Luiz Elpídio de Melo Machado

O HIPERTEXTO NA APRENDIZAGEM DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

Dissertação apresentada ao
Programa de Pós-graduação em
Engenharia de Produção da
Universidade Federal de Santa Catarina
como requisito parcial para obtenção
do título de Mestre em
Engenharia de Produção

Orientador: Prof. Fernando Álvaro Ostuni Gauthier, Dr.

Florianópolis
2002

Ficha Catalográfica

MACHADO, Luiz Elpídio de Melo
O hipertexto na aprendizagem do cálculo diferencial e integral / Luiz Elpídio de Melo Machado; orientação: Fernando Álvaro Ostuni Gauthier. – Florianópolis: Universidade Federal de Santa Catarina, 2002.
94p. il.
Dissertação (Mestrado) – Engenharia de Produção
1. Cálculo diferencial e integral. 2. Educação matemática. 3. Hipertexto. 4. Tecnologia e aprendizagem. I. Universidade Federal de Santa Catarina. II. Título.
CDD: 515.33
515.43

Luiz Elpídio de Melo Machado

O HIPERTEXTO NA APRENDIZAGEM DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

Esta dissertação foi julgada e aprovada para a Obtenção do título de **Mestre em Engenharia de Produção** no **Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção** da Universidade Federal de Santa Catarina

Florianópolis, 29 de maio de 2002.

Prof. Ricardo Miranda Barcia, Ph.D.
Coordenador do Curso

BANCA EXAMINADORA

____
Prof. Fernando Álvaro Ostuni Guathier, Dr.
Orientador

____
Profa. Edis Mafra Lapolli, Dra.

____
Profa. Sônia Maria Pereira, Dra.

Dedico este trabalho à minha esposa Marta, à minha filha Marina e ao meu filho Luiz Felipe.

Meus agradecimentos à Universidade Federal de Santa Catarina por assumir, perante a comunidade científica nacional, esta forma diferenciada de ensino, o que vem possibilitando a diversos profissionais o acesso a curso de Pós-graduação de qualidade incontestável. Agradeço-lhes por ter acreditado no meu sonho.

“Em meio minhas tristezas tenho pelo menos esta alegria: em meu rosto ninguém lê as dores e os desejos que me atravessam. Temo a inveja tanto quanto aprecio os vãos louvores do mundo... e vou por caminhos não trilhados.” (Michelangelo)

Resumo

MACHADO, Luiz Elpídio de Melo. O hipertexto na aprendizagem do cálculo diferencial e integral. 2002. 94f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção, UFSC, Florianópolis.

As teorias pedagógicas aplicadas à informática geraram novos paradigmas do gerenciamento do conhecimento. O ensino da matemática, por razões diversas, não incorporou a tecnologia ao cotidiano da prática escolar, portanto, depara-se com o desafio de utilizar o computador como veículo de informação.

O computador é um poderoso instrumento de comunicação, porque integra diversas mídias. A pesquisa sobre educação da matemática, história do cálculo e informática na educação, fundamentou a arquitetura de um hipertexto, de Cálculo Diferencial e Integral. Este trabalho descreve um estudo de caso de aprendizagem, em Curso de Licenciatura em Matemática, neste hipertexto.

Palavras-chave: Hipertexto, aprendizagem, educação matemática, cálculo diferencial e integral.

Abstract

MACHADO, Luiz Elpídio de Melo. O hipertexto na aprendizagem do cálculo diferencial e integral. 2002. 94f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção, UFSC, Florianópolis.

The pedagogical theories applied to the computer science brought about new paradigms of the management of knowledge. The teaching of mathematics, for many reasons, did not incorporate the technology to the quotidian of school practice, this, coming up against the challenge of using the computer as a vehicle of information.

The computer is a powerful instrument of communication since it integrates several media. Research on mathematics education, history of calculus and computer science education set the base for the architecture of a hypertext of differential and integral calculus. This work describes a case study of learning in a mathematics education course in this hypertext.

Key-words: Hypertext, learning, mathematics education, differential and integral calculus.

Sumário

Lista de figuras

Lista de quadros

1 INTRODUÇÃO

1.1 Contextualização

Apesar de a Matemática ser uma ciência antiga e ter evoluído das primeiras relações biunívocas (objeto-animal) até aos mais avançados cálculos computacionais, sua metodologia mantêm-se quase que estagnada, os profissionais que se dedicam ao ensino da Matemática e os programas de Cursos e Disciplinas não estão voltados para o uso das novas tecnologias.

O ensino da Matemática ainda não foi capaz de incorporar a calculadora eletrônica como instrumento de aprendizagem; em conseqüência, os alunos dos Ensinos Fundamental e Médio, em sua grande maioria, concluem a formação básica sem saber usar, este instrumento popular, sequer para efetuar as operações elementares. O desafio torna-se maior quanto ao uso do computador por exigir investimentos mais significativos e ambientes próprios de aprendizagem.

O uso do computador como meio de ensino pode mudar, suprimir, ampliar e reordenar a matemática, possibilitando modelar uma rica variedade de aplicações. No ensino da matemática consome-se, segundo Coxford (1997, p.162), "um tempo considerável com resolução de equações lineares, fatoração de expressões e equações racionais, expoente e polinômios".

A modelagem é uma alternativa para o ensino da matemática. Modelar consiste em aplicar teorias matemáticas à fenômenos do mundo real a partir de dados confiáveis. As aplicações matemáticas ocorrem, de acordo com Bushaw (1997, p.12), "de duas maneiras: 1) ao procurar utilizações no mundo real para uma idéia matemática ou 2) ao procurar idéias matemáticas para uma situação do mundo real". O desafio de um problema de aplicação está na resolução da equação conseqüente da modelagem, por exemplo, um modelo representado por um polinômio em que as raízes podem ser determinadas por fatoração a princípio é de fácil solução; no entanto, de acordo com Coxford (1997, p.188) "esse método quase nunca funciona, a não ser para os exemplos do livro. Bem poucos dos polinômios que aparecem nas aplicações podem ser fatorados facilmente, embora teoricamente todos o possam". O uso do computador permite determinar a solução de equações sem trilhar o árduo caminho da álgebra priorizando neste caso a aplicação e evidentemente as análises de resultado.

O Cálculo Diferencial e Integral é um conhecimento matemático que permite, segundo Lopes (1999, p.125):

> ...nas mais variadas áreas do conhecimento, como Engenharia, Química, Física, Biologia, Economia, Computação, Ciências Sócias, Ciências da Terra etc, a análise sistemática de modelos que permitem prever, calcular, otimizar, medir, analisar o desempenho e performance de experiências, estimar, proceder a análises estatísticas e ainda desenvolver padrões de eficiência que beneficiam o desenvolvimento social, econômico e humanístico dos diversos países do mundo. Para o estudante aprender estes diversos métodos que são abordados no curso de Cálculo é necessário primeiramente que o mesmo tenha alguns conhecimentos básicos de Matemática.

Ciente das dificuldades com as quais se deparam os estudantes de Cálculo, do baixo índice de aprovação desta disciplina, Lopes (1999, p.126) adverte:

> É importante destacar que em todos os países, educadores e matemáticos buscam encontrar métodos que visem facilitar o entendimento do Cálculo por parte dos estudantes. Muito tem se conseguido, mas é importante dizer que nenhuma fórmula mágica foi encontrada até hoje.

Portanto a necessidade de melhorar o desempenho acadêmico do estudante no Cálculo e o desafio imposto ao ensino da Matemática na utilização das novas tecnologias, tornam pertinente um estudo sobre o uso da Informática no Estudo do Cálculo Diferencial e Integral.

1.2 Computador e educação

1.2.1 Epistemologia

1.2.1.1 Associacionismo - Behaviorismo

A base epistemológica, o empirismo e o positivismo, fundamentam-se na relação estímulo-resposta. As concepções sobre aprendizagem, entre as quais o behaviorismo, que priorizam o objeto, dão origem a uma pedagogia centrada no professor. Estas concepções tendem a valorizar relações hierárquicas e acabam por produzir, de um lado, professores autoritários, e, de outro, indivíduos subservientes.

1.2.1.2 Apriorismo - Inatismo

O fundamento desta concepção supõe que todo conhecimento é anterior à experiência – o indivíduo já traz um saber de nascença, suas estruturas seriam inatas. As concepções sobre aprendizagem que priorizam o sujeito dão origem a uma pedagogia centrada no aluno. Tais concepções consideram-no dotado de um saber de nascença, basta trazê-lo à consciência, organizá-lo. Assim, o aluno aprende por si mesmo; o papel do professor, extremamente limitado, restringe-se a facilitar a aprendizagem, despertando o conhecimento que pré-existe no indivíduo.

1.2.1.3 Interacionismo - Construtivismo

A concepção de aprendizagem do interacionismo descarta a idéia de um universo de conhecimentos oriundos exclusivamente da bagagem hereditária (como nas teorias aprioristas) ou exclusivamente oriundos do meio físico ou sensorial (como no associacionismo). Propõe o conceito de conhecimento em construção expressando o movimento do pensamento em cada indivíduo inserido na humanidade como um todo. As teorias trazem, em seu bojo, um novo sujeito que se desenvolve em interação com o meio. A pedagogia resultante desta concepção tende a desabsolutizar os pólos da relação pedagógica: o professor traz sua bagagem, o aluno também, traz a sua; são diferenciadas, mas serão compartilhadas.

1.2.2 Inteligências múltiplas

A teoria das inteligências múltiplas foi elaborada a partir dos anos 80 por pesquisadores da universidade norte-americana de Harvard, liderados pelo psicólogo Howard Gardner. As teorias sobre inteligência haviam passado por três fases: primeiramente concebia-se a inteligência como herança genética, depois como processo natural de evolução, por fim, como algo mensurável. Os vários estudos na área da ciência cognitiva, da psicologia e da neurologia apontaram para outra direção, os pesquisadores observaram a existência de uma gama de habilidades diferentes que o ser humano possuía e que poderiam ser consideradas também como formas de inteligência.

A Teoria das Inteligências Múltiplas toma como base a pluralidade da mente, admite-se hoje as seguintes formas de inteligências: lingüística, pictórica, intrapessoal, corporal-cinestésica, lógico-matemática, musical, interpessoal e espacial. Admite, também, a idéia da impossibilidade de mensuração da inteligência, e alimenta o princípio de que uma inteligência não pode ser mais importante que outra, todas são igualmente importantes. Uma pessoa pode ter uma certa inteligência mais desenvolvida que outra. Disso decorre que a questão do estímulo ambiental e da importância da cultura onde o sujeito está inserido serem agentes decisivos no desenvolvimento das inteligências do indivíduo.

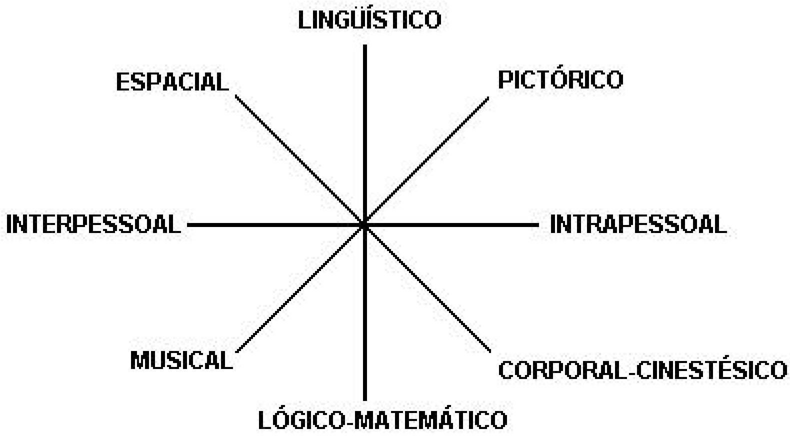


Figura 1: Espectro das inteligências

Fonte: Smole (2000, p.57)

Smole (200, p.58) alerta:

> É preciso, entretanto, que estejamos atentos para o fato de que as inteligências listadas não são isoladas e independentes, nem ao menos as únicas possibilidades de interfaces estão centradas nas parcerias que estabelecemos até aqui. Assim, ao pensarmos na elaboração de um projeto a partir do espectro, é fundamental que este seja olhado de uma forma harmoniosa, não como um conjunto no sentido das competências estarem juntas, mas como uma teia em que diferentes conexões são possíveis.

A teoria das inteligências múltiplas admite que a inteligência se evidencia na capacidade do ser humano de solucionar problemas e que se manifesta por atos criativos. Embora as inteligências sejam independentes, elas trabalham juntas. Portanto, uma pessoa ao desenvolver determinada tarefa, mobiliza diversas inteligências, pois, existem várias formas de associações criadas entre elas.

A informática, como instrumento de ensino, tem no hipertexto uma poderosa ferramenta de comunicação. O fato de associar várias mídias torna o hipertexto um atrativo meio de ensino, ao estimular vários sentidos explora as diversas inteligências.

1.2.3 O computador na educação

O computador pode ser usado como ferramenta educacional, neste caso pressupõem-se que a aprendizagem ocorra pelo fato de estar o aprendiz executando uma tarefa por meio do computador. Segundo Valente (1993, p.32):

> O uso do computador como máquina de ensinar consiste na informatização dos métodos de ensino tradicionais. Do ponto de vista pedagógico esse é o paradigma instrucionista. Alguém implementa no computador uma série de informações, que devem ser passadas ao aluno na forma de um tutorial, exercício-e-prática ou jogo.

Quando o aprendiz usa o computador, está manipulando conceitos e isto contribui no desempenho mental na construção do conhecimento. A inserção do computador no ambiente de aprendizagem implica em mudanças. Para Valente (1999, p.30):

> A mudança pedagógica que todos almejam é a passagem de uma educação totalmente baseada na transmissão da informação, na instrução, para a criação da ambientes de aprendizagem nos quais o aluno realiza atividades e constrói o seu conhecimento. Essa mudança acaba repercutindo em alterações na escola como um todo: sua organização, na sala de aula, no papel do professor e dos alunos e na relação com o conhecimento.

A relação entre ensinar e aprender impõe hoje outro olhar, flexibilidade passa a ser a palavra de ordem, para conciliar: o indivíduo e o grupo, conteúdos fixos e processos abertos de pesquisas, tempo preestabelecido e extensa informação on-line. Conciliar a extensão da informação, a variedade das fontes de acesso, com o aprofundamento da sua compreensão em espaços menos rígidos passou a ser a maior dificuldade para o educador, a aquisição da informação depende cada vez menos dele. Neste contexto, o papel do professor é auxiliar o aluno a inferir sobre informações, o papel do aluno é incorporar a real significação que essa informação tem para ele. Segundo Moran (2001):

> O conceito de curso, de aula também muda. Hoje entendemos por aula um espaço e tempo determinados. Esse tempo e espaço cada vez serão mais flexíveis. O professor continua dando aula quando está disponível para receber e responder mensagens dos alunos, quando cria uma lista de discussão e alimenta continuamente os alunos com textos, páginas da Internet, fora do horário específico da sua aula. Há uma possibilidade cada vez mais acentuada de estarmos todos presentes em muitos tempos e

> espaços diferentes, quando tanto professores quanto os alunos estão motivados e entendem a aula como pesquisa e intercâmbio, supervisionados, animados, incentivados pelo professor.

A criação de ambientes de aprendizagem baseados no computador onde o conhecimento é construído pelo aluno, necessita ter certas características que facilitem as atividades de descrição, reflexão e depuração. O hipertexto é uma ferramenta de grande potencial no gerenciamento da informação tornando viável sua utilização nesta fase informatização do ensino.

1.2.4 Hipertexto

Em relação à evolução do registro do conhecimento é possível dizer que o ser humano vivenciou três períodos: a invenção da Escrita (século VII a.C.), criação da Imprensa (século XV d.C.) e a construção do universo da Informática (século XX d.C). No primeiro período o ser humano desenvolveu a habilidade da representação, no segundo a popularização pela produção em larga escala sem perda da qualidade, no terceiro a divulgação sem fronteira num ambiente onde a organização e arquitetura do texto têm caráter individual, com a criação do hipertexto. O Hipertexto, termo estabelecido por Theodore Nelson, em 1960, que se referia a textos com escrita não-seqüencial que permitem ao leitor escolher múltiplos caminhos e acessar informações em cadeia através da tela do computador em tempo real. O hipertexto enquanto veículo tecnológico impõe novas formas de aquisição e produção do conhecimento. Quanto ao uso pedagógico do hipertexto assevera Bugay e Ulbricht (2000, p.45): “O Hipertexto destinado à pesquisa de informação é uma ferramenta pedagógica extremamente flexível e tem um papel formador muito importante, pois obriga o usuário a se concentrar em um determinado objetivo.”

O caráter flexível e dinâmico do hipertexto possibilita organizar diferentemente os diversos recursos propiciando usos variados e adaptáveis às necessidades dos usuários desse revolucionário mecanismo de linguagem. Segundo Lévy (1997, p.73):

> ...o efeito de uma mensagem é o de modificar, complexificar, retificar e um hipertexto, criar novas associações em uma rede contextual que se encontra sempre anteriormente dada. O esquema elementar da comunicação não seria mais “A transmite alguma coisa a B”, mas sim “A modifica uma configuração que é comum a A, B, C, D etc.”. O objetivo

> principal de uma teoria hermenêutica da comunicação não será, portanto, nem a mensagem, nem o emissor, nem o receptor, mas sim o hipertexto que é como a reserva ecológica, o sistema sempre móvel das relações de sentidos que os precedentes mantêm.

O hipertexto difere do texto tradicional, principalmente, pela: não-linearidade, fragmentação e virtualidade. (I) A não-linearidade é a característica fundamental do Hipertexto, esta particularidade técnica de produzir e disponibilizar a informação libera o leitor para seguir a seqüência de leitura no ritmo que desejar, fazer os saltos, abolindo a estrutura tradicional dos parágrafos, das seções ou dos capítulos imprimindo a seqüência que lhe interesse, otimizando percursos através dos links, que são os indicados pelo autor. Isto não implica uma destituição absoluta de seqüencialidade, até porque a inteligibilidade de qualquer linguagem demanda algum tipo ou forma de seqüência. Pode-se dizer que ele possui um menor grau de linearidade em relação ao texto comum. (II) A fragmentação é característica da tecnologia de escrita em processo, o Hipertexto rompe com a hierarquia de começo, meio e fim pré-definidos. O ponto-de-partida da leitura feita por um leitor pode se transformar em ponto-de-chegada quando realizada por outro leitor. (III) A virtualidade do hipertexto é significativa e sua estrutura instável é impar. Por ser virtual é atualizável sem precisar passar pela concretização efetiva ou formal, esta tecnologia intelectual manifesta-se de forma versátil e, neste sentido, se opõe diametralmente à estabilidade e concretude material do texto impresso. Não há nada pronto, acabado, no hipertexto, a atualização e modificação por acréscimo ou conexão de um hipertexto referencial a outro hipertexto ocorre, a qualquer instante, em função dos objetivos do autor. É possível a mais de um usuário acessar simultaneamente em qualquer lugar do planeta, tornado o hipertexto presente em vários locais ao mesmo tempo impensável aos impressos tradicionais.

A capacidade de agregar referentes mídias como textos, imagens, sons, mapas e gráficos possibilitando na interfase destes recursos de linguagem numa única tela de computador, atribui ao hipertexto acentuado poder de comunicação, oferecendo ao usuário uma experiência diferenciada impossível às tecnologias anteriores de escrita. Essa convergência de mídias produz um efeito de linguagem sem paralelos, contribuindo para a instauração de um ambiente cognitivo propício à exploração e apreensão de informação.

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo geral

Usar o computador como meio de ensino do Cálculo Diferencial e Integral para aumentar a eficiência da aprendizagem.

1.3.2 Objetivos específicos

? Usar o computador no ensino do Cálculo Diferencial e Integral.

? Criar hipertexto específico de Cálculo Diferencial e Integral.

? Analisar a aprendizagem num Hipertexto.

2 O HIPERTEXTO NO ENSINO DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

2.1 História da educação matemática

2.1.1 Período Paleolítico

O período Paleolítico compreende de cerca de 1 milhão de anos a 8.000 anos antes do início da era cristã. Nos primeiros tempos deste período, segundo Bernal (1969, p.74):

> ...o homem vivia de caça, da pesca e da coleta de sementes, frutos e raízes, e não tinha nenhum domínio sobre a produção desses alimentos. Essa total dependência da natureza refletia, é claro, o pequeno domínio do homem sobre as técnicas básicas, necessárias à produção de alimentos. Surgiria, então, a magia como forma de preencher essa "lacuna criada pelas limitações da técnica".

Para Miorim (1998, p.5) "...a magia, ao mesmo tempo que confirmava essas limitações dava o impulso inicial no caminho das representações e das relações entre as formas, consistindo no primeiro passo do longo caminho que levaria ao simbolismo gráfico e à escrita".

Nesses primeiros tempos da raça humana, podem-se vislumbrar noções matemáticas relacionadas aos conceitos de número, grandeza e forma. Essa capacidade de abstração foi identificada por Darwin em suas pesquisas, igualmente, em animais superiores, segundo Boyer (1987, p.1); concluiu ele que estes:

> ...possuem capacidades como memória e imaginação, e hoje é ainda mais claro que as capacidades de distinguir número, tamanho, ordem e forma – rudimentos de um sentido matemático – não são propriedades exclusivas da humanidade. Experiências com corvos, por exemplo, mostraram que pelo menos alguns pássaros podem distinguir conjuntos contendo até quatro elementos.

Conjetura-se que o conhecimento neste período era transmitido pelos membros mais instruídos, conforme Furon (1959, p.16) "êstes sábios da Pré-história eram feiticeiros". Assim, segundo Miorim (1998, p.5):

> As primeiras pinturas rupestre do Paleolítico, ou seja, as primeiras representações conhecidas, foram provavelmente realizadas por motivos mágicos. É possível que o homem daquele período acreditasse que as representações – formas planas de animais, de seus ossos e órgãos

> internos –, associados a rituais sagrados, garantiriam maior quantidade e melhor quantidade da caça.

Os primeiros elementos da Aritmética tiveram sua origem nesse período. Havia necessidade de quantificar a caça, os instrumentos de pedra, as pessoas de grupo. Segundo Furon (1959, p.22):

> Nada podemos dizer a respeito, senão que, desde o Paleolítico superior, existem entalhes nas paredes rochosas e, depois, em varinhas de marfim. Datando do Paleolítico médio, conhecemos um bastão de osso com entalhes, descoberto em 1937 em Vestonícia (Morávia), feito de um rádio de lôbo, comportando 55 entalhes em duas séries, dispostas em grupos de cinco.

Nas sociedades primitivas todos trabalhavam pela sobrevivência, o trabalho e as responsabilidades eram divididos entre homens, mulheres e crianças. Essa condição de igualdade perante o grupo, talvez, possibilitasse a todos, conforme Miorim (1998, p.7):

> ...os mesmos *direitos,* inclusive a um mesmo tipo de educação. Mas seria possível falar da existência de algum tipo de educação entre os povos primitivos? A resposta a essa questão vai depender da maneira como encaramos o processo educativo. Caso aceitemos que a transmissão dos conhecimentos, crenças e práticas adquiridas pelo grupo social às futuras gerações, como forma de garantir a sobrevivência da espécie, pode ser entendida, como uma forma de educação, diremos que sim. As crianças aprendiam todos os conhecimentos, crenças e práticas, naturalmente, na convivência cotidiana com os adultos, nas atividades e festividades da tribo. Sem dúvida, não era uma educação intencional, planejada. Todos os adultos responsabilizavam-se igualmente pela educação das crianças, e a tribo era o local reservado a essa educação. As crianças aprendiam tudo vendo, ouvindo e praticando, ou seja, participando da vida da comunidade.

Como todos aprendiam tudo e pelo mesmo processo, e não havia distinção entre aqueles que deveriam trabalhar e os que deveriam aprender, as relações eram espontâneas e sem repreensões. Para Miorim (1998, p.7):

> A criança deveria crescer com suas qualidades e defeitos, ser bem tratada, o que não a impedia de, quando adulta, se integrar perfeitamente ao grupo. As crianças não podiam ser castigadas e, caso isso viesse a ocorrer, a pessoa responsável poderia ser, também, castigada.

