beta\}$ são necessários para determinação da função de escoamento; $\{W, D_I\}$ são necessários para a caracterização da equação de evolução da variável interna κ ;

H é necessário para a caracterização da equação de evolução do tensor back-stress \mathcal{X}^D .

Interpretação Física dos Parâmetros de Encruamento

A lei de encruamento isotrópico desse modelo deriva do fato da curva de esmagamento volumétrico (deformação volumétrica plástica ε_v^p versus I_1) ser da forma exponencial:

$$\varepsilon_v^p = tr(\varepsilon^p) = -W \{1 - e^{[D_I \chi(\kappa)]}\}.$$

A lei de encruamento cinemático é implementada com a introdução de uma variável interna do tensor de segunda ordem \mathcal{X}^D , o qual tem a seguinte equação de evolução:

$$\dot{\mathcal{X}}^D = H \mathbb{I}_{dev} \dot{\varepsilon}^p$$

Nessa equação é necessário a identificação do parâmetro material H .

Observação:

No caso de carregamento monotônico, a lei de encruamento do solo pode ser proposta apenas com o encruamento isotrópico. Assim pode-se excluir a regra de encruamento cinemática do modelo, fazendo $H = 0$.

Equação Constitutiva Tensão-Deformação

Afim de caracterizar a resposta elástica do solo tem-se:

$$\sigma = \mathbb{D}\varepsilon^e$$

sendo:

$$\mathbb{D} = 2G\mathbb{I}_{dev} + K(I \otimes I),$$

G - módulo cisalhante e K - módulo volumétrico.

Para um material elástico linear tem-se as seguintes relações:

$$G = \frac{E}{2\{1 + \nu\}} = \frac{3KE}{9K - E} = \frac{3K\{1 - 2\nu\}}{2\{1 + \nu\}}$$

e

$$K = \frac{E}{3\{1 - 2\nu\}} = \frac{GE}{3\{3G - E\}} = \frac{2G\{1 + \nu\}}{3\{1 - 2\nu\}}.$$

4.3.5 Valores Iniciais das Variáveis Internas

Para representar um modelo de "Cap"Suave, emprega-se duas equações de evolução: uma para κ e outra para \mathcal{X}^D . Assim, propondo integrar estas equações é necessário se ter a condição inicial. Nesse caso:

$$\mathcal{X}^D(0) = 0$$

e

$$\kappa(0) = \bar{\kappa}_0, \quad \text{para um dado } \bar{\kappa}_0 < 0.$$

Considerando uma linearização da função de escoamento da envoltória F_e , após uma expansão em Taylor no ponto $(0 = \beta I_1)$, pode-se chegar à seguinte relação:

$$F_e(I_1) = \varsigma - \lambda \beta I_1 \left\{ 1 + \frac{\beta I_1}{2} + \frac{(\beta I_1)^2}{6} + \dots \frac{(\beta I_1)^{n-1}}{n!} + \dots \right\}.$$

Como:

$$\|\eta\| = F_e(I_1)$$

tem-se:

$$\frac{d \|\eta\|}{d I_1} = F'_e(0) = -\lambda \beta \equiv -\theta.$$

Então, $\theta = \lambda \beta$ é a inclinação da envoltória em $I_1 = 0$.

Observação:

Se $\{\beta I_1\} \ll 1$, i.e., se para um valor máximo de pressão hidrostática aplicada I_1^{\max} o parâmetro β é tal que $\{\beta I_1\} \ll 1$ num dado processo de carga, então:

$$F_e(I_1) \simeq \{\varsigma - \lambda \beta I_1\} = \{\varsigma - \theta I_1\},$$

o que caracteriza a envoltória linear de Drucker-Prager. Assim, conhecendo o parâmetro θ da envoltória linear de Drucker-Prager para um β suficientemente pequeno, pode-se obter λ como:

$$\lambda = \frac{\theta}{\beta}. \quad (4.172)$$

Capítulo 5

Resultados

Neste capítulo são mostrados alguns exemplos simulados para validar a teoria utilizada nos modelos elasto-plásticos – modelo J_2 e modelo de "Cap".

O trabalho consistiu basicamente na implementação desses modelos elasto-plásticos na estrutura de um programa em Fortran. Esse programa já é utilizado e vem sofrendo incrementos na sua estrutura de programação a cada novo trabalho orientado pelo professor Krajnc. Assim, rotinas como a do cálculo de elementos finitos já estão implementadas.

O programa é de fácil operação, e, consiste numa entrada de dados: informações de malha, de propriedades dos materiais e das condições iniciais dos problemas de valores iniciais, além de parâmetros internos do programa. Estes últimos servem para identificar rotinas "*case*", nas quais pode-se optar entre estado plano de tensão ou deformação, por exemplo.

Para se obter as informações de malha do problema de elementos finitos foi utilizado um programa de geração automática de malha – chamado GID –, que permite um pré e um pós- processamento.

Uma dificuldade encontrada na geração de malhas foi o fato de se ter malhas homogêneas. Assim, teve-se que fazer uso de simulações com grande quantidade de elementos para que a quantidade usada fosse suficiente nas regiões de interesse.

Observação:

O fato de se ter malhas com muitos elementos torna-se cara a análise do problema. O ideal seria a geração de malhas que tivessem bastantes elementos nas regiões de concentração – de maior efeito das variáveis internas –, e, poucos elementos nas regiões de pequena influência para o resultado.

5.1 Exemplos Numéricos do Modelo J_2 com Dano Isotrópico

Antes de iniciar o processo de simulações numéricas em estados planos, procurou-se verificar o modelo J_2 usando um problema no qual as tensões se reduzem a um modelo uniaxial, simulando um ensaio de tração com carregamento prescrito. A idéia é levantar algumas curvas com as variáveis elasto-plásticas, para se fazer um comparativo com as bibliografias pesquisadas.

5.1.1 Exemplo Uniaxial (EPT)

Neste modelo usou-se apenas 2 elementos tri3 como mostra a figura abaixo que contém a malha e as condições de contorno da modelagem. O carregamento prescrito foi um carregamento na forma de deslocamento $\bar{u} = 5,55 m$. Na tabela abaixo são mostradas as propriedades adotadas para o modelo.

Tabela 5.1: Propriedades físicas e geométricas: Exemplo Uniaxial

Físicas		Geométricas	
$E = 200.000 MPa$	$\nu = 0,3$	$l_1 = 1 m$	$l_2 = 1 m$
$\sigma_y = 410 MPa$	$R_\infty = 800 MPa$		
$b = 1$	$S_\infty = 7 MPa$	$nume = 2$	$numno = 6$
$\varepsilon_{pd} = 0,01$	$s_\infty = 2$	$ts = 3000$	$\bar{u} = 5,55 m$

Observação:

Toda vez que se referir no texto as variáveis $numno$ e $nume$ são dados do problema de elementos finitos, respectivamente, número de nós e número de elementos. A variável ts indica o número de "time steps", passos no tempo.

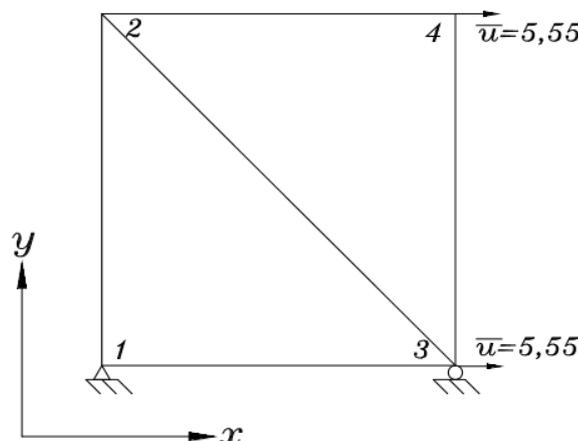


Figura 5.1: Exemplo Uniaxial – Estado Uniaxial de Tensões.

Resultados

Na figura 5.2 são mostrados os deslocamentos U_x e U_y . As evoluções de tensão e deformação são apresentadas segundo gráfico tensão σ_x por deformação plástica ε_x^p , o dano é apresentado no gráfico Dano versus Deformação Plástica.

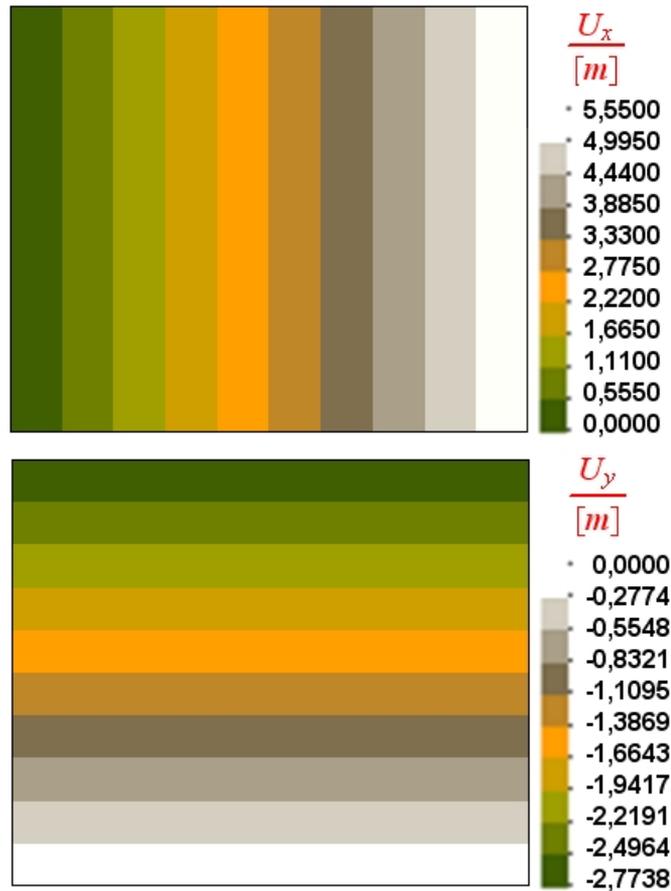


Figura 5.2: Deslocamentos U_x e U_y – Exemplo Uniaxial.

Nesse problema não foi estabelecido um valor para o dano crítico, então o dano pode atingir seu valor máximo próximo de 1. A medida que o dano começa a evoluir numa região próximo à 1, $5 \varepsilon_x^p$, a tensão decresce, figura 5.3.

Entretanto, o início do dano já ocorre em $\varepsilon_x^p \cong 0,5$, e enquanto o dano é pequeno, há um aumento na tensão de escoamento em R_∞ devido ao encruamento isotrópico.

No gráfico da figura 5.4 é mostrada a evolução do encruamento isotrópico R com a deformação plástica ε_x^p . É esperado que se tenha uma evolução do encruamento conforme a equação abaixo:

$$R = R_\infty \left\{ 1 - e^{-[b\varepsilon_x^p]} \right\} \quad (5.1)$$

Porém, nota-se que o valor teórico da função de encruamento proposta pela equação 5.1 é diferente do valor calculado no modelo, pois a variável de dano influencia, gerando um valor menor para o encruamento final.

O modelo se mostrou bastante eficiente e robusto. É possível se obter um avanço das variáveis elasto-plásticas até se atingir um valor de dano igual a 1, indicando que é capaz de captar a resposta de um material até sua ruptura.

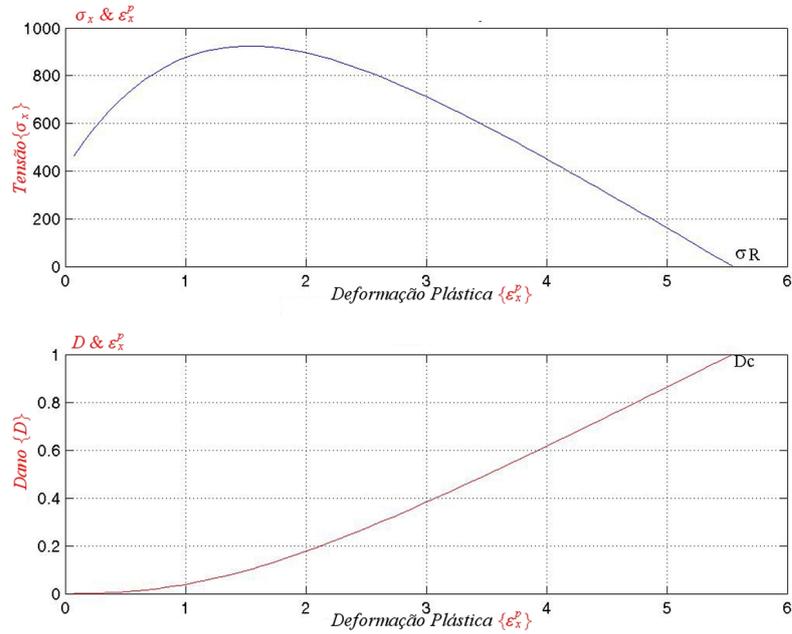


Figura 5.3: Gráficos : σ_x & ε_x^p e D & ε_x^p – Exemplo Uniaxial.

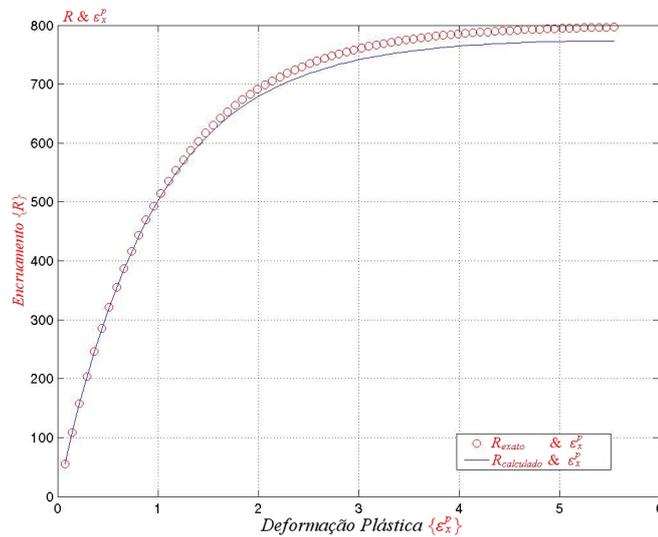


Figura 5.4: Gráfico : R & ε_x^p – Exemplo Uniaxial.

5.1.2 Problemas Testados

Dentre os problemas estabelecidos para análise e validação do modelo de plasticidade J_2 com encruamento isotrópico e dano acoplado têm-se:

1. Viga plana em flexão;
2. Placa em flexão;
3. Eixo cilíndrico;
4. Placa com furo excêntrico;
5. Fundação em bloco rígido (sapata) corrida¹;
6. Fundação em sapata circular.

Viga plana em flexão (EPT)

O problema a ser resolvido trata-se de uma viga em balanço, com carregamento na extremidade livre. A figura 5.5 ilustra o problema modelado, estado plano de tensões, com carregamento monotônico.

O material da viga considerada é um aço com as seguintes propriedades²:

Tabela 5.1: Propriedades físicas e geométricas: Viga Plana em flexão.

Físicas		Geométricas	
$E = 205.000 \text{ MPa}$	$\nu = 0,3$	$b = 1 \text{ cm}$	$h = 20 \text{ cm}$
$\sigma_y = 250 \text{ MPa}$	$R_\infty = 2000 \text{ MPa}$	$L = 200 \text{ cm}$	
$b = 1$	$S_\infty = 0,5 \text{ MPa}$	$numno = 4545$	$nume = 2162$
$\varepsilon_{pd} = 0,01$	$s_\infty = 2$	$ts = 200$	$P = 21 \text{ kN}$



Figura 5.5: Viga em balanço (EPT).

¹Neste exemplo, os parâmetros dos materiais estão calibrados para o modelo de aço, mas servirão de comparação para o modelo de "Cap" em estudo à frente. Contudo, o exemplo representa a distribuição de tensão num bloco de aço em EPD.

²As unidades utilizadas neste exemplo são: $[MPa]$ para constantes materiais, $[cm]$ para o domínio e $[kN]$ para a carga. Assim:

$$1 \text{ Pa} = \frac{1 \text{ N}}{\text{m}^2} \rightarrow 1 \text{ MPa} = \frac{1 \text{ MN}}{\text{m}^2}$$

$$1 \text{ MPa} = \frac{1000 \text{ kN}}{\text{m}^2} = \frac{0,1 \text{ kN}}{\text{cm}^2}$$

As variáveis de dano foram calibradas segundo propriedades identificadas por Lemaitre & Sermage (1997) para dano dútil, porém utilizando o parâmetro $\varepsilon_{pd} = 0,1$ estabelecido por eles, a influência do dano é pequena. Para se evidenciar o efeito do dano, optou-se por calibrar a taxa de acúmulo de deformação plástica num valor menor (em 10%), $\varepsilon_{pd} = 0,01$.

