

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

Carlos Eduardo de Oliveira Rodrigues

APLICAÇÕES DA ÁLGEBRA DE QUONS

Florianópolis

2002

Carlos Eduardo de Oliveira Rodrigues

APLICAÇÕES DA ÁLGEBRA DE QUONS

Dissertação submetida ao Programa de Pós-graduação em Física da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do grau de Mestre em Física
Orientador: Sidney dos Santos Avancini, Dr.

Florianópolis

2002

Catálogo na fonte pela Biblioteca Universitária
da
Universidade Federal de Santa Catarina

R696a Rodrigues, Carlos Eduardo de Oliveira
Aplicações da Álgebra de Quons [dissertação] / Carlos
Eduardo de Oliveira Rodrigues ; orientador, Sidney dos Santos
Avancini. - Florianópolis, SC, 2002.
66 p.: il.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Santa
Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas. Programa
de Pós-Graduação em Física.

Inclui referências

1. Física. 2. Álgebra de quons. 3. Mecânica quântica.
I. Avancini, Sidney dos Santos. II. Universidade Federal
de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Física.
III. Título.

CDU 53

Carlos Eduardo de Oliveira Rodrigues

APLICAÇÕES DA ÁLGEBRA DE QUONS

Esta Dissertação foi julgada adequada para obtenção do Título de Mestre em Física, Área de concentração Física Nuclear, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós Graduação em Física da Universidade Federal de Santa Catarina.

Prof. Raymundo Baptista, Dr.
Coordenador do Curso

Banca Examinadora:

Prof. Sidney dos Santos Avancini, Dr.
Orientador

Prof.^a Débora Peres Menezes, Ph D.
Departamento de Física (UFSC)

Prof. Bruto Max Pimentel Escobar, Dr.
IFT (UNESP)

*A minha noiva,
Fabiana.*

AGRADECIMENTOS

Esta obra é o resultado de um esforço em equipe. De forma evidente, os primeiros a quem devo agradecer são os membros desta equipe, Sidney dos Santos Avancini e José Ricardo Marinelli, pela paciência, companheirismo, e também por suas excelentes aulas.

Agradeço aos meus colegas de estudo e trabalho, que tornaram as horas na UFSC ainda mais agradáveis.

Agradeço aos meus familiares que, além de me aturar, me propiciaram momentos tranquilos para a realização deste trabalho.

Por último, agradeço a minha namorada pela semicompreensão no que concerne a minha ausência nos momentos dedicados à Física.

“Não digais: bem-aventurados os que podem viver sem saber e sem inquirir, mas dizei: bem-aventurados aqueles cujo espírito nunca está saturado de conhecimento e de bem, que lutam e sofrem para realizar sempre mais elevadas conquistas.”

(Pietro Ubaldi, 1932)

RESUMO

Neste trabalho apresentamos um método para se construir de forma sistemática uma base de muitos corpos quônica. Particularmente, mostramos uma expressão fechada válida para um sistema de N quons restritos a um subespaço simétrico por permutação, pertencente ao espaço quônico. Neste trabalho, o método é aplicado a dois problemas: o oscilador harmônico tridimensional e o modelo do rotor. Ambos os resultados são comparados com os anteriores provindos da álgebra quântica. Também serão discutidas as diferenças entre estes resultados, bem como futuras possíveis aplicações.

Palavras-chave: quons, Álgebra de Quons, Mecânica Quântica.

ABSTRACT

In this work we present a method to build in a systematic way a many-body quon basis state. In particular, we show a closed expression for a given number N of quons, restricted to the permutational symmetric subspace, which belongs to the whole quonic space. The method is applied to two simple problems: the three-dimensional harmonic oscillator and the rotor model and compared to previous quantum algebra results. The differences obtained and possible future applications are also discussed.

Keywords: quons, Quon Algebra, Quantum Mechanics

LISTA DE FIGURAS

- 4.1 Para $q = 1$ temos o espectro do oscilador harmônico em três dimensões usual. Desta forma podemos compará-lo com o obtido através da álgebra de quons. 53
- 4.2 Trata-se da comparação entre o espectro experimental do ^{244}Pu e os obtidos através das técnicas teóricas. O espectro A está relacionado aos valores experimentais. B diz respeito aos valores obtidos pela álgebra q-deformada e C pela álgebra de quons. A unidade de energia utilizada aqui é o keV. Neste caso, $q = 0,994782$ e $\tau = 0,033588$ 57
- 4.3 Comparação entre o espectro experimental do HF e os obtidos através das técnicas teóricas. Agora, utilizamos cm^{-1} como unidade de energia. Neste caso, $q = 0,999014$ e $\tau = 0,0174$. O espectro A está relacionado aos valores experimentais. B diz respeito aos valores obtidos pela álgebra q-deformada e C pela álgebra de quons. 58
- 4.4 Comparação entre o espectro experimental do HBr e os obtidos através das técnicas teóricas. Temos que $q = 0,999701$ e $\tau = 0,0113$. O espectro A está relacionado aos valores experimentais. B diz respeito aos valores obtidos pela álgebra q-deformada e C pela álgebra de quons. 59
- 4.5 Comparação entre o espectro experimental do HCl e os obtidos através das técnicas teóricas. Temos que $q = 0,999582$ e $\tau = 0,0124$. O espectro A está relacionado aos valores experimentais. B diz respeito aos valores obtidos pela álgebra q-deformada e C pela álgebra de quons. 60

LISTA DE SÍMBOLOS

a_i^\dagger	Operador de criação referente à álgebra de quons.
a_i	Operador de aniquilação referente à álgebra de quons.
n_i	Operador número.
E	Energia total das partículas de um sistema de quons livres.
ε_i	Energia do estado i .
n_{ij}	Operador número de transição.
$c_{\pi(t_1), \dots, \pi(t_n), t_1 \dots t_n}$	Funções dependentes do parâmetro q
a	Operador de aniquilação referente à álgebra do oscilador q -bosônico.
a^+	Operador de criação referente à álgebra do oscilador q -bosônico.
N	Operador número referente à álgebra do oscilador q -bosônico.
b	Operador de aniquilação que satisfaz a álgebra do oscilador bosônico usual.
b^+	Operador de criação que satisfaz a álgebra do oscilador bosônico usual.
ξ	O número de estados formados diretamente a partir de cada arranjo da representação irredutível.
φ_i	Função de onda de cada partícula i .
P_{12}	Operador de permutação relativo ao sistema de duas partículas.
S_{ij}	Operador de simetrização.
A_{ij}	Operador de antissimetrização.
B	Matriz de overlap para um sistema de três quons.
C	Matriz de overlap para um sistema de quatro quons.
H_{osc}^q	Hamiltoniano do oscilador quônico.
I	Momento de inércia.
τ	Fator de deformação da álgebra.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	23
2	ÁLGEBRA DE QUONS.....	25
2.1	DEFINIÇÕES	25
2.2	ÁLGEBRA DE QUONS x ÁLGEBRA DO Q-OSCILADOR.....	27
2.3	ÁLGEBRA SU(2) A PARTIR DA ÁLGEBRA DE QUONS	29
3	ESTADOS DE SISTEMAS DE MUITOS QUONS.....	33
3.1	DIAGRAMAS DE YOUNG	33
3.2	BASE.....	36
3.3	UMA IMPORTANTE PROPRIEDADE DO ESTADO SIMÉTRICO.	47
4	APLICANDO A ÁLGEBRA DE QUONS	51
4.1	O OSCILADOR QUÔNICO EM 3 DIMENSÕES.....	51
4.2	ROTOR QUÔNICO	54
5	CONCLUSÕES.....	61

1 INTRODUÇÃO

A observação feita em 1953 por Green[1], relacionada a possíveis tipos de partículas que obedecem a uma estatística diferente da bosônica e da fermiônica estimulou, no contexto da Teoria Quântica de Campos e da própria Mecânica Quântica, extensivos estudos referentes às chamadas estatísticas intermediárias[2, 3].

O mérito de se considerar a existência ou não de partículas fundamentais, que caracterizam-se pela violação às estatísticas usuais, não será discutido neste trabalho. Contudo, para melhor situarmo-nos no que tange aos dados que a literatura nos concede sobre o assunto, podemos nos referir ao fato de que até agora não há registro de nenhuma partícula provida desta particularidade.

A abordagem deste trabalho é a que se refere aos aspectos algébricos da estatística quônica, isto é, trata do que chamamos de *álgebra de quons*. Neste contexto, os quons seriam partículas que violariam as estatísticas usuais.

Os fundamentos para o estudo desta teoria encontram-se no primeiro capítulo. Neste, mostramos os operadores de criação e de aniquilação formadores da álgebra, e a relação entre ambos, bem como outros operadores definidos a partir destes. Existem outras álgebras definidas através de um parâmetro q [4, 5], além da quônica, diferenciando-se, dentre alguns aspectos, pela relação entre os operadores de criação e aniquilação. Há, neste capítulo uma comparação entre algumas destas álgebras¹ e a de quons. Interessante é frisar o fato de que muitas das propriedades de ambas as álgebras são bem particulares, no sentido de que seus operadores de criação e aniquilação não satisfazem a definição de álgebra de Lie².

A seguir, ainda no mesmo capítulo, podemos verificar de que forma, a partir do formalismo dos quons, bem como através da definição de alguns operadores, conseguimos chegar aos tensores irredutíveis que formam o grupo $SU(2)$ [6], cuja álgebra é característica do momento angular.

O segundo capítulo diz respeito à formação dos estados de sistemas de muitos quons. Começa com uma breve explanação de uma ferramenta que propicia a criação da base de estados através da aplicação de operadores de permutação do grupo S_n : são os chamados *diagramas de Young*[7]. Posteriormente verificamos como é possível formar a base ortonormal de estados para um sistema com dois, três e quatro quons. Finalizando este capítulo, mostra-

¹Neste caso, tratamos das chamadas *álgebras do q-oscilador*, ou ainda, *álgebras q-deformadas do oscilador*.

²Alguns autores classificam as álgebras do q-oscilador como *álgebras envelopantes* ou de *Hopf*. A definição de álgebra de Lie é apresentada no apêndice desta obra.

mos uma propriedade importante relacionada ao estado totalmente simétrico para um sistema de N quons.

Como é bem sabido, as álgebras q -deformadas são extensivamente usadas em modelos fenomenológicos adequados à descrição de núcleos e moléculas. O parâmetro q é associado a uma deformação no espectro que, por exemplo, no modo rotacional pode ser interpretado como *rigidez rotacional*, isto é, quanto mais se aproxima de $+1$, mais próximo do rotor usual chegamos.

Algumas aplicações da álgebra de quons são mostradas no último capítulo; especificamente nos referimos ao oscilador harmônico tridimensional e ao rotor quônico. Além disto, iremos mostrar que podemos construir análogos quônicos do oscilador e do rotor e compará-los com os produzidos a partir da álgebra q -deformada.

Definições relativas a aspectos básicos do que fora exposto neste trabalho são apresentados no apêndice.

2 ÁLGEBRA DE QUONS

2.1 DEFINIÇÕES

A álgebra de quons foi originariamente introduzida com a finalidade de descrever partículas que obedecem a uma estatística intermediária, isto é, os *quons*. E é justamente a seguinte relação, a qual chamamos de q -mutação, que a caracteriza desta forma:

$$[a_i, a_j^\dagger] \equiv a_i a_j^\dagger - q a_j^\dagger a_i \equiv \delta_{ij}. \quad (2.1)$$

Como tratamos aqui de uma estatística intermediária, o parâmetro q [8, 9] deve variar de -1 a $+1$, respeitando os limites da estatística fermiônica e bosônica respectivamente.

