

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA**

**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO  
EM ENGENHARIA ELÉTRICA**

**MELHORIA DA SEGURANÇA DINÂMICA  
POR OTIMIZAÇÃO E ALGORITMOS  
DE PROGRAMAÇÃO NÃO-LINEAR**

Tese submetida à  
Universidade Federal de Santa Catarina  
como parte dos requisitos para a  
obtenção do grau de Doutor em Engenharia Elétrica.

**MÁRCIA REGINA VIANNA VANTI**

Florianópolis, Março de 2003.

**MELHORIA DA SEGURANÇA DINÂMICA  
POR OTIMIZAÇÃO E ALGORITMOS  
DE PROGRAMAÇÃO NÃO-LINEAR**

MÁRCIA REGINA VIANNA VANTI

‘Esta tese foi julgada adequada para a obtenção do Título de Doutor em Engenharia Elétrica, Área de Concentração em Planejamento de Sistemas de Energia Elétrica, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Santa Catarina’

---

Prof. Ildemar Cassana Decker, D.Sc.  
Orientador

---

Prof. Clóvis Caesar Gonzaga, Ph.D.  
Co-orientador

---

Prof. Edson Roberto de Pieri, Dr.  
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

Banca Examinadora:

---

Prof. Ildemar Cassana Decker, Dr.  
Presidente

---

Prof. Clóvis Caesar Gonzaga, Dr.

---

Prof. Djalma Mosqueira Falcão, Ph.D.

---

Prof.a Sandra Augusta Santos, Dra.

---

Prof. Roberto de Souza Salgado, Ph.D.

---

Prof. Edson Luiz da Silva, Dr.

Resumo da Tese apresentada à UFSC como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Engenharia Elétrica.

**MELHORIA DA SEGURANÇA DINÂMICA  
POR OTIMIZAÇÃO E ALGORITMOS  
DE PROGRAMAÇÃO NÃO-LINEAR**

Márcia Regina Vianna Vanti

Maio / 2003

Orientador: Prof. Ildemar Cassana Decker, D.Sc.

Co-orientador: Prof. Clovis Caesar Gonzaga, Ph.D.

Área de Concentração: Sistemas de Energia.

Palavras-chave: Segurança Dinâmica, Fluxo de Potência Ótimo, Algoritmos de Otimização.

Número de páginas: 192.

Neste trabalho propõe-se a definição do redespacho de melhoria da segurança dinâmica de sistemas elétricos através de um problema de fluxo de potência ótimo com restrições de estabilidade transitória. A estabilidade transitória é considerada através de uma única restrição por contingência, impondo que a margem de segurança após o redespacho seja superior a uma margem mínima estabelecida. A formulação da margem de segurança após o redespacho baseia-se em coeficientes de sensibilidade, sendo obtida a partir da simulação no domínio do tempo empregando modelagem detalhada. Ou seja, nesta proposta não se restringe a modelagem do sistema elétrico. A segunda fase do trabalho concentra-se no estudo e desenvolvimento de algoritmos eficientes e robustos para problemas de programação não-linear e, especificamente, para o problema de fluxo de potência ótimo. Os algoritmos tradicionalmente empregados na solução do fluxo de potência ótimo não possuem convergência global garantida. Neste trabalho buscou-se o desenvolvimento de algoritmos eficientes com convergência global. Baseado no algoritmo primal-dual de pontos interiores para problemas não lineares propõe-se uma alternativa para a atualização do parâmetro da função de mérito e uma nova função de mérito que não utiliza parâmetros. Finalmente, apresenta-se um novo algoritmo que utiliza o conceito de filtro. Neste classe de algoritmos não são utilizadas funções de mérito. O funcionamento do algoritmo proposto, a formulação adotada na implementação e os resultados da aplicação do algoritmo ao problema de fluxo de potência ótimo são comentados.

Abstract of Thesis presented to UFSC as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor in Electrical Engineering.

**DYNAMIC SECURITY RESCHEDULING BY  
OPTIMIZATION AND NONLINEAR  
PROGRAMMING ALGORITHMS**

Márcia Regina Vianna Vanti

May / 2003

Advisor: Prof. Ildemar Cassana Decker, D.Sc.

Co-advisor: Prof. Clovis Caesar Gonzaga, Ph.D.

Area of Concentration: Energy Systems.

Keywords: Dynamic Security, Optimal Power Flow, Optimization Methods.

Number of Pages: 192.

In the first phase of this work propose the definition of dynamic security rescheduling of electrical systems by an optimal power flow with transient stability constraints. The transient stability is considered in the optimal power flow by a single constraint per contingency, imposing that the security margin after the rescheduling be greater than a specified minimal margin. The formulation of the security margin after the rescheduling is based in sensibility coefficients and is obtained from the time domain simulation with detailed models. It means that in this work we do not impose any kind of limitation in modeling the electrical system. In the second phase of the work we concentrate on the study and development of efficient and robust algorithms for nonlinear programming and specifically, for the solution of the optimal power flow. The algorithms traditionally employed in the solution of the optimal power flow do not have global convergence properties. With a poor initial estimate the convergence may not occur. In this work we are looking for efficient algorithms with global convergence. Based in the primal-dual interior point algorithm for nonlinear problems we propose an alternative updating of the penalty parameter of the merit function. We also propose a new merit function with no parameters. Finally, we present a new algorithm which uses the concept of filters. In this class of algorithm no merit function is used. The mechanism of this algorithm is illustrated, the formulation adopted in a preliminary implementation in Matlab is shown and the results obtained with this algorithm applied to the optimal power flow are discussed. In this work.

# Sumário

Resumo	ii
Abstract	iii
Lista de Símbolos	viii
Lista de Figuras	xiii
Lista de Tabelas	xiv
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Estrutura do texto . . . . .	5
<b>2 Análise de segurança dinâmica de sistemas de energia elétrica</b>	<b>7</b>
2.1 Introdução . . . . .	7
2.2 Operação de sistemas elétricos com análise de segurança <i>on-line</i>	7
2.2.1 Funções componentes da operação em tempo-real . . . . .	8
2.3 Análise de segurança . . . . .	10
2.4 Análise <i>on-line</i> da segurança dinâmica . . . . .	12
2.4.1 Avaliação da estabilidade transitória . . . . .	13
2.4.2 Melhoria da segurança dinâmica . . . . .	20
2.4.3 Uma metodologia de segurança dinâmica . . . . .	22
2.5 Conclusões . . . . .	25
<b>3 Melhoria da segurança dinâmica através de um fluxo de potência ótimo</b>	<b>26</b>

3.1	Introdução . . . . .	26
3.2	Melhoria da segurança dinâmica e otimização . . . . .	27
3.3	Estrutura da metodologia proposta . . . . .	30
3.4	Fluxo de potência ótimo com restrições de estabilidade transi- tória . . . . .	31
3.5	Modelagem das restrições de estabilidade transitória . . . . .	34
3.6	Experimento computacional . . . . .	43
3.6.1	Sistema teste e geração inicial ativa . . . . .	43
3.6.2	Descrição do experimento . . . . .	44
3.7	Conclusões . . . . .	51
<b>4</b>	<b>Algoritmos de pontos interiores para programação linear e suas aplicações ao fluxo de potência ótimo</b>	<b>52</b>
4.1	Introdução . . . . .	52
4.2	Algoritmos de trajetória central para programação linear . . .	53
4.2.1	Algoritmos . . . . .	57
4.3	Extensão dos algoritmos primais-duais ao fluxo de potência ótimo . . . . .	72
4.4	Conclusões . . . . .	77
<b>5</b>	<b>Elementos de programação não-linear</b>	<b>78</b>
5.1	Introdução . . . . .	78
5.2	O problema de programação não-linear . . . . .	79
5.2.1	Definições . . . . .	79
5.3	O problema de minimização irrestrita . . . . .	80
5.3.1	Algoritmos . . . . .	80
5.3.2	Algoritmos com busca linear . . . . .	81
5.3.3	Algoritmos com região de confiança . . . . .	89
5.4	O problema de minimização com restrições de igualdade . . .	104
5.4.1	Algoritmos . . . . .	108
5.4.2	Programação quadrática seqüencial . . . . .	111
5.4.3	Conclusões . . . . .	120

<b>6</b>	<b>Algoritmos para problemas com restrições de igualdade e desigualdade</b>	<b>121</b>
6.1	Introdução . . . . .	121
6.2	O problema de minimização com restrições de igualdade e desigualdade . . . . .	122
6.2.1	Algoritmos . . . . .	123
6.3	Métodos de pontos interiores com busca na direção de Newton	125
6.3.1	Algoritmos de descricimo suficiente em uma função de mérito . . . . .	127
6.3.2	Uma estratégia não-monótona para atualização de $\beta$ .	131
6.3.3	Uma nova função de mérito . . . . .	131
6.4	Algoritmos de restauração inexata . . . . .	134
6.5	Algoritmos de filtro . . . . .	136
6.6	Conclusões . . . . .	144
<b>7</b>	<b>Experimentos com algoritmos para o fluxo de potência ótimo</b>	<b>145</b>
7.1	Introdução . . . . .	145
7.2	O problema de FPO implementado . . . . .	145
7.3	Experimentos com algoritmos de pontos interiores . . . . .	146
7.3.1	Inicialização e atualização das variáveis . . . . .	147
7.3.2	Algoritmo de passo pleno . . . . .	148
7.3.3	Algoritmos de descricimo suficiente em uma função de mérito . . . . .	150
7.4	Implementação do algoritmo de filtro . . . . .	157
7.4.1	Formulação adotada na implementação . . . . .	157
7.4.2	O algoritmo de filtro implementado . . . . .	160
7.4.3	Solução dos subproblemas quadráticos . . . . .	162
7.4.4	Experimentos computacionais . . . . .	163
7.5	Conclusões . . . . .	168
<b>8</b>	<b>Conclusões</b>	<b>170</b>

<b>A</b>	<b>Expressões analíticas para a margem de segurança e para os coeficientes de sensibilidade</b>	<b>173</b>
A.1	Potência elétrica do OMIB e margem de segurança . . . . .	173
A.2	Coefficientes de sensibilidade de primeira ordem: . . . . .	177
A.3	Coefficiente de sensibilidade de segunda ordem: . . . . .	181

# Lista de Símbolos

$\alpha \in (0, 0.5)$	- Contante da condição de decréscimo suficiente;
$\beta \in (0, 1)$	- Redução da inviabilidade imposta a cada iteração;
$\beta_{min}$	- Parâmetro de penalidade mínimo para verificar (5.48);
$\hat{\beta}$	- Parâmetro de penalidade que verifica (6.23);
$\gamma$	- Passo ao longo de uma direção;
$\gamma_{max}$	- Máximo passo determinado pelo teste da razão;
$\Delta P_m$	- Variação de geração ativa no conjunto crítico;
$\delta$	- Ângulo de uma máquina em relação a referência à velocidade síncrona;
$\delta_0$	- Ângulo de equilíbrio inicial do OMIB equivalente;
$\delta_c$	- Ângulo crítico de eliminação da falta do OMIB equivalente;
$\delta_p (\delta_u)$	- Ângulo de equilíbrio pós-falta estável (instável) do OMIB equivalente;
$\delta_t$	- Ângulo correspondente ao instante de eliminação da falta;
$\delta(x, s, \mu)$	- Medida de proximidade definida em (4.10);
$\eta_i$	- Margem de segurança associada a i-ésima contingência;
$\eta_{min}$	- Margem de segurança mínima estabelecida para o sistema;
$\eta_i^r$	- Margem de segurança da i-ésima contingência após o redespacho;
$\theta$	- Ângulo da tensão nas barras do sistema;
$\lambda_{\mathcal{E}}$	- Multiplicadores de Lagrange associado as igualdades;
$\lambda_{\mathcal{I}}$	- Multiplicadores de Lagrange associado as desigualdades;
$\mu$	- Parâmetro associado a um ponto central;
$\nu$	- Deslocamento angular da curva potência ângulo;
$\rho^k$	- Relação entre as reduções real e predita;
$\sigma \in (0, 1)$	- Redução desejada para o parâmetro $\mu$ a cada iteração;
$\vartheta \in (0, 1)$	- Contante da condição de ângulo (5.3);
$\Phi_{\mu}$	- Função penalidade com parâmetro $\mu$ ;
$\phi_{\beta}$	- Função de mérito com parâmetro de penalidade $\beta$ ;

$A_{ace}$	- Área acelerante na configuração sob-falta;
$A_{des}$	- Área desacelerante máxima na configuração pós-falta;
$A_{\mathcal{E}}$	- Jacobiana das restrições de igualdade;
$A_{\mathcal{I}}$	- Jacobiana das restrições de desigualdade;
$ared$	- Redução na função;
$B^k$	- Matriz simétrica definida positiva;
$C_1, C_2, C_3, C_4$	- Critérios normalizados correspondentes às KKT perturbadas;
$C_{max}$	- Máximo dos critérios normalizados;
$d^a, d^c$	- Direção afim-escala e de centralização;
$d^{cc}$	- Direção de centralização e corretora, solução do sistema (4.36);
$d^{co}$	- Direção corretora de segunda ordem, solução do sistema (4.31);
$e$	- Vetor de componentes unitárias de comprimento adequado;
$F_k$	- Filtro na iteração $k$ ;
$\bar{F}_k$	- Filtro temporário na iteração $k$ ;
$f_0$	- Função objetivo do problema de otimização não linear;
$f_{\mathcal{E}}, f_c, f_{\mathcal{I}}$	- Restrições de igualdade, caixa e desigualdade do problema de otimização;
$H$	- Hessiana do Lagrangeano;
$h$	- Medida de inviabilidade definida por (6.29);
$M$	- Constante de inércia;
$m(\cdot)$	- Modelo quadrático construído em torno de um ponto;
$nb, ng, nl$	- Número de barras, de geradores e de linhas do sistema elétrico;
$nc$	- Número de contingências sob análise;
$P_{meq}$	- Potência mecânica do OMIB equivalente;
$P_{e_0}, P_{e_d}, P_{e_p}$	- Potência elétrica do OMIB equivalente na configuração inicial, durante a falta e pós-falta;
$P_c$	- Potência de carga equivalente da curva potência-ângulo;
$Pg_i, Qg_i$	- Potências ativa e reativa geradas na $i$ -ésima máquina;
$P_m$	- Potência ativa gerada no conjunto crítico;
$P_{max}$	- Potência elétrica máxima da curva potência-ângulo;
$pred$	- Redução predita pelo modelo;
$S_i, S'_i$	- Coeficiente de sensibilidade de primeira e segunda ordem;
$s, S$	- Vetor de variáveis de folga e matriz diagonal associada;
$T_i$	- Fluxo na $i$ -ésima linha de transmissão;
$t_0 (t_t)$	- Instante de ocorrência (eliminação) da falta;
$t_c$	- Instante crítico de eliminação da falta;

- $V_m$  - Módulo da tensão nas barras do sistema;  
 $V_t$  - Energia adquirida durante a falta;  
 $V_c$  - Energia potencial crítica;  
 $x^a$  - Ponto de Armijo;  
 $x^C$  - Ponto de Cauchy;

- $\mathcal{B}_\mu$  - Função barreira logarítmica com parâmetro  $\mu$ ;  
 $\mathcal{C}$  - Trajetória central;  
 $\mathcal{D}_\Delta$  - Região de confiança de raio  $\Delta$ ;  
 $\mathcal{E}, \mathcal{I}$  - Conjunto de índices associado as igualdades e as desigualdades;  
 $\mathcal{F}_k$  - Conjunto de pontos em  $\mathbb{R}^n$ , permanentemente proibidos, na iteração  $k$ ;  
 $\bar{\mathcal{F}}_k$  - Conjunto de pontos temporariamente proibidos na iteração  $k$ ;  
 $\mathcal{H}$  - Trajetória associada a um ponto não central;  
 $\bar{\mathcal{I}}$  - Conjunto de índices associados às restrições de desigualdades ativas;  
 $\mathcal{N}(A)$  - Núcleo de uma matriz  $A$ ;  
 $\mathcal{N}(\alpha)$  - Vizinhança da trajetória central de raio  $\alpha$ ;  
 $\mathcal{R}(A^T)$  - Imagem de uma matriz  $A^T$ ;  
 $\mathcal{S}, \mathcal{S}^0$  - Conjunto das soluções ótimas e ótimas estritas;  
 $\mathcal{V}, \mathcal{V}^0$  - Conjunto dos pontos viáveis e estritamente viáveis;

- CEPEL - Centro de Pesquisas em Energia Elétrica;  
 FPO - Fluxo de Potência Ótimo;  
 LabPlan - Laboratório de Planejamento de Sistemas Elétricos;  
 SCADA - Supervisory Control and Data Acquisition;  
 OMIB - One Machine Infinite Bus;  
 OOQP - Object-Oriented Sequential Quadratic Programming;  
 PQS - Programação Quadrática Sequencial;  
 SLEP - Superfície Limite de Energia Potencial;  
 SIME - Single Machine Infinite Bus;

# Lista de Figuras

2.1	Processo de avaliação e melhoria da segurança dinâmica . . . .	13
2.2	Avaliação da estabilidade por simulação e por métodos diretos	17
2.3	Curva $P_e \times \delta$ . . . . .	18
2.4	Curvas $P_e \times \delta$ para uma perturbação. . . . .	18
2.5	Estrutura de uma metodologia de análise da segurança dinâmica	23
3.1	Análise da segurança dinâmica com redspanho por otimização	30
3.2	Ilustração do OMIB Equivalente e curvas de potência elétrica	40
3.3	Ilustração do critério de áreas iguais . . . . .	41
3.4	Dinâmica do OMIB para uma contingência estável e sua margem de estabilidade . . . . .	42
4.1	Exemplo de trajetória central e vizinhanças $\mathcal{N}_2$ e $\mathcal{N}_{-\infty}$ . . . .	56
4.2	Uma iteração de um algoritmo primal-dual viável de PI. . . .	59
4.3	Direções de Newton para diferentes valores de $\sigma$ . . . . .	59
4.4	Uma iteração do algoritmo preditor-corretor . . . . .	61
4.5	Uma iteração do algoritmo de passo mais longo . . . . .	63
4.6	Curva $\mathcal{H}$ e sua aproximação quadrática. . . . .	66
4.7	Aproximação quadrática para $\sigma = 0$ e $\sigma > 0$ . . . . .	67
4.8	Um passo de um algoritmo inviável . . . . .	71
5.1	Direção de descida para $f$ a partir de $x$ . . . . .	82
5.2	Direção $d$ que satisfaz a condição de ângulo (5.3). . . . .	83
5.3	Busca de Armijo. . . . .	84
5.4	Passo de Newton $d$ a partir do ponto $x^k$ . . . . .	87
5.5	Regiões definidas com normas $l_1$ , $l_2$ e $l_\infty$ . . . . .	91

5.6	Região de confiança e arco de Cauchy. . . . .	94
5.7	Ponto de Cauchy. . . . .	94
5.8	Região de decréscimo igual e superior ao decréscimo de Cauchy. . . . .	96
5.9	Passos de região de confiança para diferentes raios $\Delta$ . . . . .	98
5.10	Caminho de Levenberg-Marquardt. . . . .	99
5.11	Solução exata e aproximada de um problema. . . . .	100
5.12	Ponto de Armijo para o modelo quadrático e ponto de Cauchy. . . . .	103
5.13	Região viável $\mathcal{V}$ e conjunto das direções viáveis. . . . .	105
5.14	Compatibilização das restrições do problema (5.49). . . . .	116
5.15	Estratégia de Byrd-Omojokun. . . . .	118
6.1	Uma busca ao longo de $d$ com o critério $C_{max}$ . . . . .	133
6.2	Fases de restauração e otimalidade de um algoritmo de IR. . . . .	135
6.3	Filtro constituído de três pares $(f_0^i, h^i)$ . . . . .	137
6.4	Filtro, filtro temporário e uma iteração do algoritmo. . . . .	139
6.5	Primeira iteração do algoritmo de filtro. . . . .	142
6.6	Pontos permanentemente e temporariamente proibidos após a primeira iteração. . . . .	142
6.7	Terceira iteração: uma iteração $f_0$ . . . . .	143
6.8	Quinta iteração: dois elementos do filtro são eliminados. . . . .	143
7.1	Variável de folga inicial $s_i^0=1, i \in \mathcal{I}$ . . . . .	148
7.2	Variável de folga inicial $s^0 = \max(-f_{\mathcal{I}}(x^0), 1)$ . . . . .	149
7.3	Função de mérito ao longo da direção calculada. . . . .	151
7.4	Algoritmo de Vanderbei e Shanno - Evolução dos critérios. . . . .	152
7.5	Algoritmo de Vanderbei e Shanno - Evolução de $\beta$ . . . . .	152
7.6	Atualização não monótona de $\beta$ - Evolução dos critérios. . . . .	154
7.7	Atualização não monótona de $\beta$ - Evolução de $\beta$ . . . . .	154
7.8	Primeira iteração do algoritmo de filtro. . . . .	164
7.9	Duas iterações do algoritmo de filtro. . . . .	165
7.10	Quatro iterações do algoritmo de filtro. . . . .	165
7.11	O filtro após sete iterações. . . . .	166
7.12	Solução de um problema de FPO pelo algoritmo de filtro. . . . .	167

A.1	Curvas $P_e \times \delta$ do OMIB Equivalente . . . . .	174
A.2	Curvas $P_e \times \delta$ para eliminação da falta no tempo crítico. . . .	175

# Lista de Tabelas

3.1	Geração ativa inicial e limites. . . . .	44
3.2	Contingências críticas para a geração inicial. . . . .	46
3.3	Conjunto crítico, margem e coeficientes de sensibilidade. . . . .	47
3.4	Primeiro redespacho de geração. . . . .	49
3.5	Contingências críticas após o primeiro redespacho. . . . .	49
3.6	Segunda iteração: conj. crítico, margem e coeficientes. . . . .	50
3.7	Segundo redespacho de geração ativa $\Delta Pg$ . . . . .	50
7.1	Dimensões dos sistemas testados e do problema de otimização. . . . .	146
7.2	Algoritmo de passo pleno. . . . .	150
7.3	Algoritmo de Vanderbei e Shanno. . . . .	153
7.4	Atualização não monótona de $\beta$ . . . . .	155
7.5	Busca no máximo dos critérios de KKT. . . . .	155
7.6	Número de iterações para cada algoritmo. . . . .	156

# Capítulo 1

## Introdução

Um dos principais objetivos da operação do sistema elétrico é prover permanentemente os consumidores com uma energia nos níveis próprios de tensão e frequência. A complexidade dos sistemas elétricos tanto em sua interconexão quanto nos equipamentos instalados, é crescente. Novas tecnologias introduzem novos tipos de controles e de cargas, que adicionam novos mecanismos à dinâmica do sistema. Além disto, tem-se o permanente aumento da demanda, escassos investimentos de expansão da capacidade de geração e transmissão e a implantação de um ambiente de mercado, que estimula a busca por maior eficiência de operação. Estes fatores conduzem o sistema a operar com elevado carregamento, próximo de seus limites de geração e transmissão, ou seja, com pequenas margens de segurança. A redução das margens de segurança expõe o sistema a risco de comportamentos inadequados frente a perturbações. Estes fatores fazem com que a operação segura do sistema elétrico seja considerada um grande desafio atual e futuro e torna essencial o desenvolvimento de metodologias de auxílio a operação em tempo real que considerem seu comportamento dinâmico. Dentre estas funções destaca-se a Análise de Segurança Dinâmica.

A análise da segurança dinâmica visa determinar se em um ponto de operação especificado o comportamento do sistema frente a uma lista de perturbações, é seguro [2]. Pode-se considerar a análise da segurança composta pelas funções de monitoração, avaliação e melhoria da segurança. A moni-

toração consiste em verificar, a partir da condição de operação do sistema, se os limites de segurança estabelecidos estão satisfeitos. A avaliação consiste em determinar se o comportamento do sistema frente a uma lista de contingências é seguro, ou seja, se o período transitório será suportado e será atingido um ponto de operação estável e viável (onde todos os limites operacionais são respeitados). Se for detectado que o ponto de operação do sistema não é seguro, ou a margem de segurança para alguma contingência é menor que a margem mínima estabelecida, devem ser tomadas ações de controle preventivo que conduzam o sistema a um ponto de operação seguro. A definição destas ações de controle preventivo é chamada Melhoria da Segurança Dinâmica.

Este trabalho concentra-se na Melhoria da Segurança Dinâmica. A ação de controle considerada para a melhoria da segurança dinâmica é o redespacho de geração ativa. O redespacho de geração possui duas etapas: a identificação dos geradores que participarão do redespacho e a quantificação das variações de geração em cada máquina. Uma forma simples de definir o redespacho de segurança dinâmica é pelo critério da direção S [3], reduzindo a geração das máquinas com maior afastamento do centro de ângulo e aumentando a geração nas máquinas mais próximas ao centro de ângulo. Apesar da atraente simplicidade, este método possui a desvantagem de considerar apenas a pior contingência e não fornecer uma quantificação da potência a ser relocada. Métodos mais modernos calculam o redespacho de geração através de coeficientes de sensibilidade, definidos como a derivada da margem de segurança em relação à potência gerada em cada máquina. Estes coeficientes de sensibilidade indicam a influência de cada gerador sobre a estabilidade. Métodos baseados em coeficientes de sensibilidade foram propostos por diversos autores [4, 5, 6] e são considerados mais efetivos sobre a segurança dinâmica do sistema [7]. A principal limitação dos redespachos baseados em coeficientes de sensibilidade é a dependência de métodos de avaliação da estabilidade que forneçam expressões analíticas para a margem de segurança - o que geralmente ocorre com métodos que restringem a modelagem da dinâmica do sistema ao modelo clássico.

O presente trabalho propõe a definição das ações de melhoria da segurança

através de um problema de um fluxo de potência ótimo com restrições de estabilidade transitória. Nesta proposta a estabilidade transitória é representada no fluxo de potência ótimo através de uma única restrição por contingência, que impõe que a margem de segurança após o redespacho seja superior a uma margem mínima estabelecida. A formulação da margem de segurança após o redespacho baseia-se em coeficientes de sensibilidade. Uma expressão analítica para a margem de segurança associada a cada contingência e os coeficientes de sensibilidade correspondentes são obtidos a partir da simulação no domínio do tempo com modelagem detalhada. Ou seja, na presente proposta não se faz qualquer limitação quanto à modelagem do sistema elétrico.

Uma vez formulado o problema de fluxo de potência ótimo para definição dos redespachos de geração, este trabalho concentra-se na pesquisa de métodos robustos e eficientes de solução do problema de otimização não linear.

O fluxo de potência ótimo é uma das mais importantes ferramentas de auxílio a operação do sistema, podendo ser utilizado para diversas finalidades, como por exemplo, para a identificação de ineficiências da operação, empregando funções objetivo que otimizem critérios de eficiência, como minimização de perdas nas linhas de transmissão [8]. Para a solução do problema de fluxo de potência ótimo diversos autores ([9, 10, 11]) propõem a aplicação de algoritmos do tipo primal-dual de pontos interiores, especialmente com os algoritmos do tipo preditor-corretor, com as correções de segunda ordem propostas por Mehrotra [12] e correções de ordem superior propostas por Gondzio [13]. Estes algoritmos baseiam-se na aplicação do método de Newton às condições de KKT perturbadas do problema de barreira logarítmica. Apesar dos bons resultados relatados pelos autores, sabe-se que para pontos distante de uma solução ótima, algoritmos baseados no método de Newton podem divergir. Para assegurar convergência a partir de qualquer ponto inicial é preciso empregar um algoritmo com *convergência global*.

Este trabalho concentra-se no estudo e desenvolvimento de algoritmos com propriedades de convergência global. Com isto busca-se o desenvolvimento de um algoritmo robusto para as aplicações do fluxo de potência

ótimo.

Ao solucionar um problema de programação não linear deve-se simultaneamente reduzir uma função objetivo e progredir rumo à viabilidade. O balanço dos esforços em cada um destes objetivos conflitantes é a maior dificuldade no desenvolvimento de algoritmos. O método mais comum consiste em penalizar as restrições e então aplicar um algoritmo de programação não linear irrestrita. Nos últimos anos os esforços de pesquisa concentraram-se no desenvolvimento de algoritmos nos quais o avanço em otimalidade e viabilidade a cada iteração é controlado através de uma função de mérito. O peso que cada um destes objetivos terá na iteração é definido pelo parâmetro da função de mérito. A definição deste parâmetro a cada iteração, que evidentemente afeta significativamente o desempenho do algoritmo, é um aspecto crítico dos algoritmos que utilizam função de mérito.

Neste trabalho estudamos o algoritmo primal-dual de pontos interiores para problemas não lineares proposto por Vanderbei e Shanno [1] e propomos uma alternativa para a atualização do parâmetro da função de mérito. Também propomos uma nova função de mérito que não utiliza parâmetros.

Recentemente surgiu uma nova classe de métodos para programação não linear, chamados métodos de filtro. Os métodos de filtro não utilizam função penalidade nem função de mérito. Cada iteração é composta de duas fases: uma fase de restauração, na qual uma medida da inviabilidade é reduzida, e uma fase de otimização, na qual o valor da função objetivo é reduzido. As informações sobre as iterações são armazenadas em uma estrutura chamada *filtro*, e evita-se pontos próximos a antigos iterandos. Os métodos de filtro foram introduzidos por Fletcher e Leyffer em 1997 [14] e desde então foram objeto de intensa pesquisa [15, 16].

Neste trabalho apresentamos um algoritmo de filtro que se caracteriza pela independência entre as fases de restauração e de otimização. Para este algoritmo foi desenvolvida uma teoria de convergência global em [17]. O funcionamento do algoritmo é ilustrado e a formulação adotada em uma implementação realizada em Matlab é discutida.

## 1.1 Estrutura do texto

Os capítulos que formam este texto estão organizados da seguinte forma:

No Capítulo 2 faz-se uma revisão da terminologia e dos principais conceitos empregados na análise de segurança dinâmica de sistemas de energia elétrica. Discute-se os métodos de avaliação existentes, especificamente a simulação no domínio do tempo, os métodos baseados na função energia transitória e o critério de áreas iguais estendido. Discute-se as características desejáveis de uma metodologia de análise de segurança dinâmica e expõe-se a estrutura da metodologia atualmente em desenvolvimento no Laboratório de Planejamento Labplan/UFSC. Os métodos empregados em cada etapa desta metodologia são comentados.

No Capítulo 3 faz-se a proposta de definição das ações de melhoria da segurança dinâmica através de um fluxo de potência ótimo (FPO) com restrições de estabilidade transitória. Apresenta-se a formulação do FPO ao qual é adicionado *uma única* restrição de estabilidade transitória por contingência. Expõe-se em detalhes a obtenção da restrição de estabilidade a partir das trajetórias do sistema obtidas por simulação no domínio do tempo com modelagem detalhada do sistema elétrico. Um experimento computacional é mostrado para validação da proposta.

No Capítulo 4 faz-se um estudo dos algoritmos primais-duais de pontos interiores que foram empregados por diversos autores na solução do problema de fluxo de potência ótimo convencional (sem restrições de estabilidade transitória). Devido aos bons resultados relatados com a aplicação de métodos de pontos interiores na solução do FPO, especialmente de algoritmos primais-duais, e a potencialidade de emprego destes métodos em diversos problemas de sistemas de energia, julgou-se conveniente a realização de uma ampla revisão sobre o assunto. Neste capítulo os passos dos diversos algoritmos primais-duais são expostos como combinações de duas direções e de passos ao longo destas direções, restritos a uma vizinhança especificada da trajetória central. Apenas os aspectos essenciais de cada algoritmo são estudados.

No Capítulo 5 apresenta-se os elementos necessários ao desenvolvimento

de algoritmos com convergência global. As estratégias de globalização - busca ao longo de uma direção e uso de região de confiança, são expostas para o problema irrestrito. Para problemas com restrições, nos quais a medida do progresso a cada iteração deve considerar a viabilidade e a otimalidade, tradicionalmente tem sido empregada uma função de mérito. Neste capítulo a função de mérito é apresentada e discutida para problemas com restrições de igualdade.

No Capítulo 6 estuda-se algoritmos de programação não linear para problemas com restrições de igualdade e desigualdade. As estratégias de obtenção de convergência global discutidas no capítulo precedente são aplicadas ao problema geral de programação não linear. A proposta de atualização do parâmetro da função de mérito e a nova função de mérito sem parâmetro são apresentadas. Os algoritmos de filtro são discutidos, um novo algoritmo de filtro é apresentado e seu funcionamento ilustrado.

No Capítulo 7 são mostrados os resultados obtidos com experimentos computacionais. O problema de fluxo de potência ótimo (sem restrições de estabilidade transitória) foi implementado usando a linguagem MATLAB e solucionado através dos algoritmos estudados. Especificamente testamos o algoritmo de Vanderbei e Shanno com a atualização do parâmetro da função de mérito proposta pelos autores e com a atualização não monótona proposta no Capítulo 5 deste trabalho. Testamos também a nova função de mérito apresentada no Capítulo 5. Finalmente discutimos a implementação do algoritmo de filtros proposto e sua aplicação ao fluxo de potência ótimo.

Finalmente, expomos as considerações finais sobre o trabalho. Em um apêndice são desenvolvidas as expressões analíticas para a margem de segurança e os coeficientes de sensibilidade.

# Capítulo 2

## Análise de segurança dinâmica de sistemas de energia elétrica

### 2.1 Introdução

O objetivo deste capítulo é revisar a terminologia e os principais conceitos relacionados à análise de segurança de sistemas de energia elétrica, discutir os métodos de avaliação da segurança existentes e definir a estrutura de uma metodologia para a análise de segurança dinâmica.

### 2.2 Operação de sistemas elétricos com análise de segurança *on-line*

O conceito de operação com restrições de segurança surgiu no início da década de 60 [18, 2], com o objetivo de manter o suprimento da demanda com os limites físicos e operacionais do sistema respeitados, considerando algumas contingências que possam vir a ocorrer.

Até meados da década de 70 a segurança consistia em garantir a existência de uma reserva girante capaz de suprir um aumento de demanda ou a eventual perda de uma unidade geradora. O comportamento do sistema frente às contingências era previsto na etapa de planejamento da operação, de modo a ter-se um sistema robusto. A análise de contingências a partir das condições

reais de operação era dispensada pois o ponto de operação distante dos limites de geração e transmissão garantia a existência de uma margem de segurança.

Ao longo das últimas décadas, um crescente aumento da demanda, limitações na expansão da geração e da transmissão e a busca por maior eficiência, devido à criação de um ambiente onde cada participante busca a maximização de seus próprios benefícios, causaram a perda da antiga robustez do sistema elétrico. A operação próxima a seus limites físicos e operacionais deteriorou as margens de segurança do sistema e, conseqüentemente, aumentou a possibilidade de o sistema ter comportamentos inadequados frente a perturbações. Tornou-se então necessário que a segurança fosse considerada um problema da operação em tempo real, com a análise de contingências realizada a partir das condições atuais do sistema. A este conceito deu-se o nome *operação em tempo-real com análise de segurança on-line* [18, 2].

### 2.2.1 Funções componentes da operação em tempo-real

Pacotes com funções de auxílio à operação em tempo-real com segurança *on-line* estão implementados na maior parte dos centros de controle [18]. Independentemente do nível de detalhamento com que estejam implementadas, as funções de auxílio à operação são tradicionalmente classificadas em três tipos: funções de monitoração em tempo-real, funções de análise de segurança e funções de controle corretivo. Estas funções são comentadas a seguir.

- Monitoração em tempo-real - Consiste na aquisição, envio e tratamento dos dados do sistema elétrico para posterior análise no centro de controle. A aquisição dos dados analógicos e digitais (e.g., magnitudes de tensão, injeções de corrente, status dos disjuntores) e seu envio ao centro de controle é realizado pelo sistema SCADA (Supervisory Control and Data Acquisition). O tratamento dos dados no centro de controle inclui a estimação de estados, a configuração da rede elétrica, o processamento de erros grosseiros e a modelagem da rede externa.
- Análise de segurança - A análise de segurança *on-line* pode ser definida

como a função que visa *monitorar, avaliar e manter* as margens de segurança do sistema [2]. A seguir estes três elementos são detalhados.

**Monitoração da segurança:** A partir das condições de operação do sistema, a monitoração da segurança consiste na verificação dos limites de segurança estabelecidos e das equações de balanço de potência em cada barra. Se os limites operacionais e as equações de balanço de potência estiverem satisfeitos diz-se que o sistema opera no modo normal. Se os limites operacionais estiverem violados diz-se que o sistema está operando no modo emergencial; se as equações de balanço não estiverem satisfeitas, isto é, se a carga não estiver atendida, diz-se que o sistema está no modo restaurativo. Normalmente o modo emergencial é detectado após a ocorrência de uma perturbação, e o estado restaurativo quando, visando tirar o sistema do modo emergencial, uma parcela da carga é retirada [18, 19, 20, 2].

**Avaliação da segurança:** Uma vez detectado o modo normal de operação, é avaliado o comportamento do sistema frente a uma lista de contingências, visando determinar se o sistema está operando com segurança. Se para todas as contingências analisadas for atingido um ponto de operação estável e viável diz-se que o sistema está operando no modo *normal seguro*. Se não for atingido um ponto estável e viável para alguma das contingências analisadas diz-se que o sistema opera no modo *normal inseguro*. Neste caso, a ocorrência de tal contingência pode levar o sistema ao modo emergencial, com violação dos limites operacionais, ou à instabilidade. A avaliação da segurança deve fornecer a indicação das contingências mais severas, os efeitos destas contingências sobre o sistema elétrico e, se possível, o mecanismo que provoca a instabilidade ou a violação de limites operacionais.

**Melhoria da segurança:** Se o sistema opera de forma insegura ou com pequena margem de segurança para alguma contingência analisada, a passagem ao modo normal seguro é realizada através

de ações de controle preventivo, também chamadas redespacho de segurança ou melhoria da segurança [18, 20, 2].

- Controle corretivo - Se o sistema estiver operando no modo emergencial ou restaurativo são tomadas medidas que o conduzam ao modo normal. Existem dois tipos de controle corretivo: o controle de emergência que visa eliminar as violações das restrições operacionais (geralmente reduzindo a carga) e o controle restaurativo, que visa reestabelecer o suprimento da demanda.

## 2.3 Análise de segurança

A operação segura do sistema elétrico envolve a tomada de decisões em várias escalas de tempo e em vários níveis administrativos e técnicos. Na referência [21] Wehenkel identifica vários ambientes nos quais as decisões tomadas influenciarão diretamente a segurança do sistema elétrico. Por exemplo, no ambiente administrativo, tem-se a definição das entidades responsáveis pelo estabelecimento dos padrões de segurança; no ambiente das empresas de geração tem-se a definição das ações de controle preventivo e corretivo a serem adotadas. Também influenciando a segurança de operação podem ser identificados o investimento em pesquisa (que fornece modelos, ferramentas computacionais e compreensão dos fenômenos); o investimento na expansão da geração, da transmissão e de dispositivos de comunicação e controle; o planejamento da retirada de equipamentos para manutenção e o planejamento de transações futuras.

A operação segura do sistema elétrico prevê que a intervalos determinados seja executada a análise de segurança, composta pelas funções de monitoração, avaliação e melhoria, conforme mencionado anteriormente. A avaliação da segurança, através da análise de contingências, deve fornecer ao operador respostas a perguntas do tipo:

*“No ponto de operação atual, o que acontecerá com o sistema caso ... ?”.*

A resposta a esta pergunta deve indicar os efeitos da contingência sobre o sistema, quais sejam, se após o período transitório será atingido um ponto

de operação viável; se será atingido um ponto de operação para o qual alguns limites são violados; ou ainda, se o sistema não suportará o período transitório e perderá a estabilidade.

A avaliação da segurança é tradicionalmente realizada segundo duas abordagens: análise estática e análise dinâmica. Na análise estática verifica-se, na condição de regime permanente após uma perturbação, se existe violação dos índices de segurança estabelecidos. Exemplos de índices de segurança estáticos são os próprios limites físicos e operacionais do sistema, como limite de tensão nas barras e de fluxo nas linhas [18, 22]. Na análise dinâmica o objetivo é determinar se no ponto de operação atual o sistema suportará as oscilações e alcançará um ponto de equilíbrio estável após a ocorrência da perturbação [23, 24].

A estabilidade do sistema elétrico é um problema único, mas que assume diferentes formas, influenciada por diferentes fatores. A classificação mais geral divide os fenômenos em estabilidade de *ângulo*, estabilidade de *tensão* e estabilidade de *freqüência*. A estabilidade de ângulo, por sua vez, é classificada em estabilidade *a pequenas perturbações* e estabilidade *transitória*. Na estabilidade a pequenas perturbações são utilizados modelos linearizados em torno de um ponto de equilíbrio e verificada a natureza do equilíbrio (estável ou instável). A estabilidade transitória está relacionada à resposta do sistema a uma grande perturbação, onde ocorrem grandes excursões de ângulo, com relação potência-ângulo altamente não-linear. O comportamento do sistema a grandes perturbações depende tanto do ponto inicial quanto do tipo e duração da falta. A estabilidade de tensão caracteriza-se pelo progressivo aumento ou queda de tensão em algumas barras do sistema. A estabilidade de freqüência relaciona-se à habilidade do sistema em manter o balanço entre geração e carga após a ocorrência de uma grande perturbação. A instabilidade de freqüência resulta geralmente da má coordenação dos controles de freqüência e equipamentos de proteção, podendo resultar emilhamento. A análise deste tipo de fenômeno é realizada por simulação no tempo, com o passo de integração ajustado aos transitórios de interesse.

Os diversos tipos de instabilidade muitas vezes não ocorrem isoladamente, uma forma podendo conduzir a outra. Na referência [23] Kundur propõe que

a análise de segurança seja uma ferramenta que avalie simultaneamente os diversos tipos de estabilidade. Uma ferramenta de análise de segurança “definitiva” consideraria a segurança estática e a segurança dinâmica como parte de um problema maior: a definição de um ponto de equilíbrio, com a caracterização de suas fronteiras de estabilidade, de bifurcação e de viabilidade.

## 2.4 Análise *on-line* da segurança dinâmica

A margem de segurança é um índice que quantifica o grau de severidade de uma perturbação, indicando a distância do ponto de operação à fronteira de estabilidade. Em metodologias de análise da segurança dinâmica a obtenção de uma margem de segurança é particularmente interessante, pois a margem permite concluir automaticamente sobre a severidade da contingência e auxilia a definição de ações de controle preventivo, minimizando a intervenção humana.

A análise de segurança dinâmica baseada em margens de segurança é constituída pelas seguintes etapas:

- Estabelecimento de um valor mínimo para a margem de segurança do sistema;
- Avaliação da segurança e identificação das contingências que não satisfazem a margem mínima estabelecida;
- Identificação e quantificação de ações de controle que conduzam o sistema a um ponto de operação no qual a margem mínima seja alcançada para todas as contingências.

É preciso reavaliar a segurança no novo ponto para concluir sobre sua estabilidade. O processo de avaliação e melhoria da segurança é necessariamente iterativo, pois a alteração no ponto de operação pode causar mudanças no conjunto de contingências para as quais ocorre instabilidade e, para cada contingência instável, mudança no conjunto de máquinas que se afastam da referência - chamado conjunto de máquinas críticas. A Figura (2.1) esque-

matiza o processo iterativo de avaliação e melhoria da segurança dinâmica.

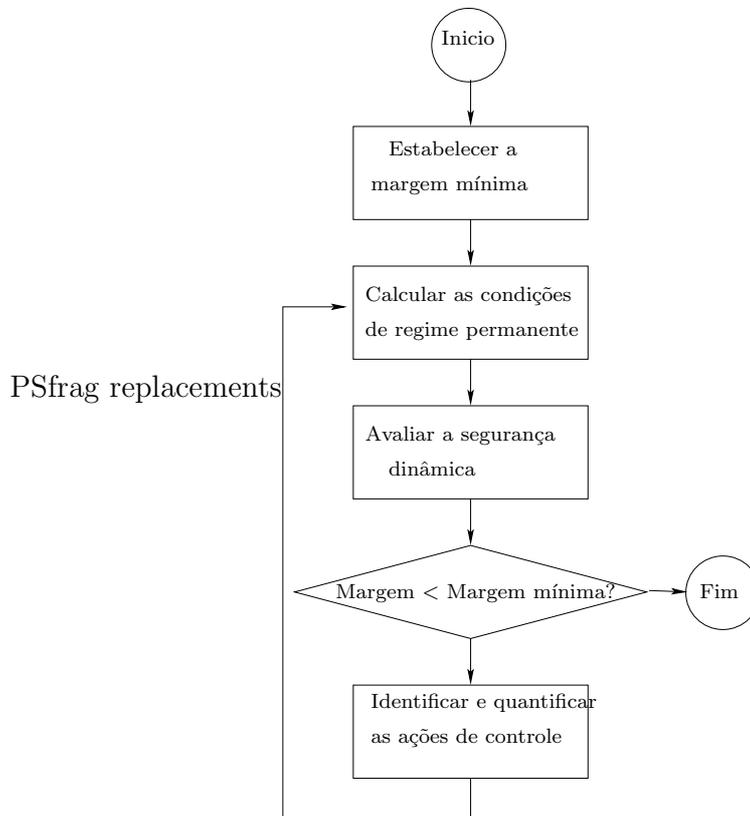


Figura 2.1: Processo de avaliação e melhoria da segurança dinâmica

As principais etapas de uma metodologia de análise da segurança dinâmica são a avaliação da estabilidade transitória e a definição das ações de melhoria da segurança.

### 2.4.1 Avaliação da estabilidade transitória

O modelo matemático do sistema elétrico é formado pelo modelo de seus componentes, com a interconexão definida pela lei das correntes de Kirchoff satisfeita em todos os nós (ou seja, somatório das correntes nulo). A estrutura genérica do modelo do sistema elétrico, sem considerar seus componentes

discretos, é um sistema dinâmico não-linear:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, y; p) \\ 0 &= g(x, y; p),\end{aligned}\tag{2.1}$$

onde  $\dot{x}$  denota  $dx/dt$ ,  $x$  são variáveis dinâmicas,  $y$  são variáveis algébricas e  $p$  são parâmetros. A função  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  satisfaz as condições de existência e unicidade das soluções. A solução  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  de (2.1) é chamada trajetória do sistema. As equações diferenciais em (2.1) descrevem o comportamento dos componentes cuja dinâmica se deseja representar e as equações algébricas, chamadas equações do fluxo de potência, descrevem a rede elétrica e as injeções de potência nas barras.

Em regime permanente o sistema elétrico está em um ponto de equilíbrio que satisfaz, para um dado conjunto de parâmetros  $p$ ,:

$$\begin{aligned}0 &= f(x, y; p) \\ 0 &= g(x, y; p).\end{aligned}\tag{2.2}$$

Para determinar um ponto de equilíbrio calcula-se o balanço de potência em todas as barras do sistema, satisfazendo  $g(x, y; p) = 0$ . Então são calculadas as condições de regime permanente para os componentes dinâmicos, satisfazendo  $f(x, y; p) = 0$ .

As alterações do sistema elétrico devido à ocorrência de uma perturbação podem ser modeladas por três configurações: pré-falta, sob-falta e pós falta. A situação pré-falta é geralmente uma condição de regime permanente. O comportamento sob-falta, do instante de ocorrência  $t_0$  até sua eliminação pelo sistema de proteção no tempo  $t_t$ , e o comportamento pós-falta, a partir de  $t_t$  são descritos pelos sistemas:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f_F(x, y; p) & \dot{x} &= f_P(x, y; p) \\ 0 &= g_F(x, y; p) & 0 &= g_P(x, y; p) \\ t_0 &< t < t_t & t_t &< t\end{aligned}\tag{2.3} \tag{2.4}$$

onde o subscrito  $F$  indica sob-falta e  $P$  pós-falta.

A avaliação da estabilidade transitória determina se a trajetória pós-falta convergirá (ou não) para um novo ponto de equilíbrio estável.

### Simulação no domínio do tempo

O método tradicional de avaliar a estabilidade transitória é calcular, através de integração no tempo, as trajetórias  $x(t)$  para as configurações sob-falta e pós-falta. Pela observação das trajetórias determina-se se a estabilidade foi mantida ou perdida. A simulação no domínio do tempo possui características desejáveis, como [25]:

*i.* permite a modelagem do sistema com qualquer nível de detalhamento;

*ii.* disponibiliza informações das variáveis de estado durante o transitório e em regime permanente;

*iii.* o resultado da simulação pode ser diretamente avaliado pelo operador;

e possui algumas características indesejáveis:

*i.* a integração de centenas de equações diferenciais demanda tempo e esforço computacional;

*ii.* não fornece uma informação quanto ao grau de instabilidade ou de estabilidade;

*iii.* não são fornecidas indicações para ações de controle preventivo.

### Métodos diretos

Outra abordagem possível para a avaliação da estabilidade transitória são os métodos diretos ou métodos de função energia transitória, desenvolvidos a partir da teoria de estabilidade de Lyapunov.

No métodos diretos a determinação da estabilidade baseia-se no conhecimento da condição inicial pós-falta  $x(t_i)$  e de uma aproximação para a região de estabilidade, ou região de atração de um ponto de equilíbrio estável. Se a condição inicial pós-falta for interior à região de atração então a trajetória do sistema irá convergir para o ponto de equilíbrio nesta região e a estabilidade

será mantida. Se a condição inicial pós-falta for exterior à região de atração, então ocorrerá instabilidade.

Para estimar a região de atração é construída uma função  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , chamada função energia. A função energia  $V$  avaliada no ponto de eliminação da falta  $x(t_t)$  quantifica a energia adquirida pelo sistema durante a falta:  $V_t = V(x(t_t))$ . A energia potencial crítica  $V_c$ , que corresponde à energia na fronteira da região de estabilidade, é estimada pela avaliação de  $V$  no tempo crítico  $t_c$ :  $V_c = V(t_c)$ . A diferença entre a energia potencial crítica  $V_c$  e a energia no ponto de eliminação da falta  $V_t$  determina a margem de energia, também chamada margem de segurança. O sistema será estável para a contingência se tiver margem de segurança positiva, caso contrário, será instável. Desta forma, através da diferença entre os valores de energia, a margem de segurança mede a distância (em energia) do ponto de eliminação da falta à fronteira de estabilidade.

Os métodos diretos são particularmente interessantes por não exigirem a integração das equações diferenciais a partir do ponto de eliminação da falta. Suas principais vantagens em relação à simulação são:

- i.* demandam pouco tempo e esforço computacional;
- ii.* fornecem uma medida do grau de estabilidade ou instabilidade;
- iii.* fornecem informações úteis na definição de ações de controle.

Suas principais desvantagens são:

- i.* são aplicáveis apenas quando se emprega modelagem simplificada para o sistema elétrico;
- ii.* não fornecem as variáveis de estado para a condição pós-falta.

A Figura (2.2) ilustra, para uma variável de estado  $x(t)$  de um sistema hipotético, a avaliação da estabilidade por simulação no tempo e através de um método direto.

## Métodos híbridos

Atualmente os métodos de avaliação de estabilidade buscam a representação do sistema elétrico com o detalhamento que a simulação no tempo permite e com as margens de estabilidade que os métodos diretos fornecem.

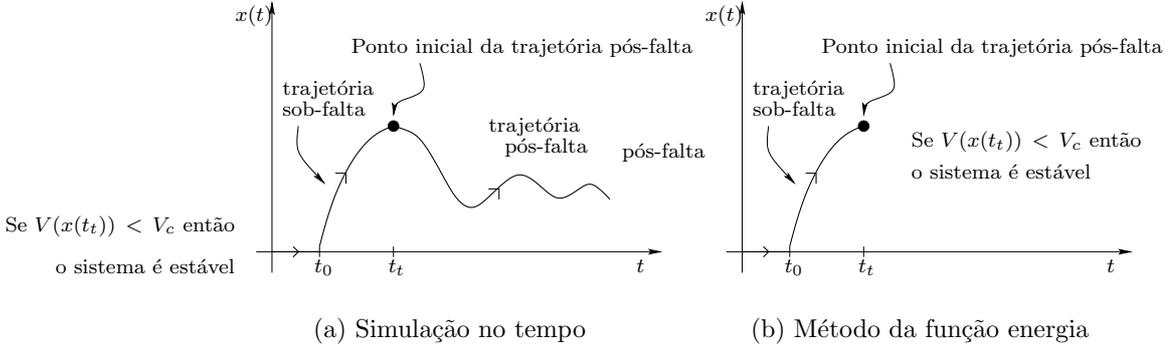


Figura 2.2: Avaliação da estabilidade por simulação e por métodos diretos

Estes métodos modernos, chamados métodos híbridos, combinam a simulação no domínio do tempo com um método direto [26, 27] ou com uma extensão do critério de áreas iguais [28].

**O critério de áreas iguais.** Referências clássicas tratam a estabilidade do sistema máquina barra-infinita através do conhecido critério de áreas iguais, exposto brevemente a seguir. A equação que descreve a dinâmica de uma máquina ligada a barra-infinita é:

$$M\ddot{\delta} = P_{meq} - P_e, \quad (2.5)$$

sendo  $P_{meq}$  a potência mecânica (considerada constante no modelo clássico) e  $P_e$  a potência elétrica, que na forma padrão é expressa por:

$$P_e(\delta) = P_c + P_{max} \text{sen}(\delta - \nu), \quad (2.6)$$

onde o termo  $P_c$ , e o deslocamento angular  $\nu$  são identificados na Figura (2.3), que ilustra a curva  $P_e(\delta) \times \delta$ .

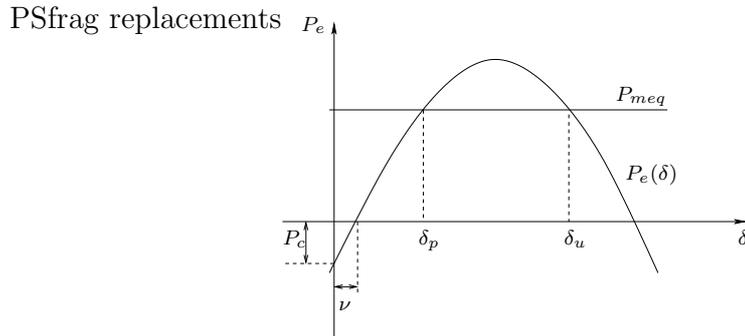


Figura 2.3: Curva  $P_e \times \delta$ .

