Universidade Federal de Santa Catarina

Curso de Pós-Graduação em Matemática e

Computação Científica

Estabilização Uniforme de uma Equação de Placas com Dissipação não Linear Localizada

Lucicléia Coelho

Orientador: Prof. Dr. Ruy Coimbra Charão

Florianópolis

Fevereiro de 2003

Universidade Federal de Santa Catarina

Curso de Pós-Graduação em Matemática e

Computação Científica

Estabilização Uniforme de uma Equação de Placas com Dissipação não Linear Localizada

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica, do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina, para a obtenção do grau de Mestre em Matemática, com Área de Concentração em Equações Diferenciais Parciais.

Lucicléia Coelho

Florianópolis

Fevereiro de 2003

Estabilização Uniforme de uma Equação de Placas com Dissipação não Linear Localizada

por

Lucicléia Coelho

Esta Dissertação foi julgada para a obtenção do Título de "Mestre",
Área de Concentração em Equações Diferenciais Parciais, e aprovada em sua forma final pelo Curso de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica.

Igor Mozolevski (Coordenador)

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Ruy Coimbra Charão (UFSC-Orientador)

Profª. Drª. Eleni Bisognin (UNIFRA)

Profª. Drª. Vanilde Bisognin (UNIFRA)

Prof. Dr. Joel Santos Souza (UFSC)

Florianópolis, Fevereiro de 2003.

À Deus

Ao meu Marido

Aos meus pais

À minha irmã

Agradecimentos

Em primeiro lugar agradeço ao meu marido João, que com amor e paciência me encorajou nas horas mais difíceis. Agradeço também meus pais e minha irmã que sempre me incentivaram.

Agradeço a agradável companhia dos meus colegas Alcides, Anderson, Claires, Danilo, Divane, Édson, Gilberto, Jeison e Juliano. Meu agradecimento especial à minha amiga Patricia pelas horas de estudo e também pela grande amizade.

Agradeço à CAPES pelo apoio financeiro, aos professores que de alguma forma me ajudaram nesse trabalho e a Elisa pela ajuda nos assuntos burocráticos.

Por último, agradeço ao professor Ruy Coimbra Charão, que para mim foi mais que um orientador, foi um grande amigo.

Resumo

Neste trabalho estudamos a existência e unicidade de soluções de uma equação de placas em um domínio limitado de $\mathbb{R}^n$, $1 \leq n \leq 3$, com um termo dissipativo, não linear e localizado em uma vizinhança da fronteira do domínio.

Usando técnicas da teoria de controle, o princípio da continuação única (Teorema de Holmgreen) e o método de Nakao, a estabilização uniforme da energia do sistema é provada com taxas de decaimento algébricas.

Abstract

In this work we study the existence and the uniqueness of solutions of the plate equation in a bounded domain of $\mathbb{R}^n$, $1 \leq n \leq 3$, with a localized nonlinear dissipative term on a neighborhood of part of the boundary.

Using technics of the control theory, unique continuation principle (Holmgreen's theorem) and Nakao's method, we prove the uniform stabilization of the energy of the system with algebraic decay rates.

Conteúdo

Introdução 1

1 Resultados da Teoria de Distribuições e Espaços de Sobolev 3

1.1 Notações 3

1.2 Distribuições 5

1.3 Espaços $L^p(\Omega)$ 6

1.4 Espaços de Sobolev 8

1.5 Desigualdades Importantes 15

1.6 Teorema da Divergência e Fórmula de Green 17

1.7 Teoremas de Compacidade 17

2 Existência e Unicidade 20

2.1 Método de Faedo - Galerkin 21

2.1.1 Problema Aproximado - Solução Local 21

2.1.2 Estimativas a Priori - Prolongamento da Solução 25

2.2 Análise das Condições Iniciais 38

2.3 Unicidade da Solução u 40

3 Estabilização 43

3.1 Lema de Nakao 45

3.2 Identidades de Energia 46

3.3 Estimativas de Energia 48

3.4 Estimativas Fundamentais 64

3.5 Prova do Teorema de Estabilização 70

Bibliografia 74

Introdução

Nosso objetivo principal neste trabalho é estudar propriedades qualitativas do seguinte problema de valor inicial e de fronteira para a equação de placas (ver Duvaut - Lions [10], capítulo 4) em um domínio Ω limitado do $\mathbb{R}^n$, $1 \leq n \leq 3$, com fronteira regular, a saber:

$$\begin{cases} u_{tt} + \triangle^2 u + \rho(x, u_t) = 0 & x \in \Omega,\ t \geq 0 \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in \Omega \\ u_t(x,0) = u_1(x) & x \in \Omega \\ u(x,t) = \frac{\partial u}{\partial \eta}(x,t) = 0 & x \in \partial\Omega,\ t \geq 0 \end{cases} \tag{1}$$

Condições são impostas sobre a função $\rho(x, s)$ para que esse problema seja dissipativo. A função $\rho(x,s) = a(x)|s|^p s$, $p > -1$, $s \in \mathbb{R}$, com $a : \bar{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ uma função limitada, satisfaz tais condições.

No capítulo 2, demostramos a existência e a unicidade de soluções do problema (1) usando o método de Galerkin.

No capítulo 3, usando multiplicadores especiais localizados obtidos da teoria de controle, o princípio de continuação única (Teorema de Holmgreen) e o método de Nakao mostramos taxas explícitas de decaimento algébrico para a energia $E(t)$ associada ao problema (1). Tais taxas dependem das hipóteses feitas sobre o termo dissipativo e localizado $\rho(x, s)$ que aparece na equação e, naturalmente, dos dados iniciais u_0 e u_1.

No capítulo 1 apresentamos alguns resultados básicos da teoria de Espaços de Sobolev, da teoria de Imersões e da teoria de Compacidade que são utilizados nos capítulos 2 e 3. Naturalmente, como tais resultados são bem conhecidos na área de Equações Diferencias Parciais, as demostrações são omitidas, porém referenciadas.

Com respeito a estabilização das soluções de problemas de evolução com dissipação localizada mencionamos alguns trabalhos.

Para a equação da onda citamos os trabalhos de E. Zuazua [32], M. Nakao [23] e suas referências.

O sistema de elasticidade em um meio isotrópico foi estudado por E. Bisognin - V. Bisognin - R. C. Charão [6] e M. A. Astaburuaga - R. C. Charão [3]. A estabilização do sistema de elasticidade em meio não isotrópico foi estudada por A. Guesmia [11] e M. A. Horn [13].

Finalmente, mencionamos os trabalhos de M. Tucsnak [29], [30] sobre a equação da viga de Bernoulli-Euler com dissipação do tipo linear:

$$u_{tt} + \triangle^2 u - b\left(\int_\Omega |\nabla|^2\, dx\right) \triangle\, u + a(x)u_t = 0, \quad x \in \Omega, \ t > 0$$

os quais inspiraram esta dissertação.

Capítulo 1

Resultados da Teoria de Distribuições e Espaços de Sobolev

Neste capítulo apresentamos os principais conceitos e resultados que serão utilizados no decorrer deste trabalho. As demonstrações são omitidas por se tratarem de resultados conhecidos, mas citamos referências onde tais resultados, junto com suas demonstrações, podem ser encontrados.

Em todo este trabalho, o símbolo Ω representará um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^n$, que eventualmente poderá ser o próprio $\mathbb{R}^n$.

1.1 Notações

1. $\mathbb{K}$ indica o corpo $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

2. $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$ para $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, $n \in \mathbb{N}$.

3. $D^\alpha u = \dfrac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots\ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$, $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$, $\alpha_i \in \mathbb{N}$.

4. Se $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável, então o *gradiente* de f, que será denotado por ∇f , é definido como o vetor de $\mathbb{R}^n$ dado por $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$.

5. A *derivada radial* de f, denotada por $\frac{\partial f}{\partial r}$, é dada por $\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\mathbf{x}}{r} \cdot \nabla f$, onde $r = \|\mathbf{x}\|$, $x \in \mathbb{R}^n$.

6. Se $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_n(\mathbf{x}))$ é um campo vetorial de classe C^1, definimos o *divergente* de $\mathbf{F}(\mathbf{x})$, denotado por $\operatorname{div} \mathbf{F}$ como $\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$, onde ∇ é o operador definido como $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$.

7. O *Laplaciano* de uma função f é definido como $\operatorname{div}(\nabla f) = \nabla \cdot \nabla f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$ e é denotado por $\triangle f$.

Identidades úteis

Se f, g são funções escalares de classe $C^1(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, c uma constante real e $\mathbf{F}$ e $\mathbf{G}$ são campos vetoriais também de classe $C^1(\Omega)$, então as seguintes relações podem ser facilmente provadas.

1. $\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g$

2. $\nabla(cf) = c\nabla f$

3. $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$

4. $\operatorname{div}(\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \operatorname{div} \mathbf{F} + \operatorname{div} \mathbf{G}$

5. $\operatorname{div}(f\mathbf{F}) = f \operatorname{div} \mathbf{F} + \mathbf{F} \cdot \nabla f$

1.2 Distribuições

Seja $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{K}$. O suporte de f, que denotaremos por $Spp\, f$, é o fecho em Ω do seguinte conjunto:

$$\{x \in \Omega; f(x) \neq 0\}.$$

Definição 1.1 *Representamos por $C_0^\infty(\Omega)$ o conjunto das funções $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{K}$, cujas derivadas parciais de todas as ordens são contínuas e cujo suporte é um conjunto compacto de Ω. Os elementos de $C_0^\infty(\Omega)$ são chamados de funções testes.*

Naturalmente, $C_0^\infty(\Omega)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ com as operações usuais de soma de funções e de multiplicação por escalar.

Noção de convergência em $C_0^\infty(\Omega)$

Definição 1.2 *Sejam (φ_k) uma sequência em $C_0^\infty(\Omega)$ e $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Dizemos que $\varphi_k \longrightarrow \varphi$ se:*

i) $\exists\, K \subset \Omega$, K compacto, tal que $Spp\, \varphi_k \subset K$, para todo $k \in \mathbb{N}$;

ii) Para cada $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $D^\alpha \varphi_k(x) \longrightarrow D^\alpha \varphi(x)$ uniformemente em $x \in \Omega$.

Definição 1.3 *O espaço vetorial $C_0^\infty(\Omega)$ com a noção de convergência definida acima é donotado por $\mathcal{D}(\Omega)$ e é chamado de espaço das funções testes.*

Definição 1.4 *Uma distribuição sobre Ω é um funcional linear definido em $\mathcal{D}(\Omega)$ e contínuo em relação a noção de convergência definida em $\mathcal{D}(\Omega)$. O conjunto de todas as distribuições sobre Ω é denotado por $\mathcal{D}'(\Omega)$.*

Desse modo,

$$\mathcal{D}'(\Omega) = \{T : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{K};\ T \text{ é linear e contínuo}\}.$$

Observamos que $\mathcal{D}'(\Omega)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$.

Se $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ denotaremos por $< T, \varphi >$ o valor de T aplicado ao elemento φ.

Noção de convergência em $\mathcal{D}'(\Omega)$

Definição 1.5 *Dizemos que $T_k \longrightarrow T$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$ se $< T_k, \varphi > \longrightarrow < T, \varphi >$, para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.*

1.3 Espaços $L^p(\Omega)$

Neste trabalho as integrais realizadas sobre Ω são no sentido de *Lebesgue*, assim como a mensurabilidade das funções envolvidas.

Definição 1.6 *Sejam Ω um conjunto mensurável e $1 \leq p \leq \infty$. Indicamos por $L^p(\Omega)$ o conjunto das funções mensuráveis $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $\|f\|_p < \infty$ onde:*

$$\|f\|_p = \left[\int_\Omega |f(t)|^p \, dt \right]^{\frac{1}{p}}, \ se\ 1 \leq p < \infty$$

e

$$\|f\|_\infty = supess_{t \in \Omega} |f(t)| = \inf\{C \in \mathbb{R}^+ \ / \ med\{t \in \Omega \ / \ |f(t)| > C\} = 0\}$$

$$= \inf\{C;\ \ |f| \leq C \ \ q.s\}.$$

Observação: As funções $\|.\|_p : L^p(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}^+$, $1 \leq p \leq \infty$, são normas.

Na verdade $L^p(\Omega)$ deve ser entendido como um conjunto de classes de funções onde duas funções estão na mesma classe se elas são iguais quase sempre em Ω.

Os espaços $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, são espaços de Banach, sendo $L^2(\Omega)$ um espaço de Hilbert com o produto interno usual da integral.

Teorema 1.1 *$C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < +\infty$.*

Teorema 1.2 (Interpolação dos Espaços $L^p(\Omega)$) *Sejam $1 \leq p < q \leq \infty$. Se $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ então $f \in l^r(\Omega)$ para todo $r \in (p, q)$. Além disso,*

$$\|f\|_{L^r(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)}^{\alpha} \, \|f\|_{L^q(\Omega)}^{1-\alpha}$$

para todo $\alpha \in [0, 1]$ tal que $\dfrac{1}{r} = \alpha\dfrac{1}{p} + (1-\alpha)\dfrac{1}{q}$.

Espaços $L^p_{loc}(\Omega)$

Definição 1.7 *Sejam Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$ e $1 \leq p \leq \infty$. Indicamos por $L^p_{loc}(\Omega)$ o conjunto das funções mensuráveis $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ tais que $f\chi_K \in L^p(\Omega)$, para todo K compacto de Ω, onde χ_K é a função característica do compacto K.*

Observação: $L^1_{loc}(\Omega)$ é chamado o espaço das funções localmente integravel.

Para $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ consideremos o funcional $T = T_u : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{K}$ definido por

$$< T, \varphi > = < T_u, \varphi > = \int_\Omega u(x)\, \varphi(x)\, dx.$$

É fácil verificar que T define uma distribuição sobre Ω.

Lema 1.1 (Du Bois Reymond) *Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Então $T_u = 0$ se e somente se $u = 0$ q.s em Ω.*

Obeservemos que a aplicação

$$\begin{array}{ccc} L^1_{loc}(\Omega) & \longrightarrow & \mathcal{D}'(\Omega) \\ u & \longmapsto & T_u \end{array}$$

é linear, contínua e injetiva (devido ao Lema 1.1). Em decorrência disso é comum identificar a distribuição T_u com a função $u \in L^1_{loc}$. Nesse sentido tem-se que $L^1_{loc} \subset \mathcal{D}'(\Omega)$. Como $L^p(\Omega) \subset L^1_{loc}$ temos que toda função de $L^p(\Omega)$ define uma distribuição sobre Ω, isto é, toda função de $L^p(\Omega)$ pode ser vista como uma distribuição.

Definição 1.8 *Sejam $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e $\alpha \in \mathbb{N}^n$. A derivada de ordem α de T, denotada por $D^\alpha T$, é a distribuição definida por*

$$< D^\alpha T, \varphi >= (-1)^{|\alpha|} < T, D^\alpha \varphi >, \ \textit{para toda} \ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Com esta definição tem-se que se $u \in C^k(\Omega)$ então $D^\alpha T_u = T_{D^\alpha u}$, para todo $|\alpha| \leq k$, onde $D^\alpha u$ indica a derivada clássica de u. Assim, se $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ então $D^\alpha T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$.

1.4 Espaços de Sobolev

Os principais resultados desta seção podem ser vistos nas referências Adams [1], Brezis [9], Kesavan [14] e Medeiros [21], [22].

Definição 1.9 *Sejam $m \in \mathbb{N}$ e $1 \leq p \leq \infty$. Indicaremos por $W^{m,p}(\Omega)$ o conjunto de todas as funções u de $L^p(\Omega)$ tais que para todo $|\alpha| \leqslant m$, $D^\alpha u$ pertence a $\mathrm{L}^p(\Omega)$,* *sendo $D^\alpha u$ a derivada distribucional de u. $W^{m,p}(\Omega)$ é chamado de Espaço de Sobolev de ordem m relativo ao espaço $L^p(\Omega)$.*

Resumidamente,

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in \mathrm{L}^p(\Omega), \quad |\alpha| \leqslant m\}$$

Norma em $W^{m,p}(\Omega)$

Para cada $u \in W^{m,p}(\Omega)$ tem-se que

$$||u||_{m,p} = \left(\sum_{|\alpha| \leqslant m} ||D^\alpha u||^p_{\mathrm{L}^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{|\alpha| \leqslant m} \int_\Omega |(D^\alpha u)(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}, \qquad 1 \leq p < \infty$$

ou

$$||u||_{m,\infty} = \sum_{|\alpha| \leqslant m} ||D^\alpha u||_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)}, \qquad p = \infty$$

define uma norma sobre $W^{m,p}(\Omega)$.

Observações

1. $(W^{m,p}(\Omega), || \cdot ||_{m,p})$ é um espaço de Banach.

2. Quando $p = 2$, o espaço de Sobolev $W^{m,2}(\Omega)$ torna-se um espaço de Hilbert com produto interno dado por

$$(u, v) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \qquad u, v \in W^{m,2}(\Omega).$$

3. Denota-se $W^{m,2}(\Omega)$ por $H^m(\Omega)$.

O Espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$

Definição 1.10 *Definimos o espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ como sendo o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$.*

Observações

1. Quando $p = 2$, escreve-se $H_0^m(\Omega)$ em lugar de $W_0^{m,p}(\Omega)$.

2. Se $W_0^{m,p}(\Omega) = W^{m,p}(\Omega)$ então a medida de $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$ é nula.

3. Vale que $W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n) = W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$.

O Espaço $W^{-m,q}(\Omega)$

Definição 1.11 *Suponha* $1 \leqslant p < \infty$ *e* $q > 1$ *tal que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Representa-se por* $W^{-m,q}(\Omega)$ *o dual topológico de* $W_0^{m,p}(\Omega)$.

O dual topológico de $H_0^m(\Omega)$ representa-se por $H^{-m}(\Omega)$.

Os espaços $H^s(\mathbb{R}^n)$, $s \in \mathbb{R}$

Proposição 1.1 *O espaço* $H^m(\mathbb{R}^n)$, $m \in \mathbb{N}$ *coincide com o conjunto*

$$\{u \in L^2(\mathbb{R}^n);\, J_m\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$$

onde J_m *é a função dada por* $J_m(x) = (1 + ||x||^2)^{\frac{m}{2}}$, $x \in \mathbb{R}^n$. *Aqui,* $\hat{u}$ *indica a Transformada de Fourier da função* u.

Além disso, a função $|||.|||_m : H^m(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ *definida por* $|||u|||_m = ||J_m\hat{u}||_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ *é uma norma equivalente a norma de Sobolev.*

A partir dessa proposição definimos:

Definição 1.12 *Para* $s \in \mathbb{R}^+$, *indicaremos por* $H^s(\mathbb{R}^n)$ *o conjunto*

$$\{u \in L^2(\mathbb{R}^n);\, J_s\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$$

onde $J_s(x) = (1 + ||x||^2)^{\frac{s}{2}}$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Observações

1. Em $H^s(\mathbb{R}^n)$ define-se o seguinte produto interno:

$$(u, v)_{H^s(\mathbb{R}^n)} = (J_s\hat{u}, J_s\hat{v})_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + \|x\|^2)^s u(x)\overline{\hat{v}(x)}dx.$$

2. $H^s(\mathbb{R}^n), s \in \mathbb{R}^+$, é um espaço de Hilbert.

Definição 1.13 *Suponha $1 \leq p < \infty$ e $q > 1$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ e seja $s \in \mathbb{R}^+$. Representa-se por $H^{-s}(\mathbb{R}^n)$ o dual topológico de $H^s(\mathbb{R}^n)$.*

Os espaços $H^s(\Omega)$, $s \in \mathbb{R}$

Definição 1.14 *Um aberto Ω do $\mathbb{R}^n$ é dito ser* **bem regular** *se a fronteira de Ω é uma variedade C^∞ de dimensão $n - 1$.*

Definição 1.15 *Sejam $s \geq 0$ e Ω um conjunto aberto limitado bem regular. O espaço de Sobolev $H^s(\Omega)$ é definido por:*

$$H^s(\Omega) = \{r_\Omega u; u \in H^s(\mathbb{R}^n)\}$$

onde $r_\Omega u$ indica a restrição de u ao aberto Ω.

