



WESLEY VIEIRA DA SILVA

**“OTIMIZAÇÃO DE CARTEIRAS DE INVESTIMENTOS NO
MERCADO FUTURO BRASILEIRO USANDO FUNÇÕES
UTILIDADE COM TRÊS MOMENTOS ESTATÍSTICOS”**

TESE DE DOUTORADO

**UFSC
Florianópolis, SC, BRASIL**

2002

WESLEY VIEIRA DA SILVA

**“OTIMIZAÇÃO DE CARTEIRAS DE INVESTIMENTOS NO MERCADO FUTURO BRASILEIRO
USANDO FUNÇÕES UTILIDADE COM TRÊS MOMENTOS ESTATÍSTICOS”**

TESE DE DOUTORADO

UFSC

FLORIANÓPOLIS, SC, BRASIL

2002

**“OTIMIZAÇÃO DE CARTEIRAS DE INVESTIMENTOS NO
MERCADO FUTURO BRASILEIRO USANDO FUNÇÕES UTILIDADE
COM TRÊS MOMENTOS ESTATÍSTICOS”**

por

WESLEY VIEIRA DA SILVA

Tese de Doutorado apresentada ao Programa Pós-Graduação em Engenharia de
Produção da Universidade Federal de Santa Catarina (SC)


Florianópolis, SC – Brasil

2002

WESLEY VIEIRA DA SILVA

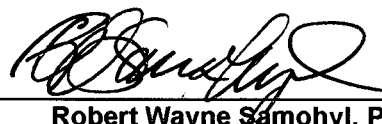
**“OTIMIZAÇÃO DE CARTEIRAS DE INVESTIMENTOS NO MERCADO FUTURO
BRASILEIRO USANDO FUNÇÕES UTILIDADE COM TRÊS MOMENTOS
ESTATÍSTICOS”**

Esta tese foi julgada adequada para a obtenção do título de DOUTOR EM
ENGENHARIA DE PRODUÇÃO e aprovada em sua forma final pelo Programa de
Pós-Graduação em Engenharia de Produção




Prof. Ricardo Miranda Barcia, Ph.D.
(Coordenador do Curso)

BANCA EXAMINADORA:



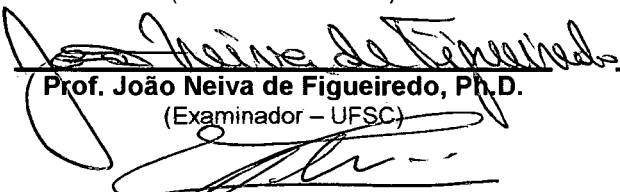
Robert Wayne Samohyl, Ph.D.
(Orientador – UFSC)



Emílio de Araújo Menezes, Dr.
(Moderador – UFSC)



Prof. Newton C. Affonso da Costa Jr., Dr.
(Examinador – UFSC)



Prof. João Neiva de Figueiredo, Ph.D.
(Examinador – UFSC)



Prof. Roberto Meurer, Dr.
(Examinador – UFSC)



Edson de Oliveira Pamplona, Dr.
(Examinador Externo – UNIFEI)



Prof. Gutemberg Hespanha Brasil, Dr.
(Examinador Externo – UFES)

Florianópolis, (SC), Maio de 2002.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer as seguintes pessoas e entidades que contribuíram direta ou indiretamente para que ele pudesse chegar ao estágio atual:

- ❑ Ao Bob Samohyl, peio incentivo, paciência, amizade e compreensão. Sinceramente, o meu obrigado por tudo;
- ❑ Aos membros da Banca Examinadora: Professores Newton C. Affonso da Costa Jr., Gutemberg Hespanha Brasil (Gut), Emílio de Araújo Menezes, Edson de Oliveira Pamplona, João Neiva de Figueiredo e Roberto Meurer, pelas críticas construtivas e sugestões realizadas com o intuito de engrandecer o trabalho;
- ❑ A Minha esposa, Luciana S. Costa V. da Silva, pela paciência e incentivo nos momentos mais difíceis desse trabalho;
- ❑ Aos meus pais, Raimundo e Arlinda, pelo incentivo dado desde a minha graduação em Maceió até o fim dessa jornada;
- ❑ À minha sogra Climene, que sempre torceu por mim durante essa jornada;
- ❑ À professora Simome, pelas correções dos erros de português;
- ❑ Aos amigos Amilton Barreto de Bem e Família, Elmo Tambosi Filho e toda Família, Anderson de B. Dantas e Família, Luis Felipe (Gordo) e Família, Adriano Mendonça e Família, Pedro Paulo Balestrassi e Família, João Caldas do Lago Neto, João Cândido e Família, André Luiz da S. Leite, Edson Ramos e Sílvia, Andréa Konrath, Florence P. Araújo, Tadeu e Família, Olívia Dalazen e Família, Patrícia Tavares, Rubson Rocha, Viviane Dias, Ivone Junges, Antero, Adauto Scalon, bem como a todos os que por ventura tenha esquecido, obrigado pelo incentivo direto ou indireto, além da amizade formada ao longo desse curso;
- ❑ Aos Funcionários do Departamento de Engenharia de Produção e Sistemas pela Universidade Federal de Santa Catarina na pessoa de Dalto, Alécio, Valéria e Sérgio que certamente torceram por mim;
- ❑ Ao Núcleo de Normalização e Qualimetria (NNQ) pelo apoio logístico recebido;
- ❑ A Universidade Federal de Santa Catarina, e Universidade Estadual de Santa Cruz, pelo apoio recebido durante a elaboração do trabalho.

A DEUS, por mais essa conquista que certamente teve muito esforço.

*Se ao perder você aprendeu algo, na verdade não perdeu.
Se ao vencer você aprendeu algo, na verdade evoluiu.*

Evandro Mota

SUMÁRIO

RESUMO.....	x
ABSTRACT.....	xi
LISTA DE QUADROS.....	xii
LISTA DE FIGURAS.....	xiv

CAPÍTULO I

1. INTRODUÇÃO.....	1
1.1. Aspectos Gerais.....	1
1.2. Justificativa e Importância do Trabalho.....	3
1.3. A Hipótese Básica da Tese.....	4
1.4. Objetivos.....	4
1.4.1. Geral.....	4
1.4.2. Específicos.....	5
1.5. Limitações do Trabalho.....	6
1.6. Estrutura do Trabalho.....	7

CAPÍTULO II

2. A MODERNA TEORIA DE CARTEIRA.....	9
2.1. Introdução.....	9
2.2. A Relação entre o Retorno e o Risco de um Ativo Individual.....	10
2.3. O Papel da Covariância e da Correlação dos Ativos numa Carteira.....	20
2.4. A Relação entre o Retorno e o Risco de uma Carteira.....	27
2.5. O Princípio da Diversificação de Carteiras.....	36

2.6. Considerações Sobre a Hipótese de Eficiência de Mercado.....	39
2.7. As Carteiras Consideradas Eficientes.....	42
2.8. O Teorema da Separação.....	44
2.9. O Gerenciamento de Carteiras Através dos Índices de Performance.....	46
2.9.1. O Índice de Sharpe.....	46
2.9.2. O Índice de Treynor.....	48
2.9.3. O Índice de Jensen.....	49

CAPÍTULO III

3. A TEORIA DA UTILIDADE.....	52
3.1. Introdução.....	52
3.2. Os Axiomas que Embasam a Teoria da Utilidade Esperada.....	54
3.3. O Formato das Funções Utilidade do Investidor Individual.....	57
3.4. As Medidas de Aversão ao Risco.....	68
3.5. As Funções Utilidade que Incorporam Dois Momentos Estatísticos.....	72
3.5.1. A Função Utilidade Quadrática.....	72
3.5.2. A Função Utilidade Logarítmica.....	79
3.5.3. A Função Utilidade Exponencial.....	83
3.5.4. A Função Utilidade Raiz Quadrada.....	88
3.6. As Funções Utilidade que Incorporam os Três Momentos Estatísticos.....	93
3.6.1. A Função Utilidade Cúbica.....	93
3.6.2. A Função Utilidade Cúbica Proposta por Karl Borch.....	100

CAPÍTULO IV

4. ASPECTOS GERAIS DOS MERCADOS FUTUROS.....	104
4.1. Introdução.....	104
4.2. A Lógica de Funcionamento dos Mercados Futuros.....	106
4.3. A Relação entre os Contratos Futuros e os Contratos a Termo.....	116
4.4. As Posições Assumidas nos Mercados Futuros.....	118
4.5. A Formação dos Preços nos Mercados Futuros.....	119
4.6. O Processo de Arbitragem nos Mercados Futuros.....	124
4.7. As Estratégias Formuladas a partir das Teorias de <i>Hedge</i>	128
4.7.1. A Teoria Clássica do <i>Hedge</i>	133
4.7.2. A Teoria Minimizadora do Risco.....	135
4.7.3. A Teoria da Especulação na Base.....	138
4.7.4. A Teoria de Portfolio.....	139

CAPÍTULO V

5. AS PREVISÕES DOS RETORNOS DOS ATIVOS SELECIONADOS.....	144
5.1. Introdução.....	144
5.2. As Variáveis Seleccionadas.....	146
5.3. Análise Descritiva dos Ativos Seleccionados.....	149
5.4. A Distribuição de Probabilidade das Taxas de Retorno dos Ativos Financeiros.....	155
5.4.1. A Relação entre a Média, Mediana e Assimetria das Taxas de Retorno.....	165
5.5. A Estacionaridade das Taxas de Retorno dos Ativos Seleccionados.....	170
5.6. Os Métodos de Previsões Econométricas.....	176
5.6.1. A Classe de Modelos <i>ARIMA</i>	177
5.6.2. O Modelo de Regressão Linear Dinâmica.....	180

5.7. Os Resultados das Previsões Econométricas.....	181
5.7.1. O Modelo de Previsão das Taxas de Retorno dos Contratos Futuros do Ibovespa (<i>F</i>).....	182
5.7.2. O Modelo de Previsão das Taxas de Retorno do Ibovespa à Vista (<i>I</i>).....	184
5.7.3. O Modelo das Taxas de Retorno dos Contratos Futuros do Ouro (<i>O</i>).....	186
5.7.4. O Modelo de Previsão das Taxas de Retorno dos Contratos Futuros do Dólar (<i>Q</i>).....	187
5.7.5. O Modelo de Previsão das Taxas de Retorno do Dólar (<i>D</i>).....	189
5.7.6. O Modelo de Previsão das Taxas de Retorno dos Contratos Futuros do Boi Gordo (<i>B</i>).....	191
5.8. As Previsões dos Ativos Seleccionados Fora da Amostra (<i>Ex-Ante</i>).....	193

CAPÍTULO VI

6. O MODELO ESTOCÁSTICO DE OTIMIZAÇÃO DE CARTEIRAS COM A INCORPORAÇÃO DA ASSIMETRIA: UMA APLICAÇÃO NO MERCADO FUTURO BRASILEIRO.....	196
6.1. Introdução.....	196
6.2. A Série de Expansão de Taylor.....	197
6.3. Os Custos de Transação do Modelo.....	200
6.4. A Simulação do Vetor de Riqueza do Algoritmo de Otimização.....	202
6.5. O Algoritmo de Otimização de Carteiras.....	206
6.6. Os Cenários Obtidos a partir das Carteiras Otimizadas.....	214

CAPÍTULO VII

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS E RECOMENDAÇÕES.....	241
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	246

APÊNDICE I: Contratos Futuros Negociados na BM&F.....	257
APÊNDICE II: Fluxograma de Funcionamento do Modelo.....	270
APÊNDICE III: Comportamento das Taxas de Retorno dos Ativos Seleccionados.....	271
ANEXO: Riqueza Esperada e Risco Temporal das Carteiras Otimizadas.....	274

RESUMO

SILVA, Wesley Vieira da. **Otimização de Carteiras de Investimentos no Mercado Futuro Brasileiro Usando Funções Utilidade com Três Momentos Estatísticos**. 2002. Tese (Doutorado em Engenharia de Produção) – PPGE/UFSC, Florianópolis – SC, Brasil.

Este trabalho tem como objetivo a proposição de um modelo dinâmico de otimização estocástica e não-linear de carteiras de investimentos nos mercados à vista e futuro, com a incorporação de alguns custos de transação. O algoritmo testado inicialmente fora desenvolvido por HALL e STEPHENSON *et al.* (1990) sendo posteriormente refinado por SAMOHYL em 1994. A operacionalização do algoritmo levou em consideração a influência do terceiro momento estatístico (assimetria) e das distribuições dos retornos dos 07 ativos previamente selecionados. Foram formuladas e otimizadas numa planilha eletrônica, 09 carteiras, levando-se em conta o grau de aversão ao risco por parte do potencial investidor. Foram otimizadas 03 funções utilidade, a saber: Cúbica, Karl Borch e Exponencial, sendo que as duas últimas foram expandidas até o terceiro momento central da distribuição através da técnica de expansão de Taylor. Os testes empíricos resultantes das otimizações das respectivas funções mostram que a função utilidade cúbica foi a única que pagou um prêmio pela assimetria de cerca de 1,72% e 1,08% para o caso das carteiras com os perfis conservador e moderado, respectivamente. Finalmente, após comparar todas as carteiras otimizadas, analisando-as através dos índices de performance de Sharpe, Treynor e Jensen, a carteira caracterizada como agressiva, otimizada através da função utilidade cúbica, foi a que obteve melhor desempenho dentre as carteiras agressivas otimizadas através das outras funções utilidade mencionadas e que obtiveram a segunda e terceira colocação, já tendo sido deduzidos os custos de transação dos ativos negociados.

Palavras Chave: Função Utilidade, Mercados Futuros e Otimização de Carteiras.

ABSTRACT

SILVA, Wesley Vieira da. **Optimization of Investments Portfólio on the Brazilian Future Market Using Utility Functions with Three Moments Statistics.** 2002. Thesis (Doctoral in Industrial Engineering) – PPGEP/UFSC, Florianópolis – SC, Brazil.

In the present study we propose an application of a dynamic stochastic nonlinear optimal control model for portfolio investments with incorporation of some transaction costs in the Brazilian spot and future markets. Therefore, portfolio theory and optimal model were utilized as a theoretical base in the model suggested. Hall and Stephenson et al (1990) developed the algorithm used in this study, and later Samohyl in 1994 adapted it. For operation of the algorithm Hall and Stephenson et al (1990) considered the influence of third statistical moment (skewness) of distribution of returns of seven assets previously selected. Therefore, nine portfolios were composed and optimized through electronic spreadsheet, considering the subjective preferences of the potential investor and also her degree of risk aversion. Besides, three utility functions were optimized: the cubic, Karl Borch and exponential. Through the Taylor expansion technique the cubic and exponential functions were expanded until the central third moment of distribution. The empirical tests showed that cubic utility function was the only that paid a premium by skewness around 1,72% and 1,08% for portfolios with conservative and moderate profile, respectively. Finally, we evaluate the optimized portfolio using the Sharpe, Treynor and Jensen Performance Measures. Of the nine portfolios, only the portfolio considered like aggressive and optimized through cubic utility function obtained the best performance. The other aggressive portfolios optimized through Karl Borch and Exponential utility functions obtained the second and third positions, respectively considering the transaction costs already deducted of the assets used.

Key Words: Utility Functions, Futures Markets and Portfolio Optimization.

LISTA DE QUADROS

Quadro 2.1: Matriz de Variância-Covariância dos Retornos	37
Quadro 3.1: Rendas Prováveis de um Sorteio Aleatório de Loteria	58
Quadro 3.2: Rendimentos Prováveis e utilidade Associados aos Resultados	66
Quadro 3.3: Níveis de Aversão ao Risco Absoluto e Relativo conforme o Nível de Riqueza do Investidor	92
Quadro 4.1: Exemplo Hipotético de uma Operação com Ajuste Final Positivo para o Vendedor	115
Quadro 4.2: Principais Diferenças entre os Contratos Futuros e os Contratos a Termo	117
Quadro 5.1: Estatísticas Descritivas dos Retornos Diários dos Ativos Seleccionados no Período de 01/08/2001 a 28/12/2001	150
Quadro 5.2: Matriz de Correlação dos Retornos Históricos dos Ativos	153
Quadro 5.3: Avaliação da Normalidade da Distribuição dos Retornos dos Ativos no Período de 01/08/2001 a 28/12/2001	164
Quadro 5.4: Teste de Raiz Unitária dos Ativos Seleccionados	175
Quadro 5.5: Estimação dos Retornos dos Contratos Futuros do Ibovespa (<i>F</i>)	182
Quadro 5.6: Teste Diagnóstico dos Parâmetros Estimados para o Ibovespa Futuro (<i>F</i>)	183
Quadro 5.7: Estimação dos Retornos do Ibovespa (<i>I</i>)	184
Quadro 5.8: Teste Diagnóstico dos Parâmetros Estimados para o Ibovespa (<i>I</i>)	185
Quadro 5.9: Estimação dos Retornos dos Contratos Futuros do Ouro (<i>O</i>)	186
Quadro 5.10: Teste Diagnóstico dos Parâmetros Estimados para o Ouro (<i>O</i>)	187
Quadro 5.11: Estimação dos Retornos dos Contratos Futuros do Dólar (<i>Q</i>)	188
Quadro 5.12: Teste Diagnóstico dos Parâmetros Estimados para o Dólar Futuro (<i>Q</i>)	189
Quadro 5.13: Estimação dos Retornos do Dólar (<i>D</i>)	190
Quadro 5.14: Teste Diagnóstico dos Parâmetros Estimados para o Dólar (<i>D</i>)	191
Quadro 5.15: Estimação dos Retornos do Boi Gordo Futuro (<i>B</i>)	192
Quadro 5.16: Previsões <i>Ex-Ante</i> dos Ativos Financeiros Seleccionados em (%)	194
Quadro 6.1: Custos de Transação a Serem Levados em Consideração	201

Quadro 6.2: O Algoritmo de Otimização das Carteiras	213
Quadro 6.3: Resultados do Processo de Otimização das Carteiras com Base na Função Utilidade Cúbica	215
Quadro 6.4: Proporções a serem Alocadas na Carteira Conservadora com Base na Função Utilidade Cúbica	218
Quadro 6.5: Proporções a serem Alocadas na Carteira Moderada com Base na Função Utilidade Cúbica	220
Quadro 6.6: Proporções a serem Alocadas na Carteira Agressiva com Base na Função Utilidade Cúbica	222
Quadro 6.7: Resultados do Processo de Otimização das Carteiras com Base na Função Utilidade Proposta por Karl Borch	223
Quadro 6.8: Proporções a serem Alocadas na Carteira Agressiva com Base na Função Utilidade Karl Borch	225
Quadro 6.9: Proporções a serem Alocadas na Carteira Moderada com Base na Função Utilidade Karl Borch	227
Quadro 6.10: Proporções a serem Alocadas na Carteira Conservadora com Base na Função Utilidade Karl Borch	228
Quadro 6.11: Resultados do Processo de Otimização das Carteiras com Base na Função Utilidade Exponencial	229
Quadro 6.12: Proporções a serem Alocadas na Carteira Agressiva com Base na Função Utilidade Exponencial	231
Quadro 6.13: Proporções a serem Alocadas na Carteira Moderada com Base na Função Utilidade Exponencial	233
Quadro 6.14: Proporções a serem Alocadas na Carteira Conservadora com Base na Função Utilidade Exponencial	235
Quadro 6.15: Comportamento do Prêmio pela Assimetria das Carteiras	237
Quadro 6.16: Avaliação do Desempenho das Carteiras Otimizadas nos 10 Dias de Previsão dos Ativos	225

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1: Comportamento da Semivariância das Taxas de Retorno	18
Figura 2.2: Correlação Positiva entre os Retornos dos Ativos (A) e (B)	23
Figura 2.3: Correlação Negativa entre os Retornos dos Ativos (A) e (B)	24
Figura 2.4: Correlação Nula entre os Retornos dos Ativos (A) e (B)	25
Figura 2.5: Correlação entre os Ativos de uma Carteira	26
Figura 2.6: Redução da Variância do Portfolio em Razão da Diversificação	39
Figura 2.7: Comportamento da Fronteira Eficiente	43
Figura 2.8: Representação do Teorema da Separação	45
Figura 3.1: Função Utilidade-Renda de um Investidor Averso ao Risco	61
Figura 3.2: Função Utilidade-Renda de um Investidor Amante do Risco	63
Figura 3.3: Função Utilidade-Renda de um Investidor Indiferente ao Risco	65
Figura 3.4: Relação entre Utilidade Esperada e riqueza Esperada	75
Figura 3.5: Relação entre Utilidade Esperada e Risco	76
Figura 3.6: Comportamento da Função Utilidade Quadrática	77
Figura 3.7: Comportamento da Função Utilidade Logarítmica	80
Figura 3.8: Comportamento da Função Utilidade Exponencial	84
Figura 3.9: Comportamento da Função Utilidade Raiz Quadrada	90
Figura 3.10: Comportamento da Função Utilidade Cúbica com o Acréscimo da Riqueza (W)	94
Figura 4.1: Funcionamento do Mercado À Vista	108
Figura 4.2: Funcionamento do Mercado Futuro	109
Figura 4.3: Ilustração do Funcionamento do Mercado Futuro	112
Figura 4.4: Perfil de Risco do Comprador de um Contrato Futuro	118
Figura 4.5: Perfil de Risco do Vendedor de um Contrato Futuro	119
Figura 4.6: Comportamento dos Preços À Vista, Futuro e da Base	122
Figura 4.7: Determinação da Razão Ótima de Hedge	141

Figura 4.8: Teorema da Separação e a razão Ótima de Hedge	143
Figura 5.1: Comportamento das Taxas de Retorno dos Ativos da Carteira	152
Figura 5.2: Os Tipos de Assimetria nas Distribuições de Probabilidade	158
Figura 5.3: Comportamento das Distribuições dos Retornos de Ativos	167
Figura 5.4: Histogramas das taxas de Retorno dos Ativos Selecionados	169
Figura 6.1: Caixa de Diálogo para a Incorporação dos Custos de Transação	202
Figura 6.2: Simulação a partir da Planilha Eletrônica Excel	205
Figura 6.3: Otimização da Carteira Conservadora com Base na Função Utilidade Cúbica	217
Figura 6.4: Otimização da Carteira Moderada com Base na Função Utilidade Cúbica	219
Figura 6.5: Otimização da Carteira Agressiva com Base na Função Utilidade Cúbica	221
Figura 6.6: Otimização da Carteira Agressiva com Base na Função Utilidade Proposta por Karl Borch	224
Figura 6.7: Otimização da Carteira Moderada com Base na Função Utilidade Proposta por Karl Borch	226
Figura 6.8: Otimização da Carteira Conservadora com Base na Função Utilidade Proposta por Karl Borch	227
Figura 6.9: Otimização da Carteira Agressiva com Base na Função Utilidade Exponencial	230
Figura 6.10: Otimização da Carteira Moderada com Base na Função Utilidade Exponencial	232
Figura 6.11: Otimização da Carteira Conservadora com Base na Função Utilidade Exponencial	234

CAPÍTULO I

1. INTRODUÇÃO

1.1. Aspectos Gerais

Os principais modelos de otimização contínua ou discreta são traduzidos pela grande dificuldade em sua manipulação, principalmente quando as suas formulações possuem formas não lineares, as variáveis em estudo não são determinísticas e sim estocásticas.

O problema fundamental na otimização de uma dada carteira de ativos financeiros pode ser visto como uma questão de planejamento: tomar decisões agora que permitam atingir o caminho ótimo através do tempo de forma a maximizar a riqueza esperada ou minimizar o risco associado a cada ativo que compõe essa mesma carteira.

Assim, esse trabalho procura apresentar alternativas de resolução para otimização de portfólios dinâmicos, estocásticos e não-lineares com a incorporação do terceiro momento estatístico (assimetria) e alguns custos de transação, valendo-se do algoritmo proposto inicialmente por HALL e STEPHENSON (1990), BECKER, *et al.* (1994) e RUSTEM (1994) e que fora refinado posteriormente por SAMOHYL (1994).

Normalmente, na teoria de finanças, parte-se da suposição de que a distribuição de probabilidade das taxas de retorno dos ativos financeiros se

comportam como uma distribuição normal sendo, portanto, um recurso analítico muito vezes aceitável, porém questionável, uma vez que a evidência de desvios da normalidade pode fornecer indicações complementares acerca da formação das expectativas sobre esses retornos.

Ao desconsiderar a influência do terceiro momento estatístico conhecido como assimetria das distribuições de probabilidade das taxas de retorno, em alguns casos, perde-se a oportunidade de se obter o que se conhece por prêmio pela assimetria.

ARDITTI (1967) argumenta em seu trabalho, ser favorável ao uso da assimetria positiva da distribuição, mostrando que ela acaba oferecendo ao investidor uma pequena possibilidade de se obter um grande retorno, além de estar protegido de grandes perdas sendo, portanto, preferida por investidores avessos ao risco que, em contrapartida, evitam assimetria negativa, o que significa ganho limitado e uma pequena possibilidade de uma grande perda.

Assim, o algoritmo proposto neste trabalho possui a vantagem de lidar com as não normalidades e não linearidades das taxas de rentabilidade das distribuições dos ativos financeiros, o que acaba convergindo com as idéias do autor supracitado.

Não obstante, a teoria de Markowitz baseia-se na teoria de utilidade, onde ele se fundamenta em algumas suposições, na qual se destaca o fato de que o investidor possui aversão ao risco e, conseqüentemente, sempre optará por um investimento de menor risco para o mesmo nível de retorno, bem como um maior retorno esperado para um dado nível de risco. Essa abordagem pode ser derivada dos axiomas da teoria de Bernoulli, pressupondo dois aspectos: o

primeiro de que a função utilidade do tomador de decisão possua uma configuração quadrática e o segundo de que a distribuição dos retornos dos ativos avaliados seja normal.

Nesse contexto, o modelo de otimização dinâmico proposto com base no algoritmo mencionado anteriormente, utiliza-se de recursos de otimização do *solver* de uma planilha eletrônica, com o objetivo de se tornar mais amigável ao usuário. Além disso, a sua aplicação no mercado futuro pode servir de base para a tomada de decisão de administradores de carteiras em banco de investimentos que atuam nesse segmento. Esses gestores podem comprar e vender nesse mercado, sem levar em consideração hipóteses que muitas vezes conduzem a erros durante o processo de formulação e otimização de carteiras, além de permitir que sejam incorporadas as preferências individuais através da função utilidade face a um conjunto de restrições pré-estabelecidas.

1.2. Justificativa e Importância do Trabalho

A pesquisa é justificada em virtude do crescente interesse que o tema controle ótimo estocástico ou determinístico vem alcançando nas mais diversas áreas, especialmente na área de ciências sociais aplicadas, já que o assunto era de tal complexidade que só despertava interesse de alguns pesquisadores.

Para tanto, os modelos de otimização de carteiras convencionais e/ou determinísticos não levam em consideração o conhecimento *a posteriori* dos benefícios decorrentes de cada investimento financeiro, face ao capital a ser investido, além de não levar também em conta o que se denominou

analiticamente de *fator de correção*, que é a diferença entre as soluções calculadas a partir do processo de otimização estocástico e determinístico.

Por fim, o propósito desse modelo destina-se principalmente aos profissionais denominados de *gestores de carteiras* que lidam com aplicações em ativos de renda variável.

1.3. A Hipótese Básica da Tese

Parte-se da hipótese de que o modelo de otimização estocástico e não-linear de carteiras de investimentos financeiros proposto no escopo do trabalho, capta os efeitos do terceiro momento estatístico (assimetria) e proporciona resultados esperados mais satisfatórios do que os modelos de otimização de carteiras tradicionalmente utilizados, tanto em relação ao retorno esperado quanto ao risco para o investidor.

1.4. Objetivos

1.4.1. Objetivo Geral

Este trabalho tem como objetivo a proposição de alternativas de resolução de um modelo dinâmico de otimização estocástica e não-linear de carteiras, com a incorporação de alguns custos de transação no mercado futuro brasileiro.

1.4.2. Objetivos Específicos

Como objetivos específicos pode-se enumerar:

- Fazer a incorporação do grau de aversão ao risco dos investidores em geral, através das funções utilidade esperada do investidor;
- Testar diversas funções utilidade esperada visando encontrar aquela função que produza resultados satisfatórios em problemas estocásticos e não-lineares de otimização de carteiras;
- Otimizar os portfólios com a realização de previsões de curtíssimo prazo para as taxas de retorno dos ativos financeiros negociados no mercado financeiro brasileiro;
- Realizar simulações dos vetores de riqueza esperada com base nos parâmetros estocásticos estimados, com o objetivo de incorporá-los nas funções utilidade esperada a serem otimizadas;
- Avaliar as carteiras que foram otimizadas com base nos índices de performance de Sharpe, Treynor e Jensen.

1.5. As Limitações do Trabalho

Como principais limitações deste trabalho tem-se:

- ❑ As não linearidades verificadas nas taxas de retorno dos ativos previamente selecionados, dificultando as previsões de curto prazo com o uso de métodos de estimação lineares;
- ❑ O fato de alguns contratos avaliados possuírem características próprias em termos de vencimento que acaba dificultando a suas inferências;
- ❑ O fato de deflacionar os ativos financeiros através do dólar comercial norte-americano, leva à formulação de carteiras sob a ótica de um investidor internacional;
- ❑ Além disso, considerou-se a suposição de que o passado das séries históricas analisadas consegue projetar de forma satisfatória o futuro, o que é uma prática comum no mercado financeiro.

1.6. Estrutura do Trabalho

Esta tese de doutorado encontra-se dividida em sete capítulos, a saber:

- ❑ Capítulo I: refere-se à introdução do trabalho onde engloba a justificativa e importância do trabalho, a hipótese do trabalho, objetivos geral e específicos, além das suas limitações;
- ❑ Capítulo II: traz a revisão de literatura referente à Moderna Teoria de Carteiras;
- ❑ Capítulo III: mostra algumas considerações sobre a teoria da utilidade esperada;
- ❑ Capítulo IV: evidencia algumas considerações acerca do funcionamento do mercado futuro brasileiro;
- ❑ Capítulo V: faz uma breve revisão de literatura dos métodos de previsão de séries temporais, bem como a análise descritiva das variáveis a serem utilizadas no modelo, além de mostrar as suas previsões através dos métodos dos mínimos quadrados ordinários e a classe de modelos ARIMA;

- Capítulo VI: traz toda a estrutura do modelo de otimização com a incorporação da assimetria e alguns custos de transação, a partir das funções utilidade pré-selecionadas;

- Capítulo VII: mostra as conclusões e recomendações para trabalhos futuros.

CAPÍTULO II

2. A MODERNA TEORIA DE CARTEIRAS

2.1. Introdução

A Teoria de Finanças sofreu profundas transformações nos últimos 50 anos. Desde a publicação do célebre artigo “*Portfolio Selection*”, por MARKOWITZ (1952), a importância dispensada à análise e domínio do risco e à gestão de investimentos, vem fazendo com que os investidores em geral tenham subsídios para a tomada de decisões, reduzindo-se com isso, grandes incertezas na escolha de ativos que estejam condizentes com o seu grau de aversão ao risco.

Os investidores passaram então a dar mais importância ao gerenciamento de carteiras, aliado ao comportamento dos fatores que influenciam os riscos não-sistemáticos dos portfólios, de modo que esses riscos fossem reduzidos significativamente, sem prejuízo da riqueza esperada por parte do aplicador.

Esse capítulo encontra-se estruturado em nove seções que discutirão os seguintes aspectos: a seção 2.2 trará um breve relato da relação risco e retorno de um ativo individual. A seção 2.3 tecerá breves considerações acerca do papel da covariância e correlação na formulação de uma carteira. A seção 2.4 falará sobre o comportamento do risco e retorno de uma carteira. A seção 2.5 abordará acerca do princípio da diversificação de carteiras. A seção 2.6

falará sobre a eficiência de mercado. A seção 2.7 faz algumas colocações sobre as carteiras consideradas eficientes. A seção 2.8 mostra algumas considerações a respeito do teorema da separação e, finalmente, a seção 2.9 enfoca brevemente as medidas de desempenho para o gerenciamento das carteiras a serem otimizadas, a partir dos índices de Sharpe, Treynor e Jensen.

2.2. A Relação entre o Retorno e o Risco de um Ativo Individual

As taxas de retorno obtidas sobre o investimento em um ativo qualquer, podem ser vistas como a relação entre o seu fluxo monetário e o respectivo preço, podendo ser encaradas como a soma dos rendimentos em unidades monetárias com o ganho ou perda do capital aplicado:

Do ponto de vista do aplicador de recursos financeiros, a taxa de retorno de um ativo qualquer refletirá uma combinação satisfatória de sua preferência por liquidez ou de sua função de transferência intertemporal de consumo, com seu comportamento em algum grau de aversão ao risco. Nesse prisma, a taxa de retorno depende, para a sua determinação, tanto da remuneração daquilo que fora investido, quanto das variações em mercado, do preço do ativo que o representa. De forma genérica, essa taxa pode ser representada pela forma funcional:

$$R_t = \left[\left(\frac{P_{t+i}}{P_t} \right) - 1 \right] \cdot 100; \quad \text{Com: } i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (2.1)$$

onde:

P_{t+i} : preços do ativo no período $(t+i)$;

P_t : preços do ativo no período (t) ;

R_t : taxa de retorno do ativo no período (t) .

A expressão anterior pode ainda ser vista de outra forma, quando se considera a taxa diferencial incidente sobre os dividendos e ganhos de capital a serem pagos ao investidor, também conhecido como taxa de lucratividade. Ressalta-se que essa taxa em termos genéricos, normalmente é tratada em termos nominais, uma vez que não se está levando em consideração os efeitos da inflação.

Todavia, ao avaliar determinada aplicação, recomenda-se observar esse efeito, levando-se a trabalhar com a taxa de retorno real, além dos efeitos da tributação e demais custos, explícitos ou implícitos, incorridos no processo de negociação. Logo, a expressão (2.1) pode ser reordenada como segue:

$$R_{t+i} = \left[\frac{D_{t+i} + P_{t+i}(1 - t_g)}{P_t} \right] \cdot 100 \quad \text{Com: } i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (2.2)$$

onde:

R_{t+i} : taxa de retorno ou de lucratividade no período $(t+i)$;

D_{t+i} : dividendos pagos ao investidor no período $(t+i)$;

P_{t+i} : preço do ativo no período $(t+i)$;

t_g : taxa incidida sobre os ganhos de capital;

P_t : preço do ativo no período (t) .

Pode-se ainda, converter as taxas de retorno discretas vista na expressão (2.2), numa taxa de retorno contínua, que é definida em termos do logaritmo da razão dos preços dos ativos, e que pode ser mostrada da seguinte forma:

$$R_{t+i} = \text{Ln} \left[\frac{D_t + P_{t+i} \cdot (1 - t_g)}{P_t} \right] \cdot 100 \quad (2.3)$$

A expressão anterior ainda pode ser transformada de modo que:

$$R_{t+i} = \text{Ln}[D_t + P_{t+i} \cdot (1 - t_g)] - \text{Ln}[P_t] \quad (2.4)$$

Denotando que $\text{Ln}[D_t + P_{t+i} \cdot (1 - t_g)] = Z_{t+i}$ e $\text{Ln}[P_t] = Z_t$, pode-se expressar (2.4) da seguinte forma:

$$r_{t+i} = \text{Ln} \left[\frac{Z_{t+i}}{Z_t} \right] \cdot 100 \quad (2.5)$$

onde (Z_t) e (Z_{t+i}) podem ser vistos como os preços em valores monetários do

ativo (Z) nos períodos (t) e ($t+i$), respectivamente, enquanto (r_{t+i}) é a taxa de retorno contínua.

Quando o investidor ordenou os ativos financeiros segundo as características de retorno médio e desvio-padrão desses retornos, ele atribuiu utilidade a tais retornos médios, os quais passaram a funcionar como expectativas de rendas futuras. Logo, ele transformou, por juízo próprio, a média dos retornos dos ativos, ponderada pela distribuição de frequência de suas ocorrências em períodos passados (Valor Esperado) em uma expectativa de retorno.

Assim, a determinação das taxas de retorno *ex-post* ou esperada possibilita uma avaliação do desempenho das aplicações realizadas. Quando o investidor empenha os seus recursos, a ele interessa a taxa de retorno mais provável de se obter dentro de um horizonte temporal de investimentos. Daí, ele passa a questionar qual será o preço provável de venda de determinado ativo que foi adquirido hoje a preço de mercado. Logicamente, tal indagação é passível de uma resposta probabilística.

ROSS, WESTERFIELD & JAFFE (1995), salientam que a média dos retornos passados dos ativos individuais traduz uma expectativa aceitável para os seus retornos futuros, dado que o passado deve ser ajustado com as previsões futuras, de modo que uma previsão mais apurada possa ser obtida a partir da determinação de um conjunto de retornos prováveis e das respectivas probabilidades, que pode ser representada matematicamente como uma média ponderada, tal como se encontra a seguir:

$$E(R_{t+i}) = \sum_j^n p_j \cdot R_{j,t+i} \quad \text{Com: } i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (2.6)$$

onde:

$E(\bullet)$: valor esperado da variável aleatória entre parênteses;

p_j : probabilidade de ocorrência do evento (j), com (n) eventos;

$R_{j,t+i}$: taxas de retorno em caso de ocorrência do evento (j) no tempo ($t + i$).

Por outro lado, a relação entre o risco e retorno tem sido apresentada como um dos pilares da literatura na área de finanças. A mensuração dos componentes risco e retorno é também uma das tarefas mais importantes dos analistas de mercado, sendo um ingrediente fundamental para a construção e formação de carteiras de ativos.

O processo de cálculo do desvio-padrão exige que, num primeiro instante, se acumulem as diferenças entre os retornos observados dos ativos (R_{is}) nos períodos, e as suas respectivas médias, elevando-as ao quadrado. Tal procedimento visa tão somente eliminar o sinal negativo das diferenças ($R_i < \bar{R}$), evitando a perda de informações, já que, os (R_i) se distribuem em torno de suas médias (\bar{R}) e as diferenças acabam se compensando.

O risco assumido em um investimento pode ser definido como uma estimativa de possíveis perdas em razão das incertezas relacionadas com a distribuição dos retornos das variáveis financeiras. Normalmente o risco desse ativo é mensurado através do desvio-padrão dos retornos inesperados,

podendo ser traduzida pela letra grega *sigma* (σ), que muitos conhecem como volatilidade.

Por outro lado, TOSTA DE SÁ (1999), mostra que numa situação onde envolva riscos, conhece-se a distribuição de probabilidade de cada um dos eventos possíveis que estão relacionados à decisão a ser tomada; ou seja, torna-se possível estabelecer a construção de distribuição de probabilidades de um evento futuro. Alternativamente, numa situação de incerteza, o que se procura é estimar uma distribuição de probabilidades para um evento futuro utilizando para isso o conhecimento acumulado dos resultados de situações similares que ocorreram no passado.

Neste caso, procura-se estimar a partir de uma distribuição para um evento futuro, o risco de um ativo qualquer, utilizando-se dados históricos que, para o caso de uma variável discreta, é calculada levando-se em conta a seguinte expressão:

$$Var(R_i) = \sigma^2 = \frac{\sum (R_i - \bar{R})^2 \cdot f_i}{\sum f_i}; \quad \text{Com: } i = 1, 2, 3, \dots, t \quad (2.7)$$

onde:

$Var(R_i) = \sigma^2$: variância dos retornos do ativo individual nos períodos (i) até (t);

R_i : taxas de retorno do ativo individual nos períodos (i) até (t);

\bar{R} : retorno médio do ativo individual;

f_i : freqüências ocorridas.

Caso se opte em determinar o desvio-padrão (σ) dos retornos desse mesmo ativo, basta extrair a raiz quadrada da variância que foi mensurada anteriormente, que pode ser visualizada a seguir como:

$$\sigma = \sqrt{\text{Var}(R_i)} \quad \text{Com: } i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (2.8)$$

onde:

σ : desvio-padrão das taxas de retorno do ativo individual;

$\text{Var}(R_i)$: variância das taxas de retorno do ativo individual.

A vantagem de se trabalhar com o desvio-padrão ao invés da variância das taxas de retorno, é que esta é uma unidade de medida expressa em unidades quadradas, o que dificulta de sobremaneira a sua avaliação, ao passo que o desvio-padrão traz como facilidade o fato de poder ser interpretado com a mesma unidade de medida dos dados originais.

ROSS, WESTERFIELD & JAFFE (1995) mostram, ainda, que quanto mais provavelmente um dado retorno puder distanciar-se da média esperada, maior será a sua volatilidade e, por conseqüência, maior será o risco assumido pelo investidor. Percebe-se então, que a dispersão ou largura da distribuição de probabilidade dos retornos possíveis reflete o grau de incerteza dos investimentos.

A distribuição com desvios-padrão pequenos em relação aos seus valores esperados, indicam uma pequena dispersão e um elevado grau de confiança nos resultados. Em termos de distribuição de probabilidade, pode-se avaliar o risco de um ativo qualquer, como segue:

$$\text{Var}(R_{t+i}) = \sum_{j=1}^n [R_{j,t+i} - E(R_{t+i})]^2 \cdot p_j \quad \text{Com: } \begin{cases} i = 1, 2, \dots, k \\ j = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (2.9)$$

onde:

$\text{Var}(R_{t+i})$: variância esperada do ativo no tempo $(t+i)$;

$R_{j,t+i}$: retorno em $(t+i)$ do ativo dado o evento (j) ;

$E(R_{t+i})$: retorno médio esperado do ativo em $(t+i)$;

p_j : probabilidade de ocorrência do evento (j) .

Vale ressaltar que as probabilidades descritas em (2.9) definem a função distribuição de probabilidade, que por construção, devem ser iguais à unidade; ou seja:

$$\sum p_j = 1 \quad (2.10)$$

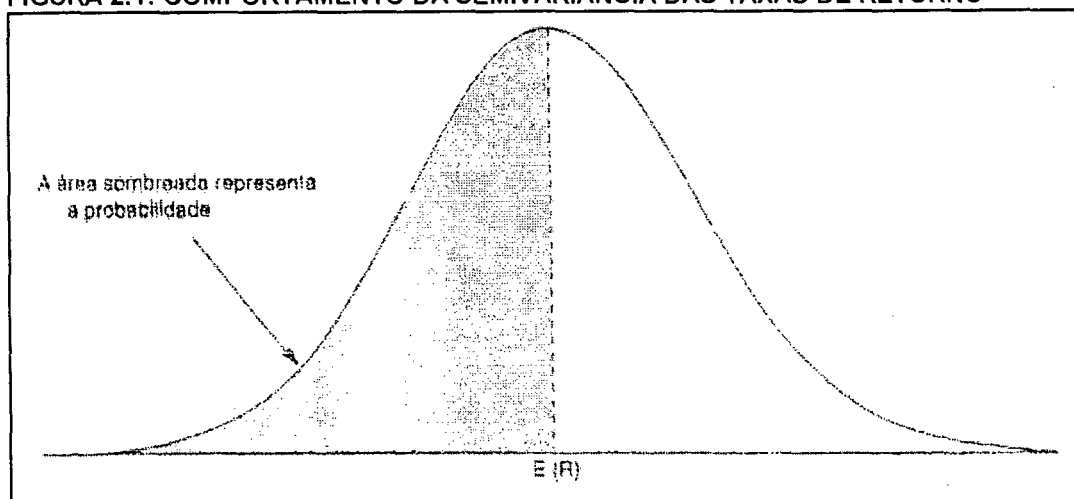
Observa-se que a estimativa do risco de um ativo qualquer pode diferir de um analista para outro no mercado. E, no momento em que tais estimativas

forem subjetivas, tratando-se do futuro, há um grande espaço para a discordância entre os analistas. Por outro lado, tais predições sobre o risco e retorno se modificarão ao longo do tempo, à medida que os analistas recebem novas informações relevantes acerca daquele mesmo ativo.

MARKOWITZ (1952), mostra que uma boa medida de mensuração do risco é a semivariância. Ela é um caso especial da variância da parte inferior ou do lado esquerdo da distribuição de probabilidade das taxas de retorno. A semivariância relativa ou semidesvio relativo é denotada como a raiz quadrada da variância relativa, sendo algumas vezes utilizada, em lugar da variância dos momentos parciais inferiores, quando o retorno pretendido não é a média da distribuição.

O comportamento da semivariância da distribuição dos retornos dos ativos pode ser evidenciado como segue:

FIGURA 2.1: COMPORTAMENTO DA SEMIVARIÂNCIA DAS TAXAS DE RETORNO



Fonte: Adaptado de BERNSTEIN e DAMODATAN (2000, P. 91)

A semivariância das taxas de retorno procura evitar diversas deficiências que infestam outras medidas de risco, sendo uma medida assimétrica centrada sobre o lado inferior da distribuição de probabilidade, evitando com isso, punir bons desempenhos. Ainda assim, é uma medida não-linear, no sentido de penalizar mais os valores maiores do que os menores.

Em termos contínuos, a expressão que mensura a semivariância das taxas de retorno pode ser vista como segue:

$$SVR = \int_{-\infty}^{E(R)} |R_i - E(R)|^2 df(R); \quad \text{Com: } i = 1, 2, 3, \dots, n. \text{ e } R_i < E(R) \quad (2.11)$$

onde:

SVR : semivariância relativa das taxas de retorno;

R_i : corresponde a um dos níveis de retorno potencial ou retorno referência da distribuição de probabilidade;

$E(R)$: taxas de retorno esperado;

$df(R)$: diferencial das taxas de retorno.

TOSTA DE SÁ (1999) ressalta ainda, que a utilização da semivariância dos retornos, se for passível de ser utilizada, seria muito mais adequada que a própria variância. Contudo, dificuldades de cálculo conseqüentes da utilização da semivariância invalidam a sua utilização.

O autor supracitado ainda atentou para o fato dos testes empíricos terem constatado que as distribuições dos retornos históricos se configuram

como quase simétricas e, portanto, neste caso, a semivariância fica quase igual à metade da variância e os cálculos necessários ao gerenciamento de risco utilizando a variância ou a semivariância conduzem à mesma composição de ativos nas carteiras.

Apesar de diversas vantagens na utilização desta medida, BERNSTEIN & DAMODARAN (2000) também evidenciam que ela apresenta algumas desvantagens. Dentre elas, encontra-se o fato da semivariância não ser popularmente conhecida como uma medida de mensuração do risco. Ademais, existem dificuldades em se utilizar pacotes computacionais de otimização que disponibilizem tais estimativas.

Além disso, existem outros momentos estatísticos que também podem influenciar significativamente os resultados esperados das carteiras de ativos financeiros em função do comportamento das distribuições de probabilidade das taxas de retorno dos ativos.

2.3. O Papel da Covariância e da Correlação dos Ativos numa Carteira

O coeficiente de correlação desempenha um papel muito importante na redução do risco não-sistemático de uma carteira de ativos, já que é necessário levar em consideração o comportamento do retorno de um ativo em relação ao retorno de um outro. Na verdade, o risco de uma carteira com um elevado número de ativos depende mais da covariância entre os seus elementos do que da variância, já que mesmo com a elevada variância de um ativo individual o risco da carteira pode ainda ser reduzido.

Para GAVA (1999), a covariância entre dois ativos quaisquer é um número de grande interesse na teoria de carteiras, uma vez que representa a forma positiva ou negativa de relacionamento entre duas variáveis, podendo contribuir com a redução do risco a depender da combinação dos ativos no portfólio.

Ele mostra que a covariância entre duas variáveis (A) e (B), por exemplo, pode ser mensurada multiplicando-se os desvios do retorno esperado de um ativo pelo outro. Neste caso, pode-se expressá-la em termos de distribuição de probabilidade como segue:

$$Cov(A, B) = \sum_{j=1}^n \sum_{t=1}^n [(R_{A_t} - E(R_{A_t})) (R_{B_t} - E(R_{B_t})) p_j] \quad (2.12)$$

com o seguinte intervalo de variação: $-\infty \leq Cov(A, B) \leq +\infty$

Onde:

$Cov(A, B)$: covariância entre os ativos (A) e (B);

R_{A_t} : retorno do ativo (A) no tempo (t);

R_{B_t} : retorno do ativo (B) no tempo (t);

$E(R_{A_t})$: retorno esperado do ativo (A) no tempo (t);

$E(R_{B_t})$: retorno esperado do ativo (B) no tempo (t);

p_j : probabilidade de ocorrência do evento (j).

Como a covariância é um valor de difícil interpretação, uma vez que ela varia de $(-\infty)$ a $(+\infty)$, uma forma de solucionar essa problemática é utilizar o coeficiente de correlação, que nada mais é do que uma covariância padronizada entre as taxas de retorno. Ele pode ser calculado, dividindo-se a covariância pelo produto dos desvios-padrão das taxas de retorno de ambos os ativos. Matematicamente pode-se definir o coeficiente de correlação de *Pearson* da seguinte forma:

$$\rho_{A,B} = \frac{\text{Cov}(A, B)}{\sigma_A \cdot \sigma_B} \quad (2.13)$$

com o seguinte intervalo de variação: $-1 \leq \rho_{A,B} \leq +1$.

onde:

$\rho_{A,B}$: coeficiente de correlação de *Pearson* entre os retornos dos ativos (A) e (B);

σ_A : desvio-padrão das taxas de retorno do ativo (A);

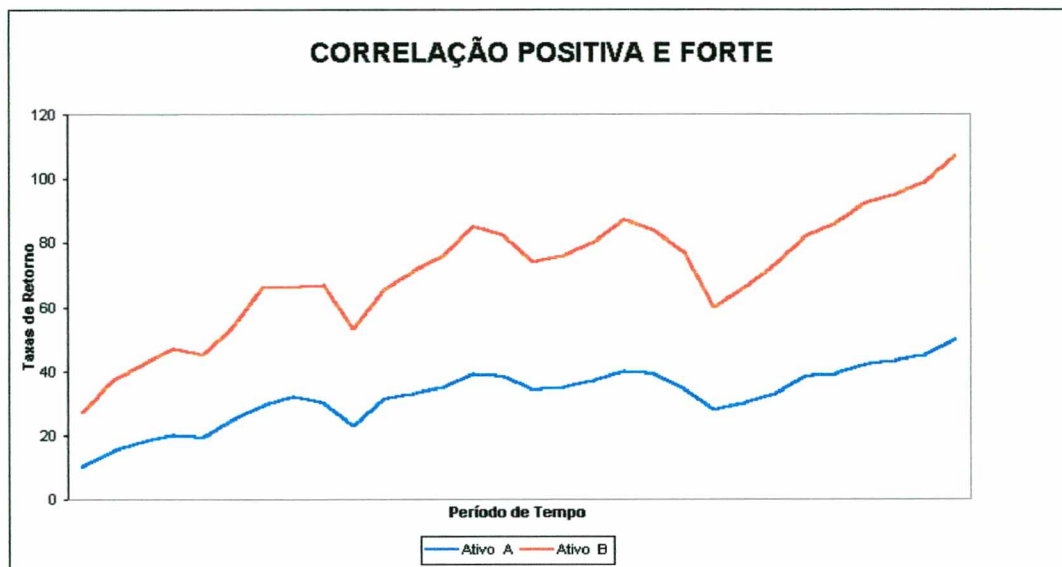
σ_B : desvio-padrão das taxas de retorno do ativo (B);

$\text{Cov}(A, B)$: covariância entre as taxas de retorno dos ativos (A) e (B).

Como o desvio-padrão sempre é positivo, a correlação passa a ser utilizada como uma importante variável que auxilia na redução do risco de

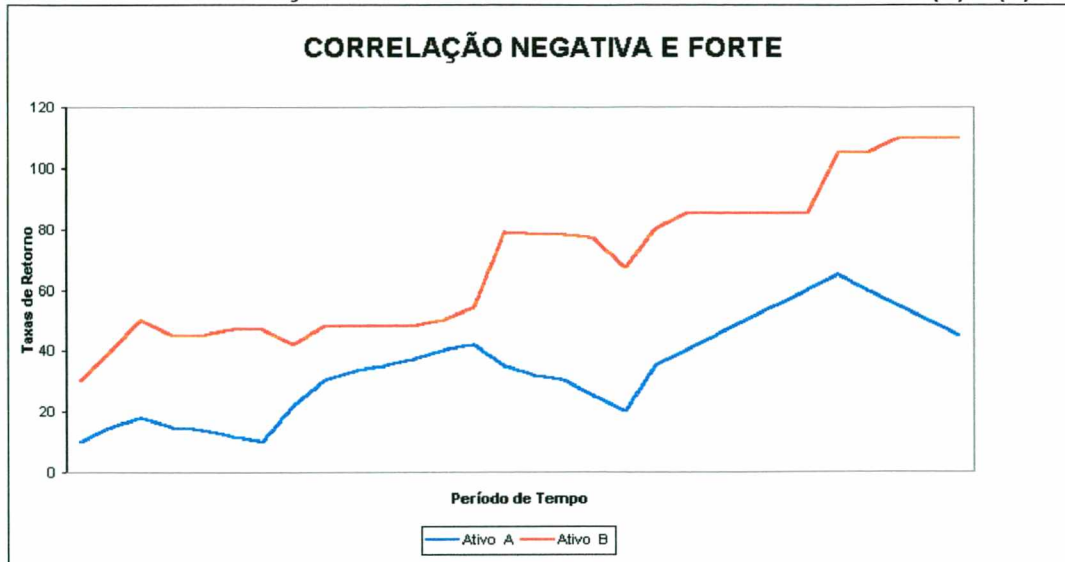
uma carteira de ativos. Dessa forma, pode-se afirmar a partir das conjecturas anteriores, que à medida que as taxas de retorno de um ativo acompanham no mesmo sentido e na mesma proporção as taxas de retorno do outro, não haverá ganhos na redução do risco de uma carteira de ativos em função da combinação dos ativos. Este fato pode ser visualizado a partir da figura 2.2.

FIGURA 2.2: CORRELAÇÃO POSITIVA ENTRE OS RETORNOS DOS ATIVOS (A) E (B).



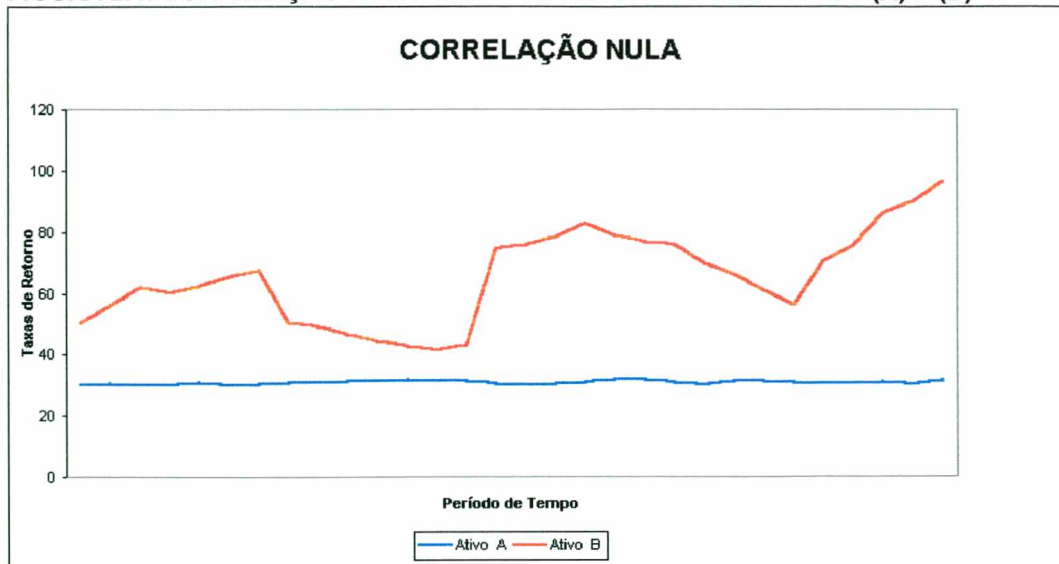
Por outro lado, quando as taxas de retorno dos ativos (A) e (B) se movimentam no sentido inverso, ou seja, quando a taxa de retorno de um ativo vier a subir, enquanto a taxa de retorno do outro ativo vier a cair, notar-se-á uma forte contribuição para a redução do risco da carteira que combina os dois ativos. Na realidade é como se um dos ativos estivesse puxando os retornos de um ativo numa direção e outro na direção oposta. Tal situação pode ser visualizada através da figura 2.3.

FIGURA 2.3: CORRELAÇÃO NEGATIVA ENTRE OS RETORNOS DOS ATIVOS (A) E (B).



De outra forma, quando não há qualquer relacionamento entre as taxas de retorno dos ativos (A) e (B), o risco da carteira simplesmente será a média ponderada dos riscos de cada um dos ativos individualmente. ROSS, WESTERFIELD & JAFFE (1995), alertam para o fato de que se duas taxas de retorno não possuírem quaisquer relacionamentos, a expressão que mensura a covariância não produzirá resultado exatamente igual a zero para uma dada série histórica. Este aspecto decorre do erro de amostragem, já que o simples caráter aleatório da amostragem poderá produzir resultados positivos ou negativos. Assim, numa amostra maior, se as duas séries não estiverem associadas, produzirá um valor próximo de zero. Tal situação pode ser visualizada na figura 2.4, tal como segue:

FIGURA 2.4: CORRELAÇÃO NULA ENTRE OS RETORNOS DOS ATIVOS (A) E (B).



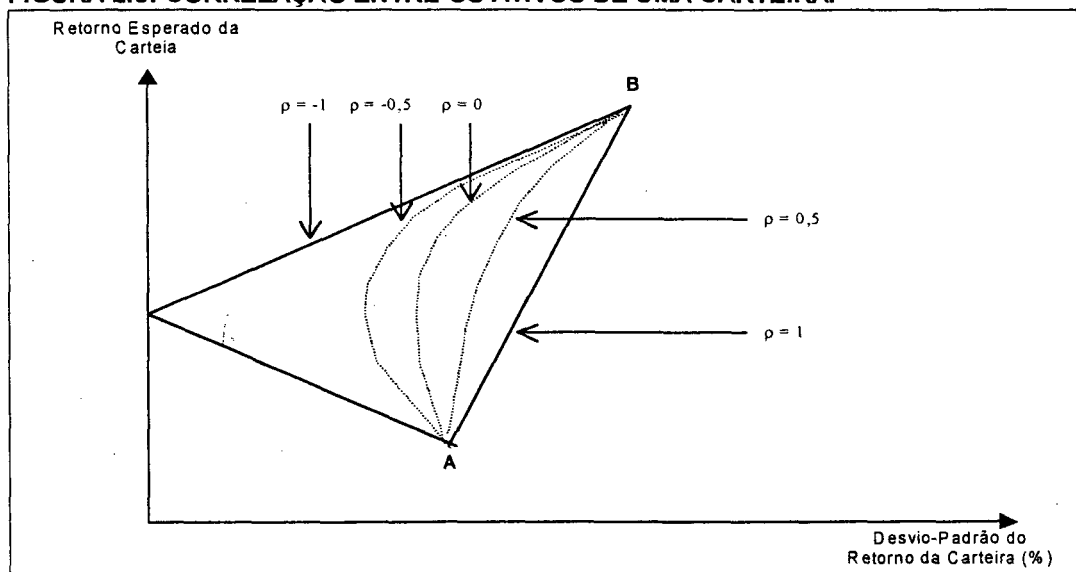
Em se tratando de uma carteira de ativos é fácil observar como uma covariância negativa ou próxima de zero, pode levar a uma redução significativa do risco do portfólio. Assim, três situações podem ser consideradas, em razão das combinações lineares dos ativos que irão compor tal portfólio:

- ❑ Correlação perfeita e positiva entre os ativos da carteira: neste caso, o coeficiente de correlação será igual a (+1), sendo pouco beneficiado com os potenciais ganhos decorrentes da diversificação;
- ❑ Correlação perfeita e negativa entre os ativos da carteira: neste caso, o coeficiente de correlação será igual a (-1). Como resposta, os preços dos ativos movem em sentido inverso. Notadamente, tudo o que for perda em um ativo poderá ser recompensado por ganhos da mesma magnitude no

outro ativo;

- Correlação nula entre os ativos da carteira: neste caso, é mais provável que o coeficiente de correlação assuma valores extremos, devendo estar no intervalo de (-1) a (+1), de tal forma que reduza a variância da carteira analisada. As três situações anteriores podem ser vislumbradas a partir da figura 2.5.

FIGURA 2.5: CORRELAÇÃO ENTRE OS ATIVOS DE UMA CARTEIRA.



Fonte: Adaptado de Ross *et al.* (1995)

Observe através da figura 2.5 que a linha que unem os ativos A e B, retratam a perfeita correlação entre os títulos da carteira, cujo coeficiente de correlação linear é igual à unidade ($\rho = 1$). À medida que são combinados diferentes títulos com coeficientes de correlação de retornos menores do que a unidade, é possível reduzir os riscos da carteira formulada. Vejam ainda que os coeficientes de correlação negativos denotam o comportamento de dois

ativos com suas expectativas de retorno esperado e risco, além de permitir uma proteção completa sobre o impacto de preços de um valor sobre outro. Além disso, as correlações desempenham um papel fundamental na redução do risco da carteira. Com isso, os gestores de risco procurarão combinar ativos que possuam baixos valores ou valores negativos dos coeficientes de correlação que irão compor o portfolio a ser otimizado.

2.4. A Relação entre o Retorno e o Risco de uma Carteira

Um portfolio ou carteira é um conjunto de ativos, tanto financeiros (moeda, ações, títulos, etc) como físicos (terra, ouro, obras de arte, etc). A teoria de carteiras começa com a proposição de que os investidores necessitam cuidar das características das carteiras como um todo, ao invés de se preocupar com algum componente isolado ou uma única aplicação.

Logo, o retorno esperado de uma carteira de ativos é o resultado da média dos retornos individuais esperados, ponderada pela participação individual de cada ativo no conjunto. Tal definição pode ser expressa matematicamente como segue:

$$E(R_p) = \phi_1 \cdot E(R_1) + \phi_2 \cdot E(R_2) + \dots + \phi_n \cdot E(R_n) \quad (2.14)$$

Em termos matriciais, pode-se representar a expressão (2.14) da seguinte forma:

$$E(R_p) = [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \dots \quad \phi_n] \begin{bmatrix} E(R_1) \\ E(R_2) \\ \vdots \\ E(R_n) \end{bmatrix} = \phi_i E(R_i) \quad \text{Com: } i = 1, 2, \dots, n \quad (2.15)$$

onde:

$E(R_p)$: retorno esperado da carteira;

ϕ_n : vetor transposto das proporções dos (n) ativos a serem aplicados na carteira;

$E(R_i)$: vetor de retornos esperados dos (n) ativos individuais.