Neste modelo, enquanto o comportamento é elástico pode-se determinar a tensão máxima solicitante e a flecha máxima obtida na linha neutra, desprezando-se a deformação por cisalhamento, dados por:

$$\sigma_x = \frac{PL}{I}y \quad e \quad y_{máx} = \frac{PL^3}{3EI} \quad (5.2)$$

Como $b = 1$, e para uma etapa de carga ts têm-se as seguintes simplificações para as fórmulas 5.2, Beer & Johnston (1982) :

$$\sigma_x = ts \frac{6PL}{h^2} \quad e \quad y_{máx} = ts \frac{4PL^3}{Eh^3} \quad (5.3)$$

Calculando os valores de σ_x e $y_{máx}$ para um $ts = 20\%$ de P , obtém-se:

$$\sigma_x = 0,2 \times \frac{6 \times 21 \times 200}{20^2} = 12,6 \frac{kN}{cm^2} = 126 MPa \quad (5.4)$$

$$y_{máx} = 0,2 \times \frac{4 \times 21 \times 200^3}{20.500 \times 20^3} = 0,8195cm \quad (5.5)$$

Os resultados obtidos no modelo J₂, são mostrados nas figuras 5.6, 5.7 e 5.8 a seguir:

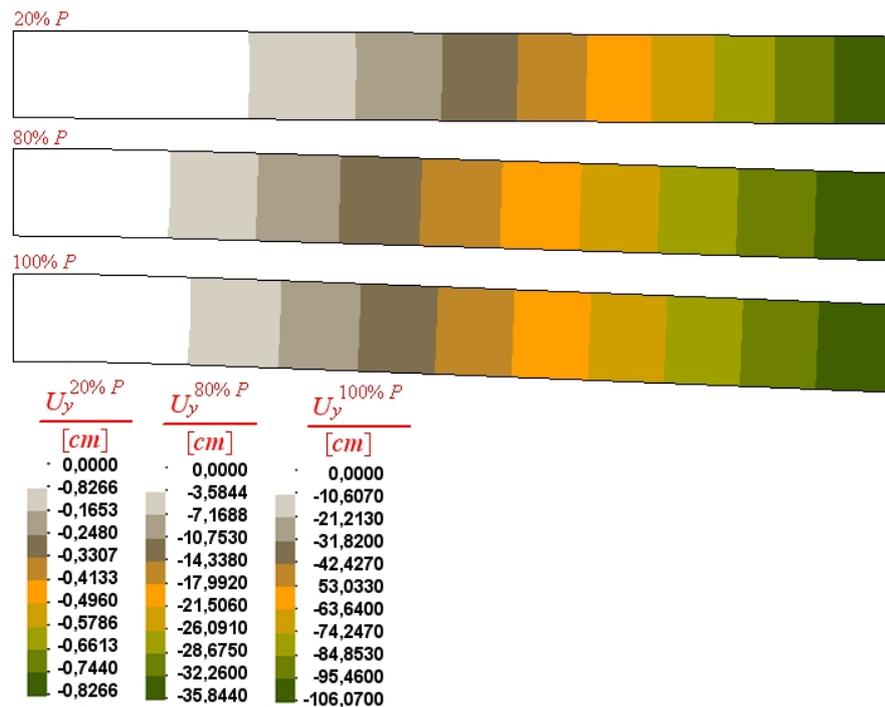


Figura 5.6: Evolução de U_y ao longo do carregamento – Viga em flexão.

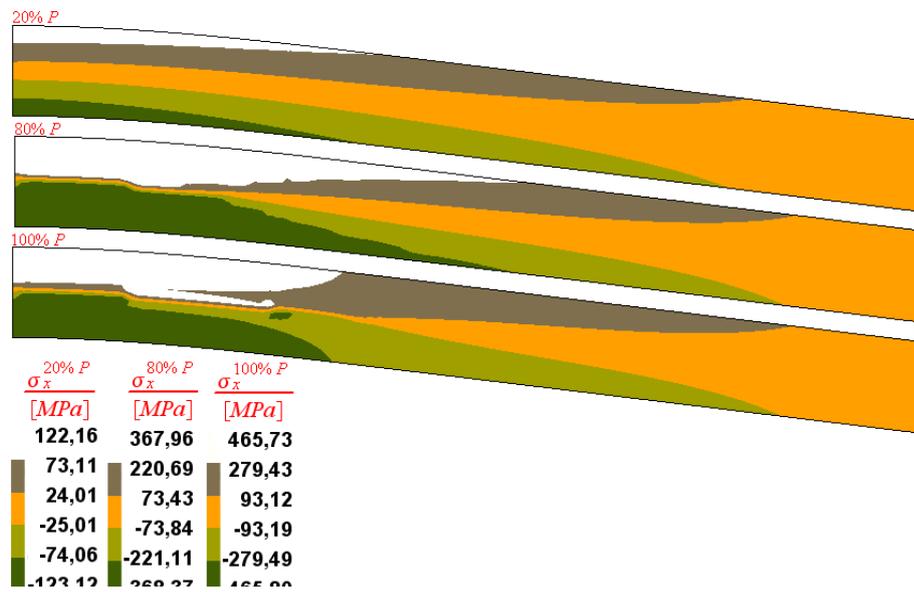


Figura 5.7: Evolução de σ_x ao longo do carregamento – Viga em flexão.

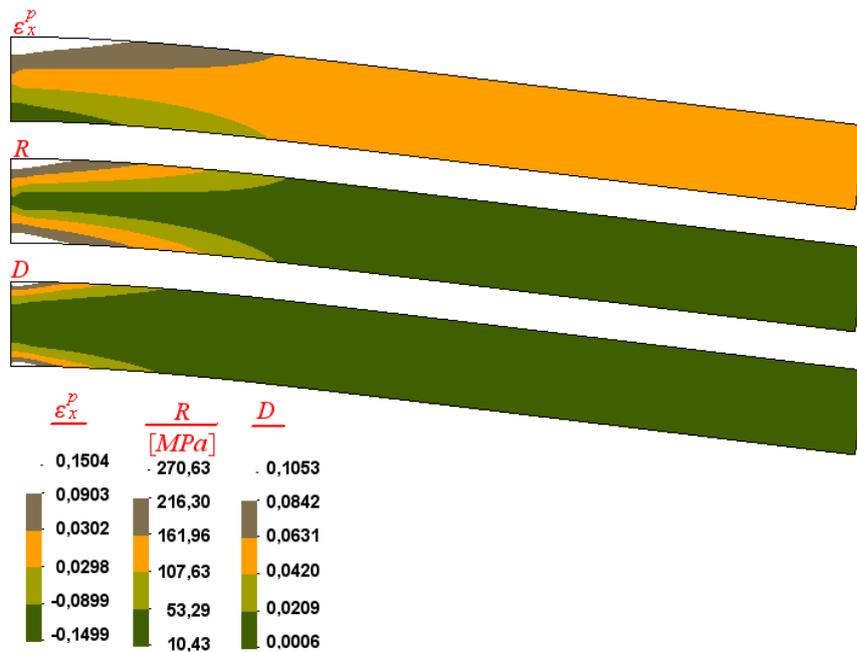


Figura 5.8: Distribuição da deformação plástica ϵ_x^p , do encruamento R e do Dano D – Viga em flexão.

Um gráfico mostrando a evolução dos deslocamentos U_y por incrementos de carga também é mostrado na figura 5.9:

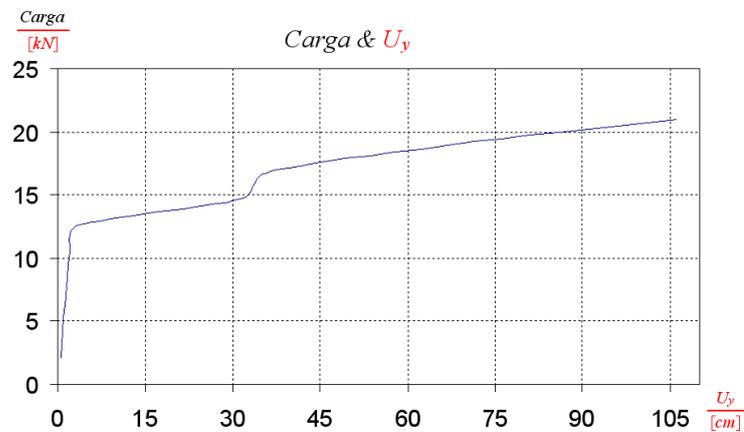


Figura 5.9: Gráfico: Carga & Deslocamento – Viga em flexão.

Na figura 5.10 são mostrados os gráficos σ_x & ε_x^p e D & ε_x^p , no ponto/nó mais solicitado.

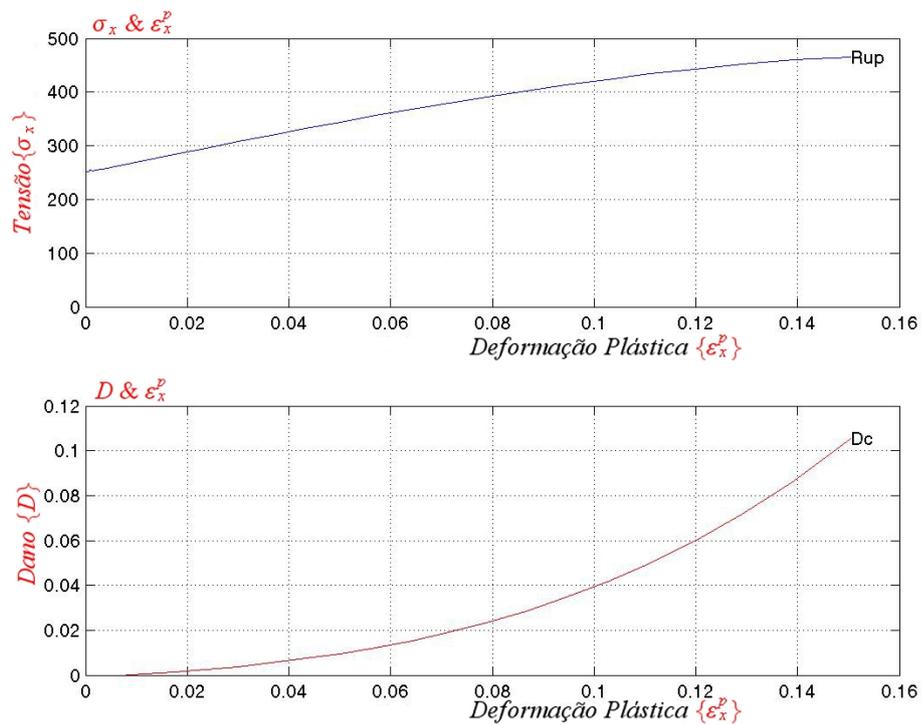


Figura 5.10: Gráficos : σ_x & ε_x^p e D & ε_x^p – Viga em flexão.

Conclusões: exemplo viga em flexão

Pode-se notar que houve uma concentração de tensão no engaste da viga, desencadeando nessa região um acúmulo de todas as variáveis plásticas internas do problema: tensões de tração (fibras superiores), tensões de compressão (fibras inferiores), deformações plásticas, encruamento e dano isotrópico em ambas extremidades da seção. O valor de dano obtido para nesse exemplo foi da ordem $D = 0.105$.

Os valores de tensão σ_x e flecha $y_{m\acute{a}x}$ no regime elástico foram: $\sigma_x = 123,10 \text{ MPa}$ e $y_{m\acute{a}x} = 0,827 \text{ cm}$, que dá um erro em torno de 2,36% para tensão e 0,86% para deslocamento, comparado com a resposta analítica, pois:

$$\text{erro}[\%] = \left\{ \frac{\text{analítico} - \text{calculado}}{\text{calculado}} \right\} \times 100 \quad (5.6)$$

O encruamento atingiu um valor maior do que o esperado, uma saturação do seu valor próxima de R_∞ . Analisando o resultado da tensão máxima obtida, tensão de fratura, verifica-se que a tensão atingiu um valor de $(\sigma_y + R_\infty) = 465,8 \text{ MPa}$, com uma saturação para o valor de R em torno de $270,6 \text{ MPa}$. A tensão só não foi maior, um valor de $(\sigma_y + R) = (250 + 270,6) = 520,6 \text{ MPa}$ devido ao dano de 0,105 que ocorreu.

No gráfico da figura ??, também se percebe o efeito que o dano causa na curva Carga & Deslocamento. A partir de um deslocamento $U_y = 31,511 \text{ cm}$ – etapa de carga de 70%, ocorre um pico na curva, o dano faz que a carga seja ampliada.

Placa em flexão (EPD)

O problema a ser resolvido trata-se de uma placa em balanço com carregamento na extremidade livre, similar ao problema anterior da viga em flexão, como mostra figura 5.11. O material da placa considerada é um aço com as seguintes propriedades:

Tabela 5.3: Propriedades físicas e geométricas: Placa em flexão.

Físicas		Geométricas	
$E = 205.000 \text{ MPa}$	$\nu = 0,3$	$b = 1 \text{ m}$	$h = 0,2 \text{ m}$
$\sigma_y = 250 \text{ MPa}$	$R_\infty = 2000 \text{ MPa}$	$L = 2 \text{ m}$	
$b = 1$	$S_\infty = 0,5 \text{ MPa}$	$numno = 4545$	$nume = 2162$
$\varepsilon_{pd} = 0,01$	$s_\infty = 2$	$ts = 200$	$P = 21 \text{ kN/m}$

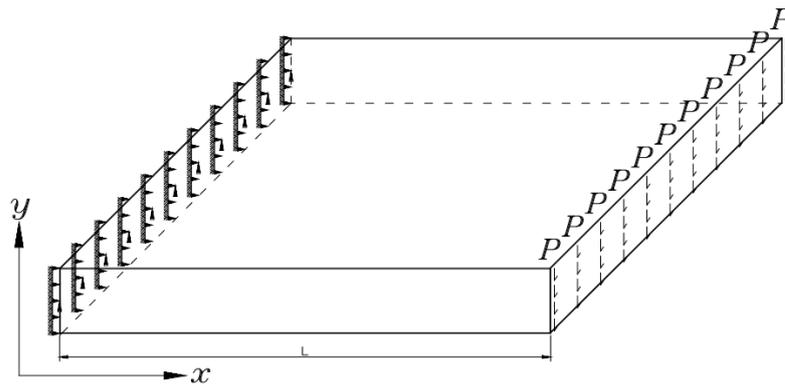


Figura 5.11: Placa em flexão.

Os resultados são mostrados na figuras 5.12, 5.13 e 5.14. Utilizou-se as mesmas propriedades físicas e geométricas do exemplo da viga, porém agora análise passa a ser em estado plano de deformação, com carregamento dado por metro.

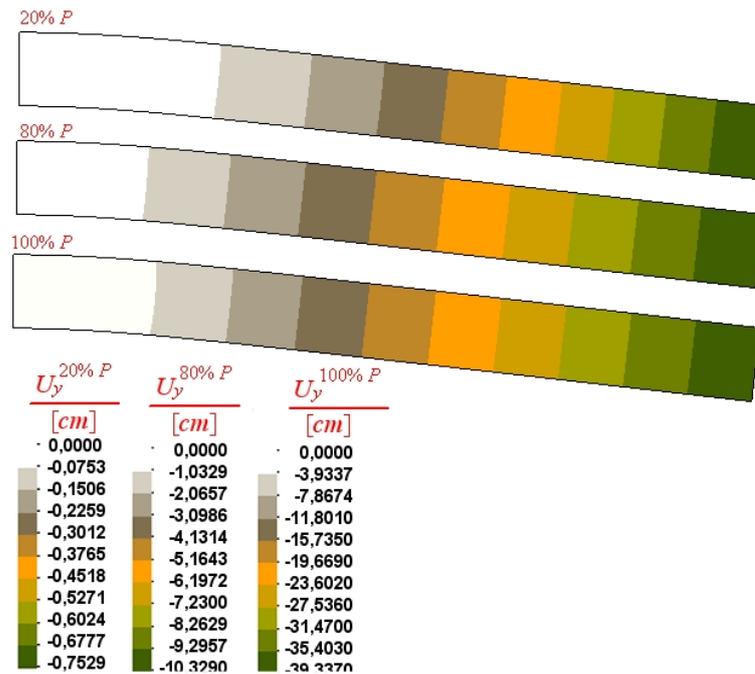


Figura 5.12: Evolução de U_y ao longo do carregamento – Placa em flexão.

Na figura 5.15 são mostrados os gráficos σ_x e ε_x^p e D e ε_x^p , no ponto/nó mais solicitado.