Para cada $u \in H^s(\Omega)$ tem-se que

$$||u||_{H^s(\Omega)} = inf\{||v||_{H^s(\mathbb{R}^n)}; v \in H^s(\mathbb{R}^n) \text{ e } r_\Omega v = u\}$$

define uma norma em $H^s(\Omega)$.

Observações

1. $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$.

2. $H^s(\Omega)$, $s > 0$, é um espaço de Hilbert.

3. $H^s(\Omega)$ coincide com o espaço usual de Sobolev $H^m(\Omega)$, definido anteriormente, se $s = m \in \mathbb{N}$ e se $\partial\Omega$ for regular. Tal resultado é provado usando a teoria do prolongamento (ver Adams [1], Kesavan [14] e Medeiros [21]).

4. $H_0^s(\Omega)$ é definido como sendo o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $H^s(\Omega)$.

5. $H^{-s}(\Omega)$ é definido como sendo o dual de $H_0^s(\Omega)$, $s > 0$.

Os espaços $H^s(\Gamma)$, $s \in \mathbb{R}$

Seja Ω um aberto limitado bem regular do $\mathbb{R}^n$.

Definição 1.16 *Seja $\bar{\Omega}$ o fecho de Ω em $\mathbb{R}^n$. Denotaremos por $D(\bar{\Omega})$ o seguinte conjunto:*

$$D(\bar{\Omega}) = \{\varphi|_{\bar{\Omega}};\ \varphi \in D(\mathbb{R}^n)\}.$$

Observação: $D(\bar{\Omega})$ é denso em $H^s(\Omega)$, $s \geq 0$.

Definição 1.17 *Denotaremos por $D(\Gamma)$ o seguinte conjunto:*

$$D(\Gamma) = \{u : \Gamma \longrightarrow \mathbb{K};\ u \in C^\infty(\Gamma) \text{ e tem suporte compacto em } \Gamma\}$$

onde Γ denota a fronteira de Ω, isto é, $\Gamma = \partial\Omega$.

Seja $u : \bar{\Omega} \longrightarrow \mathbb{K}$. Então $\gamma_0 u = u|_\Gamma$ está bem definida como uma função de Γ em $\mathbb{K}$. Com isto tem-se que se $u \in D(\bar{\Omega})$ então $\gamma_0 u \in D(\Gamma)$.

Definição 1.18 *Um sistema de cartas locais para Ω é uma família $\{\varphi_i, U_i\}_{i\in I}$ tal que:*

i) para todo $i \in I$:

$$\varphi_i : \bar{U}_i \longrightarrow Q = [0,1]^{n-1} \times [-1,1]$$

é um difeomorfismo de classe C^∞ tal que

- $\varphi_i(U_i \cap \Omega) \subset [0,1]^n = Q^+$
- $\varphi_i(U_i \cap \partial\Omega) \subset [0,1]^{n-1} \times \{0\} = \Gamma_0$
- $\varphi_i(\partial(U_i \cap \Omega)) = \partial Q^+$.

ii) $\partial\Omega \subset U = \bigcup_{i\in I} U_i$;

iii) Se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ *e se* $W_i = \varphi_i(U_i \cap U_j)$ *e* $W_j = \varphi_j(U_i \cap U_j)$ *então* $\varphi_j(\varphi_i^{-1}) : W_i \longrightarrow W_j$ *e* $\varphi_i(\varphi_j^{-1}) : W_j \longrightarrow W_i$ *são de classe* C^∞.

Agora, sejam $(\psi_1, U_1), \cdots, (\psi_N, U_N)$ um sistema de cartas locais e $\sigma_1, \cdots, \sigma_N$ funções testes do $\mathbb{R}^n$ tais que $\sum_{i=1}^{N} \sigma_i(x) = 1$ para todo $x \in \Gamma = \partial\Omega$ e $spp\sigma_i \subset U_i$ (tais funções existem pois Ω é um aberto limitado bem regular).

Para uma função w definida em $\Gamma = \partial\Omega$ sejam $w_j : \mathbb{R}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{K}$, $j = 1, 2, \cdots, N$ funções definidas por:

$$w_j(x') = \begin{cases} (\sigma_j w)(\psi_j^{-1}(x', 0), & \text{se } x' \in \Omega_0 = (0,1)^{n-1} \\ 0, & \text{se } x' \in \mathbb{R}^{n-1} \backslash \Omega_0 \end{cases}$$

Definição 1.19 *Denotaremos por $H^s(\Gamma)$ o conjunto das funções $w : \Gamma \longrightarrow \mathbb{K}$ tal que $w_j \in H^s(\mathbb{R}^{n-1})$, $j = 1, \cdots, N$, onde w_j são definidas acima. Isto é,*

$$H^s(\Gamma) = \{w : \Gamma \longrightarrow \mathbb{K};\ w_j \in H^s(\mathbb{R}^{n-1}),\ j = 1, \cdots, N\}.$$

Observações

1. Para $u, v \in H^s(\Gamma)$, a função

$$(u,v)_{H^s(\Gamma)} = \sum_{j=1}^{N} (u_j, v_j)_{H^s(\mathbb{R}^{n-1})}$$

define um produto interno sobre $H^s(\Gamma)$.

2. $H^s(\Gamma)$ é um espaço de Hilbert.

3. $D(\Gamma)$ é denso em $H^s(\Gamma)$.

Proposição 1.2 *A aplicação*

$$\gamma_0 : D(\bar{\Omega}) \longrightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

definida por $\gamma_0 u = u|_\Gamma$, é contínua na topologia de $H^1(\Omega)$, isto é, existe uma constante positiva C tal que

$$\|\gamma_0 u\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq C\|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

Como $D(\bar{\Omega})$ é denso em $H^s(\Omega)$, em particular em $H^1(\Omega)$, segue da proposição acima que existe uma aplicação, que continuaremos denotando por γ_0, de $H^1(\Omega)$ em $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ linear e contínua que estende γ_0, isto é, tal que $\gamma_0 u = u|_\Gamma$ para toda $u \in D(\bar{\Omega})$. Esta aplicação $\gamma_0 : H^1(\Omega) \longrightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ é chamada de função traço e seu valor em um dado $u \in H^1(\Omega)$ é chamado o traço de u sobre Γ.

Teorema 1.3 (Teorema do Traço) *Seja Ω um conjunto aberto limitado bem regular do $\mathbb{R}^n$. A função traço*

$$\gamma_0 : H^1(\Omega) \longrightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

é sobrejetiva e $Ker(\gamma_0) = H_0^1(\Omega)$

Observação: Quando dizemos que $u \in H_0^1(\Omega)$ anula na fronteira de Ω, isto é, que $u = 0$ sobre $\Gamma = \partial\Omega$, na verdade significa que $\gamma_0 u = 0$ sobre Γ.

Imersões de Sobolev

Teorema 1.4 (Teorema de Sobolev) *Sejam $m \geq 1$ e $1 \leq p < \infty$. Então*

i) se $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} > 0$ então $W^{m,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n}$,

ii) se $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} = 0$ então $W^{m,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, $q \in [p, \infty)$,

iii) se $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} < 0$ então $W^{m,p}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$

sendo as imersões acima contínuas.

1.5 Desigualdades Importantes

Desigualdade de Hölder

Sejam $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$ com $1 \leqslant p \leqslant \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ($q = 1$ se $p = \infty$ e $q = \infty$ se $p = 1$). Então $fg \in L^1(\Omega)$ e

$$\int_\Omega |fg| \leqslant \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}$$

Desigualdade de Young

Se $a \geqslant 0$ e $b \geqslant 0$ e $1 < p, q < \infty$ com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ então $ab \leqslant \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$.

Desigualdade de Cauchy-Schwarz para funções $L^2(\Omega)$

Sejam $f : \Omega \mapsto \mathbb{K}$ e $g : \Omega \mapsto \mathbb{K}$ duas funções de quadrado integrável, então

$$|(f,g)_{L^2}| = \left|\int_\Omega f(x)\overline{g(x)}\,dx\right| \leqslant \left[\int_\Omega |f(x)|^2\,dx\right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_\Omega |g(x)|^2\,dx\right]^{\frac{1}{2}} = ||f||_{L^2}||g||_{L^2}$$

Desigualdade de Poincaré

Seja Ω é um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$. Então existe uma constante C (dependendo de Ω) tal que

$$||u||_{L^2(\Omega)} \leq C||\nabla u||_{L^2(\Omega)} \text{ para toda } u \in H_0^1(\Omega). \tag{1.1}$$

A constante $C = C(\Omega)$ citada no teorema acima é chamada de constante de Poincaré para Ω.

Observações

1. A desigualdade de Poincaré também é válida se $u \in H^1(\Omega)$ e o traço de u sobre $\Gamma = \partial\Omega$ anular sobre apenas uma parte de Γ (ver Brezis [9]).
2. A desigualdade de Poincaré (1.1) continua válida em $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Consequências da Desigualdade de Poincaré

1. A norma de Sobolev $||.||_{1,\Omega}$ em $H_0^1(\Omega)$ é equivalente a norma do gradiente em $L^2(\Omega)$. Isto é, existe $c > 0$ tal que $||u||_{H^1(\Omega)} \leq c||\nabla u||_{L^2(\Omega)}$ para toda $u \in H_0^1(\Omega)$.
2. A norma de Sobolev $||.||_{H^2(\Omega)}$ é equivalente à norma do Laplaciano em $L^2(\Omega)$ para funções em $H_0^2(\Omega)$, isto é, existe $c > 0$ tal que $||u||_{H^2(\Omega)} \leq c|| \triangle u||_{L^2(\Omega)}$

para toda $u \in H_0^2(\Omega)$. Isso segue do fato que se $u \in H_0^2(\Omega)$ então $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in H_0^1(\Omega)$ e ainda da desigualdade de Poincaré.

1.6 Teorema da Divergência e Fórmula de Green

Valem as seguintes fórmulas

i.

$$\int_\Omega (\operatorname{div} \mathbf{F})(x)\, dx = \int_{\partial\Omega} \mathbf{F}(x) \cdot \eta(x)\, d\Gamma, \quad \mathbf{F} \in \left[H^1(\Omega)\right]^n$$

ii.

$$\int_\Omega v \triangle u\, dx = -\int_\Omega \nabla v \cdot \nabla u\, dx, \quad v \in H_0^1(\Omega),\ u \in H^2(\Omega)$$

iii.

$$\int_\Omega v \triangle u\, dx = \int_\Omega (\triangle v) u\, dx, \quad v \in H_0^2(\Omega), u \in H^2(\Omega).$$

onde Ω é um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira de classe C^2 e $\eta(x)$ denota a normal exterior unitária no ponto $x \in \partial\Omega$. A função $\mathbf{F}(x)$ integrada sobre $\partial\Omega$ é no sentido da função traço, isto é, $\int_{\partial\Omega} \mathbf{F}(x) \cdot \eta(x)\, d\Gamma$ significa $\int_{\partial\Omega} (\gamma_0 \mathbf{F})(x) \cdot \eta(x)\, d\Gamma$

1.7 Teoremas de Compacidade

Teorema 1.5 (Banach - Alaoglu - Bourbaki) *Seja E um espaço de Banach reflexivo. Então*

$$B_{E'} = \{f \in E' : \|f\| \leq 1\}$$

é compacto na topologia fraca, onde E' é o dual topológico de E.*

A demostração do teorema acima pode ser vista em Brezis [9].

Teorema 1.6 (Lema de Lions) *Sejam Ω um conjunto aberto do $\mathbb{R}^n$, g_n e g funções de $L^q(\Omega), 1 < q < \infty$ tais que*

$$||g_n||_{L^q(\Omega)} \leq C \quad e \quad g_n \longrightarrow g \quad q.s \ em \quad \Omega.$$

Então, $g_n \longrightarrow g$ fraco em $L^q(\Omega)$.

Esse resultado, juntamente com sua demostração, pode ser encontrado em Lions [19]

Definição 1.20 *Um operador diferencial de ordem $2m$, $m \in \mathbb{N}$ da forma*

$$L = \sum_{|\alpha| \leq m} C_\alpha(x) D^{2\alpha} u, \quad x \in \Omega$$

é chamado de operador elíptico se existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\sum_{|\alpha| \leq m} C_\alpha(x) \xi^{2\alpha} \geq C|\xi|^{2m}$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ e para todo $x \in \Omega$.

Teorema 1.7 (Teorema de Regularidade Elíptica) *Sejam L um operador diferencial elíptico de ordem $2m$, $m \in \mathbb{N}$, definido em um aberto Ω do $\mathbb{R}^n$ e $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Suponha que u é solução de $Lu = f$, no sentido das distribuições, com $f \in L^2(\Omega)$. Então $u \in H^{2m}(\Omega)$.*

A demostração desse teorema pode ser encontrada em Agmon-Douglis-Nirenberg [2] (ver também Perla Menzala [24]).

Definição 1.21 *Seja X um espaço de Banach. Denotaremos por $L^p(0, T; X)$ o conjunto das classes de funções $f : [0, T] \longrightarrow X$ mensuráveis tais que*

$$||f||_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T ||f(t)||_X^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Se $p = \infty$, então $L^p(0,T;X)$ é constituído das funções $f : [0,T] \longrightarrow X$ tais que

$$\|f\|_{L^\infty(0,T;X)} = \sup_{t\in(0,T)} ess\|f(t)\|_X < \infty.$$

Observações

1. $L^p(0,T;X)$ é um espaço de Banach para $1 \leq p \leq \infty$ (veja Boubarki [7]).

2. $L^p(0,T;L^p(\Omega)) = L^p(Q)$, onde $Q = (0,T) \times \Omega$.

3. $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ é o dual de $L^1(0,T;L^2(\Omega))$ (ver Yosida [31]).

O resultado seguinte é conhecido como Lema de compacidade de Aubin-Lions e pode ser encontrado em Aubin [4].

Teorema 1.8 (Aubin-Lions) *Sejam X_0, X e X_1 espaços de Banach reflexivos. Suponha que $X_0 \subset X \subset X_1$ e que a imersão $X_0 \subset X$ é compacta. Seja*

$$W = \{v \in L^{p_0}(0,T;X_0);\ \frac{dv}{dt} \in L^{p_1}(0,T;X_1),\ 1 < p_0, p_1 < \infty\}.$$

Então, a imersão $W \subset L^{p_0}(0,T;X)$ é compacta.

Observação: Se X e Y são espaços de Banach com $X \subset Y$ compactamente então se (x_n) é uma sequência limitada em X resulta, da compacidade, que existe uma subsequência que converge forte em Y.

Capítulo 2

Existência e Unicidade

Neste capítulo, mostraremos, através do método de Faedo-Galerkin, a existência e unicidade de solução do seguinte Problema de Cauchy associado com uma equação de placas com um termo dissipativo, localizado e não linear:

$$\begin{cases} u_{tt} + \triangle^2 u + \rho(x, u_t) = 0 & x \in \Omega,\ t \geq 0 \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in \Omega \\ u_t(x,0) = u_1(x) & x \in \Omega \\ u(x,t) = 0, & x \in \partial\Omega\ t \geq 0 \\ \frac{\partial u}{\partial \eta}(x,t) = 0 & x \in \partial\Omega,\ t \geq 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

onde Ω é um conjunto aberto e limitado do $\mathbb{R}^n, 1 \leq n \leq 3$, com fronteira regular, $u_0 \in H_0^2(\Omega) \cap H^4(\Omega)$, $u_1 \in H_0^2(\Omega)$ e $\rho : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função que satisfaz as seguintes condições:

$$
\begin{aligned}
&i)\ \rho(x,s)s \geq 0,\ s \in \mathbb{R},\ x \in \Omega;\\
&ii)\ \rho \text{ e } \tfrac{\partial \rho}{\partial s} \text{ são contínuas em } \Omega \times \mathbb{R};\\
&iii)\ \text{Existem constantes } K_1 \text{ e } K_2 \text{ tais que :}\\
&K_1\, a(x)\, |s|^{p+1} \leq |\rho(x,s)| \leq K_2\, a(x)\, [\, |s|^{p+1} + |s|\,],\ s \in \mathbb{R},\ x \in \Omega,\\
&\text{sendo p um número real tal que } -1 < p \leq 2;\\
&iv)\ \frac{\partial \rho}{\partial s}(x,s) \geq 0,\ \ \forall x \in \Omega,\ \ \forall s \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

Aqui, $a : \bar{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ é uma função tal que $a \in L^\infty(\Omega)$.

2.1 Método de Faedo - Galerkin

2.1.1 Problema Aproximado - Solução Local

Como os espaços de Sobolev $H^m(\Omega)$ são espaços de Hilbert separáveis e $H_0^2(\Omega)$ é o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $H^2(\Omega)$ podemos tomar uma base de $V = H_0^2(\Omega) \cap H^4(\Omega)$. Seja então, $(w_k)_{k \in \mathbb{N}}$ uma base de V.

Consideremos o subespaço de V dado por $V_m = [w_1, \cdots, w_m]$, onde w_i, $i = 1, \cdots, m$, são as m primeiras funções da base de V. Claramente, V_m é um subespaço de V de dimensão m.

Vamos mostrar que existe uma função $u_m : [0, t_m) \longrightarrow V_m$, para algum número real $t_m > 0$, que satisfaz o seguinte problema:

$$
\left\{
\begin{aligned}
&(u''_m(t),\, w)_{L^2(\Omega)} + b(u_m(t),\, w) + (\rho(x, u'_m(t)),\, w)_{L^2(\Omega)} = 0,\ \ w \in V_m\\
&u_m(0) = u_{0m}\\
&u'_m(0) = u_{1m},
\end{aligned}
\right.
\tag{2.3}
$$

onde $u' = \dfrac{\partial u}{\partial t}$ e $b : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ é a forma bilinear dada por $b(u,v) = (\triangle u, \triangle v)_{L^2(\Omega)} = \displaystyle\int_\Omega (\triangle u)\,(\triangle v)\,dx$, sendo u_{0m} e u_{1m} seqüências em V_m tais que $u_{0m} \longrightarrow u_0$ forte em V e $u_{1m} \longrightarrow u_1$ forte em $H_0^2(\Omega)$. De fato, sendo $(w_k)_{k\in\mathbb{N}}$ base de V e de $H_0^2(\Omega)$, podemos escrever que

$$u_0 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k\, w_k, \qquad u_1 = \sum_{k=1}^{\infty} d_k\, w_k \tag{2.4}$$

e portanto,

$$u_{0m} = \sum_{k=1}^{m} c_k\, w_k, \qquad u_{1m} = \sum_{k=1}^{m} d_k\, w_k.$$

É claro que b é uma função contínua, pois:

$$|b(u,v)| = |(\triangle u, \triangle v)_{L^2(\Omega)}| \leq \|\triangle u\|_{L^2(\Omega)}\, \|\triangle v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|_V\, \|v\|_V,$$

para toda $u, v \in V$, já que $\|\triangle u\|_{L^2(\Omega)}$ é parte da norma $\|u\|_V$.

O problema aproximado consiste em achar $u_m(t) = \displaystyle\sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t)\, w_j$, definida em algum intervalo $[0, t_m)$, que seja solução do problema variacional (2.3).

Observemos que como $V_m = [w_1, \cdots, w_m]$ tem-se que o problema (2.3) é equivalente ao sistema de equações:

$$\begin{cases} (u''_m(t),\, w_k)_{L^2(\Omega)} + b(u_m(t),\, w_k) + (\rho(x, u'_m(t)),\, w_k)_{L^2(\Omega)} = 0 \\ u_m(0) = u_{0m} \\ u'_m(0) = u_{1m} \end{cases} \tag{2.5}$$

com $k = 1, \cdots, m$.

Se $u_m(t)$ é uma função dada por $u_m(t) = \displaystyle\sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t)\, w_j$ então $u_m(t) \in V_m$ para cada $t \in [0, t_m)$.

