

Universidade Federal de Santa Catarina  
Curso de Pós-Graduação em Matemática e  
Computação Científica

**Evolução de Curvas Convexas  
através do Fluxo do Gradiente da  
Função Comprimento de Arco**

**Divane Marcon**

**Orientador: Prof. Dr. Celso Melchiades Doria**

**Florianópolis**

**Março de 2003**

**Universidade Federal de Santa Catarina**  
**Curso de Pós-Graduação em Matemática e**  
**Computação Científica**

**Evolução de Curvas Convexas através do Fluxo do**  
**Gradiente da Função Comprimento de Arco**

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica, do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina, para a obtenção do grau de Mestre em Matemática, com Área de Concentração em Geometria e Topologia.

**Divane Marcon**  
**Florianópolis**  
**Março de 2003**

# **Evolução de Curvas Convexas através do Fluxo do Gradiente da Função Comprimento de Arco**

**por**

**Divane Marcon**

Esta Dissertação foi julgada adequada para a obtenção do Título de “Mestre”,  
Área de Concentração em Geometria e Topologia, e aprovada em sua forma  
final pelo Curso de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica.

---

Igor Mozolevski  
Coordenador

Comissão Examinadora

---

Prof. Dr. Celso Melchiades Doria (UFSC-Orientador)

---

Prof. Dr. Eliezer Batista (UFSC)

---

Prof. Dr. Igor Mozolevski (UFSC)

---

Prof. Dr. Marcos Craizer (PUC-Rio)

**Florianópolis, Março de 2003.**

À Deus

À minha Mãe, Amélia Marcon

Ao meu Pai, Erico Marcon

# Agradecimentos

Agradeço ao meu namorado, Anderson Maciel, pela paciência e companheirismo durante estes dois anos. Aos amigos e colegas que sempre acreditaram em mim. Aos professores do departamento de matemática. A coordenação do curso de pós-graduação pelo apoio. A secretária Elisa, sempre prestativa. Ao Cristiano pelas figuras.

Meus agradecimentos, principalmente, ao Prof. Celso Doria pela orientação e pelas inúmeras dúvidas tiradas. Agradeço a CAPES e ao CNPq pelo suporte financeiro.

# Resumo

Seja  $\gamma$  uma curva plana, fechada e estritamente convexa. Aplicando o fluxo do gradiente da função comprimento de arco em  $\gamma$  obtemos uma evolução para a curva.

Faremos uma breve introdução a teoria das curvas planas, com algumas definições e resultados utilizados em nosso estudo.

Mostraremos propriedades geométricas de curvas convexas durante a evolução.

Para o caso em que  $\gamma$  é estritamente convexa, mostraremos que a área delimitada por  $\gamma$  zera em tempo finito e igual a  $\frac{A_0}{2\pi}$ , onde  $A_0$  é a área delimitada pela curva inicial.

Também veremos que a curva evolui, assintoticamente, para um círculo, enquanto sua área zera. Isto será estudado de duas maneiras distintas.

Para isto, seguiremos argumentos dos artigos de Hamilton e Gage: [GH] e [G].

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Curvas no Plano</b>	<b>2</b>
1.1 Conceitos preliminares . . . . .	2
1.2 Curvatura de Curvas Planas . . . . .	6
1.2.1 Curvas planas com curvatura constante . . . . .	10
1.2.2 Relação entre o sinal da curvatura e curvas estritamente convexas	12
1.3 Desigualdade Isoperimétrica . . . . .	17
<b>2 Equação de Evolução</b>	<b>20</b>
2.1 O fluxo pela curvatura . . . . .	20
2.2 Evolução dos invariantes geométricos . . . . .	23
2.3 Curva simples permanece simples . . . . .	26
2.4 Existência de solução para curvas estritamente convexas . . . . .	32
<b>3 Análise das soluções do fluxo pela curvatura</b>	<b>37</b>
3.1 Estudo da área . . . . .	37
3.2 Comportamento assintótico . . . . .	54
3.2.1 Primeiro método ([G]) . . . . .	54
3.2.2 Segundo método ([GH]) . . . . .	65
<b>Apêndice</b>	<b>84</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>85</b>

# Introdução

A evolução de curvas planas pelo fluxo do gradiente do funcional comprimento de arco tem várias aplicações como, por exemplo, morfologia diferencial e contornos aditivos, isto ligado à área de processamento de imagens.

Este fato foi a motivação para o assunto desta dissertação, onde definimos o fluxo em questão através de sua interpretação variacional.

O objetivo deste estudo é trabalhar com equações de evolução, do ponto de vista geométrico, para curvas planas, fechadas e estritamente convexas, analisando suas características, seguindo argumentos de [GH] e [G].

Mais claramente, queremos provar os seguintes resultados:

- 1) Seja  $\gamma$  uma curva estritamente convexa. Então o fluxo pelo gradiente contrai  $\gamma$  a um ponto em tempo finito igual a  $\frac{A_0}{2\pi}$ , onde  $A_0$  é a área de  $\gamma$ , a curva permanecendo simples e estritamente convexa ao longo da evolução.
- 2) Se para cada  $t \in [0, \frac{A_0}{2\pi})$  aplicarmos uma homotetia a  $\varphi(., t)$  de modo a obter uma curva  $\bar{\varphi}(., t)$  que possua área igual a  $\pi$ , então  $\bar{\varphi}(., t)$  converge para um círculo de área  $\pi$ .

Para isso, dividimos esta dissertação em três capítulos.

O primeiro capítulo contém resultados da teoria de curvas planas, dando ênfase à curvatura de uma curva, curvas convexas e a desigualdade isoperimétrica.

No segundo capítulo definimos o fluxo pelo gradiente, também denominado equação de evolução. Estudamos como evoluem os objetos geométricos relacionados à curva, além de algumas características da curva ao longo da evolução.

No terceiro capítulo analisamos as soluções do fluxo. Provamos que a área tende a zero em tempo finito. E por fim, estudamos o comportamento assintótico das soluções do fluxo.



# Capítulo 1

## Curvas no Plano

Neste capítulo, veremos alguns conceitos básicos necessários para o estudo de curvas planas.

### 1.1 Conceitos preliminares

Começaremos com a definição de métrica euclideana em  $\mathbb{R}^2$ .

**Definição 1.1.** *O plano tangente à  $\mathbb{R}^2$  no ponto  $p$  é o conjunto*

$$T_p\mathbb{R}^2 = \{v \in \mathbb{R}^2 / \exists \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^2, \gamma(0) = p, \gamma'(0) = v\}$$

**Definição 1.2.** *A métrica euclideana em  $\mathbb{R}^2$  é a aplicação que a cada  $p \in \mathbb{R}^2$ , associa o produto interno*

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : T_p\mathbb{R}^2 \times T_p\mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (m, n) &\mapsto \langle m, n \rangle = m_1n_1 + m_2n_2 \end{aligned} \tag{1.1}$$

onde  $m = (m_1, m_2), n = (n_1, n_2) \in T_p\mathbb{R}^2$ .

Considere  $I \subseteq \mathbb{R}$  um intervalo aberto.

**Definição 1.3.** *Uma **curva plana parametrizada** é uma aplicação  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  satisfazendo as seguintes condições:*

1.  $\gamma$  é suave, ou seja, é de classe  $C^\infty$ ;
2.  $\gamma$  é regular, isto é, para cada ponto  $u_0 \in I$ ,  $\gamma'(u_0) = \frac{d\gamma}{du}(u_0) \neq (0, 0)$ , ou equivalentemente,  $\|\gamma'(u_0)\| = \sqrt{\langle \gamma'(u_0), \gamma'(u_0) \rangle} \neq 0$ .

Além disso, denominamos traço de  $\gamma$  o conjunto imagem  $\mathbf{C} = \{\gamma(u) = (x(u), y(u)) \in \mathbb{R}^2, u \in I\}$ . A função  $\gamma(u) = (x(u), y(u))$  é dita uma parametrização de  $\mathbf{C}$  e denominamos  $u$  o parâmetro da curva  $\gamma$ .

Seja  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva parametrizada. O **vetor tangente** (ou vetor velocidade) de  $\gamma$  em  $u_0 \in I$  é dado por  $\gamma'(u_0)$ . Seu módulo é  $\|\gamma'(u_0)\| = \sqrt{\langle \gamma'(u_0), \gamma'(u_0) \rangle}$ . Assim, definimos o **vetor tangente unitário**, em  $u_0 \in I$ , por

$$T = \frac{\gamma'(u_0)}{\|\gamma'(u_0)\|}.$$

Em coordenadas, se considerarmos  $\gamma(u) = (x(u), y(u))$  uma parametrização então o vetor tangente em  $u_0 \in I$  é dado por  $\gamma'(u) = (x'(u), y'(u))$  e seu módulo é  $\|\gamma'(u_0)\| = \sqrt{(x'(u_0))^2 + (y'(u_0))^2}$ .

A partir da métrica, podemos determinar o comprimento de  $\gamma$ .

**Definição 1.4.** *Seja  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva parametrizada. O comprimento de  $\gamma$ , denotado por  $L(\gamma)$ , é dado por:*

$$L(\gamma) = \int_I \|\gamma'(u)\| du$$

Dada uma curva  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , a função comprimento de arco  $S : I \rightarrow \mathbb{R}$  é definida por

$$S(u) = \int_{u_0}^u \|\gamma'(\xi)\| d\xi.$$

Observe que, como  $\|\gamma'(u)\|$  é uma função contínua, a função  $S$  é de classe  $C^1$  e, pelo Teorema Fundamental do Cálculo  $S'(u) = \|\gamma'(u)\| > 0$ .

Dizemos que uma curva  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  encontra-se **parametrizada pelo comprimento de arco** se

$$S(u) = u + c, \quad \forall u \in I$$

onde  $c$  é uma constante.

O parâmetro de comprimento de arco denotamos por  $s$ , e neste caso escrevemos  $\gamma = \gamma(s)$ .

**Proposição 1.1.** *Uma curva  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  está parametrizada pelo comprimento de arco se, e somente se,*

$$\|\gamma'(u)\| = 1.$$

*Demonstração.* Se  $S(u) = u + c$  então obtemos que  $\|\gamma'(u)\| = S'(u) = 1$ .

Reciprocamente, se  $\|\gamma'(u)\| = 1$ , para todo  $u \in I$ , então

$$S(u) = \int_{u_0}^u \|\gamma'(\xi)\| d\xi = \int_{u_0}^u d\xi = u - u_0,$$

e portanto,  $\gamma$  está parametrizada pelo comprimento de arco.  $\square$

Quando  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  está parametrizada pelo comprimento de arco, ou seja,  $\gamma = \gamma(s)$ , temos  $T = \frac{\gamma'(s)}{\|\gamma'(s)\|} = \frac{d\gamma}{ds}(s)$  pois  $\|\gamma'(s)\| = 1$ .

Seja  $u$  um parâmetro qualquer e  $s$  o parâmetro de comprimento de arco. Considerando  $v = \|\gamma'(u)\|$ , a relação entre  $\frac{\partial}{\partial s}$  e  $\frac{\partial}{\partial u}$  é dada pelo seguinte lema;

**Lema 1.1.**

$$\frac{\partial}{\partial s} = \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial u}$$

*Demonstração.* Pela regra da cadeia temos

$$\frac{\partial}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial u} \frac{du}{ds}$$

Vamos mostrar agora que

$$\frac{du}{ds} = \frac{1}{v}$$

De fato,

Seja  $s(u) = \int_{u_0}^u v du$ ,  $\frac{ds}{du} = v > 0$ . Assim

$$s^{-1}(s(u)) = u \Rightarrow \frac{d}{du} s^{-1}(s(u)) = \frac{d}{ds} s^{-1}(s(u)) \cdot s_u = 1 \Rightarrow \frac{du}{ds} = \frac{1}{s_u} = \frac{1}{v} \Rightarrow ds = v du.$$

O que prova o lema.  $\square$

Por essa relação temos:

$$\frac{d\gamma}{du} = v \frac{d\gamma}{ds}, \quad \frac{dT}{du} = v \frac{dT}{ds}.$$

O próximo resultado nos mostra que toda curva regular admite uma reparametrização por comprimento de arco.

**Teorema 1.1.** *Toda curva regular pode ser reparametrizada pelo comprimento de arco. Ou seja, dada  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva regular e  $S : I \rightarrow \mathbb{R}$  a função comprimento de arco de  $\gamma$ , existem uma função inversa  $h$  de  $S$  definida no intervalo  $J = S(I)$  e  $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $\beta(s) = \gamma \circ h(s)$  tal que  $\|\beta'(s)\| = 1$ .*

*Demonstração.* Como  $\gamma$  é regular, a função comprimento de arco satisfaz  $S'(u) = \|\gamma'(u)\| > 0$ . Logo,  $S$  é estritamente crescente e portanto injetiva. Da continuidade de  $S$  temos que  $S(I)$  é um intervalo  $J$ . Pelo teorema da função inversa concluímos então que  $S$  possui uma função inversa diferenciável  $h : J \rightarrow I$ . Por outro lado,  $S(u_0) = 0 \in J$  e  $h(0) = u_0$ . Defina  $\beta(s) = \gamma \circ h(s)$ . Visto que  $h = S^{-1}$ , temos,

$$h'(s) = \frac{1}{S^{-1}(h(s))} = \frac{1}{\|\gamma'(h(s))\|}.$$

Logo,

$$\beta'(s) = [\gamma \circ h(s)]' = \gamma'(h(s))h'(s).$$

Portanto,

$$\|\beta'(s)\| = \|\gamma'(h(s))h'(s)\| = \|\gamma'(h(s))\| |h'(s)| = 1.$$

□

O conjunto de curvas planas que nos interessa é o conjunto das curvas fechadas, simples e estritamente convexas, conceitos definidos a seguir.

**Definição 1.5.** (1) *Dizemos que uma curva  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  é simples se a aplicação  $\gamma$  for injetiva.*

(2) *Se  $\gamma$  está definida em um intervalo fechado,  $I = [a, b]$ , e  $\gamma(a) = \gamma(b)$ , dizemos que  $\gamma$  é uma curva fechada.*

Assim, uma curva  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  é fechada e simples se  $\gamma(t) \neq \gamma(s) \quad \forall t \neq s \in [a, b]$  e  $\gamma(a) = \gamma(b)$ .

**Definição 1.6.** *Dizemos que uma curva regular  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  é **convexa** se, para qualquer  $u_0 \in [a, b]$ , o traço de  $\gamma$  está inteiramente contido em um dos semi-planos fechado determinado pela reta tangente a  $\gamma$  em  $\gamma(u_0)$ .  $\gamma$  é dita **estritamente convexa** em  $u_0$ , se o traço de  $\gamma$ , exceto pelo ponto  $\gamma(u_0)$ , está inteiramente contido no semi-plano aberto determinado pela reta tangente à  $\gamma$  em  $\gamma(u_0)$ .*

## 1.2 Curvatura de Curvas Planas

Como vimos na seção anterior, dada uma curva regular podemos reparametrizá-la pelo comprimento de arco. Seja  $\gamma(s) = (x(s), y(s))$  uma parametrização pelo comprimento de arco para  $\gamma$ . Então  $T = \gamma'(s) = (x_s, y_s)$ . Assim, definimos o **vetor normal unitário**  $N$  como sendo aquele tal que  $\{T, N\}$  seja uma base ortonormal positiva de  $\mathbb{R}^2$ . Então  $N = (w, z)$  é tal que  $\langle T, N \rangle = x_s w + y_s z = 0 \Rightarrow w = -y_s$  e  $z = x_s \Rightarrow N = (-y_s, x_s)$ .

Derivando-se  $\langle T, T \rangle$  em relação à  $s$  temos:

$$\langle T, T \rangle_s = 0 \Rightarrow \langle T, T_s \rangle + \langle T_s, T \rangle = 0 \Rightarrow 2\langle T, T_s \rangle = 0 \Rightarrow \langle T, T_s \rangle = 0.$$

Disto temos que  $T_s$  e  $N$  são colineares, donde existe uma função suave  $k = k(s)$  tal que

$$T_s(s) = k(s)N(s). \quad (1.2)$$

**Definição 1.7.** A função  $k : I \rightarrow \mathbb{R}$  é a **curvatura** de  $\gamma$  em  $s \in I$ .

Já que estamos considerando  $\gamma$  de classe  $C^\infty$ , segue que  $k = \langle T_s, N \rangle$  também é de classe  $C^\infty$ .

### Interpretação geométrica de $k$ .

Como  $\|T(s)\| = 1$  e  $|k(s)| = |\langle T_s, N \rangle| = \|T_s(s)\| = \|\gamma_{ss}(s)\|$ , a função curvatura é uma medida da variação da direção de  $T$ .

Isto nos permite escrever uma interpretação geométrica:

dado que  $\|T(s)\| = 1$ , existe  $\theta \in \mathbb{R}$  tal que  $T = (\cos \theta, \sin \theta)$  e assim,  $N = (-\sin \theta, \cos \theta)$ .

Pela regra da Cadeia

$$T_s = \frac{d\theta}{ds}(-\sin \theta, \cos \theta) = \frac{d\theta}{ds}N.$$

Comparando com  $T_s = kN$  temos que  $k = \frac{d\theta}{ds}$ . Assim, a curvatura mede a variação angular de  $T$  em relação a uma direção fixa.

### A curvatura em função de uma parametrização arbitrária.

A curvatura foi definida para curvas regulares parametrizadas pelo comprimento de arco. Mas podemos obter a curvatura em função das derivadas das coordenadas de uma parametrização arbitrária de  $\gamma$ .

**Proposição 1.2.** *Seja  $\gamma(u) = (x(u), y(u))$ ,  $u \in I$ , uma curva regular. Então*

$$k = \frac{x_u y_{uu} - y_u x_{uu}}{(\sqrt{x_u^2 + y_u^2})^3} = \frac{x_u y_{uu} - y_u x_{uu}}{(x_u^2 + y_u^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

*Demonstração.* Observe que

$$\begin{aligned} T_s = kN &\Rightarrow \langle T_s, N \rangle = \langle kN, N \rangle \\ &\Rightarrow k = \langle T_s, N \rangle = \langle (x_{ss}, y_{ss}), (-y_s, x_s) \rangle = -x_{ss}y_s + y_{ss}x_s \end{aligned}$$

Em relação a um parâmetro  $u$  qualquer, usando o lema (1.1) e  $v = \|\gamma_u\| = \sqrt{x_u^2 + y_u^2}$ , tem-se pela Regra da Cadeia:

$$\begin{aligned} x_s &= \frac{dx}{du} \frac{du}{ds} = \frac{x_u}{v} \\ x_{ss} &= \left( \frac{d}{du}(x_u) \frac{du}{ds} v - x_u v_s \right) \frac{1}{v^2} = \left( x_{uu} \cdot \frac{1}{v} \cdot v - x_u \cdot v_s \right) \cdot \frac{1}{v^2} = \frac{x_{uu}}{v^2} - \frac{x_u v_s}{v^2} \\ y_s &= y_u \cdot \frac{du}{ds} = \frac{y_u}{v} \\ y_{ss} &= \left( \frac{d}{du}(y_u) \frac{du}{ds} v - y_u v_s \right) \cdot \frac{1}{v^2} = \frac{y_{uu}}{v^2} - \frac{y_u v_s}{v^2} \\ x_s \cdot y_{ss} &= \frac{x_u}{v} \left( \frac{y_{uu}}{v^2} - \frac{y_u v_s}{v^2} \right) = \frac{x_u y_{uu}}{v^3} - \frac{x_u y_u v_s}{v^3} \\ y_s \cdot x_{ss} &= \frac{y_u}{v} \left( \frac{x_{uu}}{v^2} - \frac{x_u v_s}{v^2} \right) = \frac{y_u x_{uu}}{v^3} - \frac{y_u x_u v_s}{v^3} \end{aligned}$$

Com isso,

$$\begin{aligned} k &= x_s y_{ss} - y_s x_{ss} = \frac{x_u y_{uu}}{v^3} - \frac{x_u y_u v_s}{v^3} - \frac{y_u x_{uu}}{v^3} + \frac{y_u x_u v_s}{v^3} = \frac{x_u y_{uu}}{v^3} - \frac{y_u x_{uu}}{v^3} \\ &= \frac{x_u y_{uu} - y_u x_{uu}}{(\sqrt{x_u^2 + y_u^2})^3} = \frac{x_u y_{uu} - y_u x_{uu}}{(x_u^2 + y_u^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

□

**Definição 1.8.** *O conjunto de vetores  $\{T(s), N(s)\}$  é denominado **referencial de Frenet** de  $\gamma$ .*

Como  $\langle T, N \rangle = 0$ , derivando-se este produto interno em relação a  $s$  obte-

mos,

$$\langle T, N \rangle' = 0 \Rightarrow \langle T_s, N \rangle + \langle T, N_s \rangle = 0 \Rightarrow \langle T, N_s \rangle = -\langle T_s, N \rangle$$

De (1.2),  $k = \langle T_s, N \rangle$ , obtemos

$$\langle T, N_s \rangle = -k \Rightarrow N_s = -kT, \quad (1.3)$$

uma vez que  $\langle N, N_s \rangle = 0$ .

Desta forma, as **Equações de Frenet** são definidas como sendo as equações

$$\frac{dT}{ds} = kN, \quad \frac{dN}{ds} = -kT. \quad (1.4)$$

Dada uma função suave  $k = k(s)$ , podemos determinar uma curva tal que  $k$  é a curvatura desta curva e as equações de Frenet são satisfeitas. O teorema abaixo nos fornece este resultado.

**Teorema 1.2. Fundamental das curvas planas [AM]** *Seja  $k : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua. Então existe uma curva  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  parametrizada pelo comprimento de arco, com curvatura  $k(s)$ . Além disso,  $\gamma$  é única no seguinte sentido: se  $\beta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  é outra curva parametrizada pelo comprimento de arco, com curvatura  $k(s)$ , existe um movimento rígido  $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $\beta = A \circ \gamma$ . Um movimento rígido  $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é a composta de uma rotação com uma translação (não importa a ordem).*

*Demonstração.* Antes de começarmos a prova do teorema, faremos algumas considerações iniciais. Considere  $\alpha(s) = (x(s), y(s))$  uma curva parametrizada pelo comprimento de arco.

Vimos que  $k(s) = \frac{d\theta}{ds}$ . Isto implica que  $\theta(s) = \int_0^s k(\xi)d\xi + \theta(0)$ . Definimos agora,  $\bar{x}, \bar{y} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$\bar{x}(s) = \int_0^s \cos \theta(r)dr + x_0, \quad \bar{y}(s) = \int_0^s \text{sen} \theta(r)dr + y_0,$$

onde  $\alpha(0) = (x_0, y_0)$ .

Observamos que tanto  $(x, y)$  como  $(\bar{x}, \bar{y})$  satisfazem o mesmo sistema de equações dife-

renciais

$$\begin{cases} x'' = -ky', \\ y'' = kx'. \end{cases}$$

com condições iniciais  $(x'(0), y'(0)) = T(0)$ ,  $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$ . Logo, pelo teorema de existência e unicidade para sistemas de equações diferenciais ordinárias,  $(x(s), y(s)) = (\bar{x}(s), \bar{y}(s))$ ,  $\forall s \in [a, b]$ . Então, a curva  $\alpha$  que tem  $k(s)$  como curvatura é dada explicitamente por

$$\alpha(s) = \left( \int_0^s \cos \theta(r) dr + x_0, \int_0^s \operatorname{sen} \theta(r) dr + y_0 \right),$$

onde  $(x_0, y_0) = \alpha(0)$ ,  $\theta(s) = \int_0^s k(r) dr + \theta_0$ ; sendo  $\theta_0$  o ângulo orientado que  $T(0)$  forma com a semireta das abscissas positivas.

Dividiremos a demonstração do teorema em duas etapas: existência e unicidade.

1) *Existência*

A partir dos comentários anteriores, definimos  $\theta, x, y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$\theta(s) = \int_0^s k(r) dr, \quad x(s) = \int_0^s \cos \theta(r) dr, \quad y(s) = \int_0^s \operatorname{sen} \theta(r) dr.$$

Observe que como  $k$  é contínua,  $\theta$  é de classe  $C^1$  e  $x, y$  de classe  $C^2$ , pelo menos. Então  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $\gamma(s) = (x(s), y(s))$  é uma curva de classe  $C^2$ .

Além disso,

$$\|\gamma'(s)\| = \|(x'(s), y'(s))\| = \|(\cos \theta(s), \operatorname{sen} \theta(s))\| = 1.$$

Donde  $\gamma$  é parametrizada pelo comprimento de arco. Para finalizar a existência, basta notar que

$$x'(s)y''(s) - x''(s)y'(s) = \cos \theta(s)[\theta'(s) \cos \theta(s)] - [-\theta'(s) \operatorname{sen} \theta(s)] \operatorname{sen} \theta(s) = \theta'(s) = k(s).$$

Disto, a curvatura de  $\gamma$  é  $k(s)$ .

2) *Unicidade*

Seja  $\beta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva parametrizada pelo comprimento de arco,



tal que sua curvatura é  $k(s)$ . Defina  $(x_0, y_0) = \beta(0) = a$  e  $\theta_0$  o ângulo entre o eixo  $x$  e  $\beta'(0)$ .

A translação  $T_a : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dada por  $T_a(v) = v + a$ , leva  $\gamma(0) = (0, 0)$  em  $\beta(0)$ . A rotação  $R_{\theta_0} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por  $R_{\theta_0}(1, 0) = (\cos \theta_0, \sin \theta_0)$ ,  $R_{\theta_0}(0, 1) = (-\sin \theta_0, \cos \theta_0)$ , leva  $\gamma'(0) = (1, 0)$  em  $\beta'(0) = (\cos \theta_0, \sin \theta_0)$  e leva  $N_\gamma(0) = (0, 1)$  em  $N_\beta(0) = (-\sin \theta_0, \cos \theta_0)$ . A curva  $A \circ \gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , onde  $A = R_{\theta_0} \circ T_a$ , é ainda parametrizada pelo comprimento de arco com curvatura  $k(s)$ , pois a curvatura e o comprimento de uma curva são invariantes por movimentos rígidos no plano.

Provaremos que  $A \circ \gamma = \beta$ .

Temos que  $A \circ \gamma(0) = \beta(0)$ ,  $T_{A \circ \gamma}(0) = T_\beta(0)$  e  $N_{A \circ \gamma}(0) = N_\beta(0)$  e que  $A \circ \gamma$  e  $\beta$  satisfazem as respectivas equações de Frenet

$$\begin{cases} \frac{d}{ds} T_{A \circ \gamma} = k N_{A \circ \gamma}, & \frac{d}{ds} T_\beta = k N_\beta, \\ \frac{d}{ds} N_{A \circ \gamma} = -k T_{A \circ \gamma}. & \frac{d}{ds} N_\beta = -k T_\beta. \end{cases}$$

Derivando a expressão

$$f(s) = \|T_{A \circ \gamma} - T_\beta\|^2 + \|N_{A \circ \gamma} - N_\beta\|^2$$

e usando as equações acima, temos

$$\begin{aligned} \frac{df}{ds} &= 2 \left( \left\langle T_{A \circ \gamma} - T_\beta, \frac{d}{ds} T_{A \circ \gamma} - \frac{d}{ds} T_\beta \right\rangle + \left\langle N_{A \circ \gamma} - N_\beta, \frac{d}{ds} N_{A \circ \gamma} - \frac{d}{ds} N_\beta \right\rangle \right) \\ &= 2k (\langle T_{A \circ \gamma} - T_\beta, N_{A \circ \gamma} - N_\beta \rangle - \langle N_{A \circ \gamma} - N_\beta, T_{A \circ \gamma} - T_\beta \rangle) = 0. \end{aligned}$$

Isto implica que  $f$  é constante em  $[a, b]$  e como  $f(0) = 0$ , conseqüentemente  $f \equiv 0$  em  $[a, b]$ , isto é,  $T_{A \circ \gamma}(s) = T_\beta(s)$  e  $N_{A \circ \gamma}(s) = N_\beta(s)$ ,  $\forall s \in [a, b]$ .

