

Universidade Federal de Santa Catarina
Curso de Pós-Graduação em Matemática e
Computação Científica

hp - Versão do Método de Galerkin
Descontínuo Aplicado Para
Equações em Derivadas Parciais

Paulo Rafael Bösing
Orientador: Prof. Dr. Igor E. Mozolevski

Florianópolis
Fevereiro de 2002

Universidade Federal de Santa Catarina
Curso de Pós-Graduação em Matemática e
Computação Científica

hp -Versão do Método de Galerkin Descontínuo
Aplicado Para Equações em Derivadas Parciais

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica, do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina, para a obtenção do grau de Mestre em Matemática, com Área de Concentração em Matemática Aplicada.

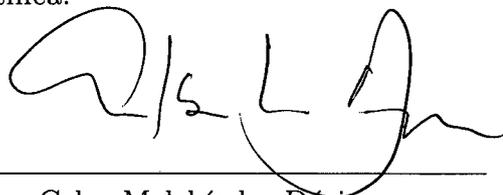
Paulo Rafael Bösing
Florianópolis
Fevereiro de 2002

hp-Versão do Método de Galerkin Descontínuo Aplicado Para Equações em Derivadas Parciais

por

Paulo Rafael Bösing

Esta Dissertação foi julgada para a obtenção do Título de “Mestre”,
Área de Concentração em Matemática Aplicada, e aprovada em sua forma
final pelo Curso de Pós-Graduação em Matemática e
Computação Científica.



Celso Melchíades Dória
Coordenador

Comissão Examinadora



Prof. Dr. Igor E. Mozolevski (UFSC-Orientador)



Prof. Dra. Liliane Basso Barichello (UFRGS)



Prof. Dr. Mário Cesar Zambaldi (UFSC)



Prof. Dr. Daniel Noberto Kozakevich (UFSC)

Florianópolis, fevereiro de 2002.

A Deus.
Ao meu pai Arnildo (in memoriam).
À minha mãe Agnes, por orientar o meu caminho,
feito de lutas e incertezas mas também
de muitas esperanças e sonhos.
À minha noiva Marta, pela dedicação,
generosidade e amor.

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a minha família, que me acompanhou nessa jornada, dando-me muita força e apoio. Em especial a Marta, pelas tantas vezes que me ergueu, quando ao chão estava.

A Nadir, Delícia e família pelas tantas “hospedagens” em vossa casa, proporcionando dias agradáveis de descanso.

À Myriam, Jandir e seus filhos Jandir D. e Raquel Irene, por terem me cuidado quando doente estive, e pelos conselhos recebidos.

Aos meus grandes amigos, Jacks, Marquinho, Antônio, Gilmar, Luciano, Aloísio, Ademir, Vilmar e Eleani, companheiros por muitas vezes de almoços, jantas, jogos, filmes, festas, farras e trilhas. Vocês são *minha família da capital*.

Aos amigos(as) que as salas de aula me trouxeram, Gilmar, Roberta, Anderson B., Vanderlei, Mara, Danieli, Anderson M., Stefan e Quelin, pelas horas agradáveis passadas juntos e pelos grupos de estudos realizados.

Ao amigo Rafael M. Casali pelo suporte em Latex.

Aos demais amigos e colegas de Pós-Graduação, Alcides, Patrícia, Divane, Edson, Jeison, Claires, Lucicléia, Juliano, Gilberto, Airton, Danilo, Graziela, Janice, Milton e Christian pela agradável companhia.

Ao professor Ruy Charão, pela amizade e apoio recebido. E aos demais professores que contribuíram com a minha formação. Agradeço também a Elisa, secretária da PG, que sempre nos atendeu prontamente.

Ao CNPq, pelo suporte financeiro.

Por último, mas de forma especial, agradeço a meu orientador, Igor Mozolevski...

*Palavras são poucas próximas de atos.
Seus atos muito me ajudaram,
e com todo carinho venho te agradecer por isto.
Muito obrigado por sua ajuda.
Foi de grande valor.*

Sumário

Lista de figuras	vi
Resumo	vii
Abstract	viii
Introdução	1
1 Conceitos básicos	4
1.1 Espaços de funções	4
1.1.1 Espaços de funções contínuas	4
1.1.2 Espaços de funções integráveis	5
1.1.3 Espaços de Sobolev	6
1.2 Existência e unicidade de solução fraca para a equação hiperbólica	10
1.3 Método de Galerkin descontínuo aplicado a equação hiperbólica	17
1.3.1 Aproximação polinomial de Galerkin descontínuo	19
1.3.2 Enumeração dos elementos da malha	21
2 Estimativas <i>a priori</i> para a equação difusão-advecção-reação	26
2.1 Preliminares	27
2.1.1 Problema modelo	27
2.1.2 Existência e unicidade de solução fraca	28
2.1.3 <i>hp</i> -espaços de elementos finitos	35
2.2 Equação de advecção com parâmetro de estabilidade	37
2.2.1 Formulação estabilizada do método de Galerkin descontínuo para a equação de advecção	39
2.2.2 Estimativas <i>a priori</i> para o erro do método de Galerkin descontínuo estabilizado para a equação de advecção	45
2.2.3 Resultados numéricos	59
2.2.4 Método “streamline diffusion”	62
2.3 Equação de advecção sem parâmetro de estabilidade	66
2.3.1 Formulação padrão do método de Galerkin descontínuo para a equação de advecção	66
2.3.2 Estimativas <i>a priori</i> para o erro do método de Galerkin descontínuo padrão para a equação de advecção	70

2.3.3	Resultados numéricos	79
2.4	Equação de difusão sem parâmetro de estabilidade	81
2.4.1	Formulação padrão do método de Galerkin descontínuo para a equação de difusão	82
2.4.2	Estimativas <i>a priori</i> para o erro do método de Galerkin descontínuo padrão para a equação de difusão	83
2.5	Equação de difusão-advecção-reação sem parâmetro de estabilidade	94
2.5.1	Formulação padrão do método de Galerkin descontínuo para a equação de difusão-advecção-reação	94
2.5.2	Estimativas <i>a priori</i> para o erro do método de Galerkin descontínuo padrão para a equação de difusão-advecção-reação	95
3	Estimativas <i>a posteriori</i>	97
3.1	Operador diferencial linear	97
3.2	O problema modelo em uma dimensão	102
	Conclusões	108
	A Algumas desigualdades	110
	Referências Bibliográficas	112

Lista de Figuras

1.1	Um ponto x tal que $x \in \partial_- K$ e $x \in \partial_+ K'$	18
1.2	Malha no caso triangular	22
1.3	Enumeração dos elementos de fronteira	22
1.4	O último elemento de fronteira	23
2.1	(a) malha regular; (b) malha 1-irregular	35
2.2	(a) O elemento \hat{P} e sua malha $\hat{\mathcal{T}}_P$; (b) o retalho P e sua malha \mathcal{T}_P	37
2.3	As aplicações $A_{\hat{K}}$, F_P e F_K	38
2.4	Enumeração dos elementos da malha para implementação	59
2.5	Exemplo 2.11. Convergência do hp -DGFEM com h -refinamento	60
2.6	Exemplo 2.11. Convergência do hp -DGFEM sobre p -enriquecimento	61
2.7	Exemplo 2.12. Convergência do hp -DGFEM com h -refinamento	61
2.8	Exemplo 2.12. Convergência do hp -DGFEM sobre p -enriquecimento	62
2.9	Exemplo 2.29. Convergência do hp -DGFEM com h -refinamento	80
2.10	Exemplo 2.29. Convergência do hp -DGFEM sobre p -enriquecimento	80
2.11	Exemplo 2.30. Convergência do hp -DGFEM com h -refinamento	81
2.12	Exemplo 2.30. Convergência do hp -DGFEM sobre p -enriquecimento	81

Resumo

Neste trabalho faz-se uma análise da *hp*-versão do método de elementos finitos de Galerkin descontínuo (*hp*-DGFEM) aplicado a um problema de valor de fronteira para equações diferenciais parciais de segunda ordem com forma característica não negativa, que sobre certas condições tem uma única solução fraca. Especial atenção é dada para estimativas “a priori” do erro para o *hp*-DGFEM que são estudadas com e sem a adição de um parâmetro de estabilidade, para o caso de pura advecção, e sem parâmetro de estabilidade para pura difusão. Assim, obtém-se uma estimativa “a priori” (sem parâmetro de estabilidade) para o problema de difusão-advecção-reação. Estimativas “a posteriori” de erro do *hp*-DGFEM também são consideradas para operadores diferenciais lineares. Resultados numéricos são obtidos para alguns problemas de teste, os quais, confirmam as estimativas acima.

Abstract

In this work an analysis of the hp -version of the discontinuous Galerkin finite element method (hp -DGFEM) is considered for a boundary value problem for second-order partial differential equations with nonnegative characteristic form. One gives special attention to “a priori” error estimates for the hp -DGFEM. The method have been studied with and without the addition of stabilization parameter for the case of pure advection, and without stabilization parameter in the pure diffusion equation. Then “a priori” estimates (without stabilization parameter) to the diffusion-advection-reaction problem are obtained. “A posteriori” error estimates for the hp -DGFEM to linear differential operator also have been considerate. Numerical experiments, that confirm the above mentioned estimates, have been realized to some test’s problems.

Introdução

O estudo de métodos para resolução numérica de equações diferenciais parciais - por suas inúmeras aplicações em diversas áreas da ciência e pelos avanços tecnológicos - recebeu um tratamento especial nos últimos anos. Em particular, o método de Galerkin descontínuo teve grande destaque.

O método de Galerkin descontínuo foi introduzido em 1973 por W. H. Reed e T. R. Hill [19] para solução da equação de transporte de neutrons. No ano seguinte foi publicado a primeira análise do método, no clássico artigo de P. Lesaint e P. A. Raviart [15], o qual apresenta a primeira estimativa de convergência do método. Nesta mesma década foi introduzido o método de Galerkin para equações elípticas e parabólicas, usando elementos finitos descontínuos. Estes métodos são geralmente chamados de métodos de penalização interior, e tiveram desenvolvimento independente do método de Galerkin descontínuo para equações hiperbólicas.

O clássico método de elementos finitos é baseado na construção de soluções aproximadas por meio de refinamentos na malha, de maneira que o diâmetro da partição h converge para zero, para uma ordem espectral de aproximação fixa (baixa). Esta estratégia é chamada de h -versão de convergência. Nos últimos anos emergiram os métodos espectrais em que a ordem de aproximação polinomial p é variada de modo a conseguir uma melhor aproximação, processo este, chamado de p -versão de convergência. Naturalmente, quando a solução do problema considerado é regular, os métodos espectrais tem grande eficiência.

Afim de obter uma maior eficiência, se combina as idéias apresentadas acima, isto é, aumenta-se a ordem espectral em regiões que a solução é regular, e faz-se um refinamento mais detalhado em regiões que a solução é irregular, resultando na hp -versão do método de elementos finitos.

Em [15], P. Lesaint e P. A. Raviart apresentaram a primeira h -versão de convergência do método de Galerkin descontínuo em L_2 , para a solução de um problema escalar hiperbólico. Eles obtiveram para um p fixo a sub-ótima estimativa “a priori” de erro, $\|u - u_h\|_{L_2(\Omega)} \leq Ch^{s-1} \|u\|_{H^s(\Omega)}$, em que u_h é a aproximação

para uma solução exata do problema $u \in H^s(\Omega)$. Mais tarde, C. Johnson e J. Pitkäranta [13] apresentaram uma análise mais detalhada da h -versão do método de Galerkin descontínuo, para leis de conservação hiperbólicas lineares. Neste trabalho foi demonstrado, com o uso de uma norma dependente da malha, a quase-ótima estimativa “a priori” de erro, $\|u - u_h\|_{h,\beta} \leq Ch^{s-1/2}\|u\|_{H^s(\Omega)}$.

A hp -versão do método de elementos finitos de Galerkin descontínuo (hp -DGFEM) foi introduzida por K. S. Bey e J. T. Odén [4], em que obtiveram estimativas “a priori” e “a posteriori” de erro para malhas compostas de quadriláteros, para uma versão estabilizada do método. Usando o parâmetro de estabilização h_K/p_K^2 , foi demonstrado uma estimativa “a priori” de erro, que para um p fixo e $h \rightarrow 0$, se reduz a estimativa apresentada por C. Johnson e J. Pitkäranta [13], e também indicaram convergência quando h é fixo e $p \rightarrow \infty$.

Estes resultados foram generalizados por P. Houston, C. Schwab e E. Süli em [11], que usando parâmetro de estabilidade da ordem $o(h/p)$, provaram taxas de convergência sobre malhas retangulares mais gerais, para o hp -DGFEM (discontinuous Galerkin finite element method) e para o hp -SDMEF (streamline-diffusion finite element method), independente da regularidade da solução. Para soluções analíticas foi deduzida convergência exponencial sobre malhas composta de quadriláteros.

Uma extensão destes resultados para a equação difusão-advecção-reação foi apresentada por P. Houston, C. Schwab e E. Süli [8], em que são apresentadas estimativas hp -ótimas para a equação puramente hiperbólica, ótimas em h mas sub-ótimas em p (pela potência $1/2$ em p) para a equação puramente difusiva, e por último, estimativas ótimas em h mas sub-ótimas em p (pela potência 1 em p) para a equação de difusão-advecção-reação.

O objetivo deste trabalho é apresentar a hp -versão do DGFEM para a equação de difusão-advecção-reação, as principais estimativas “a priori” e “a posteriori” de erro, tanto para a versão estabilizada como para a versão padrão (sem parâmetro de estabilidade) do método e implementar os algoritmos de DGFEM afim de comprovar numericamente as taxas de convergência “a priori” acima mencionadas.

O presente trabalho está organizado do seguinte modo:

No capítulo 1, apresentamos na seção 1.1 os espaços de funções que serão usados no decorrer do trabalho. Na seção 1.2 mostramos a existência e unicidade de solução fraca para a equação hiperbólica. E por último, na seção 1.3, apresentamos o método de Galerkin descontínuo para a equação hiperbólica, sua

[15] sobre a existência de uma enumeração dos elementos da malha, que permite a resolução numérica do método.

No capítulo 2, apresentamos na primeira seção a equação difusão-advecção-reação, resultados sobre a existência e unicidade da solução fraca para a mesma, e introduzimos os espaços de elementos finitos. Na seção 2.2 consideramos a equação puramente advectiva e formulamos a versão estabilizada do *hp*-DGFEM. Em seguida, obtemos a estimativa “a priori” de erro para essa formulação, a qual, é confirmada com alguns resultados numéricos. Por último, introduzimos brevemente o *hp*-SDFEM para a equação advectiva. Na seção 2.3, consideremos novamente a equação puramente advectiva, porém, com a formulação padrão do método. Então, obtemos a estimativa “a priori” de erro, a qual é confirmada com resultados numéricos. Na seção 2.4, tratamos o problema puramente difusivo com a formulação padrão, e obtemos a estimativa “a priori” de erro para esse caso. Na última seção consideremos a equação de difusão-advecção-reação com a formulação padrão do *hp*-DGFEM. Então, unificando os resultados das seções 2.3 e 2.4, temos a estimativa “a priori” de erro para este caso. Todos os resultados numéricos apresentados neste capítulo foram realizados usando a linguagem de programação C++.

Para finalizar, no capítulo 3 apresentamos na seção 3.1 uma estimativa “a posteriori” de erro para um operador diferencial linear genérico e discutimos estratégias adaptativas baseadas nestas estimativas. E na seção 3.2, mostramos explicitamente essa estimativa para a equação de difusão-advecção-reação em uma dimensão.

Capítulo 1

Conceitos básicos

Neste capítulo apresentaremos inicialmente uma breve introdução dos espaços de funções que serão usados no decorrer desta dissertação. Em seguida, conforme [22], provaremos a existência e unicidade da solução fraca para a equação hiperbólica de primeira ordem, e então, apresentaremos a *hp*-versão do Discontinuous Galerkin Finite Element Method¹ (*hp*-DGFEM) para um problema de valor de contorno para esta equação e a existência de solução para tal formulação. Por último, demonstraremos o clássico teorema apresentado por P. Lasaint e P. A. Raviart em [15] que garante a existência de uma enumeração dos elementos da malha que permite obter a solução numérica do *hp*-DGFEM de maneira explícita, pois a matriz de rigidez que corresponde a esta enumeração fica bloco-triangular.

1.1 Espaços de funções

1.1.1 Espaços de funções contínuas

Seja \mathbb{N} o conjunto dos números inteiros positivos. Uma n -úpla $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ em \mathbb{N}^n é chamado um multi-índice, e $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ é o comprimento de α . Assim, definimos $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n}$ em que $\partial_j = \partial/\partial x_j$ para $j = 1, \dots, n$.

Seja Ω um conjunto aberto em \mathbb{R}^n e $k \in \mathbb{N}$, então denotamos que:

1. $C^k(\Omega)$ é o conjunto de todas as funções u definidas em Ω com valores reais, tal que, $\partial^\alpha u$ é contínua para todo α com $|\alpha| \leq k$.
2. $C^\infty(\Omega)$ como $\bigcap_{k \geq 0} C^k(\Omega)$.

¹Método de Elementos Finitos de Galerkin Descontínuo

3. $C^k(\overline{\Omega})$ é o conjunto de todas as $u \in C^k(\Omega)$, tal que, $\partial^\alpha u$ pode ser estendida continuamente de Ω para $\overline{\Omega}$, para todo α com $|\alpha| \leq k$.
4. $C^\infty(\overline{\Omega})$ como $\bigcap_{k \geq 0} C^k(\overline{\Omega})$.

Assumindo que Ω é um conjunto aberto limitado em \mathbb{R}^n , então $C^k(\overline{\Omega})$ equipado com a norma

$$\|u\|_{C^k(\overline{\Omega})} = \max_{|\alpha| \leq k} \left\{ \sup_{x \in \Omega} |\partial^\alpha u(x)| \right\},$$

é um espaço de Banach.

Para uma função contínua u definida sobre algum conjunto Ω em \mathbb{R}^n , definimos o suporte de u como sendo o fecho em Ω do conjunto $\{x \in \Omega / u(x) \neq 0\}$. Se este conjunto é compacto e é um subconjunto do interior de Ω , então u é dita ter *suporte compacto* com respeito a Ω .

Usa-se a notação $\text{supp } u$ para designar o suporte de u .

Definição 1.1. *Seja Ω um domínio em \mathbb{R}^n para $k = 1, \dots, C_0^k(\Omega)$ denota o conjunto das funções $u \in C^k(\Omega)$ com suporte compacto em Ω .*

No caso de $k = \infty$, $C_0^\infty(\Omega) = \mathcal{D}(\Omega)$.

1.1.2 Espaços de funções integráveis

Vamos considerar aqui funções de valores reais definidas sobre um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ que são mensuráveis a Lebesgue, e denotamos que:

$$\int_{\Omega} f(x) dx$$

a integral de Lebesgue de f sobre Ω .

Para $1 \leq p < \infty$ definimos o espaço de Lebesgue $L_p(\Omega)$ como o conjunto de todas as u definidas em Ω , tal que, $|u|^p$ é integrável a Lebesgue sobre Ω .

O espaço $L_p(\Omega)$ com a norma

$$\|u\|_{L_p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{1/p},$$

é um espaço de Banach. Em particular quando $p = 2$, $L_p(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com produto interno dado por,

$$(u, v) = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx.$$

Definição 1.2. O supremo essencial de u é o ínfimo do conjunto de todos os números reais M , tal que, $|u| \leq M$ quase sempre em Ω , e denota-se por $\text{ess.sup } u(x)$.

Assim, quando $p = \infty$ o espaço $L_{\infty}(\Omega)$ denota o conjunto das funções de valores reais u definidas sobre Ω que são mensuráveis a Lebesgue, tal que, $|u|$ tem supremo essencial finito.

O espaço $L_{\infty}(\Omega)$ equipado com a norma

$$\|u\|_{L_{\infty}(\Omega)} = \text{ess.sup}_{x \in \Omega} |u(x)|,$$

é um espaço de Banach.

1.1.3 Espaços de Sobolev

Definição 1.3. Seja $u, v \in L_1(\Omega)$ e α um multi-índice, então, v é a α -ésima derivada fraca de u se, e somente se,

$$\int_{\Omega} u D^{\alpha} \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v \varphi dx \quad \text{para toda } \varphi \in C_0^{\infty}(\Omega).$$

Como no caso de derivadas clássicas escrevemos $v = D^{\alpha}u$.

Nota: A definição de derivada fraca estende a de derivada clássica.

Seja Ω um conjunto aberto do \mathbb{R}^n , então, para $1 \leq p \leq \infty$, o espaço de Sobolev $W_p^k(\Omega)$ é definido como sendo

$$W_p^k(\Omega) = \{u \in L_p(\Omega); \partial^{\alpha}u \in L_p(\Omega), |\alpha| \leq k\}$$

e, equipamos esse espaço com a norma de Sobolev dada por,

$$\|u\|_{W_p^k(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^{\alpha}u\|_{L_p(\Omega)}^p \right)^{1/p},$$

quando $1 \leq p < \infty$, e por,

$$\|u\|_{W_{\infty}^k(\Omega)} = \max_{|\alpha| \leq k} \|\partial^{\alpha} u\|_{L_{\infty}(\Omega)},$$

quando $p = \infty$.

Para cada espaço acima, define-se a semi-norma de Sobolev,

$$|u|_{W_p^k(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|=k} \|\partial^{\alpha} u\|_{L_p(\Omega)}^p \right)^{1/p},$$

quando $1 \leq p < \infty$, e

$$|u|_{W_{\infty}^k(\Omega)} = \max_{|\alpha|=k} \|\partial^{\alpha} u\|_{L_{\infty}(\Omega)},$$

quando $p = \infty$.

Todos os espaços de Sobolev com suas respectivas normas são espaços de Banach. Quando $p = 2$ também é um espaço de Hilbert com o produto interno dado por,

$$(u, v)_{W_2^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} (\partial^{\alpha} u, \partial^{\alpha} v),$$

em que $(., .)$ é o produto interno de $L_2(\Omega)$. Nesse caso designamos $W_2^k(\Omega)$ por $H^k(\Omega)$.

Espaços de Sobolev fracionários

Dado $s > 0$ e $s \notin \mathbb{N}$ escrevemos $s = m + \sigma$ sendo $0 < \sigma < 1$ e $m = [s]$ é a parte inteira de s . Então, $W_p^s(\Omega)$ é o conjunto de todas as $u \in W_p^m(\Omega)$, tal que,

$$|u|_{W_p^s(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|=m} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|\partial^{\alpha} u(x) - \partial^{\alpha} u(y)|^p}{|x - y|^{n+\sigma p}} dx dy \right)^{1/p} < \infty,$$

para $1 \leq p < \infty$ e,

$$|u|_{W_\infty^s(\Omega)} = \max_{|\alpha|=m} \left\{ \text{ess. sup}_{\substack{x, y \in \Omega \\ x \neq y}} \frac{|\partial^\alpha u(x) - \partial^\alpha u(y)|}{|x - y|^\sigma} \right\} < \infty, \quad (y) I$$

para $p = \infty$.

Equipamos $W_p^s(\Omega)$ com a norma

$$\|u\|_{W_p^s(\Omega)} = (\|u\|_{W_p^m(\Omega)}^p + |u|_{W_p^s(\Omega)}^p)^{1/p},$$

quando $1 \leq p < \infty$, e

$$\|u\|_{W_\infty^s(\Omega)} = \|u\|_{W_\infty^m(\Omega)} + |u|_{W_\infty^s(\Omega)},$$

para $p = \infty$.

Nota: Maiores informações sobre esses espaços ver [1].

A seguinte definição garante a regularidade da fronteira de um domínio Ω . Se a $\partial\Omega$ satisfaz essa definição, ela é dita ser uma *Fronteira Contínua Lipschitz*.

Definição 1.4. *Supomos que Ω é um conjunto aberto em \mathbb{R}^n , então, a $\partial\Omega$ é Contínua Lipschitz, se para todo $x \in \partial\Omega$, existe:*

1. *um conjunto aberto $O \subset \mathbb{R}^n$ com $x \in O$;*
2. *um sistema ortogonal de coordenadas locais $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n) = (\check{\zeta}, \zeta_n)$ e um $a \in \mathbb{R}^n$, tal que, $O = \{\zeta; -a_j < \zeta_j < a_j, 1 \leq j \leq n\}$;*
3. *existe uma função contínua Lipschitz φ definida sobre*

$$\check{O} = \{\check{\zeta} \in \mathbb{R}^{n-1}; -a_j < \zeta_j < a_j, 1 \leq j \leq n-1\}$$

com

$$|\varphi(\check{\zeta})| \leq \frac{a_n}{2}, \quad \check{\zeta} \in \check{O},$$

$$\Omega \cap O = \{\zeta; \zeta_n < \varphi(\check{\zeta}), \check{\zeta} \in \check{O}\}$$

e

$$\partial\Omega \cap O = \{\zeta; \zeta_n = \varphi(\check{\zeta}), \check{\zeta} \in \check{O}\}.$$

Um conjunto aberto limitado com fronteira contínua Lipschitz é chamado *Domínio Lipschitz (D.L.)*.

Proposição 1.5. *Seja Ω um D.L. e seja $1 \leq p < \infty$, então, $C^\infty(\overline{\Omega})$ é denso em $W_p^s(\Omega)$ para $s \geq 0$.*

A demonstração desta proposição pode ser encontrada em [16] pg. 14.

Nota: $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $W_p^s(\Omega)$ para $0 \leq s < 1/p$.

Referente a definição de Fronteira Contínua Lipschitz, temos que, $\forall x \in \partial\Omega$, existe uma função contínua Lipschitz,

$$\varphi : \check{O} \subset \mathbb{R}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}$$

tal que,

$$\partial\Omega \cap O = \{\zeta; \zeta = (\check{\zeta}, \varphi(\check{\zeta})); \check{\zeta} \in \check{O}\}.$$

Podemos então definir a aplicação ϕ por,

$$\phi(\check{\zeta}) = (\zeta, \varphi(\check{\zeta})).$$

Percebemos que ϕ^{-1} existe e é contínua Lipschitz sobre $\phi(\check{O})$ permitindo a seguinte definição:

Definição 1.6. *Seja Ω um D.L. em \mathbb{R}^n , para $0 \leq s \leq 1$ e $1 \leq p < \infty$ denotamos que $W_p^s(\partial\Omega)$ é o conjunto de todas as $u \in L_p(\partial\Omega)$, tal que, a composição $u \circ \phi$ pertence à $W_p^s(\check{O} \cap \phi^{-1}(\partial\Omega \cap O))$ para todos os possíveis \check{O} e φ que satisfazem a condição da definição anterior.*

Para equipar $W_p^s(\partial\Omega)$ com uma norma, consideramos o atlas $(O_j, \varphi_j)_{j=1}^J$ da $\partial\Omega$, tal que, O_j e φ_j , $j = 1, \dots, J$ satisfazem a definição 1.4. Assim,

$$\|u\|_{W_p^s(\partial\Omega)} = \left(\sum_{j=1}^J \|u \circ \phi_j\|_{W_p^s(\check{O}_j \cap \phi_j^{-1}(\partial\Omega \cap O_j))}^p \right)^{1/p},$$

em que $\phi_j(\check{\zeta}) = (\zeta, \varphi_j(\check{\zeta}))$ para $\check{\zeta} \in \check{O}_j$, $j = 1, \dots, J$.

Noção de Traço

Seja $\psi \in C^\infty(\overline{\Omega})$, então, o seu traço é definido como,

$$\gamma_o(\psi) = \psi|_{\partial\Omega}, \tag{1.1.1}$$

e pode-se demonstrar que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|\psi|_{\partial\Omega}\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \leq C\|\psi\|_{H^1(\Omega)}.$$

Sendo $C^\infty(\bar{\Omega})$ denso em $H^1(\Omega)$, a aplicação γ_o prolonga-se por continuidade à uma aplicação linear e contínua que também denominamos γ_o de $H^1(\Omega)$ em $H^{1/2}(\partial\Omega)$, a qual chamamos de traço.

Para $u \in H^1(\Omega)$, $\gamma_o u$ denomina-se o traço de u sobre $\partial\Omega$. Assim, podemos enunciar o *teorema do traço*.

Teorema 1.7. *A função traço aplica $H^1(\Omega)$ sobre $H^{1/2}(\partial\Omega)$ e o núcleo de γ_o é o espaço $H_0^1(\Omega)$.*

A demonstração pode ser encontrada por exemplo na pg. 81 de [17].

1.2 Existência e unicidade de solução fraca para a equação hiperbólica

Consideramos o seguinte problema hiperbólico de valor de fronteira.

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(bu) + cu &= f \quad \text{em } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{sobre } \partial_-\Omega \end{aligned} \tag{1.2.1}$$

sendo,

1. Ω é um domínio Lipschitz em \mathbb{R}^n ;
2. $b = (b_1, \dots, b_n)$ é uma função vetorial de valor real continuamente diferenciável definida sobre $\bar{\Omega}$ que representa o fluxo em $\bar{\Omega}$;
3. c é uma função contínua definida sobre $\bar{\Omega}$ de valor real;
4. f é uma função de valor real, tal que, $f \in L_2(\Omega)$;

Designamos por $n(x)$ o vetor normal unitário exterior a $\partial\Omega$ no ponto x . Então, divide-se a $\partial\Omega$ em $\partial_-\Omega = \{x \in \partial\Omega; n(x) \cdot b(x) < 0\}$ que representa a parte da fronteira de Ω onde o fluxo entra, e $\partial_+\Omega = \partial\Omega \setminus \partial_-\Omega$ que corresponde a parte de saída.

Associamos a (1.2.1) o espaço de funções,

$$H_-(\Omega) = \{v \in L_2(\Omega); \operatorname{div}(bv) + cv \in L_2(\Omega), \gamma_n(bv) = 0 \text{ sobre } \partial_-\Omega\}$$

onde a solução do problema é procurada. Aqui $\gamma_n(bv) = (bv) \cdot n_{|\partial_-\Omega}$ significa o traço normal do campo vetorial bv sobre $\partial_-\Omega$.

Vamos agora justificar mais formalmente a condição de fronteira e a definição de $H_-(\Omega)$. Para esse fim, lembramos que (pg. 355 em [20]) o operador traço, $\gamma_n(\cdot)$, é contínuo e sobrejetivo de

$$H(\operatorname{div}, \Omega) = \{v \in [L_2(\Omega)]^n; \operatorname{div}(v) \in L_2(\Omega)\},$$

em $H^{-1/2}(\partial\Omega) = (H^{1/2}(\partial\Omega))'$ onde $'$ representa o espaço dual.

Supomos que Γ é um subconjunto relativamente aberto e conexo de $\partial\Omega$ com medida (em $(n-1)$ -dimensão) positiva. Denotamos por $H_0^1(\Gamma)$ o fecho de $C_0^\infty(\Gamma)$ em $H^1(\Gamma)$ na norma do espaço de Sobolev $H^1(\Gamma)$. Além disso, definimos $H_{00}^{1/2}(\Gamma)$, usando interpolação de espaços de funções (para uma introdução ver pg. 356 em [20]) como sendo o espaço entre $L_2(\Gamma)$ e $H_0^1(\Gamma)$.

O operador de extensão trivial $\tilde{\varepsilon}_0$ de Γ para a $\partial\Omega$, que é dado por,

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_0 : L_2(\Gamma) &\longrightarrow L_2(\partial\Omega) \\ v(x) &\longmapsto \begin{cases} v(x) & \text{se } x \in \Gamma \\ 0 & \text{se } x \in \partial\Omega \setminus \Gamma \end{cases} \end{aligned}$$

é um operador linear e contínuo de $L_2(\Gamma)$ em $L_2(\partial\Omega)$ e de $H_0^1(\Gamma)$ em $H^1(\partial\Omega)$. Portanto, deduzimos por interpolação de espaços de funções que ele também é um operador linear e contínuo de $H_{00}^{1/2}(\Gamma)$ em $H^{1/2}(\partial\Omega)$ (ver teorema B.3, pg. 358 em [20]).

Conclui-se então, (ver teorema 02, pg. 195 em [24]) que o operador dual de $\tilde{\varepsilon}_0$,

$$\tilde{\varepsilon}'_0 : H^{-1/2}(\partial\Omega) \longrightarrow (H_{00}^{1/2}(\Gamma))'$$

é um operador linear e contínuo. Este operador é chamado a restrição de $\partial\Omega$ para Γ (para nosso propósito $\Gamma = \partial_-\Omega$).

Supondo que $v \in L_2(\Omega)$ e $\operatorname{div}(bv) + cv \in L_2(\Omega)$, temos que, $bv \in H(\operatorname{div}, \Omega)$, e segue que $\gamma_n(bv) \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$. Então a restrição de $\gamma_n(bv)$ para $\partial_-\Omega$ pertence para $(H_{00}^{1/2}(\partial_-\Omega))'$. Assim a definição de $H_-(\Omega)$ é essencial.

Nota-se que $H_-(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com a norma

$$\|u\|_{H_-(\Omega)} = (\|u\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|\mathcal{L}u\|_{L_2(\Omega)}^2)^{1/2},$$

sendo que, $\mathcal{L} : H_-(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)$ denota o operador linear definido por $\mathcal{L}v = \operatorname{div}(bv) + cv$.

Com essa notação o problema (1.2.1) pode ser formulado da seguinte forma:

Encontre $u \in H_-(\Omega)$, tal que, $\mathcal{L}u = f$.

E a formulação variacional para (1.2.1) fica:

Encontre $u \in H_-(\Omega)$ satisfazendo

$$(\operatorname{div}(bu) + cu, q) = (f, q), \quad \forall q \in L_2(\Omega). \quad (1.2.2)$$

A solução de (1.2.2) pode ser vista como uma solução fraca ou generalizada de (1.2.1), em que a equação diferencial satisfaz uma igualdade em $L_2(\Omega)$ e a condição de fronteira obedece uma igualdade em $(H_{00}^{1/2}(\Gamma))'$.

Hipótese 1.8. *Vamos supor que as componentes do vetor b pertencem a $C^1(\overline{\Omega})$ e são funções estritamente positivas sobre $\overline{\Omega}$.*

Para demonstrar a existência e unicidade da solução fraca para (1.2.2), vamos precisar do Teorema da Imagem Fechada de Banach, cuja demonstração pode ser encontrada, por exemplo, em [24], pg. 205.

Teorema 1.9. *Seja X e Y espaços de Banach, e \mathcal{A} um operador linear fechado, tal que, $\mathcal{A} : X \rightarrow Y$ com $D(\mathcal{A}) = X$, então, as seguintes proposições são equivalentes:*

- $\mathcal{R}(\mathcal{A})$ é fechada em Y ,
- $\mathcal{R}(\mathcal{A}')$ é fechada em X' ,
- $\mathcal{R}(\mathcal{A}) = \mathcal{N}(\mathcal{A}')^\perp$,
- $\mathcal{R}(\mathcal{A}') = \mathcal{N}(\mathcal{A})^\perp$.

