Universidade Federal de Santa Catarina
Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção

A OFICINA COMO MEIO FACILITADOR DO ENSINO DA MATEMÁTICA

José Roberto Lima

Dissertação apresentada no
Programa de Pós-Graduação em
Engenharia de Produção da
Universidade Federal de Santa Catarina
como requisito parcial para obtenção
do título de Mestre em
Engenharia de Produção

Florianópolis-SC

2001

José Roberto Lima

A OFICINA COMO MEIO FACILITADOR DO ENSINO DA MATEMÁTICA

Esta dissertação foi julgada e aprovada para a obtenção do título de **Mestre em Engenharia de Produção no Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção** da Universidade Federal de Santa Catarina

Florianópolis, 29 de junho de 2001

Prof. Ricardo Miranda Barcia, Ph.D.
Coordenador do PPGEP.

BANCA EXAMINADORA

Profa. Vania Ribas Ulbricht, Dra.

Orientadora

Prof. Júlio César da Silva, Dr.

Prof. Luiz Fernando Gonçalves de Figueiredo, Dr.

Dedicatória

À minha esposa Tânia, minhas filhas Tatiana e Marcela pelo apoio, compreensão e incentivo que contribuíram de forma bastante relevante para a conclusão dessa dissertação.

Aos meus alunos que acreditaram na minha proposta de trabalho e que de certa forma foram os responsáveis pela escolha do meu tema.

Aos colegas desse curso de Mestrado que sempre me apoiaram e me auxiliaram em todos os momentos de dúvidas que ocorreram nesse curso.

Enfim, a todos que direta ou indiretamente contribuíram para que esse trabalho se realizasse.

Agradecimentos

Devo agradecer a Deus, a quem muitas vezes nos momentos difíceis dessa trajetória, recorri pedindo paciência e persistência suficientes para a realização desse trabalho.

À Universidade Federal de Santa Catarina.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior CAPES.

À professora Vânia Ribas Ulbricht, orientadora e amiga, que sempre revisou meus trabalhos com o maior cuidado e atenção, indicando materiais valiosos para a minha pesquisa, e o que é mais importante; sempre me incentivando e fazendo com que eu procurasse meios para enriquecer cada vez mais o trabalho que me foi destinado.

Aos professores do Curso de Pós-Graduação. Enfim a todos que direta ou indiretamente contribuíram para a realização desta pesquisa.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

Lista de Reduções

Siglas

UFRGS - Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Coteom – Colégio Técnico do Oeste de Minas
Procap – Programa de Capacitação de Professores

RESUMO

LIMA, José Roberto. **A Oficina como Meio Facilitador do Ensino da Matemática.** Florianópolis, 2001. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção) – Programa de Pós-graduação em Engenharia de Produção em Mídia e Conhecimento com ênfase em Gestão da Informática na Educação, UFSC, 2001, 85 p.

O presente trabalho aborda alguns aspectos do ensino, especialmente o da Matemática, destacando o fato de que o indivíduo deve ser o autor de seu próprio conhecimento. Esse processo é gradativo e ocorre num clima de autoconfiança, auto-estima e autonomia, onde o aprendiz vai organizando-se de modo a construir um conceito matemático, num processo de interação com o mundo que o cerca.Também tem por objetivo destacar as mudanças que o profissional deve submeter-se para acompanhar as novas tendências, contribuindo para a melhoria da qualidade de seu trabalho. O trabalho destaca experiências positivas e negativas ocorridas em sala de aula, onde as dificuldades aparecem e as soluções para os problemas são encontradas de forma gradativa, na medida em que as estruturas mentais se desenvolvem e o conhecimento do indivíduo se torna mais próximo da realidade. Constata-se também a importância do trabalho com material concreto onde o nível de abstração é substancialmente reduzido. Essa constatação vem reforçar um processo que tem estado presente em nosso meio desde os tempos primitivos que é a chamada "Modelagem Matemática". Essa prática educativa utilizando modelos, faz com que o ensino da Matemática se torne mais prazeroso, aproximando conceitos teóricos da realidade vivenciada pelos indivíduos no dia a dia.

Palavras-chave: Ensino-Aprendizagem, Tecnologia, Modelagem Matemática.

ABSTRACT

Lima, José Roberto. **The wokshop as a facilitating means of teaching in Mathematics.** Florianópolis, 2001. Dissertation (Masters in Production Engineering) Program of Post-Graduation in Production Engineering in Media and Knowledge with Emphasis on Informatics in Education, UFSC 2001.

The present assignment addresses some aspects of teachings, especially pertaining to Mathematics, emphasizing the fact that the individual should be the bearer of his own knowlege.This process is gradual and occurs in an environment of self-confidence, self-esteem and autonomy.Where the learner organizes himself in such a manner as to construct a mathematical concept in a process of interaction with the world that surrounds him. It also has the objective of enhancing the changes to which the professional should be submitted so as to accompany the new tendencies, contributing to the improvement of the quality of his work. The assignment emphasizes positive and negative experiences occurring in classrooms where the difficulties appear and the solutions to the problems are found in a gradual manner, as the mental structures develop and the knowledge of the individual becomes closer to reality.It also ascertains the importance of working with concrete material where the level of abstraction is substantially reduced. This verification reinforces a process that has been present in our midst since the primitive ages called "Mathematical Modeling". This educational practice using models transforms the learning process of Mathematics into something more pleasurable, therefore drawing the theoretical concepts closer to the daily reality expereienced by individuals.

Key-words: Teaching-Learning, Tecnology, Interaction, Mathematics modelling.

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

1.1– Apresentação do tema

A missão dos educadores é preparar as novas gerações para o mundo em que terão que viver. Isto quer dizer proporcionar-lhes o ensino necessário para que adquiram as destrezas e habilidades que vão necessitar para seu desempenho, com comodidade e eficiência, no seio da sociedade que enfrentarão ao concluir sua escolaridade.

Por isso como o mundo atual é rapidamente mutável, também a escola deve estar em contínuo estado de alerta para adaptar seu ensino, seja em conteúdos como em metodologia, frente a evolução dessas mudanças, que afetam tanto as condições materiais de vida como a do espírito.

Não há dúvida de que devido aos progressos científicos deste século os conhecimentos do homem atual são muito superiores aos de poucas décadas atrás. O homem de hoje deve dispor de uma plataforma básica e de arquivos culturais mais poderosos do que os do homem grego e o homem do princípio do século. O problema reside em decidir como educar esse indivíduo informático que tem poderosas bases, grandes possibilidades e que vai adaptando-se a uma tecnologia que lhe permite muitas maneiras de agir. A vida tem-se tornado mais difícil e a escola deve evoluir para preparar indivíduos com capacidade para atuar neste mundo complexo e diversificado.

No processo ensino-aprendizagem é muito importante destacar que o indivíduo atualmente conta com uma tecnologia bastante avançada, pois além da televisão, video, tem também o computador, no qual ele pode fazer suas pesquisas sem necessidade de se deslocar de um lugar para o outro. As máquinas são apenas instrumentos e os programas formam uma corrente de pesquisa, possibilitando ao aluno o acesso a uma série de informações. São muito interessantes os aplicativos da tecnologia educacional principalmente na geometria plana, pois os usuários podem movimentar as figuras colocando-as em posições diferentes permitindo reconhecê-las melhor. Assim o indivíduo vai construindo seu conhecimento, atuando como sujeito desta construção e interagindo com o mundo que o cerca.

1.2 - Justificativa

A escolha desse tema nasceu da dificuldade que os professores encontram em ensinar Matemática pelos métodos convencionais. A própria experiência docente já comprovou que não é fácil manter os estudantes com a atenção voltada para uma aula expositiva sem uma atividade que chame a atenção e deixe-os motivados. No mundo atual as informações fluem com tanta rapidez em todos os canais de comunicações que na maioria das vezes os educadores tornam-se enfadonhos e esquecem que o indivíduo por si só pode construir seu próprio conhecimento, na medida em que as estruturas mentais se desenvolvem e essa construção se faz num processo de interação do sujeito com o mundo.

Levando-se em consideração a importância das teorias de Piaget, e de outros estudiosos das teorias do conhecimento, o papel do educador deve ser repensado. A maioria dos professores insistem em continuar com os métodos tradicionais no ensino da Matemática ao invés de motivar o estudante, fazendo com que ele construa conceitos a partir da observação de materiais concretos, como jogos e construção de sólidos geométricos, onde o aprendiz possa visualizar com maior clareza os elementos que o constituem, possibilitando-lhes uma ampla atuação no processo de construção do conhecimento.

É importante que se desenvolva a "representação do espaço físico", seja ele vivenciado ou imaginado num trabalho articulado com outras áreas do conhecimento como Geografia, Educação Física ou mesmo a Física onde o aluno possa interpretar e construir mapas, fazer desenhos, plantas e maquetes, representar trajetos e deslocamentos percorridos ou imaginados, desenvolver o sentido da medida especificamente as lineares, de área e de volume, construir o conceito de ângulo em diferentes contextos como por exemplo: inclinação, comparação de orientações, giro, etc. O aluno fica bastante motivado quando ele compreende e consegue operar com escalas gráficas e numéricas, constrói e compreende os sistemas de referência usando coordenadas, percebe e adota diferentes pontos de vista e estratégias na representação do espaço.

Então vem a pergunta: qual o lugar da Matemática nessa construção? O olhar da Matemática para o espaço físico caracteriza-se, fundamentalmente, pela atenção às relações que podem ser estabelecidas entre os objetos que constituem este espaço, abstraindo as particularidades que os caracterizam e concentrando o foco nas formas, nas grandezas e nos movimentos.

Deste olhar específico da Matemática para o espaço físico decorre o segundo conjunto de motivações, de desenvolver a capacidade, na atividade concreta e mental, de classificar, comparar e operar com figuras e sólidos: como recortar, colar, compor, decompor, dobrar, montar, desmontar, rotar, espelhar, trasladar, ampliar, reduzir, deformar e projetar. O aspecto a ser enfatizado aqui é a importância de atividades em Matemática que não envolvam muitas operações com números e que concentrem a atenção nas operações propriamente concretas.

Existem muitas maneiras de se trabalhar com a Matemática e muitos profissionais estão perdendo essa oportunidade, talvez por não conhecerem a realidade de seus alunos, ou por se conformarem com o sistema de ensino que vem sendo desenvolvido ao longo dos tempos ou até mesmo por não acreditarem que a mudança possa trazer benefícios contribuindo para a formação de um novo homem na sociedade.

Pelo exposto, é importante que se desenvolva um trabalho interdisciplinar onde o professor possa contar com subsídios para a solução de muitos problemas que vêm incomodando de modo geral a todos os educadores e também para que possa despertar no aluno o interesse e a curiosidade sob todos os aspectos contribuindo efetivamente para a construção do seu conhecimento, procurando sempre levar em conta que o objetivo principal de todos os que estão envolvidos nesse processo é o da "melhoria da qualidade de ensino".

1.3 – Delimitação do problema

Será possível encontrar métodos interessantes no ensino da Matemática, que levam à satisfação e um melhor rendimento do aluno na construção do seu conhecimento? Um aspecto importante que se deve destacar: é a tendência constante que profissionais da área de Matemática têm em rejeitar as novas tecnologias, preferindo continuar trabalhando com métodos ultrapassados e contribuindo para que o alunos continuem cada vez mais desmotivados e sem perspectivas para o futuro.

1.4 – Hipótese geral

É possível desenvolver um trabalho em Matemática com os alunos, fazendo com que eles se sintam motivados e se envolvam nas tarefas, utilizando material concreto e fazendo o uso das novas tecnologias.

1.5 – Objetivo geral

Determinar, através do estudo da Geometria, alternativas metodológicas que auxiliem o trabalho do docente e desenvolva no aluno o pensamento geométrico a partir da construção de seu próprio conhecimento, de uma forma sequencial, para que o estudante possa estar preparado para atingir níveis mais elevados de rigor, no que se refere aos aspectos abstratos formais da dedução.

1.6 – Objetivos específicos

- Conhecer os princípios históricos e filosóficos da Matemática desde sua origem, destacando principalmente os trabalhos que contribuíram para a construção de um mundo moderno;
- Mostrar a importância do ensino da Matemática na construção do conhecimento do indivíduo e sua relação com o cotidiano;
- Destacar a contribuição da Matemática na formação do cidadão e a influência que ela exerce nos estudantes quando se trata de trabalhos com material concreto;
- Apontar ferramentas que podem ser utilizadas no ensino da Matemática, principalmente no que se refere ao uso da tecnologia como meio facilitador do processo ensino-aprendizagem.

1.7– Procedimentos Metodológicos

Para o desenvolvimento da pesquisa foi feito um levantamento dos conteúdos de Matemática trabalhados no ensino fundamental e médio. Foi levantado também a questão do livro didático e os programas de ensino, em troca de experiências com outros profissionais da área de Matemática, em algumas escolas públicas e particulares, levando em conta a abordagem metodológica utilizada.

Dentro do conteúdo programático do ensino fundamental, foram realizadas em duas escolas, em turmas de quinta, sexta e sétima séries, trabalhos com material concreto utilizando dobraduras em folha de cartolina, para a construção de polígonos e sólidos geométricos.

Experiências foram feitas também em duas escolas: uma pública e outra particular com fitas de vídeo do Procap (Programa de Capacitação de Professores) das quais os alunos puderam assistir aulas sobre construção de ângulos, planificação de figuras geométricas e o cálculo de áreas e perímetros. Houve uma participação e um interesse muito grande por parte dos alunos em relação ao assunto abordado.

1.7.1 – Quanto ao método

O método de abordagem a ser utilizado no estudo é o indutivo, proposto por Bacon, Hobbes, Locke, Hume, o qual considera que o conhecimento é fundamentado na experiência.

1.7.2 – População e amostra

A pesquisa foi desenvolvida com o universo dos 30 alunos da quinta série do ensino fundamental da Escola Estadual Rosa Vaz Araújo, 22 alunos da sexta série e 33 alunos da sétima série do ensino fundamental do Coteom-Colégio Técnico do Oeste de Minas.

1.7.3 – Passos da pesquisa

- Aprofundamento teórico em livros didáticos, dissertações e teses.

- Diagnósticos das dificuldades encontradas no dia a dia em sala de aula pelos professores.
- Leitura de manuais, revistas e livros para melhor aprofundamento do tema.
- Troca de idéias com profissionais da área de matemática.

1.7.4 – Pesquisa teórica

O registro dos dados está dividido em fechamento por assunto e a organização da pesquisa, apresenta-se da seguinte forma:

- Histórico da Geometria Euclidiana.
- Processo Ensino Aprendizagem.
- A Modelagem da Aprendizagem da Geometria para o Ensino.
- Uma Proposta de Trabalho para o Ensino da Matemática.
- Conclusões e sugestões para trabalhos futuros.

1.8 – Organização do trabalho

O capítulo 1 descreve o escopo da presente dissertação, introduzindo o assunto, estabelecendo a relevância da pesquisa, os objetivos, os procedimentos metodológicos, o problema e a organização do trabalho.

Os capítulos 2, 3 e 4, fornecem a fundamentação teórica da dissertação. O capítulo 2 faz uma descrição histórica da geometria euclidiana, o capítulo 3 descreve o processo de ensino-aprendizagem e o capítulo 4 aborda a modelagem da aprendizagem da geometria para o ensino.

O capítulo 5, refere-se aos resultados alcançados e a proposta para o ensino da Matemática.

O capítulo 6, trata das conclusões deste trabalho e das recomendações para trabalhos futuros.

CAPÍTULO II

HISTÓRICO DA GEOMETRIA EUCLIDIANA

2.1- Introdução

Muitas foram as contribuições deixadas por matemáticos antigos, as quais, com o passar do tempo, foram tomando lugar de destaque no que se refere as ciências matemáticas.

Os nomes que marcaram a história da Matemática e, em especial, a Geometria, deixaram contribuições muito importantes em outras ciências como: Astronomia, Medicina, etc. Sabe-se que na história das ciências, como em qualquer outro ramo, é difícil falar de uma origem absoluta. Fatos foram registrados periodicamente, mas tudo leva a crer que, na história da Geometria especificamente, muitos deles foram perdidos sem que alguém pudesse pelo menos mencionar tal fato.

Ao contrário do que ocorre com a Matemática antiga do Egito e da Babilônia, quase não se dispõe de nenhuma fonte primária para lançar luz sobre a primitiva Matemática grega. Apoia-se em manuscritos e relatos escritos há vários séculos. Mas não faltaram sábios especializados na cultura clássica para construir uma descrição bastante consistente da história da Matemática. É difícil avaliar o débito da Matemática grega primitiva com a Matemática oriental. Os autores gregos sempre manifestaram seu respeito pela sabedoria oriental. (Boyer, 1996)

A principal fonte de informação a respeito dos primeiros passos da Matemática grega é o *Sumário Eudemiano* de Proclo. Embora Proclo tivesse vivido no século V d.C., ele ainda teve acesso a muitos trabalhos históricos e críticos. Este sumário é um breve resumo do desenvolvimento da Geometria grega desde seus primeiros tempos até Euclides. Antes do século VI, os gregos tinham noções de Matemática e outras ciências, receitas ou conhecimentos empíricos trazidos do oriente, mas no século VI, com o aparecimento das escolas Jônicas, fundada por Tales de Mileto e da escola pitagórica de Crotona, muitos outros centros de Matemática surgiram e floresceram em lugares e períodos de prevalecência ampla da história política grega.