O crescimento da aldeia obrigou o homem a dividir as tarefas comunitárias em técnicas, destinadas, principalmente, à produção de alimentos e administrativas, destinadas à organização da aldeia Os indivíduos responsáveis por estas últimas respondiam pela distribuição de alimentos, pelo controle da irrigação, pelo registro do tempo, pela cura das doenças e pela proteção espiritual da aldeia. Esta separação permitiu a algumas pessoas destinassem parte do seu tempo à busca de novas técnicas e novos instrumentos, o que gerou novos conhecimentos Nessas circunstâncias, limitado a um grupo privilegiado, o conhecimento passou a ser restrito e sua transmissão deixou de ser espontânea e natural. Segundo Miorim (1998, p.8):

> A educação começa então a ser diferenciada e os filhos dos organizadores – os futuros dirigentes – passam a ter tratamento especial. É o início da educação intencional, sistemática, organizada, violenta e sapiencial. Em princípio, apenas como complementação aos conhecimentos práticos das técnicas, mas em seguida, como a única forma de educação das classes dirigentes.

2.1.2 Período Mesolítico e Período Neolítico

A idade da pedra é dividida em dois períodos o Mesolítico que se estende de 8.000 e 5.000 a.C e o Neolítico de 5.000 a 2.500 a.C. No período Mesolítico desenvolveram-se a agricultura, a domesticação e criação de animais e a fabricação de instrumentos e armas. Conforme Miorim (1998, p.5):

> Isso fez com que já não existisse mais uma dependência total da natureza. As pinturas desse período não tentam reproduzir, com a maior perfeição possível, animais, objetos e pessoas, mas mostram representações esquemáticas, em que eram bastante utilizadas simetrias e congruências. A razão de terem surgido as pinturas geométricas, o uso de simetria e congruências é desconhecida, teria sido a observação da natureza, tão rica em exemplares geométricos, ou uma forma de magia?

No período Neolítico, como no Paleolítico, o homem manteve o hábito de fazer marcações quantitativas em rochas e ossos, algo que, provavelmente, tornou-se complicado com o desenvolvimento do comércio. Neste período aperfeiçoam-se as representações de figuras geométricas: pontos, linhas, círculos, espirais, quadrados, losangos e triângulos. Para Furon (1959, p.22) “Não se trata, é claro de geometria pura, mas de ornamentações de objetos mobiliários ou de paredes rochosas.” As razões que levaram o homem a essas formas de representações podem ser várias. Segundo Miorim (1998, p.5-6):

> Alguns autores, como Eves (1969, 1992), acreditam que a observação das simetrias existentes na natureza, e a conseqüente percepção de seu valor

> artístico e estético, teria levado o homem a utilizar tais representações e a perceber suas regularidades. Outros, como Gerdes (1991), entretanto defendem que as necessidades objetivas e as formas encontradas para resolvê-las – seja na fabricação de ferramentas, seja no entrelaçamento de cestas ou na tecelagem – teriam levado o homem à identificação de certas formas geométricas, em especial à simetria, como as mais adequadas, ou seja, as mais racionais. Para esses autores, o trabalho com as simetrias despertaria no homem a atenção para o seu valor estético ou artístico. É possível, ainda considerar que tanto a observação da natureza como as necessidades objetivas teriam contribuído, em maior ou menor grau, para o surgimento dessas representações. Entretanto, qualquer que seja a posição assumida sobre a origem dessas pinturas, é claro que elas indicam um avanço com relação à percepção de conceitos e propriedades geométricas.

2.1.3 As Antigas Civilizações

A organização social atinge, no final do Neolítico, grande complexidade e os agrupamentos de aldeias dão origem às cidades. Conforme Miorim (1998, p.8) “As primeiras cidades se desenvolveram nos vales de grandes rios, tais como o Eufrates, o Tigre, o Nilo e o Indo, pois as inundações anuais lhes garantiam a tão necessária fertilidade do solo.”. Nas antigas civilizações encontramos a sociedade dividida em classes: governantes-sacerdotes, funcionários administrativos, artífices, mercadores, trabalhadores e agricultores.

2.1.3.1 – O Egito

A civilização egípcia tem início no terceiro milênio anterior a era cristã e atrás de si um longo passado. Segundo Furon (1959, p.27):

> Desse passado sabemos pouca coisa, pelo menos até por volta do fim do neolítico. Escavações efetuadas em certas necrópoles dessa era, no Alto Egito (Nagada, Hieracompolis, Badari) e na região meridional do Delta (Meadi, Heliópolis), levaram à descoberta de objetos – vasos, cabeças de clava, palhetas de xisto – decoradas com figuras, que permitem reconstituir, em linhas gerais, a época histórica.

Os primeiros conceitos numéricos inteligíveis pelo homem foram certamente um e dois, segundo Boyer (1987, p.1-2):

> ...o desenvolvimento do conceito de número foi um processo longo e gradual é sugerido pelo fato de certas línguas, o grego inclusive, conservaram na sua gramática uma distinção tripartite entre um e dois e mais de dois, ao passo que a maior parte das línguas atuais só fazem a

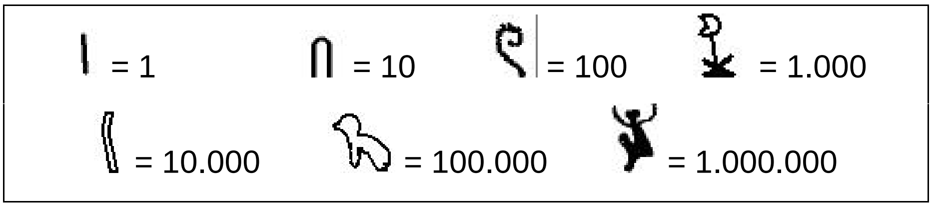
> distinção em “número” entre singular e plural. Evidentemente nossos mais antigos antepassados a princípio contavam só até dois, qualquer conjunto, além desse nível era dado como “muitos”. Mesmo hoje, povos primitivos ainda contam objetos dispondo-os em grupo de dois.

O número um poderia estar associado ao próprio indivíduo, sua distinção no grupo social, sua solidão perante a vida ou, talvez, a morte. O número dois pode estar associado a dualidade do feminino e do masculino, às simetrias da natureza principalmente a do corpo humano. Inscrições pictóricas do Egito evidenciam a gramática tripartite. Para Ifrah (1989, p.17):

> Ela consistia em repetir três vezes um mesmo hieroglifo (ou ainda em acrescentar três pequenos traços verticais à imagem correspondente): não apenas para figurar três do ser ou do objeto assim representado, mas também para indicar o seu plural.

No decorrer dos séculos o povo egípcio aprimorou seu sistema numérico atribuindo signos particulares às quantidades, embora não ter uma representação específica para o zero, alguns escribas o manejavam intuitivamente, pois deixavam um espaço vazio no lugar onde nós o escreveríamos. Veja no quadro abaixo o valor dos signos numéricos egípcios:

Quadro 1: Algarismos hieroglíficos egípcios



Fonte: Ifrah, 1989, p.158.

O sistema numérico egípcio não era posicional, ou seja, para representar uma certa quantidade deve-se repetir a quantidade de signos correspondente a cada ordem de grandeza, assim  corresponde à 1.312, como o sistema não é posicional pode ser escrito  .

As operações numéricas realizadas pelos egípcios têm suas particularidades. Conforme Furon (1959, p.34):

> A aritmética egípcia, como tôdas as aritméticas, reduz-se, em última análise, a um único processo: contar, daí por que a memória desempenha um papel tão importante no ensino da aritmética elementar. Mas, enquanto hoje aprendemos a tabuada de somar e de multiplicar até 10, o que nos permite

> efetuar rapidamente tôdas as operações simples, os egípcios não iam além de 2, e só multiplicavam e dividiam diretamente por 2.

Os egípcios não concebiam fração como atualmente nos compreendemos, assim o número $\frac{2}{5}$ era entendido como $\frac{1}{3} ? \frac{1}{15}$, ou $\frac{21}{32}$ como $\frac{1}{2} ? \frac{1}{8} ? \frac{1}{32}$, para eles existia fração somente com o número um no numerador. Segundo Furon (1959, p.40):

> À raiz quadrada concedem o nome de “canto”. Êste têrmo deriva claramente de representação de um quadrado cortado em diagonal e mostra até que ponto os egípcios mantiveram-se no nível do concreto, onde outros povos teriam recorrido à abstração.

Em geometria os egípcios calculavam corretamente a superfície do retângulo e do triângulo, e obtinham com boa aproximação a superfície do círculo.

As tarefas de registrar e contar era responsabilidade dos sacerdotes-governantes pois eram reservado a eles os meios necessários, o significado de hieróglifo – escrita de sacerdote – deixa evidente o caráter elitista da cultura que advém daquele período até os dias de hoje. Na sociedade dividida em classes, segundo Miorim (1998, p.10):

> ...onde apenas uma minoria era responsável pela organização e direção das cidades, enquanto a grande maioria deveria apenas produzir, começou a coexistência de dois tipos bastantes diferenciados de educação: uma técnica – a dos ofícios dos artesões –, transmitida oralmente por meio da prática, e outra baseada na escrita, destinada à formação dos futuros dirigentes.

A escrita passa a ser a única forma de acesso à cultura o que torna a profissão de escriba diferenciada dando início à valorização do trabalho intelectual. Neste contexto, segundo Miorim (1998, p.11-12):

> ...considerando-se que os sacerdotes egípcios detinham o monopólio da ciência, dedicavam-se ao estudo, especialmente da geometria e aritmética, e que muitos desses conhecimentos eram mantidos em segredo, como forma de garantir a superioridade da classe dirigente, podemos levantar a hipótese de que eles conheciam pelo menos alguns elementos teóricos, e que estes podem ter sido perdidos. [...]. O ensino da Matemática [...] era baseado na resolução de problemas, de maneira mecânica, por meio da repetição dos mesmos procedimentos, ou seja, por meio do treino de algoritmos. Além disso, esse ensino, bastante autoritário, era destinado apenas a alguns poucos privilegiados.

2.1.3.2 A Mesopotâmia

Por volta de 3.500 anos da nossa era que aparecem os primeiros documentos escritos da Mesopotâmia. O sistema gráfico dos mesopotâmios recebeu o nome de escrita cuneiforme em virtude da conformação dos caracteres que, pelo menos em determinadas épocas, parecem compostos de elementos em forma de prego ou de cunha. Os escribas gravavam esses caracteres, com o auxilio de um caniço delgado, em tabuinhas de argila que depois coziam ou deixavam secar ao sol. Centenas de milhares desses documentos chegaram até nós, muitas vezes em excelentes estado de conservação.

O conhecimento sobre a matemática da mesopotâmia é recente. Segundo Furon (1959, p.108-109):

> De um modo geral, os textos matemáticos babilônicos podem ser classificados em duas categorias: as tábuas numéricas e as tabuinhas de problemas. As primeiras quase não diferem das tábuas modernas: números dispostos em colunas ordenados em séries crescentes ou decrescentes, referências de uma tábua a outra, combinações etc. Quanto aos problemas, são coletâneas de exercícios, semelhantes aos que se encontram na final dos nossos manuais escolares. Coletâneas didáticas, sem dúvida, pois em vários casos pressupõem especificações não fornecidas pelo enunciado, que deviam ser indicadas oralmente ao aluno. Não raro, uma mesma tabuinha contém um número muito grande de enunciados, separados nitidamente uns dos outros, por meio de um traço simples ou duplo. Uma delas contém nada menos do que 247, todos do mesmo gênero, constituindo variantes de alguns enunciados básicos, resolvidos por métodos idênticos: em linguagem moderna, diríamos que as equações têm a mesma forma, variando apenas os coeficientes

Os textos de geometria apresentam figuras simples que servem apenas para ilustrar o enunciado dos problemas, não representam construções geométricas.

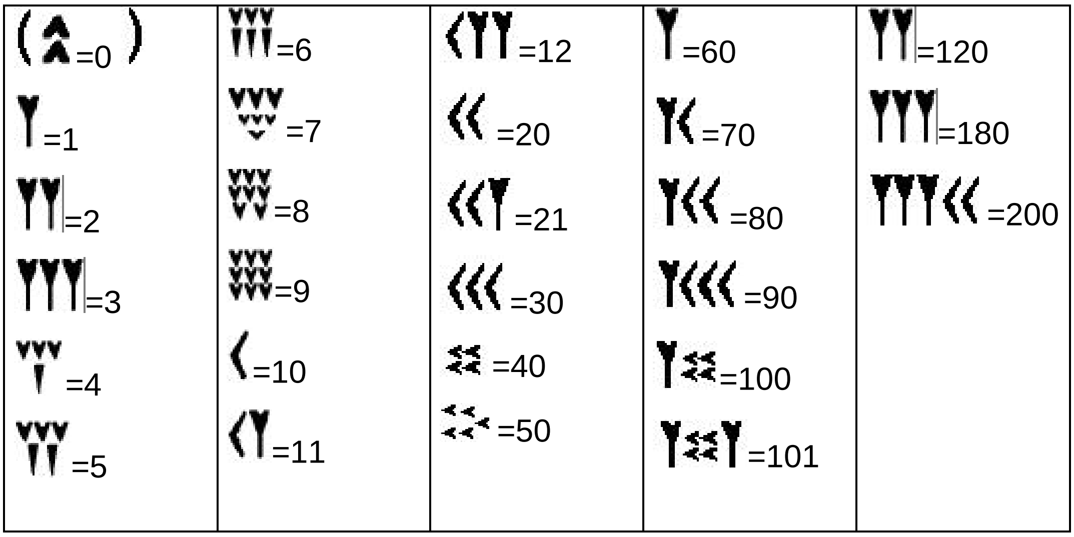
A numeração babilômica apresenta duas características originais que não se encontram em nenhum dos sistemas antigos: uma numeração de posição de base sexagesimal. Conforme Boyer (1987, p.19):

> O sistema decimal, comum à maioria das civilizações tanto antigas quanto modernas, tinha sido submerso da Mesopotâmia sob uma notação que dava a base sessenta como fundamental. Muito se escreveu sobre os motivos para essa mudança; sugeriu-se que considerações astronômicas podem ter sido determinantes ou que o sistema sexagesimal pode ter sido a

> combinação natural de dois mais antigos, um decimal outro em base seis. Parece mais provável, porém, que a base sessenta fosse adotada conscientemente e legalizada no interesse da metrologia, pois uma grandeza de sessenta unidades pode ser facilmente subdividida em metades, terços, quartos, quintos, sextos, décimos, dozeavos, quinzeavos, vigésimos, trigésimos, fornecendo assim dez possíveis subdivisões. Qualquer que tenha sido a origem o sistema sexagesimal de numeração teve vida notavelmente longa, pois até hoje restos permanecem, infelizmente para a consistência, nas unidades de tempo e medida dos ângulos, apesar da forma fundamental decimal de nossa sociedade.

Veja no quadro abaixo a notação numérica babilônica e o correspondente no sistema decimal:

Quadro 2: Sistema de numeração usado na babilônia



Fonte: Ifrah, 1989, p.240.

Neste sistema de numeração o zero não tem o mesmo significado que tem nosso sistema decimal, portanto o mesmo signo pode significar 1 ou 60. Quanto as operações aritméticas a maior parte dos documentos encontrados referem-se à taboas numéricas que dão o resultado de uma multiplicação ou de uma divisão. Para Furon (1959, p.113):

> Os babilônios decompunham esta última operação em dois tempos: para dividir um inteiro m por n, procuravam nas tábuas o inverso de n e multiplicavam m pelo número $1/n$ assim obtido. Essa maneira de proceder explica a combinação freqüente das tábuas de multiplicação com tabelas de números inversos.

Além de serem encontradas várias tábuas com multiplicações, há tábuas que contém o quadrado e o cubo de alguns números e as raízes quadradas e raízes cúbicas perfeitos, embora já possuíssem excelentes aproximações da $\sqrt{2}$ e um método para calcular as raízes cúbicas. Os babilônios eram capazes de resolver equações do primeiro e do segundo grau pela aplicação sistemática de uma arte combinatória muito evoluída. Segundo Furon (1959, p.115):

> Em geral, as tabuinhas contêm vários enunciados – do mesmo tipo ou de tipos semelhantes – e, para cada enunciado, a indicação dos cálculos e a resposta; nunca há uma justificativa teórica das fórmulas empregadas, mas os processos de resolução são sempre os mesmos, o que permite acreditar que as fórmulas eram pensadas como esquemas operatórios, embora nunca fôssem explícitas.

Pelo fato de possuírem um sistema numérico posicional os babilônios possuíam maior habilidade na realização de cálculos, talvez seja esta a razão da Matemática ter tido um desenvolvido maior nesta civilização do que na egípcia.

O ensino da Matemática na Mesopotâmia e no Egito está restrito à resolução de coleções de exercícios de situações-problema. Segundo Miorim (1998, p.11):

> Essas situações-problema, consideradas concretas por muitos autores, apresentam muitas vezes elementos improváveis para uma situação real. Isso pode indicar que o mais importante era o treino do algoritmo, ou melhor, o treino dos passos a serem seguidos para a obtenção da solução de um determinado tipo de problema, e não a sua concretude.

Semelhantes aos livros modernos que trazem uma coletânea de exercícios ao final de cada unidade, algumas tabuinhas foram elaboradas com uma série de exercícios referentes às questões práticas e outra série de treinamento desprovida de qualquer aplicabilidade. Conforme Furon (1959, p.116)

> Quando, numa tabuinha, se lê um enunciado como êste: “Somei seis vêzes a superfície de meu campo (quadrado) e três vêzes e meia o lado; obtive 906 (notação decimal); qual é o lado do meu quadrado?”, é bem evidente que não se trata de um problema de agrimensura, porém de um jôgo de espírito; quando tal problema vem seguido de uma vintena de problemas da mesma espécie, é claro que o jôgo continua: a tabuinha é um texto didático destinado a preparar os alunos no manejo das fórmulas. A disposição de algumas tabuinhas é, a êsse respeito, muito significativa, pois nelas os problemas sucessivos, baseados num mesmo motivo, são separados por linhas duplas.

Há autores que acreditam em razões lúdicas para justificar este tipo de problema, outros que vêem a tentativa de abstração. Para Miorim (1998, p.11):

> Qualquer que seja a hipótese aceita, é bem provável que a prática tenha dado início ao hábito, persistente até hoje, de colocar problemas totalmente absurdos para os alunos, apenas com a intenção de treinar os algoritmos, ou até mesmo de "desenvolver o raciocínio".

2.1.4 A civilização clássica

As antigas civilizações conceberam os rudimentos da Matemática, mas os princípios lógicos, as réguas e a exatidão dos resultados ficaram a cargo da civilização grega, no período classificado por helenismo clássico que compreende o início do século VI a.C. ao fim do século IV a.C. Segundo Michel (1959, p.9):

> Na história das ciências, como em qualquer outro ramo da história, é difícil falar de uma origem absoluta. É indubitável que, antes do século VI, os gregos tinham noções de matemática, de astronomia, de medicina – receitas ou conhecimentos empíricos, muitas vêzes trazidos do Oriente. Mas no século VI, o aparecimento das escolas jônicas constitui uma dessas viradas que, como se disse, têm o valor de uma origem: é o momento em que a ciência grega, como que tomando conhecimento de si mesma, já não se propõe apenas uma simples aquisição do saber, mas uma coordenação dos dados adquiridos. Quanto ao têrmo final do período helênico, pode ser fixado mais precisamente, tendo como referência à súbita expansão do mundo grego após as conquistas de Alexandre.

2.1.4.1 A Matemática na Cultura Helênica

A matemática pitagórica, marco inicial da filosofia desta cultura, é dominada por um pressuposto filosófico: a idéia de que tudo é número, de que os números são os modelos das coisas. Daí a mística do arithmos, que resulta, por exemplo, na atribuição de virtudes secretas a determinados números. Os números figurados são um exemplo, segundo Michel (1959, p.29):

> Esta teoria, à qual, hoje, se atribui apenas um interêsse histórico, permite-nos observar a relação estreita que se estabeleceu, desde a aurora das ciências matemáticas, entre as noções de números e de extensão; ela comprova um esfôrço inicial para conceber o número em função do espaço e vice-versa.

Na teoria dos números figurados estes podem ser lineares, planos ou sólidos. É evidente que cada um deles pode assumir várias formas, mas uma delas o caracteriza especialmente, por exemplo: 7 é primo e linear, 4 é plano (quadrado) e 8 é sólido (cúbico). Na figura estão representados alguns números planos:

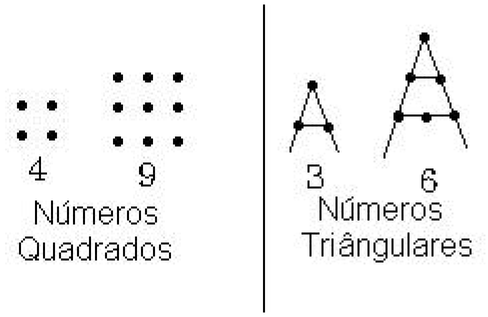


Figura 2: Representações numéricas

Fonte: Simmons, 1987, p.700

As relações numéricas, restritas aos números inteiros, abrem espaço à idéia de médias, ou seja, uma progressão de três termos, tais que, com dois deles e com duas de suas diferenças, seja possível construir duas razões idênticas. Há onze médias possíveis. Os antigos conheceram todas, mas inicialmente só consideravam três, denominadas primitivas as médias: aritmética, geométrica e musical (ou harmônica). A pesar da matemática pitagórica fazer apologia aos números inteiros, esta já havia descoberto a irracionalidade de alguns números, principalmente $\sqrt{2}$. Segundo Michel (1959, p.33) "...esta descoberta causou um escândalo na Escola, pois arruinou os seus princípios".

A obra de Euclides Os Elementos pode ser considerada o segundo marco da cultura helênica. Nela encontra-se toda a geometria até então concebida pelo ser humano, uma reunião de teoremas dispostos como uma única e vasta demonstração. Conforme Michel (1959, p.34):

> É importante notar, a êsse respeito, que a palavra ? ?? ?? ??? ? – que se traduz por elemento, e à qual se atribuiu o sentido de fundamento, de primeiro princípio – significava inicialmente aquilo que está enfileirado, o que faz parte de uma linha, de um alinhamento ou de uma cadeia, e, depois, das letras de um alfabeto.

Fiel às prescrições platônicas, Euclides só incluiu em Os Elementos problemas suscetíveis de solução da geometria plana, através da régua e do compasso.

O terceiro e último referencial filosófico foram as primeiras tentativas de uma Matemática Superior. Para Michel (1959, p.36):

> Nesta época são propostos os três problemas: da quadradura do círculo, da duplicação do cubo e da trissecção do ângulo, os quais irão preocupar, particularmente, os matemáticos do século seguinte. Quanto à teoria das secções cônicas, ela será esboçada pelos predecessores imediatos de Euclides.

Podem-se listar como características gerais da matemática no período helênico: exigência demonstrativa; o valor da intuição; aritmética intuitiva e álgebra aritmética; geometrismo e álgebra geométrica. Segundo Michel (1959):

a) Exigência demonstrativa – Com Pitágoras, têm início os princípios superiores e a investigação abstrata dos teoremas pelo puro intelecto, surge a exigência da demonstração. Aquilo que anteriormente resultava apenas da evidência sensível e só conduzia a uma receita útil, foi por fim transposto para o plano das necessidades racionais.

b) O valor da intuição – Contrasta com a característica anterior, mas é irrecusável, a matemática grega é basicamente visual. Uma figura deve evidenciar uma verdade, é provável que a figura teve o papel de prova mesmo entre os pitagóricos.

c) Aritmética intuitiva e álgebra aritmética – O que se conhece da aritmo-geometria pitagórica permite-se afirmar que a própria aritmética foi, em certo momento de sua história, intuitiva e visual. O número apresenta-se como figura e ocupa lugar no espaço. Ignorando ou recusando aceitar qualquer numeração de cifras, os pitagóricos representavam a unidade por meio de um ponto, a díade por dois pontos, e assim por diante. A figura, tornando-se símbolo, permitia uma generalização do cálculo aritmético.

d) Geometrismo e álgebra geométrica – Mesmo que o pensamento matemático dos gregos se tenha ligado à consideração do número discreto, estes sempre reconheceram que toda idéia clara do número implicava uma visão no espaço, assim não é surpreendente que a geometria tenha superado a aritmética, principalmente após a descoberta dos irracionais. Quando bem construída, a figura geométrica tem a dupla vantagem satisfaz, ao mesmo tempo, às exigências da demonstração e da intuição.