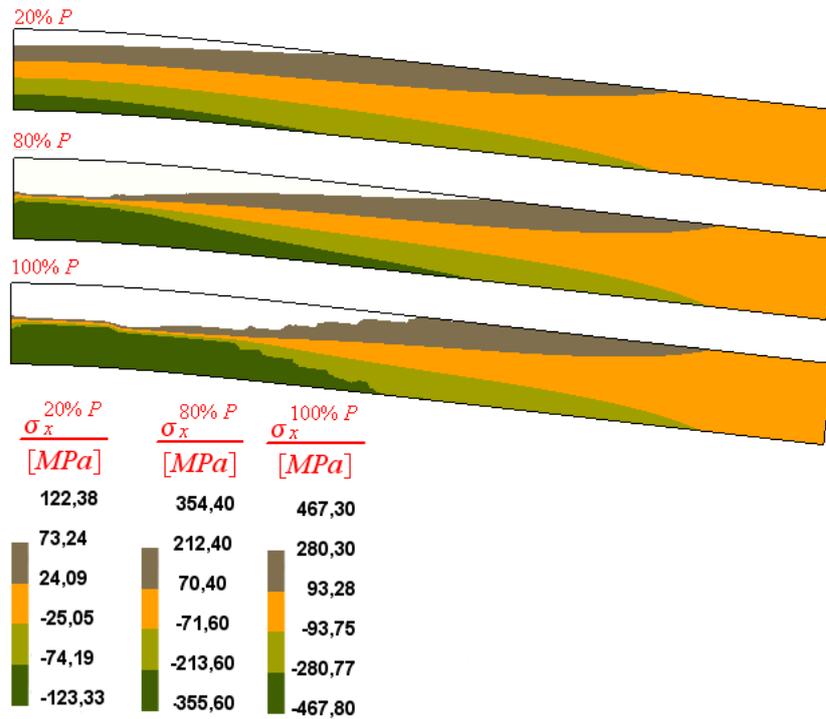


Figura 5.13: Evolução de σ_x ao longo do carregamento – Placa em flexão.

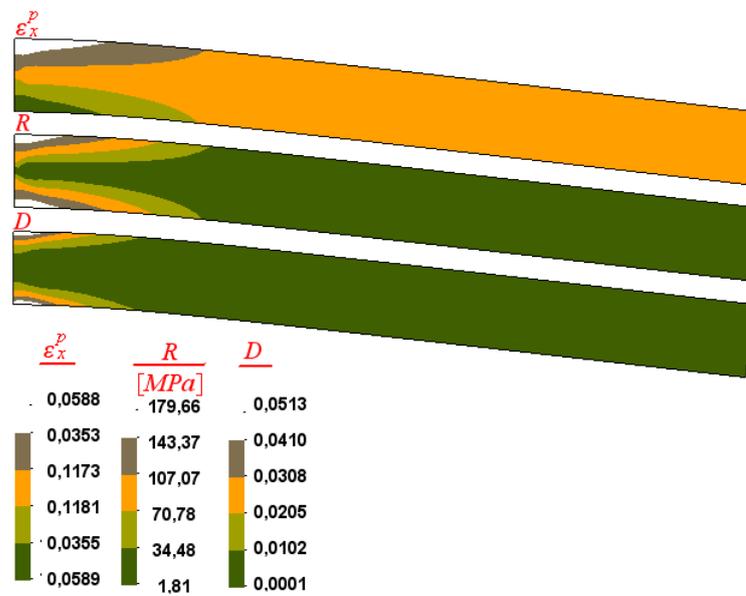


Figura 5.14: Distribuição da deforma plástica ϵ_x^p , do encruamento R e do Dano D – Placa em flexão.

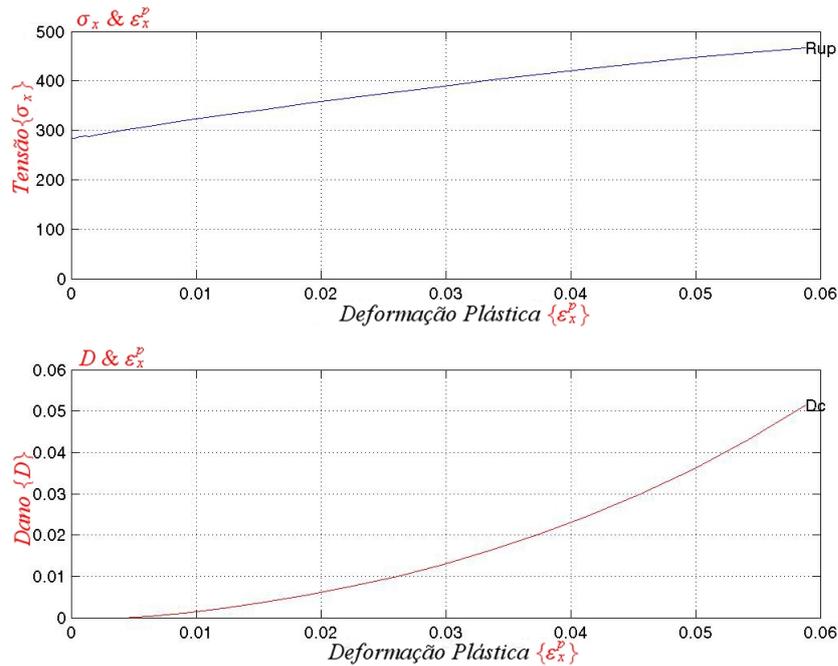


Figura 5.15: Gráficos : $\sigma_x \& \varepsilon_x^p$ e $D \& \varepsilon_x^p$ – Placa em flexão.

Conclusões: exemplo placa em flexão

Como no exemplo anterior, a forma de evolução das variáveis plásticas foi a mesma. Entretanto, pode-se notar as diferenças de uma modelagem do estado plano de tensão para uma modelagem do estado plano de deformação. No primeiro, EPT, devido à hipótese de se fazer $\sigma_z = 0$, a evolução das deformações foram maiores para um mesmo nível de carga no EPD, e, a evolução das variáveis plásticas foi mais evidente.

Já no segundo, devido ao modelo ser estado plano de deformações, nota-se que as tensões foram mais pronunciadas por causa da componente de tensão σ_z inserida no tensor tensão. Em contrapartida, as deformações foram menores no EPD, e, para um mesmo nível de carga o dano foi menor. Isto se deve, ao fato de que a massa do corpo a ser submetida é maior no plano de deformações. Na tabela abaixo é feito um comparativo entre os resultados obtidos para cada caso.

Tabela 5.4: Comparativo entre estados planos de tensão e deformação.

Variável	EPT	EPD
U_y	-106,07 cm	-39,34 cm
σ_x	465,8 MPa	467,8 MPa
ε_x	0,15	0,06
R	270,6 MPa	79,7 MPa
D	0,105	0,05

Eixo cilíndrico chanfrado (Axissimétrico)

Neste exemplo, o modelo J_2 de Lemaitre com dano acoplado é usado para simular a iniciação da fratura de um cilindro sujeito à carregamento axial de alongamento – prescrição de deslocamento. A geometria do problema, condições de contorno e malha de elementos finitos são dados pela figura 5.16. Na discretização da malha considerou-se apenas 1/4 de barra com propriedades e condições de simetria. Os parâmetros usados foram extraídos segundo dados de Benallal *et al* (1987).

Tabela 5.5: Propriedades físicas e geométricas: Eixo cilíndrico chanfrado.

Físicas		Geométricas	
$E = 210.000 \text{ MPa}$	$\nu = 0,3$	$Raio = 10 \text{ mm}$	$h = 100 \text{ mm}$
$\sigma_y = 620 \text{ MPa}$	$R_\infty = 4200 \text{ MPa}$		
$b = 1$	$S_\infty = 3,5 \text{ MPa}$	$numno = 3115$	$nume = 1482$
$\varepsilon_{pd} = 0,01$	$s_\infty = 2$	$ts = 100$	$\bar{u} = 0,50 \text{ mm}$

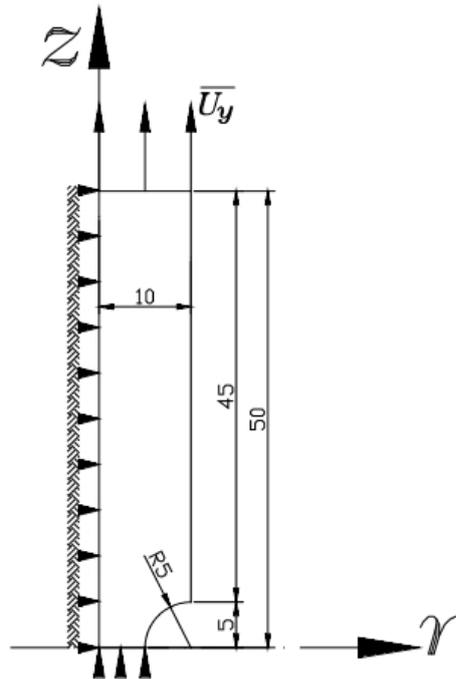


Figura 5.16: Eixo chanfrado (axissimétrico).

O cilindro foi submetido a um deslocamento prescrito $u = 0,5 \text{ mm}$, para o qual se obteve um dano da ordem de $D = 0,37$ como mostra a figura 5.17. A localização do dano se deu ao redor do centro do chanfro. Nessa figura, também são mostrados os máximos valores para as variáveis de interesse com 20% da carga total, tais como: a tensão σ_y , a deformação plástica ε_y^p , o encruamento isotrópico R e o dano D .

No gráfico 5.18 são mostrados os gráficos σ_y & ε_y^p e D & ε_y^p , na direção de y ou seja na direção de z para o caso do problema axissimétrico.

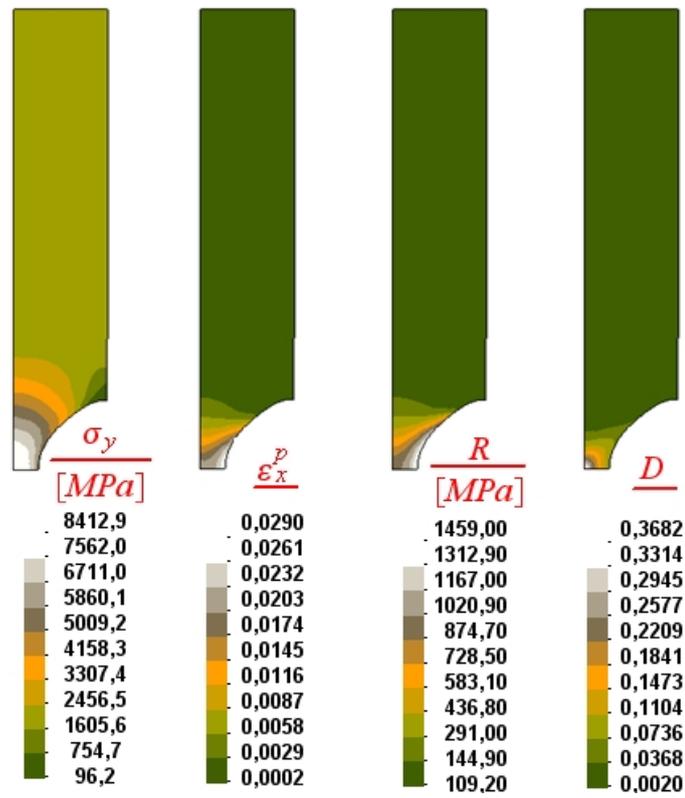


Figura 5.17: Distribuição de σ_y , ϵ_x^p , R e D – Eixo chanfrado.

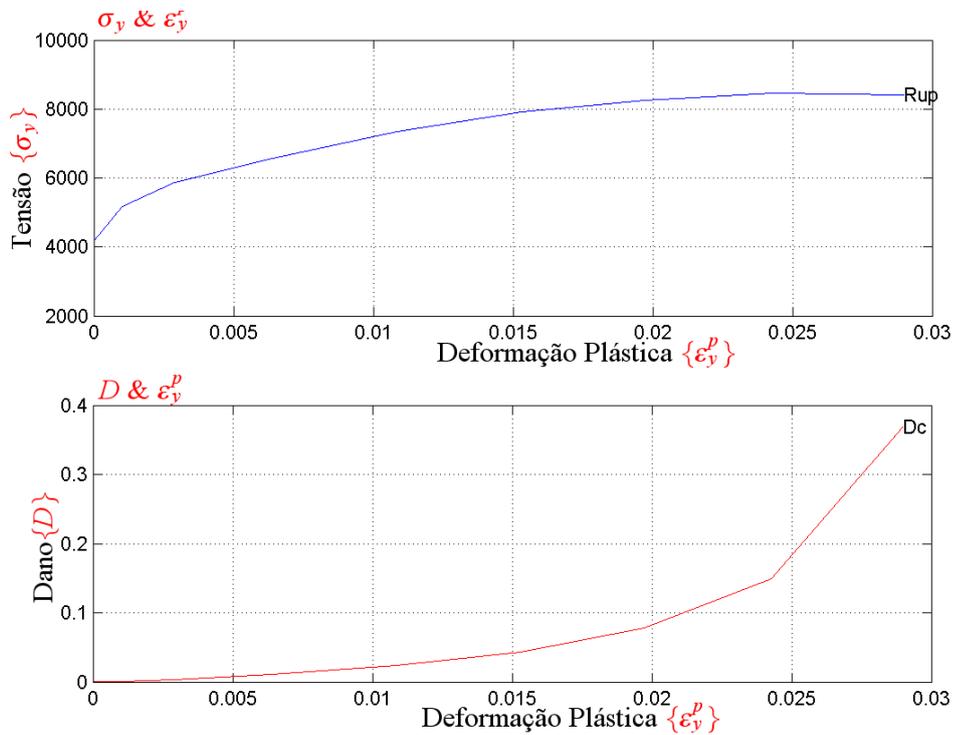


Figura 5.18: Gráficos : σ_x & ϵ_x^p e D & ϵ_x^p – Eixo chanfrado.

Conclusões: exemplo eixo cilíndrico chanfrado:

Nesse problema percebe-se que o dano atuou, chegando a um valor próximo de 0,4, ocasionando uma queda nos valores da tensão. A tensão de ruptura identificada nesta análise foi $\sigma_y = 8412,90 \text{ MPa}$ e uma deformação máxima na fratura $\varepsilon_{\max} = 0,03$.

Placa com furo (EPT)

O problema a ser resolvido trata-se de uma placa³ com um furo não central. Não se optou por uma modelagem com condições de simetria para se verificar/visualizar o efeito como um todo. A solicitação se dá em tração da chapa fina, que apresentará uma concentração de tensão na região do furo, figura 5.19. O material da placa em estudo é um aço com as seguintes propriedades:

Tabela 5.6: Propriedades físicas e geométricas: Placa com furo.

Físicas		Geométricas	
$E = 200.000 \text{ MPa}$	$\nu = 0,3$	$l1 = 100 \text{ mm}$	$l2 = 100 \text{ mm}$
$\sigma_y = 250 \text{ MPa}$	$R_{\infty} = 3500 \text{ MPa}$	$\text{raio furo} = 10 \text{ mm}$	
$b = 4$	$S_{\infty} = 0,05 \text{ MPa}$	$\text{numno} = 4879$	$\text{nume} = 2363$
$\varepsilon_{pd} = 0,01$	$s_{\infty} = 2$	$ts = 500$	$P = 75 \text{ kN}$

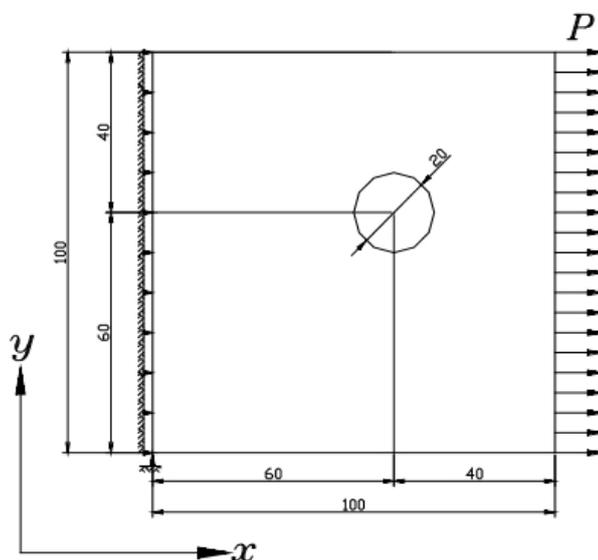


Figura 5.19: Placa com furo.

A seguir são mostrados nas figuras 5.20, 5.22, 5.23 e 5.24 as evoluções das variáveis de interesse da análise, com a estrutura deformada em 50 vezes.

³Este tipo de problema ocorre muito em obras onde o uso de ligações parafusadas é uma solução interessante, sendo assim o exemplo exposto é uma simulação de aplicação prática.

