

ERLON CRISTIAN FINARDI

ALOCAÇÃO DE UNIDADES GERADORAS
HIDRELÉTRICAS EM SISTEMAS HIDROTÉRMICOS
UTILIZANDO RELAXAÇÃO LAGRANGEANA E
PROGRAMAÇÃO QUADRÁTICA SEQUENCIAL

FLORIANÓPOLIS

2003

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA
ELÉTRICA

ALOCAÇÃO DE UNIDADES GERADORAS
HIDRELÉTRICAS EM SISTEMAS HIDROTÉRMICOS
UTILIZANDO RELAXAÇÃO LAGRANGEANA E
PROGRAMAÇÃO QUADRÁTICA SEQUENCIAL

Tese submetida à
Universidade Federal de Santa Catarina
como parte dos requisitos para a
obtenção do grau de Doutor em Engenharia Elétrica.

ERLON CRISTIAN FINARDI

Florianópolis, Junho de 2003.

" Não há linguagem mais universal e mais simples, mais livre de erros e de obscuridades, isto é, mais digna de expressar as relações invariáveis das coisas naturais [...] [A matemática] parece ser uma faculdade da mente humana destinada a suplementar a brevidade da vida e a imperfeição dos sentidos "

Joseph Fourier, Teoria Analítica do Calor, Discurso Preliminar, 1822.

Aos meus pais, por tudo.

*À Sinara,
pelo amor, apoio e incentivo.*

AGRADECIMENTOS

O estudo apresentado neste trabalho foi realizado no Laboratório de Planejamento de Sistemas de Energia Elétrica (LabPlan), vinculado ao curso de Pós-Graduação de Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC). Durante toda a jornada recebi o auxílio de diversas pessoas e gostaria de aproveitar esta oportunidade para expressar minha gratidão para com as mesmas.

Agradeço, em especial, ao meu orientador, o Prof. Edson Luiz da Silva, pela oportunidade oferecida, sugestão do tema, inspirada orientação, amizade e constante apoio durante todo o trabalho.

Ao Prof. Ildemar Cassana Decker que sempre forneceu apoio incondicional para o crescimento como pesquisador do LabPlan.

Ao Prof. Hans Helmut Zürn, pelo apoio irrestrito desde os tempos de graduação, bem como pelas sugestões finais para a elaboração do trabalho. A proximidade de pessoas iluminadas nos transforma em seres privilegiados. O Prof. Hans é uma dessas pessoas.

Aos demais professores do LabPlan e do Laboratório de Sistemas de Potência (Labspot) pela importante participação na formação de material humano proporcionada.

À Dr^a. Maria Elvira Piñeiro Maceira, do Centro de Pesquisas em Energia Elétrica (CEPEL), pelo acompanhamento, apoio desde os tempos de mestrado e ainda, por sempre acreditar no potencial de trabalho das pessoas vinculadas ao LabPlan.

Ao Dr. Albert Cordeiro Geber de Melo, do CEPEL, pelas valorosas contribuições fornecidas na fase final do trabalho, principalmente àquelas necessárias para a elaboração de um documento tecnicamente mais claro.

À Prof^a. Cláudia Alejandra Sagastizábal, do Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), pela suave orientação ao longo do intrincado mundo da programação matemática. Sua participação foi fundamental, desde a construção e concepção dos principais algoritmos desenvolvidos no trabalho, até na disponibilidade e auxílio no uso dos pacotes de programação quadrática e otimização não-diferenciável. Difícilmente teríamos alcançado o mesmo nível de resultados se a Prof^a. Cláudia não tivesse participado do trabalho.

Ao Dr. João José Cascaes Dias, da Tractebel Energia, pelo fornecimento de dados importantes e interesse em estar sempre próximo da universidade. Suas contribuições ligadas aos aspectos práticos do problema foram muito importantes e bem vindas para o desenvolvimento aqui realizado.

Ao CEPEL, que apoiou tecnicamente e financeiramente este projeto, e aos seus pesquisadores com os quais tive oportunidade de trabalhar: Alexandre Belloni, André Diniz, Luiz Carlos, Edgardo, Dr^a. Fernanda Costa, Leslie, Luciano e Vítor. Agradeço a todos e, em especial, ao André Diniz que muito apoiou no fornecimento de dados e na implementação computacional, e ao Leslie, cujas idéias sempre são fontes de reflexão e inspiração.

Ao Prof. Chung-Li Tseng, do Departamento de Engenharia Civil e Ambiental da Universidade de Maryland, pelas valorosas contribuições nos aspectos de modelagem e formulação do problema.

Ao Prof. José Mario Martinez, do Departamento de Matemática Aplicada da Universidade de Campinas, por disponibilizar e dar suporte ao uso do pacote de programação não-linear EASY!.

À todos os diversos colegas de mestrado e doutorado que tenho conhecido e trabalhado nesses anos de LabPlan. Essa convivência serviu para me mostrar que a formação de recursos humanos de qualidade é um excelente caminho para a construção de uma vida melhor.

Finalmente, esta pesquisa contou com o suporte financeiro do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

Resumo da Tese apresentada à UFSC como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Engenharia Elétrica.

ALOCAÇÃO DE UNIDADES GERADORAS HIDRELÉTRICAS EM SISTEMAS HIDROTÉRMICOS UTILIZANDO RELAXAÇÃO LAGRANGEANA E PROGRAMAÇÃO QUADRÁTICA SEQUENCIAL

Erlon Cristian Finardi

Junho/2003

Orientador: Edson Luiz da Silva, D. Eng.
Área de Concentração: Planejamento de Sistemas de Energia Elétrica.
Palavras-chave: Sistemas Hidrotérmicos, Programação da Operação Energética, Relaxação Lagrangeana, Programação Quadrática Sequencial.
Número de Páginas: 217.

O planejamento da operação de sistemas hidrotérmicos com predominância hidrelétrica possui características matemáticas as quais determinam que o problema correspondente seja solucionado de forma aproximada a partir de três outros problemas: planejamento da operação de médio prazo e de curto prazo, e a programação da operação energética. Os problemas referentes às etapas de médio e curto prazo possuem um ferramental bastante desenvolvido, sendo resultado do desenvolvimento técnico-metodológico obtido no setor elétrico ao longo das três últimas décadas. Todavia, desenvolvimento semelhante não ocorreu com o problema da programação, cujas principais contribuições têm sido restritas a sistemas termelétricos. Este trabalho visa fornecer uma contribuição para os aspectos ligados a formulação e solução do modelo da programação da operação, onde a modelagem do sistema hidrelétrico recebe atenção especial devido à predominância desse recurso no sistema brasileiro. Assim, neste trabalho é proposta uma modelagem detalhada da função de produção das unidades hidrelétricas que leva em consideração as não-linearidades presentes na cota de jusante, perdas hidráulicas, rendimentos do grupo turbina-gerador e, adicionalmente, a existência de múltiplos estados operativos relacionados com as zonas proibidas de operação. O problema resultante é de natureza não-linear, inteira-mista e de grande porte. Nesse sentido, este trabalho faz uso de diversas técnicas de programação matemática que decompõem o problema original em uma série de subproblemas mais simples de serem solucionados. Uma configuração hidrelétrica realista é utilizada para ilustrar o desempenho da estratégia de solução, aplicada ao problema hidrelétrico, onde as viabilidades conceitual e prática do modelo proposto podem ser comprovadas a partir da qualidade das soluções e dos tempos de processamento observados.

Abstract of Thesis presented to UFSC as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor in Electrical Engineering

HYDRO UNIT COMMITMENT IN HYDROTHERMAL SYSTEMS USING LAGRANGIAN RELAXATION AND SEQUENTIAL QUADRATIC PROGRAMMING

Erlon Cristian Finardi

June/2003

Advisor: Edson Luiz da Silva, D. Eng.
Area of Concentration: Electrical Systems Planning.
Keywords: Short-Term Hydrothermal Coordination, Lagrangian Relaxation, Sequential Quadratic Programming.
Number of pages: 217.

The operation planning problem of hydrothermal systems with hydroelectric predominance has a mathematical characteristic that requires the problem to be decomposed into three subproblems: long-term and medium-term operation planning and the short-term hydrothermal coordination. Up to now there is a considerable amount of developed tools for the first two problems, as a result of the technical-methodological development obtained over the last three decades. Nevertheless the same development did not occur with respect to the short-term problem, whose main contributions have been restricted to thermoelectrical systems. This work proposes a contribution to the formulation and solution of the short-term model, where the hydroelectric modeling receives special attention due to the predominance of that resource in the Brazilian system. This work proposes a detailed modeling for the hydroelectric production function associated with hydro plants that take into account the nonlinearity presents in the tailrace level, penstock losses, unit efficiency and, additionally, the existence of multiple operative states related to forbidden operative zones. The resulting problem is nonlinear, mixed-integer and large scale. In this direction, this work makes use of diverse mathematical programming techniques that decompose the original problem into a set of simpler subproblems to be solved. A realistic hydroelectric configuration is used to illustrate the performance of the solution strategy, when applied to the hydroelectric problem, aiming to show the conceptual and practical feasibility of the developed model by means of the high quality of the solutions and the reasonable computing time observed.

Sumário

CAPÍTULO 1: <i>Introdução</i>	<u>1</u>
CAPÍTULO 2: <i>O Problema da Programação da Operação Energética</i>	<u>5</u>
2.1 Introdução	5
2.2 Planejamento da Operação de Sistemas Hidrotérmicos	6
2.3 O Problema da Programação da Operação Energética: Revisão Bibliográfica	19
2.4 Contribuições do Trabalho e Conclusões	25
CAPÍTULO 3: <i>Operação de Centrais Hidrelétricas e Termelétricas</i>	<u>27</u>
3.1 Introdução	27
3.2 Unidades Hidrelétricas	28
3.2.1 Altura de Queda Líquida	30
3.2.2 Rendimento do Grupo Turbina-Gerador	38
3.2.3 Vazão Turbinada	48
3.2.4 Análise da Função de Produção	49
3.2.5 Custos Operacionais	53
3.3 Unidades Termelétricas	54
3.4 Conclusões	57
CAPÍTULO 4: <i>Modelagem do Problema da Programação da Operação Energética</i>	<u>59</u>
4.1 Introdução	59
4.2 Sistema Hidrelétrico	60
4.2.1 Restrição da Conservação da Massa da Água nos Reservatórios	60
4.2.2 Limites do Volume Armazenado e da Vazão Vertida nos Reservatórios	62
4.2.3 Função de Custo Futuro	62
4.2.4 Limites de Potência das Unidades Geradoras	63
4.2.5 Restrições de Reserva Hidrelétrica	64
4.3 Sistema Termelétrico	65
4.3.1 Restrições de Capacidade	65
4.3.2 Minimum Uptime and Downtime	66
4.3.3 Restrições de Rampa	66
4.3.4 Condições Iniciais	68
4.3.5 Restrições de Reserva Termelétrica	68
4.3.6 Custos Operativos das Unidades Termelétricas	68
4.4 Formulação do Problema	69
4.5 Conclusões	72

Capítulo 5: <i>Estratégia de Solução do Problema da Programação da Operação Energética</i>	75
5.1 Introdução	75
5.2 Relaxação Lagrangeana	76
5.3 Relaxação Lagrangeana Aplicada ao Problema da Programação da Operação Energética	88
5.4 Subproblemas Primais	104
5.4.1 Subproblema de Alocação de Unidades Termelétricas	105
5.4.2 Subproblema de Alocação de Unidades Hidrelétricas	109
5.5 Conclusões	111
Capítulo 6: <i>Tópicos Especiais em Programação Matemática</i>	115
6.1 Introdução	115
6.2 Otimização Não-Diferenciável	116
6.2.1 Método do Subgradiente	117
6.2.2 Método dos Planos Cortantes	118
6.2.3 Método dos Planos Feixes	119
6.3 Programação Quadrática Seqüencial	120
6.3.1 Direção de Busca	122
6.3.2 Globalização do Algoritmo	125
6.3.3 Matriz Hessiana do Modelo Quadrático	127
6.3.4 Algoritmo	130
6.4 Conclusões	132
Capítulo 7: <i>Implementação Computacional</i>	133
7.1 Introdução	133
7.2 Configuração Hidrelétrica	136
7.3 Desempenho Computacional	143
7.3.1 Otimização do Problema Dual	143
7.3.2 Subproblemas de Alocação de Unidades Geradoras Hidrelétricas	170
7.3.3 Problemas de Programação Não-Linear	176
7.4 Conclusões	189
Capítulo 8: <i>Conclusões</i>	195
Apêndice A: <i>Derivadas Relacionadas à Função de Produção das Unidades Hidrelétricas</i>	201
Apêndice B: <i>Decomposição Alternativa Para a Alocação de Unidades Hidrelétricas</i>	203
Referências Bibliográficas	207



CAPÍTULO

1

Introdução

ESTE trabalho tem como foco principal o problema da programação da operação energética, o qual é integrante da cadeia de modelos utilizada na operação ótima do sistema hidrotérmico brasileiro. O objetivo aqui consiste em contribuir para o desenvolvimento da modelagem desse problema bem como sua solução, com ênfase no sub-problema hidrelétrico.

O problema da programação da operação energética visa determinar quais unidades devem operar, e os respectivos níveis de geração, levando em conta um conjunto de restrições, de modo que o mínimo custo de operação seja alcançado. Neste trabalho modela-se o referido problema, o qual se caracteriza por ser do tipo não-linear inteiro-misto. Para resolvê-lo, aplica-se a Relaxação Lagrangeana a qual possibilita a decomposição do problema

original em subproblemas mais simples de serem solucionados. Neste trabalho, especial atenção é dada ao subproblema hidrelétrico a partir da concepção de um esquema de solução que faz uso da Programação Quadrática Seqüencial, mostrando-se ainda o esquema de integração deste subproblema com o restante do problema. A base teórica utilizada nesta pesquisa, bem como os resultados obtidos são apresentados nos capítulos seguintes.

O próximo capítulo define, de forma mais precisa, o foco deste trabalho, cuja origem pode ser encarado, sob ponto de vista matemático, como resultado de uma decomposição comumente utilizada para resolver o problema original do planejamento da operação. Esse capítulo realiza também uma abordagem teórica de alguns aspectos conceituais que envolvem tanto o problema de planejamento quanto da programação da operação. Ainda pode ser visto, além das contribuições deste trabalho, uma revisão bibliográfica, destacando-se alguns modelos de programação energética encontrados na literatura, e evidenciando a carência de modelos existente para o caso mais específico tratado que é o brasileiro.

Na seqüência, o Capítulo 3 mostra como são representadas as unidades geradoras no problema da programação da operação energética. Devida a predominância hidrelétrica do sistema brasileiro, maior ênfase é dada à modelagem de unidades dessa natureza, mediante a apresentação de suas principais características básicas operativas. Destaque também é dado à modelagem das unidades termelétricas, visto que as mesmas apresentam restrições operativas que devem ser adequadamente representadas no problema da programação, com propósito de evitar que sejam obtidos resultados sem qualidade prática.

Uma vez apresentada a modelagem das unidades passa-se então para a formulação do problema em referência. Essa tarefa é realizada no Capítulo 4, onde estão mostradas, de forma estruturada, as equações matemáticas que regem o comportamento físico dos reservatórios e unidades geradoras. Da mesma forma, podem ser vistas nesse capítulo as funções que representam os custos associados à operação das unidades geradoras, os quais servem como guia para o uso racional da energia.

O Capítulo 5 dedica espaço para o procedimento de solução do problema formulado no capítulo anterior. A estratégia adotada é baseada na decomposição do problema original em subproblemas mais simples de serem solucionados. A idéia consiste em utilizar a estrutura temporal e espacial do problema de uma forma conveniente, no sentido de criar subpro-

blemas menores que, resolvidos coordenadamente, resolvem o problema original ou, conforme será visto ao longo deste trabalho, fornecem uma solução aproximada para o mesmo.

Devida à complexidade resultante, a estratégia adotada é composta por um conjunto de técnicas, de naturezas diferentes, as quais são utilizadas de forma integrada. Nesse sentido, no Capítulo 6 é realizada uma descrição das principais técnicas matemáticas utilizadas na decomposição empregada no Capítulo 5.

Por fim, a estratégia de solução é testada sob ponto de vista prático, cujos resultados são apresentados no Capítulo 7. Finalizando o trabalho, no Capítulo 8 são descritas as principais conclusões e sugestões para futuros desenvolvimentos na área.



CAPÍTULO

2

*O Problema da
Programação da
Operação Energética*

2.1 Introdução

O FOCO deste trabalho é o problema da programação da operação energética de sistemas hidrotérmicos. Sistemas dessa natureza, os quais detêm acentuada participação de recursos de origem hidrelétrica, devem, de alguma maneira, estabelecer um critério para o uso da água. Para realizar essa tarefa relevante, é necessário estudar o comportamento operativo do sistema tendo como base a disponibilidade futura da água nos reservatórios. A conjunção das atividades relativas ao estudo citado é comumente conhecida como planejamento da operação. Devido a uma série de características complexas, descritas em seguida, o planejamento da operação costuma ser realizado por meio da utiliza-

ção de uma cadeia de modelos, os quais visam decompor esse problema em uma série de subproblemas mais simples de serem manuseados.

A decomposição é temporal: quão maior for o horizonte de interesse, mais detalhadamente são tratadas as incertezas operativas. Nessa escala, o problema da programação é um dos subproblemas integrantes da cadeia, cujo horizonte de estudo é o menor dentre todos demais subproblemas.

Este capítulo inicia descrevendo a maneira pela qual genericamente um sistema hidrotérmico comumente é operado. Isso é necessário para situar o problema da programação na cadeia de estudos, bem como evidenciar a importância do planejamento da operação como uma das principais atividades de sustentação técnica e econômica de uma indústria (ou sistema) de energia elétrica. Neste capítulo é realizada também uma sucinta revisão bibliográfica, onde são destacados e analisados alguns trabalhos encontrados na literatura que têm algum grau de semelhança com o foco de interesse deste trabalho. Finalmente, na última seção, as contribuições deste trabalho, juntamente com algumas conclusões referentes a este capítulo, estão apresentadas.

2.2 Planejamento da Operação de Sistemas Hidrotérmicos

Operar economicamente um sistema de energia elétrica seja ele hidrelétrico, termelétrico ou hidrotérmico¹, significa determinar quais unidades geradoras, e os respectivos níveis de geração, devem ser utilizadas no atendimento à demanda, de forma que o custo operativo associado ao uso dessas unidades seja o mínimo possível. A operação econômica tem que levar em consideração as diversas restrições relacionadas à performance das unidades geradoras, bem como as restrições do sistema interligado, i.e., requisitos de reserva, operação de reservatórios, comportamento do sistema de transmissão, entre outros.

¹ Sistemas onde existe um misto de geração hidrelétrica e termelétrica.

Sistemas hidrotérmicos com substancial participação hidrelétrica, tal como é o caso brasileiro², podem usar a água armazenada nos reservatórios para atender a demanda, a fim de evitar gastos mais dispendiosos associados ao uso dos combustíveis das usinas termelétricas. Entretanto, nas usinas hidrelétricas a energia disponível é limitada pela capacidade de armazenamento dos respectivos reservatórios. Isto introduz uma relação direta entre uma decisão operativa tomada no presente e as conseqüências operativas ligadas a essa decisão. Em outras palavras, se os reservatórios forem deplecionados no presente, e um período com baixas afluições ocorrer no futuro, será necessário utilizar geração termelétrica para atender a demanda (existe a chance inclusive de não ser possível realizar todo esse atendimento por falta de energia). Em contrapartida, se os reservatórios são pouco utilizados, por meio do uso de geração termelétrica no presente, e ainda, um elevado volume de afluições vier a ocorrer, o sistema fatalmente se defrontará com a situação de vertimento, que claramente representa uma situação de desperdício de energia e, conseqüentemente, incorre-se em um incremento no custo total de operação. Esta relação direta entre decisões e conseqüências, comumente encontrada na operação de sistemas hidrotérmicos, é ilustrada na Figura 2.2.1.

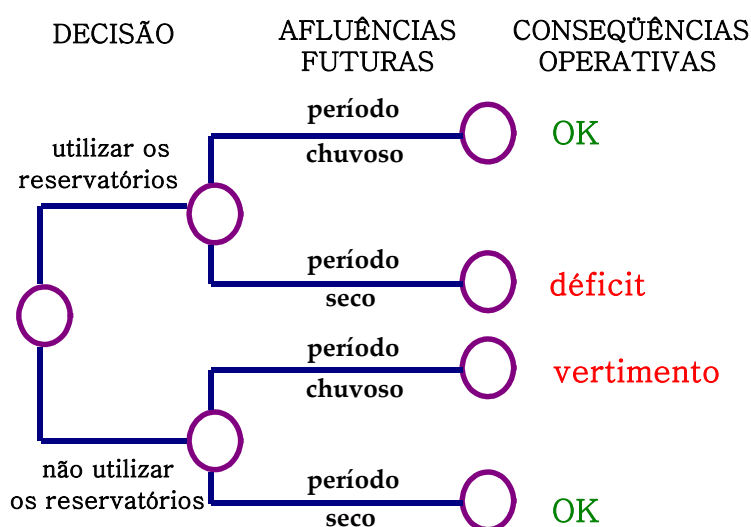


Figura 2.2.1 – Processo de Decisão Encontrado em Sistemas Hidrotérmicos.

Portanto, e de acordo com a figura, pode-se notar que a operação econômica de um sistema hidrotérmico é um problema acoplado no tempo. Assim, a solução ótima é aquela

² Atualmente, o sistema hidrotérmico brasileiro possui em torno de 70 usinas hidrelétricas (com capacidade de geração acima de 50 MW e não localizadas em sistemas isolados). Isso totaliza aproximadamente 300 unidades hidrelétricas, ou seja, 300 conjuntos turbina-gerador. Deste modo, a hidroeletricidade representa atualmente algo em torno de 90% da geração do sistema.

que estabelece uma certa decisão de “equilíbrio”, que deve ser baseada na comparação de dois benefícios existentes nesse tipo de problema: primeiro, o benefício imediato, que está relacionado com a utilização da água no presente; e o segundo, o benefício futuro, dado pelos ganhos proporcionados por optar em manter a água armazenada nos reservatórios. Estes benefícios são medidos com base no custo total de geração termelétrica e/ou déficit de energia evitados no presente (no caso do benefício imediato) e ao longo dos demais períodos de planejamento restantes (no caso do benefício futuro).

A partir de agora objetiva-se, com apoio de um exemplo simples, mostrar matematicamente como é possível estabelecer os benefícios associados ao uso da água, presentes na operação hidrotérmica. Adicionalmente, conforme será visto, essa idéia é útil também para a compreensão da estrutura do problema da programação.

Para tanto, considere o seguinte problema:

$$\text{minimize } f = \sum_{t=1}^2 \sum_{i=1}^3 c_i p t_{it} \quad (2.2.1)$$

$$\text{sujeito a: } \sum_{i=1}^3 p t_{i1} + p h_1 = 6 \quad \sum_{i=1}^3 p t_{i2} + p h_2 = 6 \quad (2.2.2)$$

$$v_1 + p h_1 = 6 \quad v_2 + p h_2 - v_1 = 2 \quad (2.2.3)$$

$$p t_{it} \leq 1 \quad p t_{3t} \leq \infty \quad i = 1, 2 \quad t = 1, 2, 3 \quad (2.2.4)$$

onde:

t é o índice associado aos estágios de tempo;

i é o índice associado com as usinas termelétricas;

$p t_{it}$ é a geração da i -ésima usina termelétrica ao longo do estágio t ;

$p h_t$ é a geração da usina hidrelétrica ao longo do estágio t ;

v_t é o volume armazenado no reservatório associado com a usina hidrelétrica no início do estágio t .

Ainda, $c_1=0,25$, $c_2=0,75$ e $c_3=2,5$, representam os custos operativos associados ao uso das unidades termelétricas 1, 2 e 3, respectivamente. Todas as variáveis apresentam limites mínimos iguais a zero.

No problema acima se deve encontrar a operação econômica, ao longo de dois estágios de tempo, de um sistema constituído por três usinas termelétricas e uma usina hidrelétrica. O mínimo custo associado com a operação econômica é dado pelo menor valor possível de f tal que, no Conjunto Restrito (2.2.2)-(2.2.4), não seja verificada nenhuma violação.

As restrições (2.2.2) representam o atendimento à demanda em cada estágio de tempo. Por sua vez, (2.2.3) garantem a conservação da massa d'água no reservatório ao longo dos períodos de estudo. As unidades termelétricas 1 e 2 têm suas capacidades de geração limitada a uma unidade de energia. A Unidade 3 tem capacidade de geração ilimitada.

Com o intuito de determinar como a água armazenada no reservatório deve ser utilizada nesses dois períodos de modo que o custo de geração termelétrica seja o menor possível, inicialmente é necessário calcular o custo de operação imediato, isto é, os gastos associados ao manuseio da água no presente (primeiro estágio). O comportamento do custo resultante, definido anteriormente como benefício imediato, pode ser obtido por meio da solução do seguinte problema:

$$\begin{aligned}
 fci = \text{minimize} \quad & 0,25pt_{11} + 0,75pt_{21} + 2,5pt_{31} \\
 \text{sujeito a:} \quad & pt_{11} + pt_{21} + pt_{31} + ph_1 = 6 \\
 & ph_1 = 6 - v_1 \\
 & pt_{11} \leq 1 \quad pt_{21} \leq 1 \quad pt_{31} \leq \infty
 \end{aligned} \tag{2.2.5}$$

Acima, fci , denominada de função de custo imediato, relaciona os gastos de geração termelétrica como função do nível de armazenamento no reservatório no final do primeiro estágio, v_1 . Com o auxílio do Problema (2.2.5) é fácil de perceber que, quanto maior for o valor de v_1 , maior também serão os gastos associados com a operação das unidades termelétricas. De forma ilustrativa, o comportamento de fci , pode ser acompanhado na Figura 2.2.2.

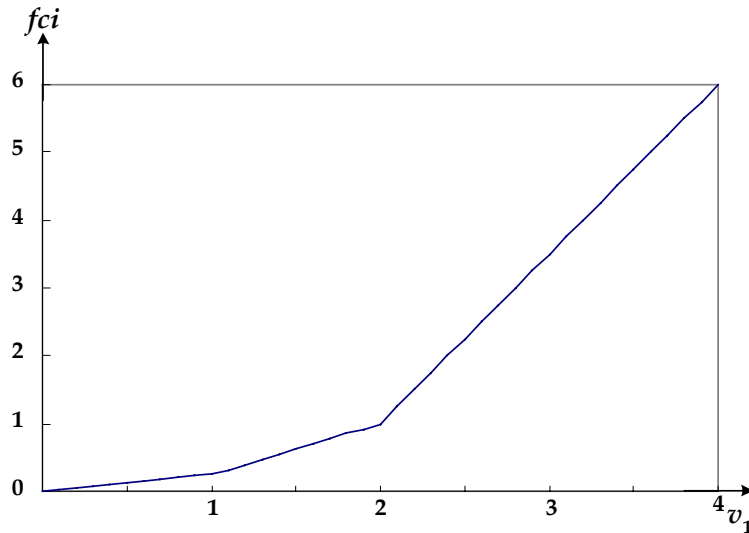


Figura 2.2.2 – Função de Custo Imediato.

O próximo passo consiste em determinar o benefício futuro de manter a água armazenada. Isso pode ser medido por meio da construção da função de custo futuro, f_{cf} , do problema. Essa função, esquematicamente mostrada na Figura 2.2.3 a seguir, relaciona o custo de geração termelétrica ao longo do segundo estágio como função do volume armazenado no reservatório disponível no início do segundo estágio (ou final do primeiro). Analogamente ao cálculo do benefício imediato, a f_{cf} é resultante da solução do seguinte problema:

$$\begin{aligned}
 f_{cf} = \text{minimize} \quad & 0,25pt_{12} + 0,75pt_{22} + 2,5pt_{32} \\
 \text{sujeito a:} \quad & pt_{12} + pt_{22} + pt_{32} + ph_2 = 6 \\
 & v_2 + ph_2 = 2 + v_1 \\
 & pt_{12} \leq 1 \quad pt_{22} \leq 1 \quad pt_{32} \leq \infty
 \end{aligned} \tag{2.2.6}$$

Acima, pode-se perceber que quanto maior for o valor de v_1 , maior também será a geração hidrelétrica e, conseqüentemente, menores serão os custos associados à geração termelétrica no segundo estágio.

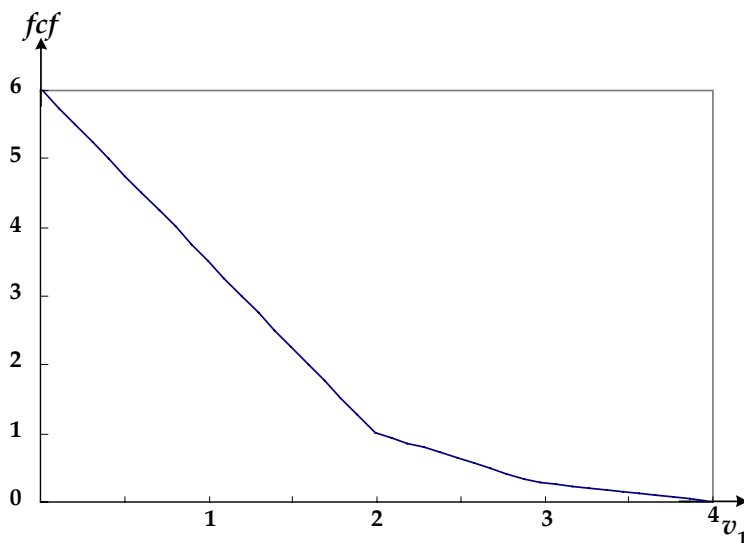


Figura 2.2.3 – Função de Custo Futuro.

Finalmente, para determinar a solução ótima para o Problema (2.2.1) deve-se encontrar o valor de v_1 tal que o custo total ao longo dos dois estágios seja mínimo. A função que esboça o custo total, fct , mostrado na Figura 2.2.4, é composta pela soma dos custos operativos do primeiro e do segundo estágio, isto é, $fci + fcf$.

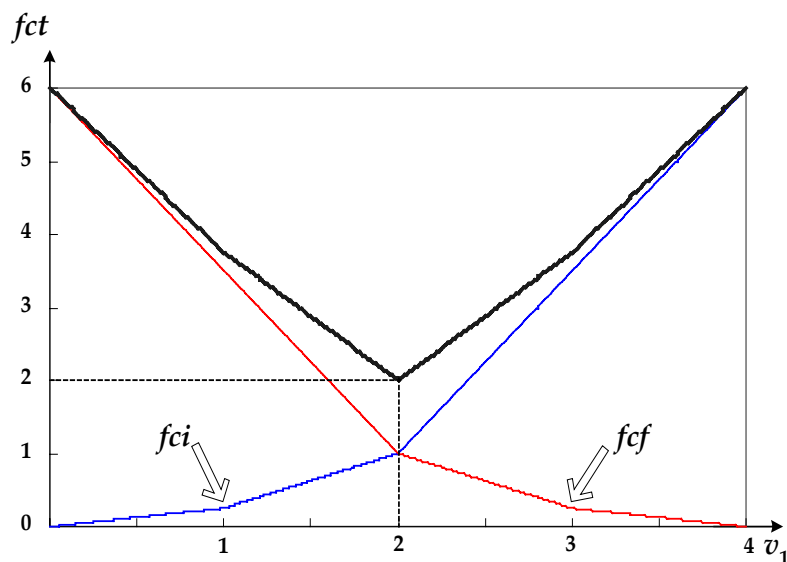


Figura 2.2.4 – Função de Custo Total.

Portanto, com base na figura anterior, pode-se perceber que o mínimo custo total operativo³ é alcançado quando o nível do reservatório ao final do primeiro estágio tem valor igual a duas unidades de volume, isto é, $v_1=2$.

Genericamente, e assumindo funções contínuas e diferenciáveis⁴ para a descrição dos custos de operação, o valor ótimo do custo total de operação é obtido no ponto onde as derivadas da fci e da fcf são iguais em módulo:

$$\begin{aligned}
 fct(v_1) &= fci(v_1) + fcf(v_1) \\
 \frac{\partial fct(v_1)}{\partial v_1} &= \frac{\partial fci(v_1)}{\partial v_1} + \frac{\partial fcf(v_1)}{\partial v_1} = 0 \\
 \frac{\partial fci(v_1)}{\partial v_1} &= - \frac{\partial fcf(v_1)}{\partial v_1}
 \end{aligned} \tag{2.2.7}$$

O exemplo anterior é de natureza determinística, isto é, admitiu-se como conhecida a vazão afluente ao reservatório ao longo de todo o período de estudo. Na prática, o acoplamento temporal torna-se muito mais complexo de ser tratado devido à variabilidade existente nas vazões afluentes, que flutuam de forma sazonal, regional e ainda, de ano para ano nos reservatórios. Uma vez que essas vazões dependem de fatores ligados a fenômenos complexos tais como regime de chuvas, tipos de clima, natureza do solo, entre outros, é impossível dispor de uma previsão precisa o suficiente, de modo que a operação do sistema possa ser guiada a partir de cenários típicos ocorridos no passado.

Como consequência, a operação de sistemas hidrotérmicos tem que levar em consideração a simulação de um grande número de cenários diversificados (secas, cheias, períodos normais) no intuito de avaliar o impacto de uma decisão operativa no presente. Portanto, a decisão de manter ou não a água armazenada nos reservatórios, em um cenário onde é impossível prever com exatidão os valores futuros de afluições, pode ser expressa apenas de forma probabilística.

³ A partir do valor de v_1 , é possível extrair os demais valores ótimos das variáveis do problema. De acordo com (2.2.5) tem-se que $pt_1=4$, $pt_{11}=1$, $pt_{21}=1$ e $pt_{31}=0$. Com base em (2.2.6) pode-se obter $pb_1=4$, $v_2=0$, $pt_{12}=1$, $pt_{22}=1$ e $pt_{32}=0$.

⁴ Note que as funções envolvidas no exemplo em questão não são diferenciáveis em todos os pontos dos respectivos domínios. Neste caso, para encontrar o ponto de mínimo custo é necessário utilizar o conceito de subgradiente. Esse conceito é abordado mais adiante, ao longo do Capítulo 6.

Assim, para casos reais, as figuras anteriormente apresentadas detêm o comportamento probabilístico dos custos gerados pelas incertezas relacionadas às afluições futuras aos reservatórios.

O horizonte dessa simulação irá depender da capacidade de armazenamento do sistema. Se a capacidade for pequena, então o impacto da decisão é diluído em alguns meses. Entretanto, se o sistema possuir uma capacidade de armazenamento substancial, a simulação deve ser estendida para um ou vários anos à frente. Deve-se lembrar que o nível de dificuldade em tratar a natureza estocástica é crescente em relação ao tamanho do horizonte de planejamento.

Fatores adicionais à estocacidade complicam em muito o tratamento do acoplamento temporal presente na operação econômica de sistemas hidrotérmicos. Por exemplo, a presença de várias usinas hidrelétricas em uma certa cascata faz com que a operação torne-se interdependente entre as mesmas. Esse acoplamento espacial deve-se ao fato que a vazão defluente de uma usina afeta diretamente a operação de todas as usinas a jusante da mesma.

Devido ao uso múltiplo da água em um aproveitamento hídrico, fatores tais como irrigação, controle de cheias, navegação, entre outros, restringem a vazão defluente na usina, dificultando a operação. Adicionalmente, devem ser considerados aspectos como infiltração, evaporação e tempos de viagem da água entre os reservatórios. A infiltração está diretamente ligada às características geológicas na qual uma dada bacia hidrográfica está situada, sendo, portanto um parâmetro de considerável importância para a estimativa das vazões afluentes incrementais em um reservatório. A evaporação, assim como a infiltração, representa uma parcela de perda no processo de utilização da água. Já o tempo de viagem da água identifica quando a vazão defluente de um reservatório estará disponível para a operação do reservatório imediatamente à jusante ao mesmo.

Nas usinas hidrelétricas encontram-se as unidades geradoras, isto é, os conjuntos turbina-gerador, onde efetivamente a energia elétrica é obtida. A potência de saída de uma unidade de geração hidrelétrica depende dos rendimentos da turbina e do gerador, da altura que queda na qual a turbina está submetida e da respectiva vazão turbinada. Por sua vez, a altura de queda líquida é função não-linear do volume armazenado e da vazão defluente no reservatório. O rendimento resultante do conjunto turbina-gerador, que especifica a relação entre a energia potencial gravitacional e a energia elétrica, é função da queda líquida e da

vazão turbinada na unidade. Para complicar ainda mais, uma unidade hidrelétrica apresenta zonas proibidas de geração⁵, o que vem a acarretar em um comportamento operativo bastante complexo resultante da descontinuidade de geração provocada pela existência de tais zonas.

No tocante às usinas termelétricas, a operação deve levar em conta os respectivos limites de potência de saída, a rampa de aquecimento e de desaquecimento. O custo operativo de uma termelétrica é uma função não-linear da quantidade de combustível consumida durante os processos de partida (sincronização) e de operação nominal da unidade. Diferentemente do caso das usinas hidrelétricas, a operação de uma usina termelétrica é independente das demais, isto é, tem-se uma operação desacoplada no espaço. Entretanto, existe a presença do acoplamento temporal devido a fatores termodinâmicos que limitam geração ao longo de um determinado período de tempo⁶.

Deste modo, os fatores descritos anteriormente mostram que o modelo matemático resultante da operação econômica de um sistema hidrotérmico com predominância de recursos de origem hidrelétrica, conforme é o caso brasileiro, possui as seguintes características [1]:

- **é acoplado no tempo devido à capacidade limitada de armazenamento dos reservatórios e fatores termodinâmicos de operação das usinas termelétricas;**
- **é estocástico, pois é impossível prever com exatidão as vazões afluentes futuras aos reservatórios, bem como o comportamento da demanda que deve ser atendida durante os estágios futuros da operação. Fatores ligados à falha dos elementos do sistema e perturbações também são de natureza estocástica e têm impacto na operação do sistema;**
- **é acoplado no espaço. Tal característica advém da presença de diversas usinas hidrelétricas em uma cascata e, adicionalmente, devido aos requisitos de atendimento à demanda e reserva do sistema;**
- **é não-linear, pois as funções de produção das unidades hidrelétricas, custos de operação das usinas termelétricas e perdas de energia no sistema de transmissão são não-lineares;**

⁵ A existência de zonas proibidas de geração em unidades hidrelétricas está ligada a comportamentos mecânicos indesejáveis para a operação das mesmas. Esse assunto será detalhado no decorrer deste trabalho.

⁶ O horizonte do impacto causado na operação do sistema pelo acoplamento temporal presente em uma usina termelétrica é inferior àquele causado pelo acoplamento proveniente da operação de uma usina hidrelétrica, principalmente quando esta última possui um reservatório de regularização plurianual.

- **é de natureza combinatória, dado que uma das tarefas primordiais da operação de um sistema de energia consiste em decidir, dentre todas as unidades que compõem o sistema gerador, quais devem estar operando no atendimento a demanda, em cada período de tempo;**
- **é de grande porte, por ser de natureza combinatória e também devido ao grande número de reservatórios, unidades hidrelétricas, termelétricas, e períodos de estudo necessários para avaliar o impacto do acoplamento temporal na operação do sistema.**

Portanto, tal nível de complexidade, torna inviável a adoção de um modelo matemático único para a solução do problema. A fim de inserir a proposta deste trabalho em um contexto mais abrangente, ilustrando ainda como as características destacadas acima podem ser manuseadas em problema de grande relevância prática, descreve-se na seqüência, de forma sucinta, o processo de planejamento da operação do sistema eletroenergético brasileiro. Com base nesse contexto é possível perceber que, independentemente do processo de planejamento adotado e das características do sistema, ao final das etapas de planejamento tem-se a programação da operação, cuja descrição e análise constituem-se em objeto deste trabalho.

Para realizar a operação do sistema eletroenergético brasileiro, e objetivando sobrepujar as complexidades associadas a esta atividade, o Operador Nacional do Sistema Elétrico (ONS) utiliza uma cadeia de modelos⁷ coordenados entre si [2,3], os quais contemplam diferentes horizontes de análise e graus de detalhamento na modelagem dos componentes do sistema.

Essa cadeia tem como alicerce os modelos de planejamento da operação energética de médio e de curto prazo e o modelo da programação da operação energética. Tais atividades são responsáveis pela otimização dos recursos energéticos disponíveis no sistema e, conseqüentemente, fornecem as principais informações para a determinação do preço da energia no mercado.

O modelo de planejamento da operação energética de médio prazo leva em consideração as incertezas associadas às vazões afluentes futuras, analisando o efeito das secas de longa duração, a capacidade de regularização plurianual dos reservatórios, as indisponibilidades duradouras de alguns elementos do sistema, e do cronograma de novas obras de gera-

⁷ Desenvolvidos pelo CEPEL, com apoio da ELETROBRÁS.

ção. O horizonte adotado, condizente com a relevância desses fatores, é de cinco anos, dividido em estágios mensais.

Dadas as incertezas das vazões afluentes e a explícita importância deste fator no horizonte em questão, o modelo de médio prazo utiliza como metodologia de solução a Programação Dinâmica Estocástica Dual (PDED) [4-13,18]. A PDED aproxima a função que representa o valor esperado do custo total de operação de um estágio de tempo qualquer até o final do horizonte de planejamento. Assim, conforme mostrado no exemplo apresentado anteriormente, o esquema de solução faz uso dessa função para evitar que sejam tomadas decisões míopes que possam comprometer a operação futura do sistema em detrimento de uma maior ou menor geração (custo) no presente.

Todavia, para que seja viável o emprego da referida ferramenta de otimização estocástica, algumas simplificações no tocante à representação das usinas se fazem necessárias a fim de obter a solução do problema com um tempo computacional condizente com um padrão de precisão requerido. Para tanto, basicamente as usinas hidrelétricas pertencentes a um subsistema são agregadas em um reservatório equivalente de energia [14-18]. Assim, o que passa a ser realizado na prática é a representação dos custos envolvidos como função da energia armazenada nos reservatórios equivalentes.

Conseqüentemente, de posse dos valores esperados do custo marginal de operação para cada subsistema e do valor esperado do custo total de operação de um estágio qualquer até o final do horizonte de planejamento (necessários para representar a função de custo futuro), o modelo de médio prazo define então a alocação ótima dos montantes dos recursos hidrelétricos e termelétricos⁸ por subsistema e o intercâmbio de energia entre os mesmos. A função de custo total esperado do modelo de médio prazo é, portanto, a principal informação a ser fornecida ao problema do planejamento de curto prazo.

Visto que o modelo de médio prazo trabalha com decisões energéticas mensais dos diversos subsistemas equivalentes, faz-se necessário usar outro modelo que desagregue essas decisões para as usinas individualmente, bem como trabalhe em uma base de tempo menor (discretização). Essa é a principal tarefa do modelo de planejamento da operação energética de curto prazo. Agora o horizonte de planejamento é de seis a dez meses, com discretização

⁸ A geração termelétrica pode ser fornecida por usina geradora.

semanal para o primeiro mês e mensal para os demais meses. No primeiro mês as aflúências são consideradas conhecidas e o restante do horizonte de planejamento trabalha com uma pequena amostra de aflúências, quando comparada ao modelo de médio prazo. Nesta etapa, as usinas hidrelétricas são representadas por uma função linear, corrigida de acordo com as condições operativas das usinas⁹, que representa a agregação das unidades geradoras que compõem as mesmas. Adicionalmente, são representados também os vínculos hidráulicos entre usinas, desprezados no modelo de médio prazo, tais como turbinamentos e vertimentos localizados e restrições de defluência. Levando-se em consideração o valor implícito da água armazenada nos reservatórios, via função de custo futuro fornecida pelo modelo de médio prazo, o planejamento da operação energética de curto prazo define, como resultado do despacho otimizado do sistema, a evolução dos níveis dos reservatórios e os respectivos valores da água ao longo do horizonte de planejamento, entre outros. Assim como no médio prazo, essa etapa utiliza como metodologia de solução a PDED, fornecendo, portanto, a função de custo futuro referente ao primeiro estágio para o modelo subsequente da cadeia, mais precisamente, o modelo da programação da operação energética.

A última etapa da cadeia de modelos é composta pela programação da operação energética. O objetivo dessa etapa consiste em calcular o despacho de geração para cada unidade do sistema levando-se em conta detalhadamente as restrições das unidades hidráulicas, isto é, dos conjuntos turbina-gerador, e das unidades termelétricas. O horizonte da programação é de 7 a 13 dias, com discretização de 30 minutos nos dois primeiros dias e de uma hora nos demais dias. A exemplo do que é feito nas etapas de mais longo prazo a programação da operação energética acopla no último estágio de estudo a função de custo futuro fornecida pelo modelo de planejamento de curto prazo que, adicionada às projeções diárias de demanda e de aflúência, possibilita o despacho otimizado do sistema.

Essa etapa da cadeia é caracterizada pela necessidade de se considerar adequadamente as não-linearidades envolvidas nas funções de produção das unidades geradoras hidrelétricas, bem como nos custos de operação das usinas termelétricas. Adicionalmente, tem-se que considerar também a natureza combinatória do problema, uma vez que é necessário decidir

⁹ A função de produção é representada no modelo de curto prazo pelo produto da vazão turbinada na usina pela respectiva produtibilidade. Esta última por sua vez é função da queda líquida na usina, que é variável de acordo com as condições operativas das usinas, isto é, volume armazenado no reservatório e volume defluente.

quais unidades devem estar operando ao longo do estágio da programação. Devido à complexidade inerente ao uso de variáveis inteiras, em geral, a natureza combinatória no problema da programação é tratada nas primeiras 48 horas do horizonte total. Devido a essas características, tipicamente o problema resultante tem sido resolvido com uso de metodologias de Relaxação Lagrangeana [19-28], Programação Dinâmica [29-39] e Programação Dinâmica Determinística Dual [1,4,9,10,13].

Para o horizonte de otimização de um dia e discretização de 30 minutos, os despachos fornecidos pela programação são usualmente validados por um modelo computacional que considera os aspectos de fluxo de potência e de análise de segurança [40]. Esse modelo considera uma representação mais detalhada da rede de transmissão, simplificada na programação, incluindo os elos de corrente contínua, compensadores síncronos, limites de transferência entre barras e áreas, *taps* dos transformadores, além de variação máxima de geração entre estágios.

Vale ainda ressaltar que as atividades de planejamento e programação da operação são apoiadas por diversos modelos dentre os quais destacam-se os modelos de projeção de consumo de energia mensal, semanal e horária; de controle de cheias; de vazões mensais, semanais, diárias e horárias; de análise da confiabilidade dos sistemas interligados e o modelo relacionado com a manutenção programada das unidades geradoras.

Assim, situado o modelo da programação na estratégia de solução do planejamento da operação, bem como descritas algumas de suas principais características, a próxima seção incumbe-se de relatar como problemas semelhantes a esse modelo têm sido tratados na literatura.

2.3 O Problema da Programação da Operação Energética: Revisão Bibliográfica

Conforme mostrado na seção anterior, a operação do sistema elétrico brasileiro é guiada por uma cadeia de modelos referentes aos problemas de planejamento da operação de médio e curto prazo e da programação da operação energética.

Os modelos de planejamento de médio e curto prazo possuem um ferramental bastante desenvolvido e são resultados do desenvolvimento técnico-metodológico obtido no

setor durante as últimas três décadas. Por sua vez, o modelo da programação da operação energética encontra-se nas fases de implementação, validação técnica e computacional.

Na estrutura do setor de energia elétrica vigente até a reforma¹⁰, cabia ao Estado a função de coordenar as atividades de planejamento da operação, considerando o sistema de forma interligada, onde se definiam as metas de geração semanais que deveriam ser desagregadas, de maneira individualizada, pelas empresas regionais. Essa desagregação era realizada em um horizonte diário e discretização de uma hora, visando o atendimento da carga própria da empresa, levando-se em conta, além das metas fornecidas pelo planejamento, a reserva de potência sob sua responsabilidade. No novo modelo do setor elétrico, as metas¹¹ fornecidas pelos modelos de planejamento da operação serão agora desagregadas pelo ONS, no escopo da programação da operação.

Dentre as várias atribuições do problema da programação, naturalmente destaca-se a determinação do despacho horário de cada unidade geradora, isto é, a definição do *status* (ligada¹² ou desligada) e nível de geração da mesma. A obrigatoriedade de definir se uma unidade estará ou não operando ao longo do horizonte da programação resulta em um modelo com característica eminentemente combinatória.

Um problema clássico encontrado na literatura, também de natureza combinatória, é o chamado *thermal unit commitment problem* [41-53], ou problema de alocação de unidades geradoras termelétricas. Neste problema, o objetivo consiste em definir quais unidades desta classe devem estar operando ao longo do horizonte de estudo, de forma que o custo operativo associado seja o menor possível. Entretanto, a referida alocação é apenas um dos objetivos a serem realizados na programação da operação energética, visto que a influência do parque gerador hidrelétrico não é considerada neste tipo de problema.

O desenvolvimento de modelos para a programação da operação energética de sistemas hidrotérmicos tem sido objeto de diversos trabalhos no Brasil [54-60] e em outros países [61-67]. Entretanto, nenhum desses trabalhos citados e nem um outro prévio que tenhamos conhecimento, englobam a modelagem descrita no decorrer deste documento,

¹⁰ Processo de Reestruturação do Setor Elétrico Brasileiro.

¹¹ Essas metas estão ligadas à informação que será repassada para a programação via função de custo futuro construída a partir do modelo de planejamento da operação de curto prazo.

¹² No caso de uma unidade hidrelétrica, deve-se também determinar a zona operativa na qual a mesma estará operando.

cuja característica detalhada objetiva buscar uma eficiência dos recursos energéticos de sistemas hidrotérmicos com predominância de recursos hidrelétricos. Essa especificidade encontrada no sistema brasileiro garante uma carência de modelos na literatura que representem adequadamente os recursos de origem hidrelétrica do problema.

Embora os trabalhos [54-58] modelem as unidades de forma individualizada, e alguns considerem ainda o sistema de transmissão e suas perdas, esses modelos não representam as características individuais dos conjuntos turbina-gerador, tais como rendimentos, perdas hidráulicas e zonas proibidas de geração.

No trabalho desenvolvido por Salmazo [58], as características individuais das unidades hidráulicas são representadas por uma função de produção detalhada que leva em consideração o efeito dos níveis de jusante, perdas hidráulicas e do rendimento do conjunto turbina-gerador. Entretanto, as zonas proibidas de geração das unidades hidráulicas, bem como os limites de potência associados às mesmas, são tratadas com base em heurísticas a fim de facilitar o processo de solução do problema, cujo objetivo principal consiste na minimização das perdas de um sistema de geração e transmissão específico. Diversas restrições do sistema hidrelétrico são ignoradas, dentre os quais destaca-se o valor implícito da água, balanço hídrico e tempo de viagem da água entre os reservatórios, entre outros. Igualmente, o problema de alocação de unidades termelétricas não é considerado.

Ainda, com relação aos trabalhos nacionais, em [60] é apresentado um modelo que inclui a alocação de unidades termelétricas no problema de despacho de geração horária desenvolvido para o sistema brasileiro [59]. Dado que estes trabalhos não levam em consideração a natureza não-linear combinatória presente nas restrições do parque hidrelétrico, nosso objetivo principal consiste em contribuir para o desenvolvimento deste modelo. A idéia, conforme será visto ao longo dos capítulos, consiste em investigar as características de modelagem e de solução dos aspectos hidrelétricos do problema. Vale ressaltar que a sofisticada estrutura de solução apresentada em [60], a qual apresentou um bom desempenho na realização da alocação de unidades termelétricas, é também empregada neste trabalho.

No tocante à literatura internacional, relacionada à programação de sistemas hidrotérmicos, alguns trabalhos merecem destaque pela modelagem e metodologia de solução apresentadas.

Chao-an Li et al. [65] desenvolveram um modelo que determina a combinação ótima de unidades geradoras do sistema controlado pela *Pacific Gas and Electric Company* (PG&E). 115 unidades hidrelétricas e 50 unidades termelétricas participam da alocação ótima. O parque de geração hidrelétrico é composto de 65 reservatórios, localizados em 14 cascatas das regiões nordeste e central do Estado da Califórnia. A menor cascata contém dois reservatórios com duas usinas e um total de cinco unidades geradoras, e a maior cascata contém 11 reservatórios com nove hidrelétricas e 19 unidades geradoras no total.

A função objetivo do problema é composta pelos custos associados à geração termelétrica, pelos custos de partida das unidades hidrelétricas e pelo valor futuro da água armazenada nos reservatórios do sistema. Os custos de geração termelétrica incluem os gastos associados ao uso de combustível, partida e desligamento das unidades. A modelagem considera uma representação individualizada das unidades hidrelétricas. Entretanto, não são representadas as zonas proibidas de geração e admite-se ainda que as unidades possuem limites constantes de vazão turbinada, para qualquer valor de queda líquida¹³. Para não permitir um comportamento cíclico na operação das unidades hidrelétricas, evitando assim os desgastes mecânicos associados ao mesmo, são inclusas restrições de número mínimo de estágios nos quais uma unidade deve permanecer obrigatoriamente ligada e desligada, uma vez que se encontram sobre os respectivos estados (em inglês, *minimum uptime and downtime constraints*).

No final do horizonte de estudo, cuja dimensão é de 168 estágios, isto é, uma semana com discretização de uma hora, é adicionada uma restrição que permite pequenas variações no armazenamento de cada reservatório; variações essas relacionadas a um valor de meta fornecida por um estudo de mais longo prazo. As unidades termelétricas devem atender as restrições de *minimum uptime and downtime*, e também restrições referentes à rampa. A modelagem relacionada ao sistema de transmissão não é considerada.

No tocante ao procedimento de solução, o problema original é decomposto em um subproblema termelétrico e outro hidrelétrico, resultantes do uso da metodologia da Relação Lagrangeana. As restrições que acoplam as variáveis termelétricas e hidrelétricas, rela-

¹³ Conforme será detalhado no Capítulo 3, os valores máximo e mínimo de vazão turbinada de uma unidade podem ser dependentes da altura de queda líquida na qual uma turbina hidráulica está submetida.

cionadas com o atendimento dos requisitos de demanda e de reserva do sistema, são transferidas para a função objetivo com o auxílio de multiplicadores de Lagrange¹⁴.

O subproblema termelétrico é separável no tocante às unidades geradoras e otimizado via Programação Dinâmica, conforme mostrado em [70]. O subproblema hidrelétrico resultante é composto por uma seqüência de subproblemas menores, cada um representando uma cascata, os quais podem ser otimizados independentemente.

A estratégia proposta pelos autores, para solucionar cada subproblema associado a uma cascata, é dividida em duas etapas. Na primeira, as funções relacionadas com as variáveis inteiras tais como custos de partida e restrições de *minimum uptime and downtime* são temporariamente desconsideradas. Com esse procedimento, cada cascata é representada por um problema contínuo, não-linear (quadrático) e convexo, sendo que a função de produção das unidades hidráulicas é dependente do volume armazenado e da vazão turbinada no estágio. Portanto, o rendimento do conjunto turbina-gerador, bem como as perdas hidráulicas associadas ao mesmo são consideradas constantes.

Cada cascata é tratada como um recurso único, sendo otimizada por um algoritmo de Fluxo em Redes, conforme descrito em [71-74]. O algoritmo de Fluxo em Redes fornece as metas hidráulicas para todos os reservatórios (volumes armazenados, turbinados e vertidos), além das metas de geração (potência de saída) para as respectivas unidades. Se nenhuma unidade violar as restrições de *minimum uptime and downtime*, as soluções encontradas são ótimas. Do contrário, o algoritmo segue para uma segunda etapa cujo objetivo é corrigir essas violações. Na segunda etapa, as restrições relacionadas com o balanço hídrico de cada reservatório do sistema são relaxadas. Desta maneira, o subproblema hidrelétrico original é decomposto em uma cadeia de novos subproblemas, cada um relacionado com um reservatório do sistema. Cada um desses subproblemas é alimentado pelas metas calculadas pelo algoritmo de Fluxo em Redes e determina a combinação ótima de unidades hidráulicas em cada reservatório, e cada estágio de tempo, levando em consideração os custos de partida e as restrições de *minimum uptime and downtime*, ambos desconsiderados anteriormente.

¹⁴ Joseph Louis Lagrange (★ 25 de Janeiro de 1736, Turin, Sardinia-Piedmont (Itália); † 10 de Abril de 1813, Paris, França). Matemático e astrônomo franco-italiano que resolveu alguns problemas famosos usando métodos novos que acabaram florescendo em um novo ramo da Matemática chamado de Cálculo das Variações [68,69].

A determinação da combinação ótima é feita por um algoritmo de Programação Dinâmica. Para diminuir o número de combinações possíveis em cada reservatório e período de tempo, os autores propõem o uso de uma Lista de Prioridades [75] ao invés de uma busca sobre o conjunto de todas as combinações possíveis. Uma vez solucionados os subproblemas por usina, procede-se à maximização da função dual, resultante do esquema de relaxação proposto, a fim de alcançar a convergência do subproblema hidrelétrico.

Outros trabalhos que igualmente merecem destaque são aqueles desenvolvidos por Guan et al. [76] e Ni et al. [77]. Esses trabalhos apresentam um algoritmo cujo objetivo consiste na solução do subproblema hidrelétrico, resultante do esquema de decomposição da Relaxação Lagrangeana, quando esta é aplicada ao problema hidrotérmico original. Em [77] considera-se o efeito da altura de queda líquida (representada por uma função linear do volume armazenado no reservatório durante o estágio em questão, desconsiderando assim o efeito do nível de jusante da potência de saída), enquanto em [76] admite-se a mesma constante.

A modelagem utilizada nesses trabalhos considera a presença de zonas proibidas de geração, representadas por limites constantes de vazão turbinada na usina, e restrições de limites de defluência causados por requerimentos ambientais e de navegação. Entretanto, as unidades pertencentes a uma mesma usina são agregadas em uma unidade equivalente, sendo que a potência de saída é modelada por uma função quadrática da vazão turbinada na mesma (no caso de [77], é função ainda da cota de montante apenas). Por sua vez, os rendimentos são considerados constantes e as perdas hidráulicas não são tratadas.

A estratégia de solução adotada consiste em relaxar as restrições de limites de vazão turbinada na usina e, adicionalmente em [76], as restrições de limites de defluência. Desta maneira os autores mostram que o subproblema inteiro-misto original pode ser decomposto em um subproblema contínuo e uma série de subproblemas inteiros. O subproblema contínuo, cujo objetivo consiste em determinar os níveis de geração para todas as usinas, é otimizado por um algoritmo de Fluxo em Redes. Os subproblemas inteiros, que determinam o estado de cada unidade levando-se em conta os custos de partida das unidades agregadas e as restrições de *minimum uptime and downtime*, são independentes entre si, sendo solucionados por Programação Dinâmica.

2.4 Contribuições do Trabalho e Conclusões

Nenhum dos trabalhos citados anteriormente leva em consideração uma adequada representação de um sistema hidrotérmico, com predominância de recursos hidrelétricos, tais como o efeito sobre a potência das unidades hidrelétricas da variação do rendimento, perdas hidráulicas, cota de jusante, bem como a presença de múltiplas zonas proibidas de geração. O trabalho apresentado aqui tem por objetivo preencher essa lacuna.

Para tanto é realizada uma visita abrangente aos fenômenos físicos relevantes na busca do atendimento dos objetivos do problema. Propõe-se uma função de produção que visa representar de forma precisa duas características que têm impacto relevante na programação: não-linearidades e não-convexidades presentes em determinadas restrições e na função objetivo.

Adicionalmente, no tocante à metodologia alicerce da estratégia de solução, utiliza-se neste trabalho a Relaxação Lagrangeana, cuja aceitação em problemas de natureza semelhante à programação é evidente na literatura. O esquema de decomposição utilizado pela Relaxação Lagrangeana é baseado na técnica de duplicação e dualização de restrições artificiais, cujos detalhes são mostrados no Capítulo 6. Esse esquema tem apresentado desempenho superior, no que diz respeito às soluções encontradas a partir do mesmo, quando comparado aos esquemas usualmente utilizados neste tipo de problema. Sucintamente, o esquema de decomposição utilizado visa garantir que restrições importantes, tais como atendimento à demanda, conversação da água nos reservatórios, função de custo futuro, potência de saída das unidades hidrelétricas, usualmente relaxadas na maioria dos trabalhos encontrados na literatura, sejam mantidas intactas problema. Deste modo, são concebidos subproblemas que tratam diretamente dessas restrições durante o processo de solução empregado pela Relaxação Lagrangeana. Esse assunto será objeto dos capítulos 5 e 6. Antes, porém, faz-se necessário modelar o comportamento das unidades geradoras, mediante a compreensão dos aspectos básicos operativos das mesmas. Esse é o escopo principal do próximo capítulo, o qual servirá de subsídio base para formular matematicamente o problema da programação; esta última tarefa é realizada no Capítulo 4.



CAPÍTULO

3

*Operação de Centrais
Hidrelétricas e
Termelétricas*

3.1 Introdução

ESTE capítulo tem por objetivo descrever a representação das unidades hidrelétricas e termelétricas no problema da programação da operação energética. Tal representação deve considerar a maneira pela qual as unidades produzem energia elétrica a partir das respectivas fontes de energia disponíveis na natureza. Dois aspectos são importantes nessa representação: a função de produção das unidades geradoras e as restrições operativas associadas às mesmas. Nesse sentido, este capítulo descreve a modelagem das unidades a partir da análise das respectivas funções de produção, bem como dos custos operativos associados. Dada a predominância dos recursos hidrelétricos no sistema elétrico

brasileiro, especial atenção é dada para essa fonte de geração, evidenciando de forma detalhada as leis que regem o seu comportamento físico.

3.2 Unidades Hidrelétricas

As unidades hidrelétricas fazem parte do recurso de geração predominante no sistema brasileiro. A modelagem da sua função de produção deve levar em conta o comportamento físico da turbina hidráulica (responsável pela transformação da energia potencial gravitacional em energia mecânica) e do gerador (que transforma a energia mecânica em energia elétrica). Por isso, uma unidade de geração hidrelétrica é comumente referida como conjunto turbina-gerador.

Em um aproveitamento hidrelétrico, o processo de produção de energia elétrica pode ser visto, de forma simplificada, como a transformação da energia potencial gravitacional, da água armazenada no reservatório, em energia elétrica, por meio das unidades geradoras. A água é captada em uma certa cota, passa pelo interior da turbina e é descarregada em uma cota inferior à primeira. A turbina transforma a energia potencial gravitacional em energia mecânica acionando o gerador conectado ao eixo da mesma, que por sua vez faz com que o gerador entregue energia elétrica em seus terminais.

Matematicamente, o processo descrito acima, considerando uma única usina hidrelétrica, é descrito simplificada da seguinte maneira:

$$E_j = E_{p_j} \eta_{t_j} \eta_{g_j} \quad (3.2.1)$$

onde:

E_j é a energia produzida (saída) pelo j -ésimo gerador da usina ao longo de um período Δt ;

E_{p_j} é a energia potencial da massa d'água que é utilizada para acionar a turbina acoplada ao j -ésimo gerador durante o período Δt ;

η_{t_j} é o rendimento médio da j -ésima turbina acoplada ao j -ésimo gerador ao longo de um período Δt ;

η_{g_j} é o rendimento médio do j -ésimo gerador ao longo de um período Δt .

Considerando que a energia potencial gravitacional é expressa pelo produto da massa da água¹, pela aceleração da gravidade e pela altura de queda líquida média em Δt a qual a turbina está submetida, hl_j , a Equação (3.2.1) pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$E_j = [(\sigma_{esp} q_j \Delta t) g h l_j] \eta t_j \eta g_j \quad (3.2.2)$$

onde:

σ_{esp} é a massa específica da água (kg/m^3);

q_j é a vazão turbinada média pela j -ésima turbina durante o período Δt (m^3/s);

g é a aceleração da gravidade (m/s^2);

Δt é o período de tempo considerado (s);

hl_j é a altura de queda líquida média (m) que a j -ésima turbina está submetida durante o intervalo de tempo Δt . Essa altura é detalhadamente definida mais adiante.

Sendo potência descrita como a energia gerada por unidade de tempo, ($pb = dE/dt$), é possível expressar a potência produzida no j -ésimo gerador pela seguinte expressão:

$$ph_j = G \eta t_j \eta g_j h l_j q_j \quad (3.2.3)$$

onde:

ph_j é a potência ativa (média) associada à energia do j -ésimo gerador (MW);

G é uma constante com valor de $9,81 \cdot 10^{-3}$ ($\text{kg/m}^2\text{s}^2$).

A constante G representa o produto entre a massa específica da água, o valor da aceleração da gravidade e uma outra constante de valor igual a 10^{-6} . Esta última objetiva converter, em (3.2.3), a potência de saída de W para MW.

Portanto, de acordo com a Equação (3.2.3) pode-se notar que a função de produção de uma unidade hidrelétrica é definida pelo inter-relacionamento das seguintes variáveis:

(i) altura de queda líquida, hl_j

¹ A massa da água, que passa em uma dada turbina, é obtida por meio da multiplicação da massa específica da água, pelo volume da mesma, sendo este último composto do produto entre a vazão turbinada e o período de tempo considerado.

- (ii) rendimento da turbina, η_{t_j} , e do gerador, η_{g_j} ;
- (iii) vazão turbinada na unidade pela j -ésima turbina, q_j .

A seguir, descreve-se detalhadamente a influência de cada uma dessas variáveis na potência de saída.

3.2.1 Altura de Queda Líquida

Antes de iniciar o estudo da variável altura de queda líquida, é importante aqui lembrar como se representa um aproveitamento hidrelétrico em problemas de planejamento da operação. Essa tarefa é basicamente realizada por meio da equação de conservação da água², considerada abaixo para uma usina hidrelétrica isolada hidráulicamente:

$$v_f = v_0 + (\gamma - Q - s) \Delta t \times 10^{-6} \quad (3.2.1.1)$$

onde:

- v_f é o volume armazenado no reservatório ao final do período Δt (hm^3);
- v_0 é o volume armazenado no reservatório no início do período Δt (hm^3);
- γ é a vazão afluyente média ao reservatório durante o período Δt (m^3/s);
- Q é a vazão turbinada média na usina durante o período Δt (m^3/s);
- s é a vazão vertida média na usina durante o período Δt (m^3/s);
- 10^{-6} é uma constante que visa converter um volume dado em m^3 para hm^3 (unidade que usualmente são fornecidos os volumes armazenados nos reservatórios).

Conforme visto anteriormente, a operação de uma turbina hidráulica em uma usina hidrelétrica depende da altura de queda na qual a mesma esteja submetida. Quanto maior a queda, maior a potência de saída. Define-se como altura de queda bruta (ou queda topográfica) de uma usina, a diferença de cotas entre os limites dos níveis de montante (na captação da água) e de jusante (canal de fuga), quando a vazão na usina é igual a zero, isto é, com as turbinas fora de operação e sem a existência de vazão vertida [78].

² Por simplificação são desconsiderados na Equação (3.2.1.1) os efeitos da evaporação e da infiltração da água.

A cota de montante do reservatório é uma função não-linear do volume armazenado no início e final do período Δt . Por sua vez, a cota de jusante é função não-linear da vazão defluente, isto é, da vazão turbinada total na usina, Q , mais a vazão vertida, s , ao longo do período Δt .