2.1.4.2 As Escolas

A filosofia e a superstição são as marcas das emergentes Escolas do período helênico, onde sobressaem os milésios, pitagóricos e aleatas. Segundo Michel (1959, p.33-34).

> Os milésios, empenhados na procura de um princípio universal, presumem que a natureza inteira pode tornar-se objeto de conhecimento racional. Tales foi, ao mesmo tempo, físico, astrônomo e geômetra; a tradição atribui-lhe cinco teoremas do primeiro livro de Euclides. Os pitagóricos não se limitam a fazer da Geometria um “ensino liberal”: considerando o número

> como o princípio das coisas, conferiram à Matemática um caráter científico por excelência, que nunca mais deixou de ser reconhecido. "Tudo o que é cognoscível tem um número, escreveu Filolau. Sem o número, não compreendemos nem conhecemos nada." Finalmente, os eleatas procederam a um exame crítico do pensamento científico. Na segunda metade do século V a.C., e no início do IV, as escolas multiplicam-se. Os centros mais ativos Quios (com Hipócrates), Cirene (com Teodoro), Mégara, e finalmente, Atenas, onde se reúne certo número de matemáticos, alguns (os sofistas) em tôrno de Protágoras e outros em volta de Sócrates.

2.1.4.3 As Propostas Pedagógicas Predominantes

A base da educação grega era a formação do guerreiro e o cultivo do corpo, felizmente esta tendência não se manteve uniforme, fundamentalmente por ser a Grécia constituída por cidades-estados, estas gozavam de total autonomia administrativa, ou seja, possuíam suas próprias leis e formas de governo. O exemplo mais representativo das diversidades existentes é a dicotomia Esparta-Atenas, enquanto Esparta manteve-se aristocrática e preservou na educação a formação do soldado, Atenas começou a valorizar o ensino da leitura e a formação do cidadão.

Neste momento ocorre uma mudança no estudo da Matemática o que possibilitaria o aparecimento da Matemática abstrata. Para Miorim (1998, p.14):

> É difícil precisar quando e qual teria sido o processo que levaria ao surgimento da Matemática abstrata na Grécia, pois não dispomos de nenhum documento daquele período. Fontes posteriores nos indicam apenas que Tales de Mileto (c. 626-545a.C.) deu passos importantes nessa direção. Por essa razão, atribuem-lhe o título de primeiro dentre todos os matemáticos gregos. Entretanto, foi Pitágoras de Samos (c. 580-500 a.C.), um filósofo da mesma época de Tales, que exerceu influência maior, e definitiva, não apenas na Matemática, mas também no ensino, especialmente por intermédio de Platão.

2.1.4.3.1 A Escola Pitagórica

Fundada por Pitágoras esta Escola era uma seita de caráter político-filosófico-religioso e constituída por aristocratas, envolta em grande misticismo acreditava que a purificação seria atingida através do conhecimento puro. Segundo Miorim (1998, p.15):

> Com relação ao aspecto educacional, podemos dizer que foi na escola filosófica de Pitágoras que a Matemática, pela primeira vez, foi introduzida na educação grega e reconhecida como um elemento de grande valor

> formativo. Entretanto, isso estaria restrito à escola filosófica e à formação dos filósofos.

Esta Escola foi responsável pela introdução da concepção de que os homens que trabalham com os conceitos matemáticos são superiores aos outros, concepção esta que persiste até os dias de hoje.

2.1.4.3.2 Sócrates e os Sofistas

Os sofistas surgiram na metade do século V a.C., atribuíam a si mesmos o título de mestre, viajavam de cidade em cidade, falavam nas praças e aquele que pudesse pagar por seu serviço receberia instrução sobre os temas diversos. Nascido em Atenas em 470 a.C., Sócrates afirmava que o estudo da geometria deveria ir até o suficiente para medir um pedaço de terra que se desejasse vender, dividir ou trabalhar; prolongar os estudos da geometria afastaria o homem de outros mais úteis. O ensino das ciências não era valorizado pelos sofistas e socráticos, por vezes, até o condenavam. Segundo Michel (1959, p.47);

> ...uma atitude francamente crítica por parte dos filósofos pode ser útil ao progresso das ciências, obrigando o cientista a certificar-se melhor de seus princípios, e a melhor definir o objeto específico de suas investigações. Ainda desta vez, podemos verificar uma contribuição indireta para o progresso metodológico.

A preocupação com o aperfeiçoamento da alma do estudante tendo como princípio básico a noção de verdade, promoveu uma revolução na educação grega. Segundo Miorim (1998, p.17):

> Os sofistas, ao proporem um novo elemento na educação grega – a educação intelectual –, deixando a educação corporal em segundo plano, abriram caminho para uma série de questões novas com relação à formação e, em especial, com relação à introdução dos estudos científicos. Essas questões podem ser assim resumidas:
>
> ? Os estudos científicos seriam realmente importantes para a formação geral do estudante?
>
> ? A importância desses estudos advém do fato de atribuirmos a eles, através da valorização de seu aspecto puramente teórico, a capacidade de desenvolver alguma habilidade do pensamento, ou pelo fato de considerarmos apenas o seu valor estritamente prático?
>
> ? Com que profundidade esses estudos devem ser desenvolvidos, para que possamos dar uma formação mais adequada ao estudante?

A popularização do estudo da matemática deve-se aos sofistas independentemente da profundidade de estudo que propunham, pois para eles era necessário falar sobre qualquer assunto e, portanto, conhecer todos, inclusive a matemática.

2.1.4.3.3 Platão

Platão (428 a.C.-348 a.C.), ao contrário dos sofistas e de Sócrates, situa a ciência no primeiro plano de toda atividade intelectual. Conforme Michel (1959, p.50-53):

> Sabe-se que Platão aceitou a distinção (já pressentida por Sócrates) entre os objetos sensíveis, imperfeitos e cambiantes, e seus modelos eternos – as idéias – perfeitas e imutáveis. Ora, permanecendo entre os dois domínios, os objetos matemáticos estariam situados num plano intermediário. Retomemos o exemplo das figuras geométricas reais, materializadas pela natureza ou artificialmente: um círculo traçado, um corpo esférico. Essas figuras são imperfeitas e o são necessariamente. Se nos referimos a elas, seremos obrigados a admitir que o círculo e a tangente se tocam em mais de um ponto. Mas se, pelo contrário, considerarmos o círculo ideal e a tangente ideal, reconheceremos sem dificuldade que ambos só têm um ponto de contacto, sem espessura. Por círculo ideal, deve-se entender aquêle que corresponde à definição do círculo e é o que o matemático toma como objeto de sua especulação. Trata-se, pois, de um conceito. Mas como se obtém êsse conceito? Não poderia ser por meio da generalização, a partir de uma série de objetos reais, pois de fato não existe uma série, nem mesmo um único objeto, que corresponda perfeitamente à definição de circulo. Será por meio de uma espécie de percepção direta de um objeto necessário – anterior à reflexão e não criado por ela – intuitivamente contemplado. Chega-se a essas realidades intangíveis, objetos verdadeiros da geometria, através da *reminiscência*. [...] O valor eminente atribuído por Platão às ciências matemáticas (comparativamente às ciências da natureza) não deve levar à crença de que êle chegasse a ponto de considerá-las como um meio de acesso às verdades absolutas. [..] A matemática é parente da dialética, mas o é como a sombra para o corpo. Suas verdades são irrefutáveis uma vez admitidos os princípios; são porém condicionais, porque é necessário estabelecer êsses princípios. O fato matemático é, para Platão, "um fato de espírito que o constrange mas que lhe pertence por inteiro" (Abel Rey). Platão leva em conta o homem, e nisto mantém-se fiel ao espírito de Sócrates. O sábio cria: sem dúvida, procura verdades externas existentes fora dêle; mas com os meios de que dispõe para chegar

> até lá são inseparáveis de si mesmo, nunca poderá atingir mais do que a sombra de uma realidade transcendente. Assim, Platão reconhece, ao mesmo tempo, a grandeza da matemática, disciplina científica por excelência, e seus limites, que são os de tôda ciência humana. Daí por que é correto dizer que êle foi, simultâneamente, "animador e crítico" dos matemáticos de sua época.

A concepção da matemática como conhecimento capaz de despertar o pensamento humano, proposta por Platão, tornou-se o diferencial de sua pedagogia, esta preconizava que os estudos da matemática fossem desenvolvidos no nível elementar, como já acontecia no ensino superior. Segundo Miorim (1998, p.18):

> No nível elementar, todas as crianças deveriam estudar rudimentos matemáticos, como "contar um, dois, três..., aprender a série dos inteiros e, provavelmente, as funções duodecimais empregadas na metrologia grega", e também elementos que Platão considerava importante, [...] por fornecerem a base necessária aos estudos posteriores. Esses elementos eram compostos essencialmente de problemas concretos, extraídos da vida e dos negócios, com o objetivo de exercitar os cálculos [...] o ensino de Matemática nesse nível elementar deveria, segundo Platão, evitar os exercícios puramente mecânicos, propor problemas adequados à idade das crianças e ser desenvolvido de maneira lúdica, por meio de jogos. Além disso, os castigos corporais não deveriam ser utilizados, pois a coação não seria a forma mais adequada para resolver o problema da falta de interesse da criança pelos estudos.

2.1.4.4 A Matemática na Idade Media

Na Idade Média destacam-se quatro períodos: o primeiro vai das invasões bárbaras, século V até o século X, o período de trevas da alta Idade Média; no segundo os séculos XI e XII, temos o despertar da Europa e as influências islâmicas, os soberanos vão, gradativamente, dominando a anarquia feudal, renasce o comércio o que torna mais freqüentes as relações internacionais favorecendo a introdução da ciência árabe no Ocidente; o terceiro período marcado pelo florescimento das universidades e a idade de ouro da ciência escolástica, do século XIII ao início do século XIV; o quarto período (1350-1450), baixa Idade Média, caracterizado socialmente por uma regressão econômica e demográfica e culturalmente pela decadência das universidades e pelo emprego dos conceitos das ciências na vida prática.

Restringir o estudo da matemática no período da Idade Média, ao continente europeu, pode parecer um ato simplista, mas para compreender o desenvolvimento da matemática no Brasil é necessário saber o que ocorreu no velho continente. Segundo Boyer (1987, p.180) é importante lembrar "...que cinco grandes civilizações, escrevendo em cinco línguas diferentes, fornecem a maior parte da história da matemática medieval." As civilizações que desenvolveram a matemática no período medieval são: a China, a Índia, a Árabe, o Império do Oriente (com centro em Constantinopla) e o Império do Ocidente (ou Romano)

Quando ocorreu o colapso do Império Romano Ocidental provocado pelas invasões bárbaras, a Igreja Católica já estava razoavelmente organizada no Ocidente. Gradualmente foi convertendo os bárbaros e fundando escolas - de início junto a mosteiros. Foi dessa forma que a cultura clássica não se apagou totalmente na fase mais obscura da Idade Média. Embora a Igreja enfatizasse mais a salvação da alma que o crescimento material, sempre alguma matemática era necessária, ainda que fosse apenas para determinar com exatidão o dia da Páscoa, uma questão considerada primordial, pois era causa de divisão entre as Igrejas de Roma e da Irlanda, que chegavam a datas diferentes.

O mosteiro foi o centro de cultura existente na Europa Ocidental. O estudo do latim limitava-se às necessidades de compreensão dos textos sagrados e das histórias dos santos, segundo Gadotti (1999, p.52) "compreendiam: o trivium – gramática, dialética e retórica; o quadrivium – aritmética, geometria, astronomia e música". Apesar das limitações quanto ao conteúdo, esse ensino introduziu alguns elementos novos. Conforme Muorim (1987, p.27):

> Pela primeira vez começa a manifestar-se uma maior preocupação para com o espírito infantil. A criança pequena passa a ter uma atenção especial por parte dos adultos, especialmente por aqueles responsáveis pelo seu ensino. Apesar de esse cuidado ainda não eliminar totalmente as punições, estas se amenizaram. Mas isso dizia respeito apenas à criança. Ao jovem era recomendado um tratamento bastante rigoroso, uma vez que se acreditava ser essa a idade mais perigosa, em que as pessoas começavam a ser atraídas pelos pecados deste mundo...

O imperador Carlos Magno preocupado com o baixo nível de cultura dos monges, do clero e também do povo, segundo Stresser-Péan (1959, p.104) ordenou "que, nos bispados e mosteiros, sejam abertas escolas onde se ensinarão o saltério, o solfejo, o canto, o cômputo eclesiástico e a gramática." De acordo com Gadotti (1999, p.52-53) este:

> ...sistema de ensino compreendia:
>
> a) educação elementar, ministrada em escolas paroquiais por sacerdotes. A finalidade dessas escolas não era instruir, mas doutrinar as massas camponesas, mantendo-as ao mesmo tempo dóceis e conformadas;
>
> b) educação secundária, ministrada em escolas monásticas, ou seja, nos conventos;
>
> c) educação superior, ministrada nas escolas imperiais, onde eram preparados os funcionários do Império.

A elaboração da organização escolar ficou a cargo de Alcuíno de York, que concebeu a célebre escola palatina. O aparecimento de uma bela escrita minúscula muito legível e a restauração do latim puro são as principais contribuições deste modelo de ensino. Para Alcuíno o treino intelectual não é tão importante quanto os melhoramentos religiosos e morais, para viabilizar sua proposta, segundo Miorim (1998, p.30) foi apresentado:

> ...em seu livro 'Problemas para o desenvolvimento da mente dos jovens' uma série de questões que não pretendiam enfatizar o aspecto instrumental das matemáticas, mas, sim, o seu valor para o desenvolvimento do raciocínio. Apesar de muitos de seus problemas terem provavelmente origem no antigo Oriente, foi, entretanto, o seu trabalho que viria a influenciar, durante séculos, muitos autores de textos matemáticos. De fato, muitos de seus problemas são ainda hoje bastante utilizados. O seguinte é um bom exemplo: Um lobo, uma cabra e uma couve têm de atravessar um rio num barco que transporta um de cada vez, incluindo o remador. Como é que o remador os levará para o outro lado de forma que a cabra não coma a couve e lobo não coma a cabra?

Acredita-se que nossas cifras procedem da Índia e que chegaram ao Ocidente por intermédio dos árabes. Sua divulgação na Europa prende-se ao emprego do ábaco, isto é, de uma tábua de cálculo na qual, à falta do zero, as cifras assumem um valor de posição variável, segundo a coluna em que se apresentam. Neste ábaco de colunas, eram utilizados tentos de chifre ou *ápices* sobre os quais os números de 1 a 9 eram figurados, quer através das primeiras letras do alfabeto grego, quer através dos sinais: Igin (1), andras (2), ormis (3), arbas (4), quimas (5), caletis (6), zenis (7), temenias (8), celentis (9). A difusão dos algarismos arábicos é atribuída, principalmente, a Gerberto, principalmente pela popularização do uso do ábaco. Para Stresser-Péan (1959, p.108) "comparados às complicações da logística grega, os novos processos de cálculo constituem uma das contribuições capitais da Idade Média ao instrumental intelectual da ciência ocidental".

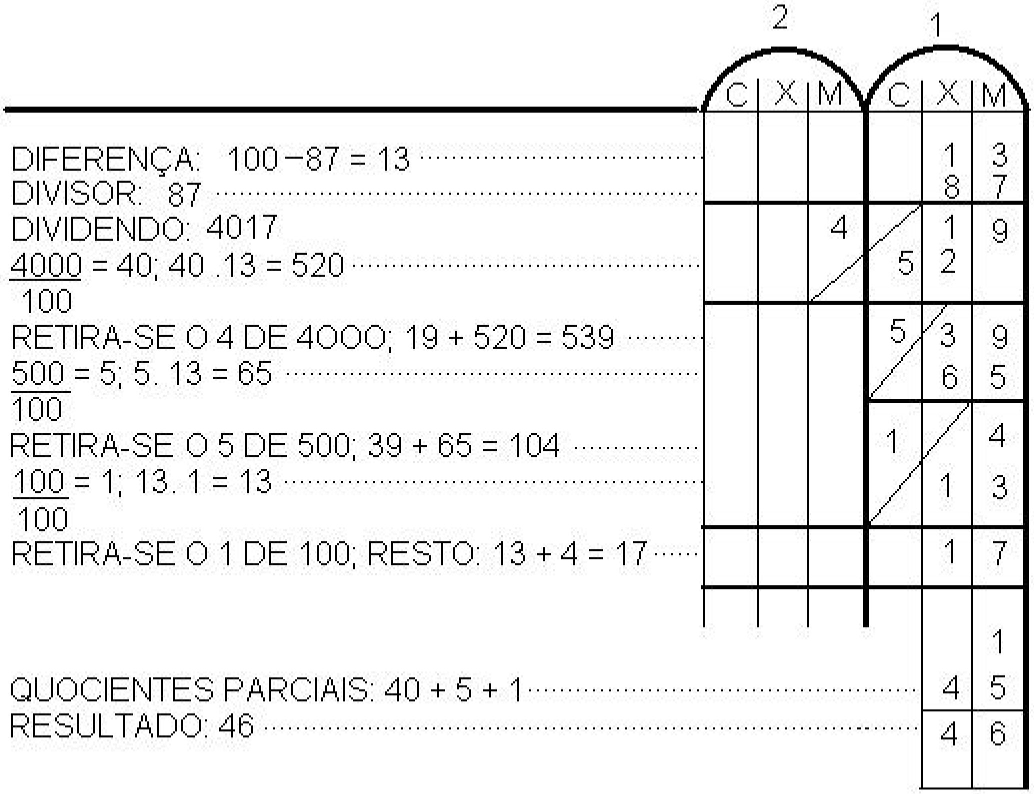


Figura 3: Exemplo da divisão por diferença segundo o método do ábaco de Gerberto, divisão de 4019 por 87.

Fonte: Stresser-Péan, 1959, p.108.

Eis, em notação moderna, o processo de operação utilizado no ábaco de Gerberto:

$$i)\frac{4019}{87} ? \frac{4019}{100 ? 13} ? \frac{4000}{100} ? \frac{4000 ? 13}{100 ? 100 ? 13 ?} ? \frac{19}{100 ? 13} ? 40 ? \frac{?40 ? 13 ? ? 19}{100 ? 13} ? \frac{4019}{100 ? 13} ? 40 ? \frac{539}{100 ? 13}$$

$$ii)\frac{539}{100 ? 13} ? \frac{500}{100} ? \frac{500 ? 13}{100 ? 100 ? 13 ?} ? \frac{39}{100 ? 13} ? 5 ? \frac{?5 ? 13 ? ? 39}{100 ? 13} ? 5 ? \frac{104}{100 ? 13}$$

$$iii)\frac{104}{100 ? 13} ? \frac{100}{100} ? \frac{100 ? 13}{100 ? 100 ? 13 ?} ? \frac{4}{100 ? 13} ? 1 ? \frac{?1 ? 13 ? ? 4}{100 ? 13} ? 1 ? \frac{17}{100 ? 13}$$

$$iv)\frac{4019}{100 ? 13} ? 40 ? \frac{539}{100 ? 13} ? 40 ? 5 ? \frac{104}{100 ? 13} ? 45 ? \frac{104}{100 ? 13} ? 45 ? 1 ? \frac{17}{100 ? 13} ? 46 ? \frac{17}{100 ? 13}$$

$$v)\frac{4019}{87} ? \frac{4019}{100 ? 13} ? 46 ? \frac{17}{87}$$

$vi)$ *dividendo* 4019, *divisor* 87, *quociente* 46 *e resto* 17.

Nos séculos XI e XII as escolas ocidentais engendraram uma forma de pensar e filosofar que recebeu o nome de escolástica, que se caracteriza, segundo Stresser-

Péan (1959, p.119) “pela aplicação mais sistemática da dialética às coisas divinas e pelo reconhecimento mais generalizado do interesse intrínseco que apresenta o estudo das ciências exatas.” Para Miorim, (1998, p.31):

> Essa nova forma de vida intelectual afetou diretamente o ensino, que assumiu uma feição diferente. A lógica adquiriu uma posição de destaque em relação às demais artes liberais. Foi ela que forneceu os fundamentos para a organização dos conhecimentos a serem transmitidos pela escola e para os objetivos a serem atingidos. A maior preocupação da educação era ministrar os elementos necessários para o perfeito desenvolvimento dos discursos formais. Era a forma que importava e não o conteúdo, nesse momento já claramente definido. Não se valorizou nenhum conhecimento novo ou aplicação.

O afrouxamento do sistema feudal, o crescimento da população e a intensificação das relações entre os povos possibilitaram a proliferação das universidades, segundo Stresser-Péan (1959, p.120), neste período, desde de “...que o número de estudantes e mestres seja suficiente para formar uma corporação e obter privilégios jurisdicionais: não é necessário mais do que isso para que se crie uma universidade”. A filosofia manteve-se como serva da fé até o início do século XIII quando houve a redescoberta de Aristóteles pelas universidades. Miorim (1998, p.33) afirma que:

> Apesar do pouco espaço reservado pelas universidades medievais ao ensino específico das matemáticas, foram as discussões filosóficas dos escolásticos que forneceram elementos para futuros desenvolvimentos da Matemática especulativa. O estudo de Platão e Aristóteles, combinado com meditações sobre a natureza da divindade, conduziu a especulações sutis sobre a natureza do movimento, do contínuo e do infinito que influenciaram [os] inventores do cálculo infinitesimal, do século XVII, e [os] filósofos do transfinito, do século XIX.

As descobertas marítimas, principalmente, obrigaram o estudo das ciências nas universidades, impulsionando as divulgações das técnicas da cartografia, da arquitetura e, naturalmente, da matemática. Nesse cenário, surge um ensino voltado para a ciência e para a prática, um movimento intelectual revolucionário, o humanismo.

2.1.4.5 História da matemática superior no Brasil

Após o descobrimento do Brasil, os portugueses conduziram à nova colônia os primeiros mestres, os padres jesuítas, que por mais de dois séculos foram os únicos. Segundo Castro (1992, p.11) estes:

> Fundaram nossas primeiras escolas de ler e escrever. Estabeleceram colégios em vários pontos do país, a começar pelo da Bahia, em 1551. [...] Nos colégios, depois do ensino elementar, ministravam o curso de letras humanas, primeiro degrau da série de estudos mais avançados que se podiam depois completar com cursos de artes e teologia. No curso de artes, se estudava Matemática, juntamente com Lógica, Física, Metafísica e Ética.

Os cursos de artes foram ministrados durante quase duzentos anos, infelizmente não se sabe a profundidade com que a matemática era ensinada. Fato é que o pensamento pedagógico do sistema de ensino em implantação reproduzia o pensamento religioso medieval. De acordo com Gadotti (1999, p.231):

> Os jesuítas nos legaram um ensino de caráter verbalista, retórico, livresco, memorístico e repetitivo, que estimulava a competição através de prêmio e castigo. Discriminatórios e preconceituosos, os jesuítas dedicaram-se à formação das elites coloniais e difundiram nas classes populares a religião da subserviência, da dependência e do paternalismo, características marcantes de nossa cultura ainda hoje. Era uma educação que reproduzia uma sociedade perversa, dividida entre analfabetos e sabichões, os doutores.

Antes da instalação das cortes portuguesas no Brasil, as condições para o estudo das ciências eram bastante adversas. Segundo Gadotti (1999, p.230) “O obscurantismo português sobre a colônia era tanto que, em 1720, a metrópole proibiu a imprensa em todo o Brasil, na tentativa de mantê-la isolada de influências externas.”