PSfrag replacements

A aplicação do critério de áreas iguais é feita utilizando a expressão de potência elétrica (2.6) associada a cada configuração do sistema durante a perturbação, conforme ilustrado na Figura (2.4), onde os sub índices 0,  $d$  e  $p$  referem-se às configurações pré-falta, durante e pós-falta, respectivamente.

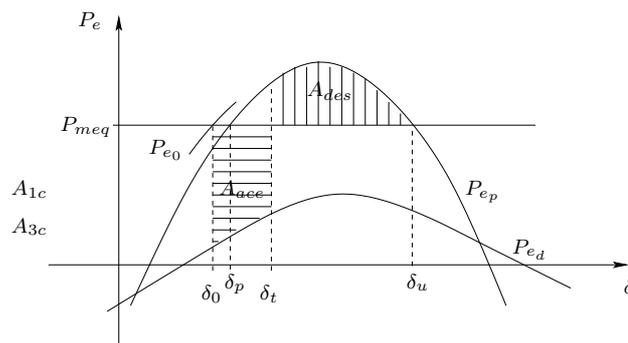


Figura 2.4: Curvas  $P_e \times \delta$  para uma perturbação.

Inicialmente a potência elétrica  $P_{e_0}$  é igual à potência mecânica  $P_{meq}$  e o sistema encontra-se em regime permanente com o ângulo  $\delta_0$ . Quando ocorre a perturbação o sistema é representado pela curva  $P_{e_d}$  e, como  $P_{meq} > P_{e_d}(\delta_0)$ , sofre aceleração e aumento do ângulo  $\delta$ . A área acelerante  $A_{ace}$  ilustrada corresponde à energia adquirida neste período. Ao ser eliminada a falta, em  $\delta = \delta_t$ , o sistema evolui sob a curva  $P_{e_p}$ , desacelerando devido a  $P_{meq} < P_{e_p}(\delta_0)$ . A perda de energia após a eliminação do defeito é representada

pela área  $A_{des}$ . Na Figura (2.4) está também indicado o ângulo de equilíbrio pós-falta  $\delta_p$  e o ângulo de equilíbrio instável pós-falta  $\delta_u$ .

O critério de áreas iguais estabelece que o sistema é estável se a área acelerante  $A_{ace}$  é menor ou igual à área desacelerante máxima possível  $A_{des}$ . Assim, a margem de segurança em energia  $\eta$  é definida como a diferença entre as áreas acelerante e desacelerante [29]:

$$\eta = A_{des} - A_{ace}. \quad (2.7)$$

No Apêndice A é apresentado o cálculo das áreas acelerante  $A_{ace}$ , desacelerante  $A_{des}$  e da margem de segurança  $\eta$ .

As primeiras extensões do critério de áreas iguais para o caso multimáquinas foram feitas na Rússia, anteriormente a 1930, particularmente no trabalho de Gorev [30]. Atualmente vários trabalhos propõem a extensão do critério de áreas iguais ao caso multimáquinas [29, 31]. O mais recente destes trabalhos é comentado a seguir.

**O método SIME.** Recentemente Zhang, Wehenkel, Rousseaux e Pavella [28] desenvolveram um método híbrido, chamado método SIME (Single Machine Equivalent) que combina a simulação no tempo com o critério de áreas iguais estendido ao caso multimáquinas.

O método SIME considera que a perda do sincronismo resulta na separação das máquinas síncronas em dois conjuntos, definidos pelas aberturas angulares das máquinas. A partir das trajetórias do sistema são identificados o conjunto de máquinas remanescentes, com pequena abertura angular, e o conjunto de máquinas relevantes, com abertura angular superior a um valor fixado. A cada um destes dois conjuntos é definida uma máquina equivalente, agrupando as máquinas pertencentes a cada conjunto.

A partir das duas máquinas equivalentes é então definido um equivalente máquina barra-infinita (OMIB - One Machine Infinite Bus), chamado OMIB equivalente relevante. A partir do OMIB equivalente a estabilidade é avaliada através do critério de áreas iguais, observando a margem de segurança. O método SIME possui as seguintes vantagens:

- i.* Utiliza as trajetórias obtidas pela simulação no domínio do tempo,

permitindo que o sistema elétrico seja modelado com o detalhamento desejado.

*ii.* Por utilizar o critério de áreas iguais fornece uma margem de estabilidade e ainda, uma expressão analítica para esta margem, permitindo a obtenção de coeficientes de sensibilidade e facilitando a definição de ações de controle.

As dificuldades encontradas na aplicação deste método são:

*i.* Mesmo que o sistema não perca a estabilidade para determinada contingência, é importante determinar sua margem de estabilidade, pois uma margem inferior à mínima estabelecida também exige ações de melhoria da segurança. Mas, na situação de estabilidade, não ocorre a separação dos geradores do sistema em dois conjuntos, e a construção do OMIB equivalente relevante é baseada em um procedimento iterativo.

*ii.* Por uma característica do próprio critério de áreas iguais, a margem de segurança das contingências estáveis é calculada aproximadamente. Esta aproximação será discutida no Capítulo 3.

### **2.4.2 Melhoria da segurança dinâmica**

As ações de melhoria da segurança dinâmica podem ser de controle preventivo ou de controle emergencial. Enquanto no controle preventivo o objetivo é preparar o sistema em estado normal para suportar uma possível contingência, no controle emergencial a ação é tomada após a ocorrência da contingência, visando minimizar seu efeito [21]. As ações de controle preventivo tem custo individual menor mas são mais frequentes que as ações corretivas. Como o ponto de operação, definido por critérios de eficiência, deve ser alterado com frequência, o controle preventivo é potencialmente mais caro que o corretivo [21]. Apesar disto, existem dificuldades práticas na implementação do controle emergencial, impostas pelo tempo em que a ação deve ser executada - no máximo 200ms após a ocorrência da falta. Neste tempo as medições devem ser recebidas pelo centro de controle, a ordem deve ser enviada às subestações e a ação deve ser aplicada [19]. Assim, a aplicação do controle emergencial exige, além de avanço metodológico, tecnologias de

comunicação e automação.

De maneira geral as metodologias podem ser desenvolvidas independente de sua aplicação, e adaptadas ao controle emergencial ou preventivo. Na metodologia representada esquematicamente na Figura (2.1), e na sequência deste trabalho, considera-se que as ações de melhoria da segurança são preventivas.

As ações preventivas de melhoria da segurança dinâmica mais empregadas são o redespacho de geração ativa, a modificação na topologia da rede, a modificação do perfil de tensões e a redução da carga [5]. Considera-se que a ação preventiva mais adequada seja o redespacho de geração [5, 6, 32].

O redespacho de geração possui duas etapas: a identificação dos geradores que participarão do redespacho, tendo sua geração reduzida ou aumentada, e a quantificação das variações de geração em cada máquina.

Uma forma simples de definir o redespacho de segurança dinâmica é pelo método da direção S [33]. Inicialmente, considerando a contingência mais severa, as máquinas são ordenadas segundo sua defasagem angular em relação ao centro de ângulo. Então é calculada uma direção de redespacho reduzindo a geração das máquinas com maior componente angular e aumentando a geração das máquinas com menor componente angular. A vantagem deste método é a simplicidade de implementação. Sua principal desvantagem é considerar a cada iteração apenas a pior contingência, sendo as demais possivelmente também bastante severas. Isto pode gerar um grande número de iterações até atingir um ponto estável para *todas* as contingências. Além disto, o método não quantifica os redespachos total e por máquina.

Alguns métodos definem o redespacho baseados em coeficientes de sensibilidade da margem de segurança em relação à potência gerada em cada máquina. Com estes coeficientes procura-se quantificar a influência de cada máquina na manutenção ou perda da estabilidade. Métodos baseados em coeficientes de sensibilidade foram propostos por Fouad e Jianzhong [4], Decker e Castro [5] e Li e Bose [6]. Segundo a referência [7], os redespachos que utilizam a informação de coeficientes de sensibilidade são mais efetivos sobre a segurança dinâmica do sistema. A dificuldade na definição de coeficientes de sensibilidade é a necessidade de uma expressão analítica para a margem de

segurança, que deve ser derivada em relação às potências geradas. Alguns métodos de avaliação da estabilidade, como os métodos diretos e o critério de áreas iguais estendido fornecem expressões para as margens de segurança; já a simulação no tempo não fornece.

Métodos recentes calculam o redespacho de segurança através de um problema de otimização [34, 35, 5, 36, 4, 37].

Assim, o novo ponto de operação, além de satisfazer as restrições de segurança dinâmica, satisfaz outras restrições do sistema elétrico. Estas propostas são analisadas no Capítulo 3.

### 2.4.3 Uma metodologia de segurança dinâmica

As características desejáveis em uma metodologia de análise da segurança dinâmica são [22]:

- Geração automática de uma lista com grande número de contingências;
- Seleção das contingências mais severas (críticas) através de um método rápido (direto ou híbrido) de avaliação da estabilidade transitória;
- Avaliação precisa das contingências selecionadas através da simulação no tempo com modelagem detalhada;
- Determinação de uma margem de segurança para as contingências avaliadas através de simulação;
- Adoção de um critério que constate *automaticamente* a instabilidade ou a estabilidade e finalize a simulação no tempo, reduzindo o esforço computacional;
- Uso de técnicas de processamento de alto desempenho.

Estas características estão presentes na metodologia em desenvolvimento no Laboratório de Planejamento de Sistemas Elétricos da Universidade Federal de Santa Catarina (LabPlan-UFSC).

A Figura (2.5) ilustra a estrutura desta metodologia.

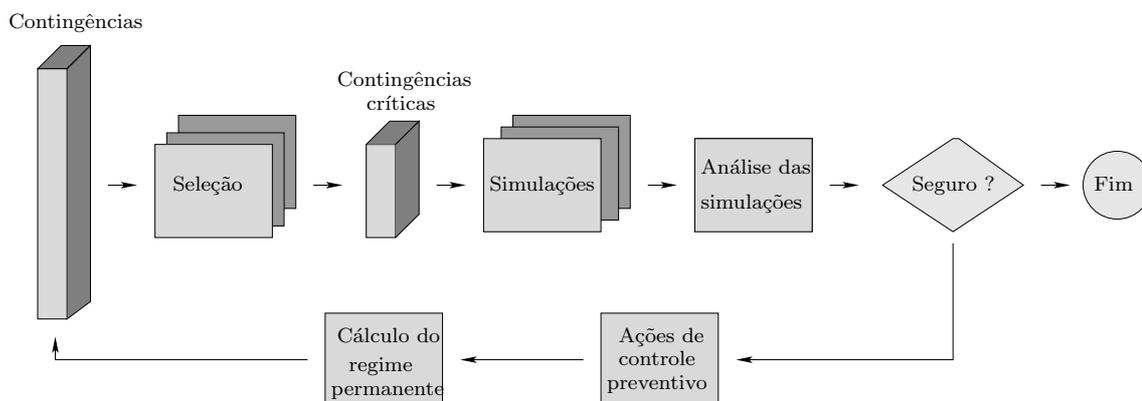


Figura 2.5: Estrutura de uma metodologia de análise da segurança dinâmica

Cada etapa da metodologia ilustrada na Figura (2.5) é comentada a seguir.

**Seleção das contingências críticas.** Um método de avaliação da estabilidade transitória, para ser utilizado na seleção de contingências críticas, deve ser confiável, rápido, robusto, e exigir pouca computação *off-line*. Confiável, neste contexto, significa que nenhuma contingência que causar instabilidade ou tiver margem de estabilidade insuficiente pode deixar de ser selecionada pelo método. A rapidez é importante devido ao grande número de contingências avaliadas. A robustez refere-se ao desempenho satisfatório independentemente do ponto de operação e da configuração do sistema elétrico. É também desejável que a demanda por computação *off-line* seja pequena, para tornar a metodologia adequada a aplicações *on-line*. Todos estes requisitos são satisfeitos pelos métodos diretos de avaliação da estabilidade. Na metodologia em desenvolvimento no Labplan a seleção é realizada através do método SLEP (Superfície Limite de Energia Potencial) iterativo [38]. No método SLEP iterativo os geradores são representados pelo modelo clássico (fonte de tensão constante em série com reatância transitória de eixo direto), não são considerados os torques de amortecimento e as cargas são representadas por impedâncias constantes. Experimentos computacionais verificaram que este método é adequado à seleção de contingências críticas.

**Avaliação precisa das contingências severas.** Na avaliação das contingências selecionadas como severas deve ser empregada uma modelagem detalhada do sistema. Por não impor restrições na modelagem, o método mais adequado à avaliação precisa das contingências é a simulação no domínio do tempo. Nesta análise detalhada são modelados dinamicamente os geradores, os sistemas de excitação, os sinais estabilizadores e alguns elementos da rede elétrica, como dispositivos FACTS (especialmente os compensadores estáticos de reativos e capacitores série controlado), que podem ter influência sobre a estabilidade. Os componentes com dinâmica demasiadamente rápida (linhas de transmissão) ou demasiadamente lenta (turbinas) para afetar a estabilidade transitória são modelados estaticamente. A atual implementação da metodologia ilustrada na Figura (2.5) utiliza o programa de avaliação da estabilidade ANATEM, desenvolvido pelo CEPEL (Centro de Pesquisas em Energia Elétrica).

**Análise das simulações.** Tradicionalmente, a análise das simulações é realizada por um especialista e os limites de estabilidade são determinados em um processo iterativo, envolvendo grande número de avaliações. Este procedimento exige intervenção humana e tempo computacional que o torna inadequado a aplicações *on-line*. Recentemente, surgiram trabalhos que buscam a obtenção de margens de estabilidade automaticamente a partir da simulação. Citamos os trabalhos de Maria, Tang e Kim [26], Tang [27] e Zhang, Wehenkel, Rousseaux e Pavella [28]. Na versão atual da metodologia em desenvolvimento no Labplan a identificação das contingências estáveis e instáveis utiliza um método baseado no conceito de *energia potencial generalizada*, descrito na referência [7]. As margens de segurança para as contingências instáveis são calculadas por uma implementação do método SIME proposto em [28].

**Ações de controle preventivo e cálculo do regime permanente.** Na versão atual da metodologia, o controle preventivo é definido pelo método da direção S [33], em uma implementação desenvolvida no mestrado de Souza [3]. O método da direção S produz os mesmos resultados que os obtidos pela ordenação das máquinas por sua defasagem angular. Uma vez determinado o redespacho, o novo ponto de operação é definido pelo programa ANAREDE

(análise de redes), desenvolvido pelo CEPEL.

Em [39] uma versão preliminar desta metodologia foi implementada utilizando processamento distribuído. Em [40] são mostrados testes computacionais referentes a esta implementação. Os resultados obtidos, em termos de redução do tempo de execução, confirmaram que a aplicação de processamento distribuído, particularmente na etapa de seleção de contingências é bastante conveniente.

## 2.5 Conclusões

Neste capítulo fez-se a revisão dos principais conceitos da análise de segurança dinâmica de sistemas de energia. Além da estrutura da análise de segurança, composta das funções de monitoração, avaliação e melhoria, os principais métodos desenvolvidos para avaliação foram discutidos.

Uma vez discutidos os métodos de avaliação da segurança, foi apresentada a estrutura de uma metodologia em desenvolvimento no LABPLAN-UFSC que satisfaz os principais requisitos estabelecidos na literatura. A metodologia apresentada é constituída por um filtro de contingências baseado na avaliação rápida da estabilidade, pela simulação no domínio do tempo das contingência severas utilizando modelagem detalhada e pela definição de ações de melhoria da segurança baseada nas informações obtidas com a simulação.

Nesta fase de melhoria da segurança verificou-se a necessidade de desenvolvimento de um método que possibilite a quantificação dos redespachos de segurança alterando o mínimo possível o ponto de operação do sistema. O estudo da bibliografia indicou o uso de coeficientes de sensibilidade e a formulação de um problema de otimização para quantificar com precisão os redespachos de potência. A definição das ações de melhoria da segurança dinâmica através de um problema de otimização utilizando coeficientes de sensibilidade será discutida no Capítulo 3 a seguir.

# Capítulo 3

## Melhoria da segurança dinâmica através de um fluxo de potência ótimo

### 3.1 Introdução

No Capítulo 2 a análise de segurança foi definida como uma das funções da operação em tempo real do sistema elétrico, sendo por sua vez, composta pelas etapas de monitoração, avaliação e melhoria da segurança. Este capítulo concentra-se na etapa de melhoria da segurança dinâmica. Inicialmente discute-se a definição da melhoria da segurança dinâmica através de um problema de otimização e comenta-se os trabalhos que utilizaram esta estratégia para definir as ações de segurança.

Considerando a estrutura da metodologia de análise de segurança dinâmica apresentada no Capítulo 2, propõe-se a definição das ações de melhoria da segurança dinâmica através de um problema de fluxo de potência ótimo com restrições de estabilidade transitória. No problema proposto a restrição de estabilidade transitória para cada contingência é formulada através da margem de segurança em energia. Esta abordagem permite a modelagem de apenas uma restrição por contingência.

A formulação das restrições de estabilidade a partir das trajetórias obtidas

por simulação com modelagem detalhada do sistema elétrico é discutida em detalhes e um experimento computacional é mostrado.

## 3.2 Melhoria da segurança dinâmica e otimização

Nesta seção evidencia-se o interesse em formular o redespacho de segurança dinâmica através de um problema de otimização e comenta-se os trabalhos que empregaram esta abordagem.

Pode-se supor que o ponto de operação do sistema elétrico é determinado pela otimização de algum critério de eficiência. Por isto é desejável que na definição de ações de melhoria da segurança o ponto de operação seja alterado no mínimo necessário. O novo ponto, determinado após o redespacho de segurança, deve também satisfazer as restrições do sistema elétrico. A formulação por otimização é considerada adequada à definição da melhoria da segurança por possibilitar a definição de um problema no qual simultaneamente é otimizado um critério de eficiência (por exemplo, minimização do desvio do ponto de operação) e satisfeitas as restrições do sistema.

Uma característica da formulação por otimização, importante na definição de ações de melhoria da segurança, é que práticas usuais da operação podem ser incorporadas ao problema. Como exemplo citamos [8]:

*i. Pequeno número de ações de controle:* É desejável que a ação altere um pequeno número de controles, pois além da dificuldade técnica de alterar um número grande de controles, isto poderia ser percebido pelo sistema como uma perturbação.

*ii. Variáveis de controle distantes de seus limites:* É uma prática usual, na medida do possível, não permitir a operação em regime permanente com as variáveis de controle em seus limites.

*iii. Pequenas violações X Medidas preventivas:* A política de operação definida pela empresa pode permitir que alguns índices de segurança sejam violados até determinada tolerância.

Visto que o principal objetivo da melhoria da segurança dinâmica é tornar

o sistema seguro frente a perturbações, isto é, capaz de passar pelo período transitório sem perder a estabilidade, o problema de redespacho de segurança dinâmica deve modelar a estabilidade transitória. A modelagem da restrição de estabilidade transitória é a principal dificuldade no estabelecimento de um problema de otimização de definição de redespachos de segurança dinâmica. Isto por que a estabilidade transitória está relacionada ao comportamento dinâmico do sistema elétrico, descrito por equações diferenciais, e as restrições do problema de otimização são expressões algébricas. Diversos trabalhos tem buscado a representação mais conveniente para a restrição de estabilidade transitória. Estes trabalhos são comentados a seguir.

Uma das primeiras propostas de determinação das ações de melhoria da segurança dinâmica por um problema de otimização é de Fonseca e Minussi [34, 35]. Os autores formularam um problema linear, considerando restrições de estabilidade transitória, limites de potência ativa gerada em cada máquina e o balanço total de potência no sistema, sem considerar as restrições da rede elétrica. A restrição de estabilidade foi formulada a partir da expressão de margem de segurança fornecida pelo método SLEP. Nesta formulação é gerado um grande número de restrições por contingência analisada.

Decker e Castro [5, 36] formularam um problema de otimização no qual as contingências mais severas são consideradas simultaneamente, com apenas *uma* restrição por contingência. Cada restrição de estabilidade é formulada a partir da margem de segurança fornecida pelo método SLEP e por coeficientes de sensibilidade, obtidos a partir do equivalente máquina barra-infinita. A proposta de Decker e Castro é dependente de um método de avaliação da estabilidade que forneça uma expressão analítica para a margem de segurança e, por utilizar o método SLEP, possui limitações de modelagem. O problema de otimização formulado considera o balanço total de potência no sistema, não considerando as restrições de rede elétrica. Uma implementação deste problema utilizando programação linear e quadrática, solucionada com o pacote computacional OSL, foi desenvolvida por Costa [41].

O problema de definição do redespacho de segurança proposto por Fouad e Jianzhong [4] minimiza o desvio do ponto inicial e, além da restrição de estabilidade transitória, considera a rede elétrica e a limitação do fluxo nas

linhas. A restrição de estabilidade transitória é formulada com coeficientes de sensibilidade da margem de energia, sendo a expressão para a margem fornecida por um método direto (que não permite liberdade de modelagem). Apenas a pior contingência é considerada a cada iteração.

Na proposta de Bettioli [42] a seleção das contingências críticas e a quantificação da potência total a ser redespachada é definida pelo método SIME. O redespacho para as máquinas críticas, cuja geração deve ser reduzida, é definido por um conjunto de regras descritas em [43]. A relocação de potência nas máquinas não críticas, cuja geração é aumentada, é definida através de um fluxo de potência ótimo convencional, garantindo assim que a relocação respeitará algumas restrições do sistema elétrico.

La Scala [37] propôs um algoritmo no qual o redespacho de segurança dinâmica é definido por um problema de otimização não-linear que preserva a liberdade de modelagem da simulação no tempo. Nesta proposta as equações algébrico-diferenciais que descrevem o sistema elétrico são discretizadas em um número pré-definido de passos de integração e incluídas no problema de otimização como restrições de igualdade. Restrições de desigualdade definem um domínio no qual as trajetórias do sistema devem permanecer para garantir a estabilidade transitória. A função objetivo do problema é composta por um termo de minimização do custo de geração e um termo que penaliza a violação da segurança. A discretização do sistema algébrico-diferencial gera um problema não-linear de porte muito grande, especialmente se forem consideradas simultaneamente várias contingências.

Nos trabalhos mencionados a estabilidade transitória foi modelada, basicamente, de duas formas: por expressões que utilizam coeficientes de sensibilidade da margem de segurança atual em relação à potência gerada em cada máquina, ou por expressões algébricas resultantes da discretização do sistema algébrico-diferencial que modela o sistema elétrico. Os métodos que utilizam coeficientes de sensibilidade são dependentes de uma expressão para a margem de segurança. Conforme comentado no Capítulo 2, os métodos diretos (que fornecem tal expressão de margem) possuem limitação de modelagem. Os métodos baseados na discretização das equações diferenciais,

por sua vez, não possuem limitação de modelagem, mas geram um problema não-linear de porte muito grande.

Nas seções seguintes propõe-se a definição do redespacho de segurança através de um problema de otimização com restrições de estabilidade transitória. Nesta proposta procurou-se conciliar a liberdade de modelagem proporcionada pela simulação no tempo com o bom desempenho dos redespachos calculados com base em coeficientes de sensibilidade.

PSfrag replacements

### 3.3 Estrutura da metodologia proposta

A partir da estrutura de análise da segurança dinâmica apresentada e discutida no Capítulo 2, propomos a estrutura ilustrada na Figura (3.1).

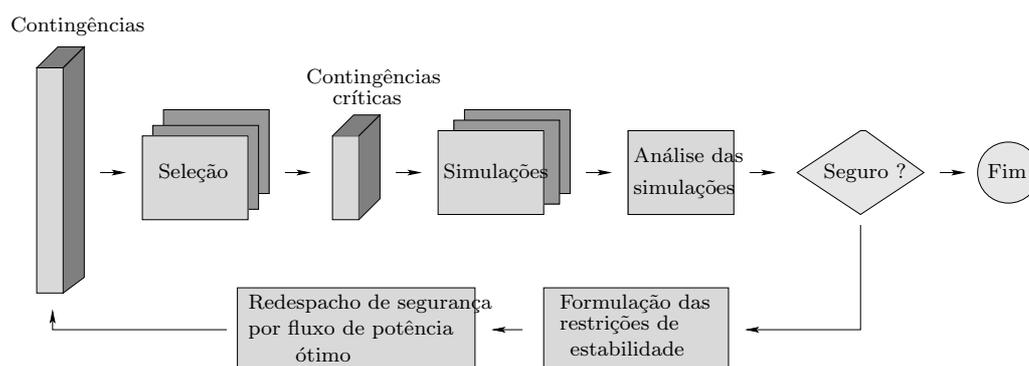


Figura 3.1: Análise da segurança dinâmica com redespacho por otimização

Nas etapas de seleção, simulação e análise de contingências, a metodologia ilustrada na Figura (3.1) é idêntica e utiliza os mesmos métodos que a metodologia mostrada na Figura (2.5). Após a seleção das contingências mais severas através de um método rápido de avaliação da estabilidade, estas são simuladas no domínio do tempo empregando modelagem detalhada. A análise das simulações, através do método SIME, determina uma margem de segurança para cada contingência. As contingências com margem inferior à mínima especificada são selecionadas e incluídas em um procedimento de melhoria da segurança.

A inovação da metodologia ilustrada na Figura (3.1) em relação à metodologia da Figura (2.5) está na definição das ações de melhoria da segurança por um problema de fluxo de potência ótimo com restrições de estabilidade transitória. A formulação deste problema é apresentada nas seções seguintes.

### 3.4 Fluxo de potência ótimo com restrições de estabilidade transitória

Um fluxo de potência ótimo convencional é um problema de otimização formado por restrições de igualdade que impõem o balanço de potência ativa e reativa nas  $nb$  barras do sistema e restrições de desigualdade que impõem os limites físicos e operacionais, como os limites de módulo da tensão nas barras, limites de potência ativa e reativa gerada nos  $ng$  geradores e limites de fluxo nas  $nl$  linhas de transmissão. A função objetivo expressa diversos interesses, por exemplo, a minimização do custo de geração, a minimização de perdas nas linhas ou a maximização da transferência de potência. O seguinte problema é um exemplo de fluxo de potência ótimo:

$$\begin{aligned}
& \text{minimize} && f_0(V_m, \theta, Pg, Qg) \\
& \text{sujeito a} && P_i(V_m, \theta) + Pl_i - Pg_i = 0 && i = 1, \dots, nb \\
& && Q_i(V_m, \theta) + Ql_i - Qg_i = 0 && i = 1, \dots, nb \\
& && \underline{V}_{m_i} \leq V_{m_i} \leq \overline{V}_{m_i} && i = 1, \dots, nb \\
& && \underline{Pg}_i \leq Pg_i \leq \overline{Pg}_i && i = 1, \dots, ng \\
& && \underline{Qg}_i \leq Qg_i \leq \overline{Qg}_i && i = 1, \dots, ng \\
& && \underline{T}_i \leq T_i(V_m, \theta) \leq \overline{T}_i && i = 1, \dots, nl,
\end{aligned} \tag{3.1}$$

onde a função objetivo  $f_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  pode representar, por exemplo, perdas nas linhas de transmissão ou custo de geração de potência ativa,  $nb$ ,  $nl$  e  $ng$  são, respectivamente, o número de barras, de linhas e de geradores do sistema;  $V_m \in \mathbb{R}^{nb}$  e  $\theta \in \mathbb{R}^{nb}$  são o módulo e o ângulo da tensão nas barras,  $Pg \in \mathbb{R}^{ng}$  e  $Qg \in \mathbb{R}^{ng}$  são as potências ativa e reativa geradas,  $Pl \in \mathbb{R}^{nb}$  e  $Ql \in \mathbb{R}^{nb}$  são as cargas ativas e reativas,  $P_i$  e  $Q_i$  são as potências ativa e reativa calculadas

na  $i$ -ésima barra e  $T \in \mathbb{R}^{nl}$  é o fluxo nas linhas de transmissão. Os termos com barras inferiores e superiores indicam respectivamente limites mínimos e máximos para as variáveis correspondentes.

A proposta deste trabalho é definir as ações de melhoria da segurança através de um problema de fluxo de potência ótimo, de forma que o ponto definido pelo redespacho de segurança satisfaça também algumas restrições de regime permanente do sistema elétrico. Para isto inclui-se, no fluxo de potência ótimo convencional, uma restrição de estabilidade transitória expressa pela margem de segurança de cada contingência após o redespacho.

**Restrição de estabilidade transitória.** Expressar a estabilidade transitória através de uma margem de segurança após o redespacho apresenta o grande atrativo de permitir que apenas uma restrição por contingência seja incorporada ao problema de otimização. Esta proposta foi desenvolvida por Decker e Castro [5].

A restrição para representar a estabilidade transitória determina que após o redespacho a margem de segurança para cada contingência seja igual ou superior à margem mínima especificada para o sistema. Seja  $\eta_k^r$  a margem de segurança para a  $k$ -ésima contingência após o redespacho e  $\eta_{min}$  a margem de segurança mínima estabelecida para o sistema. A restrição de estabilidade impõe:

$$\eta_k^r \geq \eta_{min} \quad (3.2)$$

para todas as contingências sob análise. A formulação desta restrição a partir das trajetórias obtidas por simulação será discutida na seção seguinte.

**Função objetivo.** Por se considerar que o ponto de operação foi definido otimizando algum critério, o redespacho de segurança deve alterar o mínimo possível este ponto, de forma a comprometer o mínimo possível a eficiência da operação. Além disto, por serem formuladas através de coeficientes de sensibilidade, as restrições de estabilidade são precisas apenas em uma vizinhança do ponto para o qual tais coeficientes foram determinados.

Como as ações de segurança consideradas neste trabalho são do tipo redespacho de geração ativa, a função objetivo adotada no FPO com restrições

de segurança minimiza o desvio da potência ativa gerada, e possui a forma:

$$f_0(\Delta P g) = \sum_{i=1}^{ng} \left( \frac{1}{\alpha_i} \Delta P g_i \right)^2, \quad (3.3)$$

sendo  $\Delta P g_i$  a variação na geração de potência ativa do  $i$ -ésimo gerador e  $\alpha_i$  um coeficiente de ponderação associado ao  $i$ -ésimo gerador, discutido a seguir.

O coeficiente  $\alpha_i$  é definido considerando a sensibilidade da margem de segurança para todas as contingências -  $\eta_T$ , à variação da potência gerada na  $i$ -ésima máquina [36]:

$$\alpha_i = \left( \frac{d \eta_T}{d \Delta P g_i} \right). \quad (3.4)$$

A margem de segurança total  $\eta_T$  é definida como:

$$\eta_T = \sum_{k=1}^{nc} \eta_k, \quad (3.5)$$

sendo  $nc$  o número de contingências consideradas no redespacho. A margem total pode ser expressa pela expansão de Taylor em torno do ponto atual:

$$\eta_T = \sum_{k=1}^{nc} [\eta_k^0 + S_k \Gamma_{ki} \Delta P g_i], \quad (3.6)$$

onde  $\Gamma_{ki}$  assume o valor 0 ou 1, identificando se a máquina  $i$  pertence ao conjunto crítico da  $k$ -ésima contingência. Com esta expressão, o coeficiente  $\alpha_i$  pode ser escrito como:

$$\alpha_i = \sum_{k=1}^{nc} -\Gamma_{ki} S. \quad (3.7)$$

Com a função objetivo (3.3) e incluindo a restrição de estabilidade (3.22) ao fluxo de potência ótimo (3.1), o problema de redespacho de segurança

proposto é:

$$\begin{aligned}
& \text{minimize} && \sum_{i=1}^{ng} \left( \frac{1}{\alpha_i} \Delta P g_i \right)^2 \\
& \text{sujeito a} && P_i(V_m, \theta) + Pl_i - P g_i = 0 && i = 1, \dots, nb \\
& && Q_i(V_m, \theta) + Ql_i - Q g_i = 0 && i = 1, \dots, nb \\
& && \underline{V_{m_i}} \leq V_{m_i} \leq \overline{V_{m_i}} && i = 1, \dots, nb \\
& && \underline{P g_i} \leq P g_i \leq \overline{P g_i} && i = 1, \dots, ng \\
& && \underline{Q g_i} \leq Q g_i \leq \overline{Q g_i} && i = 1, \dots, ng \\
& && \underline{T_i} \leq T_i(V_m, \theta) \leq \overline{T_i} && i = 1, \dots, nl \\
& && \eta_i^r \geq \eta_{min} && i = 1, \dots, nc.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

### 3.5 Modelagem das restrições de estabilidade transitória

A restrição de estabilidade transitória incorporada ao problema (3.8) estabelece que a margem de segurança de cada contingência após o redespacho  $\eta_k^r$  seja superior à margem mínima  $\eta_{min}$ . Ou seja:

$$\eta_k^r \geq \eta_{min}, \quad k = 1, \dots, nc. \tag{3.9}$$

Nesta seção discute-se a obtenção de uma expressão para a margem de segurança após o redespacho  $\eta^r$  a partir da simulação no domínio do tempo do sistema elétrico utilizando modelagem detalhada.

Tendo sido determinada uma margem de segurança para uma contingência, a margem de segurança após o redespacho pode ser formulada através de coeficientes de sensibilidade de primeira e segunda ordem,  $S$  e  $S'$ , respectivamente. Seguindo a referência [5], define-se os coeficientes de sensibilidade da margem de segurança da  $k$ -ésima contingência em relação à potência ativa gerada como:

$$S_k = \frac{d\eta_k}{dP_m} \tag{3.10} \quad S'_k = \frac{d^2\eta_k}{dP_m^2}, \tag{3.11}$$

sendo  $\eta_k$  a margem de segurança da  $i$ -ésima contingência e  $P_m$  a potência total

gerada no conjunto de máquinas críticas (geradores que sofrerão redução de geração).<sup>1</sup>

Utilizando os coeficientes de sensibilidade, a margem após o redespacho  $\eta^r$  pode ser estimada pela expansão em série de Taylor da margem atual  $\eta$ :

$$\eta^r = \eta + S \Delta P_m + \frac{1}{2} S' \Delta P_m^2, \quad (3.12)$$

onde  $\Delta P_m$  é a variação de geração ativa no conjunto de máquinas críticas.

De (3.9) e (3.12), a restrição que impõe a margem mínima para cada contingência após o redespacho é:

$$\frac{1}{2} S' \Delta P_m^2 + S \Delta P_m + (\eta - \eta_{min}) \geq 0. \quad (3.13)$$

Para formular a restrição de estabilidade transitória associada a cada contingência (3.13) é necessário:

- obter um valor para a margem de segurança atual  $\eta$ ;
- obter os coeficientes de sensibilidade  $S$  e  $S'$ , o que implica a disponibilidade de uma expressão analítica (que possa ser derivada) para a margem de segurança.

Em [44], Decker e Vanti propuseram a definição do redespacho através de um fluxo de potência ótimo formulado como (3.8), no qual a restrição de estabilidade é formulada pela expansão em série de Taylor da margem atual, utilizando coeficientes de sensibilidade. No entanto, nos experimentos computacionais expostos em [44], foi empregada modelagem simplificada para o sistema elétrico. Pode-se assim utilizar as margens de segurança e os coeficientes de sensibilidade fornecidos pelo método SLEP iterativo.

Neste trabalho emprega-se a simulação do sistema elétrico no domínio do tempo utilizando modelagem detalhada. Visto que nesta situação não é possível o emprego de um método direto, que forneça margens de segurança,

---

<sup>1</sup>A cada contingência está associada uma margem de segurança e um coeficiente de sensibilidade de primeira e segunda ordem. A partir daqui o sub-índice  $k$  será omitido destes termos.

propõe-se a obtenção de uma expressão analítica para a margem de segurança  $\eta$  a partir da simulação no tempo, em um procedimento composto das seguintes etapas:

- (i) Simulação da contingência, com tempo de eliminação da falta  $t_i$  fixado, empregando modelagem detalhada para os componentes do sistema;
- (ii) Definição, a partir das trajetórias obtidas com a simulação, do equivalente máquina barra-infinita do sistema elétrico (OMIB Equivalente);
- (iii) Determinação pelo método de mínimos quadrados, a partir dos pontos do OMIB Equivalente, de expressões analíticas para a potência elétrica do OMIB nas configurações pré-falta, sob-falta e pós-falta;
- (iv) Obtenção de uma expressão analítica para a margem de segurança pela aplicação do critério de áreas iguais.

Estas etapas são detalhadas a seguir.

**Construção do OMIB Equivalente.** A construção do OMIB Equivalente a partir das trajetórias obtidas com a simulação no tempo baseia-se no método SIME [28]. Para uma contingência que conduz à instabilidade, a construção do OMIB é realizada da seguinte forma:

- i. A partir das trajetórias obtidas com a simulação no tempo, são identificadas as máquinas críticas. São consideradas críticas as máquinas que apresentam um desvio angular superior a um valor especificado.
- ii. As máquinas críticas e não críticas são agregadas em dois conjuntos, e são definidas duas máquinas equivalentes, correspondentes a cada conjunto.
- iii. O sistema de duas máquinas é reduzido a um sistema equivalente máquina barra-infinita.
- iv. São calculados os parâmetros do OMIB Equivalente (potência mecânica equivalente, potência elétrica equivalente e inércia) e as trajetórias (velocidade e ângulo).

Se uma contingência não conduz à instabilidade com o tempo de eliminação da falta considerado, então não ocorre a separação das máquinas em dois grupos, de máquinas críticas e não críticas. Neste caso pode-se adotar um procedimento iterativo de simulação, no qual o tempo de eliminação da falta é aumentado até que se verifique a instabilidade. Uma vez verificada a instabilidade, a contração do OMIB Equivalente segue o procedimento já descrito. Este procedimento de identificação das máquinas críticas para as contingências estáveis considera que o conjunto crítico não se altera com a variação do tempo de eliminação da falta.

**Expressões analíticas para as trajetórias do OMIB Equivalente.** No Capítulo 2 foi discutida a obtenção da margem de segurança em energia aplicando-se o critério de áreas iguais à curva  $P_e \times \delta$ , curva esta definida pela dinâmica de uma máquina ligada a barra-infinita. Se for adotado o modelo clássico para representar a dinâmica da máquina, então a potência elétrica  $P_e(\delta)$  é expressa na forma padrão (2.6):

$$P_e(\delta) = P_c + P_{max} \text{sen}(\delta - \nu),$$

onde os termos  $P_c$ ,  $\nu$  são ilustrados na Figura (2.3).

Na metodologia em desenvolvimento deseja-se obter a margem de segurança pela aplicação do critério de áreas iguais ao OMIB Equivalente, obtido a partir da simulação no tempo utilizando modelagem detalhada. Desta forma é preciso obter expressões analíticas para a potência elétrica nas configurações pré-falta, sob-falta e pós-falta a partir dos pontos que definem o OMIB equivalente. O procedimento de obtenção destas expressões é descrito a seguir.

Para representar a potência elétrica do OMIB Equivalente adotou-se a forma polinomial, sendo a ordem  $n$  do polinômio escolhida de acordo com a precisão desejada:

$$P_e(\delta) = c_0 + c_1\delta + c_2\delta^2 + \dots + c_n\delta^n. \quad (3.14)$$

Em experimentos computacionais verificou-se que polinômios de ordem 2

representam com precisão suficiente a curva de potência elétrica do OMIB.

Para a determinação dos coeficientes  $c_i$  do polinômio (3.14) a partir dos pontos do OMIB Equivalente propõem-se o clássico *método de mínimos quadrados*. Seguindo o método de mínimos quadrados, a partir de  $k + 1$  pares  $(\delta_i, P_{e_i})$  conhecidos, com  $k > n$  e todos os  $\delta_i$  distintos, define-se o resíduo:

$$r_i = P_{e_i} - P_e(\delta_i), \quad i = 0, \dots, k, \quad (3.15)$$

ou equivalentemente, dados  $P_e \in \mathbb{R}^{k+1}$  e  $\delta \in \mathbb{R}^{k+1}$ , define-se  $r \in \mathbb{R}^{k+1}$  como  $r = P_e - P_e(\delta)$ .

O problema de mínimos quadrados consiste na determinação dos coeficientes  $c \in \mathbb{R}^{n+1}$  tais que o resíduo seja mínimo. Ou seja:

$$\underset{c \in \mathbb{R}^{n+1}}{\text{minimize}} \quad \sum_{i=0}^k r_i^2 = \|r\|^2 = \|P_e - P_e(\delta)\|^2. \quad (3.16)$$

Definindo-se a matriz  $U \in \mathbb{R}^{k+1} \times \mathbb{R}^{n+1}$ :

$$U = \begin{pmatrix} 1 & \delta_0 & \delta_0^2 & \dots & \delta_0^n \\ 1 & \delta_1 & \delta_1^2 & \dots & \delta_1^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 1 & \delta_k & \delta_k^2 & \dots & \delta_k^n \end{pmatrix}, \quad (3.17)$$

tem-se  $P_e(\delta) = Uc$ . Utilizando a definição (4.39), pode-se escrever o resíduo como

$$r = P_e - Uc,$$

e conseqüentemente,

$$\|r\|^2 = (P_e - Uc)^t(P_e - Uc).$$

Com esta notação o problema (3.16) pode ser escrito como:

$$\underset{c \in \mathbb{R}^{n+1}}{\text{minimize}} \quad (P_e - Uc)^t(P_e - Uc). \quad (3.18)$$

A condição de otimalidade para o problema (3.18) estabelece que uma

solução  $c \in \mathbb{R}^n$  satisfaz o sistema linear:

$$U^t U c = U^t P_e. \quad (3.19)$$

Esta equação é conhecida como *equação normal*. A matriz  $U^t U$  possui dimensão  $\mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1}$ . Desta forma, a determinação dos coeficientes  $c_i$  do polinômio (3.14) pelo método de mínimos quadrados consiste na solução de um único sistema linear de pequena dimensão.

A partir dos pontos que formam o OMIB Equivalente, com a aplicação do método de mínimos quadrados obtém-se os coeficientes das expressões que descrevem a potência elétrica do OMIB Equivalente nas configurações sob-falta e pós-falta:

$$\begin{aligned} P_{e_d}(\delta) &= d_0 + d_1\delta + d_2\delta^2 + \dots + d_n\delta^n \\ P_{e_p}(\delta) &= p_0 + c_1\delta + p_2\delta^2 + \dots + p_n\delta^n. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Os coeficientes da expressão para a configuração pré-falta,

$$P_{e_0}(\delta) = a_0 + a_1\delta + a_2\delta^2 + \dots + a_n\delta^n, \quad (3.21)$$

são *estimados* com base na configuração pós-falta. Nesta situação a aplicação do método de mínimos quadrados não é possível visto que apenas um ponto do OMIB Equivalente representa o sistema antes da falta.

A Figura (3.2) ilustra os pontos do OMIB Equivalente, obtidos a partir das trajetórias de um sistema elétrico teste, e as curvas de potência elétrica nas configuração pré-falta  $P_{e_0}$ , sob-falta  $P_{e_d}$  e pós-falta  $P_{e_p}$ , definidas a partir dos pontos do OMIB pela aplicação do método de mínimos quadrados. Neste exemplo adotou-se ordem  $n = 2$  para as expressões de potência elétrica.

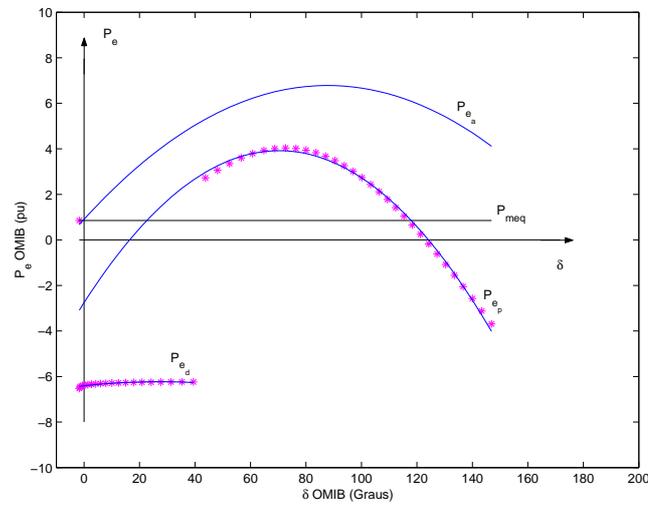


Figura 3.2: Ilustração do OMIB Equivalente e curvas de potência elétrica

**Cálculo da margem de segurança.** Uma vez disponíveis as expressões de potência elétrica do OMIB equivalente  $P_{e0}$ ,  $P_{ed}$  e  $P_{ep}$ , é possível, pela aplicação do critério de áreas iguais, determinar uma expressão e calcular a margem de segurança. Conforme discutido no Capítulo 2, pelo critério de áreas iguais estendido, a margem de segurança em energia é a diferença entre as áreas acelerante e desacelerante, que correspondem à energia adquirida pelo sistema durante a falta e a energia dissipada pelo sistema do instante de eliminação da falta até ser atingido o ponto de equilíbrio instável  $\delta_u$ . Estas áreas são ilustradas na Figura (3.3):

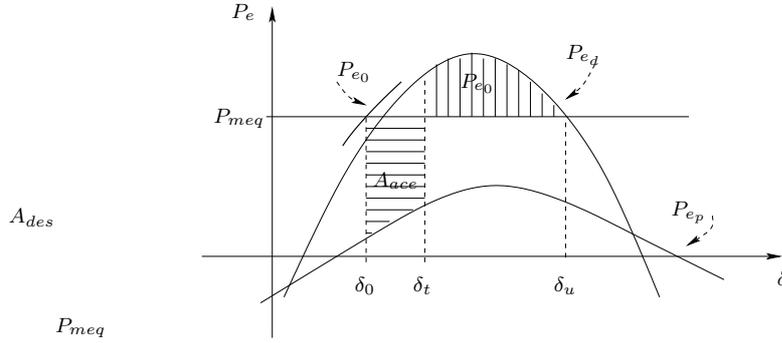


Figura 3.3: Ilustração do critério de áreas iguais

onde  $P_e$  e  $P_{meq}$  são as potências elétricas e mecânicas do OMIB Equivalente;  $\delta_0$  é o ângulo de equilíbrio da condição pré-falta,  $\delta_t$  é o ângulo de eliminação da falta e  $\delta_u$  é o ângulo de equilíbrio instável da condição pós-falta. As áreas acelerante e desacelerante são denotadas  $A_{acc}$  e  $A_{des}$ , respectivamente.

Visando a clareza da ilustração, a potência mecânica foi representada constante na Figura (3.3), mas tanto a potência elétrica quanto a potência mecânica são funções do tempo e variam com o ângulo  $\delta$  de forma não senoidal (a menos que seja usado o modelo clássico para representar a dinâmica das máquinas).

A margem de segurança em energia pelo critério de áreas iguais é:

$$\eta = A_{des} - A_{acc} = \int_{\delta_0}^{\delta_t} (P_{meq}(\delta) - P_{e_d}(\delta)) d\delta - \int_{\delta_0}^{\delta_t} (P_{e_p}(\delta) - P_{meq}(\delta)) d\delta. \quad (3.22)$$

No apêndice A, uma expressão analítica para a margem de segurança é desenvolvida a partir da expressão (3.22) e das expressões (3.20).

Para as contingências estáveis a curva  $P_e \times \delta$  do OMIB Equivalente não atinge o ângulo de equilíbrio instável  $\delta_u$ . Quando a energia adquirida durante a falta é totalmente dissipada, o que no critério de áreas iguais corresponde ao equilíbrio entre as áreas acelerante e desacelerante, a curva de potência elétrica pós-falta  $P_{e_p}$  retorna, até atingir um ponto de operação estável. Esta situação é ilustrada na Figura (3.4), onde está indicado o ângulo de retorno  $\delta_r$ .

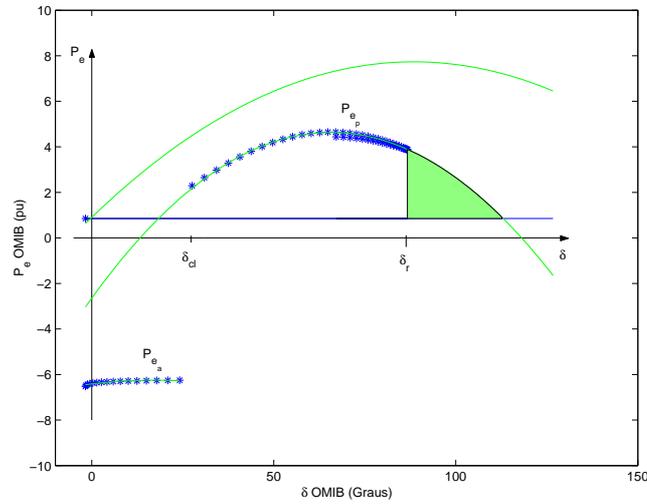


Figura 3.4: Dinâmica do OMIB para uma contingência estável e sua margem de estabilidade

A margem de estabilidade das contingências estáveis, pelo critério de áreas iguais, corresponde à área hachurada na Figura (3.4). Calcula-se esta área pela extrapolação da curva de potência elétrica pós-falta  $P_{ep}$  até a intersecção com a curva de potência mecânica equivalente  $P_{meq}$ , o que permite estimar o ângulo de equilíbrio instável  $\delta_u$ . Com esta estimativa para o ângulo  $\delta_u$ , a margem de segurança para as contingências estáveis é calculada por:

$$\eta = \int_{\delta_r}^{\delta_u} (P_{ep}(\delta) - P_{meq}(\delta)) d\delta. \quad (3.23)$$

**Cálculo dos coeficientes de sensibilidade.** Para cada contingência analisada, os coeficientes de sensibilidade de primeira e segunda ordem  $S$  e  $S'$  foram definidos em (3.10) e (3.11) como a derivada da margem de segurança  $\eta$  em relação à potência total gerada no conjunto de máquinas críticas  $P_m$ :

$$S = \frac{d\eta}{dP_m} \quad (3.24)$$

$$S' = \frac{d^2\eta}{dP_m^2}. \quad (3.25)$$

As expressões analíticas para estes coeficientes, obtidas a partir da expressão analítica para a margem de segurança, são desenvolvidas no Apêndice

A deste texto.

Na seção seguinte o procedimento de formulação das restrições de estabilidade transitória e definição do redespacho de segurança através de um FPO é exemplificado através de um experimento computacional.

## 3.6 Experimento computacional

A seguir descreve-se um experimento computacional no qual, a partir de um ponto inicial que não satisfaz os critérios de estabilidade transitória, é formulado o problema de redespacho de segurança. Em [44] foi mostrado um experimento computacional preliminar no qual avalia-se a presente proposta de definição do redespacho de segurança através de um fluxo de potência ótimo. Neste experimento, visto que não se dispunha de um método de obtenção dos coeficientes de sensibilidade a partir da simulação no tempo com modelagem detalhada, empregou-se os coeficientes fornecidos pelo método SLEP, utilizando modelagem simplificada para o sistema elétrico.

No experimento descrito a seguir é empregada modelagem detalhada para os elementos do sistema elétrico cuja dinâmica é considerada. Assim, não são utilizados coeficientes de sensibilidade fornecidos por um método direto. A margem de segurança após o redespacho é formulada a partir dos dados da simulação no domínio do tempo, conforme proposto neste capítulo.

### 3.6.1 Sistema teste e geração inicial ativa

O sistema teste considerado é constituído de 45 barras, 72 linhas de transmissão e 10 geradores. A lista de contingências é formada por 122 casos. Os dados de linha (resistência, reatância e susceptância) e os dados de barra (módulo e ângulo das tensões iniciais e carregamento inicial) deste sistema encontram-se na referência [36]. A condição inicial e os limites de geração ativa deste sistema teste são mostrados na Tabela (3.1).

Tabela 3.1: Geração ativa inicial e limites.

Gerador	Barra	$P_q^0$ (MW)	$P_q^{max}$ (MW)	$P_q^{min}$ (MW)
1	366	1250,	1860,	0,
2	369	215,	260,	0,
3	373	920,	1020,	0,
4	381	1560,	1860,	0,
5	390	1325,	1402,	0,
6	392	90,	111,	60,
7	394	120,	156,3	80,
8	395	241,	312,	200,
9	397	1326,	1402,	0,
10	407	490,	556,	0,

### 3.6.2 Descrição do experimento

A seguir especificamos as etapas que formam este experimento e os programas computacionais utilizados em cada fase.

1- Estabelecimento do ponto de operação inicial: A partir da condição de geração ativa e das cargas ativas e reativas, são calculados os valores dos módulos e ângulos da tensão nas barras e os valores do fluxo inicial nas linhas. Nesta etapa foi empregado o programa de análise de redes ANAREDE, desenvolvido pelo CEPEL.

2- Estabelecimento de uma margem de segurança mínima: Para que o sistema seja considerado seguro, uma margem de segurança mínima deve ser satisfeita para todas as contingências sob análise. Neste experimento foi adotado o valor 0,1 para a margem de segurança mínima.

3- Formação de uma lista de contingências: A lista de contingências deve descrever o tipo, a duração e os elementos do sistema elétrico envolvidos em cada contingência. Neste experimento foram considerados curto-circuitos trifásicos nas barras do sistema, com eliminação da falta pela remoção de um circuito de transmissão. A lista de contingências foi gerada automaticamente pelo programa SLEP Iterativo.

4- Seleção das contingências críticas: Utilizando um programa de avaliação rápida da estabilidade transitória e empregando modelagem simplificada para o sistema elétrico, é realizada a seleção das contingências críticas, cuja ocorrência possa conduzir à instabilidade. Neste processo de filtro de contingências foi utilizado o programa SLEP Iterativo [38] que, através de um cálculo iterativo de contingência estáveis e instáveis, fornece o tempo crítico de eliminação do defeito. Podem ser selecionadas como críticas as contingências cujo tempo crítico seja inferior a um tempo de eliminação especificado. Neste experimento foram definidas contingências críticas aquelas cujo tempo crítico determinado pelo SLEP foi inferior a 0,2 segundos.

5- Simulação das contingências selecionadas: As contingências selecionadas pelo filtro como potencialmente danosas à segurança do sistema são avaliadas através de simulação no domínio do tempo utilizando modelagem detalhada do sistema elétrico. Nesta etapa de simulação foi utilizado o programa SimSP (Simulação de Sistemas de Potência), desenvolvido na UFSC [45]. Foi adotado o tempo de eliminação da falta de 0,2 segundos.

