

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA  
LABORATORIO DE CONTROLE E MICRO-INFORMÁTICA

**Abordagem Geométrica para Estabilização por  
Realimentação de Saídas e sua Extensão aos  
Sistemas Descritores**

Tese de Doutorado submetida à  
Universidade Federal de Santa Catarina

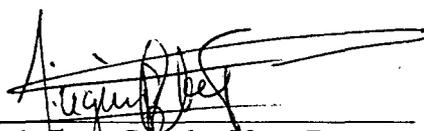
**Elmer Rolando Llanos Villarreal**

Florianópolis, Março de 2002

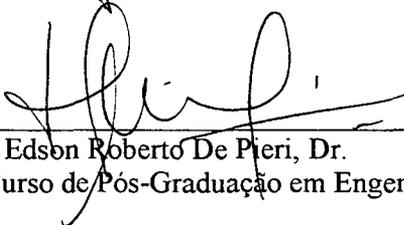
# Abordagem Geométrica para Estabilização por Realimentação de Saídas e sua Extensão aos Sistemas Descritores

Elmer Rolando Llanos Villarreal

'Esta Tese foi julgada adequada para obtenção do Título de Doutor em Engenharia Elétrica, Área de Concentração em *Sistemas de Informação*, e aprovada em sua forma final pelo Curso de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Santa Catarina.'

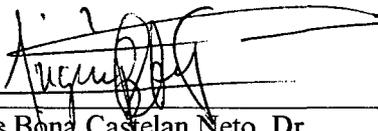


Eugênio de Bona Castelan Neto, Dr.  
Orientador

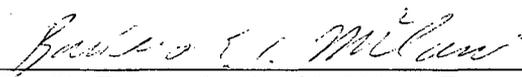


Edson Roberto De Pieri, Dr.  
Coordenador do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

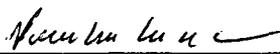
Banca Examinadora:



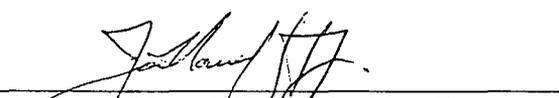
Eugênio de Bona Castelan Neto, Dr.  
Presidente



Basílio Ernesto de Almeida Milani, Dr.



Paulo Sérgio Pereira da Silva, Dr.



João Manoel Gomes da Silva, Dr.



Edson Roberto De Pieri, Dr.

Evangelho (Mt 5, 13-16):

Naquele tempo, disse Jesus a seus discípulos: "Vós sois o sal da terra. Ora, se o sal se tornar insosso, com que salgaremos? Ele não servirá para mais nada, senão para ser jogado fora e ser pisado pelos homens. Vós sois a luz do mundo. Não pode ficar escondida uma cidade construída sobre um monte. Ninguém acende uma lâmpada e a coloca debaixo de uma vasilha, mas, sim, num candeeiro, onde brilha para todos que estão na casa. Assim também brilhe a vossa luz diante dos homens, para que vejam as vossas boas obras e louvem o vosso Pai que está nos céus".

Dedicada a Maritza Egoavil de Llanos pelo amor e dedicação pela companhia na vida e constante compartilhar.

Dedicada a meus filhos Maria Claudia De La Cruz Llanos, Elmer Giovani Egoavil Llanos.

Dedicada a meus pais, Manuel Elmer Llanos Flores, Mery July Villarreal Pasquel,  
aos meus irmãos Narda Rocío Llanos Villarreal e Tony Llanos Villarreal.

## Agradecimentos

Agradeço em primeiro lugar a Deus e a Nossa Senhora Aparecida, a quem devo tudo pelas graças concedidas desde minha chegada ao Brasil.

Ao professor Eugênio de Bona Castelan Neto pela amizade incentivo competência e dedicação na orientação deste trabalho.

Aos professores membros da banca examinadora, Basílio Ernesto de Almeida Milani, Paulo Sérgio Pereira da Silva, João Manoel Gomes da Silva Jr. e Edson Roberto De Pieri pela disposição e avaliação deste trabalho.

Ao professor Edson Roberto De Pieri.

Aos professores Alexandre Trofino Neto, Antonio Augusto Rodrigues Coelho, Augusto Humberto Bruciapaglia, Carlos Raul Borenstein, Daniel Juan Pagano, Guilherme Bittencourt, Jean-Marie Farines, Joni da Silva Fraga, José Eduardo Ribeyro Cury, Julio Elias Normey Rico, Marcelo Ricardo Stemmer, Ricardo José Rabelo, Rômulo Silva de Oliveira e Werner Kraus.

Ao professor Aguinaldo Silva e Silveira, Edson Luiz da Silva e todos os professores *PGEEL*.

Aos amigos e colegas do *DAS*.

Agradeço ao *DAS* pela infra-estrutura e apoio.

Aos secretários do Programa de Pósgraduação em Engenharia Elétrica Wilson Silva Costa, Marcelo M. Siqueira.

Ao *CNPq* pelo auxílio financeiro.

Aos trabalhadores do Hospital Universitário, Restaurante Universitário e Biblioteca Central.

Aos trabalhadores da UFSC em geral.

Ao Professor orientador do mestrado Felipe Miguel Pait.

A Renato Donizete Vilela de Oliveira.

A Alexandre Orth, Ana Lúcia Driemeyer Franco, André Bittencourt Leal, André Camargo Guedes Rodrigues, Carlos Herinque Faria dos Santos, Carlos Ogawa, Cassia Yuri Tatibana, Cristiane Correia Paim, Cynthia Beatriz Scheffer, Fred Herinque Souza Paes, Jerusa Marchi Vaz, Karina Acosta Barbosa, Karen Farfan Campana, Luciana Bolan Frigo, Luciano Rottava da Silva, Max Mauro Dias Santos, Michelle Silva Wangham, Otacilio da Mota Almeida, Paulo Manoel Mafra, Rodrigo Rodrigues Sumar, Ruben Gomez Diaz, Sonia Elena Palomino Castro, Tatiana Renata Garcia, Terezinha de Fátima Faria, Ubirajara Franco Moreno, Vilemar Gomes da Silva, Vinicius Menezes de Oliveira e Xenia Kely Amorim.

A Carlos Cesar Vidal e família.

A Max Mauro Dias Santos e Meire Campos e família.

A Armando Velásquez Romero e família. Pela amizade ao longo da vida.

A Carmen Angeles G. e família. Pela amizade ao longo da vida

A Fredy Sobrado Suarez e família.

A Jose Alvaro Agramonte Caballero e família; Luis e Wadaed.

A Jose Walter Cardenas Sotil e família.

A Jorge Roel Ortiz e família.

A Nelson Jhoe Batistela.

A Yolanda Zamudio Diaz.

A minha esposa Maritza Egoavil de Llanos pelo amor e dedicação pela companhia na vida e constante compartilhar ao longo da vida.

A meus filhos Maria Claudia De La Cruz Llanos, Elmer Giovani Egoavil Llanos.

A meus pais, Manuel Elmer Llanos Flores, Mery July Villarreal Pasquel, aos meus irmaos Narda Rocío Llanos Villarreal e Tony Llanos Villarreal.

Agradeço a todos que direta ou indiretamente colaboraram para a conclusão desta tese.

Resumo da Tese apresentada à UFSC como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Engenharia Elétrica.

# **ABORDAGEM GEOMÉTRICA PARA ESTABILIZAÇÃO POR REALIMENTAÇÃO DE SAÍDAS E SUA EXTENSÃO AOS SISTEMAS DESCRITORES**

**Elmer Rolando Llanos Villarreal**

Março 2002

Orientador: Eugênio de Bona Castelan Neto, Dr.

Área de Concentração: Sistemas de Informação

Palavras-chave: **Estabilização, Realimentação de Saídas, Sistemas Descritores, Controle Geométrico, Posicionamento de Pólos.**

Número de Páginas: 122

Este trabalho trata os problemas de estabilização e de posicionamento regional de pólos em sistemas lineares contínuos no tempo usando realimentação estática de saídas. Os resultados apresentados têm como ponto de partida o conceito de subespaços  $(C,A,B)$ -invariantes caracterizados algebricamente através de um par de equações acopladas de Sylvester, cuja solução pode ser obtida, para sistemas que verificam a condição de Kimura ( $m + p > n$ ), em duas etapas utilizando o algoritmo de Syrmos e Lewis. No caso de sistemas normais, é demonstrado que subespaços  $(C,A,B)$ -invariantes estabilizáveis por saídas podem ser caracterizados através de equações acopladas de Lyapunov. Baseada nessas equações, é proposta uma condição necessária e suficiente para a existência de solução do problema de estabilização por realimentação estática de saídas. Para sistemas satisfazendo a condição de Kimura, são propostos dois algoritmos (primal e dual) para solução das equações acopladas de Lyapunov. A técnica de estabilização é então adaptada para tratar o problema de posicionamento regional de pólos. Para uma classe de sistemas descritores (regular, sem comportamento impulsivo e sem ação direta de controle nas variáveis algébricas), é demonstrado que os problemas de estabilização e de posicionamento regional de pólos por realimentação estática de saídas podem ser vistos como problemas para um sistema normal de ordem reduzida. Assim sendo, os resultados sobre existência de solução e o algoritmo dual de solução das equações acopladas de Lyapunov, desenvolvidos para sistemas normais, são adaptados para serem aplicados diretamente no modelo de ordem completa do sistema descritor. Para os sistemas descritores gerais, é introduzido o conceito de subespaços  $(C,A,E,B)$ -invariantes fortemente estabilizáveis por saídas. A caracterização algébrica destes subespaços é obtida na forma de equações acopladas generalizadas de Sylvester e de Lyapunov. São propostas condições necessárias e suficientes para a existência de solução do problema de estabilização por realimentação estática de saídas e algoritmos para solução do problema.

Abstract of Thesis presented to UFSC as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor in Electrical Engineering.

# GEOMETRIC APPROACH FOR OUTPUT FEEDBACK STABILIZATION AND ITS EXTENSION FOR DESCRIPTOR SYSTEMS

**Elmer Rolando Llanos Villarreal**

March 2002

Advisor: Eugênio de Bona Castelan Neto, Dr.

Area of Concentration: Information Systems

Keywords: **Stabilization, Output Feedback, Descriptor Systems, Geometric Control, Regional Pole Placement.**

Number of Pages: 122

This work deals with the problems of stabilization and of regional pole placement by static output feedback in linear continuous-time systems. The results are based on the key notion of  $(C,A,B)$ -invariant subspaces which can be characterized through a pair of coupled Sylvester equations. Then, solutions to these equations can be obtained, for systems verifying Kimura's condition ( $m + p > n$ ), into two steps using Syrmos and Lewis's algorithm. In case of normal systems, it is shown that output stabilizable  $(C,A,B)$ -invariant subspaces can be characterized through a pair of coupled Lyapunov equations. Based on those coupled equations, necessary and sufficient conditions for existence of a stabilizing output feedback are proposed. For systems verifying Kimura's condition, two algorithms (primal and dual) are proposed to solve the coupled Lyapunov equations. The stabilization technique is then adapted to treat the problem of regional pole placement. For a class of descriptor systems (regular, impulsive free and with no direct action of control inputs on the algebraic variables), it is demonstrated that the problems of stabilization and of regional pole placement by static output feedback can be viewed as problems for a reduced-order normal system. Thus, the previous results concerning the existence of solution and the dual algorithm using coupled Lyapunov equations, are adapted to be directly applied to the full-order descriptor system. For general descriptor systems, the concept of strongly output stabilizable  $(C,A,E,B)$ -invariant subspaces is introduced. An algebraic characterization those subspaces is obtained under the form of two coupled generalized Sylvester and Lyapunov equations. Necessary and sufficient conditions for existence of a stabilizing output feedback are proposed and an algorithm can be used to find stabilizing solutions.

## Notação

- $I_n$ : Matriz identidade de dimensão  $n$
- $A'$ : Transposta da matriz  $A$
- $A^{-1}$ : Inversa da matriz  $A$
- $A > (\geq) 0$ : Matriz simétrica, positiva (semi-)definida
- $\det(A)$ : Determinante da matriz  $A$
- $A \otimes B$ : Produto de Kronecker das matrizes  $A$  e  $B$
- $\text{Ker}(A)$ : Espaço nulo da matriz  $A$
- $\text{Im}(A)$ : Imagem da matriz  $A$
- $\sigma(A)$ : Espectro da matriz  $A$
- $LMI$ : Desigualdade Matricial Linear
- $\text{Re}(\lambda_i)$ : Parte real de  $\lambda_i$ , para  $\lambda_i \in \mathbb{C}$
- $\text{Imag}(\lambda_i)$ : Parte imaginária de  $\lambda_i$ , para  $\lambda_i \in \mathbb{C}$
- $A|_{\mathcal{V}}$ : Restrição do mapa  $A$  ao subespaço invariante  $\mathcal{V}$
- $\mathcal{X}/\mathcal{V}$ : Espaço quociente de  $\mathcal{X}$  restrito ao subespaço  $\mathcal{V}$
- $A|_{\mathcal{X}/\mathcal{V}}$ : Mapa induzido de  $A$  em  $\mathcal{X}/\mathcal{V}$
- $\sigma(E, A)$ : Espectro (pólos finitos) do par  $(E, A)$
- $(E, A)|_{\mathcal{V}}$ : Restrição do mapa  $A$  ao subespaço  $(E, A)$ -invariante  $\mathcal{V}$
- $\mathcal{V} \oplus \mathcal{T}$ : Soma direta dos subespaços  $\mathcal{V}$  e  $\mathcal{T}$

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução Geral</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Realimentação de saídas, <math>(C, A, B)</math>-invariância e Equações acopladas de Sylvester</b>	<b>8</b>
2.1	Introdução . . . . .	8
2.2	Subespaços invariantes e Equações acopladas de Sylvester . . . . .	9
2.3	Aspectos algorítmicos . . . . .	11
2.3.1	Algoritmo de Syrmos e Lewis . . . . .	12
2.3.2	Algoritmo de Alexandridis-Paraskevopoulos . . . . .	15
2.4	Conclusão . . . . .	20
<b>3</b>	<b>Realimentação de saídas via equações acopladas de Lyapunov</b>	<b>22</b>
3.1	Introdução . . . . .	22
3.2	Estabilização via equações acopladas de Lyapunov . . . . .	23
3.2.1	Resultado principal . . . . .	24
3.2.2	Algoritmos . . . . .	31
3.2.3	Exemplos . . . . .	38
3.3	Posicionamento regional de pólos . . . . .	43
3.3.1	Regiões LMI . . . . .	43
3.3.2	$\mathcal{D}$ -Estabilização por realimentação de saídas . . . . .	45
3.3.3	Aspectos algorítmicos . . . . .	49
3.3.4	Exemplos . . . . .	52
3.4	Conclusão . . . . .	55
<b>4</b>	<b>Realimentação de saídas para uma classe de sistemas descritores</b>	<b>57</b>
4.1	Introdução . . . . .	57
4.2	Apresentação do problema e resultados preliminares . . . . .	58
4.2.1	Estabilização usando o sistema normal de ordem reduzida . . . . .	60

---

4.2.2	Discussão . . . . .	62
4.3	Uma abordagem para estabilização . . . . .	63
4.3.1	Aspectos algorítmicos . . . . .	65
4.4	$\mathcal{D}$ -Estabilização por realimentação de saídas . . . . .	68
4.5	Exemplo . . . . .	71
4.6	Conclusão . . . . .	74
<b>5</b>	<b>Caracterização e uso de subespaços invariantes em sistemas descri- tores</b>	<b>75</b>
5.1	Introdução . . . . .	75
5.2	Preliminares . . . . .	76
5.3	$(C, A, E, B)$ -invariância e realimentação de saídas . . . . .	78
5.4	Aspectos algorítmicos . . . . .	80
5.4.1	Extensão do algoritmo de Syrmos-Lewis . . . . .	80
5.4.2	Subespaços $(C, A, E)$ -externamente detectáveis . . . . .	87
5.4.3	Algoritmo utilizando as equações de Lyapunov . . . . .	94
5.5	Conclusão . . . . .	98
<b>6</b>	<b>Conclusão Geral</b>	<b>100</b>
<b>A</b>	<b>Breve revisão da teoria de sistemas descritores</b>	<b>102</b>
A.1	Conceitos de base . . . . .	103
A.1.1	Equivalência . . . . .	104
A.1.2	Primeira forma equivalente . . . . .	105
A.1.3	Segunda forma equivalente: Forma algébrica-diferencial . . . . .	106
A.1.4	Estrutura de um sistema descritor . . . . .	107
A.1.5	Resposta temporal . . . . .	108
A.1.6	Condição inicial consistente . . . . .	109
A.1.7	Estabilidade . . . . .	110
<b>B</b>	<b>Demonstrações</b>	<b>112</b>

# Capítulo 1

## Introdução Geral

O controle de sistemas por realimentação de saídas é, reconhecidamente, um problema importante tanto do ponto de vista teórico quanto do ponto de vista prático. Em aplicações reais, as variáveis internas do sistema a controlar nem sempre estão disponíveis para medição, fazendo-se necessário controlar o sistema com a informação parcial disponível. Deste modo, o controle pode ser feito através de uma realimentação estática ou de uma realimentação dinâmica de saídas. Neste último caso, o controle pode ser realizado a partir de uma realimentação de estados estimados, com observador de estados de ordem completa ou de ordem reduzida, ou utilizando-se diretamente um compensador dinâmico na malha de realimentação. No caso de sistemas lineares, a estrutura do tipo de compensador dinâmico é teoricamente equivalente à utilização de uma realimentação estática de saídas aplicada a um sistema aumentado.

Por outro lado, o controle por realimentação de saídas é ainda considerado um problema teórico aberto, muito embora vários trabalhos tenham sido desenvolvidos nas últimas décadas nesta área, especialmente no caso de sistemas lineares [Lew86].

Dentro do contexto brevemente descrito acima, esta tese considera o problema de estabilização e de posicionamento regional de pólos por realimentação estática de saídas de sistemas lineares. Consideram-se sistemas clássicos, na representação por variáveis de estado, e sistemas descritores, e faz-se uso de uma abordagem geométrica baseada na invariância de subespaços para o desenvolvimento teórico. Mostra-se que esta abordagem geométrica, que pode ser naturalmente traduzida na forma de equações acopladas de Sylvester, também pode ser descrita por um conjunto de equações acopladas de Lyapunov e que ferramentas de Programação Convexa podem ser utilizados para sua solução [CHL00], [CLT01], [LCS00], [CHL02] e [CSLT02].

Os sistemas descritores também chamados de sistemas singulares, aparecem com frequência na modelagem de vários sistemas dinâmicos comumente usados em apli-

cações de engenharia, como sistemas elétricos de potência, sistemas sócio-econômicos, engenharia aeroespacial, análise de redes etc.. Um sistema descritor linear consiste basicamente de uma mistura de equações algébricas e diferenciais [VLK81] [Lew86] [Dai89], e pode ser representado por equações do tipo :

$$\begin{aligned} E\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned}$$

Quando  $E = I$ , tem-se um sistema clássico puramente diferencial, chamado de sistema normal <sup>1</sup>. Os sistemas descritores considerados neste trabalho são caracterizados por matrizes  $E$  singulares :  $\text{posto}(E) = q < n$ .

O comportamento dinâmico dos sistemas descritores apresenta certas características particulares que os diferenciam dos sistemas clássicos, dentre elas : descontinuidades e presença de impulsões em  $t = 0$ . Assim, o problema básico de controle, normalmente tratado na literatura, busca tornar o sistema descritor em malha fechada [Lew86] [Dai89] regular, livre de impulsões e assintoticamente estável. A propriedade de regularidade garante a existência da solução única do sistema descritor. Se o número de autovalores finito do par  $(E, A)$  é igual ao  $\text{posto}(E) = q < n$ , então o sistema descritor não têm modos impulsivos.

No caso de sistemas normais, uma revisão de abordagens existentes e técnicas que tratam diferentes versões do problema de controle por realimentação de saídas pode ser encontrada em [SADG97]. Outros resultados que não são cobertos em [SADG97], são encontrados em [KS95], [GOA97], [GdSS98], [CLS98], [CT99], [FM00], [AC01], [RA99] e [Tsu01]. No caso de sistemas descritores, o problema de estabilização por realimentação de saídas é considerado em , por exemplo: [Fle88], [Dai89], [BGMN94], [VLNS94], [CCH99] [Dua99]; e mais recentemente em [TK98], [GM01] e [IT00]. Trabalhos relacionados ao tema desenvolvido nesta tese e realizados no *LCMI/DAS/UFSC*, podem ser encontrados em [Gom94], [San96], [Mol97] e [Pai01] no caso de sistemas normais e em [Men98] e [Bar99], no caso de sistemas descritores.

Uma característica comum encontrada em diversos trabalhos é que os diferentes métodos propostos para solução do problema de estabilização usando realimentação de saídas são equivalentes à solução de equações matriciais acopladas: equações de Sylvester, de Lyapunov, ou de Riccati [BGM97]. Esta característica também pode ser verificada no caso de sistemas descritores, onde algumas condições complementares

---

<sup>1</sup>sistema normal : termo adotado a partir da literatura utilizada para o estudo de sistemas sistemas descritores.

devem ser garantidas para obter a regularidade e ausência de modos impulsivos em malha fechada. Em particular, através do uso de equações acopladas de Sylvester [SL93a] [SL94], o problema de controle usando realimentação de saídas pode ser resolvido em duas etapas, associadas à determinação e estabilização interna de um subespaço invariante. Esta abordagem, de cunho geométrica, é utilizada principalmente para a solução via posicionamento de autoestrutura. Para o caso dos sistemas descritores, Fletcher [Fle88] foi um dos primeiros a tratar o problema de estabilização considerando dois aspectos: a condição de regularidade e o aspecto da síntese modal através do requisito de posicionamento de pólos. A técnica usada em [Fle88] também é o posicionamento de autoestrutura, onde a seleção dos vetores que satisfazem segunda equação (associada a saída) e primeira equação (associada a entrada) de Sylvester generalizada será determinante para garantir a regularidade em malha fechada.

Usando abordagens algébricas, o problema de estabilização em sistemas descritores é também estudado em [Dua92], [Dua95], [DP97], [Dua98] e [DP98].

O presente trabalho visa estudar o problema de controle por realimentação de saídas de sistemas lineares, normais e descritores, via uma abordagem geométrica baseada na invariância e estabilidade de subespaços, que se traduzem pela solução de duas equações acopladas (generalizadas) de Sylvester. Esta técnica aparece principalmente na literatura de posicionamento de autoestrutura. Desta forma, o trabalho visa integrar técnicas de otimização convencionais ( Programação convexa e *LMI*s ) a esta abordagem geométrica, com ênfase particular à sua aplicação aos sistemas descritores.

A abordagem geométrica para solução do problema de estabilização por realimentação de saídas é baseada no conceito de  $(C, A, B)$  invariância. Este conceito geométrico apresentado em [SL94] para o caso de sistemas normais caracteriza, conjuntamente, a  $(A, B)$ -invariância e a  $(C, A)$ -invariância de um dado subespaço. Um objetivo é a obtenção da caracterização quadrática via equações de Lyapunov para a construção de subespaços invariantes estabilizável pela saída. Uma caracterização algébrica aparece naturalmente na forma de duas equações acopladas de Sylvester que, conjuntamente com as restrições de estabilidade, descrevem completamente a existência de uma realimentação de saídas estabilizadora para o sistema em malha fechada. Alguns algoritmos existentes na literatura podem, assim, ser colocados no contexto da teoria desenvolvida em [SL93a] para sistemas normais e em [Fle88] para sistemas descritores.

A técnica de estabilização é adaptada para tratar o problema do posicionamento regional de pólos por realimentação de saídas. A referida técnica é baseada no conceito de posicionamento de pólos em uma região *LMI* [CG96], [CGA99], onde a função *LMI* de Lyapunov associada as equações acopladas de Lyapunov posiciona os pólos da

malha fechada em uma região  $LMI$  previamente determinada. Em [GDB96] a técnica do posicionamento regional de pólos por realimentação de saídas é baseada nas equações de Riccati.

Também é estudado o problema de estabilização, por realimentação de saídas para sistemas descritores que, similarmente aos sistemas normais, é decomposta em duas etapas: 1) determinação de um subespaço  $(C, A, E)$ -externamente detectável; 2) estabilização interna deste subespaço.

Dentro do contexto descrito acima, o presente documento, descreve algumas contribuições que devem permitir integrar técnicas convencionais de otimização convexa e de fácil utilização para especialistas em controle, para a solução do problema de estabilização, e sua adaptação ao problema de posicionamento regional de pólos. São elas :

- uma caracterização via funções de Lyapunov quadráticas para o conceito de subespaços  $(C, A, B)$ -invariantes;
- uma aplicação da caracterização acima para uma classe de sistemas descritores [LCS00] [CSLT02]; e
- uma generalização para o caso geral de sistemas lineares descritores do conceito de subespaços  $(C, A, E, B)$ -invariantes e relação da caracterização algébrica com as equações acopladas de Sylvester e as equações de Lyapunov [CLT01].

Este trabalho é apresentado da seguinte forma :

O Capítulo dois, no contexto da teoria linear para sistemas normais, apresenta o problema da estabilização de sistemas lineares usando realimentação de saídas. Mostra-se como o conceito de subespaços  $(C, A, B)$  invariantes pode ser usado para resolver o problema de estabilização usando realimentação de saídas.

No Capítulo três, apresenta-se uma solução do problema da estabilização e para o problema de posicionamento regional de pólos usando realimentação de saídas, fazendo uso das equações acopladas de Lyapunov para construir um subespaço  $(C, A, B)$ -invariante estabilizável pela saída. Baseado nestes resultados, apresentam-se os algoritmos para calcular uma matriz de realimentação de saídas. Uma técnica de decomposição ortogonal será inicialmente usada para a elaboração do algoritmo.

No Capítulo quatro, uma classe de sistemas descritores é estudada, considerando as seguintes particularidades do sistema em malha aberta: ausência de comportamento impulsivo, regularidade e ausência da ação direta da entrada de controle nas variáveis

algébricas. Conceitos de base fundamentais para o entendimento do problema de controle de sistemas descritores são apresentados na forma de um apêndice. Considera-se uma adaptação da caracterização quadrática via equações de Lyapunov para esta classe de sistemas descritores. Baseado nestes resultados, apresenta-se um algoritmo para calcular uma matriz de realimentação de saídas.

No Capítulo quinto são considerados os sistemas descritores na sua formulação geral. A partir da noção de  $(C, A, E, B)$  invariância e do uso das equações de Sylvester/Lyapunov generalizadas para o sistema descritor apresenta-se resultados teóricos e no uso de técnicas de otimização dois algoritmos baseados em posicionamento de autoestrutura.

Exemplos numéricos são apresentados ao longo desta tese com objetivo de ajudar a entender melhor as formulações estabelecidas. Finalmente é apresentada a conclusão geral.

# Capítulo 2

## Realimentação de saídas, ( $C, A, B$ )-invariância e Equações acopladas de Sylvester

### 2.1 Introdução

Seja o sistema linear invariante no tempo descrito por :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (2.1)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (2.2)$$

onde:  $x \in \mathcal{X} \sim \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathcal{U} \sim \mathbb{R}^m$ ,  $y \in \mathcal{Y} \sim \mathbb{R}^p$ . Assume-se que  $B$  é de posto completo por colunas e que  $C$  é de posto completo por linhas. O problema de base considerado neste trabalho é encontrar uma lei de controle do tipo realimentação estática de saídas

$$u(t) = Ky(t) \quad , \quad K \in \mathbb{R}^{m \times p} \quad (2.3)$$

tal que o sistema em malha fechada seja assintoticamente estável, isto é:  $\sigma(A+BKC) \in \mathcal{C}^-$ , onde  $\sigma(A+BKC) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  é o conjunto de autovalores de  $A+BKC$ .

Este capítulo apresenta os conceitos básicos da teoria de controle geométrico que fundamentam a abordagem adotada na tese para a solução do problema [SL94], [Won79]. As equações acopladas de Sylvester são interpretadas com base na teoria de controle geométrico. Assim, através dessas equações, o problema de estabilização usando realimentação de saídas pode ser decomposto em duas etapas [SL93a]:

- determinação de um subespaço  $(C, A)$ -externamente detectável;

- estabilização interna deste subespaço.

Na busca de soluções para o problema de estabilização discutem-se e apresentam-se procedimentos para a solução destas equações acopladas, com ênfase em técnicas de posicionamento de auto-estrutura [AP96] [SL93a].

Na seção 2.2, introduz-se a noção de subespaço *O.S.*  $(C, A, B)$ -invariante e apresentam-se as equações acopladas de Sylvester. Na terceira e quarta seções apresentam-se os aspectos algorítmicos, ilustrando-os com exemplos numéricos. Alguns comentários conclusivos são finalmente apresentados.

## 2.2 Subespaços invariantes e Equações acopladas de Sylvester

Como em [SL94], usam-se alguns conceitos e definições da teoria de controle geométrico [Won79]. Sabe-se que um subespaço  $\mathcal{V} \subset \mathcal{X}$  é  $(A, B)$ -invariante se existe  $F : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  tal que  $(A + BF)\mathcal{V} \subset \mathcal{V}$ , ou equivalentemente,  $A\mathcal{V} \subset \mathcal{V} + \text{Im } B$ . Por dualidade um subespaço  $\mathcal{T} \subset \mathcal{X}$  é  $(C, A)$ -invariante se existe  $L : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$  tal que  $(A + LC)\mathcal{T} \subset \mathcal{T}$ , ou equivalentemente,  $\mathcal{T} \supset A(\mathcal{T} \cap \text{Ker}(C))$ .

**Definição 2.2.1** [SL94] *Um subespaço  $\mathcal{V} \subset \mathcal{X}$ , de dimensão  $v$ , é  $(C, A, B)$ -invariante se  $\mathcal{V}$  é  $(A, B)$ -invariante e  $(C, A)$ -invariante.*

Seja  $V \in \mathbb{R}^{v \times v}$  tal que  $\text{Im}(V) = \mathcal{V}$  e seja  $T \in \mathbb{R}^{(n-v) \times v}$  um anulador à esquerda de  $V$ , i.e. :  $\text{Ker}(T) = \text{Im}(V)$ . A definição 2.2.1 é equivalente à existência de matrizes  $(H_V \in \mathbb{R}^{v \times v}, W \in \mathbb{R}^{m \times v})$  e  $(H_T \in \mathbb{R}^{n-v \times n-v}, U \in \mathbb{R}^{(n-v) \times v})$ , soluções para as seguintes Equações acopladas de Sylvester:

$$AV - VH_V = -BW \quad (2.4)$$

$$TA - H_T T = -UC \quad (2.5)$$

$$TV = 0 \quad (2.6)$$

A definição 2.2.1 e as equações (2.4), (2.5) e (2.6) têm um papel fundamental no tratamento do problema de controle usando realimentação estática de saídas, principalmente por posicionamento de auto-estrutura [SL93a] [SL94]. O presente estudo leva em conta as propriedades de estabilizabilidade e detectabilidade, através das duas definições a seguir :

(i) um subespaço  $(A, B)$ -invariante  $\mathcal{V}$  é  $(A, B)$ -internamente estabilizável se existe  $F$

tal que  $(A + BF)|_{\mathcal{V}}$  é assintoticamente estável; e

(ii) um subespaço  $(C, A)$ -invariante  $\mathcal{V}$  é  $(C, A)$ -externamente detectável se existe  $L$  tal que  $(A + LC)|_{\mathcal{X}/\mathcal{V}}$  é assintoticamente estável.

**Definição 2.2.2** [SL94] *Um subespaço  $\mathcal{V}$ , de dimensão  $v$ , é  $(C, A, B)$ -invariante estabilizável pela saída, (ou simplesmente O.S.  $(C, A, B)$ -invariante<sup>1</sup>) se  $\mathcal{V}$  é  $(A, B)$ -internamente estabilizável e  $(C, A)$ -externamente detectável.*

Assim, uma condição necessária e suficiente para que um subespaço  $\mathcal{V} = \text{Im}(V)$  seja O.S.  $(C, A, B)$ -invariante é que (2.4), (2.5) e (2.6) sejam verificadas com as condições adicionais de estabilidade :

$$\sigma(H_V) \in \mathcal{C}^- \quad (2.7)$$

$$\sigma(H_T) \in \mathcal{C}^- \quad (2.8)$$

O Teorema a seguir relaciona o conceito de subespaços O.S.  $(C, A, B)$ -invariantes à existência de uma lei de controle do tipo realimentação estática de saídas (2.3) que estabiliza o sistema em malha fechada.

**Teorema 2.2.1** *Existe uma matriz de realimentação de saídas  $K : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{U}$  tal que  $\sigma(A + BKC) \in \mathcal{C}^-$ , se e somente se as seguintes condições são verificadas para algumas matrizes  $(V \in \mathbb{R}^{n \times v}, H_V \in \mathbb{R}^{v \times v}, W \in \mathbb{R}^{m \times v})$ ,  $(T \in \mathbb{R}^{n-v \times n}, H_T \in \mathbb{R}^{n-v \times n-v}, U \in \mathbb{R}^{n-v \times v})$  e para algum escalar positivo  $v \leq n$ :*

$$AV - VH_V = -BW, \quad \text{com } \sigma(H_V) \in \mathcal{C}^- \quad (2.9)$$

$$TA - H_T T = -UC, \quad \text{com } \sigma(H_T) \in \mathcal{C}^- \quad (2.10)$$

$$TV = 0 \quad (2.11)$$

$$\text{Ker}(CV) \subseteq \text{Ker}(W) \quad (2.12)$$

$$\text{Ker}(B'T') \subseteq \text{Ker}(U') \quad (2.13)$$

onde:  $\text{posto}(V) = v$  e  $\text{posto}(T) = n - v$ .  $\square$

É importante notar que estes resultados têm sido apresentados e explorados sob diferentes formas na literatura relativa ao posicionamento de auto-estrutura usando

<sup>1</sup>Em inglês: Output Stabilizable  $(C, A, B)$ -invariant [SL94] [CHL00]

realimentação de saídas (ver [SADG97]). O enunciado apresentado corresponde ao enunciado do Teorema 3.2 de [SL94]. Como visto, as *Equações acopladas de Sylvester* (2.9), (2.10) e (2.11) descrevem propriedades geométricas do subespaço  $\mathcal{V} = \text{Im}(V)$ . Sob a restrição de estabilidade imposta à matriz  $H_V$ , a equação (2.9) significa que o subespaço  $\mathcal{V} = \text{Im}(V)$  deve ser  $(A, B)$ -internamente estabilizável; dualmente, (2.10) significa que o subespaço  $\text{Ker}(T) = \mathcal{V}$  deve ser  $(C, A)$ -externamente estabilizável. Assim, sob a condição de acoplamento (2.11), tem-se que a existência de um subespaço  $\mathcal{V} = \text{Ker}(T)$  O.S.  $(C, A, B)$ -invariante, com as condições adicionais (2.12) e (2.13) é uma condição necessária e suficiente para a existência de solução do problema considerado. Note-se também que as condições (2.12) e (2.13) correspondem à existência de uma matriz  $K \in \mathfrak{R}^{m \times p}$  que verifica as duas igualdades seguintes:

$$KCV = W \quad (2.14)$$

$$TBK = U \quad (2.15)$$

É importante observar que garantida a existência de solução para as equações de Sylvester e que  $K$  tenha sido obtida tal que (2.14) (ou 2.15) seja verificada, os autovalores em malha fechada são dados por:

$$\sigma(A + BKC) = \sigma(H_V) \dot{\cup} \sigma(H_T)$$

### 2.3 Aspectos algorítmicos

As condições matriciais estabelecidas no Teorema 2.2.1 são não-lineares em relação às variáveis matriciais  $(V, H_V, W, T, H_T, U)$ . Em particular, os termos não lineares  $VH_V$  e  $H_T T$  presentes em (2.9) e (2.10), respectivamente, podem ser linearizados ao fixar-se as matrizes  $H_V$  e  $H_T$ , ou equivalentemente ao definir-se os autovalores desejados para o sistema em malha fechada.

Nesta seção são apresentadas duas técnicas algorítmicas baseadas em procedimentos de posicionamento de auto-estrutura para a obtenção de uma realimentação de saídas. A primeira delas, proposta por Syrmos e Lewis em [SL93a], soluciona as equações acopladas de Sylvester em dois passos e pode ser diretamente aplicada a sistemas que verificam a condição  $m + p > n$ , conhecida como condição de Kimura [Kim75]. A segunda técnica, proposta por Alexandridis e Paraskevopoulos em [AP96], utiliza uma representação do sistema numa base adequada do espaço de estados, para reescrever as equações acopladas de Sylvester na forma de um conjunto de equações algébricas

bilineares. Nas duas técnicas, assume-se que a dimensão de  $\mathcal{V} = \text{Im}(V)$  é igual ao número de saídas  $p$ , procurando garantir que a matriz  $CV \in \mathbb{R}^{p \times p}$  seja inversível e, portanto, que a matriz de ganhos de realimentação possa ser encontrada, a partir de (2.14), sob a forma  $K = W(CV)^{-1}$ .

