

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA  
ELÉTRICA

# **Controladores Discretos de Dois Graus de Liberdade para Processos com Atraso de Transporte**

Dissertação submetida à  
Universidade Federal de Santa Catarina  
como requisito para a  
obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica

**Bismark Claire Torrico**

Florianópolis, Março de 2003.

*La conquista de si mismo es la mayor de las victorias...*

*(Platón)*

*A todos los hombres que sueñan con construir un mundo, donde los valores humanos sean el motor que mueva todas nuestras acciones. Pero muy particularmente a mi madre Rosa, que me dio estos valores, que rigen mi vida y sin cuyo amor no hubiera aprendido a valorar la riqueza espiritual del hombre.*

## *Agradecimentos*

*Inicialmente agradeço a minha mãe Rosa, por seu carinho, compreensão e apoio.*

*A meu irmão César, pelo incentivo e apoio de fazer o mestrado.*

*Ao professor Julio E. Normey Rico, pela excelente orientação ao longo deste trabalho.*

*As minhas irmãs Carol e Scarlet pelo carinho e preocupação.*

*Aos membros da banca examinadora, que contribuíram na revisão deste trabalho e dando sugestões.*

*À Edileusa pela ajuda na correção deste documento.*

*Aos amigos Alberto, Rodrigo, Raul e Javier pela boa convivência e amizade no decorrer deste trabalho.*

*À Karina pela amizade e ajuda permanente.*

*A CAPES pelo financiamento econômico.*

Resumo da Dissertação apresentada à UFSC como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica.

## **Controladores Discretos de Dois Graus de Liberdade para Processos com Atraso de Transporte**

Bismark Claire Torrico

Março/2003

Orientador : Prof. Julio Elias Normey Rico, Dr.  
Área de Concentração : Automação e Sistemas  
Palavras-chave : Controle de Processos, Projeto Discreto de Compensação de Tempo Morto, Discretização, Período de Amostragem.  
Número de Páginas : 99

Este trabalho apresenta a análise e o projeto de compensadores de tempo morto discretos de dois graus de liberdade mostrando como pode-se melhorar a resposta de rejeição de perturbações quando o processo tem atraso significativo.

O estudo dos controladores está focado a partir de duas concepções. A primeira apresenta o projeto do controle no domínio discreto tanto para plantas estáveis quanto para plantas integradoras e também considera-se o caso do ajuste *deadbeat* para a rejeição de perturbações. A segunda apresenta a discretização de controladores de dois graus de liberdade para plantas com atraso dominante aplicando diferentes métodos de discretização. Um estudo comparativo permite analisar as vantagens e desvantagens de cada uma destas concepções.

Finalmente realiza-se um estudo dos problemas associados à escolha do período de amostragem e propõe-se uma nova metodologia para o ajuste deste período considerando as características da resposta e a estabilidade robusta. Diversos exemplos de processos simulados são utilizados para ilustrar os resultados apresentados.

Abstract of Dissertation presented to UFSC as a partial fulfillment of the refinements for the degree of Master in Electrical Engineering

## **Discrete of Two Degree of Freedom Controllers for Processes with Transport Delay**

Bismark Claire Torrico

Advisor : Prof. Julio Elias Normey Rico, Dr.  
Area : Automation and Systems  
Keywords : Process Control, Control Design  
for Dead Time Compensation,  
Discretisation, Sampling Period.  
Number of Pages : 99

This work presents the analysis and design of two degree of freedom discrete dead time compensators showing how the disturbance rejection response can be improved when the process has significant delay.

The study of the controllers is focused using two approaches. The first one presents the design of the discrete controller for stable and integrator plants. Also, the case of the *deadbeat* disturbance response controller is analysed. The second approach presents the discretisation of two degree of freedom dead time compensators controllers for plants with dominant delay using different discretisation methods. A comparative study allows to analyse the advantages and disadvantages of the two approaches.

Finally a study of the problems associated to the choice of the sampling period is performed and a new methodology for the tuning of this period considering performance and robustness specifications is proposed. Several simulated examples are used to illustrate the presented results.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Motivação . . . . .	1
1.2	Objetivos do Trabalho . . . . .	2
1.3	Organização do trabalho . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Compensação de tempo morto</b>	<b>4</b>
2.1	Preditor de Smith (SP) . . . . .	5
2.2	Modificações do preditor de Smith . . . . .	12
2.3	Conclusões . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Projeto discreto de compensadores de tempo morto de dois graus de liberdade</b>	<b>18</b>
3.1	Estrutura de observador de perturbações . . . . .	19
3.2	Ajuste do controlador para plantas estáveis . . . . .	22
3.2.1	Ajuste do controle primário $C(z)$ . . . . .	22
3.2.2	Ajuste do filtro $V(z)$ . . . . .	23
3.3	Ajuste do controlador para plantas integradoras . . . . .	24
3.3.1	Ajuste do controle primário $C(z)$ . . . . .	25
3.3.2	Ajuste do filtro $V(z)$ . . . . .	25
3.4	Rejeição de perturbações <i>deadbeat</i> . . . . .	26
3.5	Implementação da estrutura de controle . . . . .	30
3.6	Exemplo . . . . .	31
3.7	Conclusões . . . . .	34
<b>4</b>	<b>Discretização de compensadores de tempo morto de dois graus de liberdade</b>	<b>35</b>
4.1	Métodos clássicos de discretização . . . . .	36
4.1.1	Método de Euler (em avanço) . . . . .	38

4.1.2	Método de Euler (em atraso)	38
4.1.3	Método trapezoidal (bilinear ou de Tustin)	39
4.2	Método de Guo	40
4.2.1	Discretização de $S_1$ , $S_2$ e $S_3$	41
4.2.2	Discretização do bloco $S_4$	44
4.3	Exemplo	44
4.4	Conclusões	47
<b>5</b>	<b>Uma metodologia para a escolha do período de amostragem</b>	<b>49</b>
5.1	Robustez e estabilidade robusta	50
5.2	Robustez e escolha do período de amostragem.	53
5.3	Escolha do período de amostragem e rejeição de perturbações	57
5.4	Método de escolha do período de amostragem	63
5.5	Exemplos	64
5.6	Conclusões	76
<b>6</b>	<b>Implementação e simulações</b>	<b>77</b>
6.1	Caso de plantas estáveis	77
6.1.1	Controlador com observador de perturbações (caso Discreto)	78
6.1.2	Controlador com observador de perturbações ( <i>Deadbeat</i> )	79
6.1.3	Controlador com observador de perturbações (caso Discretizado)	79
6.1.4	Resultados de simulações	81
6.2	Processo integrador com atraso dominante	82
6.2.1	Controlador com observador de perturbações (caso Discreto)	86
6.2.2	Controlador com observador de perturbações ( <i>Deadbeat</i> )	86
6.2.3	Controlador com observador de perturbações (caso Discretizado)	87
6.2.4	Resultado de simulações	89
6.3	Conclusões	92
<b>7</b>	<b>Conclusão e Perspectivas</b>	<b>95</b>

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Motivação

Os atrasos são uma parte fundamental da dinâmica de muitos processos industriais. O atraso ou tempo morto, pode ser definido como o tempo que transcorre entre o instante em que é introduzida uma mudança na variável de entrada do processo e o instante em que a saída do mesmo começa a mudar. Geralmente o atraso é causado pelo tempo de transporte de energia ou matéria dentro do sistema. Se o atraso é dominante (maior que duas vezes a constante de tempo equivalente do processo) fica difícil controlar o processo utilizando controladores clássicos (tipo PI por exemplo). No ambiente industrial a solução adotada pelos operadores de planta é diminuir o ganho proporcional do controle e/o aumentar o tempo integral, de forma que o sistema possa funcionar de maneira estável embora com dinâmicas muito lentas. Uma solução para este problema foi introduzida por Smith (1957) chamada posteriormente “Preditor de Smith”, baseada na inclusão de um compensador de atraso, embora na prática a implementação era difícil e inconveniente devido as limitações nos equipamentos analógicos de controle. A partir de 1980 quando controladores digitais começaram a aparecer no mercado, tornou-se viável projetar controladores digitais complexos como os preditores, motivo pelo qual os pesquisadores voltaram a atenção ao “Preditor de Smith” analisando suas propriedades e propondo modificações na estrutura para satisfazer especificações de controle.

Nos últimos anos a tecnologia dos sistemas digitais tem evoluído rapidamente, aumentando as possibilidades de implantação de sistemas de controle em tempo discreto. Os avanços nos sistemas digitais e a diminuição dos custos dos equipamentos tem contribuído

para a diminuição dos custos de implantação.

Em geral, os sistemas de controle digitais têm muitas vantagens sobre os sistemas de controle analógicos. Algumas destas vantagens são:

1. Baixo custo e a potência consumida é baixa;
2. As variações nos parâmetros do controle devidos a variações na temperatura, umidade e envelhecimento dos componentes são quase nulas;
3. Mais precisos e confiáveis;
4. Facilidade de fazer mudanças nos parâmetros de controle e nas estruturas de controle.

Embora de que os compensadores de tempo morto tenham sido introduzidos na indústria com a chegada dos sistemas de controle digitais, a maioria dos trabalhos publicados no assunto desenvolvem algoritmos em tempo contínuo. Assim, existe um campo aberto para as pesquisas direcionadas ao ajuste e implementação deste tipo de controlador.

Neste trabalho apresenta-se um estudo dos controladores digitais de dois graus de liberdade para plantas com atraso, a partir de duas concepções. Na primeira são estudadas soluções no domínio digital, considerando ajustes robustos, o seguimento de referências e a rejeição de perturbações. Na segunda são estudados métodos para a digitalização de controladores de dois graus de liberdade que permitam manter as características da lei de controle original. As soluções dos controladores digitais, são estudadas comparativamente em exemplos de simulação.

## 1.2 Objetivos do Trabalho

Os principais objetivos deste trabalho são:

1. Estudar controladores discretos para plantas com grandes atrasos utilizando estruturas de dois graus de liberdade;
2. Desenvolvimento de técnicas de ajustes robustos para plantas com grandes atrasos;

3. Estudar técnicas de digitalização e desenvolver uma metodologia de discretização que permita manter as principais características do controle original, como a resposta a referências, rejeição de perturbações e robustez;
4. Definir uma metodologia para a escolha do período de amostragem utilizando um compromisso entre o comportamento, a robustez e a carga de cálculo.

### 1.3 Organização do trabalho

Este trabalho está organizado da seguinte forma:

No capítulo 2 faz-se uma revisão dos compensadores de tempo morto. Estudam-se as diferentes soluções propostas na literatura e suas propriedades.

No capítulo 3 propõe-se um projeto discreto para plantas com grandes atrasos, utilizando uma estrutura de dois graus de liberdade, baseada num observador de perturbações.

No capítulo 4 propõe-se um método de discretização de estruturas de dois graus de liberdade para plantas com atraso, os resultados são comparados com métodos clássicos de discretização.

No capítulo 5 propõe-se uma nova metodologia da escolha do período de amostragem de controladores digitais para plantas com grandes atrasos, baseado na análise da estabilidade robusta.

No capítulo 6 apresentam-se exemplos com simulações que permitam comparar a ação dos controladores digitais propostos.

No capítulo 7 apresentam-se as conclusões e perspectivas futuras.

# Capítulo 2

## Compensação de tempo morto

Os atrasos entre as variáveis de entrada e de saída dos processos, aparecem em muitas plantas industriais, sistemas biológicos e em sistemas econômicos e sociais. Na maioria dos casos, os atrasos devem-se ao transporte de massa ou energia no processo e ao efeito produzido pela acumulação de sistemas de baixa ordem.

A presença do atraso na malha de controle, tem duas conseqüências fundamentais:

1. O atraso (ou tempo morto) diminui consideravelmente a fase do sistema, conseqüentemente diminuem as margens de ganho de fase do sistema.
2. No caso contínuo as relações entrada-saída do sistema tornam-se irracionais o que dificulta o projeto do controle (Palmor 1996).

A utilização de métodos clássicos de projeto de controladores na compensação de sistemas com atraso (por exemplo Controladores tipo “proporcional integral derivativo” PID), exigem ajustes conservadores (que produzem respostas lentas) para garantir a estabilidade do sistema em malha fechada (Hagglung (1996), Astrom e Hagglund (1995)). De forma geral, se o atraso é pequeno e o modelo é de baixa ordem, o ajuste do PID permite a obtenção de uma solução aceitável. Mas se o atraso é grande e deseja-se obter respostas em malha fechada mais rápidas, então é conveniente utilizar sistemas de compensação de atraso.

O preditor de Smith (Smith 1957) foi o primeiro sistema de controle proposto na literatura que introduz um compensador de atraso (“dead-time compensator” DTC). Este

compensador baseia-se na inclusão do modelo do processo com o atraso de transporte na malha de controle. Naquela época (1957) ainda usavam-se equipamentos analógicos para o controle de plantas industriais, o que tornava a implementação do preditor de Smith difícil e inconveniente. Quando os controladores digitais começaram a aparecer no mercado no início dos anos 80, a implementação de compensadores de tempo morto (DTC) tornou-se relativamente fácil. Isso tem motivado nos últimos 20 anos a diversos autores voltarem a atenção ao preditor de Smith, analisando as propriedades e propondo métodos de ajuste ou modificações na estrutura, procurando melhorar algumas de suas características.

Neste capítulo faz-se uma revisão dos compensadores de tempo morto utilizando parte da informação do trabalho apresentado em Normey-Rico (1999).

A apresentação deste capítulo tem a seguinte seqüência: A Seção 2.1 analisa o preditor de Smith. A Seção 2.2 analisa as modificações mais relevantes apresentadas na literatura. Finalmente a Seção 2.3 apresenta as conclusões do capítulo.

## 2.1 Preditor de Smith (SP)

Um processo com atraso entre as variáveis de entrada e de saída com entrada simples, saída simples e perturbação pode ser representado por uma equação do tipo:

$$Y(s) = G(s)e^{-Ls}U(s) + G_q(s)e^{-L_q s}Q(s), \quad (2.1)$$

onde  $U(s)$  é a variável de controle ou entrada,  $Q(s)$  é uma entrada de perturbação,  $Y(s)$  é a saída do processo,  $L$  e  $L_q$  os tempos de atraso entre as entradas e a saída,  $G(s)$  e  $G_q(s)$  são funções racionais próprias.

Existem dois casos particulares do modelo da equação (2.1): um que considera as perturbações na saída da planta ( $G_q(s) = 1$  e  $L_q = 0$ ) e outro que considera as perturbações na entrada da planta ( $G_q(s) = G(s)$  e  $L_q = L$ ). Destes dois modelos o segundo é o mais utilizado nos sistemas de controle para plantas com atraso, porque representa o caso mais desfavorável para o controlador, principalmente nos casos de grandes atrasos e processos com dinâmica integradora (Palmor 1996). Utilizando a representação na frequência complexa do atraso no segundo caso, o modelo da planta é representado como:

$$Y(s) = G(s)e^{-Ls}(U(s) + Q(s)) = P(s)(U(s) + Q(s)). \quad (2.2)$$

Quando projeta-se um controlador  $C(s)$  para o processo com atraso  $P(s)$ , a função de transferência em malha aberta  $C(s)G(s)e^{-Ls}$  tem o módulo igual ao de um processo sem atraso  $C(s)G(s)$ , com a fase tendendo a  $-\infty$  em altas frequências. Isso implica que o atraso diminui a margem de fase do sistema. Se  $C(s)$  é ajustado para estabilizar  $G(s)$ , na maioria dos casos o sistema com atraso será instável para valores de  $L$  maiores do que um valor mínimo  $L_{min}$ . Em Torrico et al. (2002) apresentou-se um estudo da estabilidade global de um sistema de controle baseado num compensador de tempo morto para processos com atraso considerando variações na estimação do atraso. A análise de estabilidade, quando aplicada a processos modelados por uma função de transferência de primeira ordem com atraso, mostra o aparecimento de janelas de estabilidade dentro de regiões de instabilidade em malha fechada.

Quando o processo tem um atraso não dominante (menor que o dobro da constante de tempo equivalente do processo), o atraso pode ser aproximado por  $e^{-Ls} \cong \frac{1-\frac{L}{2}s}{1+\frac{L}{2}s}$  e  $C(s)$  pode ser projetado como um PID para controlar  $G(s)\frac{1-\frac{L}{2}s}{1+\frac{L}{2}s}$ . Quando o atraso é dominante (maior que o dobro da constante equivalente de processo),  $C(s)$  deve ser ajustada de forma muito conservadora, ou o sistema torna-se instável. Uma solução ideal para este problema de controle é realimentar a saída do processo sem atraso, como ilustrado no esquema da Figura 2.1, onde  $C(s)$  controla a  $G(s)$ .

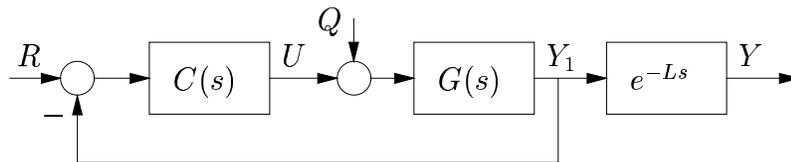


Figura 2.1: Controle ideal de plantas com atraso

Assim a relação entrada-saída é:

$$Y(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} e^{-Ls} R(s). \quad (2.3)$$

A equação (2.3) mostra que apesar de ser possível realimentar o sinal sem atraso e utilizar um controle ideal, torna-se impossível modificar o sinal da saída, antes que transcorra o tempo morto  $L$  depois de aplicar uma variação na referência, portanto não existe uma lei de controle realizável que permita eliminar o atraso da relação entrada-saída.

A solução ilustrada na Figura 2.1, não é possível de ser implementada na maioria dos casos reais, uma vez que  $Y_1$  não pode ser medido. Uma solução para este problema foi proposta por Smith (1957) e está baseada no uso de um preditor  $G_n(s)$  no esquema de controle. A Figura 2.2(a) mostra a estrutura de controle do “preditor de Smith” (SP). Nesta estratégia de controle, realimenta-se a previsão da saída do processo no tempo  $t$ , calculada usando o modelo do processo sem atraso ( $G_n(s)$ ). Para que o sistema possa rejeitar erros de modelagem e o efeito das perturbações, realimenta-se a diferença entre a saída do processo e a saída do modelo com atraso ( $P_n(s) = G_n(s)e^{-Ls}$ ), tal como ilustrado no esquema da Figura 2.2(a). Se não houverem erros de modelagem ( $G(s) = G_n(s)$ ) nem perturbações, a diferença entre a saída real e a predita é zero, portanto é possível ajustar o controle primário  $C(s)$  utilizando o modelo do processo sem atraso  $G_n(s)$ .

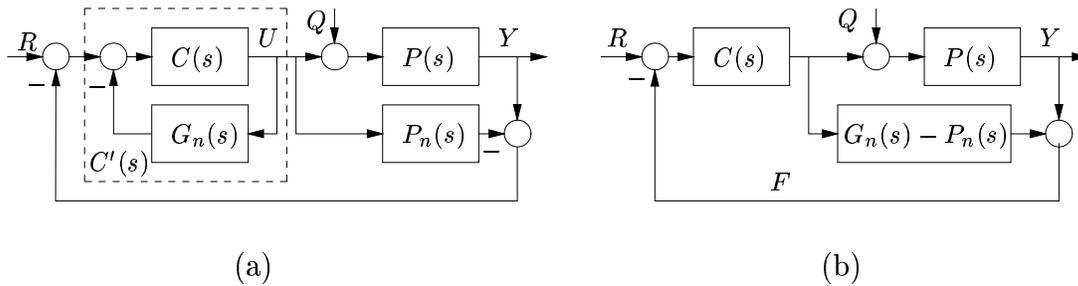


Figura 2.2: Estrutura de controle do preditor de Smith: (a) representação na forma IMC (b) representação normal.

Existem três propriedades fundamentais do preditor de Smith no caso de modelagem perfeita ( $G(s) = G_n(s)$ ) que serão analisadas em seguida:

**Propriedade 2.1** *O atraso é eliminado da equação característica do sistema em malha fechada. Como a relação entrada-saída é dada pela função:*

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} e^{-Ls}, \quad (2.4)$$

*então a equação característica é  $1 + C(s)G(s)$ .*

**Propriedade 2.2** *Para mudanças da referência com  $Q = 0$ , o sinal de realimentação  $F$  gerado pelo preditor (Figura 2.2(b)) antecipa-se à saída do processo num tempo  $L$ :*

$$F(s) = e^{Ls}Y(s). \quad (2.5)$$

*Esta propriedade não é válida para as entradas de perturbação porque*

$$F(s) = e^{Ls}Y(s) + P_n(s)Q(s)(1 - e^{Ls}). \quad (2.6)$$

*Da equação 2.6 pode-se deduzir que se as mudanças na dinâmica da perturbação são lentas ( $e^{Ls} \approx 1$ ), então  $F$  será uma boa predição de  $Y$  em  $t = L$ . No caso em que  $Q$  varie rapidamente, não será possível eliminar o efeito da perturbação do sinal de realimentação  $F$ .*

**Propriedade 2.3** *A estrutura do “preditor de Smith” (SP) fatoriza de forma implícita o processo em duas partes:  $G_n(s)$  é a parte invertível e  $e^{-Ls}$  é a parte não invertível devido ao atraso (para esta parte não são considerados os zeros com parte real positiva, cujas limitações são estudadas em detalhe em Holt e Morari (1985)). Usando a idéia da fatorização e considerando que poderia ser aplicado um controlador primário ideal (um controle de ganho tendendo ao infinito  $C(s) \rightarrow \infty$ ) obtém-se:*

$$C'(s) = \frac{C(s)}{1 + C(s)G_n(s)} = (G_n(s))^{-1}, \quad (2.7)$$

*gerando-se uma saída ideal:*

$$Y(s) = e^{-Ls}R(s) + P_n(s)Q(s)(1 - e^{-Ls}). \quad (2.8)$$

*Observa-se que a função de transferência entre a referência e a saída é simplesmente um atraso e o resultado coincide com o obtido no caso da saída realimentada sem atraso. Mesmo que esta função de transferência ideal não possa ser obtida na prática, ela fornece uma boa idéia das qualidades do SP e um limite superior do comportamento em malha fechada que pode ser obtida com esta estrutura.*

Ainda sem considerar a solução ideal de ganho infinito, uma leitura superficial das propriedades do SP pode levar à conclusão de que o ajuste do controlador primário  $C(s)$  poderia ser efetuado considerando simplesmente o modelo da planta sem atraso e que a resposta transitória em malha fechada poderia ser acelerada arbitrariamente. Não obstante, uma análise mais detalhada das propriedades e das equações anteriores podem determinar algumas limitações do SP:

1. A primeira limitação está relacionada ao ajuste do controle primário. Se  $C(s)$  fosse

ajustado tendo em conta somente a equação característica  $(1 + C(s)G(s))$ , o sistema poderia resultar instável para erros de modelagem  $(P(s) - P_n(s))$  pequenos.

2. A segunda limitação está relacionada com a estrutura do SP: o sistema de controle não pode ser utilizado com processos que tenham pólos com parte real positiva e se o processo for integrador a implementação não pode ser realizada diretamente usando os diagramas da Figura 2.2.
3. A terceira limitação está relacionada com a rejeição de perturbações. Se a planta é estável, não é possível definir arbitrariamente o comportamento do sistema frente a perturbações de carga com o ajuste do controle primário. Se a planta é integradora, o sistema não pode rejeitar perturbações constantes em regime permanente.

Para entender claramente as características do SP, deve-se analisar as relações entrada-saída do sistema representado na Figura 2.2. No caso nominal quando o modelo da planta é perfeito  $(P(s) = P_n(s))$ , as relações entrada-saída são:

$$H_r(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{C(s)P_n(s)}{1 + C(s)G_n(s)}, \quad (2.9)$$

$$H_q(s) = \frac{Y(s)}{Q(s)} = P_n(s) \left[ 1 - \frac{C(s)P_n(s)}{1 + C(s)G_n(s)} \right]. \quad (2.10)$$

Para considerar o efeito do erro de modelagem, se assumirá que as incertezas podem ser descritas por um modelo aditivo não estruturado com

$$P(s) = P_n(s) + \Delta P(s).$$

Levando-se em conta esta hipótese, é possível calcular uma medida de robustez do controle, considerando para cada frequência, o módulo máximo de erro de modelagem aditivo admissível, para que seja mantida a estabilidade em malha fechada (Um estudo mais detalhado sobre a robustez será realizado no Capítulo 5). Este índice de robustez pode-se calcular (Morari e Zafriou 1989) como:

$$I_R(w) = \frac{|1 + C(jw)G_n(jw)|}{|C(jw)|} \quad \forall w > 0. \quad (2.11)$$

A partir da análise anterior deduz-se que:

1. Se  $C(s)$  é projetado para conseguir respostas muito rápidas em malha fechada ( $H_r$  com largura de banda grande) então o sistema terá um índice de robustez muito pequeno (valores pequenos de  $I_R(w)$ ). A partir das equações (2.9) e (2.10) obtém-se:

$$I_R(w) = \frac{|P_n(jw)|}{|H_r(jw)|} \quad \forall w > 0. \quad (2.12)$$

Como o módulo de  $P_n(s)$  é muito pequeno em altas frequências (os processos têm características passa baixa) e a largura de banda de  $H_r(s)$  é grande ( $|H_r(jw)| \approx 1$  em altas frequências) o índice de robustez será muito pequeno. Isso significa que  $C(s)$  não está adequadamente projetado e pequenos erros de modelagem poderiam causar instabilidade do sistema (Palmor 1980).

2. Os pólos de  $P(s)$  não podem ser eliminados da função de transferência perturbação-saída (exceto um pólo em  $s = 0$ ). Isso acarreta três conseqüências importantes:
  - (a) O SP não pode ser utilizado com processos instáveis em malha aberta, pois a resposta às perturbações seria instável.
  - (b) Se os pólos do processo são mais lentos que os desejados em malha fechada (da relação  $Y/R$ ), então não será possível acelerar a resposta às perturbações com o ajuste de  $C(s)$  uma vez que os pólos lentos dominarão os transitórios. Na prática este problema aparece somente quando os atrasos são pequenos comparados com relação ao tempo de resposta, nos outros casos a regra geral consiste em projetar o sistema de controle para conseguir em malha fechada tempos de resposta similares aos de malha aberta. Do mesmo modo deve-se notar que não se justifica projetar sistemas muito rápidos se o efeito em malha fechada não for considerável e ao mesmo tempo prejudica-se a robustez do sistema de controle.
  - (c) Se a planta tem um pólo em  $s = 0$  (é integradora) e o resto dos pólos possuem parte real negativa, então a raiz em  $s = 0$  do denominador de  $Y/Q$  cancela-se com a mesma raiz do numerador de  $Y/Q$ , conseqüentemente o ganho estático de  $Y/Q$  é uma constante. Isso implica que o sistema em malha fechada poderá funcionar de maneira estável com plantas integradoras, mas não rejeitará perturbações constantes em regime permanente. Para comprovar esta propriedade considera-se o caso ideal ( $C(s)$  com ganho infinito). Neste caso, a equação (2.10) escreve-se como:

$$H_q = \frac{G_e(s)}{s} e^{-Ls} (1 - e^{-Ls}), \quad (2.13)$$

onde  $G_e(s)/s = G_n(s)$  e  $G_e(s)$  é a parte estável da planta. Considerando o limite para  $s \rightarrow 0$  obtém-se:

$$\lim_{s \rightarrow 0} H_q(s) = LG_e(0), \quad (2.14)$$

o que demonstra que o sistema não rejeita perturbação constante desde que  $G_e(0) \neq 0$ .

Finalmente, para manter a estabilidade interna no caso de plantas integradoras, o SP não pode ser implementado como na Figura 2.2(a). Para provar isso considera-se a modelagem perfeita e o sistema em regime permanente. Se for aplicada uma perturbação constante na saída do controle primário equivalente a  $C'(s)$ , esta afetará igualmente ao modelo  $P_n(s)$  e ao processo  $P(s)$ . Supondo  $P_n(s) = P(s)$ , não existirá sinal de realimentação e o controle permanecerá no valor que encontrava-se antes da perturbação. Como a planta é integradora, a saída do sistema crescerá indefinidamente.

Para que o sistema de controle seja internamente estável deve-se, implementar a estrutura de controle mostrada na Figura 2.2(b), utilizando a transferência não dinâmica e estável equivalente de  $G_n(s) - P_n(s)$ . Esta implementação sem o pólo na origem (consegue-se cancelando a raiz em  $s = 0$  do numerador e do denominador de  $G_n(s) - P_n(s)$ ) permite que o sistema seja internamente estável inclusive quando  $P(s)$  é integradora. O cálculo não dinâmico no caso contínuo é analisado com detalhe em Palmor (1996).

3. Se  $C(s)$  for ajustado para obter uma determinada resposta a perturbações, então não será possível obter simultaneamente uma resposta arbitrária para mudanças da referência. Para entender esta limitação deve-se observar que  $C(s)$  é o único parâmetro ajustável da estrutura de controle, portanto, em geral, não é possível projetar  $C(s)$  para definir os pólos e os zeros das funções de transferência (2.9) e (2.10). Assim para atingir estas especificações deve-se usar uma estrutura de controle de dois graus de liberdade (“two degree-of-freedom” 2DOF).

Na continuação analisam-se as modificações mais relevantes apresentadas na literatura do SP que apontam para a solução dos problemas discutidos nesta seção.

## 2.2 Modificações do preditor de Smith

Como mencionado na seção anterior, o preditor de Smith (SP) (Smith 1957) foi a primeira estrutura de controle proposta para compensar atrasos. A partir dos anos 80, quando controladores digitais começaram a aparecer no mercado, diversos autores estudaram as propriedades e limitações do SP e alguns propuseram modificações na estrutura original, com o objetivo de incluir a possibilidade do ajuste da resposta ao seguimento de referências, quanto para a rejeição das perturbações assim como a sua robustez. Por exemplo em Palmor (1980) analisa-se a estabilidade do SP frente a erros infinitesimais de modelagem utilizando a estrutura do SP sem modificá-la. Estes autores mostram que mesmo que o controle primário, para o caso nominal, esteja ajustado com margens de fase e ganho adequados, o sistema torna-se instável para erros infinitesimais de estimação do atraso. Em Morari e Zafiriou (1989), os autores estudam a sensibilidade do sistema a erros de modelagem, destacando que o SP não aumenta esta sensibilidade. Em Santacesaria e Scattolini (1993), propõem-se ajustes diferentes para melhorar a robustez do sistema.

Para melhorar a capacidade de rejeição às perturbações, vários autores propõem modificações à estrutura original do SP, utilizando estruturas com dois graus de liberdade, tanto que permitam o ajuste para o seguimento de referências e rejeição de perturbações, quanto o ajuste da robustez.

Para o caso de perturbações mensuráveis, Palmor e Powers (1985) propõem uma solução que inclui uma malha de pré-alimentação, como se ilustra na Figura 2.3.

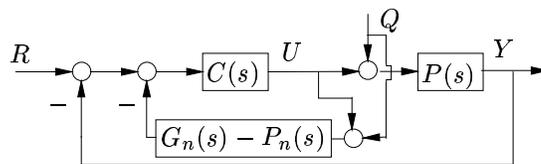


Figura 2.3: Preditor de Smith com perturbação mensurável

A função de transferência para esta estrutura de controle é:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = P_n(s) \frac{C(s)}{1 + C(s)G_n(s)}; \quad \frac{Y(s)}{Q(s)} = P_n(s) \frac{1}{1 + C(s)G_n(s)} \quad (2.15)$$

o que mostra que o atraso foi eliminado do segundo fator da relação  $\frac{Y}{Q}$  (compare este resultado com o da equação (2.10)).