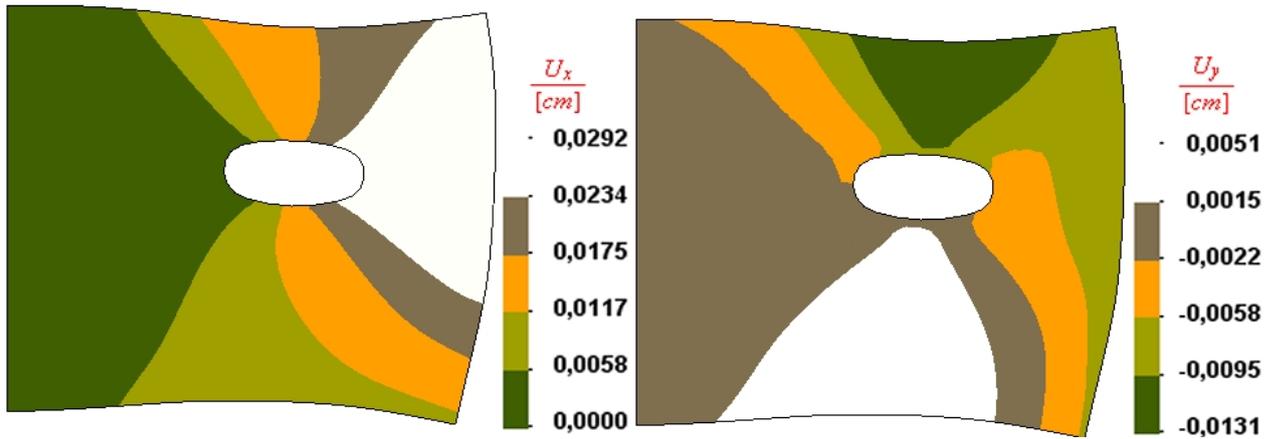


Figura 5.20: Deslocamentos U_x e U_y – Placa com furo.

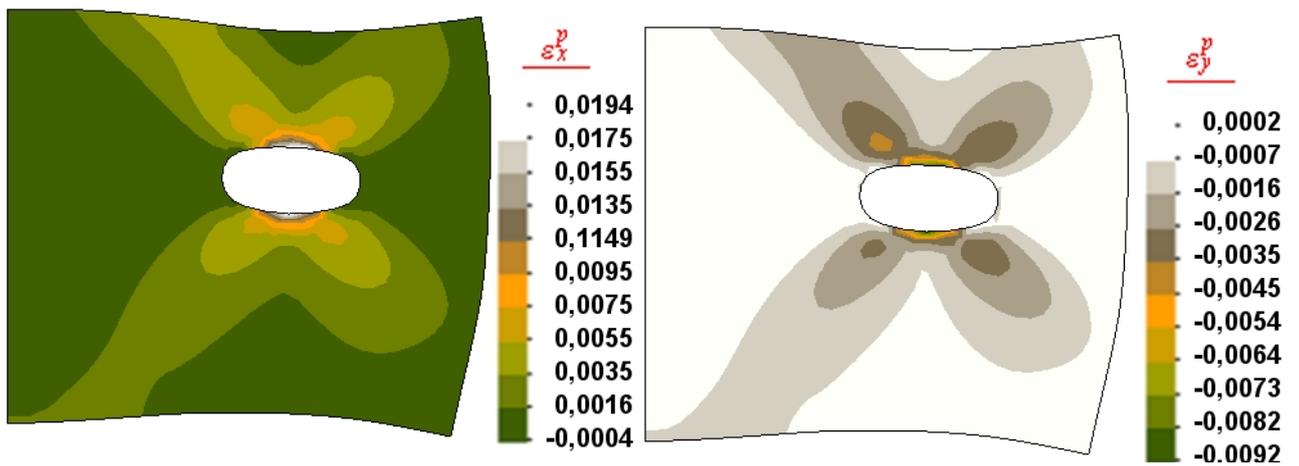


Figura 5.21: Deformações plásticas ϵ_x^p e ϵ_y^p – Placa com furo.

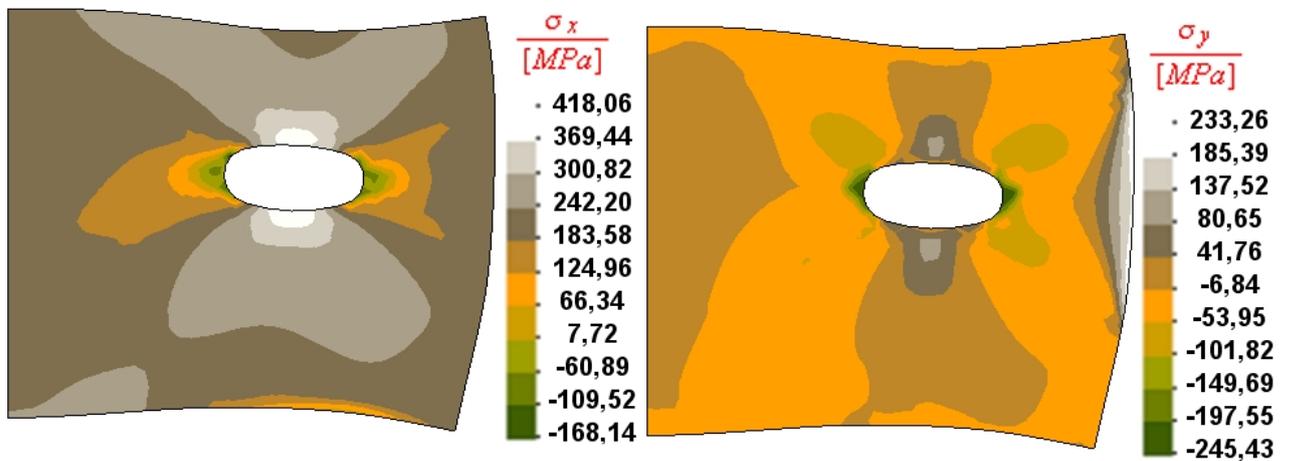


Figura 5.22: Tensões σ_x e σ_y – Placa com furo.

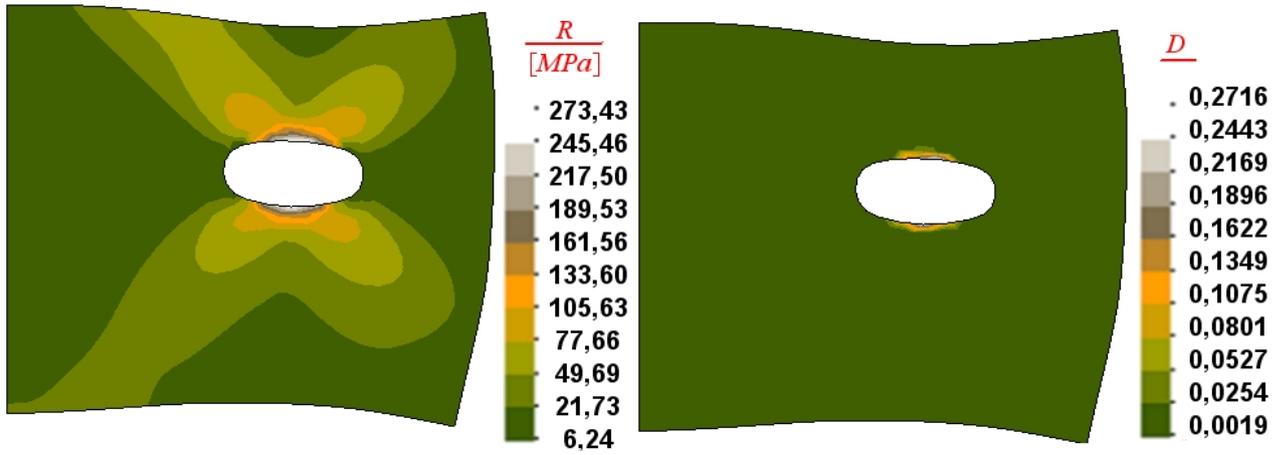


Figura 5.23: Encruamento isotrópico R e dano D – Placa com furo.

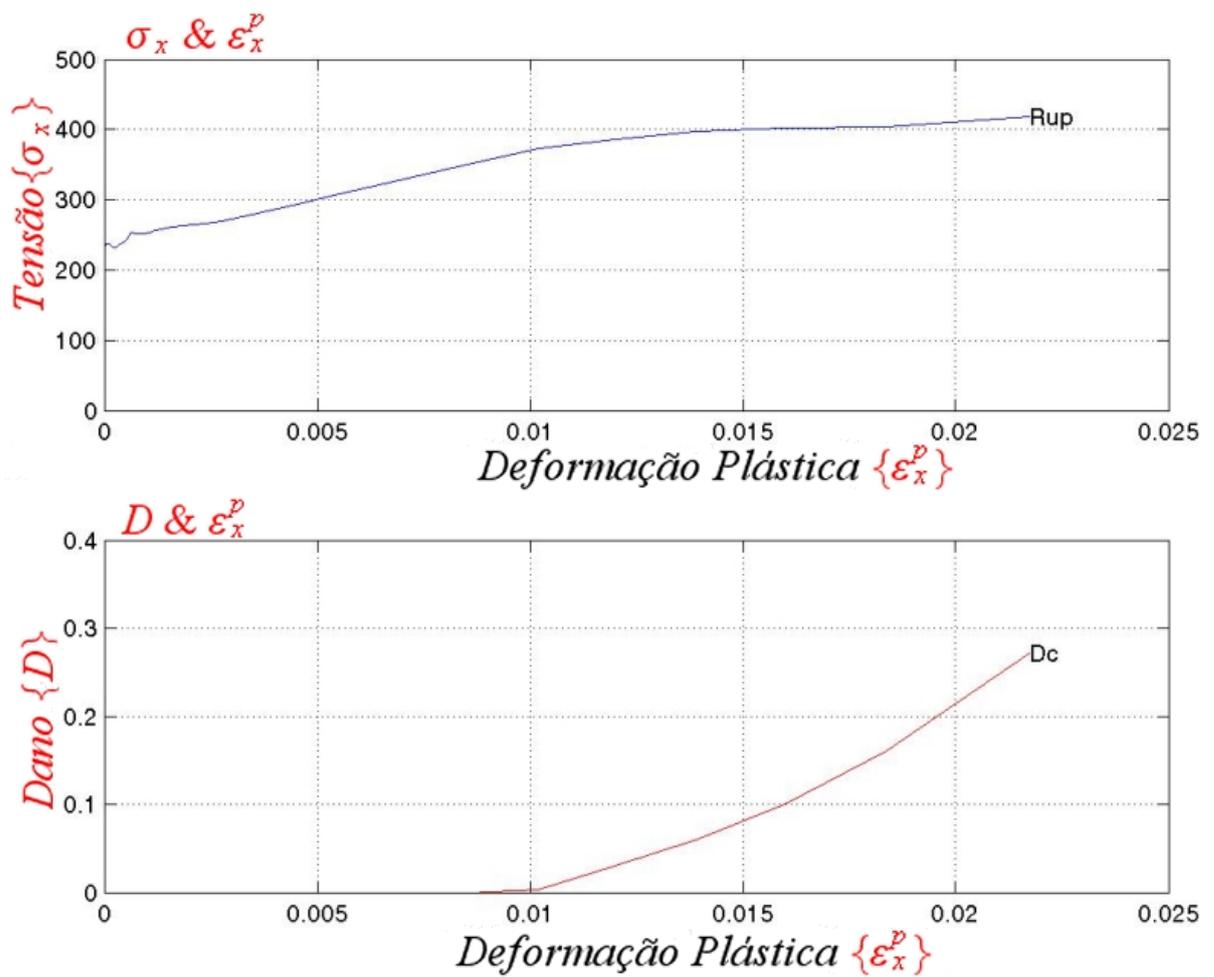


Figura 5.24: Gráficos : $\sigma_x \& \epsilon_x^p$ e $D \& \epsilon_x^p$ – Placa com furo.

Conclusões: exemplo placa com furo

O interesse de se visualizar as evoluções das variáveis plásticas, como exaustivamente mostrado nos gráficos e nas figuras dos resultados, leva a concluir que o modelo não somente é capaz de qualificar identificando as regiões de concentração de tensão (o furo), como regiões de concentração de carga (parte superior direita da placa), mas também quantificar, calculando assim o valor da tensão de ruptura, captado pela influência do dano que no problema chegou a 0,27.

A tensão de ruptura dessa placa $\sigma_{ruptura} = 418 \text{ MPa}$, se deu num carregamento de 90% do total de P . A carga máxima obtida foi de $P = 67,5 \text{ kN}$, e se obteve um encruamento isotrópico de $R = 273,43 \text{ MPa}$. Nota-se também, que mesmo o dano atuando, os valores das tensões tendem a terem pequenos acréscimos, pois a lei de evolução do encruamento isotrópico foi calibrada com parâmetros grandes, por exemplo o $R_{\infty} = 3500 \text{ MPa}$.

Fundação em sapata retangular (EPD)

O problema a ser resolvido trata-se de uma sapata corrida com as dimensões estabelecidas na figura 5.25, e consiste na simulação de um bloco rígido de uma sapata retangular, que na verdade aqui será um bloco em aço devido as propriedades físicas utilizadas.

Pode-se fazer uma alusão à problemas de contato, no entanto o objetivo desse exemplo será o de analisar a distribuição de tensão, tal qual será mostrado/analísado nos exemplos de "Cap". A dimensão do problema se deu a partir de várias simulações até se atingir um tamanho (10x10), onde a dimensão do domínio não interferisse na evolução das variáveis do problema.

O modelo é idealizado com condição de contorno, simetria e propriedades materias para uma região de aplicação de carga equivalente à $B = 1 \text{ m}$.

A solicitação se dá em compressão monotonicamente⁴, simulando o processo evolutivo de uma obra civil, na medida que um edifício é construído a carga vai aumentando, e sendo descarregada no solo de fundação. As seguintes propriedades foram estabelecidas:

Tabela 5.7: Propriedades físicas e geométricas: Sapata (EPD).

Físicas		Geométricas	
$E = 200.000 \text{ MPa}$	$\nu = 0,3$	$l1 = 10 \text{ m}$	$l2 = 10 \text{ m}$
$\sigma_y = 200 \text{ MPa}$	$R_{\infty} = 4500 \text{ MPa}$	$B = 1 \text{ m}$	
$b = 2$	$S_{\infty} = 0,05 \text{ MPa}$	$numno = 5129$	$nume = 2498$
$\varepsilon_{pd} = 0,001$	$s_{\infty} = 2$	$ts = 500$	$P = 180 \text{ kN/m}$

⁴As unidades utilizadas neste exemplo são: $[MPa]$ para constantes materiais, $[m]$ para o domínio e $[kN]$ para a carga. Assim:

$$1 \text{ Pa} = \frac{1 \text{ N}}{\text{m}^2} \rightarrow 1 \text{ MPa} = \frac{1 \text{ MN}}{\text{m}^2} = \frac{1000 \text{ kN}}{\text{m}^2}$$

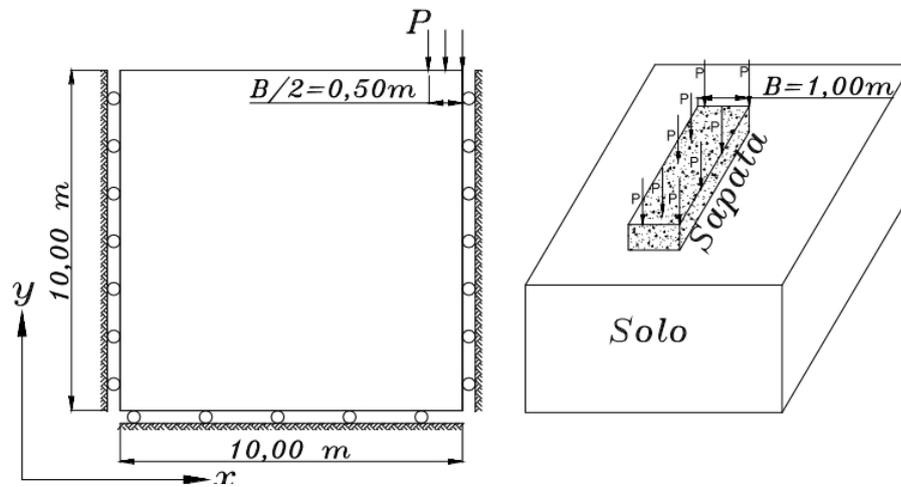


Figura 5.25: Sapata retangular (EPD).

Na figura 5.26 são mostradas a distribuição das tensões σ_x , σ_y e σ_{xy} , juntamente com a figura da estrutura deformada pelo carregamento contendo a evolução da variável de dano.