Assim, a altura de queda bruta média de operação de uma usina, para um intervalo de tempo Δt , pode ser definida matematicamente como:

$$h_b = f_{cm}(v_0, v_f) - f_{cj}(Q, s) \quad (3.2.1.2)$$

onde:

h_b é a altura de queda bruta média da usina durante o período de tempo Δt , em metros;

$f_{cm}(\cdot)$ é a função de cota de montante da usina, a qual expressa a relação entre a cota de montante da usina e o volume armazenado no reservatório. Em termos gerais, a função de cota de montante das usinas do sistema brasileiro, na maioria dos casos, é representada por um polinômio de quarta ordem, cujo valor é crescente em relação ao volume armazenado no reservatório. Exemplificando, se um dado reservatório detém um armazenamento de $v \text{ hm}^3$, o valor da cota de montante é dado por:

$$f_{cm}(v) = a_0 + a_1v + a_2v^2 + a_3v^3 + a_4v^4 \quad (3.2.1.3)$$

onde:

a_0, \dots, a_4 são os coeficientes do polinômio que representa a cota de montante para o reservatório;

Todavia, na Expressão (3.2.1.2), $f_{cm}(v_0, v_f)$ representa a cota equivalente de montante durante o período Δt . Uma interpretação gráfica para esse valor de cota é apresentada na seqüência.

$f_{cj}(\cdot)$ é a função de cota de jusante da usina. Esta função relaciona o valor da cota de jusante da usina e a vazão (média) defluente, d , da mesma durante o período Δt . A vazão defluente expressa em m^3/s , é dada por:

$$d = Q + s \quad (3.2.1.4)$$

Assim como a cota de montante, a cota de jusante das usinas do sistema brasileiro, em sua maioria, é representada de forma aproximada por um polinômio denominado de curva chave ou cota x vazão, expresso de forma genérica, pela seguinte expressão:

$$fcj(d) = b_0 + b_1d + b_2d^2 + b_3d^3 + b_4d^4 \quad (3.2.1.5)$$

onde:

b_0, \dots, b_4 são os coeficientes do polinômio que representa a cota de jusante para o reservatório.

Algumas observações devem ser feitas para as funções que aproximam as cotas de montante e de jusante de uma usina.

Rigorosamente, a cota equivalente de montante tem seu valor definido através da seguinte expressão:

$$fcm(v_0, v_f) = \frac{1}{v_0 - v_f} \int_{v_0}^{v_f} (a_0 + a_1v + a_2v^2 + a_3v^3 + a_4v^4) dv \quad (3.2.1.6)$$

Resolvendo-se a expressão anterior, obtém-se:

$$fcm(v_0, v_f) = a_0 + \frac{a_1}{2}(v_0 + v_f) + \frac{a_2}{3}(v_0 - v_f)^2 + a_2v_0v_f + \frac{a_3}{4}(v_0^2 + v_f^2)(v_0 + v_f) + \frac{a_4}{5}[(v_0 + v_f)^4 - 3v_0^3v_f - 5v_0^2v_f^2 - 3v_0v_f^3] \quad (3.2.1.7)$$

Graficamente a determinação da cota equivalente de montante, referente a um estágio de tempo qualquer, é ilustrada na Figura 3.2.1.1. Esta figura mostra ainda o comportamento da função de cota de montante da usina hidrelétrica de Ilha Solteira, localizada no Rio Paraná, SP.

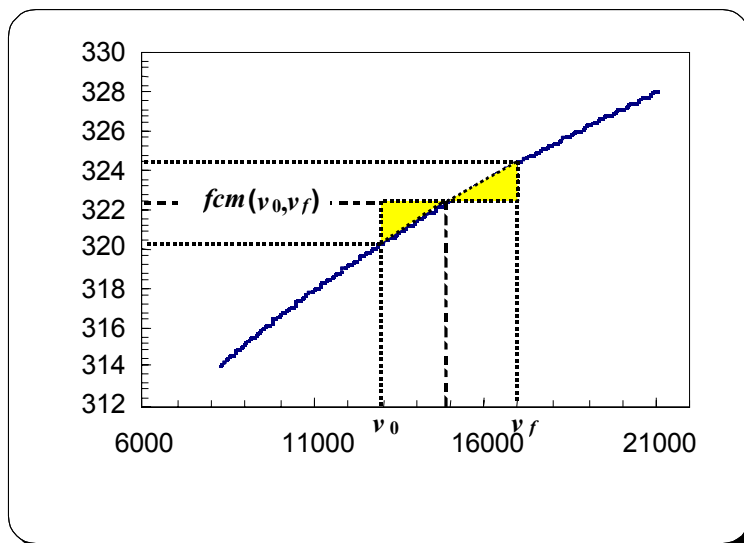


Figura 3.2.1.1 - Comportamento da Cota de Montante (m) em Função do Volume Armazenado (hm³) – Usina Hidrelétrica de Ilha Solteira, Rio Paraná, SP.

Em geral, para usinas com reservatório cuja capacidade permite grande regularização, a variação da cota de montante não é significativa para horizontes de planejamento de curta duração, tal como é o caso da programação da operação energética. Isso implica que algumas simplificações podem ser investigadas. Em uma primeira etapa, uma simplificação desejada pode ser feita no tocante à Expressão (3.2.1.7). Para motivo de ilustração, considere a Tabela 3.2.1.1, onde são mostrados os valores da cota de montante da usina de Ilha Solteira, para um determinado estágio de tempo, considerando duas situações:

- cota de montante calculada pela Equação (3.2.1.7);
- cota de montante calculada da seguinte maneira:

$$fcm(v_0, v_f) \cong fcm(\underline{v}) = a_0 + a_1 \underline{v} + a_2 \underline{v}^2 + a_3 \underline{v}^3 + a_4 \underline{v}^4 \quad (3.2.1.8)$$

onde \underline{v} é o volume médio associado ao estágio em questão:

$$\underline{v} = \left(\frac{v_0 + v_f}{2} \right) \quad (3.2.1.9)$$

Para os diferentes horizontes ilustrados na Tabela 3.2.1.1 a seguir, foi considerado que a usina de Ilha Solteira está com armazenamento inicial, v_0 , de 14.646 hm³ (50% do volume útil e cota de montante de 322,0564 metros) e que a mesma opera com uma vazão turbinada constante, Q , igual a 9.415 m³/s (valor máximo com queda nominal). Os valores de afluência considerados são nulos.

Tabela 3.2.1.1 – Função de Cota Montante (m) – Usina de Ilha Solteira.

USINA	12 h	24 h	48 h	168 h
(i)	321,8453	321,6322	321,1998	318,8897
(ii)	321,8450	321,6308	321,1939	318,7827

Conforme se pode notar na tabela acima, no caso de Ilha Solteira (um reservatório com grande regularização), a alternativa (ii) representa uma boa aproximação para o cálculo cota equivalente de montante para os diversos horizontes, quando comparada à modelagem ideal representada por (3.2.1.1). De fato, isso ocorre porque a cota de montante não obteve grande variação para os horizontes apresentados.

O tipo de simplificação apresentado acima ainda mantém a complexidade ligada ao acoplamento entre os períodos de tempo. O ideal é poder simplificar ao máximo a modelagem da cota de montante de modo a evitar esse acoplamento. Algumas diretrizes nesse sentido são apresentadas mais adiante.

No que diz respeito à cota de jusante, inicialmente cabe ressaltar que a dependência da potência de saída de uma unidade de geração hidrelétrica em relação à mesma é verificada apenas quando as turbinas que equipam a usina são de reação. Uma turbina hidráulica de reação é aquela em que o trabalho desenvolvido pela mesma é obtido pela transformação de energia cinética e de pressão da água em energia elétrica. Esse tipo de turbina tem como característica operativa o funcionamento com o canal de fuga afogado, e, portanto, a alteração do nível de jusante afeta diretamente a altura de queda na unidade. As turbinas de reação são do tipo Francis e de hélices.

Além das turbinas de reação, existem também as de ação, as quais utilizam apenas a energia cinética da água para a transformação da energia potencial gravitacional em energia mecânica. Em usinas equipadas com turbinas de ação, a alteração da cota de jusante não influencia na altura de queda. As turbinas de ação são do tipo Pelton. No Brasil existem poucas localidades que oferecem a possibilidade de implantar usinas equipadas com turbinas Pelton. Isso porque, no nosso país, inexistem a presença de aproveitamentos hídricos que detêm quedas suficientemente altas³. Em geral, somente na Serra do Mar existem encostas com diferenças de alturas de mais de 300 m (porém com rios de extensão muito pequena),

³ Em aproveitamentos cuja queda é superior a 600 m, deve-se somente usar a Turbina Pelton.

sendo, portanto, regiões onde são encontradas usinas equipadas com turbinas dessa natureza⁴.

Existindo remanso (elevação do nível de jusante causado pelo retardo no escoamento d'água) ou afogamento ao pé da barragem, é preciso fornecer, além da vazão turbinada e vertida na usina, alguma informação sobre o comportamento d'água a jusante do canal de fuga da usina. Essa informação adicional corresponde a uma cota h_{jus} que pode ser obtida a partir do volume armazenado no reservatório a jusante com remanso ou, em alguns casos específicos, a partir da vazão lateral de um afluente a jusante (e.g., usina de Itaipu, com o Rio Iguaçu como afluente a jusante).

Finalizando, deve-se atentar para o fato que para algumas usinas, o polinômio cota de jusante independe da vazão vertida. Isso acontece porque em tais usinas o volume de água lançado pelo vertedouro está suficientemente distante do canal de fuga da usina, não influenciando assim a cota de jusante e, conseqüentemente, a altura de queda na mesma.

Retornemos agora à Expressão (3.2.3), referente à função de produção de uma unidade hidrelétrica. É possível observar que a potência associada à energia produzida pela j -ésima turbina depende da altura de queda líquida e não da altura de queda bruta, descrita previamente. Conforme visto, a altura de queda bruta representa uma diferença de energia potencial gravitacional entre dois pontos (cota de montante e de jusante), sendo que esta diferença representa a energia cedida (trabalho efetuado) pela unidade de peso de água entre os mesmos.

Acontece que nem toda essa energia potencial referente à altura de queda bruta é aproveitada pela turbina. Existe uma perda de energia, comumente conhecida como perda hidráulica, oriunda do atrito da água durante o escoamento entre as cotas de montante e de jusante. Tal perda é composta pela soma de uma série de outras perdas referentes ao efeito das peças e dispositivos intercalados na adução da água tais como grades, comportas, válvulas, curvas, entre outros. Em geral, pode-se assumir que a perda hidráulica total se restringe àquelas perdas oriundas do atrito da água nos condutos forçados.

⁴ Usina de Cubatão (SP) tem cerca de 700 m de queda; Usina de Capivari-Cachoeira (PR) com queda de 714 m.

Particularmente, a parcela das perdas relacionada aos condutos pode ser calculada por várias fórmulas, entre elas destaca-se, pela larga utilização, a denominada função de Hazen-Williams [79]:

$$pl_j = 10,643q_j^{1,85} \lambda_{wl}^{-1,85} D^{-4,87} L \quad (3.2.1.10)$$

onde:

pl_j é a perda hidráulica na j -ésima unidade geradora, em metros;

λ_{wl} é o coeficiente de Hazen-Williams (tabelado);

D é o diâmetro do tubo (conduto), em metros;

L é o comprimento do tubo, em metros.

Em estudos de operação energética, utiliza-se uma aproximação da expressão acima assumindo que a perda hidráulica é proporcional ao quadrado da vazão turbinada na unidade geradora e/ou na usina. Desta forma a perda hidráulica de uma unidade, é dada pela seguinte expressão:

$$pl_j = k_{usina} Q^2 + k_j q_j^2 \quad (3.2.1.11)$$

onde:

k_{usina} constante característica do conduto forçado da usina (comum a todas as unidades), dado em s^2/m^5 ;

k_j é a constante característica do conduto forçado da j -ésima unidade geradora (adutores individuais de cada unidade), expresso em s^2/m^5 .

Ambos as constantes acima são funções das características construtivas (comprimento, diâmetro, natureza do material, entre outros) do conduto forçado da unidade.

Note-se que a Equação (3.2.1.11) considera o caso de usinas com um adutor para tomada d'água na cota montante, além de adutores individualizados para cada conjunto turbina-gerador. Quando não existir o adutor comum a todas as unidades, e sim apenas adutores individuais, basta considerar na equação acima k_{usina} igual a zero. No caso de usinas com adutores individuais para grupos de unidades geradoras, pode-se modelar de forma semelhante a (3.2.1.11), considerando um valor de k_{usina} para cada grupo.

Por fim, definida a queda bruta e também a perda hidráulica, pode-se agora encontrar a expressão resultante da altura de queda líquida (ou efetiva) de uma unidade hidrelétrica. Deve-se ressaltar neste ponto que, quando a turbina opera com a altura de queda líquida nominal (ponto de projeto) a mesma gira com o número de rotações nominal do gerador e desenvolve sua potência nominal sob vazão turbinada especificada com rendimento máximo.

Deste modo, a expressão da altura de queda líquida, hl_j , é dada por:

$$hl_j = fcm(v_0, v_f) - fcj(Q + s) - p_j^b(Q, q_j) \quad (\text{sem remanso}) \quad (3.2.1.12)$$

$$hl_j = fcm(v_0, v_f) - fcj(Q + s, h^{jms}) - p_j^b(Q, q_j) \quad (\text{com remanso}) \quad (3.2.1.13)$$

$$hl_j = fcm(v_0, v_f) - fcj(h^{jms}) - p_j^b(Q, q_j) \quad (\text{remanso e afogamento}) \quad (3.2.1.14)$$

A partir das expressões acima se pode notar que a variável altura de queda líquida na qual uma turbina está submetida é função não-linear dos volumes armazenados no reservatório, ao início e ao final de um período de tempo Δt , da vazão defluente média ao longo deste mesmo período considerado, além de, em casos particulares, do volume do reservatório a jusante e/ou da vazão lateral de um afluente próximo. Essa função não-linear possui característica polinomial, podendo ter termos de quarta ordem, conforme mostrado abaixo, a qual faz uso do cálculo aproximado da cota equivalente de montante, bem como desconsidera os casos onde existe a presença de remanso:

$$hl_j = a_0 + a_1 \left(\frac{v_0 + v_f}{2} \right) + a_2 \left(\frac{v_0 + v_f}{2} \right)^2 + a_3 \left(\frac{v_0 + v_f}{2} \right)^3 + a_4 \left(\frac{v_0 + v_f}{2} \right)^4 \quad (3.2.1.15)$$

$$-b_0 - b_1(Q + s) - b_2(Q + s)^2 - b_3(Q + s)^3 - b_4(Q + s)^4 - k_{usina} Q^2 - k_j q_j^2$$

3.2.2 Rendimento do Grupo Turbina-Gerador

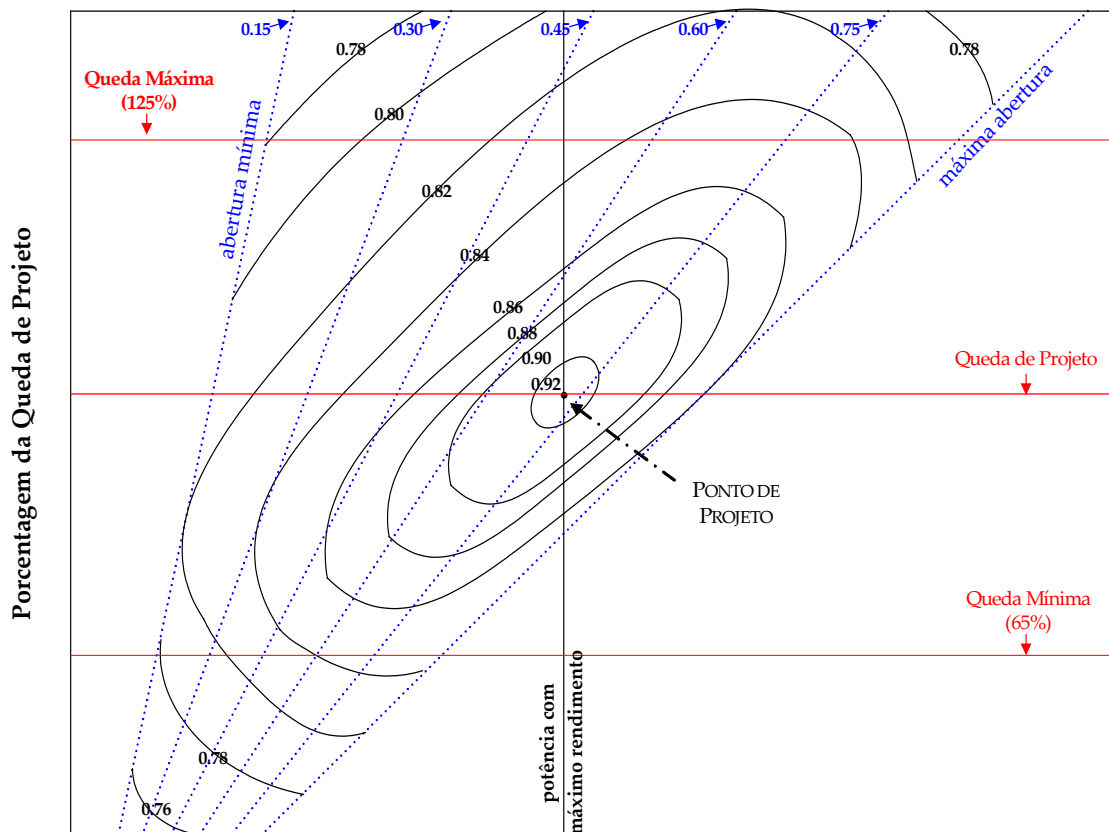
O rendimento do grupo turbina-gerador é uma variável que, assim como a altura de queda líquida, define a potência de saída de uma unidade geradora. Em estudos de médio e de curto prazo, normalmente o rendimento é considerado constante e igual a um valor médio para todos os conjuntos turbina-gerador de uma usina hidrelétrica.

Entretanto, em estudos de horizontes de mais curto prazo, conforme é o caso da programação da operação energética, faz-se necessário uma representação mais detalhada,

principalmente da turbina, uma vez que a modelagem correta de seu comportamento neste horizonte possibilita um despacho otimizado, bem como evita a presença de comportamentos operativos indesejáveis.

Define-se como rendimento da j -ésima unidade geradora (turbina-gerador), η_j , o produto dos rendimentos da turbina e do gerador, $\eta_t \times \eta_g$. Esse rendimento resultante é responsável pela introdução de perdas no processo de produção de energia elétrica. A caracterização dessas perdas é função do ponto de operação em que a turbina está submetida em um dado instante de tempo, conforme veremos mais adiante.

Para uma operação realista do comportamento físico do rendimento de uma turbina hidráulica, duas variáveis devem ser levadas em consideração: a altura de queda líquida que a mesma está submetida e a sua vazão turbinada. Esse inter-relacionamento é bastante complexo, sendo normalmente expresso por meio das curvas de desempenho da turbina. Essas curvas, denominadas de curvas-colina (em inglês, *Hill Diagrams*), apresentam um formato de uma colina, motivo este pelo qual recebem tal denominação. A Figura 3.2.2.1 [80] apresenta, de forma ilustrativa, a curva de desempenho de uma turbina, em valores percentuais.



Porcentagem da Potência em Relação à Potência Obtida com Máximo Rendimento e Queda de Projeto

Figura 3.2.2.1 - Curva de Desempenho de uma Turbina Hidráulica.

Acima, no eixo horizontal estão apresentados os valores percentuais de potência em relação ao valor de potência obtido com máximo rendimento (engolimento nominal) e altura de queda de projeto. No eixo vertical estão os valores de altura de queda líquida como porcentagens do valor da queda de projeto. Neste eixo destacam-se ainda os limites máximo e mínimo operativos, os quais definem a faixa operativa de queda possível para a turbina.

Toda turbina é projetada para operar com um engolimento (vazão turbinada) nominal, q_j^{nom} , e uma altura de queda líquida nominal (queda de projeto), hl_j^{nom} , uma vez que nestas condições seu rendimento será máximo. Esse ponto de operação, definido pelo par (q_j^{nom}, hl_j^{nom}) , é denominado de "ponto de projeto" (mostrado na Figura 3.2.2.1), o qual corresponde à potência nominal fornecida pela turbina com rendimento máximo, sem que a mesma atinja a sua potência máxima. Qualquer outra combinação de potência (engolimento) e queda líquida diferente do ponto de projeto corresponderá a um rendimento inferior ao valor máximo.

Ainda com relação à Figura 3.2.2.1, estão apresentados por tracejados os valores de abertura relativa das palhetas, em percentuais a abertura máxima. Finalmente, sob o formato de curvas de níveis, estão os valores de rendimento da turbina, na área delimitada pelos valores máximos e mínimos operativos da vazão turbinada.

A Figura 3.2.2.2, mostrada a seguir, será utilizada para fazer uma interpretação ilustrativa da interdependência que envolve as variáveis operativas de uma unidade hidrelétrica. Essa figura representa de forma aproximada a curva-colina de uma unidade hidrelétrica. Neste caso, os valores de rendimento representam o produto dos rendimentos da turbina e do gerador.

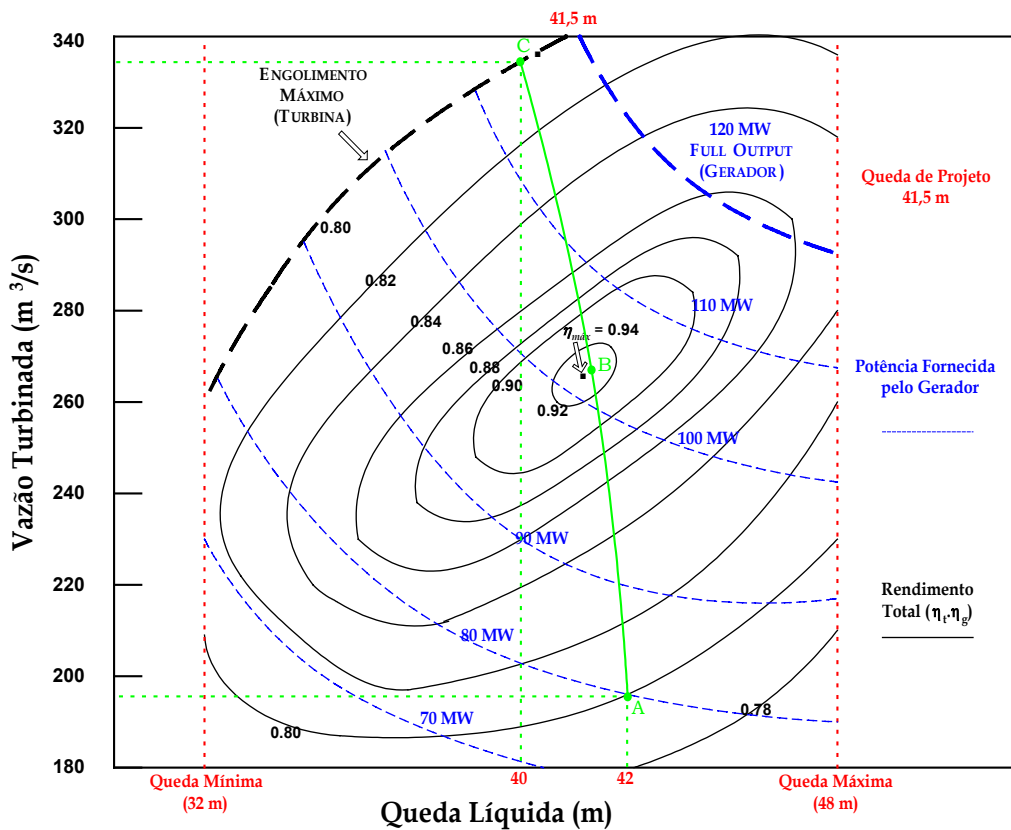


Figura 3.2.2.2 - Exemplo Ilustrativo de uma Curva-Colina.

A título de análise, considere que a turbina esteja operando com uma altura de queda líquida de 42 m, admitindo neste instante uma vazão em torno de 198 m³/s (Ponto A). Com esta altura de queda líquida e vazão, podemos observar na curva colina da unidade que o rendimento da mesma é de 80%. Nessas condições, pode-se observar também pelo diagrama da Figura 3.2.2.2 que a potência que está sendo desenvolvida pelo gerador é de 80 MW.

Caso se deseje aumentar a potência de saída do conjunto, faz-se necessário elevar a vazão turbinada, aumentando-se o engolimento na turbina. A curvatura apresentada na trajetória percorrida na Figura 3.2.2.2 é devida à interdependência da altura de queda líquida e a potência gerada (turbinamento), uma vez que um aumento na vazão turbinada causa uma redução na altura de queda líquida, como conseqüência da elevação do nível de jusante e da perda hidráulica, conforme mostrado na seção anterior.

Assim, vamos supor que esta unidade deva ser utilizada até sua potência máxima possível, ou seja, a mesma irá partir do ponto A inicial, até o ponto C. Pode-se observar nesta trajetória (ABC) que, ao incrementar-se a vazão turbinada a partir do ponto A até o ponto C, a potência de saída do gerador é sempre crescente, partindo de 80 MW (em A), até aproximadamente 115 MW (em C).

Deve ser notado também que, para esta trajetória operativa, a turbina não consegue fornecer potência máxima ao gerador (120 MW) devido a limitações de engolimento para a queda líquida em que a turbina defronta-se no ponto C.

Com relação ao comportamento do rendimento da unidade durante a trajetória ABC, de acordo com a Figura 3.2.2.2, pode-se dizer que o mesmo apresenta duas etapas distintas: do ponto A até o ponto B, o valor do rendimento é sempre crescente neste primeiro trajeto. Já a partir do ponto B, o valor do rendimento volta a decrescer até o ponto final C. Esse distanciamento da operação da unidade do ponto de melhor rendimento (no presente caso, o ponto B) causa ineficiência no processo de produção de energia elétrica.

Na Figura 3.2.2.3, à frente, tem-se a curva de rendimento da turbina, para o caso ilustrativo em questão, em função da vazão turbinada na unidade para diferentes valores de queda líquida. Deve-se ressaltar que, por simplificação, a queda líquida é mantida constante para toda a excursão de vazão turbinada na unidade. Este fato não é verdadeiro, conforme verificado na Figura 3.2.2.2, uma vez que a altura de queda líquida depende da vazão turbinada na unidade.

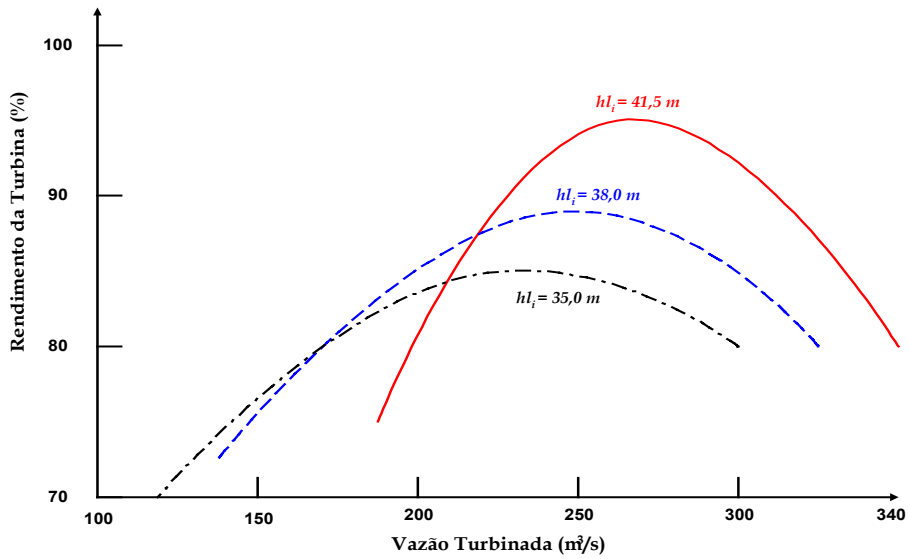


Figura 3.2.2.3 - Curva de Rendimento da Turbina em Função da Vazão Turbinada para Diferentes Alturas de Queda Líquida.

Na figura acima se pode observar que, para altura de queda nominal, 41,50 m, a vazão turbinada ótima é da ordem de 265 m³/s, visto que nessas condições a turbina está operando com seu rendimento máximo, 94,0%. Ainda nesta figura é mostrada a variação do rendimento para outros valores de queda líquida. Pode-se notar que dependendo da altura de queda em que a turbina está operando, a mesma nunca atingirá o rendimento máximo de projeto, mas apenas, um valor máximo que corresponde a uma vazão ótima para a referida queda operativa.

Com base no comportamento físico observado nas figuras 3.2.2.2 e 3.2.2.3, deve-se ressaltar que neste trabalho o comportamento do rendimento de uma unidade de geração hidrelétrica é modelado pela seguinte função quadrática, dependente da altura de queda líquida e da vazão turbinada na unidade:

$$\eta_j(q_j, bl_j) = \rho_{0j} + \rho_{1j}q_j + \rho_{2j}bl_j + \rho_{3j}bl_jq_j + \rho_{4j}q_j^2 + \rho_{5j}bl_j^2 \quad (3.2.3.1)$$

onde:

$\rho_{0j}, \dots, \rho_{5j}$ são coeficientes (particulares de cada unidade) de eficiência que devem ser estimados de antemão. Isso pode ser feito por meio da técnica de Regressão Não-Linear Multivariável [81], a partir de pontos retirados da curva-colina da j -ésima unidade.

Sob o ponto de vista operacional da j -ésima unidade geradora, algumas considerações sobre seus limites de potência (carregamento) devem ser feitas. Cada turbina, conforme pode ser visto na Figura 3.2.2.4 a seguir, detém um limite superior (e inferior) de potência causada por limitações mecânicas de engolimento que depende da altura de queda líquida a qual a turbina esteja submetida. Já os geradores possuem limites superiores fixos, ditados pela capacidade nominal dos enrolamentos de armadura. Ou seja, existe um valor de potência que não pode ser ultrapassado por razões construtivas do grupo, bem como por considerações de regime de funcionamento do gerador.

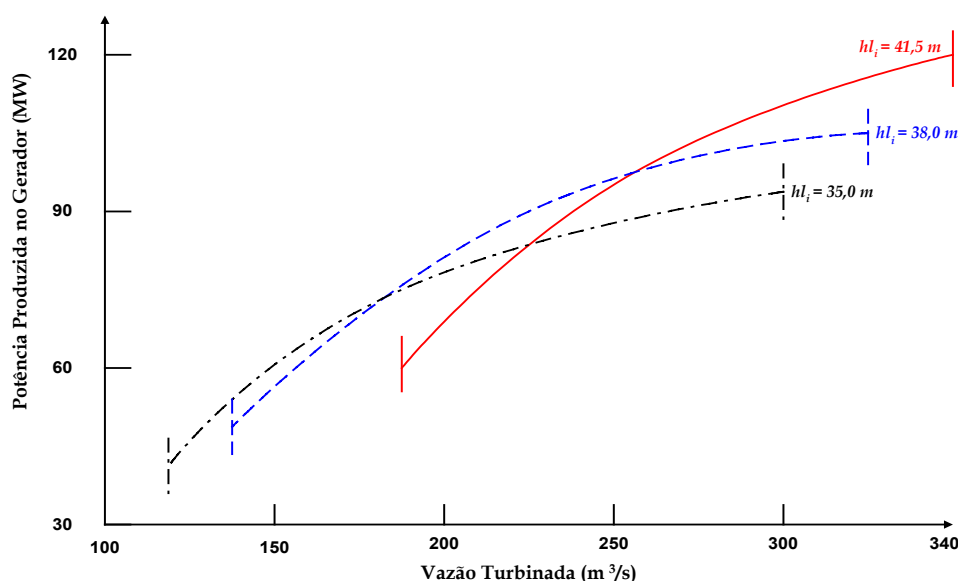


Figura 3.2.2.4 - Curva Potência Produzida no Gerador em Função da Vazão Turbinada para Diferentes Alturas de Queda Líquida.

Conforme pode ser observado na figura anterior, para cada altura de queda, o conjunto turbina-gerador é capaz de entregar uma potência máxima às custas de um turbinamento (engolimento) máximo para a referida queda. Em algumas situações, a turbina deve funcionar com o distribuidor parcialmente fechado, pois a mesma tem capacidade de potência mecânica superior àquela que o gerador pode absorver em seu eixo, conforme mostra a Figura 3.2.2.5.

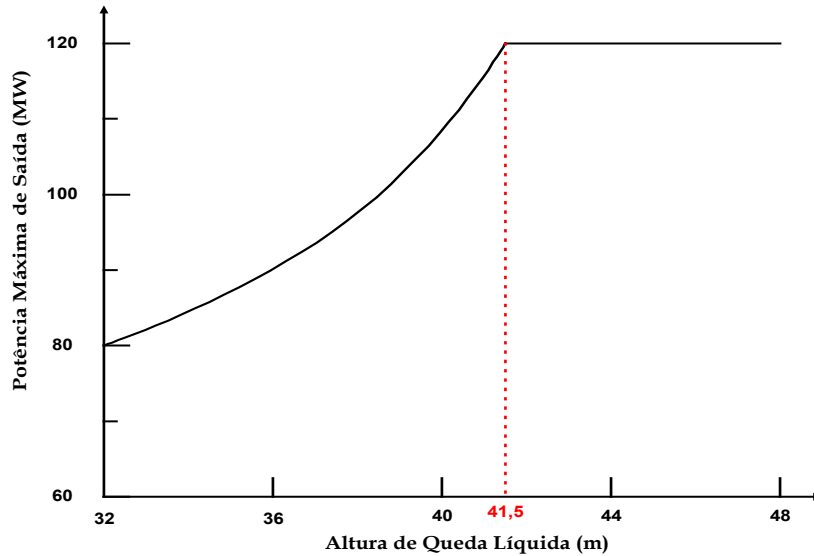


Figura 3.2.2.5 - Curva Potência Máxima em Função da Altura de Queda Líquida.

Para contornar esta situação, fazendo com que a potência de saída fique constante e igual à potência nominal do gerador, faz-se necessário que o engolimento da turbina decresça de forma a reduzir a potência para tais alturas de queda líquida, de acordo com a ilustração da Figura 3.2.2.6, a seguir.

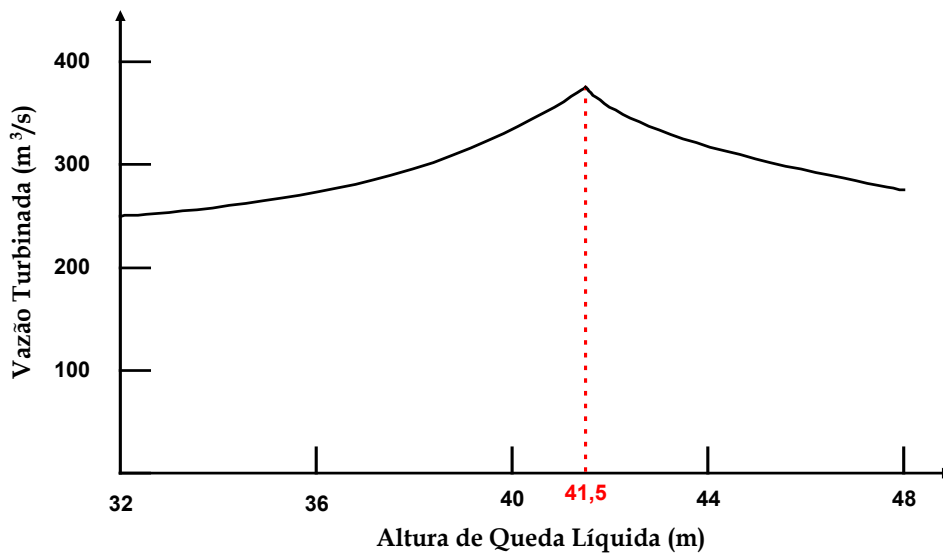


Figura 3.2.2.6 - Curva Vazão Turbinada (Engolimento) em Função da Altura de Queda Líquida.

Conforme foi visto até aqui, o comportamento do rendimento do conjunto turbina-gerador é complexo devido à interdependência das várias variáveis que estão envolvidas no processo de modelagem. Toda turbina hidráulica é projetada para um certo valor de queda,

hl_j^{nom} , e de descarga, q_j^{nom} , para as quais seu rendimento é máximo, pois, para as mesmas, a entrada da água no receptor da turbina se dá sem choque, permitindo assim uma saída longitudinal da água. Se a queda e/ou a vazão variar de forma acentuada, devido principalmente a razões hidrológicas, ou mesmo operativas, resultará numa queda de rendimento na turbina, pois esta deixa de funcionar nas condições para as quais fora projetada. Assim, toda turbina deve ser operada com um bom rendimento para um largo espectro de pontos de operação, sobretudo para operação em condições adversas encontradas em períodos com hidraulicidades desfavoráveis.

Além do problema relacionado com a redução do rendimento de uma turbina, causado pela variação da queda e da descarga, deve-se atentar para o fato que uma diminuição (ou até mesmo uma elevação) na descarga (vazão turbinada), além de certos limites⁵, pode conduzir à ocorrência do fenômeno de cavitação e, em certos casos, a vibrações mecânicas de graves conseqüências para a turbina. Associados a dois esses fatores estão ligadas às chamadas zonas proibidas de geração, nas quais a turbina não pode ser operada devido ao comprometimento do funcionamento da mesma.

O fenômeno da cavitação é basicamente entendido, como a seqüência de eventos de formação de bolhas de vapor, com seu desenvolvimento posterior, implosão ou explosão, tendo como origem à queda de pressão associada a pequenos núcleos existentes nos líquidos [82]. Os principais fatores que levam as (ou um conjunto de) turbinas hidráulicas (principalmente a Francis e a Kaplan) à cavitação estão relacionados com a perda de perfis das pás rotoras devido a sucessivas intervenções para reparos, perdas dos perfis das palhetas diretrizes, rugosidade excessiva, operação fora das faixas (zonas) garantidas (i.e, com carga parcial ou sobrecarga), características da água do reservatório, etc. Os efeitos da cavitação em turbinas hidráulicas são indesejáveis e agressivos, tais como a erosão nos contornos sólidos, vibrações, ruídos excessivos, diminuição da eficiência, com conseqüente queda de potência, limitação da flexibilidade operacional das máquinas, redução da vida útil, entre outros [83].

Assim, nota-se que existem zonas proibidas de geração, fornecidas pelo fabricante de uma turbina, nas quais a turbina certamente irá cavitatar. Usualmente, essas zonas são expressas sobre a curva-colina da unidade, conforme é mostrado na Figura 3.2.2.7. Para que evitar

⁵ Algum desses limites podem ser verificados nas figuras 3.2.2.4 e 3.2.2.5.

os efeitos danosos descritos acima, essas zonas proibidas devem ser adequadamente representadas no modelo da programação da operação energética.

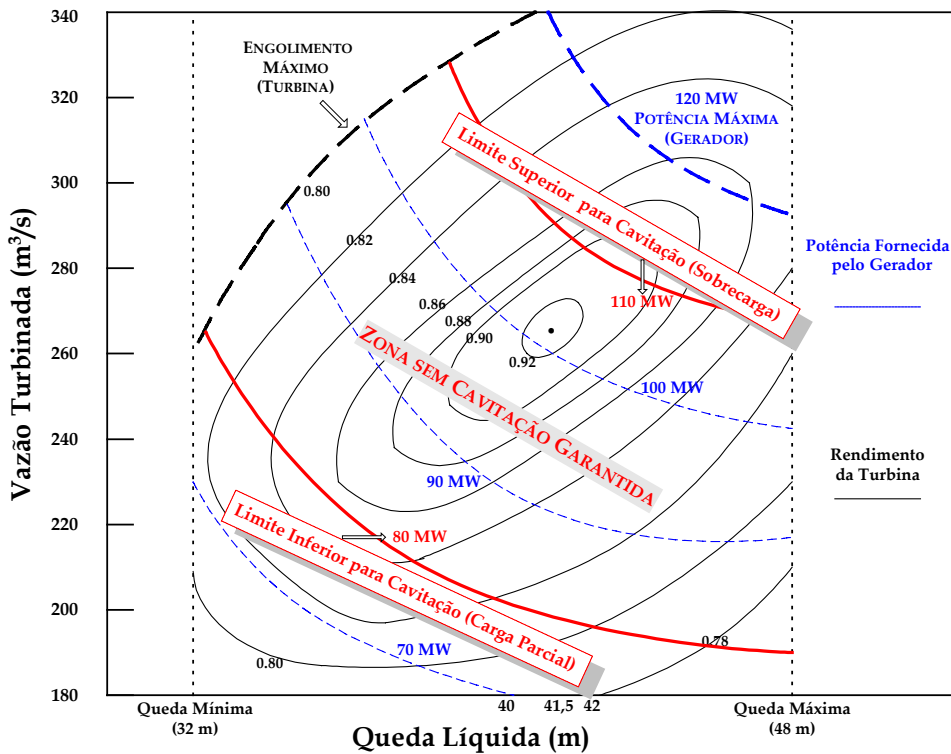


Figura 3.2.2.7 - Zonas de Cavitação em Turbinas Hidráulicas.

Além da cavitação, existem outros fatores que restringem a operação de uma unidade de geração hidrelétrica. Esses fatores estão relacionados com zonas de operação nas quais a turbina poderá sofrer fortes vibrações mecânicas, oscilações de pressão no tubo de sucção e oscilações no eixo. As duas principais conseqüências associadas a esses fenômenos são o comprometimento do funcionamento da turbina (associado ao excessivo desgaste mecânico) e oscilações da potência de saída.

A Figura 3.2.3.8 ilustra a oscilação da potência de saída (ΔP), em percentuais da potência nominal da máquina, em função da potência de saída, P . Em alguns casos práticos, uma unidade operando em uma zona proibida, a variação de potência, ΔP , pode atingir cerca de 10% do valor nominal de potência da máquina.

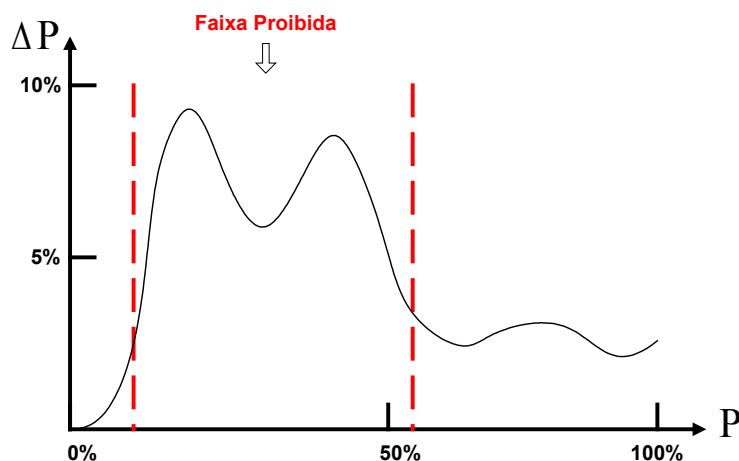


Figura 3.2.2.8 – Gráfico da Oscilação da Potência de Saída de Uma Unidade Geradora em Função do Carregamento.

Finalizando a Figura 3.2.2.9, a seguir, mostra de forma ilustrativa, uma unidade hidráulica com uma zona proibida de operação cujos valores limites estão compreendidos entre as potências de 20 e 60 MW. Nessa figura também se pode notar que a unidade geradora possui duas zonas permitidas de geração. Em uma delas, a potência de saída está limitada entre os valores de zero e 20 MW, para todos os valores operacionais de queda líquida da turbina. Já a outra zona operativa apresenta valores constantes para os limites mínimos de potência e para limites máximos de potência com quedas iguais ou superiores a queda líquida nominal. Para quedas inferiores a queda líquida nominal, o limite máximo de potência que pode ser obtido é variável (decrecente) com a vazão turbinada máxima que pode ser alcançada nessas situações.

Finalizando, para uma modelagem realista de uma unidade hidrelétrica deve-se considerar todas as restrições impostas pelas curvas de desempenho das turbinas, tais com as relacionadas com as zonas proibidas de geração das turbinas, limites máximos de funcionamento dos geradores e o comportamento do rendimento resultante da unidade.

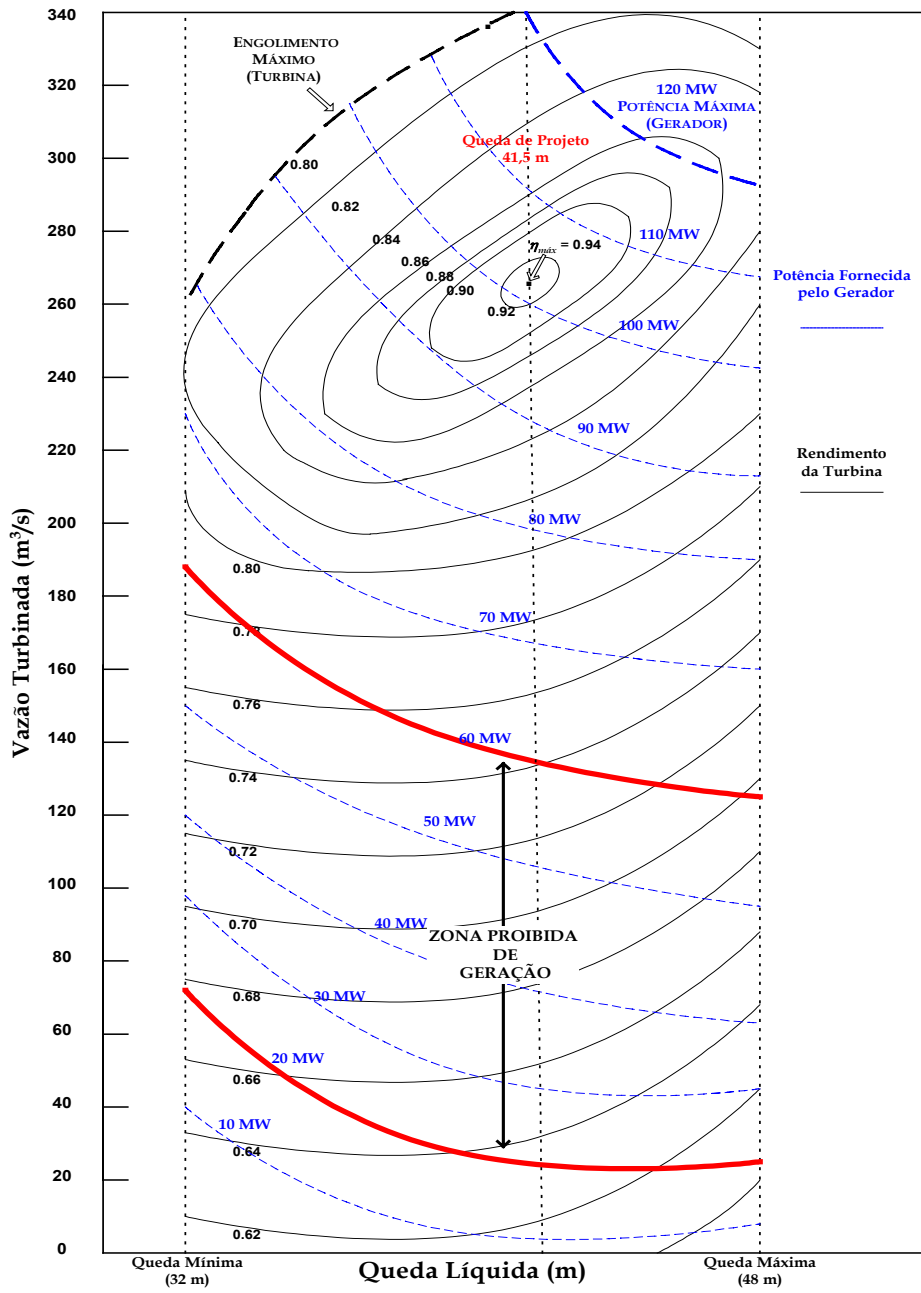


Figura 3.2.2.9 - Zonas de Operação em uma Unidade Hidrelétrica.

3.2.3 Vazão Turbinada

Conforme mostrado na Equação (3.2.3), a vazão turbinada, q_j , é uma das variáveis que definem a potência de saída do conjunto turbina-gerador. Suas relações e restrições impostas à produção de energia elétrica e a operação do conjunto já foram detalhadas nas seções anteriores.

3.2.4 Análise da Função de Produção

Conforme visto anteriormente, a função de produção de uma unidade hidrelétrica é composta pelo produto entre o rendimento resultante do conjunto turbina-gerador, a altura de queda líquida e a vazão turbinada na unidade. Matematicamente, isso equivale a dizer que a função de produção depende de variáveis de controle (vazão turbinada na unidade, na usina e vazão vertida na usina) e de variáveis de estado (volumes armazenados ao início e ao final do estágio de tempo considerado):

$$pb_j(v_0, v_f, q_j, Q, s) = G(\rho_{0j} + \rho_{1j}q_j + \rho_{2j}hl_j + \rho_{3j}q_jhl_j + \rho_{4j}q_j^2 + \rho_{5j}hl_j^2)hl_jq_j \quad (3.2.4.1)$$

onde hl_j é definido por (3.2.1.15) e G é uma constante cujo valor é de $9.81 \cdot 10^{-3}$.

Portanto, pode-se notar que, segundo a modelagem proposta neste trabalho, a expressão completa para a potência de saída de uma unidade hidrelétrica é uma função polinomial de ordem 12 nas variáveis v_0 , v_f , Q e s , e de ordem sete na variável q_j .

A partir de agora, será feito uso de algumas representações gráficas no intuito de complementar as análises feitas anteriormente para a função de produção, bem como apresentar a modelagem final da função a ser adotada neste trabalho. Para tanto, utilizar-se-ão como exemplo base os dados referentes à Usina Hidrelétrica de Ilha Solteira.

A Figura 3.2.4.1, mostrada a seguir, ilustra o comportamento da potência de saída de uma unidade desta usina como função do volume médio armazenado, \underline{v} , e da defluência⁶, d , no reservatório. Numa das ilustrações que compõem essa figura, a vazão turbinada⁷ q_j , é mantida constante em $300 \text{ m}^3/\text{s}$. Na outra, este valor é alterado para $450 \text{ m}^3/\text{s}$.

⁶ Idealmente, as análises deveriam ser apresentadas considerando as variáveis v_0 , v_f , Q e s . Entretanto, essas variáveis podem ser agrupadas para facilitar a representação gráfica. v_0 e v_f possuem comportamentos idênticos na função de produção, bem como, do mesmo modo, Q e s . Assim, v_0 e v_f são agrupadas em uma única variável \underline{v} . Da mesma forma Q e s são representadas por d apenas.

⁷ O valor máximo de vazão para esta usina é de $480 \text{ m}^3/\text{s}$.

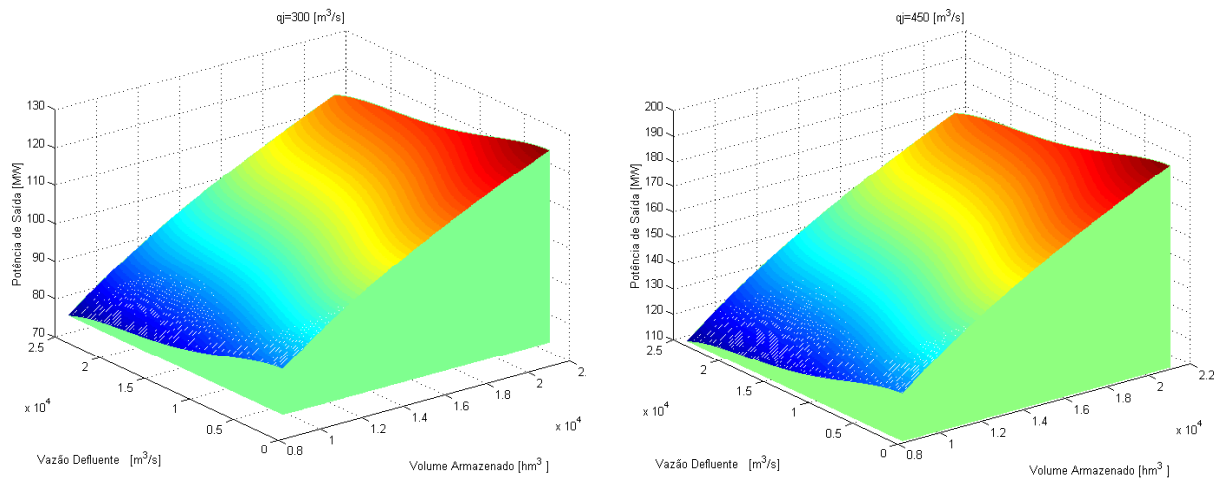


Figura 3.2.4.1 - Potência em Função do Volume Médio Armazenado e da Defluência na Usina (Vazão Turbinada Fixa na Unidade).

Pode-se notar que, para os dois valores de q_j , a potência é uma função crescente com relação a \underline{v} e decrescente em relação à d . Esse comportamento é válido para o caso geral: quanto maior o volume armazenado maior a cota de montante e conseqüentemente maior a queda líquida que a unidade dispõe para a produção de energia elétrica; analogamente, quanto maior a vazão defluente, maior é a elevação da cota de jusante e como conseqüência tem-se uma redução na altura de queda líquida na unidade.

Entretanto, sob ponto de vista da análise de convexidade⁸, existem diferenças marcantes. Pode-se ver nas figuras que, quando estão fixados os valores de q_j e d , a potência é uma função côncava⁹ com relação à \underline{v} . Isso tem uma explicação física: a taxa de variação¹⁰ da cota de montante é sempre decrescente, considerando uma excursão que parte do mínimo volume útil até o máximo. Tal comportamento, entretanto, não é verificado com relação a variável d . Em geral, fixados os valores de q_j e \underline{v} a taxa de variação da cota de jusante não é sempre decrescente à medida que d diminui. A elevação do canal de fuga depende da velocidade de escoamento da água no nível de jusante.

A velocidade é menor para casos de baixa defluência dado que a seção (calha) a jusante do rio consegue reter mais água. Retendo-se mais água, maior é a elevação da cota

⁸ Uma função $f(x)$ é convexa se e somente se para quaisquer vetores x, y e um escalar $\lambda \in [0, 1]$ se verifica que $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$ [84].

⁹ Uma função $f(x)$ é côncava caso a condição de desigualdade acima seja verificada da seguinte maneira: $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$. Em conseqüência, tem-se que o negativo de uma função convexa é uma função côncava e vice-versa.

¹⁰ Nesta seção, refere-se a variação de primeira ordem.

correspondente. A velocidade de escoamento volta a aumentar à medida que a calha do rio é preenchida por um maior nível de vazão defluente, decrescendo novamente quando o remanso ou afogamento está presente. Esse complexo fenômeno físico gera então a não-convexidade em d , as quais podem ser visualizadas na Figura 3.2.4.1.

A próxima figura ilustra o comportamento da potência como função de q_j e \underline{v} considerando para tanto dois valores fixos de defluência. Pode-se notar que neste caso existe a presença de não-convexidades na função de produção causadas pela variável q_j . Considerando um valor fixo de \underline{v} , pode-se notar na Figura 3.2.4.2 que a variação da potência apresenta dois comportamentos distintos para toda a excursão de q_j . Na primeira parte essa variação é sempre crescente (“trecho” convexo da potência, onde os valores de rendimento são excessivamente baixos), e na segunda parte a mesma é sempre decrescente (“trecho” côncavo, presença acentuada da perda hidráulica e região onde o rendimento atinge seu máximo valor e volta a decrescer).

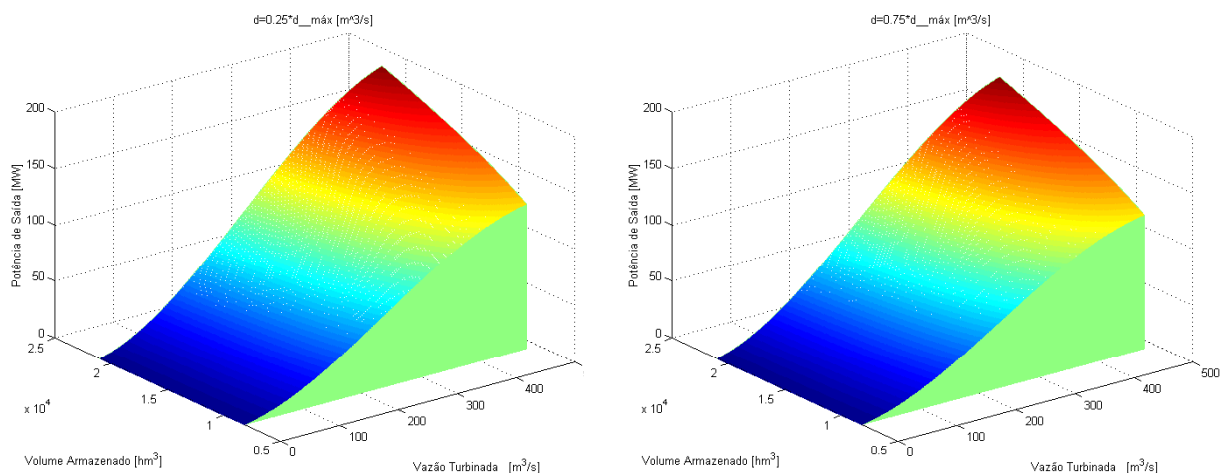


Figura 3.2.4.2 - Potência em Função do Volume Médio Armazenado e da Vazão Turbinada na Unidade (Vazão Defluente Fixa na Usina).

Por fim, na Figura 3.2.4.3 é apresentando o comportamento da função de produção como função da vazão turbinada na unidade e da vazão total defluente na usina, considerando dois valores constantes de volumes médios armazenados no reservatório.

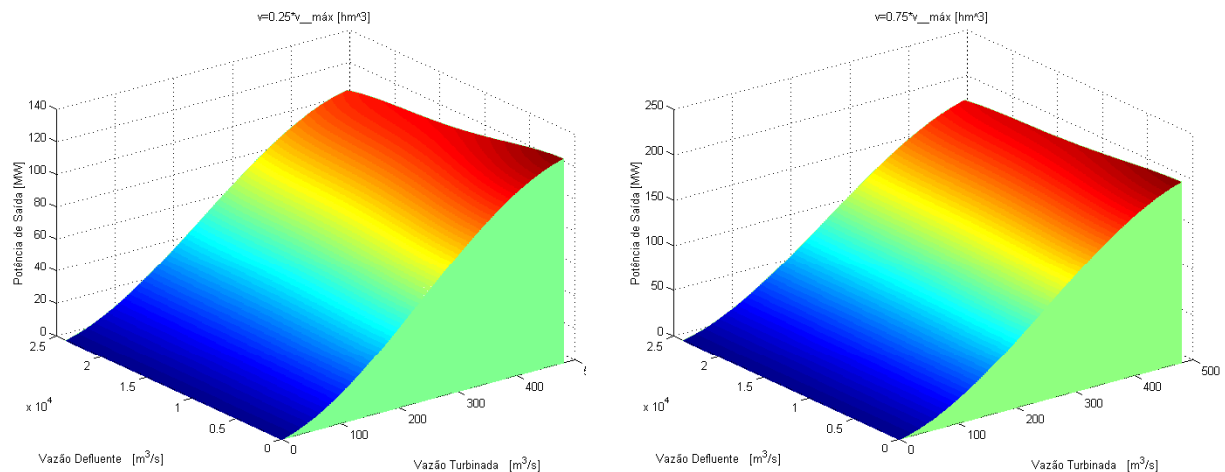


Figura 3.2.4.3 - Potência em Função do Volume Médio Armazenado e da Vazão Turbinada na Unidade (Vazão Defluente Fixa na Usina).

Neste trabalho a modelagem que será considerada corresponde àquela mostrada na Figura 3.2.4.3, acima. Deste modo, o acoplamento temporal¹¹ é eliminado por meio da consideração da cota de montante constante para todos os períodos de tempo. A grande capacidade de regularização da maioria dos reservatórios existentes no sistema brasileiro permite a adoção de tal medida simplificativa. Porém, as demais variáveis são modeladas de forma rigorosa uma vez que a presença de não-linearidades e não-convexidades é evidente. Essas características, que devem ser levadas em consideração para a obtenção de um despacho eficiente das unidades geradoras, podem aparecer de forma acentuada no problema, pois as variáveis de controle q_j , Q e s pode mudar de forma brusca ao longo do período de estudo da programação, bem como entre dois estágios de tempo consecutivos dentro do horizonte; variação essa dificilmente encontrada no volume médio armazenado no caso de reservatórios com grande capacidade de armazenamento.

Portanto, de acordo com os aspectos discutidos até aqui, matematicamente a função de produção adotada neste trabalho é dada por:

$$pb_j(q_j, Q, s) = f([q_j]^7, [Q]^{12}, [s]^{12}) \quad (3.2.4.2)$$

¹¹ Esse acoplamento temporal diz respeito somente a função de produção. Conforme será visto no capítulo seguinte, o sistema hidrelétrico é por natureza acoplado devido às restrições de conservação de massa nos reservatórios, entre outras.

Na função acima, a altura de queda líquida detém um termo constante, definido a partir de agora como f_{cm} , o qual representa a cota de montante relativa ao armazenamento inicial do reservatório no início do estudo da programação.

3.2.5 Custos Operacionais

Conforme visto no capítulo anterior, o problema de interesse deste trabalho tem como objetivo principal determinar a operação de mínimo custo do sistema para todo o horizonte da programação. Deste modo, é importante considerar todos os custos relevantes com essa atividade. Os custos de operação associados ao sistema hidrelétrico podem ser basicamente divididos em dois tipos.

No primeiro tipo, está presente o custo da água usada para produzir eletricidade durante a programação. Desde que essa água pode ser usada para gerar eletricidade no horizonte além do interesse da programação, então deve ser dado um custo alternativo (ou indireto) para a mesma. Esse custo alternativo é usualmente calculado pelo modelo de mais longo prazo utilizado no planejamento da operação. Assim, o custo de produzir eletricidade no horizonte da programação é medido com base no total de geração térmica que pode ser evitado no futuro.

O segundo tipo de custo operativo está relacionado com o custo de manutenção associado à operação do sistema hidrelétrico. Assim como o primeiro tipo de custo citado, o custo de manutenção também não é um custo imediato. Entretanto, é importante considerá-lo uma vez que o valor desse custo é afetado pelo modo na qual o sistema é operado. Uma parte dos custos de manutenção está associada com a maneira que as unidades são alocadas ao longo da programação, isto é, quantas vezes essas unidades são ligadas ou desligadas nesse horizonte.

Algumas conseqüências ligadas a este aspecto têm sido investigadas em [85]. Segundo os autores, as freqüentes partidas de uma unidade ocasionam:

- (i) incremento no número de intervenções para manutenção, uma vez que a ocorrência desse fenômeno é proporcional ao número de partidas das unidades. Deve-se ressaltar que durante a manutenção a operação otimizada do sistema pode ficar comprometida;

- (ii) excessivo desgaste e corrosão dos equipamentos mecânicos da turbina devido ao aumento de temperatura durante a partida;
- (iii) uso não eficiente da água durante a partida, pois a unidade irá operar longe do seu ponto de melhor eficiência, o que significa que a água não está sendo usada de forma otimizada.

Para tentar evitar um comportamento cíclico (liga/desliga) das unidades, alguns trabalhos sugerem a inclusão de restrições especiais, tais como as restrições de *minimum uptime and downtime*. Além dessas restrições, custos associados à partida também podem ser utilizados a fim de minimizar esse comportamento cíclico. Esta proposta, também comum em unidades termelétricas, tem sido considerada por alguns autores [86-89]. Entretanto, não existe um consenso sobre o real valor dos custos associados à partida das unidades uma vez que os mesmos são de difícil mensuração.

Outro componente que afeta os custos de manutenção é a operação fora das zonas proibidas. Nesse sentido, vibrações, cavitação e pontos de baixa eficiência operativa podem ser evitados a partir da representação das zonas. Portanto, neste trabalho a modelagem relacionada com as zonas operativas tem com um de seus objetivos diminuir os custos associados com a manutenção das unidades geradoras.

3.3 Unidades Termelétricas

As usinas termelétricas produzem energia elétrica a partir energia química ou nuclear de determinados elementos denominados de combustíveis. Basicamente, as usinas termelétricas podem ser divididas em dois grandes grupos:

- (i) as usinas convencionais, que usam materiais fósseis como combustível, tais como o carvão, óleo combustível, gás natural;
- (ii) as nucleares, as quais utilizam combustíveis físséis como o urânio.

Dentro do grupo de usinas convencionais encontramos as usinas com turbinas a vapor, a gás e usinas com combustão direta.

Apesar dos diversos tipos de combustíveis e características apresentadas pelas usinas termelétricas, é possível fazer uma representação esquemática das usinas que usam a queima

de matéria-prima para a obtenção de vapor. A fonte de calor pode ser feita a partir da combustão de qualquer um dos combustíveis citados, ou ainda, de alguma outra fonte alternativa. Essa representação pode ser vista na Figura 3.3.1, abaixo.

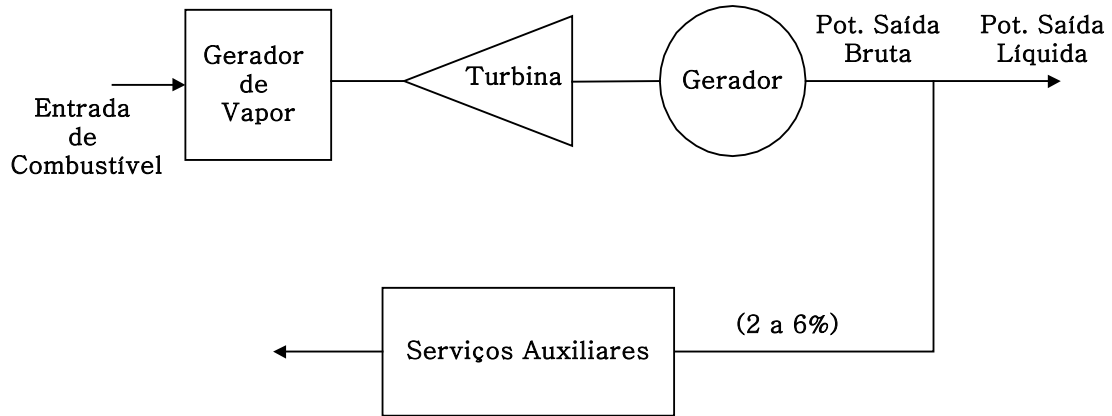


Figura 3.3.1 – Configuração Esquemática Típica da Geração de Energia com Turbina a Vapor.

Um importante parâmetro de caracterização física e operativa de uma termelétrica é a representação gráfica de seu consumo incremental, H , ou custo incremental, C , os quais representam, respectivamente, a taxa de aumento do consumo de combustível e do custo de operação, em função de um incremento no seu nível de geração. Uma curva típica de entrada e saída, que ilustra o custo incremental de operação de uma termelétrica, é apresentada na Figura 3.3.2.

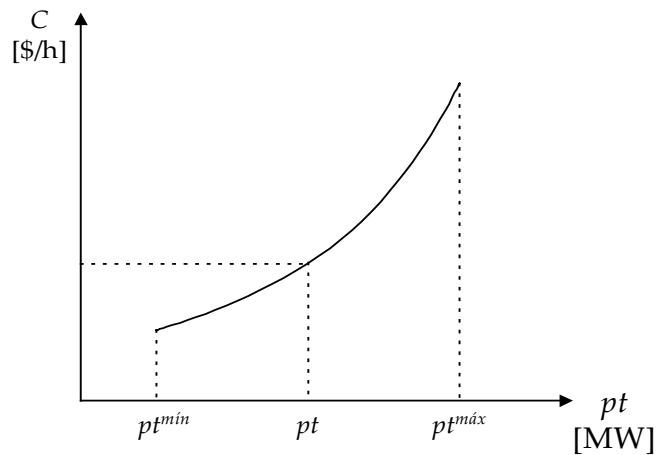


Figura 3.3.2 – Curva Típica de Entrada e Saída de uma Termelétrica.

O custo incremental de uma unidade termelétrica i , C_i , é modelado por uma função quadrática convexa, crescente com o respectivo nível de geração, pt_i , da seguinte maneira¹²:

$$C_i(pt_i) = \underline{a}_{0i} + \underline{a}_{1i}pt_i + \underline{a}_{2i}pt_i^2 \quad (3.3.1)$$

onde \underline{a}_e , com $e=0,1, e 2$, são os coeficientes da função.