2.2 – A origem da Geometria

A história tem afirmado que a Geometria localiza sua origem no Egito, relacionada a um problema prático: a reconstituição dos limites dos terrenos após as enchentes do Nilo. Depois é exportada à Grécia, possibilitando a Thales de Mileto voltar ao Egito para calcular a altura da grande pirâmide, a partir da medição de sua sombra. (Boyer, 1996).

A Geometria surge, então, como uma ciência empírica, em que os esforços de teorização estão a serviço do controle das relações do homem com seu espaço circundante. " *O plano de Thales de Mileto é o deserto onde a luz faz todos os desenhos possíveis".* (Serres, 1981 p.236).

Esta Geometria empírica, ou física, constitui uma teoria da estrutura do espaço físico, que "*não pode nunca, logicamente, dar-se por válida com certeza matemática, por amplas e numerosas que sejam as provas experimentais a que seja submetida, como qualquer outra teoria da ciência empírica, só pode conseguir um grau maior ou menor de confirmação"* (Hempel, 1974 p.236).

Afirmações sobre a origem da Geometria são necessariamente arriscadas, pois os primórdios do assunto são mais antigos que a arte de escrever. Heródoto e Aristóteles não quiseram se arriscar a propor origens mais antigas que a civilização egípcia, mas é claro que a Geometria que tinham em mente possuía raízes mais antigas. Heródoto acreditava que a Geometria tinha surgido no Egito exatamente devido a história das enchentes do Nilo. Já Aristóteles achava que o estudo da Geometria se devia a uma classe sacerdotal do Egito que exercia atividades motivadas por lazeres.

O fato dos geômetras egípcios serem chamados de " esticadores de corda " pode ter levado a qualquer uma das teorias, pois as cordas eram usadas para traçar bases de templos e realinhar demarcações apagadas de terras. O homem neolítico pode ter tido pouco lazer e pouca necessidade de medir terras, mas o fato é que desenhos e figuras sugerem uma preocupação com relações espaciais que abriram caminho para a Geometria. Para o período pré-histórico não há documentos, portanto é impossível acompanhar a evolução desde um desenho específico até um teorema familiar. (Boyer, 1996)

Segundo Boyer (1996), a preocupação do homem pré-histórico com configurações e relações pode ter origem no seu sentimento estético e no prazer que lhe dava a beleza das formas. Pensa-se que a motivação geométrica dos "esticadores de corda " no Egito era mais prática que a dos povos da Índia, mas tanto a geometria da Índia como a do Egito podem provir de uma fonte comum – uma protogeometria relacionada com ritos primitivos, como a ciência que se desenvolveu a partir da mitologia e a filosofia da teologia. Ir além é identificar uma origem determinada no espaço e no tempo, é confundir conjectura com história. O melhor é suspender o julgamento e ir adiante, ao terreno mais firme da história encontrada em documentos escritos.

Nomes importantes como o de Tales de Mileto e Pitágoras não podem deixar de fazer parte da história da Matemática. Suas contribuições registradas ao longo dos séculos fizeram com que outros matemáticos pudessem realizar magníficos trabalhos e de grande aceitação.

2.3 – Tales de Mileto

Sabe-se muito pouco sobre a vida de Tales, seu nascimento e morte são datados com base no fato de que o eclipse de 585 a.C. ocorreu quando ele tinha aproximadamente 40 anos e diz-se que tinha 78 anos quando morreu. Tales era um dos sete sábios da época e, sendo comerciante, teve a oportunidade de ser um dos estudiosos da Matemática dos egípcios. Além do mais, ele foi saudado como o primeiro matemático originador da organização dedutiva da Geometria. Não há documento que possa provar de fato que alguns teoremas importantes eram de sua autoria, mas a tradição é persistente.

Um discípulo de Aristóteles, chamado Eudemo de Rodes (viveu por volta de 320 a.C.) escreveu uma história da Matemática. Ela perdeu-se mas alguém resumiu pelo menos uma parte dela. Durante o século V, Proclo (410-485), após observações introdutórias sobre a origem da Geometria no Egito, diz que Tales:

"... primeiro foi ao Egito e de lá introduziu esse estudo na Grécia. Descobriu muitas proposições ele próprio, e instruiu seus sucessores nos princípios que regem muitas outras, seu método de ataque sendo em certos casos mais geral, em outros mais empírico. (Heath 1981, vol. I, p.128).

É principalmente dessa citação que vem as designações de Tales como primeiro matemático. Lendas descrevem Tales como mercador de sal, defensor do celibato ou ainda um estadista de visão. Tais referências, no entanto, não trazem mais provas relativas para saber se Tales arranjou de fato um certo número de teoremas geométricos numa sequência dedutiva. Mas de qualquer forma, Tales é o primeiro homem da história a quem foram atribuídas descobertas matemáticas específicas. (Boyer, 1996)

Figura 01 - Pitágoras

Fonte: A Geometria na Antiguidade Clássica – FTD. (Milies, 1999)

2.4– Pitágoras

Um matemático ilustre também mencionado no *Sumário Eudemiano* foi Pitágoras, que segundo a história, pouco se sabe sobre ele. Ao que parece Pitágoras nasceu na ilha egéia de Samos por volta de 572 a.C.

O fato de Pitágoras ser cinquenta anos mais novo que Tales e de ter morado perto de Mileto leva a crer que ele pode ter sido discípulo de Tales. Depois parece que, por algum tempo, residiu no Egito e fez algumas viagens externas. (Eves, 1997)

Ao retornar a Samos, encontrou o poder nas mãos de Polícrates, um tirano, então decidiu emigrar para o porto marítimo de Crotona, uma colônia grega situada no sul da Itália, onde fundou a famosa escola pitagórica, um centro de Filosofia, Matemática e Ciências Naturais, era também uma irmandade unida por ritos secretos e cerimônias. Devido a influência e as tendências aristocráticas da irmandade, as forças democráticas do sul da Itália destruíram os prédios da escola fazendo com que a confraria se dispersasse. Mas, segundo um relato, Pitágoras fugiu para Metaponto, onde, com uma idade entre setenta e cinco e oitenta anos tenha sido assassinado. Várias foram suas contribuições no campo da Matemática, mas o que o consagrou foi o famoso teorema sobre os triângulos retângulos que hoje, é universalmente conhecido pelo seu nome. (Eves, 1997).

2.4.1– O teorema de Pitágoras

O teorema era conhecido pelos Babilônios mais de um milênio antes, mas sua primeira demonstração geral pode ter sido dada por Pitágoras, com o seguinte enunciado: *" o quadrado sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma dos quadrados sobre os catetos"* e assim ficou registrado, devido a forma como foi demonstrado. (Eves, 1997).

O *Sumário Eudemiano,* atribui esse teorema, em geral, aos pitagóricos, pois como a demonstração desse teorema requer o conhecimento de certas propriedades sobre as retas paralelas, atribui-se também aos pitagóricos o desenvolvimento dessa teoria. Muitas demonstrações desse teorema foram dadas desde os tempos de Pitágoras. E.S.Loomis em seu livro, *The Pythagorean Proposition,* coletou aproximadamente trezentos e setenta dessas demonstrações. (Eves, 1997)

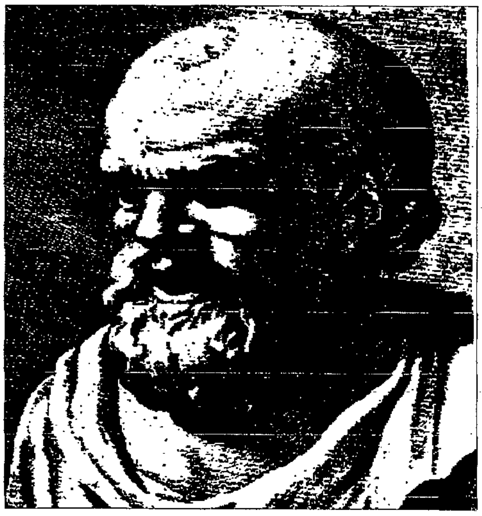
O grande dilema do teorema de Pitágoras foi quando surgiu o seguinte problema: calcular a hipotenusa de um triângulo retângulo, cujos catetos são iguais a 1. Pelo que diz o teorema, a hipotenusa teria que ser um número que elevado ao quadrado fosse igual a dois e esse número não é inteiro. Isso deixou os pitagóricos bastante perturbados, pois esse fato parecia desferir um golpe mortal na filosofia pitagórica que tudo dependia de números inteiros. (Eves,1997).

Depois de muitas demonstrações chegaram à conclusão de que esse novo número e outros que foram surgindo, receberia o nome de *número irracional*. A descoberta da irracionalidade provocou muitas perturbações nos meios pitagóricos, porque a definição de proporção assumir como comensuráveis duas grandezas quaisquer similares fazia com que todas as proporções da teoria pitagórica se limitassem a grandezas comensuráveis, invadindo a teoria das figuras semelhantes. (Eves,1997)

O escândalo lógico foi tão grande naquela época que procuravam manter em sigilo aquela questão. Segundo a lenda, um pitagórico foi lançado ao mar por ter revelado a estranhos o segredo, ou ainda, de acordo com outra versão, que tenha sido banido da comunidade pitagórica e considerado morto.

Por volta de 370 a..C. o problema fora resolvido por Eudoxo, discípulo de Platão e do pitagórico Arquitas, por meio de uma nova definição de proporção, cujo magistral tratamento foi mencionado no quinto livro dos *Elementos* de Euclides. (Eves,1997).

Figura 02 - Demócrito



Fonte: A Geometria na Antiguidade Clássica - FTD. (Milies, 1999)

2.5– Demócrito

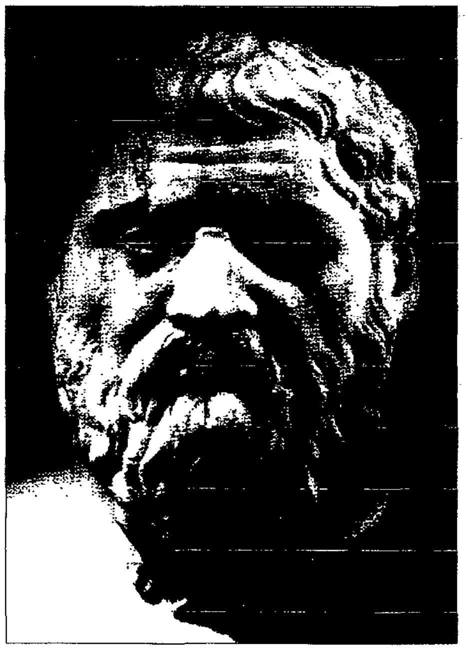
Segundo Milies (1999), Demócrito teria vivido entre 460 e 370 a..C. e destacou-se em várias áreas do conhecimento, principalmente na Matemática, Física, Filosofia, Ética e Poesia. Em relação à Geometria, sua contribuição foi importante, pois, descobriu que o volume de um cone é igual a um terço do volume de um cilindro de mesma altura, e que o volume de uma pirâmide também é igual a um terço do volume de um prisma de mesma altura.

Segundo Diógenes Laércio, Demócrito teria deixado nada menos que 73 obras importantes sobre vários assuntos da época, mas como aconteceu também com outros matemáticos de sua época, sua produção se resumiu em alguns poucos fragmentos, versando quase que exclusivamente sobre Ética.

A respeito de sua Geometria, Demócrito deixou uma frase curiosa que chamou a atenção dos geômetras da época, onde diz o seguinte: *"no agrupar linhas, com a necessária demonstração, ninguém tem me superado, nem mesmo os assim chamados harpedoneptae (esticadores de corda) do Egito".* (Milies, 1999, p.44).

2.6-Platão

Figura 03 - Platão



Fonte: A Geometria na Antiguidade Clássica – FTD. (Milies, 1999)

Segundo Milies (1999), Platão teria vivido por volta de 427 e 347 a.C.. Nasceu de uma família tradicional ateniense e dedicou o tempo todo de sua vida à Filosofia. Platão teve, além de Sócrates, grandes mestres matemáticos da famosa escola pitagórica como Teodoro de Cirene (norte da África) e Arquitas de Tarento (sul da Itália), recebendo grande influência pitagórica, o que se pôde perceber na escola platônica. Platão não foi propriamente um matemático, mas incentivou notadamente o aprendizado da aritmética e da Geometria como um eficiente meio de desenvolver o raciocínio lógico dedutivo.

Em 387 a.C., fundou a Academia em Atenas, que iria trabalhar a consciência moral, ética e política de um povo. Em sua academia eram ministrados os conhecimentos de Biologia, Teoria Política, Filosofia, Astronomia e Matemática. Interessante que sobre o portal da sala de leitura dessa academia lia-se a seguinte frase: " *Que não entre aqui ninguém que ignore a Geometria* " (Milies, 1999)

Platão foi um pensador que tinha posições filosóficas consideradas como idealistas e postulavam a existência de um mundo perfeito, o das idéias abstratas, em contradição ao mundo imperfeito, o das realidades sensíveis. Essas posições levaram a motivação e a tendência de acentuar a abstração no pensamento matemático.

Em relação à forma de raciocinar dos matemáticos, Platão faz a seguinte afirmação: " *E não sabes também que embora eles façam uso das formas visíveis e raciocinem sobre elas, eles não estão pensando nelas, mas procurando compreender as próprias coisas que só podem ser vistas com os olhos da mente* ". (Milies, 1999).

Embora tenham sido bastante relevantes suas contribuições em várias áreas do conhecimento, influiu negativamente no que diz respeito ao desenvolvimento da matemática aplicada, pois afirmava que as artes mecânicas eram atividades afeitas a escravos e não a homens livres.

Platão viveu até a idade de 80 anos, encerrando seus últimos dias de vida escrevendo diálogos que se tornaram conhecidos por muitas gerações. Cerca de trinta e cinco desses diálogos chegaram até os dias atuais e sempre tem como personagens Sócrates, filósofo grego, e outros interlocutores.

2.7 – A biblioteca de Alexandria

Após a morte de Alexandre, aconteceu a divisão daquele que foi o maior império daquela época. Na parte egípcia, onde passou a vigorar uma monarquia duradoura, foi criado em Alexandria, o maior centro de estudos que se chamava *"Museu".* O nome museu se referia as musas, as deusas das artes, junto ao qual se criou uma biblioteca onde se reuniu tudo que havia sido produzido em termos de Literatura, Filosofia e Ciências do mundo grego e de outras regiões. A instituição congregava a maioria dos sábios da época. O museu foi erigido ao lado do palácio real, tinha dependências residenciais, salas de aula e de conferências. (Milies, 1999).

Figura 04 – A biblioteca de Alexandria

Fonte: A Geometria na Antig. Clássica – FTD. (Milies,1999)

Durante o reinado dos Ptolomeus, que durou nada menos que 300 anos, a cidade de Alexandria permaneceu relativamente em paz e a biblioteca tornou-se o maior centro científico do mundo. (Milies, 1999)

Ainda, no reinado dos Ptolomeus, organizavam cursos de artes e ciências ao redor da biblioteca. Os melhores professores daquela época ensinavam e pesquisavam naquele instituto. O período foi conhecido por Alexandrino e foi o que reuniu a maior produção de obras da Matemática Clássica. Os três matemáticos mais importantes daquela época, marcaram de alguma forma esse centro cultural, mas não foram os únicos, tiveram outros muitos importantes como: Cláudio Ptolomeu, Hiparco, Menelau, entre outros. (Milies, 1999).

A biblioteca chegou a ser quase toda destruída durante o ataque de Júlio César em 48 a.C. e foi reconstituída. Em seguida, cerca de 270 d.C., houve um incêndio que novamente destruiu a biblioteca principal. Em 391 d.C., a multidão estimulada pelo bispo, destruiu também o templo e o acervo de Serapis.

Apesar desses acontecimentos, a biblioteca pôde existir por um longo período, sendo reconstituída depois de cada incidente, permanecendo sempre como o local de encontro dos maiores sábios da época, no entanto foi destruída definitivamente em 642 d.C., durante a conquista árabe do Egito. (Milies, 1999).

2.8– Euclides de Alexandria

Figura 05 - Euclides

Fonte: A Geometria na Antiguidade Clássica – FTD. (Milies, 1999)

Embora seja desapontador, pouco se sabe sobre o nascimento e vida de Euclides. Segundo alguns historiadores, sua formação matemática se deu na escola platônica de Atenas. Por volta de 300 a.C. fixou-se no Egito, foi um grande educador lecionando na escola de Matemática de Alexandria.