Em 1738, o sargento-mor José Fernandes Pinto Alpoim foi designado para ensinar artilharia no Rio de Janeiro, ele publicou dois livros. Nos quais a matemática tem abordagem elementar, segundo Castro (1992, p.18) “não temos conhecimento de trabalhos matemáticos mais antigos, escritos por autor nascido na colônia.”

A vinda de D. João VI para o Brasil, tornou o ambiente mais favorável ao estudo da matemática, pois, em 1808, ele abriu os portos às nações amigas e fundou a Impressão Régia; em 1810 fundou a Biblioteca Pública e, principalmente, criou a Academia Real Militar, na cidade do Rio de Janeiro.

A Academia Real Militar formava oficiais de artilharia e oficiais engenheiros, foi a primeira instituição, do Brasil, destinada ao estudo das ciências. Os alunos eram divididos em duas classes, os obrigados e os voluntários Os obrigados deviam assentar praça de soldados e cadetes de artilharia; os voluntários eram civis. Conforme Castro (1992, p.24) “O curso completo de sete anos, somente exigido dos Officiaes Engenheiros e de Artilharia, constava de um Curso Mathematico de quatro anos e de um Curso Militar de três.” O ensino da matemática superior ficou legado às escolas de engenharia, do Exército e da Marinha, que cumpriram este papel por mais de cem anos. Ao curso Mathematico, para que seja assegurado um mínimo de conhecimento matemático, a Carta Lei, segundo Castro (1992, p.26-27), reza que:

> ...ao adotar os livros didáticos de álgebra, cálculo diferencial e integral, de Licroix, como livros de base para a organização do compêndio do 2º ano, [...] o lente “terá cuidado de hir addicionando todos os methodos e novas descobertas que possão hir fazendo-se”.

Em 1834, o ministro do Império, Antônio Pinto Chichorro da Gama apresentou relatório sobre a situação das aulas avulsas. Estas aulas chamadas também aulas régias foram implantadas em 1772 para preencher a lacuna deixada pela abolição do sistema escolar jesuítico. Com relação ao ensino da matemática, segundo Miorim (1998, p.84-85), o ministro relatou:

> – Na Província do Rio de Janeiro, das duas vagas existentes, uma de Geometria e outra de Aritmética, Geometria e Álgebra; a primeira estava vaga, ou seja, não estava em funcionamento, e a segunda, embora estivesse provida, não possuía alunos matriculados.
>
> – Nas demais províncias a situação não era diferente: das 13 vagas existentes – apenas para Geometria –, duas delas estavam em funcionamento, enquanto as demais encontravam-se vagas.

A Escola Central, em 1874, transforma-se na Escola Politécnica. O Curso Mathematico desmembra-se em Curso de Sciencias Physicas e Mathematicas e Curso de Sciencias Physicas e Naturaes. No curso de ciências físicas e matemáticas são criadas cadeiras para complementar os estudos de matemática, segundo Castro (1992, p.45), com a introdução dos tópicos:

> Series. Funcções ellypticas. Continuação do calculo diferencial e integral. Calculo das variações. Calculo da differenças. Calculo das probabilidades. Applicação às taboas de mortalidade; aos problemas mais complicados de juros compostos; às amortizações pelo systema de Price; al calculo das Sociedades denominadas Tontinas, e aos seguros de vida.

A formação matemática desvincula-se das engenharias, a partir de 1934, com a criação da Faculdade de Ciências e Letras, na Universidade de São Paulo, um ano depois a criação da Escola de Ciências da Universidade do Distrito Federal, e posteriormente, em 1939, com a criação da Faculdade Nacional de Filosofia da Universidade do Brasil.

O Brasil passa por um grande salto qualitativo do conhecimento matemático com a criação, em 1952, pelo Conselho Nacional de Pesquisa, do Instituto de Matemática Pura e Aplicada – IMPA.

2.2 História da construção do conhecimento do Cálculo Diferencial e Integral

Nesta sessão, estão relacionados os principais matemáticos e suas contribuições para a construção do conhecimento do Cálculo Diferencial e Integral. O intuito é descrever: 1) intelectuais profundamente envolvidos: com a resolução dos problemas de natureza prática, com questões de ordem filosófica e/ou religiosa, com os desafios impostos ao desenvolvimento da tecnologia e com a elaboração de axiomas, definições e teoremas que fundamentam a Matemática; 2) a trajetória cognitiva dos matemáticos e sua contribuição na construção do conhecimento matemático.

2.2.1 Pitágoras (580–500 A.C.)

Pitágoras nasceu na ilha de Samos, na costa oeste da Ásia Menor, viajou cerca de 30 anos pelo Egito, Babilônia, Fenícia, Síria e talvez mesmo pela Pérsia e Índia, foi praticamente contemporâneo de Buda, Confúcio e Lao-Tse, de modo que o século de sua existência foi crítico no desenvolvimento da religião bem como da matemática.

A Matemática começa com ele, no sentido de que foi o primeiro a concebê-la como um sistema de pensamento mantido coeso por provas dedutivas. Foi mesmo o primeiro a usar a palavra *mathematike* (o que é aprendido) para designar a Matemática. Antes dele havia apenas a palavra *mathemata*, que designa conhecimento ou aprendizado em geral.

A ciência começa com ele, no sentido de que ele executou deliberadamente o primeiro experimento científico e que foi o primeiro homem a conceber a conjectura sumamente ousada de que o mundo é um todo ordenado e compreensível. Foi o primeiro a aplicar a palavra kosmos (que significava ordem ou harmonia) a esse todo.

Tornar-se difícil separar história e lenda no que se refere á Pitágoras, pois, segundo Simmons (1987, p.677) "...para seus contemporâneos ele era muitas coisas – um professor de sabedoria, um profeta religioso, um santo, um mágico, um charlatão, um agitador político; dependendo do ponto de vista".

Outra dificuldade para traçar o perfil da figura de Pitágoras é o fato de ele ter criado uma comunidade secreta. Menciona-se que o lema da escola pitagórica era "Tudo é número", isto faz supor influência dos babilônios que associavam medidas numéricas às coisas que os cercavam. Conforme Boyer (1987, p.37):

> Mesmo o teorema, a que o nome de Pitágoras ainda está ligado, muito provavelmente veio dos babilônios. Sugere-se, como justificativa para chamá-lo de teorema de Pitágoras, que foram os pitagóricos os primeiros a dar uma demonstração dele; mas não há meios de se verificar essa conjectura.

As maiores contribuições de Pitágoras para o Cálculo são o Teorema de Pitágoras para triângulos retângulos e a irracionalidade de $\sqrt{2}$.

2.2.2 Euclides (300 A.C.)

A morte de Alexandre, o Grande, possibilitou o controle da parte egípcia do império grego a Ptolomeu I. Entre seus primeiros atos, estava a criação em Alexandria de uma escola ou instituto conhecido como *Museum*. Como professores ele convidou um grupo de sábios, entre estes Euclides. Conhecido como Euclides de Alexandria, lendas associadas a ele o pintam como um bondoso velho. São conhecidos sobre ele apenas três fatos e duas pequenas anedotas. Segundo Simmons (1987, p.677):

> Os fatos são estes: era mais novo que Platão (428 A. C.), mais velho que Arquimedes (287 A. C.) e ensinou matemática em Alexandria... As anedotas são: a primeira, Ptolomeu I uma vez perguntou a Euclides se havia algum caminho mais curto para o conhecimento da Geometria do que *Os Elementos*, e ele respondeu que não há estrada real para a Geometria; a segunda, alguém que tinha começado a estudar Geometria com Euclides, quando aprendeu a primeira proposição, perguntou: 'O que vou ganhar aprendendo essas coisas?' Euclides chamou seu escravo e disse: 'Dê a essa pessoa uma moeda, pois ele quer lucrar com o que ele aprende.

Euclides escreveu mais de uma dúzia de tratados, cobrindo tópicos variados, desde óptica, astronomia, música e mecânica, até um livro sobre secções cônicas. Conforme Boyer (1987, p.75):

> Cinco obras de Euclides sobreviveram até hoje: *Os elementos*, *Os dados*, *Divisão de figuras*, *Os fenômenos* e *Óptica*. Essa última tem interesse por ser um dos primeiros trabalhos sobre perspectiva, ou a geometria da divisão direta.

"Os elementos" inicia o estudo da Geometria pelo começo, nada requerendo do leitor de experiência ou conhecimento anterior, um livro que teve mais de mil edições desde a invenção da imprensa e tem sido freqüentemente considerado como responsável por uma influência sobre a mente humana maior que qualquer outro livro, com exceção da Bíblia.

A contribuição de Euclides para o Cálculo está no fato de ter: organizado a maior parte da Matemática conhecida em seu tempo; concebido o teorema sobre números perfeitos; provoado por métodos envolvendo Álgebra e Teoria dos Números a infinidade de números primos.

2.2.3 Arquimedes (287–212 A.C.)

Arquimedes é natural da cidade Siracusa, estudou no grande centro intelectual de Alexandria e morreu pela espada de um soldado, durante a invasão de sua cidade, apesar das ordens de Marcelo, o general romano, para que o geômetra fosse poupado.

Segundo Simmons (v.1, p.681) Arquimedes foi "o maior matemático, físico e inventor do mundo antigo, foi um dos supremos intelectos da civilização ocidental. Outro gênio de poder e criatividade comparável não apareceu até Isaac Newton, no século XVII."

Da observação de corpos flutuantes, segundo Simmons (1987, p.682):

> "...ele criou a ciência da Hidrostática e provou muitos teoremas sobre posições de equilíbrio de corpos flutuantes de várias formas. Além disso, uma de suas mais conhecidas invenções foi uma bomba de água espiralada conhecida como "parafuso de Arquimedes". Esse aparelho é ainda usado ao longo do Nilo para elevar água do rio para os campos adjacentes."

Dentre suas contribuições para o Cálculo se destacam: a determinação de tangentes, áreas e volumes, essencialmente por cálculo; o cálculo do volume e da superfície de uma esfera; os centros de gravidade; o espiral de Arquimedes e o cálculo do ? .

2.2.4 Descartes (1596–1650)

René Descartes, francês de família da baixa nobreza, perdeu a mãe logo após seu nascimento. Aos oito anos de idade foi enviado por seu pai à escola jesuíta de La Flèche, onde teve um aprendizado completo em Literatura e Línguas Clássicas, Retórica, Teologia, Ciências e Matemática. Em virtude de sua constituição frágil e disposição para meditação foi tratado de forma diferenciada pelos padres jesuítas pois, segundo Simmons (1987 p.688):

> ...era-lhe permitido ficar na cama pelas manhãs até a hora que quisesse [...] Ele manteve esse hábito até o fim da vida e gostava de dizer que muitas de suas melhores reflexões vieram-lhe naquelas horas tranqüilas da manhã. Há mesmo uma história de que ele concebeu a idéia básica da Geometria Analítica enquanto estava na cama observando uma mosca que andava no teto de seu quarto; ele teria considerado que a trajetória da mosca poderia ser descrita se alguém soubesse uma relação que ligasse as distâncias dela às duas paredes adjacentes.

Pode-se dizer que a Filosofia moderna teve se início com o livro “Discours de la méthode pour bien conduire sa rain et vérité dans sciences” (Discurso sobre o método para raciocinar bem e procurar a verdade nas ciências) de Descartes. Nesta obra, Descartes rejeita o escolasticismo vigente e propõe-se a tarefa de reconstruir o conhecimento desde as bases, fundamentado na razão e na ciência, em vez de na autoridade e na fé, fornecendo pontos de vista necessários ao desenvolvimento da Revolução Científica.

Descartes considerava resolver um problema por um método puramente geométrico demasiadamente pesado por usar diagramas que fadigam a imaginação desnecessariamente e a algébrica uma arte confusa e obscura que embaraça a mente. Segundo Boyer (1987, p.249):

> O objetivo de seu método, portanto, era duplo: (1) por processos algébricos liberar a geometria de diagramas e (2) dar significado às operações da álgebra por meio de interpretações geométrica. Descartes estava convencido de que todas as ciências matemáticas partem dos mesmos princípios básicos, e decidiu usar o melhor de cada ramo.

Conforme Ávila (1994, p.56):

> No livro de Descartes não aparecem eixos de coordenadas, nem equações de retas ou círculos, de forma que não é fácil identificar ali a Geometria Analítica. Essa obra teve enorme influência nas investigações matemáticas subseqüentes. As expressões “coordenadas cartesianas”, “sistema cartesiano” etc. foram introduzidas por Leibniz em homenagem Descartes (Cartesius é o nome latinizado de Descartes).

A concepção dos conceitos da Geometria Analítica e a introdução de algumas noções se destacam como contribuição do trabalho de Descartes para o Cálculo.

2.2.5 Fermat (1601–1665)

Não foi matemático profissional como outros de sua época, segundo Boyer (1987, p.253):

> Fermat estudou direito em Toulouse, onde serviu no parlamento local, primeiro como advogado, mais tarde como conselheiro. Isso significava que era um homem ocupado; no entanto parece ter tido tempo para dedicar à leitura clássica, inclusive ciências e matemática, por prazer. O resultado foi que em 1629 ele começou a fazer descobertas de importância capital em matemática. Nesse ano ele começou a praticar um dos esportes favoritos do tempo – a ‘restauração’ de obras perdidas da antigüidade com base em informação encontrada nos tratados clássicos preservados. Fermat se propôs a reconstruir o *Lugares planos* de Apolônio, baseado em alusões contidas na *Coleção matemática* de Papus. Um subproduto desse esforço foi a descoberta, não mais tarde que 1636, do princípio fundamental da geometria analítica...

Para curvas poligonais da forma $y = f(x)$, conforme Simmons (1987, p.696-697):

> ... ele teve uma idéia muito engenhosa para localizar pontos em que tal função assumia um valor máximo ou mínimo. Ele comparava o valor $f(x)$ num ponto x com o valor $f(x+E)$ num ponto $x+E$ (veja figura).

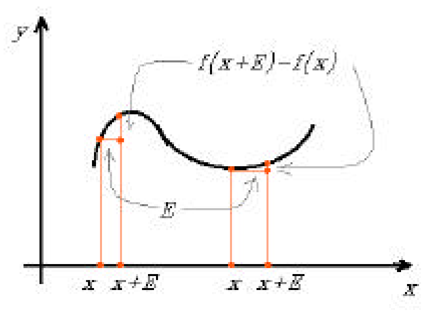


Figura 4: Máximo e mínimo

Fonte: Simmons, 1987, p.697.

> Para a maioria dos x, a diferença entre esses valores, $f_{?x?E?} ? f_{?x?}$, não era pequena comparada com E, mas Fermat observou que no topo ou na base essa diferença era muito menor que E e diminuía mais rapidamente que E. Essa idéia deu-lhe a equação aproximada $\frac{f_{?x?E?} ? f_{?x?}}{E} ? 0$, o que se torna mais e mais aproximadamente correta quando o intervalo E é tomado cada vez menor. Com isto em mente, ele a seguir, fez $E ? 0$, para obter a equação $? \frac{f_{?x?E?} ? f_{?x?}}{E} ?_{E?0} ? 0$. De acordo com Fermat, essa equação é exatamente correta nos pontos de máximo e de mínimo sobre a curva, e resolvendo-se obtém-se os valores de x que correspondem a esses pontos. A legitimidade desse procedimento foi assunto de controvérsia aguda por muitos anos. Entretanto, os estudantes de Cálculo reconhecerão que o método de Fermat equivale a calcular a derivada $f^{\backslash}_{?x?} ? \lim\limits_{E?0} \frac{f_{?x?E?} ? f_{?x?}}{E}$ e fazer esta igual a zero, o que é exatamente o que nós fazemos em Cálculo hoje, exceto que habitualmente usamos o símbolo $?x$ no lugar de E.

A aplicação mais notável do método de máximos e mínimos foi a análise da refração da luz, a conseqüência desta análise foi o que hoje se denomina por princípio de tempo mínimo de Fermat.

Para calcular a área sob a curva $y ? x^n$ no intervalo de $x ? 0$ até $x ? a$, segundo Boyer (1987, p.256):

> Fermat subdividia o intervalo desde $x ? 0$ até $x ? a$ em uma quantidade menor que um. Nesses pontos ele levantava ordenadas da curva e depois aproximava a área sob a curva por meio de retângulos.

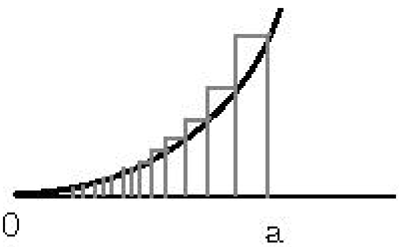


Figura 5: Cálculo da área por Fermat

Fonte: Boyer, 1987, p.256.

> As áreas dos retângulos circunscritos de aproximação, a começar do maior, são dados pelos termos em progressão geométrica $a^n(a - aE)$, $a^nE^n(aE - aE^2)$, $a^nE^{2n}(aE^2 - aE^3)$, [...] A soma a infinito desses termos é $\frac{a^{n+1}(1 - E)}{1 - E^{n+1}}$ ou $\frac{a^{n+1}}{1 + E + E^2 + ... + E^n}$. Quando E tende a um – isto é, os retângulos se tornam cada vez mais estreitos – a soma das áreas dos retângulos se aproxima da área sob a curva. Fazendo $E = 1$ na fórmula acima para a soma dos retângulos obtemos $\frac{a^{n+1}}{n+1}$, a área procurada sob a curva $y = x^n$ desde $x = 0$ até $x = a$.

Isto equivale a notação moderna do Cálculo Integral $\int_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}$.

Fermat contribuiu com o Cálculo com: a descoberta da Geometria Analítica, o cálculo e o uso de derivadas e integrais, os fundamentos da moderna Teoria dos Números, Teorema das Probabilidades.

2.2.6 Pascal (1623–1662)

Blaise Pascal nasceu em Clermont-Ferrand, na região da Auvergne da França Central, sua mãe faleceu quando tinha três anos, não freqüentou escola foi educado exclusivamente por seu pai Étienne, homem de caráter forte e amplos conhecimentos.

Em 1639, conforme Simmons (1987, p.702) aos:

> ...16 anos publicou seu famoso *Essai sur les coniques* (*Ensaio sobre as seções cônicas*). Descartes sentiu inveja de seu sucesso e recusou-se a acreditar que fora produzido por um simples garoto. Esse pequeno trabalho contém o que é ainda o mais importante teorema da geometria projetiva, conhecido como o Teorema de Pascal: um hexágono inscrito em uma seção cônica tem os três pontos de interseção de seus lados opostos sempre em uma linha reta.

Para Simmons (1987, p.703) o estudo da hidrostática o levou a descobrir:

> ...o que agora é chamado *Princípio de Pascal* para a transmissão de pressão através de um fluído. Isto o levou à idéia da pressão hidráulica, que ele descreveu muito claramente, embora as dificuldades técnicas o impedissem de fazer um modelo que funcionasse satisfatoriamente.

Por motivos religiosos Pascal abandonou, temporariamente, o estudo das ciências e da matemática. No entanto, quando retornou, segundo Boyer (1987, p.267);

> Dedicou-se de tal modo à este estudo que em seu *Traité des sinus du quart de cercle* (Tratado sobre os senos num quadrante de um círculo) de 1658 Pascal chegou notavelmente perto da descoberta do Cálculo – tão perto que Leibniz mais tarde escreveu que foi ao ler essa obra de Pascal que uma luz jorrou sobre ele.

A colaboração do trabalho de Pascal para o Cálculo: indução matemática; coeficientes binomiais; ciclóides; Teorema de Pascal em geometria; probabilidade; influencia sobre Leibniz.

2.2.7 Newton (1642–1727)

Sobre Isaac Newton, segundo Boyer (1987, p.287) sabe-se que:

> ...nasceu prematuramente no dia de Natal de 1642, o ano da morte de Galileu. Seu pai tinha morrido antes que o doentio Isaac nascesse, e sua mãe casou-se novamente quando ele tinha três anos. O menino foi educado pela avó enquanto freqüentava a escola da vizinhança, e um tio do lado materno que se formara em Cambridge percebeu no sobrinho um talento matemático incomum e convenceu a mãe de Isaac a matriculá-lo em Cambridge.

O amigo e astrônomo Edmund Halley (o que deu nome ao Cometa Halley), conforme Simmons1(987, p.710), propôs a Newton:

> ...a questão: “Qual seria a curva descrita pelos planetas sob a hipótese de que a gravidade diminuísse com o quadrado da distância?”. Newton respondeu imediatamente – “Uma elipse”. Com alegria e surpresa, Halley perguntou a ele como sabia aquilo. “Porque”, disse Newton, “eu calculei”. Não havia adivinhado, ou suspeitado, ou conjecturado, mas *calculado*. Halley queria ver os cálculos na hora, mas Newton não conseguiu achar os papéis. É interessante especular sobre as emoções de Halley quando ele viu que o velho problema e como funcionava o Sistema Solar fora enfim resolvido – mas que quem o resolvera não havia se importado em contá-lo a mingúem e ainda havia perdido os papéis. Newton prometeu escrever os teoremas e as provas novamente e enviá-los a Halley, o que ele fez.

Em matemática o resultado do trabalho de Newton sobre o teorema binomial, conforme Boyer (1987, p.287):

> ...nos parece tão evidente agora que é difícil ver por que a descoberta tardou tanto. Havia pelo menos meio milênio que os coeficientes binomiais

> para potências inteiras eram conhecidos. Cardan e Pascal, entre outros, conheciam perfeitamente a regra de sucessão para coeficientes; mas eles não usavam a notação exponencial de Descartes, por isso não podiam fazer a transição relativamente simples de potências inteiras para fracionárias. Stevin e Girard tinham sugerido potências, mas não as usaram realmente. Portanto só com Wallis, os expoentes fracionários entraram no uso comum, e vimos que mesmo Wallis, o grande interpolador, não foi capaz de escrever uma expansão para $(x - x^2)^{1/2}$ ou para $(1 - x^2)^{1/2}$. Coube a Newton fornecer as expansões como parte de seu método de séries infinitas.

Newton provou que o método das séries finitas é tão seguro, ou verdadeiro, quanto à álgebra de quantidades finitas. Para Boyer (1987, p.290), "Daí por diante, encorajados por Newton, já outros homens não tentaram mais evitar processos infinitos, como tinham feito os gregos, pois esses eram agora considerados como matemática legítima."

Em *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas* publicação de Newton com várias exposições de sua análise infinita, segundo Boyer (1987, p.291), ele provou:

> "...que a área sob a curva $y = ax^{m/n}$ é dada por $\dfrac{ax^{\left(\frac{m}{n}+1\right)}}{\frac{m}{n}+1}$. [...] Parece ser essa a primeira vez na história da matemática que uma área foi achada pelo inverso do que chamamos diferenciação, embora a possibilidade de usar tal processo evidentemente fosse conhecida por Barrow e Gregory, e talvez também por Torricelli e Fermat. Newton tornou-se o efetivo inventor do cálculo porque foi capaz de explorar a relação inversa entre inclinação e área através de sua nova análise infinita.

Newton apresentou nova forma de notação para variáveis, conforme Boyer (1987, p.291):

> ...considerou x e y como quantidades que fluem, ou fluentes, de que as quantidades p e q eram fluxo ou taxas de variação; quando redigiu essa visão do cálculo por volta de 1671 ele substituiu p e q pelas 'letras ponteadas' $\dot{x}$ e $\dot{y}$. As quantidades ou fluentes, de que x e y são fluxos, ele designou por $\grave{x}$ e $\grave{y}$. Duplicando os pontos ou linhas ele podia representar fluxos de fluxos ou fluentes de fluentes.