Então, substituindo essa expressão para $u_m(t)$ na equação em (2.5) obtém-se, para $k = 1, \cdots, m$:

$$\left(\sum_{j=1}^{m} g_{jm}^{''}(t) w_j, w_k\right)_{L^2(\Omega)} + b\left(\sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t) w_j, w_k\right) + \left(\rho\Big(x, \sum_{j=1}^{m} g_{jm}^{'}(t) w_j\Big), w_k\right)_{L^2(\Omega)} = 0.$$

Usando a linearidade da forma b e do produto interno de $L^2(\Omega)$ resulta que

$$\sum_{j=1}^{m} g_{jm}^{''}(t)(w_j,\, w_k)_{L^2(\Omega)} + \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t)\, b(w_j,\, w_k) + \left(\rho(x, \sum_{j=1}^{m} g_{jm}^{'}(t) w_j),\, w_k\right)_{L^2(\Omega)} = 0$$

para todo $k = 1, \cdots, m$.

Vamos chamar $(w_j,\, w_k) = A_{jk}$ e $b(w_j,\, w_k) = B_{jk}$. Então, o sistema de equações em (2.5) é equivalente ao sistema

$$\sum_{j=1}^{m} [A_{jk}\, g_{jm}^{''}(t) + B_{jk}\, g_{jm}(t)] + \left(\rho(x, \sum_{j=1}^{m} g_{jm}^{'}(t) w_j),\, w_k\right)_{L^2(\Omega)} = 0, \quad k = 1, \cdots, m.$$

Observemos que o sistema acima é um sistema de EDO'S de 2ª ordem para as funções $g_{jm}(t)$.

Vamos analisar condições iniciais para as $g_{jm}(t)$. Temos, das condições iniciais em (2.5) para $u_m(t)$, que:

$$\sum_{j=1}^{m} g_{jm}(0)\, w_j = u_m(0) = u_{0m} = \sum_{j=1}^{m} c_j\, w_j$$

$$\sum_{j=1}^{m} g_{jm}^{'}(0)\, w_j = u_m^{'}(0) = u_{1m} = \sum_{j=1}^{m} d_j\, w_j.$$

Portanto, se queremos que $u_m(t) = \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t) w_k$ atenda as condições iniciais de (2.5) devemos ter que

$$g_{jm}(0) = c_j, \quad j = 1, \cdots, m$$

$$g_{jm}^{'}(0) = d_j, \quad j = 1, \cdots, m$$

sendo c_j e d_j dados em (2.4).

Assim, o sistema (2.5) é equivalente ao sistema:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{m} [A_{jk}\, g_{jm}''(t) + B_{jk}\, g_{jm}(t)] + \left(\rho(x, \sum_{j=1}^{m} g_{jm}'(t) w_j), w_k \right)_{L^2(\Omega)} = 0 \\ g_{jm}(0) = c_j, \; j = 1, \cdots, m \\ g_{jm}'(0) = d_j, \; j = 1, \cdots, m \end{cases} \tag{2.6}$$

para $k = 1, \cdots, m$.

O sistema (2.6) é um problema de valor inicial para um sistema de EDO'S de 2ª ordem não linear para as funções $g_{jm}(t)$, $j = 1, \cdots, m$. Um sistema desse tipo pode ser colocado na forma:

$$\begin{cases} Y_m' = F(Y_m) \\ Y_m(0) = Y_{0m} \end{cases} \tag{2.7}$$

com $Y_m = (g_{1m}, \cdots, g_{mm}, g_{1m}', \cdots, g_{mm}')$ e $Y_{0m} = (c_1, \cdots, c_m, d_1, \cdots, d_m)$. Esse sistema tem única solução se F e $\dfrac{\partial F}{\partial Y_i}$ forem contínuas e $Y_{0m} \in Dom(F)$. Notemos que $Dom(F) = \mathbb{R}^{2m}$.

Precisamos então, analisar o termo não linear em (2.6):

$$\begin{aligned} \left(\rho(x, \sum_{j=1}^{m} g_{jm}'(t) w_j), w_k \right)_{L^2(\Omega)} &= \int_\Omega \rho(x, \sum_{j=1}^{m} g_{jm}'(t) w_j(x)) w_k(x)\, dx \\ &= H_k\,(g_{1m}'(t), \cdots, g_{mm}'(t)), \;\; k = 1, 2, \cdots, m. \end{aligned}$$

Como por hipótese $\rho(x, s)$ é contínua em $\Omega \times \mathbb{R}$ então $H_k\,(s_1, \cdots, s_m)$ é contínua em $s = (s_1, \cdots, s_m) \in \mathbb{R}^m$. Também, $\dfrac{\partial H_k}{\partial s_j}$ é contínua $\forall j, k = 1, \cdots, m$ pois $\dfrac{\partial \rho}{\partial s}$ é contínua.

Então, F atende as condições do Teorema de Caractheodory (ver Medeiros [22] e Brauer [8]). Logo, existe uma única função $Y_m = Y_m(t)$ solução de (2.7) definida em algum intervalo $[0, t_m), t_m > 0$. Desse modo, existem únicas funções $(g_1(t), \cdots, g_m(t))$ definidas no intervalo $[0, t_m)$, duas vezes diferenciávei tais que

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{m} [A_{jk}\, g_{jm}''(t) + B_{jk}\, g_{jm}(t)] + H_k\,(g_{1m}'(t), \cdots, g_{mm}'(t)) = 0 \quad t \in (0, t_m) \\ g_{jm}(0) = c_j, \ j = 1, \cdots, m \\ g_{jm}'(0) = d_j, \ j = 1, \cdots, m \end{cases}$$

para $k = 1, \cdots, m$.

Portanto, a função $u_m : [0, t_m) \longrightarrow V_m$ dada por $u_m(t) = \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t) w_j$ é solução do problema aproximado (2.3) no intervalo $[0, t_m)$.

2.1.2 Estimativas a Priori - Prolongamento da Solução

Queremos mostrar que a solução $u_m(t)$ de (2.3) em $[0, t_m)$, pode ser prolongada a um intervalo $[0, T]$ arbitrário. Mas, para fazer isso, precisamos de algumas estimativas para $u_m(t)$ e $u_m'(t)$, em norma, em todo intervalo $[0, t_m)$. De fato, como em dimensão finita todas as normas são equivalentes, se $u_m(t)$ e $u_m'(t)$ são limitadas, em norma, em algum intervalo, então g_{jm} e g_{jm}' também são limitadas nesse mesmo intervalo. Então, as soluções $g_{jm}(t)$ de (2.6) podem ser prolongadas a um intervalo $[0, T]$ desde que, por exemplo, $||u_m(t)||_V$ e $||u_m'(t)||_{L^2(\Omega)}$ sejam limitadas em $[0, t_m)$. Assim, as funções $u_m(t)$, para cada $m \in \mathbb{N}$, também serão soluções de (2.3) definidas em $[0, T]$.

As estimativas que faremos a seguir, para obter uma limitação da norma de $u_m(t)$ e $u_m'(t)$, são chamadas de estimativas a priori.

Seja $0 \leq t < t_m$, então temos que $u_m(t) = \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t) w_j$ satisfaz

$$(u_m''(t), w)_{L^2(\Omega)} + b(u_m(t), w) + (\rho(x, u_m'(t)), w)_{L^2(\Omega)} = 0, \quad \forall\, w \in V_m. \tag{2.8}$$

Agora, para

$$w = u'_m(t) = \sum_{j=1}^{m} g'_{jm}(t)\, w_j$$

obtemos que,

$$\begin{aligned}
(u''_m(t), w)_{L^2(\Omega)} &= (u''_m(t), u'_m(t))_{L^2(\Omega)} &&= \int_\Omega u''_m(t) u'_m(t)\, dx = \\
&= \int_\Omega \frac{1}{2}\frac{d}{dt}[u'_m(t)\, u'_m(t)]\, dx &&= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega (u'_m(t))^2\, dx = \qquad (2.9)\\
&= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\, \|u'_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b(u_m(t), w) &= b(u_m(t), u'_m(t)) &&= \int_\Omega \triangle u_m(t)\, \triangle u'_m(t)\, dx &&= \\
&= \int_\Omega \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\triangle u_m(t))^2\, dx &&= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega (\triangle u_m(t))^2\, dx &&= \qquad (2.10)\\
&= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\, \| \triangle u_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Substituindo (2.9) e (2.10), com $w = u'_m(t)$, em (2.8), resulta que:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\, \|u'_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\, \| \triangle u_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + (\rho(x, u'_m(t)), u'_m(t))_{L^2(\Omega)} = 0$$

para $t \in [0, t_m)$.

Integrando em $[0, t]$, $0 < t < t_m$ obtemos

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}\, \|u'_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \tfrac{1}{2}\, \| \triangle u_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^t (\rho(x, u'_m(s)), u'_m(s))_{L^2(\Omega)}\, ds = \\
&= \tfrac{1}{2}\, \|u'_m(0)\|^2_{L^2(\Omega)} + \tfrac{1}{2}\, \| \triangle u_m(0)\|^2_{L^2(\Omega)} = \tfrac{1}{2}\, \|u_{1m}\|^2_{L^2(\Omega)} + \tfrac{1}{2}\, \| \triangle u_{0m}\|^2_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Notamos que

$$(\rho(x, u'_m(s)), u'_m(s))_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega \rho(x, u'_m(s))\, u'_m(s)\, dx \geq 0$$

pois, pela hipótese (2.2)(i),

$$\rho(x, s)s \geq 0, \qquad \forall\, s \in \mathbb{R}.$$

Com isso, concluímos que

$$\|u_m'(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \| \triangle u_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \|u_{1m}\|^2_{L^2(\Omega)} + \| \triangle u_{0m}\|^2_{L^2(\Omega)}$$

$$\leq \|u_{1m}\|^2_{H_0^2(\Omega)} + \|u_{0m}\|^2_V \leq C$$

onde $C = C(u_0, u_1)$ é uma constante positiva independente de $t \in [0, t_m)$ e de $m \in \mathbb{N}$. Isso resulta do fato que $u_{1m} \longrightarrow u_1$ forte em $H_0^2(\Omega)$, quando $m \longrightarrow \infty$, donde (u_{1m}) é limitada em $H_0^2(\Omega)$, e do fato que $u_{0m} \longrightarrow u_0$ forte em V e portanto (u_{0m}) também é limitada em V.

Assim, mostramos que existe uma constante $C > 0$, independente de $t \in [0, t_m)$ e de $m \in \mathbb{N}$, tal que

$$\|u_m'(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq C \quad \text{e} \quad \| \triangle u_m(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq C. \tag{2.11}$$

Desse modo, u_m' e $\triangle u_m$ são seqüências limitadas em $L^\infty(0, t_m; L^2(\Omega))$. Agora, como $\| \triangle v\|_{L^2(\Omega)}$ é equivalente * a $\|v\|_{H^2(\Omega)}$, para toda $v \in H_0^2(\Omega)$, segue que u_m é uma seqüência limitada em $L^\infty(0, t_m; H_0^2(\Omega))$. Temos então que u_m' e u_m são seqüências limitadas em $L^\infty(0, t_m; L^2(\Omega))$ e $L^\infty(0, t_m; H_0^2(\Omega))$ respectivamente. A conseqüência disso é que a solução $u_m(t)$ de (2.3) pode ser prolongada a um intervalo arbitrário $[0, T]$.

Desse modo, vale que u_m' e u_m são seqüências limitadas em $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ e $L^\infty(0, T; H_0^2(\Omega))$ respectivamente.

Agora, vamos estimar a norma de $u_m''(0)$ em $L^2(\Omega)$. Considere $w = u_m''(t)$. Substituindo em (2.3) segue que

$$(u_m''(t), u_m''(t))_{L^2(\Omega)} + b(u_m(t), u_m''(t)) + (\rho(x, u_m'(t)), u_m''(t))_{L^2(\Omega)} = 0, \; t \in [0, T].$$

*ver cap.1, seção 1.5

Isso diz que

$$||u''_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + (\triangle u_m(t), \triangle u''_m(t))_{L^2(\Omega)} + (\rho(x, u'_m(t)), u''_m(t))_{L^2(\Omega)} = 0, \; t \in [0, T].$$

Calculando em $t = 0$ e usando a segunda Fórmula de Green, já que $u_m(t) \in V = H^2_0(\Omega) \cap H^4(\Omega)$, resulta que:

$$||u''_m(0)||^2_{L^2(\Omega)} + (\triangle^2 u_m(0), u''_m(0))_{L^2(\Omega)} + (\rho(x, u'_m(0)), u''_m(0))_{L^2(\Omega)} = 0.$$

Agora, usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz em $L^2(\Omega)$, segue que

$$||u''_m(0)||^2_{L^2(\Omega)} \leq || \triangle^2 \, u_m(0)||_{L^2(\Omega)} \, ||u''_m(0)||_{L^2(\Omega)} \tag{2.12}$$

$$+||\rho(x, u'_m(0))||_{L^2(\Omega)} \, ||u''_m(0)||_{L^2(\Omega)}.$$

Se $||u''_m(0)||^2_{L^2(\Omega)} = 0$ então $||u''_m(0)||$ é limitada. Caso contrário, tem-se de (2.12) que

$$||u''_m(0)||_{L^2(\Omega)} \leq || \triangle^2 \, u_m(0)||_{L^2(\Omega)} + ||\rho(x, u'_m(0))||_{L^2(\Omega)}. \tag{2.13}$$

Afirmação 1: $||\rho(x, u'_m(0))||_{L^2(\Omega)}$ é limitada independente de m, ou seja,

$$||\rho(x, u'_m(0))||^2_{L^2(\Omega)} = ||\rho(x, u_{1m})||^2_{L^2(\Omega)} \leq C \tag{2.14}$$

com $C = C(u_1)$ uma constante positiva.

Demonstração:

De fato, usando a hipótese (2.2)(iii) sobre a função $\rho(x, s)$, temos que

$$\begin{aligned} ||\rho(x, u'_m(0))||^2_{L^2(\Omega)} &= \int_\Omega |\rho(x, u'_m(x, 0))|^2 \, dx \leq \int_\Omega K_2^2 a(x)^2 [|u'_m(x, 0)|^{p+1} + |u'_m(x, 0)|]^2 \, dx \\ &\leq 2K_2^2 ||a||^2_\infty \int_\Omega [|u'_m(x, 0)|^{2p+2} + |u'_m(x, 0)|^2] \, dx \\ &= 2K_2^2 ||a||^2_\infty \, ||u'_m(0)||^2_{L^2(\Omega)} + 2K_2^2 ||a||^2_\infty \int_\Omega |u'_m(x, 0)|^{2p+2} \, dx \\ &= 2K_2^2 ||a||^2_\infty \, ||u_{1m}||^2_{L^2(\Omega)} + 2K_2^2 ||a||^2_\infty \int_\Omega |u_{1m}(x)|^{2p+2} \, dx. \end{aligned}$$

É claro que o primeiro termo na última igualdade é limitado pois $u_{1m} \longrightarrow u_1$ forte em $H_0^2(\Omega)$ e, portanto, em $L^2(\Omega)$. Agora, queremos limitar $\int_\Omega |u_{1m}(x)|^{2p+2}\, dx$. Claro que $0 < 2p+2 \leq 6$ pois $-1 < p \leq 2$ (veja (2.2)(iii)). Para isso, vamos considerar dois casos:

I) Caso $0 < 2p+2 < 2$.

Se $0 < 2p+2 < 2$ então usando a desigualdade de Hölder com $\frac{1}{\frac{2}{2p+2}} + \frac{1}{\frac{1}{-p}} = 1$ tem-se que

$$\int_\Omega |u_{1m}(x)|^{2p+2}\, dx \leq \left(\int_\Omega 1^{\frac{1}{-p}}\, dx\right)^{-p} \left(\int_\Omega |u_{1m}(x)|^2\, dx\right)^{\frac{2p+2}{2}}$$

$$= |\Omega|^{-p} \, \|u_{1m}\|_{L^2(\Omega)}^{2p+2} \leq C$$

pois $u_{1m} \longrightarrow u_1$ forte em $H_0^2(\Omega)$ e, em particular, $u_{1m} \longrightarrow u_1$ forte em $L^2(\Omega)$. Donde segue que $\int_\Omega |u_{1m}(x)|^{2p+2}\, dx$ é limitada independentemente de m e portanto, a Afirmação 1 é válida, neste caso.

II) Caso $2 \leq 2p+2 \leq 6$.

Como $H_0^2(\Omega)$ está imerso continuamente em $L^\infty(\Omega)$ [†], tem-se, do fato que $u_{1m} \in H_0^2(\Omega)$ que

$$\int_\Omega |u_{1m}(x)|^{2p+2}\, dx \leq |\Omega| \, \|u_{1m}\|_{L^\infty(\Omega)}^{2p+2} \leq C|\Omega| \, \|u_{1m}\|_{H^2(\Omega)}^{2p+2}$$

sendo C a constante da imersão de Sobolev. Como $u_{1m} \longrightarrow u_1$ forte em $H_0^2(\Omega)$ resulta que

$$\int_\Omega |u_{1m}(x)|^{2p+2}\, dx \leq C$$

[†] ver Teorema 1.4; cap.1; seção 1.4

já que $|\Omega|$ é finita. Aqui, C é uma constante positiva que depende de $|\Omega|$ e da função u_1. Segue que a Afirmação 1 também é válida se $2 \leq 2p + 2 \leq 6$.

Portanto a Afirmação 1 está justificada.

$\square$

De (2.13), da Afirmação 1 acima e do fato que $u_m(0) = u_{0m} \longrightarrow u_0$ forte em $H_0^2(\Omega) \cap H^4(\Omega)$ segue que

$$||u_m''(0)||^2_{L^2(\Omega)} \leq C(u_0) + C(u_1) = C \tag{2.15}$$

onde C é uma constante positiva independente de m.

Concluímos então, que $u_m''(0)$ é limitada em $L^2(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $1 \leq n \leq 3$.

Agora, derivando (2.6) em t, obtém-se que as funções g_{jm} devem ser soluções do sistema

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{m}[A_{jk}g_{jm}'''(t) + B_{jk}g_{jm}'(t)] + \left(\frac{\partial \rho}{\partial s}(x, \sum_{j=1}^{m} g_{jm}'(t)w_j)(\sum_{j=1}^{m} g_{jm}''(t)w_j), w_k\right)_{L^2(\Omega)} = 0 \\ g_{jm}(0) \;=\; c_j, \\ g_{jm}'(0) \;=\; d_j \\ g_{jm}''(0) \;=\; e_j \end{cases} \tag{2.16}$$

sendo $j, k = 1, \cdots, m$ e e_j os coeficientes de $u_m''(0)$, isto é,

$$u_m''(0) = \sum_{j=1}^{m} g_{jm}''(0)w_j = \sum_{j=1}^{m} e_j w_j.$$

Note que e_j são limitados já que $||u_m''(0)||_{L^2(\Omega)}$ é limitada.

De fato, o Teorema de Caractheodory implica que (2.16) tem solução $g_{jm}(t)$, definida em um intervalo $(0, t_m)$, que é três vezes diferenciável em $[0, t_m)$.

É claro que o novo termo não linear também atende as hipóteses do Teorema de Caractheodory, portanto

$$u_m'''(t,x) = \sum_{j=1}^{m} g_{jm}'''(t) w_j(x)$$

existe em $(0, t_m)$. Segue que $u_m(t) = \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t) w_j$ satisfaz em $[0, t_m)$:

$$(u_m'''(t), w)_{L^2(\Omega)} + b(u_m'(t), w) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial s} \left(x, u_m'(t) \right) u_m''(t), w \right) = 0$$

para toda $w \in V_m$. Fazendo $w = u_m''$ resulta que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \| u_m''(t) \|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \| \triangle u_m'(t) \|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_\Omega \frac{\partial \rho}{\partial s}(x, u_m'(t)) |u_m''(t)|^2 \, dx = 0.$$

Agora, integrando em $(0, t)$, $0 < t < t_m$, tem-se que

$$\| u_m''(t) \|_{L^2(\Omega)}^2 + \| \triangle u_m'(t) \|_{L^2(\Omega)}^2 + 2 \int_0^t \int_\Omega \frac{\partial \rho}{\partial s}(x, u_m'(t)) |u_m''(t, x)|^2 \, dx dt \tag{2.17}$$

$$\leq \| u_m''(0) \|_{L^2(\Omega)}^2 + \| \triangle u_m'(0) \|_{L^2(\Omega)}^2 = \| u_m''(0) \|_{L^2(\Omega)}^2 + \| \triangle u_{1m} \|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C$$

onde $C = C(u_0, u_1, \Omega)$ é uma constante positiva independente de m, devido a (2.15) e ao fato que $u_{1m} \longrightarrow u_1$ forte em $H_0^2(\Omega)$.