Para o caso de perturbações não mensuráveis Huang et al. (1990) apresentam uma

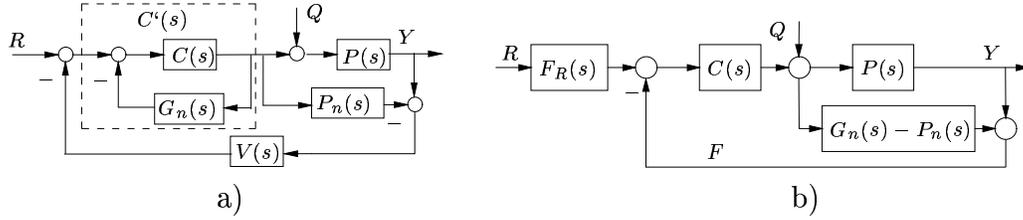


Figura 2.4: Estruturas dos Preditores de Smith modificados

estrutura como ilustrada na Figura 2.4(a) onde  $V(s)$  calcula-se como uma aproximação da inversa do atraso. Os autores propõem

$$V(s) = \frac{1 + B(s)}{1 + B(s)e^{-Ls}}, \quad B(s) = \frac{b_0}{b_1s + 1}, \quad (2.16)$$

que consiste na aproximação do atraso em baixas freqüências. O método de ajuste de  $b_0$  e  $b_1$ , pode ser encontrado em Huang et al. (1990). As relações entre  $R$ ,  $Q$  e  $Y$  são:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = P_n(s) \frac{C(s)}{1 + C(s)G_n(s)}, \quad \frac{Y(s)}{Q(s)} = P_n(s) \left[ 1 - \frac{C(s)V(s)G_n(s)e^{-Ls}}{1 + C(s)G_n(s)} \right]. \quad (2.17)$$

Se  $V(s)$ , tem uma boa aproximação de  $e^{Ls}$ , o atraso pode ser eliminado do segundo termo da relação  $Y/Q$ . Um bom ajuste de  $V(s)$ , deveria garantir que

$$H(s) = \frac{C(s)V(s)G_n(s)e^{-Ls}}{1 + C(s)G_n(s)}, \quad (2.18)$$

esteja próximo a um na largura de banda desejada. O índice de robustez do controlador é:

$$\Delta P(w) = \frac{|1 + C(jw)G_n(jw)|}{|C(jw)Q(jw)|} = \left| \frac{G_n(jw)}{H(jw)} \right| \quad \forall w > 0 \quad (2.19)$$

onde  $|H(s)|$  aparece no denominador, portanto o ajuste final de  $V(s)$  deve considerar o compromisso entre a robustez e o comportamento do sistema, observa-se que a melhora da resposta é mínima quando o atraso é dominante (Palmor 1996).

A estrutura da Figura 2.4(a), também foi usada por Normey-Rico et al. (1997), para melhorar a robustez no caso de controle de processos com incertezas no atraso. O parâmetro  $V(s)$  é escolhido como um simples filtro passa baixo, para aumentar a robustez

$\Delta P(w)$  (equação (2.19)) em altas frequências.

Outro caso é apresentado na Figura 2.4(b) proposto por Normey-Rico e Camacho (1999), onde utiliza-se um filtro de referência, para melhorar a resposta às mudanças da referência. Este esquema, que foi reordenado para mostrar separadamente as ações do preditor (sinal  $F$ ) e o controle primário, é também denominado preditor de Smith com dois graus de liberdade. Como  $F_R(s)$  afeta simplesmente o seguimento de referências e  $C(s)$  é ajustado para acelerar a resposta à rejeição de perturbações,  $Y/R$  tem zeros mal posicionados, que deterioram a resposta a mudanças da referência. Assim  $F_R(s)$  tem a função de atenuar tal efeito.

As estruturas de controle anteriormente apresentadas, não são capazes de rejeitar perturbações permanentes quando a planta é integradora.

Uma idéia simples e interessante que não modifica a estrutura original de Smith, foi apresentada por Watanabe e Ito (1981), esta estratégia propõe utilizar um modelo normal sem atraso, também denominado modelo rápido, diferente do utilizado por Smith. Este modelo rápido ( $G_m(s)$ ) calcula-se de tal forma que os pólos de malha aberta da relação  $Y/Q$  sejam eliminados. Desta forma os pólos lentos de malha aberta são eliminados da malha de realimentação interna do sistema de controle ( $G_m(s) - P_n(s)$ ) e o controlador primário ajusta-se considerando o modelo rápido  $G_m(s)$ , como se fosse o modelo nominal sem atraso. O ajuste de  $C(s)$  é mais difícil que no caso nominal, uma vez que o modelo rápido  $G_m(s)$  é geralmente mais complexo que  $G_n(s)$ . Por outro lado, a estrutura tem a vantagem adicional que pode ser utilizada para controlar plantas instáveis.

Diversos autores propuseram outras modificações ao SP original para melhorar o comportamento em malha fechada do sistema de controle quando o processo é integrador e possui atraso dominante ((Astrom et al. 1994), (Matausek e Micic 1996), (Zhang e Sun 1996), (Normey-Rico e Camacho 1999), (Normey-Rico e Camacho 2002)). O algoritmo de Astrom et al. (1994), foi comparado com o proposto por Watanabe e Ito (1981) para mostrar como o primeiro melhorava a resposta do segundo às mudanças da referência mantendo as mesmas vantagens à rejeição das perturbações. Posteriormente a solução proposta por Matausek e Micic (1996) para o mesmo problema, permite obter resultados parecidos aos de Astrom et al. (1994), mas utiliza uma estrutura mais simples e fácil de ajustar. Por outro lado os autores Normey-Rico e Camacho (1999) demonstraram que, incluindo um filtro de referência na estrutura do compensador de atrasos de Watanabe e Ito (1981) e ajustando adequadamente o modelo rápido e o controle primário, é possível obter resultados equivalentes aos controladores apresentados em Astrom et al. (1994) e

Matausek e Micic (1996) tanto para a rejeição de perturbações quanto para o seguimento de referências. Num trabalho apresentado recentemente por Zhong e Normey-Rico (2002) para compensar processos com atraso, foi proposto uma estrutura de dois graus de liberdade DTC2DOF baseada num observador de perturbações. Este compensador utiliza a inversa do modelo nominal para observar as perturbações e o efeito destas seja diretamente cancelado no sinal de controle. Uma vantagem fundamental está em que o modelo nominal da planta pode ser representado por um modelo de ordem arbitrária diminuindo o erro de modelagem e assim melhorar o índice de robustez do sistema. Outra vantagem é que pode-se rejeitar perturbações de ordem arbitrária com o ajuste adequado de um filtro  $V(s)$  na malha de controle. Os autores comparam os resultados com os obtidos em Normey-Rico e Camacho (1999), para mostrar como melhora a rejeição de perturbações, mantendo as mesmas vantagens ao seguimento de referências. Finalmente em Zhong e Li (2003) propõe-se um ajuste “deadbeat” utilizando a mesma estrutura de controle apresentada em Zhong e Normey-Rico (2002). Este ajuste conduz à rejeição da perturbação num tempo finito. Para tal efeito os autores propõem um filtro  $V(s)$  com atrasos ajustáveis e o resto dos parâmetros do controlador ajustam-se como em Zhong e Normey-Rico (2002).

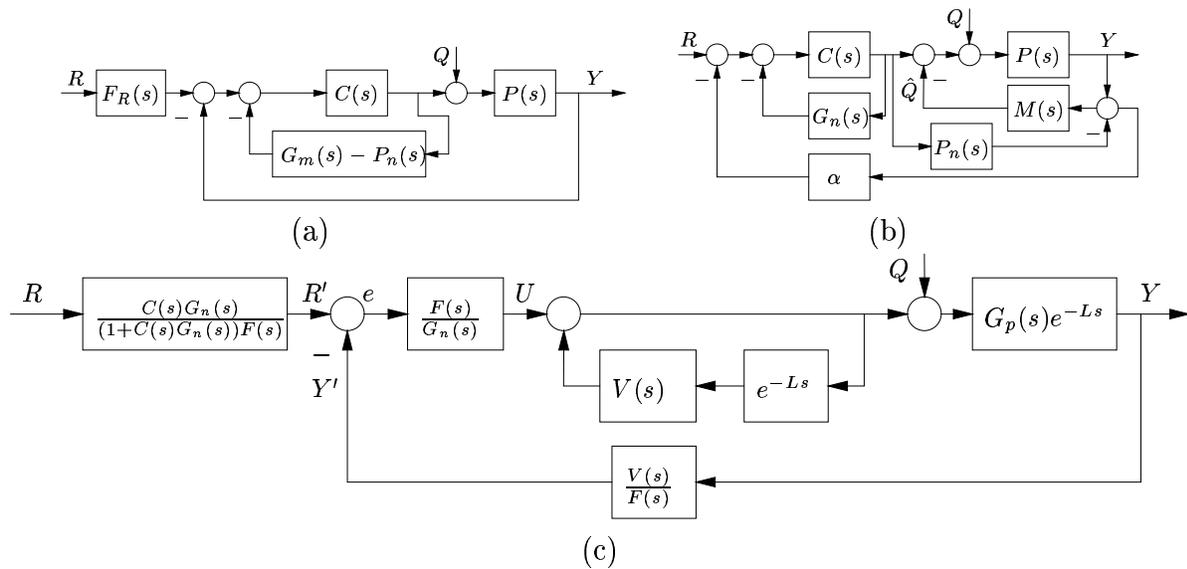


Figura 2.5: Estrutura dos DTC2DOF propostas por: (a) Normey-Rico e Camacho (1999) (b) Astrom et al. (1994) e Matausek e Misic (1996) (c) Zhong e Normey-Rico (2002) e Zhong e Li (2003).

Todas as estruturas mencionadas estão representadas nos diagramas da Figura 2.5. O controlador de Normey-Rico e Camacho (1999) está representado na Figura 2.5(a). Este mesmo esquema representa o controlador de Watanabe e Ito (1981) quando o filtro de

referência  $F_R(s) = 1$ .

No esquema da Figura 2.5(b) são representados os compensadores de Astrom et al. (1994), Matausek e Micic (1996) e Zhang e Sun (1996). Para o compensador de Matausek e Micic (1996)  $\alpha = 1$ , para os outros dois compensadores  $\alpha = 0$ . É importante destacar que os três algoritmos utilizam uma estimação da perturbação  $\hat{Q}$  como elemento atenuante dos efeitos da perturbação  $Q$  na saída do sistema.

No esquema da Figura 2.5(c) são representados os compensadores de Zhong e Normey-Rico (2002) e Zhong e Li (2003), sendo o ajuste de  $V(s)$  o único elemento que diferencia ambos compensadores. Estes controladores também estão baseados na estimação da perturbação  $\hat{Q}$  para atenuar o efeito  $Q$  na saída.

Considerando uma modelagem perfeita, as relações entrada-saída e o índice de robustez  $I_R$  dos esquemas da Figura 2.5 são mostrados na tabela 2.1.

Figura 2.5	(a)	(b)	(c)
$\frac{Y}{R}$	$\frac{F_R(s)C(s)P_n(s)}{1 + C(s)G_m(s)}$	$\frac{C(s)P_n(s)}{1 + C(s)G_n(s)}$	$\frac{C(s)P_n(s)}{1 + C(s)G_n(s)}$
$\frac{Y}{Q}$	$P_n(s) \left[ 1 - \frac{C(s)P_n(s)}{1 + C(s)G_m(s)} \right]$	$\frac{P_n(s)}{1 + M(s)P_n(s)}$	$P_n(s)(1 - V(s)e^{-Ls})$
$I_R(w)$	$\frac{ 1 + C(jw)G_m(jw) }{ C(jw) }$	$\frac{1}{ M(jw) }$	$\frac{ G_n(jw) }{ V(jw) }$

Tabela 2.1: Relações entrada-saída e índice de robustez.

A partir das relações apresentadas na Tabela 2.1 conclui-se que:

1. As três estruturas apresentadas na Figura 2.5 possuem dois graus de liberdade as quais permitem o ajuste a rejeição das perturbações e ao seguimento de referências. O ajuste da estrutura 2.5(a) deve ser efetuado inicialmente para a rejeição de perturbações através de  $C(s)$  e depois para o seguimento de referências através do filtro  $F_R(s)$ , uma vez que a relação  $Y/R$  também depende de  $C(s)$ . As estruturas 2.5(b) e 2.5 (c) apresentam as relações ao seguimento de referências e a rejeição de perturbações completamente desacopladas, isso permite que o ajuste seja independente para o seguimento de referência e para a rejeição de perturbações.

2. Nas três estruturas, o ajuste a rejeição de perturbações está relacionado com o índice de robustez  $I_R$ , estabelecendo um compromisso entre a robustez e a resposta às perturbações.
3. Uma vantagem do controlador de Zhong e Normey-Rico (2002), que utiliza a estrutura da Figura 2.5 (c) está no fato de poder ser aplicado a processos de ordem elevada com um integrador e atraso através de modelos da mesma ordem diminuindo as incertezas de modelagem e aumentando a robustez do sistema, obtendo-se também um melhor desempenho em malha fechada.
4. Outra vantagem do controlador de Zhong e Normey-Rico (2002) é a simplicidade do ajuste de  $V(s)$  para a rejeição de perturbações, conseqüentemente  $V(s)$  pode ser projetado para a rejeição de perturbações de ordem arbitrária.

## 2.3 Conclusões

Controladores de dois graus de liberdade permitem desacoplar o ajuste ao seguimento de referências e à rejeição de perturbações. Como foi estudado neste capítulo o controlador de dois graus de liberdade baseado em observador de perturbações apresentado por Zhong e Normey-Rico (2002) permite o uso de modelos de ordem elevada no projeto do controlador, diminuindo assim o erro de modelagem e permite o ajuste para a rejeição de perturbações de ordem arbitrária. Foram estes os aspectos principais que motivaram o seu uso ao longo deste projeto, tanto para o projeto de controle discreto quanto para a digitalização de controladores analógicos para plantas com atraso.

## Capítulo 3

# Projeto discreto de compensadores de tempo morto de dois graus de liberdade

Os controladores contínuos estudados no capítulo 2, necessitam para sua implementação equipamentos analógicos tais como resistores, capacitores, amplificadores operacionais, etc., o que dificulta sua implementação, especialmente quando o controlador inclui atrasos em sua estrutura como é o caso dos DTCs. Nos últimos anos estes problemas tem incentivado o incremento do uso de controladores digitais no controle de sistemas. Controladores digitais também são usados para alcançar o desempenho ótimo, em termos de produtividade máxima, custo mínimo ou energia usada. O baixo custo dos computadores digitais e a flexibilidade na programação do controle, são as principais vantagens do controle digital.

A teoria de controle encontra aplicações nas mais diversas áreas, desde típicos processos industriais como sistemas econômicos e biológicos. As plantas freqüentemente envolvem sinais contínuos, mesmo que o controle envolva sinais digitais, isto torna necessária a conversão Analógico Digital (A/D) e Digital Analógico (D/A), respectivamente. Na Figura 3.1 apresenta-se a configuração básica do esquema de controle digital para processar sinais analógicos de processos contínuos, onde os elementos básicos são representados pelos blocos.

A atenção deste capítulo está dirigida principalmente ao cálculo da lei de controle digital, quando a planta tem atraso significativo entre a entrada e a saída. Com este objetivo

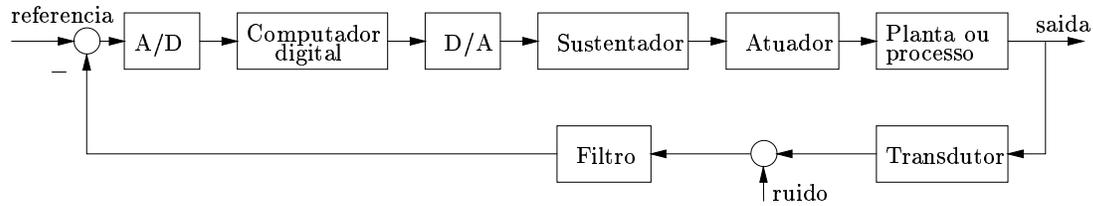


Figura 3.1: Diagrama de blocos do controle digital.

é introduzida uma estrutura de controle de dois graus de liberdade porque permite melhorar a resposta à ação de perturbações, principalmente quando o processo tem atraso significativo. A estrutura utilizada foi apresentada por Zhong e Normey-Rico (2002). Estes autores propuseram o ajuste do controlador no domínio contínuo para plantas integradoras com atraso. Neste capítulo propõe-se o ajuste dos parâmetros de controle no caso discreto para o caso de plantas estáveis com atraso e plantas integradoras com atraso, que são as mais comuns em sistemas com atraso.

A apresentação deste capítulo tem a seguinte seqüência: A seção 3.1 apresenta uma estrutura de controle baseada num observador de perturbações discreto. A seção 3.2 apresenta o ajuste do controlador para plantas estáveis com atraso. A Seção 3.3 apresenta o ajuste da lei de controle para plantas integradoras com atraso. A Seção 3.4 apresenta um ajuste *deadbeat* para a rejeição das perturbações. A Seção 3.5 apresenta a implementação das estruturas de controle. A seção 3.6 apresenta um exemplo de simulação. Finalmente a Seção 3.7 apresenta as conclusões do capítulo.

### 3.1 Estrutura de observador de perturbações

Em processos com perturbações não mensuráveis é interessante estima-las ou observá-las, dado que idealmente este tipo de estrutura permite anular o efeito das perturbações na saída. Um observador de perturbações estima as mesmas a partir das medidas da saída e do controle.

No que segue considera-se que a relação entre a saída, a entrada e a perturbação na planta pode ser descrito por:

$$Y(z) = G_n(z)(z^{-d}U(z) + z^{-d}Q(z)), \quad (3.1)$$

onde  $Y$  é a saída,  $U$  a entrada,  $Q$  a perturbação e  $d$  o atraso. Isolando-se  $z^{-d}Q(z)$  tem-se:

$$z^{-d}Q(z) = G_n^{-1}(z)Y(z) - z^{-d}U(z). \quad (3.2)$$

Neste capítulo não será estudado o problema da escolha do período de amostragem ( $T$ ) nem os problemas associados à conexão do controle discreto e o processo contínuo. Estes problemas serão analisados nos próximos capítulos. Percebe-se que em (3.2) não é possível observar a perturbação  $Q$  sem que antes transcorra um número  $d$  de amostras e além disso  $G_n^{-1}(z)$  deve ser uma função própria ou causal. Portanto opta-se por uma estimação da perturbação realizável  $\hat{Q}$  introduzindo-se um filtro  $V(z)$  na perturbação observada

$$\hat{Q}(z) = V(z)z^{-d}Q(z) = V(z)(G_n^{-1}(z)Y(z) - z^{-d}U(z)). \quad (3.3)$$

O filtro  $V(z)$  deve ser projetado com a consideração de que a função  $\frac{V(z)}{G_n(z)}$  seja própria ou causal. Isto significa que o grau do numerador não deve exceder o grau do denominador. Por outro lado a estimação da perturbação  $\hat{Q}$  permite eliminar ou diminuir os efeitos da perturbação  $Q$  se for introduzida na malha de controle. Neste caso introduzindo este observador de perturbações num preditor, obtém-se a estrutura DTC2DOF ilustrada na Figura 3.2.

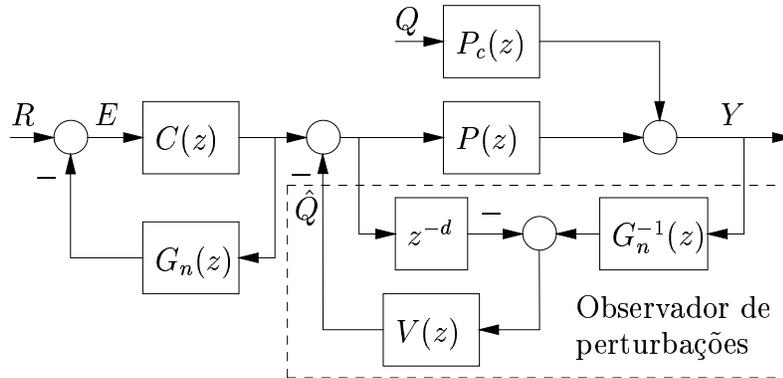


Figura 3.2: Sistema de controle discreto.

onde

- $C(z)$   $\longrightarrow$  controle primário,
- $G_n(z)$   $\longrightarrow$  modelo nominal da planta sem atraso,
- $P(z)$   $\longrightarrow$  modelo da planta para o sinal de controle,
- $P_c(z)$   $\longrightarrow$  modelo da planta para o sinal de perturbação,
- $V(z)$   $\longrightarrow$  filtro,
- $R$   $\longrightarrow$  referência,
- $Y$   $\longrightarrow$  saída,
- $Q$   $\longrightarrow$  perturbação,
- $E$   $\longrightarrow$  erro entre a saída do modelo e a referência,
- $d$   $\longrightarrow$  atraso discreto.

A relação entre  $P_c(z)$ ,  $P(z)$  e a planta contínua  $P(s)$  é:

$$P_c(z) = \mathcal{Z}\{P(s)\} \quad P(z) = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\frac{P(s)}{s}\right\}. \quad (3.4)$$

Para efeitos de simplificação pode-se usar  $P(z) = P_c(z)$  quando as perturbações são do tipo degrau.

As relações de entrada-saída e o índice de robustez no caso nominal são representadas pelas seguintes funções:

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = P(z) \frac{C(z)}{1 + C(z)G_n(z)}, \quad \frac{Y(z)}{Q(z)} = P(z)(1 - V(z)z^{-d}) \quad \text{e} \quad I_R(w) = \frac{|G_n(e^{jw})|}{|V(e^{jw})|}, \quad (3.5)$$

Percebe-se que o sistema está desacoplado entre o seguimento de referências e a rejeição de perturbações, com isso  $C(z)$  é ajustado para o seguimento de referências e  $V(z)$  para a rejeição de perturbações e a robustez. Para que a relação  $Y/Q$  se aproxime a zero rapidamente  $V(z)$  deve ser aproximado a um em altas freqüências. No entanto para que o sistema tenha robustez elevada, o filtro  $V(z)$  deve se aproximar a zero em altas freqüências, portanto existe um compromisso entre a robustez e a resposta a perturbações. Nota-se que em baixas freqüências o filtro deve tender a um para que o sistema possa rejeitar perturbações em regime permanente. Nas próximas seções serão analisadas a escolha e o

ajuste dos parâmetros de controle  $C(z)$  e  $V(z)$  para plantas estáveis e plantas integradoras.

## 3.2 Ajuste do controlador para plantas estáveis

Nesta seção o sistema de controle será ajustado para satisfazer especificações de planta, tais como o seguimento de referência tipo degrau e rejeição de perturbações tipo rampa e degrau, que são as mais comuns nas aplicações de controle.

### 3.2.1 Ajuste do controle primário $C(z)$

O ajuste do controle primário define a velocidade de resposta ao seguimento de referências. Em sistemas com atraso dominante considera-se um bom ajuste quando a velocidade de resposta ao seguimento de referência em malha fechada é aproximada à de malha aberta, por isso controladores simples podem satisfazer tais especificações. Neste caso  $C(z)$  deve controlar o modelo nominal sem atraso  $G_n(z)$ . Na Figura 3.2 pode ser verificado que o erro entre a saída do modelo e a referência é dado por:

$$E(z) = \frac{1}{1 + C(z)G_n(z)}R(z). \quad (3.6)$$

Deseja-se que o erro ( $E$ ) seja zero em regime estacionário ( $z = 1$ ), para que o sistema siga a referência. Para este objetivo projeta-se  $C(z)$  como um simples  $PI$  descrito por:

$$C(z) = K \left( 1 + \frac{T}{t_i} \frac{z}{z-1} \right) \quad (3.7)$$

onde  $K$  e  $t_i$  são os parâmetros de sintonia que definem a velocidade de resposta e  $T$  é o período de amostragem.

### 3.2.2 Ajuste do filtro $V(z)$

O filtro  $V(z)$  define a resposta a perturbações e a robustez do sistema. Portanto para rejeitar perturbações, a relação

$$\frac{Y(z)}{Q(z)} = P_n(z)(1 - V(z)z^{-d}), \quad (3.8)$$

deve ser zero em regime permanente. Isso obtém-se igualando a zero o segundo termo da equação (3.8), isto é

$$(1 - V(z)z^{-d})|_{z=1} = 0.$$

A multiplicidade das soluções (zeros), está relacionada diretamente à maior ordem de perturbação que pode ser rejeitada. Por exemplo, para uma perturbação tipo rampa (ordem 2), devem ser satisfeitas duas condições,

$$\begin{cases} (1 - V(z)z^{-d})|_{z=1} = 0 \\ \frac{d}{dz}(1 - V(z)z^{-d})|_{z=1} = 0 \end{cases} \quad \text{zero } z = 1 \text{ com multiplicidade 2.} \quad (3.9)$$

Resolvendo este sistema de equações obtém-se:

$$\begin{cases} V(1) = 1 \\ V'(1) = d. \end{cases} \quad (3.10)$$

Entretanto, para a rejeição de perturbações tipo degrau, é suficiente que a primeira condição ( $V(1) = 1$ ) seja satisfeita.

Além das condições de rejeição, o filtro  $V(z)$  deve ser projetado para garantir que a função  $\frac{V(z)}{G_n(z)}$  seja própria ou causal.

Por exemplo, se o modelo nominal sem atraso da planta ( $G_n(z)$ ), pode ser representado por uma função de transferência discreta como:

$$G_n(z) = \frac{a_0 z^{n-1} + a_1 z^{n-2} + \dots + a_{n-1}}{z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_n}, \quad (3.11)$$

para garantir a causalidade de  $\frac{V(z)}{G_n(z)}$ , o filtro  $V(z)$  deve ser projetado como:

$$V(z) = \frac{\alpha_0 z^{m-1} + \alpha_1 z^{m-2} + \dots + \alpha_{m-1}}{(z - \beta)^m}, \quad (3.12)$$

onde  $\alpha_0, \dots, \alpha_{m-1}$  e  $\beta$  são os parâmetros de sintonia.

Por exemplo, para perturbações tipo degrau é proposto o filtro

$$V(z) = \frac{\alpha_0}{(z - \beta)}. \quad (3.13)$$

Para a rejeição de perturbações tipo degrau deve ser satisfeita a condição  $V(1) = 1$ . Para isso basta garantir que

$$\alpha_0 = 1 - \beta,$$

onde  $\beta$  é um parâmetro livre que pode ser ajustado. Colocando o período de amostragem em evidência, obtém-se

$$\beta = e^{-\frac{T}{\lambda}},$$

onde  $T$  é o período de amostragem e  $\lambda$  é o parâmetro livre a ser ajustado. Observando as relações em (3.5) deduz-se que: valores grandes de  $\lambda$  tornam sistemas robustos ( $I_R$  grande) e valores pequenos de  $\lambda$  permitem compensar rapidamente as perturbações quando os erros de modelagem são pequenos, portanto existe um compromisso entre a robustez e a rejeição de perturbações definida por  $\lambda$ .

Para rejeição de perturbações tipo rampa é proposto o filtro  $V(z)$ , descrito por:

$$V(z) = \frac{\alpha_0 z + \alpha_1}{(z - \beta)^2}, \quad (3.14)$$

para serem satisfeitas as condições de rejeição de perturbação (equação 3.10) basta atribuir  $\alpha_0 = dx^2 + 2x$ ,  $\alpha_1 = x^2 - \alpha_0$  e  $x = \beta + 1$ , onde  $d$  é o atraso do modelo discreto e  $\beta$  é o parâmetro livre de sintonia.

### 3.3 Ajuste do controlador para plantas integradoras

Nesta seção estuda-se o ajuste do controle primário  $C(z)$  e o filtro  $V(z)$  para o seguimento de referências e a rejeição de perturbações de plantas integradoras com atraso.

### 3.3.1 Ajuste do controle primário $C(z)$

O seguimento de referência é ajustado através do controle primário  $C(z)$ . Neste caso particular como o modelo da planta  $G_n(z)$  é integradora,  $C(z)$  pode ser projetado como um simples ganho.

$$C(z) = K.$$

Em plantas com atraso dominante, não é necessário que a resposta em malha fechada seja muito mais rápida que a resposta em malha aberta. O interesse está na rejeição de perturbações, por isso procura-se uma solução simples para  $C(z)$ .

### 3.3.2 Ajuste do filtro $V(z)$

Como no caso de plantas estáveis, o filtro  $V(z)$  deve ser projetado para rejeitar perturbações. Neste caso o cálculo de  $V(z)$  deve anular o efeito do integrador do modelo, igualando a zero o segundo termo da relação

$$\frac{Y(z)}{Q(z)} = P_n(z)(1 - V(z)z^{-d}), \quad (3.15)$$

isto é,  $(1 - V(z)z^{-d})|_{z=1} = 0$ . Devido ao integrador da planta a multiplicidade do zero ( $z = 1$ ), deve estar relacionada à maior ordem de perturbação aumentado em um. Por exemplo, para uma perturbação tipo rampa (ordem 2), o polinômio  $(1 - V(z)z^{-d})|_{z=1} = 0$ , deve ter raiz  $z = 1$  com multiplicidade três, portanto as seguintes condições devem ser satisfeitas:

$$\begin{cases} (1 - V(z)z^{-d})|_{z=1} = 0 \\ \frac{d}{dz}(1 - V(z)z^{-d})|_{z=1} = 0 \\ \frac{d^2}{dz^2}(1 - V(z)z^{-d})|_{z=1} = 0 \end{cases} \quad (3.16)$$

As soluções da equação (3.16) são:

$$\begin{cases} V(1) = 1 \\ V'(1) = d \\ V''(1) = d(d-1) \end{cases} \quad (3.17)$$

Para a rejeição de perturbação tipo degrau, é suficiente que as duas primeiras condições ( $V(1) = 1$  e  $V'(1) = d$ ) sejam satisfeitas.

O filtro  $V(z)$  deve conter o número de parâmetros de ajuste suficientes para satisfazer as condições da equação (3.17).

Por exemplo, se é utilizado um filtro de primeira ordem

$$V(z) = \frac{\alpha_0}{z - \beta}, \quad (3.18)$$

para a rejeição de perturbação tipo degrau tem-se  $\alpha_0 = 1 - \beta$  e  $\beta = 1 + \frac{1}{d}$ . Observa-se que o pólo do filtro ( $\beta$ ) não é um parâmetro livre, porque depende do atraso  $d$  e está fora do círculo unitário tornando o sistema instável. Portanto, deve ser utilizado um filtro de maior ordem, com pelo menos 3 parâmetros de ajuste, por exemplo,

$$V(z) = \frac{\alpha_0 z + \alpha_1}{(z - \beta)^2}, \quad (3.19)$$

com

$$\alpha_0 = dx^2 + 2x \quad (3.20)$$

$$\alpha_1 = x^2 - \alpha_0 \quad (3.21)$$

$$x = 1 - \beta, \quad (3.22)$$

onde  $\beta$  é o parâmetro livre de sintonia.

No caso de perturbações de maior ordem, a ordem do filtro deve ser incrementada, aumentando o número de parâmetros de ajuste.

### 3.4 Rejeição de perturbações *deadbeat*

Nesta seção estuda-se uma metodologia de ajuste do controle discreto que rejeite perturbações num tempo finito. Este tipo de controle também é conhecido na literatura

como controle *deadbeat* e consegue-se anulando os pólos da relação  $Y/Q$ .

O trabalho mais recente de compensação de tempo morto foi proposto por Zhong e Li (2003) onde é introduzido o ajuste do controle *deadbeat* no domínio contínuo para plantas integradoras com atraso, utilizando a estrutura de observador de perturbações apresentada por Zhong e Normey-Rico (2002). Para este fim os autores propuseram um filtro  $V$  com vários atrasos em sua especificação, com resultados satisfatórios, especialmente quando os processos são modelados por funções de baixa ordem.

Na continuação apresenta-se um estudo de controle discreto *deadbeat*, adotando-se a mesma metodologia de Zhong e Li (2003) mas no caso discreto. Inicialmente faz-se uma análise de convergência de uma função de transferência discreta.