6- Cálculo do OMIB e dos coeficientes de sensibilidade: Para cada contingência simulada no domínio do tempo, é identificado o conjunto de máquinas críticas e o conjunto de máquinas remanescentes. Com a identificação destes conjuntos, é calculado o OMIB Equivalente do sistema elétrico. Considerando este OMIB são calculados a margem de segurança e os coeficientes de sensibilidade de primeira e segunda ordem, de acordo com as expressões desenvolvidas no Apêndice A. A implementação destes cálculos foi realizada utilizando Matlab.

7- Estabelecimento do problema de redespacho de segurança: Com as margens de segurança e os coeficientes de sensibilidade, são definidas as restrições de estabilidade transitória, de acordo com a expressão (3.13). Formula-se então o problema completo de redespacho de potência ativa (3.8). Este problema de otimização foi implementado em Matlab e solucionado pelo algoritmo primal-dual de pontos interiores, descrito no Capítulo 6.

8- Reavaliação Para que se possa concluir sobre a segurança do sistema

no novo ponto de operação, é realizada uma avaliação rápida da estabilidade transitória, utilizando o programa SLEP Iterativo. O processo de definição de redespacho e reavaliação da segurança é mantido até que no ponto de operação determinado o sistema seja seguro para todas as contingências definidas.

A aplicação ao problema teste dos passos citados é descrita a seguir:

**Filtro de contingências.** A partir da condição de geração ativa mostrada na Tabela (3.1), com o programa SLEP Iterativo faz-se a avaliação rápida da estabilidade transitória. Foram avaliadas as 122 contingências geradas automaticamente pelo SLEP Iterativo. Na Tabela (3.2) são listadas, por ordem crescente de tempo crítico, as sete contingências mais críticas. Por esta tabela seleciona-se para avaliação detalhada as contingências cujo tempo crítico de eliminação é inferior a 0,2 segundos.

Tabela 3.2: Contingências críticas para a geração inicial.

Contingência	Linha retirada	Tempo Crít. (s)
1	374* - 375	0,1456
2	408* - 414	0,1456
3	370 - 408*	0,1694
4	371 - 374*	0,1781
5	372 - 374*	0,1794
6	374* - 433	0,1806
7	396* - 437	0,2281

O sinal \* indica a barra onde ocorre o curto-circuito.

**Cálculo dos coeficientes de sensibilidade.** As contingências críticas selecionadas na etapa anterior são simuladas. A partir das trajetórias fornecidas pela simulação, identifica-se o conjunto de máquinas críticas e calcula-se o OMIB equivalente. Pelas expressões desenvolvidas no Apêndice A, calcula-se os coeficientes de sensibilidade de primeira e segunda ordem,  $S$  e  $S'$ , respectivamente. A Tabela (3.3) a seguir mostra o conjunto de máquinas críticas e os valores de coeficientes de sensibilidade para cada contingência simulada.

Tabela 3.3: Conjunto crítico, margem e coeficientes de sensibilidade.

Contingência	Conj. Crít.	$\eta$	S	S'
1	3	-2,296	-0,385	0,7489
2	10	-1,353	-0,563	1,097
3	10	-1,006	-1,009	1,473
4	3	-0,540	-0,543	0,318
5	3	-0,520	-0,539	0,293
6	3	-0,452	-0,532	0,288

**Formulação das restrições de estabilidade transitória.** Com os valores mostrados na Tabela (3.3), formula-se as seguintes restrições de estabilidade transitória:

$$\begin{aligned}
0,374 \Delta P m^2 - 1,385 \Delta P m - 2,296 &\geq 0 \\
0,559 \Delta P m^2 - 0,563 \Delta P m - 1,353 &\geq 0 \\
0,737 \Delta P m^2 - 1,009 \Delta P m - 1,006 &\geq 0 \\
0,159 \Delta P m^2 - 0,543 \Delta P m - 0,540 &\geq 0 \\
0,147 \Delta P m^2 - 0,539 \Delta P m - 0,520 &\geq 0 \\
0,144 \Delta P m^2 - 0,532 \Delta P m - 0,452 &\geq 0.
\end{aligned} \tag{3.26}$$

**Formulação da função objetivo.** A função de mínimo desvio (3.3) é formulada considerando os coeficientes  $\alpha_i$  associados a cada gerador. O cálculo destes coeficientes é descrito a seguir.

Observe-se que se a  $i$ -ésima máquina não faz parte do conjunto crítico para nenhuma contingência, então,  $\Gamma_{ki} = 0$  para todo  $k$ . Neste caso, define-se o coeficiente de ponderação  $\alpha_i = 1$ .

Para o exemplo, nesta primeira iteração, apenas as máquinas 3 (barra 373) e 10 (barra 407) fazem parte dos conjuntos críticos das 6 contingências consideradas. Utilizando a expressão (3.7), e visto que a máquina 3 faz parte do conjunto crítico das contingências 1, 4, 5 e 6, tem-se

$$\alpha_3 = S_1 + S_4 + S_5 + S_6$$

e visto que a máquina 10 faz parte do conjunto crítico da contingência 2 e 3,

$$\alpha_{10} = S_2 + S_3.$$

Com os coeficientes de sensibilidade mostrados na Tabela (3.3), calcula-se  $\alpha_3 = 2,000$  e  $\alpha_{10} = 1,572$ . Formula-se assim a seguinte função objetivo nesta primeira iteração do problema em teste:

$$f_0(\Delta P g) = \Delta P g_1^2 + \Delta P g_2^2 + 0,5 \Delta P g_3^2 + \Delta P g_4^2 + \Delta P g_5^2 + \Delta P g_6^2 + \Delta P g_7^2 + \Delta P g_8^2 + \Delta P g_9^2 + 0,636 \Delta P g_{10}^2. \quad (3.27)$$

**Formulação do problema de otimização.** Com a função objetivo e as restrições de estabilidade mostradas, e sendo  $\eta_{min} = 0$ , o problema de redespacho de segurança formulado na primeira iteração é:

$$\begin{aligned} &\text{minimize} && f_0(\Delta P g) = \sum_{i=1}^{10} \left( \frac{1}{\alpha_i} \Delta P g_i \right)^2 \\ &\text{sujeito a} && \\ &&& 0,374 \Delta P m^2 - 1,385 \Delta P m - 2,296 \geq 0 \\ &&& 0,559 \Delta P m^2 - 0,563 \Delta P m - 1,353 \geq 0 \\ &&& 0,737 \Delta P m^2 - 1,009 \Delta P m - 1,006 \geq 0 \\ &&& 0,159 \Delta P m^2 - 0,543 \Delta P m - 0,540 \geq 0 \\ &&& 0,147 \Delta P m^2 - 0,539 \Delta P m - 0,520 \geq 0 \\ &&& 0,144 \Delta P m^2 - 0,532 \Delta P m - 0,452 \geq 0 \\ &&& P_i(V_m, \theta) + Pl_i - P g_i = 0 && i = 1, \dots, 45 \\ &&& Q_i(V_m, \theta) + Ql_i - Q g_i = 0 && i = 1, \dots, 45 \\ &&& 0,9 \leq V_{m_i} \leq 1,1 && i = 1, \dots, 45 \\ &&& \underline{P g_i} \leq P g_i \leq \overline{P g_i} && i = 1, \dots, 10 \\ &&& \underline{Q g_i} \leq Q g_i \leq \overline{Q g_i} && i = 1, \dots, 10 \\ &&& \underline{T_i} \leq T_i(V_m, \theta) \leq \overline{T_i} && i = 1, \dots, 72. \end{aligned} \quad (3.28)$$

**Redespacho de geração ativa determinado.** A solução do problema (3.28) definiu, nesta primeira iteração, o seguinte redespacho de geração

ativa:

Tabela 3.4: Primeiro redespacho de geração.

$Pg^1$ (p.u.)	$\Delta Pg$ (p.u)	$Qg^1$ (p.u)
12,886	0,386	-0,562
2,545	0,395	-0,321
7,182	-2,018	0,750
15,984	0,384	-1,065
13,612	0,362	-2,926
1,100	0,200	0,401
1,560	0,395	0,430
2,805	0,395	0,708
13,641	0,381	0,600
3,763	-1,137	0,444

O novo ponto de operação, determinado pelo fluxo de potência ótimo com restrições de estabilidade transitória, foi avaliado quanto à sua estabilidade pelo programa SLEP iterativo. Nesta avaliação foram indicadas com tempo crítico inferior a 0,2 segundos as contingências mostradas na Tabela (3.5), a seguir.

Tabela 3.5: Contingências críticas após o primeiro redespacho.

Contingência	Linha retirada	Tempo Crít. (s)
1	380 - 396*	0,1806
3	367 - 396*	0,1856

A simulação e análise das contingências críticas mostradas na Tabela (3.5) resultaram na identificação do conjunto crítico e no cálculo dos coeficientes mostrados na Tabela (3.6), a seguir.

Tabela 3.6: Segunda iteração: conj. crítico, margem e coeficientes.

Contingência	Conj. Crít.	$\eta$	S	S'
1	6, 7 e 8	-1,4912	-0,690	0,6542
2	6, 7 e 8	-0,9305	-0,6232	0,3794

O redespacho de potência definido para este conjunto de contingências resultou na condição de geração mostrada na Tabela (3.7), a seguir.

Tabela 3.7: Segundo redespacho de geração ativa  $\Delta P_g$ .

$Pg^2$ (p.u.)	$\Delta P_g$ (p.u.)	$Qg^2$ (p.u.)
13,115	0,290	-0,3667
2,600	0,055	-0,245
7,398	0,216	0,748
16,204	0,220	-0,476
13,853	0,221	-2,877
0,657	-0,442	0,380
1,113	-0,447	0,429
2,367	-0,438	0,718
13,862	0,221	0,512
3,990	0,227	0,468

Para o ponto definido por este redespacho o sistema tornou-se seguro, ou seja, a avaliação rápida da estabilidade realizada pelo SLEP indicou todas as contingências com tempo crítico superior a 0,2 segundos. Assim, o processo iterativo de avaliação da estabilidade e definição do redespacho de segurança foi finalizado.

Considera-se que o resultado deste experimento foi satisfatório e a metodologia proposta apresenta viabilidade de aplicação. Testes com sistemas de maior dimensão, nos quais o comportamento dinâmico seja mais complexo são necessários.

### 3.7 Conclusões

Neste capítulo foram discutidas as metodologias de definição de segurança dinâmica. Dentre as propostas estudadas destacam-se aquelas nas quais o redespacho é definido por um problema de otimização. A formulação por otimização é considerada adequada à definição da melhoria da segurança por possibilitar a definição de um redespacho de segurança que altera o mínimo possível a condição de operação do sistema e no qual diversas práticas e interesses da operação podem ser incluídas.

Na representação da estabilidade transitória, os métodos baseados em margens de segurança foram considerados os mais adequados devido à possibilidade de representar o fenômeno dinâmico da estabilidade através de uma única restrição algébrica. Através de coeficientes de sensibilidade expressa-se a restrição de estabilidade através da margem de segurança após o redespacho. Com esta formulação o problema de otimização gerado é de pequeno porte. Na proposta apresentada a restrição de margem foi formulada através de coeficientes de sensibilidade, sendo tais coeficientes obtidos a partir da simulação no tempo, ou seja, não se impôs limitações de modelagem do sistema elétrico.

Um experimento foi incluído para fins de validação da proposta e o resultado obtido foi satisfatório.

# Capítulo 4

## Algoritmos de pontos interiores para programação linear e suas aplicações ao fluxo de potência ótimo

### 4.1 Introdução

O objetivo deste capítulo é discutir os algoritmos de pontos interiores primais-duais que seguem a trajetória central, com ênfase em suas características essenciais. Buscou-se evidenciar o funcionamento de cada algoritmo pela forma como os iterandos seguem a trajetória central, caracterizando cada passo como uma combinação de direções, restrito a uma vizinhança especificada da trajetória central. Os algoritmos são apresentados no formato como foram desenvolvidos, ou seja, para programação linear e aspectos de implementação, que visam aumentar a sua eficiência, não são discutidos. O estudo realizado está restrito aos algoritmos que foram, até a presente data, aplicados à solução do problema de fluxo de potência ótimo (FPO). Na segunda parte do capítulo expõe-se a aplicação dos algoritmos de pontos interiores para o problema não-linear de FPO e comenta-se os experimentos computacionais realizados por diversos autores.

## 4.2 Algoritmos de trajetória central para programação linear

Nesta seção descreve-se os algoritmos de pontos interiores primais-duais que seguem a trajetória central que foram utilizados na solução do problema de fluxo de potência ótimo. Apresenta-se a estrutura geral dos algoritmos primais-duais de trajetória central, do algoritmo preditor-corretor, do preditor-corretor de Mehrotra e do algoritmo de passo mais longo. Este desenvolvimento segue principalmente a referência [46]. Outras referências são indicadas ao longo do texto quando necessário.

**O problema.** Consideramos o problema de programação linear no formato padrão:

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && c^T x \\ & \text{sujeito a} && Ax = b \\ & && x \geq 0 \end{aligned} \tag{4.1}$$

onde  $x$  e  $c \in \mathbb{R}^n$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$  e  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  é uma matriz de posto  $m$ ,  $m \leq n$ .

Associado ao problema (4.1), que chamaremos problema primal, está o seguinte problema dual:

$$\begin{aligned} & \text{maximize} && b^T y \\ & \text{sujeito a} && A^T y + s = c \\ & && s \geq 0 \end{aligned} \tag{4.2}$$

onde  $y \in \mathbb{R}^m$  e  $s \in \mathbb{R}^n$ . As variáveis  $x$  são chamadas variáveis primais e  $y$  e  $s$  são chamadas variáveis duais. No formato primal-dual, tem-se o seguinte problema: Encontre  $(x, y, s)$  tal que: <sup>1</sup>

$$\begin{aligned} & A^T y + s = c \\ & Ax = b \\ & x s = 0 \\ & x, s > 0. \end{aligned} \tag{4.3}$$

---

<sup>1</sup>Denota-se  $a b$  o vetor em que cada componente o é produto, componente a componente, de dois vetores  $a$  e  $b$ .

### Definições.

Associados ao problema primal-dual definem-se o conjunto dos pontos viáveis  $\mathcal{V}$ , o conjunto dos pontos estritamente viáveis, ou pontos interiores,  $\mathcal{V}^0$ , o conjunto das soluções ótimas  $\mathcal{S}$  e das soluções ótimas estritas  $\mathcal{S}^0$ :

$$\mathcal{V} := \{(x, y, s) | Ax = b, A^T y + s = c, x, s \geq 0\}, \quad (4.4)$$

$$\mathcal{V}^0 := \{(x, y, s) | Ax = b, A^T y + s = c, x, s > 0\}, \quad (4.5)$$

$$\mathcal{S} := \{(x, y, s) \in \mathcal{V} | x s = 0\}, \quad (4.6)$$

$$\mathcal{S}^0 := \{(x, y, s) \in \mathcal{S} | x + s > 0\}. \quad (4.7)$$

Direções viáveis: Pelas equações  $Ax = b$  e  $A^T y + s = c$  vê-se que as direções  $d_x$  e  $d_s$  calculadas a partir de  $(x, y, s) \in \mathcal{V}^0$  são direções viáveis se  $d_x \in \mathcal{N}(A)$  e  $d_s \in \mathcal{R}(A^T)$ .

Gap de dualidade: Dada uma solução primal-dual viável  $(x, y, s)$  tem-se:  $Ax = b$  e  $A^T y + s = c$ . O gap de dualidade é definido por

$$c^T x - b^T y$$

e seu valor será nulo se  $(x, y, s)$  for solução ótima. Por substituição mostra-se que se  $(x, y, s) \in \mathcal{V}$ , então

$$x^T s = c^T x - b^T y, \quad (4.8)$$

isto é,  $x^T s$  é o valor do gap de dualidade, e deve ser reduzido a zero.

A trajetória central  $\mathcal{C}$  é uma curva formada por pontos estritamente viáveis, chamados pontos centrais, parametrizada por um escalar  $\mu > 0$ .

Dado  $\mu > 0$ , cada ponto  $(x_\mu, y_\mu, s_\mu) \in \mathcal{C}$  soluciona o sistema:

$$\begin{aligned} A^T y + s &= c \\ Ax &= b \\ xs &= \mu e, \\ (x, s) &> 0, \end{aligned} \tag{4.9}$$

onde  $e$  denota o vetor com componentes unitárias, de dimensão apropriada.

Mede-se a proximidade de um ponto interior  $(x, y, s) \in \mathcal{V}^0$  ao ponto da trajetória central  $(x_\mu, y_\mu, s_\mu)$  associado a dado  $\mu > 0$  por:

$$\delta(x, s, \mu) := \left\| \frac{xs}{\mu} - e \right\|. \tag{4.10}$$

Uma medida de proximidade  $\delta(x, s, \mu) < \alpha$ , com  $\alpha \in (0, 0.5)$ , indica que  $(x, y, s)$  está perto (em uma vizinhança) do ponto central associado a  $\mu$ .

Frequentemente são dados  $x$  e  $s$  e procura-se um valor de  $\mu$  tal que  $\delta(x, s, \mu)$  seja pequeno. Assim, dado  $(x, y, s) \in \mathcal{V}^0$ , define-se a seguinte medida de proximidade:

$$\delta(x, s) = \min_{\mu > 0} \left\| \frac{xs}{\mu} - e \right\|. \tag{4.11}$$

A solução deste problema resulta no valor de  $\mu$  ótimo:

$$\mu(x, s)^* = \frac{\|xs\|^2}{x^T s}. \tag{4.12}$$

O valor de  $\mu$  mais utilizado (bastante próximo de (4.12)) é o minimizador de

$$\delta(x, s) := \min_{\mu} \|xs - \mu e\|,$$

dado por

$$\mu(x, s) = \frac{x^T s}{n}. \tag{4.13}$$

Observe que  $n\mu(x, s)$  é o valor do gap de dualidade e portanto quer-se fazer  $\mu \rightarrow 0$ .

A vizinhança da trajetória central com raio  $\alpha$  é definida por:

$$\mathcal{N}(\alpha) := \{(x, s) \in \mathcal{V}^0 \mid \delta(x, s, \mu) \leq \alpha, \text{ para algum } \mu > 0\}. \quad (4.14)$$

As vizinhanças mais importantes são as chamadas norma-2, definida por:

$$\mathcal{N}_2(\alpha) := \{(x, y, s) \in \mathcal{V}^0 \mid \left\| \frac{xs}{\mu} - e \right\|_2 \leq \alpha, \mu > 0\} \quad (4.15)$$

e a vizinhança "menos-infinito", definida por:

$$\mathcal{N}_{-\infty}(\alpha) := \{(x, y, s) \in \mathcal{V}^0 \mid \frac{xs}{\mu} \geq (1 - \alpha)e\}. \quad (4.16)$$

com  $\alpha \in (0, 1)$ . Para valores pequenos para  $(1 - \alpha)$  (o valor típico é  $10^{-3}$ ),  $\mathcal{N}_{-\infty}$  pode englobar quase toda região  $\mathcal{V}^0$ . Assim  $\mathcal{N}_{-\infty}$  é um conjunto muito maior que  $\mathcal{N}_2$ . Temos  $\mathcal{N}_{-\infty} \supset \mathcal{N}_\infty \supset \mathcal{N}_2$ .

A Figura 4.1 ilustra as definições de trajetória central  $\mathcal{C}$  e de vizinhanças:

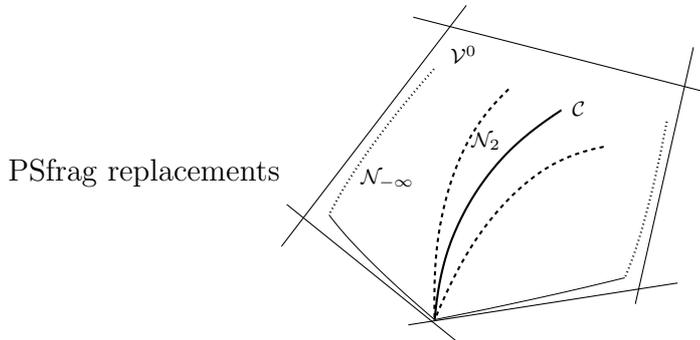


Figura 4.1: Exemplo de trajetória central e vizinhanças  $\mathcal{N}_2$  e  $\mathcal{N}_{-\infty}$

**Hipótese.** O problema (4.1) satisfaz:

$$\mathcal{V}^0 \neq \emptyset,$$

ou seja, existem pontos interiores.

Pelo teorema de Goldman-Tucker, a complementaridade estrita ( $\mathcal{S}^0 \neq \emptyset$ )

é sempre garantida em programação linear, e será uma hipótese para o caso não-linear. A complementaridade estrita é necessária para garantir que a trajetória central é uma curva diferenciável bem definida que termina no centro analítico do conjunto de soluções ótimas.

### 4.2.1 Algoritmos

Cada iteração de um algoritmo viável primal-dual de trajetória central parte de um ponto  $(x, y, s) \in \mathcal{V}^0$  e de um parâmetro  $\mu > 0$  (por exemplo  $\mu = \frac{x^T s}{n}$ ), satisfazendo uma medida de proximidade, isto é,  $\delta(x, s, \mu) \leq \alpha$  para algum  $\alpha \in (0, 1)$  fixo. Dado um parâmetro  $\sigma \in (0, 1)$ , o algoritmo faz iterações de Newton para aproximar-se da condição  $xs = \sigma\mu e$ . Esta condição corresponde a encontrar um ponto na trajetória central associado a  $\sigma\mu$ :

$$\begin{aligned} A^T y + c - s &= 0 \\ Ax &= b \\ xs - \sigma\mu e &= 0, \\ (x, s) &> 0. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Para um valor de  $\sigma$  próximo a zero o passo será longo, pois a condição corresponde a uma grande redução de  $\mu$ . Com um valor de  $\sigma$  próximo a unidade o passo será curto pois pouca redução de  $\mu$  é requerida.

Uma iteração do método de Newton para o problema (4.17) define o seguinte sistema linearizado no ponto  $(x, y, s)$ , nas variáveis  $d_x$ ,  $d_y$  e  $d_s$ :

$$\begin{aligned} A^T d_y - d_s &= 0 \\ Ad_x &= 0 \\ Sd_x + Xd_s &= \sigma\mu e - xs. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Sob forma matricial a direção de Newton é a solução do sistema:

$$\begin{bmatrix} 0 & A^T & -I \\ A & 0 & 0 \\ S & 0 & X \end{bmatrix} \begin{pmatrix} d_x \\ d_y \\ d_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sigma\mu e - xs \end{pmatrix}. \tag{4.19}$$

Ao longo da direção de Newton é realizada uma busca tal que o novo ponto  $(x_\gamma, y_\gamma, s_\gamma) := (x + \gamma d_x, y + \gamma d_y, s + \gamma d_s)$  pertença a uma determinada vizinhança da trajetória central, ou seja, satisfaça a medida de proximidade  $\delta_\gamma \leq \alpha$  para  $\alpha \in (0, 1)$  determinado.

A medida de proximidade para o ponto  $(x_\gamma, y_\gamma, s_\gamma)$  será:

$$\delta_\gamma(x_\gamma, s_\gamma) = \left\| \frac{x_\gamma s_\gamma}{\mu_\gamma} - e \right\|, \quad (4.20)$$

onde  $\mu_\gamma$  é o parâmetro associado ao ponto  $(x_\gamma, y_\gamma, s_\gamma)$ .

Uma estimativa para o valor de  $\mu$  associado ao ponto corrente  $(x, y, s)$  é dada por  $\mu(x, s) = \frac{x^T s}{n}$ . Embora esta expressão seja não linear, para  $(x, y, s) \in \mathcal{V}$ , por (4.8), sabe-se que  $\mu$  varia linearmente com  $x$  e  $s$ . Associado ao passo completo de Newton tem-se  $\sigma\mu$ . Assim, o valor de  $\mu_\gamma$ , associado ao ponto  $(x_\gamma, y_\gamma, s_\gamma)$ , será a combinação convexa de  $\mu$  e  $\sigma\mu$ :

$$\mu_\gamma = (1 - \gamma)\mu + \gamma\sigma\mu.$$

Os algoritmos primais-duais viáveis de pontos interiores que seguem a trajetória central possuem a seguinte estrutura geral:

#### Algoritmo primal-dual viável de pontos interiores

Dados:  $\alpha \in (0, 0.5)$ ,  $(x, y, s) \in \mathcal{N}(\alpha)$ .

k:=0.

Repita

$$x := x^k; y := y^k; s := s^k; \mu := \frac{x^T s}{n}.$$

Defina  $\sigma \in [0, 1]$ .

Obtenha  $(d_x, d_y, d_s)$ , resolvendo o sistema de Newton (4.19).

Calcule, realizando uma busca unidimensional, o passo

$$\gamma \in [0, 1], \text{ tal que } \delta(x + \gamma d_x, s + \gamma d_s, \mu_\gamma) \leq \alpha,$$

$$\text{onde } \mu_\gamma = (1 - \gamma)\mu + \gamma\sigma\mu.$$

Defina o novo ponto:

$$x^{k+1} := x + \gamma d_x; y^{k+1} := y + \gamma d_y; s^{k+1} := s + \gamma d_s.$$

k:=k+1.

Até convergência

A Figura 4.2 ilustra uma iteração deste algoritmo.

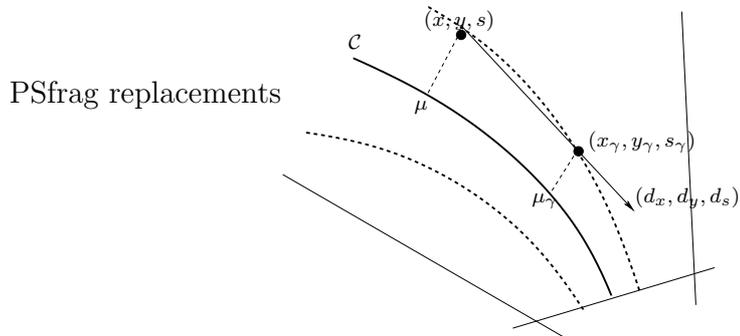


Figura 4.2: Uma iteração de um algoritmo primal-dual viável de PI.

O passo de Newton  $(d_x, d_y, d_s)$  definido pelo sistema (4.19) é uma combinação de duas direções, obtidas para duas escolhas de  $\sigma$ : a direção afim-escala, para  $\sigma = 0$ , e a direção de centralização, para  $\sigma = 1$ . O passo afim-escala tenta satisfazer  $x s = 0$  e o passo de centralização tenta atingir  $x s = \mu e$ . A Figura 4.3 ilustra as direções de Newton a partir de  $(x, s)$  para diferentes escolhas de  $\sigma$ .

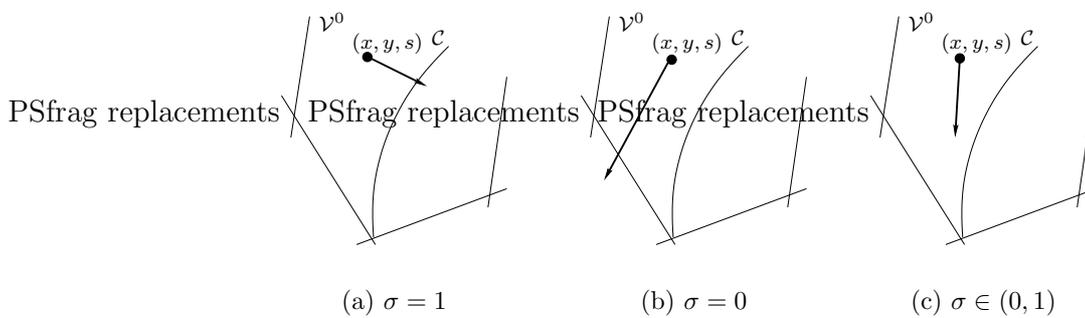


Figura 4.3: Direções de Newton para diferentes valores de  $\sigma$ .

Os diversos algoritmos primais-duais de trajetória central diferem no cálculo do passo  $\gamma$ , na escolha de  $\sigma$  a cada iteração, na forma de obter a direção  $(d_x, d_y, d_s)$  e na vizinhança  $\mathcal{N}(\alpha)$  na qual as iteradas devem permanecer.

**Teorema de centralização.** Os algoritmos de pontos interiores têm sua eficiência baseada no seguinte teorema, que é o mais importante de toda a teoria:

Teorema: Considere uma solução primal-dual interior  $(x, y, s)$  e  $\mu > 0$ . Seja  $(d_x, d_y, d_s)$  o passo de Newton associado a estes dados. Se  $\delta(x, s, \mu) < 1$ , então  $\delta^+ = \delta(x + d_x, s + d_s, \mu) \leq \frac{1}{\sqrt{8}} \frac{\delta^2}{1-\delta}$ . Em particular, se  $\delta \leq 0.75$ , então  $\delta^+ < \delta^2$ .

Isto mostra que o passo de Newton é muito eficiente em uma ampla região.

**Algoritmo preditor-corretor.** O algoritmo primal-dual preditor-corretor foi desenvolvido por Mizuno, Todd e Ye para programação linear [47]. Este foi o primeiro algoritmo de trajetória central para o qual uma taxa de convergência quadrática foi provada.

No algoritmo preditor-corretor a direção afim-escala e a direção de centralização são calculadas separadamente. A direção afim-escala  $d^a = (d_x^a, d_y^a, d_s^a)$  é obtida pela resolução do sistema (4.19) com  $\sigma = 0$ :

$$\begin{bmatrix} 0 & A^T & -I \\ A & 0 & 0 \\ S & 0 & X \end{bmatrix} \begin{pmatrix} d_x \\ d_y \\ d_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -xs \end{pmatrix}. \quad (4.21)$$

A direção de centralização  $d^c = (d_x^c, d_y^c, d_s^c)$  é calculada resolvendo-se o sistema (4.19) com  $\sigma = 1$ :

$$\begin{bmatrix} 0 & A^T & -I \\ A & 0 & 0 \\ S & 0 & X \end{bmatrix} \begin{pmatrix} d_x \\ d_y \\ d_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mu - xs \end{pmatrix}. \quad (4.22)$$

O algoritmo preditor-corretor utiliza duas vizinhanças  $\mathcal{N}_2$ , uma interna à outra, definidas por:

$$\mathcal{N}_2(\alpha) := \{(x, y, s) \in \mathcal{V}^0 \mid \left\| \frac{xs}{x^T s/n} - e \right\|_2 \leq \alpha\}. \quad (4.23)$$

A partir de um ponto  $(x, y, s)$  na vizinhança interna  $\mathcal{N}_2(0.25)$  é calculada a direção afim-escala  $d^a$ . O passo preditor  $(x^a, y^a, s^a)$  é definido ao longo de

$d^a$  até a fronteira da vizinhança externa  $\mathcal{N}_2(0.5)$ . O passo corretor, calculado a partir de  $(x^a, y^a, s^a)$ , é definido pela direção de centralização  $d^c$ . O passo total será a soma dos passos preditor e corretor.

O algoritmo preditor-corretor pode ser estabelecido como segue:

**Algoritmo preditor-corretor**

Dados:  $(x, y, s) \in \mathcal{N}_2(0.25)$ .

k:=0.

Repita

$x := x^k; y := y^k; s := s^k$ .

Calcule a direção  $d^a = (d_x^a, d_y^a, d_s^a)$  resolvendo o sistema (4.19) a partir de  $(x, y, s)$  com  $\sigma = 0$ .

Calcule o maior passo  $\gamma \in [0, 1]$  tal que

$$(x + \gamma d_x^a, y + \gamma d_y^a, s + \gamma d_s^a) \in \mathcal{N}_2(0.5).$$

Defina o ponto:  $x^a := x + \gamma d_x^a, y^a := y + \gamma d_y^a, s^a := s + \gamma d_s^a$ .

Faça  $\mu^a := \frac{x^a T s^a}{n}$

Calcule a direção  $d^c = (d_x^c, d_y^c, d_s^c)$  resolvendo o sistema (4.19) a partir de  $(x^a, y^a, s^a)$ , com  $\mu = \mu^a$  e  $\sigma = 1$ .

Defina o ponto:  $x^{k+1} := x^a + d_x^c, y^{k+1} := y^a + d_y^c, s^{k+1} := s^a + d_s^c$ .

k:=k+1.

Até convergência

A Figura 4.4 ilustra uma iteração do algoritmo preditor-corretor.

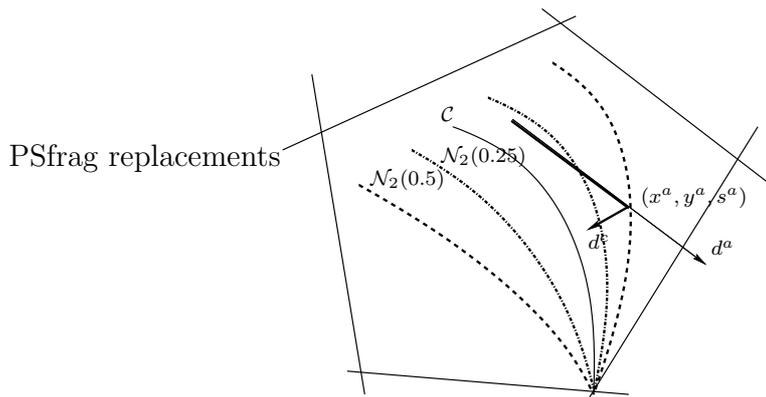


Figura 4.4: Uma iteração do algoritmo preditor-corretor

Este algoritmo está bem definido: o passo preditor fornece um ponto  $(x^a, s^a)$  satisfazendo  $\delta(x^a, s^a, \mu^a) \leq 0.5$ , e pelo teorema de centralização, obtém-se  $\delta(x^{k+1}, s^{k+1}, \mu^a) < 0.5^2 = 0.25$

**Algoritmo de passo mais longo.** O algoritmo descrito nesta seção foi desenvolvido por McShane [48] e estudado por Gonzaga [49] e Gonzaga e Bonnans [50]. Este algoritmo calcula a cada iteração o passo de Newton mais longo possível, tal que o novo ponto permaneça em uma vizinhança da trajetória central.

Conforme discutido anteriormente, a cada iteração de um algoritmo viável que segue a trajetória central, a direção de Newton calculada com  $\sigma \in (0, 1)$  é a combinação da direção afim-escala  $d^a$  calculada com  $\sigma = 0$  e da direção de centralização  $d^c$  calculada com  $\sigma = 1$ .

No algoritmo de passo mais longo são calculadas separadamente, a partir de  $(x, y, s)$ , as direções  $d^a$  e  $d^c$ . A direção de Newton é uma combinação convexa destas direções:

$$(d_x, d_y, d_s) = \sigma(d_x^c, d_y^c, d_s^c) + (1 - \sigma)(d_x^a, d_y^a, d_s^a). \quad (4.24)$$

O passo ao longo da direção  $(d_x, d_y, d_s)$  será tal que o novo ponto  $(x^+, y^+, s^+)$  esteja em uma vizinhança da trajetória central, ou seja, satisfaça uma medida de proximidade  $\delta(x^+, y^+, s^+) < \alpha$  para algum  $\alpha \in (0, 1)$ .

A medida de proximidade para o ponto  $(x^+, y^+, s^+)$  será:

$$\delta^+(\sigma) = \delta(x^+, s^+, \sigma\mu) = \left\| \frac{x^+ s^+}{\sigma\mu} - e \right\| \quad (4.25)$$

Como  $x^+ s^+ = (x + d_x)(s + d_s) = xs + xd_s + sd_x + d_x d_s$ , e o passo de Newton é  $xd_s + sd_x = \sigma\mu e - xs$ , resulta  $x^+ s^+ = \sigma\mu e + d_x d_s$ . Assim:

$$\delta^+(\sigma) = \left\| \frac{d_x d_s}{\sigma\mu} \right\| \quad (4.26)$$

A Figura 4.5 ilustra uma iteração do algoritmo de passo mais longo.

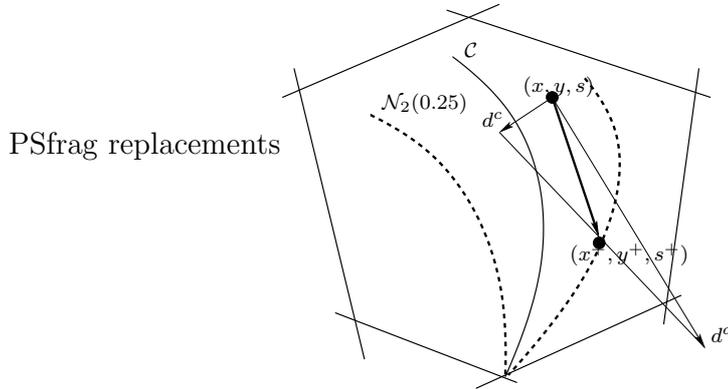


Figura 4.5: Uma iteração do algoritmo de passo mais longo

### Algoritmo de passo mais longo

Dados:  $(x^0, y^0, s^0) \in \mathcal{N}_2(0.25)$  e  $\mu^0 > 0$  tais que  $\delta(x^0, s^0, \mu^0) \leq 0.25$ .

$k:=0$ .

Repita

$$x := x^k; y := y^k; s := s^k; \mu = \mu^k.$$

Calcule a direção afin-escala  $d^a$  resolvendo o sistema (4.19) para  $\sigma = 0$ .

Calcule a direção de centralização  $d^c$  resolvendo o sistema (4.19) para  $\sigma = 1$ .

Encontre o maior valor para  $\sigma \in (0, 1)$  tal que:

$$\delta^+(\sigma) = \left\| \frac{(\sigma d_x^c + (1 - \sigma)d_x^a)(\sigma d_s^c + (1 - \sigma)d_s^a)}{\sigma \mu} \right\| = 0.25. \quad (4.27)$$

Defina o novo ponto:

$$(x^{k+1}, y^{k+1}, s^{k+1}) := (x, y, s) + \sigma d^c + (1 - \sigma) d^a.$$

$$\mu^k := \sigma \mu$$

$$k:=k+1.$$

Até convergência

No cálculo das direções  $d^a$  e  $d^c$  é realizada apenas uma fatoração da matriz de coeficientes.

O valor de  $\sigma$  definido pela equação (4.27) pode ser encontrado por bisseção ou pela resolução de uma equação de quarto grau.

**Algoritmo preditor-corretor de Mehrotra.** O algoritmo preditor-corretor proposto por Mehrotra possui diversas heurísticas, incorporadas ao longo de anos de experiência computacional, que visam aumentar sua eficiência e a robustez. Estas heurísticas são descritas no artigo original [12]. Existem também diversas variantes do algoritmo de Mehrotra, mas nesta seção são descritas apenas suas características essenciais, baseadas no artigo de Zhang e Zhang [51] e no livro de Wright [52].

A característica essencial do algoritmo proposto por Mehrotra é o cálculo de uma aproximação quadrática para a trajetória que passa pelo ponto corrente e a determinação do passo ao longo desta aproximação. A aproximação quadrática, determinada através de uma correção de segunda ordem para o passo de Newton, foi proposta por Monteiro, Adler e Resende no artigo [53].

A cada iteração de um algoritmo primal-dual viável, a partir de um ponto  $(x, y, s)$  possivelmente não central, é calculado pelo método de Newton um passo  $(d_x, d_y, d_s)$  tal que o novo ponto aproxime-se da condição  $xs - \sigma\mu e = 0$ . O passo calculado verifica o modelo linear do método de Newton :

$$x d_s + s d_x + x s - \sigma\mu e = 0. \quad (4.28)$$

A expansão da equação não-linear  $xs - \sigma\mu e$  com o passo calculado  $(d_x, d_y, d_s)$  será:

$$(x + d_x)(s + d_s) - \sigma\mu e = x d_s + s d_x + x s - \sigma\mu e + d_x d_s. \quad (4.29)$$

O termo não-linear  $d_x d_s$  da expressão (4.29) não é considerado no modelo linear do método de Newton, logo com o passo de Newton puro não é atingida a condição  $(x + d_x)(s + d_s) - \sigma\mu e = 0$ .

A direção corretora de segunda ordem  $d^{co}$  visa compensar a não-linearidade da equação  $xs - \sigma\mu e = 0$ , utilizando uma estimativa para o termo não linear  $d_x d_s$ . Esta estimativa, ou correção de segunda ordem, pode ser obtida da seguinte forma:

### Cálculo da correção de segunda ordem

Dados:  $(x, y, s) > 0$

$k:=0$ .

Repita

$$x := x^k; y := y^k; s := s^k; \mu := x^T s / n.$$

Para  $\sigma \in (0, 1)$ , calcule  $d = (d_x, d_y, d_s)$  resolvendo o sistema:

$$\begin{aligned} A^T d_y + d_s &= 0 \\ A d_x &= 0 \\ S d_x + X d_s &= -x s + \sigma \mu e. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Calcule a correção de segunda ordem  $d^{co}$  resolvendo o sistema:

$$\begin{aligned} A^T d_y^{co} + d_s^{co} &= 0 \\ A d_x^{co} &= 0 \\ S d_x^{co} + X d_s^{co} &= -d_x d_s. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Correções de ordem mais elevada podem ser obtidas resolvendo novamente o sistema (4.31) com  $(d_x + d_x^{co})(d_s + d_s^{co})$  no lado direito do sistema (4.31), e assim sucessivamente.

O passo  $\gamma$  é definido por uma busca tal que o novo ponto tenha componentes em  $x$  e  $s$  estritamente positivas. A direção de busca utilizada por Mehrotra [12] é definida por:

$$(x^+, y^+, s^+) := (x, y, s) + \gamma (d_x, d_y, d_s) + \gamma^2 (d_x^{co}, d_y^{co}, d_s^{co}). \quad (4.32)$$

Com a hipótese de existência de pontos interiores, e a complementaridade estrita garantida para programação linear, sabe-se que a trajetória central  $\mathcal{C}$  é uma curva bem definida que termina no centro analítico do conjunto de soluções ótimas. Por definição, pontos centrais verificam  $x s - \mu e = 0$ . Para cada ponto  $(x^0, y^0, s^0)$  viável não central pode-se definir uma trajetória  $\mathcal{H}$ , chamada trajetória ponderada pelo peso  $w$ , sendo  $w := x^0 s^0$ . Pontos  $x s$  de  $\mathcal{H}$  satisfazem  $x s = \mu w$ .

A direção de busca definida pela equação (4.32) pode ser entendida como

uma aproximação quadrática para a curva  $\mathcal{H}$ , a partir do ponto  $(x, y, s)$ . A Figura 4.6 ilustra a curva  $\mathcal{H}$  e sua aproximação quadrática.

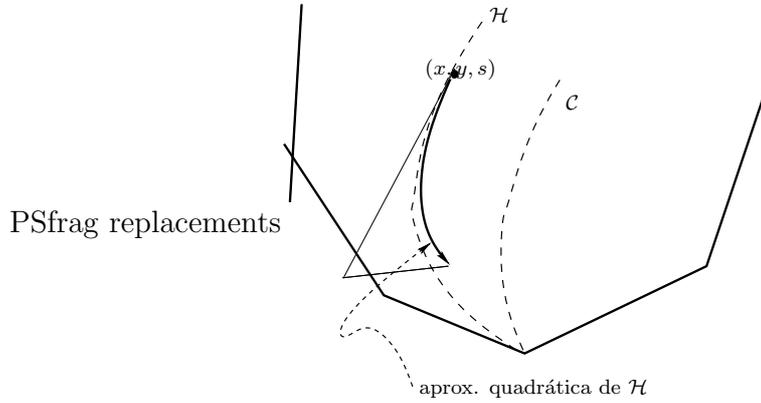


Figura 4.6: Curva  $\mathcal{H}$  e sua aproximação quadrática.

Para verificar o efeito da aproximação de segunda ordem calcula-se a proximidade para o ponto  $(x^+, y^+, s^+)$ . Vamos examinar o caso mais simples, em que  $\sigma = 0$ , isto é, a direção preditora é a direção afim-escala. Temos:

$$sd_x + xd_s = -xs, \quad (4.33)$$

$$sd_x^{co} + xd_s^{co} = -d_x d_s. \quad (4.34)$$

Vamos calcular a proximidade dos pontos obtidos após um passo nos dois casos, sem e com a correção de segunda ordem.

Primeira ordem: Para o ponto  $x^+ = x + \gamma d_x$ ,  $s^+ = s + \gamma d_s$ , usando (4.28), obtemos:

$$x^+ s^+ = xs + \gamma(xd_s + sd_x) + \gamma^2(d_x d_s) =$$

$$x^+ s^+ = (1 - \gamma)xs + \gamma^2 d_x d_s,$$

e portanto para  $\mu^+ = (1 - \gamma)\mu$ ,

$$\frac{x^+ s^+}{\mu^+} = \frac{xs}{\mu} + \frac{\gamma^2}{1 - \gamma} \frac{d_x d_s}{\mu}.$$

Assim,

$$\delta(x^+, s^+, \mu^+) = \left\| \frac{x^+ s^+}{\mu^+} - e \right\| = \delta(x, s, \mu) + \text{erro de } 2^{\text{a}} \text{ ordem.}$$

Segunda ordem: Repetindo o procedimento para o passo com correção de segunda ordem, obtém-se:

$$x^+ s^+ = xs + \gamma(xd_s + sd_x) + \gamma^2(sd_x^{co} + xd_s^{co} + d_x d_s) + \text{termo de } 3^{\text{a}} \text{ ordem.}$$

Usando (4.33) e (4.34) elimina-se o termo em  $\gamma^2$ , obtendo-se

$$\left\| \frac{x^+ s^+}{\mu^+} - e \right\| = \delta(x, s, \mu) + \text{erro de } 3^{\text{a}} \text{ ordem.}$$

Conclui-se que a correção de segunda ordem faz com que o passo de Newton siga a curva  $\mathcal{H}$  com um erro de terceira ordem.

Se tomarmos o passo predictor como em (4.30), com  $\sigma > 0$ , o resultado mostrado por Zhang e Zhang [51] é semelhante ao caso com centralizações. Tomando  $\mu^+ = (1 - \gamma)\mu$  obtém-se:

$$\delta(x^+, s^+, \mu^+) = (1 - \gamma)\delta(x, s, \mu) + \text{erro de } 3^{\text{a}} \text{ ordem.}$$

Portanto, a trajetória curvilínea de busca penetra na vizinhança, como mostrado na Figura (4.7)

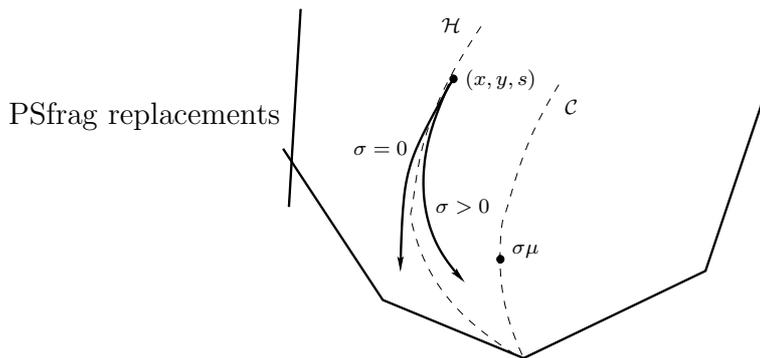


Figura 4.7: Aproximação quadrática para  $\sigma = 0$  e  $\sigma > 0$ .

A seguinte versão do algoritmo foi estabelecida por Zhang e Zhang [51].

**Algoritmo de Mehrotra - versão Zhang e Zhang**

Dados:  $(x, y, s) > 0$

$k:=0$ .

Repita

$$x := x^k; y := y^k; s := s^k; \mu := x^T s / n.$$

Calcule a direção afim-escala  $d^a$  resolvendo o sistema:

$$\begin{aligned} A^T d_y^a + d_s^a &= 0 \\ A d_x^a &= 0 \\ S d_x^a + X d_s^a &= -xs. \end{aligned} \tag{4.35}$$

Para  $\sigma \in (0, 1)$  calcule a direção de centralização e a correção de segunda ordem  $d^{cc}$  resolvendo o sistema:

$$\begin{aligned} A^T d_y^{cc} + d_s^{cc} &= 0 \\ A d_x^{cc} &= 0 \\ S d_x^{cc} + X d_s^{cc} &= \sigma \mu e - d_x^a d_s^a. \end{aligned} \tag{4.36}$$

Determine o máximo  $\gamma > 0$  realizando uma busca na direção

$$(x, y, s) + \gamma(d_x^a, d_y^a, d_s^a) + \gamma^2(d_x^{cc}, d_y^{cc}, d_s^{cc}),$$

tal que o novo ponto permaneça positivo para  $x$  e  $s$ .

Defina o novo ponto:

$$\begin{aligned} (x^{k+1}, y^{k+1}, s^{k+1}) &:= (x, y, s) + \gamma(d_x^a, d_y^a, d_s^a) + \\ &\quad \gamma^2(d_x^{cc}, d_y^{cc}, d_s^{cc}). \end{aligned} \tag{4.37}$$

$k:=k+1$ .

Até convergência

Nesta versão, a estimativa do termo não-linear  $d_x d_s$  é feita utilizando apenas a direção afim-escala  $d^a = (d_x^a, d_y^a, d_s^a)$ . A direção de centralização e a direção corretora são calculadas com a mesma matriz de coeficientes e por

serem independentes uma da outra, podem ser calculadas simultaneamente, adicionado-se os termos correspondentes  $\sigma\mu e$  e  $d_x^a d_s^a$ .

Os dois sistemas lineares solucionados a cada iteração possuem a mesma matriz de coeficientes, logo apenas uma fatoração é necessária. Por isto, o custo computacional do cálculo da direção corretora é baixo. Experimentalmente foi mostrado que o custo adicional em cada iteração é compensado pela redução no número de iterações [52].

No artigo de Mehrotra [12] é sugerida uma heurística para a escolha do parâmetro  $\sigma$ . Como a componente afim-escala é calculada separadamente, e antes da componente de centralização, o parâmetro  $\sigma$  pode ser calculado adaptativamente: se a direção afim-escala faz progresso na redução de  $\mu$  sem violar a restrição  $(x, s) > 0$ , pouca centralização é necessária, e o valor de  $\sigma$  é pequeno. Se por outro lado for possível apenas dar um passo pequeno ao longo da direção afim-escala antes de violar  $x > 0, s > 0$ , então é preciso fazer uma grande centralização e  $\sigma$  será próximo a unidade. Esta heurística é definida da seguinte forma:

**Escolha adaptativa do parâmetro  $\sigma$ :**

Calcule a direção afim-escala  $d^a$  resolvendo o sistema (4.35).

Calcule o máximo passo  $\gamma^a$  na direção  $d^a$ , tal que  $x + \gamma^a d_x^a \geq 0$  e  $s + \gamma^a d_s^a \geq 0$ .

Defina  $\mu^a$  associado ao passo até a fronteira:

$$\mu^a := (x + \alpha^a d_x^a)^T (s + \alpha^a d_s^a) / n. \quad (4.38)$$

Faça  $\sigma := (\mu^a / \mu)^3$ .

Calcule a direção  $d^{cc}$  resolvendo o sistema (4.36) com  $\sigma\mu^a$ .

No artigo de Zhang e Zhang [51] é proposta também uma versão do algoritmo de Mehrotra, na qual o passo preditor e corretor são calculados simultaneamente (como no algoritmo primal-dual padrão), e o passo corretor posteriormente.

Devido ao bom desempenho do algoritmo de Mehrotra, algoritmos com aproximações de ordem mais elevada foram propostos.

Baseado em sua grande experiência computacional, Gondzio [13] desen-

volveu um algoritmo no qual, após o cálculo da direção afim-escala, uma ou mais direções de centralização são calculadas. A cada iteração a matriz é fatorada uma única vez; cada cálculo de direção de centralização demanda o esforço computacional de uma substituição. O número de direções de centralização calculadas a cada iteração depende do aumento efetivo de proximidade que cada centralização proporciona.

**Algoritmos inviáveis.** Nos algoritmos viáveis o ponto inicial e a sequência gerada devem pertencer ao conjunto  $\mathcal{V}^0$  e a uma vizinhança especificada da trajetória. Nos algoritmos inviáveis é requerido apenas que em todas as iterações  $x$  e  $s$  sejam estritamente positivos; a vizinhança na qual as iteradas devem permanecer é uma extensão da vizinhança  $\mathcal{N}_{-\infty}$ , que inclui pontos inviáveis.

Dado  $(x, y, s)$ , sendo  $(x, s) > 0$ , define-se os resíduos de inviabilidade:

$$\begin{aligned} r_1(x, y, s) &= A^T y + c - s \\ r_2(x, y, s) &= Ax - b. \end{aligned} \quad (4.39)$$

A direção de Newton em um algoritmo inviável é a combinação de três direções: a direção afim-escala, que visa a redução do parâmetro  $\mu$ , a direção de centralização, que visa a aproximação à trajetória central, e a direção de viabilização, que visa a redução dos resíduos de inviabilidade. A direção de Newton é a solução do sistema:

$$\begin{bmatrix} 0 & A^T & -I \\ A & 0 & 0 \\ S & 0 & X \end{bmatrix} \begin{pmatrix} d_x \\ d_y \\ d_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta r_1 \\ -\beta r_2 \\ -xs + \mu \end{pmatrix}, \quad (4.40)$$

onde o parâmetro  $\beta \in (0, 1)$  define a redução da inviabilidade imposta a cada iteração. Como os resíduos (4.39) são definidos por equações lineares, em um passo de Newton a inviabilidade é efetivamente reduzida no fator  $\beta$ . Em programação linear a viabilização obtida a cada iteração não deve ser perdida.

Diversos algoritmos inviáveis podem ser desenvolvidos variando a ordem de cálculo das direções afim-escala, de centralização e corretora. Por exemplo,

em uma iteração pode-se buscar a viabilização completa e posteriormente aplicar um dos algoritmo viáveis estudados. Para a viabilização completa é solucionado o sistema:

$$\begin{bmatrix} 0 & A^T & -I \\ A & 0 & 0 \\ S & 0 & X \end{bmatrix} \begin{pmatrix} d_x \\ d_y \\ d_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r_1 \\ -r_2 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.41)$$

No entanto, a prática usual é a obtenção da viabilidade ao longo das iterações, na mesma proporção que a otimalidade é obtida.