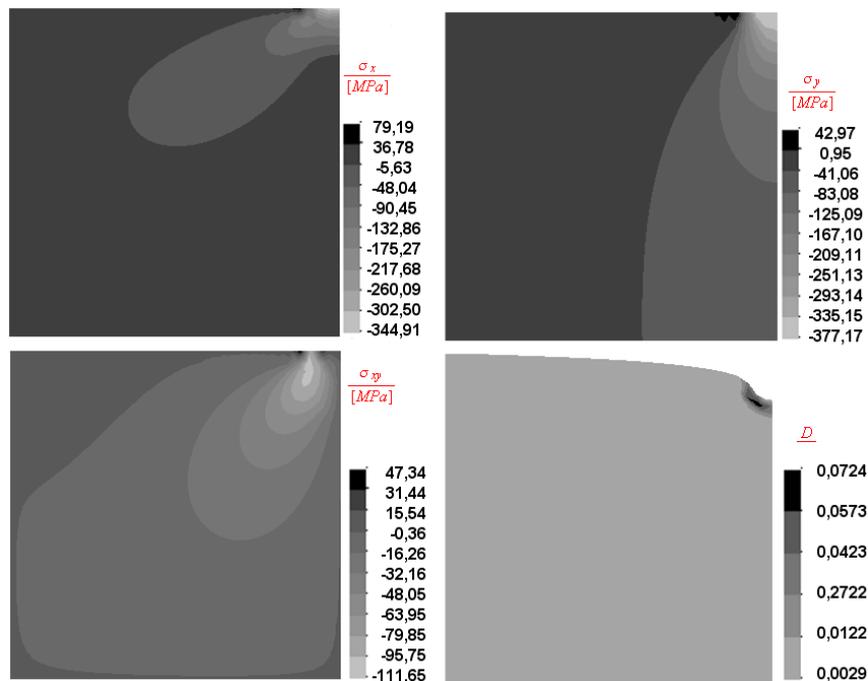


Figura 5.26: Evolução das tensões σ_x , σ_y , σ_{xy} e do dano D – Sapata retangular (EPD).

Conclusões: exemplo fundação em sapata retangular (EPD)

Pode-se ver a distribuição de pressões (bulbo de pressão) em y , além da maneira como a estrutura se deforma – aplicação de carga.

A região onde ocorre o dano é a região onde há evolução das variáveis plásticas, na extremidade de aplicação da carga comparada a extremidade da sapata. O conceito de bulbo de pressões vastamente usado em projetos geotécnicos e de fundação será apresentado quando tratar-se do modelo de "Cap", com aplicação a materiais geomecânicos.

No exemplo a seguir, o carregamento será dado por deslocamento prescrito, visando se obter uma nova forma de evolução das variáveis plásticas e de deformação da estrutura.

Fundação em sapata circular (Axissimétrico)

Assim como no exemplo anterior, procurou-se simular o que ocorreria com a estrutura, caso a análise fosse axissimétrica. Dessa forma, o problema passaria a ser resolvido como uma sapata circular com as dimensões estabelecidas na figura 5.27, um bloco cilíndrico em aço. O carregamento prescrito será em deslocamento.

O material da sapata circular/ bloco cilíndrico considerado é o um aço com as seguintes propriedades:

Tabela 5.8: Propriedades físicas e geométricas: Sapata (Axissimétrica).

Físicas		Geométricas	
$E = 200.000 \text{ MPa}$	$\nu = 0,3$	$l1 = 10 \text{ m}$	$l2 = 10 \text{ m}$
$\sigma_y = 200 \text{ MPa}$	$R_\infty = 4500 \text{ MPa}$	$B = 1 \text{ m}$	
$b = 2$	$S_\infty = 0,05 \text{ MPa}$	$numno = 5129$	$nume = 2498$
$\varepsilon_{pd} = 0,001$	$s_\infty = 2$	$ts = 30000$	$\bar{u} = 0,011 \text{ m}$

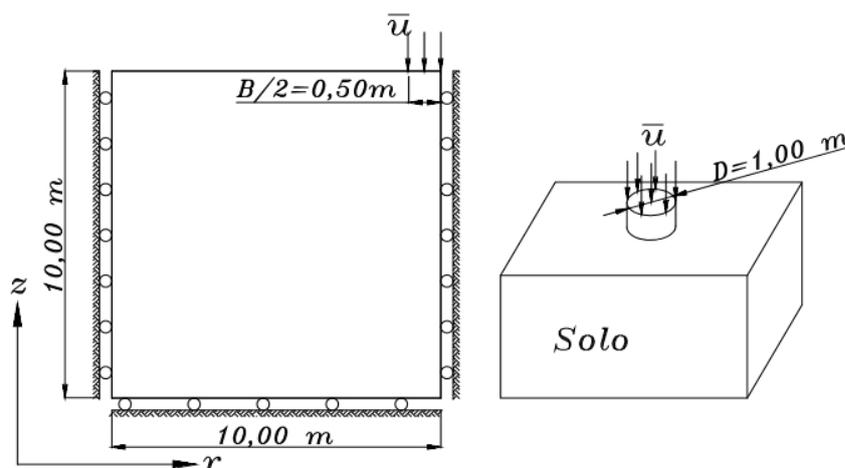


Figura 5.27: Sapata circular (Axissimétrico).

Nas figuras 5.28, 5.29 e 5.30 são mostrados os resultados obtidos: o deslocamento em y (que para caso axissimétrico se torna z), a deformação plástica ε_y^p , as tensões $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}$

e dano D .

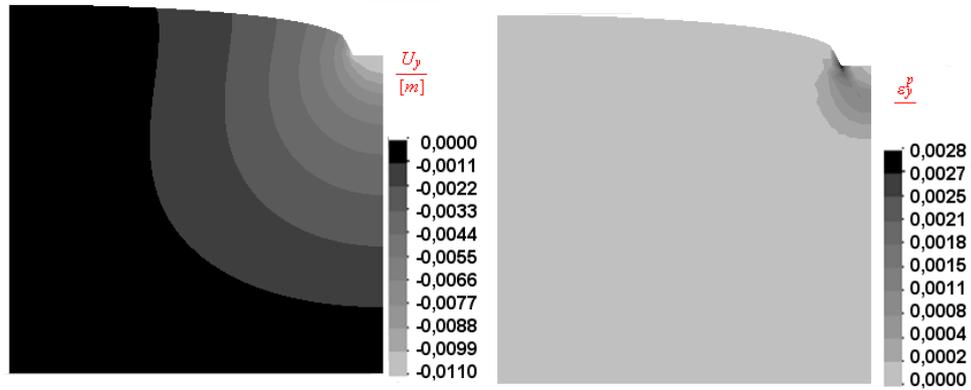


Figura 5.28: Deslocamento na direção de z chamado de U_y e a evolução da deformação plástica ϵ_y^p – Sapata circular.

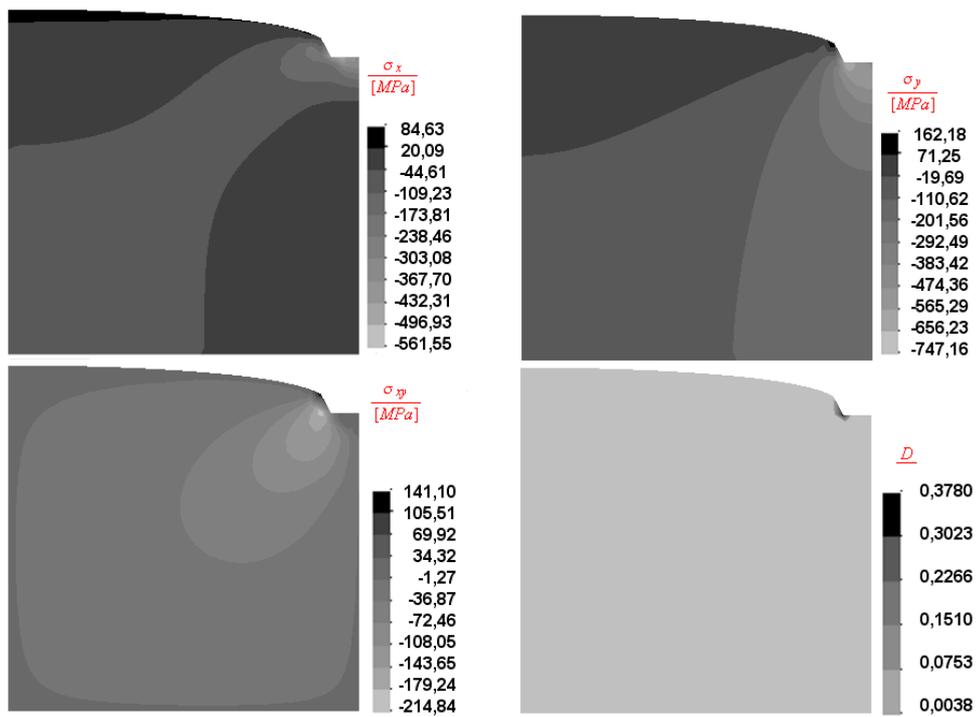


Figura 5.29: Evolução das tensões $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}$ e do dano D – Sapata circular.

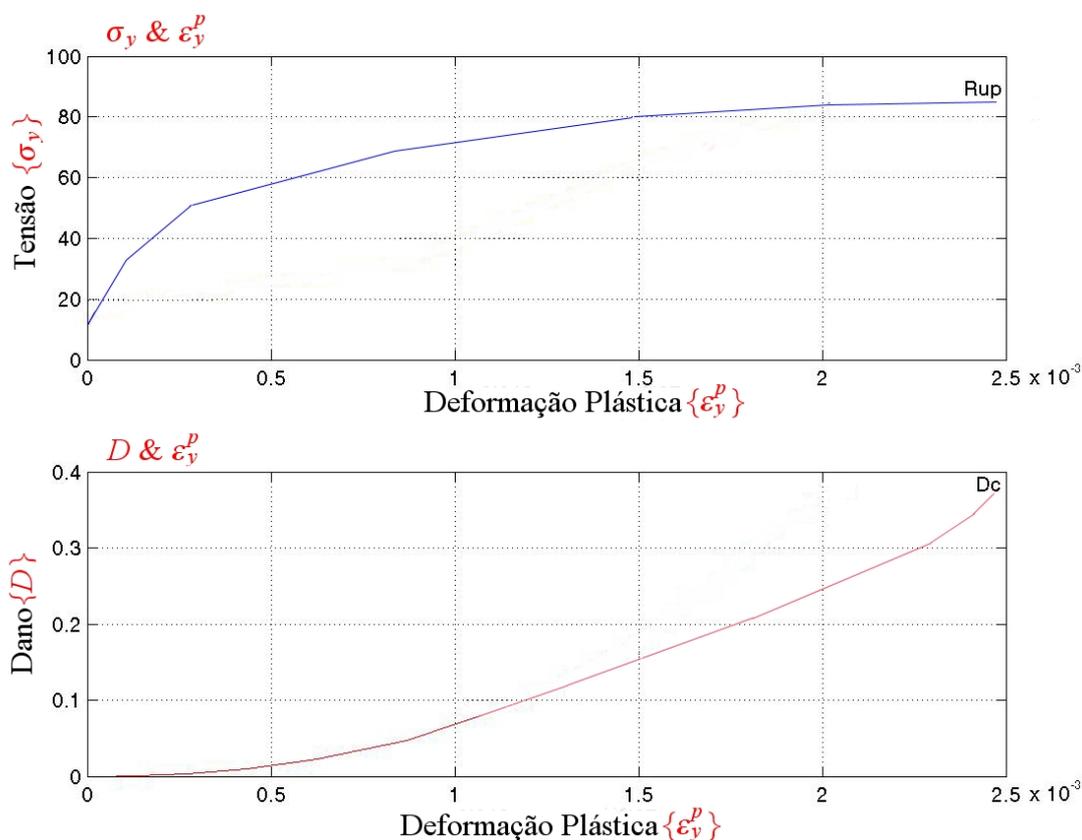


Figura 5.30: Gráficos : σ_x & ε_x^p e D & ε_x^p – Sapata circular.

Conclusões: exemplo fundação em sapata circular (Axissimétrico)

Aqui pode-se ver a diferença causada por uma prescrição em deslocamento. A evolução das variáveis plásticas são maiores, porém a região plástica é menor. O dano localizou-se exclusivamente na extremidade da prescrição do deslocamento, e o valor obtido foi de 0,37 enquanto que a prescrição de carga obteve um dano de 0,07.

E, comparado-se a fundação em sapata circular com o exemplo da placa com furo, por se ter uma função de encruamento isotrópico elevada, o valor que a tensão encrua vence o amolecimento causado pelo dano. Então, o problema se torna instável com o aumento do deslocamento e falha.

5.2 Exemplos Numéricos do Modelo de "Cap"Suave

Os exemplos que são abordados nesta parte do trabalho são uma tentativa de simular fundações em sapata corrida – estruturas em estado plano de deformação (EPD)–, para três tipos de solos: areia densa, areia fofa e argila.

As simulações incluem desde a prescrição de carregamento na forma de força aplicada até deslocamento (recalque). A utilização do modelo de "Cap"nesses exemplos servirá para avaliar a distribuição de pressões e de deformações na massa de solo. Será considerado como capacidade de carga o valor máximo obtido no último incremento de carga/deslocamento.

5.2.1 Capacidade de Carga

Os problemas a serem simulados para as distribuições de tensões das fundações, trata-se de sapatas corridas de largura $B = 2,80 \text{ m}$ apoiadas nos três diferentes tipos de solo, com as propriedades e características estabelecidas a partir de um N_{SPT} conforme tabela de Berberian (2000).

O N_{SPT} é o número de golpes dados num amostrador padrão para penetração na massa de solo num ensaio chamado de *Standard Penetration Test*.

5.2.2 Parâmetros dos Materiais

No modelo do "Cap", assim como no modelo J_2 , fez-se uso de valores tabelados em bibliografias. Os valores pesquisados foram os parâmetros que contêm informações a respeito de propriedades dos materiais de interesse nas simulações. Então, buscou-se parâmetros como: módulo de elasticidade, poisson, densidade, etc.

Nos projetos de fundações – e em outros projetos –, o engenheiro projetista muitas vezes por simplicidade, utiliza-se de propriedades dos materiais conhecidas ou retiradas de tabelas, já que nem sempre é fácil a obtenção dessas propriedades experimentalmente⁵.

Contudo, alguns pesquisadores e projetistas da área de solos, como Berberian, estabeleceram intervalos nos quais algumas propriedades intrínsecas de cada material: poisson, módulo elástico, etc. podem ser usadas para diferenciar argilas de areias.

Dessa forma, serão utilizados valores médios desses intervalos para se estabelecer os parâmetros materiais necessários para as simulações.

Com o auxílio das propriedades dos materiais mencionados na tabela 5.9, obteve-se os demais parâmetros a partir de critérios estabelecidos por Desai (1984), e que são apresentados na tabela 5.10, as unidades⁶ usadas são $[kPa]$ e $[kN]$:

⁵Na grande maioria dos projetos se utiliza de valores consagrados na literatura. A retirada de corpos-de-prova para ensaio laboratorial é feita em casos específicos ou onde existem imposições normativas.

⁶Conversão de Unidades: dados de entrada em $[kPa]$, $[kN]$ e domínio em $[m]$.

$1Pa = \frac{1N}{m^2} \rightarrow 1kPa = \frac{1kN}{m^2}$

Tabela 5.9: Propriedades físicas conforme Dickran (2000).

Tipo de Solo	N_{SPT}	E [kPa]	Poisson $[\nu]$	Pressão Admissível [kPa]
Areia Densa	5 à 10	50.000 à 84.000	0,20 à 0,40	400 kPa
Areia Fofa	0 à 4	10.500 à 24.500	0,15 à 0,25	200 kPa
Argila	9 à 15	20.000 à 50.000	0,10 à 0,30	100 kPa

Tabela 5.10: Propriedades físicas e geométricas usadas no modelo de "Cap".

Parâmetro	Areia Densa	Areia Fofa	Argila
E	70.000 kPa	17.500 kPa	25.000 kPa
ν	0,30	0,20	0,25
K	58.333 kPa	9.722 kPa	16.667 kPa
G	26.923 kPa	7.292 kPa	10.000 kPa
ρ	1.800 $\frac{kg}{m^3}$	1.450 $\frac{kg}{m^3}$	1.200 $\frac{kg}{m^3}$
$\bar{\kappa}_0$	-1000 kPa	-10 kPa	-100 kPa
H	0,00	0,00	0,00
ς	11,76 kPa	7,12 kPa	8,73 kPa
β	0,000012	0,000012	0,000012
λ	11,906	7,121	8,377
D_I	0,000000073 kPa ⁻¹	0,000000073 kPa ⁻¹	0,000000073 kPa ⁻¹
W	1,80	1,80	0,18

5.2.3 Modelagem da Fundação

Para que as variáveis de interesse não fossem influenciadas pelo tamanho do domínio da massa de solo, foram feitas várias simulações até se atingir um domínio que não sofresse essa influência. Já o tamanho do elemento finito foi conseguido a partir da menor dimensão que se conseguiu simular, visto que se teve dificuldade em gerar malhas mais eficientes.

As dimensões da modelagem, condições de contorno/simetria são mostradas segundo a figura 5.31. A dimensão em x é maior para simular o efeito de uma sapata isolada não sofrendo influência de uma sapata vizinha. Nas simulações, a estrutura é mostrada deformada em 100 vezes para se evidenciar o efeito das pressões na superfície do terreno.