John Wallis, matemático de Oxford, escreveu, em 1695, uma carta à Newton, segundo Simmons (1987, p.712):

> ...com notícias que anuviaram o resto de sua vida. Escrevendo sobre as primeiras descobertas de Newton em Matemática, Wallis o alertou de que na Holanda "suas noções" eram conhecidas como "*Calculus Differentialis* de Leibniz", e o aconselhou a tomar com urgência atitudes para proteger sua reputação. Naquele tempo as relações entre Newton e Leibniz eram cordiais e de respeito mútuo. Entretanto, a carta de Wallis logo deteriorou a atmosfera, e iniciou a mais prolongada, amarga e danificadora de todas as disputas científicas: a famosa (ou infame) controvérsia Newton-Leibniz sobre a propriedade da invenção do Cálculo.

Newton além inventar sua própria versão do Cálculo, descobriu o Teorema Fundamental, usou séries infinitas e virtualmente criou Astronomia e Física como ciências matemáticas, contribuições notáveis.

2.2.8 Leibniz (1646–1716)

Filho de professor da universidade de Leipzig, Gottfried Wilhelm Leibniz nasceu em 1646, estudou segundo Simmons (1987, p.714) em:

> ...uma boa escola, mas depois da morte de seu pai em 1652, parece ter atuado a maior parte como seu próprio professor, levando uma vida intelectual autônoma mesmo sendo criança. Os livros alemães disponíveis para ele foram rapidamente lidos. Começou a aprender por si mesmo o latim aos oito anos, e logo dominou a língua o suficiente para ler com facilidade e para compor versos latinos aceitáveis; começou a estudar grego poucos anos depois. Ele adquiriu amor pela história de seu pai, e gastou a maior parte de sua infância devorando a grande biblioteca que seu pai havia colecionado...

França, Inglaterra e Holanda eram em 1672 um jardim de civilização intelectual. Nesse cenário Leibniz colheu as amizades de Spinoza, Huygens, Roemer, Newton e trocou correspondência com muito outros. Orientado por Huygens dedicou-se ao estudo da Geometria Superior, conforme Simmons (1987, p.717):

> ...começou uma série de investigações que o levaram, nos anos seguintes, a sua criação do Cálculo Diferencial e Integral. Em 1673 fez uma de suas mais notáveis descobertas, a expansão em série infinita $\frac{?}{4} ? 1 ? \frac{1}{3} ? \frac{1}{5} ? \frac{1}{7} ? \frac{1}{9} ? ???$. Essa bela fórmula revelou uma relação formidável entre o misterioso número ? e a seqüência familiar de todos os números ímpares.

Entretanto o maior trunfo de Leibniz, em notação, são os símbolos aplicados à diferenciação e à integração. Introduziu segundo Simmons (1987, p.723):

> ...o símbolo da integral, um S longo sugerindo a primeira letra da palavra latina *summa* (soma). [...] introduziu o símbolo da diferencial "d" e logo estava escrevendo dx, dy e dx/dy como fazemos hoje, assim como as integrais como $\int ydy$ e $\int ydx$.

Além de ter inventado uma maneira mais aprimorada para o Cálculo a contribuição de Leibniz foi a descoberta do Teorema Fundamental e a invenção de muitas notações boas.

2.2.9 Euler (1707–1783)

Matemático suíço nascido em Basiléia, Leonhard Euler foi aluno de John Bernoulli. Euler teve 13 filhos e compunha artigos de matemática até mesmo enquanto brincava com estes. Perdeu a visão do olho direito aos 28 anos esta infelicidade não diminuiu sua produção de pesquisa, aos 59 anos devido a catarata começou a perder a visão do olho esquerdo. Segundo Boyer (1987, p.325):

> Uma operação foi feita em 1771, e durante alguns dias Euler enxergou novamente; mas o sucesso não durou e Euler passou quase todos os últimos dezessete anos de sua vida em total cegueira. Mesmo essa tragédia não deteve o fluxo de sua pesquisa e publicações, que continuou sem diminuição até que em 1783, aos setenta e seis anos, ele morreu subitamente enquanto tomava chá com seus netos.

Ao estudar Geometria Analítica plana e espacial Euler, conforme Simmons (1987, p.727):

> ...intruduziu a abordagem analítica para a Trigonometria, [...] e de logaritmos de números negativos e imaginários, e descobriu que $\ln x$ tem um número infinito de valores. Foi por meio de seu trabalho que os símbolos e, π e $i\,(=\sqrt{-1})$ se tornaram correntes para todos os matemáticos, e foi ele quem os relacionou através da surpreendente igualdade $e^{i\pi} = -1$.

A organização e desenvolvimento do Cálculo; a codificação da Geometria Analítica e da Trigonometria; a introdução dos símbolos e, π, i, $f(x)$, $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, séries e produtos infinitos; o cálculo das variações; a Teoria dos Números; a topologia e a Física-Matemática, são as maiores contribuições de Euler.

2.2.10 Lagrange (1736–1813)

Joseph Louis Lagrange nasceu em Turim, na Itália, de acordo com Boyer (1987, p.345) "...o mais jovem de onze filhos e o único que não morreu na infância, foi educado lá e tornou-se cedo professor de matemática na academia militar de Turim;...

Lagrange foi convidado a trabalhar em Berlim onde, segundo Simmons (1987, p.732) "...escreveu sua obra prima, o tratado Mécanique Analytique (1788), no qual unificou a mecânica geral e a transformou, como disse Hamilton mais tarde, "em uma espécie de poema científico". Neste trabalho estão as equações de Lagrange, as coordenadas generalizadas e o conceito de energia potencial".

No trabalho de Lagrange destacam-se o Cálculo das variações e a mecânica analítica.

2.2.11 Laplace (1749–1827)

Pierre Simon de Laplace matemático e astrônomo francês, filho de uma família pobre encontrou em amigos influentes e na academia militar o apoio para estudar. Em seu tratado *Mëcanique Céleste* provou que o Sistema Solar da Matemática é dinamicamente estável.

O conceito de potencial foi muito desenvolvido por Laplace originando o termo laplaciano de uma função $u ? f_{?x,y.z?}$. Segundo Boyer (1987, p.362):

> Esse é simplesmente a soma das derivadas parciais não-mistas de segunda ordem $u_{xx} ? u_{yy} ? u_{zz}$ - freqüentemente abreviada $?^2 u$ (leia-se "del-quadrado de u") onde $?^2$ chama-se operador de Laplace. A função $?^2 u$ não depende do particular sistema de coordenadas usado; sob certas condições potenciais gravitacionais, elétricos e outros satisfazem à equação de Laplace $u_{xx} ? u_{yy} ? u_{zz} ? 0$.

Para o Cálculo, a contribuição foi o estudo da mecânica celeste, a probabilidade analítica e a equação que leva o seu nome Equação de Laplace.

2.2.12 Fourier (1768–1830)

Jean Batiste Joseph Fourier foi filho de alfaiate, da cidade de Auxerre na França, foi educado pela Ordem Beneditina onde pensou em tomar ordens, mas tornou-se professor na escola militar local.

Fourier mostrou que qualquer função $y \, ? \, f_{?x?}$ pode ser representada por uma série da forma

$$y \, ? \, \frac{1}{2} a_0 \, ? \, a_1 \cos x \, ? \, a_2 \cos 2x \, ? \, ???? \, a_n \cos nx \, ? \, ???$$
$$? \, b_1 \operatorname{sen} x \, ? \, b_2 \operatorname{sen} 2x \, ? \, ???? \, b_n \operatorname{sen} nx \, ? \, ???$$

, mesmo que haja muitos pontos em que a derivada não exista ou em que a função não é contínua.

As contribuições de Fourier para o Cálculo são a equação do calor e a série que leva o seu nome Série de Fourier.

2.2.13 Gauss (1777–1855)

Carl Friedrich Gass nasceu na cidade Brunswick, no norte da Alemanha. Seu pai era um trabalhador dedicado e persistente em seus pontos de vista que segundo Boyer (1987, p.367) “...tentou evitar que seu filho recebesse instrução adequada; mas sua mãe, ela própria sem instrução, encorajou o filho nos seus estudos e orgulhou-se grandemente de seu sucesso até sua morte aos noventa e sete anos.” Contam-se dois casos sobre a infância de Gass; o primeiro foi a correção de um erro nas contas da folha de pagamentos de seu pai; o segundo: seu professor pediu a todos os alunos que somassem todos os números de um a cem Gass entregou a resposta 5050 pouco após, sendo o único a acertar.

Aos 15 anos, aproximadamente, descobriu o Teorema do Número Primo, de acordo com Simmons (1987, p.735) “...foi finalmente provado em 1896, após grandes esforços de muitos matemáticos. Ele também inventou o método dos mínimos quadrados e concebeu a Lei Gaussiana (ou Normal) da Distribuição na Teoria das Probabilidades.” Os gregos antigos sabiam construir polígonos regulares de 3, 4, 5 e 15 lados, dividindo os ângulos em partes iguais. Conforme Boyer (1987, p.373) aos dezoito anos Gauss descobriu, “...a construção do polígono regular de dezessete lados; ele levou o tópico à sua conclusão lógica mostrando quais dos infinitos polígonos regulares possíveis podem ser construídos e quais não.”

Trabalhou como astrônomo e quando no primeiro dia do século dezenove um novo planeta ou asteróide, Ceres foi descoberto por acaso e logo desapareceu, Gauss utilizando seu método dos mínimos quadrados e sua excepcional habilidade em cálculos, segundo Boyer (1987, p.373-374):

> ...aceitou o desafio de calcular, a partir das poucas observações do planeta registradas a órbita em que se movia. Para a tarefa de calcular órbitas a partir de um número limitado de observações ele inventou um processo,

> chamado método de Gauss, que ainda é usado para acompanhar satélites. O resultado foi um sucesso estrondoso, o planeta sendo redescoberto no fim do ano quase na posição indicada por seus cálculos.

Gauss iniciou o rigor na análise com provas de convergência para séries infinitas e sua contribuição para o Cálculo estende-se também a: teoria dos números; números complexos na álgebra, na análise e na teoria dos números; geometria diferencial e não-euclidiana.

2.2.14 Cauchy (1789–1857)

Augustin Louis Cauchy, nasceu em Paris poucas semanas depois da queda da Bastilha, estudou na École Polytechnique. Segundo Simmons (1987, p.740) "Ele iniciou sua carreira como engenheiro militar, com problemas de saúde, em 1813 ele pôde seguir sua inclinação natural e devotou-se inteiramente à Matemática". Em 1816, tornou-se professor na Academia e na École Polytechnique, mas com a revolução de 1830 teve de se ausentar de Paris retornando somente em 1838. Conforme Boyer (1987, p.377):

> ...onde quer que estivesse, em Turim ou em Praga, e sob qualquer governo Cauchy continuou a produzir uma torrente de livros e memórias, sendo inferior apenas a Euler em quantidade de produção. Mas ao passo que Euler estava sempre disposto a escrever com lógica discutível sobre quase qualquer aspecto da matemática pura ou aplicação, Cauchy seguia a tradição de Lagrange em sua preferência por matemática pura em forma elegante com a devida atenção a provas rigorosas.

Cauchy é, segundo Ávila (1995. v.2, p.131):

> ...considerado o matemático que primeiro lançou os fundamentos do Cálculo. Isso é apenas parcialmente verdade, embora não se possa negar que Cauchy foi um matemático de grande mérito. Sua primeira obra nesse sentido é o *Cours d'Analyse*, publicado em 1821, portanto quatro anos após a primeiro trabalho de Bolzano. Aí aparecem a definição de continuidade, o critério de convergência de 'Cauchy'' etc.

Matemáticos anteriores a Cauchy pensavam em infinitésimos como um número muito pequeno e fixo, ao passo que ele o definiu como uma variável. Conforme Boyer (1987, p.380):

> No Cálculo de Cauchy os conceitos de função e de limite de função eram fundamentais. Ao definir a derivada de $y = f(x)$ com relação a x, ele deu à

> variável x um incremento $\Delta x = i$ e formou a razão $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i) - f(x)}{i}$. O limite desse quociente de diferenças quando i se avizinha de zero ele definiu como derivada $f'(x)$ de y com relação a x.

Cauchy fez contribuições substanciais à Teoria dos Números e determinantes, é considerado o criador da Teoria dos Grupos Finitos, e fez extenso trabalho em Astronomia, Mecânica, Óptica e teoria da Elasticidade. Suas contribuições para o Cálculo são: a análise complexa e o tratamento cuidadoso dos limites, continuidade, derivadas, integrais e séries.

2.2.15 Abel (1802–1829)

Niels Henrik Abel, era um dos seis filhos de um pastor da pequena aldeia de Findö na Noruega. Ficou órfão aos dezoito anos, ficando a família na miséria. Segundo Simmons (1987, p.741) "Eles subsistiram com a ajuda de amigos e vizinhos, e de algum modo o rapaz, ajudado por vários professores conseguiu entrar na Universidade de Oslo, em 1821."

As equações cúbicas e quárticas foram resolvidas no século dezesseis as quínticas não. Abel pensou ter uma solução mas segundo Boyer (1987, p.375) "...em 1824 ele publicou um artigo, 'sobre a resolução algébrica de equações' em que ele chegava à conclusão oposta: deu a primeira prova de que não é possível a resolução, dando fim desse modo à longa procura." Em Berlim, escreveu seu clássico estudo das séries binomiais, em que achou a Teoria Geral de Convergência e deu a primeira prova satisfatória de validade dessa expansão em série. Em Paris, conforme Simmons (1987, p.741):

> ...terminou sua grande *Mémoire sur une Propriété d'une Classe Très Ètendue des Fonctions Transcendantes*, que ele considerava sua obra-prima. Esse trabalho contém a descoberta de integrais de funções algébricas, agora conhecido como Teorema de Abel, e é o fundamento para a posterior Teoria das integrais abelianas, funções abelianas, e muito da Geometria Algébrica. Décadas depois diz-se que Hermite observou sobre este Mémoire: 'Abel deixou aos matemáticos o suficiente para mantê-los ocupados por 500 anos'. Jocobi descreveu o Teorema de Abel como a maior descoberta em cálculo integral do século XIX.

Em 1826, Abel utilizou a série $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \operatorname{sen} nx}{n}$, segundo Ávila (1995, v.2, p.131):

> ...para apontar um erro de Cauchy sobre continuidade da soma de séries convergentes de funções contínuas. Abel foi dos primeiros a reconhecer e a insistir na importância do *Cours d'Analyse* de Cauchy. Ele teve plena consciência da necessidade de rigorização do Cálculo e certamente tinha visão mais penetrante que Cauchy.

Abel contribuiu para o Cálculo ao desenvolver: a série binomial, a equação do quinto grau, o cálculo integral e as funções elípticas.

2.2.16 Dirichlet (1805–1859)

O primeiro trabalho de Peter Gustav Lejeune Dirichlet foi um marco em Análise. Para Ávila (1995, v.2, 131) "Ele deu a primeira demonstração correta de que a série de Fourier de uma função converge, desde que essa função satisfaça certas condições de regularidade."

Suas pesquisas o conduziram, segundo Simmons (1987, p.743), ao "...correto entendimento da natureza de uma função, e deu a definição que é agora a mais freqüentemente usada, isto é, que y é uma função de x quando a cada valor x num intervalo corresponde um único valor de y." Esta definição se aproxima da moderna que estabelece uma correspondência entre dois conjuntos numéricos. As funções não necessitavam ter o comportamento que os matemáticos estavam acostumados. Dirichlet propôs uma função peculiar, segundo Boyer (1987, p.405) assim definida "...quando x é racional ponha-se $y = c$, e quando x irracional seja $y = d \neq c$. Essa função, freqüentemente chamada função de Dirichlet, é tão patológica que não há valor de x para o qual seja contínua."

O trabalho de Dirichlet contribuiu para o Cálculo com: a convergência de séries de Fourier, a definição moderna de função e a teoria analítica dos números.

2.2.17 Reimann (1826–1866)

Bernhard Riemann foi filho de um clérigo do norte da Alemanha. Ele era tímido e modesto, pretendia seguir o caminho da Teologia. Após o estudo de textos de matemática mudou de idéia, com a permissão de seu pai. Quando ingressou na universidade de Berlim onde atraiu ,segundo Simmons (1987, p.745)

> ...o interesse amigável de Dirichlet e de Jacobi, aprendeu muito com ambos. Dois anos mais tarde, retornou a Göttingen, onde obteve o grau de doutor, em 1851. Durante os oitos anos seguintes, suportou uma pobreza debilitante e criou suas maiores obras.

Para ser admitido como Privatdozent na Universidade de Göttingen foi requerido a Riemann um ensaio. Segundo Simmons (1987, p.746):

> O problema que ele se propôs era analisar as condições de Dirichlet (1829) para a representabilidade de uma função por série de Fourier. Uma das condições que a função deveria ter era ser integrável. Mas o que significa isto? Dirichlet usara a definição de integrabilidade de Cauchy, que se aplica apenas em Teoria dos Números sugeriram a Riemann que essa definição deveria ser ampliada. Ele desenvolveu o conceito da integral de Riemann como aparece agora nos textos de Cálculo, estabeleceu condições necessárias e suficientes para a existência de tal integral, e generalizou o critério de Dirichlet para a validade das expressões de Fourier.

As concepções em Geometria propostas Riemann eram tão originais para a época que, conforme (Ávila, 1994, p.303):

> Com o trabalho de Einstein sobre Relatividade Geral, em nosso século, a chamada Geometria Riemanniana tornava-se instrumento natural na descrição de fenômenos do mundo físico. Isso não é apenas uma coincidência feliz, já que Riemann era profundo estudioso da Física-Matemática. Ele trabalhou intensamente para criar uma teoria que unificasse os fenômenos ópticos, elétricos e magnéticos.

Publicou um trabalho sobre teoria dos Números, segundo Simmons (1987, p.748-749):

> Seu ponto de partida foi uma identidade notável descoberta de Euler no século anterior: se s é um número maior que 1, então $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p} \frac{1}{1-(1/p)^s}$, onde a expressão à direita denota o produto de números $(1-p^{-s})^{-1}$ para todos os primos p. [...] Ele denotou a função resultante por $\zeta(s)$, e ficou conhecida desde então como função zeta de Riemann: $\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots, \; s = \sigma + it$. Em seu artigo, ele provou várias propriedades importantes dessa função, [...] com uma única exceção todos os resultados foram confirmados no sentido que Riemann esperava. Essa exceção é a famosa hipótese de Riemann: que todos os zeros de $\zeta(s)$ na faixa $0 \le \sigma \le 1$ caem na linha central $\sigma = 1/2$. Ela permanece hoje

> como o problema em aberto mais importante da Matemática, e provavelmente é o problema mais difícil que a mente humana jamais concebeu.

Riemann deixou sua marca no Cálculo contribuindo com: a integral de Riemann, o teorema do rearranjo de Riemann, a geometria riemanniana, a função zeta de Riemann e a análise complexa.

2.3 Informática e educação

2.3.1 Ensino mediado por computador

No ensino mediado por tecnologia o computador poder ser enfocado como máquina de ensinar ou como ferramenta de aprender. O termo máquina de ensinar é atribuído ao ambiente no qual o aprendiz se conduz por uma seqüência pré-definida de comandos (ou atividades) visando atingir um objetivo determinado. O termo ferramenta de aprender é atribuído ao ambiente no qual o aprendiz detém o controle das atividades explorando-as, suas habilidades são desenvolvidas na resolução de problemas, manipulações de objetos, etc. Evidentemente estes dois enfoques apóiam-se em correntes pedagógicas. As principais teorias que balizam a aplicação da informática na educação são: a visão behaviorista, a visão interativa-construtivista e a visão histórico-social, esta última encontra-se em ascensão em conseqüência dos recursos proporcionados pela internet.

Segundo Casas & Bridi & Fialho (1996, p.30) o ensino auxiliado por computador apresenta quatro gerações:

> - A primeira geração baseada na teoria comportamentalista implementou as abordagens tradicionais do planejamento instrucional.
> - Na segunda ocorreram mudanças da ênfase centrada no conteúdo do projeto para a ênfase centrada na maneira como a informação é apresentada aos estudantes. Alguns psicólogos perceberam que a teoria comportamental tem uma concepção incompleta do aprendizado humano, propuseram aos especialistas em projetos instrucionais que os ambientes deveriam orientar ao invés de induzir formas de comportamento.
> - A terceira geração do ensino auxiliado por computador surgiu da crença de que a natureza da interação entre o estudante e a instrução é determinante da aprendizagem, de igual ou maior importância que o conteúdo ou o como a informação é apresentada.
> - A quarta geração propõe que o conhecimento é construído pelos próprios estudantes e não fornecido pelos recursos de aprendizagem.

A inteligência artificial abre novos horizontes ao uso da informática no ensino ao gerar ambiente que fornece diferentes situações e requisitos de aprendizagem, possibilitando a criação de situações de aprendizagem: fazer deduções e inferências, realizar análise e síntese de informação, estruturar, formular e modificar modelos mentais, utilizar heurísticas, regras e intuição na solução de problemas, transferir estratégias de solução de problemas, identificar contextos semânticos, formular hipóteses, avaliá-las e modificá-las.

O desenvolvimento de estratégias que permitam implementar de modo racional e oportuno as novas tecnologias na educação têm motivado várias pesquisas, em conseqüência as técnicas de inteligência artificial, os sistemas baseados em conhecimento, o desenvolvimento de interfaces gráficas, o hipertexto, a hipermídia, as redes educativas e a aprendizagem cooperativa tornaram-se meios de enorme potencial de difusão e gerenciamento da informação no processo ensino-aprendizagem. Este novo paradigma da aprendizagem implica em mudanças pedagógicas, para Valente (1999, p.30):

> A mudança pedagógica que todos almejam é a passagem de uma educação totalmente baseada na transmissão da informação, na instrução, para a criação de ambientes de aprendizagem nos quais o aluno realiza atividades e constrói o seu conhecimento. Essa mudança acaba repercutindo em relações na escola como um todo: sua organização, na sala de aula, no papel do professor e dos alunos e na relação com o conhecimento.

A nova tecnologia ao ser utilizada na criação de ambientes de trabalho e de aprendizagem que favoreçam a aquisição e o desenvolvimento de habilidades, sejam elas cognitivas, artísticas ou motoras edifica novo paradigma de escola.

2.3.2 Internet na educação

A Internet pode ser entendida como um emaranhado de sistemas e serviços, alguns derivados de estruturas tradicionais, como correios, bibliotecas, bancos de dados, outros são novos, características peculiares testa mídia, como a virtualidade, a interatividade e a comunicação assíncrona. A Internet rompe as fronteiras dos países e abre um enorme leque de oportunidades jamais imaginadas. A qualquer hora do dia e da noite é possível se comunicar com pessoas de diferentes países e de qualquer continente, acessar a produção científica das universidades, passear por museus, efetuar compras, ler as notícias dos principais jornais, escutar rádio, assistir documentários etc. A possibilidade de acesso a amplo leque de informações torna a internet atrativa para o meio educacional.

A internet possibilita uma nova razão cognitiva, um novo pensar, novos caminhos para construir o conhecimento. O uso da tecnologia divide a opinião dos educadores, uns a vêem com certa desconfiança e, outros, com expectativas exageradas que fogem à realidade, uma vez que acreditam que os elementos tecnológicos, por si só, possam resolver os problemas do sistema educacional. Para evitar estes exageros é prudente lembrar o papel da tecnologia, segundo Lévy (1993, p.54):

> Vale a pena repetir que a maior parte dos programas atuais desempenha um papel de *tecnologia intelectual*: eles reorganizam, de uma forma ou de outra, a visão de mundo de seus usuários e modificam seus reflexos mentais. As redes informáticas modificam os circuitos de comunicação e de decisão nas organizações. Na medida em que a informação avança, certas funções são eliminadas, novas habilidades aparecem, a ecologia cognitiva se transforma.

Impõe repensar o papel da escola diante das possibilidades cognitivas oportunizadas pela internet. Pensar uma escola conectada com o mundo, fisicamente, através destas tecnologias mas, principalmente, conectada ideologicamente, de forma autônoma, com o mundo virtual, transformando-se em um local de produção de cultura e conhecimento, articulada com o que vem acontecendo ao seu redor. Se o ambiente de aprendizagem não estimular à criatividade e à autonomia, alerta Frigotto (2001, 40) que:

> O processo educativo, escolar ou não, é reduzido à função de produzir um conjunto de habilidades intelectuais, desenvolvimento de determinadas atitudes, transmissão de um determinado volume de conhecimentos que funcionam como geradores de capacidade de trabalho e, conseqüentemente, de produção.