Na seqüência, considera-se que o sistema representado por  $(C, A, B)$  é controlável e observável, condição esta necessária para a escolha arbitrária dos pólos a serem posicionados em malha fechada. Esta condição pode entretanto ser relaxada para estabilizabilidade e detectabilidade de  $(C, A, B)$ , o que implica na utilização dos autovalores não-controláveis e não-observáveis no espectro desejado para o sistema em malha fechada.

Em ambas as técnicas a serem apresentadas, considera-se que o conjunto de pólos desejados é denotado por  $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_{n-p}, \lambda_{n-p+1}, \dots, \lambda_n\} = \{\Lambda_T, \Lambda_V\}$  onde  $\Lambda_T$  e  $\Lambda_V$  são auto-conjugados. Estes conjuntos estão associados as matrizes  $H_V \in \mathbb{R}^{p \times p}$  e  $H_T \in \mathbb{R}^{(n-p) \times (n-p)}$  na forma seguinte:  $\sigma(H_T) = \Lambda_T = \{\lambda_1, \dots, \lambda_{n-p}\}$  e  $\sigma(H_V) = \Lambda_V = \{\lambda_{n-p+1}, \dots, \lambda_n\}$ . Para simplicidade da apresentação, considera-se que os elementos de  $\Lambda = \sigma(A + BKC)$  sejam distintos.

### 2.3.1 Algoritmo de Syrmos e Lewis

Baseado nas condições expressas através do Teorema 2.2.1, o algoritmo seguinte, proposto em [SL93a], geralmente leva a uma matriz de realimentação de saídas que estabiliza o sistema em malha fechada quando a condição de Kimura  $n < m + p$  é verificada:

**Passo 1:** Escolhe-se uma matriz  $H_T \in \mathbb{R}^{(n-p) \times (n-p)}$  tal que  $\sigma(H_T) = \Lambda_T \in \mathcal{C}^-$  e resolve-se a equação de Sylvester (2.10) para encontrar uma matriz  $T \in \mathbb{R}^{(n-p) \times n}$  tal que

$$\text{posto} \left( \begin{bmatrix} T \\ C \end{bmatrix} \right) = n \iff \text{Ker } T \cap \text{Ker } C = \{0\} \quad (2.16)$$

**Passo 2:** Resolve-se a equação de Sylvester (2.9), para alguma matriz  $H_V \in \mathbb{R}^{p \times p}$  tal que  $\sigma(H_V) = \Lambda_V \in \mathcal{C}^-$  levando em consideração que a matriz  $V$  deve verificar a condição de acoplamento (2.11) e que o  $\text{posto}(V)$  deve ser igual a  $p$ .

**Passo 3:** Por construção, a relação (2.16) garante que o  $\text{posto}(CV) = p$  e a matriz  $K$  pode ser calculada como solução única de (2.14).

o

Apresenta-se a seguir algumas observações com o duplo objetivo de mostrar aspectos relativos à solução numérica dos passos do algoritmo e de justificá-los teoricamente.

**Observação 1.1 :** Os passos 1 e 2 podem ser resolvidos utilizando-se técnicas padrões para posicionamento de auto-estrutura. Considerando-se as matrizes  $H_T$  e  $H_V$  na forma diagonal de Jordan, pode-se adotar o procedimento seguinte:

**Passo 1:** Encontrar  $t_j \in \mathbb{C}^n$  e  $u_j \in \mathbb{C}^p$ , tais que:

$$\begin{bmatrix} t'_j & u'_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A - \lambda_j I \\ C \end{bmatrix} = 0 \quad \forall j = 1, \dots, n-p \quad (2.17)$$

As linhas da matriz  $T \in \mathbb{R}^{(n-p) \times n}$ , denotadas por  $T_j$ , são formadas a partir dos vetores  $t_j$ , como segue:

- se  $\lambda_j \in \mathbb{R}$ , então  $T_j = t'_j$ ;
- se  $\lambda_j \in \mathbb{C}$ , considera-se  $\lambda_{j+1} = \lambda_j^*$  e  $\begin{cases} T_j = Re(t'_j) \\ T_{j+1} = Imag(t'_j) \end{cases}$ .

**Passo 2 :** Determinar  $v_i \in \mathbb{C}^n$  e  $w_i \in \mathbb{C}^n$  tais que:

$$\begin{bmatrix} A - \lambda_i I & B \\ T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i \\ w_i \end{bmatrix} = 0 \quad \forall i = n-p+1, \dots, n \quad (2.18)$$

De forma similar ao caso anterior, as matrizes  $V$  e  $W$  utilizadas para o cálculo de  $K$  podem ser construídas somente com elementos reais. Em particular: se  $\lambda_i \in \mathbb{C}$ , considera-se  $\lambda_{i+1} = \lambda_i^*$  e  $\begin{cases} V_i = Re(v_i), & V_{i+1} = Imag(v_i) \\ W_i = Re(w_i), & W_{i+1} = Imag(w_i) \end{cases}$ , onde  $v_i$  e  $w_i$  denotam as colunas das matrizes  $V$  e  $W$ , respectivamente.

**Observação 1.2:** [CHL01] No passo 1, sob a condição de observabilidade (detectabilidade) é sempre possível construir uma matriz  $T$  que verifica a condição (2.17) e que, portanto, garante a obtenção de  $K$  via (2.14). Uma vez determinada a matriz  $T$ , o passo 2 está associada à solução conjunta das equações (2.9) e (2.11), ou seja à  $(A,B)$ -invariância de  $Ker(T)$ . Esta propriedade está associada então à "equação de zeros" (2.18) [CH93]. Para garantir que os autovalores  $\lambda_i$  do passo 2 sejam livremente alocáveis, o sistema matricial  $P(\lambda) = \begin{bmatrix} A - \lambda I & B \\ T & 0 \end{bmatrix}$  de dimensão  $(2n-p) \times (n+m)$ ,

deve ter posto completo por linha  $\forall \lambda$ . O algoritmo acima fundamenta-se no fato que sob a condição  $m + p > n$ , o sistema matricial  $P(\lambda)$  não tem perda de posto para quase todos os triplos  $(A, B, T)$  [SL93b]. Assim a equação zero (2.18) tem soluções para todo  $\lambda_i$ . Nos casos onde houver a presença de zeros invariantes é possível refazer o Passo 1 na busca de outras soluções para a equação de Sylvester (2.9).

**Observação 1.3:** No caso menos restritivo  $m + p = n$ , o sistema  $P(\lambda)$  de dimensão  $(2n - p) \times (2n - p)$ , é uma matriz quadrada e quase todos os triplos  $(A, B, T)$  têm  $p$  zeros invariantes finitos estáveis [SL93a]. Neste caso, o procedimento básico pode produzir uma matriz de realimentação de saídas que estabiliza o sistema em malha fechada unicamente se a matriz  $T$ , encontrada no passo 1, gera  $p$  zeros invariantes estáveis os quais devem ser usados para resolver a equação (2.18) [CH93].

**Exemplo 2.1 :** *Considera-se um sistema linear (2.1), (2.2), definidos por [FKKN85]:*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

O sistema correspondente é controlável e observável e  $m + p = 5 > n$ . Os autovalores a posicionar são dados por :  $\Lambda_T = \{-4\} \cup \Lambda_V = \{-3, -2 + 2j, -2 - 2j\}$ .

**Passo 1:** Para  $\lambda_1 = -4$ , determina-se  $T$  que verifica (2.17) e tal que  $(A, B, T)$  não têm zeros invariantes:

$$T = \begin{bmatrix} -0.3148 & 0.0630 & -0.2406 & -0.2425 \end{bmatrix} ;$$

**Passo 2:** Para  $\lambda_2 = -3$ ,  $\lambda_3 = -2 + 2j$  e  $\lambda_4 = -2 - 2j$ , determinam-se  $V$  e  $W$  utilizando-se (2.18):

$$V = \begin{bmatrix} 0.0727 & 0.0564 & 0.0594 \\ -0.2182 & -0.2315 & -0.0061 \\ 0.0242 & -0.0008 & 0.0289 \\ -0.1751 & -0.1325 & -0.1074 \end{bmatrix} , \quad W = \begin{bmatrix} 0.8000 & 0.6504 & -0.5041 \\ 0.5252 & 0.4797 & -0.0502 \end{bmatrix}$$

**Passo 3:** *Determina-se  $K$  tal que  $KCV = W$ :*

$$K = \begin{bmatrix} -61.0000 & -6.5685 & -30.8197 \\ -19.7741 & -5.6724 & -12.0000 \end{bmatrix}$$

A matriz em malha fechada  $A_K = A + BKC$  correspondente, cujo os autovalores são os desejados, é:

$$A_K = \begin{bmatrix} 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ -60.0000 & 1.0000 & -6.5685 & -30.8197 \\ -1.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ -19.7741 & 0.0000 & -5.6724 & -12.0000 \end{bmatrix}$$

### 2.3.2 Algoritmo de Alexandridis-Paraskevopoulos

A técnica apresentada a seguir baseia-se na utilização de uma transformação de coordenadas, obtida a partir de uma decomposição da matriz  $C$ , que permite resolver a equação (2.17) via um sistema auxiliar de ordem reduzida  $n - p$ .

Este tipo de decomposição é utilizada na teoria de controle principalmente para a construção de observadores de ordem mínima [AP96] [Che96]. De um ponto de vista geométrico, ela visa a construção de um subespaço  $\mathcal{V} = Ker(T)$  externamente estabilizável e a garantia da relação  $Ker(T) \cap Ker(C) = \{0\}$ .

Considere uma mudança de base dada por

$$x = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad M_1 \in \mathbb{R}^{n \times p}, \quad M_2 \in \mathbb{R}^{n \times n-p} \quad (2.19)$$

onde  $M = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \end{bmatrix}$  é uma matriz não singular tal que:

$$C \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{com } C_1 \in \mathbb{R}^{p \times p} \text{ e } posto(C_1) = p \quad (2.20)$$

A inversa da matriz  $M$  é denotada por  $\bar{M} = \begin{bmatrix} \bar{M}'_1 \\ \bar{M}'_2 \end{bmatrix}$ , com  $\bar{M}_1 \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $\bar{M}_2 \in \mathbb{R}^{n \times n-p}$ :

$$\begin{bmatrix} M_1 & M_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{M}'_1 \\ \bar{M}'_2 \end{bmatrix} = I_n.$$

Nessa base, o sistema em malha aberta toma a forma

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(t) \quad (2.21)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

onde, em particular,  $A_{12} \in \mathfrak{R}^{p \times n-p}$  e  $A_{22} \in \mathfrak{R}^{n-p \times n-p}$ .

**Lema 2.3.1** *Se  $(C, A)$  é observável, então sempre existe  $T \in \mathfrak{R}^{n-p \times p}$  tal que a equação (2.10) é verificada e  $\text{Ker}(T) \cap \text{Ker}(C) = \{0\}$ .*

**Demonstração:**

Como mostrado em [Che96], a observabilidade do par  $(C, A)$  é equivalente à observabilidade do par  $(A_{12}, A_{22})$  definido a partir da mudança de base expressa em (2.19). Sejam as matrizes  $T_2 \in \mathfrak{R}^{(n-p) \times (n-p)}$ , com  $\text{posto}(T_2) = n - p$ , e  $T_1 \in \mathfrak{R}^{(n-p) \times p}$ , soluções da Equação de Sylvester de *ordem-reduzida*

$$T_2 A_{22} - H_T T_2 = -T_1 A_{12} \quad , \quad \sigma(H_T) \in \mathcal{C}^- \quad (2.23)$$

onde a matriz  $H_T \in \mathfrak{R}^{n-p \times n-p}$  é escolhida tal que  $\sigma(H_T) \in \mathcal{C}^-$ . É importante observar que geralmente é possível encontrar  $T_2$  inversível quando  $H_T$  não contém os autovalores da matriz  $A_{22}$  [AP96]. Pode-se então, calcular  $U \in \mathfrak{R}^{n-p \times p}$  como a solução única de:

$$U C_1 = -(T_1 A_{11} + T_2 A_{21} - H_T T_1) \quad (2.24)$$

Conjuntamente, (2.23) e (2.24) verificam:

$$\begin{bmatrix} T_1 & T_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} - H_T \begin{bmatrix} T_1 & T_2 \end{bmatrix} = U \begin{bmatrix} C_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

que, na base original, corresponde à equação de Sylvester (2.10). Além disso, como  $T_2$  é inversível, tem-se:

$$\text{posto} \left( \begin{bmatrix} T \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1 & T_2 \\ C_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{M}'_1 \\ \bar{M}'_2 \end{bmatrix} \right) = n \iff \text{Ker}(T) \cap \text{Ker}(C) = \{0\}.$$

□

As equações (2.10) e (2.23) estão relacionadas à construção de observadores de ordem mínima [Che96] [AP96].

Pode-se, em particular, associar os autovalores de  $H_T$  aos autovalores de  $(A_{22} + L_2A_{12})$  onde  $L_2 \in \mathbb{R}^{n-p \times p}$  é tal que

$$T_2L_2 = T_1 \quad (2.26)$$

Assim, substituindo-se (2.26) em (2.23) tem-se

$$T_2(A_{22} + L_2A_{12}) = H_T T_2 \quad (2.27)$$

ou seja

$$\sigma(H_T) = \sigma(A_{22} + L_2A_{12}) \in \mathcal{C}$$

É importante observar que a decomposição  $M$  usada não é única. Em particular, ela pode ser obtida computacionalmente através de transformações ortogonais,  $\bar{M} = M'$  [AP96] [CHL00].

O Lema 2.3.1 pode, em particular, ser utilizado para realizar o passo 1 do algoritmo de Syrmos e Lewis, apresentado na seção anterior. Nesta seção, ele será utilizado para enunciar o Teorema 2.2.1 numa forma alternativa apresentada originalmente por Alexandridis e Paraskevopoulos em [AP96].

**Teorema 2.3.1** *Dado o sistema (2.1), (2.2), considere uma decomposição na forma (2.20). Seja  $K$  a matriz de realimentação de saídas expressa por  $K = W(CV)^{-1}$ . Então a matriz  $K$  verifica  $\sigma(A + BKC) = \sigma(H_V) \cup \sigma(H_T)$ , se e somente se*

$$\begin{bmatrix} T_1 & T_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{M}'_1 \\ \bar{M}'_2 \end{bmatrix} V = 0 \quad (2.28)$$

onde as matrizes  $(W \in \mathbb{R}^{m \times p}, V \in \mathbb{R}^{n \times p})$  e  $(T_1 \in \mathbb{R}^{n-p \times p}, T_2 \in \mathbb{R}^{n-p \times n-p})$  satisfazem as equações de Sylvester (2.9) e (2.23), respectivamente, com  $\det(CV) \neq 0$ .

A partir da formulação apresentada no Teorema 2.3.1 acima, o procedimento seguinte é sugerido em [AP96] para obter posicionamento de pólos quando  $mp \geq n$ .

### Procedimento para a determinação da matriz realimentação de saídas

Considerando-se que  $H_V$  e  $H_T$  sejam matrizes na forma diagonal de Jordan, a partir de (2.9) pode-se escrever  $W$  e  $V$  na forma

$$W = \begin{bmatrix} w_1, & w_2, & \dots, & w_p \end{bmatrix} ; \quad V = \begin{bmatrix} X^1w_1, & X^2w_2, & \dots, & X^pw_p \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

onde

$$X^i = (\lambda_i I - A)^{-1} B, \text{ para } i = 1, \dots, p \quad (2.30)$$

Da mesma forma, a partir de (2.23) as matrizes  $T_1$  e  $T_2$  têm a forma

$$T_1 = \begin{bmatrix} \phi'_{p+1} \\ \phi'_{p+2} \\ \vdots \\ \phi'_n \end{bmatrix} \text{ e } T_2 = \begin{bmatrix} \psi'_{p+1} \\ \psi'_{p+2} \\ \vdots \\ \psi'_n \end{bmatrix}$$

onde  $\psi_j, \forall j = p + 1, \dots, n$ , pode ser obtido de:

$$\psi'_j = \phi' A_{12} (\lambda_j I - A_{22})^{-1} \quad (2.31)$$

A partir da notação acima, a equação de acoplamento (2.28) pode ser escrita na forma de um sistema bilinear de equações algébricas. Assim, substituindo (2.30) e (2.31) em (2.28), tem-se:

$$\phi'_j \left[ \begin{array}{cc} I_p & A_{12} [\lambda_j I - A_{22}]^{-1} \end{array} \right] \begin{bmatrix} \bar{M}'_1 \\ \bar{M}'_2 \end{bmatrix} X^i w_i = 0 \quad (2.32)$$

para  $i = 1, \dots, p$  e  $j = p + 1, \dots, n$

Resolvendo a equação (2.32), determinam-se os parâmetros para  $w_i$  e  $\phi'_j$ . Então, as matrizes  $W$  e  $V$  são definidas a partir da equação (2.29) e a matriz  $K$  de realimentação de saídas é diretamente calculada de (2.14).

A partir desta formulação, a justificativa a seguir é dada em [AP96] para a obtenção da condição menos restritiva  $mp \geq n$  para posicionamento arbitrário de pólos por realimentação de saídas: "A equação (2.29) providencia  $p(m - 1)$  parâmetros livres (a partir dos elementos arbitrários de  $w_1, w_2, \dots, w_p$ ). Adicionalmente a equação (2.31) providencia  $(p - 1)(n - p)$  parâmetros livres (a partir dos elementos arbitrários de  $\phi_{p+1}, \phi_{p+2}, \dots, \phi_n$ ). Por outro lado a equação (2.32) resulta em um sistema de  $p(n - p)$  equações independentes. Assim para a existência de solução, o número de equações deve ser igual ou menor que a soma dos parâmetros livres. Depois de manipulações algébricas obtém-se a condição  $mp \geq n$ ".

**Exemplo 2.2 :** A seguir, aplica-se o procedimento de Alexandridis e Paraskevopoulos para obter o posicionamento de pólos para o sistema definido por  $A$  e  $B$ , utilizado no

exemplo anterior. Considera-se neste caso que apenas 2 estados sejam mensuráveis ou seja:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

O sistema correspondente é controlável e observável sendo  $mp = 4 = n$ , com  $p = 2$  e  $m = 2$ . Os autovalores a posicionar são  $\Lambda_V = \{-1, -2\}$  e  $\Lambda_T = \{-3, -4\}$ .

Em primeiro lugar encontra-se uma decomposição

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

utilizando (2.20) tal que:

$$C \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{C}_1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e calcula-se

$$\begin{bmatrix} A_{12} \\ A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{M}'_1 \\ \bar{M}'_2 \end{bmatrix} AM_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para  $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$ , fixamos os 2 parâmetros livres em  $\begin{bmatrix} w_1 & w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0 & 1.0 \\ w_{12} & w_{22} \end{bmatrix}$ , para obter  $w_{12} = -2.2$  e  $w_{22} = 2.8$ . Por outro lado para  $\lambda_3 = -3, \lambda_4 = -4$ , fixamos os 2 parâmetros livres em  $\begin{bmatrix} \phi'_3 \\ \phi'_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0000 & \phi_{32} \\ 1.0000 & \phi_{42} \end{bmatrix}$ , para obter  $\phi_{32} = -1.6364$  e  $\phi_{42} = -1.8824$ . Desta forma determinam-se as matrizes  $(W, V)$  e  $(T_1, T_2, T)$  que satisfazem as equações de Sylvester (2.9), (2.23) e (2.32), respectivamente com  $\det(CV) \neq 0$ :

$$V = \begin{bmatrix} 0.6 & -0.8 \\ -1.6 & 0.6 \\ 1.6 & -1.2 \\ 0.6 & -0.4 \end{bmatrix}; \quad W = \begin{bmatrix} 1.0 & 1.0 \\ -2.2 & 2.8 \end{bmatrix}$$

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1.0000 & -1.6364 \\ 1.0000 & -1.8824 \end{bmatrix} ; T_2 = \begin{bmatrix} -0.5455 & 0.1818 \\ -0.4706 & 0.1176 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} T_1 & T_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{M}'_1 \\ \bar{M}'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5455 & 0.1818 & 1.0000 & -1.6364 \\ -0.4706 & 0.1176 & 1.0000 & -1.8824 \end{bmatrix}$$

O sistema  $(A, B, T)$  tem como zeros invariantes os autovalores estáveis:  $\{-1, -2\}$ . A matriz de realimentação de saídas correspondente  $K$  é determinada por  $KCV = W$ :

$$K = \begin{bmatrix} -12.5 & 35.0 \\ -10.0 & 23.0 \end{bmatrix}$$

A matriz em malha fechada  $A_K = A + BKC$  correspondente, cujo os autovalores são os desejados, é:

$$A_K = \begin{bmatrix} 0.0 & 1.0 & -12.5 & 35.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & -10.0 & 24.0 \\ -1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix}$$

△

## 2.4 Conclusão

Foram apresentados neste capítulo alguns resultados de base que fundamentam os resultados teóricos e algoritmos a serem apresentados nos próximos capítulos. Apresentou-se o conceito de subespaços  $O.S.$   $(C, A, B)$ -invariantes e sua relação com a solução do problema de estabilização usando realimentação de saídas, via duas equações acopladas de Sylvester.

Dois algoritmos de posicionamento de pólos via solução das equações acopladas de Sylvester foram apresentados. Destaca-se o fato de o algoritmo de Syrmos e Lewis permitir a solução do problema em 2 passos subsequentes, para sistemas que verificam a condição de Kimura ( $m + p > n$ ). O segundo algoritmo, baseia-se na solução de um sistema de equações bilineares para a obtenção de posicionamento de pólos, podendo ser aplicado a sistemas que verificam a condição menos restritiva  $mp \geq n$ .

O caráter de solução em dois passos do primeiro algoritmo será ainda explorado no corpo da tese. É importante salientar que este procedimento também pode resolver o problema de estabilização em sistemas que não verificam a condição de Kimura,

utilizando-se compensadores dinâmicos de ordem  $\nu > n - (m + p)$ .

# Capítulo 3

## Realimentação de saídas via equações acopladas de Lyapunov

### 3.1 Introdução

Este capítulo demonstra que a abordagem geométrica baseada na solução das equações acopladas de Sylvester, pode ser também descrita num "framework" que utiliza equações de tipo Lyapunov. Assim, equações acopladas de Lyapunov podem ser usadas para a construção de um subespaço  $O.S.$   $(C, A, B)$ -invariante como um mecanismo intermediário no processo de síntese de uma realimentação de saídas. Logo, através do uso de equações acopladas de Lyapunov [CHL00], o problema de controle usando realimentação de saídas também pode ser decomposto em duas etapas:

- determinação de um subespaço  $(C, A)$ -externamente detectável;
- estabilização interna deste subespaço.

Demonstra-se que as soluções para a primeira etapa podem ser obtidas como soluções de uma equação de Lyapunov de ordem reduzida.

Além disso, esta caracterização quadrática de ambas as etapas por equações de Lyapunov fornece uma estrutura conveniente para a solução numérica do problema através de Programação convexa e para a integração de requisitos adicionais de desempenho, como posicionamento regional de pólos por exemplo. Discutem-se e apresentam-se procedimentos para a solução destas equações acopladas de Lyapunov na busca de soluções dos problemas de estabilização e do posicionamento regional de pólos [CHL00].

Os resultados a serem apresentados neste capítulo contêm vários conceitos básicos. Seu conteúdo é fortemente baseado no conteúdo de artigos apresentados em congressos.

Na seção 3.2, apresenta-se uma formulação genérica do problema de estabilização na

forma de equações acopladas de Lyapunov, ilustrada através de exemplo numérico. Os algoritmos (primal e dual), ilustrados com exemplos numéricos, são também propostos na seção 3.2. Na seção 3.3, esta teoria e os algoritmos propostos são adaptados para o problema de posicionamento regional de pólos ( $\mathcal{D}$ -estabilização), onde são considerados regiões do tipo *LMI*s [CG96]. Alguns comentários conclusivos são finalmente apresentados.

## 3.2 Estabilização via equações acopladas de Lyapunov

Considere um sistema linear contínuo no tempo descrito por

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (3.1)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (3.2)$$

onde:  $x \in \mathcal{X} \sim \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathcal{U} \sim \mathbb{R}^m$ ,  $y \in \mathcal{Y} \sim \mathbb{R}^p$ . Assume-se que  $B$  é de posto completo por colunas, e que  $C$  é de posto completo por linhas e que o sistema  $(C, A, B)$  é estabilizável e detectável. Deseja-se encontrar uma lei de controle do tipo realimentação estática de saídas

$$u(t) = Ky(t) \quad \text{com } K \in \mathbb{R}^{m \times p} \quad (3.3)$$

tal que, o sistema em malha fechada

$$\dot{x}(t) = (A + BKC)x(t) \quad (3.4)$$

seja assintoticamente estável, *i.e.*  $\sigma(A + BKC) \in \mathcal{C}^-$ .

Mostrou-se no capítulo anterior que a solução deste problema de estabilização está associada à existência de um subespaço  $\mathcal{V} = \text{Ker}(T)$  *O.S.*  $(C, A, B)$ -invariante e, em consequência à possibilidade de solução das equações acopladas de Sylvester, reescritas a seguir:

$$AV + VH_V = -BW \quad \text{com } \sigma(H_V) \in \mathcal{C}^- \quad (3.5)$$

$$TA + H_T T = -UC \quad \text{com } \sigma(H_T) \in \mathcal{C}^- \quad (3.6)$$

$$TV = 0 \quad (3.7)$$

Esta seção tem como principal objetivo, mostrar que Equações acopladas de Lyapunov também podem ser usadas para descrever as propriedades geométricas requeridas para a solução do problema de estabilização e técnicas de programação convexas, também podem ser usadas para a construção de subespaços  $O.S.$   $(C, A, B)$ -invariantes como mecanismo intermediário para o cálculo da lei de controle. Os resultados desta seção são fortemente baseados na referência [CHL00].

### 3.2.1 Resultado principal

Uma caracterização quadrática dos subespaços  $O.S.$   $(C, A, B)$ -invariantes pode ser obtida a partir da definição 2.2.2 ao substituírem-se as condições de estabilizabilidade expressa nas equações de Sylvester (3.5) e (3.7),  $\sigma(H_V) \in C^-$  e  $\sigma(H_T) \in C^-$ , pelas duas condições de estabilidade de Lyapunov a seguir [Che96] :

$$\sigma(H_V) \in C^- \iff \exists \Pi = \Pi' > 0 \text{ tal que } \Pi H'_V + H_V \Pi = -Q_V, \forall Q_V = Q'_V > 0 \quad (3.8)$$

$$\sigma(H_T) \in C^- \iff \exists \Gamma = \Gamma' > 0 \text{ tal que } H'_T \Gamma + \Gamma H_T = -Q_T, \forall Q_T = Q'_T > 0 \quad (3.9)$$

**Teorema 3.2.1** : *Existe uma matriz de realimentação de saídas  $K : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{U}$  tal que  $\sigma(A+BKC) \in C^-$ , se e somente se as condições seguintes são verificadas para algum escalar  $0 < v \leq n$ , e para algum par de matrizes  $V \in \mathbb{R}^{n \times v}$  e  $T \in \mathbb{R}^{n-v \times n}$ , ambas de posto completo e tais que  $TV = 0$  :*

(i)  $\forall Q_V = Q'_V > 0, Q_V \in \mathbb{R}^{v \times v}$ , existem matrizes  $P = P' \geq 0, P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$  tais que :

$$AP + PA' + BY + Y'B' = -VQ_VV' \quad (3.10)$$

$$V'PV > 0 ; TPT' = 0 \quad (3.11)$$

$$Y = W_\Pi V' \text{ para algum } W_\Pi \in \mathbb{R}^{m \times v} \quad (3.12)$$

(ii)  $\forall Q_T = Q'_T > 0, Q_T \in \mathbb{R}^{n-v \times n-v}$ , existem matrizes  $S = S' \geq 0, S \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $Z \in \mathbb{R}^{n \times v}$  tais que :

$$A'S + SA + C'Z' + ZC = -T'Q_TT \quad (3.13)$$

$$TST' > 0 ; V'SV = 0 \quad (3.14)$$

$$Z = T'U_\Gamma \text{ para algum } U_\Gamma \in \mathbb{R}^{n-v \times v} \quad (3.15)$$

(iii)

$$\text{Ker } CP \subseteq \text{Ker } Y \quad (3.16)$$

$$\text{Ker } B'S \subseteq \text{Ker } Z' \quad (3.17)$$

*Necessidade:* Considera-se a existência de uma matriz de realimentação de saídas,  $K \in \mathbb{R}^{m \times v}$ , que estabiliza o sistema em malha fechada e, portanto, que as equações de Sylvester (3.5), (3.6) e (3.7) são verificadas, para algum escalar positivo  $v \leq n$  e para um par de matrizes  $T$  e  $V$  que verificam a condição  $TV = 0$ .

Em primeiro lugar demonstra-se a necessidade da parte (i). Para todo  $Q_V = Q'_V > 0$ , a condição de estabilidade quadrática expressa em (3.8) é verdadeira. Então:

$$V(\Pi H'_V + H_V \Pi)V' = V\Pi H'_V V' + V H_V \Pi V' = -V Q_V V' \leq 0 \quad (3.18)$$

De (3.5) obtém-se  $AV + BW = V H_V$ , que pode ser usada em (3.18) para obter:

$$V\Pi V' A' + V\Pi W' B' + AV\Pi V' + BW\Pi V' = -V Q_V V' \quad (3.19)$$

Assim, definindo-se as matrizes  $P = P' = V\Pi V'$  e  $Y = W\Pi V'$  e, considerando-se que  $\text{posto}(V) = v$  e  $\Pi > 0 \implies \begin{cases} V'V\Pi V'V > 0 \\ V'T'\Pi TV = 0 \end{cases}$ , (3.19) pode ser equivalentemente substituída por (3.10), (3.11) e (3.12).

Usando argumentos similares, demonstra-se a necessidade da parte (ii). Assim, a partir das equações (3.6) e (3.9), para todo  $Q_T = Q'_T > 0$ , obtém-se:

$$T'(H'_T \Gamma + \Gamma H_T)T = A'T'\Gamma T + C'U'\Gamma T + T'\Gamma T A + T'\Gamma U C = -T'Q_T T \quad (3.20)$$

Para as matrizes  $S = T'\Gamma T$  e  $Z = T'\Gamma U$ , (3.20) pode ser substituída por (3.13) e (3.15).

Além disso, desde que  $\text{posto}(T) = n - v$  e  $\Gamma > 0$ , obtém-se também  $\begin{cases} T T' \Gamma T T' > 0 \\ V' T' \Gamma T V = 0 \end{cases}$ .

As condições (3.16) e (3.17) da parte (iii), são decorrentes das condições (2.12) e (2.13) do Teorema 2.2.1, respectivamente, levando em conta as definições acima de  $P$ ,  $Y$ ,  $S$  e  $Z$ .

*Suficiência:* Considerar que as partes (i), (ii) e (iii) são verificadas. Por definição,  $V$  e  $T$ , são matrizes com postos completos. Assim, de (3.11) e (3.14), obtém-se:

$$V'PV = \bar{P} = \bar{P}' > 0 \implies P = V(V'V)^{-1}\bar{P}(V'V)^{-1}V' \quad (3.21)$$

$$TST' = \bar{S} = \bar{S}' > 0 \implies S = T'(TT')^{-1}\bar{S}(TT')^{-1}T \quad (3.22)$$

Agora, demonstra-se que a verificação da parte (i) implica que  $\mathcal{V} = \text{Im}(V)$  é um subespaço invariante  $(A, B)$ -internamente estabilizável; argumentos similares podem ser usados para demonstrar que  $\mathcal{V} = \text{Ker}(T)$ , o qual está implícito pela condição de acoplamento, é também um subespaço  $(C, A)$ -externamente detectável.

De (3.21) e (3.22) tem-se:

$$P = \begin{bmatrix} V & T' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Pi & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V' \\ T \end{bmatrix} \geq 0 \text{ para } \Pi = \Pi' = (V'V)^{-1}\bar{P}(V'V)^{-1} > 0 \quad (3.23)$$

De (3.16), existe uma matriz  $K$  tal que

$$KCP = Y \quad (3.24)$$

Assim, pela substituição de (3.24) em (3.10), tem-se:

$$P(A + BKC)' + (A + BKC)P = -VQ_VV' \quad (3.25)$$

Agora, levando em consideração (3.23), a equação de similaridade

$$(A + BKC) \begin{bmatrix} V & T' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V & T' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

e o fato de que

$$VQ_VV' = \begin{bmatrix} V & T' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_V & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V' \\ T \end{bmatrix} \geq 0 \quad (3.27)$$

obtém-se a partir de (3.25):

$$\begin{bmatrix} V & T' \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} \Pi\bar{A}'_{11} & \Pi\bar{A}'_{21} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{A}_{11}\Pi & 0 \\ \bar{A}_{21}\Pi & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} V' \\ T \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} V & T' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_V & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V' \\ T \end{bmatrix} \geq 0 \quad (3.28)$$

Portanto, de (3.28) pode-se concluir que:

- $\mathcal{V} = \text{Im}(V)$  é  $(A + BKC)$ -invariante, já que  $\bar{A}_{21}\Pi = 0$  se e somente se  $\bar{A}_{21} = 0$ ;  
e
- $\mathcal{V}$  é internamente-estabilizável, já que  $\Pi\bar{A}'_{11} + \bar{A}_{11}\Pi = -Q_V < 0$ , implicando na

estabilidade de  $(A + BKC)|_{\mathcal{V}}$ .

□

É importante lembrar que a verificação das condições (i) e (ii) do Teorema 3.2.1 é equivalente à verificação das equações acopladas de Sylvester e, que portanto, tais condições se constituem numa caracterização quadrática para subespaços  $O.S.$   $(C, A, B)$ -invariantes.

Da demonstração dada acima, pode-se resgatar a condição de acoplamento entre as partes (i) e (ii) do Teorema 3.2.1 na forma seguinte:

**Corolário 3.2.1 :** *Se  $\mathcal{V} \subset \mathcal{X}$  é um subespaço  $O.S.$   $(C, A, B)$ -invariante, então todo par de matrizes  $(P, S)$  solução para as partes (i) e (ii) do Teorema 3.2.1 verifica  $\text{Ker}(S) = \text{Im}(\mathcal{V}) = \text{Im}(P)$ , ou e quivalentemente:*

$$SP = 0 \quad (3.29)$$

Os resultados teóricos prévios permitem também associar uma função de Lyapunov quadrática ao sistema em malha fechada.

**Proposição 3.2.1 :** *Considere que as matrizes  $P, S, V$  e  $T$  tenham sido encontradas tais que as condições no Teorema 3.2.1 sejam verificadas e seja  $K$  a matriz de realimentação de saídas correspondente. Definem-se as matrizes  $\bar{T} \in \mathbb{R}^{p \times n}$  e  $\bar{V} \in \mathbb{R}^{n \times (n-p)}$  como :*

$$\bar{T} = (V'V)^{-1}V' + D_l T = V^\dagger + D_l T ; \quad \bar{V} = T'(TT')^{-1} - VD_l = T^\dagger - VD_l \quad (3.30)$$

onde  $D_l$  é tal que :

$$D_l H_T - H_V D_l = V^\dagger (A + BKC) T^\dagger \quad (3.31)$$

Então,

$$v(x) = x' S x, \quad \text{onde}$$

$$S = \begin{bmatrix} \bar{T}' & T' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Pi^{-1} & 0 \\ 0 & \Gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{T} \\ T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V & \bar{V} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{P}^{-1} & 0 \\ 0 & \bar{S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V' \\ \bar{V}' \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

é estritamente decrescente ao longo das trajetórias do sistema em malha fechada  $\dot{x}(t) = (A + BKC)x(t)$ , ou seja

$$\dot{v}(x) = x' ((A + BKC)' S + S(A + BKC)) x < 0 \quad \forall x \neq 0.$$

**Demonstração** : Pela definição das matrizes  $\bar{T}$  e  $\bar{V}$ , pode-se verificar que:

$$\begin{bmatrix} \bar{T} \\ T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V & \bar{V} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & I_{n-p} \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

Da equivalência entre os Teoremas 3.2.1 e 2.2.1, a seguinte equação é verificada (ver [SL94]):

$$\begin{bmatrix} \bar{T} \\ T \end{bmatrix} (A + BKC) \begin{bmatrix} V & \bar{V} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_V & H_{12} \\ 0 & H_T \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

onde, a partir de (3.30),  $H_{12} = V^\dagger (A + BKC) T^\dagger = 0$ . Utilizando o produto de Kronecker [HJ91], a equação (3.31) pode ser reescrita na forma:

$$\mathcal{A}\alpha = \beta \quad (3.35)$$

onde  $\mathcal{A} = \left[ (I \otimes H'_T) + (-H_V \otimes I) \right] \in \mathfrak{R}^{(n-p)p \times (n-p)p}$ ,  $\beta = \text{vec}(H_{12}) \in \mathfrak{R}^{(n-p)p}$  e  $\alpha = \text{vec}(D_l) \in \mathfrak{R}^{p(n-p)}$ . Por construção, a matriz  $\mathcal{A}$  é de posto completo. Portanto, a equação (3.31) sempre tem solução e a decomposição (3.34) pode ser obtida. Isto demonstra que  $\bar{V}$  e  $\bar{T}$  definidas por (3.30) verificam (3.33) e implicam na decomposição (3.34), a qual pode ser escrita como:

$$\begin{bmatrix} \bar{T} \\ T \end{bmatrix} (A + BKC) = \begin{bmatrix} H_V & 0 \\ 0 & H_T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{T} \\ T \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

De (3.8) e (3.9), obtém-se também :

$$\begin{bmatrix} H'_V & 0 \\ 0 & H'_T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Pi^{-1} & 0 \\ 0 & \Gamma \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Pi^{-1} & 0 \\ 0 & \Gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_V & 0 \\ 0 & H_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Q_{\bar{V}} & 0 \\ 0 & -Q_T \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

onde :  $Q_{\bar{V}} = Q'_{\bar{V}} = \Pi^{-1} Q_V \Pi^{-1} > 0$ .