Como  $(A \circ \gamma)'(s) = T_{A \circ \gamma}(s) = T_\beta(s) = \beta'(s)$ , obtemos  $(A \circ \gamma - \beta)'(s) = 0$ , isto é,  $A \circ \gamma - \beta$  é constante. Mas  $(A \circ \gamma - \beta)(0) = 0$  donde  $A \circ \gamma = \beta$ .  $\square$

### 1.2.1 Curvas planas com curvatura constante

Vamos caracterizar as curvas planas regulares de curvatura constante.

Seja  $k : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  a função curvatura da curva plana  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ .

Consideraremos  $\gamma$  parametrizada pelo comprimento de arco.

<sup>1</sup> $N_{curva}$  indica o vetor normal relativo a curva.

**Proposição 1.3.** *O traço de  $\gamma(s)$  é uma reta se, e somente se,  $k(s) = 0$ .*

*Demonstração.* Se  $\gamma$  é uma reta e está parametrizada pelo comprimento de arco, temos que

$$\gamma(s) = P_0 + sv_0, \quad \|v_0\| = 1$$

onde  $P_0$  é um ponto e  $v_0$  é um vetor do plano.

Logo,  $T(s) = \gamma'(s) = v_0$  e, portanto,  $T'(s) = (0, 0) \forall s \in [a, b]$ . Conseqüentemente,  $0 = \|T'(s)\| = |k(s)|$ , o que implica que  $k(s) = 0$ .

Reciprocamente, suponha  $k(s) = 0$ . Como  $0 = |k(s)| = \|T'(s)\|$ , temos que  $T'(s) = (0, 0)$ . Além disso,  $T$  está definido no intervalo  $[a, b]$ , donde concluímos que  $T$  é um vetor constante  $v_0$ . Isto implica que

$$\gamma(s) = \gamma(s_0) + \int_{s_0}^s T(\xi) d\xi = \gamma(s_0) + v_0(s - s_0).$$

Portanto,  $\gamma$  é uma reta que passa por  $\gamma(s_0)$  e é paralela ao vetor  $v_0$ . □

**Proposição 1.4.** *O traço de  $\gamma(s)$  é um arco circular de raio  $R$  se, e somente se,  $|k(s)| = \frac{1}{R} = \text{constante} > 0$ .*

*Demonstração.* Suponha que  $\gamma(s)$  é um arco circular de raio  $R$ . Logo,

$$\|\gamma(s) - P_0\|^2 = R^2$$

onde  $P_0$  é um ponto do plano. Ao derivarmos, obtemos

$$\langle \gamma'(s), \gamma(s) - P_0 \rangle = 0.$$

Isto implica que

$$\gamma(s) - P_0 = RN(s) \Rightarrow \gamma'(s) = RN'(s),$$

$N(s)$  é o vetor normal a  $\gamma(s)$ .

Segue das equações de Frenet que

$$\gamma'(s) = -Rk(s)T(s). \quad (1)$$

Por outro lado,

$$\gamma'(s) = T(s). \quad (2)$$

Por (1) e (2) temos

$$\begin{aligned} -Rk(s)T(s) &= T(s) \\ \Rightarrow -Rk(s) &= 1 \\ \Rightarrow k(s) &= -\frac{1}{R} \Rightarrow |k(s)| = \frac{1}{R} \end{aligned}$$

Reciprocamente, suponha  $|k(s)| = \frac{1}{R}$ . Como  $\gamma$  está parametrizada pelo comprimento de arco e pelas equações de Frenet temos

$$\gamma'(s) = T(s) \Rightarrow \gamma''(s) = T'(s) = \frac{\varepsilon}{R}N(s),$$

onde  $\varepsilon = \pm 1$ . Além disso,

$$N'(s) = -\frac{\varepsilon}{R}T(s).$$

Por outro lado

$$\begin{aligned} [\gamma(s) + \varepsilon RN(s)]' &= \gamma'(s) + \varepsilon RN'(s) = \gamma'(s) - \varepsilon^2 R \frac{1}{R} T = 0 \\ \Rightarrow \gamma(s) + \varepsilon RN(s) &= P_0 \\ \Rightarrow \gamma(s) - P_0 &= \varepsilon RN(s) \\ \Rightarrow \|\gamma(s) - P_0\| &= R. \end{aligned}$$

Portanto,  $\gamma(s)$  é um arco circular de raio  $R$ . □

### 1.2.2 Relação entre o sinal da curvatura e curvas estritamente convexas

Seja  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva com curvatura  $k(s)$  para cada  $s \in I$ .

O próximo lema garante que, fixado  $s_0 \in I$ , se  $k(s_0) > 0$  a curva  $\gamma$  é localmente estritamente convexa.

**Lema 1.2.** *Se  $k(s_0) > 0$  então para todo  $s$  suficientemente próximo de  $s_0$ ,  $\gamma(s)$  está no semi-plano determinado pela reta tangente à curva  $\gamma$  em  $\gamma(s_0)$  para o qual aponta  $N(s_0)$ .*

*Demonstração.* Para mostrar isso, basta verificar que a função

$$f(s) = \langle \gamma(s) - \gamma(s_0), N(s_0) \rangle \geq 0$$

para  $s$  próximo de  $s_0$ . De fato, observe que

$$f'(s_0) = \langle \gamma'(s_0), N(s_0) \rangle = 0$$

e por (1.2)

$$f''(s_0) = \langle \gamma''(s_0), N(s_0) \rangle = k(s_0) > 0.$$

Logo  $f$  possui um mínimo relativo estrito em  $s_0$ . Como  $f(s_0) = 0$  concluímos a prova.  $\square$

De modo análogo, se  $k(s_0) < 0$   $f$  possui um máximo relativo e portanto  $\gamma(s)$  pertence ao semi-plano determinado pela reta tangente à curva  $\gamma$  em  $s_0$  para o qual aponta o vetor  $-N(s_0)$ .

Portanto, pelo lema acima, se  $k(s) > 0$  para todo  $s \in I$  então  $\gamma$  é uma curva estritamente convexa.

Para o caso onde  $k(s_0) \geq 0$  temos que a curva  $\gamma$  é localmente convexa, como veremos na próxima proposição. Assim, se  $k(s) \geq 0$  para todo  $s \in I$  então  $\gamma$  é uma curva convexa.

**Proposição 1.5.** *Seja  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco, com curvatura  $k(s)$ . Suponha que existe  $\delta > 0$ , tal que, para todo  $s \in (s_0 - \delta, s_0 + \delta) \subseteq I$ ,  $k(s) \geq 0$ . Então  $\gamma$  é convexa em  $s_0$ . Além disso, o traço de  $\gamma|_{(s_0 - \delta, s_0 + \delta)}$  está contido no semi-plano determinado pela reta tangente à curva em  $s_0$  para o qual aponta o vetor  $N(s_0)$ .*

*Demonstração.* Seja  $\gamma(s) = (x(s), y(s))$  uma parametrização para  $\gamma$ . Escolha o sistema de coordenadas do  $\mathbb{R}^2$  de modo que  $\gamma(s_0) = (0, 0)$ ,  $T(s_0) = (1, 0)$  e  $N(s_0) = (0, 1)$ . A prova reduz-se, neste caso, a mostrar que existe  $\delta_1 > 0$  tal que  $y(s) \geq 0$ , para todo  $s \in (s_0 - \delta_1, s_0 + \delta_1)$ . As equações de Frenet implicam que as funções  $x$  e  $y$  satisfazem

$$\begin{cases} x''(s) = -k(s)y'(s) \\ y''(s) = k(s)x'(s) \end{cases} \quad (1.5)$$

com condições iniciais dadas por  $(x(s_0), y(s_0)) = (0, 0)$  e  $(x'(s_0), y'(s_0)) = T$ . O sistema

acima tem uma integral primeira dada por

$$\begin{cases} x'(s) = \cos\left(\int_{s_0}^s k(\xi)d\xi\right) \\ y'(s) = \text{sen}\left(\int_{s_0}^s k(\xi)d\xi\right). \end{cases} \quad (1.6)$$

Assim, considerando a função  $\theta$  definida por

$$\theta(s) = \int_{s_0}^s k(\xi)d\xi$$

temos  $(x'(s), y'(s)) = \gamma'(s) = (\cos(\theta(s)), \text{sen}(\theta(s)))$ .

Como  $k(s) \geq 0$ ,  $s \in (s_0 - \delta, s_0 + \delta)$  existe  $0 < \delta_1 \leq \delta$  tal que,

$$y'(s) = \text{sen}(\theta(s)) \geq 0 \quad \text{se} \quad s_0 \leq s \leq s_0 + \delta_1$$

e

$$y'(s) = \text{sen}(\theta(s)) \leq 0 \quad \text{se} \quad s_0 - \delta_1 \leq s \leq s_0$$

Logo, a função  $y$  é decrescente no intervalo  $[s_0 - \delta, s_0]$  e crescente em  $[s_0, s_0 + \delta]$ . Como  $y(s_0) = 0$ , temos que  $y(s) \geq 0$  para todo  $[s_0 - \delta, s_0 + \delta]$ , o que conclui a prova.  $\square$

Seja  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva parametrizada pelo comprimento de arco. O teorema abaixo fornece a relação entre a convexidade e o sinal da curvatura de  $\gamma$ .

**Teorema 1.3.** *Uma curva  $\gamma$ , fechada e simples é convexa se, e somente se, sua curvatura não muda de sinal.*

*Demonstração.* Trocando a orientação de  $\gamma$ , se necessário, podemos supor que  $k(s) \geq 0$ . Pela proposição anterior, temos que  $\gamma$  é convexa para todo  $s \in [a, b]$ .

Reciprocamente, suponha que  $\gamma$  é uma curva convexa, com parametrização  $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ . Como  $\gamma$  é fechada e simples, seu traço delimita uma região conexa e limitada,  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ . Orientando  $\gamma$  de modo que, em algum  $s_0 \in [a, b]$  o vetor normal aponta na região  $\Omega$ . Pela continuidade do vetor normal,  $N(s)$  de  $\gamma$  aponta para  $\Omega$ .

Vamos provar que, com essa orientação,  $k(s) \geq 0$ .

Suponha que para algum  $s_1 \in [a, b]$ ,  $k(s_1) < 0$ . Escolhemos um sistema

de coordenadas do  $\mathbb{R}^2$ , de modo que,

$$\begin{cases} \gamma(s_1) = (s_1, 0) \\ \gamma'(s_1) = (1, 0) \end{cases} \quad (1.7)$$

Neste caso, podemos reparametrizar uma vizinhança do ponto  $\gamma(s_1)$  de modo que, o traço de  $\gamma$  seja dado pelo gráfico de uma função  $f : (s_1 - \varepsilon, s_1 + \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ . Agora, considerando a aproximação de cada coordenada de  $\gamma$  pelo polinômio de Taylor, temos,

$$\begin{cases} x(s) = x(s_1) + (s - s_1)x'(s_1) + \frac{(s-s_1)^2}{2}x''(s_1) + \frac{(s-s_1)^3}{3!}x'''(s_1) + r_1(s) \\ y(s) = y(s_1) + (s - s_1)y'(s_1) + \frac{(s-s_1)^2}{2}y''(s_1) + \frac{(s-s_1)^3}{3!}y'''(s_1) + r_2(s) \end{cases} \quad (1.8)$$

Pelas equações de Frenet,

$$\gamma'''(s_1) = (k(s)N(s))'|_{s=s_1} = k'(s_1)N(s_1) + k(s_1)N'(s_1) = k'(s_1)N(s_1) - k^2(s_1)T(s_1).$$

Por outro lado,

$$\gamma'''(s_1) = (x'''(s_1), y'''(s_1)).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \gamma(s) &= \gamma(s_1) + (s - s_1)T(s_1) + \frac{(s - s_1)^2}{2}k(s_1)N(s_1) \\ &\quad + \frac{(s - s_1)^3}{3!}[k'(s_1)N(s_1) - k^2(s_1)T(s_1)] + R(s) \end{aligned}$$

onde  $\lim_{s \rightarrow s_1} \frac{\|R(s)\|}{(s-s_1)^3} = 0$ .

Observe que, como  $k(s_1) < 0$ , pela equação anterior, para  $s$  suficientemente próximo de  $s_1$ ,

$$\frac{\langle \gamma(s), N(s_1) \rangle}{(s - s_1)^2} = \frac{k(s_1)}{2} + \frac{R}{(s - s_1)^2} < 0.$$

Isso implica que, para  $\varepsilon$  suficientemente pequeno,  $f(s) > 0$ , se  $0 < |s - s_1| < \varepsilon$ . Como  $k(s_1) < 0$ , temos  $N(s_1) = (0, -1)$  e, portanto, existem pontos do traço de  $\gamma$  com a coordenada  $y < 0$ . Por outro lado, a reta tangente a  $\gamma$  em  $\gamma(s_1)$  é a reta  $y = 0$ . Logo, existem pontos do traço de  $\gamma$  de ambos os lados dessa reta, contradizendo

a hipótese que  $\gamma$  é uma curva convexa. □

Com isso, podemos considerar  $k \geq 0$  para curvas convexas e conseqüentemente  $k > 0$  para curvas estritamente convexas. Além disso, como  $k = \frac{d\theta}{ds}$  temos que  $T$  gira no sentido anti-horário e podemos usar  $\theta \in [0, 2\pi)$  como um parâmetro regular para uma curva  $\beta$  estritamente convexa pois  $\frac{d\beta}{d\theta} = \frac{d\beta}{ds} \frac{ds}{d\theta} = \frac{1}{k} \frac{d\beta}{ds} \neq 0$ .

**Lema 1.3.** *Considere uma função  $k : I \rightarrow \mathbb{R}$  positiva, periódica de período  $2\pi$ .  $k$  representa a função curvatura de uma curva simples, fechada e estritamente convexa  $C^2$  no plano se, e somente se,*

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta}{k(\theta)} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{\text{sen} \theta}{k(\theta)} d\theta = 0$$

*Demonstração.* ( $\Rightarrow$ ) Sejam  $T = (\cos \theta, \text{sen} \theta)$  e  $\alpha$  a curva da hipótese.  $\alpha$  é fechada se, e somente se,  $\int T ds = 0$ ,  $T = \alpha_s$  e como  $\alpha$  é convexa temos

$$\begin{aligned} \int_{\alpha} T ds &= \int_{S^1} \frac{T}{k(\theta)} d\theta = \int_{S^1} \frac{(\cos \theta, \text{sen} \theta)}{k(\theta)} d\theta = 0 \\ &\Rightarrow \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta}{k(\theta)} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{\text{sen} \theta}{k(\theta)} d\theta = 0. \end{aligned}$$

( $\Leftarrow$ ) Seja  $\alpha(\theta) = (x(\theta), y(\theta))$ , onde

$$x(\theta) = \int_0^{\theta} \frac{\cos \xi}{k(\xi)} d\xi, \quad y(\theta) = \int_0^{\theta} \frac{\text{sen} \xi}{k(\xi)} d\xi.$$

Sabemos que  $\alpha_s = T$  e  $\theta_s = k$ . Com isso, obtemos

$$\alpha_{\theta} = \frac{\partial \alpha}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial \theta} = T \frac{1}{k} = \frac{T}{k}. \quad (*)$$

Por outro lado

$$\alpha_{\theta} = \left( \frac{\cos(\theta)}{k(\theta)}, \frac{\text{sen}(\theta)}{k(\theta)} \right) = \frac{(\cos(\theta), \text{sen}(\theta))}{k(\theta)} \neq 0. \quad (**)$$

Isso implica que  $\alpha$  é regular.

Segue da hipótese que  $\alpha$  é fechada pois,

$$\alpha(2\pi) - \alpha(0) = \int_0^{2\pi} \alpha_{\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{T}{k(\theta)} d\theta = 0$$

Comparando (\*\*) e (\*) temos  $T = (\cos \theta, \text{sen} \theta)$ , donde  $N = (-\text{sen} \theta, \cos \theta)$ , ou seja,  $k$  é a curvatura da curva e a convexidade desta segue do fato de que  $k$  é positiva. Além disso, a variação angular de  $T$  é  $2\pi$  e, juntamente com a convexidade da curva, temos que  $\alpha$  é simples.  $\square$

### 1.3 Desigualdade Isoperimétrica

Um resultado importante na teoria de curvas planas fechadas é a Desigualdade Isoperimétrica. Uma consequência imediata desta desigualdade é que dentre todas as curvas planas fechadas com um determinado perímetro a circunferência é a que engloba a maior área. Um outro ponto de vista para interpretação é que, dentre todas as curvas planas com uma dada área a circunferência tem o menor comprimento. Esta desigualdade também é importante pois podemos considerar a diferença  $L^2 - 4\pi A$  como uma medida de quanto uma curva convexa afasta-se de ser um círculo.

O seguinte lema será útil para demonstrar a Desigualdade Isoperimétrica.

**Lema 1.4.** *Seja  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva fechada, simples, orientada positivamente e definida por  $\gamma(u) = (x(u), y(u))$ . Então*

$$A = - \int_a^b y(u)x'(u)du = \int_a^b x(u)y'(u)du = \frac{1}{2} \int_a^b [x(u)y'(u) - y(u)x'(u)]du,$$

onde  $A$  é a região limitada pela curva  $\gamma$ .

#### **Teorema 1.4. Desigualdade Isoperimétrica**

*Sejam  $\mathbf{C}$  uma curva plana, simples, fechada com comprimento  $L$  e  $A$  a área da região limitada por  $\mathbf{C}$ . Então  $L^2 - 4\pi A \geq 0$ , ou seja,  $\frac{L^2}{A} \geq 4\pi$ . A igualdade acontece se e somente se  $\mathbf{C}$  é um círculo.*

*Demonstração.* Sejam  $E$  e  $E'$  duas linhas paralelas, uma de cada lado de  $\mathbf{C}$ , que não têm contato com a curva. Movendo estas linhas até que encontrem  $\mathbf{C}$  obtemos duas linhas paralelas  $D$  e  $D'$  que tangenciam a curva, sendo que a mesma está toda contida entre  $D$  e  $D'$ . Considere o círculo  $S^1$  que tangencia  $D$  e  $D'$  mas não toca  $\mathbf{C}$ . Seja  $O$  o centro de  $S^1$  e crie um sistema de coordenadas com centro em  $O$  e o eixo  $x$  perpendicular a  $D$  e  $D'$ . Parametrize  $\mathbf{C}$  por comprimento de arco,  $\gamma(s) = (x(s), y(s))$  tal que tenha orientação positiva e os pontos de tangência em  $D$  e  $D'$  são  $s = 0$  e  $s = s_1$  respectivamente.



Podemos assumir que a equação de  $S^1$  é  $\bar{\gamma} = (\bar{x}(s), \bar{y}(s)) = (x(s), \bar{y}(s))$ ,  $s \in [0, L]$  e  $2r$  a distância entre  $D$  e  $D'$ . Usando o lema (1.4) e denotando por  $\bar{A}$  a área limitada por  $S^1$ , temos

$$A = \int_0^L xy' ds, \quad \bar{A} = \pi r^2 = - \int_0^L \bar{y}x' ds$$

Assim,

$$\begin{aligned} A + \pi r^2 &= \int_0^L (xy' - \bar{y}x') ds \leq \int_0^L \sqrt{(xy' - \bar{y}x')^2} ds \\ &= \int_0^L \sqrt{x^2(y')^2 - 2xy'\bar{y}x' + \bar{y}^2(x')^2} ds \end{aligned}$$

Visto que

$$-2ab \leq a^2 + b^2, \quad \text{onde } a, b \in \mathbb{R}, \quad (1.9)$$

obtemos

$$\begin{aligned} A + \pi r^2 &\leq \int_0^L \sqrt{(xy')^2 + (xx')^2 + (\bar{y}y')^2 + (\bar{y}x')^2} ds \\ &= \int_0^L \sqrt{(x^2 + \bar{y}^2)((x')^2 + (y')^2)} ds = \int_0^L \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2} ds = \int_0^L r ds = Lr. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Do fato que a média geométrica de dois números positivos é menor ou igual a sua média aritmética, segue que:

$$\sqrt{A}\sqrt{\pi r^2} \leq \frac{1}{2}(A + \pi r^2) \leq \frac{1}{2}Lr. \quad (1.11)$$

Portanto,  $4\pi Ar^2 \leq L^2 r^2 \Rightarrow 4\pi \leq \frac{L^2}{A}$ .

Agora, suponha que vale  $4\pi A = L^2$ . Logo, usando (1.11), temos que  $A\pi r^2 = \frac{1}{4}(A + \pi r^2)^2$ , isto é,  $(A - \pi r^2)^2 = 0$ . Portanto,  $A = \pi r^2$ . Assim,  $L = 2\pi r$  e  $r$  não depende da escolha da direção de  $D$ . Além disso, a igualdade em (1.10) implica que vale a igualdade em (1.9), isto é,

$$x'x = a = -b = -\bar{y}y'.$$

Segue-se que

$$(x'x)^2 + (y'x)^2 = (y'x)^2 + (\bar{y}y')^2,$$

ou seja,

$$(x)^2 = [(x')^2 + (y')^2](x)^2 = [(x)^2 + (\bar{y})^2](y')^2 = r^2(y')^2.$$

Repetindo esta mesma construção com um par de retas ortogonais a  $E$ , e usando que  $r$  não depende da direção comum das retas paralelas, podemos trocar  $x$  por  $y$  na equação acima, obtendo

$$(y)^2 = r^2(x')^2.$$

Portanto,

$$(x)^2 + (y)^2 = r^2[(x')^2 + (y')^2] = r^2.$$

Isto significa que o traço de  $\gamma$  é um círculo. □

A desigualdade isoperimétrica será uma importante ferramenta na análise das soluções do fluxo pela curvatura, como veremos no capítulo 3.

# Capítulo 2

## Equação de Evolução

Seja  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva fechada e simples. Neste capítulo, introduziremos o estudo do fluxo pela curvatura de  $\gamma$  e a existência de solução.

### 2.1 O fluxo pela curvatura

Para fins de motivação, o espaço das curvas planas fechadas que consideraremos é o espaço de Sobolev, de classe  $L^{1,2}$ .

$$\Omega = \left\{ \gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 / \gamma(a) = \gamma(b), \int_a^b |\dot{\gamma}|^2 < \infty \right\}$$

onde  $'$  representa a derivada de Sobolev.

**Definição 2.1.** *O espaço tangente a  $\Omega$  em  $\gamma$  é o conjunto*

$$T_\gamma \Omega = \{ \Lambda : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 \mid \exists \delta : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \Omega, \delta(0) = \gamma, \delta'(0) = \Lambda \}$$

Com as operações usuais de funções,  $T_\gamma \Omega$  é um espaço vetorial, por isso, chamamos  $T_\gamma \Omega$  o espaço tangente a  $\Omega$  em  $\gamma$ .

No espaço tangente definimos o produto interno da seguinte forma

$$\begin{aligned} \langle \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle : T_\gamma \Omega \times T_\gamma \Omega &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\lambda, \omega) &\mapsto \langle \langle \lambda, \omega \rangle \rangle = \int_a^b \langle \lambda(t), \omega(t) \rangle dt \end{aligned}$$

Como vimos no capítulo anterior, o comprimento de  $\gamma \in \Omega$  é dado por  $L(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(u)\| du$ . Assim, o comprimento define uma função  $L : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , uma vez

que  $L(\gamma) \leq c \int_I \|\gamma'\|^2$ , onde  $c$  é uma constante. Esta função é diferenciável. [Palais]

Definido o produto interno em  $T_\gamma\Omega$ , vamos encontrar o “gradiente” do funcional comprimento.

Sejam  $\gamma(u) \in \Omega$  e  $\Lambda(u) \in T_\gamma\Omega$ . Fazendo uma analogia com o  $\mathbb{R}^n$ , podemos achar a derivada do funcional  $L(\gamma)$  na direção de  $\Lambda$ , ou seja,  $dL_\gamma.\Lambda = \langle \nabla L(\gamma), \Lambda \rangle$ , sendo  $\nabla L$  o “gradiente” do funcional  $L$ .

Usaremos ' para representar a derivada em relação a  $u$ .

Pelo produto interno definido, todo elemento  $\eta \in \Omega$  pode ser escrito na forma

$$\eta(u) = \gamma(u) + \Lambda(u), \quad \Lambda \in T_\gamma\Omega.$$

Desta forma, uma curva  $\Gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \Omega$ , tal que  $\Gamma(0) = \gamma$  pode ser escrita por

$$\Gamma(u, t) = \gamma(u) + t\Lambda(u).$$

Como  $\gamma \in \Omega$ ,  $\Lambda \in T_\gamma\Omega$  temos,

$$\Gamma(u, 0) = \gamma(u), \quad \frac{\partial \Gamma}{\partial t}(u)|_{t=0} = \Lambda(u).$$

Defina a função  $L : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$L(t) = L(\Lambda) = \int_a^b |\Gamma'(u)| du.$$

Isso implica que

$$L(t) = \int_a^b |\gamma'(u) + t\Lambda'(u)| du = \int_a^b \sqrt{|\gamma'(u)|^2 + 2t\langle \gamma'(u), \Lambda'(u) \rangle + t^2|\Lambda'(u)|^2} du$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt}\Big|_{t=0} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{L(\Delta t) - L(0)}{\Delta t} = dL_\gamma.\Lambda \\ \Rightarrow \frac{dL}{dt} &= \int_a^b \frac{\langle \gamma'(u), \Lambda'(u) \rangle + t|\Lambda'(u)|^2}{\sqrt{|\gamma'(u)|^2 + 2t\langle \gamma'(u), \Lambda'(u) \rangle + t^2|\Lambda'(u)|^2}} du \end{aligned}$$

Então

$$\frac{dL}{dt} = \int_a^b \langle \hat{\gamma}, \Lambda' \rangle du, \quad \hat{\gamma} = \frac{\gamma'}{|\gamma'|}$$

Observe que:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{du} \langle \hat{\gamma}, \Lambda \rangle &= \left\langle \frac{d\hat{\gamma}}{du}, \Lambda \right\rangle + \left\langle \hat{\gamma}, \frac{d\Lambda}{du} \right\rangle \Rightarrow \left\langle \hat{\gamma}, \frac{d\Lambda}{du} \right\rangle = \frac{d}{du} \langle \hat{\gamma}, \Lambda \rangle - \left\langle \frac{d\hat{\gamma}}{du}, \Lambda \right\rangle \\
\Rightarrow \int_a^b \left\langle \hat{\gamma}, \frac{d\Lambda}{du} \right\rangle du &= \int_a^b \frac{d}{du} \langle \hat{\gamma}, \Lambda \rangle du - \int_a^b \left\langle \frac{d\hat{\gamma}}{du}, \Lambda \right\rangle du \\
&= - \int_a^b \langle kN, \Lambda \rangle du = \langle \langle -kN, \Lambda \rangle \rangle \\
\Rightarrow \nabla L(\gamma) &= -kN,
\end{aligned}$$

onde  $k$  é a curvatura e  $N$  é o vetor normal a  $\gamma$ .

Seja  $\gamma \in \Omega$ .

**Definição 2.2.** Uma variação de  $\gamma$  em  $\Omega$  é uma aplicação suave  $\varphi : I \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^2$  satisfazendo:

- (i)  $\varphi(u, 0) = \gamma(u)$  para qualquer  $u \in I$ ;
- (ii) Para qualquer  $t_0 \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  segue que  $\varphi(\cdot, t_0) \in \Omega$ .

Dada  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , fixe  $u_0 \in [a, b]$ . Aplicando uma variação  $\varphi(u, t)$  em  $\gamma$  e analisando  $\varphi(u_0, t)$  obtemos uma curva que será “uma trajetória” para o ponto  $\gamma(u_0)$ . Com isso, derivando-se  $\varphi(u_0, t)$  em relação a  $t$ , ou seja,  $\varphi_t(u_0, t)$ , temos a velocidade do ponto  $\gamma(u_0)$  ao longo de  $\varphi(u_0, t)$ .

Desta forma, o comprimento de  $\gamma$  diminuirá se a variação tomada for na direção do fluxo do gradiente da função comprimento. O fluxo do gradiente é definido pela equação

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\nabla L = k(\varphi(u, t))N(\varphi(u, t)), \quad (2.1)$$

chamado também de **fluxo pela curvatura** ou equação de evolução.

Assim, tem-se um problema onde dada uma curva fechada  $\gamma$  procura-se uma aplicação  $\varphi : I \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}^2$  que satisfaça  $\varphi_t(u, t) = k(u, t)N(u, t)$  tal que  $\varphi(u, 0) = \gamma(u)$ , isto é, tem-se um problema de valor inicial, (PVI).