O nível mínimo de geração, mostrado na Figura 3.3.2, de uma usina termelétrica, que usualmente é utilizado em estudos de planejamento e operação energética, podem estar relacionados a uma série de fatores, tais como:

- (i) características físicas das usinas, como manutenção da estabilidade do ciclo termodinâmico ou do consumo de combustível secundário nas usinas a carvão;
- (ii) problemas de estabilidade na rede elétrica;
- (iii) usinas a carvão e gás natural usualmente têm um consumo mínimo de combustível contratado com seu fornecedor.

Outra característica importante de uma usina termelétrica (principalmente as que utilizam combustíveis fósseis) está relacionada com os custos associados à partida das mesmas. Esses custos dependem da temperatura da caldeira. Na prática assume-se que a caldeira se resfria a uma taxa inversamente proporcional a respectiva constante de resfriamento.

Matematicamente, o custo de partida da i -ésima unidade termelétrica, sc_i , pode ser descrito pela seguinte função exponencial:

¹² Esse custo também pode ser representado por uma função linear por partes ou por uma função logarítmica.

$$sc_i = \left[\underline{b}_{i1} \left(1 - e^{-\omega_i t} \right) + \underline{b}_{i2} \right] \quad (3.3.2)$$

onde:

ω_i é a constante de resfriamento da termelétrica i ;

\underline{b}_{i1} representa o custo de partida fria da termelétrica i ;

\underline{b}_{i2} representa um custo fixo da termelétrica i ;

t é o tempo total decorrido desde que a caldeira tem sido resfriada.

Portanto, conforme se pode notar nas equações (3.3.1) e (3.3.2), o custo total de operação de uma termelétrica, tipicamente inclui custos de combustíveis associados aos processos de partida e de operação nominal da usina.

Algumas características operativas das termelétricas tornam a sua operação uma tarefa um tanto complexo. Exemplificando, uma termelétrica requer equipes para operá-la quando precisam ser ligadas ou desligadas. Adicionalmente, uma usina termelétrica deve ser submetida sempre a variações graduais de temperaturas. Isso se traduz em restrições operativas à operação ao longo de um determinado espaço de tempo. Essas condições operativas são modeladas matematicamente pelas restrições de *minimum uptime and downtime* e de rampa.

As restrições de rampa, ainda não definidas até aqui, basicamente aparecem em três casos: restrições de rampa sob condição operativa normal, restrições de rampa na partida e restrições de rampa quando uma unidade é desligada [90]. O primeiro tipo limita a capacidade de variação de geração entre dois períodos em que uma termelétrica esteja operando entre seus limites operativos nominais. As demais forçam que a potência de saída siga uma trajetória pré-definida durante alguns períodos de tempo depois de iniciados os processos de partida e de desligamento da unidade. As restrições de *minimum uptime e downtime*, bem como as restrições relacionadas com a rampa das usinas termelétricas serão detalhadas no próximo capítulo.

3.4 Conclusões

Neste capítulo foi mostrado como é feita a representação das unidades geradoras no problema da programação da operação energética, mediante a apresentação das suas principais características operativas.

Conforme visto, as unidades hidrelétricas possuem algumas características operativas que necessitam ser representadas precisamente no problema da programação da operação energética, de modo a ser possível realizar uma eficiente exploração dos recursos desse tipo de fonte.

A representação proposta neste trabalho, condizente a um sistema com predominância de recursos hidrelétricos, engloba uma função de produção detalhada das unidades hidrelétricas, a qual leva em consideração o rendimento da unidade como função da vazão e da queda na mesma, efeito da perda hidráulica na usina e nas unidades individualmente, e a existência de múltiplos estados operativos resultantes das zonas proibidas de geração.

Com relação às unidades termelétricas, representam-se custos operativos associados à partida e operação, bem como três diferentes tipos de restrições de rampa relacionadas com as restrições encontradas nos processos de partida, desligamento e operação nominal das unidades.

A partir de uma modelagem das unidades geradoras de modo compatível com os requisitos impostos pelo problema da programação da operação energética, juntamente com a modelagem do atendimento a demanda, dos vínculos hidráulicos do sistema, entre outros, formula-se matematicamente o problema em referência no próximo capítulo. O resultado final é um problema com características matemáticas complexas que exige uma estratégia de solução sofisticada, que seja apta o suficiente para manusear eficientemente essas características.



CAPÍTULO

4

*Modelagem do
Problema da
Programação da
Operação Energética*

4.1 Introdução

ESTE capítulo tem como escopo principal a formulação matemática do problema da programação da operação energética. Conforme será visto, trata-se de um problema de programação inteira-mista, não-linear e de grande porte [22,28,91,92]. O capítulo inicia descrevendo a modelagem matemática relacionada com o sistema de geração representada nesse trabalho pelos aproveitamos hidrelétricos, unidades geradoras hidrelétricas e termelétricas. O capítulo é encerrado com a construção do problema de otimização resultante da programação.

4.2 Sistema Hidrelétrico

A partir de agora são apresentadas as restrições e variáveis relacionadas com o parque gerador hidrelétrico. Tais parâmetros referem-se à modelagem das principais características operativas dos rios, reservatórios e unidades hidrelétricas de geração, comumente encontrada no sistema de geração brasileira.

4.2.1 Restrição da Conservação da Massa da Água nos Reservatórios

A operação hidroenergética de um conjunto de aproveitamentos hidráulicos, situado em uma dada bacia hidrográfica, deve obedecer ao princípio da conservação da massa, isto é, o volume da água que afluí a um reservatório, em um período qualquer, deve ser igual à soma dos volumes evaporado, infiltrado, deplecionado e resultante da variação do nível no reservatório em referência nesse mesmo período.

Desconsiderando os efeitos da evaporação e da infiltração, esse princípio é representado em problemas de planejamento energético pela seguinte equação de diferenças:

$$v_{r,t+1} + Q_{rt} + s_{rt} - \sum_{m \in \mathfrak{R}_+^{(r)}} (Q_{m,t-\tau_{mr}} + s_{m,t-\tau_{mr}}) - v_{rt} = y_{rt} \quad (4.2.1.1)$$

onde:

T é o número total de estágios da programação;

t é o índice associado aos estágios da programação, tal que $t = 1, T$;

R é o número total de reservatórios do sistema;

r é o índice dos reservatórios do sistema, tal que $r = 1, R$;

v_{rt} é o volume armazenado no r -ésimo reservatório no início do estágio t ;

s_{rt} é a vazão vertida no r -ésimo reservatório ao longo do estágio t ;

$\mathfrak{R}_+^{(r)}$ é o conjunto de reservatórios imediatamente a montante ao r -ésimo reservatório;

τ_{mr} é o tempo de viagem da água entre os reservatórios m e r ;

y_{rt} é a vazão incremental afluyente ao r -ésimo reservatório ao longo do estágio t .

Q_{rt} é a vazão turbinada no r -ésimo reservatório ao longo do estágio t . Seu valor é dado pela soma das vazões turbinadas de todas as unidades que estão sendo utilizadas na operação, durante o estágio t , em uma dada usina hidrelétrica:

$$Q_{rt} = \sum_{j=1}^{J(r)} q_{jrt} \quad (4.2.1.2)$$

onde:

$J(r)$ é o número total de unidades hidrelétricas do r -ésimo reservatório, disponíveis para a operação;

j é o índice de unidades hidrelétricas (turbina-gerador), tal que $j=1, \dots, J(r)$;

q_{jrt} é a vazão turbinada da unidade hidrelétrica j , que pertence ao reservatório r , durante o estágio t .

Outra restrição importante presente na operação de aproveitamentos hidrelétricos é definida pela Equação (4.2.1.3), a seguir.

$$d_{rt} = Q_{rt} + s_{rt} \quad (4.2.1.3)$$

d_{rt} é a vazão defluente ao r -ésimo reservatório ao longo do estágio t .

Limites podem ser impostos na vazão defluente de um aproveitamento hidrelétrico, os quais têm origens diversas de acordo com os objetivos da operação do reservatório e/ou da cascata. No caso brasileiro, basicamente, esses limites são impostos pelo manuseio da água na irrigação, navegação e controle de cheias. Deste modo, a expressão acima é, em geral, explicitada por meio das seguintes restrições de desigualdade:

$$d_{rt}^{\min} \leq d_{rt} \leq d_{rt}^{\max} \quad (4.2.1.4)$$

onde:

d_{rt}^{\min} é a vazão defluente mínima que deve ser respeitada pela operação do r -ésimo reservatório durante o estágio t ;

d_{rt}^{\max} é a vazão defluente máxima que deve ser respeitada pela operação do r -ésimo reservatório durante o estágio t .

4.2.2 Limites de Volume Armazenado e Vazão Vertida nos Reservatórios

Essas restrições definem os limites operacionais do volume armazenado e da vazão vertida em cada reservatório:

$$v_r^{\min} \leq v_{r,t+1} \leq v_r^{\max} \quad (4.2.2.1)$$

$$s_{rt} \geq 0 \quad (4.2.2.2)$$

onde:

v_r^{\min} é o volume mínimo do r -ésimo reservatório,

v_r^{\max} é o volume máximo do r -ésimo reservatório.

Nessa representação pode-se notar que a variável que representa a vazão vertida corresponde a uma variável de folga. Entretanto, no caso real, o valor máximo dessa variável pode ser função do volume armazenado no reservatório.

4.2.3 Função de Custo Futuro

A função de custo futuro, fornecida pelo modelo de planejamento da operação de curto prazo, permite comparar o custo de operação resultante da utilização da água armazenada nos reservatórios, ao longo do horizonte de estudo, com o custo de manter essa água armazenada. No tocante à programação da operação energética, a função de custo futuro é acoplada no final do período de estudo que, matematicamente, é representada por uma função linear por partes, dada por:

$$\alpha + \sum_{r=1}^R \pi_r^{(1)} v_{r,T+1} \geq \alpha_0^{(1)} \quad (4.2.3.1)$$

$$\alpha + \sum_{r=1}^R \pi_r^{(2)} v_{r,T+1} \geq \alpha_0^{(2)}$$

· · · · ·

$$\alpha + \sum_{r=1}^R \pi_r^{(p)} v_{r,T+1} \geq \alpha_0^{(p)}$$

· · · · ·

$$\alpha + \sum_{r=1}^R \pi_r^{(P)} v_{r,T+1} \geq \alpha_0^{(P)}$$

onde:

α é uma variável não-negativa que representa o custo total esperado de operação do final do horizonte da programação até o final do horizonte de avaliado pelo modelo de planejamento de médio prazo;

$v_{r,T+1}$ é o volume armazenado no r -ésimo reservatório no final do horizonte da programação;

P é o número total de aproximações lineares por partes utilizado na modelagem da função de custo futuro;

$\pi_r^{(p)}$ é uma constante associada ao r -ésimo reservatório e ao p -ésimo segmento linear por partes da função de custo futuro. Seu valor representa a taxa de variação causada no custo futuro em virtude de uma perturbação unitária em $v_{r,T+1}$, considerando que os demais volumes finais dos reservatórios no referido estágio estejam fixados;

$\alpha_0^{(p)}$ é uma constante associada ao p -ésimo segmento linear por partes da função de custo futuro.

O total de segmentos necessários para a modelagem da função de custo futuro é determinado pelo modelo de planejamento da operação energética de curto prazo.

4.2.4 Limites de Potência das Unidades Geradoras

Essa classe de restrições define os limites de potência para cada unidade hidrelétrica e às respectivas zonas permitidas de geração:

$$\sum_{k=1}^{\Phi_{jr}} pb_{jkrt}^{\min} z_{jkrt} \leq pb_{jrt}(q_{jrt}, Q_{rt}, s_{rt}) \leq \sum_{k=1}^{\Phi_{jr}} pb_{jkrt}^{\max} z_{jkrt} \quad (4.2.4.1)$$

onde:

Φ_{jr} é o total de zonas permitidas de geração da j -ésima unidade hidrelétrica, pertencente ao r -ésimo reservatório;

k é o índice associado às zonas operativas permitidas das unidades hidrelétricas, tal que $k=1, \Phi_{jt}$,

$ph_{jt}(\cdot)$ é a potência de saída da j -ésima unidade hidrelétrica, pertencente ao r -ésimo reservatório, durante o estágio t ;

ph_{jkt}^{\min} é a potência mínima de saída associada à j -ésima unidade hidrelétrica, pertencente ao r -ésimo reservatório, durante o estágio t , quando a mesma estiver operando em sua k -ésima zona de geração permitida;

ph_{jkt}^{\max} é a potência máxima de saída associada à j -ésima unidade hidrelétrica, pertencente ao r -ésimo reservatório, durante o estágio t , quando a mesma estiver operando em sua k -ésima zona de geração permitida;

z_{jkt} é uma variável de decisão binária que indica se a j -ésima unidade hidrelétrica, pertencente ao r -ésimo reservatório, está ligada ($z_{jkt} = 1$) ou desligada ($z_{jkt} = 0$) durante o estágio t . Devido à existência de múltiplos estados de geração (zonas de geração permitidas) e a necessidade de cada unidade estar operando em apenas uma delas, a variável z_{jkt} deve respeitar ainda a seguinte restrição:

$$\sum_{k=1}^{\Phi_{jt}} z_{jkt} \leq 1 \quad (4.2.4.2)$$

De acordo com o capítulo anterior, os limites de potência para cada zona permitida de geração, ph_{jkt}^{\min} e ph_{jkt}^{\max} podem apresentar valores constantes ou depender da altura de queda líquida da unidade. Essas informações podem ser obtidas da curva-colina da unidade.

4.2.5 Restrições de Reserva Hidrelétrica

Neste trabalho essas restrições são modeladas de forma que cada usina respeite um nível de reserva preestabelecida:

$$\sum_{j=1}^{J(r)} \left(\sum_{k=1}^{\Phi_{jt}} ph_{jkt}^{\max} z_{jkt} - ph_{jt}(d_{jt}, Q_{rt}, s_{rt}) \right) \geq rh_{rt} \quad (4.2.5.1)$$

onde:

rh_{rt} é o valor da reserva energética da usina hidrelétrica situada no r -ésimo reservatório, durante o estágio t .

Conforme pode ser visto na Equação (4.2.5.1) acima a máxima potência de saída que uma unidade hidrelétrica pode atingir independe da zona permitida na qual a mesma está operando, isto é, esse valor máximo sempre corresponde ao maior valor de potência existente entre todas as zonas, definido em (4.2.5.1) por $ph_{j1t}^{máx}$.

4.3 Sistema Termelétrico

A partir deste ponto são descritas as principais restrições encontradas em unidades termelétricas, juntamente com a modelagem matemática das funções de custo presentes neste tipo de unidade geradora.

4.3.1 Restrições de Capacidade

Definem os limites operativos para as unidades termelétricas:

$$pt_i^{mín} u_{it} \leq pt_{it} \leq pt_i^{máx} u_{it} \quad (4.3.1.1)$$

onde:

I é o total de usinas termelétricas;

i é o índice associado às unidades termelétricas, tal que $i=1,I$;

pt_{it} é a variável que indica a potência de saída da i -ésima unidade termelétrica durante o estágio t ;

$pt_i^{mín}$ é o limite mínimo da potência de saída da i -ésima unidade termelétrica;

$pt_i^{máx}$ é o limite máximo da potência de saída da i -ésima unidade termelétrica;

u_{it} é variável de decisão binária que indica se a i -ésima unidade termelétrica está ligada ($u_{it} = 1$) ou desligada ($u_{it} = 0$) durante o estágio t .

4.3.3 Minimum Uptime and Downtime

$$u_{it} = \begin{cases} 1 & \text{se } 1 \leq x_{it} < t_i^{up} \\ 0 & \text{se } 1 \geq x_{it} > -t_i^{down} \\ 0 \text{ ou } 1 & \text{fora isso} \end{cases} \quad (4.3.2.1)$$

t_i^{up} é o número mínimo de estágios que a i -ésima unidade termelétrica deve permanecer ligada após a mesma ter entrado em operação;

t_i^{down} é o número mínimo de estágios que a i -ésima termelétrica deve permanecer desligada após a mesma ter sido retirada de operação;

x_{it} é uma variável inteira que indica o estado da i -ésima termelétrica durante o estágio t , isto é, representa o número de estágios que a unidade está ligada ($x_{it} > 0$) ou desligada ($x_{it} < 0$). O valor de x_{it} pode ser calculado pela seguinte equação de transição de estados:

$$x_{it} = \begin{cases} \text{máximo}(x_{i,t-1}, 0) + 1, & \text{se } u_{it} = 1, \\ \text{mínimo}(x_{i,t-1}, 0) - 1, & \text{se } u_{it} = 0. \end{cases} \quad (4.3.2.2)$$

4.3.3 Restrições de Rampa

As restrições de rampa acoplam o nível de geração de uma unidade termelétrica entre dois períodos consecutivos da programação:

$$\Delta_i(u_{i,t-1}, x_{it}) \leq p_{it} - p_{i,t-1} \leq \Delta_i(u_{i,t-1}, x_{it}) \quad (4.3.3.1)$$

onde $\delta_i(u_{i,t-1}, x_{it})$ e $\Delta_i(u_{i,t-1}, x_{it})$ são funções que representam o máximo desvio permitido de geração entre dois estágios.

As restrições de rampa estão diretamente ligadas às características operativas das unidades termelétricas em um dado sistema. Assim, aqui será apresentada a formulação matemática de três tipos de restrições de rampa comumente encontradas em sistemas termelétricos cuja predominância consiste de usinas a carvão e/ou óleo: restrições de rampa sob condição operativa normal, restrições de rampa na partida e restrições de rampa quando uma unidade está sendo desligada.

Matematicamente estes tipos de restrições podem ser descritos como:

- (i) *restrição de rampa na partida*: quando uma unidade termelétrica é ligada a mesma necessita de τ_i estágios, a taxa crescente de geração de pt_i^{min}/τ_i , até encontrar o seu respectivo limite mínimo operativo pt_i^{min} . Por exemplo, seja $u_{i,t-1} = 0$ e $u_{it} = 1$, então $\delta_i(u_{i,t+n-1}, x_{i,t+n}) = \Delta_i(u_{i,t+n}, x_{i,t+n}) = pt_i^{min}/\tau_i$ para $n=0, 1, \dots, \tau_i-1$;

- (ii) *restrição de rampa quando a unidade está sendo desligada*: quando uma unidade está sendo retirada de operação, seu nível de geração deve ser reduzido para pt_i^{min} e, a partir deste ponto, sua geração deve ser reduzida durante v_i estágios a uma taxa constante de decréscimo de geração de pt_i^{min}/v_i até reduzir a zero. Exemplificando, seja $u_{it} = u_{i,t+1} = \dots = u_{i,t+v_i-1} = 1$ e $u_{i,t+v_i} = 0$, assim $\delta_i(u_{i,t+n-1}, x_{i,t+n}) = \Delta_i(u_{i,t+n}, x_{i,t+n}) = -pt_i^{min}/v_i, n=1, \dots, v_i$
- (iii) *restrição de rampa em condição operativa nominal*: neste caso, a diferença do nível de geração da i -ésima unidade termelétrica entre dois períodos consecutivos na qual a unidade esteja operando entre seus limites nominais é limitado por Δ_i . Por exemplo, seja $u_{i,t-1} = u_{it} = 1$ então $-\delta_i(u_{i,t-1}, x_{it}) = \Delta_i(u_{i,t-1}, x_{it}) = \Delta_i$.

Uma ilustração destes três tipos de restrições de rampa é mostrada na Figura 4.3.3.1, a seguir.

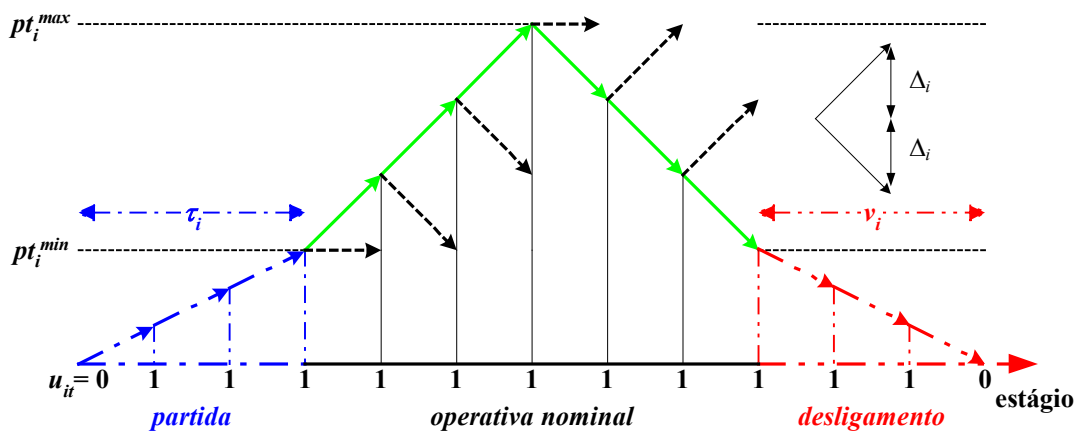


Figura 4.3.3.1 – Efeito das Restrições de Rampa.

Na figura acima as setas ilustram uma trajetória viável para uma unidade termelétrica desde sua partida até o processo de desligamento. Deve-se notar que, durante a partida e o desligamento, a unidade deve respeitar uma trajetória pré-definida. Já, durante a condição operativa nominal, os limites de geração são limitados por Δ_i para elevar e reduzir a potência de saída e também por pt_i^{min} e pt_i^{max} . Na figura em referência, as setas representadas por linhas contínuas indicam a trajetória viável para a condição nominal de operação da unidade. Por sua vez, as setas tracejadas indicam o espectro (outras possíveis trajetórias) de geração viável em cada estágio de tempo.

4.3.4 Condições Iniciais

$$\begin{aligned} u_{i0} &= \tilde{u}_{i0} \\ x_{i0} &= \tilde{x}_{i0} \\ pt_{i0} &= \tilde{p}_{i0} \end{aligned} \tag{4.3.4.1}$$

onde:

\tilde{u}_{i0} é uma variável binária que indica se a i -ésima unidade termelétrica estava ligada ou desligada durante o estágio $t=0$;

\tilde{x}_{i0} é uma variável inteira não nula, que indica o número de períodos na qual a i -ésima unidade termelétrica estava ligada ou desligada até atingir o estágio $t=0$;

\tilde{p}_{i0} é uma variável que indica a potência produzida pela i -ésima unidade termelétrica durante o estágio $t=0$.

4.3.5 Restrições de Reserva Termelétrica

Assim como no caso hidrelétrico, essas restrições são modeladas de forma que cada unidade respeite um nível de reserva pré-estabelecido individualmente:

$$pt_i^{max} u_{it} - pt_{it} \geq rt_{it} \tag{4.3.5.1}$$

onde:

rt_{it} é o valor da reserva energética da i -ésima unidade termelétrica durante o estágio t .

4.3.6 Custos Operativos das Unidades Termelétricas

Conforme visto no capítulo anterior, o custo total de operação de uma unidade termelétrica tipicamente inclui o custo associado ao uso do combustível acrescido dos custos variáveis de operação e manutenção, mais o custo relacionado com a partida da unidade. Deste modo, o custo total ao longo do horizonte da programação relativo as unidades termelétricas, CT , é dado por:

$$CT = \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^I \left[C_{it}(pt_{it}) + st_{it}(x_{i,t-1})u_{i,t}(1 - u_{i,t-1}) \right] \quad (4.3.6.1)$$

onde:

$C_{it}(pt_{it})$ é o custo associado ao uso de combustível da i -ésima termelétrica durante o estágio t . Esse custo é comumente modelado por uma função quadrática convexa, crescente em função do nível do nível de geração da termelétrica:

$$C_{it}(pt_{it}) = \underline{a}_{i0} + \underline{a}_{i1}pt_{it} + \underline{a}_{i2}pt_{it}^2 \quad (4.3.6.2)$$

onde \underline{a}_{i0} , \underline{a}_{i1} e \underline{a}_{i2} são constantes.

$st_{it}(x_{i,t-1})$ é o custo de partida associada à i -ésima termelétrica durante o estágio t . Conforme visto no capítulo anterior, esta função é modelada como uma função exponencial dependente da temperatura da caldeira, i.e., depende do número de estágios que a unidade está desligada:

$$st_{it}(x_{i,t-1}) = \left[\underline{b}_{i1} \left(1 - e^{-\frac{x_{i,t-1}}{\omega_i}} \right) + \underline{b}_{i2} \right] \quad (4.3.6.3)$$

onde \underline{b}_{i1} , \underline{b}_{i2} e ω_i são constantes definidas no Capítulo 3.

Todavia, em ambientes de mercado, a estrutura do custo total (4.3.6.1) é, em geral, representada por uma função linear, onde a derivada dessa função procura abranger os custos (4.3.6.2) e (4.3.6.1).

4.4 Formulação do Problema

O problema da programação da operação energética é formulado como um problema de programação inteira-mista, não-linear e de grande porte. O objetivo é a minimização dos custos totais associados à operação das unidades geradoras.

Na formulação mostrada a seguir, a representação do sistema de transmissão é feita de maneira simplificada por meio da modelagem de limites de intercâmbios entre os diversos subsistemas. Outra particularidade reside no fato de que as restrições de reserva são apresentadas para cada usina individualmente e não para o sistema (ou subsistema) como um todo.

A formulação do problema da programação da operação energética é dada por:

$$\underset{\{u_{it}, pt_{it}, z_{jrt}, d_{jrt}, Q_{rt}, s_{rt}, Int_{let}, Int_{elt}\}}{\text{Min}} = \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^I [C_{it}(pt_{it}) + st_{it}(x_{i,t-1})u_{i,t}(1-u_{i,t-1})] + \alpha \quad (4.4.1)$$

sujeito a:

$$\sum_{i \in I_e} pt_{it} + \sum_{r \in R_e} \left(\sum_{j=1}^{J(r)} pb_{jrt}(d_{jrt}, Q_{rt}, s_{rt}) \right) + \sum_{l \in \Omega_e} (Int_{let} - Int_{elt}) = D_t \quad (4.4.2)$$

$$0 \leq Int_{let} \leq Int_{let}^{m\acute{a}x} \quad (4.4.3)$$

$$0 \leq Int_{elt} \leq Int_{elt}^{m\acute{a}x} \quad (4.4.4)$$

$$pt_i^{m\acute{i}n} u_{it} \leq pt_{it} \leq pt_i^{m\acute{a}x} u_{it} \quad (4.4.5)$$

$$u_{it} = \begin{cases} 1 & \text{se } 1 \leq x_{it} < t_i^{up} \\ 0 & \text{se } 1 \geq x_{it} > -t_i^{down} \\ 0 \text{ ou } 1 & \text{fora isso} \end{cases} \quad (4.4.6)$$

$$x_{it} = \begin{cases} \acute{m}\acute{a}x(x_{i,t-1}, 0) + 1, & \text{se } u_{it} = 1, \\ \acute{m}\acute{i}n(x_{i,t-1}, 0) - 1, & \text{se } u_{it} = 0. \end{cases} \quad (4.4.7)$$

$$\Delta_i(u_{i,t-1}, x_{it}) \leq p_{it} - p_{i,t-1} \leq \Delta_i(u_{i,t-1}, x_{it}) \quad (4.4.8)$$

$$pt_i^{máx} u_{it} - pt_{it} \geq rt_{it} \quad (4.4.9)$$

$$u_{i0} = \tilde{u}_{i0} \quad x_{i0} = \tilde{x}_{i0} \quad pt_{i0} = \tilde{p}_{i0} \quad (4.4.10)$$

$$v_{r,t+1} + Q_{rt} + s_{rt} - \sum_{m \in \mathcal{R}_+^{(r)}} (Q_{m,t-\tau_{mr}} + s_{m,t-\tau_{mr}}) - v_{rt} = \mathcal{Y}_{rt} \quad (4.4.11)$$

$$Q_{rt} = \sum_{j=1}^{J(r)} q_{jrt} \quad (4.4.12)$$

$$v_r^{mín} \leq v_{r,t+1} \leq v_r^{máx} \quad (4.4.13)$$

$$s_{rt} \geq 0 \quad (4.4.14)$$

$$Q_{rt} + s_{rt} = d_{rt} \quad (4.4.15)$$

$$d_{rt}^{mín} \leq d_{rt} \leq d_{rt}^{máx} \quad (4.4.16)$$

$$\sum_{k=1}^{\Phi_{jr}} pb_{jkrt}^{mín} z_{jkrt} \leq pb_{jrt}(q_{jrt}, Q_{rt}, s_{rt}) \leq \sum_{k=1}^{\Phi_{jr}} pb_{jkrt}^{máx} z_{jkrt} \quad (4.4.17)$$

$$z_{jkrt} \in \{0, 1\} \quad \sum_{k=1}^{\Phi_{jr}} z_{jkrt} \leq 1 \quad (4.4.18)$$

$$\sum_{j=1}^{J(r)} \left(\sum_{k=1}^{\Phi_{jr}} pb_{jirt}^{máx} z_{jkrt} - pb_{jrt}(q_{jrt}, Q_{rt}, s_{rt}) \right) \geq rb_{rt} \quad (4.4.19)$$

$$\alpha + \sum_{e=1}^E \sum_{r \in \mathcal{R}_e} \pi_r^{(1)} v_{r,T+1} \geq \alpha_0^{(1)}$$

$$\alpha + \sum_{e=1}^E \sum_{r \in \mathcal{R}_e} \pi_r^{(2)} v_{r,T+1} \geq \alpha_0^{(2)}$$

...

$$\alpha + \sum_{e=1}^E \sum_{r \in \mathcal{R}_e} \pi_r^{(b)} v_{r,T+1} \geq \alpha_0^{(b)} \quad (4.4.20)$$

...

$$\alpha + \sum_{e=1}^E \sum_{r \in \mathcal{R}_e} \pi_r^{(P)} v_{r,T+1} \geq \alpha_0^{(P)}$$

onde:

E é o total de subsistemas;

e é o índice associado aos subsistemas, tal que $e = 1, E$;

I_e é o conjunto de índices das usinas termelétricas que pertencem ao subsistema e ;

- R_e é o conjunto de índices dos reservatórios que pertence ao subsistema e ;
- Ω_e é o conjunto de subsistemas interligado ao subsistema e ;
- Int_{elt} é o valor do intercâmbio de energia do subsistema e para o subsistema l durante o estágio t ;
- D_{et} é a demanda associada ao subsistema e durante o estágio t ;
- $Int_{elt}^{máx}$ é o valor máximo do intercâmbio de energia do subsistema e para o subsistema l durante o estágio t .

O conjunto de restrições (4.4.1) refere-se ao atendimento a demanda em cada subsistema durante o estágio t . As restrições (4.4.2) e (4.4.3) definem os limites do intercâmbio de energia entre os subsistemas durante o estágio t .

A complexidade matemática do problema da programação é confirmada pela modelagem acima. Conforme pode ser visto, existem três conjuntos distintos de variáveis neste problema: variáveis de natureza termelétrica, hidrelétrica, e aquelas relacionadas com a representação da rede de transmissão. Variáveis inteiras são necessárias com o propósito de determinar o estado ligado/desligado das unidades geradoras. No caso das unidades termelétricas, as variáveis inteiras servem ainda para caracterizar os custos de partida e as restrições de rampa. No caso das unidades hidrelétricas, essas variáveis também modelam as zonas permitidas de operação. Todas as variáveis do sistema de transmissão são de natureza contínua.

4.5 Conclusões

Neste capítulo foi apresentada a modelagem matemática referente ao problema da programação da operação energética.

Conforme visto, no tocante ao sistema hidrelétrico, a modelagem apresenta uma função de produção detalhada que leva em conta, de forma individual, efeitos tais como a variação não-linear da queda líquida, das perdas hidráulicas e a presença das zonas proibidas de operação. A consideração dessas características torna a modelagem do comportamento físico das unidades hidrelétricas bastante realista e condizente com a predominância hidrelétrica do sistema brasileiro.

Devido à representação hidrelétrica detalhada, são obtidos despachos que não violam as zonas permitidas de geração. Isso, com certeza, representa uma eficiência no processo de produção de energia de origem hidrelétrica, quando comparado com uma representação simplificada, visto que os fenômenos indesejáveis relacionados com as zonas proibidas não são permitidos. Evidentemente que na prática tais violações são evitadas pelo operador, com base no seu conhecimento, entretanto, sem a garantia de que a decisão tomada assegura a otimização do sistema. Ressalte-se ainda que, em um ambiente de mercado é necessário obter soluções não ambíguas, isto é, soluções fornecidas pelo operador do sistema que possam ser aceitas pelos agentes sem contestação.

Como consequência, a modelagem representada neste trabalho acarreta em um problema de programação matemática com características que tornam o processo de solução uma tarefa complexa. A primeira dessas características é a natureza combinatória do problema. Devido à necessidade de definir quais unidades devem operar, o problema necessita o uso de variáveis binárias, as quais por si só garantem que a natureza do problema seja não-convexa. Adicionalmente, as funções de produção das unidades hidrelétricas e os custos de produção das usinas termelétricas são funções não-lineares. Além da não-linearidade, as funções de produção das unidades hidrelétricas podem ser ainda indefinidas, isto é, nem convexas e nem côncavas. Por fim, a existência de múltiplos reservatórios, cada um contendo diversas unidades hidrelétricas e as respectivas zonas permitidas, acrescido da presença das unidades termelétricas e dos vários estágios de programação requeridos para estudo, torna o problema de grande-porte.

Os dois próximos capítulos têm como foco principal à solução do problema formulado neste capítulo e representado por (4.5.1)-(4.5.20). Conforme será visto, a técnica utilizada para obter uma solução para o problema é a metodologia da Relaxação Lagrangeana, a qual tem apresentando bons resultados em problemas com características semelhantes às aquelas encontradas na programação da operação energética. O próximo capítulo é direcionado no sentido de oferecer uma compreensão básica dos aspectos que envolvem a aplicação dessa metodologia na solução de problemas de otimização. Por sua vez, o Capítulo 6 mostra a aplicação efetiva dessa metodologia ao problema da programação.



CAPÍTULO
5

*Estratégia de Solução
do Problema da
Programação da
Operação Energética*

5.1 Introdução

O CONJUNTO viável de um problema de programação matemática é especificado em termos de restrições de igualdade e de desigualdade. A partir dessa estrutura é possível obter uma sofisticada coleção das condições de otimalidade, onde estão envolvidas algumas variáveis auxiliares denominadas de multiplicadores de Lagrange. Além de facilitar a caracterização de uma solução ótima, essas variáveis providenciam também uma valiosa informação de sensibilidade, quantificando a variação de primeira ordem

no valor ótimo da função objetivo causada por variações nos dados (vetor de recursos) do problema.

Este capítulo tem como tema central a teoria que envolve o uso dos multiplicadores de Lagrange em problemas de programação matemática. Inicialmente o objetivo consiste em ilustrar como essa teoria pode ser usada dentro de um esquema computacional direcionado à solução de problemas restritos. Após, com base nos conceitos ligados à Relaxação Lagrangeana, é apresentada a estratégia de solução adotada neste trabalho para o problema da programação.

5.2 Relaxação Lagrangeana

A fim de introduzir as idéias básicas envolvidas no uso da Relaxação Lagrangeana na solução de problemas de programação matemática, considere o seguinte exemplo ilustrativo:

$$\begin{aligned} \text{minimize } & f(q_1, q_2) = 0,25q_1^2 + 0,50q_2^2 \\ \text{s.a: } & c(q_1, q_2) = q_1 + q_2 - 9 = 0 \\ & 0 \leq q_1 \leq 10 \\ & 0 \leq q_2 \leq 10 \end{aligned} \tag{5.2.1}$$

O problema acima pode representar, por exemplo, a determinação dos valores ótimos das vazões turbinadas em duas unidades geradoras, representadas pelas variáveis q_1 e q_2 , respectivamente, de uma usina hidrelétrica qualquer. O objetivo é a minimização das potências de saída das unidades que são modeladas a partir de funções quadráticas, que dependem das respectivas vazões turbinadas. Dois conjuntos distintos de restrições são impostos à realização desse objetivo: o primeiro, composto pela restrição de igualdade, é referente a quantidade limite de água do reservatório que deve ser usada; e um segundo conjunto composto pelas demais restrições que representam os limites operativos das vazões nas unidades.

Vamos considerar, a partir de agora, um procedimento de solução descentralizada desse problema, utilizando para tanto um mecanismo de comunicação por preços¹ e, adicionalmente, um sistema que coordene esse procedimento. Seja λ um escalar que represente o preço do recurso (água disponível), com unidade² de MW/(m³/s). Dado um valor para λ , uma maneira natural de decompor o Problema (5.2.1) consiste em estabelecer um processo de decisão de modo que cada unidade escolha, de forma independente, a respectiva vazão turbinada com base no valor desse preço. As unidades têm total liberdade de utilizar a quantidade de água que desejarem³; entretanto, essa água a ser utilizada na geração de eletricidade tem um custo associado.

Intuitivamente, o processo de decisão deve ser tal que cada unidade minimize os respectivos custos totais associado ao uso dessa água, de acordo com o preço que está sendo oferecido pela mesma. Matematicamente, isso é equivalente a encontrar, de forma independente, a solução dos seguintes subproblemas:

$$\begin{array}{ll} \text{minimize } f_1(q_1, \lambda) = 0,25q_1^2 + \lambda q_1 & \text{minimize } f_2(q_2, \lambda) = 0,50q_2^2 + \lambda q_2 \\ \text{s.a: } & 0 \leq q_1 \leq 10 & \text{s.a: } & 0 \leq q_2 \leq 10 \end{array} \quad (5.2.2)$$

Temporariamente será assumido que os subproblemas acima têm soluções (decisões) ótimas finitas e únicas para qualquer valor de λ , denotadas aqui por $q_1(\lambda)$ e $q_2(\lambda)$.

Pode-se notar em (5.2.2) que as decisões em cada unidade irão depender do valor de λ , de modo que o valor desse preço providencia algum mecanismo de coordenação dessas decisões. Por exemplo, com $\lambda=0$, as decisões dos referidos subproblemas são q_1 e q_2 iguais a zero; se $\lambda=10$, os valores de decisões ainda são nulas; já, com $\lambda=-3$, tem-se que $q_1 = 6$ e $q_2 = 3$.

Com base nessas considerações, algumas importantes questões se fazem necessárias:

- existe um valor de λ , denominado de λ^* , cujas soluções primais associadas a cada subproblema de (5.2.2), isto é, $q_1(\lambda)$ e $q_2(\lambda)$, resolvem o problema original (5.2.1)?

¹ Aqui, sinônimo de multiplicador de Lagrange. Conforme citado, um multiplicador de Lagrange mede a variação de primeira ordem na função objetivo (custo) quando o recurso associado a uma determinada restrição é alterado de forma infinitesimal. Isso, em determinadas aplicações, permite fazer uma interpretação econômica, por meio da analogia multiplicador – preço.

² De forma genérica, (unidade de potência/unidade de vazão).

³ Todavia, não devem ser violados seus limites operativos individuais.

- se a resposta acima é verdadeira, como pode ser reconhecida a otimalidade de $q_1(\lambda)$ e $q_2(\lambda)$?
- ainda, como é possível estabelecer um procedimento de solução que vise calcular λ^* ?

As respostas para as questões acima envolvem conceitos relativos a pontos de sela de funções lagrangeanas e teoria da dualidade. O restante desta seção é direcionado a mostrar como esses conceitos são usados pela Relaxação Lagrangeana na solução de problemas de programação matemática restritos. Ao longo do texto, importantes características dessa técnica serão evidenciadas com o auxílio de problemas ilustrativos. Conceitos matemáticos mais detalhados envolvidos com a dualidade e programação matemática podem ser encontrados em [22,24,25,28,93].

Retornemos agora ao Problema (5.2.1). Transferindo-se a restrição de igualdade para a função objetivo, tem-se a seguinte função lagrangeana para esse problema:

$$L(q_1, q_2, \lambda) = 0,25q_1^2 + 0,50q_2^2 + \lambda(q_1 + q_2 - 9) \quad (5.2.3)$$

Na função lagrangeana acima, $(q_1^*, q_2^*; \lambda^*)$ viável é dito ser um ponto de sela de $L(q_1, q_2; \lambda)$ se:

$$L(q_1^*, q_2^*, \lambda^*) \leq L(q_1, q_2, \lambda^*) \quad 0 \leq q_i \leq 10 \quad i = 1, 2 \quad (5.2.4)$$

$$L(q_1^*, q_2^*, \lambda^*) \geq L(q_1^*, q_2^*, \lambda) \quad \forall \lambda \in \mathfrak{R} \quad (5.2.5)$$

Neste caso, um ponto de sela de $L(q_1, q_2; \lambda)$ atende as seguintes condições:

$$q_1^* \text{ e } q_2^* \text{ minimizam } L(q_1, q_2; \lambda^*) \text{ considerando } 0 \leq q_i \leq 10, \text{ com } i = 1, 2; \text{ e} \quad (5.2.6)$$

$$(q_1^* + q_2^* - 9) = 0 \quad (5.2.7)$$

Como consequência, se $(q_1^*, q_2^*; \lambda^*)$ é um ponto de sela de $L(\cdot)$, então esse ponto resolve o problema primal original (5.2.1).

Nas condições (5.2.4) e (5.2.5) vê-se que $L(q_1, q_2; \lambda^*)$ deve ser minimizado, respeitando o seu conjunto viável, para obter q_1^* e q_2^* . Desde que (5.2.3), para um valor fixo de λ , possui uma estrutura separável em q_j , tem-se⁴:

⁴ O termo constante $-\lambda 9$ não tem influência nas variáveis ótimas primais e, portanto, pode ser temporariamente desconsiderado.

$$\underset{\{q_i | \text{s.a.: } 0 \leq q_i \leq 10, i=1,2\}}{\text{minimize}} \quad f = \sum_{i=1}^2 (a_i q_i^2 + \lambda q_i) = \sum_{i=1}^2 \left\{ \underset{\{q_i | \text{s.a.: } 0 \leq q_i \leq 10\}}{\text{minimize}} \quad f_i = a_i q_i^2 + \lambda q_i \right\} \quad (5.2.8)$$

onde, de acordo com (5.2.1), $a_1=0,25$ e $a_2=0,50$. Por sua vez, f_i representa o valor ótimo para o i -ésimo subproblema explicitado em (5.2.2). Assim, é possível perceber que os subproblemas acima representam matematicamente a tentativa de satisfazer a condição de ponto de sela (5.2.4), embora nada tenha sido dito sobre como encontrar o preço ótimo λ^* . Para responder essa questão, o comportamento de $L(q_1, q_2; \lambda)$ deve ser estudado como uma função do preço λ .

Deste modo, seja:

$$\theta(\lambda) = \underset{\{q_i | \text{s.a.: } 0 \leq q_i \leq 10, i=1,2\}}{\text{minimize}} \quad L(q_1, q_2, \lambda) \quad (5.2.9)$$

A função $\theta(\lambda)$ acima é denominada de função dual que, a partir de agora, servirá como base para estabelecer uma relação com problema primal descrito por (5.2.1).

Reescrevendo de forma mais detalhada a Expressão (5.2.9), tem-se:

$$\theta(\lambda) = \underset{\{q_i | \text{s.a.: } 0 \leq q_i \leq 10, i=1,2\}}{\text{minimize}} \quad 0,25q_1^2 + 0,50q_2^2 + \lambda(q_1 + q_2 - 9) \quad (5.2.10)$$

$$\theta(\lambda) = \left\{ \underset{\{q_1 | \text{s.a.: } 0 \leq q_1 \leq 10\}}{\text{minimize}} \quad 0,25q_1^2 + \lambda q_1 \right\} + \left\{ \underset{\{q_2 | \text{s.a.: } 0 \leq q_2 \leq 10\}}{\text{minimize}} \quad 0,50q_2^2 + \lambda q_2 \right\} - 9\lambda \quad (5.2.11)$$

Dado que os valores ótimos de cada subproblema acima estão definidos para qualquer valor de λ , o domínio da função dual, D_θ , é definido por $\{\lambda \mid \forall \lambda \in \mathfrak{R}\}$. Ainda, cada subproblema possui solução analítica, genericamente expressa por:

$$q_i^*(\lambda) = \text{mínimo} \left[10, \text{máximo} \left(0, -\frac{1}{2a_i} \lambda \right) \right] \quad (5.2.12)$$

De posse da solução ótima individual de cada subproblema, como função de λ , pode-se proceder na construção da função dual dada por (5.2.10):

$$\theta(\lambda) = \begin{cases} 11\lambda + 75 & \lambda < -10 \\ -0,50\lambda^2 + \lambda + 25 & -10 \leq \lambda < -5 \\ -1,50\lambda^2 - 9\lambda & -5 \leq \lambda < 0 \\ -9\lambda & \lambda \geq 0 \end{cases} \quad (5.2.13)$$

O gráfico de $\theta(\lambda)$ é mostrado na Figura 5.2.1, a seguir.

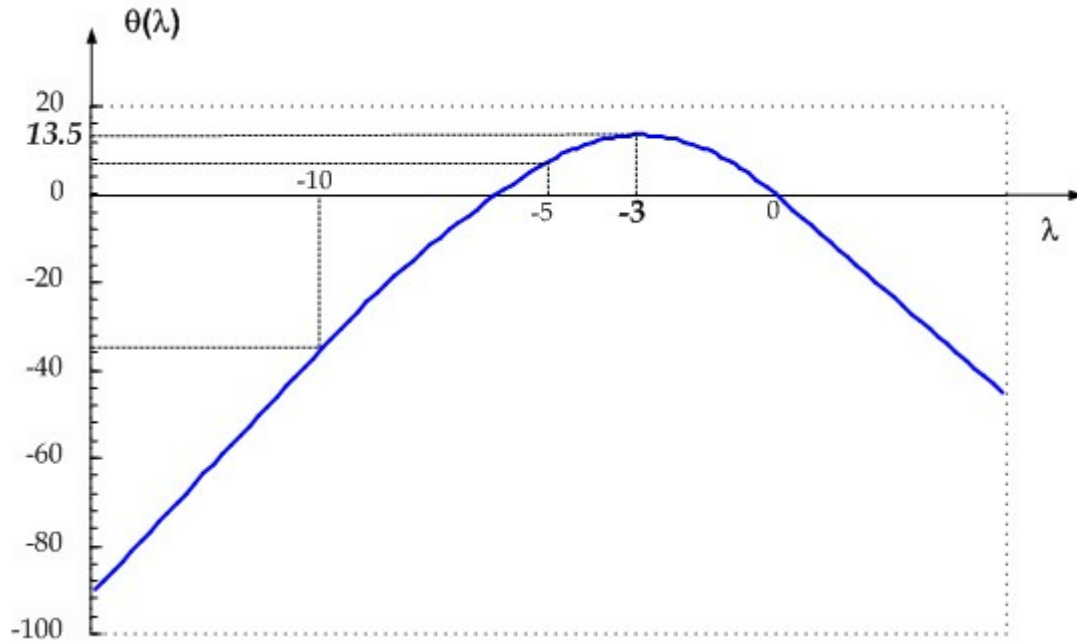


Figura 5.2.1 – Função Dual do Problema Exemplo.

Pode-se notar que o máximo da função dual é encontrado em $\lambda = -3$, cujo valor ótimo associado é igual 13,50 MW.

Ainda, pode-se verificar que esse valor ótimo é idêntico ao do Problema (5.2.1)⁵; portanto, para este caso, maximizar $\theta(\lambda)$ é igual a minimizar a função objetivo de (5.2.1). Adicionalmente, as variáveis primais obtidas a partir do problema dual, em $\lambda = -3$, correspondem exatamente a solução ótima primal que minimiza (5.2.1). Isso acontece porque o ponto $(q_1(-3), q_2(-3), -3) = (6, 3, -3)$ verifica as condições (5.2.6)-(5.2.7), ou seja, representa um ponto de sela da função lagrangeana do problema.

Além das considerações acima, é fácil de observar que o valor de $\theta(\lambda)$ fornece um limite inferior para o Problema (5.2.1), para qualquer valor de λ , ou seja:

$$\theta(\lambda) \leq f(q_1, q_2) \quad \forall \lambda \in \mathfrak{R} \quad 0 \leq q_i \leq 10 \quad i = 1, 2 \quad (5.2.14)$$

⁵ Abaixo são aplicadas as condições de otimalidade para o Problema (5.2.1), considerando de antemão que as restrições de desigualdade não estão ativas na solução ótima. Essas condições estão mais bem definidas mais adiante.

$$\begin{cases} \nabla f(q_1, q_2) + \lambda \nabla c(q_1, q_2) = 0 \\ (q_1 + q_2 - 9) = 0 \end{cases} \mapsto \begin{bmatrix} 0,5 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Acima, $\nabla f(\cdot)$ e $\nabla c(\cdot)$ representam, respectivamente, os vetores gradiente da função objetivo e da restrição de igualdade.

De acordo ainda com Figura (5.2.1), vê-se que $\theta(\lambda)$ é uma função côncava e possui derivadas em todos os valores de λ , inclusive em $\lambda=-10$, $\lambda=-5$, $\lambda=-3$ e $\lambda=0$.

A condição (5.2.14), bem como a natureza côncava de $\theta(\lambda)$, podem ser provadas verdadeiras para qualquer problema primal [22,28]. Por sua vez, a igualdade das soluções dos problemas primal e dual é verdadeira somente quando as condições de existência de ponto de sela são verificadas, as quais, grosso modo, podem ser garantidas apenas quando o problema primal for convexo.

Finalmente, a função $\theta(\lambda)$, em geral, não possui derivada em todos os valores de λ (mesmo para problemas convexos), uma vez que os vários segmentos que compõem essa função usualmente se interligam com inclinações diferentes. Entretanto, se a função objetivo primal é estritamente convexa e as restrições formam um conjunto convexo⁶, então $\theta(\lambda)$ tem derivadas de primeira ordem em todo seu domínio [28].

Para ilustrar um caso onde a função dual é não-diferenciável e, adicionalmente, verifica-se uma diferença entre os valores ótimos dos problemas primal e dual, será feito uso de um outro exemplo ilustrativo. Para tanto, considere o seguinte problema:

$$\begin{aligned} \text{minimize } f &= -8x_1 - 9x_2 - 5x_3 - 4x_4 \\ \text{s.a: } & 16x_1 + 20x_2 + 25x_3 + 10x_4 \leq 42 \\ & x_i \in \{0,1\} \quad i = 1,2,\dots,4 \end{aligned} \tag{5.2.15}$$

Esse problema representa uma variação de um famoso problema de otimização combinatória denominado de Problema da Mochila [28,91,94]. Resumidamente, neste problema o objetivo consiste em escolher, para um dado conjunto de itens, um subconjunto que respeite um determinado critério e ainda não viole a capacidade da mochila. Cada elemento do conjunto tem uma correspondente utilidade (benefício) e um valor (em geral denominado "peso"); este último define o quanto cada item utilizará da capacidade da mochila.

Como ilustração, pode-se imaginar um alpinista que, para escalar uma montanha, deve organizar sua mochila com vários itens de seu interesse, ou um muambeiro que tem uma cota fixa a ser gasta e precisa decidir sobre a escolha de itens que lhe proporcione o melhor lucro, ou ainda, a escolha de pequenas barras de ferro com comprimentos distintos que de-

⁶ Este é o caso do Problema (5.2.1).

vem ser cortadas a partir de uma barra de comprimento maior, de modo que a perda de ferro seja mínima. Enfim, pode-se perceber a partir desses exemplos simples que o Problema da Mochila tem sido alvo de intensos estudos devido a suas aplicações estratégicas, bem como pelo interesse teórico.

Vários métodos podem ser utilizados na solução de (5.2.15). Porém, todas irão se defrontar com a quantidade de possibilidades na qual a restrição do problema é respeitada. Para o exemplo, o espaço de estados, isto é, o total de combinações de itens que a mochila pode carregar, desconsiderando a restrição do problema, é constituído de $2^4 = 16$. É fácil notar que o número de estados incrementa exponencialmente com o número de itens a serem escolhidos. Deste modo percebe-se que uma boa estratégia de solução deve obrigatoriamente estar apta a tratar o aspecto combinatório do problema de uma forma eficiente.

Deste modo, vamos novamente usar o esquema descentralizado para ilustrar o processo de solução e evidenciar a utilidade desse esquema em problemas de natureza combinatória. Inicialmente, ao ignorar a restrição do problema, tem-se:

$$\begin{aligned} \text{minimize } f &= -8x_1 - 9x_2 - 5x_3 - 4x_4 \\ \text{s.a: } & x_i \in \{0,1\} \quad i = 1, 2, \dots, 4 \end{aligned} \quad (5.2.16)$$

Claramente a solução ótima do problema acima consiste em ajustar todas as variáveis em um, a qual tem-se um valor ótimo associado de -26 . Nesse caso, naturalmente que o critério é carregar a mochila com todos os itens. Note que, ao se relaxar a restrição de desigualdade, o aspecto combinatório do problema torna-se muito mais brando de ser tratado quando comparado a (5.2.15). Embora, essa solução é obviamente uma versão relaxada (inviável) do problema original, a mesma garante que nenhuma solução viável pode ter valor menor do que -26 .

Agora, vamos construir a função lagrangeana de (5.2.15) a fim de resolver o problema dual associado:

$$\begin{aligned} \theta(\lambda) = \text{minimize}_{\{x_i | \text{s.a: } x_i \in \{0,1\}, i=1,4\}} & -8x_1 - 9x_2 - 5x_3 - 4x_4 \\ & + \lambda(16x_1 + 20x_2 + 25x_3 + 10x_4 - 42) \end{aligned} \quad (5.2.17)$$

Note que a solução da função dual acima, para um dado valor de $\lambda \geq 0$ é uma versão relaxada do Problema da Mochila. Desde que é adicionado um valor não positivo a função objetivo original garante-se que, para qualquer solução viável primal (item escolhido), o

valor de $\theta(\lambda)$ associado a essa solução é, certamente, menor ou igual a solução do problema original. Isso vem apenas a confirmar a Expressão (5.2.14), a qual é conhecida como Teorema da Dualidade Fraca [22,28].

Em (5.2.17) o valor de $\theta(\lambda)$ é fácil de ser calculado devido a sua natureza separável e a simplicidade dos subproblemas resultantes:

$$\theta(\lambda) = \sum_{i=1}^4 \left\{ \underset{x_i | \text{s.a. } x_i \in \{0,1\}}{\text{minimize}} (\lambda c_i - a_i) x_i \right\} - 42\lambda = \sum_{i=1}^4 \theta_i(\lambda) - 42\lambda \quad (5.2.18)$$

Acima, cada subproblema $\theta_i(\lambda)$ tem a seguinte solução primal, como função de λ :

$$x_i(\lambda) = \begin{cases} 1 & 0 \leq \lambda < \frac{a_i}{c_i} \\ 0 & \lambda > \frac{a_i}{c_i} \\ 0 \text{ ou } 1 & \lambda = \frac{a_i}{c_i} \end{cases} \quad (5.2.19)$$

De posse das soluções ótimas primais, pode-se proceder na construção da Função Dual (5.2.18), cujo esboço é ilustrado na Figura 5.2.2, mostrada a frente.

$$\theta(\lambda) = \begin{cases} -42\lambda & \lambda \geq 0,50 \\ -26\lambda - 8 & 0,45 \leq \lambda \leq 0,50 \\ -6\lambda - 17 & 0,40 \leq \lambda \leq 0,45 \\ 4\lambda - 21 & 0,20 \leq \lambda \leq 0,40 \\ 29\lambda - 26 & 0 \leq \lambda \leq 0,20 \end{cases} \quad (5.2.20)$$

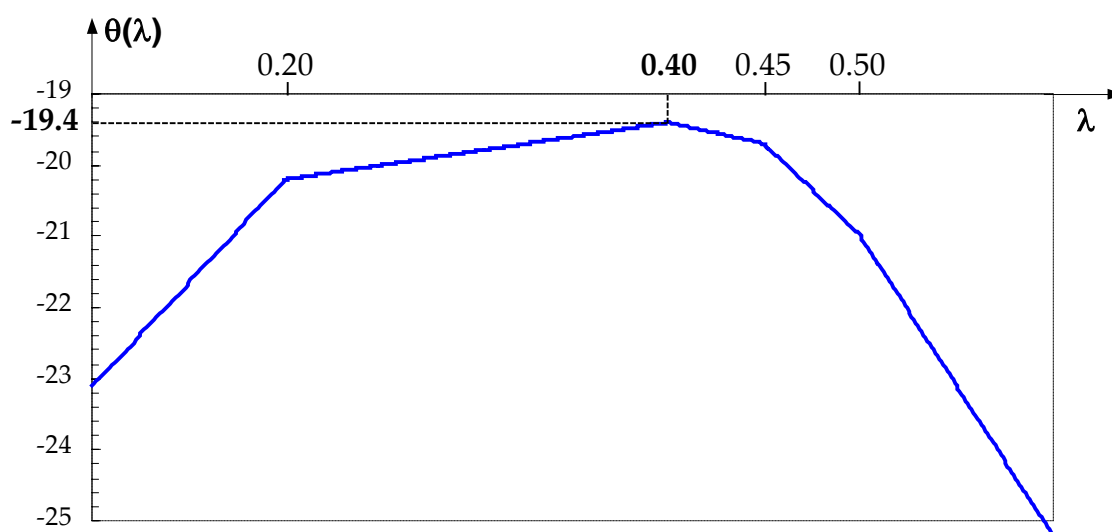


Figura 5.2.2 – Função Dual do Problema da Mochila.

Novamente é possível notar que o valor máximo de $\theta(\lambda)$ é igual a $-19,40$ obtido em $\lambda^* = 0,40$. Resolvendo o problema primal original (5.2.15), tem-se que a solução ótima encontrada é igual a -17 . Assim, pode-se notar que existe uma diferença entre as soluções dos problemas primal e dual, a qual dá-se o nome de *gap* de dualidade. A presença desse *gap* garante a inexistência de um ponto de sela para a função lagrangeana explicitada em (5.2.17).

Para que a aplicação da Relaxação Lagrangeana em problemas de otimização combinatoria (ou problemas não-convexos em geral) seja eficaz, o *gap* de dualidade deve ser o menor possível. Se este for o caso, como principal consequência, pode-se frequentemente obter uma solução primal sub-ótima de boa qualidade iniciando sua procura a partir de uma solução dual. Não é necessário inclusive recorrer a custosos procedimentos de busca⁷.

Ainda, de acordo com a Figura 5.2.2, pode-se notar que a função $\theta(\lambda)$ não é diferenciável para todo $\lambda \geq 0$, inclusive em $\lambda = 0,40$, embora ainda essa função apresente derivadas finitas a direita e a esquerda deste ponto e nos demais pontos não-diferenciáveis. Essas descontinuidades da função dual ocorrem sempre que, para um dado λ , existir mais de um minimizador primal em (5.2.18).

Conforme citado na Seção 5.1, as variáveis duais representam uma valorosa informação de sensibilidade para um determinado problema. Todavia, no tocante a análise de sensibilidade dos problemas ilustrados até aqui, alguns cuidados deve ser tomados.

No caso do exemplo ilustrado pela Figura 5.2.1, pode-se notar que, se o recurso água diminuir de uma unidade⁸, a variação de primeira ordem da função objetivo é igual ao valor do multiplicador ótimo encontrado, isto é, -3 . Por sua vez, no tocante ao Problema da Mochila, essa afirmação não é verdadeira. Se o recurso diminuir de uma unidade⁹ é possível verificar que não existe tal variação, pois a solução ótima primal não é alterada. Isso acontece pois, no primeiro exemplo, onde não existe *gap* de dualidade, o multiplicador de Lagrange é igual a solução ótima encontrada no problema dual. Entretanto, no caso da mochila, a presença do *gap* garante que o multiplicador de Lagrange não existe.

⁷ Conforme é feito em metodologias do tipo *Branch and Bound* [28,75,91,116,117].

⁸ $q_1 + q_2 = 9$ passar para $q_1 + q_2 = 8$.

⁹ Máximo peso que a mochila pode suportar passar de 42 para 41.

De modo a consolidar os conceitos vistos até aqui relacionados a Relaxação Lagrangeana e a Dualidade, outros problemas são mostrados nas figuras a seguir.

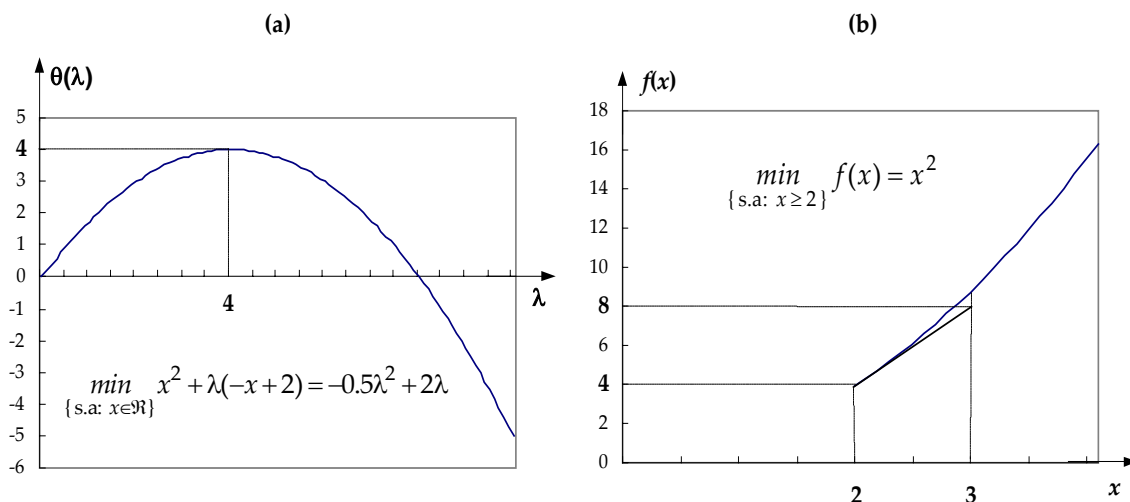


Figura 5.2.3 – O exemplo acima é semelhante ao problema mostrado em (5.2.1) onde a função objetivo do problema primal é estritamente convexa e o conjunto restrito é convexo. Deste modo, pode-se notar que o problema dual é diferenciável em todo o seu domínio. O valor ótimo do problema dual é igual ao do problema primal e o conjunto de soluções duais ($\lambda=4$) é igual ao conjunto de multiplicadores de Lagrange ótimos. No tocante a análise de sensibilidade, em (b) é mostrado que, se o recurso associado com a restrição do problema primal aumentar de uma unidade, a variação de primeira ordem da função objetivo é igual ao próprio multiplicador ótimo calculado em (a).

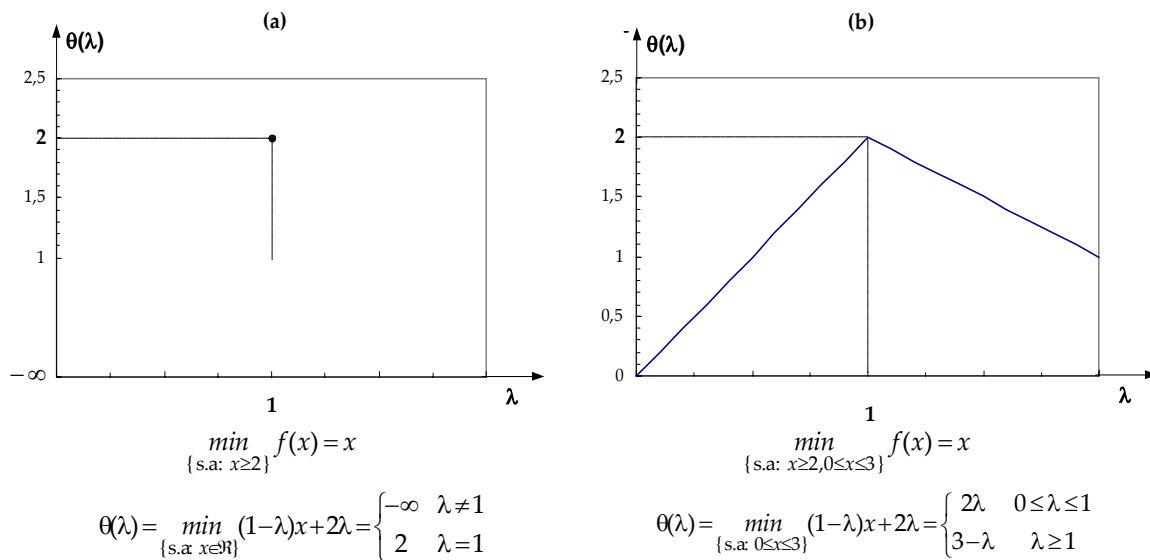


Figura 5.2.4 – Este exemplo ilustra o efeito, no problema dual, da inclusão de restrições redundantes no problema primal. Em (a), a função dual é tem valor finito apenas em um ponto. Por sua vez, em (b), onde restrições redundantes são acrescentadas, pode-se notar que a função dual tem agora valores finitos para todo $\lambda \geq 0$. Em alguns casos, a inclusão de restrições dessa natureza facilita o processo de resolução do problema dual, sob o ponto de vista prático. Como ambos os problemas (a) e (b) são convexos, as soluções dos problemas primais e duais correspondentes coincidem. Assim, a mesma análise de sensibilidade feita na figura anterior pode ser realizada aqui. Dado que as funções envolvidas são lineares, um incremento unitário dos recursos relacionados às restrições relaxadas faz com que a variação de

primeira ordem da função objetivo (igual ao multiplicador ótimo obtido) seja a própria variação dessa função. Esse é um caso especial que se aplica a problemas de programação linear.

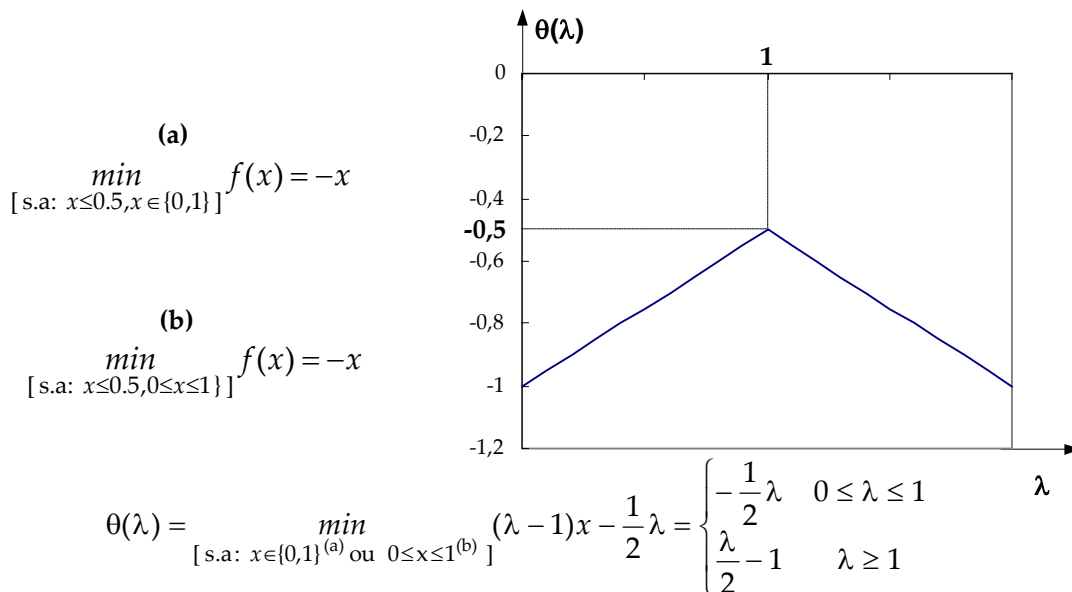


Figura 5.2.5 – Acima se tem um caso onde dois problemas primais tem o mesmo problema dual associado. O problema (a) é não-convexo, sendo possível notar que, resolvendo-se o respectivo problema dual, existe a presença de um *gap* de dualidade com valor igual a $[f(x^*) - \theta(\lambda^*) = 0,5]$. De acordo com a figura, o ponto ótimo dessa função é igual a 1 e corresponde a um multiplicador de Lagrange de uma versão “convexificada” desse problema, onde o conjunto restrito $x = \{0,1\}$ é substituído por um “envoltório” convexo, ou seja, o intervalo $[0,1]$ (Problema (b)).