Em termos de distribuição de probabilidade, analogamente, multiplicam-se as probabilidades (p_i) pelos retornos esperados individuais, obtendo-se por conseqüência o retorno esperado da carteira $E(R_p)$, tal como pode ser visualizado a seguir:

$$E(R_p) = p_1 E(R_1) + p_2 E(R_2) + \dots + p_n E(R_n) \quad \text{Com: } i = 1, 2, \dots, n \quad (2.16)$$

onde:

$E(R_p)$: retorno esperado da carteira;

$E(R_i)$: retorno esperado dos (n) ativos individuais;

p_i : probabilidades de ocorrência dos (n) ativos individuais.

Ressalta-se que o somatório da participação dos ativos na carteira de ativos deve corresponder à unidade ou 100%. Neste caso, se existir a possibilidade de vendas a descoberto, a maximização do retorno esperado da carteira estará sujeita à restrição de que o total do valor investido deva ser igual à unidade. Não existindo a possibilidade de venda a descoberto, não será permitido, então, operar nas condições de ativo livre de risco, não sendo possível captar ou aplicar recursos a uma taxa livre de risco. Assim, pode-se representar tal situação como segue:

$$\sum_{i=1}^n \phi_i = \sum_{i=1}^n p_i = 100\% \quad \text{e} \quad \phi_i \geq 0 \quad (2.17)$$

Por outro lado, o risco de uma carteira de ativos, comumente pode ser mensurado através do desvio-padrão das taxas de retorno individuais, sendo uma função das variâncias individuais e das proporções elevadas ao quadrado, além das covariâncias entre os ativos que devem ser calculados dois a dois. A variância ou desvio-padrão¹ é uma medida muito comum para avaliar os riscos de ativos, já que representa a variabilidade das taxas de retornos individuais em relação ao retorno médio. A expressão que calcula a variância de uma carteira encontra-se a seguir:

$$\text{Var}(R_p) = \sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n \phi_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n \phi_i \phi_j \sigma_{ij} = \sum_{i=1}^n \phi_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j < i}^n \phi_i \phi_j \sigma_{ij} \quad (2.18)$$

¹ Segundo BERNSTEIN & DAMODARAN (2000, p. 84), o desvio-padrão parece funcionar melhor como medida de risco, quando as distribuições dos retornos possuem um comportamento simétrico. Contudo, diversas outras medidas de risco parecem se adaptar melhor às distribuições assimétricas.

onde:

$Var(R_P) = \sigma_P^2$: variância do portfólio;

ϕ_i, ϕ_j : proporções dos ativos (i) e (j) a serem aplicados na carteira;

σ_{ij} : covariância entre os ativos (i) e (j).

Nota-se que a soma na expressão anterior envolve não somente o risco dos ativos individuais denotado por (σ_i^2), como também todos os produtos cruzados, que perfaz $\frac{n(n-1)}{2}$ covariâncias distintas. Em termos matriciais, o risco de uma carteira de ativos pode ser representado como segue:

$$Var(R_P) = [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \dots \quad \phi_n] \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \dots & \sigma_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \dots & \sigma_n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_n \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

Definindo-se (Σ) como a matriz de covariância entre os ativos da carteira, a variância desta pode ainda ser reescrita de forma compacta como segue:

$$\sigma_P^2 = \phi' \Sigma \phi \quad (2.20)$$

onde:

$Var(R_p) = \sigma_p^2$: variância dos retornos da carteira;

ϕ : vetor de proporções a serem aplicados nos ativos da carteira;

σ_{ij} : covariâncias entre os ativos (i) e (j) da carteira;

Σ : matriz de variância-covariância entre os ativos da carteira;

FRANCIS (1991), demonstra como otimizar a carteira composta por (n) ativos, valendo-se da técnica de Multiplicador de Lagrange e levando-se em consideração um conjunto de restrições impostas ao modelo. Essa técnica matemática inicialmente procura maximizar o retorno esperado do portfólio valendo-se da expressão (2.14), que pode ser reescrita da seguinte forma:

$$E(R_p) = \sum_{i=1}^n \phi_i \cdot E(R_i) \quad (2.21)$$

Por outro lado, minimiza-se a variância da respectiva carteira através da expressão (2.18), que pode ser reescrita como:

$$-Var(R_p) = -\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \phi_i \phi_j \sigma_{ij} \quad (2.22)$$

Onde (ϕ_i) e (ϕ_j) são as ponderações ou participações a serem aplicadas nos ativos (i) e (j) da carteira, sujeito à restrição já mencionada em parágrafos anteriores de que o somatório das proporções seja igual a 100%, ou seja:

$$\sum_{i=1}^n \phi_i = 100\% \quad (2.23)$$

Observe que, ao maximizar $[-Var(R_p)]$ anteriormente citada, é o mesmo que estar minimizando $[Var(R_p)]$, através da função objetivo chamada de Lagrangeano (L), que pode ser montada da seguinte forma:

$$L = \omega \left[\sum_{i=1}^n \phi_i E(R_p) \right] - \sum \phi_i \phi_j \sigma_{ij} + \lambda [1 - \sum \phi_i] \quad (2.24)$$

Veja ainda que o método começa definindo uma função auxiliar, onde a partir disso, uma nova variável (λ), conhecida como multiplicador de Lagrange, passa a ser multiplicada pela restrição do modelo. Por outro lado, a variável (ω) significa a declividade da curva de indiferença no espaço risco-retorno.

Para se determinar o conjunto de ponderações da carteira, deve-se calcular as derivadas parciais de (2.24) com relação às ponderações (ϕ_i s) e (λ), igualando-se posteriormente a zero, tal como pode ser visualizado a seguir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \phi_1} &= \omega E(R_p) - 2\phi_1\sigma_{11} - 2\phi_1\sigma_{12} - \dots - 2\phi_n\sigma_{n1} - \lambda = 0; \\ \frac{\partial L}{\partial \phi_2} &= \omega E(R_p) - 2\phi_2\sigma_{22} - 2\phi_2\sigma_{21} - \dots - 2\phi_n\sigma_{2n} - \lambda = 0; \\ &\vdots \\ \frac{\partial L}{\partial \phi_n} &= \omega E(R_p) - 2\phi_n\sigma_{nn} - 2\phi_1\sigma_{n1} - \dots - 2\phi_{n-1}\sigma_{n,n-1} - \lambda = 0; \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= 1 - \phi_1 - \phi_2 - \dots - \phi_n = 0. \end{aligned}$$

Com base nos valores calculados anteriormente, pode-se expressá-los sob a forma matricial do seguinte modo:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2\sigma_{11} & 2\sigma_{12} & \dots & 2\sigma_{1n} & 1 \\ 2\sigma_{21} & & & 2\sigma_{2n} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2\sigma_{n1} & 2\sigma_{n2} & \dots & 2\sigma_{nn} & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}}_M \underbrace{\begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_n \\ \lambda \end{bmatrix}}_\nu = \underbrace{\begin{bmatrix} \omega E(R_1) \\ \omega E(R_2) \\ \vdots \\ \omega E(R_n) \\ 1 \end{bmatrix}}_k \quad (2.25)$$

Os coeficientes das matrizes anteriores podem ser denotados por (M) , o vetor de ponderações da carteira como (ν) e o vetor de constantes como (k) . O sistema de $(n+1)$ equações pode ser resolvido utilizando-se o conceito de matriz inversa, ou seja:

$$\begin{aligned} M \cdot \phi &= k \\ M^{-1} \cdot M\phi &= M^{-1} \cdot k \\ \phi &= M^{-1} \cdot k \end{aligned} \quad (2.26)$$

Determinando-se as ponderações na carteira a ser otimizada e baseado-se nas $(n+1)$ equações, tem-se que:

$$\phi_1 = \Omega_1 + \psi_1(\varpi) \quad (2.27)$$

$$\phi_2 = \Omega_2 + \psi_2(\varpi) \quad (2.28)$$

⋮

$$\phi_n = \Omega_n + \psi_n(\varpi) \quad (2.29)$$

$$\lambda = \Omega_\lambda + \psi_\lambda(\varpi) \quad (2.30)$$

Onde os valores dos *omegas* (Ω) e *psi's* (ψ) são vistos como constantes desconhecidas. Pode-se dizer que os valores de (ϖ) pode variar de zero ao infinito, sendo responsável pelas ponderações do grau de aversão ao risco por parte do investidor que serão levados em consideração durante o processo de otimização do portfolio formulado.

Ademais, a teoria de portfolio desenvolvida por MARKOWITZ (1952), mostra os fundamentos para a introdução e aplicação da programação estocástica, representando deste modo, um avanço considerável no processo de tomada de decisão. BERNSTEIN & DAMODARAN (2000), evidenciam que Markowitz desenvolveu a chamada Moderna Teoria de Finanças, possibilitando posteriormente o uso de diversas técnicas de Pesquisa Operacional. Algumas das premissas que constituem a base do modelo por ele desenvolvido são visualizadas como segue:

- ❑ Os investidores avaliam um portfolio apenas analisando o valor esperado e a variância ou desvio-padrão das taxas de retorno dos ativos num determinado horizonte de tempo;
- ❑ Os investidores nunca estariam satisfeitos com os retornos proporcionados por um dado portfolio. Quando colocados para decidir sobre a escolha de dois portfolios de mesmo risco, sempre iriam escolher o de maior retorno;
- ❑ Os investidores seriam avessos ao risco. Quando colocados para escolher entre dois portfolios de mesmo retorno, sempre escolheriam o de menor risco;
- ❑ Existiria uma única taxa livre de risco, na qual um investidor poderia tanto emprestar, quanto tomar emprestado;
- ❑ Os custos de transação, bem como os impostos seriam irrelevantes;
- ❑ Os investidores estariam de acordo com a distribuição de probabilidades das taxas de retorno dos ativos, assegurando dessa forma a existência de um único conjunto de carteiras consideradas eficientes (expectativas homogêneas).

Ressalta-se que a combinação ideal de ativos nas carteiras, de modo a

obter máximo retorno esperado e mínimo risco, depende ainda de estratégias ótimas de investimentos que envolvam o princípio da diversificação da carteira; ou seja, manter pequenas quantidades de um grande número de ativos financeiros.

2.5. O Princípio da Diversificação de Carteiras

Genericamente, sabe-se que o risco de qualquer ativo provém de duas partes: de ações específicas, que acabam afetando a empresa, (também conhecida como risco não sistemático), ou de movimentos do mercado, que acabam afetando todos os ativos, já que os efeitos das movimentações do mercado provavelmente seguirão a mesma tendência de todos os investimentos de uma carteira, mesmo sabendo que alguns ativos serão mais afetados do que outros.

Segundo DAMODARAN (1997), os efeitos da diversificação sobre o risco podem ser demonstrados através do comportamento da variância de uma carteira, que é determinada pelas variâncias dos ativos individuais e das covariâncias entre os pares desses ativos naquela carteira. A covariância demonstra como os preços dos ativos se movimentam em conjunto, fornecendo um enfoque sobre o porque e em quanto a diversificação reduzirá o risco.

Por outro lado, ROSS, WESTERFIELD & JAFFE (1995), demonstram algebricamente, como ocorre a redução do risco numa carteira no instante em que são adicionados mais ativos nessa carteira. Para isso, estabelecem

algumas suposições consideradas necessárias:

- Todos os ativos possuem a mesma variância: $\sigma_i^2 = \overline{var}$;
- Todas as covariâncias entre os ativos são iguais: $Cov(R_A, R_B) = \overline{cov}$;
- Todos os ativos possuem a mesma ponderação na carteira, ou seja, se existem (n) ativos na carteira, o peso de cada ativo na carteira é $\frac{1}{n}$, ou $\phi = \frac{1}{n}$ para cada ativo (i) .

Através da matriz de variância-covariância a seguir é possível averiguar a existência de (n) termos na diagonal principal, conhecido por variâncias.

QUADRO 2.1: MATRIZ DE VARIÂNCIA-COVARIANÇA DOS RETORNOS

Ativos	1	2	3	...	N
1	$\left(\frac{1}{n^2}\right)\overline{var}$	$\left(\frac{1}{n^2}\right)\overline{cov}$	$\left(\frac{1}{n^2}\right)\overline{cov}$...	$\left(\frac{1}{n^2}\right)\overline{cov}$
2	$\left(\frac{1}{n^2}\right)\overline{cov}$	$\left(\frac{1}{n^2}\right)\overline{var}$	$\left(\frac{1}{n^2}\right)\overline{cov}$...	$\left(\frac{1}{n^2}\right)\overline{cov}$
3	$\left(\frac{1}{n^2}\right)\overline{cov}$	$\left(\frac{1}{n^2}\right)\overline{cov}$	$\left(\frac{1}{n^2}\right)\overline{var}$...	$\left(\frac{1}{n^2}\right)\overline{cov}$
⋮	⋮	⋮	⋮	...	⋮
N	$\left(\frac{1}{n^2}\right)\overline{cov}$	$\left(\frac{1}{n^2}\right)\overline{cov}$	$\left(\frac{1}{n^2}\right)\overline{cov}$...	$\left(\frac{1}{n^2}\right)\overline{var}$

Observe no quadro 2.1 que fora da diagonal principal encontram-se $n(n - 1)$ termos conhecidos como covariâncias. Neste caso, pode-se expressar

o comportamento da variância de uma carteira como segue:

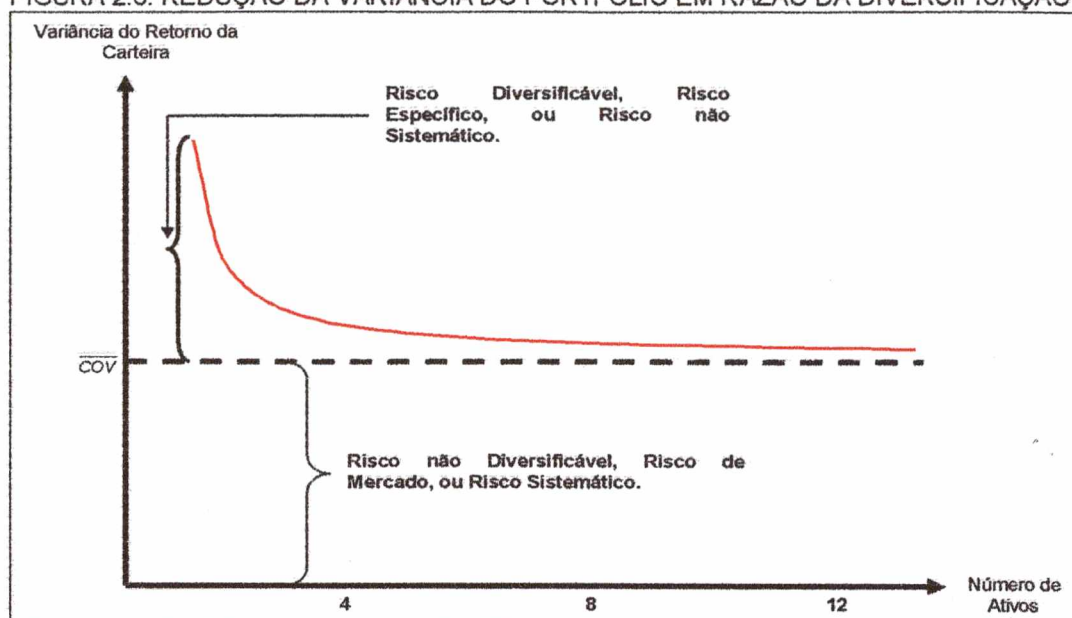
$$\begin{aligned}\sigma_p^2 &= n \left(\frac{1}{n^2} \right) \overline{var} + n(n-1) \left(\frac{1}{n^2} \right) \overline{cov} \\ \sigma_p^2 &= \left(\frac{1}{n} \right) \overline{var} + \left(\frac{n^2 - n}{n^2} \right) \overline{cov} \\ \sigma_p^2 &= \left(\frac{1}{n} \right) \overline{var} + \left(1 - \frac{1}{n} \right) \overline{cov} \quad (2.31)\end{aligned}$$

A expressão (2.31) mostra a variância de uma carteira de ativos como a soma ponderada da variância com a covariância média. Visualmente, a figura 2.6 mostra o comportamento de um investidor caso ele aumente indefinidamente o número de ativos na carteira, percebe-se que haverá uma redução do risco não-sistemático desta carteira, tal como pode ser visto a seguir:

$$\begin{aligned}\sigma_p^2 &= \left(\frac{1}{n} \right) \overline{var} + \left(1 - \frac{1}{n} \right) \overline{cov} \\ \sigma_p^2 &= \overline{cov} \quad (2.32)\end{aligned}$$

A figura a seguir, pode-se ratificar a expressão (2.32), onde é possível visualizar a importância da diversificação do risco total de determinado portfolio.

FIGURA 2.6: REDUÇÃO DA VARIÂNCIA DO PORTFOLIO EM RAZÃO DA DIVERSIFICAÇÃO



Segundo BRITO & BRITO (1989), os ganhos em virtude da diversificação no mercado acionário brasileiro tornam-se desprezíveis quando se optam por carteiras contendo mais de 15 ativos. Contudo, eles mostram em seu estudo que a maior parte dos ganhos com a diversificação são conseguidos com carteiras contendo cerca de oito ativos.

2.6. Considerações Sobre a Hipótese de Eficiência de Mercado

O conceito de eficiência de mercado foi preconizado formalmente a partir de Eugene Fama em 1970 em seu célebre artigo *Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work*. Ele argumentava que nos mercados de capitais poderiam existir três níveis de eficiência, onde tem como base o fato de que as informações se refletiriam nos preços dos ativos.

Para FAMA (1970) os testes são ditos da forma fraca quando são conduzidos sobre dados mais simples e de mais fácil acesso, que são os preços/retornos de ativos do mercado. ROSS, WESTERFIELD & JAFFE (1995) mostram que um mercado eficiente de capitais é aquele no qual os preços dos títulos refletem completamente as informações disponíveis. Eles avaliam ainda que tal mercado é eficiente no que diz respeito à informação quando não é possível obter lucros extraordinários valendo-se de um conjunto de informações.

Contudo, é possível ganhar com a informação, desde que o preço da ação leve alguns dias para se ajustar, havendo com isso, a oportunidade de ganhos para os investidores que comprarem ações na data do anúncio, e venderem no instante em que o preço retorne ao seu nível de equilíbrio.

Num mercado caracterizado desta forma, é fácil classificá-lo em função dos seus níveis de eficiência como sendo da forma fraca, semiforte e forte. O nível de eficiência sob a forma fraca é visto como aquele em que os preços correntes refletem as informações contidas em todos os preços antigos, sugerindo que gráficos de análises técnicas possam não ser úteis para descobrir ações subvalorizadas.

Já o nível de eficiência semiforte, indica que os preços correntes refletem todas as informações passadas, mas também todas as informações públicas disponíveis. Por fim, o nível forte de eficiência pode ser caracterizado como aquele em que os preços correntes refletem todas as informações, tanto públicas quanto privadas.

Certamente, se determinado mercado de capitais é visto como sendo

informacionalmente eficiente, todas as vantagens obtidas para o desenvolvimento da atividade econômica devem ser creditadas à atuação eficaz da comunidade de analistas financeiros. Da mesma forma, se ele for ineficiente, todos os problemas como, por exemplo, a obtenção de informações privilegiadas, deve ser debitada a essa mesma comunidade que atuam em tal mercado.

Nesses termos, verifica-se que num mercado com tais características, os preços das ações são um forte sinal do real valor dos ativos e as suas rentabilidades tendem a apresentar independência serial, o que garante a hipótese de que o modelo se comporte como um *random walk*².

Os testes de eficiência de mercado normalmente referenciados em estudos empíricos nos mercados financeiros visam identificar a forma através da qual os preços dos ativos se ajustam em razão dos três níveis de eficiência já mencionados. Em função disso, pode-se verificar se as estratégias específicas de investimentos conseguem induzir os investidores a obterem retornos adicionais no mercado.

Ao testar a hipótese de eficiência sob a forma fraca diversos analistas se baseiam na suposição de que os retornos esperados são constantes ao longo do tempo. Nesse contexto, o conceito de eficiência de mercado não implica necessariamente que os retornos de mercado sejam previsíveis a partir de suas séries históricas, uma vez que as melhores previsões são obtidas a partir da média histórica das observações disponíveis. Admitindo-se a existência de um ambiente de mercado do tipo *random walk*, significa dizer que

² Uma série histórica é dita *random walk*, se a sua média e variância são independentes do tempo e não existe correlação temporal.

o movimento do preço de determinada ação no passado não terá necessariamente relação com o movimento do preço no futuro.

FAMA (1970), estabelece algumas condições para que o mercado de capitais seja considerado eficiente:

- ❑ Inexistência de custos de transação na compra e venda de ativos;
- ❑ Inexistência de custos para todas as informações disponíveis;
- ❑ Concordância de opiniões sobre a influência de novas informações quanto ao preço de um ativo, bem como sobre a distribuição futura das suas taxas de retorno;

Finalmente, para o caso do Brasil, diversos estudos empíricos foram realizados no mercado de capitais local, merecendo destaque os primeiros trabalhos desenvolvidos por Brito em 1978 e Rodrigues em 1991, que apresentaram evidências de que, genericamente, a hipótese de que os retornos sejam constantes ao longo do tempo não pode ser rejeitada.

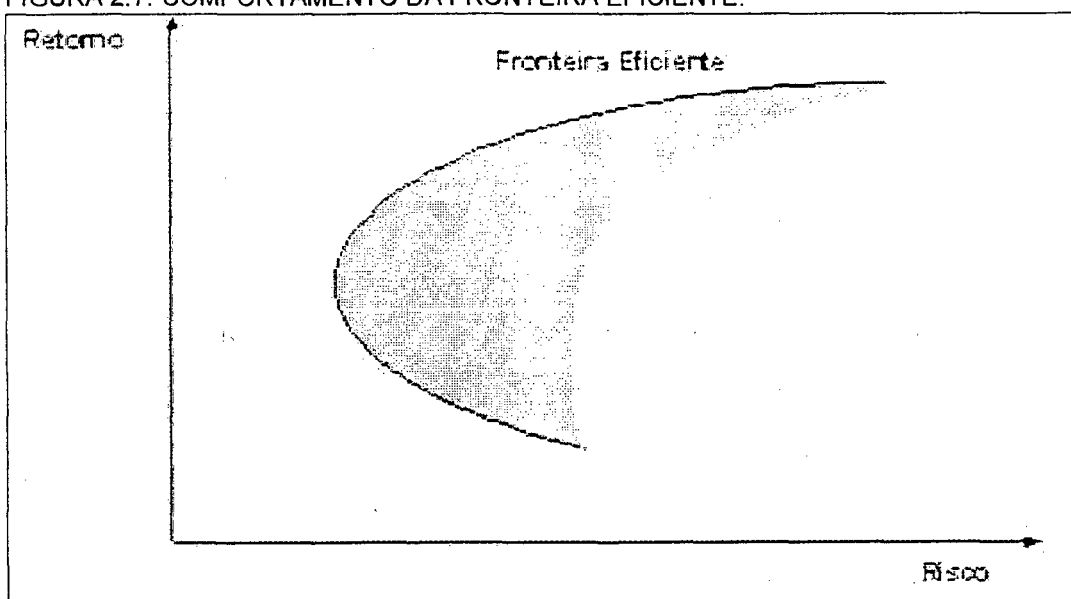
2.7. As Carteiras Consideradas Eficientes

HAUGEN (1993), caracteriza a fronteira eficiente como sendo a curva envelope contendo a melhor de todas as possibilidades de combinações entre ativos na carteira, de modo a maximizar o retorno esperado para um dado nível de risco ou minimizar o risco para um dado nível de retorno.

O investidor deve, se preocupar apenas com a escolha de ativos que

se situem na fronteira, já que eles dominam os outros ativos. Os investimentos que compõem a fronteira eficiente não são ativos isolados, mas carteiras constituídas de dois ou mais ativos, que muitas vezes são dominados. A figura 2.7 mostra o comportamento da fronteira eficiente, que também é conhecida como *curva de bala*. Veja que todas as carteiras que se encontram sob a parte sombreada, são consideradas eficientes, ou seja, evidenciam a mínima variância para um dado investidor individual.

FIGURA 2.7: COMPORTAMENTO DA FRONTEIRA EFICIENTE.



Além disso, MARKOWITZ (1952) foi capaz de demonstrar que a fronteira eficiente poderia ser determinada, pelo menos teoricamente, através de técnicas de programação quadrática, requerendo como variáveis de entrada, as taxas de retorno esperado, os desvios-padrão dessas taxas e os coeficientes de correlação de cada ativo com relação a todos os outros ativos incluídos na avaliação. A figura anterior evidencia que todas as carteiras que

estiverem sobre a *curva de bala*, seriam consideradas eficientes, proporcionando elevados retornos esperados e baixos níveis de risco para o investidor.

2.8. O Teorema da Separação

Para que se entenda o funcionamento deste teorema é necessário que se possa avaliar as alternativas de combinações que interessam ao investidor, introduzindo as possibilidades de se investir num ativo livre de risco (emprestar) e de tomar emprestado para financiar determinado investimento.

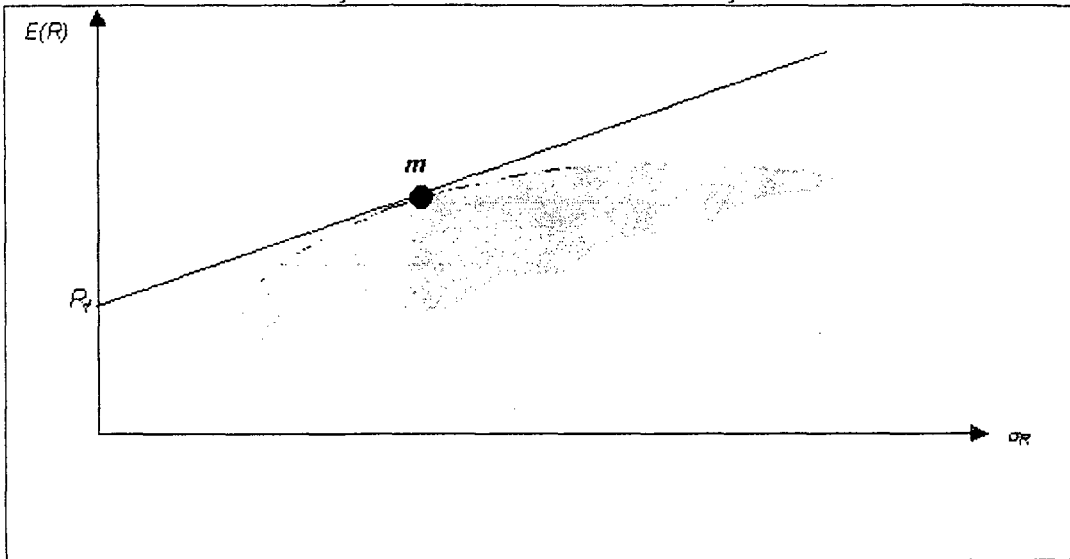
Supondo que um investidor possa emprestar e/ou tomar emprestado à mesma taxa de juros, cabe evidenciar que a escolha de um indivíduo para manter uma carteira com ativos arriscados é independente (separado) de sua atitude com relação ao risco.

As únicas características que causam interesse ao investidor são o retorno esperado e o desvio-padrão. Logo, o portfolio ótimo de ativos arriscados, denominado de (m) para tal indivíduo, não está relacionado com o seu mapa de indiferença, que expressa o seu comportamento com relação ao risco. A isso, denominou-se de *Teorema da Separação*.

A importância da interação entre o mapa de curvas de indiferença e a fronteira eficiente, definida na figura 2.8 como sendo a semi-reta com origem em $(0; R_f)$. Levando-se em conta este teorema, passa-se a ter a possibilidade de perceber qual a proporção de recursos disponíveis investida no portfolio com risco (m), e qual a proporção relativa à concessão ou tomada de

empréstimos à taxa R_f .

FIGURA 2.8: REPRESENTAÇÃO DO TEOREMA DA SEPARAÇÃO.



Veja ainda na figura supracitada, que se a tangente entre a curva de indiferença do indivíduo e a fronteira eficiente estiver entre o segmento (R_f) e (m) , o investidor manterá tanto parte dos recursos investidos em ativos livres de risco (empréstos), quanto parte aplicada no portfólio (m) .

Finalmente, observe que se o investidor estiver no ponto (m) dessa mesma figura, ele aplicará apenas nesta carteira contendo ativos arriscados. Por outro lado, se ele estiver à direita do ponto (m) , ele investirá na carteira (m) e tomará recursos emprestados para reproduzir ainda mais o portfólio (m) ; ou seja, aplicará além do montante de recursos de que dispunha inicialmente.

2.9. O Gerenciamento de Carteiras Através dos Índices de Performance

Para TOSTA DE SÁ (1999), qualquer processo de avaliação de desempenho de carteiras é, essencialmente, um processo de comparação das taxas de rentabilidades obtidas entre as carteiras que estão sendo avaliadas, em iguais intervalos de tempo. Logo é de fundamental importância que elas possuam a mesma estrutura de risco, que estejam sujeitas às mesmas restrições e tenham um porte bastante parecido, de modo a não incorrer em erros grosseiros quando comparadas. Baseando-se nisso, em seguida encontram-se os índices de Treynor, Sharpe e de Jensen, que mensurarão o desempenho das carteiras que serão otimizadas no capítulo VI deste trabalho:

2.9.1. O Índice de Sharpe

O índice de performance criado por SHARPE (1966, p. 119-138), visa avaliar se determinada carteira de ativos encontra-se subavaliada ou sobreavaliada, em razão da seleção dos ativos que compõem tal portfólio.

O Índice de Sharpe expressa a rentabilidade média excedente por unidade de risco total da carteira. Neste caso, entende-se por rentabilidade média excedente a diferença entre a rentabilidade média da carteira no período em análise e a rentabilidade de determinado ativo sem risco referencial. O índice de Sharpe pode ser definido como:

$$IS_i = \left(\frac{\bar{R}_p - R_f}{\sigma_p} \right) \quad (2.33)$$

onde:

IS_i : Índice de Sharpe;

\bar{R}_p : taxa de retorno médio da carteira avaliada;

R_f : taxa livre de risco;

$\bar{R}_p - R_f$: prêmio pelo risco;

σ_p : desvio-padrão das taxas de retorno da carteira.

Diversos autores mostram que a utilização desse índice será adequada para todos aqueles investidores que concentram seus recursos sob um único gerenciamento, sendo o caso de investidores que apliquem em uma única carteira ou fundos de pensão, que invistam seus recursos diretamente ou por intermédio de um único administrador externo.

Neste caso, quanto maior for o Índice de Sharpe, melhor será a performance da carteira analisada. Ou seja, se uma carteira (A) apresentou um índice maior do que o índice de uma carteira (B), diz-se que a carteira (A), teve uma performance melhor. Contudo, algumas dificuldades podem ocorrer com esse índice quando da sua utilização. Primeiramente, ele deve ser um número positivo, conforme proposto pela Teoria Moderna de Finanças. O índice será negativo, se e somente se, $(\bar{R}_p < R_f)$, levando a ocorrência deste fato a conclusões equivocadas. E, por outro lado, esse indicador ficará distorcido

quando a volatilidade das carteiras sob comparação for muito pequena, muito embora alguns analistas de mercado acabem substituindo as taxas livres de risco, como por exemplo, a taxa da caderneta de poupança pela taxa *over-selic*, com o objetivo de minimizar as distorções das estimativas.

2.9.2. O Índice de Treynor

Treynor (1965), desenvolveu um outro índice para avaliação de desempenho de carteiras, reconhecendo a existência de dois componentes do risco: o sistemático ou risco de mercado e o não-sistemático ou diversificável. Contudo, sugeriu que apenas o risco de mercado mereceria atenção, já que admitiu a possibilidade dos investidores manterem parte de seus recursos aplicados em ativos de risco e outra parcela à taxa livre de risco.

Neste caso, ele procurou substituir o desvio-padrão da carteira pelo coeficiente beta³. Esse índice mostra o quociente entre a taxa de retorno adicional e o risco incorrido pelo investidor (quando confrontado com investimentos livres de risco), sendo também chamado de índice de recompensa por volatilidade, que pode ser visualizado como segue:

$$IT_i = \left(\frac{\bar{R}_p - R_f}{\beta_p} \right) \quad (2.34)$$

³ Esse coeficiente pode ser visto como uma medida de volatilidade das taxas de retorno de um ativo qualquer com relação às taxas de retorno do mercado como um todo. Essa medida de risco pode ser encarada ainda como a sensibilidade do analista financeiro em acreditar que o excesso de retorno do ativo individual seja afetado pelas variações do excesso de retorno do mercado. Caso o beta seja maior do que a unidade, o ativo avaliado pode ser visto como AGRESSIVO, significando dizer que à medida que o mercado estiver em alta (baixa), o preço do ativo se elevará (reduzirá) mais que proporcionalmente. No caso do beta ser igual a unidade, o ativo avaliado pode ser considerado como NEUTRO, significando que há uma correlação perfeita entre as taxas de retorno do ativo individual e com as taxas de retorno do mercado como um todo. Finalmente, se o coeficiente beta for menor do que a unidade, o ativo pode ser classificado como DEFENSIVO, significando dizer que à medida que o mercado estiver em baixa (alta), o preço do ativo também sofrerá uma baixa (alta) menos que proporcionalmente. O coeficiente beta pode ser mensurado regressando-se os retornos do ativo analisado contra os retornos da carteira de mercado.

onde:

IT_i : índice de Treynor;

\bar{R}_p : taxa de retorno médio da carteira avaliada;

R_f : taxa livre de risco;

β_p : coeficiente beta da carteira avaliada.

O autor supracitado desenvolveu este índice de desempenho de carteiras, mencionando que este deveria ser aplicado para o caso de carteiras bem diversificadas, ou seja, carteiras que possuam pouco ou nenhum risco diversificável. Ele conclui mostrando que a sua utilização será adequada para todos aqueles que pulverizem recursos em diversas aplicações ou deleguem a diversos gerenciadores profissionais o gerenciamento dos seus recursos.

2.9.3. O Índice de Jensen

Esse índice de desempenho pode ser visto como o retorno médio da carteira sobre e acima daquele retorno que foi previsto pelo modelo CAPM, dado pelo *beta* da carteira e pelo retorno médio de mercado. Essa medida seria o valor *alfa* da carteira avaliada.

Normalmente o *alfa* de Jensen (1968) é calculado efetuando-se uma regressão linear da série temporal dos retornos extras da carteira em relação à taxa de juros livre de riscos em relação aos retornos extras do nível de

referência sobre essa taxa livre de riscos. A inclinação da linha resultante será igual ao *beta* e o intercepto é o *alfa* de Jensen. A expressão que evidencia essa medida de performance pode ser vista como:

$$\alpha_p = \bar{R}_p - [\bar{R}_f + \beta_p \cdot (\bar{R}_M - \bar{R}_f)] \quad (2.35)$$

onde:

α_p : índice de Jensen;

\bar{R}_p : taxa de retorno médio da carteira avaliada;

\bar{R}_f : taxa média de retorno livre de risco;

β_p : coeficiente *beta* da carteira avaliada.

Através da expressão (2.35), percebe-se que a inclinação da linha resultante é igual ao coeficiente *beta*. O *alfa* acaba evidenciando se o administrador da carteira está adicionando valor relativamente ao retorno esperado, dado através do coeficiente *beta*.

De modo a tornar o respectivo trabalho mais realista, parte-se da suposição de que o gerenciamento e avaliação das carteiras a serem formuladas e otimizadas serão realizados pelo respectivo gestor das carteiras, onde ele deverá levar em consideração o perfil de aversão ao risco por parte do investidor individual.

Finalmente, no capítulo subsequente procurar-se-á discorrer sobre a

teoria da utilidade, avaliando o comportamento das distribuições das taxas de retorno dos ativos, as funções utilidade com dois e três momentos estatísticos, bem como sobre o relacionamento entre a utilidade esperada, riqueza esperada e risco, além de tecer breves comentários sobre as medidas de aversão ao risco mais utilizadas por parte do investidor.

CAPÍTULO III

3. A TEORIA DA UTILIDADE

3.1. Introdução

Nos mercados financeiros, bem como na vida em geral, os indivíduos só tomam suas decisões para a compra ou venda de determinado bem ou serviço, caso haja opções de escolha dentro de um conjunto de oportunidades, de modo que os agentes econômicos possam selecionar e escolher pelo menos uma delas.

Diante das alternativas de investimentos com determinadas condições de retorno e risco, nem todos os investidores agirão de modo igual, uma vez que eles agem, em geral, procurando maximizar a utilidade esperada atribuída à importância resultante do investimento.

A teoria da utilidade procura solucionar alguns problemas de decisão que não podem ser solucionados, pautando-se basicamente em valores monetários esperados, onde o risco e a incerteza estão intimamente associados a cada alternativa.

TAVARES (1989), mostra que o comportamento do investidor frente ao risco, antes de qualquer coisa, está em definir quanto será alocado de sua renda entre o consumo presente e futuro. Espera-se que a utilidade derivada da escolha de bens e serviços disponíveis para consumo presente seja máxima

enquanto vise atender às preferências, expressas através da sua função utilidade-renda. Nesse prisma, a composição da oferta é conhecida e a função utilidade-renda é formulada com base na teoria da escolha sob condições de certeza.

Cabe salientar, que as escolhas concernentes ao consumo futuro não se referem a bens e serviços de consumo específicos, mas sim, a alternativas de rendas futuras, as quais se consubstanciam em eventos excludentes, promovendo, cada uma, alguma probabilidade particular.

Logo, é possível considerar como objeto de escolha nas condições sobre o consumo futuro, onde os agentes econômicos formarão suas expectativas quanto à utilidade esperada, uma quantidade de dinheiro ou renda representadas através de uma distribuição de probabilidade, ora objetiva, quando derivada de distribuições de frequências de dados passados, ou ora subjetivas, quando refletirem o estado de crença do agente da escolha em seus sucessos no futuro.

Uma situação típica de escolha sob condições de incerteza ao qual pode servir como exemplo para sedimentar a compreensão do leitor, diz respeito a uma loteria⁴, na qual se pretende pagar determinada quantia para se habilitar a um jogo. A quantia certa, estipulada como preço da opção de jogo, deve ser avaliada em relação aos prêmios prometidos pela casa lotérica, os quais são definidos de modo aleatório, em um sorteio. Este preço funciona,

⁴ O termo loteria será utilizado ao longo desse trabalho como sinônimo de uma situação aleatória onde envolva prêmios associados às probabilidades.

analiticamente, como o custo alternativo da decisão de jogar, ou como uma forma de *equivalente certeza*⁵ do processo de escolha.

Assim, é este evento certo que torna possível a avaliação da atratividade ou conveniência de se aceitar os riscos representados por diversos resultados prováveis do jogo. Geralmente as pessoas agem não em busca da maximização do retorno esperado, mas sim, buscando maximizar a utilidade atribuída à importância a ser recebida, o que reforça a afirmativa de que a utilidade advinda de determinada importância em dinheiro varia de pessoa para pessoa.

Nas seções seguintes abordar-se-ão os seguintes aspectos: a seção 3.2 trará os axiomas que embasam as escolhas racionais dos investidores individuais. A seção 3.3 mostrará o formato das funções utilidade de acordo com os níveis de aversão ao risco por parte do investidor individual. A seção 3.4 fará um breve relato sobre as medidas de aversão ao risco por parte do investidor. Finalmente, a seção 3.5 falará a respeito da função utilidade com dois e três momentos estatísticos.

3.2. Os Axiomas que Embasam a Teoria da Utilidade Esperada

Os indivíduos racionais, caracterizados como avessos ao risco, farão as suas escolhas sem ferir os axiomas da teoria da utilidade esperada. A regra da utilidade esperada na visão de COPELAND & WESTON (1992) deriva de

⁵ O *equivalente certeza* pode ser visto como o valor em dinheiro que um investidor aceitaria sem risco como retorno por uma escolha arriscada, ou seja, uma comparação entre investimentos com e sem risco.

um conjunto de axiomas que difere ligeiramente de autor para autor, porém se mantêm a mesma estrutura. Dentre os principais axiomas encontram-se:

1º Axioma – *Comparabilidade*: O indivíduo deve ser capaz de comparar quaisquer opções, pois assim ele dirá se prefere a opção (X) à (Y) , (Y) à (X) , ou que é indiferente entre as opções (X) e (Y) ;

2º Axioma – *Transitividade*: Define que se um indivíduo prefere (X) à (Y) além de preferir (Y) à (Z) , então (X) será preferível à (Z) . Esse axioma é necessário e suficiente para que as preferências sejam representadas por uma escala ordinal de utilidade;

3º Axioma – *Mensurabilidade*: Será sempre preferível um valor certo equivalente a um jogo. Seja (X) mais preferível à (Y) , e (Y) mais preferível à (Z) , em relação a um jogo qualquer: a probabilidade (p) de se obter (X) , com a probabilidade $(1 - p)$ de se obter (Z) , haverá apenas uma única probabilidade (p) , para a qual (Y) será indiferente ao jogo. Neste caso, (Y) será o valor equivalente à certeza relativo ao referido jogo;

4º Axioma – *Cancelamento*: Propõe a eliminação, na análise de qualquer estado da natureza que leve aos mesmos resultados, independentemente da escolha realizada. Por exemplo, se (X) é preferível à (Y) , então a possibilidade de ganhar (X) se chover amanhã [e de não ganhar nada, se não chover] deve

ser preferível à possibilidade de ganhar (Y) se chover, porque as duas possibilidades geram o mesmo resultado (nada) se não houver chuva amanhã;

5º Axioma – *Invariância*: Diferentes representações do mesmo problema de escolha devem resultar na mesma escolha, ou seja, a escolha entre diversas opções deve ser independente da forma como estas opções são descritas;

6º Axioma – *Classificação*: Este axioma é uma variação mais sofisticada dos anteriores. Dadas alternativas (Y) e (U) em algum lugar entre (X) e (Z), sendo (X) preferido à (Z), e havendo indiferença entre (Y) e o seguinte jogo: a probabilidade (p_1) de se obter (X) com a probabilidade ($1 - p_1$) de se obter (Z). Se houver indiferença entre (U) e o jogo: a probabilidade (p_2) de obter (X), com probabilidade ($1 - p_2$) de obter (Z), e a probabilidade (p_1), for maior do que a (p_2), então (Y) é preferido a (U).

Esses axiomas permitem que se desenvolva a função utilidade de cada indivíduo. Adiciona-se a isso, a hipótese de avareza ou insatisfação, segundo a qual, as pessoas preferem mais riqueza que menos e, conseqüentemente, a utilidade marginal dessa riqueza será sempre positiva.

Vale destacar, que as escolhas de um indivíduo racional devem conformar-se com os axiomas anteriormente citados, e suas preferências são descritas por conseqüências previstas (resultados) e avaliadas numa escala numérica subjetiva (função utilidade). Logo, a utilidade esperada corresponde, então, ao somatório das utilidades “subjetivas” de cada resultado, ponderadas

pelas probabilidades “subjetivas” da ocorrência esperada, com a escolha recaindo sobre a alternativa com maior utilidade esperada.

3.3. O Formato das Funções Utilidade do Investidor Individual

A postura do investidor individual face ao risco por ele enfrentado leva a determinar o seu grau de aversão ao risco, possibilitando com isso a construção do formato das funções utilidade. Através de questionários construídos por especialistas no assunto, é fácil avaliar o relacionamento existente entre o dinheiro e a sua utilidade para um dado investidor individual.

Essas funções utilidade propiciam ainda a visualização de cenários que tracem a atitude de determinada pessoa em relação ao risco; que, algumas vezes pode alterar-se ao longo do tempo, caso o indivíduo se torne mais prudente e modifique a sua escala de preferências em função das situações em que envolvam dinheiro e risco.

Para efetuar a escolha baseada na idéia de maximização, utiliza-se a função utilidade como representação das preferências. Assume-se como premissa, que os indivíduos possuam uma ordem de preferência, que pode ser representada por uma função de preferência $V(\bullet)$, que consiste de uma expectativa matemática de Von Neumann e Morgenstern relativa à distribuição de probabilidade (p). A hipótese de que esta função $V(\bullet)$ tome a forma de uma expectativa matemática equivale à condição de que seja linear em

probabilidades, isto é, corresponda à soma de pesos dos componentes de (p) , ou seja $[\sum U_i p_i]$.

Partindo das conjecturas anteriores, pode-se admitir três tipos de comportamentos de investidores individuais, a saber: os avessos, amantes e os indiferentes ao risco envolvido. Imagine a situação de um determinado jogo de loteria que visa pagar uma quantia de R\$ 5.000,00 para se habilitar a receber como prêmio um os resultados prováveis expostos no quadro a seguir:

QUADRO 3.1: RENDAS PROVÁVEIS DE UM SORTEIO ALEATÓRIO DE LOTERIA

Rendas Prováveis (R\$)	Probabilidade Associada a Cada Resultado (p)
2.000,00	$\frac{1}{4}$
4.000,00	$\frac{1}{4}$
6.000,00	$\frac{1}{4}$
8.000,00	$\frac{1}{4}$

A partir do quadro anterior, é possível observar que o preço cobrado para a loteria é igual ao seu valor esperado $E(\tilde{R})$, que pode ser expresso da seguinte forma:

$$E(\tilde{R}) = \sum_{i=1}^4 R_i \cdot p_i \quad (3.1)$$

Resolvendo a expressão anterior com base no quadro 3.1, encontra-se o valor esperado igual a:

$$E(\tilde{R}) = \frac{1}{4} \times 2.000,00 + \frac{1}{4} \times 4.000,00 + \frac{1}{4} \times 6.000,00 + \frac{1}{4} \times 8.000,00 = \text{R\$ } 5.000,00$$

Veja através do resultado encontrado anteriormente que não se trata de escolher a alternativa com base no princípio de maximização do valor esperado, mas sim, no princípio da máxima utilidade esperada associada aos prováveis retornos, sendo necessário, portanto, atribuir a cada retorno individual (R_i) o seu equivalente em utilidade para o agente da escolha.

No caso de investidores avessos ao risco, perder cerca de R\$ 5.000,00 que são considerados certos para poder se habilitar a R\$ 5.000,00 prováveis, que é o valor esperado da loteria, acaba não o motivando à realização da aposta. Para tal investidor, se o sorteio der em torno de R\$ 2.000,00 como resultado, ele estará perdendo cerca de R\$ 3.000,00 e com a mesma chance; mas se por um acaso, der R\$ 8.000,00, ele ganhará cerca de R\$ 3.000,00, os quais não apresentam uma satisfatória comparação ao juízo do decisor avesso ao risco. Para um investidor com essas características, a utilidade associada ao jogo ou *equivalente certeza*, deve ser maior do que a utilidade associada ao seu valor esperado.

Com base nesses argumentos de escolha, pode-se estabelecer uma função utilidade que caracterize esse tipo de investidor, apresentando uma função utilidade côncava em relação à origem dos eixos coordenados e onde os rendimentos marginais sejam decrescentes. Matematicamente, uma função utilidade de um investidor avesso ao risco pode ser vista como:

$$U(R) = \sqrt{R} \quad (3.2)$$

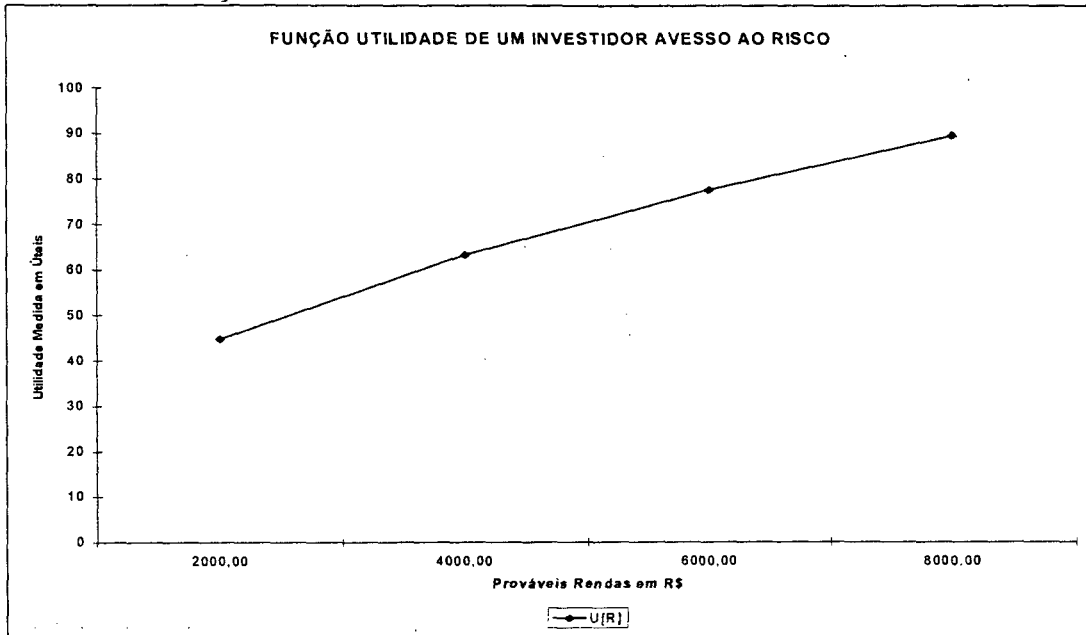
Onde R é o retorno do investidor individual em determinado período de planejamento. Para determinar se a utilidade marginal é crescente ou decrescente, normalmente avalia-se a inclinação da função utilidade ou o sinal da segunda derivada da função utilidade. Vale salientar, que para esse tipo de agente econômico, a função utilidade apresenta $U'(R) \geq 0$, para todo $R \geq 0$, e $U''(R) \leq 0$, para todo $R \geq 0$, o que determina a condição de utilidade marginal decrescente para níveis crescentes de retorno esperado.

Genericamente, uma função utilidade apresenta esse tipo de comportamento côncavo quando, para cada dois valores possíveis de X_1 e X_2 , e, para todo $0 < \alpha < 1$, tem-se que:

$$U[\alpha X_1 + (1 - \alpha)X_2] \geq \alpha U(X_1) + (1 - \alpha)U(X_2) \quad (3.3)$$

Graficamente, a expressão (3.3) mostra, que para um segmento de reta que una os pontos $U(X_1)$ e $U(X_2)$ e fique abaixo da curva de utilidade, pode ser caracterizado como função utilidade de investidor avesso ao risco. Logo, indivíduos com tais características preferirão manter a sua riqueza inicial (W_0), a aplicarem em investimentos que propiciem a mesma probabilidade de ganhar ou perder um mesmo valor, já que a perda de utilidade ocorrida com um resultado desfavorável é maior do que o ganho de utilidade de um resultado favorável; ou seja, $U(W_0) > E[U(W_0)]$. Veja através da figura 3.1 o formato da curva de um investidor individual avesso ao risco face às incertezas de prováveis rendimentos de determinada loteria.

FIGURA 3.1: FUNÇÃO UTILIDADE-RENDA DE UM INVESTIDOR AVESSO AO RISCO



Contrariamente, um investidor que é amante do risco possui uma função utilidade caracterizada por ser convexa em relação aos eixos coordenados. Reportando-se aos resultados encontrados a partir do quadro (3.1), observa-se que o fato do preço da opção do investidor pelo jogo ser igual ao seu valor esperado, deixando como ganho em utilidade, todo o incentivo moral ao respectivo jogo. Para esse tipo de agente, a utilidade associada ao jogo ou *equivalente certeza* é maior do que a utilidade associada ao seu valor esperado. Assim, o investidor amante do risco compraria a opção de jogo de loteria por R\$ 5.000,00.

Para FRANCIS & ARCHER (1979, p. 260), os casos de tendência ao risco e de indiferença ao risco são casos problemáticos, que comumente são

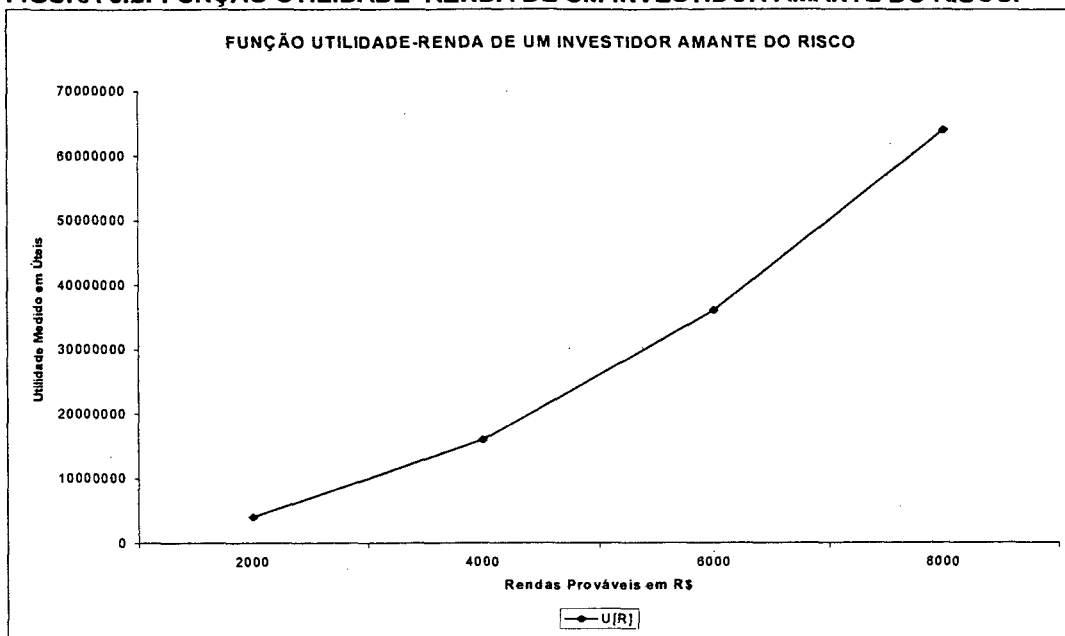
apresentados apenas como curiosidade científica, e que na realidade não podem ser considerados como um comportamento rotineiro.

Uma função utilidade específica que melhor descreve o comportamento desse tipo de jogador frente ao risco envolvido, pode ser visualizada como segue:

$$U(R) = R^2 \tag{3.4}$$

Veja que a expressão (3.4) é simétrica à verificada na expressão (3.2) que descreve o comportamento de um investidor avesso ao risco. No caso de indivíduos amantes do risco, a utilidade marginal se eleva com o crescimento da riqueza. Os rendimentos marginais para a função utilidade do agente econômico amante do risco são crescentes, sendo que a primeira e segunda derivada da função utilidade de tal investidor será maior do que zero, ou seja, $U'(R) > 0$ e $U''(R) \geq 0$, indicando a existência de um mínimo na respectiva função. Tais indivíduos são atraídos a jogos justos, cujo valor esperado é igual a zero. Graficamente, o formato da curva de utilidade do investidor que assume tais características pode ser visto da seguinte maneira:

FIGURA 3.2: FUNÇÃO UTILIDADE-RENDA DE UM INVESTIDOR AMANTE DO RISCO.



Genericamente, a função será convexa quando para cada par de possíveis valores de (X_1) e (X_2) e, para todo $0 < \alpha < 1$ tem-se que:

$$U[\alpha X_1 + (1 - \alpha)X_2] \leq \alpha U(X_1) + (1 - \alpha)U(X_2) \tag{3.5}$$

No caso anterior, a expressão (3.5) que caracteriza um amante do risco obedece à definição de que $U'(X) \geq 0$ e $U''(X) \geq 0$ para alguma faixa de valores de (X) . Finalmente, esse indivíduo se disporá a assumir um risco sempre que aumenta em forma correlativa a esperança matemática do benefício. Daí a possibilidade de se traçar uma curva de indiferença entre a esperança matemática dos resultados e a variância que representa o risco vinculado à tomada de uma determinada decisão.

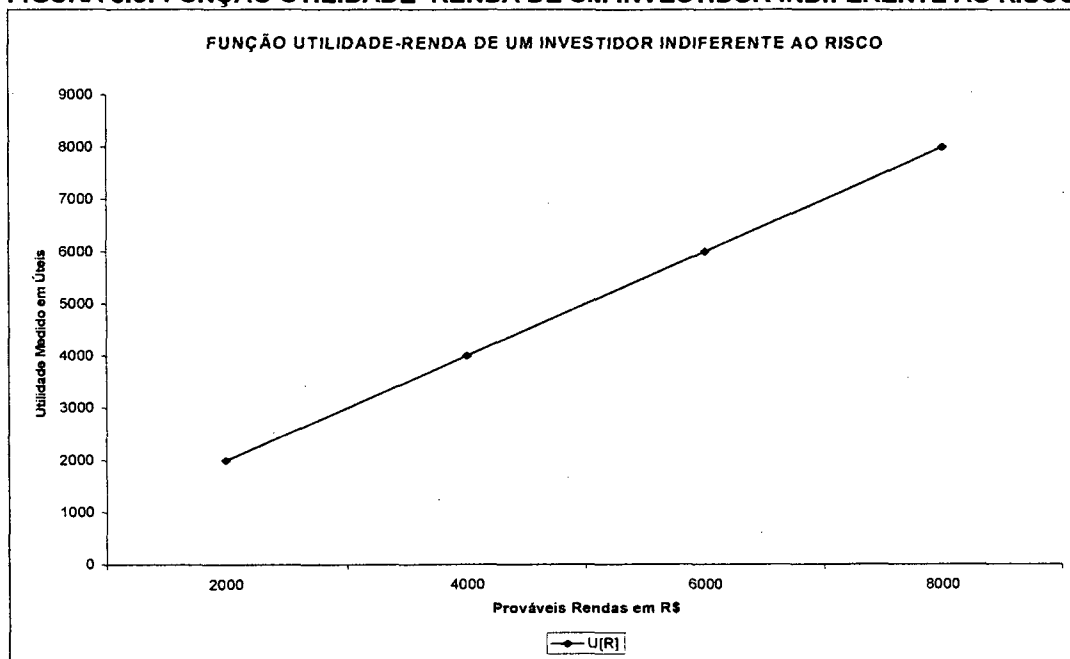
Em contraponto às características descritas para o tipo de investidor mencionado anteriormente, para os indiferentes ao risco, a decisão segundo o princípio da máxima utilidade esperada segue a decisão tomada segundo o princípio do máximo valor esperado, pois a sua função utilidade é vista como *linear*.

Reportando-se ainda ao quadro (3.1), pode-se inferir que, como o preço da opção da loteria é igual ao seu valor esperado, para este investidor, será indiferente jogar na loteria esportiva ou reter os R\$ 5.000,00 em seu poder. Para esse tipo de investidor caracterizado como neutro em relação ao risco assumido, uma função utilidade específica que melhor descreve o seu comportamento pode ser visto como segue:

$$U(R) = E(R) \tag{3.6}$$

A expressão anterior representa uma reta passando pela origem dos eixos coordenados. A taxa de substituição de riqueza por unidade de risco para esse tipo de investidor será constante, caracterizando-se por um investidor que dá atenção ao risco. Além disso, o investidor indiferente ao risco sempre tentará maximizar a riqueza esperada, dado que a sua função é linear e, portanto, $U''(R) = 0$. A figura 3.3 evidencia o comportamento desse tipo de investidor em função do seu nível de aversão ao risco assumido no mercado.

FIGURA 3.3: FUNÇÃO UTILIDADE-RENDA DE UM INVESTIDOR INDIFERENTE AO RISCO.



Considerou-se nas expressões (3.2), (3.4) e (3.6), o fato de que o domínio dos retornos seja maior ou igual à zero, ou seja, ($R \geq 0$), limitando as respectivas expressões pela definição de utilidade de cada agente individual. Logo, para um resultado esperado igual a zero, a utilidade será nula e, para um resultado encontrado igual a 100%, tem-se um agente avesso ao risco atribuindo-se $U(100)$ que é igual a 10 úteis⁶, tomando-se como base a expressão 3.2.

Assim, para o caso de um agente amante do risco, basta calcular a utilidade do investidor atribuindo-lhe $U(100)$ que é igual a 10.000 úteis, tomando-se como base a expressão 3.4 e, no caso de um agente indiferente ao risco, basta atribuir $U(100)$ tendo como resultado 100 úteis tomando-se como base para efetuar as manipulações algébricas a expressão 3.6, ficando

⁶ Para VARIAN (1994), o útil é uma medida de utilidade designada pelos economistas da escola marginalista, onde procuram mensurar a magnitude de desejo que alguém atribui a alguma coisa.

desta forma, estabelecidas as escalas de utilidade de cada investidor individual. Estas podem ainda ser associadas a possíveis rendimentos entre 0 e 100, além de serem alocadas por interpolação.

Retornando ao quadro (3.1) e calculando-se a partir das probabilidades mensuradas de cada resultado, das rendas prováveis e dos valores esperados, a utilidade esperada para os três diferentes tipos de investidores individuais, face ao nível de aversão ao risco por ele assumido, será:

QUADRO 3.2: RENDIMENTOS PROVÁVEIS E UTILIDADE ASSOCIADA AOS RESULTADOS

Rendas Prováveis (R\$)	Probabilidade Associada a cada Resultado	Valor Esperado	UTILIDADE ESPERADA SEGUNDO AS FUNÇÕES UTILIDADE DO INVESTIDOR		
			Averso ao Risco' $U(R) = \sqrt{R}$	Amante do Risco $U(R) = R^2$	Indiferente a Risco $U(R) = E(R)$
R_i	(p_i)	$E(\tilde{R}) = R_i \cdot p_i$			
2.000,00	¼	500,00	$44,72 \times \frac{1}{4}$	$4.000.000 \times \frac{1}{4}$	500,00
4.000,00	¼	1.000,00	$63,25 \times \frac{1}{4}$	$16.000.000 \times \frac{1}{4}$	1.000,00
6.000,00	¼	1.500,00	$77,46 \times \frac{1}{4}$	$36.000.000 \times \frac{1}{4}$	1.500,00
8.000,00	¼	2.000,00	$89,44 \times \frac{1}{4}$	$64.000.000 \times \frac{1}{4}$	2.000,00
Σ	-	5.000,00	68,72 úteis	30.000.000 úteis	5.000,00 úteis

Uma vez que a utilidade que é associada aos possíveis resultados da loteria para o investidor avesso ao risco é igual a 68,72 úteis, pode-se também calcular a renda esperada que proporciona este nível de utilidade para tal investidor da seguinte forma: $U(R) = \sqrt{R}$ ou, explicitando o retorno em função da utilidade, obtêm-se a seguinte expressão: $R = [U(R)]^2$.