Usando a hipótese (2.2)(iv) sobre a função ρ, isto é, que $\frac{\partial \rho}{\partial s}(x, s) \geq 0$, e a equação (2.17) concluímos que

$$\| u_m''(t) \|_{L^2(\Omega)}^2 + \| \triangle u_m'(t) \|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C, \quad t \in (0, t_m) \tag{2.18}$$

com $C > 0$ independente de m.

Em particular, podemos prolongar a solução $u_m(t)$ a um intervalo arbitrário $[0, T]$. Então, obtemos de (2.11) e de (2.18) que

$$\begin{aligned} &u_m \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; H_0^2(\Omega)) \subset L^2(0, T; H_0^2(\Omega)) \\ &u_m' \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; H_0^2(\Omega)) \subset L^2(0, T; H_0^2(\Omega)) \\ &u_m'' \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \subset L^2(0, T; L^2(\Omega)) \end{aligned} \tag{2.19}$$

pois $\| \triangle u_m' \|_{L^2(\Omega)}$ é equivalente a $\|u_m'\|_{H^2(\Omega)}$ já que $u_m' \in H_0^2(\Omega)$.

Agora, de (2.19) segue [‡] que existe uma função $u \in L^\infty(0,T;H_0^2(\Omega))$ com $u' \in L^\infty(0,T;H_0^2(\Omega))$ e $u'' \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ tal que

$$u_m \longrightarrow u, \text{ fraco* em } L^\infty(0,T;H_0^2(\Omega))$$

$$u_m' \longrightarrow u', \text{ fraco* em } L^\infty(0,T;H_0^2(\Omega)) \tag{2.20}$$

$$u_m'' \longrightarrow u'', \text{ fraco* em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)).$$

Aplicando o Teorema de Aubin - Lions [§] com $X_0 = H_0^2(\Omega)$, $X = X_1 = L^2(\Omega)$ e $p_0 = p_1 = 2$ segue que

$$W = \{v \in L^2(0,T;H_0^2(\Omega));\ v' \in L^2(0,T;L^2(\Omega))\}$$

está imerso compactamente em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$. Segue de (2.19) que u_m' é uma seqüência em W tal que $u_m' \longrightarrow u'$, fraco em W. Portanto, pela compacidade da imersão, segue que u_m' possui uma subseqüência, que continuaremos indicando por u_m', tal que

$$u_m' \longrightarrow u', \text{ forte em } L^2(0,T;L^2(\Omega)) = L^2((0,T)\times\Omega).$$

Então, por propriedade de seqüências convergentes em $L^p(Q)$ obtemos que $u_m' \longrightarrow u'$ q.s em $Q = (0,T)\times\Omega$.

Como $\rho(x,s)$ é contínua tem-se que

$$\rho(x,u_m'(x,t)) \longrightarrow \rho(x,u'(x,t)) \text{ q.s em } Q. \tag{2.21}$$

[‡] Teorema Banach-Aloglu-Boubarki; cap.1; seção 1.7

[§] ver cap.1; seção 1.7

Afirmação 2: $\rho(x, u_m')$ é limitada em $L^2(Q)$.

Demonstração:

De fato, da hipótese (2.2)(iii) temos:

$$\int_Q |\rho(x, u_m')|^2\, dxdt \leq \int_Q [K_2\, a(x)\, (|u_m'|^{p+1} + |u_m'|)]^2\, dxdt$$

$$\leq 2\, K_2^2\, \|a\|_\infty^2 \int_Q [|u_m'|^{2p+2} + |u_m'|^2]\, dxdt$$

$$= 2\, K_2^2\, \|a\|_\infty^2 \int_Q |u_m'|^{2p+2}\, dxdt + K_2^2\, \|a\|_\infty^2 \int_Q |u_m'|^2\, dxdt.$$

Agora, como u_m' é limitada em $L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \subset L^2(Q)$, temos que $\int_Q |u_m'|^2 dxdt$ é limitada.

Para limitar a integral

$$\int_Q |u_m'(x,t)|^{2p+2}\, dxdt \tag{2.22}$$

usa-se o mesmo raciocínio realizado na prova da Afirmação 1 para limitar a integral

$$\int_\Omega |u_{1m}(x)|^{2p+2}\, dx.$$

Na limitação da integral acima, usou-se o fato que u_{1m} é uma seqüência limitada em $H_0^2(\Omega)$, que Ω é limitado e certas imersões de Sobolev. Para limitar (2.22) deve-se usar que u_m' é uma seqüência limitada em $L^\infty(0, T; H_0^2(\Omega))$, que $Q = (0, T) \times \Omega$ é um conjunto limitado e as mesmas imersões de Sobolev.

Portanto, a afirmação 2 está justificada.

□

Da Afirmação 2 e da convergência dada em (2.21) segue, pelo Lema de Lions, [¶] que

$$\rho(x, u'_m) \rightharpoonup \rho(x, u') \text{ fraco em } L^2(Q). \tag{2.23}$$

Logo,

$$\langle T, \rho(x, u'_m)\rangle \longrightarrow \langle T, \rho(x, u')\rangle \text{ para toda } T \in (L^2(Q))' \cong L^2(Q).$$

Isso significa que

$$\int_Q \rho(x, u'_m) w \, dxdt \longrightarrow \int_Q \rho(x, u') w \, dxdt, \text{ para toda } w \in L^2(Q).$$

Escolhendo $w = v\theta$, $v \in H_0^2(\Omega), \theta \in \mathcal{D}(0,T)$, segue que $w \in L^2(Q)$ e portanto

$$\int_0^T \left(\int_\Omega \rho(x, u'_m) v(x) \, dx\right) \theta(t) dt \longrightarrow \int_0^T \left(\int_\Omega \rho(x, u') v(x) \, dx\right) \theta(t) dt$$

para $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$ e $v \in H_0^2(\Omega)$. Isto é,

$$\int_0^T (\rho(x, u'_m), v)_{L^2(\Omega)} \theta(t) dt \longrightarrow \int_0^T (\rho(x, u'), v)_{L^2(\Omega)} \theta(t) dt,$$

para toda $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$ e para toda $v \in H_0^2(\Omega)$. Desse modo, concluímos que

$$(\rho(x, u'_m), v)_{L^2(\Omega)} \longrightarrow (\rho(x, u'), v)_{L^2(\Omega)} \text{ em } \mathcal{D}'(0,T) \tag{2.24}$$

para toda $v \in H_0^2(\Omega)$.

Agora, queremos passar ao limite quando $m \longrightarrow \infty$ nos dois primeiros termos do problema aproximado (2.3).

Como podemos identificar $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ com o dual de $L^1(0, T; L^2(\Omega))$, o fato que $u'_m \rightharpoonup u'$ fraco* em $L^\infty(0,T; H_0^2(\Omega)) \subset L^\infty(0,T; L^2(\Omega))$ (ver (2.20)) significa dizer que para toda $w \in L^1(0,T; L^2(\Omega))$ tem-se que

$$\langle u'_m, w\rangle \longrightarrow \langle u', w\rangle.$$

[¶] ver cap.1, seção 1.7

Ou seja,

$$\int_0^T \int_\Omega u_m'(x,t)\, w(x,t)\, dxdt \longrightarrow \int_0^T \int_\Omega u'(x,t)\, w(x,t)\, dxdt \tag{2.25}$$

para toda $w \in L^1(0, T, L^2(\Omega))$.

Seja $w = \theta v$ com $\theta(t) \in L^1(0,T)$ e $v \in H_0^2(\Omega) \subset L^2(\Omega)$. Então, de (2.25) tem-se

$$\int_0^T (u_m'(t), v)_{L^2(\Omega)}\, \theta(t)\, dt \longrightarrow \int_0^T (u'(t), v)_{L^2(\Omega)}\, \theta(t)\, dt \tag{2.26}$$

para toda $\theta \in L^1(0,T)$ e para toda $v \in H_0^2(\Omega)$.

Tomemos $\theta \in \mathcal{D}(0,T) \subset L^1(0,T)$. Então, de (2.26) temos que

$$(u_m', v)_{L^2(\Omega)} \longrightarrow (u', v)_{L^2(\Omega)}$$

em $\mathcal{D}'(0,T)$ para toda $v \in H_0^2(\Omega)$. Portanto, para toda $v \in H_0^2(\Omega)$ vale que

$$(u_m'', v) = \frac{d}{dt}(u_m', v) \longrightarrow \frac{d}{dt}(u', v) = (u'', v) \tag{2.27}$$

em $\mathcal{D}'(0,T)$.

Agora, usando a convergência

$$u_m \rightharpoonup u \;\text{ fraco* em }\; L^\infty(0,T; H_0^2(\Omega)) \tag{2.28}$$

queremos mostrar que

$$b(u_m, v) \longrightarrow b(u,v)$$

em $L^\infty(0,T)$ para toda $v \in H_0^2(\Omega)$.

De fato, de (2.28) segue que

$$\triangle u_m \rightharpoonup \triangle u \;\text{ fraco* em }\; L^\infty(0,T; L^2(\Omega)) \cong \left(L^1(0,T, L^2(\Omega))\right)'.$$

Portanto, para toda $w \in L^1(0, T, L^2(\Omega))$ tem-se que

$$\int_0^T \int_\Omega (\triangle u_m) w \, dx dt \longrightarrow \int_0^T \int_\Omega (\triangle u) w \, dx dt.$$

Em particular, para $w = \theta \triangle v$, $\theta \in L^1(0, T)$, $v \in H_0^2(\Omega)$ vale a convergência acima, isto é,

$$\int_0^T \int_\Omega (\triangle u_m)(\triangle v) \theta \, dx dt \longrightarrow \int_0^T \int_\Omega (\triangle u)(\triangle v) \theta \, dx dt.$$

Então,

$$\int_0^T \left(\int_\Omega (\triangle u_m)(\triangle v) \, dx \right) \theta \, dt \longrightarrow \int_0^T \left(\int_\Omega (\triangle u)(\triangle v) \, dx \right) \theta \, dt$$

para toda $\theta \in L^1(0, T)$ e para toda $v \in H_0^2(\Omega)$. Isso diz que

$$\int_0^T \left(\triangle u_m, \triangle v \right)_{L^2(\Omega)} \theta \, dt \longrightarrow \int_0^T \left(\triangle u, \triangle v \right)_{L^2(\Omega)} \theta \, dt$$

para toda $\theta \in L^1(\Omega)$ e para toda $v \in H_0^2(\Omega)$. Portanto,

$$\left(\triangle u_m, \triangle v \right)_{L^2(\Omega)} \rightharpoonup \left(\triangle u, \triangle v \right)_{L^2(\Omega)}$$

fraco* em $L^\infty(0, T)$ para cada $v \in H_0^2(\Omega)$. Assim, relembrando a definição da forma $b(u, v)$ temos que para cada $v \in H_0^2(\Omega)$

$$b(u_m, v) \longrightarrow b(u, v)$$

fraco* em $L^\infty(0, T)$. Em particular,

$$b(u_m, v) \longrightarrow b(u, v) \tag{2.29}$$

em $\mathcal{D}'(0, T)$ para toda $v \in H_0^2(\Omega)$.

Portanto, de (2.24), (2.27) e (2.29) resulta que a função u dada em (2.20) satisfaz a equação variacional

$$(u'', v) + b(u, v) + (\rho(x, u'), v) = 0,$$

para toda $v \in H_0^2(\Omega)$, no sentido de $\mathcal{D}'(0,T)$.

Isso implica que

$$u'' + \triangle^2 u + \rho(x, u') = 0 \tag{2.30}$$

no sentido de $\mathcal{D}'(\Omega)$ para cada $t \in [0,T]$.

Usando o fato que $\triangle^2$ é um operador elíptico de ordem quatro, que $\triangle^2 u(t) = -u''(t) - \rho(x, u'(t))$ no sentido de $\mathcal{D}'(\Omega)$ e que u'' e $\rho(x,u') \in L^2(\Omega)$, para cada $t \in [0,T]$, segue do Teorema de Regularidade elíptica [||] que

$$u(t) \in H^4(\Omega)$$

para cada $t \in [0,T]$. Mas, como já sabemos que $u \in L^\infty(0,T; H_0^2(\Omega))$ então se conclui que

$$u \in L^\infty(0,T; H_0^2(\Omega) \cap H^4(\Omega)).$$

Observação: o fato que $\rho(x,u') \in L^2(\Omega)$ para cada $t \in [0,T]$ é provada de modo semelhante a justificativa da Afirmação 1.

Assim, a função u dada em (2.20) é tal que

$$u \in L^\infty(0,T; H_0^2(\Omega) \cap H^4(\Omega))$$

$$u' \in L^\infty(0,T; H_0^2(\Omega))$$

$$u'' \in L^\infty(0,T; L^2(\Omega))$$

e satisfaz (2.30) no sentido de $\mathcal{D}'(\Omega)$ para cada $t \in [0,T]$.

Então, verificando as convergências que produziram (2.24), (2.27) e (2.29), mais a segunda fórmula de Green, resulta que

$$u'' + \triangle^2 u + \rho(x, u') = 0 \tag{2.31}$$

[||] ver cap1; seção 1.7

no sentido de $L^2(Q)$. Assim, u é solução forte da equação em (2.1).

2.2 Análise das Condições Iniciais

Queremos mostrar agora, que a função u dada em (2.20) também satisfaz as condições inicias da problema (2.1), isto é,

$$u(0) = u_0 \qquad \text{e} \qquad u^{'}(0) = u_1$$

Para fazer isso, vamos considerar a seguinte proposição:

Proposição 2.1 *Sejam V_1 e V_2 espaços de Hilbert tal que $V_1 \subset V_2$ continuamente. Seja $W(0,T) = \{u \in L^p(0,T;V_1) : \dfrac{du}{dt} \in L^p(0,T;V_2)\}$. Então $W(0,T)$ está imerso continuamente em $C(0,T;V_2)$.*

A demostração pode ser encontrada em Lions [20].

Lembremos que a solução u de (2.31), dada em (2.20), é tal que $u \in L^\infty(0,T;H_0^2(\Omega) \cap H^4(\Omega))$ com $u^{'} \in L^\infty(0,T;H_0^2(\Omega))$ e $u^{''} \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$. Logo, $u \in W(0,T)$ com $p = \infty$ e $V_1 = V_2 = H_0^2(\Omega)$. Portanto, pela proposição acima tem-se que

$$u \in C([0,T],H_0^2(\Omega)).$$

Também, $u^{'} \in W(0,T)$ com $p = \infty$ e $V_1 = H_0^2(\Omega)$ e $V_2 = L^2(\Omega)$. Assim, pela Proposição 2.1

$$u^{'} \in C(0,T;L^2(\Omega)).$$

Logo, faz sentido calcular $u(0)$ e $u^{'}(0)$.

Vamos então calcular $u(0)$. Temos que

$$u_m^{'} \rightharpoonup u^{'} \text{ fraco* em } L^\infty(0,T;H_0^2(\Omega))$$

como já foi visto em (2.20).

Então, como em (2.25) e (2.26), escolhendo $w = v\theta$ com $v \in H_0^2(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ e $\theta \in L^1(0,T)$ tem-se:

$$\int_0^T (u_m^{'}, v)_{L^2(\Omega)}\theta\, dt \longrightarrow \int_0^T (u^{'}, v)_{L^2(\Omega)}\theta\, dt$$

para toda $\theta \in L^1(0,T)$. Em particular, para toda $\theta \in C^1(0,T)$ já que $C^1(0,T) \subset L^1(0,T)$.

Também, de (2.20) tem-se

$$u_m \rightharpoonup u \text{ fraco* em } L^\infty(0,T; H_0^2(\Omega)).$$

Então, como acima, para $v \in H_0^2(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ e $\varphi \in L^1(0,T)$ vale que:

$$\int_0^T (u_m, v)_{L^2(\Omega)}\varphi\, dt \longrightarrow \int_0^T (u, v)_{L^2(\Omega)}\varphi\, dt$$

para toda $\varphi \in L^1(0,T)$. Em particular, para toda $\varphi \in C(0,T)$ pois $C(0,T) \subset L^1(0,T)$.

Escolhendo $\varphi = \theta^{'}$ com $\theta \in C^1(0,T)$ concluimos que

$$\int_0^T (u_m^{'}, v)_{L^2(\Omega)}\theta\, dt \longrightarrow \int_0^T (u^{'}, v)_{L^2(\Omega)}\theta\, dt \tag{2.32}$$

e

$$\int_0^T (u_m, v)_{L^2(\Omega)}\theta^{'}\, dt \longrightarrow \int_0^T (u, v)_{L^2(\Omega)}\theta^{'}\, dt \tag{2.33}$$

para toda $v \in H_0^2(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ e para toda $\theta \in C^1(0,T)$ tal que $\theta(0) = 1$ e $\theta(T) = 0$.

Somando (2.32) e (2.33) temos que

$$\int_0^T \frac{d}{dt}\left[(u_m(t), v)_{L^2(\Omega)}\theta(t)\right] dt \longrightarrow \int_0^T \frac{d}{dt}\left[(u(t), v)_{L^2(\Omega)}\theta(t)\right] dt.$$

Então, usando o fato que $\theta(0) = 1$ e $\theta(T) = 0$ segue que

$$(u_m(0), v)_{L^2(\Omega)} \longrightarrow (u(0), v)_{L^2(\Omega)}$$

para toda $v \in H_0^2(\Omega) \subset L^2(\Omega)$. Mas como $u_m(0) = u_{0m} \longrightarrow u_0$ forte em $H_0^2(\Omega)$ (ver (2.3) e (2.4)) e portanto em $L^2(\Omega)$, tem-se que

$$(u_m(0), v)_{L^2(\Omega)} \longrightarrow (u_0, v)_{L^2(\Omega)}$$

para toda $v \in H_0^2(\Omega)$. Portanto, da unicidade do limite, concluimos que

$$u(0) = u_0. \tag{2.34}$$

De modo semelhante, mostra-se que

$$u'(0) = u_1. \tag{2.35}$$

Agora, de (2.31), (2.34) e (2.35) concluímos que a função u é solução do problema (2.1), já que as condições de fronteira em (2.1) estão satisfeitas pois $u \in H_0^2(\Omega)$.

Resta então, verificar a unicidade da solução u.

2.3 Unicidade da Solução u

Suponhamos que existem duas soluções u e v do problema (2.1) na classe $C(0,\infty; H_0^2(\Omega) \cap H^4(\Omega)) \cap C^1(0,\infty; H_0^2(\Omega))$. Então $w = u - v$ é solução de

$$\begin{cases} w_{tt} + \triangle^2 w + \rho(x, u_t) - \rho(x, v_t) = 0 & x \in \Omega,\ t \geq 0 \\ w(x,0) = w_t(x,0) = 0 & x \in \Omega \\ w(x,t) = \frac{\partial w}{\partial \eta}(x,t) = 0 & x \in \partial\Omega,\ t \geq 0 \end{cases} \tag{2.36}$$

Multiplicando a equação em (2.36) por w_t, integrando em Ω e usando as condições de fronteira para w dadas em (2.36), resulta que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega [|w_t|^2 + |\triangle w|^2]dx + \int_\Omega [\rho(x,u_t) - \rho(x,v_t)]w_t\, dx = 0$$

para todo $t \geq 0$.

Agora, integrando em $[0,t]$, $t \geq 0$, e usando as condições iniciais dadas em (2.36) segue que

$$\frac{1}{2}\int_\Omega [|w_t|^2 + |\triangle w|^2]dx + \int_0^t \int_\Omega [\rho(x,u_t) - \rho(x,v_t)]w_t\, dxds = 0$$

para todo $t \geq 0$. Ou seja,

$$E(t) + \int_0^t \int_\Omega [\rho(x,u_t) - \rho(x,v_t)]w_t\, dxds = 0$$

para todo $t \geq 0$, onde $E(t) = E(w(t))$ é a energia para a solução $w(t)$.

