

Universidade Federal de Santa Catarina
Programa de Pós-Graduação em Física

**APLICAÇÕES DA ÁLGEBRA DE QUONS A SISTEMAS DE MUITOS
CORPOS**

Eduardo Inácio Duzzioni

*Dissertação apresentada como requisito
parcial à obtenção do grau de Mestre.
Programa de Pós-Graduação em Física,
Universidade Federal de Santa Catarina.
Orientador: Prof. José Ricardo Marinelli*



03565891

CONSULTA LOCAL

FLORIANÓPOLIS

2003

APLICAÇÕES DA ÁLGEBRA DE QUONS A SISTEMAS DE MUITOS CORPOS

EDUARDO INÁCIO DUZZIONI

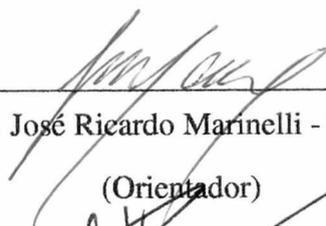
Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de **MESTRE EM FÍSICA**, com especialização em FÍSICA NUCLEAR, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação.



Prof. Dr. Sidney dos Santos Avancini

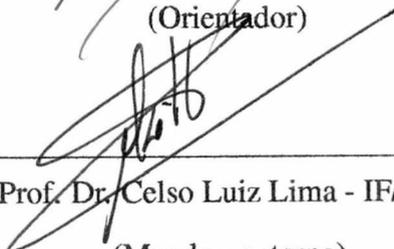
(Coordenador do Curso)

BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. José Ricardo Marinelli - FSC/UFSC

(Orientador)

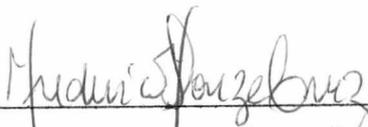


Prof. Dr. Celso Luiz Lima - IF/USP

(Membro externo)



Prof. Dr. Sidney dos Santos Avancini - FSC/UFSC



Prof. Dr. Frederico Firmo de Souza Cruz - FSC/UFSC

(Suplente)

À minha filha e à minha esposa, as pessoas que estiveram sempre ao meu lado na construção deste trabalho, dando-me sempre amor e carinho.

Agradecimentos

À Universidade Federal de Santa Catarina.

*À Coordenação de Aperfeiçoamento de Nível Superior, CAPES,
pelo apoio financeiro mas não suficiente.*

*Ao meu orientador José Ricardo Marinelli, pela paciência
e pelo acompanhamento pontual e competente.*

Aos professores do Curso de Física.

Aos meus companheiros de sala, que me aturaram por dois anos.

*Aos colegas do grupo de Física Nuclear, os quais puderam me proporcionar interessantes
discussões sobre os mais variados assuntos.*

*Aos colegas e amigos que fiz ao longo
da graduação e pós-graduação.*

Aos colegas André Schneider e Reinaldo, pelo auxílio com os cálculos computacionais.

*A todos que direta ou indiretamente contribuíram
para a realização desta pesquisa.*

*Não poderia deixar de agradecer aos meus pais, Sirlei e Nilton, aos meus irmãos e irmãs,
Renata, Fernando, Daniela, Marcelo e Rodrigo, por formarem a família
que me deu a base para chegar até aqui.*

E as minhas duas companheiras inseparáveis e amadas, Maria Eduarda e Alexandra.

Sumário

Lista de Figuras	vii
Resumo	viii
Abstract	ix
Introdução	9
1 A álgebra de quons	11
1.1 Propriedades gerais da álgebra	11
1.2 O espaço quônico	13
2 O subespaço totalmente anti-simétrico	18
2.1 Obtenção da base de estados	18
2.2 Propriedades dos estados anti-simétricos	22
2.2.1 Ortonormalidade	22
2.2.2 Atuação sucessiva de operadores de quons no subespaço anti-simétrico	22
2.3 Operadores de um e dois corpos	23
2.4 A álgebra $su(2)$ para quons no subespaço anti-simétrico	24
3 Solução de Hartree-Fock para quons no modelo de Lipkin	27
3.1 O método de Hartree-Fock	27
3.2 O modelo de Lipkin	31
3.3 O modelo de Lipkin para quons	34

3.3.1	Energia do estado fundamental	35
3.3.2	Análise das soluções	39
4	Energia de excitação	44
4.1	O método de RPA	45
4.1.1	Aplicando RPA no modelo de Lipkin	47
4.2	O método de Tamm-Dancoff	48
4.2.1	Aplicando Tamm-Dancoff no modelo de Lipkin	48
4.3	O método de RPA para quons	49
4.3.1	Energia de excitação no modelo de Lipkin para quons	50
4.4	O método de Tamm-Dancoff para quons	52
4.5	Em busca de uma expressão para q	53
	Conclusão	56
	Apêndice	58
	A Cálculo dos elementos de matriz para as equações de RPAq	58
	Bibliografia	66

Lista de Figuras

3.1	Representação esquemática do modelo de Lipkin.	31
3.2	E_0^{HF} como função de α para $\chi \leq 1$ no plano $\varphi = 0$ com $N = 10$	35
3.3	Gráfico de E_q^{HF} em função de α no plano $\varphi = 0$ para $\chi_q \geq 1$. As curvas são descritas para os valores de $q = -1$ (linha cheia) e $q = -0,99$ (linha pontilhada) com $N = 10$	39
3.4	Gráfico de E_q^{HF} em função de α no plano $\varphi = 0$ para $\chi_q \geq 1$. As curvas são descritas para os valores de $q = -1$ (linha cheia) e $q = -0,87$ (linha pontilhada) com $N = 10$. A relação entre χ e χ_q é dada pelas Eqs.(3.28) e (3.50).	41
3.5	Gráfico de E_q^{HF} em função de α no plano $\varphi = 0$ para $\chi_q \geq 1$. As curvas são descritas para os valores de $q = -1$ (linha cheia) e $q = -0,99$ (linha pontilhada) com $N = 50$. A relação entre χ e χ_q é dada pelas Eqs.(3.28) e (3.50).	42
3.6	Gráfico de χ_c em função de q para $N = 10$, onde a curva representa $\chi_q^c = 1$	43
4.1	Gráfico da energia de excitação para quons <i>versus</i> VN/ε para vários valores de q com $N = 40$, juntamente com a energia de excitação exata para férmions.	52
4.2	Gráfico da energia de excitação para quons <i>versus</i> VN/ε para vários valores de q com $N = 40$, juntamente com a energia de excitação exata para férmions.	54
4.3	Gráfico de q <i>versus</i> VN/ε para $N = 10$, $N = 30$ e $N = 50$	55

Resumo

Os quons são partículas que obedecem a estatísticas intermediárias entre as estatísticas de Bose e de Fermi. O que fazemos neste trabalho é apresentar um método para se construir de maneira sistemática uma base de muitos corpos quônica restrita ao subespaço anti-simétrico do espaço quônico total. Feito isto, consideramos o hamiltoniano de Lipkin para N quons, onde discutimos o efeito do parâmetro de deformação q na energia do estado fundamental, obtida pelo método de Hartree-Fock e na energia de excitação, obtida pelos métodos de R.P.A. e Tamm-Dancoff. O efeito do parâmetro q é tornar as partículas do sistema menos ligadas.

Abstract

Quons are particles that obey intermediate statistics between Bose and Fermi statistics. In this work we present a method to build in a systematic way a quonic basis restricted to the antisymmetric subspace of the whole quonic space. Then, we consider the Lipkin model hamiltonian for N quons, where we investigate the effect of the deformation parameter q in the ground state energy obtained by the Hartree-Fock method and in the excitation energy obtained by R.P.A. and Tamm-Dancoff methods. The q parameter tends to decrease the bound energy of the system.

Introdução

A generalização das álgebras de Lie usuais dá origem às álgebras quânticas, que constituem uma poderosa ferramenta matemática para a descrição de sistemas físicos. Os primeiros exemplos destas álgebras apareceram com os seguintes autores [1]: Kulish e Reshetichin (1981) e Skliagin (1982). As álgebras quânticas também foram desenvolvidas posteriormente por Drinfeld (1985), Jimbo (1986) e Reshetichin *et al* (1989). A primeira aplicação destas álgebras a sistemas quânticos foi feita por Biedenharn (1989), onde um q-análogo do oscilador harmônico foi construído. A utilização destas álgebras nos permite explorar simetrias além daquelas apresentadas pelas álgebras de Lie usuais. As simetrias nas quais estamos interessados são aquelas que descrevem partículas com estatísticas intermediárias entre as estatísticas usuais de Bose-Einstein e Fermi-Dirac. A primeira tentativa de ir além das estatísticas usuais parece ter sido iniciada por G. Gentile [2]. No entanto, a estatística de Gentile não era uma estatística quântica propriamente [3]. Mais tarde, outros pesquisadores começaram a investigar tal possibilidade, como por exemplo Green [4], que em 1953 investigou a generalização dos métodos de quantização de campos, tornando as estatísticas de Bose e de Fermi casos particulares destes.

Em particular, estudaremos as partículas cuja estatística tem pequeno desvio em relação às estatísticas de Bose-Einstein e Fermi-Dirac. Estas partículas são chamadas de quons* e são descritas através da álgebra de quons [3, 5]. Esta álgebra é caracterizada por um parâmetro q , cujo intervalo pode variar entre -1 e 1 , sendo que nos seus extremos recuperamos as estatísticas usuais de Fermi e de Bose, respectivamente.

Neste trabalho não estamos interessados em investigar a existência ou não destas partículas, queremos simplesmente usufruir do grau de liberdade a mais introduzido pelo parâmetro q na álgebra de quons para a descrição dos sistemas físicos, onde daremos continuidade ao trabalho desenvolvido na Ref. [6], na qual foram exploradas as propriedades do subespaço permutacional simétrico do espaço quônico total.

A continuidade do trabalho anteriormente citado, será explorar o subespaço permutacional

*O nome quons foi dado em analogia a muons.

anti-simétrico do espaço quônico total, ou seja, construiremos uma teoria de muitos corpos para quons cuja dinâmica esteja restrita ao subespaço anti-simétrico. Para isto, apresentaremos no capítulo 1 as propriedades gerais da álgebra de quons e o fato de o espaço quônico total poder ser dividido em subespaços que englobam todas as simetrias permutacionais possíveis.

No capítulo 2, levando em conta a separabilidade do espaço quônico, apresentaremos uma maneira sistemática de construir estados totalmente anti-simétricos. Serão ainda mostradas algumas propriedades relacionadas a estes estados, tais como: ortonormalidade, a relação entre dois operadores de criação ou aniquilação que atuam sucessivamente em um estado anti-simétrico e o cálculo do valor esperado de operadores de um e dois corpos. Mostraremos ainda, que é possível construir operadores de quasi-spin pelo método de Schwinger a partir de operadores de quons que satisfazem a álgebra $su(2)$.

Como aplicação do formalismo desenvolvido, no capítulo 3 consideraremos o hamiltoniano de Lipkin [7] com as partículas constituintes sendo quons e não mais férmions. A escolha do modelo de Lipkin é justificada por este ser um modelo que serve como laboratório para testar os métodos aproximativos em sistemas de muitos corpos. A dinâmica deste modelo para quons será restringida para valores de q próximos de -1 , descrevendo partículas que chamaremos de *quasi-férmions*. Encontraremos a solução para a energia do estado fundamental deste sistema pelo método de Hartree-Fock, investigando o efeito do parâmetro de deformação nesta solução e suas possíveis interpretações físicas.

No capítulo 4, faremos o estudo da energia de excitação do primeiro estado excitado no modelo de Lipkin. Construiremos uma versão deformada do método de RPA (*Random Phase Approximation*) [8] usual, o qual chamaremos de *RPA q* , para encontrar uma solução para a energia de excitação dos quasi-férmions. Também será construída uma versão deformada do método de Tamm-Dancoff [8], o qual será chamado de método de *Tamm-Dancoff deformado*. Novamente, temos como objetivo entender qual o efeito do parâmetro q na solução aproximada e obter uma interpretação física para este. Na última seção deste capítulo, tentamos entender como deve variar q para que a solução obtida pelo método de *RPA q* seja igual à solução exata.

Finalmente, apresentamos as conclusões e as perspectivas futuras deste trabalho.

Capítulo 1

A álgebra de quons

1.1 Propriedades gerais da álgebra

A álgebra de quons é caracterizada pela relação de q-mutação [3, 5, 9], dada por

$$[a_i, a_j^\dagger]_q = a_i a_j^\dagger - q a_j^\dagger a_i = \delta_{ij}, \quad (1.1)$$

onde $-1 \leq q \leq 1$. É fácil perceber na Eq.(1.1) que quando $q = 1$ recuperamos a estatística bosônica e que quando $q = -1$ recuperamos a estatística fermiônica. Para garantir que a norma dos estados seja positiva [10, 11], o parâmetro q só pode variar no intervalo acima citado.

A construção do espaço de Fock é feita através da combinação linear dos monômios

$$|(j)_m\rangle \equiv a_{j_1}^\dagger \dots a_{j_m}^\dagger |0\rangle; \quad j_k = 1, 2, \dots \quad m = 1, 2, \dots, \quad (1.2)$$

onde o vácuo é definido por

$$a_k |0\rangle = 0, \quad \text{para todo } k. \quad (1.3)$$

Os duais dos estados $|(j)_m\rangle$ são

$$\langle(\tilde{j})_m| \equiv \langle 0| a_{j_m} \dots a_{j_1}. \quad (1.4)$$

É importante salientar que na álgebra de quons não é possível obter nenhuma relação de comutação [5] entre dois operadores de criação ou entre dois operadores de aniquilação. Nos

casos bosônico e fermiônico estas relações são bem definidas. Para entendermos isto melhor, supomos a existência do seguinte estado

$$|s\rangle \equiv (a_1^\dagger a_2^\dagger - \alpha a_2^\dagger a_1^\dagger)|0\rangle = 0, \quad (1.5)$$

para alguma constante α . Aplicando a Eq.(1.1) em $a_1|s\rangle = 0$ e $a_2|s\rangle = 0$, obtemos $q = \pm 1$. Portanto, não podemos estabelecer nenhuma relação linear entre os monômios [10, 11]. Lembramos que para o cálculo dos elementos de matriz não é necessário o conhecimento das relações de comutação entre tais operadores, basta através da Eq.(1.1) levar os operadores de aniquilação para a direita e/ou os operadores de criação para a esquerda.

Uma vantagem do ponto de vista técnico na utilização da álgebra de quons com relação às álgebras q -deformadas [12], por exemplo, é que é possível construir operadores de quons que se comportam como operadores tensoriais irredutíveis da álgebra $su(2)$ [13]. Como consequência disto, as regras de acoplamento de momento angular para quons são as mesmas obedecidas por bósons e férmions.

Um operador de grande importância na teoria de muitos corpos é o operador número, pois a partir deste podemos construir operadores para a energia, momento angular, etc. Nos casos bosônico e fermiônico este é um operador simples, um operador de um corpo, mas para quons, como veremos, este é um operador de infinitos corpos. Definamos primeiramente o operador de transição $n_{\alpha\beta}$ [3, 5], que deve obedecer as relações de comutação usuais,

$$[n_{\alpha\beta}, a_\gamma^\dagger] = \delta_{\beta\gamma} a_\alpha^\dagger \quad (1.6)$$

e

$$[n_{\alpha\beta}, a_\gamma] = -\delta_{\beta\gamma} a_\alpha, \quad (1.7)$$

sendo que este operador aniquila uma partícula no nível β e cria uma partícula no nível α . Pode-se mostrar que a sua forma geral [14] é uma série infinita em a e a^\dagger , dada por

$$n_{\alpha\beta} = a_\alpha^\dagger a_\beta + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{(i_1, \dots, i_n)} \sum_{\pi} c_{\pi(i_1), \dots, \pi(i_n), i_1, \dots, i_n} (Y_{\alpha\pi(i_1), \dots, \pi(i_n)})^\dagger Y_{\beta i_1, \dots, i_n}, \quad (1.8)$$

onde a soma sobre π significa que devemos considerar todas as permutações dos índices $i_1, i_2, i_3, \dots, i_n$, inclusive as suas repetições. $\pi(i_1), \pi(i_2), \dots, \pi(i_n)$ correspondem a cada uma destas permutações e Y^\dagger é o adjunto de Y . Os operadores $Y_{\beta i_1, \dots, i_n}$ são obtidos através das relações de

recorrência [14, 15]

$$Y_{\beta i_1, \dots, i_{n+1}} = Y_{\beta i_1, \dots, i_n} a_{i_{n+1}} - q^{n+1} a_{i_{n+1}} Y_{\beta i_1, \dots, i_n}, \quad (1.9)$$

com

$$Y_{\beta i} = a_\beta a_i - q a_i a_\beta. \quad (1.10)$$

Os coeficientes $c_{\pi(i_1), \dots, \pi(i_n), i_1, \dots, i_n}$ são funções somente do parâmetro de deformação q [14, 15]. Os primeiros termos da série (1.8) [16, 17] são

$$n_{\alpha\beta} = a_\alpha^\dagger a_\beta + (1 - q^2)^{-1} \sum_m (a_m^\dagger a_\alpha^\dagger - q a_\alpha^\dagger a_m^\dagger) (a_\beta a_m - q a_m a_\beta) + \dots \quad (1.11)$$

O operador número é um caso particular em que $\alpha = \beta$ [5], ou seja,

$$n_\alpha = a_\alpha^\dagger a_\alpha + (1 - q^2)^{-1} \sum_m (a_m^\dagger a_\alpha^\dagger - q a_\alpha^\dagger a_m^\dagger) (a_\alpha a_m - q a_m a_\alpha) + \dots \quad (1.12)$$

Como exemplos de aplicações do operador número, obtemos a energia total de um sistema de N quons livres,

$$E = \sum_{i=1}^N \epsilon_i n_i, \quad (1.13)$$

onde ϵ_i é a energia do estado i . Ainda, na Ref. [13], o operador número acima definido, é utilizado na construção de operadores de momento angular que obedecem a álgebra $su(2)$.

1.2 O espaço quônico

O espaço quônico total é um espaço muito rico, no sentido de que este engloba os espaços usuais, fermiônico e bosônico. Isto se deve ao fato de q poder variar entre -1 e 1 na relação de q -mutação. O espaço de N quons idênticos contém todo tipo de simetria permutacional de acordo com a permutação dos rótulos das partículas. Portanto, podemos separar o espaço quônico total em subespaços permutacionais: simétrico, anti-simétrico e de simetria mista.

Uma maneira de se construir uma base de estados pertencente a cada um destes subespaços é através dos *diagramas de Young* ou *Young Tableaux* [18] ou através da diagonalização da matriz de *overlap* [6].

Os diagramas de Young constituem uma ferramenta para construir os estados de base de um dado espaço, levando em conta todas as simetrias permutacionais possíveis pela troca dos rótulos das partículas. Estes são descritos por caixas, onde uma caixa representa uma partícula. Cada configuração destas caixas descreve um subespaço permutacional acessível. A maneira em que estas caixas são arranjadas é tal que o número de caixas em uma linha é sempre menor ou igual ao número de caixas da linha superior. Os diagramas devem ser preenchidos com números inteiros positivos obedecendo a regra de que em cada linha os números não decrescem da esquerda para a direita e em uma coluna os números crescem de cima para baixo. Diagramas com caixas na horizontal descrevem estados simétricos, na vertical estados anti-simétricos e com caixas misturadas descrevem estados com simetrias mistas. Os procedimentos e regras de construção dos estados utilizando os diagramas de Young, utilizados aqui, podem ser encontrados na Ref. [18]. Usaremos este método de construção de estados para mostrar que o espaço quônico total pode ser separado em subespaços. Como exemplo, construiremos os estados para 2 e 3 quons através dos diagramas de Young. Abaixo representamos os diagramas de Young para $N = 2$ partículas,

$$\Psi_S = \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array} \quad (1.14)$$

e

$$\Psi_A = \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \\ \hline \end{array} \quad (1.15)$$

onde Ψ_S representa os estados simétricos não normalizados, construídos por $\Psi_S = \hat{S}_{12}\Psi(1, 2)$, $\Psi_S = \Psi(1, 1)$ e $\Psi_S = \Psi(2, 2)$, sendo que $\hat{S}_{12} = \hat{I} + \hat{P}_{12}$ é o operador de simetrização para duas partículas, \hat{I} é a identidade e \hat{P}_{12} significa a permutação da partícula 1 com a partícula 2. Ψ_A representa o estado anti-simétrico, dado por $\Psi_A = \hat{A}_{12}\Psi(1, 2)$, onde $\hat{A}_{12} = \hat{I} - \hat{P}_{12}$ é o operador de anti-simetrização para duas partículas. Então, os estados normalizados para dois quons podem ser escritos como,

$$|\Psi_S\rangle = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2(1+q)}}(a_1^\dagger a_2^\dagger + a_2^\dagger a_1^\dagger)|0\rangle \\ \frac{1}{\sqrt{1+q}}(a_1^\dagger)^2|0\rangle \\ \frac{1}{\sqrt{1+q}}(a_2^\dagger)^2|0\rangle \end{cases} \quad (1.16)$$

e

$$|\Psi_A\rangle = \frac{1}{\sqrt{2(1-q)}}(a_1^\dagger a_2^\dagger - a_2^\dagger a_1^\dagger)|0\rangle. \quad (1.17)$$

Os diagramas de Young para $N = 3$ partículas são

$$\Psi_S = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline \end{array} \quad (1.18)$$

$$\Psi_A = \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \end{array} \quad (1.19)$$

e

$$\Psi_M = \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \\ \hline \\ \hline \end{array} \quad (1.20)$$

onde Ψ_M representa os estados de simetria mista.