Note que (2.1) é uma Equação Diferencial Parcial pois  $k$  e  $N$  são obtidos pelas derivadas de  $\gamma(u)$  em relação à  $u$ . Devido ao seu caráter não linear, o PVI acima é um problema de difícil análise. O objeto central a ser estudado é o comportamento de  $\varphi(\cdot, t)$  quando  $t \rightarrow T$ .

Estas questões serão abordadas, dando ênfase à parte de Geometria Diferencial, lembrando que o nosso objetivo é demonstrar o seguinte teorema.

**Teorema 2.1.** *Seja  $\gamma$  uma curva estritamente convexa. Então o fluxo pela curvatura contrai  $\gamma$  a um ponto em tempo finito igual a  $\frac{A_0}{2\pi}$ , onde  $A_0$  é a área delimitada pela curva  $\gamma$ . A curva permanecendo simples e estritamente convexa ao longo da contração.*

Além disso, se para cada  $t \in [0, \frac{A_0}{2\pi})$  aplicarmos uma homotetia<sup>1</sup> a  $\varphi(\cdot, t)$  de modo a obter uma curva  $\bar{\varphi}(\cdot, t)$  que possua área igual a  $\pi$ , então  $\bar{\varphi}(\cdot, t)$  converge para um círculo de área  $\pi$ . Dito de outro modo,  $\varphi(\cdot, t)$  converge para um ponto “redondo”.

Ainda neste capítulo mostraremos que a curva permanece simples e estritamente convexa ao longo da contração. Mas antes, veremos o que acontece com os invariantes geométricos<sup>2</sup> associados à curva.

## 2.2 Evolução dos invariantes geométricos

Definida a equação de evolução (2.1) para uma curva fechada, analisaremos como evoluem o comprimento ( $L(u, t)$ ), a área ( $A(u, t)$ ) e a curvatura ( $k(u, t)$ ).

Seja  $v = |\varphi_u|$ . A evolução de  $v$  é dada por

**Lema 2.1.**  $v_t = -k^2v$ .

*Demonstração.*  $v^2 = x_u^2 + y_u^2 = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle$

$$\frac{\partial}{\partial t}(v^2) = \frac{\partial}{\partial t}\langle \varphi_u, \varphi_u \rangle = \langle \varphi_{ut}, \varphi_u \rangle + \langle \varphi_u, \varphi_{ut} \rangle = 2\langle \varphi_{ut}, \varphi_u \rangle$$

Como  $\varphi$  é contínua  $\varphi_{ut} = \varphi_{tu}$  e pela equação de evolução:

$$T = \frac{\varphi_u}{\|\varphi_u\|} \Rightarrow \varphi_u = \|\varphi_u\| \cdot T \Rightarrow \varphi_u = vT$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}(v^2) &= 2\langle \varphi_u, \varphi_{tu} \rangle = 2\langle vT, (kN)_u \rangle = 2\langle vT, k_uN + kN_u \rangle = 2\langle vT, k_uN + k(-vkT) \rangle \\ &= 2\langle vT, k_uN - vk^2T \rangle = -2v^2k^2T^2 = -2v^2k^2 \end{aligned}$$

Por um lado,  $(v^2)_t = -2v^2k^2$  e por outro  $(v^2)_t = 2vv_t$ .

Disto temos:

$$2vv_t = -2v^2k^2 \Rightarrow v_t = -vk^2$$

□

<sup>1</sup>Homotetia é uma aplicação da forma  $x \in \mathbb{R}^2 \mapsto \lambda x + b \in \mathbb{R}^2$ , para  $\lambda > 0$  e  $b \in \mathbb{R}^2$ .

<sup>2</sup>Invariantes por movimentos rígidos no plano e mudança de parâmetro.

A evolução do comprimento da curva é calculado da seguinte forma

**Lema 2.2.**  $L_t = - \int k^2 ds$ .

*Demonstração.* Sabemos que:

$$L = \int_0^{2\pi} v du$$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial t} = \int_0^{2\pi} v_t du = \int_0^{2\pi} -vk^2 du = - \int_0^L k^2 ds. \quad \square$$

As derivadas de  $T$  e  $N$  são dadas por

**Lema 2.3.** *Seja  $s$  o parâmetro de comprimento de arco. Então  $T_t = k_s N$  e  $N_t = -k_s T$*

*Demonstração.* Temos que:

$$T = \frac{\varphi_u}{v} = \varphi_s.$$

Assim, obtemos:

$$T_t = \left( \frac{\varphi_u}{v} \right)_t = \frac{\varphi_{ut}v - \varphi_u v_t}{v^2} = \frac{1}{v} \varphi_{ut} + \frac{k^2 \varphi_u}{v}.$$

Usando a relação  $\frac{\partial}{\partial s} = \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial u}$  e o fato de  $\varphi$  ser contínua, temos

$$\begin{aligned} T_t &= \frac{1}{v} (\varphi_t)_u + k^2 \varphi_s = \frac{1}{v} (kN)_u + k^2 T = \frac{1}{v} (k_u N + k N_u) + k^2 T = k_s N + \frac{k}{v} (-vkT) + k^2 T \\ &= k_s N - k^2 T + k^2 T = k_s N. \end{aligned}$$

Agora, note que

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \langle T, N \rangle = \langle k_s N, N \rangle + \langle T, N_t \rangle \Rightarrow -k_s = \langle T, N_t \rangle \Rightarrow N_t = -k_s T.$$

$\square$

Seja  $\theta$  o ângulo entre o vetor tangente e o eixo  $x$ .

**Lema 2.4.**

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial k}{\partial s}.$$

*Demonstração.* Tome  $T = (\cos \theta, \sin \theta) \Rightarrow N = (-\sin \theta, \cos \theta)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial k}{\partial s} &= -\langle T, N_t \rangle = -\langle (\cos \theta, \sin \theta), (-\sin \theta, \cos \theta)_t \rangle \\ &= -\left\langle (\cos \theta, \sin \theta), \frac{\partial \theta}{\partial t} (-\cos \theta, -\sin \theta) \right\rangle = \frac{\partial \theta}{\partial t} [ -(-\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) ] = \frac{\partial \theta}{\partial t} \end{aligned}$$

□

A curvatura evolui de acordo com

**Lema 2.5.**

$$\frac{\partial k}{\partial t} = \frac{\partial^2 k}{\partial s^2} + k^3.$$

*Demonstração.*

$$\begin{aligned} k &= \frac{\partial \theta}{\partial s} \\ \Rightarrow \frac{\partial k}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \theta}{\partial s} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{v} \frac{\partial \theta}{\partial u} \right) = \frac{-v_t}{v^2} \frac{\partial \theta}{\partial u} + \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \theta}{\partial u} \right) \\ &= \frac{k^2 v}{v} \frac{1}{v} \frac{\partial \theta}{\partial u} + \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} \right) = k^2 \frac{\partial \theta}{\partial s} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial t \partial s} = k^2 \frac{\partial \theta}{\partial s} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial s \partial t} = k^3 + \frac{\partial^2 k}{\partial s^2} \end{aligned}$$

□

Finalmente, calculamos a variação da área de uma curva fechada e simples.

**Lema 2.6.**

$$\frac{\partial A}{\partial t} = -2\pi.$$

*Demonstração.* Aqui usaremos a aplicação do Teorema de Green, vista no capítulo anterior.

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left( x \frac{\partial y}{\partial u} - y \frac{\partial x}{\partial u} \right) du = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left\langle (x, y), \underbrace{\left( \frac{\partial y}{\partial u}, -\frac{\partial x}{\partial u} \right)}_* \right\rangle du \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \langle \gamma, \underbrace{-vN}_{**} \rangle du \\ \Rightarrow A &= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \langle \gamma, vN \rangle du \end{aligned}$$

Obs: A justificativa para  $* = **$  é  $T = \frac{\varphi_u}{v} \Rightarrow T = \frac{(x_u, y_u)}{v} \Rightarrow N = \frac{(-y_u, x_u)}{v} \Rightarrow (-y_u, x_u) = vN$ .



Agora,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial A}{\partial t} &= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \langle \gamma, vN \rangle_t du = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\langle \gamma_t, vN \rangle + \langle \gamma, v_t N \rangle + \langle \gamma, vN_t \rangle) du \\
&= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\langle kN, vN \rangle + \langle \gamma, -vk^2 N \rangle + \langle \gamma, -vk_s T \rangle) du \\
&= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (kv - \langle \gamma, -vk^2 N \rangle + \langle \gamma, -k_u T \rangle) du
\end{aligned}$$

Note que:  $\langle \gamma, -k_u T \rangle = \langle \gamma, -(kT)_u \rangle + \langle \gamma, kT_u \rangle$ , e  $kT_u = vk^2 N$ .

Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial A}{\partial t} &= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (kv - \langle \gamma, vk^2 N \rangle + \langle \gamma, vk^2 N \rangle + \langle \gamma, -(kT)_u \rangle) du \\
&= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (kv + \langle \gamma, -(kT)_u \rangle) du \\
\langle \gamma, -(kT)_u \rangle &= -\frac{\partial}{\partial u} \langle \gamma, kT \rangle + \langle \gamma_u, kT \rangle \\
\Rightarrow \frac{\partial A}{\partial t} &= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (kv + \langle \gamma_u, kT \rangle) du = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (kv + \langle vT, kT \rangle) du \\
&= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} 2vk du = -\frac{1}{2} \int_0^L k ds = -\int_0^L \frac{d\theta}{ds} ds = -\int_0^{2\pi} d\theta = -2\pi.
\end{aligned}$$

□

## 2.3 Curva simples permanece simples

Considere  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva fechada e simples. O objetivo desta seção é mostrar que a curva se manterá simples durante a evolução. Para isto, vejamos os seguintes lemas auxiliares.

Note que por uma mudança de variável podemos passar o parâmetro  $u \in [a, b]$  para  $u \in S^1$ .

Portanto, seja  $f : S^1 \times S^1 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(u_1, u_2, t) = \|\varphi(u_1, t) - \varphi(u_2, t)\|^2 = \langle \varphi(u_1, t) - \varphi(u_2, t), \varphi(u_1, t) - \varphi(u_2, t) \rangle.$$

**Lema 2.7.** *A função  $f$  satisfaz*

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \Delta f - 4 = \frac{\partial^2 f}{\partial s_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial s_2^2} - 4.$$

*Demonstração.*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial t} &= \langle \varphi(u_1, t) - \varphi(u_2, t), \varphi(u_1, t) - \varphi(u_2, t) \rangle_t \\
&= \langle \varphi(u_1, t)_t - \varphi(u_2, t)_t, \varphi(u_1, t) - \varphi(u_2, t) \rangle + \langle \varphi(u_1, t) - \varphi(u_2, t), \varphi(u_1, t)_t - \varphi(u_2, t)_t \rangle \\
&= 2\langle \varphi(u_1, t) - \varphi(u_2, t), \varphi(u_1, t)_t - \varphi(u_2, t)_t \rangle
\end{aligned}$$

Usando a equação de evolução, com  $k_1 N_1 = \varphi_t(u_1, t)$  e  $k_2 N_2 = \varphi_t(u_2, t)$ , temos

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 2\langle \varphi(u_1, t) - \varphi(u_2, t), k_1 N_1 - k_2 N_2 \rangle$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial s_1} &= 2\langle \varphi(u_1, t) - \varphi(u_2, t), \varphi_{s_1}(u_1, t) - \varphi_{s_1}(u_2, t) \rangle \\
&= 2\langle \varphi(u_1, t) - \varphi(u_2, t), T_1 \rangle \quad (T_1 = \varphi_{s_1}(u_1, t)) \\
\frac{\partial^2 f}{\partial s_1^2} &= 2\langle \varphi(u_1, t), T_1 \rangle_{s_1} - 2\langle \varphi(u_2, t), T_1 \rangle_{s_1} \\
&= 2(\langle \varphi_{s_1}(u_1, t), T_1 \rangle + \langle \varphi(u_1, t), T_{1s_1} \rangle) - 2(\langle \varphi_{s_1}(u_2, t), T_1 \rangle + \langle \varphi(u_2, t), T_{1s_1} \rangle) \\
&= 2\langle T_1, T_1 \rangle + 2\langle \varphi(u_1, t), k_1 N_1 \rangle - 2\langle \varphi(u_2, t), k_1 N_1 \rangle \\
&= 2 + 2\langle \varphi(u_1, t) - \varphi(u_2, t), k_1 N_1 \rangle \\
\frac{\partial f}{\partial s_2} &= 2\langle \varphi(u_1, t) - \varphi(u_2, t), -T_2 \rangle \quad (T_2 = \varphi_{s_2}(u_2, t)) \\
\frac{\partial^2 f}{\partial s_2^2} &= 2(\langle \varphi(u_1, t), -T_2 \rangle_{s_2} + \langle \varphi(u_2, t), T_1 \rangle_{s_2}) \\
&= 2(\langle \varphi_{s_2}(u_1, t), -T_2 \rangle + \langle \varphi(u_1, t), -T_{2s_2} \rangle) + 2(\langle \varphi_{s_2}(u_2, t), T_2 \rangle + \langle \varphi(u_2, t), T_{2s_2} \rangle) \\
&= 2\langle T_2, T_2 \rangle - 2\langle \varphi(u_1, t), k_2 N_2 \rangle + 2\langle \varphi(u_2, t), k_2 N_2 \rangle \\
&= 2 - 2\langle \varphi(u_1, t) - \varphi(u_2, t), k_2 N_2 \rangle
\end{aligned}$$

Agora,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial s_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial s_2^2} &= 4 + 2\langle \varphi(u_1, t) - \varphi(u_2, t), k_1 N_1 \rangle - 2\langle \varphi(u_1, t) - \varphi(u_2, t), k_2 N_2 \rangle \\
&= 4 + \langle \varphi(u_1, t) - \varphi(u_2, t), k_1 N_1 - k_2 N_2 \rangle \\
\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial s_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial s_2^2} - 4 &= \frac{\partial f}{\partial t}
\end{aligned}$$

□

Seja  $s(u_1, u_2, t) = |\int_{u_1}^{u_2} v(u, t) du|$  a distância de  $u_1$  a  $u_2$  ao longo da curva, no sentido positivo. Suponha que  $k$  é limitada ( $|k| \leq c$ ), mostraremos que para  $s(u_1, u_2, t) \leq \frac{2}{c}$  temos  $f(u_1, u_2, t) = 0$  se, e somente se,  $u_1 = u_2$ . Geometricamente, isto significa que a curva não tem auto-intersecção.

Obtemos este resultado pelo corolário do próximo lema.

**Lema 2.8. Lema de Schur**

Seja  $\alpha : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva parametrizada por comprimento de arco de  $A$  a  $B$  tal que  $\alpha$  é uma curva convexa. Seja  $\tilde{\alpha}$  uma segunda curva de comprimento  $L$  ligando os pontos  $C$  e  $D$ . Assumimos que as curvas têm tangentes e curvatura contínuas. Seja  $k(s)$  e  $\tilde{k}(s)$  as curvaturas de  $\alpha$  e  $\tilde{\alpha}$  respectivamente. Suponha também que  $k(s) > 0$  e  $k(s) \geq |\tilde{k}(s)|$  então  $d(A, B) \leq d(C, D)$ .

*Demonstração.* Primeiramente, aplicamos um movimento rígido em  $\alpha$  e  $\tilde{\alpha}$  tal que os segmentos  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$  fiquem sobre o eixo  $x$ .

Sejam  $\theta(s)$  o ângulo entre  $\alpha'(s) = T(s)$  e o eixo  $x$ ,  $\tilde{\theta}(s)$  o ângulo entre  $\tilde{\alpha}'(s) = \tilde{T}(s)$  e o eixo  $x$ . Desta forma, existe exatamente um  $s_0$  tal que  $\theta(s_0) = 0$ .

Assim,

$$\theta' = \frac{d\theta}{ds} = k(s) \geq |\tilde{k}(s)| = \left| \frac{d\tilde{\theta}}{ds} \right| = |\tilde{\theta}'|.$$

Integrando

$$|\tilde{\theta}(s) - \tilde{\theta}(s_0)| = \left| \int_{s_0}^s \tilde{\theta}'(s) ds \right| = \left| \int_{s_0}^s \tilde{k}(s) ds \right| \leq \left| \int_{s_0}^s k(s) ds \right| = \left| \int_{s_0}^s \theta'(s) ds \right| = |\theta(s)|.$$

Como  $|\theta(s)| \leq \pi$  para  $0 \leq s \leq L$ , pois  $\alpha$  é convexa e a função cosseno é decrescente em  $[0, \pi]$  obtemos

$$\cos |\tilde{\theta}(s) - \tilde{\theta}(s_0)| \geq \cos |\theta(s)|.$$

Por outro lado,

$$d(C, D) = \int_0^L \cos(\tilde{\theta}(s) - \tilde{\theta}(s_0)) \quad \text{e} \quad d(A, B) = \int_0^L \cos |\theta(s)|.$$

Donde concluimos

$$d(C, D) = \int_0^L \cos(\tilde{\theta}(s) - \tilde{\theta}(s_0)) = \int_0^L \cos |\tilde{\theta}(s) - \tilde{\theta}(s_0)| \geq \int_0^L \cos |\theta(s)| = d(A, B).$$

□

**Corolário 2.1.1.** Se  $|k(u, t)| \leq c$  então

$$f(u_1, u_2, t) \geq \left\{ \frac{2}{c} \operatorname{sen} \left( \frac{c}{2} s(u_1, u_2, t) \right) \right\}^2$$

*Demonstração.* Seja  $L$  o arco de comprimento  $s(u_1, u_2, t)$  de um círculo de raio  $\frac{1}{c}$ . Vamos aplicar o lema anterior.

$R = \frac{1}{c} \Rightarrow k(s) = c$  em todo ponto de  $L$ .

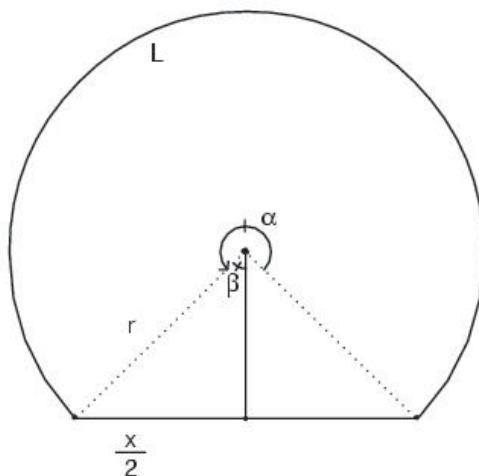


Figura 2.1:

$$L = \alpha R, \quad \beta = 2\pi - \alpha,$$

$$\begin{aligned} \frac{x}{2} &= R \operatorname{sen} \frac{\beta}{2} \Rightarrow x = 2R \operatorname{sen} \left( \frac{2\pi - \alpha}{2} \right) = 2R \operatorname{sen} \left( \pi - \frac{\alpha}{2} \right) = 2R \operatorname{sen} \left( \frac{\alpha}{2} \right) = 2R \operatorname{sen} \left( \frac{L}{2R} \right) \\ &\Rightarrow x = \sqrt{f(u_1, u_2, t)}|_L = \frac{2}{c} \operatorname{sen} \left( \frac{c}{2} s(u_1, u_2, t) \right). \end{aligned}$$

Pelo lema anterior, curvas com curvatura menor ou igual a  $k(s) = c$  terão

$$f(u_1, u_2, t) \geq \left\{ \frac{2}{c} \operatorname{sen} \left( \frac{c}{2} s(u_1, u_2, t) \right) \right\}^2$$

□

Com isto,  $f(u_1, u_2, t) \geq 0 \quad \forall (u_1, u_2, t) \in S^1 \times S^1 \times [0, T)$ , sendo

$$f(u_1, u_2, t) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen} \left( \frac{c}{2} s(u_1, u_2, t) \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{c}{2} s(u_1, u_2, t) = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{c}{2} s(u_1, u_2, t) = \pi$$

Mas  $\frac{c}{2} s(u_1, u_2, t) = \pi \Rightarrow s(u_1, u_2, t) = \frac{2\pi}{c}$  e como  $s(u_1, u_2, t) < \frac{2}{c}$  temos que  $s(u_1, u_2, t) = 0 \Leftrightarrow u_1 = u_2$ .

Portanto,  $f(u_1, u_2, t) = 0 \Leftrightarrow u_1 = u_2$  para  $s(u_1, u_2, t) < \frac{2}{c}$ .

A combinação destes resultados ajudam a formar a demonstração do teorema abaixo, que é a prova da primeira característica da curva a ser preservada durante a evolução, ser simples.

**Teorema 2.2.** *Seja  $\varphi : S^1 \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma variação de uma curva através do fluxo do gradiente da função comprimento. Se  $|k(u, t)| < c$  e se a curva inicial  $\varphi(\cdot, 0)$  é simples então  $\varphi(\cdot, t) : S^1 \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}^2$  é uma curva simples para todo  $t$ , ou seja, se a curva inicial não tem auto-intersecção então as curvas ao longo da evolução também não terão auto-intersecção.*

*Demonstração.* No conjunto  $E = \{(u_1, u_2, t) | s(u_1, u_2, t) < \frac{\pi}{c}\}$ ,  $f(u_1, u_2, t) = 0 \Leftrightarrow u_1 = u_2$  pois

$$\begin{aligned} f(u_1, u_2, t) = 0 &\Leftrightarrow \frac{2}{c} s(u_1, u_2, t) = 0 \Leftrightarrow s(u_1, u_2, t) = 0 \Leftrightarrow u_1 = u_2 \\ &\text{ou} \quad \frac{2}{c} s(u_1, u_2, t) = \pi \Leftrightarrow s(u_1, u_2, t) = \frac{2\pi}{c} > \frac{\pi}{c}. \end{aligned}$$

Agora, restrinja  $f$  ao domínio complementar  $D = S^1 \times S^1 \times [0, T] - E$ . Será usada uma versão do princípio do máximo para mostrar que em  $D$   $f$  tem um mínimo positivo, isto irá completar a prova do teorema.

A fronteira de  $D$  é dada por

$$\{(u_1, u_2, t) | s(u_1, u_2, t) = \frac{\pi}{c}, 0 \leq t \leq T\} \cup \{(u_1, u_2, 0) | s(u_1, u_2, t) \geq \frac{\pi}{c}\}$$

Pelo corolário anterior, no primeiro conjunto  $f(u_1, u_2, t) \geq (\frac{2}{c})^2$  enquanto que o segundo conjunto tem um mínimo positivo pois a curva inicial é simples. Seja  $m$  a menor destas quantidades.

Considere a função  $g(u_1, u_2, t) = f(u_1, u_2, t) + \varepsilon t$ .

Pelo lema 2.7 é imediato que  $g$  satisfaz a equação

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \Delta g - 4 + \varepsilon \quad (*)$$

Seja  $0 < \delta < m$  e suponha que  $g$  alcance o valor  $m - \delta$  em  $D$ . Seja  $t_0 = \inf\{t | g(u_1, u_2, t) = m - \delta\}$ . A continuidade de  $g$ , a compacidade de  $D$  junto com a fronteira estimada asseguram que o valor  $m - \delta$  é alcançado na primeira vez em algum ponto interior  $(\bar{u}_1, \bar{u}_2, t)$ .

Neste ponto,  $g_t \leq 0$  e

$$\frac{\partial^2 g}{\partial s_1^2} \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial s_2^2} - \left( \frac{\partial^2 g}{\partial s_1 \partial s_2} \right)^2 \geq 0.$$

Calculamos que

$$\left( \frac{\partial^2 g}{\partial s_1 \partial s_2} \right)^2 = 2 \langle \varphi_{s_1}(u_1, t) - \varphi_{s_1}(u_2, t), -T_2 \rangle = -2 \langle T_1, T_2 \rangle = \pm 2$$

pois no ponto mínimo as tangentes à curva são paralelas em  $s_1$  e  $s_2$ .

Do fato que a média aritmética de dois números positivos é maior ou igual a média geométrica temos

$$\Delta g = \frac{\partial^2 g}{\partial s_1^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial s_2^2} \geq 2 \sqrt{\frac{\partial^2 g}{\partial s_1^2} \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial s_2^2}} \geq 2 \left| \frac{\partial^2 g}{\partial s_1 \partial s_2} \right| \geq 4.$$

Isso contradiz o fato que  $g$  satisfaz (\*). Como  $\delta$  é arbitrário temos que  $g(u_1, u_2, t) \geq m$  em  $D \Rightarrow f(u_1, u_2, t) \geq m - \varepsilon t$ .

Tomando  $\varepsilon \rightarrow 0$  vemos que  $f(u_1, u_2, t) \geq m > 0$  em  $D$ , o que completa a prova.  $\square$

## 2.4 Existência de solução para curvas estritamente convexas

Seja  $\theta$  o ângulo entre a linha tangente e o eixo  $x$ . No capítulo anterior, vimos que podemos usar  $\theta$  como parâmetro e escrevemos  $k = k(\theta)$  em termos deste parâmetro.

Queremos determinar a equação de evolução pela curvatura usando  $\theta$  como parâmetro e seja  $\tau = t$  o parâmetro de tempo associado ao parâmetro  $\theta$ . Para isso, faremos uma mudança de variável de  $(u, t)$  para  $(\theta, \tau)$ . Note que  $\partial/\partial t$  é derivada parcial quando mantemos  $u$  fixo enquanto que  $\partial/\partial \tau$  é derivada parcial quando mantemos  $\theta$  fixo, isso implica que  $\partial/\partial \tau \neq \partial/\partial t$ .

Assim, obtemos a equação de evolução de  $k$  em termos de  $\theta$  e  $\tau$ .

**Lema 2.9.**

$$\frac{\partial k}{\partial \tau} = k^2 \frac{\partial^2 k}{\partial \theta^2} + k^3$$

*Demonstração.* Usando o fato que

$$k \frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial s} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial k}{\partial s}$$

e pela regra da cadeia, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial k}{\partial t} &= \frac{\partial k}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial k}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{\partial k}{\partial \theta} \frac{\partial k}{\partial s} + \frac{\partial k}{\partial \tau} = \frac{\partial k}{\partial \theta} k \frac{\partial k}{\partial \theta} + \frac{\partial k}{\partial \tau} = k \left( \frac{\partial k}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{\partial k}{\partial \tau} \\ \Rightarrow \frac{\partial k}{\partial \tau} &= \frac{\partial k}{\partial t} - k \left( \frac{\partial k}{\partial \theta} \right)^2 = \frac{\partial^2 k}{\partial s^2} + k^3 - k \left( \frac{\partial k}{\partial \theta} \right)^2 \end{aligned}$$

e

$$\frac{\partial^2 k}{\partial s^2} = \frac{\partial \theta}{\partial s} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial \theta}{\partial s} \frac{\partial k}{\partial \theta} \right) = k \left( \frac{\partial k}{\partial \theta} \right)^2 + k^2 \frac{\partial^2 k}{\partial \theta^2}$$

Das duas equações acima temos:

$$\frac{\partial k}{\partial \tau} = k^2 \frac{\partial^2 k}{\partial \theta^2} + k^3$$

□

Para efeitos de notação usaremos  $(\theta, t)$  como parâmetros. O próximo resultado nos garante que a curva permanece estritamente convexa durante a contração.

**Lema 2.10.** *Se  $k$  satisfaz  $k_t = k^2 k_{\theta\theta} + k^3$  então  $k_{\min}(t) = \inf\{k(\theta, t) \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$  é uma função não decrescente.*

*Demonstração.* Por contradição. Seja  $\varepsilon$  satisfazendo  $k_{\min}(0) > \varepsilon > 0$  e suponha que  $k_{\min}(t) = k_{\min}(0) - \varepsilon$  para algum  $t$ .

Seja  $t_0 = \inf\{t \mid k_{\min}(t) = k_{\min}(0) - \varepsilon\}$ . A continuidade de  $k$  assegura que seu mínimo é atingido em algum ponto  $(\theta_0, t_0)$ . Neste ponto, entretanto,

$$\frac{\partial k}{\partial t}(\theta_0, t_0) \leq 0, \quad \frac{\partial^2 k}{\partial \theta^2}(\theta_0, t_0) \geq 0 \quad \text{e} \quad k(\theta_0, t_0) > 0.$$

Isso contradiz a hipótese que  $k$  satisfaz  $k_t = k^2 k_{\theta\theta} + k^3$ . □

Como sabemos que através da função curvatura podemos determinar a curva, o teorema abaixo reduz o problema  $\varphi_t = kN$  para uma equação diferencial parcial, não linear, parabólica em função somente da função curvatura.