Lembrando que se a função  $Y(z) = \frac{\gamma(z)}{\theta(z)}$  é tal que o denominador  $\theta(z)$  da função é irredutível (tem somente raízes em  $z = 0$ ) então a saída converge a zero num número finito de amostras

$$y(k) = 0 \quad \forall k > k_0. \quad (3.23)$$

Assim escolhe-se  $V(z)$  para que

$$Y(z) = G_n(z)(1 - V(z)z^{-d})\frac{N(z)}{D(z)} \quad \rightarrow \quad \frac{N(z)}{D(z)} = Q(z), \quad (3.24)$$

somente tenha pólos em  $z = 0$ .

**Teorema 3.1** *O controle baseado em observador de perturbações, para um processo estável com atraso, rejeita uma perturbação do tipo degrau no tempo  $t = T(2d + d_2)$ , se o filtro passa baixo é escolhido como:*

$$V(z) = \frac{\alpha_0}{z - \beta}(1 - q_1(1 - z^{-d_1}) - q_2(1 - z^{-d_2})), \quad (3.25)$$

com

$$\begin{cases} q_1 = \frac{(1 - b^{-d_2}) - K(1 - \beta^{-d_2})}{(1 - \beta^{-d_1})(1 - b^{-d_2}) - (1 - \beta^{-d_2})(1 - b^{-d_1})} \\ q_2 = \frac{-(1 - b^{-d_1}) + K(1 - \beta^{-d_1})}{(1 - \beta^{-d_1})(1 - b^{-d_2}) - (1 - \beta^{-d_2})(1 - b^{-d_1})} \end{cases} \quad (3.26)$$

e

$$K = 1 + \frac{(\beta - b)b^d}{\alpha_0}$$

onde  $d$  é o atraso do modelo,  $d_2 > d_1 > 0$  e  $\beta$  são parâmetros que devem ser escolhidos considerando o compromisso entre a resposta e a robustez.

### Prova

Considera-se que dinâmica da planta para o projeto do filtro pode ser modelada por uma função de primeira ordem, como:

$$G_c(z) = \frac{k_p z^{-1}}{1 - b z^{-1}} \quad (3.27)$$

e a perturbação tipo degrau modelada por:

$$\frac{N(z)}{D(z)} = \frac{1}{1 - z^{-1}}. \quad (3.28)$$

Substituindo os modelos da planta, do filtro e a perturbação em

$$\phi(z) = G_c(z)(1 - V(z)z^{-d})z^{-d} \cdot \frac{N(z)}{D(z)}, \quad (3.29)$$

obtem-se:

$$\phi(z) = \frac{k_p z^{-(d+1)}(1 - \beta z^{-1} - \alpha_0 z^{-(d+1)}(1 - q_1(1 - z^{-d_1}) - q_2(1 - z^{-d_2})))}{(1 - b z^{-1})(1 - \beta z^{-1})(1 - z^{-1})} \quad (3.30)$$

Os pólos de  $\phi(z)$  são 1,  $\beta$  e  $b$ . Nota-se que no numerador está contido um zero  $z = 1$ . Para anular o efeito dos pólos restantes  $b$  e  $\beta$  deve ser calculado  $num(\phi(z))|_{z=b} = 0$  e  $num(\phi(z))|_{z=\beta} = 0$ , portanto obtém-se o seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} (1 - \beta^{-d_1})q_1 + (1 - \beta^{-d_2})q_2 = 1 \\ (1 - b^{-d_1})q_1 + (1 - b^{-d_2})q_2 = 1 + \frac{(\beta - b)b^d}{\alpha_0} \end{cases} \quad (3.31)$$

Para  $d_2 > d_1 > 0$ , as soluções de  $q_1$  e  $q_2$  são obtidas iguais às da equação (3.26), completando a prova.

◇

Para o caso de plantas integradoras tem-se o seguinte teorema:

**Teorema 3.2** *O controle baseado em observador de perturbações, para um processo integrador com atraso, rejeita uma perturbação do tipo degrau no tempo  $t = T(2d + d_2)$ , se o filtro passa baixo é escolhido como:*

$$V(z) = \frac{\alpha_0}{z - \beta} (1 - q_1(1 - z^{-d_1}) - q_2(1 - z^{-d_2})), \quad (3.32)$$

com

$$\begin{cases} q_1 = \frac{K(1 - \beta^{-d_2}) - d_2}{d_1(1 - \beta^{-d_2}) - d_2(1 - \beta^{-d_1})} \\ q_2 = \frac{-K(1 - \beta^{-d_1}) + d_1}{d_1(1 - \beta^{-d_2}) - d_2(1 - \beta^{-d_1})} \end{cases} \quad (3.33)$$

e

$$K = d_2 + \frac{\beta}{\alpha_0}(d + d_2) - \frac{1}{\alpha_0}(d + d_2 + 1),$$

onde  $d$  é o atraso do modelo,  $d_2 > d_1 > 0$  e  $\beta$  são parâmetros que devem ser escolhidos considerando o compromisso ente a resposta e a robustez.

### Prova

Dado o modelo da planta de primeira ordem integradora e a perturbação tipo degrau por:

$$G_c(z) = \frac{k_p z^{-1}}{1 - z^{-1}} \quad \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{1}{1 - z^{-1}}. \quad (3.34)$$

Substituindo os modelos da planta, do filtro e a perturbação em:

$$\phi(z) = G_c(z)(1 - V(z)z^{-d})z^{-d} \cdot \frac{N(z)}{D(z)}, \quad (3.35)$$

obtém-se:

$$\phi(z) = \frac{k_p z^{-(d+1)} (1 - \beta z^{-1} - \alpha_0 z^{-(d+1)} (1 - q_1 (1 - z^{-d_1}) - q_2 (1 - z^{-d_2})))}{(z - 1)^2 (z - \beta)}. \quad (3.36)$$

Os pólos de  $\phi(z)$  são 1, 1 e  $\beta$ . Nota-se que no numerador está contido um zero  $z = 1$ . Para anular o efeito dos pólos restantes 1 e  $\beta$  deve ser calculado  $\left. \frac{d}{dz} \text{num}(\phi(z)) \right|_{z=1} = 0$  e  $\text{num}(\phi(z))|_{z=\beta} = 0$ , portanto obtém-se o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} (1 - \beta^{-d_1})q_1 + (1 - \beta^{-d_2})q_2 = 1 \\ d_1 q_1 + d_2 q_2 = d_2 + \frac{\beta}{\alpha_0}(d + d_2) - \frac{1}{\alpha_0}(d + d_2 + 1) \end{cases} \quad (3.37)$$

Para  $d_2 > d_1 > 0$ , as soluções de  $q_1$  e  $q_2$  são obtidas iguais às equação (3.33), completando a prova.  $\diamond$

### 3.5 Implementação da estrutura de controle

A estrutura de controle ilustrada na Figura 3.2, que foi estudada nos itens anteriores, não pode ser implementada dessa forma devido a que se o denominador de  $G_n(z)$  é maior ao numerador, então a inversa não é causal.

Uma alternativa simples a este problema é a reordenação dos blocos das funções de transferência, tal que todas as relações sejam causais e internamente estáveis. Para o caso de plantas estáveis propõe-se a reordenação dos blocos como ilustrada na Figura 3.3.

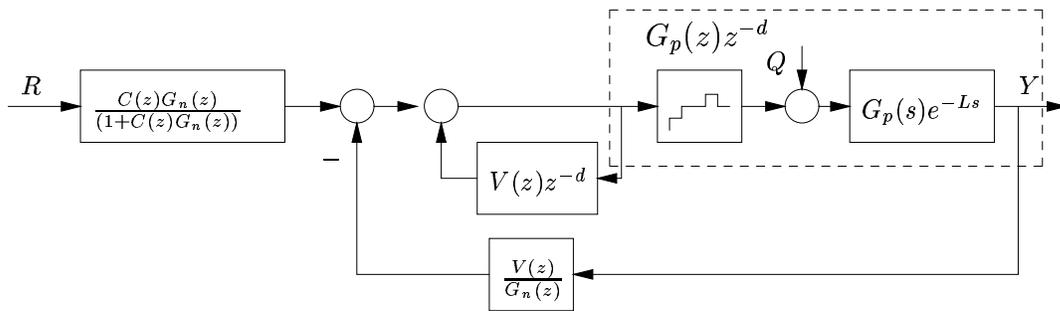


Figura 3.3: Estrutura de controle discreto para plantas estáveis com atraso.

Nota-se que com a escolha adequada do filtro  $V(z)$ , a estrutura de controle ilustrada na

Figura 3.3 será causal e internamente Estável, satisfazendo-se assim com os requerimentos para a implementação.

No caso de plantas integradoras os autores Zhong e Normey-Rico (2002) propuseram a reordenação da estrutura de controle no domínio contínuo. No caso discreto esta reordenação é ilustrada na Figura 3.4. Nota-se que aparece um parâmetro adicional  $F(z)$  que não aparecerá nas relações de entrada-saída. Os autores introduziram este parâmetro para garantir a estabilidade interna do controle.

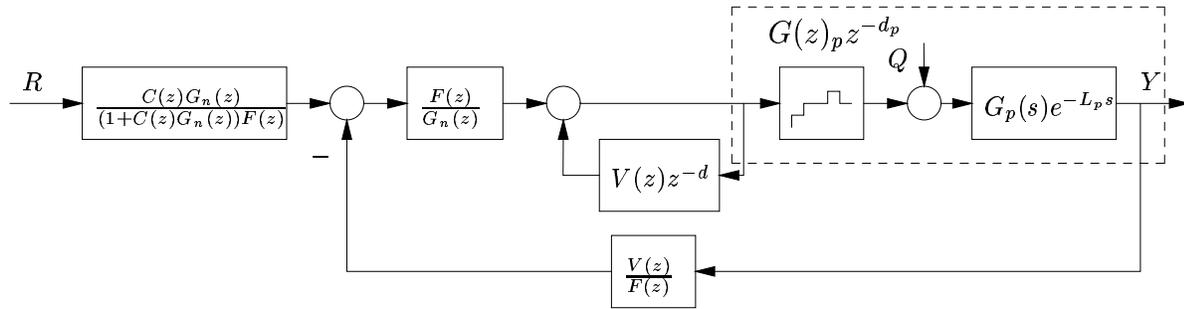


Figura 3.4: Sistema de controle discreto para plantas integradoras.

É importante salientar que as relações de entrada-saída de ambas estruturas (Figura 3.3 e Figura 3.4) não modificam as relações de entrada saída da estrutura original (equação 3.5), portanto o estudo apresentado nos itens anteriores é válido para as estruturas ilustradas nas Figuras 3.3 e 3.4.

## 3.6 Exemplo

Para ilustrar os resultados da aplicação do controle discreto proposto, analisa-se um sistema estável com atraso dominante, representado por uma função de transferência de segunda ordem como:

$$P(s) = \frac{1}{(s+1)(0.5s+1)} e^{-5s}. \quad (3.38)$$

Considerando um período de amostragem  $T = 0.5s$ , pode ser obtido o modelo em  $Z$ , através da discretização pelo método “Zero order holder” *Zoh*.

$$P_n(z) = \frac{0.1548z + 0.0939}{z^2 - 0.9744z + 0.2231} z^{-10}. \quad (3.39)$$

Deseja-se que o sistema satisfaça duas especificações. A primeira é que o tempo de subida em malha fechada seja similar ao de malha aberta e o sistema não apresente sobre-sinais. A segunda especificação é que o sistema mantenha estabilidade robusta para variações do atraso de  $\pm 10\%$ .

A primeira especificação deve ser ajustada através do controle primário  $C(z)$ , que deve controlar a  $G_n(z)$ . Para isso propõe-se  $C(z)$  como um *PI*, isto é:

$$C(z) = K \left( 1 + \frac{T}{t_i} \frac{z}{z-1} \right), \quad (3.40)$$

onde  $T = 0.5s$ ,  $t_i = 0.77$  e  $k = 0.3$  (os parâmetros do controlador primário  $C(z)$  foram sintonizados utilizando o método de lugar das raízes).

A segunda condição deve ser ajustada pelo filtro  $V(z)$ . Para plantas estáveis propõe-se duas opções, uma como um filtro passa baixa (item 3.2.2), e outra como um filtro passa baixa com atrasos em sua especificação (item 3.4).

Supondo-se o filtro passa baixa tem-se:

$$V(z) = \frac{\alpha_0}{z - \beta}, \quad (3.41)$$

onde  $\alpha_0 = 0.57$ ,  $\beta = e^{-\frac{T}{\lambda}}$ ,  $T = 0.5$  e  $\lambda = 0.6$ .

Supondo-se o filtro *deadbeat* tem-se:

$$V(z) = \frac{\alpha_0}{z - \beta} (1 - q_1(1 - z^{-d_1}) - q_2(1 - z^{-d_2})), \quad (3.42)$$

onde  $q_1 = -0.51$ ,  $q_2 = 0.06$ ,  $d_1 = 5$ ,  $d_2 = 9$ ,  $\beta = e^{-\frac{T}{\lambda}}$ ,  $\lambda = 1.5$ ,  $a = 1 - e^{-\frac{T}{\lambda}}$ ,  $b = e^{-\frac{T}{\lambda}}$  e  $T = 0.5$ , onde  $\lambda$ ,  $d_2$  e  $d_1$  foram sintonizados considerando o compromisso entre a robustez e a rejeição às perturbações.

Para efeitos de simulação considera-se que a referência inicialmente está em repouso e varia de 0 a 1, em  $t = 0s$  e em  $t = 25s$  aplica-se uma perturbação constante  $Q = 0.5$  na entrada da planta.

As respostas das simulações ilustram-se na Figura 3.5 e os resultados de comportamento (medido através do erro integral quadrático  $E_{IQ}$ ) na tabela 3.1. Observa-se que os controladores discreto (que utiliza um filtro  $V(z)$  passa baixa) e discreto deadbeat (que utiliza um filtro  $V(z)$  passa baixa com atrasos na sua especificação) tem respostas

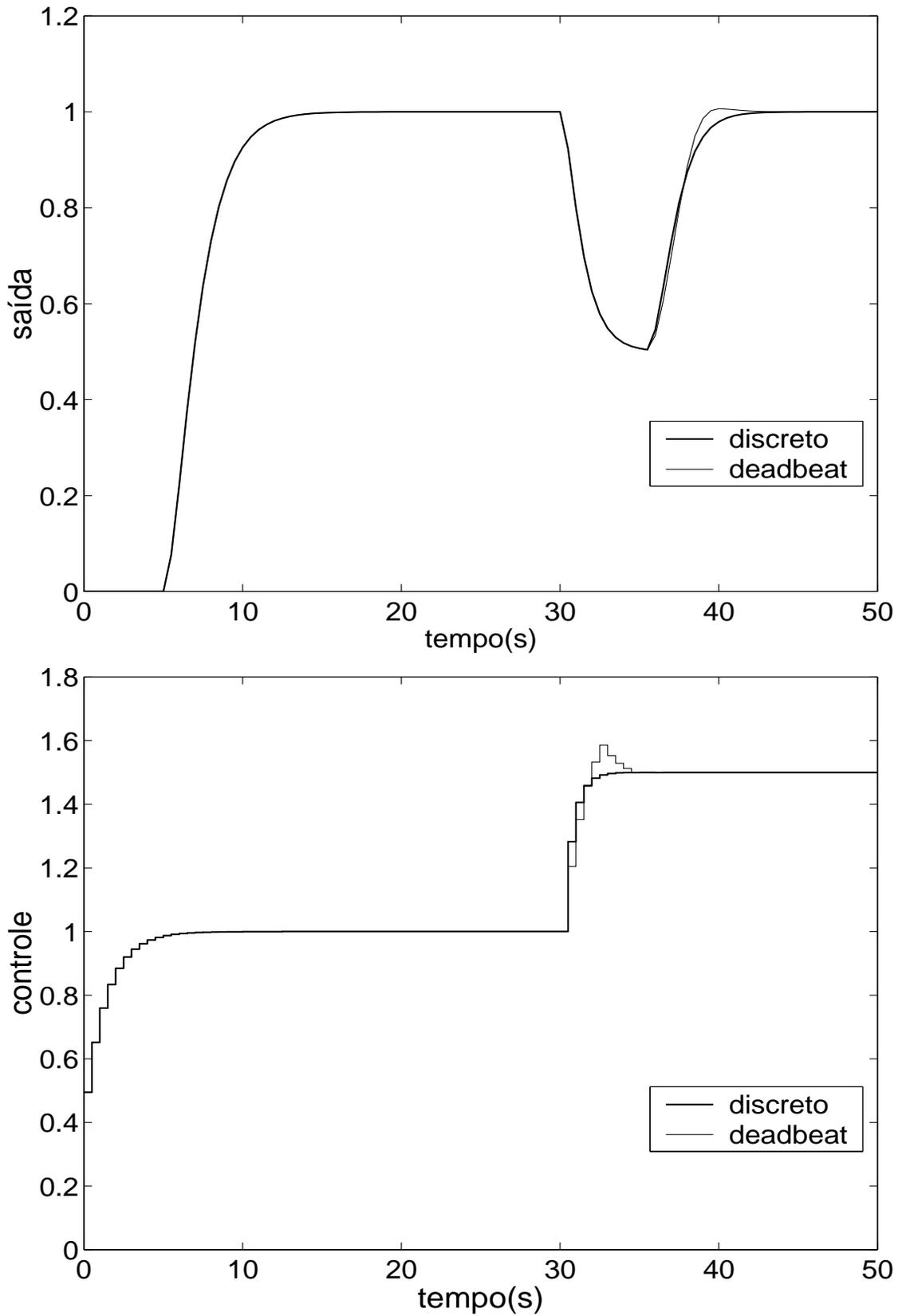


Figura 3.5: Resposta e controle para controladores discretos

	$E_{IQ}$ ao seguimento de referência	$E_{IQ}$ à rejeição de perturbação
<i>Discreto</i>	6.42	1.15
<i>Discreto deadbeat</i>	6.42	1.17

Tabela 3.1: Erro integral quadrático.

iguais ao seguimento de referência. O comportamento para a rejeição de perturbações é muito semelhante, embora pode ser verificado que com o controlador *deadbeat*, a dinâmica dominante da planta foi eliminada da resposta da saída.

### 3.7 Conclusões

Os DTC2DOF discretos estudados neste capítulo, tratam de forma apropriada o controle de plantas com atraso dominante. As respostas do seguimento de referência e a rejeição de perturbações são desacopladas, facilitando o ajuste do controle para a rejeição de perturbações de ordem arbitrária, principalmente quando as plantas são integradoras. O filtro  $V(z)$  que é representado por uma função de transferência passa baixa, sendo este um parâmetro importante, pois define o compromisso entre a resposta às perturbações e a robustez do sistema. Quando o tempo de rejeição da perturbação é uma especificação, o ajuste *deadbeat* é o mais adequado, eliminando a dinâmica lenta da planta e conduzindo a resposta à convergência num número finito de amostras. O ajuste *deadbeat* é complexo quando o modelo da planta é de ordem elevada, conseqüentemente a planta deve ser representada por um modelo simples (primeira ordem) para o projeto do filtro  $V(z)$ . Esta redução da ordem do filtro deve ser considerada especificamente para o projeto do filtro, mantendo o modelo original para o restante do projeto de controle, permitindo desta forma que a resposta ao seguimento de referência não seja distorcida pela redução do modelo. As incertezas introduzidas pela redução do modelo no projeto do filtro  $V(z)$  fazem que a resposta não seja exatamente *deadbeat*, mas compensa a dinâmica dominante da planta num tempo finito.

## Capítulo 4

# Discretização de compensadores de tempo morto de dois graus de liberdade

A representação mais realista da dinâmica dos processos pode ser descrita por sistemas no domínio do tempo contínuo, o que tem motivado que a maioria dos compensadores de tempo morto, sejam resolvidos no domínio contínuo, sem se preocupar com aspectos práticos da implementação digital. Desta forma, nas aplicações em tempo real, é necessário desenvolver metodologias de discretização que permitam manter as características da lei de controle original. Para que este objetivo seja alcançado, diversos autores propuseram métodos de aproximação. Entre os mais conhecidos na prática, tem-se os métodos de Euler (em avanço e em atraso) e o método de aproximação trapezoidal (denominado também método de aproximação bilinear ou de Tustin). Estes métodos podem ser utilizados satisfatoriamente quando o período de amostragem é suficientemente pequeno com relação ao tempo equivalente do processo, mas em algumas situações, quando não é possível obter períodos de amostragem muito pequenos, o sistema pode tornar-se instável. Para a resolução deste problema, Guo et al. (2000) propuseram um método de discretização que utiliza uma interpolação de Newton, para aproximar a lei de controle discreta à contínua. O método desenvolvido obtém resultados satisfatórios com processos estáveis e atraso não dominante, mas não permite a rejeição de perturbações quando a planta é integradora. Como contribuição a esta pesquisa de mestrado em Torrico e Normey-Rico (2002), este problema foi solucionado, quando o modelo da planta é de primeira ordem com atraso e integradora. Este trabalho trata casos de atrasos dominantes

e não dominantes e utiliza um ajuste robusto.

Neste capítulo propõe-se uma inovação com relação ao algoritmo de Guo e co-autores, utilizando um observador de perturbações apresentado recentemente por Zhong e Normey-Rico (2002), o qual permite resolver o problema de atrasos dominantes e rejeição de perturbações para plantas estáveis e integradoras de ordem arbitrária. O controle ajusta-se de acordo a com um compromisso entre a resposta a perturbação e a robustez.

Este capítulo tem a seguinte seqüência: A Seção 4.1 apresenta os métodos clássicos de discretização. A Seção 4.2 apresenta a aplicação do método de discretização de Guo para compensadores de tempo morto. A Seção 4.3 apresenta os resultados de simulação que ilustram comparações entre os métodos de discretização apresentados. Finalmente a Seção 4.4 apresenta as conclusões do capítulo.

## 4.1 Métodos clássicos de discretização

O problema da aproximação de um controlador analógico a um controlador digital está no fato de como converter a função de transferência analógica em uma equação diferencial e então obter aproximação numérica da solução da equação diferencial. Existem basicamente dois métodos para a aproximação das soluções das equações diferenciais, o primeiro consiste numa integração numérica e o segundo numa diferenciação numérica. O primeiro método que será utilizado uma vez que este atende ao objetivo, o qual consiste em dividir o intervalo de integração em muitos sub-intervalos  $T$ , também denominado período de amostragem.

Considera-se a função

$$C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{1}{s}, \quad (4.1)$$

a correspondente equação diferencial de (4.1) é:

$$\frac{du}{dt} = e(t), \quad (4.2)$$

integrando ambos termos de  $t_0$  a  $t$  obtém-se:

$$u(t) = u(t_0) + \int_{t_0}^t e(t)dt, \quad t \geq t_0 \tag{4.3}$$

Para pontos periodicamente amostrados tem-se  $t = kT$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, n$ . Durante o intervalo entre duas amostras tem-se  $t_0 = kT$  e  $t = kT + T$ , então (4.1) pode ser escrito como:

$$u(kT + T) = u(kT) + \int_{kT}^{kT+T} e(t)dt. \tag{4.4}$$

A solução de 4.4 será aproximada através de três métodos clássicos de aproximação que são apresentados a seguir.

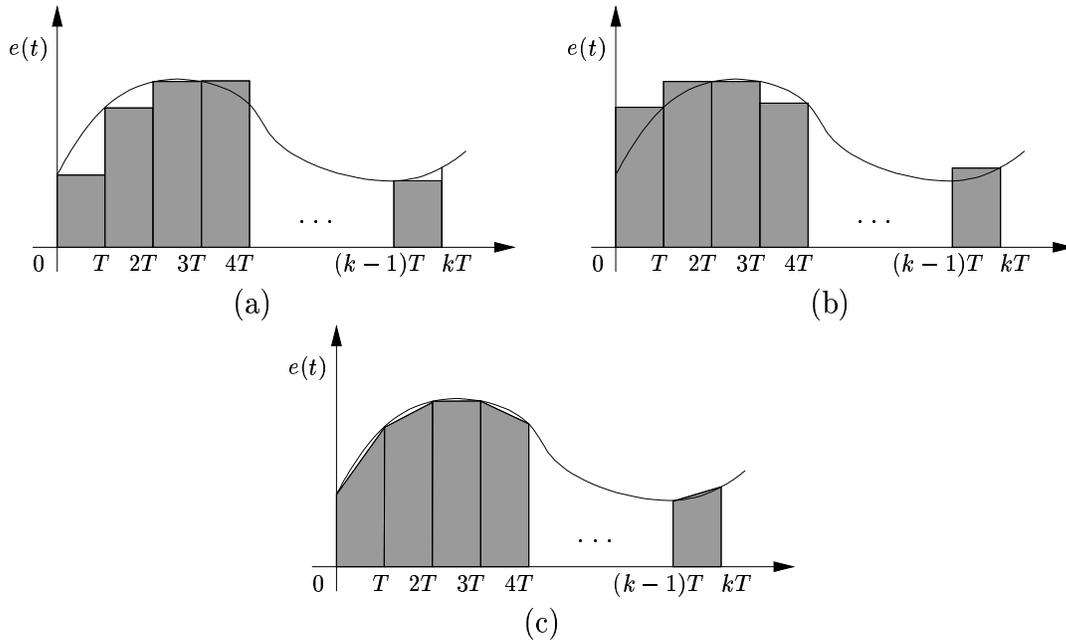


Figura 4.1: Métodos de aproximação integral (a) aproximação de Euler em avanço (b) aproximação de Euler em atraso (c) aproximação trapezoidal, bilinear ou de Tustin

### 4.1.1 Método de Euler (em avanço)

Este método de aproximação considera o sinal de entrada  $e(t)$  amostrado em  $KT$  constante no intervalo  $[kT; kT + T]$ , isto é:

$$e(t) = e(kT) \quad \forall kT \leq t < kT + T, \quad (4.5)$$

em forma gráfica esta aproximação é representada na Figura 4.1(a). Com esta aproximação a equação (4.4) resulta em:

$$\hat{u}(kT + T) = \hat{u}(kT) + Te(kT), \quad (4.6)$$

aplicando a transformada  $Z$  em ambos termos da equação (4.6) obtém-se:

$$z\hat{U}(z) - \hat{U}(z) = TE(z), \quad (4.7)$$

conseqüentemente:

$$F(z) = \frac{\hat{U}(z)}{E(z)} = \frac{T}{z - 1}. \quad (4.8)$$

Comparando as funções de transferência de (4.1) e (4.8) determina-se  $s = \frac{z-1}{T}$  de tal forma que ambas funções sejam equivalentes. Generalizando esta propriedade obtém-se:

$$F(z) = C(s)|_{s=\frac{z-1}{T}}. \quad (4.9)$$

### 4.1.2 Método de Euler (em atraso)

Este método de aproximação, considera o sinal da entrada  $e(t)$  constante no intervalo  $[kT; kT + T]$ , amostrada em  $kT + T$ , isto é:

$$e(t) = e(kT + T) \quad \forall kT < t \leq kT + T, \quad (4.10)$$

substituindo a equação (4.10) em (4.4) obtém-se:

$$\hat{u}(kT + T) = \hat{u}(kT) + Te(kT + T), \quad (4.11)$$

aplicando a transformada  $Z$  na equação (4.11), obtém-se:

$$F(z) = \frac{\hat{U}(z)}{E(z)} = \frac{Tz}{z-1}. \quad (4.12)$$

Comparando a equação (4.12) com (4.1) mostra-se que a função discreta equivalente à função analógica é obtida substituindo  $s = \frac{z-1}{Tz}$  em  $C(s)$ . De forma geral isso é expressado como:

$$F(z) = C(s)|_{s=\frac{z-1}{Tz}}. \quad (4.13)$$

### 4.1.3 Método trapezoidal (bilinear ou de Tustin)

O método de discretização de Euler em avanço ou em atraso é também denominado retangular, porque durante o intervalo de amostragem é aproximado por um retângulo. Estes métodos são denominados de primeira ordem porque utilizam uma amostra durante o intervalo entre amostras.

O desempenho do controlador digital pode ser melhorado em relação aos métodos de aproximação de Euler, incluindo-se mais uma amostra no procedimento de aproximação do controlador analógico, aproximando-se assim o sinal de controle por um trapezóide, tal como ilustrado na Figura 4.1(c), isto é:

$$e(t) = \frac{1}{2}[e(kT) + e(kT + T)] \quad \forall kT \leq t < kT + T \quad (4.14)$$

substituindo a equação (4.14) em (4.4) obtém-se:

$$\hat{u}(kT + T) = \hat{u}(kT) + \frac{T}{2}[e(kT) + e(kT + T)]. \quad (4.15)$$

A função de transferência da equação (4.15) é:

$$F(z) = \frac{\hat{U}(z)}{E(z)} = \frac{T}{2} \frac{z+1}{z-1}. \quad (4.16)$$

Comparando as equações (4.16) e (4.1) pode-se demonstrar que o controlador digital pode ser obtido substituindo  $s$  por  $\frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}$  em  $C(s)$ . De forma geral expressa-se como:

$$F(z) = C(s)|_{s=\frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}} \tag{4.17}$$

Este método é o mais utilizado em relação aos outros dois anteriormente mencionados devido à simplicidade e melhor desempenho.

## 4.2 Método de Guo

Nesta seção estuda-se a aplicação da discretização do método de Guo a estruturas de dois graus de liberdade para plantas com atraso dominante. Para isso são utilizadas duas estruturas de controle, uma para plantas estáveis com atraso e outra para plantas integradoras com atraso (Figuras 4.2(a), e 4.2(b)).

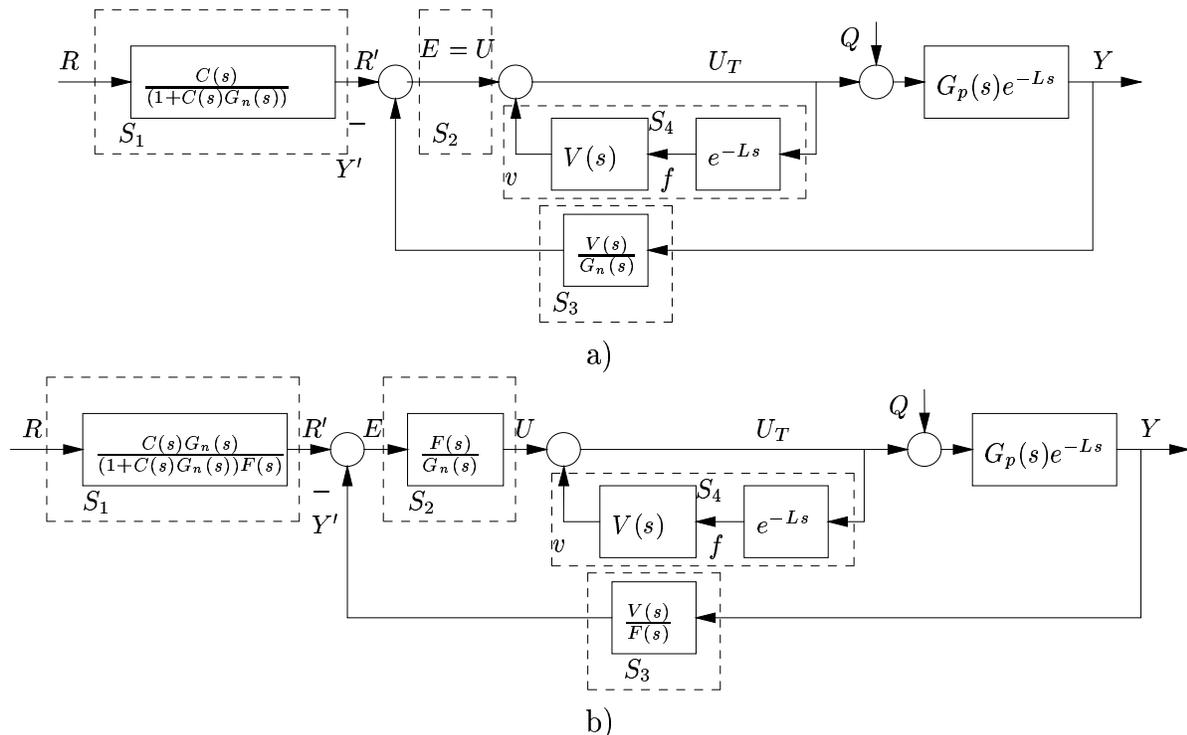


Figura 4.2: Esquema de controle por observador de perturbações (a) para plantas estáveis e (b) para plantas integradoras.