Teorema 1.10. *Vamos supor que $f \in L_2(\Omega)$, $c \in C(\overline{\Omega})$ e é válida a Hipótese 1.8. Então, o problema (1.2.2) tem única solução fraca $u \in H_-(\Omega)$. Além disso, o operador linear \mathcal{L} definido acima é uma bijeção contínua de $H_-(\Omega)$ em $L_2(\Omega)$ com uma inversa contínua $\mathcal{L}^{-1} : L_2(\Omega) \rightarrow H_-(\Omega)$.*

Demonstração:

Designamos por $C_-^1(\bar{\Omega})$ o conjunto de todas as funções de $C^1(\bar{\Omega})$ que se anulam em $\partial_-\Omega$, e seja, ξ um vetor de n -componentes, demonstraremos inicialmente que:

$$\begin{aligned} (\operatorname{div}(bv) + cv, e^{-2\xi \cdot x} v) &= (c + \frac{1}{2} \operatorname{div}(b) + b \cdot \xi, |e^{-\xi \cdot x} v|^2) \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\partial_+\Omega} (b \cdot n) |e^{-\xi \cdot x} v|^2 ds, \quad \forall v \in C_-^1(\bar{\Omega}). \end{aligned} \quad (1.2.3)$$

Como é fácil verificar, esta igualdade é equivalente a seguinte igualdade:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \operatorname{div}(bv) v e^{-2\xi \cdot x} dx &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \operatorname{div}(b) |v e^{-\xi \cdot x}|^2 dx + \int_{\Omega} (b \cdot \xi) |v e^{-\xi \cdot x}|^2 dx \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\partial_+\Omega} (b \cdot n) |v e^{-\xi \cdot x}|^2 ds, \quad \forall v \in C_-^1(\bar{\Omega}). \end{aligned}$$

Para provar esta última, consideremos a i -ésima componente, $i = 1, \dots, n$,

$$\int_{\Omega} \frac{\partial(b_i v)}{\partial x_i} v e^{-2\xi \cdot x} dx = \int_{\Omega} \frac{\partial b_i}{\partial x_i} |v e^{-\xi \cdot x}|^2 dx + \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x_i} b_i v e^{-2\xi \cdot x} dx. \quad (1.2.4)$$

Aplicando a fórmula de Green no último termo a direita,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x_i} b_i v e^{-2\xi \cdot x} dx &= - \int_{\Omega} \frac{\partial b_i}{\partial x_i} |v e^{-\xi \cdot x}|^2 dx - \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x_i} b_i v e^{-2\xi \cdot x} dx \\ &+ 2 \int_{\Omega} b_i \xi_i |v e^{-\xi \cdot x}|^2 dx + \int_{\partial\Omega} b_i n_i |v e^{-\xi \cdot x}|^2 ds. \end{aligned}$$

Concluimos disso que,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x_i} b_i v e^{-2\xi \cdot x} dx &= \frac{-1}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial b_i}{\partial x_i} |v e^{-\xi \cdot x}|^2 dx + \int_{\Omega} b_i \xi_i |v e^{-\xi \cdot x}|^2 dx \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\partial_+\Omega} b_i n_i |v e^{-\xi \cdot x}|^2 ds. \end{aligned}$$

Substituindo esta expressão em (1.2.4) temos que,

$$\int_{\Omega} \frac{\partial(b_i v)}{\partial x_i} v e^{-2\xi \cdot x} dx = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial b_i}{\partial x_i} |v e^{-\xi \cdot x}|^2 dx + \int_{\Omega} b_i \xi_i |v e^{-\xi \cdot x}|^2 dx + \\ + \frac{1}{2} \int_{\partial_+ \Omega} b_i n_i |v e^{-\xi \cdot x}|^2 ds.$$

Assim, (1.2.3) segue por soma de todas as componentes.

Agora, notemos que sempre se pode tomar ξ , tal que, a constante

$$M_0 = \inf_{\Omega} \left(c + \frac{1}{2} (\operatorname{div} b) + b \cdot \xi \right),$$

seja positiva (isso é possível pois Ω é limitado e todas as componentes de b são por hipótese estritamente positivas). E sejam M_1 e M_2 dois números reais, tais que,

$$M_1 \leq e^{-2\xi \cdot x} \leq M_2, \quad \forall x \in \bar{\Omega}. \quad (1.2.5)$$

Omitindo o segundo termo do lado direito de (1.2.3) sendo ele positivo, e notando que $C_-^1(\bar{\Omega})$ é denso em $H_-(\Omega)$, segue que,

$$(\mathcal{L}v, e^{-2\xi \cdot x} v) \geq M_0 \|e^{-\xi \cdot x} v\|_{L_2(\Omega)}^2, \quad \forall v \in H_-(\Omega).$$

Então, usando (1.2.5) temos que,

$$M_2 \|v\|_{L_2(\Omega)} \|\mathcal{L}v\|_{L_2(\Omega)} \geq M_0 \|e^{-\xi \cdot x} v\|_{L_2(\Omega)}^2 \geq M_0 M_1 \|v\|_{L_2(\Omega)}^2 \quad \forall v \in H_-(\Omega).$$

Assim,

$$\frac{M_2}{M_0 M_1} \|\mathcal{L}v\|_{L_2(\Omega)} \geq \|v\|_{L_2(\Omega)} \quad \forall v \in H_-(\Omega),$$

logo, elevando ao quadrado e adicionando $\|\mathcal{L}v\|_{L_2(\Omega)}^2$ resulta que,

$$\left(1 + \left(\frac{M_2}{M_0 M_1} \right)^2 \right) \|\mathcal{L}v\|_{L_2(\Omega)}^2 \geq \|v\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|\mathcal{L}v\|_{L_2(\Omega)}^2 \quad \forall v \in H_-(\Omega),$$

e elevando a potência 1/2,

$$\left(1 + \left(\frac{M_2}{M_0 M_1}\right)^2\right)^{1/2} \|\mathcal{L}v\|_{L_2(\Omega)} \geq \|v\|_{H_-(\Omega)} \quad \forall v \in H_-(\Omega),$$

ou

$$\|\mathcal{L}v\|_{L_2(\Omega)} \geq C\|v\|_{H_-(\Omega)} \quad \forall v \in H_-(\Omega), \quad (1.2.6)$$

em que C é uma constante positiva.

A desigualdade (1.2.6) permite-nos provar os seguintes resultados:

1. \mathcal{L} é um operador injetivo.

De fato, para $v \in \mathcal{N}(\mathcal{L})$ temos $\mathcal{L}v = 0 \Rightarrow$

$$0 = \|\mathcal{L}v\|_{L_2(\Omega)} \geq C\|v\|_{H_-(\Omega)} \Rightarrow v = 0$$

$\therefore \mathcal{L}$ é injetivo de $H_-(\Omega)$ na sua imagem $\mathcal{R}(\mathcal{L})$.

2. \mathcal{L} tem inversa contínua.

Sendo \mathcal{L} injetiva $\Rightarrow \mathcal{L}$ é bijetiva (com base em $\mathcal{R}(\mathcal{L})$)

$$\Rightarrow \exists \mathcal{L}^{-1} : \mathcal{R}(\mathcal{L}) \rightarrow H_-(\Omega)$$

Então, $\forall w \in \mathcal{R}(\mathcal{L}) \Rightarrow \exists! v \in H_-(\Omega)$, tal que, $\mathcal{L}v = w \Rightarrow v = \mathcal{L}^{-1}w$

$$\text{logo, } \|w\|_{L_2(\Omega)} = \|\mathcal{L}v\|_{L_2(\Omega)} \geq C\|v\|_{H_-(\Omega)} = C\|\mathcal{L}^{-1}w\|_{H_-(\Omega)}$$

$$\text{Assim, } \|\mathcal{L}^{-1}w\|_{H_-(\Omega)} \leq \frac{1}{C}\|w\|_{L_2(\Omega)}$$

$\therefore \mathcal{L}^{-1}$ é contínua.

3. \mathcal{L} é um isomorfismo de $H_-(\Omega)$ na sua imagem $\mathcal{R}(\mathcal{L})$.

4. $\mathcal{R}(\mathcal{L})$ é um subespaço fechado de $L_2(\Omega)$.

Seja $w \in \overline{\mathcal{R}(\mathcal{L})} \Rightarrow \exists w_n \in \mathcal{R}(\mathcal{L})$, tal que, $w_n \rightarrow w$

Sendo \mathcal{L} injetivo, $\Rightarrow \exists v_n \in H_-(\Omega)$, tal que, $\mathcal{L}v_n = w_n \quad \forall w_n \in \mathcal{R}(\mathcal{L})$

Como w_n converge $\Rightarrow w_n$ é de Cauchy.

Demonstraremos que v_n também é de Cauchy.

$$\begin{aligned} \|v_n - v_m\|_{H_-(\Omega)} &\leq \frac{1}{C}\|\mathcal{L}(v_n - v_m)\|_{L_2(\Omega)} = \frac{1}{C}\|\mathcal{L}v_n - \mathcal{L}v_m\|_{L_2(\Omega)} \\ &= \frac{1}{C}\|w_n - w_m\|_{L_2(\Omega)} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Assim, $\{v_n\}$ é de Cauchy em $H_-(\Omega)$ que é um espaço de Banach.

Logo, $\exists v \in H_-(\Omega)$, tal que, $v_n \rightarrow v$.

Sendo \mathcal{L} contínuo temos que, $\begin{matrix} \mathcal{L}v_n \rightarrow \mathcal{L}v \\ \| \\ w_n \rightarrow w \end{matrix} \Rightarrow \mathcal{L}v = w \Rightarrow w \in \mathcal{R}(\mathcal{L})$

$\therefore \mathcal{R}(\mathcal{L})$ é fechado.

Calculamos agora \mathcal{L}' . Para tanto consideramos

$$H_+(\Omega) = \{v \in L_2(\Omega); \mathcal{L}'v \in L_2(\Omega), \gamma_n(bv) = 0 \text{ sobre } \partial_+\Omega\}.$$

Sendo que,

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}u, v) &= \int_{\Omega} \mathcal{L}uv dx = \int_{\Omega} \operatorname{div}(bu)v dx + \int_{\Omega} cuv dx \\ &= - \int_{\Omega} u(b \cdot \nabla v) dx + \int_{\Omega} cuv dx + \int_{\partial_+\Omega} (b \cdot n)v u ds \end{aligned}$$

e tomando $\mathcal{L}'v = -b \cdot \nabla v + cv$, então, se $v \in H_+(\Omega)$, temos que, $(\mathcal{L}u, v) = (u, \mathcal{L}'v)$, em que $\mathcal{L}' : L_2(\Omega) \rightarrow (H_-(\Omega))'$. Assim, o problema dual para (1.2.1) é:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'z &\equiv -b \cdot \nabla z + cz = \psi \quad \text{em } \Omega \\ z &= 0 \quad \text{sobre } \partial_+\Omega \end{aligned} \tag{1.2.7}$$

Usamos o Método das Características em (1.2.7) para mostrar que $\mathcal{N}(\mathcal{L}') = \{0\}$.

Então, seja $z \in \mathcal{N}(\mathcal{L}')$ um elemento arbitrário. Assim, z é uma solução do problema de contorno seguinte:

$$\begin{aligned} -b \cdot \nabla z + cz &= 0 \quad \text{em } \Omega \\ z &= 0 \quad \text{sobre } \partial_+\Omega. \end{aligned}$$

Seja $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ uma característica da equação

$$-b \cdot \nabla z + cz = 0, \tag{1.2.8}$$

quer dizer, $x(t)$ é uma solução do sistema de EDO seguinte:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -b_1(x_1, \dots, x_n) \\ \dot{x}_2(t) = -b_2(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) = -b_n(x_1, \dots, x_n) . \end{cases}$$

Vamos procurar z na forma $z = z(x_1(t), \dots, x_n(t))$.

Sendo que,

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x_1} \dot{x}_1(t) + \dots + \frac{\partial z}{\partial x_n} \dot{x}_n(t) = -b \cdot \nabla z,$$

então, a equação (1.2.8) toma forma seguinte:

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial t} + cz = 0 & t > t_o \\ z|_{t=t_o} = 0 \end{cases},$$

sendo t_o , tal que, $z(t_o) \in \partial_+ \Omega$.

Por fator integrante, temos que,

$$\begin{aligned} \frac{\partial (ze^{\int c dt})}{\partial t} &= 0 \\ \Rightarrow z &= ce^{-\int c dt}, \end{aligned}$$

como $z(t_o) = 0 \Rightarrow c = 0$

$$\Rightarrow z = 0$$

$$\therefore \mathcal{N}(\mathcal{L}') = \{0\}.$$

Aplicando o Teorema 1.9 para \mathcal{L} , temos que, $\mathcal{R}(\mathcal{L}) = \mathcal{N}(\mathcal{L}')^\perp = \{0\}^\perp = L_2(\Omega)$. Assim, \mathcal{L} é um isomorfismo de $H_-(\Omega)$ em $L_2(\Omega)$, sendo que, $f \in L_2(\Omega)$ (por hipótese), existe única solução fraca $u \in H_-(\Omega)$ para (1.2.2).

□

1.3 Método de Galerkin descontínuo aplicado a equação hiperbólica

Definição 1.11. Uma subdivisão/partição/malha $P_h(\Omega)$ de um domínio Ω é uma coleção finita $N(P_h(\Omega))$ de conjuntos abertos $\{K_i\}$, tal que,

1. $K_i \cap K_j = \emptyset$ se $i \neq j$ e
2. $\cup \overline{K_i} = \overline{\Omega}$.

Dizemos que uma partição $P_h(\Omega)$ é regular se $\frac{h_i}{\rho_i} \leq C$ para $1 \leq i \leq N(P_h(\Omega))$, em que $\rho_i = \sup\{\text{diam}(s) / s \text{ é uma esfera } \subset K_i\}$, $h_i = \text{diam}(K_i)$ e C é uma constante positiva.

Seja $P = \{P_h(\Omega)\}_{h>0}$ uma família de partições regulares de $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ em $N = N(P_h(\Omega))$ subdomínios K . Assumimos que cada $K \in P_h(\Omega)$ possui ∂K contínua Lipschitz e designamos por n_K o vetor normal unitário exterior a ∂K . Definimos $\partial_- K$ e $\partial_+ K$ de modo análogo as definições de $\partial_- \Omega$ e $\partial_+ \Omega$, porém, substituindo Ω por K .

Objetivando introduzir a formulação de Galerkin descontínua para (1.2.1), definimos o seguinte espaço de funções:

$$V(\Omega) = \{v \in L_2(\Omega); \operatorname{div}(bv) \in L_2(\Omega)\}, \quad (1.3.1)$$

o qual estendemos sobre a partição de Ω usando espaços quebrados, i.é.,

$$V(P_h) = V(P_h(\Omega)) = \prod_{K \in P_h(\Omega)} V(K),$$

$$\text{sendo } V(K) = \widetilde{V}(K) \cap H^1(K), \quad (1.3.2)$$

$$\text{em que } \widetilde{V}(K) = \{v \in L_2(K); \operatorname{div}(bv) \in L_2(K)\}.$$

Para cada $K \in P_h(\Omega)$ e qualquer $v \in H^1(K)$ designa-se por v^+ o traço interior de v sobre ∂K (o traço tomado “de dentro de K ”). Seja um elemento K , tal que, o conjunto $\partial_- K \setminus \partial_- \Omega$ é não vazio; então para cada $x \in \partial_- K \setminus \partial_- \Omega$ existe um elemento K' dependendo de x , tal que, $x \in \partial_+ K'$ como na Figura 1.1 para o caso de $n = 2$.

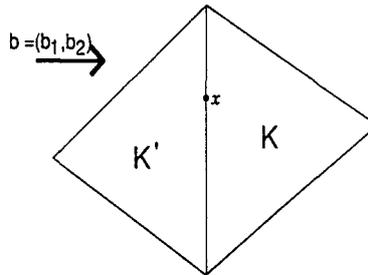


Figura 1.1: Um ponto x tal que $x \in \partial_- K$ e $x \in \partial_+ K'$

Supomos que $v \in H^1(K)$ para cada $K \in P_h(\Omega)$. Se $\partial_- K \setminus \partial_- \Omega$ é não vazia para algum $K \in P_h(\Omega)$, também podemos considerar o traço exterior v^- de v

sobre $\partial_- K \setminus \partial_- \Omega$ relativamente para K , como o traço interior v^+ relativo ao elemento K' , para o qual $\partial_+ K'$ tem intersecção com $\partial_- K \setminus \partial_- \Omega$ de $(n-1)$ -medida positiva. Também introduzimos o salto de v através de $\partial_- K \setminus \partial_- \Omega$ por,

$$[v] = v^+ - v^-.$$

Consideremos agora um problema não homogêneo, isto é, $u = g$ sobre $\partial_- \Omega$ sendo $g \in L_2(\partial_- \Omega)$. Então, a *formulação variacional* ou *formulação fraca* do método de elementos finitos de Galerkin descontínuo para (1.2.1) é:

Encontre $u \in V(P_h)$, tal que,

$$\begin{aligned} \int_K v(\nabla \cdot (bu) + cu - f)dx - \int_{\partial_- K \setminus \partial_- \Omega} (u^+ - u^-)v^+(b \cdot n_K)ds \\ - \int_{\partial_- K \cap \partial_- \Omega} (u^+ - g)v^+(b \cdot n_K)ds = 0, \end{aligned} \quad (1.3.3)$$

$$\forall v \in V(P_h), \quad \forall K \in P_h(\Omega).$$

1.3.1 Aproximação polinomial de Galerkin descontínuo

Supomos que cada $K \in P_h(\Omega)$ é imagem de um elemento mestre \hat{K} por uma aplicação afim F_K , i.e., $K = F_K(\hat{K})$, $\forall K \in P_h(\Omega)$, em que \hat{K} é um cubo canônico $\hat{K} = \hat{Q} = (-1, 1)^n$ ou, um simplex unitário

$$\hat{K} = \hat{S} = \left\{ \hat{x} \in \mathbb{R}^n; \hat{x}_i > 0, \sum_{i=1}^n \hat{x}_i < 1 \right\}.$$

Sobre o elemento mestre consideramos os *espaços de polinômios* de grau $p \geq 0$ conforme segue:

$$Q_p = span\{\hat{x}^\alpha; 0 \leq \alpha_i \leq p, 1 \leq i \leq n\}$$

e

$$P_p = span\{\hat{x}^\alpha; 0 \leq |\alpha| \leq p\}.$$

Neste caso Q_p é o conjunto de todos os produtos tensoriais de polinômios definidos sobre o elemento mestre de grau $\leq p$ em cada direção coordenada.

Definimos, então,

$$R_{p_K}(K) = \left\{ v \in L_2(\Omega); \begin{array}{l} v = v|_K \circ F_K \in Q_{p_K} \text{ se } K \in P_h(\Omega) \text{ é quadrilátero,} \\ v = v|_K \circ F_K \in P_{p_K} \text{ se } K \in P_h(\Omega) \text{ é triangular} \end{array} \right\},$$

e introduzimos o subespaço de dimensão finita de $V(P_h)$ assim,

$$V_p(P_h) = \{v \in V(P_h); v|_K \in R_{p_K}(K), \forall K \in P_h(\Omega)\}.$$

Logo, a formulação da **aproximação polinomial de Galerkin descontínuo** para o problema (1.2.1) fica:

Encontre uma função $u_h^p \in V_p(P_h)$ de acordo com a seguinte regra:

Para $K \in P_h(\Omega)$, dado u_h^{p-} sobre ∂_-K achar $u_h^p \equiv u_h^p|_K \in R_{p_K}(K)$, tal que,

$$\begin{aligned} \int_K (\nabla \cdot (bu_h^p) + cu_h^p)v dx - \int_{\partial_-K} (u_h^{p+} - u_h^{p-})v^+(n_K \cdot b) ds \\ = \int_K f v dx, \quad \forall v \in R_{p_K}(K). \end{aligned} \quad (1.3.4)$$

Tomando $(w, v)_K = \int_K w v dx$, $\langle v, w \rangle_\gamma = \int_\gamma w v |b \cdot n_\gamma| ds$ e $u_{hb}^p = \nabla \cdot (bu_h^p)$ a equação (1.3.4) fica

$$(u_{hb}^p + cu_h^p, v)_K + \langle [u_h^p], v^+ \rangle_{\partial_-K} = (f, v)_K, \quad \forall v \in R_{p_K}(K). \quad (1.3.5)$$

Podemos escrever agora a equação (1.3.5) da seguinte forma:

$$B_K(u_h^p, v) = L_K(v), \quad \forall v \in R_{p_K}(K),$$

sendo $B_K(w, v) = (w_b + cw, v)_K + \langle [w], v^+ \rangle_{\partial_-K}$ e $L_K(v) = (f, v)_K$. Logo, a aproximação polinomial de Galerkin descontínuo para (1.2.1) pode ser formulada da seguinte maneira:

Encontre $u_h^p \in V_p(P_h)$, tal que,

$$B(u_h^p, v) = L(v), \quad \forall v \in V_p(P_h), \quad (1.3.6)$$

sendo

$$B(w, v) = \sum_{K \in P_h} B_K(w, v) \quad \text{e} \quad L(v) = \sum_{K \in P_h} L_K(v)$$

e $u_h^p = g$ sobre $\partial_- \Omega$.

1.3.2 Enumeração dos elementos da malha

A formulação (1.3.4) supõe que se conheça u_h^p sobre $\partial_- K$ para então encontrar a solução aproximada u_h^p . Isso é possível desde que se enumere adequadamente os elementos de $P_h(\Omega)$. O próximo teorema mostra que existe tal enumeração K_1, K_2, \dots, K_l que permite a resolução de (1.3.4), para o caso de elementos triangulares ou quadriláteros ($n = 2$).

Definição 1.12. K é dito ser um elemento de fronteira se pelo menos um dos lados da ∂K for um subconjunto da $\partial \Omega$.

Definição 1.13. K é dito ser um elemento de semi-fronteira se um e somente um vértice de K pertence a $\partial \Omega$.

Teorema 1.14. Supomos que $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é um domínio poliedral convexo limitado, então, existe uma ordem K_1, K_2, \dots, K_l dos elementos de $P_h(\Omega)$, tal que, para $i = 1, \dots, l$, cada lado de $\partial_- K_i$ é um subconjunto de $\partial_- \Omega$ ou de $\partial_+ K_j$ para algum $j < i$.

Demonstração:

Consideremos na $\partial_- \Omega$ uma enumeração K^1, K^2, \dots, K^s dos elementos de fronteira obtida no sentido horário. Para essa enumeração, dois elementos K^i e K^{i+1} podem ter um lado em comum ou não. Para o último caso (conforme Figura 1.2), existe pelo menos um elemento de semi-fronteira entre K^i e K^{i+1} , então, dizemos que um lado de K^i (resp. K^{i+1}) é *semi-comum* com K^{i+1} (resp. K^i) se ele é um subconjunto da união dos elementos de semi-fronteiras localizados entre K^i e K^{i+1} .

Mostramos agora que existe pelo menos um elemento de fronteira K , tal que, $\partial_- K \subset \partial_- \Omega$. Para isso, vamos assumir o contrário, i.e., $\partial_- K^i \not\subset \partial_- \Omega$ para $i = 1, \dots, s$, e chegaremos a uma contradição.

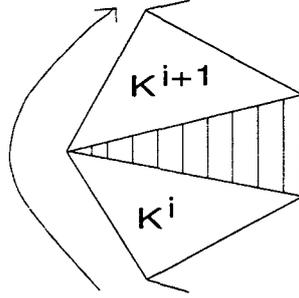


Figura 1.2: Malha no caso triangular

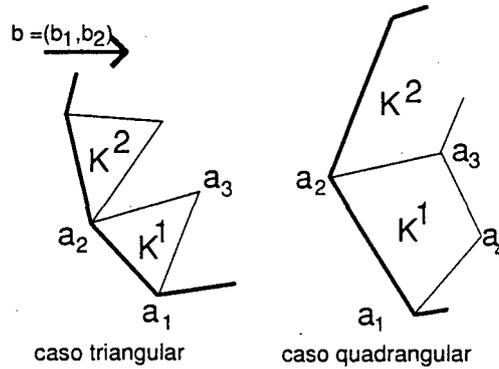


Figura 1.3: Enumeração dos elementos de fronteira

Tomando o elemento K^1 e usando a notação da Figura 1.3 para o caso triangular (resp. quadrilátero) o lado $[a_1, a_3]$ (resp. $[a_1, a_4]$) de K^1 , é um subconjunto de $\partial_+ K^1$. Do contrário, K^1 não poderia ser o primeiro elemento da $\partial_- \Omega$, então, o lado $[a_2, a_3]$ de K^1 que é comum ou semi-comum com K^2 pertence para $\partial_- K^1$. De outro modo, teríamos que $\partial_- K^1 = [a_1, a_2] \subset \partial_- \Omega$ que foi excluído. Portanto, o lado de K^2 que é comum ou semi-comum com K^1 pertence a $\partial_+ K^2$. Similarmente obtemos para todo $i = 1, \dots, s-1$ a seguinte propriedade: o lado de K^i que é comum ou semi-comum com K^{i+1} é um subconjunto de $\partial_- K^i$, e portanto, o lado de K^{i+1} que é comum ou semi-comum com K^i é um subconjunto de $\partial_+ K^{i+1}$. Agora considerando o último elemento de fronteira K^s e usando a notação da Figura 1.4 para o caso triangular (resp. quadriláteros), o lado $[a_1, a_3]$ (resp. $[a_1, a_4]$) de K^s é um subconjunto de $\partial_+ K^s$. Além disso, o lado $[a_2, a_3]$ é um subconjunto de $\partial_+ K^s$. Do contrário, K^s não poderia ser o último elemento de $\partial_- \Omega$, então, obtemos que $\partial_- K^s = [a_1, a_2] \subset \partial_- \Omega$ que foi excluído. Assim, existe um elemento K , tal que, $\partial_- K \subset \partial_- \Omega$.

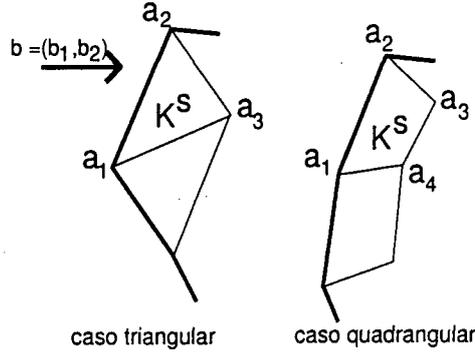


Figura 1.4: O último elemento de fronteira

Agora, escolhamos para K_1 o elemento de fronteira de $\partial_-\Omega$, tal que, $\partial_-K_1 \subset \partial_-\Omega$ e definimos $\Omega_1 = \Omega \setminus K_1$. Notamos que cada lado de $\partial_1-\Omega$ é, ou um subconjunto de $\partial_-\Omega$, ou um subconjunto de ∂_+K_1 . Aplicando o mesmo argumento acima para Ω_1 , existe um elemento de fronteira K_2 de Ω_1 , tal que, $\partial_-K_2 \subset \partial_1-\Omega$, e repetindo esse processo, levamos em conta todos os elementos de $P_h(\Omega)$, obtendo uma ordem K_1, K_2, \dots, K_l dos elementos de $P_h(\Omega)$, tal que, a propriedade desejada vale.

□

O próximo lema é uma condição necessária para obter a unicidade de solução da aproximação polinomial de Galerkin descontínuo descrita em (1.3.6).

Lema 1.15. *Com a substituição $u = e^{\lambda(\sum_{i=1}^{i=n} \frac{x_i}{b_i})} w$ a equação (1.2.1) torna-se*

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(bw) + (c + n\lambda)w &= e^{-\lambda(\sum_{i=1}^{i=n} \frac{x_i}{b_i})} f \quad \text{em } \Omega, \\ w &= 0 \quad \text{sobre } \partial_-\Omega. \end{aligned} \tag{1.3.7}$$

Demonstração:

Note que:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(bwe^{\lambda(\sum_{i=1}^{i=n} \frac{x_i}{b_i})}) &= \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial(b_i we^{\lambda(\sum_{i=1}^{i=n} \frac{x_i}{b_i})})}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial(b_i w)}{\partial x_i} e^{\lambda(\sum_{i=1}^{i=n} \frac{x_i}{b_i})} \\ &+ \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial e^{\lambda(\sum_{i=1}^{i=n} \frac{x_i}{b_i})}}{\partial x_i} b_i w = \operatorname{div}(bw) e^{\lambda(\sum_{i=1}^{i=n} \frac{x_i}{b_i})} + \sum_{i=1}^{i=n} \lambda \frac{1}{b_i} e^{\lambda(\sum_{i=1}^{i=n} \frac{x_i}{b_i})} b_i w \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \operatorname{div}(bw)e^{\lambda(\sum_{i=1}^{i=n} \frac{x_i}{b_i})} + \sum_{i=1}^{i=n} \lambda e^{\lambda(\sum_{i=1}^{i=n} \frac{x_i}{b_i})} w \\
&= \operatorname{div}(bw)e^{\lambda(\sum_{i=1}^{i=n} \frac{x_i}{b_i})} + n\lambda e^{\lambda(\sum_{i=1}^{i=n} \frac{x_i}{b_i})} w
\end{aligned}$$

Substituindo isso em (1.2.1) obtemos o resultado.

□

Desta forma, substituindo c por $c + n\lambda$ é coerente fazer a seguinte hipótese:

Hipótese 1.16. *Assumimos que existe $\alpha > 0$, tal que,*

$$0 < \alpha \leq c(x) \leq M \quad \text{q.s. em } \Omega. \quad (1.3.8)$$

Hipótese 1.17. *Vamos supor que as componentes do vetor b são constantes positivas sobre $\bar{\Omega}$.*

Teorema 1.18. *Assumindo que $f \in L_2(\Omega)$, $g = 0$, e que são válidas as Hipótese 1.16 e 1.17, então, existe única função $u_h^p \in V_p(P_h)$ que satisfaz (1.3.6) $\forall K \in P_h(\Omega)$.*

Demonstração:

Sendo que $V_p(P_h)$ tem dimensão finita, (1.3.6) é equivalente a um sistema linear $N \times N$ de equações com $N = \dim(V_h(P_h))$. Assim, é suficiente provar a unicidade da solução u_h^p (cf. pg. 97 em [21]). Assumindo que $f = 0$ mostraremos por indução que necessariamente $u_h^p = 0$. Para tanto, seja K_1, K_2, \dots, K_l a ordem dos elementos de $P_h(\Omega)$, oferecida pelo Teorema 1.14.

PH Pela Hipótese 1.17 temos que para o elemento K_1 (1.3.4) fica:

$$\int_{K_1} (b \cdot \nabla u_h^p) + cu_h^p v dx - \int_{\partial_- K_1} (u_h^{p+}) v^+ (n_K \cdot b) ds = 0, \quad \forall v \in R_{p_{K_1}}(K_1).$$

Tomando $v = u_h^p$ e notando que (usando a fórmula de Green),

$$\int_{K_1} (b \cdot \nabla u_h^p) u_h^p dx = \frac{1}{2} \int_{\partial K_1} (u_h^{p+})^2 (n_K \cdot b) ds,$$

temos que,

$$-\int_{\partial_- K_1} (u_h^{p+})^2 (n_K \cdot b) ds + \frac{1}{2} \int_{\partial K_1} (u_h^{p+})^2 (n_K \cdot b) ds + \int_{K_1} c(u_h^p)^2 dx = 0 .$$

Assim,

$$-\frac{1}{2} \int_{\partial_- K_1} (u_h^{p+})^2 (n_K \cdot b) ds + \frac{1}{2} \int_{\partial_+ K_1} (u_h^{p+})^2 (n_K \cdot b) ds + \int_{K_1} c(u_h^p)^2 dx = 0 .$$

Usando (1.3.8) e notando que a Hipótese 1.17 implica que $(n_K \cdot b) \geq 0$ em $\partial_+ K_1$ e $(n_K \cdot b) < 0$ em $\partial_- K_1$, obtemos que $u_h^p = 0$ em K_1 .

HI Supomos que $u_h^p = 0$ em $K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_{i-1}$.

TH Usando HI temos que $v^- = 0$ sobre $\partial_- K_i$ então a equação (1.3.4) fica,

$$\int_{K_i} (b \cdot \nabla u_h^p + c u_h^p) v dx - \int_{\partial_- K_i} (u_h^{p+}) v^+ (n_K \cdot b) ds = 0, \quad \forall v \in R_{p_{K_i}}(K_i).$$

Tomando $v = u_h^p$ e repetindo o processo feito em PI temos que $u_h^p = 0$ em K_i . Portanto obtemos que $u_h^p = 0$ em Ω . Logo, existe única solução $u_h^p \in V_p(P_h)$ que satisfaz (1.3.6).

□

Capítulo 2

Estimativas *a priori* para a equação difusão-advecção-reação

O objetivo principal deste capítulo é provar estimativas de erro *a priori* para a equação difusão-advecção-reação. Faremos isto, dividindo tal equação em duas, uma puramente advectiva e outra puramente difusiva. Então, obtemos estimativas de erro *a priori* para cada uma dessas equações e conseqüentemente temos a estimativa procurada.

Inicialmente apresentamos o problema modelo, os *hp*-espaços de elementos finitos e, conforme [8], demonstramos a existência e unicidade de solução fraca para a equação difusão-advecção-reação com condições de fronteiras nulas. Na seção 2.2 consideramos o problema puramente advectivo com uma formulação fraca que inclui a adição de um parâmetro de estabilidade. Essa formulação foi primeiramente estudada por K. S. Bey e J. T. Oden em [4] com um parâmetro da ordem $o(h/p^2)$. No entanto, seguiremos aqui as idéias apresentadas por P. Houston, C. Schwab e E. Süli em [11], em que o parâmetro de estabilidade é da ordem $o(h/p)$ e a malha é composta de quadriláteros que pode ser constituída de elementos 1-irregulares.

As estimativas de erro sem a adição de parâmetro de estabilidade para o problema advectivo e difusivo tem por base o artigo [8] de P. Houston, C. Schwab e E. Süli, e são consideradas nas seções 2.3 e 2.4 respectivamente. Para este caso, um trabalho mais “refinado” será feito para obter estimativas de erro ótimas em p e h .

Por último, agrupando os resultados das seções 2.3 e 2.4, temos a estimativa de erro para a equação difusão-advecção-reação, que apresentaremos na seção 2.5.

2.1 Preliminares

2.1.1 Problema modelo

Seja Ω um domínio poliedral limitado em \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, a equação de difusão-advecção-reação sobre Ω é dada por,

$$\mathcal{L}u = - \sum_{i,j=1}^n \partial_j (a_{ij}(x) \partial_i u) + \sum_{i=1}^n b_i(x) \partial_i u + c(x)u = f(x) \quad \forall x \in \Omega, \quad (2.1.1)$$

sendo,

- $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$;
- $f \in L_2(\Omega)$;
- $c \in C(\overline{\Omega})$;
- $b = \{b_i\}_{i=1}^n$ uma função vetorial de valor real, tal que, $b_i \in C^1(\overline{\Omega})$, $i = 1, \dots, n$.
- $a = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$ uma matriz simétrica cujas entradas a_{ij} são funções de valores reais contínuas por partes definidas sobre $\overline{\Omega}$ e limitadas, com

$$\zeta^\top a(x) \zeta \geq 0 \quad \forall \zeta \in \mathbb{R}^n, \quad \text{q.s. } x \in \overline{\Omega}. \quad (2.1.2)$$

Com estas hipóteses, a equação (2.1.1) é uma **equação diferencial parcial com forma característica não negativa**.

Denotamos por Γ a união das faces abertas (de $(n-1)$ -dimensão) de Ω , e por $n(x) = \{n_i\}_{i=1}^n$ o vetor normal exterior unitário para Γ em $x \in \Gamma$ e consideremos uma divisão de Γ do seguinte modo,

$$\Gamma_0 = \{x \in \Gamma ; n(x)^\top a(x) n(x) > 0\} \quad (2.1.3)$$

$$\Gamma_- = \{x \in \Gamma \setminus \Gamma_0 ; b(x) \cdot n(x) < 0\} \quad (2.1.4)$$

$$\Gamma_+ = \{x \in \Gamma \setminus \Gamma_0 ; b(x) \cdot n(x) \geq 0\}$$

Obviamente, $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_- \cup \Gamma_+$.

Quando Γ_0 não é vazio, também o dividimos em dois subconjuntos disjuntos Γ_N e Γ_D com $\Gamma_D \neq \emptyset$ e relativamente aberto em Γ .

Complementamos (2.1.1) com as condições de fronteira

$$\begin{aligned} u &= g_D \quad \text{sobre } \Gamma_D \cup \Gamma_- \\ n \cdot (a\nabla u) &= g_N \quad \text{sobre } \Gamma_N \end{aligned} \tag{2.1.5}$$

sendo $g_D \in L_2(\Gamma_D \cup \Gamma_-)$ e $g_N \in L_2(\Gamma_N)$, e seguindo [8], adotamos a hipótese que $b \cdot n \geq 0$ sobre Γ_N quando $\Gamma_N \neq \emptyset$.

Notação: Para simplificar escrevemos:

- $S^P = S^P(\Omega, \mathcal{T}, F)$ (será definido adiante);
- $\|\cdot\|_K$ em vez de $\|\cdot\|_{L_2(K)}$;
- $\|\cdot\|_{s,K}$ em vez de $\|\cdot\|_{H^s(K)}$;
- $|\cdot|_{s,K}$ em vez de $|\cdot|_{H^s(K)}$;
- $\|\cdot\|_{\partial K}$ em vez de $\|\cdot\|_{L_2(\partial K)}$ sendo $\|v\|_{L_2(\partial K)}^2 = \int_{\partial K} |b \cdot n| |v|^2 ds$.

2.1.2 Existência e unicidade de solução fraca

Mostraremos aqui a existência e unicidade da solução fraca para a seguinte versão homogênea do problema (2.1.1) e (2.1.5).

$$\begin{aligned} \mathcal{L}u &\equiv -\nabla \cdot (a\nabla u) + b \cdot \nabla u + cu = f \quad \text{em } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{sobre } \Gamma_D \cup \Gamma_- \\ n \cdot (a\nabla u) &= 0 \quad \text{sobre } \Gamma_N \end{aligned} \tag{2.1.6}$$

Nosso primeiro passo é construir a **formulação variacional** (ou generalizada) para o problema (2.1.6), i.é., multiplicar a equação por uma função teste (pertencente a um espaço teste) e integrar sobre Ω para então, definir uma forma bilinear e um funcional linear. Iniciamos com o seguinte resultado.