Assim, fazendo $R = (68,72)^2 = R\$ 4.722,44$, obtêm-se um preço que é inferior ao preço da opção pelo jogo que foi igual a R\$ 5.000,00. Logo, o valor

⁷ O cálculo da utilidade para um investidor avesso ao risco se processa da seguinte forma: $U(2.000) = \sqrt{2.000} = 44,72 \times \frac{1}{4} = 11,18$ úteis. Para um investidor que é amante do risco o cálculo da utilidade será: $U(2.000) = (2.000)^2 = 4.000.000 \times \frac{1}{4} = 1.000.000$ úteis. Já o cálculo para um investidor indiferente ao risco pode ser feito da seguinte forma: $U(2.000) = 2.000 \times \frac{1}{4} = 500,00$ úteis.

de R\$ 4.722,44 seria o máximo que o agente econômico estaria disposto a pagar para aceitar o risco da aposta. Comparando-se com o resultado encontrado anteriormente e fazendo a operação matemática inversa, observa-se que a utilidade do valor esperado $U(5.000)$ é igual a 70,71 úteis que é maior do que a utilidade esperada do jogo de loteria. Logo, o agente avesso ao risco não aceitaria jogar a este preço.

Para o investidor amante do risco, a utilidade esperada associada ao jogo; ou seja, cerca de 30.000.000 úteis é maior do que a utilidade associada ao valor esperado $U(5.000)$ que é igual a 25.000.000 úteis, o que leva o agente a aceitar tal jogo. Já o investidor indiferente ao risco, o preço de R\$ 5.000,00 que ele deveria pagar pela opção de jogar, acaba provocando uma desutilidade igual à utilidade esperada associada ao respectivo jogo. Assim, a expectativa do investidor com relação a esta escolha é de um resultado líquido nulo sendo, portanto, indiferente entre jogar na loteria ou não jogar.

Cabe salientar que a condição de racionalidade do agente investidor fica estabelecida através das preferências por mais utilidade do que por menos em suas escolhas, e pelas habilidades em fazer associações entre os retornos possíveis acerca de determinado evento, de tal forma que possa refletir sobre as suas utilidades esperadas:

Outrossim, a teoria da utilidade ainda constitui um sistema normativo a partir do qual esse agente de decisão pode codificar essas preferências, destacá-las de um sistema complexo, transformando finalmente tais preferências, numa estrutura numérica de utilidades adequada para ser processada através de um algoritmo de otimização.

3.4. As Medidas de Aversão ao Risco

A análise de portfólios de investimentos financeiros sob condições de risco e incertezas vem sendo alvo de diversas pesquisas na área da Moderna Teoria de Finanças, em que diversos pesquisadores vêm procurando avaliar os níveis de aversão ao risco incorrido por investidores, em função de um conjunto de decisões a serem tomadas.

Genericamente, a aversão ao risco pode ser obtida pela medida do prêmio pelo risco de determinado investimento. Esse prêmio pode ser definido através do valor de (π) que resolve a expressão visualizada a seguir:

$$E[U(W + Y)] = U[W + E(Y) - \pi] \quad (3.7)$$

onde:

W : riqueza de determinado investidor;

Y : variável aleatória com valor esperado $E(Y)$, correspondente ao valor do retorno de um ativo com risco;

π : prêmio pelo risco.

A expressão (3.7) mostra que o prêmio pelo risco pode ser visto como o diferencial entre o valor esperado da riqueza de determinado jogo para um

indivíduo e o nível de riqueza que esse indivíduo aceitaria com certeza, caso o respectivo jogo fosse realizado; ou seja, é o *equivalente certeza*.

Assim, o lado esquerdo da expressão anterior é visto como a utilidade esperada da riqueza, dada a existência de um determinado jogo; enquanto no lado direito dessa mesma expressão, vê-se a utilidade do nível de riqueza, mais a utilidade do valor esperado do jogo, subtraído do prêmio pelo risco.

ARROW (1964) e PRATT (1965) se baseiam na expressão (3.7) para mostrar que se (Y) representa uma variável aleatória com desvios pequenos em relação à riqueza (W) , o prêmio pelo risco pode ser definido da seguinte forma:

$$\pi = -\frac{\sigma^2}{2} \cdot \frac{U''(W)}{U'(W)} \quad (3.8)$$

onde (σ^2) é a variância de Y . Uma vez que a razão $\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)$ é um valor positivo, a medida de aversão absoluta ao risco, designada por $A(W)$ em relação ao nível de riqueza, pode ser vista como segue:

$$A(W) = -\frac{U''(W)}{U'(W)} \quad (3.9)$$

A medida de aversão ao risco absoluto $A(W)$ mostra que um determinado investidor exibe um nível de aversão absoluta ao risco

decrecente, à medida que se eleva a importância aplicada em investimentos de risco. Por outro lado, se tal investidor continuar aplicando a mesma importância em ativos arriscados, ele será caracterizado como um investidor que exibe aversão absoluta ao risco constante. Ademais, se ele reduz a importância aplicada em ativos arriscados, então é possível classificá-lo como um investidor que exibe aversão absoluta ao risco crescente.

A primeira derivada de $A(W)$ em relação à riqueza é uma medida apropriada de como a aversão absoluta ao risco se comporta com relação a modificações no nível de riqueza do investidor. Tal medida de aversão é caracterizada como local; ou seja, ela é calculada para cada nível de renda real do investidor individual.

TOSTA DE SÁ (1999) mostra que, na prática, à medida que a riqueza investida aumenta, as importâncias investidas em ativos arriscados também se elevam, ou seja, os investidores em geral exibem aversão absoluta ao risco decrescente. Assim, torna-se possível especificar os sentimentos de aversão absoluta ao risco, restringindo-se a forma das funções utilidade que melhor descreva as suas preferências individuais.

Logo, existe uma relação direta entre o prêmio pelo risco que é o diferencial entre valor esperado matemático ou *equivalente certeza*, e o grau de aversão ao risco do investidor. Esse relacionamento pode ser resumido como segue:

- Se $A(W) > 0$; $\forall W \Rightarrow U(W)$ é côncava e o decisor é caracterizado como avesso ao risco;
- Se $A(W) = 0$; $\forall W \Rightarrow U(W)$ é uma reta e o decisor é indiferente ao risco;
- Se $A(W) < 0$; $\forall W \Rightarrow U(W)$ é convexa e o decisor é amante do risco.

Para encontrar a medida de aversão relativa, que pode ser designada como $R(W)$, basta multiplicar $A(W)$ descrito em (3.9) pelo nível de riqueza (W), tal como pode ser visualizado como segue:

$$R(W) = -W \cdot \frac{U''(W)}{U'(W)} = -W \cdot A(W) \quad (3.10)$$

Para indivíduos caracterizados como avessos ao risco, tanto a medida de aversão absoluta ao risco $A(W)$, como a medida de aversão relativa ao risco $R(W)$ serão positivas, tornando-se nulas para os indivíduos indiferentes ao risco e sendo negativas para aqueles indivíduos amantes do risco.

FRIEND & BLUME (1975) obtiveram valores decrescentes para a medida de aversão ao risco absoluto $A(W)$, e valor constante para a medida de aversão relativa $R(W)$ no trabalho sobre a natureza da função utilidade de investidores individuais em imóveis no mercado norte-americano, confirmando com isso, algumas considerações intuitivas mencionadas anteriormente.

Vale ressaltar, que as características de aversão absoluta ao risco de um agente econômico permitem determinar quando ele trata um ativo com

risco como um bem normal, ao fazer a escolha entre um ativo arriscado e um ativo com menos risco.

Finalmente, JIA & DYER (1996) mostraram que a medida de aversão ao risco local de Arrow-Pratt pode ser utilizada somente para funções utilidade que são continuamente diferenciáveis, devendo tais funções ser côncavas em toda parte de $A(W)$ que será utilizada na tomada de decisão.

3.5. As Funções Utilidade que Incorporam Dois Momentos Estatísticos

3.5.1. A Função Utilidade Quadrática

A função utilidade quadrática é bastante utilizada na área de finanças, uma vez que diversos pesquisadores avaliam que tal função descreve mais adequadamente o comportamento dos investidores frente às alternativas de investimentos com diferentes níveis de retorno esperado e risco, face às incertezas inerentes ao mercado.

A função utilidade quadrática pode ser descrita matematicamente através da seguinte expressão:

$$U(W) = W - bW^2 \tag{3.11}$$

Onde a constante (b) é positiva, enquanto (W) é a riqueza do investidor ao final de um período de investimento, sendo que: $0 \leq W < \frac{1}{2}b$. Aplicando-se o operador de esperança matemática na expressão (3.11) tem-se que:

$$E(U) = E(W) - bE(W^2) \quad (3.12)$$

O último termo da expressão (3.12) pode ser determinado a partir de um resultado elementar geralmente encontrado nos manuais de estatística que pode ser visto como:

$$E(W^2) = \sigma^2 + E(W)^2 \quad (3.13)$$

Assim, para determinar a utilidade esperada de uma carteira de ativos financeiros, basta substituir a expressão (3.13) em (3.12) que resultará na seguinte equação:

$$E(U) = E(W) - b\sigma_p^2 - bE(W)^2 \quad (3.14)$$

onde:

$E(U)$: valor esperado da utilidade;

$E(W)$: valor esperado da riqueza;

σ_p^2 : variância da carteira;

b : constante de ponderação da riqueza e da variância da carteira

A constante (b), também conhecida como coeficiente de ponderação do grau de aversão ao risco do investidor, deve ser definida de modo que possa satisfazer a restrição (3.16), garantido a convergência da função durante o processo de otimização da carteira. Para tanto, a expressão (3.14) deve garantir algumas condições:

A primeira derivada da função utilidade em relação à riqueza esperada é positiva, ou seja:

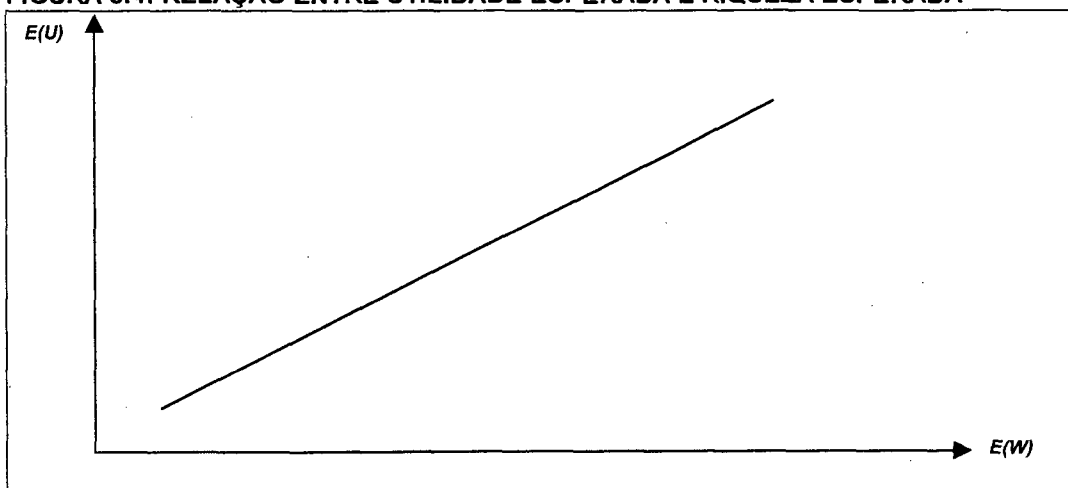
$$\frac{\partial E(U)}{\partial E(W)} = U'(W) = 1 - 2bE(W) \quad (3.15)$$

Com a seguinte desigualdade sendo levada em consideração:

$$\frac{\partial E(U)}{\partial E(W)} > 0 \quad (3.16)$$

As expressões demonstradas em (3.15) e (3.16) evidenciam a utilidade marginal da riqueza. Logo, à medida que há um aumento da riqueza esperada, *ceteris paribus*, implica um maior grau de satisfação para o investidor, ou vice-versa. Graficamente, observa-se uma relação direta entre a utilidade esperada e a riqueza esperada:

FIGURA 3.4: RELAÇÃO ENTRE UTILIDADE ESPERADA E RIQUEZA ESPERADA



Já o relacionamento entre a utilidade esperada e o risco da carteira, ou seja, a utilidade marginal do risco da carteira deve ser menor do que zero:

$$\frac{\partial E(U)}{\partial \sigma_p^2} = -2b\sigma_p \quad (3.17)$$

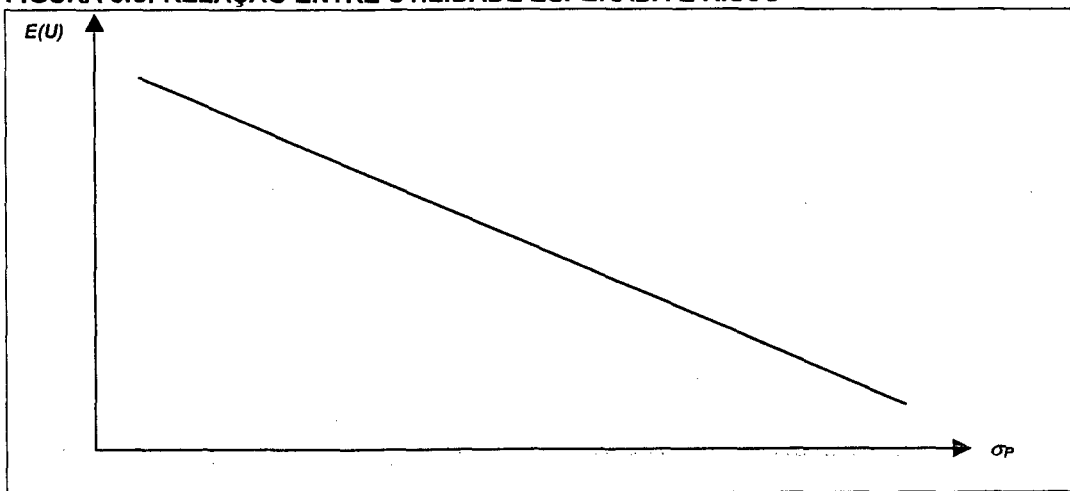
Vê-se que o agente econômico avesso ao risco prefere menos, a mais risco:

$$\frac{\partial E(U)}{\partial \sigma_p^2} < 0 \quad (3.18)$$

As expressões (3.17) e (3.18) denotam a utilidade marginal do risco, onde, à medida que há uma elevação do risco associado à riqueza esperada da carteira, *ceteris paribus*, tem-se como resposta uma redução na utilidade

esperada, mostrando que o investidor normalmente prefere menos, a mais risco. Graficamente, observa-se uma relação inversa entre riqueza esperada e risco da carteira.

FIGURA 3.5: RELAÇÃO ENTRE UTILIDADE ESPERADA E RISCO



Por outro lado, a segunda derivada da expressão (3.14) em relação à riqueza é menor do que zero (negativa), ou seja:

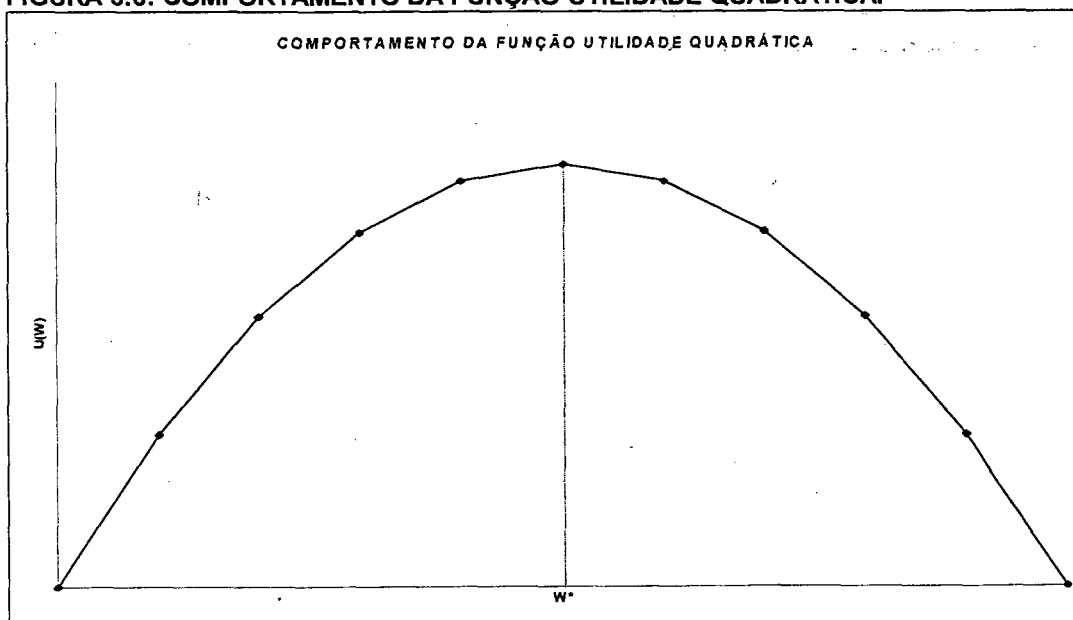
$$\frac{\partial^2 E(U)}{\partial E(W)^2} = U''(W) = -2b \quad (3.19)$$

Tendo a seguinte desigualdade como restrição:

$$\frac{\partial^2 E(U)}{\partial E(W)^2} < 0 \quad (3.20)$$

Tal como foi mencionado anteriormente, a constante de ponderação denotada por (b) deve ser positiva, visando garantir que a utilidade marginal seja decrescente. Graficamente, o comportamento da função utilidade quadrática pode ser visualizado na figura 3.6. Observa-se que no eixo da abscissa localiza-se a riqueza esperada do investidor denotada por $E(W)$, enquanto no eixo da ordenada localiza-se a utilidade esperada da riqueza proporcionada a esse investidor denotada por $U(W)$. Esse tipo de função atinge o valor máximo em algum valor de (W) conhecido como (W^*) , decrescendo a taxas crescentes a partir desse ponto de máximo.

FIGURA 3.6: COMPORTAMENTO DA FUNÇÃO UTILIDADE QUADRÁTICA.



Esse tipo de função utilidade apresenta medida de aversão ao risco absoluto crescente $A'(W) > 0$ e medida de aversão ao risco relativo crescente,

$R'(W) > 0$. As medidas de aversão ao risco da função utilidade quadrática podem ser calculadas como segue:

$$A(W) = \frac{-U''(W)}{U'(W)} = \frac{2b}{1-2bE(W)} \quad (3.22)$$

Calculando-se a primeira derivada da expressão (3.22), observa-se que ela deve ser maior do que zero, caracterizando os investidores como avessos ao risco; ou seja:

$$A'(W) = \frac{4b}{[1-2bE(W)]^2} > 0 \quad (3.23)$$

Já para o cálculo da medida de aversão ao risco relativo $R'(W)$ para a função utilidade quadrática este pode ser expresso da seguinte forma:

$$R'(W) = \frac{2b}{[1-2bE(W)]^2} > 0 \quad (3.24)$$

Vale ressaltar, que a função utilidade quadrática parece ser a mais adequada para descrever o comportamento dos investidores frente a alternativas de investimentos com diferentes quantidades de retorno esperado e risco, desde que obedeça às restrições impostas ao seu uso.

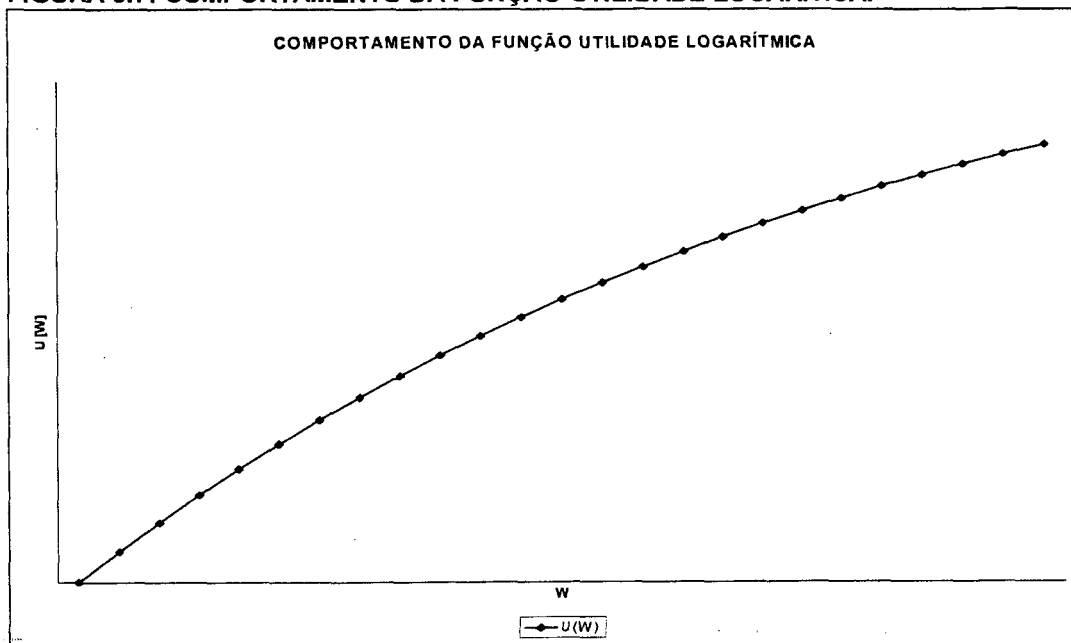
3.5.2. A Função Utilidade Logarítmica

Algumas suposições realizadas por Bernoulli *apud* BERNSTEIN & DAMODARAN (2000), partiram do pressuposto de que a utilidade se eleva com o logaritmo da quantidade; ou seja, a unidade mais a mudança percentual da riqueza. Dessa forma, a utilidade da riqueza aparentava ser uma função logarítmica do tamanho do prêmio pela riqueza, comportando-se matematicamente da seguinte forma:

$$U(W) = \ln(W) \tag{3.25}$$

Onde $U(W)$ é a utilidade derivada de uma quantidade de riqueza (W) positiva. Esse tipo de função utilidade apresenta a vantagem de possibilitar a incorporação do capital do agente econômico ao modelo decisório de utilidade. Graficamente, a função utilidade logarítmica assemelha-se às funções utilidade exponencial e raiz quadrada que serão abordadas posteriormente. A função logarítmica pode ser visualizada como segue:

FIGURA 3.7: COMPORTAMENTO DA FUNÇÃO UTILIDADE LOGARÍTMICA.



A função logarítmica dá a noção de que incrementos proporcionalmente iguais na riqueza esperada do decisor acabam propiciando adições absolutas também iguais na utilidade esperada. Aplicando-se o operador de esperança matemática na expressão (3.25) obtêm-se a seguinte expressão:

$$E(U) = E[\ln(W)] \quad (3.26)$$

Onde $E(U)$ é o valor esperado da função utilidade logarítmica, enquanto $E[\ln(W)]$ é a riqueza esperada. Esta função de Bernoulli acaba incorporando o princípio da utilidade marginal decrescente. Assim, a primeira derivada da utilidade esperada com relação à riqueza esperada pode ser vista

como:

$$\frac{\partial E(U)}{\partial E(W)} = U'(W) = \frac{1}{(W)} \quad (3.27)$$

Com a seguinte desigualdade sendo levada em consideração:

$$\frac{\partial E(U)}{\partial E(W)} \geq 0 \quad (3.28)$$

A expressão (3.26) é uma função monotonicamente não decrescente, indicando que à medida que o capital investido cresce, os agentes econômicos obtêm cada vez menos satisfação com cada unidade adicional de capital; uma vez que eles sofrem maior desutilidade com um declínio do capital investido, do que com a utilidade resultante de um aumento de capital de mesma grandeza.

Por outro lado, a segunda derivada da expressão (3.26) da utilidade esperada em relação à riqueza esperada é negativa, ou seja, a utilidade marginal da riqueza decresce quando a riqueza esperada se eleva. Logo, tem-se que:

$$\frac{\partial^2 E(U)}{\partial E(W)^2} = U''(W) = -\frac{1}{(W)^2} \quad (3.29)$$

A desigualdade a seguir deve ser levada em consideração de modo a garantir a maximização da riqueza esperada por parte do investidor:

$$\frac{\partial^2 E(U)}{\partial E(W)^2} \leq 0 \quad (3.30)$$

Calculando-se a partir das expressões anteriores, o coeficiente de aversão ao risco absoluto $A(W)$ por parte do investidor, encontra-se a seguinte expressão:

$$A(W) = -\frac{U''(W)}{U'(W)} = \frac{1/(W)^2}{1/(W)} = \frac{1}{(W)} \quad (3.31)$$

Com base na equação (3.31) é possível escrever a primeira derivada de (3.31), como sendo menor do que zero, ou seja, $A'(W) < 0$. Já o cálculo para a expressão que determina o coeficiente de aversão ao risco relativo por parte do investidor pode ser encontrado como segue:

$$R(W) = \frac{-WU''(W)}{U'(W)} = \frac{-W - \frac{1}{(W)^2}}{\frac{1}{(W)}} = 1 \quad (3.32)$$

Finalmente, a expressão anterior pressupõe que o agente econômico possua uma aversão relativa constante ao risco, ou seja, $R'(W) = 0$, já que o percentual alocado para investimentos em ativos considerados arriscados não se altera com o nível de riqueza esperada.

3.5.3. A Função Utilidade Exponencial

Esse tipo de função utilidade caracteriza-se por ser assintótica por cima, o que acaba acarretando um nível de utilidade finito para um nível de riqueza infinita. Tal função é empregada com bastante frequência na análise de portfólios. Matematicamente, a função utilidade exponencial pode ser expressa da seguinte forma:

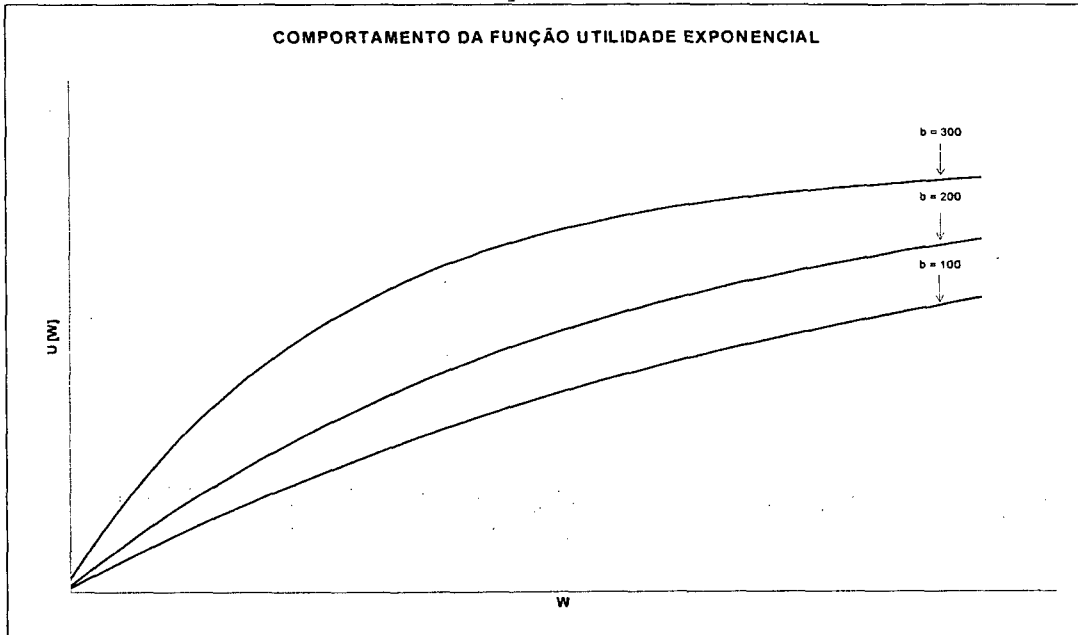
$$U(W) = 1 - e^{-bW} \quad (3.33)$$

Onde (W) é a riqueza do investidor e o coeficiente de ponderação ou coeficiente de aversão ao risco denotado por (b) é não-nulo, cujo valor deve ser obtido experimentalmente, controlando com isso o comportamento da curva de acordo com o nível de tolerância ao risco por parte do decisor, enquanto que o parâmetro (e) na expressão anterior é o logaritmo natural cujo valor é aproximadamente igual a (2,7178281).

Graficamente, o comportamento da função utilidade exponencial pode ser explicitado através da figura 3.8. Veja a partir da mesma figura que se o

decisor é avesso ao risco, esta função utilidade pode ser utilizada como uma boa aproximação do comportamento desse agente econômico.

FIGURA 3.8: COMPORTAMENTO DA FUNÇÃO UTILIDADE EXPONENCIAL



O gráfico supracitado mostra o comportamento de diferentes curvas de utilidade com distintos valores do coeficiente de aversão ao risco (b) por parte do decisor. Cabe observar que quando o coeficiente de aversão ao risco (b) cresce, a curva de utilidade torna-se mais achatada, *ceteris paribus*, com o decisor sendo mais avesso ao risco e obtendo um elevado prêmio pelo risco. Também é fácil observar que à medida que a riqueza (W) do investidor torna-se muito grande, $U(W)$ tenderá a se situar próximo da unidade. Todavia, se (W) for igual a zero, então a utilidade da riqueza esperada, $U(W)$, também será igual a zero.

Para usar consistentemente a função utilidade exponencial, deve-se inicialmente determinar valores que sejam razoáveis para o parâmetro de tolerância ao risco (b). Uma metodologia convincente envolve a determinação de um valor máximo de uma quantia (Y) para que o decisor esteja disposto a participar de determinado jogo de chances com apostas, cujos possíveis resultados seriam:

- Ganhar cerca de R\$ Y com probabilidade igual a 50%;

- Ganhar cerca de R\$ Y_1 com probabilidade igual a 50%.

O valor máximo de R\$ Y para o qual tal decisor aceite a aposta supracitada acaba fornecendo uma estimativa razoável do coeficiente de aversão (b). Veja que o tomador de decisão se dispõe a aceitar tal aposta para valores muito pequenos de (Y), caracterizando o decisor como avesso ao risco. Alternativamente, se o tomador de decisão se dispõe a jogar por valores muito elevados de (Y), ele será caracterizado como amante do risco, que corresponde ao relacionamento entre as curvas de utilidade e os valores de (b) evidenciados na figura 3.6.

Esse tipo de função apresenta aversão absoluta ao risco constante. Aplicando-se inicialmente o operador de esperança matemática na expressão (3.33), encontra-se a seguinte equação:

$$E(U) = -e^{-bE(W)} \quad (3.34)$$

Calculando-se a primeira derivada da expressão (3.34), ou seja, da utilidade esperada em relação à riqueza esperada, também conhecida como utilidade marginal da riqueza esperada por parte do investidor, tem-se que:

$$\frac{\partial E(U)}{\partial E(W)} = U'(W) = be^{-bE(W)} \quad (3.35)$$

Por outro lado, a segunda derivada da utilidade esperada em relação à riqueza esperada em (3.34), deve ser menor do que zero, podendo ser calculada de modo a garantir o máximo de satisfação por parte do investidor, conforme a expressão (3.36) a seguir:

$$\frac{\partial^2 E(U)}{\partial E(W)^2} = U''(W) = -b^2 e^{-bE(W)} \quad (3.36)$$

Para calcular a medida de aversão ao risco absoluto por parte do investidor, denotado por $A(W)$, basta efetuar a divisão entre as expressões (3.35) e (3.36), tal como pode ser visto a seguir:

$$A(W) = \frac{-U''(W)}{U'(W)} = \frac{b^2 e^{-bE(W)}}{be^{-bE(W)}} = b \quad (3.37)$$

A expressão anterior informa acerca da existência de *aversão absoluta* ao risco constante, ou seja, à medida que a riqueza esperada se eleva, pode-se investir a mesma importância em ativos considerados arriscados, traduzindo-se através da seguinte relação: $A'(W) = 0$. Já o cálculo da medida de aversão ao risco relativa dado por $R'(W)$, pode ser expresso da seguinte forma:

$$R(W) = \frac{-WU''(W)}{U(W)} = -W.A(R) = -W.b \quad (3.38)$$

Através da expressão anterior observa-se que ela apresenta uma *aversão relativa* ao risco decrescente. Logo, se a riqueza inicial se elevar, a proporção a ser investida no ativo de maior risco tenderá a decrescer, tudo o mais mantido constante.

BEKMAN & COSTA NETO (1980, p. 70-71) mostram que esta função utilidade é a única, juntamente com a função utilidade linear, que apresenta uma propriedade conhecida como delta (Δ), ou seja, caso se acrescente uma constante (Δ) qualquer a todos os prêmios de uma determinada loteria, seu *equivalente certeza* ficará acrescido da mesma constante. Ao levar em consideração tal propriedade, evidencia-se que os preços de compra e de venda⁸ de determinada loteria serão iguais.

⁸ Entende-se por preço de compra de uma determinada loteria o limite máximo do valor que um indivíduo estaria disposto a pagar para participar da mesma, enquanto o preço de venda seria o limite mínimo do valor que ele estaria disposto a receber para se desfazer da loteria. Ressalta-se que a definição de *equivalente certeza* acaba coincidindo exatamente com a do preço de venda.

3.5.4. A Função Utilidade Raiz Quadrada

O uso deste tipo de função utilidade é mais apropriado para investidores que são caracterizados como avessos ao risco. Tal função pode ser representada através da seguinte expressão matemática:

$$U(W) = \sqrt{W} \quad (3.39)$$

Onde (W) é a riqueza de um investidor individual qualquer. Calculando-se o valor esperado a partir da expressão (3.39), obtêm-se a seguinte expressão:

$$E(U) = E(W)^{1/2} \quad (3.40)$$

Assim, para encontrar a utilidade marginal da riqueza esperada, é necessário calcular a derivada primeira da utilidade esperada em relação à riqueza esperada, pautando-se na expressão anterior:

$$\frac{\partial E(U)}{\partial E(W)} = U'(W) = \frac{1}{2} W^{-1/2} \quad (3.41)$$

Tem-se como restrição à desigualdade que a utilidade marginal da riqueza deve ser maior ou igual a zero, o que torna o investidor individual avesso ao risco, tal como pode ser visto a seguir:

$$\frac{\partial E(U)}{\partial E(W)} = U'(W) \geq 0 \quad (3.42)$$

Por outro lado, a segunda derivada da utilidade esperada em relação à riqueza esperada, ou segunda derivada da utilidade marginal da riqueza esperada com base na expressão (3.40), pode ser vista como:

$$\frac{\partial^2 E(U)}{\partial E(W)^2} = U''(W) = -\frac{1}{2}W^{-3} \quad (3.43)$$

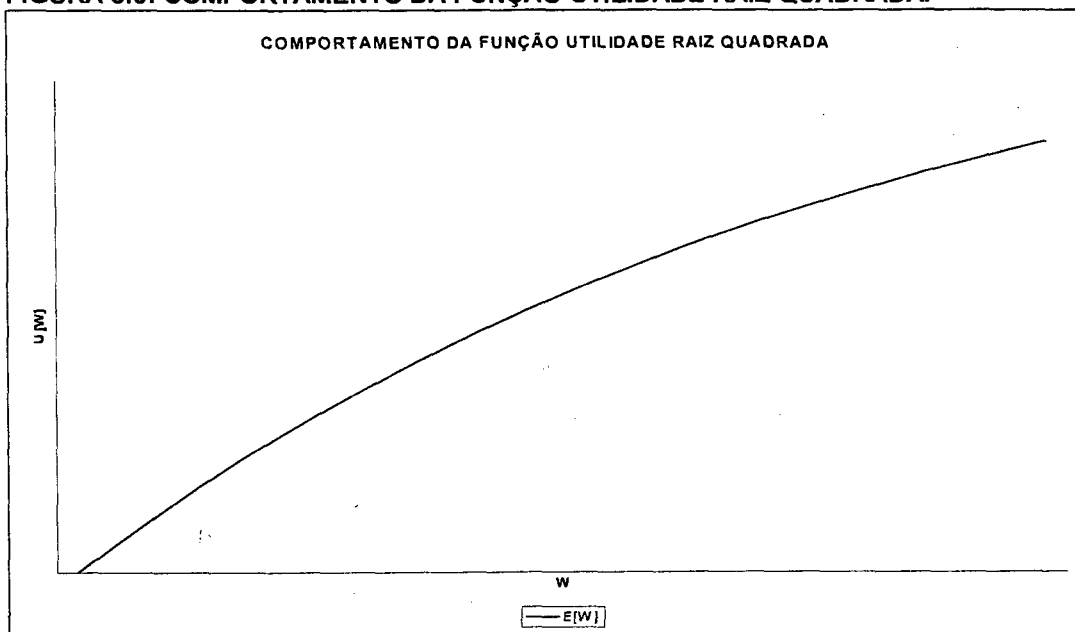
Vale salientar, que a restrição de que a segunda derivada da utilidade esperada em relação à riqueza esperada deve ser menor ou igual a zero, garante a maximização da utilidade esperada do investidor, tal como encontra-se na expressão seguinte:

$$\frac{\partial^2 E(U)}{\partial E(W)^2} = U''(W) \leq 0 \quad (3.44)$$

Para LEVY & SARNAT (1972) a restrição imposta na expressão (3.44) indica que o investidor é caracterizado como um avesso ao risco, uma vez que

a utilidade marginal da riqueza diminui, ou seja, o valor da utilidade esperada para o investidor a cada incremento adicional de R\$ 1,00, por exemplo, diminui quando sua riqueza se eleva. Graficamente, o comportamento da função utilidade raiz quadrada pode ser visualizada a seguir:

FIGURA 3.9: COMPORTAMENTO DA FUNÇÃO UTILIDADE RAIZ QUADRADA.



Para o cálculo da medida de aversão ao risco absoluto usando a função utilidade raiz quadrada, basta efetuar a divisão da derivada de segunda ordem pela derivada de primeira ordem da utilidade esperada em relação à riqueza esperada, que pode ser vista como:

$$A(W) = -\frac{U''(W)}{U'(W)} = W^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{W}} \quad (3.45)$$

Veja a partir da expressão anterior, que à medida que a riqueza do investidor se eleva, o grau de aversão ao risco absoluto passa a ser decrescente, já que, o investidor diminui maiores recursos quando a riqueza esperada do decisor se eleva, traduzindo-se por $A'(W) < 0$. Já o nível de aversão ao risco relativo $R(W)$ por parte do decisor deve ser mensurado tal como segue:

$$R(W) = -\frac{WU''(W)}{U'(W)} = \frac{2W^{\frac{3}{2}}}{2W^{\frac{3}{2}}} = 1 \quad (3.46)$$

Observe com base na expressão (3.46) que o investidor individual possui aversão relativa ao risco constante. Tal como pôde ser visto na função utilidade logarítmica, o percentual investido em ativos arriscados não se altera com o nível da renda, ou seja, $R(W) = 0$. O quadro a seguir procura sintetizar o comportamento do investidor em relação ao seu grau de aversão ao risco absoluto e relativo, levando-se em consideração o nível de riqueza esperada investido pelo decisor.

QUADRO 3.3: NÍVEIS DE AVERSÃO AO RISCO ABSOLUTO E RELATIVO CONFORME O NÍVEL DE RIQUEZA DO INVESTIDOR

AVERSÃO ABSOLUTA AO RISCO: $A(W)$			
Função Utilidade	Tipo de Investidor	Característica	Propriedade
Quadrática	Aversão absoluta ao risco crescente	Conforme a riqueza se eleva, investe-se menos em ativos com risco.	$A'(W) > 0$
Logarítmica	Aversão absoluta ao risco decrescente	Conforme a riqueza se eleva, investe-se maiores quantias em ativos com risco.	$A'(W) < 0$
Exponencial	Aversão absoluta ao risco constante	Conforme aumenta a riqueza, investe-se a mesma quantia em ativos com risco.	$A'(W) = 0$
Raiz Quadrada	Aversão absoluta ao risco decrescente	Conforme aumenta a riqueza, investe-se maiores quantias em ativos com risco.	$A'(W) < 0$
AVERSÃO RELATIVA AO RISCO: $R(W)$			
Função Utilidade	Tipo de Investidor	Característica	Propriedade
Quadrática	Aversão ao risco relativo crescente	Percentual investido em ativos com risco decresce com o aumento da riqueza	$R'(W) > 0$
Logarítmica	Aversão ao risco relativo constante	Percentual investido em ativos com risco não se altera com o nível de riqueza	$R'(W) = 0$
Exponencial	Aversão ao risco relativo decrescente	Percentual investido em ativos com risco se eleva com o aumento do nível de riqueza	$R'(W) < 0$
Raiz Quadrada	Aversão ao risco relativo constante	Percentual investido em ativos com risco não se altera com o nível de riqueza	$R'(W) = 0$

Pretende-se neste trabalho, dar um tratamento teórico acerca do comportamento das funções utilidade do investidor individual, procurando averiguar paralelamente os tipos de aversão ao risco por parte desse investidor, valendo-se das medidas convencionais de aversão de Arrow-Pratt.

Ressalta-se que das quatro funções que exibem os dois primeiros momentos estatísticos, ou seja, média ou valor esperado e variância ou risco, apenas a função do tipo exponencial será incorporada a assimetria através da série de expansão de Taylor, uma vez que ela é a única dentre as quatro

funções pré-selecionadas que possui o coeficiente de ponderação do risco do investidor em função do seu nível de aversão.

3.6. As Funções Utilidade que Incorporam os Três Momentos Estatísticos

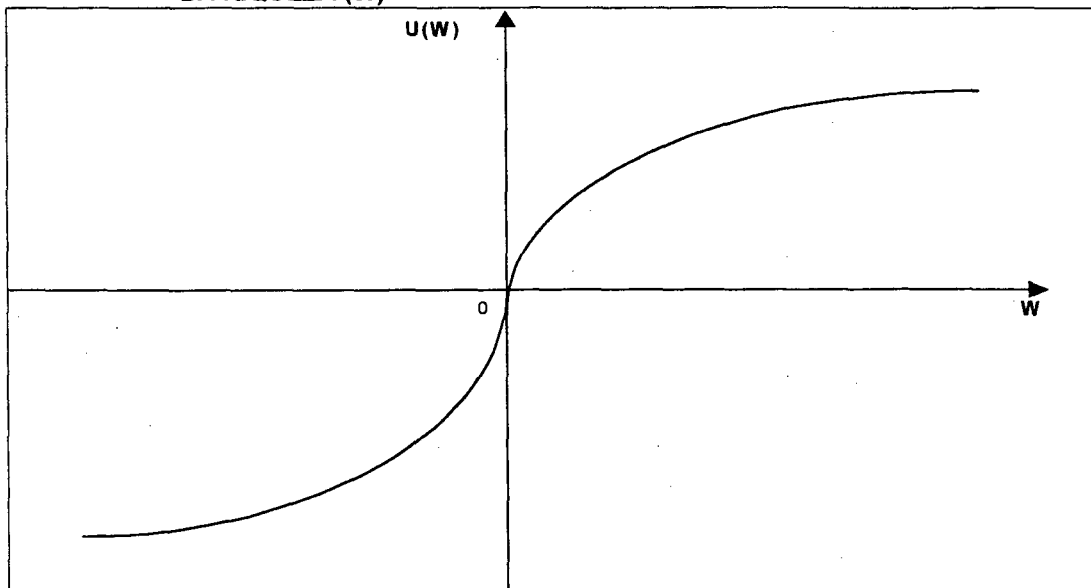
3.6.1. A Função Utilidade Cúbica

Existem ainda outros tipos de funções utilidade que já incorporam diretamente a assimetria sem a necessidade da série de expansão de Taylor. Essas funções possuem a característica de um polinômio de terceiro grau.

Na visão de KAHNEMAN & TVERSKY (1979), o comportamento dos indivíduos pode ser representado por uma curva em forma de (S) que procura mensurar a atitude dos agentes frente aos riscos incorridos num processo de escolha. Uma declividade quase horizontal na parte côncava de tal curva ilustra um comportamento de aversão ao risco por parte do investidor, e à medida que a parte convexa se verticaliza, aproximando-se do ponto de referência, evidencia uma tendência de propensão ao risco.

A figura 3.10 ilustra os resultados obtidos a partir do processo de escolha e são expressos como desvios positivos para o caso da forma côncava no domínio dos ganhos, ou negativos para o caso da forma convexa em situações de perdas.

FIGURA 3.10: COMPORTAMENTO DA FUNÇÃO UTILIDADE CÚBICA COM O ACRÉSCIMO DA RIQUEZA (W)



TVERSKY & KAHNEMAN (1981), mostram que a curva supracitada não espelha fidedignamente todos os padrões do comportamento humano, uma vez que parte de um ponto de referência, *status-quo*, que depende da formulação do problema a ser resolvido, bem como da percepção e do conhecimento do decisor.

Embora essa tomada de decisão sob condição de incerteza dependa, de alguma forma, de todos os momentos da distribuição de probabilidade, assumir determinada função utilidade específica acaba permitindo ao decisor, concentrar sua atenção num subconjunto da distribuição dos momentos estatísticos, ou seja, para o caso de um decisor que assuma uma função utilidade do tipo quadrática, as decisões de investimentos preocupam-se somente com os dois primeiros momentos.

Contudo, ao levar em consideração os três primeiros momentos ou até mesmo o quarto momento estatístico, não significa que todos os investidores possuam funções utilidade estilo a cúbica, muito embora o terceiro e o quarto momentos estatísticos sejam realmente considerados significantes para a avaliação de um portfólio.

KRAUS & LITZENBERGER (1976), também enfatizam que a preferência por portfólios arriscados usando os três primeiros momentos estatísticos das taxas de retorno pode, em geral, ser determinado somente para investidores cujo comportamento possa ser modelado por uma função utilidade do tipo cúbica. Contudo, ele avalia que o terceiro grau do polinômio seria uma função utilidade inadequada para um investidor caracterizado como avesso ao risco.

LEVY & SARNAT (1972) mostram que uma função utilidade que depende apenas dos três primeiros momentos estatísticos pode ser expressa da seguinte forma:

$$U(W + x) = a.(W + x) + b.(W + x)^2 + c.(W + x)^3 + d \quad (3.47)$$

Onde (W) denota a riqueza do investidor, (x) pode ser visto como o retorno aleatório de um investimento qualquer, enquanto os coeficientes de ponderação (a), (b), (c) e (d), são as constantes da respectiva equação. Expandindo a expressão (3.47) sob o ponto (W), e pautando-se na série de expansão de Taylor, tem-se que:

$$U(W+x) = U(W) + U'(W).x + \frac{1}{2}U''(W).x^2 + \frac{1}{6}U'''(W).x^3 \quad (3.48)$$

Após terem sido calculadas as três primeiras derivadas de (U) no ponto (W) e, substituindo tais derivadas na expressão (3.47), pode-se obter a seguinte expressão:

$$U(W+x) = a_1.x + b_1.x^2 + c_1.x^3 + d_1 \quad (3.49)$$

Observe que os parâmetros expostos na expressão (3.49) e denotados por (a_1), (b_1), (c_1) e (d_1), foram determinados a partir das seguintes expressões:

$$a_1 = a + 2bW + 3cW^2 \quad (3.50)$$

$$b_1 = b + 3cW \quad (3.51)$$

$$c_1 = c \quad (3.52)$$

$$d_1 = aW + bW^2 + cW^3 + d \quad (3.53)$$

Pode-se afirmar que a expressão (3.49) possui segmentos côncavos e convexos, tal como pôde ser visualizado anteriormente através da figura 3.10. Assim, é possível demonstrar algebricamente que a função utilidade polinomial de terceira ordem deve incluir uma parte côncava seguida de uma parte convexa. Para encontrar a expressão cúbica que mostra o relacionamento

entre a utilidade esperada e a riqueza esperada, assume-se por definição que $U(Y)$ seja uma função polinomial de terceira ordem (genérica), expressa da seguinte forma:

$$U(Y) = a_1 \cdot Y + a_2 \cdot Y^2 + a_3 \cdot Y^3 + e \quad (3.54)$$

Sabendo-se ainda que a variável denotada por $U(Y)$ é determinada por uma transformação linear positiva, pode-se subtrair o parâmetro qualquer (e) da expressão anterior e dividir por (a_1), obtendo-se com isso, sem perder a generalidade, a seguinte expressão algébrica:

$$U(W) = W + bW^2 + cW^3 \quad (3.55)$$

Veja que os parâmetros (b) e (c) da expressão anterior podem ser vistos como:

$$b = \frac{a_2}{a_1} \quad \text{e} \quad c = \frac{a_3}{a_1} \quad (3.56)$$

Tomando-se a suposição convencional de que $U'(W) > 0$, pode-se calcular a derivada primeira da utilidade esperada com relação à riqueza esperada, também conhecida como utilidade marginal da riqueza, com base na

expressão (3.55), e a partir disso poder retirar algumas inferências sobre tal expressão. Assim, tem-se que:

$$U'(W) = 3cW^2 + 2bW + 1 > 0 \quad (3.57)$$

Desde que (3.57) seja uma equação polinomial de segunda ordem, pode-se dizer que a desigualdade anterior somente será assegurada caso as duas raízes sejam imaginárias, isto é, se:

$$(2b)^2 < 4.3c, \text{ ou de outra forma, } b^2 < 3c \quad (3.58)$$

A partir da expressão (3.57), pode-se afirmar que o parâmetro denotado por (c) deve ser positivo, significando que o coeficiente de assimetria é maior do zero, o que evidencia uma distribuição de probabilidade dos retornos dos ativos como sendo positivamente assimétrica. Um outro resultado derivado da mesma equação é que o parâmetro denotado por (b) pode ser tanto positivo quanto negativo. Calculando-se a derivada segunda da utilidade esperada $U(W)$ em relação à riqueza esperada $E(W)$ na expressão (3.55), tem-se:

$$U''(W) = 6cW + 2b \quad (3.59)$$

Como o parâmetro denotado por (c) é positivo, pode-se então determinar as seguintes desigualdades:

$$U''(W) \leq 0; \text{ caso: } W \leq -\frac{b}{3c} \quad (3.60)$$

Ou de outra forma, tem-se ainda que:

$$U''(W) > 0; \text{ caso: } W > -\frac{b}{3c} \quad (3.61)$$

Assim, se o coeficiente de ponderação denotado por (b) for menor do que zero, ou seja, $(b < 0)$, a função utilidade será *côncava* para alguns valores de (W) , como também para todos os valores negativos de (W) . Alternativamente, se o coeficiente de ponderação denotado por (b) for maior do que zero, ou seja, $(b > 0)$, a função utilidade esperada será *côncava*, somente para valores negativos de (W) .

Por outro lado, se o coeficiente de ponderação (b) for menor do que zero, ou seja, $(b < 0)$, isso evidencia um grau de aversão ao risco por parte do investidor no intervalo considerado. Logo, para valores pequenos da riqueza (W) , ou grandes valores negativos da riqueza (W) , a utilidade marginal da riqueza será crescente, com a função utilidade sendo caracterizada como *côncava* e com o investidor individual sendo avesso ao risco. Já para baixos níveis de riqueza (W) , mas para altos retornos, o investidor mostra uma

preferência pelo risco, isto é, a utilidade marginal do dinheiro cresce com o aumento da riqueza (W).

3.6.2. A Função Utilidade Cúbica Proposta por Karl Borch

BORCH (1963), sugere uma função utilidade polinomial de terceiro grau que já incorpora os efeitos do terceiro momento estatístico da distribuição das taxas de retornos dos ativos financeiros. Essa função apresenta um comportamento gráfico similar ao descrito na figura 3.10 deste trabalho, porém, não necessita de grandes manipulações algébricas. Tal função pode ser expressa matematicamente da seguinte forma:

$$U(W) = (W - a)^3 \quad (3.62)$$

Calculando-se o valor esperado e desenvolvendo algebricamente a equação (3.62) é possível encontrar:

$$E(U) = 3a^2 E(W) - 3a[E(W^2)] + E(W^3) - a^3 \quad (3.63)$$

sendo que:

$$E(W^3) = A_3 + 3E(W)\sigma^2 + E(W)^3 \quad (3.64)$$

O parâmetro (A_3) é conhecido como coeficiente de assimetria da distribuição dos retornos dos ativos enquanto o parâmetro (a) pode ser visto como coeficiente de ponderação da riqueza esperada, risco e assimetria da distribuição. Com base nas expressões (3.13) e (3.64), pode-se transformar algebricamente a expressão (3.64) na seguinte relação:

$$E(U) = 3a^2 2E(W) - 3a[\sigma^2 + E(W)^2] + A_3 + 3E(W)\sigma^2 + E(W)^3 - a^3 \quad (3.65)$$

Veja através da expressão (3.65) que ela possui a característica de somente possuir o único coeficiente de ponderação para os momentos estatísticos da distribuição denotada pelo parâmetro (a). Assim, ao otimizar determinada carteira de ativos financeiros, o coeficiente de ponderação (a) será utilizado para ponderar tanto o risco quanto o retorno da carteira. Por outro lado, os efeitos provenientes da assimetria são incorporados na função utilidade sem qualquer controle por parte do tomador de decisão, uma vez que ele não possui qualquer parâmetro que atribua uma determinada ponderação.

Cabe ressaltar, que as funções utilidade descritas até o momento procuram descrever o comportamento de um investidor avesso ao risco, o que exige a imposição de algumas restrições para o bom funcionamento das respectivas expressões.

Vê-se a partir da equação anterior, que a derivada parcial da utilidade esperada em relação à riqueza esperada, conhecida como utilidade marginal da riqueza deve necessariamente ser positiva, já que o aumento adicional da

riqueza esperada acaba gerando uma elevação na utilidade esperada do investidor, tal como pode ser visto na equação adiante:

$$\frac{\partial E(U)}{\partial E(W)} = U'(W) = 6a^2 - 6aE(W) + 3\sigma^2 + 3E(W)^2 > 0 \quad (3.66)$$

Por outro lado, a derivada parcial de segunda ordem da utilidade esperada em relação à riqueza esperada na expressão (3.65), deve ser negativa, o que garante a existência de um ponto de maximização da respectiva função. Esta derivação pode ser visualizada como segue:

$$\frac{\partial^2 E(U)}{\partial E(W)^2} = U''(W) = -6a + 6E(W) < 0 \quad (3.67)$$

Já a derivada parcial da utilidade esperada em relação ao risco (variância ou desvio-padrão) da carteira, necessariamente deve ser negativa, já que o investidor individual caracterizado como avesso ao risco, prefere menos a mais risco, tal como pode ser visto abaixo:

$$\frac{\partial^2 E(U)}{\partial \sigma^2} = -6a + 6E(W)\sigma < 0 \quad (3.68)$$

Em relação às expressões mostradas anteriormente, deve-se considerar a desigualdade que garante a validade da função utilidade

reportada, isto é, o coeficiente de ponderação denotado por (a) deve ser maior do que a riqueza esperada, $a > E(W)$. Vale salientar, que o grau de aversão ao risco absoluto $A(W)$ para esta função utilidade deve ser decrescente quando a riqueza esperada se eleva.

Finalmente, este capítulo servirá como embasamento para o processo de otimização da função utilidade exponencial, função utilidade cúbica e função utilidade cúbica proposta por Karl Borch, que será implementado no sexto capítulo do respectivo trabalho.

CAPÍTULO IV

4. ASPECTOS GERAIS DOS MERCADOS FUTUROS

4.1. Introdução

A existência dos mercados futuros desde suas origens no século XIX, vem sofrendo diversas alterações no que diz respeito aos objetivos do mercado, à natureza dos riscos, aos padrões da indústria e ao refinamento das práticas de negociação e compensação de futuros. Nesse sentido, as bolsas de futuros passaram a ser vistas como um *locus* onde as transações são efetivadas com o objetivo de transferir riscos entre agentes independentes.

Esse mercado acabou se beneficiando em virtude de uma série de instrumentos e mecanismos que resultaram em transformações na maneira como os agentes econômicos tomam decisões e realizam negócios. Nesse prisma, ficou mais fácil lidar com os riscos e incertezas produzidos por eventos desfavoráveis que podem comprometer os resultados futuros dos indivíduos e das empresas.

MILLER (1986), mostra que os mercados futuros são a inovação financeira mais significativa dos últimos vinte anos. Embora os mercados futuros existam há mais de um século, ele ressalta que uma inovação é significativa quando for capaz de produzir efeitos permanentes, e não transitórios e, quando continua crescendo mesmo depois que o seu impulso

inicial tenha desaparecido. Não obstante esses mercados do ponto de vista econômico possuem duas funções básicas:

- ❑ Sinalização dos preços futuros (*price discovery*);
- ❑ Transferência de riscos (*hedging*).

A função de *hedging* ou de transferência de riscos caracteriza-se por ser um dos principais papéis de qualquer mercado futuro. Notadamente, o processo de proteção contra o risco sempre foi marcante nos mercados futuros desde seus primórdios quando produtores e comerciantes realizavam operações de venda e compra de mercadorias a termo (*forward*). Desta forma, os produtores se protegiam de uma queda nos preços dos bens transacionados e os compradores estavam resguardados contra uma alta dos preços.

No que diz respeito à função de sinalização dos preços, diz-se que os preços dos contratos futuros para um determinado vencimento seriam uma estimativa para os preços do ativo para esta data. Somente na década de 30, o economista J. M. Keynes divulgou a teoria geral onde mostra que nos preços dos contratos futuros é normal a existência de um prêmio em razão da atuação de *hedgers* e/ou especuladores.

Este prêmio seria um valor cobrado pelos especuladores em virtude do risco que correm ao se posicionarem nos mercados futuros. Portanto, a existência de um prêmio pelo risco pode fazer com que as cotações dos preços futuros sejam uma estimativa viesada dos preços à vista.

Este capítulo encontra-se estruturado em sete seções, a saber: a segunda seção tece considerações sobre a lógica de funcionamento dos mercados futuros. A terceira seção fala sobre a relação dos contratos futuros e a termo. A quarta seção mostra as posições assumidas pelos investidores nesse mercado. A quinta seção aborda a formação dos preços em contratos futuros. A sexta seção fala sobre o processo de arbitragem no mercado futuro. A sétima seção finaliza mostrando algumas estratégias de *hedge*⁹ comumente usadas nos mercados futuros.

4.2. A Lógica de Funcionamento dos Mercados Futuros

Um contrato futuro pode ser visto como uma obrigação, legalmente exigível, de entregar ou receber determinada quantidade de uma mercadoria de qualidade preestabelecida, pelo prazo ajustado em determinada bolsa de mercadorias e futuros, no momento em que o contrato é executado.

Neste caso, o vendedor pode optar em fazer a entrega da mercadoria transacionada em algum momento do mês para o qual tenha sido estipulada a entrega futura. Normalmente no Brasil uma característica marcante nesse tipo de negociação é que apenas uma pequena parte dos contratos celebrados são liquidados pela entrega efetiva de seus ativos-objetos. Os usuários comerciais ou especuladores optam por compensar ou liquidar sua obrigação, pela

⁹ Para SILVA NETO (1998, p. 116), o *hedge* pode ser definido como uma operação que tem por objetivo diminuir o risco de determinada posição de caixa, estoque ou até mesmo outra operação. Já a literatura chama a pessoa que realiza essa operação de proteção, ou eliminação do risco de *hedger*.

realização de transações inversas ou reversão de posições. Isso leva a dizer que os mercados futuros servem como transferência de riscos.

TEIXEIRA (1992) evidencia duas vantagens dos mercados futuros. A primeira delas mostra que à medida que se tornam possíveis operações de compra e venda para entrega futura, os mercados futuros suavizam a sazonalidade da comercialização agrícola, promovem a alocação intertemporal dos bens e estimulam a liquidez e o desenvolvimento dos negócios no mercado físico.

Em segundo lugar, os mercados futuros atraem, além dos *hedgers*, a participação de especuladores. Estes por sua vez, fornecem o capital de risco necessário para absorção das variações dos níveis de preços das *commodities*. Vale ressaltar, que a presença dos especuladores é de fundamental importância para amortecer a extrema volatilidade de preços e proteger os agentes econômicos contra variações indesejadas dos preços.

No Brasil, a história dos Mercados Futuros iniciou-se a partir da criação da Bolsa de Mercadoria de São Paulo (BMSP) em outubro de 1917, tendo seu primeiro negócio se realizado no ano seguinte. O início dessa bolsa foi marcado pelos negócios envolvendo algodão, açúcar, arroz e café. Conquanto, a mercadoria que mais atraía negócios era o algodão devido à expansão da indústria têxtil nos anos 20 e à exportação desta matéria-prima (FERREIRA e HORITA, 1996 p. 118).

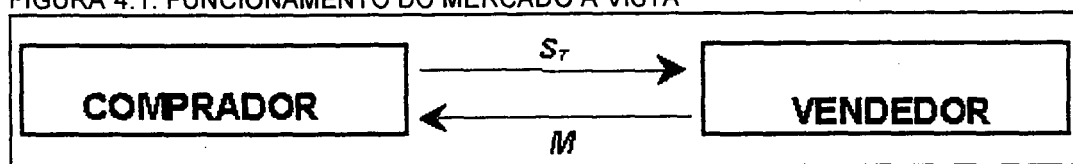
Os contratos realizados na bolsa supracitada eram característicos de um mercado a termo. As liquidações de tais contratos eram realizadas através de um sistema, denominado Caixa de Liquidação, instituído em 1918. Neste

sistema, os participantes depositavam margens como garantia da efetiva liquidação das operações.

Após a incorporação da BMSP, o seu nome foi alterado para Bolsa de Mercadorias e Futuros (BM&F) no ano de 1986. Essa bolsa foi construída com recursos próprios e com o apoio de técnicos da Bovespa. Porém, foi a partir de 1998, que a BM&F passou a ocupar a quinta posição na relação das maiores bolsas de futuros do mundo.

Nesses termos, é necessário entender não somente toda a parte histórica das bolsas de futuros, como também a lógica do funcionamento desses mercados, pautando-se numa operação realizada num mercado à vista (*spot*). Imagine uma situação onde dois agentes econômicos num instante (T) qualquer, onde se negocia determinada mercadoria (M) ao preço estipulado em (S_T). O comprador desse bem paga uma quantia correspondente a (S_T) e o vendedor entrega essa mercadoria (M), caracterizando-se a operação que pode ser ilustrada a seguir.