Além das características mostradas nessas figuras, pode-se ter problemas onde o multiplicador ótimo é nulo, ou existem vários multiplicadores ótimos e ainda, casos onde o problema é convexo e ainda assim apresenta um *gap* de dualidade. Estas e outras situações interessantes podem ser vistas com detalhe em [28].

Por fim, falta esboçar um pseudo-algoritmo que mostre o uso da Relaxação Lagrangeana na solução de um problema de programação matemática. Esse procedimento é delineado abaixo.

1. Escolha valores iniciais (viáveis) para os multiplicadores de Lagrange e resolva os subproblemas primais associados com a função lagrangeana, tal como em (5.2.8);
2. avalie a função dual e escolha novos multiplicadores de modo que a mesma é incrementada;
3. se o máximo da função dual é atingido, pare. Caso contrário retorne ao Passo 1;
4. a partir dos multiplicadores ótimos obtidos em (3), encontre uma solução primal viável (e se possível, ótima) para o problema primal original.

De acordo com o pseudo-algoritmo mostrado, pode-se distinguir três etapas principais no processo: resolução dos subproblemas primais, maximização da função dual e a busca de soluções primais associadas, ou conforme é mais bem conhecida essa última fase, recuperação primal. A recuperação primal é usualmente feita por meio de heurísticas. Assim, não existe muito que dizer sobre tais heurísticas uma vez que elas são tipicamente dependentes da natureza do problema. Neste trabalho não serão tomadas medidas para a recuperação primal. O interesse do mesmo, conforme será visto ainda, é o procedimento de solução do problema dual.

5.3 Relaxação Lagrangeana Aplicada ao Problema da Programação da Operação Energética.

Dado que a Relaxação Lagrangeana foi a escolhida para a solução do problema, é correto refletir os potenciais incentivos para a sua utilização. De acordo com a seção anterior, tem-se que:

- o problema dual é côncavo, independente do problema primal ser convexo ou não;
- dependendo da estrutura do problema dual, o número de variáveis pode ser inferior e apresentar restrições mais simples que o problema primal;
- na ausência de *gap* de dualidade, todas as soluções primais ótimas podem ser obtidas minimizando a função lagrangeana correspondente, considerando o multiplicador ótimo encontrado¹⁰ no problema dual;
- mesmo existindo um *gap* de dualidade, o valor da função dual é sempre um limite inferior para a solução do problema primal. Este limite inferior pode ser útil no contexto da otimização de problemas discretos e em esquemas de solução baseados na metodologia de *Branch and Bound*.

Em contraste aos aspectos positivos apresentados acima, deve-se considerar também algumas dificuldades inerentes ao uso da Relaxação Lagrangeana. Dentre as mais importantes, destacam-se:

¹⁰ Todavia, podem existir mínimos primais adicionais da função lagrangeana que são inviáveis.

- a minimização da função lagrangeana pode violar algumas das restrições relaxadas, de modo que se faz necessário encontrar essa viabilidade perdida por meio de algum método heurístico;
- a maximização da função dual pode não ser trivial desde que (principalmente nos casos práticos) essa função é tipicamente não-diferenciável.

Outro importante aspecto que envolve a aplicação da Relaxação Lagrangeana é o fato de existirem diferentes maneiras de se construir um problema dual na solução de um determinado problema primal. Neste contexto, pode-se dualizar qualquer restrição (ou conjunto de restrições), várias restrições podem ser agrupadas em uma única restrição e subsequentemente realizar a dualização, ou ainda, restrições redundantes podem ser anexadas no problema primal, entre outras maneiras. Cada uma dessas opções irá produzir um específico problema dual com um diferente valor ótimo associado à esse problema¹¹.

Existem ainda esquemas de dualização na qual o espaço das variáveis primais é transformado de antemão, os quais são denominados de *splitting methods* [118]. Esses métodos são muito utilizados em programação estocástica (veja, [119]) e têm sido estudados em [120,121] na solução de determinados problemas de natureza combinatória.

A idéia base consiste em duplicar artificialmente as variáveis primais de interesse para posteriormente encontrar uma decomposição adequada por meio da dualização das restrições artificialmente impostas e resultantes dessa duplicação. Essa estratégia tem sido proposta recentemente para o problema de alocação de unidades termelétricas [122-124] e será utilizada neste trabalho como técnica de dualização.

Embora os méritos relativos dos vários esquemas de dualização sejam mais ou menos conhecidos, a técnica usada nos *splitting methods* tem se mostrado superior, para alguns casos específicos, no que diz respeito ao tamanho *gap* de dualidade. Um estudo recente que diz respeito entre a relação de esquemas de dualização e o tamanho do *gap* de dualidade pode ser visto em [125].

A partir de agora será ilustrado o esquema de solução do problema da programação. Para conforto de visualização e, tendo em vista a preservação da didática do conteúdo, esse

¹¹ Essa consideração é válida somente para o caso de problemas onde existe um *gap* de dualidade.

esquema é apresentado de forma seqüencial, isto é, a decomposição será realizada por grupo de variáveis com características semelhantes até que o problema dual esteja construído por completo. Aspectos relativos com a solução dos subproblemas primais resultantes do esquema serão tratados na penúltima seção, a qual precede a seção de conclusões deste capítulo.

A primeira etapa do esquema de dualização usada visa realizar o problema de alocação das unidades termelétricas.

De acordo com a formulação apresentada no Capítulo 4, o acoplamento existente entre as variáveis termelétricas e o restante do problema é dado pela equação de atendimento a demanda em cada subsistema e estágio de tempo. A fim de retirar esse acoplamento, o qual vem indiretamente pelo conjunto de variáveis pt_{it} , são introduzidas no Problema (4.4.1)-(4.4.20), as seguintes restrições:

$$pta_{it} = pt_{it} \quad \begin{matrix} i = 1, I \\ t = 1, T \end{matrix} \quad (5.3.1)$$

Na reconstrução do Problema (4.4.1)-(4.4.20), as variáveis artificiais pta_{it} substituem as variáveis pt_{it} nas restrições onde não estão presentes as variáveis inteiras, u_{it} , isto é, nas restrições de atendimento a demanda.

Ao fazer uso desta duplicação-substituição, tem-se o seguinte problema:

$$\min_{\{u_{it}, pta_{it}, pta_{it}, z_{jrt}, q_{jrt}, Q_{rt}, s_{rt}, Int_{let}, Int_{dt}\}} = \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^I [C_{it}(pt_{it}) + st_{it}(x_{i,t-1})u_{i,t}(1-u_{i,t-1})] + \alpha \quad (5.3.2)$$

sujeito a:

$$\sum_{i \in I_c} pta_{it} + \sum_{r \in R_c} \left(\sum_{j=1}^{J(r)} pb_{jrt}(q_{jrt}, Q_{rt}, s_{rt}) \right) + \sum_{l \in \Omega_c} (Int_{let} - Int_{dt}) = D_{et} \quad (5.3.3)$$

$$0 \leq Int_{let} \leq Int_{let}^{máx} \quad (5.3.4)$$

$$0 \leq Int_{elt} \leq Int_{elt}^{máx} \quad (5.3.5)$$

$$pta_{it}^{mín} u_{it} \leq pta_{it} \leq pta_{it}^{máx} u_{it} \quad (5.3.6)$$

$$\delta_i(u_{i,t-1}, x_{it}) \leq pta_{it} - pta_{i,t-1} \leq \Delta_i(u_{i,t-1}, x_{it}) \quad (5.3.7)$$

$$u_{it} = \begin{cases} 1 & \text{se } 1 \leq x_{it} < t_i^{up} \\ 0 & \text{se } 1 \geq x_{it} > -t_i^{down} \\ 0 \text{ ou } 1 & \text{fora isso} \end{cases} \quad (5.3.8)$$

$$x_{it} = \begin{cases} \text{máx}(x_{i,t-1}, 0) + 1, & \text{se } u_{it} = 1, \\ \text{mín}(x_{i,t-1}, 0) - 1, & \text{se } u_{it} = 0. \end{cases} \quad (5.3.9)$$

$$pt_i^{\text{máx}} u_{it} - pt_{it} \geq rt_{it} \quad (5.3.10)$$

$$u_{i0} = \tilde{u}_{i0} \quad x_{i0} = \tilde{x}_{i0} \quad pt_{i0} = \tilde{p}_{i0} \quad (5.3.11)$$

$$pta_{it} = pt_{it} \quad (5.3.12)$$

$$v_{r,t+1} + Q_{rt} + s_{rt} - \sum_{m \in \mathbb{R}_+^{(r)}} (Q_{m,t-\tau_{mr}} + s_{m,t-\tau_{mr}}) - v_{rt} = \gamma_{rt} \quad (5.3.13)$$

$$v_r^{\text{mín}} \leq v_{r,t+1} \leq v_r^{\text{máx}} \quad (5.3.14)$$

$$s_{rt} \geq 0 \quad (5.3.15)$$

$$Q_{rt} + s_{rt} = d_{rt} \quad (5.3.16)$$

$$d_{rt}^{\text{mín}} \leq d_{rt} \leq d_{rt}^{\text{máx}} \quad (5.3.17)$$

$$\alpha + \sum_{e=1}^E \sum_{r \in \mathbb{R}_e} \pi_r^{(1)} v_{r,T+1} \geq \alpha_0^{(1)}$$

$$\alpha + \sum_{e=1}^E \sum_{r \in \mathbb{R}_e} \pi_r^{(2)} v_{r,T+1} \geq \alpha_0^{(2)}$$

.....

$$\alpha + \sum_{e=1}^E \sum_{r \in \mathbb{R}_e} \pi_r^{(p)} v_{r,T+1} \geq \alpha_0^{(p)} \quad (5.3.18)$$

.....

$$\alpha + \sum_{e=1}^E \sum_{r \in \mathbb{R}_e} \pi_r^{(P)} v_{r,T+1} \geq \alpha_0^{(P)}$$

$$Q_{rt} = \sum_{j=1}^{J(r)} d_{jrt} \quad (5.3.19)$$

$$\sum_{k=1}^{\Phi_{jr}} pb_{jkrt}^{\text{mín}} z_{jkrt} \leq pb_{jrt}(d_{jrt}, Q_{rt}, s_{rt}) \leq \sum_{k=1}^{\Phi_{jr}} pb_{jkrt}^{\text{máx}} z_{jkrt} \quad (5.3.20)$$

$$z_{jkrt} \in \{0, 1\} \quad \sum_{k=1}^{\Phi_{jr}} z_{jkrt} \leq 1 \quad (5.3.21)$$

$$\sum_{j=1}^{J(r)} \left(\sum_{k=1}^{\Phi_{jr}} pb_{j1rt}^{\text{máx}} z_{jkrt} - pb_{jrt}(d_{jrt}, Q_{rt}, s_{rt}) \right) \geq rb_{rt} \quad (5.3.22)$$

O passo seguinte consiste em construir o problema dual do problema acima. Isso é feito por meio da dualização das restrições artificiais (5.3.12).

Sendo λpt_{it} o corresponde multiplicador de Lagrange, irrestrito em sinal, associado a cada restrição artificial (5.3.12), tem-se o seguinte problema dual de (5.3.2)-(5.3.22):

$$(D_{HT}) = \max_{\lambda pt_{it}} \Theta(\lambda pt_{it}) \quad (5.3.23)$$

onde:

$$\begin{aligned} \Theta(\lambda pt_{it}) = \min_{\{u_{it}, pt_{it}, pta_{it}, z_{jert}, d_{jrt}, Q_{it}, s_{it}, Int_{it}, Int_{dt}\}} & \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^I [C_{it}(pt_{it}) + st_{it}(x_{i,t-1})u_{i,t}(1-u_{i,t-1})] + \alpha \\ & + \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^I \lambda pt_{it} (pta_{it} - pt_{it}) \end{aligned} \quad (5.3.24)$$

$$\text{sujeito a:} \quad (5.3.3)-(5.3.11), (5.3.13)-(5.3.22)$$

Pode-se notar que, quando são fornecidos multiplicadores λpt_{it} , a função dual, pode ser calculada por meio da resolução de dois conjuntos de subproblemas de minimização, desacoplados entre si:

$$\Theta(\lambda pt_{it}) = \Theta_{AUT}(\lambda pt_{it}) + \Theta_{HT}(\lambda pt_{it}) \quad (5.3.25)$$

onde:

$$\Theta_{AUT}(\lambda pt_{it}) = \min_{\{u_{it}, pt_{it}\}} \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^I [C_{it}(pt_{it}) + st_{it}(x_{i,t-1})u_{i,t}(1-u_{i,t-1}) - \lambda pt_{it} pt_{it}] \quad (5.3.26)$$

$$\text{sujeito a:} \quad (5.3.6)-(5.3.11)$$

e

$$\Theta_{HT}(\lambda pt_{it}) = \min_{\{pta_{it}, z_{jert}, d_{jrt}, Q_{it}, s_{it}, Int_{it}, Int_{dt}\}} \alpha + \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^I \lambda pt_{it} pta_{it} \quad (5.3.27)$$

$$\text{sujeito a:} \quad (5.3.3)-(5.3.5), (5.3.13)-(5.3.22)$$

Os subproblemas de minimização (5.3.26) e (5.3.27) são chamados aqui de subproblemas de alocação de unidades termelétricas e hidrotérmico, respectivamente.

O subproblema de alocação de unidades termelétricas possui variáveis binárias u_{it} e variáveis contínuas pt_{it} .

Conforme pode ser notado na formulação desse subproblema, as restrições fazem com que o mesmo possa ser resolvido de forma independente para cada unidade geradora¹². Deste modo, cada unidade geradora pode ter sua operação otimizada utilizando para tanto um algoritmo de Programação Dinâmica.

Por sua vez, o subproblema hidrotérmico visa atender as restrições de atendimento a demanda e todas as demais restrições do problema (associadas com a operação do sistema hidrelétrico). Este problema é ainda muito acoplado e conseqüentemente necessita ser mais simplificado para tornar a avaliação da função dual (5.3.24) mais atrativa.

Nesse sentido, pode-se atentar para as restrições que regem o atendimento a demanda em cada subsistema e estágio de tempo. Do modo que estão formuladas, essas restrições são compostas pelas variáveis compõem a função $ph_{jt}(\cdot)$, bem como de pta_{it} , Int_{iet} e Int_{eit} . Com exceção das variáveis que compõe $ph_{jt}(\cdot)$, as demais variáveis da restrição de atendimento a demanda não têm ligação alguma com as demais restrições de (5.3.27)¹³. Então, o próximo passo consiste em desacoplar as variáveis de geração de origem hidrelétrica das restrições de atendimento a demanda. Assim como no caso termelétrico, a fim de retirar esse acoplamento, são introduzidas no Problema (5.3.27), as seguintes restrições:

$$GH_{rt} = \sum_{j=1}^{J(r)} ph_{jrt}(q_{jrt}, Q_{rt}, s_{rt}) \quad \begin{matrix} r = 1, R \\ t = 1, T \end{matrix} \quad (5.3.28)$$

Assim como no caso anterior, na reconstrução do Problema (5.3.27), as variáveis artificiais GH_{rt} substituirão o somatório de $ph_{jrt}(\cdot)$ nas restrições de atendimento a demanda. Como conseqüência, as variáveis pta_{it} , Int_{iet} e Int_{eit} ficam livres do acoplamento existente com o sistema hidrelétrico, principalmente aquele relacionado com as variáveis binárias, z_{jkt} , presentes nesse sistema.

Ao fazer uso desta estratégia, o problema (5.3.27) é reescrito da seguinte maneira:

$$\Theta_{HT}(\lambda pt_{it}) = \min_{\{pta_{it}, z_{jkt}, GH_{rt}, Q_{rt}, s_{rt}, Int_{iet}, Int_{eit}\}} \alpha - \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^I \lambda pt_{it} pta_{it} \quad (5.3.29)$$

¹² Na formulação apresentada no Capítulo 4, referente a modelagem das unidades termelétricas, as mesmas foram modeladas considerando que uma usina é composta por uma unidade geradora apenas. No caso de uma usina ser composta de várias unidades, então o problema fica acoplado de acordo com esse número de unidades devido à restrição de reserva. Direcionamentos para sobrepujar esse acoplamento são tratados adiante na Seção 5.4.1.

¹³ A ligação aqui se refere aquela encontrada por meio de restrições. Naturalmente pt_{it} tem ligação com o problema termelétrico por meio de multiplicadores de Lagrange.

$$\begin{aligned}
 \text{sujeito a: } \quad & \sum_{i \in I_t} pta_{it} + \sum_{r \in R_t} GH_{rt} + \sum_{l \in \Omega_t} (Int_{lt} - Int_{dt}) = D_{et} \\
 & GH_{rt} = \sum_{j=1}^{J(r)} ph_{jrt}(q_{jrt}, Q_{rt}, s_{rt}) \\
 & (5.3.4)-(5.3.5), (5.3.13)-(5.3.22)
 \end{aligned}$$

Sendo λd_{rt} o corresponde multiplicador de Lagrange, irrestrito em sinal, associado a cada restrição artificial (5.3.28), tem-se o seguinte problema dual do problema acima:

$$\begin{aligned}
 \Theta_{HT}(\lambda pt_{it}, \lambda d_{rt}) = & \min_{\{pta_{it}, z_{jkt}, GH_{rt}, q_{jrt}, Q_{rt}, s_{rt}, Int_{lt}, Int_{dt}\}} \alpha + \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^I \lambda pt_{it} pta_{it} \\
 & + \sum_{t=1}^T \sum_{r=1}^R \lambda d_{rt} \left(GH_{rt} - \sum_{j=1}^{J(r)} ph_{jrt}(q_{jrt}, Q_{rt}, s_{rt}) \right) \quad (5.3.30) \\
 \text{sujeito a: } \quad & \sum_{i \in I_t} pta_{it} + \sum_{r \in R_t} GH_{rt} + \sum_{l \in \Omega_t} (Int_{lt} - Int_{dt}) = D_{et} \\
 & (5.3.4)-(5.3.5), (5.3.13)-(5.3.22)
 \end{aligned}$$

Novamente, a função dual acima é de natureza separável podendo ser, portanto, calculada através da resolução de dois novos conjuntos de subproblemas de minimização, desacoplados entre si:

$$\Theta_{HT}(\lambda pt_{it}, \lambda d_{rt}) = \Theta_D(\lambda pt_{it}, \lambda d_{rt}) + \Theta_H(\lambda d_{rt}) \quad (5.3.31)$$

onde:

$$\begin{aligned}
 \Theta_D(\lambda pt_{it}, \lambda d_{rt}) = & \min_{\{pta_{it}, GH_{rt}, Int_{lt}, Int_{dt}\}} \sum_{t=1}^T \left\{ \sum_{i=1}^I \lambda pt_{it} pta_{it} + \sum_{r=1}^R \lambda d_{rt} GH_{rt} \right\} \\
 \text{sujeito a: } \quad & \sum_{i \in I_t} pta_{it} + \sum_{r \in R_t} GH_{rt} + \sum_{l \in \Omega_t} (Int_{lt} - Int_{dt}) = D_{et} \quad (5.3.32) \\
 & (5.3.4)-(5.3.5)
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 \Theta_H(\lambda d_{rt}) = & \min_{\{z_{jkt}, q_{jrt}, Q_{rt}, s_{rt}\}} \alpha - \sum_{t=1}^T \sum_{r=1}^R \lambda d_{rt} \left(\sum_{j=1}^{J(r)} ph_{jrt}(q_{jrt}, Q_{rt}, s_{rt}) \right) \quad (5.3.33) \\
 \text{sujeito a: } \quad & (5.3.13)-(5.3.22)
 \end{aligned}$$

Os novos subproblemas (5.3.32) e (5.3.33) são denominados aqui de subproblemas de atendimento a demanda e hidrelétrico, respectivamente.

O subproblema de atendimento a demanda é constituído apenas por variáveis contínuas e devido a representação simplificada do sistema de transmissão, esse subproblema é

também de natureza linear. Outra observação importante é o fato de que esse subproblema é desacoplado no tempo podendo ser, portanto, otimizado a cada estágio de tempo por meio de qualquer pacote de programação linear.

Por sua vez, o subproblema hidrelétrico é composto pelas variáveis relacionadas às condições operativas dos reservatórios do sistema e das respectivas unidades de geração, referentes aos diversos conjuntos turbina-gerador. Devido a larga predominância deste recurso no parque gerador brasileiro, hoje de aproximadamente 90%, aliado ao comportamento físico complexo da produção de energia elétrica a partir dos recursos hídricos, o subproblema hidrelétrico é de mais difícil solução quando comparado aos anteriores até aqui mostrados. A presença de não-linearidades na modelagem das unidades hidrelétricas, bem como o acoplamento temporal e espacial presente entre os diversos reservatórios, torna a solução desse subproblema uma tarefa desafiadora. Assim como os demais subproblemas, a solução apresentada adiante será baseada na mesma estratégia de duplicação-dualização. Antes, porém, faz-se necessário reorganizar os subproblemas até aqui decompostos para melhor visualizar a distribuição espacial e temporal dos mesmos.

Inicialmente, atualizando a Expressão (5.3.23) tem-se:

$$(D_{HT}) = \max_{\{\lambda_{pt_{it}}, \lambda_{d_{it}}\}} \Theta(\lambda_{pt_{it}}, \lambda_{d_{it}}) \quad (5.3.34)$$

Conforme dito anteriormente, o subproblema de alocação de unidades termelétricas é separável por unidade geradora, isto é, desacoplado espacialmente. Pode-se notar facilmente que as restrições de rampa, quando presentes, bem como as restrições de *minimum uptime and downtime* acoplam no tempo cada subproblema relacionado a uma unidade específica. Portanto, esse problema é acoplado no tempo.

No tocante ao subproblema de atendimento à demanda, o mesmo, conforme visto, é desacoplado no tempo. Dado que a demanda deve ser atendida, na decomposição empregada, pela combinação das diversas gerações e intercâmbios, esse subproblema não é desacoplado no espaço.

Com base nessas observações, a avaliação da função dual até aqui esquematizada (5.3.34) é obtida por meio da seguinte expressão:

$$\Theta(\lambda_{pt_{it}}, \lambda_{d_{it}}) = \sum_{i=1}^I \Theta_{AUT}^i(\lambda_{pt_{it}}) + \sum_{t=1}^T \Theta_D^t(\lambda_{pt_{it}}, \lambda_{d_{it}}) + \Theta_H(\lambda_{d_{it}}) \quad (5.3.35)$$

onde:

$$\Theta_{AUT}^i(\lambda p t_{it}) = \min_{\{u_{it}, p t_{it}\}} \sum_{i=1}^T C_{it}(p t_{it}) + s t_{it}(x_{i,t-1}) u_{i,t} (1 - u_{i,t-1}) - \lambda p t_{it} p t_{it} \quad (5.3.36)$$

sujeito a: (5.3.6)-(5.3.11) (i fixo)

e

$$\Theta_D^t(\lambda p t_{it}, \lambda d_{it}) = \min_{\{p t_{it}, GH_{it}, Int_{it}, Int_{dt}\}} \left\{ \sum_{i=1}^I \lambda p t_{it} p t_{it} + \sum_{r=1}^R \lambda d_{it} GH_{it} \right\}$$

$$\text{sujeito a: } \sum_{i \in I_t} p t_{it} + \sum_{r \in R_t} GH_{it} + \sum_{l \in \Omega_t} (Int_{lt} - Int_{dt}) = D_{it} \quad (5.3.37)$$

(5.3.4)-(5.3.5) (t fixo)

O próximo passo agora consiste em decompor o terceiro termo de (5.3.35), referente ao subproblema hidrelétrico, ou mais precisamente, a Expressão (5.3.33). Nesse subproblema, pode-se notar que as restrições (5.3.13)-(5.3.18) são compostas por variáveis que se referem a modelagem das usinas hidrelétricas, isto é, Q_{it} , s_{it} , d_{it} e $v_{i,t+1}$. Por sua vez, o conjunto de restrições definido por (5.3.19)-(5.3.22) depende, além de Q_{it} e s_{it} , das variáveis de decisão que são tomadas nas unidades de uma usina isoladamente, ou seja, q_{ijt} e z_{kjt} . Pode-se notar ainda que as características das restrições envolvidas nestes dois conjuntos [(5.3.13)-(5.3.18); (5.3.19)-(5.3.22)] são de naturezas distintas. No primeiro, existem apenas restrições lineares, enquanto no segundo estão presentes restrições de natureza inteira-mista e não-linear do sistema hidrelétrico. Ainda, no conjunto definido por (5.3.13)-(5.3.19) existe forte acoplamento temporal e espacial¹⁴. Já, o conjunto de restrições restante é caracterizado pela inexistência desses acoplamentos.

A idéia de decomposição apresentada a seguir visa fazer com que as características citadas acima sejam tratadas de forma independente. Deste modo as decisões globais¹⁵ de manuseio da água, as quais visam o atendimento do balanço hídrico nos reservatórios, restrições de defluência, bem como o atendimento as imposições operativas definidas pelas estratégias de longo prazo, sugerem ser realizadas um novo subproblema. Por sua vez, a realização da alocação das unidades geradoras hidrelétricas, o qual leva em consideração as zonas

¹⁴ Esse acoplamento é relativo aos reservatórios. Existe ainda um acoplamento dentro das unidades de um único reservatório que, conforme será visto adiante, pode trazer complexidades adicionais à estratégia de solução.

¹⁵ Globais no sentido de estarem referidas com o nível de turbinamento total em cada usina e não na distribuição do mesmo entre as unidades.

operativas, reserva na usina, não-linearidades da função de produção, necessita ser realizada de uma forma simplificada o suficiente de maneira que as complexidades associadas possam ser precisamente tratadas.

Para tornar essa idéia realidade, deve-se atentar para as variáveis que são comuns aos dois conjuntos citados, isto é, Q_{rt} e s_{rt} . Conseqüentemente, e fazendo uso da estratégia adotada anteriormente, tem-se que o primeiro passo consiste em incluir $2 \times R \times T$ restrições¹⁶ referentes à duplicação dessas variáveis no Problema (5.3.33):

$$\Theta_H(\lambda d_{rt}) = \min_{\{z_{jrt}, q_{jrt}, Q_{rt}, Qa_{rt}, s_{rt}, sa_{rt}\}} \alpha - \sum_{t=1}^T \sum_{r=1}^R \lambda d_{rt} \left(\sum_{j=1}^{J(r)} ph_{jrt}(q_{jrt}, Q_{rt}, s_{rt}) \right)$$

(5.3.38)

sujeito a: $Qa_{rt} = Q_{rt}$

$sa_{rt} = s_{rt}$

(5.3.13)-(5.3.22)

Assim como nos casos anteriores, deve-se agora substituir as variáveis artificiais no problema acima da seguinte maneira:

$$\Theta_H(\lambda d_{rt}) = \min_{\{z_{jrt}, q_{jrt}, Q_{rt}, Qa_{rt}, s_{rt}, sa_{rt}\}} \alpha - \sum_{t=1}^T \sum_{r=1}^R \lambda d_{rt} \left(\sum_{j=1}^{J(r)} ph_{jrt}(q_{jrt}, Q_{rt}, s_{rt}) \right)$$

(5.3.39)

sujeito a: $Qa_{rt} = Q_{rt}$ (5.3.40)

$sa_{rt} = s_{rt}$ (5.3.41)

$v_{r,t+1} + Qa_{rt} + sa_{rt} - \sum_{m \in \mathcal{H}_r^{(t)}} (Qa_{m,t-\tau_m} + sa_{m,t-\tau_m}) - v_{rt} = \gamma_{rt}$ (5.3.42)

$v_r^{min} \leq v_{r,t+1} \leq v_r^{max}$ (5.3.43)

$s_{rt} \geq 0$ (5.3.44)

$Qa_{rt} + sa_{rt} = d_{rt}$ (5.3.45)

$d_{rt}^{min} \leq d_{rt} \leq d_{rt}^{max}$ (5.3.46)

$\alpha + \sum_{t=1}^T \sum_{r \in \mathcal{R}_t} \pi_r^{(1)} v_{r,T+1} \geq \alpha_0^{(1)}$ (5.3.47)

¹⁶ De acordo com o Capítulo 3, nem todas as usinas hidrelétricas têm sua produção dependente da vazão vertida. Deste modo, a duplicação de s_{rt} faz-se somente necessária quando as unidades de uma dada usina são dependentes do vertimento. Caso contrário apenas a duplicação de Q_{rt} é necessária.

$$\alpha + \sum_{e=1}^E \sum_{r \in R_e} \pi_r^{(2)} v_{r,T+1} \geq \alpha_0^{(2)}$$

$$\alpha + \sum_{e=1}^E \sum_{r \in R_e} \pi_r^{(b)} v_{r,T+1} \geq \alpha_0^{(b)}$$

$$\alpha + \sum_{e=1}^E \sum_{r \in R_e} \pi_r^{(P)} v_{r,T+1} \geq \alpha_0^{(P)}$$

$$Q_{rt} = \sum_{j=1}^{J(r)} q_{jrt} \quad (5.3.48)$$

$$\sum_{k=1}^{\Phi_{jr}} \text{ph}_{jkrt}^{\min} z_{jkrt} \leq \text{ph}_{jrt}(q_{jrt}, Q_{rt}, s_{rt}) \leq \sum_{k=1}^{\Phi_{jr}} \text{ph}_{jkrt}^{\max} z_{jkrt} \quad (5.3.49)$$

$$z_{jkrt} \in \{0, 1\} \quad \sum_{k=1}^{\Phi_{jr}} z_{jkrt} \leq 1 \quad (5.3.50)$$

$$\sum_{j=1}^{J(r)} \left(\sum_{k=1}^{\Phi_{jr}} \text{ph}_{jkrt}^{\max} z_{jkrt} - \text{ph}_{jrt}(q_{jrt}, Q_{rt}, s_{rt}) \right) \geq rh_{rt} \quad (5.3.51)$$

Sendo λq_{rt} e λs_{rt} multiplicadores de Lagrange, irrestritos em sinal, associados aos respectivos conjuntos de restrições artificiais do subproblema acima, então é possível construir um novo problema dual cuja estrutura é dada por:

$$\begin{aligned} \Theta_H(\lambda d_{rt}, \lambda q_{rt}, \lambda s_{rt}) = & \min_{\{z_{jkrt}, q_{jrt}, Q_{rt}, Qa_{rt}, sa_{rt}\}} \alpha - \sum_{t=1}^T \sum_{r=1}^R \lambda d_{rt} \left(\sum_{j=1}^{J(r)} \text{ph}_{jrt}(q_{jrt}, Q_{rt}, s_{rt}) \right) \\ & + \sum_{t=1}^T \sum_{r=1}^R [\lambda q_{rt} (Q_{rt} - Qa_{rt}) + \lambda s_{rt} (s_{rt} - sa_{rt})] \end{aligned} \quad (5.3.52)$$

sujeito a: (5.3.42)-(5.3.51)

A função dual acima pode ser avaliada por meio da resolução de dois novos conjuntos de subproblemas. O primeiro constituído por apenas um subproblema, surge arranjando os termos da função objetivo e as restrições que dependem exclusivamente das variáveis de usina, ou seja, α , $v_{r,t+1}$, Qa_{rt} , sa_{rt} e d_{rt} :

$$\Theta_{SH}(\lambda q_{rt}, \lambda s_{rt}) = \min_{\{Qa_{rt}, sa_{rt}\}} \alpha - \sum_{t=1}^T \sum_{r=1}^R [\lambda q_{rt} Qa_{rt} + \lambda s_{rt} sa_{rt}] \quad (5.3.53)$$

sujeito a: (5.3.42)-(5.3.47)

Esse subproblema é de natureza linear, acoplado no tempo e no espaço, sendo denominado aqui de subproblema hidráulico.

O segundo conjunto de subproblemas refere-se ao agrupamento das restrições que possuem as variáveis q_{jrt} , Q_{rt} , s_{rt} e z_{jkrt} :

$$\Theta_{AUH}(\lambda d_{rt}, \lambda q_{rt}, \lambda s_{rt}) = \min_{\{z_{jkrt}, q_{jrt}, Q_{rt}, s_{rt}\}} - \sum_{t=1}^T \sum_{r=1}^R \lambda d_{rt} \left(\sum_{j=1}^{J(r)} ph_{jrt}(q_{jrt}, Q_{rt}, s_{rt}) \right) + \sum_{t=1}^T \sum_{r=1}^R [\lambda q_{rt} Q_{rt} + \lambda s_{rt} s_{rt}] \quad (5.3.54)$$

sujeito a: (5.3.48)-(5.3.51)

O subproblema acima é de natureza inteira-mista não-linear e é chamado de subproblema de alocação de unidades hidrelétricas. Pode-se notar ainda que essa alocação pode ser realizada de forma desacoplada no tempo e no espaço, isto é:

$$\Theta_{AUH}(\lambda d_{rt}, \lambda q_{rt}, \lambda s_{rt}) = \sum_{t=1}^T \sum_{r=1}^R \Theta_{AUH}^{rt}(\lambda d_{rt}, \lambda q_{rt}, \lambda s_{rt}) \quad (5.3.55)$$

onde:

$$\Theta_{AUH}^{rt}(\lambda d_{rt}, \lambda q_{rt}, \lambda s_{rt}) = \min_{\{z_{jkrt}, q_{jrt}, Q_{rt}, s_{rt}\}} - \lambda d_{rt} \left(\sum_{j=1}^{J(r)} ph_{jrt}(q_{jrt}, Q_{rt}, s_{rt}) \right) + \lambda q_{rt} Q_{rt} + \lambda s_{rt} s_{rt} \quad (5.3.56)$$

sujeito a: (5.3.48)-(5.3.51) (com r e t fixos)

Ainda assim, e diferentemente de (5.3.53), o problema acima merece uma delicada atenção, pois, além das não-linearidades envolvidas, o número de combinações existentes em uma dada usina vai depender do número de unidades e zonas operativas. Esse número de combinações pode então tornar o processo de solução desses subproblemas muito trabalhoso.

É sabido que o número de combinações que uma usina possui cresce exponencialmente com o número de unidades e de zonas operativas. Uma usina com $J(r)$ unidades diferentes, sendo que cada uma possui k zonas operativas permitidas, tem um total de $(k+1)^{J(r)}$ combinações.

Algumas técnicas podem ser usadas para solucionar (5.3.56). Dentre esse universo, citamos os métodos de *Branch and Bound*, Programação Dinâmica, e a própria Relaxação Lagrangeana inclusive. Entretanto, essas técnicas podem incrementar a complexidade computacional sendo que, a escolha de uma delas não faria sentido sem antes analisar as características do problema, o que é resumidamente realizado na seqüência.

Em geral, as usinas hidrelétricas possuem unidades idênticas. Considerando ainda o caso de uma zona operativa (que também é o caso mais comum), o total de combinações decresce de $2^{J(r)}$ para $J(r) + 1$. De posse dessa consideração, uma boa estratégia para solucionar (5.3.56) consiste em investigar todo o espaço de estados do problema por meio de uma enumeração exaustiva das combinações. Esse número $J(r) + 1$ de combinações pode ser ainda decrescido quando se considera na enumeração, a inviabilidade que surgir pela necessidade do atendimento do valor de reserva na usina, rb_{it} .

Assim, a solução que será adotada, para aquelas usinas com um “número pequeno” de estados que deve ser calculado, segue a enumeração exaustiva. A ordem de grandeza desse número é mais bem definido na fase de testes computacionais, apresentada no Capítulo 7.

Usinas hidrelétricas com um elevado número de unidades geradoras e/ou zonas operativas tornam muito ineficiente o uso da técnica da enumeração exaustiva. Isso porque, além do excessivo número de combinações, os problemas de programação não-lineares têm dimensão crescente com o número de unidades.

Deste modo deve-se investigar cuidadosamente esse último caso citado sendo necessário, portanto, encontrar uma alternativa à enumeração exaustiva. A alternativa aqui novamente faz uso dos conceitos da Relaxação Lagrangeana. Tanto a técnica de *Branch and Bound*, quanto a Programação Dinâmica, no caso geral, representam alternativas menos atraídas devido às características das funções envolvidas no problema. O procedimento visa sobrepujar a dificuldade combinatória presente em alguns casos específicos.

Retornando ao Problema (5.3.56), nota-se que para amenizar o tratamento do efeito combinatório é necessário desacoplar as variáveis inteiras das variáveis que compõem a função de produção das unidades geradoras. Esse acoplamento é visto em dois grupos de restrições específicos: nas restrições de limites de potências associadas as zonas operativas das unidades (5.3.49); e na restrição de reserva de energia da usina (5.3.51).

No sentido de encontrar um desacoplamento desejável, e fazendo uso dos paradigmas presentes na Relaxação Lagrangeana, o primeiro passo consiste em incluir em (5.3.33) $J(r)$ restrições artificiais referentes à duplicação da função de produção das unidades geradoras, da seguinte maneira:

$$\Theta_{AUIH}^t(\lambda d_{rt}, \lambda q_{rt}, \lambda s_{rt}) = \min_{\{z_{jkt}, q_{jrt}, Q_{rt}, s_{rt}\}} -\lambda d_{rt} \left(\sum_{j=1}^{J(r)} ph_{jrt}(q_{jrt}, Q_{rt}, s_{rt}) \right) + \lambda q_{rt} Q_{rt} + \lambda s_{rt} s_{rt}$$

(5.3.57)

$$\text{sujeito a: } pha_{jrt} = ph_{jrt}(q_{jrt}, Q_{rt}, s_{rt})$$

(5.3.48)-(5.3.51) (com r e t fixos)

A seguir, realiza-se a seguinte substituição:

$$\Theta_{CUIH}^t(\lambda d_{rt}, \lambda q_{rt}, \lambda s_{rt}) = \min_{\{z_{jkt}, q_{jrt}, Q_{rt}, s_{rt}\}} -\lambda d_{rt} \left(\sum_{j=1}^{J(r)} ph_{jrt}(q_{jrt}, Q_{rt}, s_{rt}) \right) + \lambda q_{rt} Q_{rt} + \lambda s_{rt} s_{rt}$$

(5.3.58)

$$\text{sujeito a: } pha_{jrt} = ph_{jrt}(q_{jrt}, Q_{rt}, s_{rt})$$

(5.3.59)

$$Q_{rt} = \sum_{j=1}^{J(r)} q_{jrt}$$

(5.3.60)

$$\sum_{k=1}^{\Phi_r} ph_{jkr}^{\min} z_{jkr} \leq pha_{jrt} \leq \sum_{k=1}^{\Phi_r} ph_{jkr}^{\max} z_{jkr}$$

(5.3.61)

$$\sum_{j=1}^{J(r)} \left(\sum_{k=1}^{\Phi_r} ph_{j1rt}^{\max} z_{jkr} - ph_{jrt}(q_{jrt}, Q_{rt}, s_{rt}) \right) \geq rh_{rt}$$

(5.3.62)

$$z_{jkr} \in \{0, 1\} \quad \sum_{k=1}^{\Phi_r} z_{jkr} \leq 1$$

(5.3.63)

Pode-se notar que, mesmo relaxando as restrições artificiais, o problema ainda permanecerá acoplado, no tocante as variáveis inteiras e contínuas $(q_{jrt}, Q_{rt}, s_{rt})$, por meio da restrição de reserva. A estratégia utilizada neste trabalho prevê que essa restrição seja dualizada do modo a realizar o desacoplamento.

Sendo λph_{jrt} os multiplicadores de Lagrange, irrestritos em sinal, associados às restrições artificiais (5.3.59), e λr_{rt} o multiplicador de Lagrange, maior ou igual a zero, referente a restrição de reserva (5.3.62), o problema dual associado ao subproblema (5.3.58)-(5.3.63) é construído da seguinte maneira:

$$\Theta_{AUIH}^t(\lambda d_{rt}, \lambda q_{rt}, \lambda s_{rt}, \lambda ph_{jrt}, \lambda r_{rt}) = \min_{\{z_{jkt}, q_{jrt}, Q_{rt}, s_{rt}, ph_{jrt}\}} -\lambda d_{rt} \left(\sum_{j=1}^{J(r)} ph_{jrt}(q_{jrt}, Q_{rt}, s_{rt}) \right)$$

$$+ \lambda q_{rt} Q_{rt} + \lambda s_{rt} s_{rt} + \sum_{j=1}^{J(r)} \lambda ph_{jrt} [pha_{jrt} - ph_{jrt}(q_{jrt}, Q_{rt}, s_{rt})]$$

(5.3.64)

$$+ \lambda r_{rt} \left\{ \sum_{j=1}^{J(r)} \left(ph_{jrt}(q_{jrt}, Q_{rt}, s_{rt}) - \sum_{k=1}^{\Phi_r} ph_{j1rt}^{\max} z_{jkr} \right) + rh_{rt} \right\}$$

$$\text{sujeito a: } Q_{rt} = \sum_{j=1}^{J(r)} q_{jrt}$$

(5.3.65)

$$\sum_{k=1}^{\Phi_j} pb_{jkr}^{min} z_{jkr} \leq pba_{jrt} \leq \sum_{k=1}^{\Phi_j} pb_{jkr}^{max} z_{jkr} \quad (5.3.66)$$

$$z_{jkr} \in \{0,1\} \quad \sum_{k=1}^{\Phi_j} z_{jkr} \leq 1 \quad (5.3.67)$$

Investigando o subproblema acima se pode notar que o acoplamento entre as variáveis contínuas (exceto pba_j) e as variáveis inteiras desapareceu. Como resultado tem-se dois novos conjuntos de subproblemas de características distintas.

O primeiro deles é composto por um único subproblema cuja natureza é contínua e não-linear:

$$\begin{aligned} \Theta_{AUH_{cont}}^{rt}(\lambda d_{rt}, \lambda q_{rt}, \lambda s_{rt}, \lambda pb_{jrt}, \lambda r_{rt}) = \min_{\{q_{jrt}, Q_{rt}, s_{rt}\}} & -\lambda d_{rt} \left(\sum_{j=1}^{J(r)} pb_{jrt}(q_{jrt}, Q_{rt}, s_{rt}) \right) \\ & + \lambda q_{rt} Q_{rt} + \lambda s_{rt} s_{rt} - \sum_{j=1}^{J(r)} \lambda pb_{jrt} pb_{jrt}(q_{jrt}, Q_{rt}, s_{rt}) \\ & + \lambda r_{rt} \left\{ \sum_{j=1}^{J(r)} pb_{jrt}(q_{jrt}, Q_{rt}, s_{rt}) + rh_{rt} \right\} \\ \text{sujeito a: } & Q_{rt} = \sum_{j=1}^{J(r)} q_{jrt} \end{aligned} \quad (5.3.68)$$

O segundo conjunto é composto por:

$$\begin{aligned} \Theta_{AUH_{int}}^{rt}(\lambda pb_{jrt}, \lambda r_{rt}) = \min_{\{z_{jkr}, pba_{jrt}\}} & \sum_{j=1}^{J(r)} \lambda pb_{jrt} pba_{jrt} - \lambda r_{rt} \left\{ \sum_{j=1}^{J(r)} \sum_{k=1}^{\Phi_j} pb_{jkr}^{max} z_{jkr} \right\} \\ \text{sujeito a: } & \sum_{k=1}^{\Phi_j} pb_{jkr}^{min} z_{jkr} \leq pba_{jrt} \leq \sum_{k=1}^{\Phi_j} pb_{jkr}^{max} z_{jkr} \\ & z_{jkr} \in \{0,1\} \quad \sum_{k=1}^{\Phi_j} z_{jkr} \leq 1 \end{aligned} \quad (5.3.69)$$

Como resultado da decomposição empregada, o conjunto de acima é ainda separável no que diz respeito as unidades geradoras que, por sua vez, torna atrativo a sua aplicação para casos onde existem muitas combinações entre número de unidades e zonas operativas.

Assim, (5.3.69) pode ser calculado da seguinte maneira:

$$\Theta_{AUH_{int}}^{rt}(\lambda pb_{jrt}, \lambda r_{rt}) = \sum_{j=1}^{J(r)} \Theta_{CUH_{int}}^{jrt}(\lambda pb_{jrt}, \lambda r_{rt}) \quad (5.3.70)$$

onde

$$\Theta_{CUH_{int}}^{jrt}(\lambda pb_{jrt}, \lambda r_{rt}) = \min_{\{z_{jkr}, pba_{jrt}\}} \left\{ \lambda pb_{jrt} pba_{jrt} - \lambda r_{rt} \sum_{k=1}^{\Phi_j} pb_{jkr}^{max} z_{jkr} \right\} \quad (5.3.71)$$

$$\begin{aligned} \text{sujeito a: } & \sum_{k=1}^{\Phi_j} pb_{jkrt}^{\min} z_{jkrt} \leq pb_{a_{jt}} \leq \sum_{k=1}^{\Phi_j} pb_{jkrt}^{\max} z_{jkrt} \\ & z_{jkrt} \in \{0,1\} \quad \sum_{k=1}^{\Phi_j} z_{jkrt} \leq 1 \\ & (j \text{ fixo}) \end{aligned}$$

O problema acima pode ser facilmente resolvido por meio de uma simples enumeração do total de zonas permitidas de uma unidade em particular.

Portanto, com a apresentação dessa última estratégia, referente à alocação das unidades hidrelétricas de usinas com muitas combinações, encerra-se o procedimento de decomposição do problema da programação da operação energética.

Atualizando novamente a Expressão (5.3.34), pode-se notar a seguir como é feita a avaliação da função dual segundo a decomposição apresentada neste trabalho.

$$(D_{HT}) = \max_{\{\lambda_{pt_{it}}, \lambda d_{rt}, \lambda q_{rt}, \lambda s_{rt}, \lambda ph_{jt}, \lambda r_{rt}\}} \Theta(\lambda_{pt_{it}}, \lambda d_{rt}, \lambda q_{rt}, \lambda s_{rt}, \lambda ph_{jt}, \lambda r_{rt}) \quad (5.3.72)$$

onde:

$$\begin{aligned} \Theta(\lambda_{pt_{it}}, \lambda d_{rt}, \lambda q_{rt}, \lambda s_{rt}, \lambda ph_{jt}, \lambda r_{rt}) &= \sum_{i=1}^I \Theta_{AUI}^i(\lambda_{pt_{it}}) + \sum_{t=1}^T \Theta_D^t(\lambda_{pt_{it}}, \lambda d_{rt}) \\ &+ \Theta_{SH}(\lambda q_{rt}, \lambda s_{rt}) + \sum_{t=1}^T \sum_{r=1}^{R(\Gamma)} \Theta_{AUH}^{rt}(\lambda d_{rt}, \lambda q_{rt}, \lambda s_{rt}) \\ &+ \sum_{t=1}^T \sum_{r=1}^{R(\Xi)} \left(\Theta_{AUH_{\text{out}}}^{rt}(\lambda d_{rt}, \lambda q_{rt}, \lambda s_{rt}, \lambda ph_{jt}, \lambda r_{rt}) + \sum_{j=1}^{J(r)} \Theta_{AUH_{\text{in}}}^{jt}(\lambda ph_{jt}, \lambda r_{rt}) \right) \end{aligned} \quad (5.3.73)$$

Acima $R(\Gamma)$ e $R(\Xi)$, representam o conjunto que contém os índices dos reservatórios que serão resolvidos de acordo com (5.3.56) e (5.3.68)-(5.3.71), respectivamente.

A Figura 5.3.1 ilustra, de forma esquemática, o processo de decomposição do problema da programação da operação energética.

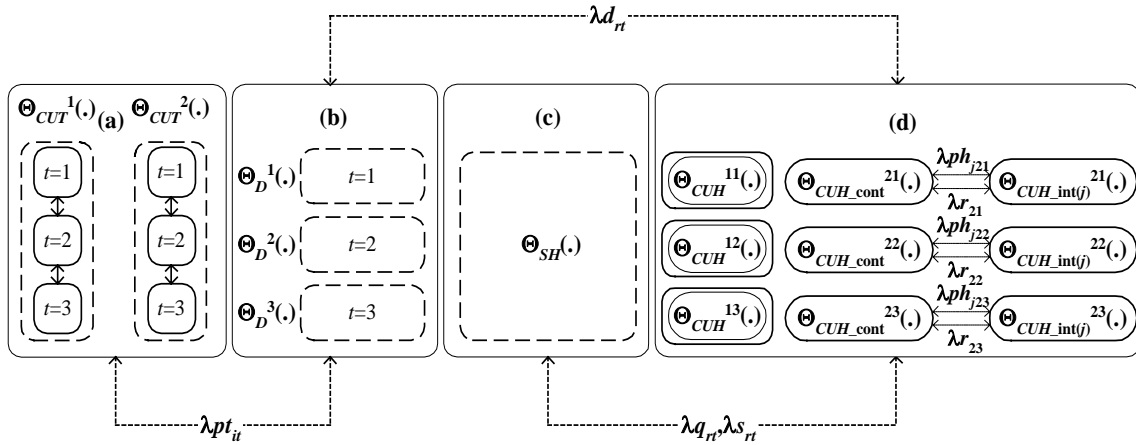


Figura 5.3.1 – Decomposição utilizada no processo de solução do problema da programação da operação energética. De forma ilustrativa, a figura refere-se a um sistema fictício que possui um total de duas unidades termelétricas e duas usinas hidrelétricas. A decomposição leva em conta um horizonte de programação igual a três estágios de tempo. Em (a) está representado o subproblema de alocação de unidades termelétricas. Esse subproblema é desacoplado em relação as unidades geradoras desta natureza. O acoplamento existente neste caso se deve as restrições de *minimum uptime and downtime*, bem como, quando presentes, as restrições de rampa. O subproblema de atendimento a demanda está representado em (b). Pode-se notar que esse subproblema é desacoplado no tempo, sendo que o acoplamento existente dá-se em um único estágio devido a restrição de atendimento a demanda. Por sua vez, (c) representa o subproblema hidráulico onde o objetivo principal consiste em respeitar as restrições da conservação da água nos dois reservatórios simultaneamente ao longo dos três estágios e, adicionalmente, levar em conta o efeito do valor futuro da água armazenada nos mesmos. Outras restrições também estão presentes nesse subproblema, o qual é acoplado no tempo e no espaço, tais como limites de volumes, vazões defluente, entre outras. O último subproblema, referente à alocação das unidades hidrelétricas, é ilustrado em (d). Conforme pode ser visto, esse subproblema é desacoplado tanto no tempo quanto no espaço. No exemplo, uma usina hidrelétrica tem sua alocação realizada por meio da enumeração exaustiva. Já a outra usina faz uso de nova decomposição para tratar com o elevado número de combinações presentes na mesma. Por fim, na figura acima também é possível identificar como fica a comunicação entre os subproblemas via os multiplicadores de Lagrange.

Por fim, falta detalhar a expressão do vetor de subgradientes associado com a decomposição apresentada. De acordo com o capítulo anterior, uma característica comum presente em métodos de otimização não-diferenciável é a utilização, além do valor da função dual, de um único vetor de subgradientes na maximização da função dual. Esse vetor, o qual é obtido diretamente do processo de avaliação de (6.7.73), tem sua expressão dada por:

$$\text{sg}^{(iter)} = \begin{bmatrix} \text{pta}_t^{(iter)} - \text{pt}_t^{(iter)} \\ GH_t^{(iter)} - \sum_{j=1}^{J(r)} ph_{jrt}(q_{jrt}^{(iter)}, Q_{rt}^{(iter)}, s_{rt}^{(iter)}) \\ Q_{rt}^{(iter)} - Qa_{rt}^{(iter)} \\ sa_{rt}^{(iter)} - sa_{rt}^{(iter)} \\ pha_{jrt}^{(iter)} - ph_{jrt}(q_{jrt}^{(iter)}, Q_{rt}^{(iter)}, s_{rt}^{(iter)}) \\ \sum_{j=1}^{J(r)} \left(ph_{jrt}(q_{jrt}^{(iter)}, Q_{rt}^{(iter)}, s_{rt}^{(iter)}) - \sum_{k=1}^{\Phi_j} ph_{j1rt}^{m\acute{a}x} z_{jkrt}^{(iter)} \right) + rh_{rt} \end{bmatrix} \quad (5.3.74)$$

5.4 Subproblemas Primais

Um dos requisitos mais importantes para o sucesso da aplicação da Relaxação Lagrangeana é que os subproblemas primais (também conhecidos como locais) associados sejam resolvidos eficientemente. Nesse sentido, o processo de solução desses subproblemas é discutido adiante, cuja atenção maior é dada, por razões evidentes, aos subproblemas de alocação de unidades geradoras termelétricas e hidrelétricas.

5.4.1 Subproblema de Alocação de Unidades Termelétricas

Conforme mostrado anteriormente, o subproblema de alocação de unidades termelétricas resultante do esquema de decomposição utilizado pela Relaxação Lagrangeana é dado por:

$$\Theta_{AUI}(\lambda p t_{it}) = \min_{\{u_{it}, p t_{it}\}} \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^I [C_{it}(p t_{it}) + s t_{it}(x_{i,t-1}) u_{i,t}(1 - u_{i,t-1}) - \lambda p t_{it} p t_{it}] \quad (5.4.1.1)$$

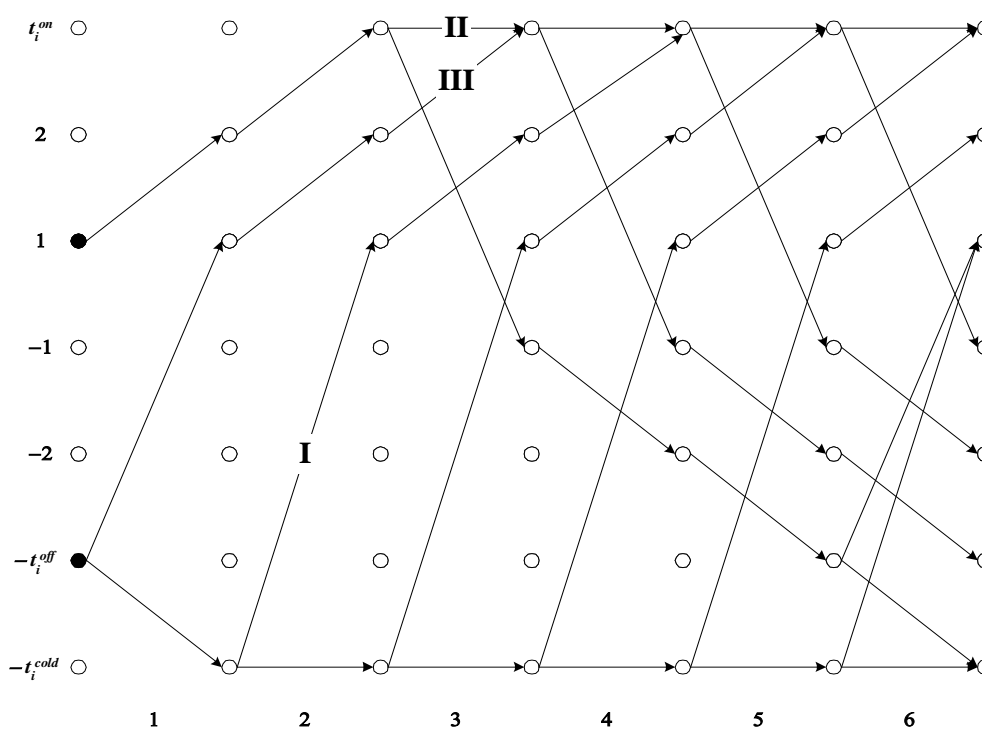
sujeito a: (5.3.6)-(5.3.11)

Esse problema pode ser decomposto em I subproblemas, cada um referente a i -ésima unidade termelétrica em particular:

$$\Theta_{CUI}^i(\lambda p t_{it}) = \min_{\{u_{it}, p t_{it}\}} \sum_{t=1}^T C_{it}(p t_{it}) + s t_{it}(x_{i,t-1}) u_{i,t}(1 - u_{i,t-1}) - \lambda p t_{it} p t_{it} \quad (5.4.1.2)$$

sujeito a: (5.3.6)-(5.3.11) (i fixo)

A estrutura do problema acima é bastante adequada ao uso de um algoritmo baseado nas técnicas de Programação Dinâmica. Para ver como isso é possível, considere um caso onde as restrições de rampa estão ausentes em uma determinada unidade geradora, cujo grafo associado à aplicação da Programação Dinâmica é apresentado na Figura 5.4.1.1, mostrada a seguir.



$$I \mapsto \underset{\{pt_{i2}\}}{\text{Min}} f_{i2} = C_{i2}(pt_{i2}) - \lambda_{s2}pt_{i2} + st_{i2}(-t_i^{\text{off}})$$

$$s.a: pt_i^{\text{min}} \leq pt_{i2} \leq pt_i^{\text{máx}}$$

$$pt_i^{\text{máx}} - pt_{i2} \geq rt_{i2}$$

$$II = III \mapsto \underset{\{pt_{i3}\}}{\text{Min}} f_{i3} = C_{i3}(pt_{i3}) - \lambda_{s3}pt_{i3}$$

$$s.a: pt_i^{\text{min}} \leq pt_{i3} \leq pt_i^{\text{máx}}$$

$$pt_i^{\text{máx}} - pt_{i3} \geq rt_{i3}$$

Figura 5.4.1.1 – Grafo Associado ao Subproblema Relacionado à i -ésima Unidade Termelétrica.

Na figura acima, os vértices do grafo representam possíveis estados da unidade e as setas ilustram as possíveis transições entre os estágios. O estado é definido por dois componentes, isto é, um componente indicando se a unidade está ligada ou desligada, e outro componente indicando o número de estágios sobre os quais a unidade encontra-se em uma específica condição operativa.

Os tempos relacionados com as restrições de *minimum uptime and downtime* da unidade geradora são iguais a três estágios. O tempo de partida fria, necessário para computar os custos de partida da unidade, t_i^{cold} , é de quatro estágios. Na figura são ilustradas ainda dois possíveis estados da unidade no estágio $t=0$.

Todos os custos associados a um estado em que a unidade encontra-se desligada são nulos. No tocante aos estados em que a unidade está operando, os custos em um determinado estágio são calculados de acordo com I, se a unidade for ligada no respectivo estágio ou, conforme II ou III, se a unidade estiver em operação no estágio anterior.

Baseado no grafo apresentado pela figura, a alocação ótima da unidade i pode ser obtida determinando-se a trajetória de mínimo custo entre os estágios inicial e final, utilizando, por exemplo, as técnicas de Programação Dinâmica.

Por sua vez, quando as restrições de rampa estão presentes no subproblema termelétrico, algumas modificações se fazem necessárias no tocante a estratégia de solução adotada. Isso porque, caso utilize-se um algoritmo de programação dinâmica para resolver o subproblema, faz-se necessário expandir o espaço de estados a fim de incluir a discretização¹⁷ do nível de geração da unidade [93]. Neste caso, o tamanho do subproblema pode aumentar dramaticamente caso seja necessário resolver o mesmo com elevada precisão ou quando restrições associadas com a rampa da partida e desligada das unidades estão presentes.

Embora não pareça ser atrativa em uma análise inicial, dependendo da natureza das características das unidades geradoras a discretização pode ser vista como uma alternativa de bom desempenho prático [126].

Todavia, dado que a expansão do espaço de estados causa um incremento de mesma ordem no tempo total de solução, esta alternativa é de difícil implementação para alguns sistemas. Para sobrepujar a discretização várias alternativas podem ser encontradas. Aqui, será utilizado o procedimento apresentado em [90], cuja principal característica consiste em relaxar cada restrição de rampa presente no subproblema termelétrico.

Sendo ξ_{it} e ζ_{it} os correspondentes multiplicadores de Lagrange associados às restrições (5.3.7), os subproblemas, representados por (5.4.1.2), são rescritos por:

$$\begin{aligned} \theta_{AUII}^i(\lambda p_{it}, \xi_{it}, \zeta_{it}) = \min_{\{u_{it}, p_{it}\}} \sum_{t=1}^T [C_{it}(p_{it}) - \lambda p_{it} p_{it} + st_{it}(x_{it}) u_{it} (1 - u_{i,t-1}) \\ + \xi_{it}(p_{it} - p_{i,t-1} - \Delta_i(u_{i,t-1}, x_{it})) + \zeta_{it}(p_{i,t-1} - p_{it} + \delta_i(u_{i,t-1}, x_{it}))] \end{aligned} \quad (5.4.1.3)$$

$$\text{sujeito a: } (5.3.6), (5.3.8)-(5.3.11)$$

¹⁷ A discretização é necessária uma vez que a potência de saída da unidade em um estágio diferente daqueles analisados pela Programação Dinâmica é desconhecida.

Novamente, cada subproblema acima pode ser resolvido utilizando a Programação Dinâmica. O grafo associado com as transições de estados envolvidas no subproblema i é mostrado na Figura 5.4.1.2.

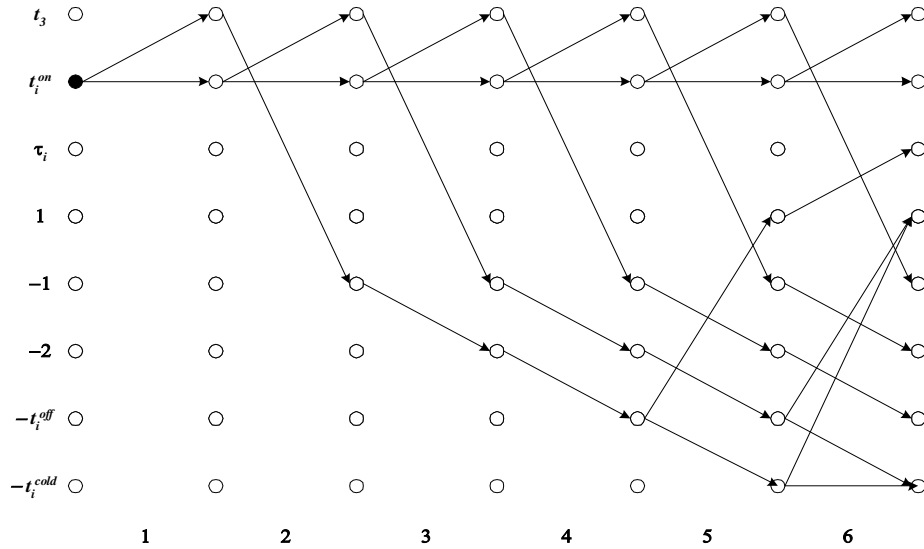


Figura 5.4.1.2 – Diagrama de Transição de Estados – Presença de Restrições de Rampa.

Deve-se notar nessa figura que, além dos estados envolvidos entre a partida fria, $-t_i^{cold}$, e os tempos relacionados com as restrições de *minimum uptime*, t_i^{on} , e *downtime*, $-t_i^{off}$, são necessários estados extras para acomodar as restrições relacionadas com a rampa de desligamento da unidade, representado na figura por t_3 ($v_i = t_3 - t_i^{on}$). No exemplo ilustrado na figura, os tempos envolvidos com a rampa na partida, τ_i e com a rampa durante o processo de desligamento da unidade, v_{i1} são considerados iguais a dois estágios e um estágio de tempo, respectivamente.

Para um estágio com a unidade em operação, isto é $u_{it} = 1$, a variável contínua pt_{it} , e o conseqüente custo ótimo do estado, pode ser determinada pela solução do seguinte problema de otimização unidimensional:

$$\begin{aligned} \min_{\{pt_{it}\}} & C_{it}(pt_{it}) - (\lambda pt_{it} - \xi_{it} + \xi_{i,t+1} + \zeta_{it} - \zeta_{i,t+1}) pt_{it} + st(x_{it}) u_{it} (1 - u_{i,t-1}) \\ \text{sujeito a:} & \quad pt_{it}^{min} \leq pt_{it} \leq pt_{it}^{max} \\ & \quad pt_{it}^{max} - pt_{it} \geq rt_{it} \end{aligned} \tag{5.4.1.4}$$

Dependendo do valor da rampa em condição operativa nominal, Δ_{it} , pode ser necessário mudar os valores de pt_{it}^{min} e pt_{it}^{max} para que a viabilidade do problema seja mantida ao longo do processo iterativo.

5.4.2 Subproblema de Alocação de Unidades Hidrelétricas

De acordo com a seção anterior, o subproblema de alocação de unidades hidrelétricas é resolvido segundo as características particulares de uma usina em particular. Quando o número de combinações a serem investigadas não for muito elevado, então a estratégia adotada é a enumeração exaustiva. Por sua vez, em casos onde o número de unidades e/ou faixas operativas é elevado (caso menos comum), onde o total de estados a serem enumerados torna-se proibitivo, então a solução é obtida por meio da dualização-decomposição de algumas restrições artificiais, bem como da relaxação da restrição de reserva.

Conforme visto anteriormente, o subproblema a ser resolvido, para cada usina e cada estágio de tempo da programação, é dado por:

$$\begin{aligned}
 \Theta_{AUH}^t(\lambda d_{rt}, \lambda q_{rt}, \lambda s_{rt}) = & \min_{\{z_{jkr}, q_{jrt}, Q_{rt}, s_{rt}\}} -\lambda d_{rt} \left(\sum_{j=1}^{J(r)} pb_{jrt}(q_{jrt}, Q_{rt}, s_{rt}) \right) + \lambda q_{rt} Q_{rt} + \lambda s_{rt} s_{rt} \\
 \text{sujeito a: } & Q_{rt} = \sum_{j=1}^{J(r)} q_{jrt} \\
 & \sum_{k=1}^{\Phi_{jr}} pb_{jkr}^{\min} z_{jkr} \leq pb_{jrt}(q_{jrt}, Q_{rt}, s_{rt}) \leq \sum_{k=1}^{\Phi_{jr}} pb_{jkr}^{\max} z_{jkr} \\
 & \sum_{j=1}^{J(r)} \left(\sum_{k=1}^{\Phi_{jr}} pb_{jkr}^{\max} z_{jkr} - pb_{jrt}(q_{jrt}, Q_{rt}, s_{rt}) \right) \geq rh_{rt} \\
 & z_{jkr} \in \{0, 1\} \qquad \sum_{k=1}^{\Phi_{jr}} z_{jkr} \leq 1
 \end{aligned} \tag{5.4.2.1}$$

No caso da enumeração exaustiva, se a usina apresentar nc combinações diferentes (viáveis) então, devem ser resolvidos nc problemas contínuos. A estrutura desses problemas é dada por:

$$\begin{aligned}
 \min_{\{q_{jrt}, Q_{rt}, s_{rt}\}} f_{aub}^{rt} = & -\lambda d_{rt} \left(\sum_{j=1}^{ng} pb_{jrt}(q_{jrt}, Q_{rt}, s_{rt}) \right) + \lambda q_{rt} Q_{rt} + \lambda s_{rt} s_{rt} \\
 \text{sujeito a: } & Q_{rt} = \sum_{j=1}^{J(r)} q_{jrt} \\
 & pb_{jkr}^{\min} \leq pb_{jrt}(q_{jrt}, Q_{rt}, s_{rt}) \leq pb_{jkr}^{\max} \\
 & \sum_{j=1}^{ng} (pb_{jkr}^{\max} - pb_{jrt}(q_{jrt}, Q_{rt}, s_{rt})) \geq rh_{rt}
 \end{aligned} \tag{5.4.2.2}$$

onde ng é o número de unidades que pertencem ao conjunto combinações viáveis. A viabilidade referida diz respeito a restrição de reserva. No presente trabalho, o número mí-

nimo de unidades a ser investigado é função do valor da reserva na usina. Por sua vez, o número máximo depende do número de unidades disponíveis à operação em uma dada usina.

De acordo com (5.4.2.2) pode-se notar que o problema contínuo possui $ng+2$ variáveis e $2 \times ng+2$ restrições. As variáveis são as vazões turbinadas em cada unidade geradora, q_{jrt} , a vazão turbinada total na usina, Q_{rt} e, quando existir, a vazão vertida na usina s_{rt} .