**Teorema 2.3.** *Resolver  $\varphi_t = kN$  para curvas estritamente convexas é equivalente a resolver o problema de valor inicial da equação diferencial parcial: dada  $k : S^1 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  satisfazendo:*

(i)  $k \in C^{2+\alpha, 1+\alpha}(S^1 \times [0, T - \varepsilon]) \quad \forall \varepsilon > 0;$

(ii)  $k_t = k^2 k_{\theta\theta} + k^3$

(iii)  $k(\theta, 0) = k_0(\theta)$  onde  $k_0$  satisfaz:

(a)  $k_0 \in C^{1+\alpha}(S^1);$

(b)  $k_0(\theta) > 0$  e

(c)  $\int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta}{k(\theta)} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{\sin \theta}{k(\theta)} d\theta = 0$



*Demonstração.* Seja  $\varphi = \varphi(\theta, t)$  solução de  $\varphi_t = kN$ . Se  $k = k(\theta, t)$  é a curvatura de  $\varphi$  então, cada  $k = k(\cdot, t)$  é positiva, pois pelo lema (2.10) cada  $\varphi(\cdot, t)$  é convexa e  $k$  satisfaz  $k_t = k^2(k_{\theta\theta} + k)$ , pelo lema (2.9). Pelo lema (1.3) a condição

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta}{k(\theta)} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{\text{sen} \theta}{k(\theta)} d\theta = 0$$

expressa o fato que cada curva na evolução é fechada e regular.

Reciprocamente, se  $k = k(\theta, t)$  é uma solução de  $k_t = k^2(k_{\theta\theta} + k)$ , defina  $\varphi : S^1 \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}^2$  por

$$\varphi(\theta, t) = \int_0^\theta \frac{(\cos \xi, \text{sen} \xi)}{k(\xi, t)} d\xi.$$

Então, como o processo é contínuo e a curva continua simples,  $\int_{S^1} \frac{(\cos \theta, \text{sen} \theta)}{k(\theta, t)} d\theta = 0$  e o lema (1.3) implica que cada  $\varphi(\cdot, t)$  é fechada e convexa e a curvatura de  $\varphi(\cdot, t)$  é precisamente  $k(\cdot, t)$ .

Vamos mostrar que  $\varphi(\theta, t)$  de finida acima satisfaz  $\varphi_t = kN$ .

$$\varphi(\theta, t) = \left( \int_0^\theta \frac{\cos \xi}{k(\xi, t)} d\xi, \int_0^\theta \frac{\text{sen} \xi}{k(\xi, t)} d\xi \right)$$

Derivando em relação a  $t$ ,

$$\varphi_t(\theta, t) = \left( - \int_0^\theta \frac{k_t(\xi, t) \cos \xi}{k^2(\xi, t)} d\xi, - \int_0^\theta \frac{k_t(\xi, t) \text{sen} \xi}{k^2(\xi, t)} d\xi \right)$$

Usando o fato que  $k$  satisfaz  $k_t = k^2(k_{\theta\theta} + k)$ ,

$$\varphi_t(\theta, t) = \left( - \int_0^\theta (k_{\xi\xi} + k) \cos \xi d\xi, - \int_0^\theta (k_{\xi\xi} + k) \text{sen} \xi d\xi \right)$$

Ao integrarmos por partes as coordenadas de  $\varphi$ , obtemos

$$\begin{aligned}
\int_0^\theta (k_{\xi\xi} + k) \cos \xi d\xi &= \int_0^\theta k_{\xi\xi} \cos \xi d\xi + \int_0^\theta k \cos \xi d\xi \\
&= k_\xi \cos \xi \Big|_0^\theta - \int_0^\theta k_\xi (-\text{sen} \xi) d\xi + k \text{sen} \xi \Big|_0^\theta - \int_0^\theta k_\xi (\text{sen} \theta) d\xi \\
&= k_\xi \cos \xi \Big|_0^\theta + k \text{sen} \xi \Big|_0^\theta \\
\int_0^\theta (k_{\xi\xi} + k) \text{sen} \xi d\xi &= \int_0^\theta k_{\xi\xi} \text{sen} \xi d\xi + \int_0^\theta k \text{sen} \xi d\xi \\
&= k_\xi \text{sen} \xi \Big|_0^\theta - \int_0^\theta (k_\xi) \cos \xi d\xi + k(-\cos \xi) \Big|_0^\theta - \int_0^\theta (-k_\xi) \cos \xi d\xi \\
&= k_\xi \text{sen} \xi \Big|_0^\theta - k \cos \xi \Big|_0^\theta
\end{aligned}$$

Isto implica que

$$\begin{aligned}
\varphi_t(\theta, t) &= (-k_\theta(\theta, t) \cos(\theta) - k(\theta, t) \text{sen} \theta, -k_\theta(\theta, t) \text{sen}(\theta) + k(\theta, t) \cos \theta) \\
&= k(\theta, t)(-\text{sen} \theta, \cos \theta) - k_\theta(\theta, t)(\cos \theta, \text{sen} \theta) \\
&= kN - k_\theta T
\end{aligned}$$

Mudando o espaço de variáveis, podemos transformar a componente tangencial,  $k_\theta T$ , sem mudar a forma da curva. Queremos que  $\varphi_t$  com  $\theta$  fixo resolva  $\varphi_t = kN$ . Escrevendo  $\theta$  em função de  $u$  e  $t$  temos

$$\varphi = \varphi(\theta, t) = \varphi(\theta(u, t), t).$$

Pela regra da cadeia

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(\theta(u, t), t) + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}(\theta(u, t), t) \frac{\partial \theta}{\partial t}(u, t).$$

Por outro lado,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \frac{\partial \varphi}{\partial s} \frac{ds}{d\theta} = \frac{T}{k}.$$

Assim, obtemos

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = kN - k_\theta T + \frac{T}{k}(\theta, t) \frac{\partial \theta}{\partial t}(u, t).$$

Para que  $\varphi_t = kN$ ,  $\frac{\partial \theta}{\partial t}(u, t)$  deve satisfazer

$$\frac{\partial \theta}{\partial t}(u, t) = k(\theta(u, t), t)k_\theta(\theta(u, t), t).$$

Resolvendo isto com a condição inicial  $\theta(u, 0) = 2\pi u$  temos uma função satisfazendo  $\theta(u+1, t) = \theta(u, t)$  e  $\frac{\partial \theta}{\partial u} \geq 0$ . Com isso prova-se o teorema.  $\square$

Como através da curvatura pode-se determinar a curva e com o teorema anterior, usando técnicas de Equações Diferenciais Parciais, prova-se que para curvas estritamente convexas o PVI acima descrito tem solução única e maximal em  $[0, T)$ . Apenas enunciaremos o teorema de existência.

**Teorema 2.4.** *Seja  $k_0 : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$  positiva e de classe  $C^\infty$  e suponha que  $k_t = k^2 k_{\theta\theta} + k^3$  é parabólica<sup>3</sup> em  $k_0$ . Então existem  $T > 0$  e  $k : S^1 \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}$  satisfazendo:*

- (i)  $k \in C^{2+\alpha, 1+\alpha}(S^1 \times [0, T - \varepsilon]) \quad \forall \varepsilon > 0;$
- (ii)  $k_t = k^2 k_{\theta\theta} + k^3$
- (iii)  $k(\cdot, 0) = k_0(\cdot).$

Até aqui, provamos uma parte do teorema principal, o fato da curva permanecer simples e estritamente convexa durante a evolução.

No próximo capítulo analisaremos o comportamento das soluções quando  $t \rightarrow T$ .

---

<sup>3</sup>Neste caso,  $k_t = k^2 k_{\theta\theta} + k^3$  é parabólica se  $k^2(\theta, t) > 0$  para todo  $(\theta, t) \in S^1 \times [0, T)$ .

# Capítulo 3

## Análise das soluções do fluxo pela curvatura

Neste capítulo veremos que a curva converge para um “ponto redondo”.

### 3.1 Estudo da área

O objetivo é mostrar que ao longo da evolução, a área tende a zero,  $(\lim_{t \rightarrow T} A(t) = 0)$ .

Seja  $\theta$  o ângulo entre  $T$  e o eixo  $x$ . Podemos usá-lo como parâmetro pois estamos trabalhando com curvas convexas.

Faremos algumas estimativas para estas curvas concluindo que enquanto a curva tiver alguma área a sua curvatura será uniformemente limitada. A limitação é na norma infinito, ou seja, dada uma função  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\|f\|_\infty = \max_{s \in I} \{f(s)\}$ . Usaremos também  $\|f\|_p = [\int_I (f(s))^p]^{\frac{1}{p}}$ .

**Definição 3.1.** *Definimos a curvatura mediana  $k^*$  de uma curva como*

$$k^* = \sup\{b \mid k(\theta) > b \text{ em algum intervalo de comprimento } \pi\}$$

**Lema 3.1. Estimativa geométrica**

*Se  $k(\theta, t)$  é a curvatura de uma curva plana fechada convexa com área  $A$  e comprimento  $L$  então  $k^*(t) \leq \frac{L}{A}$ .*

*Demonstração.* Seja  $M < k^*(t)$ . Então  $k(\theta, t) > M$  em algum intervalo  $(a, a + \pi)$ . Isto implica que as linhas paralelas a curva têm distância dada por

$$\int_a^{a+\pi} \frac{\text{sen}(\theta - a)}{k(\theta, t)} d\theta \leq \frac{2}{M}.$$

O diâmetro é limitado por  $\frac{L}{2}$  e a área é limitada pela largura  $l$  vezes o diâmetro  $d$ . Assim temos:

$$A \leq l.d \leq l \cdot \frac{L}{2} \leq \frac{2}{M} \frac{L}{2} \Rightarrow M \leq \frac{L}{A}.$$

Como  $M$  pode ser tomado arbitrariamente próximo de  $k^*(t)$  temos  $k^*(t) \leq \frac{L}{A}$ .  $\square$

**Lema 3.2. Desigualdade de Wirtinger [Ar]**

Seja  $f$  uma função de classe  $C^1$ , periódica de período  $2\pi$ , e tal que  $\int_0^{2\pi} f(t)dt = 0$ . Então  $\int_0^{2\pi} (f'(t))^2 dt \geq \int_0^{2\pi} (f(t))^2 dt$ , e a igualdade vale se, e somente se, existirem  $a$  e  $b$  tais que  $f(t) = a \cos t + b \sin t$ .

*Demonstração.* Seja

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nt) - b_n \sin(nt))$$

a expansão de  $f$  em série de Fourier. Como  $f'(t)$  é contínua, sua expansão obtém-se da de  $f$  por derivação termo a termo, sendo assim

$$f(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} (nb_n \cos(nt) - na_n \sin(nt)).$$

Uma vez que  $\int_0^{2\pi} f(t)dt = \pi a_0$ , nossa hipótese traduz-se em que  $a_0 = 0$ . Usando a forma de Parseval, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (f(t))^2 dt &= \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \\ \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (f'(t))^2 dt &= \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (a_n^2 + b_n^2) \end{aligned}$$

Daqui vem

$$\int_0^{2\pi} (f'(t))^2 dt - \int_0^{2\pi} (f(t))^2 dt = \sum_{n=1}^{\infty} \pi(n^2 - 1)(a_n^2 + b_n^2) \geq 0$$

e a igualdade acontece se  $a_n = b_n = 0$  para qualquer  $n > 1$ . Já que as funções contínuas ficam determinadas por sua expansão de Fourier, isto é equivalente a que seja  $f(t) = a_1 \cos t + b_1 \sin t$ .  $\square$

**Lema 3.3. Estimativa da integral**

Se  $k^*(t)$  é limitada em  $[0, T)$  então  $\int_0^{2\pi} \log k(\theta, t) d\theta$  é limitada em  $[0, T)$ .

*Demonstração.* Fazendo uso da equação de evolução

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{2\pi} \log k(\theta, t) d\theta &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{k(\theta, t)} k_t d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{k} (k^2 k_{\theta\theta} + k^3) d\theta = \int_0^{2\pi} (k k_{\theta\theta} + k^2) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} k^2 d\theta + \int_0^{2\pi} k k_{\theta\theta} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} k^2 d\theta + \left[ k k_{\theta} \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} k_{\theta} k_{\theta} d\theta \right] = \int_0^{2\pi} [k^2 - (k_{\theta})^2] d\theta \end{aligned}$$

Fixaremos  $t$  e estimaremos a integral à direita no conjunto aberto  $U = \{\theta | k(\theta, t) > k^*(t)\}$  e em seu complemento  $V = S^1 - U$ .

A definição de  $k^*$  implica que o conjunto  $U$  é a união enumerável de intervalos disjuntos  $I$  de comprimento menor ou igual a  $\pi$ . Nos extremos fechados desses intervalos  $k(\theta, t) = k^*(t)$  e com isso podemos aplicar a inequação de Wirtinger para a função  $k(\theta, t) - k^*(t)$ :

$$\int_{\bar{I}_i} [k(\theta, t) - k^*(t)]^2 d\theta \leq \int_{\bar{I}_i} [k_{\theta}(\theta, t) - k_{\theta}^*(t)]^2 d\theta = \int_{\bar{I}_i} [k_{\theta}(\theta, t)]^2 d\theta$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \int_{\bar{I}_i} [k(\theta, t) - k^*(t)]^2 d\theta &= \int_{\bar{I}_i} [k^2(\theta, t) - 2k(\theta, t)k^*(t) + (k^*(t))^2] d\theta \leq \int_{\bar{I}_i} [k_{\theta}(\theta, t)]^2 d\theta \\ &\Rightarrow \int_{\bar{I}_i} [k^2(\theta, t) - (k_{\theta}(\theta, t))^2] d\theta \leq 2k^*(t) \int_{\bar{I}_i} k(\theta, t) d\theta \end{aligned}$$

Somando a última desigualdade nos intervalos que compreendem  $U$  obtemos

$$\int_U k^2(\theta, t) - (k_{\theta}(\theta, t))^2 d\theta \leq 2k^*(t) \int_U k(\theta, t) d\theta \leq 2k^*(t) \int_0^{2\pi} k(\theta, t) d\theta$$

No conjunto  $V$  a estimativa é simples, pois em  $V$   $k(\theta, t) \leq k^*(t)$ . Assim

$$\begin{aligned} \int_V k^2(\theta, t) - (k_{\theta}(\theta, t))^2 d\theta &\leq \int_V k^2(\theta, t) d\theta \leq \int_V (k^*(t))^2 d\theta \\ &\leq \int_0^{2\pi} (k^*(t))^2 d\theta = 2\pi (k^*(t))^2 \end{aligned}$$

Somando as duas últimas inequações e usando que  $L_t = -\int k^2 ds = -\int k d\theta$  temos

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^{2\pi} \log k(\theta, t) d\theta \leq 2k^*(t) \left( -\frac{\partial L}{\partial t} \right) + 2\pi(k^*(t))^2$$

Finalmente, assumimos que  $k^*(t) < M$  e integramos para obter a estimativa desejada

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \log k(\theta, t) d\theta &\leq \int_0^{2\pi} \log k(\theta, 0) d\theta + 2M(L(0) - L(t)) + 2\pi M^2 t \\ &\leq D + 2M(L(0) - L(t)) + 2\pi M^2 t \end{aligned}$$

□

**Lema 3.4.** *Se  $\int_0^{2\pi} \log k(\theta, t) d\theta$  é limitada em  $[0, T)$  então para qualquer  $\delta > 0$  nós podemos achar uma constante  $c$  tal que  $k(\theta, t) \leq c$ , exceto em intervalos de comprimento menor ou igual a  $\delta$ .*

*Demonstração.* Se  $k \geq c$  em  $a \leq \theta \leq b$  e  $b - a \geq \delta$  então

$$\int_0^{2\pi} \log k(\theta, t) d\theta \geq \delta \log c + (2\pi - \delta) \log k_{\min}(0)$$

onde  $k_{\min}(0)$  é um limitante inferior para  $k$ . (Lembre-se que  $k_{\min}(t)$  não decresce com o tempo). Para  $c$  suficientemente grande isto contradiz o lema anterior. □

**Lema 3.5.** *Podemos achar uma constante  $D$  tal que*

$$\int_0^{2\pi} (k_\theta(\theta, t))^2 d\theta \leq \int_0^{2\pi} (k(\theta, t))^2 d\theta + D \quad \text{para } 0 \leq t < T.$$

*Demonstração.* Na próxima equação usaremos a equação de evolução para a curvatura

e integral por partes. Assim

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \int_0^{2\pi} k^2 - (k_\theta)^2 d\theta &= 2 \int_0^{2\pi} k k_t - k_\theta k_{t\theta} d\theta \\
&= 2 \int_0^{2\pi} k k_t d\theta - \left[ k_t k_\theta \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} k_t k_{\theta\theta} d\theta \right] = 2 \int_0^{2\pi} k k_t + k_t k_{\theta\theta} d\theta \\
&= 2 \int_0^{2\pi} [k + k_{\theta\theta}] k_t d\theta = 2 \int_0^{2\pi} (k + k_{\theta\theta})(k^2 k_{\theta\theta} + k^3) d\theta \\
&= 2 \int_0^{2\pi} (k^3 k_{\theta\theta} + k^4 + k^2 k_{\theta\theta}^2 + k^3 k_{\theta\theta}) d\theta \\
&= 2 \int_0^{2\pi} [k^2 (k_{\theta\theta}^2 + 2k k_{\theta\theta} + k^2)] d\theta = 2 \int_0^{2\pi} [k^2 (k_{\theta\theta} + k)^2] d\theta \geq 0.
\end{aligned}$$

Agora, integrando em  $t$

$$\int_0^{2\pi} k^2 - (k_\theta)^2 d\theta \geq D \Rightarrow \int_0^{2\pi} (k_\theta)^2 d\theta \leq \int_0^{2\pi} k^2 d\theta + D$$

Isto quer dizer que  $\|k_\theta\|_2^2 \leq \|k\|_2^2 + D$ . □

**Lema 3.6. Estimativa Pontual**

Se  $\int_0^{2\pi} \log k(\theta, t) d\theta$  é limitada em  $[0, T)$  então  $k(\theta, t)$  é uniformemente limitada em  $S^1 \times [0, T)$ .

*Demonstração.* Como  $\int_0^{2\pi} \log k(\theta, t) d\theta$  é limitada temos  $k \leq c$  exceto em intervalos  $[a, b]$  de comprimento menor ou igual a  $\delta$ . Seja  $\theta \in [a, b]$ .

$$\int_a^b k_\theta d\theta = \int_a^\theta k_\theta d\theta + \int_\theta^b k_\theta d\theta$$

Isso implica que

$$\begin{aligned}
k(b) - k(a) &= k(b) - k(\theta) + \int_a^\theta k_\theta d\theta \\
\Rightarrow k(\theta) &= k(a) + \int_a^\theta k_\theta d\theta \leq c + \left( \int_a^\theta k_\theta d\theta \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_a^\theta d\theta \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq c + \sqrt{\delta} \left( \int_{S^1} k^2 d\theta + D \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Seja  $k_{\max}(\theta, t) \in S^1 \times [0, T)$  o máximo valor de  $k$ . Isso implica que  $\int_{S^1} k^2(\theta, t) d\theta \leq$



$\int_{S^1} k_{\max}^2(\theta, t) d\theta = k_{\max}^2(\theta, t) 2\pi$ . Combinando isso com a inequação anterior temos

$$k_{\max}(\theta, t) \leq c + \sqrt{\delta}(2\pi k_{\max}^2(\theta, t) + D)^{\frac{1}{2}} \leq c + 2\pi\sqrt{\delta}k_{\max}(\theta, t) + \sqrt{\delta}D$$

$$k_{\max}(\theta, t) \leq \frac{c + \sqrt{\delta}D}{1 - 2\pi\sqrt{\delta}}$$

Escolhendo  $\delta$  suficientemente pequeno temos  $k \leq 2c$ . Isso implica que  $k$  é uniformemente limitada em  $[0, T)$ .  $\square$

A combinação destas estimativas nos fornece a prova do próximo teorema.

**Teorema 3.1.** *Se  $k : S^1 \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}$  satisfaz o teorema (2.3) e a área das curvas associadas,  $A(t)$ , é limitada inferiormente por  $A^* > 0$ , então a curvatura  $k$  é uniformemente limitada em  $S^1 \times [0, T)$ , ou seja,  $\|k(\theta, t)\|_{\infty} < \infty$ .*

*Demonstração.* O comprimento das curvas decresce durante a contração, deste modo um limitante uniforme inferior para a área,  $A^* > 0$ , produz um limitante uniforme superior para  $k^*(t)$  e como consequência das estimativas pontual e da integral,  $k(\theta, t)$  é uniformemente limitada.  $\square$

Os lemas a seguir serão úteis na prova da limitação das derivadas de  $k$ , em relação a  $\theta$ , na norma infinito, no intervalo  $[0, T)$ .

Pela desigualdade de Sobolev se uma função e sua derivada são limitadas na norma  $L^2$  então a função será limitada na norma  $L^\infty$ . Não apresentaremos a demonstração deste resultado, que pode ser encontrado em [dLM].

**Lema 3.7.** *(Desigualdade de Sobolev)*

*Seja  $I \subseteq \mathbb{R}$  um intervalo limitado. Então existe  $C > 0$  dependendo somente de  $I$  tal que vale*

$$\|v\|_{\infty}^2 \leq C(\|v\|_2^2 + \|v'\|_2^2)$$

*para qualquer função  $v : I \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$ .*

Este próximo lema servirá para limitarmos as derivadas de  $k$ , em relação a  $\theta$ , em intervalos limitados, na norma  $L^2$ .

**Lema 3.8.** *Seja  $y : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  satisfazendo*

$$\frac{dy}{dt} \leq ay + by^{\frac{1}{2}} + c$$

onde  $a, b, c$  são constantes não negativas. Então existem constantes  $B$  e  $C$  positivas tais que  $y(t) \leq Ce^{Bt}$ . Em particular,  $y = y(t)$  é limitada em intervalos limitados.

*Demonstração.* Observe que

$$\begin{aligned} y > 0 &\Rightarrow y^{\frac{1}{2}} \leq y + 1 \\ \Rightarrow \frac{dy}{dt} &\leq ay + b(y + 1) + c = y(a + b) + b + c = By + D \\ \Rightarrow \frac{dy}{dt} &\leq By + D \end{aligned}$$

Seja  $w = By + D$ . Assim,

$$\frac{dw}{dt} = B \frac{dy}{dt} \leq B(By + D) \Rightarrow \frac{dw}{dt} \leq Bw \Rightarrow \frac{dw}{w} \leq B dt.$$

Integrando

$$\ln w \leq Ct \Rightarrow w \leq e^{Bt}$$

Conseqüentemente,  $y \leq Ce^{Bt}$ . □

Usaremos a desigualdade de Peter-Paul para simplificarmos equações.

**Lema 3.9.** (*Desigualdade de Peter-Paul*)

Para todo  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $\varepsilon > 0$  temos  $ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{4\varepsilon}$

*Demonstração.*

$$\left( a\sqrt{2\varepsilon} - \frac{b}{\sqrt{2\varepsilon}} \right)^2 \geq 0 \Rightarrow 2\varepsilon a^2 - 2\frac{b}{\sqrt{2\varepsilon}}a\sqrt{2\varepsilon} + \frac{b^2}{2\varepsilon} \geq 0 \Rightarrow ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{4\varepsilon}.$$

□

Assumindo que  $k$  é limitada faremos estimativas para ver que as suas derivadas parciais também são e, juntamente com o teorema (3.1), provaremos que existe solução para a equação de evolução de  $k$  enquanto houver alguma área. Para efeitos de notação, usaremos  $'$  para denotar a derivada de  $k$  em função de  $\theta$ .

**Proposição 3.1.** *Se  $k$  é limitada então  $k'$  é limitada ( $\|k(\theta, t)\|_\infty < \infty \Rightarrow \|k'(\theta, t)\|_\infty < \infty$ ).*

*Demonstração.* A idéia é usar a desigualdade de Sobolev com  $v = k'$  de modo que precisamos estimar  $\|k'\|_2$  e  $\|k''\|_2$ . Se  $k$  é limitada então, pelo lema (3.5),  $\|k'\|_2$  é limitada, basta estimar  $\|k''\|_2$ .

Observe que:

$$(k')_t = (k_t)' = (k^2 k_{\theta\theta} + k^3)' = k^2 k''' + 2kk'k'' + 3k^2 k', \quad (3.1)$$

donde segue que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int (k')^4 d\theta &= 4 \int (k')^3 (k')_t d\theta = 4 \int (k')^3 (k^2 k''' + 2kk'k'' + 3k^2 k') d\theta \\ &= 4 \int k^2 k''' (k')^3 d\theta + 8 \int (k')^3 k k' k'' d\theta + 12 \int (k')^3 k^2 k' d\theta. \end{aligned}$$

Usando integração por partes

$$\begin{aligned} 4 \int k^2 (k')^3 k''' d\theta &= 4 \left[ k^2 (k')^3 k'' \Big|_0^{2\pi} - \int k'' ((k')^3 k^2)' d\theta \right] = -4 \int k'' ((k')^3 k^2)' d\theta \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} \int (k')^4 d\theta &= -4 \int k'' ((k')^3 k^2)' d\theta + 8 \int (k')^3 k k' k'' d\theta + 12 \int (k')^4 k^2 d\theta \\ &= -4 \int k'' (3(k')^2 k'' k^2 + (k')^3 2k k') d\theta + 8 \int (k')^4 k k'' d\theta \\ &\quad + 12 \int (k')^4 k^2 d\theta \\ &= -4 \int (k'')^2 3(k')^2 k^2 d\theta + 2k'' (k')^4 k d\theta + 8 \int (k')^4 k k'' d\theta \\ &\quad + 12 \int (k')^4 k^2 d\theta \\ &= -12 \int (k'')^2 (k')^2 k^2 d\theta - 8 \int k'' (k')^4 k d\theta + 8 \int (k')^4 k k'' d\theta \\ &\quad + 12 \int (k')^4 k^2 d\theta \\ &= -12 \int (k'')^2 (k')^2 k^2 d\theta + 12 \int (k')^4 k^2 d\theta. \quad (1) \end{aligned}$$

Utilizando a equação de evolução para  $k$  obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int (k'')^2 d\theta &= 2 \int k'' (k'')_t d\theta = 2 \int k'' ((k')_t)' d\theta \\
&= 2 \int k'' (k^2 k''' + 2kk'k'' + 3k^2 k')' d\theta \\
&= 2 \int k'' (k^2 k''')' + 2 \int k'' (2kk'k'')' + 2 \int k'' (3k^2 k')' d\theta \\
&= 2 \int k'' (k^2 k''')' + 4 \int k'' (kk'k'')' + 6 \int k'' (k^2 k')' d\theta.
\end{aligned}$$

Integramos por partes os seguintes termos

$$\begin{aligned}
2 \int k'' (k^2 k''')' d\theta &= 2 \left[ k'' k^2 k''' \Big|_0^{2\pi} - \int k^2 k''' k'' d\theta \right] = -2 \int k^2 (k''')^2 d\theta \\
4 \int k'' (kk'k'')' d\theta &= 4 \left[ k'' kk'k'' \Big|_0^{2\pi} - \int kk'k'' k''' d\theta \right] = -4 \int kk'k'' k''' d\theta
\end{aligned}$$

e substituindo na equação anterior

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int (k'')^2 d\theta &= -2 \int k^2 (k''')^2 d\theta - 4 \int kk'k'' k''' d\theta + 6 \int k'' (2kk'k' + k^2 k'') d\theta \\
&= -2 \int k^2 (k''')^2 d\theta - 4 \int kk'k'' k''' d\theta + 12 \int k'' k (k')^2 + 6 \int k^2 (k'')^2 d\theta. (*)
\end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned}
\int k (k')^2 k'' d\theta &= k (k')^2 k' \Big|_0^{2\pi} - \int k' [k' (k')^2 + 2kk'k''] d\theta \\
&= - \int (k')^4 d\theta - 2 \int k (k')^2 k'' d\theta \\
\Rightarrow - \int (k')^4 d\theta &= 3 \int k (k')^2 k'' d\theta.
\end{aligned}$$

Substituindo em (\*)

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int (k'')^2 d\theta &= -2 \int k^2 (k''')^2 d\theta - 4 \int kk'k'' k''' d\theta - 4 \int (k')^4 d\theta + 6 \int k^2 (k'')^2 d\theta \\
&\leq -2 \int k^2 (k''')^2 d\theta - 4 \int kk'k'' k''' d\theta + 6 \int k^2 (k'')^2 d\theta \\
&\leq -2m^2 \int (k''')^2 d\theta - 4 \int kk'k'' k''' d\theta + C_2 \int (k'')^2 d\theta \quad (**)
\end{aligned}$$

onde  $m$  é uma cota inferior de  $k \Rightarrow -m \geq -k$ .