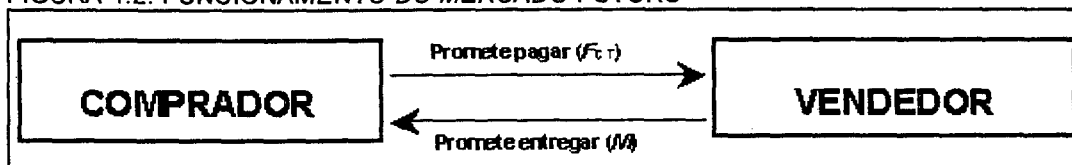
FIGURA 4.1: FUNCIONAMENTO DO MERCADO À VISTA



Vê-se através da figura 4.1 uma exemplificação de uma transação realizada no mercado à vista. Já para o caso do mercado futuro, suponha que os mesmos agentes econômicos no negócio anteriormente citado em uma determinada data (t) anterior ao vencimento (T), detalhando o tipo de

mercadoria (M), a quantidade (uma unidade) e o preço (F_t, T), as duas partes envolvidas no negócio tenham celebrado um acordo de compra e venda de um bem, por um preço previamente combinado e, para liquidação numa data futura, que comumente é referenciado no mercado futuro de ativo-objeto. Essa transação pode ser visualizada através da ilustração a seguir.

FIGURA 4.2: FUNCIONAMENTO DO MERCADO FUTURO



À luz das figuras anteriores pode-se descrever didaticamente acerca do comportamento dos dois agentes econômicos:

- *Comprador*: caracteriza-se por ter a obrigação de pagar o preço combinado (F_t, T) pelo ativo (M). Quando um investidor adquire contratos futuros, diz-se que ele assumiu uma *posição comprada* no mercado futuro. Conseqüentemente, ele incorrerá em riscos caso haja uma queda no preço do ativo-objeto de negociação;
- *Vendedor*: caracteriza-se por ter o dever de entregar a mercadoria (M) na data combinada (T). Logo, o investidor que efetuou a operação inversa assumiu uma *posição vendida*. Conseqüentemente ele incorrerá em riscos caso haja uma elevação no preço do ativo-objeto de negociação.

HULL (1996), classifica os participantes do mercado futuro de acordo com os propósitos de negociação. Genericamente, existem três tipos de participantes nesse mercado: os clientes, que podem ser divididos em *hedgers*, especuladores e arbitradores, os corretores e, a câmara de compensação, também conhecida por *clearing houses*. A seguir, encontram-se as definições dos participantes mencionados anteriormente.

- *Os Clientes*: são conhecidos por *hedgers* e visam eliminar os riscos de perdas decorrentes de variações de preços, sendo subdivididos em: *hedgers* vendidos e *hedgers* comprados. Por outro lado, os especuladores são aqueles clientes que se encontram dispostos a assumir uma posição de risco buscando ganhos financeiros e, os que saem e entram no mercado velozmente, de acordo com as suas posições. Finalmente, os arbitradores são os clientes que visam obter retornos extraordinários com base na diferença de preços de um mesmo produto ou de substituto próximo em diferentes mercados.

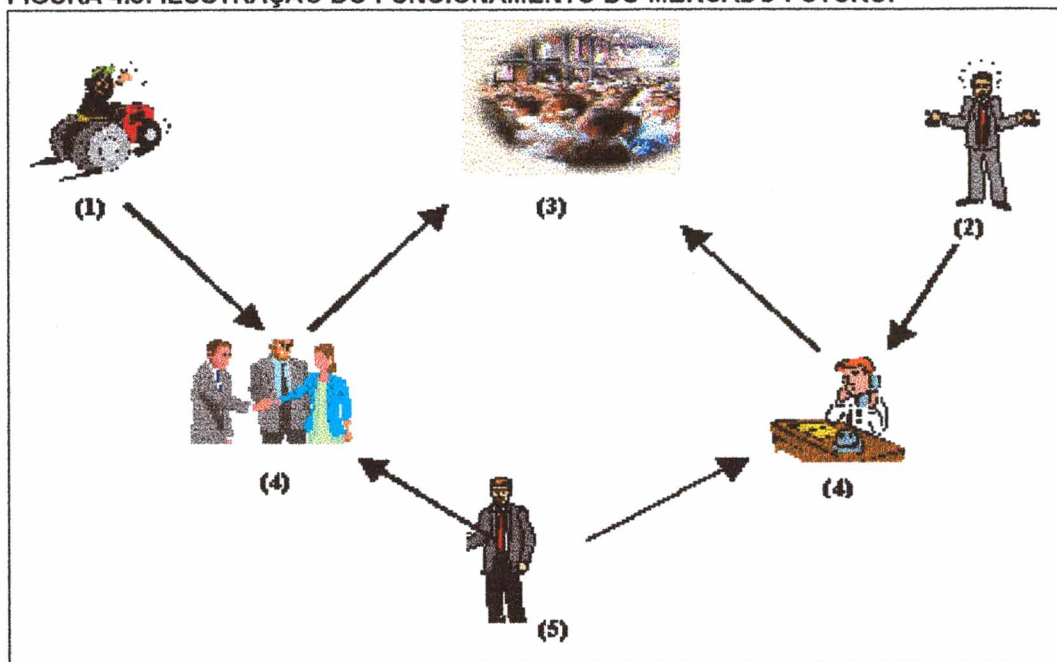
- *Corretoras*: estas funcionam como agentes intermediários entre o *hedger* e o especulador. Os seus rendimentos decorrem da “corretagem”, ou seja, da comissão que é cobrada a cada ordem executada. Normalmente esta taxa é cobrada em proporção inversa ao valor que foi transacionado. Assim, quanto maior for o valor da operação, menor será o percentual de corretagem a ser cobrado. Além disso, na negociação a corretagem pode ser livremente negociada entre a corretora e os clientes. Existe uma tabela

de corretagem usada como base ou sugestão. *Câmara de Compensação*: ela é uma participante auxiliar à bolsa, possuindo a função de garantir a não inadimplência por parte dos agentes econômicos envolvidos. Logo, a bolsa procura calcular a posição líquida de cada um dos membros e cobram as respectivas diferenças. Na Bolsa de Mercadorias e Futuros (BM&F), a Central de Títulos Privados (CETIP) funciona como câmara de compensação, uma vez que procura liquidar as operações realizadas na bolsa, administrando as margens e garantias, realizando o processo de entrega física quando do vencimento dos contratos, controlando as posições em aberto e os cancelamentos a pedido dos clientes, além de outras atribuições, de modo a contribuir com o bom funcionamento do mercado.

MARQUES e MELLO (1999), ilustram a estrutura organizacional das negociações nos mercados futuros que já fora exposto anteriormente. Observe na figura 4.3 que há uma evidente necessidade da atuação ativa dos agentes componentes desse mercado.

Descrevendo detalhadamente a figura seguinte, observa-se que os vendedores expostos em (1) geralmente são aqueles que possuem o produto físico; eles procuram um seguro contra uma eventual baixa de preços numa data pré-determinada no futuro, sendo chamados de *hedgers*.

FIGURA 4.3: ILUSTRAÇÃO DO FUNCIONAMENTO DO MERCADO FUTURO.



Fonte: MARQUES e MELLO (1999).

Por outro lado, os compradores retratados em (2), geralmente são aqueles que necessitam de um produto físico, eles estão procurando uma proteção ou seguro contra uma eventual alta de preços em determinada data predeterminada no futuro. Entram no mercado comprando contratos futuros referentes a uma quantidade de produtos, e mantêm uma posição de mercado chamada de posição comprada ou *long*.

Todavia, para efetuar uma operação no mercado futuro, tanto o vendedor como o comprador necessitam operacionalizar as suas intenções através de determinada corretora de mercadoria que seja membro da bolsa, sendo retratado em (4). Tais corretoras são credenciadas a participar do pregão da bolsa, visualizado em (3), por intermédio dos seus operadores de

pregão que, além de executar as ordens de seus clientes, acompanham também as suas contas e a sua posição junto à câmara de compensação – *clearing house*.

Notadamente, esse mercado ainda compõe-se da figura do especulador, visto em (5), que é um agente de fundamental importância para a liquidez dos negócios, não devendo ser visto com o sentido pejorativo de *explorador* nas respectivas transações.

Algumas características operacionais merecem destaque no mercado futuro. A primeira delas, diz respeito às margens de garantias normalmente depositadas pelos agentes para garantir o cumprimento dos contratos que foram abertos. Existem três tipos de margem: a margem inicial onde normalmente é cobrado um depósito inicial de cerca de 10% no Brasil e 5% nos EUA, de tal forma que seja suficiente para garantir o cumprimento dos contratos abertos por dois ou três dias.

Por outro lado, a margem adicional é calculada de acordo com a variação entre o preço de fechamento e o preço do contrato, que são cobradas conforme os ajustes diários. E, por fim, a margem de manutenção que na visão de COPELAND & WESTON (1988) é vista como sendo a quantidade mínima do valor contratual que deve estar depositada na câmara de compensação. Assim, caso não se pague a margem adicional, essa câmara faz uso do depósito inicial. Depois de tal ajuste, se o que restou for menor do que, por exemplo, cerca de 75% do depósito inicial, resta tomar as providências necessárias de modo que não haja quebra do contrato.

Cabe fazer algumas considerações acerca do ajuste diário das margens, que é outro mecanismo operacional utilizado no mercado futuro. Esse mecanismo serve de segurança para cobrir a variação diária dos preços, sendo visto como o diferencial a pagar ou receber pelos participantes do mercado. Para entender todo o mecanismo de segurança dos contratos negociados na Bolsa, faz-se necessário, exemplificar o funcionamento do ajuste diário das margens de garantias no referido mercado¹⁰.

Suponha que determinado produtor calculou, em novembro de 2001, seu custo de produção e quer garantir o preço de venda que encontra-se em torno de US\$ 12,25/saca para a época da colheita que ocorrerá em maio de 2002. Uma vez que o produtor encontra-se receoso em não alcançar o seu objetivo, ele dá ordem em novembro de 2001 para o seu corretor vender a esse preço a sua produção prevista, ou seja, 2.250 sacas de 60 kg de determinado produto, para o mês de maio de 2002 na BM&F.

Suponha ainda, que os contratos foram negociados no dia 05 de novembro de 2001 a US\$ 12,25/saca, com a perspectiva de queda nos preços do produto negociado. O detalhamento completo dessa negociação pode ser visualizado no quadro seguinte.

¹⁰ Esse exemplo foi adaptado do livro: *Mercados Futuros de Commodities Agropecuárias – Exemplos e aplicações para os mercados brasileiros* de autoria dos professores Pedro V. Marques e Pedro C. de Mello. São Paulo: Bolsa de Mercadorias & Futuros, 1999.

QUADRO 4.1: EXEMPLO HIPOTÉTICO DE UMA OPERAÇÃO COM AJUSTE FINAL POSITIVO PARA O VENDEDOR

Dia (1)	Produtor (2)	Preço de Negociação [US\$/saca] (3)	Preço de Ajuste [US\$/saca] (4)	Ajuste [US\$/saca] (5)	Ajuste Total US\$ (6)
05/11/2001	Vendeu 05 contratos para maio de 2002	12,25	12,24	$(12,25 - 12,24) = +0,01$	$(2.250 \times 0,01) = +22,50$
06/11/2001			12,20	$(12,24 - 12,20) = +0,04$	$(2.250 \times 0,04) = +90,00$
07/11/2001			12,25	$(12,20 - 12,25) = -0,05$	$(2.250 \times -0,05) = -112,50$
...
14/05/2002				10,60	
15/05/2002	Comprou 05 contratos em maio de 2002	10,50		+0,10	+225,00

Através do quadro 4.1, percebe-se que o preço de ajuste foi mais baixo do que o preço ao qual o produtor vendeu; logo, ele foi creditado em US\$ 0,01. Como ele vendeu 2.250 sacas, o ajuste total foi igual a US\$ 22,50; visto na coluna (6) do quadro anterior. No dia posterior, a cotação para maio caiu para US\$ 12,20/saca. Neste caso, ele foi creditado imediatamente em US\$ 0,04/saca, num total de US\$ 90,00. Posteriormente, o preço acaba subindo um pouco para cerca de US\$ 12,25. O produtor, por sua vez acabou pagando US\$ 0,05/saca. Veja que o ajuste diário refere-se à relação com a cotação do dia anterior e a do dia do pregão.

Por fim, quando chegou o dia 15 de maio de 2002, ele foi ao comprador habitual de sua mercadoria e vendeu as 2.250 sacas do produto por US\$ 10,50/saca à vista. Ele também foi à respectiva bolsa e “comprou” os contratos no futuro, “zerando” a sua posição no mercado; ou seja, ele acabou realizando uma operação inversa que é muito comum, visando desfazer a operação na bolsa de futuros.

4.3. A Relação entre os Contratos Futuros e os Contratos a Termo

Os contratos a termo envolvem o compromisso de compra e venda de determinada quantidade de mercadorias, e a um preço fixado para liquidação e entrega numa data futura. Eles evitam perdas decorrentes de oscilações desfavoráveis no preço, no período entre o embarque e o recebimento da produção, eliminando assim as incertezas sobre o preço futuro e fazendo aumentar o seu volume de negócios. A maioria dessas operações é comumente realizada no prazo de 30 dias, podendo, entretanto, serem realizadas em 60, 90, 120 ou até 180 dias.

As operações a termo são formalizadas em contratos específicos, emitidas e registradas nas bolsas em nome das corretoras participantes. Ademais, tais contratos não necessitam serem negociados em bolsas e, em função deste aspecto, podem ser feitos através de particulares, conforme as cláusulas de mútuo acordo. Não obstante, o preço, a qualidade, o prazo de entrega e volume comercializado variam de contrato para contrato negociado. Sumariamente, pode-se caracterizar o mercado a termo da seguinte forma:

- O comprador e vendedor se conhecem;
- As cláusulas contratuais se ajustam às necessidades das partes envolvidas;
- Não é necessário ocorrer a negociação em um recinto organizado, como por exemplo, a Bolsa de Valores;

- De uma forma genérica, nesse mercado ocorre a liquidação física do bem.

Esses contratos ainda podem ser realizados com modalidades de liquidação *integral* ou *pro rata*. Na liquidação *integral*, esta será sempre realizada pelo total do valor contratado. Já na liquidação *pro rata*, será efetuada no vencimento, pelo total do valor contratado.

Por outro lado, os contratos futuros, tal como já fora brevemente explanado em parágrafos anteriores, surgiram como evolução natural dos contratos a termo, visando atrair os especuladores, já que estes propiciavam maior liquidez às negociações realizadas. O quadro 4.2 a seguir mostra as principais diferenças entre os contratos futuros e os contratos a termo.

QUADRO 4.2: PRINCIPAIS DIFERENÇAS ENTRE OS CONTRATOS FUTUROS E OS CONTRATOS A TERMO

Características	Contrato Futuro	Contrato a Termo
Local de Negociação	Bolsas de Futuros	Estabelecido entre as Partes
Qualidade e Quantidade de Contratos a serem Negociados	Estabelecido pelas Bolsas de Futuros	Negociado pelas Partes
Datas de Vencimentos	Estabelecida pelas Bolsas de Futuros	Negociada pelas Partes; em geral Somente Uma Parte
Participantes dos Mercados	Qualquer Pessoa Física ou Jurídica	Produtores, Comerciantes e Consumidores do Ativo
Responsabilidades	Câmara de Compensação	Partes Contratantes
Porte dos Participantes	Pequenos, Médios e Grandes	Grandes

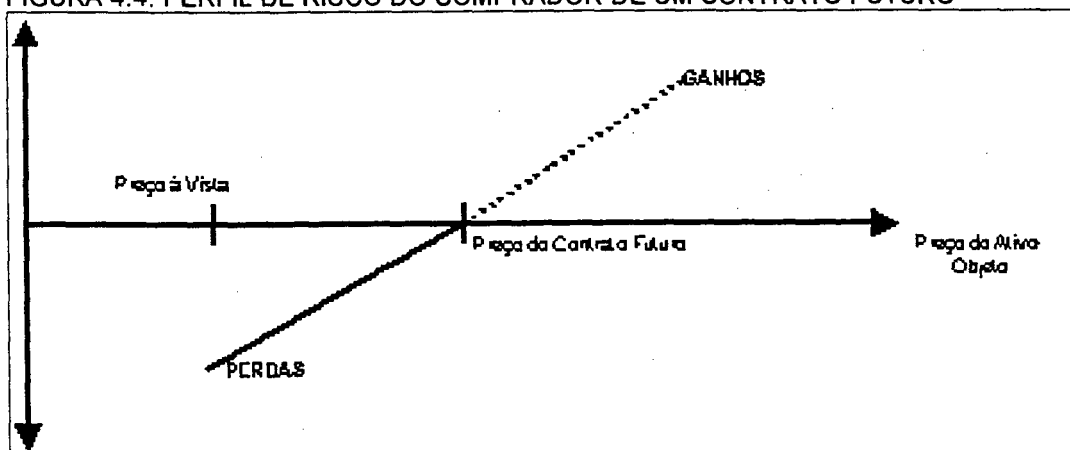
No que concerne aos limites de oscilação dos preços dos ativos transacionados, eles existem com o objetivo de atrair maiores especuladores. Normalmente, quando determinado preço ultrapassa um certo patamar mínimo ou máximo, as negociações são suspensas, ajudando a evitar ou até reduzir o

não cumprimento do contrato, pois a situação desfavorável de um negociante nem sempre acaba conduzindo a resultados ideais do ponto de vista agregado.

4.4. As Posições Assumidas nos Mercados Futuros

Para PINHEIRO (2001, p. 173), uma posição assumida no mercado futuro pode ser vista como o saldo líquido dos contratos negociados pelos clientes por meio de operações realizadas nesse mesmo mercado. Cada contrato pode ser eliminado através da recompra ou revenda por seu titular. O comprador desse contrato possui uma posição aberta no futuro, também chamada de posição longa. Ele ganha dinheiro caso o preço do ativo-objeto suba, e perde caso tal preço caia. A figura 4.4 ilustra o comportamento de uma posição assumida no futuro por parte de determinado investidor individual.

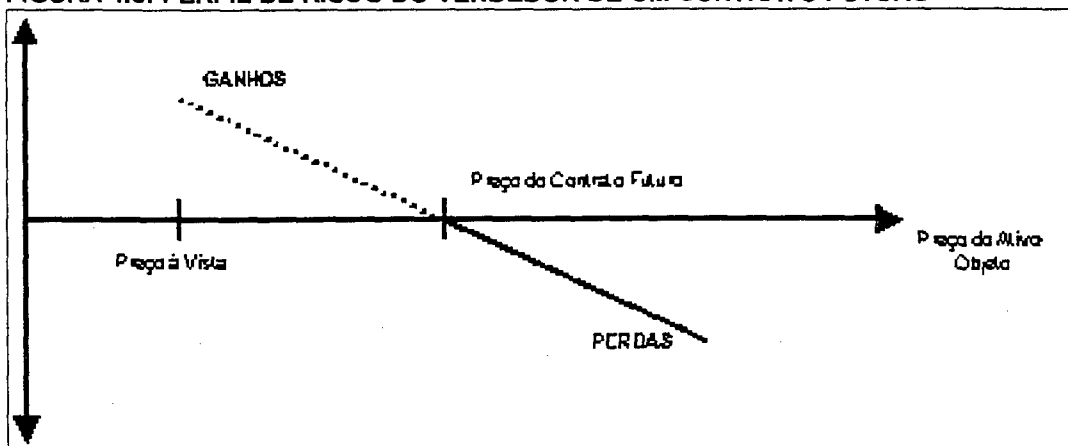
FIGURA 4.4: PERFIL DE RISCO DO COMPRADOR DE UM CONTRATO FUTURO



Por outro lado, o vendedor de um contrato futuro pode ser visto como aquele que também tem uma posição aberta no futuro, chamada de posição

curta. O investidor possui um perfil de risco que difere do comprador do contrato. Assim, ele ganha caso o preço do ativo-objeto de negociação caia, e perde caso ele suba. A figura 4.5 mostra o comportamento do perfil deste vendedor.

FIGURA 4.5: PERFIL DE RISCO DO VENDEDOR DE UM CONTRATO FUTURO



Finalmente, vale salientar que o fechamento de uma posição aberta nesse mercado ocorre à medida que o investidor assuma uma posição contrária, ou seja, o possuidor do contrato futuro deverá vender um contrato futuro com as mesmas características, enquanto o vendedor deverá comprá-lo.

4.5. A Formação dos Preços nos Mercados Futuros

As variações dos preços cotados no mercado à vista e nos mercados futuros são os mais importantes mecanismos de determinação da taxa de *hedge* com variância mínima, que será abordado com mais detalhe

posteriormente. Contudo, faz-se necessário observar, que se os preços são mal formados, surgem oportunidades de arbitragem.

Um dos conceitos mais importantes para o entendimento da formação dos preços nos mercados futuros é o de risco de base, que pode ser visto como a diferença entre o preço futuro de uma mercadoria para um determinado vencimento e o seu preço à vista. A base corresponde ao custo de manter a posse da mercadoria física até a data de vencimento do contrato futuro numa situação normal de mercado. Matematicamente, tem-se que a base (B_t) no tempo (t) pode ser expressa através da seguinte relação:

$$B_t = P_t - F_t \quad (4.1)$$

onde (P_t) é o preço cotado no mercado à vista e a variável (F_t) é o preço cotado no mercado futuro no tempo (t). Observe que (B_t) tem o sinal negativo em condições normais de mercado. Quando (B_t) aumenta de valor ou se torna positivo, diz-se que a base está fortalecida e, contrariamente, quando a base diminui seu valor ocorre o seu enfraquecimento.

À medida que se aproxima o período de liquidação do contrato, os fatores determinantes da oferta e da demanda dos preços das *commodities* cotados no mercado à vista e no mercado futuro tornam-se semelhantes, fazendo com que a base se reduza na mesma proporção em que decresce o custo de carregamento. No vencimento do contrato futuro, a base (B_t) tende a se aproximar de zero, caracterizando-se por um *hedge* perfeito.

SCHOUCHANA e CAMPOS (1997) mostram que quando o *hedge* é realizado em locais fora do ponto de entrega, existe o risco de base mesmo no vencimento dos contratos. Normalmente, os participantes desse mercado solicitam muitos pontos de entrega visando facilitar a fixação do *hedge*; contudo, as bolsas procuram estabelecer o menor número de pontos de entrega possíveis.

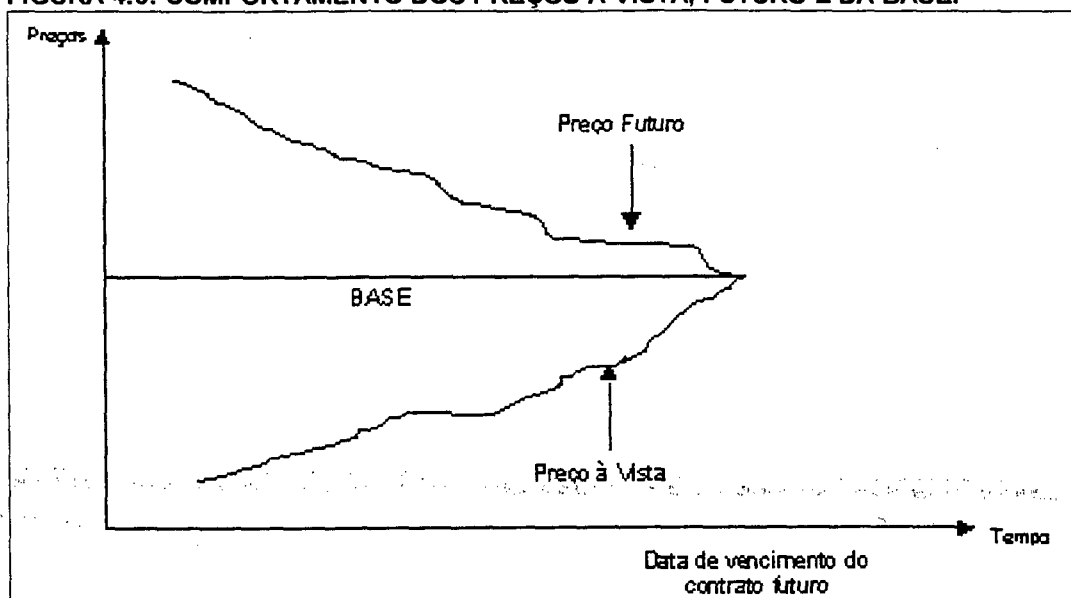
Os referidos autores enfatizam que quando se dispõe de pontos de entrega em regiões de preços diferentes, deve ser estabelecido um desconto para as regiões de menor preço, no valor da diferença entre estas e a região de maior preço. O problema é que, na maioria das vezes, as diferenças não são constantes e a base fica comprometida.

Assim, se as diferenças entre os preços nas diferentes regiões são constantes, o número de pontos de entrega não afetará a eficiência do *hedge*. Caso contrário, a escolha dos pontos de entrega deve ser feita de forma muito cuidadosa. Desta maneira, não é a magnitude dos ajustes que importa no *hedge*, mas sim a estabilidade das diferenças de cotações entre regiões distantes.

Nesse contexto, FORTUNA (1998) alerta para o fato de que o preço do vencimento do contrato futuro converge para o preço cotado no mercado à vista, uma vez que, naquela data, o contrato futuro deve ser liquidado com as mesmas características do produto no mercado à vista. Veja na figura 4.6 que a discrepância desses preços em relação à base é que acaba gerando a possibilidade das operações de financiamento ou de caixa. Além disso, tal

figura mostra os comportamentos dos preços cotados no mercado à vista e no mercado futuro.

FIGURA 4.6: COMPORTAMENTO DOS PREÇOS À VISTA, FUTURO E DA BASE.



Fonte: Adaptado de FORTUNA (1998).

Ademais, os mercados futuros ainda apresentam dois fenômenos que ocorrem com os preços dos contratos futuros que são chamados de *normal contango* e *normal backwardation*. Quando o preço à vista ou preço *spot* de determinado ativo financeiro for menor do que os preços futuros ou a termo desse mesmo ativo, então o que o mercado denomina de *normal contango*. Por outro lado, o *backwardation* é uma terminologia britânica empregada no mercado para expressar uma situação em que os preços no mercado *spot* são superiores aos valores dos contratos futuros.

No caso do *normal backwardation*, diz-se que é uma situação denominada de mercado invertido, ocorrendo quando existe uma escassez do

ativo-objeto de negociação, aliado à demanda pelo mesmo, com vistas a liquidar contratos futuros que podem fazer com que os preços à vista fiquem maiores que as cotações futuras.

Com base nessa teoria, os preços dos contratos futuros não necessariamente correspondem às expectativas que os agentes econômicos possuem dos preços à vista. ALEXANDER *et al.* (1993), mostram que se os *hedgers* tendem a ficar vendidos nos mercados futuros, os especuladores passam a ser os responsáveis pela oferta destes contratos. Dado a existência de riscos associados à posição comprada, o único estímulo para os especuladores participarem é fazer com que as expectativas dos preços no futuro sejam superiores aos preços dos contratos futuros.

Outrossim, se os preços dos contratos futuros estiverem abaixo das expectativas dos preços à vista no futuro, neste caso, o prêmio será positivo, beneficiando o comprador deste contrato. Nesses termos, os preços dos contratos futuros em média tenderão à expectativa dos preços à vista, à medida que o vencimento se aproxime.

Já o *normal contango* é um fenômeno oposto ao *normal backwardation*. Ele ocorre quando os preços futuros são superiores às expectativas de preços à vista no futuro. Neste caso, diz-se que os preços dos contratos futuros seguem uma situação denominada de *contango*. De forma análoga ao que fora descrito anteriormente, se os preços futuros estiverem acima das expectativas dos preços, o prêmio será positivo, o que tenderá a beneficiar o vendedor do contrato futuro.

4.6. O Processo de Arbitragem nos Mercados Futuros

O mercado futuro representa o “local” capaz de oferecer aos investidores diversos mecanismos de administração financeira, valendo-se de estratégias que podem ser utilizadas dependendo dos objetivos e do grau de aceitação ou de aversão ao risco por parte de cada um participante.

Nesse sentido, se um dado investidor encontra-se disposto a aceitar determinado grau de risco, ele pode optar, por exemplo, por realizar uma arbitragem especulativa, utilizando dois ou mais mercados futuros. Neste caso, tem-se como base as expectativas futuras de preços ou simplesmente quando se acredita que os preços de certos ativos estejam fora de sua paridade normal.

VARGA (1998) evidencia que o mecanismo de arbitragem consiste numa operação financeira, ao qual permite que os preços de dois ativos quaisquer mantenham uma paridade entre si, toda vez que puder ser realizada algum tipo de operação que envolva ambos os ativos financeiros. Esse mecanismo proporciona ao investidor auferir retornos esperados, sem incorrer em riscos quando os preços de um dos ativos desviar-se dessa relação de paridade.

Do mesmo modo, COSTA (1998) caracteriza a arbitragem como sendo uns posicionamentos em (n) preços que se supõem correlacionados, aproveitando-se de um momento em que, rompendo a correlação, eles passam a ser distorcidos. Geralmente, espera-se que tais distorções fechem, isto é, reduzam-se, e que a partir disso ocorram os lucros decorrentes da operação.

As oportunidades de arbitragem normalmente não duram muito tempo, uma vez que, à medida que os arbitradores passam a comprar um determinado ativo em Nova Iorque, por exemplo, as forças de oferta e procura farão o seu preço subir em dólares. Da mesma forma, se eles vendem o ativo no Brasil, o seu preço em reais cairá. Os dois preços, então, irão rapidamente tornar-se equivalentes à taxa de câmbio corrente. Assim, a existência de arbitradores ávidos por lucro torna pouco provável que ocorra uma grande disparidade entre os preços do ativo transacionado em dólares e em reais.

Vê-se então, que na possibilidade de arbitragem e, caso os agentes econômicos tenham acesso às informações disponíveis no mercado, certamente tomarão as suas decisões com vistas a se aproveitar de tais circunstâncias. Neste caso, haverá um excesso de demanda pelo ativo que estiver com o preço subavaliado e muita oferta pelo ativo com o valor superestimado até que o equilíbrio de mercado se estabeleça.

O *hedger*, diferentemente do especulador, tenta reduzir o seu risco nesse mercado volátil, dispondo-se a aceitar um retorno esperado menor em seu investimento, muitas vezes procurando outros tipos de investimentos sem risco, o que viria a beneficiar o mercado de valores mobiliários se este lhe fornecer mecanismos que permitam o *hedging* parcial (redução de risco) ou total (eliminação do risco), combinando-se operações com contratos de venda e de compra.

COSTA (1998), mostra ainda que alguns riscos incorridos no processo de arbitragem estão diretamente relacionados com os custos das arbitragens. Um custo raramente identificável nesse processo é o de oportunidade dos

recursos empregados nela. Esse custo não se refere apenas à especulação ou ao custo de oportunidade do capital, que impõe que a operação renda mais do que a taxa de juros livre de risco, mas refere-se principalmente, a dois aspectos:

- Ao dispêndio de esforços em fazer um volume adequado da operação, verificando se tais esforços não teriam utilização melhor num dado momento do que em outro;
- Ao fato de se poder entrar ou reentrar melhor na mesma operação. Tal discussão é particularmente válida quando se observa que, na maioria das vezes, o fechamento total da distorção só se dá no vencimento ou muito próximo dele, ao passo que a oscilação da distorção ocorre frequentemente.

No passado, os maiores méritos do arbitrador estavam em identificar uma distorção onde as concorrências não soubessem que existiam, além de detectar as distorções já conhecidas antes que a concorrência o fizesse. Atualmente, a estes aspectos acrescenta-se o de contornar os custos e riscos das arbitragens, estendendo o lucro potencial ou o volume de operações. Enquanto a identificação necessita basicamente de conhecimento teórico, ou a respeito de legislação – e a detecção é questão de tecnologia de mesa de operações – o tratamento dos riscos e custos podem ser ampliados a muitas áreas, incluindo relacionamento, crédito e engenharia de produtos específicos.

Cabe ressaltar que a aplicação do *teorema da arbitragem* sobre a avaliação dos contratos futuros se baseia nos resultados advindos da compra do ativo no mercado à vista (S_t) e simultânea venda no mercado futuro ($F_{t,T}$). Uma vez que esse ativo possui um custo de estocagem (ce) e uma taxa de conveniência¹¹ (q), a rentabilidade desta carteira deve ser equivalente à taxa livre de risco (r). A relação do preço à vista com a cotação no mercado futuro é conhecida como custo de carregamento (*cost-of-carry relationship*), que pode ser mensurado através da seguinte expressão:

$$F_{t,T} = S_t \left[\frac{(1+r_t)(1+ce)}{1+q} \right]^{T-t} \quad (4.2)$$

Pode-se ainda transformar a expressão anterior para um modelo contínuo que pode ser visto da seguinte forma:

$$F_{t,T} = S_t \cdot e^{(r+ce-q)(T-t)} \quad (4.3)$$

Com base nas expressões (4.2) e (4.3), é possível ainda descrever algumas hipóteses simplificadoras fundamentais para uma avaliação desse mercado:

¹¹ Na visão de SECURATO e SASSATANI (1998), o conceito de taxa de conveniência (*convenience yield*) advém do benefício obtido através da posse do ativo físico. Para as *commodities* agrícolas, trata-se do ganho pela utilização da mercadoria no processo produtivo. No caso dos ativos financeiros, como o dólar, ouro e as ações, por exemplo, corresponde ao ganho obtido pelo aluguel ou empréstimo dos mesmos.

- Inexistência de custos de transação, bem como informação para a compra ou venda de contratos futuros ou para o ativo-objeto de negociação;
- Inexistência de restrições para tomar ou emprestar recursos;
- Não incidência de impostos;
- As captações e os empréstimos são realizados às mesmas taxas de juros;
- Não há riscos de crédito na compra ou venda de contratos futuros ou do ativo-objeto de negociação; neste caso, não existe a necessidade para depósito de margem;
- As *commodities* podem ser estocadas eternamente sem que as suas características sejam alteradas.

Finalmente, é possível observar através das expressões descritas anteriormente que elas retratam o valor dos contratos futuros segundo um modelo de capitalização discreto.

4.7. As Estratégias Formuladas a Partir das Teorias de *Hedge*

Existem diversas estratégias que normalmente são traçadas no mercado futuro com os objetivos claros de fazer *hedge* ou de especular. Uma estratégia muito comum nesse mercado é a trava de riscos. Ela visa maximizar a eficiência de proteção de determinada carteira obtida quando se utilizam os contratos futuros.

Uma vez que os mercados futuros operam ativos intangíveis, existe com isso, uma relação de oscilação entre os preços do ativo-objeto de

negociação e seu ativo intangível, que não necessariamente é igual a um. Empiricamente observa-se que na maioria das vezes uma oscilação percentual no preço do ativo-objeto provoca oscilações percentuais de maior magnitude em seu ativo intangível, ou seja, as oscilações de preços nos produtos derivativos são amplificações das oscilações de preço do ativo-objeto a que se relaciona.

SAMUELSON (1973), mostra que tradicionalmente o *hedge* tem sido abordado como uma espécie de seguro contra variações de preço da mercadoria e a avaliação de sua eficiência tem sido relacionada à eliminação desse risco, qualquer que seja a sua definição.

Visando avaliar o funcionamento do mecanismo de *hedge* no mercado futuro, cabe estabelecer algumas definições essenciais para o entendimento das respectivas estratégias. Assim, considere os retornos aleatórios de determinada mercadoria cotada no mercado *spot* (\tilde{R}_s) e no mercado futuro (\tilde{R}_f), durante o período de tempo (t) que pode ser definido da seguinte forma:

$$\tilde{R}_s = \frac{\tilde{P}_t - P_0}{P_0} \quad \text{e} \quad \tilde{R}_f = \frac{\tilde{F}_t - F_0}{P_0} \quad (4.4)$$

Onde as variáveis (P_t) e (F_t) denotam os preços da respectiva mercadoria cotada nos mercados *spot* (s) e futuro (f), nos instantes de tempo que variam de zero (0) até (t). Já o símbolo descrito por (\sim) denota a aleatoriedade das respectivas variáveis.

O retorno de um contrato futuro não é um conceito tão bem definido, já que não ocorre um investimento inicial na aquisição desse contrato. Contudo, é necessário supor em termos analíticos que ocorre tal investimento e que a sua magnitude é igual ao preço da mercadoria no mercado *spot*. Uma vez que o parâmetro (h) pode ser visto como a razão de *hedge*, então o retorno do *hedge*, ou seja, (\tilde{R}_h), por definição, pode ser visto como segue:

$$\tilde{R}_h = \tilde{R}_s - h \cdot \tilde{R}_r \quad (4.5)$$

Uma vez que prevaleçam as cotações para utilização da variância como medida do risco, pode-se estabelecer os pares de risco e retorno esperado da mercadoria e do respectivo contrato futuro, tal como pode ser visto a seguir:

$$\bar{R}_s = \frac{\bar{P}_t - P_0}{P_0} \quad \text{e} \quad \text{Var}(\tilde{R}_r) = \frac{1}{P_0^2} \cdot \text{Var}(\tilde{P}_t) \quad (4.6)$$

Onde \bar{R}_s é o retorno médio ou esperado da mercadoria, enquanto \bar{R}_r é o retorno médio ou esperado do contrato futuro. Assim, tem-se que:

$$\bar{R}_r = \frac{\bar{F}_t - F_0}{P_0} \quad \text{e} \quad \text{Var}(\tilde{R}_r) = \frac{1}{P_0^2} \cdot \text{Var}(\tilde{F}_t) \quad (4.7)$$

Não obstante, o risco do contrato futuro é superior ao da mercadoria cotada no mercado *spot*, dado que os preços futuros correspondem à capitalização dos preços presentes usando-se uma determinada taxa ajustada ao risco. Por outro lado, o par de risco e retorno do *hedge* pode ser visto como:

$$\bar{R}_h = \bar{R}_s - h\bar{R}_r \quad \text{e} \quad \text{Var}(\tilde{R}_h) = \text{Var}(\tilde{R}_s) + h^2 \cdot \text{Var}(\tilde{R}_r) - 2h \cdot \text{Cov}(\tilde{R}_s; \tilde{R}_r) \quad (4.8)$$

Onde a expressão que denota a covariância (*Cov*) pode ser visualizada da seguinte forma:

$$\text{Cov}(\tilde{R}_s; \tilde{R}_r) = \frac{1}{P_0^2} \cdot \text{Cov}(\tilde{P}_t; \tilde{F}_t) \quad (4.9)$$

É possível ainda avaliar o comportamento dos agentes econômicos em termos de *hedging* de base (B_t). Assim, cabe em primeiro plano, expressar o retorno da base a partir da expressão vista a seguir:

$$\tilde{R}_B = \frac{\tilde{B}_t - B_0}{P_0} \quad (4.10)$$

Enquanto o correspondente par de risco e retorno de base pode ser visualizado como segue:

$$\bar{R}_B = \frac{\bar{B}_t - B_0}{P_0} \quad \text{e} \quad \text{Var}(\tilde{R}_B) = \frac{1}{P_0^2} \cdot \text{Var}(\tilde{B}_t) \quad (4.11)$$

Desta forma, a variância ou risco de base (\tilde{B}_t) pode ser denotada pela expressão, $\text{Var}(\tilde{B}_t) = \text{Var}(\tilde{P}_t) + \text{Var}(\tilde{F}_t) - 2 \cdot \text{Cov}(\tilde{P}_t; \tilde{F}_t)$. Já o retorno do contrato cotado no mercado futuro passa a ser constituído pelos retornos da mercadoria e da respectiva base, ou seja: $\tilde{R}_r = \tilde{R}_s + \tilde{R}_B$, logo, tem-se que:

$$\bar{R}_r = \tilde{R}_s + \tilde{R}_B \quad \text{e} \\ \text{Var}(\tilde{R}_r) = \text{Var}(\tilde{R}_s) + \text{Var}(\tilde{R}_B) + 2 \cdot \text{Cov}(\tilde{R}_s; \tilde{R}_B) \quad (4.12)$$

Onde a covariância pode ser mensurada da seguinte forma:

$$\text{Cov}(\tilde{R}_s; \tilde{R}_B) = \frac{1}{P_0^2} \cdot [\text{Cov}(\tilde{P}_t; \tilde{F}_t) - \text{Var}(\tilde{P}_t)] \quad (4.13)$$

Nesse prisma, é possível observar como o risco de base depende também da covariância entre os retornos da mercadoria e os retornos da base. Por outro lado, o retorno do *hedge* passa a ser expresso como uma espécie de ponderação entre os retornos da mercadoria e da respectiva base, tal como segue:

$$\bar{R}_h = (1-h)\bar{R}_s - h\bar{R}_B \quad \text{e}$$

$$\text{Var}(\tilde{R}_h) = (1-h)^2 \cdot \text{Var}(\tilde{R}_s) + h^2 \cdot \text{Var}(\tilde{R}_B) - 2h(1-h) \cdot \text{Cov}(\tilde{R}_s; \tilde{R}_B) \quad (4.14)$$

Cabe acrescentar que o risco do *hedge* depende fundamentalmente da covariância entre os retornos da mercadoria e do contrato futuro, ou em última instância, da covariância entre os preços nos mercados *spot* e futuro. Logo, percebe-se que o risco do *hedge* se reduzirá à medida que a correlação entre os preços à vista e futuro se eleve.

4.7.1. A Teoria Clássica do *Hedge*

A abordagem clássica do *hedge* pressupõe implicitamente que o *hedger* não é capaz ou não deseja formar expectativas acerca dos movimentos dos preços e que seus lucros derivam exclusivamente de algum processo de *transformação* da mercadoria, qualquer que seja – estocagem ou produção de outra mercadoria.

Segundo tal abordagem, o *hedger* deve assumir posições opostas e de igual magnitude nos mercados *spot* e futuro, isto é, deve empregar uma *razão de hedge igual à unidade*; ou seja, ($h^* = 1$). Notadamente, essa abordagem revela de forma subjacente a suposição de que os preços dos contratos em ambos os mercados *spot* e futuro estão *perfeitamente correlacionados* e que suas variações se compensam mutuamente.

Visando demonstrar como funciona esse mecanismo de proteção empregou-se a relação matemática descrita na expressão (4.8), tal como pode ser vista a seguir:

$$\bar{R}_h = \bar{R}_s - R_f \quad \text{e} \quad \text{Var}(\tilde{R}_s) + \text{Var}(\tilde{R}_f) - 2 \cdot \text{Cov}(\tilde{R}_s; \tilde{R}_f) \quad (4.15)$$

Assim, o risco do *hedge* somente será eliminado caso:

$$\text{Var}(\tilde{R}_s) = \text{Var}(\tilde{R}_f) \quad \text{e} \quad \text{Corr}(\tilde{R}_s; \tilde{R}_f) = 1 \quad (4.16)$$

Onde a variável $\text{Corr}(\tilde{R}_s; \tilde{R}_f)$ representa o coeficiente de correlação entre as taxas de retornos cotadas no mercado *spot* e no mercado futuro. Por outro lado, avaliando-se a teoria clássica em termos de base tomando-se como parâmetro as relações descritas a partir de (4.14), tem-se que:

$$\bar{R}_h = -\bar{R}_B \quad \text{e} \quad \text{Var}(\tilde{R}_h) = \text{Var}(\tilde{R}_B) \quad (4.17)$$

Dado que os preços cotados nos mercados *spot* e futuro não são perfeitamente correlacionados, nem apresentam idêntica variância, observa-se que a teoria clássica não é suficiente para eliminar ou até mesmo minimizar o risco do *hedge*.

Contudo, a favor de tal abordagem existe a possibilidade de se conduzir o *hedge* até a expiração do contrato futuro, o que torna a sua base não estocástica, isto é, $\tilde{P}_t = \tilde{F}_t$ e, conseqüentemente, $\tilde{B}_t = 0$, de tal modo que:

$$\tilde{R}_h = \frac{F_0 - P_0}{P_0} \quad \text{e} \quad \text{Var}(\tilde{R}_h) = 0 \quad (4.18)$$

Usualmente o *hedge* não é mantido até a expiração do contrato futuro e a teoria clássica fica sujeita à duas objeções cruciais:

- Não proporciona a adequada redução de risco;
- Não considera o retorno esperado do *hedge*.

Em resposta à primeira objeção é que foi desenvolvida a teoria minimizadora que será abordada posteriormente.

4.7.2. A Teoria Minimizadora do Risco

A partir do desenvolvimento da moderna teoria de carteiras é que a variância das taxas de retorno passou a ser largamente utilizada como uma medida de mensuração do risco, sendo aplicada aos problemas que envolvessem *hedging*.

Com isso, o *hedge* passou a ser visto como um portfolio constituído por dois ativos fundamentais:

- A mercadoria *não-hedge*;
- O *hedge* completo, com $h = 1$.

Assim, caso o *hedger* seja infinitamente avesso ao risco, basta determinar o portfolio de mínima variância entre todas as infinitas combinações dos dois ativos fundamentais. Logo, a *razão de hedge* que minimiza o risco é obtida através da seguinte relação:

$$\frac{\partial \text{Var}(\tilde{R}_h)}{\partial h} = 0 \quad (4.19)$$

Valendo-se da equação (4.19), basta derivar a respectiva expressão em relação à razão de *hedge*, encontrando com isso a expressão algébrica a seguir:

$$h^* = \frac{\text{Cov}(\tilde{R}_s, \tilde{R}_f)}{\text{Var}(\tilde{R}_f)} = \frac{\text{Cov}(\tilde{P}_f, \tilde{F}_f)}{\text{Var}(\tilde{F}_f)} = \text{beta}(s) \quad (4.20)$$

Veja que (h^*) corresponde à volatilidade denotada pelo coeficiente [beta (s)] das taxas de retorno (ou preços) da mercadoria em relação às taxas de retorno (preços) do contrato futuro. Veja também que o beta supracitado corresponde ao coeficiente angular obtido a partir da regressão linear simples de \tilde{R}_s em \tilde{R}_f ou de outra forma, \tilde{P}_f em relação a \tilde{F}_f .

Uma vez que usualmente os preços cotados no mercado à vista são menos voláteis que os preços cotados no mercado futuro, então a razão de *hedge* que minimiza o risco será inferior à postulada pela teoria clássica onde h^* é menor do que a unidade, ou seja, ($h^* < 1$).

Com base no exposto, é possível expressar o par de risco e retorno associado à teoria minimizadora da seguinte forma:

$$\bar{R}_h = \bar{R}_s - h^* \bar{R}_f \quad \text{e}$$

$$Var^*(\tilde{R}_s) = Var(\tilde{R}_s) - \frac{Cov(\tilde{R}_s; R_f)}{Var(\tilde{R}_f)} = \left\{ 1 - [Corr(\tilde{R}_s; \tilde{R}_f)]^2 \right\} Var(\tilde{R}_s) \quad (4.21)$$

Observa-se, portanto, que o risco do *hedge* será eliminado, se e somente se, os preços cotados nos mercados *spot* e futuro forem *perfeitamente correlacionados*, ou seja, $Corr(\tilde{R}_s; R_f) = 1$. Baseando-se na expressão (4.12), é possível então representar (h^*) em termos da base da seguinte forma:

$$h^* = \frac{Var(\tilde{R}_s) + Cov(\tilde{R}_s; \tilde{R}_B)}{Var(\tilde{R}_s) + Var(\tilde{R}_B) + 2.Cov(\tilde{R}_s; \tilde{R}_B)} \quad (4.22)$$

Assim, se o *hedge* for conduzido até a expiração do contrato futuro, então a expressão anterior se reduzirá a $(h^* = 1)$, já que a base deixa de ser estocástica. Nesse caso, a teoria minimizadora será equivalente à teoria clássica.

Finalmente, uma vez que os *hedgers* não são infinitamente avessos ao risco, a principal crítica à teoria minimizadora é que esta não considera o retorno esperado do *hedge*.

4.7.3. A Teoria da Especulação na Base

A teoria de especulação na base não pode ser caracterizada como uma teoria de determinação da *razão de hedge*. Trata-se de uma teoria que explicitamente considera o aspecto especulativo do *hedging*, isto é, em qualquer combinação da mercadoria e do respectivo contrato futuro, as variações dos preços não se compensam perfeitamente. Tal como já foi mencionado anteriormente, o *hedger* acaba retendo o que se denominou de risco de base.

WORKING (1953), mostra que essa abordagem considera a possibilidade de se aumentar o retorno através do *hedging* seletivo ou especulação na base, decorrente das variações relativas entre os preços nos mercados *spot* e futuro. Essa abordagem admite uma eventual "superioridade informacional" do *hedger*, proveniente da sua especialização na transformação da mercadoria, o que lhe permitiria prever com maior grau de precisão as variações da base.

Vale salientar, que a característica principal e diferenciadora da especulação na base é que ela propõe uma administração ativa do *hedge*, aproximando-se mais dos modelos dinâmicos de *hedging*. Em virtude de suas características, tal abordagem não pode ser avaliada em termos dos pares de risco e retorno *ex-ante*.

Finalmente, pode-se afirmar de forma genérica, que essa abordagem acaba proporcionando um retorno esperado superior ao da abordagem da teoria clássica, evidentemente às custas de um maior risco.

4.7.4. A Teoria de Portfolio

A moderna teoria de portfolio também serviu de alicerce para as aplicações em problemas de *hedging*, procurando incorporar explicitamente no modelo decisório algumas considerações em relação ao retorno e risco do *hedge*, bem como das preferências do *hedger*.

Outras variantes desse modelo foram desenvolvidas com o objetivo de lidar com aspectos específicos do *hedging*, como capacidade de estocagem, estoques mínimos, custos de estocagem, etc. Visando apresentar o modelo da teoria de portfolio, cabe explicitar alguns pressupostos básicos:

$$\begin{aligned} \bar{R}_r > \bar{R}_s > 0; \quad \text{Var}(\tilde{R}_r) > \text{Var}(\tilde{R}_s) > 0 \quad \text{e} \\ 0 < \text{Cov}(\tilde{R}_s; \tilde{R}_r) < \text{Var}(\tilde{R}_r) \end{aligned} \quad (4.23)$$

além disso, tem-se que:

$$0 < \text{Corr}(\tilde{R}_s; \tilde{R}_r) < 1 \quad (4.24)$$

Desta forma, é possível mostrar a fronteira eficiente dos pares de risco e retorno estabelecidos a partir da expressão (4.8), bastando para isso, variar parametricamente a variável (\tilde{R}_r) e obter como resposta as variâncias associadas, empregando-se a seguinte relação:

$$h = \frac{\bar{R}_s - \bar{R}_h}{\bar{R}_f} \quad (4.25)$$

Contudo, é fácil perceber que existe um limite superior na *razão de hedge* (h), justamente associado ao *hedge* de mínima variância, ou seja:

$$\infty < h < h_{M\acute{a}x} = \frac{\text{Cov}(\tilde{R}_s; R_f)}{\text{Var}(\tilde{R}_f)} < 1 \quad (4.26)$$

Observe na figura 4.7 que o par de risco e retorno descrito com base na teoria clássica não pertence à fronteira eficiente. Por outro lado, os valores de (h) pertencentes ao intervalo de $(0; h_{M\acute{a}x})$ correspondem às diversas combinações de *hedge*, enquanto os valores de (h) menores que zero (0) estão associados a posições especulativas (*long* ou comprada) em ambos os mercados.

O par de risco e retorno correspondente ao ponto onde a inclinação da fronteira eficiente é igual à inclinação da curva de isutilidade do *hedger*, de modo que se determine a razão ótima de *hedge* pode ser visto da seguinte forma:

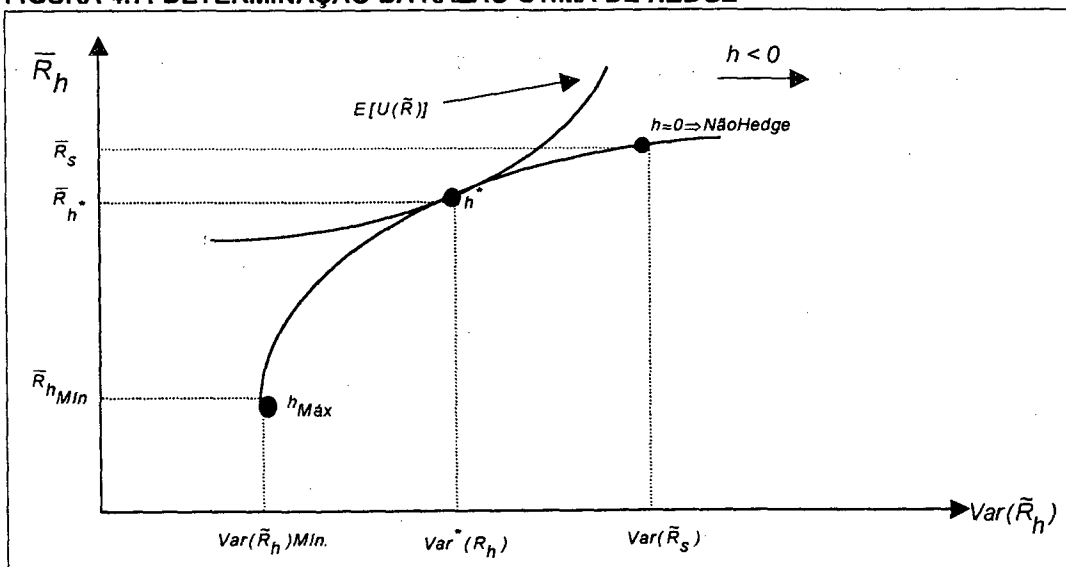
$$\frac{d\bar{R}_h}{d\text{Var}(\tilde{R}_h)} = \frac{\frac{dE[U(\tilde{R})]}{d\text{Var}(\tilde{R})}}{\frac{dE[U(\tilde{R})]}{dR}} \quad (4.27)$$

Tendo como complemento da relação anterior a seguinte expressão:

$$\frac{d\bar{R}_h}{d\text{var}(\tilde{R}_h)} = -\frac{1}{2} \frac{\bar{R}_r}{h \cdot \text{Var}(\tilde{R}_r) - \text{Cov}(\tilde{R}_s; \tilde{R}_r)} \quad (4.28)$$

A figura seguinte ilustra a determinação da razão ótima de *hedge* (h^*), tal como segue:

FIGURA 4.7: DETERMINAÇÃO DA RAZÃO ÓTIMA DE HEDGE



Admitindo-se que o *hedger* possa emprestar ou tomar emprestado qualquer importância de recursos à taxa de juros livre de risco (f), mais uma vez é possível invocar o teorema da separação que foi abordado no segundo capítulo deste trabalho, aplicando-o ao problema de *hedging*.

Logo, existirá uma única razão ótima de *hedge*, independentemente da estrutura de preferências do *hedger*, uma vez que este poderá satisfazer às suas preferências quanto ao risco em função da adequada divisão do investimento entre o ativo livre de risco e o *hedge* ótimo. Visando determinar essa razão, basta maximizar a função objetivo (θ) definida através da expressão (4.29) por LINTNER (1965), tal como segue:

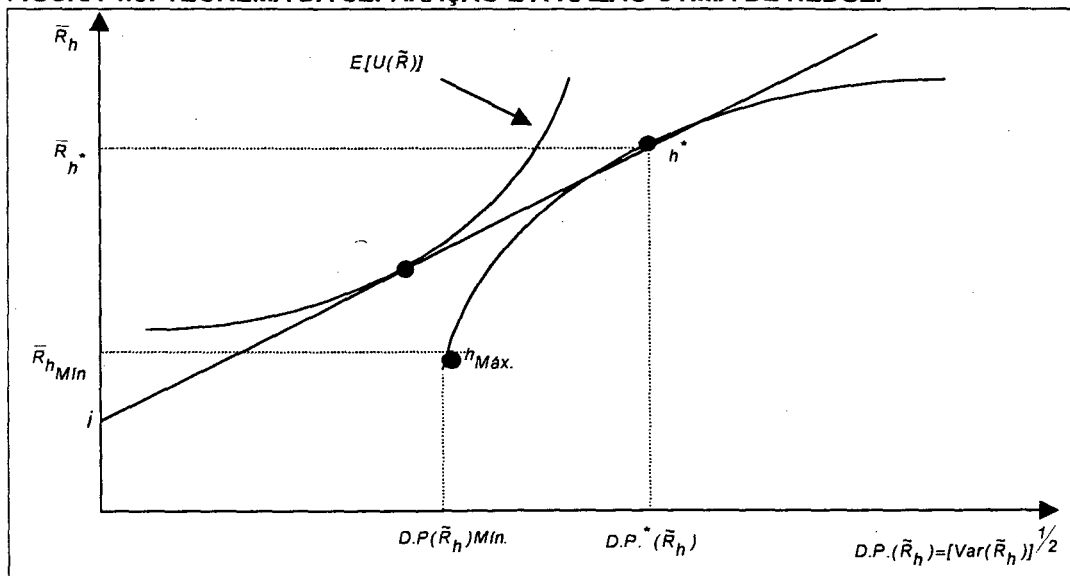
$$\theta = \frac{\bar{R}_h - i}{\text{Var}(\bar{R}_h)^{1/2}} \quad (4.29)$$

Com base na teoria de portfolio, a razão ótima de *hedge*, designada por (h^*) pode então ser vista através da seguinte expressão matemática:

$$h^* = \frac{(\bar{R}_r - i) \cdot \text{Var}(\tilde{R}_s) - (\bar{R}_s - i) \cdot \text{Cov}(\tilde{R}_s; \tilde{R}_r)}{(\bar{R}_s - i) \cdot \text{Var}(\tilde{R}_r) - (\bar{R}_r - i) \cdot \text{Cov}(\tilde{R}_s; \tilde{R}_r)} \quad (4.30)$$

A figura 4.8 ilustra o comportamento da determinação da razão ótima de *hedge* pautando-se no teorema da separação.

FIGURA 4.8: TEOREMA DA SEPARAÇÃO E A RAZÃO ÓTIMA DE HEDGE.



A literatura mostra que a teoria de portfólio parece ser superior às teorias clássica e minimizadora, em função de levar sistematicamente em consideração o risco e o retorno do *hedge* nos mercados futuros à luz da estrutura de preferências do *hedger*.

Finalmente, esse capítulo procurou proporcionar uma visão genérica acerca do funcionamento do mercado futuro, destacando as teorias nele utilizadas, dado que esse trabalho utiliza-se ativos transacionados no mercado futuro brasileiro. Nesse sentido, o capítulo subsequente procura estabelecer previsões *ex-ante* com base nos ativos mencionados anteriormente, construindo em seguida as carteiras que serão otimizadas numa planilha eletrônica.

CAPÍTULO V

5. AS PREVISÕES DOS RETORNOS DOS ATIVOS SELECIONADOS

5.1. Introdução

Na visão de NEWBOLD & BOS (1994, p. 1), existe um instinto humano para saber cada vez mais sobre o futuro. Essa natural curiosidade humana sobre o futuro tem sustentado um mercado em que os astrólogos, horóscopos e cartomantes consultam bolas de cristal, atendendo cada vez mais diversas pessoas interessadas em reduzir as incertezas sobre o futuro.

Nesse prisma, o uso de técnicas quantitativas em finanças vem se tornando cada vez mais comum, dado que o administrador financeiro encontra-se normalmente envolvido com as análises numéricas, que facilita de sobremaneira a sua aplicação. O seu relacionamento com a estatística e a econometria hoje em dia, passou a ser mais estreita, devido a utilização dos conceitos de tendência, ciclo e sazonalidade, além do uso dos modelos dinâmicos que podem ser aplicados às previsões de vendas, lucros, etc., além da elaboração de cenários que estão intimamente ligados aos conceitos de probabilidade e de risco, que são definidos a partir de resultados numéricos das séries temporais.

Cabe salientar que a importância dos conhecimentos acerca da macroeconomia, tal como a oferta e a demanda por moeda, a inflação, as taxas de

juros, taxa de câmbio, etc., que na maioria das vezes são elementos fundamentais na construção dos modelos econométricos, também possuem um importante papel no desenvolvimento desses modelos de tomada de decisões.

Além disso, o planejamento e a previsão passaram a ser uma necessidade de amenizar as incertezas no processo de planejamento de uma carteira de ativos financeiros através do conhecimento dos erros das previsões e de seus preços, além da distribuição de probabilidade desses erros de forma adequada, da reconsideração da coerência dos pressupostos de planejamento e da monitoração do gestor de forma sistematizada.

Hoje em dia é essencial que os gestores de carteiras possam melhorar continuamente as suas previsões, aumentando com isso a sua capacidade de resposta e diminuindo os riscos envolvidos em seus negócios. O acerto ou erros que por ventura venham a acontecer nas previsões pode diminuir o fracasso ou sucesso de um gerente de risco no curto ou no longo prazo.

Este trabalho encontra-se estruturado em oito seções. A segunda seção traz a descrição dos ativos selecionados. A terceira seção fala sobre a distribuição de probabilidade das taxas de retorno dos ativos financeiros, mostrando o relacionamento entre assimetria, média e a mediana das taxas de retorno. A terceira seção mostra a análise descritiva dos ativos dos modelos a serem estimados. A quarta seção traz algumas considerações sobre a distribuição de probabilidade dos ativos a serem previstos, além de uma avaliação da normalidade através do teste Bera-Jarque. A quinta seção traz a análise da

estacionaridade das taxas de retorno dos ativos selecionados. A sexta seção mostra os métodos de previsões econométricos. A sétima seção traz os resultados das previsões econométricas, valendo-se dos métodos lineares dinâmicos e da classe de modelos *ARIMA*. A oitava seção finaliza mostrando o comportamento das previsões fora da amostra (*ex-ante*) que serão utilizados para otimizar as carteiras a serem formuladas.

5.2. As Variáveis Selecionadas

Diversos fatores podem influenciar a rentabilidade de determinado ativo financeiro, cotado tanto no mercado à vista quanto no mercado futuro. Deve-se considerar desde os fatores exógenos ao sistema elaborado, tais como as guerras, os atentados terroristas, as taxas de desemprego, etc, além de fatores endógenos ao sistema que em grande parte também afetam os retornos de um dado investidor no mercado financeiro.

Nesses termos, cabe ao planejador de determinada carteira saber utilizar a quantidade de variáveis e de dados históricos necessários para a elaboração de um modelo econométrico, de tal forma que ele possa interferir, *a priori*, na sua escolha, a cada regressão elaborada, fornecendo respostas em que possam acompanhar sistematicamente as estratégias previamente elaboradas.