Deste modo, o esforço computacional será uma função crescente do número de unidades geradoras presentes em uma dada usina. Cada subproblema representado por (5.4.2.2) será resolvido neste trabalho por meio do algoritmo de Programação Quadrática Sequencial apresentado no capítulo anterior. Mais detalhes sobre a implementação desse algoritmo para o subproblema em referência são apresentados no próximo capítulo.

Na impossibilidade da enumeração exaustiva, a alternativa é o uso de uma nova decomposição. A tarefa então passa a ser dupla: resolver um subproblema com características contínuas e, adicionalmente, uma série de subproblemas de natureza inteira-mista linear para cada unidade em particular.

O subproblema contínuo, resultante desta alternativa, é dado por:

$$\min_{\{q_{jrt}, Q_{rt}, s_{rt}\}} f_{aub_cont}^{rt} = \left(\sum_{j=1}^{J(r)} (-\lambda d_{rt} + \lambda r_{rt} - \lambda \phi b_{jrt}) p b_{jrt}(q_{jrt}, Q_{rt}, s_{rt}) \right) + \lambda q_{rt} Q_{rt} + \lambda s_{rt} s_{rt} \quad (5.4.2.3)$$

sujeito a: $Q_{rt} = \sum_{j=1}^{J(r)} q_{jrt}$

O número de variáveis neste subproblema é sempre¹⁸ igual $J(r)+2$ e tem-se apenas uma restrição de igualdade.

Os subproblemas de natureza inteira-mista são dados por:

$$\Theta_{AUH_{int}}^{rt}(\lambda \phi b_{jrt}, \lambda r_{rt}) = \sum_{j=1}^{J(r)} \Theta_{AUH_{int}}^{jrt}(\lambda \phi b_{jrt}, \lambda r_{rt}) \quad (5.4.2.4)$$

onde

$$\Theta_{AUH_{int}}^{jrt}(\lambda \phi b_{jrt}, \lambda r_{rt}) = \min_{\{z_{jkrt}, p b_{jrt}\}} \left\{ \lambda \phi b_{jrt} p b a_{jrt} - \lambda r_{rt} \sum_{k=1}^{\Phi_j} p b_{j1rt}^{máx} z_{jkrt} \right\} \quad (5.4.2.5)$$

sujeito a: $\sum_{k=1}^{\Phi_j} p b_{jkrt}^{mín} z_{jkrt} \leq p b a_{jrt} \leq \sum_{k=1}^{\Phi_j} p b_{jkrt}^{máx} z_{jkrt}$

¹⁸ Ou $J(r)+1$ se o vertimento não influenciar na potência de saída das unidades.

$$z_{jkrt} \in \{0, 1\} \quad \sum_{k=1}^{\Phi_{jr}} z_{jkrt} \leq 1$$

(j fixo)

Cada subproblema (5.4.2.5) é resolvido enumerando-se o total de faixas permitidas de cada unidade geradora isoladamente. Isso resulta na solução de Φ_{jr} problemas de programação linear, para cada unidade:

$$\Theta_{AUFH_{in}}^{jt}(\lambda ph_{jrt}, \lambda r_{rt}) = \min_{\{ph_{jrt}\}} \{ \lambda ph_{jrt} ph_{jrt} - \lambda r_{rt} ph_{jrt}^{máx} \}$$

$$\text{sujeito a: } ph_{jrt}^{mín} \leq ph_{jrt} \leq ph_{jrt}^{máx} \quad (j \text{ fixo}) \quad (5.4.2.6)$$

os quais, por sua vez, detêm solução analítica:

$$\Theta_{AUFH_{in}}^{jt}(\lambda ph_{jrt}, \lambda r_{rt}) = \begin{cases} \lambda ph_{jrt} ph_{jrt}^{mín} - \lambda r_{rt} ph_{jrt}^{máx} & \lambda ph_{jrt} \geq 0 \\ \lambda ph_{jrt} ph_{jrt}^{máx} - \lambda r_{rt} ph_{jrt}^{máx} & \lambda ph_{jrt} \leq 0 \end{cases} \quad (5.4.2.7)$$

Finalmente a solução ótima de (5.4.2.5) é dada por:

$$\min[\Theta_{AUFH_{in}}^{jt}(\lambda ph_{jrt}, \lambda r_{rt}), 0] \quad (5.4.2.8)$$

5.5 Conclusões

Neste capítulo foi apresentada uma estratégia de solução do problema da programação da operação energética, a qual tem como base a metodologia da Relaxação Lagrangeana. Conforme visto, o problema primal original foi decomposto em uma cadeia de subproblemas que são mais fáceis de serem resolvidos quando comparados com o problema original.

O primeiro subproblema, resultante da decomposição, refere-se a alocação de unidades geradoras termelétricas, o qual tem recebido grande atenção de vários trabalhos na literatura, tanto por sua importância teórica, quanto pela relevância prática. Deste modo, um dos objetivos da decomposição empregada neste trabalho consistia em manter a estrutura do subproblema termelétrico semelhantes aquelas comumente encontradas, de modo que técnicas amplamente aceitas possam ser empregadas na solução neste subproblema.

O segundo subproblema tem a tarefa de, ofertados preços da potência de saída das unidades termelétricas e usinas hidrelétricas, atender a demanda da melhor forma possível, de modo que as restrições do sistema de transmissão não sejam violadas. Embora a representação da rede não seja objeto de estudo deste trabalho, a partir de uma simples análise na

decomposição proposta, pode-se perceber que é possível modelar o sistema de transmissão de forma mais detalhada do que o ilustrado aqui. Para tanto, paga-se o preço de ter subproblemas lineares (ou não-lineares, de acordo com a modelagem da rede) com um número maior de variáveis e restrições e, conseqüentemente, maior esforço computacional.

O terceiro subproblema tem como tarefa principal de definir o uso da água do sistema. Ele estabelece, por meio dos multiplicadores, o total de água que cada reservatório pode “disponibilizar” às respectivas unidades fazerem uso na geração, levando-se em conta a sua posição na cascata, tempo de viagem da água, restrições de limites volumes, vertimentos e defluência obrigatória, entre outras, e ainda o valor futuro da água armazenada. Embora este subproblema seja acoplado temporalmente e espacialmente, o mesmo é de natureza linear e possui uma estrutura especial que pode ser explorada, caso necessário.

O último subproblema, que na verdade, assim como os dois primeiros casos, é uma coleção de subproblemas, tem por objetivo determinar o número ótimo de unidades (e as respectivas zonas operativas) de geração hidrelétrica para cada usina e estágio de tempo do problema. Preços relativos à água e a potência de saída na usina são usados para realizar essa alocação que considera restrições importantes (e difíceis de serem manuseadas quando se consideram diversas usinas simultaneamente) tais como a conservação da água nos condutos, limites de potência das zonas permitidas nas unidades e a restrição de reserva de energia. Duas estratégias são usadas para resolver esse subproblema: a enumeração exaustiva e a duplicação-dualização de algumas restrições. Essas estratégias são necessárias devido ao tamanho do espaço de estados que pode resultar nas mais diversificadas usinas hidrelétricas. A relação entre tamanho do espaço de estados e a estratégia é abordada junto com os resultados computacionais, os quais serão apresentados no capítulo de resultados.



CAPÍTULO

6

*Tópicos Especiais em
Programação
Matemática*

6.1 Introdução

O PROBLEMA da programação da operação energética, conforme descrito matematicamente no Capítulo 4, é de natureza não-linear, inteira-mista e de grande porte. Desde que o problema detém variáveis de decisão binárias e uma série de restrições não-triviais, não é possível esperar que exista um método que seja eficiente o bastante para encontrar uma solução global (ótima) do problema. Portanto, o que se procura aqui é oferecer uma solução aproximada, e de boa qualidade (sub-ótima), por meio da técnica da Relaxação Lagrangeana, a qual faz uso de conceitos de dualidade, técnicas de otimização não-diferenciável e diferenciável, adaptadas a estrutura do problema em estudo.

A seguir é dedicado espaço para dois tópicos ligados à programação matemática os quais neste trabalho são empregados no contexto da Relaxação Lagrangeana: a otimização não-diferenciável (empregados na maximização do problema dual) e o procedimento de solução de problemas de programação não-linear (encontrados nos subproblemas de alocação de unidades geradoras hidrelétricas, conforme mostrado no capítulo anterior).

6.2 Otimização Não-Diferenciável.

Conforme visto no Capítulo 5, é de suma importância o conhecimento das propriedades de diferenciabilidade da função dual para que sejam utilizadas técnicas eficientes na sua maximização. Esta seção trata do caso onde a função dual, $\theta(\lambda)$, não possui derivadas em todo seu domínio. A não-diferenciabilidade de $\theta(\lambda)$ está presente, por exemplo, em problemas onde existe a presença de variáveis inteiras, pois, para um determinado valor de λ a função lagrangeana apresenta múltiplos minimizadores primais, podendo acontecer inclusive no próprio ponto ótimo de $\theta(\lambda)$. Portanto, a não-diferenciabilidade tende a aparecer nos pontos mais interessantes da função dual e os métodos de solução não podem ignorar essa característica que, de acordo com o mostrado no capítulo anterior, está presente de forma acentuada no problema da programação da operação energética.

Antes de estabelecer um padrão de algoritmo, usualmente utilizado em problemas de natureza não-diferenciável, é importante caracterizar uma importante propriedade da função dual que é a existência de um conceito genérico de gradiente para essa função, denominado de subgradiente, $sg(x(\lambda_0))$. A definição deste conceito é vista na Expressão (6.2.1), mostrada a abaixo.

$$q(\lambda) \leq q(\lambda_0) + (\lambda - \lambda_0)' sg(x(\lambda_0)) \quad \forall \lambda \in \mathfrak{R}^p \quad (6.2.1)$$

O que é importante notar acima é que o cálculo de um vetor subgradiente é obtido sem esforço algum. Isso porque no processo de avaliação de $\theta(\lambda)$ o vetor de variáveis primais, x , é calculado de antemão e, portanto, $sg(x(\lambda_0))$ está disponível em λ_0 . Os métodos, brevemente descritos aqui, resolvem o problema dual por meio da avaliação da função $\theta(\lambda)$ e do cálculo de um vetor subgradiente, calculados para uma seqüência de variáveis duais, λ . Deve-se notar por (6.2.1) que, em um determinado λ_0 , pode existir um intervalo onde estão associados diversos valores de vetores subgradientes. Todavia, não é preciso computar esse conjun-

to inteiro, denominado de subdiferencial, $\partial\theta(\lambda)$, embora o mesmo possua características que revelam a natureza diferenciável da função dual em um ponto. Se $\partial\theta(\lambda)$ for composto de apenas um elemento, isto é, um único subgradiente, então a função lagrangeana associada possui um único mínimo primal, em um dado λ , e então, o subgradiente é igual ao valor do gradiente. Neste caso a função dual possui derivadas idênticas à direita e à esquerda de λ , isto é, torna-se diferenciável em λ .

Por fim, o padrão de algoritmo que se deseja é aquele utilizado pelos métodos de subida. Neste caso, procura-se definir, de forma iterativa, uma seqüência em λ , tal que $\theta(\lambda^{iter+1}) \geq \theta(\lambda^{iter})$ que assegura, portanto, a convergência para um ponto de máximo de $\theta(\lambda)$. A seguir, apresentam-se resumidamente os métodos mais conhecidos e que dizem respeito a esse padrão de algoritmo.

6.2.1 Método do Subgradiente

O método do subgradiente gera uma seqüência de pontos duais viáveis de acordo com a seguinte expressão:

$$\lambda^{iter+1} = \lambda^{iter} + t^{iter} \frac{sg^{iter}}{\|sg^{iter}\|} \quad (6.2.1.1)$$

onde t^{iter} é um tamanho de passo positivo.

Um aspecto importante relacionado com a expressão anterior é que devido a não-diferenciabilidade da função dual, a iteração $iter+1$ pode não melhorar o valor dessa função para todos os tamanhos de passo, isto é, para algum $iter$ pode haver $\theta(\lambda^{iter+1}) < \theta(\lambda^{iter})$, para qualquer $t^{iter} > 0$. Essa característica faz com que o método possa não convergir. Porém, uma escolha especial do passo permite recuperar convergência [95], embora não se tenha a propriedade $\theta(\lambda^{iter+1}) > \theta(\lambda^{iter})$ para qualquer valor de $iter$.

Ainda assim, a escolha do tamanho de passo t^{iter} é sempre um assunto delicado pois o mesmo pode provocar *zig-zags* e, como conseqüência, tornando o processo de convergência demasiadamente lento. Outro problema associado com o método do subgradiente refere-se à inexistência de um critério de parada para esse algoritmo, utilizando-se em geral um limite no número máximo de iterações. Portanto, as características de convergência desse método não são sólidas, e também compreendidas de forma insatisfatória. Claramente, existem problemas onde o método do subgradiente trabalha de forma ineficiente; basta imaginar um problema

onde a matriz hessiana é mal-condicionada, na qual o método torna-se uma variação do método do gradiente usado em otimização diferenciável.

Deste modo, para sobrepujar as características negativas apresentadas, no tocante ao desempenho do método do subgradiente, foram desenvolvidos métodos que fazem uso de informações calculadas durante o processo iterativo para construir iterativamente uma aproximação para o problema dual. Esses métodos são brevemente discutidos nas duas próximas seções.

6.2.2 Método dos Planos Cortantes

Por meio das informações obtidas durante o processo iterativo, isto é, o cálculo da função dual e de um respectivo subgradiente, pode-se construir, além de gerar uma seqüência de λ^{iter} , um modelo da função dual que seja fácil de realizar sua minimização. Essa é a idéia base da classe de métodos denominada de planos cortantes [96,97], onde as seguintes informações são usadas na construção do modelo de $\theta(\lambda)$:

$$\theta^{iter} \equiv \theta(\lambda^{iter}) \quad sg^{iter} \in \partial\theta(\lambda^{iter}) \quad iter = 1, \dots, iter^{max} \quad (6.2.2.1)$$

A partir do conjunto de informações acima, pode-se então definir um modelo côncavo e linear por partes da função dual:

$$\theta^{iter}(\lambda) = \min_{iter=1, \dots, iter^{max}} \{ \theta^{iter} + (\lambda - \lambda^{iter})^t sg^{iter} \} \quad (6.2.2.2)$$

De acordo com o problema acima, o método define, a cada iteração, um novo valor de λ^{iter} por meio da solução de um problema de programação linear, que vis maximizar $\theta^{iter}(\lambda)$. O procedimento de parada deste algoritmo é definido, tipicamente, com base em limites construídos a partir do modelo (6.2.2.2) e da avaliação da função dual em λ^{iter} . Comparativamente ao método do subgradiente, o algoritmo de planos cortantes apresenta a vantagem de fornecer esse teste de parada. Entretanto, cada novo ponto dual é obtido resolvendo-se um problema de programação linear.

Embora mais robusto que o método do subgradiente, a técnica de planos cortantes sofre de instabilidades na convergência quando se está perto do valor máximo da função dual, devido a presença de oscilações causadas pelas diferenças entre os modelos em análise. Além disso, para garantir convergência, deve-se conservar todos os elementos contidos em

(6.2.2.2) que, por sua vez, garante esforço computacional crescente, dado que o tamanho do problema de programação linear aumenta com o número de iterações.

A próxima seção apresenta uma metodologia que visa estabilizar as oscilações presentes no método dos planos cortantes, corrigindo inclusive a propriedade negativa relacionada com o tamanho crescente do problema linear que deve ser resolvido.

6.2.4 Método de Feixes

Conforme visto, os métodos do subgradiente e de planos cortantes não asseguram uma subida efetiva, isto é, ao se calcular um novo valor de λ em uma dada iteração, não é garantido que o valor da função dual nesse ponto seja menor que o valor da função encontrado até então. Deste modo, tais métodos são caracterizados como instáveis.

Por sua vez, uma classe de algoritmos denominada de Métodos de Feixes [98-103], conseguem gerar uma seqüência em λ de modo a garantir uma efetiva subida em relação ao ponto ótimo da função dual. Existem diversas variantes desse método (penalidade, região de confiança, entre outros) [98-102], as quais estão relacionadas com o processo de estabilização da convergência, inexistente nos métodos descritos anteriormente.

Fazendo uso da variante que usa o conceito de penalidade [103], basicamente, a idéia alicerce do método de feixes consiste em introduzir um termo quadrático nos problemas de programação linear usados para calcular um novo λ , penalizando os desvios em torno de λ , da seguinte maneira:

$$\lambda^{iter+1} = \arg \max_{\lambda} \left\{ \theta^{iter}(\lambda) - \frac{1}{2} \mu^{iter} \|\lambda - \lambda^{iter}\|^2 \right\} \quad (6.2.3.1)$$

onde μ^{iter} é um escalar positivo, o qual serve para medir até onde se pode procurar um novo λ^{iter+1} a partir de λ^{iter} . O objetivo é que, durante as iterações iniciais passos grandes possam ser aceitos (μ^{iter} pequeno), enquanto que, perto da solução ótima, passos grandes, os quais só provocam oscilações, sejam evitados (μ^{iter} grande). Por ser superior aos anteriores, o método de feixes será utilizado para a otimização da função dual do problema da programação da operação energética, que será apresentada no capítulo seguinte.

6.3 Programação Quadrática Seqüencial

Esta seção é dedicada a metodologia que será utilizada na solução de grande parte dos subproblemas primais referentes a decomposição do problema da programação da operação energética, realizada por meio da Relaxação Lagrangeana. Conforme será visto, durante o processo de solução desses subproblemas é necessário resolver uma seqüência de Problemas de Programação Não-Linear (PNL). Deste modo, com o objetivo de garantir que esses problemas sejam resolvidos de forma eficiente, esse trabalho fará uso de um algoritmo de Programação Quadrática Seqüencial (PQS) [94,104-108], o qual será objeto de descrição a partir de agora.

Assim como acontece com o Método de Newton, quando aplicado a problemas de otimização irrestrita ou restrita, a PQS é concebida mais como uma metodologia do que um algoritmo propriamente dito. Em um algoritmo típico de PQS, a idéia base consiste em linearizar as condições de otimalidade de modo que sejam alcançadas boas propriedades de convergência local, obtidas por meio da transformação do PNL original em uma seqüência de problemas de Programação Quadrática (PQ). Essa aproximação é eficiente devido ao fato de que problemas de PQ são mais fáceis de serem resolvidos e detêm (boas) propriedades teóricas bastante solidificadas.

Todavia, a idéia básica acima não é suficiente para especificar um algoritmo prático de PQS. Para tanto, deve ficar claro como resolver as condições linearizadas (cálculo da direção de busca), como tratar a possibilidade da primeira iteração estar afastada de uma solução ótima (globalização do algoritmo) e ainda, como o algoritmo pode ser usado sem o cálculo de derivadas de segunda ordem (necessárias na concepção do PQ). Portanto, é fácil de perceber que existem várias maneiras de realizar cada uma dessas condições, de modo que algoritmos de naturezas distintas podem ser construídos.

O restante deste capítulo ilustra uma das possibilidades citadas, a qual será utilizada no esquema de solução do presente trabalho. Na próxima seção, é mostrado como a direção de busca pode ser obtida por meio da solução de um problema de PQ. Depois, é abordado o conceito de função de mérito, uma vez que se deseja garantir que o algoritmo seja "globalmente" convergente, isto é, encontre alguma solução independentemente do ponto inicial.

Por fim, é mostrada a forma de sobrepujar o cálculo das derivadas de segunda ordem, juntamente com o escopo básico do algoritmo a ser usado no trabalho.

Porém, antes de tratar da construção do algoritmo especificamente, é necessário fazer algumas considerações sobre as características problema a ser resolvido pela PQS, bem como estabelecer um novo conjunto de notações básicas. Nesse sentido, o PNL de interesse a ser solucionado é:

$$\begin{aligned}
 & \underset{x}{\text{minimize}} && f(x) \\
 & \text{s.a:} && c_i(x) \leq 0 \\
 & && c_e(x) = 0 \\
 & && x \in \Omega
 \end{aligned} \tag{6.3.1}$$

onde $f: \Omega \rightarrow \mathfrak{R}$, $c_e: \Omega \rightarrow \mathfrak{R}^{m_e}$ e $c_i: \Omega \rightarrow \mathfrak{R}^{m_i}$. Ω é um conjunto aberto definido no \mathfrak{R}^n . m_e e m_i são inteiros não-negativos que representam o número de restrições de igualdade e desigualdade, respectivamente. Em (6.3.1) o objetivo é encontrar um ponto $x^* \in \Omega$ tal que f seja minimizada no conjunto viável, definido por:

$$X = \{x \in \Omega : c_e = 0, c_i \leq 0\} \tag{6.3.2}$$

Se f , c_e e c_i são funções suaves¹, com as restrições qualificadas em x^* [28,92,108]², então existe um vetor $\lambda^* \in \mathfrak{R}^m$ na qual são atendidas as seguintes condições de otimalidade de Karush-Kuhn-Tucker (KKT):

$$KKT \Rightarrow \begin{cases} (a) & \nabla f(x^*) + Jc(x^*)^t \lambda^* = 0 \\ (b) & c(x^*)^\# = 0 \\ (c) & (\lambda^*)_I \geq 0 \\ (d) & (\lambda^*)_I^t c_I(x^*) = 0 \end{cases} \tag{6.3.3}$$

Acima, $\nabla f(x^*)$ representa o vetor gradiente da função objetivo e $Jc(x^*)$ é a matriz jacobiana das restrições. $c(x^*)^\# = 0$ significa que $c_e(x^*) = 0$ e $c_i(x^*) = 0$, onde I é o conjunto definido pelos índices associados as restrições de desigualdades ativas em x^* . O operador $\#$ indica o conjunto total de restrições ativas em x^k .

¹ Duas vezes diferenciável, pelo menos.

² A existência de um multiplicador de Lagrange, $\lambda^* \in \mathfrak{R}^m$, de modo que as condições de KKT são válidas, é garantida apenas quando as restrições são qualificadas em x^* .

As equações (6.3.3) definem as condições de otimalidade primeira ordem (pois envolvem apenas derivadas primeiras das funções envolvidas), sendo muito utilizadas na construção de vários algoritmos de PNL. Assim, lembradas as condições de otimalidade primeira ordem, pode-se agora partir para a definição das principais características de um algoritmo de PQS.

6.3.1 Direção de Busca

Como sugerido, a PQS é um método que, em uma dada iteração x^k , o passo para a iteração seguinte x^{k+1} pode ser obtido com base na informação gerada pela solução de um problema de PQ. Esse problema deve, portanto, refletir em suas características, as propriedades locais do PNL original. Para ver como isso é possível, considere o seguinte PNL, o qual é desprovido de restrições de desigualdade:

$$\begin{aligned} & \underset{x}{\text{minimize}} && f(x) \\ & \text{s.a:} && c_i(x) = 0 \\ & && x \in \Omega \end{aligned} \tag{6.3.1.1}$$

Aplicando-se as condições de primeira ordem de KKT ao problema acima, obtém-se o seguinte sistema não-linear³ com $n+me$ equações e $n+me$ incógnitas x e λ :

$$F(x, \lambda) = \begin{bmatrix} \nabla f(x) + Jc(x)^t \lambda \\ c_i(x) \end{bmatrix} = 0 \tag{6.3.1.2}$$

Se a matriz jacobiana acima tem posto cheio, qualquer solução (x^*, λ^*) de (6.3.1.1) satisfaz (6.3.1.2). Para encontrar tal solução, o sistema de equações não-lineares deve ser resolvido. Nesse sentido, a expressão a seguir representa a matriz jacobiana resultante da aplicação do método de Newton ao sistema (6.3.1.2).

$$\begin{bmatrix} B(x, \lambda) & Jc(x)^t \\ Jc(x) & 0 \end{bmatrix} \tag{6.3.1.3}$$

Acima, $B(x, \lambda)$ representa a matriz hessiana da função lagrangeana de (6.3.1.1), isto é:

$$B(x, \lambda) = \nabla_{xx}^2 L(x, \lambda) \tag{6.3.1.4}$$

O passo de Newton, na iteração k , (x^k, λ^k) , é dado por:

³ Para tanto, $f(x)$ e/ou $c_i(x)$ devem possuir grau maior ou igual a três. Com ordem dois, o sistema resultante é linear.

$$\begin{bmatrix} x^{k+1} \\ \lambda^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^k \\ \lambda^k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} dx^k \\ d\lambda^k \end{bmatrix} \quad (6.3.1.5)$$

onde dx^k e $d\lambda^k$ resolvem o seguinte sistema:

$$\begin{bmatrix} B(x^k, \lambda^k) & Jc(x^k)^t \\ Jc(x^k) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx^k \\ d\lambda^k \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \nabla f(x^k) + Jc(x^k)^t \lambda^k \\ c_e(x^k) \end{bmatrix} \quad (6.3.1.6)$$

Os passos acima são bem definidos se a matriz do sistema for não-singular. Essa não-singularidade é consequência de duas condições: $Jc(x^k)$ deve ter posto cheio e $B(x^k, \lambda^k)$ ser definida positiva no espaço tangente das restrições, isto é, $d^t B(x^k, \lambda^k) d^t > 0$ para todo $d \neq 0$ tal que $Jc(x^k)d = 0$. Por meio dessas condições, pode-se provar [107] que o método de Newton tem convergência quadrática e, portanto, constitui um excelente algoritmo para resolver esse tipo de problema, considerando que o ponto inicial esteja perto da solução.

Todavia, os passos representados por (6.3.1.5)-(6.3.1.6) podem ser vistos de uma maneira alternativa. Para tanto, basta supor que nessa iteração (x^k, λ^k) seja definido o seguinte problema de PQ:

$$\begin{aligned} & \underset{p}{\text{minimize}} \quad \nabla f(x^k)^t p + \frac{1}{2} p^t B(x^k, \lambda^k) p \\ & \text{s.a:} \quad Jc(x^k)p + c_e(x^k) = 0 \end{aligned} \quad (6.3.1.7)$$

Se as considerações feitas acima para definir a iteração forem mantidas, esse problema de PQ tem solução única $(p^k, \mu^k)^4$, que satisfaz as seguintes condições⁵:

$$\begin{aligned} B(x^k, \lambda^k)p^k + \nabla f(x^k)^t p^k + Jc(x^k)^t \mu^k &= 0 \\ Jc(x^k)p^k + c_e(x^k) &= 0 \end{aligned} \iff \begin{bmatrix} B(x^k, \lambda^k) & Jc(x^k)^t \\ Jc(x^k) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p^k \\ \mu^k \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \nabla f(x^k)^t \\ c_e(x^k) \end{bmatrix} \quad (6.3.1.8)$$

A observação chave é que p^k e μ^k podem ser identificados com a solução da iteração de Newton ilustrada anteriormente. Se o termo $Jc(x^k)^t \lambda^k$ for adicionado de ambos os lados da primeira equação de (6.3.1.6), tem-se:

$$\begin{bmatrix} B(x^k, \lambda^k) & Jc(x^k)^t \\ Jc(x^k) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx^k \\ d\lambda^{k+1} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \nabla f(x^k)^t \\ c_e(x^k) \end{bmatrix} \quad (6.3.1.9)$$

de modo que, de acordo com (6.3.1.8), tem-se $dx^k = p^k$ e $d\lambda^{k+1} = \mu^k$. Assim, pode-se ver que existe uma interessante relação entre os métodos de Newton e a PQS. Portanto, garanti-

⁴ μ^k representa o multiplicador associado à restrição do PQ.

⁵ Condições de KKT aplicadas ao PQ.

das certas condições em x^k , uma nova iteração (x^{k+1}, λ^{k+1}) pode ser construída pela solução do problema de PQ ou pela solução do método de Newton.

A analogia feita acima pode ser estendida para o caso do PNL geral (6.3.1). Neste caso o problema de PQ deve incluir também a linearização das restrições de desigualdade:

$$\begin{aligned} & \underset{p}{\text{minimize}} \quad \nabla f(x^k)^t p + \frac{1}{2} p^t B(x^k, \lambda^k) p \\ \text{s.a:} \quad & \nabla c_e(x^k)^t p + c_e(x^k) = 0 \\ & \nabla c_i(x^k)^t p + c_i(x^k) \leq 0 \end{aligned} \tag{6.3.1.10}$$

Deve-se ressaltar que a linearização dessas restrições pode gerar um problema de PQ de natureza inviável. Considere, por exemplo, o caso onde um conjunto viável é composto pelas restrições $x \leq 1$ e $x^2 \geq 0$. Se estas restrições forem linearizadas em $x=3$, o conjunto restrito do problema de PQ associado é composto por $p + 2 \leq 0$ e $6p + 9 \geq 0$, o qual notadamente é inviável. Uma alternativa que pode ser utilizada para sobrepujar esta dificuldade consiste em definir um problema PQ relaxado que seja garantidamente viável [28,106,109]. Todavia, a inviabilidade do problema PQ está estritamente relacionada com a natureza das restrições e, portanto, do PNL.

Detalhes de como isso é tratado nos problemas específicos deste trabalho são mostrados no Capítulo 7.

6.3.2 Globalização do Algoritmo

Conforme visto, um algoritmo de PQS é baseado na linearização das condições de otimalidade (KKT). Estas linearizações fazem sentido quando o ponto inicial do algoritmo está suficientemente próximo do ótimo (pertence a uma "bola de convergência"). Então, é de se esperar que, caso o ponto inicial esteja afastado de tal solução, alguma técnica esteja disponível para garantir que a seqüência iterativa entre nessa bola, ou seja, globalize⁶ o algoritmo.

Existem duas maneiras (no mínimo) que são usadas para globalizar um algoritmo local: busca-linear e região de confiança. Aqui será tratada apenas a primeira. Porém, ambas fazem uso da mesma idéia: medem o progresso feito entre as iterações x^k e x^{k+1} guiado por uma fun-

⁶ O termo global é usado em diversos contextos em otimização não-linear sendo uma inerente fonte de confusão. Aqui, para um algoritmo ser globalmente convergente, o mesmo deve convergir para alguma solução local independente do ponto de partida.

ção auxiliar, denominada de função de mérito. Em otimização irrestrita, a função de mérito apropriada é, naturalmente, a própria função objetivo do problema.

Agora, no caso restrito, a medida desse progresso tem que levar em consideração dois objetivos, usualmente conflitantes, que são a minimização da função objetivo e o atendimento a viabilidade do problema. Dado essa exigência, uma função mérito ϕ tem em geral a forma $f(x) + \pi(x)$, onde $\pi(x)$ penaliza as inviabilidades das restrições, isto é, deve ser zero para valores viáveis e estritamente positivo caso contrário.

Existem várias funções de mérito. Aqui será visto apenas uma delas, a qual não faz uso de derivadas de $f(x)$, $c_i(x)$ e $c_i(x)$, e que tem provado ser eficiente em diversos problemas de natureza prática:

$$\phi(x^k, \sigma) = f(x^k) + \sigma^k \|c(x^k)^\#\|_\infty \quad (6.3.2.1)$$

Essa função é conhecida como função de mérito (ou penalidade) de Han [108], onde σ^k é um parâmetro que deve ser escolhido. As propriedades dessa função estão bem documentadas na literatura. Para os propósitos desse trabalho é suficiente notar que essa função é de penalidade exata, ou seja, existe um $\underline{\sigma}^k$ positivo tal que, para qualquer $\sigma^k \geq \underline{\sigma}^k$, um mínimo de irrestrito de $\phi(x^k, \sigma^k)$ corresponde a solução do PNL original. Deve-se observar também que $\phi(x^k, \sigma^k)$ não é diferenciável em todo conjunto viável; todavia, essa função sempre possui derivadas direcionais ao longo da direção de busca, p^k .

Para usar $\phi(x^k, \sigma^k)$ como uma função que mede o progresso ao longo de p^k , essa direção deve ser de descida em x^k , ou seja, a derivada direcional $D[\phi(x^k, \sigma^k); p^k]$ tem que ser menor do que zero. Pode se mostrar que a expressão, para o caso da função de mérito acima, desta derivada satisfaz a seguinte relação:

$$D[\phi(x^k, \sigma^k); p^k] \leq \nabla f(x^k)^t p^k - \sigma^k \|c(x^k)^\#\|_\infty \quad (6.3.2.2)$$

$$\leq (p^k)^t B(x^k, \lambda^k) p^k + (\mu^k)^t c(x^k) - \sigma^k \|c(x^k)^\#\|_\infty \quad (6.3.2.3)$$

Acima, também pode ser mostrado que um ponto estacionário do problema de PQ, p^k , é uma direção de descida se $B(x^k, \lambda^k)$ for definida positiva e σ^k é ajustado, em cada iteração, da seguinte maneira:

$$\sigma^k \geq \left\| \mu^k \right\|_{\infty} + \bar{\delta} \quad \bar{\delta} > 0 \quad (6.3.2.4)$$

Na prática, bem como para propósitos de análise, algumas regras relativas a atualização de σ^k (além da regra exposta acima) são necessárias, cujo objetivo é permitir que desse parâmetro tenha seu valor imutável quando isso for adequado e seja decrescido de forma significativa caso contrário. Uma regra que torna isso possível é apresentada em [108], a qual é parte do algoritmo usado no trabalho.

De posse dos valores calculados de p^k e σ^k , o próximo objetivo consiste em estabelecer o nível de decréscimo que deve ser realizado na função de mérito. Nesse trabalho será feito uso da seguinte condição de Armijo [110]:

$$x^k + \alpha p^k \in \Omega \quad \phi^k(x^k + \alpha p^k) \leq \phi^k(x^k) + \omega \alpha \Delta^k \quad (6.3.2.5)$$

onde ω é uma constante que pertence a $]0, 1/2[$ e α é o tamanho do passo positivo a ser calculado de modo que a condição acima seja verificada. O requerimento $\omega < 1/2$ deve-se a razões teóricas [105, 108]. Por sua vez, o valor de Δ^k deveria ser idealmente o valor exato da derivada direcional. Entretanto, como esse valor nem sempre é fácil de se computar, Δ^k terá valor igual ao limite superior dessa derivada, a qual foi mostrada em (6.3.2.2):

$$\Delta^k := \nabla f(x^k)^t p^k - \sigma^k \left\| c(x^k)^{\#} \right\|_{\infty} \quad (6.3.2.6)$$

Uma vez que $D[\phi(x^k, \sigma^k); p^k] \leq \Delta^k < 0$ e $\omega < 1$, então é possível encontrar um $\alpha > 0$ que atende a (6.3.2.5).

6.3.3 Matriz Hessiana do Problema Quadrático

Conforme visto, o cálculo da direção do problema de PQ em (6.3.1.7) é motivado pela equivalência entre os métodos de Newton e a PQS, quando se considera o uso da hessiana (completa) da função lagrangeana do PNL.

Essa escolha permite ao algoritmo de PQS uma taxa quadrática no processo de convergência, podendo ser usada ainda para conceber um rápido progresso quando as iterações correntes estão afastadas da solução. Entretanto, essa matriz é composta de derivadas segundas da função objetivo, bem como das restrições, as quais não necessariamente são fáceis de serem calculadas. Além disso, se a dificuldade não for o caso, a hessiana da função lagrangeana pode não ser definida positiva em todo o domínio de interesse (podendo ser assim inclusi-

ve na solução), de modo que as considerações relativas ao uso da função de mérito citadas na seção anterior podem ser invalidadas.

Métodos de Quase-Newton⁷ constituem alternativas concretas quando o objetivo é evitar o cálculo das derivadas de segunda ordem.

Esses métodos mantêm ainda uma convergência intermediária entre os métodos de Newton e do gradiente⁸.

Um exaustivo estudo das diversas técnicas de Quase-Newton está fora de contexto deste trabalho. A abundância de algoritmos proposta reflete a dificuldade do problema, sendo que uma solução satisfatória para o uso dessas técnicas não tem sido encontrada ainda (principalmente referente a aplicação em problemas com restrições). Assim, esse trabalho se concentra na descrição da variação mais utilizada denominada de BFGS (Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno) [113,114]. Essa variante tem provado ser eficiente no contexto da otimização irrestrita, e sua aplicação no caso restrito tem obtido boa performance em um grande número de problemas práticos.

Num algoritmo padrão de Quase-Newton, o objetivo básico é, em cada iteração, atualizar uma matriz aproximada com base na informação obtida ao longo da mais recente direção de busca. Essa atualização é feita com base na chamada *condição de Quase-Newton*:

$$M(x^{k+1}, \lambda^{k+1})s^k = z^k \quad (6.3.3.1)$$

com

$$s^k = x^{k+1} - x^k \quad z^k = \nabla_x L(x^{k+1}, \lambda^{k+1}) - \nabla_x L(x^k, \lambda^{k+1}) \quad (6.3.3.2)$$

⁷ Na década de 50, o físico W. C. Davidon, vinculado ao *Argonne National Laboratory*, estava usando uma técnica, baseada no método do gradiente, para realizar cálculos em um modelo de otimização que exigia enorme esforço computacional. Naquele tempo os computadores não eram muito estáveis, e para a decepção de Davidon, seu computador freqüentemente apresentava problemas impedindo assim que o modelo pudesse encontrar a solução. Então, Davidon decidiu encontrar uma maneira de acelerar o processo de convergência. A técnica algoritmo desenvolvido por ele – a primeira versão de um algoritmo de Quase-Newton – tornou-se uma das idéias mais revolucionárias em otimização não-linear. Durante as duas décadas seguintes numerosas variantes foram propostas e centenas de artigos foram devotadas ao seu estudo. Uma interessante ironia histórica é que o artigo de Davidon sobre o método [111] não foi aceito para publicação, permanecendo como um relatório técnico por mais de trinta anos, até ser publicado na primeira edição do periódico *SIAM Journal on Optimization*, em 1991 [112].

⁸ Na verdade, o objetivo do método do Quase-Newton é conseguir, à medida que as iterações vão se sucedendo, uma aproximação eficiente da hessiana da função lagrangeana (caso restrito). Embora isso nem sempre possa ser alcançado, em termos gerais, a convergência obtida nesse método é bastante superior ao método do gradiente.

Acima, $M(x^{k+1}, \lambda^{k+1})$ representa a matriz de Quase-Newton na iteração $k+1$. A condição (6.3.3.1) pode ser alcançada com diversas matrizes. No caso da variação BFGS, uma matriz que em particular verifica essa condição é obtida por meio da seguinte expressão:

$$M(x^{k+1}, \lambda^{k+1}) = M(x^k, \lambda^{k+1}) - \frac{M(x^k, \lambda^{k+1})s^k (s^k)^t M(x^k, \lambda^{k+1})}{(s^k)^t M(x^k, \lambda^{k+1})s^k} + \frac{z^k (z^k)^t}{(z^k)^t s^k} \quad (6.3.3.3)$$

A equação acima representa a atualização de uma matriz onde a função objetivo é dada pela função lagrangeana (com λ fixo). Se a hessiana dessa função for definida positiva na região onde está sendo realizada a iteração, então a matriz aproximada $M(x^{k+1}, \lambda^{k+1})$ irá refletir alguma informação sobre a curvatura do problema, propiciando uma rápida convergência, tal como acontece no caso da aplicação para problemas irrestritos. Todavia, se a hessiana possuir autovalores negativos, então a aproximação por uma matriz definida positiva pode ser ineficiente. De fato, a atualização de BFGS requer que s^k e z^k satisfaçam a condição de curvatura $(s^k)^t z^k > 0$, que pode não ser atendida quando s^k e z^k são definidos por (6.3.3.2), mesmo para iterações próximas da solução.

Para sobrepujar a dificuldade acima, pode-se pular a atualização acima se a condição:

$$(s^k)^t z^k \geq \theta (s^k)^t B(x^k, \lambda^{k+1})s^k \quad (6.3.3.4)$$

não for satisfeita, onde θ é um parâmetro positivo⁹. Essa estratégia tem sido usada com sucesso em algumas implementações da PQS, embora não possa ser considerada como adequada para qualquer algoritmo.

Uma modificação da estratégia acima pode ser utilizada para propósitos mais genéricos. Mantendo-se as definições de s^k e z^k e ajustando

$$r^k = \theta^k z^k + (1 - \theta^k) B(x^k, \lambda^{k+1})s^k \quad (6.3.3.5)$$

onde o escalar θ^k é definido como:

$$\theta^k = \begin{cases} 1 & \text{se } (s^k)^t z^k \geq 0, 20(s^k)^t B(x^k, \lambda^{k+1})s^k \\ \frac{0, 8(s^k)^t B(x^k, \lambda^{k+1})s^k}{(s^k)^t B(x^k, \lambda^{k+1})s^k - (s^k)^t z^k} & \text{se } (s^k)^t z^k < 0, 20(s^k)^t B(x^k, \lambda^{k+1})s^k \end{cases} \quad (6.3.3.6)$$

pode-se agora realizar a atualização (6.3.3.3) por:

⁹ Deve pertencer ao intervalo]0,1[.

$$M(x^{k+1}, \lambda^{k+1}) = M(x^k, \lambda^{k+1}) - \frac{M(x^k, \lambda^{k+1}) s^k (s^k)^t M(x^k, \lambda^{k+1})}{(s^k)^t M(x^k, \lambda^{k+1}) s^k} + \frac{r^k (z^k)^t}{(s^k)^t r^k} \quad (6.3.3.7)$$

Essa nova forma de atualização, denominada de correção de Powell [114], tem sido incorporada a diversos algoritmos de PQS, cujo desempenho tem sido bastante satisfatório em um grande número de problemas. Outras alternativas de aproximação da matriz hessiana, no tocante ao uso em algoritmo de PQS, podem ser vistas em [108].

6.3.4 Algoritmo

De posse das considerações feitas nas seções anteriores é possível agora estruturar o algoritmo de PQS utilizado no trabalho. Para tanto, quando a iteração ilustrada abaixo é iniciada, admite-se que um ponto inicial primal-dual (x^k, λ^k) é conhecido, bem como uma matriz simétrica definida positiva está disponível para aproximar a hessiana da função lagrangeana do PNL.

- Calcule a solução ótima primal-dual (p^k, μ^k) resultante da resolução do problema de PQ (6.3.1.10). Esse problema é suposto ser viável;
- Preparação para a busca-linear: adapte o parâmetro de penalidade da função de mérito σ^k de modo a observar a Regra (6.3.2.4);
- Busca-linear: encontre um tamanho de passo $\alpha^k > 0$, ao longo da direção p^k de modo a satisfazer as condições de Armijo representadas por (6.3.2.5). Essas condições referem-se ao uso da função de penalidade (mérito) de Han (6.3.2.1).
- Faça $x^{k+1} = x^k + \alpha^k p^k$ e $\lambda^{k+1} = \lambda^k + \alpha^k (\mu^k - \lambda^k)$.
- Compute a nova aproximação da matriz hessiana da função lagrangeana por meio das equações (6.3.3.2)-(6.3.3.7).

No primeiro passo do algoritmo acima é assumido que as restrições do problema de programação quadrática são consistentes. Se este não for o caso, técnicas podem ser usadas para modificar este problema de modo a incrementar as chances do mesmo tornar-se viável (para tanto veja, por exemplo, [109]).

Adicionalmente, para o algoritmo ser completo, deve-se também incluir alguma técnica para evitar um comportamento indesejado que acontece quando o processo iterativo está

próximo da solução. Este ponto é de suma importância para a eficiência prática do algoritmo e foi omitido nas seções anteriores para aliviar a apresentação.

O comportamento sucintamente descrito acima é denominado de efeito de Maratos [115]. Trata-se de um fenômeno que pode impedir a rápida convergência local de um algoritmo de PQS manifestado pela rejeição do “bons” tamanhos de passos. Essa rejeição, que acontece quando se utilizam algumas funções de mérito específicas (inclusive a função de Han), faz com que a taxa quadrática de convergência gerada pela direção p^k seja afetada negativamente devido ao incremento nos valores da função objetivo e da norma das restrições.

Em [92] pode-se verificar que qualquer função de mérito da seguinte forma:

$$\Psi(x, \sigma) = f(x) + \sigma h(c(x)) \quad (6.3.4.1)$$

(onde $h(c(x))$ é uma função não-negativa que satisfaz $h(0)=0$) irá causar o efeito de Maratos em um algoritmo de PQS. Se nenhuma medida for tomada, esse efeito irá causar uma drástica redução no desempenho do algoritmo.

Algumas técnicas que podem ser usadas para evitar esse efeito são:

- utilizar uma função de mérito que não seja afetada pelo efeito de Maratos;
- fazer uma correção na qual é adicionado a p^k um passo p^k cujo objetivo é providenciar um suficiente decréscimo no valor das restrições;
- pode-se permitir que a função de mérito incremente em certas iterações.

No algoritmo de PQS utilizado nesse trabalho foi implementada a segunda estratégia, a qual será descrita de forma sucinta, a seguir.

Dado um passo p^k , a correção, e^k , é definida como [92]:

$$e^k = -Jc(x^k)^t [Jc(x^k)Jc(x^k)^t]^{-1} c(x^k + p^k) \quad (6.3.4.2)$$

Visto que e^k é calculada por meio da avaliação da restrição em um ponto diferente de x^k , não é possível mais garantir que $p^k + e^k$ seja uma direção de descida para a função de mérito, ou seja, fazer uma busca linear ao longo dessa direção pode se tornar impossível. Uma solução para tanto é determinar um passo ao longo do arco:

$$d^k(\alpha) = x^k + \alpha p^k + \alpha^2 e^k \quad (6.3.4.3)$$

O tamanho desse passo pode então ser calculado conforme a terceira etapa do algoritmo mostrado anteriormente.

A estratégia de correção é eficaz na prática. O custo adicional de realizar avaliações extras das restrições é amenizado pela robustez e eficiência adquiridas.

6.4 Conclusões

Neste capítulo foram apresentados os principais aspectos conceituais envolvidos nas metodologias usadas neste trabalho para otimizar a função dual e os problemas de programação não-linear resultantes da estratégia de solução adotada. No caso da otimização dual será feito uso de uma subrotina construída com base no método de feixes. Essa subrotina está disponível para uso acadêmico. Por sua vez, os problemas não-lineares são otimizados por meio de um algoritmo de Programação Quadrática Seqüencial, implementado no trabalho.



CAPÍTULO

7

Implementação Computacional

7.1 Introdução

ESTE capítulo tem por objetivo descrever a implementação computacional realizada neste projeto de pesquisa. Conforme mostrado, a estratégia empregada na solução do problema da programação engloba a decomposição desse problema em subproblemas de solução mais simples e com características diferenciadas entre si. Também citado anteriormente, não é de interesse deste trabalho a solução de alguns subproblemas resultantes da decomposição, tais como os subproblemas de alocação de unidades geradoras termelétricas e de atendimento a demanda, definidos no Capítulo 6. Portanto, os resultados e análises mostrados adiante dizem respeito à solução do subproblema hidrelétrico, definido no capítulo anterior e rescrito a abaixo.

$$\Theta_H(\lambda d_t) = \min_{\{z_{jrt}, q_{jrt}, Q_{rt}, s_{rt}\}} \alpha - \sum_{t=1}^T \sum_{r=1}^R \lambda d_{rt} \left(\sum_{j=1}^{J(r)} p b_{jrt}(q_{jrt}, Q_{rt}, s_{rt}) \right) \quad (7.1.1)$$

sujeito a: (5.3.13)-(5.3.22)

Para um dado conjunto de multiplicadores λd_{rt} fornecido, o subproblema acima objetiva minimizar o custo operativo total associado ao uso das unidades geradoras de natureza hidrelétrica. De acordo com (7.1.1), esse custo é composto por duas parcelas distintas entre si: um custo imediato, que depende da geração hidrelétrica verificada durante o horizonte de estudo da programação, e um custo futuro que depende do nível de armazenamento entregue ao final desse horizonte.

O custo futuro está bem definido por meio de uma função que é decrescente com o nível de armazenamento do sistema: quanto maior a quantidade de água disponível no final do horizonte da programação, menor será esse custo futuro. A função de custo futuro, cuja construção é definida pelos modelos de planejamento da operação de mais longo prazo, é acoplada no final do último estágio do horizonte de estudo. Por sua vez, o termo referente ao custo imediato do subproblema hidrelétrico é função, além das características individuais das unidades e reservatórios, dos preços ofertados para as potências de saída nas usinas hidrelétricas; esses preços são os multiplicadores de Lagrange λd_{rt} provenientes do esquema de decomposição mostrado no capítulo anterior.

Com o objetivo de fornecer uma idéia generalizada de como os multiplicadores λd_{rt} são obtidos e utilizados, será feito uso de um problema simplificado, cuja estrutura matemática é bastante semelhante ao problema da programação.

$$\begin{aligned} &\text{minimize} \quad f = c(pt) + \alpha \\ &\text{sujeito a:} \quad pt + \sum_{j=1}^{ng} p b_j(\cdot) = D \\ &\quad \alpha + \pi_1 v \geq \alpha_1^0 \quad \alpha + \pi_2 v \geq \alpha_2^0 \quad \alpha + \pi_3 v \geq \alpha_3^0 \end{aligned} \quad (7.1.2)$$

demais restrições hidrelétricas e termelétricas

Acima, tem-se um problema cujo objetivo consiste em minimizar o custo de operação total, f , ao longo de dois períodos de tempo (presente e futuro), associado ao uso das unidades geradoras.

De acordo com o esquema de decomposição ilustrado no capítulo anterior, λd^t é obtido mediante a realização dos seguintes passos:

$$\begin{aligned}
 &\text{minimize} && f = c(pt) + \alpha \\
 &\text{sujeito a:} && pt + GH = D \\
 &&& \alpha + \pi_1 v \geq \alpha_1^0 \quad \alpha + \pi_2 v \geq \alpha_2^0 \quad \alpha + \pi_3 v \geq \alpha_3^0 \\
 &&& \text{demais restrições hidrelétricas e termelétricas} \\
 &&& GH = \sum_{j=1}^{ng} ph_j(.)
 \end{aligned} \tag{7.1.3}$$

A partir da dualização da restrição artificial de (7.1.3), e agrupando as restrições e os termos da função objetivo adequadamente, tem-se que o problema dual associado detém os seguintes subproblemas primais:

$$\begin{aligned}
 &\text{minimize} && f_D = ct(pt) + \lambda d GH \\
 &\text{sujeito a:} && pt + GH = D \\
 &&& \text{restrições termelétricas}
 \end{aligned} \tag{7.1.4}$$

e

$$\begin{aligned}
 &\text{minimize} && f_H = \alpha - \lambda d \sum_{j=1}^{ng} ph_j(.) \\
 &\text{sujeito a:} && \alpha + \pi_1 v \geq \alpha_1^0 \quad \alpha + \pi_2 v \geq \alpha_2^0 \quad \alpha + \pi_3 v \geq \alpha_3^0 \\
 &&& \text{demais restrições hidrelétricas}
 \end{aligned} \tag{7.1.5}$$

É possível notar que a tarefa de λd consiste em coordenar o nível de geração hidrelétrica ótima para o Problema (7.1.2) da seguinte maneira: em (7.1.4), λd é usado para decidir a participação hidrelétrica ótima no atendimento da demanda, tendo como base de comparação os custos de geração termelétrica; por sua vez, em (7.1.5) λd é utilizado para calcular essa participação observando o valor futuro da água armazenada no reservatório. Deve-se ressaltar que uma solução ótima para o Problema (7.1.2) deve considerar o atendimento à demanda e o valor futuro da água de forma simultânea.

A implementação computacional realizada neste trabalho objetiva determinar os níveis ótimos de geração hidrelétrica, para uma configuração hidrelétrica realista. Este tipo de problema pode aparecer em situações diferentes àquela apresentada aqui. Exemplificando, se em (7.1.2) a restrição de atendimento a demanda tivesse sido relaxada (e não fosse colocada

¹ Para o exemplo tem-se que r e t são iguais a 1. Por isso estão suprimidos os índices de reservatório e estágio.

a restrição artificial), o subproblema hidrelétrico manteria a mesma estrutura apresentada em (7.1.5). Deste modo, esse subproblema pode ser também objeto de solução em outros esquemas baseados na Relaxação Lagrangeana [61,63-65]. Outra situação onde é necessário resolver um problema muito semelhante a (7.7.1) é aquela que diz respeito à maximização dos lucros de um agente de geração hidrelétrica, em um mercado *pool* de eletricidade, provenientes da venda de energia para o dia seguinte [127-131].

De posse da apresentação inicial do problema implementado, a próxima seção descreve a configuração hidrelétrica utilizada, bem como os dados associados à mesma. Em seguida, na terceira seção do capítulo, estão apresentados os principais resultados obtidos pela aplicação da metodologia proposta na configuração hidrelétrica. Por fim, na última seção, estão apresentadas as conclusões do presente capítulo.

7.2 Configuração Hidrelétrica

A configuração hidrelétrica utilizada neste trabalho está esquematicamente representada pelo diagrama da Figura 7.2.1. Trata-se de uma configuração reduzida do sistema de geração hidrelétrico brasileiro. A configuração estudada tem potência máxima nominal de 31.129,2 MW. Este valor corresponde aproximadamente a 49% da potência hidrelétrica instalada atualmente no sistema brasileiro. Nessa figura, cada usina possui um número de identificação, além do nome e da respectiva potência máxima nominal. As usinas de Água Vermelha (3), Emborcação (4), São Simão (6) e Passo Fundo (14) estão destacadas em relação às demais devido ao fato que a produção de energia nessas usinas independe das respectivas vazões vertidas².

Na figura é possível ver ainda os tempos de viagem³ da água entre os reservatórios, os quais apresenta-se de forma destacada entre colchetes.

² As unidades dessas usinas possuem usinas do tipo de reação e/ou a vazão vertida no reservatório não tem influência no nível de jusante.

³ Neste trabalho é assumido que o tempo de viagem entre a usina r e a usina imediatamente a jusante a mesma é constante. Isso não é verdadeiro na prática, desde que o tempo de viagem é dependente da quantidade de vazão defluente na usina.

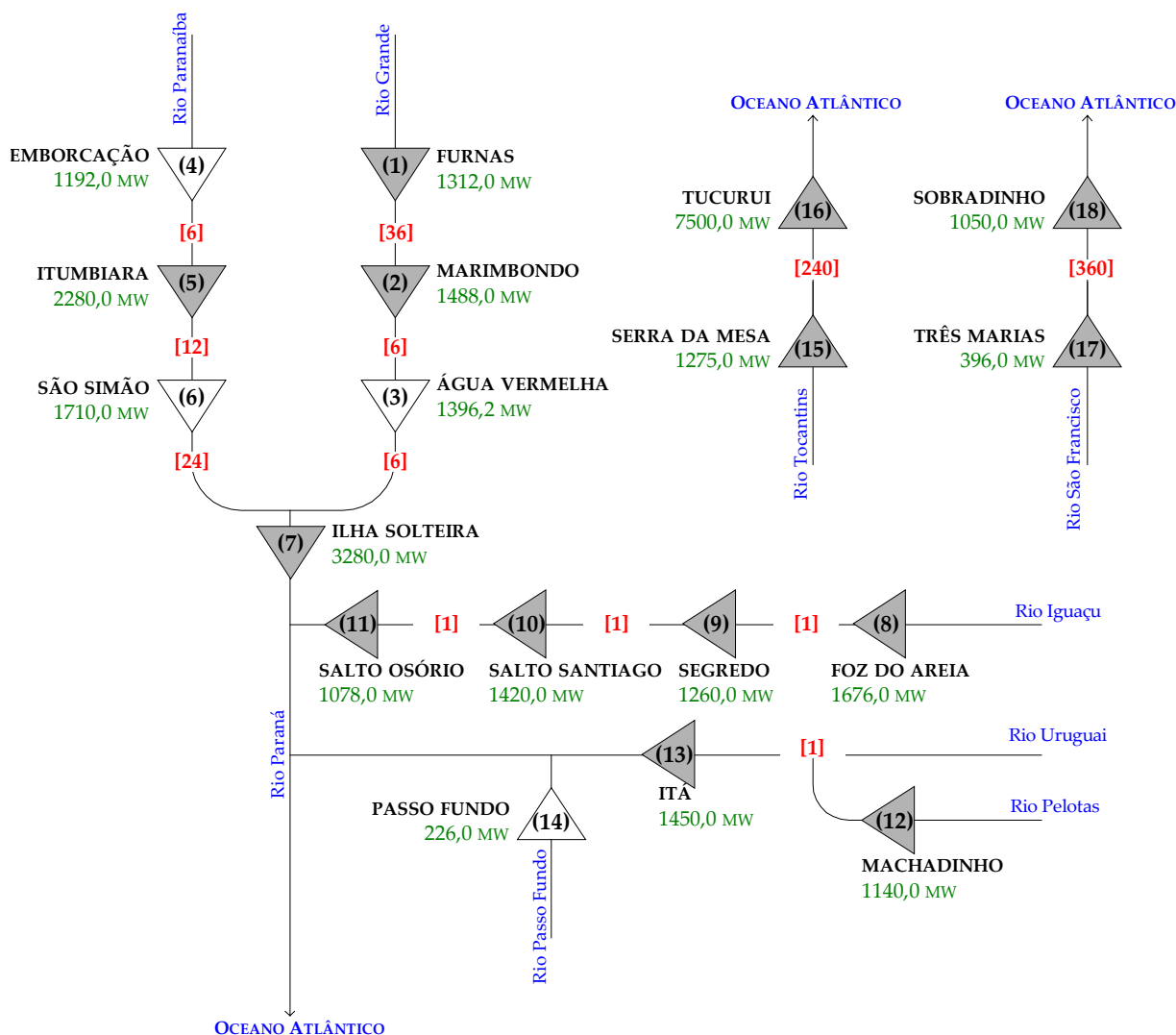


Figura 7.2.1 – Configuração Hidrelétrica Teste⁴.

Iniciando pelas características dos reservatórios, a Tabela 7.2.1, ilustrada a seguir, apresenta os limites operativos de volumes e vazões dos reservatórios. O limite máximo de vazão turbinada no reservatório é dado pela capacidade de engolimento de suas unidades. Por sua vez, o limite máximo de vazão vertida depende de fatores ligados ao projeto do vertedouro. Além disso, esse limite pode ser função do volume armazenado no reservatório, mas tal característica será desconsiderada aqui. Todavia, por questões ligadas à implementação, bem como pela indisponibilidade de dados dessa natureza, o limite máximo possível para a vazão vertida em cada reservatório foi considerado igual a duas vezes o valor da respectiva vazão turbinada máxima. Limites mínimos de vazão turbinada e vertida no reservató-

⁴ Apesar da usina hidrelétrica de Passo Fundo (14) ter seu reservatório situado no rio de mesmo nome, a casa de máquinas está situada junto ao Rio Erechim, na cidade de Entre Rios do Sul, RS [132].

rio são considerados nulos. Restrições de defluência obrigatória também não foram consideradas.

Tabela 7.2.1 – Limites de Volumes e Vazões dos Reservatórios.

Usina	VOLUME Mínimo (hm ³)	VOLUME Máximo (hm ³)	Engolimento Máximo (m ³ /s)	Vertimento Máximo (m ³ /s)
1	5733	22950	1688	3376
2	890	5887	2944	5888
3	5856	11025	2958	5916
4	4669	17725	1048	2096
5	4573	17027	3222	6444
6	7000	12540	2670	5340
7	8232	21060	9280	18560
8	1974	5779	1376	2752
9	2562	2950	1268	2536
10	2662	6775	1576	3152
11	1014	1124	1784	3568
12	2283	3340	1311	2622
13	4302	5110	1590	3180
14	185	1589	104	208
15	11150	54400	1215	2430
16	13487	45500	12480	24960
17	4250	19528	924	1848
18	5447	34116	4278	8556

A maioria dos dados utilizados neste trabalho e que se referem às unidades geradoras são mostrados na Tabela 7.2.2, adiante. Com base nesta tabela, pode-se notar que o total de unidades geradoras presentes na configuração hidrelétrica é igual a 121. Com exceção de Salto Osório (11) e Serra da Mesa (15), as demais usinas hidrelétricas apresentam, em seus respectivos grupos turbina-gerador, unidades idênticas. Na verdade, algumas usinas apresentam grupos com diferentes unidades. Esse é o caso de Ilha Solteira (7) e Tucuruí (16). Entretanto, devido à ausência de dados (curvas-colina), foi considerado que essas usinas detêm um grupo de geração, com unidades idênticas. Em Salto Osório (11) existem dois grupos com características operativas diferentes. Por sua vez, Serra da Mesa (15) é a única usina do sistema que apresenta unidades com mais de uma faixa operativa. Na Tabela 7.2.2 podem ser vistas ainda as constantes relativas à função que aproxima as perdas hidráulicas e a altura de queda nominal das unidades. Nesse estudo as usinas não possuem um conduto forçado comum para todas as unidades. Deste modo, o valor da constante relacionado a essa adução comum é nulo.

Tabela 7.2.2 – Características das Unidades Geradoras.

Usina	Número de Unidades	Zonas Operativas (MW)	Engolimento Máximo (m ³ /s)	Perdas Hidráulicas (s ² /m ⁵)	Queda Nominal (m)
1	8	[110-164]	211	$2,203 \times 10^{-5}$	90,0
2	8	[120-188]	368	$6,994 \times 10^{-6}$	59,2
3	6	[125-232,7]	493	$2,443 \times 10^{-6}$	53,5
4	4	[170-298]	262	$2,411 \times 10^{-5}$	130,3
5	6	[200-380]	537	$3,337 \times 10^{-6}$	80,2
6	6	[185-285]	445	$2,220 \times 10^{-6}$	70,9
7	20	[60-165]	464	$4,239 \times 10^{-6}$	41,5
8	4	[290-419]	344	$2,229 \times 10^{-5}$	135,0
9	4	[180-315]	317	$1,830 \times 10^{-5}$	110,0
10	4	[210-355]	394	$1,077 \times 10^{-5}$	102,0
11	4 – grupo 1	[120-182]	301	$1,616 \times 10^{-5}$	68,4
	2 – grupo 2	[120-175]	290	$1,741 \times 10^{-5}$	
12	3	[170-380]	437	$5,452 \times 10^{-6}$	97,3
13	5	[200-290]	318	$2,017 \times 10^{-5}$	102,0
14	2	[70-113]	52	$2,700 \times 10^{-3}$	247,0
15	3	[210-230]	405	$2,500 \times 10^{-5}$	117,2
		[290-425]			
16	20	[160-375]	624	$3,609 \times 10^{-4}$	65,5
17	6	[35-66]	154	$1,270 \times 10^{-5}$	50,2
18	6	[60-175]	713	$2,675 \times 10^{-7}$	27,2

Outro conjunto de dados de grande importância é aquele relativo aos coeficientes da função rendimento das unidades geradoras. Esses coeficientes foram estimados a partir de pontos extraídos da curva colina fictícia representada pela Figura 3.2.2.1.

Por fim, faltam ser detalhadas as condições iniciais (volumes iniciais, horizonte de estudo, vazões afluentes incrementais, níveis de reserva e multiplicadores de Lagrange relativos aos preços das potências) e finais do problema (coordenação com o problema de longo prazo). O total de estágios utilizado na otimização é igual a 48, isto é, discretização horária de um horizonte de dois dias. Os volumes iniciais dos reservatórios foram considerados iguais a 50% dos respectivos volumes úteis. Esses valores, bem como a cota de montante associada, estão colocados na Tabela 7.2.3, adiante. Vale ressaltar aqui que o valor dessa cota é considerado constante ao longo de todo o horizonte da programação.

No que diz respeito às vazões incrementais afluentes, as mesmas foram consideradas conhecidas e iguais a zero em todo o horizonte de estudo.

Tabela 7.2.3 – Volumes Iniciais e Respectivas Cotas de Montante dos Reservatórios.

Usina	Volume Inicial (hm ³)	Cota de Montante (m)
1	14341,5	761,05
2	3388,5	438,78
3	8440,5	378,93
4	11197,0	643,89
5	10800,0	510,49
6	9770,0	396,16
7	14646,0	322,07
8	3876,5	725,21
9	2756,0	604,62
10	4718,5	494,78
11	1069,0	397,00
12	2811,5	472,97
13	4701,0	370,00
14	887,0	592,63
15	32750,0	445,68
16	29493,5	64,115
17	11889,0	563,55
18	19781,5	388,35

Os montantes de reserva energética, vistos na Tabela 7.2.4, refere-se a 4% da capacidade máxima da usina. Essa capacidade máxima leva em conta o efeito da cota de montante na qual as usinas estão submetidas no primeiro estágio, bem das perdas hidráulicas e do rendimento das diversas unidades na usina⁵.

⁵ A capacidade máxima de geração de uma usina é determinada da seguinte maneira:

- inicialmente calcula-se uma queda bruta aproximada para usina que leva em consideração a cota de montante mostrada na Tabela 7.2.3. A correspondente cota de jusante utilizada é aquela na qual a usina opera com todas as unidades geradoras nos respectivos engolimentos máximos e, ainda, inexistia o vertimento;
- em seguida são descontados da queda bruta os correspondentes valores de perdas hidráulicas associadas com as unidades operando com o engolimento máximo. De posse dessa queda e dos engolimentos, é encontrado o rendimento aproximado das unidades.
- por fim, determinam-se as potências das unidades, as quais somadas aproximam a máxima potência que a usina pode alcançar. Para esta potência, então é determinado um fator (no presente caso 0,04) referente ao nível de reserva desejado na usina.

Para se ter uma idéia da diferença causada pela cota de montante, perdas hidráulicas e rendimento das unidades, na capacidade de geração na usina, pode-se observar o caso da usina de Tucuruí (16). Aqui, essa usina tem capacidade máxima nominal de 7500 MW. Com volume útil médio armazenado a capacidade dessa usina cai para aproximadamente 5670 MW. A título de curiosidade, a diferença resultante da correção aproximada representa algo em torno de 80% da demanda média semanal verificada na primeira quinzena de Fevereiro de 2003 no estado de Santa Catarina [133].

Tabela 7.2.4 – Reserva nas Usinas Hidrelétricas.

Usina	Reserva (MW)
1	49,05
2	51,82
3	53,34
4	41,97
5	77,75
6	59,95
7	121,15
8	54,41
9	47,46
10	50,22
11	42,13
12	42,67
13	54,61
14	08,65
15	43,38
16	226,76
17	14,58
18	34,08

Ainda, com relação às condições iniciais do subproblema hidrelétrico, é necessário descrever a magnitude do conjunto de multiplicadores de Lagrange, λ_{d_t} , provenientes do esquema de decomposição mostrado no capítulo anterior. Esses valores foram escolhidos com base nos custos de geração referentes a uma curva de demanda típica ao longo dos 48 estágios de tempo, isto é, custos de produção mais elevados nas horas de maior demanda e inferiores nos demais períodos. A grandeza desses multiplicadores (seus valores médios) é baseada no custo de operação de uma usina termelétrica de boa eficiência. Na Figura 7.2.2, mostrada a frente, estão ilustrados os valores médios⁶, para cada estágio de tempo, dos valores de λ_{d_t} utilizados na implementação.

No que se refere à coordenação com o problema de mais longo prazo foi visto nos capítulos anteriores que essa tarefa é realizada pelo acoplamento da função de custo futuro no final do horizonte da programação. Todavia, para obter tal função, seria necessário realizar uma simulação operativa da configuração hidrelétrica, com base nos custos de geração termelétrica associados a diversos cenários de afluência no futuro. Isso também não é de interesse deste trabalho e, portanto, não será incluída a função de custo futuro no problema.

⁶ Média das usinas.