A internet é a mídia que mais cresce em todo o mundo, promove mudanças sociais, econômicas e culturais, estabelece novas formas de produção, novos empregos e a escola está sendo envolvida por essa revolução digital estabelecendo para si novo paradigma. Para Valente (1999, p.34):

> Um outro desafio desencadeado por esse novo paradigma é a qualificação do trabalhador. O profissional da sociedade "enxuta" deverá ser um indivíduo crítico, criativo, com capacidade de pensar, de aprender a aprender, de trabalhar em grupo, de utilizar os meios automáticos de

> produção e disseminação da informação e de conhecer o seu potencial cognitivo, afetivo e social. Certamente, essa nova atitude é fruto de um processo educacional, cujo objetivo é a criação de ambientes de aprendizagem em que o aprendiz vivencia essas competências. Elas não são passíveis de ser transmitidas, mas, devem ser construídas por cada indivíduo.

A internet pode ser vista como uma oportunidade de reorganizar a estrutura atual do processo de escolarização, com ela alunos e professores estarão derrubando barreiras. A possibilidade de acesso instantâneo a informações em qualquer parte do mundo para a pesquisa e leitura inquiridora, crítica, abre vastos horizontes. Da escola, de casa ou outro espaço destinado ao estudo e à pesquisa, o aluno poderá acessar um documento mestre e consultar várias fontes, de certo modo como se estivesse pessoalmente e de modo permanente, nas melhores bibliotecas do planeta.

O uso da internet como meio de ensino é atraente por: a) prover acesso a fontes ilimitadas de informações, não convenientemente obteníveis através de outras maneiras; b) permitir a criação de materiais de cursos extremamente ricos; c) ampliar o processo vital de aprendizado dialético; c) criar uma gama de novos fóruns eletrônicos para aprendizado; d) reforçar a concepção dos aprendizes como agentes ativos no processo de aprendizagem na utilização do hipertexto.

2.3.3 Ciberespaço

As novas tecnologias acarretam novas terminologias; ciberespaço é uma destas, definido por Lévy (1999, p.92) como:

> *...o espaço de comunicação aberto pela interconexão mundial dos computadores e das memórias dos computadores*. Essa definição inclui o conjunto dos sistemas de comunicação eletrônicos (aí incluídos os conjuntos de redes hertzianas e telefônicos clássicos), na medida em que transmitem informações provenientes de fontes digitais ou destinadas à digitalização. Insisto na codificação digital, pois ela configura o caráter plástico, fluido, calculável com precisão e tratável em tempo real, hipertextual, interativo e, resumindo, virtual da informação que é, parece-me, a marca distinta do ciberespaço.

No ciberespaço, temos a oportunidade de narrativa não-linear, hipertextual. Através de palavras selecionadas em forma de links, o navegante pode cruzar diversos documentos. As descobertas tornam-se mais dinâmicas e interessantes, à medida que as palavras selecionadas vão esclarecendo as informações num contexto ramificado, ou seja, uma informação vai conduzindo a outra, e assim sucessivamente. O professor deverá tentar ensinar ao aprendiz novas formas de leitura, que no fundo são as de sempre: ler nas entrelinhas, não se impressionando mais com a aparência e a forma; questionar afirmações; confirmar ou questionar fontes e a veracidade ou qualidade de citações, da história, da informação. Isso também acarretará maior responsabilidade, além da maior liberdade ao aluno.

2.3.4 WWW – hipertexto em expansão

O acesso rápido aos hipertextos disponíveis na Internet tornou-se possível com o advento da Word Wide Web (Grande Teia Mundial), às vezes designada também por WWW, W3 ou Web. A Web associa informações armazenadas em diversos computadores, é considerado o serviço mais abrangente e popular da Internet. De acordo com Bugay & Ulbricht (2000, p. 83):

> O conceito da *Web* (teia de aranha) foi apresentado à comunidade da Internet em 1991. Segundo seu criador, "Web representa o universo das informações acessíveis por redes de computadores, a personificação do conhecimento humano". A Word Wide Web é o primeiro exemplo de uma Hipermídia num "ambiente mediado pelo computador" (CME – *Computer Mediated Environment*)...

O acesso aos arquivos da WWW é efetuado por um software que controla a navegação pelos documentos hipermídia gerenciando a apresentação de textos, gráficos e áudio e a exibição de vídeo. Os softwares mais conhecidos são o Internet Explorer e o Netscape.

A página da WWW é construída em um editor HTML (Hyper Text Markup Language), quando disponibilizada passa ter um código de identificação em URL (Uniform Resource Locator), que para ser acessada é necessário um protocolo HTTP (Huper Text Transport Protocol). Estas particularidades técnicas não impedem ou dificultam a criação de páginas da Web, o editor e o provedor encarregam-se dessas providências, cabe ao usuário empregar a criatividade na elaboração do seu Hipertexto e explorar a rede de forma inteligente. Acordo com Lévy (1996, p.47):

> Milhões de pessoas e de instituições no mundo trabalham na construção e na disposição de imenso hipertexto da Word Wide Web. Na Web, como em todo hiperdocumento, é preciso distinguir conceitualmente dois tipos de memórias diferentes. De um lado, a reserva textual o documental multimodal, os dados, um estoque quase amorfo, suficientemente balizado,

> no entanto, para que seus elementos tenham um endereço. De outro, um conjunto de estruturas, percursos, vínculos ou redes de indicadores, que representam organizações particulares, seletivas e subjetivas do estoque.

A WWW transformou a Internet em um hipertexto gigante, segundo Lévy (1999, p.106):

> Na Web, cada elemento de informação contém ponteiros, ou links, que podem ser seguidos para acessar outros documentos sobre assuntos relacionados. A Web também permite o acesso por palavras-chave a documentos dispersos em centenas de computadores dispostos através do mundo, como se esses documentos fizessem parte do mesmo banco de dados ou do mesmo disco rígido.

A tecnologia da Word Wide Web permite aos Hipertextos não só relacionar diversas mídias, como também a navegação entre os vários servidores dispostos pela Internet. A navegação orienta-se pela subjetividade individual, para Lévy (1996, p.48):

> No ciberespaço, como qualquer ponto é diretamente acessível a partir de qualquer outro, será cada vez maior a tendência a substituir as cópias de documentos por ligações hipertextuais: no limite, basta que o texto exista fisicamente uma vez na memória de um computador conectado à rede para que ele faça parte, graças a um conjunto de vínculos, de milhares ou mesmo de milhões de percursos ou de estruturas semânticas diferentes. A partir das *home pages* e dos hiperdocumentos on line, pode-se seguir os fios de diversos universos subjetivos.

Uma página da Word Wide Web é semelhante a um nó hipermídia dos sistemas hipermídia; nos sistemas hipermídia os arquivos, que dão origem aos nós, são gerenciadas de forma controlada pela plataforma. Na Web, o conjunto de milhões de páginas de informações distribuídas nos sites e os sites interconectados de variadas formas permitem a individualização absoluta da navegação.

2.4 Hipertexto

2.4.1 História e concepção do Hipertexto

Os hipertextos são elaborados com textos organizados de forma não linear, os textos contêm referências a outros textos ou até outros hipertextos. Os documentos referenciados podem ser acessados à medida que as referências são apresentadas, tornando a leitura não seqüencial. As informações se relacionam facilitando aprofundar a leitura no assunto de interesse do leitor caracterizando a individualização da leitura. Este extraordinário recurso de redação apóia-se em tecnologia que possui sua história, segundo Bugay & Ulbricht (2000, p.48) os principais fatos são:

1945 – Vannevar Bush propõe o Memex.

1965 – Ted Nelson lança a palavra “Hipertexto”.

1967 – Andy van Dam, Universidade de Brown, apresenta o Hypertext Editing Sustem and FRESS.

1968 – Doug Engelbart demonstra o demo do sistema NLS na FJCC.

1975 – ZOG (agora KMS): CMU.

1978 – Andy Lippman, MIT Architecture Machine Group, apresenta o primeiro videodisco hipermídia – Filme do mapa de Aspen (Aspen Movie Map).

1984 – O Filevision da Telos: base de dados de hipermídia limitada amplamente disponível para o Macintosh.

1985 – Janet Walker apresenta Symbolics Documenet Examiner.

1985- Norman Meyrowitz, Univesidade de Brown, apresenta o Intermedia.

1986 – OWL introduz o Guide, o primeiro hipertexto amplamente disponível.

1987 – Bill Aktinson, Apple, apresenta o HyperCard.

1987 – O Workshop Hypertext’87 na Carolina do Norte.

1991- Tim Berners-Lee, CERN, cria a WWW – Word Wide Web que se torna o primeiro hipertexto global.

1992 – O New York Times Book Review cobre uma história em ficção em hipermídia.

1993 – A National Center for Supercomputing Applications lança o Mosaic.

1993 – A Hard Day’s Night torna-se o primeiro filme em hipermídia.

1993 – Enciclopédia em hipermídia vende mais cópias que enciclopédias impressas.

O livro impresso é estruturado de forma linear, ou seja, o acesso às informações ocorre respeitando a ordem dos capítulos, das seções. O hipertexto tem uma arquitetura diferenciada. Na elaboração de um hipertexto é possível, segundo Lévy (1996, p.37) “...hierarquizar e selecionar áreas de sentido, tecer ligações entre essas zonas, conectar o texto a outros documentos, arrimá-lo a toda uma memória que forma o fundo sobre o qual ele se destaca e ao qual remete”.

2.4.2 Características do Hipertexto

O Hipertexto pode ser entendido como uma ferramenta de acesso a uma grande quantidade de informações, permite-nos criar e relacionar textos colocando-os à disposição de usuários, oportuniza inter-relacionar estes textos a outros conteúdos correlatos ou complementares. O hipertexto possui três componentes e três características principais, que segundo Bugay & Ulbricht (2000) são:

a) componentes:

- ? uma base de dados textual;
- ? uma rede semântica formada por relações hierárquicas, associadas e análogas entre diferentes unidades temáticas;
- ? ferramentas informáticas que permitem criar e percorrer o texto com o auxílio de uma rede semântica.

b) características

- ? diversidade de possibilidades de acesso à informação;
- ? mecanismo de backtrack (que permite ir e voltar, sendo uma operação reversível);
- ? representação explícita da estrutura de rede.

Um hipertexto é constituído de nós (ou base de dados) e ligações (ou rede semântica). Os dados são organizados como textos separados, embora inter-relacionados. O sistema hipertexto é um conjunto de ligações associativas que conectam os nós em uma rede principal.

2.4.3 Hipertexto na educação

A informática abre novos horizontes para a educação. Segundo Lévy (1996, p.41) "Considerar o computador apenas como um instrumento a mais para produzir textos, sons ou imagens sobre suporte fixo (papel, película, fita magnética) equivale a negar sua fecundidade propriamente cultural". Os computadores ao possibilitar o uso do hipertexto na educação põem à disposição dos educadores um recurso como grande capacidade de comunicação.

O hipertexto ao gerenciar som, imagem e texto explora várias linguagens, o que conduz esta ferramenta ao domínio da semiótica. De acordo com Duarte (1997, p.117):

> Teoria de todas as linguagens, a semiótica objetiva identificar e descrever os processos de produção de significação e de sentidos. O estudo particular de uma linguagem deve transcorrer no interior do seu próprio sistema cujas normas e regras prevêem as relações possíveis e mesmo as possibilidades de ruptura. Cada vez mais, as sociedades utilizam-se de construções textuais envolvendo diferentes linguagens.

O hipertexto associado a outras mídias amplia a capacidade de comunicação. Na educação, esta associação torna-se atrativa, por permitir explorar várias inteligências num mesmo recurso, o que dá facilidade à cognição. Em contato com o hipertexto, o aprendiz amplia suas experiências e conhecimentos em pesquisas nas diversas áreas do conhecimento.

3 PROJETO DE UM HIPERTEXTO ESTINADO À APRENDIZAGEM DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

De acordo com Boyce (1999, p.10) “O novo ambiente de ensino, baseado na participação cada vez maior da tecnologia da computação, requer um novo tipo de flexibilidade por parte dos livros-texto”. Esta afirmativa evidencia a preocupação do matemático para a necessidade da absorção da tecnologia no ensino, mas ainda é conservador por limitar a atenção aos livros-texto tradicionais. O Hipertexto é um recurso da informática que permite uma flexibilidade, nunca antes imaginada, intimamente associado ao computador. Assim, evidencia-se a necessidade da criação de um ambiente destinado a aprendizagem matemática por computador onde é reservado ao hipertexto o papel de agente cognitivo.

O ambiente proposto será elaborado em três etapas: criação da arquitetura do ambiente e da estrutura semântica, coleta de dados (textos) e organização da informação.

3.1 Arquitetura do ambiente e arquitetura semântica

O ambiente é constituído por três camadas: (I) contém uma única página e destina-se a apresentar o ambiente ao aprendiz; (II) contém várias páginas que possibilitam uma estrutura semântica de aprendizagem de Cálculo; (III) base de dados. Veja a representação das camadas na ilustração a seguir:

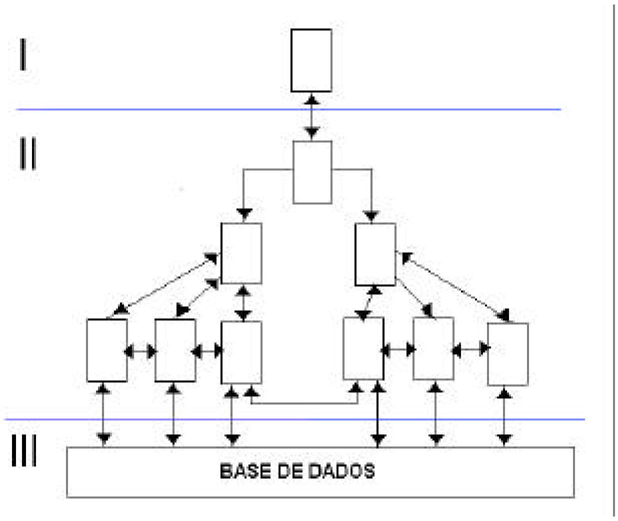


Figura 6: Arquitetura do ambiente

O termo arquitetura semântica designa a estrutura do hipertexto, que possibilita o acesso de forma coerente e organizada à base de dados, visando a aprendizagem do Cálculo. Esta camada do hipertexto possui arquitetura específica. Veja a ilustração a seguir:

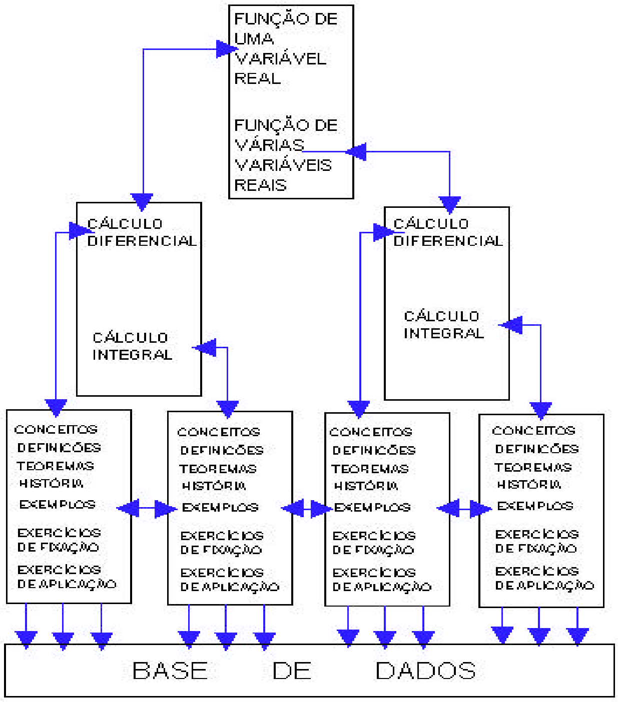


Figura 7: Arquitetura semântica idealizada

Após a edição, o hipertexto contou com as seguintes páginas que determinam sua arquitetura semântica. Esta arquitetura basea-se na construção histórica das definições e dos teoremas do Cálculo.

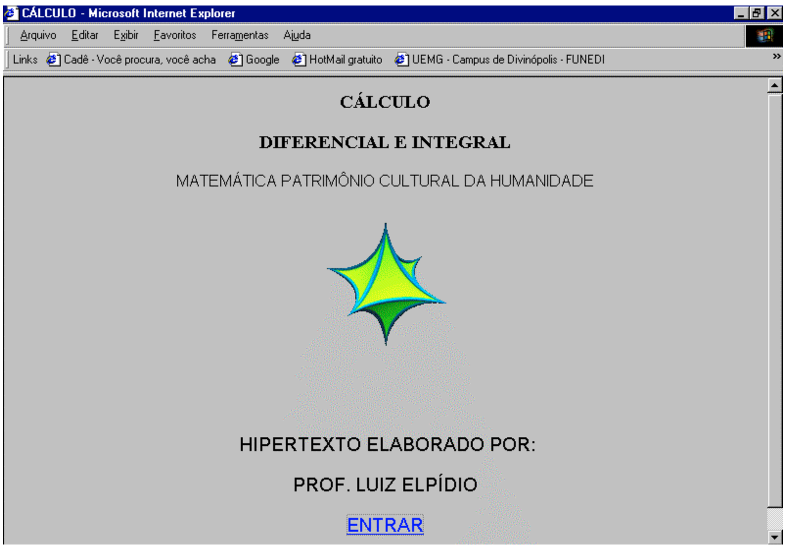


Figura 8: Página de apresentação

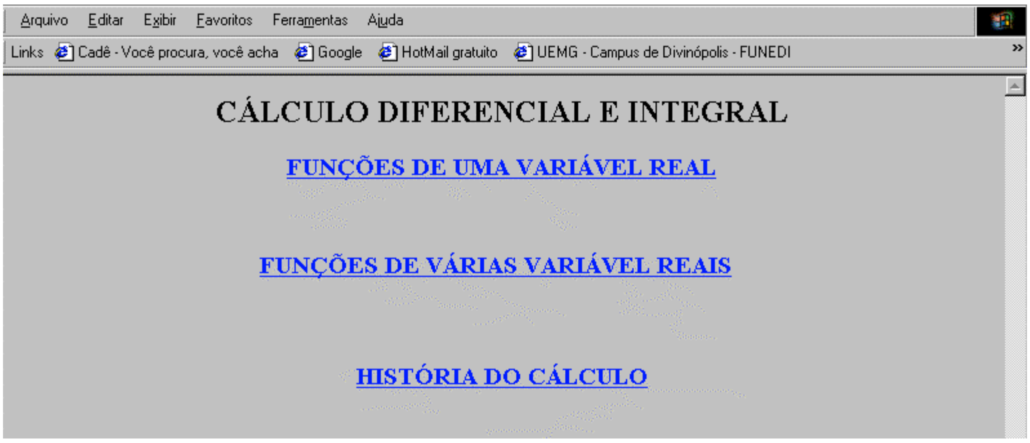


Figura 9: Página principal

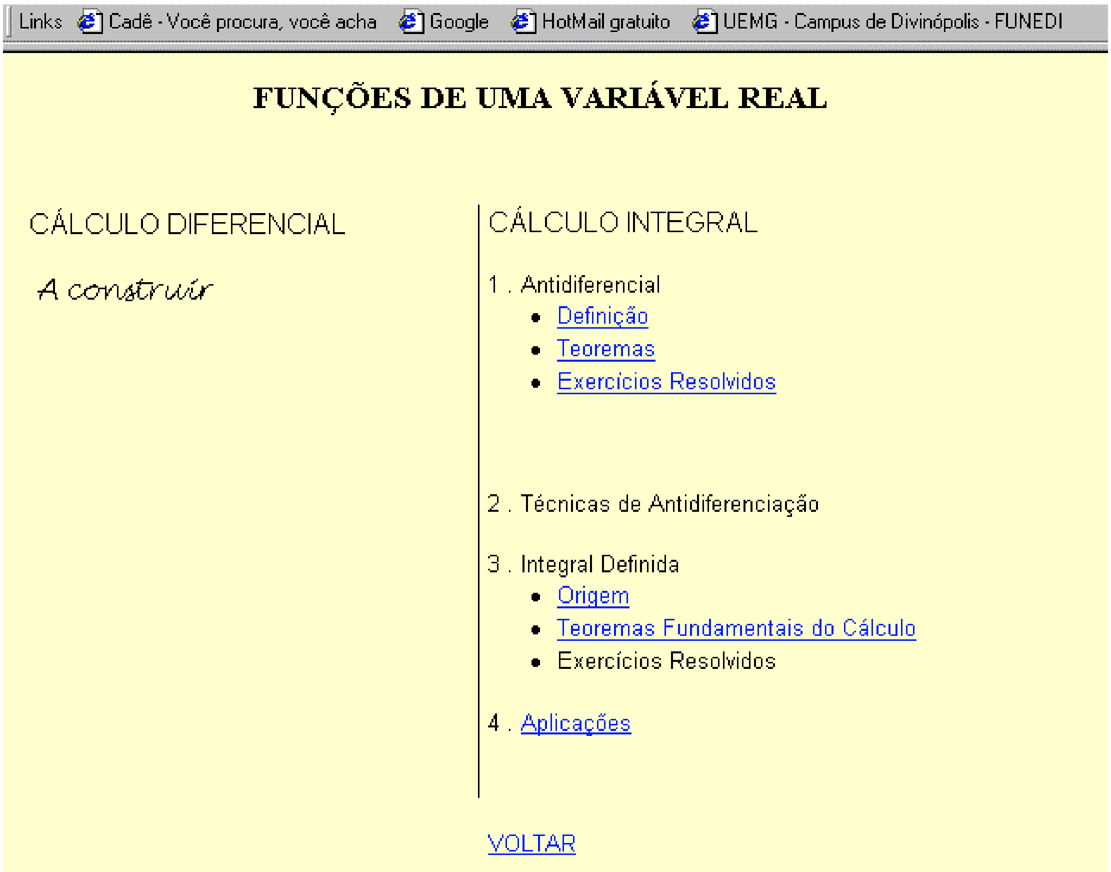


Figura 10: Funções de uma variável real

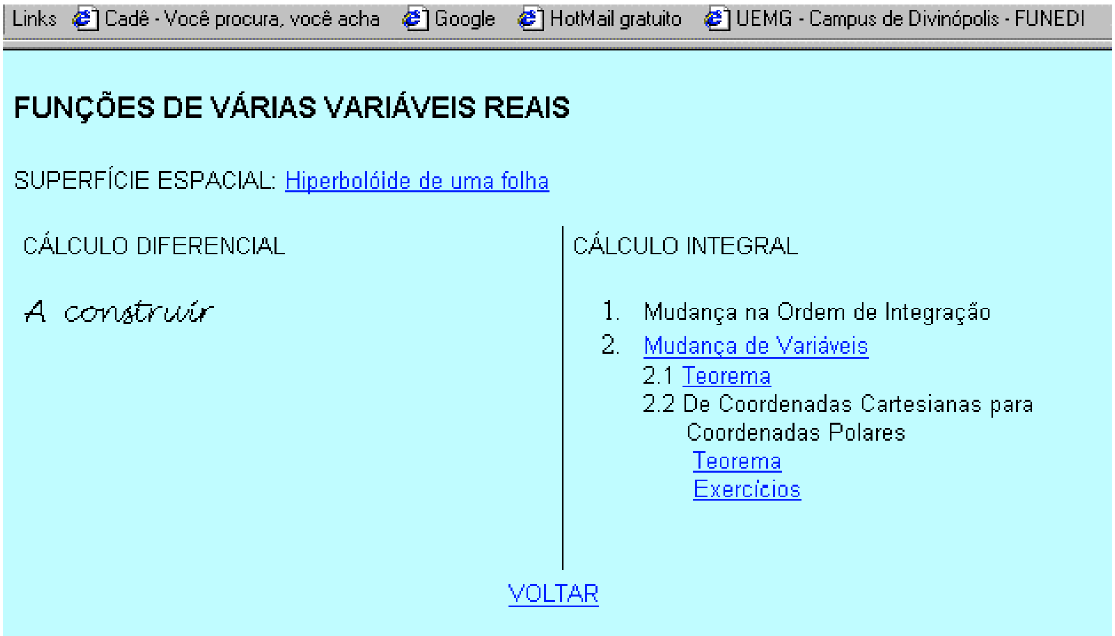


Figura 11: Funções de várias variáveis reais

Para facilitar a identificação do tema em estudo, o plano de fundo das páginas respeitou o seguinte critério: cor cinza nas páginas de apresentação e principal; cor amarela nas páginas de função de uma variável real; cor azul piscina nas páginas de função de várias variáveis reais; cor verde água nas páginas da história do Cálculo. Veja abaixo um exemplo de página da história do Cálculo, de teoria, de exercício resolvido, do ambiente interativo.