Nota-se que as relações entrada saída para ambos esquemas (Figuras. 4.2(a), e 4.2(b))

são iguais. No caso nominal  $P(s) = P_n(s)$ , então obtém-se:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = P_n(s) \frac{C(s)}{1 + C(s)G_n(s)}, \quad \frac{Y(s)}{Q(s)} = P_n(s)(1 - V(s)e^{-Ls}). \quad (4.18)$$

A análise de discretização é dividida em dois casos, no primeiro são discretizados os blocos  $S_1, S_2$  e  $S_3$  e no segundo o bloco  $S_4$  (ver Figura 4.2). Esta divisão permite simplificar os cálculos, porque o bloco  $S_4$  contém um atraso  $L$  na entrada e deve ser tratado separadamente.

### 4.2.1 Discretização de $S_1, S_2$ e $S_3$

Inicialmente as funções de transferência dos blocos  $S_1, S_2$  e  $S_3$  são levados à representação de espaço de estados.

$$S_1 \begin{cases} \dot{x}_A(t) = A_A x_A(t) + B_A r(t), & x_A(t) \in \mathfrak{R}^{n_A}, r(t) \in \mathfrak{R}^{m_A}, & (A_A, B_A) \text{ controlável} \\ r'(t) = C_A x_A(t) + D_A r, & r'(t) \in \mathfrak{R}^{p_A}, & (C_A, A_A) \text{ observável} \end{cases} \quad (4.19)$$

$$S_2 \begin{cases} \dot{x}_B(t) = A_B x_B(t) + B_B e(t), & x_B(t) \in \mathfrak{R}^{n_B}, e(t) \in \mathfrak{R}^{m_B}, & (A_B, B_B) \text{ controlável} \\ u(t) = C_B x_B(t) + D_B e(t), & u(t) \in \mathfrak{R}^{p_B}, & (C_B, A_B) \text{ observável} \end{cases} \quad (4.20)$$

$$S_3 \begin{cases} \dot{x}_C(t) = A_C x_C(t) + B_C y(t), & x_C(t) \in \mathfrak{R}^{n_C}, y(t) \in \mathfrak{R}^{m_C}, & (A_C, B_C) \text{ controlável} \\ y'(t) = C_C x_C(t) + D_C y(t), & y'(t) \in \mathfrak{R}^{p_C}, & (C_C, A_C) \text{ observável} \end{cases} \quad (4.21)$$

onde  $e(t) = r'(t) - y'(t)$ . O sistema composto pelos três subsistemas  $S_1, S_2$  e  $S_3$  é representado como:

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \dot{x}_A \\ \dot{x}_B \\ \dot{x}_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_A & 0 & 0 \\ B_B C_A & A_B & -B_B C_C \\ 0 & 0 & A_C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \\ x_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_A \\ B_B D_A \\ 0 \end{bmatrix} r + \begin{bmatrix} 0 \\ -B_A D_C \\ B_C \end{bmatrix} y \\ u = \begin{bmatrix} D_B C_A & 1 & -D_B C_C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \\ x_C \end{bmatrix} + D_B D_A r - D_B D_C y \end{array} \right. \quad (4.22)$$

Sendo equivalente a:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_1 r(t) + B_2 y(t) \\ u(t) = Cx(t) + D_1 r(t) + D_2 y(t) \end{cases} \quad (4.23)$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} A_A & 0 & 0 \\ B_B C_A & A_B & -B_B C_C \\ 0 & 0 & A_C \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} B_A \\ B_B D_A \\ 0 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -B_A D_C \\ B_C \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} D_B C_A & 1 & -D_B C_C \end{bmatrix}, D_1 = D_B D_A, D_2 = -D_B D_C.$$

O cálculo da lei de controle discreta, está baseado na metodologia proposta por Guo et al. (2000), onde demonstra-se que o controle discreto

$$u_d(kT) = \frac{1}{T} \int_{kT}^{kT+T} u(t) dt, \quad (4.24)$$

mantém as mesmas características de resposta do controle contínuo  $u(t)$ . O controle contínuo depende da referência e da saída da planta, portanto no intervalo  $[kT, kT + T]$ , a referência é aproximada por uma constante  $r(kT)$  e a saída é aproximada pela extrapolação de Newton, como:

$$\begin{aligned}
y(t) &= y(kT + \alpha T) = \left(1 + \frac{3}{2}\alpha + \frac{1}{2}\alpha^2\right) y(kT) \\
&\quad - (2\alpha + \alpha^2) y(kT - T) + \left(\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\alpha^2\right) y(kT - 2T), \quad (4.25)
\end{aligned}$$

onde  $0 \leq \alpha < 1$ .

Com estas considerações da referência e da saída do sistema, o controle no domínio contínuo  $u(t)$  pode ser representado no intervalo  $[kT, kT + T]$ , a partir do sistema de equações (4.23). Substituindo a entrada  $u(t)$  na equação (4.24) e calculando a integral, obtém-se o sistema de controle discreto, que representado em variáveis de estado é:

$$\begin{cases} x(kT + T) = e^{AT}x(kT) + M_0 B_1 r(kT) + M_A y(kT) + M_B y(kT - T) + M_C y(kT - 2T) \\ u(kT) = N_2 x(kT) + N_1 r(kT) + N_3 y(kT) + N_4 y(kT - T) + N_5 y(kT - 2T) \end{cases} \quad (4.26)$$

onde,

$$N_1 = C B_1 M_1 + D_1 \quad (4.27)$$

$$N_2 = \frac{C M_0}{T} \quad (4.28)$$

$$N_3 = C \left( M_1 + \frac{3}{2} M_2 + \frac{1}{2} M_3 \right) B_2 + \frac{23}{12} D_2 \quad (4.29)$$

$$N_4 = -C(2M_2 + M_3)B_2 - \frac{4}{3}D_2 \quad (4.30)$$

$$N_5 = \frac{1}{2}(M_2 + M_3)B_2 + \frac{5}{12}D_2 \quad (4.31)$$

$$M_A = B_2(M_0 + \frac{3}{2}M_1 + M_2) \quad (4.32)$$

$$M_B = B_2(-2(M_1 + M_2)) \quad (4.33)$$

$$M_C = B_2(\frac{1}{2}M_1 + M_2) \quad (4.34)$$

$$M_0 = (e^{AT} - I)A^{-1} \quad (4.35)$$

$$M_1 = (M_0 - T)(AT)^{-1} \quad (4.36)$$

$$M_2 = (M_1 - \frac{1}{2}T)(AT)^{-1} \quad (4.37)$$

$$M_3 = (2M_2 - \frac{1}{3}T)(AT)^{-1}. \quad (4.38)$$

### 4.2.2 Discretização do bloco $S_4$

A entrada da planta está dividida em duas partes,  $u$  que foi calculada na seção anterior e  $v$  que é a saída do filtro. A representação por variáveis de estado do filtro é dado pelo seguinte sistema:

$$S_V \begin{cases} \dot{x}_V(t) = A_V x_V(t) + B_V f(t), & x_V \in \mathfrak{R}^{n_V}, f \in \mathfrak{R}^{m_V}, (A_V, B_V) \text{ controlável} \\ v(t) = C_V x_V(t), & v \in \mathfrak{R}^{p_V}, (C_V, A_V) \text{ observável} \end{cases}, \quad (4.39)$$

Para o cálculo do filtro discreto é considerado a entrada  $f$  constante no intervalo  $[kT, kT + T]$ . A saída discreta é calculada resolvendo a integral  $v(kT) = \frac{1}{T} \int_{kT}^{kT+T} v(t) dt$ .

A representação de estados discreta da solução, representada em variáveis de estado resulta:

$$S_4 \begin{cases} x(kT + T) = e^{A_V T} x(kT) + M_{V_0} B_V f(kT) \\ v(kT) = \frac{C_V M_{V_0}}{T} x(kT) + M_{V_1} B_V f(kT) \end{cases}, \quad (4.40)$$

onde  $M_{V_0} = (e^{A_V T} - I) A_V^{-1}$ ,  $M_{V_1} = (M_{V_0} - T)(A_V T)^{-1}$  e  $f(kT) = u_T(kT - dT)$ .

## 4.3 Exemplo

Para ilustrar os resultados da aplicação do compensador de tempo morto discretizado através de métodos apresentados nesta seção, analisa-se o mesmo sistema estável com atraso dominante representado no capítulo 3 por uma função de transferência de segunda ordem,

$$P(s) = \frac{1}{(s + 1)(0.5s + 1)} e^{-5s}. \quad (4.41)$$

Neste exemplo considera-se apenas o caso de modelo perfeito  $P_n = P$ . A estrutura de controle utilizada é um DTC com observador de perturbações como o ilustrado na Figura 4.2(a). Deseja-se que o sistema de controle satisfaça duas especificações. A primeira consiste em que o tempo de subida em malha fechada seja similar ao de malha aberta e o sistema não apresente sobre-sinais. A segunda condição é que o sistema mantenha

estabilidade robusta para variações do atraso de  $\pm 10\%$ . A primeira especificação deve ser satisfeita através do ajuste do controle primário  $C(s)$ , o qual deve controlar a  $G_n(s)$ , para isso propõe-se  $C(s)$  como um  $PI$ , isto é:

$$C(s) = k \left( 1 + \frac{1}{t_i s} \right), \quad (4.42)$$

sintonizando  $C(s)$  através do método lugar das raízes obtém-se  $t_i = 1$  e  $k = 0.4$ . A segunda especificação deve ser satisfeita através do ajuste do filtro  $V(s)$ , que para um modelo de segunda ordem é proposto como:

$$V(s) = \frac{1}{(\lambda s + 1)^2} \quad (4.43)$$

onde  $\lambda = 0.1$  está ajustado para satisfazer a condição de estabilidade robusta estabelecida para variações do atraso de  $\pm 10\%$ .

Para poder implementar o sistema de controle no domínio digital, o sistema de controle contínuo deve ser discretizado mantendo suas características. O período de amostragem é definido igual a  $T = 0.5s$  (um estudo detalhado da escolha de  $T$  será visto no Capítulo 5).

Para efeitos de comparação o controle é digitalizado por vários métodos, inicialmente pelos métodos clássicos (métodos Tustin, Euler em avanço e Euler em atraso) e posteriormente pelo método de discretização de Guo.

A discretização através de métodos clássicos obtém-se aplicando as seguintes aproximações:

$$\begin{aligned} s &= \frac{2z-1}{Tz+1} && \text{para o método de Tustin,} \\ s &= \frac{z-1}{T} && \text{para o método de Euler em avanço,} \\ s &= \frac{z-1}{Tz} && \text{para o método de Euler em atraso.} \end{aligned}$$

A discretização pelo método de Guo é calculada em duas partes, primeiramente o sinal  $u(kT)$  através da lei de Controle,

$$\begin{cases} x(kT + T) = e^{AT}x(kT) + M_0B_1r(kT) + M_Ay(kT) + M_By(kT - T) + M_Cy(kT - 2T) \\ u(kT) = N_2x(kT) + N_1r(kT) + N_3y(kT) + N_4y(kT - T) + N_5y(kT - 2T) \end{cases} \quad (4.44)$$

onde

$$e^{AT} = \begin{bmatrix} 0.09 & -0.35 & -0.09 & 0 & 0 \\ 0.46 & 0.78 & -0.06 & 0 & 0 \\ 0.15 & 0.46 & 0.99 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.37 \\ 0 & 0 & 0 & 0.37 & 0.74 \end{bmatrix}, M_0 = \begin{bmatrix} 0.23 & -0.11 & -0.03 & 0 & 0 \\ 0.15 & 0.46 & -0.01 & 0 & 0 \\ 0.03 & 0.12 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.18 & -0.1321 \\ 0 & 0 & 0 & 0.13 & 0.4482 \end{bmatrix},$$

$$M_A = \begin{bmatrix} 0.52 & -0.19 & -0.05 & 0 & 0 \\ 0.25 & 0.9 & -0.02 & 0 & 0 \\ 0.04 & 0.19 & 0.96 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.43 & -0.22 \\ 0 & 0 & 0 & 0.22 & 0.88 \end{bmatrix}, M_B = \begin{bmatrix} -0.42 & 0.11 & 0.03 & 0 & 0 \\ -0.15 & -0.64 & 0.01 & 0 & 0 \\ -0.02 & -0.10 & -0.67 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.37 & 0.13 \\ 0 & 0 & 0 & -0.13 & -0.63 \end{bmatrix},$$

$$M_C = \begin{bmatrix} 0.13 & -0.03 & -0.01 & 0 & 0 \\ 0.04 & 0.20 & 0 & 0 & 0 \\ 0.01 & 0.03 & 0.21 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.12 & -0.04 \\ 0 & 0 & 0 & 0.04 & 0.20 \end{bmatrix},$$

$$N_1 = 0.49; \quad N_2 = [0.33 \quad 0.37 \quad 0.20 \quad 0.63 \quad 0.63]; \quad N_3 = -3.23; \quad N_4 = 2.33; \quad N_5 = -0.73.$$

Logo calcula-se o sinal  $v(kT)$  com a lei de controle,

$$\begin{cases} x(kT + T) = e^{AvT}x(kT) + M_{V0}B_V f(kT) \\ v(kT) = \frac{C_V M_{V0}}{T}x(kT) + M_{V1}B_V f(kT) \end{cases}, \quad (4.45)$$

$$\text{onde } e^{AvT} = \begin{bmatrix} 0 & -0.18 \\ 0.74 & 0.74 \end{bmatrix}, M_{V0} = \begin{bmatrix} 0.18 & -0.07 \\ 0.26 & 0.45 \end{bmatrix}, M_{V1} = \begin{bmatrix} 0.13 & -0.03 \\ 0.10 & 0.24 \end{bmatrix},$$

$$C_V = [0 \quad 1], \quad B_V = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

O sinal total de controle está composta pela soma  $u_T(kT) = u(kT) + v(kT)$ .

Para efeitos de simulação, considera-se que a referência inicialmente em repouso varia de 0 a 1 em  $t = 0s$  e em  $t = 25s$  aplica-se uma perturbação constante  $q = 0.5$  na entrada da planta.

As respostas das simulações são ilustradas na Figura 4.3 e os resultados de comportamento na tabela 4.1. Observa-se que a saída da planta aplicando o controle discretizado

	$E_{IQ}$ ao seguimento de referência	$E_{IQ}$ à rejeição de perturbação
<i>Continuo</i>	6.50	1.176
<i>Guo</i>	6.495	1.175
<i>Tustin</i>	6.486	1.232
<i>Euler Avanco</i>	6.552	1.222
<i>Euler Atraso</i>	6.438	1.245

Tabela 4.1: Erro integral quadrático.

pelo método de Guo, é bastante aproximada à saída da planta quando aplica-se um controle contínuo. Com relação aos resultados obtidos aplicando métodos clássicos de discretização, verifica-se que estes apresentam respostas transitórias oscilatórias na saída e no controle com sobre-sinais de aproximadamente 7% e maior erro integral quadrático ao seguimento de referência e à rejeição de perturbação. Portanto torna-se necessário a escolha de períodos de amostragem menores para diminuir os erros de aproximação e poder aplicar estes métodos.

## 4.4 Conclusões

A aplicação do método de Guo (Guo et al. 2000) na discretização de controladores de dois graus de liberdade, para plantas com grandes atrasos, permite manter as características de controle contínuo com a escolha apropriada do período de amostragem. Os resultados de simulação mostram claramente que a resposta do sistema, aplicando o controlador digitalizado através do método de Guo, aproxima-se à resposta do sistema quando é aplicado um controlador contínuo. Com relação aos controladores discretizados através dos métodos clássicos (Euler, Tustin), percebe-se que estes apresentam respostas com oscilações e sobre-sinal elevado em regime transitório, tornando-se necessário a escolha de um período de amostragem menor, significando mais custo em termos de implementação.

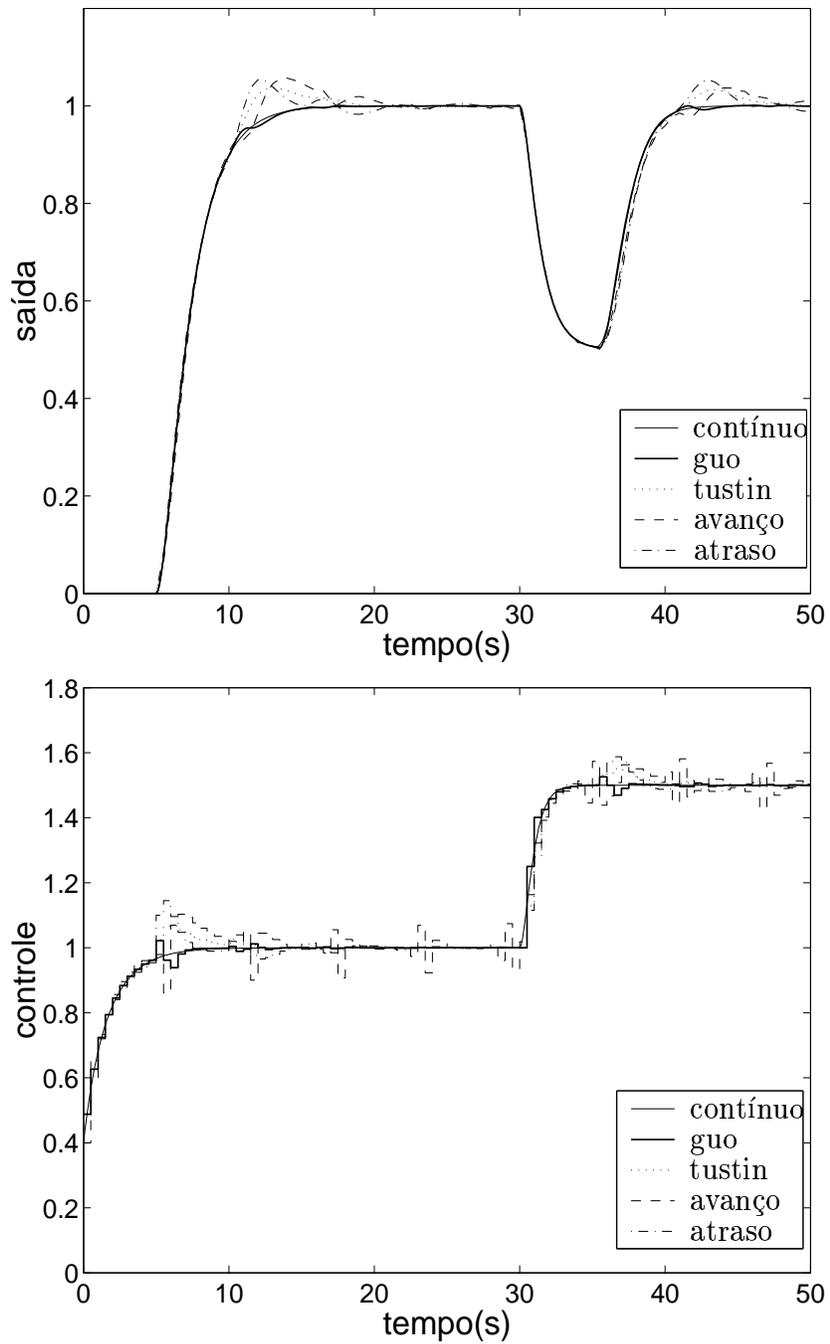


Figura 4.3: Resposta e controle para controladores discretizados

# Capítulo 5

## Uma metodologia para a escolha do período de amostragem

O objetivo em sistemas de controle é manter a saída de uma planta o mais perto possível da referência, apesar da ação de perturbações e incertezas e que o sistema transite de um ponto de operação a outro com a forma de onda desejada. Um aspecto fundamental no projeto do controle é a estabilidade. A estabilidade em malha fechada é um absoluto requisito, porque a falta de estabilidade pode causar severos danos, podendo eventualmente destruir a planta. Na engenharia de sistemas, é de fundamental importância que o sistema de controle seja projetado para operar dentro das regiões de estabilidade em malha fechada na presença de incertezas.

Em sistemas discretos ou discretizados, o índice de robustez não depende simplesmente de alguns parâmetros de ajuste, mas também existe uma dependência adicional com a escolha do período de amostragem  $T$ , que possui um efeito adverso sobre o índice de robustez. Uma alternativa em relação à escolha de  $T$  é que este seja suficientemente pequeno frente à dinâmica do processo considerado, para não afetar significativamente a resposta do sistema, nem ao índice de robustez. Essa escolha implica em um custo elevado em termos de cálculo, existindo desta forma um compromisso entre o custo de cálculo e a robustez do sistema. Sendo assim, o período de amostragem  $T$  deve ser escolhido o maior possível, de forma tal que não modifique substancialmente a estabilidade robusta e o comportamento do sistema.

Este capítulo está dedicado ao estudo do efeito de  $T$  no comportamento e a robustez do sistema e propõe um método original para sua escolha, garantindo um compromisso

entre a robustez e o comportamento do sistema.

A apresentação deste capítulo tem a seguinte seqüência: A Seção 5.1 apresenta a análise da robustez e da estabilidade robusta para sistemas com grandes atrasos. A Seção 5.2 analisa o efeito da escolha do período de amostragem sobre a robustez. A Seção 5.3 analisa o efeito da escolha do período de amostragem sobre o comportamento do sistema. A Seção 5.4 apresenta uma nova metodologia da escolha do período de amostragem. A Seção 5.5 apresenta exemplos de simulação. Finalmente, a Seção 5.6 apresenta as conclusões do capítulo.

## 5.1 Robustez e estabilidade robusta

As plantas reais geralmente apresentam uma dinâmica não linear. Nos sistemas de controle, estas plantas devem ser representadas através de modelos simples, com o objetivo de projetar um controlador simples que satisfaça as condições de comportamento preestabelecidas. O modelo simplificado do sistema geralmente é obtido através da linearização em um ponto de operação, sendo este preciso somente nas vizinhanças daquele ponto, onde são ignoradas as não linearidades. Em processos com grandes atrasos de transporte, também aparecem incertezas devido a variações no atraso e aos erros na estimação do mesmo, que devem ser consideradas no projeto do controlador.

O erro de modelagem pode ser definido como a diferença entre a planta e o modelo, isto é:

$$\Delta P(z) = P(z) - P_n(z). \quad (5.1)$$

Considerando que a planta e o modelo podem ser representados por uma função de transferência seguida de um atraso, obtém-se:

$$P(z) = G_p(z)z^{-d_p}, \quad P_n(z) = G_n(z)z^{-d}, \quad (5.2)$$

onde  $d_p$  é o atraso da planta e  $d$  é o atraso do modelo, ambos no domínio discreto.

Substituindo as equações de (5.2) na equação (5.1) obtém-se o erro de modelagem como:

$$\Delta P(z) = P_n(z) \left( \frac{G_p(z)}{G_n(z)} z^{-\delta_d} - 1 \right), \quad (5.3)$$

onde  $\delta_d = d_p - d$ .

Neste caso, para a análise da estabilidade e da robustez de processos com atraso de transporte dominante, considera-se somente o erro no atraso. Como estudado em Normey-Rico e Camacho (1999), o erro no atraso é o fator mais importante no estudo de robustez deste tipo de processo. Assim se  $G_n(z) = G_p(z)$  e  $\delta_d > 0$ , o erro de modelagem (5.3) pode ser representado por:

$$\Delta P(z) = P_n(z) (z^{-\delta_d} - 1). \quad (5.4)$$

onde  $P_n(z)$  é o modelo nominal da planta e  $\delta_d$  é o erro máximo do atraso.

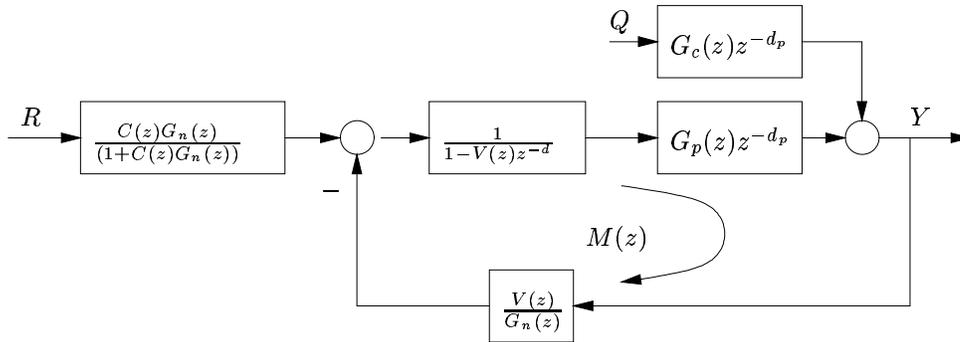


Figura 5.1: Sistema de controle discreto para plantas estáveis com atraso.

Por outro lado, definindo-se  $M(z)$  como a função de transferência de malha direta do sistema de controle com compensação do atraso (ver Figura 5.1), obtém-se:

$$M(z) = \frac{V(z)}{G_n(z)(1 - V(z)z^{-d})} G_p(z)z^{-d_p} = X(z)G_p(z)z^{-d_p}, \quad (5.5)$$

onde  $X(z) = \frac{V(z)}{G_n(z)(1 - V(z)z^{-d})}$ .

O índice de robustez, que pode ser interpretada como a capacidade de manter a estabilidade do sistema na presença de incertezas no mesmo, pode ser calculado como em Morari e Zafiriou (1989), isto é:

$$I_R(w) = \frac{|1 + X(e^{jw})P(e^{jw})|}{|X(e^{jw})|} \quad \forall w \in [0, \pi/T]. \quad (5.6)$$

Substituindo  $X(z)$  na equação (5.6) o índice de robustez pode ser descrito como:

$$I_R(w) = \frac{|G_n(e^{jw})(1 - V(e^{jw})e^{-dTjw}) + V(e^{jw})P(e^{jw})|}{|V(e^{jw})|}. \quad (5.7)$$

Como inicialmente foi assumido que  $G_n(z) = G_p(z)$  então o índice de robustez  $I_R(w)$  reduz-se a:

$$I_R(w) = \frac{|G_n(e^{jw})|}{|V(e^{jw})|}. \quad (5.8)$$

A condição de estabilidade robusta apresentada em Morari e Zafriou (1989) indica que um sistema mantém a estabilidade robusta se satisfaz a condição:

$$I_R(w) > \Delta P(w), \quad (5.9)$$

e se o sistema não satisfaz esta condição pode tornar-se instável para algum erro de modelagem  $\Delta P$ . Substituindo as equações (5.4) e (5.8) em (5.9) a condição de estabilidade robusta pode ser expressa como:

$$\frac{1}{|e^{-\delta_d T j w} - 1|} > |V(e^{jw})| \quad \forall w \in [0, \pi/T]. \quad (5.10)$$

Nota-se que o ajuste da estabilidade robusta depende somente do filtro  $V$ .

Em controladores projetados no domínio contínuo e logo discretizados, a planta  $G_p$  deve ser discretizada incluindo um sustentador de ordem zero na entrada (5.11) denominado “ Zero order holder ” (Zoh),

$$G_p(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left\{ \frac{G_p(s)}{s} \right\}. \quad (5.11)$$

O controlador pode ser discretizado através de qualquer método de aproximação, como o método de Euler, Tustin ou Guo. Como o modelo nominal da planta  $G_n$  está incluído na malha de controle, então esta também deve ser discretizada pelo mesmo método que o controlador, portanto  $G_p(z) \neq G_n(z)$ , uma vez que o método de aproximação de  $G_n(z)$  não considera o sustentador na entrada da planta. Nesse caso a condição de estabilidade robusta é dada por:

$$\frac{1}{|e^{-\delta_d T j\omega} - 1|} > |V(e^{j\omega})E(e^{j\omega})|. \quad (5.12)$$

onde

$$E(e^{j\omega}) = \frac{[P(e^{j\omega}) - P_n(e^{j\omega})]}{(e^{-\delta_d T j\omega} - 1)[G_n(e^{j\omega})(1 - V(e^{j\omega})e^{-dTj\omega}) + P(e^{j\omega})V(e^{j\omega})]}. \quad (5.13)$$

Observa-se neste caso, que o ajuste da estabilidade robusta não depende somente do ajuste do filtro  $V(z)$ , mas existe um parâmetro adicional  $E(z)$  que deve ser levado em conta e que depende do método de discretização utilizado no controlador assim como o período  $T$  escolhido.

## 5.2 Robustez e escolha do período de amostragem.

Nesta seção introduz-se um método gráfico do efeito da escolha do período de amostragem  $T$  sobre a robustez no domínio da frequência. O índice de robustez varia em função da escolha do período de amostragem  $T$ . Períodos de amostragem muito grandes levarão o sistema à instabilidade e períodos muito pequenos não melhoram significativamente a resposta nem a estabilidade robusta, porém aumentam a complexidade do controle. Neste caso o período de amostragem ótimo será o maior valor de  $T$  que mantém aproximadamente as características de estabilidade robusta de um sistema com um período de amostragem que consiga características quase equivalentes ao caso contínuo, especialmente nas frequências onde o erro de modelagem é mais importante.

Considerando que a máxima variação do atraso da planta contínua é  $\Delta L$  e lembrando que a relação com a variação do atraso da planta discretizada é:

$$\delta_d T = \Delta L, \quad (5.14)$$

a condição de estabilidade robusta pode ser reescrita como:

$$\frac{1}{|e^{-\Delta L j\omega} - 1|} > |V(e^{j\omega})|. \quad (5.15)$$

Para uma análise gráfica o filtro  $V(z)$  é representado por uma função de transferência

de primeira ordem que permite rejeitar perturbações degrau em plantas estáveis com atraso

$$V(z) = \frac{1 - e^{-\frac{T}{\lambda}}}{z - e^{-\frac{T}{\lambda}}} \quad (5.16)$$

onde  $T$  é o período de amostragem e  $\lambda$  um parâmetro livre que deve ser ajustado para satisfazer a condição de estabilidade robusta.

Normalizando a relação de estabilidade robusta obtém-se:

$$\frac{1}{|e^{-jw_n} - 1|} > \left| \frac{1 - e^{-k_n T_n}}{e^{T_n j w_n} - e^{-k_n T_n}} \right|, \quad (5.17)$$

onde  $w_n$  é a frequência normalizada,  $T_n$  é o período de amostragem normalizado e  $k_n$  é um parâmetro livre que deve ser ajustado.

A relação entre os parâmetros reais e os normalizados são

$$w_n = \Delta L w, \quad (5.18)$$

$$T_n = \frac{T}{\Delta L}, \quad (5.19)$$

$$k_n = \frac{\Delta L}{\lambda}, \quad (5.20)$$

$$\Delta L = \max_{L_p} |L_p - L| \quad (5.21)$$

onde  $L_p = d_p T$  é o atraso real e  $L = d T$  o atraso do modelo contínuo.

Na Figura 5.2 ilustra-se a resposta em frequência da estabilidade robusta normalizada para quatro períodos de amostragem ( $T_n = 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{5}$ ), com  $k_n = \frac{5}{6}$  ajustado para satisfazer a condição de estabilidade robusta. O filtro  $|V(e^{jw_n})|$  está representado pelas quatro linhas inferiores da Figura 5.2, cada uma para um período de amostragem específico. A condição de estabilidade robusta é válida no intervalo  $w_n : [0, \pi/T_n]$ . Observa-se que em baixas frequências o módulo do filtro  $|V(e^{jw_n})|$  é quase independente do período de amostragem, mas a medida que a frequência aumenta, as curvas afastam-se. Para garantir a estabilidade robusta a curva do filtro  $|V(e^{jw_n})|$  não pode ultrapassar a curva  $\frac{1}{|e^{-jw_n} - 1|}$ . Observa-se que para  $T_n = 2$  a curva  $|V(e^{jw_n})|$  corta a  $\frac{1}{|e^{-jw_n} - 1|}$ , portanto o sistema pode tornar-se instável para o erro máximo de modelagem no atraso ( $\Delta L$ ).