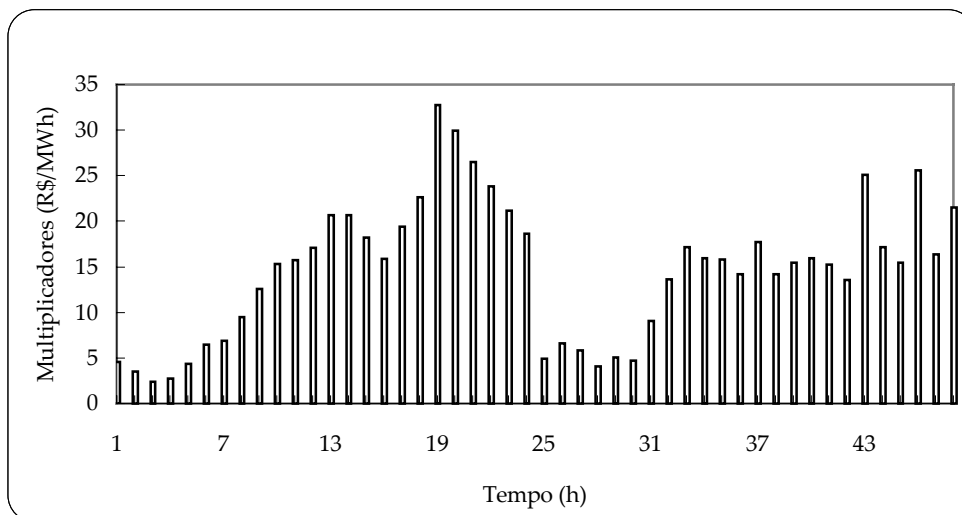


Figura 7.2.2 – Magnitude dos Multiplicadores de Lagrange, λd_{rr} .

Entretanto, para tentar emular⁷, pelo menos parcialmente, o efeito da função de custo futuro, foram impostos ao problema, limites mínimos de armazenamento dos reservatórios que devem ser atendidos no último estágio de estudo, os quais podem ser vistos na Tabela 7.2.4.

Os limites mínimos de armazenamento foram ajustados a partir da seguinte regra: encontra-se o volume associado à quantidade de água com a usina operando com engolimento máximo ao longo de todo o horizonte de estudo; por fim, este valor de volume é descontado do volume inicial de cada reservatório. Na maioria dos casos a regra acima ainda garantia um excesso de água para as usinas e então, nos testes, esses valores foram tornados mais restritos ainda, de modo a atingir os valores mostrados na Tabela 7.2.4.

Neste caso, onde existe a presença de limites de volumes finais, as cascatas podem ser otimizadas de forma independente. Isso não é verdadeiro quando a função de custo futuro está presente, uma vez que o valor futuro da água apresenta valores diferentes em cada usina. Deste modo, todo o sistema hidrelétrico é tratado com uma única cascata. O uso da função de custo futuro é bastante justificado em casos onde existem muitas usinas acopladas hidráulicamente e com grande variabilidade no comportamento das aflúências, conforme é o caso das usinas tratadas nesse trabalho. Conforme citado anteriormente, essa função não foi utilizada devido à indisponibilidade de um modelo de longo prazo para fornecer a mesma.

Tabela 7.2.4 – Limites Mínimos de Volumes Finais nos Reservatórios.

⁷ Fazer com que exista um limite de água para ser usado no presente (horizonte da programação).

Usina	Volume Final (hm ³)
1	14100
2	3000
3	8400
4	11100
5	10500
6	9700
7	13700
8	3750
9	2650
10	4650
11	1050
12	2700
13	4600
14	880
15	32600
16	27700
17	11800
18	19200

A próxima seção, a seguir, mostra alguns dos principais resultados obtidos a partir da aplicação da Relaxação Lagrangeana na otimização do problema descrito até aqui.

7.3 Desempenho Computacional

Nesta seção, três aspectos relativos à implementação realizada neste trabalho são tratados: a otimização do problema dual de (7.1.1); os subproblemas de alocação de unidades geradoras hidrelétricas, definido por (5.3.54); e ainda, o modelo de Programação Quadrática Seqüencial, usado na solução dos subproblemas contínuos (5.4.2.2) e (5.4.2.3).

7.3.1 Otimização do Problema Dual

Conforme visto no capítulo anterior, o subproblema hidrelétrico tem seu problema dual construído segundo as características particulares das usinas. Tais características referem-se ao tamanho do espaço de estados associado que, conforme visto, é função do total de unidades distintas e das respectivas zonas operativas. Em casos onde o número de estados (combinações) é pequeno, pode-se adotar como critério de solução o processo de enumeração exaustiva. Caso contrário dualizações adicionais são utilizadas para evitar o esforço computacional que teria para realizar a enumeração exaustiva em usinas com múltiplas faixas operativas e/ou unidades distintas. Esta seção tem por objetivo estabelecer diretivas que possam ser úteis na determinação do esquema de dualização a ser utilizado.

Quando se trabalha com a Relaxação Lagrangeana, um objetivo que deve ser, sempre que possível, almejada, diz respeito ao número de restrições utilizadas na construção de um específico problema dual. Pelo menos em tese, embora possa existir uma dependência relacionada com a natureza do problema, a qualidade da solução primal é uma função decrescente do total de restrições que estão sendo dualizadas.

Porém, dualizando-se poucas restrições corre-se o risco de ter que resolver subproblemas primais quase tão complicados quanto o próprio problema primal original. Deste modo, verifica-se que existe um compromisso entre o número de restrições dualizadas e a qualidade da solução primal proveniente dessa relaxação. Esse compromisso deve ser medido também com base no esforço computacional resultante do problema dual resultante.

Outro aspecto, que diz respeito ao uso da Relaxação Lagrangeana, está relacionada com a natureza das restrições dualizadas. Neste caso, a tarefa é decidir se restrições lineares, não-lineares, duplicadas, redundantes e restrições com presença de variáveis inteiras devem ou não ser dualizadas. Aqui a estratégia empregada também depende muito das peculiaridades do problema.

Com o objetivo de fornecer algumas respostas para as questões anteriormente apresentadas, três problemas duais com características específicas e associados com o subproblema hidrelétrico, foram implementados neste trabalho, e são definidos aqui da seguinte maneira:

- *caso enumerativo*: nesse problema dual, os subproblemas de alocação de unidades hidrelétricas são resolvidos por meio da enumeração de todos os estados viáveis, conforme (6.2.56);
- *caso decomposto*: neste caso, os subproblemas acima são resolvidos todos por duplicação e dualização das restrições artificiais (as restrições de reserva também são dualizadas), de acordo (6.2.57);
- *caso misto*: onde algumas usinas em particular fazem uso da decomposição (6.2.57) e as demais são resolvidas por enumeração.

As características dimensionais, bem como os principais resultados obtidos no tocante ao uso de cada um dos problemas duais acima descritos são analisadas a partir de agora.

De acordo com o capítulo anterior, além dos subproblemas de alocação de unidades geradoras hidrelétricas, o problema dual de (7.1.1) também exige que seja resolvido um subproblema de natureza linear, acoplado no tempo e no espaço, definido como subproblema hidráulico. Neste trabalho, esse subproblema é solucionado por meio do uso do pacote comercial de programação linear inteira-mista ILOG CPLEX 7.1 [134]. Vale ressaltar que o subproblema hidráulico é o responsável pelo tratamento explícito do acoplamento espacial entre os reservatórios, bem como as restrições fornecidas pelo modelo de mais longo prazo, entre outros⁸.

Nos três casos citados, segundo a decomposição proposta, é necessário dualizar restrições artificiais resultantes da duplicação das variáveis que representam as vazões turbinadas e vertidas⁹ nas usinas ao longo dos estágios da programação. Deste modo, é possível extrair o número de variáveis presente nos referidos problemas duais.

No caso enumerativo, tem-se um total de $(nr + nrv) \times nt$ variáveis duais, onde nr é o total de reservatórios, nrv é o total de reservatórios onde a produção depende da vazão vertida e nt é o número de estágios de tempo. Como $nt=48$, $nr=18$ e $nrv=14$, tem-se um total de 1536 variáveis duais, ou seja, 864 variáveis $\lambda_{q_{nt}}$ e 672 variáveis $\lambda_{s_{nr}}$ de acordo com (6.2.52). Os outros dois casos, o decomposto e o misto, representam um problema dual com dimensão maior ao caso enumerativo, naturalmente. As características desses dois problemas são detalhadas adiante.

Analisemos a partir de agora, os aspectos referente ao número de estados dos subproblemas de alocação, no tocante ao caso enumerativo. Exceto as usinas de Salto Osório (11) e Serra da Mesa (15), o número de combinações a serem testadas em cada estágio para as demais usinas da configuração é igual a $J(r)$ ¹⁰, onde $J(r)$ é o número de unidades disponíveis para a operação no reservatório r . Esse número só é alterado caso a restrição de reserva torne algum desses estados inviável.

⁸ Caso fossem modeladas, as seguintes restrições integrariam o subproblema hidráulico: limites de defluência ligadas ao controle de cheias, navegação, recreação, entre outros; máximo vertimento como função do volume armazenado no reservatório; tempos de viagem da água entre os reservatórios representados de forma mais sofisticada como, por exemplo, a mediante a aplicação das equações de Saint-Venant [135].

⁹ Só interessam as vazões vertidas das usinas que têm sua produção afetada pelo vertimento.

¹⁰ A combinação onde todas as unidades estão desligadas é, de antemão, considerada ineficaz.

Em geral, a restrição de reserva elimina poucos estados da árvore enumerativa. Para os valores de reserva mostrados anteriormente na Tabela 7.2.4, apenas quatro usinas devem manter no mínimo duas unidades geradoras operando para que não violem a referida restrição: Furnas (1), Marimbondo (2), Ilha Solteira (7) e Tucuruí (16). Além disso, os subproblemas de programação não-linear associados com esses estados eliminados requerem pouco esforço computacional, uma vez que os mesmos são de pequena dimensão devido ao reduzido número de unidades presentes.

No caso de Salto Osório (11) tem-se um total de 14 estados a serem investigados. Esse número pode ser obtido multiplicando-se o número de combinações possíveis em cada grupo que pertence a usina. No grupo 1, tem-se quatro unidades idênticas, cujo total de combinações é igual a cinco. Por sua vez, o grupo 2, com duas unidades idênticas, apresenta um total de 3 combinações. Fazendo o produto entre os dois grupos obtém-se um total de 15 estados. Excluindo a combinação na qual a reserva é certamente inviável, isto é, todas as unidades desligadas, chega-se finalmente no total de 14 estados a serem enumerados em cada estágio de tempo. Todos esses estados são viáveis com relação ao nível de reserva imposto para essa usina.

Por sua vez, Serra da Mesa (15) apresenta nove estados a serem investigados de um total de 27 estados possíveis (se todas as unidades fossem diferentes). Todos esses nove estados são viáveis perante a restrição de reserva.

Definido o número total de estados presente em cada usina e estágio de tempo, pode-se então determinar o montante de combinações (problemas de programação não-linear) que deve ser resolvido, no caso enumerativo, durante uma iteração do problema dual:

$$n_estados = \sum_{r=1}^{nr} \sum_{t=1}^{nt} (ncomb_ube_r) = 6288 \quad (7.3.1.1)$$

onde $ncomb_ube_r$ é o número total de combinações do r -ésimo reservatório durante o estágio t .

Assim, de posse do número total de variáveis duais e de subproblemas primais (estados) do caso enumerativo, é apresentado na seqüência os principais resultados da otimização do problema dual referente a este primeiro caso.

No caso enumerativo, o valor ótimo do problema dual encontrado foi de R\$ -17.339.230,0. Em média, o otimizador dual necessitou realizar 175 iterações, com três horas (180 minutos) de processamento em um computador Pentium III 550 MHz com 128 Mbytes de memória RAM. A linguagem de programação utilizada foi o Fortran¹¹, tendo como compilador o Compaq Visual Fortran Professional Edition 6.1.0 [136].

No intuito de encontrar o valor ótimo dual citado acima, a implementação fez uso de uma subrotina, também escrita em Fortran, e de livre uso acadêmica, chamada de N1CV2 Code [137]. Esta subrotina realiza a minimização irrestrita de uma função objetivo sem as usuais considerações de diferenciabilidade. Todavia, essa função deve ser convexa. Portanto, convexidade¹² e não-diferenciabilidade são características presentes no problema dual em questão. Em seu algoritmo, a N1CV2 necessita que um simulador forneça, para um determinado ponto, o valor da função objetivo e algum (arbitrário) vetor de subgradientes. O algoritmo básico usado pela subrotina, o qual faz uso dos conceitos relativos ao método dos feixes mostrado no Capítulo 6, está descrito em [103].

Na primeira iteração do caso enumerativo, todos os multiplicadores iniciais foram considerados iguais a um. Neste ponto, o valor da função dual é de R\$ -18.385.565,0. Embora a diferença relativa entre o ponto ótimo inicial e final seja de aproximadamente 10%, a diferença absoluta é de R\$ 1.046.335,0. O reflexo dessa variação pode ser observado na diferença da potência produzida nas usinas ao longo de todo o período. No início do processo iterativo, o total gerado em todo sistema é igual 1.234.751,5 MW¹³; por sua vez, na última iteração esse valor decresce para 818.984,28 MW.

Para ilustrar alguns resultados primais obtidos para esse primeiro caso, será feito uso de algumas variáveis específicas. Notadamente, deve-se lembrar que, na ausência da função de custo futuro, as cascatas são otimizadas de forma independente. Deste modo, algumas usinas dessas cascatas serão usadas para ilustrar tais resultados primais e duais, uma vez que apresentação de todos os resultados obtidos torna-se aqui proibitiva.

¹¹ O programa foi escrito quase em sua totalidade em Fortran 77. Pequenas declarações e inicializações foram de algumas variáveis foram implementados com base na linguagem Fortran 90.

¹² Minimiza-se o negativo da função dual que, por sua vez, torna-se uma função convexa.

¹³ Soma de todas as usinas e estágios.

No tocante à função dual, os dois grupos de restrições relaxadas, isto é, aquelas relacionadas com a duplicação das vazões turbinada e vertida nas usinas, tiveram comportamento distintos. Nenhuma das restrições relacionadas com as vazões vertidas nas usinas foram violadas. Em contrapartida, diversas restrições do grupo restante contribuíram para a construção do *gap* de dualidade do problema. Essas violações são tratadas a partir de agora.

Inicialmente, começaremos analisando um caso mais simples, o qual refere-se aos resultados primais obtidos na usina de Sobradinho (18). Essa usina, assim como Passo Fundo (14), Serra da Mesa(15), Tucuruí (16) e Três Marias (17), está isolada hidraulicamente das demais usinas do sistema o que, de certo modo, vem a facilitar uma análise introdutória dos resultados. O isolamento hidráulico deve-se ao fato que, além da ausência da função de custo futuro, o tempo de viagem entre Sobradinho (18) e Três Marias (17) é de 15 dias o que, conseqüentemente, excede o horizonte de estudo tratado neste trabalho. Na mesma situação, encontram-se as usinas de Serra da Mesa (15) e Tucuruí (16) onde o tempo de viagem da água entre as mesmas é de 10 dias. Por sua vez, Passo Fundo (14) não possui nenhuma usina a jusante.

Na Figura 7.3.1.1 estão ilustradas as vazões turbinadas obtidas na primeira iteração dual pelos subproblemas hidráulico, Q_{pl_ini} , e de alocação, Q_{pl_ini} , referentes a hidrelétrica de Sobradinho (18). Nesta situação, onde todos os multiplicadores λ_{q_t} e λ_{s_t} são iguais a um, é possível perceber como são tratadas as diversas restrições do problema primal original no esquema de dualização adotado. Na figura ainda são mostrados os preços ofertados para a potência de saída da usina ao longo dos estágios da programação, λ_{d_t} .

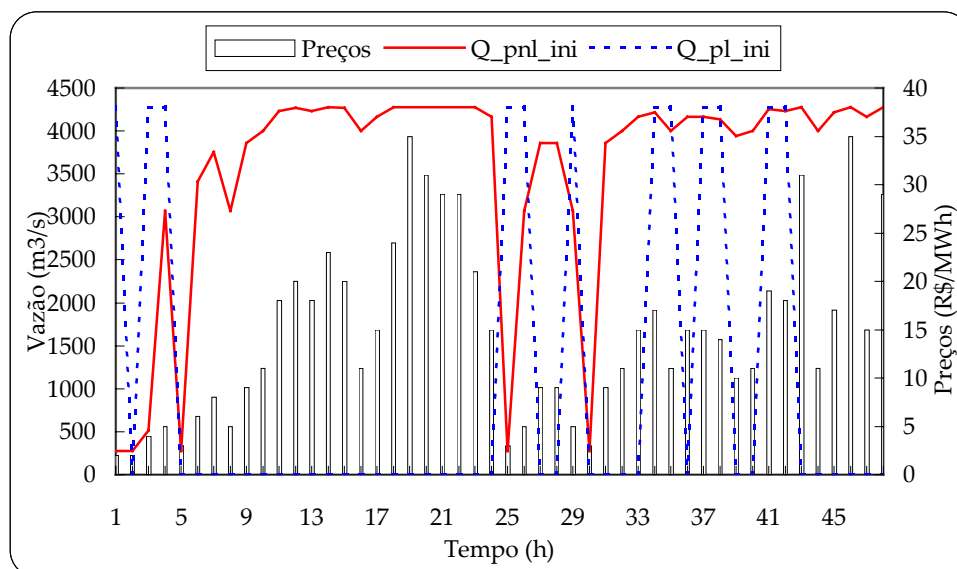


Figura 7.3.1.1 – Preços para a Potência de Saída e Vazões Turbinadas Obtidas na Primeira Iteração Dual pelos Subproblemas Hidráulico, Q_{pl_ini} , e de Alocação, Q_{pnl_ini} , referentes a Usina de Sobradinho (18).

De acordo com a figura, pode-se notar que os valores de Q_{pl_ini} apresentam apenas dois valores apenas: $0 \text{ m}^3/\text{s}$ e $4278 \text{ m}^3/\text{s}$, os quais representam os limites mínimos e máximos de vazão turbinada na usina, respectivamente. Esta é a maneira pela qual o subproblema hidráulico utiliza toda a água (ocorrendo vertimento nos estágios que detêm valores não nulos¹⁴ de vazão turbinada), ao longo de todo o horizonte da programação: atende as restrições de balanço da água no reservatório, bem como o limite de armazenamento imposto à usina no último estágio de tempo, concentrando as vazões defluentes nos estágios onde os multiplicadores para as respectivas vazões λ_{q_n} e λ_{s_n} são maiores¹⁵.

No que diz respeito aos valores de Q_{pnl_ini} pode-se notar que os mesmos apresentam um comportamento completamente diferente de Q_{pl_ini} . De acordo com a figura, em nenhum estágio de tempo os subproblemas de alocação fornecem vazões turbinadas na usina nula, conforme acontece no subproblema hidráulico.

¹⁴ Nos mesmos estágios apresentados na Figura 7.3.1.1, onde os valores Q_{pl_ini} são não nulos também foram verificadas vazões vertidas, cujos valores são iguais a $8556 \text{ m}^3/\text{s}$. Apenas no estágio 24 que foi encontrado um valor de vazão vertida igual a $7519,78 \text{ m}^3/\text{s}$.

¹⁵ Note que, neste caso onde esses multiplicadores inicialmente são todos iguais a um, existe a presença de soluções primais degeneradas.

Isso porque, os valores de Q_{pnl_ini} levam em consideração as restrições de reserva, as quais não permitem que a usina opere com um nível a de aproximadamente $276 \text{ m}^3/\text{s}^{16}$. Outra característica importante a ser observada no subproblema de alocação diz respeito ao efeito dos preços $\lambda_{d_{it}}$ nas decisões ótimas de vazões turbinadas. Isso pode ser mais bem observado na Figura 7.3.1.2, onde os preços e as respectivas vazões estão ordenados de forma crescente. É possível perceber que a vazão turbinada (e como conseqüência, a potência de saída) aumenta com o incremento dos preços $\lambda_{d_{it}}$. Note que os demais multiplicadores, $\lambda_{q_{it}}$ e $\lambda_{s_{it}}$ são todos iguais a um e por isso tal comportamento é apresentado.

Na verdade a relação entre preços e vazões ótimas é muito mais complexa do que mostrado na Figura 7.3.1.2. De todo modo, na seção seguinte, será feita uma análise específica no tocante à sensibilidade dos subproblemas de alocação com relação aos respectivos multiplicadores de Lagrange ligados aos mesmos, isto é, $\lambda_{d_{it}}$, $\lambda_{q_{it}}$ e $\lambda_{s_{it}}$. Para se ter uma idéia, observe o que acontece na usina, no tocante à vazão turbinada durante a transição dos estágios 6 e 7, onde os preços são 4 R\$/MW e 5 R\$/MW, respectivamente. Com apenas essa mudança de 1 R\$/MW no valor de $\lambda_{d_{it}}$, a variação de turbinamento na usina é de 2599,71 m^3/s , ou seja, 59,83 % da capacidade máxima nominal da mesma.

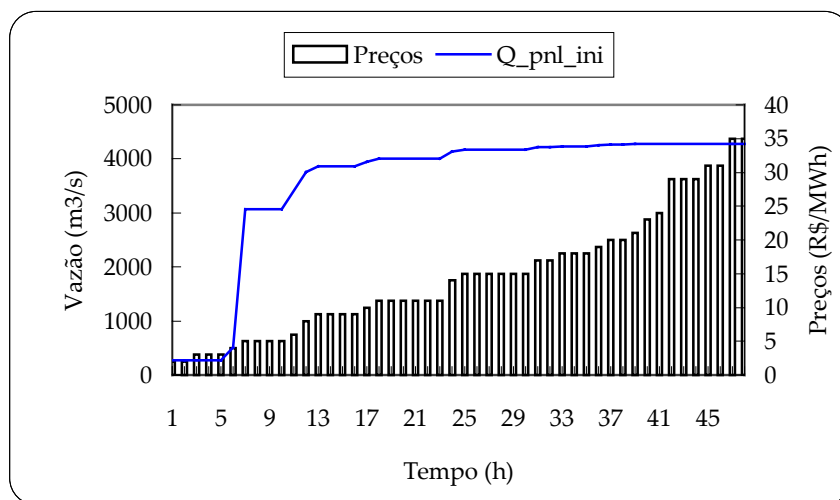


Figura 7.3.1.2 – Relação Entre Preços $\lambda_{d_{it}}$ e as Decisões Ótimas de Vazão Turbinada na Usina de Sobradinho (18) – Primeira Iteração Dual.

Todavia, ambas as figuras anteriores mostram que os subproblemas de alocação não observam diretamente o acoplamento temporal, bem como o subproblema hidráulico, de

¹⁶ Esse valor é correspondente a usina operar com uma unidade geradora em seu respectivo nível de geração mínimo, isto é, 60 MW.

forma idêntica, com relação aos preços ofertados para a potência¹⁷ de saída na usina, $\lambda_{d_{it}}$. Por isso as discrepâncias obtidas na primeira iteração dual e apresentadas entre as vazões turbinadas desses subproblemas, visualizadas anteriormente na Figura 7.3.1.1.

Com base nos resultados obtidos na primeira iteração dual, percebe-se que as “contas” precisam ser fechadas, isto é, a viabilidade primal necessita ser recuperada ou mais precisamente, neste caso não-convexo, diminuir a mesma o máximo possível. Nesse sentido, é necessário ajustar os multiplicadores de Lagrange $\lambda_{d_{it}}$ e $\lambda_{s_{it}}$, isto é, maximizar a função dual. A Figura 7.3.1.3 mostra as vazões turbinadas na usina de Sobradinho (18), na última iteração dual.

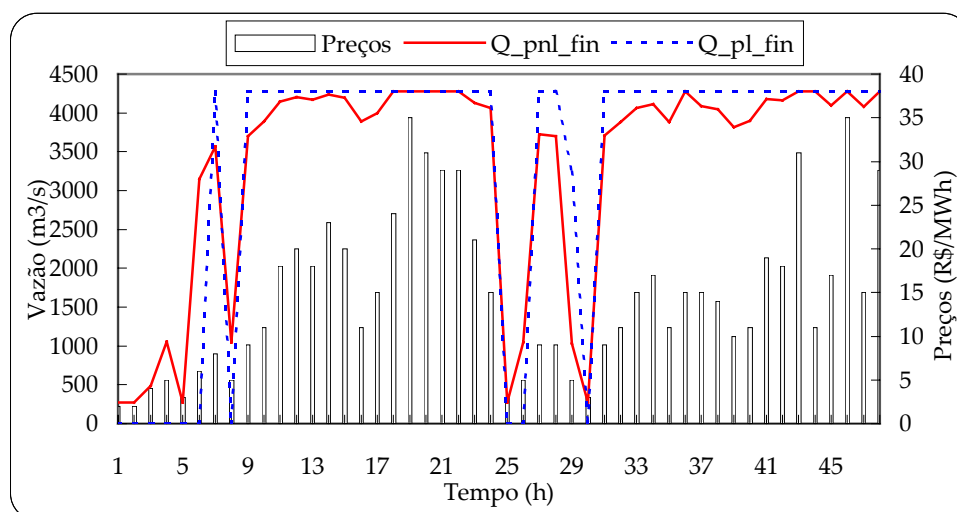


Figura 7.3.1.3 – Preços para a Potência de Saída e Vazões Turbinadas Obtidas na Última Iteração Dual pelos Subproblemas Hidráulico, Q_{pl_fin} , e de Alocação, Q_{pnl_fin} , referentes a Usina de Sobradinho (18).

Um aspecto importante que pode ser observado na Figura 7.3.1.3 diz respeito ao perfil apresentado pela vazão turbinada ao longo dos períodos de estudo. Pode-se notar que os valores de Q_{pl_fin} e Q_{pnl_fin} são mais elevados nos períodos onde os preços são mais elevados. Esse comportamento pode ser explicado com base no problema primal referente a Sobradinho (18). Inicialmente é interessante lembrar que essa usina está isolada hidraulicamente e com uma quantidade restrita de água para ser utilizada (imposta pelo limite mínimo de armazenamento e afluências nulas). No intuito de maximizar a potência na usina, essa

¹⁷ Na verdade não são apenas os preços para as potências das unidades que são determinantes no despacho do modelo não-linear. Deve-se lembrar que as unidades detêm características peculiares provenientes da modelagem das respectivas funções de produção. Deste modo, o que na verdade importa é a função resultante do

água deve ser mais utilizada em períodos onde os preços para as potências nas unidades são mais elevados.

Uma pausa aqui se faz necessária para analisar o efeito da função custo futuro, caso a mesma estivesse presente. Nesse sentido, o perfil de despachos apresentado na Figura 7.3.1.3 poderia ser alterado, uma vez que, ao invés de levar em consideração os períodos apenas, o efeito do acoplamento espacial também é analisado. Deste modo, por exemplo, uma usina em uma outra cascata poderia ter seu despacho priorizado em relação a Sobradinho (14) dependendo da configuração entre preços para as potências e valor futuro da água armazenada nos reservatórios.

Retornando-se aos resultados primais, as figuras 7.3.1.4, 7.3.1.5 e 7.3.1.6 apresentam as mesmas grandezas apresentadas para a Sobradinho (18), no tocante às usinas de Emborcação (4), Itumbiara (5) e Ilha Solteira (7), as quais estão acopladas hidráulicamente.

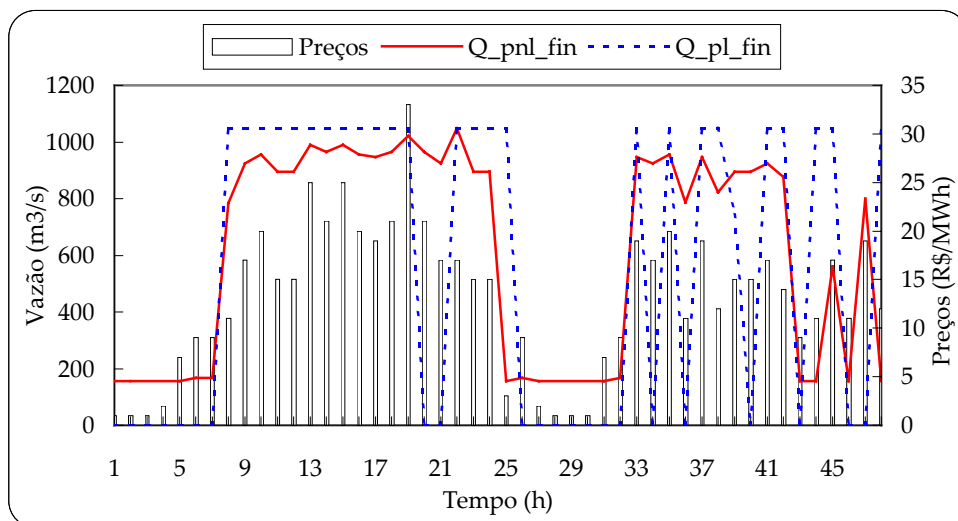


Figura 7.3.1.4 – Preços para a Potência de Saída e Vazões Turbinadas Obtidas na Última Iteração Dual pelos Subproblemas Hidráulico, Q_{pl_fin} , e de Alocação, Q_{pnl_fin} , referentes a Usina de Emborcação (4) – Caso Enumerativo.

produto entre esses preços e a função de produção, isto é, $\lambda_{d,t} \times \sum p_{j,t}(\cdot)$. Todavia, como se trata de uma usina isolada a análise com vistas apenas no preço da potência pode ser realizada.

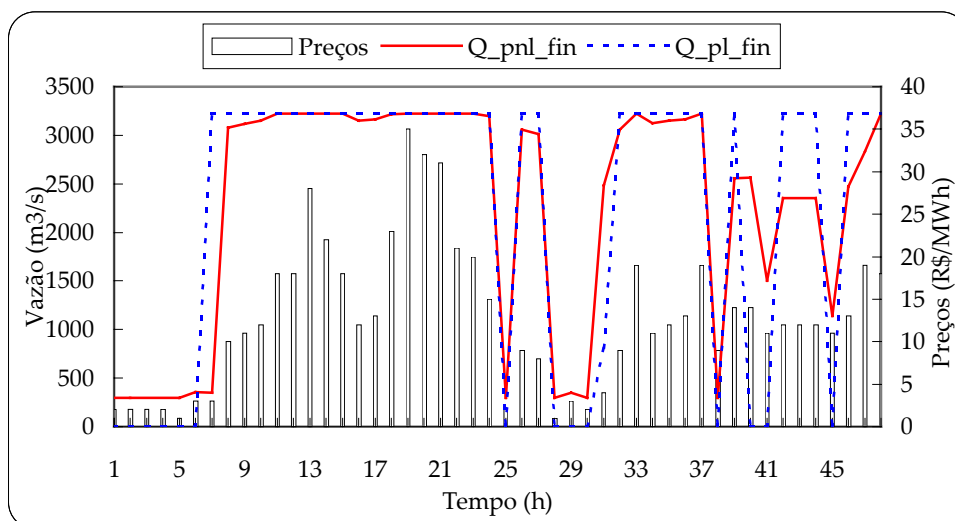


Figura 7.3.1.5 – Preços para a Potência de Saída e Vazões Turbinadas Obtidas na Última Iteração Dual pelos Subproblemas Hidráulico, Q_{pl_fin} , e de Alocação, Q_{pnl_fin} , referentes a Usina de Itumbiara (5) – Caso Enumerativo.

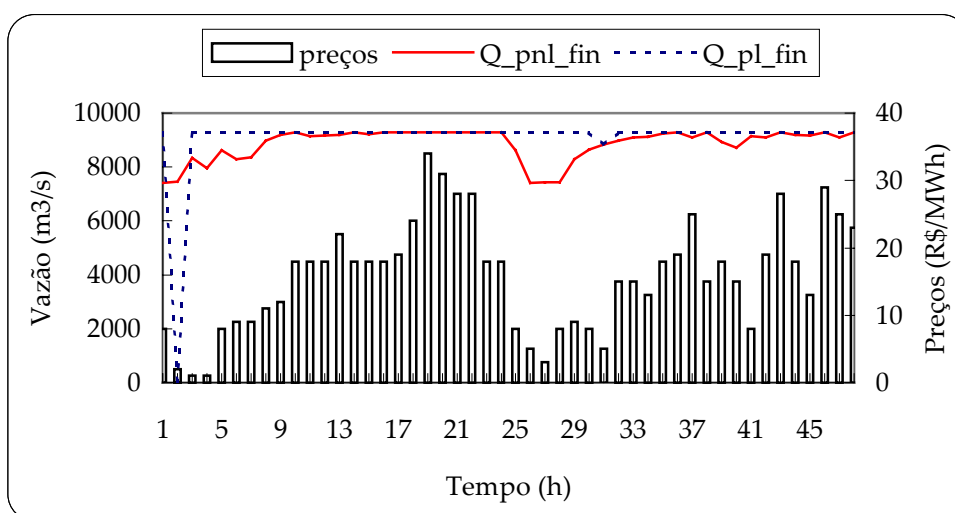


Figura 7.3.1.6 – Preços para a Potência de Saída e Vazões Turbinadas Obtidas na Última Iteração Dual pelos Subproblemas Hidráulico, Q_{pl_fin} , e de Alocação, Q_{pnl_fin} , referentes a Usina de Ilha Solteira (7) – Caso Enumerativo.

De acordo com as três figuras anteriores, os níveis mais elevados de vazões, assim como no caso de Sobradinho (18), também são encontrados nos períodos onde os preços das potências são mais elevados. Outro aspecto que pode ser notado nessas figuras diz respeito ao nível de violação primal encontrada nas respectivas usinas. É possível notar que, quanto mais a jusante está a usina, menor é a discrepância entre os valores primais fornecidos pelos subproblemas em questão. Tal fato está relacionado com a quantidade de água que a usina dispõe para a produção de energia (nas usinas a montante, a água é mais escassa quando comparado com as usinas a jusante). Entretanto, deve-se lembrar que as usinas na

cascata apresentam um perfil de preços λd_t bastante semelhante. Em situações diferentes a essa, a idéia acima pode não ser aceita.

Algumas usinas da cascata do rio Iguaçu apresentaram resultados interessantes no que diz respeito à violação das restrições dualizadas, os quais foram fortemente influenciados pela disponibilidade (elevada) de água. A usina de Segredo (9), por exemplo, não teve nenhuma restrição dualizada violada. Salto Santiago (10) teve em apenas dois estágios de tempo violações muito pequenas (na ordem de $10 \text{ m}^3/\text{s}$). Por sua vez, Salto Osório (11), cujos resultados estão apresentados na Figura 7.3.1.7, apresentou em 46 dos 48 estágios uma violação igual a $173,53 \text{ m}^3/\text{s}$. Tal fato está intrinsecamente ligado a restrição de reserva. Nesta usina, são requeridos $42,13 \text{ MW}$ de reserva, os quais não podem ser respeitados se todas as unidades operarem com seu engolimento máximo (e igual ao subproblema hidráulico). Neste perfil de despacho, os subproblemas de alocação têm como solução o valor de $1610,47 \text{ m}^3/\text{s}$, em contraste aos $1784 \text{ m}^3/\text{s}$ fornecidos pelo subproblema hidráulico.

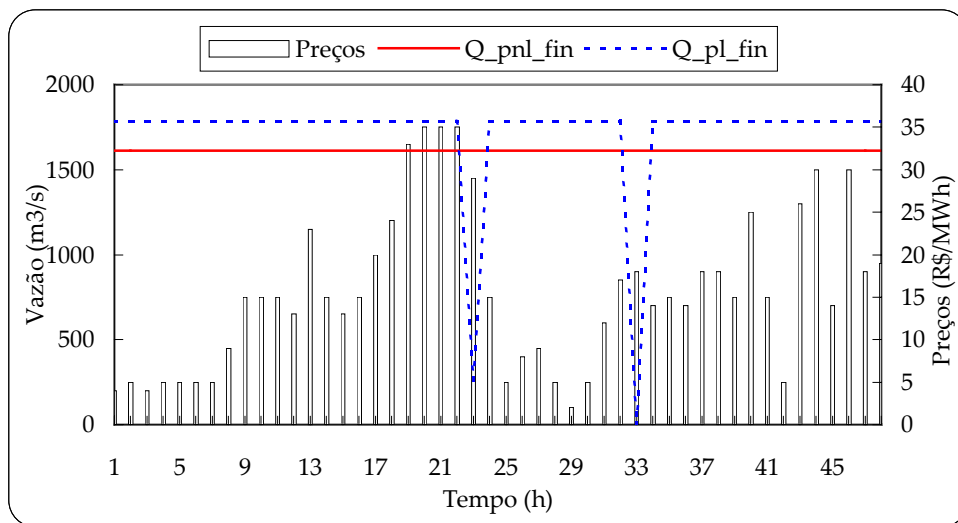


Figura 7.3.1.7 – Preços para a Potência de Saída e Vazões Turbinadas Obtidas na Última Iteração Dual pelos Subproblemas Hidráulico, Q_{pl_fin} , e de Alocação, Q_{pnl_fin} , referentes a Usina de Salto Osório (11) – Caso Enumerativo.

Outro aspecto peculiar à usina de Salto Osório (11) trata da distribuição de geração entre as respectivas unidades. Dado que neste caso existe unidades com características diferentes, a distribuição de potência entre as mesmas não é eqüitativa, conforme o verificado nas demais usinas do sistema. Para as quatro unidades do grupo 1, a potência de saída é igual a $171,47 \text{ MW}$; por sua vez, no grupo 2, as duas unidades operam com sua capacidade máxi-

ma, isto é, 175 MW. Deste modo, nota-se que toda a reserva da usina¹⁸ ficou ao encargo das unidades do grupo 1, dado que, essas unidades são menos eficientes que as demais. Ainda com relação a cascata do Rio Iguaçu, a usina de Foz do Areia (9) apresentou resultados de violação das restrições dualizadas muito semelhantes às aquelas encontradas na usina de Emborcação (4), mostrada anteriormente. Deve-se lembrar que essas duas usinas ficam na posição mais a montante das respectivas cascatas.

A partir de agora será abordado o segundo problema dual referente a (7.1.1): o caso decomposto. Duas mudanças são significativas neste novo problema dual, quando comparado com o caso enumerativo: o tamanho do mesmo e a natureza dos subproblemas primais associados.

Inicialmente vale lembrar que a natureza do subproblema hidráulico é idêntica ao caso enumerativo, uma vez que as novas restrições dualizadas dizem respeito apenas aos subproblemas de alocação de unidades geradoras. No tocante ao tamanho do problema, o número de variáveis duais associadas ao caso decomposto é dado por $(2 \times nr + nrv + ngmix) \times nt$, onde $ngmix$ é o número total de unidades geradoras do sistema. Conseqüentemente, dado que neste dual $ngmix = 121$, tem-se 8208 variáveis no problema. Com relação aos novos subproblemas primais associados, de acordo com o capítulo anterior, é possível observar que, para cada usina e estágio de tempo, apenas um problema de programação não-linear, mostrado em (5.3.68), necessita ser resolvido. Deste modo, o número total de problemas dessa natureza a serem resolvidos em cada iteração dual é igual a $nr \times nt = 864$, ou seja, aproximadamente 13,75% do montante necessário para a decomposição enumerativa.

Assim como no caso enumerativo, na primeira iteração do caso enumerativo, todos os multiplicadores foram considerados iguais a um, inclusive aqueles associados com as restrições artificiais e de reserva dualizadas. Neste ponto inicial, o valor da função dual é de R\$ -19.055.570,0. O valor ótimo do problema dual encontrado foi de R\$ -17.450.168,0, realizando em média 325 iterações e 50 minutos de processamento.

¹⁸ Cada unidade do grupo 1 fica responsável por $(182-171,47) = 10,53$ MW de reserva. Assim, os 41,13 MW da reserva na usina são respeitados por essas unidades.

Como primeira constatação, pode-se perceber que o ponto ótimo da função dual encontrado aqui possui valor menor do que aquele encontrado no caso anterior analisado. Dado que a solução do problema dual é sempre um limite inferior para a solução do problema primal, pode-se perceber que a qualidade das variáveis primais do caso enumerativo são superiores às encontradas no caso decomposto. Esse fato já era esperado, uma vez que, conforme é visto na seqüência, muitas restrições dualizadas neste último esquema são violadas.

Inicialmente, vamos fazer uso da usina de Sobradinho (18), para realizar algumas comparações entre os resultados primais obtidos entre os casos enumerativo e decomposto. A Figura 7.3.1.8 ilustra a diferença entre as vazões turbinadas, resultantes dos subproblemas hidráulico, Q_{pl_fin} , e de alocação, Q_{pnl_fin} obtidas no caso decomposto. Novamente, os valores dos preços para a potência na usina também são ilustrados.

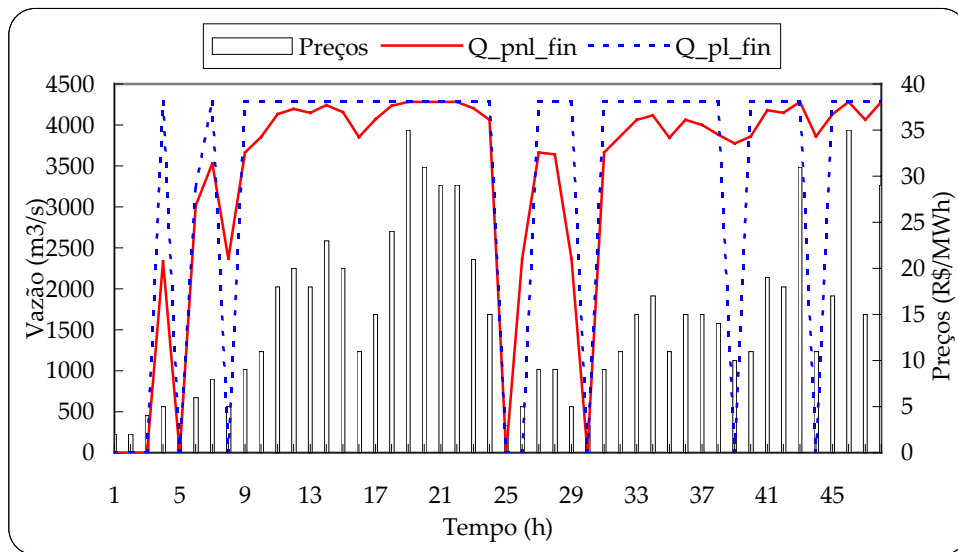


Figura 7.3.1.8 – Preços para a Potência de Saída e Vazões Turbinadas Obtidas na Última Iteração Dual pelos Subproblemas Hidráulico, Q_{pl_fin} , e de Alocação, Q_{pnl_fin} , referentes a Usina de Sobradinho (18) – Caso Decomposto.

Em comparação com o caso enumerativo, a figura anterior ilustra algumas diferenças encontradas no caso decomposto no tocante aos níveis de turbinamento na usina; diferenças essas notadas tanto nas variáveis provenientes do subproblema hidráulico, quanto aquelas relacionadas com os subproblemas de alocação. No que diz respeito a estes últimos, pode-se notar acima que, em diversos estágios de tempo, a geração na usina é nula, ou seja, existe, pelo menos, violação da restrição de reserva.

Deve-se ressaltar aqui que os subproblemas de programação não-linear referente ao modelo decomposto foram implementados de forma diferente àquela apresentada em (5.3.68). Nessa expressão, a única restrição presente refere-se ao atendimento da conservação da massa da água nos condutos forçados da usina. Na implementação, com o propósito de utilizar o mesmo modelo de programação não-linear construído para o caso enumerativo, algumas restrições adicionais ao Subproblema (5.3.68) foram incluídas. Essas restrições dizem respeito aos limites de potência das zonas operativas e de reserva. A diferença para o caso enumerativo está no fato de que todos os limites mínimos de potência das unidades são considerados iguais a zero. Os limites máximos de potência nas unidades geradoras e a restrição de reserva (cujas variáveis inteiras associadas são ajustadas em 1) são mantidas. Deste modo, o subproblema em questão está mais restrito, quando comparado a (5.3.68) e, portanto, pode-se dizer que, sem essas restrições adicionais, o nível de violação entre os casos enumerativo e decomposto seria maior do que o apresentado aqui. O efeito da inclusão dessas restrições, referente a alguns casos específicos, é mostrado adiante.

Na seqüência são mostrados os resultados primais obtidos pelo caso decomposto, no tocante as usinas de Emborcação (4), Itumbiara (5) e Ilha Solteira (7).

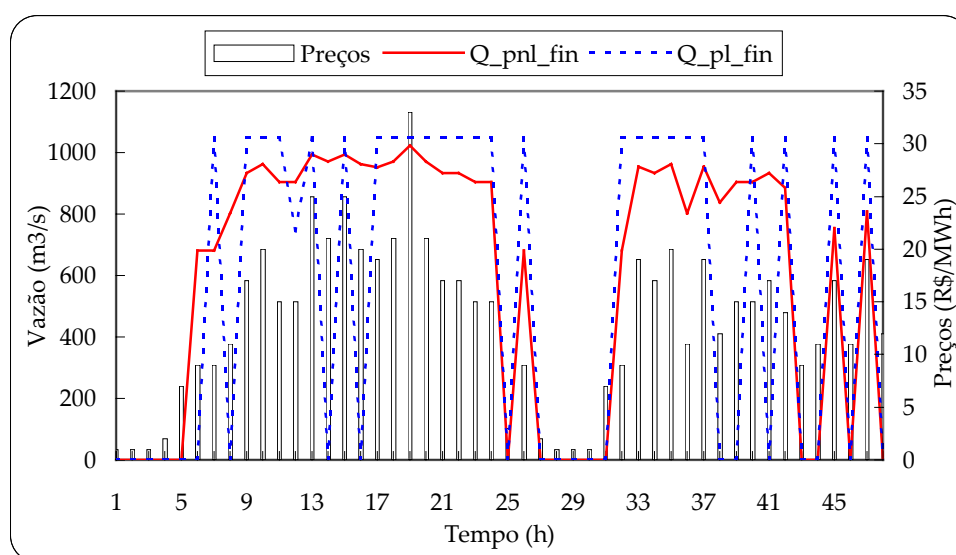


Figura 7.3.1.9 – Preços para a Potência de Saída e Vazões Turbinadas Obtidas na Última Iteração Dual pelos Subproblemas Hidráulico, Q_{pl_fin} , e de Alocação, Q_{pnl_fin} , referentes a Usina de Emborcação (4) – Caso Decomposto.

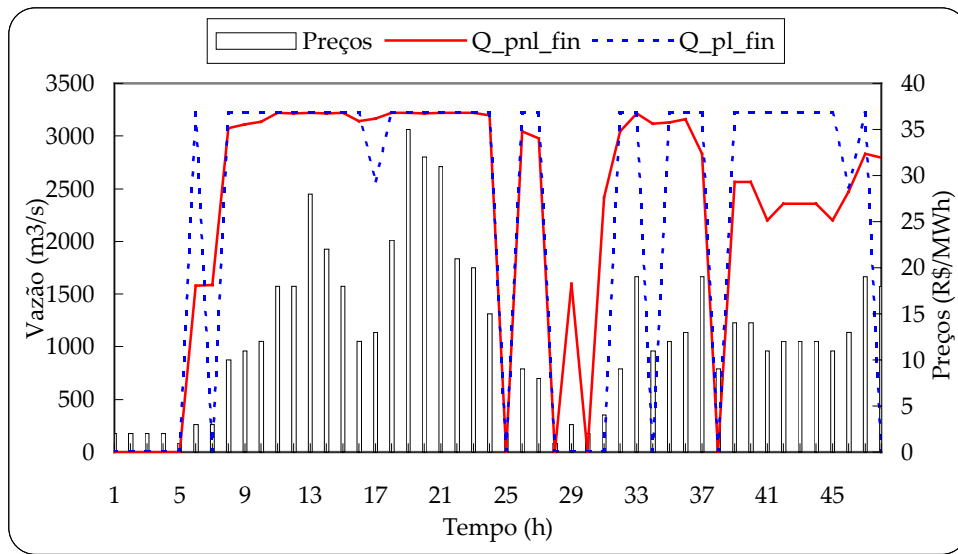


Figura 7.3.1.10 – Preços para a Potência de Saída e Vazões Turbinadas Obtidas na Última Iteração Dual pelos Subproblemas Hidráulico, Q_{pl_fin} , e de Alocação, Q_{pnl_fin} , referentes a Usina de Itumbiara (5) – Caso Decomposto.

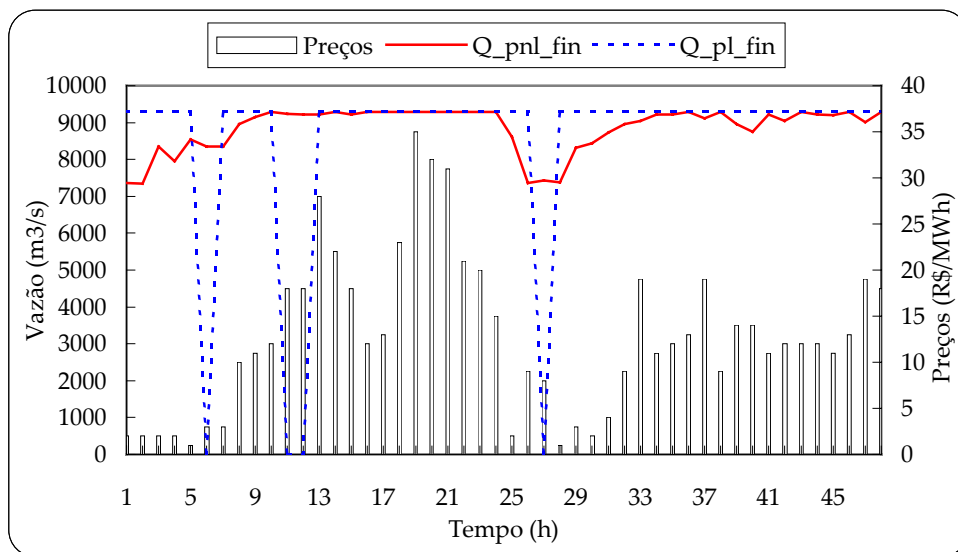


Figura 7.3.1.11 – Preços para a Potência de Saída e Vazões Turbinadas Obtidas na Última Iteração Dual pelos Subproblemas Hidráulico, Q_{pl_fin} , e de Alocação, Q_{pnl_fin} , referentes a Usina de Ilha Solteira (7) – Caso Decomposto.

É possível notar nessas figuras que o nível de violação das restrições de vazão turbinadas dualizadas do modelo decomposto é superior aquele encontrado no caso enumerativo. Conforme citado anteriormente, o caso enumerativo não apresentou qualquer violação nas restrições dualizadas relacionadas com as vazões vertidas nas usinas. No caso decomposto, porém, foram encontradas algumas violações. Tal fato ocorreu nas três usinas mais a jusante da cascata do Rio Iguaçu, conforme mostra a Figura 7.3.1.12. Deve-se ressaltar que essa cascata, mesmo com os limites de volumes finais impostos ao horizonte de estudo, detém

abundância de água para a geração. Com exceção da usina mais a montante no Rio Iguaçu, as demais apresentaram, nos dois casos analisados até aqui, um perfil de geração elevado ao longo de todos os períodos.

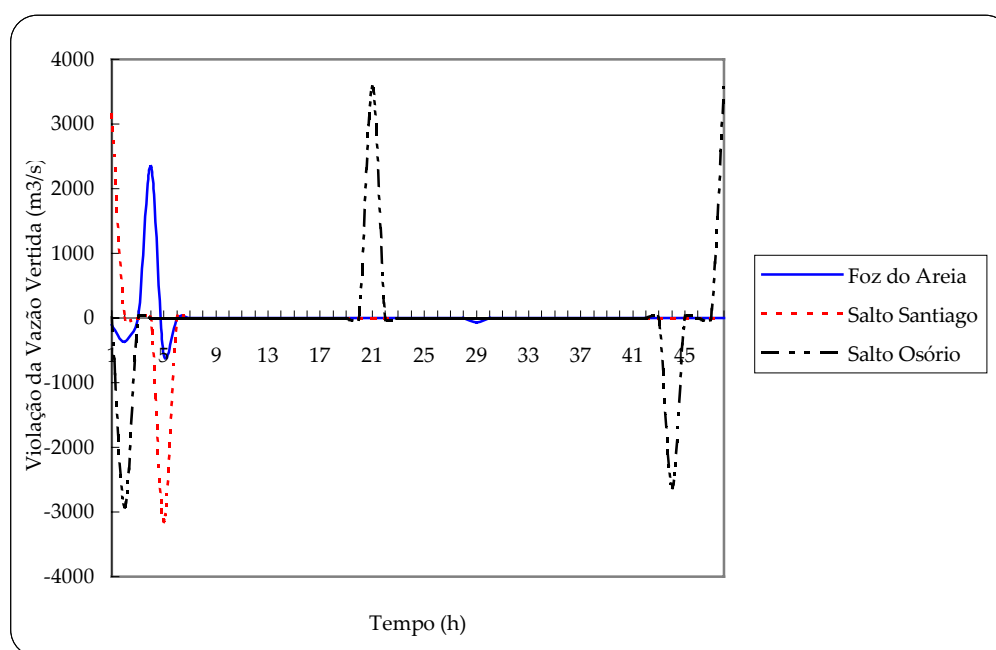


Figura 7.3.1.12 – Violações das Restrições Ligadas às Vazões Vertidas Encontradas no Caso Decomposto.

O nível elevado de oferta de água, bem como a presença dos multiplicadores ligados às restrições artificiais e de reserva, devem ter contribuído para a presença dos desvios nas vazões vertidas nas referidas usinas, ocorridas nas usinas mostradas na figura anterior, no tocante ao caso decomposto.

Com relação às restrições artificiais e de reserva, de acordo com o esquema mostrado em (6.2.57)-(6.2.71), tem-se que as mesmas são tratadas, por meio dos respectivos multiplicadores de Lagrange, em uma série de subproblemas de naturezas diferentes: um subproblema contínuo não-linear (que considera todas as unidades da usina simultaneamente), e os demais de programação linear inteira-mista (no qual as unidades são otimizadas individualmente). Com base nesses aspectos relativos às distintas naturezas dos subproblemas envolvidos, é de se esperar que muitas dessas restrições sejam violadas, semelhantemente ao que foi constatado com as restrições dualizadas de vazões turbinadas nas usinas (e, em alguns casos específicos, vazões vertidas).

Nos testes realizados, a maioria das violações das restrições de reserva acontece quando todas as variáveis dos subproblemas inteiro-misto linear e contínuo não-linear são nulas simultaneamente. Em contrapartida, as restrições artificiais somente não foram violadas nessa situação, ou seja, quando as variáveis dos subproblemas inteiro e contínuo deram nulas. Essa situação, porém, representa um caso de inviabilidade da restrição da reserva.

A figura abaixo mostra o nível de geração calculado nos subproblemas inteiro-misto linear, ph_pim , e contínuo não-linear, ph_pnl , no tocante a usina de Furnas (1). Nessa figura podem ser vistos ainda os preços para a potência de saída da usina ao longo dos estágios de tempo.

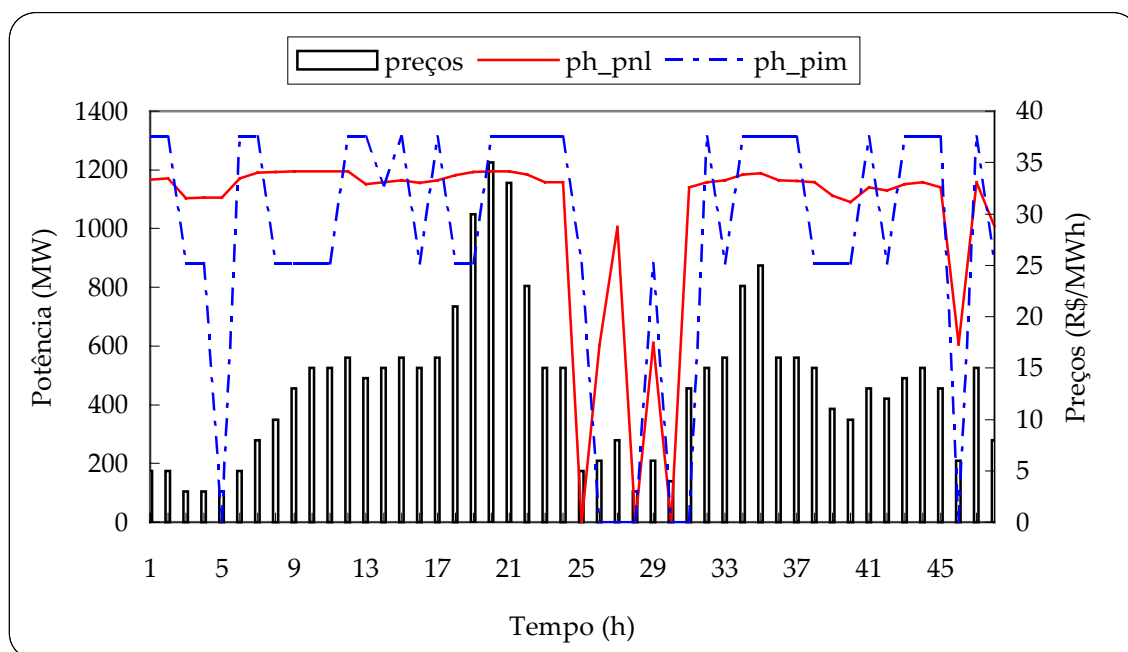


Figura 7.3.1.13 – Perfil de Geração na Usina de Furnas (1) – Comparação entre as Potências Fornecidas pelos Modelos Contínuo Não-Linear, ph_pnl , e Inteiro-Misto Linear, ph_pim .

Na figura acima, nota-se que o subproblema inteiro-misto linear fornece apenas os seguintes valores de despacho: 0, 880, 1148¹⁹ e 1312 MW. Esses despachos estão relacionados à natureza linear desse subproblema. 880 MW significa que a usina opera com as suas oito unidades nos respectivos níveis mínimos de geração, isto é, 110 MW. Por sua vez, 1148 MW representa sete unidades com capacidade máxima, 164 MW, e uma desligada. Por fim, 1312 MW é a capacidade máxima nominal da usina.

¹⁹ Estágio 14.

Em contrapartida, pode-se notar que, salvo alguns estágios onde a geração é nula, os resultados do modelo contínuo diferem do modelo inteiro-misto analisado. Outro aspecto importante a ser analisado diz respeito ao comportamento diferenciado de ph_pim e ph_pnl em relação aos preços das potências.

Abaixo, uma figura semelhante àquela apresentada para a usina de Furnas (1) também é mostrada para Salto Osório (11).

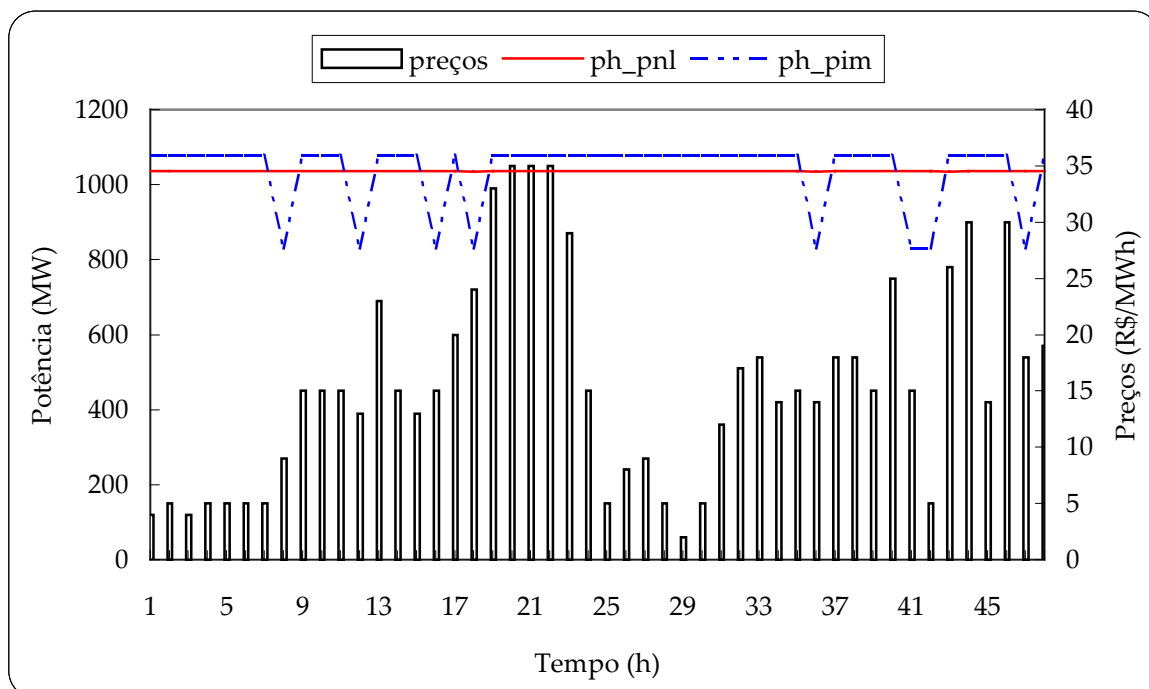


Figura 7.3.1.14 – Perfil de Geração na Usina de Salto Osório (11) – Comparação entre as Potências Fornecidas pelos Modelos, Contínuo Não-Linear, ph_pnl , e Inteiro-Misto Linear, ph_pim .

Conforme citado anteriormente, algumas usinas do Rio Iguaçu estão com excesso de disponibilidade de água para geração. Assim, é possível notar que as disparidades entre ph_pnl e ph_pim foram menores do que aqueles visto na figura anterior (que representam o caso geral observado) cuja usina está com esse recurso mais restrito.

Para o caso de Salto Osório (11), representado na Figura 7.3.1.14, ph_pim apresentou apenas dois valores: 830 MW (as seis unidades da usina operando em geração mínima) e 1078 MW (unidades do grupo um, despachadas em 182 MW e as do grupo dois com 175

MW, isto é, geração máxima nominal para a usina). Por sua vez, ph_pnl apresentou um comportamento constante em torno de 1035 MW²⁰.

Deve-se notar que o modelo contínuo não atinge o valor máximo (1078 MW), uma vez que, conforme dito anteriormente, a restrição de reserva foi mantida no subproblema de referência.

Todavia, ainda que o montante de potência na usina tenha sido equivalente ao longo dos estágios, deve-se ressaltar que a distribuição de potência entre as unidades dessa usina sofreu alterações quando comparadas ao caso enumerativo. A comparação relativa a essa distribuição é vista na Figura 7.3.1.15, adiante.

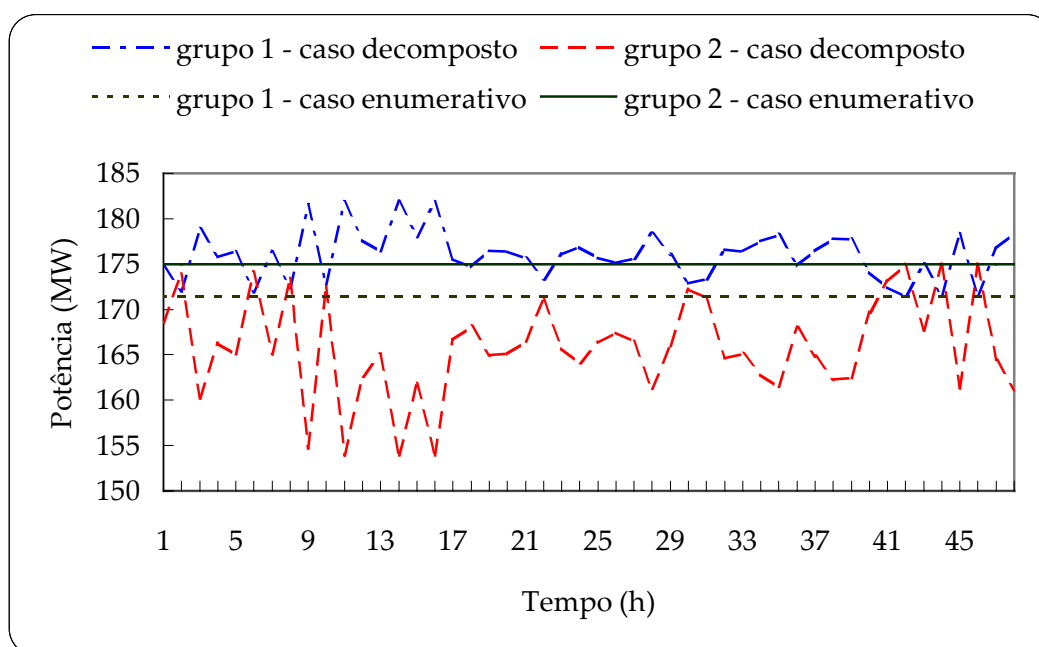


Figura 7.3.1.15 – Diferentes Valores de Despacho Obtidos nas Unidades de Salto Osório (11) nos Casos Decomposto e Enumerativo.

Outro aspecto interessante notado no caso decomposto é ilustrado na Figura 7.3.1.16, a qual apresenta o comportamento dos despachos e preços das potências referentes a usina de Serra da Mesa (15). Deve-se lembrar que essa é a única a apresentar unidades geradoras com mais de uma faixa operativa. Mesmo detendo duas faixas, o modelo inteiro-misto não consegue despachar, em nenhum instante, as unidades em 230 MW (limite máximo da faixa 2) e 290 MW (limite mínimo da faixa 1). Foram verificados os seguintes despachos: 0 MW, 425 MW (uma unidade no máximo da faixa 2), 630 MW (três unidades no

²⁰ Os valores de ph_pnl variam de 1035,16 a 1035,87 MW.

mínimo da faixa 1) e 1275 MW (capacidade máxima da usina). Ao que tudo indica, o problema dual decomposto está resolvendo uma versão convexa desses subproblemas, admitindo que as unidades dessa usina detêm apenas uma faixa operativa cujos limites mínimo e máximo são, respectivamente, 210 e 425 MW²¹. Essa situação, que representa um mesmo problema dual que é encontrado em dois problemas primais diferentes, fora ilustrado na Figura 5.2.5, no Capítulo 5.

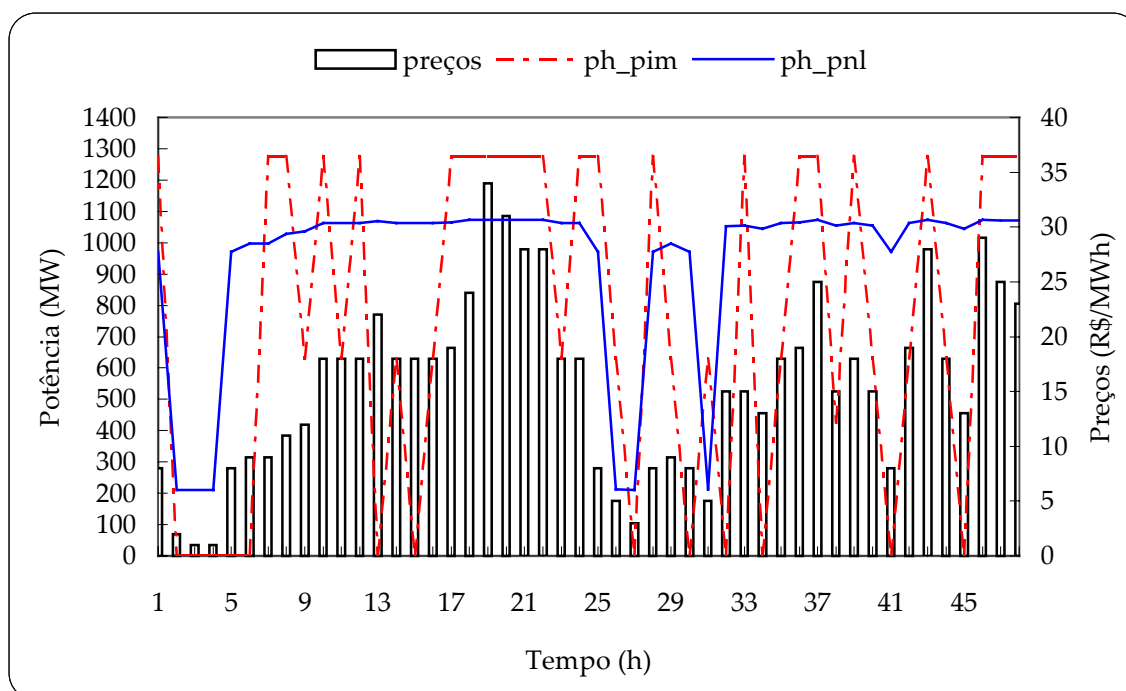


Figura 7.3.1.16 – Perfil de Geração na Usina de Serra da Mesa (15) – Comparação entre as Potências Fornecidas pelos Modelos, Contínuo Não-Linear, ph_pnl , e Inteiro-Misto Linear, ph_pim .