Como $\rho(x,s)$ é diferenciável na variável s, segue do Teorema do Valor Médio do Cálculo que

$$E(t) + \int_0^t \int_\Omega \frac{\partial\rho}{\partial s}(x,\xi)[u_t - v_t]w_t\, dxds = 0,$$

sendo $\xi = \xi(x,s)$ um número entre $u_t(x,s)$ e $v_t(x,s)$.

Isto é,

$$E(t) + \int_0^t \int_\Omega \frac{\partial\rho}{\partial s}(x,\xi)|w_t|^2\, dxds = 0$$

para todo $t \geq 0$.

Como $\dfrac{\partial\rho}{\partial s}(x,s) \geq 0$ para todo $x \in \Omega$ e para todo $s \in \mathbb{R}$ resulta que

$$E(t) = E(w(t)) = 0, \quad \forall\, t \geq 0.$$

Portanto, $w_t(x,t) = 0$ q.s em $\Omega \times (0,\infty)$. Daí segue que $w(x,t)$ é constante q.s em $\Omega \times (0,\infty)$. Mas $w(x,t) = 0$ para $x \in \partial\Omega$ e para todo $t \geq 0$. Logo concluimos que $w(x,t) = 0$ q.s em $\Omega \times (0,\infty)$. Isto é, $u = v$. Conseqüentemente, o problema (2.1) tem uma única solução.

Capítulo 3

Estabilização

Neste capítulo vamos estudar taxas de decaimento da energia da solução $u(x,t)$ do sistema (2.1). Para isso, consideremos $x_0 \in \mathbb{R}^n$ um vetor fixo e

$$\Gamma(x_0) = \{x \in \Gamma;\ (x - x_0).\eta(x) \geq 0\}$$

onde $\eta = \eta(x)$ é o vetor normal unitário exterior calculado em $x \in \Gamma = \partial\Omega$.

Aqui, explicitaremos mais condições sobre a função $a(x)$ que aparece nas hipóteses (2.2) sobre a função $\rho(x,s)$.

Seja então, $\omega \subset \bar{\Omega}$ uma vizinhança de $\Gamma(x_0)$ e assumiremos que $a : \bar{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ é uma função limitada satisfazendo

$$a(x) \geq 0 \text{ em } \bar{\Omega} \text{ e } a(x) \geq a_0 > 0 \text{ em } \omega. \tag{3.1}$$

O objetivo é estudar a estabilização uniforme da energia total $E(t)$, do sistema (2.1), dada por

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|u_t|^2 + |\triangle u|^2\right) dx. \tag{3.2}$$

Isso é possível, porque a energia $E(t)$ satisfaz a seguinte identidade:

$$E(t) - E(t+T) = \int_t^{t+T} \int_\Omega \rho(x, u_t) u_t \, dx dt, \quad t \geq 0, \quad T > 0. \qquad (3.3)$$

Assim, a energia é uma função decrescente, já que $\rho(x, u_t)u_t \geq 0$ para todo $t \geq 0$ (ver hipóteses (2.2) sobre $\rho(x, u_t)$).

A identidade (3.3) é obtida fazendo o produto da equação em (2.1) com u_t e integrando em $[t, t+T] \times \Omega$.

Teorema 3.1 (Estabilização) *Considerando a hipótese (3.1) sobre $a(x)$ e as hipóteses (2.2) sobre a função $\rho(x, s)$, tem-se que a energia total da solução $u = u(x, t)$ do problema (2.1) tem o seguinte comportamento assintótico no tempo:*

$$E(t) = E\big(u(x,t)\big) \leq CE(0)(1+t)^{-\gamma_i}, \quad i = 1, 2, \qquad (3.4)$$

onde C é uma constante positiva e as taxas de decaimento γ_i são dadas de acordo com os seguintes casos:

caso 1: $\gamma_1 = \dfrac{2}{p}$ *se* $1 \leq p \leq 2$ *e* $\gamma_1 = p + 1$ *se* $0 \leq p \leq 1$

caso 2: $\gamma_2 = p + 1$ *se* $-1 < p < 0$

Observação: Observemos que no caso em que $p = 0$ pode-se provar que a taxa de decaimento é exponencial (ver [5] e [32]).

Para provar este teorema vamos precisar de alguns lemas e estimativas especiais sobre a solução u.

3.1 Lema de Nakao

Para provar a estabilização da energia $E(t)$ vamos mostrar que $E(t)$ satisfaz uma desigualdade do tipo:

$$E(t)^{\epsilon_i} \leq C_i[E(t) - E(t+T)], \quad t \geq 0 \tag{3.5}$$

onde C_i é uma constante positiva, $T > 0$ está fixo e $\epsilon_i > 1$ está relacionado com γ_i, que são dados no Teorema 3.1.

Então, a propriedade de decaimento (3.4) seguirá de (3.5) e do seguinte lema:

Lema 3.1 (Nakao) *Seja $\varphi(t)$ uma função não negativa em $\mathbb{R}^+$ satisfazendo para $t \geq 0$:*

$$\sup_{t \leq s \leq t+T} \varphi(s)^{1+\delta} \leq g(t)[\varphi(t) - \varphi(t+T)]$$

com $T > 0$, $\delta \geq 0$ e $g(t)$ uma função contínua não decrescente.

Se $\delta > 0$ então $\varphi(t)$ satisfaz

$$\varphi(t) \leq \left\{\varphi(0)^{-\delta} + \int_T^t g(s)^{-1}\, ds\right\}^{\frac{-1}{\delta}}, \quad t \geq T.$$

Se $\delta = 0$, ao invés da desigualdade acima temos que

$$\varphi(t) \leq C\varphi(0)\exp^{-\lambda t}, \quad t \geq 0$$

para algum $\lambda > 0$.

3.2 Identidades de Energia

Para provar (3.5) também precisamos desenvolver algumas identidades de energia. Seja $h : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ um campo vetorial de classe C^2 tal que

$$\begin{aligned} h(x) &= \eta(x) \quad \text{em} \quad \Gamma(x_0) \\ h(x).\eta(x) &\geq 0 \quad \text{em} \quad \Gamma \\ h(x) &= 0 \quad \text{em} \quad \Omega\backslash\hat{\omega} \end{aligned} \tag{3.6}$$

onde $\hat{\omega}$ é um aberto do $\mathbb{R}^n$ tal que $\Gamma(x_0) \subset \hat{\omega} \cap \bar{\Omega} \subset \omega$ (para a existência de tal campo h veja Lions [18]).

Com o uso do multiplicador $M(u) = h.\nabla u$, sendo $u(x,t)$ a solução do sistema (2.1), obteremos uma determinada identidade de energia.

Vamos considerar também, uma função $m \in W^{2,\infty}(\Omega)$ tal que $\dfrac{|\nabla m|^2}{m}$ e $\dfrac{|\triangle m|^2}{m}$ são limitados e

$$\begin{aligned} 0 \leq m \leq 1 &\quad \text{em} \quad \Omega \\ m = 1 &\quad \text{em} \quad \tilde{\omega} \\ m = 0 &\quad \text{em} \quad \bar{\Omega}\backslash\omega \end{aligned} \tag{3.7}$$

onde $\tilde{\omega} \subset \bar{\Omega}$ é um aberto em $\bar{\Omega}$ com $\Gamma(x_0) \subset \tilde{\omega} \subset \omega \subset \bar{\Omega}$. Evidentemente, uma tal função $m(x)$ existe (veja Lions [18] e Tucsnak [29], [30]).

Os multiplicadores $M(u) = u$ e $M(u) = m(x)u$ também produzem identidades de energia.

Lema 3.2 *Sejam $h : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^2, $m \in W^{2,\infty}(\Omega)$, u a solução de (2.1) e $T > 0$ fixo. Então as seguintes identidades são válidas para todo $t \geq 0$:*

$$\left[\int_\Omega u_t u\, dx\right]_t^{t+T} - \int_t^{t+T}\int_\Omega u_t^2\, dxds + \int_t^{t+T}\int_\Omega |\triangle u|^2\, dxds \\ + \int_t^{t+T}\int_\Omega \rho(x,u_t)u\, dxds = 0. \tag{3.8}$$

$$\int_t^{t+T}\int_\Omega \left[m(x)|\triangle u|^2 - m(x)|u_t|^2\right] dxds = \\ -\left[\int_\Omega m(x)uu_t\, dx\right]_t^{t+T} - \int_t^{t+T}\int_\Omega m(x)u\rho(x,u_t)\, dxds \\ -\int_t^{t+T}\int_\Omega \left[u\triangle u \triangle m + 2\triangle u\nabla u.\nabla m\right] dxds. \tag{3.9}$$

$$\left[\int_\Omega u_t(h.\nabla u)\, dx\right]_t^{t+T} + \frac{1}{2}\int_t^{t+T}\int_\Omega (divh)|u_t|^2\, dxds \\ + \int_t^{t+T}\int_\Omega \rho(x,u_t)(h.\nabla u)\, dxds - \frac{1}{2}\int_t^{t+T}\int_\Omega (divh)|\triangle u|^2\, dxds \\ +2\int_t^{t+T}\int_\Omega \sum_{j,k=1}^{n} D_jh^k(D_jD_ku)\triangle u\, dxds + \int_t^{t+T}\int_\Omega (\triangle h.\nabla u)\triangle u\, dxds \\ = \frac{1}{2}\int_t^{t+T}\int_\Gamma (h.\eta)|\triangle u|^2\, d\Gamma ds \tag{3.10}$$

onde h^k *indica a k-ésima componente do campo* h, $D_j = \dfrac{\partial}{\partial x_j}$, $\triangle h = (\triangle h^1, \cdots, \triangle h^n)$ *e* $\eta = \eta(x)$ *é a normal ao ponto* $x \in \Gamma = \partial\Omega$.

$$\left[\int_\Omega u_t(x-x_0).\nabla u\, dx\right]_t^{t+T} + \frac{n}{2}\int_t^{t+T}\int_\Omega |u_t|^2\, dxds \\ + \int_t^{t+T}\int_\Omega \rho(x,u_t)((x-x_0).\nabla u)\, dxds + \left(2-\frac{n}{2}\right)\int_t^{t+T}\int_\Omega |\triangle u|^2\, dxds \\ = \frac{1}{2}\int_t^{t+T}\int_\Gamma (x-x_0).\eta|\triangle u|^2\, d\Gamma ds. \tag{3.11}$$

Demonstração:

As identidades (3.8), (3.9) e (3.10) são obtidas fazendo o produto da equação em (2.1) com os multiplicadores $M(u) = u$, $M(u) = m(x)u$ e $M(u) = h.\nabla u$ respectivamente, integrando em $\Omega \times [t, t+T]$ e usando o fato que $u = \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = 0$ sobre $\Gamma \times \mathbb{R}^+$, já que u, $u_t \in H_0^2(\Omega)$ para cada $t \geq 0$.

A identidade (3.11) é um caso particular da equação (3.10) quando $h(x) = (x - x_0)$. Em (3.10) não usamos as propriedades (3.6) do campo vetorial h. Idem em (3.9) as propriedades (3.7) da função $m(x)$.

$\square$

3.3 Estimativas de Energia

Observamos que em todas as estimativas que se seguirem, a letra C poderá indicar diferentes constantes positivas.

A primeira estimativa é dada pelo seguinte lema:

Lema 3.3 *Seja $T > 0$ fixo. Então existem $\gamma > 0$ e $\beta > 0$ tal que a solução $u(x,t)$ de (2.1) satisfaz a seguinte desigualdade:*

$$\gamma \int_t^{t+T} E(s)\, ds \leq C\big[E(t+T) + E(t)\big] +$$
$$+ \int_t^{t+T} \int_\Omega |\rho(x,u_t)|\big[|u| + \beta M|\nabla u|\big]\, dxds + \frac{\beta}{2} \int_t^{t+T} \int_{\Gamma(x_0)} (x - x_0).\eta| \triangle u|^2\, d\Gamma ds$$

onde $M = \sup_{\bar\Omega} |x - x_0|$ e $E = E(t)$ é a energia associada a solução $u(x,t)$.

Demonstração:

Multiplicando (3.11) por β, $\beta > 0$ e depois somando com (3.8) resulta:

$$\begin{aligned}
&\int_t^{t+T} \int_\Omega \Big[(1 + \beta\frac{(4-n)}{2})| \triangle u|^2 + (\frac{n\beta}{2} - 1)|u_t|^2\Big]\, dxds \\
&\quad + \int_t^{t+T} \int_\Omega \rho(x,u_t)[u + \beta(x - x_0).\nabla u]\, dxds \qquad (3.12)\\
&\quad + \Big[\int_\Omega u_t[u + \beta(x - x_0).\nabla u]\, dx\Big]_t^{t+T} - \frac{\beta}{2}\int_t^{t+T}\int_\Gamma (x - x_0).\eta| \triangle u|^2\, d\Gamma ds = 0.
\end{aligned}$$

Agora, fixamos $\beta > 0$ tal que $\frac{n\beta}{2} - 1 > 0$ e tomamos

$$\gamma = min\Big\{2(1 + \beta\frac{4-n}{2}),\ 2(\frac{n\beta}{2} - 1)\Big\}.$$

Portanto $\gamma > 0$.

Então, de (3.12) se obtém que

$$
\begin{aligned}
\gamma \int_t^{t+T} E(s)\,ds &\leq -\Big[\int_\Omega u_t[u+\beta(x-x_0).\nabla u]\,dx\Big]_t^{t+T} \\
-\int_t^{t+T}\int_\Omega \rho(x,u_t)[u+\beta(x-x_0).\nabla u]\,dxds &+ \frac{\beta}{2}\int_t^{t+T}\int_\Gamma (x-x_0).\eta|\triangle u|^2\,d\Gamma ds \\
\leq \Big[\int_\Omega |u_t|[|u|+\beta|x-x_0||\nabla u|]\,dx\Big]_t^{t+T} &+ \int_t^{t+T}\int_\Omega |\rho(x,u_t)|[|u|+\beta|x-x_0||\nabla u|]\,dxds \\
&+\frac{\beta}{2}\int_t^{t+T}\int_{\Gamma(x_0)} (x-x_0).\eta|\triangle u|^2\,d\Gamma ds
\end{aligned}
$$

já que $(x-x_0).\eta \leq 0$ em $\Gamma\backslash\Gamma(x_0)$.

Então, sendo $M = \sup_{x\in\bar{\Omega}} |x-x_0|$, da estimativa acima segue que:

$$
\begin{aligned}
\gamma \int_t^{t+T} E(s)\,ds \leq & \int_\Omega |u_t|\,[|u|+\beta M|\nabla u|\,]\,dx\Big|_t^{t+T} \\
&+ \int_t^{t+T}\int_\Omega |\rho(x,u_t)|\,[\,|u|+\beta M|\nabla u|\,]\,dxds \qquad (3.13)\\
&+ \frac{\beta}{2}\int_t^{t+T}\int_{\Gamma(x_0)} (x-x_0).\eta|\triangle u|^2\,d\Gamma ds.
\end{aligned}
$$

Como a solução $u \in H_0^2(\Omega)$ então devido a desigualdade de Poincaré (ver cap.1, seção 1.5) segue que

$$
||u||_{L^2(\Omega)} \leq C||\nabla u||_{L^2(\Omega)} \leq C||\triangle u||_{L^2(\Omega)}
$$

para todo $t \geq 0$.

Então, de (3.13) resulta que

$$
\begin{aligned}
\gamma \int_t^{t+T} E(s)\,ds \leq & \; C\Big[||u_t||_{L^2(\Omega)}||\triangle u||_{L^2(\Omega)}\Big]_t^{t+T} \\
&+ \int_t^{t+T}\int_\Omega |\rho(x,u_t)|[|u|+\beta M|\nabla u|]\,dxds \qquad (3.14)\\
&+ \frac{\beta}{2}\int_t^{t+T}\int_{\Gamma(x_0)} (x-x_0).\eta|\triangle u|^2\,d\Gamma ds.
\end{aligned}
$$

Mas, observemos que

$$
\begin{aligned}
\Big[\|u_t\|_{L^2(\Omega)}\| \triangle u\|_{L^2(\Omega)}\Big]_t^{t+T} &= \|u_t(t+T)\|\| \triangle u(t+T)\| - \|u_t(t)\|\| \triangle u(t)\| \\
&\leq \frac{\|u_t(t+T)\|^2}{2} + \frac{\| \triangle u(t+T)\|^2}{2} + \frac{\|u_t(t)\|^2}{2} + \frac{\| \triangle u(t)\|^2}{2} \\
= \frac{1}{2}\int_\Omega \Big(|u_t(t+T)|^2 + | \triangle u(t+T)|^2\Big)\,dx &+ \frac{1}{2}\int_\Omega \Big(|u_t(t)|^2 + | \triangle u(t)|^2\Big)\,dx \\
&= E(t+T) + E(t)
\end{aligned}
$$

Portanto, de (3.14) e da observação acima segue que

$$
\gamma \int_t^{t+T} E(s)\,ds \leq C\big(E(t+T) + E(t)\big)
$$

$$
+ \int_t^{t+T} \int_\Omega |\rho(x, u_t)|[|u| + \beta M|\nabla u|]\,dxds + \frac{\beta}{2}\int_t^{t+T} \int_{\Gamma(x_0)} (x - x_0).\eta| \triangle u|^2\,d\Gamma ds.
$$

Isso prova o Lema 3.3.

$\square$

Lema 3.4 *Sejam $T > 0$ fixo e u a solução de (2.1). Então,*

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_t^{t+T} \int_{\Gamma(x_0)} | \triangle u|^2 d\Gamma ds \leq \Big[\int_\Omega u_t(h.\nabla u)\,dx\Big]_t^{t+T} &+ \frac{1}{2}\int_t^{t+T} \int_\Omega (divh)|u_t|^2\,dxds \\
+ \int_t^{t+T} \int_\Omega \rho(x, u_t)(h.\nabla u)\,dxds &- \frac{1}{2}\int_t^{t+T} \int_\Omega (divh)| \triangle u|^2\,dxds \\
+2\int_t^{t+T} \int_\Omega \sum_{j,k=1}^{n} (D_j h^k)(D_j D_k u) \triangle u\,dxds &+ \int_t^{t+T} \int_\Omega (\triangle h.\nabla u) \triangle u\,dxds,
\end{aligned}
$$

onde h é o campo dado em (3.6), h^k é a k-ésima componente de h e $D_j = \dfrac{\partial}{\partial x_j}$.

Demonstração:

Considerando as propriedades (3.6) do campo vetorial h e a identidade

(3.10) obtemos que

$$\frac{1}{2}\int_t^{t+T}\int_{\Gamma(x_0)} |\triangle u|^2 d\Gamma ds = \frac{1}{2}\int_t^{t+T}\int_{\Gamma(x_0)} (h.\eta)|\triangle u|^2 d\Gamma ds$$

$$\leq \frac{1}{2}\int_t^{t+T}\int_{\Gamma} (h.\eta)|\triangle u|^2 d\Gamma ds = \left[\int_\Omega u_t(h.\nabla u)\,dx\right]_t^{t+T}$$

$$+\frac{1}{2}\int_t^{t+T}\int_\Omega (divh)|u_t|^2\,dxds + \int_t^{t+T}\int_\Omega \rho(x,u_t)(h.\nabla u)\,dxds$$

$$-\frac{1}{2}\int_t^{t+T}\int_\Omega (divh)|\triangle u|^2\,dxds + 2\int_t^{t+T}\int_\Omega \sum_{j,k=1}^{n}(D_jh^k)(D_jD_ku)\triangle u\,dxds$$

$$+\int_t^{t+T}\int_\Omega (\triangle h.\nabla u)\triangle u\,dxds.$$

Portanto, o Lema 3.4 está provado.

□

Agora, vamos estimar cada termo da desigualdade que aparece no Lema 3.4.