Seguindo o procedimento análogo para $N = 2$ quons, onde utilizaremos a seguinte notação, $a_1^\dagger a_2^\dagger a_3^\dagger |0\rangle = |123\rangle$, obtemos os seguintes estados normalizados:

$$\begin{aligned} |\Psi_S\rangle &= \frac{1}{\sqrt{6(1+2q+2q^2+q^3)}} (|123\rangle + |213\rangle + |132\rangle + |231\rangle + |321\rangle + |312\rangle), \\ |\Psi_A\rangle &= \frac{1}{\sqrt{6(1-2q+2q^2-q^3)}} (|123\rangle - |213\rangle - |132\rangle + |231\rangle - |321\rangle + |312\rangle), \\ |\Psi_{M_1}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{12(1+q-q^2-q^3)}} (|123\rangle - |213\rangle + 2|132\rangle + |231\rangle - |321\rangle - 2|312\rangle), \\ |\Psi_{M_2}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{4(1+q-q^2-q^3)}} (-|123\rangle - |213\rangle + |231\rangle + |321\rangle), \\ |\Psi_{M_3}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{4(1-q-q^2+q^3)}} (|123\rangle - |213\rangle - |231\rangle + |321\rangle), \\ |\Psi_{M_4}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{12(1-q-q^2+q^3)}} (|123\rangle + |213\rangle - 2|132\rangle + |231\rangle + |321\rangle - 2|312\rangle), \end{aligned} \quad (1.21)$$

onde $|\Psi_{M_1}\rangle$, $|\Psi_{M_2}\rangle$, $|\Psi_{M_3}\rangle$ e $|\Psi_{M_4}\rangle$ são os estados de simetria mista e onde omitimos neste caso as repetições dos índices, as quais podem ser obtidas como casos particulares.

Podemos obter os mesmos estados gerados através dos diagramas de Young usando a diagonalização da matriz de *overlap*. Esta matriz é formada por todas as combinações dos produtos

dos monômios de um espaço. Como exemplo, escrevemos a matriz de *overlap* para dois quons

$$A = \begin{pmatrix} \langle 0|a_1 a_1 a_1^\dagger a_1^\dagger|0\rangle & \langle 0|a_1 a_1 a_2^\dagger a_2^\dagger|0\rangle & \langle 0|a_1 a_1 a_1^\dagger a_2^\dagger|0\rangle & \langle 0|a_1 a_1 a_2^\dagger a_1^\dagger|0\rangle \\ \langle 0|a_2 a_2 a_1^\dagger a_1^\dagger|0\rangle & \langle 0|a_2 a_2 a_2^\dagger a_2^\dagger|0\rangle & \langle 0|a_2 a_2 a_1^\dagger a_2^\dagger|0\rangle & \langle 0|a_2 a_2 a_2^\dagger a_1^\dagger|0\rangle \\ \langle 0|a_1 a_2 a_1^\dagger a_1^\dagger|0\rangle & \langle 0|a_1 a_2 a_2^\dagger a_2^\dagger|0\rangle & \langle 0|a_1 a_2 a_1^\dagger a_2^\dagger|0\rangle & \langle 0|a_1 a_2 a_2^\dagger a_1^\dagger|0\rangle \\ \langle 0|a_2 a_1 a_1^\dagger a_1^\dagger|0\rangle & \langle 0|a_2 a_1 a_2^\dagger a_2^\dagger|0\rangle & \langle 0|a_2 a_1 a_1^\dagger a_2^\dagger|0\rangle & \langle 0|a_2 a_1 a_2^\dagger a_1^\dagger|0\rangle \end{pmatrix}. \quad (1.22)$$

Calculando os elementos de matriz de A, obtemos

$$A = \begin{pmatrix} 1+q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & 1 \\ 0 & 0 & 1 & q \end{pmatrix}. \quad (1.23)$$

Notemos que a matriz A pode ser diagonalizada em blocos, onde neste caso é necessário diagonalizar somente o bloco inferior, referente ao produto dos monômios $a_1^\dagger a_2^\dagger|0\rangle$ e $a_2^\dagger a_1^\dagger|0\rangle$. Diagonalizando esta matriz obtemos os mesmos estados dados em (1.16) e (1.17).

Seguindo o raciocínio empregado na diagonalização da matriz A, a construção da matriz de *overlap* para $N = 3$ pode ser feita através da sub-matriz,

$$B = \begin{pmatrix} \langle 123|123\rangle & \langle 123|132\rangle & \langle 123|213\rangle & \langle 123|231\rangle & \langle 123|312\rangle & \langle 123|321\rangle \\ \langle 132|123\rangle & \langle 132|132\rangle & \langle 132|213\rangle & \langle 132|231\rangle & \langle 132|312\rangle & \langle 132|321\rangle \\ \langle 213|123\rangle & \langle 213|132\rangle & \langle 213|213\rangle & \langle 213|231\rangle & \langle 213|312\rangle & \langle 213|321\rangle \\ \langle 231|123\rangle & \langle 231|132\rangle & \langle 231|213\rangle & \langle 231|231\rangle & \langle 231|312\rangle & \langle 231|321\rangle \\ \langle 312|123\rangle & \langle 312|132\rangle & \langle 312|213\rangle & \langle 312|231\rangle & \langle 312|312\rangle & \langle 312|321\rangle \\ \langle 321|123\rangle & \langle 321|132\rangle & \langle 321|213\rangle & \langle 321|231\rangle & \langle 321|312\rangle & \langle 321|321\rangle \end{pmatrix}. \quad (1.24)$$

Calculando os elementos de matriz de B , obtemos

$$B = \begin{pmatrix} 1 & q & q & q^2 & q^2 & q^3 \\ q & 1 & q^2 & q^3 & q & q^2 \\ q & q^2 & 1 & q & q^3 & q^2 \\ q^2 & q^3 & q & 1 & q^2 & q \\ q^2 & q & q^3 & q^2 & 1 & q \\ q^3 & q^2 & q^2 & q & q & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.25)$$

Como resultado da diagonalização da matriz acima obtemos uma base para $N = 3$ quons. Esta base não é necessariamente a mesma obtida utilizando os diagramas de Young, como mostrado na Ref. [6]. Os casos onde há repetição dos índices são casos particulares da combinação destes monômios, a menos de fatores de normalização independentes de q . Naturalmente, o processo exemplificado acima, pode ser estendido para um número qualquer de partículas.

Capítulo 2

O subespaço totalmente anti-simétrico

2.1 Obtenção da base de estados

Como já mencionado, neste trabalho estamos interessados em desenvolver uma teoria de muitos corpos para quons restritos ao subespaço anti-simétrico, dando continuidade ao trabalho desenvolvido na Ref. [6], onde foi construída uma teoria de muitos corpos para quons restritos ao subespaço simétrico. Como pré-requisito para o desenvolvimento da nossa teoria, devemos saber como são os estados de muitos quons no subespaço anti-simétrico. Poderíamos utilizar os diagramas de Young ou a diagonalização da matriz de *overlap* para a construção de tais estados. Porém, o uso destes dois métodos para um número grande de partículas torna-se excessivamente dispendioso. O que procuramos fazer, foi desenvolver uma maneira sistemática para construir uma base de estados para N quons restritos ao subespaço anti-simétrico do espaço quônico total. Como exemplo, construiremos inicialmente os estados totalmente anti-simétricos com representação no espaço de Fock para $N = 2$ e $N = 3$ quons. Novamente, devido ao fato de não haver nenhum tipo de relação de comutação entre dois operadores de criação devemos levar em conta todas as combinações possíveis dos rótulos das partículas. Assim, um estado anti-simétrico de 2 quons pode ser escrito como

$$|2; \mathcal{A}\rangle_q = \mathcal{N}_2(a_1^\dagger a_2^\dagger - a_2^\dagger a_1^\dagger)|0\rangle, \quad (2.1)$$

onde \mathcal{N}_2 é a norma deste estado, o número 2 do lado esquerdo da equação é o número de quons e \mathcal{A} representa que o estado é totalmente anti-simétrico. Encontramos \mathcal{N}_2 usando a condição de

normalização

$${}_q\langle 2; \mathcal{A} | 2; \mathcal{A} \rangle_q = |\mathcal{N}_2|^2 \langle 0 | (a_2 a_1 - a_1 a_2) (a_1^\dagger a_2^\dagger - a_2^\dagger a_1^\dagger) | 0 \rangle = 1. \quad (2.2)$$

Usando a Eqs.(1.1) e (1.3), chegamos ao seguinte resultado

$$\mathcal{N}_2 = \frac{1}{\sqrt{2(1-q)}}. \quad (2.3)$$

Portanto,

$$|2; \mathcal{A} \rangle_q = \frac{1}{\sqrt{2(1-q)}} (a_1^\dagger a_2^\dagger - a_2^\dagger a_1^\dagger) | 0 \rangle. \quad (2.4)$$

Seguindo o mesmo procedimento para 3 quons, façamos

$$|3; \mathcal{A} \rangle_q = \mathcal{N}_3 (a_1^\dagger a_2^\dagger a_3^\dagger - a_1^\dagger a_3^\dagger a_2^\dagger - a_2^\dagger a_1^\dagger a_3^\dagger + a_2^\dagger a_3^\dagger a_1^\dagger + a_3^\dagger a_1^\dagger a_2^\dagger - a_3^\dagger a_2^\dagger a_1^\dagger) | 0 \rangle. \quad (2.5)$$

Normalizando este estado, obtemos

$$|3; \mathcal{A} \rangle_q = \frac{1}{\sqrt{6(1-2q+q^2-q^3)}} (a_1^\dagger a_2^\dagger a_3^\dagger - a_1^\dagger a_3^\dagger a_2^\dagger - a_2^\dagger a_1^\dagger a_3^\dagger + a_2^\dagger a_3^\dagger a_1^\dagger + a_3^\dagger a_1^\dagger a_2^\dagger - a_3^\dagger a_2^\dagger a_1^\dagger) | 0 \rangle. \quad (2.6)$$

Os estados em (2.4) e (2.6) conferem com os estados obtidos através dos diagramas de Young ou diagonalizando a matriz de *overlap*, dados nas Eqs.(1.17) e (1.21).

Extendendo o procedimento anterior para a construção de um estado genérico anti-simétrico de N quons, definimos o operador de anti-simetrização* como sendo

$$\hat{\mathcal{A}}_N = \sum_{\alpha} \varepsilon_{\alpha} P_{\alpha}, \quad (2.7)$$

onde a soma é feita sobre todas as $N!$ permutações dos primeiros N termos, P_{α} é uma permutação qualquer e ε_{α} é definido da seguinte maneira:

$$\varepsilon_{\alpha} = \begin{cases} +1, & \text{se } P_{\alpha} \text{ é uma permutação par,} \\ -1, & \text{se } P_{\alpha} \text{ é uma permutação ímpar.} \end{cases} \quad (2.8)$$

*Na Ref. [19] o operador de anti-simetrização é definido como $\hat{\mathcal{A}}_N = \frac{1}{N!} \sum_{\alpha} \varepsilon_{\alpha} P_{\alpha}$.

Então, um estado anti-simétrico para N quons, não normalizado, pode ser escrito como

$$\hat{\mathcal{A}}_N(a_1^\dagger a_2^\dagger a_3^\dagger \dots a_N^\dagger)|0\rangle. \quad (2.9)$$

Para encontrarmos a norma deste estado precisamos saber como é a atuação de um operador de aniquilação no mesmo. Para isto, basta notar que o operador de anti-simetrização de N partículas pode ser expandido como uma soma de operadores de anti-simetrização de $N - 1$ partículas, como segue abaixo:

$$\begin{aligned} a_1 \hat{\mathcal{A}}_N(a_1^\dagger a_2^\dagger a_3^\dagger \dots a_N^\dagger)|0\rangle &= a_1 [\hat{\mathcal{A}}_{N-1}(\hat{a}_1^\dagger a_2^\dagger a_3^\dagger \dots a_N^\dagger)|0\rangle - \hat{\mathcal{A}}_{N-1}(a_2^\dagger \hat{a}_1^\dagger a_3^\dagger \dots a_N^\dagger)|0\rangle + \\ &+ \hat{\mathcal{A}}_{N-1}(a_2^\dagger a_3^\dagger \hat{a}_1^\dagger \dots a_N^\dagger)|0\rangle + \dots + (-)^{N-1} \hat{\mathcal{A}}_{N-1}(a_2^\dagger a_3^\dagger \dots a_N^\dagger \hat{a}_1^\dagger)|0\rangle], \end{aligned} \quad (2.10)$$

onde o símbolo $\hat{}$ (chapéu) indica que o operador não é permutado. Usando as Eqs.(1.1) e (1.3), obtemos:

$$\begin{aligned} a_1 \hat{\mathcal{A}}_N(a_1^\dagger a_2^\dagger a_3^\dagger \dots a_N^\dagger)|0\rangle &= \hat{\mathcal{A}}_{N-1}(a_2^\dagger a_3^\dagger \dots a_N^\dagger)|0\rangle - q \mathcal{A}_{N-1}(a_2^\dagger a_3^\dagger \dots a_N^\dagger)|0\rangle + \\ &+ q^2 \hat{\mathcal{A}}_{N-1}(a_2^\dagger a_3^\dagger \dots a_N^\dagger)|0\rangle + \dots + (-q)^{N-1} \hat{\mathcal{A}}_{N-1}(a_2^\dagger a_3^\dagger \dots a_N^\dagger)|0\rangle \\ &= (1 - q + q^2 + \dots + (-q)^{N-1}) \hat{\mathcal{A}}_{N-1}(a_2^\dagger a_3^\dagger \dots a_N^\dagger)|0\rangle \\ &= \left(\frac{1 - (-q)^N}{1 + q} \right) \hat{\mathcal{A}}_{N-1}(a_2^\dagger a_3^\dagger \dots a_N^\dagger)|0\rangle. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Chamaremos

$$\{N\} = \frac{1 - (-q)^N}{1 + q}, \quad (2.12)$$

de *anti-caixote* do número N . O nome foi dado em analogia ao *caixote* de N , $[N] = \frac{1 - q^N}{1 - q}$, comumente utilizado nas álgebras deformadas [12]. A definição *caixote* também foi usada na descrição das propriedades ligadas ao subespaço simétrico quônico [6, 21], sendo que esta muda para o *anti-caixote* de N trocando-se q por $-q$. Portanto,

$$a_i \hat{\mathcal{A}}_N(a_1^\dagger a_2^\dagger \dots a_i^\dagger \dots a_N^\dagger)|0\rangle = (-)^{i-1} \{N\} \hat{\mathcal{A}}_{N-1}(a_1^\dagger a_2^\dagger \dots a_{i-1}^\dagger a_{i+1}^\dagger \dots a_N^\dagger)|0\rangle. \quad (2.13)$$

A fase que aparece no lado direito da equação acima surge do número de permutações do operador a_i até encontrar o seu adjunto, considerando a ordem não permutada dos operadores. A norma de um estado de N quons totalmente anti-simétrico, representado por $|N; \mathcal{A}\rangle_q$, é obtida

fazendo-se

$${}_q\langle N; \mathcal{A} | N; \mathcal{A} \rangle_q = 1 = |\mathcal{N}_N|^2 \langle 0 | (a_N \cdots a_2 a_1) \hat{\mathcal{A}}_N^\dagger \hat{\mathcal{A}}_N (a_1^\dagger a_2^\dagger \cdots a_N^\dagger) | 0 \rangle. \quad (2.14)$$

Juntamente com as propriedades do operador de anti-simetrização,

$$\hat{\mathcal{A}}_N^\dagger = \hat{\mathcal{A}}_N \quad \text{e} \quad \hat{\mathcal{A}}_N^2 = \hat{\mathcal{A}}_N N!, \quad (2.15)$$

obtemos

$$|\mathcal{N}_N|^2 N! \langle 0 | a_N \cdots a_2 a_1 \hat{\mathcal{A}}_N (a_1^\dagger a_2^\dagger \cdots a_N^\dagger) | 0 \rangle = 1. \quad (2.16)$$

Utilizando a Eq.(2.13) sucessivamente e a condição $\langle 0 | 0 \rangle = 1$, encontramos a norma do estado

$$|\mathcal{N}_N| = \frac{1}{\sqrt{\{N\}! N!}}, \quad (2.17)$$

onde $\{N\}! = \{N\}\{N-1\}\{N-2\} \cdots \{1\}\{0\}!$, tal que $\{0\}! \equiv 1$.

Logo, o estado $|N; \mathcal{A}\rangle_q$ será dado por

$$|N; \mathcal{A}\rangle_q = \frac{1}{\sqrt{\{N\}! N!}} \hat{\mathcal{A}}_N (a_1^\dagger a_2^\dagger \cdots a_N^\dagger) | 0 \rangle. \quad (2.18)$$

Podemos verificar que os resultados (2.4) e (2.6) são casos particulares do resultado geral dado acima. Assim, a atuação do operador de aniquilação no estado anti-simétrico de N quons normalizado é

$$\begin{aligned} a_i |N; \mathcal{A}\rangle_q &= \frac{(-1)^{i-1}}{\sqrt{\{N\}! N!}} \{N\} \hat{\mathcal{A}}_{N-1} (a_1^\dagger a_2^\dagger \cdots a_{i-1}^\dagger a_{i+1}^\dagger \cdots a_N^\dagger) | 0 \rangle \\ &= \frac{(-1)^{i-1} \{N\}}{\sqrt{\{N\} N}} \left[\frac{\hat{\mathcal{A}}_{N-1}}{\sqrt{\{N-1\}!(N-1)!}} (a_1^\dagger a_2^\dagger \cdots a_{i-1}^\dagger a_{i+1}^\dagger \cdots a_N^\dagger) | 0 \rangle \right]. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Ou seja,

$$a_i |N; \mathcal{A}\rangle_q = (-1)^{i-1} \sqrt{\frac{\{N\}}{N}} |N-1; \mathcal{A}\rangle_q. \quad (2.20)$$

2.2 Propriedades dos estados anti-simétricos

2.2.1 Ortonormalidade

Dados dois estados de N quons restritos ao subespaço anti-simétrico, $|N; \mathcal{A}\rangle_q$ e $|N'; \mathcal{A}\rangle_q$, queremos mostrar que estes dois estados são ortonormais. Então, escrevemos:

$${}_q\langle N'; \mathcal{A} | N; \mathcal{A} \rangle_q = \frac{1}{\{N\}!N!} \langle 0 | (a_{N'} \dots a_{i'} \dots a_{1'}) \hat{\mathcal{A}}_{N'}^\dagger \hat{\mathcal{A}}_N (a_1^\dagger \dots a_i^\dagger \dots a_N^\dagger) | 0 \rangle. \quad (2.21)$$

Usando que $\hat{\mathcal{A}}_{N'}^\dagger \hat{\mathcal{A}}_N = N! \hat{\mathcal{A}}_N$, pois os índices '(linha) servem apenas para enfatizar que os operadores a_k^\dagger não são necessariamente os mesmos operadores a_k^\dagger , mas ambos estados têm o mesmo número de partículas, N . Portanto,

$${}_q\langle N'; \mathcal{A} | N; \mathcal{A} \rangle_q = \frac{1}{\{N\}!} \langle 0 | (a_{N'} \dots a_{i'} \dots a_{1'}) \hat{\mathcal{A}}_N (a_1^\dagger \dots a_i^\dagger \dots a_N^\dagger) | 0 \rangle. \quad (2.22)$$

Fazendo uso da Eq.(2.13) sucessivamente, demonstramos a relação de ortonormalidade,

$${}_q\langle N'; \mathcal{A} | N; \mathcal{A} \rangle_q = \delta_{1'1} \delta_{2'2} \dots \delta_{i'i} \dots \delta_{N'N}. \quad (2.23)$$

2.2.2 Atuação sucessiva de operadores de quons no subespaço anti-simétrico

Demonstraremos uma propriedade muito importante para o cálculo de elementos de matriz de operadores de mais de um corpo, que está relacionada com a ordem de atuação dos operadores de aniquilação e criação em um estado dado pela Eq.(2.18). Utilizemos a seguinte notação

$$|N; \mathcal{A}\rangle_q = |1, 2, \dots, i, \dots, j, \dots, N; \mathcal{A}\rangle_q, \quad (2.24)$$

onde cada índice representa um operador de criação na ordem dada. Atuando com os operadores $a_i a_j$ em (2.24), obtemos:

$$\begin{aligned} & a_i a_j |1, 2, \dots, i, \dots, j, \dots, N; \mathcal{A}\rangle_q \\ &= (-)^{j-1} \sqrt{\frac{\{N\}}{N}} a_i |1, 2, \dots, i, \dots, j-1, j+1, \dots, N; \mathcal{A}\rangle_q \\ &= (-)^{i+j} \sqrt{\frac{\{N\}\{N-1\}}{N(N-1)}} |1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, j-1, j+1, \dots, N; \mathcal{A}\rangle_q. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Trocando a ordem de atuação dos operadores para $a_j a_i$, chegamos à seguinte relação

$$\begin{aligned} & a_j a_i |1, 2, \dots, i, \dots, j, \dots, N; \mathcal{A}\rangle_q \\ &= (-)^{i-1} \sqrt{\frac{\{N\}}{N}} a_j |1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, j, \dots, N; \mathcal{A}\rangle_q \\ &= (-)^{i+j-1} \sqrt{\frac{\{N\}\{N-1\}}{N(N-1)}} |1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, j-1, j+1, \dots, N; \mathcal{A}\rangle_q \end{aligned} \quad (2.26)$$

Então, mostramos que

$$a_i a_j |N; \mathcal{A}\rangle_q = -a_j a_i |N; \mathcal{A}\rangle_q. \quad (2.27)$$

O seu dual é

$${}_q \langle N; \mathcal{A} | a_j^\dagger a_i^\dagger = -{}_q \langle N; \mathcal{A} | a_i^\dagger a_j^\dagger. \quad (2.28)$$

O resultado acima equivale a dizer que, dentro do subespaço anti-simétrico, dois operadores de aniquilação (criação) de quons anti-comutam.