Lema 2.1. *Seja M uma matriz $n \times n$ simétrica definida não-negativa. Se $\zeta^\top M \zeta = 0$, para um $\zeta \in \mathbb{R}^n$, então, $M\zeta = 0$.*

Segue da definição de Γ_0 que

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)n_i n_j = 0 \quad \text{para } x \in \Gamma \setminus \Gamma_0. \quad (2.1.7)$$

Sendo que $(a_{ij}(x))$ é simétrica definida não-negativa, então, para $x \in \Gamma \setminus \Gamma_0$, chegamos por (2.1.7) e Lema 2.1 com $M = a$ e $\zeta = n$ que

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}(x)n_j = 0 \quad \text{para } x \in \Gamma \setminus \Gamma_0 \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.1.8)$$

Seja,

$$H_D^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) ; v(x) = 0 \quad \text{para } x \in \Gamma_D\}$$

o espaço teste, então, se (2.1.6) tem uma solução $u \in H^2(\Omega)$ temos através de (2.1.8) que,

$$\sum_{i,j=1}^n \int_{\Gamma} a_{ij}(x)n_j \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = 0 \quad \text{para } \forall v \in H_D^1(\Omega). \quad (2.1.9)$$

Note que:

- a) sobre Γ_D a integral é nula pela definição de $H_D^1(\Omega)$;
- b) sobre Γ_N é por (2.1.6);
- c) sobre $\Gamma \setminus \Gamma_0$ é por (2.1.8).

Notação: Usamos (\cdot, \cdot) para denotar o produto interno em $L_2(\Omega)$, e introduzimos o produto interno em $L_2(\gamma)$, dado por: $\langle v, w \rangle_{\gamma} = \int_{\gamma} |b \cdot n| v w ds$, sendo $\gamma \subset \Gamma$ um conjunto aberto.

Multiplicando a equação (2.1.6) por $v \in H_D^1(\Omega)$ e integrando sobre Ω , obtemos,

$$(-\nabla \cdot (a \nabla u), v) + (b \cdot \nabla u, v) + (cu, v) = (f, v) \quad \forall v \in H_D^1(\Omega). \quad (2.1.10)$$

Integrando o primeiro termo por partes

$$(-\nabla \cdot (a \nabla u), v) = (a \nabla u, \nabla v) + \int_{\Gamma} (a \nabla u \cdot n) v ds \stackrel{(2.1.9)}{=} (a \nabla u, \nabla v), \quad (2.1.11)$$

em que o lado direito deve ser visto como a integral sobre Ω do produto interno em \mathbb{R}^n de $a\nabla u$ por ∇v .

Integrando agora o segundo termo de (2.1.10) por partes

$$\begin{aligned} (b \cdot \nabla u, v) &= -(u, \nabla \cdot (bv)) + \int_{\Gamma} uvb \cdot nds \stackrel{(2.1.6)}{=} -(u, \nabla \cdot (bv)) + \int_{\Gamma_+ \cup \Gamma_N} uvb \cdot nds \\ &= -(u, \nabla \cdot (bv)) + \int_{\Gamma_+ \cup \Gamma_N} uv|b \cdot n|ds, \end{aligned} \tag{2.1.12}$$

sendo a última igualdade válida pela definição de Γ_+ e pela hipótese que $b \cdot n$ é não negativo sobre Γ_N .

Substituindo (2.1.11) e (2.1.12) em (2.1.10) temos que,

$$(a\nabla u, \nabla v) - (u, \nabla \cdot (bv)) + (cu, v) + \langle u, v \rangle_{\Gamma_+ \cup \Gamma_N} = (f, v) \quad \forall v \in H_D^1(\Omega).$$

Consideramos agora o espaço teste $\mathcal{H}(\Omega)$ como sendo o fecho de $H_D^1(\Omega)$ em $L_2(\Omega)$ com respeito a norma $\|\cdot\|_{\mathcal{H}(\Omega)}$ definida por $\|w\|_{\mathcal{H}(\Omega)} = \sqrt{(w, w)_{\mathcal{H}(\Omega)}}$ sendo $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{H}(\Omega)}$ o produto interno em $\mathcal{H}(\Omega)$ dado por,

$$(w, v)_{\mathcal{H}(\Omega)} = (a\nabla w, \nabla v) + (w, v) + \langle w, v \rangle_{\Gamma_+ \cup \Gamma_N \cup \Gamma_-}.$$

Como $\mathcal{H}(\Omega)$ é um subespaço do espaço de Hilbert $L_2(\Omega)$, também é um espaço de Hilbert.

Para $w \in \mathcal{H}(\Omega)$ e $v \in H_D^1(\Omega)$ consideramos a forma bilinear $B(\cdot, \cdot) : \mathcal{H}(\Omega) \times H_D^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$B(w, v) = (a\nabla w, \nabla v) - (w, \nabla \cdot (bv)) + (cw, v) + \langle w, v \rangle_{\Gamma_N \cup \Gamma_+}$$

e para $v \in H_D^1(\Omega)$, o funcional linear $l : H_D^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ dado por,

$$l(v) = (f, v).$$

Então, a **formulação variacional** para (2.1.6) é:

Encontre $u \in \mathcal{H}(\Omega)$, tal que,

$$B(u, v) = l(v) \quad \forall v \in H_D^1(\Omega). \quad (2.1.13)$$

A solução u de (2.1.13) é a *solução fraca* (ou generalizada) de (2.1.6). Vamos supor que existe $\alpha > 0$, tal que,

$$c(x) - \frac{1}{2} \nabla \cdot b(x) \geq \alpha \quad \text{q.s. } x \in \bar{\Omega}. \quad (2.1.14)$$

Teorema 2.2. *Vamos supor que (2.1.14) é válido e que a_{ij} são constantes $\forall i, j = 1, \dots, n$. Então, para cada $f \in L_2(\Omega)$, existe $u \in \mathcal{H}(\Omega)$, tal que, (2.1.13) vale. Além disso, existe um subespaço de Hilbert $\mathcal{H}'(\Omega)$ de $\mathcal{H}(\Omega)$, tal que, existe único $u \in \mathcal{H}'(\Omega)$ que satisfaz (2.1.13).*

Demonstração:

Da definição da forma bilinear

$$B(w, v) = (a \nabla w, \nabla v) - (w, \nabla \cdot (bv)) + (cw, v) + \langle w, v \rangle_{\Gamma_N \cup \Gamma_+}.$$

Aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz (C.S.) para o primeiro termo, temos que,

$$(a \nabla w, \nabla v) = \int_{\Omega} a \nabla w \cdot \nabla v dx \stackrel{\text{C.S.}}{\leq} \int_{\Omega} |a \nabla w| |\nabla v| dx \stackrel{\text{C.S.}}{\leq} \|a \nabla w\|_{\Omega} \|\nabla v\|_{\Omega}.$$

Aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz também nos demais termos, resulta que,

$$\begin{aligned} B(w, v) &\leq \|a \nabla w\|_{\Omega} \|\nabla v\|_{\Omega} + \|w\|_{\Omega} \|\nabla \cdot (bv)\|_{\Omega} \\ &\quad + \|cw\|_{\Omega} \|v\|_{\Omega} + \|w\|_{\Gamma_N \cup \Gamma_+} \|v\|_{\Gamma_N \cup \Gamma_+}. \end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Hölder, obtemos que,

$$\begin{aligned} B(w, v) &\leq (\|a \nabla w\|_{\Omega}^2 + \|w\|_{\Omega}^2 + \|cw\|_{\Omega}^2 + \|w\|_{\Gamma_N \cup \Gamma_+}^2)^{1/2} \\ &\quad \times (\|\nabla v\|_{\Omega}^2 + \|\nabla \cdot (bv)\|_{\Omega}^2 + \|v\|_{\Omega}^2 + \|v\|_{\Gamma_N \cup \Gamma_+}^2)^{1/2}. \end{aligned} \quad (2.1.15)$$

Para o primeiro termo da última desigualdade vale que,

$$\begin{aligned}\|a\nabla w\|_{\Omega}^2 &= \int_{\Omega} |a\nabla w|^2 dx = \int_{\Omega} |\sqrt{a}\sqrt{a}\nabla w|^2 dx \leq \int_{\Omega} |\sqrt{a}|^2 |\sqrt{a}\nabla w|^2 dx \\ &= \bar{a}_{\Omega} \int_{\Omega} |\sqrt{a}\nabla w|^2 dx = \bar{a}_{\Omega} \int_{\Omega} a\nabla w \cdot \nabla w dx,\end{aligned}$$

sendo $\bar{a}_{\Omega} \leq \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2$ e \sqrt{a} é a raiz quadrada matricial de a , i.é., $a = \sqrt{a}\sqrt{a}$, então,

$$\|a\nabla w\|_{\Omega}^2 \leq C(a\nabla w, \nabla w). \quad (2.1.16)$$

Substituindo (2.1.16) em (2.1.15), tomando o sup em $c(x)$, $b(x)$ e aplicando a desigualdade do traço

$$\|v\|_{\partial\Omega}^2 \leq C(\|\nabla v\|_{\Omega}\|v\|_{\Omega} + d^{-1}\|v\|_{\Omega}^2), \quad (2.1.17)$$

no termo $\|v\|_{\Gamma_N \cup \Gamma_+}^2$, temos que,

$$\begin{aligned}B(w, v) &\leq C((a\nabla w, \nabla w) + (w, w) + \langle w, w \rangle_{\Gamma_N \cup \Gamma_+ \cup \Gamma_-})^{1/2} \times \\ &\quad (2\|\nabla v\|_{\Omega}^2 + \|v\|_{\Omega}^2 + \|\nabla v\|_{\Omega}\|v\|_{\Omega} + \|v\|_{\Omega}^2)^{1/2}.\end{aligned}$$

Aplicando agora a desigualdade aritmética geométrica (A.G.), resulta que,

$$B(w, v) \stackrel{A.G.}{\leq} C\|w\|_{\mathcal{H}(\Omega)} \left(\|\nabla v\|_{\Omega}^2 + 2\|v\|_{\Omega}^2 + \frac{1}{2}\|\nabla v\|_{\Omega}^2 + \frac{1}{2}\|v\|_{\Omega}^2 \right)^{1/2}.$$

Assim,

$$B(w, v) \leq C\|w\|_{\mathcal{H}(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

Conclui-se então que $B(\cdot, v)$ é um funcional linear limitado sobre $\mathcal{H}(\Omega)$. Pelo teorema da Representação de Riesz, existe único elemento $T(v) \in \mathcal{H}(\Omega)$, tal que,

$$B(w, v) = (w, T(v))_{\mathcal{H}(\Omega)} \quad \forall w \in \mathcal{H}(\Omega). \quad (2.1.18)$$

Sendo B uma forma bilinear, segue que o operador $T : H_D^1(\Omega) \rightarrow \mathcal{H}(\Omega)$

que aplica $v \mapsto T(v)$ é um operador linear. Mostraremos agora que T é injetivo.

$$B(v, v) = (a \nabla v, \nabla v) - (v, \nabla \cdot (bv)) + (cv, v) + \langle v, v \rangle_{\Gamma_N \cup \Gamma_+} \quad \forall v \in H_D^1(\Omega) \quad (2.1.19)$$

Para o segundo termo, temos que,

$$\begin{aligned} (v, \nabla \cdot (bv)) &= \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} v \frac{\partial}{\partial x_i} (b_i v) dx = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} v^2 \frac{\partial b_i}{\partial x_i} dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} v b_i \frac{\partial v}{\partial x_i} dx \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} v^2 \frac{\partial b_i}{\partial x_i} dx - \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} v \frac{\partial}{\partial x_i} (b_i v) dx + \int_{\partial \Omega} (b \cdot n) v^2 ds, \end{aligned}$$

sendo que a última igualdade foi obtida usando fórmula de Green. Assim,

$$\begin{aligned} -(v, \nabla \cdot (bv)) &= - \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} v \frac{\partial}{\partial x_i} (b_i v) dx = - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} v^2 \frac{\partial b_i}{\partial x_i} dx - \frac{1}{2} \int_{\partial \Omega} (b \cdot n) v^2 ds \\ &= - \frac{1}{2} (v^2, \nabla \cdot b) - \frac{1}{2} \int_{\partial \Omega} (b \cdot n) v^2 ds. \end{aligned} \quad (2.1.20)$$

Substituindo (2.1.20) em (2.1.19), temos que,

$$\begin{aligned} B(v, v) &= (a \nabla v, \nabla v) + (c - \frac{1}{2} \nabla \cdot b, v^2) - \frac{1}{2} \int_{\partial \Omega} (b \cdot n) v^2 ds \\ &\quad + \langle v, v \rangle_{\Gamma_N \cup \Gamma_+} \quad \forall v \in H_D^1(\Omega) \end{aligned}$$

Usando a hipótese que $b \cdot n$ é não negativo sobre Γ_N , e as definições de Γ_{\mp} e $H_D^1(\Omega)$ resulta que,

$$\begin{aligned} - \frac{1}{2} \int_{\partial \Omega} (b \cdot n) v^2 ds &= - \frac{1}{2} \int_{\Gamma_N} |b \cdot n| v^2 ds - \frac{1}{2} \int_{\Gamma_+} |b \cdot n| v^2 ds \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_-} |b \cdot n| v^2 ds. \end{aligned} \quad (2.1.21)$$

Somando (2.1.21) com o termo $\langle v, v \rangle_{\Gamma_N \cup \Gamma_+}$ e usando a hipótese (2.1.14) chegamos

a,

$$\begin{aligned} B(v, v) &\geq (a\nabla v, \nabla v) + \alpha\|v\|_{\Omega}^2 + \frac{1}{2} \langle v, v \rangle_{\Gamma_N \cup \Gamma_+ \cup \Gamma_-} \\ &\geq C\|v\|_{\mathcal{H}(\Omega)}^2 \quad \forall v \in H_D^1(\Omega), \end{aligned} \quad (2.1.22)$$

em que $C = \min(\alpha, 1/2)$. Aplicando (2.1.18) em (2.1.22),

$$(v, T(v))_{\mathcal{H}(\Omega)} \geq C\|v\|_{\mathcal{H}(\Omega)}^2 \quad \forall v \in H_D^1(\Omega) \quad (2.1.23)$$

e pela desigualdade de Cauchy-Schwarz no lado esquerdo de (2.1.23),

$$\|T(v)\|_{\mathcal{H}(\Omega)} \geq C\|v\|_{\mathcal{H}(\Omega)} \quad \forall v \in H_D^1(\Omega). \quad (2.1.24)$$

Conclui-se assim, que T é um operador injetivo de $H_D^1(\Omega)$ em sua imagem $\mathcal{R}(T)$ contida em $\mathcal{H}(\Omega)$. Seja $\mathcal{H}'(\Omega) = \overline{\mathcal{R}(T)}$ com o fecho na norma de $\mathcal{H}(\Omega)$.

Da definição de $l(v)$ temos que,

$$\begin{aligned} |l(v)| &\leq \|f\|_{\Omega}\|v\|_{\Omega} \leq \|f\|_{\Omega}\|v\|_{\mathcal{H}(\Omega)} \\ &\stackrel{(2.1.24)}{\leq} C^{-1}\|f\|_{\Omega}\|T(v)\|_{\mathcal{H}(\Omega)} \quad \forall v \in H_D^1(\Omega). \end{aligned} \quad (2.1.25)$$

Dado $w \in \mathcal{H}'(\Omega)$ existe $w_n \in \mathcal{R}(T)$, tal que, $w_n \rightarrow w$ em $\mathcal{H}(\Omega)$, então, define-se

$$g(w) = \lim_{n \rightarrow \infty} l(T^{-1}w_n). \quad (2.1.26)$$

Por (2.1.25), a definição de $g(w)$ é correta e independe da seqüência w_n , sendo que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|w_n\|_{\mathcal{H}(\Omega)} = \|w\|_{\mathcal{H}(\Omega)}$, por (2.1.26) e (2.1.25) temos que,

$$\begin{aligned} |g(w)| &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} C^{-1}\|f\|_{\Omega}\|w_n\|_{\mathcal{H}(\Omega)} \leq C^{-1}\|f\|_{\Omega} \lim_{n \rightarrow \infty} \|w_n\|_{\mathcal{H}(\Omega)} \\ &= C^{-1}\|f\|_{\Omega}\|w\|_{\mathcal{H}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Então, g é um funcional linear limitado sobre $\mathcal{H}'(\Omega)$. Como $\mathcal{H}'(\Omega)$ é fechado na norma de $\mathcal{H}(\Omega)$, é um subespaço de Hilbert de $\mathcal{H}(\Omega)$. Novamente pelo teo-

rema da Representação de Riesz, existe único $u \in \mathcal{H}'(\Omega)$, tal que, $g(w) = (u, w)_{\mathcal{H}(\Omega)} \quad \forall w \in \mathcal{H}'(\Omega)$, em particular

$$g(T(v)) = (u, T(v))_{\mathcal{H}(\Omega)} \quad \forall v \in H_D^1(\Omega) \quad (2.1.27)$$

Como g não depende da seqüência, tomamos $w_n = T(v)$, $n = 1, 2, \dots$ que converge para $w = T(v)$. Segue de (2.1.26) que

$$g(T(v)) = g(w) = \lim_{n \rightarrow \infty} l(T^{-1}w_n) = l(v) \quad \forall v \in H_D^1(\Omega). \quad (2.1.28)$$

Dê (2.1.27) e (2.1.28) temos que $l(v) = (u, T(v))_{\mathcal{H}(\Omega)}$ para todo $v \in H_D^1(\Omega)$, então demonstramos que existe único $u \in \mathcal{H}'(\Omega)$, tal que,

$$B(u, v) \equiv (u, T(v))_{\mathcal{H}(\Omega)} = l(v) \quad \forall v \in H_D^1(\Omega).$$

□

2.1.3 hp -espaços de elementos finitos

Malha

No capítulo 1 definimos uma malha (partição) regular $P_h(\Omega)$ composta de elementos abertos K , tal que, $\bar{\Omega} = \cup_{K \in P_h(\Omega)} \bar{K}$. Vamos agora designar por \mathcal{T} uma malha que pode ser regular ou 1-irregular, i.é., as faces de cada $K \in \mathcal{T}$ podem ter no máximo um nóculo “pendurado”. Aqui também cada K é imagem por uma aplicação afim de um elemento mestre \hat{K} , sendo \hat{K} um hipercubo unitário aberto ou um simplex unitário aberto em \mathbb{R}^n (definidos na seção 1.3.1) (ver Figura 2.1).

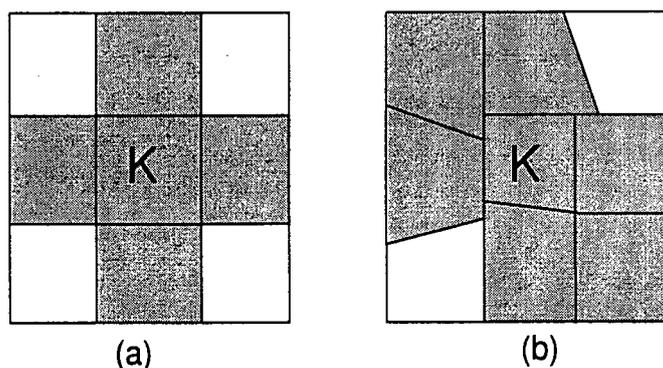


Figura 2.1: (a) malha regular; (b) malha 1-irregular

Seja Ψ o conjunto de todas as faces abertas ($(n - 1)$ -dimensão) de todos os elementos $K \in \mathcal{T}$. Denotamos por Ψ_{int} o conjunto de todos $e \in \Psi$ que estão contidos em Ω . Além disso, seja

$$\Gamma_{int} = \{x \in \Omega; x \in e \text{ para algum } e \in \Psi_{int}\}$$

e

$$\Psi_D = \{e \in \Psi; e \subset \Gamma_D\}$$

Nota: Está implícito nestas definições que \mathcal{T} respeita as divisões de Γ .

Espaços de polinômios

Sobre o elemento de referência, consideramos os espaços de polinômios Q_p, P_p (definidos na seção 1.3.1) de grau $p \geq 0$. Supomos que cada $K \in \mathcal{T}$ é imagem de um elemento mestre \hat{K} por uma aplicação afim F_K , i.e., $K = F_K(\hat{K}), \forall K \in \mathcal{T}$. Assim, para cada $K \in \mathcal{T}$ associamos o inteiro não negativo p_K (grau dos polinômios locais) e o inteiro não negativo s_K (índice local de Sobolev), e coletamos os p_K, s_K e F_K nos vetores $\mathbf{p} = \{p_K; K \in \mathcal{T}\}$, $\mathbf{s} = \{s_K; K \in \mathcal{T}\}$ e $\mathbf{F} = \{F_K; K \in \mathcal{T}\}$, e consideramos o espaço de elementos finitos

$$S^{\mathbf{p}}(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{F}) = \{v \in L_2(\Omega); v|_K \circ F_K \in R_{p_K}(\hat{K})\},$$

sendo que R é Q ou P (veja seção 1.3.1).

Associamos a \mathcal{T} o espaço de Sobolev quebrado

$$H^{\mathbf{s}}(\Omega, \mathcal{T}) = \{v \in L_2(\Omega); u|_K \in H^{s_K}(K) \quad \forall K \in \mathcal{T}\},$$

o qual equipamos com a seguinte norma e semi-norma

$$\|v\|_{\mathbf{s}, \mathcal{T}} = \left(\sum_{K \in \mathcal{T}} \|v\|_{H^{s_K}(K)}^2 \right)^{1/2}, \quad |v|_{\mathbf{s}, \mathcal{T}} = \left(\sum_{K \in \mathcal{T}} |v|_{H^{s_K}(K)}^2 \right)^{1/2}$$

respectivamente.

Para $u \in H^1(\Omega, \mathcal{T})$ definimos o gradiente quebrado $\nabla_{\mathcal{T}} u$ de u por $(\nabla_{\mathcal{T}} u)|_K = \nabla(u|_K)$, para $K \in \mathcal{T}$.

2.2 Equação de advecção com parâmetro de estabilidade

Desenvolveremos nesta seção as estimativas “a priori” para a parte \mathcal{L}_0 do operador \mathcal{L} responsável pela advecção-reação, i.é., para

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 u &\equiv b \cdot \nabla u + cu = f \quad \text{em } \Omega \\ u &= g_D \quad \text{sobre } \Gamma_- . \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

A malha com que vamos trabalhar aqui é mais geral que a considerada na seção anterior, mas, por outro lado, as estimativas de erro serão desenvolvidas para o caso particular de $n = 2$.

Malhas

Seja \mathcal{P} uma partição em retalhos de Ω em abertos P que são imagem de um domínio de referência \hat{P} por uma aplicação bijetiva F_P , i.é.,

$$\forall P \in \mathcal{P}, \quad P = F_P(\hat{P})$$

sendo que \hat{P} é um hipercubo (\hat{Q}) ou um simplex unitário (\hat{S}) definidos na seção 1.3.2.

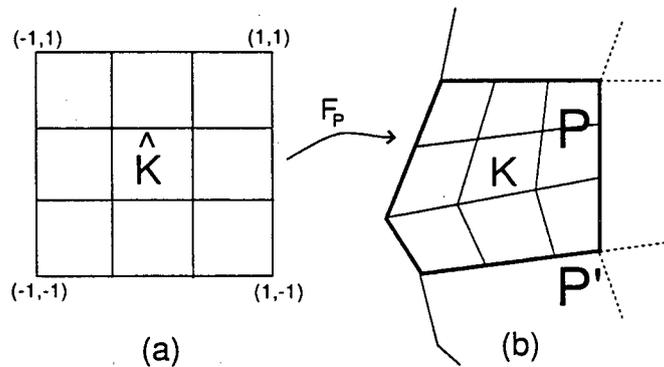


Figura 2.2: (a) O elemento \hat{P} e sua malha $\hat{\mathcal{T}}_P$; (b) o retalho P e sua malha \mathcal{T}_P

Uma malha \mathcal{T} de Ω vai ser construída subdividindo os retalhos P . Para cada P , construímos uma malha \mathcal{T}_P subdividindo \hat{P} em elementos \hat{K} (ver Figura 2.2 para o caso de $\hat{P} = \hat{Q}$) que são equivalentes afim com \hat{Q} ou \hat{S} , essa malha em \hat{P} é

chamada $\hat{\mathcal{T}}_P$. A malha \mathcal{T}_P para $P \in \mathcal{P}$ é obtida aplicando $\hat{\mathcal{T}}_P$ para P usando F_P , i.e.,

$$\forall P \in \mathcal{P}: \quad \mathcal{T}_P := \{K; K = F_P(\hat{K}), \hat{K} \in \hat{\mathcal{T}}_P\}$$

então, a malha \mathcal{T} de Ω é a coleção de todos os elementos, i.e.,

$$\mathcal{T} = \bigcup_{P \in \mathcal{P}} \mathcal{T}_P.$$

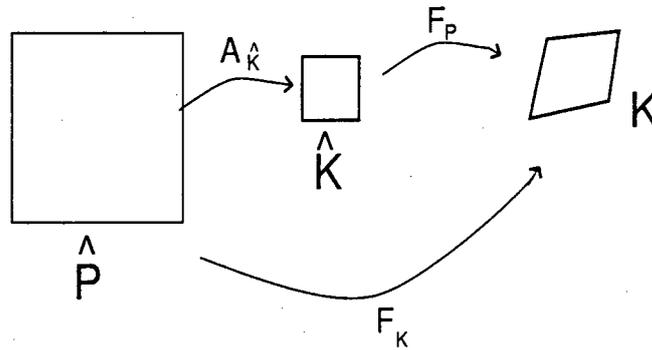


Figura 2.3: As aplicações $A_{\hat{K}}$, F_P e F_K

Aqui, cada $K \in \mathcal{T}$ é imagem do domínio de referência \hat{P} via uma aplicação F_K : se $K \in P$ para algum $P \in \mathcal{P}$,

$$K = F_K(\hat{P}), \quad F_K := F_P \circ A_{\hat{K}}$$

sendo $A_{\hat{K}} : \hat{P} \rightarrow \hat{K} \in \hat{\mathcal{T}}_P$ afim (ver Figura 2.3).

Vamos assumir que existem constantes positivas c_1 e c_2 , tal que,
 $\forall K \in \mathcal{T}$

$$c_1 \leq h_K/h_{\hat{K}} \leq c_2, \quad (2.2.2)$$

em que $h_K = \text{diam}(K)$ e $h_{\hat{K}} = \text{diam}(\hat{K})$.

Nota: Adaptamos o espaço de elementos finitos acima para essa malha tomando $\mathbf{F} = \{F_P; P \in \mathcal{P}\}$.

2.2.1 Formulação estabilizada do método de Galerkin descontínuo para a equação de advecção

Seja $\delta \in H^1(K)$ uma função positiva para cada $K \in \mathcal{T}$, e seja $w, v \in H^1(\Omega, \mathcal{T})$, suprimindo os subíndices K , consideramos a forma bilinear dada por,

$$\begin{aligned} B_{DG}(w, v) = & \sum_K \int_K \mathcal{L}_0 w (v + \delta \mathcal{L}_0 v) dx - \sum_K \int_{\partial_- K \setminus \Gamma_-} (b \cdot n) [w] v^+ ds \\ & - \sum_K \int_{\partial_- K \cap \Gamma_-} (b \cdot n) w^+ v^+ ds \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

e o funcional linear dado por,

$$l_{DG}(v) = \sum_K \int_K f(v + \delta \mathcal{L}_0 v) dx - \sum_K \int_{\partial_- K \cap \Gamma_-} (b \cdot n) g_D v^+ ds.$$

A aproximação hp -DGFEM com parâmetro de estabilidade para (2.2.1) é definida da seguinte forma:

Encontre $u_{DG} \in S^p(\Omega, \mathcal{T}, F)$, tal que,

$$B_{DG}(u_{DG}, v) = l_{DG}(v) \quad \forall v \in S^p(\Omega, \mathcal{T}, F) \quad (2.2.4)$$

Esta formulação difere do original hp -DGFEM pela adição de um parâmetro de estabilidade quando $\delta > 0$. Uma análise desta formulação foi feita por K. S. Bey e J. T. Oden em [4].

Seja a função $c_0(x)$ definida assim,

$$c_0^2(x) := c(x) - \frac{1}{2} \nabla \cdot b(x), \quad x \in \bar{\Omega} \quad (2.2.5)$$

de (2.1.14), $c_0(x) \geq \alpha$ quase sempre em Ω . Com isso, mostramos no próximo lema a estabilidade do problema discreto (2.2.4).

Lema 2.3. *Supomos que existe $\alpha > 0$, tal que, (2.1.14) vale. Então, u_{DG} satisfaz a*

seguinte estimativa:

$$\begin{aligned} \sum_K \left\{ \|\sqrt{\delta} \mathcal{L}_0 u_{DG}\|_K^2 + \alpha \|u_{DG}\|_K^2 + \|u_{DG}^+ - u_{DG}^-\|_{\partial_- K \setminus \Gamma_-}^2 + \frac{1}{2} \|u_{DG}^+\|_{\partial_- K \cap \Gamma_-}^2 \right. \\ \left. + \|u_{DG}^+\|_{\partial_+ K \cap \Gamma_+}^2 \right\} \leq \sum_K \left\{ \|\sqrt{\delta} f\|_K^2 + \frac{1}{\alpha} \|f\|_K^2 + 2 \|g\|_{\partial_- K \cap \Gamma_-}^2 \right\}. \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

Demonstração:

Tomando $v = u_{DG}$ em (2.2.4)

$$B_{DG}(u_{DG}, u_{DG}) = l_{DG}(u_{DG}) \quad (2.2.7)$$

sendo que,

$$\begin{aligned} B_{DG}(u_{DG}, u_{DG}) = \sum_K \left\{ \int_K \delta (\mathcal{L}_0 u_{DG})^2 dx + \int_K \mathcal{L}_0 u_{DG} u_{DG} dx \right. \\ \left. - \int_{\partial_- K \setminus \Gamma_-} (b \cdot n) [u_{DG}] u_{DG}^+ ds - \int_{\partial_- K \cap \Gamma_-} (b \cdot n) (u_{DG}^+)^2 ds. \right. \end{aligned}$$

Para cada K o segundo termo do lado direito fica,

$$\int_K \mathcal{L}_0 u_{DG} u_{DG} dx = \int_K (b \cdot \nabla u_{DG}) u_{DG} dx + \int_K c (u_{DG})^2 dx$$

Aplicando a fórmula de Green no primeiro termo do segundo membro, temos que,

$$\int_K (b \cdot \nabla u_{DG}) u_{DG} dx = \frac{-1}{2} \int_K (\nabla \cdot b) (u_{DG})^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\partial K} (n \cdot b) (u_{DG}^+)^2 ds.$$

Logo,

$$\int_K \mathcal{L}_0 u_{DG} u_{DG} dx = \frac{-1}{2} \int_K (\nabla \cdot b) (u_{DG})^2 dx + \int_K c (u_{DG})^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\partial K} (n \cdot b) (u_{DG}^+)^2 ds.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
B_{DG}(u_{DG}, u_{DG}) &= \sum_K \left\{ \int_K \delta(\mathcal{L}_0 u_{DG})^2 dx + \int_K \left(c - \frac{1}{2} \nabla \cdot b \right) (u_{DG})^2 dx \right. \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_K \int_{\partial K} (n \cdot b) (u_{DG}^+)^2 ds - \int_{\partial_- K \setminus \Gamma_-} (b \cdot n) [u_{DG}] u_{DG}^+ ds \\
&\quad \left. - \int_{\partial_- K \cap \Gamma_-} (b \cdot n) (u_{DG}^+)^2 ds. \right\} \quad (2.2.8)
\end{aligned}$$

Decompomos as integrais sobre a fronteira de K da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \int_{\partial K} (n \cdot b) (u_{DG}^+)^2 ds &= \frac{1}{2} \int_{\partial_+ K \cap \Gamma_+} (n \cdot b) (u_{DG}^+)^2 ds + \frac{1}{2} \int_{\partial_+ K \setminus \Gamma_+} (n \cdot b) (u_{DG}^+)^2 ds \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_{\partial_- K \cap \Gamma_-} (n \cdot b) (u_{DG}^+)^2 ds + \frac{1}{2} \int_{\partial_- K \setminus \Gamma_-} (n \cdot b) (u_{DG}^+)^2 ds \quad (2.2.9)
\end{aligned}$$

e notemos que,

$$\begin{aligned}
- \int_{\partial_- K \setminus \Gamma_-} (b \cdot n) [u_{DG}] u_{DG}^+ ds &= - \frac{1}{2} \int_{\partial_- K \setminus \Gamma_-} (b \cdot n) (u_{DG}^+)^2 ds \\
- \frac{1}{2} \int_{\partial_- K \setminus \Gamma_-} (b \cdot n) (u_{DG}^+ - u_{DG}^-)^2 ds &+ \frac{1}{2} \int_{\partial_- K \setminus \Gamma_-} (b \cdot n) (u_{DG}^-)^2 ds. \quad (2.2.10)
\end{aligned}$$

Assim, substituindo (2.2.9) e (2.2.10) em (2.2.8) e usando o fato que

$$\sum_K \int_{\partial_+ K \setminus \Gamma_+} (b \cdot n) |u_{DG}^+|^2 ds + \sum_K \int_{\partial_- K \setminus \Gamma_-} (b \cdot n) |u_{DG}^-|^2 ds = 0,$$

os três últimos termos (2.2.8) podem ser escritos como,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \sum_K \int_{\partial_- K \cap \Gamma_-} - (b \cdot n) |u_{DG}^+|^2 ds &+ \frac{1}{2} \sum_K \int_{\partial_- K \setminus \Gamma_-} - (b \cdot n) |u_{DG}^+ - u_{DG}^-|^2 ds \\
&+ \frac{1}{2} \sum_K \int_{\partial_+ K \cap \Gamma_+} (b \cdot n) |u_{DG}^+|^2 ds. \quad (2.2.11)
\end{aligned}$$

Substituindo (2.2.11) em (2.2.8) e lembrando de (2.2.5) junto com a definição de

$\partial_- K$, obtemos,

$$\begin{aligned}
B_{DG}(u_{DG}, u_{DG}) &= \sum_K \left\{ \|\sqrt{\delta} \mathcal{L}_0 u_{DG}\|_K^2 + \|c_0 u_{DG}\|_K^2 + \frac{1}{2} \|u_{DG}^+\|_{\partial_- K \cap \Gamma_-}^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \|u_{DG}^+ - u_{DG}^-\|_{\partial_- K \setminus \Gamma_-}^2 + \frac{1}{2} \|u_{DG}^+\|_{\partial_+ K \cap \Gamma_+}^2 \right\}.
\end{aligned} \tag{2.2.12}$$

Limitamos agora o lado direito de (2.2.7)

$$\begin{aligned}
|l(u_{DG})| &\stackrel{C.S.}{\leq} \sum_K \left\{ \|f\|_K \|u_{DG}\|_K + \|\sqrt{\delta} f\|_K \|\sqrt{\delta} \mathcal{L}_0 u_{DG}\|_K \right. \\
&\quad \left. + \|g\|_{\partial_- K \cap \Gamma_-} \|u_{DG}^+\|_{\partial_- K \cap \Gamma_-} \right\} \\
&\stackrel{A.G.}{\leq} \sum_K \left\{ \frac{\alpha}{2} \|u_{DG}\|_K^2 + \frac{1}{2\alpha} \|f\|_K^2 + \frac{1}{2} \|\sqrt{\delta} f\|_K^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \|\sqrt{\delta} \mathcal{L}_0 u_{DG}\|_K^2 + \frac{1}{4} \|u_{DG}^+\|_{\partial_- K \cap \Gamma_-}^2 + \|g\|_{\partial_- K \cap \Gamma_-}^2 \right\}.
\end{aligned} \tag{2.2.13}$$

Usando (2.1.14) em (2.2.12) e comparando o resultado com (2.2.13) por meio de (2.2.7), obtemos (2.2.6).

□

Para fazer uma análise de erro do hp -DGFEM, escrevemos

$$u - u_{DG} = (u - \Pi u) + (\Pi u - u_{DG}) \equiv \eta + \xi, \tag{2.2.14}$$

em que u é a única solução fraca de (2.2.1), u_{DG} é a solução da aproximação descontínua de Galerkin e Πu é um projetor adequado de u em $S^p(\Omega, \mathcal{T}, F)$, que será escolhido posteriormente.