Para os quons, podemos contruir o espaço de Fock \mathcal{F} [10] através do conjunto de estados que são combinações lineares dos monômios

$$|(j)_m\rangle \equiv a_{j_1}^\dagger \dots a_{j_m}^\dagger |0\rangle, \quad j_k \in \mathbb{N}, \quad m \in \mathbb{N}, \quad (2.2)$$

cujos duais são

$$\langle\langle \tilde{j} \rangle\rangle_m | \equiv \langle 0 | a_{j_m} \dots a_{j_1}. \quad (2.3)$$

O vácuo quônico é definido por:

$$a_i |0\rangle = 0 \quad \forall i. \quad (2.4)$$

Através de 2.1 e de 2.4 podemos chegar a solução [11] do seguinte elemento de matriz:

$$\begin{aligned} \langle 0 | a_i a_j a_k^\dagger a_l^\dagger | 0 \rangle &= \\ &= \frac{1}{2} (1+q) (\delta_{il} \delta_{jk} + \delta_{ik} \delta_{jl}) + \frac{1}{2} (1-q) (\delta_{il} \delta_{jk} - \delta_{ik} \delta_{jl}). \end{aligned} \quad (2.5)$$

A expressão acima atende a expectativa no que se refere às álgebras usadas em teorias de muitos corpos, isto é, quando $q = -1$, temos um elemento de matriz característico de sistemas fermiônicos, enquanto que, quando $q = +1$, ocorre o mesmo para sistemas bosônicos.

De forma genérica, o chamado q -produto interno $\langle\langle \tilde{j} \rangle\rangle_{m'} | (j)_m \rangle$ pode ser calculado utilizando-se das relações 2.1 e 2.4, sendo estas também as responsáveis pela positividade da *norma* dos estados formados pela combinação linear dos monômios. Em [12] vemos que a norma positiva é uma característica não apenas para o caso de $|0\rangle$, mas também para bases de qual-

quer número de quons, com $q \in [-1, +1]$. A norma de $|(j)_m\rangle$ designa-se pelo q -produto $\langle(\tilde{j})_m|(j)_m\rangle$. Se $|s\rangle = \left(a_i^\dagger a_j^\dagger - \alpha a_j^\dagger a_i^\dagger\right)|0\rangle$, percebemos que $\langle s|s\rangle = 2(1 \pm q)$ para $\alpha = \pm 1$, isto é, $\langle s|s\rangle > 0$.

Façamos a hipótese de que $|s\rangle = 0$. Aplicamos agora a relação 2.1 nas expressões $a_i|s\rangle = 0$ e $a_j|s\rangle = 0$. Desta forma concluímos que $q = \pm 1$, ou seja, para os casos bosônicos e fermiônicos. Este resultado nos leva a afirmar o fato de que não há relação de q -mutação entre os operadores a_i^\dagger e a_j^\dagger , bem como a_i e a_j , exceto para quando $q = \pm 1$, ou seja, para os casos bosônicos e fermiônicos.

Um operador muito importante na teoria de muitos corpos é o operador número n_i com o qual, por exemplo, podemos obter a energia total E das partículas de um sistema de quons livres, ou seja,

$$E = \sum_i \varepsilon_i n_i, \quad (2.6)$$

sendo ε_i a energia do estado i .

Com quons, o operador número deve obedecer a relação usual de comutação

$$[n_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij} a_j^\dagger, \quad (2.7)$$

o que faz com que tenhamos a seguinte expansão [13]

$$n_i = a_i^\dagger a_i + (1 - q^2)^{-1} \sum_k \left(a_k^\dagger a_i^\dagger - q a_i^\dagger a_k^\dagger \right) (a_i a_k - q a_k a_i) + \dots, \quad (2.8)$$

sendo esta uma série infinita.

Da teoria de muitos corpos, o chamado operador número de transição n_{ij} deve obedecer as seguintes relações de comutação

$$[n_{ij}, a_k^\dagger] = \delta_{jk} a_i^\dagger, \quad (2.9)$$

e

$$[n_{ij}, a_k] = -\delta_{ik} a_j. \quad (2.10)$$

Em termos de a_i^\dagger 's e a_i 's, n_{ij} pode ser escrito [13] como

$$n_{ij} = a_i^\dagger a_j + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{t_1 \dots t_n} \sum_{\pi} c_{\pi(t_1), \dots, \pi(t_n), t_1 \dots t_n} \left(Y_{i\pi(t_1), \dots, \pi(t_n)} \right)^\dagger Y_{j t_1 \dots t_n}, \quad (2.11)$$

sendo o somatório sobre π a soma de todas as permutações de índice t_1, t_2, \dots, t_n , incluindo os casos de sua repetição. E justamente dizem res-

peito a cada uma destas permutações os termos $\pi(t_1), \pi(t_2), \dots, \pi(t_n)$. Os coeficientes $c_{\pi(t_1), \dots, \pi(t_n); t_1 \dots t_n}$ nada mais são do que funções dependentes do parâmetro q .

Com $Y_{\beta t} = a_{\beta} a_t - q a_t a_{\beta}$, temos que [14]

$$Y_{\beta t_1 \dots t_{n+1}} = Y_{\beta t_1 \dots t_n} a_{t_{n+1}} - q^{n+1} a_{t_{n+1}} Y_{\beta t_1 \dots t_n}. \quad (2.12)$$

São estes os primeiros termos da expansão [15, 16]:

$$n_{ij} = a_i^{\dagger} a_j + (1 - q^2)^{-1} \sum_{\gamma} \left(a_{\gamma}^{\dagger} a_i^{\dagger} - q a_i^{\dagger} a_{\gamma}^{\dagger} \right) (a_j a_{\gamma} - q a_{\gamma} a_j) + \dots \quad (2.13)$$

2.2 ÁLGEBRA DE QUONS x ÁLGEBRA DO Q-OSCILADOR

Trataremos, na presente seção, da definição do oscilador q-deformado bosônico, bem como sua representação no espaço de Fock [4], para verificarmos diferenças entre esta álgebra e a quônica.

Podemos começar definindo a álgebra do oscilador q-bosônico através das seguintes relações:

$$aa^+ - qa^+a = q^{-N}, \quad [N, a] = -a, \quad [N, a^+] = +a^+, \quad (2.14)$$

sendo a o operador de aniquilação, a^+ o de criação, e N o operador número. O parâmetro q é um número complexo.

A representação no espaço de Fock da estrutura algébrica mostrada em 2.14 é realizada através dos autoestados ortonormalizados $|n\rangle$ do operador N , de modo que

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{[n]!}} (a^+)^n |0\rangle, \quad a|0\rangle = 0 \quad e \quad N|n\rangle = n|n\rangle, \quad (2.15)$$

sendo

$$[n] \equiv \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2.16)$$

e

$$[n]! \equiv [n][n-1] \dots 1, \quad \text{com} \quad [0]! = 1. \quad (2.17)$$

É fácil provar que neste espaço de Fock são válidas as seguintes relações:

$$a^+a = [N], \quad e \quad aa^+ = [N+1]. \quad (2.18)$$

Uma outra possibilidade, na qual q é um número real está relacionada

aos operadores definidos por

$$A = q^{N/2} \quad \text{e} \quad A^+ = a^+ q^{N/2} \quad (2.19)$$

que, por sua vez, satisfazem a relação

$$AA^+ - q^2 A^+ A = 1. \quad (2.20)$$

Podemos ainda verificar a representação no espaço de Fock destes operadores:

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{[n]^B!}} (A^+)^n |0\rangle, \quad A|0\rangle = 0 \quad \text{e} \quad N|n\rangle = n|n\rangle, \quad (2.21)$$

com

$$[n]^B \equiv q^{n-1} [n] \frac{q^{2n} - 1}{q^2 - 1}. \quad (2.22)$$

Aplicando os operadores nos elementos do espaço de Fock, temos que

$$A^+ A = [N]^B \quad \text{e} \quad AA^+ = [N+1]^B. \quad (2.23)$$

Portanto no caso unidimensional a relação entre os operadores de criação e aniquilação da álgebra de quons é equivalente à q -deformada com $q \in [-1, +1]$.

Existe a possibilidade de se expressar 2.14 através das transformações [5, 17]

$$a = \left(\frac{[N+1]}{N+1} \right)^{1/2} b \quad \text{e} \quad a^+ = b^+ \left(\frac{[N+1]}{N+1} \right)^{1/2}. \quad (2.24)$$

Os operadores b e b^+ satisfazem a álgebra do oscilador bosônico usual, isto é,

$$[b, b^+] = 1, \quad [N, b] = -b, \quad [N, b^+] = b^+ \quad \text{e} \quad N = b^+ b. \quad (2.25)$$

Estas relações provam a existência de um mapeamento entre ambas as álgebras.

A generalização das álgebras 2.14 e 2.19 para mais de uma dimensão

pode ser feita respectivamente da forma seguinte:

$$a_i a_j^\dagger - ((q-1)\delta_{ij} + 1)a_j^\dagger a_i = \delta_{ij} q^{-N_i} \quad (2.26)$$

$$[N_i, a_j] = -\delta_{ij} a_j \quad [N_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij} a_j^\dagger$$

$$A_i A_j^\dagger - ((q^2-1)\delta_{ij} + 1)A_j^\dagger A_i = \delta_{ij} \quad (2.27)$$

$$[N_i, A_j] = -\delta_{ij} A_j \quad [N_i, A_j^\dagger] = \delta_{ij} A_j^\dagger.$$

Vemos que, no caso do oscilador q-deformado bosônico, ocorre comutação no que concerne aos diferentes graus de liberdade, isto é, quando $i \neq j$. Eis aqui a principal diferença entre estas álgebras e a de quons. Para estes últimos ocorre não uma comutação, mas uma q-mutação definida em 2.1 referente aos vários graus de liberdade possíveis. Notemos que para a álgebra q-deformada os operadores a_i e a_j , bem como a_i^\dagger e a_j^\dagger , comutam entre si. Como isto não ocorre na álgebra de quons, não existe mapeamento entre esta e a álgebra usual para o caso de mais de uma dimensão. A álgebra de quons também difere neste ponto de uma álgebra formada a partir de operadores fermiônicos[4], conhecida como álgebra do oscilador q-fermiônico¹. Esta é concebida de modo análogo ao do oscilador q-bosônico e não será discutida aqui pois os argumentos comentados nesta seção são suficientes para convencer-mos da diferença entre as álgebras q-deformadas do oscilador e a quônica.

2.3 ÁLGEBRA SU(2) A PARTIR DA ÁLGEBRA DE QUONS

O operador de transição n_{ij} pode nos fornecer um meio de, através da álgebra de quons, obtermos uma análoga a do momento angular. Não obstante, devemos primeiro definir estes operadores[6]:

$$a_m \text{ e } a_m^\dagger, \text{ mas agora } m = -\ell \dots + \ell. \quad (2.28)$$

Estes, por sua vez, devem obedecer a relação de comutação definida em 2.1. Neste caso,

$$\left[a_m, a_{m'}^\dagger \right]_q = a_m a_{m'}^\dagger - q a_{m'}^\dagger a_m = \delta_{mm'}. \quad (2.29)$$

¹Esta álgebra, contudo, tem sido motivo de controvérsias. Na comunidade discute-se a possibilidade desta álgebra ser uma redundância do caso q-bosônico.

Neste espaço restrito, podemos usar as equações 2.9, 2.10 e 2.12 para chegarmos a [6]

$$\begin{aligned} \left[n_{ij}, \left(Y'_{i' t_1 \dots t_n} \right)^\dagger \right] &= \delta_{j t_1} \left(Y'_{i' i t_2 \dots t_n} \right)^\dagger + \delta_{j t_2} \left(Y'_{i' t_1 i t_3 \dots t_n} \right)^\dagger + \dots \\ &+ \delta_{j t_{n-1}} \left(Y'_{i' t_1 t_2 \dots i t_n} \right)^\dagger + \delta_{j t_n} \left(Y'_{i' t_1 t_2 \dots t_{n-1} i} \right)^\dagger + \delta_{j i'} \left(Y_{i i t_2 \dots t_n} \right)^\dagger. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Da equação 2.30, podemos achar

$$\begin{aligned} \left[n_{ij}, \left(Y'_{i' \pi(t_1) \dots \pi(t_n)} \right)^\dagger Y'_{j' t_1 \dots t_n} \right] &= \\ &= \delta_{j i'} \left(Y_{i \pi(t_1) \dots \pi(t_n)} \right)^\dagger Y'_{j' t_1 \dots t_n} - \delta_{i j'} \left(Y'_{i' \pi(t_1) \dots \pi(t_{n+1})} \right)^\dagger Y_{j t_1 \dots t_{n+1}}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

O próximo passo é calcular a relação de comutação $[n_{ij}, n_{i' j'}]$. Para isto devemos substituir $n_{i' j'}$ por 2.11, de forma a chegar a

$$\begin{aligned} [n_{ij}, n_{i' j'}] &= [n_{ij}, a_i^\dagger a_{j'}^\dagger] + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{t_1 \dots t_n} \sum_{\pi} c_{i' \pi(t_1), \dots, \pi(t_n), j' t_1 \dots t_n} \left[n_{ij}, \left(Y'_{i' \pi(t_1), \dots, \pi(t_n)} \right)^\dagger Y'_{j' t_1 \dots t_n} \right]. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Com 2.11 e 2.30 chegamos finalmente a:

$$[n_{ij}, n_{i' j'}] = \delta_{j i'} n_{i j'} - \delta_{i j'} n_{i' j}. \quad (2.33)$$

Sua importância está relacionada ao fato de podermos gerar a álgebra $su(2l+1)$ através do operador número de transição n_{ij} .