2.3 Operadores de um e dois corpos

Nesta seção fazemos o cálculo de elementos de matriz de operadores de um e dois corpos, cuja finalidade será a aplicação nas próximas seções.

Definimos o operador de um corpo [8] como

$$\hat{T} = \sum_{\nu\nu'}^N T_{\nu\nu'} a_\nu^\dagger a_{\nu'}. \quad (2.29)$$

Calculando o valor esperado de \hat{T} na base de estados pertencentes ao subespaço anti-simétrico de N quons, obtemos:

$${}_q \langle N; \mathcal{A} | \hat{T} | N'; \mathcal{A} \rangle_q = \sum_{\nu\nu'}^N T_{\nu\nu'} {}_q \langle N; \mathcal{A} | a_\nu^\dagger a_{\nu'} | N'; \mathcal{A} \rangle_q. \quad (2.30)$$

Usando a Eq.(2.20) e a relação de ortonormalidade (2.23), a equação acima se reduz a

$${}_q \langle N; \mathcal{A} | \hat{T} | N'; \mathcal{A} \rangle_q = \sum_{\nu\nu'}^N T_{\nu\nu'} \frac{\{N\}}{N} (-)^{\nu+\nu'} \delta_{\nu\nu'}. \quad (2.31)$$

Definimos o operador de dois corpos como sendo

$$\hat{V} = \sum_{\mu\nu\mu'\nu'}^N V_{\mu\nu\mu'\nu'} a_{\mu}^{\dagger} a_{\nu}^{\dagger} a_{\nu'} a_{\mu'}. \quad (2.32)$$

Façamos o procedimento análogo ao feito com o termo de um corpo. Assim,

$${}_q\langle N; \mathcal{A} | \hat{V} | N'; \mathcal{A} \rangle_q = \sum_{\mu\nu\mu'\nu'}^N V_{\mu\nu\mu'\nu'} {}_q\langle N; \mathcal{A} | a_{\mu}^{\dagger} a_{\nu}^{\dagger} a_{\nu'} a_{\mu'} | N'; \mathcal{A} \rangle_q. \quad (2.33)$$

Aplicando a Eq.(2.20) duas vezes e usando a relação de ortonormalidade, obtemos o resultado:

$${}_q\langle N; \mathcal{A} | \hat{V} | N'; \mathcal{A} \rangle_q = \sum_{\mu\nu\mu'\nu'} V_{\mu\nu\mu'\nu'} \frac{\{N\}\{N-1\}}{N(N-1)} (-)^{\mu+\mu'} (-)^{\nu+\nu'} \delta_{\mu\mu'} \delta_{\nu\nu'}, \quad (2.34)$$

onde a soma em μ e em ν é feita em um índice até N e a outra até $N-1$.

A diferença principal entre os valores esperados dos operadores de um e dois corpos para quons dentro do subespaço anti-simétrico em relação aos férmions, é que aparecem os fatores $\frac{\{N\}}{N}$ e $\frac{\{N\}\{N-1\}}{N(N-1)}$ para quons. Analisando tais fatores através da Eq.(2.12), percebemos que estes são sempre menores que 1 e serão iguais a 1 para $q = -1$, ou seja, o caso fermiônico.

2.4 A álgebra $su(2)$ para quons no subespaço anti-simétrico

No final da seção (1.1) foi mencionado que é possível construir a partir da álgebra de quons, operadores de momento angular que satisfazem a álgebra $su(2)$. Tais operadores possuem no entanto uma forma funcional complicada, escrita em termos de operadores de criação e aniquilação de quons. Por outro lado, na Ref. [21], foi mostrado que é possível, restrito ao subespaço simétrico, definir operadores de momento angular seguindo a conhecida prescrição de Schwinger. Mostraremos a seguir que o mesmo é válido dentro do subespaço anti-simétrico. Definimos então os seguintes operadores de quasi-spin:

$$\hat{K}_0 = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^n (c_{+m}^{\dagger} c_{+m} - c_{-m}^{\dagger} c_{-m}); \quad \hat{K}_+ = \sum_{m=1}^n c_{+m}^{\dagger} c_{-m} \quad \text{e} \quad \hat{K}_- = \sum_{m=1}^n c_{-m}^{\dagger} c_{+m}. \quad (2.35)$$

A motivação para definirmos os operadores desta maneira é que estes serão utilizados posteriormente no modelo de Lipkin.

Os estados que servirão como base para os nossos cálculos são estados do tipo descrito na Eq.(2.18), que podem ser escritos como

$$|n; \mathcal{A}\rangle_q = \frac{1}{\sqrt{\{n\}!n!}} \hat{\mathcal{A}}_n \left(c_1^\dagger \dots c_i^\dagger \dots c_n^\dagger \right) |0\rangle, \quad (2.36)$$

onde as n partículas estão distribuídas em dois níveis, + e -.

Para demonstrar a seguinte relação, ${}_q\langle n, \mathcal{A} | [K_+, K_-] | n'; \mathcal{A} \rangle_q = {}_q\langle n, \mathcal{A} | 2K_0 | n'; \mathcal{A} \rangle_q$, façamos:

$$\begin{aligned} & {}_q\langle n; \mathcal{A} | [K_+, K_-] | n'; \mathcal{A} \rangle_q = {}_q\langle n, \mathcal{A} | K_+ K_- | n'; \mathcal{A} \rangle_q - {}_q\langle n, \mathcal{A} | K_- K_+ | n'; \mathcal{A} \rangle_q \\ & = {}_q\langle n; \mathcal{A} | \sum_{m, m'=1}^n c_{+m'}^\dagger c_{-m'} c_{-m}^\dagger c_{+m} | n'; \mathcal{A} \rangle_q - {}_q\langle n; \mathcal{A} | \sum_{m, m'=1}^n c_{-m'}^\dagger c_{+m'} c_{+m}^\dagger c_{-m} | n'; \mathcal{A} \rangle_q. \end{aligned}$$

Usando a Eq.(1.1), obtemos

$$\begin{aligned} & {}_q\langle n; \mathcal{A} | [K_+, K_-] | n'; \mathcal{A} \rangle_q = {}_q\langle n, \mathcal{A} | \sum_{m=1}^n c_{+m}^\dagger c_{+m} | n'; \mathcal{A} \rangle_q + \\ & + q \left({}_q\langle n; \mathcal{A} | \sum_{m, m'=1}^n c_{+m'}^\dagger c_{-m}^\dagger c_{-m'} c_{+m} | n'; \mathcal{A} \rangle_q \right) - {}_q\langle n; \mathcal{A} | \sum_{m=1}^n c_{-m}^\dagger c_{-m} | n'; \mathcal{A} \rangle_q - \\ & - q \left({}_q\langle n; \mathcal{A} | \sum_{m, m'=1}^n c_{-m'}^\dagger c_{+m}^\dagger c_{+m'} c_{-m} | n'; \mathcal{A} \rangle_q \right). \end{aligned}$$

Os elementos de matriz que estão multiplicados por q se cancelarão, devido as propriedades dadas pelas Eqs.(2.27) e (2.28). Portanto,

$$\begin{aligned} & {}_q\langle n; \mathcal{A} | [K_+, K_-] | n'; \mathcal{A} \rangle_q = {}_q\langle n; \mathcal{A} | \sum_{m=1}^n c_{+m}^\dagger c_{+m} - c_{-m}^\dagger c_{-m} | n'; \mathcal{A} \rangle_q \\ & = {}_q\langle n; \mathcal{A} | 2\hat{K}_0 | n'; \mathcal{A} \rangle_q. \end{aligned} \quad (2.37)$$

A próxima relação, ${}_q\langle n; \mathcal{A} | [K_0, K_+] | n'; \mathcal{A} \rangle_q = {}_q\langle n; \mathcal{A} | K_+ | n'; \mathcal{A} \rangle_q$, pode ser demonstrada da seguinte forma

$${}_q\langle n; \mathcal{A} | [K_0, K_+] | n'; \mathcal{A} \rangle_q = {}_q\langle n; \mathcal{A} | K_0 K_+ | n'; \mathcal{A} \rangle_q - {}_q\langle n; \mathcal{A} | K_+ K_0 | n'; \mathcal{A} \rangle_q. \quad (2.38)$$

Continuando,

$$\begin{aligned}
 {}_q\langle n; \mathcal{A} | [K_0, K_+] | n'; \mathcal{A} \rangle_q &= \frac{1}{2} \sum_{m, m'=1}^n [{}_q\langle n; \mathcal{A} | c_{+m}^\dagger c_{+m'} c_{+m}^\dagger c_{-m} | n'; \mathcal{A} \rangle_q - \\
 &- {}_q\langle n; \mathcal{A} | c_{-m'}^\dagger c_{-m} c_{+m}^\dagger c_{-m} | n'; \mathcal{A} \rangle_q - {}_q\langle n; \mathcal{A} | c_{+m}^\dagger c_{-m'} c_{+m}^\dagger c_{+m} | n'; \mathcal{A} \rangle_q + \\
 &+ {}_q\langle n; \mathcal{A} | c_{+m}^\dagger c_{-m'} c_{-m}^\dagger c_{-m} | n'; \mathcal{A} \rangle_q].
 \end{aligned} \tag{2.39}$$

Utilizando a Eq.(1.1), obtemos:

$$\begin{aligned}
 {}_q\langle n; \mathcal{A} | [K_0, K_+] | n'; \mathcal{A} \rangle_q &= \frac{1}{2} [2 \sum_{m=1}^n {}_q\langle n; \mathcal{A} | c_{+m}^\dagger c_{-m} | n'; \mathcal{A} \rangle_q + \\
 &+ q \sum_{m, m'=1}^n ({}_q\langle n; \mathcal{A} | c_{+m}^\dagger c_{+m}^\dagger c_{+m'} c_{-m} | n'; \mathcal{A} \rangle_q - {}_q\langle n; \mathcal{A} | c_{-m'}^\dagger c_{+m}^\dagger c_{-m'}^\dagger c_{-m} | n'; \mathcal{A} \rangle_q - \\
 &- {}_q\langle n; \mathcal{A} | c_{+m}^\dagger c_{+m}^\dagger c_{-m'} c_{+m} | n'; \mathcal{A} \rangle_q + {}_q\langle n; \mathcal{A} | c_{+m}^\dagger c_{-m}^\dagger c_{-m'} c_{-m} | n'; \mathcal{A} \rangle_q)].
 \end{aligned} \tag{2.40}$$

Os operadores de dois corpos se cancelarão novamente. Portanto,

$$\begin{aligned}
 {}_q\langle n; \mathcal{A} | [K_0, K_+] | n'; \mathcal{A} \rangle_q &= {}_q\langle n; \mathcal{A} | \sum_{m=1}^n c_{+m}^\dagger c_{-m} | n'; \mathcal{A} \rangle_q \\
 &= {}_q\langle n; \mathcal{A} | K_+ | n'; \mathcal{A} \rangle_q.
 \end{aligned} \tag{2.41}$$

Finalmente, resta-nos mostrar a relação, ${}_q\langle n; \mathcal{A} | [K_0, K_-] | n'; \mathcal{A} \rangle_q = {}_q\langle n; \mathcal{A} | -K_- | n'; \mathcal{A} \rangle_q$, a qual pode ser facilmente mostrada tomando-se o hermiteano conjugado da Eq.(2.41).

Como resultado geral, mostramos que os operadores de quasi-spin acima descritos satisfazem a álgebra $su(2)$ no subespaço anti-simétrico, ou seja,

$${}_q\langle n; \mathcal{A} | [K_+, K_-] | n'; \mathcal{A} \rangle_q = {}_q\langle n; \mathcal{A} | 2K_0 | n'; \mathcal{A} \rangle_q \tag{2.42}$$

e

$${}_q\langle n; \mathcal{A} | [K_0, K_\pm] | n'; \mathcal{A} \rangle_q = {}_q\langle n; \mathcal{A} | \pm K_\pm | n'; \mathcal{A} \rangle_q. \tag{2.43}$$

Capítulo 3

Solução de Hartree-Fock para quons no modelo de Lipkin

Com o intuito de estudar os núcleos atômicos a partir de seus constituintes, os núcleons, surgiram as teorias microscópicas em física nuclear. A não existência de uma teoria que descreva exatamente o problema de muitos corpos é suprida em parte pelas teorias de campo médio. Usaremos o método de Hartree-Fock, que é uma teoria de campo médio, para encontrar a energia do estado fundamental do nosso sistema de estudo, o modelo de Lipkin.

Consideraremos o modelo de Lipkin como sendo formado por quons e não mais férmions. O fato de considerarmos os quons como as partículas que constituem este sistema introduz um novo grau de liberdade, o parâmetro q . Estamos interessados em saber quais as modificações que surgirão na solução de Hartree-Fock com a introdução deste parâmetro.

3.1 O método de Hartree-Fock

No campo da teoria atômica, Douglas Hartree e alguns colaboradores propuseram em 1928 uma teoria que simulasse efetivamente o potencial sentido por um elétron devido ao núcleo e a todos os outros elétrons de um átomo. Nesta teoria supunha-se uma base de estados de partícula independente que obedecia o princípio de exclusão de Pauli na forma fraca. Esta base de estados era auto-estado do hamiltoniano de um corpo, o qual continha o potencial efetivo do sistema. Este potencial dependia da densidade de carga eletrônica, que por sua vez dependia das funções de onda dos elétrons. Portanto, constituía um método auto-consistente.

Mais tarde, Fock considerou como auto-funções do hamiltoniano de um corpo, funções de onda que obedeciam o princípio de exclusão de Pauli na forma forte, dando origem ao termo de troca. Este método ficou conhecido como método de Hartree-Fock (HF).

Para deduzirmos as equações de HF [20] tentamos encontrar um potencial de um corpo tal que o hamiltoniano seja dado por,

$$\hat{\mathcal{H}}^{HF} = \sum_{i=1}^A \hat{h}(i), \quad (3.1)$$

onde o seu auto-estado com menor autovalor E_0^{HF} , é uma aproximação ao estado fundamental exato e A é o número de partículas*. Este auto-estado é um *determinante de Slater*, que pode ser escrito como

$$|HF\rangle = |\Phi\rangle = \prod_{i=1}^A a_i^\dagger |-\rangle, \quad (3.2)$$

onde $a_k^\dagger |-\rangle$ corresponde ao estado de uma partícula (férmion) no estado k . Os auto-estados do hamiltoniano $\hat{h}(i)$ são tais que,

$$\hat{h}(i)|\varphi_k(i)\rangle = \varepsilon_k|\varphi_k(i)\rangle; \quad i = \{\vec{r}_i, s_i, t_i\}, \quad (3.3)$$

onde \vec{r}_i , s_i e t_i indicam posição, spin e isospin da i -ésima partícula, respectivamente.

Geralmente, trabalhamos com uma base completa e ortogonal de estados de partícula independente. O estado $|\varphi_k\rangle$ pode ser expandido nesta base,

$$|\varphi_k\rangle = \sum_l D_{lk} |\chi_l\rangle, \quad (3.4)$$

sendo que para cada função $|\chi_l\rangle$ correspondem operadores de criação e aniquilação de férmions, c_l^\dagger e c_l e D é uma transformação unitária.

Representaremos o determinante de Slater $|\Phi\rangle$ por sua matriz densidade de partícula independente,

$$\rho_{uv} = \langle \Phi | c_u^\dagger c_l | \Phi \rangle. \quad (3.5)$$

*Estamos usando a notação onde os índices i, j referem-se a estados de buraco, os índices m, n referem-se a estados de partícula e os índices k, l não fazem nenhuma distinção.

Da transformação (3.4), temos

$$\rho_{ll'} = \sum_{k,k'} D_{lk} D_{l'k'}^* \langle \Phi | a_k^\dagger a_k | \Phi \rangle = \sum_{i=1}^N D_{li} D_{li}^* \quad (3.6)$$

Como ρ é diagonal na base a_k^\dagger, a_k com autovalores 0 ou 1, o traço de ρ é igual ao número de partículas do sistema, obedecendo a propriedade $\rho^2 = \rho$.

O hamiltoniano de muitos corpos tem a forma:

$$\hat{\mathcal{H}} = \sum_{l_1, l_2} t_{l_1 l_2} c_{l_1}^\dagger c_{l_2} + \frac{1}{4} \sum_{l_1, l_2, l_3, l_4} \bar{v}_{l_1 l_2 l_3 l_4} c_{l_1}^\dagger c_{l_2}^\dagger c_{l_4} c_{l_3}, \quad (3.7)$$

onde $\bar{v}_{l_1 l_2 l_3 l_4} = v_{l_1 l_2 l_3 l_4} - v_{l_1 l_2 l_4 l_3}$. Para calcular a energia de HF, façamos

$$E^{HF} = \langle \Phi | \hat{\mathcal{H}} | \Phi \rangle,$$

a qual pode ser escrita em termos da densidade de partícula independente, ou seja,

$$\begin{aligned} E^{HF}[\rho] &= \sum_{l_1, l_2} t_{l_1 l_2} \langle \Phi | c_{l_1}^\dagger c_{l_2} | \Phi \rangle + \frac{1}{4} \sum_{l_1, l_2, l_3, l_4} \bar{v}_{l_1 l_2 l_3 l_4} \langle \Phi | c_{l_1}^\dagger c_{l_2}^\dagger c_{l_4} c_{l_3} | \Phi \rangle \\ &= \sum_{l_1, l_2} t_{l_1 l_2} \rho_{l_2 l_1} + \frac{1}{2} \sum_{l_1, l_2, l_3, l_4} \rho_{l_3 l_1} \bar{v}_{l_1 l_2 l_3 l_4} \rho_{l_4 l_2}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Podemos usar a equação acima para fornecer uma expressão para a energia de HF na base $\{|\varphi_k\rangle\}$ em que ρ é diagonal, com autovalores 0 e 1,

$$E^{HF} = \sum_{i=1}^A t_{ii} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^A \bar{v}_{ij,ij}. \quad (3.9)$$

Para determinar a base de HF nós devemos minimizar a energia (3.8) para todas as densidades ρ com a propriedade $\rho^2 = \rho$. Assim, a variação da Eq.(3.8) é dada por

$$\delta E = E[\rho + \delta\rho] - E[\rho] = \sum_{kk'} h_{kk'} \delta\rho_{k'k}, \quad (3.10)$$

onde a matriz hermiteana h é definida como

$$h_{kk'} = \frac{\partial E^{HF}[\rho]}{\partial \rho_{k'k}}. \quad (3.11)$$

Da Eq.(3.8) obtemos

$$h = t + \Gamma, \quad (3.12)$$

onde definimos o campo auto-consistente

$$\Gamma_{kk'} = \sum_{l'} \bar{v}_{kl'l} \rho_{l'l}. \quad (3.13)$$

Devido ao fato de ρ ser diagonal na base de HF, os termos de partícula-partícula e buraco-buraco dos elementos de $\delta\rho$ são nulos. Como $\delta\rho_{im}$ pode assumir qualquer valor na Eq.(3.10), da condição que $\delta E = 0$, temos

$$h_{mi} = t_{mi} + \sum_{j=1}^A \bar{v}_{mji} = 0, \quad (i \leq A, m > A). \quad (3.14)$$

Nesta base onde ρ é diagonal, h não mistura estados de buraco e estados de partícula, sendo que esta base fica determinada a menos de transformações unitárias entre os níveis ocupados ou entre os níveis vazios. Podemos usar este grau de liberdade e exigir que h seja diagonal, ou seja,

$$h_{kk'} = t_{kk'} + \sum_{i=1}^A \bar{v}_{kik'i} = \varepsilon_k \delta_{kk'}. \quad (3.15)$$

Considerando a transformação (3.4), obtemos as equações de HF

$$\sum_{l'} h_{ll'} D_{l'k} = \sum_{l'} \left(t_{ll'} + \sum_{i=1}^A \sum_{p,p'} \bar{v}_{lp'l'p} D_{pi} D_{p'i}^* \right) D_{l'k} = \varepsilon_k D_{lk}. \quad (3.16)$$

Notemos que a equação acima depende dos D 's, que fazem parte da solução do problema. Ou seja, são eles que determinam os estados $|\varphi_k\rangle$.