Usando a desigualdade de Peter-Paul, com  $a = k'''$  e  $b = -4kk'k''$  temos

$$-4 \int kk'k''k''' d\theta \leq \int \left( \varepsilon(k''')^2 + \frac{(4kk'k'')^2}{4\varepsilon} \right) d\theta = \varepsilon \int (k''')^2 d\theta + \frac{4}{\varepsilon} \int k^2(k')^2(k'')^2 d\theta$$

Substituindo em (\*\*)

$$\frac{d}{dt} \int (k'')^2 d\theta \leq -2m^2 \int (k''')^2 d\theta + \varepsilon \int (k''')^2 d\theta + \frac{4}{\varepsilon} \int k^2(k')^2(k'')^2 d\theta + C_2 \int (k'')^2 d\theta$$

Escolhendo  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno para garantir que  $\varepsilon < 2m^2$  e usando  $a - b < a$  com  $b > 0$  temos

$$\frac{d}{dt} \int (k'')^2 d\theta \leq \frac{4}{\varepsilon} \int k^2(k')^2(k'')^2 d\theta + C_3 \int (k'')^2 d\theta \quad (2)$$

Multiplicando (1) por  $\frac{1}{\varepsilon}$

$$\frac{d}{dt} \int \frac{(k')^4}{\varepsilon} d\theta = -\frac{12}{\varepsilon} \int (k'')^2(k')^2 k^2 d\theta + \frac{12}{\varepsilon} \int (k')^4 k^2 d\theta \quad (3)$$

Multiplicando (2) por 3

$$\frac{d}{dt} 3 \int (k'')^2 d\theta \leq \frac{12}{\varepsilon} \int (k'')^2(k')^2 k^2 d\theta + 3C_3 \int (k'')^2 d\theta \quad (4)$$

Agora, fazendo (3) + (4)

$$\frac{1}{\varepsilon} \frac{d}{dt} \int (k')^4 d\theta + 3 \frac{d}{dt} \int (k'')^2 d\theta \leq \frac{12}{\varepsilon} \int (k')^4 k^2 d\theta + 3C_3 \int (k'')^2 d\theta$$

Reescrevendo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int (k')^4 d\theta + C_4 \frac{d}{dt} \int (k'')^2 d\theta &\leq C_5' \int (k')^4 k^2 d\theta + C_6 \int (k'')^2 d\theta \\ &\leq C_5 \int (k')^4 d\theta + C_6 \int (k'')^2 d\theta \end{aligned} \quad (5)$$

Defina agora,  $f = \int (k'')^2 d\theta$  e  $g = \int (k')^4 d\theta$ , isto implica que (5) fica da forma

$$\frac{df}{dt} - C_5 f \leq -C_4 \frac{dg}{dt} + C_6 g$$

Usaremos a técnica de fator integrante para resolução de EDO.

Multiplicando a equação acima pelo fator integrante  $e^{-C_5 t}$ , temos

$$\begin{aligned} e^{-C_5 t} \frac{df}{dt} - C_5 f e^{-C_5 t} &\leq e^{-C_5 t} \left[ -C_4 \frac{dg}{dt} + C_6 g \right] \\ \Rightarrow \frac{d(e^{-C_5 t} f)}{dt} &\leq e^{-C_5 t} \left[ -C_4 \frac{dg}{dt} + C_6 g \right] \end{aligned}$$

Agora, integrando de 0 à  $t$  obtemos:

$$e^{-C_5 t} f \leq f(0) + \int_0^t \left[ e^{-C_5 t} \left( -C_4 \frac{dg}{dt} + C_6 g \right) \right]$$

Já vimos que  $g$  e  $\frac{dg}{dt}$  são limitadas. Logo, pela desigualdade acima,  $f$  é limitada em intervalos limitados, ou seja,  $\|k''\|_2$  é limitada em intervalos limitados.

Assim, pela desigualdade de Sobolev, temos que  $\|k'\|_\infty \leq C$  e portanto  $k'$  é limitada.  $\square$

**Proposição 3.2.** *Se  $k$  e  $k'$  são limitadas então  $k''$  é limitada.*

*Demonstração.* Usaremos novamente a desigualdade de Sobolev com  $v = k''$ , assim, devemos estimar  $\|k'''\|_2$ , mas primeiro vamos estimar  $\|k''\|_4$ .

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int (k'')^4 d\theta &= 4 \int (k'')^3 (k^2 k'' + k^3)'' d\theta = 4 \int (k'')^3 (2k k' k'' + k^2 k''' + 3k^2 k')' d\theta \\ &= 8 \int (k'')^3 (k k' k'')' d\theta + 4 \int (k'')^3 (k^2 k''')' d\theta + 12 \int (k'')^3 (k^2 k')' d\theta \end{aligned}$$

Integrando por partes

$$\begin{aligned}
8 \int (k'')^3 (kk'k'')' d\theta &= 8 \left[ (k'')^3 (kk'k'') \Big|_0^{2\pi} - \int kk'k'' 3k''k''' d\theta \right] = -24 \int kk'(k'')^2 k''' d\theta \\
4 \int (k'')^3 (k^2 k''')' d\theta &= 4 \left[ (k'')^3 k^2 k''' \Big|_0^{2\pi} - \int k^2 k''' 3(k'')^2 k''' d\theta \right] = -12 \int k^2 (k'')^2 (k''')^2 d\theta \\
12 \int (k'')^3 (k^2 k')' d\theta &= 12 \left[ (k'')^3 k^2 k' \Big|_0^{2\pi} - \int k^2 k' 3(k'')^2 k''' d\theta \right] = -36 \int k^2 k' (k'')^2 k''' d\theta \\
&\Rightarrow \frac{d}{dt} \int (k'')^4 = -24 \int kk'(k'')^2 k''' d\theta - 12 \int k^2 (k'')^2 (k''')^2 d\theta \\
&\quad - 36 \int k^2 k' (k'')^2 k''' d\theta.
\end{aligned}$$

Pela desigualdade de Peter-Paul, com  $a = -24kk''$  e  $b = kk''k'''$  obtemos

$$-24 \int kk'(k'')^2 k''' d\theta \leq 24^2 \varepsilon \int k^2 (k'')^2 d\theta + \frac{1}{4\varepsilon} \int k^2 (k'')^2 (k''')^2 d\theta.$$

Analogamente, com  $a = -36kk'k''$  e  $b = kk''k'''$ ,

$$-36 \int k^2 k' (k'')^2 k''' d\theta \leq 36^2 \varepsilon \int k^2 (k')^2 (k'')^2 d\theta + \frac{1}{4\varepsilon} \int k^2 (k'')^2 (k''')^2 d\theta.$$

Com isso, calculamos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int (k'')^4 d\theta &\leq 24^2 \varepsilon \int k^2 (k'')^2 d\theta + \frac{1}{4\varepsilon} \int k^2 (k'')^2 (k''')^2 d\theta - 12 \int k^2 (k'')^2 (k''')^2 d\theta \\
&\quad + 36^2 \varepsilon \int k^2 (k')^2 (k'')^2 d\theta + \frac{1}{4\varepsilon} \int k^2 (k'')^2 (k''')^2 d\theta \\
&= 24^2 \varepsilon \int k^2 (k'')^2 d\theta + \left( \frac{1}{2\varepsilon} - 12 \right) \int k^2 (k'')^2 (k''')^2 d\theta \\
&\quad + 36^2 \varepsilon \int k^2 (k')^2 (k'')^2 d\theta.
\end{aligned}$$

Escolhendo  $\varepsilon$  suficiente grande para assegurar que  $-12 + 1/2\varepsilon \leq 0$ , estas estimativas garantem a existência de  $C_7, C_8 > 0$  tais que

$$\frac{d}{dt} \int (k'')^4 d\theta \leq C_7 \int k^2 (k'')^2 d\theta + C_8 \int k^2 (k')^2 (k'')^2 d\theta$$

Como  $k$  e  $k'$  limitadas, isto implica que  $k^2 \leq C$  e  $(k')^2 \leq D$ , assim,

$$\frac{d}{dt} \int (k'')^4 d\theta \leq CC_7 \int (k'')^2 d\theta + CDC_8 \int (k'')^2 d\theta = C_9 \int (k'')^2 d\theta.$$

Por outro lado, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} \int (k'')^2 d\theta &\leq \left( \int d\theta \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int ((k'')^2)^2 d\theta \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2\pi} \left( \int (k'')^4 d\theta \right)^{\frac{1}{2}} \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} \int (k'')^4 d\theta &\leq C_{10} \left( \int (k'')^4 d\theta \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Pelo lema (3.8) temos que  $\|k''\|_4$  cresce exponencialmente em  $t$  sendo limitada em intervalos limitados.

Vamos agora estimar  $\|k'''\|_2$ .

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int (k''')^2 d\theta &= 2 \int k'''(k''')_t d\theta = 2 \int k'''(k_t)''' d\theta \\ 2 \int k'''(k_t)''' d\theta &= 2 \left[ k'''(k_t) \Big|_0^{2\pi} - \int k''''(k_t)'' d\theta \right] = -2 \int k''''(k_t)'' d\theta. \end{aligned}$$



Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int (k''')^2 d\theta &= -2 \int k''''(k_t)'' d\theta = -2 \int k''''(k^2 k'' + k^3)'' d\theta \\
&= -2 \int k''''(2kk'k'' + k^2 k''' + 3k^2 k')' d\theta \\
&= -4 \int k''''(kk'k'')' d\theta - 2 \int k''''(k^2 k''')' d\theta - 6 \int k''''(k^2 k')' d\theta \\
&= -4 \int k''''[(k'k' + kk'')k'' + kk'k'''] d\theta - 2 \int k''''(2kk'k''' + k^2 k''''') d\theta \\
&\quad - 6 \int k''''(2kk'k' + k^2 k'') d\theta \\
&= -4 \int k''''[(k')^2 k'' + k(k'')^2 + kk'k'''] d\theta - 4 \int k''''(kk'k''') d\theta \\
&\quad - 2 \int k^2 (k''''')^2 d\theta - 12 \int k'''' k (k')^2 d\theta - 6 \int k^2 k'' k'''' d\theta \\
&= -4 \int k''''(k')^2 k'' d\theta - 4 \int k'''' k (k'')^2 d\theta - 4 \int k'''' k k' k'''' d\theta \\
&\quad - 4 \int k'''' k k' k'''' d\theta - 2 \int k^2 (k''''')^2 d\theta - 12 \int k'''' k (k')^2 d\theta \\
&\quad - 6 \int k^2 k'' k'''' d\theta \\
&= -2 \int k^2 (k''''')^2 d\theta - 4 \int k''''(k')^2 k'' d\theta - 4 \int k'''' k (k'')^2 d\theta \\
&\quad - 8 \int k'''' k k' k'''' d\theta - 6 \int k^2 k'' k'''' d\theta - 12 \int k'''' k (k')^2 d\theta
\end{aligned}$$

Seja  $m$  conta inferior de  $k$ , também  $k$  e  $k'$  são limitadas. Então

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int (k''')^2 d\theta &\leq -2m^2 \int (k''''')^2 d\theta + C_{11} \int |k''''| |k''''| d\theta + C_{12} \int (k'')^2 |k''''| d\theta \\
&= C_{13} \int |k''| |k''''| d\theta + C_{14} \int |k| |k''''| d\theta.
\end{aligned}$$

Vamos aplicar o a desigualdade de Peter-Paul do segundo ao quinto termo da inequação acima.

No segundo termo com  $a = |k''''|$  e  $b = C_{11}|k''''|$  obtemos

$$C_{11} \int |k''''| |k''''| d\theta \leq \varepsilon \int (k''''')^2 + \frac{C_{11}^2}{4\varepsilon} \int (k''''')^2 d\theta \quad (1)$$

No terceiro termo com  $a = |k''''|$  e  $b = C_{12}(k'')^2$  obtemos

$$C_{12} \int (k'')^2 |k''''| d\theta \leq \varepsilon \int (k'''' )^2 + \frac{C_{12}^2}{4\varepsilon} (k'')^4 d\theta \quad (2)$$

No quarto termo com  $a = |k''''|$  e  $b = C_{13}|k''|$  obtemos

$$C_{13} \int |k''| |k''''| d\theta \leq \varepsilon \int (k'''' )^2 + \frac{C_{13}^2}{4\varepsilon} (k'')^2 d\theta \quad (3)$$

No quinto termo com  $a = |k''''|$  e  $b = C_{14}|k|$  obtemos

$$C_{14} \int |k| |k''''| d\theta \leq \varepsilon \int (k'''' )^2 + \frac{C_{14}^2}{4\varepsilon} k^2 d\theta. \quad (4)$$

Juntando (1), (2), (3) e (4) temos

$$\frac{d}{dt} \int (k'''' )^2 \leq (-2m^2 + C_{15}\varepsilon) \int (k'''' )^2 d\theta + \frac{C_{16}}{4\varepsilon} \int (k'''' )^2 d\theta + \frac{C_{17}}{4\varepsilon} \int (k'')^4 d\theta + C_{18}$$

onde  $C_{18}$  resulta do fato que  $\int (k'')^2 d\theta$  e  $\int k^2 d\theta$  são limitadas.

Escolhendo  $\varepsilon$  suficientemente pequeno como nos casos anteriores e sabendo que  $\|k''\|_4$  é limitada em intervalos limitados temos

$$\frac{d}{dt} \int (k'''' )^2 \leq C_{19} \int (k'''' )^2 d\theta + C_{20}$$

Com isso, pelo lema (3.8),  $\|k''''\|_2$  cresce exponencialmente em  $t$  e é limitada em intervalos limitados. Pela desigualdade de Sobolev temos que  $\|k''\|_\infty < \infty$ .  $\square$

**Proposição 3.3.** *Se  $k$ ,  $k'$  e  $k''$  são uniformemente limitadas, então também são  $k'''$  e todas as derivadas de ordem maior.*

*Demonstração.* Calculamos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} k'''' &= (k^2 k'' + k^3)'''' \\ &= k^2 k^{(5)} + 6kk'k^{(4)} + [8kk'' + 6(k')^2 + 3k^2]k'''' \\ &\quad + [6k'(k'')^2 + 18kk'k'' + 6(k')^3] \end{aligned}$$

Isto significa que  $k''''$  satisfaz uma equação parabólica com coeficientes limitados, como

vimos nos lemas anteriores. Assim, podemos aplicar o Princípio do Máximo Parabólico a  $e^{-\lambda t}k$ , com  $\lambda$  escolhido adequadamente, para garantir que  $|k''''|$  é limitada em intervalos limitados.

Em geral, se  $k, k', \dots, k^{(n-1)}$  são limitadas então

$$\frac{\partial}{\partial t}k^{(n)} \leq k^2k^{(n+2)} + 2nk k' k^{(n+1)} + Ck^{(n)} + C$$

por indução, também é limitada em intervalos limitados, já que, pela hipótese de indução, estimamos as derivadas de  $k$  até a ordem  $(n-1)$ .  $\square$

Para limitarmos as derivadas mistas de  $k$ , vejamos, primeiramente, o que acontece com  $k_{t\theta}$ . Pela equação de evolução, temos

$$k_{t\theta} = k^2k'''' + 2k'k'' + 3k^2k'.$$

Utilizando as estimativas obtidas para  $k, k', k''$  e  $k''''$  concluimos que  $k_{t\theta}$  é limitada. Com um procedimento análogo, mostra-se que todas as derivadas mistas de  $k$  são uniformemente limitadas em intervalos limitados.

Agora chegamos ao ponto de ver o que acontece com a área.

Primeiramente, vamos analisar um caso particular, onde a curva inicial é um círculo de raio  $r_0 > 0$ , ou seja,  $\varphi(\theta, 0) = r_0(\cos \theta, \sin \theta)$ .

**Exemplo:** O círculo contrai-se a um ponto em tempo finito.

Neste caso, considerações de simetria implicam que  $\varphi(\theta, t)$  deve ser um círculo de raio  $r(t) > 0$  concêntrico a  $\varphi(\theta, 0)$ . Logo, podemos escrever  $\varphi(\theta, t) = r(t)(\cos \theta, \sin \theta)$ .

Disto segue-se que  $\varphi_t = r_t(\cos \theta, \sin \theta)$  e  $kN = -\frac{1}{r(t)}(\cos \theta, \sin \theta)$ , ou seja,  $r$  deve satisfazer  $\frac{dr}{dt} = -\frac{1}{r}$ .

Vamos integrar

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} = -\frac{1}{r} &\Rightarrow r dr = -dt \Rightarrow \int_{r_0}^r r dr = - \int dt \Rightarrow \frac{r^2}{2} \Big|_{r_0}^r = t \Rightarrow \frac{r^2(t) - r_0^2(t)}{2} = -t \\ &\Rightarrow r(t) = \sqrt{r_0^2 - 2t}, \quad t \in \left[0, \frac{r_0^2}{2}\right] \end{aligned}$$

Como, no caso do círculo,  $r = \frac{1}{k}$  tem-se  $k = \frac{1}{r}$  e usando o resultado anterior obtemos  $k = \frac{1}{\sqrt{r_0^2 - 2t}}$ .

Com isso podemos ver que quando  $t \rightarrow \frac{r_0^2}{2}$ ,  $r(t) \rightarrow 0$  e  $k \rightarrow \infty$  e disto tiramos a conclusão de que o círculo contrai-se a um ponto em tempo finito a saber,  $\bar{T} = \frac{r_0^2}{2}$ .

Observe que

$$\bar{T} = \frac{r_0^2}{2} = \frac{\pi r_0^2}{2\pi} = \frac{A_0}{2\pi}$$

onde  $A_0$  é a área do círculo inicial.

Com isso, vemos que a área do círculo se anula no instante  $t = \frac{A_0}{2\pi}$ .

Veremos que para uma curva convexa qualquer a área também zera em tempo finito.

**Proposição 3.4.** *O tempo maximal de existência de soluções para o fluxo pela curvatura correspondente a curvas iniciais convexas é sempre finito e limitado superiormente por  $\frac{1}{2k_{\min}(0)}$ , onde  $k_{\min}(0)$  denota o valor mínimo da curvatura da curva inicial.*

*Demonstração.* Este resultado é uma aplicação imediata do princípio do máximo, que pode ser encontrado em [dLM]. □

**Teorema 3.2.** *Existe solução para  $k : S^1 \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}$  até a área zerar.*

*Demonstração.* Enquanto existir alguma área,  $k$  e suas derivadas são limitadas. Suponha a existência de solução maximal para  $k : S^1 \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ , mas a área não vai para zero, ou seja, existe  $A^* > 0$  tal que  $\lim_{t \rightarrow T} A(t) = A^*$ . Então existe  $\lim_{t \rightarrow T} k$  que é  $C^\infty$  e assim podemos estender a solução para um intervalo  $[0, T + \varepsilon)$ , o que contraria  $k$  ser solução maximal em  $[0, T)$ . Portanto,  $\lim_{t \rightarrow T} A(t) = 0$ . □

Isto significa que enquanto a curva tiver alguma área, a curvatura permanece limitada e a única forma da curvatura explodir é a área zerar.

Além disso, como  $T < \infty$  e  $A_t = -2\pi$  temos que o tempo que a área leva para zerar é finito e exatamente  $T = \frac{A_0}{2\pi}$ , onde  $A_0$  é a área da curva inicial.

Terminamos a demonstração do teorema (2.1), falta mostrar que a curva evolui, assintoticamente, para um círculo ao mesmo tempo em que a área tende a zero. É o que faremos na próxima seção.

## 3.2 Comportamento assintótico

Nosso objetivo nesta seção é mostrar que a curva tende a um círculo enquanto a área tende a zero.

Faremos isto através de dois métodos distintos.

No primeiro, seguindo argumentos de [G], veremos que a área tende a zero e a razão isoperimétrica decresce, implicando que  $\frac{L^2}{A} \rightarrow 4\pi$ . Conseqüentemente a razão entre o raio da circunferência circunscrita à curva,  $(r_{ex})$ , e o raio da circunferência inscrita,  $(r_{in})$ , converge para 1, ou seja,  $\frac{r_{ex}}{r_{in}} \rightarrow 1$ . Assim, a curva converge para um círculo.

No segundo método, seguindo [GH], mostraremos que a razão entre a curvatura máxima e a curvatura mínima tende a 1, ou seja,  $\frac{k_{\max}}{k_{\min}} \rightarrow 1$ .

E finalmente, vamos estimar as derivadas de ordem maior de  $k$  para provar que elas convergem para zero e conseqüentemente as curvas convergem para círculos em “ $C^\infty$ ”.

### 3.2.1 Primeiro método ([G])

Começaremos com alguns conceitos preliminares.

Sejam  $\varphi(t) = \varphi(., t)$  uma família de curvas parametrizadas, fechadas e convexas,  $G(t)$  a região delimitada por  $\varphi(t)$ . Além disso,  $L(t)$  e  $A(t)$  são o comprimento e a área de  $\varphi(t)$  respectivamente.

**Definição 3.2.** *A função suporte da curva  $\varphi(t)$  é  $h(u, t) = -\langle \varphi(u, t), N(u, t) \rangle$ , onde  $N(u, t)$  é o vetor normal à  $\varphi(u, t)$ .*

Geometricamente,  $h$  mede a distância entre a origem e as retas tangentes à curva. A função  $h$  depende da escolha de uma origem no plano, valendo  $h > 0$  se, e somente se, a origem encontra-se no interior da região compacta delimitada por  $\varphi(t)$ .

Definida a função suporte, podemos determinar expressões para a área e o comprimento de uma curva fechada e convexa usando  $h$ .

**Lema 3.10.** *O comprimento e a área de  $\varphi(t)$  são dados por*

$$L = \int_{\varphi} h k ds \quad e \quad A = \frac{1}{2} \int_{\varphi} h ds$$

*respectivamente.*

*Demonstração.* Seja  $\varphi(s, t) = (x(s, t), y(s, t))$  uma parametrização de  $\varphi(t)$  pelo comprimento de arco. Usando o lema (1.4)

$$A = \frac{1}{2} \int_{\varphi} xy_s - yx_s ds = \frac{1}{2} \int_{\varphi} \langle \varphi, -N \rangle ds = \frac{1}{2} \int_{\varphi} h ds.$$

Para o comprimento usaremos  $\theta \in S^1$  como parâmetro. Usando as equações de Frenet, observe que

$$\begin{aligned} h_{\theta} &= \frac{\partial h}{\partial s} \frac{ds}{d\theta} = \frac{1}{k} [-\langle \varphi_s, N \rangle - \langle \gamma, N_s \rangle] = \frac{1}{k} [-\langle T, N \rangle + \langle \varphi, kT \rangle] = \langle \varphi, T \rangle \\ h_{\theta\theta} &= \frac{1}{k} [\langle \varphi_s, T \rangle + \langle \varphi, T_s \rangle] = \frac{1}{k} [\langle T, T \rangle + \langle \varphi, kN \rangle] = \frac{1}{k} + \langle \varphi, N \rangle \end{aligned}$$

Com isso,

$$h + h_{\theta\theta} = -\langle \varphi, N \rangle + \langle \varphi, N \rangle + \frac{1}{k} = \frac{1}{k}.$$

Finalmente,

$$L = \int_{\varphi} ds = \int_{S^1} \frac{ds}{d\theta} d\theta = \int_{S^1} [h + h_{\theta\theta}] d\theta = \int_{S^1} h d\theta = \int_{\varphi} h k ds,$$

pois  $\int_{S^1} h_{\theta\theta} d\theta = 0$ . Isto prova o lema.  $\square$

Definiremos a distância de Hausdorff entre conjuntos, pois em nossa análise, a convergência das curvas para círculos ocorrerá nesta métrica.

Sejam  $A$  e  $B$  dois conjuntos fechados e convexos.

Dado  $\varepsilon > 0$ , seja  $A_{\varepsilon} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \text{dist}(x, A) \leq \varepsilon\}$ .

**Definição 3.3.** A distância de Hausdorff entre os conjuntos  $A$  e  $B$  é

$$d_H(A, B) = \inf\{\varepsilon \mid A \subseteq B_{\varepsilon} \text{ e } B \subseteq A_{\varepsilon}\}.$$

O teorema de Seleção de Blaschke [Lay] garante que qualquer coleção infinita de conjuntos convexos em uma região fixada limitada do  $\mathbb{R}^2$  tem uma subsequência que converge para um conjunto convexo, na distância de Hausdorff.

Seja  $\varphi(t)$  uma curva fechada e convexa. Vamos aplicar uma homotetia em  $\varphi(t)$  tal que a nova curva  $\bar{\varphi}(t)$  tenha área  $\pi$ , ou seja, vamos fazer uma normalização das áreas. Considere  $\mu$  o fator de homotetia.

Seja  $\bar{\varphi}(\theta, t) = \mu\varphi(\theta, t)$ , onde  $\varphi(\theta, t) = (x(\theta, t), y(\theta, t))$ .

Assim,

$$\bar{\varphi} = (\bar{x}, \bar{y}) \Rightarrow \bar{x} = \mu x, \quad \bar{y} = \mu y.$$

Com isso, denotando por ' a derivada em relação a  $\theta$ , obtemos

$$\bar{x}' = \mu'x + \mu x' \quad \text{e} \quad \bar{y}' = \mu'y + \mu y'.$$

Vamos encontrar o fator de homotetia  $\mu$ .

Sabemos que  $A(\varphi) = \frac{1}{2} \int (xy' - yx') ds$ .

$$\begin{aligned} \Rightarrow A(\bar{\varphi}) &= \frac{1}{2} \int (\bar{x}\bar{y}' - \bar{y}\bar{x}') ds = \frac{1}{2} \int [\mu x(\mu'y + \mu y') - \mu y(\mu'x + \mu x')] ds \\ &= \frac{1}{2} \int [\mu^2 xy' - \mu^2 yx'] ds = \frac{1}{2} \mu^2 \int xy' - yx' ds = \mu^2 A(\varphi) \end{aligned}$$

Queremos que  $A(\bar{\varphi}) = \pi$ . Portanto, defina  $\mu$  de modo que  $\mu^2 A(\varphi) = \pi$ .

Isso implica que

$$\mu^2 = \frac{\pi}{A} \Rightarrow \mu = \sqrt{\frac{\pi}{A}}.$$

Com isso obtemos

$$\bar{\varphi}(t) = \sqrt{\frac{\pi}{A}} \varphi(t).$$

Denotaremos  $r_{in}$ , de um conjunto  $G$ , o raio do maior círculo inscrito a  $G$  e  $r_{ex}$  o raio do menor círculo circunscrito a  $G$ .

Para a demonstração do teorema que garante que a curva durante a evolução torna-se um círculo, precisamos dos seguintes lemas auxiliares.

O lema (3.11) e o corolário (3.2.2) são essenciais na demonstração do teorema principal desta subseção.

**Lema 3.11.** *Para toda curva convexa  $\gamma$ , de classe  $C^1$ , existe um funcional  $F(\gamma) \geq 0$  tal que*

$$LA(1 - F(\gamma)) \geq \pi \int h^2 ds. \quad (3.2)$$

*Seja  $\{\gamma_i\}$  uma seqüência de curvas convexas tal que  $\lim_{i \rightarrow \infty} F(\gamma_i) = 0$ . Se as curvas  $\gamma_i$  ficam em uma região limitada fixa do plano, então a região  $G_i$  inclusa em  $\gamma_i$  converge*

para um disco, na métrica de Hausdorff. Além disso,  $F(\gamma) = 0$  se, e somente se,  $\gamma$  é um círculo.