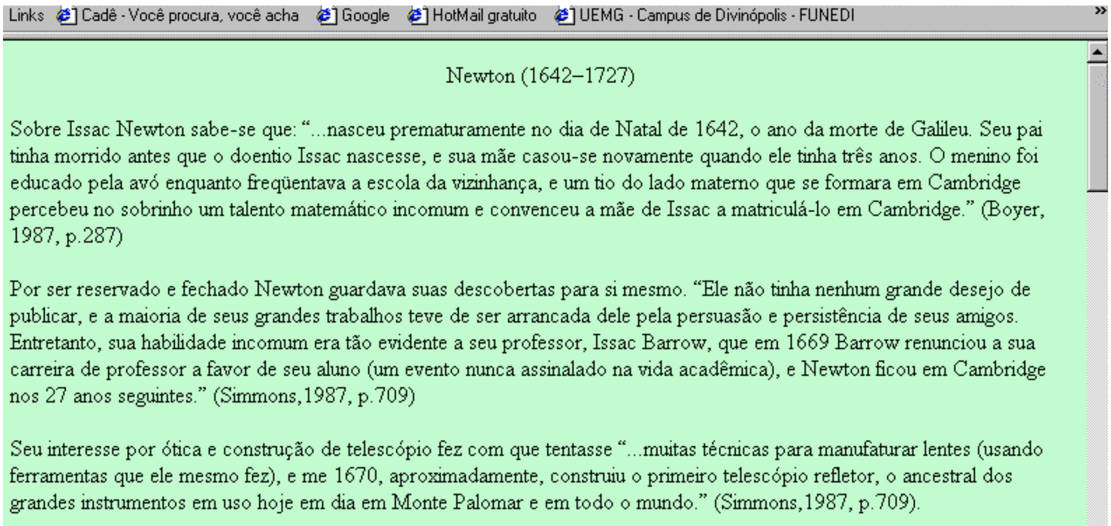


Figura 12: História do Cálculo – Newton

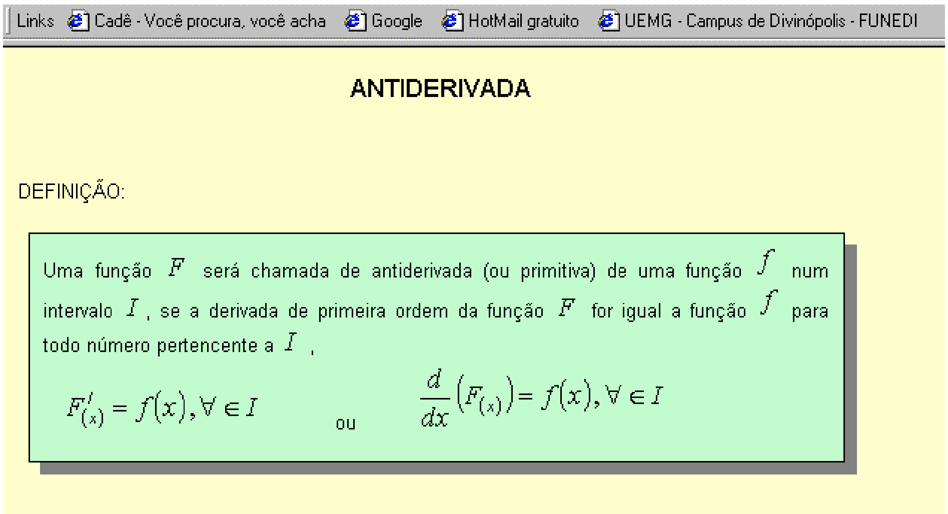


Figura 13: Teoria: Definição de antiderivada

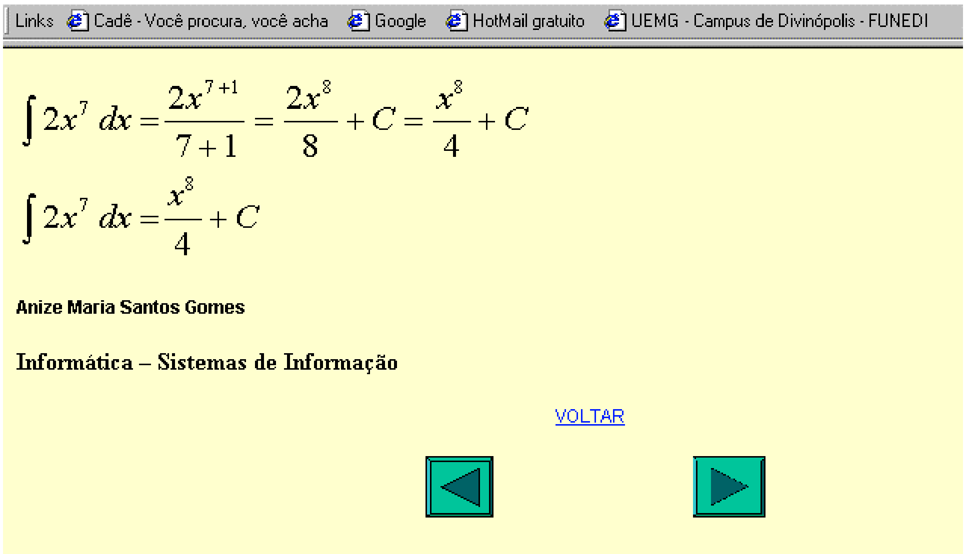


Figura 14: Exercício resolvido, consta o nome do aluno e o do curso.

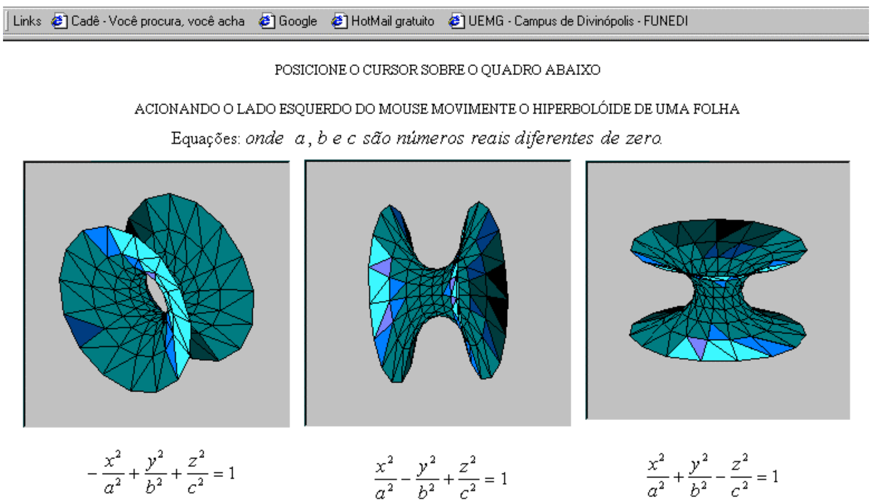


Figura 15: Ambiente interativo: hiperbolóide de uma folha

3.2 Base de Dados - Textos

A base de dados é constituída por textos contendo conceitos, definições, teoremas, história da matemática, exercício de fixação e de aplicação, possui também imagens, movimentos e aplicativos interativos.

A base de dados é constituída de três tipos de elementos: textos teóricos, exercícios resolvidos por alunos e recursos visuais. Os dados possuem links que os associam à estrutura semântica e outros que os associam entre si, independentemente desta. Considerações sobre a base dados:

a) Texto teórico – é denominado texto teórico o texto que apresenta conceito, definição, teorema e demonstração que fundamenta o Cálculo Diferencial e Integral, retirado de livros-texto tradicionais.

b) Exercícios resolvidos – são exercícios resolvidos por alunos de cursos de graduação.

c) Recursos visuais – são arquivos de imagens e movimentos que ilustram teorias do Cálculo Diferencial e Integral.

3.2.1 Os exercícios resolvidos

Para obter a coletânea de exercícios resolvidos será solicitada a cooperação de alunos de duas instituições de ensino superior de Divinópolis, Instituto Superior de Ensino e Pesquisa – INESP e Faculdades do Oeste de Minas – FADOM. O trabalho transcorrerá da seguinte forma:

a) no INESP será solicitado aos alunos do 1º período Curso de Engenharia Civil e alunos do 2º, 4º e 6º período Curso de Licenciatura em Matemática que enviem os exercícios, previamente selecionados, em anexo para o endereço eletrônico calculo@funedi.edu.br.

b) na FADOM será solicitado aos alunos do primeiro ano Curso de Sistemas de Informação, matutino e noturno, que enviem os exercícios, previamente selecionados, em anexo para o endereço eletrônico calculo@fadom.br.

Os exercícios serão redigido no Word e as expressões matemáticas no editor de equações Microsoft Equation 3.0. Esta decisão basea-se no fato de ser Windows o recurso de mais fácil acesso entre os alunos.

3.3 Organização da informação

Para organizar o diretório onde serão arquivados os exercícios e tornar possível a seleção por assunto, será solicitado aos alunos, que os arquivos sejam salvos com o seguinte nome:

- E2000-FIOM-MAT-número de matrícula do aluno – para os alunos do Curso de Sistemas de Informação, FADOM, matutino.
- E2000-FIOM-NOT-número de matrícula do aluno – para os alunos do Curso de Sistemas de Informação, FADOM, noturno.
- E2000-ENG-1P-nome do aluno – para os alunos do Curso de Engenharia Civil do INESP.
- E2000-MAT-2P-nome do aluno – para os alunos do 2º período Curso de Licenciatura em Matemática do INESP.
- E2000-MAT-4P-nome do aluno – para os alunos do 4º período Curso de Licenciatura em Matemática do INESP.
- E2000-MAT-6P-nome do aluno – para os alunos do 6º período Curso de Licenciatura em Matemática do INESP.

Após ler e corrigir o exercício arquivado, na extensão .doc, este será convertido para extensão html. Redigido em html, o arquivo fará parte da base de dados do hipertexto.

4 O TESTE DE UM HIPERTEXTO NA APRENDIZAGEM DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

4.1. O local de aplicação

4.1.1 A universidade

A Universidade do Estado de Minas Gerais, criada pelos constituintes mineiros de 1989 e credenciada pelo Decreto 40.359 do Governador do Estado em abril de 1999, congrega, sob sua administração e orientação acadêmica, diversas instituições de ensino criadas pelo Estado na década de 60, todas com seus cursos reconhecidos pelo governo federal. A integração destas instituições à UEMG possibilita o cumprimento dos objetivos expressos no Constituição Mineira de 1989, especialmente no que diz respeito à interiorização do conhecimento, proporcionando condições materiais e humanas para que se desenvolvam “Campi” universitários em regiões-pólo do Estado.

4.1.2 O campus

Entre as unidades acadêmicas da UEMG, está o Campus da Fundação Educacional de Divinópolis, constituído a partir do Instituto de Ensino Superior e Pesquisa – INESP, cujas origens remontam a 1964 com a criação da Fundação Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Divinópolis. As atividades letivas da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Divinópolis - FAFID - tiveram início no primeiro semestre de 1965 com os cursos de Ciências Sociais (Licenciatura), Filosofia, Letras e Pedagogia. Em 1973, a FAFID foi reestruturada e passou a denominar-se Instituto de Ensino Superior e Pesquisa, tendo como mantenedora a Fundação Educacional de Divinópolis – FUNEDI.

De maneira bastante sintética, é possível dizer que o INESP, nesses 36 anos de sua existência, tem percorrido uma trajetória que revela um gradual processo de evolução, isto é, de superação de um quadro de relativo isolamento, precariedade e de atuação centrada exclusivamente na modalidade ensino, para uma situação de regularidade, de intercâmbio com o mundo da ciência e de uma atuação que contempla, ao lado do ensino, a extensão e a pesquisa, ainda que esta última esteja ainda mais voltada para a prestação de serviços e suporte para intervenções sociais.

Atualmente, os cursos regulares reconhecidos pelo Conselho Estadual de Educação são: Ciências Sociais (Bacharelado), Filosofia (Licenciatura), Letras (Licenciatura em Língua Portuguesa ou em Língua Inglesa), Pedagogia, Psicologia (Formação de Psicólogos), Biologia (Licenciatura) e Matemática (Licenciatura). O INESP passou a percorrer novos rumos a partir da perspectiva de se integrar definitivamente à UEMG, no final da década passada começou a implantar novos cursos: Graduação em Enfermagem, Engenharia Civil - Ênfase em Meio Ambiente, Geografia (Licenciatura), História (Licenciatura) e Comunicação Social - (Bacharelado em Jornalismo ou em Publicidade e Propaganda). Todos estes cursos estão em funcionamento, sendo que os dois primeiros formam as primeiras turmas, respectivamente, em 2002 e 2003. Os demais encontram-se devidamente autorizados por decretos governamentais.

4.1.3 O Curso de Licenciatura em Matemática do INESP-UEMG

O curso propõe na definição do currículo, muito mais do que a escolha de um elenco de disciplinas, pois o desafio é a formação de um novo professor. Partindo do pressuposto de que esta formação só acontece através da prática, definiu-se um currículo em que os alunos tivessem a oportunidade de vivenciar situações diretamente relacionadas com o perfil profissional desejado.

A proposta pedagógica implementada enfatiza a formação de um professor com as seguintes competências:

? ter visão abrangente do papel social do educador;

? de trabalhar em equipes multidisciplinares e de exercer liderança;

? de capacitar-se continuamente;

? ter visão histórica e crítica da matemática, tanto no seu estado atual como nas várias fases de sua evolução;

? ter visão crítica da matemática que o capacite a avaliar livros-texto e a estruturação de cursos e tópicos de ensino;

? de comunicar-se matematicamente e de compreender Matemática;

? de estabelecer relações entre a matemática e outras áreas do conhecimento;

? de utilizar os conhecimentos matemáticos para a compreensão do mundo que o cerca;

? de despertar, nos alunos, a criatividade através do pensamento matemático;

- ? despertar, nos alunos, o hábito da pesquisa promovendo a autonomia destes;
- ? de expressar-se com clareza, precisão e objetividade;
- ? de criar e adaptar a metodologia necessária ao seu ambiente de trabalho.

O currículo proposto para a realização desta proposta pedagógica tem forte caráter interdisciplinar, desenvolvendo-se em *quatro grandes eixos*: da formação matemática, das disciplinas integradoras, da formação pedagógica e da pesquisa e prática pedagógica (estágio supervisionado).

Os alunos têm oportunidades de vivenciar práticas pedagógicas durante todo o curso: no eixo das disciplinas integradoras, no eixo das pedagógicas e no eixo da disciplina de pesquisa e prática pedagógica (estágio supervisionado); o conhecimento pedagógico dos conteúdos também é tematizado em muitas das disciplinas de formação matemática. Grande ênfase é dada à construção de competência no uso de tecnologia informática no ensino e aprendizagem da Matemática. A Educação Matemática e a formação do professor estão presentes durante todo o curso, num currículo que busca a integração, ao longo dos quatro anos de formação, das disciplinas das áreas pedagógica e matemática, numa distribuição equilibrada dos créditos, articulando teoria e prática.

4.1.4 A turma

O modelo proposto será aplicado em uma turma de licenciatura em matemática que cursa o terceiro período do noturno, composta principalmente por alunos trabalhadores. Os alunos desta turma cursaram a disciplina Cálculo Diferencial e Integral I, que possui a seguinte ementa: números reais, desigualdades, seqüências numéricas, funções reais, limite e continuidade, função linear e afim, funções algébricas elementares (polinômios, inverso, raiz quadrada), derivada, regra da cadeia. O teorema do valor médio, gráficos de funções, função exponencial, logaritmo, funções trigonométricas, derivadas de ordem superior, máximos e mínimos, aplicações. Estes alunos estão cursando a disciplina Cálculo Diferencial e Integral II que possui ementa: integrais definidas, integrais indefinidas, o Teorema Fundamental do Cálculo, métodos de integração, áreas, volumes, equações diferenciais lineares de primeira ordem e aplicações.

Atualmente, esta turma está aprendendo a aplicação da integral para cálculo do comprimento de arco. O rendimento de alguns alunos neste tópico não está sendo devidamente atingido, porque a resolução de determinadas integrais tornam-se factíveis pela utilização do método da substituição de variáveis, e estes não conseguem associar o método de resolução aos problemas propostos.

O estudo em um hipertexto, destinado à resolução de integrais utilizando o método (ou técnica) da substituição de uma variável real por outra, permite a revisão de conceitos matemáticos pelo aprendiz. Para ter sucesso na resolução esse tipo de integral, o aprendiz necessitará do conhecimento dos teoremas de diferenciação além dos de integração.

4.2 Explorando o Hipertexto

Para avaliar o desempenho dos alunos na utilização do hipertexto o seguinte roteiro será operacionalizado:

a) Os alunos serão conduzidos à sala de informática onde inicialmente responderão o questionário (1) (anexo A).

b) Em seguida será pedido a eles que acessem o endereço www.aprendacalculo.hpg.com.br. A navegação pelo hipertexto será livre por trinta minuto, para exploração.

c) Será proposta a resolução do problema: Calcule o comprimento do arco da curva $y^2 = x^3$ entre os pontos $(1,1)$ e $(4,8)$. A razão da escolha deste problema é que na avaliação deste tópico nenhum dos alunos resolveu o seguinte problema: Calcule o comprimento da curva $y^2 = 4x^3$ entre os pontos $(0,0)$ e $(2,4\sqrt{2})$.

d) Será sugerido o acesso à página www.aprendacalculo.hpg.br, que contém exercícios de integral resolvidos pelo método da substituição.

e) Após vinte minutos da proposição acima será aplicado o questionário (2) (anexo B).

f) Ao entregar o questionário (2) respondido o aluno receberá o exercício proposto resolvido (anexo C).

4.3 Avaliação da aplicação do Hipertexto na aprendizagem do Cálculo

O trabalho foi desenvolvido com o universo dos trinta e oito alunos do terceiro período do Curso de Licenciatura em Matemática. Os questionários (1) e (2) foram os instrumentos de coleta de dados. O questionário (1) foi elaborado com seis questões objetivas, sendo duas questões (2 e 3) destinadas aos alunos que utilizam o computador freqüentemente, as outras questões destinadas à todos alunos. O questionário (2) foi elaborado com quatro questões, duas objetivas e duas subjetivas. O questionário (1) foi preenchido pelos alunos antes do acesso ao hipertexto, o questionário (2) foi preenchido no final da atividade.

Do total dos alunos 50% não usam o computador durante a semana (figura 16).

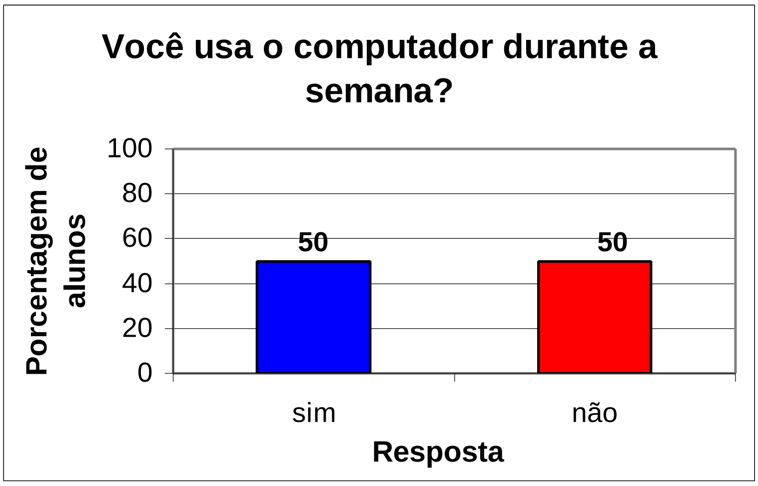


Figura 16: Você usa o computador durante a semana?

Dos alunos que utilizam o computador durante a semana, 66,7% usam 4 horas ou menos, 33,3% usam 8 horas ou mais (figura 17). Contudo, 20,0% não utilizam o computador para aprendizagem, 40,0% utilizam até 1 hora e 40,0% utilizam o computador por 2 horas ou mais como o objetivo de aprender (figura 18). Isto demonstra que estes estudantes de licenciatura praticamente não utilizam o computador como meio de aprendizagem.

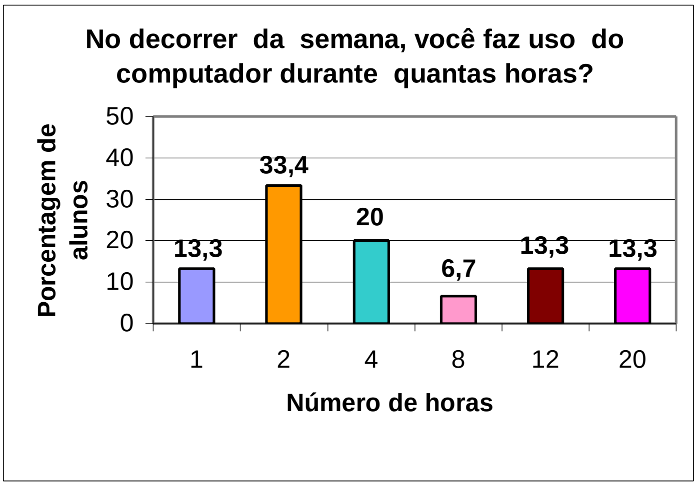


Figura 17: No decorrer da semana, você faz uso do computador durante quantas horas?

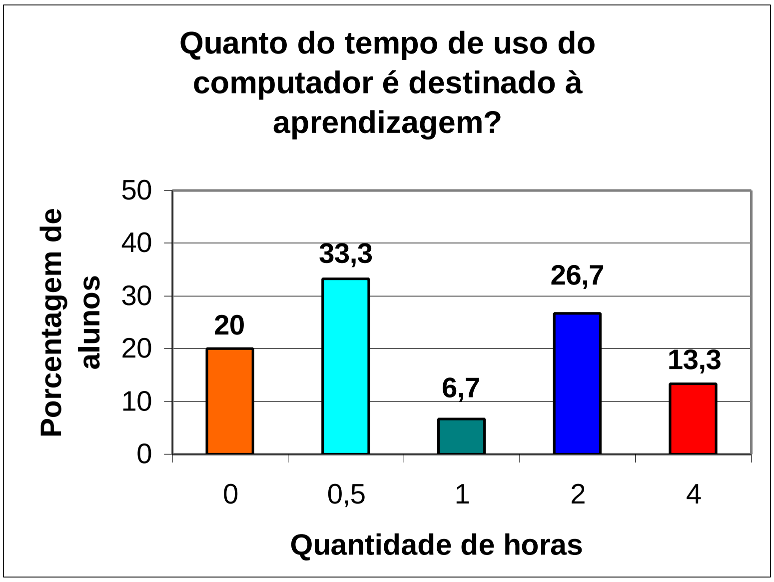


Figura 18: Se você usa o computador durante a semana, quanto tempo é destinado à aprendizagem?

Dos alunos, 83,3% não sabem o que é hipertexto (figura 19), contudo 73,3% respoderam que já haviam feito pesquisa na Internet (figura 20), antes da atividade no site de Cálculo Diferencial e Integral, os dados acima permitem-nos questionar a qualidade da pesquisa que estes efetuam. Não são necessários conhecimentos técnicos para usar a Internet, mas um mínimo de teoria ajuda a não dispersar durante as pesquisas.