Para perceber melhor o surgimento do potencial efetivo, ou seja, a média das interações de

dois corpos, escrevemos a Eq.(3.16) na representação de coordenadas espaciais[†], como segue,

$$\frac{-\hbar^2 \nabla^2}{2m} \varphi_k(\vec{r}) + \sum_{i=1}^A \int d\vec{r}^i v(\vec{r}, \vec{r}^i) \varphi_j^*(\vec{r}^i) \left[\varphi_j(\vec{r}^i) \varphi_k(\vec{r}) - \varphi_j(\vec{r}) \varphi_k(\vec{r}^i) \right] = \varepsilon_k \varphi_k(\vec{r}), \quad (3.17)$$

onde o primeiro termo do colchete define o *potencial local de Hartree*,

$$\Gamma_H(\vec{r}) = \int d\vec{r}^i v(\vec{r}, \vec{r}^i) \sum_{j=1}^A |\varphi_j(\vec{r}^i)|^2 = \int d\vec{r}^i v(\vec{r}, \vec{r}^i) \rho(\vec{r}^i), \quad (3.18)$$

e o segundo termo do colchete define o *potencial não-local ou potencial de troca*,

$$\Gamma_{ex}(\vec{r}, \vec{r}^i) = -v(\vec{r}, \vec{r}^i) \sum_{j=1}^A \varphi_j^*(\vec{r}^i) \varphi_j(\vec{r}) = -v(\vec{r}, \vec{r}^i) \rho(\vec{r}, \vec{r}^i). \quad (3.19)$$

3.2 O modelo de Lipkin

O modelo proposto em 1964 por H. J. Lipkin, N. Meshkov e A. J. Glick [7], simplesmente conhecido como modelo de Lipkin, foi criado com a finalidade de testar os métodos aproximativos em sistemas de muitos corpos. Assim, construiu-se um modelo exatamente solúvel, mas não trivial. Este modelo permite comparar as soluções aproximadas com as soluções exatas, para então comparar a região de validade da solução para cada método e talvez encontrar quais as modificações que deverão ser feitas para se ter uma ampla região de validade do mesmo.

O modelo de Lipkin consiste de N férmions distribuídos em dois níveis N vezes degenerados e separados por uma energia ε , como mostra a figura abaixo [20],

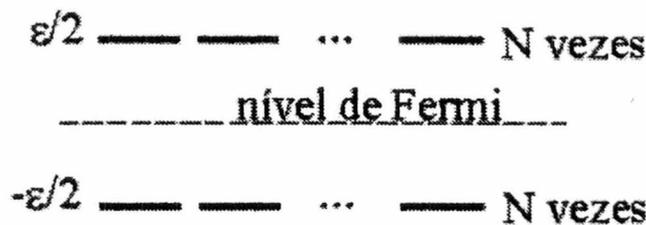


Figura 3.1: Representação esquemática do modelo de Lipkin.

[†] Assumimos que o potencial não depende do spin ou do isospin

O hamiltoniano para este sistema é

$$\hat{H} = \frac{\varepsilon}{2} \sum_{\sigma,p} \sigma c_{\sigma p}^{\dagger} c_{\sigma p} - \frac{V}{2} \sum_{\sigma,p,p'} c_{\sigma p}^{\dagger} c_{\sigma p'}^{\dagger} c_{-\sigma p'} c_{-\sigma p}, \quad (3.20)$$

onde $\sigma = -, +$ representam os níveis abaixo e acima do nível de Fermi, respectivamente, que estão separados por uma energia ε . Os índices p e p' descrevem o estado de uma partícula no nível σ e o potencial de interação entre as partículas é dado por V , sendo que c_{\pm}^{\dagger} e c_{\pm} representam operadores de criação e aniquilação de férmions, respectivamente [20].

Definindo os operadores \hat{K}_0 , \hat{K}_- e \hat{K}_+ da mesma maneira que em (2.35), o hamiltoniano, Eq.(3.20), pode ser escrito como:

$$\hat{H} = \varepsilon \hat{K}_0 - \frac{V}{2} (\hat{K}_+^2 + \hat{K}_-^2). \quad (3.21)$$

É possível verificar que estes operadores satisfazem as relações de comutação da álgebra $su(2)$. Lembremos que agora estamos tratando de férmions.

Como autoestado do hamiltoniano admitimos um determinante de Slater da forma mais geral possível, o qual é caracterizado pelo número complexo z [20],

$$|\Phi\rangle = \mathcal{N} \exp(z \hat{K}_+) |\Phi_0\rangle, \quad (3.22)$$

com

$$|\Phi_0\rangle = \prod_{m=1}^N c_{-m}^{\dagger} |0\rangle, \quad (3.23)$$

onde \mathcal{N} é a norma do estado e $|0\rangle$ representa o vácuo.

Através da transformação unitária,

$$\begin{aligned} a_{0m}^{\dagger} &= D_{-0} c_{-m}^{\dagger} + D_{+0} c_{+m}^{\dagger} \\ a_{1m}^{\dagger} &= D_{-1} c_{-m}^{\dagger} + D_{+1} c_{+m}^{\dagger}, \end{aligned} \quad (3.24)$$

onde os D's são parâmetros variacionais e 0 e 1 indicam os novos níveis abaixo e acima do nível

de Fermi, respectivamente, podemos escrever o estado (3.22) como [20],

$$|\Phi\rangle = \prod_{m=1}^N a_{0m}^\dagger |0\rangle. \quad (3.25)$$

Reescrevendo o hamiltoniano em termos dos novos operadores e minimizando a expressão, $\langle\Phi|\hat{\mathcal{H}}|\Phi\rangle$ juntamente com a condição de normalização para os estados de partícula independente, com respeito a D_{-0}^* e D_{+0}^* , obtemos as equações de HF na forma matricial para o modelo de Lipkin,

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -Q \\ -Q^* & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_{-0} \\ D_{+0} \end{pmatrix} = \frac{e_0}{\varepsilon} \begin{pmatrix} D_{-0} \\ D_{+0} \end{pmatrix}, \quad (3.26)$$

onde

$$Q = \chi D_{+0} D_{-0}^*, \quad (3.27)$$

e

$$\chi = \frac{V(N-1)}{\varepsilon}. \quad (3.28)$$

O parâmetro χ é chamado de *parâmetro de interação* e Q de *potencial de deformação*. Resolvendo a Eq.(3.26), encontramos a energia de partícula independente,

$$e_{0m} = \pm\varepsilon\sqrt{\frac{1}{4} + |Q|^2}. \quad (3.29)$$

Fazendo a mudança de variáveis,

$$\begin{aligned} D_{-0} &= \cos\alpha, \\ D_{+0} &= \sin\alpha \exp(-i\varphi), \end{aligned} \quad (3.30)$$

a energia do estado fundamental assume a forma

$$E_0^{HF} = \frac{-\varepsilon N}{2} \left[\cos(2\alpha) + \frac{\chi}{2} \sin^2(2\alpha) \cos(2\varphi) \right]. \quad (3.31)$$

Minimizando a energia com relação aos parâmetros α e φ , E_0^{HF} será um mínimo para $\chi < 1$ quando

$$\alpha \equiv \alpha_{HF} = 0 \quad \text{para} \quad \forall\varphi. \quad (3.32)$$

Resultando em

$$E_0^{HF} = \frac{-\varepsilon N}{2}. \quad (3.33)$$

Esta solução é chamada de *solução esférica*. Para $\chi > 1$, a solução é

$$\cos(2\alpha_{HF}) = \frac{1}{\chi} \quad \text{para} \quad \varphi \equiv \varphi_{HF} = 0. \quad (3.34)$$

Resultando em

$$E_0^{HF} = \frac{-\varepsilon N}{4} \left(\chi + \frac{1}{\chi} \right). \quad (3.35)$$

Esta solução é chamada de *solução deformada*.

Para o valor,

$$\chi_c = \frac{V_c(N-1)}{\varepsilon} = 1, \quad (3.36)$$

chamado de *valor crítico*, a solução em $\alpha = 0$ e $\varphi = 0$ torna-se instável. Isto caracteriza uma transição de fase entre as soluções esférica e deformada. Na Fig.(3.2) mostramos a energia do estado fundamental para $\chi \leq 1$ no plano $\varphi = 0$ com $N = 10$. A solução exata não exhibe esta transição de fase. Notemos que a solução deformada exhibe uma degenerescência na energia do estado fundamental.

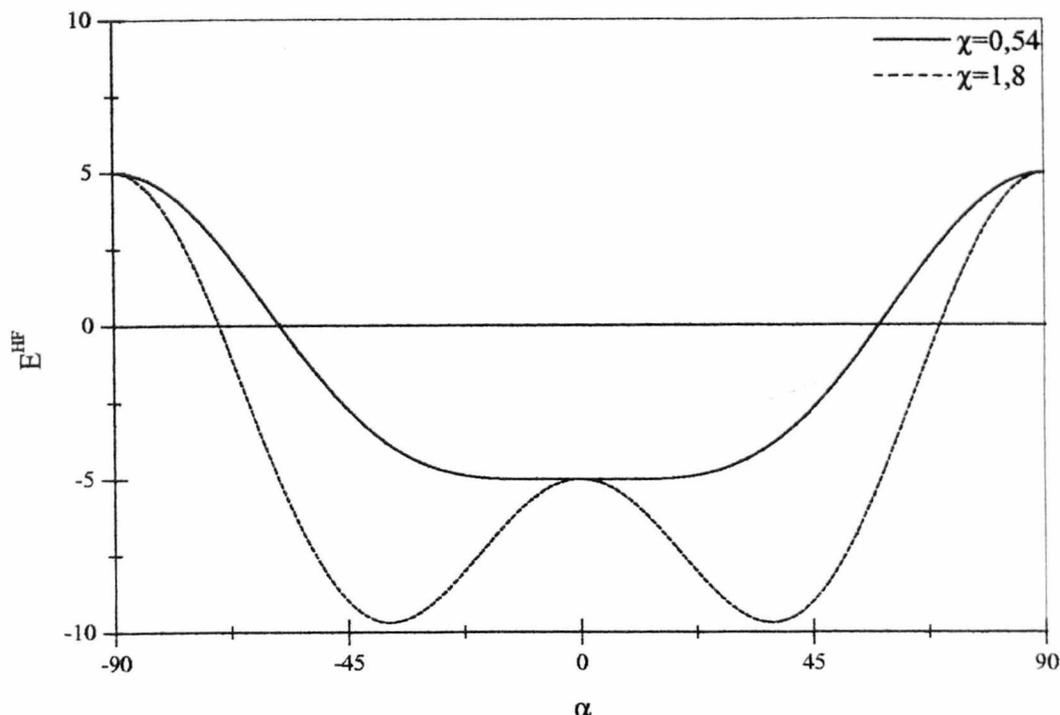
3.3 O modelo de Lipkin para quons

O fato de o modelo de Lipkin ser relativamente simples foi o que nos motivou a usá-lo como sistema de estudo para aplicar a teoria de muitos corpos para quons restritos ao subespaço anti-simétrico. A modificação que faremos neste modelo é simplesmente considerar as partículas constituintes deste como sendo quons e não mais férmions. Nesta parte, queremos saber quais os efeitos desta modificação na solução de HF para a energia do estado fundamental.

Admitiremos como auto-estado do hamiltoniano de HF na base dos a 's um estado do tipo dado pela Eq.(2.18), ou seja,

$$|HF; N\rangle_q = \frac{1}{\sqrt{\{N\}!N!}} \hat{A}_N \left(\prod_{m=1}^N a_{0m}^\dagger \right) |0\rangle. \quad (3.37)$$

Este estado se reduz ao estado da Eq.(3.25) quando $q = -1$.


 Figura 3.2: E_0^{HF} como função de α para $\chi \leq 1$ no plano $\varphi = 0$ com $N = 10$.

3.3.1 Energia do estado fundamental

Para calcularmos o valor esperado do hamiltoniano precisamos calcular o valor esperado dos operadores \hat{K}_0 , \hat{K}_+^2 e \hat{K}_-^2 . Isto pode ser feito escrevendo os c 's em função dos a 's através da transformação (3.24), a qual preserva a álgebra de quons, e atuando no estado (3.37).

Portanto, o valor esperado de \hat{K}_0 é dado por:

$$\begin{aligned}
 {}_q\langle HF; N | \hat{K}_0 | HF; N \rangle_q &= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^N \{ (|D_{+0}|^2 - |D_{-0}|^2)_q \langle HF; N | a_{0m}^\dagger a_{0m} | HF; N \rangle_q + \\
 &+ (|D_{+1}|^2 - |D_{-1}|^2)_q \langle HF; N | a_{1m}^\dagger a_{1m} | HF; N \rangle_q + \\
 &+ (D_{+0}^* D_{+1} - D_{-0}^* D_{-1})_q \langle HF; N | a_{0m}^\dagger a_{1m} | HF; N \rangle_q + \\
 &+ (D_{+1}^* D_{+0} - D_{-1}^* D_{-0})_q \langle HF; N | a_{1m}^\dagger a_{0m} | HF; N \rangle_q \}. \quad (3.38)
 \end{aligned}$$

Utilizando o fato que $a_{1m} | HF; N \rangle_q = 0$ e aplicando o resultado geral dado pela Eq.(2.31), obtemos:

$${}_q\langle HF; N | \hat{K}_0 | HF; N \rangle_q = \frac{\{N\}}{2} (|D_{+0}|^2 - |D_{-0}|^2). \quad (3.39)$$

Para calcular o valor esperado do operador \hat{K}_+^2 seguimos o mesmo procedimento feito acima, resultando em

$$\begin{aligned} {}_q\langle HF; N | \hat{K}_+^2 | HF; N \rangle_q &= q \sum_{m,m'=1}^N \{ {}_q\langle HF; N | (D_{+0}^* a_{0m}^\dagger + D_{+1}^* a_{1m}^\dagger) (D_{+0}^* a_{0m'}^\dagger + D_{+1}^* a_{1m'}^\dagger) \times \\ &\quad \times (D_{-0} a_{0m} + D_{-1} a_{1m}) (D_{-0} a_{0m'} + D_{-1} a_{1m'}) | HF; N \rangle_q \} \\ &= q \sum_{m,m'=1}^N D_{+0}^{*2} D_{-0}^2 \langle HF; N | a_{0m}^\dagger a_{0m'}^\dagger a_{0m} a_{0m'} | HF; N \rangle_q. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Aplicando as propriedades dadas por (2.27) ou (2.28) e (2.34), obtemos

$${}_q\langle HF; N | \hat{K}_+^2 | HF; N \rangle_q = -q D_{+0}^{*2} D_{-0}^2 \{N\} \{N-1\}. \quad (3.41)$$

Como $(\hat{K}_+)^{\dagger} = \hat{K}_-$, podemos encontrar o valor esperado de \hat{K}_-^2 da seguinte maneira,

$${}_q\langle HF; N | \hat{K}_-^2 | HF; N \rangle_q = {}_q\langle HF; N | \hat{K}_+^2 | HF; N \rangle_q^* = -q D_{+0}^{*2} D_{-0}^2 \{N\} \{N-1\}. \quad (3.42)$$

Portanto, o valor esperado do hamiltoniano é

$${}_q\langle HF; N | \hat{H} | HF; N \rangle_q = \frac{\varepsilon\{N\}}{2} (|D_{+0}|^2 - |D_{-0}|^2) + \frac{qV}{2} \{N\} \{N-1\} (D_{+0}^{*2} D_{-0}^2 + D_{+0}^2 D_{-0}^{*2}). \quad (3.43)$$

Para obtermos as equações de HF fazemos

$$\frac{\delta}{\delta D_{\sigma 0}^*} \left({}_q\langle HF; N | \hat{H} | HF; N \rangle_q - \sum_{m=1}^N e_{0m}^q \langle 0 | a_{0m} a_{0m}^\dagger | 0 \rangle \right) = 0, \quad (3.44)$$

onde e_{0m}^q é a energia de partícula independente.

Avaliamos o último termo da Eq.(3.44) usando a transformação (3.24),

$$\sum_{m=1}^N \langle 0 | a_{0m} a_{0m}^\dagger | 0 \rangle = \sum_{m=1}^n \langle 0 | (D_{-0}^* c_{-m} + D_{+0}^* c_{+m}) (D_{-0} c_{-m}^\dagger + D_{+0} c_{+m}^\dagger) | 0 \rangle. \quad (3.45)$$

O elemento de matriz acima resulta em:

$$\sum_{m=1}^N \langle 0 | a_{0m} a_{0m}^\dagger | 0 \rangle = N (|D_{-0}|^2 + |D_{+0}|^2). \quad (3.46)$$

Substituindo (3.46) em (3.44), encontramos

$$\frac{\delta}{\delta D_{\sigma 0}^*} \left\{ \frac{\varepsilon \{N\}}{2} (|D_{+0}|^2 - |D_{-0}|^2) + \frac{qV}{2} \{N\} \{N-1\} (D_{+0}^* D_{-0}^2 + D_{+0}^2 D_{-0}^*) - e_0 N (|D_{-0}|^2 + |D_{+0}|^2) \right\} = 0. \quad (3.47)$$

Logo, as equações de HF são

$$\frac{D_{+0}}{2} + \frac{qV}{\varepsilon} \{N-1\} D_{+0}^* D_{-0}^2 = \frac{e_0}{\varepsilon} \frac{N}{\{N\}} D_{+0}, \quad (3.48)$$

$$-\frac{D_{-0}}{2} + \frac{qV}{\varepsilon} \{N-1\} D_{-0}^* D_{+0}^2 = \frac{e_0}{\varepsilon} \frac{N}{\{N\}} D_{-0}. \quad (3.49)$$

Em analogia ao caso fermiônico, chamaremos

$$\chi_q = \frac{-qV}{\varepsilon} \{N-1\}, \quad (3.50)$$

de *q*-parâmetro de interação e

$$Q_q = \chi_q D_{+0} D_{-0}^*, \quad (3.51)$$

de *q*-potencial de deformação. Assim, as equações de HF podem ser escritas na forma matricial da seguinte maneira:

$$\begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & -Q_q \\ -Q_q^* & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_{-0} \\ D_{+0} \end{pmatrix} = \frac{e_0}{\varepsilon} \frac{N}{\{N\}} \begin{pmatrix} D_{-0} \\ D_{+0} \end{pmatrix}. \quad (3.52)$$

Resolvendo a equação acima, encontramos a energia de partícula independente

$$e_0^q = \pm \varepsilon \frac{\{N\}}{N} \sqrt{\frac{1}{4} + |Q_q|^2}. \quad (3.53)$$

Fazendo a mudança de variáveis, ver Eq.(3.30), a energia do estado fundamental do sistema pode ser escrita como

$$E_q^{HF} = \frac{-\varepsilon \{N\}}{2} \left[\cos(2\alpha) + \frac{\chi_q}{2} \sin^2(2\alpha) \cos(2\varphi) \right]. \quad (3.54)$$

Para minimizar a energia E_q^{HF} em relação aos seus parâmetros, efetuamos as derivadas primei-

ras da equação acima em relação aos mesmos,

$$\frac{\partial E_q^{HF}}{\partial \alpha} = \varepsilon\{N\} \sin(2\alpha) [1 - \chi_q \cos(2\alpha) \cos(2\varphi)] = 0 \quad (3.55)$$

e

$$\frac{\partial E_q^{HF}}{\partial \varphi} = \frac{\varepsilon\{N\} \chi_q}{2} \sin^2(2\alpha) \sin(2\varphi) = 0. \quad (3.56)$$

A solução $\alpha = 0$ sempre satisfará as equações acima, mas analisemos os casos em que $\chi_q \geq 1$.