Vamos agora mostrar como podemos gerar a álgebra $su(2)^2$ utilizando-se deste operador. Para tal, definamos os geradores $SU(2)$ a partir dos n_{ij} :

$$L_0 = \sum_{\mu=-\ell}^{+\ell} \mu n_{\mu \mu} \quad (2.34)$$

e

$$L_{\pm} = \sum_{\mu=-\ell}^{+\ell} \sqrt{(\ell \mp \mu)(\ell \pm \mu + 1)} n_{\mu \pm 1, \mu}. \quad (2.35)$$

Vamos agora comprovar que estes operadores, definidos desta maneira, formam a álgebra $su(2)$. Com este intuito, vejamos as relações de

²A definição de grupo $SU(2)$ é mostrada no apêndice.

comutação entres estes e o operador a_m^\dagger definido em 2.28:

$$\begin{aligned} [L_0, a_m^\dagger] &= \sum_{\mu=-\ell}^{+\ell} \mu [n_{\mu\mu}, a_m^\dagger] = \sum_{\mu=-\ell}^{+\ell} \delta_{\mu m} a_m^\dagger \Rightarrow \\ [L_0, a_m^\dagger] &= m a_m^\dagger. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Além disto,

$$\begin{aligned} [L_\pm, a_m^\dagger] &= \sum_{\mu=-\ell}^{+\ell} \sqrt{(\ell \mp \mu)(\ell \pm \mu + 1)} [n_{\mu\pm 1, \mu}, a_m^\dagger] \\ &= \sum_{\mu=-\ell}^{+\ell} \sqrt{(\ell \mp \mu)(\ell \pm \mu + 1)} \delta_{\mu m} a_{\mu\pm 1}^\dagger \Rightarrow \\ [L_\pm, a_m^\dagger] &= \sqrt{(\ell \mp \mu)(\ell \pm \mu + 1)} a_{\mu\pm 1}^\dagger. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Com 2.34 e 2.35 podemos ainda obter a relação

$$\begin{aligned} [L_0, L_\pm] &= \sum_{\mu, \mu'} \mu \sqrt{(\ell \mp \mu')(\ell \pm \mu' + 1)} [n_{\mu\mu}, n_{\mu' \pm 1, \mu'}] \Rightarrow \\ [L_0, L_\pm] &= \sum_{\mu, \mu'} \mu \sqrt{(\ell \mp \mu')(\ell \pm \mu' + 1)} (\delta_{\mu, \mu' \pm 1} n_{\mu\mu'} - \delta_{\mu, \mu'} n_{\mu, \mu' + 1}) \Rightarrow \\ [L_0, L_\pm] &= \pm L_\pm. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Encerramos a seção citando que, de forma semelhante, podemos calcular

$$[L_+, L_-] = 2L_0, \quad (2.39)$$

comprovando, por fim, que estes operadores definidos em 2.34 e 2.35 geram a álgebra do momento angular.

Importante é salientar o fato de ser impossível a construção da álgebra $su(2)$ partindo da relacionada aos osciladores q-deformados da mesma forma que fizemos com álgebra de quons.

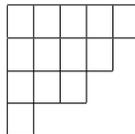
Mostramos então que podemos construir operadores a_m^\dagger , que são irredutíveis de $SU(2)$, o que faz com que, na formação de modelos, seja imediata a maneira de construirmos hamiltonianos escalares, bastando-nos apenas utilizar as regras usuais de acoplamento de momento angular, isto é, usar os coeficientes de Clebsh-Gordan usuais. Isto difere no caso das álgebras q-deformadas nas quais o acoplamento é bem mais complexo[18].

3 ESTADOS DE SISTEMAS DE MUITOS QUONS

3.1 DIAGRAMAS DE YOUNG

Uma ferramenta importante para se trabalhar com o grupo de permutação de n elementos S_n , na formação dos estados de muitos quons, é justamente o chamado *diagrama de Young* [7, 19–21].

Definimo-lo como uma coleção de caixas arranjadas de maneira que a quantidade destas venha a diminuir à medida que aumenta o número da respectiva linha ou coluna. Os diagramas de Young, então, estão relacionados às partições dos números inteiros. Um exemplo de diagrama de Young é mostrado abaixo.



(3.1)

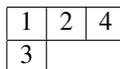
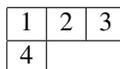
A cada diagrama de Young associamos uma representação irredutível do grupo de permutações.

Os diagramas nos dão as simetrias do grupo de permutações S_n . Os estados da base de um sistema de muitos quons podem ser classificados de acordo com as representações irredutíveis do grupo de permutações.

A simetria, por exemplo, para a função de onda de 13 partículas representada pelo diagrama de Young 3.1, corresponde às permutações nas quais as linhas são simetrizadas primeiro e as colunas antissimetrizadas posteriormente, ou vice-versa.

O número de estados ξ formados diretamente a partir de cada arranjo da representação irredutível nos define as dimensão *dim* deste arranjo. O número de estados da base quônica compostos por estes estados será ξ^2 .

Um exemplo possível é o dos estados do sistema de quatro quons, representados pelos diagramas



que são formados a partir do arranjo da representação irredutível de $dim = 3$ associado ao diagrama



Vamos começar com a utilização para o sistema de duas partículas idênticas. A função de onda de cada partícula i é aqui denotada por φ_i , de modo que o estado do sistema $\psi(1, 2)$ seja

$$\psi(1, 2) = \varphi_1(1) \varphi_2(2).$$

Os números 1 e 2 dentro dos parênteses correspondem a todos os números quânticos das partículas 1 e 2 respectivamente, de forma mais explícita, $1 \rightarrow x_1, y_1, z_1, s_1, \tau_1$, e $2 \rightarrow x_2, y_2, z_2, s_2, \tau_2$. Sendo x_i, y_i e z_i as coordenadas espaciais da partícula i , s_i o spin e τ_i o isospin.

Sabemos que a função de onda de um sistema bosônico com duas partículas é dada pela expressão

$$\psi_S = \psi(1, 2) + \psi(2, 1), \quad (3.2)$$

e a fermiônica

$$\psi_A = \psi(1, 2) - \psi(2, 1). \quad (3.3)$$

O índice A significa que trata-se do estado antissimétrico, enquanto que S , do estado simétrico.

Podemos usar a notação

$$\psi_S = \psi(1, 2) + P_{12}\psi(1, 2), \quad \psi_A = \psi(1, 2) - P_{12}\psi(1, 2) \quad (3.4)$$

para o sistema bosônico e fermiônico respectivamente, isto pois

$$\psi(2, 1) = P_{12}\psi(1, 2), \quad (3.5)$$

sendo P_{12} o chamado operador de permutação[20, 21].

Podemos ainda representar os estados simétricos e antissimétricos através dos diagramas de Young da seguinte maneira:

$$\psi_S = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \quad (3.6)$$

$$\psi_A = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \quad (3.7)$$

Já para um sistema de três partículas o estado simétrico fica:

$$\psi_S = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline \end{array} \quad (3.8)$$

$$\psi_A = \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \end{array} \quad (3.9)$$

Não obstante, aqui temos a presença de estados mistos representados pelo diagrama

$$\psi_M = \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array}. \quad (3.10)$$

Podemos construir estes estados através dos operadores de simetrização S_{ij} e antissimetrização A_{ij} definidos pela expressão abaixo

$$S_{ij} = e + P_{ij}, \quad A_{ij} = e - P_{ij}, \quad (3.11)$$

com e sendo o elemento identidade.

O estado simétrico para três partículas definido em 3.8 também pode ser escrito desta forma:

$$\psi_S \equiv S_{123} \psi(123) = (e + P_{12} + P_{13} + P_{23} + P_{12}P_{13} + P_{13}P_{12}) \psi(123), \quad (3.12)$$

enquanto que o antissimétrico 3.9

$$\psi_A \equiv A_{123} \psi(123) = (e - P_{12} - P_{13} - P_{23} + P_{12}P_{13} + P_{13}P_{12}) \psi(123). \quad (3.13)$$

Além disto, os quatro estados mistos 3.10 também têm a sua representação em termos dos operadores de permutação

$$\psi_M = A_{ik} S_{ij} \psi(123). \quad (3.14)$$

De posse desta equação, podemos ilustrar melhor a utilização dos diagramas de Young caso a compararmos com a 3.10 modificada desta forma:

$$\psi_M = \begin{array}{|c|c|} \hline i & j \\ \hline & k \\ \hline \end{array}. \quad (3.15)$$

Estes seis estados, por sua vez, formam uma base não ortonormal irredutível de simetria mista do grupo S_3 .

Encerramos, desta forma, a explanação sobre os diagramas de Young tendo em vista que o objetivo principal é fornecer um pouco de subsídios para a continuação da leitura, de forma um pouco pragmática, e não nos aprofun-

daremos demasiadamente no assunto. Mais propriedades destes serão discutidas ao longo do texto se houver necessidade.

3.2 BASE

O conjunto dos monômios definidos em 3.2 não é uma base ortonormal, portanto não é uma base conveniente para os sistemas de muitos quons. Mostraremos agora como é possível a formação desta base, a começar pelo exemplo relacionado ao sistema de dois quons:

$$\frac{1}{\sqrt{1+q}} \left(a_1^\dagger \right)^2 |0\rangle, \quad \frac{1}{\sqrt{1+q}} \left(a_2^\dagger \right)^2 |0\rangle, \quad a_1^\dagger a_2^\dagger |0\rangle \quad \text{e} \quad a_2^\dagger a_1^\dagger |0\rangle. \quad (3.16)$$

Os métodos utilizados na ortonormalização destes estados podem consistir na diagonalização da matriz de overlap

$$A = \begin{pmatrix} \langle 0 | a_1 a_1 a_1^\dagger a_1^\dagger | 0 \rangle & \langle 0 | a_1 a_1 a_2^\dagger a_2^\dagger | 0 \rangle & \langle 0 | a_1 a_1 a_1^\dagger a_2^\dagger | 0 \rangle & \langle 0 | a_1 a_1 a_2^\dagger a_1^\dagger | 0 \rangle \\ \langle 0 | a_2 a_2 a_1^\dagger a_1^\dagger | 0 \rangle & \langle 0 | a_2 a_2 a_2^\dagger a_2^\dagger | 0 \rangle & \langle 0 | a_2 a_2 a_1^\dagger a_2^\dagger | 0 \rangle & \langle 0 | a_2 a_2 a_2^\dagger a_1^\dagger | 0 \rangle \\ \langle 0 | a_1 a_2 a_1^\dagger a_1^\dagger | 0 \rangle & \langle 0 | a_1 a_2 a_2^\dagger a_2^\dagger | 0 \rangle & \langle 0 | a_1 a_2 a_1^\dagger a_2^\dagger | 0 \rangle & \langle 0 | a_1 a_2 a_2^\dagger a_1^\dagger | 0 \rangle \\ \langle 0 | a_2 a_1 a_1^\dagger a_1^\dagger | 0 \rangle & \langle 0 | a_2 a_1 a_2^\dagger a_2^\dagger | 0 \rangle & \langle 0 | a_2 a_1 a_1^\dagger a_2^\dagger | 0 \rangle & \langle 0 | a_2 a_1 a_2^\dagger a_1^\dagger | 0 \rangle \end{pmatrix},$$

ou então através dos chamados diagramas de Young aplicados apenas aos estados linearmente independentes, isto é, $a_1^\dagger a_2^\dagger |0\rangle$ e $a_2^\dagger a_1^\dagger |0\rangle$.

Em verdade, esta matriz foi apenas inserida por motivos ilustrativos pois poderíamos simplesmente construir uma submatriz 2×2 cujos elementos são o produto interno entre estes últimos estados. Os diagramas referentes a este sistema foram ilustrados em 3.6 e 3.7.