Uma análise superficial poderia levar a uma conclusão errônea de que para  $T_n = 1$  o sistema pode tornar-se instável muito mais facilmente que para os casos  $T_n = \frac{1}{2}, T_n = \frac{1}{5}$  uma vez que em  $w_n = \pi$  (frequência na qual a inversa do erro tem o valor mínimo) a

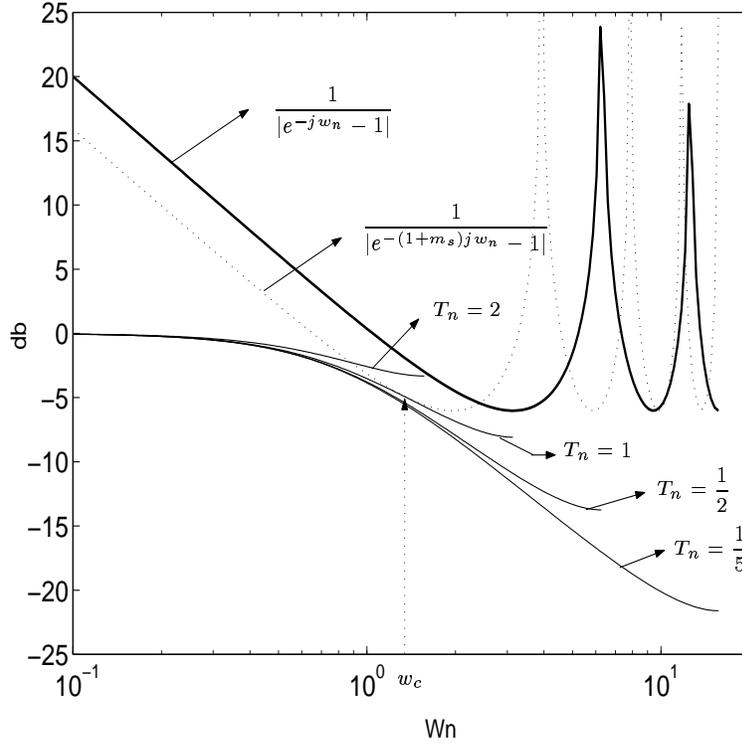


Figura 5.2: Ajuste da estabilidade robusta normalizada.

distância entre as curvas  $\frac{1}{|e^{-jw_n} - 1|}$  e  $|V(e^{jw_n})|$  é mínima.

Entretanto, considerando que o erro é devido à má estimação do atraso, a curva da inversa do erro ( $\frac{1}{|e^{-jw_n} - 1|}$ ) tende a movimentar-se no sentido das baixas frequências, portanto a condição de estabilidade robusta tende a ser insatisfeita em frequências menores a  $w_n = \pi$ . Para ilustrar este comportamento o erro do atraso máximo é incrementado  $m_s$

$$\frac{1}{|e^{-(1+m_s)jw_n} - 1|} \quad \forall w_n \in [0, \pi/T_n], \quad (5.22)$$

tal que (5.22) seja tangente a  $|V(e^{jw_n})|$  (linha pontilhada da Figura 5.2). O ponto de tangência é o ponto crítico  $w_c$  onde o sistema tende a instabilizar-se. Como nesse ponto crítico ( $w_c$ ) as características de estabilidade robusta são similares para períodos de amostragem  $T_n = 1$  ou menores, então a melhor escolha do período de amostragem é  $T_n = 1$ .

Na Figura 5.3 ilustram-se as distâncias em frequência entre  $\frac{1}{|e^{-jw_n} - 1|}$  e  $|V(e^{jw_n})|$  para  $T_n = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{5}$  (linhas contínuas) e a distância em frequência entre  $\frac{1}{|e^{-(1+m_s)jw_n} - 1|}$  e  $|V(e^{jw_n})|$  para  $T_n = 1$  (linha pontilhada).

A frequência no ponto crítico de instabilidade é  $w_c = 1.35$  (quando a linha pontilhada

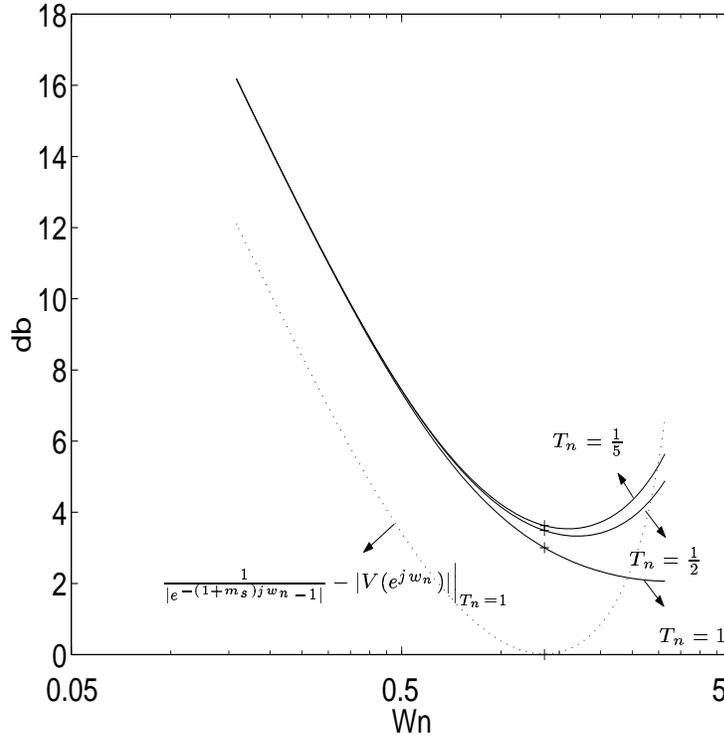


Figura 5.3: Estabilidade robusta.

da Figura 5.3 vale zero) e as distâncias entre  $\frac{1}{|e^{-jw_c} - 1|}$  e  $|V(e^{jw_c})|$  são:

$$d_1 = \frac{1}{|e^{-jw_c} - 1|} - |V(e^{jw_c})|_{T_n=1/5} = 3.6 \text{ db}$$

$$d_2 = \frac{1}{|e^{-jw_c} - 1|} - |V(e^{jw_c})|_{T_n=1/2} = 3.4 \text{ db}$$

$$d_3 = \frac{1}{|e^{-jw_c} - 1|} - |V(e^{jw_c})|_{T_n=1} = 3 \text{ db}.$$

Comparando as distâncias  $d_1$ ,  $d_2$  e  $d_3$  pode-se notar que no ponto crítico de instabilidade, a margem que garante a estabilidade robusta ( $d_1$ ,  $d_2$  e  $d_3$ ) é similar para os três períodos de amostragem ( $T_n = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{5}$ ). Portanto a escolha do período de amostragem  $T_n = 1$  pode ser considerada como a mais adequada em termos de robustez uma vez que exige menos custo de cômputo e mantém quase as mesmas características de estabilidade dos períodos de amostragem menores.

### 5.3 Escolha do período de amostragem e rejeição de perturbações

Nesta seção é analisado o erro integral quadrático ( $E_{IQ}$ ) de um sistema cuja estrutura de controle está ilustrada na Figura 5.4. Para este objetivo considera-se duas escolhas de  $T$ . A primeira o caso ideal em que  $T$  tende a zero  $T \rightarrow 0$  e a segunda quando  $0 < T \leq \Delta L$ .

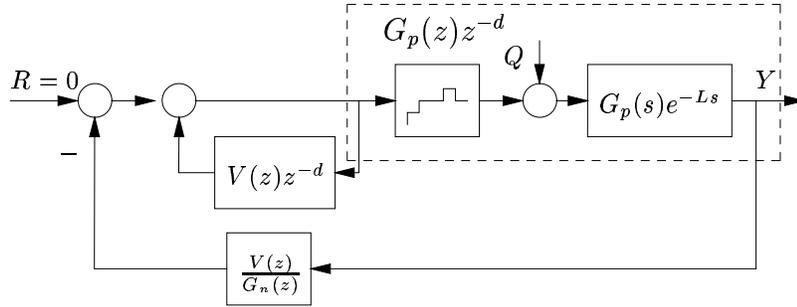


Figura 5.4: Estrutura de controle para rejeição de perturbações ( $R = 0$ ).

Para esta análise a planta é representada por uma função de transferência de primeira ordem com atraso

$$P(s) = G_p(s)e^{-Ls} = \frac{K_p}{\tau s + 1}e^{-Ls},$$

no caso discreto a planta é representada por:

$$P(z) = G_p(z)z^{-d} = \frac{K_p(1 - a_0)}{z - a_0}z^{-d}.$$

Neste estudo considera-se uma modelagem perfeita ( $P_n = P$ ), portanto a relação perturbação-saída é dada por:

$$\frac{Y(z)}{Q(z)} = P(z)(1 - V(z)z^{-d}). \quad (5.23)$$

Para que em regime permanente  $Y/Q$  seja zero o filtro  $V(z)$  é projetado como:

$$V(z) = \frac{a}{z - b} \quad (5.24)$$

onde  $a = 1 - b$ ,  $b = e^{-\frac{T}{\lambda}}$ ,  $T$  é o período de amostragem e  $\lambda$  um parâmetro de ajuste.

Na Figura 5.5 ilustra-se a variação da saída da planta, quando é aplicada uma per-

turbação tipo degrau com magnitude  $q$  em  $t = t_0$  e a referência é zero  $r(t) = 0$ . Observa-se que a saída começa a mudar somente em  $t = t_1$ , devido ao atraso  $L$  na planta. No intervalo  $[t_1, t_2]$  a dinâmica da planta é em malha aberta, embora a ação do controle começa em  $t = t_1$  o efeito sobre a saída é visto a partir de  $t = t_2$  devido ao atraso  $L$ . As relações entre as variáveis  $t_0$ ,  $t_1$  e  $t_2$  são:

$$t_1 = t_0 + L,$$

$$t_2 = t_0 + 2L.$$

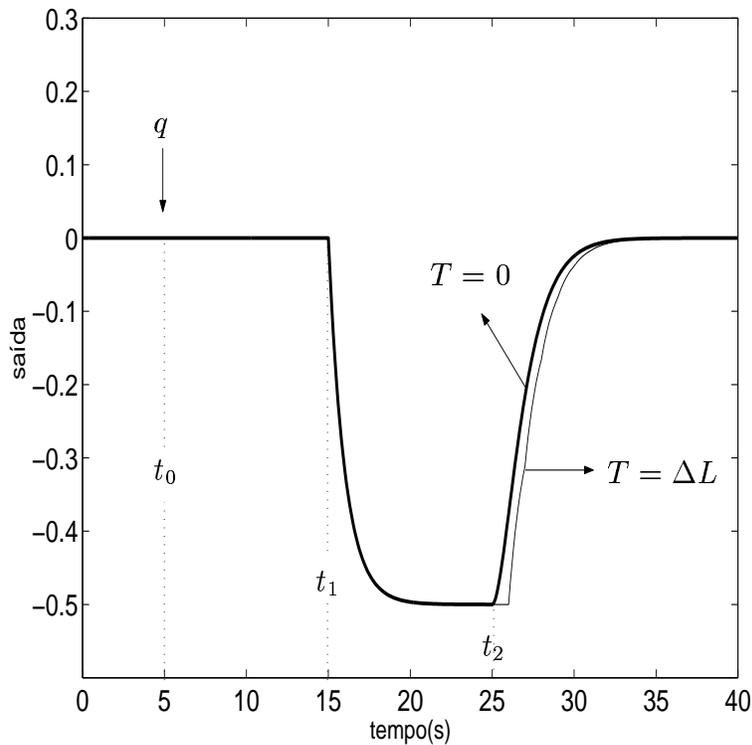


Figura 5.5: Análise do erro integral quadrático

O erro entre a referência e a saída é definido como a diferença entre os mesmos, considerando a referência zero ( $r = 0$ ) obtém-se:

$$e(t) = r(t) - y(t) = 0 - y(t) = -y(t). \quad (5.25)$$

O erro integral quadrático ( $E_{IQ}$ ) é definido formalmente por:

$$E_{IQ} = \int_0^{\infty} (e(t))^2 dt. \quad (5.26)$$

Utilizando propriedades de integrais na equação (5.26), obtém-se:

$$E_{IQ} = \int_0^{t_2} (e(t))^2 dt + \int_{t_2}^{\infty} (e(t))^2 dt. \quad (5.27)$$

O erro quadrático é dividido em dois termos, observa-se que o primeiro termo  $\int_0^{t_2} (e(t))^2 dt$  é independente da lei de controle, devido a que o efeito da lei de controle sobre a saída começará em  $t = t_2$  (Figura 5.5), entretanto o segundo termo  $\int_{t_2}^{\infty} (e(t))^2 dt$  depende da ação do controlador.

Considerando  $t_0 = 0$ , o erro integral quadrático no intervalo  $[0, t_2]$  é calculado como:

$$I_1 = \int_0^{t_2} (y(t))^2 dt \quad (5.28)$$

A função de transferência contínua da saída da planta é representado por:

$$\frac{Y}{Q} = G(s)e^{-Ls}(1 - V(s)e^{-Ls}) = \frac{K_p}{\tau s + 1}e^{-Ls}\left(1 - \frac{1}{\lambda s + 1}e^{-Ls}\right). \quad (5.29)$$

Calculando a inversa da transformada de La Place, para uma perturbação constante  $q$  obtém-se:

$$y(t) = 0 \quad \forall t : [t_0, t_1] \quad (5.30)$$

$$y(t) = K_p q \left(1 - e^{-\frac{t-t_1}{\tau}}\right) \quad \forall t : [t_1, t_2] \quad (5.31)$$

Substituindo a saída  $y(t)$  na equação (5.28) e calculando a integral obtém-se:

$$I_1 = K_p^2 q^2 \left( L + 2\tau \left( e^{-\frac{L}{\tau}} - 1 \right) - \frac{\tau}{2} \left( e^{-\frac{2L}{\tau}} - 1 \right) \right). \quad (5.32)$$

No intervalo  $[t_2, \infty]$  o erro integral quadrático quando  $T \rightarrow 0$  é calculado como:

$$I_2 = \int_{t_2}^{\infty} (y(t))^2 dt, \quad (5.33)$$

a saída da planta no intervalo  $[t_2, \infty]$  está dada por:

$$y(t) = K_p q \left\{ (1 - e^{-\frac{t-t_1}{\tau}}) - \left( 1 - \frac{\tau}{\tau - \lambda} e^{-\frac{t-t_2}{\tau}} + \frac{\lambda}{\tau - \lambda} e^{-\frac{t-t_2}{\lambda}} \right) \right\}. \quad (5.34)$$

Substituindo a saída na equação (5.33) e resolvendo a integral obtém-se:

$$I_2 = \frac{K_p^2 q^2}{(\tau - \lambda)^2} \left( (\tau - e^{-\frac{L}{\tau}}(\tau - \lambda))^2 \frac{\tau}{2} - 2(\tau - e^{-\frac{L}{\tau}}(\tau - \lambda)) \lambda^2 \frac{\tau}{\tau + \lambda} + \frac{\lambda^3}{2} \right). \quad (5.35)$$

No caso discreto o erro integral quadrático discreto no intervalo  $[t_2, \infty]$  está dado por:

$$I_{2D} = \sum_{kT=t_2}^{\infty} \int_{kT}^{kT+T} (y(t))^2 dt, \quad (5.36)$$

onde  $y(t)$  é dado por:

$$y(t) = K_p q b^{kT} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \left( 1 - \frac{y(kT)}{K_p q b^{kT}} \right) \right) \quad \forall t : [kT, kT + T]. \quad (5.37)$$

Calculado a integral da equação (5.36) obtém-se

$$I_{2D} = K_p^2 q^2 b^{2kT} \sum_{kT=t_2}^{\infty} \left\{ T + 2\tau(e^{-\frac{T}{\tau}} - 1) \left( 1 - \frac{y(kT)}{K_p q b^{kT}} \right) - \frac{\tau}{2}(e^{-\frac{2T}{\tau}} - 1) \left( 1 - \frac{y(kT)}{K_p q b^{kT}} \right)^2 \right\}. \quad (5.38)$$

Na Figura 5.6 é ilustrado a relação entre o erro integral quadrático discreto  $I_{2D}$  (5.38) e o contínuo ( $I_2$ ) quando varia  $\frac{\tau}{L}$ . Observa-se que o caso mais desfavorável para o controlador discreto é quando  $\frac{\tau}{L} \rightarrow 0$ , que é o caso dos sistemas com atraso dominante ( $L \gg 2\tau$ ). Para uma simplificação dos resultados e o cálculo do máximo valor do erro integral quadrático será tomado em conta simplesmente o caso mais desfavorável  $\tau = 0$ . As equações (5.32), (5.35) e (5.38) podem ser reduzidas a:

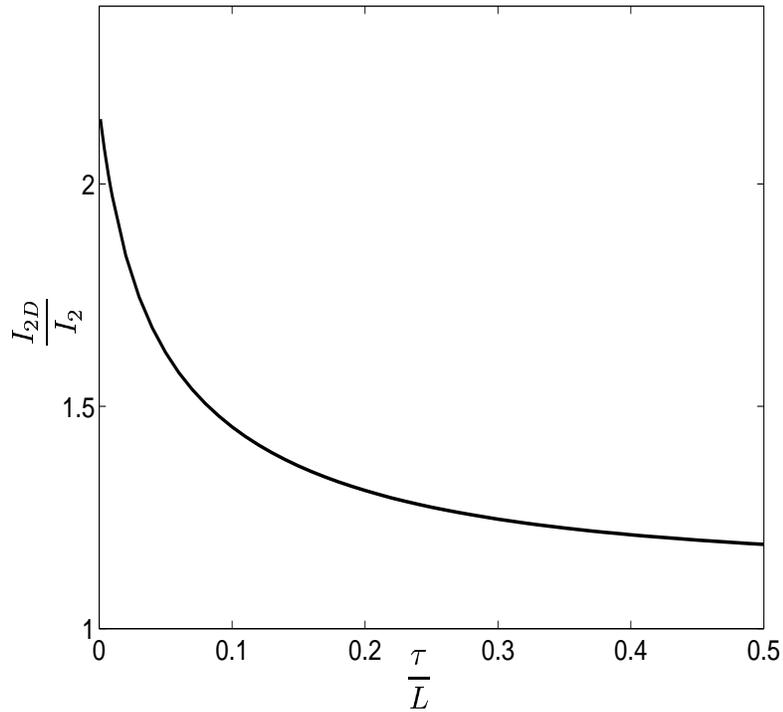


Figura 5.6: Índice do erro integral quadrático no intervalo  $[t_2, \infty]$ .

$$I_1 = K_p^2 q^2 L, \quad (5.39)$$

$$I_2 = \int_{t_2}^{\infty} (e(t))^2 dt = \frac{K_p^2 q^2 \lambda}{2}, \quad (5.40)$$

$$I_{2D} = K_p^2 q^2 T \frac{2k_n \frac{T}{\Delta L}}{1 - e^{-2k_n \frac{T}{\Delta L}}}. \quad (5.41)$$

A relação  $\frac{I_{2D}}{I_2}$  pode ser expressada em função de  $\frac{T}{\Delta L}$

$$k_e = \frac{I_{2D}}{I_2} = \frac{2k_n \frac{T}{\Delta L}}{1 - e^{-2k_n \frac{T}{\Delta L}}}. \quad (5.42)$$

O erro integral quadrático no caso de um controlador contínuo ( $T \rightarrow 0$ ) está dado por

$$E_{IQ_{contínuo}} = I_1 + I_2, \quad (5.43)$$

e o erro integral quadrático discreto por:

$$E_{IQdiscreto} = I_1 + I_{2D} = I_1 + k_e I_2. \quad (5.44)$$

A relação entre  $E_{IQcontinuo}$  e  $E_{IQdiscreto}$  é denominado índice do erro integral quadrático ( $I_{EIQ}$ ) que está dado por:

$$I_{EIQ} = \frac{E_{IQdiscreto}}{E_{IQcontinuo}} = \frac{I_1 + k_e I_2}{I_1 + I_2}, \quad (5.45)$$

esta equação pode ser reduzida a:

$$I_{EIQ} = \frac{1 + \frac{k_e \Delta L}{2k_n L}}{1 + \frac{1}{2k_n} \frac{\Delta L}{L}} \quad (5.46)$$

onde  $k_n$  é ajustado para manter a estabilidade robusta e  $k_e$  é calculada através da equação (5.42).

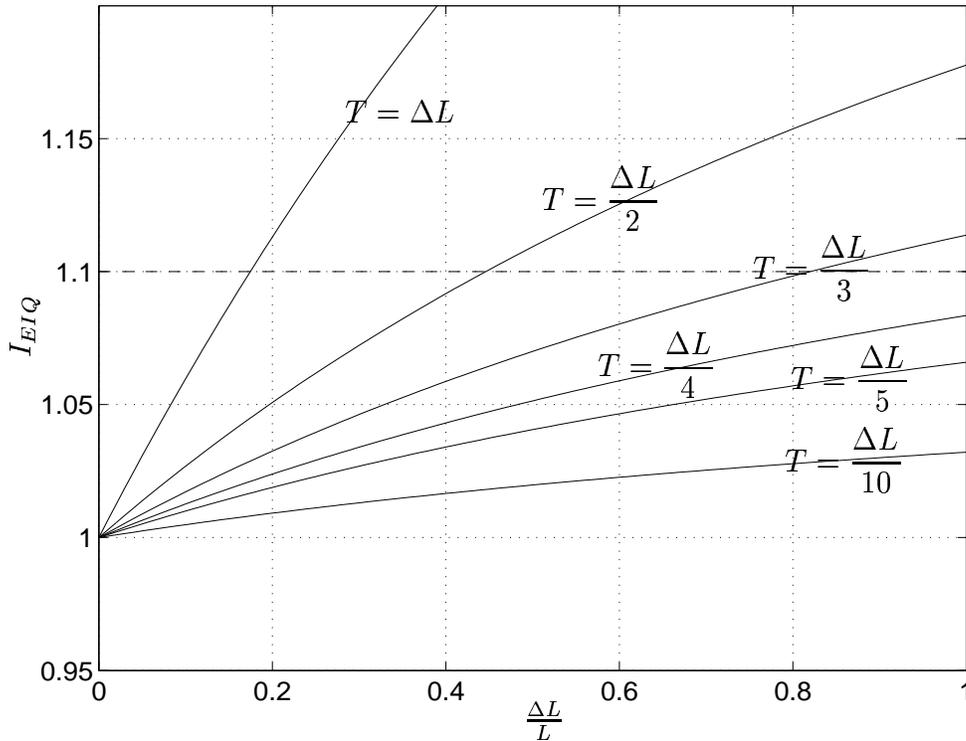


Figura 5.7: Índice do erro integral quadrático.

Na Figura 5.7 ilustra-se a variação do índice do erro integral quadrático ( $I_{EIQ}$ ) em

função de  $\frac{\Delta L}{L}$  e  $\frac{\Delta L}{T}$  parametrizado. Observa-se que embora o sistema esteja ajustado para garantir a estabilidade robusta, o comportamento, medido através do índice do erro integral quadrático ( $I_{EIQ}$ ) piora quando  $\frac{\Delta L}{L}$  aumenta.

Na próxima seção será estudada a escolha do período de amostragem.

## 5.4 Método de escolha do período de amostragem

O período de amostragem deve ser escolhido considerando dois aspectos fundamentais tais como a robustez e o comportamento. Na seção 5.2 foi estudado o efeito da escolha de  $T$  sobre a robustez do sistema. Foi demonstrado que a escolha de  $T \leq \Delta L$  ( $T_n \leq 1$ ) não modifica consideravelmente a robustez do sistema, tal como é ilustrado na Figura 5.8(a). Por outro lado na seção 5.3 foi estudado o efeito da escolha de  $T$  sobre o comportamento do sistema definido pelo índice do integral quadrático ( $I_{EIQ}$ ), tal como se mostra na Figura 5.8(b).

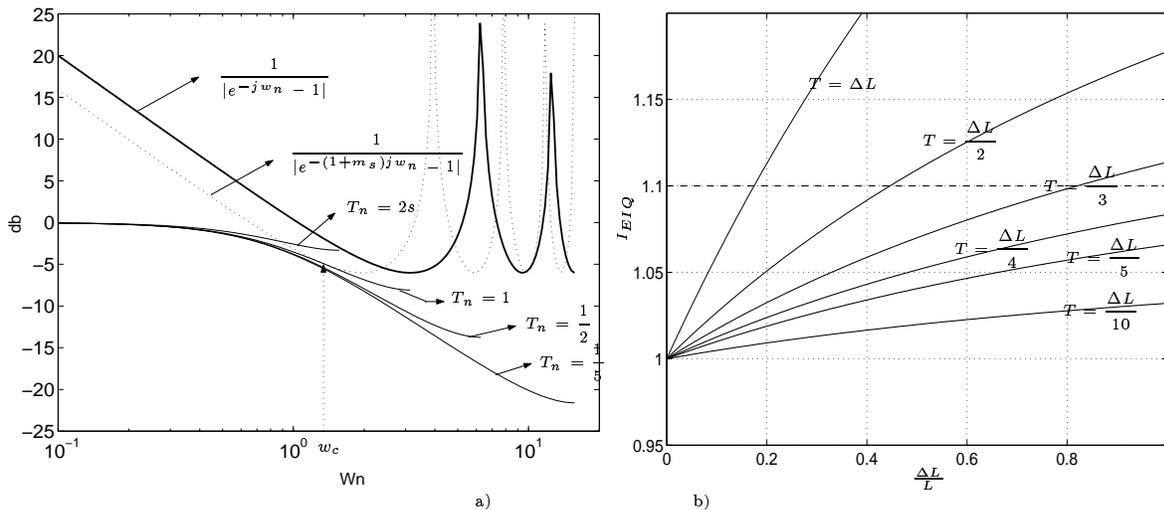


Figura 5.8: Escolha de T

Portanto se é desejado que a escolha de  $T$  mantenha a estabilidade robusta e não afete significativamente ao comportamento do sistema, deve-se utilizar os criterios estudados nas seções 5.2 e 5.3. Por exemplo na Tabela 5.1 é escolhido o período de amostragem tomando em conta a premissa de que o erro integral quadrático discreto  $E_{IQdiscreto}$  não deve exceder em 10% ao caso contínuo e o sistema deve manter a estabilidade robusta para variações do atraso. Embora quando  $T = \Delta L$  o sistema mantém a estabilidade robusta para grandes variações do atraso, esta escolha não é adequada em caso de grandes

variações do atraso se deseja-se atender o critério de comportamento.

$\Delta L$	Escolha do período de amostragem
0-17%	$T = \Delta L$
17%-45%	$T = \Delta L/2$
45%-82%	$T = \Delta L/3$
82%-100%	$T = \Delta L/4$

Tabela 5.1: Escolha de  $T$  para  $I_{EIQ} = 1.1$ .

Assim o método proposto permite uma forma simples da escolha do período de amostragem, que exige menos custo de cômputo e garante a estabilidade robusta do sistema e o comportamento, para erros de estimação do atraso dentro de uma faixa de considerada.

Na próxima seção serão apresentados exemplos de simulação comparando a resposta de um sistema com diferentes escolhas do período de amostragem.

## 5.5 Exemplos

Para ilustrar os resultados da metodologia da escolha de  $T$  para plantas com atraso dominante, analisam-se os seguintes exemplos exemplos.

### Exemplo 1

Neste exemplo analisa-se a planta estável com atraso apresentada em (5.1) conforme a função de transferência:

$$P(s) = \frac{1}{(s+1)(0.5s+1)} e^{-5s}. \quad (5.47)$$

O modelo nominal discreto é calculado pelo método de discretização *Zoh*

$$G_n(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left\{ \frac{G_n(s)}{s} \right\}. \quad (5.48)$$

O esquema do controlador é ilustrado na Figura 5.1. Deseja-se que o sistema satisfaça duas especificações. A primeira é que o tempo de subida em malha fechada seja similar ao de malha aberta e o sistema não apresente sobre-sinal. A segunda especificação é que o sistema seja robustamente estável para variações do atraso de  $\pm 10\%$ , isto é  $\Delta L = 0.5s$ .

O controle primário é ajustado através do método lugar das raízes, como no exemplo 3.6, isto é:

$$C(z) = 0.3 \left( 1 + \frac{T}{0.77} \frac{z}{z-1} \right)$$

e o filtro primário é proposto como:

$$V(z) = \frac{1 - e^{-\frac{T}{\lambda}}}{z - e^{-\frac{T}{\lambda}}}$$

O ajuste do filtro foi efetuado de forma normalizada para manter a estabilidade robusta (Figura 5.2) com  $k_n = \frac{5}{6}$ , neste caso particular tem-se  $\lambda = \frac{\Delta L}{k_n} = \frac{0.5}{\frac{5}{6}} = 0.6$ .

Para efeitos de simulação considera-se que o sistema está inicialmente em repouso, a referência varia de 0 a 1 em  $t = 0s$  e em  $t = 40s$  aplica-se uma perturbação constante  $q = 0.5$  na entrada da planta.