Euclides foi o primeiro diretor do Museu, graças a isso, pôde organizar os resultados obtidos por matemáticos anteriores como Tales, Pitágoras, Eudoxo e outros. Tal organização se acha em sua imortal obra. Os Elementos são um conjunto de 13 livros dedicados ao fundamento e o desenvolvimento lógico e sistemático da Geometria. (Boyer,1996)

O famoso Euclides é conhecido como *Euclides de Alexandria,* por ter sido chamado para lá ensinar Matemática. Pela natureza de seu trabalho pode-se presumir que tivesse estudado com discípulos de Platão.

Do que Euclides escreveu, mais da metade se perdeu, inclusive algumas das obras mais importantes, como o Tratado das Cônicas. Mas logo foi superado pelo trabalho extenso sobre Cônicas de Apolônio. (Boyer, 1996).Cinco das obras mais importantes de Euclides sobreviveram até hoje: *Os Elementos, Os dados, Divisão de Figuras, Os Fenômenos e Óptica.* Esta última destaca-se por ser um dos primeiros trabalhos sobre perspectiva, ou a Geometria da Visão Direta.

2.8.1 – Os Elementos

Realmente, o momento culminante no desenvolvimento da Geometria como ramo da Matemática acontece quando Euclides escreve *Os Elementos* (século III a.c.), sintetizando o saber geométrico de sua época. Nesta, obra ele relaciona alguns axiomas, postulados e definições, onde vem a construir um conjunto de proposições geométricas. (Boyer, 1996).

Considerando a fama do autor e de sua obra, sabe-se muito pouco sobre a vida de Euclides. Tão obscura ficou sua vida que nenhum lugar de nascimento é associado a seu nome. Embora edições de *Os Elementos* frequentemente identificassem o autor como Euclides de Megara e um retrato de Euclides em Megara frequentemente apareça em histórias da Matemática, trata-se de um erro de identidade. O verdadeiro Euclides de Megara era um discípulo de Sócrates e, embora se preocupasse com Lógica, não se sentia mais atraído pela Matemática que seu mestre.

Há algumas estórias interessantes em relação à vida deste matemático: Ptolomeu uma vez perguntou a Euclides se havia um caminho mais curto, para a Geometria, que o estudo de *Os Elementos*, e ele respondeu que não havia estrada real para a Geometria. Outro fato interessante foi quando um estudante perguntou a ele para que servia a Geometria, então Euclides disse a seu escravo que desse três moedas ao estudante, "pois ele precisa ter lucro com o que aprende " (Boyer, 1996).

Euclides era conhecido notadamente pela sua capacidade de expor, eis o grande sucesso de sua obra, mas não por ser o pioneiro, porque surgiram pelo menos uns três anteriores, inclusive uma versão escrita por Hipócrates. *Os Elementos* era uma publicação realmente imbatível e dos treze livros, os seis primeiros são sobre Geometria Plana Elementar, os três últimos sobre Geometria no Espaço e os quatro restantes sobre a Teoria dos Números e Progressões Geométricas. (Boyer, 1996).

Uma observação interessante em sua obra é a deficiência nas definições, quando diz que: " um ponto é aquilo que não tem partes " ou que " uma reta é o comprimento sem largura " ou ainda "uma superfície é o que tem comprimento e largura ". Considera-se muito vago como definição, pois esta deve ser expressa em termos de conceitos anteriores que são melhor conhecidos que as coisas definidas. (Boyer, 1996).

De qualquer forma, ele sempre enuncia suas leis em forma universal. Formula as leis de modo a torná-las rigorosas e absolutas, nunca são dadas como simples aproximações e, além disso, não se limita a enunciar um grande número de leis geométricas; demonstra-as de maneira sistemática e não de caráter indutivo. Euclides não solicita que se efetue medidas de ângulos de um triângulo afim de verificar que a soma é igual a soma de dois ângulos retos. Não se preocupa com experimentos e sim, faz demonstrações dentro do maior rigor e a mais absoluta necessidade lógica, pois uma demonstração é uma cadeia de raciocínios que permite asseverar uma conclusão, mostrando que ela decorre de certas premissas sabidamente verdadeiras. Euclides admitia que as premissas geométricas eram indispensáveis para a obtenção de conclusões geométricas. (Barker, 1969)

Deve-se destacar que, uma dedução não equivale a uma demonstração. Por exemplo: poderia-se deduzir que *" todos os gatos voam "* empregando a premissa *" todos os gatos voam e os gatos são mamíferos ",* porém, isso não demonstra que os gatos voam. (Barker, 1969, p.30).

Em Geometria algumas leis podem ser demonstradas e outras não. Euclides em *"Os Elementos"* chama as leis que não podem ou não precisam ser demonstradas de *"postulados"* enquanto que as que devem ser demonstradas de *"teoremas"* (Barker, 1969).

No livro Os Elementos é relatada a geometria do plano com estudo exclusivo das figuras poligonais e circulares, abrangendo os quatro primeiros livros. Ela não recorre a semelhança. Esta noção é estudada na segunda parte formada pelo livro V, que trata abstratamente das razões e proporções. A quinta parte, que aborda a geometria do espaço, compreende os livros XI, XII e XIII. (Taton, 1959).

Euclides começa o livro I com definições, em cinco postulados, " noções comuns ", em número variável segundo as edições e das quais, cinco no máximo, são tidas como autênticas. (Taton, 1959).

O livro II, muito breve, trata dos fundamentos da Álgebra Geométrica, instrumento indispensável à Geometria Grega.

O livro III, ainda muito elementar, trata das propriedades do círculo. Estabelece a noção de potência de um ponto em relação a um círculo, sem utilizar semelhança, pelos métodos de aplicação das áreas, ou álgebra geométrica. O estudo da tangente em um ponto, aparece pela primeira vez na história a noção básica de ângulo de segmento.

O livro IV, estuda a inscrição, no círculo dos polígonos regulares, bem como sua circunscrição. Limita-se apenas ao triângulo equilátero, ao quadrado, ao pentágono e ao hexágono. (Taton, 1959).

O livro VI é importante, mas elementar. Encontramos nele os casos de semelhança de triângulos, o teorema chamado hoje impropriamente "de Tales", a proporcionalidade dos arcos de círculo aos ângulos centrais e aos ângulos inscritos e a resolução das equações do segundo grau por processos puramente geométricos. Daí por diante está constituida a álgebra geométrica. (Taton, 1959).

A geometria do espaço se inicia com o livro XI. Dentre as definições iniciais, as concernentes à esfera, ao cone e ao cilindro, recorrem ao movimento. As rotações de um semicírculo, de um triângulo retângulo em torno de seu cateto, de um retângulo em torno de seu lado. (Taton, 1959).

O livro XII, trata das áreas dos círculos e dos volumes das pirâmides, cones, cilindros e esferas.

E o livro XIII, muito técnico, é inteiramente consagrado aos cinco poliedros regulares de Platão. (Taton, 1959).

Os Elementos de Euclides não só constituem a mais antiga obra matemática grega importante, mas o texto mais influente de todos os tempos. Composto em 300 A.C., aproximadamente, foi copiado e recopiado repetidamente depois. É claro que erros e variações se inseriram e alguns editores posteriormente tentaram o melhorar o original.

A primeira versão impressa dessa obra apareceu em Veneza, em 1482, calcula-se que mais de mil edições foram publicadas. (Boyer, 1996).

2.9 – Os sucessores de Euclides

Segundo Boyer (1996), depois de Euclides, alguns de seus sucessores vieram, como por exemplo, Apolônio e Arquimedes.

2.10 – Apolônio

Segundo Milies (1999), Apolônio nasceu em Perga, na cidade de Anatólia, atual Turquia e viveu entre 262 a 190 a.C. Apolônio estudou com Euclides em Alexandria e frequentou também a biblioteca de Pérgamo, talvez como professor visitante. Apolônio encontrou-se com Eudemus, um grande historiador da Geometria, a quem dedicou os primeiros livros de sua obra.

Apolônio dedicou-se ao estudo da família de curvas denominadas de cônicas e a razão desse nome é pelo simples fato de resultarem do corte de um cone, dependendo do corte poderia resultar em uma hipérbole, parábola ou elípse. As órbitas dos planetas são elípses, os espelhos telescópios parabólicos, etc. (Boyer, 1996).

Sabe-se que, mais uma vez, como aconteceu com a maioria das grandes obras dos matemáticos, as de Apolônio também não foram diferentes, pois a maior parte de seus relevantes trabalhos se perderam ao longo dos tempos. Dos que restaram, muitos foram conhecidos por descrições feitas por comentaristas da Antiguidade.

Dentre as obras que foram consideradas perdidas, encontram-se alguns comentários no que diz respeito a *Divisão de Áreas, Secções Determinadas, Tangências, Inclinações, Comparações entre o Icosaedro e o Dodecaedro* e outros.

Certamente, sua maior obra, foi o "Tratado sobre as Cônicas". Pois até a época de Apolônio, as cônicas só eram obtidas a partir de secções de cones circulares retos com planos perpendiculares a um dos elementos do cone (geratriz, eixo) e que com a variação do ângulo do vértice poderia-se obter diferentes cônicas. Mas Apolônio conseguiu mostrar que todas as cônicas podiam ser obtidas a partir de um único cone, variando apenas o plano seccionador. (Milies, 1999).

Sua obra, talvez, tenha sido a melhor contribuição da época à Geometria Clássica e foi escrita em oito volumes, então devido a este grande trabalho ele ficou conhecido entre os antigos como o *"Geômetra Magno".*

2.11 - Arquimedes

Figura 06 – Arquimedes.

Fonte: A Geometria na Antiguidade Clássica - FTD. (Milies, 1999)

Arquimedes nasceu na cidade de Siracusa no ano de 287 A.C. Descendente da família real, não foi só matemático, mas também inventor. Era filho de Fídeas, um astrônomo e parente de Heron, governante da cidade. Arquimedes pode ter estudado algum tempo em Alexandria, mas viveu e morreu em Siracusa. Arquimedes inventou engenhosas máquinas de guerra para manter longe o inimigo, catapultas para lançar pedras, cordas, polias e ganchos para levantar e espatifar os navios romanos. (Strathern, 1998).

Contam os grandes historiadores que Arquimedes, enquanto tomava banho, descobriu o famoso princípio da hidrostática *" todo corpo mergulhado em um líquido sofre um empuxo de baixo para cima equivalente ao peso do líquido deslocado "* (Milies, 1999, p.74).

Depois da descoberta contam que Arquimedes teria saído pelas ruas de Siracusa, totalmente nu, gritando: *" Eureca, Eureca "* (achei, achei).

Arquimedes foi um grande impulsionador da mecânica e construiu mecanismos que contribuíram de forma expressiva em sua época. Ficou famoso e pôde ser comparado com o matemático inglês Isaac Newton. Era muito conhecido pela antiga frase: *"Daí-me um ponto de apoio que eu moverei o mundo "*. (Strathern, 1998, p.29).

Sabe-se que Arquimedes incendiou e destruir uma esquadra romana, usando espelhos parabólicos, mas todas as narrações da vida de Arquimedes, concordam que ele dava pouco valor a seus engenhos mecânicos em comparação com o produto de seus pensamentos. Se preocupava muito mais com os princípios gerais que com as aplicações práticas. (Boyer, 1996).

Dentre suas obras mais conhecidas pode-se citar: *"Sobre o Equilíbrio de Planos "*, que fala dos centros de gravidades de figuras planas, *"Sobre Corpos Flutuantes "*, que contém o princípio de empuxo, acima mencionado e que é considerado como um tratado de arquitetura naval, *"Sobre as Medidas do Círculo "*, que demonstra a fórmula da área do círculo, *"Sobre Espirais "* onde mostra a espiral de Arquimedes e apresenta suas propriedades *"Sobre Esfera e o Cilindro "*, onde calcula a área e volume da esfera, entre outras.

2.11.1 – O comprimento da circunferência

Dentre as contribuições matemáticas deixadas por Arquimedes pode-se destacar o cálculo do comprimento da circunferência que foi apresentado na obra *" Sobre as Medidas do Círculo "* e foi considerada a primeira tentativa científica para se calcular o valor aproximado do número π.

Arquimedes procedeu da seguinte forma: primeiro considerou um hexágono inscrito e outro circunscrito numa circunferência de raio r e tomou o perímetro de cada hexágono. Como o comprimento da circunferência está entre esses dois valores, ele considerou uma aproximação por falta e outra por excesso para o valor de π. Mas nessa época, existia uma fórmula que permitia calcular a partir do perímetro de um polígono regular, o perímetro de outro polígono com o dobro do número de lados. A partir dessa fórmula, Arquimedes consegue calcular o perímetro dos polígonos inscritos e circunscritos de 12, 24, 48 e 96 lados, e chega a conclusão de que o valor procurado de π deveria estar situado entre 223/71 e 22/7, com uma aproximação decimal de duas casas igual a 3,14. (Milies, 1999).

2.11.2 – A esfera e o cilindro

Arquimedes, em mais um de seus livros, deixou registrado algumas definições e axiomas importantes intitulado como " *Sobre a Esfera e o Cilindro* ". Nessa obra ele afirma inicialmente que " *De todas as linhas que têm os mesmos extremos, a de menor comprimento é a reta* ". (Milies, 1999 p. 77).

Neste mesmo livro, Arquimedes afirma que " *A superfície de qualquer esfera é quatro vezes a área de um círculo máximo* ". Considerando o raio do círculo máximo igual ao raio da esfera, sendo esse círculo aquele que é obtido pela intersecção da superfície da esfera com um plano que passa pelo seu centro, ele chegou a conclusão de que sendo a área do círculo igual a πr^2, então a área da esfera seria $4\pi r^2$.

Arquimedes, na proposição 34 de seu livro afirma que: " Todo cilindro cuja base é igual a um círculo máximo de esfera e cuja altura é igual ao seu diâmetro tem volume igual a 3/2 do volume e superfície, incluindo as bases, igual a 3/2 da superfície da esfera ". Assim sendo, pode-se considerar como sendo r o raio da esfera e também da base do cilindro e a altura de 2r. Como o volume do cilindro é obtido pelo produto da área da base pela altura, logo o volume seria dado por $\pi r^2.2r = 2\pi r^3$. Mas pelo corolário, o volume da esfera sendo 2/3 do volume do cilindro, valerá $2/3.2\pi^3 = 4/3\pi r^3$.
(Milies, 1999).

Arquimedes considerava que a descoberta da relação entre uma esfera e o cilindro que a contém era sua conquista mais importante, tanto que pediu que o diagrama de uma esfera inscrita em um cilindro fosse gravado em seu túmulo.

Seu trabalho prático com objetos esféricos era igualmente admirável. Atribuiu-se a ele a construção de dois planetários esféricos tão admirados que foram saqueados e levados para Roma após a queda de Siracusa.

Em Roma, o planetário de Arquimedes, com suas peças em movimento, despertou a curiosidade de muitos pelos séculos que se seguiram, inclusive no século IV d.C., o erudito latino Lactâncio chegou a apresentar o feito de Arquimedes como uma das provas da existência de Deus. Segundo Lactâncio, " *Se a inteligência de um ser humano era capaz de produzir algo tão maravilhoso, devia haver uma inteligência ainda maior que fosse capaz de produzir o objeto que a inteligência humana procurava imitar* " (Strathern, 1998, p.34).

2.11.3 – O assassinato de Arquimedes

A vida de Arquimedes, tal como a morte, foi contada por Plutarco e outros historiadores da Antiguidade.

Segundo Millies (1999), em 264 a.C., duas potências entraram em conflito, Roma interferiu nos assuntos da Sicília e a partir daí, três guerras aconteceram, terminando com a destruição da cidade de Cartago em 146 a:.C. Um dos episódios marcantes na segunda guerra foi a queda da cidade de Siracusa, na qual Arquimedes foi assassinado por um soldado romano.

Segundo Millies (1999), há mais de uma versão sobre a morte de Arquimedes. Na primeira, Arquimedes foi abordado por um soldado romano quando estava examinando algumas figuras planas, quando disse: *"espere-me terminar esta investigação, pois não gosto de deixar nada sem concluir"*. Na segunda, Plutarco diz que um grupo de soldados encontrou Arquimedes carregando numa arca, seus instrumentos e manuscritos para entregar a Marcelo, um general romano. Imaginando que estivesse carregando naquela arca coisas de muito valor, exigiu que o geômetra entregasse aqueles objetos, como Arquimedes se recusou, eles o mataram. Ainda existe uma outra versão que afirma que um soldado romano foi encarregado de levar o sábio à presença dos generais. Arquimedes estava desenhando figuras geométricas na areia, então o soldado exigiu que este o seguisse, mas Arquimedes não havia dado atenção àquele soldado e por isso foi morto alí mesmo. (Millies, 1999).