Os autoestados da matriz A seriam então o estado simétrico:

$$|\phi_s\rangle = \frac{1}{\sqrt{2(1+q)}} \left(a_1^\dagger a_2^\dagger + a_2^\dagger a_1^\dagger \right) |0\rangle, \quad (3.17)$$

e o antissimétrico

$$|\phi_a\rangle = \frac{1}{\sqrt{2(1+q)}} \left(a_1^\dagger a_2^\dagger - a_2^\dagger a_1^\dagger \right) |0\rangle, \quad (3.18)$$

além dos simétricos $\frac{1}{\sqrt{1+q}} \left(a_1^\dagger \right)^2 |0\rangle$ e $\frac{1}{\sqrt{1+q}} \left(a_2^\dagger \right)^2 |0\rangle$.

Ainda poderíamos escrever $a_1^\dagger a_2^\dagger |0\rangle$ e $a_2^\dagger a_1^\dagger |0\rangle$ desta forma:

$$a_1^\dagger a_2^\dagger |0\rangle = \sqrt{\frac{1+q}{2}} |\phi_s\rangle + \sqrt{\frac{1-q}{2}} |\phi_a\rangle, \quad (3.19)$$

e

$$a_2^\dagger a_1^\dagger |0\rangle = \sqrt{\frac{1+q}{2}} |\phi_s\rangle - \sqrt{\frac{1-q}{2}} |\phi_a\rangle. \quad (3.20)$$

O método elaborado para a formação dos estados de três quons é uma extensão do elaborado para a resolução para dois quons. Neste caso, temos os estados não ortonormais:

$$\begin{aligned} |\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3\rangle &= |123\rangle = a_1^\dagger a_2^\dagger a_3^\dagger |0\rangle, \\ |\varphi_1 \varphi_3 \varphi_2\rangle &= |132\rangle = a_1^\dagger a_3^\dagger a_2^\dagger |0\rangle, \\ |\varphi_2 \varphi_1 \varphi_3\rangle &= |213\rangle = a_2^\dagger a_1^\dagger a_3^\dagger |0\rangle, \\ |\varphi_2 \varphi_3 \varphi_1\rangle &= |231\rangle = a_2^\dagger a_3^\dagger a_1^\dagger |0\rangle, \\ |\varphi_3 \varphi_1 \varphi_2\rangle &= |312\rangle = a_3^\dagger a_1^\dagger a_2^\dagger |0\rangle, \\ |\varphi_3 \varphi_2 \varphi_1\rangle &= |321\rangle = a_3^\dagger a_2^\dagger a_1^\dagger |0\rangle, \end{aligned}$$

resultados da aplicação do operador P_{ij} no estado $|123\rangle$. Os estados nos quais $\varphi_1 = \varphi_2$, $\varphi_2 = \varphi_3$, $\varphi_1 = \varphi_3$ e $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3$ estarão incluídos nos cálculos apenas com estes monômios.

Ficamos então com a matriz de overlap B para diagonalizar com o intuito de obtermos os estados ortonormalizados:

$$B = \begin{pmatrix} \langle 123|123\rangle & \langle 123|132\rangle & \langle 123|213\rangle & \langle 123|231\rangle & \langle 123|312\rangle & \langle 123|321\rangle \\ \langle 132|123\rangle & \langle 132|132\rangle & \langle 132|213\rangle & \langle 132|231\rangle & \langle 132|312\rangle & \langle 132|321\rangle \\ \langle 213|123\rangle & \langle 213|132\rangle & \langle 213|213\rangle & \langle 213|231\rangle & \langle 213|312\rangle & \langle 213|321\rangle \\ \langle 231|123\rangle & \langle 231|132\rangle & \langle 231|213\rangle & \langle 231|231\rangle & \langle 231|312\rangle & \langle 231|321\rangle \\ \langle 312|123\rangle & \langle 312|132\rangle & \langle 312|213\rangle & \langle 312|231\rangle & \langle 312|312\rangle & \langle 312|321\rangle \\ \langle 321|123\rangle & \langle 321|132\rangle & \langle 321|213\rangle & \langle 321|231\rangle & \langle 321|312\rangle & \langle 321|321\rangle \end{pmatrix}.$$

Como resultado, temos

$$B = \begin{pmatrix} 1 & q & q & q^2 & q^2 & q^3 \\ q & 1 & q^2 & q^3 & q & q^2 \\ q & q^2 & 1 & q & q^3 & q^2 \\ q^2 & q^3 & q & 1 & q^2 & q \\ q^2 & q & q^3 & q^2 & 1 & q \\ q^3 & q^2 & q^2 & q & q & 1 \end{pmatrix}.$$

Seus autovalores e respectivos autovetores podem assim ser facilmente calculados. Os resultados são apresentados abaixo:

$$\lambda_S = 1 + 2q^2 + 2q + q^3;$$

$$|S\rangle = \frac{1}{\sqrt{1 + 2q^2 + 2q + q^3}} \frac{1}{\sqrt{6}} [|123\rangle + |213\rangle + |132\rangle + |231\rangle + |312\rangle + |321\rangle]; \quad (3.21)$$

$$\lambda_A = 1 + 2q^2 - 2q - q^3;$$

$$|A\rangle = \frac{1}{\sqrt{1 + 2q^2 - 2q - q^3}} \frac{1}{\sqrt{6}} [|123\rangle - |213\rangle - |132\rangle + |231\rangle + |312\rangle - |321\rangle]. \quad (3.22)$$

Sendo $|S\rangle$ e $|A\rangle$ os estados totalmente simétricos e antissimétricos respectivamente. Usamos a notação λ_X para designar o autovalor do estado X . A seguir verificamos as expressões para os estados mistos.

$$\lambda_{M_1 M_2} = 1 - q^2 + q - q^3;$$

$$|M_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{1 - q^2 + q - q^3}} \frac{1}{\sqrt{12}} [|123\rangle - |213\rangle + 2|132\rangle + |231\rangle - 2|312\rangle - |321\rangle]; \quad (3.23)$$

$$|M_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{1 - q^2 + q - q^3}} \frac{1}{2} [-|123\rangle - |213\rangle + |231\rangle + |321\rangle]; \quad (3.24)$$

e ainda

$$\lambda_{M_3 M_4} = 1 - q^2 - q + q^3;$$

$$|M_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{1 - q^2 - q + q^3}} \frac{1}{2} [|123\rangle - |213\rangle - |231\rangle + |321\rangle]; \quad (3.25)$$

$$|M_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{1 - q^2 - q + q^3}} \frac{1}{\sqrt{12}} [|123\rangle + |213\rangle - 2|132\rangle + |231\rangle - 2|312\rangle + |321\rangle]. \quad (3.26)$$

Vamos agora verificar como poderíamos formar estes estados, construindo-os diretamente através dos diagramas de Young.

Notemos que a ação dos operadores do grupo de permutação nos estados $|M_1\rangle$ e $|M_2\rangle$ apenas geram combinações lineares destes mesmos estados,

isto é, temos uma representação irredutível 2-D do grupo S_3 . De modo análogo, obtemos outra representação equivalente a partir dos estados $|M_3\rangle$ e $|M_4\rangle$.

Em sua representação irredutível, os estados podem ser classificados desta forma, conforme sua dimensão $dim[20, 21]$:

$$|S\rangle = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array}, \quad dim = 1;$$

$$|A\rangle = \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}, \quad dim = 1;$$

$$|M_i^{(1)}\rangle = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}, \quad dim = 2;$$

$$|M_i^{(2)}\rangle = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array}, \quad dim = 2.$$

Esta análise, no que se refere às dimensões do espaço, implica na possibilidade de ocorrerem os seguintes estados:

$$|S\rangle$$

e

$$|A\rangle,$$

além de $|\psi_1\rangle$, $|\psi_2\rangle$, $|\psi_3\rangle$ e $|\psi_4\rangle$, estados de simetria mista.

Como $|S\rangle$ e $|A\rangle$ formam subespaços independentes podemos obtê-los facilmente através das equações 3.12 e 3.13 e de sua normalização, resultado mostrado em 3.21 e em 3.22 .

Para acharmos os estados mistos, podemos utilizar a equação 3.14 :

$$|\psi_1\rangle = A_{13}S_{12}|123\rangle = |123\rangle + |213\rangle - |321\rangle - |312\rangle, \quad (3.27)$$

$$|\psi_2\rangle = A_{23}S_{12}|123\rangle = |123\rangle + |213\rangle - |132\rangle - |231\rangle, \quad (3.28)$$

$$|\psi_3\rangle = A_{12}S_{13}|123\rangle = |123\rangle + |321\rangle - |213\rangle - |231\rangle, \quad (3.29)$$

$$|\psi_4\rangle = A_{23}S_{13}|123\rangle = |123\rangle + |321\rangle - |132\rangle - |312\rangle, \quad (3.30)$$

podendo ser obtidos através dos diagramas de Young, isto é,

$$|\psi_1\rangle = \frac{\boxed{1} \boxed{2}}{\boxed{3}},$$

$$|\psi_2\rangle = \frac{\boxed{2} \boxed{1}}{\boxed{3}},$$

$$|\psi_3\rangle = \frac{\boxed{1} \boxed{3}}{\boxed{2}},$$

$$|\psi_4\rangle = \frac{\boxed{3} \boxed{1}}{\boxed{2}}.$$

Utilizaremos agora o conhecimento do processo de ortogonalização de Gram-Schmidt aplicando-o na base não-ortonormalizada $\beta = \{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, |\psi_3\rangle, |\psi_4\rangle\}$.

Já a base ortogonalizada será

$$\beta = \{|\psi'_1\rangle, |\psi'_2\rangle, |\psi'_3\rangle, |\psi'_4\rangle\}, \quad (3.31)$$

sendo que, de acordo com o método,

$$|\psi'_1\rangle = |\psi_1\rangle, \quad (3.32)$$

$$|\psi'_2\rangle = |\psi_2\rangle - \frac{\langle \psi_2 | \psi'_1 \rangle}{\langle \psi'_1 | \psi'_1 \rangle} |\psi'_1\rangle, \quad (3.33)$$

$$|\psi'_3\rangle = |\psi_3\rangle - \frac{\langle \psi_3 | \psi'_2 \rangle}{\langle \psi'_2 | \psi'_2 \rangle} |\psi'_2\rangle - \frac{\langle \psi_3 | \psi'_1 \rangle}{\langle \psi'_1 | \psi'_1 \rangle} |\psi'_1\rangle, \quad (3.34)$$

$$|\psi'_4\rangle = |\psi_4\rangle - \frac{\langle \psi_4 | \psi'_3 \rangle}{\langle \psi'_3 | \psi'_3 \rangle} |\psi'_3\rangle - \frac{\langle \psi_4 | \psi'_2 \rangle}{\langle \psi'_2 | \psi'_2 \rangle} |\psi'_2\rangle - \frac{\langle \psi_4 | \psi'_1 \rangle}{\langle \psi'_1 | \psi'_1 \rangle} |\psi'_1\rangle. \quad (3.35)$$

Agora deixamos explícitos os elementos da matriz:

$$\langle \psi'_1 | \psi'_1 \rangle = 4(1 + q - q^2 - q^3); \quad (3.36)$$

$$\langle \psi'_2 | \psi'_1 \rangle = 2(1 + q - q^2 - q^3) \Rightarrow \quad (3.37)$$

$$\frac{\langle \psi_2 | \psi'_1 \rangle}{\langle \psi'_1 | \psi'_1 \rangle} = \frac{1}{2}. \quad (3.38)$$

Por intermédio da substituição de 3.30 e 3.38 em 3.33, ficamos com:

$$|\psi'_2\rangle = \frac{1}{2} [|123\rangle + |213\rangle + |312\rangle + |321\rangle] - |132\rangle - |231\rangle. \quad (3.39)$$

Da mesma forma podemos calcular

$$\frac{\langle \psi_3 | \psi'_1 \rangle}{\langle \psi'_1 | \psi'_1 \rangle} = -\frac{1}{4} \quad (3.40)$$

e

$$\frac{\langle \psi_3 | \psi'_2 \rangle}{\langle \psi'_2 | \psi'_2 \rangle} = \frac{1}{2}. \quad (3.41)$$