A amostra utilizada neste trabalho foi coletada junto à Gerência Técnica da Bolsa de Mercadorias e Futuros (*BM&F*), ao Banco Central do Brasil (*BACEN*)

e ao banco de dados *Econômica Software para Investimentos LTDA*, tendo como período de coleta o dia 01 de agosto de 2001 a 28 de dezembro do mesmo ano, perfazendo um total de 98 observações.

Os preços dos ativos coletados foram posteriormente deflacionados pelo dólar comercial real por dólares norte-americanos. Vale salientar, que esses dados correspondem às cotações dos preços de ajuste diários que foram posteriormente transformados em taxas de variação (retornos) dos ativos no mercado à vista e do mercado futuro brasileiro¹².

Para calcular os retornos discretos com base nos preços de fechamento dos ativos financeiros utilizou-se o modelo de capitalização discreta descrito através da expressão (2.1) do segundo capítulo desse trabalho. Notadamente, se os retornos fossem calculados com base na capitalização contínua, a diferença com relação aos valores obtidos seria muito pequena, não levando os resultados esperados a grandes distorções. As variáveis previamente selecionadas podem ser definidas como segue:

1. *Índice da Bolsa de Valores de São Paulo (IBOVESPA) no mercado à vista*: é o índice de ações mais consagrado no Brasil, sendo também o mais representativo indicador do mercado acionário brasileiro, em função de sua metodologia que procura adotar a ponderação da carteira teórica através do índice de negociabilidade em bolsa dos seus ativos componentes;

¹² Neste trabalho utilizou-se de dois contratos futuros com o objetivo de formar cada série a ser avaliada.

2. *Contratos Futuros de Ouro 250 gramas*: as principais características desse contrato futuro negociado na BM&F podem ser visualizadas no apêndice I deste trabalho;

3. *Cotações da Taxa de Câmbio de Reais por Dólar Comercial*: pode ser vista como o relacionamento entre o valor da moeda norte-americana (dólar) cotada em moeda nacional (reais). A sua formação é influenciada pela lei da oferta e procura, além de diversos fatores socioeconômicos;

4. *Contratos Futuros de Taxa de Câmbio de Reais por Dólar Comercial*: as principais características desse contrato futuro negociado na BM&F podem ser visualizadas no apêndice I deste trabalho;

5. *Contratos Futuros de Ibovespa*: as principais características desse contrato futuro negociado na BM&F podem ser visualizadas no apêndice I deste trabalho;

6. *Contratos Futuros de Boi Gordo Denominado em Reais*: as principais características desse contrato futuro negociado na BM&F podem ser visualizadas no apêndice I deste trabalho;

7. *Dinheiro*: corresponde ao papel moeda em poder do público, não possuindo qualquer risco quando da inclusão no portfólio dinâmico. Na verdade esse ativo possui um importante papel durante o processo de otimização das carteiras a serem formuladas, uma vez que os agentes econômicos poderão analisar os custos de transação e os custos de oportunidade sempre quando forem avaliar a decisão entre deixar os recursos parados, sem obter qualquer tipo de rendimento, ou simplesmente alocar os seus recursos num portfólio com maior risco.

5.3. Análise Descritiva dos Ativos Seleccionados

As variáveis coletadas para as estimações econométricas, bem como a composição das carteiras a serem otimizadas, correspondem a 07 ativos financeiros, sendo um número de ativos considerados suficientes para se obter ganhos através do processo de diversificação. Assim, levou-se em consideração a suposição de que os contratos futuros avaliados seriam negociados continuamente de modo a não haver qualquer distorção.

Com base no quadro 5.1, é fácil realizar algumas inferências acerca das estatísticas expostas a seguir investigando, por conseguinte, alguns fatos estilizados observados nas séries históricas a serem trabalhadas.

QUADRO 5.1: ESTATÍSTICAS DESCRITIVAS DOS RETORNOS DIÁRIOS DOS ATIVOS SELECIONADOS NO PERÍODO DE 01/08/2001 A 28/12/2001

Variáveis	Média	Mediana	Desvio Padrão	Mínimo	Máximo	Coefficiente de Variação
Ibovespa Futuro	0,439%	0,239%	2,762%	-5,073%	10,159%	629,157%
Ibovespa	0,519%	0,290%	2,667%	-3,939%	10,411%	513,873%
Ouro Futuro	0,173%	-0,038%	2,246%	-5,103%	7,748%	1.298,266%
Dólar Futuro	0,043%	0,035%	0,913%	-2,898%	2,129%	2.123,256%
Boi Gordo Futuro	0,092%	0,021%	0,485%	-1,011%	2,069%	527,174%
Dólar	0,042%	0,110%	0,990%	-2,432%	2,558%	2.357,143%

Através do respectivo quadro, é fácil observar que o ativo que apresentou maior taxa de rentabilidade média no período avaliado foi o Ibovespa com uma taxa de retorno em torno de 0,519%. Por outro lado, teve ainda em contrapartida um risco absoluto mensurado em termos de desvio padrão de cerca de 2,667%, enquanto o seu risco relativo medido através do coeficiente de variação foi igual a 513,873%, sendo o menos volátil dentre todos os que foram analisados.

Alternativamente, o ativo que apresentou a menor taxa de rentabilidade média no período considerado foi o dólar cotado no mercado à vista, proporcionando uma taxa de retorno de cerca de 0,042%, e um risco absoluto mensurado em termos de desvio padrão igual a 0,990%. Contudo, esse mesmo ativo foi considerado o mais volátil em termos de risco relativo (coeficiente de variação) no período analisado, proporcionando um risco de cerca de 2.357,14%.

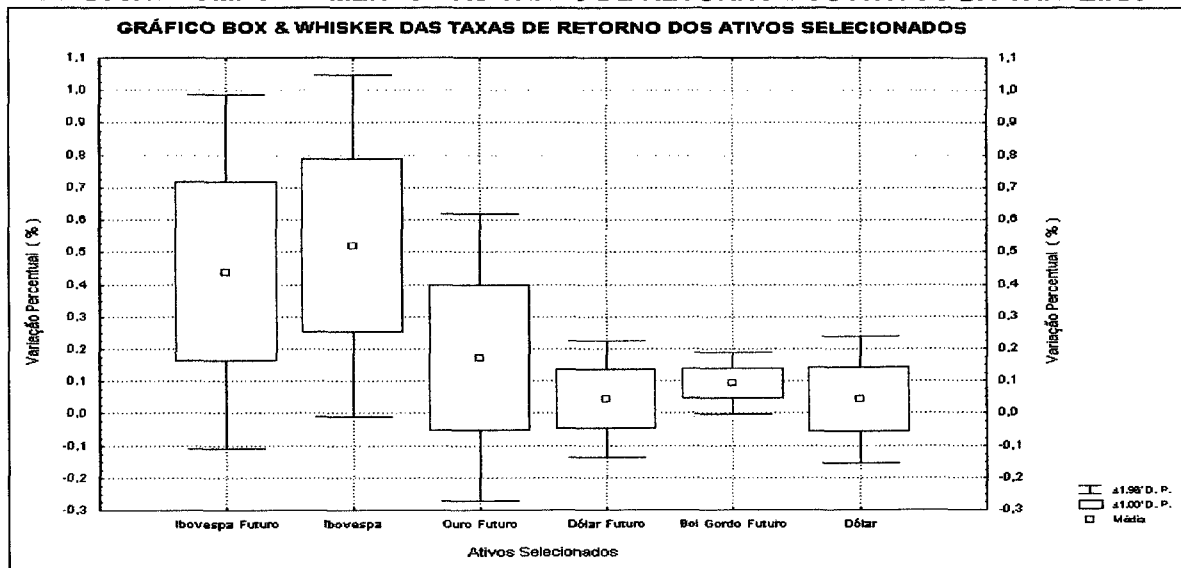
Veja ainda que todos os valores calculados para as taxas de rentabilidade média foram superiores às taxas de rentabilidade mediana dos ativos analisados,

caracterizando-se por uma distribuição assimétrica positiva dos retornos, exceto a distribuição de retorno do dólar, que apresentou uma assimetria negativa.

O comportamento das taxas de retorno também pode ser visto através do gráfico *Box & Whisker*. Esse gráfico pode ser mostrado de três formas comumente conhecidas. Ele pode ser calculado em relação à mediana, o desvio padrão e o erro padrão de estimativa das taxas de retorno. Tal ferramenta estatística visa captar as informações concernentes à média, mediana, desvio padrão, erro padrão, assimetria e curtose da distribuição.

A figura 5.1 evidencia o intervalo de 95% de confiança para a taxa de rentabilidade média pode ser visto a partir da linha desenhada em ambos os lados, saindo da esquerda e da direita até a caixa central. Esse intervalo de confiança de 95% para o retorno médio possui $\pm 2\sigma$, tomando-se como parâmetro o comportamento da distribuição normal.

FIGURA 5.1: COMPORTAMENTO DAS TAXAS DE RETORNO DOS ATIVOS DA CARTEIRA



Veja através da figura anterior, que a largura da caixa ou *box* indica o formato da distribuição em relação ao grau de curtose do conjunto de observações da amostra, podendo tal curtose ser classificada como: leptocúrtica, mesocúrtica e platicúrtica. Já o ponto localizado no centro da caixa, diz respeito à taxa média dos retornos dos ativos no período considerado.

Observe ainda no gráfico *Box & Whisker* que a sua caixa contém os retornos compreendidos entre 25% e 75% da distribuição, ou seja, 50% centrais. Avaliando os retornos em termos da amplitude interquartil, verifica-se que a maior amplitude diz respeito às cotações do Ibovespa que pode ser vista como a diferença entre o terceiro e primeiro quartil da distribuição, também chamado de intervalo interquartil, que é igual a 3,4705, enquanto que a menor dispersão dos

retornos diz respeito às cotações das taxas de retorno dos contratos do boi gordo negociadas nesse mesmo mercado, cujo intervalo interquartil é igual a 0,2843.

Ademais, calculou-se ainda a matriz de correlação entre as rentabilidades históricas dos ativos previamente selecionados, com o objetivo de avaliar a possibilidade de utilizá-los no processo de diversificação das carteiras a serem planejadas.

No quadro 5.2 é possível notar que as rentabilidades dos ativos selecionados apresentam alguns coeficientes de correlação linear de *Pearson* significativos estatisticamente em relação à sua rentabilidade média, considerando um nível de significância de 5% e 10%.

QUADRO 5.2: MATRIZ DE CORRELAÇÃO DOS RETORNOS HISTÓRICOS DOS ATIVOS

	Ibovespa Futuro	Ibovespa	Ouro Futuro	Dólar Futuro	Boi Gordo Futuro	Dólar
Ibovespa Futuro	1,000					
Ibovespa	0,971 p = 0,000*	1,000				
Ouro Futuro	0,038 p = 0,711	0,099 p = 0,328	1,000			
Dólar Futuro	-0,101 p = 0,321	-0,075 p = 0,466	0,173 p = 0,089**	1,000		
Boi Gordo Futuro	0,061 p = 0,553	0,045 p = 0,659	-0,222 p = 0,028*	-0,029 p = 0,771	1,000	
Dólar	0,053 p = 0,606	0,058 p = 0,570	0,102 p = 0,316	-0,053 p = 0,602	0,179 p = 0,079**	1,000

Avaliando o par de ativos Ouro Futuro e Dólar Futuro, o coeficiente de correlação de *Pearson* foi igual a 17,3%, já os ativos Ouro Futuro e Boi Gordo

* Nível de significância estatística de $p < 5\%$.

** Nível de significância estatística de $p < 10\%$.

Futuro apresentaram um coeficiente de correlação de *Pearson* negativo e significativo em torno de -22,2%, que pode contribuir com a redução do risco diversificável da carteira.

Além disso, os ativos Boi Gordo Futuro e o Dólar cotado no mercado à vista, apresentaram um coeficiente de correlação em torno 17,9%, sendo significativo estatisticamente ao nível de 10%. Já os ativos Ibovespa Futuro e Ibovespa cotado no mercado à vista, apresentaram coeficientes de correlação linear de *Pearson* significativos e positivos, com valor igual a 97,1%.

Esses ativos apesar de não favorecerem isoladamente a redução do risco total do portfólio, podem contribuir com a formulação de estratégias de *hedge* de mínima variância no mercado futuro nacional, dado que quanto mais próximo da unidade estiver o coeficiente de determinação (ρ^2) entre os pares de ativos selecionados, maior será a redução do risco no mercado à vista.

Vale salientar que houve um grande número de coeficientes de correlação linear calculados que foram negativos e com valores muito próximos de zero, o que contribui significativamente com a redução do risco não sistemático ou diversificável; caso esses ativos financeiros sejam combinados numa carteira, favorecendo a minimização de riscos durante o processo de otimização.

5.4. A Distribuição de Probabilidade das Taxas de Retorno dos Ativos Financeiros

Diversos autores vêm propondo diferentes distribuições estatísticas para avaliar as mudanças dos preços dos ativos, já que a normalidade quase sempre é desprezada ou violada, em razão do elevado grau de curtose e assimetria que ganham cada vez mais importância em estudos sobre o respectivo tema.

Até o trabalho descrito por MANDELBROT (1963), admitia-se que o processo gerador das variações de preços das ações era um movimento do tipo *browniano*, implicando por definição variância finita e distribuição normal com média igual a (μ) e variância (σ^2) no tempo (t) . No entanto, Mandelbrot e posteriormente FAMA (1965), contestaram a hipótese de normalidade dos retornos baseando-se numa característica típica das distribuições empíricas: o excesso de observações nas caudas e em torno da média, quando comparadas com a distribuição normal.

Este fato levou os autores anteriormente citados a sugerirem que a densidade de probabilidade das taxas de retorno das ações pertencia a uma classe das distribuições conhecidas como *pareto estáveis* ou *alfa-estáveis*¹³, com parâmetro variando no intervalo de $(0, 2]$. Essa distribuição apresenta coeficientes

¹³ As distribuições alfa-estáveis formam uma classe de distribuições, caracterizadas por PAUL LÉVY (1924), que permitem acomodar diferentes graus de assimetria e curtose. Geralmente essas distribuições não têm expressões definidas para funções de densidade e distribuição. Observa-se, entretanto, três casos onde existe uma expressão definida para a função de densidade das distribuições alfa-estáveis: as distribuições gaussianas (normal), Cauchy e Lévy. Ressalta-se que as distribuições gaussianas e Cauchy são simétricas, em forma de sino e a distribuição Lévy é altamente assimétrica.

de assimetria (A_3) maiores do que se a distribuição das taxas de retorno em sua forma logarítmica fosse normal. A distribuição paretiana é definida pelo parâmetro alfa (α), tal que, se $\alpha = 2$, a distribuição será caracterizada como uma normal. Se $\alpha < 2$, a distribuição de probabilidade é tida como leptocúrtica e com caudas assintóticas ao eixo horizontal.

DELGADO (1994), enfatiza que a assimetria das taxas de retorno implica numa maior probabilidade de perdas ou ganhos dependendo do tipo de assimetria que se está analisando. Assim, nos casos em que as distribuições das taxas de retorno possuam assimetria à esquerda, a cauda esquerda da densidade estimada é sempre mais pesada do que a da normal, isso significa que a probabilidade de uma perda é mais elevada, supondo que os retornos sigam a distribuição estimada ao invés de serem normalmente distribuídos.

A maioria das discussões teóricas de escolha sob condições de risco tem se ocupado de formas relativamente simples da distribuição de probabilidade das taxas de retorno. Contudo, os retornos podem assumir formas complexas e irregulares, que, na maioria das vezes, são desprezadas ao serem levadas em consideração pelo tomador de decisão. Nesses termos, o terceiro momento estatístico mencionado anteriormente, bem como os demais momentos das taxas de retorno dos ativos financeiros podem ser calculados, de tal forma que forneça uma descrição resumida acerca das distribuições de probabilidades avaliadas.

Assim, o coeficiente de assimetria estatístico (A_3) centrado na média da distribuição pode ser facilmente calculado como segue:

$$A_3 = \frac{M_3}{\sigma^3} = \frac{\frac{\sum (R_i - \bar{R})^3}{n}}{\left(\frac{\sqrt{\sum (R_i - \bar{R})^2}}{n} \right)^3} \quad \text{Com: } i = 1, 2, \dots, n \quad (5.1)$$

Usando-se agora uma distribuição genérica de probabilidades das taxas de retorno dos ativos financeiros, pode-se mensurar os momentos estatísticos através da seguinte expressão:

$$M_n = \sum p_i [R_i - E(R)]^n \quad \text{Com: } i = 1, 2, \dots, n \quad (5.2)$$

onde:

A_3 : coeficiente de assimetria;

M_3 : terceiro momento estatístico;

p_i : probabilidade ou frequência relativa do retorno i ;

R_i : taxas de retorno;

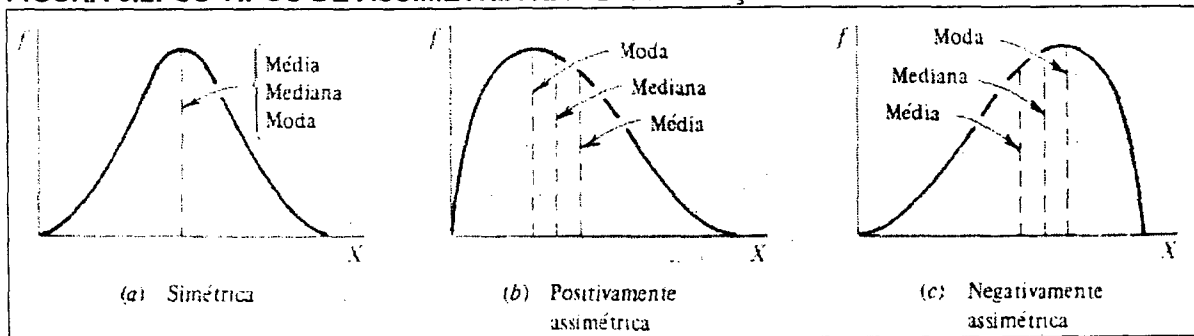
$E(R)$: retorno esperado;

\bar{R} : taxa de retorno médio.

Deste modo, pode-se dizer que o primeiro momento centrado na média será zero. Porém, se for considerado o primeiro momento centrado na origem da distribuição, tem-se o valor esperado ou médio dessa distribuição. Nesse sentido, uma distribuição de probabilidade normal das taxas de retorno de determinado ativo apresenta um coeficiente de assimetria nulo, indicando que a média, mediana e sua moda, caso existam, serão iguais.

Para o segundo momento, centrado na média da distribuição, tem-se a variância, com a sua raiz quadrada sendo o desvio-padrão. Já o terceiro momento da distribuição, traduz-se pela assimetria, que é o grau de deformação da curva da distribuição, podendo ela ser simétrica ou normal, assimétrica positiva e assimétrica negativa. Os três tipos de distribuição anteriores podem ser vistos como segue:

FIGURA 5.2: OS TIPOS DE ASSIMETRIA NAS DISTRIBUIÇÕES DE PROBABILIDADE



Através da figura 5.2 pode-se verificar que a distribuição de probabilidade assimétrica positiva caracteriza-se por apresentar uma cauda mais alongada à direita, havendo uma predominância de valores que são superiores à moda, ou

seja, moda < mediana < média, o que equivale dizer que há uma concentração de valores na extremidade inferior da escala.

Por outro lado, a distribuição de probabilidade assimétrica negativa, caracteriza-se por apresentar uma cauda alongada à esquerda, havendo predominância de valores que são inferiores à moda, ou seja, média < mediana < moda.

CHUNCHACHINDA *et al.* (1997), mostram que a seleção de portfólios pode também ser afetada pela assimetria da distribuição dos retornos. Ele observa que o terceiro momento estatístico é relevante na medida que a sua incorporação na decisão do investidor causa mudanças importantes na construção do portfólio ótimo, já que os investidores procuram negociar o retorno esperado pela assimetria.

Paralelo a isso, o relacionamento existente entre o número de ativos de risco em um portfólio e o risco total desse portfólio tem sido examinada extensivamente tanto teoricamente quanto empiricamente por diversos pesquisadores. A conclusão geral dessas análises é de que a adição de ativos de risco ponderados igualmente e selecionados aleatoriamente em determinado portfólio tenderá a reduzir o risco total sem, contudo, afetar o seu retorno esperado.

Logo, através do processo de diversificação de ativos financeiros, é fácil esperar que ativos arriscados sejam combinados num contexto da teoria de portfólio de tal forma que consiga reduzir de alguma forma, os riscos de tal

carteira, em função dos baixos coeficientes de correlação e/ou de covariâncias entre os ativos pré-selecionados.

Diversos outros estudos empíricos têm sido apresentados mostrando portfolios cujas distribuições de probabilidade das taxas de retornos se comportam como distribuições não normais, e isso se reverte cada vez mais numa motivação intuitiva dos agentes econômicos por uma preferência por assimetria positiva, dado que tal investidor nunca pode perder mais do que 100%, caso os ganhos esperados sejam potencialmente ilimitados.

SCOTT & HORVATH (1980), por exemplo, evidenciam que os investidores exibem utilidade marginal positiva da riqueza para todos os níveis de riqueza, aversão consistente ao risco em todos os níveis de riqueza e uma consistência estreita da preferência dos momentos pela assimetria positiva. A não diversificação acaba conduzindo à formação de portfolios cujas distribuições de probabilidade são assimétricas.

Além disso, o crescimento do número de ativos de risco em um portfolio não somente reduz a sua variância, como também, a sua assimetria. Logo, o número ótimo de ativos numa carteira é obtido no ponto onde um acréscimo marginal da utilidade esperada para um decréscimo na variância é igual ao decréscimo marginal da utilidade esperada para redução da assimetria.

Para PIERÓ (1999), a relevância dada à análise da simetria vai além da determinação da distribuição estatística que se está trabalhando. O Modelo de Precificação de Ativos de Capital (CAPM), por exemplo, assume que somente a

média e a variância dos retornos são relevantes na determinação do preço dos ativos e, desta forma, os momentos de ordem superior ou do lado inferior são considerados iguais pelos investidores. Contudo, tal suposição torna-se algo irrelevante, uma vez que a maioria dos investidores tem uma preferência por assimetria positiva, quando se utiliza a média como estimador das taxas de rentabilidade dos ativos financeiros.

CONINE & TAMARKIN (1981), sugerem intuitivamente que a assimetria positiva poderia ser explicada pelo fato de que a perda da riqueza do investidor não poderia ser superior a 100%, enquanto que os ganhos relativos a ela poderiam ser ilimitados.

Nesse prisma, os investidores sabem que o tipo de assimetria dos retornos dos ativos seja ela positiva ou negativa, reflete-se na distribuição dos retornos da carteira de mercado, e que um mercado em baixa tende a gerar concentrações de ativos com assimetria negativa, assim como, quando em alta, acaba gerando assimetria positiva.

A estatística utilizada para analisar o grau de normalidade das distribuições das taxas de retorno dos ativos previamente selecionados foi a de Bera–Jarque, que possui um poder de teste elevado, com o objetivo de não errar na presença de normalidade.

Assim, há uma baixa probabilidade de indicar a normalidade na presença de não normalidade das distribuições, ou seja, pode-se cometer o chamado Erro

Tipo II, aceitando-se a hipótese de normalidade quando a hipótese alternativa de não normalidade é a verdadeira.

SAMOHYL e ROMÃO (2002), mostram que a vantagem no uso da estatística Bera-Jarque está no fato dela ser bastante simples em termos de uso e compreensão intuitiva, dependendo apenas de dois parâmetros, a assimetria e a curtose, que podem ser calculadas diretamente dos dados históricos.

Levando-se em conta uma distribuição normal, a assimetria é igual a zero e a curtose igual a três. Conseqüentemente, os desvios com base nesses valores conduzem a resultados mais elevados para a estatística Bera-Jarque, traduzindo-se por uma não normalidade. A equação que mensura essa estatística segue uma distribuição do tipo qui-quadrado com 02 graus de liberdade, tal como pode ser vista a seguir:

$$BJ = N \cdot \left[\frac{A_3^2}{6} + \frac{(K_4 - 3)^2}{24} \right] \sim \chi_2^2(\alpha = 5\%) \geq 5,99 \quad (5.3)$$

onde:

A_3 : coeficiente de assimetria das distribuições;

K_4 : coeficiente de curtose excessivo das distribuições;

N : tamanho da amostra.

Observe que, quando o valor da expressão (5.3) for maior do que 5,99, tem-se a indicação de não normalidade da distribuição, considerando um nível de significância de 5%, que é o tradicionalmente usado para essa estatística. Já para um nível de significância de 1% e com 02 graus de liberdade, o valor crítico será igual a 9,21.

Por outro lado, para atingir a normalidade de dados não normais, muitas vezes é necessário realizar alguns tipos de transformações algébricas, levando os dados históricos a se aproximar da normalidade. Nesse sentido, uma família de transformações suficientemente abrangente para incluir transformações matemáticas é conhecida como transformação de Box-Cox, que pode ser calculada a partir da seguinte expressão:

$$Y(\lambda) = \frac{Y^\lambda - 1}{\lambda} \quad (5.4)$$

Onde lambda (λ) pode assumir valores compreendidos entre -3 até +3. Contudo, nem sempre é garantido que os dados avaliados serão normais, mas na maioria da vezes consegue-se encontrar um valor para lambda (λ) que resulte na normalidade dos dados históricos da amostra analisada. À medida que lambda (λ) se aproxime de zero, a série transformada corresponderá a uma transformação do tipo logarítmica, ou seja, $\ln(Y)$.

SAMOHYL e ROMÃO (2002), mostram uma forma simples e operacional para esse tipo de transformação, valendo-se de uma planilha eletrônica onde levam em conta os seguintes procedimentos:

$$\text{Minimizar : Bera-Jarque} = g \text{ (Assimetria e Curtose)}$$

$$-3 < \lambda < 3$$

Eles procuram minimizar a estatística Bera-Jarque, variando-se o parâmetro lambda¹⁴ (λ), de modo que os dados sejam transformados, buscando-se com isso a normalidade em função de valores relativamente elevados da assimetria e da curtose.

Os resultados do teste de normalidade da distribuição dos retornos dos ativos financeiros analisados, bem como os coeficientes de assimetria e excesso de curtose encontram-se expostos no quadro 5.3.

QUADRO 5.3: AVALIAÇÃO DA NORMALIDADE DA DISTRIBUIÇÃO DOS RETORNOS DOS ATIVOS NO PERÍODO DE 01/08/2001 A 28/12/2001

Variáveis	Assimetria	Excesso de Curtose	Bera-Jarque	Transformação Box-Cox	Bera-Jarque Transformado
Ibovespa Futuro	0,7503	0,8943	13,61	$\lambda = 0,047$	0,0006
Ibovespa	0,9317	1,6262	27,51	$\lambda = -0,155$	0,042
Ouro Futuro	0,6827	1,4537	18,23	$\lambda = 0,278$	4,054
Dólar Futuro	-0,4345	0,7064	5,84 ⁽¹⁾	—	—
Boi Gordo Futuro	0,8862	3,0521	57,10	$\lambda = -2,337$	8,683
Dólar	-0,1279	0,2810	0,80 ⁽¹⁾	—	—

¹⁴ Os valores estabelecidos para a variação de lambda (λ) seguem os mesmos critérios adotados por SAMOHYL e ROMÃO (2002).

⁽¹⁾ Significa a aceitação da hipótese nula de normalidade da distribuição ao nível de significância estatística de 5%, uma vez que a estatística qui-quadrado calculada igual a 5,84 foi inferior ao qui-quadrado tabelado que é igual a 5,99.

Veja na figura 5.3, disposta na sub-seção 5.4.1, que a distribuição de probabilidade de alguns ativos possuem menos massa de probabilidade no centro da distribuição (*cintura fina*), e mais peso nas caudas, quando comparada à distribuição normal.

O teste de normalidade Bera-Jarque aceitou a hipótese nula de normalidade da distribuição ao nível de significância estatística de 5% para o Dólar Futuro e o Dólar, uma vez que os valores calculados da estatística qui-quadrado para os dois ativos foram inferiores à estatística qui-quadrado, tabelado com 02 graus de liberdade, que foi igual a 5,99. Assim, tais ativos não necessitaram sofrer qualquer tipo de transformação para que fossem induzidos à normalidade da distribuição.

Não obstante, os demais ativos financeiros, Ibovespa futuro, Ibovespa, Ouro Futuro e Boi Gordo Futuro necessitaram ser induzidos à transformação de Box-Cox, com vistas a preservar a hipótese de normalidade das distribuições. Todavia, foi necessário usar um lambda (λ) relativamente elevado para a transformação de Box-Cox igual a $-2,337$, com vistas a obter normalidade da distribuição dos retornos dos contratos futuros do boi gordo.

5.4.1. A Relação entre a Média, Mediana e Assimetria das Taxas de Retorno

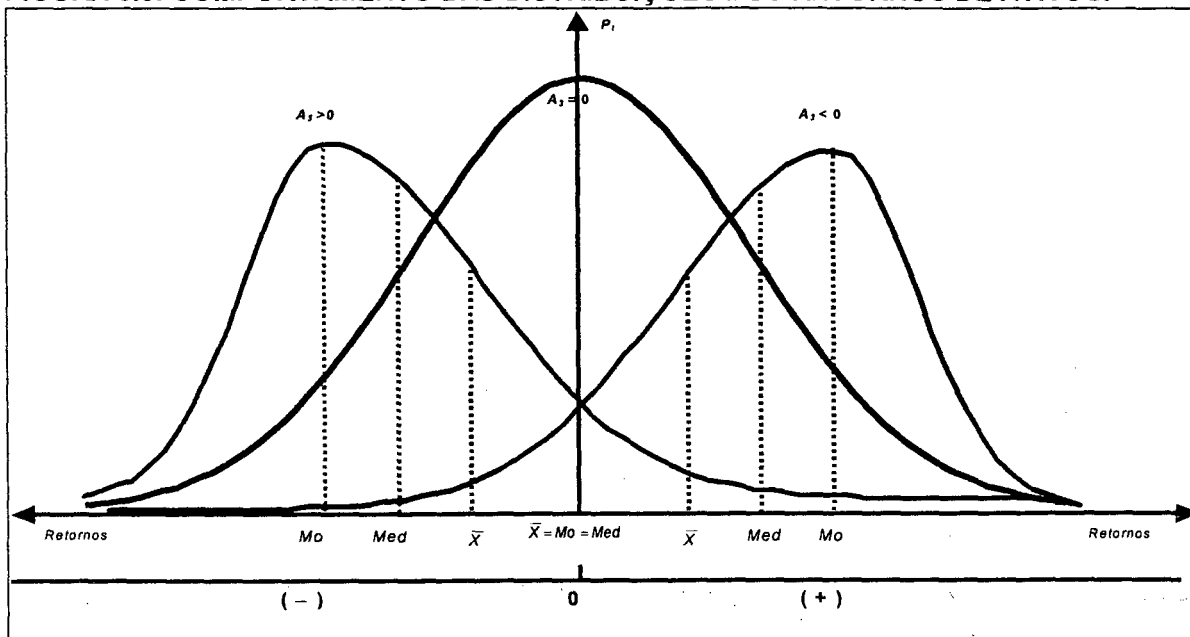
Como pôde ser visto até o presente momento, desvendar a correta distribuição de probabilidade das taxas de retorno dos ativos financeiros a partir de

dados históricos, visando retirar inferências sobre o comportamento futuro de determinado ativo e assim administrar coerentemente uma carteira, sem o grande risco de perder cifras elevadas, tem sido o alvo de diversos pesquisadores na área de finanças.

Nesse contexto, discute-se a medida correta para mensuração tanto do risco, quanto das taxas de retorno desses ativos. Com relação ao risco, existem diversas medidas alternativas como o desvio padrão, coeficiente de variação, semivariância dos retornos, etc. Já para a medida dos retornos, existem as comumente visualizadas na literatura que são: a média, ou valor esperado, a mediana e o valor modal.

Quando a distribuição das taxas de retornos dos ativos se comporta como uma distribuição normal ou uma curva de sino, quaisquer das medidas de rentabilidade supracitadas são indiferentes, já que os seus valores vão ser coincidentes, ou seja, a média será igual à mediana e conseqüentemente igual à moda com o coeficiente de assimetria sendo igual a zero ($A_3 = 0$). Esta situação pode ser vista através da figura.

FIGURA 5.3: COMPORTAMENTO DAS DISTRIBUIÇÕES DOS RETORNOS DE ATIVOS.



Veja através da figura 5.3, que se o coeficiente de assimetria for positivo, ou seja, ($A_3 > 0$), a média será maior do que a mediana, traduzindo-se por uma maior ocorrência de valores superiores ao da média. Contrariamente, se o coeficiente de assimetria for negativo, ou seja, ($A_3 < 0$), o retorno médio será menor do que o mediano, o qual tem 50% das observações para cada lado. Como o número de dados observados é o que informa a probabilidade de suas ocorrências no futuro e sendo, \bar{R}_i (médio) < R_i (mediano), a probabilidade de \bar{R}_i (médio) será menor do que a de R_i (mediano).

Para TAVARES (1989), a não normalidade dos retornos dos ativos financeiros pode decorrer tanto da não normalidade da distribuição de frequência

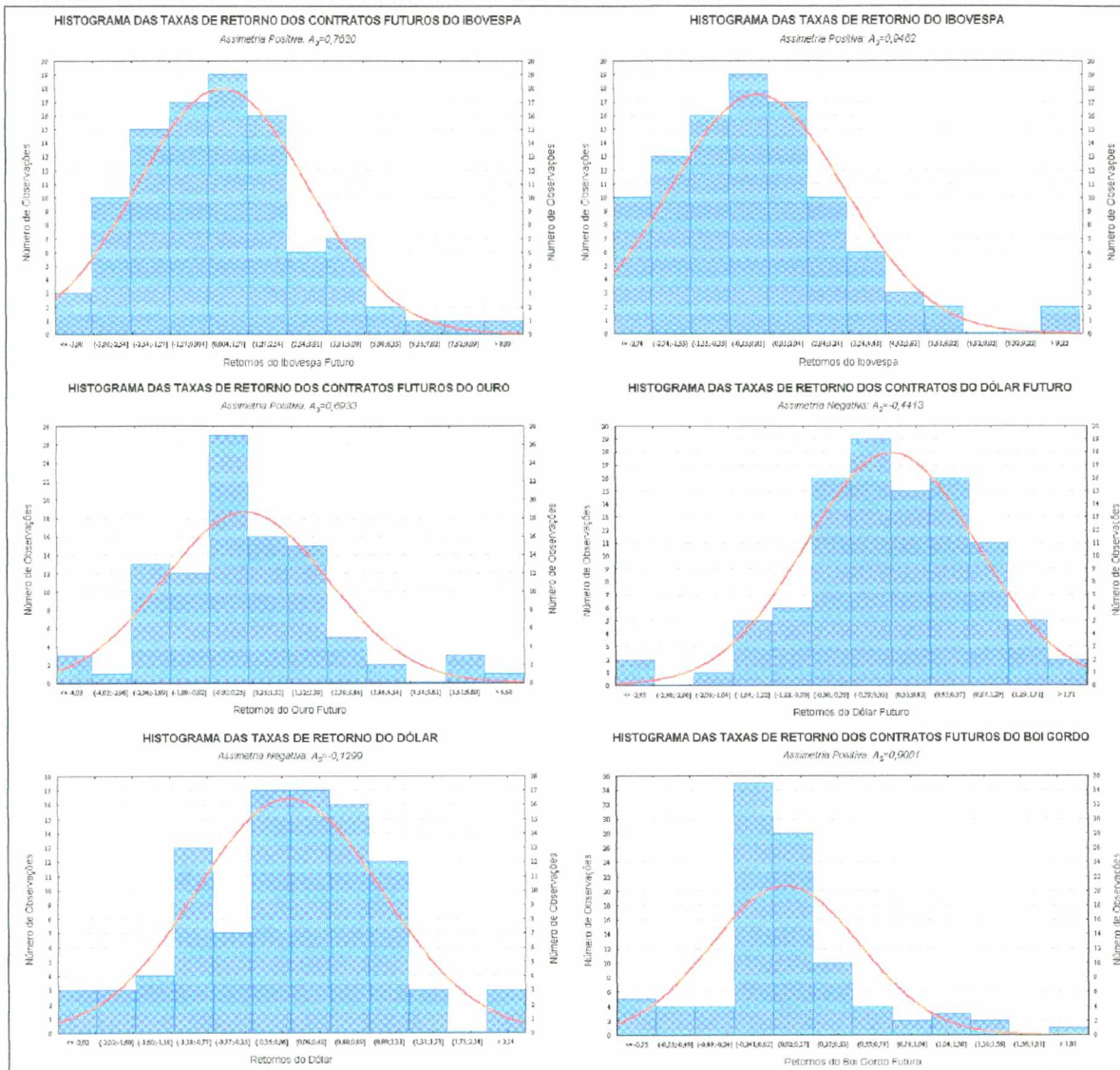
das informações geradas e disseminadas sobre os ativos aos quais se incorporam aos seus preços correntes, determinando suas variações; quanto ao fato das decisões sobre a oferta e demanda por ativos estarem subordinadas aos impulsos do comportamento humano, o que imprime em seus resultados um padrão oscilatório considerado estável.

MARKOWITZ (1959) mostra que a escolha de uma medida para as taxas de retorno é uma questão de conveniência e que a distribuição de probabilidades subjetivas derivadas da crença dos investidores segue, aproximadamente, uma distribuição do tipo *Log-Normal*, não implicando, contudo, na invalidação das condições de eficiência enumeradas para o caso da distribuição normal.

Visando estabelecer as previsões dos parâmetros estocásticos dos ativos financeiros nas seções subseqüentes, inicialmente optou-se por averiguar o comportamento das distribuições das taxas de retorno no que concerne à sua assimetria, curtose, além do teste de normalidade Bera-Jarque (*B-J*), de modo a preservar as hipóteses subjacentes ao método dos mínimos quadrados ordinários, utilizando-se corretamente os modelos clássicos de regressão linear.

Por outro lado, os histogramas das distribuições das taxas de retornos dos ativos analisados que farão parte das carteiras a serem formuladas podem ser vistos a seguir:

FIGURA 5.4: HISTOGRAMAS DAS TAXAS DE RETORNO DOS ATIVOS SELECIONADOS



Observa-se através da figura 5.4 que aparentemente nenhuma das variáveis analisadas possuem um comportamento gaussiano, apresentando coeficientes de assimetria considerados à primeira vista pequenos.

É fácil notar também na mesma figura, que a distribuição dos retornos dos ativos: Ibovespa Futuro, Ibovespa, Ouro Futuro e Boi Gordo Futuro, possuem um

coeficiente de assimetria positivo, o que leva a inferir que a rentabilidade média de tais ativos, em geral, é maior do que a rentabilidade mediana. Já as distribuições dos retornos dos ativos: Dólar cotado no mercado futuro e o Dólar cotado no mercado à vista são caracterizadas como assimétrica negativa, apresentando um coeficiente de assimetria menor do que zero, o que leva a inferir que há uma maior ocorrência de observações de retornos medianos do que de retornos médio nas séries avaliadas.

5.5. A Estacionaridade das Taxas de Retorno dos Ativos Seleccionados

GRANGER & NEWBOLD (1974), foram os primeiros autores a invocarem o conceito de regressão espúria, ao perceber que duas variáveis que dependam do tempo sejam utilizadas na formulação de uma regressão e que o coeficiente de explicação ou de determinação seja bastante elevado. Como exemplificação acerca da regressão espúria, tome o PIB brasileiro e o relacione com o tempo, logo você perceberá que ele aumenta paulatinamente à medida que os anos passam.

Por outro lado, se for relacionado o número nascimentos de bebês em determinada maternidade com o tempo, o leitor também verá que os nascimentos de bebês também aumentarão com o passar do tempo. Logo, criando-se uma regressão entre o PIB e o número de nascimentos de bebês, pode-se notar que tal relacionamento captará o que ficou conhecido na literatura como regressão

espúria, obtendo-se um coeficiente de explicação elevado sem, contudo, ter um sentido lógico.

Assim, caso seja encontrada alguma influência do tempo nas variáveis do modelo, então tal regressão captará apenas a influência do tempo nas variáveis, não refletindo desse modo, o relacionamento entre elas. Visando diagnosticar as suspeitas de que as séries temporais guardam algum relacionamento com o tempo, sugere-se checar a ordem de integração das séries econômicas. Neste caso, são utilizados os testes denominados de Dickey-Fuller (*DF*) e Dickey-Fuller Aumentado (*ADF*) para testar tal estacionaridade.

Como é sabido na literatura que grande parte das séries econômicas possuem esse tipo de tendência nos níveis das variáveis, elas podem conduzir à formulação de regressões espúrias, caso não sejam avaliadas a sua ordem de integração¹⁵. Como os testes Dickey-Fuller (*DF*) e Dickey-Fuller Aumentado (*ADF*) são sensíveis ao número de defasagens adotadas, para a sua adequada escolha, seguiu-se o procedimento sugerido por DOORNIK & HENDRY (1996), que visa escolher um número de defasagens arbitrariamente alto e selecionar a defasagem estatisticamente significativa. Caso não sejam encontradas defasagens significantes, os testes (*DF*) e (*ADF*) são equivalentes.

Nesse sentido, o conceito de raiz unitária tornou-se importante em econometria, pois, quando uma série possui esse tipo de raiz, torna-se incorreto

¹⁵ Existe ainda outro teste de raiz unitária desenvolvido por Phillips e Perron (*PP*) que consegue diagnosticar a tendência nos níveis das variáveis na presença de quebras estruturais. Contudo, esse trabalho avaliará todas as séries financeiras através dos testes Dickey-Fuller (*DF*) e Dickey-Fuller Aumentado (*ADF*).

utilizar a distribuição *t*-Student nas regressões que a incluem. Visando compreender melhor este conceito de raiz unitária, considere um processo autoregressivo de primeira ordem AR(1) do tipo:

$$Z_t = \alpha_1 Z_{t-1} + e_t \quad (5.3)$$

onde α_1 é um número real e $e_t \sim N(0, \sigma^2)$.

Ao avaliar a questão da raiz unitária deve-se observar o comportamento de α_1 . Quando $|\alpha_1| > 1$, a série apresenta um comportamento explosivo, algo considerado irrealista pela maioria dos economistas. Porém, se $|\alpha_1| < 1$, Z_t seguirá um processo estacionário. Por outro lado, se $|\alpha_1| = 1$, diz-se que o processo avaliado possui raiz unitária. Neste caso, Z_t não será estacionário, pois:

$$Z_t = Z_{t-1} + e_t \quad (5.4)$$

$$Z_t = Z_{t-2} + e_{t-1} + e_t \quad (5.5)$$

$$Z_t = Z_{t-3} + e_{t-2} + e_{t-1} + e_t \quad (5.6)$$

⋮

$$Z_t = Z_0 + \sum_{i=1}^t e_i \quad (5.7)$$

ou seja, $Var(Z_t) = t\sigma^2$, a variância de Z_t cresce com o passar do tempo, violando a condição de que a variância deva ser constante ao longo das unidades amostrais.

O teste inicialmente utilizado para detectar raiz unitária foi proposto por DICKEY & FULLER (1979) chama-se (*DF*), podendo ser facilmente demonstrado a partir de (5.3), desde que seja subtraído por Z_{t-1} em cada lado:

$$\Delta Z_t = \gamma Z_{t-1} + \varepsilon_t \quad (5.8)$$

onde ΔZ_t é a primeira diferença de Z_t e $\gamma = \alpha_1 - 1$. Neste caso, testa-se $\alpha_1 = 1$ em (5.3), que é equivalente a testar a hipótese $\gamma = 0$ em (5.8).

Este teste considera ainda duas outras formas adicionais para verificar a presença de raiz unitária, a saber: modelos com a presença de intercepto e tendência linear, ambos parâmetros determinísticos. Os modelos podem ser visualizados como seguem:

$$\Delta Z_t = \alpha_0 + \gamma Z_{t-1} + \varepsilon_t \quad (5.9)$$

$$\Delta Z_t = \alpha_0 + \gamma Z_{t-1} + \alpha_2 t + \varepsilon_t \quad (5.10)$$

Não obstante, o coeficiente a ser testado nos modelos (5.8), (5.9) e (5.10) é sempre o γ . O teste *DF* consiste na estimação de um dos modelos supracitados valendo-se do Método dos Mínimos Quadrados Ordinários (*OLS*), comparando a

estatística t de γ com os valores críticos tabelados por Dickey-Fuller. Assim, as hipóteses a serem testadas são:

- Se $t_{\text{Calculado}} < t_{\text{Tabelado}}$ a hipótese nula $\gamma = 0$, indica que a presença de uma raiz unitária no processo não pode ser rejeitada; por outro lado, se $t_{\text{Calculado}} > t_{\text{Tabelado}}$ a hipótese alternativa será aceita, indicando ser um processo estocástico estacionário.

No caso do teste Dickey-Fuller Ampliado (ADF), basta generalizar os modelos (5.8), (5.9) e (5.10), incluindo defasagens em ΔZ_t no lado direito da equação. Neste caso, tem-se que:

$$\Delta Z_t = \gamma Z_{t-1} + \sum_{i=2}^p \beta_i \Delta Z_{t-i+1} + \varepsilon_t \quad (5.11)$$

$$\Delta Z_t = \alpha_0 + \gamma Z_{t-1} + \sum_{i=2}^p \beta_i \Delta Z_{t-i+1} + \varepsilon_t \quad (5.12)$$

$$\Delta Z_t = \alpha_0 + \alpha_2 t + \gamma Z_{t-1} + \sum_{i=2}^p \beta_i \Delta Z_{t-i+1} + \varepsilon_t \quad (5.13)$$

onde p é o número ótimo de defasagens a ser determinado empiricamente para cada variável do modelo a ser determinado. Os procedimentos e valores críticos

do teste (*DF*) são análogos ao teste (*ADF*), testando-se a hipótese nula de que $\gamma = 0$.

Vale salientar que os testes de raiz unitária ainda possuem baixo poder, com uma elevada probabilidade da ocorrência de erro tipo II, ou seja, (aceitação da hipótese nula quando ela deve ser rejeitada), sendo recomendado a inspeção visual através do correlograma.

Os resultados obtidos a partir dos testes Dickey-Fuller (*DF*) e Dickey-Fuller Aumentado (*ADF*) estão apresentados no quadro 5.4. Os testes foram realizados em três versões: sem constante, com constante e com constante e tendência. Partiu-se inicialmente de um número de cinco defasagens para cada variável, sendo feitas as devidas reduções e escolhendo-se aquela defasagem que minimiza o critério bayesiano de Schwarz (*SC*).

QUADRO 5.4: TESTE DE RAIZ UNITÁRIA DOS ATIVOS SELECIONADOS

Variáveis	I (0)		I (1)	
	Sem Tendência (*)	Com Tendência (**)	Sem Tendência (*)	Com Tendência (**)
	<i>DF</i>	<i>ADF</i> (5)	<i>DF</i>	<i>ADF</i> (5)
Ibovespa Futuro	-10,023	-4,776	—	—
Ibovespa	-9,379	-5,240	—	—
Ouro Futuro	-15,926	-3,824	—	—
Dólar Futuro	-11,398	-4,937	—	—
Boi Gordo Futuro	-6,152	-2,976	-14,989	-4,248
Dólar	-7,689	-4,232	—	—

Através do quadro supracitado, é fácil notar que os resultados obtidos levam à aceitação da hipótese nula de não estacionaridade para a variável: Boi

* Valores Críticos para as estatísticas *DF* e *ADF*: 5% = -2,893 e 1% = -3,502.

** Valores Críticos para as estatísticas *DF* e *ADF*: 5% = -3,459 e 1% = -4,06.

Gordo cotado no mercado futuro, ao nível de significância de 5%; ou seja, tal variável pode ser considerada, a princípio, integrada de primeira ordem ou $I(1)$, uma vez que necessita sofrer uma diferenciação para ser induzida a estacionaridade.

5.6. Os Métodos de Previsões Econométricos

Os métodos de previsão utilizados têm por finalidade estabelecer previsões prospectivas n -passos à frente, com base nos dados das cotações das taxas de retorno dos ativos negociados nos mercados à vista e futuro brasileiro.

Os métodos de previsão adotados neste trabalho são dois: a classe de Modelos Autoregressivos Integrados de Médias Móveis ou *ARIMA*, além das técnicas de regressão lineares dinâmicas tradicionais, onde se leva em consideração a modelagem das variáveis pré-selecionadas de acordo com a metodologia conhecida por "the General to Specific" (geral para o específico) da Escola de Economia de Londres (*London School of Economics*). Os dois modelos mencionados anteriormente podem ser abordados de forma genérica nas sub-seções seguintes:

5.6.1. A Classe de Modelos *ARIMA*

Os modelos *ARIMA* possuem a característica de relacionar os valores correntes de determinada variável somente com seus próprios valores no passado e com os seus erros correntes e passados, sendo chamados de modelos de séries temporais univariados.

Os modelos *ARIMA* resultam da combinação de três componentes que também são chamados de filtros: o componente autoregressivo (*AR*), o filtro de Integração (*I*) e o componente de médias móveis (*MA*).

Os modelos (*AR*) exploram a estrutura de autocorrelação do processo gerador da série temporal. As autocorrelações existem quando se observa a presença de correlação entre observações de determinada série temporal. Logo, o processo autoregressivo generalizado que contemple (*p*) edições de correlação entre observações sucessivas da série, ou seja, *AR(p)* pode ser descrito matematicamente como:

$$\dot{Y}_t = \phi_1 \cdot \dot{Y}_{t-1} + \phi_2 \cdot \dot{Y}_{t-2} + \dots + \phi_p \cdot \dot{Y}_{t-p} + e_t \quad (5.14)$$

Veja que a partir da série temporal (Y_t), são estimados os parâmetros (ϕ_p) do modelo a ser formulado e avalia-se posteriormente o comportamento dos resíduos do modelo (e_t).

O modelo denominado de Médias Móveis (*MA*) procura explorar a estrutura de autocorrelação dos resíduos da previsão. Tal autocorrelação é verificada sempre que existir uma correlação entre erros sucessivos em uma determinada série temporal. A expressão que contempla um processo de média móvel de ordem (q), ou seja, *MA*(q) pode ser vista matematicamente como segue:

$$\hat{Y}_t = \mu - \theta_1 \cdot e_{t-1} - \theta_2 \cdot e_{t-2} - \dots - \theta_q \cdot e_{t-q} + e_t \quad (5.15)$$

Onde a variável (μ) é o nível do processo, ($\theta \cdot e_{t-i}$) são os termos de erros correlacionados e (e_t) é o termo de erro aleatório. Observe que os termos erros correlacionados recebem sinal negativo por convenção. É fácil notar ainda que os parâmetros designados por (θ_i) funcionam como pesos de importância atribuídos aos termos erros correlacionados. A incorporação dos termos erros na respectiva expressão tem por finalidade melhorar a força explanatória do modelo (5.15).

Além disso, os modelos de séries temporais que descrevem processos mistos, cujos termos são autoregressivos e de médias móveis de ordem (p) e (q) podem ser vistos como sendo um modelo *ARMA* do tipo (p, q). Nesses modelos, o parâmetro (p) indica a ordem do componente autoregressivo, enquanto o

parâmetro (q) mostra a ordem do componente de média móvel. O modelo *ARMA* (p, q) pode ser expresso matematicamente da seguinte forma:

$$\hat{Y}_t = \phi_1 \cdot \hat{Y}_{t-1} + \phi_2 \cdot \hat{Y}_{t-2} + \dots + \phi_p \cdot \hat{Y}_{t-p} - \theta_1 \cdot e_{t-1} - \theta_2 \cdot e_{t-2} - \dots - \theta_q \cdot e_{t-q} + e_t \quad (5.16)$$

Por fim, verifica-se que a estimação dos parâmetros do modelo (5.16) mostra-se complexa, o que demanda o auxílio de programas computacionais específicos. Já os modelos (5.14), (5.15) e (5.16), requerem estimativas preliminares da função de autocorrelação amostral (*FAC*) e da função de autocorrelação parcial (*FACP*) que podem mensurar o grau de estacionaridade das séries temporais.

HILL, GRIFFITHS e JUDGE (1999), mostram que tais modelos fornecem a possibilidade de realizar previsões acuradas, mesmo quando o modelo econômico não é previamente estabelecido. Neste caso, pode-se escolher determinado modelo de série temporal a partir das informações fornecidas pelo conjunto de dados, ao invés de elaborar o modelo de série temporal a partir de informações fornecidas tanto pela teoria, como pelos dados, tal como ocorre com os modelos econômicos convencionais.

5.5.2. O Modelo de Regressão Linear Dinâmica

Para o caso das estimações econométricas realizadas através do Método dos Mínimos Quadrados Ordinários (OLS), usa-se o mesmo método desenvolvido por DAVIDSON *et al.* (1978, p. 661-692), onde eles procuram modelar uma função consumo para o Reino Unido. Neste caso, parte-se de um modelo matemático especificado, onde se leva em consideração uma elevada estrutura de defasagens em todas as variáveis do modelo.

Nesse prisma, a avaliação diagnóstica desses modelos econométricos pode ser feita levando-se em conta a imposição de algumas restrições lineares no respectivo modelo, gradativamente, à luz dos testes *t-Student* e *F-Snadecor* determina-se um modelo simples (parcimonioso) e bem especificado a ser usado para fins de previsão.

Para MAKRIDAKIS *et al.* (1998), essa metodologia de previsão baseia suas previsões na extrapolação de características de observações passadas e no inter-relacionamento entre tais observações, fornecendo previsões acuradas, se o futuro apresentar um comportamento similar ao passado.

Os autores reportados anteriormente ainda salientam que apesar de boa parte dos métodos de previsão de séries temporais estarem calcados nas análises de observações das séries de interesse para a especificação de algum modelo que descreva tais observações, alguns procedimentos de previsão procuram

explicar o comportamento de uma série temporal pela evolução dos fenômenos observacionais de outras séries. Notadamente, esses modelos devem garantir todas as hipóteses de normalidade inferidas sobre o vetor de resíduos provenientes das estimações.

5.7. Os Resultados das Previsões Econométricas

O horizonte de previsão prospectiva (fora da amostra) dos ativos previamente selecionados será de 10 dias úteis. Este é o período de planejamento considerado satisfatório para que o administrador da carteira cotidianamente possa refazer as previsões econométricas e a revisão da carteira, caso haja algum tipo de choque endógeno ou exógeno.

Vale salientar que os parâmetros dispostos a seguir foram transformados através da metodologia de *Box-Cox*. Todavia, tais parâmetros necessitaram ser novamente transformados para a sua forma original, com o objetivo de se estabelecer as previsões fora da amostra (*ex-ante*).

5.7.1. O Modelo de Previsão das Taxas de Retorno dos Contratos Futuros do Ibovespa (F)

Uma vez que as variáveis desse modelo são estacionárias, valem os valores críticos tradicionais para o teste de *Wald*¹⁶, que foi utilizado para averiguar as reduções ou exclusões de variáveis do modelo econométrico.

Esse teste possui uma distribuição do tipo qui-quadrado com 04 graus de liberdade, sendo capaz de rejeitar a hipótese nula de que as primeiras diferenças, bem como as respectivas defasagens do modelo são conjuntamente nulas. Os resultados da equação dinâmica estimada encontram-se a seguir:

QUADRO 5.5: ESTIMAÇÃO DOS RETORNOS DOS CONTRATOS FUTUROS DO IBOVESPA (F)

Variáveis	Parâmetros	Erro-Padrão	t-Student	Significância	R ² Parcial
Constante	-0,51266	0,096110	-5,334	0,0000	0,2624
[Ibovespa (I)] _t	1,6425	0,041385	39,690	0,0000	0,9517
[Ibovespa Futuro (F)] _{t-1}	0,0986	0,024691	-3,994	0,0001	0,1663
R ² = 95,17%; DW = 1,83; σ = 0,0648879					

Veja que a variável que mais influencia o Ibovespa Futuro são os retornos do Ibovespa cotado no mercado à vista, obtendo um teste *t-student* calculado igual a 39,690, que comparado com o teste *t-student* tabelado igual a 2,00, acabou rejeitando a hipótese nula de que tal parâmetro é significativo estatisticamente ao nível de 5%, o que já era de se esperar, já que se trata da formação das

¹⁶ O teste Wald visa verificar a existência de um fator comum entre os parâmetros do modelo a ser estimado. A hipótese nula (H₀) a ser testada pressupõe a ocorrência da restrição $\alpha_1\beta_0 + \beta_1 = 0$ na equação dinâmica do tipo $Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 Y_{t-1} + \beta_0 X_t + \beta_1 X_{t-1} + \varepsilon_t$, baseando-se na distribuição qui-quadrado. Aceitando-se a hipótese nula, será a mesma coisa que assumir a presença de correlação serial no modelo, permitindo assim a aplicação do método de correção Cochrane-Orcutt (AR).

expectativas do referido índice de mercado. Ademais, obteve-se ainda os testes de validação dos parâmetros estimados do modelo econométrico, que podem ser vistos no quadro a seguir:

QUADRO 5.6: TESTE DIAGNÓSTICO DOS PARÂMETROS ESTIMADOS PARA O IBOVESPA FUTURO (F)

Testes Estatísticos	Valores Calculados	Significância
Autocorrelação Serial: AR 1 – 2	F (2; 78) = 0,33472	0,7166
Heteroscedasticidade Condicional: ARCH (1)	F (1; 78) = 1,9063	0,1714
Normalidade (Bera-Jarque): $\chi^2(2)$	1,2072	0,5468
Heteroscedastidade Residual: X_i^2	F (8; 70) = 0,8543	0,6096
Forma Funcional: Teste RESET de Ramsey	F (1; 80) = 3,6876	0,0584
Teste de Estabilidade dos Parâmetros: (CHOW)	F (10; 79) = 1,8278	0,0690

Todos os testes mostrados no quadro 5.6 evidenciam uma boa adequação dos parâmetros do modelo estimado através do método dos mínimos quadrados ordinários (OLS). O teste de autocorrelação serial, conhecido pela sigla (AR) aceitou a hipótese nula de não autocorrelação serial ao nível de significância de 5%.

Por outro lado, o teste ARCH (1) que testa a presença ou não de resíduos autocorrelacionados heteroscedásticos, bem como o teste (X_i^2) que visa avaliar a presença ou não de heteroscedasticidade dos resíduos, aceitaram a hipótese nula de que os resíduos provenientes do modelo estimado são homoscedásticos ao nível de significância de 5%.

Já o teste de normalidade conhecido como Bera-Jarque, segue uma distribuição do tipo qui-quadrado com dois graus de liberdade. Se o valor crítico ao nível de significância de 5% é igual a 5,99, aceita-se a hipótese nula de que a

distribuição dos resíduos do modelo estimado é gaussiana. Vale salientar, que o teste (*RESET*) de Ramsey também acabou aceitando a hipótese nula de que os parâmetros e variáveis estimadas possuem uma combinação linear.

5.7.2. O Modelo de Previsão das Taxas de Retorno do Ibovespa à Vista (*I*)

Para os valores estimados das taxas de retorno cotadas no mercado à vista, utilizou-se o Método dos Mínimos Quadrados Ordinários. Os resultados das equações estimadas encontram-se no quadro a seguir:

QUADRO 5.7: ESTIMAÇÃO DOS RETORNOS DO IBOVESPA (*I*)

<i>Variáveis</i>	<i>Parâmetros</i>	<i>Erro-Padrão</i>	<i>t-Student</i>	<i>Significância</i>	<i>R² Parcial</i>
Constante	2,2645	0,20742	10,917	0,0000	0,5984
[Ibovespa (<i>I</i>)] _{t-2}	-0,2135	0,10836	-1,971	0,0522	0,0463
Tendência	0,0020	0,00078	2,601	0,0111	0,0779
R ² = 10,07%; DW = 2,00; σ = 0,16993					

Veja que a variável que mais influenciou o Ibovespa cotado no mercado à vista foi a taxa de retorno do mesmo ativo, cotada em dois dias anteriores, mais especificamente a segunda defasagem, com o teste *t-student* sendo significativo ao nível de 5%. Ressalta-se, que ainda foram consideradas como variáveis significativas do modelo econométrico, a constante e a tendência determinística com um *t-Student* calculado igual a 10,917 e 2,601, respectivamente.

Foram calculados ainda os testes de validação do modelo econométrico. Tal como foram mencionados anteriormente, todos os parâmetros da variável

Ibovespa (*I*) foram devidamente transformados para a sua forma original, com o objetivo de se estabelecer as previsões fora da amostra. O teste diagnóstico dos parâmetros estimados pode ser visto no quadro 5.8 a seguir:

QUADRO 5.8: TESTE DIAGNÓSTICO DOS PARÂMETROS ESTIMADOS PARA IBOVESPA (*I*)

<i>Testes Estatísticos</i>	<i>Valores Calculados</i>	<i>Significância</i>
Autocorrelação Serial: AR 1 – 2	F (2; 78) = 0,7694	0,5738
Heteroscedasticidade Condicional: ARCH (1)	F (1; 78) = 0,0019	0,9654
Normalidade (Bera-Jarque): $\chi^2(2)$	0,95777	0,6195
Heteroscedasticidade Residual: X_i^2	F (4; 75) = 1,9138	0,1169
Forma Funcional: Teste RESET de Ramsey	F (1; 79) = 0,1586	0,6916
Teste de Estabilidade dos Parâmetros: (CHOW)	F (10; 80) = 1,1704	0,3230

Veja que os testes mostrados no quadro 5.8 mostram uma satisfatória adequação dos parâmetros do modelo estimado através do método dos mínimos quadrados ordinários (*OLS*). O teste de autocorrelação serial (*AR*) aceitou a hipótese nula de não autocorrelação serial ao nível de significância de 5%.

Por outro lado, o teste ARCH (1) que testa a presença ou não de resíduos autocorrelacionados heteroscedásticos de primeira ordem, bem como o teste (X_i^2) que visa avaliar a presença ou não de heteroscedasticidade dos resíduos, aceitaram a hipótese nula de que os resíduos provenientes do modelo estimado são homoscedásticos ao nível de significância de 5%.

Já o teste de normalidade conhecido como Bera-Jarque, segue uma distribuição do tipo qui-quadrado com dois graus de liberdade. Seu valor crítico ao nível de significância de 5% é igual a 5,99, aceitando-se a hipótese nula de que a distribuição dos resíduos dos modelos estimados também é gaussiana.

Finalmente, o teste (*RESET*) de Ramsey acabou aceitando a hipótese nula de que os parâmetros e variáveis estimadas para o modelo econométrico possuem uma combinação linear.