Com o passar dos tempos, apesar da grandiosidade de suas obras ter sido desdenhada, elas sobreviveram de uma forma ou de outra até a Idade Média e além dela. O que fez das grandes obras de Arquimedes esse espírito medieval? Quase nada. A Europa, principalmente, continuava em estagnação e, em sua maior parte, a Matemática continuou sendo um instrumento prático. A capacidade do homem para o rigor matemático continuou adormecido por longos anos, pois era visto como especulação teológica. Essa tendência não mudou quase nada até o Renascimento, quando Arquimedes, em meados do século XVI, passou a inspirar de fato, novos talentos. (Millies 1999).

2.12 – Ptolomeu

Segundo Millies (1999), com Arquimedes encerra realmente a grande fase da Geometria do período Alexandrino, mas nem por isso significou o das contribuições à Matemática.

A obra de Ptolomeu, uma das mais importantes entre os posteriores Alexandrinos, também teve seu lugar de destaque entre os geômetras que viviam num mundo completamente diferente dos primeiros dos geômetras gregos de toda a história.

Há poucos fatos registrados sobre sua vida, mas acreditam ter se instalado em Alexandria entre 127 e 151 d.C., como observador astronômico. Sua obra que mais marcou os tempos antigos são os treze livros que versavam sobre Astronomia, Geometria e Trigonometria.

Depois de Ptolomeu, ainda surgiram outros matemáticos, mas, com predomínio do cristianismo em todo o mundo romano, do qual o Egito fazia parte, a ciência Alexandrina cai consideravelmente pelo fato dos interesses pela teologia, sobrepor aos intelectuais da filosofia natural. (Milies, 1999).

Por volta de 392 A.C., o cristianismo que havia sofrido várias perseguições, passou a combater o que chamava-se naquela época de "cultura pagã" e nela estaria incluída a Matemática, a Física e a Astronomia. Contam que a última e grande matemática desse período, filha de Teon de Alexandria, recusou-se a abjurar a religião grega tradicional e por isso foi trucidada pela multidão em Alexandria, por volta de 415 d.C.(Milies, 1999).

2.13 – Conclusão

Conclui-se, acerca deste capítulo que, segundo Heródoto, a Geometria surgiu a partir das necessidades práticas dos egípcios em reconstituírem a demarcação de seus terrenos após as enchentes do rio Nilo.

Considera-se importante destacar as contribuições deixadas por matemáticos antigos. Eles foram os principais responsáveis pela evolução da Matemática e de outras ciências, resultando em muitos benefícios à sociedade. O mais interessante é que todos eles tinham o estudo da matemática como uma causa tão nobre que costumavam entrar em conflito com a política, religião e outros, chegando às vezes a trazer consequências muito sérias. O importante é que esses matemáticos visavam o bem comum. Muitos deles deixavam seus familiares, seus negócios, seus lazeres para passar horas e horas dedicando-se a um determinado trabalho.

Muitos destes sábios não se dedicavam somente ao estudo da Matemática: eram filósofos, às vezes se dedicavam à Astronomia, à Medicina e outras ciências, com o mínimo de recursos possíveis.

De acordo com a história da Matemática, além dos nomes aqui citados, imagina-se que existiram outros nomes que deixaram também suas contribuições, mas é possível que seus escritos tenham sido perdidos no decorrer do tempo.

Torna-se difícil reconstituir esta história, pois muitos fatos não foram relatados em documentos escritos. No entanto, destaca-se a obra Sumário Eudemiano de Proclo, como a principal fonte de informação a respeito do desenvolvimento da Matemática. Esta obra relata todos os passos percorridos desde seus primórdios até a época de Euclides.

Torna-se importante destacar os nomes de alguns matemáticos como o de Tales de Mileto, considerado o primeiro homem da história a quem foram atribuídas descobertas matemáticas específicas. Em seguida Pitágoras, que consagrou-se pela demonstração do teorema sobre os triângulos retângulos, o qual levou à descoberta da irracionalidade, causando muitas perturbações nos meios pitagóricos.

No período Alexandrino houve a maior produção de obras da matemática clássica, destacando-se dentre elas, a de Euclides, que recebeu o nome de Os Elementos, obtendo grande aprovação dos matemáticos daquela época.

Outros matemáticos foram surgindo como Apolônio que se dedicou ao estudo das cônicas, Arquimedes que descobriu o princípio da hidrostática e Ptolomeu que se destacou no estudo da Astronomia, Geometria e Trigonometria.

Depois de Ptolomeu surgiram outros matemáticos, mas os interesses teológicos sobrepuseram-se aos intelectuais da filosofia natural e as ciências foram vistas como "cultura pagã".

A partir do que foi relatado, percebe-se que a Matemática não só abriu campo para os historiadores interessados nessa área, mas também serviu de base para muitos matemáticos modernos na realização de suas pesquisas.

CAPÍTULO III

O PROCESSO DE ENSINO-APRENDIZAGEM

3.1. Introdução

Após esta exposição histórica em torno da Geometria, faz-se necessário algumas considerações em relação ao processo de ensino-aprendizagem. Considerando que hoje existe a consciência de que o trabalho pedagógico deva ser realizado no equilíbrio e na harmonia do desenvolvimento de cada ser humano, e que a rapidez das mudanças da sociedade brasileira interferem na formação de valores das crianças e adolescentes, torna-se necessário e urgente que os profissionais da educação repensem a prática pedagógica e conheçam novos caminhos que permeiem e oportunizem o aguçar do senso crítico, a criatividade e a expressividade dos educandos, para que atuem no mundo em que vivem com sabedoria e justiça. Assim, o hoje e o amanhã se transformarão em dias cada vez melhores.

A partir desta concepção, as dimensões teóricas são apresentadas como norteadoras de práticas pedagógicas que permitem ao educando ser sujeito de sua própria aprendizagem, atuando de modo inteligente em busca da compreensão do mundo que o rodeia.

Vive-se hoje a " *era da comunicação* ". As informações fluem com rapidez em todos os canais da comunicação: jornais, revistas, vídeo, televisão, informática. A informação chega aos quatro cantos do mundo quase concomitante aos fatos. O estudante de hoje não precisa ir à escola para que lhe conte os acontecimentos de uma grande guerra, ele os vê na TV e normalmente com muito mais interesse. Os alunos ficam cansados ao assistir uma aula de Ciências, ouvindo o professor falar de coisas da natureza sabendo que quase todos os dias ele pode assistir através de bons programas na televisão. Existem sites excelentes que o educando pode acessar, onde ele aprende Matemática, Geometria, entre outras matérias.

Por estes e outros motivos a escola precisa repensar com urgência sua prática educativa, tendo sempre em vista sua função social: preparar o cidadão-profissional de uma sociedade em constante transformação. Partindo do pressuposto que muitos educadores pretendem, de fato, comprometer-se com a prática educativa, assumindo uma nova postura frente à educação, faz-se necessário que eles compreendam que o desenvolvimento cognitivo e emocional do aluno ocorra na interação dele com o ambiente e com as demais pessoas.

3.2 – A teoria de Piaget e o desenvolvimento das noções espaciais

Um tema que educadores da área de Matemática não podem deixar de considerar é a *"psicogênese das noções espaciais"*, baseado nos trabalhos de Piaget (1937), os quais relatam que os conceitos espaciais vão se constituindo progressivamente, a partir das experiências de deslocamento do sujeito. Poincaré (1937) afirma: " *para um sujeito imóvel não existe nem espaço nem geometria"* e também " *localizar um objeto é representar os movimentos que seria necessário fazer para alcançá-lo".* Com estas hipóteses, Piaget realizou um cuidadoso trabalho de observação e experimentação sobre indivíduos em desenvolvimento.

Com relação ao espaço, Piaget (1937) mostra que inicialmente o sujeito elabora espaços específicos para cada domínio sensório motor, heterogêneos e não coordenados entre si. O espaço está formado por feixes perceptivos, altamente instáveis e incontroláveis pelo sujeito aos quais acomoda os escassos deslocamentos que pode realizar.

A construção do espaço euclidiano, o espaço que contém tanto objetos móveis como o sujeito, é abordada por Piaget e colaboradores basicamente na obra *"A geometria espontânea da criança"* (Piaget,1948). Um dos problemas fundamentais que Piaget tenta resolver ao longo de grande parte de sua obra é o do trânsito do conhecimento experimental, contingente ao conhecimento dedutivo necessário.

A característica fundamental do espaço euclidiano, para Piaget, é a métrica, que viabiliza a estruturação de um sistema tridimensional e um sistema de coordenadas possibilitando a matematização do espaço. A métrica envolve a utilização de duas operações que determinam a passagem da manipulação qualitativa do espaço à manipulação quantitativa: a partição de um todo em suas partes, para construir uma unidade de medida,e o deslocamento para aplicar essa unidade de medida de maneira reiterada, cobrindo a extensão do objeto. A medição de distâncias no espaço euclidiano supõe que o comprimento de um objeto se conserva quando este se desloca, já que, em caso contrário, a unidade de medida perderia seu caráter de padrão estável.

Em referência às consequências pedagógicas que o próprio Piaget postulou a partir de suas concepções sobre a psicogênese das noções espaciais, faz-se necessário destacar que, em uma intervenção sobre Educação Matemática, depois de fazer referência como o pensamento lógico deriva de uma fonte profunda, da lógica implícita nas coordenações gerais da ação, afirmou: "*Nos alunos jovens a ação sobre os objetos torna-se totalmente indispensável para a compreensão, não só das relações aritméticas, mas também das geométricas*" (Parra, 1996).

3.3- Cognição

Segundo Heymeyer et.al. (1993), cada pessoa tem o seu jeito próprio de aprender. Desde os primeiros anos de vida o ser humano, através dos seus sentidos e da ação motora sobre o ambiente, vai descobrindo o prazer de fazer acontecer. Tornando-se capaz de fazer e sentindo prazer em realizar algo ele irá repetir a ação e repetindo por muitas vezes a ação irá ganhando competência e condições para resolver problemas. O prazer pode ser tanto sensorial, intelectual, motor ou tudo ao mesmo tempo, enfim, o prazer de ser capaz de realizar algo é o que estimula a aprendizagem. *"Coisas e fatos adquirem significação para o ser humano quando inseridos em uma estrutura",* é isso que Piaget (1993) denomina ASSIMILAÇÃO.

A significação é o resultado da assimilação. Conhecer o meio ambiente, sejam pessoas ou objetos, é o que dá coragem para enfrentar os novos problemas. Quando uma pessoa age e obtém sucesso, ela começa a se sentir curiosa e procura descobrir novas experiências. Uma criança, por exemplo, quando faz perguntas, é sinal que quer descobrir como são feitas as coisas e porquê elas são feitas.

Para que uma criança possa ter condições de interagir e compreender o mundo é preciso que se ofereça à ela um ambiente adequado, que dê condições para que possa se integrar naquele ambiente. (Heymeyer et. al., 1993).

Segundo Borba (2000), a psicologia cognitiva embala a esperança de chegar a uma formulação do gênero: um neurônio, um comportamento.

Se uma pessoa reconhece em centésimos de segundos a fotografia da mãe é sinal de uma cognição específica. Ou então se distingue a letra A da B, também é resultado de outra cognição específica. Talvez um dia saberão como o cérebro permite a uma pessoa distinguir um A de um B. Surgiram alguns avanços a partir de modelos da inteligência artificial. Explicar a gênese do conhecimento no ser humano a partir de suas bases biológicas. Trata-se, portanto, de uma teoria epistemológica, uma teoria sobre as relações entre o sujeito e o objeto no processo de conhecer, formulada por um biólogo de formação e um epistemólogo por interesse, como o próprio Piaget sugere. (Borba, 2000).

3.4 – Educação e educador

Preparar o aluno para que ele tenha condições de escolher o seu caminho profissional, desenvolver habilidades, senso crítico e criar condições para que ele possa ocupar o seu espaço na sociedade, não só como integrante, mas como cidadão de fato, exercendo todos os seus direitos dentro do regime que lhe é imposto é o grande desafio do educador.

Por outro lado, o futuro professor poderia dizer que se ingressou na profissão por gostar de ensinar ou por estar junto com aprendizes. Na verdade, o ensino poderia ser considerado de forma desafiadora, a partir do momento que o profissional começa a enfrentar lutas e desafios. Dessa forma as razões seriam intrínsecas ao ensino. Seja por qualquer razão o ingresso na profissão exige dedicação, sentimento de luta, respeito e se possível, vocação.

Cabe ao professor, normalmente, o domínio do conteúdo a ser trabalhado com determinado grupo. Muitos se contentam e até mesmo se julgam excelentes profissionais por pensar que o educando precisa mesmo é de conteúdo. O estudante de hoje recebe informações de todos os meios e o profissional que não se atualizar acaba ficando cada vez mais isolado por resistir à determinadas mudanças que a educação vem sofrendo em velocidades cada vez maiores. (Moran,1999).

Além do domínio do conteúdo, cabe ao professor comunicar-se muito bem com o grupo, fazendo com que eles possam trabalhar de forma colaborativa, dando aos alunos condições para que eles possam desenvolver suas habilidades, construindo seu próprio conhecimento sem automatização e sim interagindo de forma a torná-los motivados para a realização de seus projetos. O verdadeiro educador nunca pode deixar de levar em conta que o seu papel principal é preparar o ser humano para a sociedade, fazendo com que o educando se sinta bem em estar interagindo de forma colaborativa. Um passo importante do bom educador é conquistar a confiança do educando, motivando-o sempre nas horas que ele sente dificuldades e fazendo com que ele trabalhe cada vez mais com o grupo, dando sugestões, questionando, criando metas e executando tarefas. São critérios que facilitam muito o processo ensino-aprendizagem. Paulo Freire mostrou que trabalhando com algo de interesse do educando a aprendizagem se torna muito significativa. Moran (1999).

Segundo Gauthier (1998), em seu conceito de educação, existe um estreito paralelo entre as razões educacionais e as médicas. Na prática da medicina o médico se interessa em curar as pessoas de alguma forma, seja por meio de medicamentos, cirurgia etc. Da mesma forma educar exige uma série de processos que contribuem para tornar as pessoas moralmente melhores. As razões educacionais estão ligadas ao desenvolvimento de qualidades desejáveis nas pessoas. No mundo moderno, faz-se necessário que a educação passe por uma reforma bastante considerável tendo em vista que os meios de comunicação chegam às escolas quase sob pressão.

A educação ainda caminha a passos lentos, enquanto a informação chega aos estudantes com uma velocidade incomparável. As mudanças na educação dependem principalmente dos educadores, eles têm um papel muito importante em todo esse processo e podem conseguir muito mais do que imaginam, porque o educando tem atração por idéias novas, claras e práticas. O aluno também faz parte dessas mudanças, pois é dele que o professor-educador vai precisar para que a educação seja renovada de forma a trazer segurança e tranquilidade para a sociedade. Alunos curiosos, motivados, atentos ajudam muito na construção de uma educação melhor para todos.

3.4.1 – Os problemas de comportamento na relação professor-aluno

Segundo Vasconcellos (1998), a atitude do professor em relação aos problemas de comportamento do aluno no processo ensino-aprendizagem interfere muito na qualidade de seu trabalho. Quantas vezes um professor teve que interromper o seu trabalho para atender a um estudante cujo comportamento agressivo prejudicava o andamento dos estudos? Mesmo os estudantes que não tem comportamento agressivo, absorvem muito o tempo do professor e podem ter uma influência perturbadora. Por exemplo: um aluno tímido ou uma aluna que não queira participar de atividades em grupo que exigem cooperação dos estudantes, são fatores que interferem no trabalho do professor. De certa forma qualquer sintoma como " vadiagem ", " timidez extrema ", " insatisfação ", podem ser considerados como diferentes problemas de comportamento.

Muitos professores preferem não se preocuparem muito com os problemas de comportamento e costumam encaminhar esses estudantes aos administradores, orientadores, psicólogos ou pais para resolvê-los. Em geral essa atitude é considerada satisfatória desde que seja de maneira sensata, sem ferir o emocional do aluno, mas muitas vezes isso pode ser encarado como uma forma de se livrar do problema, induzindo outra pessoa a assumir a responsabilidade. É importante que o próprio professor possa assumir essa responsabilidade dentro da sala de aula, tendo em vista que, mesmo se o problema for levado para outra pessoa, o aluno ainda continuará em sala de aula, a não ser em alguns casos especiais que não estejam ao alcance do professor, aí sim, esse aluno deverá ser encaminhado.

O fato é que todo educador deve ter em mente que no processo ensino-aprendizagem sempre ocorrerão os problemas de comportamento e ele não pode se dar ao luxo de ignorá-los, portanto, deve ter alguns conhecimentos em relação a esses sintomas. Não só ele deve saber quais os problemas interferem no processo de aprendizagem, como também quais os casos deverão ser encaminhados aos especialistas. Assim ele não estará funcionando como psicólogo, mas como pessoa responsável para se promover a aprendizagem. (Vaconcellos, 1998).