Com 3.27, 3.29 e as três últimas equações aplicadas em 3.34 chegamos ao estado

$$|\psi'_3\rangle = \frac{1}{2} [|132\rangle - |231\rangle - |312\rangle + |321\rangle] + |123\rangle - |213\rangle, \quad (3.42)$$

faltado-nos apenas calcular $|\psi'_4\rangle$. Para tal, obtemos os seguintes resultados:

$$\frac{\langle \psi_4 | \psi'_1 \rangle}{\langle \psi'_1 | \psi'_1 \rangle} = \frac{1}{4}, \quad (3.43)$$

$$\frac{\langle \psi_4 | \psi'_2 \rangle}{\langle \psi'_2 | \psi'_2 \rangle} = \frac{1}{2}, \quad (3.44)$$

$$\frac{\langle \psi_4 | \psi'_3 \rangle}{\langle \psi'_3 | \psi'_3 \rangle} = \frac{1}{2}. \quad (3.45)$$

Finalmente encontramos o último estado, que é

$$|\psi'_4\rangle = \frac{3}{4} [|231\rangle + |321\rangle - |132\rangle - |312\rangle]. \quad (3.46)$$

Para encontrar a base de estados ortonormalizados basta apenas normalizar os estados $|\psi'_1\rangle$, $|\psi'_2\rangle$, $|\psi'_3\rangle$ e $|\psi'_4\rangle$, de forma que ficamos com:

$$|\psi_1^N\rangle = \frac{1}{\sqrt{1 - q^2 - q + q^3}} \frac{1}{2} [|123\rangle + |213\rangle - |321\rangle - |312\rangle]; \quad (3.47)$$

$$|\psi_2^N\rangle = \frac{1}{\sqrt{1-q^2-q+q^3}} \frac{1}{\sqrt{12}} [|123\rangle + |213\rangle + |312\rangle + |321\rangle - 2|132\rangle - 2|231\rangle] ; \quad (3.48)$$

$$|\psi_3^N\rangle = \frac{1}{\sqrt{1-q^2-q+q^3}} \frac{1}{\sqrt{12}} [|132\rangle - |231\rangle - |312\rangle + |321\rangle + 2|123\rangle - 2|213\rangle] ; \quad (3.49)$$

$$|\psi_4^N\rangle = \frac{1}{\sqrt{1-q^2-q+q^3}} \frac{1}{2} [|231\rangle + |321\rangle - |132\rangle - |312\rangle] . \quad (3.50)$$

No que se refere aos estados com quatro quons, que estão relacionados ao grupo de permutação S_4 , o número de estados ($4! = 24$) nos levará a uma

matriz 24×24 . A relação destes, por sua vez, é mostrada abaixo:

$$\begin{aligned}
|\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \varphi_4\rangle &= |1234\rangle = a_1^\dagger a_2^\dagger a_3^\dagger a_4^\dagger |0\rangle ; \\
|\varphi_1 \varphi_2 \varphi_4 \varphi_3\rangle &= |1243\rangle = a_1^\dagger a_2^\dagger a_4^\dagger a_3^\dagger |0\rangle ; \\
|\varphi_1 \varphi_3 \varphi_2 \varphi_4\rangle &= |1324\rangle = a_1^\dagger a_3^\dagger a_2^\dagger a_4^\dagger |0\rangle ; \\
|\varphi_1 \varphi_3 \varphi_4 \varphi_2\rangle &= |1342\rangle = a_1^\dagger a_3^\dagger a_4^\dagger a_2^\dagger |0\rangle ; \\
|\varphi_1 \varphi_4 \varphi_2 \varphi_3\rangle &= |1423\rangle = a_1^\dagger a_4^\dagger a_2^\dagger a_3^\dagger |0\rangle ; \\
|\varphi_1 \varphi_4 \varphi_3 \varphi_2\rangle &= |1432\rangle = a_1^\dagger a_4^\dagger a_3^\dagger a_2^\dagger |0\rangle ; \\
|\varphi_2 \varphi_1 \varphi_3 \varphi_4\rangle &= |2134\rangle = a_2^\dagger a_1^\dagger a_3^\dagger a_4^\dagger |0\rangle ; \\
|\varphi_2 \varphi_1 \varphi_4 \varphi_3\rangle &= |2143\rangle = a_2^\dagger a_1^\dagger a_4^\dagger a_3^\dagger |0\rangle ; \\
|\varphi_2 \varphi_3 \varphi_1 \varphi_4\rangle &= |2314\rangle = a_2^\dagger a_3^\dagger a_1^\dagger a_4^\dagger |0\rangle ; \\
|\varphi_2 \varphi_3 \varphi_4 \varphi_1\rangle &= |2341\rangle = a_2^\dagger a_3^\dagger a_4^\dagger a_1^\dagger |0\rangle ; \\
|\varphi_2 \varphi_4 \varphi_1 \varphi_3\rangle &= |2413\rangle = a_2^\dagger a_4^\dagger a_1^\dagger a_3^\dagger |0\rangle ; \\
|\varphi_2 \varphi_4 \varphi_3 \varphi_1\rangle &= |2431\rangle = a_2^\dagger a_4^\dagger a_3^\dagger a_1^\dagger |0\rangle ; \\
|\varphi_3 \varphi_1 \varphi_2 \varphi_4\rangle &= |3124\rangle = a_3^\dagger a_1^\dagger a_2^\dagger a_4^\dagger |0\rangle ; \\
|\varphi_3 \varphi_1 \varphi_4 \varphi_2\rangle &= |3142\rangle = a_3^\dagger a_1^\dagger a_4^\dagger a_2^\dagger |0\rangle ; \\
|\varphi_3 \varphi_2 \varphi_1 \varphi_4\rangle &= |3214\rangle = a_3^\dagger a_2^\dagger a_1^\dagger a_4^\dagger |0\rangle ; \\
|\varphi_3 \varphi_2 \varphi_4 \varphi_1\rangle &= |3241\rangle = a_3^\dagger a_2^\dagger a_4^\dagger a_1^\dagger |0\rangle ; \\
|\varphi_3 \varphi_4 \varphi_1 \varphi_2\rangle &= |3412\rangle = a_3^\dagger a_4^\dagger a_1^\dagger a_2^\dagger |0\rangle ; \\
|\varphi_3 \varphi_4 \varphi_2 \varphi_1\rangle &= |3421\rangle = a_3^\dagger a_4^\dagger a_2^\dagger a_1^\dagger |0\rangle ; \\
|\varphi_4 \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3\rangle &= |4123\rangle = a_4^\dagger a_1^\dagger a_2^\dagger a_3^\dagger |0\rangle ; \\
|\varphi_4 \varphi_1 \varphi_3 \varphi_2\rangle &= |4132\rangle = a_4^\dagger a_1^\dagger a_3^\dagger a_2^\dagger |0\rangle ; \\
|\varphi_4 \varphi_2 \varphi_1 \varphi_3\rangle &= |4213\rangle = a_4^\dagger a_2^\dagger a_1^\dagger a_3^\dagger |0\rangle ; \\
|\varphi_4 \varphi_2 \varphi_3 \varphi_1\rangle &= |4231\rangle = a_4^\dagger a_2^\dagger a_3^\dagger a_1^\dagger |0\rangle ; \\
|\varphi_4 \varphi_3 \varphi_1 \varphi_2\rangle &= |4312\rangle = a_4^\dagger a_3^\dagger a_1^\dagger a_2^\dagger |0\rangle ; \\
|\varphi_4 \varphi_3 \varphi_2 \varphi_1\rangle &= |4321\rangle = a_4^\dagger a_3^\dagger a_2^\dagger a_1^\dagger |0\rangle .
\end{aligned}$$

Isto nos fornece indubitavelmente trabalho considerável caso queiramos chegar aos autovetores e autovalores. A matriz de overlap C é mostrada a seguir:

A ordem de estados seguida para a realização desta matriz é a mesma da apresentação dos estados da página 43. Por exemplo, o elemento de matriz $c_{11,20} = \langle 2413|4132 \rangle$.

Embora tenhamos conseguido a matriz C , a dificuldade se encontra em, até mesmo computacionalmente, acharmos os seus autovetores. Através deste método, chegamos a estes autovalores:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 1 + 5q^2 + 5q^4 + q^6 + 3q + 6q^3 + 3q^5 \\ \lambda_2 &= (q^2 + 1 + \sqrt{3}q)(q+1)^2(q-1)^2 \\ \lambda_3 &= \left(\sqrt{2q^2 + 6q^3 + 9q^4 + 6q^5 + 2q^6} - q^4 - q^3 - q^2 - q - 1 \right) (q+1)(q-1) \\ \lambda_4 &= \left(\sqrt{2q^2 - 6q^3 + 9q^4 - 6q^5 + 2q^6} - q^4 + q^3 - q^2 + q - 1 \right) (q+1)(q-1) \\ \lambda_5 &= 1 - q - q^2 + 2q^3 - q^4 - q^5 + q^6 \\ \lambda_6 &= 1 + q - q^2 - 2q^3 - q^4 + q^5 + q^6 \\ \lambda_7 &= (q^2 + 1 - \sqrt{3}q)(q+1)^2(q-1)^2 \\ \lambda_8 &= \left(\sqrt{2q^2 + 6q^3 + 9q^4 + 6q^5 + 2q^6} + q^4 + q^3 + q^2 + q + 1 \right) (q+1)(1-q) \\ \lambda_9 &= \left(\sqrt{2q^2 - 6q^3 + 9q^4 - 6q^5 + 2q^6} + q^4 - q^3 + q^2 - q + 1 \right) (q+1)(1-q) \\ \lambda_{10} &= 1 + 5q^2 + 5q^4 + q^6 - 3q - 6q^3 - 3q^5.\end{aligned}$$

Os autovalores λ_1 e λ_{10} estão relacionados ao estado simétrico e antissimétrico respectivamente. Todavia os mais curiosos, com certeza, são os autovalores λ_3 , λ_4 , λ_8 e λ_9 . Além de seu aspecto diferente daqueles que havíamos obtido anteriormente, pois até então não registrávamos a presença de nenhum autovalor com uma raiz de um polinômio de q , os seus autovetores tem dependência local em q , ou seja, possui um termo em função de q que multiplica os estados $|ijkl\rangle$.

Em termos de degenerescência, podemos comentar que dois autoestados possuem o autovalor λ_2 , outros dois, o autovalor λ_7 . Exceto λ_1 , λ_{10} e os mostrados neste parágrafo, cada um dos autovalores restantes estão associados a três respectivos autovetores.

Não obstante, através de uma breve análise relacionada às representações irreduzíveis mostradas entre 3.53 e 3.55, podemos inferir os respectivos subespaços a que os autovalores se referem. O diagrama 3.53 representa um subespaço 2-D, que possui quatro estados de base, cujos autovalores devem ser λ_5 e λ_6 .

Os autovalores λ_2 , λ_3 e λ_4 podem ser, por sua vez, referentes ao subespaço representado por 3.54 ou pelo diagrama 3.55. Assim se sucede com relação a λ_7 , λ_8 e λ_9 . Esta análise dimensional não nos fornece a ferramenta para definir se os autovalores λ_2 , λ_3 e λ_4 são relativos a 3.54 ou a 3.55, o mesmo ocorrendo para λ_7 , λ_8 e λ_9 . Verificamos que, neste caso, cada diagrama está associado a nove estados de base independentes devido ao fato de

que $dim = 3$.

A formação dos estados de base, então, seria possível graças à utilização recorrente dos diagramas de Young. Mostraremos de que maneira poderíamos obter a solução para os estados de base.

Para começar, através dos diagramas podemos obter a representação irredutível de S_4 :

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}, \dim = 1 ; & (3.51)\end{array}$$

$$\begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \end{array}, \dim = 1 ; & (3.52)$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \end{array}, \dim = 2 ; & (3.53)$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \end{array}, \dim = 3 ; & (3.54)$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \end{array}, \dim = 3 . & (3.55)$$

Seguindo o método diagramático devemos calcular as funções de onda, por exemplo,

$$\psi_1 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array},$$

e $\psi_1 = A_{13}S_{124}|1234\rangle$, operadores definidos em 3.11. Então

$$\begin{aligned} \psi_1 = & |1234\rangle + |1432\rangle + |2134\rangle + |2431\rangle + |4132\rangle + |4231\rangle \\ & - |2314\rangle - |2413\rangle - |3214\rangle - |3412\rangle - |4213\rangle - |4312\rangle . \end{aligned} \quad (3.56)$$

Terminamos este capítulo com este exemplo de utilização dos operadores de permutação nos estados $|ijkl\rangle$ para aplicações posteriores, que não serão feitas aqui, na formação dos vetores que formam a base ortonormal do sistema.