As simulações consideram quatro diferentes períodos de amostragem  $T_n = 2, 1, \frac{1}{2}$  e  $\frac{1}{5}$ , isto é  $T = 1, \frac{1}{2}s, \frac{1}{4}s$  e  $\frac{1}{10}s$ . Na Figura 5.9 ilustram-se as simulações quando não existe erro de modelagem no atraso. Em todos os casos, o sistema têm respostas estáveis semelhantes tanto para o seguimento de referência, quanto para a rejeição de perturbações. Isto significa que se não há erros de modelagem, a resposta não é influenciada significativamente pela escolha do período de amostragem na faixa escolhida. Na Figura 5.10 ilustram-se as simulações para a variação máxima do atraso de +10%, isto é  $\Delta L = 0.5s$ . Nota-se que para o período de amostragem  $T = 1s$  o sistema é instável e para períodos de amostragem  $T = \frac{1}{2}s, \frac{1}{4}s$  e  $\frac{1}{10}s$  o sistema é estável e tem respostas muito similares. Isto reitera os resultados obtidos da escolha de  $T$  apresentada na Tabela 5.1 que para períodos de amostragem maiores a  $T_n = 1 \rightarrow T = \frac{1}{2}s$  com  $\Delta L_{max} = 10\%$  a condição de estabilidade robusta diminui bastante ocasionando respostas instáveis e para períodos de amostragem menores ou iguais a  $T = \frac{1}{2}s$  as características de estabilidade robusta, permanecem bastante aproximadas, obtendo-se respostas similares ao seguimento de referência e à rejeição de perturbação, sendo a melhor escolha do período de amostragem  $T_n = 1 \rightarrow T = \Delta L = 0.5s$ . O erro quadrático integral apresentado na Tabela 5.2 mostra a semelhança do comportamento à rejeição de perturbações quando  $T \leq 0.5s$

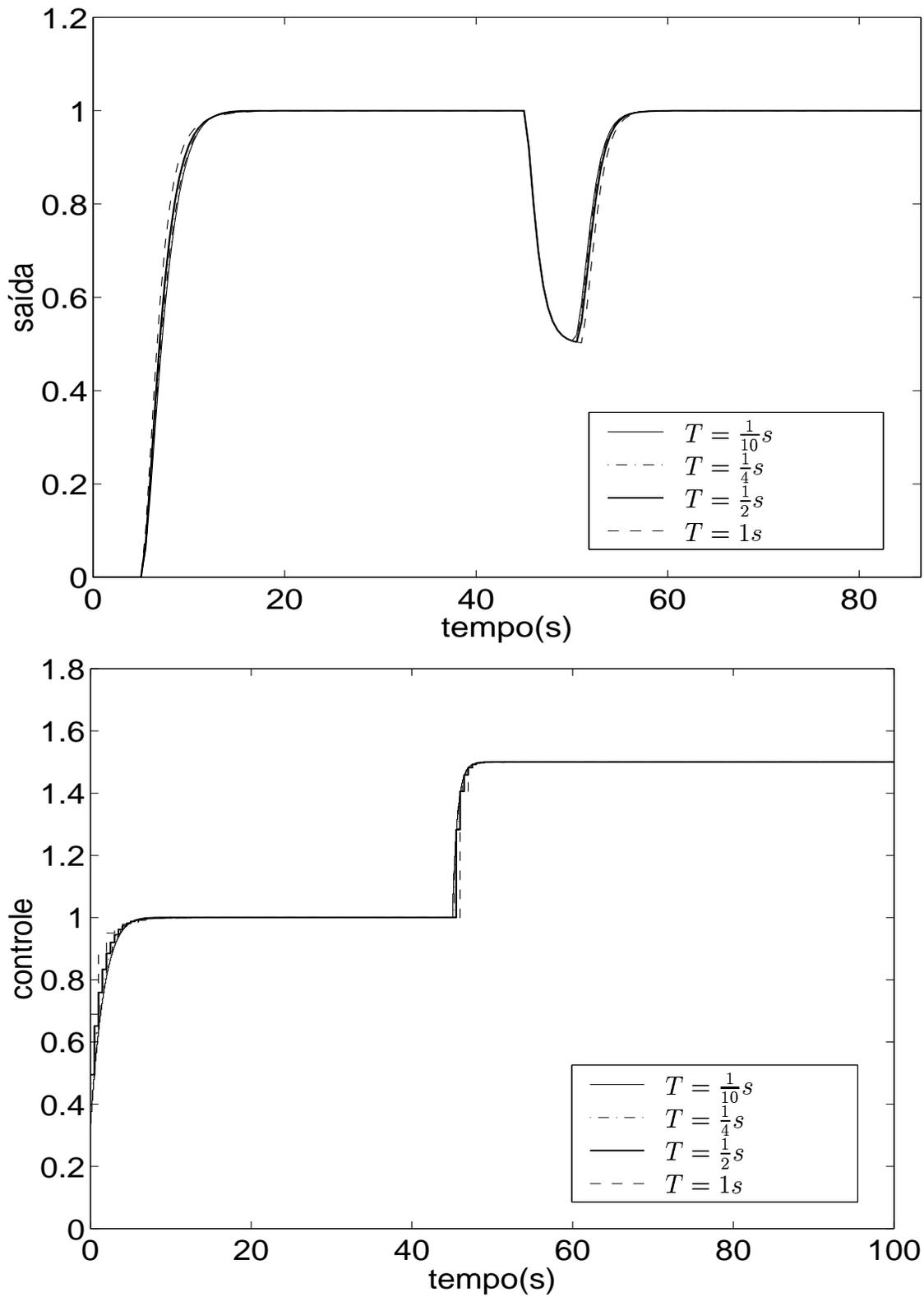


Figura 5.9: Resposta e controle de plantas estáveis com atraso (Exemplo 1) com  $\Delta L = 0s$ .

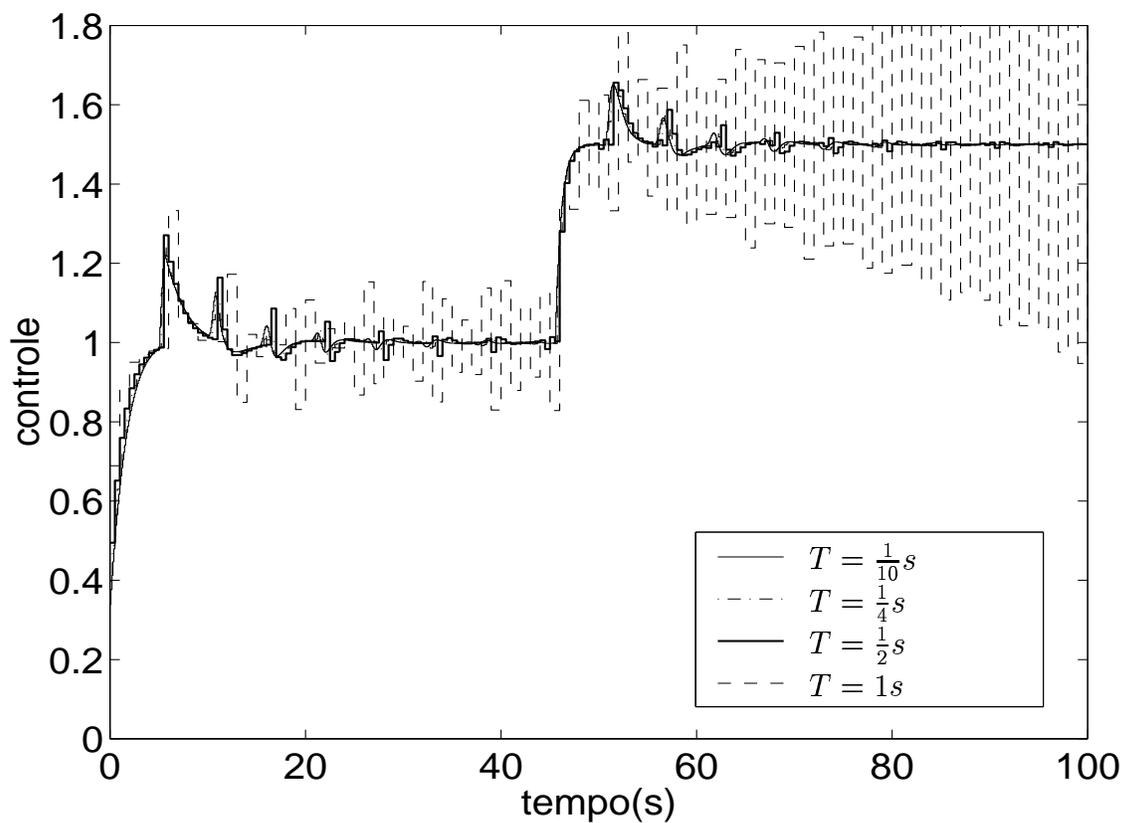
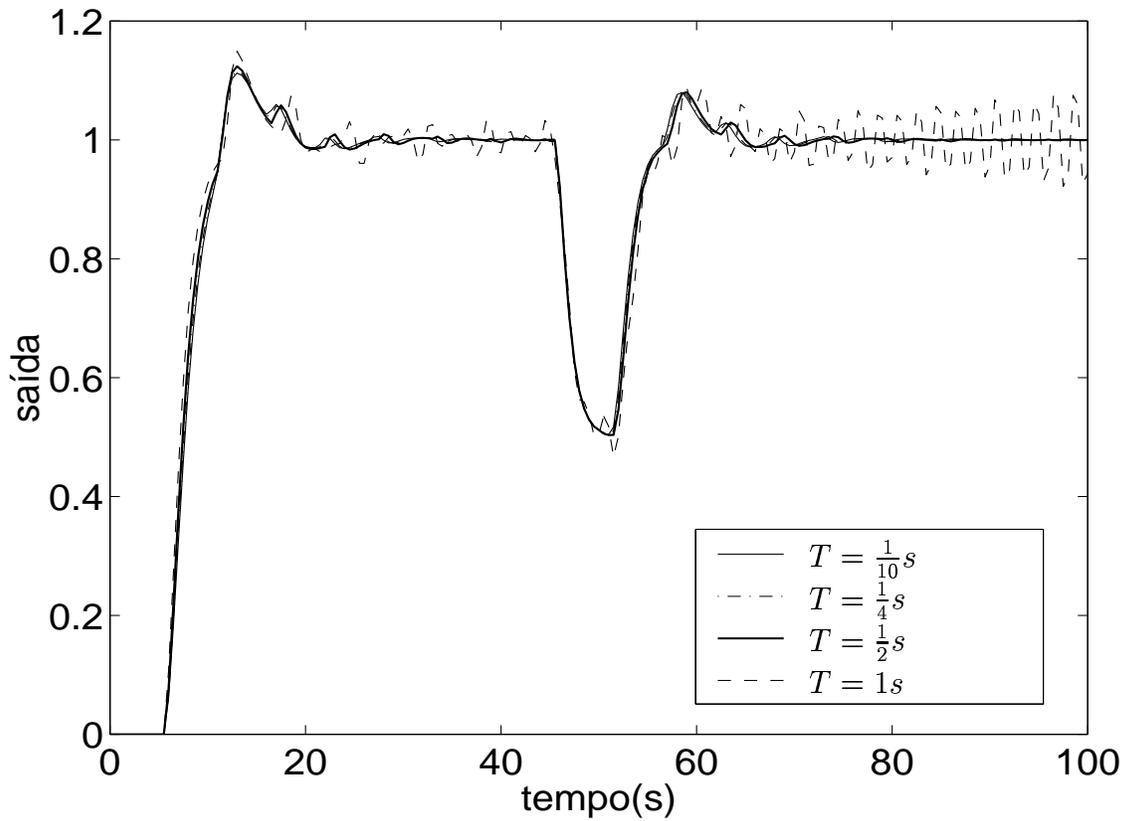


Figura 5.10: Resposta e controle de plantas estáveis com atraso (Exemplo 1) com  $\Delta L = 0.5s$

Variação do atraso	período de amostragem	$E_{IQ}$ ao seguimento de referência	$E_{IQ}$ à rejeição de perturbação
$\Delta L = 0$	$T = 1s$	6.21	1.23
$\Delta L = 0$	$T = 0.5s$	6.41	1.14
$\Delta L = 0$	$T = 0.25s$	6.52	1.11
$\Delta L = 0$	$T = 0.1$	6.58	1.08
$\Delta L = 0.5s$	$T = 1s$	6.76	1.41
$\Delta L = 0.5s$	$T = 0.5s$	6.95	1.28
$\Delta L = 0.5s$	$T = 0.25s$	7.05	1.24
$\Delta L = 0.5s$	$T = 0.1s$	7.11	1.22

Tabela 5.2: Índice de comportamento do sistema (Exemplo 1).

**Exemplo 2**

Neste exemplo analisa-se a planta estável com atraso apresentada pela seguinte função de transferência:

$$P(s) = \frac{1}{(s+1)(0.5s+1)} e^{-20s}. \quad (5.49)$$

O modelo nominal discreto é calculado pelo método de discretização *zoh*

$$G_n(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left\{ \frac{G_n(s)}{s} \right\}. \quad (5.50)$$

O esquema do controlador é ilustrado na Figura 5.1. Deseja-se que o sistema de controle mantenha a estabilidade robusta para variações do atraso de 100%, isto é  $\Delta L = 20s$

O controle primário é ajustado através do método de lugar das raízes, isto é:

$$C(z) = 0.03 \left( 1 + \frac{T}{0.77} \frac{z}{z-1} \right)$$

e o filtro primário é proposto como:

$$V(z) = \frac{1 - e^{-\frac{T}{\lambda}}}{z - e^{-\frac{T}{\lambda}}}.$$

O ajuste do filtro foi efetuado de forma normalizada para manter a estabilidade robusta (Figura 5.2) com  $k_n = \frac{5}{6}$ , neste caso particular tem-se  $\lambda = \frac{\Delta L}{k_n} = \frac{20}{\frac{5}{6}} = 26$ .

Para efeitos de simulação considera-se que o sistema está inicialmente em repouso, a referência varia de 0 a 1 em  $t = 0s$  e em  $t = 500s$  aplica-se uma perturbação constante  $q = 0.5$  na entrada da planta.

As simulações consideram três diferentes períodos de amostragem  $T_n = 1, \frac{1}{2}$  e  $\frac{1}{4}$ , isto é  $T = 20s, 10s, 5s$  e  $\frac{1}{10}s$ . Nas Figuras 5.11 e 5.12 ilustram-se as respostas das simulações do sistema quando  $\Delta L = 0$  e  $\Delta L = 100s$  respectivamente. Observa-se que o sistema melhora significativamente o comportamento à rejeição de perturbação quando é escolhido  $T = \Delta L/4$  através do método proposto (Tabela 5.1). Embora nota-se que na Tabela 5.3 que o índice  $E_{IQ}$  é menor ao seguimento de referência quando aumenta  $T$ , mas apresenta maior sobre-sinal quando o atraso é mal estimado, o controle primário que atua sobre o seguimento de referência pode ser ajustado de acordo com as necessidades do processo, uma vez que este não afeta ao índice de robustez do sistema.

Variação do atraso	periodo de amostragem	$E_{IQ}$ ao seguimento de referência	$E_{IQ}$ à rejeição de perturbação
$\Delta L = 0$	$T = \Delta L$	21.93	10.95
$\Delta L = 0$	$T = \frac{\Delta L}{2}$	26.95	9.24
$\Delta L = 0$	$T = \frac{\Delta L}{4}$	30.27	8.50
$\Delta L = 20s$	$T = \Delta L$	51.60	17.45
$\Delta L = 20s$	$T = \frac{\Delta L}{2}$	52.59	15.36
$\Delta L = 20s$	$T = \frac{\Delta L}{4}$	54.58	14.58

Tabela 5.3: Índice de comportamento do sistema (Exemplo 2).

### Exemplo 3

Neste exemplo analisa-se uma planta integradora com atraso dominante dada pela

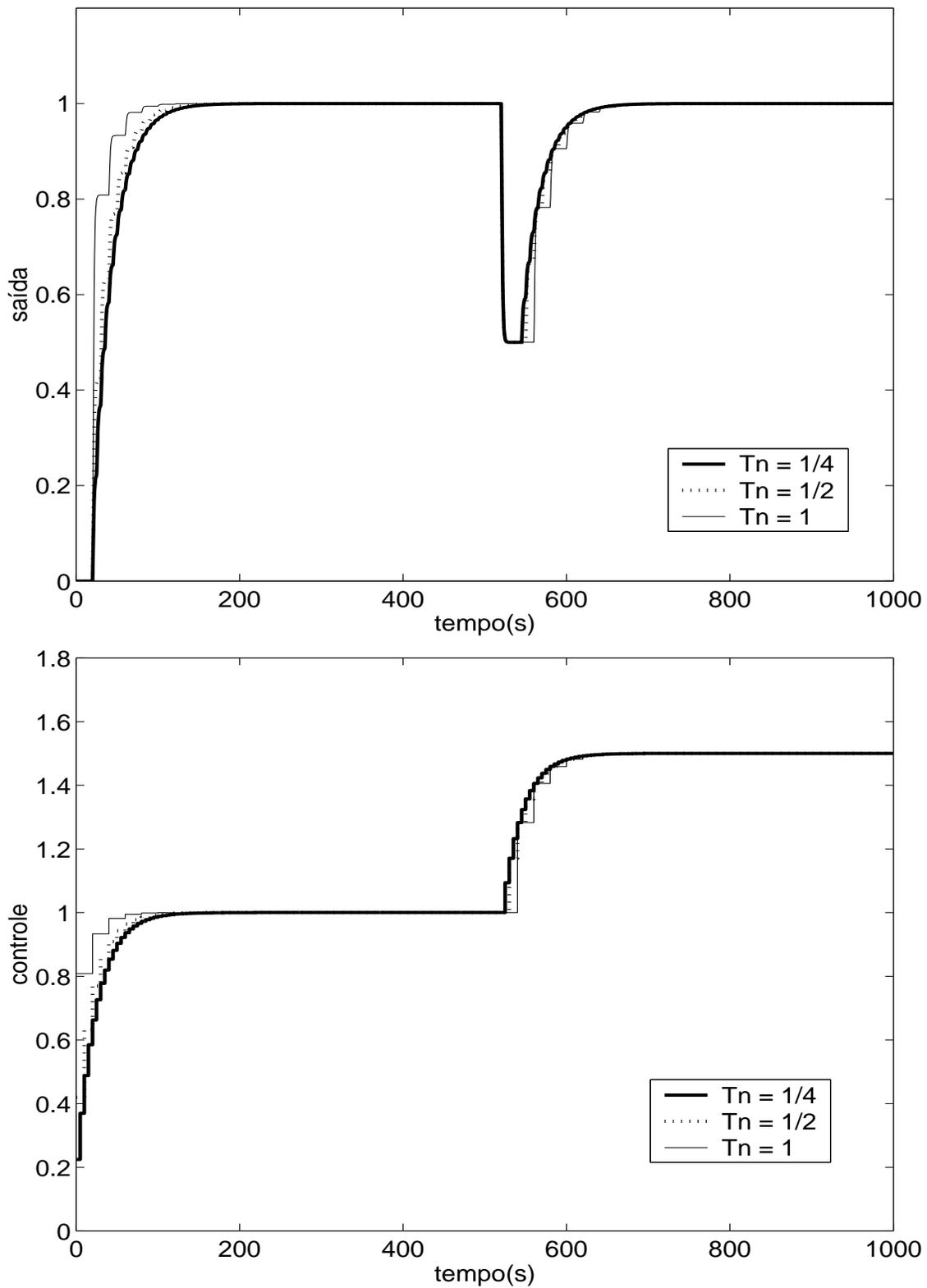


Figura 5.11: Resposta e controle de plantas estáveis com atraso (Exemplo 2) com  $\Delta L = 0s$ .

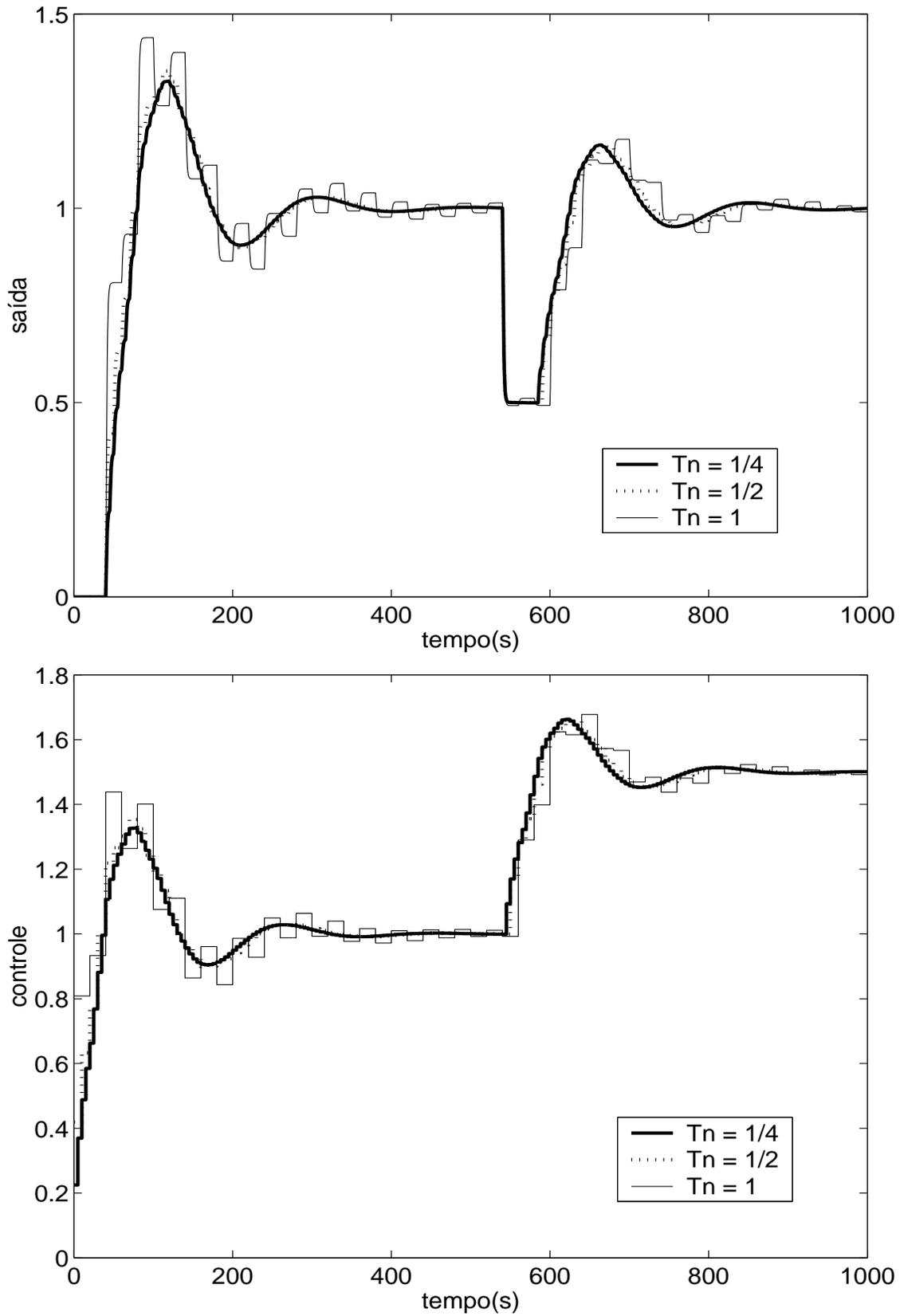


Figura 5.12: Resposta e controle de plantas estáveis com atraso (Exemplo 2) com  $\Delta L = 20s$

função de transferência

$$P(s) = \frac{1}{s(0.9s + 1)(0.5s + 1)(0.3s + 1)(0.1s + 1)} e^{-19s}. \quad (5.51)$$

Para o projeto de controle considera-se um modelo reduzido, representado pela função de transferência

$$P(s) = \frac{1}{s(0.9s + 1)} e^{-20s} \quad (5.52)$$

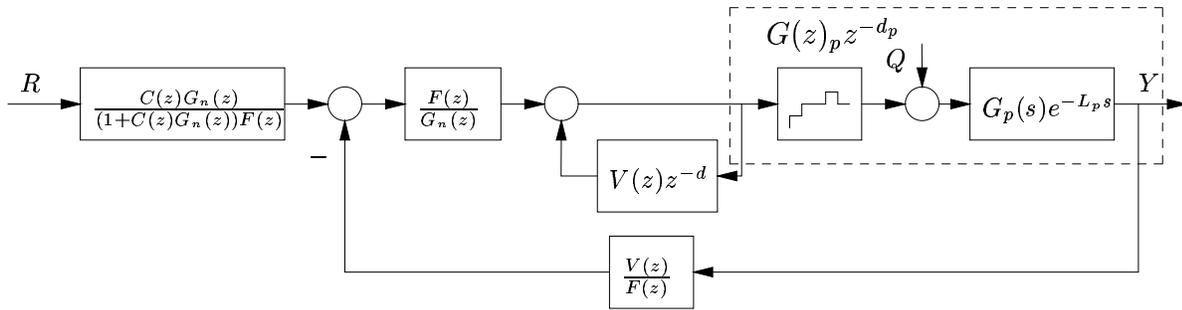


Figura 5.13: Sistema de controle discreto para plantas integradoras.

Para controlar esta planta utiliza-se a estrutura de controle de um observador de perturbações como ilustrada na Figura 5.13. Deseja-se que o sistema em malha fechada siga referência e seja robustamente estável para variações do atraso de  $\pm 10\%$  ( $\Delta L = 2s$ ). Para satisfazer estas condições os parâmetros  $C(z)$ ,  $V(z)$  e  $F(z)$  são definidos como:

$$C(z) = 0.2, \quad (5.53)$$

$$V(z) = \frac{\alpha_0 z + \alpha_1}{(1 - \beta)^2} \quad (5.54)$$

$$F(z) = \frac{1}{1 - \beta} \quad (5.55)$$

onde  $\beta = e^{-\frac{T}{\lambda}}$ ,  $\alpha_0 = d(1 - \beta)^2 + 2(1 - \beta)$ ,  $\alpha_1 = (1 - \beta)^2 - \alpha_0$ . No caso de plantas integradoras para que o controlador rejeite perturbações tipo degrau e seja robustamente estável o filtro normalizado deve ser ajustado com  $k_n = 0.2$ .

Neste caso particular pode-se ajustar  $\lambda$  através da relação  $\lambda = \frac{\Delta L}{k_n} = 10$ .

Para efeitos de simulação considera-se que a referência varia de 0 a 1 em  $t = 0s$  e em

$t = 200s$  aplica-se uma perturbação constante  $q = 0.05$  na entrada da planta.

Varição do atraso	Atraso	$E_{IQ}$ ao seguimento de referência	$E_{IQ}$ à rejeição de perturbação
$\Delta L = 0$	$T = 4s$	24.57	30.52
$\Delta L = 0$	$T = 2s$	24.92	27.20
$\Delta L = 0$	$T = 1s$	25.12	25.76
$\Delta L = 0$	$T = 0.5s$	25.23	25.10
$\Delta L = 2s$	$T = 4s$	27.56	46.17
$\Delta L = 2s$	$T = 2s$	27.45	33.68
$\Delta L = 2s$	$T = 1s$	27.55	31.95
$\Delta L = 2s$	$T = 0.5s$	27.61	31.11

Tabela 5.4: Índice de comportamento do sistema (Exemplo 3).

As simulações consideram quatro diferentes períodos de amostragem  $T = 4s, 2s, 1s,$  e  $0.5s$  ( $T_n = 2s, 1s, \frac{1}{2}s, \frac{1}{4}s$ ). Na Figura 5.14 ilustram-se as simulações quando o erro de modelagem é zero. Em todos os casos o sistema tem respostas estáveis e semelhantes, significando que a resposta não é influenciada significativamente por  $T$  na faixa escolhida. Na Figura 5.15 ilustram-se as simulações para a variação máxima do atraso  $\Delta L = 2s$ . Nota-se que para o período de amostragem  $T = 4s$  o sistema é instável e para os períodos de amostragem  $T = 2s, 1s,$  e  $0.5s$  o sistema é estável com respostas muito similares (ver Tabela 5.4). Isto indica que no caso de plantas integradoras, a melhor escolha do período de amostragem é  $T_n = 1s \rightarrow T = 2s$  conforme com o método proposto para sua escolha.

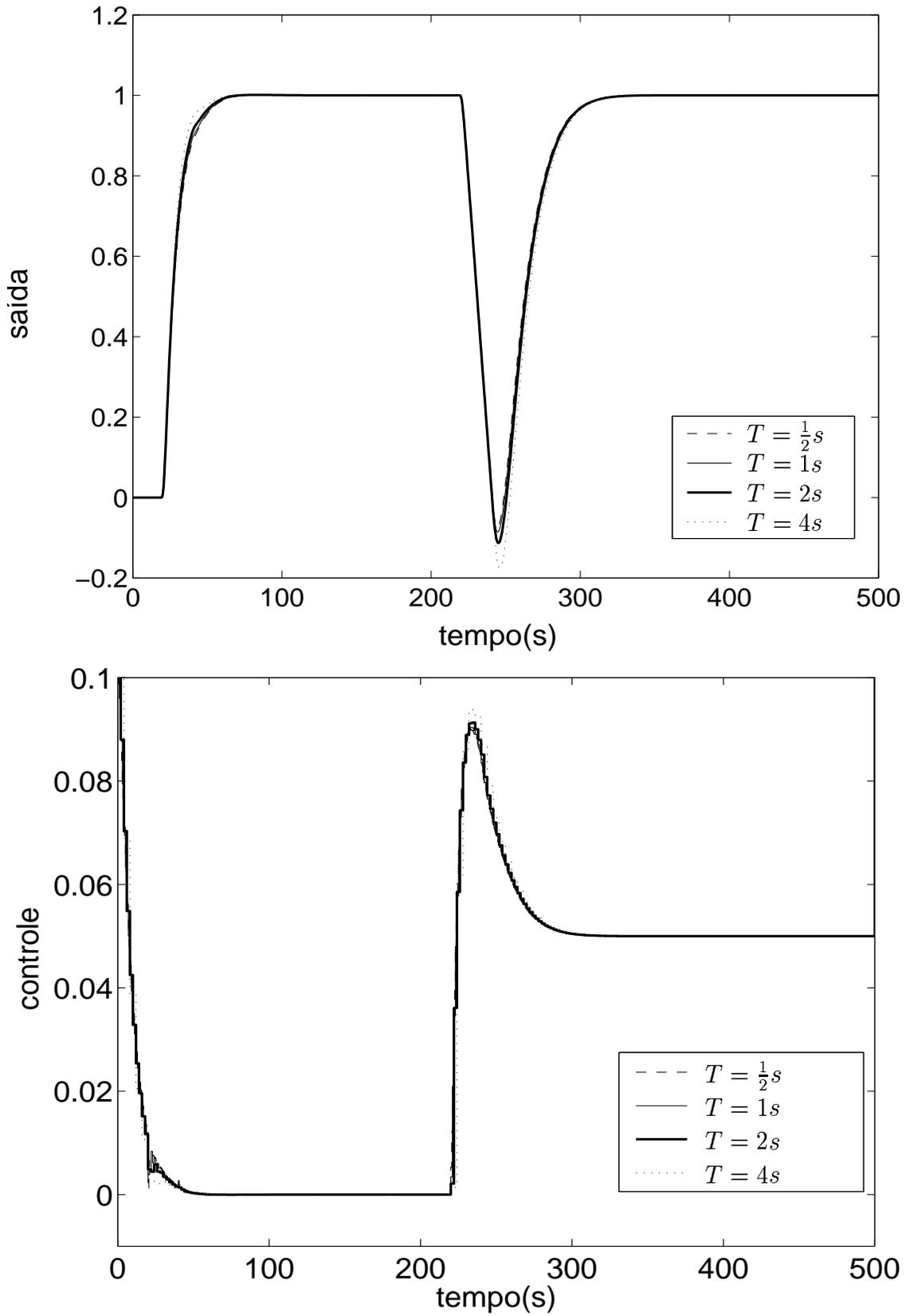


Figura 5.14: Resposta e controle de plantas integradoras com atraso (Exemplo 3) com  $\Delta L = 0s$ .

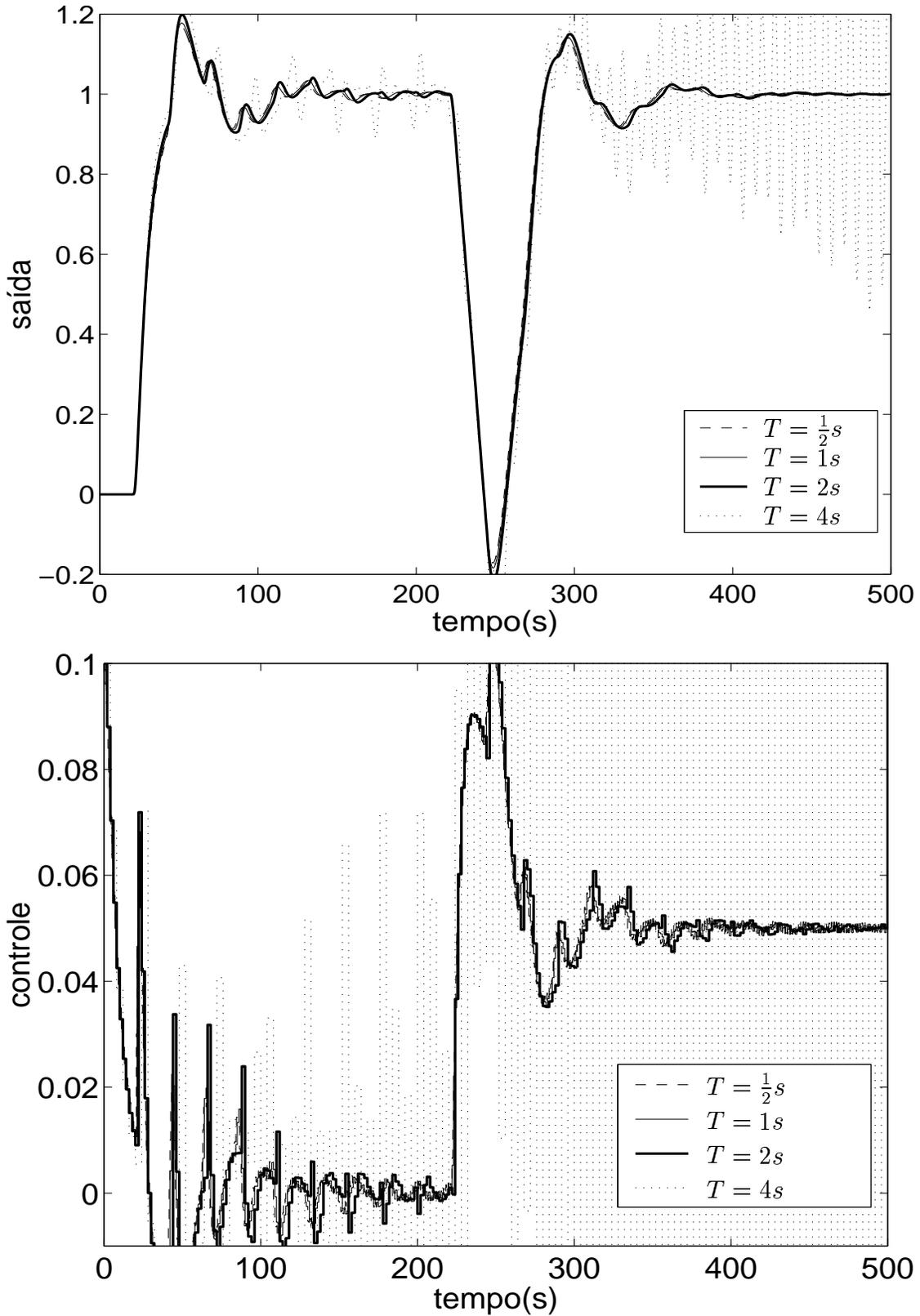


Figura 5.15: Resposta e controle de plantas integradoras com atraso (Exemplo 3) com  $\Delta L = 2s$ .