Lema 2.4. *Se (2.1.14) vale e $u \in H^1(K)$ para cada $K \in \mathcal{T}$, temos que,*

$$\begin{aligned} & \sum_K \left\{ \|\sqrt{\delta}\mathcal{L}_0\xi\|_K^2 + \|c_0\xi\|_K^2 + \|\xi^+\|_{\partial_-K\cap\Gamma_-}^2 + \frac{1}{2}\|\xi^+\|_{\partial_+K\cap\Gamma_+}^2 + \frac{1}{2}\|\xi^+ - \xi^-\|_{\partial_-K\setminus\Gamma_-}^2 \right\} \\ & \leq \sum_K \left\{ \left\| \sqrt{\delta}\mathcal{L}_0\eta - \frac{1}{\sqrt{\delta}}\eta \right\|_K^2 + 4\|c_0\eta\|_K^2 + 2\|\eta^+\|_{\partial_+K\cap\Gamma_+}^2 + 2\|\eta^-\|_{\partial_-K\setminus\Gamma_-}^2 \right\}. \end{aligned} \quad (2.2.15)$$

Demonstração:

De (2.2.14) temos que,

$$\begin{aligned} B_{DG}(\xi, \xi) &= B_{DG}(\Pi u - u_{DG}, \xi) = B_{DG}(u - u_{DG} - u + \Pi u, \xi) \\ &= B_{DG}(u - u_{DG}, \xi) - B_{DG}(\eta, \xi) = -B_{DG}(\eta, \xi). \end{aligned} \quad (2.2.16)$$

Aqui $B_{DG}(u - u_{DG}, \xi) = 0$ pelo fato que sendo u a solução de (2.2.1), u também satisfaz (2.2.4). Logo,

$$B_{DG}(u - u_{DG}, \xi) = B_{DG}(u, \xi) - B_{DG}(u_{DG}, \xi) = B_{DG}(u, \xi) - l_{DG}(\xi) = 0.$$

Vamos limitar $B_{DG}(\eta, \xi)$.

$$\begin{aligned} B_{DG}(\eta, \xi) &= \sum_K \left\{ \int_K \delta\mathcal{L}_0\eta\mathcal{L}_0\xi dx + \int_K (b \cdot \nabla\eta)\xi dx + \int_K c\eta\xi dx \right. \\ & \quad \left. - \int_{\partial_-K\setminus\Gamma_-} (b \cdot n)[\eta]\xi^+ ds - \int_{\partial_-K\cap\Gamma_-} (b \cdot n)\eta^+\xi^+ ds \right\} \end{aligned}$$

e lembrando que

$$\int_K (b \cdot \nabla\eta)\xi dx = - \int_K (b \cdot \nabla\xi)\eta dx - \int_K (\nabla \cdot b)\eta\xi dx + \int_{\partial K} (b \cdot n)\eta^+\xi^+ ds$$

deduzimos que,

$$\begin{aligned}
B_{DG}(\eta, \xi) = & \sum_K \left\{ \int_K \delta \mathcal{L}_0 \eta \mathcal{L}_0 \xi dx - \int_K \eta \mathcal{L}_0 \xi dx + 2 \int_K c \eta \xi dx \right. \\
& - \int_K (\nabla \cdot b) \eta \xi dx + \int_{\partial K} (b \cdot n) \eta^+ \xi^+ ds \\
& \left. - \int_{\partial_- K \setminus \Gamma_-} (b \cdot n) [\eta] \xi^+ ds - \int_{\partial_- K \cap \Gamma_-} (b \cdot n) \eta^+ \xi^+ ds \right\}. \tag{2.2.17}
\end{aligned}$$

Manipulando os termos sobre K , obtemos,

$$\begin{aligned}
& \sum_K \left\{ \int_K \left(\sqrt{\delta} \mathcal{L}_0 \eta - \frac{\eta}{\sqrt{\delta}} \right) \sqrt{\delta} \mathcal{L}_0 \xi dx + 2 \int_K \left(c - \frac{1}{2} \nabla \cdot b \right) \eta \xi dx \right\} \\
& = \sum_K \left\{ \int_K \left(\sqrt{\delta} \mathcal{L}_0 \eta - \frac{\eta}{\sqrt{\delta}} \right) \sqrt{\delta} \mathcal{L}_0 \xi dx + 2 \int_K c_0^2 \eta \xi dx \right\}, \tag{2.2.18}
\end{aligned}$$

e sobre a fronteira com $b_n := (b \cdot n)$ temos que,

$$\begin{aligned}
& \sum_K \left\{ - \int_{\partial_- K \setminus \Gamma_-} b_n \eta^+ \xi^+ ds + \int_{\partial_- K \setminus \Gamma_-} b_n \eta^- \xi^+ ds - \int_{\partial_- K \cap \Gamma_-} b_n \eta^+ \xi^+ ds \right. \\
& \left. + \int_{\partial_- K \cap \Gamma_-} b_n \eta^+ \xi^+ ds + \int_{\partial_- K \setminus \Gamma_-} b_n \eta^+ \xi^+ ds + \int_{\partial_+ K \cap \Gamma_+} b_n \eta^+ \xi^+ ds + \int_{\partial_+ K \setminus \Gamma_+} b_n \eta^+ \xi^+ ds \right\}.
\end{aligned}$$

Simplificando, obtemos

$$\sum_K \left\{ \int_{\partial_+ K \cap \Gamma_+} b_n \eta^+ \xi^+ ds + \int_{\partial_+ K \setminus \Gamma_+} b_n \eta^+ \xi^+ ds + \int_{\partial_- K \setminus \Gamma_-} b_n \eta^- \xi^+ ds \right\} \tag{2.2.19}$$

e notando que,

$$\begin{aligned}
& \left| \sum_K \left\{ \int_{\partial_+ K \setminus \Gamma_+} b_n \eta^+ \xi^+ ds + \int_{\partial_- K \setminus \Gamma_-} b_n \eta^- \xi^+ ds \right\} \right| \\
& = \left| \sum_K \left\{ - \int_{\partial_- K \setminus \Gamma_-} b_n \eta^- \xi^- ds + \int_{\partial_- K \setminus \Gamma_-} b_n \eta^- \xi^+ ds \right\} \right| \\
& = \left| \sum_K \int_{\partial_- K \setminus \Gamma_-} b_n \eta^- (\xi^+ - \xi^-) ds \right|. \tag{2.2.20}
\end{aligned}$$

Substituindo (2.2.19) e (2.2.18) em (2.2.17) e usando (2.2.20) obtemos

$$\begin{aligned}
|B_{DG}(\eta, \xi)| \leq \sum_K \left\{ \left| \int_K \left(\sqrt{\delta} \mathcal{L}_0 \eta - \frac{\eta}{\sqrt{\delta}} \right) \sqrt{\delta} \mathcal{L}_0 \xi dx \right| + 2 \left| \int_K c_0^2 \eta \xi dx \right| \right. \\
\left. + \left| \int_{\partial_{-K} \setminus \Gamma_-} b_n \eta^- (\xi^+ - \xi^-) ds \right| + \left| \int_{\partial_{+K} \cap \Gamma_+} b_n \eta^+ \xi^+ ds \right| \right\}.
\end{aligned} \tag{2.2.21}$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz em (2.2.21) chegamos a seguinte desigualdade:

$$\begin{aligned}
|B_{DG}(\eta, \xi)| \leq \sum_K \left\{ \left\| \sqrt{\delta} \mathcal{L}_0 \eta - \frac{\eta}{\sqrt{\delta}} \right\|_K \left\| \sqrt{\delta} \mathcal{L}_0 \xi \right\|_K + 2 \|c_0 \eta\|_K \|c_0 \xi\|_K \right. \\
\left. + \|\eta^-\|_{\partial_{-K} \setminus \Gamma_-} \|\xi^+ - \xi^-\|_{\partial_{-K} \setminus \Gamma_-} + \|\eta^+\|_{\partial_{+K} \cap \Gamma_+} \|\xi^+\|_{\partial_{+K} \cap \Gamma_+} \right\}.
\end{aligned}$$

Aplicando agora a desigualdade aritmética geométrica temos que,

$$\begin{aligned}
|B_{DG}(\eta, \xi)| \leq \sum_K \left\{ \frac{1}{2} \left\| \sqrt{\delta} \mathcal{L}_0 \eta - \frac{\eta}{\sqrt{\delta}} \right\|_K^2 + \frac{1}{2} \left\| \sqrt{\delta} \mathcal{L}_0 \xi \right\|_K^2 + 2 \|c_0 \eta\|_K^2 + \frac{1}{2} \|c_0 \xi\|_K^2 \right. \\
\left. + \|\eta^-\|_{\partial_{-K} \setminus \Gamma_-}^2 + \frac{1}{4} \|\xi^+ - \xi^-\|_{\partial_{-K} \setminus \Gamma_-}^2 + \|\eta^+\|_{\partial_{+K} \cap \Gamma_+}^2 + \frac{1}{4} \|\xi^+\|_{\partial_{+K} \cap \Gamma_+}^2 \right\}.
\end{aligned} \tag{2.2.22}$$

De (2.2.16), (2.2.12) com $u_{DG} = \xi$ e (2.2.22) temos provado (2.2.15). □

2.2.2 Estimativas *a priori* para o erro do método de Galerkin descontínuo estabilizado para a equação de advecção

As estimativas que desenvolveremos aqui são baseadas no produto tensorial, por isso, iniciamos com alguns resultados em uma dimensão. Para tanto, seja $\hat{I} = (-1, 1)$ e $S^p(\hat{I})$ o conjunto dos polinômios de grau p definidos sobre \hat{I} .

Teorema 2.5. *Seja $u \in H^{k+1}(\hat{I})$ para algum $k \geq 0$. Então, para todo $p \geq 1$, existe*

$\pi_p u \in S^p(\widehat{I})$, tal que,

$$\|u' - (\pi_p u)'\|_{\widehat{I}}^2 \leq \frac{(p-s)!}{(p+s)!} |u|_{s+1, \widehat{I}}^2 \quad (2.2.23)$$

para qualquer $0 \leq s \leq \min(p, k)$ e, tal que,

$$\|u - \pi_p u\|_{\widehat{I}}^2 \leq \frac{1}{p(p+1)} \frac{(p-t)!}{(p+t)!} |u|_{t+1, \widehat{I}}^2 \quad (2.2.24)$$

para qualquer $0 \leq t \leq \min(p, k)$. Além disso,

$$\pi_p u(\pm 1) = u(\pm 1).$$

Para demonstração ver pg. 75 em [20].

Corolário 2.6. *O projetor π_p , cuja existência é assegurada no Teorema 2.5, satisfaz as seguintes estimativas:*

$$\|(\pi_p u)'\|_{\widehat{I}} \leq 2 \|u'\|_{\widehat{I}} \quad (2.2.25)$$

$$\|\pi_p u\|_{\widehat{I}} \leq \|u\|_{\widehat{I}} + \frac{1}{\sqrt{p(p+1)}} \|u'\|_{\widehat{I}} \quad (2.2.26)$$

$\forall p \geq 1$ e todo $u \in H^1(\widehat{I})$.

Demonstração:

A desigualdade (2.2.25) é obtida da desigualdade triangular e de (2.2.23) com $s = 0$, i.é.,

$$\|(\pi_p u)'\|_{\widehat{I}} = \|(\pi_p u)' - u' + u'\|_{\widehat{I}} \leq \|(\pi_p u)' - u'\|_{\widehat{I}} + \|u'\|_{\widehat{I}} \leq 2 \|u'\|_{\widehat{I}}.$$

(2.2.26) é obtida de modo análogo, porém usando (2.2.24), i.é.,

$$\|\pi_p u\|_{\widehat{I}} = \|\pi_p u - u + u\|_{\widehat{I}} \leq \|\pi_p u - u\|_{\widehat{I}} + \|u\|_{\widehat{I}} \leq \frac{1}{\sqrt{p(p+1)}} \|u'\|_{\widehat{I}} + \|u\|_{\widehat{I}}.$$

□

Vamos usar esses resultados sobre $(-1, 1)$ para construir aproximações

para $\widehat{Q} = (-1, 1)^2$. Para tanto denotamos por $\pi_p^i u$ o projetor de u na i -ésima coordenada.

Seja $v(x)$ e $w(y)$ funções de uma variável, tais que, ambas pertencem a $H^k(\widehat{I})$, então, para as funções do tipo $v(x)w(y)$ definimos o operador

$$\begin{aligned} \Pi_p : \mathcal{D}(\Pi_p) \subset H^k(\widehat{Q}) &\longrightarrow S^p(\widehat{Q}) \\ u &\longmapsto \Pi_p u = \pi_p^1 v \pi_p^2 w \end{aligned}$$

em que $u(x, y) = v(x)w(y)$. Sendo que o conjunto das funções $v(x)w(y)$ é denso em $H^k(\widehat{Q})$, podemos estender o operador $\Pi_p = \pi_p^1 \pi_p^2$ para todas as funções $u \in H^k(\widehat{Q})$.

Teorema 2.7. *Seja $\widehat{Q} = (-1, 1)^2$ e supomos que $p \geq 1$ e que $u \in H^{k+1}(\widehat{Q})$ para algum $k \geq 1$. Então, vale as seguintes estimativas:*

$$\begin{aligned} \|u - \Pi_p u\|_{\widehat{Q}}^2 &\leq \frac{2}{p(p+1)} \frac{(p-s)!}{(p+s)!} \left\{ \|\partial_1^{s+1} u\|_{\widehat{Q}}^2 + 2\|\partial_2^{s+1} u\|_{\widehat{Q}}^2 \right\} \\ &\quad + \frac{4}{p^2(p+1)^2} \frac{(p-s+1)!}{(p+s-1)!} \|\partial_1 \partial_2^s u\|_{\widehat{Q}}^2, \end{aligned} \quad (2.2.27)$$

$$\begin{aligned} \|\nabla(u - \Pi_p u)\|_{\widehat{Q}}^2 &\leq 2 \frac{(p-s)!}{(p+s)!} \left\{ \|\partial_1^{s+1} u\|_{\widehat{Q}}^2 + \|\partial_2^{s+1} u\|_{\widehat{Q}}^2 \right\} \\ &\quad + \frac{8}{p(p+1)} \frac{(p-s+1)!}{(p+s-1)!} \left\{ \|\partial_1^s \partial_2 u\|_{\widehat{Q}}^2 + \|\partial_1 \partial_2^s u\|_{\widehat{Q}}^2 \right\} \end{aligned} \quad (2.2.28)$$

para qualquer $0 \leq s \leq \min(p, k)$.

Nota: É suficiente provar essas desigualdades para as funções do tipo $u(x, y) = v(x)w(y)$, pelo fato da densidade.

Demonstração:

$$\|u - \Pi_p u\|_{\widehat{Q}}^2 \leq 2\|u - \pi_p^1 u\|_{\widehat{Q}}^2 + 2\|\pi_p^1(u - \pi_p^2 u)\|_{\widehat{Q}}^2 \equiv 2A + 2B$$

Agora,

$$A = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 |vw - \pi_p^1 vw|^2 dx dy = \int_{-1}^1 |w|^2 \int_{-1}^1 |v - \pi_p^1 v|^2 dx dy$$

$$\stackrel{(2.2.24)}{\leq} \frac{1}{p(p+1)} \frac{(p-s)!}{(p+s)!} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 |w|^2 |\partial_1^{s+1} v|^2 dx dy = \frac{1}{p(p+1)} \frac{(p-s)!}{(p+s)!} \|\partial_1^{s+1} u\|_{\tilde{Q}}^2$$

e,

$$B = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 |\pi_p^1(vw - v\pi_p^2 w)|^2 dx dy = \int_{-1}^1 |w - \pi_p^2 w|^2 \int_{-1}^1 |\pi_p^1 v|^2 dx dy$$

$$\stackrel{(2.2.26)}{\leq} \int_{-1}^1 |w - \pi_p^2 w|^2 \left(\int_{-1}^1 2|v|^2 dx + \frac{2}{p(p+1)} \int_{-1}^1 |\partial_1 v|^2 dx \right) dy$$

$$\stackrel{(2.2.24)}{\leq} \frac{2}{p(p+1)} \frac{(p-s)!}{(p+s)!} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 |\partial_2^{s+1} w|^2 |v|^2 dx dy$$

$$+ \frac{2}{p^2(p+1)^2} \frac{(p-r)!}{(p+r)!} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 |\partial_2^{r+1} w|^2 |\partial_1 v|^2 dx dy$$

$$= \frac{2}{p(p+1)} \frac{(p-s)!}{(p+s)!} \|\partial_2^{s+1} u\|_{\tilde{Q}}^2 + \frac{2}{p^2(p+1)^2} \frac{(p-r)!}{(p+r)!} \|\partial_1 \partial_2^{r+1} u\|_{\tilde{Q}}^2,$$

tomando $r = s - 1$ temos que,

$$\|u - \Pi_p u\|_{\tilde{Q}}^2 \leq \frac{2}{p(p+1)} \frac{(p-s)!}{(p+s)!} \left\{ \|\partial_1^{s+1} u\|_{\tilde{Q}}^2 + 2\|\partial_2^{s+1} u\|_{\tilde{Q}}^2 \right\}$$

$$+ \frac{4}{p^2(p+1)^2} \frac{(p-s+1)!}{(p+s-1)!} \|\partial_1 \partial_2^s u\|_{\tilde{Q}}^2$$

o que prova (2.2.27).

Mostraremos agora (2.2.28).

$$\|\nabla(u - \Pi_p u)\|_{\tilde{Q}}^2 = \|\partial_1(u - \Pi_p u)\|_{\tilde{Q}}^2 + \|\partial_2(u - \Pi_p u)\|_{\tilde{Q}}^2 \equiv A + B$$

Aqui,

$$A \leq 2\|\partial_1(u - \pi_p^1 u)\|_{\widehat{Q}}^2 + 2\|\partial_1(\pi_p^1(u - \pi_p^2 u))\|_{\widehat{Q}}^2 \equiv 2I + 2II$$

sendo

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 |\partial_1(vw - \pi_p^1 vw)|^2 dx dy = \int_{-1}^1 |w|^2 \int_{-1}^1 |\partial_1(v - \pi_p^1 v)|^2 dx dy$$

$$\stackrel{(2.2.23)}{\leq} \frac{(p-s)!}{(p+s)!} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 |w|^2 |\partial_1^{s+1} v|^2 dx dy = \frac{(p-s)!}{(p+s)!} \|\partial_1^{s+1} u\|_{\widehat{Q}}^2$$

e,

$$II = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 |\partial_1(\pi_p^1 vw - \pi_p^1 v \pi_p^2 w)|^2 dx dy = \int_{-1}^1 |w - \pi_p^2 w|^2 \int_{-1}^1 |\partial_1 \pi_p^1 v|^2 dx dy$$

$$\stackrel{(2.2.25)}{\leq} 4 \int_{-1}^1 |\partial_1 v|^2 \int_{-1}^1 |w - \pi_p^2 w|^2 dy dx$$

$$\stackrel{(2.2.24)}{\leq} \frac{4}{p(p+1)} \frac{(p-t)!}{(p+t)!} \int_{-1}^1 |\partial_1 v|^2 \int_{-1}^1 |\partial_2^{t+1} w|^2 dy dx = \frac{4}{p(p+1)} \frac{(p-t)!}{(p+t)!} \|\partial_1 \partial_2^{t+1} u\|_{\widehat{Q}}^2,$$

tomando $t = s - 1$ temos que,

$$A \leq 2 \frac{(p-s)!}{(p+s)!} \|\partial_1^{s+1} u\|_{\widehat{Q}}^2 + \frac{8}{p(p+1)} \frac{(p-s+1)!}{(p+s-1)!} \|\partial_1 \partial_2^s u\|_{\widehat{Q}}^2.$$

Da mesma forma se obtém uma estimativa análoga para B , e juntando as duas a estimativa (2.2.28) segue.

□

Para um domínio geral Ω com diâmetro d , definimos $\widehat{\Omega} = \{\frac{1}{d}x; x \in \Omega\}$. Se $u \in W_p^m(\Omega)$, seja $\widehat{u}(y) = u(dy)$, é natural que $\widehat{u} \in W_p^m(\widehat{\Omega})$. Por uma mudança de variável, temos que,

$$|\widehat{u}|_{W_p^m(\widehat{\Omega})} = d^{k-n/p} |u|_{W_p^m(\Omega)} \quad \text{para } 0 \leq k \leq m$$

Para um retângulo K com diâmetro h_K e com um lado γ existe um

sistema de coordenadas locais (i.é., uma F_K , tal que, $K = F_K(\widehat{K})$) de maneira que $\widehat{K} = (-1, 1)^2$ e conseqüentemente $\widehat{\gamma} = (-1, 1)$ e segue que para $u \in H^k(K)$ vale

$$|u|_{s,K} \leq Ch_K^{1-s} |\widehat{u}|_{s,\widehat{K}} \quad (2.2.29)$$

$$|u|_{s,\gamma} \leq Ch_K^{1/2-s} |\widehat{u}|_{s,\widehat{\gamma}} \quad (2.2.30)$$

$$|\widehat{u}|_{s,\widehat{K}} \leq Ch_K^{s-1} |u|_{s,K} \quad (2.2.31)$$

$$|\widehat{u}|_{s,\widehat{\gamma}} \leq Ch_K^{s-1/2} |u|_{s,\gamma} \quad (2.2.32)$$

para $\forall s$, tal que, $0 \leq s \leq k$.

Teorema 2.8. *Seja $P \in \mathcal{P}$ com malha \mathcal{T}_P regular composta de quadriláteros (possivelmente 1-irregulares). Assumimos que $\forall K \in \mathcal{T}_P$ $u|_K \in H^{k_K+1}(K)$ para algum $k_K \geq 1$ e definimos $\Pi u \in S^p(P, \mathcal{T}_P)$ elemento a elemento por*

$$(\Pi u)|_K \circ F_P := \Pi_{p_K}(u|_K \circ F_P) \quad \forall K \in \mathcal{T}_P,$$

então, para $p_K \geq 1$ e para $0 \leq s_K \leq \min(p_K, k_K)$ vale a seguinte estimativa:

$$\|u - \Pi u\|_P^2 \leq C \sum_{K \in \mathcal{T}_P} \left(\frac{h_K}{2}\right)^{2s_K+2} \frac{1}{p_K(p_K+1)} \Phi(p_K, s_K) |\widehat{u}|_{s_K+1,\widehat{K}}^2 \quad (2.2.33)$$

sendo $\widehat{u} = u \circ F_P$ e

$$\Phi(p, s) = \frac{(p-s)!}{(p+s)!} + \frac{1}{p(p+1)} \frac{(p-s+1)!}{(p+s-1)!}, \quad 0 \leq s \leq p \quad (2.2.34)$$

E, além disso,

$$\|\nabla(u - \Pi u)\|_P^2 \leq C \sum_{K \in \mathcal{T}_P} \left(\frac{h_K}{2}\right)^{2s_K} \Phi(p_K, s_K) |\widehat{u}|_{s_K+1,\widehat{K}}^2 \quad (2.2.35)$$

em que C é uma constante positiva que depende de F_P , mas independe de h_K , p_K e s_K .

Notação: Aqui dz representa a unidade de área, i.é., $dz = dx dy$ e usamos essa mesma notação quando aplicamos alguma mudança de variável.

Demonstração:

$$\begin{aligned}
\|u - \Pi u\|_P^2 &= \sum_{K \in \mathcal{T}_P} \|u - \Pi u\|_K^2 = \sum_K \int_K |u - \Pi u|^2 dz \\
&= \sum_K \int_{\hat{K}} |\hat{u} - \Pi_{p_K} \hat{u}|^2 C dz \stackrel{(2.2.29)}{\leq} C \sum_K \int_{\hat{Q}} |u \circ F_P \circ A_{\hat{K}} - \Pi_{p_K} u \circ F_P \circ A_{\hat{K}}|^2 \frac{h_K^2}{4} dz \\
&= C \sum_K \frac{h_K^2}{4} \|u_o - \Pi_{p_K} u_o\|_{\hat{Q}}^2 \quad \text{sendo } u_o = u \circ F_P \circ A_{\hat{K}}.
\end{aligned}$$

Aplicando agora o Teorema 2.7 temos que,

$$\|u - \Pi u\|_P^2 \leq C \sum_{K \in \mathcal{T}_P} \frac{1}{p_K(p_K + 1)} \Phi(p_K, s_K) \frac{h_K^2}{4} |u_o|_{s_K+1, \hat{Q}}^2. \quad (2.2.36)$$

Majorando a semi-norma em (2.2.36) com (2.2.31) chegamos a,

$$\|u - \Pi u\|_P^2 \leq C \sum_{K \in \mathcal{T}_P} \frac{1}{p_K(p_K + 1)} \Phi(p_K, s_K) \frac{h_K^2}{4} \left(\frac{h_K}{2}\right)^{2(s_K+1-1)} |\hat{u}|_{s_K+1, \hat{K}}^2,$$

do qual resulta (2.2.33).

Demonstraremos agora (2.2.35)

$$\|\nabla(u - \Pi u)\|_P^2 \leq C(F_P) \|\widehat{\nabla}((u - \Pi u) \circ F_P)\|_{\hat{P}}^2. \quad (2.2.37)$$

Para o lado direito de (2.2.37).

$$\begin{aligned}
\|\widehat{\nabla}((u - \Pi u) \circ F_P)\|_{\hat{P}}^2 &= \|\widehat{\partial}_1(\hat{u} - \Pi \hat{u})\|_{\hat{P}}^2 + \|\widehat{\partial}_2(\hat{u} - \Pi \hat{u})\|_{\hat{P}}^2 \\
&= \sum_{\hat{K} \in \hat{\mathcal{T}}_P} \left\{ \|\widehat{\partial}_1(\hat{u} - \Pi_{p_K} \hat{u})\|_{\hat{K}}^2 + \|\widehat{\partial}_2(\hat{u} - \Pi_{p_K} \hat{u})\|_{\hat{K}}^2 \right\} = \sum_{K \in \mathcal{T}_P} \{A + B\}.
\end{aligned} \quad (2.2.38)$$

Denotamos por \hat{h}_i o comprimento do lado i de \hat{K} . Então, por uma mudança de

variável

$$\begin{aligned}
A &= \int_{-\frac{\hat{h}_2}{2}}^{\frac{\hat{h}_2}{2}} \int_{-\frac{\hat{h}_1}{2}}^{\frac{\hat{h}_1}{2}} |\hat{\partial}_1(\hat{v}\hat{w} - \Pi_{p_K}\hat{v}\hat{w})|^2 dx dy \stackrel{(2.2.30)}{\leq} C \frac{1}{\hat{h}_1} \int_{-\frac{\hat{h}_2}{2}}^{\frac{\hat{h}_2}{2}} \int_{-1}^1 |\tilde{\partial}_1(v_o\hat{w} - \Pi_{p_K}v_o\hat{w})|^2 dx dy \\
&\stackrel{(2.2.29)}{\leq} C \frac{\hat{h}_2}{\hat{h}_1} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 |\tilde{\partial}_1(v_o w_o - \Pi_{p_K}v_o w_o)|^2 dx dy = C \frac{\hat{h}_2}{\hat{h}_1} \|\tilde{\partial}_1(u_o - \Pi_{p_K}u_o)\|_{\hat{Q}}^2.
\end{aligned}$$

De maneira semelhante para B , obtemos,

$$A \leq C \frac{\hat{h}_2}{\hat{h}_1} \|\tilde{\partial}_1(u_o - \Pi_{p_K}u_o)\|_{\hat{Q}}^2 \quad \text{e} \quad B \leq C \frac{\hat{h}_1}{\hat{h}_2} \|\tilde{\partial}_2(u_o - \Pi_{p_K}u_o)\|_{\hat{Q}}^2.$$

Substituído isso em (2.2.38) temos que,

$$\|\hat{\nabla}(\hat{u} - \Pi\hat{u})\|_{\hat{P}}^2 = \sum_{\hat{K} \in \hat{\mathcal{T}}_P} C \frac{\hat{h}_1^2 + \hat{h}_2^2}{\hat{h}_2\hat{h}_1} \left\{ \|\tilde{\partial}_1(u_o - \Pi_{p_K}u_o)\|_{\hat{Q}}^2 + \|\tilde{\partial}_2(u_o - \Pi_{p_K}u_o)\|_{\hat{Q}}^2 \right\}.$$

Aplicando (2.2.28),

$$\begin{aligned}
\|\hat{\nabla}(\hat{u} - \Pi\hat{u})\|_{\hat{P}}^2 &= \sum_{\hat{K} \in \hat{\mathcal{T}}_P} C \frac{\hat{h}_K^2}{\hat{h}_2\hat{h}_1} \left\{ \frac{(p_K - s_K)!}{(p_K + s_K)!} \left(\|\tilde{\partial}_1^{s_K+1}u_o\|_{\hat{Q}}^2 + \|\tilde{\partial}_2^{s_K+1}u_o\|_{\hat{Q}}^2 \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{4}{p_K(p_K + 1)(p_K + s_K - 1)!} \left(\|\tilde{\partial}_1^{s_K}\tilde{\partial}_2 u_o\|_{\hat{Q}}^2 + \|\tilde{\partial}_1\tilde{\partial}_2^{s_K}u_o\|_{\hat{Q}}^2 \right) \right\}.
\end{aligned} \tag{2.2.39}$$

Limitamos agora cada norma do lado direito de (2.2.39) usando a densidade,

$$\begin{aligned}
A &:= \|\tilde{\partial}_1^{s_K+1}u_o\|_{\hat{Q}}^2 = \int_{-1}^1 |w|^2 \int_{-1}^1 |\partial_1^{s_K+1}v|^2 dx dy \\
&\stackrel{(2.2.32)}{\leq} C \hat{h}_1^{2s_K+1} \int_{-1}^1 |w|^2 \int_{-\frac{\hat{h}_1}{2}}^{\frac{\hat{h}_1}{2}} |\partial_1^{s_K+1}\hat{v}|^2 dx dy
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2.2.32) \quad & \leq C \frac{\widehat{h}_1^{2s_{K+1}}}{\widehat{h}_2} \int_{-\frac{\widehat{h}_2}{2}}^{\frac{\widehat{h}_2}{2}} \int_{-\frac{\widehat{h}_1}{2}}^{\frac{\widehat{h}_1}{2}} |\widehat{w}|^2 |\partial_1^{s_{K+1}} \widehat{v}|^2 dx dy \\
& = \frac{\widehat{h}_1^{2s_{K+1}}}{\widehat{h}_2} \|\partial_1^{s_{K+1}} \widehat{u}\|_{\widehat{K}} \leq C \frac{\widehat{h}_1^{2s_{K+1}}}{\widehat{h}_2} |\widehat{u}|_{s_{K+1}, \widehat{K}}^2,
\end{aligned}$$

de modo semelhante, obtemos,

$$B := \|\widetilde{\partial}_2^{s_{K+1}} u_o\|_{\widehat{Q}}^2 \leq C \frac{\widehat{h}_2^{2s_{K+1}}}{\widehat{h}_1} |\widehat{u}|_{s_{K+1}, \widehat{K}}^2$$

$$C := \|\widetilde{\partial}_1^{s_K} \widetilde{\partial}_2 u_o\|_{\widehat{Q}}^2 \leq C \widehat{h}_1^{2s_K-1} \widehat{h}_2 |\widehat{u}|_{s_{K+1}, \widehat{K}}^2$$

$$D := \|\widetilde{\partial}_1 \widetilde{\partial}_2^{s_K} u_o\|_{\widehat{Q}}^2 \leq C \widehat{h}_2^{2s_K-1} \widehat{h}_1 |\widehat{u}|_{s_{K+1}, \widehat{K}}^2$$

Assim,

$$\begin{aligned}
& \frac{\widehat{h}_K^2}{\widehat{h}_2 \widehat{h}_1} (A + B) = C \frac{\widehat{h}_K^2}{\widehat{h}_2 \widehat{h}_1} \left\{ \widehat{h}_1^{2s_K} \frac{\widehat{h}_1}{\widehat{h}_2} + \widehat{h}_2^{2s_K} \frac{\widehat{h}_2}{\widehat{h}_1} \right\} |\widehat{u}|_{s_{K+1}, \widehat{K}}^2 \\
& = C \frac{\widehat{h}_K^2}{\widehat{h}_2 \widehat{h}_1} \left\{ \frac{(\widehat{h}_1^2)^{s_{K+1}} + (\widehat{h}_2^2)^{s_{K+1}}}{\widehat{h}_1 \widehat{h}_2} \right\} |\widehat{u}|_{s_{K+1}, \widehat{K}}^2 \leq C \frac{\widehat{h}_K^2}{\widehat{h}_2 \widehat{h}_1} \left\{ \frac{(\widehat{h}_1^2 + \widehat{h}_2^2)^{s_{K+1}}}{\widehat{h}_1 \widehat{h}_2} \right\} |\widehat{u}|_{s_{K+1}, \widehat{K}}^2 \\
& = C \frac{\widehat{h}_K^2}{\widehat{h}_2 \widehat{h}_1} \frac{\widehat{h}_K^2}{\widehat{h}_2 \widehat{h}_1} \widehat{h}_K^{2s_K} |\widehat{u}|_{s_{K+1}, \widehat{K}}^2.
\end{aligned}$$

Sendo que por hipótese

$$\frac{\widehat{h}_K^2}{\widehat{h}_2 \widehat{h}_1} \leq C$$

temos que,

$$\frac{\widehat{h}_K^2}{\widehat{h}_2 \widehat{h}_1} (A + B) \leq C \widehat{h}_K^{2s_K} |\widehat{u}|_{s_{K+1}, \widehat{K}}^2 \leq C \left(\frac{\widehat{h}_K}{2} \right)^{2s_K} |\widehat{u}|_{s_{K+1}, \widehat{K}}^2. \quad (2.2.40)$$

Agora,

$$\begin{aligned}
\frac{\widehat{h}_K^2}{\widehat{h}_2 \widehat{h}_1} (C + D) &= C \frac{\widehat{h}_K^2}{\widehat{h}_2 \widehat{h}_1} \left\{ \widehat{h}_1^{2s_K-1} \widehat{h}_2 + \widehat{h}_2^{2s_K-1} \widehat{h}_1 \right\} |\widehat{u}|_{s_K+1, \widehat{K}}^2 \\
&= C \frac{\widehat{h}_K^2}{\widehat{h}_2 \widehat{h}_1} \left\{ \widehat{h}_1^{2s_K} \frac{\widehat{h}_2}{\widehat{h}_1} + \widehat{h}_2^{2s_K} \frac{\widehat{h}_1}{\widehat{h}_2} \right\} |\widehat{u}|_{s_K+1, \widehat{K}}^2 = C \widehat{h}_K^2 \left\{ \frac{\widehat{h}_1^{2s_K}}{\widehat{h}_1^2} + \frac{\widehat{h}_2^{2s_K}}{\widehat{h}_2^2} \right\} |\widehat{u}|_{s_K+1, \widehat{K}}^2 \\
&= C \widehat{h}_K^2 \left\{ (\widehat{h}_1^2)^{s_K-1} + (\widehat{h}_2^2)^{s_K-1} \right\} |\widehat{u}|_{s_K+1, \widehat{K}}^2 \leq C \widehat{h}_K^2 (\widehat{h}_1^2 + \widehat{h}_2^2)^{s_K-1} |\widehat{u}|_{s_K+1, \widehat{K}}^2 \\
&= C \widehat{h}_K^2 \widehat{h}_K^{2s_K-2} |\widehat{u}|_{s_K+1, \widehat{K}}^2.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{\widehat{h}_K^2}{\widehat{h}_2 \widehat{h}_1} (C + D) \leq C \widehat{h}_K^{2s_K} |\widehat{u}|_{s_K+1, \widehat{K}}^2 \leq C \left(\frac{\widehat{h}_K}{2} \right)^{2s_K} |\widehat{u}|_{s_K+1, \widehat{K}}^2. \quad (2.2.41)$$

Substituindo (2.2.41) e (2.2.40) (lembrando de como A , B , C e D foram definidos) em (2.2.39) chegamos a

$$\|\widehat{\nabla}(\widehat{u} - \Pi\widehat{u})\|_{\widehat{P}}^2 \leq \sum_{\widehat{K} \in \widehat{\mathcal{T}}_P} C \left(\frac{\widehat{h}_K}{2} \right)^{2s_K} \Phi(p_K, s_K) |\widehat{u}|_{s_K+1, \widehat{K}}^2.$$

Usando que os “tamanhos” dos elementos $\widehat{K} \in \widehat{\mathcal{T}}_P$ são comparáveis com o “tamanho” dos elementos $K \in \mathcal{T}_P$ (pela hipótese (2.2.2)) temos provado o teorema. □

Com esse resultado temos condições de provar uma estimativa de erro na norma dependente da malha dada por

$$\begin{aligned}
|||u|||_{p,DG}^2 &:= \sum_{K \in \mathcal{T}} \left\{ \|\sqrt{\delta} \mathcal{L}_0 u\|_K^2 + \|c_0 u\|_K^2 + \|u^+\|_{\partial_- K \cap \Gamma_-}^2 + \frac{1}{2} \|u^+\|_{\partial_+ K \cap \Gamma_+}^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \|u^+ - u^-\|_{\partial_- K \cap \Gamma_-}^2 \right\}.
\end{aligned}$$

Teorema 2.9. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ e \mathcal{T}, \mathcal{P} definidos anteriormente. Supomos que \mathcal{T}_P para $P \in \mathcal{P}$ é regular e constituída de elementos quadriláteros (possivelmente 1-irregular) com grau de polinômios $p_K \geq 1$. Então, para $u \in H^{k_K+1}(K), \forall K \in \mathcal{T}$ com $k_K \geq 1$, tomando*

$$\delta|_K = \delta_K = h_K/p_K \quad \forall K \in \mathcal{T},$$

temos que,

$$\| \|u - u_{DG}\| \|_{p_{DG}}^2 \leq C \sum_{K \in \mathcal{T}} \left(\frac{h_K}{2} \right)^{2s_K+1} \frac{\Phi(p_K, s_K)}{p_K} |\widehat{u}|_{s_K+1, \widehat{K}}, \quad (2.2.42)$$

para qualquer $1 \leq s_K \leq \min(p_K, k_K)$, em que C é uma constante positiva que depende da regularidade de \mathcal{T} e dos coeficientes b e c , mas independe de p_K, s_K, h_K e sendo $\Phi(p_K, s_K)$ definido por (2.2.34).