3.3 UMA IMPORTANTE PROPRIEDADE DO ESTADO SIMÉTRICO

Temos a expressão

$$|n_i n_j n_k \dots; S\rangle = \sqrt{\frac{n_i! n_j! n_k! \dots}{N! [N]!}} \hat{S}_N (a_i^\dagger)^{n_i} (a_j^\dagger)^{n_j} (a_k^\dagger)^{n_k} \dots |0\rangle, \quad (3.57)$$

para o estado totalmente simétrico normalizado de N quons $|n_i n_j n_k \dots; S\rangle$ que será aplicada no próximo capítulo. Para tal, podemos definir o operador \hat{S}_N da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \hat{S}_N (a_i^\dagger)^{n_i} (a_j^\dagger)^{n_j} (a_k^\dagger)^{n_k} \dots |0\rangle &\equiv \\ &\equiv \frac{1}{n_i! n_j! n_k! \dots} \sum_{P_N} a_{\alpha_1}^\dagger a_{\alpha_2}^\dagger \dots a_{\alpha_{n_i}}^\dagger a_{\alpha_{n_i+1}}^\dagger \dots a_{\alpha_{n_i+n_j+1}}^\dagger \dots a_{\alpha_N}^\dagger |0\rangle, \end{aligned} \quad (3.58)$$

sendo

$$N = n_i + n_j + n_k + \dots,$$

com a soma em P_N sendo realizada em todas as $N!$ permutações aplicadas aos índices $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$. Os índices estão ordenados de forma que $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n_i}$ sejam relativos ao estado i , além de que $\alpha_{n_i+1}, \alpha_{n_i+2}, \dots, \alpha_{n_i+n_j}$ ao estado j e assim por diante. Os termos repetidos são retirados através dos fatoriais do denominador.

Por hipótese, consideremos como verdade esta equação:

$$a_i \hat{S}_N (a_i^\dagger)^{n_i} (a_j^\dagger)^{n_j} (a_k^\dagger)^{n_k} \dots |0\rangle = [N] \hat{S}_{N-1} (a_i^\dagger)^{n_i-1} (a_j^\dagger)^{n_j} (a_k^\dagger)^{n_k} \dots |0\rangle, \quad (3.59)$$

cujos símbolo $[N]$ é definido por 2.16. Através desta última equação, podemos verificar que

$$a_i \hat{S}_{N-1} (a_i^\dagger)^{n_i} (a_j^\dagger)^{n_j} (a_k^\dagger)^{n_k} \dots |0\rangle = [N-1] \hat{S}_{N-2} (a_i^\dagger)^{n_i-1} (a_j^\dagger)^{n_j} (a_k^\dagger)^{n_k} \dots |0\rangle. \quad (3.60)$$

Por intermédio da equação 3.58 podemos chegar a

$$\begin{aligned}
 \hat{S}_N(a_i^\dagger)^{n_i}(a_j^\dagger)^{n_j}(a_k^\dagger)^{n_k} \dots |0\rangle &= \frac{1}{n_i!n_j!n_k! \dots} \\
 &\cdot \left(a_{\alpha_1}^\dagger \sum_{P_{N-1}} \hat{a}_{\alpha_1}^\dagger a_{\alpha_2}^\dagger \dots a_{\alpha_N}^\dagger |0\rangle \right. \\
 &+ a_{\alpha_2}^\dagger \sum_{P_{N-1}} a_{\alpha_1}^\dagger \hat{a}_{\alpha_2}^\dagger a_{\alpha_3}^\dagger \dots a_{\alpha_N}^\dagger |0\rangle \\
 &+ \dots + \\
 &+ a_{\alpha_{n_i}}^\dagger \sum_{P_{N-1}} a_{\alpha_1}^\dagger \dots \hat{a}_{\alpha_{n_i}}^\dagger a_{\alpha_{n_i+1}}^\dagger \dots a_{\alpha_N}^\dagger |0\rangle \\
 &+ \dots + a_{\alpha_N}^\dagger \sum_{P_{N-1}} a_{\alpha_1}^\dagger \dots a_{\alpha_{N-1}}^\dagger \hat{a}_{\alpha_N}^\dagger |0\rangle \left. \right), \tag{3.61}
 \end{aligned}$$

sendo que o acento circunflexo significa a omissão do operador de criação. São iguais os primeiros n_i termos desta equação. Os termos $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n_i}$ relacionam-se ao i -ésimo estado, sendo da mesma forma no que se refere aos termos n_j e os outros n^s . Deste modo, temos que

$$\begin{aligned}
 \hat{S}_N(a_i^\dagger)^{n_i}(a_j^\dagger)^{n_j}(a_k^\dagger)^{n_k} \dots |0\rangle &= a_i^\dagger \hat{S}_{N-1}(a_i^\dagger)^{n_i-1}(a_j^\dagger)^{n_j}(a_k^\dagger)^{n_k} \dots |0\rangle \\
 &+ a_j^\dagger \hat{S}_{N-1}(a_i^\dagger)^{n_i}(a_j^\dagger)^{n_j-1}(a_k^\dagger)^{n_k} \dots |0\rangle \\
 &+ a_k^\dagger \hat{S}_{N-1}(a_i^\dagger)^{n_i}(a_j^\dagger)^{n_j}(a_k^\dagger)^{n_k-1} \dots |0\rangle \\
 &+ \dots \tag{3.62}
 \end{aligned}$$

De posse de 2.1 e 3.62 obtemos o estado resultante da aplicação do operador de aniquilação a_i num estado simétrico de N quons, mostrado a seguir

$$\begin{aligned}
 a_i \hat{S}_N(a_i^\dagger)^{n_i}(a_j^\dagger)^{n_j}(a_k^\dagger)^{n_k} \dots |0\rangle &= \hat{S}_{N-1}(a_i^\dagger)^{n_i-1}(a_j^\dagger)^{n_j}(a_k^\dagger)^{n_k} \dots |0\rangle \\
 &+ q \cdot \left(a_i^\dagger a_i \hat{S}_{N-1}(a_i^\dagger)^{n_i-1}(a_j^\dagger)^{n_j}(a_k^\dagger)^{n_k} \dots |0\rangle \right. \\
 &+ a_j^\dagger a_i \hat{S}_{N-1}(a_i^\dagger)^{n_i}(a_j^\dagger)^{n_j-1}(a_k^\dagger)^{n_k} \dots |0\rangle \\
 &+ a_k^\dagger a_i \hat{S}_{N-1}(a_i^\dagger)^{n_i}(a_j^\dagger)^{n_j}(a_k^\dagger)^{n_k-1} \dots |0\rangle \left. \right). \tag{3.63}
 \end{aligned}$$

Reescrevendo os termos em parênteses de 3.60, podemos obter

$$\begin{aligned}
 a_i \hat{S}_N (a_i^\dagger)^{n_i} (a_j^\dagger)^{n_j} (a_k^\dagger)^{n_k} \dots |0\rangle &= \hat{S}_{N-1} (a_i^\dagger)^{n_i-1} (a_j^\dagger)^{n_j} (a_k^\dagger)^{n_k} \dots |0\rangle \\
 &+ q[N-1] \cdot \left(a_i^\dagger \hat{S}_{N-2} (a_i^\dagger)^{n_i-2} (a_j^\dagger)^{n_j} (a_k^\dagger)^{n_k} \dots |0\rangle \right. \\
 &+ a_j^\dagger \hat{S}_{N-2} (a_i^\dagger)^{n_i-1} (a_j^\dagger)^{n_j-1} (a_k^\dagger)^{n_k} \dots |0\rangle \\
 &\left. + a_k^\dagger \hat{S}_{N-2} (a_i^\dagger)^{n_i-1} (a_j^\dagger)^{n_j} (a_k^\dagger)^{n_k-1} \dots |0\rangle \right). \quad (3.64)
 \end{aligned}$$

Devido ao rearranjo dos termos entre parênteses no que tange à equação 3.62, além da utilização da propriedade $[N] = 1 + q[N-1]$, podemos chegar à expressão:

$$a_i \hat{S}_N (a_i^\dagger)^{n_i} (a_j^\dagger)^{n_j} (a_k^\dagger)^{n_k} \dots |0\rangle = [N] \hat{S}_{N-1} (a_i^\dagger)^{n_i-1} (a_j^\dagger)^{n_j} (a_k^\dagger)^{n_k} \dots |0\rangle, \quad (3.65)$$

provando, por indução, a equação 3.59. Falta apenas normalizar o estado simétrico.

Começamos com:

$$|n_i, n_j, n_k \dots; S\rangle \equiv A_{n_i n_j n_k \dots} \hat{S}_N (a_i^\dagger)^{n_i} (a_j^\dagger)^{n_j} (a_k^\dagger)^{n_k} \dots |0\rangle. \quad (3.66)$$

Desta forma, determinamos a constante de normalização $A_{n_i n_j n_k \dots}$:

$$1 = \langle n_i, n_j, n_k \dots; S | n_i, n_j, n_k \dots; S \rangle = A_{n_i n_j n_k \dots}^2 \frac{N!}{n_i! n_j! n_k!}$$

$$\langle 0 | \dots (a_k^\dagger)^{n_k} (a_j^\dagger)^{n_j} (a_i^\dagger)^{n_i} \hat{S}_N (a_i^\dagger)^{n_i} (a_j^\dagger)^{n_j} (a_k^\dagger)^{n_k} \dots |0\rangle = A_{n_i n_j n_k \dots}^2 \frac{N! [N]!}{n_i! n_j! n_k!}$$

que nada mais é que um valor proveniente de processos iterativos. Com 3.65 chegamos finalmente a

$$a_i |n_i, n_j, n_k \dots; S\rangle = \sqrt{\frac{[N]}{N}} \sqrt{n_i} |n_i - 1, n_j, n_k \dots; S\rangle, \quad (3.67)$$

que é um resultado genérico para o estado totalmente simétrico de um sistema de muitos quons.

4 APLICANDO A ÁLGEBRA DE QUONS

Vejamos agora algumas aplicações da teoria dos quons abordando o caso do oscilador harmônico em três dimensões e o do sistema que diz respeito ao rotor quônico.

4.1 O OSCILADOR QUÔNICO EM 3 DIMENSÕES

O hamiltoniano do oscilador quônico H_{osc}^q pode ser definido da seguinte maneira[22]:

$$H_{osc}^q = \frac{\hbar\omega}{2} \{a_+^\dagger a_+ + a_+ a_+^\dagger + a_-^\dagger a_- + a_- a_-^\dagger + a_0^\dagger a_0 + a_0 a_0^\dagger\}, \quad (4.1)$$

pois, na base esférica,

$$a_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1 + ia_2), \quad a_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1 - ia_2), \quad a_0 = a_3. \quad (4.2)$$

Como os operadores a_1, a_2 e a_3 obedecem a 2.1, a_+, a_- e a_0 também obedecem esta relação, de forma que ficamos com

$$H_{osc}^q = \frac{\hbar\omega}{2} \cdot \left\{ a_+^\dagger a_+ + (1 + qa_+^\dagger a_+) + a_-^\dagger a_- + (1 + qa_-^\dagger a_-) + a_0^\dagger a_0 + (1 + qa_0^\dagger a_0) \right\}. \quad (4.3)$$

Por fim, temos o seguinte hamiltoniano para o sistema do oscilador quônico tridimensional:

$$H_{osc}^q = \frac{\hbar\omega}{2} \{ (a_+^\dagger a_+ + a_-^\dagger a_- + a_0^\dagger a_0)(1 + q) + 3 \}. \quad (4.4)$$

O método utilizado para a ortonormalização desses estados já fora mostrado no capítulo anterior. Nos é útil agora o caso em que temos uma base de três quons. Nesta situação definimos o número de quanta $N = n_+ + n_- + n_0$.