Para $0 < \chi_q < 1$ temos somente uma solução[†]:

$$\alpha = 0 \quad \text{para} \quad \forall \varphi. \quad (3.57)$$

Para $\chi_q > 1$ temos duas soluções:

$$\begin{cases} \alpha = 0 & \text{para} \quad \forall \varphi; \\ 1 = \chi_q \cos(2\alpha) & \text{para} \quad \varphi = 0. \end{cases} \quad (3.58)$$

Devemos verificar se os pontos de extremos encontrados acima são pontos de mínimo. Para isto, analisemos a derivada segunda da energia.

A derivada segunda em relação a α é,

$$\frac{\partial^2 E_q^{HF}}{\partial \alpha^2} = 2\varepsilon\{N\} [\cos(2\alpha) - \chi_q(2 \cos^2(2\alpha) - 1) \cos(2\varphi)], \quad (3.59)$$

e a derivada segunda em relação a φ é,

$$\frac{\partial^2 E_q^{HF}}{\partial \varphi^2} = \varepsilon\{N\} \chi_q \sin^2(2\alpha) \cos(2\varphi). \quad (3.60)$$

Para $\chi_q < 1$ tal que $\alpha = 0$ a solução é um mínimo para $\forall \varphi$.

Para $\chi_q > 1$ tal que $\alpha = 0$ e $\varphi = 0$, podemos ver pela Eq.(3.59) que esta solução é um máximo. Ainda, para $\chi_q > 1$ tal que $\cos(2\alpha) = \frac{1}{\chi_q}$ e $\varphi = 0$, a solução é um mínimo.

[†]Excluimos aqui a possibilidade de q ser positivo, uma vez que estamos interessados nos valores de q próximos de -1 .

Portanto, as soluções que minimizam a energia do sistema são:

$$\begin{cases} \chi_q < 1, & \alpha_{HF} = 0 \text{ para } \varphi \forall; \\ \chi_q > 1, & \cos(2\alpha_{HF}) = \frac{1}{\chi_q} \text{ para } \varphi_{HF} = 0. \end{cases} \quad (3.61)$$

Na Fig.(3.3) mostramos o comportamento das soluções de HF com valores de $q = -0,99$ e $q = -1$ para $N = 10$ partículas. Com a introdução da deformação, os valores de $\chi = 0,54$ e $\chi = 1,8$ são mapeados no valores de $\chi_q = 0,51$ e $\chi_q = 1,7$, respectivamente.

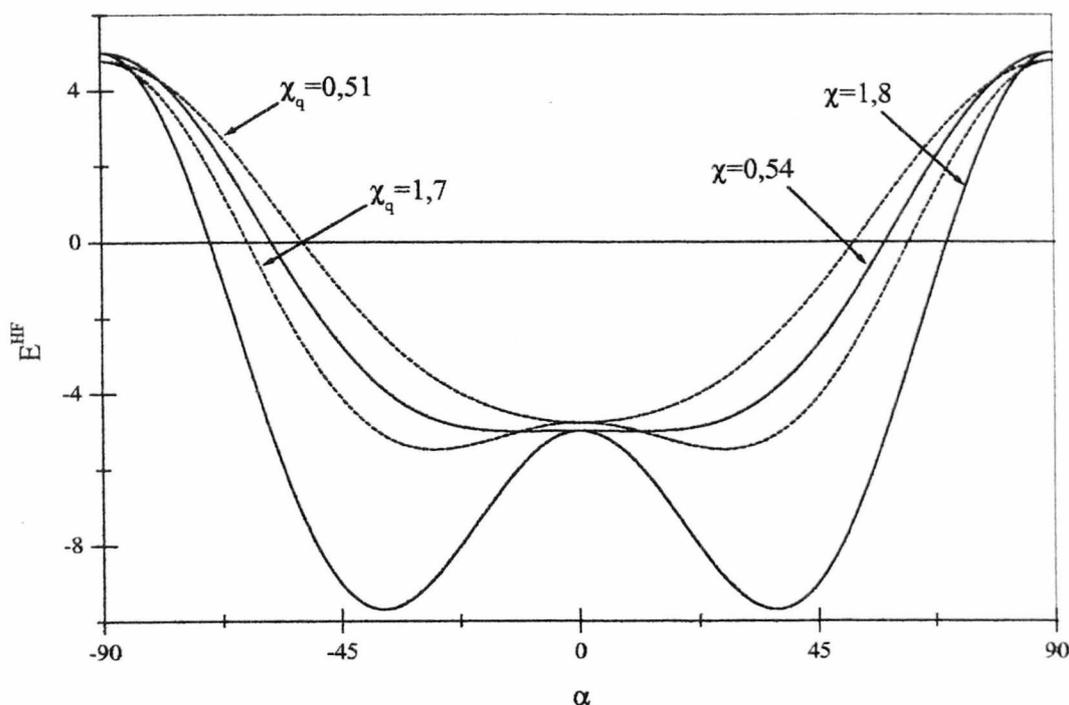


Figura 3.3: Gráfico de E_q^{HF} em função de α no plano $\varphi = 0$ para $\chi_q \geq 1$. As curvas são descritas para os valores de $q = -1$ (linha cheia) e $q = -0,99$ (linha pontilhada) com $N = 10$.

3.3.2 Análise das soluções

As soluções em que $\chi_q \leq 1$, como mostrado na Fig.(3.3), se comportam como nos casos em que $\chi \leq 1$. Por este motivo manteremos as nomenclaturas relacionadas às soluções esféricas e deformadas.

A primeira solução, para $\chi_q < 1$, é dada por

$$E_q^{HF} = -\frac{\varepsilon\{N\}}{2}; \quad \chi_q < 1. \quad (3.62)$$

A diferença desta solução para o caso fermiônico está na substituição de $\{N\}$ por N . Como $\{N\} \leq N$, a solução no caso quônico será sempre menor ou igual em módulo ao caso fermiônico, a qual é obtida no limite de $q \rightarrow -1$. Vemos que o efeito da deformação da álgebra é tornar as partículas *menos ligadas*. Podemos notar isto escrevendo a Eq.(3.62) da seguinte maneira

$$E_q^{HF} = -\frac{\varepsilon N}{2} \left(\frac{\{N\}}{N} \right); \quad \chi_q < 1. \quad (3.63)$$

Ou seja, temos a solução do caso fermiônico multiplicada por um fator menor que 1, $\frac{\{N\}}{N}$.

A energia de partícula independente neste caso é

$$e_0^q = e_0 \frac{\{N\}}{N}; \quad \chi_q < 1, \quad (3.64)$$

onde $e_0 = \pm \frac{\varepsilon}{2}$ é a energia de partícula independente para férmions, com $\chi < 1$. Portanto, a energia de cada quasi-férmion tem seu valor absoluto diminuído quando comparado com o caso fermiônico.

É importante notar que a energia de partícula independente e_0^q depende do número de partículas do sistema, mesmo que esta solução não tenha nenhuma dependência explícita no potencial de interação V . Isto mostra que existe um outro tipo de correlação além daquela dada por V , a correlação introduzida pelo parâmetro q , o qual será, em nosso caso, tratado como um parâmetro livre da teoria.

A segunda solução, para $\chi_q > 1$, é dada por

$$E_q^{HF} = -\frac{\varepsilon\{N\}}{4} \left(\chi_q + \frac{1}{\chi_q} \right); \quad \chi_q > 1. \quad (3.65)$$

A análise desta solução torna-se razoavelmente mais complicada que o primeiro caso. Isto se deve à dependência no potencial de interação entre as partículas, V , nesta solução. Agora não podemos mais escrever a Eq.(3.65) como o produto do número de quasi-férmions do sistema

vezes a energia de cada partícula, a qual é dada por

$$e_0^q = \pm \frac{\varepsilon}{2} \frac{\{N\}}{N} |\chi_q|; \quad \chi_q > 1. \quad (3.66)$$

A relação entre a Eq.(3.65) e a Eq.(3.66) é mais complicada. O que podemos manter é a interpretação física do parâmetro q . Para perceber isto melhor reescrevemos a Eq.(3.66) da seguinte maneira

$$e_0^q = e_0 \left[-q \frac{\{N\}}{N} \frac{\{N-1\}}{(N-1)} \right]; \quad \chi_q > 1, \quad (3.67)$$

onde

$$e_0 = \pm \frac{V(N-1)}{\varepsilon}, \quad (3.68)$$

é a energia de partícula independente no caso fermiônico. Ou seja, a energia de cada partícula diminuiu em módulo. Comparando (3.64) com (3.67), vemos que o efeito de deformação da álgebra também é enfraquecer o potencial de interação entre as partículas. Percebemos isto melhor comparando as Fig.(3.3) e (3.4).

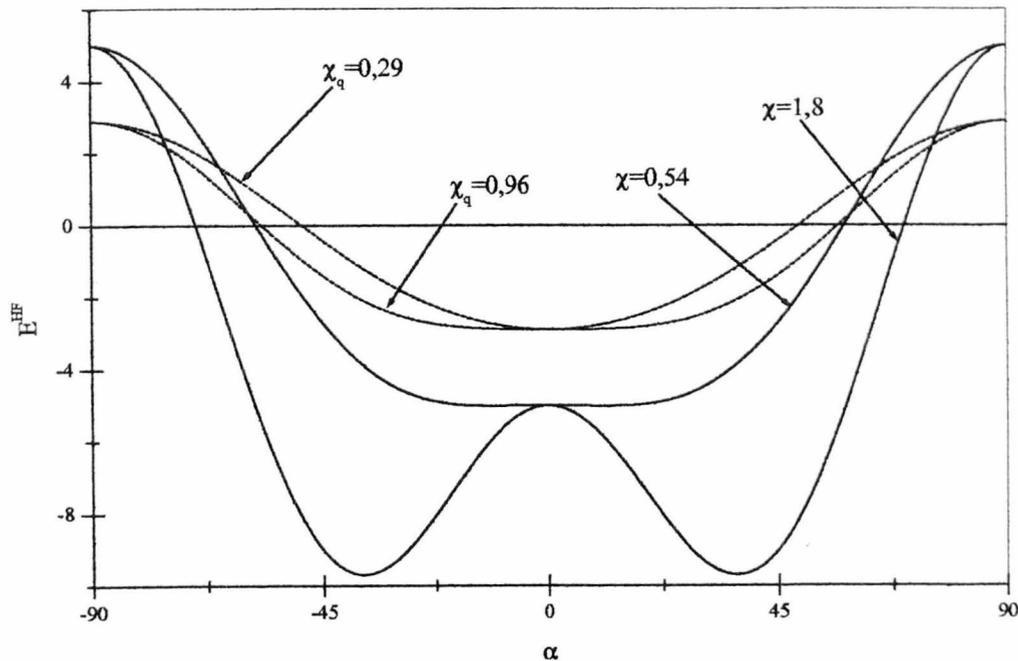


Figura 3.4: Gráfico de E_q^{HF} em função de α no plano $\varphi = 0$ para $\chi_q \geq 1$. As curvas são descritas para os valores de $q = -1$ (linha cheia) e $q = -0,87$ (linha pontilhada) com $N = 10$. A relação entre χ e χ_q é dada pelas Eqs.(3.28) e (3.50).

Na Fig.(3.3) notamos o aumento da energia do estado fundamental das duas soluções para os quasi-férmions. Mas é importante notar que na solução para $\chi_q > 1$ houve um maior aumento no valor da energia nos pontos de mínimo se comparado com o aumento sofrido no valor da energia no ponto de mínimo para $\chi_q < 1$. Isto se deve ao enfraquecimento do efeito do potencial V .

Na Fig.(3.5) mostramos a dependência no número de partículas do sistema no valor da energia do estado fundamental obtida pelo método de HF. Com o aumento do número de partículas estas ficam mais fortemente correlacionadas e o efeito do parâmetro q torna-se mais significativo, provocando um maior aumento da energia do estado fundamental. Isto é bem acentuado na solução em que $\chi_q > 1$.

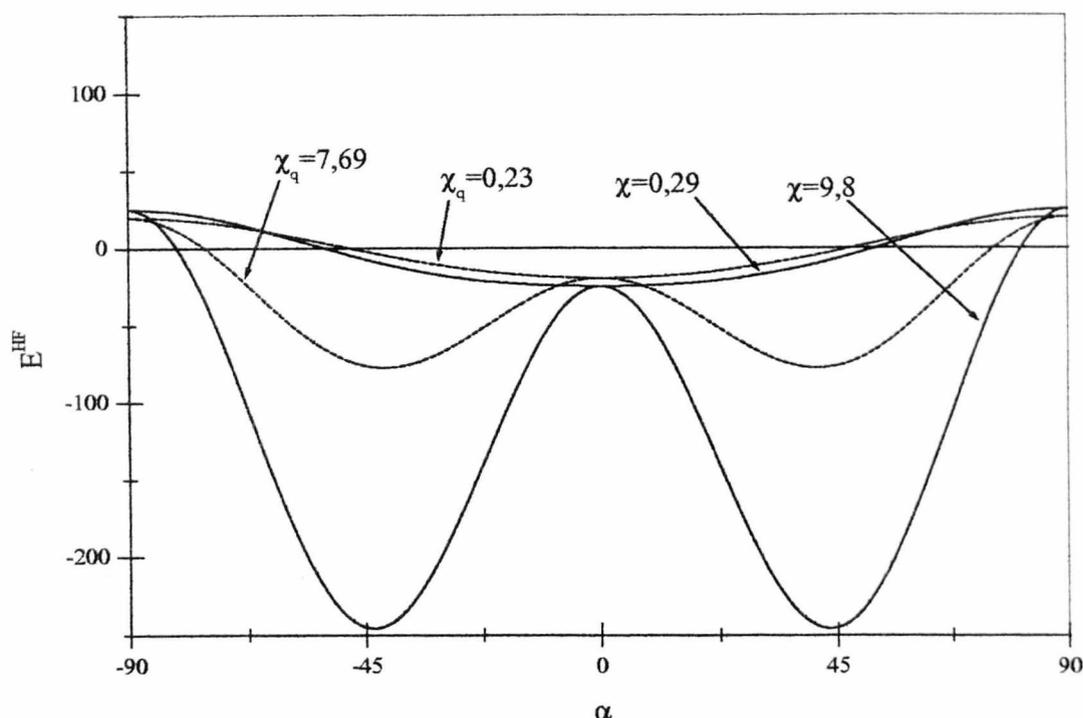


Figura 3.5: Gráfico de E_q^{HF} em função de α no plano $\varphi = 0$ para $\chi_q \geq 1$. As curvas são descritas para os valores de $q = -1$ (linha cheia) e $q = -0,99$ (linha pontilhada) com $N = 50$. A relação entre χ e χ_q é dada pelas Eqs.(3.28) e (3.50).

O q -parâmetro de interação, χ_q , está relacionado com o parâmetro de interação, χ , através da relação:

$$\chi_q = \chi \left(\frac{-q\{N-1\}}{N-1} \right). \quad (3.69)$$

Esta relação nos mostra que χ_q será sempre menor ou igual em módulo a χ . A relação de

igualdade entre estes dois parâmetros é controlada pelo parâmetro q , portanto, poderemos estudar como será modificada a transição de fase no caso quônico quando comparada ao caso fermiônico.

Analogamente ao caso fermiônico, a solução em que

$$\chi_q^c = \frac{-qV\{N-1\}}{\varepsilon} = 1, \quad (3.70)$$

torna-se instável nos pontos $\alpha = 0$ e $\varphi = 0$. Ocorrerá portanto uma transição de fase, como mostrado nas Fig.(3.3) e (3.5). Já na Fig.(3.4) foi possível remover a transição de fase. Isto se obtém variando q de tal forma que este se afaste de -1 , o que significa que χ_q pode assumir valores menores que 1 mesmo que $\chi > 1$, como mostra a Eq.(3.6). Nesta figura representamos como é modificado o parâmetro de interação em função de q para $N = 10$ partículas, onde os pontos sobre a curva descrevem χ_q^c . Percebemos que ao afastarmos q de -1 , o valor de χ_c aumenta.

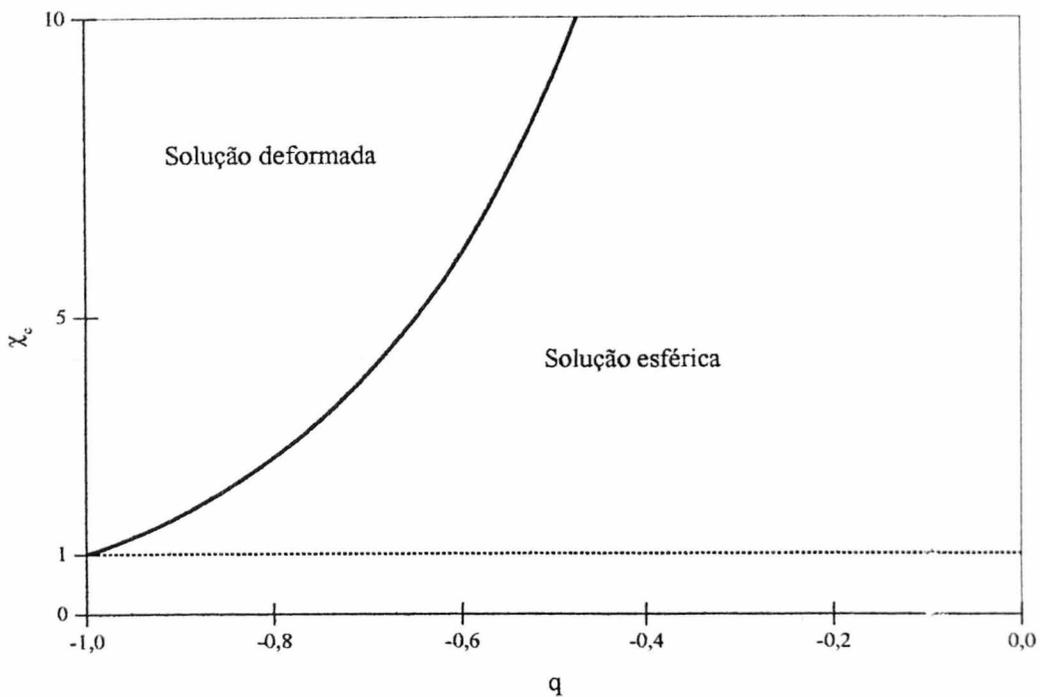


Figura 3.6: Gráfico de χ_c em função de q para $N = 10$, onde a curva representa $\chi_q^c = 1$.

Capítulo 4

Energia de excitação

O estudo da energia de excitação de sistemas de muitos corpos geralmente é feito através de métodos aproximativos, pois é muito difícil resolver tal problema exatamente. Muitos destes métodos utilizados em física nuclear foram importados da teoria do estado sólido. Os métodos nos quais estamos interessados são: Tamm-Dancoff (T-D) e RPA (Random Phase Approximation).

A diferença entre estes dois métodos está na consideração do estado fundamental. Na aproximação de T-D o estado fundamental do sistema é aproximado pelo estado de HF, ou seja, um estado de partícula independente. Já na aproximação de RPA, o estado fundamental leva em conta misturas de partícula-buraco. Assim, os estados excitados não são mais criados somente através da atuação de operadores do tipo $a_m^\dagger a_i$, como no método de T-D, mas também admite a atuação de operadores do tipo $a_i^\dagger a_m$ no estado fundamental do sistema* [27].

Neste capítulo desenvolveremos versões deformadas dos dois métodos acima citados, os quais serão chamados de método de *Tamm-Dancoff deformado (T-Dq)* e *RPA deformado (RPAq)*. A construção destas versões é feita considerando as partículas do sistema como sendo quons com a dinâmica restrita ao subespaço anti-simétrico. Consideraremos pequenos desvios da álgebra fermiônica, ou seja, trabalharemos com valores de q próximos de -1 .