## 5.6 Conclusões

Este capítulo apresentou uma forma simples de escolha do período de amostragem relacionada com a estabilidade robusta do sistema e a resposta. Períodos de amostragem iguais ou menores do que  $\Delta L$  mantêm características similares de estabilidade robusta e períodos de amostragem maiores do que  $\Delta L$ , diminuem em forma considerável a estabilidade robusta. Conseqüentemente a melhor escolha do período de amostragem é  $T = \Delta L$ , ou menores quando as variações do atraso são grandes, uma vez que exige um menor custo computacional. O ajuste do controlador que satisfaz a condição da estabilidade robusta foi efetuado com parâmetros normalizados, garantindo a generalidade dos resultados obtidos. Assim o ajuste proposto permite o controle de sistemas com atraso dominante e diferentes erros de modelagem do atraso. A escolha de  $T$  (o maior possível atendendo ao critério de robustez e comportamento) deve ser acompanhado do método de Guo para o caso de discretização do controlador.

# Capítulo 6

## Implementação e simulações

Neste capítulo, serão estudados comparativamente os controladores digitais propostos nos capítulos anteriores (controladores discretizados e controladores projetados no domínio discreto (método direto)), utilizando modelos de plantas com atraso de transporte. A maioria dos processos reais com atraso, podem ser representados através de modelos estáveis com atraso e modelos integradores com atraso, o que nos leva a analisá-los neste capítulo.

A apresentação deste capítulo tem a seguinte seqüência: A Seção 6.1 apresenta o estudo de plantas estáveis com atraso. A Seção 6.2 o estudo de plantas integradoras com atraso. Finalmente a Seção 6.3 apresenta as conclusões do capítulo.

### 6.1 Caso de plantas estáveis

Nesta seção será analisado comparativamente o controle digital para um modelo de uma planta estável com atraso. A planta está representada pela seguinte função de transferência:

$$G_p(s) = \frac{1}{(s+1)(0.5s+1)(0.25s+1)(0.125s+1)}, L_p = 9.7s. \quad (6.1)$$

Para o projeto do controle, a planta pode ser representada aproximadamente por um modelo de segunda ordem com atraso, obtida através de uma resposta ao degrau, descrito por:

$$G_n(s) = \frac{1}{(s+1)(0.6s+1)}, L_m = 10s. \quad (6.2)$$

A especificação do controle requer que o sistema mantenha a estabilidade robusta para variações do atraso de  $\pm 10\%$  e que a resposta em malha fechada tenha características similares à de malha aberta e seja escolhido um período de amostragem apropriado que não comprometa a estabilidade do sistema.

Inicialmente faz-se a escolha do período de amostragem. Considerando  $\pm 10\%$  nas variações máximas do atraso, então o erro de estimação do atraso é um segundo ( $\Delta L = 1s$ ). Portanto a melhor escolha do período de amostragem segundo a Tabela 5.1 é:

$$T = \Delta L = 1s.$$

A seguir apresentam-se os métodos de cálculo do controle digital estudados nos capítulos anteriores.

### 6.1.1 Controlador com observador de perturbações (caso Discreto)

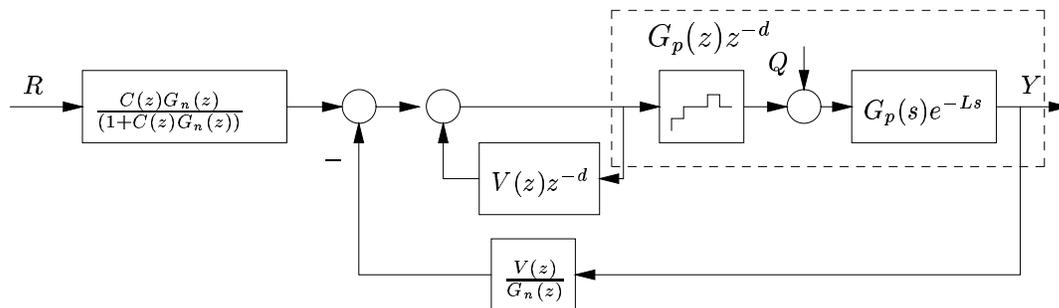


Figura 6.1: Esquema de controle discreto para plantas estáveis.

No caso discreto é utilizada a estrutura da Figura 6.1. A planta é representada por uma função de transferência de segunda ordem, descrita por:

$$G_n(z) = \frac{0.3636z + 0.1491}{z^2 - 0.5568z + 0.06948}.$$

O controle primário é projetado como um *PI*, descrito por:

$$C(z) = K \left( 1 + \frac{T}{t_i} \frac{z}{z-1} \right), \quad (6.3)$$

onde  $K = 0.2$ ,  $T = 1$  e  $t_i = 0.58$ , estes parâmetro foram ajustados através do método lugar das raízes.

O filtro é projetado como:

$$V(z) = \frac{a}{z-b}$$

onde  $a = 1 - b$ ,  $b = e^{-\frac{T}{\lambda}}$ ,  $T = 1$ ,  $\lambda = 1.7$ .  $T$  é o período de amostragem e  $\lambda$  foi escolhida para serem satisfeitas as condições de estabilidade robusta (ver Figura 6.2(b)).

### 6.1.2 Controlador com observador de perturbações (*Deadbeat*)

A diferença do cálculo de controle discreto *Deadbeat* em relação ao caso anterior, é a escolha do filtro  $V(z)$ . Neste caso projeta-se como:

$$V(z) = \frac{a(1 - q_1(1 - z^{-d_1}) - q_2(1 - z^{-d_2}))}{z - b}$$

com  $q_1 = -0.1051$ ;  $q_2 = 0.0031$ ;  $d_1 = 5$ ;  $d_2 = 9$ . O ajuste foi feito garantindo a estabilidade robusta do sistema (Figura 6.2(b)).

### 6.1.3 Controlador com observador de perturbações (caso Discretizado)

A estrutura utilizada está ilustrada na Figura 4.2. O controle primário é ajustado utilizando o método de lugar das raízes como:

$$\begin{aligned} C(s) &= \frac{k(t_i s + 1)}{t_i s}, \\ t_i &= 1, \\ k &= 0.4, \end{aligned}$$

O filtro  $V(s)$  é projetado como:

$$V(s) = \frac{1}{(\lambda s + 1)^2} \quad (6.4)$$

$$\lambda = 1.1 \quad (6.5)$$

onde  $\lambda$  foi escolhida, para satisfazer as condições de robustez desejadas (ver Figura 6.2). Uma vez encontrados os parâmetros do controlador contínuo procede-se a sua discretização.

A discretização pelo método de Guo é calculada em duas partes, primeiramente o sinal  $u(kT)$  através da lei de controle,

$$\begin{cases} x(kT + T) = e^{AT}x(kT) + M_0 B_1 r(kT) + M_A y(kT) + M_B y(kT - T) + M_C y(kT - 2T) \\ u(kT) = N_2 x(kT) + N_1 r(kT) + N_3 y(kT) + N_4 y(kT - T) + N_5 y(kT - 2T) \end{cases} \quad (6.6)$$

onde

$$e^{AT} = \begin{bmatrix} -0.15 & -0.34 & -0.08 & 0 & 0 \\ 0.46 & 0.46 & -0.14 & 0 & 0 \\ 0.41 & 0.78 & 0.94 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.04 & -0.33 \\ 0 & 0 & 0 & 0.40 & 0.77 \end{bmatrix}, M_0 = \begin{bmatrix} 0.23 & -0.27 & -0.07 & 0 & 0 \\ 0.41 & 0.78 & -0.06 & 0 & 0 \\ 0.17 & 0.44 & 0.99 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.40 & -0.23 \\ 0 & 0 & 0 & 0.28 & 0.91 \end{bmatrix},$$

$$M_A = \begin{bmatrix} 0.63 & -0.47 & -0.12 & 0 & 0 \\ 0.72 & 1.59 & -0.09 & 0 & 0 \\ 0.26 & 0.71 & 1.89 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.93 & -0.39 \\ 0 & 0 & 0 & 0.47 & 1.79 \end{bmatrix}, M_B = \begin{bmatrix} -0.59 & 0.29 & 0.079 & 0 & 0 \\ -0.45 & -1.18 & 0.049 & 0 & 0 \\ -0.12 & -0.39 & -1.32 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.77 & 0.23 \\ 0 & 0 & 0 & -0.27 & -1.27 \end{bmatrix},$$

$$M_C = \begin{bmatrix} 0.19 & -0.09 & -0.02 & 0 & 0 \\ 0.14 & 0.37 & -0.01 & 0 & 0 \\ 0.04 & 0.12 & 0.41 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.25 & -0.07 \\ 0 & 0 & 0 & 0.08 & 0.4 \end{bmatrix},$$

$N_1 = 0.56$ ;  $N_2 = [0.29 \ 0.29 \ 0.15 \ -0.29 \ -0.28]$ ;  $N_3 = -1.21$ ;  $N_4 = 0.81$ ;  $N_5 = -0.25$ .

Posteriormente calcula-se o sinal  $v(kT)$  com a lei de controle,

$$\begin{cases} x(kT + T) = e^{A_V T} x(kT) + M_{V0} B_V f(kT) \\ v(kT) = \frac{C_V M_{V0}}{T} x(kT) + M_{V1} B_V f(kT) \end{cases}, \quad (6.7)$$

$$\text{onde } e^{A_V T} = \begin{bmatrix} 0.04 & -0.33 \\ 0.40 & 0.77 \end{bmatrix}, M_{V0} = \begin{bmatrix} 0.40 & -0.23 \\ 0.28 & 0.91 \end{bmatrix}, M_{V1} = \begin{bmatrix} 0.28 & -0.09 \\ 0.11 & 0.48 \end{bmatrix},$$

$$C_V = [0 \ 1], \quad B_V = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

O sinal total de controle é composto pela soma  $u_T(kT) = u(kT) + v(kT)$ .

### 6.1.4 Resultados de simulações

Inicialmente na Figura 6.2 apresentam-se as curvas de estabilidade robusta. A curva superior representa a inversa do erro e as inferiores representam as curvas do filtro para diferentes métodos utilizados. O sistema mantém a estabilidade robusta se as curvas do filtro não ultrapassam a inversa do erro no intervalo de frequência  $\omega T [0; \pi]$ .

Na Figura 6.2(a) comparam-se a estabilidade robusta dos controladores discretizados através dos métodos Guo e Tustin com o controlador contínuo. Observa-se que em baixas frequências, as curvas de estabilidade contínua e a de Guo são iguais, mas a medida que a frequência aumenta as curvas afastam-se.

Na Figura 6.2(b) são realizados ajustes similares de estabilidade robusta dos métodos de cálculo de controladores discretos, de tal forma que seja possível comparar as respostas do seguimento de referência e rejeição de perturbações.

Para efeitos de simulação considera-se que a referência inicialmente está em repouso e varia de 0 a 1, em  $t = 0s$  e em  $t = 70s$  aplica-se uma perturbação constante  $q = 0.5$  na entrada da planta.

Nas Figuras 6.3 e 6.4 são ilustrados a saída  $y(t)$  e o controle do sistema  $u(t)$  quando o erro de modelagem no atraso é zero e 10% respectivamente. O desempenho do sistema é medido através do erro integral quadrático e é ilustrado na tabela 6.1 para  $\Delta L = 0$  e na tabela 6.2 para  $\Delta L = 10\%$ . Observa-se que o desempenho do sistema aplicando os controladores Guo, Discreto e Deadbeat são bastante similares. A resposta aplicando o controlador discretizado pelo método de Tustin, tem um desempenho menos satisfatório quando o erro de modelagem no atraso é zero, mas o desempenho é semelhante aos demais sistemas quando o atraso for mal estimado.

Pode-se concluir que as melhoras de um método com relação ao outro são bastante

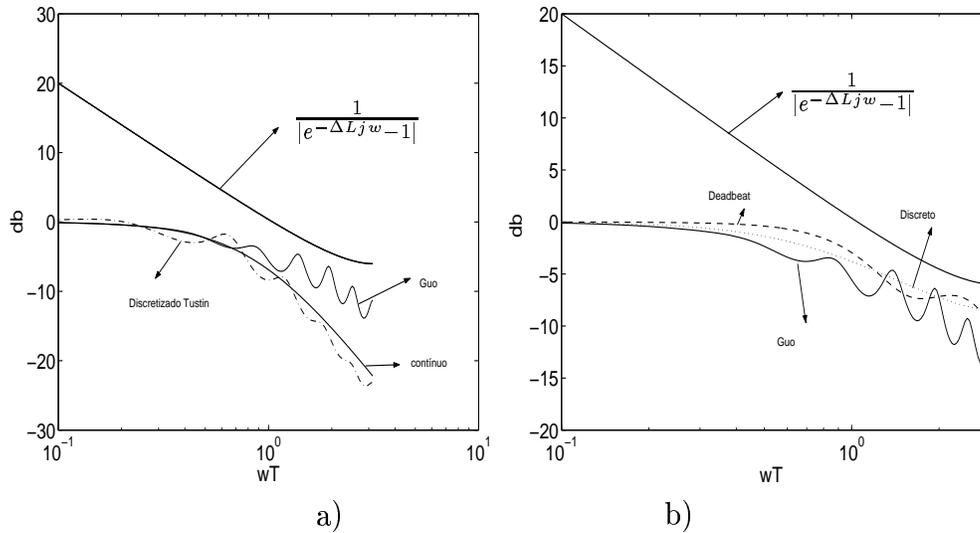


Figura 6.2: Análise de estabilidade robusta para erros de  $\pm 10\%$  na estimação do atraso (para plantas estáveis)

	$E_{IQ}$ ao seguimento de referência	$E_{IQ}$ à rejeição de perturbação
<i>Discreto</i>	11.50	2.63
<i>Discreto deadbeat</i>	11.50	2.62
<i>Guo</i>	11.51	2.63
<i>Tustin</i>	11.55	2.76

Tabela 6.1: Erro integral quadrático  $\Delta L = 0$  (para a planta estável).

pequenas e quando o atraso é mal estimado, estas melhoras desaparecem. Portanto a melhor alternativa é projetar o controlador no domínio discreto, uma vez que o procedimento de sintonia é mais simples.

## 6.2 Processo integrador com atraso dominante

Nesta seção é realizado um estudo comparativo dos controladores apresentados nos capítulos anteriores utilizando um modelo de um sistema integrador com atraso dominante.

A planta a ser estudada é dada pela função:

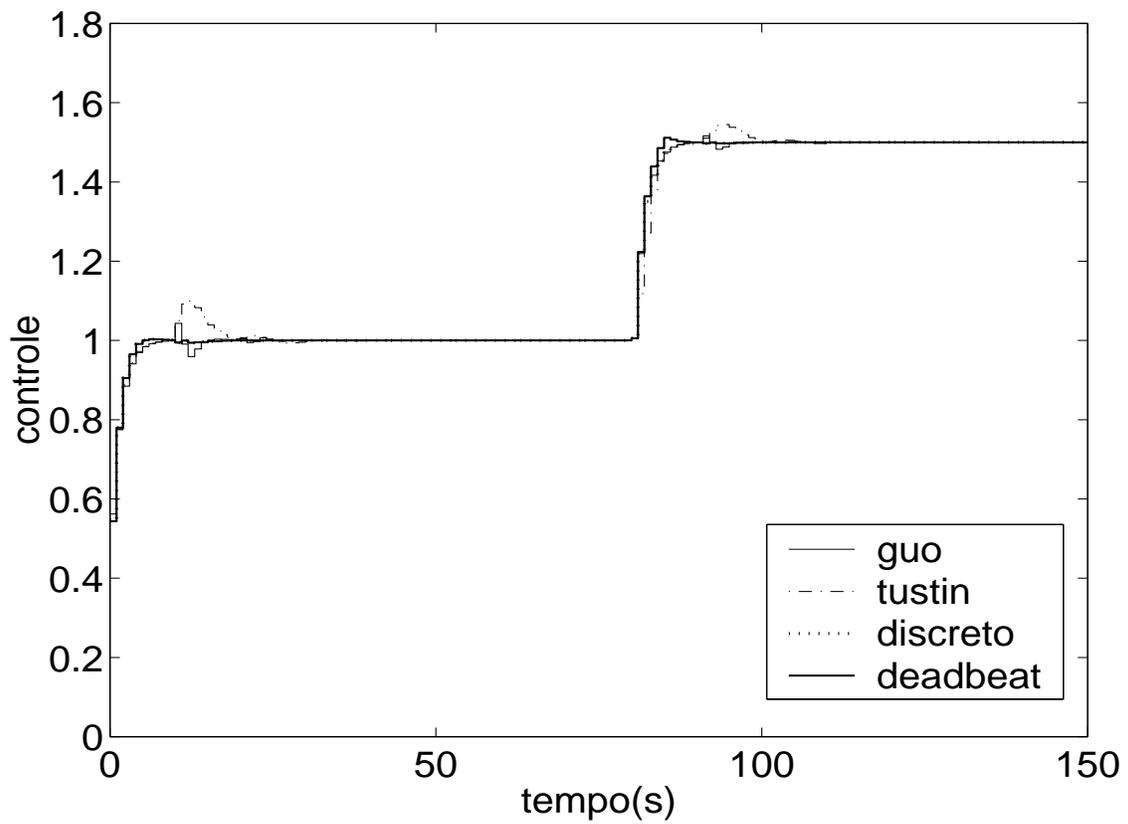
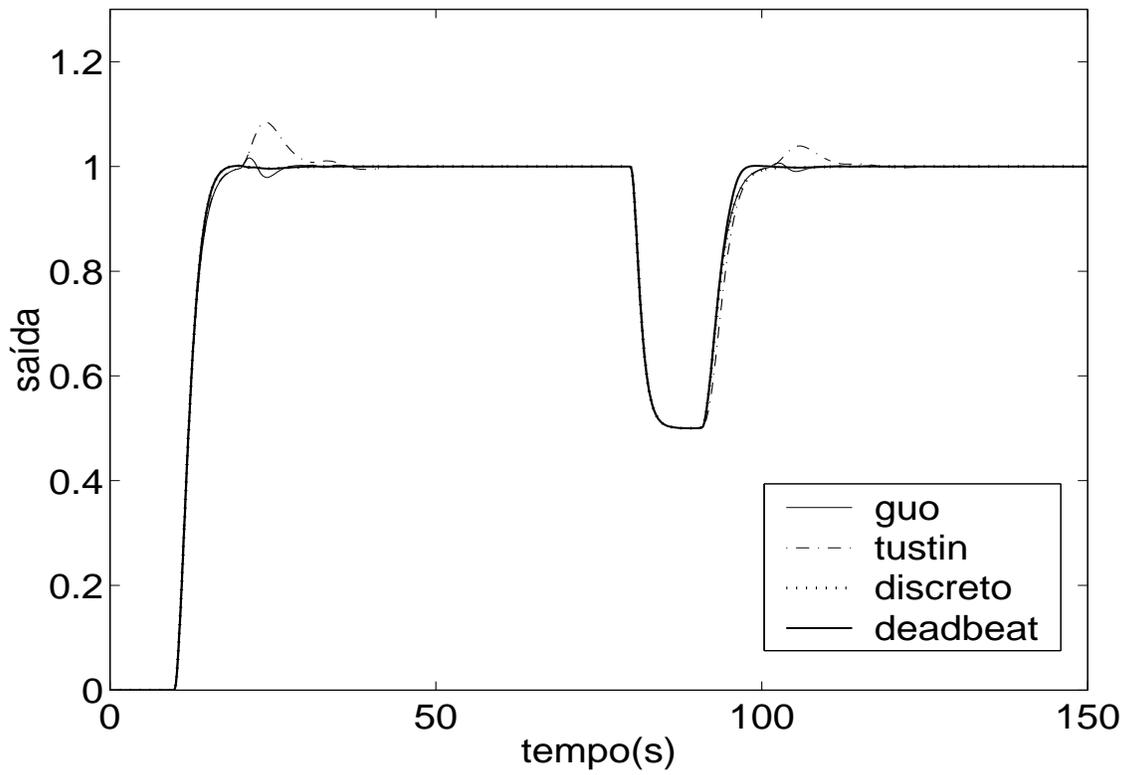


Figura 6.3: Resposta e controle com erro de estimação de 0% (para plantas estáveis).

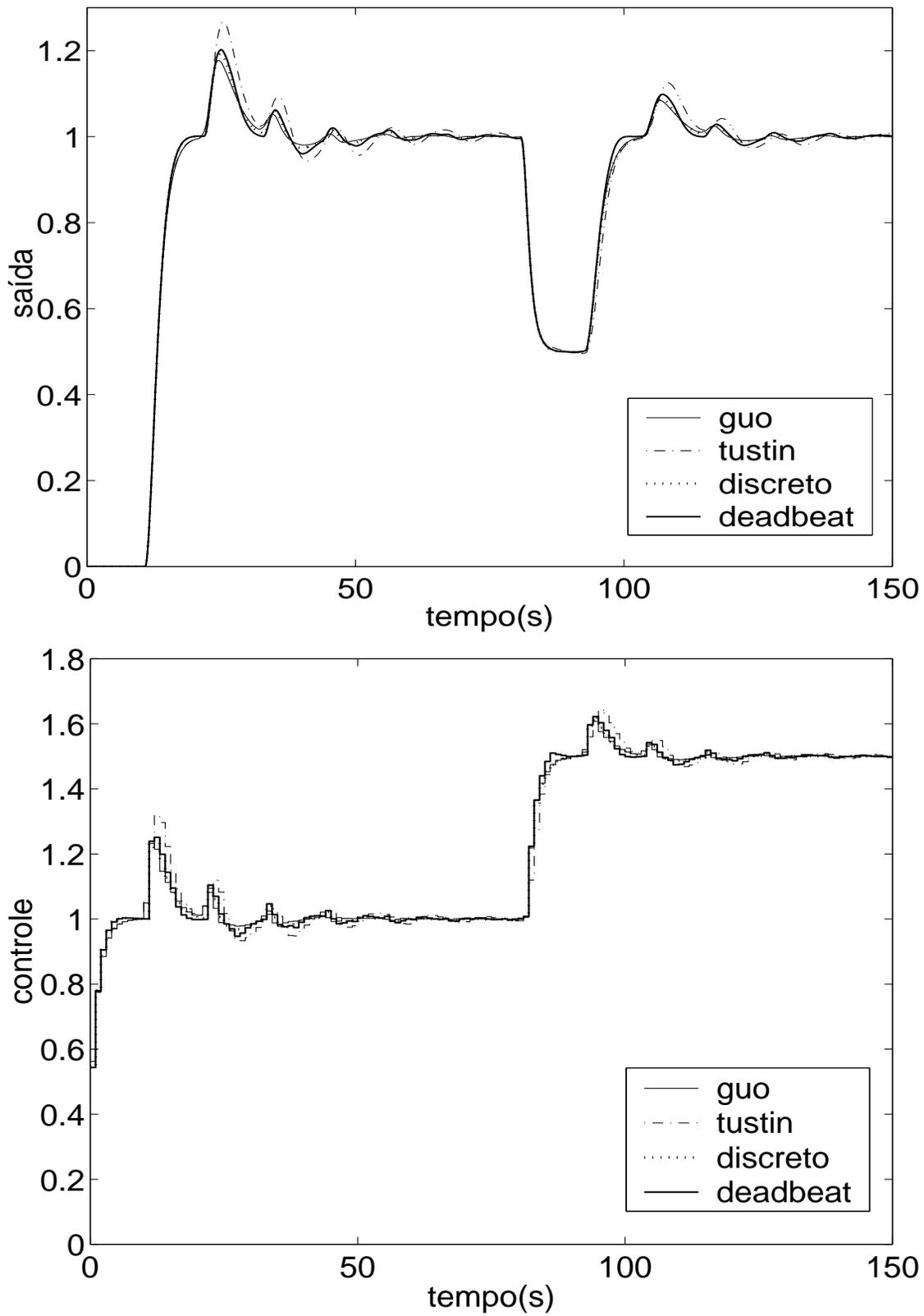


Figura 6.4: Resposta e controle, erro de estimação do atraso de 10% (plantas estáveis).

	$E_{IQ}$ ao seguimento de referência	$E_{IQ}$ à rejeição de perturbação
<i>Discreto</i>	12.65	2.91
<i>Discreto deadbeat</i>	12.65	2.90
<i>Guo</i>	12.64	2.91
<i>Tustin</i>	12.84	2.08

Tabela 6.2: Erro integral quadrático  $\Delta L = 10\%$  (para a planta estável).

$$G_p(s) = \frac{1}{s(s+1)(0.5s+1)(0.2s+1)(0.1s+1)}, Lp = 5s \quad (6.8)$$

Para simplificar o projeto de controle obtém-se um modelo de segunda ordem da planta através da resposta ao degrau, descrita por:

$$G_n(s) = \frac{1}{s(1.2s+1)}, L = 5.6s. \quad (6.9)$$

A especificação do controle é que o sistema deve manter a estabilidade robusta para variações do atraso de  $\pm 10\%$  e seja escolhido um período de amostragem apropriado que não comprometa a estabilidade do sistema.

Inicialmente faz-se a escolha do período de amostragem, considerando  $\pm 10\%$  nas variações do atraso, isso significa um erro de estimação de  $\pm 0.5s$  ( $\Delta L = 0.5s$ ). Então a melhor escolha do período de amostragem é:

$$T = \Delta L = 0.5s.$$

A seguir calcula-se a lei de controle digital através dos métodos propostos nos capítulos anteriores.

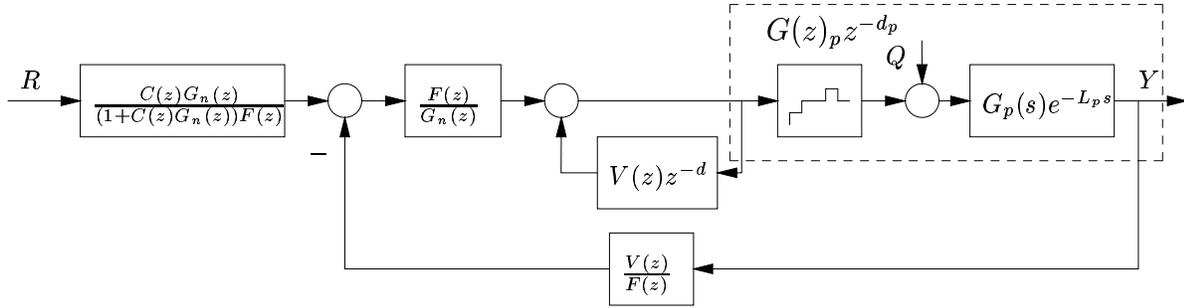


Figura 6.5: Esquema de controle discreto para plantas integradoras.

### 6.2.1 Controlador com observador de perturbações (caso Discreto)

No caso discreto é utilizado a estrutura da Figura 6.5, onde a planta é representada por uma função de transferência de segunda ordem, descrita como:

$$G_n(z) = \frac{0.09109z + 0.0793}{z^2 - 1.659z + 0.6592}.$$

Projeta-se o controle primário  $C(z)$  como um simples ganho, dado por:

$$C(z) = 0.2. \tag{6.10}$$

O filtro é projetado como

$$V(z) = \frac{1.2238z - 1.1589}{z - 0.7452}.$$

Este filtro satisfaz as condições de estabilidade robusta e rejeição de perturbações (ver Figura 6.6(b)).

### 6.2.2 Controlador com observador de perturbações (*Deadbeat*)

A diferença do cálculo de controle em relação ao caso anterior é a escolha do o filtro  $V(z)$ . Neste caso projeta-se como:

$$V(z) = \frac{a(1 - q_1(1 - z^{-d_1}) - q_2(1 - z^{-d_2}))}{z - b}$$

com  $q_1 = -1.75$ ;  $q_2 = 0.39$ ;  $d_1 = 13$ ;  $d_2 = 20$ . Estes parâmetros permitem um ajuste que mantenha a estabilidade robusta do sistema (Figura 6.6(b)).

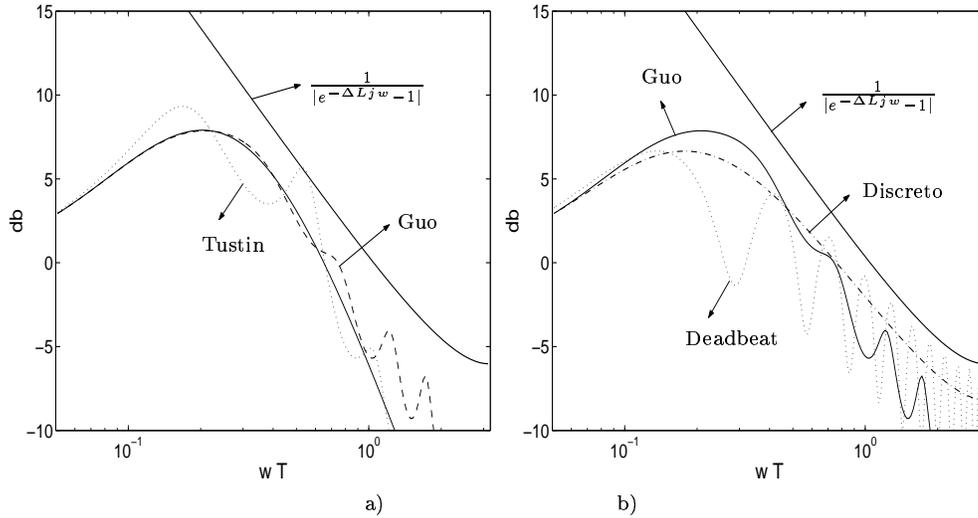


Figura 6.6: Análise de estabilidade robusta para erros de  $\pm 10\%$  na estimação do atraso

### 6.2.3 Controlador com observador de perturbações (caso Discretizado)

A estrutura de controle utilizada nesta seção está ilustrada na Figura 4.2. O controle primário  $C(s)$  pode ser ajustado como um simples ganho

$$C(s) = 0.2.$$

O filtro  $V(s)$  é projetado como:

$$V(s) = \frac{(3\lambda + L)s + 1}{(\lambda s + 1)^3}, \quad (6.11)$$

$$\lambda = 1.7, \quad (6.12)$$

onde  $\lambda$ , foi escolhida, para satisfazer as condições de estabilidade robusta inicialmente estabelecidas (ver Figura 6.6). Uma vez calculados os parâmetros do controlador procede-se à discretização.