A Figura 4.8 ilustra a situação de inviabilidade do ponto  $(x, y, s)$  e um passo de um algoritmo no qual busca-se simultaneamente reduzir a inviabilidade e progredir rumo a otimalidade, reduzindo o valor de  $\mu$ .

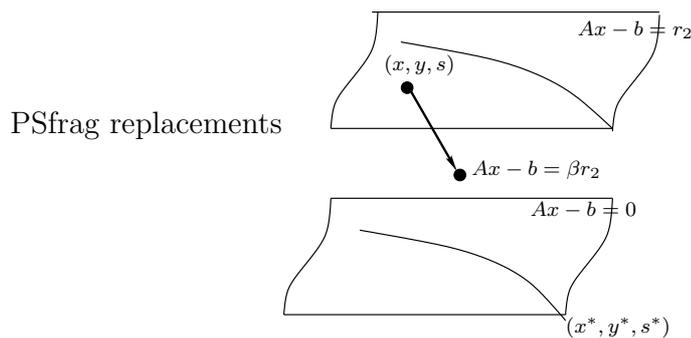


Figura 4.8: Um passo de um algoritmo inviável

Para o desenvolvimento de resultados de convergência dos algoritmos inviáveis são impostas duas condições adicionais a cada iteração: a violação das restrições deve diminuir ao menos tão rapidamente quanto diminui o parâmetro  $\mu$  e deve-se garantir (por exemplo, através de busca de Armijo) que  $\mu$  decresce ao menos uma fração do decréscimo predito para a iteração. Estas condições garantem que os resíduos de inviabilidade tendem a zero [52]. A convergência dos algoritmos inviáveis é estudada no livro de Wright [52].

### 4.3 Extensão dos algoritmos primais-duais ao fluxo de potência ótimo

O fluxo de potência ótimo foi formulado por Carpentier no início dos anos 60 e, desde então, vários métodos foram empregados em sua solução. Podemos citar o método do gradiente reduzido usado por Dommel e Tinney [54], e métodos de programação quadrática sequencial e linear sequencial por Biggs e Laughton [55] e por Sun, Ashley, Brewer, Hughes e Tinney (1984) [56].

Desde a publicação de Granville em 1994 [9] o interesse pela aplicação de algoritmos de pontos interiores ao problema de fluxo de potência ótimo tem sido grande. Por considerar as restrições de desigualdade sem estimar o conjunto ativo, nos métodos de pontos interiores o sistema linear a ser solucionado tem a mesma dimensão e estrutura a cada iteração, o que permite a exploração da estrutura do problema. Diversos trabalhos tem demonstrado o bom desempenho desta classe de algoritmos aplicados ao FPO [10], [57], [11], [58]. Uma relação atualizada da aplicação do método de pontos interiores a problemas de sistemas de potência é fornecida em [59].

No artigo de Wu, Debs e Marsten [10] foi proposta a aplicação do método primal-dual preditor-corretor, desenvolvido por Mizuno, Todd e Ye ([47]) para programação linear. O algoritmo preditor-corretor desenvolvido por Mehrotra [12] foi testado para a solução do fluxo de potência ótimo por Yan e Quintana [57]. Recentemente o algoritmo com múltiplos passos corretores, proposto por Gondzio [13] foi aplicado à solução do FPO por Torres [11]. Estes algoritmos foram também testados para a solução do fluxo de potência ótimo por Castronuovo [58], que aplicou ainda o algoritmo com passo mais longo de McShane [48]. Os resultados descritos por estes autores serão discutidos nesta seção.

O problema de fluxo de potência ótimo pode ser estabelecido como um problema de programação não-linear com restrições de igualdade e de cana-

lização:

$$\begin{aligned}
 & \text{minimize} && f_0(x) \\
 & \text{sujeito a} && f_{\mathcal{E}}(x) = 0 \\
 & && l_c \leq f_{\mathcal{C}}(x) \leq u_c \\
 & && l_x \leq E x \leq u_x
 \end{aligned} \tag{4.42}$$

onde  $f_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_{\mathcal{E}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  e  $f_{\mathcal{C}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^q$  são funções duplamente continuamente diferenciáveis.

Em um típico problema de fluxo de potência  $x \in \mathbb{R}^n$  são variáveis de controle e de estado,  $f_0$  é a função que define o objetivo do problema,  $f_{\mathcal{E}}$  modela a rede elétrica em regime permanente, a caixa  $f_{\mathcal{C}}$  define limites físicos e operacionais (limitação de fluxo nas linhas, por exemplo), e  $E_{r \times n}$  é uma submatriz da identidade  $I_{n \times n}$  que identifica as componentes restritas de  $x$  (módulo da tensão nas barras, e.g). Os vetores  $l_c$ ,  $u_c$ ,  $l_x$  e  $u_x$  definem os limites inferiores e superiores de  $f_{\mathcal{C}}(x)$  e  $E x$ , respectivamente.

Caso esta estrutura de caixa e canalizações não seja considerada, pode-se definir a função  $f_{\mathcal{I}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ , sendo  $p = 2q + 2r$ , por:

$$f_{\mathcal{I}}(x) = \begin{bmatrix} f_{\mathcal{C}}(x) - u_c \\ l_c - f_{\mathcal{C}}(x) \\ E x - u_x \\ l_x - E x \end{bmatrix}, \tag{4.43}$$

e escrever o problema (4.42) como:

$$\begin{aligned}
 & \text{minimize} && f_0(x) \\
 & \text{sujeito a} && f_{\mathcal{E}}(x) = 0 \\
 & && f_{\mathcal{I}}(x) \leq 0,
 \end{aligned} \tag{4.44}$$

onde  $\mathcal{E}$  indica o conjunto de índices  $\{1, \dots, m\}$  associado às restrições de igualdade e  $\mathcal{I}$  identifica o conjunto  $\{1, \dots, p\}$  associado às restrições de desigualdade.

Seguindo a estratégia de pontos interiores, adiciona-se variáveis de folga  $s \in \mathbb{R}^p$ , às restrições de desigualdade e, para dado parâmetro de barreira

$\mu > 0$ , associa-se ao problema (4.44) o seguinte problema de barreira:

$$\begin{aligned}
& \text{minimize} && f_0(x) - \mu \sum_{i=1}^p \log s_i \\
& \text{sujeito a} && f_{\mathcal{E}}(x) = 0 \\
& && f_{\mathcal{I}}(x) + s = 0 \\
& && s > 0.
\end{aligned} \tag{4.45}$$

Se  $x$  e  $s > 0$  são minimizadores locais de (4.45), então associado à  $i$ -ésima restrição existe um escalar  $\lambda_i$ , chamado multiplicador de Lagrange, que satisfaz às condições de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) [60]:

$$\begin{aligned}
\nabla f_0(x) + A_{\mathcal{E}}(x)^T \lambda_{\mathcal{E}} + A_{\mathcal{I}}(x)^T \lambda_{\mathcal{I}} &= 0 \\
f_{\mathcal{I}}(x) + s &= 0 \\
f_{\mathcal{E}}(x) &= 0 \\
-\mu s^{-1} + \lambda_{\mathcal{I}} &= 0 \\
s > 0, \lambda_{\mathcal{I}} > 0
\end{aligned} \tag{4.46}$$

onde  $\nabla f_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é o gradiente da função objetivo,  $A_{\mathcal{E}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n}$  e  $A_{\mathcal{I}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{p \times n}$  são as matrizes jacobianas das restrições de igualdade e desigualdade, respectivamente e  $\lambda_{\mathcal{E}} \in \mathbb{R}^m$ ,  $\lambda_{\mathcal{I}} \in \mathbb{R}^p$  são os multiplicadores de Lagrange associados às restrições de igualdade e desigualdade. Denotamos  $\lambda = (\lambda_{\mathcal{E}}, \lambda_{\mathcal{I}})$ .

As condições de KKT perturbadas são obtidas multiplicando-se a segunda linha das equações de KKT (4.46) pela matriz  $S = \text{diag}(s)$ :

$$\begin{aligned}
\nabla f_0(x) + A_{\mathcal{E}}(x)^T \lambda_{\mathcal{E}} + A_{\mathcal{I}}(x)^T \lambda_{\mathcal{I}} &= 0 \\
f_{\mathcal{I}}(x) + s &= 0 \\
f_{\mathcal{E}}(x) &= 0 \\
S \lambda_{\mathcal{I}} &= \mu e \\
s > 0, \lambda_{\mathcal{I}} > 0
\end{aligned} \tag{4.47}$$

onde  $S = \text{diag}(s)$  e  $e = (1, \dots, 1)^T$ .

A extensão dos algoritmos primais-duais de pontos interiores para pro-

blemas não-lineares é realizada aplicando-se o método de Newton ao sistema formado pelas equações de KKT perturbadas (4.47).

A partir de um ponto inicial  $(x^0, s^0, \lambda^0)$ , com  $s^0 > 0$  e  $\lambda_{\mathcal{I}}^0 > 0$ , é gerada uma sequência de pontos

$$(x^{k+1}, s^{k+1}, \lambda^{k+1}) = (x^k, s^k, \lambda^k) + \gamma(d_x, d_s, d_\lambda) \quad (4.48)$$

onde  $\gamma \in (0, 1]$  e  $(d_x, d_s, d_\lambda)$  são direções de busca que satisfazem a linearização de (4.47):

$$\begin{pmatrix} H & 0 & A_{\mathcal{I}}^T & A_{\mathcal{E}}^T \\ A_{\mathcal{I}}^T & I & 0 & 0 \\ A_{\mathcal{E}}^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda_{\mathcal{I}} & S & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_x \\ d_s \\ d_{\lambda_{\mathcal{I}}} \\ d_{\lambda_{\mathcal{E}}} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \nabla f_0(x) + A_{\mathcal{E}}^T \lambda_{\mathcal{E}} + A_{\mathcal{I}}^T \lambda_{\mathcal{I}} \\ S \lambda_{\mathcal{I}} - \mu e \\ f_{\mathcal{I}}(x) + s \\ f_{\mathcal{E}}(x) \end{pmatrix} \quad (4.49)$$

com  $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  definida por

$$H = \nabla^2 f_0(x) + \sum_{i \in \mathcal{I}} \lambda_i \nabla^2 f_i(x) + \sum_{i \in \mathcal{E}} \lambda_i \nabla^2 f_i(x). \quad (4.50)$$

**Implementações e testes numéricos.** Em um artigo publicado em 1994, Granville [9] propôs a aplicação de um algoritmo primal-dual de pontos interiores ao problema de fluxo de potência ótimo. O algoritmo descrito por Granville possui a seguinte estrutura:

Dados:  $(x, s, \lambda)$ , com  $s > 0$ ,  $\lambda_{\mathcal{I}} > 0$ .

$k := 0$ .

Repita

$x := x^k$ ;  $s := s^k$ ;  $\lambda := \lambda^k$ .

Para  $\sigma \in (0, 1)$ ,  $\mu = \sigma \frac{s^T \lambda_{\mathcal{I}}}{p}$ .

Obtenha  $d = (d_x, d_s, d_\lambda)$  resolvendo o sistema (4.49).

Calcule os passos  $\alpha_p$  e  $\alpha_d$ .

Atualize as variáveis (com  $\tau = 0.9995$ ):

$$x^{k+1} := x + \tau\alpha_p d_x$$

$$s^{k+1} := s + \tau\alpha_p d_s$$

$$\lambda^{k+1} := \lambda + \tau\alpha_d d_\lambda.$$

$$k := k + 1.$$

Até convergência

Na inicialização é imposto que  $x$  seja interior à caixa definida por  $l \leq h(x) \leq u$ . As variáveis de folga iniciais  $s$  devem ser positivas, mas não é imposto que elas satisfaçam  $f_{\mathcal{I}}(x) + s = 0$ .

Os comprimentos dos passos são determinados pelo teste de razão, de forma que as folgas e os multiplicadores de Lagrange associados às restrições de desigualdade permaneçam positivos. O algoritmo utiliza dois comprimentos de passo distintos:  $\alpha_p$  na atualização das variáveis primais  $x$  e  $s$ ; e  $\alpha_d$  na atualização das variáveis duais  $\lambda$ . Na redução do parâmetro  $\mu$ , baseado em experiência computacional, o autor sugere  $\sigma = 0, 1$ . O artigo relata testes computacionais utilizando dois sistemas-teste de grande porte (1832 e 3467 barras) e conclui que o algoritmo é adequado ao problema de fluxo de potência ótimo, especialmente por não exigir a identificação do conjunto ativo, por sua facilidade de inicialização, e pelo número de iterações necessárias não variar significativamente com o tamanho do problema.

Em um artigo publicado em 1994, Wu, Debs e Marsten [10] descrevem a aplicação do algoritmo preditor-corretor ao problema de fluxo de potência ótimo. Os experimentos computacionais com sistemas-teste de 9 a 2423 barras confirmaram o excelente desempenho do algoritmo.

No artigo [57] Yan e Quintana descrevem a implementação do algoritmo preditor-corretor com correção de segunda ordem, tendo seguido as referências [12] e [?]. Na atualização do parâmetro  $\mu$  e na definição dos pontos iniciais os autores seguiram as indicações da referência [?]. Os testes numéricos foram realizados com cinco sistemas-teste, e o desempenho do algoritmo, em comparação ao algoritmo sem correção de segunda ordem,

foi superior para todos sistemas testados, com redução no número total de iterações de até 50% e redução no tempo de CPU de até 45%.

A implementação e teste do algoritmo proposto por Gondzio, com múltiplas direções de centralização, foi descrita por Torres e Quintana (2001) [11]. Nos experimentos computacionais foram utilizados cinco sistemas-teste, com tamanho variando de 118 a 2098 barras. Para o sistema com 2098 barras, com o algoritmo primal-dual sem correção de segunda ordem não foi atingida uma solução, pois o tamanho do passo tendeu a zero. No entanto, o algoritmo com múltiplas correções solucionou o problema. Além disto, os autores registraram que com 5 direções corretoras houve uma redução de 32,8% do tempo de CPU.

Castronuovo [58] descreve testes computacionais com os algoritmos acima citados e ainda com o algoritmo de passo mais longo, de McShane [48], e confirma o bom desempenho dos algoritmos.

## 4.4 Conclusões

Neste capítulo foram descritos os principais algoritmos de programação linear e foram comentados os resultados obtidos por diversos autores na aplicação destes algoritmos ao problema de fluxo de potência ótimo. Os autores citados confirmam a eficiência do método de pontos interiores na resolução de problemas com sistemas elétricos reais, enfatizando o bom desempenho do método preditor-corretor e do cálculo da correção de segunda ordem.

A extensão dos algoritmos de programação linear ao problema de fluxo de potência ótimo é realizada pela solução, pelo método de Newton, do sistema formado pelas equações de KKT perturbadas. A necessidade de um algoritmo robusto e eficiente para aplicações *on-line*, especificamente para o fluxo de potência ótimo com restrições de segurança, conduziu à pesquisa em algoritmos de programação não-linear com convergência global assegurada. Esta pesquisa envolveu a familiarização com os conceitos básicos de programação não-linear e com as estratégias de globalização. Estes conceitos são discutidos no Capítulo 5, a seguir.

# Capítulo 5

## Elementos de programação não-linear

### 5.1 Introdução

O objetivo deste capítulo é apresentar a nomenclatura e alguns resultados importantes de programação não-linear, discutir os principais métodos de solução e reunir os elementos necessários à obtenção de algoritmos com convergência global.

Para problemas irrestritos, apresenta-se os algoritmos de solução evidenciando as duas formas de obtenção de convergência global: busca unidirecional e região de confiança. Para problemas com restrições de igualdade comenta-se o método de Newton estendido e a programação quadrática sequencial e discute-se a globalização destes métodos.

Para garantir convergência global com problemas restritos é necessário que o passo seja avaliado considerando tanto o progresso em otimalidade quanto em viabilidade. Isto é tradicionalmente feito através de uma função de mérito. Exemplos de funções de mérito e sua utilização para a obtenção de convergência global são apresentados.

Finalmente discute-se uma nova classe de métodos, chamados métodos de filtro, que não utilizam funções de mérito, e um novo algoritmo é proposto.

## 5.2 O problema de programação não-linear

Neste capítulo são estudados problemas de programação não-linear cuja forma genérica é

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && f(x) \\ & \text{sujeito a} && x \in S, \end{aligned} \tag{5.1}$$

onde  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função duplamente continuamente diferenciável e  $S \in \mathbb{R}^n$  é o conjunto viável do problema.

### 5.2.1 Definições

Um ponto  $x^* \in S$  é dito *minimizador local* do problema (6.1) se e somente se existe  $\epsilon > 0$  tal que  $f(x) \geq f(x^*)$  para todo  $x \in S$  tal que  $\|x - x^*\| < \epsilon$ . Se  $f(x) > f(x^*)$  para todo  $x \in S$  tal que  $x \neq x^*$  e  $\|x - x^*\| < \epsilon$ , então  $x^*$  é *minimizador local estrito* de (6.1).

Um ponto  $x^* \in S$  é *minimizador global* do problema (6.1) se e somente se  $f(x) \geq f(x^*)$  para todo  $x \in S$ . Se  $f(x) > f(x^*)$  para todo  $x \in S$  tal que  $x \neq x^*$ , então  $x^*$  é um *minimizador global estrito* de (6.1).

**Convergência.** A *convergência local* de um algoritmo refere-se às propriedades de convergência a partir de um ponto inicial em uma vizinhança de um minimizador local.

A *convergência global* refere-se a que a convergência ocorre independentemente do ponto inicial.

Ressalte-se que obtenção de convergência global não se refere à procura por minimizadores globais.

**Taxas de convergência.** Se uma seqüência  $(x^k)$  converge para um minimizador local  $x^*$ , ou seja, se  $\lim_{k \rightarrow \infty} x^k = x^*$ , então  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^k - x^*\| = 0$  e pode-se definir  $\|x^k - x^*\|$  como o erro cometido na iteração  $k$ . A taxa de convergência pode ser avaliada comparando os erros cometidos em duas iterações sucessivas:

$$e^{k+1} = \|x^{k+1} - x^*\| \quad \text{e} \quad e^k = \|x^k - x^*\|.$$

Se  $e^{k+1} \leq r e^k$ , para algum  $r \in (0, 1)$  diz-se que a seqüência  $(x^k)$  converge

com *ordem linear* e taxa não superior a  $r$ . Quanto menor  $r$ , mais rápida será a convergência da seqüência.

Se  $\lim_{k \rightarrow \infty} e^{k+1}/e^k = 0$  diz-se que a seqüência  $(x^k)$  converge com *ordem superlinear*. Neste caso a redução do erro é maior que qualquer fração fixa.

Se  $e^{k+1} \leq a(e^k)^p$ ,  $a > 0$ , diz-se que a seqüência  $(x^k)$  converge com ordem não inferior a  $p$ . Se  $p = 2$  a ordem de convergência é *quadrática*.

## 5.3 O problema de minimização irrestrita

Nesta seção estudaremos problemas de otimização irrestrita, onde o conjunto viável  $S$  é o  $\mathbb{R}^n$ :

$$\underset{x \in \mathbb{R}^n}{\text{minimize}} \quad f(x). \quad (5.2)$$

**Condições de otimalidade.** As condições de otimalidade para o problema irrestrito são:

Condição necessária de primeira ordem: Seja  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função continuamente diferenciável ( $f \in C^1$ ). Se  $x^*$  é um minimizador local de  $f$  em  $\mathbb{R}^n$ , então  $\nabla f(x^*) = 0$ .

Como esta condição é necessária mas não suficiente, pontos estacionários, para os quais  $\nabla f(x) = 0$ , são “candidatos” a minimizadores de  $f$ .

Condição necessária de segunda ordem: Seja  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função duplamente continuamente diferenciável ( $f \in C^2$ ). Se  $x^*$  é um minimizador local de  $f$  em  $\mathbb{R}^n$ , então  $\nabla f(x^*) = 0$  e  $\nabla^2 f(x^*)$  é positiva semidefinida.

Condição suficiente de segunda ordem: Seja  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$   $f \in C^2$ . Se  $x^* \in \mathbb{R}^n$ ,  $\nabla f(x^*) = 0$ , e  $\nabla^2 f(x^*)$  é positiva definida, então  $x^*$  é um minimizador local de  $f$  em  $\mathbb{R}^n$ .

### 5.3.1 Algoritmos

Partindo de um ponto inicial  $x^0$  não estacionário, os algoritmos iterativos de minimização geram uma seqüência  $(x^k)$  até que seja encontrado um ponto estacionário ou que algum critério de parada seja satisfeito. Nos algoritmos descritos neste capítulo o critério de parada não é especificado, visto que

em implementações práticas a parada é definida de acordo com o problema. Para fins de análise de convergência considera-se que o algoritmo pára caso seja encontrado um ponto estacionário ou gera uma sequência  $(x^k)$  infinita.

Para mover-se do ponto  $x^k$  para o ponto  $x^{k+1}$  é requerido que o valor da função decresça, ou seja,  $f(x^{k+1}) < f(x^k)$ . Em alguns algoritmos não é exigido decréscimo a cada iteração, mas em um número  $m$  de iterações. Neste caso,  $f(x^{k+m}) < f(x^k)$ .

Estamos interessados em estudar algoritmos com propriedades de convergência global. Existem dois tipos de algoritmos de minimização irrestrita com propriedades de convergência global, os que utilizam busca linear e os que utilizam região de confiança. Nas seções seguintes estudaremos estas duas classes de algoritmos, com ênfase nas condições que garantem convergência global.

### 5.3.2 Algoritmos com busca linear

No desenvolvimento de um algoritmo com busca linear é essencial o conceito de direção de descida, definido a seguir.

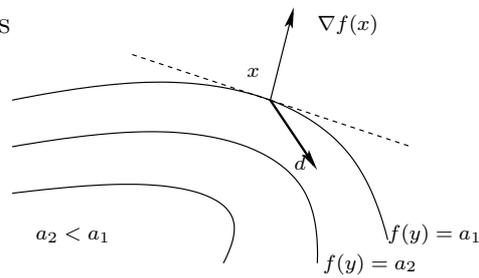
Dado um ponto  $x \in \mathbb{R}^n$  que não é minimizador local de  $f$  ( $\nabla f(x) \neq 0$ ),  $d \in \mathbb{R}^n$  é uma direção de descida para  $f$  a partir de  $x$  se existe  $\bar{\gamma} > 0$  tal que para todo  $\gamma \in (0, \bar{\gamma})$ ,

$$f(x + \gamma d) < f(x).$$

As direções que satisfazem  $\nabla^t f(x)d < 0$ , ou seja, formam um ângulo maior que  $90^\circ$  com  $\nabla f(x)$ , são direções de descida. Isto pode ser verificado pela definição do gradiente.

Uma direção de descida  $d$  para a função  $f$  a partir do ponto  $x$  é ilustrada na Figura 5.1:

PSfrag replacements

Figura 5.1: Direção de descida para  $f$  a partir de  $x$ .

A seguir é estabelecido um algoritmo bastante genérico, no qual a condição de descida é satisfeita a cada iteração.

#### Algoritmo - Busca linear em uma direção de descida

Dado  $x \in \mathbb{R}^n$ . Faça  $k := 0$ .

Repita

Calcule uma direção  $d \in \mathbb{R}^n$  tal que  $\nabla^t f(x^k)d < 0$ .

Calcule o passo  $\gamma$  tal que  $f(x^k + \gamma d) < f(x^k)$ .

$x^{k+1} := x^k + \gamma d$ .

$k := k + 1$ .

O processo iterativo descrito no algoritmo acima termina se for encontrado um ponto estacionário  $\bar{x}$  tal que  $\nabla f(\bar{x}) = 0$ . Caso não se verifique a condição  $\nabla f(x) = 0$ , é gerada uma sequência infinita  $(x^k)$  em  $\mathbb{R}^n$ . Por construção, a sequência  $f(x^k)$  é monótona decrescente. No entanto, não podemos garantir que existe  $\lim_{k \rightarrow \infty} x^k$  e caso exista, que este limite seja um ponto estacionário. Existem exemplos nos quais a sequência gerada pelo algoritmo de descida converge para um ponto não estacionário. O seguinte exemplo em uma variável foi fornecido por Friedlander em [61].

Considere a função  $f(x) = x^2$ , cujo único minimizador é  $x^* = 0$ . A sequência definida por  $x^k = 1 + 1/k$ , para  $k \geq 1$  pode ser gerada pelo algoritmo, pois  $f(x^{k+1}) < f(x^k)$ . No entanto,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x^k = 1.$$

Para assegurar resultados de convergência são suficientes as chamadas

condição de ângulo e condição de decréscimo suficiente, estabelecidas e comentadas logo a seguir:

**Condição de ângulo.** Para todo  $k \in \mathbb{N}$ , para alguma constante  $\vartheta \in (0, 1)$ ,  $d$  deve ser tal que

$$\nabla^t f(x^k) d \leq -\vartheta \|\nabla f(x^k)\| \|d\|. \quad (5.3)$$

Decréscimos excessivamente pequenos no valor da função podem ser gerados caso seja tomada uma direção “quase” ortogonal ao gradiente da função no ponto  $x^k$ . A condição de ângulo (5.3) é imposta para impedir que as direções sejam “quase” ortogonais à  $\nabla f(x^k)$ . Sendo  $\beta$  o ângulo entre  $\nabla f(x^k)$  e  $d$ ,

$$\cos \beta = \frac{\nabla^t f(x^k) d}{\|\nabla f(x^k)\| \|d\|}.$$

Logo, a condição (5.3) equivale à  $\cos \beta \leq -\vartheta$ . Definindo  $\bar{\beta}$  tal que  $\cos \bar{\beta} = -\vartheta$ ,  $\bar{\beta}$  é o menor ângulo permitido entre  $\nabla f(x^k)$  e  $d$ . Usualmente  $\vartheta = 10^{-6}$ . A Figura 5.2 ilustra a condição de ângulo (5.3).

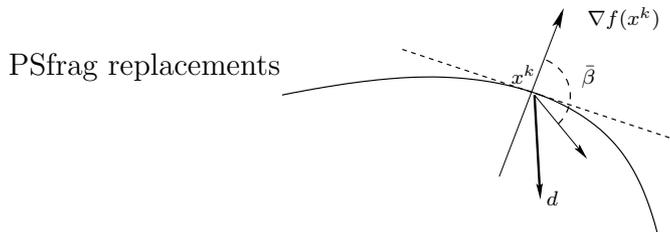


Figura 5.2: Direção  $d$  que satisfaz a condição de ângulo (5.3).

**Condição de decréscimo suficiente.** Para alguma constante  $\alpha \in (0, 0.5)$  e  $\gamma$  “grande”,

$$f(x^k + \gamma d) < f(x^k) + \alpha \nabla^t f(x^k) \gamma d. \quad (5.4)$$

A constante  $\alpha$  é adimensional e, para fins de análise pode-se fazer  $\alpha = 0.5$ . Em implementações é usual  $\alpha = 10^{-4}$ .

Visto que  $d$  gerada pelo algoritmo é uma direção de descida, tem-se

$$\nabla^t f(x^k) \gamma d < 0.$$

Ou seja, seguramente o valor da função decresce caso seja tomado um pequeno deslocamento ao longo de  $d$ . A condição (5.4) impõe não apenas um decréscimo no valor da função, mas um *decréscimo suficiente*, com  $\gamma$  “grande”.

A condição de decréscimo suficiente (5.4) com  $\gamma$  “grande” é assegurada por uma busca de Armijo na variável  $\gamma$ .

Na busca de Armijo, a partir de  $\gamma^{max}$ , o passo  $\gamma$  é reduzido até a condição de decréscimo ser verificada. Este procedimento é ilustrado na Figura (5.3), onde é também indicado o ponto  $\gamma^*$ , minimizador exato de  $f$ .

A Figura (5.3) identifica também o ponto de Armijo  $\gamma^a$ , que é definido como o ponto ao longo de uma direção  $d$  no qual a função  $f(x^k + \gamma d)$  tem o mesmo valor que a metade de sua aproximação quadrática em  $x^k$ .

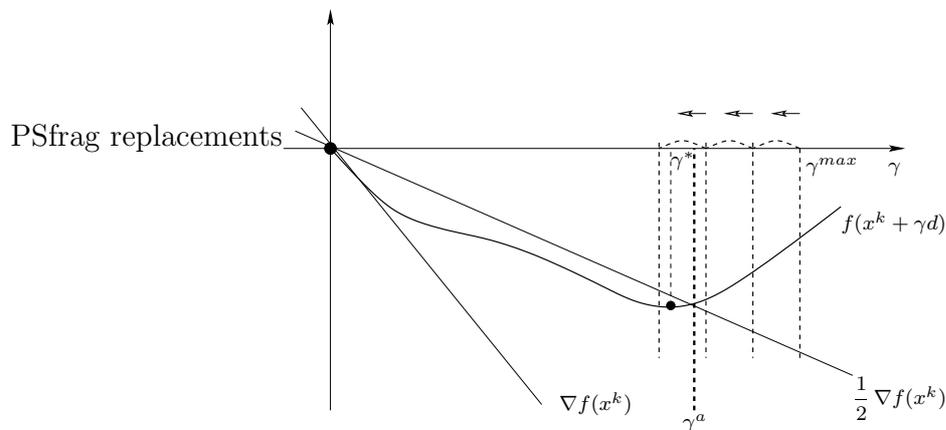


Figura 5.3: Busca de Armijo.

A busca de Armijo é extremamente simples:

#### Algoritmo - Busca de Armijo

Dados  $x^k \in \mathbb{R}^n$ ,  $d \in \mathbb{R}^n$ , e  $\gamma^{max}$ .

Enquanto

$$f(x^k + \gamma d) > f(x^k) + \frac{1}{2}\gamma \nabla f(x^k)^T d \text{ faça } \gamma := 0.7\gamma.$$

Incorporando as condições de ângulo e de decréscimo suficiente, define-se o seguinte algoritmo de busca em uma direção de descida:

**Algoritmo - Decréscimo suficiente por busca linear**

Dados  $\sigma$  e  $\vartheta \in (0, 1)$ ,  $\alpha \in (0, 0.5)$  e  $x \in \mathbb{R}^n$ .

Faça  $k:=0$ .

Repita

Calcule a direção  $d \in \mathbb{R}^n$  tal que  $\nabla^t f(x^k) d \leq -\vartheta \|\nabla f(x^k)\| \|d\|$ .

Determine por Armijo o  $\gamma$  tal que

$$f(x^k + \gamma d) < f(x^k) + \alpha \nabla^t f(x^k) \gamma d.$$

$$x^{k+1} := x^k + \gamma d.$$

Para este algoritmo pode-se enunciar o seguinte teorema de convergência global:

**Teorema - Convergência global do algoritmo com busca linear**

O algoritmo pára com algum  $k$ , tal que  $\nabla f(x^k) = 0$ , ou gera uma sequência infinita  $\{x^k\}$  tal que todo ponto limite  $\bar{x}$  é um ponto estacionário de  $f$ , ou seja,  $\nabla f(\bar{x}) = 0$ .

Este teorema não assegura convergência da sequência  $(x^k)$ , mas garante que se existe um ponto limite  $\bar{x}$ , então  $\bar{x}$  é um ponto estacionário. Se a função  $f$  é convexa, então a sequência  $(x^k)$  converge.

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [62].

Nesta seção vimos que características deve possuir um algoritmo de descida com busca linear para ser globalmente convergente. Discutiremos a seguir dois algoritmos clássicos de descida, o método de Cauchy e o método de Newton.

**O método de Cauchy.** Neste método,  $d$  é a direção contrária ao gradiente de  $f$  no ponto  $x^k$ . Fazendo  $d = -\nabla f(x^k)$ , a condição **c1** (5.3) é verificada trivialmente. A condição **c2** (5.4) é garantida por uma busca linear.

**Algoritmo - Cauchy**

Dado  $x \in \mathbb{R}^n$ . Faça  $k:=0$ .

Repita

Calcule a direção  $d = -\nabla f(x^k)$ .

Determine por Armijo  $\gamma$  tal que  $f(x^k + \gamma d) < f(x^k) + \alpha \nabla f(x^k)^T \gamma d$ .

Faça  $x^{k+1} := x^k + \gamma d$ .

$k := k + 1$ .

A convergência global do método de Cauchy é um resultado bem conhecido, assim como sua ordem de convergência local linear. Métodos com convergência local mais rápida utilizam informação de segunda ordem de  $f$ , como os métodos de Newton e quase-Newton.

**O método de Newton.** Neste método, a direção  $d$  é definida por

$$\nabla^2 f(x^k) d = -\nabla f(x^k). \quad (5.5)$$

A direção  $d$  calculada pelo sistema (5.5) é chamada passo de Newton, ou passo de Newton puro. A motivação para o método de Newton é que a expansão de Taylor da função  $f$  no ponto  $x^k$  é

$$f(x^k + d) = f(x^k) + \nabla f(x^k) d + (d)^t \nabla^2 f(x^k) d + o(\|d\|^2). \quad (5.6)$$

Desconsiderando os termos de ordem superior a 2, define-se um modelo quadrático  $m$  para  $f$  no ponto  $x^k$ :

$$d \in \mathbb{R}^n \mapsto m(d) = f(x^k) + \nabla f(x^k) d + (d)^T \nabla^2 f(x^k) d. \quad (5.7)$$

Se a matriz  $\nabla^2 f(x^k)$  for positiva definida, então a minimização deste modelo quadrático é a direção de Newton  $d$  definida pelo sistema (5.5), e o ponto  $x^k + d$  é o minimizador do modelo quadrático.

Como o modelo quadrático concorda com a expansão da função em três termos, o erro entre o modelo e a função é  $o(\|d\|^2)$ , e será particularmente pequeno quando  $\|d\|$  for pequena. Ou seja, o modelo quadrático é uma boa aproximação da função em uma vizinhança de  $x^k$ .

A Figura (5.4) ilustra um passo de Newton  $d$  - minimizador do modelo quadrático  $m$  - a partir de  $x^k$ .

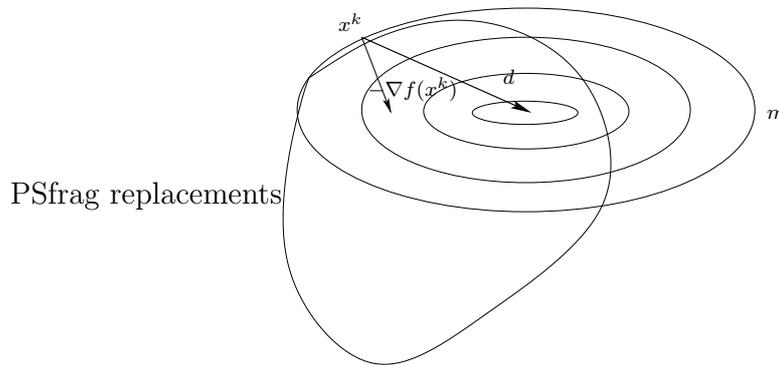


Figura 5.4: Passo de Newton  $d$  a partir do ponto  $x^k$ .

O resultado de convergência local do método de Newton diz que se  $x^0$  estiver suficientemente próximo de um minimizador local  $x^*$ , então  $d$  está bem definida para todo  $k \in \mathbb{N}$  e a sequência gerada converge a  $x^*$  com ordem de convergência quadrática. No desenvolvimento de um algoritmo de Newton com convergência global é desejável manter esta boa propriedade de convergência local.

Uma condição padrão para o método de Newton é que a matriz do sistema (5.5) seja positiva definida. De fato, de (5.5),  $d^T \nabla^2 f(x^k) d = -d^T \nabla f(x^k)$ . Com  $\nabla^2 f(x^k)$  positiva definida tem-se  $d^T \nabla^2 f(x^k) d > 0$ , e conseqüentemente  $\nabla^T f(x^k) d < 0$ . Ou seja, com  $\nabla^2 f(x^k)$  positiva definida pode-se garantir que  $d$  é uma direção de descida para  $f$ . Caso esta condição não se verifique a hessiana deve ser alterada.

A seguir é descrito um algoritmo de Newton *perturbado*, no qual a hessiana é alterada de forma a ser positiva definida em todas as iterações. As condições de convergência global (5.3) e (5.4) são testadas explicitamente.

#### **Algoritmo - Newton perturbado com convergência global**

Dados  $\alpha \in (0, 0.5)$ ,  $\vartheta \in (0, 1)$ ,  $\beta > 0$   $x \in \mathbb{R}^n$ . Faça  $k:=0$ .

Repita

Se  $\nabla^2 f(x^k)$  é positiva definida, calcule a direção  $d$  resolvendo o sistema  $\nabla^2 f(x^k) d = -\nabla f(x^k)$ .

Caso contrário, defina  $B^k = \nabla^2 f(x^k) + tI$ , onde  $t > 0$  é tal que  $B^k$  seja positiva definida e resolva o sistema  $B^k d = -\nabla f(x^k)$ .

Se  $\nabla f(x^k)^T d > \vartheta \|\nabla f(x^k)\| \|d\|$ , aumente  $t$  e torne a resolver o sistema.

Determine o passo  $\gamma \in (0, 1]$  tal que

$$f(x^k + \gamma d) < f(x^k) + \alpha \nabla^t f(x^k) \gamma d.$$

Faça  $x^{k+1} := x^k + \gamma d$ .

$k := k + 1$ .

A verificação da hessiana pode ser feita usando a fatoração de Cholesky, por exemplo. Se a matriz não for positiva definida, sua diagonal é aumentada. A determinação de  $t$  pode ser realizada calculando o autovalor mais negativo da hessiana, mas como o cálculo dos autovalores é computacionalmente caro,  $t$  pode ser determinado em um processo iterativo. Aumentar a diagonal da matriz equivale a aproximar o passo da direção de Cauchy, logo, a condição de ângulo deve ser satisfeita. Caso isto não ocorra,  $t$  é aumentado. Desta forma, o algoritmo satisfaz a condição (5.3).

O passo de Newton  $d$  poderá ser reduzido para verificar a condição de decréscimo suficiente (5.4). No entanto, na vizinhança de uma solução, a aproximação quadrática realizada no método de Newton é boa, os passos  $d$  satisfazem Armijo, e serão aceitos sem redução. Este resultado, que está desenvolvido em [62], garante que o método de Newton global mantém as boas propriedades de convergência local do Newton puro.

**Métodos quase-Newton.** No algoritmo de Cauchy,

$$d = -\nabla f(x^k),$$

e no algoritmo de Newton,

$$d = -(\nabla^2 f(x^k))^{-1} \nabla f(x^k).$$

Nos algoritmos quase-Newton

$$d = -B^k \nabla f(x^k),$$

onde  $B^k \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é uma matriz simétrica positiva definida.<sup>1</sup>

Existem diversas formas de calcular a matriz  $B^k$ , caracterizando diversos métodos quase-Newton, como por exemplo, os conhecidos métodos DFP, proposto por Davidon (1959) e popularizado por Fletcher e Powell e BFGS, cujo nome refere-se a seus autores Broyden, Fletcher, Goldfarb e Shanno.

O resultado de convergência local para estes métodos diz que se existe  $x^*$  minimizador local de  $f$  em  $\mathbb{R}^n$ , e  $\nabla^2 f(x^*)$  é positiva definida então, para  $x^0$  suficientemente próximo de  $x^*$ , a sequência  $(x^k)$  converge para  $x^*$  e a ordem de convergência é pelo menos superlinear [63].

Os métodos com busca linear podem ser compreendidos como a minimização de um modelo (linear no método de Cauchy e quadrático no método de Newton). Caso o minimizador do modelo não proporcione um decréscimo suficiente na função é realizada uma busca na direção definida pelo ponto corrente e o minimizador do modelo. Desta forma, mesmo rejeitado um ponto, a direção de busca permanece a mesma. Os métodos estudados na seção seguinte possuem um mecanismo diverso: cada vez que o minimizador do modelo é rejeitado, é calculada uma nova direção.

### 5.3.3 Algoritmos com região de confiança

A proposta fundamental dos métodos de região de confiança é a construção de uma região na qual o modelo quadrático representa adequadamente a função a ser minimizada e a minimização aproximada do modelo nesta região.

A idéia de construir uma região onde confiar no modelo quadrático foi proposta por Levenberg (1944) e Marquardt (1963) para problemas de mínimos quadrados, e a aplicação deste método ao problema de minimização irrestrita foi sugerida por Goldelf, Quandt e Trotter (1966).

**O subproblema quadrático.** Os métodos de região de confiança baseiam-se na minimização aproximada de um modelo quadrático construído em torno

---

<sup>1</sup>No algoritmo de Newton *perturbado* descrito anteriormente, quando a hessiana  $\nabla^2 f(x^k)$  é substituída por uma matriz  $B^k$  definida positiva, o passo é dito quase-Newton.

do ponto  $x^k$ :

$$m(x) = f(x^k) + \nabla^t f(x^k) (x - x^k) + \frac{1}{2} (x - x^k)^t B_k (x - x^k), \quad (5.8)$$

onde  $B^k$  é uma matriz simétrica. Quando  $B^k = \nabla^2 f(x^k)$  o método é chamado região de confiança tipo Newton. Se  $B^k$  for definida positiva o modelo é convexo.

Visto que o modelo quadrático só aproxima bem a função em uma vizinhança do ponto onde foi construído, define-se o conjunto  $\mathcal{D}_\Delta$ , chamado região de confiança:

$$\mathcal{D}_\Delta = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x^k\| \leq \Delta\}, \quad (5.9)$$

onde  $\Delta > 0$  é o raio da região. Assim, a cada iteração do método de região de confiança é formulado o subproblema:

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && m(x) \\ & \text{sujeito a} && x \in \mathcal{D}_\Delta. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Além do seu tamanho, definido pelo raio  $\Delta$ , uma importante característica da região  $\mathcal{D}_\Delta$  é seu formato, definido pela norma utilizada.

Regiões de confiança definidas com as normas usuais - norma euclidiana  $l_2$ , norma unitária  $l_1$  e norma infinito  $l_\infty$ , e um mesmo raio  $\Delta$ , são ilustradas na Figura (5.5). Nesta figura estão identificados, para as regiões de confiança correspondentes, os minimizadores  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_\infty$ .

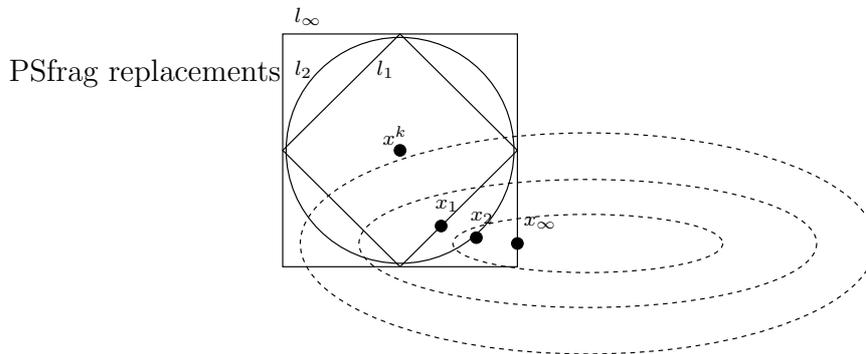


Figura 5.5: Regiões definidas com normas  $l_1$ ,  $l_2$  e  $l_\infty$ .

Na implementação de um algoritmo de região de confiança, a escolha da norma pode levar em consideração as características do problema e a disponibilidade de programas computacionais que resolvam eficientemente os subproblemas quadráticos. Em problemas restritos o formato da região de confiança pode ser definido de maneira a adaptar-se às restrições do problema. Assim, problemas com grande número de variáveis canalizadas podem ser eficientemente solucionados através de métodos que utilizam regiões de confiança tipo caixa (norma  $l_\infty$ ). Para solucionar eficientemente problemas com restrições tipo caixa citamos o QUACAN, um software desenvolvido por A. Friedlander, J.M. Martínez e S.A. Santos, do DMA – IMECC (UNICAMP) [64].

**O algoritmo.** Se a solução do subproblema (5.10) produz uma “boa redução” do valor da função  $f$ , então ela é aceita. Caso contrário, a solução é rejeitada, o domínio do subproblema é reduzido e é calculado outro ponto tentativo, resolvendo um novo subproblema. Assim, cada iteração de um algoritmo de região de confiança consiste em determinar o domínio  $\mathcal{D}_\Delta$  no qual o modelo quadrático representa bem a função e o ponto  $x$  que minimiza aproximadamente o modelo quadrático neste domínio. Este procedimento é sistematizado no seguinte algoritmo conceitual:

#### Algoritmo - Região de confiança

Dados  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\Delta_{min} \in \mathbb{R}$  e  $\alpha \in (0, 0.5)$ .

Faça  $k:=0$ .

Repita

Defina  $\bar{\Delta} > \Delta_{min}$  e  $B^k$  simétrica.

Enquanto  $f(x^k) - f(\bar{x}) < \alpha (m(x^k) - m(\bar{x}))$

Calcule um ponto  $\bar{x}$  que resolve aproximadamente (5.10):

$$\begin{aligned} &\text{minimize} && m(x) \\ &\text{sujeito a} && \|x - x^k\| \leq \bar{\Delta}, \end{aligned}$$

Reduza  $\bar{\Delta}$ .

Faça  $x^{k+1} := \bar{x}$ .

$k := k + 1$ .

Em algoritmos de região de confiança é usual estabelecer o critério de aceitação utilizando as seguintes definições, onde  $x^k$  é o ponto corrente e  $\bar{x}$  é a solução aproximada do problema (5.10):

- redução real na função:  $ared = f(x^k) - f(\bar{x})$ ;
- redução predita pelo modelo:  $pred = m(x^k) - m(\bar{x})$ ;
- relação entre as reduções real e predita:

$$\rho^k = \frac{ared}{pred}. \quad (5.11)$$

A relação  $\rho^k$  entre a redução real  $ared$  e a redução predita  $pred$  informa se o modelo quadrático representa bem a função na região  $\mathcal{D}_{\Delta}$ . Com esta nomenclatura, a condição de aceitação do passo pode ser escrita como:

$$ared \geq \alpha pred, \quad (5.12)$$

ou seja, o minimizador aproximado do modelo é aceito se  $\rho^k \geq \alpha$ . Caso contrário, o raio da região de confiança é reduzido, fazendo, por exemplo,  $\Delta := \Delta/2$ , e o subproblema quadrático é resolvido novamente.

Em implementações é usual estabelecer  $\alpha = 10^{-4}$ . Para análise pode-se fazer  $\alpha = 0.25$ , por exemplo.

Observe que a condição  $ared \geq \alpha pred$  é precisamente a condição de decréscimo imposta no algoritmo de busca apresentado na seção anterior.

A definição do raio  $\bar{\Delta}$  no início de cada iteração não é um procedimento essencial, podendo ser feita de forma bastante simples. Para evitar raios demasiadamente pequenos “herdados” da iteração anterior,  $\bar{\Delta}$  é tomado maior que um valor mínimo fixado. Além disto, pode-se considerar o sucesso da iteração precedente. Se  $\rho^k$  for próximo à unidade ( $\rho^k > 0.75$ ), o modelo representa bem a função, sendo possível expandir a região de confiança para a iteração seguinte. Se  $\rho^k$  for positivo mas não próximo de 1 ( $0.25 < \rho^k < 0.75$ ), então a região permanece inalterada. Se  $\rho^k$  for próximo a zero ( $\rho^k < 0.25$ ), então a região deve ser reduzida na próxima iteração.

Para evitar raios demasiadamente grandes, sempre que o passo de Newton for interior à região de confiança, o raio permanecerá inalterado para a próxima iteração.

**O ponto de Cauchy e a redução no modelo.** A cada iteração de um algoritmo de região de confiança não é necessário encontrar uma solução ótima do subproblema quadrático (5.10). Uma solução aproximada é satisfatória se proporcionar uma *redução suficiente* no modelo. Esta redução suficiente pode ser quantificada precisamente em termos do ponto de Cauchy. Dizemos que o decréscimo é suficiente se for igual ou superior ao decréscimo proporcionado pelo ponto de Cauchy. A seguir define-se o ponto de Cauchy, a redução proporcionada por ele e o decréscimo esperado para uma solução aproximada.

Sabemos que a direção de Cauchy é o vetor  $-\nabla f(x^k)$ , ou seja, é a direção de máximo decréscimo de  $f$ . Definimos inicialmente o arco de Cauchy. O arco de Cauchy é um segmento na direção de Cauchy, restrito à região de confiança  $\mathcal{D}_\Delta$ . O arco de Cauchy é ilustrado na Figura (5.6) para um modelo quadrático convexo.

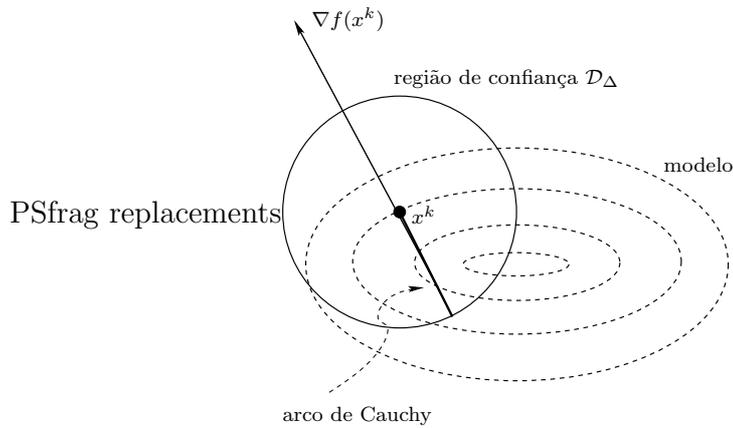


Figura 5.6: Região de confiança e arco de Cauchy.

O ponto de Cauchy  $x^C$  é o resultado da minimização do modelo quadrático no arco de Cauchy. Dependendo da curvatura do modelo ao longo da direção de Cauchy, o minimizador pode estar no interior ou na fronteira da região de confiança. Estas situações são ilustradas na Figura (5.7) a seguir.

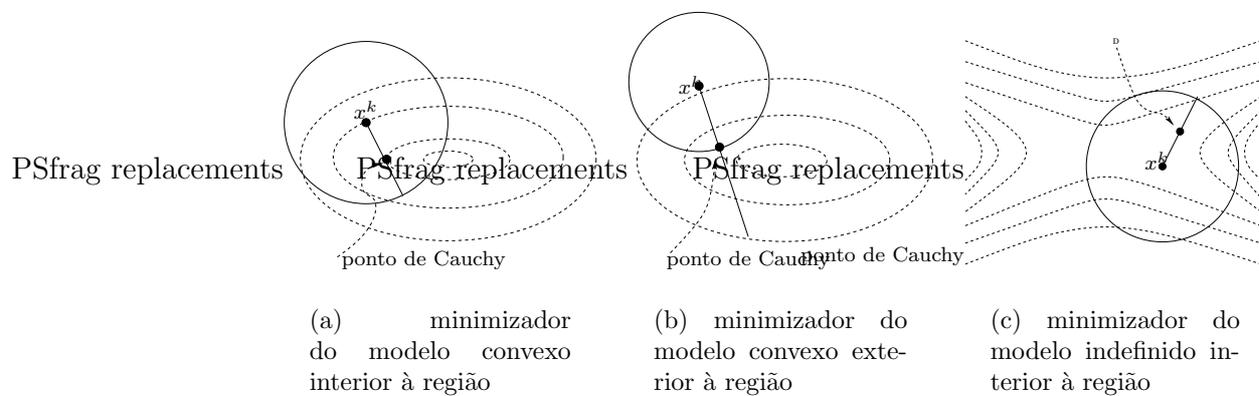


Figura 5.7: Ponto de Cauchy.

O ponto de Cauchy  $x^C$  pode ser calculado por:

$$x^C = x^k - \alpha^C \frac{\Delta}{\|\nabla f_k\|} \nabla f_k, \quad (5.13)$$

onde

$$\alpha^C = 1$$

quando o minimizador do modelo quadrático estiver fora da região de confiança ( $x^C$  na fronteira), e

$$\alpha^C = \frac{\|\nabla f_k\|^3}{\Delta \nabla f_k^T B_k \nabla f_k}$$

quando o minimizador do modelo for interior à região.

Uma estimativa para a redução obtida no modelo  $m$  com uma solução aproximada  $\bar{x}$  é:

$$m(x^k) - m(\bar{x}) \geq c_1 \|\nabla f_k\| \min \left( \Delta, \frac{\|\nabla f_k\|}{\|B_k\|} \right), \quad (5.14)$$

onde  $c_1 \in (0, 1]$  é uma constante. Esta estimativa considera que a redução obtida no modelo é proporcional ao tamanho do passo e ao gradiente.

O ponto de Cauchy satisfaz (5.14) com  $c_1 = \frac{1}{2}$ , ou seja:

$$m(x^k) - m(x^C) \geq \frac{1}{2} \|\nabla f_k\| \min \left( \Delta, \frac{\|\nabla f_k\|}{\|B_k\|} \right). \quad (5.15)$$

Este resultado está demonstrado em [60].

Toda solução aproximada  $\bar{x}$  que proporcione redução no modelo igual ou superior à redução obtida com o ponto de Cauchy ( $m(x) \leq m(x^C)$ ), satisfaz (5.14) com  $c_1 = 1/2$ . A região hachurada da Figura (5.8) identifica a área na qual uma solução aproximada  $\bar{x}$  deve estar para satisfazer (5.14) com  $c_1 = 1/2$ .

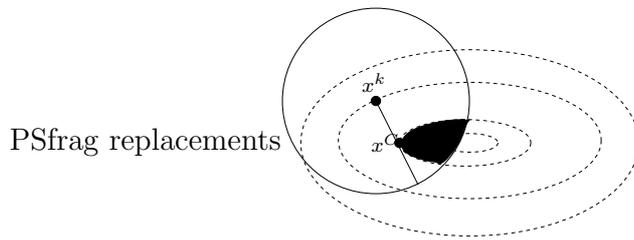


Figura 5.8: Região de decréscimo igual e superior ao decréscimo de Cauchy.