Assim, levando em conta (3.36) e multiplicando (3.37) à esquerda e à direita, respectivamente, por  $\begin{bmatrix} \bar{T}' & T' \end{bmatrix}$  e  $\begin{bmatrix} \bar{T} \\ T \end{bmatrix}$ , obtém-se :

$$(A + BKC)' \begin{bmatrix} \bar{T}' & T' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Pi^{-1} & 0 \\ 0 & \Gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{T} \\ T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{T}' & T' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Pi^{-1} & 0 \\ 0 & \Gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{T} \\ T \end{bmatrix} (A + BKC) < 0$$

Portanto,  $\dot{v}(x) = x'((A + BKC)'S + S(A + BKC))x < 0 \quad \forall x \neq 0$ . Além disso,  $\mathcal{S}$  pode ser escrito como :

$$\mathcal{S} = \begin{bmatrix} V & T' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{P}^{-1} & 0 \\ 0 & \Gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V' \\ T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V & \bar{V} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{P}^{-1} & 0 \\ 0 & \bar{S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V' \\ \bar{V}' \end{bmatrix}$$

□

O exemplo a seguir tem por objetivo verificar o cumprimento das condições do Teorema 3.2.1, a partir de uma matriz  $K$  obtida pela técnica de posicionamento de auto-estrutura. A utilização do Teorema 3.2.1 para a síntese de realimentação de saídas será considerada na próxima subseção.

**Exemplo 3.1 :** (continuação do exemplo 2.1) Por construção, o subespaço  $\mathcal{V} = \text{Im}(V)$  é O.S.  $(C, A, B)$ -invariante em relação ao sistema utilizado no Exemplo 2.1. Lembre-se

$$V = \begin{bmatrix} 0.0727 & 0.0564 & 0.0594 \\ -0.2182 & -0.2315 & -0.0061 \\ 0.0242 & -0.0008 & 0.02893 \\ -0.1751 & -0.1325 & -0.1074 \end{bmatrix}; \quad W = \begin{bmatrix} 0.8000 & 0.6504 & -0.5041 \\ 0.5252 & 0.4797 & -0.0502 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Por construção, } H_V = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \text{ e, para } Q_V = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \text{ obtém-se } \Pi = I_3$$

como solução de (3.8). A partir das matrizes  $V$  e  $W$  correspondentes, obtêm-se

$$P = V'V = \begin{bmatrix} 0.0120 & -0.0293 & 0.0034 & -0.0266 \\ -0.0293 & 0.1012 & -0.0053 & 0.0695 \\ 0.0034 & -0.0053 & 0.0014 & -0.0073 \\ -0.0266 & 0.0695 & -0.0073 & 0.0597 \end{bmatrix},$$

$$Y = WV' = \begin{bmatrix} 0.0649 & -0.3220 & 0.0043 & -0.1721 \\ 0.0622 & -0.2253 & 0.0109 & -0.1501 \end{bmatrix}; \quad \bar{P} = VPV' = \begin{bmatrix} 0.0138 & 0.0128 & 0.0040 \\ 0.0128 & 0.0119 & 0.0037 \\ 0.0040 & 0.0037 & 0.0012 \end{bmatrix},$$

que verificam a parte (i) do Teorema 3.2.1,

Da mesma forma:  $H_T = -4$  e para  $Q_T = 8$  obtém-se  $\Gamma = 1$ . A partir das matrizes  $T$  e  $U = [u'_j] = \begin{bmatrix} 0.9556 & 0.9622 & 0.9701 \end{bmatrix}$  correspondentes, obtém-se

$$S = T' \Gamma T = \begin{bmatrix} 0.0991 & -0.0198 & 0.07572 & 0.0763 \\ -0.0198 & 0.0040 & -0.0151 & -0.0153 \\ 0.0757 & -0.0151 & 0.0579 & 0.0583 \\ 0.0763 & -0.0153 & 0.0583 & 0.0588 \end{bmatrix},$$

$$Z = T'U = \begin{bmatrix} -0.3008 & -0.3029 & -0.3054 \\ 0.0602 & 0.0606 & 0.0611 \\ -0.2299 & -0.2315 & -0.2334 \\ -0.2318 & -0.2334 & -0.2353 \end{bmatrix}, \quad \bar{S} = TST' = 0.0483$$

que verificam a parte (ii) do Teorema 3.2.1.

Utilizando os dados do Exemplo, determinam-se as matrizes  $\bar{V}$ ,  $\bar{T}$  e  $D_l$ :

$$D_l = \begin{bmatrix} 1075.6807 \\ 93.4707 \\ -311.959506 \end{bmatrix}; \quad \bar{V} = T'(TT')^{-1} - VD_l = \begin{bmatrix} 63.5364 \\ -254.1456 \\ 15.8841 \\ -168.3096 \end{bmatrix}$$

$$\bar{T} = (V'V)^{-1}V' + D_lT = \begin{bmatrix} 296.9963 & -74.2491 & 318.1863 & 254.2592 \\ 67.6143 & -4.1815 & -33.1349 & 28.7112 \\ -74.2416 & 27.5349 & -100.8326 & -79.1194 \end{bmatrix}.$$

Portanto

$$S = \begin{bmatrix} V & \bar{V} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{P}^{-1} & 0 \\ 0 & \bar{S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V' \\ \bar{V}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3958.4478 & -253.9027 & -5165.6041 & -92.6085 \\ -253.9027 & 3226.6972 & -881.2126 & 2091.7306 \\ -5165.6041 & -881.2126 & 7301.8276 & -769.9300 \\ -92.6085 & 2091.7306 & -769.9300 & 1460.3183 \end{bmatrix} > 0$$

é tal que:

$$(A+BKC)'S+S(A+BKC) = \begin{bmatrix} 44462.0390 & -230378.1700 & 62988.6800 & -144673.8900 \\ -230378.1700 & 5945.5888 & -39106.5850 & -122547.4100 \\ 62988.6800 & -39106.5850 & 20311.2400 & 14374.7530 \\ -144673.8900 & 122547.4100 & 14374.7530 & -163980.5600 \end{bmatrix} < 0$$

△

Para finalizar esta subseção, considere as seguintes equações acopladas de Lyapunov que também podem ser usadas para o estudo do problema de estabilização por

realimentação de saídas [CHL00] [?]:

$$AP + PA' + BW + W'B' < 0, \quad P > 0 \quad (3.38)$$

$$SA + A'S + YC + C'Y' < 0, \quad S > 0 \quad (3.39)$$

$$SP = I_n \quad (3.40)$$

Estas equações são obtidas a partir da condição de estabilidade quadrática do sistema em malha fechada

$$S(A + BKC) + (A + BKC)'S < 0, \quad S > 0 \quad (3.41)$$

que, para  $P = S^{-1}$  pode ser reescrita na forma

$$(A + BKC)P + P(A + BKC)' < 0, \quad P > 0 \quad (3.42)$$

A condição de acoplamento (3.29) é a diferença central entre as condições de estabilização quadrática obtidas no Teorema 3.2.1 e as condições expressas acima. As condições de estabilização propostas no presente trabalho estão diretamente relacionadas às propriedades geométricas  $Ker(S) = Im(V) = Im(P)$ , enquanto as condições acopladas (3.38), (3.39) e (3.40) estão fundamentalmente relacionadas à invariância e à contractibilidade do conjunto elipsoidal definido a partir de uma função de Lyapunov na forma  $v(x) = x'Sx$ .

Assim, entendemos que o Teorema 3.2.1 constitui-se, juntamente com o Corolário 3.2.1 e a Proposição 3.2.1, numa ponte entre a abordagem geométrica e as abordagens de estabilização quadráticas até então usadas para tratar o problema de estabilização via realimentação estática de saída. Isto é particularmente evidenciado nos algoritmos da próxima seção.

### 3.2.2 Algoritmos

O Teorema 3.2.1 fornece uma condição necessária e suficiente para a existência de uma realimentação de saídas que estabiliza o sistema em malha fechada. Entretanto, estes resultados envolvem equações não-lineares particularmente nas variáveis de decisão  $T$ ,  $V$ ,  $P$  e  $S$ . Mas a caracterização quadrática do Teorema 3.2.1 pode ser usada adequadamente para construir subespaços  $O.S.$   $(C, A, B)$ -invariantes, que levam ao cálculo da matriz de realimentação de saídas  $K$ . Inspirado no algoritmo de Syrmos e Lewis, apresentado no capítulo 2 isto pode ser realizado, por exemplo, levando em

conta o requisito de acoplamento e resolvendo subsequentemente as partes (ii) e (i) do Teorema 3.2.1.

Antes de apresentar um procedimento de síntese baseado neste último comentário, formula-se um resultado que permite usar uma equação de Lyapunov de ordem reduzida para resolver a parte (ii) e considerar a condição (3.16). A demonstração do próximo Lema é baseada na utilização da decomposição usada no capítulo 2 e coloca em evidência algumas ligações entre as abordagens via equações de Lyapunov e equações de Sylvester.

**Lema 3.2.1** : *Sob a hipótese de que o par  $(C, A)$  é detectável, sempre existem matrizes  $S = S' \geq 0$  e  $Z$  verificando (3.13), (3.14) e (3.15) para alguma matriz  $T \in \mathfrak{R}^{n-p \times n}$ , com posto  $(T) = n - p$ , tal que  $\text{Ker}(T) = \mathcal{V}$  é  $(C, A)$ -externamente detectável e  $\text{Ker}(T) \cap \text{Ker}(C) = \{0\}$ .*

**Demonstração** : Considerar a mudança de base seguinte :

$$x = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad M_1 \in \mathfrak{R}^{n \times p}, \quad M_2 \in \mathfrak{R}^{n \times n-p} \quad (3.43)$$

onde  $[M_1 \ M_2]$  é uma matriz não singular tal que :

$$C \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{com } C_1 \in \mathfrak{R}^{p \times p} \text{ e } \text{posto}(C_1) = p \quad (3.44)$$

A inversa da matriz  $M$  é denotada por :  $\bar{M} = \begin{bmatrix} \bar{M}'_1 \\ \bar{M}'_2 \end{bmatrix}$  com  $\bar{M}_1 \in \mathfrak{R}^{n \times p}$ ,  $\bar{M}_2 \in \mathfrak{R}^{n \times n-p}$ .

Nesta base, o sistema em malha aberta toma a forma

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(t) \quad (3.45)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

onde as matrizes envolvidas têm as dimensões apropriadas.

Como demonstrado em [Che96], a detectabilidade do par  $(C, A)$  é equivalente à detectabilidade do par  $(A_{12}, A_{22})$ . Assim, considere uma matriz  $Q_T = Q'_T > 0$  e sejam as matrizes  $S_{22} \in \mathfrak{R}^{n-p \times n-p}$ , com  $S_{22} = S'_{22} > 0$ , e  $S_{21} \in \mathfrak{R}^{n-p \times p}$  soluções da equação de Lyapunov de ordem reduzida seguinte :

$$A'_{22}S_{22} + S_{22}A_{22} + A'_{12}S'_{21} + S_{21}A_{12} = -Q_T \quad (3.47)$$

Seja  $L_2 \in \mathfrak{R}^{n-p \times p}$  tal que

$$S_{22}L_2 = S_{21} \quad (3.48)$$

Considere também a decomposição de Choleski de  $S_{22} = S'_{22} > 0$  dado por:

$$S_{22} = T'_2 T_2 \quad (3.49)$$

Assim, de (3.47), (3.48) e (3.49), obtém-se

$$T'_2 T_2 (A_{22} + L_2 A_{12}) + (A'_{22} + A'_{12} L'_2) T'_2 T_2 = -Q_T$$

onde, por construção,  $\sigma(A_{22} + L_2 A_{12}) \in \mathcal{C}^-$ .

Já que  $T_2$  é, por construção, não-singular, pode-se definir a matriz  $H_T \in \mathfrak{R}^{n-p \times n-p}$  a partir da relação de similaridade

$$T_2 (A_{22} + L_2 A_{12}) = H_T T_2 \quad (3.50)$$

com  $\sigma(H_T) = \sigma(A_{22} + L_2 A_{12}) \in \mathcal{C}^-$ .

Definindo  $T_1 = T_2 L_2$  e já que  $C_1$  é inversível, a matriz  $U \in \mathfrak{R}^{n-p \times p}$  pode sempre ser calculada de :

$$UC_1 = -(T_2 L_2 A_{11} + T_2 A_{21} - H_T T_1) \quad (3.51)$$

Então (3.50) e (3.51) podem ser substituídas por

$$\begin{bmatrix} T_1 & T_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} - H_T \begin{bmatrix} T_1 & T_2 \end{bmatrix} = U \begin{bmatrix} C_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

Portanto,  $T = \begin{bmatrix} T_1 & T_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{M}'_1 \\ \bar{M}'_2 \end{bmatrix}$  é tal que

- $Ker(T)$  é  $(C, A)$ -externamente detectável, já que  $H_T = (A + LC)|_{\mathcal{X}/\mathcal{V}}$  é estável com  $\sigma(H_T) \in \mathcal{C}^-$  para  $L = T'(TT')^{-1}U$ ;
- $Ker(T) \cap Ker(C) = \{0\}$ , já que a inversibilidade de  $T_2$  implica em  $posto \left( \begin{bmatrix} T \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1 & T_2 \\ C_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{M}'_1 \\ \bar{M}'_2 \end{bmatrix} \right) = n$ .

Além disso, seja  $\Gamma = \Gamma' > 0$  a solução única de

$$H'_T \Gamma + \Gamma H_T = -Q_T \quad (3.53)$$

Para  $T$  definido acima, as matrizes  $Z$  e  $S = S' \geq 0$  seguintes verificam (3.13), (3.14) e (3.15):

$$Z = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T'_1 \\ T'_2 \end{bmatrix} U\Gamma \text{ e } S = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{11} & S'_{21} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{M}'_1 \\ \bar{M}'_2 \end{bmatrix} U\Gamma,$$

com

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S'_{21} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{M}'_1 \\ \bar{M}'_2 \end{bmatrix} \Gamma \begin{bmatrix} T_1 & T_2 \end{bmatrix}.$$

□

Da demonstração dada acima, pode-se verificar que  $V = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$  com  $Im(V) = Ker(T)$  pode ser obtido como uma base do espaço nulo de  $T = \begin{bmatrix} S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{M}'_1 \\ \bar{M}'_2 \end{bmatrix}$ :

$$TV = 0 \tag{3.54}$$

Baseado nos resultados acima e também inspirado pelo algoritmo de Syrmos e Lewis [SL93a], apresentado no capítulo 2, propõe-se o seguinte procedimento básico para calcular a matriz de realimentação de saídas que estabiliza o sistema em malha fechada quando  $m + p > n$ <sup>1</sup>:

### Algoritmo Primal:

#### Passo 1:

1.1) Encontrar uma decomposição  $C \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{C}_1 & 0 \end{bmatrix}$  e calcular as matrizes  $A_{12}, A_{22}$ :

$$\begin{bmatrix} A_{12} \\ A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{M}'_1 \\ \bar{M}'_2 \end{bmatrix} AM_2 \text{ onde } \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{M}'_1 \\ \bar{M}'_2 \end{bmatrix} = I_n;$$

1.2) Resolver a equação de Lyapunov de *ordem reduzida* para encontrar  $S_{21}$  e  $S_{22}$ :

$$A'_{22}S_{22} + S_{22}A_{22} + A'_{12}S'_{21} + S_{21}A_{12} = -Q_T < 0 \tag{3.55}$$

1.3) Calcular  $T = \begin{bmatrix} S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{M}'_1 \\ \bar{M}'_2 \end{bmatrix}$ . Se  $(A, B, T)$  tem zeros invariantes infinitos ou instáveis então repetir o passo 1 para uma nova decomposição de  $C$ ; caso contrário ir ao passo 2.

<sup>1</sup>Se  $m + p = \bar{\nu} \leq n$ , um compensador dinâmico de ordem  $\nu > n - \bar{\nu}$  pode ser considerado para reencontrar a condição de Kimura

**Passo 2 :**

2.1) Calcular  $V$  como uma base ortogonal de  $Ker(T)$  i.e,  $V'V = I_p$ :

$$TV = 0 \quad (3.56)$$

2.2) Resolver as equações (3.10), (3.11) e (3.12) para encontrar  $P$ ,  $Y$  e  $W_\Pi$ ;

**Passo 3 :** Calcular a matriz de realimentação de saídas que estabiliza o sistema em malha fechada, como a única solução de

$$KCP = Y \iff KCV\bar{P} = W_\Pi, \text{ já que } V'V = I_p.$$

o

Os comentários que seguem visam justificar os passos adotados no algoritmo:

**Comentário 3.2.1** *A decomposição usada no passo 1 não é única. Em particular, ela pode ser obtida computacionalmente através de transformações ortogonais [CHL00] [CHL02]. O conjunto de todas as decomposições (3.44) podem ser descrito a partir de uma matriz  $M$  ortogonal inicialmente escolhida como*

$$CMD = C \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ D_{21} & D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{C}_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

onde as matrizes  $D_1 \in \mathbb{R}^{p \times p}$  e  $D_2 \in \mathbb{R}^{(n-p) \times (n-p)}$  são não-singulares. Por exemplo nos casos pouco frequentes onde o passo 2 falha, uma nova base (não necessariamente ortogonal) pode ser construída com o  $M^n = MD$ , onde o novo par detectável  $(A_{12}^n, A_{22}^n)$  satisfaz:

$$\begin{bmatrix} A_{12}^n \\ A_{22}^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1^{-1} & 0 \\ -\bar{D}_{21} & D_2^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{21} \\ A_{22} \end{bmatrix} D_2 = \begin{bmatrix} D_1 A_{21} D_2 \\ D_2^{-1} A_{22} D_2 - \bar{D}_{21} A_{21} D_2 \end{bmatrix}$$

com  $\bar{D}_{21} = D_2^{-1} D_{21} D_1^{-1}$ . Desta forma outras soluções para o passo 1 podem ser encontradas.

**Comentário 3.2.2** *O passo 2 é usado para resolver o conjunto de condições (3.10), (3.11) e (3.12) para  $Im(V) = Ker(T)$ . É importante lembrar que essas condições são geralmente solucionáveis no sentido de que o sistema matricial  $P(\lambda) = \begin{bmatrix} A - \lambda I & B \\ T & 0 \end{bmatrix}$  de dimensão  $(2n - p) \times (n + m)$  tem posto linha completo para quase todos os triplos  $(A, B, T)$ , quando  $m + p > n$ . O teste de factibilidade foi colocado no final do passo 1*

para que os cálculos envolvidos no passo 2 sejam efetuados somente quando uma solução estável é factível. Experimentos numéricos, relatados na próxima seção demonstram a eficiência da abordagem proposta.

**Comentário 3.2.3** *Técnicas padrões de programação convexa podem ser usadas para encontrar soluções para as equações de Lyapunov envolvidas [BGFB94]. No presente estudo, a estabilidade assintótica é o único requisito em malha fechada. Existem graus de liberdade na abordagem quadrática dada aqui que podem ser exploradas para conseguir outros requisitos como, por exemplo, posicionamento regional de pólos a ser estudado na seção seguinte deste capítulo.*

**Comentário 3.2.4** *O procedimento algorítmico dado não está diretamente adaptado para casos menos restritivos onde  $m + p \leq n$ , embora uma busca tipo "tentativa e erro" poderia ser efetuado para encontrar um "bom"  $T$  usando, por exemplo, a definição da decomposição  $M$ . No caso  $m + p = n$ ,  $P(\lambda)$  de dimensão  $(2n - p) \times (2n - p)$  é uma matriz quadrada e quase todos os triplos  $(A, B, T)$  têm zeros invariantes finitos [SL93b]. Neste caso, o procedimento básico pode produzir soluções estáveis, unicamente se a matriz  $T$  encontrada no passo 1 gera  $p$  zeros invariantes estáveis, que devem ser usadas para resolver (2.18) [CH93]. Para casos onde  $m + p \leq n$ , o procedimento pode ser usado sistematicamente para calcular um compensador dinâmico de ordem  $\nu$ , para recuperar a condição de Kimura, com  $\nu > n - (m + p)$ .*

Finalmente é importante lembrar que soluções podem ser também calculadas a partir do sistema dual  $(A', C', B')$ .

### Algoritmo Dual

**Passo 1 :**

1.1) Encontrar uma decomposição  $B = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$  com as matrizes  $A_{21}, A_{22}$  tais que  $\begin{bmatrix} A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \bar{M}'_2 A \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \end{bmatrix}$  onde  $A_{21} \in \mathfrak{R}^{n-m \times m}$ ,  $A_{22} \in \mathfrak{R}^{n-m \times n-m}$  e  $\begin{bmatrix} M_1 & M_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{M}'_1 \\ \bar{M}'_2 \end{bmatrix} = I_n$ .

1.2) Resolver a equação de Lyapunov de ordem reduzida para encontrar  $P_{12} \in \mathfrak{R}^{m \times n-m}$  e  $P_{22} = P'_{22} > 0$ ,  $P_{22} \in \mathfrak{R}^{n-m \times n-m}$ :

$$P_{22}A'_{22} + A_{22}P_{22} + P'_{12}A'_{21} + A_{12}P_{12} = -Q_V < 0 \quad (3.58)$$

1.3) Encontrar  $V \in \mathfrak{R}^{n \times n-m}$  tal que  $V = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{12} \\ P_{22} \end{bmatrix}$ . Se  $(A, V, C)$  tem zeros

invariantes infinitos ou instáveis então repetir o passo 1 para uma nova decomposição de  $B$ ; caso contrário ir ao passo 2.

**Passo 2 :**

2.1) Calcular  $T \in \mathfrak{R}^{m \times n}$  como uma base ortogonal do espaço nulo à esquerda de  $V$ ;

$$TV = 0 \quad TT' = I_m. \quad (3.59)$$

2.2) Resolver as equações (3.13), (3.14) e (3.15) para encontrar  $S$ ,  $Z$  e  $U_\Gamma$ ;

**Passo 3 :** Calcular a matriz de realimentação de saídas que estabiliza o sistema em malha fechada, como a única solução de

$$SBK = Z \iff \bar{S}TBK = U_\Gamma, \quad \text{já que } TT' = I_m.$$

o

**Comentário 3.2.5** *A decomposição usada no passo 1 não é única. O conjunto de todas as decomposições podem ser descrito a partir de uma matriz  $M$  ortogonal inicialmente escolhida como*

$$B = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 & D_{12} \\ 0 & D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

onde as matrizes  $D_1 \in \mathfrak{R}^{m \times m}$  e  $D_2 \in \mathfrak{R}^{n-m \times n-m}$  são não-singulares. Por exemplo nos casos pouco frequentes onde o passo 2 falha, uma nova base (não necessariamente ortogonal) pode ser construída com o  $M^n = MD$ , onde o novo par detectável  $(A_{21}^n, A_{22}^n)$  satisfaz:

$$\begin{bmatrix} A_{21}^n & A_{22}^n \end{bmatrix} = D_2^{-1} \begin{bmatrix} A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 & D_{12} \\ 0 & D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_2^{-1}A_{21}D_1 & D_2^{-1}A_{21}D_2 + D_2^{-1}A_{22}D_2 \end{bmatrix}$$

com  $\bar{D}_{12} = D_1^{-1}D_{12}D_2^{-1}$ . Desta forma outras soluções para o passo 1 podem ser encontradas.

**Comentário 3.2.6** *O passo 2 é usado para resolver o conjunto de condições (3.13), (3.14) e (3.15) tal que  $TV = 0$ . É importante lembrar que essas condições são geralmente solucionáveis no sentido que o sistema matricial  $P(\lambda) = \begin{bmatrix} A - \lambda I & V \\ C & 0 \end{bmatrix}$  de dimensão  $(n+p) \times (2n-m)$  tem posto coluna completo para quase todos os triplos  $(A, V, C)$ , quando  $m+p > n$ . O teste de factibilidade foi colocado no final do passo*

1 para que os cálculos envolvidos no passo 2 sejam efetuados somente quando uma solução estável é factível.

### 3.2.3 Exemplos

Os exemplos relatados nesta seção foram resolvidos usando-se o pacote Scilab (desenvolvido no INRIA, França). Em todos os testes, a matriz de decomposição no passo 1 foi obtida primeiramente da decomposição  $QR$  da matriz  $C$ . Técnicas padrões de programação convexa foram aplicadas para encontrar soluções factíveis para as condições quadráticas acopladas sem requisitos adicionais.

**A- Exemplos gerados randomicamente:** Primeiramente, 20 000 sistemas randômicos representados por  $(A, B, C)$  foram gerados, verificando a condição de Kimura  $m + p > n$ , com  $n = 5$ ,  $m = p = 3$ . Usando o algoritmo primal com o procedimento básico, calculam-se soluções estáveis em 99.6% de casos, sem necessidade de iterações sobre o passo 1.

Nos exemplos não solucionados pelo algoritmo básico, somente uma iteração foi necessária para obter uma solução estável; esta iteração foi efetuada usando o comentário 3.2.1, com  $D = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ D_{21} & I_{n-p} \end{bmatrix}$ , para uma matriz randômica  $D_{21}$  estabelecida. Assim satisfeita a condição de Kimura, o algoritmo proposto apresenta desempenho comparável com o algoritmo proposto em [GOA97] ("The cone complementarity algorithm").

No quadro 3.1 a seguir mostra-se um resumo dos cálculos computacionais que foram feitos para os exemplos randômicos. Em particular, demonstra-se a eficiência do algoritmo primal proposto para calcular soluções estáveis quando a condição de Kimura é recuperada através dos compensadores dinâmicos. Além disso, na última linha do quadro demonstra-se que a abordagem poderia também ser usada para busca de soluções estáveis quando a condição de Kimura não é verificada.

**B Exemplo não-randômico:** Considera-se os dados já utilizados nos exemplos 2.1 e 3.1 anteriores [FKKN85];

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Duas matrizes de saídas diferentes são consideradas. Em ambos os casos, os triplos  $(C, A, B)$  correspondentes são controláveis e observáveis, e  $m + p = 5 > n$ . Também,

Ord. do sistema	Ord. do compensador	Nro de exemplos	Sucesso		
			Proc. básico	1 iter.	2 iteração
$n = 5$ $m = p = 3$	$\nu = 0$	20000	19920	80	-
$n = 5$ $m = 2; p = 3$	$\nu = 1$	1000	984	16	-
$n = 5$ $m = 2; p = 2$	$\nu = 2$	1000	991	9	-
$n = 4$ $m = p = 2$	$\nu = 0$	100	27	21	16

Tabela 3.1: Resumo dos exemplos gerados randomicamente

para obter autovalores em malha fechada com parte reais menores que  $-\alpha = -2$ , os cálculos são realizados usando  $(A + \alpha I)$  em lugar de  $A$ . Técnicas padrões de programação convexa são aplicadas para encontrar soluções factíveis para as equações de Lyapunov, sem requisitos adicionais que poderiam melhorar a solução numérica ou o desempenho em malha fechada.

1º.- Caso : Considera-se primeiro a seguinte matriz de saída :

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A matriz ortogonal  $M = \begin{bmatrix} -0.7071 & 0.0000 & 0.7071 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 \\ 0.0000 & -1.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ -0.7071 & 0.0000 & -0.7071 & 0.0000 \end{bmatrix}$  é encontrada no

passo 1.1 que leva a calcular  $\begin{bmatrix} A_{12} \\ A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.7071 \\ 0.0000 \\ 0.7071 \\ 1.0000 \end{bmatrix}$ . Uma solução para a passo 1.2 é:

$$\begin{bmatrix} S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0006 & 0.0000 & -4.9492 & 1.0000 \end{bmatrix}, \text{ que resulta no passo 1.3:}$$

$$T = \begin{bmatrix} S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{M}'_1 \\ \bar{M}'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3.5001 & 1.0000 & 0.0000 & 3.4992 \end{bmatrix}$$

O sistema  $(A, B, T)$  não tem zeros invariantes. Isto implica no passo 2.1:

$$V = \begin{bmatrix} 0.6930 & 0.0000 & 0.1980 \\ -0.0811 & 0.0000 & 0.9768 \\ 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 \\ 0.7163 & 0.0000 & -0.0811 \end{bmatrix}$$

Uma solução factível para o passo 2.2 é então encontrada:

$$P = \begin{bmatrix} 2418.6331 & -5970.9960 & 778.5635 & 4125.5761 \\ -5970.9960 & 28753.8330 & -1211.2143 & -14189.5870 \\ 778.5635 & -1211.2143 & 355.9045 & 1124.8840 \\ 4125.5761 & -14189.5870 & 1124.8840 & 8181.6056 \end{bmatrix},$$

$$Y = \begin{bmatrix} 1916.6900 & -85976.6890 & -829.7399 & 22653.0220 \\ -4409.4721 & 46819.9550 & -850.7372 & -17790.5780 \end{bmatrix},$$

$$W_{\Pi} = \begin{bmatrix} 21868.5220 & -829.7399 & -86200.8810 \\ -19595.3740 & -850.7372 & 46304.1850 \end{bmatrix}.$$

A matriz de realimentação de saídas correspondente

$$K = \begin{bmatrix} -79.0365 & 63.4020 & 112.9424 \\ 24.8017 & -18.1188 & -36.9913 \end{bmatrix}$$

fornece:

$$\sigma(A + BKC) = \{ -2.5001 ; -2.0906 ; -3.2994 \pm 4.4091j \}$$

onde o autovalor  $-2.5001$  corresponde ao passo 1, através de (3.48).

2º.- **Caso:** Considera-se agora a matriz de saídas usada em [FKKN85]:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A matriz ortogonal  $M = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$  é encontrada passo (1.1) e calcula-se

as matrizes  $A_{12} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  e  $A_{22} = 1$ . Uma solução para a passo 1.2 é:

$[S_{21} \ S_{22}] = [1.0000 \ 0.0000 \ 0.2857 \ 0.2857]$ , que resulta no passo 1.3:

$$T = [S_{21} \ S_{22}] \begin{bmatrix} \bar{M}'_1 \\ \bar{M}'_2 \end{bmatrix} = [-1.0000 \ 0.2857 \ 0.0000 \ -0.2857]$$

O sistema  $(A, B, T)$  não tem zeros invariantes. Isto implica no passo 2.1:

$$V = \begin{bmatrix} -0.2649 & 0.0000 & 0.2649 \\ 0.0364 & 0.0000 & 0.9636 \\ 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 \\ 0.9636 & 0.0000 & 0.0364 \end{bmatrix}$$

Uma solução factível para o passo 2.2 é então encontrada:

$$W_{\Pi} = \begin{bmatrix} -13462.2110 & -485.8837 & -21674.8640 \\ -44139.3730 & 100.2978 & -39822.2320 \end{bmatrix},$$

$$Y = \begin{bmatrix} -2175.4676 & -21375.8320 & -485.8837 & -13761.2500 \\ 1143.8916 & -39979.4670 & 100.2978 & -43982.1340 \end{bmatrix};$$

$$P = \begin{bmatrix} 523.5706 & -1118.3001 & 167.3698 & -2950.7590 \\ -1118.3001 & 6994.3428 & -167.5217 & 10908.2050 \\ 167.3698 & -167.5217 & 76.3854 & -753.3084 \\ -2950.7590 & 10908.2050 & -753.3084 & 21235.5400 \end{bmatrix}$$

A matriz de realimentação de saídas correspondente,

$$K = \begin{bmatrix} -83.0701 & 85.2556 & -9.1666 \\ -90.8184 & 85.2536 & -11.6664 \end{bmatrix}$$

conduz a :  $\sigma(A+BKC) = \{-2.5001; -2.3467; -2.9098 \pm 5.2786j\}$ , onde o autovalor  $-2.5001$  corresponde ao passo 1 através de (3.48).

△

**Algoritmo Dual:**

**Exemplo 3.2 :** *Considerando os dados do exemplo anterior.*

A matriz ortogonal  $M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  é encontrada no passo (1.1) que leva

a calcular calcular calcula-se as matrizes  $A_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$  e  $A_{22} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ . Uma solução para a passo 1.2 é:

$$\begin{bmatrix} P_{12} \\ P_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0475 & 1.0000 \\ 0.0638 & 0.0638 \\ 0.0475 & 0.1091 \\ 0.1091 & 0.4841 \end{bmatrix}, \text{ que resulta no passo 1.3:}$$

$$V = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{12} \\ P_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1091 & 0.4841 \\ 0.0475 & -1.0000 \\ 0.0475 & 0.1091 \\ -0.0638 & -0.0638 \end{bmatrix}$$

O sistema  $(A, V, C)$  não tem zeros invariantes. Isto implica no passo 2.1:

$$T = \begin{bmatrix} 0.4190 & 0.1546 & 0.0789 & 0.8912 \\ -0.3314 & -0.0634 & 0.9376 & 0.0838 \end{bmatrix},$$

Uma solução factível para o passo 2.2 é então encontrada:

$$U_{\Gamma} = \begin{bmatrix} 56285.700 & -64114.027 & -124677.070 \\ 135731.850 & -280669.200 & -350030.290 \end{bmatrix},$$

$$Z = \begin{bmatrix} -21399.1590 & 66152.1480 & 63763.5450 \\ 93.2309 & 7889.3942 & 2925.1376 \\ 131705.9600 & -268219.5200 & 338032.5800 \\ 61537.1600 & -80658.2320 & -140446.4400 \end{bmatrix};$$

$$S = \begin{bmatrix} 2280.2536 & -161.0725 & -16602.0100 & -8582.4272 \\ -161.0725 & 45.8538 & 1758.4415 & 1068.1988 \\ -16602.0100 & 1758.4415 & 130826.0600 & 70334.8120 \\ -8582.4272 & 1068.1988 & 70334.8120 & 38492.4340 \end{bmatrix}$$

A matriz de realimentação de saídas correspondente,

$$K = \begin{bmatrix} -99.5959 & 624.7714 & 420.8836 \\ 4.3626 & -19.4334 & -15.3286 \end{bmatrix}$$

conduz a :  $\sigma(A + BKC) = \{ -2.3780 \pm 2.5053j ; -2.6050 \pm 6.6433j \}$ , onde os autovalores  $\{ -2.3780 \pm 2.5053j \}$  corresponde ao passo 1 através de (3.48).

$\triangle$

### 3.3 Posicionamento regional de pólos

Nesta seção a técnica de estabilização formulada nas seções anteriores é adaptada para tratar o problema de posicionamento regional de pólos em regiões do tipo *LMI* [CG96].

Seja  $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{C}^-$  uma região qualquer do plano complexo. O problema a ser estudado é encontrar uma realimentação de saídas  $u = Ky$  tal que  $\sigma(A + BKC) \in \mathcal{D}$ , ou equivalentemente, o sistema em malha fechada é  $\mathcal{D}$ -estável.