*Demonstração.* A prova será feita em três etapas.

1) Primeiramente, mostraremos que para curvas convexas simétricas em relação a origem vale a equação

$$LA - \pi \int h^2 ds \geq LA.E(\gamma) \quad (3.3)$$

onde  $E(\gamma)$  é o funcional não negativo

$$E(\gamma) = 1 + \frac{\pi r_{in} r_{ex}}{A} - \frac{2\pi(r_{ex} + r_{in})}{L}$$

A forma da inequação de Bonnesen [O] para curvas fechadas é

$$rL - A - \pi r^2 \geq 0 \quad \text{para} \quad r_{in} \leq r \leq r_{ex} \quad (3.4)$$

a igualdade acontecendo para  $r = r_{ex}$  somente se a curva é um círculo.

O lado esquerdo de 3.4 é uma função côncava de  $r$  e conseqüentemente seu gráfico fica acima da linha secante formada pelo segmento de

$$(r_{in}, r_{in}L - A - \pi(r_{in})^2) \quad \grave{\text{a}} \quad (r_{ex}, r_{ex}L - A - \pi(r_{ex})^2)$$

Isto implica que

$$rL - A - \pi r^2 \geq (r - r_{in}) \frac{r_{ex}L - A - \pi(r_{ex})^2}{r_{ex} - r_{in}} + (r_{ex} - r) \frac{r_{in}L - A - \pi(r_{in})^2}{r_{ex} - r_{in}} \geq 0 \quad (3.5)$$

quando  $r_{in} \leq r \leq r_{ex}$ . Para curvas convexas simétricas, a função suporte  $h$  satisfaz  $r_{in} \leq h \leq r_{ex}$ . Substituindo  $r$  por  $h$  em 3.5 obtemos

$$hL - A - \pi h^2 \geq (h - r_{in}) \frac{r_{ex}L - A - \pi(r_{ex})^2}{r_{ex} - r_{in}} + (r_{ex} - h) \frac{r_{in}L - A - \pi(r_{in})^2}{r_{ex} - r_{in}} \geq 0 \quad (3.6)$$



Integrando a equação acima em relação ao comprimento de arco temos

$$\begin{aligned}
L \int_{\gamma} h ds - A \int_{\gamma} ds - \pi \int_{\gamma} h^2 ds &\geq \frac{r_{ex}L - A - \pi(r_{ex})^2}{r_{ex} - r_{in}} \int_{\gamma} (h - r_{in}) ds \\
&+ \frac{r_{in}L - A - \pi(r_{in})^2}{r_{ex} - r_{in}} \int_{\gamma} (r_{ex} - h) ds \\
&= \frac{r_{ex}L - A - \pi(r_{ex})^2}{r_{ex} - r_{in}} \left[ \int_{\gamma} h ds - r_{in} \int_{\gamma} ds \right] \\
&+ \frac{r_{in}L - A - \pi(r_{in})^2}{r_{ex} - r_{in}} \left[ - \int_{\gamma} h ds + r_{ex} \int_{\gamma} ds \right] \geq 0
\end{aligned}$$

Usando que  $L = \int_{\gamma} ds$  e  $A = \frac{1}{2} \int_{\gamma} h ds$  e substituindo acima temos

$$\begin{aligned}
2LA - AL - \pi \int_{\gamma} h^2 ds &\geq \frac{r_{ex}L - A - \pi(r_{ex})^2}{r_{ex} - r_{in}} [2A - r_{in}L] \\
&+ \frac{r_{in}L - A - \pi(r_{in})^2}{r_{ex} - r_{in}} [-2A + r_{ex}L] \geq 0 \\
\Rightarrow LA - \pi \int_{\gamma} h^2 ds &\geq \frac{2r_{ex}LA - 2A^2 - 2A\pi(r_{ex})^2 - r_{ex}r_{in}L + r_{in}LA + \pi(r_{ex})^2r_{in}L}{r_{ex} - r_{in}} \\
&+ \frac{-2r_{in}LA + 2A^2 + 2A\pi(r_{in})^2 + r_{ex}r_{in}L - r_{ex}LA - \pi(r_{in})^2r_{ex}L}{r_{ex} - r_{in}} \\
&= \frac{2LA(r_{ex} - r_{in})}{r_{ex} - r_{in}} - \frac{2A\pi(r_{ex}^2 - r_{in}^2)}{r_{ex} - r_{in}} - \frac{LA(r_{ex} - r_{in})}{r_{ex} - r_{in}} + \frac{\pi Lr_{in}r_{ex}}{r_{ex} - r_{in}} \geq 0 \\
&= LA - 2\pi A(r_{ex} + r_{in}) + \pi Lr_{in}r_{ex} = LA.E(\gamma) \geq 0
\end{aligned}$$

ou seja,  $LA - \pi \int_{\gamma} h^2 ds \geq LA.E(\gamma)$ , com  $E(\gamma) \geq 0$ .

Se  $E(\gamma) = 0$  então a integral do lado direito de 3.6 é igual a zero. Isto implica que o lado direito de 3.5 é zero e disto temos a igualdade em 3.4 com  $r = r_{ex}$ . Portanto,  $\gamma$  é um círculo.

2) Agora vamos analisar a convergência de  $\{\gamma_i\}$  quando  $\lim_{i \rightarrow \infty} E(\gamma_i) = 0$ . Sejam  $\{\gamma_i\}$  uma seqüência de curvas convexas simétricas em relação a origem, e  $G_i$  a região limitada por  $\gamma_i$ . Suponha que  $\lim_{i \rightarrow \infty} E(\gamma_i) = 0$ . Assuma que a seqüência  $\{G_i\}$  está toda numa região limitada do plano. O teorema de seleção de Blaschke afirma que uma subsequência  $G_{i_k}$  converge para um conjunto convexo  $G_{\infty}$ . Uma vez que  $A$ ,  $L$ ,  $r_{in}$  e  $r_{ex}$  são funcionais contínuos de conjuntos fechados e convexas, segue que  $E$  também é contínua. Logo,  $E(G_{\infty}) = \lim E(G_{i_k}) = 0$ . Da primeira etapa, conclui-se que  $G_{\infty}$  é o interior de um círculo.

Levando em consideração que a curva decresce na direção do vetor normal,

toda subsequência convergente converge para  $G_\infty$ , ou seja, para um círculo. Conseqüentemente, toda seqüência  $\{G_i\}$  converge para um círculo, na métrica de Hausdorff.

3) Vamos estender os resultados obtidos para uma curva convexa qualquer.

Seja  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva fechada e convexa que limita uma região  $D$ . Para  $s \in [a, b]$  seja  $j(s)$  o único elemento de  $[a, b]$  tal que o segmento de reta determinado por  $\gamma(s)$  e  $\gamma(j(s))$  divide  $D$  em duas regiões com a mesma área.

Considere a função contínua  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(s) = \langle T(s) \times T(j(s)), \vec{n} \rangle,$$

onde  $\times$  é o produto vetorial de vetores,  $T(s)$  e  $T(j(s))$  são vetores tangentes a  $\gamma(s)$  e  $\gamma(j(s))$  respectivamente,  $\vec{n} = (0, 0, 1)$  e estamos identificando o conjunto  $\mathbb{R}^2$  ao subconjunto  $\{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 / x, y \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$ . Observe que

$$f(s) = \langle T(s) \times T(j(s)), \vec{n} \rangle = -\langle T(j(s)) \times T(s), \vec{n} \rangle = -f(j(s)).$$

Pelo teorema do valor intermediário, existe  $s_0$  tal que  $f(s_0) = 0$ . Logo,  $T(s_0) \times T(j(s_0)) = 0$ , ou seja,  $T(s_0) = -T(j(s_0))$ .

Escolhamos coordenadas tal que o segmento formado por  $\gamma(s_0)$  e  $\gamma(j(s_0))$  fique no eixo  $x$  e o ponto médio deste segmento é a origem do sistema de coordenadas. Sejam  $\gamma_1$  a porção de  $\gamma$  acima do eixo  $x$  e  $\gamma_2$  a porção de  $\gamma$  abaixo do eixo  $x$ . Denominamos de  $-\gamma_1$  e  $-\gamma_2$  as reflexões em relação à origem de  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  respectivamente.

Por construção, a curva convexa formada por  $\gamma_1 \cup (-\gamma_1)$  é convexa, possui o dobro do comprimento  $L_1$  de  $\gamma_1$  e a mesma área de  $\gamma$ . O mesmo acontece com  $\gamma_2 \cup (-\gamma_2)$  com comprimento  $2L_2$ .

Aplicando a desigualdade 3.3 para  $\gamma_1 \cup (-\gamma_1)$  e  $\gamma_2 \cup (-\gamma_2)$  e dividindo por 2 segue que

$$L_1 A - \pi \int_{\gamma_1} h^2 ds \geq L_1 A \{E(\gamma_1 \cup (-\gamma_1))\} \quad (3.7)$$

e

$$L_2 A - \pi \int_{\gamma_2} h^2 ds \geq L_2 A \{E(\gamma_2 \cup (-\gamma_2))\}$$

Combinando estas equações temos

$$LA - \pi \int_{\gamma} h^2 ds \geq LA \left\{ \frac{L_1}{L} E(\gamma_1 \cup (-\gamma_1)) + \frac{L_2}{L} E(\gamma_2 \cup (-\gamma_2)) \right\} \quad (3.8)$$

O valor de cada parcela da soma do lado esquerdo da desigualdade acima depende da escolha específica do segmento usado para formar as curvas simétricas convexas. Seja

$$F(\gamma) = \max \left\{ \frac{L_1}{L} E(\gamma_1 \cup (-\gamma_1)), \frac{L_2}{L} E(\gamma_2 \cup (-\gamma_2)) \right\}.$$

O comprimento  $2L_1$  da curva simétrica  $\gamma_1 \cup (-\gamma_1)$  é limitado inferiormente por  $2\sqrt{\pi A}$ , visto que  $\frac{(2L_1)^2}{A} \geq 4\pi$ . Análogo para  $2L_2$ .

Se o comprimento  $L$  de  $\gamma$  é limitado por uma constante ( $L \leq C$ ) então pela equação 3.8 tem-se

$$\begin{aligned} F(\gamma) &\geq \frac{L_1}{L} E(\gamma_1 \cup (-\gamma_1)) \geq \frac{\sqrt{\pi A}}{C} E(\gamma_1 \cup (-\gamma_1)) \\ F(\gamma) &\geq \frac{L_2}{L} E(\gamma_2 \cup (-\gamma_2)) \geq \frac{\sqrt{\pi A}}{C} E(\gamma_2 \cup (-\gamma_2)) \end{aligned} \quad (3.9)$$

Também temos

$$r_{in}(\gamma) \geq \min\{r_{in}(\gamma_1 \cup (-\gamma_1)), r_{in}(\gamma_2 \cup (-\gamma_2))\} \quad (3.10)$$

e

$$r_{ex}(\gamma) \leq \max\{r_{ex}(\gamma_1 \cup (-\gamma_1)), r_{ex}(\gamma_2 \cup (-\gamma_2))\} \quad (3.11)$$

Seja  $\{\gamma_i\}$  uma seqüência de curvas fechadas e convexas contidas numa região fixa do plano. Suponha que seus comprimentos são todos menores que o comprimento de um envoltório convexo da região limitada onde as curvas estão. Se  $\lim_{i \rightarrow \infty} F(\gamma_i) = 0$  então, segue de 3.9 que, o funcional  $E$  aplicado a curvas convexas simétricas tenderá a zero. Da segunda etapa, concluímos que as curvas simétricas que limitam regiões convergem para um disco de raio  $r$ . Em particular, o raio interno e o raio externo das curvas convexas simétricas convergem para  $r$ . As desigualdades 3.10 e 3.11 implicam que  $r_{in}(\gamma_i)$  e  $r_{ex}(\gamma_i)$  também convergem para  $r$  e conseqüentemente a região  $G_i$  inclusa em  $\gamma_i$  converge para o círculo de raio  $r$ , na métrica de Hausdorff.

Para concluirmos a prova do lema,

$$\begin{aligned} F(\gamma) = 0 &\Leftrightarrow \frac{L_1}{L}E(\gamma_1 \cup (-\gamma_1)) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{L_2}{L}E(\gamma_2 \cup (-\gamma_2)) = 0 \\ &\Leftrightarrow E(\gamma_1 \cup (-\gamma_1)) = 0 \quad \text{e} \quad E(\gamma_2 \cup (-\gamma_2)) = 0. \end{aligned}$$

Pela segunda etapa, tem-se que  $\gamma_1 \cup (-\gamma_1)$  e  $\gamma_2 \cup (-\gamma_2)$  são círculos, o que implica que  $\gamma$  é um círculo.  $\square$

Para as curvas normalizadas, de área  $\pi$ , temos o seguinte corolário.

**Corolário 3.2.1.** *Seja  $\{\bar{\gamma}_i\}$  uma seqüência de curvas normalizadas tal que  $\lim_{i \rightarrow \infty} F(\bar{\gamma}_i) = 0$ . Se estas curvas normalizadas ficam em uma região fixa limitada do plano, então a região  $H_i$  inclusa em  $\bar{\gamma}_i$  converge para o disco unitário, na métrica de Hausdorff.*

*Demonstração.* Considere  $\{\bar{\gamma}_i\}$  uma seqüência de curvas normalizadas simétricas em relação à origem. Pelas etapas 1) e 2) da demonstração do teorema temos que a seqüência  $\{H_i\}$  converge para um disco de área  $\pi$ , ou seja, para o disco unitário, na métrica de Hausdorff.

Seja  $\bar{\gamma}$  uma curva convexa normalizada. Seguindo os passos da etapa 3) da prova do teorema construímos curvas simétricas, de área  $\pi$ ,  $\bar{\gamma}_1 \cup (-\bar{\gamma}_1)$  e  $\bar{\gamma}_2 \cup (-\bar{\gamma}_2)$  de comprimento  $2L_1$  e  $2L_2$  respectivamente. O comprimento  $2L_1$  é limitado inferiormente por  $2\pi$ , visto que  $\frac{(2L_1)^2}{A} \geq 4\pi$  e a área é igual a  $\pi$ . Análogo para  $2L_2$ .

Se o comprimento  $L$  de  $\bar{\gamma}$  é limitado por uma constante ( $L \leq C$ ) então pela equação 3.8 tem-se

$$\begin{aligned} F(\bar{\gamma}) &\geq \frac{L_1}{L}E(\bar{\gamma}_1 \cup (-\bar{\gamma}_1)) \geq \frac{\pi}{C}E(\bar{\gamma}_1 \cup (-\bar{\gamma}_1)) \\ F(\bar{\gamma}) &\geq \frac{L_2}{L}E(\bar{\gamma}_2 \cup (-\bar{\gamma}_2)) \geq \frac{\pi}{C}E(\bar{\gamma}_2 \cup (-\bar{\gamma}_2)) \end{aligned} \tag{3.12}$$

Também temos

$$r_{in}(\bar{\gamma}) \geq \min\{r_{in}(\bar{\gamma}_1 \cup (-\bar{\gamma}_1)), \quad r_{in}(\bar{\gamma}_2 \cup (-\bar{\gamma}_2))\} \tag{3.13}$$

e

$$r_{ex}(\bar{\gamma}) \leq \max\{r_{ex}(\bar{\gamma}_1 \cup (-\bar{\gamma}_1)), \quad r_{ex}(\bar{\gamma}_2 \cup (-\bar{\gamma}_2))\} \tag{3.14}$$

Dada uma seqüência  $\{\bar{\gamma}_i\}$  de curvas normalizadas fechadas e convexas

contidas numa região plana fixada, com seus comprimentos menores que o comprimento de um envoltório convexo da região limitada onde as curvas estão. Se  $\lim_{i \rightarrow \infty} F(\bar{\gamma}_i) = 0$  então de 3.12 segue que o funcional  $E$  aplicado a curvas convexas tenderá a zero. Assim, as curvas simétricas que limitam regiões convergem para o disco unitário. Em particular, o raio interno e o raio externo das curvas convexas simétricas convergem para 1. As desigualdades 3.13 e 3.14 implicam que  $r_{in}(\bar{\gamma}_i)$  e  $r_{ex}(\bar{\gamma}_i)$  também convergem para 1 e conseqüentemente a região inclusa converge para o disco unitário na métrica de Hausdorff.  $\square$

**Corolário 3.2.2.** *Para algum funcional  $F(\gamma)$*

$$\left( \int k^2 ds \right) \cdot (1 - F(\gamma)) - \pi \frac{L}{A} \geq 0 \quad (3.15)$$

*sempre que  $\gamma$  é  $C^2$  e convexa.*

*Demonstração.* De  $L = \int_{\gamma} h k ds$ , pela desigualdade de Cauchy segue que

$$L \leq \left( \int_{\gamma} h^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\gamma} k^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}$$

Pela equação 3.2 temos

$$\begin{aligned} L^2 &\leq \left( \int h^2 ds \right) \left( \int k^2 ds \right) \leq \frac{LA(1 - F(\gamma))}{\pi} \int k^2 ds \\ \Rightarrow 0 &\leq \frac{L}{A} \pi \leq (1 - F(\gamma)) \int k^2 ds \\ 0 &\leq (1 - F(\gamma)) \int k^2 ds - \frac{L}{A} \pi \end{aligned}$$

$\square$

**Lema 3.12.** *Se  $\lim_{t \rightarrow T} A(t) = 0$  então*

$$\liminf_{t \rightarrow T} L(t) \left( \int k^2 ds - \pi \frac{L(t)}{A(t)} \right) \leq 0$$

*Demonstração.* A derivada da razão isoperimétrica, em relação a  $t$ , é

$$\left( \frac{L^2}{A} \right)_t = \frac{2LL_t A - L^2 A_t}{A^2} = -2 \frac{L}{A} \left( \int k^2 ds - \pi \frac{L}{A} \right) \quad (3.16)$$

onde  $L_t = - \int k^2 ds$  e  $A_t = -2\pi$ .

Suponha que

$$L \left( \int k^2 ds - \pi \frac{L}{A} \right) > \varepsilon$$

em uma vizinhança de  $T$  então

$$\left( \frac{L^2}{A} \right)_t \leq -2 \frac{\varepsilon}{A} = \frac{\varepsilon}{\pi} (\ln A)_t \quad t_1 \leq t \leq T$$

Ao integrarmos, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{L^2}{A}(t) - \frac{L^2}{A}(t_1) &\leq \frac{\varepsilon}{\pi} \ln(A(t)) - \frac{\varepsilon}{\pi} \ln(A(t_1)) \\ \Rightarrow \frac{L^2}{A}(t) &\leq \frac{L^2}{A}(t_1) - \frac{\varepsilon}{\pi} \ln(A(t_1)) + \frac{\varepsilon}{\pi} \ln(A(t)) \end{aligned}$$

Por hipótese,  $A(t)$  tende a zero. Disto segue que  $\frac{\varepsilon}{\pi} \ln(A(t)) \rightarrow -\infty$  e conseqüentemente o lado direito da desigualdade acima atinge um valor negativo. Por outro lado, pela desigualdade isoperimétrica temos que  $4\pi \leq \frac{L^2}{A}$ . Donde temos um absurdo. Isto prova o lema.  $\square$

Finalmente, vamos mostrar o principal resultado desta seção.

**Teorema 3.3.** *Uma família de curvas convexas, de classe  $C^2$ , que satisfaz a equação de evolução para  $0 < t < T$  e para a qual  $\lim_{t \rightarrow T} A(t) = 0$  também satisfaz*

$$\lim_{t \rightarrow T} \frac{L^2(t)}{A(t)} = 4\pi.$$

*Demonstração.* Rearranjando a equação 3.15 temos

$$\int k^2 ds - \pi \frac{L}{A} \geq \left( \int k^2 ds \right) F(\gamma) \quad (3.17)$$

Da desigualdade de Schwartz e do fato de que para curvas fechadas e simples vale  $\int_{\gamma} k ds = \int_{S^1} \frac{d\theta}{ds} ds = \int_{S^1} d\theta = 2\pi$  segue que

$$4(\pi)^2 = \left( \int_{\gamma} k ds \right)^2 \leq \left[ \left( \int_{\gamma} k^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\gamma} ds \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2 = L \int_{\gamma} k^2 ds$$

e combinando isto com 3.17 temos

$$L \left( \int k^2 ds - \pi \frac{L}{A} \right) \geq 4\pi^2 F(\gamma) \quad (3.18)$$

Pelo lema (3.12), concluímos que existe uma subsequência de curvas  $\gamma(t_i)$  tal que o lado esquerdo de 3.18 aproxima-se de zero, logo  $F(\gamma(t_i))$  tende a zero.

Temos que mostrar que as curvas ficam numa região limitada.

Da equação 3.16 segue

$$\int k^2 ds - \pi \frac{L}{A} \geq F(\gamma) \int k^2 ds \geq 0$$

Com isso temos  $\left(\frac{L^2}{A}\right)_t \leq 0$ , o que implica que  $\frac{L^2}{A}$  decresce durante o encolhimento da curva.

Juntamente com a desigualdade de Bonnesen,

$$\frac{L^2}{A} - 4\pi \geq \frac{\pi^2}{A} (r_{ex} - r_{in})^2, \quad (3.19)$$

obtemos que os raios das curvas  $\gamma(t)$  são limitados superiormente, para todo  $t$ , por uma constante  $R$ . Como as curvas encolhem ao longo da evolução temos que a região das curvas convexas satisfazem  $G(t_2) \subseteq G(t_1)$  se  $t_2 > t_1$ . Isto implica que o conjunto  $\bigcap_{0 \leq t < T} \{G(t)\}$  contém pelo menos um ponto. Se usarmos um destes pontos como origem, então todas as curvas estarão contidas numa bola de raio  $2R$  em torno deste ponto.

Disto, aplicando o lema (3.11) vemos que a seqüência de regiões  $G(t_i)$  converge para o disco, na métrica de Hausdorff. Como  $L$  e  $A$  são funcionais contínuos da região convexa e  $\frac{L^2}{A}$  está decrescendo durante o processo de encolhimento da curva, conseqüentemente  $\frac{L^2}{A}$  converge para  $4\pi$  para toda uma família de curvas.  $\square$

**Corolário 3.3.1.** *A família de curvas normalizadas  $\bar{\gamma}(t)$ , que limitam regiões convexas  $H(t)$  converge para o disco unitário na métrica de Hausdorff.*

*Demonstração.* Pelo teorema (3.3), os raios das curvas  $\bar{\gamma}(t)$  são limitados, para todo  $t$ , por uma constante  $C$  e todas as curvas estão numa bola de raio  $2C$ .

Pelo lema (3.11) a seqüência  $\{H(t_i)\}$  converge para o disco unitário, na métrica de Hausdorff. Segue de 3.19 que  $r_{ex}$  e  $r_{in}$  convergem para 1, forçando a região normalizada a convergir para o disco unitário.  $\square$

Com isso, terminamos o primeiro método para mostrar que, durante a evolução, a curva torna-se um círculo.

### 3.2.2 Segundo método ([GH])

Nesta subseção, também mostraremos que a curva torna-se um círculo, mas analisando o comportamento da função curvatura ao longo da evolução, com o objetivo, primeiramente, de mostrar que  $\frac{k_{\max}}{k_{\min}} \rightarrow 1$ .

O primeiro lema refina a estimativa geométrica.

Seja  $k_{\omega}^* = \sup\{b \mid k(\theta) > b \text{ em algum intervalo de comprimento } \omega\}$ .

**Lema 3.13.**

$$k_{\omega}^*(t)r_{in}(t) < \frac{1}{1 - f(\omega)\left(\frac{r_{ex}}{r_{in}} - 1\right)}$$

onde  $r_{in}$  é o raio da circunferência inscrita e  $r_{ex}$  é o raio da circunferência circunscrita da curva definida por  $k(\cdot, t)$ .  $f$  é uma função decrescente em  $\omega$  com  $f(0) = \infty$  e  $f(\pi) = 0$ .

*Demonstração.* Seja  $M < k_{\omega}^*(t)$ . O conjunto  $\{\theta \mid k(\theta, t) > M\}$  contém um intervalo de comprimento menor ou igual do que  $\omega$ , fazendo uma mudança de parametrização podemos assumir que este conjunto contém o intervalo  $(-\frac{\omega}{2}, \frac{\omega}{2})$ . Se construirmos um arco circular de curvatura  $M$  e ângulo  $\omega$ , de acordo com a figura 3.1, tangente a curva em  $\theta = 0$ , vemos que a curva convexa deve ficar na região limitada pelo arco e os raios tangentes aos extremos do arco.

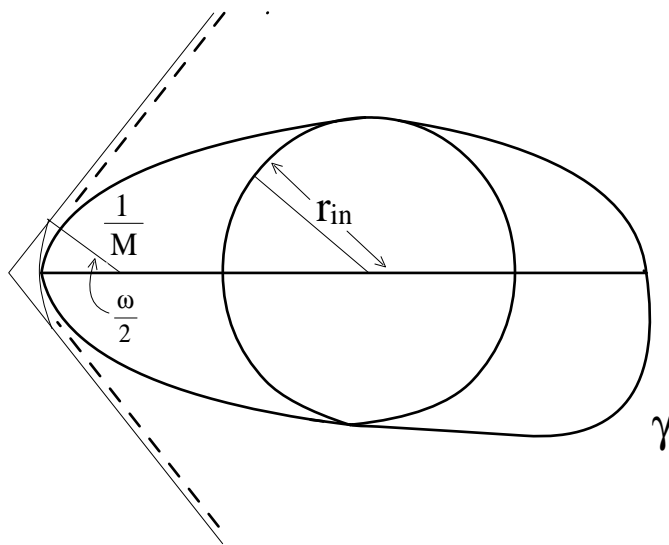


Figura 3.1:



A hipótese de convexidade assegura que a curva fica no interior das linhas pontilhadas, enquanto a estimativa  $k(\theta) > M$  em  $(-\frac{\omega}{2}, \frac{\omega}{2})$  assegura que as linhas pontilhadas ficam dentro do cone formado pelo arco circular e linhas retas do sólido.

Visto que o círculo inscrito fica no interior do cone e o círculo circunscrito deve envolver todo ponto da curva, vemos que para um dado  $R_{in}$  (observe que  $r_{in} \leq R_{in}$ ) o menor  $R_{ex}$  é obtido pela configuração mostrada na figura 3.2.