Lema 3.5 *Sejam $T>0$ fixo, $h:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ um campo vetorial de classe C^2 com as propriedades (3.6) e u a solução de (2.1). Então,*

$$\left|\int_\Omega u_t(h.\nabla u)\,dx\right|_t^{t+T} \leq C\big(E(t+T)+E(t)\big) \tag{3.15}$$

$$\left|\frac{1}{2}\int_t^{t+T}\int_\Omega (divh)|u_t|^2\,dxds\right| \leq C\int_t^{t+T}\int_{\bar\Omega\cap\hat\omega} |u_t|^2\,dxds \tag{3.16}$$

$$\left|\int_t^{t+T}\int_\Omega \rho(x,u_t)(h.\nabla u)\,dxds\right| \leq C\int_t^{t+T}\int_\Omega |\rho(x,u_t)||\nabla u|\,dxds \tag{3.17}$$

$$\left|\int_t^{t+T}\int_\Omega (\triangle h.\nabla u)\triangle u\,dxds\right| \leq C\int_t^{t+T}\int_{\bar\Omega\cap\hat\omega} |\triangle u|^2\,dxds \tag{3.18}$$

$$\left|2\int_t^{t+T}\int_\Omega \sum_{j,k=1}^{n}(D_jh^k)(D_jD_ku)\triangle u\,dxds\right| \leq C\int_t^{t+T}\int_{\bar\Omega\cap\hat\omega} |\triangle u|^2\,dxds \tag{3.19}$$

$$\left|-\frac{1}{2}\int_t^{t+T}\int_\Omega (divh)|\triangle u|^2\,dxds\right| \leq C\int_t^{t+T}\int_{\bar\Omega\cap\hat\omega} |\triangle u|^2\,dxds \tag{3.20}$$

onde $\hat\omega$ está citado nas propriedades (3.6) sobre o campo h.

Demonstração:

Usando o fato que h é de classe C^2 e a Desigualdade de Poincaré temos:

$$\left|\int_\Omega u_t(h.\nabla u)\,dx\right|_t^{t+T} \leq C\Big[\int_\Omega |u_t||\nabla u|\Big]_t^{t+T} \leq C\Big[\|u_t\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\Big]_t^{t+T}$$

$$\leq \Big[\|u_t\|_{L^2(\Omega)}\|\triangle u\|_{L^2(\Omega)}\Big]_t^{t+T} \leq C\big(E(t+T)+E(t)\big),$$

e fica provado (3.15).

Para provar as demais estimativas, vamos usar o fato que $h = 0$ em $\bar{\Omega}\backslash\hat{\omega}$ e que h é de classe C^2 em $\bar{\Omega}$. Daí,

$$\left|\frac{1}{2}\int_t^{t+T}\int_\Omega (divh)|u_t|^2\,dxds\right|$$

$$\leq \frac{1}{2}\int_t^{t+T}\int_{\bar{\Omega}\cap\hat{\omega}} |divh||u_t|^2\,dxds \leq C\int_t^{t+T}\int_{\bar{\Omega}\cap\hat{\omega}} |u_t|^2\,dxds.$$

Portanto, (3.16) está provada.

Agora,

$$\left|\int_t^{t+T}\int_\Omega \rho(x,u_t)(h.\nabla u)\,dxds\right|$$

$$\leq \int_t^{t+T}\int_\Omega |\rho(x,u_t)||h||\nabla u|\,dxds \leq C\int_t^{t+T}\int_\Omega |\rho(x,u_t)||\nabla u|\,dxds.$$

Portanto, (3.17) é válida.

Usamos a Desigualdade de Poincaré para provar (3.18). Assim,

$$\left|\int_t^{t+T}\int_\Omega (\triangle h.\nabla u)\triangle u\,dxds\right| \leq \int_t^{t+T}\int_{\bar{\Omega}\cap\hat{\omega}} |\triangle h||\nabla u||\triangle u|\,dxds$$

$$\leq C\int_t^{t+T}\int_{\bar{\Omega}\cap\hat{\omega}} |\nabla u||\triangle u|\,dxds \leq C\int_t^{t+T}\Big(\int_{\bar{\Omega}\cap\hat{\omega}} |\nabla u|^2\,dx\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_{\bar{\Omega}\cap\hat{\omega}} |\triangle u|^2\,dx\Big)^{\frac{1}{2}}ds$$

$$\leq C\int_t^{t+T}\Big(\int_{\bar{\Omega}\cap\hat{\omega}} |\triangle u|^2\,dx\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_{\bar{\Omega}\cap\hat{\omega}} |\triangle u|^2\,dx\Big)^{\frac{1}{2}}ds = C\int_t^{t+T}\int_{\bar{\Omega}\cap\hat{\omega}} |\triangle u|^2\,dxds,$$

onde a última desigualdade é devido a Poincaré aplicada ao ∇u, já que ∇u anula em parte do bordo de $\bar{\Omega} \cap \hat{\omega}$ (ver observações sobre desigualdede de Poincaré; Capítulo 1, seção 1.5), pois $\Gamma(x_0) \subset \bar{\Omega} \cap \hat{\omega}$.

Assim também a estimativa (3.18) é válida.

Agora estimamos

$$\left|2\int_t^{t+T}\int_\Omega \sum_{j,k=1}^n (D_jh^k)(D_jD_ku)\Delta u\, dxds\right| \leq 2\int_t^{t+T}\int_{\bar{\Omega}\cap\hat{\omega}} \sum_{j,k=1}^n |D_jh^k||D_jD_ku||\Delta u|\, dxds$$

$$\leq C\int_t^{t+T}\int_{\bar{\Omega}\cap\hat{\omega}} \sum_{j,k=1}^n |D_jD_ku||\triangle u|\, dxds$$

$$\leq C\int_t^{t+T}\left[\Big(\int_{\bar{\Omega}\cap\hat{\omega}} \sum_{j,k=1}^n |D_jD_ku|^2\, dx\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_{\bar{\Omega}\cap\hat{\omega}} |\triangle u|^2\, dx\Big)^{\frac{1}{2}}\right] ds$$

$$\leq C\int_t^{t+T}\Big(\int_{\bar{\Omega}\cap\hat{\omega}} |\triangle u|^2\, dx\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_{\bar{\Omega}\cap\hat{\omega}} |\triangle u|^2\, dx\Big)^{\frac{1}{2}} ds = C\int_t^{t+T}\int_{\bar{\Omega}\cap\hat{\omega}} |\triangle u|^2\, dxds$$

devido a desigualdade de Poincaré para $\bar{\Omega} \cap \hat{\omega}$ já que $\nabla u = 0$ em parte da fronteira de $\bar{\Omega} \cap \hat{\omega}$, isto é, sobre $\Gamma \cap (\bar{\Omega} \cap \hat{\omega})$.

Logo, (3.19) também é válida.

A prova de (3.20) é imediata já que $h = 0$ fora de $\bar{\Omega} \cap \hat{\omega}$ e $divh$ é limitado sobre $\bar{\Omega}$.

Portanto, o Lema 3.5 está provado.

□

Agora, vamos usar o Lema 3.5 para provar o próximo lema:

Lema 3.6 *Sejam $T > 0$ fixo e u a solução de (2.1). Então,*

$$\frac{1}{2}\int_t^{t+T}\int_{\Gamma(x_0)} |\triangle u|^2\, d\Gamma ds \leq C\Big[E(t) + E(t+T)$$

$$+\int_t^{t+T}\int_{\bar{\Omega}\cap\hat{\omega}} |u_t|^2\, dxds + \int_t^{t+T}\int_{\bar{\Omega}\cap\hat{\omega}} |\triangle u|^2\, dxds + \int_t^{t+T}\int_\Omega |\rho(x,u_t)||\nabla u|\, dxds\Big]$$

Demonstração:

A prova é imediata. Basta substituir as estimativas (3.15) - (3.20) do Lema 3.5 na estimativa dada no Lema 3.4.

□

A seguir, queremos estimar o termo

$$\int_t^{t+T}\int_{\bar{\Omega}\cap\hat{\omega}} |\triangle u|^2\, dxds.$$

Temos então o seguinte lema

Lema 3.7 *Para $T > 0$ e u a solução de (2.1) vale que*

$$\int_t^{t+T}\int_{\bar{\Omega}\cap\hat{\omega}} |\triangle u|^2\, dxds \le C\Big[E(t) + E(t+T)$$

$$+\int_t^{t+T}\int_\Omega |\rho(x,u_t)||u|\, dxds + \int_t^{t+T}\int_\omega |\nabla u|^2\, dxds + \int_t^{t+T}\int_\omega |u|^2\, dxds\Big],$$

onde ω é citado nas propriedades (3.1) sobre a função $a(x)$ que localiza a dissipação.

Demonstração:

Vamos limitar cada termo que aparece na identidade (3.9) do Lema 3.2, com $m(x)$ uma função com as propriedades (3.7).

$$\left|\Big[\int_\Omega m(x)uu_t\, dx\Big]_t^{t+T}\right| \le \Big[\int_\Omega |m(x)||u||u_t|\, dx\Big]_{t+T} + \Big[\int_\Omega |m(x)||u||u_t|\, dx\Big]_t$$

$$\le \|m\|_\infty \int_\Omega |u(t+T)||u_t(t+T)|\, dx + \|m\|_\infty \int_\Omega |u(t)||u_t(t)|\, dx \qquad (3.21)$$

$$\le C\|u(t)\|_{L^2(\Omega)}\|u_t(t)\|_{L^2} + \|u(t+T)\|_{L^2(\Omega)}\|u_t(t+T)\|_{L^2} \le C\Big[E(t) + E(t+T)\Big]$$

devido a desigualdade de Poincaré já que $u \in H_0^2(\Omega)$.

Agora, note que

$$\left|\int_t^{t+T}\int_\Omega um(x)\rho(x,u_t)\,dxds\right| \leq \int_t^{t+T}\int_\Omega |u||\rho(x,u_t)|\,dxds \tag{3.22}$$

pois $0 \leq m(x) \leq 1$ sobre Ω.

Finalmente, usando que $m = 0$ fora de ω, temos

$$\begin{aligned}
&\left|\int_t^{t+T}\int_\Omega [u \triangle u \triangle m + 2 \triangle u(\nabla u.\nabla m)]\,dxds\right| \\
&\leq \int_t^{t+T}\int_\omega \big[|u|| \triangle u|| \triangle m| + 2| \triangle u||\nabla u||\nabla m|\big]\,dxds \\
&= \int_t^{t+T}\int_\omega \left[\frac{| \triangle m|}{\sqrt{\frac{m}{2}}}|u|\sqrt{\frac{m}{2}}| \triangle u| + 2\sqrt{m}| \triangle u||\nabla u|\frac{|\nabla m|}{\sqrt{m}}\right] dxds \\
&\leq \int_t^{t+T}\left\{\Big(\int_\omega 2\frac{| \triangle m|^2}{m(x)}|u|^2\,dx\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_\omega \frac{m(x)}{2}| \triangle u|^2\,dx\Big)^{\frac{1}{2}}\right. \\
&\left.+2\Big(\int_\omega m(x)| \triangle u|^2\,dx\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_\omega \frac{|\nabla m|^2}{m(x)}|\nabla u|^2\,dx\Big)^{\frac{1}{2}}\right\} ds \\
&\leq \int_t^{t+T}\left\{C\Big(\int_\omega |u|^2\,dx\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_\omega \frac{m(x)}{2}| \triangle u|^2\,dx\Big)^{\frac{1}{2}}\right. \\
&\left.+C\Big(\int_\omega m(x)| \triangle u|^2\,dx\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_\omega |\nabla u|^2\,dx\Big)^{\frac{1}{2}}\right\} ds \\
&\leq \int_t^{t+T}\left[C\int_\omega |u|^2\,dx + \frac{1}{4}\int_\omega m(x)| \triangle u|^2\,dx\right] ds \\
&+C\int_t^{t+T}\Big(\int_\omega |\nabla u|^2\,dx\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_\omega m(x)| \triangle u|^2\,dx\Big)^{\frac{1}{2}} ds.
\end{aligned}$$

Isto é , existe uma constante positiva C tal que

$$\begin{aligned}
&\left|\int_t^{t+T}\int_\Omega [u \triangle u \triangle m + 2 \triangle u(\nabla u.\nabla m)]\,dxds\right| \\
&\leq \int_t^{t+T}\left[C\int_\omega |u|^2\,dx + \frac{1}{4}\int_\omega m(x)| \triangle u|^2\,dx\right] ds \\
&+C\int_t^{t+T}\Big(\int_\omega |\nabla u|^2\,dx\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_\omega m(x)| \triangle u|^2\,dx\Big)^{\frac{1}{2}} ds.
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Substituindo as estimativas (3.21)-(3.23) em (3.9) obtemos que:

$$\int_t^{t+T}\int_\Omega m(x)|\triangle u|^2\,dxds \le \int_t^{t+T}\int_\Omega m(x)|u_t|^2\,dxds + C\big[E(t)+E(t+T)\big]$$

$$+\int_t^{t+T}\int_\Omega |u||\rho(x,u_t)|\,dxds + \int_t^{t+T}\Big(C\int_\omega |u|^2\,dx + \frac{1}{4}\int_\omega m(x)|\triangle u|^2\,dx\Big)\,ds$$

$$+C\int_t^{t+T}\Big(\int_\omega |\nabla u|^2\,dx\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_\omega m(x)|\triangle u|^2\,dx\Big)^{\frac{1}{2}}\,ds$$

$$\le C\Big\{E(t)+E(t+T)+\int_t^{t+T}\int_\Omega |u||\rho(x,u_t)|\,dxds + \int_t^{t+T}\int_\omega |u|^2\,dxds\Big\}$$

$$+\frac{1}{4}\int_t^{t+T}\int_\Omega m(x)|\triangle u|^2\,dxds + C\int_t^{t+T}\Big(\int_\omega |\nabla u|^2\,dx\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_\omega m(x)|\triangle u|^2\,dx\Big)^{\frac{1}{2}}\,ds.$$

Daí concluímos que

$$\int_t^{t+T}\int_\Omega m(x)|\triangle u|^2\,dxds \le C\Big\{E(t)+E(t+T)+\int_t^{t+T}\int_\Omega |u||\rho(x,u_t)|\,dxds$$

$$+\int_t^{t+T}\int_\omega |u|^2\,dxds\Big\} + C\int_t^{t+T}\Big(\int_\omega |\nabla u|^2\,dx\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_\omega m(x)|\triangle u|^2\,dx\Big)^{\frac{1}{2}}\,ds$$

$$\le C\Big\{E(t)+E(t+T)+\int_t^{t+T}\int_\Omega |u||\rho(x,u_t)|\,dxds$$

$$+\int_t^{t+T}\int_\omega |u|^2\,dxds\Big\} + C\int_t^{t+T}\int_\omega |\nabla u|^2\,dxds + \frac{1}{2}\int_t^{t+T}\int_\omega m(x)|\triangle u|^2\,dxds$$

Ou ainda,

$$\begin{aligned}\int_t^{t+T}\int_\Omega m(x)|\triangle u|^2\,dxds \le C\Big\{E(t)+E(t+T)\\ +\int_t^{t+T}\int_\Omega |u||\rho(x,u_t)|\,dxds + \int_t^{t+T}\int_\omega\Big(|u|^2+|\nabla u|^2\Big)\,dxds\Big\}.\end{aligned} \tag{3.24}$$

Agora, usando em (3.24) o fato que $0 \le m(x) \le 1$ sobre Ω e que $m(x) = 1$ em $\hat{\omega} \subset \bar{\Omega}$ (ver (3.7)) segue a conclusão do Lema 3.7.

□

Lema 3.8 *Sejam $T > 0$ e u a solução de (2.1). Então,*

$$\frac{1}{2}\int_t^{t+T}\int_{\Gamma(x_0)} |\triangle u|^2\,d\Gamma ds \le C\Big\{E(t)+E(t+T)+$$

$$+\int_t^{t+T}\int_\omega\Big[|u_t|^2+|\nabla u|^2+|u|^2\Big]\,dxds + \int_t^{t+T}\int_\Omega |\rho(x,u_t)|\Big[|u|+|\nabla u|\Big]\,dxds\Big\}$$

com C alguma constante positiva.

Demonstração:

Combinando as estimativas obtidas no Lema 3.6 e no Lema 3.7 segue que

$$\frac{1}{2}\int_t^{t+T}\int_{\Gamma(x_0)} |\triangle u|^2 \, d\Gamma ds \leq C\left\{ E(t) + E(t+T) + \int_t^{t+T}\int_{\bar{\Omega}\cap\hat{\omega}} |u_t|^2 \, dxds \right.$$

$$\left. + \int_t^{t+T}\int_{\Omega} |\rho(x,u_t)||\nabla u| \, dxds \right\} + C\left\{ E(t) + E(t+T) + \int_t^{t+T}\int_{\Omega} |\rho(x,u_t)||u| \, dxds \right.$$

$$+ \int_t^{t+T}\int_{\omega} |\nabla u|^2 \, dxds + \int_t^{t+T}\int_{\omega} |u|^2 \, dxds.$$

Portanto,

$$\frac{1}{2}\int_t^{t+T}\int_{\Gamma(x_0)} |\triangle u|^2 \, d\Gamma ds \leq C\left\{ E(t) + E(t+T) + \int_t^{t+T}\int_{\omega} |u_t|^2 \, dxds \right.$$

$$+ \int_t^{t+T}\int_{\Omega} |\rho(x,u_t)|\big(|\nabla u| + |u|\big) \, dxds + \int_t^{t+T}\int_{\omega} |\nabla u|^2 \, dxds + \int_t^{t+T}\int_{\omega} |u|^2 \, dxds$$

$$= C\left\{ E(t) + E(t+T) + \int_t^{t+T}\int_{\omega} \Big(|u_t|^2 + |\nabla u|^2 + |u|^2\Big) \, dxds \right.$$

$$+ \int_t^{t+T}\int_{\Omega} |\rho(x,u_t)|\big(|\nabla u| + |u|\big) \, dxds$$

pois $\bar{\Omega}\cap\hat{\omega} \subset \omega$ (veja (3.6)).

Logo, o Lema 3.8 é verdadeiro.

□

Lema 3.9 *Seja u a solução de (2.1). Então existe $T > 0$ tal que*

$$E(t) \leq C\left\{ E(t) - E(t+T) + \int_t^{t+T}\int_{\Omega} |\rho(x,u_t)|\big(|\nabla u| + |u|\big) \, dxds \right.$$

$$\left. + \int_t^{t+T}\int_{\omega} \Big(|u_t|^2 + |\nabla u|^2 + |u|^2\Big) \, dxds \right\}$$

para alguma constante positiva C e para todo $t \geq 0$.

Demonstração:

Da estimativa dada no Lema 3.3 segue que existe $\gamma > 0$ tal que

$$\gamma \int_t^{t+T} E(s)\,ds \leq C\left\{ E(t) + E(t+T) + \int_t^{t+T}\int_\Omega |\rho(x,u_t)|\big(|\nabla u| + |u|\big)\,dxds \right.$$

$$\left. + \int_t^{t+T}\int_{\Gamma(x_0)} |\triangle u|^2\,d\Gamma ds \right\}$$

para alguma constante $C > 0$.

Usando a estimativa obtida no Lema 3.8 se conclui que

$$\gamma \int_t^{t+T} E(s)\,ds \leq C\left\{ E(t) + E(t+T) + \int_t^{t+T}\int_\Omega |\rho(x,u_t)|\big(|\nabla u| + |u|\big)\,dxds \right.$$

$$\left. + \int_t^{t+T}\int_\omega \Big(|u_t|^2 + |\nabla u|^2 + |u|^2\Big)\,dxds \right\} \qquad (3.25)$$

para $T > 0$ fixado arbitrariamente e C uma constante positiva, com $t \geq 0$ qualquer.

Agora, fixamos $T > \dfrac{2C}{\gamma} + 1$. Do fato que $TE(t+T) \leq \displaystyle\int_t^{t+T} E(s)\,ds$, já que $E(t)$ é decrescente, resulta de (3.25) que

$$E(t) \leq \Big(1 + \frac{C}{\gamma}\Big)\Big[E(t) - E(t+T)\Big] + \frac{C}{\gamma}\left[\int_t^{t+T}\int_\Omega |\rho(x,u_t)|\big(|\nabla u| + |u|\big)\,dxds \right.$$

$$\left. + \int_t^{t+T}\int_\omega \Big(|u_t|^2 + |\nabla u|^2 + |u|^2\Big)\,dxds \right].$$

Da estimativa acima segue a prova do Lema 3.9.

□

Precisamos agora, estimar a seguinte integral:

$$I = \int_t^{t+T}\int_\Omega |\rho(x,u_t)|\big(|\nabla u| + |u|\big)\,dxds$$

com $T > 0$ fixado pelo Lema 3.9.