3.4.1.1 – Tipos de problemas de comportamento

Segundo Vasconcelos (1998), os problemas de comportamento são classificados em duas categorias: são os problemas de conduta e os problemas de personalidade. Os de conduta referem-se ao "comportamento " que perturba totalmente os outros e pode ser visto como agressivo, destrutivo ou desobediente. Os problemas de personalidade são mais ou menos de caráter " neurológico ". São aqueles problemas que normalmente leva o aluno a sentir medo, ansioso, rejeitado. Às vezes um estudante com problemas de personalidade pode ser levado ao sentimento de culpa e dirige-se contra si próprio.

É claro que os problemas de conduta são os que mais chamam a atenção dos professores, mas, nem todos os alunos que perturbam a aula têm problemas de conduta. Os alunos com problemas de personalidade, ao contrário, muitas vezes podem fugir à observação dos professores, pois costumam ser submissos e obedientes.

3.4.1.2– Maneiras de lidar com os problemas de comportamento

Segundo Vasconcellos (1998), está comprovado que atitudes como punição excessiva, expulsão de sala de aula, repreensão, suspensão, por parte dos professores ou de especialistas escolares só vem a agravar os problemas de comportamento e na maioria das vezes são desapontadores. Esse tipo de atitude geralmente aumenta o medo que os adolescentes e pré-adolescentes tem dos adultos, resultando em um comportamento cada vez mais agressivo e rebelde que prejudica o desenvolvimento do aluno.

É necessário que todos os educadores desenvolvam métodos novos e eficientes para tratar dos problemas de comportamento e que não se acomodem, utilizando métodos ultrapassados que não levam a lugar algum. É preciso ir além dos aspectos superficiais o que é uma tarefa difícil para o educador.

Segundo Vasconcellos (1998), pesquisas foram feitas em relação aos problemas de comportamento e chegaram à conclusão que o emprego de orientadores educacionais, psicólogos e assistentes sociais trabalhando em parceria com o professor, ajudam muito na solução dos problemas de comportamento. A participação dos pais na vida escolar também ajuda muito no desenvolvimento do aluno, melhorando assim, o seu rendimento e dando suporte ao professor para que ele possa desenvolver melhor o seu trabalho. Um outro fator que foi considerado importante no processo é o interesse da escola pelo processo de avaliação, tendo em vista que esta deve rever seus paradigmas e procurar sanar os problemas que interferem direta ou indiretamente na vida do aluno. E para complementar, foi comprovado que a introdução de matérias sobre as relações humanas têm contribuído muito para o sucesso da relação professor-aluno. Enfim, se a escola aumentar sua eficiência e se transformar num laboratório de aprendizagem, melhor que no passado, ela se transformará num lugar onde as pessoas com problemas poderão aprender e estabelecer padrões de comportamento mais saudáveis e eficientes. (Vasconcellos, 1998).

3.5 – Tecnologias da inteligência

Segundo Machado (1996), existem três componentes das tecnologias que interagem continuamente: a oralidade, a escrita e a informática.

Na primeira, os parceiros da comunicação encontram-se mergulhados nas mesmas circunstâncias e a memória está encarnada em pessoas vivas. A imagem geométrica desse processo é a de um círculo.

Na Segunda, a distância entre o autor e o leitor pode ser demasiadamente grande no tempo e no espaço e apesar da necessidade de interpretação por parte do receptor, a memória encontra-se parcialmente centrada no texto. A imagem geométrica em relação a esse processo é o de uma linha reta.

Na terceira, os atores da comunicação estão interagindo continuamente em troca de mensagens e a memória encontra-se objetivada e em permanente transformação. A imagem geométrica para esse processo é o de uma rede.

3.6 – Aprendizagem da Matemática

Segundo Coll (1995), existe entre os matemáticos, o costume de dizer que a Matemática é uma fonte inesgotável de elegância formal, rigor e até mesmo uma beleza que não se encontram em outras classes de conhecimento. Para os filósofos pitagóricos os conhecimentos matemáticos não deviam ser transmitidos às pessoas alheias à sociedade pitagórica.

Essa história leva a crer que desde a sua constituição como saber dedutivo, a Matemática sempre teve um certo caráter elitista que, até os dias de hoje, não foi eliminado. Muitas pessoas desenvolvem em sua vida escolar, atitudes negativas em relação à matemática e suas escolhas escolares e profissionais são condicionadas por suas dificuldades para dominá-la.

Segundo Coll (1995), foi feita uma pesquisa entre alguns estudantes da Coréia, Espanha, Estados Unidos, Irlanda e Reino Unido para verificar o nível de rendimento em relação à Matemática. A pesquisa mostra diferentes percentuais no que diz respeito as operações elementares, emprego de habilidade na resolução de problemas, compreensão dos conceitos de medida e geometria, compreensão e aplicação de conceitos matemáticos mais avançados. Mas conclui-se que há um número bastante reduzido de estudantes que acham a Matemática fácil e fascinante e um grupo maior que consideram a matemática difícil e enfadonha. A dificuldade na aprendizagem da Matemática é um dos assuntos mais discutidos entre os profissionais da psicologia da instrução. A análise das dificuldades na aprendizagem da Matemática se baseiam em conceitos muito discutidos, mas de consistência duvidosa. De certa forma entende-se que alunos de inteligência normal, que não tem problemas emocionais graves, nem deficiência sensorial têm um rendimento escolar ruim, caracterizado por baixas pontuações em testes de rendimento.

No campo específico da Matemática, foram apresentadas diversas causas neurológicas, que explicassem as dificuldades graves de aprendizagem. Alguns investigadores chegaram até definir o que chamaram de *"discalculia específica de evolução".* Deve-se destacar que, a maioria dos investigadores admite que a presença de certos distúrbios neurológicos possa estar ligada à dificuldade para a realização de tarefas matemáticas, mas isso não significa que as pessoas que demonstrem uma certa dificuldade na aprendizagem matemática possuem alguma disfunção cerebral (Coll, 1995).

Segundo Coll (1995), o ensino da Matemática deveria ter como base uma aproximação entre as idéias prévias dos alunos e as novas noções matemáticas. Deveria-se ensinar média aritmética por exemplo, a partir das estaturas dos alunos ao invés de começar por *"números frios "* escritos na lousa. O mesmo ocorre com a Geometria, existem tantos instrumentos práticos com quais o professor pode iniciar seu trabalho, como por exemplo: planificar sólidos, para mostrar as diversas figuras planas, conceituar ponto, reta, plano, noções de paralelismo, perpendicularismo, etc, levando os alunos a um trabalho colaborativo e motivando-os a descobrir certos conceitos que o ajudarão na construção do seu conhecimento. Mas infelizmente, na maioria dos casos, os professores preferem continuar com o seu método tradicional por achar mais cômodo. Por outro lado os programas de ensino são demasiadamente extensos e exigentes contribuindo para que o aluno tenha um rendimento baixo, pois, muitas vezes, não consegue acompanhar o rítmo acelerado adotado pela escola.

O professor deve sempre evitar comentários negativos, desestimulando os alunos de baixo rendimento e deixar que os alunos descubram por si próprios seus erros e as soluções possíveis e fomentar uma aprendizagem baseada na resolução de problemas do que em cálculos escritos (Coll, 1995).

3.6.1 – O professor de Matemática e a tecnologia

Segundo Machado (1996), o profissional da área de matemática que incorpora as tecnologias informáticas e relaciona-se estreitamente com as diversas formas de linguagem, tende a desempenhar um papel cada vez mais importante no campo da educação. Os computadores contribuem de forma bastante prática para a aproximação entre a Matemática e a Língua Materna.

Através dos editores de texto, professores e alunos conseguem aproximar-se de procedimentos algorítmicos, interagindo com o equipamento através de uma linguagem que é a da comunicação e a do cálculo, a do texto, a da imagem, dos números e dos ícones.

Os matemáticos ou professores de matemática, devem preparar-se para prestar aos navegantes de outros temas, uma colaboração de natureza crescente cibernética. Para isso é preciso estar atento às transformações paradigmáticas sob o ponto de vista econômico, cultural e epistemológico. (Machado, 1996).

3.7 – Emprego dos recursos audiovisuais no processo de ensino-aprendizagem

Segundo Ronca (1995), pesquisas indicam que o emprego dos recursos audiovisuais produzem resultados superiores àqueles que são obtidos por métodos convencionais. Um filme educativo, por exemplo, implica em um certo grau de preocupação do educador em melhorar a qualidade de ensino e atrair a atenção do aluno de modo a deixá-lo motivado. Um outro método que se destaca em relação aos métodos tradicionais é o da televisão. Segundo especialistas e professores, experiências em escolas de ensino fundamental mostram que o método empregado pela televisão para abordagem de determinados assuntos chega a ser melhor que os métodos convencionais.

De modo geral, as técnicas audiovisuais melhoram a aprendizagem, principalmente porque dão novas dimensões à comunicação de idéias. O uso de novos métodos audiovisuais têm grande sucesso principalmente porque envolve mais o aluno no processo ensino-aprendizagem. Enquanto os métodos convencionais tratam os alunos como agentes passivos de aprendizagem, os novos métodos fazem com que os alunos percebam a aprendizagem como um processo ativo, ou seja, o aluno só terá sucesso se estiver ativamente envolvido. Em geral, alunos que aprendem pelos novos métodos, desenvolvem mais a capacidade de pensar por si próprios.

Segundo Ronca (1995), os professores têm sido muito lentos em adotar os métodos de educação centrados no aluno e um dos fatores, é porque o emprego de novos métodos exige o desenvolvimento de técnicas diferentes e a compreensão das necessidades dos alunos. A tendência do educador é continuar o seu trabalho da maneira como ele sempre executou.

3.8 – O uso do computador na educação

Segundo Costa (1996), a partir de 1970 os computadores foram lentamente sendo introduzidos na área instrucional. O uso da informática na educação ainda está sendo experimentado de forma a garantir uma melhor qualidade no processo ensino-aprendizagem. Deve-se tomar um certo cuidado para não supervalorizar o computador na escola, porque não será a máquina, nem suas aplicações que melhorarão o processo pedagógico, e sim, o uso combinado com a realidade dos alunos e considerando suas necessidades, motivação e o desenvolvimento cognitivo. Portanto, vale a pena lembrar que problemas educacionais não serão resolvidos pela introdução dos computadores nas escolas e que as tecnologias dependem dos homens.

3.8.1 – O uso do computador no ensino da Geometria

Segundo Gravina (1996), quando os alunos ingressam em um curso de licenciatura em Matemática, normalmente são oferecidos, nos primeiros períodos, um curso de Geometria Euclidiana, pois os alunos chegam à universidade sem atingirem os níveis mentais de dedução e rigor, de tal forma que esses alunos mal conseguem estruturar uma demonstração. Os livros escolares iniciam com definições, nem sempre claras, acompanhadas de desenhos bem particulares. Por exemplo retângulos sempre com dois lados diferentes, alturas de triângulos sempre acutângulos, etc. Dificilmente algum livro pede como exercício que o aluno construa alguma figura geométrica e é isso que o leva ao domínio dos conceitos geométricos.

Segundo Gravina(1996), experiências efetuadas com alunos do curso de licenciatura em Matemática da UFRGS evidenciam que *softwares* com recursos de desenhos em movimentos como por exemplo: Cabri-Géomètre e Geoplan são ferramentas ideais na solução de dificuldades observadas nos alunos.

De acordo com os princípios da geometria dinâmica, os programas construídos para atender ao aluno são ferramentas de construção. Os desenhos de objetos e configurações geométricas são feitos a partir das propriedades que o definem. Para um dado objeto ou propriedade, temos associada uma coleção de desenhos em movimento e as propriedades geométricas são descobertas a partir dos invariantes no movimento.

Muitas vezes um aluno tem dificuldade em identificar determinadas figuras devido à sua posição no papel. Esses programas permitem ao estudante movimentar as figuras sem perder suas características geométricas. Por exemplo: o giro de um quadrado na tela. Quando o aluno constrói o desenho de um retângulo dentro dos princípios geométricos, ele pode obter através de movimentos, uma família de representantes, sendo que um deles tem os quatro lados de mesma medida, o que significa que " ter lados diferentes " não é característica do retângulo.

Segundo Gravina (1996), os programas de criação de micro-mundos de Geometria, como Cabri e Geoplan, são ferramentas eficazes para os alunos na superação de suas dificuldades. Os aprendizes têm atitudes em relação ao processo como: experimentar, criar estratégias, argumentar e deduzir propriedades matemáticas. O fato é que a partir de manipulação concreta " desenhos em movimento " , os alunos atingem níveis mentais superiores ao da dedução e rigor e passam a entender a natureza dos raciocínios matemáticos.

3.9-Avaliação

Segundo Luckesi, (1997) , *"avaliar"* é atribuir valores. Estes valores são parte de uma cultura, e são necessárias à condição humana: avaliar e ser avaliado. É crescente a preocupação com a qualidade da avaliação no processo ensino-aprendizagem, tanto que o número de teses sobre o assunto é demasiadamente grande. A avaliação merece toda atenção possível, tendo em vista que pode ser considerada como solução para os males da educação ou então, como principal causadora desses males.

Apesar de todo esse interesse pela avaliação, ainda não se pode falar de uma melhoria da qualidade do trabalho pedagógico. Deve-se destacar alguns aspectos importantes em relação a avaliação, no que diz respeito ao método aplicado por alguns educadores que são os seguintes: a utilização de técnicas de avaliar sem o devido conhecimento das teorias, são extremamente prejudiciais ao ensino. A ausência de uma visão global do processo ensino-aprendizagem, da não aceitação crítica por parte do avaliador, da mensuração de aspectos irrelevantes, resultam em distorções que prejudicam muito a qualidade do trabalho.

O importante da avaliação é que ela oferece informações que possibilitam a melhoria do processo ensino-aprendizagem e é o referencial para que o educador possa refletir sobre o seu trabalho. Avaliar não é uma tarefa simples, porém deve fazer parte do processo, impondo-se ao educador, como responsabilidade ética para melhoria da qualidade do seu trabalho.

Segundo Luckesi (1997), a avalição é delineada em três momentos: *"O diagnóstico"* : como o ensino-aprendizagem se baseia em uma relação interpessoal, *"educando e educador"*, é importante que se faça o diagnóstico da clientela como o ponto de partida do processo. Deve-se levantar informações relativas às condições culturais e educacionais do corpo discente, avaliando-se as informações colhidas por meio de intrevistas, questionários e registros da escola para obter o perfil da clientela. *"O processo"* : os procedimentos constituem experiências de aprendizagem. O aluno nunca irá buscar soluções novas se são entregues a ele respostas definidas. É necessário que se valorizem os passos lógicos que conduzem ao raciocínio. Não se deve dar ênfase exagerada à resultados de provas porque isso faz com que o aluno se desanime, levando-o a pensar que se deve valorizar somente aquilo que é colocado em provas. A avaliação do processo está diretamente vinculada ao aluno e por isso deve ser levado em consideração outros fatores que o leve ao interesse e que o oriente na direção dos objetivos a serem atingidos. A avaliação nunca deve ser usada como um instrumento de punição, isso só irá franquear o sucesso de um pequeno número de estudantes, condenando a grande maioria à mediocridade e ao fracasso. *"O produto"* : deve-se controlar determinadas variáveis do processo em termos de resultados observados ao final de certas etapas. O acompanhamento posterior é imprescindível para a verificação dos objetivos a serem alcançados. A utilização dos resultados dessa avaliação implica em modificações mais amplas no planejamento de curso, que dará ao educador melhores condições de aprimoramento do seu trabalho.

3.9.1 – Auto-avaliação

Segundo Luckesi (1997), é importante que o aluno faça sua própria avaliação porque nesse momento ele estará participando ativamente do processo em um clima de liberdade e aceitação. Com a auto-avaliação, o educador terá uma fonte de informação que será muito válida no aprimoramento do seu trabalho.

Considera-se tarefa do educador apoiar o educando no sentido de assegurar-lhe um clima de confiança, orientando-o na busca de si mesmo e respeitando sua dignidade. Normalmente o indivíduo tende a agir de acordo com o que dele se espera, por exemplo: ao chamar um aluno de desonesto, o educador estará rotulando-o e levando-o a aceitar-se como tal. Ao passo que estimulando-o, motivando-o, fazendo crescer sua auto-estima, estará fazendo com que esse educando possa obter resultados muito mais satisfatórios do que normalmente se espera.

A auto-imagem tem uma evolução lenta e gradativa e ao ingressar-se na escola, o estudante possui pouca capacidade para se auto-avaliar e é nesse momento que o professor deve incentivá-lo, valorizá-lo e respeitar suas limitações. Nos primeiros anos escolares, o educador deve fazer avaliações coletivas com atividades lúdicas, levando-o a refletir sobre a participação do grupo. Com o passar do tempo, o aluno deverá ser orientado a fazer auto-avaliações individuais porque o jovem está sempre procurando um meio de avaliar e avaliar-se. Um detalhe importante é que uma auto-avaliação nunca poderá ser usada como instrumento punitivo para o aluno, um educador nunca deverá usar esse documento para lembrar o aluno do que ele deve ou não fazer, porque isso pode levá-lo ao receio nas próximas auto-avaliações e muito menos poderá ser usado como objeto de comparação com os outros alunos.