Como aplicação utilizaremos os métodos de T-Dq e RPAq para encontrar a energia de excitação no modelo de Lipkin. Devido ao fato de o modelo de Lipkin ser exatamente solúvel, através da comparação com o resultado obtido pelo método RPAq, poderemos tentar obter uma conexão entre o parâmetro de deformação q e a interação V entre as partículas do sistema.

*Manteremos a notação utilizada na seção 3.1

4.1 O método de RPA

O desenvolvimento da teoria de RPA começou com Bohm e Pines em 1953 [22] através da teoria para oscilações de um plasma de gás de elétrons. A primeira aplicação do método de RPA em física nuclear foi feita por Ferrell (1957) [23], no campo da Teoria de Hartree-Fock Dependente do Tempo para as vibrações de monopolo do O^{16} . Vários outros autores também contribuíram para o desenvolvimento do método de RPA com aplicação em física nuclear [24, 25, 26].

Uma maneira de deduzirmos as equações de RPA [8] consiste em supor a existência de um operador, \hat{Q}_ν^\dagger , tal que quando este atuar no estado fundamental, $|G\rangle$, leva-lo-á a um estado excitado $|\nu\rangle$. Sendo $|G\rangle$ e $|\nu\rangle$ soluções da equação de Schroedinger estacionária, temos

$$\hat{H}|G\rangle = E_G|G\rangle, \quad (4.1)$$

$$\hat{H}|\nu\rangle = E_\nu|\nu\rangle, \quad (4.2)$$

onde

$$\hat{Q}_\nu^\dagger|G\rangle = |\nu\rangle, \quad (4.3)$$

com a seguinte condição

$$\hat{Q}_\nu|G\rangle = 0. \quad (4.4)$$

Atuando com o operador \hat{Q}_ν^\dagger na Eq.(4.1) e subtraindo da Eq.(4.2) chegamos à seguinte equação:

$$[\hat{H}, \hat{Q}_\nu^\dagger]|G\rangle = (E_\nu - E_G)\hat{Q}_\nu^\dagger|G\rangle. \quad (4.5)$$

Efetuada uma variação no estado $|\nu\rangle$, tal que

$$\delta|\nu\rangle = \delta\hat{Q}_\nu^\dagger|G\rangle, \quad (4.6)$$

e multiplicando a Eq.(4.5) por $\langle\nu|\delta$, obtemos:

$$\langle G|[\delta\hat{Q}_\nu, [\hat{H}, \hat{Q}_\nu^\dagger]]|G\rangle = \hbar\omega_\nu\langle G|[\delta\hat{Q}_\nu, \hat{Q}_\nu^\dagger]|G\rangle, \quad (4.7)$$

onde $\hbar\omega_\nu = E_\nu - E_G$.

A aproximação de RPA consiste em definirmos o estado fundamental como,

$$|G\rangle \simeq |\mathcal{RPA}\rangle, \quad (4.8)$$

tal que,

$$\hat{Q}_\nu^\dagger = \sum_{i,m} \left(X_{mi}^\nu a_m^\dagger a_i - Y_{mi}^\nu a_i^\dagger a_m \right). \quad (4.9)$$

Substituindo (4.8) e (4.9) em (4.7) e efetuando as variações em relação a X e Y , obtemos:

$$\langle \mathcal{RPA} | [a_i^\dagger a_m, [\hat{\mathcal{H}}, \hat{Q}_\nu^\dagger]] | \mathcal{RPA} \rangle = \hbar\omega_\nu \langle \mathcal{RPA} | [a_i^\dagger a_m, \hat{Q}_\nu^\dagger] | \mathcal{RPA} \rangle, \quad (4.10)$$

$$\langle \mathcal{RPA} | [a_m^\dagger a_i, [\hat{\mathcal{H}}, \hat{Q}_\nu^\dagger]] | \mathcal{RPA} \rangle = \hbar\omega_\nu \langle \mathcal{RPA} | [a_m^\dagger a_i, \hat{Q}_\nu^\dagger] | \mathcal{RPA} \rangle. \quad (4.11)$$

A próxima aproximação, também conhecida como aproximação de *quasi-bóson* [27], nos permite escrever,

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{RPA} | [a_i^\dagger a_m, a_n^\dagger a_j] | \mathcal{RPA} \rangle &\simeq \delta_{ij} \delta_{mn} \\ &= \langle HF | [a_i^\dagger a_m, a_n^\dagger a_j] | HF \rangle, \end{aligned} \quad (4.12)$$

ou seja, admitimos que o número de partículas acima do nível de Fermi e o número de buracos no estado fundamental de RPA são pequenos. Isto equivale a substituir o estado de RPA pelo estado de Hartree-Fock em (4.10) e (4.11), obtendo as equações de RPA:

$$\sum_{n,j} \left\{ X_{nj}^\nu \langle HF | [a_i^\dagger a_m, [\hat{\mathcal{H}}, a_n^\dagger a_j]] | HF \rangle - Y_{nj}^\nu \langle HF | [a_i^\dagger a_m, [\hat{\mathcal{H}}, a_j^\dagger a_n]] | HF \rangle \right\} = \hbar\omega_\nu X_{mi}^\nu, \quad (4.13)$$

$$\sum_{n,j} \left\{ -X_{nj}^\nu \langle HF | [a_i^\dagger a_m, [\hat{\mathcal{H}}, a_j^\dagger a_n]] | HF \rangle^* + Y_{nj}^\nu \langle HF | [a_i^\dagger a_m, [\hat{\mathcal{H}}, a_n^\dagger a_j]] | HF \rangle^* \right\} = -\hbar\omega_\nu Y_{mi}^\nu. \quad (4.14)$$

Chamando de

$$A_{mi,nj} = \langle HF | [a_i^\dagger a_m, [\hat{\mathcal{H}}, a_n^\dagger a_j]] | HF \rangle \quad (4.15)$$

e

$$B_{mi,nj} = -\langle HF | [a_i^\dagger a_m, [\hat{\mathcal{H}}, a_j^\dagger a_n]] | HF \rangle, \quad (4.16)$$

podemos escrever as equações (4.13) e (4.14) da seguinte maneira

$$\sum_{n,j} (X_{nj}^\nu A_{mi,nj} + Y_{nj}^\nu B_{mi,nj}) = \hbar\omega_\nu X_{mi}^\nu \quad (4.17)$$

$$\sum_{n,j} (X_{nj}^\nu B_{mi,nj}^* + Y_{nj}^\nu A_{mi,nj}^*) = -\hbar\omega_\nu Y_{mi}^\nu. \quad (4.18)$$

Ou na forma matricial, como segue,

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^* & A^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^\nu \\ Y^\nu \end{pmatrix} = \hbar\omega_\nu \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^\nu \\ Y^\nu \end{pmatrix}. \quad (4.19)$$

4.1.1 Aplicando RPA no modelo de Lipkin

Como aplicação da teoria de RPA encontraremos a energia de excitação no modelo de Lipkin. Neste modelo esquemático temos somente dois níveis, portanto os operadores \hat{Q}_ν^\dagger e $\delta\hat{Q}_\nu$ assumem a forma:

$$\hat{Q}^\dagger = X\hat{K}_+ - Y\hat{K}_-, \quad (4.20)$$

$$\delta_{X^*}\hat{Q} = \hat{K}_-, \quad (4.21)$$

$$\delta_{Y^*}\hat{Q} = -\hat{K}_+. \quad (4.22)$$

Utilizando a aproximação de quasi-bóson, Eq.(4.12), as equções de RPA assumem a forma:

$$\langle HF | [\hat{K}_-, [\hat{H}, X\hat{K}_+ - Y\hat{K}_-]] | HF \rangle = \hbar\omega \langle HF | [\hat{K}_-, X\hat{K}_+ - Y\hat{K}_-] | HF \rangle, \quad (4.23)$$

$$\langle HF | [\hat{K}_+, [\hat{H}, X\hat{K}_+ - Y\hat{K}_-]] | HF \rangle = \hbar\omega \langle HF | [\hat{K}_+, X\hat{K}_+ - Y\hat{K}_-] | HF \rangle, \quad (4.24)$$

onde \hat{H} é dado pela Eq.(3.21). Usando o fato de que os operadores \hat{K}_0 , \hat{K}_+ e \hat{K}_- satisfazem as relações de comutação da álgebra $su(2)$ e calculando o valor esperado de combinações destes operadores na base de HF, chegamos ao sistema de equações abaixo

$$X\varepsilon - YV(N-1) = \hbar\omega X, \quad (4.25)$$

$$XV(N-1) - \varepsilon Y = \hbar\omega Y. \quad (4.26)$$

Resolvendo o sistema de equações acima, encontramos a frequência de RPA,

$$\hbar\omega_{RPA} = \varepsilon\sqrt{1 - \chi^2}, \quad (4.27)$$

onde χ é o parâmetro de interação definido na Eq.(3.28).

4.2 O método de Tamm-Dancoff

Para deduzirmos as equações de T-D faremos um processo semelhante ao utilizado para obter as equações de RPA. Como dito anteriormente, o estado fundamental no método de T-D é aproximado por um estado de HF. Isto nos diz que o segundo termo da Eq.(4.9) não contribuirá, ou seja, $Y_{mi}^\nu = 0$. Assim, as equações de T-D são:

$$\sum_{n,j} X_{nj}^\nu \langle HF | [a_i^\dagger a_m, [\hat{\mathcal{H}}, a_n^\dagger a_j]] | HF \rangle = \hbar\omega_\nu X_{mi}^\nu. \quad (4.28)$$

4.2.1 Aplicando Tamm-Dancoff no modelo de Lipkin

Para obtermos a energia de excitação no modelo de Lipkin via método de T-D, basta fazer $Y = 0$ na Eq.(4.25), que nos fornece o seguinte resultado

$$\hbar\omega_{TD} = \varepsilon. \quad (4.29)$$

A solução obtida por este método está de acordo com o esperado, pois considera o estado fundamental do sistema como sendo formado por N estados degenerados de partícula independente com energia $-\varepsilon/2$ e tem como única possibilidade excitar uma partícula para um estado com energia $\varepsilon/2$, gerando uma diferença de energia $\hbar\omega = \varepsilon$.

O estado de T-D, representado por $|TD\rangle$, no modelo de Lipkin é dado por

$$|TD\rangle = X \hat{K}_+ |HF\rangle, \quad (4.30)$$

ou ainda,

$$|TD\rangle = X \sum_{m=1}^N (-)^{m-1} \left(c_{+m}^\dagger c_{-1}^\dagger \dots c_{-(m-1)}^\dagger c_{-(m+1)}^\dagger \dots c_{-N}^\dagger \right) |0\rangle. \quad (4.31)$$

Da condição de normalização $\langle TD|TD\rangle = 1$, obtemos

$$|TD\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=1}^N (-)^{m-1} \left(c_{+m}^\dagger c_{-1}^\dagger \dots c_{-(m-1)}^\dagger c_{-(m+1)}^\dagger \dots c_{-N}^\dagger \right) |0\rangle. \quad (4.32)$$

4.3 O método de RPA para quons

A dedução das equações de RPAq será feita de modo análogo ao caso fermiônico. Mas é importante lembrar que devido ao fato de estarmos nos restringindo ao subespaço anti-simétrico do espaço quônico total, temos que garantir que o estado fundamental e o estado excitado sejam anti-simétricos perante a permutação dos rótulos das partículas.

Começaremos definindo o estado excitado $|\nu\rangle_q$, o qual é construído com a atuação do operador coletivo, \hat{Q}_ν^\dagger , no estado fundamental $|G\rangle_q$, como sendo

$$\hat{\mathcal{A}}_N \hat{Q}_\nu^\dagger |G\rangle_q = |\nu\rangle_q, \quad (4.33)$$

onde $\hat{\mathcal{A}}_N$ é o operador de anti-simetrização definido em (2.7).

Uma condição sobre o adjunto do operador \hat{Q}_ν^\dagger é

$$\hat{\mathcal{A}}_N \hat{Q}_\nu |G\rangle_q = 0. \quad (4.34)$$

Assumimos que $|\nu\rangle_q$ e $|G\rangle_q$ são soluções da equação de Schroedinger,

$$\hat{\mathcal{H}}|G\rangle_q = E_G|G\rangle_q, \quad (4.35)$$

$$\hat{\mathcal{H}}|\nu\rangle_q = E_\nu|\nu\rangle_q. \quad (4.36)$$

Multiplicando a Eq.(4.35) à esquerda pelo operador $\hat{\mathcal{A}}_N \hat{Q}_\nu^\dagger$ e reescrevendo a Eq.(4.36), temos:

$$\hat{\mathcal{A}}_N \hat{Q}_\nu^\dagger \hat{\mathcal{H}}|G\rangle_q = E_G \hat{\mathcal{A}}_N \hat{Q}_\nu^\dagger |G\rangle_q, \quad (4.37)$$

$$\hat{\mathcal{H}} \hat{\mathcal{A}}_N \hat{Q}_\nu^\dagger |G\rangle_q = E_\nu \hat{\mathcal{A}}_N \hat{Q}_\nu^\dagger |G\rangle_q. \quad (4.38)$$

Subtraindo a Eq.(4.37) da Eq.(4.38), chegamos a

$$[\hat{\mathcal{H}}, \hat{\mathcal{A}}_N \hat{Q}_\nu^\dagger] |G\rangle_q = \hbar\omega_\nu^q \hat{\mathcal{A}}_N \hat{Q}_\nu^\dagger |G\rangle_q, \quad (4.39)$$

onde $\hbar\omega_\nu^q = E_\nu - E_G$.

Uma outra equação pode ser deduzida a partir da condição (4.34), sendo dada por

$$[\hat{\mathcal{H}}, \hat{\mathcal{A}}_N \hat{Q}_\nu] |G\rangle_q = -\hbar\omega_\nu^q \hat{\mathcal{A}}_N \hat{Q}_\nu |G\rangle_q. \quad (4.40)$$

Efetuada uma variação sobre o estado $|\nu\rangle_q$, como em (4.6), e multiplicando a Eq.(4.39) a esquerda por ${}_q\langle G | \delta \hat{Q}_\nu \hat{\mathcal{A}}_N^\dagger$, obtemos:

$${}_q\langle G | \delta \hat{Q}_\nu \hat{\mathcal{A}}_N^\dagger [\hat{\mathcal{H}}, \hat{\mathcal{A}}_N \hat{Q}_\nu^\dagger] |G\rangle_q = \hbar\omega_\nu^q \left({}_q\langle G | \delta \hat{Q}_\nu \hat{\mathcal{A}}_N^\dagger \hat{\mathcal{A}}_N \hat{Q}_\nu^\dagger |G\rangle_q \right), \quad (4.41)$$

Multiplicando a Eq.(4.40) a esquerda por ${}_q\langle G | \delta \hat{Q}_\nu^\dagger \hat{\mathcal{A}}_N^\dagger$ e conjugando-a, chegamos a:

$${}_q\langle G | [\hat{\mathcal{H}}, \hat{Q}_\nu^\dagger \hat{\mathcal{A}}_N] \hat{\mathcal{A}}_N \delta \hat{Q}_\nu |G\rangle_q = \hbar\omega_\nu^q \left({}_q\langle G | \hat{Q}_\nu^\dagger \hat{\mathcal{A}}_N^\dagger \hat{\mathcal{A}}_N \delta \hat{Q}_\nu |G\rangle_q \right). \quad (4.42)$$

Subtraindo a Eq.(4.42) da Eq.(4.41), encontramos a seguinte equação:

$$\begin{aligned} & {}_q\langle G | \delta \hat{Q}_\nu \hat{\mathcal{A}}_N^\dagger [\hat{\mathcal{H}}, \hat{\mathcal{A}}_N \hat{Q}_\nu^\dagger] |G\rangle_q - {}_q\langle G | [\hat{\mathcal{H}}, \hat{Q}_\nu^\dagger \hat{\mathcal{A}}_N] \hat{\mathcal{A}}_N \delta \hat{Q}_\nu |G\rangle_q \\ & = \hbar\omega_\nu^q \left({}_q\langle G | \delta \hat{Q}_\nu \hat{\mathcal{A}}_N^\dagger \hat{\mathcal{A}}_N \hat{Q}_\nu^\dagger |G\rangle_q - {}_q\langle G | \hat{Q}_\nu^\dagger \hat{\mathcal{A}}_N^\dagger \hat{\mathcal{A}}_N \delta \hat{Q}_\nu |G\rangle_q \right) \end{aligned} \quad (4.43)$$

A equação acima é a equação que descreve a dinâmica do sistema, levando em conta o fato de estarmos nos restringindo ao subespaço anti-simétrico. A aproximação de RPA_q corresponde agora a fazermos

$$|G\rangle_q \simeq |\mathcal{RPA}\rangle_q, \quad (4.44)$$

juntamente com

$$\hat{Q}_\nu^\dagger = \sum_{i,m} \left(X_{mi}^\nu a_m^\dagger a_i - Y_{mi}^\nu a_i^\dagger a_m \right). \quad (4.45)$$

4.3.1 Energia de excitação no modelo de Lipkin para quons

Para resolvermos a Eq.(4.43), usando as aproximações (4.44) e (4.45), onde consideramos a hamiltoniana do modelo de Lipkin para quons, supomos que os operadores \hat{Q}_ν^\dagger , $\delta_X \cdot \hat{Q}$ e $\delta_Y \cdot \hat{Q}$ sejam da mesma forma que aqueles dados pelas equações (4.20), (4.21) e (4.22), respectivamente. Porém, é importante lembrar que agora estamos tratando de quons.

Na solução do nosso problema, adotaremos novamente a aproximação em que substituímos

o estado $|\mathcal{RPA}\rangle_q$ pelo estado $|HF\rangle_q$ no cálculo dos elementos de matriz em (4.43). Usando então o estado definido em (3.37), chegamos às seguintes equações:

$$\begin{aligned} X_q \langle HF | \hat{K}_- \hat{A}_N [\hat{\mathcal{H}}, \hat{A}_N \hat{K}_+] | HF \rangle_q - Y_q \langle HF | \hat{K}_- \hat{A}_N [\hat{\mathcal{H}}, \hat{A}_N \hat{K}_-] | HF \rangle_q \\ = X \hbar \omega^q \langle HF | \hat{K}_- \hat{A}_N \hat{A}_N \hat{K}_+ | HF \rangle_q \end{aligned} \quad (4.46)$$

e

$$\begin{aligned} X_q \langle HF | [\hat{\mathcal{H}}, \hat{K}_+ \hat{A}_N] \hat{A}_N \hat{K}_+ | HF \rangle_q - Y_q \langle HF | [\hat{\mathcal{H}}, \hat{K}_- \hat{A}_N] \hat{A}_N \hat{K}_+ | HF \rangle_q \\ = -Y \hbar \omega^q \langle HF | \hat{K}_- \hat{A}_N \hat{A}_N \hat{K}_+ | HF \rangle_q. \end{aligned} \quad (4.47)$$

O cálculo dos elementos de matriz das equações acima está feito no **Apêndice**. Portanto, das equações (4.46) e (4.47), obtemos

$$X \frac{\{N\}}{N} - Y \frac{\{2\}}{2} \chi_q = \frac{\hbar \omega^q}{\varepsilon} X, \quad (4.48)$$

$$X \frac{\{2\}}{2} \chi_q - Y \frac{\{N\}}{N} = \frac{\hbar \omega^q}{\varepsilon} Y. \quad (4.49)$$

A frequência de RPAq, ω^q , é obtida resolvendo o sistema de equações acima, ou seja,

$$\hbar \omega^q = \varepsilon \sqrt{\left(\frac{\{N\}}{N}\right)^2 - \left(\frac{\{2\}}{2} \chi_q\right)^2}. \quad (4.50)$$

Notemos que a Eq.(4.50) se reduz à Eq.(4.27) quando $q \rightarrow -1$.

Na Fig.(4.1) representamos a energia de excitação no modelo de Lipkin para $N = 40$ quasi-férmions obtida pelo método RPAq para vários valores de q , juntamente com a solução exata para férmions. Notemos que quanto mais q afasta-se de -1 , o sistema fica menos ligado. Isto está de acordo com a nossa interpretação do parâmetro q . O resultado para a frequência de RPAq, apesar de ter um parâmetro a mais, q , não faz com que a solução aproximada vá na direção da solução exata para férmions, tendo ainda o melhor resultado quando $q = -1$.