5.7.3. O Modelo das Taxas de Retorno dos Contratos Futuros do Ouro (O)

Estimou-se econometricamente as taxas de retorno dos contratos futuros do ouro valendo-se do Método dos Mínimos Quadrados Ordinários. Os resultados obtidos a partir das estimações econométricas mostram a significância estatística para as variáveis *dummy's* nas segundas, quintas e sextas-feiras, caracterizando-se pela existência de uma sazonalidade semanal desse ativo cotado no mercado futuro. O quadro a seguir mostra as estimações econométricas.

QUADRO 5.9: ESTIMAÇÃO DOS RETORNOS DOS CONTRATOS FUTUROS DO OURO (O)

Variáveis	Parâmetros	Erro-Padrão	t-Student	Significância	R ² Parcial
Constante	7,3563	0,64285	11,443	0,0000	0,6328
[Ouro (O)] _{t-1}	-0,72908	0,10337	-7,053	0,0000	0,3956
[Ouro (O)] _{t-2}	-0,31383	0,11393	-2,754	0,0074	0,0908
[Ouro (O)] _{t-5}	-0,19112	0,09923	-1,926	0,0578	0,0465
Segunda-Feira	-0,24821	0,10270	-2,417	0,0180	0,0714
Quinta-Feira	-0,24387	0,10631	-2,294	0,0246	0,0648
Sexta-feira	-0,32580	0,11163	-2,918	0,0046	0,1008
R ² = 45,66%; DW = 1,98; σ = 0,33352					

Veja no quadro 5.9 que as variáveis que mais influenciaram as cotações do Ouro no mercado futuro foram as suas taxas de retorno nas defasagens 01, 02

e 05 dias, além das variáveis *dummy* segunda-feira, quinta-feira e sexta-feira, valendo-se de estatísticas *t-student's* significativas ao nível de 5%.

Por outro lado, foram calculadas as estatísticas concernentes aos testes que validam o modelo formulado, diagnosticando com isso, a sua performance das estimativas. Esses testes podem ser vistos no quadro 5.10.

QUADRO 5.10: TESTE DIAGNÓSTICO DOS PARÂMETROS ESTIMADOS PARA O OURO (O)

Testes Estatísticos	Valores Calculados	Significância
Autocorrelação Serial: AR 1 – 2	F (2; 74) = 0,65748	0,5212
Heteroscedasticidade Condicional: ARCH (1)	F (1; 74) = 0,00567	0,9402
Normalidade (Bera-Jarque): $\chi^2(2)$	2,5473	0,2798
Heteroscedastidade Residual: X_i^2	F (9; 666) = 0,85434	0,6096
Forma Funcional: Teste RESET de Ramsey	F (1; 75) = 0,5699	0,2112
Teste de Estabilidade dos Parâmetros: (CHOW)	(10; 75) = 2,0248	0,0422

Veja a partir dos testes mostrados no quadro 5.10 que existe uma perfeita adequação do modelo econométrico através do método dos mínimos quadrados ordinários (OLS), de tal forma que as previsões sejam acuradas, tornando-se desse modo as decisões do gerenciador da carteira fidedignas.

5.7.4 O Modelo de Previsão das Taxas de Retorno dos Contratos Futuros do Dólar (Q)

As taxas de retorno dos contratos do dólar cotadas no mercado futuro também foram estimadas com base no método dos mínimos quadrados ordinários. Foram utilizadas como variáveis explicativas: as cotações do dólar no mercado à vista, as taxas de retorno do Ibovespa, além das variáveis *dummy's* para os dias

da semana. Os resultados das estimações econométricas podem ser visualizados no quadro 5.11 seguinte:

QUADRO 5.11: ESTIMAÇÃO DOS RETORNOS DOS CONTRATOS FUTUROS DO DÓLAR (Q)

<i>Variáveis</i>	<i>Parâmetros</i>	<i>Erro-Padrão</i>	<i>t-Student</i>	<i>Significância</i>	<i>R² Parcial</i>
[Dólar Futuro (Q)] _{t-1}	-0,31280	0,10850	-2,883	0,0051	0,0941
[Dólar Futuro (Q)] _{t-2}	-0,21106	0,10773	-1,959	0,0536	0,0458
[Dólar Futuro (Q)] _{t-3}	-0,22803	0,09960	-2,289	0,0247	0,0615
R ² = 16,07%; DW = 1,81; σ = 0,851481.					

Observe que o melhor modelo dinâmico encontrado para esta variável foi uma estrutura autoregressiva de terceira ordem ou *AR(3)*, cujo coeficiente de explicação para uma estimativa sem constante foi igual a 16,07%. Ressalta-se que nenhuma das variáveis *dummy's* diária, bem como as demais variáveis explicativas calculadas inicialmente e que não foram significativas estatisticamente, foram eliminadas durante o processo de estimação.

Por outro lado, os testes que diagnosticam as estimações dos parâmetros estocásticos encontram-se dispostos no quadro 5.12. Veja através do quadro seguinte que o modelo estimado fornece testes que não viesam as estimações lineares através do método dos mínimos quadrados ordinários.

QUADRO 5.12: TESTE DIAGNÓSTICO DOS PARÂMETROS ESTIMADOS PARA O DÓLAR FUTURO (Q)

Testes Estatísticos	Valores Calculados	Significância
Autocorrelação Serial: AR 1 – 2	F (2; 78) = 0,60915	0,5464
Heteroscedasticidade Condicional: ARCH (1)	F (1; 78) = 1,0214	0,3153
Normalidade (Bera-Jarque): $\chi^2(2)$	4,5836	0,1009
Heteroscedastidade Residual: X_i^2	F (6; 73) = 0,50614	0,8018
Forma Funcional: Teste RESET de Ramsey	F (1; 79) = 0,2706	0,5855
Teste de Estabilidade dos Parâmetros: (CHOW)	(10; 80) = 1,1465	0,2706

Observe com base no quadro 5.12 que é possível verificar a clara perfeição da adequação do modelo econométrico que foi estimado através do método linear dos mínimos quadrados ordinários (OLS). Todos os testes diagnósticos apontaram para estimativas de coeficientes não viesados e que fornecem uma boa capacidade preditiva.

5.7.5. O Modelo de Previsão das Taxas de Retorno do Dólar (D)

As estimativas das taxas de retorno do dólar cotadas no mercado à vista também foram pautadas na estrutura dinâmica de estimação linear de mínimos quadrados ordinários. Os resultados das equações estimadas podem ser vistos no quadro 5.13 a seguir:

QUADRO 5.13: ESTIMAÇÃO DOS RETORNOS DO DÓLAR (D)

Variáveis	Parâmetros	Erro-Padrão	t-Student	Significância	R ² Parcial
Constante	6,1917	1,26540	4,893	0,0000	0,2396
[Dólar (D)] _{t-1}	0,3009	0,08727	3,447	0,0009	0,1352
[Dólar (D)] _{t-2}	-0,1944	0,09006	-2,158	0,0341	0,0578
[Dólar (D)] _{t-3}	0,1545	0,08962	1,724	0,0887	0,0376
[Ibovespa (I)] _{t-1}	-1,1580	0,47417	-2,442	0,0169	0,0728
[Ibovespa (I)] _{t-4}	-1,9809	0,50795	-3,900	0,0002	0,1667
Sexta-Feira	-0,5162	0,23289	-2,216	0,0297	0,0607

R² = 40,28%; DW = 1,99; σ = 0,733092.

O quadro visto anteriormente revela a estimação das taxas de retorno do dólar cotadas no mercado à vista. Veja que essa variável possui três parâmetros autoregressivos de terceira ordem, além da variável Ibovespa que possui a primeira e quarta defasagens significativas estatisticamente ao nível de 5%.

Por outro lado, o modelo estimado consegue explicar de forma satisfatória cerca de 40,28% das variações das variáveis independentes, o que à primeira vista, indica um prenúncio de boas estimativas futuras para a variável preditiva. Além disso, a variável *dummy* diária para a sexta-feira foi significativa estatisticamente ao nível de 5%, com uma estatística *t-student* calculada de -2,22, sendo superior ao valor tabelado igual a 2,00.

Foram calculadas também todas as estatísticas que dizem respeito aos testes que validam o modelo econométrico formulado, diagnosticando deste modo, a boa performance das estimações econométricas. Os testes de validação do respectivo modelo podem ser vistos no quadro 5.14:

QUADRO 5.14: TESTE DIAGNÓSTICO DOS PARÂMETROS ESTIMADOS PARA O DÓLAR (D)

Testes Estatísticos	Valores Calculados	Significância
Autocorrelação Serial: AR 1 – 2	F (2; 74) = 0,00884	0,9912
Heteroscedasticidade Condicional: ARCH (1)	F (1; 74) = 0,00957	0,9223
Normalidade (Bera-Jarque): $\chi^2(2)$	4,5763	0,1015
Heteroscedasticidade Residual: X_i^2	F (11; 64) = 4,0652	0,0002
Forma Funcional: Teste RESET de Ramsey	F (1; 75) = 0,4076	0,5251
Teste de Estabilidade dos Parâmetros: (CHOW)	(10; 76) = 2,1425	0,0309

Veja a partir dos testes mostrados no quadro 5.14 que aparentemente parece existir uma perfeita adequação do modelo econométrico através do método dos mínimos quadrados ordinários (OLS). Contudo, o teste de heteroscedasticidade residual (X_i^2) revelou a presença dessa anomalia na distribuição dos resíduos do modelo estimado.

Tentou-se ainda utilizar outra transformação na variável dependente, mas não foi obtido êxito no desaparecimento dessa anomalia, nem tampouco foram obtidas melhores estimações, optando-se por validar o respectivo modelo.

5.7.6. O Modelo de Previsão das Taxas de Retorno dos Contratos Futuros do Boi Gordo (B)

Para as estimativas dos parâmetros estocásticos dos retornos dos contratos futuros de Boi Gordo utilizou-se a classe de Modelos Autoregressivos Integrados de Médias Móveis (ARIMA) que fornecem estimativas não viesadas, valendo-se do método de estimação não linear de máxima verossimilhança. Os valores dos parâmetros previstos encontram-se no quadro 5.15.

QUADRO 5.15: ESTIMAÇÃO DOS RETORNOS DO BOI GORDO FUTURO (B)

<i>Parâmetros</i>	<i>Estimativas</i>	<i>Erro-Padrão</i>	<i>t-Student</i>	<i>Significância</i>
$p(1)$	-0,39018	0,108813	-3,58578	0,000543
$p(2)$	-0,35279	0,099888	-3,53190	0,000650
Omega (1)	0,55917	0,287644	1,94396	0,054989
Delta (1)	0,52785	0,202374	2,60830	0,010636
Omega (2)	-1,13666	0,321173	-3,53909	0,000635
Delta (2)	-0,48591	0,128598	-3,77853	0,000281
Modelo: (2, 1, 0); QMR = 0,17848.				

Com base nas estimações dispostas no quadro 5.15 foi possível estabelecer um modelo de previsão de séries temporais para os retornos dos contratos futuros do boi gordo cotado na BM&F. O modelo avaliado através das funções de autocorrelação amostral e parcial que melhor se adaptou aos dados históricos foi um ARIMA do tipo (2, 1, 0), com intervenções gradual/permanente na trigésima segunda e trigésima quinta observação, que acabaram sendo significativas estatisticamente aos níveis de 5% e 1%, respectivamente.

Tal como foram analisadas as estimações anteriores, observou-se o comportamento dos resíduos no que tange à normalidade da distribuição. Para isso, o teste de normalidade de Bera-Jarque foi aplicado, e constatou-se que os resíduos provenientes das estimações do modelo de séries temporais se comportam como uma curva de sino.

5.8. As Previsões dos ativos Seleccionados Fora da Amostra (Ex-Ante)

A modelagem das variáveis previamente seleccionadas deve ser feita com determinado grau de confiabilidade, mesmo sabendo que sempre haverá certo grau de incerteza ou risco associados à escolha de determinada decisão. Assim, cabe ao gestor das carteiras, buscar informações adicionais sobre componentes considerados essenciais dos modelos apresentados, reduzindo-se, por conseguinte, o grau de incerteza, de tal sorte que o investidor potencial possa discernir as vantagens e as desvantagens de uma opção sobre as demais.

Para MOTTA e CALÔBA (2002), algumas vezes é necessário decidir entre investimentos com maiores ou menores graus de incerteza, a qual se origina estimativas e previsões de futuros acontecimentos. Tais incertezas não invalidam as análises das alternativas entre os diversos ativos e/ou portfólios, mas devem ser de alguma forma consideradas para assegurar a tomada de decisão consciente e com qualidade.

Logo, as análises de investimentos realizados em carteiras a serem otimizadas, necessitam de várias estimativas, através de estatísticas e previsões econométricas. A qualidade das decisões a serem tomadas deve ser avaliada por comparações entre as previsões e os fatos que realmente aconteceram, observando a partir disso, a avaliação dos pontos fortes e fracos na política empregada pelos gestores para a aplicação do capital alheio.

Nesse sentido, diversas técnicas de modelagem de séries temporais vêm sendo utilizadas e algumas vezes adaptadas por diversas instituições financeiras, com o objetivo de se estabelecer previsões de curto e longo prazos, dando respaldo ao gestor da carteira para que ele possa tomar algum tipo de decisão.

Os profissionais que comumente operam com elevado grau de incerteza sobre decisões que afetarão o futuro, procuram aprimorar continuamente as decisões tomadas, aumentando a sua capacidade de resposta e reduzindo os riscos envolvidos nos negócios efetuados. Os acertos ou erros de determinada previsão poderão determinar o fracasso ou sucesso no fechamento de uma negociação.

Assim, foram estabelecidas 10 previsões fora da amostra (*ex-ante*) das séries temporais analisados, com base no método dos mínimos quadrados ordinários e da classe de modelos *ARIMA*. O quadro a seguir evidencia os valores de tais previsões fora da amostra:

QUADRO 5.16: PREVISÕES EX-ANTE DOS ATIVOS FINANCEIROS SELECIONADOS EM (%)

Períodos	Ibovespa Futuro	Ibovespa	Ouro Futuro	Dólar Futuro	Dólar	Boi Gordo Futuro
t+1	1,01934	1,24330	-2,27570	2,16608	0,27772	0,01674
t+2	-1,34890	1,87370	-2,31219	1,80161	0,13610	0,06030
t+3	0,83672	1,65250	-1,19220	0,19793	-1,05342	0,07300
t+4	4,08635	2,14140	1,97419	-0,22840	0,21649	0,01058
t+5	0,95223	1,74890	-1,48636	0,98656	0,16502	0,08850
t+6	-3,98042	-0,11330	-1,90883	0,43183	0,87077	0,08370
t+7	3,47053	1,66850	0,38623	-0,50158	-0,40257	0,09170
t+8	0,46493	2,70980	3,04577	-0,34614	-0,95323	0,09030
t+9	2,43508	0,22120	-0,49383	0,20115	0,30705	0,08800
t+10	-1,32772	1,86860	-0,92379	0,72741	0,12813	0,08940

Para estabelecer as previsões visualizadas anteriormente, foi necessário transformar novamente os parâmetros estimados para a sua base original, dado que algumas variáveis foram transformadas através da metodologia de *Box-Cox*.

Veja que a variável que apresentou maior variabilidade nas taxas de retorno foi o Ibovespa futuro, com um valor previsto mínimo de $-3,98\%$ na sexta previsão e um valor máximo para a taxa de retorno de $4,09\%$ para a quarta previsão. Alternativamente, as previsões consideradas mais estáveis foram as cotações das taxas de retorno dos contratos de Boi Gordo da BM&F.

Finalmente, todas as previsões *ex-ante* das taxas de retornos dos ativos previamente selecionados foram consideradas estáveis através do teste *CHOW* e servirão de base para que o gestor de carteiras possa formular os portfólios a serem otimizados no capítulo subsequente.

CAPÍTULO VI

6. O MODELO ESTOCÁSTICO DE OTIMIZAÇÃO DE CARTEIRAS COM A INCORPORAÇÃO DA ASSIMETRIA: UMA APLICAÇÃO NO MERCADO FUTURO BRASILEIRO

6.1. Introdução

Este capítulo apresenta o modelo estocástico de otimização de carteiras com a inclusão de alguns custos de transação no mercado futuro brasileiro. Este modelo servirá como apoio para que os administradores de riscos possam gerenciar os recursos financeiros que lhes são entregues em função dos riscos incorridos nesse mercado.

A grande utilização de modelos de otimização de carteiras de investimentos financeiros chamados de determinísticos pressupõe a ocorrência de um único estado para as variáveis, isto é, as variáveis envolvidas podem assumir apenas um único valor, sendo este valor perfeitamente conhecido. Não obstante esses modelos continuaram sem sofrer grandes modificações até o final da década de 70. Somente na década de 80, começa a ganhar força o uso de modelos mais sofisticados baseados em análises estatísticas e/ou econométricas, incorporando, por conseguinte, o parâmetro de mensuração de risco, que até então era ignorado.

A evolução das modernas técnicas de otimização de carteiras, aliado aos inovadores modelos de gerenciamento de riscos nos anos 90, levou diversos

investidores a buscar em métodos que fossem capazes de aumentar a riqueza financeira dos agentes econômicos, o que acabou contribuindo com a performance dos gestores de carteiras e conseqüentemente com a maximização da riqueza esperada.

Este capítulo encontra-se estruturado em seis seções. A segunda seção tece breves considerações sobre a série de expansão de *Taylor*. A quarta seção fala sobre os custos de transação a serem considerados no modelo. A quinta seção mostra algumas considerações acerca do processo de simulação a ser usado no algoritmo de otimização. Finalmente, a sexta seção mostra os cenários obtidos a partir das carteiras otimizadas.

6.2. A Série de Expansão de *Taylor*

Alguns manuais de matemática mostraram que o valor de uma função, quando sua entrada aleatória estiver próxima de sua média, pode ser aproximada por termos que são relacionados ao valor esperado da entrada aleatória de expansão em uma série de Taylor.

Normalmente, o problema de determinado investidor individual é o de maximizar a utilidade esperada do valor da renda ao final de um período de planejamento e, não somente maximizar a utilidade. Assim, cabe proceder ao uso da expansão em séries de Taylor em cada forma funcional de cada função utilidade a ser exposta.

Ao tomar a decisão para a realização de determinado investimento, o agente econômico investe em ativos considerados arriscados, caso ele não seja avesso ao risco, e defronta-se com distribuições de probabilidades onde contém vieses de alta e de baixa. Pode-se observar que a sua decisão acerca deste investimento dependerá *a priori* do conhecimento de todos os momentos estatísticos, de tal modo que *a posteriori* ele efetivamente possa conhecer o formato exato de tal distribuição.

Neste caso, o valor de uma função $f(X)$ pode ser maximizado ou minimizado, a depender do caso, através de uma série de Taylor sobre um ponto fixo qualquer, diga-se $X = k$, onde a expansão pode ser descrita da seguinte forma:

$$f(X) = f(k) + f'(k)(X - k) + \frac{f''(k)(X - k)^2}{2!} + \frac{f'''(k)(X - k)^3}{3!} + \dots + \frac{f^{(n)}(k)(X - k)^n}{n!} + R_n \quad (6.1)$$

Onde R_n é chamado de resto após (n) termos expandidos. Contudo, é necessário que a série expandida seja convergente; para isso $(R_n \rightarrow 0)$ quando $n \rightarrow \infty$. Cabe salientar, que qualquer função diferenciável poderá ser expandida em uma série de Taylor; contudo, se a função for *infinitamente* diferenciável, tal série poderá ser expandida em uma série infinita de termos; contrariamente, se tal função for finitamente diferenciável, essa série terá um número finito de termos.

Para LEVY & SARNAT (1972), as funções de Taylor se adaptam melhor para séries cuja distribuição se comportem como uma normal ou que não

possuam grandes variações. Se uma função utilidade for expandida por uma série de Taylor num ponto, ou seja, $[W + E(r)]$, onde $E(r)$ é o valor esperado de uma distribuição da variável aleatória, então $U'[W + E(r)]$ pode ser vista como a primeira derivada da função utilidade no ponto $[W + E(r)]$, ou seja:

$$U(W+r) = U[W+E(r)] + U'[W+E(r)][W+r-(W+E(r))] + \frac{U''[W+E(r)]}{2!} [W+r-(W+E(r))]^2 + \frac{U'''[W+E(r)]}{3!} [W+r-(W+E(r))]^3 + \frac{U''''[W+E(r)]}{4!} [W+r-(W+E(r))]^4 + \dots \quad (6.2)$$

Logo, pode-se obter a seguinte expressão matemática:

$$U(W+r) = U[W+E(r)] + U'[W+E(r)][r-E(r)] + \frac{U''[W+E(r)]}{2!} [r-E(r)]^2 + \frac{U'''[W+E(r)]}{3!} [r-E(r)]^3 + \frac{U''''[W+E(r)]}{4!} [r-E(r)]^4 + \dots \quad (6.3)$$

Dado a racionalidade do investidor individual, este procurará otimizar as taxas de retornos dos seus investimentos selecionados, procurando maximizar a sua função utilidade esperada, reescrevendo $E[U(W+r)]$ tal como pode ser visto a seguir:

$$E[U(W+r)] = U'[W+E(r)] + \frac{U''[W+E(r)]}{2!} \cdot \sigma^2 + \frac{U'''[W+E(r)]}{3!} \cdot A_3 + \frac{U''''[W+E(r)]}{4!} \cdot K_4 + \dots \quad (6.4)$$

Onde (σ^2) é a variância da distribuição das taxas de retorno de determinado investimento financeiro. Já o parâmetro (A_3) é o terceiro momento central da distribuição, chamado de assimetria. Por outro lado, (K_4) pode ser visto como o quarto momento estatístico da distribuição e assim por diante.

Assim, a série de expansão de Taylor servirá de base para a incorporação dos efeitos da assimetria nas taxas de retorno dos ativos a serem avaliados nas seções subseqüentes.

6.3. Os Custos de Transação do Modelo

Os administradores de carteiras, na maioria das vezes, são atingidos pelos custos de transação que variam de acordo com as suas estratégias estabelecidas na aplicação de determinado investimento financeiro sob condições de risco e incerteza.

O conceito de custo de transação originalmente usado por DEMSETZ (1968) e que também será utilizado neste trabalho, refere-se às comissões pagas para corretores efetuarem as ordens e, principalmente, à diferença entre preços ofertados para compra e preços perdidos para venda (*bid-ask spread*), que é um indicador de liquidez do mercado.

BERNSTEIN & DAMODARAN (2000), caracterizam os custos de transação como o diferencial entre o preço que prevalecerá na ausência de determinado negócio. Infelizmente, a própria operação entre os agentes

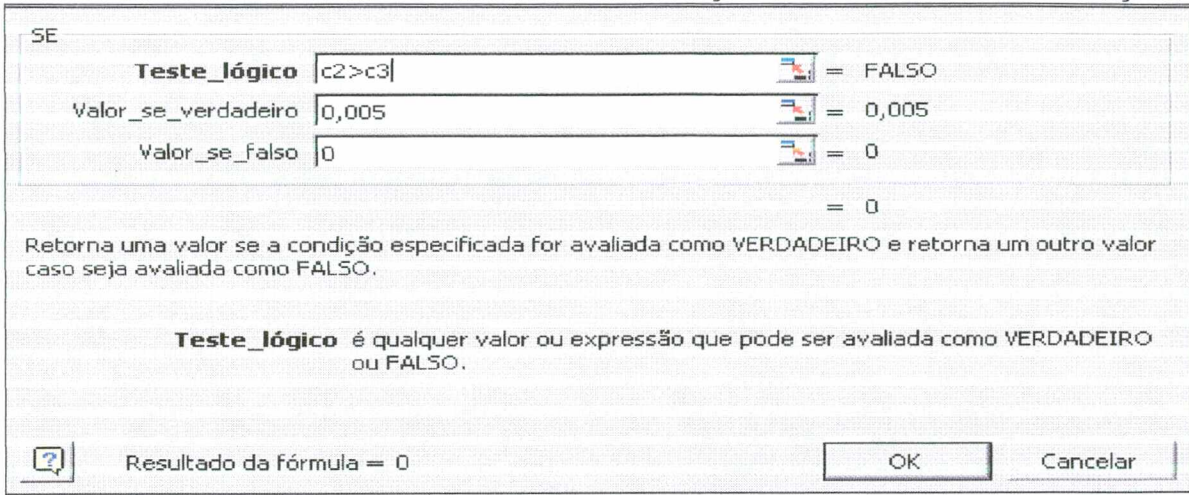
econômicos acaba impedindo a informação sobre os preços, fazendo com que não permita mensurar de forma acurada os custos de transação. O quadro 6.1 mostra os custos de transação a serem levados em consideração durante o processo de otimização da carteira formulada.

QUADRO 6.1: CUSTOS DE TRANSAÇÃO A SEREM LEVADOS EM CONSIDERAÇÃO

Ativos Selecionados	Alguns Custos de Transação da BM&F
1. Ibovespa Futuro	1. CPMF: 0,38% 2. Taxa de Operação Básica (TOB): 0,25% 3. Taxas da Bolsa: 2,93% da TOB
2. Ouro Futuro	1. CPMF: 0,38% 2. Taxa de Operação Básica (TOB): 0,25% 3. Taxas da Bolsa: 6,32% da TOB
3. Dólar Futuro	1. CPMF: 0,38% 2. Taxa de Operação Básica (TOB): 0,12% 3. Taxas da Bolsa: 1,20% da TOB
4. Boi Gordo Futuro	1. CPMF: 0,38% 2. Taxa de Operação Básica (TOB): 0,30% 3. Taxas da Bolsa: 6,32% da TOB
5. Dólar	1. CPMF: 0,38%

Vale salientar, que todos os custos de transação dispostos anteriormente serão inseridos na planilha eletrônica excel através da função lógica (SE), sendo então deduzidos dos ganhos obtidos *durante* o processo de otimização da carteira. A seguir, encontra-se a caixa de diálogo a ser utilizada na planilha eletrônica Excel.

FIGURA 6.1: CAIXA DE DIÁLOGO PARA A INCORPORAÇÃO DOS CUSTOS DE TRANSAÇÃO.



Por fim, a caixa de diálogo servirá de base para a incorporação dos custos de transação a partir da planilha eletrônica excel. Vale salientar, que as deduções dos rendimentos financeiros serão efetuadas à medida que ocorram mudanças nas variáveis de controle – proporções a serem aplicadas na carteira – de um período para o outro, reduzindo-se assim a riqueza esperada do investidor.

6.4. A Simulação do Vetor de Riqueza do Algoritmo de Otimização

O uso da simulação permite que os pesquisadores que utilizam essa técnica possam fazer manipulações que seriam inviáveis caso o sistema analisado fosse real, em função dos custos incorridos ou mesmo da impossibilidade de realizá-las. A simulação usada nesse trabalho serve de arcabouço para delinear

novas políticas e regras de decisão para o claro entendimento do algoritmo de otimização de carteiras a ser proposto.

Um dos métodos mais utilizados no processo de simulação é conhecido como Método de Monte Carlo (*MMC*), que opera modelos estatísticos de modo a lidar experimentalmente com variáveis descritas por funções probabilísticas. COSTA e AZEVEDO (1996), mostram que esse método pode ser visto como uma técnica de amostragem artificial, de tal forma que se possa executar numericamente, sistemas complexos que tenham componentes aleatórios.

Essa metodologia, muito utilizada na área de finanças, consiste em simular eventos futuros em um computador, alimentando-o com um modelo que leva em consideração as medidas de sensibilidade e a distribuição das variáveis. Nesse contexto, são realizadas diversas simulações onde, em cada uma delas, são gerados valores aleatórios do modelo que estão sujeitos à incerteza. Tais valores aleatórios gerados seguem distribuições de probabilidade específicas que devem ser identificadas ou estimadas previamente. Essa técnica visa simular caminhos para a evolução de um fenômeno até encontrar uma aproximação satisfatória que o explique.

SILVA NETO (1996, p. 198), destaca que o *MMC* baseia-se num conceito estatístico relativamente simples, onde a sua implementação leva em conta três etapas:

1ª Etapa: nessa fase o computador escolhe ao acaso uma das variáveis do modelo, assume que esta variará aleatoriamente e simulará um grande número de

valores possíveis para ela, de acordo com uma distribuição estatística. No caso de haver interesse em estimar o valor futuro de determinado ativo, o computador escolherá ao acaso, por exemplo, a volatilidade, e o fará variar aleatoriamente dentro dos parâmetros previamente estabelecidos;

2ª Etapa: nessa etapa, o computador simulará o caminho que o ativo avaliado poderia percorrer, com a volatilidade variando estocasticamente. Obtém-se com isso o preço final teórico;

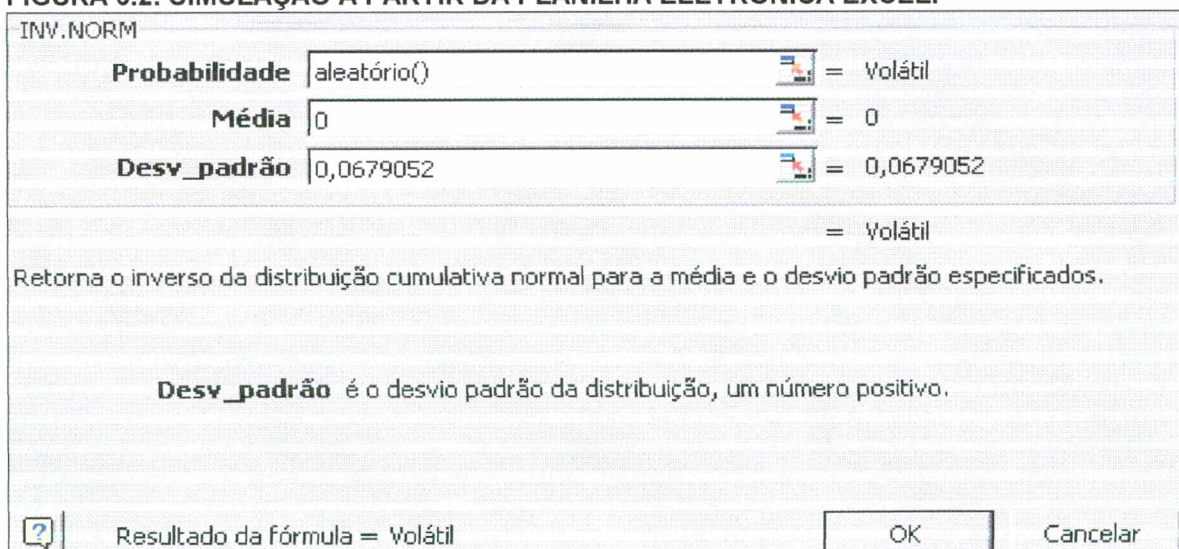
3ª Etapa: a última etapa consiste em repetir as duas primeiras etapas em um número suficiente de vezes, ou seja, cerca de 5.000, obtendo-se como resposta 5.000 preços finais do ativo estudado e, por consequência, a sua distribuição.

Neste trabalho, faz-se o uso do *MMC*, onde procura-se simular um vetor contendo cerca de 5.000 valores correspondentes à riqueza do investidor, gerados aleatoriamente, com base na distribuição de probabilidade Normal, e tendo como parâmetros de entrada do sistema o primeiro e o segundo momentos estatísticos. No caso da média (primeiro momento) o seu valor é considerado igual a zero, em razão da distribuição de probabilidade se basear numa Normal. Já o desvio-padrão (segundo momento) é calculado e inserido no sistema com base nas estimações das regressões econométricas. Estas, por sua vez, foram formuladas a partir de dados históricos dos ativos cotados no mercado futuro brasileiro.

Como resultados produzidos ao longo de todas as simulações, analisam-se estatisticamente os parâmetros de saída que serão as estatísticas descritivas e, a partir disso, incorpora-se posteriormente os parâmetros de interesse nas funções utilidade avaliadas, calculando-se, por conseguinte, o chamado *fator de correção* que será abordado na seção subsequente.

Todo o processo de simulação do vetor de riquezas aleatórias usando o MMC foi realizado através da planilha eletrônica Excel for Windows®. (Para tanto, procurou-se operacionalizar a geração aleatória desse vetor, baseando-se na função de busca e referência, fazendo o uso dos dígitos aleatórios expressos como: [= ALEATÓRIO()]}, além de utilizar a função {= INV.NORMAL [(Nº MATRIZ DE DADOS, COLUNA)]} que identifica o valor correspondente da função de probabilidade acumulada, tal como pode ser ilustrado na figura a seguir.

FIGURA 6.2: SIMULAÇÃO A PARTIR DA PLANILHA ELETRÔNICA EXCEL.



Finalmente, deve-se assegurar a aleatoriedade dos valores correspondentes às riquezas do investidor obtidos a partir de todo o processamento, que após a realização de n simulações, permita calcular as estimativas da distribuição. Notadamente, o Teorema Central do Limite revela que para um n considerado grande, ou seja, a média cujo $n \geq 30$ e o desvio-padrão amostrai cujo $n \geq 100$ tendem a convergir para a média e desvio padrão populacional.

6.5. O Algoritmo de Otimização de Carteiras

Vale destacar que um resultado comumente observado na teoria de controle ótimo é que, para um grande número de funções critério (objetivo) e linearidades nos sistemas de equações, acaba levando à igualdade entre caminhos ótimos determinísticos e estocásticos, uma vez que o valor esperado obtido a partir de uma solução estocástica é idêntico aos valores obtidos a partir de uma solução determinística.

THEIL (1964), chama a igualdade entre os caminhos ótimos determinísticos e estocásticos de *Princípio de Equivalência Certa*, que tem validade quando os erros são aditivos e os coeficientes são supostamente fixos. Tal equivalência é negada em sistemas não-lineares e, conseqüentemente, o controle de sistemas não-lineares é significativamente mais complicado.

CUTHBERTSON *et al.* (1992), também evidenciam não ser surpreendente que o procedimento de simplesmente ignorar o caráter estocástico de sistemas não-lineares tenha sido o culpado em produzir resultados duvidosos no processo de otimização. Esses sistemas são particularmente sensíveis às propriedades estocásticas, já que em diversos sistemas dinâmicos e não-lineares, a sua evolução através do tempo depende dos valores dos termos erro.

Nesse prisma, diversas simulações são realizadas com erros originários de uma geradora de números aleatórios, produzindo resultados para os caminhos ótimos diferentes dos resultados obtidos através da parte determinística (com erros supostamente nulos) do modelo estocástico. Para um maior esclarecimento acerca do algoritmo proposto, cabe descrevê-lo em sua forma original tomando-se como base STOPPLER (1979), onde considera a seguinte função critério:

$$E(C) = E \left[\sum_{i=1}^n (Y_i - Y_i^D)^2 \cdot G_i \right] \quad (6.5)$$

A expressão anterior, também chamada de função critério ou função objetivo, pode ser novamente formulada como segue:

$$E(C) = \sum_{i=1}^n \left\{ \sigma_i^2 + [E(Y_i) - Y_i^D]^2 \right\} G_i \quad (6.6)$$

Onde (σ_i^2) é a variância, enquanto as variáveis (Y_i) e (G_i) denotam os pesos ou ponderações a serem determinadas por especialistas da área. Vale salientar, que tais ponderações são análogas aos coeficientes de ponderação existentes na função utilidade cúbica mostrada no terceiro capítulo deste trabalho.

Assim, a função critério (6.6) será minimizada ou maximizada, a depender do caso, com vistas a produzir caminhos ótimos para as variáveis de controle e, conseqüentemente, as variáveis de estado. Por outro lado, os aspectos inerentes às linearidades e não-linearidades fazem com que $E(Y_i)$ difira da variável (Y_i) . Tal diferenciação é calculada através do *Fator de Correção (FC)*, que pode ser visto como a diferença entre o valor encontrado a partir da solução estocástica (Y_i^{STO}) e a solução determinística (Y_i^{DET}) , tal como segue:

$$FC = Y_i^{STO} - Y_i^{DET} \quad (6.7)$$

Onde $Y_i^{DET} = f_i(Y_{i-1}, X_i, Z_i, e)$, supondo que o valor de (e) é igual a zero.

Com isso, as variáveis podem ainda ser definidas como:

Y: variável de estado;

X: variável de controle;

Z: variável exógena;

e: vetor de resíduos.

Pode-se isolar o valor da variável (Y_i^{STO}) que representa o valor esperado de (Y_i), substituindo-o posteriormente na expressão (6.6), resultando na seguinte equação:

$$E(C) = \sum_{i=1}^n \left\{ \sigma_i^2 + [(Y_i^E + FC) - Y_i^{DET}]^2 \right\} G_i \quad (6.8)$$

O algoritmo proposto embasa-se em dois passos que podem ser descritos da seguinte forma:

1º Passo:

- Maximizar a função critério ou função objetivo, descrita através da expressão (6.8), considerando o fator de correção (FC), a variância e o vetor de resíduos iguais a zero, com o objetivo de encontrar as variáveis determinísticas de controle e de estado;
- Valendo-se das variáveis de controle otimizadas de forma determinística anteriormente, simula-se um vetor de resíduos (e), visando calcular $E(Y_i)$, bem como a $Var(Y)$. De posse desses valores, calcula-se o fator de correção (FC).

2º Passo:

- Uma vez encontrado o fator de correção (FC), além da respectiva variância, obtidos com base no primeiro passo, deve-se repetir a primeira etapa do primeiro passo. Assim, encontram-se novas variáveis de controle que foram otimizadas e que são análogas à otimização determinística;
- Com base nos valores determinísticos, faz-se necessário uma nova geração de um vetor de resíduos (e) com o objetivo de calcular novamente $E(Y)$, a nova variância, ou seja, $Var(Y)$ e o novo fator de correção (FC).

Todos os passos do algoritmo proposto se repetem até o instante em que as diferenças nas variáveis de estado, entre uma interação e outra, sejam mínimas. Vale salientar, que o processo de simulação do vetor de resíduos torna o sistema estocástico em condições para uma nova otimização. Caso o critério de parada não seja satisfeito, novas simulações e, por consequência, novas otimizações deverão ser processadas.

No caso do algoritmo de otimização a ser descrito nos parágrafos posteriores, cada estágio representará um dia de previsão das taxas de retorno. Como foram estabelecidas 10 previsões, tem-se então 10 estágios. Por outro lado, as variáveis de estado ou de controle são caracterizadas como as proporções a serem alocadas em cada ativo individualmente, enquanto que as funções objetivo a serem otimizadas serão as funções de utilidade previamente selecionadas.

Baseando-se em toda argumentação anterior, considere então um modelo de portfólio contendo duas equações e três ativos:

$$W_{t+1} = (1 + r_t \phi_t^A + r_t \phi_t^B + R \phi_t^C) W_t \quad (6.9)$$

e,

$$r_t = r_{t-1} + e_t ; \text{ Com: } t = 1, 2, 3, \dots, T \quad (6.10)$$

MERTON (1971) e TAPIERO (1988), mostram que a equação (6.10) é derivada da teoria de portfólio dinâmico. Os subscritos são os períodos de tempo, e:

r e R : são as taxas de retorno para ativos com e sem risco, respectivamente;

ϕ_t^A , ϕ_t^B e ϕ_t^C : as proporções a serem aplicadas nos ativos A , B e C ;

W_t : a riqueza no tempo t .

Veja através da expressão (6.10) que a taxa de retorno e risco dos ativos se comportam como um *Ruído Branco*. Vale ressaltar que este sistema comporta-se de forma não-linear, podendo ser demonstrado em um modelo de três períodos de tempo ($t = 1, 2, 3$). Assim, substituindo a expressão (6.10) em (6.9) e, substituindo-se recursivamente a expressão (6.9) nela mesmo, tem-se que:

$$W_3 = \{[1 + (r_0 + e_1 + e_2)\phi_2^A + (r_0 + e_1 + e_2)\phi_2^B + R\phi_2^C] \cdot [1 + (r_0 + e_1)\phi_1^A + (r_0 + e_1)\phi_1^B + R\phi_1^C]\} W_1 \quad (6.11)$$

Caso sejam ignoradas as características estocásticas da expressão (6.11) e assumindo que $e_1 = e_2 = 0$, tal expressão pode se reescrita de modo determinístico como segue:

$$W_3^{Det} = (1 + r_0\phi_2^A + r_0\phi_2^B + R\phi_2^C)(1 + r_0\phi_1^A + r_0\phi_1^B + R\phi_1^C)W_1 \quad (6.12)$$

Encontrando o valor esperado da expressão (6.11), e assumindo que:

$$E(e_t) = E(e_t e_{t-1}) = 0 \quad \text{e} \quad E(e_t^2) = \sigma_e^2 \quad (6.13)$$

Vê-se que a expressão (6.12) com: $e_1 = e_2 = 0$ sendo levado em consideração, pode ainda ser escrita da seguinte forma:

$$E(W_3) = W_3^{Det} + \sigma_e^2 \phi_2^A \phi_1^A + \sigma_e^2 \phi_2^B \phi_1^B \quad (6.14)$$

Veja que a partir do momento em que o número de períodos é inferior a três, as não linearidades passam a não existir. Assim, chama-se o terceiro termo da expressão (6.14) de fator de correção, também encontrado em SAMOBYL (1994) e em CUTHBERTSON *et al.* (1992, p. 241).

Não obstante, para sistemas estocásticos não lineares tratados como determinísticos, o exercício de controle ótimo passa a ser enganoso. Na maioria dos casos, até mesmo quando os sistemas de equações são simples, se esse fator de correção não for incorporado no procedimento do controle, os caminhos calculados podem tornar-se viesados, levando a resultados duvidosos.

O algoritmo proposto para o caso de otimização de carteiras que procura eliminar essas distorções de ordem operacional, encontra-se sumarizado no quadro a seguir:

QUADRO 6.2: O ALGORITMO DE OTIMIZAÇÃO DAS CARTEIRAS

PASSOS	INSUMO	PROCEDIMENTO	PRODUTO
1a.	Fator de Correção: $e = 0$ Assimetria = 0 $e = 0$ Variância ($r_t W_t$) = 0 Variância (W_{T+1}) = 0	Otimização	ϕ^S_t e ϕ^B_t Variância (W_t) W_{T+1}
1b.	Amostra simulada do passo 1a. ϕ^S_t e ϕ^B_t	Simulação do Vetor de Resíduos	$E(W_{T+1})$ Fator de Correção = $E(W_{T+1}) - (W_{T+1})$ Variância ($r_t W_t$) Variância (W_{T+1}) Assimetria
2a.	Fator de Correção Assimetria $e = 0$ Variância ($r_t W_t$) Variância (W_{T+1})	Otimização	ϕ^S_t e ϕ^B_t Variância (W_t) W_{T+1}
2b.	Amostra simulada do passo 2a.: ϕ^S_t e ϕ^B_t	Simulação do Vetor de Resíduos	$E(W_{T+1})$ Fator de Correção = $E(W_{T+1}) - (W_{T+1})$ Variância ($r_t W_t$) Variância (W_{T+1}) Assimetria
3a.	Tal como o passo 2a.		
3b.	Tal como o passo 2b.		
Até que o critério de parada ¹⁷ seja satisfeito. $ABS [\phi(\text{interação}) - \phi(\text{interação} - 1)] \cdot 0,01$			

Fonte: SAMOHYL (1994).

¹⁷ O critério convergência ou parada do algoritmo de otimização proposto leva em consideração, o fato de que as proporções a serem aplicadas no portfólio, de uma interação para outra, não se modifiquem.

Com base no algoritmo proposto no quadro 6.2, pretende-se testar diversas funções critério com o objetivo de otimizar as carteiras de ativos financeiros a serem formuladas, levando-se em conta os níveis de aversão ao risco por parte do investidor individual com vistas a captar os efeitos da incorporação do terceiro momento estatístico (assimetria) sobre a riqueza esperada do portfólio ao final do período de planejamento dessa carteira.

6.6. Os Cenários Obtidos a Partir das Carteiras Otimizadas

Os mercados futuros representam uma grande indústria que visa fornecer aos potenciais investidores diversos mecanismos de administração financeira, sendo um amplo leque de estratégias que podem ser usadas a depender dos objetivos traçados e do grau de aversão ou aceitação do risco por parte dos aplicadores.

Assim, o trabalho procura montar carteiras que se comportem segundo um perfil fixo de risco e retorno, sem ter quaisquer problemas específicos de liquidez que eventualmente ocorram no mercado acionário. Notadamente, as carteiras foram balanceadas com alguns ativos cotados nos mercados à vista e futuro, com a finalidade não somente de maximizar o retorno esperado das carteiras, como também de minimizar os riscos inerentes aos mercados futuros.

São considerados 03 cenários alternativos para as 03 funções utilidade a serem otimizadas, a saber: função utilidade cúbica, função utilidade exponencial e

a função utilidade cúbica proposta por Karl Borch, onde levam em conta os perfis do investidor quanto ao seu grau de aversão ao risco: *conservador* ou avesso ao risco, *moderado* ou indiferente ao risco e *agressivo* ou amante do risco.

Nesse contexto, parte-se da hipótese de que o investidor recorre a uma corretora qualquer, onde procura algum especialista no assunto que lhes oferece um leque de oportunidades de investimentos financeiros, traçando concomitantemente o seu perfil com relação ao risco. Munido dessas informações, o administrador de sua carteira de investimentos procurará destinar os seus dados cadastrais para uma corretora vinculada ao respectivo banco, onde esta por sua vez, irá alocar os seus recursos para aqueles ativos que são considerados mais atrativos. O quadro a seguir, sintetiza os resultados obtidos após o processo de otimização das carteiras com base na função utilidade cúbica.

QUADRO 6.3: RESULTADOS DO PROCESSO DE OTIMIZAÇÃO DAS CARTEIRAS COM BASE NA FUNÇÃO UTILIDADE CÚBICA

Função	Perfil do Investidor								
	AGRESSIVO			MODERADO			CONSERVADOR		
	$a = 1; b = -0,0008 \text{ e } c = 0,05$			$a = 1; b = -0,00075 \text{ e } c = 0,04$			$a = 1; b = -0,0007 \text{ e } c = 0,03$		
Cúbica	Ganho Esperado em 10 dias	Risco em 10 dias	Beta (β_p)	Ganho Esperado em 10 dias	Risco em 10 dias	Beta (β_p)	Ganho Esperado em 10 dias	Risco em 10 dias	Beta (β_p)
		16,365%	2,716%	4,026	7,940%	2,345%	1,698	1,331%	2,398%

Avaliando os perfis do investidor individual através do quadro 6.3 é fácil notar após o processo de otimização da função utilidade cúbica, que tal investidor caracterizado como agressivo obteve um ganho real líquido de cerca de 16,37%, negociando contratos no mercado financeiro brasileiro. Por outro lado, obteve em

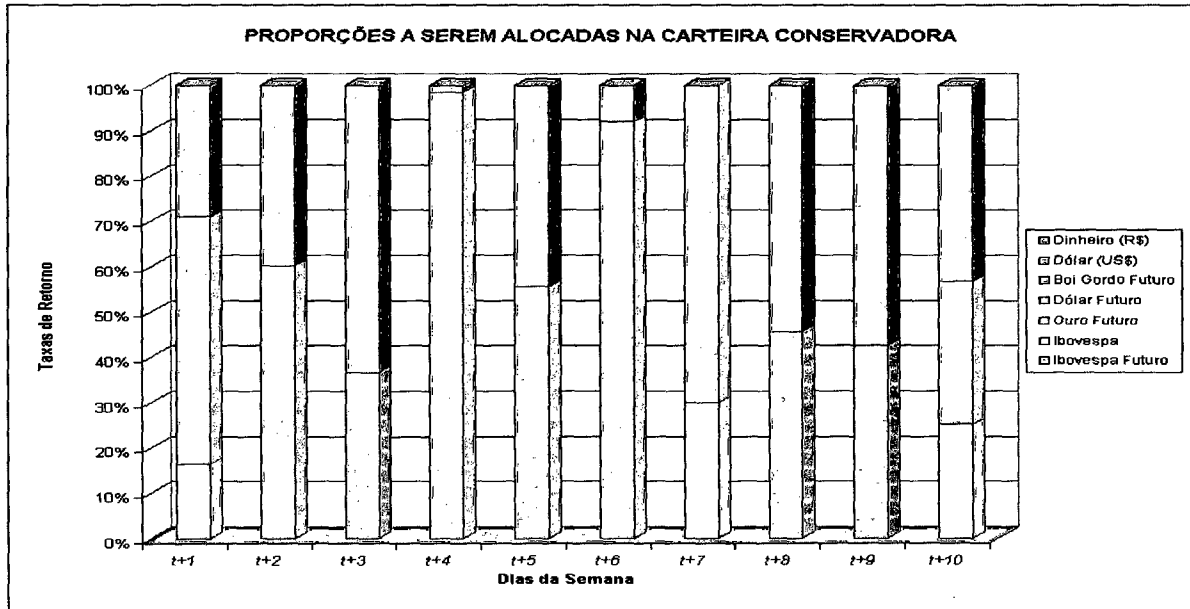
contrapartida, um risco mensurado em termos de desvio padrão de 2,716% e o coeficiente beta do período de planejamento da carteira foi igual a 4,026; ou seja, para cada movimento de cerca de 10% na carteira de mercado, tudo o mais mantido constante, a carteira agressiva desse investidor irá variar em torno de 40,26%.

Para o caso do investidor caracterizado com o perfil moderado ou indiferente ao risco, o ganho real líquido ao final do período de planejamento da carteira foi de 7,940%, tendo como risco medido através do desvio padrão cerca de 2,345%. Além disso, o coeficiente beta do portfólio otimizado foi igual a 1,698, podendo ser considerado um coeficiente mais característico de um investidor agressivo, porém situando-se num valor intermediário entre o beta conservador e o agressivo. O coeficiente beta pode ser interpretado da seguinte forma: para cada movimento em torno de 10% na carteira de mercado, tudo o mais mantido constante, a carteira moderada do investidor irá variar em cerca de 16,98%.

Por fim, a função utilidade cúbica foi usada para avaliar o comportamento frente ao risco do investidor conservador. A riqueza esperada obtida por esse investidor proporcionou um ganho real líquido igual a 1,331%, enquanto o risco desta carteira mensurada através do desvio padrão foi em torno de 2,398%. Já o coeficiente beta da carteira foi igual a 0,268, podendo ser avaliado como: para cada movimento de 10% nos retornos da carteira de mercado, a carteira conservadora irá variar em cerca de 2,68%, tudo mais mantido constante.

A figura a seguir ilustra o comportamento dos ativos financeiros da carteira conservadora formulada pelo respectivo gerenciador, com base na função utilidade cúbica.

FIGURA 6.3: OTIMIZAÇÃO DA CARTEIRA CONSERVADORA COM BASE NA FUNÇÃO UTILIDADE CÚBICA



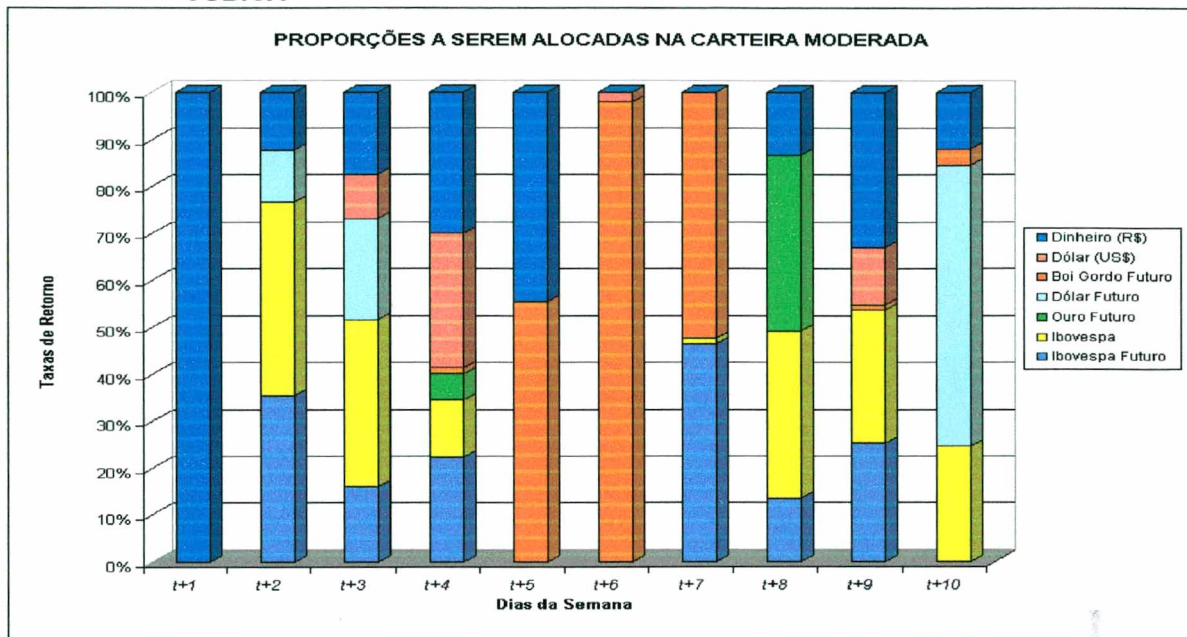
Nota-se no gráfico supracitado, que a maior parte dos recursos a serem empregados destinam-se para aqueles ativos considerados menos arriscados durante o período de planejamento da carteira. Notadamente, o ativo que deverá destinar maiores quantias de recursos será os contratos futuros de boi gordo negociados na Bolsa de Mercadorias e Futuros. O quadro 6.4 a seguir também resume o que foi relatado anteriormente.

QUADRO 6.4: PROPORÇÕES A SEREM ALOCADAS NA CARTEIRA CONSERVADORA COM BASE NA FUNÇÃO UTILIDADE CÚBICA

	Ibovespa Futuro	Ibovespa	Ouro Futuro	Dólar Futuro	Boi Gordo Futuro	Dólar (US\$)	Dinheiro (R\$)
t+1	0,00%	0,00%	0,00%	16,46%	54,55%	0,00%	29,00%
t+2	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	60,12%	0,00%	39,88%
t+3	36,55%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	63,45%
t+4	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	98,56%	0,00%	1,44%
t+5	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	55,55%	0,00%	44,45%
t+6	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	92,05%	0,00%	7,95%
t+7	0,00%	30,00%	0,00%	0,00%	70,00%	0,00%	0,00%
t+8	45,63%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	54,37%
t+9	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	42,54%	57,46%
t+10	0,00%	0,00%	0,00%	25,13%	31,56%	0,00%	43,31%

O gráfico a seguir ilustra o comportamento do investidor caracterizado como moderado. Veja que o gestor da carteira procura pulverizar os recursos empregados na aplicação, contemplando aqueles ativos que ele considera arriscados, como também os ativos que possuem baixo nível de risco, dado o perfil de indiferença do respectivo investidor com relação ao risco.

FIGURA 6.4: OTIMIZAÇÃO DA CARTEIRA MODERADA COM BASE NA FUNÇÃO UTILIDADE CÚBICA



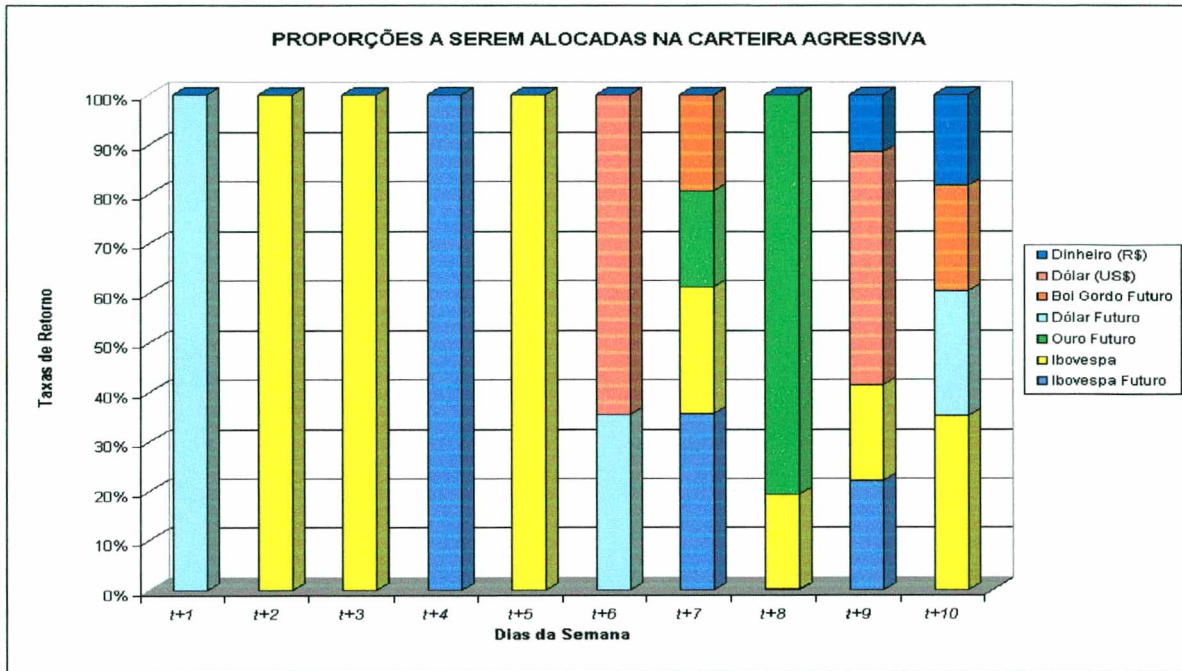
Veja a partir da figura 6.4, que os recursos são pulverizados de acordo com o nível de aversão ao risco por parte do investidor da carteira. O quadro 6.5 a seguir sumariza os resultados obtidos com base na função utilidade cúbica para esse investidor indiferente ao risco.

QUADRO 6.5: PROPORÇÕES A SEREM ALOCADAS NA CARTEIRA MODERADA COM BASE NA FUNÇÃO UTILIDADE CÚBICA

	Ibovespa Futuro	Ibovespa	Ouro Futuro	Dólar Futuro	Boi Gordo Futuro	Dólar (US\$)	Dinheiro (R\$)
<i>t+1</i>	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	100,00%
<i>t+2</i>	35,47%	41,24%	0,00%	11,12%	0,00%	0,00%	12,17%
<i>t+3</i>	16,00%	35,64%	0,00%	21,56%	0,00%	9,45%	17,34%
<i>t+4</i>	22,35%	12,13%	5,65%	0,00%	1,29%	28,65%	29,94%
<i>t+5</i>	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	55,55%	0,00%	44,45%
<i>t+6</i>	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	98,00%	2,00%	0,00%
<i>t+7</i>	46,42%	1,20%	0,00%	0,00%	52,38%	0,00%	0,00%
<i>t+8</i>	13,55%	35,64%	37,56%	0,00%	0,00%	0,00%	13,24%
<i>t+9</i>	25,23%	28,55%	0,00%	0,00%	1,02%	12,35%	32,84%
<i>t+10</i>	0,00%	24,59%	0,00%	60,00%	3,49%	0,00%	11,92%

Por fim, observa-se a partir da figura 6.5 que a maior parte dos recursos empregados são destinados para aqueles ativos considerados arriscados, já que o investidor possui um perfil caracterizado como agressivo, dado que esse agente econômico aceita assumir parcela do risco associado à carteira, caso seja recompensado por uma riqueza esperada mais elevada.

FIGURA 6.5: OTIMIZAÇÃO DA CARTEIRA AGRESSIVA COM BASE NA FUNÇÃO UTILIDADE CÚBICA



Através da figura 6.5, observa-se que parte significativa dos recursos empregados destina-se ao ativo Ibovespa, dado a sua grande volatilidade no mercado financeiro brasileiro. Cabe salientar, que em todas as carteiras otimizadas, os custos de transação correspondentes aos ativos cotados nos mercados à vista e futuro foram deduzidos durante o processo de otimização da carteira. Os resultados obtidos a partir do processo de otimização encontram-se resumidos no quadro 6.6.

QUADRO 6.6: PROPORÇÕES A SEREM ALOCADAS NA CARTEIRA AGRESSIVA COM BASE NA FUNÇÃO UTILIDADE CÚBICA

	Ibovespa Futuro	Ibovespa	Ouro Futuro	Dólar Futuro	Boi Gordo Futuro	Dólar (US\$)	Dinheiro (R\$)
t+1	0,00%	0,00%	0,00%	100,00%	0,00%	0,00%	0,00%
t+2	0,00%	100,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
t+3	0,00%	100,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
t+4	100,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
t+5	0,00%	100,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
t+6	0,00%	0,00%	0,00%	35,41%	0,00%	64,59%	0,00%
t+7	35,65%	25,58%	19,39%	0,00%	19,37%	0,00%	0,00%
t+8	0,00%	19,36%	80,62%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
t+9	22,15%	19,38%	0,00%	0,00%	0,00%	47,00%	11,46%
t+10	0,00%	35,26%	0,00%	25,17%	21,25%	0,00%	18,32%

Com base nos resultados obtidos a partir da otimização da função utilidade proposta por Karl Borch disposto no quadro 6.7, a riqueza esperada do investidor caracterizado como *agressivo* foi igual à R\$ 116.000,78, obtendo um ganho real líquido ao final do período de planejamento da carteira de 14,21%. Já o risco do portfólio nesse mesmo período foi de 2,42%, obtendo-se um coeficiente beta, que mede as variações dos ativos em relação às variações do mercado, igual a 4,379. Logo, para cada variação de 10% nas taxas de retorno de mercado, os retornos da carteira podem oscilar em torno de 43,79%, tudo mais mantido constante. Tais resultados podem ser evidenciados no quadro a seguir.