Por fim, a análise comparativa dos desempenhos obtidos entre os problemas duais relacionados com os casos enumerativo e decomposto necessita abranger, além das soluções primais mostradas até então, a ordem de grandeza das variáveis duais encontradas na última iteração dual. Essas variáveis, dizem respeito àquelas comuns entre os dois casos, isto é, os multiplicadores de Lagrange das restrições dualizadas de vazões turbinada e vertida nas usinas e estágios de tempo, isto é, λ_{q_t} e λ_{s_t} . Alguns casos específicos são mostrados e comentados na seqüência.

²¹ Esse comportamento pode ser visto a partir da análise do Problema (6.3.2.6)

Nas figuras 7.3.1.17, 7.3.1.18 e 7.3.1.19 são mostradas comparações, referentes aos casos enumerativo e decomposto, entre os multiplicadores ótimos $\lambda_{q,t}$ para as usinas de Emborcação (4), Itumbiara (5) e Ilha Solteira (7), respectivamente.

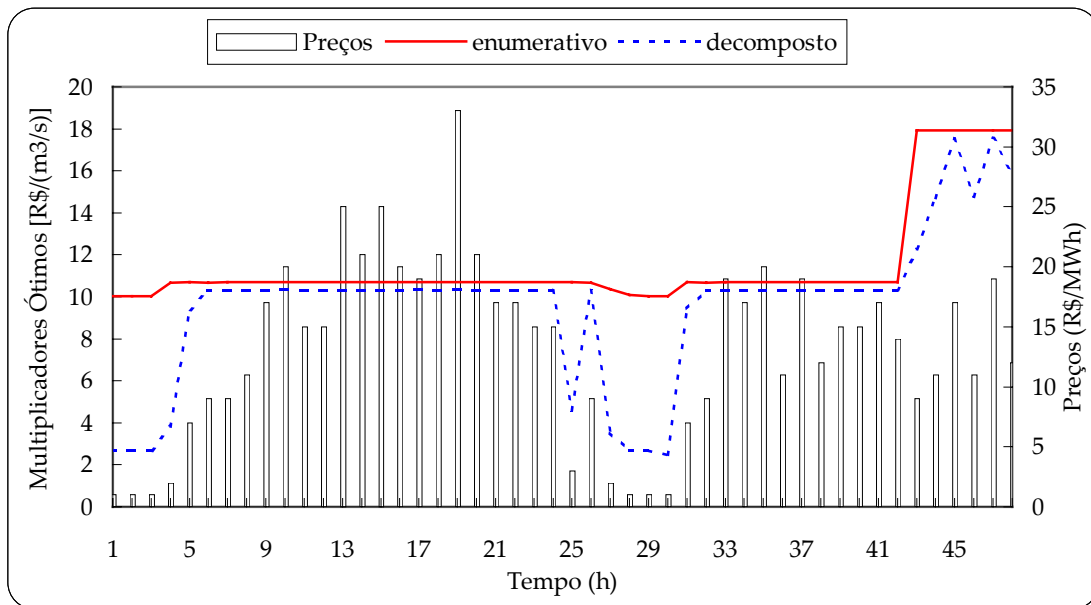


Figura 7.3.1.17 – Multiplicadores $\lambda_{q,t}$ Ótimos Encontrados nos Casos Enumerativo e Decomposto – Usina de Emborcação (4).

As usinas situadas nas posições mais a montante das cascatas, tais como Furnas (1), Foz do Areia (8) e Machadinho (12), apresentaram um perfil semelhante aquele apresentado na figura acima, no que diz respeito aos multiplicadores $\lambda_{q,t}$ obtidos nos casos enumerativo e decomposto. Nessa figura é possível notar que em alguns períodos que a relação entre os multiplicadores ótimos encontrados nos dois problemas duais é acentuada (na ordem de 3 vezes). As maiores disparidades entre os multiplicadores ocorrem nos períodos onde os preços das potências são menores, isto é, existe grande diferença entre os resultados primais fornecidos pelos subproblemas, hidráulico e de alocação.

Além das usinas citadas acima, comportamento semelhante ao apresentado na Figura 7.3.1.17 também foi verificado nas usinas de Passo Fundo (14), Serra da Mesa (15), Tucuruí (16), Três Marias (17) e Sobradinho (18). Conforme visto, essas usinas detêm quantidade de água limitada para a produção de energia ao longo do horizonte de estudo.

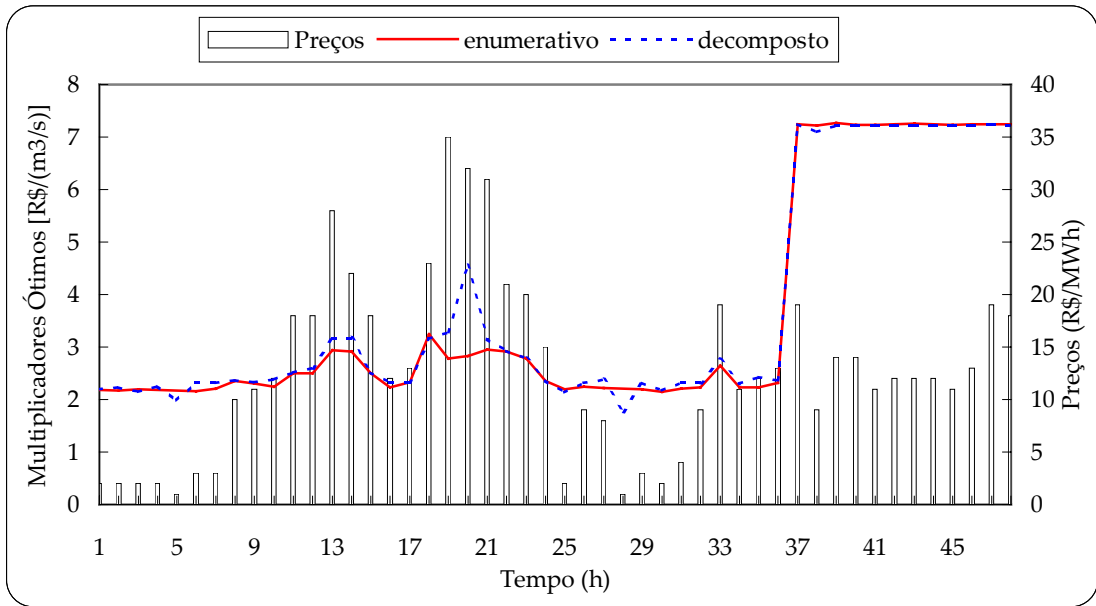


Figura 7.3.1.18 – Multiplicadores $\lambda_{q,t}$ Ótimos Encontrados nos Casos Enumerativo e Decomposto – Usina de Itumbiara (5).

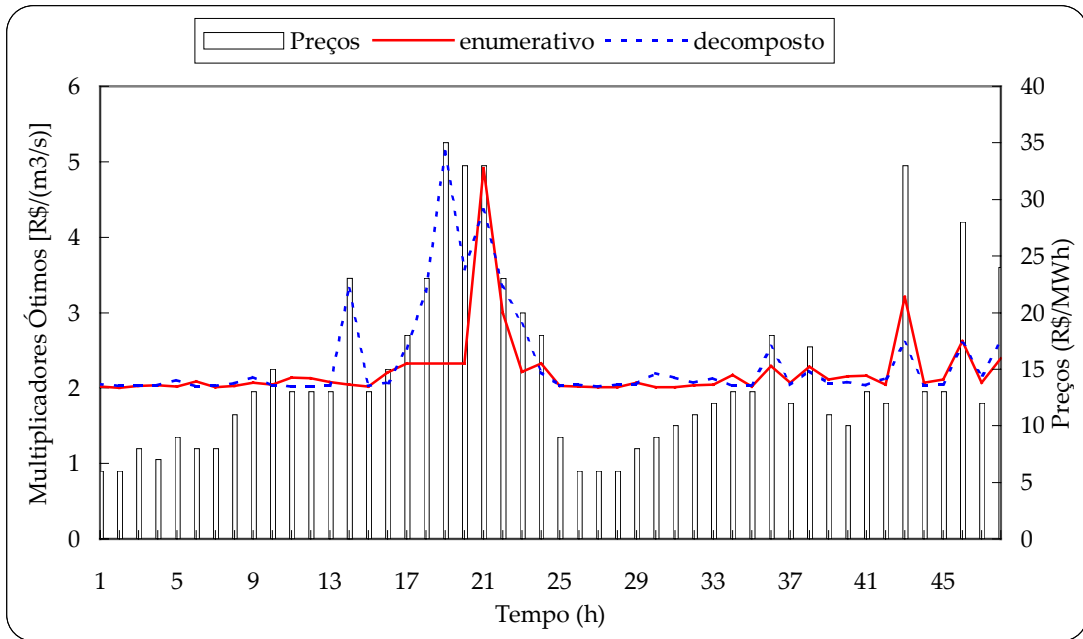


Figura 7.3.1.19 – Multiplicadores $\lambda_{q,t}$ Ótimos Encontrados nos Casos Enumerativo e Decomposto – Usina de Ilha Solteira (7).

No caso das figuras 7.3.1.18 e 7.3.1.19 é possível notar que a ordem de grandeza dos multiplicadores $\lambda_{q,t}$ dos problemas duais enumerativo e decomposto são, em sua grande maioria, equivalentes. Além das respectivas usinas mostradas nessas figuras, esse comportamento é verificado também nas usinas de Marimbondo (2), Água Vermelha (3), São Simão (6), Segredo (9), Salto Santiago (10) e Itá (13).

Por sua vez, de forma relativa, a usina de Salto Osório (11) foi a que apresentou os maiores desvios das variáveis duais em análise, as quais são mostradas na Figura 7.3.1.20. Em alguns estágios de tempo, o valor do multiplicador ótimo referente ao caso enumerativo chega a quase dez vezes o valor do respectivo multiplicador encontrado no caso decomposto.

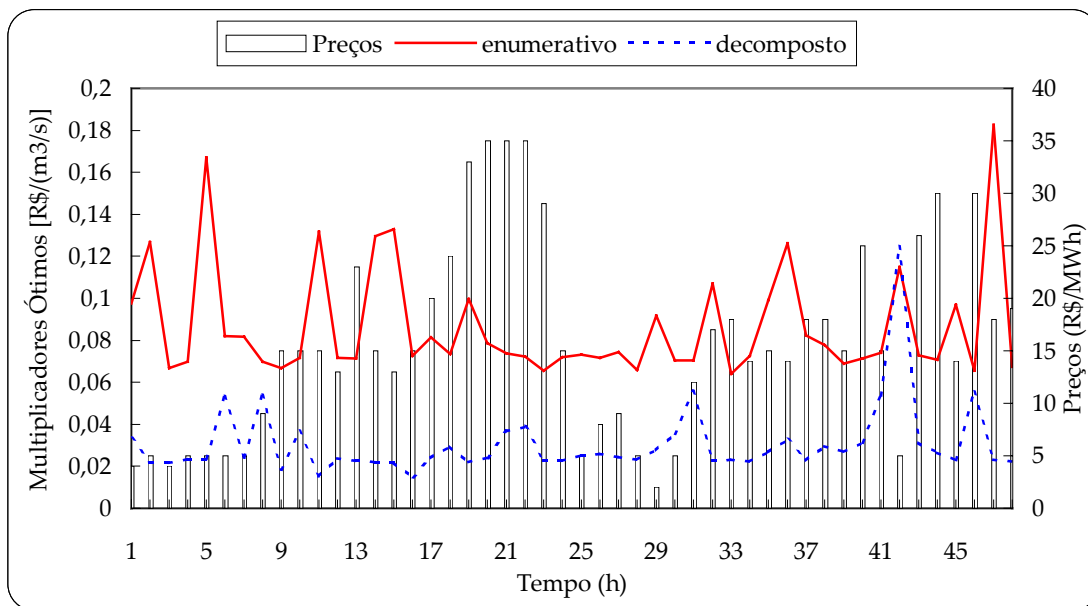


Figura 7.3.1.20 – Multiplicadores Ótimos Relacionados com a Vazão Turbinada na Usina de Salto Osório (11) – Comparação Entre os Casos Decomposto e Enumerativo.

No caso de Salto Osório (11), porém, a diferença acima nas variáveis duais não mudou muito a vazão turbinada na usina, quando comparado ao caso enumerativo. Todavia, a distribuição dessa água foi sensivelmente alterada, conforme visto na Figura 7.3.1.15. Esse comportamento ilustra a grande sensibilidade que o modelo não-linear contínuo apresenta em relação aos multiplicadores de Lagrange.

Para finalizar a comparação entre os problemas duais associados aos casos enumerativo e decomposto é necessário fazer algumas reflexões. Não há dúvida que, em termos de qualidade da solução *primal-dual* encontrada, o problema dual do caso enumerativo se revela superior e deve ser a primeira opção de implementação sempre quando possível. Todavia, os resultados mostraram que os tempos computacionais do caso decomposto foram em média três vezes e meio superior ao caso enumerativo, numa base de tempo horária. Deve-se lembrar que o esquema decomposto é usado para tratar o aspecto enumerativo presente nos

subproblemas de alocação. Deste modo, o que está sendo visado é encontrar um despacho para a usina que se aproxime o máximo possível do caso enumerativo.

De acordo com as figuras anteriores, pode-se perceber que o sucesso da estratégia adotada para realizar essa aproximação irá depender, dentre várias coisas, da disponibilidade de água que a usina ou a cascata dispõe para a operação. Quando é necessário trabalhar com potência elevada, a aproximação é boa, visto que, nesses casos, embora existam violações de diversas restrições dualizadas, a vazão turbinada final não difere muito entre os casos estudados (embora possa existir significativa mudança entre a distribuição de potência entre as unidades, principalmente quando as mesmas não são todas idênticas). Porém, quando é necessário trabalhar com níveis de reduzidos (ou mesmo intermediários) de geração na usina, o tratamento com as faixas operativas e a restrição de reserva fica menos eficiente no caso decomposto.

Sob ponto de vista do problema dual, esse controle de quanto a usina deve produzir em um determinado estágio de tempo é feito pelos multiplicadores de Lagrange associados às restrições de vazão turbinada e vertida. O modo como isso é realizado é objeto de estudo da próxima seção, onde ingredientes adicionais podem ser colocados na comparação entre os casos até aqui analisados. No momento, entretanto, vamos nos ater aos aspectos de qualidade de solução primal e esforço computacional para decidir quando um esquema é melhor de ser usado em relação a outro.

Para a configuração hidrelétrica ilustrada, os resultados mostram que, exceto para as usinas de Ilha Solteira (7) e Tucuruí (16), não é necessário empregar as dualizações presentes no caso decomposto, visto que o tratamento enumerativo destes casos não requisitou muito esforço computacional. Como características comuns, deve-se lembrar que as usinas indicadas para o caso enumerativo, exceto as usinas de Salto Osório (11) e Serra da Mesa (15), possuem no máximo nove estados a serem investigados, de modo que os subproblemas de programação não-linear relacionados a esses estados não apresentam dimensão superior a 10 variáveis e 18 restrições. Entretanto, significativa diferença é percebida entre os tempos computacionais (mostrados em seguida) quando se adotam os esquemas enumerativo e decomposto nas usinas de Ilha Solteira (7) e Tucuruí (16). Essas usinas são aquelas que apresentam o maior número de estados a ser investigados (19 estados cada), cujos problemas de programação não-linear podem atingir um máximo de 22 variáveis e 42 restrições.

Por fim, os problemas de alocação associados com Salto Osório (11) e Serra da Mesa (15), segundo os resultados obtidos, devem ser resolvidos por enumeração, uma vez que a dimensão dos subproblemas contínuos associados ainda é pequena: um máximo de 8 variáveis e 14 restrições no caso de Salto Osório (11), e 5 variáveis e 8 restrições no caso de Serra da Mesa (15). Detalhes que dizem respeito ao desempenho computacional obtido nos subproblemas contínuos não-lineares são apresentados na Seção 7.3.3, adiante.

Com base na análise anterior é possível ilustrar os principais resultados (valor ótimo dual, número de iterações e tempo computacional, entre outros) obtidos pelo terceiro caso implementado, denominado de caso misto. Esses resultados são apresentados na Tabela 7.3.1.1, onde também são colocados de forma comparativa os respectivos valores encontrados nos casos enumerativo e decomposto, analisados detalhadamente até aqui.

Tabela 7.3.1.1 – Principais Resultados Obtidos pelos Casos Analisados no Trabalho.

Tipo do Problema Dual	Enumerativo	Decomposto	Misto
Valor Inicial (R\$)	-18.385.565,0	-19.055.570,0	-18.626.162,0
Valor Ótimo (R\$)	-17.339.230,0	-17.450.168,0	-17.359.077,0
Número de Iterações	175	275	220
Tempo Computacional (minutos)	180	50	70
Total de Variáveis	1536	8208	2592
Total de PNL's ²²	6288	864	4560

Deve-se aqui ressaltar que no problema dual relacionado ao caso misto, apenas os problemas associados às usinas de Ilha Solteira (7) e Tucuruí (16) não são resolvidos por enumeração. Inicialmente o caso misto considerava também que os problemas associados às usinas de Salto Osório (11) e Serra da Mesa (15) fossem resolvidos de acordo com o caso decomposto. Depois, adotou-se a enumeração e os tempos computacionais incrementaram apenas em 10 minutos.

De acordo com a tabela anterior pode-se notar a justificativa para evitar o esquema enumerativo nas usinas de Ilha Solteira (7) e Tucuruí (16), em termos de esforço computacional.

²² Total de problemas de programação não-linear resolvido por iteração.

cional: embora a redução no número de estados tenha sido na ordem de 27,50%²³, o ganho computacional (redução do tempo de processamento) foi de 61,11 %.

Outro aspecto importante ilustrado na Tabela 7.3.1.1 refere-se ao valor ótimo da função dual encontrado em cada um dos casos. A diferença absoluta do caso decomposto em relação ao caso enumerativo é de R\$ 110.938,0, no caso decomposto, enquanto no caso misto esse valor é R\$ 19.847,0, ou seja, aproximadamente cinco vezes e meio menor.

As duas próximas seções investigam especificamente outros aspectos realizados na implementação: os subproblemas de alocação de unidades geradoras e os problemas de programação não-linear pertencentes a esses subproblemas. A análise desses casos, conforme será visto, podem sugerir esquemas de solução alternativos aos apresentados aqui.

7.3.2 Subproblemas de Alocação de Unidades Geradoras Hidrelétricas

O objetivo dessa seção consiste em ilustrar a forma pela qual as decisões dos subproblemas de alocação de unidades geradoras são afetadas de acordo com a magnitude dos multiplicadores de Lagrange $\lambda_{q_{rt}}$ e $\lambda_{s_{rt}}$. Inicialmente, abaixo é reescrita a formulação do subproblema de alocação de unidades geradoras hidrelétricas. Conforme pode ser notado a seguir, está-se interessado no subproblema de alocação referente ao caso enumerativo.

$$\begin{aligned}
 f_{rt} = \min_{\{z_{jkrt}, q_{jrt}, Q_{rt}, s_{rt}\}} & \lambda_{d_{rt}} \left(\sum_{j=1}^{J(r)} \dot{p}h_{jrt}(q_{jrt}, Q_{rt}, s_{rt}) \right) + \lambda_{q_{rt}} Q_{rt} + \lambda_{s_{rt}} s_{rt} \\
 \text{sujeito a:} & \quad Q_{rt} = \sum_{j=1}^{J(r)} q_{jrt} \\
 & \quad \sum_{k=1}^{\Phi_{jr}} \dot{p}h_{jkrt}^{\min} z_{jkrt} \leq \dot{p}h_{jrt}(q_{jrt}, Q_{rt}, s_{rt}) \leq \sum_{k=1}^{\Phi_{jr}} \dot{p}h_{jkrt}^{\max} z_{jkrt} \\
 & \quad \sum_{j=1}^{J(r)} \left(\sum_{k=1}^{\Phi_{jr}} \dot{p}h_{j1rt}^{\max} z_{jkrt} - \dot{p}h_{jrt}(q_{jrt}, Q_{rt}, s_{rt}) \right) \geq rb_{rt} \\
 & \quad z_{jkrt} \in \{0, 1\} \quad \sum_{k=1}^{\Phi_{jr}} z_{jkrt} \leq 1 \\
 & \quad r \text{ e } t \text{ fixos} \quad j = 1, J(r) \quad k = 1, \Phi_{jr}
 \end{aligned} \tag{7.3.2.1}$$

As análises serão realizadas com base nos dados referentes à usina de Salto Osório (11). Essa usina foi a escolhida por apresentar, conforme visto, unidades diferentes e cuja produção de energia é dependente da vazão vertida. Deste modo, o Problema (7.3.2.1) po-

²³ Caso misto em relação ao enumerativo.

de ser rescrito especificamente para Salto Osório (11), considerando um estágio de tempo qualquer:

$$\begin{aligned}
 f &= \min_{\{z_j, q_j, Q, s\}} \sum_{j=1}^6 ph_j(q_j, Q, s) + \beta_1 Q + \beta_2 s \\
 \text{sujeito a: } & Q = \sum_{j=1}^6 q_j \\
 & 120z_j \leq ph_j(q_j, Q, s) \leq 182z_j \quad j = 1, 4 \\
 & 120z_j \leq ph_j(q_j, Q, s) \leq 175z_j \quad j = 5, 6 \\
 & \sum_{j=1}^4 [182z_j - ph_j(q_j, Q, s)] + \sum_{j=5}^6 [175z_j - ph_j(q_j, Q, s)] \geq 42,13 \\
 & z_j \in \{0, 1\} \quad j = 1, 6
 \end{aligned} \tag{7.3.2.2}$$

No problema acima se pode notar que todos os termos da função objetivo estão divididos pelo multiplicador referente ao preço da potência de saída da usina, isto é, λd . Deste modo, tem-se que $\beta_1 = \lambda q / \lambda d$ e $\beta_2 = \lambda s / \lambda d$.

Como primeira análise considere a Figura 7.3.2.1, na qual pode ser visto o comportamento do valor ótimo de (7.3.2.2) como função dos multiplicadores de β_1 e β_2 .

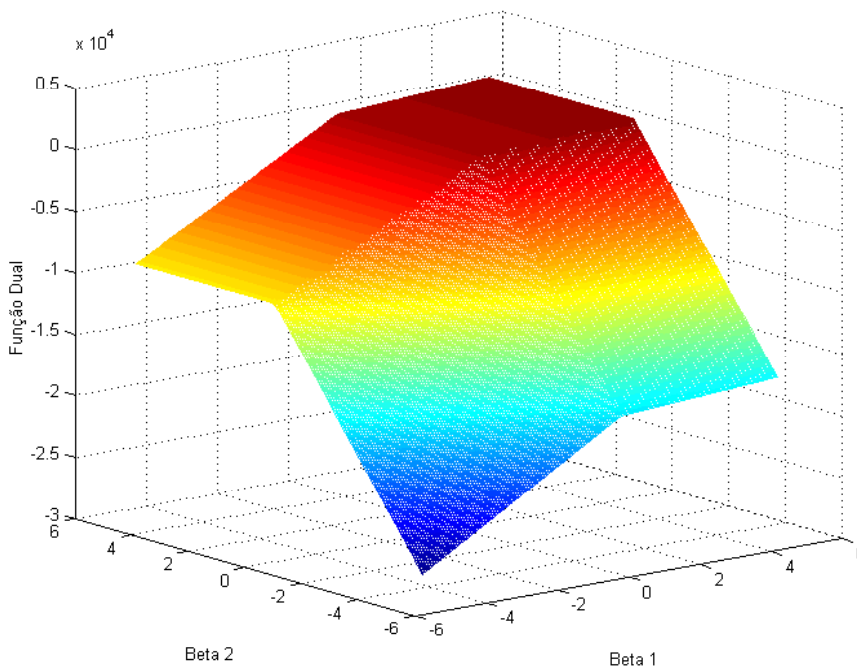


Figura 7.3.2.1 – Valor Ótimo do Problema (7.3.2.2) em Função dos Multiplicadores β_1 e β_2 .

Pode-se notar acima que a função mostrada acima é sempre crescente quando se aumentam os valores de β_1 e β_2 . Outra característica importante que pode ser visualizada na

figura diz respeito aos pontos onde essa função dual é não-diferenciável. Essas não-diferenciabilidades são melhor visualizadas na Figura 7.3.2.2, onde estão apresentadas as curvas de nível da função.

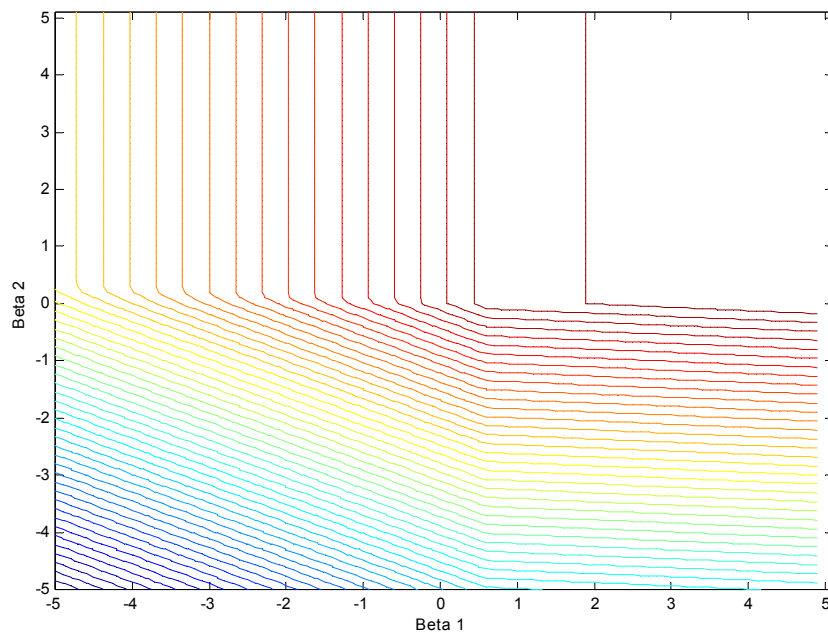


Figura 7.3.2.2 – Curvas de Nível da Função Dual Representada Pelo Problema (7.3.2.2).

Na Figura 7.3.2.3, em frente, estão mostradas os resultados primais de vazões turbinada e vertida na usina, resultantes da variação dos multiplicadores β_1 e β_2 .

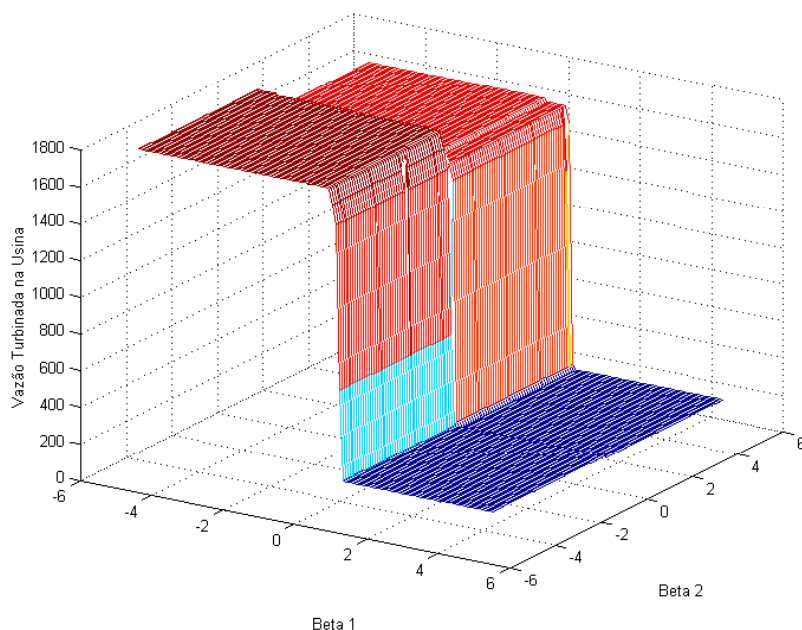


Figura 7.3.2.3 – Vazões Turbinadas Ótimas Obtidas Pela Variação dos Multiplicadores β_1 e β_2 .

De acordo com essa figura, verifica-se que na maior parte do domínio da função as vazões ótimas apresentam três valores, os quais representam valores limites para a operação da usina. O primeiro desses valores é igual a 211,68 m³/s, o que corresponde à menor vazão que a usina deve operar, devido à restrição de reserva. Os outros dois valores dizem respeito ao máximo engolimento possível na usina, os quais também respeitam a restrição de reserva na usina: 1784,0²⁴ m³/s e 1630,7 m³/s. Em conseqüência, é possível concluir que existe uma estreita faixa de valores de β_1 nos quais as decisões diferentes das citadas anteriormente (e que representam a condição operativa mais comum na usina), são obtidas.

O mesmo comportamento verificado na Figura 7.3.2.3, no tocante à vazão turbinada, é verificado para a vazão vertida na usina. Esse comportamento é ilustrado esquematicamente na Figura 7.3.2.4, adiante.

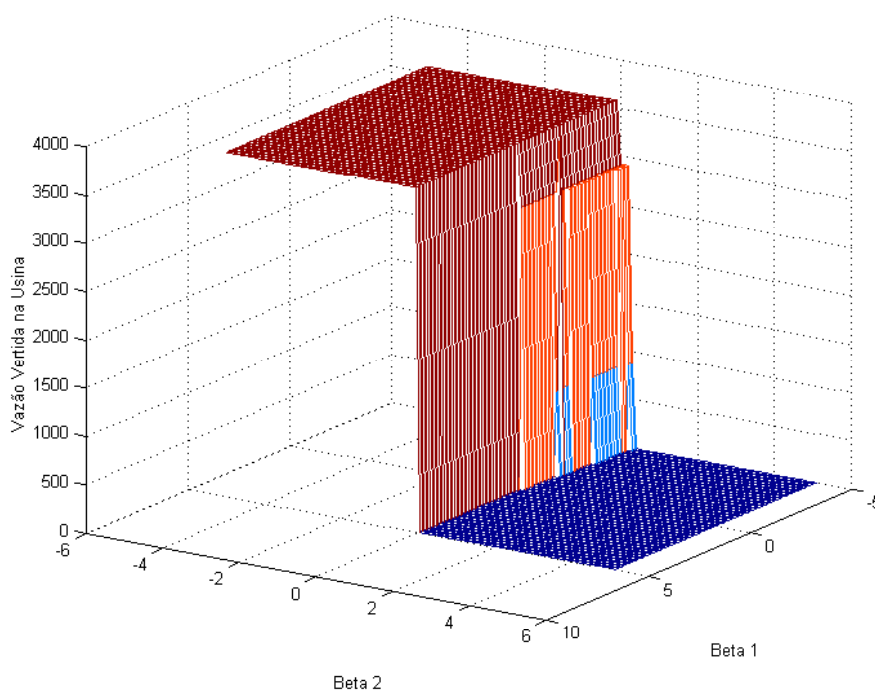


Figura 7.3.2.4 – Vazões Vertidas Ótimas Obtidas Pela Variação dos Multiplicadores β_1 e β_2 .

Restringindo-se um pouco os limites dos multiplicadores, β_1 e β_2 , é possível detalhar as decisões operativas obtidas na usina, bem como o comportamento da função dual representado pela Figura 7.3.2.1. Esse último, é observado na figura abaixo.

²⁴ Com esta vazão, necessariamente a usina deve apresentar vertimento, uma vez que, de acordo com as análises feitas na seção anterior, a Usina de Salto Osório (11) não pode atender a restrição de reserva com engolimento máximo e ausência de vertimento.

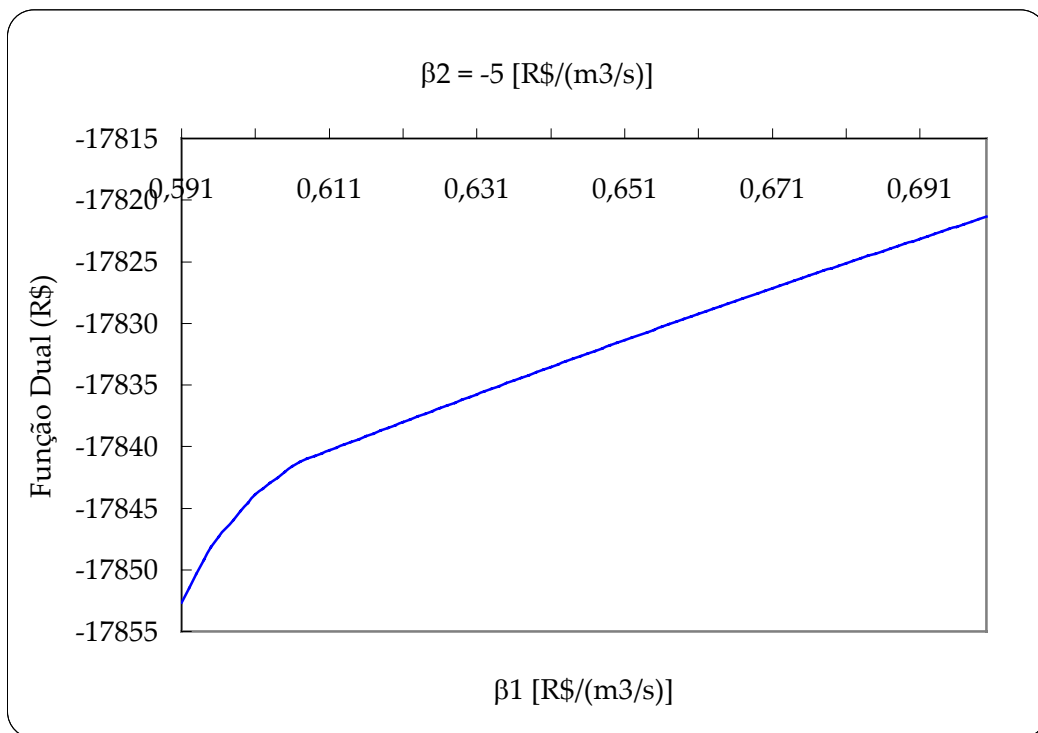


Figura 7.3.2.5 – Valor Ótimo do Problema (7.3.2.2) em Função dos Multiplicadores β_1 (β_2 fixado em -5).

As vazões ótimas turbinadas na usina, para os limites apresentados na figura anterior, são vistos na Figura 7.3.2.6, a seguir. Nessa figura é mostrado também o número ótimo de unidades geradoras necessárias para se fornecer as vazões ótimas.

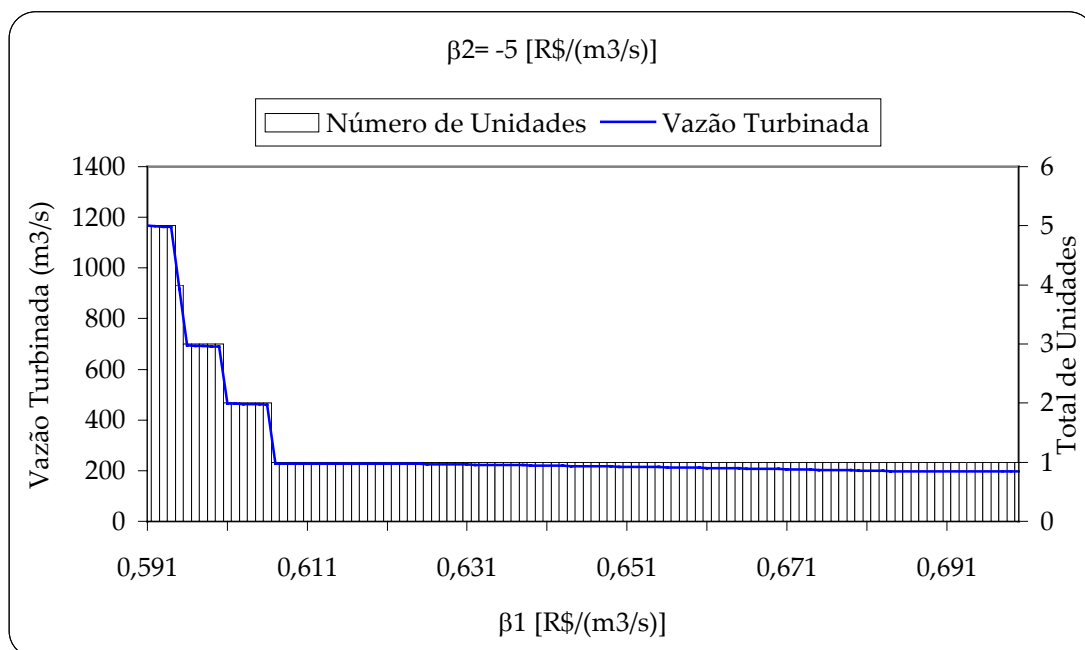


Figura 7.3.2.6 – Vazões Turbinadas Ótimas, e as Respectivas Unidades Geradoras, Obtidas Pela Variação dos Multiplicadores β_1 ($\beta_2 = -5$).

Acima se pode perceber a sensibilidade do modelo de alocação frente à variação dos multiplicadores. Para valores de β_1 compreendidos no intervalo $[0,59; 0,61]$ a usina apresenta grande variação na vazão turbinada. As figuras 7.3.2.7 e 7.3.2.8 repetem a mesma análise anterior, para o caso onde o valor de β_2 é alterado para 5.

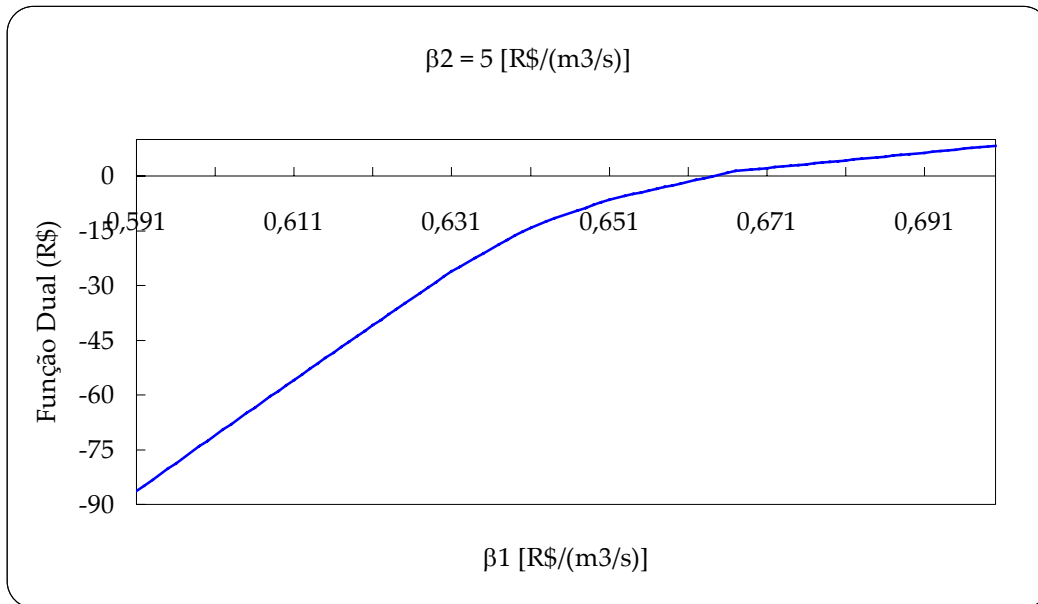


Figura 7.3.2.7 – Valor Ótimo do Problema (7.3.2.2) em Função dos Multiplicadores β_1 ($\beta_2 = 5$).

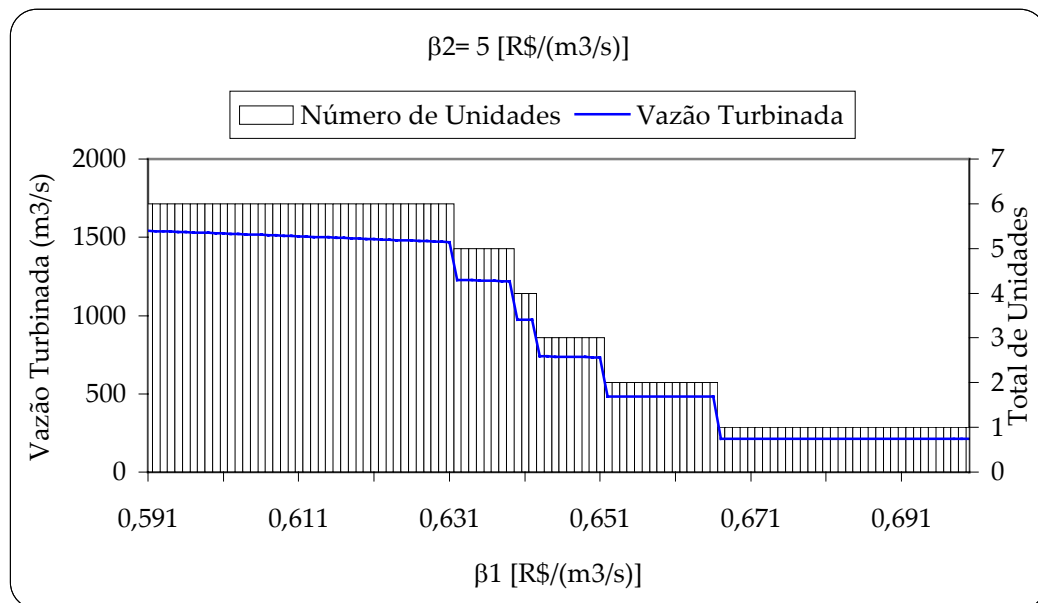


Figura 7.3.2.8 – Vazões Turbinadas Ótimas, e as Respectivas Unidades Geradoras, Obtidas Pela Variação dos Multiplicadores β_1 ($\beta_2 = 5$).

Portanto, de acordo com a análise apresentada nesta seção, é de suma importância fazer uso de modelos que estejam aptos a otimizar de forma eficiente a função dual, bem

como os subproblemas primais associados. Conforme citado, a função dual é maximizada com base num algoritmo de Método de Feixes, o qual representa o estado da arte em problemas dessa natureza. No tocante aos subproblemas primais, as vazões ilustradas nas últimas seções são obtidas por meio da solução de problemas de programação não-linear. O algoritmo usado para realizar tal tarefa é a Programação Quadrática Seqüencial que, por sua vez, assim como o Método de Feixes, representa uma poderosa ferramenta de solução de problemas de natureza semelhante àqueles tratados neste trabalho. Os detalhes da implementação, que dizem respeito aos modelos de programação não-linear, são abordados na próxima seção.

7.3.3 Problemas de Programação Não-Linear

Tanto na decomposição enumerativa, quanto no caso decomposto, ambos apresentados na Seção 7.3.1, é necessário, em algum momento, resolver um problema de programação não-linear. Abaixo, é apresentado o modelo do problema de programação não-linear que foi resolvido no presente trabalho.

$$\begin{aligned}
 f_t^{comb} = \min_{\{q_j, Q, s\}} & \left\{ \sum_{j=1}^{ng} [\lambda r - \lambda d - \lambda p b_j] p b_j(q_j, Q, s) + \lambda q \cdot Q + \lambda s \cdot s \right\} \\
 \text{sujeito a: } & Q = \sum_{j=1}^{ng} q_j \\
 & p b_j^{min} \leq p b_j(q_j, Q, s) \leq p b_j^{max} \quad j = 1, ng \\
 & \sum_{j=1}^{ng} [p b_{j1}^{max} - p b_j(q_j, Q, s)] \geq r h_t
 \end{aligned} \tag{7.3.3.1}$$

Para tornar o modelo não-linear contínuo acima igual àquele encontrado no caso enumerativo é necessário tornar os multiplicadores λr e $\lambda p b_j$ nulos. Por outro lado, no caso decomposto, são necessárias alterações apenas no conjunto restrito. Originalmente, o problema não-linear associado a este último caso possui apenas a restrição de igualdade. Porém, conforme citado, na implementação as restrições de limites de potência (os valores de $p b_j^{min}$ são considerados nulos) e de reserva na usina são mantidas.

De posse das considerações acima, essa análise inicia com as questões dimensionais de (7.3.3.1). Neste modelo, tem-se um total de $ng + i_spill + 1$ variáveis, onde i_spill representa um "flag" indicando se a potência na usina é dependente ($i_spill = 1$) da vazão vertida na mesma. Já, o número de restrições é dado por $2 \times ng + 2$.

No algoritmo, o ponto inicial para o problema acima é obtido por meio dos seguintes passos:

- calcula-se um valor de queda bruta na usina, considerando, além da cota de montante referente ao volume inicial, que a mesma opera com engolimento máximo referente ao número de unidades da combinação em operação, ng ;
- em seguida são descontados da queda bruta os correspondentes valores de perdas hidráulicas associadas com as unidades operando com o engolimento máximo. De posse dessa queda e dos engolimentos, é encontrado o rendimento aproximado das unidades;
- após, é calculado o produto entre a queda líquida, a constante $9,81 \times 10^{-3}$ e o rendimento das unidade. A esse produto dá-se o nome de produtibilidade específica;
- o próximo passo consiste em calcular a vazão turbinada referente ao valor médio de potência para a faixa operativa na qual uma unidade está operando. Esse valor é dado por $[(pb^{min}_j + pb^{max}_j)/2]/prod$, onde $prod$ é o valor da produtibilidade calculada anteriormente. Deste modo, todos os valores iniciais para as vazões turbinadas, $q_j^{(0)}$, são encontradas. O valor inicial da vazão turbinada na usina, $Q^{(0)}$, é dada pela soma dos $q_j^{(0)}$. Já, o ponto inicial referente ao vertimento é considerado nulo.

Na maioria das vezes o ponto inicial encontrado acima é de natureza viável. Em alguns casos, porém, a restrição de reserva é violada. Todavia, deve-se ressaltar que isso não representa um problema para o algoritmo de Programação Quadrática Seqüencial (PQS) implementado, visto que esse método, no caso específico, não necessita trabalhar com pontos viáveis. O esforço realizado para determinar o ponto inicial tem como principal objetivo encontrar um ponto de partida próximo do ótimo.

Os passos anteriores dizem respeito à inicialização das variáveis primais do problema. De acordo, com o Capítulo 5, as variáveis duais referentes às restrições de (7.3.3.1) possuem um papel importante em um algoritmo de PQS, embora a variação do algoritmo implementada²⁵ amenize bastante esse fato. De qualquer modo, uma aproximação é realizada

²⁵ Versão Quase-Newton.

para inicializar o vetor do gradiente do lagrangeano da função objetivo, bem como a matriz inicial de derivadas segundas que é requerida pelo algoritmo.

Antes de detalhar as inicializações acima, faz-se necessário construir a expressão da função lagrangeana associada à (7.3.3.1). Isso será feito, por motivos de visualização, considerando que os valores de λr e $\lambda p b_j$ são nulos:

$$\begin{aligned} L(q_j, Q, s, \phi e, \phi l_j, \phi u_j, \phi i) = & -\lambda d \sum_{j=1}^{ng} p b_j(.) + \lambda q \cdot Q + \lambda s \cdot s + \phi e \left(\sum_{j=1}^{ng} q_j - Q \right) + \\ & \sum_{j=1}^{ng} [\phi u_j (p b_j(.) - p b_j^{máx}) + \phi l_j (-p b_j(.) + p b_j^{mín})] + \\ & \phi i \left(\sum_{j=1}^{ng} [p b_j(.) - p b_{j1}^{máx}] + r b \right) \end{aligned} \quad (7.3.3.2)$$

Acima, ϕe , ϕl_j , ϕu_j , ϕi , são, respectivamente, os multiplicadores de Lagrange associados com as restrições de conservação da água nos condutos, limites mínimos e máximos de potência, e ainda, a restrição de reserva. Rearranjando a expressão (7.3.3.2), tem-se:

$$\begin{aligned} L(q_j, Q, s, \phi e, \phi l_j, \phi u_j, \phi i) = & \sum_{j=1}^{ng} [-\lambda d + \phi i + \phi u_j - \phi l_j] \cdot p b_j(.) + \phi e \left(\sum_{j=1}^{ng} q_j \right) + \\ & (\lambda q - \phi e) Q + \lambda s \cdot s + \sum_{j=1}^{ng} [\phi l_j p b_j^{mín} - \phi u_j p b_j^{máx}] + \\ & \phi i \left(r b - \sum_{j=1}^{ng} p b_{j1}^{máx} \right) \end{aligned} \quad (7.3.3.3)$$

Com o intuito de construir o vetor do gradiente do lagrangeano, é necessário derivar a expressão anterior em relação as variáveis primais, $x = [q_j, Q, s]^t$, do problema:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(.)}{\partial q_j} &= [-\lambda d + \phi i + \phi u_j - \phi l_j] \frac{\partial p b_j(.)}{\partial q_j} + \phi e \\ \frac{\partial L(.)}{\partial Q} &= \sum_{j=1}^{ng} [-\lambda d + \phi i + \phi u_j - \phi l_j] \frac{\partial p b_j(.)}{\partial Q} + (\lambda q - \phi e) \\ \frac{\partial L(.)}{\partial s} &= \sum_{j=1}^{ng} [-\lambda d + \phi i + \phi u_j - \phi l_j] \frac{\partial p b_j(.)}{\partial s} + \lambda s \end{aligned} \quad (7.3.3.4)$$

$$\nabla_x L(.) = \begin{bmatrix} \frac{\partial L(.)}{\partial q_j} & \frac{\partial L(.)}{\partial Q} & \frac{\partial L(.)}{\partial s} \end{bmatrix}^t$$

As expressões que envolvem as derivadas da função de produção, mostradas acima, bem como aquelas encontradas no decorrer dessa seção, podem ser vistas no Apêndice.

Conforme visto no Capítulo 5, a hessiana da função lagrangeana do Problema (7.3.3.1) é aproximada na versão algoritmo de PQS a partir de uma matriz de Quase-Newton. Deste modo, não é necessário computar derivadas de ordem superior a um ao longo do processo iterativo. Entretanto, nesta implementação, também com vistas no auxílio do processo de convergência, algumas informações referentes às derivadas de segunda ordem foram utilizadas.

Originalmente, a matriz hessiana do problema tem a seguinte estrutura:

$$\nabla_{xx}^2 L(.) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L(.)}{\partial q_j^2} & \frac{\partial L(.)}{\partial q_j \partial Q} & \frac{\partial L(.)}{\partial q_j \partial s} \\ \frac{\partial L(.)}{\partial Q \partial q_j} & \frac{\partial^2 L(.)}{\partial Q^2} & \frac{\partial L(.)}{\partial Q \partial s} \\ \frac{\partial L(.)}{\partial s \partial q_j} & \frac{\partial L(.)}{\partial s \partial Q} & \frac{\partial^2 L(.)}{\partial s^2} \end{bmatrix}_{(ng+i_spill+1) \times (ng+i_spill+1)} \quad (7.3.3.5)$$

Essa matriz, que depende de variáveis primais e duais, pode não ser definida positiva ao longo do processo iterativo (inclusive na própria solução), impedindo assim seu uso na versão do algoritmo de SQP utilizado. Nessa implementação, a matriz hessiana acima é utilizada apenas para a construção da matriz inicial de Quase-Newton. Uma das exigências é que essa matriz seja simétrica e definida positiva. Deste modo, adotou-se a seguinte estrutura para a matriz hessiana inicial:

$$\nabla_{xx}^2 L(.) = \begin{bmatrix} \left| \frac{\partial^2 L(.)}{\partial q_j^2} \right| & 0 & 0 \\ 0 & \left| \frac{\partial^2 L(.)}{\partial Q^2} \right| & 0 \\ 0 & 0 & \left| \frac{\partial^2 L(.)}{\partial s^2} \right| \end{bmatrix}_{(ng+i_spill+1) \times (ng+i_spill+1)} \quad (7.3.3.6)$$

onde:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 L(.)}{\partial q_j^2} &= [-\lambda d + \phi i + \phi u_j - \phi l_j] \frac{\partial^2 p h_j(.)}{\partial q_j^2} \\ \frac{\partial^2 L(.)}{\partial Q^2} &= \sum_{j=1}^{ng} [-\lambda d + \phi i + \phi u_j - \phi l_j] \frac{\partial^2 p h_j(.)}{\partial Q^2} \\ \frac{\partial^2 L(.)}{\partial s^2} &= \sum_{j=1}^{ng} [-\lambda d + \phi i + \phi u_j - \phi l_j] \frac{\partial^2 p h_j(.)}{\partial s^2} \end{aligned} \quad (7.3.3.7)$$

Portanto, de acordo com as expressões (7.3.3.4) e (7.3.3.6), observa-se que as mesmas dependem dos multiplicadores de Lagrange das restrições do problema não-linear. No caso desses multiplicadores, não se tem uma regra geral para iniciá-los. Nesse sentido, e levando-se em consideração seu efeito abrandado num SQP Quase-Newton, seus valores iniciais foram calculados a partir da seguinte expressão:

$$\nabla_x L(.) = \nabla f(x^{(0)}) + \phi^t Jc(x^{(0)}) = 0 \quad (7.3.3.8)$$

$$\phi = -Jc_{-}(x^{(0)})^t \nabla f(x^{(0)})$$

onde $f(x^{(0)})$ é o valor da função objetivo do problema, $Jc(x^{(0)})$ é a matriz jacobiana das restrições e $Jc_{-}(x^{(0)})$ é matriz inversa²⁶ a direita de $Jc(x^{(0)})$, todos avaliados no ponto primal inicial $(x^{(0)} = [q_j^{(0)}, Q^{(0)}, s^{(0)}]^t)$ detalhado anteriormente. O uso da matriz inversa à direita é justificado uma vez que o jacobiano é uma matriz retangular, não podendo ser, portanto, invertível como uma matriz quadrada. Detalhes sobre essa matriz, também conhecida como matriz pseudo-inversa ou pseudo-inversa de Moore-Penrose, podem ser visto em [138-139].

Para calcular a matriz inversa à direita, a implementação fez uso de uma rotina, escrita em linguagem Fortran, de domínio público irrestrito, chamada de MPINV. Esse rotina foi desenvolvida pelo Departamento de Energia da Universidade do Tennessee [140].

De posse dos valores iniciais das variáveis primais, duais e da matriz hessiana inicial, o algoritmo calcula a direção de busca por meio da solução de um problema quadrático que represente, da melhor maneira possível, todas as não-linearidades envolvidas no modelo a ser solucionado. A estrutura do problema quadrático foi visto em (6.3.1.10), sendo que a matriz jacobiana das restrições é mostrada abaixo.

²⁶ Essa matriz é equivalente ao produto $-Jc(x^k)^t [Jc(x^k) \times Jc(x^k)]^{-1}$ mostrado na Equação (5.4.4.2).

$$J_C(.) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & -1 & 0 \\ \frac{\partial ph_1(.)}{\partial q_1} & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial ph_1(.)}{\partial Q} & \frac{\partial ph_1(.)}{\partial s} \\ 0 & \frac{\partial ph_2(.)}{\partial q_2} & \dots & 0 & \frac{\partial ph_2(.)}{\partial Q} & \frac{\partial ph_2(.)}{\partial s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial ph_j(.)}{\partial q_j} & \frac{\partial ph_j(.)}{\partial Q} & \frac{\partial ph_j(.)}{\partial s} \\ -\frac{\partial ph_1(.)}{\partial q_1} & 0 & \dots & 0 & -\frac{\partial ph_1(.)}{\partial Q} & -\frac{\partial ph_1(.)}{\partial s} \\ 0 & -\frac{\partial ph_2(.)}{\partial q_2} & \dots & 0 & -\frac{\partial ph_2(.)}{\partial Q} & -\frac{\partial ph_2(.)}{\partial s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial ph_j(.)}{\partial q_j} & -\frac{\partial ph_j(.)}{\partial Q} & -\frac{\partial ph_j(.)}{\partial s} \\ \frac{\partial ph_1(.)}{\partial q_1} & \frac{\partial ph_2(.)}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial ph_j(.)}{\partial q_j} & \sum_{j=1}^{ng} \frac{\partial ph_j(.)}{\partial Q} & \sum_{j=1}^{ng} \frac{\partial ph_j(.)}{\partial s} \end{bmatrix}_{l \times n} \quad (7.3.3.9)$$

onde $l = 2ng + 2$ e $n = ng + i_spill + 1$.

A matriz jacobiana acima pode representar um conjunto restrito inviável, dependendo do ponto no qual a mesma é obtida. Esse é um evento negativo que pode ocorrer quando o conjunto restrito apresenta restrições de desigualdade. Em testes iniciais do modelo, em alguns casos, foi detectada inviabilidade relacionada com a linearização das restrições de limites mínimos de potência (ou uma delas) e de reserva. Tal fato estava ligado a pontos afastados da solução ótima. Duas medidas foram tomadas para tentar evitar essa inviabilidade: fornecer um ponto inicial de boa qualidade, tal como mostrado anteriormente; e limitar a direção do modelo quadrático de modo que as variáveis primais não excedessem seus limites operativos físicos, para os quais a função de produção é definida. Esses limites referem-se aos engolimentos máximos das unidades e da usina, bem como à capacidade máxima de vertimento da usina. Todos os limites mínimos são considerados iguais a zero.

Medidas mais sofisticadas podem ser tomadas para tratar essa inviabilidade. Uma alternativa seria adotar uma estratégia que considere apenas o conjunto ativo das restrições, tal como visto em [106]. Outra alternativa que poderia ser realizada diz respeito ao uso de variáveis de folga para transformar as restrições de desigualdade em igualdade, igualmente aquela usada em algoritmos de PQS baseados em região de confiança [141,142]. Todavia,

essas alternativas fornecem complexidades adicionais à implementação e foram tratadas como alternativas. Antes delas, porém, poder-se-ia testar algo no seguinte sentido: resolver o problema inicialmente desconsiderando a restrição de reserva e , no decorrer do processo iterativo incluir novamente a mesma. Embora aspectos relacionados à taxa de convergência poderiam ser prejudicados, segundo as observações realizadas no comportamento do modelo, trata-se de uma opção atrativa. De todo modo, as restrições de caixa do modelo quadrático, bem como os pontos iniciais fornecidos garantiram um bom desempenho do modelo no que diz respeito ao tratamento da viabilidade das restrições linearizadas.

No tocante à solução do problema de programação quadrática, este trabalho fez uso de uma rotina escrita em Fortran, chamada de PLCBAS, a qual implementa uma estratégia de solução baseada em conjuntos ativos descrita em [143] e [144]. Essa rotina é direcionada para resolver problemas de programação quadrática de natureza geral com qualquer matriz hessiana simétrica, incluindo os casos onde essa matriz é singular, ou mesmo ser não-definida positiva. Referências relatadas à PLCBAS são encontradas em [145].

Calculada a direção, o modelo verifica o quanto é possível caminhar nessa direção tal como é feito em (6.3.2.5). Duas das três correções citadas no Capítulo 6, no tocante ao tratamento do efeito de Maratos, foram utilizadas nesta implementação: a correção de decréscimo das restrições e a aceitação do incremento da função de mérito em pontos próximos da solução. Inicialmente o algoritmo implementado executava apenas a primeira opção. Porém, em alguns casos, o limite máximo de simulações (descrito à frente) foi alcançado sem atingir a solução. Deste modo, resolveu-se utilizar também o incremento da função de mérito a partir do momento que o simulador atingisse um número crítico de simulações obtido em uma dada iteração onde a correção esta sendo utilizada. Os testes mostraram uma sensível redução do número máximo de simulações e raramente o algoritmo parou por causa dessa limitação.

Determinado o tamanho de passo, o algoritmo, depois de determinar o novo valor das variáveis primais e duais²⁷, realiza então o teste de convergência. Diversos testes podem ser realizados em otimização não linear, sendo que o escolhido aqui é mostrado na Expressão (7.3.3.10) [146,147].

²⁷ Variáveis primais: $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha d^{(k)}$; variáveis duais: os novos multiplicadores são os mesmos encontrados no problema quadrático.

$$\text{opt_test} = \|\nabla L(\cdot)\|_{\infty} + \|c(\cdot)^{\#}\|_{\infty} \leq \text{eps} \quad (7.3.3.10)$$

O valor para eps utilizado neste trabalho foi de $1,0 \times 10^{-8}$. Em alguns casos²⁸ foi verificado que um critério menor do que esse não era suficiente para encontrar soluções precisas. No entanto, em outros casos esse critério nunca conseguiu ser atingido, devido ao fato de ser excessivamente preciso. A alternativa foi adotar um segundo teste de parada, construído com base no comportamento do modelo quadrático. Ao longo dos testes, observou-se que antes de atingir o valor de eps mostrado acima, a direção do modelo quadrático apresentava norma infinita muito inferior ao valor de eps . Deste modo, quando a direção calculada no modelo quadrático é inferior a $1,0 \times 10^{-10}$ o algoritmo é finalizado. Na maioria dos casos, quando o modelo atende esse último critério, o valor de opt_test apresentou variações entre $1,0 \times 10^{-4}$ e $1,0 \times 10^{-6}$.

Fora os dois critérios de parada acima, o algoritmo pode ser terminado com base em outras duas alternativas: número máximo de iterações e/ou simulações. 300 e 600 foram adotados, respectivamente, para esses valores limites. Ressalta-se que uma simulação diz respeito às avaliações realizadas durante a busca do tamanho de passo mostrada por (6.3.2.5). O número médio máximo de iterações encontrado, para os casos apresentados na seção anterior, é igual a oito. Por sua vez, o número simulações, encontrado em média, foi igual a dez. Em nenhuma situação, referentes aos casos apresentados na seção anterior, o algoritmo parou por causa do número de iterações. Todavia, o número máximo de simulações foi encontrado em alguns casos ligados à usina de Ilha Solteira (7); nessa usina, quando aconteceu tal situação, o valor médio de eps encontrado foi $1,0 \times 10^{-6}$.

Uma vez que nenhum dos critérios de parada descritos acima é atendido, o algoritmo realiza a atualização da matriz de Quase-Newton, de acordo com (6.3.3.5)-(6.3.3.7), a fim de iniciar uma nova iteração.

²⁸ Esses casos dizem respeito tanto a uma usina específica, quanto o número de unidades geradoras, bem como a grandeza dos multiplicadores de Lagrange provenientes da decomposição utilizada (casos enumerativo, decomposto e misto).

Por fim, na seqüência, são apresentados os principais resultados obtidos ao longo de um processo iterativo realizado pelo algoritmo de PQS desenvolvido neste trabalho. Esse processo tomou como exemplo um problema relacionado com a usina de Salto Osório (11), onde, conforme pode ser visto abaixo, $\lambda d=1$, $\lambda q=0,60$, $\lambda s=5$, $\lambda r=0$ e $\lambda ph_j=0$.

$$\begin{aligned} \min_{\{q_j, Q, s\}} f(q_j, Q, s) &= \left\{ \sum_{j=1}^6 ph_j(q_j, Q, s) + 0,60Q + 5,0s \right\} \\ \text{sujeito a: } Q &= \sum_{j=1}^6 q_j \\ 120 &\leq ph_j(q_j, Q, s) \leq 182 & j = 1, 4 \\ 120 &\leq ph_j(q_j, Q, s) \leq 175 & j = 5, 6 \\ \sum_{j=1}^4 [182 - ph_j(q_j, Q, s)] &+ \sum_{j=5}^6 [175 - ph_j(q_j, Q, s)] \geq 42,13 \end{aligned} \quad (7.3.3.11)$$

Valores iniciais calculados: queda bruta aproximada²⁹: 71,51 m; produtividade específica em cada máquina: 0,6314 (MW/(m³/s)/m). Os correspondentes valores iniciais das variáveis primais, $x^{(0)}$, e duais, $\phi^{(0)}$, estão mostrados nas próximas expressões.

$$x^{(0)} = [144,11 \quad 144,11 \quad 144,11 \quad 144,11 \quad 138,57 \quad 138,57 \quad 853,60 \quad 0]^t \quad (7.3.3.12)$$

$$\phi^{(0)} = \begin{bmatrix} 0,5439 \\ 3,99 \times 10^{-2} \\ 3,99 \times 10^{-2} \\ 3,99 \times 10^{-2} \\ 3,99 \times 10^{-2} \\ 3,59 \times 10^{-2} \\ 3,59 \times 10^{-2} \\ -3,99 \times 10^{-2} \\ -3,99 \times 10^{-2} \\ -3,99 \times 10^{-2} \\ -3,99 \times 10^{-2} \\ -3,59 \times 10^{-2} \\ -3,99 \times 10^{-2} \\ 0,2316 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0,5439 \\ 3,99 \times 10^{-2} \\ 3,99 \times 10^{-2} \\ 3,99 \times 10^{-2} \\ 3,99 \times 10^{-2} \\ 3,59 \times 10^{-2} \\ 3,59 \times 10^{-2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,2316 \end{bmatrix} \quad (7.3.3.13)$$

²⁹ Cota de montante igual a 397 metros e cota de jusante associada à vazão máxima na usina, para o caso de operação com seis máquinas, de 1784 m³/s.

Acima, pode-se notar que os valores dos multiplicadores de Lagrange associados às restrições de limites mínimos de potência são negativos. No problema, todas as restrições de desigualdade são do tipo menor ou igual. Deste modo, os multiplicadores de Lagrange só podem ser maiores ou iguais a zero. Isso justifica a projeção dos multiplicadores para o respectivo domínio viável. A seguir, é apresentada a matriz Quase-Newton inicial, $M^{(0)}$.

$$\begin{aligned}
 M^{(0)} &= \begin{bmatrix} M_1^{(0)} & 0 & 0 \\ 0 & M_2^{(0)} & 0 \\ 0 & 0 & M_3^{(0)} \end{bmatrix} \\
 M_1^{(0)} &= \begin{bmatrix} 5,367 \times 10^{-4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5,367 \times 10^{-4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5,367 \times 10^{-4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5,367 \times 10^{-4} \end{bmatrix} \\
 M_2^{(0)} &= \begin{bmatrix} 7,729 \times 10^{-4} & 0 \\ 0 & 7,729 \times 10^{-4} \end{bmatrix} \\
 M_3^{(0)} &= \begin{bmatrix} 1,4467 \times 10^{-7} & 0 \\ 0 & 1,4467 \times 10^{-7} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{7.3.3.14}$$

Para o Problema (7.3.3.11), o algoritmo necessitou de 8 iterações para atingir uma solução. Os resultados referentes à direção do modelo quadrático, d , o valor da condição de armijo, $armijo$, as variáveis primais, x , e o teste de parada, opt_test , são mostrados, a seguir, para cada iteração isoladamente.