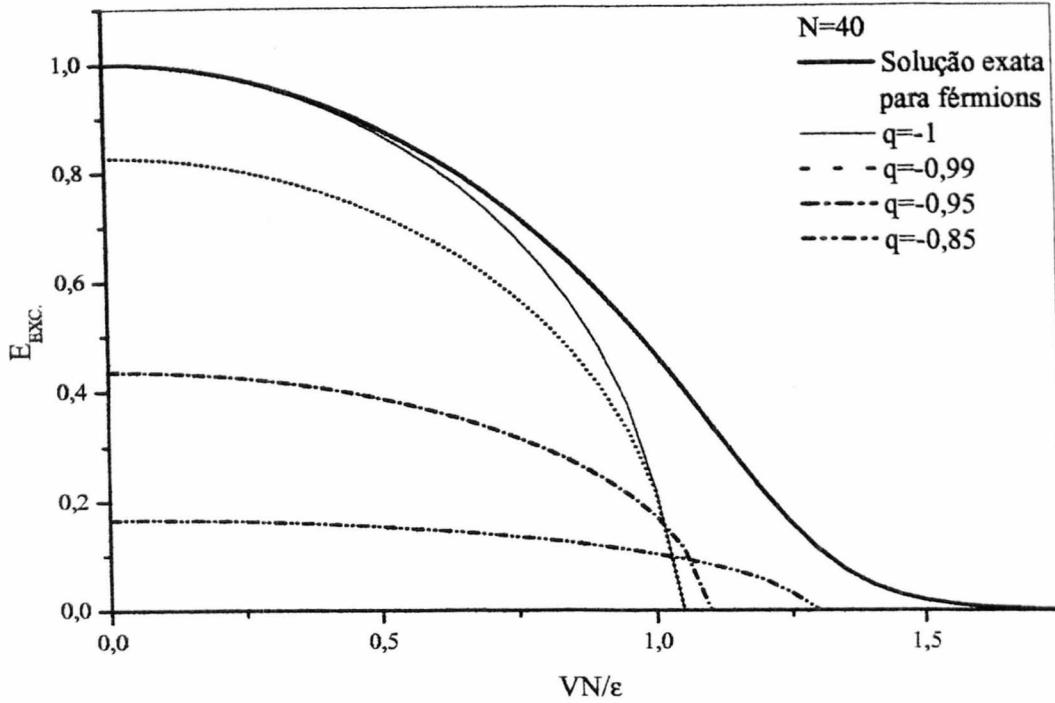


Figura 4.1: Gráfico da energia de excitação para quons *versus* VN/ϵ para vários valores de q com $N = 40$, juntamente com a energia de excitação exata para férmions.

4.4 O método de Tamm-Dancoff para quons

Analogamente ao caso fermiônico, a obtenção das equações de T-Dq faz-se considerando o vácuo desta aproximação como sendo um determinante de Slater. Mas uma diferença importante entre o estado fundamental fermiônico e o quônico, é que neste último as partículas estão correlacionadas pelo parâmetro q . O tipo de correlação que existe é devido a introdução do parâmetro q na norma do estado, sendo esta incapaz de misturar estados de partícula com estados de buraco. Assim, para obtermos a energia de excitação pelo método de T-Dq, basta fazermos $Y = 0$ na Eq.(4.48),

$$\hbar\omega_{TD}^q = \epsilon \frac{\{N\}}{N}. \tag{4.51}$$

Esta solução, quando comparada ao caso fermiônico tem a energia de excitação por partícula diminuída por um fator $\frac{\{N\}}{N}$.

O estado de T-Dq para N quons no modelo de Lipkin é obtido através de

$$|TD; N\rangle_q = X \hat{A}_N \hat{K}_+ |HF\rangle_q, \tag{4.52}$$

onde a norma deste estado está calculada no **Apêndice**. Portanto, o estado de T-Dq para N quons no modelo de Lipkin é:

$$|TD; N\rangle_q = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=1}^N (-)^{m-1} \frac{\hat{A}_N}{\sqrt{\{N\}!N!}} \left(c_{+m}^\dagger c_{-1}^\dagger \cdots c_{-(m-1)}^\dagger c_{-(m+1)}^\dagger \cdots c_{-N}^\dagger \right) |0\rangle. \quad (4.53)$$

4.5 Em busca de uma expressão para q

A aplicação das álgebras quânticas na descrição de sistemas físicos, como por exemplo as álgebras q -deformadas [12], álgebra de quons [21] e outras álgebras, têm como um dos seus objetivos obter uma interpretação física do parâmetro de deformação quando aplicada em sistemas físicos particulares, além de obter uma melhor descrição destes sistemas. Para o modelo de Lipkin, onde consideramos que suas partículas constituintes são quons com dinâmica restrita ao subespaço anti-simétrico quônico, obtivemos uma interpretação possível para q como sendo um potencial efetivo do sistema que torna os quasi-férmions menos ligados.

No entanto, vimos através da Fig.(4.1), que o efeito da deformação usando a álgebra de quons não nos permite aproximar os resultados de RPAq da solução exata para férmions. Para $V = 0$, isto se deve essencialmente ao aparecimento do fator $\frac{\{N\}}{N}$. Podemos também interpretar tal fator da seguinte forma: temos um sistema de N quons livres, os quais podem ocupar apenas os estados anti-simétricos acessíveis; isto é equivalente a termos $\{N\}$ férmions livres no sistema.

Assim, se queremos usar nossos resultados até aqui obtidos para tentar aproximar a solução de RPAq da solução exata, temos que antes de mais nada “corrigir” a energia de excitação pelo fator $\frac{\{N\}}{N}$. Em outras palavras, dividindo a frequência de RPAq por este fator, garantimos que para $V = 0$ a solução exata é obtida e deixamos toda a dependência da deformação no termo que depende da interação entre as partículas. A partir de (4.50) obtemos então a nova expressão:

$$\hbar\omega_N^q = \varepsilon \sqrt{1 - \left(\frac{\{2\}}{2} \frac{N}{\{N\}} \chi_q \right)^2}. \quad (4.54)$$

A representação gráfica da nova solução está na Fig.(4.2). Através desta figura percebemos que vários pontos da curva que descreve a solução exata para férmions são interceptados pelas soluções ω_N^q para diferentes valores de q . Portanto, podemos procurar uma expressão para o parâmetro de deformação q dentro do intervalo -1 e 1 em função de V e N . O procedimento que utilizaremos, consiste em igualar a solução exata da energia de excitação do modelo de

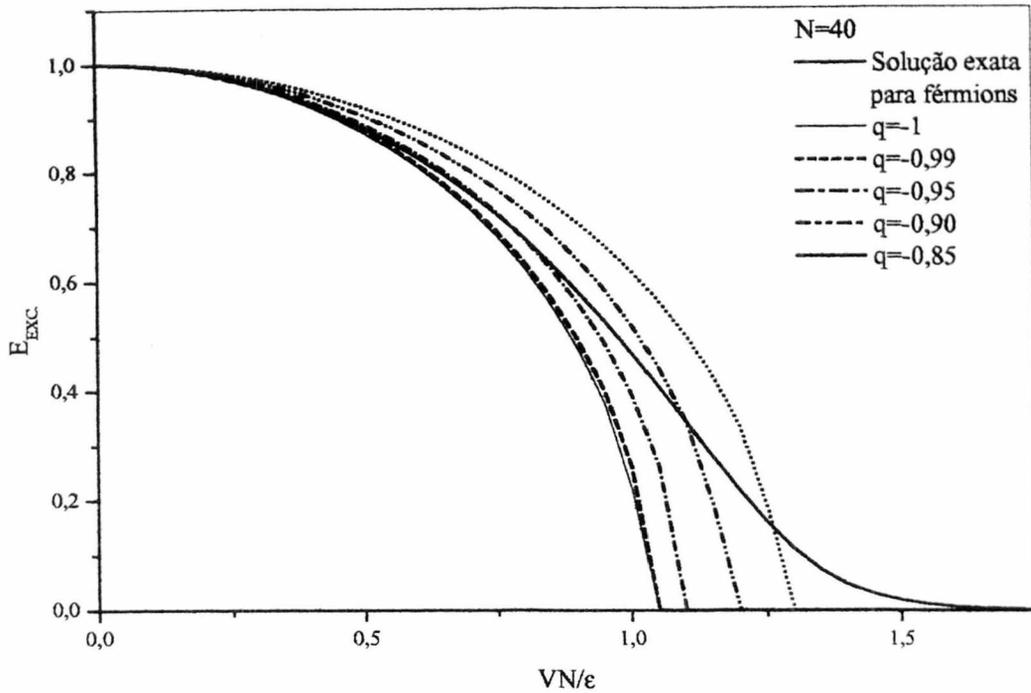


Figura 4.2: Gráfico da energia de excitação para quons *versus* VN/ϵ para vários valores de q com $N = 40$, juntamente com a energia de excitação exata para férmions.

Lipkin com a frequência de RPA deformada, ω_N^q . Fazendo isto, obtemos a seguinte expressão:

$$(q^2 - q) \frac{\{N-1\}}{\{N\}} = \frac{2\epsilon}{VN} \sqrt{1 - \left(\frac{E_{EXC}^{EXA.}}{\epsilon}\right)^2}, \quad (4.55)$$

onde $E_{EXC}^{EXA.}$ é a energia de excitação exata para férmions no modelo de Lipkin. Representamos graficamente a solução da Eq.(4.55) na Fig(4.3) para os valores $N = 10$, $N = 30$ e $N = 50$ de quasi-férmions.

Na Fig.(4.3) apresentamos o gráfico dos valores de q que ajustam a frequência de RPA à energia de excitação exata, como função do produto VN/ϵ , onde fazemos $\epsilon = 1$. Vemos claramente que a dependência em N desaparece à medida que este aumenta. Isto também pode ser obtido, notando que para N grande, $\frac{\{N-1\}}{\{N\}}$ tende a 1 e assim, a solução da Eq.(4.55) torna-se trivial. Para valores de V pequenos, notamos que q só depende de N .

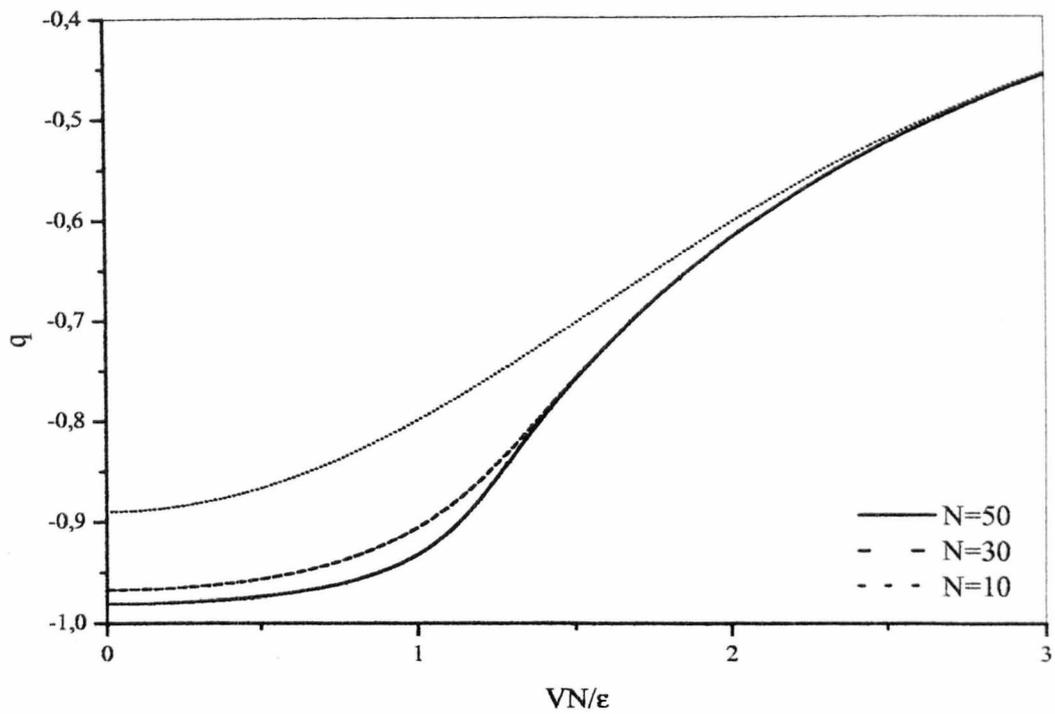


Figura 4.3: Gráfico de q versus VN/ϵ para $N = 10$, $N = 30$ e $N = 50$.

Conclusão

O fato de o espaço quônico total conter todas as simetrias permutacionais possíveis, aliada à não intersecção dos subespaços associados a cada simetria, nos permitiu fazer o estudo do subespaço totalmente anti-simétrico separadamente, como mostrado através dos diagramas de Young e através da diagonalização da matriz de *overlap*. Com isso, pudemos construir uma base de muitos corpos quônica restrita ao subespaço anti-simétrico do espaço quônico total. Mostramos ainda, que esta base tem propriedades semelhantes a uma base de fermions independentes, a menos do número de ocupação, o qual é reduzido pelo fator $\{N\}/N$.

Utilizando esta mesma base quônica, mostramos que é possível construir operadores de quasi-spin a partir de operadores de quons, seguindo a prescrição de Schwinger, que obedecem a álgebra $su(2)$.

Da aplicação do formalismo quônico no modelo de Lipkin para quons, obtivemos uma interpretação possível para o parâmetro q como sendo responsável por correlações no sistema, cujo efeito é tornar o sistema menos ligado, conforme q afasta-se de -1 . O efeito destas correlações é tal que é possível remover a transição de fase existente entre as soluções esférica e deformada na aproximação de HF para um dado valor de V . Conclusão semelhante também foi obtida utilizando-se a álgebra $su_q(2)$ [28]. Através do estudo da energia necessária para excitar os quasi-férmions, obtida pelos métodos de RPA $_q$ e T-D $_q$, percebemos que esta é sempre diminuída em função das correlações introduzidas pelo parâmetro q sobre as partículas do sistema, como citado acima.

Além disto, notamos que a utilização do resultado obtido para a frequência de RPA $_q$ pode ser ajustado para reproduzir a solução exata do modelo de Lipkin para férmions. Para isto, foi necessário corrigir a frequência por um fator que garantisse que o número de quasi-férmions fosse igual ao número de férmions do sistema. Tal procedimento, introduziu naturalmente uma dependência do parâmetro de deformação com o potencial de interação entre as partículas, cuja forma funcional torna-se extremamente simples para um número grande de partículas.

Finalmente, um ponto não explorado neste trabalho, é a utilização do nosso formalismo

na descrição de partículas compostas de spin semi-inteiro. Recentemente, foi mostrado que a álgebra de quons, restrita ao subespaço simétrico, é capaz de descrever pequenos desvios do comportamento bosônico de partículas compostas de spin inteiro (partículas formadas por um número par de férmions) [29]. De forma semelhante, o formalismo aqui desenvolvido pode servir como ponto de partida para a descrição de sistemas de partículas compostas de spin semi-inteiro, para os quais a estrutura interna destas partículas não seja desprezível em relação às dimensões do sistema.

Apêndice A

Cálculo dos elementos de matriz para as equações de RPA_q

Neste apêndice calcularemos os elementos de matriz das equações (4.46) e (4.47). Sejam as equações:

$$\begin{aligned} X_q \langle HF | \hat{K}_- \hat{A}_N [\hat{\mathcal{H}}, \hat{A}_N \hat{K}_+] | HF \rangle_q - Y_q \langle HF | \hat{K}_- \hat{A}_N [\hat{\mathcal{H}}, \hat{A}_N \hat{K}_-] | HF \rangle_q \\ = X \hbar \omega^q \langle HF | \hat{K}_- \hat{A}_N \hat{A}_N \hat{K}_+ | HF \rangle_q \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

e

$$\begin{aligned} X_q \langle HF | [\hat{\mathcal{H}}, \hat{K}_+ \hat{A}_N] \hat{A}_N \hat{K}_+ | HF \rangle_q - Y_q \langle HF | [\hat{\mathcal{H}}, \hat{K}_- \hat{A}_N] \hat{A}_N \hat{K}_+ | HF \rangle_q \\ = -Y \hbar \omega^q \langle HF | \hat{K}_- \hat{A}_N \hat{A}_N \hat{K}_+ | HF \rangle_q. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Podemos escrever o primeiro termo do lado esquerdo da Eq.(A.1) como:

$$\begin{aligned} \langle HF | \hat{K}_- \hat{A}_N [\hat{\mathcal{H}}, \hat{A}_N \hat{K}_+] | HF \rangle_q &= \underbrace{\langle HF | \hat{K}_- \hat{A}_N \hat{\mathcal{H}} \hat{A}_N \hat{K}_+ | HF \rangle_q}_I \\ &- \underbrace{\langle HF | \hat{K}_- \hat{A}_N \hat{A}_N \hat{K}_+ \hat{\mathcal{H}} | HF \rangle_q}_II. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Para calcularmos I devemos conhecer como é a atuação dos operadores de criação e aniquilação no estado $\hat{\mathcal{A}}_N \hat{K}_+ |HF\rangle_q$. O estado $\hat{\mathcal{A}}_N \hat{K}_+ |HF\rangle_q$ pode ser escrito como:

$$\hat{\mathcal{A}}_N \hat{K}_+ |HF\rangle_q = \hat{\mathcal{A}}_N \sum_{i=1}^N c_{+i}^\dagger c_{-i} \left[\frac{1}{\sqrt{\{N\}!N!}} \hat{\mathcal{A}}_N \left(\prod_{j=1}^N c_{-j}^\dagger \right) \right] |0\rangle. \quad (\text{A.4})$$

Usando a Eq.(2.13), temos que

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{A}}_N \hat{K}_+ |HF\rangle_q = & \\ & \frac{\{N\}}{\sqrt{\{N\}!N!}} \sum_{i=1}^N (-)^{i-1} \hat{\mathcal{A}}_N \left[c_{+i}^\dagger \hat{\mathcal{A}}_{N-1} \left(\prod_{j=1, j \neq i}^N c_{-1}^\dagger c_{-2}^\dagger \dots c_{-(i-1)}^\dagger c_{-(i+1)}^\dagger \dots c_{-N}^\dagger \right) \right] |0\rangle. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

A seguir, fazemos uso do resultado:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{A}}_N \left[c_{+i}^\dagger \hat{\mathcal{A}}_{N-1} \left(c_{-1}^\dagger c_{-2}^\dagger \dots c_{-(i-1)}^\dagger c_{-(i+1)}^\dagger \dots c_{-N}^\dagger \right) \right] |0\rangle = & \\ \hat{\mathcal{A}}_{N-1} \left[\hat{\mathcal{A}}_{N-1} \left(\hat{c}_{+i}^\dagger c_{-1}^\dagger c_{-2}^\dagger \dots c_{-(i-1)}^\dagger c_{-(i+1)}^\dagger \dots c_{-N}^\dagger \right) \right] |0\rangle - & \\ - \hat{\mathcal{A}}_{N-1} \left[\hat{\mathcal{A}}_{N-1} \left(c_{-1}^\dagger \hat{c}_{+i}^\dagger c_{-2}^\dagger \dots c_{-(i-1)}^\dagger c_{-(i+1)}^\dagger \dots c_{-N}^\dagger \right) \right] |0\rangle + & \\ + \dots + (-)^{N-1} \hat{\mathcal{A}}_{N-1} \left[\hat{\mathcal{A}}_{N-1} \left(c_{-1}^\dagger c_{-2}^\dagger \dots c_{-(i-1)}^\dagger c_{-(i+1)}^\dagger \dots c_{-N}^\dagger \hat{c}_{+i}^\dagger \right) \right] |0\rangle. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Utilizando a Eq.(2.15), obtemos:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{A}}_N \left[c_{+i}^\dagger \hat{\mathcal{A}}_{N-1} \left(c_{-1}^\dagger c_{-2}^\dagger \dots c_{-(i-1)}^\dagger c_{-(i+1)}^\dagger \dots c_{-N}^\dagger \right) \right] |0\rangle = & \\ (N-1)! \left[\hat{\mathcal{A}}_{N-1} \left(\hat{c}_{+i}^\dagger c_{-1}^\dagger c_{-2}^\dagger \dots c_{-(i-1)}^\dagger c_{-(i+1)}^\dagger \dots c_{-N}^\dagger \right) \right] |0\rangle - & \\ -(N-1)! \left[\hat{\mathcal{A}}_{N-1} \left(c_{-1}^\dagger \hat{c}_{+i}^\dagger c_{-2}^\dagger \dots c_{-(i-1)}^\dagger c_{-(i+1)}^\dagger \dots c_{-N}^\dagger \right) \right] |0\rangle + & \\ + \dots + (-)^{N-1} (N-1)! \left[\hat{\mathcal{A}}_{N-1} \left(c_{-1}^\dagger c_{-2}^\dagger \dots c_{-(i-1)}^\dagger c_{-(i+1)}^\dagger \dots c_{-N}^\dagger \hat{c}_{+i}^\dagger \right) \right] |0\rangle = & \\ (N-1)! \hat{\mathcal{A}}_N \left[c_{+i}^\dagger \left(\prod_{j=1, j \neq i}^N c_{-j}^\dagger \right) \right] |0\rangle. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Portanto,

$$\hat{A}_N \hat{K}_+ |HF\rangle_q = \{N\}(N-1)! \sum_{i=1}^N (-)^{i-1} \frac{1}{\sqrt{\{N\}!N!}} \hat{A}_N \left(c_{+i}^\dagger c_{-1}^\dagger c_{-2}^\dagger \dots c_{-(i-1)}^\dagger c_{-(i+1)}^\dagger \dots c_{-N}^\dagger \right) |0\rangle \quad (\text{A.8})$$

O estado acima pode ser normalizado, o que corresponde a encontrar o estado de Tamm-Dancoff deformado dado por (4.53).