Restringindo a aplicação do hamiltoniano 4.4 ao espaço totalmente simétrico podemos facilmente chegar ao espectro do oscilador harmônico:

$$E_{osc}^q = \frac{\hbar\omega}{2} \{ [N](1 + q) + 3 \}. \quad (4.5)$$

Este evidentemente forma um espectro cujo espaçamento entre as li-

nhas não é o mesmo como no respectivo ao oscilador harmônico composto pela álgebra usual. A figura 4.1 nos permite realizar esta comparação com maior precisão. Na figura, para quando $q = 1$ temos o espectro do oscilador harmônico da álgebra de Lie, sendo que, desta maneira, podemos verificar mais facilmente quais as consequências das pequenas alterações do parâmetro q na deformação do espectro.

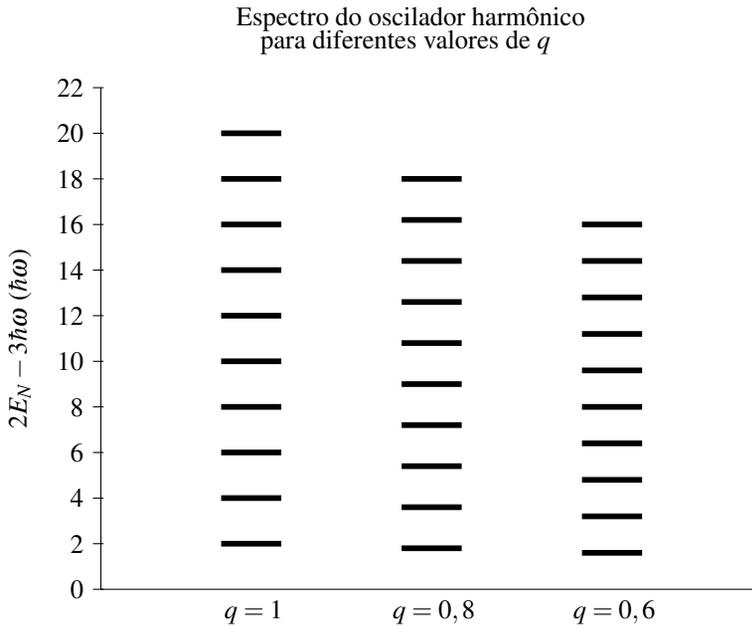


Figura 4.1: Para $q = 1$ temos o espectro do oscilador harmônico em três dimensões usual. Desta forma podemos compará-lo com o obtido através da álgebra de quons.

4.2 ROTOR QUÔNICO

Vamos analisar agora o caso da álgebra relacionada ao sistema que chamamos de rotor quônico[22]. Para tanto, devemos utilizar o método prescrito por Schwinger[19] na definição dos componentes do momento angular:

$$L_+ = a_+^\dagger a_-, \quad L_- = a_-^\dagger a_+, \quad L_0 = \frac{1}{2} \{a_+^\dagger a_+ - a_-^\dagger a_-\}. \quad (4.6)$$

Como na seção anterior, devemos restringir o nosso espaço e usar o subespaço totalmente simétrico, através do qual podemos chegar a

$$\langle n_+, n_- ; S | [L_+, L_-] | n_+, n_- ; S \rangle = \frac{[N]}{N} (n_+ - n_-) \delta_{n_+, n_+} \delta_{n_-, n_-}, \quad (4.7)$$

e, além disto,

$$\langle n_+, n_- ; S | 2L_0 | n_+, n_- ; S \rangle = \frac{[N]}{N} (n_+ - n_-) \delta_{n_+, n_+} \delta_{n_-, n_-}, \quad (4.8)$$

sendo

$$N = n_+ + n_-.$$

Com o mesmo tipo de relação utilizado para calcular 4.8, podemos obter

$$\langle n_+, n_- ; S | [L_0, L_+] | n_+, n_- ; S \rangle = \langle n_+, n_- ; S | L_+ | n_+, n_- ; S \rangle, \quad (4.9)$$

além de

$$\langle n_+, n_- ; S | [L_0, L_-] | n_+, n_- ; S \rangle = -\langle n_+, n_- ; S | L_- | n_+, n_- ; S \rangle, \quad (4.10)$$

implicando no fato de que os operadores definidos em 4.6 formam a álgebra referente ao momento angular. Na busca do espectro do rotor quônico é necessária a solução do seguinte elemento de matriz, relacionado ao operador de Casimir¹ L^2 da álgebra:

$$\langle n_+, n_- ; S | L^2 | n_+, n_- ; S \rangle = \frac{[N]}{2} \left\{ \frac{[N]}{2} + 1 \right\} \delta_{n_+, n_+} \delta_{n_-, n_-}. \quad (4.11)$$

Como o hamiltoniano do rotor é diretamente proporcional a L^2 , caso

¹A definição do operador de Casimir é feita no apêndice deste trabalho.

considerarmos $n_+ = \ell + m$ e $n_- = \ell - m$, obtemos, por fim, o espectro do rotor quônico:

$$E_\ell^q = A \frac{[2\ell]}{2} \left\{ \frac{[2\ell]}{2} + 1 \right\}. \quad (4.12)$$

Esta relação nos mostra mais diferenças entre a álgebra q-deformada e a álgebra de quons. Estas diferenças dizem respeito não apenas a seu aspecto mais fundamental, mas a resultados, neste caso relacionado ao rotor deformado.

Em [23], Bonatsos, através de técnicas de q-deformação², realizou um trabalho que o levou à expansão para τ pequeno:

$$\begin{aligned} E(\ell) = E_0 + \frac{1}{2I} \ell(\ell+1) - \frac{1}{3} \tau^2 [\ell(\ell+1)]^2 + \frac{2}{45} \tau^4 [\ell(\ell+1)]^3 \\ - \frac{1}{315} \tau^6 [\ell(\ell+1)]^4 + \frac{2}{14175} \tau^8 [\ell(\ell+1)]^5 - \dots \end{aligned} \quad (4.13)$$

Enquanto I é o momento de inércia, τ é o fator de deformação da álgebra³, com $\tau \in \mathbb{R}$. Em 4.12 o termo A já leva em conta o momento de inércia, o que difere da expansão de 4.12 feita em torno de $\ell(\ell+1)$:

$$\begin{aligned} E_\ell^q = A \left\{ \ell(\ell+1) + \frac{7\tau^2}{3} \ell^2(\ell+1)^2 + \frac{62\tau^4}{45} \ell^3(\ell+1)^3 \right. \\ \left. + (2\ell+1) \left[\frac{3\tau}{4} + \tau \ell(\ell+1) + \tau^3 \ell^2(\ell+1)^2 \right] + \dots \right\} \end{aligned} \quad (4.14)$$

Sendo agora, $q = e^\tau$ e $\tau \leq 0$. Todavia esta expressão é similar à obtida em [24]. O motivo da diferença está relacionado ao fato de que, na álgebra de quons $\tau \in \mathbb{R} \Rightarrow q \in \mathbb{R}$, enquanto que na q-deformada, $\tau \in \mathbb{R} \Rightarrow q \in \mathbb{C}$, sendo isto facilmente verificado se analisarmos as relações já mostradas de q e τ para ambas as álgebras.

Podemos, então, através de 4.12 e 4.13 e dos dados experimentais[25, 26], compararmos o seu espectro. Esta análise pode ser feita através das figuras 4.2, 4.3, 4.4 e 4.5. A primeira figura traz a comparação entre os espectros obtidos experimentalmente do ^{244}Pu , com os teóricos obtidos pela álgebra quônica e a q-deformada[25]. Também podemos fazer o mesmo tipo de comparação utilizando-se das figuras subsequentes, sendo que, nestes casos, estão relacionadas aos espectros rotacionais das moléculas HF , HBr e HCl . Os valores de q referentes à equação 4.12 utilizados nas figuras são, respectiva-

²Técnicas estas que diferenciavam-se da que utilizávamos até mesmo porque usavam outra relação de q-mutação.

³Neste trabalho, foi considerado $q = e^{i\tau}$.

mente, 0,994782, 0,999014, 0,999701 e 0,999582. Os do τ , de 4.13, por sua vez, são: 0,033588, 0,0174, 0,0113 e 0,0124.

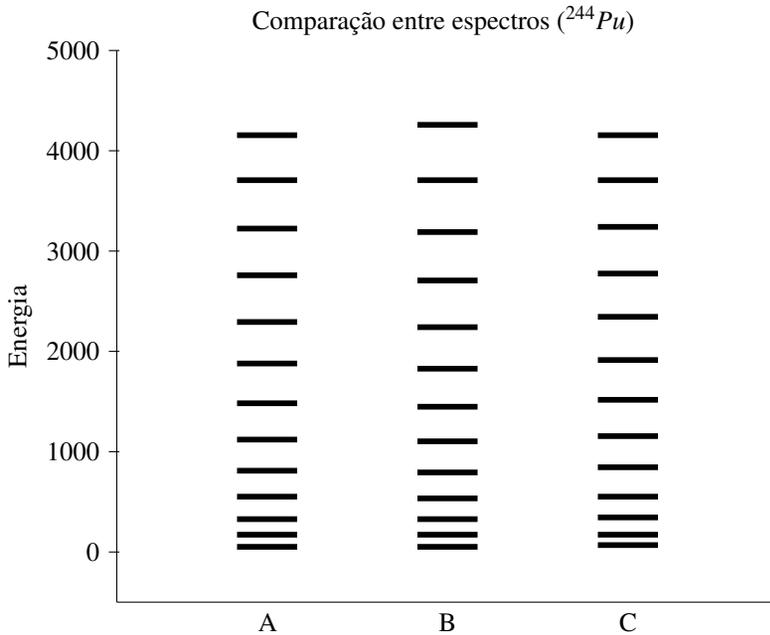


Figura 4.2: Trata-se da comparação entre o espectro experimental do ^{244}Pu e os obtidos através das técnicas teóricas. O espectro A está relacionado aos valores experimentais. B diz respeito aos valores obtidos pela álgebra q -deformada e C pela álgebra de quons. A unidade de energia utilizada aqui é o keV. Neste caso, $q = 0,994782$ e $\tau = 0,033588$.

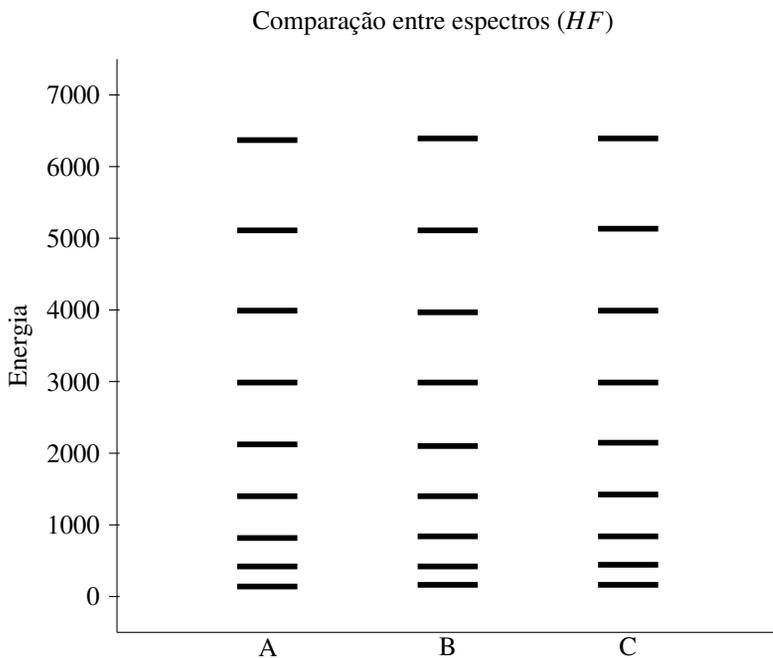


Figura 4.3: Comparação entre o espectro experimental do HF e os obtidos através das técnicas teóricas. Agora, utilizamos cm^{-1} como unidade de energia. Neste caso, $q = 0,999014$ e $\tau = 0,0174$. O espectro A está relacionado aos valores experimentais. B diz respeito aos valores obtidos pela álgebra q -deformada e C pela álgebra de quons.