É importante também que o educador faça sua auto-avaliação, pois é um processo de aperfeiçoamento profissional, onde o educador pode fazer um balanço do seu trabalho, e quem sabe, melhorar ainda mais sua postura como profissional. (Luckesi 1997).

3.9.2 – Avaliação como instrumento de reflexão da prática pedagógica

Segundo Queluz, (1999), a avaliação deve ser um instrumento de auxílio, ou seja, fortalece o caráter diagnóstico antes que classificatório, dissociado da idéia de punição ou mesmo nivelamento dos alunos.

O conceito de avaliação enquanto atividade diagnóstico-formativa, deve mostrar aos professores a sua utilidade como instrumento de reflexão sobre os resultados de aprendizagem ou desempenho dos alunos frente ao trabalho por eles efetuado, de forma a permitir uma tomada de consciência mais realista do seu trabalho.

Os professores devem entender que o trabalho pedagógico se processa de forma lenta e os efeitos sobre os aprendizes é cumulativo, portanto, supõe alterações nem sempre perceptíveis ao professor quando este se prende apenas a resultados imediatos de desempenho expresso nas provas finais. Muitas das alterações produzidas são difíceis de captar através desses instrumentos; porém, se acompanhadas atentamente pelo professor, dão pistas para o prosseguimento do ensino em sintonia com os níveis de elaboração mental dos alunos e com suas necessidades de aprendizagem. (Queluz,1999).

Segundo Queluz, (1999), a avaliação diagnóstico-formativa adquire um papel fundamental no processo ensino-aprendizagem. A diagnóstica procura verificar os avanços e dificuldades do aluno e tomar decisões, enquanto a formativa permite o redimensionamento da ação docente durante o processo.

Stufflebeam, considera que avaliar é ajudar a tomada de decisões racionais e abertas proporcionando informação e provocando a exploração das próprias posições de valor de quem decide.

Para viabilizar esse tipo de avaliação, deve-se realizar análise constante de clareza dos objetivos de ensino preestabelecidos, o que implica em mudança na concepção de planejamento e avaliação.

Segundo Queluz (1999), a decisão de trabalhar com objetivos de registrar os avanços feitos pelos alunos em termos desses objetivos conflita, em parte, com a exigência regulamentar da escola de expressar o aproveitamento do aluno em notas na escala de zero a dez no final de cada bimestre.

O registro dos objetivos alcançados possibilita ao professor acompanhar adequadamente o progresso dos alunos, ao invés de se limitar a uma avaliação mecânica e formal expressa pelo número de pontos atingidos. A abolição da nota exige que o professor saiba justificar a aprendizagem do aluno através de critérios claros de juízo de valor da sua prática e desempenho do aluno.

A relexão como forma de auxiliar o professor no processo de construção do conhecimento deve ser incentivada pela escola e contribuir para que o professor possa rever o processo de avaliação, assumindo de fato, os critérios estabelecidos de forma coerente com a abordagem pedagógica.

Segundo Queluz (1999), o desencadeamento de um trabalho de formação de professores pode mudar o paradigma da ação docente e levar à prática da avaliação diagnóstico-formativa, inclusive nas séries mais avançadas do ensino fundamental e médio, onde essa prática é muito pouco expressiva.

3.9.3 – Notas e conceitos

Segundo Hoffmann (1991), felizmente o homem ainda não conseguiu descobrir nenhum instrumento que se pode medir o amor, a tristeza, ou outros sentimentos humanos, mas pode-se medir em uma escola, a frequência às aulas o número de acertos de uma tarefa ou o número de livros lidos em um determinado período. Muitas vezes os professores atribuem valores numéricos a aspectos comportamentais dos estudantes como se fossem itens objetivos. Nem sempre é possível dar valores à comprometimento, participação e outros aspectos.

O que se pode perceber é que certos educadores acham que "tudo pode ser medido ", e com isso muitas notas ou conceitos são atribuídos aos alunos arbitrariamente, muitas vezes até por comparação. Nota-se que entre dois professores de mesma área e em situações muito próximas podem ocorrer incríveis diferenças na atribuição desses conceitos. Na concepção do professor aluno ideal definido subjetivamente por ele merece nota 10, os demais recebem notas conforme forem piores ou melhores do que o aluno tomado como referencial.

Segundo Hoffmann (1991), pesquisas foram feitas e chegaram a conclusão que diferentes professores tendem a atribuir diferentes notas ao mesmo trabalho em diferentes ocasiões, e as diferenças tendem a aumentar cada vez mais à medida que as dissertações permitem grande liberdade de expressão.

É comum os professores começarem a corrigir os trabalhos após tê-los todos em mãos para que ele possa ter um ponto de partida e encontrar o aluno nota 10 para que ele possa continuar a avaliar os demais. Numa redação por exemplo, é muito comum fazer esse tipo de comparação.

O reducionismo da avaliação ao termo " medida " denuncia uma consciência ingênua do educador e ele não se aprofunda em causas e consequências de tais fatos, cometendo injustiças ou equívocos que prejudica muito o processo ensino-aprendizagem. É muito comum os professores atribuírem a responsabilidade desses equívocos ao sistema e à administração da escola alegando estar respeitando o regimento escolar. Realmente há muitas distorções na elaboração dos regimentos, mas o professor deve entender que a quantificação não é indispensável e essencial à avaliação. A medida deve ser vista como um indicador de erros e acertos e a quantificação consiste em uma ferramenta de trabalho do professor que só deve ser usada se assim for compreendida. (Hoffmann, 1991).

3.10 – Conclusão

O que se pode concluir sobre o processo de ensino-aprendizagem é que os profissionais do ensino devem repensar sua prática pedagógica levando em conta que o aluno deve ser sempre o sujeito de sua aprendizagem. O professor deve orientá-lo sempre que necessário, mas sempre deixando com que o aprendiz procure construir o seu próprio conhecimento. Cabe ao professor além do domínio do conteúdo a ser desenvolvido, comunicar-se bem com o aluno e ter em mente que ele recebe muitas informações, com isso torna-se necessário que esse profissional esteja atento aos avanços da tecnologia.

Há de se considerar também que em toda escola existem os alunos com problemas de comportamento. Faz-se necessário que os professores estejam atentos a esses problemas, mas que procure resolvê-los de maneira sensata dentro da sala de aula, procurando evitar o encaminhamento desses alunos aos especialistas até por uma questão de autoridade, a não ser alguns casos especiais que exijam a interferência de outras pessoas na solução do problema.

Além de vários problemas que uma escola enfrenta como esse que foi citado anteriormente, há de se destacar que o ensino da Matemática ainda é um assunto de muita discussão entre os especialistas. O ensino da Matemática deveria ser levado ao aluno de uma forma bastante prática, para que pudesse atrair mais a sua atenção. O compromisso que o professor tem no cumprimento do programa, e que é muito extenso, muitas vezes o leva a processos pedagógicos que estão fora da realidade.

Os professores de matemática deveriam optar por fazer o uso da tecnologia, pois como ficou claro, o aluno se sentirá mais atraído e terá um melhor rendimento. Existem ferramentas que ajudam muito no ensino da Matemática como alguns *softwares* e até mesmo algumas construções que podem ser desenvolvidas em sala de aula, fazendo com que os alunos se envolvam cada vez mais e passam a trabalhar de maneira colaborativa.

Um outro fator que se deve considerar no processo de ensino-aprendizagem, não só para os professores de Matemática, mas para todos os educadores, é a questão da avaliação. Ela deve ser somativa e contínua, visando sempre a melhoria da qualidade do ensino e nunca deve ser usada como um instrumento punitivo para o aluno.

De modo geral, todos os educadores não podem perder de vista que o objetivo da educação é o da formação do cidadão para que ele possa viver bem e de maneira justa dentro da sociedade.

CAPÍTULO IV

MODELAGEM DA APRENDIZAGEM DA GEOMETRIA PARA O ENSINO

4.1 - Introdução

Ao iniciar o trabalho docente, geralmente há uma preocupação muito grande por parte do professor de matemática em registrar os conceitos, propriedades ou teoremas. Porque não iniciar com objetos concretos, trazidos às vezes pelos próprios alunos, fazendo daquele ambiente uma oficina onde cada um possa participar de maneira colaborativa, permitindo que o aluno tire suas conclusões em relação ao seu objeto de estudo? Partindo dessa premissa, o indivíduo vai construindo seu conhecimento de maneira natural e, em um segundo momento aqueles conceitos e propriedades que são importantes na Geometria serão memorizados com maior facilidade.

O importante nesse processo é fazer com que o estudante se envolva cada vez mais, permitindo que ele próprio descubra algo de seu interesse e discuta com o colega o que descobriu de novo, pois o prazer em participar o leva ao caminho da construção do seu conhecimento.

O maior problema do ensino tradicional é a imposição de regras. Quando regras são impostas a tendência é o desinteresse e onde não há interesse, não há rendimento. Há uma preocupação muito grande por parte de certos professores em relação ao uso de certas ferramentas como vídeo, televisão ou mesmo o computador, pois acreditam que são ferramentas usadas com o intuito de minimizar o seu tempo de trabalho e muitos são tão resistentes, que chegam a criticar de maneira irônica o uso da tecnologia. Nem sempre é necessário o uso de tais ferramentas porque um educador que desenvolve seu trabalho sob um enfoque interdisciplinar, muitas vezes o faz de acordo com os pressupostos dessa tendência.

Em se tratando de uma apresentação formal e discursiva, o que se pode notar é que os estudantes não se engajam em ações que desafiem suas capacidades cognitivas, ocorrendo assim um processo de memorização, repetição e, consequentemente, os alunos não são autores das construções que dão sentido ao conhecimento geométrico. O conhecimento deve ser construído a partir de muita investigação e exploração e a formalização é o coroamento do trabalho que culmina na escrita formal e organizada dos resultados obtidos.

4.2– A Modelagem Cognitiva

Segundo Gomide (1998), modelagem é o reforçamento diferencial de algumas respostas que vão levar à resposta final desejada. A modelagem é um procedimento utilizado para instalar alguns comportamentos que ainda não fazem parte do repertório do sujeito.

Segundo Richard (1986), a modelagem cognitiva resulta da passagem da descrição de processos cognitivos na linguagem psicológica, para uma linguagem formal, permitindo fazer cálculos ou simulações.

A modelagem cognitiva se desenvolve apenas sob duas condições: 1) pela necessidade de formalismos adaptados, que não sacrificam o pensamento quando se expressa algo. 2) deve ser explicitada a descrição dos processos psicológicos a um nível de precisão para que essa descrição seja completa e que não tenha nada a acrescentar para que ela produza comportamentos simulados e que se possa comparar aos comportamentos observados. (Richard, 1986)

As linguagens computacionais, assim como os modelos computacionais de tratamento da informação, permitem um progresso expressivo na modelagem cognitiva, exprimindo os raciocínios não formais, descrevendo os conhecimentos e representando as aprendizagens.

Segundo Richard (1986), os sistemas de produção, os conhecimentos sob forma de esquema e as redes semânticas, são exemplos dos novos formalismos que, em colaboração com psicólogos, são elaborados para atender os profissionais da computação e são ferramentas muito importantes na modelagem de processos.

4.2.1 – Modelagem em Educação

Segundo Ogborn (1990), a modelagem em educação pode fornecer ao estudante ferramentas de trabalho que o auxiliam a construir seu próprio conhecimento, expressar as representações desse conhecimento, e, também, explorar representações de outros estudantes e professores.

O uso da modelagem em educação tem natureza tanto individual quanto social da construção do conhecimento. A modelagem tem por princípio, que o estudante deve ter a máxima liberdade em manipular suas próprias idéias, para que possa melhor entender o mundo e a natureza da própria atividade de construção de teorias sobre ele.

Quanto as ferramentas de modelagem, vão desde o papel e lápis até a utilização de tecnologias interativas, como o computador. O uso do computador como ferramenta de modelagem em educação, significa trabalhar dentro de uma visão de aprendizagem realizada a partir de mundos artificiais nos processos de ensino e aprendizagem.

4.2.2– Modelagem da Aprendizagem da Geometria

Segundo Gravina (1998), no contexto da Matemática a aprendizagem depende de ações que caracterizam o "fazer matemática": experimentar, visualizar, induzir, conjeturar, abstrair, generalizar e finalmente demonstrar. O aluno deve agir diferentemente de seu papel passivo diante de uma apresentação formal do conhecimento, baseada na transmissão ordenada de "fatos", em geral na forma de definições e propriedades.

Com relação ao uso da informática, há de se destacar que trata-se de um atrativo bastante interessante para o aluno, mas deve-se tomar o cuidado, pois mesmo nos dias de hoje ainda há uma grande oferta de programas que mesmo tendo interface com interessantes recursos de hipermídia (som, imagem, animação), nada mais oferecem aos alunos do que ler definições, propriedades e aplica-las em exercícios práticos e fixar conhecimentos através da realização de exercícios repetitivos e que aumentam o grau de dificuldade. Se se almeja uma mudança de paradigma para a educação, torna-se necessário ser crítico e cauteloso no processo do uso da informática. A informática por si só, não garante um mudança e, às vezes, pode-se ser enganado pelo visual interessante dos recursos tecnológicos que estão disponíveis e que simplesmente reforçam as mesmas características do modelo de escola que privilegia a transmissão do conhecimento. Existem programas, como o *Cabri Geometry* e o *Sketchpad,* que são excelentes ferramentas para a aprendizagem da matemática dentro de uma linha construtivista, onde os alunos podem modelar, fazer simulações, experimentos e conjeturar. Nestes ambientes, os alunos utilizam processos de representação muito próximos da utilização do "lápis e papel" , sem exigir deles o conhecimento de uma linguagem de programação. (Gravina, 1998).

4.3 – Atitudes que levam o aluno à motivação

Segundo Dante (1998), determinados lembretes são importantes ao professor para que o aluno alcance sua meta com sucesso. Eis alguns deles:

1) o professor nunca deve começar um assunto resolvendo problemas difíceis. Deve-se iniciar com problemas atrativos e práticos que levam o aluno a envolver-se e em seguida apresente alguns exercícios de impactos, fazendo-o pensar e despertando nele a vontade de querer resolvê-lo. Lembre-se de que repetidos fracassos levam à desmotivação e à frustração;

2) evite listas grandes de exercícios, pois se tornam cansativas e monótonas. Dê poucos exercícios e com bastante freqüência;

3) é interessante que se resolva diferentes problemas com a mesma estratégia e aplicar diferentes estratégias para resolver o mesmo problema;

4) deve-se incentivar os alunos a "pensarem alto". Na função de orientador e facilitador da aprendizagem devemos perceber como eles estão pensando, como estão encaminhando a solução do problema e que estratégias estão tentando usar;

5) deve-se motivar o aluno a rever o seu raciocínio, levando-o a tentar resolver a questão de outra maneira e a testar a solução encontrada;

6) é importante que os alunos usem materiais manipulativos como: palitos, fichas, cartazes, gráficos ilustrativos, material para dobradura, etc;

7) não se pode evitar de mostrar o erro do aluno. Às vezes é percebendo o erro que cometeu, é que ele compreende melhor o que deveria ter feito. É necessário tomar o cuidado de não expô-lo perante os colegas;

8) é interessante que se forme um "banco de problemas", para que toda semana seja colocado em um mural os desafios e suas soluções. Os estudantes tem muito interesse em levar para a escola curiosidades que vão chamar a atenção dos colegas;

9) um professor nunca deve dizer ao aluno o caminho que ele pode descobrir por si só. Ele deve ser levado a pensar e como facilitador da aprendizagem deve-se incentivar o aluno, insinuar, mas nunca apontar o caminho a ser seguido. Alguns segundos de prazer da descoberta valem mais do que mil informações que possam ser transmitidas a ele.

4.4 – Construindo o conhecimento

Segundo Procap (1997) a rigor, os entes geométricos são constructos mentais, isto é, abstrações. Um indivíduo, quando pensa, é capaz de construir mentalmente um ente geométrico embora não consiga representá-lo com perfeição.

A diferença entre o conceito (abstrato) e sua representação (concreto), pode ser considerada como um dos maiores desafios no ensino do conteúdo de Geometria, tendo em vista que o aluno, até uma determinada fase ainda não tem facilidade para abstrair do objeto observado as caracteristicas específicas que o tornam um ente geométrico único e conceptual.

No que se refere as figuras tridimensionais e sua representação, o estudante se depara com uma questão muito grave que é: a existência das três dimensões e que o leva ao uso de artifícios quando se trata de representá-lo em duas dimensões. O aluno numa fase mais madura, para dar a idéia do relevo da figura, utiliza-se das técnicas de perspectiva. Não se pode esperar que um aluno no princípio da escolarização venha a interpretar a representação em perspectiva, onde a idéia de relevo ou profundidade é passada através de linhas pontilhadas.