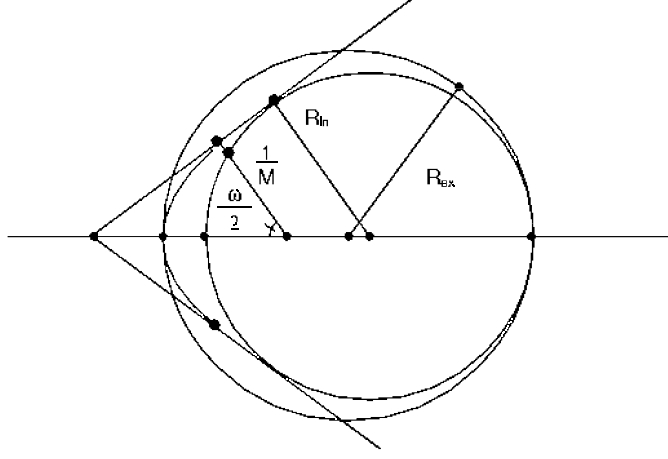


Figura 3.2:

Observe que  $r_{in} \leq R_{in}$  e  $R_{ex} \leq r_{ex}$ . Da figura anterior e trigonometria, determinamos que  $|b| = \frac{1}{M}$  e que

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\omega}{2}\right) &= \frac{\frac{1}{M}}{|d| + |b|} = \frac{\frac{1}{M}}{|d| + \frac{1}{M}} = \frac{R_{in}}{|a| + |d|} \\ 2R_{ex} &\geq R_{in} + |a| \quad (**) \\ \Rightarrow \cos\left(\frac{\omega}{2}\right) &\leq \frac{R_{in}}{2R_{ex} - R_{in}} \end{aligned}$$

De (\*\*), temos

$$\begin{aligned} 2\frac{R_{ex}}{R_{in}} &\geq 1 + \frac{|a|}{R_{in}} \Rightarrow \frac{R_{ex}}{R_{in}} \geq \frac{1}{2} + \frac{|a|}{2R_{in}} \Rightarrow \frac{R_{ex}}{R_{in}} \geq 1 - \frac{1}{2} + \frac{|a|}{2R_{in}} \\ \Rightarrow \frac{R_{ex}}{R_{in}} - 1 &\geq -\frac{1}{2} + \frac{|a|}{2R_{in}} \end{aligned} \quad (3.20)$$

Agora

$$\cos\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{R_{in}}{|a| + |d|} \Rightarrow (|a| + |d|) \cos\left(\frac{\omega}{2}\right) = R_{in} \Rightarrow |a| = \frac{R_{in}}{\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)} - |d|$$

Por outro lado

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\omega}{2}\right) &= \frac{\frac{1}{M}}{|d| + |b|} \Rightarrow |d| = \frac{\frac{1}{M}}{\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)} - \frac{1}{M} \Rightarrow |d| = \frac{1}{M} \left( \frac{1}{\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)} - 1 \right) \\ \Rightarrow |a| &= \frac{R_{in}}{\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)} - \frac{1}{M} \left( \frac{1}{\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)} - 1 \right) \end{aligned} \quad (3.21)$$

Substituindo 3.21 em 3.20 e arranjando os termos

$$\begin{aligned} \frac{R_{ex}}{R_{in}} - 1 &\geq -\frac{1}{2} + \frac{1}{2R_{in}} \left( \frac{R_{in}}{\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)} - \frac{1}{M} \left( \frac{1}{\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)} - 1 \right) \right) \\ \Rightarrow \frac{R_{ex}}{R_{in}} - 1 &\geq -\frac{1}{2} + \frac{1}{2\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)} - \frac{1}{2R_{in}M} \left( \frac{1}{\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)} - 1 \right) \\ \Rightarrow \frac{R_{ex}}{R_{in}} - 1 &\geq -\frac{1}{2} + \frac{1}{2\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)} - \frac{1}{R_{in}M} \left( \frac{1}{2\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)} - \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

Substituindo  $\alpha = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)}$ , obtemos

$$\begin{aligned} \left( \frac{R_{ex}}{R_{in}} - 1 \right) &\geq \alpha - \frac{1}{R_{in}M} \alpha \left( 1 - \frac{1}{R_{in}M} \right) \\ \Rightarrow \left( \frac{R_{ex}}{R_{in}} - 1 \right) \alpha^{-1} &\geq \left( 1 - \frac{1}{R_{in}M} \right) \\ \Rightarrow \left( \frac{R_{ex}}{R_{in}} - 1 \right) \alpha^{-1} - 1 &\geq -\frac{1}{R_{in}M} \\ \Rightarrow - \left( \frac{R_{ex}}{R_{in}} - 1 \right) \alpha^{-1} + 1 &\leq \frac{1}{R_{in}M} \Rightarrow Mr_{in} \leq \frac{1}{1 - \alpha^{-1} \left( \frac{R_{ex}}{R_{in}} - 1 \right)} \end{aligned}$$

faça  $\alpha^{-1} = f(\omega)$ . Como  $M$  pode ser tomado arbitrariamente próximo de  $k_{\omega}^*(t)$  isto prova o lema.  $\square$

**Corolário 3.3.2.**

$$k_{\max}(t)r_{in}(t) \leq \left( \frac{1}{1 - \varepsilon} \right) \frac{1}{1 - f(\omega) \left( \frac{R_{ex}}{R_{in}} - 1 \right)}$$

onde  $\varepsilon$  é qualquer número positivo pequeno.

*Demonstração.* Pela demonstração da estimativa pontual, vemos que para qualquer  $\varepsilon > 0$ , se  $\frac{\omega}{2} < \delta$  então  $k(\theta, t) > (1 - \varepsilon)k_{\max}(t)$  para todo  $\theta \in (\theta_0 - \frac{\omega}{2}, \theta_0 + \frac{\omega}{2})$  (onde  $k_{\max}(t) = k(\theta_0, t)$ ). Assim,  $k_{\omega}^*(t) \geq k_{\max}(t)(1 - \varepsilon)$  para todo  $t$ . A escolha de  $\delta$  depende

somente da curva inicial. Com isso

$$\begin{aligned} k_{\max}(t)(1 - \varepsilon)r_{in}(t) &\leq k_{\omega}^*(t)r_{in}(t) \leq \frac{1}{1 - f(\omega)\left(\frac{R_{ex}}{R_{in}} - 1\right)} \\ \Rightarrow k_{\max}(t)r_{in}(t) &\leq \left(\frac{1}{1 - \varepsilon}\right) \frac{1}{1 - f(\omega)\left(\frac{R_{ex}}{R_{in}} - 1\right)} \end{aligned}$$

□

**Proposição 3.5.** *Para qualquer  $\varepsilon > 0$*

$$k_{\max}(t)r_{in}(t) \leq \left(\frac{1}{1 - \varepsilon}\right)$$

para todo  $t$  suficientemente próximo de  $T$ .

*Demonstração.* Da desigualdade de Bonnesen tem-se a estimativa

$$\frac{L^2}{A} - 4\pi \geq \frac{\pi^2}{A}(r_{ex} - r_{in})^2 \geq \left(1 - \frac{r_{in}}{r_{ex}}\right)^2$$

Já vimos que  $\frac{L^4}{A}$  converge para  $4\pi$  durante a evolução da curva, conseqüentemente  $\frac{r_{ex}}{r_{in}}$  converge para 1. Como  $1 \leq \frac{R_{ex}}{R_{in}} \leq \frac{r_{ex}}{r_{in}} \rightarrow 1$  temos que  $\frac{R_{ex}}{R_{in}} \rightarrow 1$ . Isso implica que, juntamente com o corolário anterior,

$$k_{\max}(t)r_{in}(t) \leq \left(\frac{1}{1 - \varepsilon}\right)$$

□

**Teorema 3.4.**  *$k(\theta, t)r_{in}(t)$  converge uniformemente para 1.*

*Demonstração.* Usando as técnicas usadas para provar a estimativa pontual, mostra-se que a família  $k(\theta, t)r_{in}(t)$  é equicontínua. Além disso, é uniformemente limitada e existe uma subseqüência que converge uniformemente para uma função  $f(\theta)$ .  $f(\theta) \leq 1$  segue da estimativa acima. Por outro lado,  $(k(\theta, t_i)r_{in}(t_i))^{-1}$  converge pontualmente para  $f(\theta)^{-1}$  na reta estendida e pelo lema de Fatou temos

$$\int \frac{1}{f(\theta)} d\theta \leq \liminf \int \frac{d\theta}{k(\theta, t_i)r_{in}(t_i)} = \liminf \frac{L(t_i)}{r_{in}(t_i)} = 2\pi$$

Mas,  $2\pi \leq \int \frac{d\theta}{f(\theta)}$ , assim,  $f(\theta) \equiv 1$ . Como toda subseqüência converge uniformemente para 1,  $k(\theta, t)r_{in}(t)$  converge uniformemente para 1. □

**Corolário 3.4.1.**  $\frac{k_{\min}(t)}{k_{\max}(t)}$  converge para 1.

*Demonstração.* Pelo teorema (3.4),  $k(\theta, t)r_{in}(t)$  converge uniformemente para 1. Isto implica que  $k_{\max}(t)r_{in}(t)$  e  $k_{\min}(t)r_{in}(t)$  convergem uniformemente para 1. Assim,

$$\frac{k_{\min}(t)r_{in}(t)}{k_{\max}(t)r_{in}(t)} = \frac{k_{\min}(t)}{k_{\max}(t)} \rightarrow 1$$

uniformemente. □

**Corolário 3.4.2.**  $k(\theta, t)\sqrt{2T - 2t}$  converge uniformemente para 1.

*Demonstração.* Pela desigualdade de Bonnesen e  $A(t) = 2\pi(T - t)$  temos

$$\frac{L^2}{A} - 4\pi \geq \frac{(L - 2\pi r_{in})^2}{A} = \left( \frac{L}{\sqrt{A}} - \frac{2\pi r_{in}}{\sqrt{2\pi(T - t)}} \right)^2 \geq 0$$

Como  $\frac{L}{\sqrt{A}} \rightarrow 2\sqrt{\pi}$ , segue que  $\frac{r_{in}}{\sqrt{T-t}}$  converge para  $\sqrt{2}$ .

Usando o teorema anterior,

$$\frac{1}{k(\theta, t)\sqrt{2T - 2t}} \rightarrow 1$$

uniformemente. Portanto,  $k(\theta, t)\sqrt{2T - 2t}$  converge uniformemente para 1. □

Para determinar a razão de convergência das derivadas de  $k$  faremos uma normalização de  $k$  de tal forma que as curvas de evolução tenham área  $\pi$ .

Queremos mostrar que o comportamento assintótico no final da evolução é um círculo.

Seja  $\varphi(\theta, t)$  uma parametrização para uma família de curvas que satisfazem a equação de evolução.

Seja  $\bar{\varphi}(\theta, t) = \mu\varphi(\theta, t)$ .

Já vimos que  $A(\bar{\varphi}) = \mu^2 A(\varphi) = \pi$ .

Por outro lado,  $A(t) = 2\pi T - 2\pi t = 2\pi(T - t)$ .

Isso implica que

$$\mu^2 = \frac{\pi}{A} \Rightarrow A(t) = \frac{\pi}{\mu^2} = 2\pi(T - t) \Rightarrow \mu = [2(T - t)]^{-\frac{1}{2}}$$

Queremos criar um novo parâmetro de tempo,  $\tau$ , para as curvas normalizadas de tal forma que

$$\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \tau} = \bar{\varphi} + \bar{k}N.$$

Para isso,

$$\begin{aligned}\frac{d\mu}{dt} &= (2(T-t))_t^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}(2(T-t))^{-\frac{3}{2}}(-2) = (2(T-t))^{-\frac{3}{2}} = \mu^3 \\ \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \tau} &= \frac{d\bar{\varphi}}{dt} \frac{dt}{d\tau} = (\mu^3 \varphi + \mu k N) \frac{dt}{d\tau} = (\mu^3 \varphi + \mu k N) \mu^{-2} = \mu \varphi + \frac{k}{\mu} N = \bar{\varphi} + \bar{k} N.\end{aligned}$$

De onde obtemos que  $\frac{dt}{d\tau} = \mu^{-2}$  e concluímos que

$$\begin{aligned}\frac{dt}{d\tau} &= \mu^{-2} = 2(T-t) \Rightarrow d\tau = \frac{dt}{2(T-t)} \\ \Rightarrow \tau &= -\frac{1}{2} \ln(T-t)\end{aligned}$$

Observe que, quando  $t \rightarrow T$  temos que  $\tau \rightarrow \infty$ .

**Lema 3.14.** *Seja  $\bar{k}(\theta, t)$  a curvatura normalizada. Então*

$$\bar{k}(\theta, t) = k\sqrt{2T-2t}.$$

*Demonstração.*

$$\begin{aligned}\bar{k}(\theta, t) &= \frac{-\mu x_{\theta\theta} \mu y_{\theta} + \mu x_{\theta} \mu y_{\theta\theta}}{[(\mu x_{\theta})^2 + (\mu y_{\theta})^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu^2(-x_{\theta\theta} y_{\theta} + x_{\theta} y_{\theta\theta})}{(\mu^2)^{\frac{3}{2}}(x_{\theta}^2 + y_{\theta}^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu^2(-x_{\theta\theta} y_{\theta} + x_{\theta} y_{\theta\theta})}{\mu^3(x_{\theta}^2 + y_{\theta}^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{k(\theta, t)}{\mu} \\ &= k(\theta, t)\sqrt{2T-2t}\end{aligned}$$

□

Com isso, pelo corolário (3.4.2) temos que  $\bar{k}$  converge uniformemente para 1.

Mudaremos o parâmetro do tempo  $t$  para  $\tau = -\frac{1}{2} \ln(T-t)$ . Para facilitar a notação, usaremos  $k(\theta, t) = k$ .

A seguir, analisaremos a evolução da curvatura e de suas derivadas.

**Proposição 3.6.** *A equação de evolução para  $\bar{k}$  é*

$$\bar{k}_{\tau} = \bar{k}^2 \bar{k}_{\theta\theta} + \bar{k}^3 - \bar{k}$$

*Demonstração.*

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{k}}{\partial \tau}(\theta, \tau) &= \frac{\partial \bar{k}}{\partial t} \frac{dt}{d\tau} = \left( \frac{k}{\mu} \right)_t \frac{dt}{d\tau} = \left( \frac{k_t \mu - k \mu_t}{\mu^2} \right) \mu^{-2} = \left( \frac{(k^2 k_{\theta\theta} + k^3) \mu - k \mu^3}{\mu^2} \right) \mu^{-2} \\ &= \left( \frac{k^2 k_{\theta\theta} + k^3}{\mu} - k \mu \right) \mu^{-2} = (k^2 k_{\theta\theta} + k^3) \mu^{-3} - k \mu^{-1} = \bar{k}^2 \bar{k}_{\theta\theta} + \bar{k}^3 - \bar{k}\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}\bar{k} &= k \mu^{-1} \Rightarrow \bar{k}^3 = k^3 \mu^{-3} \\ \bar{k}_{\theta\theta} &= k_{\theta\theta} \mu^{-1} \Rightarrow \bar{k}^2 \bar{k}_{\theta\theta} = k^2 k_{\theta\theta} \mu^{-3}\end{aligned}$$

□

As próximas estimativas serão feitas para provar o teorema abaixo.

**Teorema 3.5.**

$$\left\| \frac{\partial^l \bar{k}}{\partial \theta^l}(t) \right\|_{\infty} \leq c(l) e^{-2\alpha\tau}$$

para  $l \geq 1$ ,  $0 < \alpha < 1$ .

Quando  $\tau \rightarrow \infty$  as derivadas de  $\bar{k} \rightarrow 0$ .

O corolário do teorema anterior confirma que a curva converge para um círculo, na convergência  $C^\infty$ . Para efeitos de notação  $k^{(l)} = \frac{\partial^l k}{\partial \theta^l}$ .

**Corolário 3.5.1.**  $\|k^{(l)}\|_{\infty} \leq \bar{c}(l)(T-t)^{\alpha-\frac{1}{2}}$ ,  $l \geq 1$  e  $0 < \alpha < 1$ . Isto implica que as derivadas das curvaturas originais não normalizadas converge para 0 uniformemente.

*Demonstração.* Usando o teorema anterior e o fato que  $\tau = -\frac{1}{2} \ln(T-t)$  e que  $\bar{k}^{(l)} = k^{(l)} \mu^{-1}$  temos

$$\begin{aligned}\|\bar{k}^{(l)}\|_{\infty} &= \|k^{(l)} \mu^{-1}\|_{\infty} = |\mu^{-1}| \|k^{(l)}\|_{\infty} \leq c(l) e^{-2\alpha\tau} \\ \Rightarrow \|k^{(l)}\|_{\infty} &\leq \frac{c(l) e^{-2\alpha\tau}}{\mu^{-1}} \leq \frac{c(l) e^{2\alpha \frac{1}{2} \ln(T-t)}}{\mu^{-1}} \leq c(l) e^{\ln(T-t)\alpha} \mu \\ &\leq c(l) (T-t)^{\alpha} \cdot (2(T-t))^{-\frac{1}{2}} \leq c(l) 2^{-\frac{1}{2}} (T-t)^{\alpha-\frac{1}{2}} \leq \bar{c}(l) (T-t)^{\alpha-\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

□

Os próximos dois lemas serão ferramentas para limitar, em relação a  $t$ , as derivadas de  $\bar{k}$ , em relação a  $\theta$ . Juntamente com a desigualdade de Sobolev e outras ferramentas antes utilizadas.

**Lema 3.15.** *Seja  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  satisfazendo  $\frac{df}{d\tau} \leq cf^{1-\frac{1}{p}} - 2pf$ . Então*

$$f(\tau)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{c}{2p} + De^{-2\tau} \leq C(p).$$

*Demonstração.* Calculamos

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau}(e^{2\tau} f^{\frac{1}{p}}) &= 2e^{2\tau} f^{\frac{1}{p}} + e^{2\tau} \frac{1}{p} f^{\frac{1}{p}-1} \frac{df}{d\tau} \\ &\leq 2e^{2\tau} f^{\frac{1}{p}} + \frac{e^{2\tau}}{p} f^{\frac{1}{p}-1} (cf^{1-\frac{1}{p}} - 2pf) \\ &= 2e^{2\tau} f^{\frac{1}{p}} + \frac{e^{2\tau}}{p} cf^0 - 2e^{2\tau} f^{\frac{1}{p}} = \frac{e^{2\tau} c}{p}. \end{aligned}$$

Integrando em relação a  $\tau$  obtemos

$$\begin{aligned} e^{2\tau} f^{\frac{1}{p}} &\leq \frac{ce^{2\tau}}{2p} + D \\ \Rightarrow f^{\frac{1}{p}} &\leq \frac{c}{2p} + De^{-2\tau} \end{aligned}$$

□

Similarmente temos

**Lema 3.16.** *Se  $\frac{df}{d\tau} \leq -\alpha f + Ce^{-\beta\tau}$ , então*

$$f(\tau) \leq De^{-\alpha\tau} + \frac{C}{\alpha - \beta} e^{-\beta\tau} \quad \text{se } \alpha \neq \beta,$$

ou

$$f(\tau) \leq De^{-\alpha\tau} + C\tau e^{-\alpha\tau} \quad \text{se } \alpha = \beta.$$

*Demonstração.* Calculamos

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau}(e^{\alpha\tau} f) &= \alpha e^{\alpha\tau} f + e^{\alpha\tau} \frac{df}{d\tau} \\ &\leq \alpha e^{\alpha\tau} f + e^{\alpha\tau} (-\alpha f + ce^{-\beta\tau}) \\ &= Ce^{(\alpha-\beta)\tau}. \end{aligned}$$

Integrando para  $\alpha \neq \beta$

$$\begin{aligned} e^{\alpha\tau} f &\leq \frac{ce^{(\alpha-\beta)\tau}}{\alpha-\beta} + D \\ \Rightarrow f &\leq \frac{c}{\alpha-\beta}e^{-\beta\tau} + De^{-\alpha\tau} \end{aligned}$$

Para  $\alpha = \beta$  temos  $\frac{d}{d\tau}(e^{\alpha\tau} f) \leq C$ . Integrando

$$\begin{aligned} e^{\alpha\tau} f &\leq C\tau + D \\ \Rightarrow f &\leq C\tau e^{-\alpha\tau} + De^{-\alpha\tau} \end{aligned}$$

□

Nos próximos lemas limitaremos algumas derivadas de  $\bar{k}$ .

**Lema 3.17.**  $\|\bar{k}'\|_2$  e  $\|\bar{k}'\|_4$  são limitadas por constantes independente de  $\tau$ .

*Demonstração.* Por  $\bar{k}_\tau = \bar{k}^2 \bar{k}_{\theta\theta} + \bar{k}^3 - \bar{k}$  obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\tau} \int (\bar{k}')^4 d\theta &= 4 \int (\bar{k}')^3 (\bar{k}')_\tau d\theta = 4 \int (\bar{k}')^3 (\bar{k}_\tau)' d\theta \\ &= 4 \int (\bar{k}')^3 (\bar{k}^2 \bar{k}_{\theta\theta} + \bar{k}^3 - \bar{k})' d\theta \\ &= 4 \int (\bar{k}')^3 [(\bar{k}^2 \bar{k}_{\theta\theta})' + (\bar{k}^3)' - (\bar{k})'] d\theta \\ &= 4 \int (\bar{k}')^3 (\bar{k}^2 \bar{k}_{\theta\theta})' + (\bar{k}')^3 (\bar{k}^3)' - (\bar{k}')^3 (\bar{k})' d\theta \end{aligned}$$

Usando integral por partes,

$$\begin{aligned} \int (\bar{k}')^3 (\bar{k}^2 \bar{k}_{\theta\theta})' d\theta &= (\bar{k}')^3 (\bar{k}^2 \bar{k}_{\theta\theta}) \Big|_0^{2\pi} - \int \bar{k}^2 \bar{k}'' \mathfrak{z}(\bar{k}')^2 \bar{k}'' d\theta = - \int \bar{k}^2 \bar{k}'' \mathfrak{z}(\bar{k}')^2 \bar{k}'' d\theta \\ \int (\bar{k}')^3 (\bar{k}^3)' d\theta &= (\bar{k}')^3 \bar{k}^3 \Big|_0^{2\pi} - \int \bar{k}^3 \mathfrak{z}(\bar{k}')^2 \bar{k}'' d\theta = - \int \bar{k}^3 \mathfrak{z}(\bar{k}')^2 \bar{k}'' d\theta \end{aligned}$$

Isso implica que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\tau} \int (\bar{k}')^4 d\theta &= \int -4(\bar{k}')^4 - 12\bar{k}^2 (\bar{k}')^2 (\bar{k}'')^2 - 12\bar{k}^3 (\bar{k}')^2 \bar{k}'' d\theta \\ &= \int -4(\bar{k}')^4 d\theta - 12 \int \bar{k}^2 (\bar{k}')^2 (\bar{k}'')^2 d\theta - 12 \int \bar{k}^3 (\bar{k}')^2 \bar{k}'' d\theta \end{aligned} \tag{3.22}$$



Pela desigualdade de Peter-Paul

$$-12 \int \bar{k}^3 (\bar{k}')^2 \bar{k}'' d\theta \leq \varepsilon (-12)^2 \int \bar{k}^4 (\bar{k}')^2 d\theta + \frac{1}{4\varepsilon} \int \bar{k}^2 (\bar{k}')^2 (\bar{k}'')^2 d\theta$$

Substituindo em 3.22 temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \int (\bar{k}')^4 d\theta &\leq -4 \int (\bar{k}')^4 d\theta - 12 \int \bar{k}^2 (\bar{k}')^2 (\bar{k}'')^2 d\theta + 144\varepsilon \int \bar{k}^4 (\bar{k}')^2 d\theta \\ &\quad + \frac{1}{4\varepsilon} \int \bar{k}^2 (\bar{k}')^2 (\bar{k}'')^2 d\theta \end{aligned}$$

Tomando  $\varepsilon$  tal que  $-12 + \frac{1}{4\varepsilon} \leq 0$  temos

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \int (\bar{k}')^4 d\theta \leq -4 \int (\bar{k}')^4 d\theta + 144\varepsilon \int \bar{k}^4 (\bar{k}')^2 d\theta$$

Da desigualdade de Hölder aplicada em  $\int \bar{k}^4 (\bar{k}')^2 d\theta$  segue que

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \int (\bar{k}')^4 d\theta \leq -4 \int (\bar{k}')^4 d\theta + 144\varepsilon \left( \int \bar{k}^8 d\theta \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int (\bar{k}')^4 d\theta \right)^{\frac{1}{2}}$$

juntamente com o fato que  $\bar{k} \rightarrow 1$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \int (\bar{k}')^4 d\theta \leq -4 \int (\bar{k}')^4 d\theta + c \left( \int (\bar{k}')^4 d\theta \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Fazendo  $f(\tau) = \left( \int (\bar{k}')^4 d\theta \right)^{\frac{1}{2}}$  temos

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} \leq -4f + cf^{\frac{1}{2}}.$$

Tomando  $p = 2$ , aplicamos o lema 3.15 concluímos que

$$\left( \int (\bar{k}')^4 d\theta \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{C}{4} + De^{-2\tau} \leq \tilde{C}(2).$$

O que implica que  $\|\bar{k}'\|_4$  é limitada.

Afirmção:  $\|\bar{k}'\|_2$  é limitada.

Pela desigualdade de Hölder

$$\int (\bar{k}')^2 d\theta \leq \left( \int d\theta \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int (\bar{k}')^4 d\theta \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{2\pi} \tilde{C}.$$

□

**Lema 3.18.**  $\|\bar{k}''\|_2$  é limitada por uma constante independente de  $\tau$ .

*Demonstração.* Usando a equação de evolução para  $\bar{k}$  tem-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \int (\bar{k}'')^2 d\theta &= 2 \int \bar{k}'' (\bar{k}_\tau)'' d\theta = 2 \int (\bar{k}'') (\bar{k}^2 \bar{k}_{\theta\theta} + \bar{k}^3 - \bar{k})'' d\theta \\ &= 2 \int \bar{k}'' (\bar{k}^2 \bar{k}'')'' d\theta + 2 \int \bar{k}'' (\bar{k}^3)'' d\theta - 2 \int (\bar{k}'')^2 d\theta \end{aligned}$$

Usando integral por partes,

$$\begin{aligned} \int \bar{k}'' (\bar{k}^2 \bar{k}'')'' d\theta &= \bar{k}'' (\bar{k}^2 \bar{k}'')'|_0^{2\pi} - \int (\bar{k}^2 \bar{k}'')' \bar{k}''' d\theta = - \int (\bar{k}^2 \bar{k}'')' \bar{k}''' d\theta \\ \int \bar{k}'' (\bar{k}^3)'' d\theta &= \bar{k}'' (\bar{k}^3)'|_0^{2\pi} - \int (\bar{k}^3)' \bar{k}''' d\theta = - \int (\bar{k}^3)' \bar{k}''' d\theta \end{aligned}$$

Isso implica que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \int (\bar{k}'')^2 d\theta &= -2 \int (\bar{k}'')^2 d\theta - 2 \int (\bar{k}^2 \bar{k}'')' \bar{k}''' d\theta - 2 \int (\bar{k}^3)' \bar{k}''' d\theta \\ &= -2 \int (\bar{k}'')^2 d\theta - 2 \int (2\bar{k} \bar{k}' \bar{k}'' + \bar{k}^2 \bar{k}''') \bar{k}''' d\theta - 2 \int 3\bar{k}^2 \bar{k}' \bar{k}''' d\theta \\ &= -2 \int (\bar{k}'')^2 d\theta - 4 \underbrace{\int \bar{k} \bar{k}' \bar{k}'' \bar{k}''' d\theta}_1 - 2 \int \bar{k}^2 (\bar{k}''')^2 d\theta - 6 \underbrace{\int \bar{k}^2 \bar{k}' \bar{k}''' d\theta}_2 \end{aligned} \tag{3.23}$$

Aplicando a desigualdade de Peter-Paul em 1 e 2 temos

$$\begin{aligned} 4 \int \bar{k} \bar{k}' \bar{k}'' \bar{k}''' d\theta &\leq 16\varepsilon \int (\bar{k}')^2 (\bar{k}'')^2 d\theta + \frac{1}{4\varepsilon} \int (\bar{k}''')^2 \bar{k}^2 d\theta \\ 6 \int \bar{k}^2 \bar{k}' \bar{k}''' d\theta &\leq 36\varepsilon \int \bar{k}^2 (\bar{k}')^2 d\theta + \frac{1}{4\varepsilon} \int (\bar{k}''')^2 \bar{k}^2 d\theta \end{aligned}$$

Substituindo em 3.23 segue que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \int (\bar{k}'')^2 d\theta &\leq -2 \int (\bar{k}'')^2 d\theta - 2 \int \bar{k}^2 (\bar{k}''')^2 d\theta + 36\varepsilon \int \bar{k}^2 (\bar{k}')^2 d\theta \\ &\quad + 16\varepsilon \int (\bar{k}')^2 (\bar{k}'')^2 d\theta + \frac{1}{2\varepsilon} \int (\bar{k}''')^2 \bar{k}^2 d\theta \end{aligned}$$

Escolhendo  $\varepsilon$  de tal forma que  $-2 + \frac{1}{2\varepsilon} \leq 0$  obtemos

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \int (\bar{k}'')^2 d\theta \leq -2 \int (\bar{k}'')^2 d\theta + C_1 \int \bar{k}^2 (\bar{k}')^2 d\theta + C_2 \int (\bar{k}')^2 (\bar{k}'')^2 d\theta \quad (3.24)$$

Usando

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \int (\bar{k}')^4 d\theta = \int -4(\bar{k}')^4 - 12\bar{k}^2 (\bar{k}')^2 (\bar{k}'')^2 - 12\bar{k}^3 (\bar{k}')^2 \bar{k}'' d\theta$$

temos

$$\int 12\bar{k}^2 (\bar{k}')^2 (\bar{k}'')^2 d\theta \leq -\frac{\partial}{\partial \tau} \int (\bar{k}')^4 d\theta + \underbrace{\int -4(\bar{k}')^4 d\theta}_{\leq 0} - 12 \int \bar{k}^3 (\bar{k}')^2 \bar{k}'' d\theta \quad (3.25)$$

Seja  $M$  um limitante inferior de  $\bar{k}$  e

$$\int -12\bar{k}^3 (\bar{k}')^2 \bar{k}'' d\theta \leq 144\varepsilon \int \bar{k}'' d\theta + \frac{1}{4\varepsilon} \int (\bar{k}')^4 (\bar{k}')^6 d\theta.$$

Assim, obtemos

$$12M^2 \int (\bar{k}')^2 (\bar{k}'')^2 d\theta \leq -\frac{\partial}{\partial \tau} \int (\bar{k}')^4 d\theta + 144\varepsilon \int \bar{k}'' d\theta + \frac{1}{4\varepsilon} \int (\bar{k}')^4 (\bar{k}')^6 d\theta.$$

Voltando a 3.25

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \int (\bar{k}'')^2 d\theta &\leq -2 \int (\bar{k}'')^2 d\theta - \frac{1}{12M^2} \frac{\partial}{\partial \tau} \int (\bar{k}')^4 d\theta + \frac{12\varepsilon}{M^2} \int (\bar{k}'')^2 d\theta \\ &\quad + \underbrace{\frac{1}{48\varepsilon} \int (\bar{k}')^4 (\bar{k}')^6 d\theta + C_2 \int (\bar{k}')^2 \bar{k}^2 d\theta}_{C_4}. \end{aligned}$$

Tomando  $\varepsilon$  pequeno

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \int (\bar{k}'')^2 d\theta \leq -C_3 \frac{\partial}{\partial \tau} \int (\bar{k}')^4 d\theta + C_4 - \int (\bar{k}'')^2 d\theta.$$

Seja  $f = \int (\bar{k}'')^2 d\theta$ .