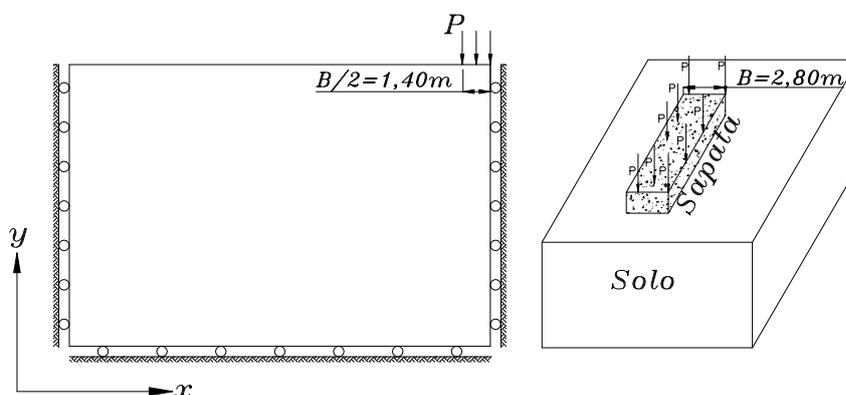


Figura 5.31: Fundação típica em sapata corrida analisada no modelo de "Cap".

5.2.4 Análises para Carregamento Prescrito

A seguir será mostrada uma seqüência de figuras contendo as distribuições de tensões σ_x e σ_y , as evoluções de deslocamentos U_y e do encruamento κ para os três tipos de solos analisados: areia densa, areia fofa e argila.

Simulação de sapata em areia densa:

Na figura 5.32 pode-se ver as distribuições de tensões σ_x e σ_y . A forma dos bulbos de pressões foi obtida para uma carga equivalente a 50% do carregamento P prescrito. Sendo: $P = 384 \text{ kN/m}$.

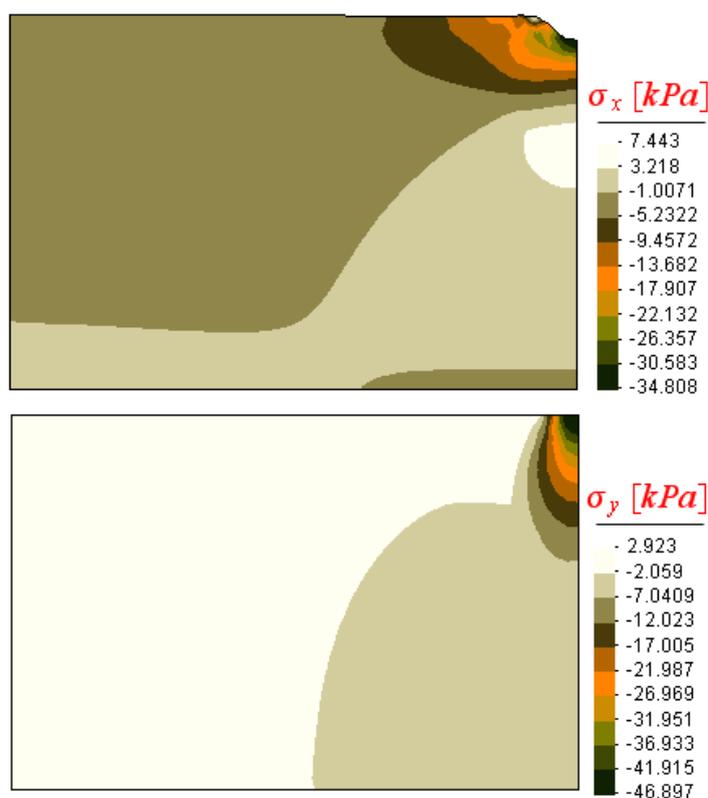


Figura 5.32: Distribuições de tensões σ_x e σ_y em solo de areia densa.

Pode-se ver que a forma os bulbos de pressões abaixo da sapata nas direções x e y evoluem com a profundidade. Nota-se também a diferença de pressões para uma mesma camada (y) de solo, i.e., $\sigma_{x\text{máx}} = -34,81 \text{ kN/m}^2$ enquanto que $\sigma_{y\text{máx}} = -46,90 \text{ kN/m}^2$. Pode-se ainda relacionar as tensões verticais σ_v com as tensões horizontais σ_h , usando um fator c_o , que pode ser chamado de coeficiente de empuxo no repouso. Assim tem-se:

$$\sigma_h = c_o \sigma_v \quad (5.7)$$

e, nesse caso $c_o = 0,74$.

Na figura 5.33 são mostradas as evoluções dos deslocamentos (recalque) em y , e do encruamento (consolidação) isotrópico.

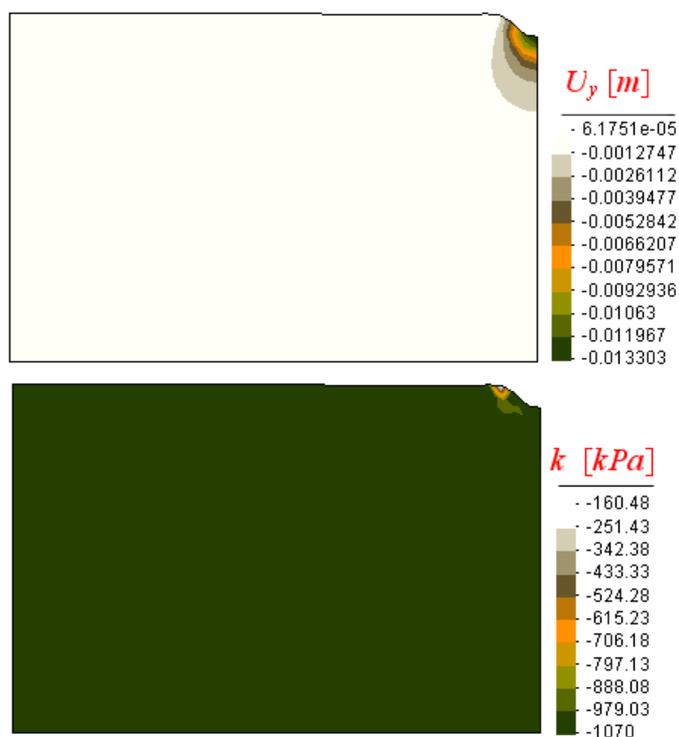


Figura 5.33: Evoluções dos deslocamentos U_y e do encruamento κ em solo de areia densa.

Simulação de sapata em areia fofa:

Na figura 5.34 são mostradas as distribuições de tensões σ_x e σ_y . O nível de carregamento nesse caso atingiu uma carga equivalente a 30% do carregamento P prescrito. Isto se deve ao fato das simulações serem feitas visando o maior efeito de evolução das variáveis internas do problema elasto-plástico. Na figura 5.35 são mostradas as evoluções dos deslocamentos (recalque) em y , e do encruamento (consolidação) isotrópico.

Simulação de sapata em solo argiloso:

Como no exemplo anterior, de sapata assente em solo de areia fofa, na figura 5.36 são mostradas as distribuições de tensões σ_x e σ_y , para um nível de carregamento equivalente a 30% do carregamento P prescrito. Já na figura 5.37 são mostradas as evoluções dos deslocamentos em y , e do encruamento isotrópico.

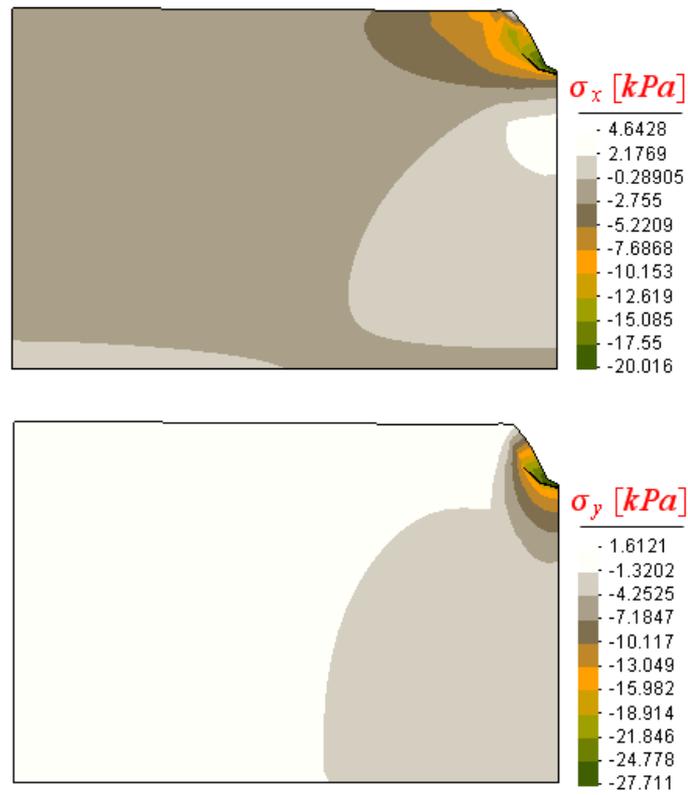


Figura 5.34: Distribuições de tensões σ_x e σ_y em solo de areia fofa.

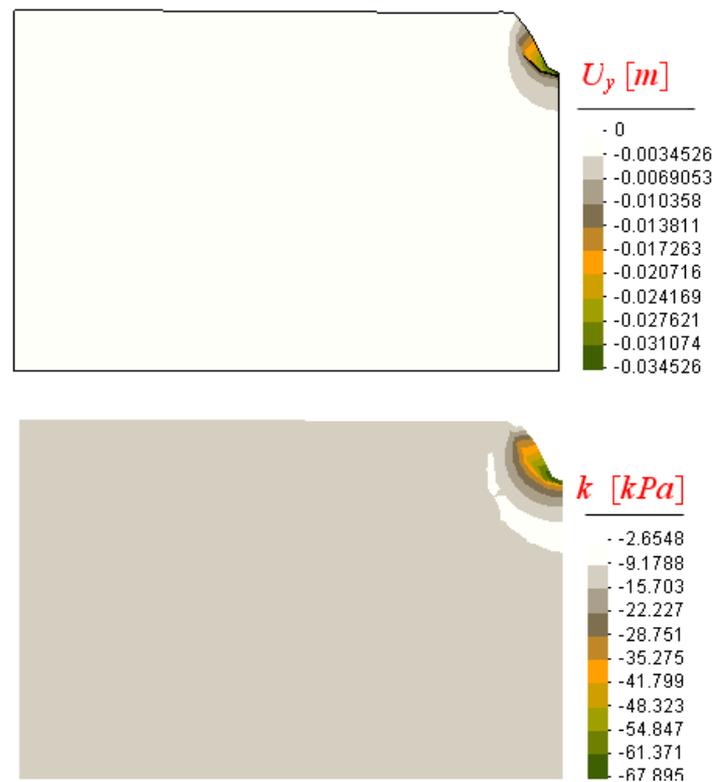


Figura 5.35: Evoluções dos deslocamentos U_y e do encruamento κ em solo de areia fofa.

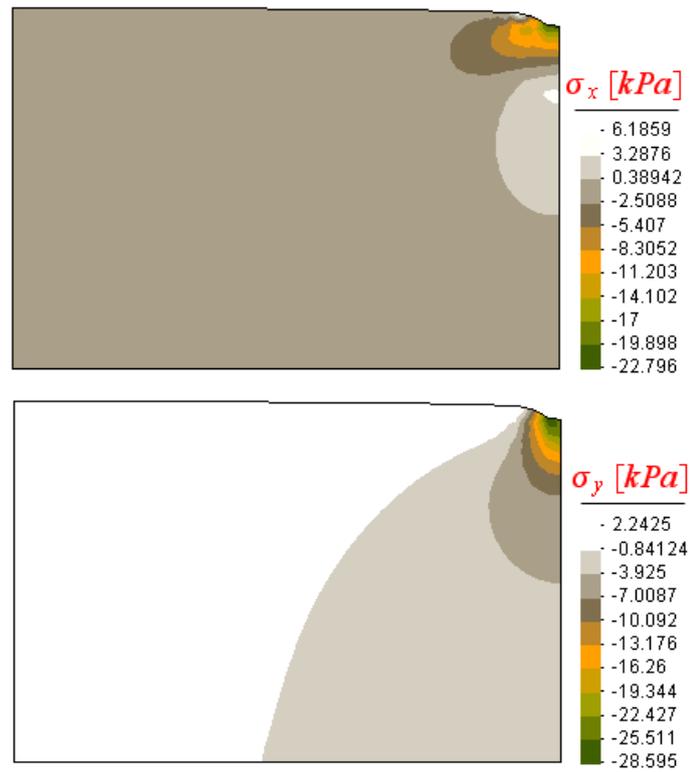


Figura 5.36: Distribuições de tensões σ_x e σ_y em solo argiloso.

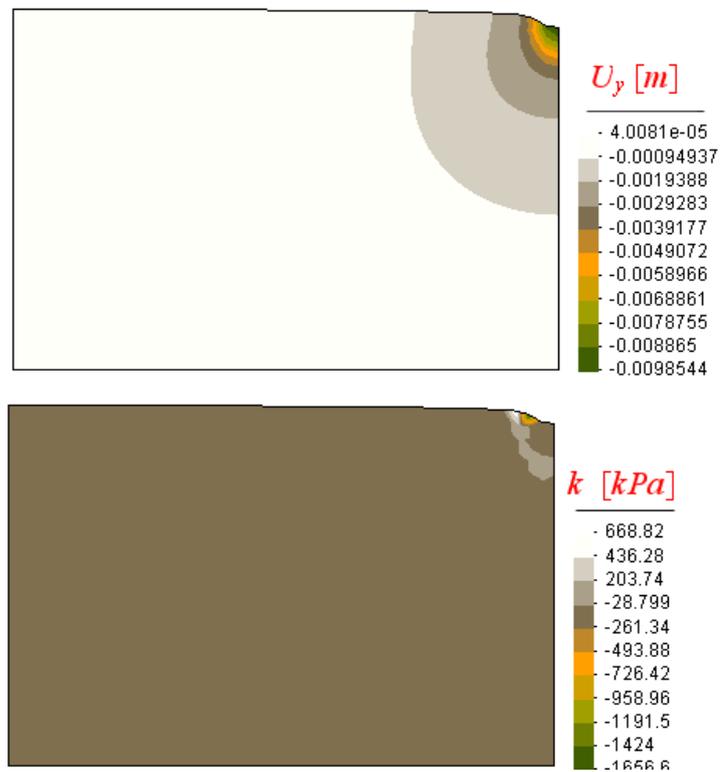


Figura 5.37: Evoluções dos deslocamentos U_y e do encruamento κ em solo argiloso.

Conclusões: análise de carregamento prescrito

Para se fazer um comparativo dos resultados obtidos entre os solos analisados com a simulação de carregamento prescrito, elaborou-se a tabela 5.11. Uma relação entre os parâmetros de encruamento foi inserida para se observar o que aconteceu na massa de solo quanto ao efeito da compactação.

Tabela 5.11: Comparação de resultados entre solos: areia densa, areia fofa e argila - carregamento prescrito.

<i>Solo</i>	$\sigma_x[kPa]$	$\sigma_y[kPa]$	c_o	$U_y[cm]$	$\kappa[kPa]$	$\kappa_o[kPa]$	κ/κ_o
<i>Areia Densa</i>	-34,80	-46,90	0,74	-1,30	-1070,00	-1000,00	1,07
<i>Areia Fofa</i>	-20,00	-27,70	0,72	-3,50	-67,90	-10,00	6,79
<i>Argila</i>	-22,80	-28,60	0,80	-1,00	-1656,60	-100,00	16,56

No âmbito das distribuições de pressões, foi notável e relevante o efeito das pressões horizontais em relação as pressões verticais. Verificou-se que o coeficiente de empuxo no repouso c_o foi da ordem de 70 à 80% da tensão vertical. Isto indica que apenas a consideração da pressão vertical em projetos de fundação pode não ser uma boa aproximação da realidade. O projetista deve ser cauteloso e levar em conta o efeito das pressões laterais (horizontais) nas suas simplificações dos modelos de cálculo e dimensionamento.

Quanto a prática de projetos de fundação em se estabelecer pressões admissíveis da ordem de 400 kPa à 100 kPa , é porque tais valores foram taxados para recalques da ordem de 10 cm . No entanto, nos exemplos aqui testados a ordem dos recalques que se conseguiu foi de 1 cm .

Embora, estabelecendo analogamente um recalque da ordem de 10 cm nos exemplos testados, apenas nos solos arenosos é que se obteria uma boa aproximação das pressões admissíveis.

O fato de não se conseguir chegar a uma ordem de grandeza de 10 cm nos recalques, se deve entre outros motivos à:

- dificuldade de se calibrar os parâmetros dos materiais;
- dificuldade de se gerar uma malha mais adequada;
- falta de dados experimentais.