Demonstração:

Usando a desigualdade triangular, (2.2.14) e a definição de $\| \cdot \|_{DG}$

$$\begin{aligned} \| \|u - u_{DG}\| \|_{p_{DG}} &\leq \| \eta \|_{p_{DG}} + \| \xi \|_{p_{DG}} \stackrel{(2.2.15) \text{ e def.}}{\leq} C \left\{ \left(\sum_K \|\sqrt{\delta} \mathcal{L}_0 \eta\|_K^2 \right)^{1/2} \right. \\ &+ \left(\sum_K \|c_0 \eta\|_K^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_K \|\eta^+\|_{\partial_- K \cap \Gamma_-}^2 \right)^{1/2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sum_K \|\eta^+\|_{\partial_+ K \cap \Gamma_+}^2 \right)^{1/2} \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sum_K \|\eta^+ - \eta^-\|_{\partial_- K \cap \Gamma_-}^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_K \left\| \sqrt{\delta} \mathcal{L}_0 \eta - \frac{1}{\sqrt{\delta}} \eta \right\|_K^2 \right)^{1/2} \\ &\left. + 2 \left(\sum_K \|c_0 \eta\|_K^2 \right)^{1/2} + \sqrt{2} \left(\sum_K \|\eta^+\|_{\partial_+ K \cap \Gamma_+}^2 \right)^{1/2} + \sqrt{2} \left(\sum_K \|\eta^-\|_{\partial_- K \cap \Gamma_-}^2 \right)^{1/2} \right\}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \| \|u - u_{DG}\| \|_{p_{DG}} &\leq C \left\{ \sum_K \left(\|\sqrt{\delta} \nabla \eta\|_K^2 + \|\sqrt{\delta} \eta\|_K^2 + \|\eta\|_K^2 + \left\| \frac{1}{\sqrt{\delta}} \eta \right\|_K^2 \right) \right. \\ &\left. + \sum_K \left(\|\eta^+\|_{\partial_+ K \cap \Gamma_+}^2 + \|\eta^+\|_{\partial_- K \cap \Gamma_-}^2 + \|\eta^+\|_{\partial_- K \cap \Gamma_-}^2 + \|\eta^-\|_{\partial_- K \cap \Gamma_-}^2 \right) \right\}^{1/2}. \end{aligned}$$

Para facilitar escrevemos,

$$\| \|u - u_{DG}\| \|_{p_{DG}} \equiv C(A + B)^{1/2}. \quad (2.2.43)$$

Sendo que $\eta = u - \Pi u$ com Π como no Teorema 2.8 temos,

$$\begin{aligned} A &\leq \sum_K \left\{ \left(\frac{h_K}{2} \right)^{2s_K} \Phi(p_K, s_K) \left(\delta_K + \left(\delta_K \frac{h_K^2}{4} + \frac{h_K^2}{4} + \delta_K^{-1} \frac{h_K^2}{4} \right) \frac{1}{p_K^2 + p_K} \right) |\widehat{u}|_{s_{K+1}, \widehat{K}}^2 \right\} \\ &\leq C \sum_K \left\{ \left(\frac{h_K}{2} \right)^{2s_K} \Phi(p_K, s_K) \left(\delta_K + \frac{h_K^2}{4} (\delta_K + 1 + \delta_K^{-1}) \frac{1}{p_K^2} \right) |\widehat{u}|_{s_{K+1}, \widehat{K}}^2 \right\}, \end{aligned}$$

e notando que para δ_K pequeno $\delta_K + 1 + \delta_K^{-1} < C\delta_K^{-1}$, chegamos a,

$$A \leq C \sum_K \left\{ \left(\frac{h_K}{2} \right)^{2s_K} \Phi(p_K, s_K) \left(\delta_K + \frac{h_K^2}{4} \delta_K^{-1} \frac{1}{p_K^2} \right) |\widehat{u}|_{s_{K+1}, \widehat{K}}^2 \right\}. \quad (2.2.44)$$

Para estimar B , usaremos novamente o Teorema 2.8 com a desigualdade do traço (2.1.17) aplicada ao elemento K , i.e.,

$$\|v\|_{\partial K}^2 \leq C(\|\nabla v\|_K \|v\|_K + h_K^{-1} \|v\|_K^2), \quad (2.2.45)$$

assim,

$$\begin{aligned} B &\leq C \sum_K \left\{ \left(\frac{h_K}{2} \right)^{s_K} \Phi(p_K, s_K)^{1/2} \left(\frac{h_K}{2} \right)^{s_{K+1}} \Phi(p_K, s_K)^{1/2} \frac{1}{\sqrt{p_K^2 + p_K}} |\widehat{u}|_{s_{K+1}, \widehat{K}}^2 \right. \\ &\quad \left. + h_K^{-1} \left(\frac{h_K}{2} \right)^{2s_K+2} \Phi(p_K, s_K) \frac{1}{p_K^2 + p_K} |\widehat{u}|_{s_{K+1}, \widehat{K}}^2 \right\}. \end{aligned}$$

Então,

$$B \leq C \sum_K \left\{ \left(\frac{h_K}{2} \right)^{2s_K+1} \Phi(p_K, s_K) \frac{1}{p_K} |\widehat{u}|_{s_{K+1}, \widehat{K}}^2 \right\}. \quad (2.2.46)$$

Substituindo (2.2.46) e (2.2.44) em (2.2.43) e usando a definição de δ_K

$$\begin{aligned} \| \|u - u_{DG}\| \|_{DG} \leq C \left\{ \sum_K \left\{ \left(\frac{h_K}{2} \right)^{2s_K} \Phi(p_K, s_K) \left(\frac{h_K}{p_K} + \frac{h_K^2 p_K}{p_K^2 h_K} \right) |\widehat{u}|_{s_K+1, \widehat{K}}^2 \right\} \right. \\ \left. + \sum_K \left\{ \left(\frac{h_K}{2} \right)^{2s_K+1} \Phi(p_K, s_K) \frac{1}{p_K} |\widehat{u}|_{s_K+1, \widehat{K}}^2 \right\} \right\}^{1/2}, \end{aligned}$$

o que prova o teorema. □

Observação 2.10. *Note que:*

- a) Se $p_K = p$ é fixo, e $h_K = h \rightarrow 0$, a estimativa (2.2.42) é ótima em h .
- b) Se s é fixo e $p_K = p \gg 1$, usando a fórmula de Stirling ($n! = Cn^{n+1/2}e^{-n}$) (S.) temos que,

$$\Phi(p, s) \leq C(s)p^{-2s}$$

e (2.2.42) se reduz a,

$$\| \|u - u_{DG}\| \|_{pDG}^2 \leq C \sum_{K \in \mathcal{T}} \left(\frac{h_K}{p_K} \right)^{2s_K+1} |\widehat{u}|_{s_K+1, \widehat{K}}^2.$$

Assim, a estimativa (2.2.42) também é ótima em p .

Convergência Exponencial

Afim de determinar uma convergência exponencial supomos que u é uma função analítica sobre todos os retalhos. Então,

$$\forall \widehat{K} \in \mathcal{T} \exists d_K > 1, C > 0 \forall s > 0; |\widehat{u}|_{s, \widehat{K}} \leq C(d_K)^s s! |\widehat{K}|^{1/2},$$

em que $|\widehat{K}|$ denota a medida de \widehat{K} .

Tomando $s = \epsilon p$, em que $0 < \epsilon < 1$ será selecionado abaixo, e notando

que $\Phi(p, s) \leq \frac{(p-s)!}{(p+s)!}$ junto com a fórmula de Stirling temos,

$$\begin{aligned}
\Phi(p, s) |\widehat{u}|_{s+1, \widehat{K}}^2 &\leq C(d_K)^{2s+2} ((s+1)!)^2 \frac{(p-s)!}{(p+s)!} |\widehat{K}| \\
&\stackrel{S.}{\leq} C(d_K)^{2\epsilon p+2} (\epsilon p+1)^{2\epsilon p+3} e^{-2\epsilon p-2} \frac{(p-\epsilon p)!}{(p+\epsilon p)!} |\widehat{K}| \\
&\stackrel{S.}{\leq} C(d_K)^{2\epsilon p+2} (\epsilon p+1)^{2\epsilon p+3} e^{-2\epsilon p-2} \frac{((1-\epsilon)p)^{(1-\epsilon)p+1/2} e^{-(1-\epsilon)p}}{((1+\epsilon)p)^{(1+\epsilon)p+1/2} e^{-(1+\epsilon)p}} |\widehat{K}| \\
&\leq C(d_K)^{2\epsilon p+2} (\epsilon p+1)^{2\epsilon p+3} \left(\frac{(1-\epsilon)^{(1-\epsilon)}}{(1+\epsilon)^{(1+\epsilon)}} \right)^p \frac{p^{(1-\epsilon)p} (1-\epsilon)^{1/2}}{p^{(1+\epsilon)p} (1+\epsilon)^{1/2}} e^{-2} |\widehat{K}| \\
&\leq C(d_K)^{2\epsilon p} d_K^2 (\epsilon p+1)^{2\epsilon p} (\epsilon p+1)^3 \left(\frac{(1-\epsilon)^{(1-\epsilon)}}{(1+\epsilon)^{(1+\epsilon)}} \right)^p p^{-2\epsilon p} \frac{(1-\epsilon)^{1/2}}{(1+\epsilon)^{1/2}} |\widehat{K}|.
\end{aligned}$$

Sendo que $\frac{(1-\epsilon)^{1/2}}{(1+\epsilon)^{1/2}} < 1$, $(\epsilon p+1)^{2\epsilon p} < (\epsilon p)^{2\epsilon p}$ e $(\epsilon p+1)^3 < (\epsilon p)^3$ temos que,

$$\begin{aligned}
\Phi(p, s) |\widehat{u}|_{s, \widehat{K}}^2 &\leq C d_K^{2\epsilon p} \epsilon^{2\epsilon p} p^{2\epsilon p} (\epsilon p)^3 \left(\frac{(1-\epsilon)^{(1-\epsilon)}}{(1+\epsilon)^{(1+\epsilon)}} \right)^p p^{-2\epsilon p} |\widehat{K}| \\
&\leq C p^3 \left((\epsilon d_K)^{2\epsilon} \frac{(1-\epsilon)^{(1-\epsilon)}}{(1+\epsilon)^{(1+\epsilon)}} \right)^p |\widehat{K}|.
\end{aligned}$$

Definindo,

$$F(d, \epsilon) := \frac{(1-\epsilon)^{(1-\epsilon)}}{(1+\epsilon)^{(1+\epsilon)}} (\epsilon d)^{2\epsilon},$$

e notando que,

$$\min_{0 < \epsilon < 1} F(d, \epsilon) = F(d, \epsilon_{min}) < 1, \quad \epsilon_{min} = \frac{1}{\sqrt{1+d^2}},$$

segue-se tomando $2b_K = |\log F(d_K, \epsilon_{min})|$ que

$$\Phi(p_K, \epsilon p_K) |\widehat{u}|_{\epsilon p_K+1, \widehat{K}}^2 \leq C p_K^3 e^{-2b_K p_K} |\widehat{K}|,$$

e obtemos de (2.2.42) a seguinte convergência exponencial estimada com respeito

para p sobre \mathcal{T} .

$$\|u - u_{DG}\|_{p,DG}^2 \leq C \sum_{K \in \mathcal{T}} \left(\frac{h_K}{2}\right)^{2s_K+1} p_K^2 e^{-2b_K p_K} |\hat{K}| \quad (2.2.47)$$

2.2.3 Resultados numéricos

Apresentamos nesta seção, exemplos numéricos que confirmam os resultados teóricos da seção anterior, i.é., o Teorema 2.9 e (2.2.47).

Os problemas de valores de contorno que vamos aproximar numericamente nesta dissertação estão todos definidos sobre o quadrado unitário, i.é., $\Omega = (-1, 1)^2$. Como será observado posteriormente, a parte da fronteira que corresponde a entrada de fluxo Γ_- é $y = -1$ e $x = -1$. Desta forma, trabalhamos com uma malha constituída de quadrados uniformemente distribuídos, os quais foram enumerados conforme a Figura 2.4.

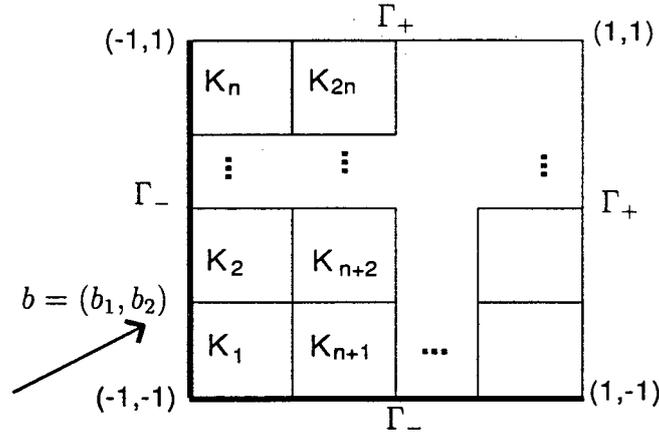


Figura 2.4: Enumeração dos elementos da malha para implementação

Sobre o elemento de referência, usamos o espaço Q_p para $1 \leq p \leq 7$, gerado pelo produto tensorial dos polinômios de Legendre. Para integração numérica usamos quadratura de Gauss com 20 pontos, e na resolução do sistema linear local foi usado decomposição LU . Toda implementação foi realizada na linguagem de programação C++.

Exemplo 2.11. Consideremos o problema de valor de contorno (2.2.1), com os seguintes dados: $\Omega = (-1, 1)^2$, $b = (8/10, 6/10)$, $c = 1$, $g_D = 1$ e a parte direita f é

escolhida de forma que a solução analítica para (2.2.1) seja dada por,

$$u(x, y) = 1 + \sin(\pi(1+x)(1+y)^2/8). \quad (2.2.48)$$

Então, calculamos a solução numérica u_{DG} usando o algoritmo definido por (2.2.4) com $\delta = h/p$.

Observe que a direção do campo de fluxo na fronteira Γ_- deste exemplo, confere com a indicada na Figura 2.4.

Primeiro analisamos o comportamento do hp -DGFEM sobre uma seqüência de refinamentos da malha para diferentes valores de p .

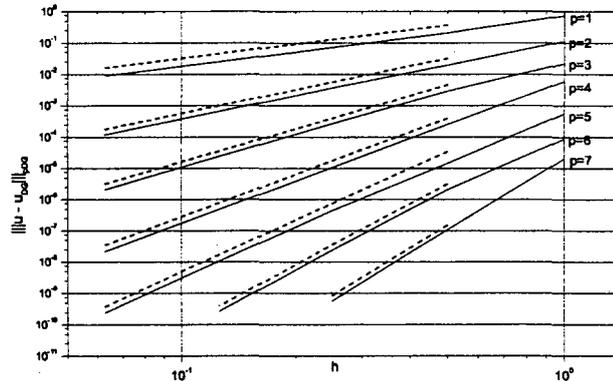


Figura 2.5: Exemplo 2.11. Convergência do hp -DGFEM com h -refinamento

A Figura 2.5 apresenta o comportamento do erro $\|u - u_{DG}\|_{p,DG}$ em escala logarítmica, como uma função de h para valores de p entre 1 e 7.

Aqui, para cada p , a linha pontilhada tem a propriedade de passar pelo “primeiro” ponto (quando $h = 1$) com uma inclinação $p + 1/2$ (que corresponde $h^{p+1/2}$ em escala linear), que por conveniência foi levemente deslocada para cima. Como se pode ver na Figura 2.5, de fato, o erro $\|u - u_{DG}\|_{p,DG}$ converge na ordem de $h^{p+1/2}$, quando h tende a zero para cada p (fixo).

O comportamento do hp -DGFEM com p -enriquecimento para valores de h fixos, é apresentado na Figura 2.6. Aqui para cada gráfico é indicado a malha usada. Sendo que a solução (2.2.48) é uma função analítica, espera-se taxas de convergência exponencial (como foi notado em (2.2.47)), o que de fato é observado: pois sobre uma escala linear-logarítmica, a convergência para cada malha é aproximadamente uma linha reta.

No próximo exemplo mostramos o comportamento do método para um problema com coeficientes variáveis.

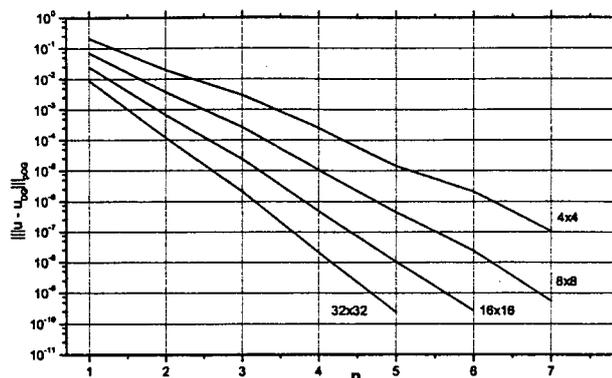


Figura 2.6: Exemplo 2.11. Convergência do hp -DGFEM sobre p -enriquecimento

Exemplo 2.12. Consideremos o problema de valor de contorno (2.2.1) com os seguintes dados: $\Omega = (-1, 1)^2$, $b = (2 - y^2, 2 - x)$, $c = 1 + (1 + x)(1 + y)^2$, $g_D = 1$ e a parte direita f é escolhida de forma que a solução analítica para (2.2.1) seja dada por

$$u(x, y) = 1 + \sin(\pi(1 + x)(1 + y)^2/8). \quad (2.2.49)$$

Então, calculamos a solução numérica u_{DG} usando o algoritmo definido por (2.2.4) com $\delta = h/p$.

A direção do campo de fluxo na fronteira Γ_- deste exemplo, está “indicada” na Figura 2.4 e na Figura 2.7 o comportamento do erro $\|u - u_{DG}\|_{pDG}$ como uma função de h para valores de p entre 1 e 7.

Assim como no exemplo anterior, temos que $\|u - u_{DG}\|_{pDG}$ converge na ordem de $h^{p+1/2}$ quando h tende a zero para cada p (fixo).

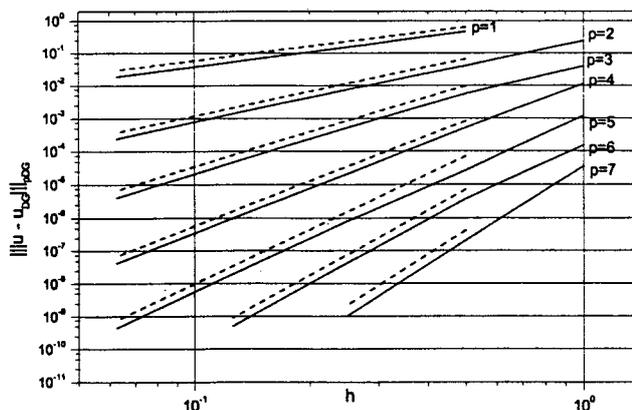


Figura 2.7: Exemplo 2.12. Convergência do hp -DGFEM com h -refinamento

A convergência do hp -DGFEM com p -enriquecimento para valores de

h fixos, é observada na Figura 2.8. E aqui, novamente se pode observar uma convergência exponencial.

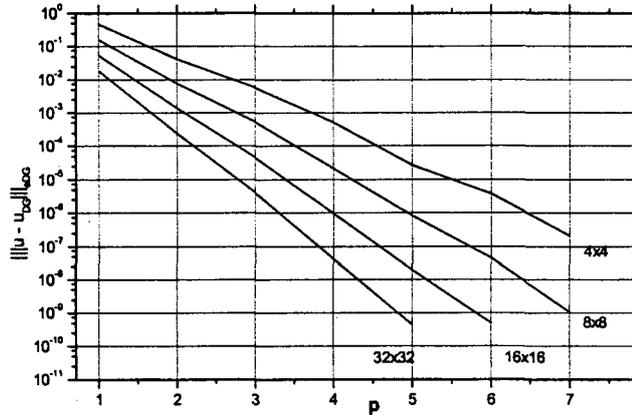


Figura 2.8: Exemplo 2.12. Convergência do hp -DGFEM sobre p -enriquecimento

2.2.4 Método “streamline diffusion”

Abordaremos brevemente a hp -versão do método “streamline diffusion” (hp -SDFEM) para a equação (2.2.1).

Espaços de polinômios

Sobre o elemento de referência consideramos agora os hp -espaços de elementos finitos contínuos. Assumimos que \mathcal{T} é regular ou 1-irregular e que o grau dos polinômios p_K são uniformes, i.é., $p_K = p \forall K$. Então para $p \geq 1$ definimos

$$S^{p,1}(\Omega, \mathcal{T}, F) = S^p(\Omega, \mathcal{T}, F) \cap H^1(\Omega)$$

Nota: Aqui a continuidade entre as fronteiras dos elementos K é agora forçada.

Se o grau dos polinômios não é uniforme, precisamos forçar a continuidade sobre as fronteiras. Podemos fazer isso de duas formas; supondo que K' e K tem uma fronteira em comum e que $p_K < p_{K'}$, então podemos enriquecer o espaço em K ou enfraquecer o espaço em K' . Nesse caso,

$$S^{p,1}(\Omega, \mathcal{T}, F) = S^p(\Omega, \mathcal{T}, F) \cap H^1(\Omega).$$

hp-SDFEM

O hp-SDFEM para a equação (2.2.1) é definido como segue:
 Encontre $u_{SD} \in S^{p,1} = S^{p,1}(\Omega, \mathcal{T}, F)$, tal que,

$$(\mathcal{L}_0 u_{SD}, v + \delta \mathcal{L}_0 v) + \langle u_{SD}, v \rangle_{\Gamma_-} = (f, v + \delta \mathcal{L}_0 v) + \langle g, v \rangle_{\Gamma_-} \quad \forall v \in S^{p,1}. \quad (2.2.50)$$

A estabilidade do método está expressa no próximo lema.

Lema 2.13. *Supondo que (2.1.14) vale, então, u_{SD} satisfaz a seguinte estimativa:*

$$\begin{aligned} & \|\sqrt{\delta} \mathcal{L}_0 u_{SD}\|_{\Omega}^2 + \alpha \|u_{SD}\|_{\Omega}^2 + \|u_{SD}\|_{\Gamma_+}^2 + \frac{1}{2} \|u_{SD}\|_{\Gamma_-}^2 \\ & \leq \|\sqrt{\delta} f\|_{\Omega}^2 + \frac{1}{\alpha} \|f\|_{\Omega}^2 + 2 \|g\|_{\Gamma_-}^2. \end{aligned}$$

Demonstração:

Selecionando $v = u_{SD}$ em (2.2.50) e suprimindo o subíndice Ω temos que,

$$\begin{aligned} & \|\sqrt{\delta} \mathcal{L}_0 u_{SD}\|^2 + (b \cdot \nabla u_{SD}, u_{SD}) + (c u_{SD}, u_{SD}) + \langle u_{SD}, u_{SD} \rangle_{\Gamma_-} \\ & = \|\sqrt{\delta} \mathcal{L}_0 u_{SD}\|^2 + ((c - \frac{1}{2} \nabla \cdot b) u_{SD}, u_{SD}) + \frac{1}{2} \int_{\partial \Omega} (b \cdot n) u_{SD}^2 ds + \langle u_{SD}, u_{SD} \rangle_{\Gamma_-} \\ & \stackrel{def.}{=} \|\sqrt{\delta} \mathcal{L}_0 u_{SD}\|^2 + \|c_0 u_{SD}\|^2 + \frac{1}{2} \|u_{SD}\|_{\Gamma_-}^2 + \frac{1}{2} \|u_{SD}\|_{\Gamma_+}^2 \quad (2.2.51) \\ & \stackrel{(2.1.14)}{\leq} \|\sqrt{\delta} \mathcal{L}_0 u_{SD}\|^2 + \alpha \|u_{SD}\|^2 + \frac{1}{2} \|u_{SD}\|_{\Gamma_-}^2 + \frac{1}{2} \|u_{SD}\|_{\Gamma_+}^2. \end{aligned}$$

Para o lado direito,

$$\begin{aligned} & (f, u_{SD} + \delta \mathcal{L}_0 u_{SD}) + \langle g, u_{SD} \rangle_{\Gamma_-} \\ & \stackrel{C.S.}{\leq} \frac{1}{\alpha} \|f\|_{\Omega} \|u_{SD}\| + \|\sqrt{\delta} f\| \|\sqrt{\delta} \mathcal{L}_0 u_{SD}\| + \|g\|_{\Gamma_-} \|u_{SD}\|_{\Gamma_-} \\ & \stackrel{A.G.}{\leq} \frac{1}{2\alpha} \|f\|^2 + \frac{\alpha}{2} \|u_{SD}\|^2 + \frac{1}{2} \|\sqrt{\delta} f\|^2 + \frac{1}{2} \|\sqrt{\delta} \mathcal{L}_0 u_{SD}\|^2 + \|g\|_{\Gamma_-}^2 + \frac{1}{4} \|u_{SD}\|_{\Gamma_-}^2. \end{aligned}$$

Agrupando os termos semelhantes chegamos a,

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{1}{2}\right) \|\sqrt{\delta} \mathcal{L}_0 u_{SD}\|_{\Omega}^2 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) \alpha \|u_{SD}\|_{\Omega}^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) \|u_{SD}\|_{\Gamma_-}^2 + \frac{1}{2} \|u_{SD}\|_{\Gamma_+}^2 \\ & \leq \frac{1}{2} \|\sqrt{\delta} f\|_{\Omega}^2 + \frac{1}{2\alpha} \|f\|_{\Omega}^2 + \|g\|_{\Gamma_-}^2, \end{aligned}$$

e multiplicando por 2 temos o resultado. □

Com a decomposição $u - u_{SD} = (u - \Pi u) + (\Pi u - u_{SD}) \equiv \eta + \xi$ obtemos o seguinte resultado.

Lema 2.14. *Assumindo que (2.1.14) vale e que $u \in H^1(\Omega)$. Então, vale a seguinte estimativa:*

$$\begin{aligned} \|\sqrt{\delta} \xi\|_{\Omega}^2 + \|c_0 \xi\|_{\Omega}^2 + \|\xi\|_{\Gamma_-}^2 + \frac{1}{2} \|\xi\|_{\Gamma_+}^2 & \leq \left\| \sqrt{\delta} \mathcal{L}_0 \eta - \frac{1}{\sqrt{\delta}} \eta \right\|_{\Omega}^2 \\ & + 4 \|c_0 \eta\|_{\Omega}^2 + 2 \|\eta\|_{\Gamma_+}^2, \end{aligned}$$

em que c_0 é definida por (2.2.5).

Demonstração:

Para $v, w \in H^1(\Omega)$ definimos a forma bilinear

$$B(w, v) = (\mathcal{L}_0 w, v + \delta \mathcal{L}_0 v) + \langle w, v \rangle_{\Gamma_-}$$

e o funcional linear

$$l(v) = (f, v + \delta \mathcal{L}_0 v) + \langle g, v \rangle_{\Gamma_-}$$

Por (2.2.16)

$$B(\xi, \xi) = -B(\eta, \xi)$$

e por (2.2.51)

$$\|\sqrt{\delta}\mathcal{L}_0u_{SD}\|^2 + \|c_0u_{SD}\|^2 + \frac{1}{2}\|u_{SD}\|_{\Gamma_-}^2 + \frac{1}{2}\|u_{SD}\|_{\Gamma_+}^2 = -B(\eta, \xi). \quad (2.2.52)$$

Repetindo o cálculo feito na demonstração do Lema 2.4, obtemos que (ver (2.2.22))

$$-B(\eta, \xi) \leq \frac{1}{2}\left\|\sqrt{\delta}\mathcal{L}_0\eta - \frac{1}{\sqrt{\delta}}\eta\right\|^2 + \frac{1}{2}\|\sqrt{\delta}\mathcal{L}_0\xi\|^2 + \frac{1}{2}\|c_0\xi\|^2 + 2\|c_0\eta\|^2 + \|\eta\|_{\Gamma_+}^2 + \frac{1}{4}\|\xi\|_{\Gamma_+}^2. \quad (2.2.53)$$

Substituindo (2.2.53) em (2.2.52) e multiplicando o resultado por 2 temos provado o Lema 2.14. □

Usando os resultados da seção 2.2.2 mostra-se o seguinte teorema “equivalente” ao Teorema 2.8 para os caso de aproximação contínua.

Teorema 2.15. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ e seja $P \in \mathcal{P}$ com malha regular ou 1-irregular constituída de quadriláteros K com diâmetro h_K . Supondo que o grau de polinômios é uniforme, i.é., $p_K = p \geq 1$, e $u|_K \in H^{k_K+1}(K)$ para algum $k_K \geq 1$ com $u \in H^2(P)$. Então, existe um projetor $\tilde{\Pi}u \in S^{p,1}(\Omega, \mathcal{T}, F)$, tal que, as seguintes estimativas de erro valem:*

$$\|u - \tilde{\Pi}u\|_P^2 \leq C \frac{1}{p(p+1)} \Phi(p, s) \sum_{K \in \mathcal{T}} \left(\frac{h_K}{2}\right)^{2s_K+2} |\hat{u}|_{s_K+1, \hat{K}}^2 \quad (2.2.54)$$

e

$$\|\nabla(u - \tilde{\Pi}u)\|_P^2 \leq C \Phi(p, s) \sum_{K \in \mathcal{T}} \left(\frac{h_K}{2}\right)^{2s_K} |\hat{u}|_{s_K+1, \hat{K}}^2,$$

para $0 \leq s_K \leq \min(p, k_K)$, em que C é uma constante positiva que depende somente de F_P e independe de s, p, h_K . Se \mathcal{T}_P tem nódulos pendurados perde-se o fator $1/p$ em (2.2.54).

Ver prova na pg. 1631 em [11].

Assim, obtém-se uma estimativa de erro para o hp -SDFEM que é análoga ao Teorema 2.9.

Teorema 2.16. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ e \mathcal{T}, \mathcal{P} como definidos anteriormente com uma malha 1-irregular composta de elementos quadriláteros com grau de polinômios $p_K = p \geq 1$. Seleccionando,*

$$\delta_{|K} = \delta_K = h_K/p_K \quad \forall K \in \mathcal{T}.$$

Então, na ausência de nódulos pendurados, vale a seguinte estimativa de erro,

$$\| \|u - u_{SD}\| \|_{SD}^2 \leq C \sum_{K \in \mathcal{T}} \left(\frac{h_K}{2} \right)^{2s_K+1} \frac{\Phi(p, s_K)}{p} |\hat{u}|_{s_K+1, \hat{K}}^2 \quad (2.2.55)$$

em que

$$\| \|w\| \|_{SD}^2 := \|\sqrt{\delta} \mathcal{L}_0 w\|^2 + \|c_0 w\|^2 + \frac{1}{2} \|w\|_{\Gamma_+}^2 + \|w\|_{\Gamma_-}^2$$

e

$$0 \leq s_K \leq p \quad \forall K \in \mathcal{T}, \quad \hat{u} = u \circ F_P \text{ se } K \in \mathcal{T}_P,$$

sendo $\Phi(p_K, s_K)$ definida por (2.2.34). Se a malha tem nódulos pendurados, o fator p é suprimido do denominador de (2.2.55).

2.3 Equação de advecção sem parâmetro de estabilidade

Consideramos novamente o problema (2.2.1), porém, com a formulação variacional de Galerkin padrão.

2.3.1 Formulação padrão do método de Galerkin descontínuo para a equação de advecção

Suprimindo os subíndices K , para $v, w \in H^1(\Omega, \mathcal{T})$ definimos a forma bilinear

$$A(w, v) = \sum_{K \in \mathcal{T}} \left\{ \int_K \mathcal{L}_0 w v dx - \int_{\partial_- K \setminus \Gamma_-} (b \cdot n) [w] v^+ ds - \int_{\partial_- K \cap \Gamma_-} (b \cdot n) w^+ v^+ ds \right\}, \quad (2.3.1)$$

e o funcional linear

$$l_A(v) = \sum_{K \in \mathcal{T}} \left\{ \int_K f v dx - \int_{\partial_- K \cap \Gamma_-} (b \cdot n) g_D v^+ ds \right\}.$$

A aproximação hp -DGFEM padrão para (2.2.1) é definida assim:
Encontre $u_{DG} \in S^{\mathbf{P}}(\Omega, \mathcal{T}, F)$, tal que,

$$A(u_{DG}, v) = l_A(v) \quad \forall v \in S^{\mathbf{P}}(\Omega, \mathcal{T}, F). \quad (2.3.2)$$

O lema seguinte caracteriza a estabilidade do problema discreto (2.3.2).

Lema 2.17. *A solução u_{DG} de (2.3.2) satisfaz a seguinte estimativa:*

$$\begin{aligned} \sum_K \left\{ \|c_0 u_{DG}\|_K^2 + \frac{1}{2} \|u_{DG}^+\|_{\partial_- K \cap \Gamma_-}^2 + \|u_{DG}^+ - u_{DG}^-\|_{\partial_- K \setminus \Gamma}^2 + \|u_{DG}^+\|_{\partial_+ \cap \Gamma}^2 \right\} \\ \leq \sum_K \left\{ \|c_0^{-1} f\|_K^2 + 2 \|g_D\|_{\partial_- K \cap \Gamma_-}^2 \right\}. \end{aligned}$$

A demonstração segue do Lema 2.3 quando $\delta = 0$.