QUADRO 6.7: RESULTADOS DO PROCESSO DE OTIMIZAÇÃO DAS CARTEIRAS COM BASE NA FUNÇÃO UTILIDADE PROPOSTA POR KARL BORCH

Função	<i>Perfil do Investidor</i>								
	AGRESSIVO			MODERADO			CONSERVADOR		
	<i>a = 10,50</i>			<i>a = 3,52</i>			<i>a = 3,455</i>		
Karl Borch	Ganho Esperado em 10 dias	Risco em 10 dias	Beta (β)	Ganho Esperado em 10 dias	Risco em 10 dias	Beta (β)	Ganho Esperado em 10 dias	Risco em 10 dias	Beta (β)
		14,205%	2,42%	4,379	6,008%	1,88%	2,413	2,473%	2,23%

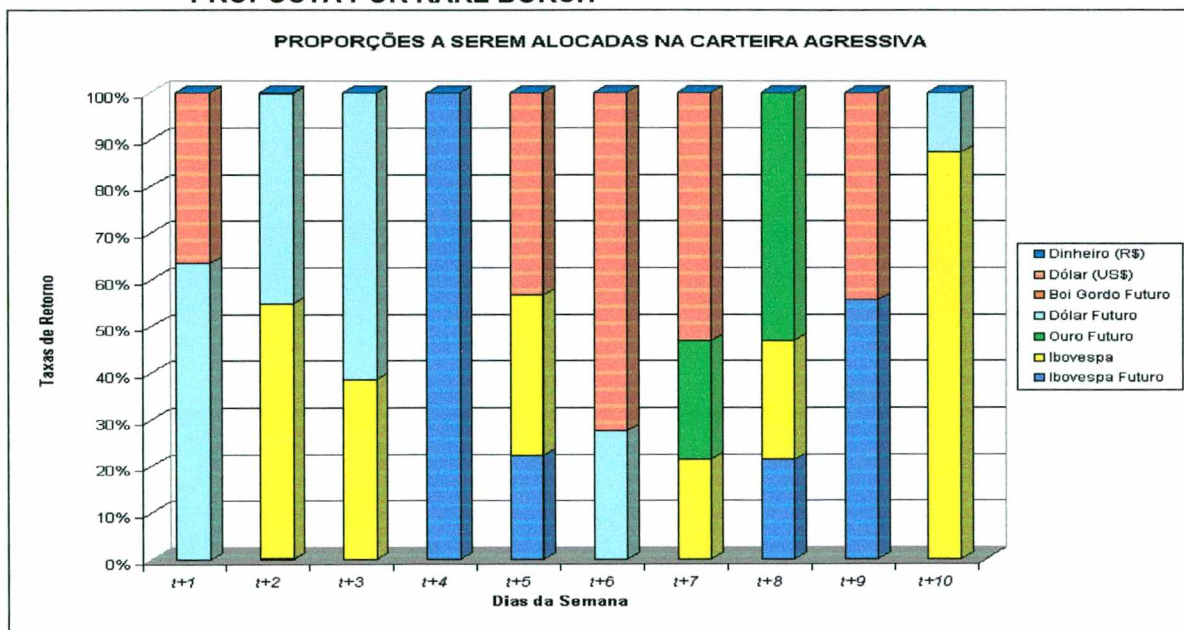
Por outro lado, ao analisar o potencial investidor caracterizado como indiferente ao risco ou similarmente que suporta um risco *moderado*, verifica-se que ele conseguiu obter ganhos de aproximadamente R\$ 107.000,08, o que equivale a um crescimento real líquido da sua riqueza esperada em torno de 6,01% durante o período de aplicação. Além disso, a carteira moderada encontrou um coeficiente beta igual a 2,413, que pode ser interpretado levando-se em conta o fato de que variações de 10% na carteira de mercado, os retornos da carteira moderada irão oscilar em torno de 24,13%, tudo mais mantido constante.

Enfim, na carteira otimizada para o potencial investidor caracterizado como conservador ou similarmente avesso ao risco, obteve-se uma riqueza esperada ao final do período de planejamento da carteira de R\$ 102.000,57. Em contrapartida, o investidor obteve um risco mensurado em termos de desvio padrão igual a 2,23%, além de um coeficiente beta da carteira em torno de 1,393. Tal coeficiente pode ser visto pelo gerenciador da carteira da seguinte forma: para cada oscilação de 10% nas taxas de retorno da carteira de mercado, tem-se como

resposta oscilações em torno de 13,93% na carteira conservadora, tudo o mais mantido constante.

Na figura seguinte visualiza-se o comportamento dos ativos financeiros da carteira conservadora formulada pelo respectivo gerenciador, tomando-se como base a função utilidade proposta por Karl Borch.

FIGURA 6.6: OTIMIZAÇÃO DA CARTEIRA AGRESSIVA COM BASE NA FUNÇÃO UTILIDADE PROPOSTA POR KARL BORCH



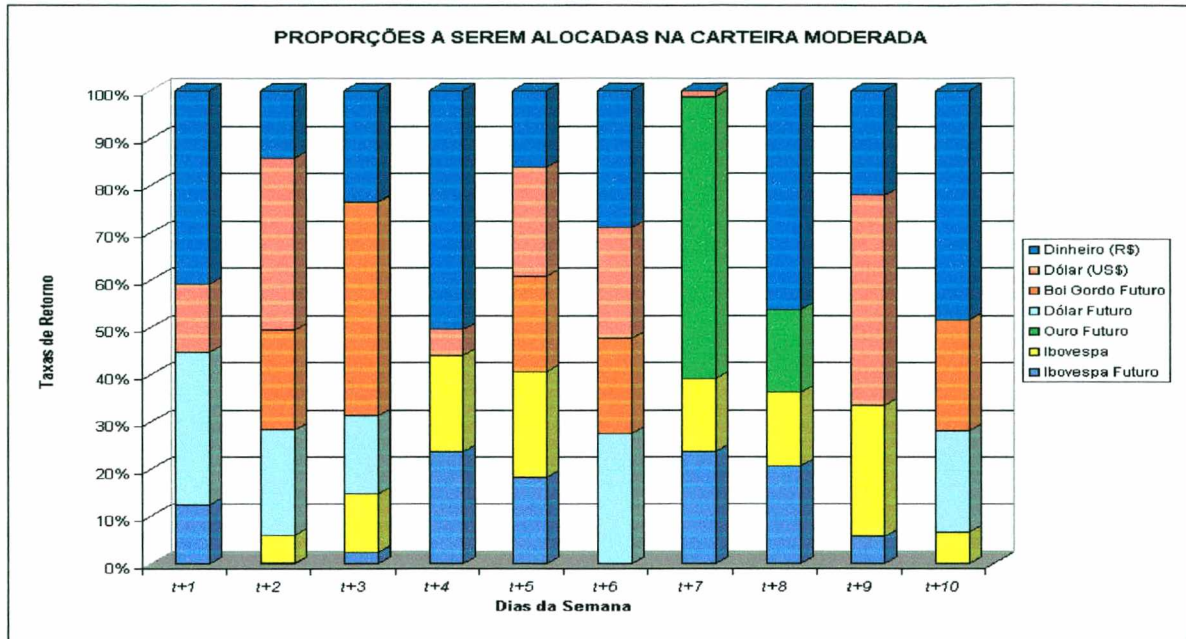
Veja na figura supracitada que o gestor da carteira otimiza a carteira agressiva através da função utilidade proposta por Karl Borch procurando alocar a maior parte dos recursos destinados à aplicação para aqueles ativos considerados arriscados. O quadro 6.8 sumariza os valores destinados aos ativos que compõem o portfolio ótimo.

QUADRO 6.8: PROPORÇÕES A SEREM ALOCADAS NA CARTEIRA AGRESSIVA COM BASE NA FUNÇÃO UTILIDADE KARL BORCH

	Ibovespa Futuro	Ibovespa	Ouro Futuro	Dólar Futuro	Boi Gordo Futuro	Dólar (US\$)	Dinheiro (R\$)
$t+1$	0,00%	0,00%	0,00%	63,52%	0,00%	36,48%	0,00%
$t+2$	0,05%	54,73%	0,05%	45,05%	0,05%	0,05%	0,05%
$t+3$	0,01%	38,56%	0,01%	61,40%	0,01%	0,01%	0,01%
$t+4$	100,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
$t+5$	22,24%	34,41%	0,00%	0,00%	0,00%	43,34%	0,00%
$t+6$	0,00%	0,00%	0,00%	27,51%	0,00%	72,49%	0,00%
$t+7$	0,00%	21,35%	25,45%	0,00%	0,00%	53,21%	0,00%
$t+8$	21,29%	25,58%	53,13%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
$t+9$	55,57%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	44,43%	0,00%
$t+10$	0,00%	87,28%	0,00%	12,72%	0,00%	0,00%	0,00%

A figura 6.7 ilustra o comportamento do potencial investidor que suporta um grau moderado de risco. Observe que o gerenciador da carteira procura pulverizar os recursos empregados na aplicação financeira, contemplando aqueles ativos que ele considera tanto arriscados quanto os que possuem um baixo nível de risco.

FIGURA 6.7: OTIMIZAÇÃO DA CARTEIRA MODERADA COM BASE NA FUNÇÃO UTILIDADE PROPOSTA POR KARL BORCH



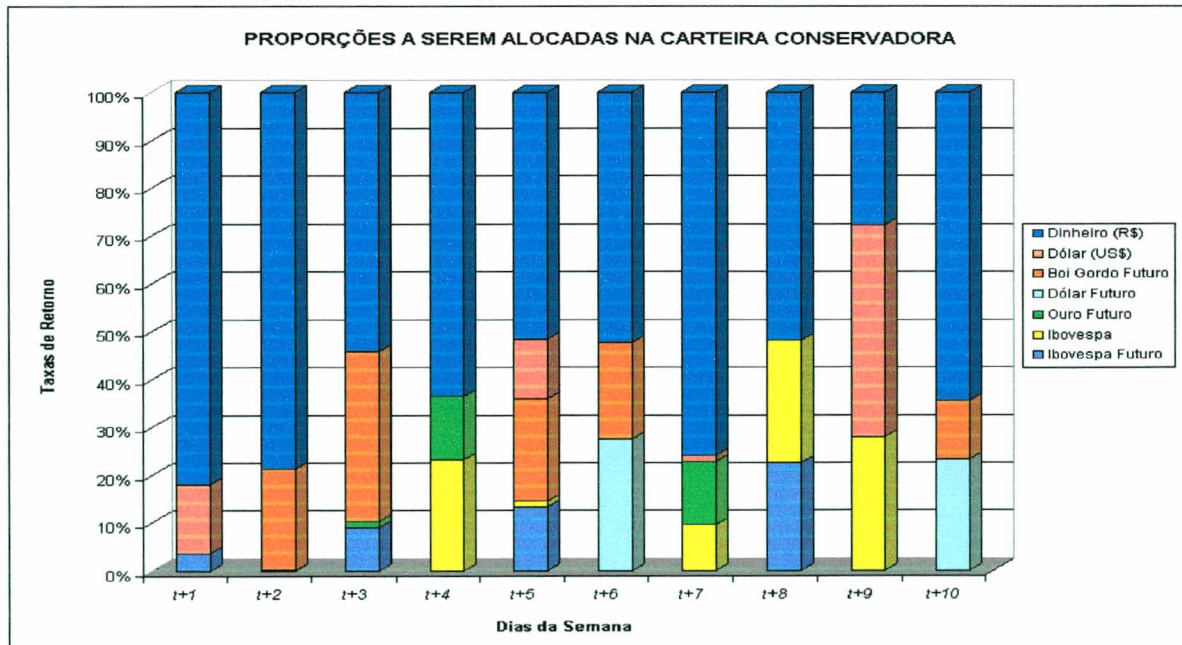
A figura anterior mostra o bom funcionamento do modelo de otimização da carteira do investidor com o perfil moderado em relação ao risco, dado que houve uma distribuição dos recursos a serem aplicados de forma proporcional, alocando-se parte dos recursos tanto para os ativos arriscados quanto para os que proporcionam menores riscos. O quadro 6.9 sumariza o que foi mencionado anteriormente.

QUADRO 6.9: PROPORÇÕES A SEREM ALOCADAS NA CARTEIRA MODERADA COM BASE NA FUNÇÃO UTILIDADE KARL BORCH

	Ibovespa Futuro	Ibovespa	Ouro Futuro	Dólar Futuro	Boi Gordo Futuro	Dólar (US\$)	Dinheiro (R\$)
t+1	0,00%	0,00%	0,00%	63,52%	0,00%	36,48%	0,00%
t+2	0,05%	54,73%	0,05%	45,05%	0,05%	0,05%	0,05%
t+3	0,01%	38,56%	0,01%	61,40%	0,01%	0,01%	0,01%
t+4	100,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
t+5	22,24%	34,41%	0,00%	0,00%	0,00%	43,34%	0,00%
t+6	0,00%	0,00%	0,00%	27,51%	0,00%	72,49%	0,00%
t+7	0,00%	21,35%	25,45%	0,00%	0,00%	53,21%	0,00%
t+8	21,29%	25,58%	53,13%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
t+9	55,57%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	44,43%	0,00%
t+10	0,00%	87,28%	0,00%	12,72%	0,00%	0,00%	0,00%

A figura 6.8 mostra o comportamento da carteira otimizada com base na função utilidade proposta por Karl Borch para um potencial investidor que possua um perfil conservador em relação ao risco.

FIGURA 6.8: OTIMIZAÇÃO DA CARTEIRA CONSERVADORA COM BASE NA FUNÇÃO UTILIDADE PROPOSTA POR KARL BORCH



O quadro 6.10 sintetiza os resultados ilustrados na figura 6.8 destacando-se o fato de que grande parte dos recursos do potencial investidor foram alocados para o ativo dinheiro. Assim, o investidor optou por deixarem guardados os recursos destinados à aplicação, do que receber qualquer tipo de rendimento ao final do período de planejamento da carteira, em função do seu grau de aversão ao risco.

QUADRO 6.10: PROPORÇÕES A SEREM ALOCADAS NA CARTEIRA CONSERVADORA COM BASE NA FUNÇÃO UTILIDADE KARL BORCH

	Ibovespa Futuro	Ibovespa	Ouro Futuro	Dólar Futuro	Boi Gordo Futuro	Dólar (US\$)	Dinheiro (R\$)
t+1	3,56%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	14,49%	81,95%
t+2	0,03%	0,00%	0,03%	0,00%	21,22%	0,00%	78,78%
t+3	8,98%	0,00%	1,25%	0,00%	35,65%	0,00%	54,13%
t+4	0,00%	23,15%	13,25%	0,00%	0,00%	0,00%	63,60%
t+5	13,25%	1,25%	0,00%	0,00%	21,46%	12,47%	51,58%
t+6	0,00%	0,00%	0,00%	27,51%	20,14%	0,00%	52,35%
t+7	0,00%	9,55%	13,25%	0,00%	0,00%	1,25%	75,96%
t+8	22,45%	25,58%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	51,97%
t+9	0,00%	27,89%	0,00%	0,00%	0,00%	44,43%	27,67%
t+10	0,00%	0,00%	0,00%	23,14%	12,35%	0,00%	64,51%

No que concerne à função utilidade exponencial, ela foi otimizada através do *solver* do Excel com base na série de expansão de Taylor, expandido-a até o terceiro termo, com o objetivo de captar os efeitos da assimetria na distribuição dos retornos dos ativos componentes da carteira. O quadro 6.11 mostra os resultados obtidos após a otimização das carteiras com base na função utilidade exponencial.

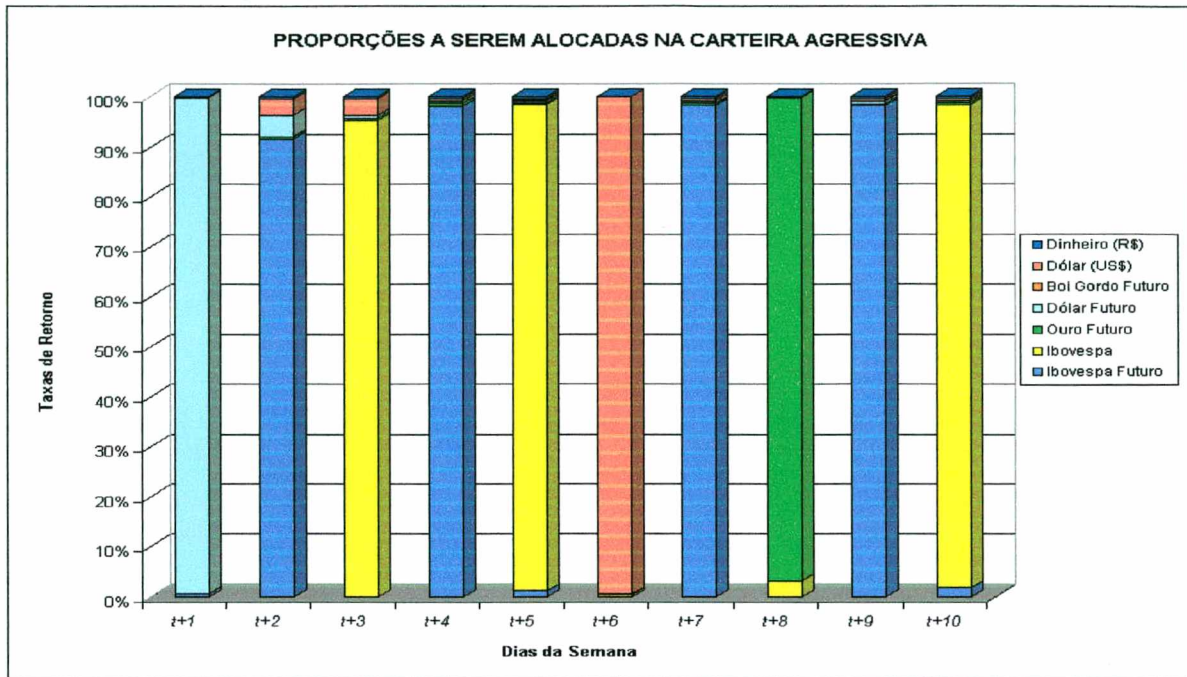
QUADRO 6.11: RESULTADOS DO PROCESSO DE OTIMIZAÇÃO DAS CARTEIRAS COM BASE NA FUNÇÃO UTILIDADE EXPONENCIAL

Função	<i>Perfil do Investidor</i>								
	AGRESSIVO			MODERADO			CONSERVADOR		
	$b = 0,560$			$b = 0,554$			$b = 0,535$		
Exponencial	Ganho Esperado em 10 dias	Risco em 10 dias	Beta (β_P)	Ganho Esperado em 10 dias	Risco em 10 dias	Beta (β_P)	Ganho Esperado em 10 dias	Risco em 10 dias	Beta (β_P)
		17,437%	3,08%	6,955	8,988%	2,12%	3,676	4,772%	2,06%

Observando os perfis do potencial investidor no quadro 6.11, veja que após o processo de otimização da função utilidade exponencial, o investidor caracterizado como agressivo obteve um ganho real líquido de cerca de 17,44% com a negociação de contratos no mercado financeiro brasileiro. Por outro lado, obteve em contrapartida um risco mensurado em termos de desvio padrão de 3,084% e um coeficiente beta do período de planejamento da carteira igual a 6,955. O beta da carteira pode ser avaliado levando-se em consideração o fato de que movimentos de cerca de 10% na carteira de mercado, a carteira agressiva desse investidor irá variar em torno de 69,55%, tudo mais mantido constante.

Na figura 6.9 observa-se o comportamento dos ativos financeiros que fazem parte da carteira agressiva formulada pelo gestor da carteira, tomando-se como base a respectiva função utilidade.

FIGURA 6.9: OTIMIZAÇÃO DA CARTEIRA AGRESSIVA COM BASE NA FUNÇÃO UTILIDADE EXPONENCIAL



É fácil observar, que parte significativa dos recursos destinam-se para aqueles ativos que proporcionam maiores taxas de retorno para o potencial investidor, durante o período de planejamento da carteira. O quadro 6.12 mostra os resultados numéricos obtidos a partir do processo de otimização da carteira com o perfil agressivo.

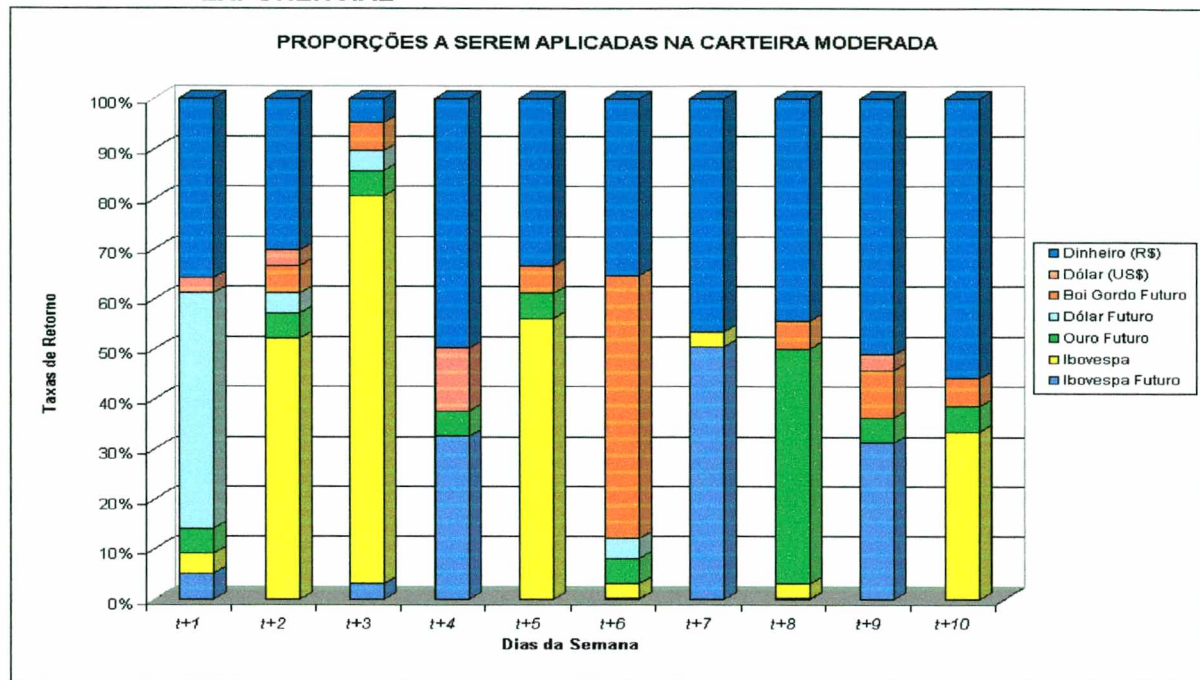
QUADRO 6.12: PROPORÇÕES A SEREM ALOCADAS NA CARTEIRA AGRESSIVA COM BASE NA FUNÇÃO UTILIDADE EXPONENCIAL

	Ibovespa Futuro	Ibovespa	Ouro Futuro	Dólar Futuro	Boi Gordo Futuro	Dólar (US\$)	Dinheiro (R\$)
t+1	0,53%	0,00%	0,00%	99,45%	0,09%	0,03%	0,00%
t+2	91,68%	0,00%	0,41%	4,27%	0,00%	3,29%	0,35%
t+3	0,00%	95,44%	0,42%	0,47%	0,06%	3,31%	0,36%
t+4	98,24%	0,00%	0,45%	0,50%	0,05%	0,42%	0,38%
t+5	1,09%	97,40%	0,33%	0,47%	0,06%	0,34%	0,36%
t+6	0,00%	0,43%	0,04%	0,00%	0,00%	99,53%	0,00%
t+7	98,28%	0,06%	0,36%	0,50%	0,05%	0,42%	0,38%
t+8	0,00%	3,19%	96,76%	0,00%	0,16%	0,00%	0,05%
t+9	98,32%	0,00%	0,36%	0,50%	0,05%	0,42%	0,40%
t+10	1,74%	96,73%	0,35%	0,47%	0,06%	0,34%	0,38%

Analisando a carteira considerada moderada aos olhos de um potencial investidor indiferente ao risco, percebe-se que os recursos alocados pelo gestor da carteira distribuem-se entre os diversos ativos que a compõem. Esta carteira obteve um retorno real líquido em torno de 8,899% durante o seu período de planejamento, tendo em contrapartida um risco mensurado em termos de desvio padrão na ordem de 2,12%.

Ademais, encontrou-se um coeficiente beta da carteira em torno de 3,676, situando-se bem acima da unidade, e que pode ser interpretado considerando que para cada oscilação de 10% nos retornos da carteira de mercado, os retornos da carteira moderada irá variar em torno de 36,76%, tudo mais mantido constante. A figura 6.10 mostra o resultado do processo de otimização da carteira para um período de planejamento de 10 dias úteis.

FIGURA 6.10: OTIMIZAÇÃO DA CARTEIRA MODERADA COM BASE NA FUNÇÃO UTILIDADE EXPONENCIAL



O quadro 6.13 a seguir mostra detalhadamente quais ativos foram contemplados com aplicações dos recursos por parte do potencial investidor indiferente ao risco. Tal carteira proporcionou ao investidor um ganho real líquido em torno de 10,121% durante o período de planejamento da carteira.

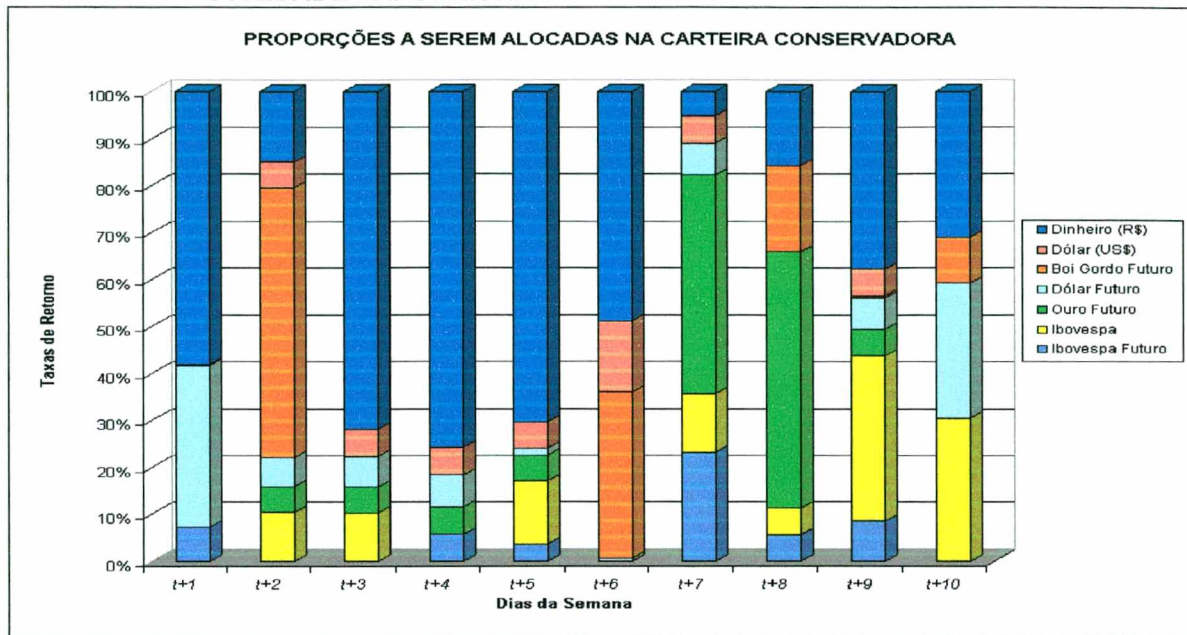
QUADRO 6.13: PROPORÇÕES A SEREM ALOCADAS NA CARTEIRA MODERADA COM BASE NA FUNÇÃO UTILIDADE EXPONENCIAL

	Ibovespa Futuro	Ibovespa	Ouro Futuro	Dólar Futuro	Boi Gordo Futuro	Dólar (US\$)	Dinheiro (R\$)
t+1	5,08%	3,99%	5,03%	47,07%	0,00%	3,03%	35,79%
t+2	0,00%	52,15%	5,04%	4,00%	5,58%	3,03%	30,20%
t+3	3,03%	77,56%	5,03%	4,00%	5,58%	0,00%	4,79%
t+4	32,56%	0,00%	5,03%	0,00%	0,00%	12,61%	49,79%
t+5	0,00%	56,15%	5,03%	0,00%	5,58%	0,00%	33,24%
t+6	0,00%	3,03%	5,04%	4,00%	52,63%	0,00%	35,30%
t+7	50,57%	3,03%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	46,40%
t+8	0,00%	3,03%	47,08%	0,00%	5,58%	0,00%	44,31%
t+9	31,26%	0,00%	5,04%	0,00%	9,58%	3,03%	51,09%
t+10	0,00%	33,56%	5,03%	0,00%	5,58%	0,00%	55,82%

A figura 6.11 evidencia a carteira otimizada pelo gestor, de acordo com o perfil do potencial investidor caracterizado como avesso aos riscos incorridos no mercado futuro brasileiro. Assim, ele opta em alocar a maior parcela dos recursos destinados à aplicação, numa carteira considerada conservadora, preferindo investir no consumo presente em prol de uma taxa de retorno futura.

A carteira conservadora obteve um ganho real líquido após o período de planejamento em torno de 4,772%. O risco da respectiva carteira mensurado através do desvio padrão situou-se em torno de 2,06%, enquanto o seu coeficiente beta foi igual 1,824, o que equivale dizer que para cada oscilação de 10% nas taxas de retorno da carteira de mercado, a carteira conservadora irá oscilar em torno de 18,24%, tudo mais mantido constante.

FIGURA 6.12: OTIMIZAÇÃO DA CARTEIRA CONSERVADORA COM BASE NA FUNÇÃO UTILIDADE EXPONENCIAL



Finalmente, percebe-se na figura 6.12 que os recursos alocados pelo gestor da carteira destinam-se aos ativos menos arriscados ou que proporcionam menores taxas de retorno no período considerado. O quadro 6.14 evidencia detalhadamente o comportamento dos ativos financeiros durante o período de planejamento do portfólio ótimo.

QUADRO 6.14: PROPORÇÕES A SEREM ALOCADAS NA CARTEIRA CONSERVADORA COM BASE NA FUNÇÃO UTILIDADE EXPONENCIAL

	Ibovespa Futuro	Ibovespa	Ouro Futuro	Dólar Futuro	Boi Gordo Futuro	Dólar (US\$)	Dinheiro (R\$)
t+1	7,24%	0,00%	0,00%	34,57%	0,24%	0,00%	58,19%
t+2	0,00%	10,36%	5,48%	6,29%	57,45%	5,54%	14,89%
t+3	0,00%	10,23%	5,56%	6,55%	0,00%	5,85%	71,81%
t+4	5,65%	0,00%	5,87%	6,81%	0,00%	5,87%	75,81%
t+5	3,58%	13,47%	5,52%	1,46%	0,00%	5,60%	70,38%
t+6	0,00%	0,00%	0,00%	0,53%	35,47%	15,22%	48,78%
t+7	23,15%	12,55%	46,59%	6,80%	0,00%	5,87%	5,04%
t+8	5,58%	5,65%	54,68%	0,00%	18,45%	0,00%	15,64%
t+9	8,48%	35,47%	5,75%	6,68%	0,41%	5,75%	37,87%
t+10	0,00%	30,47%	0,00%	28,79%	9,75%	0,00%	30,99%

Das nove carteiras avaliadas anteriormente, apenas a carteira conservadora otimizada com base na função utilidade cúbica apresentou um coeficiente beta menor do que a unidade. Todavia, as demais carteiras apresentaram coeficientes betas maiores do que um, em virtude dos ativos analisados serem bastante voláteis, o que acaba superestimando o coeficiente encontrado.

Vale destacar, que o algoritmo de otimização proposto no escopo do trabalho atendeu aos critérios de convergência do modelo, sem que nenhuma restrição imposta fosse desconsiderada. Ademais, o tempo médio de otimização de cada carteira foi de aproximadamente 20 minutos, considerando um processador do tipo AMD-K6II350 com 98 de Memória RAM, e a sua convergência ocorreu no máximo em 06 passos, o que reduziu significativamente o esforço computacional. O critério de parada utilizado na otimização das carteiras levou em consideração o fato de que os valores das proporções a serem alocadas nas

carteiras não se modificassem de um passo para o outro nas três funções utilidade avaliadas.

Todavia, analisando-se as funções utilizadas durante o processo de otimização das carteiras, percebeu-se que a função utilidade cúbica, apesar de evidenciar resultados coerentes com a moderna teoria de finanças, apresentou algumas dificuldades pontuais que podem ser enumeradas como segue:

1º) Dificuldade na escolha dos coeficientes de ponderação para a respectiva função utilidade;

2º) Enquanto a função exponencial e a função proposta por Karl Borch levaram aproximadamente 20 minutos para garantir a convergência do algoritmo, a função utilidade cúbica levou cerca de 50% de tempo a mais do que as funções anteriormente citadas;

3º) A grande sensibilidade apresentada pelos coeficientes de ponderação da função utilidade cúbica em alguns momentos do processo de otimização levou à obtenção de resultados dúbios, que foram revistos fazendo-se outras otimizações.

Por outro lado, a comparação das carteiras otimizadas em função dos riscos e dos índices de desempenho ou de performance, pode ser vista no quadro 6.15.

Para tanto, calculou-se também o *prêmio pela assimetria*, otimizando-se as respectivas funções utilidade e ponderando-se o terceiro momento estatístico como sendo igual a zero. A partir disso, calculou-se o diferencial entre os resultados esperados das funções utilidade obtidos na primeira otimização (com assimetria), com a ponderação diferente de zero, e os resultados da segunda otimização (sem assimetria), com a ponderação sendo igual a zero, com o objetivo de verificar se o potencial investidor irá ou não pagar o respectivo prêmio após o período de planejamento da carteira.

QUADRO 6.15: COMPORTAMENTO DO PRÊMIO PELA ASSIMETRIA DAS CARTEIRAS

Funções	<i>Perfil do Investidor Frente ao Prêmio pela Assimetria</i>		
	AGRESSIVO	MODERADO	CONSERVADOR
	Prêmio pela Assimetria	Prêmio pela Assimetria	Prêmio pela Assimetria
Cúbica	0,05%	-1,08%	-1,76%
Karl Borch	2,77%	2,53%	2,22%
Exponencial	6,56%	5,73%	2,65%

O quadro 6.15 revela os resultados obtidos pelo gestor da carteira, após o processo de otimização das funções utilidade com e sem a incorporação dos efeitos da assimetria das distribuições de retornos dos ativos previamente selecionados. Veja que das 03 funções testadas empiricamente, apenas a função utilidade cúbica faz com que o investidor acabe pagando um prêmio pela assimetria de cerca de 1,76% e 1,08% nos 10 dias de previsão da carteira, para o caso das carteiras com perfil conservador e moderado, respectivamente. Vale acrescentar, que as duas outras funções utilidade proporcionaram ao gestor das

carteiras prêmios pela assimetria em todos os perfis de aversão ao risco que foram considerados.

Observa-se, portanto, que a função exponencial e a função proposta por Karl Borch captam os efeitos da assimetria verificados nas distribuições das taxas de retorno dos ativos analisados. Contrariamente, a função cúbica acabou não captando todos os efeitos da assimetria no período e tamanho da amostra considerada, mesmo apresentando retornos esperados relativamente significativos, evidenciando que apenas os primeiros dois momentos estatísticos das distribuições são suficientes para explicar os ganhos esperados através do processo de otimização.

Finalmente, ao comparar todas as carteiras otimizadas, analisando os respectivos desempenhos em termos de performance do gestor, foram utilizadas como medidas os índices de Sharpe (*IS*), Treynor (*IT*) e Jensen (*IJ*). Essas medidas visam tão somente verificar qual a carteira adequada para o investidor, descobrindo concomitantemente se o gestor conseguiu superar a carteira de mercado. É com base nessas informações que o dado investidor decidirá se ficará com o gerenciamento ativo ou procurará um gerenciamento passivo, que apenas acompanhe as classes dos ativos escolhidos como referência. Os resultados calculados para os três índices expostos anteriormente, estão dispostos no quadro 6.16, a seguir.

QUADRO 6.16: AVALIAÇÃO DO DESEMPENHO DAS CARTEIRAS OTIMIZADAS NOS 10 DIAS DE PREVISÃO DOS ATIVOS

Funções/Índice	Perfil do Investidor											
	AGRESSIVO				MODERADO				CONSERVADOR			
	Índice de Sharpe	Índice de Treynor	Índice de Jensen	Ranking ¹⁸	Índice de Sharpe	Índice de Treynor	Índice de Jensen	Ranking	Índice de Sharpe	Índice de Treynor	Índice de Jensen	Ranking
Cúbica	0,53	4,71	0,001	1º	3,36	4,64	0,007	4º	6,00	4,05	0,014	6º
Karl Borch	1,08	1,73	0,002	2º	3,16	2,46	0,005	6º	5,84	3,23	0,012	9º
Exponencial	2,28	2,58	0,004	3º	4,21	2,43	0,007	5º	5,64	2,50	0,014	6º
Ibovespa	Índice de Sharpe: 0,163; Índice de Treynor: 0,450; Índice de Jensen: 0,000, Ranking: 10º											

Para calcular os indicadores anteriores, tomou-se como taxa de juro livre de risco, a taxa média de juros dos títulos do Governo Federal, já que o Governo tem o poder de emitir moeda e, assim, pagar qualquer dívida em moeda local, fazendo com que os títulos por ele emitidos possuam um menor risco. A média aritmética da taxa diária de juros *over-selic* foi igual a 0,069%, durante o período avaliado.

Para MELLAGI FILHO e ISHIKAWA (2000, p. 142), a taxa livre de risco mencionada anteriormente, é a taxa praticada nas operações diárias com títulos públicos federais, registrados pelo *over/selic*. Sua média diária reajusta diariamente os preços unitários (PU) dos títulos públicos corrigidos pela *selic*. Por outro lado, a terminologia *over* advém das operações de *overnight*, que justamente se definem como operações financeiras que são feitas de um dia para o outro.

Através do quadro 6.16, verifica-se que os valores encontrados para os indicadores supracitados acabaram classificando a carteira agressiva otimizada

¹⁸ Para determinar o *ranking*, efetuou-se a média aritmética dos índices de performance utilizados.

através da função cúbica como sendo a que obteve melhor desempenho dentre as demais carteiras agressivas das outras duas funções utilidade reportada que obtiveram a segunda e terceira colocação; o que já era de se esperar em razão de terem proporcionado rendimentos esperados relativamente elevados no período considerado.

Comparando-se os resultados obtidos através das 03 funções utilidade com a carteira de mercado representada pelo Ibovespa, verifica-se no quadro 6.16 que todas as carteiras, independentemente do grau de aversão ao risco por parte do investidor, obtiveram rendimentos superiores ao Ibovespa, o que mostra que o gestor é capaz de superar o mercado. Isso permite inferir que ele foi capaz de ter acesso a melhores informações e/ou possuir modelos que processaram tais informações, de modo a proporcionar um retorno superior ao do mercado, justificando assim a administração ativa.

CAPÍTULO VII

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS E RECOMENDAÇÕES

Este trabalho teve como objetivo a proposição de um modelo dinâmico de otimização estocástica e não-linear de carteiras de investimentos, com a incorporação de alguns custos de transação nos mercados à vista e futuro brasileiro.

O algoritmo testado no escopo do trabalho inicialmente fora desenvolvido por HALL e STEPHENSON *et al.* (1990) e foi posteriormente refinado por SAMOBYL em 1994. A operacionalização do respectivo algoritmo levou em consideração a influência dos efeitos do terceiro momento estatístico (assimetria) da distribuição dos retornos dos ativos previamente selecionados, nas funções utilidade que foram otimizadas numa planilha eletrônica.

Foram construídas 09 carteiras contendo 07 ativos cada, com a maior parte dos ativos negociados no mercado futuro brasileiro. Para cada uma das 03 funções utilidade otimizadas, levou-se em conta os 03 níveis de aversão ao risco por parte do potencial investidor, a saber: conservador, moderado e agressivo, já levando-se em conta alguns custos de transação que foram abatidos dos ganhos esperados durante o processo de otimização das carteiras.

O algoritmo de otimização proposto no trabalho atendeu aos critérios de convergência do modelo, sem que nenhuma restrição imposta fosse

desconsiderada. Ademais, o tempo médio de otimização de cada carteira foi de aproximadamente 20 minutos considerando um processador do tipo *AMD-K6II350* com 98 de Memória *RAM*, e a sua convergência ocorreu em no máximo 06 passos, o que reduziu significativamente o esforço computacional. Vale destacar, que o critério de parada adotado levou em consideração o fato de que as proporções a serem alocadas nos ativos de um período para o outro não se modificassem, o que evidenciou a convergência para um ponto de máximo global.

Vale destacar, que a formação de preços no mercado financeiro depende fundamentalmente de decisões feitas por investidores individuais, e a escolha ótima é determinada através da maximização do valor esperado da função utilidade desse investidor.

Para tanto, determinou-se o chamado *prêmio pela assimetria*, sendo otimizadas as respectivas funções utilidade cúbica, Karl Borch e exponencial, e ponderou-se o terceiro momento estatístico como sendo igual a zero. A partir disso, calculou-se o diferencial entre os resultados esperados das funções utilidade obtidos na primeira otimização (com assimetria), com a ponderação diferente de zero e os resultados da segunda otimização (sem assimetria) com a ponderação igual a zero, verificando se o potencial investidor irá ou não pagar o respectivo prêmio após o período de planejamento da carteira.

Notou-se que das 03 funções testadas empiricamente, apenas a função utilidade cúbica fez com que o investidor acabasse pagando um prêmio pela assimetria de cerca de 1,76% e 1,08%, para o caso das carteiras com perfis

conservador e moderado, respectivamente. Vale acrescentar que as duas outras funções utilidade proporcionaram ao gestor das carteiras prêmios pela assimetria em todos os perfis de aversão ao risco que foram considerados.

Logo, pode-se inferir que a função exponencial e a função proposta por Karl Borch captaram os efeitos da assimetria verificado nas distribuições das taxas de retorno dos ativos analisados. Contrariamente, a função utilidade cúbica não captou todos os efeitos da assimetria no período e tamanho da amostra considerada, mesmo apresentando retornos esperados relativamente expressivos, evidenciando que apenas os primeiros dois momentos estatísticos das distribuições são suficientes para explicar os ganhos esperados através do processo de otimização.

Por outro lado, todas as carteiras otimizadas apresentaram coeficientes betas superiores à unidade, caracterizando-se como carteiras altamente voláteis, com exceção da carteira conservadora que foi otimizada através da função utilidade cúbica. Pode-se inferir que os valores elevados de tais coeficientes podem ter sido influenciados pela elevada volatilidade dos ativos componentes das carteiras formuladas.

Comparou-se também todas as carteiras otimizadas, analisando-se o desempenho em termos de performance do gestor. Utilizou-se para tal avaliação os índices de Sharpe, Treynor e Jensen. Para calcular os indicadores anteriormente citados, tomou-se como taxa de juro livre de risco, a taxa média de juros dos títulos do Governo Federal (*over/selic*) que foi igual a 0,069%, durante o

período avaliado.

Os valores calculados para os índices mencionados anteriormente acabaram classificando a carteira caracterizada como agressiva, a qual foi otimizada através da função utilidade cúbica, como sendo a que obteve melhor desempenho dentre as carteiras agressivas otimizadas através das outras duas funções utilidade reportadas, e que obtiveram a segunda e terceira colocação. Esses resultados já eram esperados em razão da função utilidade cúbica ter proporcionado rendimentos esperados relativamente elevados no período considerado, mesmo já tendo abatido os custos de transação dos ativos negociados.

Observando-se os resultados obtidos através das 03 funções utilidade com a carteira de mercado representada pelo Ibovespa, verificou-se que todas as carteiras, independentemente do grau de aversão ao risco por parte do investidor, obtiveram rendimentos superiores ao Ibovespa, o que mostra que o gestor das carteiras foi capaz de superar o mercado. Isso permite inferir que ele teve acesso às melhores informações e/ou possuiu modelos que processaram tais informações, de modo a proporcionar um retorno superior ao do mercado, justificando assim a administração ativa.

Assim, o fato de combinar ativos financeiros cotados no mercado à vista com ativos financeiros cotados no mercado futuro levou o gestor da carteira a fornecer, de alguma forma, uma renda fixa para o potencial investidor, uma vez que se procurou montar carteiras balanceadas que tivessem um perfil fixo de risco

e retorno, de modo que não houvesse problemas específicos de liquidez. Nesses termos, os gestores podem sentir-se capazes de traçar estratégias de *hedge* no mercado futuro, com base nos recursos que foram alocados a partir das carteiras otimizadas.

Finalmente, recomenda-se para trabalhos futuros a realização de previsões *ex-post* dos ativos selecionados, testando com isso a performance dos coeficientes estimados dentro da amostra. Além disso, recomenda-se a inclusão de variáveis macroeconômicas para as previsões *ex-ante* e *ex-post* dos ativos componentes dos portfólios, de modo a captar os efeitos das políticas macroeconômicas sobre o comportamento dos ativos negociados nesse mercado, além da *customização* de todo o modelo de otimização de portfólio numa linguagem de programação mais acessível ao público leigo.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALEXANDER, Gordon J., SHARPE, W. F. & BAYLEY, J. V. **Fundamentals of Investments**. 2a. ed., Prentice Hall, New Jersey, 1993.

ARDITI, Fredd D. Risk and the Required Return on Equity. **The Journal of Finance**. v. 22, n. 1, p. 19-36, march, 1967.

ARROW, K. J. **Aspects of The Theory of Risk Bearing**. Academic Publishers, Helsinki, 1964.

BECKER, R., HALL, S., RUSTEM, B. Robust Optimal Decisions with Stochastic Nonlinear Economic Systems. **Journal of Economics Dynamic and Control**. 1994, pp. 125-147.

BORCH, Karl. A Note on Utility and Attitudes to Risk. **Management Science**, p. 697-700, v. 9, n. 2, 1963.

BECKMAN, Otto & COSTA NETO, Pedro Luiz O. **Análise Estatística da Decisão**. Ed. Edgard Blücher: São Paulo, 1980.

BERNSTEIN, Peter L. & DAMODARAN, Aswath. **Administração de Investimentos**. Porto Alegre: Bookman, 2000.

BRITO, Ney Roberto Ottoni e BRITO, Chistóvão Thiago. Macrocarteiras de Investimento: Seleção e Composição. In: **Gestão de Investimentos**. Brito (org.) São Paulo: Atlas, ed. UFRJ, p. 105-122, 1989.

CHUNCHACHINDA, Pornchai. *et al.* Portfólio Selection and Skewness: Evidence from International Stock Markets. **Journal of Banking & Finance**. v. 21, p. 143-167, 1997.

CONINE, T. E. and TAMARKIN, M. J. On diversification given asymmetry in returns. **The Journal of Finance**. December, vol. XXXVI, n. 5, 1981.

COPELAND, T. E. & WESTON, F. J. **Financial Theory and Corporate Policy**. 3 ed., New York: Addison Wesley, 1988. 946 p.

COSTA, Lauro César. **Opções: Operando a Volatilidade**. São Paulo: Bolsa de Mercadorias & Futuros, 1998.

COSTA, Luiz Guilherme Tinoco Aboim e AZEVEDO, Marcos Correia Lima. **Análise Fundamentalista**. Rio de Janeiro: EPGE/FGV, 1996.

COSTA NETO, Pedro Luiz de Oliveira. **Estatística**. 1a. ed., Ed. Edgard Blücher: São Paulo, 1977. 264p.

CUTHBERTSON, K., STEPHEN G. H. and MARK P. Taylor. **Applied Econometric Techniques**. Harvester, Wheatsheaf, 1992.

DAMODARAN, A. **Avaliação de Investimentos: Ferramentas e Técnicas para Determinação do Valor de Qualquer Ativo**. Rio de Janeiro: Qualitymark, 1997.

DAVIDSON, J. H., D. H., HENDRY, F. Srba and S. Yco. Econometric Modelling of the Aggregate Time-Series Relationship Between Consumers Expenditure and Income in the United Kingdom. **The Economic Journal**. v. 88, p. 661-692, 1978.

DELGADO, Sylvia. **A Distribuição de Probabilidade dos Retornos das Ações no Brasil**. Dissertação (Mestrado em Economia) Escola de Pós-Graduação em Economia, EPGE/FGV, Rio de Janeiro, 1994.

DEMSETZ, H. The Cost of Transacting. **Quarterly Journal of Economics**. 82 (10): 33-53, 1968.

DOORNIK J. & HENDRY, D. **Empirical Econometric Modelling: Using PcGive for Windows**, International Thomson Business Press, 1996.

FAMA, Eugene. The Behavior of Stock-Market Prices. **Journal of Business**. v. XXXVIII, n. 1, p. 34-105, 1965.

FAMA, Eugene F. Efficient Capital Markets I: A Review of Theory and Empirical Work. **Journal of Finance**. v. 25, p. 383 – 417, 1970.

FERREIRA, Alcides e HORITA, N. **A História do Mercado Futuro no Brasil**. 1a. Edição. São Paulo: Cultura Editora Associados e Bolsa de Mercadorias & Futuros, 1996.

FORTUNA, Eduardo. **Mercado Financeiro: Produtos e Serviços**. 11a. ed. Revista e Ampliada. Rio de Janeiro: Qualitymark ed., 1998.

FRANCIS, Jack Clark. **Investments: Analysis and Management**. New Jersey: McGraw-Hill, Series in Finance, 1991.

FRANCIS, Jack Clark & ARCHER, Stephen H. **Portfolio Analysis**. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs. New Jersey, 1979.

FRIEND, Irwin & BLUME, Marshall E. The Demand for Risky Assets. **The American Economic Review**. v. LXV, n. 5, December, p. 900-922, 1975.

GAVA, Alexandre Majola. **Risco em Portfólio de Ativos Reais: A Consideração Explícita da Covariância Entre Projetos de Investimentos.** 23º Encontro da ANPAD – Encontro Nacional dos Programas de Pós-Graduação em Administração. Foz do Iguaçu – PR: Setembro de 1999.

GRANGER, C. W. J. & NEWBOLD, Paul. Spurious Regressions in Econometrics. **Journal of Econometrics.** V. 2, p. 11-20, 1974.

HAUGEN, R. A. **Modern Investment Theory.** New Jersey: Prentice-Hall, 1993.

HALL, S. G. & STEPHENSON, M. J. Optimal Control of Stochastic Non-Linear Models. In N. Christodfoulakis. **Dynamic Modelling and Control of National Economies.** Pergamon Press, Oxford, 1990.

HILL, Carter R., GRIFFITHS, William E. e JUDGE, George E. **Econometria.** São Paulo: Saraiva, 1999.

HOLT, C., MODIGLIANI, F. & SIMON, H. A Linear Decision Rule for Production and Employment Scheduling. **Management Science.** v.2, n. 1, p. 1-30, 1960.

HULL, Jonh. **Introdução aos Mercados Futuros e de Opções.** 2a. ed., São Paulo: Cultura Editores Associados e Bolsa de Mercadorias & Futuros, 1996.

JIA, Jianmin & DYER, James. A Standard Measure of Risk and Risk-Value Models. **Management Science**. v. 42, n. 12, december, 1996.

JENSEN, M. C. The performance of mutual funds in the period 1945-1964. **The Journal of Finance** 23, 389-416, 1968.

KAHNEMAN, Daniel & TVERSKY. Amos. Prospect Theory: An Analysis of Decisions Under Risk. **Econometrica**. v. 47, p. 263-291, 1979.

KRAUS, Alan. LITZENBERGER, Robert. Skewness Preference and the valuation of risk assets. **The Journal of Finance**. V. XXXI, n. 4, September, p. 1085-1100, 1976.

LÉVY, P. Theorie de L'addition des Variables Aléatoires. **Bulletin de la Société de France**. v. 52, p. 49-85, 1924.

LEVY, Haim & SARNAT, Marshall. **Investment and Portfolio Analysis**. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1972.

LINTNER, J. The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risk Investments in Stocks Portfolios and Capital Budgets. **Review of Economics and Statistics**, v. 1, p. 13-37, 1965.

MAKRIDAKIS, S., WHEELWRIGHT, S. C. and HYNDMAN, R. J. **Forecasting: methods and applications**. John Wiley & Sons, Inc., 1998.

MELLAGI FILHO, Armando e ISHIKAWA, Sérgio. **Mercado Financeiro e de Capitais**. São Paulo: Atlas, 2000.

MARKOWITZ, H. Portfolio Selection. **Journal of Finance**. March, p. 77-91, 1952.

MARKOWITZ, H. **Portfolio Selection**. Wiley, New York: 1959.

MANDELBROT, Benoit. The Variation of Certain Speculative Prices. **Journal of Business**. v. XXXVI, n. 4, p. 394-419, 1963.

MARQUES, Pedro V. e MELLO, Pedro C. **Mercados Futuros de Commodities Agropecuárias – exemplos e aplicações para os mercados brasileiros**. São Paulo: Bolsa de Mercadorias & Futuros, 1999.

MERTON, R. C. Optimal Consumption and Portfolio Rules in a Continuous Time Model. **Journal of Economic Theory**. v. 3, n 4, December, p. 373-413, 1971.

MILLER, Merton H. Financial Innovation: The Last Twenty Years and The Next. **Journal of Financial and Quantitative Analysis**. v. 21, n. 4, p. 459-471, 1986.

MOTTA, Regis da Rocha e CALÔBA, Guilherme Marques. **Análise de Investimentos: Tomada de Decisão em Projetos Industriais**. São Paulo: Atlas, 2002.

NEWBOLD & BOS. **Introductory Business & Economic Forecasting**. Cincinnati: South Western Publishing Co., 1994.

PIERÓ, Amando. Skewness in Financial Returns. **Journal of Banking & Finance**. v. 23, p. 847-862, 1999.

PINHEIRO, Juliano Lima. **Mercado de Capitais: Fundamentos e Técnicas**. São Paulo: Atlas, 2001.

PRATT, J. W. Risk Aversion in the Large and in the Small. **Econometrica**, 32, p. 132-136, 1965.

ROSS, Stephen A. WESTERFIELD, Randolph W. JAFFE, Jeffrey. **Administração Financeira**. São Paulo: Atlas, 1995.

RUSTEM, Berc. Stochastic and Robust Control of Nonlinear Economic Systems. **European journal of Operation Research**. 1994, R. 73304-318.

SAMOHYL, Robert W. Applications of stochastic optimal control through simulation. **Congresso Nacional de Pesquisa Operacional**, Florianópolis, 3/12/1994.

SAMOHYL, Robert W. e ROMÃO, Costa M. Verônica. Procedimentos de Detecção de Erros Grosseiros (Blunders, Outliers) e Não-Normalidade nas Observações GPS. **10º Congresso da APDIO**. Guimarães–Portugal, 24 a 27 de 2002.

SAMUELSON, P. A. **Economics**. New York, McGraw-Hill, 1973.

SHARPE, William F. Mutual Fund Performance. **Journal of Business**. v. 39, n. 1, p. 119-138, 1966.

SCHOUCHANA, Felix e CAMPOS, Rodrigo Barros de Moura. A Relação Entre o Mercado Físico e o Futuro. **Revista Resenha BM&F**. São Paulo, p. 1-7, 1997.

SCOTT, R. and HORVATH, P. On the direction of preference for moments for higher order than the variance. **Journal of Finance**. September, 1980.

SECURATO, José Roberto e SASSATANI, Ricardo. Prêmio pelo Risco nos Mercados Futuros: Evidências do Índice Bovespa. **Anais do III SemeAd**, São Paulo, 1998.

SILVA NETO, Lauro de Araújo. **Opções: do tradicional ao exótico**. 2 ed. São Paulo: Atlas, 1996.

STOPPLER, S. Risk minimization by linear feedback. **Kyber**, 1979, p. 171-184, v. 8.

TAPIERO, Charles S. **Applied Stochastic Models and Control in Management**. Amsterdam, North-Holland, 1988.

• TAVARES, Miguel Dirceu Fonseca. **Análise de Investimento: Avaliação de Ações e Seleção de Carteiras**. Ed. Correia da Serra: Rio de Janeiro, 1989.

TEIXEIRA, M. A. **Mercados Futuros: Fundamentos e Características Operacionais**. São Paulo: Bolsa de Mercadorias e Futuros, 1992, 48p.

THEIL, H. **Optimal Decision Rules for Government and Industry**. Amsterdam: North-Holland, 1964.

TOSTA DE SÁ, Geraldo. **Administração de Investimentos: Teoria de Carteiras e Gerenciamento do Risco**. Rio de Janeiro: Qualitymark Ed., 1999, 376p.

TREYNOR, J. How to rate management of investments funds. **Harvard Business Review** 43(1), 63-75, 1965.

TVERSKY, Amos & KAHNEMAN, Daniel. The Framing of Decisions and the Psychology of Choice. **Science**. v. 211, p. 453-458, Jan 1981.

VARIAN, Hal R. **Microeconomia: Princípios Básicos**. Rio de Janeiro: campus, 1994.

VARGA, Georgy. **Notas de Aula: Cálculo de Preço de Opção de Compra para o mercado Brasileiro**. Texto para Discussão. Rio de Janeiro: Escola de Pós-Graduação em Economia – Fundação Getúlio Vargas, 1998.

WORKING, H. Hedging Reconsidered. **Journal of Farm Economics**, v. 35, p. 544-561, 1953.

APÊNDICE I

CONTRATOS FUTUROS NEGOCIADOS NA BM&F

ESPECIFICAÇÕES DO CONTRATO FUTURO DE OURO 250 GRAMAS

1. Objeto de negociação

Ouro fino, sob forma de lingote, fundido por empresa refinadora e custodiado em instituição depositária, ambas credenciadas pela BM&F.

2. Cotação

Reais por grama, com até três casas decimais.

3. Variação mínima de apregoação

R\$0,001 por grama.

4. Oscilação máxima diária

5% sobre o valor do terceiro vencimento em aberto, calculados sobre o preço de ajuste do pregão anterior. Os dois primeiros vencimentos abertos à negociação não estão sujeitos a limites de oscilação. A Bolsa poderá, a qualquer momento, alterar os limites de oscilação, bem como sua aplicação aos diversos vencimentos, inclusive para aqueles que habitualmente não têm limites.

5. Unidade de negociação

Lote padrão de 250 gramas de ouro fino.

6. Meses de vencimento

Todos os meses.

7. Número de vencimentos em abertos

No máximo doze.

8. Data de vencimento e último dia de negociação

Último dia útil do mês anterior ao mês de vencimento.

9. Day trade

São admitidas operações de compra e venda para liquidação diária (*day trade*), desde que realizadas no mesmo pregão, pelo mesmo cliente (ou operador especial), intermediadas pela mesma corretora de mercadorias e registradas pelo mesmo membro de compensação. Os resultados auferidos nessas operações são movimentados financeiramente no dia útil seguinte ao de sua realização.

10. Ajuste diário

As posições em aberto ao final de cada pregão serão ajustadas com base no preço de ajuste do dia, estabelecido no *call* de fechamento, conforme regras da Bolsa, com movimentação financeira em D+1. O ajuste diário será calculado de acordo com as seguintes fórmulas:

a) ajuste das operações realizadas no dia

$$AD = (PA^t - PO) \times 250 \times n$$

b) ajuste das posições em aberto no dia anterior

$$AD = (PA^t - PA^{t-1}) \times 250 \times n$$

onde:

AD = valor do ajuste diário;

PA^t = preço de ajuste do dia;

PO = preço da operação;

n = número de contratos;

PA^{t-1} = preço de ajuste do dia anterior.

O valor do ajuste diário, se positivo, será creditado ao comprador e debitado ao vendedor; caso o valor seja negativo, será debitado ao comprador e creditado ao vendedor.

11. Condições de liquidação no vencimento

A liquidação física pelo vendedor será realizada no dia útil seguinte ao último dia de negociação, com a entrega de 249,75 gramas de ouro fino, contido em lingotes de 250 ou 1.000 gramas, com teor de pureza de no mínimo 999,0 partes de ouro fino para cada 1.000 partes de metal, ou em lingotes de 100 ou 400 onças, com teor de pureza de no mínimo 995,0 partes de ouro fino para cada 1.000 partes de metal. A liquidação financeira pelo comprador será efetuada no dia útil subsequente ao último dia de negociação, com o pagamento do valor de liquidação definido pela seguinte fórmula:

$VL = P \times 249,75$ onde:

VL = valor de liquidação por contrato;

P = preço de ajuste do último dia de negociação.

12. Hedgers

Fundidores e fornecedores de ouro, joalherias, mineradoras e empresas assemelhadas, a critério da Bolsa.

13. Margem de garantia

Valor fixo por contrato, devida em D+1, com redução de 20% para *hedgers*. A margem de garantia é alterável a qualquer momento, a critério da Bolsa.

14. Ativos aceitos como margem

Dinheiro, ouro e, a critério da Bolsa, títulos públicos e privados, cartas de fiança, apólices de seguro, ações e cotas de fundos fechados de investimento em ações.

15. Custos operacionais

- **Taxa operacional básica**

Operação normal: 0,25%; *day trade*: 0,1%. A taxa operacional básica, sujeita a valor mínimo estabelecido pela Bolsa, é calculada sobre o preço de ajuste do pregão anterior do primeiro vencimento em aberto.

- **Taxa de liquidação no vencimento**

0,3% sobre o valor de liquidação.

- **Taxas da Bolsa (emolumentos e contribuição para o Fundo de Garantia)**

6,32% da taxa operacional básica ou da taxa de liquidação no vencimento.

- **Taxa de registro**

Valor fixo divulgado pela BM&F.

Os custos operacionais são devidos no dia útil seguinte ao de realização da operação no pregão. Os sócios efetivos pagarão no máximo 75% da taxa operacional básica e da taxa de liquidação no vencimento, e 75% dos demais custos operacionais (taxas de registro e da Bolsa). Os investidores institucionais pagarão 75% das taxas de registro e da Bolsa.

16. Normas complementares

Fazem parte integrante deste contrato a legislação em vigor e as normas e os procedimentos da BM&F, definidos em seus Estatutos Sociais, Regulamento de Operações e ofícios circulares, bem como no Protocolo de Intenções entre as bolsas de valores, de mercadorias e de mercados de liquidação futura, de 25.5.88, observadas, adicionalmente, as regras específicas do Banco Central do Brasil.

OFÍCIO CIRCULAR 133/94-SG, DE 30.6.94

ESPECIFICAÇÕES DO CONTRATO FUTURO DE IBOVESPA

1. Objeto de negociação

Índice de ações da Bolsa de Valores de São Paulo (Índice Bovespa-Ibovespa).

2. Cotação

Pontos do índice, sendo cada ponto equivalente ao valor em reais estabelecido pela BM&F.

3. Variação mínima de apregoação

5 pontos.

4. Oscilação máxima diária

15% sobre o valor do terceiro vencimento em aberto, calculados sobre o preço de ajuste do pregão anterior. Os dois primeiros vencimentos abertos à negociação não estão sujeitos a limites de oscilação. A Bolsa poderá, a qualquer momento, alterar os limites de oscilação, bem como sua aplicação aos diversos vencimentos, inclusive para aqueles que habitualmente não têm limites.

5. Unidade de negociação

Ibovespa futuro multiplicado pelo valor em reais de cada ponto do índice, estabelecido pela BM&F.