- **Iteração 1:**

$$\begin{aligned}
 d^{(0)} &= [145,38 \quad 145,38 \quad 145,38 \quad 145,38 \quad 97,06 \quad 97,06 \quad 695,55 \quad 0]^t \\
 armijo &= -73,82 \\
 x^{(1)} &= [269,47 \quad 269,47 \quad 269,47 \quad 269,47 \quad 235,63 \quad 253,63 \quad 1549,85 \quad 0]^t \\
 opt_test &= 0,1327
 \end{aligned} \tag{7.3.3.15}$$

- **Iteração 2:**

$$\begin{aligned}
 d^{(1)} &= [-47,84 \quad -47,84 \quad -47,84 \quad -47,84 \quad 31,02 \quad 31,02 \quad 129,30 \quad 0]^t \\
 armijo &= -1,4831 \\
 x^{(2)} &= [221,64 \quad 221,64 \quad 221,64 \quad 221,64 \quad 266,65 \quad 266,65 \quad 1419,85 \quad 0]^t \\
 opt_test &= 7,9625 \times 10^{-2}
 \end{aligned} \tag{7.3.3.16}$$

- **Iteração 3:**

$$\begin{aligned}
 d^{(2)} &= [25,90 \quad 25,90 \quad 25,90 \quad 25,90 \quad 2,38 \quad 2,38 \quad 108,34 \quad 0]^t \\
 \text{armijo} &= -4,3841 \\
 x^{(3)} &= [247,53 \quad 247,53 \quad 247,53 \quad 247,53 \quad 269,03 \quad 269,03 \quad 1528,20 \quad 0]^t \\
 \text{opt_test} &= 2,9037 \times 10^{-2}
 \end{aligned} \tag{7.3.3.17}$$

- **Iteração 4:**

$$\begin{aligned}
 d^{(3)} &= [0,866 \quad 0,866 \quad 0,866 \quad 0,866 \quad -7,485 \quad -7,485 \quad -11,50 \quad 0]^t \\
 \text{armijo} &= -2,5613 \times 10^{-5} \\
 x^{(4)} &= [247,53 \quad 247,53 \quad 247,53 \quad 247,53 \quad 269,01 \quad 269,01 \quad 1528,17 \quad 0]^t \\
 \text{opt_test} &= 5,1986 \times 10^{-3}
 \end{aligned} \tag{7.3.3.18}$$

- **Iteração 5:**

$$\begin{aligned}
 d^{(4)} &= [0,405 \quad 0,405 \quad 0,405 \quad 0,405 \quad -1,796 \quad -1,796 \quad -1,969 \quad 0]^t \\
 \text{armijo} &= -1,069 \times 10^{-2} \\
 x^{(5)} &= [247,94 \quad 247,94 \quad 247,94 \quad 247,94 \quad 267,20 \quad 269,20 \quad 1526,20 \quad 0]^t \\
 \text{opt_test} &= 1,0515 \times 10^{-4}
 \end{aligned} \tag{7.3.3.19}$$

- **Iteração 6:**

$$\begin{aligned}
 d^{(5)} &= -[3,5 \times 10^{-2} \quad 3,5 \times 10^{-2} \quad 3,5 \times 10^{-2} \quad 3,5 \times 10^{-2} \quad 2,4 \times 10^{-2} \quad 2,4 \times 10^{-2} \quad 0,18 \quad 0]^t \\
 \text{armijo} &= -7,4577 \times 10^{-6} \\
 x^{(6)} &= [247,90 \quad 247,90 \quad 247,90 \quad 247,90 \quad 267,20 \quad 267,20 \quad 1526,01 \quad 0]^t \\
 \text{opt_test} &= 1,8271 \times 10^{-5}
 \end{aligned} \tag{7.3.3.20}$$

- **Iteração 7:**

$$\begin{aligned}
 d^{(6)} &= [5,2 \times 10^{-3} \quad 5,2 \times 10^{-3} \quad 5,2 \times 10^{-3} \quad 5,2 \times 10^{-3} \quad 2,2 \times 10^{-3} \quad 2,2 \times 10^{-3} \quad 2,6 \times 10^{-2} \quad 0]^t \\
 \text{armijo} &= -2,0443 \times 10^{-7} \\
 x^{(7)} &= [247,91 \quad 247,91 \quad 247,91 \quad 247,91 \quad 267,20 \quad 267,20 \quad 1526,04 \quad 0]^t \\
 \text{opt_test} &= 1,7150 \times 10^{-8}
 \end{aligned} \tag{7.3.3.21}$$

- **Iteração 8:**

$$d^{(7)} = [2,4 \times 10^{-6} \quad 2,4 \times 10^{-6} \quad 2,4 \times 10^{-6} \quad 2,4 \times 10^{-6} \quad -5,1 \times 10^{-6} \quad -5,1 \times 10^{-6} \quad -2,5 \times 10^{-7} \quad 0]^t \tag{7.3.3.21}$$

$$armijo = -4,5475 \times 10^{-13}$$

$$x^{(7)} = [247,91 \quad 247,91 \quad 247,91 \quad 247,91 \quad 267,20 \quad 267,20 \quad 1526,04 \quad 0]^t$$

$$opt_test = 8,8505 \times 10^{-11}$$

Além das 8 iterações descritas acima, o algoritmo necessitou realizar um total de 11 simulações ao longo do processo iterativo. Quando não existe a presença do efeito de Maratos, o número de iterações é igual ao de simulações. Neste caso, esse efeito foi verificado na quarta iteração, fazendo com que a direção calculada pelo modelo quadrático fosse rejeitada pela função de mérito³⁰. Para sobrepujar essa rejeição o algoritmo realizou as respectivas simulações extras, no intuito de calcular os parâmetros relacionados com a correção (vetor $e^{(k)}$ de (6.3.4.2)) e, adicionalmente, com a determinação o passo ao longo do arco definido em (6.3.4.3). Ao final dessa iteração, o passo ótimo encontrado ao longo desse arco foi igual a $2,43 \times 10^{-3}$.³¹

Os resultados ótimos primais são precisamente detalhados abaixo.

$$x^{(8)} = \begin{bmatrix} 247,909930046246 \\ 247,909930054482 \\ 247,909930052785 \\ 247,909930050024 \\ 267,198133868577 \\ 267,198133869291 \\ 1526,03598794141 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7.3.3.23)$$

Para a solução apontada acima, o valor da queda bruta na usina é de 71,9955 m. Por sua vez, a altura de queda líquida nas unidades do grupo 1 é de 70,9258 m e no grupo 2 esse valor é de 70,7529 m. Os respectivos rendimentos são de 92,83% e 93,74%. De posse desses valores, as unidades do grupo 1 operam em 160,12 MW e as demais em 173,85 MW. Nesses níveis de despacho, pode-se perceber que a restrição de reserva não está ativa³², bem como nenhuma das demais restrições de desigualdade que compõem o problema. Como resultado, tem-se que o único multiplicador de Lagrange não nulo encontrado no problema é aquele relacionado à restrição de igualdade, ϕ_i , cujo valor calculado é $0,626222 \text{ R\$/}(m^3/s)$.

³⁰ Isso pode ser verificado por $x^{(4)} - x^{(3)} \neq d^{(4)}$.

³¹ Assim, $x^{(4)} - x^{(3)} = 2,43 \times 10^{-3} d^{(4)}$.

³² $4 \times (182 - 160,12) + 2 \times (175 - 173,85) = 89,82 \geq 42,13$.

O algoritmo de PQS teve seus resultados aferidos com o pacote de programação não-linear chamado Easy!, disponibilizado, para uso acadêmico, pelo Grupo de Otimização do Departamento de Matemática da Universidade de Campinas. Este pacote utiliza a metodologia do Lagrangeano Aumentado [148-150], sendo que as principais especificações referentes ao mesmo podem ser vistas em [151-155].

Nos testes comparativos, os resultados primais foram idênticos. Contudo, o algoritmo de PQS apresentou tempos de processamento bastante inferiores do que a Easy!, visto que esse último não foi construído especificamente para o modelo e, adicionalmente, os recursos disponíveis para melhorar seu desempenho³³ não foram utilizados. Desconsiderando as desvantagens apresentadas na Easy!, em relação ao tempo comparado com a PQS, as quais podem ser facilmente suplantadas em uma implementação específica, as impressões com a metodologia do Lagrangeano Aumentado foram bastante positivas, de modo que a mesma também caracteriza uma importante alternativa de implementação para os problemas de programação não-linear apresentados nesse trabalho.

7.4 Conclusões

Este capítulo realizou uma análise computacional referente à implementação da estratégia de solução adotada no problema da programação da operação energética. De forma mais precisa, a implementação realizada neste trabalho é parte integrante do procedimento de solução do referido problema, ou ainda, pode ser parte de um outro esquema de decomposição matemática, por exemplo. Todavia, com base no caso brasileiro, o subproblema hidrelétrico é de especial interesse, visto que existe uma predominância dos recursos desta natureza. Conseqüentemente, sob ponto de vista computacional, esse subproblema irá deter o maior tempo no procedimento de solução.

Este capítulo abordou, em sua maior parte, o tratamento da natureza combinatória presente nos problemas de alocação das unidades hidrelétricas, realizando para tanto o uso das duas abordagens propostas no capítulo anterior: a enumeração exaustiva e o uso de decomposições auxiliares.

³³ A Easy! é muito mais eficiente se derivadas analíticas são fornecidas. Na ausência dessas derivadas, o pacote utiliza métodos de diferenças finitas para realizar essas aproximações.

Nesse sentido, foram mostrados alguns dos principais resultados primais-duais obtidos, com o intuito de realizar uma comparação entre essas abordagens. As abordagens, definidas neste capítulo como casos enumerativo e decomposto, foram implementadas em um problema prático relevante e ao mesmo tempo de complexidade teórica. Pode se dizer prático dado que a configuração hidrelétrica utilizada apresenta a maioria das complexidades encontradas no caso brasileiro. É de relevância teórica quando, conforme mostrado no capítulo, a estratégia permite obter informações do comportamento da solução do problema mediante diversas representações, mais ou menos simplificadas, das restrições e custos envolvidos.

Sob ponto de vista de qualidade da solução, os resultados apontam para o uso do problema dual enumerativo. Todavia, deve-se evitar, conforme mostrou a análise de um terceiro problema dual, denominado de caso misto, que os problemas de alocação associados às usinas com características semelhantes às maiores usinas utilizadas na configuração (Ilha Solteira e Tucuruí) sejam resolvidos por enumeração. Deve-se lembrar que, o maior tempo de processamento encontrado nos testes foi igual a três horas. Esse tempo é ainda perfeitamente aceitável e compatível com os requisitos de tempo para a tomada de decisões que devem ser tomadas pelo operador do sistema.

É possível concluir que determinadas estratégias alternativas possam ser analisadas, as quais dizem respeito ao uso combinado dos casos enumerativo, decomposto e misto. Como idéia inicial, poderia se resolver o subproblema hidrelétrico de modo semelhante ao realizado no caso decomposto ou, de forma mais prática, no caso misto. De posse dos valores ótimos encontrados nesse primeiro problema dual, o caso enumerativo então seria executado utilizando esses valores ótimos como ponto de partida.

Outra opção consiste em realizar o esquema decomposto em alguns estágios de tempo para uma dada usina. As análises anteriores mostram que existe uma relação entre os multiplicadores de Lagrange de um dado subproblema de alocação, na qual o caso decomposto representa uma boa aproximação para o caso enumerativo. Portanto, com base na relação dos multiplicadores, determinados estágios ficariam ao encargo da estratégia realizada no modelo decomposto, sendo que as demais devem ser direcionadas para o caso enumerativo.

Ainda, com base nos resultados obtidos, é possível propor algumas estratégias adicionais que visam melhorar o desempenho da decomposição apresentada no Capítulo 5 e utilizada neste capítulo.

Uma importante característica notada nos testes, com relação às decisões do subproblema hidráulico, diz respeito a maneira como esse modelo linear realiza essas decisões. Conforme visto, o subproblema tende a utilizar a água de modo a usina defluir apenas nos valores máximos e mínimos possíveis na usina. Portanto, deve ser investigado o efeito da inclusão de limites máximos e mínimos mais próximos possível daqueles encontrados no modelo não-linear, isto é, que levam em conta os efeitos (pelo menos de forma aproximada) da queda líquida e das restrições de reserva nesses limites. Deste modo, ter-se-ia em mãos um limite máximo de vazão turbinada na usina de limitados pela máxima potência que as usinas poderiam alcançar, e um limite mínimo que representaria de forma aproximada o menor valor de vazão na usina na qual deveria estar operando para que o número mínimo de máquinas necessário para manter a restrição de reserva seja atendido. Nos testes foram observados que esses valores mínimos são muito superiores a zero, sendo que, em geral, representam a vazão turbinada de uma (ou no máximo duas) unidade operando em potência mínima. Por sua vez, os valores máximos são inferiores àqueles usados na implementação, os quais representam o engolimento máximo nominal das unidades.

Algumas investigações relacionadas aos subproblemas de alocação também podem ser realizadas, as quais dizem respeito ao uso de estratégias diferentes daquelas propostas para os casos enumerativo e decomposto. Análise semelhante realizada na Seção 7.3.2 pode ser realizada considerando diversas simplificações nos subproblemas de alocação. A idéia seria observar o comportamento da função dual, tal como mostrado na referida seção, com base na relação dos multiplicadores presentes no subproblema, mediante as seguintes medidas:

- representar o efeito das unidades idênticas nos diversos grupos de uma usina por meio de uma unidade equivalente;
- relaxar as variáveis inteiras do problema, isto é, representar todas as unidades por meio de funções contínuas definidas entre seus limites mínimos e máximos de potência.

Duas sugestões de implementação podem ser investigadas também nos subproblemas referentes a estratégia adotada no caso decomposto. Como primeira delas e diferentemente do apresentado no capítulo anterior, pode-se substituir as variáveis artificiais pha_j também na restrição de reserva, antes de dualizar esta última. Deste modo a reserva é tratada nos subproblemas de programação linear inteira-mista e não mais no subproblema contínuo não-linear. A segunda sugestão para o caso decomposto é semelhante àquela citada para o subproblema hidráulico. Os subproblemas de natureza linear inteira-mista tomam decisões de forma semelhante ao subproblema hidráulico, isto é, procuram operar as unidades com geração em valores mínimos ou máximos. Então, também é desejável que estes valores se aproximem ao máximo daqueles que podem ser fornecidos pelo subproblema contínuo e não-linear.

Este trabalho não deixaria de propor esquemas de dualização alternativos. A idéia visa obter uma outra estrutura de decomposição que tem por objetivo sobrepujar a explosão combinatória que pode estar presente nos subproblemas de alocação de unidades geradoras hidrelétricas. Isso na verdade representa o mesmo objetivo da decomposição utilizada pelo caso decomposto. Todavia, o que se propõem é evitar trabalhar com subproblemas de características muito distintas, isto é, não-linear contínuo e linear inteiro-misto. Esse esquema de decomposição é mostrado no Apêndice B.

Por fim, deve-se ressaltar ainda que, na implementação, não foram tomadas algumas medidas que poderiam certamente decrescer os tempos de processamento. Inicialmente, estão disponíveis computadores que são, no mínimo quatro vezes mais velozes do que aquele usado aqui. Opções de compilação direcionadas para melhorar o tempo de execução, além de outras medidas, estas ligadas à programação, também não devem ser rejeitadas. No tocante à programação, é de especial interesse armazenar as variáveis primais ótimas obtidas nos problemas de programação não-linear, obtidas em um dada iteração dual, e utilizá-las como ponto inicial nos respectivos problemas na iteração dual subsequente. À medida que o problema dual está próximo da solução, a grandeza das variáveis duais tende a variar em menor escala. Deste modo, o reflexo nos problemas de programação não-linear deve ser positivo, uma vez que o número de iterações deve ser reduzido. Assim como o caso enumerativo deve ser almejado, o uso de técnicas de processamento paralelo deve ser encarado do mesmo modo, principalmente quando se tem um problema onde diversas tarefas podem ser re-

solvidas independentemente. Esse é o caso dos subproblemas de alocação de unidades geradoras, os quais representam a maior carga computacional resultante da decomposição proposta.



CAPÍTULO

8

Conclusões

ESTE trabalho teve como tema central o problema da programação da operação energética de sistemas hidrotérmicos, cuja predominância dos recursos de geração é de origem hidrelétrica. A programação é um dos principais problemas que devem ser resolvidos de modo a permitir que a sociedade usufrua da melhor maneira possível dos benefícios ligados à energia elétrica, isto é, usando os recursos energéticos de forma racional e respeitando as restrições ambientais.

As características básicas do problema da programação, além de questões mais amplas relativas ao planejamento da operação de sistemas hidrotérmicos, estão evidenciadas no Capítulo 2. Dois aspectos principais foram abordados no tocante ao problema em referência, ressaltando-se a sua predominância hidrelétrica: a modelagem e técnica de solução.

Começando pela modelagem, este trabalho procurou ilustrar, no Capítulo 3, o complexo comportamento operativo associado ao uso das unidades geradoras, com evidente ênfase para as unidades hidrelétricas. No referido capítulo, é apresentada uma função de produção que representa, de forma precisa, o efeito sobre a potência de saída das unidades da variação do rendimento, perdas hidráulicas, cota de jusante, bem como a presença de múltiplas zonas proibidas de geração.

Com relação à modelagem das unidades termelétricas, o trabalho representa custos operativos associados com a partida e operação em condição nominal, bem como três diferentes tipos de restrições de rampa relacionadas com as restrições encontradas nos processos de partida, desligamento e operação nominal das unidades. O sistema de transmissão não é modelado de forma detalhada sendo, portanto, aproximado por restrições de limites de intercâmbio entre os diversos subsistemas.

Como consequência, a modelagem representada neste trabalho acarreta em um problema de programação matemática com características que tornam o processo de solução uma tarefa bastante complexa. Isso porque se tem um problema de natureza não-linear, inteira-mista e de grande porte. Nesse sentido, é necessário utilizar técnicas de otimização que estejam aptas a manusear com essas características, fornecendo ainda uma solução de boa qualidade a um custo computacional compatível com os requerimentos da programação energética.

A técnica escolhida foi a Relaxação Lagrangeana, cujo desempenho obtido em problemas de natureza semelhantes ao deste trabalho é evidente na literatura. No contexto da Relaxação Lagrangeana, foi apresentado, com o auxílio de técnicas de dualização baseadas na duplicação de restrições artificiais, um esquema de decomposição que trata o problema original a partir da solução de diversos grupos de subproblemas distintos, descritos matematicamente ao longo do Capítulo 5.

O primeiro grupo trata da alocação de unidades geradoras termelétricas. A estrutura desses subproblemas é tal que técnicas amplamente estudadas possam ser empregadas na sua solução. O segundo grupo de subproblemas refere-se ao atendimento das restrições de demanda e do sistema de transmissão. Ressalte-se aqui que, embora a representação da rede tenha sido dada de forma demasiadamente simplificada, a decomposição proposta permite modelar o sistema de transmissão de forma mais detalhada e compatível com os requisitos

do problema da programação. O terceiro grupo subproblema tem como tarefa principal manusear o uso da água do sistema hidrelétrico, estabelecendo o total de água que cada reservatório pode “disponibilizar” às respectivas unidades fazerem uso na geração, levando-se em conta as diversas restrições pertinentes à operação das cascatas, a qual destaca-se aqui aquelas relacionadas com o valor futuro da água armazenada. O último conjunto de subproblemas, e que recebeu maior atenção ao longo de todo o trabalho, determina o número ótimo de unidades (e as respectivas zonas operativas) para cada usina hidrelétrica e estágio de tempo do problema. Essa tarefa considera restrições que são difíceis de serem manuseadas quando se consideram diversas usinas simultaneamente, como por exemplo, os limites de potência das zonas das unidades. Porém, conforme visto, duas estratégias são usadas para resolver esse subproblema: a enumeração exaustiva e duplicação-dualização de algumas restrições. Essas estratégias são necessárias devido ao tamanho do espaço de estados que pode existir nas mais diversificadas usinas hidrelétricas.

A viabilidade computacional, bem como a aplicabilidade prática do esquema proposto, para o subproblema hidrelétrico, foram demonstradas no Capítulo 7, a partir dos tempos de processamento e da qualidade das soluções obtidas. Para a obtenção dos resultados foram utilizados dados referentes a uma configuração hidrelétrica de natureza realista, pertencente ao sistema eletro-energético brasileiro.

A implementação enfocou a resolução do subproblema hidrelétrico, o qual é composto pelos subproblemas hidráulico e de alocação de unidades geradoras hidrelétricas. Esses subproblemas são de especial interesse uma vez que, sob ponto de vista computacional, os mesmos requerem o maior esforço computacional do problema da programação. As questões ligadas ao tratamento do número de estados dos subproblemas de alocação receberam o maior interesse, mediante a apresentação de resultados de duas estratégias específicas, denominadas de casos enumerativo e decomposto.

Em geral, os testes apontaram que o caso enumerativo é o mais adequado para a maioria das usinas hidrelétricas do sistema utilizado, sendo que o mesmo foi considerado como base comparativa para o outro caso analisado, o caso decomposto. Todavia, deve-se levar em conta o sistema brasileiro detém pelo menos o dobro de unidades estudadas neste trabalho que, por sua vez, podem tornar a aplicação direta do caso enumerativo muito onerosa. Nesse sentido, o trabalho mostrou quão afastado e quais situações especiais o segundo

caso estudado, o caso decomposto, representa uma boa aproximação para o tratamento enumerativo. Conforme visto, usinas com maior disponibilidade de água fazem com que os casos enumerativo e decomposto apresentem, nessa situação, decisões primais-duais bastante próximas.

Como consequência, podem ser testadas algumas estratégias que englobam o uso simultâneo das duas abordagens. Um exemplo, denominado de caso misto, foi apresentado no Capítulo 7, onde apenas algumas usinas em especial fizeram uso do esquema de dualização presente no caso decomposto. Alternativas ainda podem ser realizadas no sentido de combinar, ao longo de um mesmo processo iterativo, as estratégias referentes aos casos decomposto, misto e enumerativo.

Como sugestões futuras, no sentido de melhorar a qualidade das soluções fornecidas pelo caso decomposto, pode-se investigar o efeito da inclusão de limites ligados às vazões turbinada e vertida no subproblema hidráulico mais próximos daqueles encontrados nos subproblemas de alocação. Medidas semelhantes são sugeridas também para os limites de potência nas faixas operativas que são tratadas nos subproblemas de programação linear inteira-mista.

Outras sugestões, no tocante ao uso de decomposições alternativas, também representam alternativas concretas com o intuito de melhorar o desempenho do caso decomposto. Nesse sentido, foi apresentada uma opção que procura realizar a alocação de unidades geradoras hidrelétricas de modo que não exista a presença de subproblemas de natureza linear. Essa idéia também pode ser investigada para eliminar a característica linear do subproblema hidráulico, embora os acoplamentos temporal e espacial existente sejam fatores limitantes para uma decomposição desse tipo.

Outro aspecto importante, o qual não foi tratado neste trabalho, e que pode merecer atenção especial em alguns casos, diz respeito ao efeito da variação da cota de montante nos subproblemas de alocação de unidades geradoras. Essa variação, a qual está relacionada com reservatórios de pequena capacidade de regularização, engloba complexidades adicionais no sentido de acoplar as decisões de uma mesma usina ao longo do horizonte de estudo. Portanto, seria necessário realizar, por exemplo, além da duplicação das variáveis referentes às vazões turbinada e vertida, a duplicação das variáveis relacionadas com o volume armazenado no reservatório.

Para finalizar o trabalho, deve-se ressaltar que a abordagem tratada aqui diz respeito à solução de um problema dual, que por sua vez é uma versão relaxada do problema primal original. Conforme foi mostrado ao longo do último capítulo, diversas restrições são violadas na solução ótima dual, de modo que é necessário fazer uma “purificação” das soluções ótimas primais obtidas. Esta purificação do processo de solução dá-se o nome de recuperação primal, a qual é baseada em heurísticas que dependem fortemente da estrutura de um problema em particular.

Diversas heurísticas têm sido utilizadas para os mais diferentes problemas, como por exemplo, aquelas observadas em [45,51,157]. Todavia, é importante lembrar que o caso brasileiro possui características peculiares que podem requerer o uso de heurísticas próprias, as quais não necessariamente representam uma aplicação direta, ou até mesmo parcial, daquelas encontradas nas referências acima. Uma idéia que está sendo estruturada, no tocante à operação do sistema brasileiro, consiste em utilizar como ponto de partida os multiplicadores ótimos provenientes da otimização dual e usá-los para obter uma solução primal viável no contexto da metodologia do Lagrangeano Aumentado [60].

Apêndice A

Derivadas Relacionadas à Função de Produção das Unidades Hidrelétricas

Este apêndice apresenta as derivadas (de até segunda ordem) que estão envolvidas com a função de produção de uma unidade hidrelétrica, de acordo com a representação proposta no terceiro capítulo. Conforme visto nos Capítulos 5, 6 e 7, a maioria dessas derivadas foi utilizada neste trabalho.

Inicialmente, deve-se ressaltar que a função de produção é escrita aqui como função da vazão defluente na usina, d , e não em termos das vazões turbinada, Q , e vertida, s . É fácil de perceber que as derivadas da função de produção em relação a Q e a s são idênticas, o que vem a justificar o uso da variável d . Abaixo, estão apresentadas essas derivadas.

$$pb_j(.) = G\eta_j(.)bl_j(.)q_j \quad (\text{a.1})$$

$$bl_j(.) = fcm - b_0d - b_1d^2 - b_2d^3 - b_3d^4 - k_jq_j^2 \quad (\text{a.2})$$

$$\frac{\partial bl_j(.)}{\partial q_j} = -2k_jq_j \quad (\text{a.3})$$

¹ Isso só é válido se k_{usinar} pertencente a Equação (3.2.1.11), for igual a zero. De todo modo, o desenvolvimento mostrado neste apêndice pode ser facilmente realizado quando tal fato não for verdadeiro. Para tanto, deve-se utilizar as variáveis Q e s , em vez da variável d .

$$\frac{\partial^2 hl_j(.)}{\partial q_j^2} = -2k_j \quad (\text{a.4})$$

$$\frac{\partial hl_j(.)}{\partial d} = -b_0 - 2b_1d - 3b_2d^2 - 4b_3d^3 \quad (\text{a.5})$$

$$\frac{\partial^2 hl_j(.)}{\partial d^2} = -2b_1 - 6b_2d - 12b_3d^2 \quad (\text{a.6})$$

$$\frac{\partial^2 hl_j(.)}{\partial q_j \partial d} = 0 \quad (\text{a.7})$$

$$\eta_j[q_j, hl_j(q_j, d)] = \rho_0 + \rho_1 q_j + \rho_2 hl_j + \rho_3 q_j hl_j + \rho_4 q_j^2 + \rho_5 hl_j^2 \quad (\text{a.8})$$

$$\frac{\partial \eta_j(.)}{\partial q_j} = \rho_1 + \rho_2 \frac{\partial hl_j(.)}{\partial q_j} + \rho_3 \left(hl_j(.) + q_j \frac{\partial hl_j(.)}{\partial q_j} \right) + 2\rho_4 q_j + 2\rho_5 \frac{\partial hl_j(.)}{\partial q_j} hl_j(.) \quad (\text{a.9})$$

$$\frac{\partial^2 \eta_j(.)}{\partial q_j^2} = \rho_2 \frac{\partial^2 hl_j(.)}{\partial q_j^2} + \rho_3 \left(2 \frac{\partial hl_j(.)}{\partial q_j} + q_j \frac{\partial^2 hl_j(.)}{\partial q_j^2} \right) + 2\rho_4 + 2\rho_5 \left(2 \frac{\partial^2 hl_j(.)}{\partial q_j^2} hl_j(.) + \left(\frac{\partial hl_j(.)}{\partial q_j} \right)^2 \right) \quad (\text{a.10})$$

$$\frac{\partial \eta_j(.)}{\partial d} = \rho_2 \frac{\partial hl_j(.)}{\partial d} + \rho_3 q_j \frac{\partial hl_j(.)}{\partial d} + 2\rho_5 \frac{\partial hl_j(.)}{\partial d} hl_j(.) \quad (\text{a.11})$$

$$\frac{\partial^2 \eta_j(.)}{\partial d^2} = \rho_2 \frac{\partial^2 hl_j(.)}{\partial d^2} + \rho_3 q_j \frac{\partial^2 hl_j(.)}{\partial d^2} + 2\rho_5 \left(\frac{\partial^2 hl_j(.)}{\partial d^2} hl_j(.) + \left(\frac{\partial hl_j(.)}{\partial d} \right)^2 \right) \quad (\text{a.12})$$

$$\frac{\partial^2 \eta_j(.)}{\partial d \partial q_j} = \rho_2 \frac{\partial^2 hl_j(.)}{\partial d \partial q_j} + \rho_3 \left(\frac{\partial hl_j(.)}{\partial d} + q_j \frac{\partial^2 hl_j(.)}{\partial d \partial q_j} \right) + 2\rho_5 \left[\frac{\partial^2 hl_j(.)}{\partial d \partial q_j} hl_j(.) + \left(\frac{\partial hl_j(.)}{\partial d} \frac{\partial hl_j(.)}{\partial q_j} \right) \right] \quad (\text{a.13})$$

$$\frac{\partial pb_j(.)}{\partial q_j} = G \left[\frac{\partial \eta_j(.)}{\partial q_j} hl_j(.) q_j + \eta_j(.) \frac{\partial hl_j(.)}{\partial q_j} q_j + \eta_j(.) hl_j(.) \right] \quad (\text{a.14})$$

$$\frac{\partial pb_j(.)}{\partial d} = G \left[\frac{\partial \eta_j(.)}{\partial d} hl_j(.) q_j + \eta_j(.) \frac{\partial hl_j(.)}{\partial d} q_j \right] \quad (\text{a.15})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 pb_j(.)}{\partial q_j^2} = G & \left[\left(\frac{\partial^2 \eta_j(.)}{\partial q_j^2} hl_j(.) q_j + \frac{\partial \eta_j(.)}{\partial q_j} \frac{\partial hl_j(.)}{\partial q_j} q_j + \frac{\partial \eta_j(.)}{\partial q_j} hl_j(.) \right) + \left(\frac{\partial \eta_j(.)}{\partial q_j} \frac{\partial hl_j(.)}{\partial q_j} q_j \right. \right. \\ & \left. \left. + \eta_j(.) \frac{\partial^2 hl_j(.)}{\partial q_j^2} q_j + \eta_j(.) \frac{\partial hl_j(.)}{\partial q_j} \right) + \left(\frac{\partial \eta_j(.)}{\partial q_j} hl_j + \eta_j(.) \frac{\partial hl_j(.)}{\partial q_j} \right) \right] \quad (\text{a.16}) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 pb_j(.)}{\partial d^2} = G \left[\left(\frac{\partial^2 \eta_j(.)}{\partial d^2} hl_j(.) q_j + \frac{\partial \eta_j(.)}{\partial d} \frac{\partial hl_j(.)}{\partial d} q_j \right) + \left(\frac{\partial \eta_j(.)}{\partial d} \frac{\partial hl_j(.)}{\partial d} q_j + \eta_j(.) \frac{\partial^2 hl_j(.)}{\partial d^2} q_j \right) \right] \quad (\text{a.17})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 pb_j(.)}{\partial d \partial q_j} = G & \left[\left(\frac{\partial^2 \eta_j(.)}{\partial d \partial q_j} hl_j(.) q_j + \frac{\partial \eta_j(.)}{\partial d} \frac{\partial hl_j(.)}{\partial q_j} q_j + \frac{\partial \eta_j(.)}{\partial d} hl_j(.) \right) + \left(\frac{\partial \eta_j(.)}{\partial q_j} \frac{\partial hl_j(.)}{\partial d} q_j \right. \right. \\ & \left. \left. + \eta_j(.) \frac{\partial^2 hl_j(.)}{\partial d \partial q_j} q_j + \eta_j(.) \frac{\partial hl_j(.)}{\partial d} \right) \right] \quad (\text{a.18}) \end{aligned}$$

Apêndice B

Decomposição Alternativa Para a Alocação de Unidades Hidrelétricas

Inicialmente, com o objetivo de apresentar essa decomposição, é reescrito abaixo o subproblema de alocação de unidades geradoras hidrelétricas, considerando fixos os índices de reservatório e estágio de tempo.

$$f_{rt} = \min_{\{z_{jk}, q_j, Q, s\}} \lambda d \left(\sum_{j=1}^{J(r)} p h_j(q_j, Q, s) \right) + \lambda q \cdot Q + \lambda s \cdot s \quad (\text{b.1})$$

$$\text{sujeito a: } Q = \sum_{j=1}^{J(r)} q_j \quad (\text{b.2})$$

$$\sum_{k=1}^{\Phi_{jr}} p h_{jk}^{\text{mín}} z_{jk} \leq p h_j(q_j, Q, s) \leq \sum_{k=1}^{\Phi_{jr}} p h_{jk}^{\text{máx}} z_{jk} \quad (\text{b.3})$$

$$\sum_{j=1}^{J(r)} \left(\sum_{k=1}^{\Phi_{jr}} p h_{j1}^{\text{máx}} z_{jk} - p h_j(q_j, Q, s) \right) \geq r b \quad (\text{b.4})$$

$$z_{jk} \in \{0, 1\} \quad \sum_{k=1}^{\Phi_j} z_{jk} \leq 1 \quad (b.5)$$

$$pha_j(qa_j) = p_{1j}qa_j + p_{2j}qa_j^2 + \dots + p_{7j}qa_j^7 \quad (b.6)$$

$$pha_j(qa_j) = ph_j(q_j, Q, s) \quad (b.7)$$

onde $pha_j(qa_j)$ é uma função de ordem sete, detalhada adiante.

Como primeiro passo para a dualização alternativa, é necessário substituir $ph_j(q_j, Q, s)$ por $pha_j(qa_j)$ em (b.3) e dualizando-se (b.4) e (b.7) tem-se que a função dual pode ser avaliada por meio dos seguintes subproblemas primais:

$$\Theta_{AUH_{cont}}^{rt}(\lambda d, \lambda q, \lambda s, \lambda ph_j, \lambda r) = \min_{\{q_j, Q, s\}} \left(\sum_{j=1}^{J(r)} (\lambda r - \lambda ph_j - \lambda d) \cdot ph_j(q_j, Q, s) \right) + \lambda q \cdot Q + \lambda s \cdot s \quad (b.8)$$

sujeito a: $Q = \sum_{j=1}^{J(r)} q_j$

e

$$\Theta_{AUH_{int}}^{rt}(\lambda ph_j, \lambda r) = \sum_{j=1}^{J(r)} \Theta_{CUH_{int}}^{int}(\lambda ph_j, \lambda r) \quad (b.9)$$

onde

$$\Theta_{AUH_{int}}^{int}(\lambda ph_j, \lambda r) = \min_{\{z_{jk}, pha_j\}} \left\{ \lambda ph_j \cdot pha_j(qa_j) - \lambda r \sum_{k=1}^{\Phi_j} ph_{j1}^{máx} z_{jk} \right\}$$

sujeito a: $\sum_{k=1}^{\Phi_j} ph_{jk}^{mín} z_{jk} \leq pha_j(qa_j) \leq \sum_{k=1}^{\Phi_j} ph_{jk}^{máx} z_{jk}$

$$z_{jk} \in \{0, 1\} \quad \sum_{k=1}^{\Phi_j} z_{jk} \leq 1 \quad (b.10)$$

$$pha_j(qa_j) = p_{1j}qa_j + p_{2j}qa_j^2 + \dots + p_{7j}qa_j^7$$

O Subproblema (b.8), de natureza contínua e não-linear, é idêntico ao implementado no caso decomposto. Por sua vez, cada subproblema representado por (b.10) detém agora também característica não-linear, a qual provém da inclusão da função $pha_j(qa_j)$. Essa função, conforme é visto detalhadamente em [156], pode ser obtida a partir de uma representação da função de produção de uma unidade hidrelétrica que considera a altura de queda bruta da usina constante.

Reescrevendo-se (b.10), tem-se:

$$\Theta_{AHH_{int}}^{irt}(\lambda p b_j, \lambda r) = \min_{\{z_{jk}, p b_{jk}\}} \left\{ \lambda p b_j \cdot (p_{1j} q a_j + p_{2j} q a_j^2 + \dots + p_{7j} q a_j^7) - \lambda r \sum_{k=1}^{\Phi_j} p b_{j1}^{máx} z_{jk} \right\}$$

$$\text{s. a: } \sum_{k=1}^{\Phi_j} p b_{jk}^{mín} z_{jk} \leq p_{1j} q a_j + p_{2j} q a_j^2 + \dots + p_{7j} q a_j^7 \leq \sum_{k=1}^{\Phi_j} p b_{jk}^{máx} z_{jk} \quad (\text{b.11})$$

$$z_{jk} \in \{0, 1\} \quad \sum_{k=1}^{\Phi_j} z_{jk} \leq 1$$

O procedimento de solução do subproblema acima é semelhante ao encontrado no caso decomposto: enumera-se cada zona operativa para cada unidade individualmente. Entretanto, deve-se agora resolver um problema de natureza não-linear de ordem sete.

O tratamento das restrições ligadas às zonas operativas é muito simples de ser realizado, uma vez que essas restrições representam a própria função objetivo do problema (salvo o multiplicador de Lagrange, $\lambda p b_{jk}$). Assim, o procedimento de solução equivale aquele que é realizado em problemas de otimização (no presente caso unidimensional) sujeito a simples limites nas variáveis. Nessa otimização, diversas técnicas podem ser utilizadas, inclusive não se descartando a aplicação de uma versão Quase-Newton unidimensional.

O uso de (b.11) visa, conforme dito, evitar o comportamento observado neste trabalho, no tocante aos subproblemas de natureza linear inteira-mista. A mesma idéia pode ser investigada para evitar que subproblema hidráulico seja de natureza linear. Todavia, deve-se lembrar que esse subproblema é acoplado no tempo e no espaço, o que por sua vez merece uma atenção especial na estrutura não-linear a ser empregada.

Referências

- [1] SILVA, E. L.; *Formação de Preços em Mercados de Energia Elétrica*, Editora Sagra Luzzatto, Porto Alegre, RS, 2001.
- [2] FILHO, J. M. A.; Imperativos da Descentralização e Coordenação da Operação Energética no Âmbito da Reforma Institucional do Setor Elétrico Brasileiro, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Março de 2000.
- [3] COSTA J. P., CAMPODÓNICO N. M., GORENSTIN, B. G. et al.; "A Model for Optimal Energy Expansion in Interconnected Hydrosystems", *10th PSCC*, Austria, August 1990.
- [4] PEREIRA, M. V. F., PINTO, L. M. V. G.; Stochastic Optimization of Multireservoir Hydroelectric System: A Decomposition Approach, *Water Resources Research*, Volume 21, Number 6, p.779-792, June, 1985.
- [5] PEREIRA, M. V. F.; Optimal Scheduling of Hydrothermal Systems – An Overview, *IFAC Electric Energy Systems*, Rio de Janeiro, Brazil, pp. 1-9, 1985.
- [6] COSTA, J. P., GORENSTIN, B., CAMPODÓNICO, N. M., PEREIRA, M. V. F.; Programação Estocástica de Operação de Sistemas Hidrotérmicos, *Simpósio Brasileiro de Recursos Hídricos*, Foz do Iguaçu, 26-30 de Novembro, 1989.
- [7] PEREIRA, M. V. F.; Optimal Stochastic Operations of Large Hydroelectric Systems, *Electrical Power & Energy Systems*, Volume 11, Number 3, pp. 161-169, July 1989.
- [8] PEREIRA, M. V. F., PINTO, L. M. V. G.; Multi-Stage Stochastic Optimization Applied to Energy Planning, *Mathematical Programming*, 52, 1991.
- [9] KLIGERMAN, A. S.; Operação Ótima de Subsistemas Hidrotérmicos Interligados Utilizando Programação Dinâmica Estocástica Dual, Dissertação de Mestrado, UNICAMP, Campinas, SP, Brasil, Fevereiro de 1992.
- [10] GORENSTIN, B., COSTA, J. P., PEREIRA, M. V. F.; Stochastic Optimization of a Hydrothermal System, *IEEE Transactions on Power Systems*, Volume 7, Number 2, May 1992.
- [11] MACEIRA, M. E. P.; Stochastic Dual Dynamic Programming Applied to the Operating Planning of Hydrothermal Systems with Representation of the Inflows through the Use of Auto-Regressive Models, Project NEWAVE - Technical Report-CEPEL 237/93, 1993.

- [12] PORTO, T. O.; Representação de Problemas Estocásticos Multi-Estágios em Decomposição – Uma Aplicação ao Planejamento da Expansão de Sistemas Elétricos, Dissertação de Mestrado, PUC/Departamento de Engenharia Elétrica, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, Abril de 1994.
- [13] FINARDI, E. C.; *Planejamento da Operação de Sistemas Hidrotérmicos Utilizando Computação de Alto Desempenho*, Dissertação de Mestrado, UFSC/LABPLAN, Florianópolis, SC, Brasil, Abril de 1999.
- [14] ARVANITIDIS, N. V., ROSING, J.; Optimal Operation of Multireservoir Using a Composite Representation, *IEEE Transactions on PAS*, Volume PAS-89, Number 2, pp. 327-335, February 1970.
- [15] ARVANITIDIS, N. V., ROSING, J.; Composite Representation of Multireservoir Hydroelectric Power System, *IEEE Transactions on PAS*, Volume PAS-89, Number 2, pp. 319-326, February 1970.
- [16] CRUZ, G.; Modelo Equivalente Não-Linear para o Planejamento da Operação de Longo Prazo de Sistemas de Energia Elétrica, Tese de Doutorado, Unicamp, Campinas, SP, Brasil, Dezembro de 1988.
- [17] MERCIO, C. M. V. D. B.; Resolução de Problemas de Planejamento de Sistemas Hidrotérmicos com Representação do Sistema por Modelo Equivalente de Energia Adotando Acoplamento Hidráulico, Dissertação de Mestrado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, Outubro de 2000.
- [18] CARVALHO, L. C. X.; Planejamento de Sistemas Hidrotérmicos: Uma Análise Comparativa Entre as Representações a Usinas Individualizadas e a Reservatórios Equivalentes de Energia, Dissertação de Mestrado, UFSC/LABPLAN, Florianópolis, SC, Brasil, Maio de 2002.
- [19] EVERETT III, H.; Generalized Lagrange Multiplier Method for Solving Problems of Optimum Allocation of Resources, *Operation Research*, 11 (1963), pp. 399-417.
- [20] BALISNKI, M. L., BAUMOL, W. J.; The Dual in Nonlinear Programming and Its Economic Interpretation, *Rev. Economic Studies*, XXXV, 103 (1968), pp. 237-256.
- [21] FALK, J. E.; Lagrange Multipliers and Nonconvex Programs, *SIAM Journal on Control*, 7(4): 534-545, 1969.
- [22] LASDON, L. S.; *Optimization Theory of Large Systems*, Macmillan Company, New York, NY, 1970.
- [23] GEOFFRION, A. M.; Duality in Nonlinear Programming: A Simplified Applications-Oriented Development, *SIAM Review*, Vol. 13, Number 4, January, 1971.
- [24] GEOFFRION, A. M.; Lagrangean Relaxation for Integer Programming, *Mathematical Programming Study*, 2:82-114, 1974.

- [25] BAZARAA, S. M., SHETTY, C. M.; *Nonlinear Programming*, John Wiley & Sons, Atlanta, 1979.
- [26] FISHER, M. L.; The Lagrangian Relaxation Method for Solving Integer Programming Problems, *Management Science*, Number 27, pp. 1-18, 1981.
- [27] URRUTY, J. B. H., LEMARÉCHAL, C.; *Convex Analysis and Minimization Algorithms*, Springer-Verlag, 1993.
- [28] BERTSEKAS, D. P.; *Nonlinear Programming*, Athena Scientific, 2nd Edition, Belmont, MA, 1999.
- [29] BELLMAN, R.; *Dynamic Programming*, Princeton, N. J., Princeton University Press, 1957.
- [30] BELLMAN, R.; *Adaptive Control Process*, Princeton. N. J., Princeton University Press, 1961.
- [31] BELLMAN, R., DREYFUS, S.; *Applied Dynamic Programming*, Princeton University Press, 1962.
- [32] BELLMAN, R., KALABA, R. E.; *Quasilinearization and Nonlinear Boundary-Value Problems*, American Elsevier, New York 1965.
- [33] LARSON, R. E.; A Survey of Dynamic Programming Computational Procedures, *IEEE Transactions on Automatic Control*, December, 1967.
- [34] LARSON, R. E.; *State Increment Dynamic Programming*, American Elsevier, New York, 1968.
- [35] LARSON, R. E.; A Dynamic Programming Successive Approximations Technique, *Presented at 1968 JACC*, University of Michigan, June 1968.
- [36] LARSON, R. E., KECKLER, W. G.; Applications of Dynamic Programming to the Control of Water Resource Systems, *Automatica*, Vol. 5, pp. 15-26, Pergamon Press, 1969.
- [37] KORSAK, A. J., LARSON, R. E.; Convergence Proofs for a Dynamic Programming Successive Approximation Technique, *4th IFAC Congress*, Warsaw, Poland, June 1969.
- [38] ARDUINO, A.; *Programação Dinâmica*, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Junho de 1972.
- [39] HASTINGS, N. A. J.; *Dynamic Programming With Management Applications*, Operations Research Series, The Butterwork Group, London, 1973.
- [40] CENTRO DE PESQUISAS DE ENERGIA ELÉTRICA (Cepel); RELATÓRIO TÉCNICO, *Especificação Funcional do Modelo PREDESP*. Rio de Janeiro, RJ, 1999.

- [41] MUCKSTADT, J. A., KOENIG, S. A.; An Application of Lagrangian Relaxation to Scheduling in Power-Generation Systems, *Operations Research*, Volume 25, Number 3, May-June, 1977.
- [42] LAUER, G. S., SANDELL, N. R., BERTSEKAS, D. P., POSBERGH, T. A.; Solution of Large-Scale Optimal Unit Commitment Problems, *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, Volume PAS-101, Number 1, January, 1982.
- [43] BERTSEKAS, D. P., LAUER, G. S., SANDELL, N. R., POSBERGH, T. A.; Optimal Short-Term of Large-Scale Power Systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-28, Number 1, January, 1983.
- [44] MERLIN, A., SANDRIN, P.; A New Method for Unit Commitment at Electricite de France, *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, Volume PAS-102, Number 5, May, 1983.
- [45] ZHUANG, F., GALIANA, F. D.; Towards a More Rigorous and Practical Unit Commitment by Lagrangian Relaxation, *IEEE Transactions on Power Systems*, Volume 3, Number 2, May, 1988.
- [46] BARD, J.F.; Short-Term Scheduling of Thermal-Electric Generations Using Lagrangian Relaxation, *Operations Research*, Volume 36, Number 5, September-October, 1988.
- [47] RUZIC, S., RAJAKOVIC, N.; A New Approach for Solving Extended Unit Commitment Problem, *IEEE Transactions on Power Systems*, Volume 6, Number 1, February, 1991.
- [48] GUAN, X., LUH, P. B., YAN, H.; An Optimization-based Method for Unit Commitment, *Electrical Power & Energy Systems*, Volume 14, Number 1, February, 1992.
- [49] SHEBLE, G. B., FAHD, G. N.; Unit Commitment Literature Synopsis, *IEEE Transactions on Power Systems*, Volume 9, Number 1, February, 1994.
- [50] TAKRITI, S., BIRGE, J. R., LONG, E.; A Stochastic Model for the Unit Commitment Problem, *IEEE Transactions on Power Systems*, Volume 11, Number 3, August, 1996.
- [51] FELTENMARK, S.; *On Optimization of Power Production*, Doctoral Thesis, Royal Institute of Technology, Department of Mathematics, Stockholm, Sweden, 1997.
- [52] LAI, S. Y., BALDICK, R.; Unit Commitment with Ramp Multipliers, *IEEE Transactions on Power Systems*, Volume 14, Number 1, February, 1999.
- [53] ZHAI, Q., GUAN, X., CUI, J.; Unit Commitment with Identical Units: Successive Subproblem Solving Method Based on Lagrangian Relaxation, *IEEE Transactions on Power Systems*, Volume 17, Number 4, November, 2002.

- [54] PEREIRA, M. V. P., PINTO, M. V. G.; Aplicação de Técnicas de Decomposição ao Pré-Despacho de Sistemas Hidrotérmicos, Grupo X, *SNPTEE*, Brasília, DF, Brasil, 1987.
- [55] PINTO, M. V. G., PEREIRA, M. V. P.; Alocação Semanal de Geração em Sistemas Hidrotérmicos Interligados, Grupo X, *SNPTEE*, Belo Horizonte, MG, Brasil, 1987.
- [56] AMADO, S. M., RIBEIRO, C. C.; Short-Term Generation of Hydraulic Multi-Reservoir Area Interconnected Systems, *IEEE Transactions on Power Systems*, Volume PWRS-2, pp. 758-763, August, 1987.
- [57] OHISHI, T.; Planejamento da Operação de Curto Prazo de Sistemas Hidrotérmicos Predominantemente Hidráulicos, Tese de Doutorado, UNICAMP, Campinas, SP, Dezembro de 1990.
- [58] SALMAZO, C. T.; Modelo de Otimização Eletro-energético de Curto Prazo (Pré-Despacho) Aplicado ao Sistema da COPEL, Dissertação de Mestrado, UNICAMP, Campinas, SP, Março de 1997.
- [59] MACEIRA, M. E. P., TERRY, L., et al.; Despacho de Geração Horário com Representação Detalhada de Restrições Hidráulicas, *VII Symposium of Specialists in Electric Operational and Expansion Planning*, Curitiba, Brazil, SP-063, Electronic Version, 2000.
- [60] BELLONI, A., LIMA, A. L. D. S., MACEIRA, M. E. P., SAGASTIZÁBAL, C. A.; Bundle Relaxation and Primal Recovery in Unit Commitment Problems. The Brazilian Case, *Annals of Operations Research* 120, pp. 21-44, Kluwer Academic Publishers, Netherlands, 2003.
- [61] HABIBOLLAHZADEH, H.; *Application of Mathematical Programming to Short-Term Operation Planning of Hydrothermal Power System*, Doctoral Thesis, Royal Institute of Technology, Department of Electric Power System Engineering, Stockholm, Sweden, 1984.
- [62] YANG, J., CHEN, N.; Short-Term Hydrothermal Coordination Using Multi-Pass Dynamic Programming, *IEEE Transactions on Power Systems*, Volume 4, Number 3, August, 1989.
- [63] RUZIC, S., RAJAKOVIC, N., VUCKOVIC, A.; A Flexible Approach to Short-Term Hydro-Thermal Coordination, PART I: Problem Formulation and General Solution Procedure, *IEEE Transactions on Power Systems*, Volume 11, Number 3, August, 1996.
- [64] UZIC, S., VUCKOVIC, A., RAJAKOVIC, N.; A Flexible Approach to Short-Term Hydrothermal Coordination, PART II: Dual Problem Solution Procedure, *IEEE Transactions on Power Systems*, Volume 11, Number 3, August, 1996.

- [65] I, C. A., SVOBODA, A. J., TSENG, C. L., JOHNSON, R. B.; Hydro Unit Commitment in Hydro-Thermal Optimization, *IEEE Transactions on Power Systems*, Volume 12, Number 2, May, 1997.
- [66] RADINSKAIA, E., GALIANA, F. D.; Generation Scheduling and the Switching Curve Law, *IEEE Transactions on Power Systems*, Volume 15, Number 2, May, 2000.
- [67] SHAWWASH, Z. K., SIU, T. K., RUSSEL, S. O.; The B. C. Hydro Short-Term Hydro Scheduling Optimization Model, *IEEE Transactions on Power Systems*, Volume 15, Number 3, August, 2000.
- [68] TURNBULL, H. W.; *The Great Mathematicians*, Simon and Schuster, New York, 1962.
- [69] HERRMANN, D.; *Joseph Louis Lagrange (1736-1813)*, Berlin-Treptow, 1963.
- [70] FERREIRA, L. A. F. M., ANDERSSON, T., IMPARATO, C. F., MILLER, T. E., PANG, C. K., SVOBODA, A., VOJDANI, A. F.; Short-Term Resource Scheduling in Multi-Area Hydrothermal Power Systems, *Electric and Energy Systems*, Volume 11, Number 3, 1989.
- [71] GONZAGA, C.; Busca de Caminhos em Grafos e Aplicações, *I Reunião de Matemática Aplicada*, Centro Educacional Residencial Gávea, Rio de Janeiro, RJ, 4 a 15 de Dezembro, 1978.
- [72] KENNINGTON, J. L., HELGASON, R. V.; *Algorithms for Network Programming*, John Wiley & Sons, New York, 1980.
- [73] BRANNLUND, H., BUBENKO, J. A., SJELVGREN, D., ANDERSSON, N.; Optimal Short-Term Operation Planning of a Large Hydrothermal Power System Based on a Nonlinear Network Flow Concept, *IEEE Transactions on Power Systems*, November, 1986.
- [74] LI, C.A., JAP, P. J., STREIFFERT, D. L.; Implementation of Network Flow Programming to the Hydrothermal Coordination in an Energy Management Systems, *IEEE Transactions on Power Systems*, August, 1993.
- [75] WOOD, A. J., WOLLENBERG, B. F.; *Power Generation Operation & Control*, John Wiley & Sons, 1984.
- [76] GUAN, X., SVOBODA, A., LI, C. A.; Scheduling Hydro Power Systems with Restricted Operating Zones and Discharges Ramping Constraints, *IEEE Transactions on Power Systems*, Volume 14, Number 1, February 1999.
- [77] NI, E., GUAN, X., LI, R.; Scheduling Hydrothermal Power Systems with Cascaded and Head-Dependent Reservoirs, *IEEE Transactions on Power Systems*, Volume 14, Number 3, August, 1999.
- [78] MACINTYRE, A. J.; *Máquinas Motrizes Hidráulicas*, Guanabara Dois, Rio de Janeiro, 1983.

- [79] SOUZA, Z.; *Centrais Hidro e Termelétricas*, Editora Blucher, São Paulo, 1983.
- [80] FORTUNATO, L. A. M., ARARIPE, T. A., ALBUQUERQUE, J. C. R., PEREIRA, M. V. F.; *Introdução ao Planejamento da Expansão e Operação de Sistemas de Produção de Energia Elétrica*, Editora da Universidade Federal Fluminense, 1990.
- [81] WONNACOTT, T. H, WONNACOTT, R. J.; *Introductory Statistics for Business and Economics*, Ontario, Canada, John Wiley & Sons, Inc, 1972.
- [82] CALAINHO, J. A. L., HORTA, C. A., GONÇALVES, C., LOMÔNACO, F. G.; *Cavitação em Turbinas Hidráulicas do Tipo Francis e Kaplan no Brasil*, ELETRONORTE, 1997.
- [83] GULLIVER, J. S., ARNDT, R. E.; *Hydropower Engineering Handbook*, McGraw-Hill, 1991.
- [84] FRIEDLANDER, A.; *Elementos de Programação Não-Linear*, Editora da UNICAMP, Campinas, SP, 1994.
- [85] NILSSON, O., SJELVGREN, D.; Hydro Unit Start-Up Costs and Their Impact on the Short-Term Scheduling Strategies of Swedish Power Producers, *IEEE Transactions on Power Systems*, Volume 12, Number 1, February, 1997.
- [86] GEORGE, J. A., READ, E. G., KERR, A. L., ROSENTHAL, R. E.; Optimal Scheduling of Hydro Stations: An Integer Programming Model, *Working Paper: EMRG – WP-95-07*, Energy Modeling Research Group, Department of Management, University of Canterbury, New Zealand, July, 1995.
- [87] NILSSON, O., SJELVGREN, D.; Mixed-Integer Programming Applied to Short-Term Planning of Hydro-Thermal System, *IEEE Transactions on Power Systems*, Volume 11, Number 1, February, 1996.
- [88] NILSSON, O., SJELVGREN, D.; Variable Splitting Applied to Modeling of Start-Up Costs in Short-Term Hydro Generation Scheduling, *IEEE Transactions on Power Systems*, Volume 12, Number 2, May, 1997.
- [89] ARCE, A., OHISHI, T., SOARES, S.; Optimal Dispatch of Generating Units of the Itaipú Hydroelectric Plant, *IEEE Transactions on Power Systems*, Volume 17, Number 1, February, 2002.
- [90] SVOBODA, A., TSENG, C. L., JOHNSON, R. B.; Short-Term Resource Scheduling with Ramp Constraints, *IEEE Transactions on Power Systems*, Volume 12, Number 1, February, 1997.
- [91] WOLSEY, L. A.; *Integer Programming*, John Wiley & Sons Inc., 1998.
- [92] NOCEDAL, J., WRIGHT, S. J.; *Numerical Optimization*, Springer Series in Operations Research, 1999.

- [93] TSENG, C. L.; *On Power System Generation Unit Commitment Problems*, Doctoral Thesis, Engineering-Industrial and Operations Research, University of California, Berkeley, 1996.
- [94] LIN, E. Y.; A Bibliographical Survey on Some Well-Known Non-Standard Knapsack Problems, *INFOR*, 36(4), 274-317, (1998).
- [95] SHOR, N.; *Minimization Methods for Non-Differentiable Functions*, Springer-Verlag, Berlin, 1997.
- [96] CHENEY, E., GOLDSTEIN, A.; Newton's Method for Convex Programming and Tchebycheff Approximations, *Numerische Mathematik* (1), pp. 253-268, 1959.
- [97] KELLEY, J. E.; The Cutting Plane Method for Solving Convex Programs, *J. Soc. Indust. Appl. Math* (8), pp. 95-109, 1975.
- [98] LEMARÉCHAL, C.; An Extension of Davidon Methods to Nondifferentiable Problems, *Mathematical Programming Study* (3), pp. 95-109, 1975.
- [99] KIWIEL, K. C.; Proximity Control in Bundle Methods for Convex Nondifferentiable Minimization, *Mathematical Programming* (46), pp. 105-122, 1990.
- [100] SCHRAMM, H., ZOWE, J.; A Version of the Bundle Idea for Minimizing a Nonsmooth Function: Conceptual Idea, Convergence Analysis, Numerical Results, *SIAM Journal on Optimization* (2), Number 1, pp. 121-152, 1992.
- [101] BONNANS, J. F., GILBERT, J. C., LEMARÉCHAL, C., SAGASTIZÁBAL, C.; A Family of Variable Metric Proximal Methods, *Mathematical Programming* (68), pp. 15-47, 1995.
- [102] LEMARÉCHAL, C., SAGASTIZÁBAL, C.; An Approach to the Variable Metric Bundle Methods, *Systems Modeling and Optimization* (J. Henry and J-P. Yvon, eds.), *Lectures Notes in Control and Information Sciences*, Number 197, Springer-Verlag, pp. 144-162.
- [103] LEMARÉCHAL, C., SAGASTIZÁBAL, C.; Variable Metric Bundle Methods: From Conceptual to Implementable Forms, *Mathematical Programming* (76), pp. 393-410, 1997.
- [104] DIAZ, G. E., FONTANE, D. F.; Hydropower Optimization Via Sequential Quadratic Programming, *Journal of Water Resources Planning and Management*, Vol. 115, Number 6, November, 1989.
- [105] BOGGS, P. T., TOLLE, J. W.; Sequential Quadratic Programming, *Acta Numerica*, pp. 1- 51, 1996.
- [106] LAWRENCE, C. T.; A Computationally Efficient Feasible Sequential Quadratic Programming Algorithm, Ph.D. Thesis, University of Maryland, USA, 1998.

- [107] GOLDSMITH, M. J.; Sequential Quadratic Programming Methods Based on Indefinite Hessian Approximations, Ph. D. Thesis, Stanford University, USA, 1999.
- [108] BONNANS, J. F., GILBERT, J. C., LEMARÉCHAL, C., SAGASTIZÁBAL, C.; *Numerical Optimization. Theoretical and Practical Aspects*, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2002.
- [109] TONE, K.; Revisions of Constraint Approximations in the Successive QP Method for Nonlinear Programming Problems, *Mathematical Programming*, 26:144-152, 1983.
- [110] ARMIJO, L.; Minimization of Functions Having Lipschitz Continuous First Partial Derivates, *Pacific Journal of Mathematics*, 16:1-3, 1966.
- [111] DAVIDON, W. C.; Variable Metric Method for Minimization, *Technical Report ANL-5990* (revised), Argonne National Laboratory, Argonne, Il, 1959.
- [112] DAVIDON, W. C.; Variable Metric Method for Minimization, *SIAM Journal on Optimization* (1), pp. 1-17, 1991.
- [113] HAN, S. P.; Superlinearly Convergent Variable Metric Algorithms for General Nonlinear Programming Problems, *Mathematical Programming*, 11:263-282, 1976.
- [114] POWELL, M. J. D.; A Fast Algorithm for Nonlinearly Constrained Optimization Calculations, *Numerical Analysis*, pp. 144-157, Springer-Verlag, Berlin, 1978.
- [115] MARATOS, N.; Exact Penalty Function Algorithms for Finite Dimensional and Control Optimization, Ph. D. Thesis, University of London, 1978.
- [116] GILLET, B. E; Introduction to Operations Research: A Computer-Oriented Algorithmic Approach, Missouri, United States, McGraw-Hill, 1976.
- [117] WAGNER, H. M.; *Pesquisa Operacional*, Prentice/Hall do Brasil, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 1986.
- [118] DOUGLAS, J., RACHFORD, H. H.; On the Numerical Solution of Heat Conduction Problems in Two and Three Space Variables, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 82:421-439, 1956.
- [119] RUSZCZYNSKI, A.; Decomposition Methods in Stochastic Programming, *Mathematical Programming*, 79:333-353, 1997.
- [120] GUIGNARD, M., KIM, S.; Lagrangean Decomposition: A Model Yielding Stronger Lagrangean Bounds, *Mathematical Programming*, 39 (2):215-228, 1987.
- [121] GUIGNARD, M., KIM, S.; Lagrangean Decomposition for Integer Programming: Theory and Applications, *RAIRO Recherche Opérationnelle*, 21 (4):307-323, 1987.
- [122] BATUT, J., RENAUD, A.; Daily Generation Scheduling with Transmission Constraints: A New Class of Algorithms, *IEEE Transactions on Power Systems*, Volume 7, Number 3, 1992.

- [123] LEMARÉCHAL, C., PELLEGRINO, F., RENAUD, A., SAGASTIZÁBAL, C.; Bundle Methods Applied to the Unit Commitment Problem, *System Modeling and Optimization*, pp. 395-402, 1996.
- [124] RENAUD, A.; Daily Generation Management at Électricité de France: From Planning Towards Real Time", *IEEE Transactions on Automatic Control*, 38(7)-1080:1093, July 1993.
- [125] LEMARÉCHAL, C., RENAUD, A.; A Geometric Study of Duality Gaps, With Applications, *Mathematical Programming*, 90 (3), pp. 399-427, 2001.
- [126] CENTRO DE PESQUISAS DE ENERGIA ELÉTRICA (Cepel); RELATÓRIO TÉCNICO, *Implementação do Unit Commitment das Usinas Térmicas no Modelo DESSEM*, Rio de Janeiro, RJ, 2001.
- [127] CONEJO, A. J., CONTRERAS, J., ARROYO, J. M., TORRE, S.; Optimal Response of an Oligopolistic Generating Company to a Competitive Pool-Based Electric Power Market, *IEEE Transactions on Power Systems*, Volume 15, pp. 1098-1104, 2002.
- [128] CONEJO, A. J., ARROYO, J. M., CONTRERAS, J., VILLAMOR, F. A.; Self-Scheduling of a Hydro Producer in a Pool-Based Electricity Market, *IEEE Transactions on Power Systems*, Volume 17, Number 4, pp. 1265-1272, November, 2002.
- [129] GONZÁLEZ, J. J., BASAGOITI, P.; Spanish Power Exchange Market and Information System, in *Proc. IEEE 21st Int. Conf. Power Industry Comput. Applicat.*, pp. 245-252., Santa Clara, CA, May 1999.
- [130] CHEUNG, K. W., SHAMSOLLAHI, P., SUN, D., MILLIGAN, J., POTISHNAK, M.; Energy and Ancillary Service Dispatch for the Interim ISO New England Electricity Market, *IEEE Transactions on Power Systems*, Volume 15, pp. 968-974, August, 2002.
- [131] FOSSO, O. B., GJELSVIK, A., HAUGSTAD, A., MO, B., WAGENSTEEN, I.; Generation Scheduling in a Deregulated System, The Norwegian Case, *IEEE Transactions on Power Systems*, Volume 14, pp. 75-81, February, 1999.
- [132] SANTOS, S. C., REIS, M. J.; *Memória do Setor Elétrico da Região Sul*, Editora da Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC, 2002.
- [133] <http://www.ons.org.br>, Endereço Internet do Operador Nacional do Sistema Elétrico Brasileiro (ONS).
- [134] ILOG, *Ilog CPLEX 7.1 User's Manual*, March 2001.
- [135] CHOW, V. T.; *Open Channel Hydraulics*, McGraw-Hill, New York, 1959.
- [136] COMPAQ, *Compaq Visual Fortran Professional Edition 6.1.0 Reference Manual*, Copyright Digital Corporation Equipment, 1997-1999.

- [137] LEMARÉCHAL, C., SAGASTIZÁBAL, C.; Use of the Code N1CV2, Inria, France, 2002.
- [138] NASHED, M. Z.; *Generalized Inverses and Applications*, Academic Press, New York.
- [139] GOLUB, G. H., LOAN, C. F. V.; *Matrix Computations*, The John Hopkins University Press, Baltimore and London, Third Edition, 1996.
- [140] OAK RIDGE NATIONAL LABORATORY; *The Cascade Project*, The University of Tennessee and U.S. Department of Energy, Contract number DE-AC05-84OR21400, May, 1985.
- [141] DENNIS, J. E., SCHNABEL, R. B.; *Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1983.
- [142] CELIS, M. R., DENNIS, J. E., TAPIA, R.A.; A Trust-Region Strategy for Nonlinear Equality Constrained Optimization, *Numerical Optimization 1984*, SIAM, Philadelphia, pp.71-82, 1985.
- [143] CASAS, E., POLA, C.; An Algorithm for Indefinite Quadratic Programming Based on a Partial Cholesky Factorization, *RAIRO – Operations Research*, 27:401-426, 1993.
- [144] CASAS, E., POLA, C.; A Sequential Generalized Quadratic Programming Algorithm Using Exact l_1 Penalty Functions, *Optimization Methods and Software*, 2:145-176, 1993.
- [145] CASAS, E., POLA, C.; *PLCBAS User's Guide Version 2.1*, Departamento de Matemáticas, Estadística y Computación, Universidad de Cantabria, 2002.
- [146] HIMMELBLAU, D. M.; *Applied Nonlinear Programming*, McGraw-Hill Book Company, University of Texas, Austin, Texas, USA, 1972.
- [147] GILL, P. E., MURRAY, W., WRIGHT, M. H.; *Practical Optimization*, Academic Press, Stanford University, California, USA, 1981.
- [148] HESTENES, M. R.; Multiplier and Gradient Methods, *Journal of Optimization Theory and Applications* (4), pp. 303-320, 1969.
- [149] POWELL, M. J.; A Method for Nonlinear Constraints in Minimization Problems in Optimization, Academic Press, New York, NY, 1969.
- [150] BERTSEKAS, D. P.; *Constrained Optimization and Lagrange Multiplier Methods*, Academic Press, New York, 1982.
- [151] FRIEDLANDER, A., MARTINEZ, J. M., SANTOS, S. A.; A New Trust Region algorithm for bound constrained minimization, *Applied Mathematics and Optimization* 30, pp. 235-266, 1994.

- [152] FRIEDLANDER, A., MARTINEZ, J. M.; On the Maximization of a Concave Quadratic Function with box constraints, *SIAM Journal on Optimization* 4, pp. 177-192, 1994.
- [153] FRIEDLANDER, A., MARTINEZ, J. M., SANTOS, S. A.; On the Resolution of Large Scale Linearly Constrained Convex Minimization, *SIAM Journal on Optimization* 4, pp. 331-339, 1994.
- [154] MARTINEZ, J. M., Augmented Lagrangians and Sphere Packing Problems, *International Journal of Computer Mathematics* 70, pp. 75-86, 1998.
- [155] KREJIC, N., MARTINEZ, J. M., MELLO, M. P., PILOTTA, E. A.; Validation of an Augmented Lagrangian Algorithm with a Gauss-Newton Hessian Approximation Using a Set of Hard-Spheres Problems, *Computational Optimization and Applications* 16, pp. 247-263, 2000.
- [156] PROJETO CEPEL/UFSC, Modelo DESSEM – Relatório n^o 1: Comissionamento de Unidades Hidráulicas, Janeiro de 2000.
- [157] BLONDEL, H.; RENAUD, A.; D'ecomposition Par Les Prix et Lagrangien Augment'e: Une Association Efficace Pour le Traitement des Probl'emes de Production, *Bulletin EDF, S'erie C*, 4, pp. 23-43, 1991.