Um par  $(A, B)$  é  $\mathcal{D}$ -estabilizável se e somente se

$$\text{posto} \left( \begin{bmatrix} \lambda I - A & B \end{bmatrix} \right) = n, \quad \forall \lambda \notin \mathcal{D} \quad (3.61)$$

e um par  $(C, A)$  é  $\mathcal{D}$ -detectável se e somente se

$$\text{posto} \left( \begin{bmatrix} \lambda I - A \\ C \end{bmatrix} \right) = n, \quad \forall \lambda \notin \mathcal{D} \quad (3.62)$$

#### 3.3.1 Regiões LMI

As regiões *LMI* descrevem regiões convexas no plano complexo que são simétricas com respeito ao eixo real.

**Definição 3.3.1** Um subconjunto  $\mathcal{D}$

$$\mathcal{D} = \{ \lambda \in \mathbb{C} : f_{\mathcal{D}}(\lambda) < 0 \} \quad (3.63)$$

do plano complexo é denominado uma região do tipo *LMI* se existe uma matriz simétrica  $\Delta = (\delta)_{kl} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e uma matriz  $\Theta = (\theta)_{kl} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tais que

$$f_{\mathcal{D}}(\lambda) = \Delta + \lambda\Theta + \bar{\lambda}\Theta' \quad (3.64)$$

com  $\lambda, \bar{\lambda} \in \mathcal{C}$ , onde  $\mathcal{C}$  denota o semiplano complexo <sup>2</sup>.

A função característica  $f_{\mathcal{D}}(\lambda)$  toma valores no espaço de matrizes Hermitianas de dimensões  $n \times n$ . Desigualdades matriciais lineares, (*LMIs*), podem ser definidas a partir de  $f_{\mathcal{D}}(\lambda)$  para caracterizar as propriedades de que os autovalores de uma matriz real pertencem a  $\mathcal{D}$  [CG96].

Exemplos de interesse de regiões do tipo *LMI* com suas funções características são apresentadas a seguir [CG96].:

- Um disco centrado em  $(-q, 0)$  com raio  $r$ , cuja função característica é:

$$f_{\mathcal{D}}(\lambda) = \begin{pmatrix} -r & q \\ q & -r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \lambda + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}' \bar{\lambda} \quad (3.65)$$

- Um setor cônico centrado na origem com ângulo interno  $\theta$ , cuja função característica é:

$$f_{\mathcal{D}}(\lambda) = \begin{pmatrix} \text{sen}(\theta/2) & \text{cos}(\theta/2) \\ -\text{cos}(\theta/2) & \text{sen}(\theta/2) \end{pmatrix} \lambda + \begin{pmatrix} \text{sen}(\theta/2) & \text{cos}(\theta/2) \\ -\text{cos}(\theta/2) & \text{sen}(\theta/2) \end{pmatrix}' \bar{\lambda} \quad (3.66)$$

- Uma faixa vertical definida por  $h_1 < \text{Re}(\lambda) < h_2$ . A função característica da faixa é

$$f_{\mathcal{D}}(\lambda) = \begin{pmatrix} 2h_1 & 0 \\ 0 & -2h_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \lambda + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}' \bar{\lambda} \quad (3.67)$$

Considere o sistema linear representado por

$$\dot{z}(t) = Hz(t), \text{ com } H \in \mathfrak{R}^{n \times n} \quad (3.68)$$

O sistema (3.68) é  $\mathcal{D}$ -estável, onde  $\mathcal{D}$  é uma região do tipo *LMI*, se e somente se existem matrizes  $\Delta$  e  $\Theta \in \mathfrak{R}^{n \times n}$

$$f_{\mathcal{D}}(\Theta) = \Delta + \Theta \otimes H + \Theta' \otimes H' < 0 \quad (3.69)$$

onde  $\otimes$  representa o produto de Kronecker [HJ91].

É interessante observar que:

---

<sup>2</sup> $(\delta)_{kl} ((\theta)_{kl})$  representam os elementos da matriz  $\Delta$  ( $\Theta$ )  $\forall 1 \leq k, l \leq n$

- a equação (3.69) pode ser reescrita na forma

$$f_{\mathcal{D}}(\theta) = (\delta)_{kl} + (\theta)_{kl}H + (\theta)'_{lk}H', \quad \forall 1 \leq k, l \leq n \quad (3.70)$$

- para duas regiões  $\mathcal{D}_1$  e  $\mathcal{D}_2$  do tipo *LMI*, e cujas funções características associadas são  $f_{\mathcal{D}_1}$  e  $f_{\mathcal{D}_2}$ , respectivamente, a interseção  $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$  é uma região do tipo *LMI* com a função característica  $f_{\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2} = \text{Diag}(f_{\mathcal{D}_1}, f_{\mathcal{D}_2})$ .

### 3.3.2 $\mathcal{D}$ -Estabilização por realimentação de saídas

Lembre-se inicialmente que a existência de uma matriz de realimentação de saídas que estabiliza o sistema em malha fechada, pode ser associada à solução das equações acopladas de Sylvester (3.5), (??) e (3.7). Pelo Teorema 2.2.1 do Capítulo 2, estas equações podem ser interpretadas em termos de propriedades geométricas do subespaço  $\mathcal{V} = \text{Ker}(T)$ . Uma vez encontrada a matriz de realimentação de saídas que estabiliza o sistema, o espectro da malha fechada é dado por :

$$\sigma(A + BKC) = \sigma(H_V) \dot{\cup} \sigma(H_T) \quad (3.71)$$

Assim, na seqüência considera-se que o posicionamento regional de pólos desejados é definido a partir de regiões do tipo *LMIs* associadas as matrizes  $H_V$  e  $H_T$ , como segue:

$$\begin{aligned} \sigma(H_V) \in \mathcal{D}_V \\ \sigma(H_T) \in \mathcal{D}_T \end{aligned} \implies \mathcal{D} = \mathcal{D}_V \cup \mathcal{D}_T \quad (3.72)$$

Então, assumindo-se que  $H_V \in \mathbb{R}^{p \times p}$  e  $H_T \in \mathbb{R}^{n-p \times n-p}$ , as condições de  $\mathcal{D}$ -estabilizabilidade em regiões do tipo *LMIs* são equivalentemente substituídas pelas duas condições a seguir :

$$\sigma(H_V) \in \mathcal{D}_V \iff \exists \Pi = \Pi' > 0 \text{ tal que } \Delta_V \otimes \Pi + \Theta'_V \otimes (\Pi H'_V) + \Theta_V \otimes (H_V \Pi) = -Q_V < 0 \quad (3.73)$$

onde  $\Pi \in \mathbb{R}^{p \times p}$

$$\sigma(H_T) \in \mathcal{D}_T \iff \exists \Gamma = \Gamma' > 0 \text{ tal que } \Delta_T \otimes \Gamma + \Theta'_T \otimes (H'_T \Gamma) + \Theta_T \otimes (\Gamma H_T) = -Q_T < 0 \quad (3.74)$$

onde  $\Gamma \in \mathbb{R}^{n-p \times n-p}$ .

O resultado seguinte pode ser obtido de uma forma similar ao resultado da seção

anterior, considerando-se como ponto de partida as equações acopladas de Sylvester sob o posicionamento regional de pólos restrito no espectro das matrizes  $H_V$  e  $H_T$  respectivamente. Para fins algorítmicos considera-se que  $v = p$ .

**Teorema 3.3.1** *Existe uma matriz de realimentação de saídas  $K : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{U}$  tal que  $\sigma(A + BKC) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\} \in \mathcal{D}$ , para  $\mathcal{D} = \mathcal{D}_V \cup \mathcal{D}_T$ , onde  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_{n-p}\} \in \mathcal{D}_T$  e  $\{\lambda_{n-p+1}, \dots, \lambda_n\} \in \mathcal{D}_V$ , se e somente se existem matrizes ( $P = P' \geq 0$ ,  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $S = S' \geq 0$ ,  $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $Z \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ) tais que as seguintes condições são verificadas para algum par de matrizes  $V \in \mathbb{R}^{n \times p}$  e  $T \in \mathbb{R}^{(n-p) \times n}$  verificando  $TV = 0$ :*

i)

$$\Delta_V \otimes P + \Theta_V \otimes (AP + BY) + \Theta'_V \otimes (PA' + Y'B') = -(V \otimes I_p) Q_{V1} (V \otimes I_p)' \text{ para } Q_{V1} > 0 \quad (3.75)$$

$$V'PV = \bar{P} > 0 ; TPT' = 0 \quad (3.76)$$

$$Y = W_\Pi V' \text{ para algum } W_\Pi \in \mathbb{R}^{m \times p} \quad (3.77)$$

ii)

$$\Delta_T \otimes S + \Theta_T \otimes (SA + ZC) + \Theta'_T \otimes (A'S + C'Z') = -(T' \otimes I_{n-p}) Q_{T1} (I_{n-p} \otimes T) \text{ para } Q_{T1} > 0 \quad (3.78)$$

$$TST' = \bar{S} > 0 ; V'SV = 0 \quad (3.79)$$

$$Z = T'U_\Gamma \text{ para algum } U_\Gamma \in \mathbb{R}^{m \times p} \quad (3.80)$$

iii)

$$\text{Ker } CP \subseteq \text{Ker } Y \quad (3.81)$$

$$\text{Ker } B'S \subseteq \text{Ker } Z' \quad (3.82)$$

#### Demonstração:

**Necessidade:** Considere que as equações acopladas de Sylvester (3.5), (3.6) e (3.7) são verificadas junto com as condições (2.12) e (2.13). Primeiramente demonstra-se a necessidade da parte (i). Desde que a condição quadrática dada por (3.73) deve ser verdadeira, e utilizando-se da definição do produto de Kronecker <sup>3</sup> :

$$(\delta_V)_{kl}(V\Pi V') + (\theta_V)_{lk}(V\Pi H'_V V') + (\theta_V)_{kl}(V H_V \Pi V') = -V(Q_V)_{kl} V' \quad \forall 1 \leq k, l \leq n \quad (3.83)$$

onde:  $(Q_V)_{kl} = (Q_V)'_{kl} \in \mathbb{R}^{p \times p}$ .

<sup>3</sup>Note-se que (3.73) pode ser equivalentemente substituída por:  $(\delta_V)_{kl}\Pi + (\theta_V)_{lk}(\Pi H'_V) + (\theta_V)_{kl}(H_V \Pi) = -(Q_V)_{kl} \quad \forall 1 \leq k, l \leq n$

De (3.5), obtém-se também que  $AV + BW = VH_V$ , que pode ser usada em (3.83) para obter

$$(\delta_V)_{kl}(V\Pi V') + (\theta_V)_{lk}(V\Pi V' A' + V\Pi W' B') + (\theta_V)_{kl}(AV\Pi V' + BW\Pi V') = -V(Q_V)_{kl}V' \quad (3.84)$$

Assim, colocando-se as matrizes  $P = P' = V\Pi V'$  e  $Y = W\Pi V'$ , e considerando-se que o posto  $(V) = p$  e que  $\Pi > 0 \implies \begin{cases} V'V\Pi V'V > 0 \\ T'V\Pi V'T = 0 \end{cases}$ , então (3.84) pode ser equivalentemente substituída por (3.75), (3.76) e (3.77).

Usando argumentos similares, demonstra-se a necessidade da parte (ii). Assim, de (3.6) e (3.74), obtém-se:

$$(\delta_T)_{kl}(T'\Gamma T) + (\theta_T)_{lk}(T'H_T'\Gamma T) + (\theta_T)_{kl}(T'\Gamma H_T T) = -T'(Q_T)_{kl}T \quad \forall 1 \leq k, l \leq n \quad (3.85)$$

onde:  $(Q_T)_{kl} = (Q_T)'_{kl} \in \mathfrak{R}^{n-p \times n-p}$ .

Para as matrizes  $S = T'\Gamma T$  e  $Z = T'\Gamma U$ , (3.85) pode ser substituída por (3.78) e (3.80). Além disso, desde que  $\text{posto}(T) = q - p$  e  $\Gamma > 0$ , obtém-se também

$$\begin{cases} TT'\Gamma TT' > 0 \\ V'T'\Gamma TV = 0 \end{cases}$$

A necessidade da parte (iii), (3.81) e (3.82), segue-se das condições  $\text{Ker } CV \subseteq \text{Ker } W$  e  $\text{Ker } B'T' \subseteq \text{Ker } U'$  respectivamente, levando em conta as definições acima de  $P$ ,  $Y$ ,  $S$  and  $Z$ .

**Suficiência:** Considera-se que as partes (i), (ii) e (iii) são verificadas. Por definição,  $V$  e  $T$ , são matrizes com postos coluna e linha completos, respectivamente. Assim, de (3.76) e (3.79), obtém-se:

$$V'PV = \bar{P} = \bar{P}' > 0 \implies P = V(V'V)^{-1}\bar{P}(V'V)^{-1}V' \quad (3.86)$$

$$TST' = \bar{S} = \bar{S}' > 0 \implies S = T'(TT')^{-1}\bar{S}(TT')^{-1}T \quad (3.87)$$

Agora demonstra-se que a verificação da parte (i) implica que o subespaço  $\mathcal{V} = \text{Ker}(T)$  é  $(A + BKC)$ -invariante e que o mapeamento que representa  $(A + BKC)|_{\mathcal{V}}$  é tal que seu espectro pertence à  $\mathcal{D}_V$ .

De (3.86) e (3.87) obtém-se:

$$P = \begin{bmatrix} V & T' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Pi & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V' \\ T \end{bmatrix} \geq 0 \text{ para } \Pi = \Pi' = (V'V)^{-1}\bar{P}(V'V)^{-1} > 0 \quad (3.88)$$

De (3.81), pode-se afirmar que existe uma matriz  $K$  tal que

$$KCP = Y \quad (3.89)$$

Assim, pela substituição de (3.89) em (3.75), obtém-se

$$(\delta_V)_{kl}P + (\theta_V)_{lk}P(A + BKC)' + (\theta_V)_{kl}(A + BKC)P = -V(Q_V)_{kl}V' \quad \forall 1 \leq k, l \leq n \quad (3.90)$$

Agora, levando em conta (3.88), a equação de similaridade

$$(A + BKC) \begin{bmatrix} V & T' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V & T' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} \quad (3.91)$$

e o fato que

$$\begin{bmatrix} V & T' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (Q_V)_{kl} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V' \\ T \end{bmatrix} \leq 0 \quad (3.92)$$

De (3.90), obtém-se  $\forall 1 \leq k, l \leq n$  :

$$\begin{aligned} & (\delta_V)_{kl} \begin{bmatrix} V & T' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Pi & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V' \\ T \end{bmatrix} + (\theta_V)_{lk} \begin{bmatrix} V & T' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Pi \bar{A}'_{11} & \Pi \bar{A}'_{21} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V' \\ T \end{bmatrix} + \\ & (\theta_V)_{kl} \begin{bmatrix} V & T' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{A}_{11}\Pi & 0 \\ \bar{A}_{21}\Pi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V' \\ T \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} V & T' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (Q_V)_{kl} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V' \\ T \end{bmatrix} \\ \\ & \begin{bmatrix} V & T' \end{bmatrix} \left( (\delta_V)_{kl} \begin{bmatrix} \Pi & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + (\theta_V)_{lk} \begin{bmatrix} \Pi \bar{A}'_{11} & \Pi \bar{A}'_{21} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + (\theta_V)_{kl} \begin{bmatrix} \bar{A}_{11}\Pi & 0 \\ \bar{A}_{21}\Pi & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} V' \\ T \end{bmatrix} = \\ & \quad - \begin{bmatrix} V & T' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (Q_V)_{kl} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V' \\ T \end{bmatrix} \\ & \begin{bmatrix} V & T' \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} (\delta_V)_{kl}\Pi + (\theta_V)_{lk}\Pi \bar{A}'_{11} + (\theta_V)_{kl}\bar{A}_{11}\Pi & (\theta_V)_{lk}\Pi \bar{A}'_{21} \\ (\theta_V)_{kl}\bar{A}_{21}\Pi & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} V' \\ T \end{bmatrix} = \\ & \quad - \begin{bmatrix} V & T' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (Q_V)_{kl} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V' \\ T \end{bmatrix} \quad (3.93) \end{aligned}$$

Considerando que por construção  $\Pi > 0$  e que  $(\theta_V)_{kl} \neq 0$ , tem-se de (3.93) que:

- $\mathcal{V} = \text{Ker}(T)$  é um subespaço  $(A + BKC)$ -invariante, já que  $(\theta_V)_{kl}\bar{A}_{21}\Pi = 0$  se e somente se  $\bar{A}_{21} = 0$ ; e

- $\mathcal{V} = \text{Ker}(T)$  é  $\mathcal{D}$ -estabilizável, já que  $(\delta_V)_{kl}\Pi + (\theta_V)_{lk}\Pi\bar{A}'_{11} + (\theta_V)_{kl}\bar{A}_{11}\Pi < 0$ ,  $\forall 1 \leq k, l \leq n$  implica a  $\mathcal{D}$ -estabilidade de  $(A + BKC)|_{\mathcal{V}}$ .

□

Note-se que, também neste caso, se as matrizes  $P, S, V$  e  $T$  tenham sido encontradas de modo que o Teorema 3.3.1 é verificado, com a matriz  $K$  de realimentação de saídas correspondente, então a condição de acoplamento entre as partes (i) e (ii) pode ser descrita por  $SP = 0$  [CHL00].

**Comentário 3.3.1** A aplicação do resultado acima para uma região circular de raio unitário, denotada por  $\mathcal{C}^s = \{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| < 1\}$ , corresponde à estabilidade no caso de sistemas discretos no tempo [CHL02]:

Existe uma matriz de realimentação de saídas  $K : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{U}$  tal que  $\sigma(A + BKC) \in \mathcal{C}^s$ , se e somente se existem matrizes ( $P = P' \geq 0$ ,  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $S = S' \geq 0$ ,  $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $Z \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ) tais que as seguintes condições são verificadas para algum par de matrizes  $V \in \mathbb{R}^{n \times p}$  e  $T \in \mathbb{R}^{n-p \times n}$  verificando  $TV = 0$ :

i)  $\forall Q_V = Q'_V > 0$ ,  $Q_V \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$

$$\begin{bmatrix} -P & PA' + Y'B' \\ AP + BY & -P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V & 0 \\ 0 & V \end{bmatrix} Q_V \begin{bmatrix} V' & 0 \\ 0 & V' \end{bmatrix} \quad (3.94)$$

(3.11) e (3.12)

ii)  $\forall Q_T = Q'_T > 0$ ,  $Q_T \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$

$$\begin{bmatrix} -S & SA + ZC \\ A'S + C'Z' & -S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T' & 0 \\ 0 & T' \end{bmatrix} Q_T \begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & T \end{bmatrix} \quad (3.95)$$

(3.14) e (3.15)

iii)

(3.16) e (3.17)

### 3.3.3 Aspectos algorítmicos

#### Algoritmo Primal

Baseado no algoritmo primal proposto na seção anterior, o procedimento básico seguinte pode ser usado para calcular a matriz de realimentação de saídas que  $\mathcal{D}$ -estabiliza o sistema em malha fechada quando a condição  $m + p > n$  é verificada:

**Passo 1:**

1.1) Encontrar uma decomposição

$$C \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.96)$$

onde:  $C_1 \in \mathbb{R}^{p \times p}$ ,  $\text{posto}(C_1) = p$ . Calcular as matrizes  $A_{12}, A_{22}$ :

$$\begin{bmatrix} A_{21} \\ A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{M}'_1 \\ \bar{M}'_2 \end{bmatrix} A M_2 \quad \text{onde} \quad \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{M}'_1 \\ \bar{M}'_2 \end{bmatrix} = I_n \quad (3.97)$$

1.2) Resolver a *LMI* para encontrar  $S_{21}$  e  $S_{22} = S'_{22} > 0$ :

$$\Delta_T \otimes (S_{22}) + \Theta_T \otimes (S_{22}A_{22} + S_{21}A_{12}) + \Theta'_T \otimes (A'_{22}S_{22} + A'_{21}S'_{21}) < 0. \quad (3.98)$$

1.3) Calcular  $T = \begin{bmatrix} S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{M}'_1 \\ \bar{M}'_2 \end{bmatrix}$ . Se  $(A, B, T)$  não tem zeros invariantes, ir ao Passo 2; caso contrário, repetir o Passo 1 usando uma nova decomposição para  $C$ .

**Passo 2:**

2.1) Calcular  $V$  como uma base ortogonal de  $\text{Ker}(T)$ :

$$TV = 0 \quad \text{com} \quad V'V = I_p \quad (3.99)$$

2.2) Resolver a equação seguinte, sob as restrições (3.76) e (3.77), para encontrar  $P$  e  $Y$ :

$$\Delta_V \otimes P + \Theta_V \otimes (AP + BY) + \Theta'_V \otimes (PA' + Y'B') = -(V \otimes I_p) Q_{V1} (V \otimes I_p)' \leq 0 \quad (3.100)$$

**Passo 3:** A matriz de realimentação de saídas que  $\mathcal{D}$ -estabiliza o sistema em malha fechada correspondente verifica

$$KCP = Y \iff KCV\bar{P} = W_{\Pi}, \quad \text{já que} \quad V'V = I_p.$$

o

**Comentário 3.3.2** Na primeira parte do Passo 1, um par de matrizes auxiliares ( $A_{22} \in \mathbb{R}^{(n-p) \times (n-p)}$ ,  $A_{12} \in \mathbb{R}^{p \times (n-p)}$ ) é calculado a partir da decomposição (3.96). Assume-se que o sistema em malha aberta é  $\mathcal{D}$ -estabilizável, então o par  $(A_{12}, A_{22})$  é  $\mathcal{D}$ -detectável. Portanto existem  $(S_{22}, S_{21})$ , soluções para (3.98), tais que:  $\sigma(A_{22} + (S_{22})^{-1}S_{21}A_{12}) = \sigma(H_T) \in \mathcal{D}_T$  (para detalhes, ver [CHL00]). Note-se também que a

equação (3.98) é uma LMI nas variáveis  $S_{21}$  e  $S_{22}$ . Então, técnicas de programação convexa podem ser usadas para encontrar soluções factíveis [BGFB94]. Como teste de factibilidade para o passo 2, deve-se verificar se o sistema  $(A, B, T)$  não tem zeros invariantes que pertençam a  $\mathcal{D}_V$  então ir ao próximo passo. As condições são geralmente solucionáveis no sentido que o sistema matricial  $P_\lambda = \begin{bmatrix} A - \lambda I_n & B \\ T & 0 \end{bmatrix}$  de dimensão  $(n + m) \times (2n - p)$  deve ter posto linha completo  $\forall \lambda$ . Assim o Passo 2 somente é efetuado com soluções estáveis factíveis [CHL00].

### Algoritmo Dual Passo 1:

1.1) Encontrar uma decomposição

$$\begin{bmatrix} \bar{M}'_1 \\ \bar{M}'_2 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.101)$$

onde:  $B_1 \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $\text{posto}(B_1) = m$ ,  $\begin{bmatrix} M_1 & M_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Calcular as matrizes  $A_{21}$ ,  $A_{22}$ :

$$\begin{bmatrix} A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \bar{M}'_2 A \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \end{bmatrix} \quad \text{onde} \quad \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{M}'_1 \\ \bar{M}'_2 \end{bmatrix} = I_n \quad (3.102)$$

1.2) Resolver a LMI para encontrar  $P_{12}$  e  $P_{22} = P'_{22} > 0$ :

$$\Delta_V \otimes (P_{22}) + \Theta_V \otimes (A_{22}P_{22} + A_{21}P_{12}) + \Theta'_V \otimes (P_{22}A'_{22} + P'_{12}A'_{21}) < 0. \quad (3.103)$$

1.3) Calcular  $V = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{12} \\ P_{22} \end{bmatrix}$ . Se  $(A, V, C)$  não tem zeros invariantes no exterior da região  $\mathcal{D}_T$ , ir ao Passo 2; caso contrário, repetir o Passo 1 usando uma nova decomposição para  $B$ .

### Passo 2:

2.1) Calcular  $T$  tal que

$$TV = 0 \quad \text{com} \quad TT' = I_m \quad (3.104)$$

2.2) Resolver a equação seguinte, sob as restrições (3.79) e (3.80), para encontrar  $S$  e  $Z$ :

$$\Delta_T \otimes S + \Theta_T \otimes (SA + ZC) + \Theta'_T \otimes (A'S + C'Z') = -(T' \otimes I_m) Q_{T1} (I_m \otimes T) \leq 0 \quad (3.105)$$

**Passo 3:** A matriz de realimentação de saídas que  $\mathcal{D}$ -estabiliza o sistema em malha

fechada correspondente verifica a equação

$$SBK = Z \iff \bar{S}TBK = U_{\Gamma}, \text{ já que } TT' = I_m.$$

o

### 3.3.4 Exemplos

Considerar o sistema  $(A, B, C)$  dos já utilizado nos exemplos anteriores [FKKN85];

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

O sistema  $(C, A, B)$  correspondente é controlável e observável, e  $m + p = 5 > n$ . Os pólos de malha aberta são: 0.0000, 0.0000, 1.6180, -0.6180.

A) Algoritmo Primal:

A região  $\mathcal{D}_T$  do tipo *LMI* é uma faixa vertical definida por:  $\mathcal{D}_T = \{x + jy \in \mathcal{C}; -5 < x < -1\}$ . A região  $\mathcal{D}_V$  do tipo *LMI* é definida a partir da interseção dos setores cônicos e um disco definido por:  $\{x + jy \in \mathcal{C}; x < -5, |x + jy| < 10 \text{ e } \tan 45^\circ x < |y|\}$ . Assim, técnicas de programação convexa são aplicadas para encontrar soluções factíveis para as equações de posicionamento regional de pólos sem requisitos adicionais.

$$\text{A matriz } \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.7071 & 0.0000 & 0.7071 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 \\ 0.0000 & -1.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ -0.7071 & 0.0000 & -0.7071 & 0.0000 \end{bmatrix} \text{ encontrada no}$$

$$\text{passo 1.1 leva a: } A_{22} = 1.0000 \quad A_{12} = \begin{bmatrix} -0.7071 \\ 0.0000 \\ 0.7071 \end{bmatrix}.$$

Uma solução para o passo 1.2 é:

$$S_{22} = 333.3318, \quad S_{21} = \begin{bmatrix} 0.0000 & 0.0000 & -2080.8778 \end{bmatrix},$$

que resulta no passo 1.3:

$$T = \begin{bmatrix} -1471.4028 & 333.3318 & 0.0000 & 1471.4028 \end{bmatrix}.$$

Esta solução não tem zeros invariantes e implica, no passo 2.1:

$$V = \begin{bmatrix} 0.6982 & 0.0000 & 0.1582 \\ -0.0650 & 0.0000 & 0.9853 \\ 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 \\ 0.7129 & 0.0000 & -0.0650 \end{bmatrix}.$$

Uma solução para o passo 2.2 é então encontrada:

$$Y = \begin{bmatrix} 10887.2550 & 150744.2000 & 304.1292 & 45036.8680 \\ -4945.7042 & 52669.6190 & -336.9173 & -16877.4870 \end{bmatrix}$$

$$W_{\Pi} = \begin{bmatrix} 49513.0880 & 304.1292 & -149730.1600 \\ -18910.8790 & -336.9173 & 52208.9740 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 585.8797 & -3033.8726 & 88.1286 & 1273.1736 \\ -3033.8726 & 23055.7690 & -320.7086 & -8256.9297 \\ 88.1286 & -320.7086 & 16.9370 & 160.7819 \\ 1273.1736 & -8256.9297 & 160.7819 & 3143.6997 \end{bmatrix}$$

A matriz de realimentação de saídas correspondente que estabiliza o sistema em malha fechada é:

$$K = \begin{bmatrix} -218.6662 & 348.0591 & 303.7491 \\ 52.7244 & -78.8494 & -75.4133 \end{bmatrix}$$

que resulta :  $\sigma(A + BKC) = \{-3.4142, -5.7409, -6.2669 \pm 4.6210j\} \subset \mathcal{D}_V$ . Onde o autovalor  $-3.4142 \in \mathcal{D}_T$  corresponde ao passo 1.

B) Algoritmo dual:

A região  $\mathcal{D}_V$  do tipo *LMI* é definida a partir da interseção dos setores cônicos e um disco definido por:  $\{x + jy \in \mathcal{C} ; x < -6, |x + jy| < 16 \text{ e } \tan 45^\circ x < |y|\}$ .

A região  $\mathcal{D}_T$  do tipo *LMI* é definida a partir da interseção dos setores cônicos e um disco definido por:  $\{x + jy \in \mathcal{C} ; x < -2, |x + jy| < 3.5 \text{ e } \tan 45^\circ x < |y|\}$ .

Assim, técnicas de programação convexa são aplicadas para encontrar soluções factíveis para as equações de posicionamento regional de pólos sem requisitos adici-

onais.

Usando a matriz  $\begin{bmatrix} M_1 & M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ , técnicas de programação con-

vexa não produzem uma solução factível no passo 2, devido ao fato de que a matriz

$V$  selecionada no passo 1  $V = \begin{bmatrix} 1.7120 & 7.5928 \\ 0.7449 & -15.6857 \\ 0.7449 & 1.7120 \\ 0.0000 & 0.0000 \end{bmatrix}$ , é tal que  $(A, V, C)$  tem um zero

instável: 5.7561.

Entretanto, existem soluções que estabilizam o sistema em malha fechada (ver [CHL00]). Assim define-se uma nova decomposição no passo 1 a partir de

$$\begin{bmatrix} D_1 & D_{12} \\ 0 & D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.0000 & 0.1035 & 0.7861 \\ 0.0000 & 1.0000 & 0.4280 & 0.0568 \\ 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 \end{bmatrix}$$

$$\text{Calcula-se } A_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, A_{22} = \begin{bmatrix} 0.0000 & -1.0000 \\ -0.1035 & -0.7861 \end{bmatrix}.$$

Uma solução para o passo 1.2 é:

$$P_{12} = \begin{bmatrix} -2.1677 & 9.5400 \\ 0.0000 & 0.0000 \end{bmatrix}, P_{22} = \begin{bmatrix} 0.7449 & 1.7120 \\ 1.7120 & 7.5928 \end{bmatrix}$$

que resulta no passo 1.3:

$$V = \begin{bmatrix} 1.7120 & 7.5928 \\ 0.7449 & -15.6857 \\ 0.7449 & 1.7120 \\ -1.7856 & -7.2383 \end{bmatrix}$$

Esta solução não tem zeros invariantes e implica, no passo 2.1:

$$T = \begin{bmatrix} 0.6891 & 0.0160 & 0.1150 & 0.7153 \\ -0.2695 & 0.0761 & 0.9539 & 0.1078 \end{bmatrix}$$

Uma solução para o passo 2.2 é então encontrada:

$$U_T = \begin{bmatrix} 225135.7200 & 1093080.3000 & 486238.9400 \\ -299223.1800 & 235312.9700 & 146795.0100 \end{bmatrix},$$

$$Z = \begin{bmatrix} 235767.9300 & 689781.4200 & 295487.2700 \\ 26370.9230 & -400.5034 & -3382.7842 \\ -259523.7300 & 350276.0300 & 195993.6100 \\ 128787.0300 & 807282.4600 & 363647.3700 \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} -39751.453 & 995.0800 & -34092.5110 & -51918.4220 \\ 995.0800 & -136.9332 & 2456.1519 & 1921.4859 \\ -34092.5110 & 2456.1519 & -52169.4840 & -53424.0430 \\ -51918.4220 & 1921.4859 & -53424.0430 & -71261.1720 \end{bmatrix}.$$

A matriz de realimentação de saídas correspondente que estabiliza o sistema em malha fechada é:

$$K = \begin{bmatrix} -350.5961 & -251.0160 & -75.4515 \\ -11.2607 & -18.0969 & -7.1375 \end{bmatrix},$$

que resulta :  $\sigma(A + BKC) = \{-2.3780 \pm 2.5053i, -6.3211 \pm 14.8048i\} \subset \mathcal{D}_T$ . Onde os autovalores  $\{-2.3780 \pm 2.5053i\} \subset \mathcal{D}_V$  corresponde ao passo 1.

△

### 3.4 Conclusão

Este capítulo focalizou aspectos teóricos e algorítmicos; acentuando-se alguns vínculos com abordagens das equações acopladas de Sylvester. O presente capítulo tem duas partes importantes: Na primeira parte foi apresentada uma abordagem quadrática para a construção dos subespaços  $O.S.$   $(C, A, B)$ -invariantes que leva ao cálculo da matriz de realimentação de saídas. Em particular, uma condição necessária e suficiente para existência de uma realimentação de saídas que estabiliza o sistema em malha fechada foi obtida em termos das equações acopladas de Lyapunov. Assim mostrou-se que as Equações acopladas de Lyapunov também podem ser usadas para descrever as propriedades geométricas requeridas para a solução do problema de estabilização. Também foram propostos dois algoritmos (primal e dual), que solucionam as equações acopladas de Lyapunov em dois passos e é diretamente aplicada a sistemas que verificam a condição  $m + p > n$  (condição de Kimura).

Na segunda parte, para resolver o problema de posicionamento regional de pólos, a teoria e os algoritmos propostos foram adaptados para tratar o problema considerado.

O carácter de solução em dois passos dos algoritmos será ainda explorado no capítulo seguinte. É importante salientar que os algoritmos podem resolver o problema de estabilização e o posicionamento regional de pólos em sistemas que não verificam a condição de Kimura, utilizando-se compensadores dinâmicos de ordem  $\nu > n - (m + p)$ .

# Capítulo 4

## Realimentação de saídas para uma classe de sistemas descritores

### 4.1 Introdução

Os sistemas descritores originam-se naturalmente do modelamento de muitos sistemas tais como redes de circuitos elétricos, sistemas de potências, processos químicos e outros sistemas interconectados [Dai89] [VLK81]. Embora uma representação puramente diferencial para estes sistemas possa usualmente ser obtida, existem vantagens na manutenção do modelo original na forma de sistema descritor. No caso de sistemas de potência, sua modelagem como sistema descritor aparece naturalmente e, também, a redução a uma forma puramente diferencial pode apresentar restrições computacionais devido às grandes dimensões que os sistemas de potência podem apresentar. Em particular a alta esparsidade encontrada nas matrizes do sistema é perdida quando da redução a um sistema puramente diferencial. Técnicas de análise têm sido desenvolvidas para tratar de modelos de sistemas de potência na forma de sistemas descritores, preservando esparsidade. Por outro lado, poucas técnicas de projeto de controladores que usam a formulação de sistema descritor podem ser encontradas [FSoc95] [FSoc97].

Este capítulo trata o problema de estabilização usando realimentação de saídas de um modelo descritor algébrico-diferencial particular. Este modelo apresenta como características: regularidade, ausência de comportamento impulsivo e ação não-direta de entradas de controle nas variáveis algébricas. Embora estas hipóteses possam parecer restritivas, alguns modelos físicos, como modelos de sistemas de potência, concordam com elas. Neste capítulo mostra-se inicialmente que a estabilização usando realimentação de saídas do sistema descritor considerado pode ser vista como um problema

clássico de estabilização usando realimentação de saídas de um sistema normal de *ordem reduzida*, para o qual muitas técnicas de estabilização usando realimentação de saídas podem ser aplicadas [SADG97]. Além disso, é mostrado como estas técnicas podem ser diretamente aplicadas ao modelo na forma de sistema descritor de ordem completa. Para ilustrar este ponto, utiliza-se a abordagem do capítulo 3 baseada na solução de duas equações acopladas de Lyapunov. Considera-se então o problema de posicionamento regional de pólos, ou de  $\mathcal{D}$ -estabilização, via realimentação de saídas para o modelo descritor algébrico-diferencial [CSLT02].

O presente capítulo é organizado como segue. A seção 4.2 apresenta o problema de estabilização a ser tratado e alguns resultados preliminares. Na seção 4.3, a abordagem via equações acopladas de Lyapunov é apresentada e adaptada para o sistema descritor considerado. Na seção 4.4, uma abordagem para  $\mathcal{D}$ -estabilização usando as equações de Lyapunov é apresentada. Alguns comentários conclusivos são finalmente apresentados. Conceitos básicos da teoria de sistemas descritores, necessários para o entendimento do presente capítulo, são apresentados no apêndice.

## 4.2 Apresentação do problema e resultados preliminares

Estuda-se neste capítulo a classe de sistemas descritores descritos por um conjunto de equações algébricas-diferenciais na forma:

$$\begin{bmatrix} I_q & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 & J_2 \\ J_3 & J_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \quad (4.1)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

onde:  $x_1 \in \mathbb{R}^q$ ,  $x_2 \in \mathbb{R}^{n-q}$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$  e  $y \in \mathbb{R}^p$ ;  $I_q$  é a matriz identidade de dimensão  $q$  e  $J_4 \in \mathbb{R}^{(n-q) \times (n-q)}$  é não-singular. As outras matrizes envolvidas são de dimensões apropriadas e também assume-se que  $\text{posto}(B_1) = m$ .