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} \leq -C_3 \frac{\partial}{\partial \tau} \int (\bar{k}')^4 d\theta + C_4 - f.$$

Multiplicando pelo fator integrante  $e^\tau$  temos

$$\begin{aligned} e^\tau \frac{\partial f}{\partial \tau} &\leq -C_3 e^\tau \frac{\partial}{\partial \tau} \int (\bar{k}')^4 d\theta + e^\tau C_4 - e^\tau f \\ \Rightarrow e^\tau \frac{\partial f}{\partial \tau} + e^\tau f &\leq e^\tau \left( -C_3 \frac{\partial}{\partial \tau} \int (\bar{k}')^4 d\theta + C_4 \right) \\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \tau} (e^\tau f) &\leq e^\tau \left( -C_3 \frac{\partial}{\partial \tau} \int (\bar{k}')^4 d\theta + C_4 \right) \end{aligned}$$

Integrando em relação a  $\tau$

$$\begin{aligned} \int_0^a \frac{\partial}{\partial \tau} (e^\tau f) d\tau &\leq -C_3 \int_0^a e^\tau \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \int_0^{2\pi} (\bar{k}')^4 d\theta \right) d\tau + C_4 e^a \\ &\leq C_3 \int_0^a e^\tau \left( \int_0^{2\pi} (\bar{k}')^4 d\theta \right) d\tau - \left\{ C_3 e^\tau \int_0^{2\pi} (\bar{k}')^4 d\theta \right\} \Big|_0^a + C_4 e^a \end{aligned}$$

donde obtemos

$$\begin{aligned} e^a f(a) &\leq C_5 e^a + C_6 + C_4 e^a \\ \Rightarrow f(a) &\leq C_5 + C_6 + C_4 \end{aligned}$$

O que implica que  $f$  é limitada e conseqüentemente  $\|k''\|_2$  é limitada.  $\square$

**Lema 3.19.**  $\|\bar{k}'\|_\infty$  converge para 0 quando  $\tau \rightarrow \infty$ .

*Demonstração.* Da desigualdade de Sobolev e dos lemas (3.19) e (3.20) concluímos que  $\|\bar{k}'\|_\infty < \infty$ . O limitante em  $\|\bar{k}'\|_2$  implica que  $\bar{k}'$  é equicontínua, disto uma subsequência converge uniformemente para  $g(\theta)$ . A anti-derivada de  $\bar{k}'$  necessariamente converge para a anti-derivada de  $g$ . Mas  $\bar{k} \rightarrow 1$  uniformemente, disto  $g \equiv 0$ . Visto que toda subsequência converge para zero,  $\bar{k}'(\theta, \tau) \rightarrow 0$  uniformemente.  $\square$

**Observação 3.1.** Uma função  $F$  é chamada uma anti-derivada de uma função  $f$  em um intervalo  $I$  se  $F'(x) = f(x)$  para todo  $x \in I$ .

Vamos determinar bons limitantes exponenciais para as derivadas de ordem maior.

**Lema 3.20.** Para qualquer  $0 < \alpha < 1$  podemos escolher  $A$  tal que para  $\tau > A$ ,  $\int (\bar{k}'')^2 \geq 4\alpha \int (k')^2$ .

*Demonstração.* Observe que se

$$\int \frac{\cos \theta}{\bar{k}} d\theta = \int \frac{\text{sen} \theta}{\bar{k}} d\theta = 0$$

então

$$\int \frac{\bar{k}'}{\bar{k}^2} \cos \theta d\theta = \int \frac{\bar{k}'}{\bar{k}^2} \text{sen} \theta d\theta = \int \frac{\bar{k}'}{\bar{k}^2} d\theta = 0.$$

Desde que  $\frac{\bar{k}'}{\bar{k}^2}$  é perpendicular ao primeiro autovetor, pela desigualdade de Wirtinger temos

$$\int \left[ \left( \frac{\bar{k}'}{\bar{k}^2} \right)' \right]^2 \geq 4 \int \left( \frac{\bar{k}'}{\bar{k}^2} \right)^2.$$

Estimando o lado esquerdo da desigualdade acima

$$\begin{aligned} \int \left( \frac{\bar{k}''}{\bar{k}^2} - 2 \frac{(\bar{k}')^2}{\bar{k}^3} \right)^2 d\theta &= \int \frac{(\bar{k}'')^2}{\bar{k}^4} - 4 \frac{(\bar{k}')^2 \bar{k}''}{\bar{k}^5} + 4 \frac{(\bar{k}')^4}{\bar{k}^6} d\theta \\ &\leq \int \left( \frac{\bar{k}''}{\bar{k}^2} \right)^2 + 4 \frac{(\bar{k}')^4}{\bar{k}^6} + 4\varepsilon \frac{(\bar{k}'')^2}{\bar{k}^4} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{(\bar{k}')^4}{\bar{k}^6} d\theta \\ &\leq (1 + 4\varepsilon) \int \left( \frac{\bar{k}''}{\bar{k}^2} \right)^2 d\theta + c(\tau) \int \left( \frac{\bar{k}'}{\bar{k}^2} \right)^2 d\theta \end{aligned}$$

visto que  $\|\bar{k}'\|_\infty \rightarrow 0$ . Para  $A$  suficientemente grande, podemos assumir que  $\bar{k}$  é aproximadamente 1. Assim, para qualquer  $\alpha$  tal que  $0 < \alpha < 1$ , temos  $4\alpha \int (\bar{k}')^2 d\theta \leq \int (\bar{k}'')^2 d\theta$ .  $\square$

**Lema 3.21.** Para qualquer  $0 < \alpha < 1$  há uma constante  $c$  tal que  $\|\bar{k}'\|_2 \leq ce^{-2\alpha\tau}$ .

*Demonstração.* Consideremos

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \int (\bar{k}')^2 d\theta = 2 \int \bar{k}' (\bar{k}^2 \bar{k}'' + \bar{k}^3 - \bar{k})' d\theta = 2 \int \bar{k}' (\bar{k}^2 \bar{k}'')' + \bar{k}' (\bar{k}^3)' - (\bar{k}')^2 d\theta$$

Mas

$$\int \bar{k}' (\bar{k}^2 \bar{k}'')' d\theta = \bar{k}' \bar{k}^2 \bar{k}'' \Big|_0^{2\pi} - \int \bar{k}^2 (\bar{k}'')^2 d\theta$$

o que implica que

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \int (\bar{k}')^2 d\theta = 2 \int \bar{k}^2 (\bar{k}'')^2 d\theta + 6 \int (\bar{k}')^2 (\bar{k}^2) d\theta - 2 \int (\bar{k}')^2 d\theta$$

Para qualquer  $\alpha$ ,  $0 < \alpha < 1$ , podemos escolher  $A$  tal que para  $\tau > A$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \int (\bar{k}')^2 d\theta &\leq -8\alpha \int (\bar{k}')^2 d\theta + 6\alpha \int (\bar{k}')^2 d\theta - 2 \int (\bar{k}')^2 d\theta \\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \tau} \int (\bar{k}')^2 d\theta &\leq -4\alpha \int (\bar{k}')^2 d\theta \end{aligned}$$

Chamando  $f = \int (\bar{k}')^2 d\theta$  tem-se

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} \leq -4\alpha f.$$

Integrando temos  $f \leq Ce^{-4\alpha\tau}$  o que implica que  $\|\bar{k}'\|_2^2 \leq Ce^{-4\alpha\tau}$ .  $\square$

**Lema 3.22.** Para qualquer  $0 < \alpha < 1$  há uma constante  $c$  tal que  $\|\bar{k}''\|_2 \leq ce^{-2\alpha\tau}$ .

*Demonstração.*

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \int (\bar{k}'')^2 d\theta = \int -2(\bar{k}'')^2 - 2\bar{k}^2(\bar{k}''')^2 - \underbrace{4\bar{k}\bar{k}'\bar{k}''\bar{k}'''}_1 - \underbrace{6\bar{k}^2\bar{k}'\bar{k}''''}_2 d\theta$$

Aplicando a desigualdade de Peter-Paul em 1 e 2 temos

$$\begin{aligned} \int \bar{k}\bar{k}'\bar{k}''\bar{k}'''' d\theta &\leq \varepsilon \int (\bar{k}\bar{k}''')^2 d\theta + \frac{1}{4\varepsilon} \int (\bar{k}')^2 (\bar{k}'')^2 d\theta \\ \int \bar{k}^2\bar{k}'\bar{k}'''' d\theta &\leq \varepsilon \int (\bar{k}\bar{k}''')^2 d\theta + \frac{1}{4\varepsilon} \int \bar{k}^2 (\bar{k}')^2 d\theta \end{aligned}$$

donde obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \int (\bar{k}'')^2 d\theta &\leq \int -2(\bar{k}'')^2 - 2\bar{k}^2(\bar{k}''')^2 - 4\varepsilon(\bar{k}\bar{k}''')^2 + \frac{1}{\varepsilon}(\bar{k}')^2(\bar{k}'')^2 \\ &\quad - 6\varepsilon\bar{k}^2(\bar{k}''')^2 + \frac{2}{3\varepsilon}\bar{k}^2(\bar{k}')^2 d\theta. \end{aligned}$$

Escolhendo  $\varepsilon$  pequeno e  $A$  grande o suficiente tal que  $\tau > A$ ,  $\|\bar{k}'\|_\infty$  é muito pequeno:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \int (\bar{k}'')^2 d\theta \leq \int [-2\bar{\alpha}(\bar{k}'')^2 - 2\bar{\alpha}\bar{k}^2(\bar{k}''')^2] d\theta + Ce^{-4\bar{\alpha}\tau}.$$

Usando a desigualdade de Wirtinger e o fato que  $\bar{k} \rightarrow 1$  uniformemente segue que

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \int (\bar{k}'')^2 d\theta \leq -4\bar{\alpha} \int (\bar{k}'')^2 d\theta + Ce^{-4\bar{\alpha}\tau}.$$

Pelo lema (3.16) concluímos que  $\int (\bar{k}'')^2 \leq \tilde{C}e^{-4\alpha\tau}$  para qualquer  $\alpha < \bar{\alpha}$  e conseqüente-

mente  $\|\bar{k}''\|_2^2 \leq \tilde{C}e^{-4\alpha\tau}$ . □

**Corolário 3.5.2.** *Para qualquer  $0 < \alpha < 1$  podemos achar uma constante  $c$  tal que  $\|\bar{k}'\|_\infty \leq ce^{-2\alpha\tau}$ .*

*Demonstração.* Pela desigualdade de Sobolev, fazendo  $v = \bar{k}'$  temos

$$\|\bar{k}'\|_\infty^2 \leq C(\|\bar{k}'\|_2^2 + \|\bar{k}''\|_2^2) \leq e^{-2\alpha\tau}$$

□

Para limitar a terceira derivada precisaremos do seguinte:

**Lema 3.23.** *Para qualquer  $0 < \alpha < 1$  podemos achar uma constante  $c$  tal que  $\|\bar{k}''\|_4 \leq ce^{-\alpha\tau}$ .*

*Demonstração.* Calculando

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\tau} \int (\bar{k}'')^4 d\theta &= 4 \int (\bar{k}'')^3 (\bar{k}'')_\tau d\theta = 4 \int (\bar{k}'')^3 (\bar{k}'_\tau)' d\theta = 4 \int (\bar{k}'')^3 (\bar{k}^2 \bar{k}'' + \bar{k}^3 - \bar{k})'' d\theta \\ &= 4 \int (\bar{k}'')^3 (\bar{k}^2 \bar{k}''') + (\bar{k}'')^3 (\bar{k}^3)'' - (\bar{k}'')^3 (\bar{k})'' d\theta \end{aligned}$$

Usando integral por partes

$$\begin{aligned} \int (\bar{k}'')^3 (\bar{k}^2 \bar{k}'')'' d\theta &= (\bar{k}'')^3 (\bar{k}^2 \bar{k}'')'|_0^{2\pi} - 3 \int (\bar{k}^2 \bar{k}'')' (\bar{k}'')^2 \bar{k}''' d\theta \\ &= -3 \int (2\bar{k} \bar{k}' \bar{k}'' + \bar{k}^2 \bar{k}''') (\bar{k}'')^2 \bar{k}''' d\theta \\ &= \int -6\bar{k} \bar{k}' (\bar{k}'')^3 \bar{k}''' - 3\bar{k}^2 (\bar{k}'')^2 (\bar{k}''')^2 d\theta; \\ \int (\bar{k}'')^3 (\bar{k}^3)'' d\theta &= (\bar{k}'')^3 (\bar{k}^3)'|_0^{2\pi} - 3 \int (\bar{k}^3)' (\bar{k}'')^2 \bar{k}''' d\theta = \int -3(3\bar{k}^2 \bar{k}' (\bar{k}'')^2 \bar{k}''') d\theta. \end{aligned}$$

Isto implica que

$$\frac{\partial}{\partial\tau} \int (\bar{k}'')^4 d\theta = \int [-4(\bar{k}'')^4 - 24\bar{k} \bar{k}' (\bar{k}'')^3 \bar{k}''' - 12\bar{k}^2 (\bar{k}'')^2 (\bar{k}''')^2 - 36\bar{k}^2 \bar{k}' (\bar{k}'')^2 \bar{k}'''] d\theta$$

Usando a desigualdade de Peter-Paul obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \int (\bar{k}'')^4 d\theta &\leq \int [-12\bar{k}^2(\bar{k}'')^2(\bar{k}''')^2 + 24\varepsilon\bar{k}^2(\bar{k}''')^2 + \frac{24}{4\varepsilon}(\bar{k}')^2(\bar{k}'')^4 \\ &\quad + 36\varepsilon\bar{k}^2(\bar{k}''\bar{k}''')^2 + \frac{36}{4\varepsilon}\bar{k}^2(\bar{k}')^2(\bar{k}'')^2 - 4(\bar{k}'')^4] d\theta \end{aligned}$$

Escolhendo  $\varepsilon$  pequeno e usando que  $\|\bar{k}'\|_\infty$  e  $\|\bar{k}'\|_2$  são limitadas, para  $\tau$  grande obtemos

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \int (\bar{k}'')^4 d\theta \leq -4\bar{\alpha} \int (\bar{k}'')^4 d\theta + Ce^{-8\alpha\tau}$$

Aplicando o lema (3.16) concluímos que  $\|\bar{k}''\|_4^2 \leq Ce^{-2\alpha\tau}$ .  $\square$

**Lema 3.24.** *Para qualquer  $0 < \alpha < 1$  existe uma constante  $c$  tal que  $\|\bar{k}'''\|_2 \leq ce^{-2\alpha\tau}$ .*

*Demonstração.* Novamente, seguindo os passos das demonstrações anteriores temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \int (\bar{k}''')^2 d\theta &= 2 \int \bar{k}'''(\bar{k}_\tau)''' d\theta = 2 \int \bar{k}'''(\bar{k}^2\bar{k}'' + \bar{k}^3 - \bar{k})''' d\theta \\ &= 2 \int [\bar{k}'''(\bar{k}^2\bar{k}'')''' + \bar{k}'''(\bar{k}^3)''' - (\bar{k}''')^2] d\theta \end{aligned}$$

Usando integral por partes

$$\begin{aligned} \int \bar{k}'''(\bar{k}^2\bar{k}'')''' d\theta &= \bar{k}'''(\bar{k}^2\bar{k}'')'''|_0^{2\pi} - \int (\bar{k}^2\bar{k}'')''\bar{k}'''' d\theta = - \int (2\bar{k}\bar{k}'\bar{k}'' + \bar{k}^2\bar{k}''')'\bar{k}'''' d\theta \\ &= - \int \{[2\bar{k}'\bar{k}' + 2\bar{k}\bar{k}'']\bar{k}'' + 2\bar{k}\bar{k}'\bar{k}'' + \bar{k}^2\bar{k}''''\}\bar{k}'''' d\theta \\ &= - \int \bar{k}''''[2(\bar{k}')^2\bar{k}'' + 2\bar{k}(\bar{k}'')^2 + 4\bar{k}\bar{k}'\bar{k}'' + \bar{k}^2\bar{k}''''] d\theta; \\ \int \bar{k}'''(\bar{k}^3)''' d\theta &= \bar{k}'''(\bar{k}^3)'''|_0^{2\pi} - \int \bar{k}''''(\bar{k}^3)'' d\theta = - \int \bar{k}''''[3\bar{k}^2\bar{k}']' d\theta \\ &= - \int \bar{k}''''[6\bar{k}\bar{k}'\bar{k}' + 3\bar{k}^2\bar{k}''] d\theta. \end{aligned}$$

Isso implica que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \int (\bar{k}''')^2 d\theta &= -2 \int \{(\bar{k}''')^2 + \bar{k}''''[2(\bar{k}')^2\bar{k}'' + 2\bar{k}(\bar{k}'')^2 + 4\bar{k}\bar{k}'\bar{k}'' + \bar{k}^2\bar{k}'''' \\ &\quad + 6\bar{k}(\bar{k}')^2 + 3\bar{k}^2\bar{k}'']\} d\theta \end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Peter-Paul “de forma adequada”,  $\tau$  suficientemente grande,



$\varepsilon$  pequeno, a desigualdade de Wirtinger, o lema (3.22) e o corolário (3.5.3) produzimos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \int (\bar{k}''')^2 d\theta &\leq \int \left\{ -2\bar{k}^2 (\bar{k}''')^2 + C_1 \varepsilon \bar{k}^2 (\bar{k}''')^2 + \frac{C_2}{\varepsilon} (\bar{k}')^2 (\bar{k}''')^2 + \frac{C_3}{\varepsilon} \frac{(\bar{k}')^4 (\bar{k}'')^2}{\bar{k}^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{C_4}{\varepsilon} (\bar{k}'')^4 + \frac{C_5}{\varepsilon} (\bar{k}')^4 + \frac{C_6}{\varepsilon} \bar{k}^2 (\bar{k}'')^2 - 2(\bar{k}''')^2 \right\} d\theta \\ &\leq -4\alpha \int (\bar{k}''')^2 d\theta + C e^{-4\alpha\tau} \end{aligned}$$

Por fim, usando o lema (3.16) concluímos que  $\|\bar{k}'''\|_2 \leq C e^{-2\alpha\tau}$ . □

**Lema 3.25.** *Assuma que  $l \geq 4$ ,  $0 < \bar{\alpha} < 1$ ,  $\|\bar{k}^{(l-1)}\|_2 \leq c_1 e^{-2\alpha\tau}$  e  $\|\bar{k}^{(j)}\|_\infty \leq c_2 e^{-2\alpha\tau}$ ,  $j = 1, 2, \dots, l-2$ . Então  $\|\bar{k}^{(l)}\|_2 \leq c_3 e^{-2\alpha\tau}$  e  $\|\bar{k}^{(l-1)}\|_\infty \leq c_4 e^{-2\alpha\tau}$*

*Demonstração.* Calculamos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \int (\bar{k}^{(l)})^2 d\theta &= 2 \int \bar{k}^{(l)} (\bar{k}^2 \bar{k}'' + \bar{k}^3 - \bar{k})^{(l)} d\theta \\ &= \int -2\bar{k}^{(l+1)} [\bar{k}^2 \bar{k}'' + \bar{k}^3 - \bar{k}]^{(l-1)} - 2(\bar{k}^{(l)})^2 d\theta \\ (a) \quad &= \int \left\{ -2\bar{k}^2 (\bar{k}^{(l+1)})^2 \right. \\ (b) \quad &\quad \left. - 2\bar{k}^{(l+1)} (\bar{k}^2)' \bar{k}^{(l)} \right. \\ (c) \quad &\quad \left. - 2\bar{k}^{(l+1)} (\bar{k}^2)'' \bar{k}^{(l-1)} \right. \\ &\quad \vdots \\ (d) \quad &\quad \left. - 2\bar{k}^{(l+1)} (\bar{k}^2)^{(j)} \bar{k}^{(l+1-j)} \quad (2 \leq j \leq l-2) \right. \\ &\quad \vdots \\ (e) \quad &\quad \left. - 2\bar{k}^{(l+1)} (\bar{k}^2)^{(l-1)} \bar{k}'' \right. \\ (f) \quad &\quad \left. - 2\bar{k}^{(l+1)} (\bar{k}^3)^{(l-1)} \right. \\ (g) \quad &\quad \left. - 2(\bar{k}^{(l)})^2 d\theta \right. \end{aligned}$$

Os termos do meio podem ser limitados em termos de uma pequena fração arbitrária

do termo (a) e dos seguintes termos:

$$\begin{aligned}
(b) \quad & C_1 \frac{((\bar{k}^2)')^2 (\bar{k}^{(l)})^2}{\bar{k}^2}, \\
(c) \quad & C_2 \frac{((\bar{k}^2)'')^2 (\bar{k}^{(l-1)})^2}{\bar{k}^2}, \\
(d) \quad & C_3 \frac{((\bar{k}^2)^{(j)})^2 (\bar{k}^{(l+1-j)})^2}{\bar{k}^2}, \\
(e) \quad & C_4 \frac{((\bar{k}^2)^{(l-1)})^2 (\bar{k}'')^2}{\bar{k}^2}, \\
(f) \quad & C_5 \frac{(\bar{k}^3)^{(l-1)}}{\bar{k}^2}.
\end{aligned}$$

O termo (b) pode ser limitado por uma pequena parte de (g) se  $\tau$  é escolhido adequadamente grande. Seja  $\bar{\alpha} \in (\alpha, 1)$ . Os termos (c) e (e) são limitados por  $Ce^{-4\bar{\alpha}\tau}$  usando a norma  $L^\infty$  para as derivadas de pequena ordem e a norma  $L_2$  na derivada  $l-1$ . Os termos nas linhas (d) podem ser limitados por  $Ce^{-4\bar{\alpha}\tau}$  usando apenas a norma  $L^\infty$ . Finalmente, limitamos (a) por  $-\int (\bar{k}^{(l)})^2 d\theta$  usando a desigualdade de Wirtinger e o fato que  $\bar{k} \rightarrow 1$  uniformemente. Com isso, obtemos

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \int (\bar{k}^{(l)})^2 d\theta \leq -4\alpha \int (\bar{k}^{(l)})^2 + Ce^{-4\bar{\alpha}\tau}.$$

Novamente, aqui aplica-se o lema (3.16) e completamos a demonstração.  $\square$

Vamos mostrar o teorema objetivo desta parte.

**Teorema 3.6.**

$$\left\| \frac{\partial^l \bar{k}}{\partial \theta^l} \right\|_\infty \leq c(l)e^{-4\alpha\tau}$$

para  $l \geq 1$ ,  $0 < \alpha < 1$ .

*Demonstração.* Vamos fazer a demonstração por indução. Pelo corolário (3.5.3),  $\|\bar{k}'\|_\infty \leq Ce^{-2\alpha\tau}$  e pelo lema anterior  $\|\bar{k}^{(l-1)}\|_\infty \leq C_4 e^{-2\alpha\tau}$ . Portanto para  $\|\bar{k}^{(l)}\|_\infty$  temos

$$\|\bar{k}^{(l)}\|_\infty = \|\bar{k}^1 \bar{k}^{(l-1)}\|_\infty = \|\bar{k}^1\|_\infty \|\bar{k}^{(l-1)}\|_\infty \leq C_5 e^{-4\alpha\tau}$$

$\square$

Assim, terminamos de mostrar que uma curva convexa torna-se, assintoticamente, um círculo enquanto a área zera.

# Apêndice

Enunciaremos alguns resultados auxiliares.

## 1) Princípio do Máximo Parabólico [dF]

Suponha que  $F(x, t) : [0, \varepsilon] \times [t_0, t_0 + \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}$  e que

- a evolução de  $F$  com respeito a  $t$  é governada por uma equação diferencial estritamente parabólica;
- $F(x, t) \geq 0$ , mas não  $\equiv 0$ ;
- $F(0, t) \geq 0$  e  $F(\varepsilon, t) \geq 0$ .

Então  $F(x, t) > 0$  para  $x \in (0, \varepsilon)$  e  $t \in (t_0, t_0 + \varepsilon]$ .

## 2) Lema de Fatou

Sejam  $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_n \geq 0$ ,  $\mu$  uma medida e seja  $f(x) = \liminf f_n(x)$ . Então

$$\int_E f(x) d\mu(x) \leq \liminf \int_E f_n(x) d\mu(x), \quad \forall E \in M.$$

## 3) Desigualdade de Hölder

Sejam  $p, q > 1$  tal que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Então  $\forall f \in L_p(a, b)$  e  $\forall g \in L_q(a, b)$  tem-se que  $fg \in L_1(a, b)$  e é válida a seguinte desigualdade

$$\left| \int_a^b f(t)g(t)dt \right| \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

# Referências Bibliográficas

- [AS] ALENCAR, Hilário, e SANTOS, Walcy: *Geometria das curvas planas*. XII Escola de Geometria Diferencial, 2002.
- [Ar] ARAÚJO, Paulo V.: *Geometria Diferencial*. Coleção Matemática Universitária. IMPA, 1998.
- [AM] ASPERTI, Antônio C., e Mercuri, Francisco: *Topologia e geometria das curvas planas*, 13<sup>o</sup> Colóquio Brasileiro de Matemática, 1981.
- [CJ] COURANT, R., and JOHN, F.: *Introduction to Calculus and Analysis*, Vol. 2. Wiley - Interscience Publication. New York, 1974.
- [dLM] de LIMA, Levi L., e MONTENEGRO, José F.B.: *Evolução pela curvatura em geometria plana*. X Escola de Geometria Diferencial, 1998.
- [dM] do CARMO, Manfredo P.: *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice-Hall, 1976.
- [dF] de Figueiredo, Djairo G.: *Análise de Fourier e equações diferenciais parciais*, Projeto Euclides, IMPA, RJ, 4<sup>a</sup> edição 2000.
- [Lay] LAY, S.R.: *Convex sets and their applications*. New York: John Wiley and Sons, 1982.
- [Te] TENENBLAT, Keti: *Introdução à Geometria Diferencial*. Unb, 1990.
- [Palais] PALAIS, R.S.: *Foundations of Global Non-Linear Analysis*, Benjamin, inc, 1968.
- [GH] GAGE, M., and HAMILTON, R.S.: *The heat equation shrinking convex plane curves*, J. Differential Geometry **23** (1986), 69-96.

- [G] GAGE, M.: *Curve shortening makes convex curves circular*, *Inventiones Mathematicae* **76** (1984), 357-364.
- [O] OSSERMAN, Robert: *Bonnesen-Style Isoperimetric Inequalities*, *Amer. Math. Monthly*, 1979, (1-29).