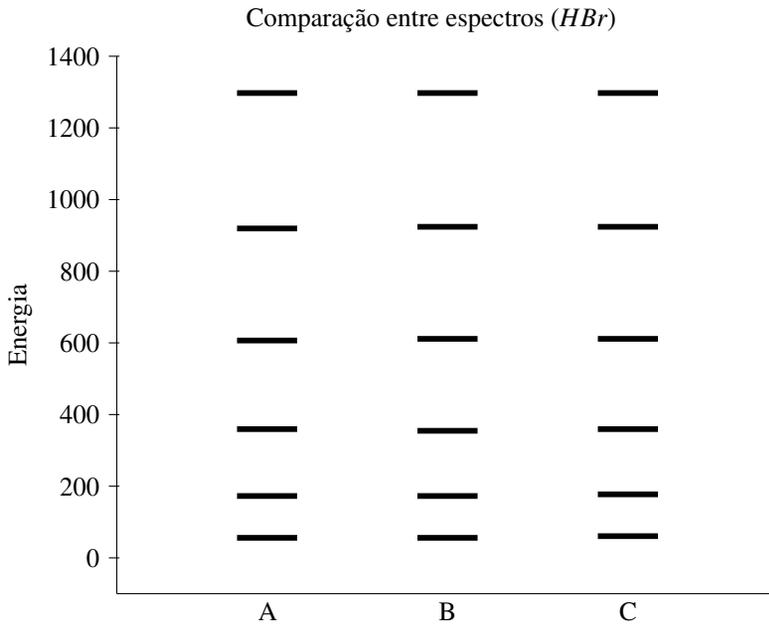


Figura 4.4: Comparação entre o espectro experimental do *HBr* e os obtidos através das técnicas teóricas. Temos que $q = 0,999701$ e $\tau = 0,0113$. O espectro A está relacionado aos valores experimentais. B diz respeito aos valores obtidos pela álgebra q -deformada e C pela álgebra de quons.

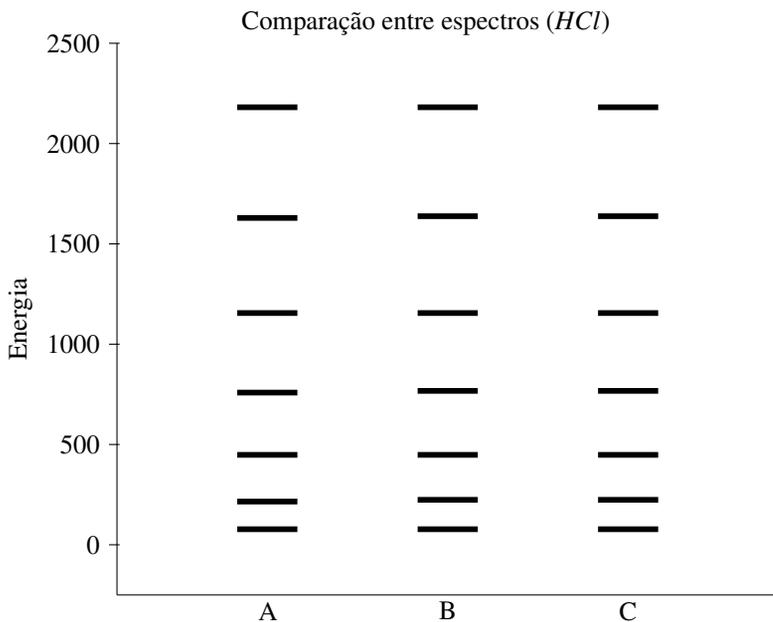


Figura 4.5: Comparação entre o espectro experimental do HCl e os obtidos através das técnicas teóricas. Temos que $q = 0,999582$ e $\tau = 0,0124$. O espectro A está relacionado aos valores experimentais. B diz respeito aos valores obtidos pela álgebra q -deformada e C pela álgebra de quons.

5 CONCLUSÕES

Verificamos neste trabalho as diferenças fundamentais entre as álgebras q -deformadas do oscilador e a dos quons. Enfatizamos a existência de um mapeamento entre álgebra q -deformada do oscilador e as usuais, podendo ser expresso por 2.24. O fato de não existir um análogo desta característica para o caso quônico é uma das razões responsáveis pelas diferenças entre ambas as álgebras.

Mostramos que a álgebra de quons, devido a sua característica de q -mutatividade, permite a formação da álgebra $su(2)$ a partir dos operadores de criação e aniquilação quônicos. Além disto, comentamos sobre a impossibilidade de se fazer o mesmo através das álgebras do q -oscilador, na qual é necessária a construção de operadores que satisfazem a álgebra $su_q(2)$ [5], tornando difícil a interpretação física dos modelos baseados nesta teoria.

Outro ponto importante está relacionado ao fato de que a álgebra de quons, ao seguir as restrições impostas em 2.28, nos permite definir operadores que satisfazem as regras do tensor esférico usual, o que é resultado de vital importância em muitas aplicações da álgebra de quons, visado para descrever muitas características de sistemas físicos. Além disto, podemos construir operadores tensoriais do grupo $SU(2)$ e realizar acoplamentos usando-se dos coeficientes de Clebsh-Gordon da álgebra de Lie, o que é bastante útil no que se refere às aplicações da álgebra quônica.

Na elaboração dos modelos, podemos considerar os operadores de criação e aniquilação de quons como os graus de liberdade fundamentais. Pelo acoplamento dos tensores podemos construir hamiltonianos escalares por rotação que, por sua vez, irão descrever os sistemas físicos que desejamos estudar. Neste trabalho foi considerado o exemplo do hamiltoniano do rotor, que poderia ter sido apresentado como o escalar $j = 0$ gerado a partir do acoplamento de tensores esféricos $j = 1/2$ construídos a partir dos operadores a_+^+ , a_+ e a_- .

Uma classe enorme de modelos algébricos pode ser considerada no contexto que estamos discutindo. Algumas aplicações preliminares nesta linha já foram feitas em modelos nucleares construídos a partir de bósons s ($j = 0$) e d ($j = 2$)[27].

Analisamos de que forma podemos utilizar os diagramas de Young na formação dos estados de base para um sistema de muitos quons. Um fato interessante é que, para um mesmo sistema de quons, pode haver mais de uma base ortonormal, como podemos perceber devido às diferenças entre as equações 3.23 até 3.26 e 3.47 até 3.50.

Conseguimos uma expressão fechada para o subespaço totalmente simétrico e aplicamo-la para os casos do oscilador harmônico e do rotor quô-

nico. Um fato interessante é que a expressão que define o espectro do rotor quônico é diferente da vista na literatura obtida através da álgebra $su_q(2)$ [5]. Por intermédio de uma expansão de 4.12 em $\ell(\ell + 1)$ verificamos sua equivalência a feita em [24], e a diferença em relação a [25].

Na atualidade, uma série de aplicações utilizando-se um subespaço restrito quônico é realizada [27, 28].

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- 1 GREEN, H. S. *Phys. Rev.*, v. 90, p. 270, 1953.
- 2 GREENBERG, O. W.; MCCRAE, K. I. *Nucl. Phys.*, B219, p. 358, 1983.
- 3 OHNUKI, Y.; KAMEFUCHI, S. *Quantum Field Theory and Parastatistics*. [S.l.]: Springer, 1982.
- 4 CHAICHAN, M.; FELIPE, R. G.; MONTONEN, C. *J. Phys.*, A26, p. 4017, 1993.
- 5 KIBLER, M. R. *Introduction to Quantum Algebras, Second International School on Theoretical Physics*. [S.l.]: World Scientific, 1992.
- 6 AVANCINI, S. S. et al. *Phys. Letters*, A267, p. 109, 2000.
- 7 FULTON, W. *Young Tableaux*. [S.l.: s.n.], 1997.
- 8 GREENBERG, O. W. *Phys. Rev.*, D43, p. 4111, 1991.
- 9 GREENBERT, O. W. In: *hep-th/0007054*. [S.l.: s.n.], 6/7/2000.
- 10 FIVEL, D. I. *Rev. Lett.*, v. 65, p. 3361, 1990.
- 11 GREENBERG, O. W. *Physica*, A180, p. 419, 1992.
- 12 ZAGIER, D. *Commun Math. Phys.*, v. 147, p. 199 – 210, 1992.
- 13 MELJANAC, S.; PERICA, A. *J. Phys.*, A27, p. 4737, 1994.
- 14 DOREŠIĆ, M. A. *J. Phys.*, A28, p. 189, 1995.
- 15 STANCIU, S. *Rev. Lett.*, v. 147, p. 211, 1992.
- 16 GREENBERG, O. W. *Physica*, A209, p. 137, 1995.
- 17 KULISH, P.; DAMANSKINSKY, E. *J. Phys. A: Math Gen.*, v. 23, p. L415, 1990.
- 18 BIEDENHARN, L. C.; LOHE, M. A. *Quantum Group Symmetry and q-Tensor Algebras*. [S.l.: s.n.], 1995.
- 19 SAKURAI, J. J. *Modern Quantum Mechanics*. [S.l.]: Addison Wesley, 1985.
- 20 HAMERMESH, M. *Group Theory and its Application to Physical Problems*. [S.l.]: Dover Pub., 1989.

- 21 GREINER, W.; MÜLLER, B. *Quantum Mechanics Symmetries, Second Edition*. [S.l.]: Springer, 1994.
- 22 AVANCINI, S. S.; MARINELLI, J. R.; RODRIGUES, C. E. O. quant-ph/0109095. 19Sep2001.
- 23 BONATSOS, D.; DASKALOYANNIS, C. *Prog. in Part. and Nucl. Phys.*, v. 43, p. 537, 1999.
- 24 BARBIER, R.; MEYER, J.; KIBLER, M. *J. Phys.*, G20, p. L13 – L19, 1994.
- 25 RAYCHEV, P. P.; ROUSSEV, R. P.; SMIRNOV, Y. F. *J. Phys.*, G16, p. L137 – L141, 1990.
- 26 BONATSOS, D. et al. *Chem. Phys. Letters*, v. 175, p. 4, 1990.
- 27 AVANCINI, S. S. et al. *J. Phys.*, G25, p. 525, 1999.
- 28 AVANCINI, S. S.; MARINELLI, J. R.; MENEZES, D. P. *J. Phys.*, G25, p. 1829, 1999.
- 29 HUMPHREYS, J. E. *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory - Graduate Texts in Mathematics - Vol. 9*. [S.l.]: Springer-Verlag, 1972.
- 30 CORNWELL, J. F. *Group Theory in Physics, Volumes 1, 2 and 3 - Techniques in Physics 7*. [S.l.]: Academic Press, 1984.

APÊNDICE

O objetivo deste apêndice é apresentar as definições de alguns destes entes matemáticos citados durante o texto. Especificamente, definimos álgebra de Lie, grupo de Lie e o operador de Casimir. Além disto, é feita uma breve explanação sobre a conexão entre álgebra de Lie e seu respectivo grupo de Lie [20, 21, 29, 30].

Álgebra de Lie

Uma álgebra de Lie consiste de um espaço vetorial \mathfrak{g} munido de produto (colchete ou comutador de Lie)

$$[,] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g} ,$$

com as propriedades:

1. bilinearidade;
2. antissimetria, ou seja $[X, X] = 0 \forall X \in \mathfrak{g}$, implicando no fato de que $[X, Y] = -[Y, X] \forall X, Y \in \mathfrak{g}$, e;
3. satisfação da identidade de Jacobi, ou seja, $\forall X, Y$ e $Z \in \mathfrak{g}$

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0 .$$

Grupos de Lie

É um grupo contínuo. Em outras palavras, é um grupo cujos elementos são funções analíticas dos parâmetros. Um exemplo possível é o grupo de rotação $SO(2)$ (S-special, O-ortogonal, 2-referente ao número de dimensões).

Relação entre álgebra de Lie e seu respectivo grupo

Seja $G(t_i) \in G$ e $g_i \in \mathfrak{g}$, sendo G o grupo e \mathfrak{g} a álgebra, então a relação entre $G(t_i)$ e g_i é dada por:

$$G(t_i) = \exp(g_i t_i)$$

ou ainda

$$\left(\frac{dG(t_i)}{dt_i} \right)_{t_i=0} = g_i,$$

com

$$i \in \mathbb{N}.$$

O grupo $SU(2)$

Seja o grupo $GL(n, \mathbb{C}) = \{U \in U(n, \mathbb{C}) / \det U \neq 0\}$, então

$$SU(2) = \{U \in GL(2, \mathbb{C}) / U^\dagger U = 1 \text{ e } \det U = 1 \}.$$

O operador de Casimir

É o operador que comuta com todos os elementos da álgebra.