Modelos de sistemas dinâmicos como sistemas descritores na forma algébrico-diferencial originam-se naturalmente quando estes sistemas são formados de subsistemas interconectados. Os sistemas descritores na forma algébrico-diferencial podem ser usados, em particular, para aproximar o comportamento dinâmico de sistemas elétricos de potência e outros sistemas perturbados singularmente [VLK81]. As particularidades estruturais do sistema (4.1), (4.2) são as seguintes:

- a matriz  $J_4$  é inversível, o que implica na ausência de comportamento impulsivo na resposta dinâmica do sistema e também na sua regularidade [BL97];
- ausência de ação direta da entrada de controle nas variáveis algébricas, enfatizada pela estrutura da matriz de entrada  $\begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}$ .

O problema básico a ser resolvido é encontrar uma lei de controle de realimentação estática de saídas para o sistema descritor (4.1), (4.2) da forma

$$u(t) = Ky(t) = K \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

onde  $K \in \mathbb{R}^{m \times p}$  é tal que o sistema malha fechada expressado na forma

$$\begin{bmatrix} I_q & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 + B_1KC_1 & J_2 + B_1KC_2 \\ J_3 & J_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

é assintoticamente estável.

As proposições seguintes dizem respeito à estabilizabilidade e à detectabilidade de sistemas descritores considerados, propriedades estas necessárias para solução do problema de estabilização.

**Proposição 4.2.1** : *O sistema (4.1), (4.2) é estabilizável se e somente se*

$$\text{posto} \left( \begin{bmatrix} \lambda I_q - J_1 & -J_2 & B_1 \\ -J_3 & -J_4 & 0 \end{bmatrix} \right) = n, \forall \lambda \text{ finito} \in \bar{C}^+ \quad (4.5)$$

**Proposição 4.2.2** : *O sistema (4.1), (4.2) é detectável se e somente se*

$$\text{posto} \left( \begin{bmatrix} \lambda I_q - J_1 & -J_2 \\ -J_3 & -J_4 \\ C_1 & C_2 \end{bmatrix} \right) = n, \forall \lambda \text{ finito} \in \bar{C}^+ \quad (4.6)$$

### 4.2.1 Estabilização usando o sistema normal de ordem reduzida

A estrutura particular do sistema descritor (4.1), (4.2) conduz a alguns resultados de interesse para o desenvolvimento e uso de técnicas de estabilização usando realimentação de saídas.

Mostraremos inicialmente que, sob as hipóteses de estabilizabilidade e detectabilidade do sistema (4.1), (4.2) o problema de estabilização usando realimentação de saídas pode ser visto como um problema clássico de estabilização usando realimentação de saídas de um sistema *normal de ordem reduzida*. Para isto, serão consideradas

as matrizes  $Q = I_n$  e  $P = \begin{bmatrix} I_q & 0 \\ -J_4^{-1}J_3 & I_{n-q} \end{bmatrix}$  e, a mudança de coordenadas  $x = Pz$ :

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_q & 0 \\ -J_4^{-1}J_3 & I_{n-q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

Assim, o sistema (4.1), (4.2) é equivalente a

$$\begin{bmatrix} I_q & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{z}_1(t) \\ \dot{z}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 - J_2J_4^{-1}J_3 & J_2 \\ 0 & J_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \quad (4.8)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} C_1 - C_2J_4^{-1}J_3 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Portanto, aplicando  $u(t) = Ky(t)$  para (4.8), (4.9), obtém-se a representação equivalente do sistema em malha fechada nas novas coordenadas definidas na (4.7):

$$\begin{bmatrix} I_q & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{z}_1(t) \\ \dot{z}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1(K) & J_2(K) \\ 0 & J_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

onde:

$$\begin{aligned} J_1(K) &= (J_1 - J_2J_4^{-1}J_3) + B_1K(C_1 - C_2J_4^{-1}J_3) \\ J_2(K) &= J_2 + B_1KC_2 \end{aligned}$$

A partir da estrutura das matrizes envolvidas na representação (4.10) (ver relação (A.5)), os pólos finitos em malha fechada correspondem ao conjunto de autovalores da matriz  $J_1(K)$  e são dados pelas raízes da equação característica  $(\lambda I_q - J_1(K)) = 0$ .

Do desenvolvimento acima, conclui-se que a matriz  $K$  deve ser tal que o espectro de  $J_1(K)$ , o qual fornece os pólos finitos da malha fechada, seja estável. Então, o problema

a ser resolvido neste passo pode ser visto como o de estabilização usando realimentação de saídas, considerando  $u(t) = Kv(t)$ , do sistema *normal* de *ordem reduzida*:

$$\dot{\zeta}_1(t) = (J_1 - J_2 J_4^{-1} J_3) \zeta_1(t) + B_1 u(t) \quad (4.11)$$

$$v(t) = (C_1 - C_2 J_4^{-1} J_3) \zeta_1(t) \quad (4.12)$$

Sejam  $A = J_1 - J_2 J_4^{-1} J_3$ ,  $B = B_1$  e  $C = C_1 - C_2 J_4^{-1} J_3$ . Então as condições necessárias para estabilizar o sistema *normal* de ordem reduzida  $(A, B, C)$  usando realimentação de saídas são conhecidas e relativas a estabilizabilidade e a detectabilidade dos pares  $(A, B)$  e  $(C, A)$  (ver por exemplo, [SADG97]).

**Lema 4.2.1** : O sistema de ordem reduzido (4.11), (4.12) é estabilizável e detectável se e somente se o sistema descritor (4.1), (4.2) é estabilizável e detectável.

**Demonstração:**

i) O sistema descritor (4.1), (4.2) é estabilizável se e somente se

$$\text{posto} \left( \begin{bmatrix} J_1 - \lambda I_q & J_2 & B_1 \\ J_3 & J_4 & 0 \end{bmatrix} \right) = \text{posto} \left( \begin{bmatrix} I_q & -J_2(J_4)^{-1} \\ 0 & I_{n-q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_1 - \lambda I_q & J_2 & B_1 \\ J_3 & J_4 & 0 \end{bmatrix} \right) = \quad (4.13)$$

$$\text{posto} \left( \begin{bmatrix} J_1 - \lambda I_q - J_2(J_4)^{-1} J_3 & 0 & B_1 \\ J_3 & J_4 & 0 \end{bmatrix} \right) = n \quad \forall \lambda \text{ finito} \in \bar{\mathcal{C}}^+ \quad (4.14)$$

o que é equivalente a

$$\text{posto} \left( \begin{bmatrix} A - \lambda I_q & B \end{bmatrix} \right) = q. \quad (4.15)$$

ii) O sistema descritor (4.1), (4.2) é detectável se e somente se

$$\text{posto} \left( \begin{bmatrix} J_1 - \lambda I_q & J_2 \\ J_3 & J_4 \\ C_1 & C_2 \end{bmatrix} \right) = \text{posto} \left( \begin{bmatrix} I_q & -J_2(J_4)^{-1} \\ 0 & I_{n-q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_1 - \lambda I_q & J_2 \\ J_3 & J_4 \\ C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_q & 0 \\ -(J_4)^{-1} J_3 & I_{n-q} \end{bmatrix} \right) = \quad (4.16)$$

$$\text{posto} \left( \begin{bmatrix} J_1 - \lambda I_q - J_2(J_4)^{-1} J_3 & 0 \\ 0 & J_4 \\ C_1 - C_2(J_4)^{-1} J_3 & C_2 \end{bmatrix} \right) = n \quad \forall \lambda \text{ finito} \in \bar{\mathcal{C}}^+ \quad (4.17)$$

o que é equivalente a

$$\text{posto} \left( \begin{bmatrix} A - \lambda I_q \\ C \end{bmatrix} \right) = q.$$

□

### 4.2.2 Discussão

Os desenvolvimentos anteriores podem ser resumidos pela seguinte metodologia para estabilização usando realimentação de saídas de sistemas descritores (4.1), (4.2) via sistema de ordem reduzida. Assume-se que o sistema a ser controlado é estabilizável e detectável.

- **Passo 1**: Calcular  $X \in \mathbb{R}^{(n-q) \times q}$  tal que  $J_4 X = J_3$  e fazer :

$$A = J_1 - J_2 X$$

$$B = B_1$$

$$C = C_1 - C_2 X$$

- **Passo 2**: Calcular  $K \in \mathbb{R}^{m \times p}$  tal que  $\sigma(A + BKC) \in \mathcal{C}^-$ .

O passo 1 do algoritmo se resume basicamente à solução de um conjunto de sistemas de  $q$  sistemas de equações lineares, que podem ser resolvidos, por exemplo, a partir da decomposição  $LU$  da matriz  $J_4$  [Men98]. Dependendo da estrutura, dimensão e esparsidade das matrizes envolvidas, técnicas de cálculo particulares podem também ser utilizadas para solução eficiente e numericamente robusta deste passo [Bar99].

Comenta-se agora o passo 2 do algoritmo. Já que o sistema descritor é estabilizável e detectável, os pares  $(A, B)$  e  $(C, A)$  envolvidos no passo 2 são estabilizáveis e detectáveis. Assim, as condições necessárias para resolver o problema de estabilização usando realimentação de saídas no passo 2 são cumpridas. Além disso, não existe uma solução fechada para o problema de estabilização de sistemas lineares *normais* usando realimentação de saídas, mas diferentes técnicas propostas na literatura para tratar este problema podem ser candidatas a serem usadas no passo 2. A escolha de uma técnica apropriada depende, em muitos casos, da estrutura das matrizes envolvidas e do conhecimento e experiência do projetista [SADG97].

A metodologia descrita acima faz uso do sistema de *ordem reduzida*, correspondente à utilização de técnicas de eliminação de variáveis. Entretanto, como já citado, o uso do modelo de ordem completa pode ser atrativo do ponto de vista numérico e computacional, principalmente para sistemas de dimensão alta onde as matrizes envolvidas têm alguma estrutura (esparsa) que é perdida no sistema de *ordem reduzida*  $(A, B, C)$  [FSOC95] [FSOC97]. Neste sentido, embora diferentes técnicas para a estabilização usando realimentação podem ser consideradas para serem aplicadas ao sistema de *ordem reduzida*, agora demonstra-se que a técnica escolhida pode ser diretamente aplicada ao sistemas descritores de ordem completa (4.1), (4.2). Isto será mostrado

considerando a técnica particular apresentada no capítulo 3, que traz junto elementos das abordagens geométrica e quadrática para estabilização via realimentação de saídas.

### 4.3 Uma abordagem para estabilização

Primeiramente apresenta-se uma condição necessária e suficiente para a estabilização do sistema de *ordem reduzida* (4.11), (4.12). O resultado a seguir é uma aplicação direta do Teorema 3.2.1 ao sistema de *ordem reduzida*.

**Corolário 4.3.1** [LCS00] : *Existe uma matriz de realimentação de saídas  $K \in \mathbb{R}^{m \times v}$  tal que o sistema em malha fechada de ordem reduzida*

$$\dot{\zeta}(t) = (A + BKC)\zeta(t) \quad (4.18)$$

é assintoticamente estável se e somente se existem matrizes  $P_1 = P_1' \geq 0$ ,  $P_1 \in \mathbb{R}^{q \times q}$ ,  $Y \in \mathbb{R}^{m \times q}$ ,  $S_1 = S_1' \geq 0$ ,  $S_1 \in \mathbb{R}^{q \times q}$  e  $Z \in \mathbb{R}^{q \times v}$  tais que as seguintes condições são verdadeiras para algum par de matrizes  $V_1 \in \mathbb{R}^{q \times v}$  e  $T_1 \in \mathbb{R}^{q-v \times q}$  verificando  $T_1 V_1 = 0$ :

(i)  $\forall Q_V = Q_V' > 0$ ,  $Q_V \in \mathbb{R}^{v \times v}$  tem-se:

$$AP_1 + P_1 A' + BY + Y' B' = -V_1 Q_V V_1' \quad (4.19)$$

$$V_1' P_1 V_1 = \bar{P}_1 > 0 \quad ; \quad T_1 P_1 T_1' = 0 \quad (4.20)$$

$$Y = W_\Pi V_1' \text{ para algum } W_\Pi \in \mathbb{R}^{m \times v} \quad (4.21)$$

(ii)  $\forall Q_T = Q_T' > 0$ ,  $Q_T \in \mathbb{R}^{q-v \times q-v}$  tem-se:

$$A' S_1 + S_1 A + C' Z' + Z C = -T_1' Q_T T_1 \quad (4.22)$$

$$T_1 S_1 T_1' = \bar{S}_1 > 0 \quad ; \quad V_1' S V_1 = 0 \quad (4.23)$$

$$Z = T_1' U_\Gamma \text{ para algum } U_\Gamma \in \mathbb{R}^{q-v \times v} \quad (4.24)$$

(iii)

$$\text{Ker } CP_1 \subseteq \text{Ker } Y \quad (4.25)$$

$$\text{Ker } B' S_1 \subseteq \text{Ker } Z' \quad (4.26)$$

□

Para efeitos algorítmicos, assumiremos neste capítulo  $v = q - m$ , o que permitirá utilizar a relação (4.26) (em lugar de (4.25), como no capítulo 3) para o cálculo da

matriz de realimentação de saídas  $K$ .

Também observa-se que se matrizes  $P_1, S_1, V_1$  e  $T_1$  forem encontradas tais que o Corolário 4.3.1 é verdadeiro e  $K$  é a realimentação de saídas correspondente, então :

- a condição de acoplamento entre as partes (i) e (ii) pode ser descrita por :

$$S_1 P_1 = 0 \quad (4.27)$$

- a função de Lyapunov :  $v_1(\zeta_1) = \zeta_1' S_1 \zeta_1$ , com

$$S_1 = \begin{bmatrix} V_1 & \bar{V}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{P}_1^{-1} & 0 \\ 0 & \bar{S}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1' \\ \bar{V}_1' \end{bmatrix}$$

e

$$\bar{T}_1 = (V_1' V_1)^{-1} V_1' + D_l T_1 = V^\dagger + D_l T_1 ; \quad \bar{V}_1 = T_1' (T_1 T_1')^{-1} V_1' - V_1 D_l = T^\dagger - V_1 D_l,$$

é estritamente decrescente ao longo das trajetórias do sistema de *ordem reduzida* em malha fechada (4.18).

Lembrando que  $A = J_1 - J_2 J_4^{-1} J_3$   $B = B_1$  e  $C = C_1 - C_2 J_4^{-1} J_3$ , pode-se reformular a condição necessária e suficiente fornecida no Corolário 4.3.1 diretamente em termos do modelo descritor (4.1), (4.2).

**Proposição 4.3.1** [LCS00] : *Existe uma matriz de realimentação de saídas  $K \in \mathbb{R}^{m \times p}$  tal que o sistema em malha fechada (4.4) é assintoticamente estável se e somente se existem matrizes ( $P_1 = P_1' \geq 0$ ,  $P_2$ , e  $S_1 = S_1' \geq 0$ ,  $S_2$  e  $Z$ ) tais que as seguintes condições são verdadeiras para algum par de matrizes  $V_1$  e  $T_1$  verificando  $T_1 V_1 = 0$*

i)  $\forall Q_V = Q_V' > 0$ ,  $Q_V \in \mathbb{R}^{v \times v}$  tem-se:

$$J_1 P_1 + J_2 P_2 + P_1 J_1' + P_2 J_2' + B Y + Y' B' = -V_1 Q_V V_1' \quad (4.28)$$

$$J_3 P_1 + J_4 P_2 = 0 \quad (4.29)$$

$$(4.20) \quad e \quad (4.21)$$

ii)  $\forall Q_T = Q_T' > 0$ ,  $Q_T \in \mathbb{R}^{q-v \times q-v}$  tem-se:

$$S_1 J_1 + S_2 J_3 + J_1' S_1 + J_3' S_2 + Z C_1 + C_1' Z' = -T_1' Q_T T_1 \quad (4.30)$$

$$S_1 J_2 + S_2 J_4 + Z C_2 = 0 \quad (4.31)$$

$$(4.23) \quad e \quad (4.24)$$

iii)

$$Ker CP \subseteq Ker Y \quad (4.32)$$

$$Ker B'S \subseteq Ker Z' \quad (4.33)$$

**Demonstração :** Desde que  $J_4$  é inversível, as equações (4.29) e (4.31) fornecem, respectivamente:

$$P_2 = -J_4^{-1} J_3 P_1 \quad (4.34)$$

$$S_2 = -(S_1 J_2 + Z C_2) J_4^{-1} \quad (4.35)$$

Assim substituindo (4.34) e (4.35) em (4.28) e (4.30), respectivamente, obtêm-se as equações (4.19) e (4.22) do Corolário 4.3.1; o inverso também é verdadeiro.  $\square$

### 4.3.1 Aspectos algorítmicos

O Corolário 4.3.1 e a Proposição 4.3.1 fornecem condições necessárias e suficientes equivalentes para a existência da matriz de realimentação de saídas  $K$  que estabiliza o sistema em malha fechada. Como no capítulo anterior, a caracterização quadrática do Corolário 4.3.1 e do Teorema 4.3.1 pode ser usada para calcular matrizes de realimentação de saídas  $K$  que estabilizam o sistema em malha fechada. Isto pode ser realizado levando em conta o requisito de acoplamento e resolvendo subsequentemente a parte (i) e a parte (ii) de tal modo a obter via (4.33) a matriz de realimentação de saídas que estabiliza o sistema em malha fechada.

A escolha do algoritmo dual é devido basicamente a que a transformação de coordenadas que leva ao sistema de ordem reduzida não interfere na matriz  $B = B_1$ . Baseado nos resultados prévios e no algoritmo dual proposto no capítulo 3, o seguinte procedimento básico é proposto para calcular uma matriz de realimentação de saídas que estabiliza o sistema em malha fechada quando  $m + p > q$ <sup>1</sup>:

**Passo 1 :**

1.1) Encontrar uma decomposição :

---

<sup>1</sup>Se  $m + p = \bar{\nu} \leq q$ , um compensador dinâmico de ordem  $\nu > q - \bar{\nu}$  pode ser considerado para reencontrar esta condição

$\begin{bmatrix} \bar{M}'_1 \\ \bar{M}'_2 \end{bmatrix} B_1 = \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$ , onde  $\bar{B}_1 \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ ,  $\text{posto}(\bar{B}_1) = m$  e  $\begin{bmatrix} \bar{M}'_1 \\ \bar{M}'_2 \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{q \times q}$  inversível.

Seja  $\begin{bmatrix} M_1 & M_2 \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{q \times q}$  onde  $\begin{bmatrix} M_1 & M_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{M}'_1 \\ \bar{M}'_2 \end{bmatrix} = I_n$ . Calcular a matriz  $\begin{bmatrix} M_3 & M_4 \end{bmatrix}$  como a solução única de

$$J_4 \begin{bmatrix} M_3 & M_4 \end{bmatrix} = -J_3 \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \end{bmatrix}. \quad (4.36)$$

Calcular

$$\begin{bmatrix} A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \bar{M}'_2 \begin{bmatrix} J_1 & J_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{bmatrix}.$$

1.2) Resolver a seguinte equação de Lyapunov generalizada de *ordem reduzida* para encontrar  $P_{12}$  e  $P_{22} = P'_{22} > 0$ :

$$P_{22}A'_{22} + A_{22}P_{22} + P'_{12}A'_{21} + A_{21}P_{12} = -Q_V < 0. \quad (4.37)$$

1.3) Calcular  $V_1 = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{12} \\ P_{22} \end{bmatrix}$  e sejam as matrizes

$A = J_1$ ,  $B = [-J_2 \ V_1]$ ,  $C = \begin{bmatrix} -J_3 \\ C_1 \end{bmatrix}$  e  $\mathcal{E} = \begin{bmatrix} -J_4 & 0 \\ C_2 & 0 \end{bmatrix}$ . Se  $(A, B, C, \mathcal{E})$  não tem zeros invariantes, então ir ao Passo 2; caso contrario, repetir Passo 1 usando uma nova decomposição para  $B_1$ .

**Passo 2:**

2.1) Calcular  $T_1$  como uma base ortogonal do espaço nulo à esquerda de  $V_1$ , isto é :

$$T_1 V_1 = 0 \text{ com } T_1 T'_1 = I_m.$$

2.2) Resolver as equações (4.30), (4.31), (4.23) e (4.24) para encontrar  $S$ ,  $Z$  e  $U_\Gamma$ .

**Passo 3:** Calcular a matriz de realimentação de saídas que estabiliza o sistema em malha fechada, como solução única de

$$S_1 B_1 K = Z \iff \bar{S} T_1 B_1 K = U_\Gamma, \text{ já que } T_1 T'_1 = I_m.$$

**Comentário 4.3.1** Na primeira parte do Passo 1, as matrizes auxiliares  $A_{22} \in \mathfrak{R}^{(q-m) \times (q-m)}$  e  $A_{21} \in \mathfrak{R}^{(q-m) \times m}$  são calculadas sem a necessidade do cálculo da matriz  $A = (J_1 - J_2 J_4^{-1} J_3)$  do sistema de ordem reduzida. Como as matrizes  $A_{22}$ ,  $A_{21}$  devem satisfazer

$$\begin{bmatrix} A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \bar{M}'_2 A \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

Pode-se definir  $\begin{bmatrix} M_3 & M_4 \end{bmatrix} = -J_4^{-1} J_3 \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \end{bmatrix}$ . Portanto  $\begin{bmatrix} M_3 & M_4 \end{bmatrix}$  pode ser obtida pela solução da equação linear (4.36) e o par  $(A_{21}, A_{22})$  pode ser calculado por (4.38). Desde que o sistema em malha aberta é por hipótese estabilizável, segue-se que o par  $(A_{22}, A_{21})$  é estabilizável. Assim as soluções  $(P_{22}, P_{12})$  para (4.37) existem e são tais que:  $\sigma(A_{22} + A_{21} P_{12} (P_{22})^{-1}) = \sigma(H_V)$  (para detalhes, ver [CHL00] e capítulo 3). Note-se também que a equação (4.37) é uma LMI nas variáveis  $P_{12}$  e  $P_{22}$ . Então, as técnicas de programação convexa podem ser usadas para encontrar soluções factíveis para esta desigualdade matricial [BGFB94].

**Comentário 4.3.2** Da teoria apresentada na seção 3.3 do capítulo 3 pode-se demonstrar que os zeros invariantes do sistema de ordem reduzida corresponde aos zeros invariantes de  $(A, B, C, E)$ . Assim, se  $(A, B, C, E)$  não tem zeros invariantes, o sistema

matricial  $P_\lambda = \begin{bmatrix} J_1 - \lambda I_q & J_2 & V_1 \\ J_3 & J_4 & 0 \\ C_1 & C_2 & 0 \end{bmatrix}$  tem posto coluna completo, igual a  $n + q - m$ .

A seguinte equivalência de matrizes pode ser utilizada para a demonstração:

$$\begin{bmatrix} I_q & -J_2 J_4^{-1} & 0 \\ 0 & I_{n-q} & 0 \\ 0 & -C_2 J_4^{-1} & I_p \end{bmatrix} P_\lambda \begin{bmatrix} I_q & 0 & 0 \\ -J_4^{-1} J_3 & I_{n-q} & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 - J_2 J_4^{-1} J_3 - \lambda I_q & 0 & -V_1 \\ 0 & J_4 & 0 \\ C_1 - C_2 J_4^{-1} J_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

Portanto, fazendo uso do sistema normal de ordem reduzida, tem-se

$$\text{posto} \left( \begin{bmatrix} J_1 - J_2 J_4^{-1} J_3 - \lambda I_q & -V_1 \\ C_1 - C_2 J_4^{-1} J_3 & 0 \end{bmatrix} \right) = 2q - m \iff \text{posto}(P_\lambda) = n - q + m \quad (4.40)$$

Logo, o Passo 2 somente é efetuado com soluções estáveis factíveis. Em geral, a existência de zeros invariantes infinitos ou instáveis não permite resolver o Passo 2. Além disso, em casos não freqüentes onde zeros invariantes poderiam aparecer, outras soluções para o Passo 1 poderiam ser geradas de uma nova decomposição expressa por:

$MD = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 & D_{12} \\ 0 & D_2 \end{bmatrix}$  onde  $D_1$  e  $D_2$  são matrizes não-singulares.

Assim determina-se os novos valores de  $M_3$  e  $M_4$  que satisfazem:

$$-J_3 \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 & D_{12} \\ 0 & D_2 \end{bmatrix} = J_4 \begin{bmatrix} M_3 & M_4 \end{bmatrix}$$

#### 4.4 $\mathcal{D}$ -Estabilização por realimentação de saídas

Nesta seção apresenta-se a formulação do problema de estabilização via posicionamento regional de pólos para a classe de sistemas descritores considerada. Neste contexto são usados alguns conceitos e o algoritmo dual para  $\mathcal{D}$ -estabilização já estudados no capítulo 3, assim como alguns conceitos referenciados no apêndice.

As condições seguintes dizem respeito à  $\mathcal{D}$ -estabilizabilidade e à  $\mathcal{D}$ -detectabilidade de sistemas descritores (4.1), (4.2):

O sistema (4.1), (4.2) é  $\mathcal{D}$ -estabilizável se e somente se

$$\text{posto} \left( \begin{bmatrix} \lambda I_q - J_1 & -J_2 & B_1 \\ -J_3 & -J_4 & 0 \end{bmatrix} \right) = n, \forall \lambda \text{ finito} \in \mathcal{D} \quad (4.41)$$

O sistema (4.1), (4.2) é  $\mathcal{D}$ -detectável se e somente se

$$\text{posto} \left( \begin{bmatrix} \lambda I_q - J_1 & -J_2 \\ -J_3 & -J_4 \\ C_1 & C_2 \end{bmatrix} \right) = n, \forall \lambda \text{ finito} \in \mathcal{D} \quad (4.42)$$

Lembrando que  $A = J_1 - J_2 J_4^{-1} J_3 \in \mathbb{R}^{q \times q}$ ,  $B = B_1 \in \mathbb{R}^{q \times m}$  e  $C = C_1 - C_2 J_4^{-1} J_3 \in \mathbb{R}^{p \times q}$ , o Teorema 3.3.1, toma a forma seguinte:

**Corolário 4.4.1** [CSLT02] *Existe uma matriz de realimentação de saídas  $K \in \mathbb{R}^{m \times p}$  tal que  $\sigma(A + BKC) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q\} \in \mathcal{D}$ , para  $\mathcal{D} = \mathcal{D}_V \cup \mathcal{D}_T$  onde  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_{q-p}\} \in \mathcal{D}_T$  e  $\{\lambda_{q-p+1}, \dots, \lambda_q\} \in \mathcal{D}_V$  se e somente se existem matrizes ( $P_1 = P_1' \geq 0$ ,  $P_1 \in \mathbb{R}^{q \times q}$ ,  $Y \in \mathbb{R}^{m \times q}$ ,  $S_1 = S_1' \geq 0$ ,  $S_1 \in \mathbb{R}^{q \times q}$  e  $Z \in \mathbb{R}^{q \times p}$ ) tais que as seguintes condições são verificadas para algumas matrizes  $V_1 \in \mathbb{R}^{q \times p}$  e  $T_1 \in \mathbb{R}^{q-p \times q}$  verificando  $T_1 V_1 = 0$ :*

(i)

$$\Delta_V \otimes P_1 + \Theta_V \otimes (AP_1 + BY) + \Theta_V' \otimes (P_1 A' + Y' B') = -(V_1 \otimes I_p)(Q_{V_1})(V_1 \otimes I_p)' \quad (4.43)$$

$$V_1' P_1 V_1 = \bar{P}_1 > 0; T_1 P_1 T_1' = 0 \quad (4.44)$$

$$Y = W_{\Pi} V_1' \text{ para algum } W_{\Pi} \in \mathbb{R}^{m \times p} \quad (4.45)$$

(ii)

$$\Delta_T \otimes S_1 + \Theta_T \otimes (S_1 A + ZC) + \Theta'_T \otimes (A' S_1 + C' Z') = -(T'_1 \otimes I_{q-p})(Q_{T_1})(I_{q-p} \otimes T_1) \quad (4.46)$$

$$T_1 S_1 T'_1 = \bar{S}_1 > 0; V' S V = 0 \quad (4.47)$$

$$Z = T'_1 U_\Gamma \text{ para algum } U_\Gamma \in \mathbb{R}^{m \times p} \quad (4.48)$$

(iii)

$$\text{Ker } CP_1 \subseteq \text{Ker } Y \quad (4.49)$$

$$\text{Ker } B' S_1 \subseteq \text{Ker } Z' \quad (4.50)$$

□

Da mesma forma que na seção anterior, as condições do Corolário anterior podem ser reescritas utilizando-se diretamente as matrizes do modelo descritor. Em particular a equação (4.46), pode ser equivalentemente substituída por:

$$\Delta_T \otimes S_1 + \Theta_T \otimes (S_1 J_1 + S_2 J_3 + ZC_1) + \Theta'_T \otimes (J'_1 S_1 + J'_3 S'_2 + C'_1 Z') = -(T'_1 \otimes I_{q-p})(Q_{T_1})(I_{q-p} \otimes T_1) \quad (4.51)$$

$$S_1 J_2 + S_2 J_4 + ZC_2 = 0 \quad (4.52)$$

Assim, o procedimento básico seguinte pode ser usado para calcular a matriz realimentação de saídas que posiciona os pólos numa região  $\mathcal{D} = \mathcal{D}_V \cup \mathcal{D}_T$  do tipo LMI quando a condição  $m + p > q$  é verificada:

**Passo 1:**

1.1) Encontrar uma decomposição:

$$\begin{bmatrix} \bar{M}'_1 \\ \bar{M}'_2 \end{bmatrix} B_1 = \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.53)$$

onde:  $\bar{B}_1 \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $\text{posto}(\bar{B}_1) = m$ ,  $\begin{bmatrix} \bar{M}'_1 \\ \bar{M}'_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{q \times q}$  inversível. Seja  $\begin{bmatrix} M_1 & M_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{q \times q}$

onde  $\begin{bmatrix} M_1 & M_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{M}'_1 \\ \bar{M}'_2 \end{bmatrix} = I_q$ . Calcular a matriz  $\begin{bmatrix} M_3 & M_4 \end{bmatrix}$  como solução única de

$$J_4 \begin{bmatrix} M_3 & M_4 \end{bmatrix} = -J_3 \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \end{bmatrix} \quad (4.54)$$

Calcular

$$\begin{bmatrix} A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \bar{M}'_2 \begin{bmatrix} J_1 & J_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \end{bmatrix} \quad (4.55)$$

1.2) Resolver a LMI para encontrar as matrizes  $P_{12}$  e  $P_{22} = P'_{22} > 0$ :

$$\Delta_V \otimes (P_{22}) + \Theta_V \otimes (A_{22}P_{22} + A_{21}P_{12}) + \Theta'_V \otimes (P_{22}A'_{22} + P'_{12}A'_{21}) = -Q_V > 0 \quad (4.56)$$

1.3) Calcular  $V_1 = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{12} \\ P_{22} \end{bmatrix}$  e sejam as matrizes  $\mathcal{A} = J_1$ ,  $\mathcal{B} = [-J_2 \quad -V_1]$ ,  $\mathcal{C} = \begin{bmatrix} -J_3 \\ -C_1 \end{bmatrix}$  e  $\mathcal{E} = \begin{bmatrix} -J_4 & 0 \\ -C_2 & 0 \end{bmatrix}$ . Se  $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{E})$  não tem zeros invariantes no exterior de  $\mathcal{D}_T$ , então ir ao Passo 2; caso contrário, repetir Passo 1 usando uma nova decomposição para  $B_1$ .

**Passo 2:**

2.1) Calcular  $T_1$  tal que

$$T_1 V_1 = 0 \quad \text{com} \quad T_1 T'_1 = I_m \quad (4.57)$$

2.2) Resolver as duas equações seguintes, sob as restrições es (4.47) e (4.48), para encontrar  $S$  e  $Z$ :

$$\Delta_T \otimes S_1 + \Theta_T \otimes (S_1 J_1 + S_2 J_3 + Z C_1) + \Theta'_T \otimes (J'_1 S_1 + J'_3 S'_2 + C'_1 Z') = -(T'_1 \otimes I_m)(Q_{T1})(I_m \otimes T_1) \quad (4.58)$$

$$S_1 J_2 + S_2 J_4 + Z C_2 = 0 \quad (4.59)$$

A matriz de realimentação de saídas  $\mathcal{D}$ -estabilizante correspondente verifica

$$S_1 B K = Z \iff \bar{S} T_1 B_1 K = U_T, \quad \text{já que } T_1 T'_1 = I_m.$$

o

**Comentário 4.4.1** Desde que o sistema de ordem reduzida em malha aberta é por hipótese  $\mathcal{D}$ -estabilizável, segue-se que o par  $(A_{22}, A_{21})$  é  $\mathcal{D}$ -estabilizável. Assim a solução  $(P_{22}, P_{12})$  para (4.56) existe e é tal que:  $\sigma(A_{22} + A_{21}P_{12}(P_{22})^{-1}) = \sigma(H_V) \in \mathcal{D}_V$  (para detalhes, ver [CHL00] e capítulo 3). Note-se também que a equação (4.56) é uma LMI nas variáveis  $P_{12}$  e  $P_{22}$ . Então, as técnicas de programação convexa podem ser usadas para encontrar soluções factíveis para esta desigualdade matricial [BGFB94]. Note-se também que a desigualdade (4.58) é obtida de (4.46), definindo  $S_2 = -(S_1 J_2 + Z C_2) J_4^{-1}$ , que é equivalente a (4.59).

É possível mostrar que os zeros invariantes do sistema de ordem reduzida  $(A, V, C)$  corresponde aos zeros invariantes de  $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{E})$ . Assim, se  $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{E})$  não tem zeros

invariantes na região  $\mathcal{D}_T$ , o sistema matricial  $P_\lambda = \begin{bmatrix} J_1 - \lambda I_q & J_2 & -V \\ & J_3 & J_4 & 0 \\ & C_1 & C_2 & 0 \end{bmatrix}$  tem posto

coluna completo, igual a  $n + q - m$ ,  $\forall \lambda \in \mathcal{D}_T$ . Assim, o Passo 2 somente é efetuado com soluções  $\mathcal{D}_T$ -estáveis factíveis. Em geral, a existência de zeros invariantes  $\mathcal{D}_T$ -instáveis não permite resolver o Passo 2. Além disso, em casos não freqüentes onde zeros invariantes poderiam aparecer, outras soluções para o Passo 1 poderiam ser geradas de uma nova decomposição (4.53), não necessariamente ortogonal, expressa como  $MD = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 & D_{12} \\ 0 & D_2 \end{bmatrix}$  onde  $D_1$  e  $D_2$  são matrizes não-singulares. Assim determina-se os novos valores de  $M_3$  e  $M_4$ , que devem satisfazer:

$$J_4 \begin{bmatrix} M_3 & M_4 \end{bmatrix} = -J_3 \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 & D_{12} \\ 0 & D_2 \end{bmatrix}$$

## 4.5 Exemplo

Considere os dados correspondente a [Dua99]:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} ; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

O sistema correspondente  $(C, A, E, B)$  é fortemente controlável e observável e  $m + p = 4 > q$ . Os pólos de malha aberta são

$$\sigma(E, A) = \{ 0.755 ; -0.877 + 0.745i \quad -0.877 + 0.745j \}$$

A) Algoritmo dual:

Para obter os pólos de malha fechada com partes reais menores que  $-\alpha = -1$ , os cálculos usando  $(A + \alpha I)$  em substituição a  $A$ . Assim, técnicas de programação convexa padrão são aplicadas para encontrar soluções factíveis para as equações quadráticas

acopladas, sem requisitos adicionais que melhoram a solução numérica ou o desempenho em malha fechada.