**Resultados de convergência.** As primeiras provas de convergência global de um algoritmo de região de confiança foram feitas por Powell (1975) [65]. No algoritmo estudado por Powell, uma solução aproximada  $\bar{x}$  é aceita se

$$\frac{ared}{pred} \geq 0.$$

Com isto Powell demonstrou que existe um ponto limite  $x^*$  da seqüência  $(x^k)$  gerada pelo algoritmo que é ponto crítico de primeira ordem do problema (5.2), ou seja, satisfaz  $\nabla f(x^*) = 0$ .

Com o requerimento de  $\alpha$  estritamente positivo no critério de aceitação,

$$\frac{ared}{pred} \geq \alpha, \quad \text{com } \alpha > 0, \quad (5.16)$$

Thomas (1975) [66] demonstrou que *todo* ponto limite da seqüência gerada pelo algoritmo é ponto crítico de primeira ordem. Na prática, a diferença entre os dois critérios é desprezível. Reescrevemos a seguir as hipóteses para este resultado.

- Por hipótese do problema,  $f$  é uma função duplamente continuamente diferenciável em  $\mathbb{R}^n$ .
- Por hipótese do modelo  $m$ , a seqüência de matrizes  $(B^k)$  é limitada em  $\mathcal{D}_\Delta$ .

- Por hipótese do algoritmo, a solução aproximada  $\bar{x}$  satisfaz:

$$m(x^k) - m(\bar{x}) \geq c_1 \|\nabla f_k\| \min \left( \Delta, \frac{\|\nabla f_k\|}{\|B_k\|} \right),$$

para alguma constante  $c_1$ .

### **Teorema - Convergência global do algoritmo de região de confiança**

O algoritmo pára para algum  $k$  tal que  $\nabla f(x^k) = 0$ , ou gera uma seqüência infinita  $(x^k)$  tal que todo ponto limite é ponto crítico de primeira ordem, ou seja:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\nabla f_k\| = 0.$$

Uma vez estabelecida a convergência global do algoritmo é importante observar se sua convergência local não foi prejudicada. Para o algoritmo de região de confiança, à medida que a seqüência gerada se aproxima de uma solução local ótima, a região de confiança tende a ficar inativa (pois a aproximação quadrática da função é boa). Desta forma, o algoritmo mantém a convergência local do método de Newton (se  $B^k = \nabla^2 f(x^k)$ ) [60].

**O subproblema quadrático.** A seguir estuda-se o subproblema quadrático formulado a cada iteração de um algoritmo de região de confiança. A partir do ponto corrente  $x^k$  e um raio estimado  $\Delta$  é formulado o problema de minimização do modelo  $m$  sujeito à região de confiança:

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & m(d) := f(x^k) + \nabla^T f(x^k) d + \frac{1}{2} d^T \nabla^2 f(x^k) d, \\ \text{sujeito a} \quad & \|d\| \leq \Delta. \end{aligned} \tag{5.17}$$

Este problema sempre tem solução, pois  $m$  é uma função contínua e a região de confiança é limitada e fechada no  $\mathbb{R}^n$ .

Para caracterizar uma solução exata do subproblema (5.17) observamos suas condições de otimalidade: Se  $d^*$  é um minimizador global do problema (5.17), então existe um escalar  $\lambda \geq 0$  tal que as seguintes condições são

satisfeitas:

$$\begin{aligned} (\nabla^2 f(x^k) + \lambda I) d^* &= -\nabla f_k, \\ \lambda(\|d^*\| - \Delta) &= 0, \\ (\nabla^2 f(x^k) + \lambda I) &\text{ positiva definida.} \end{aligned} \tag{5.18}$$

As seguintes situações podem ocorrer:

Se  $\nabla^2 f(x^k)$  é positiva definida e o passo de Newton  $d = \nabla^2 f(x^k)^{-1} \nabla f_k$  satisfaz  $\|d\| \leq \Delta$ , então solução é  $d^* = d$ ,  $\lambda = 0$  e a região de confiança está inativa. Tal situação está ilustrada na Figura (5.9), para  $\mathcal{D}_{\Delta_1}$ .

Se  $\nabla^2 f(x^k)$  for positiva semi-definida mas o passo de Newton tiver norma maior que o raio da região de confiança ou  $\nabla^2 f(x^k)$  não for positiva semi-definida, então  $d^*$  será solução de  $(\nabla^2 f(x^k) + \lambda I) d = -\nabla f_k$ , com  $\lambda > 0$  e  $\|d^*\| = \Delta$ . Esta situação de solução na fronteira da região de confiança ocorre para  $\mathcal{D}_{\Delta_2}$  e  $\mathcal{D}_{\Delta_3}$  na Figura (5.9).

Além disto, se  $(\nabla^2 f(x^k) + \lambda I)$  for positiva definida então  $d^*$  será minimizador único do problema (5.17).<sup>2</sup>

A demonstração deste resultado pode ser encontrada em [60].

Uma característica essencial dos métodos de região de confiança pode ser observada na Figura (5.9): para regiões com raios diferentes, não apenas o comprimento, mas também a direção do passo é alterada.

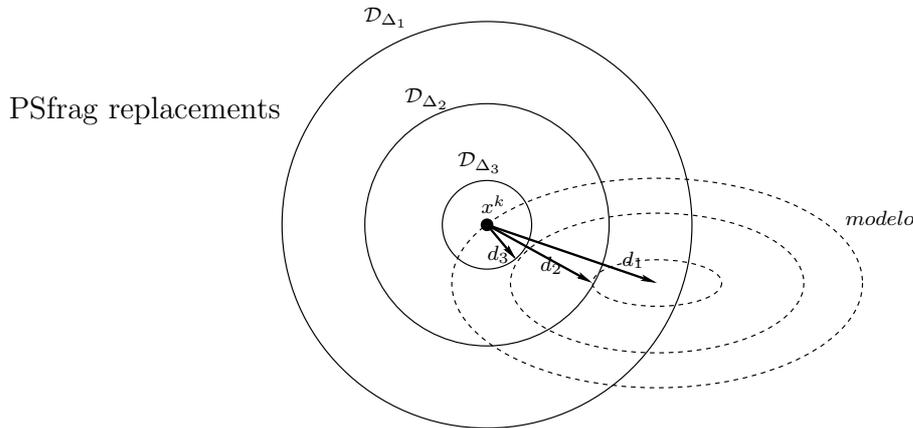


Figura 5.9: Passos de região de confiança para diferentes raios  $\Delta$ .

<sup>2</sup>Existe um caso em que  $((\nabla^2 f(x^k) + \lambda I))$  é positiva semi-definida e o problema não tem solução única. Este caso, conhecido como *hard case*, não será discutido aqui.

**Solução do subproblema quadrático.** Pelas condições de otimalidade sabe-se que a solução exata do problema (5.17) tem a forma  $d = -(\nabla^2 f(x^k) + \lambda I)^{-1} \nabla f_k$  para algum  $\lambda \geq 0$ . Pode-se então definir a curva

$$d(\lambda) = -(\nabla^2 f(x^k) + \lambda I)^{-1} \nabla f_k, \quad (5.19)$$

onde  $\lambda \in (0, \infty)$ . Esta curva é chamada caminho de Levenberg-Marquardt.

O algoritmo de Levenberg-Marquardt, desenvolvido para problemas de mínimos quadrados, resolve a equação (5.19) ajustando diretamente o valor de  $\lambda$ , de acordo com a redução obtida na função  $f$  e em seu modelo.

O caminho de Levenberg-Marquardt  $d(\lambda)$  pode ser formado pelas soluções do problema quadrático para diversos raios da região de confiança, conforme ilustrado na Figura (5.10). Esta relação entre o algoritmo de Levenberg-Marquardt e o algoritmo de região de confiança para problemas irrestritos foi estabelecida por Moré em 1978.

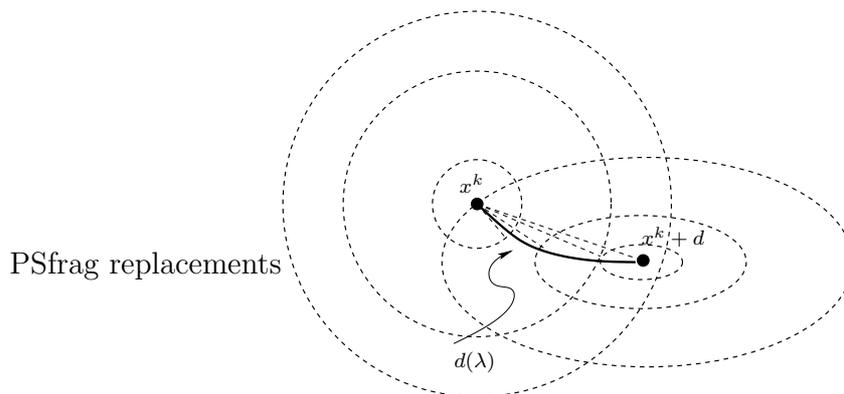


Figura 5.10: Caminho de Levenberg-Marquardt.

Existem duas estratégias para minimizar aproximadamente um problema quadrático sujeito a uma região de confiança:

- Procurar, através de iterações na variável  $\lambda$ , uma solução no caminho de Levenberg-Marquardt. Uma solução sobre a curva de Levenberg-Marquardt é dita exata.

- Procurar uma solução sobre uma curva que aproxime o caminho de Levenberg- Marquardt. Uma solução sobre a curva aproximada é dita aproximada.

A Figura (5.11) ilustra uma solução exata e aproximada de um problema quadrático convexo com região de confiança  $l_2$ .

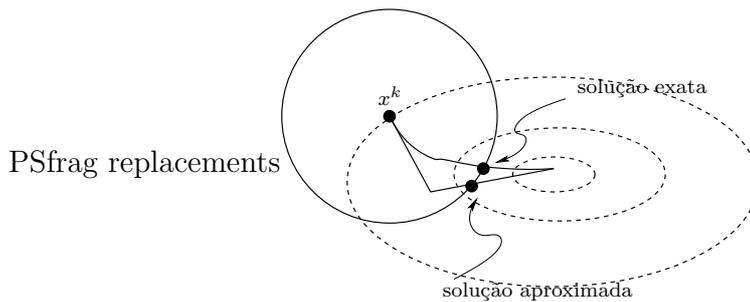


Figura 5.11: Solução exata e aproximada de um problema.

Um método de solução “quase” exata foi proposto por Moré e Sorensen [67]. O algoritmo de Moré e Sorensen consiste em encontrar uma solução que satisfaça as condições de otimalidade (5.18) realizando fatorações de Cholesky de  $(\nabla^2 f(x^k) + \lambda I)$  para diferentes valores de  $\lambda$ .

Caso  $\lambda = 0$  não satisfaça as equações (5.18) com  $\|d(\lambda)\| \leq \Delta$ , define-se

$$d(\lambda) = -(\nabla^2 f(x^k) + \lambda I)^{-1} \nabla f_k,$$

e procura-se o valor de  $\lambda$  que satisfaça

$$\|d(\lambda)\| - \Delta = 0 \quad (5.20)$$

dentro de uma certa tolerância. Devido a esta tolerância o método é dito “quase” exato.

O método de Moré e Sorensen é um processo iterativo que envolve a solução de diversos sistemas lineares, sendo adequado apenas a problemas de pequena dimensão.

Para a solução aproximada do subproblema quadrático sujeito a região

de confiança podem ser utilizados métodos bastante eficientes computacionalmente, como o método de dog-leg, o método de minimização em um subespaço bidimensional [68] e o método de gradientes conjugados de Steihaug [69].

No método de dog-leg é solucionado apenas um sistema linear. Este método é apropriado quando a hessiana  $\nabla^2 f(x^k)$  do modelo quadrático é positiva definida em todas as iterações, pois é necessário calcular o passo de Newton a cada iteração. O método da minimização em um subespaço bidimensional pode ser aplicado quando as matrizes do modelo não são positivas definidas. Neste caso é feita uma estimativa do autovalor mais negativo. O método de gradientes conjugados desenvolvido por Steihaug adapta-se a problemas de grande porte onde a matriz não é necessariamente positiva definida. Neste método não é necessário calcular autovalores. Além dos artigos originais, estes métodos de solução aproximada são descritos, por exemplo, no livro de Nocedal [60].

**Relação entre ponto de Armijo e ponto de Cauchy.** Nesta seção sobre minimização de problemas irrestritos foi visto que um passo de um algoritmo com busca é aceito caso proporcione decréscimo suficiente no valor da função, decréscimo este que pode ser determinado por uma busca do tipo Armijo. Foi visto também que um passo de região de confiança é aceito se o modelo quadrático prediz com precisão satisfatória o comportamento da função em determinada região e se o passo proporcionar decréscimo suficiente no modelo quadrático. Este decréscimo deve ser uma fração fixa do decréscimo proporcionado pelo ponto de Cauchy. Como estas condições são necessárias para a obtenção de resultados de convergência global dos algoritmos de busca e de região de confiança, pode-se questionar a relação existente entre o ponto de Cauchy e o ponto de Armijo.

Conforme definido anteriormante, o ponto de Cauchy é o minimizador do modelo quadrático da função  $f$ , sujeito à região de confiança, ao longo da direção de maior decréscimo local  $-\nabla f_k$ . Sem considerar a região de

confiança, o ponto de Cauchy pode ser calculado por:

$$x^C = x^k - \frac{\|\nabla f_k\|_2^2}{\nabla f_k^T \nabla^2 f_k \nabla f_k} \nabla f_k. \quad (5.21)$$

Veremos a seguir que para o modelo quadrático, o ponto de Armijo  $x^a$  e o ponto de Cauchy  $x^C$  coincidem.

Suponhamos que a busca de Armijo seja realizada no modelo quadrático da função ao longo de  $\gamma d$ :

$$m(\gamma) = \frac{1}{2}(\gamma d)^t \nabla^2 f_k(\gamma d).$$

Neste caso, o ponto de Armijo será determinado por:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\gamma d)^t \nabla^2 f_k(\gamma d) &= \frac{1}{2} \nabla^t f_k(\gamma d), \\ (\gamma d)^t \nabla^2 f_k(\gamma d) + \nabla^t f_k(\gamma d) &= 0, \quad \text{e} \\ \gamma &= -\frac{\nabla^t f_k d}{d^t \nabla^2 f_k d}. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Assim, com  $d = -\nabla f_k$ , o ponto de Armijo será:

$$x^a = x^k - \frac{\|\nabla f_k\|_2^2}{\nabla f_k^T \nabla^2 f_k \nabla f_k} \nabla f_k.$$

Comparando esta expressão com a expressão (5.21), vê-se que para o modelo quadrático o ponto de Armijo  $x^a$  e o ponto de Cauchy  $x^C$  coincidem. Esta propriedade é ilustrada na Figura (5.12).

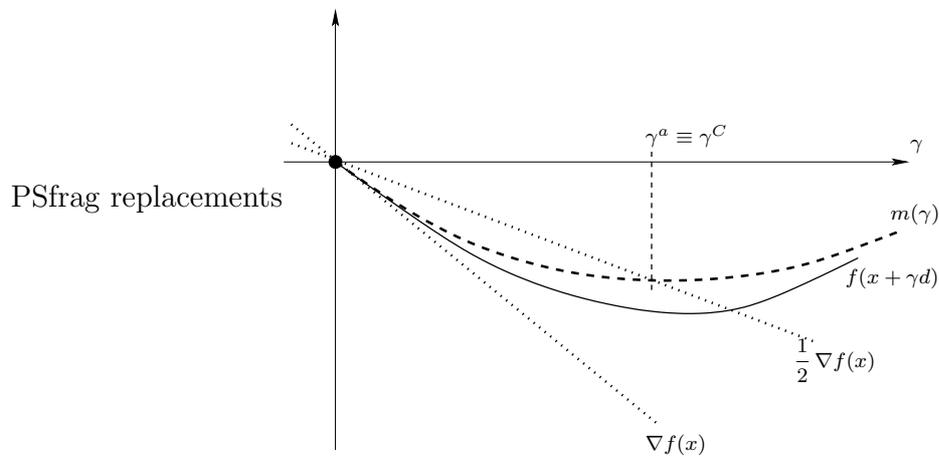


Figura 5.12: Ponto de Armijo para o modelo quadrático e ponto de Cauchy.

Conclui-se que, se o modelo quadrático for uma boa aproximação da função ao longo da direção de busca, então o ponto de Cauchy estará próximo ao ponto de Armijo.

**Relação entre região de confiança e Newton perturbado.** Finaliza-se esta seção sobre minimização irrestrita observando a relação entre um passo de um algoritmo de região de confiança e um passo de um algoritmo do tipo Newton.

Conforme discutido, um passo do algoritmo de Newton é a solução do sistema

$$\nabla^2 f_k d = -\nabla f_k, \quad (5.23)$$

e caso a matriz  $\nabla^2 f_k$  não seja positiva definida, usa-se o passo de Newton perturbado dado pela solução do sistema

$$(\nabla^2 f_k + tI)d = -\nabla f_k, \quad (5.24)$$

onde  $t > 0$  é tal que  $(\nabla^2 f_k + tI)$  é positiva definida.

Por outro lado, um passo de região de confiança é a solução aproximada

do problema quadrático

$$\begin{aligned} \text{minimize } m(d) &= \nabla^t f_k d + \frac{1}{2} d^t \nabla^2 f_k d \\ \text{sujeito a } \|d\| &\leq \Delta, \end{aligned} \quad (5.25)$$

e pelas condições de otimalidade sabe-se que se  $d^*$  é um minimizador do problema (5.25), então existe um escalar  $t^* \geq 0$  satisfazendo:

$$(\nabla^2 f_k + t^* I) d^* = -\nabla f_k, \quad (5.26)$$

com  $(\nabla^2 f_k + t^* I)$  positiva definida.

A comparação das expressões (5.24) e (5.26) permite observar que o método de Newton com perturbação da hessiana e o método de região de confiança são equivalentes, a menos de um parâmetro. Ou seja, existe uma escolha de parâmetros tal que os dois métodos são equivalentes, mas tal escolha não pode ser determinada *a priori*.

A equivalência entre os métodos pode ser estabelecida da seguinte forma:

Se  $d^*$  é uma solução de (5.25), então existe  $t \geq 0$  tal que  $d^*$  é solução de (5.23). Da mesma forma, se  $d^*$  é uma solução de (5.23), então existe um raio  $\Delta \geq 0$  tal que  $d^*$  é uma solução de (5.25).

## 5.4 O problema de minimização com restrições de igualdade

Nesta seção estudamos problemas com restrições de igualdade. Inicialmente consideramos o caso mais simples, no qual as restrições são lineares:

$$\begin{aligned} \text{minimize } f_0(x) \\ \text{sujeito a } Ax = b, \end{aligned} \quad (5.27)$$

sendo a matriz  $A \in R^{m \times n}$  com posto completo  $m$  e  $1 \leq m < n$ . O conjunto viável deste problema,

$$\mathcal{V} := \{x \in \mathbb{R}^n / Ax = b\},$$

é a variedade linear de soluções do sistema linear  $Ax = b$ , cuja dimensão é  $n - m$ . Associado a  $\mathcal{V}$ , está o conjunto chamado núcleo de  $A$ , denotado  $\mathcal{N}(A)$ , formado pelas soluções do sistema homogêneo  $Ax = 0$ . O núcleo de  $A$  possui dimensão  $n - m$ , é paralelo a  $\mathcal{V}$ , e passa pela origem. O espaço de dimensão  $m$  formado pelas  $m$  linhas linearmente independentes de  $A$  é chamado imagem de  $A^T$ , e é denotado  $\mathcal{R}(A^T)$ . Os espaços  $\mathcal{N}(A)$  e  $\mathcal{R}(A^T)$  são ortogonais e verificam

$$\mathbb{R}^n = \mathcal{N}(A) \oplus \mathcal{R}(A^T).$$

A partir de um ponto viável  $x$ , dada uma direção  $d \in \mathcal{N}(A)$ , então  $\tilde{x} = x + \gamma d$ , com  $\gamma \in \mathbb{R}$ , também é um ponto viável. Ou seja, a partir de um ponto viável,  $d \in \mathcal{N}(A)$  é uma direção viável para o problema (5.27). A recíproca é verdadeira. Se a partir de  $x$  viável, um passo ao longo da direção  $d \in \mathbb{R}^n$  conduzir a  $\tilde{x} = x + \gamma d$  com  $\tilde{x}$  viável, então necessariamente  $d \in \mathcal{N}(A)$ . Por esta razão,  $\mathcal{N}(A)$  é o conjunto das direções viáveis no conjunto viável  $\mathcal{V}$ .

A Figura (5.13) ilustra, para um problema no  $\mathbb{R}^2$ , a região viável  $\mathcal{V}$  e o conjunto das direções viáveis  $\mathcal{N}(A)$  do problema (5.27).

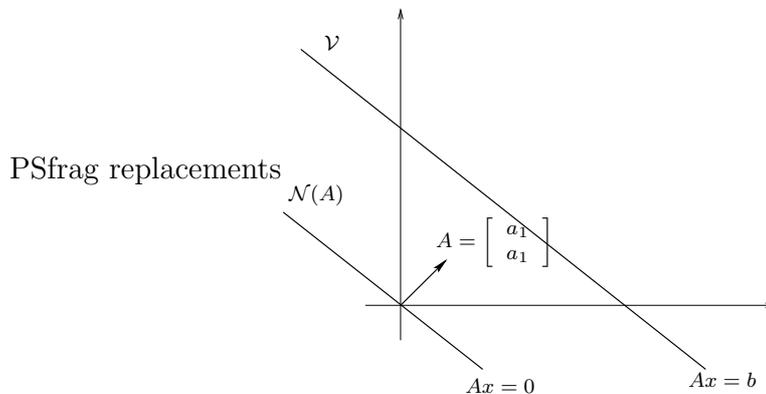


Figura 5.13: Região viável  $\mathcal{V}$  e conjunto das direções viáveis.

Consideramos agora o problema com restrições não-lineares:

$$\begin{aligned} &\text{minimize} && f_0(x) \\ &\text{sujeito a} && f_{\mathcal{E}}(x) = 0, \end{aligned} \tag{5.28}$$

onde  $\mathcal{E}$  é o conjunto finito de índices  $\{1, \dots, m\}$  e  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m+1} \in C^2$ , com  $m < n$ . Associado a este problema definimos o conjunto dos pontos viáveis  $\mathcal{V}$  :

$$\mathcal{V} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid f_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, m\}.$$

Para o caso não-linear, a partir de um ponto viável  $x \in \mathcal{V}$  não é possível, em geral, definir direções viáveis [61].

Denotamos por  $A_{\mathcal{E}}(x)$  a matriz jacobiana avaliada em  $x$ , associada às restrições do problema (5.28):

$$A_{\mathcal{E}}(x)^T := [\nabla f_1(x) \cdots \nabla f_m(x)].$$

**Qualificação das restrições.** Para estabelecer as condições de otimalidade do problema restrito é necessária uma hipótese de qualificação das restrições, que assegure que o problema não é degenerado. A hipótese de qualificação das restrições mais simples é a de regularidade:

Um ponto  $x$  é *regular* se os gradientes das restrições avaliados em  $x$  são linearmente independentes, ou seja, se o conjunto  $\{\nabla f_1(x), \dots, \nabla f_m(x)\}$  é linearmente independente.

**Subespaço tangente.** Se um ponto  $x$  é viável e regular então o subespaço tangente ao conjunto viável em  $x$  é dado por

$$T := \{d \in \mathbb{R}^n \mid A(x) d = 0\}. \quad (5.29)$$

**Lagrangeano e estimativa dos multiplicadores de Lagrange.** A curvatura das restrições pode ser considerada através de suas hessianas, que fornecem informações de segunda ordem. Para isto, à  $i$ -ésima restrição associa-se um escalar  $\lambda_i$  e, dados  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $\lambda \in \mathbb{R}^m$ , define-se o *Lagrangeano*:

$$L(x, \lambda) := f_0(x) + \lambda^t f_{\mathcal{E}}(x). \quad (5.30)$$

O gradiente do Lagrangeano em relação à variável  $x$  será:

$$\nabla_x L(x, \lambda) = \nabla f_0(x) + A_{\mathcal{E}}(x)^T \lambda, \quad (5.31)$$

e a matriz hessiana, definida pela derivada de segunda ordem em relação a  $x$ , será:

$$\nabla_{xx}^2 L(x, \lambda) = \nabla^2 f_0(x) + \sum_{i \in \mathcal{E}} \lambda_i \nabla_{xx}^2 f_i(x). \quad (5.32)$$

Nas expressões (5.30)-(5.32), o vetor  $\lambda \in \mathbb{R}^m$  é formado por *estimativas* dos multiplicadores de Lagrange  $\lambda^*$ . Existem diversas formas de estimar os multiplicadores de Lagrange. Uma estimativa usual é fornecida pelo problema de mínima norma, considerando-se a condição de otimalidade de primeira ordem. Para dado  $x$ , o problema de mínima norma para estimativa dos multiplicadores de Lagrange é:

$$\min_{\lambda} \|\nabla f_0(x) + A_{\mathcal{E}}^T(x) \lambda\|_2,$$

cuja solução (possível desde que a matriz  $A_{\mathcal{E}}^T(x)(A_{\mathcal{E}}(x)A_{\mathcal{E}}^T(x))^{-1}$  esteja bem definida) resulta no seguinte estimador:

$$\lambda(x) = (A_{\mathcal{E}}^T(x)(A_{\mathcal{E}}(x)A_{\mathcal{E}}^T(x))^{-1})^T \nabla f_0(x). \quad (5.33)$$

### Condições de otimalidade.

Condição necessária de primeira ordem: Se  $x^*$  é um minimizador local regular de (5.28), então existe  $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$  tal que as seguintes condições são satisfeitas:

$$\begin{aligned} \nabla f_0(x^*) + \sum_{i \in \mathcal{E}} \lambda_i^* \nabla f_i(x^*) &= 0, \\ f_{\mathcal{E}}(x^*) &= 0, \end{aligned} \quad (5.34)$$

sendo  $\lambda_i^*$ ,  $i \in \mathcal{E}$ , o multiplicador de Lagrange associado à  $i$ -ésima restrição.

Geometricamente, a equação  $\nabla f_0(x^*) + A_{\mathcal{E}}^T(x^*) \lambda^* = 0$  especifica que

$$\nabla f_0(x^*) \in \mathcal{R}(A_{\mathcal{E}}^T(x^*)), \quad (5.35)$$

isto é, o gradiente da função objetivo avaliado em  $x^*$ ,  $\nabla f_0(x^*)$ , é uma com-

binação linear dos gradientes das restrições.

Condição necessária de segunda ordem: Seja  $f \in C^2$  e  $T$  e  $L$  definidos anteriormente. Se  $x^*$  é um ponto regular e minimizador local de (5.28) e  $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$  são os multiplicadores de Lagrange que verificam (5.34), então

$$d^t \nabla_{xx}^2 L(x^*, \lambda^*) d \geq 0, \text{ para todo } d \in T.$$

Condição suficiente de segunda ordem: Suponha que para um ponto viável  $x^*$  existe um vetor de multiplicadores de Lagrange  $\lambda^*$  tal que as condições de KKT (5.34) são satisfeitas. Suponha também que  $d^t \nabla_{xx}^2 L(x^*, \lambda^*) d > 0$ , para todo  $d \in T, d \neq 0$ . Então  $x^*$  é um minimizador local estrito de (5.28).

### 5.4.1 Algoritmos

Em programação com restrições lineares é possível garantir que a viabilidade obtida a cada iteração não seja perdida. Consequentemente, uma vez obtido um ponto viável, o algoritmo pode, a cada iteração, obter pontos que se aproximem da otimalidade. Em programação com restrições não-lineares, no entanto, mesmo que seja obtido um ponto viável, a viabilidade não é mantida na iteração seguinte. Assim existem, a cada iteração de um algoritmo com restrições não-lineares, dois objetivos: minimizar uma função e satisfazer as restrições. Os métodos tradicionalmente utilizados para solucionar este problema com dois objetivos são os métodos de penalidade.

**Métodos de penalidade.** Nesta classe de métodos, os dois objetivos são combinados na chamada *função penalizada*, que é uma combinação com pesos da otimalidade e da viabilidade. A otimalidade é normalmente medida pela função objetivo do problema e a viabilidade por uma função  $h$ , chamada medida de inviabilidade. A forma geral de uma função penalidade é

$$x \in \mathbb{R}^n \rightarrow \Phi_w(x) = f_0(x) + w h(f_{\mathcal{E}}(x)),$$

sendo  $w \in \mathbb{R}^m$  os pesos. Diferentes combinações de normas e funções  $h$  originam os diversos métodos de penalidade existentes. Como exemplo, citamos a

função de penalização quadrática, estudada por Fiacco e McCormick (1968):

$$\Phi_{\mu}(x) = f_0(x) + \frac{1}{2\mu} \|f_{\mathcal{E}}(x)\|_2^2$$

e o Lagrangeano aumentado, proposto por Powel (1969) e Hestenes(1969):

$$\Phi_{\lambda,\mu}(x) = f_0(x) - \lambda^T f_{\mathcal{E}}(x) + \frac{1}{2\mu} \|f_{\mathcal{E}}(x)\|_2^2,$$

onde  $\lambda \in \mathbb{R}^m$  são estimativas para os multiplicadores de Lagrange e  $\mu$  é o parâmetro de penalidade.

Nos algoritmos de penalidade são solucionados uma seqüência de problemas irrestritos, nos quais a função  $\Phi$  é minimizada para uma seqüência de pesos e parâmetros. O algoritmo de penalidade pode ser estabelecido da seguinte forma:

**Algoritmo - Método de função penalidade**

Dados  $x^0 \in \mathbb{R}^n, \mu^0 > 0$ .

Faça  $k := 0$ .

Repita

    Calcule  $x^{k+1}$  tal que:

$$x^{k+1} = \arg \min \Phi(x, \mu^k). \quad (5.36)$$

    Faça  $\mu^{k+1} < \mu^k$ .

$k := k + 1$ .

Com hipóteses razoáveis pode ser mostrado que qualquer ponto limite da seqüência  $(x^k)$  gerada pelo algoritmo é solução ótima do problema original (5.28) [70].

A disponibilidade de algoritmos eficientes para solução de problemas irrestritos e o bom desenvolvimento teórico tornam os métodos de penalidade atraentes. Todavia, eles sofrem de dificuldades numéricas, visto que o problema irrestrito torna-se progressivamente mal condicionado à medida que se aproxima da solução, devido à redução do parâmetro de penalidade.

**Método de Newton estendido.** Este método consiste na aplicação do Método de Newton às condições de otimalidade do problema (5.28). Seguindo Tapia [71], definimos o *sistema estendido*, formado pelas condições de otimalidade de primeira ordem do problema com restrições de igualdade (5.34):

$$\begin{aligned}\nabla f_0(x) + A_{\mathcal{E}}(x)^T \lambda &= 0 \\ f_{\mathcal{E}}(x) &= 0,\end{aligned}\tag{5.37}$$

onde  $x \in \mathbb{R}^n$ , e  $\lambda \in \mathbb{R}^m$  é uma estimativa para os multiplicadores de Lagrange. O problema de Newton estendido consiste em encontrar um ponto estacionário da função lagrangeana, ou seja, encontrar  $(x, \lambda)$  que satisfaça o sistema (5.37).

Para a solução do sistema (5.37) através do método de Newton faz-se a hipótese que  $\nabla_{xx}^2 L$  é positiva definida.

Sejam  $x^k$  e  $\lambda^k$  estimativas dos valores ótimos  $x^*$  e  $\lambda^*$ . Uma iteração do método de Newton a partir de  $(x^k, \lambda^k)$  é definida por:

$$\begin{aligned}x^{k+1} &= x^k + d_x \\ \lambda^{k+1} &= \lambda^k + d_\lambda,\end{aligned}\tag{5.38}$$

sendo  $(d_x, d_\lambda)$  a solução do sistema linear:

$$\begin{bmatrix} H & A_{\mathcal{E}}^T \\ A_{\mathcal{E}} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} d_x \\ d_\lambda \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \nabla f_0(x^k) + A_{\mathcal{E}}^T \lambda^k \\ f_{\mathcal{E}}(x^k) \end{pmatrix},\tag{5.39}$$

onde denotamos  $A_{\mathcal{E}} = A_{\mathcal{E}}(x^k)$  e  $H = \nabla_{xx}^2 L(x^k, \lambda^k)$ , definida por (5.32). Observando que  $d_\lambda = \lambda^{k+1} - \lambda^k$ , pode-se escrever o sistema de Newton (5.39) da forma:

$$\begin{bmatrix} H & A_{\mathcal{E}}^T \\ A_{\mathcal{E}} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} d_x \\ \lambda^{k+1} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \nabla f_0(x^k) \\ f_{\mathcal{E}}(x^k) \end{pmatrix}.\tag{5.40}$$

Os valores  $\lambda^{k+1}$ , fornecidos pela resolução do sistema (5.40), podem ser utilizados como estimativa para os multiplicadores de Lagrange na iteração  $k + 1$ .

O algoritmo de Newton aplicado ao sistema estendido pode ser estabelecido como segue:

### Algoritmo - Método de Newton estendido

Dados  $x_0 \in \mathbb{R}^n, \lambda_0 \in \mathbb{R}^m$ .

Faça  $k := 0$ .

Repita

    Calcule  $(d_x, d_\lambda)$  solucionando o sistema linear (5.39).

    Faça  $x^{k+1} := x^k + d_x, \lambda^{k+1} := \lambda^k + d_\lambda$ .

$k := k + 1$ .

Com as hipóteses mencionadas, este algoritmo tem convergência local quadrática em  $(x, \lambda)$  [72], mas sua convergência global não é assegurada.

Nas seções seguintes estuda-se uma forma de solucionar o problema (5.28) garantindo convergência global através de busca ao longo de uma direção e através de região de confiança.

## 5.4.2 Programação quadrática seqüencial

A idéia básica dos algoritmos de programação quadrática seqüencial (PQS) é modelar o problema não-linear original em  $x^k$  por um subproblema quadrático e usar a solução deste problema quadrático para construir uma aproximação melhor em  $x^{k+1}$ . Com uma formulação adequada do subproblema quadrático, a programação quadrática seqüencial “local”, ou seja, sem estratégias de globalização, é equivalente ao método de Newton estendido, discutido na seção anterior.

A seguir discute-se uma formulação do subproblema quadrático para a qual a equivalência com o método de Newton estendido é preservada. Nesta formulação minimiza-se a aproximação quadrática do lagrangeano (definido em (5.30)), sujeito à linearização em  $x^k$  das restrições do problema original. Desta forma, dados  $x^k$  e  $\lambda^k$ , sendo  $\lambda^k$  estimativas dos multiplicadores de Lagrange, o subproblema quadrático formulado a cada iteração é:

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & L_k + \nabla L_k^T(x - x^k) + \frac{1}{2}(x - x^k)^T H(x - x^k) \\ \text{sujeito a} \quad & f_{\mathcal{E}}(x^k) + A_{\mathcal{E}}(x - x^k) = 0. \end{aligned} \quad (5.41)$$

Utilizando as definições (5.30) e (5.31), a aproximação quadrática da

função lagrangeana é:

$$f_0(x^k) + \lambda^T f_{\mathcal{E}}(x^k) + (\nabla f_0(x^k)^T + \lambda^T A_{\mathcal{E}})(x - x^k) + \frac{1}{2}(x - x^k)^T H(x - x^k).$$

Considerando a restrição  $f_{\mathcal{E}}(x^k) + A_{\mathcal{E}}(x - x^k) = 0$  e desconsiderando o termo constante  $f_0(x^k)$ , o problema quadrático (5.41) assume a forma:

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \nabla f_0(x^k)^T(x - x^k) + \frac{1}{2}(x - x^k)^T H(x - x^k) \\ \text{sujeito a} \quad & f_{\mathcal{E}}(x^k) + A_{\mathcal{E}}(x - x^k) = 0. \end{aligned} \quad (5.42)$$

A condição de otimalidade de primeira ordem deste problema nas variáveis  $x$  e  $\lambda^{k+1}$  é:

$$\begin{aligned} \nabla f_0(x^k) + H(x - x^k) + A_{\mathcal{E}}^T \lambda^{k+1} &= 0 \\ f_{\mathcal{E}}(x^k) + A_{\mathcal{E}}(x - x^k) &= 0, \end{aligned} \quad (5.43)$$

e na variável  $d_x = x - x^k$ :

$$\begin{aligned} \nabla f_0(x^k) + H d_x + A_{\mathcal{E}}^T \lambda^{k+1} &= 0 \\ f_{\mathcal{E}}(x^k) + A_{\mathcal{E}} d_x &= 0. \end{aligned} \quad (5.44)$$

O sistema (5.44) é idêntico ao sistema de Newton (5.40). Assim, a solução do subproblema quadrático (5.42) gera iterandos iguais aos gerados pela solução por Newton do sistema estendido (5.37). Por isto, visando preservar as boas propriedades de convergência local do método de Newton, considera-se que (5.42) seja a formulação quadrática ideal para um algoritmo de PQS.

Para assegurar a convergência de um algoritmo de PQS a partir de pontos remotos da solução pode ser controlado o tamanho do passo ao longo da direção calculada (algoritmos de busca) ou determinado se um ponto é aceitável ou se a região de confiança deve ser alterada (algoritmos de região de confiança). Em problemas irrestritos vimos que isto é feito avaliando-se a redução na função objetivo do problema. Em problemas com restrições é tradicionalmente utilizada uma *função de mérito*, discutida a seguir.

**Funções de mérito.** A função penalidade é uma forma de considerar si-

multaneamente dois objetivos possivelmente conflitantes, a otimização e a viabilização. Nos algoritmos de penalidade, conforme discutido, ela é utilizada para obter uma direção que preserve o compromisso entre viabilidade e otimalidade. Já nos algoritmos de programação quadrática seqüencial a função penalidade pode ser utilizada para *avaliar* a qualidade de uma direção já determinada. Um determinado passo é então julgado “bom” caso produza decréscimo suficiente na função penalidade, e “ruim” caso contrário. Quando a função penalidade é utilizada para avaliar um passo ela é chamada *função de mérito*. Como exemplo de funções de mérito citamos:

\* A função  $l_1$ , definida por

$$\phi_\beta(x) := f_0(x) + \beta \|f_\mathcal{E}(x)\|_1, \quad (5.45)$$

onde  $\beta$  é o parâmetro de penalidade. Esta função não diferenciável é facilmente avaliada. A função  $l_1$  é *exata*, o que precisamente significa que existe um escalar  $\beta^*$  tal que para todo  $\beta \in (0, \beta^*)$ , toda solução local do problema não-linear (5.28) é um minimizador local de  $\phi_\beta(x)$ .

\* A função de penalidade quadrática  $l_2$ , definida por

$$\phi_\beta(x) := f_0(x) + \frac{\beta}{2} \|f_\mathcal{E}(x)\|_2^2, \quad (5.46)$$

onde  $\beta$  é o parâmetro de penalidade. Esta função de mérito é diferenciável em todo domínio, mas possui a desvantagem, por não ser exata, de exigir que o parâmetro de penalidade cresça muito para garantir convergência para um ponto viável que, espera-se, seja minimizador do problema original.

\* A função lagrangeano aumentado, proposta por Fletcher:

$$\phi_{\lambda,\beta}(x) := f_0(x) - \lambda(x)^T f_\mathcal{E}(x) + \frac{\beta}{2} \|f_\mathcal{E}(x)\|_2^2, \quad (5.47)$$

sendo  $\beta$  o parâmetro de penalidade e  $\lambda(x)$  uma estimativa dos multiplicadores de Lagrange dada por:

$$\lambda(x) = [A_\mathcal{E}(x)A_\mathcal{E}^T(x)]^{-1} A_\mathcal{E}(x)\nabla f_0(x).$$

A função lagrangeano aumentado também é *exata*. Como envolve a estimativa de multiplicadores de Lagrange, sua avaliação pode ser particularmente difícil caso a matriz  $A_\varepsilon$  se torne posto deficiente.

Uma propriedade crucial para uma função de mérito é que ela possua pontos críticos de primeira ordem nos pontos críticos de primeira ordem do problema. É desejável ainda que todos os pontos críticos da função de mérito sejam também pontos críticos do problema, ou seja, que a função não possua pontos críticos adicionais [73].

Outra propriedade essencial para possibilitar a busca é que o passo calculado e a função de mérito sejam compatíveis, no sentido que a derivada direcional seja negativa. Assim, a cada iteração, para  $\beta$  suficientemente grande,  $d$  gerada pelo algoritmo deve ser uma direção de descida para a função  $\phi_\beta$ , ou seja, deve verificar:

$$\nabla \phi_\beta^T d < 0. \quad (5.48)$$

**Algoritmo de PQS com busca na função de mérito.** Em algoritmos com busca em função de mérito, para garantir (5.48), o parâmetro  $\beta$  pode ser atualizado a cada iteração fazendo  $\beta > \beta_{min}$ , onde  $\beta_{min}$  verifica:

$$\nabla \phi_{\beta_{min}}^T d = 0.$$

Tomando-se como exemplo a função  $l_2$ , cujo gradiente avaliado em  $x^k$  é:

$$\nabla \phi_\beta(x^k) = \nabla f_0(x^k) + \beta A_\varepsilon^T(x^k) f_\varepsilon(x^k),$$

o valor de  $\beta_{min}$  será:

$$\beta_{min} = \frac{-\nabla f_0(x^k)^T d}{f_\varepsilon(x^k)^T A_\varepsilon(x^k) d}.$$

Reunindo os elementos discutidos, o algoritmo de PQS com busca em função de mérito pode ser estabelecido da seguinte forma:

**Algoritmo - PQS com busca em função de mérito**

Dados  $x^0 \in \mathbb{R}^n, \lambda^0 \in \mathbb{R}^m, \tau \in (0, 1)$ .

Faça  $k := 0$ .

Repita

Avalie  $f_0(x^k)$ ,  $\nabla f_0(x^k)$ ,  $f_{\mathcal{E}}(x^k)$ ,  $A_{\mathcal{E}}(x^k)$  e  $H$ .

Calcule  $d_x$  solucionando o sistema linear (5.40).

Atualize  $\beta$  tal que  $d_x$  seja direção de descida para  $\phi_{\beta}$ .

Determine (por Armijo) o passo  $\gamma \in (0, 1)$  tal que:

$$\phi_{\beta}(x^k + \gamma d_x) > \phi_{\beta}(x^k) + \frac{1}{2}\gamma \nabla \phi_{\beta}(x^k).$$

Atualize as variáveis:  $x^{k+1} := x^k + \gamma d_x$  e  $\lambda^{k+1}$ .

$k := k + 1$ .

**Algoritmo de PQS com região de confiança.** Seguindo a estratégia de região de confiança, estudada para problemas irrestritos, adicionamos uma restrição de região de confiança ao subproblema quadrático (5.42), obtendo:

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \nabla f_0(x^k)^T(x - x^k) + \frac{1}{2}(x - x^k)^T H(x - x^k) \\ \text{sujeito a} \quad & f_{\mathcal{E}}(x^k) + A_{\mathcal{E}}(x^k)(x - x^k) = 0, \\ & \|(x - x^k)\| \leq \Delta_k. \end{aligned} \tag{5.49}$$

É possível que o conjunto viável deste problema seja vazio, caso as restrições sejam incompatíveis, ou seja, caso a restrição linear esteja fora da região de confiança. Para garantir a compatibilidade das restrições pode-se considerar que não é necessário satisfazer a restrição linear perfeitamente e reformular o subproblema (5.49) com a restrição linear relaxada. Estas situações de incompatibilidade e de relaxamento da restrição são ilustradas na Figura (5.14) para um problema com uma restrição em  $\mathbb{R}^2$ :

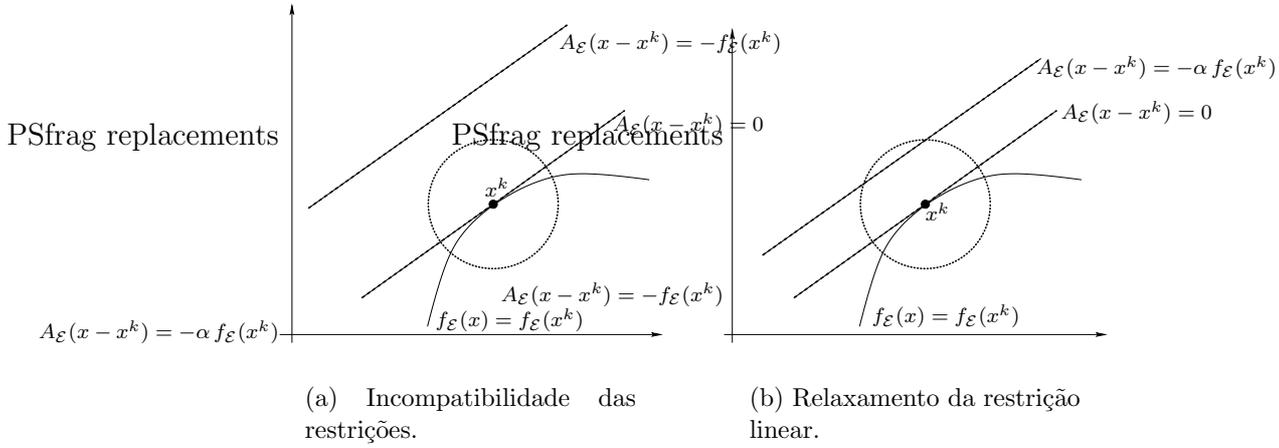


Figura 5.14: Compatibilização das restrições do problema (5.49).

Existem três formas de realizar o relaxamento da restrição linear de (5.49), comentadas a seguir.

Vardi (1985) [74] e Byrd, Schnabel e Shultz (1987) [75] propuseram o relaxamento da restrição linear através de um parâmetro  $0 < \alpha \leq 1$ :

$$\alpha f_{\mathcal{E}}(x^k) + A_{\mathcal{E}}(x^k)(x - x^k) = 0,$$

sendo  $\alpha$  determinado tal que o conjunto viável

$$\mathcal{V}_{\alpha} = \{d \mid \alpha f_{\mathcal{E}}(x^k) + A_{\mathcal{E}}(x^k)(x - x^k) = 0 \text{ e } \|d\| \leq \Delta_k\}$$

seja não vazio. Obviamente  $\mathcal{V}_0$  é não vazio. Existirá um valor máximo tal que para  $\alpha \in (0, \alpha_{max}]$  as restrições são compatíveis, mas determinar com precisão  $\alpha_{max}$  é um procedimento computacionalmente caro. Por outro lado, valores pequenos para  $\alpha$  comprometem o desempenho do algoritmo, pois a cada iteração pouco progresso é feito na viabilização.

Outra abordagem foi proposta por Celis-Dennis-Tapia (1985) [76]. Os

autores formulam e resolvem o problema:

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && \nabla f_0(x^k)^T(x - x^k) + \frac{1}{2}(x - x^k)^T H(x - x^k) \\ & \text{sujeito a} && \|f_{\mathcal{E}}(x^k) + A_{\mathcal{E}}(x^k)(x - x^k)\| \leq \bar{h}, \\ & && \|(x - x^k)\| \leq \Delta_k. \end{aligned} \quad (5.50)$$

onde  $\bar{h}$ , escolhido tal que o problema (5.50) tenha região viável não nula, impõe um limite para a inviabilidade a cada iteração. Para garantir redução na inviabilidade,  $\bar{h}$  pode ser determinado tal que:

$$\min_{\|(x-x^k)\| \leq \Delta_k} \|f_{\mathcal{E}}(x^k) + A_{\mathcal{E}}(x^k)(x - x^k)\| \leq \|f_{\mathcal{E}}(x^k)\|. \quad (5.51)$$

Além da dificuldade de determinação do parâmetro  $\bar{h}$ , o próprio subproblema (5.50) impõe dificuldades. Com norma  $l_2$  o problema envolve *duas* restrições quadráticas, e a aplicação de técnicas eficientes de solução não é evidente.

Finalmente, uma terceira abordagem, proposta por Byrd-Omojokun (1989) [77, 78], divide a solução do subproblema quadrático (5.49) em duas fases, chamadas *normal* e *tangencial*.

Na fase normal, a partir de  $x^k$  é calculado um passo  $v$ , para o qual a inviabilidade é reduzida satisfazendo a região de confiança. Este passo  $v$  é a solução aproximada do seguinte problema quadrático, chamado problema normal:

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && \|f_{\mathcal{E}}(x^k) + A_{\mathcal{E}}(x^k)v\| \\ & \text{sujeito a} && \|v\| \leq \zeta \Delta_k, \end{aligned} \quad (5.52)$$

onde  $0 < \zeta < 1$  (e.g.  $\zeta = 0.8$ ) é um fator de contração para a região.

Na fase tangencial é calculado o passo total  $d$ , resolvendo-se aproximadamente o problema seguinte:

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && \nabla f_0(x^k)^T d + \frac{1}{2} d^T H d \\ & \text{sujeito a} && A_{\mathcal{E}}(x^k) d = A_{\mathcal{E}}(x^k) v, \\ & && \|d\| \leq \Delta_k. \end{aligned} \quad (5.53)$$

Este problema é sempre consistente, pois, por exemplo,  $d = v$  é viável.

É possível demonstrar [79] que existe uma solução aproximada de (5.52) que está no espaço imagem de  $A_{\mathcal{E}}^T$  (será a solução de mínima norma). Impor a condição

$$v = A_{\mathcal{E}}^T y \quad (5.54)$$

para algum  $y \in \mathbb{R}^m$ , previne que o passo normal  $v$  seja demasiadamente longo. Se o passo total  $d$  for escrito como  $d = v \oplus w$ , com  $w \in \mathbb{R}^n$ , a restrição linear do problema tangencial (5.53),  $A_{\mathcal{E}}(x^k)d = A_{\mathcal{E}}(x^k)v$ , pode ser escrita  $A_{\mathcal{E}}(x^k)(v + w) = A_{\mathcal{E}}(x^k)v$ . Logo:

$$A_{\mathcal{E}}(x^k)w = 0,$$

ou seja,  $w \in \mathcal{N}(A_{\mathcal{E}})$ . O passo  $w$ , no espaço tangente à linearização das restrições, é ortogonal ao passo  $v$ , no espaço imagem de  $A_{\mathcal{E}}^T$ .

A Figura (5.15) ilustra a estratégia de Byrd-Omojokun para um sub-problema quadrático com região de confiança. A partir do ponto  $x^k$  a figura ilustra o passo total  $d$  obtido a partir do passo normal  $v$  e do passo tangencial  $h$ .

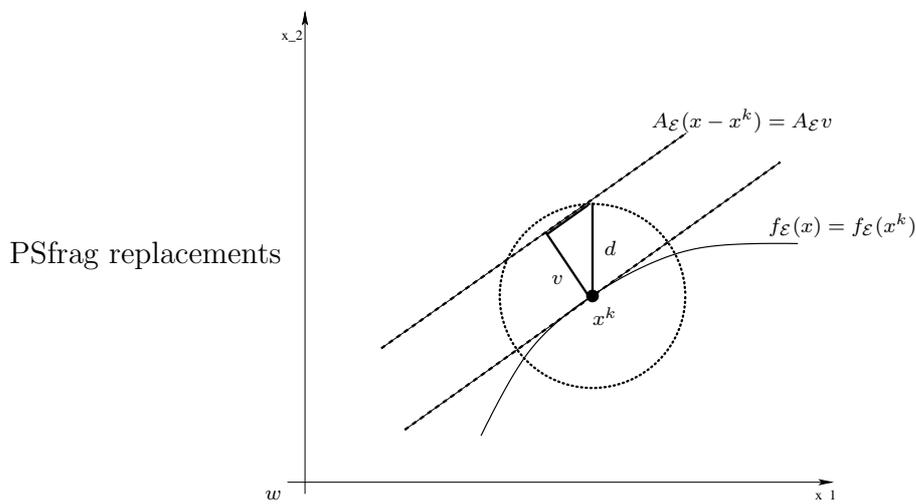


Figura 5.15: Estratégia de Byrd-Omojokun.

Uma solução aproximada de (5.52) e (5.53) é considerada satisfatória se

produzir decréscimo igual ou superior ao decréscimo obtido pelo ponto de Cauchy.

A estratégia de Byrd-Omojokun é considerada adequada para problemas de grande porte, tendo sido utilizada em algoritmos recentes de programação quadrática sequencial [80], [81]. Isto deve-se também à disponibilidade de algoritmos eficientes para a solução aproximada dos subproblemas normal e tangencial.

Após seu cálculo, deve-se avaliar se um passo é “bom”. Um passo  $d$  é considerado bom caso produza decréscimo suficiente na função de mérito. Em algoritmos de região de confiança este decréscimo é estabelecido pela relação entre a redução obtida na função de mérito e a redução predita pelo modelo quadrático da função de mérito. Tomando como exemplo a função  $l_1$  (não diferenciável)

$$\phi_\beta(x) = f_0(x) + \frac{\beta}{2} \|f_\varepsilon(x)\|_1,$$

e construindo um modelo quadrático de  $\phi_\beta$  em torno do ponto  $x$ :

$$m_\beta(d) := f_0(x) + \nabla f_0(x)^T d + \frac{1}{2} d^T H d + \frac{\beta}{2} \|f_\varepsilon(x) + A_\varepsilon(x)d\|_1,$$

define-se:

$$ared(d) = \phi_\beta(x) - \phi_\beta(x + d),$$

e

$$\begin{aligned} pred(d) &= m_\beta(0) - m_\beta(d) \\ &= -\nabla f_0(x)^T d - \frac{1}{2} d^T H d + \frac{\beta}{2} (\|f_\varepsilon(x)\|_1 - \|f_\varepsilon(x) + A_\varepsilon(x)d\|_1). \end{aligned} \tag{5.55}$$

O passo  $d$  será aceito se:

$$ared(d) \geq \eta pred(d),$$

para  $\eta \in (0, 0.5]$ .

A seguir estabelecemos um algoritmo de programação quadrática sequencial com região de confiança utilizando a estratégia de Byrd-Omojokun.

### Algoritmo - PQS com Região de confiança

Dados  $x^0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $\Delta_{min} \in \mathbb{R}$  e  $\eta \in (0, 0.5]$ .

Faça  $k:=0$ .

Repita

Defina  $\bar{\Delta} > \Delta_{min}$ .

Avalie  $f_0(x^k)$ ,  $\nabla f_0(x^k)$ ,  $f_{\mathcal{E}}(x^k)$ ,  $A_{\mathcal{E}}(x^k)$ .