6. Meses de vencimento

Meses pares. A BM&F poderá, a seu critério, quando as condições de mercado assim exigirem, autorizar a negociação para vencimento em meses ímpares.

7. Número de vencimentos em aberto

No máximo seis.

8. Data de vencimento e último dia de negociação

Quarta-feira mais próxima do dia 15 do mês de vencimento. Se esse dia for feriado ou não houver pregão na BM&F, a data de vencimento será o dia útil subsequente.

9. Day trade

São admitidas operações de compra e venda para liquidação diária (*day trade*), desde que realizadas no mesmo pregão, pelo mesmo cliente (ou operador especial), intermediadas pela mesma corretora de mercadorias e registradas pelo mesmo membro de compensação. Os resultados auferidos nessas operações são movimentados financeiramente no dia útil seguinte ao de sua realização.

10. Ajuste diário

As posições em aberto ao final de cada pregão serão ajustadas com base no preço de ajuste do dia, determinado pela média ponderada das cotações dos negócios realizados nos últimos 30 minutos do pregão, conforme regras da Bolsa, com movimentação financeira em D+1. O ajuste diário será calculado de acordo com as seguintes fórmulas:

a) ajuste das operações realizadas no dia

$$AD = (PA^t - PO) \times M \times n$$

b) ajuste das posições em aberto no dia anterior

$$AD = (PA^t - PA^{t-1}) \times M \times n$$

onde:

AD = valor do ajuste diário;

PA^t = preço (em pontos) de ajuste do dia;

PO = preço (em pontos) da operação;

M = valor em reais de cada ponto do índice, estabelecido pela BM&F;

n = número de contratos;

PA^{t-1} = preço (em pontos) de ajuste do dia anterior.

O valor do ajuste diário, se positivo, será creditado ao comprador e debitado ao vendedor. Caso o valor seja negativo, será debitado ao comprador e creditado ao vendedor.

11. Condições de liquidação no vencimento

Na data de vencimento, as posições em aberto, após o último pregão, serão liquidadas financeiramente pela Bolsa, mediante o registro de operação de natureza inversa (compra ou venda) à da posição, na mesma quantidade de contratos, pela média do Ibovespa a vista nessa data, observada na últimas duas horas e trinta minutos de negócios da sessão do pregão de viva voz da Bolsa de Valores de São Paulo, de acordo com a seguinte fórmula:

$VL = P \times M$ onde:

VL = valor de liquidação por contrato;

P = média do Ibovespa a vista, observada nas últimas duas horas e 30 minutos de negócios da sessão do pregão de viva voz da Bolsa de Valores de São Paulo, no último dia de negociação;

M = valor em reais de cada ponto do índice, estabelecido pela BM&F.

Os resultados financeiros da liquidação serão movimentados no dia útil subsequente à data de vencimento.

12. Hedgers

Fundações de seguridade, seguradoras, fundos mútuos de ações, clubes de investimento em ações, fundos de investimento e demais investidores institucionais.

13. Margem de garantia

Valor fixo por contrato, estabelecido com base na volatilidade do índice de referência. A margem de garantia é devida em D+1, com redução de 20% para *hedgers*, podendo ser alterada a qualquer momento, a critério da Bolsa.

14. Ativos aceitos como margem

Dinheiro, ouro, cotas do FIF e, a critério da Bolsa, títulos públicos e privados, cartas de fiança, apólices de seguro, ações e cotas de fundos fechados de investimento em ações.

15. Custos operacionais

- Taxa operacional básica

Operação normal: 0,25%; *day trade*: 0,15%. A taxa operacional básica, sujeita a valor mínimo estabelecido pela Bolsa, é calculada sobre o preço de ajuste do pregão anterior do primeiro vencimento em aberto.

- Taxas da Bolsa (emolumentos e fundos)

2,93% da taxa operacional básica.

- Taxa de registro

Valor fixo divulgado pela BM&F.

Os custos operacionais são devidos no dia útil seguinte ao de realização da operação no pregão. Os sócios efetivos pagarão no máximo 75% da taxa operacional básica e da taxa de liquidação no vencimento e 75% dos demais custos operacionais (taxas de registro e da Bolsa). Os investidores institucionais pagarão 75% das taxas de registro e da Bolsa.

16. Normas complementares

Fazem parte integrante deste contrato a legislação em vigor e as normas e os procedimentos da BM&F, definidos em seus Estatutos Sociais, Regulamento de Operações e ofícios circulares, bem como no Protocolo de Intenções firmado entre as bolsas de valores, de mercadorias e de mercados de liquidação futura, de 25.5.88, observadas, adicionalmente, as regras específicas da Comissão de Valores Mobiliários.

17. Observação

Considerando-se que a carteira teórica do Ibovespa é atualizada quadrimestralmente pela Bolsa de Valores de São Paulo, a BM&F ressalta o fato de que poderá ocorrer mudança em sua composição durante o período de vigência de um contrato futuro nele referenciado.

OFÍCIO CIRCULAR 106/97-SG, DE 25.8.97

ESPECIFICAÇÕES DO CONTRATO FUTURO DE TAXA DE CÂMBIO DE REAIS POR DÓLAR COMERCIAL

1. Objeto de negociação

A taxa de câmbio de reais por dólar dos Estados Unidos, para entrega pronta, contratada nos termos da Resolução 1690/90, do Conselho Monetário Nacional-CMN.

2. Cotação

Reais por US\$1.000,00, com até três casas decimais.

3. Variação mínima de apregoação

R\$0,001 por US\$1.000,00.

4. Oscilação máxima diária

5% sobre o valor do vencimento negociado, calculados sobre o preço de ajuste do pregão anterior. Os dois primeiros vencimentos abertos à negociação não estão sujeitos a limites de oscilação. A Bolsa poderá, a qualquer momento, alterar os limites de oscilação, bem como sua aplicação aos diversos vencimentos, inclusive para aqueles que habitualmente não têm limites.

5. Unidade de negociação

US\$50.000,00 para os vencimentos até outubro/97, inclusive, e US\$100.000,00 para os vencimentos posteriores.

6. Meses de vencimento

Todos os meses.

7. Número de vencimentos em abertos

No máximo 24 meses, conforme autorização da BM&F.

8. Último dia de negociação

Último dia útil (dia de pregão) do mês anterior ao mês de vencimento do contrato.

9. Data de vencimento

Primeiro dia útil (dia de pregão) do mês de vencimento do contrato.

10. Day trade

São admitidas operações de compra e venda para liquidação diária (*day trade*), desde que realizadas no mesmo pregão, pelo mesmo cliente (ou operador especial), intermediadas pela mesma corretora de mercadorias e registradas pelo mesmo membro de compensação. Os resultados auferidos nessas operações são movimentados financeiramente no dia útil seguinte ao de sua realização.

11. Ajuste diário

As posições em aberto ao final de cada pregão serão ajustadas com base no preço de ajuste do dia, estabelecido conforme regras da Bolsa, com movimentação financeira em D+1. Para os dois primeiros vencimentos, o preço de ajuste será estabelecido pela média ponderada dos negócios realizados nos últimos 15 minutos do pregão ou por um preço arbitrado pela BM&F; para os demais, o preço de ajuste será estabelecido no *call* de fechamento. O ajuste diário será calculado de acordo com as seguintes fórmulas:

a) ajuste das operações realizadas no dia

$$AD = (PA^t - PO) \times M \times n$$

b) ajuste das posições em aberto no dia anterior

$$AD = (PA^t - PA^{t-1}) \times M \times n$$

onde:

AD = valor do ajuste diário;

PA^t = preço de ajuste do dia;

PO = preço da operação;

M = multiplicador do contrato, estabelecido em 50 para os vencimentos até outubro/97, inclusive, e em 100 para os vencimentos posteriores;

n = número de contratos;

PA^{t-1} = preço de ajuste do dia anterior.

O valor do ajuste diário, se positivo, será creditado ao comprador e debitado ao vendedor. Caso o valor seja negativo, será debitado ao comprador e creditado ao vendedor.

12. Condições de liquidação no vencimento

Na data de vencimento, as posições em aberto serão liquidadas financeiramente pela Bolsa, mediante o registro de operação de natureza inversa (compra ou venda) à da posição, na mesma quantidade de contratos, pelo valor de liquidação, de acordo com a seguinte fórmula: $VL = (TC \times 1.000) \times M$ onde:

VL = valor de liquidação por contrato;

TC = taxa de câmbio de reais por dólar dos Estados Unidos, para entrega pronta, contratada nos termos da Resolução 1690/90, do CMN, definida como a taxa média de venda apurada pelo Banco Central do Brasil-Bacen, segundo critérios por ele definidos, e divulgada através do Sisbacen, transação PTAX800, opção "5-L" (cotação de fechamento), e que será utilizada com até quatro casas decimais. A taxa de câmbio será aquela verificada no último dia do mês imediatamente anterior ao mês de vencimento do contrato, independentemente de, nesse dia, haver ou não pregão na BM&F;

M = conforme definido no item 11.

Os resultados financeiros da liquidação serão movimentados no mesmo dia, ou seja, na data de vencimento.

• Condições especiais

Se, por qualquer motivo, o Bacen não divulgar a taxa de câmbio correspondente ao último dia do mês imediatamente anterior ao mês de vencimento deste contrato, a BM&F poderá, a seu critério:

- prorrogar a liquidação do contrato até a divulgação oficial; ou
- utilizar como valor de liquidação o preço de ajuste do último dia de negociação ou um valor por ela arbitrado, caso entenda não ser representativo o referido preço.

Em ambos os casos, a BM&F poderá corrigir o valor de liquidação por um custo de oportunidade, por ela arbitrado, desde a data de vencimento até o dia de sua efetiva liquidação financeira. Ainda, se o Bacen suspender a divulgação diária da taxa de câmbio objeto deste contrato ou em caso de força maior, que comprometa o livre funcionamento do mercado físico, a BM&F encerrará a negociação deste contrato, liquidando as posições em aberto com base no preço de ajuste do último pregão ou por um valor por ela arbitrado, a seu critério. A BM&F poderá ainda, em qualquer caso, arbitrar um preço para liquidação deste contrato se, a seu critério, julgar não serem representativos tanto a cotação divulgada pelo Bacen quanto o último preço de ajuste disponível.

13. Hedgers

Instituições autorizadas pelo Bacen a operar no mercado de câmbio comercial e outras pessoas jurídicas, cuja atividade básica esteja relacionada com as transações, regulamentadas pelo Bacen, nesse mercado.

14. Margem de garantia

Valor fixo por contrato, devida em D+1, com redução de 20% para *hedgers*. A margem de garantia é alterável a qualquer momento, a critério da Bolsa.

15. Ativos aceitos como margem

Dinheiro, ouro e, a critério da Bolsa, títulos públicos e privados, cartas de fiança, apólices de seguro, ações e cotas de fundos fechados de investimento em ações.

16. Custos operacionais

• Taxa operacional básica

Operação normal: 0,12%; *day trade*: 0,06%. A taxa operacional básica por contrato, sujeita a valor mínimo estabelecido pela Bolsa, incide sobre a seguinte base de cálculo: $BC = (PA^{t-1} \times$

M) onde:

BC = base de cálculo;

PA^{t-1} = preço de ajuste do dia anterior, referente ao primeiro vencimento em aberto;

M = conforme definido no item 11.

• **Taxas da Bolsa (emolumentos e fundos)**

1,47% e 0,9% da taxa operacional básica para operações normais e *day trade*, respectivamente, para os vencimentos até outubro/97, inclusive; para os vencimentos posteriores, 1,2% e 0,75%, respectivamente. Para as operações realizadas exclusivamente nos dois últimos dias de negociação e para a liquidação do contrato no vencimento, as taxas da Bolsa serão calculadas com base na corretagem mínima.

Os custos operacionais são devidos no dia útil seguinte ao de realização da operação no pregão. Os sócios efetivos pagarão no máximo 75% da taxa operacional básica e 75% dos demais custos operacionais (taxas da Bolsa). Os investidores institucionais pagarão 75% das taxas Bolsa.

17. Normas complementares

Fazem parte integrante deste contrato a legislação em vigor e as normas e os procedimentos da BM&F, definidos em seus Estatutos Sociais, Regulamento de Operações e ofícios circulares, bem como no Protocolo de Intenções firmado entre as bolsas de valores, de mercadorias e de mercados de liquidação futura, de 25.5.88, observadas, adicionalmente, as regras específicas do Banco Central do Brasil.

OFÍCIO CIRCULAR 082/97-SG, DE 2.7.97

ESPECIFICAÇÕES DO CONTRATO FUTURO DE BOI GORDO DENOMINADO EM REAIS

1. Objeto de negociação

Boi gordo acabado para abate.

Tipo: bovinos machos, castrados, bem acabados (carcaça convexa), em pasto ou confinamento.

Peso: vivo individual entre o mínimo de 450 quilos e o máximo de 550 quilos, verificado na balança do local de entrega.

Idade máxima: 42 meses.

2. Cotação

Reais por arroba líquida, com duas casas decimais.

3. Variação mínima de apregoação

R\$0,01 (um centavo de real) por arroba líquida.

4. Oscilação máxima diária

O limite de oscilação será fixado pela BM&F, através de Ofício Circular. A BM&F poderá, a qualquer momento, alterar os limites de oscilação, bem como sua aplicação aos diversos vencimentos.

5. Unidade de negociação

330 arrobas líquidas.

6. Meses de vencimento

Todos os meses.

7. Número de vencimentos em aberto

No mínimo quinze, conforme autorização da Bolsa.

8. Data de vencimento e último dia de negociação

Último dia útil do mês de vencimento.

9. Dia útil

Considera-se dia útil, para efeito deste contrato, o dia em que há pregão na BM&F. Entretanto, para efeito de liquidação financeira, a que se referem os itens 10, 11, 12.1, 12.2(d) e 16.1, considerar-se-á dia útil o dia que, além de haver pregão na BM&F, não for feriado bancário na praça de Nova Iorque, EUA.

10. Day trade

São admitidas operações *day trade* (compra e venda, no mesmo dia, da mesma quantidade de contratos para o mesmo vencimento), que se liquidarão automaticamente, desde que realizadas em nome do mesmo cliente, por intermédio da mesma Corretora de Mercadorias e sob a responsabilidade do mesmo Membro de Compensação, ou realizadas pelo mesmo Operador Especial, sob a responsabilidade do mesmo Membro de Compensação. A liquidação financeira dessas operações se fará no dia útil subsequente, sendo os valores apurados de acordo com o item 11(a), observado, no que couber, o disposto no item 17.

11. Ajuste diário

As posições em aberto ao final de cada pregão serão ajustadas com base no preço de ajuste do dia, estabelecido no *call* de fechamento, conforme regras da Bolsa, com liquidação financeira no dia útil subsequente, observado, no que couber, o disposto nos itens 12 e 17. O ajuste diário será calculado de acordo com as seguintes fórmulas:

a) ajuste das operações realizadas no dia

$$AD = (PA^t - PO) \times 330 \times n \quad (1)$$

b) ajuste das posições em aberto no dia anterior

$$AD = (PA^t - PA^{t-1}) \times 330 \times n \quad (2)$$

onde:

AD = valor do ajuste diário;

PA^t = preço de ajuste do dia;

PO = preço da operação;

n = número de contratos;

PA^{t-1} = preço de ajuste do dia anterior.

O valor do ajuste diário, se positivo, será creditado ao comprador e debitado ao vendedor. Caso o valor seja negativo, será debitado ao comprador e creditado ao vendedor. O ajuste diário das posições em aberto será realizado até a data de vencimento.

12. Liquidação no vencimento

As posições que não forem encerradas em pregão até o último dia de negociação mediante a realização de operações de natureza (compra ou venda) inversa, poderão ser liquidadas no vencimento, alternativamente, de duas formas: liquidação por índice de preços ou liquidação por entrega. Os clientes residentes poderão optar tanto pela liquidação por índice de preços quanto pela liquidação por entrega. Os clientes não-residentes não poderão optar pela liquidação por entrega.

12.1. Liquidação por índice de preços

As posições em aberto, após o encerramento do pregão do último dia de negociação, que não atenderem às condições necessárias à liquidação por entrega, descritas no item 12.2, serão liquidadas pela BM&F na data de vencimento, mediante o registro de operação de natureza (compra ou venda) inversa à da posição, na mesma quantidade de contratos, pelo preço calculado de acordo com a seguinte fórmula:

$$PO_i = \frac{\sum_{t=(d-4)}^d IBG_t}{5} \quad (3)$$

onde:

PO_i = preço da operação relativa à liquidação por índice de preços, expresso em reais por arroba líquida;

IBG_t = Indicador de Preço Disponível do Boi Gordo ESALQ/BM&F, relativo ao último dia de negociação, expresso em reais por arroba líquida, apurado pela Escola Superior de Agricultura Luiz de Queiroz (ESALQ) e divulgado pela Bolsa em seu *Boletim Diário*;

d-4 = quarto dia útil anterior à data de vencimento do contrato;

d = data de vencimento do contrato.

Os valores relativos à liquidação da posição por índice de preços serão liquidados financeiramente no dia útil subsequente ao último dia de negociação, observado, no que couber, o disposto no item 17.

12.2. Liquidação por entrega

a) Aviso de Intenção de Liquidação por Entrega

A liquidação das posições mediante o procedimento de entrega só poderá ser realizada caso o vendedor queira realizar a entrega e caso haja compradores interessados por seu recebimento.

O cliente-vendedor que optar pela liquidação por entrega deverá, por intermédio de sua Corretora de Mercadorias, apresentar o Aviso de Intenção de Liquidação por Entrega (AILE) à BM&F no período compreendido entre o quinto dia útil anterior à data de vencimento, inclusive, e o dia útil anterior à data de vencimento, inclusive. O AILE

poderá, nesse período, ser apresentado das 8:30 às 18:00, devendo ser protocolado pela Diretoria de Liquidação e Custódia (DLC).

Os AILEs que forem apresentados até as 9:00 serão divulgados ao mercado no mesmo dia, durante o pregão; os que forem apresentados após as 9:00 serão divulgados no dia útil subsequente. Os AILES ficarão disponíveis na sala de negociações até a data de vencimento.

Os clientes-compradores interessados por seu recebimento deverão comunicar essa intenção à BM&F no mesmo dia. Terão prioridade no recebimento os compradores com posições mais antigas, ou seja, que tiverem sido abertas há mais tempo.

Não havendo nenhum cliente-comprador interessado pelo recebimento dos bois, a(s) posição(ões) será(ão) liquidada(s) pelo índice de preços, conforme o item 12.1.

No caso de um cliente-vendedor apresentar o AILE após as 9:00 e decidir, mediante operação de compra em pregão, encerrar sua posição de venda ou reduzi-la a um número de contratos inferior ao constante do AILE, este deverá comunicar tal fato, até as 18:00 do dia da operação, à BM&F, que cancelará o AILE.

Havendo vendedores interessados pela entrega e compradores interessados pelo recebimento, confirmados pela BM&F, estes acertarão entre si a data de pesagem, que deverá ser realizada em qualquer dia do período compreendido entre o segundo, inclusive, e o oitavo, inclusive, dias úteis posteriores à data de vencimento. A Corretora de Mercadorias do cliente-vendedor deverá comunicar esse acerto à BM&F, mediante apresentação do Aviso de Entrega até as 18:00 do sexto dia útil posterior à data de vencimento. Caso a BM&F não receba o Aviso de Entrega no prazo estabelecido, esta determinará compulsoriamente a data de pesagem.

O cliente-vendedor deverá anexar ao Aviso de Entrega a seguinte documentação, para efeito de faturamento:

- declaração de propriedade da mercadoria e de que está livre de ônus de qualquer natureza, de emissão do cliente-vendedor;
- declaração de estabelecimento da data de pesagem, emitida em conjunto com o cliente-comprador.

É facultado aos clientes-vendedores e compradores indicar terceiros para entrega e recebimento dos bois, mas somente por ocasião da apresentação do Aviso de Entrega. Nesse caso, os terceiros indicados deverão igualmente fornecer as informações para faturamento e assumirão todas as obrigações e exigências deste contrato, até sua liquidação final. Adicionalmente, o comprador e o vendedor originais assumirão total responsabilidade pelas obrigações dos terceiros por eles indicados, até a liquidação final do contrato.

b) Ponto de entrega

Curral localizado no município de Araçatuba (SP), credenciado pela BM&F.

c) Procedimentos de entrega

A entrega dos animais deverá ser realizada, no curral determinado pela BM&F, das 7:00 às 22:00 do dia anterior à data de pesagem, quando o recinto será fechado, para reabertura no dia seguinte. A movimentação física dos animais, do local de origem do cliente-vendedor, dentro do Estado de São Paulo, ao curral credenciado pela BM&F em Araçatuba, SP, estará amparada por Regime Especial de ICMS, concedido pela Secretaria de Fazenda do Estado de São Paulo.

A pesagem e a classificação dos animais serão efetuadas pela BM&F no dia posterior à

entrada dos animais no curral, dentro do horário estabelecido pela Bolsa, podendo os clientes-comprador e vendedor fiscalizar esses atos. Haverá reidratação dos animais, desde o momento da chegada ao curral até o momento da pesagem. Não será oferecida ração aos animais no curral credenciado. A ordem de pesagem obedecerá à ordem de chegada de cada caminhão ao curral.

Poderá haver a pesagem dos animais no mesmo dia em que derem entrada no curral, caso os clientes-comprador e vendedor estejam de acordo, devendo as duas partes assinar tal acordo em impresso apropriado e comunicar essa decisão às respectivas Corretoras e estas, à BM&F.

Para a formação do lote de 330 arrobas líquidas, deverão ser observados os seguintes critérios:

- i) os animais deverão ser pesados individualmente;
- ii) o peso bruto de cada animal deverá estar em estrita observância ao disposto no item 1;
- iii) considerar-se-á peso líquido de cada animal 54% (rendimento líquido) de seu respectivo peso bruto;
- iv) o peso líquido do lote, apurado com duas casas decimais, será o somatório dos pesos líquidos dos animais;
- v) o peso obtido no item iv acima deverá ser igual a 330 arrobas, com tolerância, para mais ou para menos, de 5%

No ato da entrega, o cliente-vendedor deverá comprovar o bom estado dos animais, por meio de atestado sanitário exigido por lei.

Concluída a pesagem, os animais deverão ser retirados do curral, não havendo nenhuma responsabilidade do curral, nem da BM&F, sobre os animais. Caso o cliente-comprador não esteja presente para a retirada dos animais, estes serão pesados e arbitrados, permanecendo no curral.

Durante o período em que os animais estiverem sob a responsabilidade do curral, terão a cobertura de apólice de seguro.

A responsabilidade pelo transporte dos bois ao curral de entrega, bem como pelos custos e despesas correspondentes, inclusive aqueles relativos ao seguro, caberá ao cliente-vendedor. Após a pesagem, constatada sua conformidade, todas as despesas e a responsabilidade pela retirada dos animais caberão ao cliente-comprador.

O não cumprimento de qualquer das obrigações previstas nos procedimentos descritos acarretará multa à parte faltosa, a ser fixada pela BM&F.

d) Liquidação financeira da entrega

A liquidação financeira, relativa à entrega e ao recebimento dos bois-objeto de negociação, será realizada pelo cliente-comprador no dia útil anterior ao de pesagem dos animais, observado, no que couber, o disposto no item 17.

O valor de liquidação por contrato será calculado de acordo com a seguinte fórmula:

$$VL = \frac{\sum_{t=(d-4)}^d IBG_t}{5} \times 330 \quad (4)$$

onde:

VL = valor de liquidação por contrato;

IBG_t, d-4 e d = variáveis definidas no item 12.1.

No dia de pesagem, será feito um ajuste no valor de liquidação, com base no peso efetivo apurado no curral de entrega, que será creditado ou debitado no dia útil seguinte, mais o ICMS, se devido, menos a Contribuição de Seguridade Social.

A BM&F somente pagará à Corretora de Mercadorias, e esta ao cliente-vendedor, um dia útil depois de o cliente-comprador comprovar o recebimento dos bois, mediante documento próprio, disponibilizado pela BM&F. Caso o cliente-comprador não esteja presente no dia de pesagem para comprovar o recebimento, o representante da BM&F no curral de entrega assinará o documento à revelia do mesmo, não cabendo, nesse caso, nenhum recurso.

e) Arbitramento

Todas as entregas serão arbitradas por árbitros escolhidos pela BM&F, que acompanharão o processo de entrega. A arbitragem assim realizada será final, não cabendo nenhum recurso contra ela.

13. Hedgers

Pecuaristas, frigoríficos, indústrias processadoras e comerciantes de carne.

14. Margem de garantia

Valor por contrato, com redução de 20% para *hedgers*, alterável a qualquer momento, a critério da Bolsa.

A margem será devida no dia útil subsequente ao de abertura da posição. No caso de clientes não-residentes, se o dia útil subsequente for feriado bancário em Nova Iorque, a margem será devida no primeiro dia, após o de abertura da posição, em que não for feriado bancário naquela praça.

No caso de clientes não-residentes, quando o atendimento da exigência de margem for feito em dinheiro, deverá ser observado, no que couber, o disposto no item 17.

15. Ativos aceitos como margem

Dinheiro, títulos públicos federais, ouro, cotas do Fundo dos Intermediários Financeiros (FIF) e, mediante autorização prévia da Bolsa, títulos privados, cartas de fiança, ações e cotas de fundos fechados de investimento em ações. Para não-residentes, dólares dos Estados Unidos e, mediante autorização prévia da BM&F, títulos do governo dos Estados Unidos (*T-Bonds*, *T-Notes* e *T-Bills*).

16. Custos operacionais

- **Taxa operacional básica**

Operação normal: 0,30%; *day trade*: 0,07%. A taxa operacional básica, sujeita a valor mínimo estabelecido pela Bolsa, será calculada sobre o preço de ajuste do dia anterior do segundo vencimento em aberto.

- **Taxa de liquidação por entrega**

0,45% sobre o valor de liquidação financeira no vencimento.

- **Taxas da Bolsa (emolumentos e fundos)**

6,32% da taxa operacional básica.

- **Taxa de registro**

Valor fixo divulgado pela BM&F.

- **Taxa de arbitramento**

Valor estabelecido pela BM&F e devido pelo comprador.

Os Sócios Efetivos pagarão no máximo 75% da taxa operacional básica e da taxa de liquidação por entrega e 75% das taxas de registro e da Bolsa.

16.1. Data de pagamento

- a) As taxas operacional básica, da Bolsa e de registro serão devidas no dia útil seguinte ao da operação, observado, no que couber, o disposto no item 17.
- b) A taxa de liquidação por entrega será devida na data de liquidação financeira no vencimento, observado, no que couber, o disposto no item 17.
- c) A taxa de arbitramento será devida no dia útil seguinte ao de sua realização.

17. Forma de pagamento e recebimento dos valores relativos à liquidação financeira

A liquidação financeira das operações *day trade*, de ajustes diários, das liquidações financeiras relativas à liquidação por índice de preços e à liquidação por entrega, de depósitos de margem em dinheiro e dos custos operacionais será realizada observando-se o seguinte:

- i. para os clientes não-residentes: em dólares dos Estados Unidos da América, na praça de Nova Iorque, EUA, por meio do Banco Liquidante das operações da BM&F no Exterior, por ela indicado. A conversão dos valores respectivos de liquidação financeira, quando for o caso, se fará pela Taxa de Câmbio Referencial BM&F, descrita no Anexo I deste contrato e relativa a uma data específica, conforme a natureza do valor a ser liquidado, a saber:
 - a) na liquidação de operações *day trade*: a Taxa de Câmbio Referencial BM&F do dia da operação;
 - b) na liquidação de ajuste diário: a Taxa de Câmbio Referencial BM&F do dia a que o ajuste se refere;
 - c) na liquidação financeira relativa à liquidação por índice de preços: a Taxa de Câmbio Referencial BM&F do último dia de negociação;
 - d) na liquidação dos custos operacionais: a Taxa de Câmbio Referencial BM&F do dia da operação.
- ii. para os clientes residentes: em reais, de acordo com os procedimentos normais dos demais contratos da BM&F não autorizados à negociação pelos investidores estrangeiros, observado o disposto no item 9.

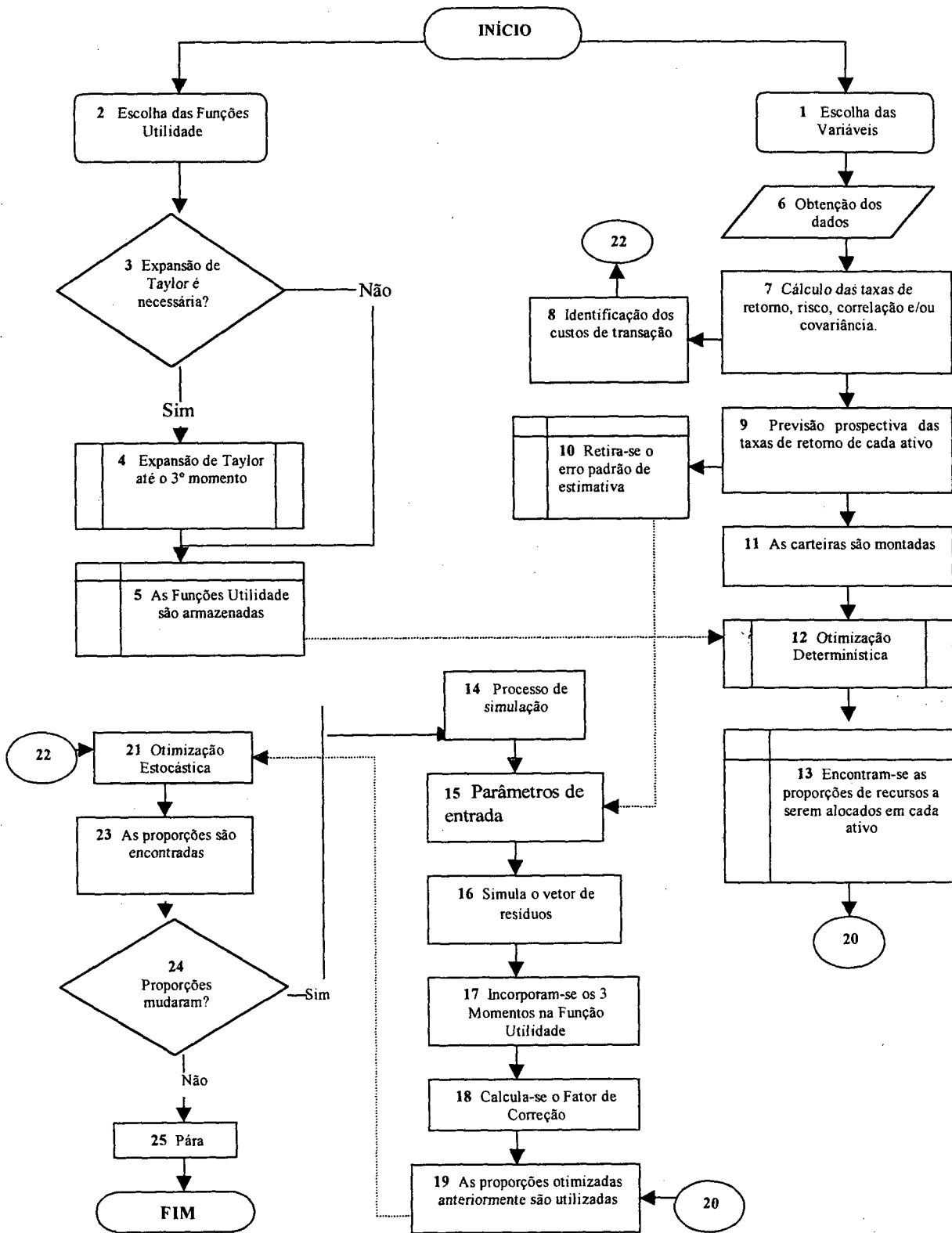
18. Normas complementares

Fazem parte integrante deste contrato o Anexo I e, no que couber, a legislação em vigor, as normas e os procedimentos da BM&F, definidos em seus Estatutos Sociais, Regulamento de Operações e Ofícios Circulares, bem como normas específicas das autoridades governamentais que possam afetar os termos do mesmo.

ÚLTIMA ATUALIZAÇÃO: OFÍCIO CIRCULAR 116/2000-DG, DE 06.09.2000

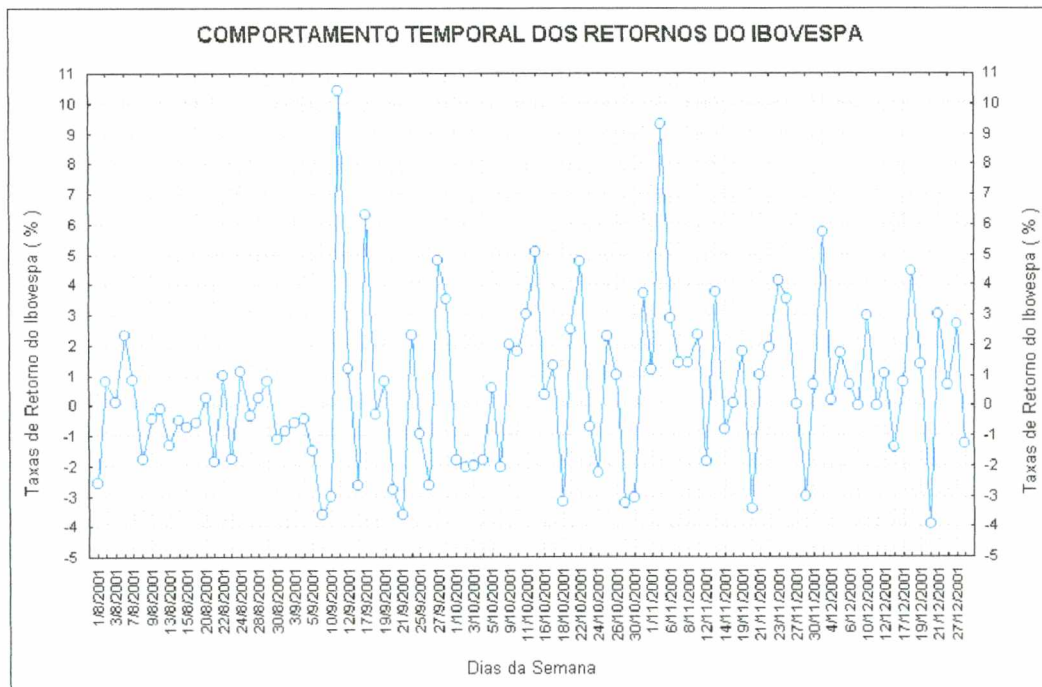
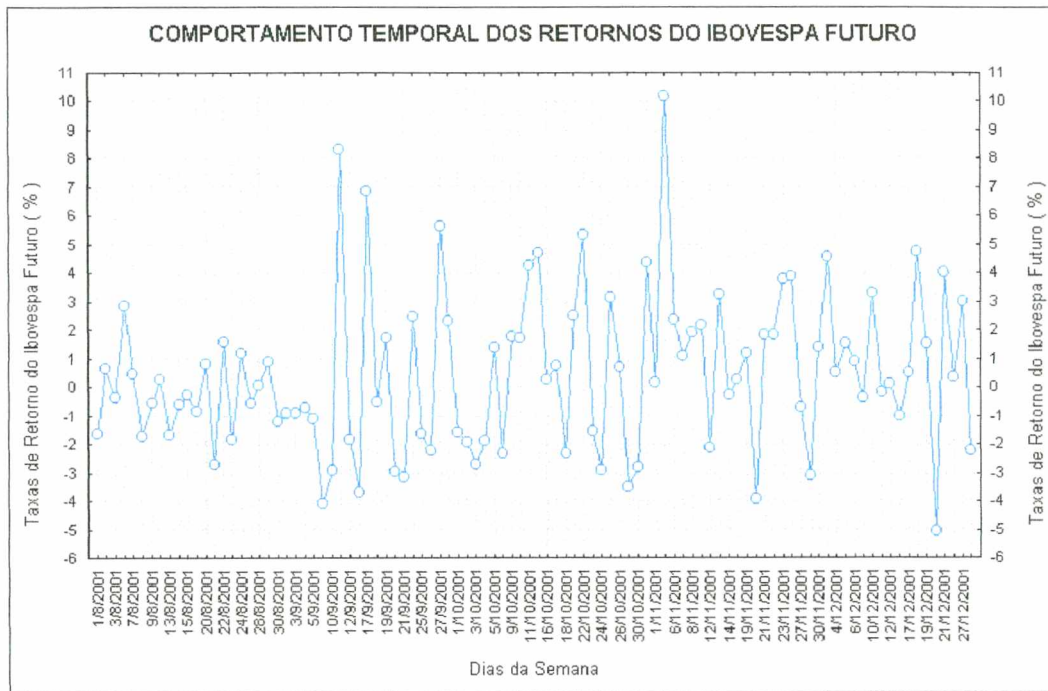
APÊNDICE II

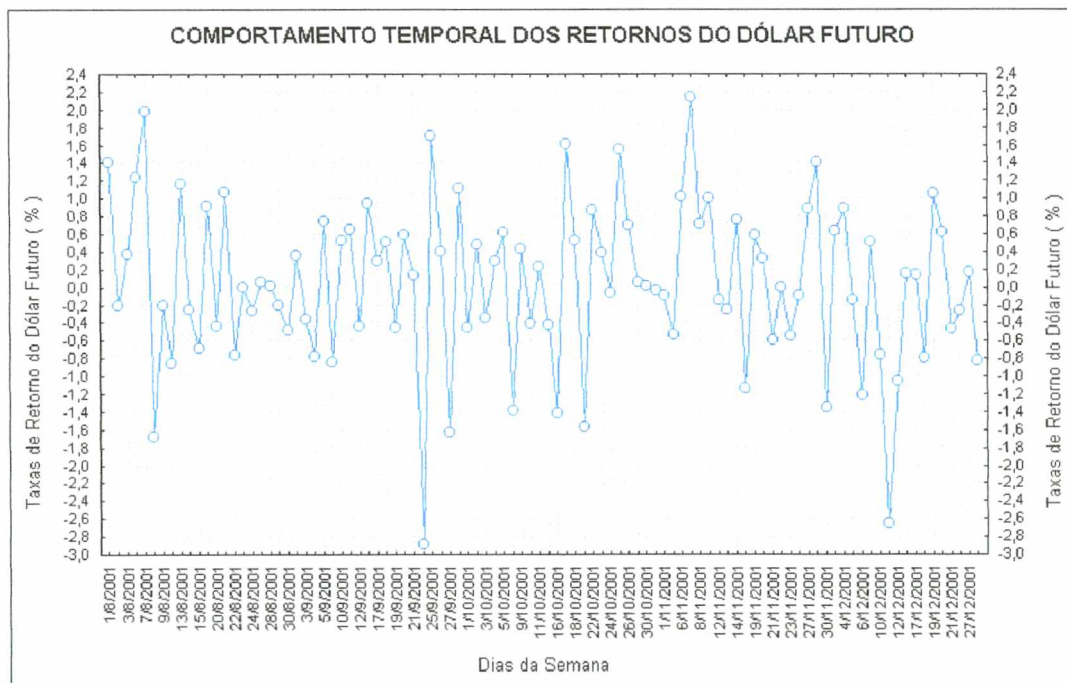
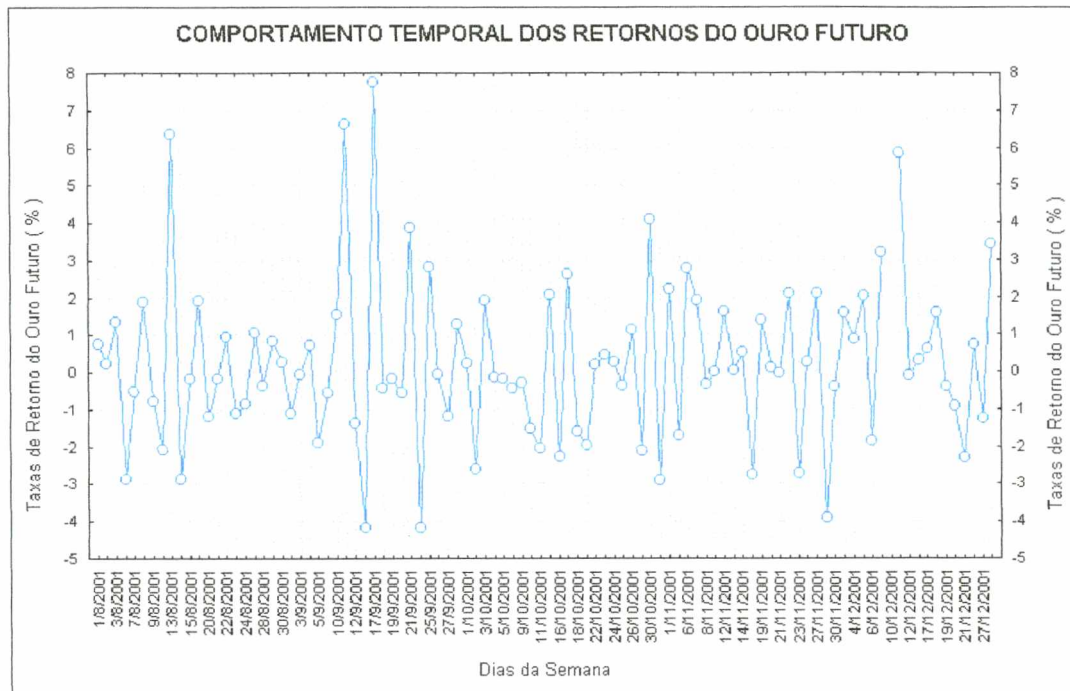
FLUXOGRAMA DE FUNCIONAMENTO DO MODELO

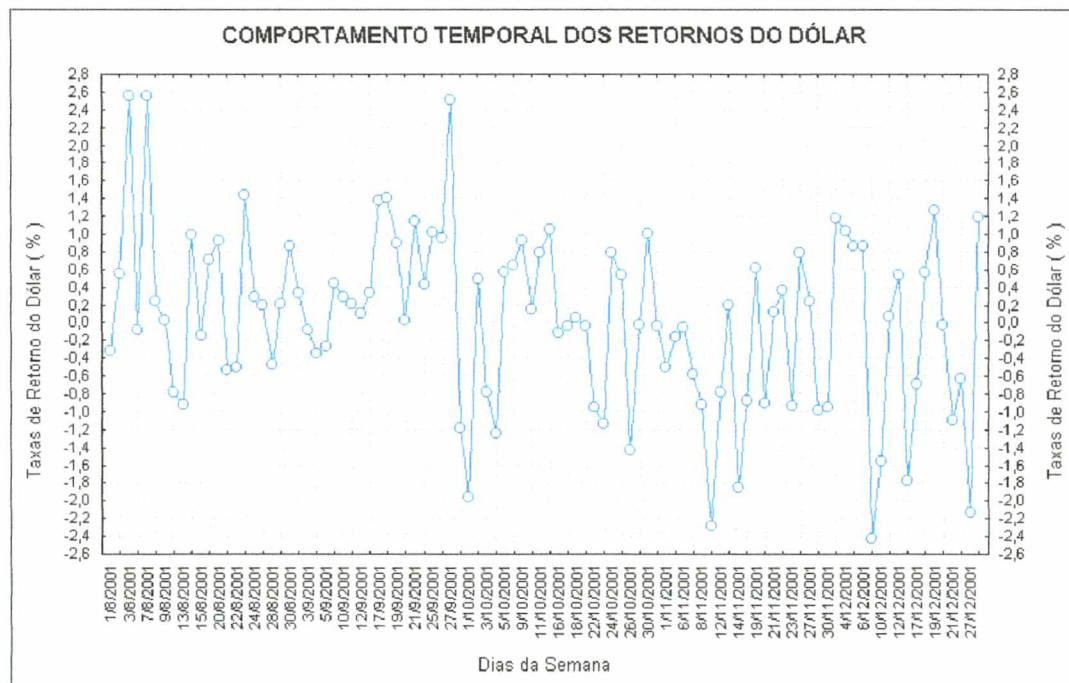
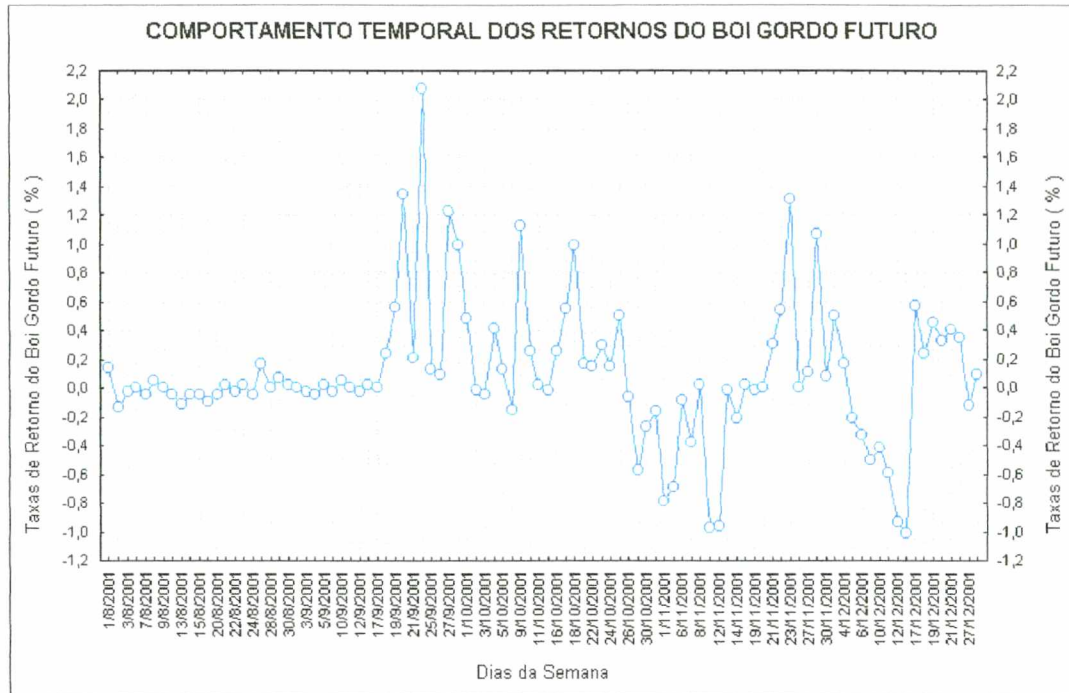


APÊNDICE III

COMPORTAMENTO DAS TAXAS DE RETORNO DOS ATIVOS SELECIONADOS

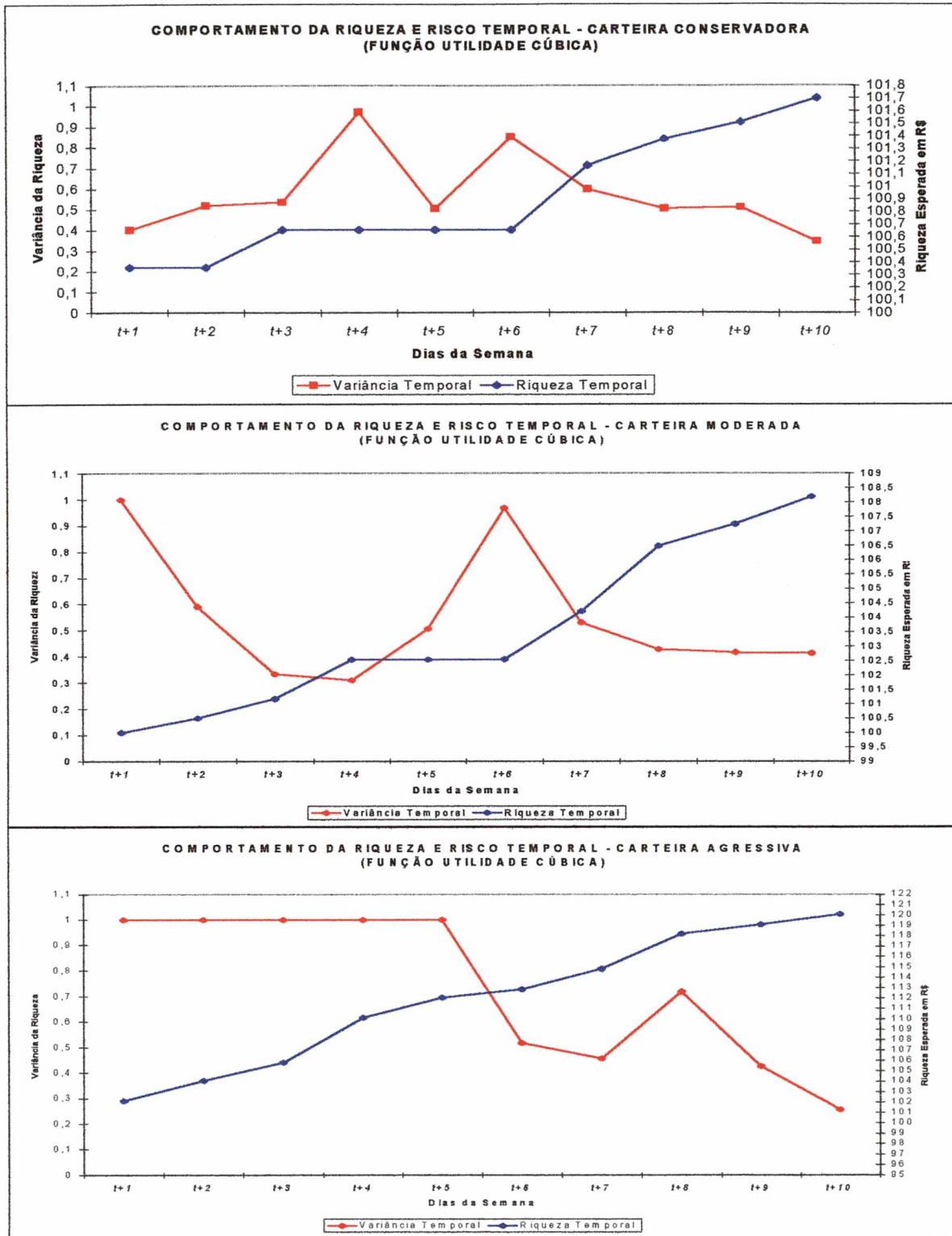


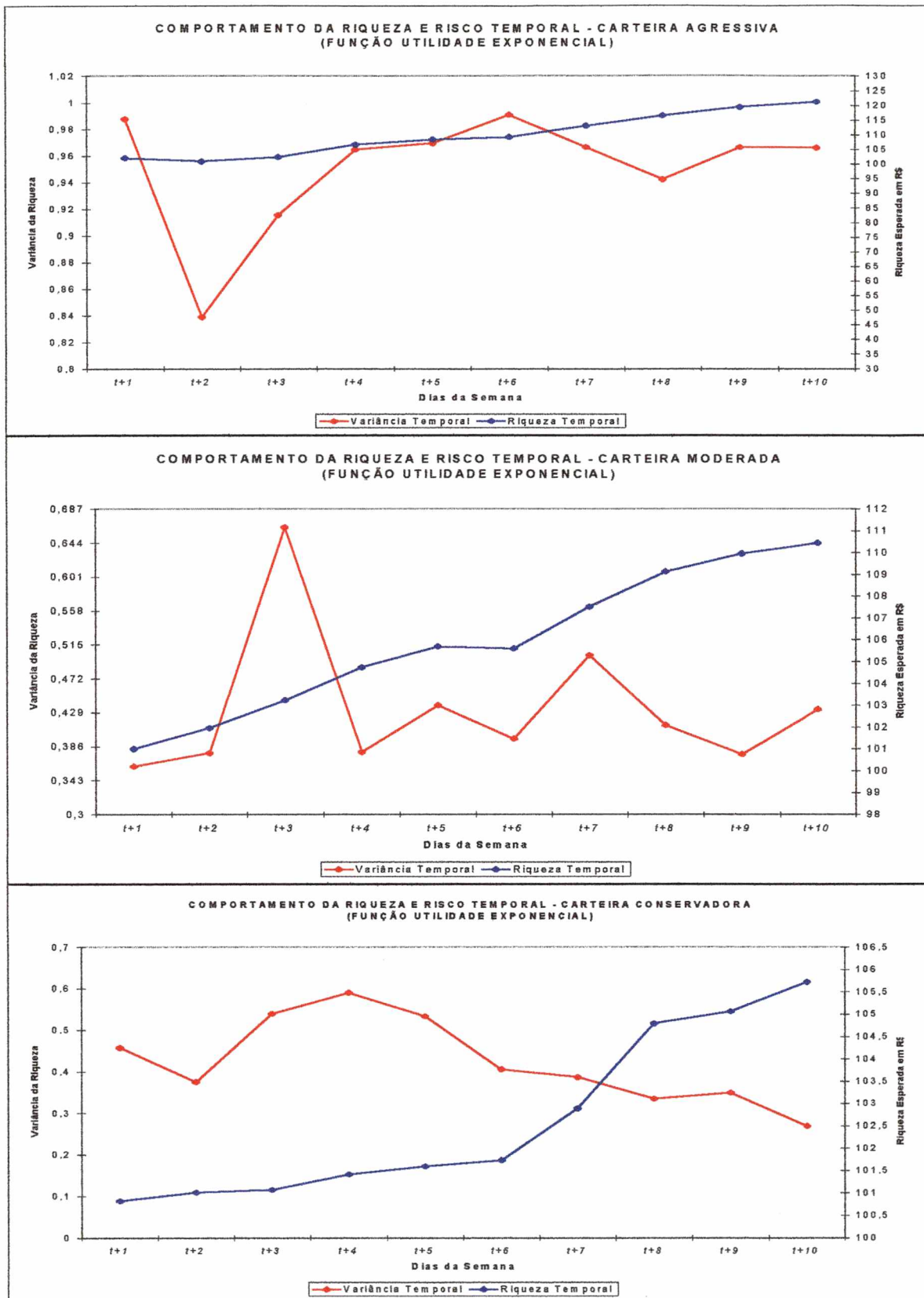


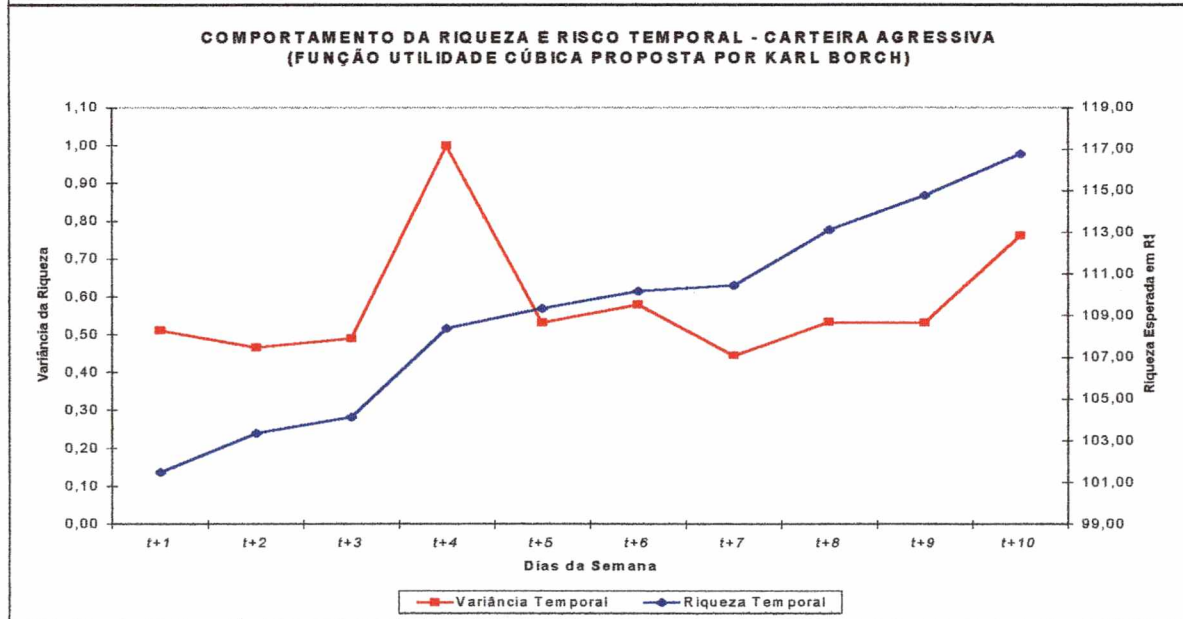
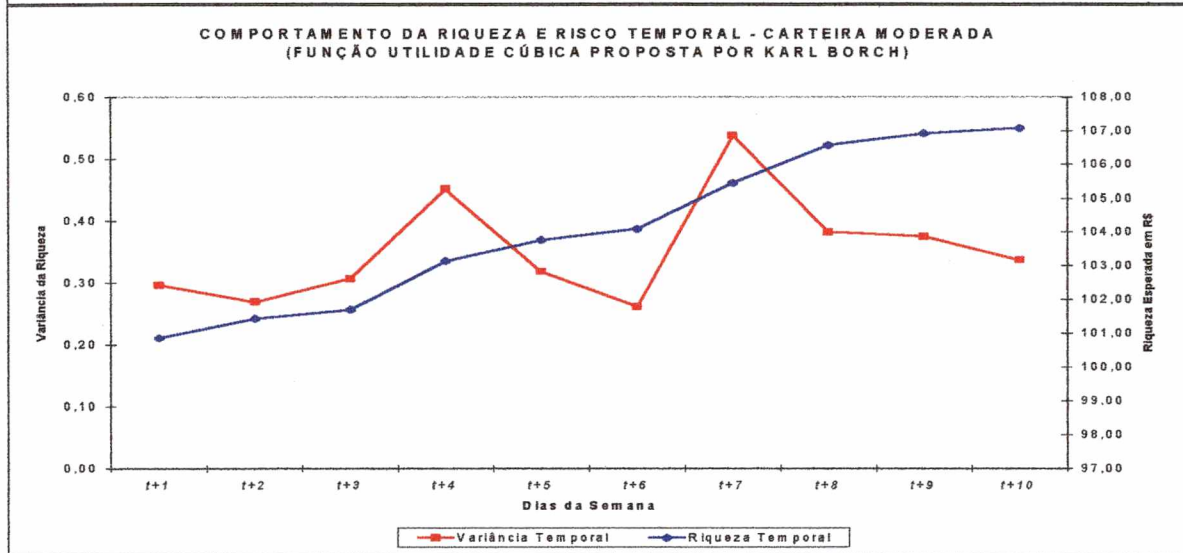
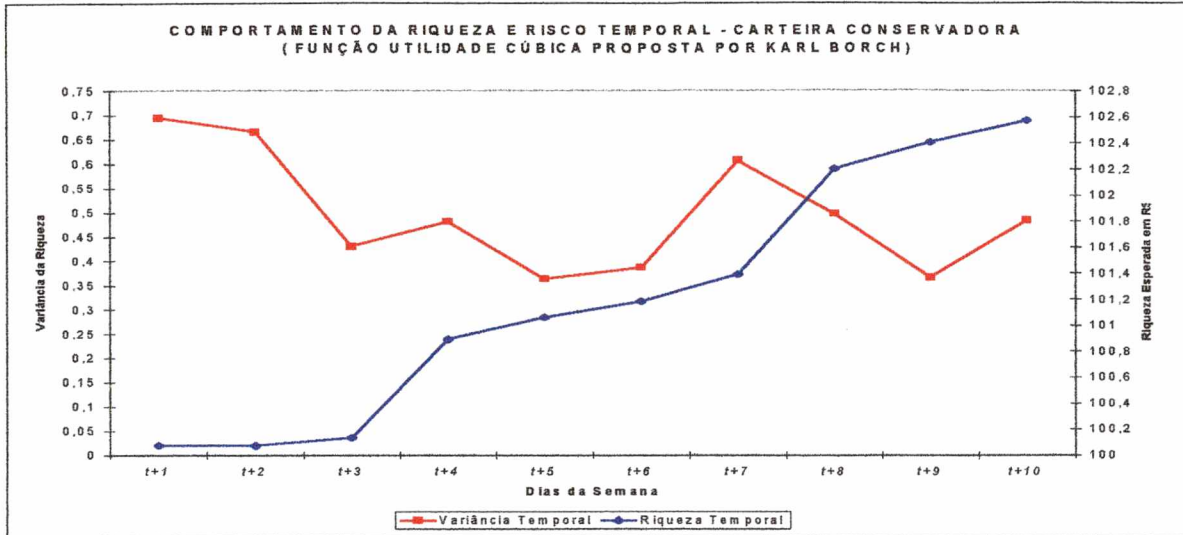


ANEXO

RIQUEZA ESPERADA E RISCO TEMPORAL DAS CARTEIRAS OTIMIZADAS







DADOS SOBRE O AUTOR E OS MEMBROS DA BANCA EXAMINADORA

Autor: Wesley Vieira da Silva

Graduação: Economia

Mestrado: Engenharia de Produção, UFSC

Local: Universidade Federal de Santa Catarina, UFSC

Orientador: Prof. Robert Wayne Samohyl, Ph.D.

Doutorado: Economia

Local: Rice University, R.U., Houston, Estados Unidos

Vínculo: Departamento de Engenharia de Produção e Sistemas, UFSC.

Membro – UFSC: Roberto Meurer, Dr.

Doutorado: Engenharia de Produção, UFSC

Local: Universidade Federal de Santa Catarina, UFSC

Vínculo: Departamento de Ciências Econômicas, UFSC

Membro – UFSC: Emílio de Araújo Menezes, Dr.

Doutorado: Administração de Empresas

Local: Escola de Administração de Empresas de São Paulo, FGV/EAESP

Vínculo: Departamento de Engenharia de Produção e Sistemas, UFSC

Membro – UFSC: Newton C. Affonso da Costa Jr., Dr.

Doutorado: Administração de Empresas

Local: Escola de Administração de Empresas de São Paulo, FGV/EAESP

Vínculo: Departamento de Ciências Econômicas, UFSC

Membro – UFSC: João Neiva de Figueiredo

Doutorado: Economia Empresarial

Local: Harvard University, Estados Unidos

Vínculo: Departamento de Engenharia de Produção e Sistemas, UFSC

Membro Externo (UFES): Gutemberg Hespanha Brasil

Doutorado: Engenharia Elétrica

Local: Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, PUC/RJ

Vínculo: Departamento de Estatística, UFES

Membro Externo (UNIFEI): Edson de Oliveira Pamplona

Doutorado: Administração de Empresas

Local: Escola de Administração de Empresas de São Paulo, FGV/EAESP

Vínculo: Departamento de Engenharia de Produção, UNIFEI