Para isso, vamos considerar dois lemas:

Lema 3.10 *Sejam $T > 0$ dado no Lema 3.9 e u a solução de (2.1). Se $0 \leq p \leq 2$, p dado na hipótese (2.2)(iii) sobre a função $\rho(x,s)$, então*

$$I \leq C\big[E(t) - E(t+T)\big]^{\frac{1}{p+2}}\sqrt{E(t)} + C\big[E(t) - E(t+T)\big]^{\frac{p+1}{p+2}}(E(t))^{\frac{1}{p+2}}.$$

Demonstração:

Podemos escrever

$$I = \int_t^{t+T}\int_\Omega |\rho(x,u_t)|\big(|\nabla u| + |u|\big)\,dxds = I_1 + I_2$$

onde

$$I_1 = \int_t^{t+T}\int_{\Omega_1} |\rho(x,u_t)|\big(|\nabla u| + |u|\big)\,dxds$$

e

$$I_2 = \int_t^{t+T}\int_{\Omega_2} |\rho(x,u_t)|\big(|\nabla u| + |u|\big)\,dxds$$

sendo $\Omega_1 = \Omega_1(t) = \{x \in \Omega;\ |u_t(x,t)| \leq 1\}$ e $\Omega_2 = \Omega\backslash\Omega_1$.

Precisamos estimar as integrais I_1 e I_2. Sendo $p \geq 0$ obtem-se (usando o fato que $E(t)$ é uma função de t decrescente e a hipótese (2.2)(iii) sobre $\rho(x,s)$):

$$\begin{aligned}
I_1 &\leq \int_t^{t+T}\int_{\Omega_1} K_2 a(x)\big[|u_t|^{p+1} + |u_t|\big]\big[|\nabla u| + |u|\big]\,dxds\\
&\leq 2K_2\int_t^{t+T}\int_{\Omega_1} a(x)|u_t|\big(|\nabla u| + |u|\big)\,dxds\\
&\leq 2K_2\|a\|_\infty^{\frac{1}{2}}\int_t^{t+T}\int_{\Omega_1}\sqrt{a(x)}|u_t|\big(|\nabla u| + |u|\big)\,dxds\\
&\leq C\int_t^{t+T}\Big(\int_{\Omega_1} a(x)|u_t|^2\,dx\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\frac{1}{2}\int_{\Omega_1}|\nabla u|^2 + |u|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\,ds\\
&\leq C\int_t^{t+T}\Big(\int_{\Omega_1} a(x)|u_t|^2\,dx\Big)^{\frac{1}{2}}\sqrt{E(s)}ds\\
&\leq C\left(\int_t^{t+T}\int_{\Omega_1} a(x)|u_t|^2\,dxds\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_t^{t+T} E(s)\,ds\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leq C\left(\int_t^{t+T}\int_{\Omega_1} a(x)|u_t|^2\,dxds\right)^{\frac{1}{2}}\sqrt{T}\sqrt{E(t)} = C\left(\int_t^{t+T}\int_{\Omega_1} a(x)|u_t|^2\,dxds\right)^{\frac{1}{2}}\sqrt{E(t)}
\end{aligned}$$

onde C indica diferentes constantes positivas. Também usamos o fato que $\|\triangle u\|_{L^2(\Omega)}$ domina $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ e $\|u\|_{L^2(\Omega)}$ pois $u \in H_0^2(\Omega)$.

Como $\frac{1}{\frac{p+2}{2}} + \frac{1}{\frac{p+2}{p}} = 1$ segue por Hölder que

$$I_1 \leq C\left(\int_t^{t+T}\int_{\Omega_1}\left(a(x)|u_t|^2\right)^{\frac{p+2}{2}}dxds\right)^{\frac{1}{p+2}}\left(\int_t^{t+T}\int_{\Omega}dxds\right)^{\frac{p}{2(p+2)}}\sqrt{E(t)}$$

$$\leq C_T\left(\int_t^{t+T}\int_{\Omega_1}a(x)|u_t|^{p+2}\,dxds\right)^{\frac{1}{p+2}}\sqrt{E(t)}$$

onde C_T é uma costante positiva que depende de $\|a\|_\infty, T$ e $|\Omega|$, a medida de Ω.

Note que usamos o fato que

$$\left|a(x)^{\frac{p+2}{2}}\right| = \left|a(x)^{1+\frac{p}{2}}\right| = \left|a(x)a(x)^{\frac{p}{2}}\right| = |a(x)||a(x)|^{\frac{p}{2}} \leq a(x)\|a\|_\infty^{\frac{p}{2}}.$$

Agora, usando as hipóteses (2.2)(i) e (iii) sobre $\rho(x,s)$ segue que

$$I_1 \leq C\Big(\int_t^{t+T}\int_{\Omega_1}\rho(x,u_t)u_t\,dxds\Big)^{\frac{1}{p+2}}\sqrt{E(t)} = C\big(E(t)-E(t+T)\big)^{\frac{1}{p+2}}\sqrt{E(t)}$$

devido a identidade de energia (3.3).

Vamos estimar I_2. Como $|u_t| \geq 1$ sobre Ω_2, então, da hipótese (2.2)(iii) sobre $\rho(x,s)$, vem que:

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \int_t^{t+T}\int_{\Omega_2}K_2 a(x)\big[|u_t|^{p+1}+|u_t|\big]\,\big[|\nabla u|+|u|\big]\,dxds \\ &\leq 2K_2\int_t^{t+T}\int_{\Omega_2}a(x)|u_t|^{p+1}\,\big[|\nabla u|+|u|\big]\,dxds \\ &\leq 2K_2\Big(\int_t^{t+T}\int_{\Omega_2}a(x)^{\frac{p+2}{p+1}}|u_t|^{p+2}\,dxds\Big)^{\frac{p+1}{p+2}}\Big(\int_t^{t+T}\int_{\Omega}\big(|\nabla u|+|u|\big)^{p+2}\,dxds\Big)^{\frac{1}{p+2}} \end{aligned}$$

pois $\frac{1}{\frac{p+2}{p+1}} + \frac{1}{p+2} = 1$ e $\frac{p+2}{p+1}, p+2 \geq 1$ se $p \geq 0$.

Portanto,

$$\begin{aligned} I_2 &\leq C\Big(\int_t^{t+T}\int_{\Omega_2}a(x)|u_t|^{p+2}\,dxds\Big)^{\frac{p+1}{p+2}}\Big(\int_t^{t+T}\int_{\Omega}\big[|\nabla u|^{p+2}+|u|^{p+2}\big]\,dxds\Big)^{\frac{1}{p+2}} \\ &\leq C\Big(\int_t^{t+T}\int_{\Omega_2}a(x)|u_t|^{p+2}\,dxds\Big)^{\frac{p+1}{p+2}}\Big(\int_t^{t+T}\int_{\Omega}|\nabla u|^{p+2}\,dxds\Big)^{\frac{1}{p+2}} \qquad (3.26) \end{aligned}$$

devido a desigualdade de Poincaré em $W_0^{1,p+2}(\Omega)$. A costante $C > 0$ depende de $||a||_\infty$ e da costante de Poincaré para o aberto limitado Ω. É claro, pela imersão de Sobolev, que a solução u está em $W_0^{1,p+2}(\Omega), 0 \leq p \leq 2$, já que $u(t) \in H_0^2(\Omega) \cap H^4(\Omega)$ para cada t.

Lembremos que, de fato, $u \in L^\infty(0,T; H_0^2(\Omega) \cap H^4(\Omega))$ e portanto $\nabla u \in L^\infty(0,T; H^3(\Omega))$. Como $H^3(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$ continuamente (pois estamos considerando a dimensão $1 \leq n \leq 3$), então

$$\nabla u \in L^\infty((0,T) \times \Omega).$$

Assim, existe $C_1 = C(u_0, u_1) > 0$ tal que

$$||\nabla u||_{L^\infty((0,T)\times\Omega)} \leq C_1.$$

Então,

$$\int_t^{t+T} \int_\Omega |\nabla u|^{p+2}\, dxds \leq C_1^p \int_t^{t+T} \int_\Omega |\nabla u|^2\, dxds \leq C \int_t^{t+T} \int_\Omega | \triangle u|^2\, dxds$$

devido a Desigualdede de Poincaré.

Daí, temos que

$$\int_t^{t+T} \int_\Omega |\nabla u|^{p+2}\, dxds \leq 2C \int_t^{t+T} E(s)\, ds \leq 2CTE(t) \tag{3.27}$$

pois $E(t)$ é decrescente.

Substituindo (3.27) na estimativa (3.26) para I_2 obtemos que

$$I_2 \leq C\Big(\int_t^{t+T} \int_{\Omega_2} a(x)|u_t|^{p+2}\, dxds\Big)^{\frac{p+1}{p+2}} E(t)^{\frac{1}{p+2}}.$$

Usando as hipóteses (2.2) sobre a função $\rho(x,s)$ segue que

$$\begin{aligned} I_2 &\leq C\Big(\int_t^{t+T} \int_{\Omega_2} \rho(x,u_t)u_t\, dxds\Big)^{\frac{p+1}{p+2}} E(t)^{\frac{1}{p+2}} \\ &= C\Big[E(t) - E(t+T)\Big]^{\frac{p+1}{p+2}} E(t)^{\frac{1}{p+2}} \end{aligned}$$

devido a identidade (3.3).

Juntando as estimativas para I_1 e I_2 segue a conclusão da prova do Lema 3.10.

$\square$

Lema 3.11 *Seja* $-1 < p < 0$. *Então, para* $T > 0$ *dado no Lema 3.9, a solução* $u(x,t)$ *de (2.1) satisfaz*

$$I \leq C\big[E(t) - E(t+T)\big]^{\frac{p+1}{p+2}}\sqrt{E(t)} + C\big[E(t) - E(t+T)\big]^{\frac{2}{4-p}}\sqrt{E(t)}.$$

Demonstração:

Como no Lema 3.10 vamos escrever $I = I_1 + I_2$. Daí, usando as hipóteses (2.2) sobre $\rho(x,s)$, a desigualdade de Hölder e a desigualdade de Poincaré em $W_0^{1,p+2}(\Omega)$, temos do fato que $0 < p+1 < 1$:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_t^{t+T}\int_{\Omega_1} |\rho(x,u_t)|\big(|\nabla u| + |u|\big)\,dxds \\
&\leq K_2\int_t^{t+T}\int_{\Omega_1} a(x)\big(|u_t|^{p+1} + |u_t|\big)\big(|u| + |\nabla u|\big)\,dxds \\
&\leq 2K_2\int_t^{t+T}\int_{\Omega_1} a(x)|u_t|^{p+1}\big(|u| + |\nabla u|\big)\,dxds \\
&\leq C\Big(\int_t^{t+T}\int_{\Omega_1} a(x)|u_t|^{p+2}\,dxds\Big)^{\frac{p+1}{p+2}}\Big(\int_t^{t+T}\int_{\Omega} |\nabla u|^{p+2}\,dxds\Big)^{\frac{1}{p+2}} \\
&\leq C\Big(\int_t^{t+T}\int_{\Omega_1} |\rho(x,u_t)|u_t\,dxds\Big)^{\frac{p+1}{p+2}}\Big(\int_t^{t+T}\int_{\Omega} |\nabla u|^2\,dxds\Big)^{\frac{1}{2}}\bigg(\Big(\int_t^{t+T}\int_{\Omega} dxds\Big)^{\frac{-p}{2}}\bigg)^{\frac{1}{p+2}} \\
&\leq C\Big(\int_t^{t+T}\int_{\Omega} \rho(x,u_t)u_t\,dxds\Big)^{\frac{p+1}{p+2}}\Big(\int_t^{t+T}\int_{\Omega} |\nabla u|^2\,dxds\Big)^{\frac{1}{2}}\big(T|\Omega|\big)^{\frac{-p}{2(p+2)}}.
\end{aligned}$$

A constante final C depende da constante de Poincaré para Ω, da medida de Ω, de T, da $||a||_\infty$ e também de p.

Assim, concluimos que

$$I_1 \leq C\left[\int_t^{t+T}\int_\Omega \rho(x,u_t)u_t\,dxds\right]^{\frac{p+1}{p+2}}\sqrt{E(t)}. \tag{3.28}$$

Agora, vamos estimar I_2. Para isso, vamos usar novamente as desigualdades de Hölder e de Poincaré. Assim, como $0 < p+1 < 1$ temos

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_t^{t+T}\int_{\Omega_2} |\rho(x,u_t)|\big(|\nabla u| + |u|\big)\,dxds\\
&\leq K_2\int_t^{t+T}\int_{\Omega_2} a(x)\big(|u_t|^{p+1} + |u_t|\big)\big(|u| + |\nabla u|\big)\,dxds\\
&\leq 2K_2\int_t^{t+T}\int_{\Omega_2} a(x)|u_t|\big(|u| + |\nabla u|\big)\,dxds\\
&\leq C\Big(\int_t^{t+T}\int_{\Omega_2} a(x)|u_t|^2\,dxds\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_t^{t+T}\int_{\Omega_2} |\nabla u|^2\,dxds\Big)^{\frac{1}{2}}\\
&\leq C\Big(\int_t^{t+T}\int_{\Omega_2} a(x)|u_t|^2\,dxds\Big)^{\frac{1}{2}}\sqrt{E(t)} = C\Big(\int_t^{t+T}\int_{\Omega_2} a(x)|u_t|^{2-\alpha}|u_t|^{\alpha}\Big)^{\frac{1}{2}}\sqrt{E(t)}
\end{aligned}$$

onde α é uma constante positiva a ser escolhida. Agora a desigualdade de Hölder implica que:

$$I_2 \leq C\left[\Big(\int_t^{t+T}\int_{\Omega_2}\Big(a(x)|u_t|^{2-\alpha}\Big)^{\frac{4-p}{4}}dxds\Big)^{\frac{4}{4-p}}\right]^{\frac{1}{2}}\left[\Big(\int_t^{t+T}\int_{\Omega_2}\Big(|u_t|^{\alpha}\Big)^{\frac{4-p}{-p}}dxds\Big)^{\frac{-p}{4-p}}\right]^{\frac{1}{2}}\sqrt{E(t)}$$

pois $\dfrac{-p}{4-p} + \dfrac{4}{4-p} = 1$ e $\dfrac{-p}{4-p}, \dfrac{4}{4-p} > 1$ já que $-1 < p < 0$.

Escolhendo $\alpha = \dfrac{-6p}{4-p} > 0$, já que $-1 < p < 0$, segue que

$$\begin{aligned}
I_2 &\leq C\Big(\int_t^{t+T}\int_{\Omega_2} a(x)|u_t|^{2+p}\,dxds\Big)^{\frac{2}{4-p}}\Big(\int_t^{t+T}\int_{\Omega_2} |u_t|^6\,dxds\Big)^{\frac{-p}{8-2p}}\sqrt{E(t)}\\
&\leq C\Big(\int_t^{t+T}\int_{\Omega_2} a(x)|u_t|^{2+p}\,dxds\Big)^{\frac{2}{4-p}}\sqrt{E(t)}
\end{aligned}$$

devido ao fato que $u_t \in L^\infty(0,\infty; H_0^2(\Omega))$ e portanto, pelas imersões de Sobolev, $u_t \in L^\infty((0,\infty)\times\Omega)$ para $1 \leq n \leq 3$.

Assim, usando a hipótese (2.2) sobre a função $\rho(x,s)$ temos que

$$I_2 \leq C\Big(\int_t^{t+T}\int_{\Omega_2} \rho(x,u_t)u_t\,dxds\Big)^{\frac{2}{4-p}}\sqrt{E(t)}. \tag{3.29}$$

Juntando as estimativas (3.28) e (3.29) para I_1 e I_2 e usando a identidade de energia (3.3) concluimos a prova do Lema 3.11.

$\square$

3.4 Estimativas Fundamentais

Agora, vamos combinar as estimativas dos Lemas 3.10 e 3.11 com a estimativa dada no Lema 3.9 para obter uma estimativa para a energia $E(t)$. Fazendo isso obtemos que

$$E(t) \le C\left\{D_i(t)^2 + \int_t^{t+T}\int_\omega \left[|u_t|^2 + |u|^2 + |\nabla u|^2\right] dxds\right\} \quad (i = 1, 2) \qquad (3.30)$$

onde

$$D_1(t)^2 = E(t) - E(t+T) + \left[E(t) - E(t+T)\right]^{\frac{1}{p+2}}\sqrt{E(t)} + \left[E(t) - E(t+T)\right]^{\frac{p+1}{p+2}} E(t)^{\frac{1}{p+2}},$$

para o caso $0 \le p \le 2$

$$D_2(t)^2 = E(t) - E(t+T) + \left[E(t) - E(t+T)\right]^{\frac{p+1}{p+2}}\sqrt{E(t)} + \left[E(t) - E(t+T)\right]^{\frac{2}{4-p}}\sqrt{E(t)},$$

para o caso $-1 < p < 0$.

Proposição 3.1 *Sejam u a solução do problema (2.1) e $T > 0$ fixado pelo Lema 3.9. Então, a energia da solução u satisfaz para $t \ge 0$:*

$$E(t) \le C\left\{\tilde{D}_i(t)^2 + \int_t^{t+T}\int_\omega \left[|u_t|^2 + |u|^2 + |\nabla u|^2\right] dxds\right\} \quad (i = 1, 2) \qquad (3.31)$$

sendo C uma constante positiva independente de u,

$$\tilde{D}_1(t)^2 = E(t) - E(t+T) + \left[E(t) - E(t+T)\right]^{\frac{2}{p+2}}$$

para o caso $0 \leq p \leq 2$ *e*

$$\tilde{D}_2(t)^2 = E(t) - E(t+T) + \big[E(t) - E(t+T)\big]^{\frac{p+1}{p+2}} + \big[E(t) - E(t+T)\big]^{\frac{4}{4-p}},$$

para o caso $-1 < p < 0$.

Demonstração:

Aplicando a desigualdade de Young * em (3.30) com $0 \leq p \leq 2$ temos:

$$\begin{aligned} E(t) \; &\leq C\Bigg[E(t) - E(t+T) + \big[E(t) - E(t+T)\big]^{\frac{2}{p+2}} + \tfrac{E(t)}{4} \\ &+ \tfrac{p+1}{p+2}[E(t) - E(t+T)] + \tfrac{E(t)}{p+2} + \int_t^{t+T}\int_\omega \Big[|u_t|^2 + |u|^2 + |\nabla u|^2\Big]\,dxds\Bigg]. \end{aligned}$$

Daí resulta que

$$\begin{aligned} E(t) &\leq C\Bigg\{E(t) - E(t+T) + \big[E(t) - E(t+T)\big]^{\frac{2}{p+2}} \\ &+ \int_t^{t+T}\int_\omega \Big[|u_t|^2 + |u|^2 + |\nabla u|^2\Big]\,dxds\Bigg\} \\ &= C\Big[\tilde{D}_1(t)^2 + \int_t^{t+T}\int_\omega \Big[|u_t|^2 + |u|^2 + |\nabla u|^2\Big]\,dxds\Big] \end{aligned}$$

se $0 \leq p \leq 2$, onde C é uma constante positiva independente da solução u, mas possivelmente dependente de $E(0)$.

Analogamente verifica-se, usando que $E(t) \leq E(0) = C$, que

$$E(t) \leq C\Big[\tilde{D}_2(t)^2 + \int_t^{t+T}\int_\omega \Big[|u_t|^2 + |u|^2 + |\nabla u|^2\Big]\,dxds\Big]$$

se $-1 < p < 0$.

□

Proposição 3.2 *Sejam $R > 0$ fixo e u a solução de (2.1) com dados iniciais u_0 e u_1 tais que $E(0) \leq R$. Seja $T > 0$ dado no Lema 3.9. Então, existe $C > 0$ tal que*

$$\int_t^{t+T}\int_\Omega \big[|u|^2 + |\nabla u|^2\big]\,dxds \leq C\Big\{\tilde{D}_i(t)^2 + \int_t^{t+T}\int_\omega |u_t|^2\,dxds\Big\} \qquad (3.32)$$

*cap1;seção1.5

com $i = 1$ ou 2 em acordo com os casos $0 \leq p \leq 2$ e $-1 < p < 0$, respectivamente, C uma constante que depende de R e $\tilde{D}_i(t)$ são dados na Proposição 3.1.