Cabe salientar quanto ao fenômeno da compactação, que os parâmetros κ_o da maneira calibrada para caracterizar os três tipos de solos foram adequados.

Observa-se que comparando uma areia densa (com poucos vazios) e uma areia fofa (com bastantes vazios), a areia fofa apresentou uma maior compactação, o que já era de se esperar. E, da mesma forma, aconteceu para o solo de argila, que indicou uma enorme compactação. Entretanto, não se pode esquecer que a compactação está intimamente

ligada com o percentual de umidade do solo, e nas simulações, as análises contemplam somente solos drenados, sem a presença de água.

Diante dos resultados obtidos, em seguida serão mostrados exemplos onde o carregamento se dará em deslocamento prescrito, de maneira que se busque maiores recalques, e conseqüentemente maior evolução das variáveis internas analisadas pelo modelo.

5.2.5 Análises para Deslocamento Prescrito

Os exemplos testados para deslocamento prescrito foram simulados até se atingir o máximo deslocamento possível de acordo com os parâmetros calibrados e com o passo estabelecido na análise incremental. O passo nesses exemplos teve de ser da ordem de 100 vezes menor do que os usados em carga prescrita, para que se obtesse convergência.

Nas figuras a seguir serão mostradas: as distribuições de tensões σ_x , σ_y , e as evoluções do deslocamento U_y e do encruamento κ . Nas tabela 5.4 e 5.5 são apresentados comparações entre os valores máximos σ_x , σ_y , U_y e κ .

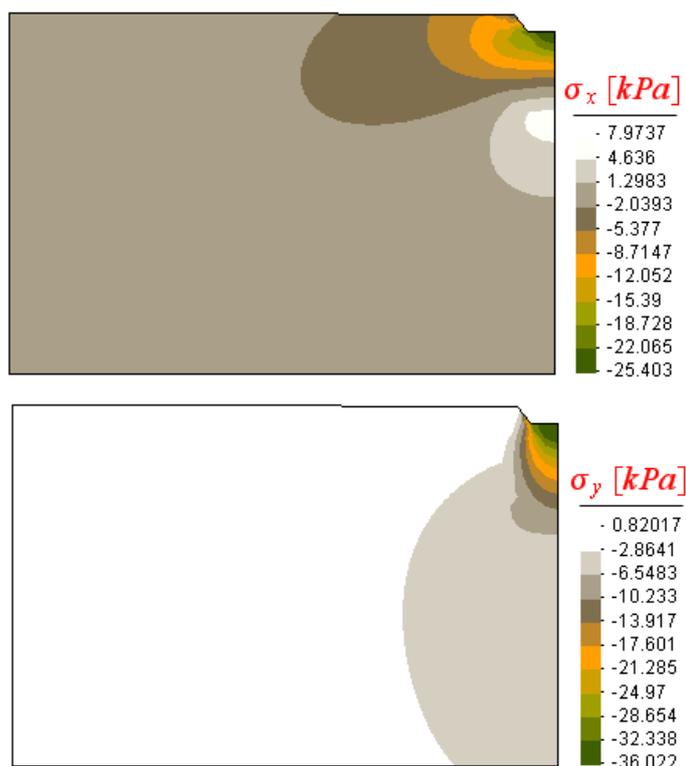


Figura 5.38: Distribuições de tensões σ_x e σ_y em solo de areia densa – deslocamento prescrito.

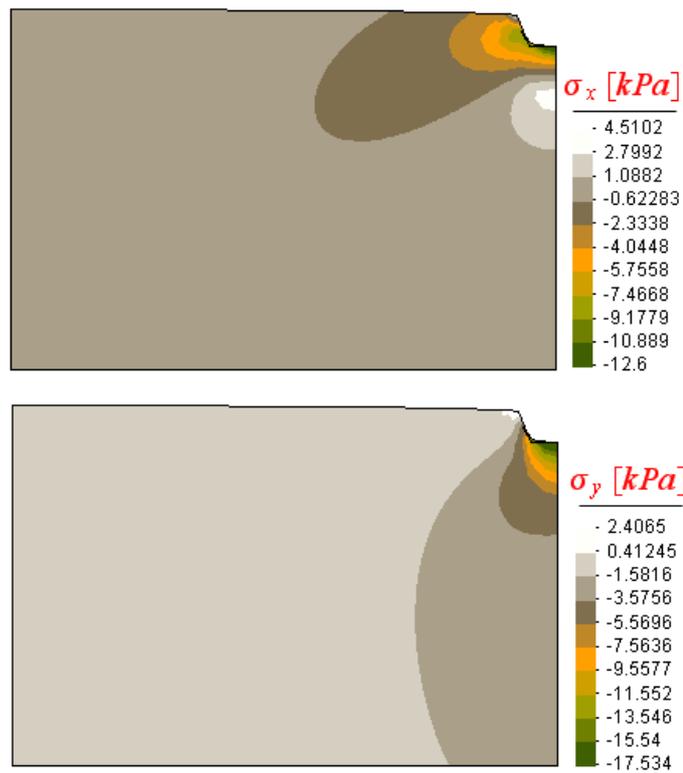


Figura 5.39: Distribuições de tensões σ_x e σ_y em solo de areia fofa – deslocamento prescrito.

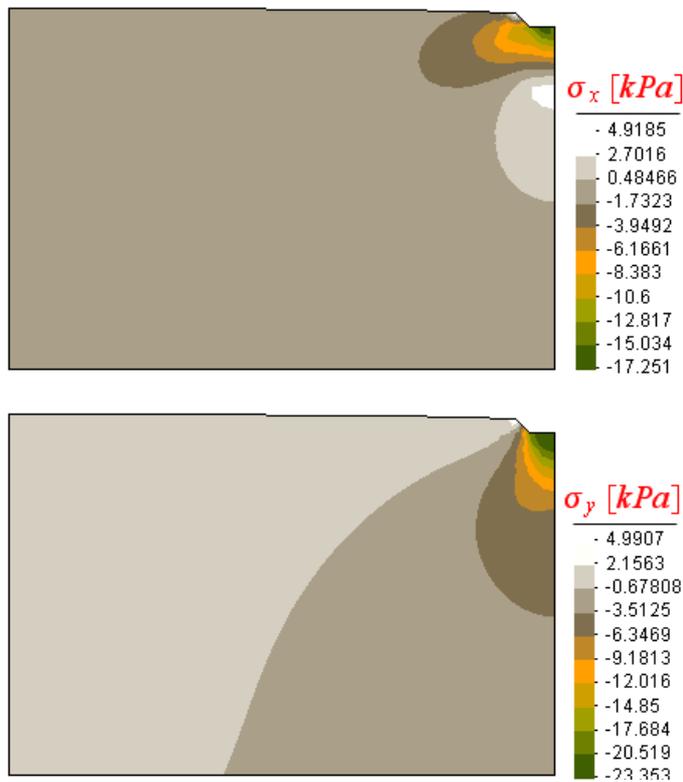


Figura 5.40: Distribuições de tensões σ_x e σ_y em solo argiloso – deslocamento prescrito.

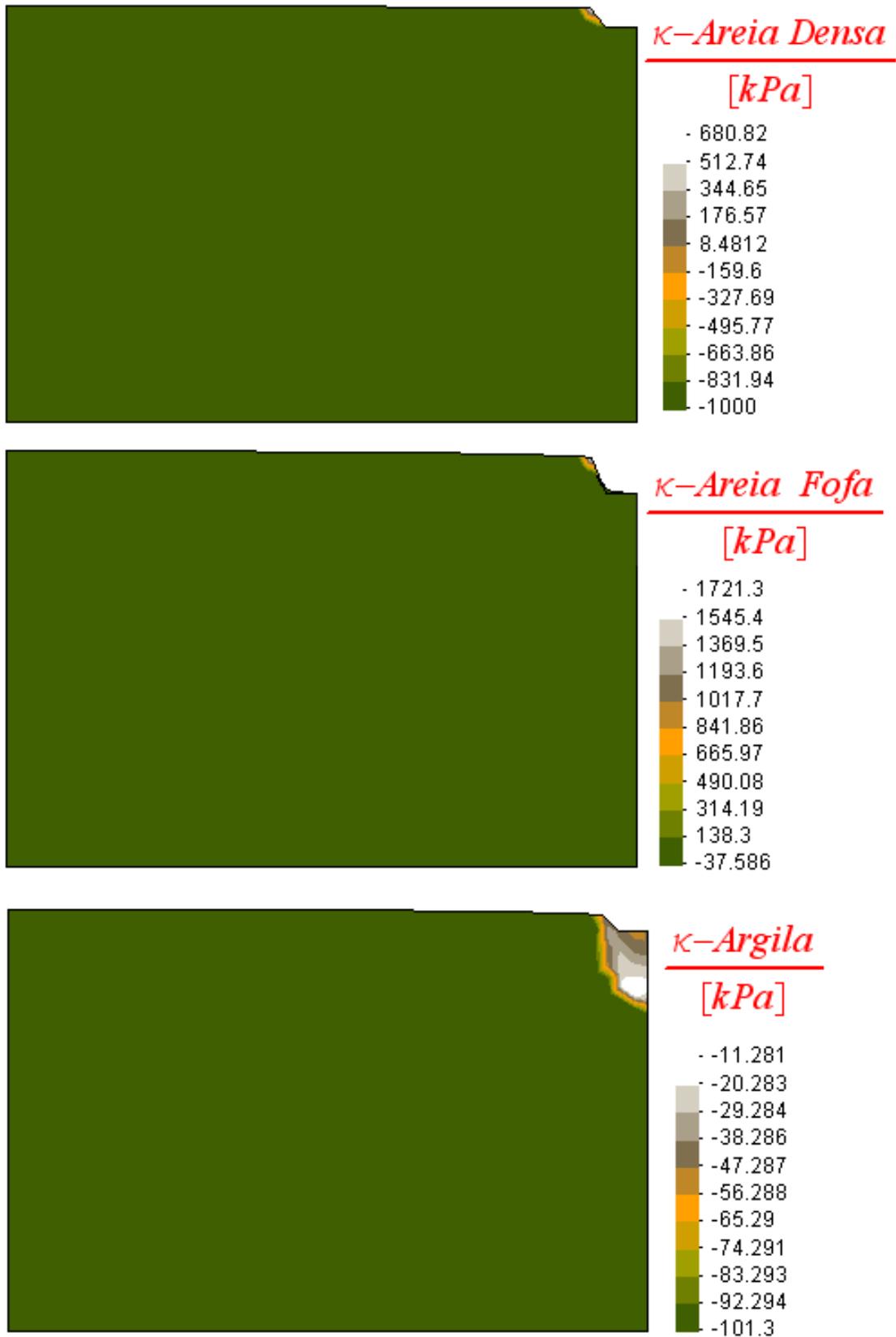


Figura 5.41: Evoluções dos parâmetros de encruamento κ – deslocamento prescrito.



Figura 5.42: Evoluções dos deslocamentos U_y – deslocamento prescrito.

Conclusões: análise de deslocamento prescrito

Constatou-se que alguns efeitos foram similares ao ocorrido no caso de deslocamento prescrito tais como: a distribuição de tensão em y , e os deslocamentos em x e y .

Já as deformações plásticas e o encruamento se deram em locais diferentes, devido à deformação que a estrutura apresentou, pois ela abateu uniformemente abaixo da base da sapata para um mesmo valor de u prescrito. Isto causou tensões de tração na massa de solo ao lado da sapata. Na região de abatimento, a compressão ocorreu devido ao carregamento, porém no solo vizinho/limite ao carregamento, quando de um certo valor de deslocamento, houve tração.

Uma prova disto, é o parâmetro de encruamento, que se moveu em direção ao "Cap" de compressão encruando até um certo estágio de carregamento – enquanto o efeito da compactação abaixo da sapata era mais pronunciado –, e depois movendo-se na direção do "Cap" de tração, devido a tração ocorrida na massa de solo vizinha. De posse das propriedades dos materiais e da malha utilizada as análises foram onerosas, dificultando a convergência para o carregamento de deslocamento prescrito, e, não foi possível atingir a ordem de grandeza de 10 *cm* para o recalque.

Então, com os resultados obtidos estabeleceu as tabelas 5.12 e 5.13 como comparação, e salienta-se que qualitativamente as análises foram eficientes.

A tabela abaixo mostra um comparativo dos resultados obtidos entre as tensões e o deslocamento prescrito.

Tabela 5.12: Comparação de resultados entre solos: areia densa, areia fofa e argila - deslocamento prescrito.

<i>Solo</i>	$\sigma_x [kPa]$	$\sigma_y [kPa]$	c_o	$U_y [cm]$
<i>Areia Densa</i>	25,01	36,02	0,69	1,00
<i>Areia Fofa</i>	12,60	17,53	0,72	2,00
<i>Argila</i>	17,25	23,35	0,74	1,00

Na tabela 5.13, é mostrado uma análise do que ocorreu com o parâmetro de encruamento. Define-se: κ^+ – valores de κ no "Cap" de tração, e κ^- – valores de κ no "Cap" de compressão.

Tabela 5.13: Comparação entres os parâmetros de encruamento.

<i>Solo</i>	$\kappa^+ [kPa]$	$\kappa^- [kPa]$	$\kappa_o [kPa]$	$\{\kappa^+ - \kappa_o\} / \kappa_o$	$\{\kappa^- - \kappa_o\} / \kappa_o$
<i>Areia Densa</i>	680	-1000	-1000	1,70	0,00
<i>Areia Fofa</i>	1721	-38	-10	173,10	2,76
<i>Argila</i>	11	-101	-100	1,11	0,01

Capítulo 6

Conclusões e Sugestões

No trabalho foram estudados dois modelos que apresentaram boas aproximações da evolução de variáveis internas no domínio plástico. O mapeamento dessas variáveis permite uma melhor estimativa dos valores de tensão de ruptura como no caso da plasticidade J_2 com encruamento e dano isotrópicos.

Além da vantagem de se conseguir a evolução das variáveis plásticas, pode-se chegar em alguns casos – estado homogêneo de tensão –, a obter um valor de dano próximo de 1, indicando uma robustez do algoritmo implementado. Outra vantagem é o fato de se poder usar o modelo J_2 como localizador de dano em peças com diversificadas geometrias.

Já, no modelo de "Cap", percebe-se que uma dificuldade é a calibragem das variáveis de evolução elasto-plástica, seus valores iniciais é que determinam qual material está sendo analisado. Entretanto, consegue-se com esse modelo uma boa localização da deformação plástica e dos bulbos de pressões. Essa informação é valiosa para se estimar a distribuição de tensão ao longo das camadas de solo abaixo de uma fundação em sapata rasa.

Não apenas, torna-se possível uma melhor estimativa da capacidade de carga do solo de fundação, mas também, se fizer uma analogia com o modelo de dano, pode-se prever/imaginar que na região onde ocorrer a máxima deformação plástica, poderá ocorrer o dano. Dessa forma, é razoável que em projetos mais sofisticados – com análises elasto-plásticas –, uma cautela a mais quanto ao efeito localizado da deformação plástica é recomendável.

O modelo geomecânico – "Cap", foi desenvolvido contendo em sua formulação uma lei de encruamento cinemático para que se pudesse capturar o efeito de solicitações cíclicas. No entanto, nesse trabalho, restringiu-se apenas a solicitações monotônicas com uso de uma lei de encruamento isotrópico. Essa restrição fez que o modelo não fosse totalmente explorado, pois poderia ser empregado em análises de estruturas de rodovias e ferrovias por exemplo, cujo carregamento é cíclico.

Tendo em vista as vantagens que uma simulação elasto-plástica apresenta, cabe salientar que nem todos os benefícios foram desfrutados, pois algumas implementações (evoluções dos modelos), não foram feitas.

Assim, elas ficam como sugestões para trabalhos futuro, as quais são:

1. Acrescentar o carregamento próprio – o que seria de rápida implementação –, mas que diante das possibilidades de execução e término do trabalho foi comprometido, seu uso seria fundamental para simulação de problemas de estabilidade de taludes;
2. Passar o escopo dos modelos para análises 3D, usando elementos finitos tetraédricos;
3. Implementação dentro do enfoque de problemas de grandes deformações;
4. Inserção de modelos para carregamentos cíclicos – análise em fadiga –, poderia ser aplicada por meio de lei de encruamento cinemático. Nesse caso, pode-se mencionar a utilização do fenômeno do fechamento de microtrinca, que ocorre na fase de compressão das histereses geradas;
5. Inserção de modelo com refinamento h-adaptativo para capturar bandas de falhas.

Além dessas sugestões existem outros fenômenos que podem ser mencionados, enriquecendo os modelos e tornando-os mais requintados e complexos, tais como: efeitos de temperatura, efeitos dinâmicos e comportamento fluido, principalmente em solos.