Neste caso, com o objetivo de obter a melhor aproximação, utiliza-se o método de

Guo. A discretização pelo método de Guo é calculada em duas partes. Primeiramente o sinal  $u(kT)$  é calculado através da lei de controle

$$\begin{cases} x(kT + T) = e^{AT}x(kT) + M_0B_1r(kT) + M_Ay(kT) + M_By(kT - T) + M_Cy(kT - 2T) \\ u(kT) = N_2x(kT) + N_1r(kT) + N_3y(kT) + N_4y(kT - T) + N_5y(kT - 2T) \end{cases} \quad (6.13)$$

onde

$$e^{AT} = \begin{bmatrix} 0.64 & -0.14 & 0 & 0 & 0 \\ 0.21 & 0.98 & 0 & 0 & 0 \\ 0.06 & 0.06 & 0.52 & -0.13 & 0.25 \\ 0.02 & 0.02 & 0.38 & 0.96 & 0.07 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.74 \end{bmatrix}, M_0 = \begin{bmatrix} 0.41 & -0.04 & 0 & 0 & 0 \\ 0.06 & 0.50 & 0 & 0 & 0 \\ 0.02 & 0.02 & 0.38 & -0.04 & 0.07 \\ 0 & 0 & 0.11 & 0.50 & 0.01 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.44 \end{bmatrix},$$

$$M_A = \begin{bmatrix} 0.82 & -0.06 & 0 & 0 & 0 \\ 0.09 & 0.97 & 0 & 0 & 0 \\ 0.03 & 0.03 & 0.76 & -0.06 & 0.12 \\ 0 & 0 & 0.17 & 0.96 & 0.02 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.86 \end{bmatrix}, M_B = \begin{bmatrix} -0.59 & 0.03 & 0 & 0 & 0 \\ -0.05 & -0.68 & 0 & 0 & 0 \\ -0.02 & -0.0 & -0.56 & 0.03 & -0.07 \\ 0 & 0 & -0.09 & -0.67 & -0.01 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.62 \end{bmatrix},$$

$$M_C = \begin{bmatrix} 0.19 & -0.01 & 0 & 0 & 0 \\ 0.02 & 0.21 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.18 & -0.01 & 0.02 \\ 0 & 0 & 0.03 & 0.21 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.19 \end{bmatrix},$$

$N_1 = 0.12$ ;  $N_2 = [0.12 \ 0.12 \ -0.27 \ -0.26 \ 0.51]$ ;  $N_3 = -4.20$ ;  $N_4 = 3.05$ ;  $N_5 = -0.96$ .

Logo calcula-se o sinal  $v(kT)$  com a lei de controle

$$\begin{cases} x(kT + T) = e^{AvT}x(kT) + M_{V0}B_V f(kT) \\ v(kT) = \frac{C_V M_{V0}}{T}x(kT) + M_{V1}B_V f(kT) \end{cases}, \quad (6.14)$$

$$\text{onde } e^{AvT} = \begin{bmatrix} -1.77 & -0.52 & -0.2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.50 & 0 \end{bmatrix}, M_{V0} = \begin{bmatrix} 0.32 & -0.05 & -0.02 \\ 0.19 & 0.49 & -0.01 \\ 0.02 & 0.06 & 0.51 \end{bmatrix},$$

$$M_{V1} = \begin{bmatrix} 0.19 & -0.02 & -0.01 \\ 0.07 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0.02 & 0.25 \end{bmatrix}, C_V = [0 \ 1.09 \ 0.2], B_V = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

O sinal total de controle está composta pela soma  $u_T(kT) = u(kT) + v(kT)$ .

### 6.2.4 Resultado de simulações

Na Figura 6.6(a) ilustram-se as curvas de estabilidade robusta dos controladores discretizados pelos métodos de Guo e Tustin com o controlador contínuo. Nota-se que a estabilidade robusta do controlador discretizado pelo método de Guo é igual ao do controlador contínuo em baixas frequências, existindo diferença unicamente em frequências próximas a  $wT = \pi$ . O controlador discretizado pelo método de Tustin não satisfaz a condição de estabilidade robusta, consequentemente o sistema pode tornar-se instável para erros máximos de modelagem no atraso de +10%. Na Figura 6.6(b) ilustram-se as curvas de estabilidade robusta dos controladores discretos de Guo, Deadbeat e Discreto, ajustadas para manter a estabilidade robusta para o erro máximo de modelagem de +10%.

Para efeito de simulação considera-se que a referência inicialmente está em repouso e varia de 0 a 1, em  $t = 0s$  e em  $t = 70s$  aplica-se uma perturbação constante  $q = 0.5$  na entrada da planta.

	$E_{IQ}$ ao seguimento de referência	$E_{IQ}$ à rejeição de perturbação
<i>Discreto</i>	8.67	2.21
<i>Discreto deadbeat</i>	8.67	2.78
<i>Guo</i>	8.70	2.22
<i>Tustin</i>	8.62	2.45
<i>Contínuo</i>	8.70	2.22

Tabela 6.3: Erro integral quadrático  $\Delta L = 0$ . (para planta integradora)

Nas Figuras 6.7 e 6.8, comparam-se as respostas e o controle dos métodos de discretização de Tustin e Guo com o controlador contínuo. O desempenho do sistema é medido através do erro integral quadrático e é ilustrado na tabela 6.3 para  $\Delta L = 0$  e na tabela 6.4 para  $\Delta L = 10\%$ . Observa-se que através do método de discretização de Guo, obtém-se uma resposta bastante aproximada ao do controlador contínuo, da mesma forma observa-se uma melhor resposta que o controle discretizado pelo método de Tustin o qual torna-se instável para erros de modelagem.

Finalmente nas Figuras 6.9 e 6.10 comparam-se as respostas utilizando o método de discretização de Guo e os métodos de projeto Discreto e discreto *Deadbeat*.

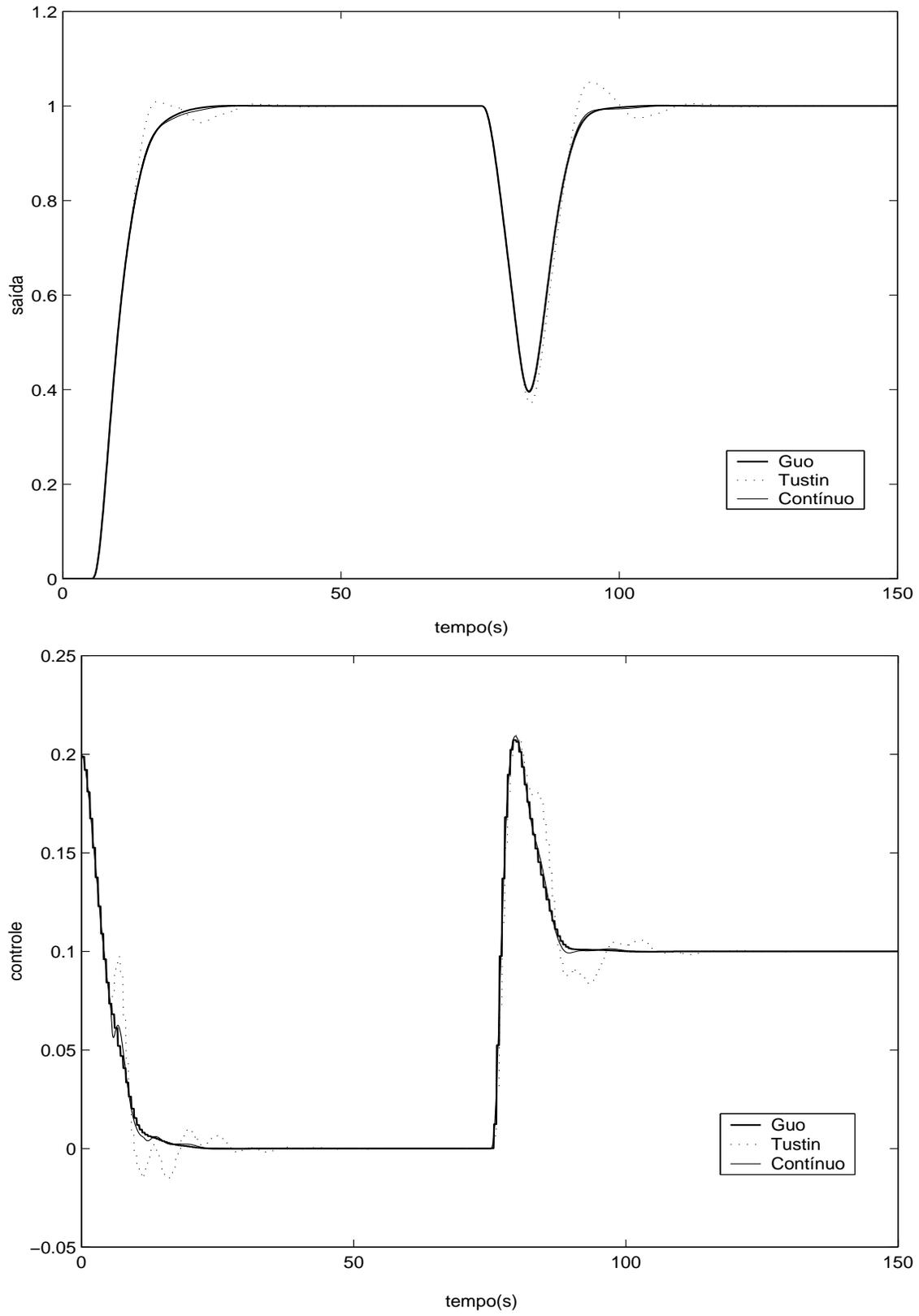


Figura 6.7: Erro de estimação do atraso = 0 (plantas integradoras).

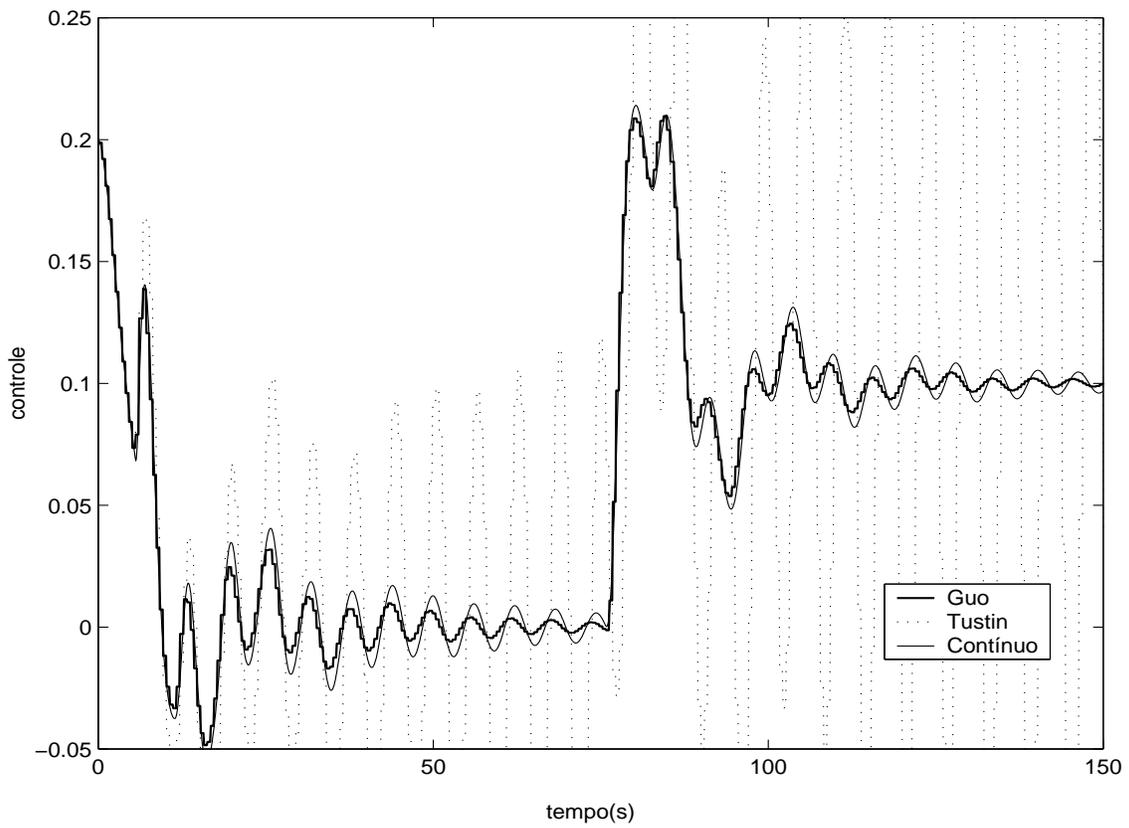
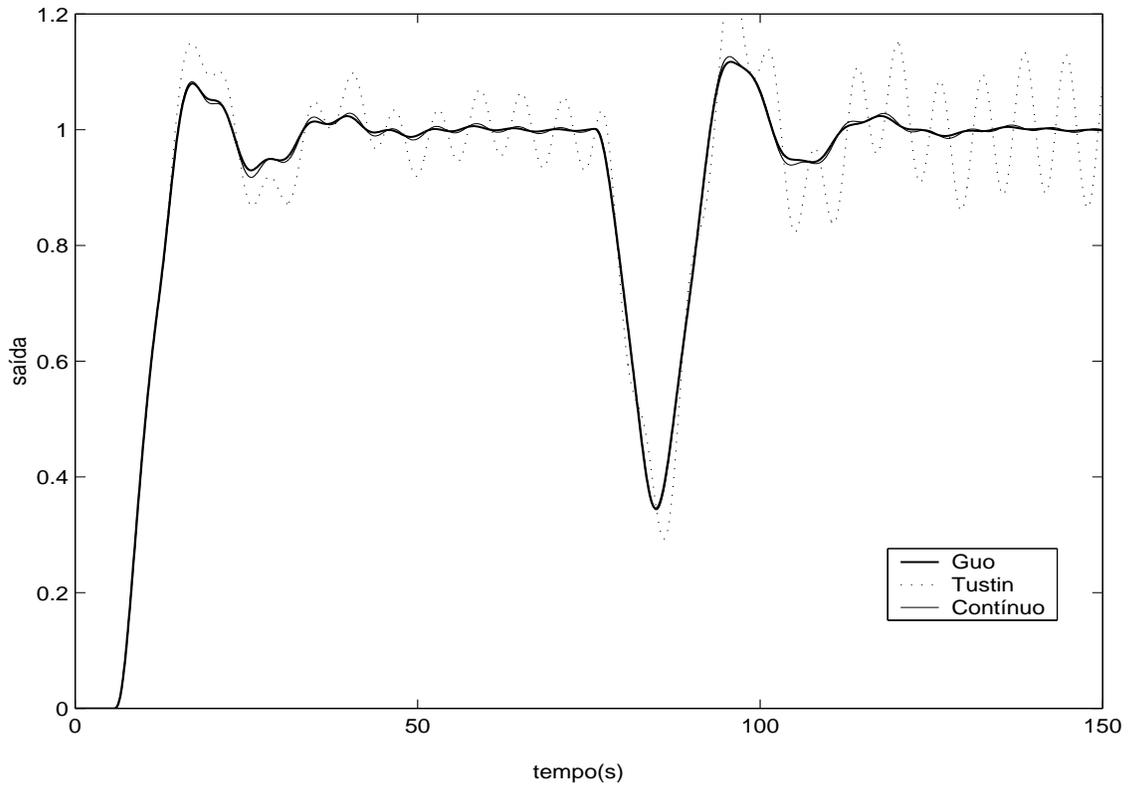


Figura 6.8: Erro de estimação do atraso = 0.5 (plantas integradoras).

	$E_{IQ}$ ao seguimento de referência	$E_{IQ}$ à rejeição de perturbação
<i>Discreto</i>	9.12	2.70
<i>Discreto deadbeat</i>	9.12	3.35
<i>Guo</i>	9.20	2.82
<i>Tustin</i>	9.42	6.61
<i>Contínuo</i>	9.20	2.82

Tabela 6.4: Erro integral quadrático  $\Delta L = 10\%$  (para a planta integradora).

Observa-se um comportamento quase igual do controlador de Guo, e do controlador calculado pelo projeto Discreto e finalmente com um desempenho menor o controlador discreto Deadbeat quando o erro de modelagem é zero. As melhoras de um método em relação ao outro não são mais significativas quando existem erros na estimação do atraso.

### 6.3 Conclusões

Se o projeto de controle foi realizado no domínio contínuo, então deve ser aplicado um método de discretização que garanta as propriedades de estabilidade e resposta do sistema original. O controlador discretizado pelo método de Guo permite manter estas características.

Se ainda não for definido o método a ser aplicado, então é conveniente utilizar algum projeto de controle discreto, uma vez que a estabilidade robusta pode ser especificada diretamente, evitando os problemas que pode acarretar a discretização.

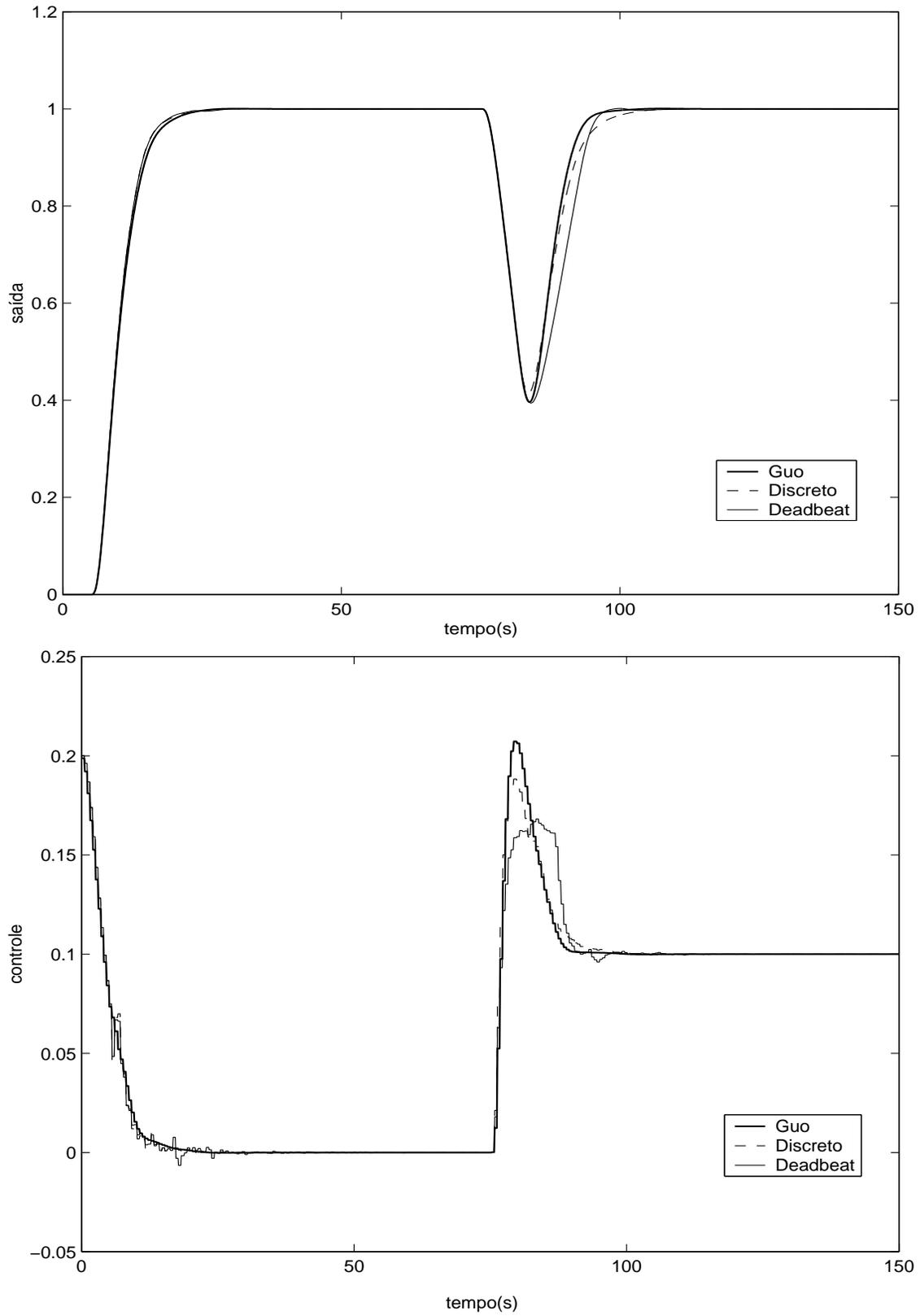


Figura 6.9: Erro de estimação do atraso = 0 (plantas integradoras).

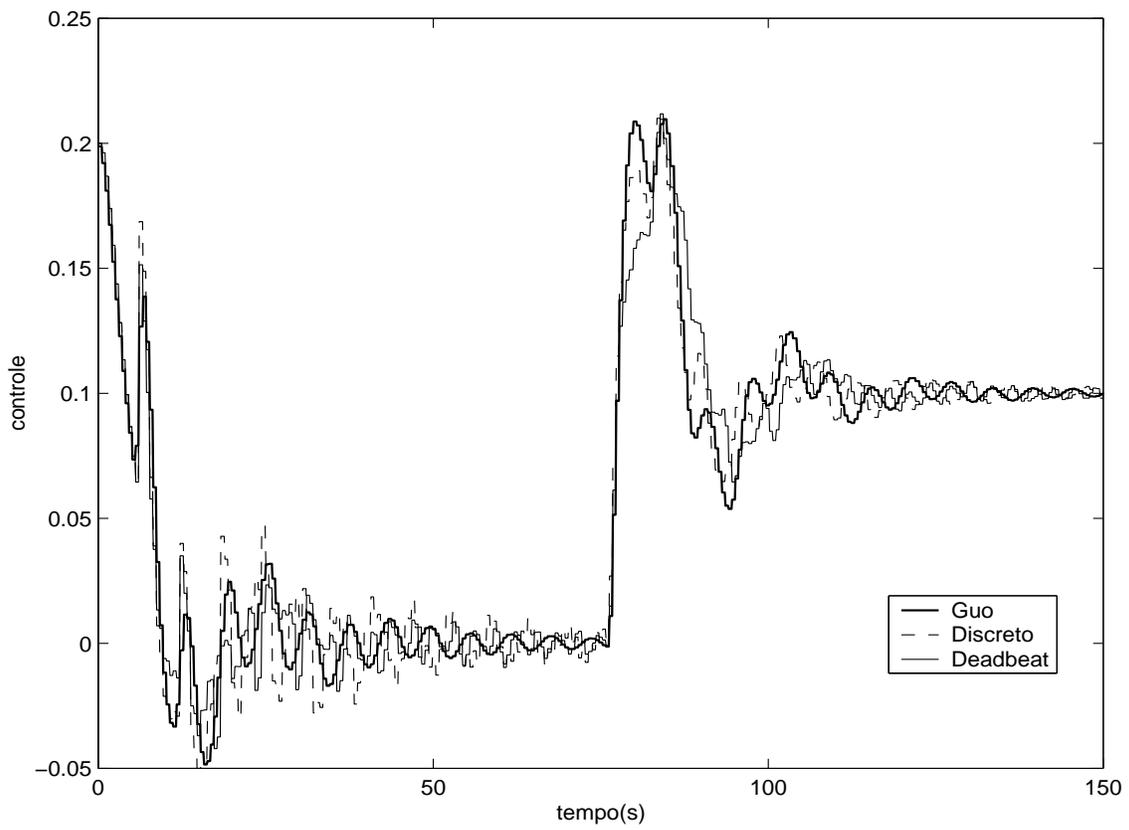
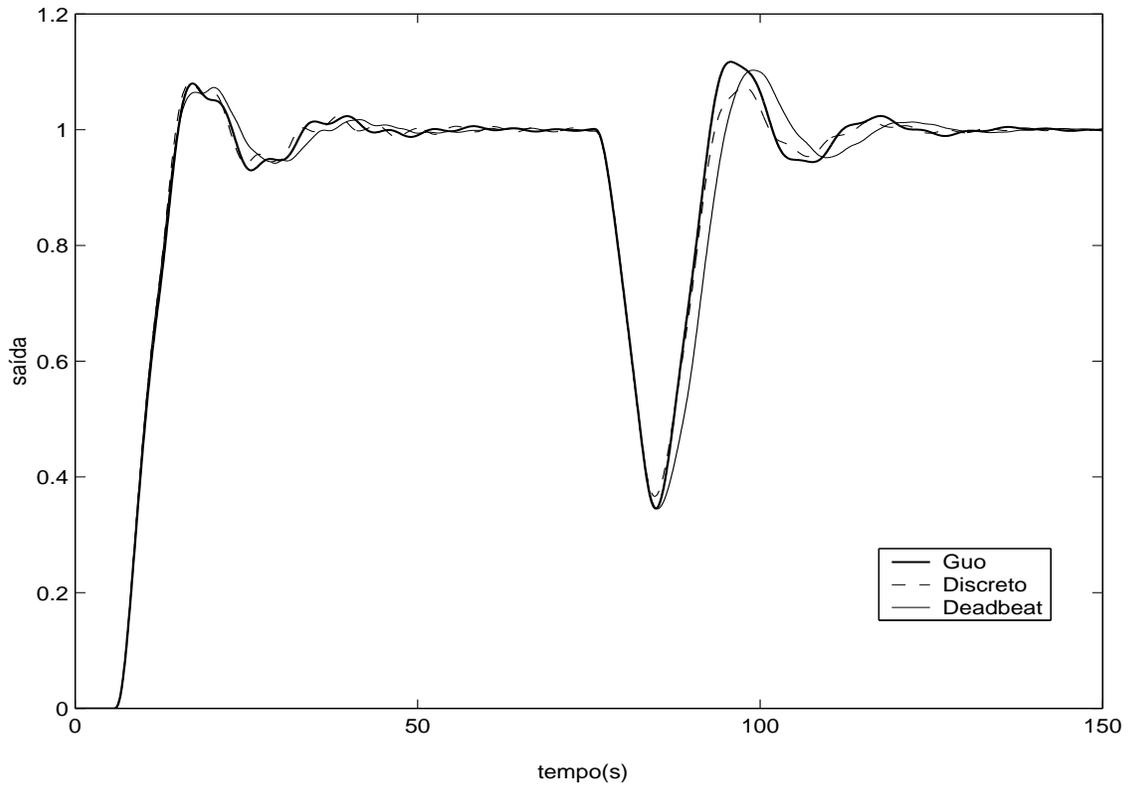


Figura 6.10: Erro de estimação do atraso = 0.5 (plantas integradoras).

# Capítulo 7

## Conclusão e Perspectivas

A maioria dos compensadores de tempo morto apresentados na literatura propõem soluções de controle no domínio contínuo sem se preocupar com os aspectos de implementação em tempo discreto. Neste trabalho foram estudados métodos de cálculo de controle digital para plantas com grandes atrasos a partir de duas concepções. A primeira através do projeto de controle no domínio discreto. A segunda através do projeto de controle no domínio contínuo e logo discretizado. O estudo coloca em evidencia as vantagens e desvantagens de cada uma destas concepções. Considera-se também como parte fundamental deste projeto a escolha do período de amostragem.

As principais contribuições deste trabalho são:

- O desenvolvimento de uma metodologia de projeto de controle discreto de plantas monovariáveis com grandes atrasos. O estudo considerou como especificações o seguimento de referências, rejeição de perturbações e robustez. O estudo considerou também modelos de plantas com atraso estáveis e integradoras uma vez que na maioria dos casos reais as plantas podem ser aproximadas por esses modelos.
- Foi aplicado o método de Guo (Guo et al. 2000) para a discretização de controladores de dois graus de liberdade para plantas com atraso permitindo que o controlador mantenha as características originais. Os resultados foram comparados em simulações com metodologias de discretização clássicos mostrando claramente um melhor desempenho do controlador proposto.
- Foi proposta uma metodologia simples e inovadora da escolha do período de amostragem de sistemas com atraso dominante através do estudo da robustez e o com-

portamento. Esta metodologia de escolha permite manter as características de estabilidade robusta comparada com sistemas com um período de amostragem muito pequeno.

Como perspectivas de trabalhos futuros podem-se citar

- Aplicação dos controladores estudados em plantas reais.
- Generalização de alguns resultados no caso multivariável.

# Referências Bibliográficas

- Astrom, K. e Hagglund, T. (1995). *PID Controllers: Theory, Design and Tuning*, Instrument Society of America.
- Astrom, K., Hang, C. e Lim, B. (1994). A new smith predictor for controlling a process with a integrator and long dead-time, *IEEE Transactions on Automatic Control* **39**(2): 343–345.
- Guo, S., Wang, W. e Shieh, L. (2000). Discretisation of two degree-of-freedom controller and system with state, and output delays, *IEE Proceedings - Control Theory and Applications* **147**(1): 87–96.
- Hagglung, T. (1996). An industrial dead-time compensating PI controller, *Control Engineering Practice* **4**(6): 749–756.
- Holt, B. e Morari, M. (1985). Design of resilient processing plants. vi: The effect of right-half-plane zeros on dynamic resilience, *Chem. Eng. Science* **40**(1): 59–74.
- Huang, H., Chen, C., Chao, Y. e Chen, P. (1990). A modified SP with an approximated inverse of dead time, *AIChE journal* **36**: 1025–1031.
- Matausek, M. e Micic, A. (1996). A modified smith predictor for controlling a process with a integrator and long dead-time, *IEEE Transactions on Automatic Control* **41**(8): 1199–1203.
- Morari, M. e Zafiriou, E. (1989). *Robust Process Control*, Prentice Hall.
- Normey-Rico, J., Bordons, C. e Camacho, E. (1997). Improving the robustness of dead-time compensating PI controllers, *Control Engineering Practice* **5**(6): 801–810.
- Normey-Rico, J. e Camacho, E. (1999). Robust tuning of dead-time compensators for processes with an integrator and long dead-time, *IEEE Transactions on Automatic Control* **44**(8): 1597–1603.

- Normey-Rico, J. e Camacho, E. (2002). A unified approach to design dead-time compensators for stable and integrative processes with dead-time, *IEEE Transactions on Automatic Control* **47**(2).
- Normey-Rico, J. E. (1999). *Predicción para control*, Escuela Superior de Ingenieros de la Universidad de Sevilla.
- Palmor, Z. (1980). Stability properties of smith dead time compensator controller, *Int. J. Control* **32**: 937–949.
- Palmor, Z. (1996). *The Control Handbook: Chapters 10.8-10.10*, CRC Press and IEEE Press.
- Palmor, Z. e Powers, D. (1985). Improved dead time compensator controllers, *AIChE-Journal* **31**: 215–221.
- Santacesaria, C. e Scattolini, R. (1993). Easy tuning of smith predictor in presence of delay uncertainty, *Automatica* **29**: 1595–1597.
- Smith, O. J. M. (1957). Closed control of loops with dead-time, *Chem. Eng. Progress* **53**: 217–219.
- Torrico, B. C. e Normey-Rico, J. E. (2002). Discretización de controladores de dos grados de libertad para procesos integradores con retardo, *XIV Congresso brasileiro de automática* p. 2438–2443.
- Torrico, B. C., Pagano, D. J. e Normey-Rico, J. E. (2002). Janelas de estabilidade em sistemas com grandes atrasos e saturação, *XIV Congresso brasileiro de automática* p. 104–109.
- Watanabe, K. e Ito, M. (1981). A process-model control for linear systems with delay, *IEEE Transactions on Automatic Control* **26**(6): 1261–1269.
- Zhang, W. D. e Sun, Y. X. (1996). Modified smith predictor for controlling integrator/time delay processes, *Ind. Eng. Chem. Res.* **35**: 2769–2772.
- Zhong, Q.-C. e Li, H.-X. (2003). Control of integral processes with dead time. part 3: Dead-beat disturbance response, *IEEE Transactions on, Automatic Control* **48**(1): 153 –159.

- Zhong, Q. e Normey-Rico, J. (2002). Control of integral processes with dead-time. Part 1: Disturbance observer-based 2 DOF control scheme , *Control Theory and Applications, IEE Proceedings* **149**(4): 285–290.