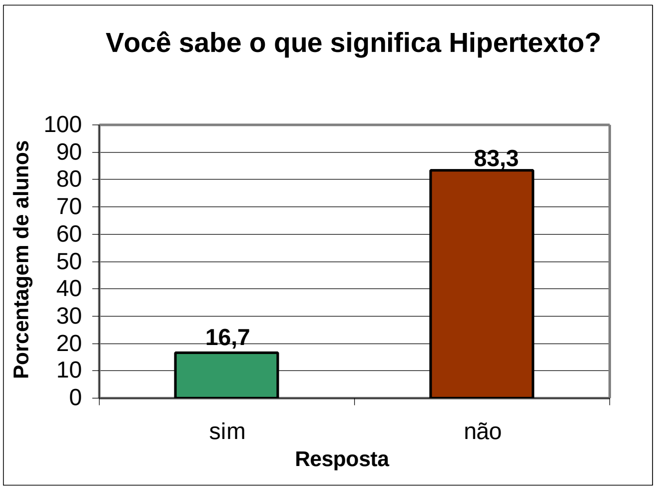


Figura 19: Você sabe o que significa Hipertexto?

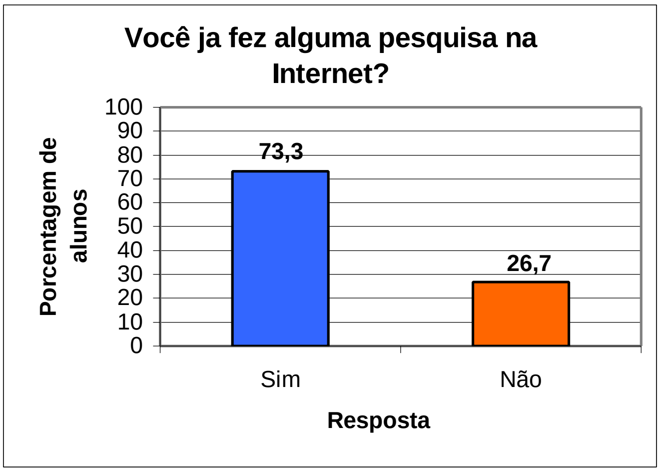


Figura 20: Você já fez alguma pesquisa na Internet?

No final da atividade, 73,1% dos alunos compreenderam a resolução do exercício proposto (figura 21), após explorar o Hipertexto de Cálculo Diferencial e Integral, e 92,3% dos alunos desejam que outros tópicos da disciplina estejam disponíveis na forma de Hipertexto (figura 22). Isto mostra o potencial de comunicação do Hipertexto, e o entusiasmo proporcionado pela introdução da tecnologia na aprendizagem do Cálculo.

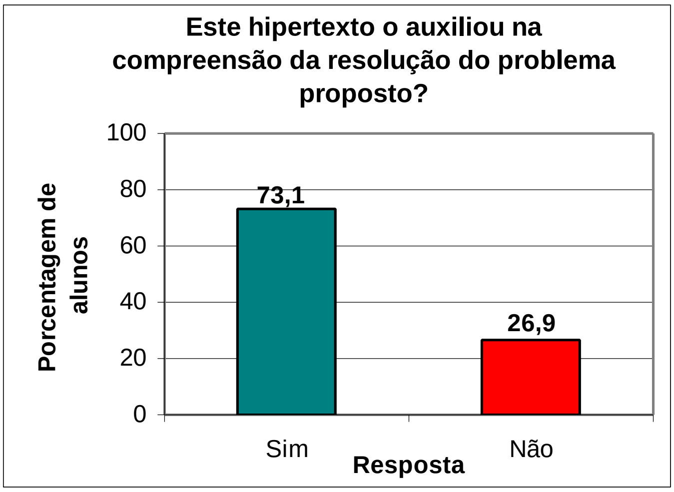


Figura 21: Este Hipertexto o auxiliou na compreensão da resolução do problema proposto?

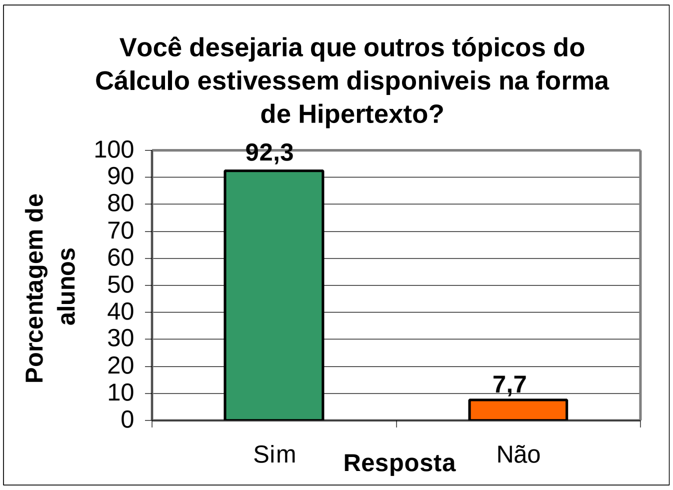


Figura 22: Você desejaria que outros tópicos do Cálculo estivessem disponíveis na forma de Hipertexto?

Em relação às perguntas subjetivas vale ressaltar algumas respostas.

Pergunta 8 - Como você define o uso do computador como recurso didático.

- Apesar de poucas pessoas terem acesso à informática, ela serve como um ótimo recurso didático pois é um método diferente e atrativo.
- A informática pode vir a ser um bom recurso, mas poucas pessoas têm acesso ao computador e a maioria dos professores não sabem como utilizá-lo como recuso didático.
- É um recurso que serve tanto para o professor dar aula, como para o aluno estudar. O professor pode utilizá-lo para fazer pesquisa, elaborar exercícios, resolver exercícios. O aluno pode fazer pesquisa, resolver exercícios etc.
- É um recurso didático, onde se pode unir a teoria com a prática, e uma maneira para que todos possam ter acesso a informática, já que hoje ela é necessária.
- É um recurso, pelo qual se pode explorar várias coisas de diferentes aspectos; além de tornar as aulas mais dinâmicas.

Pergunta 9 – Existe alguma limitação para este uso ocorra?

- Sim, existe por parte dos alunos uma dispersão.
- A pouca disponibilidade de máquinas para uso e consulta.
- A única limitação, na minha opinião, é acessibilidade e o conhecimento técnico da área.
- Não, só depende da boa vontade do professor para estar passando este conhecimento p/ seus alunos.
- O curso de Matemática (principalmente) deveria ter mais acesso à sala de informática.

- O que limita o uso é o pequeno número de computadores disponíveis e principalmente a ausência do horário reservado para os alunos. No geral o acesso ao computador é raro.

5 CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA FUTUROS TRABALHOS

5.1 Conclusões

5.1.1 Da pesquisa teórica

A Matemática surgiu da necessidade de medir, pesar, contar e construir. Em decorrência destas necessidades seu ensino esteve vinculado à resolução de problemas de natureza prática. No ensino da Matemática, houve sempre a presença de recursos técnicos, tais como: pedras, tabuinhas de barro, ábacos, corda, compasso, régua, esquadro.

O homem primitivo criou algumas formas de representar quantidades, para caracterizar o ambiente no qual viveu desenhou figuras, principalmente as simétricas. A transmissão destas habilidades ocorreu no dia-a-dia, na convivência diária, pela observação, numa relação de respeito e igualdade entre aquele que executa a tarefa e o que aprende.

O crescimento das tribos e conseqüentemente o aparecimento das cidades, alterou a relação entre os indivíduos. A complexidade da sociedade promoveu mudanças nas atividades produtivas, levando à especificidade do trabalho. A transmissão da técnica e do conhecimento, passou a exigir a presença de alguém que pudesse dedicar-se exclusivamente à ela, surge a atividade da docência e conseqüentemente a figura do professor.

Inicialmente, foram criados dois tipos de ensino, um voltado para a técnica, atividade produtiva, destinado aos operários e outro a administração, atividade de gerenciamento destinado aos soberanos e religiosos, o ensino fica a serviço de uma ideologia. A educação, que anteriormente era espontânea, passou a ser coercitiva, permitindo em determinadas circunstâncias o castigo.

As antigas civilizações conceberam os rudimentos da Matemática, onde surgiram as primeiras formas de representações numéricas, mas este conhecimento era privilégio de poucos. Por exemplo, no Egito as tarefas de registrar e contar eram responsabilidade dos sacerdotes-governantes, era reservado a eles os meios necessários, daí o significado de hieróglifos, escrita de sacerdote.

A civilização clássica elaborou os princípios lógicos, as regras e a exatidão dos resultados, promovendo o amadurecimento da matemática enquanto ciência. Mas, o ensino da matemática continuou elitista, restrito aos iniciados, como ocorreu nas escolas dos milésios, pitagóricos e aleatas, onde filosofia e superstição fundiam-se na proposta pedagógica.

No período medieval a matemática pouco evoluiu na Europa. O fato relevante foi a introdução dos algarismos hindu-arábicos em decorrência do uso de ábaco. Surgiram as universidades, mas o ensino da matemática ficou restrito às operações aritméticas, necessárias aos sacerdotes, para determinar os dias santos. No entanto, a educação teve um significativo avanço por amenizar os castigos impostos às crianças.

O crescimento da população e a intensificação das relações entre os povos possibilitaram a proliferação das universidades. As descobertas marítimas, principalmente, obrigaram o estudo das ciências nas universidades, impulsionando o desenvolvimento das diversas áreas do conhecimento. A genialidade de homens como Descartes, Fermat e Pascal, ilumina as diversas teorias da matemática.

No século XVII, Newton e Leibniz inventam o Cálculo, cada um a sua maneira. Esta teoria notável proporciona uma revolução no pensamento matemático da época.

No século XVIII, enquanto, na Europa, Euler criava e produzia textos matemáticos em abundância, no Brasil era proibida a imprensa, marca do obscurantismo português. A primeira publicação de trabalho matemático, realizado por autor nascido no Brasil ocorreu em 1738, por um sargento da artilharia.

Os primeiros professores de matemática, formados no Brasil, estudaram na Academia Real Militar. Coube às escolas do Exército e da Marinha a responsabilidade do ensino da matemática até 1934, quando foi criada a Faculdade de Ciências e Letras, na Universidade de São Paulo. Hoje o Brasil conta com diversas universidades e faculdades que possuem cursos de matemática, licenciatura e bacharelado.

As dificuldades de aprendizagem da matemática continua a preocupar os educadores. Quanto à aprendizagem do Cálculo, é bom lembrar que são necessários alguns conhecimentos básicos de Matemática e apesar dos esforços para facilitar o entendimento, nenhuma fórmula mágica foi encontrada até hoje.

Portanto, o desenvolvimento de recursos, o estudo de métodos e de técnicas que venham facilitar a aprendizagem do Cálculo devem ser valorizados e incentivados. A informática contando com o recurso de comunicação de diversas mídias, pode tornar-se a grande a aliada do educador da área de matemática.

O mundo globalizado socializa a informação pela WWW; o acesso à produção científica dos Centros de Tecnologias e das Universidades é imediato. A Internet permite a troca de correspondência síncrona e assíncrona, o que possibilita a formação de grupos de discussão. Neste cenário, de permuta on-line, pesquisar, debater e solucionar problemas são valiosos recursos para a aprendizagem e divulgação do Cálculo.

A possibilidade de associar textos concisos de diversas maneiras torna o Hipertexto num valioso recurso didático, que pode ser usado dentro da próprio ambiente escolar (intranet) ou na Web pela Internet.

5.1.2 Da construção do Hipertexto

Na construção do Hipertexto destaca-se os seguintes fatos:

a) o uso do e-mail – quanto ao uso do e-mail vale destacar que a grande maioria dos alunos o usou corretamente, os alunos que não tiveram êxito com o correio participou entregando os exercícios em disquete.

b) a base de dados – na construção da base de dados a maior dificuldade foi converter os documentos que estavam na extensão doc para html. Inicialmente, salvava-se o arquivo do Word como html, este tipo de arquivo ocupa muita memória, o que dificulta a transferência, para o servidor, pelo FTP. Portanto esta técnica foi substituída pelo recurso do FrontPage, o trabalho foi refeito utilizando em todas as páginas este recurso. O arquivo gerado pelo FrontPage ocupa menos espaço na memória.

c) arquitetura do ambiente – elaborar um modelo de arquitetura é uma tarefa complexa, a maior dificuldade está no acréscimo de links, à medida em que as possibilidades vão surgindo no decorrer da construção do Hipertexto.

5.1.3 Do uso do Hipertexto

O Hipertexto como meio didático mostrou ser eficiente, pois 73.1% dos alunos, envolvidos na atividade, compreenderam a resolução do exercício proposto. É um alto índice, principalmente levando em consideração que 50% deles não usam o computador regularmente.

A motivação promovida pelo uso computador fica evidente quando 92.3% dos alunos manifestam o desejo de ter acesso a outros tópicos do Cálculo redigidos na forma de hipertexto.

O hipertexto contribui decisivamente para aumentar a qualidade da comunicação nos ambientes educacionais, pois quando a informação apresentada envolve muitos dos sentidos do aprendiz, a compreensão é mais eficiente.

5.2 Sugestões Para Futuros Trabalhos

O uso do hipertexto e de ambientes com objetivos educacionais caracterizam uma nova e promissora área de pesquisa e aplicação de recursos computacionais. Assim coloca-se como sugestão para futuros trabalhos:

- ampliar o uso do hipertexto a outros tópicos do Cálculo.
- estudar e aplicar tecnologia na disciplina Estágio Supervisionado, de Curso de Licenciatura em Matemática.
- projetar, executar e avaliar o desempenho de um ambiente de aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral.

6 REFERÊNCIAS

ÁVILA, Geraldo. **Cálculo: Funções de uma variável**. 6ª ed. Rio de Janeiro: Moderna, 1994. v1 355p.

BOYCE, William E., DIPRIMA, Richard C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno.** 6.ed. Rio de Janeiro: LTC, 1999. 532p.

BOYER, Carl Benjamin. **História da matemática** 7 ed.. Tradução Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1974. 488p.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997. 142p.

BUSHAW, Donald, et al.; tradução: Hygino H. Domingues. **Aplicações da Matemática Escolar**. São Paulo: Atual, 1997. 354p.

CASAS, Luis Alberto Alfaro, BRIDI, Vera Lúcia, FIALHO, Francisco Antônio Pereira. Construção de Conhecimento por Imersão em Ambientes de Realidade Virtual. In: **VII Simpósio Brasileiro de Informática na Educação**. Belo Horizonte, de 20 a 22 de novembro de 1996. Belo Horizonte: UFMG, 1996. Anais... p.29-44

CASTRO, F. M. de Oliveira. **A matemática no Brasil.** Campinas, São Paulo: UNICAMP, 1992. 80p.

COXFORD, Arthur F., SHULTE, Albert P. (org.), tradução: Hygino H. Domingues. **As Idéias da Álgebra**. São Paulo: Atual, 1997. 285p.

DANTE, Luiz Roberto. **Didática da Resolução de Problemas de Matemática**. 11.ed. São Paulo: Ática, 1998.176p.

DEMO, Pedro. **Mitologias da Avaliação**: de como ignorar, em vez de enfrentar problemas. Campinas, SP: Autores Associados, 1999. 84p.

DUARTE, Elizabeth Bastos. (org.) **Semiótica e pragmática da comunicação**. São Leopoldo:Unisinos, 1997. 170p.

FRANÇA, Júnia Lessa. **Manual para Normatização de Publicações Técnico-Científicas** 4. ed. ver. e aum. Belo Horizonte: UFMG,1998. 213p.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia da autonomia**: saberes necessários à pratica educativa. São Paulo: Paz e Terra, 1996. 165p.

FURON, R. et al. As Ciências Antigas do Oriente. In: TATON, René. **A Ciência Antiga e Medieval**. São Paulo: Difusão Européia do Livro, 1959. Tomo I, v.1. 204p. (História geral das ciências)

GODOTTI, Moacir. **Histórias das Idéias Pedagógicas**. São Paulo: Ática, 1999. 319p.

KRULIK, Stephen,;REYS, Robert E.; tradução: Hygino H. Domingues, Olgo Corbo. **A Resolução de Problemas na Matemática Escolar**. São Paulo: Atual, 1998. 343p.

LÉVY, Pierre. **As tecnologias da inteligência**; tradução de Carlos Irineu da Costa. Rio de Janeiro: 34, 1993. 208p.

LÉVY, Pierre. **Cibercultura**; tradução de Carlos Irineu da Costa. São Paulo: 34, 1999. 264p.

LÉVY, Pierre. **O que é virtual?**; tradução de Carlos Irineu da Costa. São Paulo: 34, 1996. 160p.

LOPES, Artur. **Algumas reflexões sobre a questão do alto índice de reprovação nos cursos de Cálculo da UFRGS**. Sociedade Brasileira de Matemática. Rio de Janeiro, n.26/27, p.123-146, jun./dez. 1999. (Matemática Universitária)

MACHADO, Nilson José. **Epistemologia e Didática**: as compepções de conhecimento e inteligência e a prática docente. 3.ed. São Paulo: Cortez, 1999. 320p

MACHADO, Nilson José. **Matemática e Língua Materna**. 4.ed. São Paulo: Cortez, 1998. 169p.

MACHADO, Nilson José. **Matemática e Realidade**. 3.ed. São Paulo: Cortez, 1994. 103p.

Metodologia da pesquisa e produção de dissertação. Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção. Florianópolis: Universidade Federal de Santa Catarina, 2000.

MICHEL, P. H. et al. As ciências no mundo Greco-Romano. In: TATON, René **A Ciência Antiga e Medieval**. São Paulo: Difusão Européia do Livro, 1959. Tomo I, v.2. 208p. (História geral das ciências)

MINAS GERAIS. Secretaria de Estado da Educação. **Guia curricular de matemática: ciclo básico de alfabetição, ensino fundamental.** Wanda Maria de Castro Alves (coor.); Sônia Fuiza da Rocha Castilho, Stella Maris Fernandes Fialho de Martins Flores, Wanda Maria de Castro Alves (elab.). Belo Horizonte: SEE, 1997. 2v. 436p.

MORAN, José Manuel. **Mudar a forma de ensinar e de aprender com tecnologias: transformar as aulas em pesquisa e comunicação presencial-virtual**. Disponível: <www.eca.usp.br/prof/moran/textos/html>. Acessado em 12 fevereiro de 2002.

PARRA, Cecilia, SAIZ, Irmã, et al.; tradução: Juan Acuña Llorens. **Didática da Matemática**: reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996. 258p.

PINTO, Diomara, MORGADO, Maria Cândida Ferreira. **Cálculo Diferencial e Integral de Funções de Várias Variáveis**. Rio de Janeiro: UFRJ, 1997. 348p.

Piskounov, N. **Cálculo Diferencial e Integral**. Porto: Lopes da Silva, 1979. v.1. 516p.

Piskounov, N. **Cálculo Diferencial e Integral**. Porto: Lopes da Silva, 1979. v.2. 457p.

SIMMONS, George F. **Cálculo com geometria analítica**. Tradução Seiji Hariki; revisão técnica Rodney Carlos Bassanezi, Silvio de Alencastro Pregnolatto. São Paulo: McGraw-hill, 1987. v.2. 807p.

SIMMONS, George F. **Cálculo com geometria analítica**. Tradução Seiji Hariki; revisão técnica Rodney Carlos Bassanezi, Silvio de Alencastro Pregnolatto. São Paulo: McGraw-hill, 1987. v.1. 829p.

SMOLE, Kátia Cristina Stocco. **A Matemática na Educação Infantil**: A teoria das Inteligências Múltiplas na Prática Escolar. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 2000. 205p.

STRESSER-PÉAN, G. et al. A idade média. In: TATON, René. **A Ciência Antiga e Medieval**. São Paulo: Difusão Européia do Livro, 1959. Tomo I, v.3. 208p. (História geral das ciências)

VALENTE, José Armando. **Computadores e conhecimento: repensando a educação.** Campinas: UNICAMP, 1993. 418p.

VALENTE, José Armando. **O computador na sociedade do conhecimento**. Campinas: UNICAMP, 1999. 156p.

VASCONCELOS, Mario Sergio. **A Difusão das Idéias de Piaget na Brasil**. São Paulo: Casa do Psicólogo, 1996. 285p.

WILLIAM, G. McCallum, DEBORAH, Hughes-Hallett, ANDREW, M. Gleason, et al. **Cálculo de Várias Variáveis**. São Paulo: Edgard Blücher, 1997. 294p.

7 ANEXO

7.1 ANEXO A – Questionário (1)

1) Você usa o computador durante a semana?

a) Não.
b) Sim.

2) caso tenha respondido sim á primeira pergunta responda, no decorrer da semana, você faz uso do computador durante quantas horas?

a) Uma hora.
b) Duas horas.
c) Quatro horas.
d) Oito horas.
e) Doze horas.
f) Vinte horas.

3) Se você usa o computador durante a semana, quanto tempo é destinado à aprendizagem?

a) Meia hora.
b) Uma hora.
c) Duas horas.
d) Quatro horas.
e) Mais de quatro horas.

4) Você sabe o que é hipertexto?

a) Sim.
b) Não

5) Você já fez alguma pesquisa na internet?

a) Sim.
b) Não.

7.2 Anexo B – Questionário (2)

1) Este hipertexto o auxiliou na compreensão da resolução do problema proposto?

a) Sim.

b) Não.

2) Você desejaria que outros tópicos do Cálculo estivessem disponíveis na forma de hipertexto?

a) Sim.

b) Não.

3) Como você define o uso do computador como recurso didático.

4) Existe alguma limitação para que este uso ocorra?

7.3 Anexo C – Resolução do exercício sobre comprimento de arco

Resolução do exercício proposto na atividade de uso do Hipertexto.

Calcule o comprimento do arco da curva $y^2 = x^3$ entre os pontos $(1,1)$ e $(4,8)$.

i) Determinando a função

$y^2 = x^3$ é igual a $y = x^{3/2}$ e $y = -x^{3/2}$ como as coordenadas do eixo y para dos pontos dados são positivas faremos o estudo pela função $y = x^{3/2}$.

ii) Determinado $\frac{dy}{dx}$

$y = x^{3/2}$ então $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}x^{1/2}$

iii)Cálculo do comprimento do arco

$$L = \int_1^4 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \int_1^4 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}x^{1/2}\right)^2}\,dx = \int_1^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\,dx$$

iv) Resolução da integral pelo método da substituição*

$$I = \int \sqrt{1 + \frac{9x}{4}}\,dx$$

$$seja\ u = 1 + \frac{9x}{4}$$

$$então\quad du = \frac{9}{4}dx \Rightarrow \quad dx = \frac{4}{9}du$$

$$assim\ I = \int \sqrt{u}\,\frac{4}{9}du = \frac{4}{9}\int \sqrt{u}\,du$$

$$I = \frac{4}{9}\int u^{1/2}du = \frac{4}{9}\frac{u^{3/2}}{3/2} + c \Rightarrow$$

$$I = \frac{8}{27}u^{3/2} + c$$

$$I = \frac{8}{27}\left(1 + \frac{9x}{4}\right)^{3/2} + k$$

$$L = \int_1^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\,dx = \frac{8}{27}\left(1 + \frac{9x}{4}\right)^{3/2}\Bigg|_1^4$$

$$L = \frac{8}{27}\left[\left(1 + \frac{9 \cdot 4}{4}\right)^{3/2} - \left(1 + \frac{9 \cdot 1}{4}\right)^{3/2}\right]$$

$$L = \frac{8}{27}\left[(10)^{3/2} - \left(\frac{13}{4}\right)^{3/2}\right]$$

$$L = \frac{8}{27}\left(10\sqrt{10} - \frac{13\sqrt{13}}{8}\right)$$

***Revisar resolução de integral pelo método da substituição, integral da função composta. Página 295 do livro "O Cálculo com Geometria Analítica", autor Louis Leithold.**