Segundo o mesmo autor, como cobrar do aluno conhecimentos de figuras tridimensionais, quando na verdade se apresentam como bidimensionais? Então é importante que o aluno antes de fazer a representação com lápis e papel, o professor possa incentivá-lo a fazer atividades em sala de aula, manipulando e construindo as figuras geométricas. A observação deve ser contínua, sistematizada e dirigida à linguagem espontânea do aluno. (Procap, 1997).

Segundo Grassechi, (1999) ao introduzir um determinado assunto o professor deve sempre preparar alguma prática para chamar a atenção do aluno e para que tenha mais interesse, motivação e prazer em construir o seu conhecimento. Por exemplo: em uma aula de semelhança de triângulos é comum em primeiro lugar o professor começar falando dos polígonos semelhantes em geral. Ao contrário do que alguns profissionais fazem, ao invés de se limitar à demonstrações de teoremas é importante que faça com que o aluno desenvolva bem a parte exploratória, utilizando material concreto, comparando figuras, pois, esse tipo de atividade irá contribuir para que o aluno construa os conceitos fundamentais da geometria.

Para essa prática e outras que se fizerem necessárias, é importante que o professor peça com antecedência aos alunos o material a ser usado. Eles levarão com o maior entusiasmo, pois adoram atividades práticas, como construções de sólidos, planificações, desenhos, etc.

1) Comparando figuras geométricas planas:

Material necessário: Uma lanterna, um pedaço de cartolina escura ou papelão, tesoura e/ou estilete, fita adesiva.

Procedimento:

- Recorte a cartolina copiando a forma e o tamanho do vidro da lanterna.
- Reproduza a figura por exemplo, uma estrela, no centro do recorte obtido.
- Faça um molde vazado recortando a estrela.
- Prenda o molde vazado no bocal da lanterna.
- Reproduza a estrela em uma folha de papel em branco, depois deixe a folha em cima da carteira ou mesa.

Depois que os alunos construíram o instrumento, começa-se a segunda fase:

Um colega segura a lanterna acesa perpendicular à folha a uma distância de aproximadamente de 10 cm e o outro desenha a figura projetada na mesma folha. Daí repete-se o procedimento anterior com a lanterna a 15 cm da folha.

Depois de projetar algumas sombras, compare a figura colada na folha com as figuras projetadas a 10 cm, 15cm, etc. Em seguida faz-se os questionamentos:

a) As figuras projetadas são reproduzidas com a mesma forma da primeira?
b) O que acontece quando a lanterna é aproximada ou afastada verticalmente da folha?
c) O que acontece com a figura quando a lanterna é inclinada em relação à mesa? (Grasseschi, 1999).

Para trabalhar com o conteúdo: sistema cartesiano, é interessante que o professor introduza o assunto com uma prática para que o aluno se envolva com o assunto.

É o chamado "jogo da batalha geométrica", onde o professor forma as duplas em sala de aula e passa as regras do jogo para os alunos.

2) Coordenando os pontos:

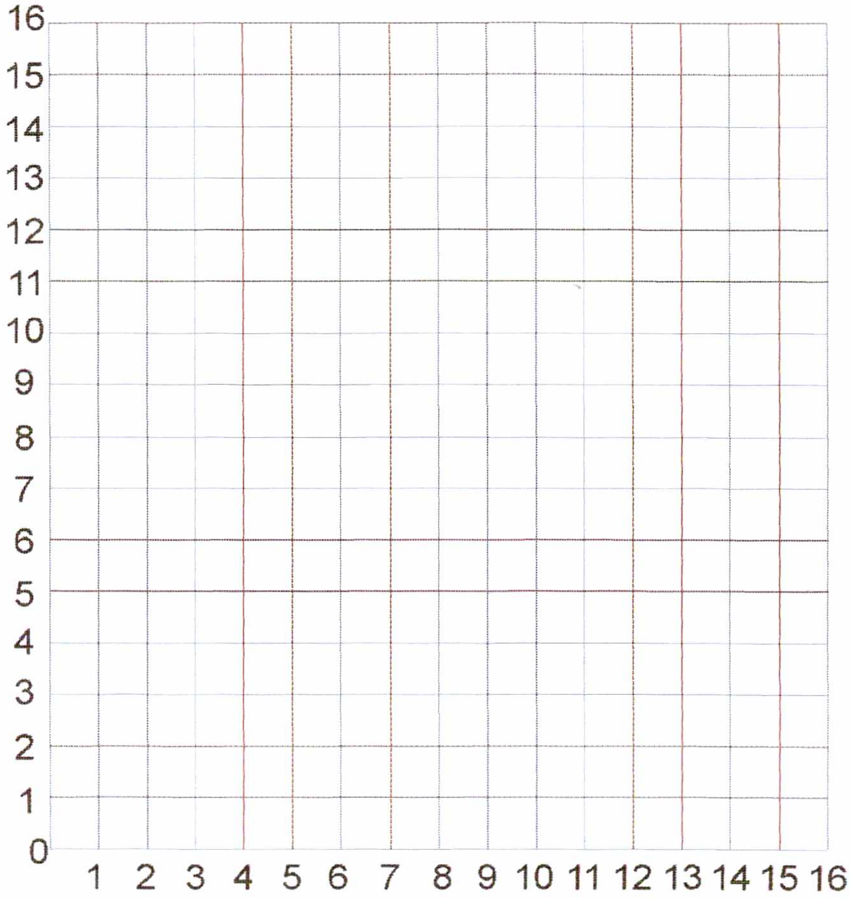
Nome do jogo: "Batalha geométrica de áreas

Número de participantes: dois

Material: papel quadriculado (são os chamados esquemas)

Para este jogo reproduza duas vezes o esquema a seguir em uma folha de papel quadriculado, identificando-os com as letras A e B.

Figura 07 - Esquema.

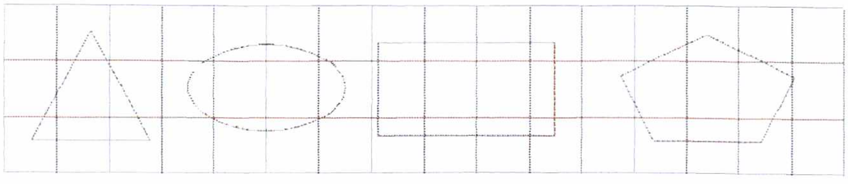


Fonte: Promat – FTD - 1999.

Regras:

Primeira: Sem que o adversário veja, o jogador desenha no esquema A uma de cada das figuras geométricas indicadas abaixo, mantendo pelo menos um quadrinho de distância entre elas.

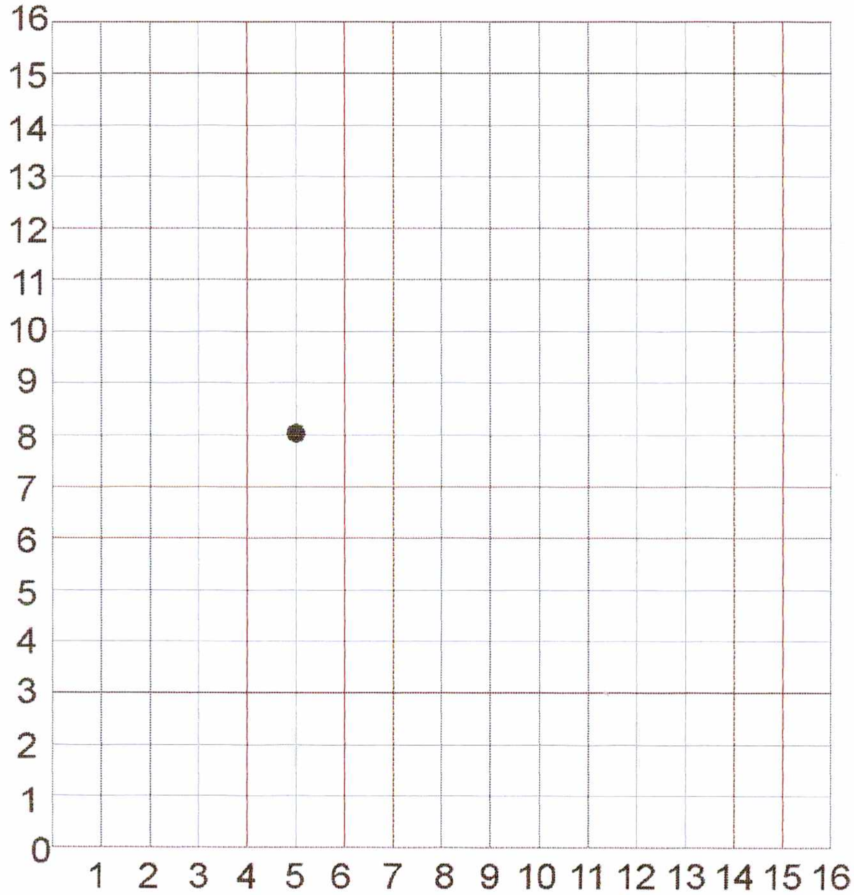
Figura 08 - Polígonos



Fonte: Promat – FTD –1999.

Segunda: Na sua vez, o jogador tenta "atingir" os pontos de intersecção das linhas horizontais e verticais de cada figura que o adversário desenhou, indicando por meio de um par de números, por exemplo 5 e 8. O primeiro número refere-se às linhas horizontais e o segundo às linhas verticais.

Figura 09 – Esquema.



Fonte: Promat – FTD – 1999.

Terceira: A resposta pode ser:

- Interna, se o ponto referido pertencer à região interna da figura.
- Externa, se o ponto referido pertencer à região externa da figura.
- Contorno, se o ponto referido pertencer ao contorno da figura.

Quarta: Para controle dos acertos e erros, quem faz a tentativa anota o resultado no esquema B.
Quinta: Cada participante faz uma tentativa: se acertar, continua jogando; caso contrário, passa a vez ao adversário.
Sexta: Considera-se que a figura foi completamente atingida quando todos os pontos de intersecção que pertencem ao seu contorno forem preenchidos. Não há necessidade de acertar os pontos internos. Deve-se, então, avisar ao adversário que ele completou a figura.
Sétima: Ganha quem primeiro atingir todas as figuras do adversário.
Obs: pode-se variar o jogo substituindo a quinta regra pela seguinte: cada jogador faz, na sua vez, três tentativas; anota os resultados e passa a vez ao adversário.

3) O feixe de paralelas.

Para falar do teorema de Tales é necessário que se introduza o conceito de feixe de paralelas e das retas transversais. Há um fato interessante que se pode comentar com os alunos e levar até ilustrações para que eles fiquem mais entusiasmados que é o caso da mariposa.

Primeiro lançaria a pergunta: Você já viu uma mariposa rodar sem parar em torno de uma lâmpada? É uma verdadeira atração fatal não é! Por que a lâmpada atrai a mariposa?

Nesse momento é importante que os alunos tenham um tempo para pensar. Muitas vezes os professores conseguem obter respostas bastante inteligentes.

Depois de um certo momento, após algumas conclusões, as opiniões podem ser colhidas e comparadas com a seguinte explicação: Acontece que as mariposas orientam seus vôos por um feixe de retas paralelas existente na natureza. São os raios de luz solar ou lunar.

Sendo os raios solares paralelos, se forem projetados sobre um círculo vazado irão reproduzir numa superfície plana um círculo de luz do mesmo tamanho que a abertura do original.

Voltando à mariposa: quando ela voa em certa direção, seu sentido de orientação faz com que ela não mude o ângulo entre o seu caminho e os raios solares. Mantendo sempre um mesmo ângulo, o caminho resulta numa linha reta. Imagina a mariposa voando em sentido horizontal e sendo os raios solares inclinados os ângulos formados entre a trajetória e os raios serão "ângulos correspondentes".

A trajetória da mariposa ocorre quando, em vez do sol, ela encontra uma lâmpada comum. Nesse caso, os raios de luz não são paralelos. Eles equivalem a um feixe de retas concorrentes, que se encontram, todas no centro da lâmpada. Só que a mariposa não sabe disso.

A coitada, pensando que se trata da luz à qual está acostumada, ou seja, à luz solar, procura se orientar da mesma maneira. Assim, ela mantém sempre o mesmo ângulo com os raios de luz. Nesse caso a trajetória, em vez de ser uma reta, passa a ser uma espiral que vai dar no centro da lâmpada. Por isso a mariposa nunca chega a seu destino. (Imenes, 1992).

4) A rigidez do triângulo

Uma das propriedades importantes do triângulo é sua rigidez. Numa turma de sétima série do ensino fundamental ao conceituar triângulos, o professor pede aos seus alunos que levem para a aula canudos de refresco e percevejos. Os alunos devem se organizar em grupos e de início pode ser trabalhado a construção de triângulos, mostrando a condição de existência, ou seja, a medida de um lado deve ser sempre menor que a soma das medidas dos outros dois.

Após as construções, o professor pede aos alunos que construam quadriláteros de tamanhos variados. Os alunos vão notar que os lados do quadrilátero vão se movimentar deformando a figura.

Depois peça que os alunos construam novamente um triângulo, eles vão notar que o triângulo não se deforma. Após alguns questionamentos o professor deve deixar claro para o aluno a importância dessa propriedade. Todos outros polígonos feitos nessa condição mudam de forma. Só os triângulos têm essa rigidez.

Em seguida deve ser comentado algumas aplicações práticas dos triângulos, como por exemplo: na construção de galpões, pontes, portões grandes, telhados, torres, etc. (Imenes, 1992).

5) Artefatos

Para sanar as dificuldades dos alunos na visualização de sólidos geométricos e a desmotivação que muitos estudantes apresentam nas aulas de Geometria espacial o professor pode levar para a sala de aula uma prática que pode levar o aprendiz a vivenciar os conceitos espaciais através de experiências elementares. Utilizando material concreto, como por exemplo: canudos plásticos unidos por meio de um fio de linha ou corda de nylon. Seja a construção de um tetraedro regular:

- Tome o fio de linha, passe-o através de três pedaços de canudos de mesmo tamanho, construindo um triângulo e o feche por meio de um nó. Agora, passe o restante da linha por mais dois pedaços de canudo, juntando-os e formando mais um triângulo com um dos lados do primeiro triângulo. Finalmente, passe a linha por um dos lados desse triângulo e pelo pedaço que ainda resta, fechando a estrutura com um nó. Essa estrutura representa as arestas de um tetraedro regular. (Kaleff, 1995)

4.4.1 – A Matemática e as dobraduras

Segundo Imenes, (1999), uma brincadeira muito difundida entre os japoneses, os quais fazem dela uma arte é a dobradura. Eles constroem as mais variadas formas – pássaros, peixes, flores, caixas, aviões, barcos, bonecos, e todas têm em destaque figuras geométricas nas suas construções. Chamam-na de *origami*, que quer dizer "dobradura de papel".

Sua origem é tão remota quanto a história do próprio papel. Mas esse trabalho, da forma como é conhecido hoje, se desenvolveu em meados do século XIX. Hoje em dia, os *origamis* são muito empregados nas escolas e são confeccionados em papéis retangulares ou tiras de papel, além do uso da tesoura e cola. Os papéis não devem ser difíceis de dobrar, mas também não podem rasgar com facilidade.

Nas construções geométricas é muito comum o uso de régua, compasso e outros instrumentos. Mas pode-se fazer construções das mais variadas usando o *origami*.

Segundo Almeida (2000), professores e pesquisadores, preocupados com a falta de conhecimento em Geometria, têm procurado caminhos que façam o aluno se interessar e se envolver no estudo desta disciplina.

A dobradura de papel é uma das possibilidades de se fazer experiências exploratórias. Além de permitir a manipulação de formas, o indivíduo ao executar as dobras vai participando ativamente da formação do modelo, podendo constatar através de movimentos das dobras elementos e propriedades destas.

O *origami*, além de servir como instrumento de desenvolvimento e aprimoramento da coordenação motora, que motiva as pessoas e desperta interesse, possibilita trabalhar conceitos geométricos com um material concreto de fácil execução.

Educadores em geral vêem utilizando as dobraduras não só para o estudo da Geometria, mas como um elemento interdisciplinar devido as suas características. O aluno normalmente participa da construção dos modelos e através do manuseio do material concreto, vai compreendendo e se familiarizando com a estrutura deste ocasionado pela vivência de todo um processo de experimentação e controle, contribui na formação dos seus modelos mentais.

O desenho é um dos procedimentos utilizados no ensino da Geometria. Através do desenho são representados os modelos geométricos no espaço bidimensional e tridimensional, através de sistemas de representação que codificam os elementos de modo que estes possam ser representados e extraídos dessa representação, todos os dados qualitativos e quantitativos da forma.

A computação gráfica vem substituindo gradativamente as ferramentas euclidianas. Porém, o uso de *software* gráficos ou instrumentos de desenho exigem uma elaboração ou codificação de estratégias na representação, que por vezes sobrecarregam o aprendiz com informações que deslocam o eixo das questões a serem estudadas. É muito comum os alunos repetirem os passos de construção das figuras geométricas, sem entenderem os conceitos que estão sendo trabalhados. (Almeida, 2000).