Definindo então, $|TD; N\rangle_q = \mathcal{N} \hat{A}_N \hat{K}_+ |HF\rangle_q$,

$$\begin{aligned} {}_q\langle TD; N | TD; N \rangle_q &= |\mathcal{N}|^2 \frac{\{N\}^2 (N-1)!^2}{\{N\}!N!} \sum_{i,j=1}^N (-)^{i+j} \langle 0 | (c_{-N} \dots c_{-(j+1)} c_{(j-1)} \dots c_{-2} c_{-1} c_{+j}) \hat{A}_N^\dagger \times \\ &\times \hat{A}_N \left(c_{+i}^\dagger c_{-1}^\dagger c_{-2}^\dagger \dots c_{-(i-1)}^\dagger c_{-(i+1)}^\dagger \dots c_{-N}^\dagger \right) |0\rangle. \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Utilizando a relação Eq.(2.15) e a Eq.(2.13) sucessivamente, obtemos

$${}_q\langle TD; N | TD; N \rangle_q = |\mathcal{N}|^2 \frac{\{N\}^2 (N-1)!^2}{\{N\}!N!} N! \{N\}! N = 1. \quad (\text{A.10})$$

Assim, o estado de T-Dq normalizado para N quons é:

$$|TD; N\rangle_q = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N (-)^{i-1} \frac{1}{\sqrt{\{N\}!N!}} \hat{A}_N \left(c_{+i}^\dagger c_{-1}^\dagger c_{-2}^\dagger \dots c_{-(i-1)}^\dagger c_{-(i+1)}^\dagger \dots c_{-N}^\dagger \right) |0\rangle. \quad (\text{A.11})$$

O estado dado pela Eq.(A.4) e o estado acima estão relacionados por,

$$\sqrt{N} \{N\}(N-1)! |TD; N\rangle_q = \hat{A}_N \hat{K}_+ |HF\rangle_q. \quad (\text{A.12})$$

Os operadores que atuarão em um estado do tipo T-Dq são os operadores K_0 , K_- e K_+ . Portanto, analisemos como os operadores de criação e aniquilação atuam no estado dado pela

Eq.(A.11). Façamos:

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^N c_{+j} |TD; N\rangle_q &= \\
 \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i,j=1}^N (-)^{i-1} c_{+j} \frac{1}{\sqrt{\{N\}!N!}} \hat{A}_N \left(c_{+i}^\dagger c_{-1}^\dagger c_{-2}^\dagger \dots c_{-(i-1)}^\dagger c_{-(i+1)}^\dagger \dots c_{-N}^\dagger \right) |0\rangle &= \\
 \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{\{N\}}{N}} \sum_{i,j=1}^N (-)^{i-1} \delta_{ij} \frac{1}{\sqrt{\{N\}!N!}} \hat{A}_{N-1} \left(c_{-1}^\dagger c_{-2}^\dagger \dots c_{-(i-1)}^\dagger c_{-(i+1)}^\dagger \dots c_{-N}^\dagger \right) |0\rangle &= \\
 \frac{\sqrt{\{N\}}}{N} \sum_{j=1}^N (-)^{j-1} \frac{1}{\sqrt{\{N-1\}!(N-1)!}} \hat{A}_{N-1} \left(c_{-1}^\dagger c_{-2}^\dagger \dots c_{-(j-1)}^\dagger c_{-(j+1)}^\dagger \dots c_{-N}^\dagger \right) |0\rangle. &
 \end{aligned} \tag{A.13}$$

Notemos que o termo $\hat{A}_{N-1} \left(c_{-1}^\dagger c_{-2}^\dagger \dots c_{-(i-1)}^\dagger c_{-(i+1)}^\dagger \dots c_{-N}^\dagger \right) |0\rangle$ é, a menos da norma, um estado de HFq de $N-1$ quons, sendo que a partícula com índice j não participa do estado. Denotaremos este estado normalizado por $|HF; \hat{j}; N-1\rangle_q$, onde o índice \hat{j} indica que a partícula j foi aniquilada e o índice está sendo somado. Reescrevendo a expressão (A.13), temos:

$$\sum_{j=1}^N c_{+j} |TD; N\rangle_q = \frac{\sqrt{\{N\}}}{N} \sum_{j=1}^N (-)^{j-1} |HF; \hat{j}; N-1\rangle_q. \tag{A.14}$$

Estudemos agora a atuação do operador c_{-j} :

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^N c_{-j} |TD; N\rangle_q &= \\
 \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i,j=1}^N (-)^{i-1} c_{-j} \frac{1}{\sqrt{\{N\}!N!}} \hat{A}_N \left(c_{+i}^\dagger c_{-1}^\dagger c_{-2}^\dagger \dots c_{-(i-1)}^\dagger c_{-(i+1)}^\dagger \dots c_{-N}^\dagger \right) |0\rangle &= \\
 \frac{\sqrt{\{N\}}}{N} \sum_{i,j=1; i \neq j}^N (-)^{i+j} \frac{1}{\sqrt{\{N-1\}!(N-1)!}} \times & \\
 \times \hat{A}_{N-1} \left(c_{+i}^\dagger c_{-1}^\dagger c_{-2}^\dagger \dots c_{-(i-1)}^\dagger c_{-(i+1)}^\dagger \dots c_{-(j-1)}^\dagger c_{-(j+1)}^\dagger \dots c_{-N}^\dagger \right) |0\rangle. &
 \end{aligned} \tag{A.15}$$

Como c_{-j} contribuirá somente para as partículas abaixo do nível de Fermi, e sendo que há $(N-1)$ termos deste, a soma em j contribuirá com $(N-1)$ termos. Portanto, a Eq.(A.15) pode

ser escrita como:

$$\sum_{j=1}^N c_{-j} |TD; N\rangle_q = \frac{\sqrt{\{N\}\{N-1\}}}{N} \sum_{j=1}^N (-)^{j-1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{N-1}} \sum_{i=1; i \neq j}^N (-)^{j-1} \frac{1}{\sqrt{\{N-1\}!(N-1)!}} \times \right. \\ \left. \times \hat{A}_{N-1} \left(c_{+i}^\dagger c_{-1}^\dagger c_{-2}^\dagger \dots c_{-(i-1)}^\dagger c_{-(i+1)}^\dagger \dots c_{-(j-1)}^\dagger c_{-(j+1)}^\dagger \dots c_{-N}^\dagger \right) |0\rangle \right\}. \quad (\text{A.16})$$

Ou ainda,

$$\sum_{j=1}^N c_{-j} |TD; N\rangle_q = \frac{\sqrt{\{N\}\{N-1\}}}{N} \sum_{j=1}^N (-)^{j-1} |TD; N-1\rangle_q. \quad (\text{A.17})$$

Retornando ao cálculo do elemento I, percebemos facilmente que contribuirá somente o termo em εK_0 do hamiltoniano. Usando a Eq.(A.12) temos:

$$I = \varepsilon_q \langle HF | \hat{K}_- \hat{A}_N \hat{K}_0 \hat{A}_N \hat{K}_+ | HF \rangle_q = \varepsilon N \{N\}^2 [(N-1)!]^2 {}_q \langle TD; N | \hat{K}_0 | TD; N \rangle_q = \\ \frac{\varepsilon}{2} N \{N\}^2 [(N-1)!]^2 \left\{ {}_q \langle TD; N | \sum_{m=1}^N c_{+m}^\dagger c_{+m} | TD; N \rangle_q - {}_q \langle TD; N | \sum_{m=1}^N c_{-m}^\dagger c_{-m} | TD; N \rangle_q \right\} \quad (\text{A.18})$$

Usando as Eqs.(A.14) e (A.17), obtemos:

$$I = \frac{\varepsilon}{2} N \{N\}^2 [(N-1)!]^2 \left\{ \frac{\{N\}}{N^2} \sum_{m=1}^N \underbrace{{}_q \langle HF; \hat{m}; N-1 | HF; \hat{m}; N-1 \rangle_q}_{=1} - \right. \\ \left. - \frac{\{N\}(N-1)}{N^2} \sum_{m=1}^N \underbrace{{}_q \langle TD; \hat{m}; N-1 | TD; \hat{m}; N-1 \rangle_q}_{=1} \right\}. \quad (\text{A.19})$$

Portanto,

$$I = \frac{\varepsilon}{2} \{N\}^3 [(N-1)!]^2 (2-N). \quad (\text{A.20})$$

Para o cálculo do elemento II da Eq.(A.3), novamente usamos as Eqs.(A.12) e (2.15). Como resultado temos:

$$II = \sqrt{N} \{N\} (N-1)! N! {}_q \langle TD; N | \hat{K}_+ \hat{H} | HF \rangle_q. \quad (\text{A.21})$$

O único termo do hamiltoniano que contribuirá é $\varepsilon \hat{K}_0$. Ou seja,

$$\begin{aligned}
 II &= \varepsilon \sqrt{N} \{N\} (N-1)! N! {}_q \langle TD; N | \hat{K}_+ \hat{K}_0 | HF \rangle_q. \\
 &= \frac{\varepsilon}{2} \sqrt{N} \{N\} (N-1)! N! {}_q \langle TD; N | \sum_{m,m'=1}^N c_{+m'}^\dagger c_{-m'} (c_{+m}^\dagger c_{+m} - c_{-m}^\dagger c_{-m}) | HF \rangle_q.
 \end{aligned} \tag{A.22}$$

Como $c_{+m} | HF \rangle_q = 0$ e fazendo uso da Eq.(1.1), chegamos a:

$$\begin{aligned}
 II &= -\frac{\varepsilon}{2} \sqrt{N} \{N\} (N-1)! N! \times \\
 &\times \left[{}_q \langle TD; N | \sum_{m=1}^N c_{+m}^\dagger c_{-m} | HF \rangle_q + q \langle TD; N | \sum_{m,m'=1, m \neq m'}^N c_{+m'}^\dagger c_{-m}^\dagger c_{-m'} c_{-m} | HF \rangle_q \right].
 \end{aligned} \tag{A.23}$$

Das equações (A.14) e (A.17), obtemos:

$$\begin{aligned}
 II &= -\frac{\varepsilon}{2} \sqrt{N} \{N\} (N-1)! N! \frac{\sqrt{\{N\}}}{N} \sqrt{\frac{\{N\}}{N}} \times \\
 &\times \left[\sum_{m=1}^N \underbrace{{}_q \langle HF; \hat{m}; N-1 | HF; \hat{m}; N-1 \rangle_q}_{=1} + \right. \\
 &\left. + q \langle HF; \hat{m}'; N-1 | \sum_{m,m'=1}^N (-)^{m+m'} c_{+m}^\dagger c_{-m'} | HF; \hat{m}; N-1 \rangle_q \right].
 \end{aligned} \tag{A.24}$$

Aplicando a Eq.(2.20) no segundo termo da expressão acima, obtemos:

$$II = -\frac{\varepsilon}{2} \{N\}^2 (N-1)! N! (1 - q\{N-1\}). \tag{A.25}$$

Usando agora a propriedade $(1 - q\{N-1\}) = \{N\}$, temos

$$II = -\frac{\varepsilon}{2} \{N\}^3 (N-1)! N!. \tag{A.26}$$

Calculados os termos I e II, avaliamos o seguinte elemento de matriz:

$${}_q \langle HF | \hat{K}_- \hat{A}_N [\hat{\mathcal{H}}, \hat{A}_N \hat{K}_+] | HF \rangle_q = \varepsilon \{N\}^3 [(N-1)!]^2. \tag{A.27}$$

Seja agora o segundo termo do lado esquerdo da Eq.(A.1):

$$\underbrace{{}_q\langle HF | \hat{K}_- \hat{A}_N [\hat{\mathcal{H}}, \hat{A}_N \hat{K}_-] | HF \rangle_q}_{III} = \underbrace{{}_q\langle HF | \hat{K}_- \hat{A}_N \hat{\mathcal{H}} \hat{A}_N \hat{K}_- | HF \rangle_q}_{=0} - {}_q\langle HF | \hat{K}_- \hat{A}_N \hat{A}_N \hat{K}_- \hat{\mathcal{H}} | HF \rangle_q. \quad (A.28)$$

Usando as Eqs.(2.15) e (A.12), chegamos ao seguinte resultado:

$$III = -\sqrt{N} \{N\} (N-1)! N! {}_q\langle TD; N | \hat{K}_- \hat{\mathcal{H}} | HF \rangle_q \quad (A.29)$$

É fácil perceber que somente o termo $\frac{-V}{2} \hat{K}_+^2$ do hamiltoniano contribuirá para o cálculo da expressão acima. Assim,

$$III = \frac{V}{2} \sqrt{N} \{N\} (N-1)! N! \underbrace{{}_q\langle TD; N | \hat{K}_- \hat{K}_+^2 | HF \rangle_q}_{IV}. \quad (A.30)$$

Avaliando IV:

$$IV = {}_q\langle TD; N | \sum_{n,m,m'=1}^N c_{-m'}^\dagger c_{+m'} c_{+m}^\dagger c_{-m} c_{+n}^\dagger c_{-n} | HF \rangle_q. \quad (A.31)$$

Usando a Eq.(1.1) obtemos os seguintes elementos de matriz:

$$\begin{aligned} IV = & \underbrace{{}_q\left({}_q\langle TD; N | \sum_{m,m'=1}^N c_{-m}^\dagger c_{+m'}^\dagger c_{-m} c_{-m'} | HF \rangle_q \right)}_V + \\ & + q^2 \underbrace{\left({}_q\langle TD; N | \sum_{m,m'=1}^N c_{-m'}^\dagger c_{+m}^\dagger c_{-m} c_{-m'} | HF \rangle_q \right)}_{VI} + \\ & + q^3 \left({}_q\langle TD; N | \sum_{n,m,m'=1}^N c_{-m'}^\dagger c_{+m}^\dagger c_{+n}^\dagger c_{+m'} c_{-m} c_{-n} | HF \rangle_q \right), \quad (A.32) \end{aligned}$$

onde o último termo da equação acima não contribui, pois $c_{+m'} | HF \rangle_q = 0$. Para o cálculo de

V necessitamos das Eqs. (A.14) e (A.17), ou seja,

$$\begin{aligned}
 V &= \frac{\sqrt{\{N\}\{N-1\}}}{N} \sqrt{\frac{\{N\}}{N}} {}_q\langle TD; \hat{m}; N-1 | \sum_{m,m'=1}^N (-)^{m+m'} c_{+m'}^\dagger c_{-m} | HF; \hat{m}; N-1 \rangle_q \\
 &= \frac{\{N\}}{N} \sqrt{\frac{N-1}{N}} \frac{\sqrt{\{N-1\}}}{(N-1)} \sqrt{\frac{\{N-1\}}{N-1}} \sum_{m,m'=1}^N {}_q\langle HF; \hat{m}, \hat{m}'; N-2 | HF; \hat{m}, \hat{m}'; N-2 \rangle_q \\
 &= \frac{\{N\}\{N-1\}}{\sqrt{N}}.
 \end{aligned} \tag{A.33}$$

Notemos que o elemento VI é igual ao elemento V a menos de uma fase. Portanto, o elemento IV da Eq.(A.30) assume a forma:

$$IV = -q \frac{\{N\}\{N-1\}}{\sqrt{N}} + q^2 \frac{\{N\}\{N-1\}}{\sqrt{N}}. \tag{A.34}$$

Através de IV obtemos o elemento de matriz III da Eq.(A.28), o qual é dado por:

$${}_q\langle HF | \hat{K}_- \hat{A}_N [\hat{H}, \hat{A}_N \hat{K}_-] | HF \rangle_q = \frac{V}{2} \{N\}^2 \{N-1\} N [(N-1)!]^2 (q^2 - q). \tag{A.35}$$

No cálculo do lado direito da Eq.(A.1) usamos a Eq.(A.12), obtendo o seguinte resultado:

$${}_q\langle HF | \hat{K}_- \hat{A}_N \hat{A}_N \hat{K}_+ | HF \rangle_q = N \{N\}^2 [(N-1)!]^2. \tag{A.36}$$

Finalmente temos todos os termos da Eq.(A.1) calculados. É fácil notar que o primeiro e o segundo termos da Eq.(A.2) são o conjugado negativo do segundo e do primeiro termos da Eq.(A.1), respectivamente. Portanto, as equações de R.P.A. para quons assumem a seguinte forma:

$$X \frac{\{N\}}{N} - Y \frac{\{2\}}{2} \chi_q = \frac{\hbar\omega^q}{\varepsilon} X, \tag{A.37}$$

$$X \frac{\{2\}}{2} \chi_q - Y \frac{\{N\}}{N} = \frac{\hbar\omega^q}{\varepsilon} Y. \tag{A.38}$$

Referências Bibliográficas

- [1] P. P. Raychev, R. P. Roussev, Yu F. Smirnov, *J. Phys. G* **16** (1990) L137.
- [2] G. Gentile, *Nuovo Cimento* **17** (1940) 493.
- [3] O. W. Greenberg, *Physica A* **180** (1992) 419.
- [4] H. S. Green, *Phys. Rev.* **90** (1953) 270.
- [5] O.W. Greenberg, *Phys. Rev. D* **43** (1991) 4111.
- [6] C. E. de O. Rodrigues, *Aplicações da Álgebra de Quons*, (Dissertação de Mestrado em Física - Curso de Pós-Graduação em Física), Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis (2002).
- [7] H. J. Lipkin, N. Meshkov, J. Glick, *Nucl. Phys.* **62** (1965) 188.
- [8] D. J. Rowe, *Nuclear Collective Motion, Models and Theory*, Methuen (1970).
- [9] R. N. Mohapatra, *Phys. Lett. B* **242** (1990) 407.
- [10] D. I. Fivel, *Phys. Rev. Lett.* **65** (1990) 3361.
- [11] D. I. Fivel, *Phys. Rev. Lett.* **69** (1992) 2020.
- [12] D. Bonatsos, C. Daskaloyannis, *Prog. in Part. and Nucl. Phys.* **43** (1999) 537.
- [13] S. S. Avancini, F. F. de Souza Cruz, J. R. Marinelli, D. P. Menezes, *Phys. Lett. A* **267** (2000) 109.
- [14] S. Meljanac, A. Perica, *J. Phys. A* **27** (1994) 4737.
- [15] M. A. Doresic, *J. Phys. A* **28** (1995) 189.
- [16] O. W. Greenberg, *Phys. Lett. A* **209** (1995) 137.

- [17] S. Stanciu, *Phys. Rev Lett.* **147** (1992) 221.
- [18] W. Greiner, B. Müller, *Quantum Mechanics Symmetries*, 2nd. Ed., Springer (1994).
- [19] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu. F. Laloë, *Quantum Mechanics*, vol. II, 2nd. Ed., Hermann (1977).
- [20] P. Ring, P. Schuck, *The Nuclear Many-Body Problem*, Springer (1991).
- [21] S. S. Avancini, J. R. Marinelli, C. E. de O. Rodrigues, *Phys. Lett. A* **297** (2002) 137.
- [22] D. Bohm, D. Pines, *Phys. Rev.* **92** (1953) 609; 626.
- [23] R. A. Ferrell, *Phys. Rev.* **107** (1957) 1631.
- [24] M. Baranger, *Phys. Rev.* **120** (1960) 957.
- [25] J. Sawicki, *Nucl. Phys.* **23** (1961) 285.
- [26] D. J. Thouless, *Nucl. Phys.* **22** (1961) 78.
- [27] W. Greiner, J. A. Maruhn, *Nuclear Models*, Springer (1996).
- [28] D. Galleti, J. T. Lunardi, B. M. Pimentel, C. L. Lima, *Topics in Theoretical Physics, Festschrift for Paulo Leal Ferreira*, IFT (1995) 227.
- [29] S. S. Avancini, J. R. Marinelli, G. Krein, arXiv:cond-mat/0210310v1, 2002, submetido à *Phys. Lett. A*.