A matriz

$$\begin{bmatrix} M_1 & M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.7071 & 0.4082 & -0.5774 \\ -0.7071 & -0.4082 & 0.5774 \\ 0.0000 & 0.8165 & 0.5774 \end{bmatrix}$$

encontrada no passo 1.1 leva a calcular  $M_3$  e  $M_4$  como a solução única de:

$$J_4 \begin{bmatrix} M_3 & M_4 \end{bmatrix} = -J_3 \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \end{bmatrix} ;$$

$$\begin{bmatrix} M_3 & M_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0000 & -0.8165 & -0.5774 \end{bmatrix}$$

Calcula-se

$A_{22} = -0.6670$ ,  $A_{21} = \begin{bmatrix} -1.1790 & -0.4080 \end{bmatrix}$ . Uma solução para o passo 1.2 é:  $P_{22} = 1$ ,  $P_{12} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  que resulta no passo 1.3 :

$$V_1 = \begin{bmatrix} -0.4080 & 0.7070 & -0.5770 \\ -0.8160 & 0.0000 & 0.5770 \\ 0.4082 & 0.7071 & 0.5770 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.9860 \\ -0.2390 \\ 0.9860 \end{bmatrix}$$

Esta solução não tem zeros invariantes. Isto implica no passo 2.1:

$$T_1 = \begin{bmatrix} 0.697 & 0.069 & 0.714 \\ -0.169 & 0.983 & 0.069 \end{bmatrix}$$

Uma solução factível para o passo 2.2 é então encontrada:

$$S_1 = \begin{bmatrix} 0.0478 & 0.1518 & 0.0847 \\ 0.1518 & 0.4959 & 0.2722 \\ 0.0847 & 0.2722 & 0.1507 \end{bmatrix}, \quad S_2 = \begin{bmatrix} -0.1414 \\ -0.4215 \\ -0.2437 \end{bmatrix}$$

$$Z = \begin{bmatrix} -0.2030 & -0.2597 \\ -0.6401 & -0.7894 \\ -0.3583 & -0.4512 \end{bmatrix}, \quad U_r = \begin{bmatrix} -0.4416 & -0.5579 \\ -0.6198 & -0.7635 \end{bmatrix}$$

A matriz de realimentação de saídas correspondente que estabiliza o sistema em malha

fechada é:

$$K = \begin{bmatrix} -2.0919 & -4.4084 \\ -3.1958 & -9.2350 \end{bmatrix}$$

que resulta:

$$\sigma(E, A + BKC) = \{ -1.845 ; -1.2297 + 0.5723j \quad -1.2297 - 0.5723j \}$$

onde o autovalor  $-1.845$  corresponde ao passo 1.

B) Algoritmo dual na região  $\mathcal{D}$  do tipo *LMI*:

A região  $\mathcal{D}_V$  do tipo *LMI* é uma faixa vertical definida por:  $\mathcal{D}_V = \{ x + jy \in \mathcal{C} ; -3.5 < x < -2.5 \}$ . A região  $\mathcal{D}_T$  do tipo *LMI* é definida a partir da interseção dos setores cônicos e um disco, definido por:  $\{ x + jy \in \mathcal{C} ; x < -2.5, |x + jy| < 5 \text{ e } \tan 45^\circ x < |y| \}$ . Assim, técnicas de programação convexa são aplicadas para encontrar soluções factíveis para as equações de posicionamento regional de pólos sem requisitos adicionais.

$$\text{A matriz } \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.7071 & 0.4082 & -0.5774 \\ -0.7071 & -0.4082 & 0.5774 \\ 0.0000 & 0.8165 & 0.5774 \\ 0.0000 & -0.8165 & -0.5774 \end{bmatrix} \text{ encontrada no passo 1.1}$$

leva a calcular:  $A_{22} = -0.6667$   $A_{21} = \begin{bmatrix} -0.8165 & -0.9428 \end{bmatrix}$ .

Uma solução para o passo 1.2 é:

$$P_{22} = 1, P_{12} = \begin{bmatrix} 2.6616 \\ 0.0011 \end{bmatrix}, \text{ que resulta no passo 1.3:}$$

$$V_1 = \begin{bmatrix} -0.9860 \\ -0.2390 \\ 0.9860 \end{bmatrix}.$$

Esta solução não tem zeros invariantes e implica, no passo 2.1:

$$T_1 = \begin{bmatrix} 0.2034 & 0.0501 & 0.9778 \\ -0.4590 & 0.8870 & 0.0501 \end{bmatrix}$$

Uma solução para o passo 2.2 é então encontrada:

$$Z = \begin{bmatrix} 546.5093 & 26024.2050 \\ -25080.3660 & -156113.2600 \\ -54283.3750 & -241688.3500 \end{bmatrix}; U_T = \begin{bmatrix} -54223.7730 & -238850.1900 \\ -25214.8880 & -162519.0800 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} S_1 & S_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1092.1903 & -4276.1339 & -5006.9700 & 30484.6650 \\ -4276.1339 & 33000.0840 & 56298.632 & -187331.5300 \\ 5006.9700 & 56298.6320 & 105776.5400 & -293181.5100 \end{bmatrix}.$$

A matriz de realimentação de saídas correspondente que  $\mathcal{D}$ -estabiliza o sistema em malha fechada é:

$$K = \begin{bmatrix} 0.1052 & -9.2545 \\ -1.2062 & 4.7089 \end{bmatrix},$$

que resulta :  $\sigma(A + BKC) = \{-2.8409, -3.0511 \pm 1.5106j\} \subset \mathcal{D}_T$ . Onde o autovalor  $-2.8409 \subset \mathcal{D}_V$  corresponde ao passo 1.

$\triangle$

## 4.6 Conclusão

Neste capítulo foram estudados o problema de estabilização e posicionamento regional de pólos para uma classe de sistemas descritores. A estrutura particular do modelo foi explorado para propor uma abordagem baseada na solução do conjunto de equações acopladas de Lyapunov.

A principal contribuição foi apresentar uma adaptação da caracterização quadrática das equações de Lyapunov para resolver o problema de estabilização e posicionamento regional de pólos para uma classe de sistemas descritores. Na primeira seção foi usado o algoritmo dual para tratar o problema de estabilização via solução das equações acopladas de Lyapunov. Na segunda seção se fez a adaptação desta abordagem para tratar o problema de posicionamento regional de pólos.

Sistemas descritores cuja a matriz  $C$  de saída apresenta a estrutura na forma  $C = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \end{bmatrix}$  podem ser tratados de forma similar a partir do algoritmo primal.

# Capítulo 5

## Caracterização e uso de subespaços invariantes em sistemas descritores

### 5.1 Introdução

Estuda-se neste capítulo o problema de estabilização usando realimentação estática de saídas para o sistema descritor linear. Lembre-se que um sistema descritor consiste basicamente de uma mistura de  $q$  equações diferenciais e  $n - q$  equações algébricas [VLK81] [Lew86] [Dai89]. Devido a esta característica, a estabilização de sistemas descritores requer, além da garantia da estabilidade assintótica em malha fechada, outras duas propriedades importantes: regularidade e ausência de impulsões. O problema de calcular uma realimentação de saídas apropriada para o qual estas propriedades em malha fechada são verificadas, é denominado de *estabilização forte* ou, simplesmente, *S-estabilização*<sup>1</sup>. Diferentemente do capítulo anterior, o sistema descritor em malha aberta não possui nenhuma estrutura ou propriedade particular. Requer-se apenas que o sistema seja fortemente estabilizável e fortemente detectável, propriedades estas necessárias para existência de solução (veja apêndice A).

As três propriedades desejadas podem ser descritas em termos da autoestrutura do sistema em malha fechada: (i) a estabilidade assintótica é equivalente a que todos os pólos finitos estejam no semiplano esquerdo; (ii) a ausência dos modos impulsivos é equivalente a ter  $q$  pólos finitos em malha fechada; e (iii) a regularidade é garantida se o sistema é livre de impulsões.

Da interpretação dada acima, condições necessárias e suficientes para a existência de uma realimentação de saídas *S-estabilizável* podem ser encontradas como um con-

---

<sup>1</sup>Do inglês Strong Stabilization

junto de Equações acopladas de Sylvester generalizadas [Dua99], [Fle88]. Como no caso do sistema normal, estas equações de Sylvester podem ser interpretadas em termos geométricos e também serem usadas para resolver o problema considerado. Em particular, introduz-se a noção de subespaços fortemente *O.S.*  $(C, A, E, B)$ -invariantes e mostra-se como este conceito pode ser usado como mecanismo intermediário para a construção da realimentação de saídas.

Como consequência mostra-se que equações acopladas de Lyapunov generalizadas podem também ser usadas para obter um conjunto de condições necessárias e suficientes para a existência de uma realimentação de saídas que  $S$ -estabiliza o sistema. Faz-se então uma extensão para o caso de sistemas descritores dos procedimentos algorítmicos dos capítulos 2 e 3 utilizando equações de Lyapunov generalizadas. Como ficará evidenciado neste capítulo, é notável o fato que mesmo no caso geral considerado, a solução do problema ainda pode ser associada a um sistema normal de ordem reduzida  $q$ , o qual pode ser obtido a partir de uma transformação especial de coordenadas.

Na seção 5.2, introduz-se a noção de subespaço fortemente *O.S.*  $(C, A, E, B)$ -invariante e a equivalência básica entre a existência deste tipo de subespaço fortemente e as equações acopladas de Sylvester generalizadas associadas a existência de uma realimentação estática de saídas para o sistema. Na terceira seção apresenta-se as condições de existência de solução do problema de  $S$ -estabilização através das equações acopladas de Sylvester e de Lyapunov generalizadas. Baseado nos algoritmos apresentados nos capítulos anteriores, propõe-se na seção 5.4 um algoritmo para resolver o problema de  $S$ -estabilização; um exemplo numérico ilustra a aplicação do algoritmo. Alguns comentários conclusivos são finalmente apresentados.

## 5.2 Preliminares

Seja o sistema descritor invariante no tempo descrito por :

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (5.1)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (5.2)$$

onde:  $x \in \mathcal{X} \sim \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathcal{U} \sim \mathbb{R}^m$ ,  $y \in \mathcal{Y} \sim \mathbb{R}^p$  e  $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\text{posto}(E) = q < n$ ; as demais matrizes têm dimensões adequadas com  $\text{posto}(B) = m$  e  $\text{posto}(C) = p$ .

O problema a ser estudado é encontrar uma lei de controle do tipo realimentação

de saídas  $u(t) = Ky(t)$  tal que o sistema em malha fechada

$$E\dot{x}(t) = (A + BKC)x(t) \quad (5.3)$$

é  $S$ -estável: regular, assintoticamente estável e livre de impulsões.

Apresentam-se a seguir, os conceitos e definições básicos da teoria de controle geométrico para sistemas descritores, necessários para a extensão dos resultados anteriores [Lew86], [OL89], [OL90]. Um subespaço  $\mathcal{V} \subset \mathcal{X}$  é  $(A, E, B)$ -invariante se existe  $F : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  tal que  $(A + BF)\mathcal{V} \subset E\mathcal{V}$ , ou equivalentemente,  $A\mathcal{V} \subset E\mathcal{V} + \text{Im}(B)$ . Dualmente, um subespaço  $\mathcal{T} \subset \mathcal{X}$  é  $(C, A, E)$ -invariante se existe  $L : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$  tal que  $(A + LC)\mathcal{T} \subset E\mathcal{T}$ , ou equivalentemente,  $E\mathcal{T} \supset A(\mathcal{T} \cap \text{Ker}(C))$ .

**Definição 5.2.1** [CLT01] *Um subespaço  $\mathcal{V} \subset \mathcal{X}$ , de dimensão- $v$ , é  $(C, A, E, B)$ -invariante se  $\mathcal{V}$  é  $(A, E, B)$ -invariante e  $(C, A, E)$ -invariante.*

Baseado no capítulo 2, as propriedades de estabilizabilidade e detectabilidade, podem ser consideradas através das duas definições a seguir :

- (i) um subespaço  $(A, E, B)$ -invariante  $\mathcal{V}$  é  $(A, E, B)$ -internamente estabilizável se existe  $F$  tal que  $(E, A + BF)|_{\mathcal{V}}$  é (assintoticamente) estável; e
- (ii) um subespaço  $(C, A, E)$ -invariante  $\mathcal{V}$  é  $(C, A, E)$ -externamente detectável se existe  $L$  tal que  $(E, A + LC)|_{\mathcal{X}/\mathcal{V}}$  é (assintoticamente) estável.

A partir das definições (i) e (ii) obtém-se a seguinte definição :

**Definição 5.2.2** [CLT01] *Um subespaço  $\mathcal{V}$ , de dimensão- $v$ , é O.S.  $(C, A, E, B)$ -invariante, se  $\mathcal{V}$  é  $(A, E, B)$ -internamente estabilizável e  $(C, A, E)$ -externamente detectável.*

Observe, entretanto, que um subespaço  $\mathcal{V}$  pode ser O.S.  $(C, A, E, B)$ -invariante mas o sistema em malha fechada associado ser não regular ou possuir modos impulsivos. Uma definição mais forte que a definição 5.2.2 e que permite considerar, em particular, a propriedade de regularizabilidade [OL90], segue :

**Definição 5.2.3** [CLT01] *Um subespaço  $\mathcal{V} \subset \mathcal{X}$ , de dimensão- $v$ , é fortemente O.S.  $(C, A, E, B)$ -invariante se ele é O.S.  $(C, A, E, B)$ -invariante e  $\text{Ker } E \cap \mathcal{V} = \{0\}$ .*

Seja  $V \in \mathbb{R}^{n \times v}$  tal que  $\text{Im}(V) = \mathcal{V}$ . Então a condição  $\text{Ker } E \cap \mathcal{V} = \{0\}$  pode ser equivalentemente substituída por [OL90]:

$$\text{posto}(EV) = v \quad (5.4)$$

Assumindo que (5.4) é verificado, a matriz  $T \in \mathfrak{R}^{(q-v) \times n}$  é um anulador à esquerda de  $EV$ , se  $TEV = 0$  e  $\text{Ker}(T) \cap \text{Im}(E) = \{0\}$ .

Assim, um subespaço  $\mathcal{V} = \text{Im}(V)$  é fortemente  $O.S.$   $(C, A, E, B)$ -invariante se e somente se existem matrizes  $(H_V \in \mathfrak{R}^{v \times v}, W \in \mathfrak{R}^{m \times v})$  e  $(H_T \in \mathfrak{R}^{(q-v) \times (q-v)}, U \in \mathfrak{R}^{(q-v) \times v})$  soluções para as seguintes *Equações acopladas de Sylvester generalizadas* :

$$\begin{aligned} AV - EVH_V &= -BW, & \sigma(H_V) &\in C^- \\ TA - H_TTE &= -UC, & \sigma(H_T) &\in C^- \\ TEV &= 0 \end{aligned}$$

As definições apresentadas neste capítulo e as equações (5.5), (5.6) e (5.7), são uma extensão para sistemas descritores, das definições e das equações (2.9), (2.10) e (2.11) apresentadas no capítulo 2.

### 5.3 $(C, A, E, B)$ -invariância e realimentação de saídas

O Teorema 5.3.1 a seguir relaciona o conceito de subespaços fortemente  $O.S.$   $(C, A, E, B)$ -invariantes à existência de uma lei de controle de realimentação de saídas  $u(t) = Ky(t)$  que  $S$ -estabiliza o sistema em malha fechada. Este resultado estende para o caso de sistemas descritores o resultado formulado pelo Teorema 2.2.1 apresentado no capítulo 2.

**Teorema 5.3.1** [CLT01] *Existe uma matriz de realimentação de saídas  $K : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{U}$  tal que  $\sigma(E, A + BKC) \in C^-$  e o sistema em malha fechada é regular e livre de impulsões se e somente se as seguintes condições são verificadas para algumas matrizes  $(V \in \mathfrak{R}^{n \times v}, H_V \in \mathfrak{R}^{v \times v}, W \in \mathfrak{R}^{m \times v})$ ,  $(T \in \mathfrak{R}^{q-v \times n}, H_T \in \mathfrak{R}^{q-v \times q-v}, U \in \mathfrak{R}^{n-v \times n-v})$  e para algum escalar positivo  $v \leq n$ :*

$$AV - EVH_V = -BW, \quad \sigma(H_V) \in C^- \quad (5.5)$$

$$TA - H_TTE = -UC, \quad \sigma(H_T) \in C^- \quad (5.6)$$

$$TEV = 0 \quad (5.7)$$

$$\text{Ker}(CV) \subseteq \text{Ker}(W) \quad (5.8)$$

$$\text{Ker}(B'T') \subseteq \text{Ker}(U') \quad (5.9)$$

onde:  $\text{posto}(EV) = \text{posto}(TE) = q$ .

**Demonstração :** A demonstração, mostrada no apêndice B, utiliza argumentos de posicionamento de autoestrutura. Ela leva em consideração apenas a estrutura finita do sistema descritor em malha fechada, que define o subespaço invariante associado aos pólos finitos, dados por:  $\sigma(E, A + BKC) = \sigma(H_V) \dot{\cup} \sigma(H_T) \square$

Como no capítulo 2, uma caracterização quadrática dos subespaços fortemente *O.S.*  $(C, A, E, B)$ -invariantes pode ser obtida a partir da definição 5.2.1 através das condições  $\sigma(H_V) \in \mathcal{C}^-$  e  $\sigma(H_T) \in \mathcal{C}^-$ , ao substituírem-se as condições de estabilizabilidade expressa nas equações de Sylvester (5.5), (5.6) pelas duas condições de estabilidade de Lyapunov [Che96]:

$$\sigma(H_V) \in \mathcal{C}^- \iff \exists \Pi = \Pi' > 0 \text{ tal que } \Pi H_V' + H_V \Pi = -Q_V, \forall Q_V = Q_V' > 0 \quad (5.10)$$

$$\sigma(H_T) \in \mathcal{C}^- \iff \exists \Gamma = \Gamma' > 0 \text{ tal que } H_T' \Gamma + \Gamma H_T = -Q_T, \forall Q_T = Q_T' > 0 \quad (5.11)$$

**Teorema 5.3.2 [CLT01] :** *Existe uma matriz de realimentação de saídas  $K : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{U}$  tal que  $\sigma(E, A + BKC) \in \mathcal{C}$ , se e somente se as condições seguintes são verificadas para algum escalar positivo  $v \leq n$  e para algum par de matrizes  $V \in \mathbb{R}^{n \times v}$  e  $T \in \mathbb{R}^{q-v \times n}$  tais que  $TEV = 0$ , onde  $\text{posto}(EV) = \text{posto}(TE) = q$ :*

*(i)  $\forall Q_V = Q_V' > 0, Q_V \in \mathbb{R}^{v \times v}$ , existem matrizes  $P = P' \geq 0, P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$  tais que*

$$APE' + EPA' + BYE' + EY'B' = -EVQ_VV'E' \quad (5.12)$$

$$V'PV > 0 ; TEPE'T' = 0 \quad (5.13)$$

$$Y = W_\Pi V' \text{ para algum } W_\Pi \in \mathbb{R}^{m \times v} \quad (5.14)$$

*(ii)  $\forall Q_T = Q_T' > 0, Q_T \in \mathbb{R}^{q-v \times q-v}$ , existem matrizes  $S = S' \geq 0, S \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $Z \in \mathbb{R}^{n \times v}$  tais que*

$$A'SE + E'SA + C'Z'E + E'ZC = -E'T'Q_TTE \quad (5.15)$$

$$TST' > 0 ; V'E'SEV = 0 \quad (5.16)$$

$$Z = T'U_\Gamma \text{ para algum } U_\Gamma \in \mathbb{R}^{q-v \times v} \quad (5.17)$$

(iii)

$$\text{Ker } CP \subseteq \text{Ker } Y \quad (5.18)$$

$$\text{Ker } B'S' \subseteq \text{Ker } Z' \quad (5.19)$$

**Demonstração :** A demonstração, apresentada no apêndice B, é tecnicamente similar à demonstração do Teorema 3.2.1.  $\square$

Como no capítulo 3, pode-se resgatar a condição de acoplamento entre as partes (i) e (ii) do Teorema 5.3.2 na forma seguinte :

**Corolário 5.3.1** *Se  $\mathcal{V} \subset \mathcal{X}$  é um subespaço O.S.  $(C, A, E, B)$ -invariante, então para todo par de matrizes  $(P, S)$ , solução para as partes (i) e (ii) do Teorema 5.3.2, verifica-se ;*

$$SEP = 0 \quad (5.20)$$

com:  $\text{posto}(SE) = \text{posto}(EP) = q$ .

## 5.4 Aspectos algorítmicos

As caracterizações algébricas dos Teoremas 5.3.1 e 5.3.2 podem ser usadas para construir subespaços fortemente O.S.  $(C, A, E, B)$ -invariantes que levam ao cálculo da matriz de realimentação de saídas  $K$ . Como no caso de sistemas normais (capítulo 3 [CHL00], [SL93a]), isto pode ser realizado, por exemplo, levando em conta o requisito de acoplamento e resolvendo subsequentemente as equações acopladas de Sylvester ou de Lyapunov generalizadas.

### 5.4.1 Extensão do algoritmo de Syrmos-Lewis

Baseado no algoritmo apresentado no capítulo 2, propõe-se o seguinte procedimento básico para calcular a realimentação de saídas que estabiliza o sistema em malha fechada, quando  $m + p > q$ . Os autovalores de malha fechada são posicionados arbitrariamente próximos ao conjunto  $\Lambda = \Lambda_T \dot{\cup} \Lambda_V$ , onde  $\Lambda_T = \{\lambda_1, \dots, \lambda_{q-p}\}$  e  $\Lambda_V = \{\lambda_{q-p+1}, \dots, \lambda_q\}$  são conjuntos simétricos de autovalores pré-especificados. O sistema  $(E, A, B, C)$  é considerado fortemente controlável e fortemente detectável (ver apêndice A).

**Passo 1:** Escolhe-se uma matriz  $H_T \in \mathfrak{R}^{q-p \times q-p}$  tal que  $\sigma(H_T) = \Lambda_T \in \mathcal{C}^-$  e resolve-se a equação de Sylvester (5.6) para encontrar uma matriz  $T \in \mathfrak{R}^{q-p \times n}$  tal que

$$\text{posto} \left( \begin{bmatrix} TE \\ C \end{bmatrix} \right) = q \quad (5.21)$$

**Passo 2:** Resolve-se a equação de Sylvester (5.5), para alguma matriz  $H_V \in \mathfrak{R}^{p \times p}$  tal que  $\sigma(H_V) = \Lambda_V \in \mathcal{C}^-$  levando em consideração que a matriz  $V$  deve verificar a condição de acoplamento (5.7) e tomando em conta que  $\text{posto}(EV) = v$  (ou  $\text{Ker}(TE) = \text{Ker}(E) \oplus \text{Im}(V)$ , onde  $\oplus$  representa a soma direta)<sup>2</sup>.

**Passo 3:** Por construção, a matriz  $V$  deve verificar que  $\text{posto}(CV) = p$  e a matriz  $K$  pode ser calculada por:

$$K = W(CV)^{-1} \quad (5.22)$$

o

**Comentário 5.4.1** Os passos 1 e 2 podem ser resolvidos utilizando-se técnicas padrões para posicionamento de auto-estrutura. Considerando-se as matrizes  $H_T \in \mathfrak{R}^{q-p \times q-p}$  e  $H_V \in \mathfrak{R}^{p \times p}$ :

**Passo 1:** Encontrar  $t_j \in \mathcal{C}^n$  e  $u_j \in \mathcal{C}^p$ , tais que:

$$\begin{bmatrix} t'_j & u'_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A - \lambda_j E \\ C \end{bmatrix} = 0 \quad \forall j = 1, \dots, q-p \quad (5.23)$$

As linhas da matriz  $T \in \mathfrak{R}^{(q-p) \times n}$ , denotadas por  $T_j$ , são formadas a partir dos vetores  $t_j$ , como segue:

- se  $\lambda_j \in \mathfrak{R}$ , então  $T_j = t'_j$ ;
- se  $\lambda_j \in \mathcal{C}$ , considera-se  $\lambda_{j+1} = \lambda_j^*$  e  $\begin{cases} T_j = \text{Re}(t'_j) \\ T_{j+1} = \text{Im}(t'_j) \end{cases}$ .

**Passo 2:** Determinar  $v_i \in \mathcal{C}^n$  e  $w_i \in \mathcal{C}^p$  tais que:

$$\begin{bmatrix} A - \lambda_i E & B \\ TE & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i \\ w_i \end{bmatrix} = 0 \quad \forall i = q-p+1, \dots, q \quad (5.24)$$

<sup>2</sup>A condição (5.21) garante, em particular, que  $\text{posto}(TE) = q$

De forma similar ao caso anterior, as matrizes  $V$  e  $W$  utilizadas para o cálculo de  $K$  podem ser construídas somente com elementos reais. Em particular: se  $\lambda_i \in \mathbb{C}$ , considera-se  $\lambda_{i+1} = \lambda_i^*$  e 
$$\begin{cases} V_i = \text{Re}(v_i), & V_{i+1} = \text{Imag}(v_i) \\ W_i = \text{Re}(w_i), & W_{i+1} = \text{Imag}(w_i) \end{cases},$$
 onde  $V_i$  e  $W_i$  denotam as colunas das matrizes  $V$  e  $W$ , respectivamente.

No passo 1, sob a condição de que o sistema seja fortemente observável (detectável) é sempre possível construir uma matriz  $T$  que verifica a condição (5.21). Como será visto posteriormente, graus de liberdade existentes na escolha de  $V$  que satisfaça a condição de acoplamento  $TEV = 0$ , também podem ser usados para garantir a obtenção de  $K$  tal que  $KCV = W$ .

Para garantir que os autovalores  $\lambda_i$  do passo 2 sejam livremente alocáveis, o sistema matricial  $P(\lambda) = \begin{bmatrix} A - \lambda E & B \\ TE & 0 \end{bmatrix}$  de dimensão  $(n + q - p) \times (n + m)$ , deve ter posto completo por linhas  $\forall \lambda$  e deve-se garantir a possibilidade de encontrar os vetores  $v_i$ , a partir de (5.24), que não pertençam a  $\text{Ker}(E)$ .

Se o par  $(E, A)$  é não regular então o posto  $(\lambda E - A) < n \forall \lambda$  finito ou, equivalentemente,  $\dim(\mathcal{S} = \text{Ker}(E) \cap \text{Ker}(A)) = d \geq 1$ . Assim, para todo vetor  $s \in \mathcal{S}$ ,  $s \neq 0$ , tem-se:

$$\begin{bmatrix} A - \lambda_i E & B \\ TE & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \quad \forall \lambda_i \in \mathbb{C} \quad (5.25)$$

Supondo que o vetor  $s$  seja utilizado para compor a matriz  $V$  isto implicaria em

$$(A + BKC)s = Es = 0 \quad (5.26)$$

ou seja, o sistema em malha fechada correspondente seria não regular. Deste modo, quando o sistema em malha aberta for não regular (porém fortemente controlável e observável) o procedimento via posicionamento de autoestrutura acima, e em particular a utilização da equação de zeros na forma (5.24) pode ser realizado somente se  $m + p > q + d$ . No caso  $(E, A)$  regular,  $d = 0$  e reencontra-se a condição  $m + p > q$ .

**Exemplo 5.1 :**

Considere os dados correspondente a [CCH99]:

$$E = \begin{bmatrix} 0.00 & 0.00 & -0.82 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 1.72 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 \end{bmatrix}; \quad A = \begin{bmatrix} 0.00 & 0.00 & 1.23 & 0.00 & 0.00 \\ 1.10 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 1.56 & 0.00 & 0.00 & 1.01 \\ 0.00 & 0.00 & 1.98 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.41 & -6.64 & -2.34 \\ 0.00 & 0.00 & 0.45 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 1.72 & -15.48 & 0.00 \\ 7.00 & 0.00 & -1.00 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

O sistema descritor correspondente é não regular ( $d = 1$ ) e seus pólos finitos são dados por:  $\sigma(E, A) = \{0.0, 0.0, -1.5\}$ . O sistema  $(C, E, A, B)$  é fortemente controlável e fortemente detectável e,  $m + p = 5 > q + d$ .

A) Algoritmo por posicionamento de autoestrutura:

Os autovalores a posicionar são dados por:  $\Lambda_T = \{-1\} \cup \Lambda_V = \{-2+2j, -2-2j\}$ .

**Passo 1:** Para  $\lambda_1 = -1$ , determina-se  $T$  que verifica (5.23) e tal que (5.21) é também verificada e  $(A, B, T, E)$  não têm zeros invariantes:

$$T = \begin{bmatrix} -0.4731 & 0.2819 & 0.0000 & 0.0980 & -0.4786 \end{bmatrix}$$

**Passo 2:** Para  $\lambda_2 = -2 + 2j$  e  $\lambda_3 = -2 - 2j$ , determinam-se  $V$  e  $W$  utilizando-se (5.24):

$$V = \begin{bmatrix} -0.2051 & -0.0523 \\ 0.0678 & 0.2729 \\ -0.0401 & -0.4973 \\ 0.3262 & 0.0381 \\ -0.1048 & -0.4216 \end{bmatrix}; \quad W = \begin{bmatrix} 0.2220 & 0.1088 \\ -0.0377 & -0.0176 \\ 0.5014 & 0.1279 \end{bmatrix};$$

**Passo 3:** Determina-se  $K$  tal que  $KCV = W$ :

$$K = \begin{bmatrix} -2.5232 & -0.3776 \\ 0.4237 & 0.0616 \\ -5.0962 & -0.5232 \end{bmatrix};$$

$$A + BKC = \begin{bmatrix} -8.0773 & 0.0000 & 1.2300 & -7.4167 & 0.6606 \\ 3.3933 & 0.0000 & 0.0000 & 2.0578 & -0.2354 \\ 0.0000 & 1.5600 & 0.0000 & 0.0000 & 1.0100 \\ 10.8984 & 0.0000 & 1.9800 & 9.2957 & -1.6027 \\ 12.5665 & 0.0000 & 0.0000 & 10.4468 & -2.1198 \end{bmatrix}.$$

O sistema em malha fechada  $(E, A + BKC)$  correspondente tem os autovalores generalizados desejados.

**Exemplo 5.2 :** Considere o resultado obtido no exemplo anterior. Por construção o subespaço  $\mathcal{V} = \text{Im } V$  é fortemente O.S.  $(C, A, E, B)$ -invariante em relação ao sistema (5.1), (5.2) utilizado no exemplo 5.1.

Neste caso  $H_V = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$ , e pode-se utilizar  $\Pi = I_2$ , o que implica em  $Q_V = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ . A partir das matrizes  $V$  e  $W$  correspondentes, obtém-se:

$$P = VV' = \begin{bmatrix} 0.0448 & -0.0282 & 0.0342 & -0.0689 & 0.0435 \\ -0.0282 & 0.0791 & -0.1385 & 0.0325 & -0.1222 \\ 0.0342 & -0.1385 & 0.2489 & -0.0320 & 0.2139 \\ -0.0689 & 0.0325 & -0.0320 & 0.1079 & -0.0502 \\ 0.0435 & -0.1222 & 0.2139 & -0.0502 & 0.1887 \end{bmatrix};$$

$$Y = WV' = \begin{bmatrix} -0.0512 & 0.0447 & -0.0630 & 0.0765 & -0.0691 \\ 0.0086 & -0.0074 & 0.0102 & -0.0130 & 0.0114 \\ -0.1095 & 0.0689 & -0.0837 & 0.1684 & -0.1065 \end{bmatrix}$$

que verificam a parte (i) do Teorema 5.3.2. Neste caso  $H_T = -1$ , podendo-se utilizar  $\Gamma = I_1$ , o que implica em  $Q_T = 2$ . A partir das matrizes  $T$  e  $U = [u'_j] = \begin{bmatrix} 0.4786 & 0.4786 \end{bmatrix}$  correspondentes, obtém-se:

$$S = T'T = \begin{bmatrix} 0.2238 & -0.1334 & 0.0000 & -0.0463 & 0.2264 \\ -0.1334 & 0.0795 & 0.0000 & 0.0276 & -0.1349 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ -0.0463 & 0.0276 & 0.0000 & 0.0096 & -0.0469 \\ 0.2264 & -0.1349 & 0.0000 & -0.0469 & 0.2290 \end{bmatrix},$$

$$Z = T'U = \begin{bmatrix} -0.2264 & -0.2264 \\ 0.1349 & 0.1349 \\ 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0469 & 0.0469 \\ -0.2290 & -0.2290 \end{bmatrix};$$

que verificam a parte (ii) do Teorema 5.3.2.

△

**Exemplo 5.3 :** O exemplo numérico nesta parte, mostra como a caracterização quadrática pode ser usada para encontrar um controlador fortemente estabilizável.

Considere os dados do exemplo anterior e considera-se a matriz  $B$  formada pela primeira e terceira entradas de controle a seguir:

$$B = \begin{bmatrix} 0.41 & -2.34 \\ 0.00 & 0.45 \\ 0.00 & 0.00 \\ 1.72 & 0.00 \\ 7.00 & -1.00 \end{bmatrix}$$

O sistema descritor correspondente é não regular e seus pólos finitos são dados por:  $\sigma(E, A) = \{0.0, 0.0, -1.5\}$ . O sistema  $(C, E, A, B)$  é fortemente controlável e fortemente detectável e,  $m + p = 4 = q + d$ .

No primeiro passo, resolve-se a equação de Sylvester (5.6) para encontrar uma matriz  $T$  para  $\lambda = -1$  e tal que (5.21) é também verificado.

$$T = \begin{bmatrix} -0.3142 & -0.3547 & -0.7228 & 0.0368 & 0.0000 \end{bmatrix}$$

Note-se também que, de  $H_T = -1$ ,  $Q_T = 2$  e  $\Gamma = 1$ , a parte (i) do Teorema 5.3.2 é verificada para

$$S = T'\Gamma T = \begin{bmatrix} 0.0987 & 0.1115 & 0.2271 & -0.0112 & 0.0000 \\ 0.1115 & 0.1258 & 0.2564 & -0.0131 & 0.0000 \\ 0.2271 & 0.2564 & 0.5224 & -0.0266 & 0.0000 \\ -0.0112 & -0.0131 & -0.0266 & 0.0014 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \end{bmatrix}; \bar{S} = TST' = 0.5600$$

$$Z = T'U_{\Gamma} = \begin{bmatrix} -0.1115 & -0.1115 \\ -0.1258 & -0.1258 \\ -0.2564 & -0.2564 \\ 0.0131 & 0.0131 \\ 0.0000 & 0.0000 \end{bmatrix} ; \quad U_{\Gamma} = \begin{bmatrix} 0.3547 & 0.3547 \end{bmatrix}$$

Da matriz  $T$  acima definida, coloca-se  $V$  como uma matriz ortogonal tal que  $TEV = 0$  e  $Ker(TE) = Ker(E) \oplus Im(V)$ :

$$V = \begin{bmatrix} -0.8363 & -0.4104 \\ -0.2517 & 0.8765 \\ 0.4871 & -0.2517 \\ 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 \end{bmatrix}$$

No segundo passo, técnicas de programação convexa são aplicadas para encontrar uma solução factível para as equações da parte (ii) do Teorema 5.3.2:

$$P = \begin{bmatrix} 388.0134 & -327.6484 & -7.8867 & 231.0341 & -22.8114 \\ -327.6484 & 2821.1594 & -1242.2123 & -1989.2791 & -304.7180 \\ -7.8867 & -1242.2123 & 613.1257 & 875.9189 & 159.4782 \\ 231.0341 & -1989.2791 & 875.9189 & 19286.532 & 299.0262 \\ -22.8114 & -304.7180 & 159.4782 & 299.0262 & 12950.852 \end{bmatrix}$$

$$\bar{P} = V'PV = \begin{bmatrix} 768.7349 & -967.2713 \\ -967.2713 & 3053.5637 \end{bmatrix}, \quad W_{\Pi} = \begin{bmatrix} -397.5889 & -1392.0117 \\ -600.9586 & -1086.4158 \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{bmatrix} 903.8387 & -1119.9507 & 156.7155 & 0.0000 & 0.0000 \\ 948.4773 & 800.9183 & -19.2785 & 0.0000 & 0.0000 \end{bmatrix}$$

A matriz de realimentação de saídas correspondente que estabiliza fortemente o sistema em malha fechada verificando  $KCV\bar{P} = W_{\Pi}$  é:

$$K = \begin{bmatrix} 2.2110 & -0.1402 \\ 2.4444 & 0.0000 \end{bmatrix}$$

Os pólos finitos do sistema em malha fechada correspondente são:  $\sigma(E, A + BKC) = \{-1.8462 \pm 2.1865j, -1.0000\}$  onde o autovalor  $-1$  corresponde ao passo 1.

$\triangle$

### 5.4.2 Subespaços $(C, A, E)$ -externamente detectáveis

Os resultados a seguir permitem a construção de uma matriz  $T$  com propriedades adequadas para a obtenção da realimentação de saídas desejadas. Sem perda de generalidade, assume-se na seqüência que as matrizes que descrevem o sistema descritor em malha aberta têm a forma ( ver apêndice A Forma algébrica diferencial):

$$E = \begin{bmatrix} I_q & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{n \times n}, A = \begin{bmatrix} J_1 & J_2 \\ J_3 & J_4 \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{n \times n} \text{ e } C = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{p \times n},$$

com  $\text{posto}(C) = p \leq q$ .