Calcule estimativas  $\lambda^k$  para os multiplicadores de Lagrange, utilizando, por exemplo, (5.33).

Calcule  $v$  resolvendo aproximadamente o problema normal (5.52).

Avalie a hessiana do Lagrangeano  $H$ .

Calcule  $d$  resolvendo aproximadamente o subproblema (5.53).

Calcule  $\rho = \text{ared}/\text{pred}$ .

Se  $\rho \geq \eta$  faça  $x^{k+1} := x^k + d$  e defina  $\Delta_{k+1} \geq \Delta_k$ ;

caso contrário faça  $x^{k+1} := x^k + d$  e reduza  $\Delta$ .

$k := k + 1$ .

A cada iteração de um método de PQS com região de confiança, com a região de confiança centrada no ponto corrente  $x^k$ , busca-se reduzir a inviabilidade e progredir na otimalidade. No Capítulo seguinte será discutida uma classe de algoritmos onde o compromisso entre viabilidade e otimalidade a cada iteração é tratado de forma diversa.

### 5.4.3 Conclusões

Neste capítulo foram reunidos os elementos de programação não-linear necessários ao estabelecimento de um algoritmo com convergência global. Foi discutida a globalização por busca linear e por região de confiança. Para problemas restritos considerou-se o uso de uma função de mérito e as funções de mérito mais utilizadas foram apresentadas e discutidas.

No capítulo seguinte os conceitos e algoritmos apresentados no Capítulo 4 e Capítulo 5 serão retomados para o estabelecimento de algoritmos para problemas não-lineares com restrições de igualdade e desigualdade.

# Capítulo 6

## Algoritmos para problemas com restrições de igualdade e desigualdade

### 6.1 Introdução

Neste capítulo são discutidos algoritmos para problemas não-lineares com restrições de igualdade e desigualdade. Visto que o principal objetivo é o estudo e o desenvolvimento de algoritmos com convergência global, discute-se para esta classe de problemas a estratégia de globalização por decréscimo suficiente em uma função de mérito e apresenta-se o algoritmo proposto por Vanderbei e Shanno [1]. Um ponto crítico do uso da função de mérito é a atualização de seu parâmetro. Após expor a atualização proposta em [1], propõe-se uma estratégia de atualização do parâmetro dita não monótona. Além disto, propõe-se uma nova função de mérito, que não utiliza parâmetro de penalização.

Uma nova classe de métodos, chamados métodos de filtro, que não utilizam função de mérito, é apresentada, os conceitos básicos dos métodos de filtro são definidos e um novo algoritmo de filtro é proposto. O funcionamento do novo algoritmo de filtro é ilustrado através de um exemplo gráfico.

## 6.2 O problema de minimização com restrições de igualdade e desigualdade

Nesta seção estuda-se o problema com restrições de igualdade e desigualdade não-lineares:

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && f_0(x) \\ & \text{sujeito a} && f_{\mathcal{E}}(x) = 0 \\ & && f_{\mathcal{I}}(x) \leq 0, \end{aligned} \tag{6.1}$$

onde  $\mathcal{E} = \{1, \dots, m\}$  e  $\mathcal{I} = \{1, \dots, p\}$  são os conjuntos de índices das restrições de igualdade e desigualdade respectivamente e  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m+p+1}$ , com  $m < n$ , é um vetor de funções duplamente continuamente diferenciáveis.

Denota-se  $A_{\mathcal{E}}(x)$  e  $A_{\mathcal{I}}(x)$  as matrizes jacobianas avaliadas em  $x$ , associadas às restrições de igualdade e desigualdade, respectivamente:

$$A_{\mathcal{E}}(x)^T := [\nabla f_i(x)]_{i \in \mathcal{E}}, \quad A_{\mathcal{I}}(x)^T := [\nabla f_i(x)]_{i \in \mathcal{I}}. \tag{6.2}$$

Denota-se  $\bar{\mathcal{I}}$  o conjunto de índices associados às restrições de desigualdades ativas:

$$\bar{\mathcal{I}} = \{i \in \mathcal{I} \mid f_i(x) = 0\}.$$

**Hipóteses.** As seguintes hipóteses são consideradas padrão:

**Existência de pontos interiores** O problema (6.1) satisfaz

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid f_i(x) = 0, i \in \mathcal{E} \text{ e } f_i(x) < 0, i \in \mathcal{I}\} \neq \emptyset.$$

**Complementaridade estrita** Para todo  $i \in \bar{\mathcal{I}}$ ,  $f_i(x^*) + \lambda_i^* > 0$ .

**Regularidade** Um ponto  $x$  viável é regular se os gradientes das restrições ativas em  $x$  são linearmente independentes, ou seja, se o conjunto

$$\{\nabla f_i(x), i \in \mathcal{E}\} \cup \{\nabla f_i(x), i \in \bar{\mathcal{I}}\}$$

é linearmente independente.

**Função Lagrangeana.** Dados  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\lambda_{\mathcal{E}} \in \mathbb{R}^m$  e  $\lambda_{\mathcal{I}} \in \mathbb{R}^p$ , define-se a função Lagrangeana para o problema (6.1) por:

$$L(x, \lambda) = f_0(x) + \lambda_{\mathcal{E}}^t f_{\mathcal{E}}(x) + \lambda_{\mathcal{I}}^t f_{\mathcal{I}}(x), \quad (6.3)$$

e seu gradiente em relação à variável  $x$  por:

$$\nabla_x L(x, \lambda) = \nabla f_0(x) + A_{\mathcal{E}}(x)^T \lambda_{\mathcal{E}} + A_{\mathcal{I}}(x)^T \lambda_{\mathcal{I}}. \quad (6.4)$$

**Condição de otimalidade de primeira ordem (Karush-Kuhn-Tucker-KKT).** Seja  $x^*$  um minimizador local regular do problema (6.1). Então existem  $\lambda_{\mathcal{E}}^* \in \mathbb{R}^m$  e  $\lambda_{\mathcal{I}}^* \in \mathbb{R}^p$  tais que as seguintes condições são satisfeitas:

$$\begin{aligned} \nabla f_0(x^*) + \sum_{i \in \mathcal{I}} \lambda_i^* \nabla f_i(x^*) + \sum_{i \in \mathcal{E}} \lambda_i^* \nabla f_i(x^*) &= 0 \\ f_{\mathcal{E}}(x^*) &= 0 \\ \lambda_i^* f_i(x^*) &= 0, \quad i \in \mathcal{I} \\ \lambda_i^* &\geq 0, \quad i \in \mathcal{I} \\ f_{\mathcal{I}}(x^*) &\leq 0. \end{aligned} \quad (6.5)$$

### 6.2.1 Algoritmos

Nesta seção introduz-se a formulação de algoritmos para a solução do problema (6.1). Define-se a função barreira logarítmica, a inclusão de variáveis de folga e o problema penalizado formulado nos métodos de pontos interiores.

**O método da função barreira logarítmica.** Os métodos de barreira consistem em minimizar aproximadamente uma função barreira  $\mathcal{B}_{\mu}(\cdot)$  para uma seqüência decrescente de valores do parâmetro  $\mu$ . A função barreira pode ser construída com um termo de penalização para as restrições de igualdade e um termo de barreira para as restrições de desigualdade. A função barreira mais utilizada é a função logarítmica, estudada por Fiacco e McCormick [82].

Se fizermos o coeficiente do termo de penalização  $\beta = 1/\mu$ , sendo  $\mu$  o parâmetro de barreira, então a função barreira logarítmica com penalização

quadrática será:

$$\mathcal{B}_\mu(x) = f_0(x) - \mu \sum_{i \in \mathcal{I}} \log - f_i(x) + \frac{1}{2\mu} \|f_{\mathcal{E}}(x)\|^2. \quad (6.6)$$

Em [82], Fiacco e McCormick definem as condições para que a seqüência gerada pelas soluções locais de  $\mathcal{B}_\mu(x)$ , para  $\mu \rightarrow 0$ , convirja a uma solução local ótima de (6.1).

Como nos métodos de penalidade, a hessiana da função  $\mathcal{B}_\mu$  torna-se mal condicionada à medida que o parâmetro  $\mu$  decresce, causando dificuldades numéricas ao algoritmo. Além disto, é necessário, após cada redução de  $\mu$ , encontrar um ponto inicial no domínio de  $\mathcal{B}_\mu$ .

Uma modificação no método de barreira que torna mais simples a definição de um ponto inicial viável é a introdução de variáveis de folga  $s \in \mathbb{R}^p$ . Assim, associado ao problema (6.1) define-se o seguinte problema:

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && f_0(x) \\ & \text{sujeito a} && f_{\mathcal{E}}(x) = 0 \\ & && f_{\mathcal{I}}(x) + s = 0, \\ & && s \geq 0. \end{aligned} \quad (6.7)$$

A função penalidade correspondente a este problema será:

$$\mathcal{B}_\mu(x, s) = f_0(x) - \mu \sum_{i \in \mathcal{I}} \log(s_i) + \frac{1}{2\mu} \|f_{\mathcal{E}}(x)\|^2 + \frac{1}{2\mu} \|f_{\mathcal{I}}(x) + s\|^2.$$

Observe que com esta formulação não se exige  $f_{\mathcal{I}}(x) + s = 0$ . Todo  $(x, s)$  com  $s > 0$  pertence ao domínio desta função.

Modificando o método de minimização da função barreira  $\mathcal{B}_\mu(x, s)$  tem-se o método primal-dual de pontos interiores, discutido a seguir.

**Métodos de pontos interiores.** Na estratégia de pontos interiores são adicionadas variáveis de folga  $s \in \mathbb{R}^p$  às restrições de desigualdade  $f_{\mathcal{I}}$ . A função barreira logarítmica, que incide sobre as folgas, é incorporada à função objetivo  $f_0$  e, para dado parâmetro de barreira  $\mu > 0$ , o seguinte problema

penalizado é associado ao problema (6.1) :

$$\begin{aligned}
 & \text{minimize} && f_0(x) - \mu \sum_{i=1}^p \log s_i \\
 & \text{sujeito a} && f_{\mathcal{E}}(x) = 0 \\
 & && f_{\mathcal{I}}(x) + s = 0 \\
 & && s > 0.
 \end{aligned} \tag{6.8}$$

Os métodos discutidos a seguir resolvem o problema (6.1) resolvendo aproximadamente uma sequência de problemas penalizados (6.8), para uma sequência decrescente do parâmetro  $\mu$ . Para a solução aproximada do problema penalizado (6.8) podem ser empregados métodos de programação não-linear para problemas com restrições de igualdade discutidos no Capítulo 5, tais como métodos de programação quadrática sequencial com região de confiança [80, 81] ou com busca na direção de Newton [83, 84, 1]. Na seção seguinte estuda-se o algoritmo de pontos interiores com busca na direção de Newton.

### 6.3 Métodos de pontos interiores com busca na direção de Newton

Nesta seção apresenta-se os métodos de pontos interiores com busca na direção de Newton. Dá-se atenção especial ao algoritmo proposto por Vanderbei e Shanno [1]. A partir do algoritmo de Vanderbei e Shanno [1] faz-se uma proposta de atualização não monótona do parâmetro da função de mérito e propõe-se uma nova função de mérito, que não emprega parâmetro de penalização.

**Função Lagrangeana.** Dados  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\lambda_{\mathcal{E}} \in \mathbb{R}^m$  e  $\lambda_{\mathcal{I}} \in \mathbb{R}^p$ , define-se a função Lagrangeana para o problema penalizado (6.8) por:

$$L(x, s, \lambda, \mu) = f_0(x) - \mu \sum_{i=1}^m \log(s_i) + \lambda_{\mathcal{I}}^T (f_{\mathcal{I}}(x) + s) + \lambda_{\mathcal{E}}^T f_{\mathcal{E}}(x). \tag{6.9}$$

**Condições de otimalidade de primeira ordem.** As condições de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) para o problema penalizado (6.8) são satisfeitas em um ponto  $(x, s)$  se existem  $\lambda_{\mathcal{E}} \in \mathbb{R}^m$  e  $\lambda_{\mathcal{I}} \in \mathbb{R}^p$  tais que:

$$\begin{aligned} \nabla f_0(x) + A_{\mathcal{E}}(x)^T \lambda_{\mathcal{E}} + A_{\mathcal{I}}(x)^T \lambda_{\mathcal{I}} &= 0 \\ -\mu S^{-1} e + \lambda_{\mathcal{I}} &= 0 \\ f_{\mathcal{I}}(x) + s &= 0 \\ f_{\mathcal{E}}(x) &= 0 \\ s > 0, \lambda_{\mathcal{I}} > 0 \end{aligned} \quad (6.10)$$

onde  $S = \text{diag}(s_1, \dots, s_p)$  é a matriz diagonal associada ao vetor de folgas  $s \in \mathbb{R}^p$  e  $e \in \mathbb{R}^p$  é o vetor de componentes unitários.

As chamadas condições de KKT perturbadas são geradas multiplicando-se a segunda linha de (6.10) pela matriz diagonal  $S$ . Obtém-se assim a expressão:

$$S \lambda_{\mathcal{I}} = \mu e \quad (6.11)$$

Para simplificar a notação define-se o ponto  $z := (x, s, \lambda_{\mathcal{I}}, \lambda_{\mathcal{E}})$ , a direção  $d := (d_x, d_s, d_{\lambda_{\mathcal{I}}}, d_{\lambda_{\mathcal{E}}})$  e o vetor de resíduos  $F_{\mu}$  associado as equações de KKT perturbadas:

$$F_{\mu}(z) := \begin{pmatrix} \nabla f_0(x) + A_{\mathcal{E}}(x)^T \lambda_{\mathcal{E}} + A_{\mathcal{I}}(x)^T \lambda_{\mathcal{I}} \\ S \lambda_{\mathcal{I}} - \mu e \\ f_{\mathcal{I}}(x) + s \\ f_{\mathcal{E}}(x) \end{pmatrix}. \quad (6.12)$$

A extensão dos algoritmos primais-duais de pontos interiores para problemas não-lineares é realizada aplicando-se o método de Newton ao sistema formado pelas equações de KKT perturbadas  $F_{\mu}(z) = 0$ . A partir de um ponto inicial  $z^0$ , com  $s^0 > 0$  e  $\lambda_{\mathcal{I}}^0 > 0$ , é gerada uma sequência de pontos

$$z^{k+1} = z^k + \gamma d^k, \quad (6.13)$$

onde  $\gamma \in (0, 1]$  determina o comprimento do passo e  $d^k$  é uma direção de

busca que satisfaz a linearização de (6.12), com  $z = z^k$ :

$$\nabla F_\mu(z)d = -F_\mu(z). \quad (6.14)$$

Em notação estendida o sistema (6.14) é:

$$\begin{pmatrix} H & 0 & A_{\mathcal{I}}^T(x) & A_{\mathcal{E}}^T(x) \\ A_{\mathcal{I}}(x) & I & 0 & 0 \\ A_{\mathcal{E}}(x) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda_{\mathcal{I}} & S & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_x \\ d_s \\ d_{\lambda_{\mathcal{I}}} \\ d_{\lambda_{\mathcal{E}}} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \nabla f_0(x) + A_{\mathcal{E}}^T(x)\lambda_{\mathcal{E}} + A_{\mathcal{I}}^T(x)\lambda_{\mathcal{I}} \\ S\lambda_{\mathcal{I}} - \mu e \\ f_{\mathcal{I}}(x) + s \\ f_{\mathcal{E}}(x) \end{pmatrix} \quad (6.15)$$

onde  $H = \nabla_{xx}^2 L(x, \lambda)$  é a hessiana do Lagrangeano em relação a  $x$ .

**Teste da razão.** O teste da razão consiste em determinar o máximo passo  $\gamma_{max} \in (0, 1]$  tal que as variáveis  $s$  e  $\lambda_{\mathcal{I}}$  permaneçam estritamente positivas após a iteração, ou seja, para  $\gamma \in [0, \gamma_{max}]$ ,  $s + \gamma d_s > 0$  e  $\lambda_{\mathcal{I}} + \gamma d_{\lambda_{\mathcal{I}}} > 0$ .

A partir do ponto corrente  $(x, s, \lambda)$  e da direção  $d = (d_x, d_s, d_\lambda)$ , para os índices  $i \in \mathcal{I}$  tal que  $d_{s_i} < 0$  e  $d_{\lambda_i} < 0$ , calcula-se:

$$\gamma_{max} = \min \left\{ \min_{d_{s_i} < 0} \frac{s_i}{-d_{s_i}}, \min_{d_{\lambda_i} < 0} \frac{\lambda_i}{-d_{\lambda_i}}, 1 \right\}. \quad (6.16)$$

**Determinação do passo em algoritmos de descrésimo suficiente.** A seleção do passo  $\gamma$  em algoritmos baseados em busca ao longo de uma direção pode ser estabelecida da seguinte forma: a cada iteração é determinado o passo máximo  $\gamma_{max}$  através do teste da razão para as variáveis  $s$  e  $\lambda_{\mathcal{I}}$ ; a partir de  $\gamma_{max}$  o intervalo  $(0, \gamma_{max}]$  é reduzido até que se verifique descrésimo suficiente em uma função de mérito. Este é um procedimento crítico em programação não-linear, e será discutido na seção seguinte.

### 6.3.1 Algoritmos de descrésimo suficiente em uma função de mérito

Sabe-se que para problemas não-lineares, com uma estimativa inicial ruim, o método de Newton pode divergir. Para garantir convergência inde-

pendentemente da estimativa inicial é preciso *globalizar* o método de Newton.

A convergência global do método de Newton, conforme discutido no Capítulo 5, pode ser obtida através de uma busca ao longo da direção  $d$  que garanta decréscimo suficiente em uma função de mérito. Esta estratégia de globalização foi empregada nos algoritmos propostos por El-Bakry, Tapia, Tsuchiya e Zhang [83] e Vanderbei e Shanno [1].

**A função de mérito.** A função de mérito tem grande importância no desempenho de um algoritmo. Suas características fundamentais foram discutidas no Capítulo 5, onde alguns exemplos foram apresentados.

Para o problema com restrições de igualdade e desigualdade, El Bakry, Tapia, Tsuchiya e Zhang [83] propuseram o uso da função  $l_2$  aplicada aos resíduos das condições de KKT (6.12):

$$\phi(z) := \|F(z)\|_2^2. \quad (6.17)$$

Com esta função de mérito os autores provaram, sob hipóteses razoáveis, e desde que a jacobiana não se torne singular, convergência para pontos que satisfazem as condições de otimalidade de primeira ordem. No entanto, foi verificada, em alguns casos, convergência para pontos de máximo ou de sela (ambos satisfazem as condições de primeira ordem).

Vanderbei e Shanno [1] utilizaram em seu algoritmo a função penalidade quadrática  $l_2$ , que aplicada ao problema de barreira (6.8) assume a forma:

$$\phi_{\mu,\beta}(x, s) := f_0(x) - \mu \sum_{i \in \mathcal{I}} \log(s_i) + \frac{\beta}{2} \left\| \begin{pmatrix} f_{\mathcal{I}}(x) + s \\ f_{\mathcal{E}}(x) \end{pmatrix} \right\|_2^2. \quad (6.18)$$

**Atualização do parâmetro  $\beta$ .** O parâmetro  $\beta$  da função de mérito (6.18) é atualizado a cada iteração tal que a direção de busca  $d$ , determinada pela solução do sistema (6.15), seja uma direção de descida para  $\phi_{\mu,\beta}$ . Sempre que o problema é estritamente convexo, com o parâmetro  $\beta$  suficientemente

grande, isto se verifica. Ou seja, existe  $\beta_{min} \geq 0$  tal que para todo  $\beta > \beta_{min}$ ,

$$\begin{bmatrix} \nabla_x \phi_{\mu, \beta} \\ \nabla_s \phi_{\mu, \beta} \end{bmatrix}^T \begin{pmatrix} d_x \\ d_s \end{pmatrix} \leq 0. \quad (6.19)$$

Podemos determinar o valor de  $\beta_{min}$ . O gradiente da função de mérito  $\phi_{\mu, \beta}$  é:

$$\nabla \phi(x, s) = \begin{bmatrix} \nabla f_0 + \beta A_{\mathcal{I}}^T (f_{\mathcal{I}} + s) + \beta A_{\mathcal{E}}^T f_{\mathcal{E}} \\ -\mu S^{-1} e + \beta (f_{\mathcal{I}} + s) \end{bmatrix}. \quad (6.20)$$

Pode-se escrever:

$$\nabla \phi^T d = \nabla f_0^T d_x + \beta ((f_{\mathcal{I}} + s)^T A_{\mathcal{I}} + f_{\mathcal{E}}^T A_{\mathcal{E}}) d_x - \mu e^T S^{-1} d_s + \beta (f_{\mathcal{I}} + s)^T d_s, \quad (6.21)$$

e para verificar (6.19), deve-se ter  $\beta \geq \beta_{min}$ , sendo:

$$\beta_{min} = \frac{-\nabla f_0^T d_x + \mu e^T S^{-1} d_s}{((f_{\mathcal{I}} + s)^T A_{\mathcal{I}} + f_{\mathcal{E}}^T A_{\mathcal{E}}) d_x + (f_{\mathcal{I}} + s)^T d_s}. \quad (6.22)$$

O parâmetro  $\beta$  é inicializado com valor 0 e permanece inalterado enquanto a direção calculada for uma direção de descida para a função de mérito. Sempre que  $d$  falha como direção de descida, é feito  $\beta = 10 \beta_{min}$ . A iteração seguinte começa com este valor aumentado de  $\beta$ . Visto que o parâmetro pode apenas crescer no decorrer das iterações, esta atualização é dita *monótona*.

**Perturbação da hessiana.** Em algoritmos de programação não-linear baseados na direção de Newton é preciso garantir que a hessiana do sistema (6.15) seja definida positiva em todas as iterações. Vanderbei e Shanno utilizam a perturbação da hessiana, estratégia discutida no Capítulo 5 para problemas irrestritos, como forma de garantir a definição da matriz do sistema de Newton.

Podemos verificar, já que  $s$  e  $\lambda_{\mathcal{I}}$  são estritamente positivos, que a hessiana do sistema de Newton será definida positiva se a hessiana do lagrangeano  $H$  o for. Baseado nisto os autores definem a matriz com uma perturbação diagonal:

$$\hat{H} = H + tI, \quad t \geq 0.$$

A cada iteração o valor de  $t$  é inicializado em 0 e, caso necessário, é alterado em um processo iterativo até que  $\hat{H}$  seja definida positiva. Com  $t \geq 0$  tal que  $\hat{H}$  é definida positiva, é possível verificar que a direção calculada será de descida para a função de mérito. No entanto, com esta perturbação, os autores não obtiveram prova de convergência para o algoritmo.

Com os elementos discutidos, o algoritmo de Vanderbei e Shanno para programação não-linear pode ser estabelecido como segue:

### Algoritmo - Vanderbei e Shanno

Dados  $\sigma \in [0, 1]$ ,  $\beta = 0$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $s \in \mathbb{R}^p$ .

Faça  $k:=0$ .

Repita

Se a hessiana do lagrangeano  $H$  é definida positiva, então calcule a direção  $d$  resolvendo o sistema (6.15).

Caso contrário, defina  $\hat{H} = H + tI$ , onde  $t > 0$  é tal que  $\hat{H}$  é definida positiva e resolva o sistema (6.15) com  $\hat{H}$ .

Determine o máximo passo  $\gamma_{max} \in (0, 1]$  pelo teste de razão para as variáveis  $s$  e  $\lambda_{\mathcal{I}}$ .

Atualize o parâmetro  $\beta$  da função de mérito:

Calcule  $\beta_{min}$  por (6.22).

Se  $\beta < \beta_{min}$  faça  $\beta = 10 \beta_{min}$ .

Determine o passo  $\gamma \in (0, \gamma_{max}]$  através de uma busca na função de mérito.

Atualize as variáveis:

$$x^{k+1} := x^k + \gamma d_x, \quad s^{k+1} := s^k + \gamma d_s.$$

$$\lambda_{\mathcal{I}}^{k+1} := \lambda_{\mathcal{I}}^k + \gamma d_{\lambda_{\mathcal{I}}}, \quad \lambda_{\mathcal{E}}^{k+1} := \lambda_{\mathcal{E}}^k + \gamma d_{\lambda_{\mathcal{E}}}.$$

Atualize o parâmetro de barreira:

$$\mu^{k+1} := \sigma \frac{s^T \lambda_{\mathcal{I}}}{p};$$

$k := k + 1$ .

Ressalta-se que neste algoritmo o problema de barreira não é solucionado para determinada precisão. Ao invés disto, após cada passo o parâmetro de barreira  $\mu$  é reduzido.

O algoritmo de Vanderbei e Shanno não possui prova de convergência global. Segundo os autores [1], uma prova de convergência para este algoritmo requer desenvolvimento na seleção do parâmetro  $\beta$ .

### 6.3.2 Uma estratégia não-monótona para atualização de $\beta$

No algoritmo proposto por Vanderbei e Shanno  $\beta_{min}$  é definido a cada iteração tal que

$$\nabla \phi_{\mu, \beta_{min}}^T d = 0.$$

Fazer  $\beta > \beta_{min}$  a cada iteração garante que  $d$  é uma direção de descida para  $\phi_{\mu, \beta}$ . Esta estratégia monótona de atualização do parâmetro  $\beta$  conduz a boas propriedades de convergência global mas pode ser ineficiente. O parâmetro pode crescer muito, colocando demasiada importância sobre a viabilidade nas iterações finais. Por isto propomos uma estratégia de atualização não-monótona, descrita a seguir.

Define-se  $\hat{\beta}$  tal que:

$$\nabla \phi_{\mu, \hat{\beta}}(x, s)^T d = \frac{1}{2} \nabla \left\| \begin{pmatrix} f_I(x) + s \\ f_E(x) \end{pmatrix} \right\|^2. \quad (6.23)$$

e a atualização de  $\beta$  torna-se

$$\beta = \max(10\beta_{min}, 10\hat{\beta}, \bar{\beta}), \quad (6.24)$$

onde  $\bar{\beta}$  é um valor constante em todas as iterações. Sugerimos  $\bar{\beta} = 1$ . Esta atualização é realizada em todas as iterações, assim  $\beta$  pode tanto aumentar quanto diminuir quando  $\bar{\beta}$  for pequeno.

### 6.3.3 Uma nova função de mérito

Devido à importância do valor do parâmetro  $\beta$  a cada iteração sobre o desempenho do algoritmo, propomos uma nova função de mérito que não utiliza parâmetro de penalização.

Visto que a direção de busca  $d$  é o passo de Newton aplicado às condições de KKT perturbadas (6.12),  $d$  é uma direção de descida para cada um dos resíduos do sistema formado por (6.12). Isto significa que pequenos deslocamentos ao longo da direção  $d$  devem reduzir a inviabilidade, a otimalidade e a condição de complementaridade. Considerando isto propomos como função de mérito o máximo destes objetivos, convenientemente normalizados.

Define-se inicialmente os critérios normalizados:  $C_1$  - otimalidade,  $C_2$  - centralidade,  $C_3$  - inviabilidade das desigualdades e  $C_4$  - inviabilidade das igualdades:

$$\begin{aligned}
 C_1 &:= \mu_0 \|\nabla f_0(x) + A_{\mathcal{E}}(x)^T \lambda_{\mathcal{E}} + A_{\mathcal{I}}(x)^T \lambda_{\mathcal{I}}\|_{\infty} \\
 C_2 &:= \|S\lambda - \mu e\|_{\infty} \\
 C_3 &:= \frac{\mu_0 \|f_{\mathcal{I}}(x) + s\|_{\infty}}{\|f_{\mathcal{I}}(x_0) + s_0\|_{\infty} + 1} \\
 C_4 &:= \frac{\mu_0 \|f_{\mathcal{E}}(x)\|_{\infty}}{\|f_{\mathcal{E}}(x_0)\|_{\infty} + 1}.
 \end{aligned} \tag{6.25}$$

A partir dos critérios normalizados  $C_1, C_2, C_3$  e  $C_4$ , define-se:

$$C_{max}(x, s, \mu) = \max\{C_1, C_2, C_3, C_4\}. \tag{6.26}$$

A Figura (6.1) mostra a evolução dos critérios  $C_1, C_2, C_3, C_4$  e  $C_{max}$  ao longo da direção  $d$  para uma aplicação típica de FPO e mostra o resultado de uma busca efetuada em  $C_{max}$ . O passo  $\gamma \in (0, \gamma_{max})$  determinado pela busca é tal que  $\gamma d$  é direção de descida para  $C_{max}$ .

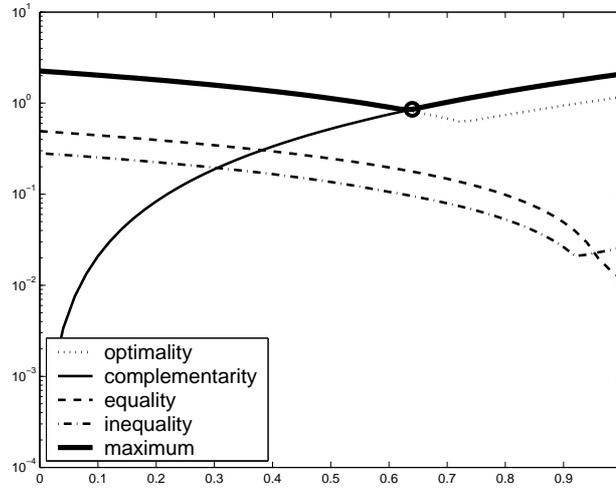


Figura 6.1: Uma busca ao longo de  $d$  com o critério  $C_{max}$ .

A normalização dos critérios (6.25) possui significado: se for exigido  $C_2 \leq \mu$  então o ponto  $(x, s, \lambda)$  está bem centralizado. Exigir  $C_1 \leq \mu$  equivale a:

$$\|\nabla f_0(x) + A_{\mathcal{E}}(x)^T \lambda_{\mathcal{E}} + A_{\mathcal{I}}(x)^T \lambda_{\mathcal{I}}\|_{\infty} \leq \frac{\mu}{\mu_0}.$$

Ou seja, impõe-se uma redução na norma da otimalidade proporcional ao valor do parâmetro  $\mu$ . Igualmente,  $C_3 \leq \mu$  e  $C_4 \leq \mu$  equivalem a impor uma redução na inviabilidade proporcional a  $\mu$  e a inviabilidade inicial:

$$\|f_{\mathcal{I}}(x) + s\|_{\infty} \leq \frac{\mu}{\mu_0} (\|f_{\mathcal{I}}(x_0) + s_0\|_{\infty} + 1) \quad \text{e} \quad \|f_{\mathcal{E}}(x)\|_{\infty} \leq \frac{\mu}{\mu_0} (\|f_{\mathcal{E}}(x_0)\|_{\infty} + 1).$$

O número 1 é introduzido no denominador dos critérios  $C_3$  e  $C_4$  para evitar divisão por zero.

Para cada problema penalizado pode ser definido o seguinte critério de parada:

$$C_{max} \leq \mu.$$

Se o algoritmo alcança  $C_{max} \leq \mu$  em alguma iteração, então  $C_2$  garante que o ponto obtido está bem centralizado e os demais critérios são reduzidos proporcionalmente a  $\mu$ . Na última iteração é requerido  $C_{max} \leq \mu$  e  $\mu \leq 10^{-5}$ .

## 6.4 Algoritmos de restauração inexata

Os métodos de restauração inexata (IR) foram recentemente introduzidos por Martínez e Pillota (2000, 2001) [85, 86] para resolver problemas com restrições. A principal idéia da restauração inexata é que a viabilidade, por ser um aspecto muito importante do problema, pode ser tratada independentemente da otimalidade. Esta idéia foi utilizada em algoritmos viáveis e quase-viáveis [87, 88, 89], que possuem o inconveniente de, ao seguir domínios muito curvos, gerarem passos demasiadamente pequenos longe da solução. A restauração inexata evita este inconveniente dos métodos viáveis e quase-viáveis reduzindo automaticamente a tolerância à inviabilidade à medida que os iterando se aproximam da solução. Assim, distante da solução são aceitos passos grandes.

Uma iteração típica de um método de restauração inexata é composta por duas fases, chamadas de fase de restauração e fase de otimalidade. Na fase de restauração, a partir do ponto corrente  $x^k$ , possivelmente não-viável, é determinado um ponto intermediário  $z$  tal que a inviabilidade tenha sido “suficientemente” reduzida. Sendo  $h$  uma medida de inviabilidade e  $r$  a redução imposta, o passo de restauração  $z$  deve verificar  $h(z) < r h(x^k)$ . É também usual impor uma limitação de tamanho, para evitar passos demasiadamente longos. Assim a fase de restauração pode ser estabelecida como:

Dados  $x^k$ ,  $\beta > 0$  e  $r \in [0, 1)$ , encontre  $z$  tal que:

$$\begin{aligned} |h(z)| &\leq r |h(x^k)| \\ \|z - x^k\| &\leq \beta |h(x^k)|. \end{aligned} \tag{6.27}$$

Na restauração pode ser utilizado qualquer método para reduzir a inviabilidade.

Na fase de otimalidade, as restrições são linearizadas em  $z$  e minimiza-se aproximadamente a função objetivo do problema (ou o Lagrangeano) sujeito à linearização das restrições e à região de confiança  $\mathcal{D}_\Delta$  centrada em  $z$ . O ponto obtido  $y$  é avaliado, podendo ser aceito como novo iterando ou rejeitado. Se o ponto  $y$  for rejeitado, a região de confiança é reduzida e um novo ponto é calculado. Neste caso, a região de confiança permanece centrada em  $z$ , ou

seja, a viabilização obtida na fase de restauração não é perdida.

Uma iteração de um algoritmo de restauração inexata para um problema com uma restrição em  $\mathbb{R}^2$  é ilustrada na Figura (6.2).

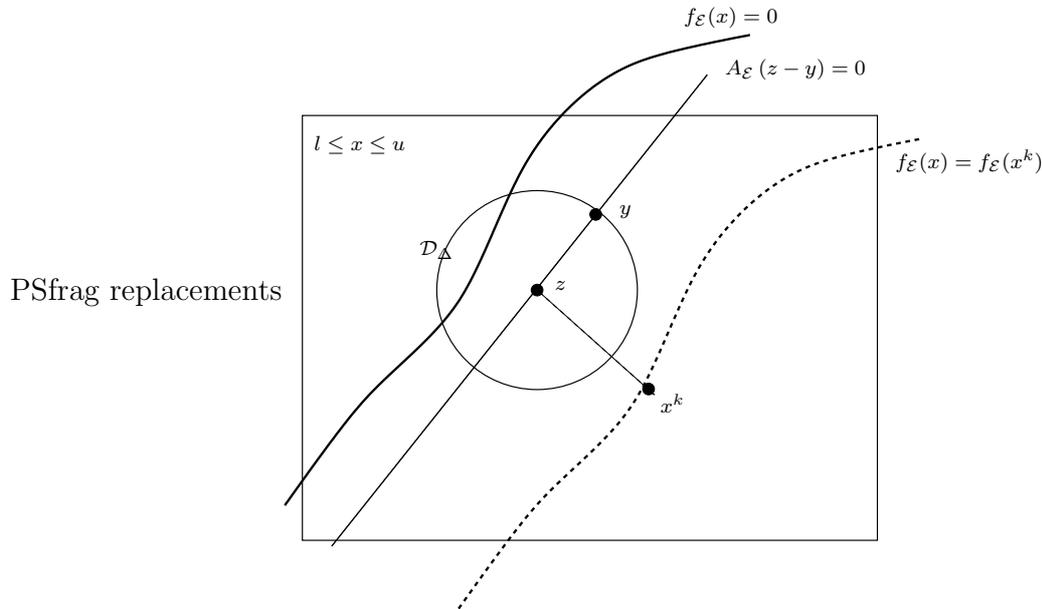


Figura 6.2: Fases de restauração e otimalidade de um algoritmo de IR.

Nos algoritmos de restauração inexata [85, 86] o ponto  $y$  é avaliado através de uma função de mérito, que combina a redução da função objetivo  $f_0$  e da medida de inviabilidade  $h$  através do parâmetro de penalidade  $\beta$ . A escolha do parâmetro  $\beta$  a cada iteração, essencial para o desempenho do algoritmo, envolve tanto a otimalidade quanto a viabilidade, o que reduz a independência das fases de restauração e otimalidade.

A restauração inexata pode ser empregada em algoritmos de programação quadrática seqüencial e de penalidade. No entanto, é em uma nova classe de métodos, chamados métodos de filtro, que o desacoplamento entre viabilização e otimização torna-se efetivo. Os algoritmos de filtro são discutidos a seguir.

## 6.5 Algoritmos de filtro

Nesta seção descreve-se o conceito de filtro, apresenta-se um novo algoritmo que utiliza este conceito e ilustra-se o funcionamento do algoritmo proposto através de saídas de um programa desenvolvido em Matlab.

O conceito de filtro foi introduzido em programação não-linear com o objetivo de evitar o uso de uma função de mérito - e conseqüentemente, evitar a atualização do parâmetro  $\beta$ .

Descrevemos nesta seção um algoritmo de filtro para o problema de programação não-linear com restrições de igualdade:

$$\begin{aligned} & \underset{x \in X}{\text{minimize}} && f_0(x) \\ & \text{sujeito a} && f(x) = 0 \end{aligned} \tag{6.28}$$

onde  $X$  é um conjunto simples (uma caixa). No capítulo de experimentos computacionais adaptaremos o tratamento ao problema geral, com restrições de igualdade e desigualdade.

Para o problema (6.28) consideramos a medida de inviabilidade  $h$ :

$$h(x) := \|f(x)\|. \tag{6.29}$$

Para definir o filtro é utilizado um conceito de otimização multi-objetivo: a dominação. Diz-se que um ponto  $x$  *domina* um ponto  $y$  sempre que:

$$f_0(x) \leq f_0(y) \quad \text{e} \quad h(x) \leq h(y).$$

Os iterandos que não são dominados por nenhum outro são armazenados em uma estrutura chamada *filtro*. O filtro  $F$  é uma lista de pares  $(f_0^i, h^i)$  tal que

$$f_0^i < f_0^j \quad \text{ou} \quad h^i < h^j \quad \text{para} \quad i \neq j.$$

Cada par  $(f_0^i, h^i)$  do filtro define uma região proibida em  $\mathbb{R}^2$ ,  $\{(f_0, h) \mid f_0 \geq f_0^i, h \geq h^i\}$  e uma região proibida em  $\mathbb{R}^n$ ,  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f_0(x) \geq f_0^i, h(x) \geq h^i\}$ . A união das regiões proibidas pelos pares que formam o filtro definem as regiões proibidas em  $\mathbb{R}^2$  e em  $\mathbb{R}^n$ .

A Figura (6.3) ilustra um filtro constituído de 3 pares  $(f_0^i, h^i)$  no espaço  $(f_0, h)$  e a região proibida correspondente.

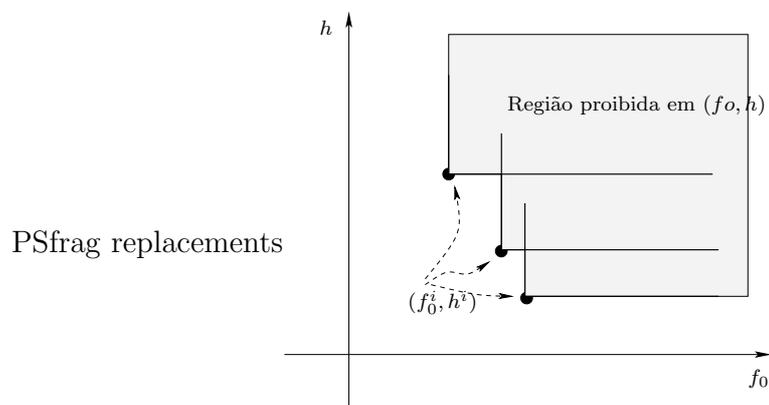


Figura 6.3: Filtro constituído de três pares  $(f_0^i, h^i)$

A estrutura do filtro é simples e facilmente implementável, visto que apenas um pequeno número de pares são armazenados. Dado um ponto  $x \in \mathbb{R}^n$ , é fácil verificar se ele pertence à região proibida, fazendo apenas comparações em  $\mathbb{R}^2$ .

O uso do filtro na avaliação de um passo foi proposto por Fletcher e Leyffer (1997) [90] e uma prova de convergência global para um algoritmo de PQS com região de confiança utilizando filtro foi obtida (1999) por Fletcher, Gould, Leyffer, Toint e Wächter [14]. O filtro foi também adotado em algoritmos para problemas com restrições de igualdade e desigualdade, utilizando pontos interiores com busca unidirecional por Ulbrich, Ulbrich e Vicente (2000) [15] e por Wächter e Biegler (2001) [16].

**Um algoritmo de filtro.** Nesta seção é apresentado o algoritmo de filtro desenvolvido por Gonzaga, Karas e Vanti (2001) [17]. Este algoritmo possui as seguintes características:

- Cada iteração inicia com um filtro e sua região proibida.
- Utiliza o conceito de restauração inexata de Martínez, tendo uma fase de viabilização e uma fase de otimização.

- As fases de viabilidade e otimalidade são totalmente independentes.
- Para as fases de viabilização e otimização podem ser empregados quaisquer algoritmos satisfazendo hipóteses razoáveis.
- Na fase de viabilização exige-se apenas que a inviabilidade seja reduzida de uma fração fixa.
- Em sua versão base o número de pares  $(f_0^i, h^i)$  introduzidos no filtro é talvez o mínimo necessário para garantir a existência de um ponto estacionário de primeira ordem.

O algoritmo trabalha com o filtro  $F_k$  em  $\mathbb{R}^2$  e com o conjunto de pontos proibidos associado, em  $\mathbb{R}^n$ , que denotamos  $\mathcal{F}_k$ . O conjunto  $\mathcal{F}_k$  não é construído. A verificação se um ponto pertence a ele é realizada através de comparações em  $\mathbb{R}^2$ .

Como exemplo, considere um ponto corrente  $x^k$ , um filtro  $F^k$  e um passo  $d$  gerado. Se para  $y = x^k + d$  o par associado  $(f_0(y), h(y))$  estiver na região proibida em  $\mathbb{R}^2$  definida por  $F^k$ , então o passo  $d$  será rejeitado. Somente se  $(f_0(y), h(y))$  não estiver na região proibida,  $y$  poderá ser aceito como novo iterando.

No início de cada iteração, o par

$$(f_0(x^k) - \alpha h(x^k), h(x^k) - \alpha h(x^k)) \text{ com } \alpha \in (0, 1),$$

é temporariamente introduzido no filtro, definindo o chamado *filtro temporário*, denotado  $\bar{F}_k$ , e definindo também o conjunto de pontos proibidos em  $\mathbb{R}^n$  associado ao filtro temporário, denotado  $\bar{\mathcal{F}}_k$ . Após a iteração ser completada, este par será adicionado ao filtro permanente  $F_k$  apenas se a iteração não produzir um decréscimo em  $f_0$ . Sempre que um novo par é introduzido no filtro, os pares dominados por ele são eliminados.

Cada iteração do algoritmo é composta de duas fases:

— Fase de viabilização (restauração): a partir de  $x^k$  obtém-se  $z^k \in X$  que que não pertence a  $\bar{\mathcal{F}}_k$  e a inviabilidade é reduzida de no mínimo  $\alpha h(x^k)$ .

— Fase de otimização: define-se o conjunto tangente associado a  $z^k$ ,

$$\mathcal{L}(z^k) = \{x \in X \mid x - z^k \in \mathcal{N}(A(z^k))\},$$

a partir de  $z^k$  busca-se reduzir a função objetivo no espaço tangente ao conjunto viável, ou seja calcula-se  $x^{k+1} \in \mathcal{L}(z^k)$  com  $x^{k+1} \notin \bar{\mathcal{F}}_k$  e  $f_0(x^{k+1}) < f_0(z^k)$ .

Estas duas fases são ilustradas na Figura (6.4). Os pontos  $x \in \mathbb{R}^n$ , mostrados no espaço  $(f_0, h)$ , indicam  $(f_0(x), h(x))$ .

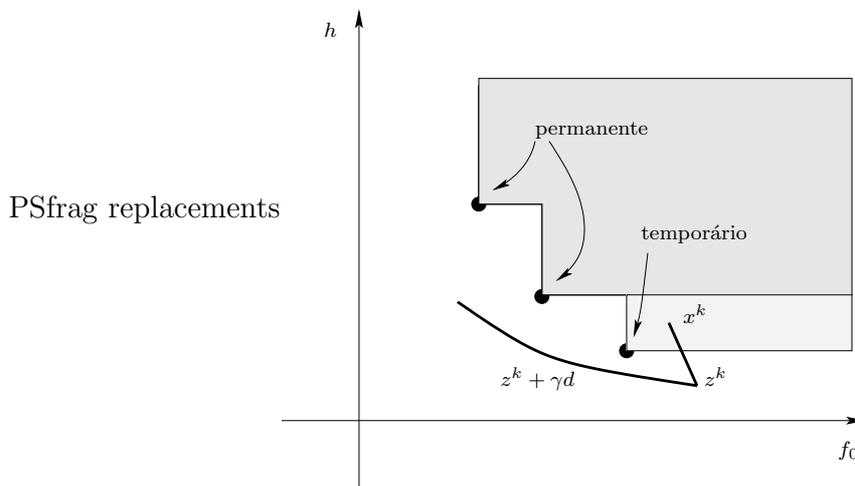


Figura 6.4: Filtro, filtro temporário e uma iteração do algoritmo.

O algoritmo pode parar em duas situações: se um ponto estacionário for obtido, ou se a fase de restauração falhar, o que pode ocorrer caso seja encontrado um ponto estacionário não viável para a medida  $h$ . Se estas situações não ocorrem então o algoritmo gera sequências  $(x^k)$  e  $(z^k)$ .

O algoritmo de filtro proposto é descrito a seguir:

#### Algoritmo - Restauração inexata com filtro

Dados  $x^0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $F_0 = \emptyset$ ,  $\mathcal{F}_0 = \emptyset$  e  $\alpha \in (0, 1)$ .

$k := 0$ .

Repita

$$(\tilde{f}_0, \tilde{h}) = (f_0(x^k) - \alpha h(x^k), (1 - \alpha)h(x^k)).$$

Construa o conjunto  $\bar{F}_k = F_k \cup \{(\tilde{f}_0, \tilde{h})\}$ .

Defina o conjunto  $\bar{\mathcal{F}}_k = \mathcal{F}_k \cup \{x \in \mathbb{R}^n \mid f_0(x) \geq \tilde{f}_0, h(x) \geq \tilde{h}\}$ .

*Fase de restauração:*

Se  $h(x^k) = 0$  então  $z^k = x^k$ ;

senão calcule  $z^k \notin \bar{\mathcal{F}}_k$  tal que  $h(z^k) < (1 - \alpha)h(x^k)$ ;

se não for possível, pare com insucesso.

*Fase de otimização:*

Se  $z^k$  é um ponto estacionário então pare com sucesso;

senão calcule  $x^{k+1} \notin \bar{\mathcal{F}}_k$  tal que

$$x^{k+1} \in \mathcal{L}(z^k) \text{ e } f_0(x^{k+1}) \leq f_0(z^k).$$

*Atualização do filtro:*

Se  $f_0(x^{k+1}) < f_0(x^k)$  então

$$F_{k+1} = F_k, \mathcal{F}_{k+1} = \mathcal{F}_k \text{ (iteração } f_0)$$

senão

$$\bar{F}_{k+1} = \bar{F}_k, \bar{\mathcal{F}}_{k+1} = \bar{\mathcal{F}}_k \text{ (iteração } h)$$

$k := k + 1$ .

**Hipóteses.** Foram usadas as seguintes hipóteses gerais:

**(H1)** Os iterandos  $(x^k)$  e  $(z^k)$  permanecem em um domínio convexo compacto  $\Omega \in \mathbb{R}^n$ . Esta hipótese é usual e pode ser assegurada adicionando ao problema uma grande restrição de caixa.

**(H2)** Todas as funções  $f_0(\cdot)$  e  $f(\cdot)$  são Lipschitz continuamente diferenciáveis em um conjunto aberto contendo  $\Omega$ . Ou seja, para  $x, y \in \Omega$  e  $i = 0, 1, \dots, m$ ,

$$f_i(y) = f_i(x) + \nabla f_i(x)^T(y - x) + o(x, y),$$

onde  $|o(x, y)| \leq M\|x - y\|^2$  e  $M > 0$  é uma constante de Lipschitz.

**(H3)** Todos os pontos de acumulação  $\bar{x} \in \Omega$  de  $(x^k)$  satisfazem a condição de qualificação de Mangasarian-Fromovitz (M-F).

Além destas hipóteses gerais considera-se que em todas as iterações os passos de viabilidade e otimalidade são *eficientes*, ou seja,  $z^k - x^k$  é uma

boa direção de descida para a inviabilidade e  $x^{k+1} - z^k$  é uma boa direção de descida para a otimalidade. A norma do passo de viabilidade deverá ser da ordem da medida de inviabilidade em  $x^k$ , não sendo demasiadamente longo. Para o passo de otimalidade, descreve-se em [17] uma condição geral de decréscimo que é satisfeita pelo método descrito no próximo capítulo.

**Resultados de convergência global.** Para este algoritmo, com as hipóteses explicitadas anteriormente, foram demonstrados dois resultados de convergência global: para um filtro com pequeno número de pontos (talvez o mínimo) o algoritmo gera um ponto de acumulação estacionário. Para um filtro maior todos os pontos de acumulação são pontos estacionários. Estes resultados, que estão desenvolvidos em [17], não são mostrados neste texto.

**Um exemplo gráfico.** O funcionamento deste algoritmo é mostrado em um exemplo gráfico com o seguinte problema em  $\mathbb{R}^2$ :

$$\begin{aligned} &\text{minimize} && f_0(x) = x_2 \\ &\text{sujeito a} && f(x) = x_2 + (2 + x_1) \cos(x_1) = 0. \end{aligned} \tag{6.30}$$

As figuras a seguir mostram algumas iterações do algoritmo de filtro programado em Matlab. Os passos de viabilidade e restauração são intencionalmente imprecisos, mas satisfazem todas as hipóteses do algoritmo. As figuras da esquerda, em  $\mathbb{R}^n$ , mostram a região viável, curvas de nível da inviabilidade  $h(x) = \|f(x)\|$  e um minimizador local. As figuras da direita mostram os pares  $(f_0(x), h(x))$ .

A Figura (6.5) ilustra a primeira iteração. A figura da esquerda, em  $\mathbb{R}^n$ , mostra os pontos temporariamente proibidos associados com o primeiro iterando  $x^0$  e um passo de viabilidade seguido de um passo tangencial.

A figura da direita mostra o filtro no espaço  $(f_0, h)$ . Nesta primeira iteração tem-se  $F_0 = \emptyset$  e  $\bar{F}_0$  contém apenas o ponto  $(f_0(x^0) - \alpha h(x^0), (1 - \alpha)h(x^0))$ . Os pares resultantes dos passos de viabilidade e tangencial também são mostrados.

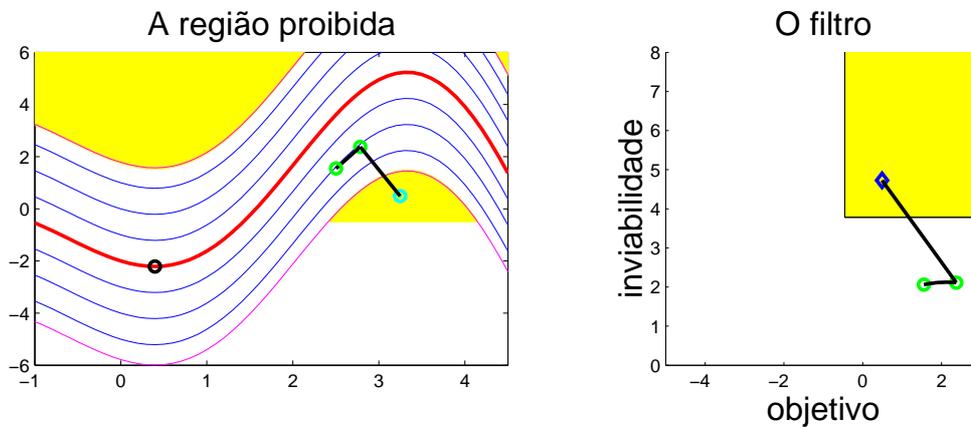


Figura 6.5: Primeira iteração do algoritmo de filtro.

A primeira iteração foi uma iteração- $h$ , pois  $f_0(x^1) \geq f_0(x^0)$ , portanto o par  $(f_0(x^0), h(x^0))$  é adicionado ao filtro permanente.

A Figura (6.6) mostra a segunda iteração. A região dos pontos permanentemente proibidos é representada em cor magenta, enquanto a região dos pontos temporariamente proibidos é representada em amarelo.

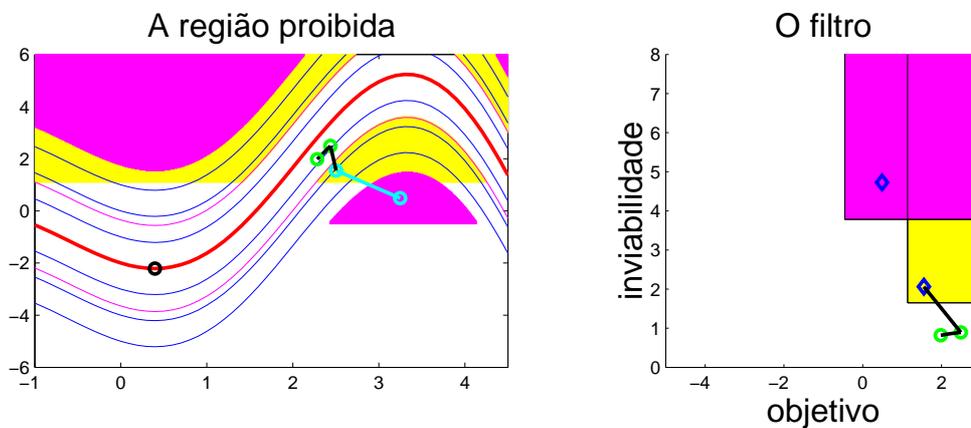


Figura 6.6: Pontos permanentemente e temporariamente proibidos após a primeira iteração.