Demonstração:

Suponhamos que (3.32) é falsa. Então, existe uma sequência de soluções $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ associadas a dados iniciais u_0^n e u_1^n e uma sequência de pontos $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tais que

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{\int_{t_n}^{t_n+T}\int_\Omega \left[|u_n|^2 + |\nabla u_n|^2\right] dxds}{\tilde{D}_i(t_n)^2 + \int_{t_n}^{t_n+T}\int_\omega |(u_n)_t|^2\, dxds} = \infty. \tag{3.33}$$

Sejam

$$\lambda_n^2 = \int_{t_n}^{t_n+T}\int_\Omega \left[|u_n|^2 + |\nabla u_n|^2\right] dxds \tag{3.34}$$

e

$$I_n(t_n)^2 = \frac{1}{\lambda_n^2}\left[\tilde{D}_i(t_n)^2 + \int_{t_n}^{t_n+T}\int_\omega |(u_n)_t|^2\, dxds\right]. \tag{3.35}$$

Então, de (3.33) tem-se

$$I_n(t_n)^2 \longrightarrow 0, \text{ quando } n \longrightarrow \infty. \tag{3.36}$$

Seja $v_n(x,t) = \dfrac{u_n(x,t+t_n)}{\lambda_n}$, $0 \leq t \leq T$. De (3.34) temos que

$$\begin{aligned}
1 &= \frac{1}{\lambda_n^2}\int_{t_n}^{t_n+T}\int_\Omega \left[|u_n(x,s)|^2 + |\nabla u_n(x,s)|^2\right] dxds \\
&= \frac{1}{\lambda_n^2}\int_0^T\int_\Omega \left[|u_n(x,t+t_n)|^2 + |\nabla u_n(x,t+t_n)|^2\right] dxdt \\
&= \int_0^T\int_\Omega \left[|v_n(x,t)|^2 + |\nabla v_n(x,t)|^2\right] dxdt.
\end{aligned}$$

Isto é,

$$\int_0^T\int_\Omega \left[|v_n(x,t)|^2 + |\nabla v_n(x,t)|^2\right] dxdt = 1, \tag{3.37}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Da estimativa (3.31) dada na Proposição 3.1 e de (3.37) segue que

$$
\begin{aligned}
E(v_n(t)) &= E(\frac{u_n(t+t_n)}{\lambda_n}) = \frac{1}{\lambda_n^2}E(u_n(t+t_n)) \leq \frac{1}{\lambda_n^2}E(u_n(t_n)) \\
&\leq \frac{C}{\lambda_n^2}\left\{\tilde{D}_i(t_n)^2 + \int_{t_n}^{t_n+T}\int_\omega |(u_n)_t|^2\,dxds + \int_{t_n}^{t_n+T}\int_\Omega \left[|u_n|^2 + |\nabla u_n|^2\right] dxds\right\} \\
&= CI_n(t_n)^2 + \frac{C}{\lambda_n^2}\int_{t_n}^{t_n+T}\int_\Omega \left[|u_n(x,s)|^2 + |\nabla u_n(x,s)|^2\right] dxds \\
&= CI_n(t_n)^2 + C\int_0^T\int_\Omega \left[|v_n(x,t)|^2 + |\nabla v_n(x,t)|^2\right] dxdt = C\left[I_n(t_n)^2 + 1\right].
\end{aligned}
$$

Mas, $I_n(t_n)^2$ é limitado devido a (3.36). Assim, obtemos que

$$E(v_n(t)) \leq C$$

para todo $0 \leq t \leq T$ e para todo $n \in \mathbb{N}$, onde $C > 0$ independe de t e n.

Portanto

$$\|(v_n)_t(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq C \quad \text{e} \quad \|\triangle v_n(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq C \tag{3.38}$$

para todo $0 \leq t \leq T$ e para todo $n \in \mathbb{N}$.

Da Desigualdade de Poincaré e da estimativa (3.38) segue que

$$\|v_n(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_\Omega |v_n(x,t)|^2\,dx = \int_\Omega \frac{1}{\lambda_n^2}|u_n(x,t+t_n)|^2\,dx$$

$$\leq C_1\int_\Omega \frac{1}{\lambda_n^2}|\nabla u_n(x,t+t_n)|^2\,dx = C_1\int_\Omega |\nabla v_n(x,t)|^2\,dx \leq C_2\int_\Omega |\triangle v_n(x,t)|^2\,dx \leq C$$

para todo $0 \leq t \leq T$ e para todo $n \in \mathbb{N}$.

Isto é, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\int_\Omega |v_n(x,t)|^2\,dx \leq C \tag{3.39}$$

para todo $0 \leq t \leq T$ e para todo $n \in \mathbb{N}$.

Agora, de (3.38) e (3.39) concluimos que a seqüência (v_n) é tal que

$$v_n \text{ é limitada em } W^{1,\infty}([0,T],L^2(\Omega)) \cap L^\infty([0,T],H_0^2(\Omega)) \qquad (3.40)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Afirmação:

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{1}{\lambda_n}\rho(x,u_{n_t}(t+t_n)) = 0 \text{ em } L^1([0,T]\times\Omega). \qquad (3.41)$$

Vamos provar a afirmação considerando os dois casos correspondentes a $i=1$ e $i=2$.

Caso 1: $0 \leq p \leq 2$. Temos, como nas estimativas obtidas no Lema 3.10 para I_1 e I_2, que

$$\int_t^{t+T}\int_\Omega |\rho(x,u_t)|\,dxds \leq C\left\{\Big[E(t)-E(t+T)\Big]^{\frac{1}{p+2}} + \Big[E(t)-E(t+T)\Big]^{\frac{p+1}{p+2}}\right\}.$$

Usando a definição de $\tilde{D}_1(t)$ obtemos que

$$\Big[E(t)-E(t+T)\Big]^{\frac{1}{p+2}} \leq \tilde{D}_1(t)$$

$$\Big[E(t)-E(t+T)\Big]^{\frac{p+1}{p+2}} \leq \tilde{D}_1(t)^2.$$

Portanto,

$$\int_{t_n}^{t_n+T}\int_\Omega |\rho(x,u_{n_t})|\,dxds \leq C\Big[\tilde{D}_1(t_n)+\tilde{D}_1(t_n)^2\Big].$$

Usando a definição de $I_n(t_n)$, obtemos

$$\frac{1}{\lambda_n}\int_{t_n}^{t_n+T}\int_\Omega |\rho(x,u_{n_t})|\,dxds \leq C\Big[I_n(t_n)+\frac{1}{\lambda_n}\tilde{D}_1(t_n)^2\Big]$$

$$\leq C[I_n(t_n)+\lambda_n I_n(t_n)^2].$$

Agora, observemos que a sequência (λ_n) é limitada pois, usando a Desigualdade de Poincaré, vale que

$$\begin{aligned}\lambda_n &= \left(\int_{t_n}^{t_n+T} \|u_n(s)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u_n(s)\|^2_{L^2(\Omega)}\, ds\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\leq C\left(\int_{t_n}^{t_n+T} \|\nabla u_n(s)\|^2_{L^2(\Omega)}\, ds\right)^{\frac{1}{2}} \leq C\left(\int_{t_n}^{t_n+T} \|\triangle u_n(s)\|^2_{L^2(\Omega)}\, ds\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\leq CE(u_n(0)) \leq CR,\end{aligned}$$

já que os dados iniciais estão na bola $B(0,R)$.

Consequentemente, (3.36) implica que

$$\frac{1}{\lambda_n}\int_{t_n}^{t_n+T}\int_\Omega |\rho(x,u_{n_t})|\, dxds \longrightarrow 0$$

quando $n \longrightarrow \infty$. Isto é,

$$\frac{1}{\lambda_n}\int_0^T\int_\Omega |\rho(x,u_{n_t}(x,t+t_n))|\, dxds \longrightarrow 0$$

quando $n \longrightarrow \infty$.

Logo, para esse caso, a afirmação é válida.

Caso 2: $-1 < p < 0$. A afirmação é mostrada de modo análogo ao caso 1.

Assim, a afirmação é válida nos dois casos.

$\square$

Agora, de (3.40) segue que existe uma função $v(t)$ e uma subseqüência v_n de v_n tais que

$$v_n(t) \rightharpoonup v(t) \ \text{ fraco* em } W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;H_0^2(\Omega))$$

e pelo teorema de Aubin-Lions †

$$v_n(t) \longrightarrow v(t) \text{ forte em } H_0^1((0,T) \times \Omega). \tag{3.42}$$

Assim, a função $v(t)$ satisfaz:

i) $v \in W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;H_0^2(\Omega))$;

ii) $v_{tt} + \triangle^2 v = 0$ em $(0,T) \times \Omega$ (por causa da afirmação (3.41));

iii) $\int_0^T \int_\omega |v_t|^2 \, dxds = 0$ (por causa de (3.35), (3.36) e (3.42);

iv) $\int_0^T \left[\|v\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)}\right] ds = 1$ (por (3.37) e (3.42).

Segue dos itens (ii), (iii) e do Teorema de Unicidade de Holmgreen (veja as referências Kim [15], Perla [25] e Mizohata [26]) que $v \equiv 0$ em $(0,T) \times \Omega$. Isso contradiz o item (iv).

Assim, a Proposição 3.2 é válida.

□

3.5 Prova do Teorema de Estabilização

Da Proposição 3.1 e da Proposição 3.2 segue que

$$E(t) \leq C\left\{\tilde{D}_i(t)^2 + \int_t^{t+T} \int_\omega |u_t|^2 \, dxds\right\} \tag{3.43}$$

para todo $t \geq 0$ com $i = 1$ se $0 \leq p \leq 2$ e $i = 2$ se $-1 < p < 0$. Aqui, C independe de u e $\tilde{D}_i(t)^2$ $(i = 1, 2)$ são dados na Proposição 3.1.

† veja cap1; seção1.7

Para provar o Teorema 3.1 vamos estimar a integral

$$\int_t^{t+T} \int_\omega |u_t|^2 \, dxds.$$

Caso 1: $\mathbf{0 \leq p \leq 2}$. Usando as hipóteses (3.1) sobre a função $a(x)$ e a Desigualdade de Hölder temos que

$$\begin{aligned}
\int_t^{t+T} \int_\omega |u_t|^2 \, dxds &\leq C \int_t^{t+T} \int_\Omega a(x)|u_t|^2 \, dxds \quad \Big(C = \frac{1}{a_0}\Big) \\
&\leq C \int_t^{t+T} \int_{\Omega_1} a(x)|u_t|^2 \, dxds + \int_t^{t+T} \int_{\Omega_2} a(x)|u_t|^2 \, dxds \\
&\leq C\Big\{ \Big[\int_t^{t+T} \int_{\Omega_1} a(x)|u_t|^{p+2} \, dxds\Big]^{\frac{2}{p+2}} + \int_t^{t+T} \int_{\Omega_2} a(x)|u_t|^{p+2} \, dxds \Big\} \\
&\leq C\Big\{ \Big[\int_t^{t+T} \int_{\Omega_1} \rho(x, u_t)u_t \, dxds\Big]^{\frac{2}{p+2}} + \int_t^{t+T} \int_{\Omega_2} \rho(x, u_t)u_t \, dxds \Big\}
\end{aligned}$$

onde C é uma constante positiva que depende de $|\Omega|, T$ e $||a||_\infty$ e Ω_1 e Ω_2 foram definidos anteriormente na prova do Lema 3.10.

Agora, aplicando a identidade (3.3) segue que

$$\int_t^{t+T} \int_\omega |u_t|^2 \, dxds \leq C\Big\{[E(t) - E(t+T)] + [E(t) - E(t+T)]^{\frac{2}{p+2}}\Big\}. \tag{3.44}$$

De (3.43), (3.44) e da expressão para $\tilde{D}_1(t)$ obtemos

$$E(t) \leq C\Big\{[E(t) - E(t+T)] + [E(t) - E(t+T)]^{\frac{2}{p+2}} + [E(t) - E(t+T)]^{\frac{p+1}{p+2}}\Big\}.$$

Como $E(t)$ é limitada, concluimos que

$$E(t) \leq C[E(t) - E(t+T)]^{K_1}, \quad t \geq 0$$

onde $K_1 = min\Big\{\frac{2}{p+2}, \frac{p+1}{p+2}\Big\}$ é tal que $0 < K_1 < 1$.

Assim, obtemos a seguinte estimativa

$$\sup_{t \leq s \leq t+T} E(s)^{\frac{1}{K_1}} \leq E(t)^{\frac{1}{K_1}} \leq C[E(t) - E(t+T)]. \tag{3.45}$$

Seja $1+\gamma = \frac{1}{K_1}$. Então $\gamma = \frac{1-K_1}{K_1} > 0$ e aplicando o Lema 3.1 (Lema de Nakao) segue que

$$E(t) \leq CE(0)(1+t)^{-\frac{1}{\gamma}}, \quad t \geq T. \tag{3.46}$$

Assim, resulta que

$$E(t) \leq CE(0)(1+t)^{-\gamma_1}, \quad t \geq T$$

onde $\gamma_1 = \dfrac{2}{p}$ se $1 \leq p \leq 2$ e $\gamma_1 = p+1$ se $0 \leq p \leq 1$.

Caso 2: $-1 < p < 0$. Neste caso, em vez de (3.44) obtemos que

$$\int_t^{t+T}\int_\omega |u_t|^2\,dxds \leq C\Big\{[E(t)-E(t+T)]^{\frac{p+1}{p+2}} + [E(t)-E(t+T)]^{\frac{1}{p+2}}\Big\}.$$

Da estimativa (3.43) e da definição de $\tilde{D}_2(t)$ segue que

$$E(t) \leq C\Big\{[E(t)-E(t+T)]+[E(t)-E(t+T)]^{\frac{p+1}{p+2}}+[E(t)-E(t+T)]^{\frac{4}{4-p}}+[E(t)-E(t+T)]^{\frac{1}{p+2}}\Big\}.$$

Assim, como $E(t)$ é limitada segue que

$$E(t)^{\frac{1}{K_2}} \leq C[E(t)-E(t+T)], \quad t \geq 0$$

com $K_2 = min\Big\{1, \frac{p+1}{p+2}, \frac{4}{4-p}, \frac{1}{p+2}\Big\} = \frac{p+1}{p+2}$ é tal que $0 < K_2 < 1$, pois $-1 < p < 0$.

Isso diz que

$$E(t)^{1+\gamma} \leq C[E(t)-E(t+T)], \ t \geq 0$$

onde $\gamma = \dfrac{1-K_2}{K_2} = \dfrac{1}{p+1}$.

Agora, aplicando o Lema 3.1 obtemos que

$$E(t) \leq CE(0)(1+t)^{-\frac{1}{\gamma}}, \quad t \geq T.$$

De onde resulta que

$$E(t) \leq CE(0)(1+t)^{-\gamma_2}$$

com $\gamma_2 = p + 1$.

Isso completa a prova do Teorema 3.1.

$\square$

Bibliografia

[1] R. A. Adams, *Sobolev Spaces*. Academic Press, New York, 1975.

[2] S. Agmon, H. Douglis, L. Nirenberg, *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions II*. Comm. Pure Appl. Math., 17, 35-92, 1964.

[3] M. A. Astaburuaga, R. Coimbra Charão, *Stabilization of the total energy for a system of elasticity with localized dissipation*. Diff. Int. Eqs. 15, n$^{\underline{o}}$ 11, 1357-1376, 2002.

[4] J. P. Aubin, *Approximation of elliptic boundary value problems*. Wiley Interscience, New York, 1972.

[5] E. Bisognin, V. Bisognin, R. Coimbra Charão, *Decaimento exponencial das soluções do sistemas de ondas elásticas com dissipação não linear localizada*. Atas do 51$^{\underline{o}}$ Seminário Brasileiro de Análise, UFSC, Florianópolis, 337-382, 2000.

[6] E. Bisognin, V. Bisognin, R. Coimbra Charão, *Uniform stabilization for elastic waves system with highly nonlinear localized dissipation*. Portugaliae Matemática (to appear).

[7] N. Boubarki, *Intégration*. Hermann, Paris, 1966.

[8] F. Brauer, J. A. Nohel, *The qualitative theory of ordinary differential equations: an introduction*. Menlo Park: W. A. Benjamin, 1969.

[9] H. Brezis, *Análisis funcional teoria y aplicaciones*. Alianza Editorial, Madrid, 1983.

[10] G.Duvaut, J. L. Lions, *Les inéquations en mécanique et en physique*. Dunod, Paris, 1972.

[11] A. Guesmia, *On the decay estimates for elasticity systems with some localized dissipations*. Asymtotic Analysis 22, 1-13, 2000.

[12] A. Haraux, *Semigroupes Linéaires et équations d'évolution linéaires périodiques*. Université Pierre et Marie Curie, Paris, 1978.

[13] M. A. Horn, *Nonlinear Boundary stabilization of a system of anisotropic elasticity with light internal damping*. Contemporary Mathematics 268, 177-189, 2000.

[14] S. Kesavan, *Topics in functional analysis and applications*. Wiley Eastern Limited, Bangalore, 1989.

[15] J. U. Kim, *A unique continuation property of a beam equation with variable coefficients, in estimation and control of distributed parameter sustems*. (Desch,W., Kappel, F., Kunisch, K. eds.), 197-205, Birkhäuser, Basel, 1991 (Internationel Series of numerical mathematics, 100 (1991)).

[16] V. Komornik, *Exact Controllability and Stabilization, The Multiplier Method.* John Wiley & Sons - Masson, Paris, 1994.

[17] J. L. Lions, *Exact Contrôlabilé Exacte Perturbations et Stabilization De Systèmes Distribués.* Tome 1, Masson, Paris, 1988.

[18] J. L. Lions, *Exact Controllability, Stabilization and perturbations for Distributed Systems.* SIAM Rev.30, 1-68, 1988.

[19] J. L. Lions, *Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites Non Linéaires.* Gauthier - Villars, Paris, 1969.

[20] J. L. Lions, *Problèmes aux limites dans les equations aux de riveés partielles .* Press univ. Montreal, 1962 (ver p.51).

[21] L. A. Medeiros, P. H. Rivera, *Iniciação aos espaços de Sobolev.* IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 1977.

[22] L. A. Medeiros, P. H. Rivera, *Espaços de Sobolev e aplicações às equações diferenciais parciais.* Textos de Métodos Matemáticos n$^{\underline{o}}$9, IM-UFRJ, Rio de Janeiro.

[23] M. Nakao, *Decay of solutions of the wave equation with a local nonlinear dissipation.* Math. Ann, 1996.

[24] G. Perla Menzala, *Pertubação linear e aplicações às equações diferenciais parciais.* Textos de Métodos Matemáticos n$^{\underline{o}}$8, IM-UFRJ, Rio de Janeiro.

[25] G. Perla Menzala, *Equações Diferenciais: Ordinárias e Parciais.* Textos de Métodos Matemáticos n$^{\underline{o}}$14, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 1977.

[26] S. Mizohata, *The theory of partial differential equations.* Cambridge University Press, 1973.

[27] J. E. M. Rivera, *Teoria das Distribuições e Equações Diferenciais Parciais.* Textos Avançados, LNCC, Rio de Janeiro, 1999.

[28] R. Teman, *Navier-Stokes Equations, studies in mathematics and its applications, vol 2.* Revised Edition, North-Holland, Amsterdan, New York, Oxford, 1979.

[29] M. Tucsnak, *Semi-internal Stabilization for a non-linear Bernoulli - Euler equation.* Mathematical Methods in the Applied Sciences, 19, 897-907, 1996.

[30] M. Tucsnak, *Stabilization of Bernoulli - Euler beam by means of a pointwise feedback force.* Siam J. control Optim 39, nº4, 1160-1181, 2000.

[31] K. Yosida, *Functional Analysis.* Springer-Verlag, Berlin-Heildelberg-New York, 1966.

[32] E. Zuazua, *Exponential decay for the semilinear wave equation with locally distributed damping.* Comm. Partial Diff. Eqs. 15, 205-235, 1990.