**Lema 5.4.1** *Seja  $(C, A, E)$  fortemente detectável. Considere qualquer matriz inversível  $\bar{R} = \begin{bmatrix} \bar{R}_1 \\ \bar{R}_2 \end{bmatrix}$ , onde  $\bar{R}_1 \in \mathfrak{R}^{(n-q) \times (n-q+p)}$  e  $\bar{R}_2 \in \mathfrak{R}^{p \times (n-q+p)}$  são tais que*

$$\begin{bmatrix} \bar{R}_1 \\ \bar{R}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_4 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{J}_4 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

com  $\bar{J}_4 \in \mathfrak{R}^{n-q \times n-q}$  inversível. Defina:

$$\begin{bmatrix} \bar{J}_3 \\ \bar{C}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{R}_1 \\ \bar{R}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_3 \\ C_1 \end{bmatrix}. \quad (5.28)$$

Então, o sistema representado por  $(\bar{C}, \bar{A}, \bar{E})$ , onde  $\bar{E} = \begin{bmatrix} I_q & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\bar{A} = \begin{bmatrix} J_1 & J_2 \\ \bar{J}_3 & \bar{J}_4 \end{bmatrix}$  e  $\bar{C} = \begin{bmatrix} \bar{C}_1 & C_2 \end{bmatrix}$ , é fortemente detectável.

#### Demonstração:

Por hipótese,  $(C, A, E)$  é fortemente detectável o que é equivalente a

$$\text{posto} \left( \begin{bmatrix} \lambda E - A \\ C \end{bmatrix} \right) = n, \quad \forall \lambda \text{ finito} \in \bar{\mathcal{C}}^+ \quad (5.29)$$

e

$$\text{posto} \left( \begin{bmatrix} E \\ L_\infty A \\ C \end{bmatrix} \right) = n, \quad (5.30)$$

onde  $L_\infty \in \mathfrak{R}^{n-q \times n}$  é tal que  $L_\infty E = 0$  posto  $L_\infty = n - q$ .

De (5.30) tem-se que  $\text{posto} \left( \begin{bmatrix} J_4 \\ C_2 \end{bmatrix} \right) = n - q$  e uma matriz inversível  $\bar{R} \in \mathfrak{R}^{n-q+p \times n-q+p}$  existe tal que a decomposição (5.27) é verificada.

Assim, de (5.29), obtém-se

$$\text{posto} \left( \begin{bmatrix} J_1 - \lambda I_q & J_2 \\ \bar{J}_3 & \bar{J}_4 \\ \bar{C}_1 & 0 \end{bmatrix} \right) = \text{posto} \left( \begin{bmatrix} I_q & 0 \\ 0 & \bar{R}_1 \\ 0 & \bar{R}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_1 - \lambda I_q & J_2 \\ J_3 & J_4 \\ C_1 & C_2 \end{bmatrix} \right) = n \quad \forall \lambda \text{ finito} \in \mathcal{C}^+ \quad (5.31)$$

Por outro lado,

$$\text{posto} \left( \begin{bmatrix} \bar{E} \\ \bar{L}_\infty \bar{A} \\ \bar{C}_1 \end{bmatrix} \right) = \text{posto} \left( \begin{bmatrix} I_q & 0 \\ \bar{J}_3 & \bar{J}_4 \\ \bar{C}_1 & 0 \end{bmatrix} \right) = n \quad (5.32)$$

o que completa a demonstração.

□

É interessante salientar que a matriz  $\bar{R}$  utilizada acima não caracteriza exatamente uma transformação de coordenadas, como definida no apêndice A. Entretanto esta transformação permite definir o sistema descritor auxiliar  $(\bar{C}, \bar{A}, \bar{E})$ , onde a estrutura particular das matrizes  $\bar{A}$  e  $\bar{C}$  permitem utilizar técnicas similares as do capítulo anterior para a definição dos algoritmos. Note, em particular, que a partir do sistema  $(\bar{C}, \bar{A}, \bar{E})$  é possível determinar um sistema "auxiliar" de ordem reduzida  $q$ , representado pelo par  $(\hat{C}, \hat{A})$ , onde

$$\hat{A} = J_1 - J_2(\bar{J}_4)^{-1}\bar{J}_3 \in \mathfrak{R}^{q \times q} \quad \hat{C} = \bar{C}_1 \in \mathfrak{R}^{p \times q} \quad (5.33)$$

É interessante verificar que o par  $(\hat{C}, \hat{A})$  é detectável:

$$\text{posto} \left( \begin{bmatrix} \hat{A} - \lambda I_q \\ \hat{C} \end{bmatrix} \right) = q, \quad \forall \lambda \in \bar{\mathcal{C}}^+ \quad (5.34)$$

**Comentário 5.4.2 :** *Por construção*

$$\text{posto} \left( \begin{bmatrix} J_3 & J_4 \\ C_1 & C_2 \end{bmatrix} \right) = \text{posto} \left( \begin{bmatrix} \bar{R}_1 \\ \bar{R}_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \bar{J}_3 & \bar{J}_4 \\ \bar{C}_1 & 0 \end{bmatrix} \right) \leq n - q + p \quad (5.35)$$

Desde que  $\bar{J}_4$  é inversível, segue-se que  $\text{posto}(\bar{C}_1) = p$  se e somente se

$$\text{posto} \left( \begin{bmatrix} J_3 & J_4 \\ C_1 & C_2 \end{bmatrix} \right) = n - q + p \quad (5.36)$$

Assim, para simplificar a apresentação, assume-se na seqüência que a condição (5.36) é verificada.

**Proposição 5.4.1** *Se  $(C, A, E)$  é fortemente detectável, então existe uma matriz  $T = \begin{bmatrix} T_1 & T_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{q-p \times n}$ , com  $\text{posto}(TE = \begin{bmatrix} T_1 & 0 \end{bmatrix}) = q - p$  tal que, para  $V = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times p}$  verificando  $TEV = T_1V_1 = 0$  e  $\text{posto}(EV = V_1) = p$ , o subespaço  $\mathcal{V} = \text{Im}(V)$ , é  $(C, A, E)$ -externamente detectável e  $\text{posto} \left( \begin{bmatrix} TE \\ L_\infty A \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1 & 0 \\ J_3 & J_4 \\ C_1 & C_2 \end{bmatrix} \right) = n$ .*

**Demonstração:**

A demonstração é construtiva e faz uso de mudanças de coordenadas que permitem colocar em evidência as propriedades desejadas.

Considere o sistema auxiliar  $(\bar{C}, \bar{A}, \bar{E})$  fortemente detectável obtido do Lema 5.4.1. Seja  $M = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{q \times q}$  uma matriz não singular tal que

$$\bar{C}_1 \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{C}_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.37)$$

com  $\tilde{C}_1 \in \mathbb{R}^{p \times p}$ ,  $\text{posto}(\tilde{C}_1) = p$ . Considere a matriz  $\begin{bmatrix} M_3 & M_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n-q \times q}$  que verifica:

$$\bar{J}_4 \begin{bmatrix} M_3 & M_4 \end{bmatrix} = -\bar{J}_3 \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \end{bmatrix} \quad (5.38)$$

Seja  $\tilde{M} = \begin{bmatrix} \tilde{M}'_1 \\ \tilde{M}'_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n-q \times n-q}$  a matriz inversa de  $M$ , onde  $\begin{bmatrix} M_1 & M_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{M}'_1 \\ \tilde{M}'_2 \end{bmatrix} = I_q$ .

Então, define-se as matrizes não-singulares

$$\tilde{Q} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{M}'_1 \\ \tilde{M}'_2 \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & I_{n-q} \end{bmatrix} \quad e \quad \tilde{P} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{bmatrix} & 0 \\ & I_{n-q} \end{bmatrix}$$

para obter o sistema  $(\tilde{E}, \tilde{A}, \tilde{C}) = \tilde{Q}(\bar{E}, \bar{A}, \bar{C})\tilde{P}$ , onde:

$$\tilde{E} = \tilde{Q}\bar{E}\tilde{P} = \begin{bmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & I_{q-p} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.39)$$

$$\tilde{A} = \tilde{Q}\bar{A}\tilde{P} = \begin{bmatrix} \tilde{J}_{11} & \tilde{J}_{12} & \tilde{J}_{13} \\ \tilde{J}_{21} & \tilde{J}_{22} & \tilde{J}_{23} \\ 0 & 0 & \tilde{J}_{33} \end{bmatrix}, \quad \tilde{J}_{33} = \bar{J}_4 \quad (5.40)$$

$$\tilde{C} = \bar{C}\tilde{P} = \begin{bmatrix} \tilde{C}_1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.41)$$

O sistema representado por  $(\tilde{E}, \tilde{A}, \tilde{C})$  é fortemente detectável. Isto particularmente implica que

$$\text{posto} \left( \begin{bmatrix} \tilde{A} - \lambda\tilde{E} \\ \tilde{C} \end{bmatrix} \right) = n, \quad \forall \lambda \text{ finito} \in \bar{C}^+ \quad (5.42)$$

Portanto, da estrutura das matrizes envolvidas, tem-se

$$\text{posto} \left( \begin{bmatrix} \tilde{J}_{22} - \lambda I_{q-p} \\ \tilde{J}_{12} \end{bmatrix} \right) = q - p, \quad \forall \lambda \text{ finito} \in \bar{C}^+ \quad (5.43)$$

o que é equivalente a que o par  $(\tilde{J}_{12} \in \mathfrak{R}^{p \times (q-p)}, \tilde{J}_{22} \in \mathfrak{R}^{(q-p) \times (q-p)})$  é detectável. Então, é possível encontrar matrizes  $\tilde{T}_{11} \in \mathfrak{R}^{q-p \times p}$  e  $\tilde{T}_{12} \in \mathfrak{R}^{(q-p) \times (q-p)}$  não-singular, tais que

$$\tilde{T}_{12}\tilde{J}_{22} - H_T\tilde{T}_{12} = -\tilde{T}_{11}\tilde{J}_{12} \quad H_T \in \mathfrak{R}^{(q-p) \times (q-p)}, \quad \sigma(H_T) = \Lambda_T \in C^- \quad (5.44)$$

e

$$\text{posto} \left( \begin{bmatrix} \tilde{T}_{11} & \tilde{T}_{12} \\ \tilde{C}_1 & 0 \end{bmatrix} \right) = q. \quad (5.45)$$

Além disso, a inversibilidade das matrizes  $\tilde{C}_1$  e  $\tilde{J}_{33}$  permite calcular  $\tilde{U}$  e  $\tilde{T}_2$  tais que

$$\tilde{U}\tilde{C}_1 = -(\tilde{T}_{11}\tilde{J}_{11} + \tilde{T}_{12}\tilde{J}_{21}) \quad (5.46)$$

$$\tilde{T}_2 \tilde{J}_{33} = -(\tilde{T}_{11} \tilde{J}_{11} + \tilde{T}_{12} \tilde{J}_{21}) \quad (5.47)$$

Colocando  $\tilde{T} = \begin{bmatrix} \tilde{T}_{11} & \tilde{T}_{12} & \tilde{T}_2 \end{bmatrix}$  e escrevendo conjuntamente com as equações (5.44), (5.46) e (5.47), tem-se

$$\tilde{T} \tilde{A} - H_T \tilde{T} \tilde{E} = \tilde{U} \tilde{C} \quad (5.48)$$

Nas coordenadas do sistema auxiliar  $(\bar{E}, \bar{A}, \bar{C})$ , a equação (5.48) toma a forma

$$\bar{T} \bar{A} - H_T \bar{T} \bar{E} = \bar{U} \bar{C} \quad (5.49)$$

onde  $\bar{T} = \begin{bmatrix} \bar{T}_1 & \bar{T}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{T}_{11} & \tilde{T}_{12} & \tilde{T}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{M}'_1 \\ \tilde{M}'_2 \\ 0 \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & I_q \end{bmatrix}$ , com  $\bar{T}_2 = \tilde{T}_2$  e  $\bar{U} = \tilde{U}$ .

Segue-se de (5.49) que:

$$\begin{bmatrix} \bar{T}_1 & \bar{T}_2 & \bar{U} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_1 & J_2 \\ \bar{J}_3 & \bar{J}_4 \\ \bar{C}_1 & 0 \end{bmatrix} - H_T \begin{bmatrix} \bar{T}_1 & \bar{T}_2 & \bar{U} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0 \quad (5.50)$$

A partir da definição da matriz  $\begin{bmatrix} \bar{J}_3 & \bar{J}_4 \\ \bar{C}_1 & 0 \end{bmatrix}$  no Lema 5.4.1 e usando o particionamento seguinte para a matriz  $\bar{R}$

$$\begin{bmatrix} \bar{R}_1 \\ \bar{R}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{R}_{11} & \bar{R}_{12} \\ \bar{R}_{21} & \bar{R}_{22} \end{bmatrix} \quad (5.51)$$

com  $\bar{R}_{11} \in \mathfrak{R}^{n-q \times n-q}$  e  $\bar{R}_{22} \in \mathfrak{R}^{p \times p}$ , a equação de Sylvester associada ao sistema original  $(C, A, E)$  é dada por

$$\begin{bmatrix} T_1 & T_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_1 & J_2 \\ J_3 & J_4 \end{bmatrix} - H_T \begin{bmatrix} T_1 & T_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_q & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = -U \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \quad (5.52)$$

onde:

$$T = \begin{bmatrix} T_1 & T_2 \end{bmatrix} \text{ com } T_1 = \bar{T}_1, T_2 = \bar{T}_2 \bar{R}_{11} + \bar{U} \bar{R}_{21}, U = (\bar{T}_2 \bar{R}_{12} + \bar{U} \bar{R}_{22}).$$

Assim, para toda matriz  $V = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$ , onde  $V_1 \in \mathbb{R}^{q \times p}$  verifica  $T_1 V_1 = 0$ , com  $\text{posto}(V_1) = p$ , segue de (5.52) que  $\mathcal{V} = \text{Im}(V)$  é  $(C, A, E)$ -externamente detectável.

Por outro lado considerando (5.45), com  $\bar{T}_1 = \begin{bmatrix} \tilde{T}_{11} & \tilde{T}_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{M}'_1 \\ \tilde{M}'_2 \end{bmatrix}$  e  $\bar{C}_1 = \begin{bmatrix} \tilde{C}_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{M}'_1 \\ \tilde{M}'_2 \end{bmatrix}$ , e  $\bar{J}_4$  inversível, tem-se:

$$\text{posto} \left( \begin{bmatrix} \bar{T}_1 & 0 \\ \bar{J}_3 & \bar{J}_4 \\ \bar{C}_1 & 0 \end{bmatrix} \right) = \text{posto} \left( \begin{bmatrix} I_{q-p} & 0 \\ 0 & \bar{R}_1 \\ 0 & \bar{R}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 & 0 \\ J_3 & J_4 \\ C_1 & C_2 \end{bmatrix} \right) = n \quad (5.53)$$

Portanto,

$$\text{posto} \left( \begin{bmatrix} TE \\ L_\infty A \\ C \end{bmatrix} \right) = \text{posto} \left( \begin{bmatrix} T_1 & 0 \\ J_3 & J_4 \\ C_1 & C_2 \end{bmatrix} \right) = n \quad (5.54)$$

que implica em:

$$\text{posto} \left( \begin{bmatrix} TE \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1 & 0 \\ C_1 & C_2 \end{bmatrix} \right) = q \quad (5.55)$$

□

Do ponto de vista algorítmico é necessário apenas calcular as matrizes  $\tilde{T}_{11}$ ,  $\tilde{T}_{12}$  resolvendo a equação (5.44), pois

$$TE = \begin{bmatrix} T_1 & T_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_q & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1 & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$T_1 = \bar{T}_1 = \begin{bmatrix} \tilde{T}_{11} & \tilde{T}_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{M}'_1 \\ \tilde{M}'_2 \end{bmatrix}.$$

### Obtenção via Equações de Lyapunov

A matriz  $T \in \mathbb{R}^{q-p \times n}$  também pode ser obtida baseando-se na solução da equação de Lyapunov associada ao sistema de ordem reduzida, pois a detectabilidade de  $(\tilde{C}, \tilde{A}, \tilde{E})$  é equivalente a detectabilidade do par  $(\tilde{J}_{12}, \tilde{J}_{22})$ . Assim, sejam as matrizes  $S_{21} \in \mathbb{R}^{q-p \times p}$ ,  $S_{22} \in \mathbb{R}^{q-p \times q-p}$ , com  $S_{22} = S'_{22} > 0$ , soluções da equação de Lyapunov de

ordem reduzida

$$\tilde{J}'_{22}S_{22} + S_{22}\tilde{J}_{22} + \tilde{J}'_{12}S'_{21} + S_{21}\tilde{J}_{12} < 0 \quad (5.56)$$

Seja  $L_2 \in \mathbb{R}^{q-p \times p}$  tal que

$$S_{22}L_2 = S_{21} \quad (5.57)$$

Considere-se também a decomposição de Choleski de  $S_{22} = S'_{22} > 0$  dado por:

$$S_{22} = \tilde{T}'_{12}\tilde{T}_{12} \quad (5.58)$$

Assim, de (5.56), (5.57) e (5.58), obtém-se

$$\tilde{T}'_{12}\tilde{T}_{12}(\tilde{J}_{22} + L_2\tilde{J}_{12}) + (\tilde{J}'_{22} + \tilde{J}'_{12}L'_2)\tilde{T}'_{12}\tilde{T}_{12} < 0$$

onde, por construção,  $\sigma(\tilde{J}_{22} + L_2\tilde{J}_{12}) \in \mathcal{C}^-$ .

Já que  $\tilde{T}_{12}$  é, por construção, não-singular, pode-se definir a matriz  $H_T \in \mathbb{R}^{q-p \times q-p}$  a partir da relação de similaridade

$$\tilde{T}_{12}(\tilde{J}_{22} + L_2\tilde{J}_{12}) = H_T\tilde{T}_{12} \quad (5.59)$$

com  $\sigma(H_T) = \sigma(\tilde{J}_{22} + L_2\tilde{J}_{12}) \in \mathcal{C}^-$ . A matriz  $\tilde{T}_{11}$  correspondente, que satisfaz (5.44) verifica

$$\tilde{T}_{11} = \tilde{T}_{12}L_2 \quad (5.60)$$

**Comentário 5.4.3** A partir de (5.57) (5.58) e (5.60), tem-se

$$\tilde{T}'_{12}\tilde{T}_{11} = \tilde{T}'_{12}\tilde{T}_{12}L_2 = S_{22}L_2 = S_{21} \quad (5.61)$$

Então como  $T_1 = \begin{bmatrix} \tilde{T}_{11} & \tilde{T}_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{M}'_1 \\ \tilde{M}'_2 \end{bmatrix}$  e  $\tilde{T}'_{12}$  é inversível, tem-se:

$$Ker(T_1) = Ker(\tilde{T}'_{12}T_1) = Ker \left( \begin{bmatrix} S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{M}'_1 \\ \tilde{M}'_2 \end{bmatrix} \right) \quad (5.62)$$

A relação (5.62) pode ser utilizada para o cálculo de  $V$  tal que:

$$TEV = T_1V_1 = 0 \quad (5.63)$$

### 5.4.3 Algoritmo utilizando as equações de Lyapunov

Baseado nos algoritmos propostos em [SL93a] [CHL00] e no capítulo 4, o procedimento básico seguinte pode ser usado para calcular a matriz de realimentação de saídas que estabiliza o sistema quando a condição  $m + p > q$  é satisfeita:

**Passo 1:**

1.1) Expressar o sistema  $(E, A, B, C)$  na forma algébrica diferencial:

$$E \leftarrow QER = \begin{bmatrix} I_q & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A \leftarrow QAR = \begin{bmatrix} J_1 & J_2 \\ J_3 & J_4 \end{bmatrix},$$

$$B \leftarrow QB \text{ e } C \leftarrow CR = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix},$$

onde  $Q$  e  $R$  são matrizes não singulares.

1.2) Determina-se a matriz  $\begin{bmatrix} \bar{R}_1 \\ \bar{R}_2 \end{bmatrix}$  tal que:  $\begin{bmatrix} \bar{R}_1 \\ \bar{R}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_3 & J_4 \\ C_1 & C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{J}_3 & \bar{J}_4 \\ \bar{C}_1 & 0 \end{bmatrix}$ .

**Passo 2:**

2.1) Encontrar uma decomposição:

$$\bar{C}_1 \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{C}_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.64)$$

onde:  $\bar{C}_1 \in \mathbb{R}^{p \times p}$ ,  $\text{posto}(\bar{C}_1) = p$ ,  $\begin{bmatrix} M_1 & M_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{q \times q}$ .

Calcular a matriz  $\begin{bmatrix} M_3 & M_4 \end{bmatrix}$  que verifica:

$$J_4 \begin{bmatrix} M_3 & M_4 \end{bmatrix} = -J_3 \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \end{bmatrix} \quad (5.65)$$

Seja  $\begin{bmatrix} M_1 & M_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{q \times q}$ , onde  $\begin{bmatrix} M_1 & M_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{M}'_1 \\ \tilde{M}'_2 \end{bmatrix} = I_q$ , calcular:

$$\begin{bmatrix} \tilde{J}_{12} \\ \tilde{J}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{M}'_1 \\ \tilde{M}'_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{J}_1 & \bar{J}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_2 \\ M_4 \end{bmatrix} \quad (5.66)$$

2.2) Resolver a LMI de ordem reduzida para encontrar  $S_{11}$ ,  $S_{12} = S'_{12} > 0$ :

$$\tilde{J}'_{22}S_{22} + S_{22}\tilde{J}_{22} + \tilde{J}'_{12}S'_{21} + S_{21}\tilde{J}_{12} < 0$$

2.3) Calcular

$$T_1 = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{M}'_1 \\ \tilde{M}'_2 \end{bmatrix}.$$

Sejam as matrizes

$\mathcal{A} = J_1$ ,  $\mathcal{B} = [-J_2 \ 0]$ ,  $\mathcal{C} = \begin{bmatrix} -J_3 \\ -T_1 \end{bmatrix}$  e  $\mathcal{E} = \begin{bmatrix} -J_4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ . Se  $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{E})$  não tem zeros invariantes, então ir ao Passo 3; caso contrário, repetir o Passo 2 usando uma nova decomposição para  $\tilde{C}_1$ .

**Passo 3:**

3.1) Calcular  $V = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$  que verifique  $TEV = T_1V_1 = 0$  e  $\text{posto}(CV) = p$ .

3.2) Resolver equação (5.12), sob as restrições (5.13) e (5.14), para encontrar as matrizes  $P$ ,  $Y$  e  $W_{\Pi}$ :

**Passo 4** A matriz de realimentação de saídas que estabiliza o sistema em malha fechada correspondente verifica

$$KCP = Y \iff KCV\bar{P} = W_{\Pi}, \text{ se } V'V = I_p$$

No passo 2, deseja-se calcular  $V = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$  tal que:  $TEV = T_1V_1 = 0$  e tal que  $\text{posto}(CV) = \text{posto} \left( \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \right) = p$ . Como  $V_2 \in \mathbb{R}^{n-q \times p}$  é livre:

- se  $\text{posto}(C_1V_1) = p$ , então considera-se  $V_2 = 0$ ;
- se  $\text{posto}(C_1V_1) < p$ , então  $V_2$  não nula ( $V_2 \neq 0$ ) para garantir que o  $\text{posto}(CV)$  seja completo.

**Exemplo 5.4** *Considera-se os dados do exemplo anterior.*

*No Passo 1 determina-se as matrizes não singulares  $Q$  e  $R$  a seguir:*

$$Q = \begin{bmatrix} 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.5814 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 \\ 1.2195 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & -1.0000 & 0.0000 & 0.0000 \end{bmatrix},$$

$$R = \begin{bmatrix} -1.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & -1.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 \\ 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \end{bmatrix},$$

tais que  $E \leftarrow QER = \begin{bmatrix} I_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,

$$A \leftarrow QAR = \begin{bmatrix} 0.00 & 0.00 & 1.15 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & -1.50 & 0.00 & 0.00 \\ -1.10 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & -1.10 & 0.00 & -1.56 & 0.00 \end{bmatrix},$$

$$B \leftarrow QB = \begin{bmatrix} -1.0000 & 0.0000 \\ 7.0000 & -1.0000 \\ 0.5000 & -2.8537 \\ 0.0000 & 0.4500 \\ 0.0000 & 0.0000 \end{bmatrix}, \quad C \leftarrow CR = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

1.2) Determina-se  $\begin{bmatrix} \bar{R}_1 \\ \bar{R}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 1.0000 & 0.7071 & -0.7071 \\ 0.7071 & 0.0000 & 0.5000 & 0.5000 \\ -0.7071 & 0.0000 & 0.5000 & 0.5000 \end{bmatrix}$ . Assim conside-

rando  $\bar{E} = E$  e

$$\begin{bmatrix} \bar{J}_3 & \bar{J}_4 \\ \bar{C}_1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0000 & -1.1000 & 0.0000 & -1.5600 & 0.0000 \\ 0.7071 & -0.7071 & 0.0000 & 0.0000 & -1.4142 \\ -0.2778 & 0.5000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 1.2778 & 0.5000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \end{bmatrix}.$$

A matriz

$$\begin{bmatrix} M_1 & M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.4857 & -0.8741 & 0.0000 \\ 0.8741 & -0.4857 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 \end{bmatrix}$$

encontrada no passo 2.1 leva a calcular  $M_3$  e  $M_4$  como a solução única de:

$$\bar{J}_4 \begin{bmatrix} M_3 & M_4 \end{bmatrix} = -\bar{J}_3 \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} M_3 & M_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.6164 & 0.3425 & 0.0000 \\ -0.6799 & -0.1942 & 0.0000 \end{bmatrix}$$

Calcula-se  $\begin{bmatrix} \tilde{J}_{12} \\ \tilde{J}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5586 \\ -1.0052 \\ -1.5000 \end{bmatrix}$ .

Uma solução para o passo 2.2 é:

$$\begin{bmatrix} S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6213 & 0.3455 & 0.2894 \end{bmatrix}$$

que resulta no passo 2.3 :

$$T_1 = \begin{bmatrix} S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{M}'_1 \\ \bar{M}'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.6038 & 0.3753 & 0.2894 \end{bmatrix}$$

$$TE = \begin{bmatrix} T_1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.6038 & 0.3753 & 0.2894 & 0.0000 & 0.0000 \end{bmatrix}$$

Esta solução não tem zeros invariantes. Isto implica no passo 3.1:

$$V = \begin{bmatrix} 0.3770 & 0.4889 \\ -0.1032 & 0.8662 \\ 0.9204 & -0.1032 \\ 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 \end{bmatrix}$$

Uma solução factível para o passo 3.2 é então encontrada:

$$P = \begin{bmatrix} 1906.2914 & 3549.0662 & -625.2525 & -2502.5467 & 0.0000 \\ 3549.0662 & 11431.039 & -7419.5297 & -8060.3483 & 0.0000 \\ -625.2525 & -7419.5297 & 8317.5769 & 5231.7197 & 0.0000 \\ -2502.5467 & -8060.3483 & 5231.7197 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \end{bmatrix}$$

$$\bar{P} = V'PV = \begin{bmatrix} 8529.3783 & -7086.2327 \\ -7086.2327 & 13516.325 \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{bmatrix} 1449.0571 & 606.61385 & 2236.7134 & 0.0000 & 0.0000 \\ 4659.8234 & 8675.4952 & -1528.395 & 0.0000 & 0.0000 \end{bmatrix};$$

$$W_{\Pi} = \begin{bmatrix} 2542.4949 & 1003.1718 \\ -545.0746 & 9950.7314 \end{bmatrix}$$

A matriz de realimentação de saídas correspondente que estabiliza fortemente o sistema em malha fechada verificando  $KCV\bar{P} = W_{\Pi}$  é:

$$K = \begin{bmatrix} 1.5673 & -0.4335 \\ 2.4444 & 0.0000 \end{bmatrix}.$$

Os pólos finitos do sistema em malha fechada correspondente são:  $\sigma(E, A + BKC) = \{ -1.1013 \pm 2.2982j, -3.8994 \}$  onde o autovalor  $-3.8994$  corresponde ao passo 2.

△

## 5.5 Conclusão

Considerou-se o problema da existência e cálculo da matriz de realimentação de saídas que estabiliza fortemente um sistema descritor.

Introduziu-se o conceito de  $(C, A, E, B)$ -invariância a caracterização algébrica de um subespaço fortemente *O.S.*  $(C, A, E, B)$ -invariante, foi obtida sob a forma de equações acopladas de Sylvester e equações acopladas de Lyapunov. Mostrou-se que o conceito de subespaços fortemente  $(C, A, E, B)$ -invariantes tem um papel fundamental na estabilização usando realimentação de saídas em sistemas descritores e foram apresentados algoritmos para o cálculo da matriz de realimentação de saídas, baseados em posicionamento de autoestrutura ou programação convexa. Foram apresentadas somente as versões primais destes algoritmos. É importante salientar que o algoritmo de estabilização baseado na solução de Equações de Lyapunov também pode ser adaptado para obter-se posicionamento regional de pólos, como nos capítulos anteriores.

Pontos importantes que podem também ser salientados são:

- A transformação especial que permite obter um sistema auxiliar descritor  $(\bar{C}, \bar{A}, \bar{B})$ , regular e com estrutura particular da matriz  $\bar{C}$ ,
- o fato que a partir de  $(\bar{C}, \bar{A}, \bar{B})$  o problema pode também ser visto como o de

estabilização de um sistema normal de ordem reduzida  $q$ .

# Capítulo 6

## Conclusão Geral

Neste trabalho apresentou-se técnicas para a solução dos problemas de estabilização por realimentação estática de saídas para os casos de sistemas normais e de sistemas descritores. A partir do conceito de subespaços  $(C, B, A)$ -invariantes, que podem ser expressos através de um par de equações acopladas de Sylvester, a solução do problema de estabilização de sistemas normais pode ser obtida, para sistemas que verificam a condição de Kimura  $m + p > n$ , utilizando-se o algoritmo de Syrmos e Lewis que resolve o problema em duas etapas. Um segundo procedimento, que baseia-se na solução de um sistema de equações bilineares para a obtenção de posicionamento de pólos, em sistemas que verificam a condição  $mp \geq n$ , também foi apresentado.

A seguir, fazendo uso de equações acopladas de Lyapunov, foi desenvolvido um procedimento para a solução dos problemas de estabilização e do problema posicionamento regional de pólos usando realimentação de saídas, via construção de um subespaço  $(C, A, B)$ -invariante estabilizável pela saída. Baseado nestes resultados, apresentou-se os algoritmos para calcular uma matriz de realimentação de saídas. Os algoritmos apresentados resolvem o problema em duas etapas. Uma técnica de decomposição ortogonal foi inicialmente usada para a elaboração do algoritmo.

Uma adaptação foi realizada, para resolver o problema de posicionamento regional de pólos para uma classe particular de sistemas descritores (regular, sem comportamento impulsivo e sem ação direta de controle nas variáveis algébricas). Resolveu-se o problema via as equações acopladas de Lyapunov. Uma técnica de decomposição ortogonal foi apresentada.

Para os sistemas descritores em sua forma geral, introduziu-se o conceito de subespaços  $(C, A, E, B)$ -invariantes para tratar o problema de estabilização por realimentação estática de saídas destes sistemas. Mostrou-se que o conceito de subespaços fortemente  $(C, A, E, B)$ -invariantes admitem uma caracterização algébrica de equações

acopladas de Sylvester e de Lyapunov. Baseada nestas equações acopladas foi encontrada uma condição necessária e suficiente para a existência de uma matriz de realimentação estática de saídas estabilizador para sistemas que verificam a condição  $m + p > q$ . Foram apresentados algoritmos para o cálculo da realimentação de saídas. Os algoritmos de estabilização baseado nas equações de Lyapunov podem ser adaptados para obter-se posicionamento regional de pólos para os sistemas descritores.

Como sugestões de futuros trabalhos que podem ser desenvolvidos a partir do material desta tese, destacamos:

- o tratamento de casos menos restritivos:  $m + p > n$ , no caso de sistemas normais, e  $m + p > q$ , no caso de sistemas descritores;
- adaptação da teoria e dos algoritmos para a consideração de outros critérios de desempenho (  $H_2$  e  $H_\infty$  , por exemplo) ou de robustez;
- estudo e solução do problema de controle descentralização,
- consideração de restrições sobre variáveis de controle.

# Apêndice A

## Breve revisão da teoria de sistemas descritores

Considere o sistema descritor linear :

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (\text{A.1})$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (\text{A.2})$$

onde :  $x \in \mathfrak{R}^n$ ,  $u \in \mathfrak{R}^m$ ,  $y \in \mathfrak{R}^p$  e  $E \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  verifica  $\text{posto}(E) = q < n$ ; as demais matrizes tem dimensões adequadas com  $\text{posto}(B) = m$  e  $\text{posto}(C) = p$ . O objetivo deste apêndice é revisar alguns resultados de interesse na resolução do seguinte problema de estabilização usando realimentação de saídas :

Dado o sistema descritor (A.1), (A.2), deseja-se encontrar uma lei de controle usando realimentação estática de saídas.

$$u(t) = Ky(t) = KCx(t) \quad (\text{A.3})$$

onde  $K \in \mathfrak{R}^{m \times p}$ , tal que o sistema em malha fechada dado por

$$E\dot{x}(t) = (A + BKC)x(t) \quad (\text{A.4})$$

é regular, livre de impulsões e assintoticamente estável.

## A.1 Conceitos de base

A fim de entender melhor e resolver o problema de estabilização usando realimentação de saídas, primeiro apresenta-se alguns conceitos da teoria de sistemas descritores [VLK81] [YS81] [Cob4a] [Lew86] [Dai89].

O sistema descritor (A.1), (A.2) é denominado regular se  $\det(\lambda E - A) \neq 0$ . Se assume-se que ele é regular, o conjunto de pólos deste sistema (finito e infinito) representa o conjunto de autovalores generalizados do par  $(E, A)$ . Os pólos finitos de  $(E, A)$  são as raízes da equação característica

$$\Delta(E, A) = \det(\lambda E - A) = 0 \quad (\text{A.5})$$

Se o número de pólos é menor que  $\text{posto}(E) = q$ , então o sistema descritor têm modos impulsivos. O sistema é livre de impulsos se ele tem exatamente  $q$  pólos finitos. Se diz que o sistema é assintoticamente estável se todos os seus pólos estão em  $\mathcal{C}^-$ , o semiplano complexo aberto. Quanto as propriedades estruturais das triplas  $(E, A, B)$  e  $(C, A, E)$  que serão usadas na seqüência, se diz que o sistema descritor (A.1), (A.2) é estabilizável se e somente se

$$\text{posto} \left( \begin{bmatrix} \lambda E - A & B \end{bmatrix} \right) = n, \quad \forall \text{ finito } \lambda \in \bar{\mathcal{C}}^+ \quad (\text{A.6})$$

e é detectável se e somente se

$$\text{posto} \left( \begin{bmatrix} \lambda E - A \\ C \end{bmatrix} \right) = n, \quad \forall \text{ finito } \lambda \in \bar{\mathcal{C}}^+ \quad (\text{A.7})$$

onde  $\bar{\mathcal{C}}^+$  representa o semiplano complexo direito fechado. As duas seguintes proposições abaixo introduzem um conceito de estabilizabilidade e detectabilidade mais fortes adaptado as características dos sistemas descritores.

**Proposição A.1.1** *O sistema (A.1), (A.2) é fortemente estabilizável se e somente se as duas seguintes condições são verificadas.*

$$\text{posto}([\lambda E - A \ B]) = n, \quad \forall \lambda \text{ finito } \lambda \in \mathcal{C}^+ \quad (\text{A.8})$$

$$\text{posto}([E, \ AS_\infty, \ B]) = n, \quad (\text{A.9})$$

onde as colunas de  $S_\infty$  geram o espaço nulo de  $E$ .

**Proposição A.1.2** *O sistema (A.1), (A.2) é fortemente detectável se e somente se as duas seguintes condições são conferidas.*

$$\text{posto}\left(\begin{bmatrix} \lambda E - A \\ C \end{bmatrix}\right) = n, \forall \lambda \text{ finito} \in \mathcal{C}^+ \quad (\text{A.10})$$

$$\text{posto}\left(\begin{bmatrix} E \\ L_\infty A \\ C \end{bmatrix}\right) = n, \quad (\text{A.11})$$

onde as colunas de  $L_\infty$  geram o espaço nulo de  $E$ .