Como a solução de (2.2.1), pode somente apresentar descontinuidades através das hipersuperfícies características, então, para qualquer hipersuperfície $S \subset \Omega$, com vetor normal n o fluxo normal da solução $bu \cdot n$ é uma função contínua através de S , mesmo se u tem uma descontinuidade em S (para esse último caso $b \cdot n = 0$ sobre S). Assim, $(b \cdot n)[u] = [bu] \cdot n = 0$ sobre S e o método (2.3.2) é consistente. Por isso, a solução u de (2.2.1) satisfaz (2.3.2) e temos a propriedade da ortogonalidade de Galerkin, i.é.,

$$A(u - u_{DG}, v) = 0 \quad \forall v \in S^{\mathbf{P}}.$$

Hipótese 2.18. *Vamos supor que*

$$b \cdot \nabla_{\mathcal{T}} v \in S^{\mathbf{P}} \quad \forall v \in S^{\mathbf{P}}. \quad (2.3.3)$$

Decompomos o erro global $u - u_{DG}$ como,

$$u - u_{DG} = (u - \Pi_p u) + (\Pi_p u - u_{DG}) \equiv \eta + \xi,$$

em que Π_p denota o projetor ortogonal de $L_2(\Omega)$ sobre o espaço $S^{\mathbf{P}}$, i.é., dado

$u \in L_2(\Omega)$, $\Pi_p u$ é definido por,

$$(u - \Pi_p u, v) = 0 \quad \forall v \in S^p. \quad (2.3.4)$$

Lema 2.19. *Assume (2.3.3) e (2.2.5) e seja $\gamma_1 = \text{ess. sup}_{x \in \Omega} |c_1(x)|$ em que $c_1(x) = (c(x) - (\nabla \cdot b)(x)) / (c_0(x))^2$, então, as funções ξ e η satisfazem a desigualdade,*

$$\begin{aligned} \sum_K \left\{ \|c_0 \xi\|_K^2 + \|\xi^+\|_{\partial_- K \cap \Gamma_-}^2 + \frac{1}{2} \|\xi^+ - \xi^-\|_{\partial_- K \setminus \Gamma}^2 + \frac{1}{2} \|\xi^+\|_{\partial_+ \cap \Gamma}^2 \right\} \\ \leq \sum_K \left\{ \gamma_1^2 \|c_0 \eta\|_K^2 + 2 \|\eta^+\|_{\partial_+ K \cap \Gamma}^2 + 2 \|\eta^-\|_{\partial_- K \setminus \Gamma}^2 \right\}. \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

Demonstração:

Por (2.2.16)

$$A(\xi, \xi) = -A(\eta, \xi), \quad (2.3.6)$$

então, integrando por partes e usando a definição de c_0 assim como feito no Lema 2.3 com $\delta = 0$ temos que (ver (2.2.12))

$$A(\xi, \xi) = \sum_K \left\{ \|c_0 \xi\|_K^2 + \frac{1}{2} \|\xi^+\|_{\partial_- K \cap \Gamma_-}^2 + \frac{1}{2} \|\xi^+ - \xi^-\|_{\partial_- K \setminus \Gamma_-}^2 + \frac{1}{2} \|\xi^+\|_{\partial_+ K \cap \Gamma_+}^2 \right\}. \quad (2.3.7)$$

Sendo que, $(\eta, v) = (u - \Pi u, v) = 0 \quad \forall v \in S^p$ usando (2.3.3) chegamos que,

$$\int_K \eta (b \cdot \nabla \xi) dx = 0 \quad \forall K \in \mathcal{T}, \quad (2.3.8)$$

então, para os termos sobre K em $A(\eta, \xi)$

$$\begin{aligned}
\sum_K \int_K \mathcal{L}_0 \eta \xi dx &= \sum_K \int_K (b \cdot \nabla \eta) \xi dx + \sum_K \int_K c \eta \xi dx \\
&= \sum_K \int_K (-b \cdot \nabla \xi - (\nabla \cdot b) \xi + c \xi) \eta dx + \sum_K \int_{\partial K} (b \cdot n) \eta^+ \xi^+ ds \\
&\stackrel{(2.3.8)}{=} \sum_K \int_K \frac{(c - (\nabla \cdot b)) c_0^2}{c_0^2} \xi \eta dx + \sum_K \int_{\partial K} (b \cdot n) \eta^+ \xi^+ ds \\
&= \sum_K \int_K c_1 c_0^2 \xi \eta dx + \sum_K \int_{\partial K} (b \cdot n) \eta^+ \xi^+ ds. \tag{2.3.9}
\end{aligned}$$

e para as integrais sobre ∂K temos,

$$\begin{aligned}
&\sum_K \int_{\partial K} (b \cdot n) \eta^+ \xi^+ ds - \sum_K \int_{\partial_{-K} \setminus \Gamma_-} (b \cdot n) [\eta] \xi^+ ds - \sum_K \int_{\partial_{-K} \cap \Gamma_-} (b \cdot n) \eta^+ \xi^+ ds \\
&\leq \sum_K \left| \int_{\partial_{+K} \cap \Gamma_+} (b \cdot n) \eta^+ \xi^+ ds \right| + \sum_K \left| \int_{\partial_{-K} \setminus \Gamma_-} (b \cdot n) \eta^- (\xi^+ - \xi^-) ds \right|, \tag{2.3.10}
\end{aligned}$$

sendo a última desigualdade válida por (2.2.19) e (2.2.20). Então, de (2.3.9) e (2.3.10) chegamos a,

$$\begin{aligned}
A(\eta, \xi) &\leq \sum_K \left\{ \frac{1}{2} \|c_0 \xi\|_K^2 + \frac{1}{2} \gamma_1^2 \|c_0 \eta\|_K^2 + \frac{1}{4} \|\xi^+\|_{\partial_{+K} \cap \Gamma_+}^2 + \|\eta^+\|_{\partial_{+K} \cap \Gamma_+}^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{4} \|\xi^+ - \xi^-\|_{\partial_{-K} \setminus \Gamma_-}^2 + \|\eta^-\|_{\partial_{-K} \setminus \Gamma_-}^2 \right\} \tag{2.3.11}
\end{aligned}$$

Combinando (2.3.11), (2.3.6) e (2.3.7) temos (2.3.5). □

Por (2.3.7), definimos a DG-norma $\|\cdot\|_{aDG}$ por

$$\|w\|_{aDG}^2 := \frac{1}{2} \sum_K \left\{ 2 \|c_0 w\|_K^2 + \|w^+\|_{\partial_{-K} \cap \Gamma_-}^2 + \|w^+ - w^-\|_{\partial_{-K} \setminus \Gamma_-}^2 + \|w^+\|_{\partial_{+K} \cap \Gamma_+}^2 \right\}.$$

2.3.2 Estimativas *a priori* para o erro do método de Galerkin descontínuo padrão para a equação de advecção

Afim de usar o produto tensorial vamos assumir que $\forall K \in \mathcal{T}$, K é um n -paralelepípedo, i.é., $\widehat{K} = (-1, 1)^n$ e iniciamos com o seguinte resultado apresentado na pg. 72 em [20].

Lema 2.20. *Seja $I = (-1, 1)$ e $\widehat{u} \in H^k(I)$ para algum $k \geq 1$. Então, vale a seguinte estimativa de erro para qualquer inteiro s , $0 \leq s \leq \min(p+1, k)$, com $W = W(\widehat{x}) = (1 - \widehat{x}^2)^{1/2}$.*

$$\|\widehat{u} - \widehat{\Pi}_p \widehat{u}\|_I^2 \leq \frac{\Gamma(p+2-s)}{\Gamma(p+2+s)} \|W^s \widehat{u}^{(s)}\|_I^2 \leq \frac{\Gamma(p+2-s)}{\Gamma(p+2+s)} |\widehat{u}|_{s,I}^2 \quad (2.3.12)$$

em que $\widehat{\Pi}_p$ denota o projetor de $L_2(I)$ em $P_p(I)$, $p \geq 0$.

Usaremos o produto tensorial para que estimativas semelhantes a (2.3.12), sejam válidas para $\widehat{K} = (-1, 1)^n$. Para tanto, definimos por $\widehat{\Pi}_p$ (usando a mesma notação, o contexto deixa claro qual projetor se trata) o projetor de $L_2(\widehat{K})$ sobre $Q_p(\widehat{K})$ com $\widehat{\Pi}_p = \widehat{\Pi}_p^1 \widehat{\Pi}_p^2 \dots \widehat{\Pi}_p^n$, sendo que, $\widehat{\Pi}_p^i$ é o projetor de $L_2(I)$ sobre o espaço de polinômios de grau p na variável \widehat{x}_i .

Assim, para $n > 1$ podemos obter estimativas para $\widehat{u} - \widehat{\Pi}_p \widehat{u}$ sobre \widehat{K} de (2.3.12). Por exemplo para $n = 2$ temos que,

$$\widehat{u} - \widehat{\Pi}_p \widehat{u} = \widehat{u} - \widehat{\Pi}_p^1 \widehat{\Pi}_p^2 \widehat{u} = \widehat{u} - \widehat{\Pi}_p^1 \widehat{u} + \widehat{\Pi}_p^1 (\widehat{u} - \widehat{\Pi}_p^2 \widehat{u}),$$

e lembrando que $\widehat{\Pi}_p^1$ tem norma 1, chegamos que,

$$\|\widehat{u} - \widehat{\Pi}_p \widehat{u}\|_{\widehat{K}} \leq \|\widehat{u} - \widehat{\Pi}_p^1 \widehat{u}\|_{\widehat{K}} + \|\widehat{u} - \widehat{\Pi}_p^2 \widehat{u}\|_{\widehat{K}}. \quad (2.3.13)$$

Para $n > 2$, inteirando (2.3.13) temos que,

$$\|\widehat{u} - \widehat{\Pi}_p \widehat{u}\|_{\widehat{K}} \leq \sum_{i=1}^n \|\widehat{u} - \widehat{\Pi}_p^i \widehat{u}\|_{\widehat{K}}. \quad (2.3.14)$$

De (2.3.12) e (2.3.14) chegamos ao seguinte resultado.

Lema 2.21. *Seja $\widehat{K} = (-1, 1)^n$, $n \geq 1$ e $\widehat{u} \in H^k(\widehat{K})$ para algum $k \geq 1$. Então, vale a seguinte estimativa para qualquer inteiro s , $0 \leq s \leq \min(p+1, k)$, com*

$$W_i = W_i(\hat{x}_i) = (1 - \hat{x}_i^2)^{1/2},$$

$$\|\hat{u} - \hat{\Pi}_p \hat{u}\|_{\hat{K}} \leq \left(\frac{\Gamma(p+2-s)}{\Gamma(p+2+s)} \right)^{1/2} \sum_{i=1}^n \|W_i^s \partial_i^s \hat{u}\|_{\hat{K}} \leq C(n) \left(\frac{\Gamma(p+2-s)}{\Gamma(p+2+s)} \right)^{1/2} |\hat{u}|_{s, \hat{K}}, \quad (2.3.15)$$

em que $\hat{\Pi}_p$ é o projetor de $L_2(\hat{K})$ em $Q_p(\hat{K})$, $p \geq 0$.

Desde que \mathcal{T} é regular, $K = F_K(\hat{K})$ com F_K afim e sendo $\hat{u} = u \circ F_K$ em (2.3.15) e pelo fato que $(\hat{\Pi}_p \hat{u})(\hat{x}) = (\Pi_p u)(F_K(\hat{x})) \quad \forall \hat{x} \in \hat{K}$, encontramos de (2.2.29) e (2.2.31) que $\forall K \in \mathcal{T}$ e $u \in H^s(K)$, vale a seguinte estimativa:

$$\|u - \Pi_p u\|_K \leq C(n) h^s \left(\frac{\Gamma(p+2-s)}{\Gamma(p+2+s)} \right)^{1/2} |u|_{s, K}, \quad (2.3.16)$$

sendo $0 \leq s \leq \min(p+1, k)$ e Π_p definido por (2.3.4).

Para obtermos uma estimativa de erro da solução aproximada u_{DG} precisamos limitar $\|u - \Pi_p u\|_K$ e também $\|u - \Pi_p u\|_{\partial K}$. Na seção anterior conseguimos limitações para essa última norma usando a desigualdade do traço, que é ótima em h mas sub-ótima em p . Para fugir deste “inconveniente” vamos estimá-la diretamente. Com este fim, primeiro aplicamos K sobre o elemento mestre \hat{K} e consideramos sem perda de generalidade o traço de $u - \Pi_p u$ sobre a face $x_1 = 1$, então, usando argumentos de produto tensorial conseguimos uma estimativa para $\|u - \Pi_p u\|_{\partial K}$ que é ótima em h e também em p .

Lema 2.22. *Seja $I = (-1, 1)$ e $\hat{u} \in H^k(I)$ para algum $k \geq 1$, e seja $\hat{\Pi}_p$ o projetor de $L_2(I)$ em $P_p(I)$, $p \geq 0$, então, vale a seguinte estimativa:*

$$\begin{aligned} |(\hat{u} - \hat{\Pi}_p \hat{u})(1)|^2 &\leq \frac{1}{2p+1} \frac{\Gamma(p+1-t)}{\Gamma(p+1+t)} \|W^t \hat{u}^{(t+1)}\|_I^2 \\ &\leq \frac{1}{2p+1} \frac{\Gamma(p+1-t)}{\Gamma(p+1+t)} |\hat{u}|_{t+1, I}^2, \end{aligned} \quad (2.3.17)$$

para qualquer inteiro t , $0 \leq t \leq \min(p, k-1)$, sendo $W = W(\hat{x}) = (1 - \hat{x}^2)^{1/2}$.

Demonstração:

Se $p = 0$ segue. Vamos supor que $p \geq 1$. Sendo que $\hat{u}' \in L_2(I)$ vamos

escrevê-la em série de Legendre como uma função de \hat{x} em I .

$$\hat{u}' = \sum_{i=0}^{\infty} b_i L_i \quad , \quad b_i = \frac{2i+1}{2} \int_{-1}^1 \hat{u}'(\hat{x}) L_i(\hat{x}) d\hat{x},$$

então,

$$\hat{u}(\hat{x}) = \hat{u}(-1) + \sum_{i=0}^{\infty} b_i \int_{-1}^{\hat{x}} L_i(\zeta) d\zeta,$$

e usando a propriedade dos polinômios de Legendre (ver pg. 360 em [20]) que,

$$L_i(\hat{x}) = \frac{(L'_{i+1}(\hat{x}) - L'_{i-1}(\hat{x}))}{2i+1} \quad , \quad i \geq 1 ,$$

encontramos que,

$$\int_{-1}^{\hat{x}} L_i(\zeta) d\zeta = \frac{L_{i+1}(\hat{x}) - L_{i-1}(\hat{x})}{2i+1} \quad , \quad i \geq 1 .$$

Assim,

$$\begin{aligned} \hat{u}(\hat{x}) &= \hat{u}(-1) + b_0 \int_{-1}^{\hat{x}} L_0(\zeta) d\zeta + \sum_{i=1}^{\infty} b_i \frac{L_{i+1}(\hat{x}) - L_{i-1}(\hat{x})}{2i+1} \\ &= \hat{u}(-1) \cdot 1 + b_0(\hat{x} + 1) + \sum_{i=1}^{\infty} b_i \frac{L_{i+1}}{2i+1} - \sum_{i=1}^{\infty} b_i \frac{L_{i-1}}{2i+1} \\ &= (b_0 + \hat{u}(-1))L_0 + b_0 L_1 + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{b_{i-1}}{2i-1} L_i - \sum_{i=0}^{\infty} \frac{b_{i+1}}{2i+3} L_i \end{aligned}$$

e comparando os coeficientes com $\hat{u} = \sum_{i=0}^{\infty} \hat{u}_i L_i$ temos que,

$$\hat{u}_i = \frac{b_{i-1}}{2i-1} - \frac{b_{i+1}}{2i+3}, \quad i \geq 2 .$$

Então, para $r \geq 2$,

$$\begin{aligned} \sum_{i=r}^{\infty} \hat{u}_i &= \sum_{i=r}^{\infty} \left(\frac{b_{i-1}}{2i-1} - \frac{b_{i+1}}{2i+3} \right) = \sum_{i=r}^{\infty} \frac{b_{i-1}}{2i-1} - \sum_{i=r}^{\infty} \frac{b_{i+1}}{2i+3} \\ &= \sum_{i=r-1}^{\infty} \frac{b_i}{2i+1} - \sum_{i=r+1}^{\infty} \frac{b_i}{2i+1} = \frac{b_{r-1}}{2r-1} + \frac{b_r}{2r+1} \end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=r}^{\infty} \hat{u}_i \right)^2 &= \left(\frac{b_{r-1}}{2r-1} + \frac{b_r}{2r+1} \right)^2 \leq \frac{2(b_{r-1})^2}{(2r-1)^2} + \frac{2(b_r)^2}{(2r+1)^2} \\ &\leq \frac{1}{2r-1} \sum_{i=r-1}^{\infty} \frac{2}{2i+1} |b_i|^2 \leq \frac{1}{2r-1} \|\hat{u}'\|_I^2. \end{aligned}$$

A última desigualdade vale pois,

$$\int_I |\hat{u}'|^2 d\hat{x} = \int_I \left(\sum_{i=0}^{\infty} b_i L_i, \sum_{j=0}^{\infty} b_j L_j \right) d\hat{x} = \int_I \sum_{i=0}^{\infty} |b_i|^2 |L_i|^2 d\hat{x} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2}{2i+1} |b_i|^2.$$

Assim,

$$|(\hat{u} - \hat{\Pi}_p \hat{u})(1)| = \left| \sum_{i=0}^{\infty} \hat{u}_i L_i(1) - \sum_{i=0}^p \hat{u}_i L_i(1) \right|^2 = \left(\sum_{i=p+1}^{\infty} \hat{u}_i \right)^2 \leq \frac{1}{2p+1} \|\hat{u}'\|_I^2, \quad p \geq 1.$$

Seja agora $\hat{v} := \hat{u} - \hat{P}_p \hat{u}$, em que o projetor \hat{P}_p é definido por,

$$(\hat{P}_p w)(\hat{x}) = w(-1) + \int_{-1}^{\hat{x}} (\hat{\Pi}_{p-1}(w'))(\zeta) d\zeta, \quad p \geq 1, \quad w \in H^1(I),$$

então, de (2.3.12) aplicado com $s = t$ e $p \rightarrow p - 1$ temos que,

$$\begin{aligned}
|(\widehat{u} - \widehat{\Pi}_p \widehat{u})(1)|^2 &= |\widehat{u}(1) - (\widehat{P}_p \widehat{u})(1) + (\widehat{P}_p \widehat{u})(1) - (\widehat{\Pi}_p \widehat{u})(1)|^2 \\
&= |(\widehat{u} - \widehat{P}_p \widehat{u})(1) - \widehat{\Pi}_p(\widehat{u} - \widehat{P}_p \widehat{u})(1)|^2 = |\widehat{v}(1) - \widehat{\Pi}_p(\widehat{v})(1)|^2 \\
&\leq \frac{1}{2p+1} \|v'\|_I^2 = \frac{1}{2p+1} \|\widehat{u}' - \widehat{\Pi}_{p-1} \widehat{u}'\|_I^2 \\
&\stackrel{(2.3.12)}{\leq} \frac{1}{2p+1} \frac{\Gamma(p+1-t)}{\Gamma(p+1+t)} \|W^t \widehat{u}^{(t+1)}\|_I^2 \\
&\leq \frac{1}{2p+1} \frac{\Gamma(p+1-t)}{\Gamma(p+1+t)} |\widehat{u}|_{t+1, I}^2
\end{aligned}$$

para $0 \leq t \leq \min(p, k-1)$.

□

Com esse resultado vamos agora estimar $\|\widehat{u} - \widehat{\Pi}_p \widehat{u}\|_{\partial \widehat{K}}$.

Lema 2.23. *Vamos supor que $\widehat{u} \in H^k(\widehat{K})$ para algum $k \geq 1$, e seja s um inteiro com $1 \leq s \leq \min(p+1, k)$, com $p \geq 0$; então vale a seguinte estimativa:*

$$\|\widehat{u} - \widehat{\Pi}_p \widehat{u}\|_{\partial \widehat{K}} \leq C(n) \Phi_1(s, p) |\widehat{u}|_{s, \widehat{K}}, \quad (2.3.18)$$

sendo,

$$\begin{aligned}
\Phi_1(s, p) &= \frac{1}{\sqrt{2p+1}} \left\{ \left(\frac{\Gamma(p+2-s)}{\Gamma(p+s)} \right)^{1/2} + \left(\frac{\Gamma(p+3-s)}{\Gamma(p+1+s)} \right)^{1/2} \right\} \\
&\quad + \left(\frac{\Gamma(p+2-s)}{\Gamma(p+2+s)} \right)^{1/4} \left(\frac{\Gamma(p+3-s)}{\Gamma(p+1+s)} \right)^{1/4} + \left(\frac{\Gamma(p+2-s)}{\Gamma(p+2+s)} \right)^{1/2}
\end{aligned} \quad (2.3.19)$$

Demonstração:

Escrevemos $\widehat{K} = I^{(1)} \times I^{(2)} \times \dots \times I^{(n)}$, e $\widehat{x} = (\widehat{x}_1, \widehat{x}_2, \dots, \widehat{x}_n) \equiv (\widehat{x}_1, \widehat{x}')$ em que $I^{(i)} = (-1, 1)$ na i -ésima direção. Definimos $\widehat{K}' \subset \partial \widehat{K}$ via $\widehat{K} = I^{(1)} \times \widehat{K}'$ e

dividimos $\widehat{\Pi}_p$ em $\widehat{\Pi}_p^1 \widehat{\Pi}'_p$. Então,

$$\begin{aligned} \|(\widehat{u} - \widehat{\Pi}_p \widehat{u})(1, \cdot)\|_{\widehat{K}'} &\leq \|(\widehat{u} - \widehat{\Pi}_p^1 \widehat{u})(1, \cdot)\|_{\widehat{K}'} + \|\widehat{\Pi}_p^1 (\widehat{u} - \widehat{\Pi}'_p \widehat{u})(1, \cdot)\|_{\widehat{K}'} \\ &\equiv T_1 + T_2. \end{aligned} \quad (2.3.20)$$

Vendo as variáveis $(\widehat{x}_2, \widehat{x}_3, \dots, \widehat{x}_n) = \widehat{x}'$ como parâmetros temos que,

$$|(\widehat{u} - \widehat{\Pi}_p^1 \widehat{u})(1, \widehat{x}')|^2 \stackrel{(2.3.17)}{\leq} \frac{1}{2p+1} \frac{\Gamma(p+2-s)}{\Gamma(p+s)} |\widehat{u}(\cdot, \widehat{x}')|_{s, I}^2,$$

para $1 \leq s \leq \min(p+1, k)$, $k \geq 1$. Então, integrando sobre todas as variáveis $(\widehat{x}_2, \widehat{x}_3, \dots, \widehat{x}_n)$ nos respectivos $I^i = (-1, 1)$ chegamos a,

$$T_1 = \|(\widehat{u} - \widehat{\Pi}_p^1 \widehat{u})(1, \cdot)\|_{\widehat{K}'} \leq \frac{1}{\sqrt{2p+1}} \left(\frac{\Gamma(p+2-s)}{\Gamma(p+s)} \right)^{1/2} |\widehat{u}|_{s, \widehat{K}'}, \quad (2.3.21)$$

para $1 \leq s \leq \min(p+1, k)$, $k \geq 1$.

Definindo $w := \widehat{u} - \widehat{\Pi}'_p \widehat{u}$, e notando que,

$$T_2 = \|\widehat{\Pi}_p^1 w(1, \cdot)\|_{\widehat{K}'} \leq \|w(1, \cdot)\|_{\widehat{K}'} + \|(w - \widehat{\Pi}_p^1 w)(1, \cdot)\|_{\widehat{K}'} \equiv T_{21} + T_{22}. \quad (2.3.22)$$

Para T_{22} temos que,

$$T_{22} = \|(w - \widehat{\Pi}_p^1 w)(1, \cdot)\|_{\widehat{K}'} \stackrel{(2.3.17)}{\leq} \frac{1}{\sqrt{2p+1}} \|\widehat{\partial}_1 \widehat{w}\|_{\widehat{K}'}, \quad (2.3.23)$$

e,

$$\begin{aligned} \|\widehat{\partial}_1 \widehat{w}\|_{\widehat{K}'} &= \|\widehat{\partial}_1 \widehat{u} - \widehat{\Pi}'_p (\widehat{\partial}_1 \widehat{u})\|_{\widehat{K}'} \stackrel{(2.3.15)}{\leq} C(n) \left(\frac{\Gamma(p+3-s)}{\Gamma(p+1+s)} \right)^{1/2} |\widehat{\partial}_1 \widehat{u}|_{s-1, \widehat{K}'} \\ &\leq C(n) \left(\frac{\Gamma(p+3-s)}{\Gamma(p+1+s)} \right)^{1/2} |\widehat{u}|_{s, \widehat{K}'} \end{aligned} \quad (2.3.24)$$

substituindo (2.3.24) em (2.3.23) resulta que,

$$T_{22} = C(n) \frac{1}{\sqrt{2p+1}} \left(\frac{\Gamma(p+3-s)}{\Gamma(p+1+s)} \right)^{1/2} |\widehat{u}|_{s, \widehat{K}'}, \quad (2.3.25)$$

para $1 \leq s \leq \min(p+1, k)$, $k \geq 1$.

Usando a desigualdade do traço na direção \hat{x}_1 , e integrando sobre $\hat{x}' \in \hat{K}'$, temos que,

$$T_{21} = \|w(1, \cdot)\|_{\hat{K}'} \leq C \left(\|w\|_{\hat{K}}^{1/2} \|\hat{\partial}_1 w\|_{\hat{K}}^{1/2} + \|w\|_{\hat{K}} \right). \quad (2.3.26)$$

Sendo que,

$$\|w\|_{\hat{K}} = \|\hat{u} - \hat{\Pi}'_p \hat{u}\|_{\hat{K}} \stackrel{(2.3.15)}{\leq} C(n) \left(\frac{\Gamma(p+2-s)}{\Gamma(p+2+s)} \right)^{1/2} |\hat{u}|_{s, \hat{K}}, \quad (2.3.27)$$

temos inserindo (2.3.27) e (2.3.24) em (2.3.26) que,

$$T_{21} = C(n) \left\{ \left(\frac{\Gamma(p+2-s)}{\Gamma(p+2+s)} \right)^{1/4} \left(\frac{\Gamma(p+3-s)}{\Gamma(p+1+s)} \right)^{1/4} + \left(\frac{\Gamma(p+2-s)}{\Gamma(p+2+s)} \right)^{1/2} \right\} |\hat{u}|_{s, \hat{K}}, \quad (2.3.28)$$

para $1 \leq s \leq \min(p+1, k)$, $k \geq 1$.

Agora, substituindo (2.3.28) e (2.3.25) em (2.3.22) e inserindo a desigualdade resultante e (2.3.21) em (2.3.20) obtemos que,

$$\begin{aligned} \|(\hat{u} - \hat{\Pi}'_p \hat{u})(1, \cdot)\|_{\hat{K}'} &\leq C(n) \left\{ \frac{1}{\sqrt{2p+1}} \left[\left(\frac{\Gamma(p+2-s)}{\Gamma(p+s)} \right)^{1/2} + \left(\frac{\Gamma(p+3-s)}{\Gamma(p+1+s)} \right)^{1/2} \right] \right. \\ &\quad + \left(\frac{\Gamma(p+2-s)}{\Gamma(p+2+s)} \right)^{1/4} \left(\frac{\Gamma(p+3-s)}{\Gamma(p+1+s)} \right)^{1/4} \\ &\quad \left. + \left(\frac{\Gamma(p+2-s)}{\Gamma(p+2+s)} \right)^{1/2} \right\} |\hat{u}|_{s, \hat{K}} = C(n) \Phi_1(p, s) |\hat{u}|_{s, \hat{K}}, \end{aligned}$$

para $1 \leq s \leq \min(p+1, k)$, $k \geq 1$.

Um argumento idêntico para cada uma das outras faces de \hat{K} vale. Unindo as limitações resultantes completamos a prova. □

Observação 2.24. Os resultado desta seção foram firmados supondo que $\hat{u} = u \circ F_K$ pertence a um espaço de Sobolev de ordem inteira, porém, usando o

K-método de interpolação de espaços de funções, esses resultados podem ser estendidos para espaços de Sobolev de ordem fracionária.

Observando que $\widehat{\Pi}_p \widehat{u}(\widehat{x}) = (\Pi_p u)(F_K(\widehat{x}))$ para $\widehat{x} \in \widehat{K}$, deduzimos o próximo lema.

Lema 2.25. *Seja $K \in \mathcal{T}$ e supondo que $u \in H^k(K)$ para algum $k \geq 1$, então, para qualquer inteiro s com $1 \leq s \leq \min(p+1, k)$, e $p \geq 0$, vale a seguinte estimativa:*

$$\|u - \Pi_p u\|_{\partial K} \leq C(n) \Phi_1(s, p) h_K^{s-\frac{1}{2}} |u|_{s, K}, \quad (2.3.29)$$

sendo $\Phi_1(s, p)$ definida por (2.3.19).

Demonstração:

$$\begin{aligned} \|u - \Pi_p u\|_{\partial K} &\stackrel{(2.2.30)}{\leq} C h_K^{1/2} \|\widehat{u} - \widehat{\Pi}_p \widehat{u}\|_{\partial \widehat{K}} \stackrel{(2.3.18)}{\leq} C \Phi_1(s, p) h_K^{1/2} |\widehat{u}|_{s, \widehat{K}} \\ &\stackrel{(2.2.31)}{\leq} C \Phi_1(s, p) h_K^{1/2} h_K^{s-1} |u|_{s, K} = C \Phi_1(s, p) h_K^{s-1/2} |u|_{s, K}. \end{aligned}$$

□

Observação 2.26. *Para um $s \geq 1$ fixo, pela fórmula de Stirling resulta que*

$$\Phi_1(s, p) \leq \frac{C(s)}{(p+1)^{s-1/2}},$$

consequentemente (2.3.29) é ótima também em $p \geq 0$.

Teorema 2.27. *Supondo que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio poligonal limitado e $\mathcal{T} = \{K\}$ é regular e composta por n -paralelepípedos K com diâmetro h_K , e seja, $u_{DG} \in S^p(\Omega, \mathcal{T}, F)$ a aproximação descontínua de Galerkin para u definida por (2.3.2) e supondo que $u|_K \in H^{k_K}(K)$ para cada $K \in \mathcal{T}$ e para inteiros $k_K \geq 1$. Então, assumindo que (2.3.3) e (2.1.14) são válidas, a seguinte estimativa de erro se verifica:*

$$\| \|u - u_{DG}\| \|_{aDG}^2 \leq C \sum_{K \in \mathcal{T}} h_K^{2s_K-1} (\beta_K \Phi_1^2(p_K, s_K) + \gamma_K h_K \Phi_2^2(p_K, s_K)) |u|_{s_K, K}^2, \quad (2.3.30)$$

para qualquer inteiro s_K , $1 \leq s_K \leq \min(p_K + 1, k_K)$ e $p_K \geq 0$. Sendo,

$$\beta_K = \|b\|_{L^\infty(K)} \quad e \quad \gamma_K = (1 + \gamma_1^2) \|c_0\|_{L^\infty(K)}^2$$

em que c_0 e γ_1 são definidos em (2.2.5) e Lema 2.19, respectivamente, com

$$\Phi_2(p, s) = \left(\frac{\Gamma(p + 2 - s)}{\Gamma(p + 2 + s)} \right)^{1/2},$$

e C sendo uma constante positiva que depende somente de n e da regularidade de \mathcal{T} .

Demonstração:

$$\begin{aligned} \|u - u_{DG}\|_{aDG} &\leq \|\xi\|_{aDG} + \|\eta\|_{aDG} \\ &\stackrel{(2.3.5)}{\leq} \left\{ \sum_K \left[\|c_0 \eta\|_K^2 + \frac{1}{2} \|\eta^+\|_{\partial_- K \cap \Gamma}^2 + \frac{1}{2} \|\eta^+ - \eta^-\|_{\partial_- K \setminus \Gamma}^2 + \frac{1}{2} \|\eta^+\|_{\partial_+ K \cap \Gamma}^2 \right] \right\}^{1/2} \\ &\quad + \left\{ \sum_K \left[\gamma_1^2 \|c_0 \eta\|_K^2 + 2 \|\eta^+\|_{\partial_+ K \cap \Gamma}^2 + 2 \|\eta^-\|_{\partial_- K \setminus \Gamma}^2 \right] \right\}^{1/2} \\ &\leq C \left\{ \sum_K \left[\|c_0 \eta\|_K^2 + \frac{1}{2} \|\eta^+\|_{\partial_- K \cap \Gamma}^2 + \frac{1}{2} \|\eta^+ - \eta^-\|_{\partial_- K \setminus \Gamma}^2 + \frac{1}{2} \|\eta^+\|_{\partial_+ K \cap \Gamma}^2 \right] \right. \\ &\quad \left. + \sum_K \left[\gamma_1^2 \|c_0 \eta\|_K^2 + 2 \|\eta^+\|_{\partial_+ K \cap \Gamma}^2 + 2 \|\eta^-\|_{\partial_- K \setminus \Gamma}^2 \right] \right\}^{1/2} \\ &\leq C \left\{ \sum_K \left[(\gamma_1^2 + 1) \|c_0\|_{L^\infty(K)}^2 \|\eta\|_K^2 + C \|b\|_{L^\infty(K)} \|\eta^+\|_{\partial K}^2 \right] \right\}^{1/2} \\ &\leq C \left\{ \sum_K \left[\gamma_K \|\eta\|_K^2 + \beta_K \|\eta^+\|_{\partial K}^2 \right] \right\}^{1/2} \\ &\stackrel{(2.3.16) \text{ e } (2.3.29)}{\leq} C \left\{ \sum_K \left[\gamma_K h_K^{2s_K} \Phi_2^2(p_K, s_K) + \beta_K h_K^{2s_K-1} \Phi_1^2(p_K, s_K) \right] |u|_{s_K, K}^2 \right\}^{1/2}. \end{aligned}$$

De onde segue (2.3.30).

□

Observação 2.28. Quando $p_K = p \geq 1$, $s_K = s$, $1 \leq s \leq \min(p + 1, k)$, $k \geq 1$ e $h = \max_{K \in \mathcal{T}} h_K$, temos aplicando a fórmula de Stirling em $\Phi_1(p, s)$ e $\Phi_2(p, s)$ a seguinte estimativa:

$$\| \|u - u_{DG}\| \|_{aDG} \leq C \left(\frac{h}{p+1} \right)^{s-1/2} |u|_{s,\mathcal{T}}.$$

2.3.3 Resultados numéricos

Refazemos agora os exemplos apresentados na seção 2.2.3, usando a formulação padrão do hp -DGFEM definida em (2.3.2). Observamos que estes exemplos numéricos confirmam os resultados teóricos das seções anteriores, i.é., o Teorema 2.27 e a convergência exponencial.

Nota:

- a) Veja seção 2.2.3 para detalhes sobre a implementação do método;
- b) A direção do campo de fluxo na fronteira Γ_- dos exemplos seguintes esta indicada na Figura 2.4.

Exemplo 2.29. Consideremos o problema de valor de contorno (2.2.1) com os seguintes dados: $\Omega = (-1, 1)^2$, $b = (8/10, 6/10)$, $c = 1$, $g_D = 1$ e a parte direita f é escolhida de forma que a solução analítica para (2.2.1) seja dada por

$$u(x, y) = 1 + \sin(\pi(1+x)(1+y)^2/8). \quad (2.3.31)$$

Então, calculamos a solução numérica u_{DG} usando o algoritmo definido por (2.3.2).

Uma análise do comportamento do hp -DGFEM sobre uma seqüência de refinamentos da malha para valores de p entre 1 e 7 é apresentada na Figura 2.9, em que o erro $\| \|u - u_{DG}\| \|_{aDG}$ está como uma função de h .

Se pode observar na Figura 2.9 que de fato o erro $\| \|u - u_{DG}\| \|_{aDG}$ converge na ordem de $h^{p+1/2}$, quando h tende a zero para cada p (fixo). Apresentamos na Figura 2.10 o comportamento do hp -DGFEM com p -enriquecimento para valores de h fixos, e como a solução (2.3.31) é uma função analítica, espera-se taxas de convergência exponencial, o que de fato é observado, pois sobre uma escala linear-logarítmica, a convergência para cada malha é aproximadamente uma linha reta.

No próximo exemplo, verificamos o comportamento do método para um problema com coeficientes variáveis quando a Hipótese 2.18 não é satisfeita.