A segunda iteração também foi uma iteração- $h$ . O par  $(f_0(x^1), h(x^1))$  é adicionado ao filtro, que passa a ter dois pontos.

A terceira iteração, mostrada na Figura (6.7), é uma iteração- $f_0$ . O filtro permanecerá inalterado.

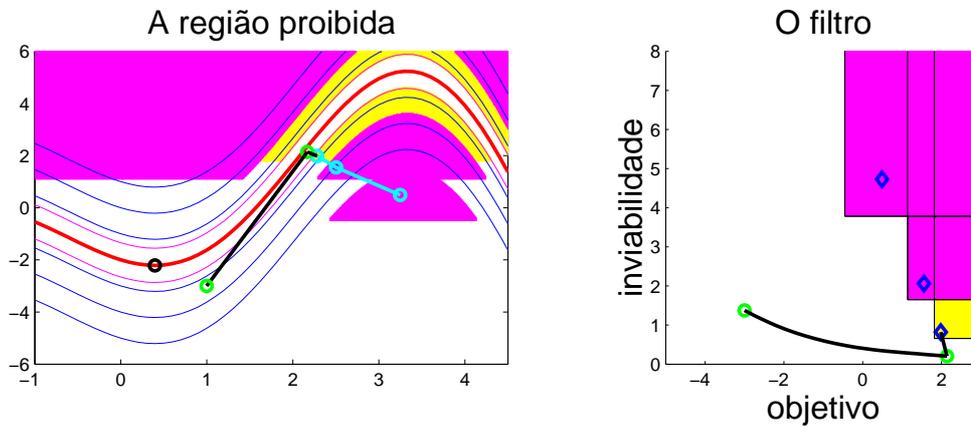


Figura 6.7: Terceira iteração: uma iteração  $f_0$ .

Após mais uma iteração- $h$  (iteração 4), os pontos do filtro são dominados pela nova entrada, e podem ser eliminados. A Figura (6.8) mostra a quinta iteração.

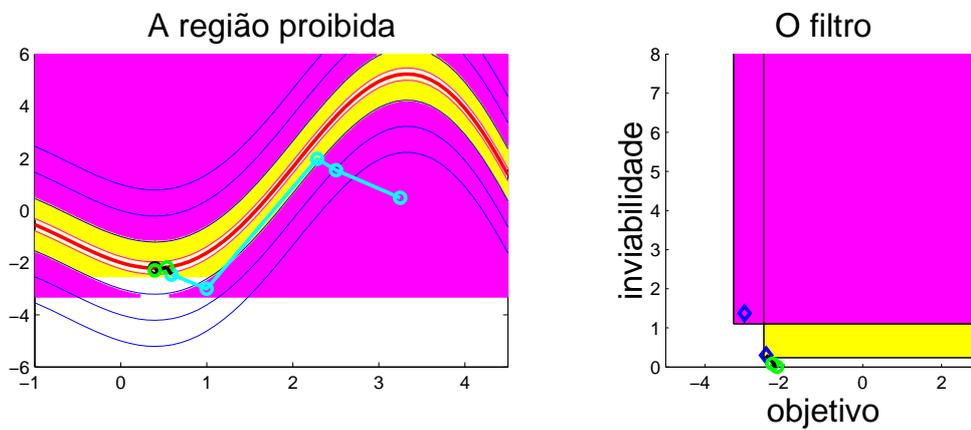


Figura 6.8: Quinta iteração: dois elementos do filtro são eliminados.

## 6.6 Conclusões

Neste capítulo foram comentadas as principais classes de algoritmos para problemas com restrições de igualdade e desigualdade. Especificamente comentamos o método de função barreira logarítmica e o método de pontos interiores. Como estratégia de globalização estudamos algoritmos de decréscimo suficiente em uma função de mérito e apresentamos o algoritmo proposto por Vanderbei e Shanno [1]. Um ponto crítico do algoritmo de Vanderbei e Shanno [1] é a atualização do parâmetro da função de mérito, que influencia significativamente o desempenho do algoritmo. Após expor a atualização proposta pelos autores, dita monótona, visto que o parâmetro pode apenas crescer ao longo das iterações, propomos uma estratégia não monótona de atualização do parâmetro. Além disto, uma nova função de mérito, que não utiliza parâmetro de penalização, foi proposta.

Uma nova classe de métodos, chamados métodos de filtro, que não utilizam função de mérito, foi também apresentada. Os conceitos básicos dos métodos de filtro foram definidos e um novo algoritmo foi proposto. Para este algoritmo foi desenvolvida a teoria de convergência global, tendo sido demonstrada a convergência para pontos críticos de primeira ordem. Estes resultados de convergência não foram reproduzidos neste texto, podendo ser encontrados na referência [17]. O funcionamento do algoritmo de filtro proposto foi ilustrado através de um exemplo gráfico.

No Capítulo 7 a seguir apresenta-se alguns experimentos computacionais com a aplicação dos algoritmos propostos ao fluxo de potência ótimo.

# Capítulo 7

## Experimentos com algoritmos para o fluxo de potência ótimo

### 7.1 Introdução

Neste capítulo descreve-se experimentos computacionais com os algoritmos de programação não-linear, expostos no capítulo precedente, aplicados ao problema de fluxo de potência ótimo.

### 7.2 O problema de FPO implementado

**O problema de FPO implementado.** O problema de fluxo de potência ótimo, implementado em Matlab e empregado nos experimentos descritos, possui a estrutura (3.1), mostrada no Capítulo III:

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & f_0(Pg) = \sum_{i=1}^{ng} a_i Pg_i^2 + b_i Pg_i + c_i \\ \text{sujeito a} \quad & P_i(V_m, \theta) + Pl_i - Pg_i = 0 & i = 1, \dots, nb \\ & Q_i(V_m, \theta) + Ql_i - Qg_i = 0 & i = 1, \dots, nb \\ & \underline{V}_{m_i} \leq V_{m_i} \leq \overline{V}_{m_i} & i = 1, \dots, nb \\ & \underline{Pg}_i \leq Pg_i \leq \overline{Pg}_i & i = 1, \dots, ng \\ & \underline{Qg}_i \leq Qg_i \leq \overline{Qg}_i & i = 1, \dots, ng \\ & \underline{T}_i \leq T_i(V_m, \theta) \leq \overline{T}_i & i = 1, \dots, nl. \end{aligned} \tag{7.1}$$

onde a função objetivo  $f_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  adotada minimiza o custo de geração ativa, sendo  $a_i$ ,  $b_i$  e  $c_i$  os coeficientes de custo de geração da  $i$ -ésima máquina;  $nb$ ,  $nl$  e  $ng$  são, respectivamente, o número de barras, de linhas e de geradores do sistema;  $V_m \in \mathbb{R}^{nb}$  e  $\theta \in \mathbb{R}^{nb}$  são o módulo e o ângulo da tensão nas barras;  $Pg \in \mathbb{R}^{ng}$  e  $Qg \in \mathbb{R}^{ng}$  são as potências ativa e reativa geradas;  $Pl \in \mathbb{R}^{nb}$  e  $Ql \in \mathbb{R}^{nb}$  são as cargas ativas e reativas;  $P_i$  e  $Q_i$  são as potências ativa e reativa calculadas na  $i$ -ésima barra e  $T \in \mathbb{R}^{nl}$  é o fluxo nas linhas de transmissão. Os termos com barras inferiores e superiores indicam respectivamente limites mínimos e máximos para as variáveis correspondentes.

**Sistemas elétricos testados.** Foram empregados nos testes os sistemas IEEE de 30, 57 e 118 barras e duas configurações do sistema Sul-Brasileiro com 45 e 54 barras. A Tabela 7.1 mostra as principais dimensões destes sistemas.

Tabela 7.1: Dimensões dos sistemas testados e do problema de otimização.

Sistema	$N^0$ Barras	$N^0$ Linhas	$N^0$ Ger.	n	m	p
IEEE	30	41	6	71	60	166
IEEE	57	80	7	127	114	302
IEEE	118	186	54	343	236	824
IEEE	300	411	69	737	600	1698
BR	54	78	13	133	108	316

Seguiu-se a notação dos capítulos anteriores, sendo  $n = 2nb - 1 + 2ng$  a dimensão de  $x$ ,  $m = 2nb$  o número de restrições de igualdade e  $p = 2nb + 4ng + 2nl$  o número de restrições de desigualdade.

### 7.3 Experimentos com algoritmos de pontos interiores

Nesta seção aplica-se os algoritmos de pontos interiores com busca em uma função de mérito descritos no Capítulo 6. Inicialmente são mostrados os resultados obtidos com o algoritmo sem globalização, ou seja, sem busca

em uma função de mérito. Seguem-se os resultados obtidos realizando uma busca tipo Armijo ao longo da função de mérito. Adota-se a atualização do parâmetro de penalidade proposta por Vanderbei e Shanno e a atualização não-monótona proposta neste trabalho. Finalmente mostram-se os resultados utilizando a nova função de mérito proposta, que não utiliza parâmetro de penalização.

### 7.3.1 Inicialização e atualização das variáveis

**As variáveis de folga.** Nos algoritmos de pontos interiores exige-se na inicialização das variáveis de folga apenas sua positividade. Assim, pode-se fazer  $s_i^0 = 1$ , para todo  $i \in \mathcal{I}$ . Outra opção é considerar as restrições satisfeitas em  $x^0$  ( $f_i(x^0) \leq 0$  para  $i \in \mathcal{I}$ ), fazendo:

$$s^0 = \max(-f_{\mathcal{I}}(x^0), 1).$$

O efeito destas inicializações será comentado posteriormente.

**Os multiplicadores de Lagrange.** Na inicialização dos multiplicadores de Lagrange é exigida apenas a positividade de  $\lambda_{\mathcal{I}}$ , e não há restrição na inicialização de  $\lambda_{\mathcal{E}}$ . Pode-se então fazer  $\lambda_i = 1$  para todo  $i \in (\mathcal{E} \cup \mathcal{I})$ .

**O parâmetro de barreira  $\mu$ .** O parâmetro de barreira  $\mu$  é inicializado com  $\mu^0 = 1$ , e para sua atualização faz-se a cada iteração  $\mu = \sigma \frac{s^T \lambda_{\mathcal{I}}}{p}$ , com  $\sigma = 0.2$ .

**Critério de parada.** O critério de parada adotado considera a norma das condições de KKT perturbadas (6.12). Definimos  $\varepsilon_g = 1e - 5$ ,  $\varepsilon_{\mathcal{E}} = 1e - 3$ ,  $\varepsilon_{\mathcal{I}} = 1e - 3$  e  $\varepsilon_v = 1e - 5$ . O algoritmo pára ao verificar:

$$\left\| \begin{array}{c} (\nabla f_0(x) + A_{\mathcal{E}}(x)^T \lambda_{\mathcal{E}} + A_{\mathcal{I}}(x)^T \lambda_{\mathcal{I}}) / \varepsilon_g \\ (S \lambda_{\mathcal{I}} - \mu e) / \varepsilon_v \\ (f_{\mathcal{I}}(x) + s) / \varepsilon_{\mathcal{I}} \\ (f_{\mathcal{E}}(x)) / \varepsilon_{\mathcal{E}} \end{array} \right\|_{\infty} \leq 1. \quad (7.2)$$

### 7.3.2 Algoritmo de passo pleno

Neste algoritmo o passo de Newton, definido pela solução do sistema (6.15), é aceito sem que seja realizada uma busca. Apenas o teste da razão (6.16) é realizado para garantir positividade das variáveis de folga e dos multiplicadores associados às desigualdades.

As Figuras (7.1) e (7.2) ilustram, para o sistema IEEE 57, com duas inicializações diferentes das variáveis de folga, o decréscimo do parâmetro  $\mu$  e dos critérios que compõem o critério de parada (7.2), ao longo das iterações.

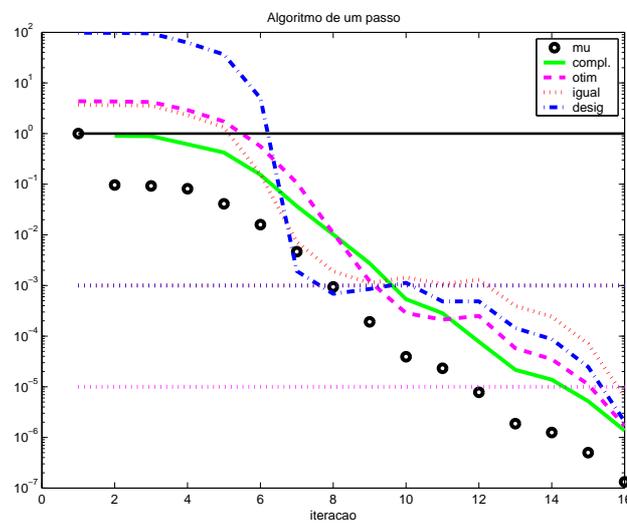


Figura 7.1: Variável de folga inicial  $s_i^0=1$ ,  $i \in \mathcal{I}$ .

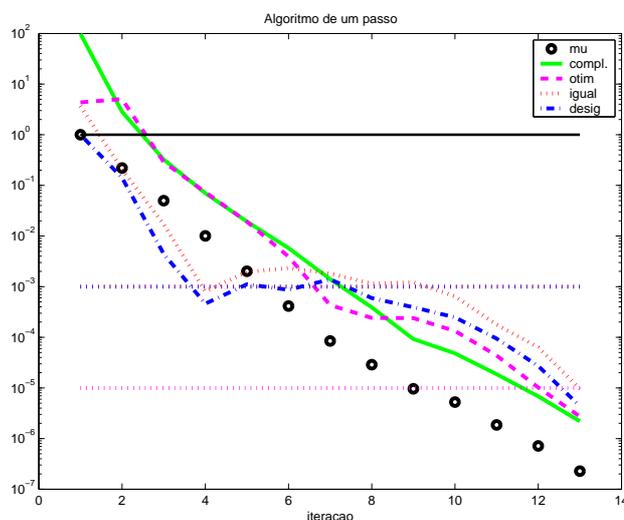


Figura 7.2: Variável de folga inicial  $s^0 = \max(-f_{\mathcal{I}}(x^0), 1)$ .

O efeito da inicialização das variáveis de folga sobre o valor da inviabilidade inicial pode ser observado nestas figuras. Para a inicialização que faz  $s^0 = \max(-f_{\mathcal{I}}(x^0), 1)$ , a inviabilidade inicial das desigualdades é nula, o que indica que neste exemplo o ponto inicial satisfaz  $f_{\mathcal{I}}(x^0) \leq 0$  para todo  $i \in \mathcal{I}$ . Os demais critérios decrescem e satisfazem o critério de parada após 13 iterações, ao passo que com a inicialização unitária são necessárias 16 iterações. Esta redução no número de iterações verifica-se nos demais sistemas testados, como pode ser observado na tabela a seguir.

A Tabela (7.2) mostra o número de iterações necessárias para que o critério de parada seja satisfeito com cada um dos sistemas teste. A redução do número de iterações devido à inicialização das variáveis de folga que considera a inviabilidade inicial  $f_{\mathcal{I}}(x^0)$ , pode ser observada.

Nos testes seguintes foi adotada a inicialização da variável de folga que proporcionou melhores resultados, ou seja,  $s_i^0 = \max(f_i(x^0), 1), i \in \mathcal{I}$ .

Tabela 7.2: Algoritmo de passo pleno.

Sistema	IEEE 30	IEEE 57	IEEE 118	IEEE 300	BR 54
$s_i^0 = 1, i \in \mathcal{I}$	13	16	21	27	21
$s_i^0 = \max(f_i(x^0), 1), i \in \mathcal{I}$	13	13	19	25	18

### 7.3.3 Algoritmos de descréscimo suficiente em uma função de mérito

Nos algoritmos testados nesta seção a globalização do método de Newton é realizada através de busca que garante, a cada iteração, descréscimo suficiente em uma função de mérito. Inicialmente mostramos os resultados para o algoritmo de Vanderbei e Shanno.

**Algoritmo de Vanderbei e Shanno.** O algoritmo de Vanderbei e Shanno foi exposto no Capítulo 6. Neste algoritmo, uma vez determinado  $\gamma_{max}$  pelo teste da razão (6.16), é realizada uma busca tipo Armijo ao longo da direção de Newton, no intervalo  $(0, \gamma_{max}]$  tal que o passo proporcione descréscimo suficiente em uma função de mérito. A função de mérito empregada é a penalidade quadrática (6.18).

A Figura (7.3) ilustra, para uma iteração de um problema de FPO, o comportamento da inviabilidade, da função objetivo penalizada e da função de mérito ao longo da direção  $d$ , no intervalo  $(0, \gamma_{max}]$ . A figura identifica também o passo definido por uma busca Armijo na função de mérito. Observe-se que a busca de Armijo não é exata.

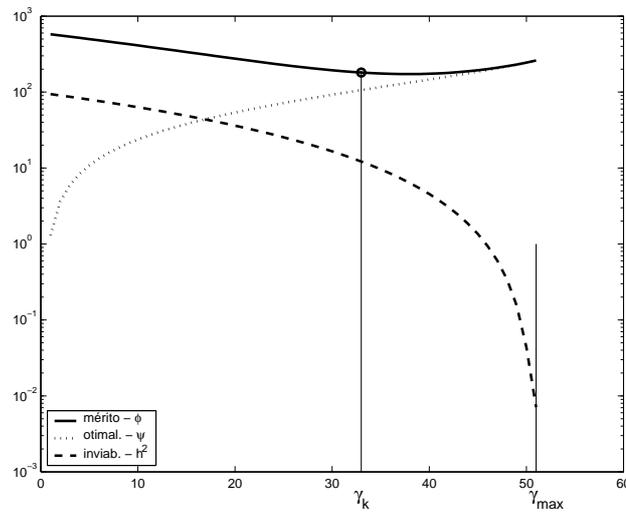


Figura 7.3: Função de mérito ao longo da direção calculada.

O parâmetro  $\beta$  é inicializado  $\beta^0 = 1$  e sua atualização ocorre de forma crescente, de acordo com a proposta dos autores em [1], ou seja, é calculado  $\beta_{min}$  por (6.22) e exige-se, a cada iteração,  $\beta > \beta_{min}$ . Caso esta desigualdade não se verifique, é feita a atualização  $\beta = 10\beta_{min}$ .

A Figura (7.4) ilustra, para o sistema teste IEEE 57, o decréscimo do parâmetro  $\mu$  e dos critérios que compõem (7.2) ao longo das iterações. A Figura (7.5) ilustra, para este problema, a evolução do parâmetro  $\beta$ .

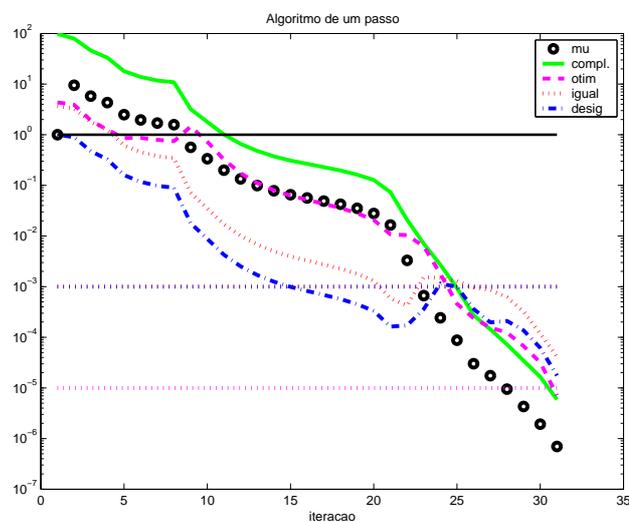


Figura 7.4: Algoritmo de Vanderbei e Shanno - Evolução dos critérios.

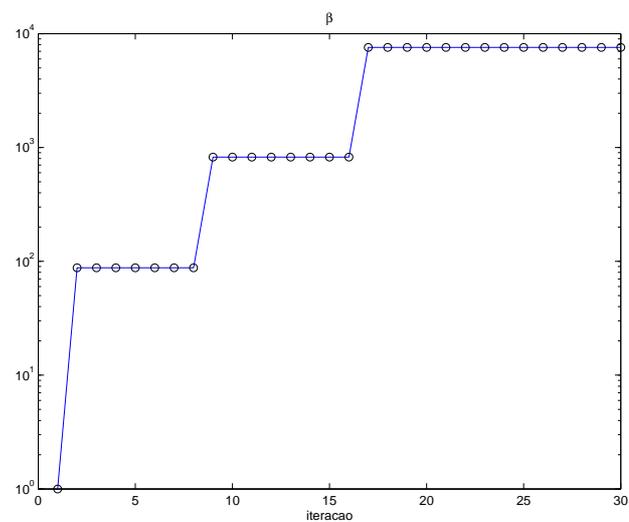


Figura 7.5: Algoritmo de Vanderbei e Shanno - Evolução de  $\beta$ .

Pelas figuras vê-se que com a redução do passo a cada iteração os critérios são reduzidos mais lentamente do que no algoritmo de passo pleno, exigindo assim um número maior de iterações. A Tabela (7.3) mostra o número de

iterações necessárias para obter a solução de cada problema testado com o algoritmo de Vanderbei e Shanno.

Tabela 7.3: Algoritmo de Vanderbei e Shanno.

Sistemas	IEEE 30	IEEE 57	IEEE 118	IEEE 300	BR 54
Iterações	18	31	37	34	25

Comparando-se estes valores com os obtidos para o caso sem busca ao longo da função de mérito, pode-se notar que, para todos os problemas testados, o número de iterações foi maior no algoritmo com busca. Este comportamento é esperado, visto que a cada iteração, o comprimento do passo ao longo da direção calculada, é reduzido. Como deseja-se um algoritmo com a robustez proporcionada pela convergência global mas que também seja eficiente, testam-se a seguir as estratégias propostas no Capítulo 6.

**Atualização não monótona de  $\beta$ .** Colocar demasiada importância na viabilidade nas iterações finais pode ser ineficiente, bem como considerar pouco a viabilidade nas iterações iniciais. Propomos então a definição de  $\hat{\beta}$  (6.23) que considera explicitamente a redução obtida na inviabilidade e a atualização não monótona de  $\beta$  pela regra:

$$\beta = \max(10\beta_{min}, 10\hat{\beta}, \bar{\beta}).$$

Nos testes empregamos  $\bar{\beta} = 1$ .

As Figuras (7.6) e (7.7), a seguir, que referem-se ao sistema com BR 57, ilustram, para o algoritmo com a atualização não monótona proposta, o decréscimo do parâmetro  $\mu$  e dos critérios que compõem (7.2) e o comportamento do parâmetro  $\beta$ , respectivamente.

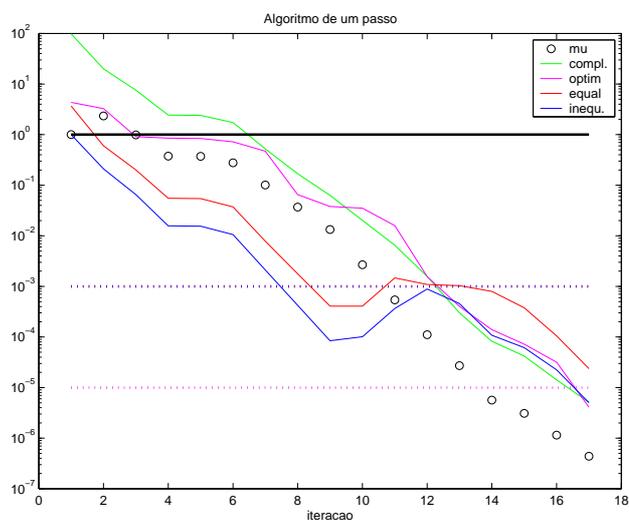


Figura 7.6: Atualização não monótona de  $\beta$  - Evolução dos critérios.

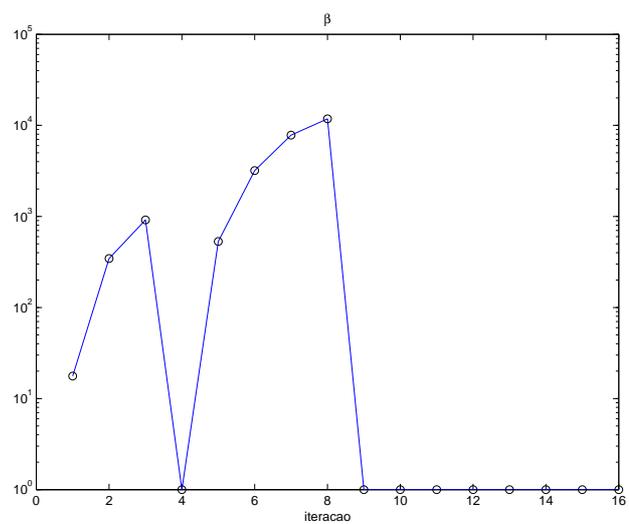


Figura 7.7: Atualização não monótona de  $\beta$  - Evolução de  $\beta$ .

Esta estratégia não monótona de atualização do parâmetro  $\beta$  produziu os resultados mostrados na Tabela (7.4) a seguir.

Com esta atualização não-monótona do parâmetro  $\beta$ , o número de iterações necessárias para satisfazer o critério de parada foi reduzido em relação ao

Tabela 7.4: Atualização não monótona de  $\beta$ .

Sistemas	IEEE 30	IEEE 57	IEEE 118	IEEE 300	BR 54
Iterações	15	17	22	28	26

número de iterações com o algoritmo de Vanderbei e Shanno, que permite apenas aumento de  $\beta$ . Por estes experimentos, além de observar o desempenho satisfatório da proposta de atualização não-monótona de  $\beta$ , verificou-se também a forte influência da atualização do parâmetro da função de mérito no desempenho do algoritmo. Esta sensibilidade a um parâmetro motivou a proposta da função de mérito descrita no Capítulo 6, que não utiliza parâmetro de penalização. Os experimentos com esta nova função de mérito são descritos a seguir.

**Função de mérito sem parâmetro.** No desenvolvimento desta função de mérito foi observado que a direção  $d$ , solução do sistema (6.15), é obtida pela aplicação do método de Newton às condições de KKT perturbadas (6.11). Logo  $d$  é uma direção de descida para cada um dos critérios de KKT perturbadas, e pequenos deslocamentos ao longo de  $d$  devem reduzir todos os critérios. Foi então proposta a realização de uma busca ao longo da direção  $d$  observando o máximo dos critérios normalizados a cada ponto, com a função definida por (6.26).

Utilizando a função de mérito (6.26) foram obtidos os resultados, em número de iterações para satisfazer o critério de parada, mostrados na Tabela (7.5) a seguir.

Tabela 7.5: Busca no máximo dos critérios de KKT.

Sistemas	IEEE 30	IEEE 57	IEEE 118	IEEE 300	BR 54
Iterações	13	18	27	34	25

A Tabela (7.6) resume os resultados obtidos. Nesta tabela Alg.1 refere-se ao algoritmo de passo pleno, Alg. 2 ao algoritmo de Vanderbei e Shanno,

Alg.3 a atualização não monótona de  $\beta$  e Alg.4 ao algoritmo com busca no critério  $C_{max}$ .

Tabela 7.6: Número de iterações para cada algoritmo.

Sistemas	IEEE 30	IEEE 57	IEEE 118	IEEE 300	BR 54
Alg.1	13	13	19	25	18
Alg.2	18	31	37	34	25
Alg.3	15	17	22	28	26
Alg.4	13	18	27	34	25

Embora não seja possível destacar, pelos resultados mostrados na Tabela (7.6), o algoritmo com busca mais eficiente, nota-se que com as propostas de atualização não monótona de  $\beta$  e a nova função de mérito (6.26), o esforço computacional devido à realização da busca é aceitável. Ou seja, o número de iterações, embora superior ao número demandado pelo algoritmo no qual não é realizada busca, é aceitável.

Os resultados mostrados consideraram apenas o número de iterações que cada algoritmo demandou para satisfazer o critério de parada. Isto porque, uma vez calculada a direção de Newton, cada algoritmo difere apenas na forma de calcular o passo ao longo desta direção. O cálculo da direção consiste na solução do sistema (6.15), envolvendo portanto a fatoração de uma matriz e a substituição. O cálculo do passo ao longo da direção envolve apenas a avaliação de funções e uma busca inexata, do tipo Armijo. Assim, o custo computacional de cada iteração dos algoritmos, quer envolvam algum tipo de busca quer não, não diferem significativamente.

As propostas de atualização não-monótona do parâmetro  $\beta$  e a função de mérito que não utiliza parâmetro de penalidade, bem como os experimentos computacionais correspondentes, discutidos nesta seção foram apresentados em [91].

Conclusões definitivas sobre as propostas requerem experimentos computacionais com sistemas teste de maior dimensão.

## 7.4 Implementação do algoritmo de filtro

No Capítulo 6 foi exposto um algoritmo de filtro que se caracteriza pela independência entre as fases de viabilização e otimização. Os algoritmos utilizados em cada uma destas fases não foram especificados, pois desde que estes satisfaçam as hipóteses, a teoria de convergência global desenvolvida é válida independentemente dos algoritmos internos escolhidos.

Nesta seção faz-se a descrição da formulação adotada na implementação do algoritmo de filtro e expõe-se os experimentos computacionais realizados. A seguir expomos as formulações das fases de viabilização e otimização.

### 7.4.1 Formulação adotada na implementação

Pela adição de variáveis de folga  $s \in \mathbb{R}^p$  às restrições de desigualdade do problema geral (6.1), obtemos o problema seguinte, que está no formato de (6.28):

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && f_0(x) \\ & \text{sujeito a} && f_{\mathcal{E}}(x) = 0 \\ & && f_{\mathcal{I}}(x) + s = 0 \\ & && s \geq 0. \end{aligned} \tag{7.3}$$

Para este problema define-se a medida de inviabilidade (6.29):

$$h(x, s) = \left\| \begin{pmatrix} f_{\mathcal{I}}(x) + s \\ f_{\mathcal{E}}(x) \end{pmatrix} \right\|, \tag{7.4}$$

e a matriz jacobiana das restrições de igualdade e desigualdade:

$$A(x, s) = \begin{bmatrix} A_{\mathcal{I}}(x, s) & I \\ A_{\mathcal{E}}(x) & 0 \end{bmatrix}. \tag{7.5}$$

**A fase de viabilização.** Nesta fase deve-se reduzir a inviabilidade até obter as condições  $h(x, s) \leq (1 - \alpha)h(x^k, s^k)$  e  $(x, s) \notin \bar{\mathcal{F}}_k$ . Isto é obtido por iterações de um algoritmo de região de confiança para o seguinte problema

de viabilização:

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && h(x, s)^2 \\ & \text{sujeito a} && s \geq 0. \end{aligned} \tag{7.6}$$

O problema de restauração (7.6) é solucionado através de sucessivos passos de região de confiança até a inviabilidade ser reduzida de um fator  $r$ :  $h(z^k) \leq r h^k$ .

Cada passo de região de confiança consiste na resolução aproximada de um problema quadrático no qual se minimiza a norma ao quadrado da linearização das restrições com uma região de confiança tipo caixa de raio  $\Delta$  para o passo  $d_x$  e para garantir a positividade da variável de folga. O problema quadrático formulado é o seguinte:

$$\begin{aligned} & \text{minimize}_{d \in \mathbb{R}^{n+p}} \left\| \begin{array}{c} A_{\mathcal{I}} d_x + d_s + f_{\mathcal{I}}(x) + s \\ A_{\mathcal{E}} d_x + f_{\mathcal{E}}(x) \end{array} \right\|^2 \\ & \text{sujeito a} \quad \begin{array}{l} -\Delta e \leq d_x \leq \Delta e \\ -\tau e \leq \frac{d_s}{s} \leq e, \end{array} \end{aligned} \tag{7.7}$$

e sua solução é obtida por um algoritmo de programação quadrática, que comentaremos adiante.

### Algoritmo de restauração

Dados  $x = x^k$ ,  $s = s^k$ ,  $h = h(x^k, s^k)$ ,  $\Delta > 0$ ,  $\beta \in (0, 1)$ ,  $r \in (0, 1)$ ,  $\bar{h} = rh$  (usamos  $\beta = 0.01$ ,  $r = 0.5$ ).

Calcule a matriz jacobiana  $A(x, s)$  por (7.5).

Repita

Calcule um passo de restauração  $d = (d_x, d_s)$  resolvendo (7.7).

Avalie a inviabilidade  $h_d = h(x + d_x, s + d_s)$ .

Avalie o passo  $d$  calculando:

$$\begin{aligned} \text{ared} &= \|h\|^2 - \|h_d\|^2 \\ \text{pred} &= \|h\|^2 - \|h + Ad\|^2 \\ \rho &= \frac{\text{ared}}{\text{pred}} \end{aligned} \quad (7.8)$$

Se  $\rho > \beta$  (aceitar o passo) faça:

$$x = x + d_x, \quad s = s + d_s, \quad h = h(x, s).$$

Se  $\rho > 0.8$ , faça  $\Delta = 2\Delta$ .

Se  $h > \bar{h}$  ou  $(x, s) \in \bar{\mathcal{F}}_k$ , calcule  $A(x, s)$ .

Senão (rejeitar o passo) faça

$$\Delta = \Delta/4.$$

Até que  $h \leq \bar{h}$  e  $(x, s) \notin \bar{\mathcal{F}}_k$ .

Faça  $z^k = (x, s)$ .

**A fase de otimização.** A fase de otimização do algoritmo de filtro consiste em, a partir de  $z^k$  determinar  $(x^{k+1}, s^{k+1})$  que não pertença ao conjunto  $\bar{\mathcal{F}}_k$  e para o qual o valor da função objetivo tenha sido reduzido em relação a seu valor em  $z^k$ . O passo de otimização deve estar no conjunto tangente  $\mathcal{L}(z^k)$ , o que nesta formulação significa que  $(x^{k+1}, s^{k+1}) - z^k \in \mathcal{N}(A(z^k))$  e  $s^{k+1} \geq 0$ .

A fase de otimização é portanto uma iteração de região de confiança para este problema. Vamos definir (como fizemos para a restauração) o problema de minimização de um modelo quadrático de  $f_0(\cdot)$  em uma região de confiança com formato de caixa que nas variáveis  $x$  tem raio  $\Delta$ , em torno de um ponto  $(x, z)$  (as variáveis  $s$  devem somente manter-se não negativas):

$$\begin{aligned} \underset{d \in \mathbb{R}^{n+p}}{\text{minimize}} \quad & \nabla f_0(x)^T d_x + 0.5 d_x^T H_0 d_x \\ \text{sujeito a} \quad & Ad = 0 \\ & -\Delta e \leq d_x \leq \Delta e \\ & -\tau s \leq d_s \leq \infty. \end{aligned} \quad (7.9)$$

Neste problema, o modelo de variação da função objetivo é dado por  $m(d) = \nabla f_0(x)^T d_x + 0.5 d_x^T H_0 d_x$ , onde  $H_0$  é uma matriz, em geral semi-definida

positiva, que aproxima a hessiana de  $f_0$  em  $x$ , ou preferencialmente a hessiana do lagrangeano do problema com estimadores de multiplicadores de KKT bem escolhidos. Comentaremos este modelo abaixo.

De posse do problema quadrático de região de confiança, podemos enunciar o algoritmo de otimização tangencial. A região de confiança é centrada no ponto  $z^k$ , obtido na fase de viabilização, e o raio  $\Delta$  da região de confiança será comentado adiante.

### Algoritmo de otimização tangencial

Dados  $(x, s) = z^k$ ,  $\Delta > 0$ ,  $\beta \in (0, 1)$  (usamos  $\beta = 0.01$ ).

Calcule a matriz jacobiana  $A(x, s)$  por (7.5) e a matriz  $H_0$  do modelo quadrático.

Repita

Calcule um passo tangencial  $d = (d_x, d_s)$  resolvendo (7.9).

Calcule  $(x^+, s^+) = (x, s) + d$ ,  $f_0(x^+)$  e  $h(x^+, s^+)$ .

Se  $(x^+, s^+) \in \tilde{\mathcal{F}}_k$ , faça  $\Delta = \Delta/4$  (passo rejeitado).

Senão, calcule

$$\begin{aligned} \text{ared} &= f_0(x) - f_0(x^+), \\ \text{pred} &= -(\nabla f_0(x))^T d_x + 0.5 d_x^T H_0 d_x, \\ \rho &= \frac{\text{ared}}{\text{pred}}. \end{aligned}$$

Se  $\rho > \beta$  (aceitar o passo)

faça  $x^{k+1} = x^+$ ,  $s^{k+1} = s^+$  e pare.

Senão (rejeitar o passo) faça  $\Delta = \Delta/4$ .

## 7.4.2 O algoritmo de filtro implementado

Com as fases de viabilização e otimização e as formulações expostas, pode-se definir o algoritmo de filtro seguinte:

### Algoritmo de filtro

Dados:  $x^0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $s^0 \in \mathbb{R}^p$ ,  $\alpha_f = 0.01$ ,  $\beta_f = 0.8$ ,  $r = 0.5$ ,

$\alpha = 0.01$ ,  $F_0 := \emptyset$  e  $\mathcal{F}_0 := \emptyset$ .

$k:=0$ .

Repita

Avalie  $f_0 = f_0(x^k)$  e  $h^k = h(x^k, s^k)$ .

$k=k+1$ ;

Forme o filtro temporário construindo o conjunto:

$$\bar{F}_k := F_k \cup (f_0 - \beta_f h, \alpha_f h).$$

Defina o conjunto em  $\mathbb{R}^n$  associado ao filtro temporário:

$$\bar{\mathcal{F}}_k = \mathcal{F}_k \cup \{x \in \mathbb{R}^n | f_0(x) \geq f_0 - \beta_f h^k, h(x) \geq \alpha_f h^k\}.$$

*Fase de viabilização:*

Se  $h^k = 0$  então  $z^k = x^k$ ;

senão, obtenha  $z^k$  pelo algoritmo de viabilização

Se não for possível pare com insucesso.

*Fase de otimização:*

Se  $z^k$  é um ponto estacionário então pare com sucesso;

senão, obtenha  $(x^{k+1}, s^{k+1})$  pelo algoritmo de otimização tangencial.

cial.

*Atualização do filtro:*

Se  $f_0(x^{k+1}) < f_0(x^k)$  então

$$F_{k+1} = F_k, \mathcal{F}_{k+1} = \mathcal{F}_k \text{ (iteração } f_0)$$

senão

$$F_{k+1}^- = \bar{F}_k, \mathcal{F}_{k+1}^- = \bar{\mathcal{F}}_k \text{ (iteração } h)$$

$k := k + 1$ .

### Observações.

Os raios  $\Delta$ : em ambas as fases é necessário fornecer aos algoritmos os raios  $\Delta_r$  e  $\Delta_0$  das regiões de confiança. O procedimento padrão consiste em iniciar com valores grandes e deixar que os algoritmos os reduzam sempre que haja passos rejeitados. Pode-se também permitir aumentos de  $\Delta$ , como fizemos no caso de restauração.

O modelo quadrático: neste trabalho não aprofundamos o estudo do modelo quadrático utilizado na fase de otimização. Para uma implementação eficiente é necessário utilizar estimativas de multiplicadores de Lagrange, que

têm grande influência na velocidade de convergência, principalmente perto de uma solução ótima.

### 7.4.3 Solução dos subproblemas quadráticos

A abordagem de filtros é muito dependente da capacidade de resolver os problemas de região de confiança. Muito recentemente houve um grande desenvolvimento em métodos de programação quadrática, e dispomos agora de pacotes computacionais muito eficientes.

Nesta implementação, a solução dos problemas quadráticos (7.7) e (7.9) foi realizada através de um pacote computacional chamado OOQP - Object-Oriented Software for Quadratic Programming, desenvolvido por M. Gertz e S. W. Wright junto ao Argonne National Laboratory [92].

O OOQP é um pacote computacional orientado para objetos que soluciona eficientemente problemas quadráticos convexos. Os problemas quadráticos são solucionados por algoritmos do tipo primal-dual de pontos interiores. As heurísticas de Mehrotra [12], discutidas no Capítulo 4, para a escolha do parâmetro de centralização, do comprimento do passo e o termo corretor de segunda ordem estão disponíveis, bem como as correções de ordem superior, propostas por Gondzio [13].

O OOQP foi implementada na linguagem C++, com interfaces que permitem a definição do problema e a entrada de dados via ASCII, MPS, AMPL e Matlab. Sua implementação considera a solução de problemas de grande porte. Os dados dos problemas são automaticamente convertidos em esparsos e manipulados convenientemente. Problemas quadráticos com estruturas especiais podem ser eficientemente solucionados. Por exemplo, problemas com restrições de caixa nas variáveis (como os problemas (7.7) e (7.9)) podem ser solucionados considerando sua estrutura.

Informações adicionais sobre este pacote podem ser obtidas na página [www.cs.wisc.edu/~swright/ooqp](http://www.cs.wisc.edu/~swright/ooqp).

**Ilustração do uso da OOQP.** O pacote OOQP proporciona grande liberdade na definição dos algoritmos de solução, nos parâmetros utilizados, e mesmo na especificação das rotinas de álgebra linear responsáveis pela

solução dos sistemas lineares. Nesta implementação do algoritmo de filtros utilizamos a OOQP da forma mais simples, sem alterar os parâmetros nem especificar os algoritmos de solução. A seguir expomos o uso da OOQP na forma como ela foi empregada.

Na definição do problema para a OOQP considera-se o problema quadrático:

$$\begin{aligned} & \underset{d}{\text{minimize}} && c^T d + 0.5 d^T Q d \\ & \text{sujeito a} && A d = b \\ & && C d \geq d. \end{aligned} \quad (7.10)$$

A chamada do pacote de solução OOQP é realizada pela seguinte instrução:  $[d]=\text{ooqp}(c, Q, lb, lu, A, b, [ ], [ ], [ ])$ ; onde, de acordo com (7.10),  $c$  e  $Q$  definem a função objetivo quadrática,  $A$  e  $b$  definem a restrição linear de igualdade e  $lb$  e  $lu$  definem os limites inferiores e superiores, respectivamente, da restrição linear de desigualdade.

Considerando, como exemplo, o problema de otimização (7.9), onde  $d = (d_x, d_s)$ , faz-se a seguinte definição de variáveis:

$$\begin{aligned} c &= \begin{bmatrix} \nabla f_o(x^k) \\ 0 \end{bmatrix}; & Q &= H_0; & b &= 0; \\ lb &= \begin{bmatrix} -\Delta e \\ -\tau s \end{bmatrix}; & lu &= \begin{bmatrix} \Delta e \\ \tau s \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (7.11)$$

A seguir ilustra-se a aplicação do algoritmo de filtros ao problema de fluxo de potência ótimo.

#### 7.4.4 Experimentos computacionais

As figuras a seguir mostram, no espaço  $(f_0, h)$ , as iterações do algoritmo de filtro aplicado ao fluxo de potência ótimo, com o sistema teste de 54 barras. Parte-se do ponto  $x^0$  determinado pelas condições iniciais do sistema, com inviabilidade  $h^0 = 36913.0$ , e função objetivo com valor  $f_0^0 = 1311.0$ . Um valor ótimo conhecido para a função objetivo é  $f_0^* = 566.09$ .

A Figura (7.8), a seguir, ilustra a primeira iteração do algoritmo de filtros. Com o ponto  $x^0$  é construído o filtro temporário  $\bar{F}_0$ , ilustrado na cor

amarela. A esta região do espaço  $(f_0, h)$  correspondem os pontos em  $\mathbb{R}^n$  temporariamente proibidos. Um passo de restauração a partir de  $x^0$  conduz ao ponto  $z^1$  e um passo de otimização a partir de  $z^1$  conduz ao ponto  $x^1$ .

A figura à esquerda mostra os mesmos passos em escala logarítmica. Os pontos de  $x \in \mathbb{R}^n$  representados nas figuras indicam  $(f_0(x), h(x))$ .

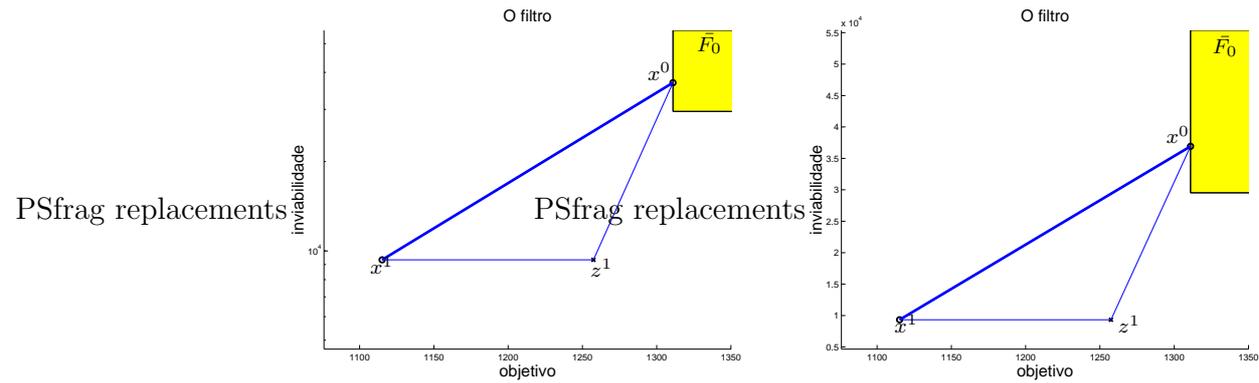


Figura 7.8: Primeira iteração do algoritmo de filtro.

A Figura (7.9), a seguir, ilustra as duas primeiras iterações do algoritmo. O filtro temporário associado ao ponto  $x^1$  é mostrado. Observe-se que a primeira iteração foi do tipo  $f_0$ , ou seja, houve redução na função objetivo:  $f_0(x^1) < f_0(x^0)$ . Por isto, o filtro permanente continua vazio nesta segunda iteração e apenas o filtro temporário associado ao ponto  $x^1$  é construído.

A partir de  $x^1$ , um passo de restauração e um passo de otimização conduzem ao ponto  $x^2$ .

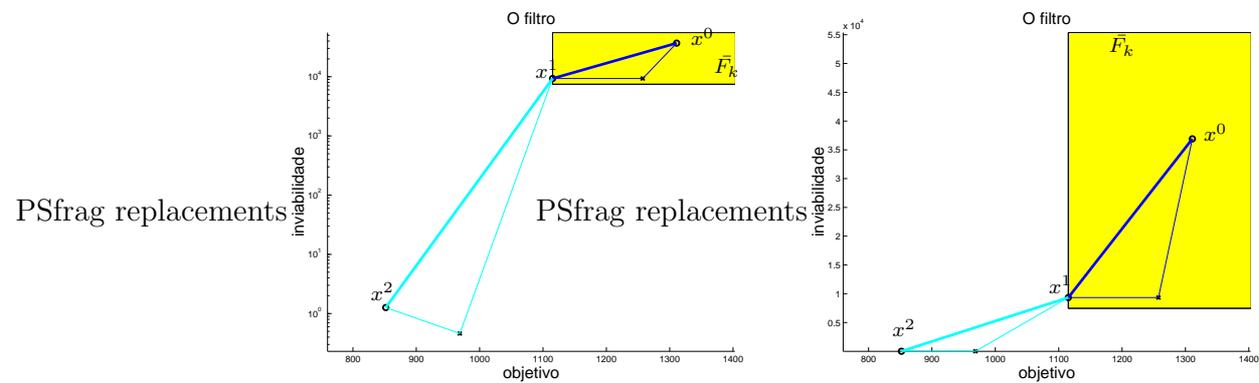


Figura 7.9: Duas iterações do algoritmo de filtro.

Pela Figura (7.9) vê-se que após duas iterações houve grande redução da inviabilidade e significativo progresso na otimalidade.

Nesta segunda iteração também houve redução da função objetivo, portanto o filtro não é atualizado e permanece vazio.

A Figura (7.10) a seguir ilustra quatro iterações do algoritmo. O filtro temporário associado ao ponto  $x^3$  é mostrado, bem como todos os passos de restauração e otimalidade que conduziram de  $x^0$  a  $x^4$ .

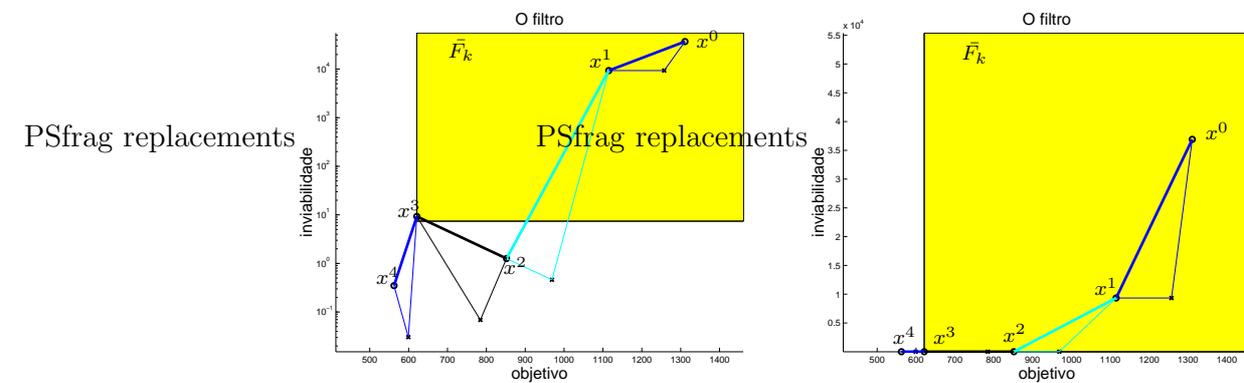


Figura 7.10: Quatro iterações do algoritmo de filtro.

Como na fase de otimização é minimizada a aproximação quadrática da função objetivo no espaço tangente à linearização das restrições, sem

considerar-se portanto, a curvatura das restrições, parte da viabilidade obtida no passo de restauração é perdida no passo de otimização. Na Figura (7.10), em escala logarítmica, pode-se observar que esta perda é mais significativa nas iterações três e quatro. Ou seja, quando a inviabilidade já foi bastante reduzida e os iterandos aproximam-se de uma solução ótima. Este comportamento confirma-se nas demais iterações do algoritmo.

A Figura (7.11), a seguir, ilustra sete iterações do algoritmo de filtro. Nesta figura está representado na cor magenta o filtro permanente e na cor amarela o filtro temporário associado ao ponto  $x^6$ .

Nesta iteração a otimalidade está próxima a um valor ótimo e com o passo de restauração a medida de inviabilidade atinge o valor  $10^{-4}$ . Após o passo de otimização, no entanto, a inviabilidade tem o valor  $10^{-2}$ .

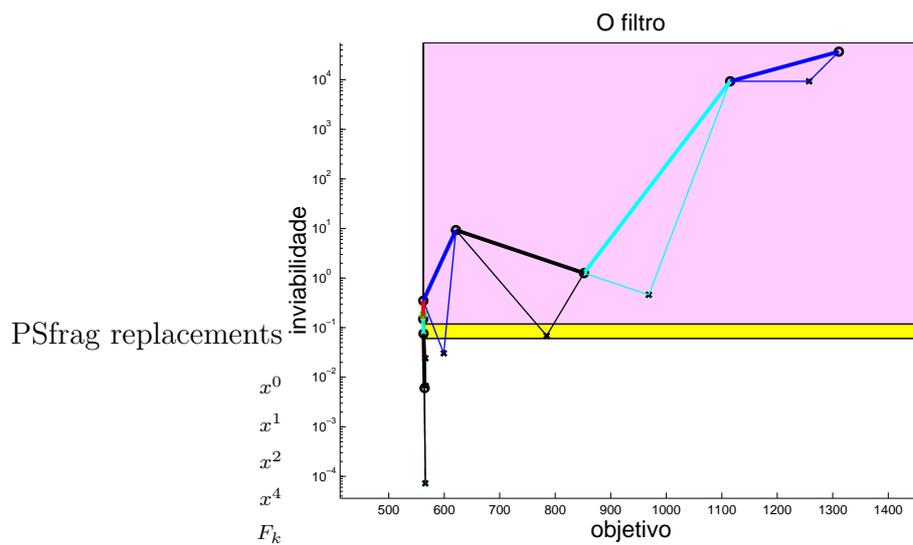


Figura 7.11: O filtro após sete iterações.

A Figura (7.12) ilustra todas as iterações do algoritmo de filtro aplicado a este problema de fluxo de potência ótimo. Após 10 iterações o critério de parada foi verificado.

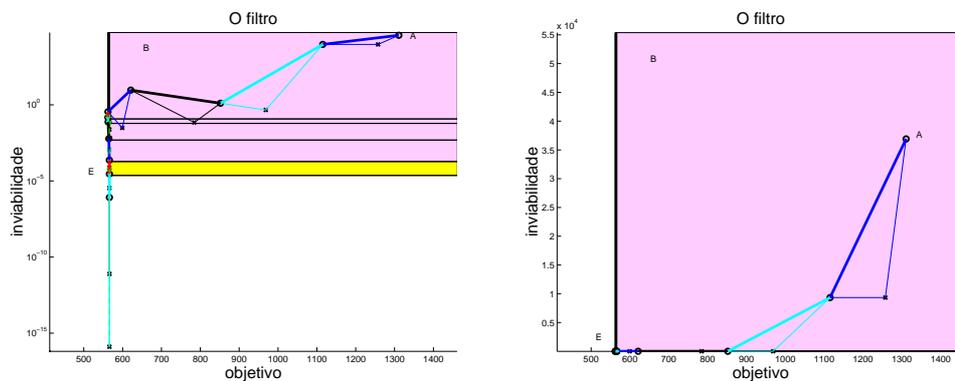


Figura 7.12: Solução de um problema de FPO pelo algoritmo de filtro.

O algoritmo de filtro foi testado com os demais sistemas da Tabela (7.1) e todos os casos foram solucionados em um número máximo de 15 iterações. Pelos testes realizados verificou-se os fatos comentados a seguir.

**Tamanho do filtro.** Pela especificação do algoritmo, trabalha-se com um filtro permanente que é atualizado apenas quando a iteração for do tipo  $h$  (quando não ocorre redução da função objetivo) e um filtro temporário, associado ao ponto corrente. A solução dos problemas testados foi obtida em um número pequeno de iterações, sendo muitas destas iterações do tipo  $f_0$  - o filtro permanece inalterado nestes casos. Com isto o filtro permanente é constituído de um pequeno número de pares de pontos e verificar se um iterando pertence a região proibida definida pelo filtro é um procedimento computacionalmente simples e rápido.