Considera-se também a lei de controle de realimentação de saídas (A.3) e assume-se que (A.6) não é verificado para algum finito  $\lambda \in \bar{\mathcal{C}}^+$ . Isto é equivalente a existência de um vetor não nulo  $q \in \mathfrak{R}^n$  tal que  $q^T(\lambda E - A) = 0$  e  $q^T B = 0$ . Assim pré-multiplicando-se a matriz de saídas da malha fechada  $(A + BKC)$  por  $q^T$ , consegue-se

$$q^T(A + BKC) = q^T A = q^T \lambda E$$

que significa que  $\lambda$  é necessariamente um pólo finito da malha fechada. Portanto, a controlabilidade dos pólos finitos instáveis da malha aberta é uma condição necessária para a estabilização de sistemas descritores usando realimentação de saídas. Pela dualidade, a observabilidade dos pólos finitos instáveis da malha aberta é uma condição necessária para a estabilização de sistemas descritores usando realimentação de saídas. Os sistemas regulares que satisfazem as equações (A.8) , (A.9) são usualmente chamados de sistemas controláveis no infinito. Dualmente, os sistemas regulares que satisfazem as equações (A.10) , (A.11) são usualmente chamados de sistemas observáveis no infinito [VLK81]. Pode-se também mostrar que (A.9) e (A.11) são condições necessárias para a obtenção de um sistema em malha fechada , livre de impulsões e, conseqüentemente regular [Dai89].

### A.1.1 Equivalência

Sejam  $\tilde{Q} \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  e  $\tilde{P} \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  duas matrizes não singulares e considere o mudança de coordenadas  $x = \tilde{P}\tilde{x}$ . Então, o seguinte sistema é uma representação equivalente do sistema (A.1), (A.2) :

$$\tilde{E}\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{B}u(t) \quad (\text{A.12})$$

$$y(t) = \tilde{C}\tilde{x}(t) \quad (\text{A.13})$$

onde :  $\tilde{E} = \tilde{Q}E\tilde{P}$ ,  $\tilde{A} = \tilde{Q}A\tilde{P}$ ,  $\tilde{B} = \tilde{Q}B$  e  $\tilde{C} = C\tilde{P}$ . Além disso já que matrizes  $\tilde{Q}$  e  $\tilde{P}$  são não singulares pode ser demonstrado que as seguintes propriedades são preservadas sob mudança de coordenadas [BGMN92]:

1.  $\Delta(\tilde{E}, \tilde{A}) = \tilde{Q}\Delta(E, A)\tilde{P}$ , que implica que os pólos finitos de  $(\tilde{E}, \tilde{A})$  e  $(E, A)$  são os mesmos.
2.  $(E, A, B)$  é controlável (estabilizável) se e somente se  $(\tilde{E}, \tilde{A}, \tilde{B})$  é controlável (estabilizável).
3.  $(C, A, E)$  é observável (detectável) se e somente se  $(\tilde{C}, \tilde{A}, \tilde{E})$  é observável (detectável).

As duas formas equivalentes, a seguir são de interesse particular para apresentação e desenvolvimento de alguns conceitos e resultados [Dai89].

### A.1.2 Primeira forma equivalente

A primeira forma equivalente, chamada Decomposição Padrão, baseia-se no Lema seguinte [Dai89]:

**Lema A.1.1** :  $(E, A)$  é regular se, somente se, existem duas matrizes não singulares,  $L \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  e  $S \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ , tais que:

$$LES = \begin{bmatrix} I_l & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} ; \quad LAS = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I_s \end{bmatrix} \quad (\text{A.14})$$

onde  $l + s = n$  e  $N \in \mathfrak{R}^{s \times s}$  é uma matriz nilpotente talque  $N^h = 0$ , sendo  $h$  seu índice de nilpotência.

Desta forma, se  $(E, A)$  é regular existe uma transformação de coordenadas  $x(t) = S \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$ , tal que o sistema (A.1), (A.2) é equivalente ao sistema

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} I_l & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

onde  $S = \begin{bmatrix} S_1 & S_2 \end{bmatrix}$  e  $L = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix}$  são matrizes que satisfazem as condições do lema A.1.1, com  $S_1 \in \mathbb{R}^{n \times l}$  e  $S_2 \in \mathbb{R}^{n \times s}$  e  $L_1 \in \mathbb{R}^{l \times n}$ ,  $L_2 \in \mathbb{R}^{s \times n}$ . Então,

$$x(t) = \begin{bmatrix} S_1 & S_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} e \begin{bmatrix} B_1(t) \\ B_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} B(t) \quad (\text{A.16})$$

Esta decomposição não é única. As matrizes  $S$  e  $L$  podem ser obtidas por exemplo a partir da autoestrutura do par  $(E, A)$  [Lew86]. Na forma padrão a resposta do sistema é dada por: a estrutura finita e a estrutura no infinito do sistema.

### A.1.3 Segunda forma equivalente: Forma algébrica-diferencial

Seja  $q = \text{posto}(E)$ . Sabemos que existem matrizes não singulares  $Q$  e  $R$ , de dimensão  $n$ , tais que  $QER = \text{diag}(I_q, 0)$ . Portanto, utilizando a transformação de coordenadas

$$x(t) = \begin{bmatrix} R_1 & R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

O sistema (A.1), (A.2) é equivalente a:

$$\begin{bmatrix} I_q & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(t) \quad (\text{A.17})$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad (\text{A.18})$$

onde

$$R = \begin{bmatrix} R_1 & R_2 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} e \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} B \quad (\text{A.19})$$

com  $R_1 \in \mathbb{R}^{n \times q}$ ,  $R_2 \in \mathbb{R}^{n \times n-q}$ ,  $Q_1 \in \mathbb{R}^{q \times n}$  e  $Q_2 \in \mathbb{R}^{n-q \times n}$ .

A equação (A.17), (A.18) representa a segunda forma equivalente para o sistema (A.1), (A.2), e pode ser obtida a partir de Decomposição em Valores Singulares ou da Decomposição "QR" da matriz  $E$  [Str88] [Str93]. Assim, as matrizes  $Q$  e  $R$  não são únicas. Pode-se também observar que para a obtenção destas matrizes não é necessário supor a regularidade do sistema original, sendo assim de interesse para o desenvolvimento de resultados práticos.

Sob esta decomposição, o sistema é representado por equações algébricas e equações diferenciais dando origem a uma Forma algébrica-diferencial. A parte diferencial representa um subsistema dinâmico e a parte algébrica representa a conexão entre os subsistemas. Assim, observamos que os sistemas descritores podem ser vistos como um sistema composto formado por alguns sistemas interconectados.

Por outro lado o sistema (A.1), (A.2) dado pode ser expresado na forma A.17, A.18 dada anteriormente, e as propriedades fundamentais podem ser expresadas como [BL97]: se  $A_{22}^{-1}$  existe, então, o sistema de malha fechada é livre de impulsos regular e os autovalores  $\sigma(A_{22} + B_2KC_2)$  pertencem a uma região estável do plano complexo e as trajetórias convergem ao origem.

#### A.1.4 Estrutura de um sistema descritor

- Autovalores finitos(infinitos)/Autovetores finitos (infinitos) [Lew86].

Usaremos  $\sigma(E, A) = \{\lambda/\lambda \in \mathcal{C}, \lambda \text{ finito}, |\lambda E - A| = 0\}$  para determinar o conjunto de autovalores finitos do sistema.

- Para os autovalores distintos, os autovetores correspondentes são representados por  $u$  e definidos por :

$$(\lambda E - A)u = 0 \quad (\text{A.20})$$

- Para os autovalores finitos iguais, de multiplicidade  $k > 1$ , os autovetores correspondentes são representados por  $u^k$  e definidos por :

$$(\lambda E - A)u^{k+1} = Eu^k, k > 1 \quad (\text{A.21})$$

- A estrutura de autovalores infinitos é determinada pelos zeros de  $(\lambda E - A)$  no infinito, o que corresponde a  $(\frac{1}{\lambda}E - A)$  para  $\lambda = 0$ .
- Os autovalores infinitos de grau 1, os autovetores correspondentes representados por  $u_\infty^k$  e definidos por :

$$Eu_\infty^{k+1} = 0 \quad (\text{A.22})$$

- Para os autovalores infinitos de multiplicidade  $k$ , os autovetores correspondentes

representados por  $u_\infty^k$  e definidos por :

$$Eu_\infty^{k+1} = Eu_\infty^k, k > 1. \quad (\text{A.23})$$

### Forma compacta finita :

Para um sistema em malha fechada com  $q$  pólos finitos ( portanto regular e livre de impulsões) :

$$AV = EVH \quad (\text{A.24})$$

$$TA = HTE \quad (\text{A.25})$$

$$TEV = I_q \quad (\text{A.26})$$

onde  $T \in \mathbb{R}^{q \times n}$ ,  $V \in \mathbb{R}^{n \times q}$ ,  $H \in \mathbb{R}^{q \times q}$ ,  $\text{posto}(V) = q$ , e  $\text{posto}(EV) = \text{posto}(TE) = q$ ,  $\sigma(H) \in \mathcal{C}^-$ . Os autovalores finitos do sistema estão diretamente ligados à estabilidade da resposta do sistema.

### Forma compacta infinita :

$$EV_\infty = 0, \text{ posto}(V_\infty) = n - q \quad (\text{A.27})$$

$$T_\infty E = 0, \text{ posto}(T_\infty) = n - q \quad (\text{A.28})$$

onde  $\text{posto}(\begin{bmatrix} V & V_\infty \end{bmatrix}) = n$ , e  $\text{posto}(\begin{bmatrix} T \\ T_\infty \end{bmatrix}) = n$ .

Os autovalores infinitos do sistema estão diretamente ligados à presença de modos impulsivos na resposta transitória do sistema, como será visto a seguir.

## A.1.5 Resposta temporal

Estando o sistema escrito na forma padrão (A.15), e considerando o fato de que

$$N^h = 0 \quad (\text{A.29})$$

pela definição de matriz nilpotente, o sistema pode ser dividido em dois subsistemas e a solução destes podem ser representadas como segue :

- o subsistema lento, corresponde a um sistema normal de ordem  $q$  associado aos

autovalores finitos do par  $(E, A)$ , cujas trajetórias são descritas unicamente por :

$$z_1(t) = e^{A_1 t} z_1(0) + \int_0^t e^{A_1(t-\tau)} B_1 u(\tau) d\tau \quad (\text{A.30})$$

- o subsistema rápido, associado aos autovalores infinitos do par  $(E, A)$ , cuja solução única é dada por :

$$z_2(t) = \sum_{i=1}^{h-1} \delta^{(i-1)}(t) N^i z_2(0) - \sum_{i=0}^{h-1} N^i B_2 u^{(i)} \quad (\text{A.31})$$

sendo  $u^{(i)}$  a  $i$ -ésima derivada de  $u(t)$  e  $\delta(t)$  a função impulso unitário.

O subsistema lento corresponde a uma equação diferencial ordinária, a qual possui uma única solução para uma condição inicial  $z_1(0)$  e para qualquer função parcialmente contínua  $u(t)$  [Dai89]. Os termos impulsivos na resposta dependem da multiplicidade dos autovalores no infinito. Assim se tivermos  $h > 1$  na relação (A.29), tal que os autovalores infinitos possuam multiplicidade  $k > 1$ , existirão valores de  $z_2(0)$  tal que a resposta possua termos impulsivos em  $z_2(t)$ . Por outro lado, se tivermos  $N = 0$ , o que corresponde a  $h = 1$ , a resposta do sistema não possui termos impulsivos e o sistema é livre de impulsões. Logo podemos constatar que os autovalores infinitos e consequentemente os termos impulsivos, estão diretamente relacionados ao subsistema rápido [Lew86] [Dai89] [Men98].

### A.1.6 Condição inicial consistente

Nos concentraremos no caso onde o sistema não possua impulsões, ou seja,  $N = 0$ .

No instante inicial, a resposta do sistema é dada por :

$$z_1(t) = e^{A_1 t} z_1(0) \quad z_2 = \sum_{i=1}^{h-1} \delta^{(i-1)}(t) N^i z_2(0) \quad (\text{A.32})$$

com

$$z(0-) = \begin{bmatrix} z_1(0-) \\ z_2(0-) \end{bmatrix}. \quad (\text{A.33})$$

Para  $t > 0$ ,  $z_2(t) = 0$ . Logo,

$$z(0+) = \begin{bmatrix} \lim_{t \rightarrow 0+} z_1(t) \\ \lim_{t \rightarrow 0+} z_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1(0-) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.34})$$

Assim, se  $z_2(0-) \neq 0$ , podemos observar que  $z(0+) \neq z(0-)$ , o que implica na inconsistência da condição inicial, e o sistema possui descontinuidades no instante inicial. A referência [LYT95], pode se consultada para uma melhor compreensão de como estes saltos são influenciados pela lei de controle e como tais influências podem ser exploradas para reduzi-los através de uma realimentação apropriada.

### A.1.7 Estabilidade

Por simplicidade, consideraremos apenas a estabilidade assintótica do sistema descritor autônomo :

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) \quad , \quad \text{com } x(0) = x_0. \quad (\text{A.35})$$

Aplicando a transformação de coordenadas  $x = Rz$ , o sistema (A.35) é equivalente ao sistema autônomo na forma padrão :

$$\begin{bmatrix} I_l & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{z}_1(t) \\ \dot{z}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} \quad (\text{A.36})$$

onde

$$\begin{bmatrix} z_1(0) \\ z_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{10} \\ z_{20} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.37})$$

Para  $t > 0$ , o sistema (A.36) tem como solução :

$$z_1(t) = e^{A_1 t} z_1(0) \quad (\text{A.38})$$

$$z_2(t) = 0 \quad (\text{A.39})$$

Como, para  $t > 0$  apenas o subestado  $z_1$  determina a dinâmica do sistema, teremos a condição

$$\|z(t)\|_2 < \|R\|_2^{-1} \alpha e^{-\beta t} \|z(0)\|_2 \quad , \quad \alpha, \beta > 0$$

verdadeira se, e somente se,  $z_1(t)$  satisfaz

$$\|z_1(t)\|_2 < \|R\|_2^{-1} \alpha e^{-\beta t} \|z(0)\|_2, \quad t > 0,$$

o que é equivalente a  $\sigma(A_1) = \sigma(E, A) \in \mathcal{C}^-$  [Dai89].

Pode-se escrever o seguinte teorema, que define a estabilidade do sistema (A.1), (A.2) [Dai89].

**Teorema A.1.1** *O sistema (A.1), (A.2) é assintoticamente estável se todos os autovalores finitos definidos pelo conjunto  $\sigma(E, A) = \{\lambda/\lambda \in \mathcal{C}, \lambda \text{ finito}, |\lambda E - A| = 0\}$ , estão no semiplano esquerdo do plano complexo  $\mathcal{C}^-$  para sistemas contínuos.*

# Apêndice B

## Demonstrações

### Demonstração do Teorema 5.3.1:

Assume-se que as Equações de Sylvester generalizadas (5.5), (5.6) e (5.7) são verificadas com  $\text{posto}(EV) = v$  e  $\text{posto}(TE) = q - v$ . Então as Equações (5.8) e (5.9) podem ser equivalentemente substituídas pela existência de um  $K : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{U}$  tal que:

$$KCV = W \quad (\text{B.1})$$

$$TBK = U \quad (\text{B.2})$$

*Necessidade:* Assumindo-se o sistema em malha fechada é regular, livre de impulsões e assintoticamente estável, as seguintes equações são verificadas para algum escalar  $v \geq 0$  (ver [Dua99]):

$$(A + BKC) \begin{bmatrix} V & \bar{V} \end{bmatrix} = E \begin{bmatrix} V & \bar{V} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_V & 0 \\ 0 & H_T \end{bmatrix} \quad (\text{B.3})$$

$$\begin{bmatrix} \bar{T} \\ T \end{bmatrix} (A + BKC) = \begin{bmatrix} H_V & 0 \\ 0 & H_T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{T} \\ T \end{bmatrix} E \quad (\text{B.4})$$

$$\begin{bmatrix} \bar{T} \\ T \end{bmatrix} E \begin{bmatrix} V & \bar{V} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_v & 0 \\ 0 & I_{q-v} \end{bmatrix} \quad (\text{B.5})$$

onde:  $H_V \in \mathfrak{R}^{v \times v}$  e  $H_T \in \mathfrak{R}^{(q-v) \times (q-v)}$  são tais que  $\sigma(E, A + BKC) = \sigma(H_V) \dot{\cup} \sigma(H_T) \in \mathcal{C}^-$ , e  $\begin{bmatrix} V & \bar{V} \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{n \times q}$  e  $\begin{bmatrix} \bar{T} \\ T \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{q \times n}$  são duas matrizes posto completas.

As equações (B.3), (B.4) e (B.5) são relativas a autoestrutura finita da malha fechada [Fle88]. Da regularidade da malha fechada segue-se que  $\text{posto}(EV) = v$ . Assim, colocando  $KCV = W$  em (B.3) e  $TBK = U$  em (B.4), pode-se deduzir que o subespaço  $\mathcal{V} = \text{Im}V$  de dimensão- $v$  é fortemente  $O.S.(C, A, E, B)$ -invariante.

**Suficiência:** Substituindo as Equações (B.1) e (B.2), respectivamente nas Equações (5.5), (5.6) obtêm-se:

$$(A + BKC)V = EVH_V \quad (\text{B.6})$$

$$T(A + BKC) = H_TTE \quad (\text{B.7})$$

Já que  $\text{posto}(EV) = v$  e  $\text{posto}(TE) = q - v$  definem-se duas matrizes  $\bar{T} \in \mathbb{R}^{v \times n}$  e  $\bar{V} \in \mathbb{R}^{n \times q-v}$  a seguir:

$$\bar{T} = (V'E'EV)^{-1}V'E' \ ; \ \bar{V} = E'T'(TEE'T')^{-1} \quad (\text{B.8})$$

Pela definição das matrizes  $\bar{T}$  e  $\bar{V}$ , pode-se verificar que:

$$\begin{bmatrix} \bar{T} \\ T \end{bmatrix} E \begin{bmatrix} V & \bar{V} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_v & 0 \\ 0 & I_{q-v} \end{bmatrix} \quad (\text{B.9})$$

e

$$\text{posto}\left(\begin{bmatrix} \bar{T} \\ T \end{bmatrix} E\right) = \text{posto}(E \begin{bmatrix} V & \bar{V} \end{bmatrix}) = q \quad (\text{B.10})$$

Das equações (B.6), (B.7), pode-se expressar o seguinte :

$$(A + BKC) \begin{bmatrix} V & \bar{V} \end{bmatrix} = E \begin{bmatrix} V & \bar{V} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_V & H_{V2} \\ 0 & H_{V3} \end{bmatrix} \quad (\text{B.11})$$

$$\begin{bmatrix} \bar{T} \\ T \end{bmatrix} (A + BKC) = \begin{bmatrix} H_{T1} & 0 \\ H_{T3} & H_T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{T} \\ T \end{bmatrix} E \quad (\text{B.12})$$

Pré-multiplicando (B.11) por  $\begin{bmatrix} \bar{T} \\ T \end{bmatrix}$  e pré-multiplicando (B.12) por  $\begin{bmatrix} V & \bar{V} \end{bmatrix}$  observe-

se que :

$$\begin{bmatrix} H_V & H_{V2} \\ 0 & H_{V3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{T1} & 0 \\ H_{T3} & H_T \end{bmatrix} \quad (\text{B.13})$$

Isto implica que :

$$(A + BKC) \begin{bmatrix} V & \bar{V} \end{bmatrix} = E \begin{bmatrix} V & \bar{V} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_V & 0 \\ 0 & H_T \end{bmatrix} \quad (\text{B.14})$$

Utilizando argumentos de análise modal para sistemas descritores conclue-se que o sistema em malha fechada é regular, livre de impulsões e assintoticamente estável já que, por construção,  $(E, A + BKC)$  tem  $q$  autovalores finitos assintoticamente estáveis tais que :

$$\sigma(E, A + BKC) = \sigma(H_V) \cup \sigma(H_T) \quad (\text{B.15})$$

□

### Demonstração do Teorema 5.3.2:

**Necessidade:** Considera-se que  $K \in \mathfrak{R}^{m \times v}$  é uma matriz de realimentação de saídas que estabiliza o sistema em malha fechada e, portanto, que as equações de Sylvester (5.5), (5.6) e (5.7) são verificadas.

Em primeiro lugar demonstra-se a necessidade da parte (i). Para algum  $Q_V = Q'_V > 0$ , a condição de estabilidade quadrática expressa em (5.10) é verdadeira, e usando a equação (5.5) onde  $AV + BW = EVH_V$ , obtém-se então :

$$EV(\Pi H'_V + H_V \Pi) V' E' = EV \Pi H'_V V' E' + EV H_V \Pi V' E' = -EV Q_V V' E' \leq 0 \quad (\text{B.16})$$

De (5.5) obtém-se que  $AV + BW = EVH_V$ , que pode ser usada em (B.16) para obter

$$EV \Pi V' A' + EV \Pi W' B' + AV \Pi V' E' + BW \Pi V' E' = -EV Q_V V' E' \quad (\text{B.17})$$

Assim, definindo-se as matrizes  $P = P' = V \Pi V'$  e  $Y = W \Pi V'$  e, e considerando que  $\text{posto}(EV) = v$  e que  $\Pi > 0 \implies \begin{cases} V' V \Pi V' V > 0 \\ V' E' T' \Pi T E V = 0 \end{cases}$ , (B.17) pode ser equivalente-

mente substituída por (5.12), (5.13) e (5.14).

Usando argumentos similares, demonstra-se a necessidade da parte (ii).

As necessidades da parte (iii), (5.18) e (5.19), segue-se das condições  $Ker CV \subset Ker W$  e  $Ker B'T' \subset Ker U'$  respectivamente, levando em conta as definições acima das matrizes  $P, Y, S$  e  $Z$ .

### Suficiência

Considerar que as partes (i) e (ii) são verificadas. Por definição,  $EV$  e  $TE$ , são matrizes com postos completos. Assim, de (5.14) e (5.17), obtêm-se:

$$V'PV = \bar{P} = \bar{P}' > 0 \implies P = V(V'V)^{-1}\bar{P}(V'V)^{-1}V' \quad (B.18)$$

$$TST' = \bar{S} = \bar{S}' > 0 \implies S = T'(TT')^{-1}\bar{S}(TT')^{-1}T \quad (B.19)$$

Agora demonstra-se que a verificação da parte (i) implica que  $\mathcal{V} = Im V$  é um subespaço fortemente invariante  $(A, E, B)$ -internamente estabilizável. Assim, argumentos similares podem ser utilizados para demonstrar que  $\mathcal{V}$ , é também um subespaço  $(C, E, A)$ -externamente detectável.

De (B.18) e (B.19) obtêm-se:

$$P = \begin{bmatrix} V & T' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Pi & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V' \\ T \end{bmatrix} \geq 0 \text{ para } \Pi = \Pi' = (V'V)^{-1}\bar{P}(V'V)^{-1} > 0 \quad (B.20)$$

De (5.18) pode-se afirmar que existe uma matriz  $K$  tal que

$$KCP = Y \quad (B.21)$$

Assim, pela substituição de (B.21) em (5.12), obtém-se

$$EP(A + BKC)' + (A + BKC)PE' = -EVQ_VV'E' \quad (B.22)$$

Agora, levando em conta (B.20), a equação de similaridade "generalizada":

$$(A + BKC) \begin{bmatrix} V & T' \end{bmatrix} = E \begin{bmatrix} V & T' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} \quad (B.23)$$

e o fato de que

$$EVQ_VV'E' = E \begin{bmatrix} V & T' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_V & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V' \\ T \end{bmatrix} E' \geq 0 \quad (B.24)$$

obtém-se a partir de (B.22):

$$\begin{aligned}
 E \begin{bmatrix} V & T' \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} \Pi \bar{A}'_{11} & \Pi \bar{A}'_{21} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} \Pi & 0 \\ \bar{A}_{21} \Pi & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} V' \\ T \end{bmatrix} E' = \\
 -E \begin{bmatrix} V & T' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_V & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V' \\ T \end{bmatrix} E' \geq 0
 \end{aligned} \tag{B.25}$$

Portanto, de (B.25) pode-se concluir que:

- $\mathcal{V} = \text{Im } V$  é  $(E, A + BKC)$ -invariante, já que  $\bar{A}_{21} \Pi = 0$  se e somente se  $\bar{A}_{21} = 0$ ;  
e
- $\mathcal{V}$  é internamente-estabilizável, já que  $\Pi \bar{A}'_{11} + \bar{A}_{11} \Pi = -Q_V < 0$  implicando na estabilidade de  $(E, A + BKC)|_{\mathcal{V}}$ .

□

# Referências Bibliográficas

- [AC01] A. Astolfi and P. Colaneri. An algebraic characterization of the static output feedback stabilization problem. In *American Control Conference*, pages 1408–1413, Arlington VA, 2001.
- [AP96] A. T. Alexandridis and P. N. Paraskevopoulos. A new approach to eigens-  
tructure assignment by output feedback. *IEEE Trans. Automatic. Control*, 41(7), July 1996.
- [Bar99] K. A. Barbosa. *Técnicas LMI para Sistemas com Restrições Algébricas no Estado*. Dissertação de Mestrado em Engenharia Elétrica UFSC, Florianópolis, 1999.
- [BGFB94] S. P. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishhnan. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. Philadelphia SIAM, 1994.
- [BGM97] R. Byers, T. Geerts, and V. Mehrmann. Descriptor systems without controllability at infinity. *SIAM J. Control Optim*, 35(2):462–479, 1997.
- [BGMN92] A. Bunse-Gerstner, V. Mehrmann, and N. K. Nichols. Regularization of descriptor systems by derivative and proportional state feedback. *Siam J. Matrix Anal. Appl.*, 13(1):46–67, January 1992.
- [BGMN94] A. Bunse-Gerstner, V. Mehrmann, and N. K. Nichols. Regularization of descriptor systems by output feedback. *IEEE Trans. Autom. Control*, 39(8):1742–1748, 1994.
- [BL97] D. J. Bender and A. J. Laub. The linear quadratic optimal regulator for descriptor systems. *IEEE Trans. Automatic. Control*, AC-32(8):672–688, 1997.

- [CCH99] D. L. Chu, H. C. Chan, and D. W. C. Ho. Necessary and sufficient conditions for the output feedback regularization of descriptor systems. *IEEE Trans. Automatic. Control*, 44(2), 1999.
- [CG96] M. Chilali and P. Gahinet.  $h_\infty$  design with pole placement constraints: An lmi approach. *IEEE Trans. Automatic. Control*, 41(03):358–367, 1996.
- [CGA99] M. Chilali, P. Gahinet, and P. Apkarian. Robust pole placement in lmi regions. *IEEE Trans. Automatic. Control*, 44:2257–2270, 1999.
- [CH93] Eugênio B. Castelan and J. C. Hennet. Eigenstructure assignment for state constrained linear continuous time systems. *Automatica*, 28(3):605–611, 1993.
- [Che96] C. T. Chen. *Linear System Theory and Design*. Holt, Rinehart and Winston, 1996.
- [CHL00] Eugênio B. Castelan, Jean C. Hennet, and Elmer R. Llanos Villarreal. Quadratic characterization and use of output stabilizable subspaces. In *Proceedings (CD) of the 8th Mediterranean Conference on Control and Automation*, page 5, Greece, 2000.
- [CHL01] Eugênio B. Castelan, Jean-Claude Hennet, and Elmer R. Llanos Villarreal. Quadratic characterization and use of output stabilizable subspaces. *Artigo submetido ao IEEE Trans. Automatic. Control*, 2001.
- [CHL02] Eugênio B. Castelan, Jean C. Hennet, and Elmer R. Llanos Villarreal. Output feedback design by coupled lyapunov-like equations. In *aceito ao 15 th IFAC World Congress on Automatic Control*, page 6, Spain, 2002.
- [CLS98] Y. Y. Cao, J. Lam, and Y. X. Sun. Static output feedback stabilization: an lmi approach. *Automatica*, 34:1641–1645, 1998.
- [CLT01] Eugênio B. Castelan, Elmer R. Llanos Villarreal, and Sophie Tarbouriech. Quadratic characterization and use of output stabilizable subspaces in descriptor systems. In *Proceedings (CD) 1st IFAC Symposium on System Structure*, page 5, Prague, 2001.
- [Cob4a] D. J. Cobb. Controllability observability and duality in singular systems. *IEEE Trans. Automatic. Control*, AC-29:1076–1082, 1984a.

- [CSLT02] Eugênio B. Castelan, Aguinaldo S. Silva, Elmer R. Llanos Villarreal, and Sophie Tarbouriech. Regional pole placement by output feedback for a class descriptor systems. In *aceito ao 15 th IFAC World Congress on Automatic Control*, page 6, Spain, 2002.
- [CT99] C. A. R. Crusius and A. Trofino. Sufficient lmi conditions output feedback control problems. *IEEE Trans. Automatic. Control*, 44(5):1053–1057, 1999.
- [Dai89] L. Dai. *Singular Control System*. Springer-Verlag, 1989.
- [DP97] G. R. Duan and R. J. Patton. Eigenstructure assignment in descriptor systems via proporcional plus derivative state feedback. *Int J. Control*, 68:1147–1162, 1997.
- [DP98] G. R. Duan and R. J. Patton. Eigenstructure assignment in descriptor linear systems via state feedback. a new complete parametric approach. *Int J. of Systems Science*, 29:167–178, 1998.
- [Dua92] G. R. Duan. Solution to matrix equation  $av + bw = evf$  and eigenstructure assignment for descriptor systems. *Automatica*, 28:465–469, 1992.
- [Dua95] G. R. Duan. Parametric approach for eigenstructure assignment in descriptor systems via output feedback. *IEE Proceedings-Control Theory and Application*, 142:36–41, 1995.
- [Dua98] G. R. Duan. Eigenstructure assignment and response analysis in descriptor linear systems with state feedback. *IEE Proceedings-Control Theory and Application*, 142:36–41, 1998.
- [Dua99] G. R. Duan. Eigenstructure assignment in descriptor systems via output feedback: a new complete parametric approach. *Int J. Control*, 72(4):345–364, 1999.
- [FKKN85] L. R. Fletcher, J. Kautsky, G. K. G. Kolka, and N. K. Nichols. Eigenstructure assingment by output feedback in descriptor systems. *IEEE Trans. Automatic. Control*, 42:1457–1468, 1985.
- [Fle88] L. R. Fletcher. Eigenstructure assingment by output feedback in descriptor systems. *IEE Proceedings*, 135(4):302–308, 1988.

- [FM00] G. Franzé and P. Muraca. Eigenvalue assignment by static output feedback: Minimizing of the control effort. In *American Control Conference*, pages 406–407, Chicago, 2000.
- [FSoc95] F. D. Freitas, A. S. Silva, and A. J. A. Simões Costa. Coordinate setting of stabilizers for synchronous generators and facts devices in power systems. In *CIGRÉ Symposium on Power Electronics in Power Systems*, pages 320–323, Tokyo, May 1995.
- [FSoc97] F. D. Freitas, A. S. Silva, and A. J. A. Simões Costa. Design of decentralized controllers for large power systems considering sparsity. *IEEE Trans. on Power Systems*, 12(1):144–152, 1997.
- [GDB96] G. Garcia, J. Daafouz, and J. Bernussou. Output feedback disk pole assignment for systems with positive real uncertainty. *IEEE Trans. Automatic Control*, 41(09):1385–1391, 1996.
- [GdSS98] J. C. Geromel, C. C. de Souza, and R. E. Skelton. Static output feedback controllers: Stability and convexity. *Automatica*, 43(1):120–125, January 1998.
- [GM01] L. Gou and M. Malabre. Output feedback  $h_\infty$  controller design for descriptor systems. In *Proceedings (CD) 1st IFAC Symposium on System Structure*, page 5, Prague, 2001.
- [GOA97] L. El Ghaoui, F. Oustry, and M. AitRami. A cone complementarity linearization algorithm for static output-feedback and related problems. *IEEE Trans. Automatic Control*, 42(8):1171–1176, August 1997.
- [Gom94] J. M. Gomes da Silva. *Aplicação do Posicionamento Parcial de Autoestrutura ao Problema de Reagulação sob restrições nas Variáveis de Controle*. Dissertação de Mestrado em Engenharia Elétrica UFSC, Florianópolis, 1994.
- [HJ91] R. A. Horn and C. R. Johnson. *Topics in Matrix Analysis*. Cambridge University Press, 1991.
- [IT00] J. Y. Ishihara and M. H. Terra. Continuous-time  $h_2$  optimal control problem for descriptor systems. In *American Control Conference*, pages 1894–1898, Chicago, 2000.

- [Kim75] H. Kimura. Pole assignment by gain output feedback. *IEEE Trans. Automatic Control*, 20:509–516, 1975.
- [KS95] V. Kucera and C. C. De Souza. A necessary and sufficient condition for feedback stabilizability. *Automatica*, 31:1357–1359, 1995.
- [LCS00] Elmer R. Llanos Villarreal, Eugênio B. Castelan, and Aguinaldo S. Silva. Output feedback for stabilization of a class descriptor systems. In *Anais do XIII Congresso Brasileiro de Automática*, pages 423–428, Florianópolis, Brasil, 2000.
- [Lew86] F. L. Lewis. A survey of linear singular systems. *Circuits Systems Signal Process*, 5(1):3–36, 1986.
- [LYT95] W. Q. Liu, W. Y. Yan, and K. L. Teo. On initial instantaneous jumps of singular systems. *IEEE Trans. Automatic Control*, 40(9):1650–1655, 1995.
- [Men98] R. A. M. Mendonça. *Estabilização em Duas Etapas de Sistemas Descritores*. Dissertação de Mestrado em Engenharia Elétrica UFSC, Florianópolis, 1998.
- [Mol97] J. C. M. Molina. *Controle Centralizado e Descentralizado por Realimentação de Estados via Controle Ótimo e Programação Linear*. Dissertação de Mestrado em Engenharia Elétrica UFSC, Florianópolis, 1997.
- [OL89] K. S. Ozcaldiran and F. L. Lewis. Geometric structure and feedback in singular systems. *IEEE Trans. Automatic Control*, AC-34:450–455, 1989.
- [OL90] K. S. Ozcaldiran and F. L. Lewis. On the regularizability of singular systems. *IEEE Trans. Automatic Control*, 35(10):1156–1160, October 1990.
- [Pai01] Cristiane C. Paim. *Análise e Síntese de Sistemas de Controle Multivariáveis sujeitos à Saturação*. Exame de Qualificação em Engenharia Elétrica UFSC, Florianópolis, 2001.
- [RA99] A. Rehm and F. Allgower. A linear matrix inequality approach towards  $h_\infty$  control descriptor systems. In *7th Mediterranean Conference on Control and Automation*, pages 103–113, Israel, 1999.
- [SADG97] V. L. Syrmos, C. T. Abdallah, P. Dorato, and K. Grigoriadis. Static output feedback - a survey. *Automatica*, 33(2):125–137, 1997.

- [San96] M. M. D. Santos. *Regulação sob Restrições com Alocação de Pólos Abordagem por Invariância Positiva e Programação Linear*. Dissertação de Mestrado em Engenharia Elétrica UFSC, Florianópolis, 1996.
- [SL93a] V. L. Syrmos and F. L. Lewis. Output feedback eigenstructure assignment using two sylvester equations. *IEEE Trans. Automatic. Control*, 38(3):495–499, March 1993.
- [SL93b] V. L. Syrmos and F. L. Lewis. Transmission zero assignment using descriptions. *IEEE Trans. Automatic. Control*, 38(7):1115–1120, 1993.
- [SL94] V. L. Syrmos and F. L. Lewis. Bilinear formulation for the output feedback problem in linear system. *IEEE Trans. Automatic. Control*, 39(2):410–414, February 1994.
- [Str88] G. Strang. *Linear Algebra and its Applications*. Harcourt Brace Jovanovich, 1988.
- [Str93] G. Strang. *Introduction to Linear Algebra*. Wellesley Cambridge Press, 1993.
- [TK98] K. Takaba and T. Katayama.  $h_2$  output feedback control for descriptor systems. *Automatica*, 34:841–850, 1998.
- [Tsu01] C. Chi Tsui. A design algorithm of static output feedback control design for eigenstructure assignment. In *American Control Conference*, pages 1669–1674, Arlington, 2001.
- [VLK81] G. C. Verghese, B. C. Lèvy, and T. Kailath. A general state space for singular systems. *IEEE Trans. Automatic. Control*, 26:811–831, 1981.
- [VLNS94] D. L. Powers V. Lovass-Nagy and R. J. Schilling. On regularizing descriptor systems by output feedback. *IEEE Trans. Automatic. Control*, 39(7):1507–1509, 1994.
- [Won79] W. M. Wonahm. *Linear Multivariable Control, a Geometric Approach*. Springer-Verlag, 1979.
- [YS81] E. L. Yip and R. F. Sincovec. Solvability, controllability and observability of continuous descriptor systems. *IEEE Trans. Automatic. Control*, 26:702–707, 1981.