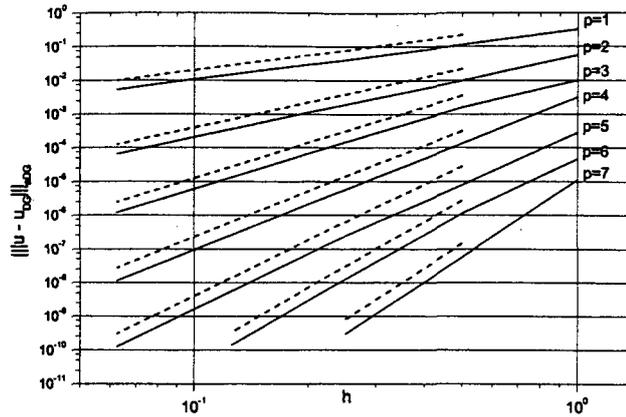


Figura 2.9: Exemplo 2.29. Convergência do hp -DGFEM com h -refinamento

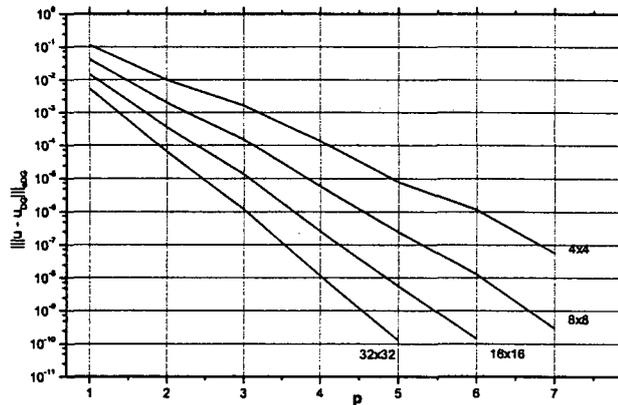


Figura 2.10: Exemplo 2.29. Convergência do hp -DGFEM sobre p -enriquecimento

Exemplo 2.30. Consideremos o problema de valor de contorno (2.2.1) com os seguintes dados: $\Omega = (-1, 1)^2$, $b = (2 - y^2, 2 - x)$, $c = 1 + (1 + x)(1 + y)^2$, $g_D = 1$ e a parte direita f é escolhida de forma que a solução analítica para (2.2.1) seja dada por

$$u(x, y) = 1 + \sin(\pi(1 + x)(1 + y)^2/8). \quad (2.3.32)$$

Então, calculamos a solução numérica u_{DG} usando o algoritmo definido por (2.3.2).

Na Figura 2.11 plotamos o comportamento do erro $\|u - u_{DG}\|_{aDG}$ como uma função de h para valores de p entre 1 e 7.

Assim como no exemplo anterior, $\|u - u_{DG}\|_{aDG}$ converge na ordem de $h^{p+1/2}$ quando h tende a zero, para cada p (fixo).

A convergência do hp -DGFEM com p -enriquecimento para valores de h fixos, é apresentada na Figura 2.12, onde se observa mais uma vez a convergência exponencial. Notamos que o Teorema 2.27 é novamente confirmado neste caso, mesmo que o vetor b tem coeficientes variáveis que não satisfazem a Hipótese 2.18.

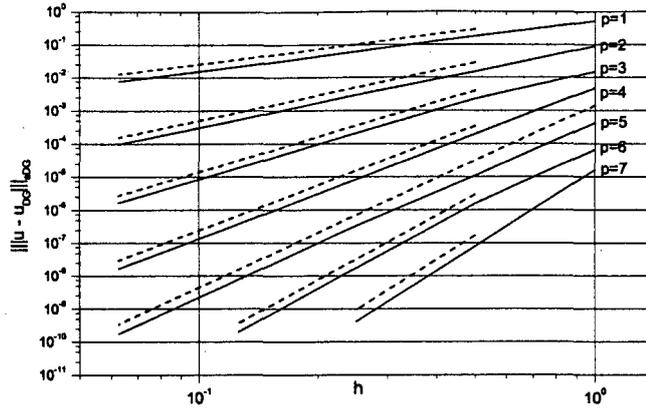


Figura 2.11: Exemplo 2.30. Convergência do hp -DGFEM com h -refinamento

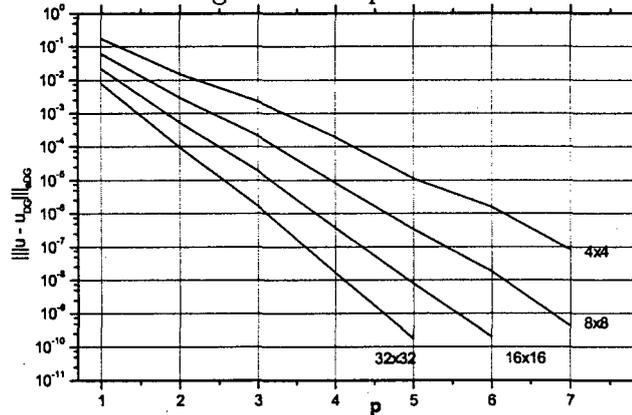


Figura 2.12: Exemplo 2.30. Convergência do hp -DGFEM sobre p -enriquecimento

2.4 Equação de difusão sem parâmetro de estabilidade

Considerando agora a parte do operador \mathcal{L} definido em (2.1.1) responsável pela difusão, dada por:

$$\mathcal{L}_a u \equiv - \sum_{i,j=1}^n \partial_j (a_{ij}(x) \partial_i u) = f(x), \quad x \in \Omega. \quad (2.4.1)$$

Vamos supor que (2.4.1) é elíptico em cada $x \in \Omega$, i.é.,

$$\zeta^\top a(x) \zeta > 0 \quad \forall \zeta \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad x \in \Omega. \quad (2.4.2)$$

Desta forma segue de (2.1.3) que $\Gamma \setminus \Gamma_0 = \emptyset$ em (2.1.4) e completamos (2.4.1) com as condições de fronteiras (2.1.5), porém, agora com $\Gamma_- = \emptyset$.

Assumimos que a_{ij} são constantes sobre cada elemento $K \in \mathcal{T}$, i.é.,

$$a \in [S^0(\Omega, \mathcal{T}, F)]_{sym}^{n \times n}. \quad (2.4.3)$$

Lembramos que para uma matriz A positiva definida existe única matriz B positiva definida, tal que, $A = BB$. Nesse caso diz-se que $B = \sqrt{A}$. Então, de (2.4.3) e (2.4.2) a admite única $\sqrt{a} \in [S^0(\Omega, \mathcal{T}, F)]_{sym}^{n \times n}$ que satisfaz de novo (2.4.2).

2.4.1 Formulação padrão do método de Galerkin descontínuo para a equação de difusão

Escrevemos $\bar{a} = |\sqrt{a}|_2^2 \leq \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2$ sendo $|\cdot|_2$ a norma de matriz subordinada a l_2 , $\bar{a}_K = \bar{a}|_K$ e por $\bar{a}_{\bar{K}}$ denotamos a média aritmética dos valores de $\bar{a}_{K'}$ sobre esses elementos K' (incluindo K) que partilham de uma face com K .

Dado um $e \in \Psi_{int}$, existe um índice i e j , tal que, $i > j$ e existe K_i e K_j que partilham a face e . Definimos o salto de $v \in H^1(\Omega, \mathcal{T})$ através de e e o valor médio de v em e por,

$$[v]_e = v|_{\partial K_i \cap e} - v|_{\partial K_j \cap e} \quad \text{e} \quad \langle v \rangle_e = \frac{1}{2} (v|_{\partial K_i \cap e} + v|_{\partial K_j \cap e}),$$

respectivamente, e com cada face $e \in \Psi_{int}$ associamos o vetor normal unitário ν de K_i para K_j .

Nota: Em geral $[v]$ distingue-se de $[v]$ pois o último é independente da enumeração dos elementos.

Com essa notação introduzimos a forma bilinear

$$D(w, v) = B_a(w, v) + B_s(w, v),$$

em que,

$$\begin{aligned} B_a(w, v) &= \sum_{K \in \mathcal{T}} \int_K a \nabla w \cdot \nabla v dx + \int_{\Gamma_D} \{w((a \nabla v) \cdot n) - ((a \nabla w) \cdot n)v\} ds \\ &+ \int_{\Gamma_{int}} \{[w] \langle (a \nabla v) \cdot \nu \rangle - [v] \langle (a \nabla w) \cdot \nu \rangle\} ds \end{aligned} \quad (2.4.4)$$

$$B_s(w, v) = \int_{\Gamma_D} \sigma w v ds + \int_{\Gamma_{int}} \sigma [w] [v] ds \quad (2.4.5)$$

e o funcional linear,

$$l_D(v) = l_a(v) + l_s(v),$$

em que,

$$l_a(v) = \sum_{K \in \mathcal{T}} \int_K f v dx + \int_{\Gamma_D} g_D ((a \nabla v) \cdot n) ds + \int_{\Gamma_N} g_N v ds$$

$$l_s(v) = \int_{\Gamma_D} \sigma g_D v ds.$$

Aqui σ é chamado de *parâmetro de penalização descontínua*, e é definido por $\sigma|_e = \sigma_e$ para $e \in \Psi_{int} \cup \Psi_D$ sendo σ_e uma constante não negativa.

O hp -DGFEM para (2.4.1), (2.1.5) é:

Encontre $u_{DG} \in S^p(\Omega, \mathcal{T}, F)$, tal que,

$$D(u_{DG}, v) = l_D(v), \quad \forall v \in S^p(\Omega, \mathcal{T}, F) \quad (2.4.6)$$

Para que (2.4.6) seja significativo vamos supor que $p_K \geq 1 \quad \forall K \in \mathcal{T}$, e para assegurar a ortogonalidade de Galerkin ($D(u - u_{DG}, v) = 0 \quad \forall v \in S^p$) supomos que a solução u do problema de valor de fronteira acima é suficientemente regular ($u \in H^2(\Omega, \mathcal{T})$) para garantir que as funções u e $(a \nabla u \cdot \nu)$ são contínuas através de cada face $e \in \Psi_{int}$.

2.4.2 Estimativas *a priori* para o erro do método de Galerkin descontínuo padrão para a equação de difusão

Teorema 2.31. *Supondo que (2.4.2) e (2.4.3) valem, então, para todo $w \in H^2(\Omega, \mathcal{T})$, temos que,*

$$\|w\|_{dDG}^2 \equiv D(w, w) = \sum_{K \in \mathcal{T}} \|\sqrt{a} \nabla w\|_K^2 + \int_{\Gamma_D} \sigma w^2 ds + \int_{\Gamma_{int}} \sigma [w]^2 ds. \quad (2.4.7)$$

Além disso, se σ for positivo sobre $\Gamma_{int} \cup \Gamma_D$ então o hp-DGFEM (2.4.6) tem única solução $u_{DG} \in S^p(\Omega, \mathcal{T}, F)$.

Demonstração:

(2.4.7) segue de (2.4.4) e (2.4.5). Se σ é positivo sobre $\Gamma_D \cup \Gamma_{int}$ então, sendo $a(x)$ positiva definida sobre $\bar{\Omega}$ segue de (2.4.7) que $D(w, w) > 0 \forall w \in S^p \setminus \{0\}$, o que implica na unicidade da solução u_{DG} . Como S^p é um espaço de dimensão finita e (2.4.6) é um problema linear, a existência da solução para (2.4.6) segue do fato que o problema homogêneo tem única solução $u_{DG} = 0$.

□

Lema 2.32. *Seja \mathcal{T} uma subdivisão regular de Ω e assuma que o parâmetro σ é positivo sobre $\Gamma_{int} \cup \Gamma_D$, então, a seguinte desigualdade vale com $C > 0$ dependente somente de n e \mathcal{T} .*

$$\begin{aligned} |||\xi|||_{dDG}^2 &\leq C \left\{ \int_{\Gamma_D} \sigma |\eta|^2 ds + \int_{\Gamma_{int}} \sigma [\eta]^2 ds + \sum_{K \in \mathcal{T}} \|\sqrt{a} \nabla \eta\|_K^2 \right. \\ &\quad \left. + \sum_{K \in \mathcal{T}} \left(\|\sqrt{\tau} \eta\|_{\partial K \cap \Gamma_D}^2 + \bar{a}_K^2 \left\| \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \nabla \eta \right\|_{\partial K \cap \Gamma_D}^2 \right) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{K \in \mathcal{T}} \left(\|\sqrt{\tau} [\eta]\|_{\partial K \cap \Gamma_{int}}^2 + \bar{a}_K^2 \left\| \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \nabla \eta \right\|_{\partial K \cap \Gamma_{int}}^2 \right) \right\}, \end{aligned} \quad (2.4.8)$$

sendo $\tau|_e = \frac{\langle \bar{a} p^2 \rangle_e}{h_e}$ e h_e o diâmetro da face $e \in \Psi_{int} \cup \Psi_D$, com a convenção que para $e \in \Psi_D$ a contribuição exterior a Ω na definição de τ_e é zero.

Nota: Novamente

$$u - u_{DG} = (u - \Pi_p u) + (\Pi_p u - u_{DG}) \equiv \eta + \xi \quad (2.4.9)$$

sendo Π_p o projetor ortogonal de $L_2(\Omega)$ sobre S^p .

Demonstração:

Pela hipótese da regularidade de u temos que,

$$|||\xi|||_{dDG}^2 = D(\xi, \xi) = D((u - u_{DG}) - \eta, \xi) = -D(\eta, \xi).$$

Destá forma,

$$|||\xi|||_{dDG}^2 \leq |B_a(\eta, \xi)| + |B_s(\eta, \xi)|, \quad (2.4.10)$$

e,

$$\begin{aligned} |B_s(\eta, \xi)| &\leq \left| \int_{\Gamma_D} \sigma \eta \xi ds \right| + \left| \int_{\Gamma_{int}} \sigma [\eta] [\xi] ds \right| \\ &\stackrel{C.S.}{\leq} \|\sqrt{\sigma} \eta\|_{\Gamma_D} \|\sqrt{\sigma} \xi\|_{\Gamma_D} + \|\sqrt{\sigma} [\eta]\|_{\Gamma_{int}} \|\sqrt{\sigma} [\xi]\|_{\Gamma_{int}} \\ &\stackrel{H.}{\leq} \left(\|\sqrt{\sigma} \eta\|_{\Gamma_D}^2 + \|\sqrt{\sigma} [\eta]\|_{\Gamma_{int}}^2 \right)^{1/2} \times \left(\|\sqrt{\sigma} \xi\|_{\Gamma_D}^2 + \|\sqrt{\sigma} [\xi]\|_{\Gamma_{int}}^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Assim,

$$|B_s(\eta, \xi)| \leq |||\xi|||_{dDG} \left(\int_{\Gamma_D} \sigma |\eta|^2 ds + \int_{\Gamma_{int}} \sigma [\eta]^2 ds \right)^{1/2}. \quad (2.4.11)$$

Limitaremos $B_a(\eta, \xi)$ termo a termo,

$$\begin{aligned} |B_a(\eta, \xi)| &\leq \left| \sum_{K \in \mathcal{T}} \int_K a \nabla \eta \cdot \nabla \xi dx \right| + \left| \int_{\Gamma_D} \{ \eta ((a \nabla \xi) \cdot n) - ((a \nabla \eta) \cdot n) \xi \} ds \right| \\ &\quad + \left| \int_{\Gamma_{int}} \{ [\eta] \langle (a \nabla \xi) \cdot \nu \rangle - [\xi] \langle (a \nabla \eta) \cdot \nu \rangle \} ds \right| \equiv I + II + III. \end{aligned} \quad (2.4.12)$$

Para I ,

$$\begin{aligned} I &= \left| \sum_{K \in \mathcal{T}} \int_K \sqrt{a} \nabla \eta \cdot \sqrt{a} \nabla \xi dx \right| \stackrel{C.S.}{\leq} \sum_{K \in \mathcal{T}} \int_K |\sqrt{a} \nabla \eta| |\sqrt{a} \nabla \xi| dx \\ &\stackrel{C.S.}{\leq} \sum_{K \in \mathcal{T}} \|\sqrt{a} \nabla \eta\|_K \|\sqrt{a} \nabla \xi\|_K \stackrel{H.}{\leq} \left(\sum_{K \in \mathcal{T}} \|\sqrt{a} \nabla \eta\|_K^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{K \in \mathcal{T}} \|\sqrt{a} \nabla \xi\|_K^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Desta forma,

$$I \leq |||\xi|||_{dDG} \left(\sum_{K \in \mathcal{T}} \|\sqrt{a} \nabla \eta\|_K^2 \right)^{1/2}$$

Limitando II,

$$\begin{aligned} II &\leq \left| \int_{\Gamma_D} \eta ((\sqrt{a} \nabla \xi) \cdot \sqrt{an}) ds \right| + \left| \int_{\Gamma_D} ((a \nabla \eta) \cdot n) \xi ds \right| \\ &\stackrel{c.s.}{\leq} \int_{\Gamma_D} |\eta| |\sqrt{a} \nabla \xi| |\sqrt{an}| ds + \int_{\Gamma_D} |a \nabla \eta| |n| |\xi| ds \\ &\stackrel{c.s.}{\leq} \|\eta \sqrt{an}\|_{\Gamma_D} \|\sqrt{a} \nabla \xi\|_{\Gamma_D} + \|a \nabla \eta\|_{\Gamma_D} \|n \xi\|_{\Gamma_D} \\ &\leq \|\eta\|_{\Gamma_D} |\sqrt{an}| \|\sqrt{a} \nabla \xi\|_{\Gamma_D} + \|\sqrt{a} \sqrt{a} \nabla \eta\|_{\Gamma_D} |n| \|\xi\|_{\Gamma_D}, \end{aligned}$$

o que pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} II &\leq \sum_K \left[\|\eta\|_{\partial K \cap \Gamma_D} |\sqrt{an}| \|\sqrt{a} \nabla \xi\|_{\partial K \cap \Gamma_D} + \|\sqrt{a} \sqrt{a} \nabla \eta\|_{\partial K \cap \Gamma_D} |n| \|\xi\|_{\partial K \cap \Gamma_D} \right] \\ &\leq \sum_K \left[\|\eta\|_{\partial K \cap \Gamma_D} |\sqrt{a}| |n| \|\sqrt{a} \nabla \xi\|_{\partial K \cap \Gamma_D} + |\sqrt{a}| |\sqrt{a}| |n| \left\| \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \nabla \eta \right\|_{\partial K \cap \Gamma_D} \|\sqrt{\sigma} \xi\|_{\partial K \cap \Gamma_D} \right], \end{aligned}$$

sendo que $|n| = 1$, e $|\sqrt{a}| = \bar{a}_K^{1/2}$ resulta que,

$$\begin{aligned} II &\leq \sum_K \left[\frac{1}{\sqrt{\gamma_K}} \|\eta\|_{\partial K \cap \Gamma_D} \bar{a}_K^{1/2} \sqrt{\gamma_K} \|\sqrt{a} \nabla \xi\|_{\partial K \cap \Gamma_D} + \bar{a}_K \left\| \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \nabla \eta \right\|_{\partial K \cap \Gamma_D} \|\sqrt{\sigma} \xi\|_{\partial K \cap \Gamma_D} \right] \\ &\stackrel{H.}{\leq} \left\{ \sum_K \frac{\bar{a}_K}{\gamma_K} \|\eta\|_{\partial K \cap \Gamma_D}^2 \right\}^{1/2} \left\{ \sum_K \gamma_K \|\sqrt{a} \nabla \xi\|_{\partial K \cap \Gamma_D}^2 \right\}^{1/2} \\ &\quad + \left\{ \sum_K \bar{a}_K^2 \left\| \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \nabla \eta \right\|_{\partial K \cap \Gamma_D}^2 \right\}^{1/2} \left\{ \sum_K \|\sqrt{\sigma} \xi\|_{\partial K \cap \Gamma_D}^2 \right\}^{1/2}, \end{aligned}$$

para qualquer $\gamma_K \in \mathbb{R}$.

Como a é uma matriz constante sobre cada elemento $K \in \mathcal{T}$, usamos o Teorema 4.76 de [20], para obter que,

$$\|\sqrt{a}\nabla\xi\|_{\partial K \cap \Gamma_D}^2 \leq C \frac{p_K^2}{h_K} \|\sqrt{a}\nabla\xi\|_K^2, \quad (2.4.13)$$

em que, C depende somente de \mathcal{T} . Usando (2.4.13) junto com $\gamma_K = h_K/p_K^2$ temos que,

$$\begin{aligned} II &\leq \left(\sum_K \frac{\bar{a}_K p_K^2}{h_K} \|\eta\|_{\partial K \cap \Gamma_D}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_K \frac{h_K}{p_K^2} C \frac{p_K^2}{h_K} \|\sqrt{a}\nabla\xi\|_K^2 \right)^{1/2} \\ &\quad + \left(\sum_K \bar{a}_K^2 \left\| \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \nabla\eta \right\|_{\partial K \cap \Gamma_D}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_K \|\sqrt{\sigma}\xi\|_{\partial K \cap \Gamma_D}^2 \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

e definindo $\tau_e = \frac{\langle \bar{a}_K p_K^2 \rangle_e}{h_e}$,

$$II \leq C \|\xi\|_{dDG} \left[\left(\sum_K \tau_e \|\eta\|_{\partial K \cap \Gamma_D}^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_K \bar{a}_K^2 \left\| \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \nabla\eta \right\|_{\partial K \cap \Gamma_D}^2 \right)^{1/2} \right]$$

Assim,

$$II \leq C \|\xi\|_{dDG} \left[\sum_K \left(\|\sqrt{\tau_e}\eta\|_{\partial K \cap \Gamma_D}^2 + \bar{a}_K^2 \left\| \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \nabla\eta \right\|_{\partial K \cap \Gamma_D}^2 \right) \right]^{1/2}.$$

De um modo similar,

$$III \leq C \|\xi\|_{dDG} \left[\sum_K \left(\|\sqrt{\tau_e}[\eta]\|_{\partial K \cap \Gamma_D}^2 + \bar{a}_K^2 \left\| \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \nabla\eta \right\|_{\partial K \cap \Gamma_D}^2 \right) \right]^{1/2}.$$

Das limitações I , II e III obtemos uma para (2.4.12), a qual junto

com (2.4.11) nos fornece a seguinte estimativa para $|||\xi|||_{dDG}^2$ por (2.4.10):

$$\begin{aligned}
|||\xi|||_{dDG}^2 \leq C |||\xi|||_{dDG} & \left\{ \left(\int_{\Gamma_D} \sigma |\eta|^2 ds + \int_{\Gamma_{int}} \sigma [\eta]^2 ds \right)^{1/2} + \left(\sum_{K \in \mathcal{T}} \|\sqrt{a} \nabla \eta\|_K^2 \right)^{1/2} \right. \\
& + \left[\sum_K \left(\tau_e \|\eta\|_{\partial K \cap \Gamma_D}^2 + \bar{a}_K^2 \left\| \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \nabla \eta \right\|_{\partial K \cap \Gamma_D}^2 \right) \right]^{1/2} \\
& \left. + \left[\sum_K \left(\|\sqrt{\tau_e} [\eta]\|_{\partial K \cap \Gamma_D}^2 + \bar{a}_K^2 \left\| \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \nabla \eta \right\|_{\partial K \cap \Gamma_D}^2 \right) \right]^{1/2} \right\},
\end{aligned}$$

de onde obtemos (2.4.8). □

Assumimos que o vetor \mathbf{p} (com os $p_K \geq 1$ para cada $K \in \mathcal{T}$) tenha *variação local limitada*, i.é., que existe uma constante $\rho \geq 1$, tal que, para qualquer par de elementos K e K' que tem uma face $((n-1)$ -dimensão) em comum, vale

$$\rho^{-1} \leq p_K/p_{K'} \leq \rho.$$

Lema 2.33. *Vamos supor que:*

- a) $K \in \mathcal{T}$ é um n -simplex ou um n -paralelepípedo com diâmetro h_K ;
- b) $u|_K \in H^{k_K}(K)$, $k_K \geq 0$, para $K \in \mathcal{T}$.

Então, existe uma seqüência $z_{p_K}^{h_K}(u) \in R_{p_K}(K)$, $p_K = 1, 2, \dots$, tal que, para $0 \leq q \leq k_K$ vale,

$$\|u - z_{p_K}^{h_K}(u)\|_{q,K} \leq C \frac{h_K^{s_K - q}}{p_K^{k_K - q}} \|u\|_{k_K, K}, \quad (2.4.14)$$

sendo $s_K = \min(p_K + 1, k_K)$ e C uma constante independente de u , h_K e p_K , mas dependente de $k = \max_{K \in \mathcal{T}} k_K$.

Para $u \in H^2(\Omega, \mathcal{T})$ definimos $\Pi_p^h u \in S^p$ por

$$(\Pi_p^h u)|_K = z_{p_K}^{h_K}(u|_K), \quad K \in \mathcal{T}.$$

Teorema 2.34. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio poliedral limitado, \mathcal{T} uma subdivisão regular de Ω em n -paralelepípedos, e supomos ainda que \mathbf{p} tenha variação local limitada. Associamos a cada face $e \in \Psi_D \cup \Psi_{int}$ o número real positivo*

$$\sigma_e = \frac{\langle \bar{a} p^2 \rangle_e}{h_e}, \quad (2.4.15)$$

sendo h_e o diâmetro de e , com a convenção que para $e \in \Psi_D$ a contribuição exterior a Ω na definição de σ_e é zero. Então, assumindo que $u|_K \in H^{k_K}(K)$, $k_K \geq 2$, para $K \in \mathcal{T}$, a solução $u_{DG} \in S^{\mathbf{p}}(\Omega, \mathcal{T}, F)$ de (2.4.6) obedece a seguinte estimativa de erro:

$$\|u - u_{DG}\|_{dDG}^2 \leq C \sum_{K \in \mathcal{T}} \alpha_K \frac{h_K^{2s_K-2}}{p_K^{2k_K-4}} \|u\|_{k_K, K}^2, \quad (2.4.16)$$

com $1 \leq s_K \leq \min(p_K+1, k_K)$, $p_K \geq 1$, $\alpha_K = \bar{a}_K$ para $K \in \mathcal{T}$ em que C é uma constante positiva dependendo de n , do parâmetro ρ , $k = \max_{K \in \mathcal{T}} k_K$ e da regularidade de \mathcal{T} .

Demonstração:

Com o objetivo de aproveitar as limitações do Lema anterior vamos decompor η definido em (2.4.9) da seguinte forma,

$$\eta = u - \Pi_p u = (u - \Pi_p^h u) + \Pi_p^h (u - \Pi_p u) \equiv \eta_1 + \eta_2. \quad (2.4.17)$$

Estimativas para η_1 são obtidas diretamente de (2.4.14) e da desigualdade do traço (2.2.45), i.é.,

$$\|\sqrt{a} \nabla \eta_1\|_K^2 \leq C \bar{a}_K \frac{h_K^{2s_K-2}}{p_K^{2k_K-2}} \|u\|_{k_K, K}^2, \quad (2.4.18)$$

$$\|\eta_1\|_{\partial K}^2 \leq C \frac{h_K^{2s_K-1}}{p_K^{2k_K-1}} \|u\|_{k_K, K}^2 \quad \text{e} \quad \|\nabla \eta_1\|_{\partial K}^2 \leq C \frac{h_K^{2s_K-3}}{p_K^{2k_K-3}} \|u\|_{k_K, K}^2. \quad (2.4.19)$$

Por outro lado, as normas para η_2 são majoradas por $\|\eta_2\|_K$ usando as

seguintes desigualdades inversas.

$$\|\sqrt{a}\nabla\eta_2\|_K^2 \leq C\bar{a}_K \frac{p_K^4}{h_K^3} \|\eta_2\|_K^2, \quad (2.4.20)$$

$$\|\eta_2\|_{\partial K}^2 \leq C \frac{p_K^2}{h_K} \|\eta_2\|_K^2 \quad \text{e} \quad \|\nabla\eta_2\|_{\partial K}^2 \leq C \frac{p_K^6}{h_K^3} \|\eta_2\|_K^2. \quad (2.4.21)$$

Agora $\|\eta_2\|_K$ é limitada por,

$$\|\eta_2\|_K = \|\Pi_p^h(u - \Pi_p u)\|_K \leq C\|u - \Pi_p u\|_K \leq C \frac{h_K^{s_K}}{p_K^{s_K}} |u|_{s_K, K},$$

para $1 \leq s_K \leq \min(p_K + 1, k_K)$, em que a segunda desigualdade segue de (2.3.16).
Então,

$$\|\eta_2\|_K \leq C \frac{h_K^{s_K}}{p_K^{s_K}} \|u\|_{k_K, K} \quad (2.4.22)$$

Substituindo (2.4.22) em (2.4.20) e (2.4.21) temos que,

$$\|\sqrt{a}\nabla\eta_2\|_K^2 \leq C\bar{a}_K \frac{h_K^{2s_K-2}}{p_K^{2k_K-4}} \|u\|_{k_K, K}^2, \quad (2.4.23)$$

$$\|\eta_2\|_{\partial K}^2 \leq C \frac{h_K^{2s_K-1}}{p_K^{2k_K-2}} \|u\|_{k_K, K}^2 \quad \text{e} \quad \|\nabla\eta_2\|_{\partial K}^2 \leq C \frac{h_K^{2s_K-3}}{p_K^{2k_K-6}} \|u\|_{k_K, K}^2. \quad (2.4.24)$$

E substituindo em (2.4.17) as limitações (2.4.18), (2.4.19), (2.4.23) e (2.4.24) temos que,

$$\|\sqrt{a}\nabla\eta\|_K^2 \leq C (\|\sqrt{a}\nabla\eta_1\|_K^2 + \|\sqrt{a}\nabla\eta_2\|_K^2) \leq C\bar{a}_K \frac{h_K^{2s_K-2}}{p_K^{2k_K-4}} \|u\|_{k_K, K}^2, \quad (2.4.25)$$

$$\|\eta\|_{\partial K}^2 \leq C (\|\eta_1\|_{\partial K}^2 + \|\eta_2\|_{\partial K}^2) \leq C \frac{h_K^{2s_K-1}}{p_K^{2k_K-2}} \|u\|_{k_K, K}^2, \quad (2.4.26)$$

$$\|\nabla\eta\|_{\partial K}^2 \leq C (\|\nabla\eta_1\|_{\partial K}^2 + \|\nabla\eta_2\|_{\partial K}^2) \leq C \frac{h_K^{2s_K-3}}{p_K^{2k_K-6}} \|u\|_{k_K, K}^2. \quad (2.4.27)$$

Sendo que,

$$\| \| u - u_{DG} \| \|_{dDG} \leq \| \| \eta \| \|_{dDG} + \| \| \xi \| \|_{dDG}, \quad (2.4.28)$$

e da definição de $\| \| \cdot \| \|_{dDG}$ resulta que,

$$\| \| \eta \| \|_{dDG}^2 = \sum_{K \in \mathcal{T}} \| \sqrt{a} \nabla \eta \|_K^2 + \int_{\Gamma_D} \sigma \eta^2 ds + \int_{\Gamma_{int}} \sigma [\eta]^2 ds \equiv I + II + III, \quad (2.4.29)$$

e como I , II e III aparecem no lado direito de (2.4.8), é suficiente limitar cada um de seus termos para obter uma estimativa do erro global.

- Primeiro termo:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_D} \sigma |\eta|^2 ds &= \sum_K \| \sqrt{\sigma_e} \eta \|_{\partial K \cap \Gamma_D}^2 = \sum_K \frac{\langle \bar{a}_K p_K^2 \rangle_e}{h_e} \| \eta \|_{\partial K \cap \Gamma_D}^2 \\ &= \sum_K \frac{1}{2h_e} (\bar{a}_K p_K^2) \| \eta \|_{\partial K \cap \Gamma_D}^2 \stackrel{(2.4.26)}{\leq} \sum_K \left(\frac{\bar{a}_K p_K^2 h_K^{2s_K-1}}{2h_e p_K^{2k_K-2}} \right) \| u \|_{k_K, K}^2, \end{aligned}$$

segue que,

$$\int_{\Gamma_D} \sigma |\eta|^2 ds \leq C \sum_K \bar{a}_{\bar{K}} \frac{h^{2s_K-2}}{p_K^{2k_K-4}} \| u \|_{k_K, K}^2. \quad (2.4.30)$$

- Segundo termo:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{int}} \sigma [\eta]^2 ds &= \sum_K \frac{\langle \bar{a}_K p_K^2 \rangle_e}{h_e} \| \eta_{\partial K' \cap e} - \eta_{\partial K \cap e} \|_{\partial K \cap \Gamma_{int}}^2 \\ &\leq \sum_K \frac{1}{2h_e} (\bar{a}_{K'} p_{K'}^2 + \bar{a}_K p_K^2) (\| \eta_{\partial K' \cap e} \|_{\partial K \cap \Gamma_{int}}^2 + \| \eta_{\partial K \cap e} \|_{\partial K \cap \Gamma_{int}}^2), \end{aligned}$$

assim,

$$\int_{\Gamma_{int}} \sigma [\eta]^2 ds \stackrel{(2.4.26)}{\leq} C \sum_K \bar{a}_{\bar{K}} \frac{h^{2s_K-2}}{p_K^{2k_K-4}} \| u \|_{k_K, K}^2. \quad (2.4.31)$$

- Terceiro termo:

$$\sum_{K \in \mathcal{T}} \| \sqrt{a} \nabla \eta \|_K^2 \stackrel{(2.4.25)}{\leq} C \sum_K \bar{a}_{\bar{K}} \frac{h^{2s_K-2}}{p_K^{2k_K-4}} \| u \|_{k_K, K}^2. \quad (2.4.32)$$

- Quarto termo:

$$\sum_{K \in \mathcal{T}} \|\sqrt{\tau} \eta\|_{\partial K \cap \Gamma_D}^2 \stackrel{(2.4.26)}{\leq} \sum_{K \in \mathcal{T}} \left(\frac{\bar{a}_K p_K^2}{2p_K^2} \frac{h_K^{2s_K-2}}{p_K^{2k_K-4}} \frac{h_K}{h_e} \right) \|u\|_{k_K, K}^2,$$

desta forma,

$$\sum_{K \in \mathcal{T}} \|\sqrt{\tau} \eta\|_{\partial K \cap \Gamma_D}^2 \leq C \sum_K \bar{a}_{\tilde{K}} \frac{h_K^{2s_K-2}}{p_K^{2k_K-4}} \|u\|_{k_K, K}^2.$$

- Quinto termo:

$$\sum_{K \in \mathcal{T}} \bar{a}_K^2 \left\| \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \nabla \eta \right\|_{\partial K \cap \Gamma_D}^2 \stackrel{(2.4.27)}{\leq} \sum_{K \in \mathcal{T}} \bar{a}_{\tilde{K}}^2 \left(\frac{2h_e}{\bar{a}_K p_K^2} \frac{h_K^{2s_K-3}}{p_K^{2k_K-6}} \right) \|u\|_{k_K, K}^2,$$

segue que,

$$\sum_{K \in \mathcal{T}} \bar{a}_K^2 \left\| \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \nabla \eta \right\|_{\partial K \cap \Gamma_D}^2 \leq C \sum_K \bar{a}_{\tilde{K}} \frac{h_K^{2s_K-2}}{p_K^{2k_K-4}} \|u\|_{k_K, K}^2.$$

- Sexto termo:

$$\begin{aligned} & \sum_{K \in \mathcal{T}} \|\sqrt{\tau} [\eta]\|_{\partial K \cap \Gamma_{int}}^2 = \sum_{K \in \mathcal{T}} \tau_e \|[\eta]\|_{\partial K \cap \Gamma_{int}}^2 \\ &= \sum_K \frac{1}{2h_e} (\bar{a}_{K'} p_{K'}^2 + \bar{a}_K p_K^2) (\|\eta_{\partial K' \cap e}\|_{\partial K \cap \Gamma_{int}}^2 + \|\eta_{\partial K \cap e}\|_{\partial K \cap \Gamma_{int}}^2) \\ & \stackrel{(2.4.26)}{\leq} C \sum_{K \in \mathcal{T}} \left(\bar{a}_{K'} \frac{h_K^{2s_K-2}}{p_K^{2k_K-4}} \frac{h_K}{h_e} + \bar{a}_K \frac{h_K^{2s_K-2}}{p_K^{2k_K-4}} \frac{h_K}{h_e} \right) \|u\|_{k_K, K}^2, \end{aligned}$$

assim,

$$\sum_{K \in \mathcal{T}} \|\sqrt{\tau} [\eta]\|_{\partial K \cap \Gamma_{int}}^2 \leq C \sum_K \bar{a}_{\tilde{K}} \frac{h_K^{2s_K-2}}{p_K^{2k_K-4}} \|u\|_{k_K, K}^2.$$

- Sétimo termo: (repetindo o cálculo feito no quinto termo)

$$\sum_{K \in \mathcal{T}} \bar{a}_K^2 \left\| \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \nabla \eta \right\|_{\partial K \cap \Gamma_{int}}^2 \stackrel{(2.4.27)}{\leq} C \sum_K \bar{a}_{\tilde{K}} \frac{h_K^{2s_K-2}}{p_K^{2k_K-4}} \|u\|_{k_K, K}^2.$$

Obtemos destas sete limitações usando (2.4.8) que,

$$|||\xi|||_{dDG}^2 \leq C \sum_K \alpha_K \frac{h_K^{2s_K-2}}{p_K^{2k_K-4}} \|u\|_{k_K, K}^2, \quad (2.4.33)$$

para $1 \leq s_K \leq \min(p_K + 1, k_K)$, $K \in \mathcal{T}$.