Bibliografia

- [1] Atkinson, J. H. – The Mechanics of Soils – Cambridge, 1978.
- [2] Babuska, I. – Reliability of Computational Analysis of Plasticity – Government Research Announcements and Index, vol. mar., 1991.
- [3] Bathe, K. J. – Finite Elements Procedures in Engineering Analysis – New Jersey, prentice-Hall, 1982.
- [4] Batoz, Jean-Louis & Dhatt, Gouri – Modélisation des Structures par Éléments Finis – vol. 3, Paris, Hermes, 1992.
- [5] Beer, F. P. & Johnston, E. R. Jr. – Resistência dos Materiais – São Paulo, 1989.
- [6] Berberian, Dickran – Engenharia de Fundações – Brasília, UnB, 2000.
- [7] Benallal, A.; Billardon, R. & Doghri, I. – An Integration Algorithm and the Corresponding Consistent Tangent Operator for Fully Coupled Elastoplastic and Damage Equations – Communications in Applied Numerical Methods, vol. 4, pp 731-740, 1988.
- [8] Caputo, H. P. – Mecânica dos Solos e Suas Aplicações – Rio de Janeiro, IME, 1975.
- [9] Chen, W. F., & Han, D. J. – Plasticity for Structural Engineers – New York, Springer-Verlag, 1988.
- [10] Chtourou H.; Guillot, M. & Gakwaya, A. – Modeling of metal powder compactation process using cap model. Part.I. Numerical implementation and practical applications, International Journal of Solid and Structures, Vol.39, pp.1077-1096,2002.
- [11] Coimbra, A. L. – Novas Lições de Mecânica do Contínuo – Rio de Janeiro, COPPE, 1984.
- [12] Cook, R. D.; Malkus, D. S. & Plesha, M. E. – Concepts and Applications of Finite Element Analysis – 3rd edition, New York, John Wiley & Sons, 1988.
- [13] Desai, C. S. – Constitutive laws for engineering materials, with emphasis on geologic materials – Chadrakant S., 1984.

- [14] Dhatt G. & Touzot G. – The Finite Element Method Displayed – John Wiley and Sons, 1984, ISBN 0-471-90110-5.
- [15] Gurtin, M. E. – An Introduction to Continuum Mechanics – New York, Academic Press, pp. 264, 1981.
- [16] Hughes, T. R. H. – The Finite Element Method – New Jersey, Prentice Hall International, pp. 797, 1987.
- [17] Kachanov, L. M. – Foundations of the Theory of Plasticity – Amsterdam, Elsevier, 1971.
- [18] Kaliszky, Sándor – Plasticity: theory and engineering applications – Amsterdam, Elsevier, 1989.
- [19] Lemaitre, J. – A Course on Damage Mechanics – Germany, Springer-Verlag, p. 209, 1992.
- [20] Lemaitre, J. – Micro-mechanics of Crack Initiation – International Journal of Fracture, vol. 42, pp. 87-99, 1990.
- [21] Lemaitre, J. & Chaboche, J. L. – Mechanics of Solid Materials – First paper-back edition, Cambridge University Press, 1994.
- [22] Lemaitre, J. & Dufailly, J. – Damage Measurements – Engineering Fracture Mechanics, vol. 28, pp. 643-661, 1987.
- [23] Lemaitre, J. & Sermage, P. – One damage law for different mechanisms – Computational Mechanics, Springer-Verlag, pp. 84-88, 1997.
- [24] Lewis, R. W. & Khoei, A. R. – Numerical modeling of large deformations in metal powder forming, Computational methods in applied Mechanics and Engineering, vol 159, pp. 291-328, 1998.
- [25] Lubliner, Jacob – Plasticity Theory – New York, Macmillan Publishing Company, 1990.
- [26] Malvern, L. E. – Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium – New Jersey, Prentice-Hall, 1969.
- [27] Mitchell, James K. – Fundamentals of Soil Behavior – Berkeley, University of California, 1976.
- [28] Owen, D. R. J. & Hinton, E. – Finite Elements in Plasticity – Swansea, Pineridge Press Limited, 1980.

- [29] Simo, J. C.; Ju, J. W.; Pister, K. S. & Taylor, R. L. – Assessment of cap model: consistent return algorithms and rate dependent extension, *Journal of Engineering Mechanics*, 114, 1988, 191218.
- [30] Simo, J. C. & Ju, J. W. – Strain- and Stress-Based Continuous Damage Model - Part I and II – *Int. J. Solids Structures*, vol 23, pp 821-869, 1987.
- [31] Simo, J. C. & Taylor, R. L. – A Return Mapping Algorithm for Plane Stress Elasto-plasticity – *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 31, pp. 649-670, 1986.
- [32] Souza Neto, E. A.– *Computacional Plasticity - USP* , 2002.
- [33] Spencer, A. J. M. – *Continuum mechanics (Longman mathematical texts)*– Great Britain, 1980.
- [34] Szabó, B. & Babuska, I. – *Finite Element Analysis* – New York, John Wiley & Sons, pp. 368, 1991.
- [35] Swan, Colby C. & Seo, Young-Kyo – A Smooth, Three-Surface Elasto-Plastic Cap Model: Rate Formulation, Integration Algorithm and Tangent Operators, *Journal of Engineering Mechanics*, 114, 2000, 191218.
- [36] Truesdell C. – *Mechanics of Solids – vol. III, Theory of Viscoelasticity, Plasticity, Elastic Waves, and Elastic Stability*, Springer-Verlag, 1984.
- [37] Washizu, K. – *Variational Methods in Elasticity and Plasticity* – 2nd edition, Pergamon Press, Oxford, 1975.
- [38] Zienkiewicz, O. C. & Taylor, R. L. - *The Finite Element Method - Fourth Edition*, vol.1 e 2, McGraw-Hill Book Company, ISBN 0-07-084175-6, 1989.

Apêndice A

Integração Numérica

Afim de se determinar as integrais para os problemas de elementos finitos, emprega-se um procedimento de integração, como por exemplo o descrito abaixo:

A.1 Regra da Quadratura Gaussiana

Seja $g(\xi, \eta)$, uma função genérica definida no intervalo $[0, -1]^2$, segundo o produto cartesiano, então.

$$\int_0^1 \int_0^{1-\xi} g(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_i \sum_j g(\xi_i, \eta_j) w_i w_j \quad (\text{A.1})$$

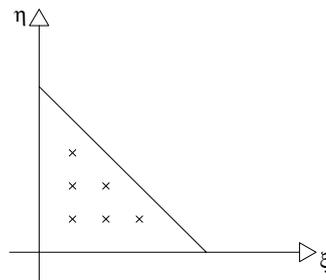


Figura A.1: Pontos de integração do elemento finito

No caso de usar esta regra de integração, como os valores obtidos para as coordenadas e os pesos advindos de, Gouri Dhatt and Gilbert Touzot (1984), assim, tem-se:

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \xi_1 = \pm \frac{1}{5} & w_1 &= \frac{50}{144} \\ \eta_2 &= \xi_2 = \pm \frac{3}{5} & w_2 &= \frac{75}{144} \\ \eta_3 &= \xi_3 = \pm 1 & w_3 &= \frac{19}{144} \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Neste caso a rigidez tangente e o vetor de cargas externas pode ser computado como:

A.1.1 Caso Estado Plano de Deformação e Tensão

$$[\mathbb{K}_T^e] = \sum_i \sum_j [\mathcal{B}(\xi_i, \eta_j)]^T \left[\mathbb{C}_{(\xi_i, \eta_j)}^{(i)} \right] [\mathcal{B}(\xi_i, \eta_j)] J(\xi_i, \eta_j) w_i w_j \quad (\text{A.3})$$

e

$$\left[\vec{F}_e^{int} \right] = \sum_i \sum_j [\mathcal{B}(\xi_i, \eta_j)]^T \sigma(\xi_i, \eta_j) J(\xi_i, \eta_j) w_i w_j \quad (\text{A.4})$$

A.1.2 Caso Axissimétrico

$$[\mathbb{K}_T^e] = \sum_i \sum_j 2\pi [\mathcal{B}(\xi_i, \eta_j)]^T \left[\mathbb{C}_{(\xi_i, \eta_j)}^{(i)} \right] [\mathcal{B}(\xi_i, \eta_j)] r(\xi_i, \eta_j) J(\xi_i, \eta_j) w_i w_j \quad (\text{A.5})$$

e

$$\left[\vec{F}_e^{int} \right] = \sum_i \sum_j 2\pi [\mathcal{B}(\xi_i, \eta_j)]^T \sigma(\xi_i, \eta_j) r(\xi_i, \eta_j) J(\xi_i, \eta_j) w_i w_j \quad (\text{A.6})$$

Apêndice B

Algoritmos do Modelo de "Cap" Suave

Neste apêndice são inseridos os algoritmos utilizados para caracterização e análise do modelo de "Cap" Suave.

B.1 Algoritmo do cálculo de I_1

Algoritmo usado para cálculo dos raios dos "Cap" de compressão e tração.

Inicializar

$$i = 0$$

$$I_1^{(i)} = \kappa$$

$$erro = 1$$

while ($erro > tol$)

Determine $\Delta I_1^{(i)}$

$$\Delta I_1^{(i)} = - \frac{g(I_1^{(i)})}{g'(I_1^{(i)})}$$

Atualize $I_1^{(i+1)}$

$$I_1^{(i+1)} = I_1^{(i)} + \Delta I_1^{(i)}$$

Cálculo do erro

$$erro = \left| g(I_1^{(i+1)}) \right|$$

Reinicie/atualize

$$I_1^{(i)} \leftarrow I_1^{(i+1)}$$

$$i = i + 1$$

end while

B.2 Algoritmo Verificação das Funções de Escoamento

Algoritmo usado na determinação da superfície de escoamento ativa

```

if  $\left\{ \{I_1\}_{n+1}^{(1)} \in \left[ \{I_1^c\}_{n+1}^{(1)}, I_1^T \right] \right\}$  then
    A verdadeira função de escoamento ativa é a  $f_1$ 
else
    if  $\left\{ \{I_1\}_{n+1}^{(1)} < \{I_1^c\}_{n+1}^{(1)} \right\}$  then
        A verdadeira função de escoamento ativa é  $f_2$ 
        Resolva o return mapping para  $f_2$ 
    end if
    if  $\left\{ \{I_1\}_{n+1}^{(1)} > I_1^T \right\}$  then
        A verdadeira função de escoamento ativa é  $f_3$ 
        Resolva o return mapping para  $f_3$ 
    end if
end if

```

B.3 Algoritmo do cálculo de k

Inicialize $i = 0$

$\kappa^0 = \kappa_n$

$erro = 1$

while($erro > tol$)*do*

Computar $\Delta\kappa^i$

$$\Delta\kappa^i = -\frac{P(\kappa^i)}{P'(\kappa^i)}$$

Atualizar κ

$$\kappa^{i+1} = \kappa^i + \Delta\kappa^i$$

Determinar erro

$$erro = \frac{|P(\kappa^{i+1})|}{\max\{1, |\kappa^{i+1}|\}}$$

Reiniciar/atualizar contador

$$i = i + 1$$

$$\kappa^i \Leftarrow \kappa^{i+1}$$

end while

B.4 Algoritmo Determinação do Valor da Superfície de Escoamento Ativa

Algoritmo usado na determinação do valor da superfície de escoamento ativa.

Computar o *elastic predictor* da tensão σ_{n+1}^{trial} ;

Computar as variáveis de encruamento $\mathcal{X}_{n+1}^{D trial}$, κ_{n+1}^{trial} ;

Computar os valores das funções de escoamento f_1^{trial} , f_2^{trial} e f_3^{trial} ,

baseado em $\{\sigma_{n+1}^{trial}, \mathcal{X}_{n+1}^{D trial}, \kappa_{n+1}^{trial}\}$

If($f_1^{trial} > tol$)*then*

Avaliar *return mapping* para o *Caso (1)*

Computar $\{I_1\}_{n+1}^{(1)}$ e $\kappa_{n+1}^{(1)}$

if $\{\{I_1\}_{n+1}^{(1)} < \{I_1\}_{n+1}^{(1)}\}$ *then*

Caso (2) está ativo

go to Caso (2)

elseif $\{\{I_1\}_{n+1}^{(1)} > I_1^T\}$ *then*

Caso (3) está ativo

go to Caso (3)

else

Caso (1) está ativo

end if

else

if $\{(f_2^{trial} > tol) .and. (I_1^{trial} < I_1^c(\kappa_{n+1}^{trial}))\}$ *then*

go to Caso (2)

elseif $\{(f_3^{trial} > tol) .and. (I_1^{trial} > I_1^T)\}$ *then*

go to Caso (3)

else

Elastic predictor, pois está no domínio elástico

end if

end if

B.5 Algoritmo do cálculo de $\Delta\gamma_3$

Inicialize $\Delta\gamma_3^{(0)} = 0$, $i = 0$ e $erro = 1$
while($erro > tol$)*do*
 Computar $\delta\Delta\gamma_3^{(i)}$

$$\delta\Delta\gamma_3^{(i)} = -\frac{\mathfrak{S}(\Delta\gamma_3^{(i)})}{\mathfrak{S}'(\Delta\gamma_3^{(i)})}$$

 Atualizar $\Delta\gamma_3^{(i+1)}$

$$\Delta\gamma_3^{(i+1)} = \Delta\gamma_3^{(i)} + \delta\Delta\gamma_3^{(i)}$$

 Determinar erro

$$erro = \frac{|\delta\Delta\gamma_3^{(i)}|}{\max\{1, |\Delta\gamma_3^{(i+1)}|\}}$$
 sendo: $erro = |\mathfrak{S}(\Delta\gamma_3)|$
 Reiniciar/atualizar contador
 $i = i + 1$
 $\{\Delta\gamma_3\}^{(i)} \leftarrow \{\Delta\gamma_3\}^{(i+1)}$
end while

B.6 Algoritmo do cálculo de $\bar{\kappa}_{n+1}$

Inicializar $\kappa_{n+1}^{(0)} = \kappa_n$, $i = 0$ e $erro = 1$
while($erro > tol$)*do*
 Computar $\delta\kappa_n^{(i)}$

$$\delta\kappa_n^{(i)} = -\frac{F(\kappa_n^{(i)})}{F'(\kappa_n^{(i)})}$$

 Atualizar $\kappa_{n+1}^{(i+1)}$

$$\kappa_{n+1}^{(i+1)} = \kappa_{n+1}^{(i)} + \delta\kappa_n^{(i)}$$

 Determinar erro

$$erro = \frac{|\delta\kappa_n^{(i)}|}{\max\{1, |\kappa_{n+1}^{(i+1)}|\}}$$

 Reiniciar/atualizar contador
 $i = i + 1$
 $\kappa_{n+1}^{(i)} \leftarrow \kappa_{n+1}^{(i+1)}$
end while

B.7 Procedimento da Diferença Finita

O procedimento da diferença finita foi muito utilizado no cálculo das inúmeras derivadas que se teve que calcular para implementação dos algoritmos deste trabalho. A verificação numérica foi fundamental para a comparação analítica das derivadas.

O procedimento da diferença finita é ilustrado na figura abaixo:

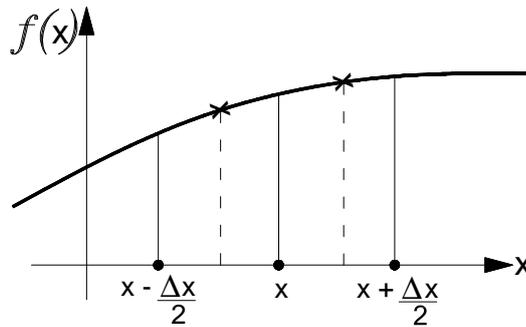


Figura B.1: Procedimento da Diferença Finita Central.

Neste caso:

$$\mathcal{F}'\left(x - \frac{\Delta x}{2}\right) = \frac{\mathcal{F}(x) - \mathcal{F}(x - \Delta x)}{\Delta x} \quad (\text{B.1})$$

e

$$\mathcal{F}'\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \frac{\mathcal{F}(x + \Delta x) - \mathcal{F}(x)}{\Delta x} \quad (\text{B.2})$$

Assim, ao aplicar o método da diferença central,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}''(x) &= \frac{\mathcal{F}'\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) - \mathcal{F}'\left(x - \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} \\ &= \frac{\mathcal{F}(x + \Delta x) - 2\mathcal{F}(x) + \mathcal{F}(x - \Delta x)}{(\Delta x)^2} \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Como resultado obtém-se:

$$\mathcal{F}'(x) = \frac{\mathcal{F}(x + \Delta x) - \mathcal{F}(x - \Delta x)}{2\Delta x} \quad (\text{B.4})$$

e,

$$\mathcal{F}''(x) = \frac{\mathcal{F}(x + \Delta x) - 2\mathcal{F}(x) + \mathcal{F}(x - \Delta x)}{(\Delta x)^2}. \quad (\text{B.5})$$