**Eficiência do algoritmo de otimização.** Nos testes com os demais sistemas verificou-se o comportamento ilustrado para o sistema BR 54. Nas iterações finais, próximas a uma solução ótima, parte significativa da viabilidade obtida no passo de restauração é perdida no passo de otimalidade. Tal comportamento deve-se ao fato de no passo de otimização realizar-se a minimização da aproximação quadrática da função objetivo, sem considerar a curvatura das restrições. Em implementações futuras prevê-se a necessidade de considerar a curvatura das restrições, através da minimização da aproximação quadrática do Lagrangeano.

**Solução dos subproblemas quadráticos.** Conforme exposto, cada iteração do algoritmo de filtro consiste na solução de dois subproblemas quadráticos, um para viabilização e outro para otimização. A avaliação do ponto obtido utilizando o filtro não demanda esforço computacional considerável. Assim, o esforço computacional em cada iteração depende da solução eficiente de cada subproblema quadrático.

Ao utilizar o pacote computacional OOQP, os problemas quadráticos são solucionados através de um método de pontos interiores primal-dual. Sem a especificação de parâmetros, cada problema quadrático é solucionado com uma precisão elevada, o que aumenta o esforço computacional. No entanto, no algoritmo de filtro, tal precisão não é necessária. Os subproblemas podem ser solucionados aproximadamente. Além disto, a cada iteração, dispõe-se de uma boa inicialização dos problemas quadráticos.

Uma importante característica da programação quadrática é que as matrizes são calculadas apenas uma vez, permanecendo inalteradas ao longo das iterações. Isto torna a programação quadrática bastante eficiente.

A redução do esforço computacional de cada iteração do algoritmo de filtro exige maior desenvolvimento de pesquisa na solução dos subproblemas quadráticos, seja através de uma utilização mais eficiente do pacote OOQP, seja utilizando programas que realizam a minimização de funções quadráticas em caixas, seja desenvolvendo pesquisa e implementação de algoritmos específicos para o problema.

## 7.5 Conclusões

Neste capítulo foram descritos os experimentos computacionais com os algoritmos de programação não-linear propostos. Inicialmente descrevemos os testes com os algoritmos baseados em busca na direção determinada pela solução das equações de KKT perturbadas (6.12). Os resultados obtidos, em termos de número de iterações para convergência, indicam que o uso desta estratégia de globalização não compromete demasiadamente a eficiência do algoritmo, especialmente quando são empregadas as propostas de atualização não-monótona do parâmetro de penalidade e da nova função de mérito, que

não possui parâmetros.

Para o algoritmo de filtro foi realizada uma implementação preliminar, visando observar o comportamento do algoritmo aplicado ao problema de fluxo de potência ótimo. Este experimento indicou ser o algoritmo de filtro bastante promissor. Seu desempenho em termos de número de iterações foi satisfatório. O desempenho computacional do algoritmo de filtro depende da solução eficiente dos subproblemas quadráticos de região de confiança. Na implementação realizada utilizou-se o pacote computacional OOQP de forma bastante simples, sem especificar os algoritmos de solução e os parâmetros internos. A estrutura de caixa dos problemas quadráticos (7.7) e (7.9) também não foram exploradas. Uma implementação futura, explorando os recursos oferecidos pelo pacote OOQP, deverá confirmar as indicações.

# Capítulo 8

## Conclusões

Neste trabalho propomos a definição de ações de melhoria da segurança dinâmica através de um problema de fluxo de potência ótimo com restrições de estabilidade transitória. Esta proposta se caracteriza por formular a estabilidade através de uma margem de segurança, impondo que a margem de segurança após o redespacho seja superior à margem mínima estabelecida para o sistema. Com esta formulação escreve-se apenas uma restrição por contingência. A formulação da restrição de estabilidade transitória utiliza coeficientes de sensibilidade, que neste trabalho são determinados a partir da simulação no domínio do tempo, utilizando modelagem detalhada para o sistema elétrico. Um experimento computacional preliminar indicou a viabilidade da proposta.

Uma vez definido o problema de otimização para definição do redespacho de segurança, este trabalho concentrou-se no estudo de algoritmos robustos e eficientes para sua solução. Tradicionalmente os problemas de fluxo de potência ótimo são solucionados por algoritmos do tipo primal-dual de pontos interiores que, embora bastante eficientes, não possuem convergência global assegurada. Para pontos iniciais ruins pode não ocorrer convergência. Neste trabalho buscou-se o desenvolvimento de algoritmos que mantivessem a eficiência dos métodos tradicionalmente empregados na solução do fluxo de potência ótimo mas com propriedades de convergência global. No Capítulo 4 foram estudados algoritmos com convergência global para problemas ir-

restritos. Foram apresentadas duas formas de obter convergência global: realizando uma busca ao longo da direção calculada e utilizando região de confiança. Para esta classe de problemas, o progresso a cada iteração considera a redução obtida na função objetivo. Para os problemas com restrições, estudados no Capítulo 5, o progresso a cada iteração deve ser avaliado considerando dois objetivos, muitas vezes conflitantes: a viabilização e a otimização, o que é tradicionalmente feito utilizando uma função de mérito, que reúne os dois objetivos através de um parâmetro. O parâmetro da função de mérito influencia significativamente o desempenho dos algoritmos, portanto, sua atualização a cada iteração é um aspecto crítico.

Neste trabalho apresentamos e testamos o algoritmo proposto por Vanderbei e Shanno para problemas não lineares, no qual é realizada uma busca utilizando função de mérito na direção obtida pela solução do sistema formado pelas equações de KKT perturbadas (6.12). A atualização do parâmetro da função de mérito é tal que apenas aumentos são permitidos. Isto pode prejudicar o desempenho do algoritmo, especialmente nas iterações finais. Considerando isto, neste trabalho propomos uma atualização não-monótona do parâmetro de penalidade.

Visto que a direção de busca é calculada aplicando o método de Newton às condições de KKT perturbadas (6.12), esta é uma direção de decréscimo para cada um dos critérios que compõem KKT. Ou seja, pequenos deslocamentos ao longo da direção de busca deve reduzir simultaneamente todos os critérios. Baseados nesta observação, neste trabalho propomos uma nova função de mérito, que não utiliza parâmetro de penalidade.

Os resultados dos experimentos computacionais aplicando estas propostas ao problema de fluxo de potência ótimo indicaram que ambas são promissoras.

No Capítulo 6 foi introduzido o conceito de filtro e um novo algoritmo empregando filtros foi proposto. Este algoritmo de filtro se caracteriza pela independência entre as fases de viabilização e de otimização. A teoria de convergência global desenvolvida em [17] é independente dos algoritmos internos utilizados. Para este algoritmo foi exposta, no Capítulo 7, a formulação adotada em uma implementação preliminar. Os resultados obtidos com a

aplicação do algoritmo de filtros ao problema de fluxo de potência ótimo indicaram que este algoritmo é muito promissor.

### **Sugestões para trabalhos futuros.**

Os experimentos realizados neste trabalho indicaram a viabilidade das propostas. Contudo, a proposta de redespacho de segurança através de um fluxo de potência ótimo com restrições de estabilidade transitória necessita, para sua validação, a realização de experimentos com sistemas de maior dimensão, nos quais os comportamentos dinâmicos sejam mais complexos, envolvendo um maior número de máquinas críticas no conjunto crítico de cada contingência.

Na proposta do novo algoritmo de filtros destaca-se a necessidade de uma implementação na qual a estrutura do problema de fluxo de potência ótimo seja explorada. O pacote computacional OOQP, utilizado para a solução dos subproblemas quadráticos, deve ser empregado de forma mais eficiente, através da especificação dos parâmetros internos. Também pode-se considerar o uso de outros pacotes computacionais, como o BOX-QUACAN, que solucionam problemas quadráticos com região de confiança tipo caixa.

Além deste aspecto, os experimentos computacionais com o algoritmo de filtro mostraram a necessidade de, na fase de otimização, considerar a minimização da aproximação quadrática do Lagrangeano. O uso da função lagrangeana introduz informações da curvatura das restrições e com isto o passo de otimização será mais eficiente.

Sabe-se que para utilizar a função lagrangeana deve-se dispor, a cada iteração, de uma estimativa para os multiplicadores de Lagrange. Pode-se empregar um estimador de multiplicadores de Lagrange ou pode-se utilizar como estimativa os multiplicadores obtidos na solução dos subproblemas quadráticos. Caso seja utilizado o pacote OOQP, tais multiplicadores são fornecidos juntamente com a solução dos problemas.

# Apêndice A

## Expressões analíticas para a margem de segurança e para os coeficientes de sensibilidade

Neste apêndice desenvolvem-se expressões analíticas para a margem de segurança em energia e expressões para coeficientes de sensibilidade de primeira e segunda ordem desta margem em relação à potência ativa gerada pelo conjunto de máquinas críticas. As expressões de margem são obtidas pela aplicação do critério de áreas iguais estendido. No desenvolvimento das expressões segue-se a referência [36].

### A.1 Potência elétrica do OMIB e margem de segurança

Para representar a potência elétrica  $P_e$  do OMIB Equivalente nas configurações de regime permanente, durante a ocorrência e após a eliminação da falta, foram definidas expressões na forma polinomial de ordem  $n$ ,  $n \geq 2$ :

$$\begin{aligned} P_{e_a}(\delta) &= a_0 + a_1\delta + a_2\delta^2 + \cdots + a_n\delta^n \\ P_{e_d}(\delta) &= d_0 + d_1\delta + d_2\delta^2 + \cdots + d_n\delta^n \\ P_{e_p}(\delta) &= p_0 + p_1\delta + p_2\delta^2 + \cdots + p_n\delta^n \end{aligned} \tag{A.1}$$

onde os índices  $a$ ,  $d$  e  $p$  referem-se, respectivamente, à condição em regime permanente, durante a falta e pós-falta.

Com expressões para a potência elétrica é possível a determinação, pela aplicação do critério de áreas iguais estendido, de uma expressão analítica para a margem de segurança. Isto é realizado a partir da Figura (A.1), que ilustra a dinâmica ( $P_e \times \delta$ ) do OMIB.

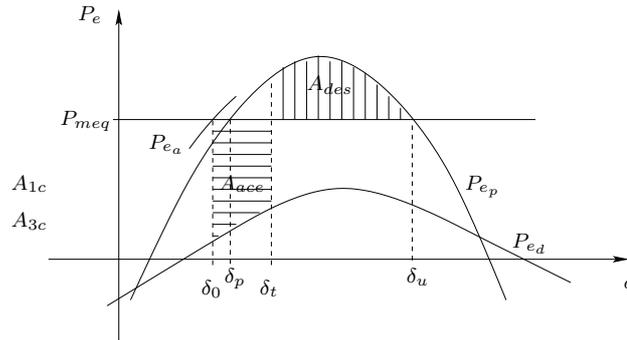


Figura A.1: Curvas  $P_e \times \delta$  do OMIB Equivalente

Na Figura (A.1) estão também indicadas as seguintes grandezas:

- $\delta_0$  - ângulo de ocorrência da falta;
- $\delta_t$  - ângulo de eliminação da falta;
- $\delta_p$  - ângulo de equilíbrio pós-falta;
- $\delta_u$  - ângulo de equilíbrio instável pós-falta;
- $A_{ace}$  - área acelerante;
- $A_{des}$  - área desacelerante.

O critério de áreas iguais define a margem de segurança em energia  $\eta$  como a diferença entre as áreas acelerante e desacelerante [29]:

$$\eta = A_{des} - A_{ace}. \quad (A.2)$$

Embora o cálculo das áreas  $A_{ace}$  e  $A_{des}$  possa variar, a expressão para a margem  $\eta$  permanece invariável. Este fato é demonstrado em [36]. Consideremos pois o caso dito “normal”, ilustrado na Figura (A.1), para o qual,

considerando as expressões (A.1), resulta:

$$A_{ace} = \int_{\delta_0}^{\delta_t} (P_{meq} - P_{ed}) d\delta = \int_{\delta_0}^{\delta_t} (P_{meq} - d_0 - d_1\delta - d_2\delta^2 - \dots - d_n\delta^n) d\delta, \quad (A.3)$$

$$A_{des} = \int_{\delta_t}^{\delta_u} (P_{ep} - P_{meq}) d\delta = \int_{\delta_t}^{\delta_u} (p_0 + p_1\delta + p_2\delta^2 + \dots + p_n\delta^n - P_{meq}) d\delta. \quad (A.4)$$

Pela definição de margem (A.2) tem-se:

$$\begin{aligned} \eta = & (P_{meq} - d_0)\delta_0 - d_1\frac{\delta_0^2}{2} - \dots - d_n\frac{\delta_0^{n+1}}{n+1} + \\ & (d_0 - p_0)\delta_t + (d_1 - p_1)\frac{\delta_t}{2} + \dots + (d_n - p_n)\frac{\delta_t^{n+1}}{n+1} + \\ & (p_0 - P_{meq})\delta_u + p_1\frac{\delta_u^2}{2} + \dots + p_n\frac{\delta_u^{n+1}}{n+1}. \end{aligned} \quad (A.5)$$

Seguindo a referência [36], define-se a margem ponderada  $\eta_e$ :

$$\eta_e = \frac{\eta}{A_{1c} + A_{3c}}. \quad (A.6)$$

onde  $A_{1c}$  e  $A_{3c}$  são as áreas ilustradas na Figura (A.2), definidas com a eliminação da falta no tempo crítico. O ângulo de eliminação da falta é PSfratão chamado de *ângulo crítico*  $\delta_c$ .

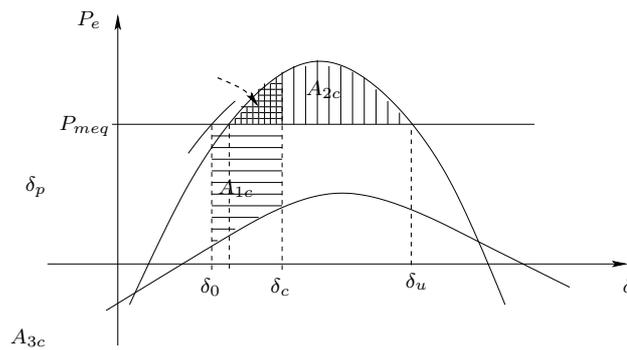


Figura A.2: Curvas  $P_e \times \delta$  para eliminação da falta no tempo crítico.

Tem-se assim:

$$A_{1c} = \int_{\delta_0}^{\delta_c} (P_{meq} - P_{e_d}) d\delta = (P_{meq} - d_0)(\delta_c - \delta_0) - d_1 \left( \frac{\delta_c^2}{2} - \frac{\delta_0^2}{2} \right) - \dots - d_n \left( \frac{\delta_c^{n+1}}{n+1} - \frac{\delta_0^{n+1}}{n+1} \right), \quad (\text{A.7})$$

e

$$A_{3c} = \int_{\delta_p}^{\delta_c} (P_{e_p} - P_{meq}) d\delta = (p_0 - P_{meq})(\delta_c - \delta_p) + p_1 \left( \frac{\delta_c^2}{2} - \frac{\delta_p^2}{2} \right) + \dots + p_n \left( \frac{\delta_c^{n+1}}{n+1} - \frac{\delta_p^{n+1}}{n+1} \right). \quad (\text{A.8})$$

**Termos definidos.** Para simplificar a notação define-se os seguintes termos:

$$\begin{aligned} aao &= a_0\delta_0 + a_1\frac{\delta_0^2}{2} + \dots + a_n\frac{\delta_0^{n+1}}{n+1} & apc &= p_0\delta_c + p_1\frac{\delta_c^2}{2} + \dots + p_n\frac{\delta_c^{n+1}}{n+1} \\ ado &= d_0\delta_0 + d_1\frac{\delta_0^2}{2} + \dots + d_n\frac{\delta_0^{n+1}}{n+1} & app &= p_0\delta_p + p_1\frac{\delta_p^2}{2} + \dots + p_n\frac{\delta_p^{n+1}}{n+1} \\ adc &= d_0\delta_c + d_1\frac{\delta_c^2}{2} + \dots + d_n\frac{\delta_c^{n+1}}{n+1} & apt &= p_0\delta_t + p_1\frac{\delta_t^2}{2} + \dots + p_n\frac{\delta_t^{n+1}}{n+1} \\ adt &= d_0\delta_t + d_1\frac{\delta_t^2}{2} + \dots + d_n\frac{\delta_t^{n+1}}{n+1} & apu &= p_0\delta_u + p_1\frac{\delta_u^2}{2} + \dots + p_n\frac{\delta_u^{n+1}}{n+1}, \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

$$\begin{aligned} bao &= a_0 + a_1\delta_0 + \dots + a_n\delta_0^n & bpc &= p_0 + p_1\delta_c + \dots + p_n\delta_c^n \\ bdo &= d_0 + d_1\delta_0 + \dots + d_n\delta_0^n & bpp &= p_0 + p_1\delta_p + \dots + p_n\delta_p^n \\ bdc &= d_0 + d_1\delta_c + \dots + d_n\delta_c^n & bpt &= p_0 + p_1\delta_t + \dots + p_n\delta_t^n \\ bdt &= d_0 + d_1\delta_t + \dots + d_n\delta_t^n & bpu &= p_0 + p_1\delta_u + \dots + p_n\delta_u^n, \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

$$\begin{aligned}
cao &= a_1 + 2a_2\delta_0 + \cdots + na_n\delta_0^{n-1} & cpc &= p_1 + 2p_2\delta_c + \cdots + np_n\delta_c^{n-1} \\
cdo &= d_1 + 2d_2\delta_0 + \cdots + nd_n\delta_0^{n-1} & cpp &= p_1 + 2p_2\delta_p + \cdots + np_n\delta_p^{n-1} \\
cdc &= d_1 + 2d_2\delta_c + \cdots + nd_n\delta_c^{n-1} & cpt &= p_1 + 2p_2\delta_t + \cdots + np_n\delta_t^{n-1} \\
cdt &= d_1 + 2d_2\delta_t + \cdots + nd_n\delta_t^{n-1} & cpu &= p_1 + 2p_2\delta_u + \cdots + np_n\delta_u^{n-1},
\end{aligned} \tag{A.11}$$

$$\begin{aligned}
dao &= 2a_2 + \cdots + (n^2 - n)a_n\delta_0^{n-2} & dpp &= 2p_2 + \cdots + (n^2 - n)p_n\delta_p^{n-2} \\
ddo &= 2d_2 + \cdots + (n^2 - n)d_n\delta_0^{n-2} & dpu &= 2p_2 + \cdots + (n^2 - n)p_n\delta_u^{n-2}
\end{aligned} \tag{A.12}$$

Com os termos definidos (A.9) - (A.12), as áreas  $A_{1c}$  e  $A_{3c}$  podem ser escritas como:

$$A_{1c} = P_{meq}(\delta_c - \delta_0) - adc + ado, \tag{A.13}$$

$$A_{3c} = -P_{meq}(\delta_c - \delta_p) - app + apc, \tag{A.14}$$

e a margem de segurança  $\eta$  pode ser escrita como:

$$\eta = P_{meq}(\delta_0 - \delta_u) - ado - apt + adt + apu. \tag{A.15}$$

## A.2 Coeficientes de sensibilidade de primeira ordem:

Para cada contingência, definem-se os coeficientes de sensibilidade de primeira e segunda ordem da margem de segurança  $\eta_e$  em relação à potência gerada no conjunto de máquinas críticas  $P_m$  [36]:

$$S = \frac{d\eta_e}{dP_m}, \quad S' = \frac{d^2\eta_e}{dP_m^2}. \tag{A.16}$$

Denotamos o conjunto de máquinas críticas por  $\Gamma$  e o conjunto de máquinas não críticas por  $A$ .

A potência mecânica do OMIB equivalente  $P_{meq}$  é definida por:

$$P_{meq} = \frac{1}{Meq}(M_A P_m - M_\Gamma P_A),$$

onde  $Meq$  é a inércia do OMIB Equivalente,  $M_A$  a inércia das máquinas não críticas e  $M_\Gamma$  a inércia das máquinas críticas. Derivando  $P_{meq}$  em relação à potência mecânica do conjunto crítico  $P_m$ , e considerando que a variação de geração no conjunto  $\Gamma$  é totalmente compensada pela variação de geração no conjunto  $A$ , têm-se:

$$\frac{dP_{meq}}{dP_m} = \frac{1}{Meq} \left( M_A \frac{dP_m}{dP_m} - M_\Gamma \frac{dP_A}{dP_m} \right) = 1. \quad (\text{A.17})$$

No ponto de equilíbrio pré-falta verifica-se  $P_{meq} = P_{ea}(\delta_0)$ . Assim:

$$\begin{aligned} \frac{dP_{meq}}{dP_m} &= \frac{d(a_0 + a_1\delta_0 + a_2\delta_0^2 + \dots + a_n\delta_0^n)}{dP_m} = \\ &= (a_1 + 2a_2\delta_0 + \dots + na_n\delta_0^{n-1}) \frac{d\delta_0}{dP_m} = cao \frac{d\delta_0}{dP_m} = 1. \end{aligned}$$

Logo:

$$\frac{d\delta_0}{dP_m} = \frac{1}{cao}. \quad (\text{A.18})$$

Analogamente, para os pontos de equilíbrio pós-falta tem-se:

$$\frac{d\delta_p}{dP_m} = \frac{1}{cpp}, \quad \frac{d\delta_u}{dP_m} = \frac{1}{cpu}. \quad (\text{A.19})$$

Com (A.18) e (A.19) calcula-se as seguintes derivadas:

$$\begin{aligned}
\frac{dado}{dP_m} &= (d_1\delta_0 + d_2\delta_0^2 + \dots + d_n\delta_0^n) \frac{d\delta_0}{dP_m} = \frac{bdo}{cao} \\
\frac{dapp}{dP_m} &= (p_1\delta_p + p_2\delta_p^2 + \dots + p_n\delta_p^n) \frac{d\delta_p}{dP_m} = \frac{bpp}{cpp} \\
\frac{dapu}{dP_m} &= (p_1\delta_u + p_2\delta_u^2 + \dots + p_n\delta_u^n) \frac{d\delta_u}{dP_m} = \frac{bpu}{cpu} \\
\frac{dbao}{dP_m} &= (a_1 + 2a_2\delta_0 + \dots + na_n\delta_0^{n-1}) \frac{d\delta_0}{dP_m} = \frac{cao}{cao} = 1 \\
\frac{dbdo}{dP_m} &= (d_1 + 2d_2\delta_0 + \dots + nd_n\delta_0^{n-1}) \frac{d\delta_0}{dP_m} = \frac{cdo}{cao} \\
\frac{dbpp}{dP_m} &= (p_1 + 2p_2\delta_p + \dots + np_n\delta_p^{n-1}) \frac{d\delta_p}{dP_m} = \frac{cpp}{cpp} = 1 \\
\frac{dbpu}{dP_m} &= (p_1 + 2p_2\delta_u + \dots + np_n\delta_u^{n-1}) \frac{d\delta_u}{dP_m} = \frac{cpu}{cpu} = 1 \\
\frac{dcdo}{dP_m} &= (2d_2 + \dots + n^2 - nb_n\delta_0) \frac{d\delta_0}{dP_m} = \frac{ddo}{cao}.
\end{aligned} \tag{A.20}$$

É necessário calcular as derivadas em relação à  $P_m$  do ângulo de eliminação da falta  $\delta_t$  e do ângulo crítico de abertura  $\delta_c$ . Para isto definem-se inicialmente os ângulos  $\delta_t$  e  $\delta_c$  pela expansão em série de Taylor do ângulo de regime permanente  $\delta_0$ :

$$\delta_t = \delta_0 + \frac{1}{2}\nu_0 t_t^2 + \frac{1}{24}\ddot{\nu}_0 t_t^4, \tag{A.21}$$

e

$$\delta_c = \delta_0 + \frac{1}{2}\nu_0 t_c^2 + \frac{1}{24}\ddot{\nu}_0 t_c^4. \tag{A.22}$$

Os termos  $\nu_0$  e  $\ddot{\nu}_0$  em (A.21) e (A.22) são definidos por:

$$\nu_0 = \frac{d^2\delta_0}{dt^2}/t=0^+ = \frac{1}{Meq}(P_{meq} - P_{ed}) = \frac{1}{Meq}(P_{meq} - bdo), \tag{A.23}$$

$$\ddot{\nu}_0 = -\frac{1}{Meq} \frac{d^2 \delta_0}{dt^2} cdo = -\frac{1}{Meq} \nu_0 cdo, \quad (\text{A.24})$$

cuas derivadas em relação à  $P_m$  são:

$$\frac{d\nu_0}{dP_m} = \frac{1}{Meq} \left( \frac{dP_{meq}}{dP_m} - \frac{dbdo}{dP_m} \right), \quad (\text{A.25})$$

e

$$\frac{d\ddot{\nu}_0}{dP_m} = -\frac{1}{Meq} \left( \nu_0 \frac{dcdo}{dP_m} + cdo \frac{d\nu_0}{dP_m} \right). \quad (\text{A.26})$$

Utilizando-se (A.18), (A.25) e (A.26) pode-se então calcular:

$$\frac{d\delta_t}{dP_m} = \frac{d\delta_0}{dP_m} + \frac{t_t^2}{2} \frac{d\nu_0}{dP_m} + \frac{t_t^4}{24} \frac{d\ddot{\nu}_0}{dP_m}, \quad (\text{A.27})$$

e

$$\frac{d\delta_c}{dP_m} = \frac{d\delta_0}{dP_m} + \frac{t_c^2}{2} \frac{d\nu_0}{dP_m} + \frac{t_c^4}{24} \frac{d\ddot{\nu}_0}{dP_m}. \quad (\text{A.28})$$

Com (A.27) e (A.28) calcula-se:

$$\begin{aligned} \frac{dadt}{dP_m} &= (d_0 + d_1\delta_t + d_2\delta_t^2 + \dots + d_n\delta_t^n) \frac{d\delta_t}{dP_m} = bdt \frac{d\delta_t}{dP_m} \\ \frac{dapt}{dP_m} &= (p_0 + p_1\delta_t + p_2\delta_t^2 + \dots + p_n\delta_t^n) \frac{d\delta_t}{dP_m} = bpt \frac{d\delta_t}{dP_m} \\ \frac{dapc}{dP_m} &= (p_0 + p_1\delta_c + p_2\delta_c^2 + \dots + p_n\delta_c^n) \frac{d\delta_c}{dP_m} = bpc \frac{d\delta_c}{dP_m} \\ \frac{dadc}{dP_m} &= (d_0 + d_1\delta_c + d_2\delta_c^2 + \dots + d_n\delta_c^n) \frac{d\delta_c}{dP_m} = bdc \frac{d\delta_c}{dP_m} \\ \frac{dbpc}{dP_m} &= (p_1 + 2p_2\delta_c + \dots + np_n\delta_c^{n-1}) \frac{d\delta_c}{dP_m} = cpc \frac{d\delta_c}{dP_m} \\ \frac{dbpt}{dP_m} &= (p_1 + 2p_2\delta_t + \dots + np_n\delta_t^{n-1}) \frac{d\delta_t}{dP_m} = cpt \frac{d\delta_t}{dP_m} \\ \frac{dbdc}{dP_m} &= (d_1 + 2d_2\delta_c + \dots + nd_n\delta_c^{n-1}) \frac{d\delta_c}{dP_m} = cdc \frac{d\delta_c}{dP_m} \\ \frac{dbdt}{dP_m} &= (d_1 + 2d_2\delta_t + \dots + nd_n\delta_t^{n-1}) \frac{d\delta_t}{dP_m} = cdt \frac{d\delta_t}{dP_m} \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

As expressões (A.18), (A.19), (A.20), (A.28) e (A.29) são empregadas no cálculo das derivadas de  $A_{1c}$  e  $A_{3c}$  em relação a  $P_m$ :

$$\frac{dA_{1c}}{dP_m} = \delta_c - \delta_0 + P_{meq} \left( \frac{d\delta_c}{dP_m} - \frac{d\delta_0}{dP_m} \right) - \frac{dadc}{dP_m} + \frac{dado}{dP_m}, \quad (\text{A.30})$$

e

$$\frac{dA_{3c}}{dP_m} = \delta_p - \delta_c - P_{meq} \left( \frac{d\delta_c}{dP_m} - \frac{d\delta_p}{dP_m} \right) + \frac{dapc}{dP_m} - \frac{dapp}{dP_m}, \quad (\text{A.31})$$

e no cálculo da derivada da margem  $\eta$  em relação a  $P_m$ :

$$\begin{aligned} \frac{d\eta}{dP_m} = & \delta_0 - \delta_u + P_{meq} \left( \frac{d\delta_0}{dP_m} - \frac{d\delta_u}{dP_m} \right) - \\ & - \frac{dapt}{dP_m} - \frac{dado}{dP_m} + \frac{dadt}{dP_m} + \frac{dapu}{dP_m} \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

Derivando (A.6) e utilizando (A.30), (A.31) e (A.32), o coeficiente de sensibilidade de primeira ordem pode ser calculado:

$$\frac{d\eta_e}{dP_m} = \frac{1}{A_{1c} + A_{3c}} \left( \frac{d\eta}{dP_m} - \eta_e \left( \frac{dA_{1c}}{dP_m} + \frac{dA_{3c}}{dP_m} \right) \right) \quad (\text{A.33})$$

### A.3 Coeficiente de sensibilidade de segunda ordem:

Derivando as expressões (A.18) e (A.19) em relação a  $P_m$  tem-se:

$$\frac{d^2\delta_0}{dP_m^2} = \frac{d}{dP_m} \left( \frac{1}{cao} \right) = -\frac{dao}{cao^3}, \quad (\text{A.34})$$

$$\frac{d^2\delta_p}{dP_m^2} = \frac{d}{dP_m} \left( \frac{1}{cpp} \right) = -\frac{dpp}{cpp^3}, \quad (\text{A.35})$$

e

$$\frac{d^2\delta_u}{dP_m^2} = \frac{d}{dP_m} \left( \frac{1}{cpu} \right) = -\frac{dpu}{cpu^3}. \quad (\text{A.36})$$

As derivadas de (A.20) necessárias são:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2ado}{dP_m^2} &= \frac{d}{dP_m} \left( \frac{bdo}{cao} \right) = \frac{1}{cao^2} \left( cdo - \frac{bdo\,dao}{cao} \right) \\
\frac{d^2bdo}{dP_m^2} &= \frac{d}{dP_m} \left( \frac{cdo}{cao} \right) = \frac{1}{cao^2} \left( ddo - \frac{cdo\,dao}{cao} \right) \\
\frac{d^2app}{dP_m^2} &= \frac{d}{dP_m} \left( \frac{bpp}{cpp} \right) = \frac{1}{cpp^2} \left( cpp - \frac{bpp\,dpp}{cpp^2} \right) \\
\frac{d^2apu}{dP_m^2} &= \frac{d}{dP_m} \left( \frac{bpu}{cpp} \right) = \frac{1}{cpp^2} \left( cpp - \frac{bpu\,dpp}{cpp} \right) \\
\frac{d^2bpu}{dP_m^2} &= \frac{d}{dP_m} (1) = 0 \\
\frac{d^2cdo}{dP_m^2} &= \frac{d}{dP_m} \left( \frac{ddo}{cao} \right) = \frac{1}{cao^2} \left( edo - \frac{ddo\,dao}{cao} \right),
\end{aligned} \tag{A.37}$$

sendo  $edo = 6d_3 + \dots + n(n-1)(n-2)d_n\delta_0^{n-3}$ .

Com (A.37) calcula-se as derivadas de (A.25) e (A.26):

$$\frac{d^2\nu_0}{dP_m^2} = \frac{d}{dP_m} \left( \frac{1}{Meq} \left( \frac{dP_{meq}}{dP_m} - \frac{dbdo}{dP_m} \right) \right) = -\frac{1}{Meq} \frac{d^2bdo}{dP_m^2}, \tag{A.38}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\ddot{\nu}_0}{dP_m^2} &= \frac{d}{dP_m} \left( -\frac{1}{Meq} \left( \nu_0 \frac{dcdo}{dP_m} + cdo \frac{d\nu_0}{dP_m} \right) \right) \\
&= -\frac{1}{Meq} \left( \frac{d^2cdo}{dP_m^2} \nu_0 + 2 \frac{dcdo}{dP_m} \frac{d\nu_0}{dP_m} + cdo \frac{d^2\nu_0}{dP_m^2} \right).
\end{aligned} \tag{A.39}$$

Com (A.38) e (A.39) calcula-se as derivadas de (A.27) e (A.28):

$$\frac{d^2\delta_t}{dP_m^2} = \frac{d^2\delta_0}{dP_m^2} + \frac{t_t^2}{2} \frac{d^2\nu_0}{dP_m^2} + \frac{t_t^4}{24} \frac{d^2\ddot{\nu}_0}{dP_m^2}, \tag{A.40}$$

e

$$\frac{d^2\delta_c}{dP_m^2} = \frac{d^2\delta_0}{dP_m^2} + \frac{t_c^2}{2} \frac{d^2\nu_0}{dP_m^2} + \frac{t_c^4}{24} \frac{d^2\ddot{\nu}_0}{dP_m^2}. \tag{A.41}$$

Com (A.29), (A.40) e (A.41) pode-se calcular:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 adt}{dP_m^2} &= \frac{d}{dP_m} \left( bdt \frac{d\delta_t}{dP_m} \right) = bdt \frac{d^2 \delta_t}{dP_m^2} + \frac{d bdt}{dP_m} \frac{d\delta_t}{dP_m} \\
\frac{d^2 adc}{dP_m^2} &= \frac{d}{dP_m} \left( bdc \frac{d\delta_c}{dP_m} \right) = bdc \frac{d^2 \delta_c}{dP_m^2} + \frac{d bdc}{dP_m} \frac{d\delta_c}{dP_m} \\
\frac{d^2 apt}{dP_m^2} &= \frac{d}{dP_m} \left( bpt \frac{d\delta_t}{dP_m} \right) = bpt \frac{d^2 \delta_t}{dP_m^2} + \frac{d bpt}{dP_m} \frac{d\delta_t}{dP_m} \\
\frac{d^2 apc}{dP_m^2} &= \frac{d}{dP_m} \left( bpc \frac{d\delta_c}{dP_m} \right) = bpc \frac{d^2 \delta_c}{dP_m^2} + \frac{d bpc}{dP_m} \frac{d\delta_c}{dP_m}.
\end{aligned} \tag{A.42}$$

Com as expressões (A.30), (A.31), (A.32), (A.37), (A.41) e (A.42) calcula-se:

$$\frac{d^2 A_{1c}}{dP_m^2} = P_{meq} \left( \frac{d^2 \delta_c}{dP_m^2} - \frac{d^2 \delta_0}{dP_m^2} \right) + 2 \left( \frac{d\delta_c}{dP_m} - \frac{d\delta_0}{dP_m} \right) - \frac{d^2 adc}{dP_m^2} + \frac{d^2 ado}{dP_m^2}, \tag{A.43}$$

$$\frac{d^2 A_{3c}}{dP_m^2} = -P_{meq} \left( \frac{d^2 \delta_c}{dP_m^2} - \frac{d^2 \delta_p}{dP_m^2} \right) + 2 \left( \frac{d\delta_p}{dP_m} - \frac{d\delta_c}{dP_m} \right) + \frac{d^2 apc}{dP_m^2} - \frac{d^2 app}{dP_m^2} \tag{A.44}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 \eta}{dP_m^2} &= 2 \left( \frac{d\delta_0}{dP_m} - \frac{d\delta_u}{dP_m} \right) + P_{meq} \left( \frac{d^2 \delta_0}{dP_m^2} - \frac{d^2 \delta_u}{dP_m^2} \right) \\
&\quad - \frac{d^2 apt}{dP_m^2} + \frac{d^2 apu}{dP_m^2} + \frac{d^2 adt}{dP_m^2} - \frac{d^2 ado}{dP_m^2}
\end{aligned} \tag{A.45}$$

Finalmente, derivando (A.33) e utilizando (A.43), (A.44) e (A.45) calcula-se o coeficiente de sensibilidade de segunda ordem:

$$\frac{d^2 \eta_e}{dP_m^2} = \frac{1}{A_{1c} + A_{3c}} \left( \frac{d^2 \eta}{dP_m^2} - \eta_e \left( \frac{d^2 A_{1c}}{dP_m^2} + \frac{d^2 A_{3c}}{dP_m^2} \right) - 2 \frac{d\eta_e}{dP_m} \left( \frac{dA_{1c}}{dP_m} + \frac{dA_{3c}}{dP_m} \right) \right). \tag{A.46}$$

# Referências Bibliográficas

- [1] VANDERBEI, R. J.; SHANNO, D. F. An interior-point algorithm for nonconvex nonlinear programming. *Computational Optimization and Applications*, v. 13, p. 231–252, 1999.
- [2] STOTT, B.; ALSAC, O.; MONTICELLI, A. Security analysis and optimization. *Proceedings of the IEEE*, v. 75, n. 12, p. 1623–1642, 1987.
- [3] SOUZA, A. *Avaliação da Segurança Dinâmica usando Modelos Detalhados e Processamento Distribuído*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Santa Catarina, Santa Catarina, Brazil, 1999.
- [4] FOUAD, A.; JIANZHONG, T. Stability constrained optimal rescheduling of generation. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 8, n. 1, p. 105–112, 1993.
- [5] DECKER, I. C.; CASTRO, J. G. Melhoria da segurança dinâmica de sistemas de energia elétrica usando otimização. XI CBA - Congresso Brasileiro de Automática. 1996.
- [6] LI, W.; BOSE, A. A coherency based rescheduling method for dynamic security. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 13, n. 3, 1998. August.
- [7] KUO, D.; BOSE, A. A generation rescheduling method to increase the dynamic security of power systems. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 10, n. 1, 1995.
- [8] PAPALEXOUPoulos. Challenges to on-line opf implementations. IEEE-PES Winter Meeting. 1996.

- [9] GRANVILLE, S. Optimal reactive dispatch through interior point methods. *IEEE transactions on Power Systems*, v. 9, n. 1, p. 136–146, 1994.
- [10] WU, Y.; DEBS, A. S.; MARSTEN, R. E. A direct nonlinear predictor–corrector primal-Dual Interior point algorithm for optimal power flow. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 9, n. 2, p. 876–883, 1994.
- [11] TORRES, G. L.; QUINTANA, V. H. An interior point method for nonlinear optimal power flow using voltage rectangular coordinates. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 13, n. 4, p. 1211–1218, 1998.
- [12] MEHROTRA, S.; SUN, J. On the implementation of a (primal–dual) interior point method. *SIAM Journal on Optimization*, v. 2, n. 4, p. 575–601, 1992.
- [13] GONDZIO, J. Multiple centrality corrections in a primal dual method for linear programming. *Comp. Opt. and Appl.*, v. 6, p. 137–156, 1996.
- [14] FLETCHER, R. et al. Global convergence of trust-region and SQP-filter algorithms for general nonlinear programming. *SIAM Journal on Optimization*, v. 13, n. 3, p. 635–659, 2002.
- [15] ULBRICH, M.; ULBRICH, S.; VICENTE, L. N. *A Globally Convergent Primal-Dual Interior-Point Filter Method for Nonconvex Nonlinear Programming*. [S.l.], April 2000.
- [16] WächTER, A.; BIEGLER, L. T. *Global and Local Convergence of Line Search Filter Methods for Nonlinear Programming*. [S.l.], August 2001.
- [17] GONZAGA, C. C.; KARAS, E. W.; VANTI, M. A globally convergent filter method for nonlinear programming. Optimization online. 2001.
- [18] BALU, N.; A.; B. On-line power system security analysis. In: *Proceedings of the IEEE*. USA: [s.n.], 1992. v. 80, p. 272–279.

- [19] BILLINTON, R.; E.KHAN. A security based approach to composite power system reliability evaluation. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 7, n. 1, p. 65–72, 1992.
- [20] COSTA, A. S.; SALGADO, R. S.; MACHADO, L. J. B. *Análise de Segurança de Sistemas de Energia Elétrica*. [S.l.], 1995. Apostila do Curso de Pós-graduação.
- [21] WEHENKEL, L. Emergency control and its strategies. 13 PSCC. 1999.
- [22] EJEBE, G. C. On-line dynamic security assessment in an EMS. *IEEE Computer Applications in Power*, p. 43–47, 1998.
- [23] KUNDUR, P.; MORINSON, G. K. A review of definitions and classification of stability problem in today's power system. IEEE PES Meeting. 1997.
- [24] KUNDUR, P.; MORINSON, G. K. On-line dynamic security assessment of power system. VI SEPOPE - Symposium of Specialists in Electric Operational and Expansion Planning. 1998.
- [25] CHIANG, H. D.; CHU, C. C.; CAULEY, G. Direct stability analysis of electric power systems using energy functions: Theory, applications and perspectives. *Proceedings of the IEEE*, v. 83, n. 11, p. 1497–1527, 1995.
- [26] MARIA, G.; THANG, C.; KIM, J. Hybrid transient stability analysis. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 5, n. 2, p. 384–393, 1990.
- [27] TANG, C. Transient stability index from conventional time domain simulation. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 9, n. 3, p. 1524–1530, 1994.
- [28] ZHANG, Y. et al. SIME: A hybrid approach to fast transient stability assessment and contingency selection. *Electrical Power and Energy Systems*, v. 19, n. 3, p. 195–208, 1997.
- [29] XUE, Y.; PAVELLA, M. Extended equal area criterion: An analytical ultra-fast method for transient stability assessment and preventive control

- of power systems. *Electrical Power and Energy Systems*, v. 11, n. 2, p. 131–149, 1989.
- [30] HILL, D. Scanning the issue on nonlinear phenomena in power systems: Theory and practical implications. *Proceedings of the IEEE*, v. 83, n. 11, p. 1439–1441, 1995.
- [31] XUE, Y.; WEHENKEL, L.; BELHOMME, R. Extended equal area criterion revisited. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 7, n. 3, p. –, 1992.
- [32] MANSOUR, Y.; X. Dynamic security contingency screening and ranking using neural networks. *IEEE Transactions on Neural Networks*, v. 8, n. 4, p. 942–950, 1997.
- [33] FONSECA, L. G. S.; PEDROSO, A. S. Correção da segurança dinâmica em sistemas de potência de grande porte via redespacho. VIII CBA - Congresso Brasileiro de Automática. 1990.
- [34] FONSECA, L. G. S.; MINUSSI, C. R. Redespacho de geração para controle de segurança dinâmica em sistemas de energia elétrica através de análise de sensibilidade. VIII CBA - Congresso Brasileiro de Automática. 1990.
- [35] MINUSSI, C. R. *Controle de Segurança Dinâmica em Sistemas de Energia Elétrica*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Santa Catarina, Santa Catarina, Brazil, 1990.
- [36] CASTRO, J. G. *Metodologia para o Estudo da Segurança Dinâmica de Sistemas de Energia Elétrica Usando os Métodos SLEP Iterativo e das áreas Iguais Estendido*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Santa Catarina, Santa Catarina, Brazil, 1995.
- [37] LASCALA, M.; TROVATO, M.; ANTONELLI, C. On-line dynamic preventive control: An algorithm for transient security dispatch. *IEEE Transactions on Power Systems*, 1997.

- [38] DECKER, I. C. *Análise da Estabilidade Transitória em Sistemas de Potência usando o Conceito de Superfície Limite de Energia Potencial*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Santa Catarina, Santa Catarina, Brazil, 1984.
- [39] CASTRO, M. C. A. *Avaliação e Melhoria da Segurança Dinâmica Utilizando Computação de Alto Desempenho*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Santa Catarina, Santa Catarina, Brazil, 1997.
- [40] DECKER, I. C.; CASTRO, M. C. A.; VANTI, M. R. Melhoria da segurança dinâmica de sistemas de energia elétrica utilizando processamento distribuído. Simpósio Brasileiro de Arquitetura de Computadores. 1998.
- [41] COSTA, L. *Melhoria da Segurança Dinâmica usando Técnicas de Otimização*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Santa Catarina, Santa Catarina, Brazil, 1997.
- [42] BETTIOL, A. L. Transient stability constrained optimal power flow. Budapest Power Tech. 1999.
- [43] BETTIOL, A. L.; WEHENKEL, L.; PAVELLA, M. R. Generation allocation for transient stability-constrained maximum power transfer. VI Simpósio de Especialistas em Planejamento da Expansão e da Operação de Sistemas Elétricos. 1998.
- [44] VANTI, M. R. V.; DECKER, I. C. Análise da segurança dinâmica com controle preventivo através de fluxo de potência Ótimo. XIII CBA - Congresso Brasileiro de Automática. 2000.
- [45] MANZONI, A. *Desenvolvimento de um Módulo Dinâmico para Ensino e Treinamento de Sistemas de Potência Usando Programação Orientada a Objeto*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Santa Catarina, Santa Catarina, Brazil, 1996.
- [46] WRIGHT, S. J. *Primal-Dual Interior-Point Methods*. Philadelphia: SIAM Publication, 1997.

- [47] MIZUNO, S.; TODD, M. J.; YE, Y. On adaptive step primal–dual interior–point algorithms for linear programming. *Mathematics of Operations Research*, v. 18, n. 4, p. 964–981, 1993.
- [48] MCSHANE, K. A. A superlinearly convergent  $O(\sqrt{n}L)$  iteration primal–dual linear programming algorithm. *SIAM Journal on Optimization*, v. 4, p. 247–261, 1994.
- [49] GONZAGA, C. C. The largest step path following algorithm for monotone linear complementarity problems. *Mathematical Programming*, v. 76, p. 309–332, 1997.
- [50] GONZAGA, C. C.; BONNANS, F. Fast convergence of the simplified largest step path following algorithm. *Mathematical Programming*, v. 76, p. 95–116, 1997.
- [51] ZHANG, Y.; ZHANG, D. *On Polynomiality of the Mehrotra–Type Predictor–Corrector Interior–Point Algorithm*. Baltimore, MD 21228–5398, USA, June 1993.
- [52] WRIGHT, S. J.; RALPH, D. A superlinear infeasible–interior–point algorithm for monotone complementarity problems. *Mathematics of Operations Research*, v. 21, p. 815–838, 1996.
- [53] MONTEIRO, R. D. C.; ADLER, I. Interior path following primal–dual algorithms : Part I : Linear programming. *Mathematical Programming*, v. 44, p. 27–41, 1989.
- [54] DOMMEL, H. W.; TINNEY, W. F. Optimal power flow solutions. *IEEE Transactions on Apparatus and Systems*, PAS-87, p. 1866–1876, 1968.
- [55] BIGGS, M. C.; LAUGHTON, M. A. Optimal electric power scheduling: A large nonlinear programming test problem solved by recursive quadratic programming. *Mathematical Programming*, v. 13, 1977.
- [56] SUN, D. J. et al. Optimal power flow by Newton approach. v. 103, 1984.

- [57] YAN, X.; QUINTANA, V. H. An efficient predictor–corrector interior point algorithm for security-constrained economic dispatch. IEEE Power Engineering Society - Summer Meeting. 1996.
- [58] CASTRONUOVO, E. D. *Aplicação de Métodos de Pontos Interiores no Fluxo de Potência Ótimo Não-Linear com Utilização de Processamento de Alto Desempenho*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Santa Catarina, Santa Catarina, Brazil, 2001.
- [59] QUINTANA, V. H.; TORRES, G. L.; MEDINA-PALOMO, J. Interior point methods and their applications to power systems: A classification of publications and software codes. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 15, n. 1, p. 170–176, 2000.
- [60] NOCEDAL, J.; WRIGHT, S. J. *Numerical Optimization*. [S.l.]: Springer-Verlag, 1999. (Springer Series in Operations Research).
- [61] FRIEDLANDER, A. *Elementos de Programação Não Linear*. Campinas: Editora da Unicamp, 1994.
- [62] MARTÍNEZ, J. M.; SANTOS, S. A. *Métodos Computacionais de Otimização*. Rio de Janeiro: IMPA, 1995. (20<sup>o</sup> Colóquio Brasileiro de Matemática).
- [63] DENNIS, J. E.; SCHNABEL, R. B. *Numerical methods for unconstrained optimization and nonlinear equations*. Philadelphia - United States: SIAM, 1996.
- [64] MARTÍNEZ, J. M. Box-quacan and the implementation of augmented lagrangian algorithms for minimization with inequality constraints. *Computational & Applied Mathematics*, v. 19, p. 31–56, 2000.
- [65] POWELL, M. J. D. Convergence properties of a class of minimization algorithms. In: MANGASARIAN, O. L.; MEYER, R. R.; ROBINSON, S. M. (Ed.). *Nonlinear Programming 2*. New York: Academic Press, 1975. p. 1–27.

- [66] THOMAS, S. *Sequential estimation techniques for quasi-Newton algorithms*. Tese (Doutorado) — Cornell University, Ithaca - New York - USA, 1975.
- [67] MORÉ, J. J.; SORENSEN, D. C. Computing a trust region step. *SIAM Journal on Sci. Statist. Comput.*, v. 4, p. 553–572, 1983.
- [68] BYRD, R. H.; SCHNABEL, R. B.; SCHULTZ, G. A. Approximate solution of the trust regions problem by minimization over two-dimensional subspaces. *Mathematical Programming*, v. 40, p. 247–263, 1988.
- [69] STEihaug, T. The conjugate gradient method and trust regions in large scale optimization. *SIAM J. Numer. Anal.*, v. 20, p. 626–637, 1983.
- [70] LUENBERGER, D. *Introduction to Linear and Nonlinear Programming*. United States: Addison Wesley Publishing Company, 1984.
- [71] TAPIA, R. A. Quasi-Newton methods for equality constrained optimization: Equivalence of existing methods and a new implementation. In: MANG, O.; R.MEYES; ROB, S. (Ed.). *Nonlinear Programming 3*. [S.l.]: Academic Press, 1978.
- [72] TAPIA, R. A. Diagonalized multiplier methods and quasi-Newton methods for constrained optimization. *Journal Optimization Theory and Applications*, v. 22, p. 135–194, 1977.
- [73] CONN, A. R.; GOULD, N. I. M.; TOINT, P. L. *Trust Region Methods*. Philadelphia - United States: SIAM, 2000.
- [74] VARDI, A. A trust region algorithm for equality constrained minimization: Convergence properties and implementation. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, v. 22, p. 575–591, 1985.
- [75] BYRD, R. H.; SCHNABEL, R. B.; SCHULTZ, G. A. A trust region algorithm for nonlinearity constrained optimization. *SIAM Journal on Optimization*, v. 24, p. 1152–1170, 1987.

- [76] CELIS, M. R.; DENNIS, J. E.; TAPIA, R. A. A trust region strategy for nonlinear equality constrained optimization. In: BOGGS, P. T.; BYRD, R. H.; SCHNABEL, R. B. (Ed.). *Numerical Optimization 1984*. Philadelphia: SIAM, 1985. p. 71 – 82.
- [77] BYRD, R. H. Robust trust region methods for constrained optimization. Third SIAM Conference on Optimization. 1987.
- [78] OMOJOKUN, E. *Trust Region Algorithms for Optimization with Non-linear Equality and Inequality Constraints*. Tese (Doutorado) — Dept. of Computer Science, University of Colorado, 1991.
- [79] LALEE, M.; NOCEDAL, J.; PLATENGA, T. On the implementation of an algorithm for large-Scale equality constrained optimization. *SIAM Journal on Optimization*, v. 8, n. 3, p. 682–706, 1998.
- [80] BYRD, R. H.; GILBERT, J. C.; NOCEDAL, J. A trust region method based on interior point techniques for nonlinear programming. *Mathematical Programming*, v. 89, n. 1, p. 149–185, 2000.
- [81] BYRD, R. H.; HRIBAR, M. E.; NOCEDAL, J. An interior point algorithm for large-scale nonlinear programming. *SIAM Journal on Optimization*, v. 9, n. 4, p. 877–900, 1999.
- [82] FIACCO, A. V.; MCCORMICK, G. P. *Nonlinear Programming : Sequential Unconstrained Minimization Techniques*. New York: John Wiley & Sons, 1968. Reprint : Volume 4 of *SIAM Classics in Applied Mathematics*, SIAM Publications, Philadelphia, PA 19104-2688, USA, 1990.
- [83] EL-BAKRY, A. S. et al. On the formulation and theory of the Newton interior-point method for nonlinear programming. *Journal of Optimization Theory and Applications*, v. 89, p. 507–541, 1996.
- [84] SHANNO, D. F.; VANDERBEI, R. J. Interior-point methods for non-convex nonlinear programming: Orderings and higher-order methods. *Mathematical Programming*, v. 87, n. 2, p. 303–316, 2000.

- [85] MARTÍNEZ, J. M.; PILOTTA, E. A. Inexact restoration algorithms for constrained optimization. *Journal of Optimization Theory and Applications*, v. 104, p. 135–163, 2000.
- [86] MARTÍNEZ, J. M. Inexact-restoration method with Lagrangian tangent decrease and a new merit function for nonlinear programming. *Journal of Optimization Theory and Applications*, v. 111, p. 39–58, 2001.
- [87] ABADIE, J.; CARPENTIER, J. Generalization of the Wolfe reduced-gradient method to the case of nonlinear constraints. In: FLETCHER, R. (Ed.). *Optimization*. New York: Academic Press, 1968. p. 37–47.
- [88] MIELE, A.; LEVY, A.; CRAGG, E. E. Modifications and extensions of the conjugate-gradient restoration algorithm for mathematical programming problems. *Journal of Optimization Theory and Applications*, v. 7, p. 450–472, 1971.
- [89] ROSEN, J. B. The gradient projection method for nonlinear programming, part 1, linear constraints. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, v. 8, p. 181–217, 1960.
- [90] FLETCHER, R.; LEYFFER, S. *Nonlinear Programming without a Penalty Function*. [S.l.], 1997. Revised 2000.
- [91] VANTI, M. R.; GONZAGA, C. C. On the Newton interior-point method for the optimal power flow. IEEE Bologna Power Tech. 2003.
- [92] GERTZ, M.; WRIGHT, S. *Object-Oriented Software for Quadratic Programming*. Argonne - USA, October 2001.