Substituindo (2.4.30), (2.4.31) e (2.4.32) em (2.4.29) resulta que,

$$|||\eta|||_{dDG}^2 \leq C \sum_K \alpha_K \frac{h_K^{2s_K-2}}{p_K^{2k_K-4}} \|u\|_{k_K, K}^2, \quad (2.4.34)$$

e substituindo (2.4.33) e (2.4.34) em (2.4.28) temos que,

$$|||u - u_{DG}|||_{dDG} \leq \left\{ C \sum_K \alpha_K \frac{h_K^{2s_K-2}}{p_K^{2k_K-4}} \|u\|_{k_K, K}^2 \right\}^{1/2} + \left\{ C \sum_K \alpha_K \frac{h_K^{2s_K-2}}{p_K^{2k_K-4}} \|u\|_{k_K, K}^2 \right\}^{1/2},$$

de onde segue o resultado. □

Se o projetor Π_p é tomado como sendo $z_{p_K}^{h_K}$ (definido em (2.4.14)), vale o seguinte teorema em que temos uma melhora da ordem de $p^{1/2}$ na convergência em relação ao teorema anterior.

Teorema 2.35. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio poliedral limitado, \mathcal{T} uma subdivisão regular de Ω em n -paralelepípedos, e supomos ainda que \mathbf{p} tenha variação local limitada. Associamos a cada face $e \in \Psi_D \cup \Psi_{int}$ o número real positivo*

$$\sigma_e = \frac{\langle \bar{a}p \rangle_e}{h_e}, \quad (2.4.35)$$

sendo h_e o diâmetro de e , com a convenção que para $e \in \Psi_D$ a contribuição exterior a Ω na definição de σ_e é zero. Então, assumindo que $u|_K \in H^{k_K}(K)$, $k_K \geq 2$, para $K \in \mathcal{T}$, a solução $u_{DG} \in S^p(\Omega, \mathcal{T}, F)$ de (2.4.6) obedece a seguinte estimativa de erro:

$$|||u - u_{DG}|||_{dDG}^2 \leq C \sum_{K \in \mathcal{T}} \alpha_K \frac{h_K^{2s_K-2}}{p_K^{2k_K-3}} \|u\|_{k_K, K}^2, \quad (2.4.36)$$

com $1 \leq s_K \leq \min(p_K + 1, k_K)$, $p_K \geq 1$ para $K \in \mathcal{T}$, sendo $\alpha_K = \bar{\alpha}_{\bar{K}}$ em que C é uma constante positiva dependendo de n , do parâmetro ρ , $k = \max_{K \in \mathcal{T}} k_K$ e da regularidade de \mathcal{T} .

Nota: A demonstração é semelhante a feita no teorema anterior.

2.5 Equação de difusão-advecção-reação sem parâmetro de estabilidade

2.5.1 Formulação padrão do método de Galerkin descontínuo para a equação de difusão-advecção-reação

Consideramos agora o problema geral (2.1.1) e (2.1.5). Para este o hp -DGFEM é definido como:

Encontre $u_{DG} \in S^{\mathbb{P}}$, tal que,

$$B_{DG}(u_{DG}, v) = l_{DG}(v) \quad \forall v \in S^{\mathbb{P}}, \quad (2.5.1)$$

sendo,

$$\begin{aligned} B_{DG}(w, v) = & \sum_K \left\{ \int_K a \nabla w \cdot \nabla v dx + \int_K (b \cdot \nabla w + cw) v dx \right. \\ & \left. - \int_{\partial_- K \cap (\Gamma_- \cup \Gamma_D)} (b \cdot n) w^+ v^+ ds - \int_{\partial_- K \setminus \Gamma} (b \cdot n) [w] v^+ ds \right\} \\ & + \int_{\Gamma_D} \{ w ((a \nabla v) \cdot n) - ((a \nabla w) \cdot n) v \} ds + \int_{\Gamma_D} \sigma w v ds \\ & + \int_{\Gamma_{int}} \{ [w] \langle (a \nabla v) \cdot \nu \rangle - [v] \langle (a \nabla w) \cdot \nu \rangle \} ds + \int_{\Gamma_{int}} \sigma [w] [v] ds, \end{aligned}$$

e,

$$l_{DG}(v) = \sum_{K \in \mathcal{T}} \left\{ \int_K f v dx - \int_{\partial_- K \cap (\Gamma_- \cup \Gamma_D)} (b \cdot n) g_D v^+ ds \right\} \\ + \int_{\Gamma_D} g_D ((a \nabla v) \cdot n) ds + \int_{\Gamma_N} g_N v ds + \int_{\Gamma_D} \sigma g_D v ds,$$

em que σ é um parâmetro positivo que será dado adiante.

2.5.2 Estimativas *a priori* para o erro do método de Galerkin descontínuo padrão para a equação de difusão-advecção-reação

Assumindo (2.1.14) e lembrando da definição (2.2.5), introduzimos a norma,

$$\|w\|_{DG}^2 = \sum_{K \in \mathcal{T}} \left\{ \|\sqrt{a} \nabla w\|_K^2 + \|c_0 w\|_K^2 + \frac{1}{2} \|w^+\|_{\partial_- K \cap (\Gamma_- \cup \Gamma_D)}^2 \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \|w^+ - w^-\|_{\partial_- K \setminus \Gamma_-}^2 + \frac{1}{2} \|w^+\|_{\partial_+ K \cap \Gamma}^2 \right\} + \int_{\Gamma_D} \sigma w^2 ds + \int_{\Gamma_{int}} \sigma [w]^2 ds. \quad (2.5.2)$$

Por (2.3.1) e (2.3.7), temos que,

$$\sum_K \left\{ \int_K (b \cdot \nabla w + c w) w dx - \int_{\partial_- K \cap \Gamma} (b \cdot n) [w] w^+ ds - \int_{\partial_- K \cap (\Gamma_- \cup \Gamma_D)} (b \cdot n) |w^+|^2 ds \right\} \\ = \sum_K \left\{ \|c_0 w\|_K^2 + \frac{1}{2} \|w^+\|_{\partial_- K \cap (\Gamma_- \cup \Gamma_D)}^2 + \frac{1}{2} \|w^+ - w^-\|_{\partial_- K \setminus \Gamma_-}^2 + \frac{1}{2} \|w^+\|_{\partial_+ K \cap \Gamma}^2 \right\},$$

segue então que (ver (2.4.7)),

$$\|w\|_{DG}^2 = B_{DG}(w, w) \quad \forall w \in H^2(\Omega, \mathcal{T}).$$

Para assegurar a propriedade ortogonal de Galerkin para $\forall v \in S^p$, supomos que a solução u para o problema de valor de fronteira considerado pertence

ao espaço $H^2(\Omega, \mathcal{T})$, e as funções u e $(a\nabla u) \cdot n$ são contínuas através de cada face $e \in \Psi_{int}$ que intercepta o subdomínio de elipcidade $\{x \in \bar{\Omega} ; \zeta^\top a \zeta > 0 \ \forall \ \zeta \in \mathbb{R}^n\}$.

Afim de obter uma estimativa “a priori” de erro para o hp -DGFEM aplicado a equação de advecção-difusão-reação combinamos os resultados das seções 2.3.2 e 2.4.2 no próximo teorema.

Teorema 2.36. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio poligonal limitado e $\mathcal{T} = \{K\}$ uma partição regular de Ω composta de n -paralelepípedos K com diâmetro h_K , e seja, \mathbf{p} um vetor de variação local limitada. Vamos supor que sobre cada face $e \in \Psi_{int} \cup \Psi_D$ o parâmetro σ_e é definido como em (2.4.15). Se (2.1.14), (2.3.3) e (2.4.3) valem, e $u|_K \in H^{k_K}(K)$ com $k_K \geq 2$ para cada $K \in \mathcal{T}$. Então, a solução $u_{DG} \in S^p(\Omega, \mathcal{T}, F)$ de (2.5.1) satisfaz a seguinte estimativas de erro:*

$$\| \|u - u_{DG}\| \|_{DG}^2 \leq C \sum_{K \in \mathcal{T}} \left(\alpha_K \frac{h_K^{2s_K-2}}{p_K^{2k_K-4}} + \beta_K \frac{h_K^{2s_K-1}}{p_K^{2k_K-1}} + \gamma_K \frac{h_K^{2s_K}}{p_K^{2k_K}} \right) \|u\|_{k_K, K}^2, \quad (2.5.3)$$

para $1 \leq s_K \leq \min(p_K + 1, k_K)$ e $p_K \geq 1 \ \forall \ K \in \mathcal{T}$. Sendo $\alpha_K = \bar{a}_K$; β_K e γ_K como no Teorema 2.27 e C uma constante positiva que depende de n , ρ , $k = \max_K k_K$ e da regularidade de \mathcal{T} .

Demonstração:

Sendo que,

$$\| \|w\| \|_{DG}^2 = \| \|w\| \|_{aDG}^2 + \| \|w\| \|_{aDG}^2,$$

e,

$$\Phi_1(p, s) \leq \frac{C(s)}{p^{s-1/2}}, \quad \Phi_2(p, s) \leq \frac{C(s)}{p^s} \quad 1 \leq s \leq \min(p + 1, k)$$

(2.5.3) segue de (2.4.16) e (2.3.30).

□

Capítulo 3

Estimativas *a posteriori*

O estudo de estimativas “a posteriori” é fundamental para elaborar estratégias de algoritmos adaptativos. Estas estimativas podem ser feitas tanto para minimizar o erro $\|u - u_{DG}\|$ (ver [22]) como para minimizar o erro de funcionais lineares de solução (ver [9, 10]), i.é., $|J(u) - J(u_{DG})|$. Para ambos os casos, a idéia é majorar o erro por constantes calculáveis multiplicadas pelo resíduo de elementos finitos. O que em geral requer hipóteses fortes sobre o problema em que se trabalha.

As estimativas a posteriori estão diretamente ligadas com o problema dual, mais precisamente com estimativas da solução do mesmo. Assim, para criar um algoritmo adaptativo, precisamos calcular uma solução dual aproximada (usando método de Galerkin descontínuo) quando o problema dual não tem solução analítica. Neste caso, toda a técnica empregada para obter a aproximação da solução primal é usada.

O estudo aqui apresentado segue as idéias inicialmente desenvolvidas por C. Johnson e colaboradores que posteriormente foram aprimoradas por E. Süli em [22]. Na seção 3.1 desenvolvemos a teoria para um operador qualquer \mathcal{L} (linear) e na seção 3.2 aplicamos essa teoria para o problema (2.1.1) no caso de $\Omega = (0, 1)$, isto é, para o problema de difusão-advecção-reação em uma dimensão.

3.1 Operador diferencial linear

Seja \mathcal{L} um operador linear, tal que, $\mathcal{L} : \mathcal{D}(\mathcal{L}) \subset Y \rightarrow Y$ sendo Y um espaço de Hilbert com produto interno (\cdot, \cdot) e norma $\|\cdot\|$, e $\mathcal{D}(\mathcal{L})$ é o domínio do

operador \mathcal{L} . Dado $f \in Y$, nosso problema é encontrar $u \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$, tal que,

$$\mathcal{L}u = f. \quad (3.1.1)$$

Designamos por h um parâmetro positivo de discretização. Vamos aproximar esse problema tomando uma seqüência de espaços de dimensão finita $\{X_h\}$, tal que, $X_h \subset D(\mathcal{L}) \forall h$, e simultaneamente consideremos uma seqüência de espaços de dimensão finita $\{Y_h\}$ com $Y_h \subset Y \forall h$ chamados espaços de testes.

Denotamos por Π_h o projetor ortogonal de Y em Y_h . Então, podemos formular o método de elementos finitos de Galerkin descontínuo como:

Encontre $u_h : X_h \rightarrow Y_h$, tal que,

$$\Pi_h \mathcal{L}u_h = \Pi_h f,$$

ou equivalentemente, podemos escrever isto como segue:

Encontre $u_h \in Y_h$, tal que,

$$(\mathcal{L}u_h, v_h) = (f, v_h) \quad \forall v_h \in Y_h.$$

Nota: Aqui os espaços finitos X_h podem ser “pensados” como uma partição do $D(\mathcal{L})$ e os Y_h como os espaços de polinômios por partes.

Definimos o resíduo de elementos finitos r_h por,

$$r_h = f - \mathcal{L}u_h,$$

e notamos, devido a propriedade ortogonal de Galerkin que,

$$(r_h, v_h) = 0 \quad \forall v_h \in Y_h.$$

Por necessidades posteriores vamos considerar o seguinte problema auxiliar, chamado de *problema dual*:

Encontre $z \in \mathcal{D}(\mathcal{L}')$, tal que,

$$\mathcal{L}'z = u - u_h.$$

A análise do erro “a posteriori” é baseada no seguinte argumento de

dualidade:

$$\begin{aligned}\|u - u_h\|^2 &= (u - u_h, u - u_h) = (u - u_h, \mathcal{L}'z) = (\mathcal{L}(u - u_h), z) \\ &= (\mathcal{L}u - \mathcal{L}u_h, z) = (f - \mathcal{L}u_h, z) = (r_h, z).\end{aligned}$$

Pela ortogonalidade de Galerkin, $(r_h, z_h) = 0 \quad \forall \quad z_h \in Y_h$, resultando que

$$\|u - u_h\|^2 = (r_h, z - z_h) = (h^s r_h, h^{-s}(z - z_h)),$$

e pela desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$\|u - u_h\|^2 \leq \|h^s r_h\| \|h^{-s}(z - z_h)\|. \quad (3.1.2)$$

Aqui, o primeiro termo do lado direito é calculável, enquanto o segundo é desconhecido, então, precisamos substituí-lo em termos de $u - u_h$ multiplicado por constantes adequadas.

Vamos supor que $\{W_l\}_{l \geq 0}$ é uma “escala” de espaços de Hilbert com norma correspondente $\|\cdot\|_l$, tal que, $W_0 = Y$ e W_{l_2} é continuamente imerso em W_{l_1} para $l_2 \geq l_1$.

Supomos a seguinte propriedade de aproximação: para cada $z \in W_s$ existe $z_h \in Y_h$ e uma constante $C_a > 0$ que independe de z e h , tal que,

$$\|h^{-s}(z - z_h)\| \leq C_a \|z\|_s.$$

Para métodos de elementos finitos essa hipótese é facilmente cumprida escolhendo $W_s = H^s(\Omega)$ para um apropriado $s = s_a > 0$ e refere-se as propriedades de aproximação padrão de funções polinomial por partes em espaços de Sobolev, com $z_h \in Y_h$ tomado como o interpolante, quase-interpolante ou a projeção de z . Então, chegamos a estimativa,

$$\|u - u_h\|^2 \leq C_a \|h^s r_h\| \|z\|_s. \quad (3.1.3)$$

Para proceder, supomos que \mathcal{L}' é inversível e que $(\mathcal{L}')^{-1}$ é um operador

linear e limitado de Y em W_s para algum $s \in [0, s_a]$, então,

$$\|z\|_s = \|(\mathcal{L}')^{-1}(u - u_h)\|_s \leq C_s \|u - u_h\|, \quad (3.1.4)$$

em que $C_s > 0$ é de maneira que $C_s \geq \|(\mathcal{L}')^{-1}\|$.

Combinando (3.1.3) e (3.1.4) chegamos a desejada estimativa a posteriori sobre o erro global $u - u_h$ em termos do resíduo de elementos finitos r_h e as constantes C_a e C_s ,

$$\|u - u_h\| \leq C_a C_s \|h^s r_h\|. \quad (3.1.5)$$

Sendo conhecida u_h é fácil calcular r_h e então, $\|r_h\|$. Portanto, a desigualdade (3.1.5) será usada somente se C_a e C_s forem calculáveis. Cálculos para C_a , como já mencionado acima, usa-se resultados da teoria de aproximação. Por outro lado, o cálculo de C_s é mais difícil e envolve o estudo do problema dual (como p.e. se ele é bem-posto), sendo que qualquer estimativa que se chegue através do uso de argumentos analíticos para C_s é limitado inferiormente por $\|z\|_s / \|u - u_h\|$. Essa constante é na prática determinada computacionalmente “a mão” para o problema específico que se trabalha.

Resta-nos ainda determinar o valor de s . Se $s = 0$ não nos beneficiamos da ortogonalidade de Galerkin e tomando $z_h = 0$ teríamos,

$$\|u - u_h\| \leq C_s \|r_h\|.$$

Agregado a isto, gostaríamos que s fosse o maior possível, para refletir as propriedades de aproximação do espaço Y_h . Então, teríamos que escolher $s = s_a$. Por outro lado, para problemas hiperbólicos, $(\mathcal{L}')^{-1}$ tem pouca regularidade, o que nos impõe uma limitação para escolher o valor de s . Assim, a melhor escolha de s depende de uma “criteriosa” análise do problema que se trabalha.

Algoritmo Adaptativo

Como mencionado acima, a análise de erro a posteriori é realizada também para funcionais lineares de solução $J(\cdot)$, que podem ser valores pontuais, médias locais ou integrais de fluxo. Desse modo, obtém-se estimativas do tipo (ver

[9]):

$$|J(u) - J(u_h)| \leq E(u_h, h, p, z - z_h), \quad (3.1.6)$$

em que o lado direito é semelhante a parte direita de (3.1.2). E quando não se conhece a solução analítica z para o problema dual, esta é aproximada numericamente. Assim, denotando por z_{DG} a aproximação de Galerkin descontínua para z , a equação (3.1.6) pode ser rescrita como:

$$|J(u) - J(u_h)| \leq |E(u_h, h, p, z_{DG} - z_h)| + |E_\Omega(u_h, h, p, z - z_{DG})| \equiv E_P + E_D,$$

em que E_P é uma ordem de grandeza maior que E_D conforme [9]. Desta forma, E_D pode ser absorvido por E_P sem que seja comprometida a estimativa acima.

Como qualquer algoritmo adaptativo está baseando na idéia que: Dado um funcional linear $J(\cdot)$ e uma tolerância positiva TOL , deve-se calcular u_h , tal que, $|J(u) - J(u_h)| \leq TOL$. Temos que este algoritmo adaptativo não será comprometido se o critério de parada for, $E_P \leq TOL$.

Eqüidistribuindo o erro do critério de parada sobre todos os elementos da malha, precisamos que

$$E_{P|K} \leq \frac{TOL}{N}, \quad (3.1.7)$$

em que N é o número de elementos da malha.

Assim, cada elemento da malha é “testado” e passa por um h -refinamento ou p -enriquecimento para assegurar que o princípio da eqüidistribuição (3.1.7) seja válido. Uma vez que um elemento K é testado, uma decisão precisa ser feita sobre alterar o tamanho h_K ou o grau local p_K da aproximação polinomial. Quando E_D é maior que TOL/N , e a solução primal u e dual z forem regulares, um p -enriquecimento vai ser mais eficiente que h -refinamento. Entretanto, se u ou z tem baixa regularidade no elemento K , então, h -refinamento vai ser mais adequado. E repete-se este processo até que a condição (3.1.7) seja válida.

Desta forma, fica garantido que o erro entre a solução exata (ou funcional linear da solução exata) e a solução aproximada (e o funcional linear da solução aproximada) é menor que TOL .

3.2 O problema modelo em uma dimensão

Desenvolvemos aqui (na integra) a teoria apresentada na seção anterior para o problema (2.1.1) no caso de $\Omega = (0, 1)$ e com condições de fronteiras nulas, conseguindo assim, exibir explicitamente o “tamanho” do erro $\|u - u_h\|$.

Inicialmente enunciamos dois resultados que serão usados no decorrer do proposto, cuja as demonstrações vão ser omitidas.

Lema 3.1. (Desigualdade de Poincaré-Friedrichs) *Supomos que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto aberto limitado com fronteira suficientemente regular (p.e. um domínio poligonal) e seja $u \in H_0^1(\Omega)$. Então, existe uma constante $C_\star(\Omega)$, independente de u , tal que,*

$$\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \leq C_\star \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 dx. \quad (3.2.1)$$

Observação 3.2. *Se $\Omega = (0, 1)^2 \subset \mathbb{R}^2$, então, $C_\star = \frac{1}{4}$; similarmente, se $\Omega = (0, 1) \subset \mathbb{R}$, então, $C_\star = \frac{1}{2}$.*

Consideramos a subdivisão não uniforme de $(0, 1)$ dada por,

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{N-1} < x_N = 1,$$

sendo os pontos da malha x_i , $i = 0, \dots, N$, não necessariamente igualmente espaçados. Vamos supor que $N \geq 2$ para termos ao menos um ponto (nódulo) na malha. Designamos por $h_i = x_i - x_{i-1}$ para $i = 1, \dots, N$ e por $h = \max_i h_i$. Para essa subdivisão, consideramos a função base de elementos finitos

$$\phi_i(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq x_{i-1} \\ (x - x_{i-1})/h_i & \text{se } x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ (x_{i+1} - x)/h_{i+1} & \text{se } x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0 & \text{se } x_{i+1} \leq x \end{cases},$$

para $i = 1, \dots, N - 1$. Tomamos agora $V_h = \text{span}\{\phi_1, \dots, \phi_{N-1}\}$, temos que, V_h é um subespaço de dimensão $N - 1$ do espaço $H_0^1(0, 1)$.

Definição 3.3. *O interpolante de u designado por $\mathcal{I}_h u \in V_h$ é a função contínua linear por partes definida sobre a subdivisão acima que coincide com u nos pontos x_i*

da malha, i. é.,

$$\mathcal{I}_h u(x) = \sum_{i=1}^{N-1} u(x_i) \phi_i(x).$$

Lema 3.4. *Supomos que $u \in H^2(0, 1)$ e seja $\mathcal{I}_h u$ o interpolante de u pertencente ao espaço V_h . Então, as seguintes estimativas de erro valem:*

$$\|u - \mathcal{I}_h u\|_{L_2(0,1)} \leq \left(\frac{h}{\Pi}\right)^2 \|u''\|_{L_2(0,1)}, \quad (3.2.2)$$

$$\|u' - (\mathcal{I}_h u)'\|_{L_2(0,1)} \leq \frac{h}{\Pi} \|u''\|_{L_2(0,1)}, \quad (3.2.3)$$

Nosso problema modelo é:

$$\begin{aligned} -u'' + bu' + cu &= f & \text{para } 0 < x < 1 \\ u(0) &= u(1) = 0, \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

sendo $b \in W_\infty^1(0, 1)$, $c \in L_\infty(0, 1)$ e $f \in L_2(0, 1)$.

Consideremos a forma bilinear,

$$B(w, v) = \int_0^1 [w'v' + bw'v + cvv] dx,$$

e o funcional linear,

$$l(v) = \int_0^1 f v dx,$$

então, a formulação fraca para (3.2.4) é:

Encontre $u \in H_0^1(0, 1)$, tal que,

$$B(u, v) = l(v) \quad \forall v \in H_0^1(0, 1).$$

Como visto na seção 2.1.3 com a hipótese (2.1.14) o problema (3.2.4) tem única solução fraca $u \in H_0^1(0, 1)$.

O problema aproximando para (3.2.4) é:

Encontre $u_h \in V_h$, tal que,

$$B(u_h, v_h) = l(v_h) \quad \forall v_h \in V_h$$

Notação: Por simplicidade vamos escrever $\|\cdot\|$ em vez de $\|\cdot\|_{L_2(0,1)}$.

Notamos que o problema dual para (3.2.4) é dado por,

$$\begin{aligned} -z'' - (bz)' + cz &= u - u_h & \text{para } 0 < x < 1 \\ z(0) &= z(1) = 0, \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

então,

$$\|u - u_h\|^2 = (u - u_h, u - u_h) = (u - u_h, -z'' + (bz)' + cz) = B(u - u_h, z),$$

pois $(u - u_h)(0) = (u - u_h)(1) = 0$.

Pela ortogonalidade de Galerkin $B(u - u_h, z_h) = 0 \quad \forall z_h \in V_h$ e tomando z_h como o interpolante de z associado a partição definida acima, temos que,

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|^2 &= B(u - u_h, z - \mathcal{I}z) = B(u, z - \mathcal{I}z) - B(u_h, z - \mathcal{I}z) \\ &= (f, z - \mathcal{I}z) - B(u_h, z - \mathcal{I}z). \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

Como,

$$\begin{aligned} B(u_h, z - \mathcal{I}z) &= \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} u_h' (z - \mathcal{I}z)' dx \\ &+ \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} b u_h' (z - \mathcal{I}z) dx + \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} c u_h (z - \mathcal{I}z) dx, \end{aligned}$$

integrando por partes o primeiro termo em cada $N - 1$ intervalos (note que $(z - \mathcal{I}z)(x_i) = 0$, $i = 0, \dots, N$) resulta que,

$$B(u_h, z - \mathcal{I}z) = \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} [u_h'' + b u_h' + c u_h] (z - \mathcal{I}z) dx.$$

Além disso,

$$(f, z - \mathcal{I}z) = \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)(z - \mathcal{I}z)dx.$$

Substituindo isto em (3.2.6), deduzimos que,

$$\|u - u_h\|^2 = \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} R(u_h)(z - \mathcal{I}z)dx, \quad (3.2.7)$$

para $i = 1, \dots, N$ sendo $R(u_h) = f + u_h'' - bu_h' - cu_h$ a função resíduo de elemento finito. Aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz em (3.2.7) temos que,

$$\|u - u_h\|^2 = \sum_{i=1}^N \|R(u_h)\|_{L_2(x_{i-1}, x_i)} \|z - \mathcal{I}z\|_{L_2(x_{i-1}, x_i)}.$$

De (3.2.2),

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|^2 &= \frac{1}{\Pi^2} \sum_{i=1}^N h_i^2 \|R(u_h)\|_{L_2(x_{i-1}, x_i)} \|z''\|_{L_2(x_{i-1}, x_i)} \\ &\leq \frac{1}{\Pi^2} \left(\sum_{i=1}^N h_i^4 \|R(u_h)\|_{L_2(x_{i-1}, x_i)}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^N \|z''\|_{L_2(x_{i-1}, x_i)}^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\|u - u_h\|^2 \leq \frac{1}{\Pi^2} \left(\sum_{i=1}^N h_i^4 \|R(u_h)\|_{L_2(x_{i-1}, x_i)}^2 \right)^{1/2} \|z''\|. \quad (3.2.8)$$

Nos concentramos agora em substituir $\|z''\|$ na desigualdade acima por constantes calculáveis. Por (3.2.5),

$$z'' = u_h - u - (bz)' + cz = u_h - u - bz' + (c - b')z,$$

logo,

$$\|z''\| \leq \|u_h - u\| + \|b\|_{L_\infty(0,1)} \|z'\| + \|c - b'\|_{L_\infty(0,1)} \|z\|. \quad (3.2.9)$$

Vamos mostrar que $\|z\|$ e $\|z'\|$ podem ser estimadas em termos de

$\|u - u_h\|$, então, o mesmo vale para $\|z''\|$. Com este fim, note que,

$$(-z'' - (bz)'' + cz, z) = (u - u_h, z).$$

Integrando por partes e notando que $z(0) = z(1) = 0$,

$$\begin{aligned} (-z'' - (bz)'' + cz, z) &= (z', z') + (bz, z') + (cz, z) \\ &= \|z'\|^2 + \frac{1}{2} \int_0^1 b[z^2]' dx + \int_0^1 c[z^2] dx, \end{aligned}$$

integrando por partes o segundo termo, resulta que,

$$\begin{aligned} (-z'' - (bz)'' + cz, z) &= \|z'\|^2 - \frac{1}{2} \int_0^1 b'[z^2] dx + \int_0^1 c[z^2] dx \\ &= \|z'\|^2 + \int_0^1 \left(c - \frac{1}{2} b' \right) z^2 dx. \end{aligned}$$

Assim,

$$\|z'\|^2 \stackrel{(2.1.14)}{\leq} (u - u_h, z) \stackrel{C.S.}{\leq} \|u - u_h\| \|z\|. \quad (3.2.10)$$

Por (3.2.1) e Observação 3.2,

$$\|z\|^2 \leq \frac{1}{2} \|z'\|^2,$$

então de (3.2.10),

$$\|z\| \leq \frac{1}{2} \|u - u_h\|, \quad (3.2.11)$$

e substituindo isso no lado direito de (3.2.10) deduzimos que,

$$\|z'\| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \|u - u_h\|, \quad (3.2.12)$$

e inserindo (3.2.11) e (3.2.12) em (3.2.9) resulta que,

$$\|z''\| \leq K \|u - u_h\|, \quad (3.2.13)$$

sendo $K = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\|b\|_{L_\infty(0,1)} + \frac{1}{2}\|c - b'\|_{L_\infty(0,1)}$ uma quantidade calculável.

Substituindo (3.2.13) em (3.2.8) chegamos ao resultado final do cálculo da estimativa *a posteriori* de erro

$$\|u - u_h\| \leq K_0 \left(\sum_{i=1}^N h_i^4 \|R(u_h)\|_{L_2(x_{i-1}, x_i)}^2 \right)^{1/2},$$

sendo $K_0 = \frac{K}{\Pi^2}$.

Conclusões

A análise “a priori” da hp -versão do método descontínuo de Galerkin apresentado nesta dissertação foi realizada, primeiramente, para a equação puramente hiperbólica, e então, para a equação de difusão. Para o primeiro caso, as estimativas “a priori” forneceram a convergência esperada do método, a qual, foi confirmada com alguns resultados numéricos, assim, podemos concluir que o método descontínuo de Galerkin é muito eficiente, independente de usar a formulação padrão ou estabilizada.

Para o caso da equação com o termo difusivo, a implementação é bem mais delicada, uma vez que, o método descontínuo de Galerkin deixa de ser local e passa a ser um método global. Conseqüentemente, na resolução numérica, é necessário levar outros fatores em conta, pois a dimensão do sistema global pode ser relativamente grande, pois depende diretamente do número de elementos que a malha possui. Ainda neste caso, um estudo mais detalhado pode ser realizado afim de obter uma estimativa “a priori” de erro que seja ótima em p e h , uma vez que, as apresentadas aqui foram sub-ótimas em p .

As estratégias adaptativas são outro ponto para se estudar, pois podem ser um diferencial muito grande na aplicação do hp -DGFEM, tanto no custo computacional como na “qualidade” da solução aproximada, uma vez que, para o hp -DGFEM é necessário tratar de maneira diferente as regiões onde a solução é descontínua das demais regiões. No caso de um elemento que pertença a região descontínua, o adequado é fazer um h -refinamento, isso não só melhora a solução aproximada, como também, em alguns casos, evita que o sistema global seja muito grande. Por outro lado, se a ordem de aproximação polinomial é grande, é mais conveniente que o elemento tenha uma tamanho maior.

Quanto as estimativas de erro “a posteriori”, nota-se que no argumento de dualidade (feito na seção 3.1), a hipótese do operador \mathcal{L} ser inversível e ter inversa limitada é razoavelmente forte, e agregado a isto, a determinação das constantes C_s e C_a , em muitos casos, é bastante complexa, o que impõe muita restrição no uso

desta teoria.

Já para o caso em que as estimativas “a posteriori” de erro são realizadas para os funcionais lineares de soluções, a maior dificuldade também está no problema dual. Entretanto, esta estratégia se apresenta como uma alternativa, pois não precisa de hipóteses fortes como as usadas no argumento de dualidade.

Apêndice A

Algumas desigualdades

Desigualdade Aritmética Geométrica (A.G.)

Para qualquer número real a e b vale que,

$$ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2).$$

Uma versão mais sofisticada desta desigualdade é obtida da seguinte forma,

$$ab = (a\epsilon) \left(\frac{b}{\epsilon} \right) \leq \frac{1}{2} \left((\epsilon a)^2 + \left(\frac{b}{\epsilon} \right)^2 \right),$$

e substituindo ϵ^2 por δ , deduzimos que,

$$ab \leq \frac{\delta}{2} a^2 + \frac{1}{2\delta} b^2$$

para qualquer $\delta > 0$.

Desigualdade de Hölder (H.)

Se $1 < p, q < \infty$, tal que, $1 = 1/p + 1/q$ e $u \in L_p(\Omega)$ e $v \in L_q(\Omega)$, então $uv \in L_1(\Omega)$ e,

$$\int_{\Omega} |u(x)v(x)| dx \leq \|u\|_{L_p(\Omega)} \|v\|_{L_q(\Omega)}.$$

No caso particular de $p = 2 \Rightarrow q = 2$ e a desigualdade de Hölder se

apresenta como,

$$|(u, v)| \leq \|u\|_{L_2(\Omega)} \|v\|_{L_2(\Omega)},$$

e é conhecida como desigualdade de Cauchy-Schwarz (C.S.).

A desigualdade de Hölder também vale para somas finitas ou infinitas e é dada por,

$$\sum_k |a_k b_k| \leq \left(\sum_k |a_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum_k |b_k|^q \right)^{1/q}.$$

Referências Bibliográficas

- [1] Adams, R. A. **Sobolev Spaces**. New York. Academic Press. 1975.
- [2] Baumann, C. E. **An hp-Adaptive Discontinuous Finite Element Method for Computational Fluid Dynamics**. PhD dissertation, The University of Texas at Austin, Agosto 1997.
- [3] Baumann, C. E.; Oden, J. T. **A Discontinuous hp-Finite Element Method for Convection-Diffusion Problems**. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering.
- [4] Bey, K.S.; Oden, J. T. **hp-Version Discontinuous Galerkin Methods for Hyperbolic Conservation Laws**. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 133(3-4). pp. 259-286, 1996.
- [5] Brenner, S. C.; Scott, L. R. **The Mathematical Theory of Finite Element Methods**. New York. Springer-Verlang. 1994.
- [6] Ciarlet, P. G. **The Finite Element Method for Elliptic Problems**. North-Holland. New York. 1980.
- [7] Fairweather, G. **Finite Element Galerkin Methods for Differential Equation**. Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics. New York. Marcel Dekker, Inc. 1978.
- [8] Houston, P.; Schwab, C.; e Süli, E. **Discontinuous hp-Finite Element Method for Advection -Diffusion Problems** . Oxford University Computing Laboratory research report N. 00/15(2000).
- [9] Houston, P.; Süli, E. **hp-Adaptive Discontinuous Galerkin Finite Element Method for First-Order Hyperbolic Problems**. Oxford University Computing Laboratory research report N. 01/05(2001).

- [10] Houston,P.; Rannacher, R.; e Süli, E. **A Posteriori Error Analysis for Stabilized Finite Element Approximations of Transport Problems.** Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 190 (2000), pp. 1483-1508.
- [11] Houston,P.; Schwab, C.; e Süli, E. **Stabilized hp-Finite Element Method for First-Order Hyperbolic Problem.** SIAM J. Numer. Anal. Vol.37,5 (2000), pp. 1618-1643.
- [12] Johnson, C. **Numerical Solution of Partial Differential Equation by the Finite Element Method.** Lund. Cambridge University Press. 1994.
- [13] Johnson, C.; Pitkäranta, J. **An analysis of the discontinuous Galerkin method for a scalar hyperbolic conservation law,** Math. Comp., 46(1986), pg. 1-23.
- [14] Kant, I. **Crítica da Razão Pura.** Nova Cultura, São Paulo, 1991.
- [15] Lesaint, P.; Raviart, P. A. **On a Finite Element Method for Solving the Neutron Transport Equation.** Em: Mathematical aspects of Finite Elements in Partial Differential equations, C.A. deBoor (Ed.), Academic Press, New York, 1974, pp. 89-123.
- [16] Maz'ja, V. G. **Sobolev Spaces.** Springer-Verlang, Berlin, 1985.
- [17] Medeiros, L. A.; Rivera, P. H. **Iniciação aos Espaços de Sobolev.** Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1977.
- [18] Oden, J. T.; Demkowicz, L. F. **Applied Functional Analysis.** Florida. CRC Press. 1996.
- [19] Reed, W. H.; Hill, T. R. **Triangular Mesh Methods for the Neutron Transport Equation,** Technical Report LA_UR-73-479, Los Alamos Scientific Laboratory, Los Alamos, NM, 1973.
- [20] Schwab, C. **p- and hp-Finite Element Methods. Theory and Applications in Solid and Fluid Mechanics.** Oxford, New York, 1998.
- [21] Strang, G. **Linear Algebra and its Applications,** Academic Press, 1992.

- [22] Süli, E. **A Posteriori Error Analysis and Adaptivity for Finite Element Approximations of Hyperbolic Problems**. Em: D. Kröner, M. Ohlberger and C. Rohde (Eds.). Introduction to Recent Developments in Theory and Numerics for Conservation Laws. Lecture Notes in Computational Science and Engineering. Volume 5, pp.123-194. Springer-Verlang, 1998.
- [23] Süli, E. **Finite Element Method for Partial Differential Equations**. Oxford University Computing Laboratory research report. 2000.
- [24] Yosida, K. **Functional Analysis**. Springer-Verlang, Berlin, 1978.