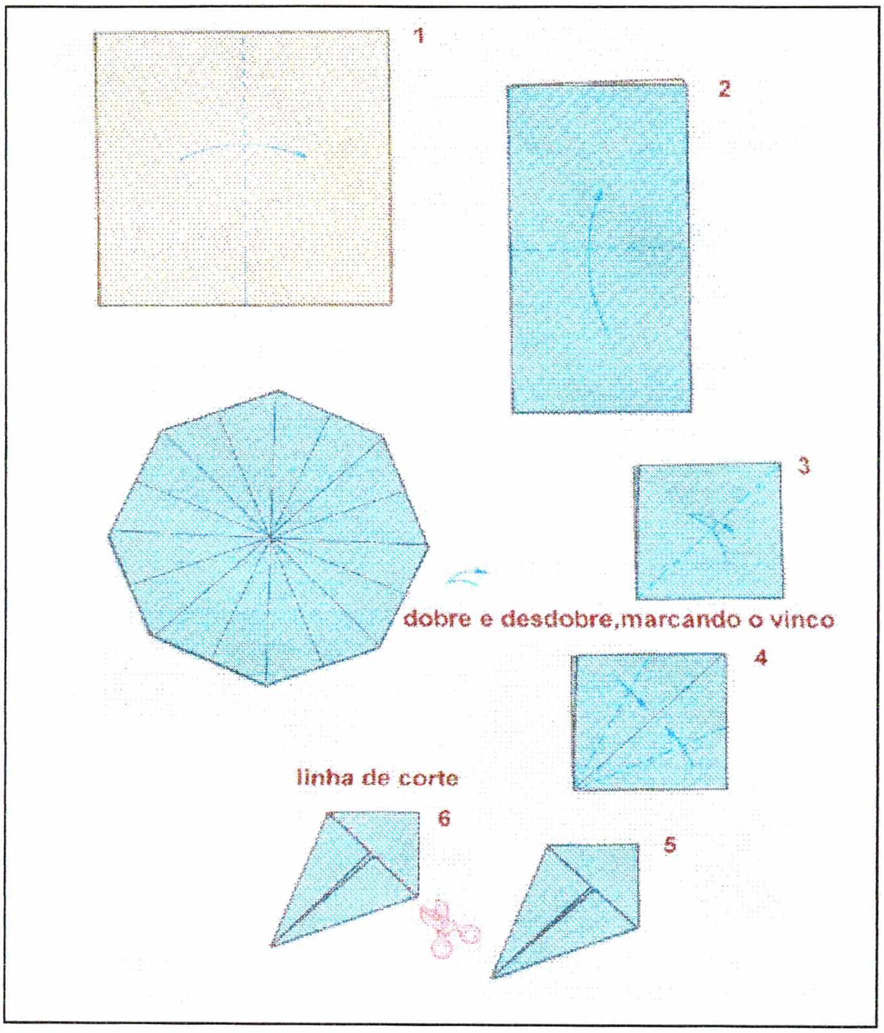
Do ponto de vista educacional, o que se pretende com o *origami* é fazer com que o aluno ao manusear formas venha compreender melhor os conceitos geométricos subjacentes. Dessa maneira, quando um aluno utilizar os instrumentos de desenho ou um *software* para a representação das formas, poderá fazer com muito mais domínio. Na verdade o que se pretende com o *origami* é o resultado da ação física e intelectual do aluno, de modo que ele possa ter um papel central na elaboração e apropriação do saber. (Almeida, 2000).

As dobraduras permitem que sejam trabalhados diferentes conceitos geométricos, uma vez que são ilimitáveis as possibilidades de se dobrar um papel. Essa alternativa é de grande utilidade para o ensino da Geometria, uma vez que funciona como um laboratório de pesquisa para o professor e para o aluno com a grande vantagem de se trabalhar com material concreto, de fácil manipulação e altamente criativo. (Almeida, 2000).

A construção dos modelos geométricos através das dobraduras, baseia-se na utilização de princípios geométricos que direcionam o resultado para a construção aproximada ou para um modelo que possui uma tradução matemática, ou seja, construções demonstráveis. Da mesma maneira que se executam as construções geométricas com ferramentas euclidianas, podem-se executar as construções com dobraduras, seguindo determinadas regras, permitindo que um modelo possa ser reproduzido outras vezes. Tais construções são representadas por diagramas mostrando cada passo de dobra a ser executado.

A Figura 10 mostra a construção de um octógono a partir de dobradura em folha de papel cartolina, onde o aluno pode ir construindo passo a passo, executando as dobras no papel até chegar a construção do polígono. A partir desse polígono o aluno pode tirar conclusões em relação aos elementos que o constitui e o professor ainda poderá sugerir que tragam sólidos como prismas e pirâmides formados por polígonos como esse e outros que venham desenvolver a habilidade e o interesse do aluno.

Figura 10 - Construção de um octógono.



Fonte: Vivendo a matemática – Scipione (1999)

4.5 – Conclusão

Ao concluir o que foi exposto nesse capítulo, fica claro que cada indivíduo tem seu modo de aprender, e cada vez que ele aprende algo, sente-se mais seguro nas suas ações. Isso faz com que esse indivíduo fique cada vez mais curioso e crie coragem para enfrentar os novos problemas.

O que se pôde perceber é que à medida que um indivíduo começa a agir de maneira diferente, buscando uma forma mais adequada para alcançar a aprendizagem, ou então que ele seja levado à mudanças na medida em que constrói o seu conhecimento; significa que ele está passando por um processo de modelagem.

Em relação à Geometria é importante destacar que o aluno ou o professor pode lançar mão de ferramentas de várias modalidades para trabalhar de maneira prática e prazerosa. Um detalhe que traz bastante satisfação a um determinado indivíduo é o fato de poder conceituar bem algo que anteriormente era considerado totalmente abstrato, e que a partir de uma representação concreta, ele passa a construir melhor os conceitos.

Para que o estudante entenda com maior clareza um determinado conteúdo, faz-se necessário que professor consiga um meio de ilustrar sua aula de tal modo a atrair a sua atenção, para que não caia naquela rotina de sempre fazendo com que ele se desanime. É importante que ele procure ilustrar a aula com exemplos práticos, jogos, ou algo similar para enriquecer o seu trabalho.

A modelagem da aprendizagem da Geometria exige que o professor seja criativo em sala de aula. A criatividade é essencial para se alcançar o objetivo e o espírito de cooperativismo que é uma constante no processo. Agindo dessa forma os alunos se envolvem, se organizam e vão ao mesmo tempo construindo seu próprio conhecimento, sem perder de vista a essência do rigor matemático que lhe é peculiar.

CAPÍTULO V

UMA PROPOSTA DE TRABALHO PARA O ENSINO DA MATEMÁTICA

5.1 – Introdução

Observa-se que, nos últimos anos, principalmente nas séries do ensino fundamental, a prática em sala de aula foi extremamente reduzida e, em alguns casos, até extinta dos programas.

Há alguns autores que ainda sugerem algumas práticas para que possam ser trabalhadas em sala de aula, mas a maioria se preocupa muito com conteúdos e o professor se desgasta muito tentando ensinar determinados conceitos e o aluno não consegue entender, exatamente porque o nível de abstração é grande e por isso as aulas se tornam cansativas e monótonas.

As aulas expositivas usando somente o quadro e o giz já não produzem os resultados esperados. Há de se incrementar novos métodos para que alunos e professores possam estar em constante harmonia e se crie um ambiente de aprendizagem desenvolvendo um trabalho colaborativo e que explore a criatividade dos alunos.

Torna-se necessário um planejamento onde o professor possa trabalhar os conteúdos, mas que dê também a oportunidade aos educandos de construir seu próprio conhecimento, incentivando-os em determinados momentos em trabalhos com materiais concretos e tentando mostrar ao indivíduo que o processo de construção do seu conhecimento está diretamente ligado com as relações que ele estabelece com o mundo que o cerca.

Um fato importante que se deve levar em conta também, é a questão dos programas de ensino. Os professores elaboram seus planos de curso com o objetivo de cumpri-los em tempo hábil e com o melhor rendimento possível. Mas o que ocorre no final do ano? Os professores nem sempre conseguem cumprir o seu programa, os alunos estão entediados com tantas aulas maçantes, e o que é pior, a aprendizagem não foi satisfatória.

5.2 – Proposta

Em princípio, como parte desta proposta, faz-se necessário a inclusão da questão curricular na escola como "reflexão", principalmente em relação à Matemática, pois há sempre a tentação de se limitar a essa reflexão, tendo em vista que as tendências conservadoras têm a visão predominante de que os conceitos sempre aparecem como pré requisitos de outros.

Em relação ao ensino da Matemática o que se observa, é que há algum tempo era muito comum os alunos de ensino fundamental e médio participarem de aulas de desenho geométrico, utilizando instrumentos como: lápis, régua, compasso, jogo de esquadros, transferidor, etc. É importante que se trabalhe com esses instrumentos construindo com os alunos determinados elementos como: retas, paralelismo de retas, perpendicularismo de retas, mediatrizes, bissetrizes, circunferências, ângulos, congruência de ângulos, triângulos, quadriláteros e outros polígonos, os pontos notáveis de um triângulo (mediana, altura e bissetriz) , diagonais de um polígono, polígonos inscritos e circunscritos em círculos, etc.

Uma proposta nesse sentido se faz necessária, porque o ideal é que o professor deixe que os alunos construam os entes geométricos e tirem suas próprias conclusões. Pode-se citar algumas práticas que devem ser levadas para a sala de aula e que melhoram a aprendizagem e motivam o aluno:

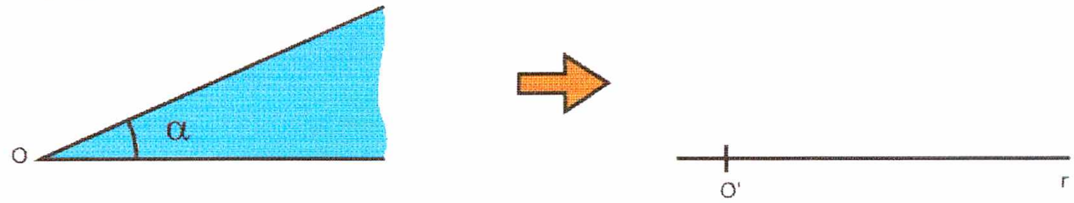
1) Em uma sétima série do ensino fundamental o professor vai trabalhar com ângulos congruentes, ele deve solicitar aos alunos que resolvam equações envolvendo o conceito de congruência. O ideal é que se construam um ângulo qualquer com lápis e régua e logo em seguida, utilizando compasso façam a transferência desse ângulo para outro local da folha. Terminada a construção, os alunos, auxiliados pelo professor, irão medir os dois ângulos

e irão perceber que têm mesma medida. Concluída a medição, o professor auxilia os alunos a conceituarem ângulos congruentes e em seguida os alunos terão condições de resolver o exercício algebricamente.

Construção de ângulo

Figura 11

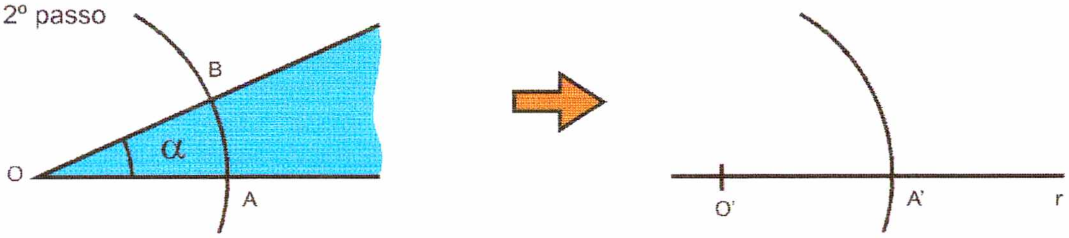
1º passo



Dado o ângulo de medida α, trace uma reta **r** auxiliar. Marque em r um ponto **O'**.

Figura 12

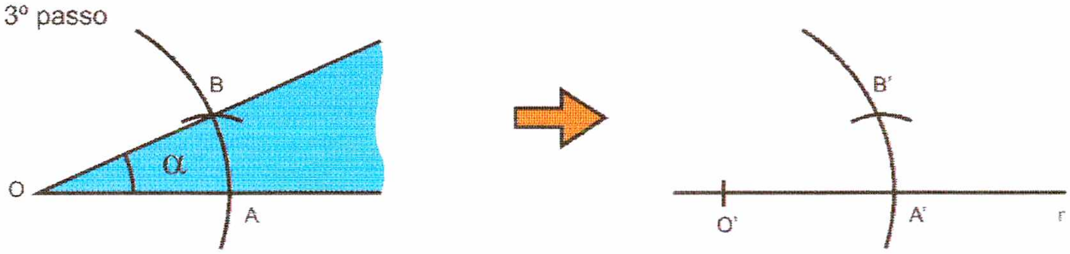
2º passo



Trace um arco de centro **O**, obtendo os pontos **A** e **B**. Com o mesmo raio, trace um arco de centro **O'**, obtendo **A'** em **r**.

Figura 13

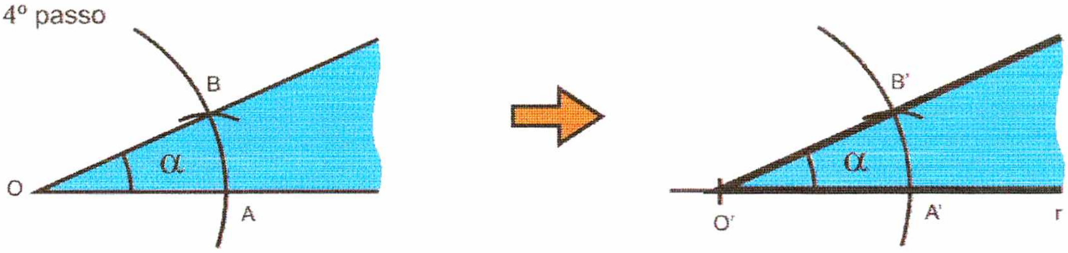
3º passo



Trace um arco de centro **A** e raio **AB**. Com o mesmo raio, trace um arco de centro **A'**, obtendo **B'**.

Figura 14

4º passo



Destaque o ângulo A' O' B', de medida α, obtido por "transporte".

2) Ainda na mesma turma, o professor deseja ensinar quadriláteros. Os alunos com o auxílio do professor constróem vários quadriláteros, o professor juntamente com seus alunos conceitua, trabalha com seus elementos, e logo em seguida pede aos alunos que construam um quadrado (quadrilátero especial) e traçam as suas diagonais. Terminada a construção, alguns alunos já vão perceber que todos os ângulos do quadrado são retos e que as diagonais são perpendiculares e congruentes. Em seguida podem ser feitas outras construções como o losango, retângulo, trapézio, paralelogramo para num segundo momento falar sobre suas propriedades e passar ao cálculo algébrico.

Alguns profissionais insistem em ensinar ao aluno Matemática, com todo o seu rigor em aulas expositivas, o que o leva ao cansaço e desinteresse. É muito comum os alunos perguntarem: Por que estou aprendendo álgebra? Que utilidade isso tem na vida prática? Por que estudar Geometria? Por que ela é importante? Muitas vezes o professor é abordado com determinadas perguntas como essas, e fica sem saber o que responder aos seus alunos.

Por isso a prática é importante para que o aluno possa relacionar o conteúdo que está sendo ensinado com o mundo que está a sua volta. O grande desafio do professor de Matemática é ensinar determinados conteúdos aos seus alunos, passando pelos níveis de abstração que eles possuem. Essa situação só se resolve quando se trabalha com material concreto, ou que seja colocada uma experiência ou uma situação da vida prática, para que o aluno possa sentir a necessidade de aprender determinados conceitos matemáticos.

Um professor em sala de aula pode usar de vários artifícios para introduzir determinados conceitos. Imagine que um professor vai iniciar sua aula falando de "média aritmética". Normalmente o que ocorre é o seguinte: O professor dá a fórmula e faz com que seus alunos resolvam uma série de exercícios repetitivos. Será que esse é o melhor método? Por que não iniciar a aula com um exemplo prático, onde os alunos possam se descontrair e aprender com maior clareza. Seja a seguinte situação prática: O professor reúne um grupo de cinco ou seis alunos, toma-se uma fita métrica ou uma trena e pede que tirem as medidas de suas alturas. Obtidas as medidas e registradas em uma folha, com a orientação do professor, os próprios alunos poderão obter a média aritmética das alturas de seus colegas. Terminada a experiência o professor poderá perguntar: será que tem aqui na sala algum aluno com essa média? Que importância vocês vêem no estudo da média aritmética? Que outros exemplos vocês poderiam citar para esse estudo? Certamente que os alunos irão sugerir vários outros exemplos e também responder às perguntas feitas pelo professor.

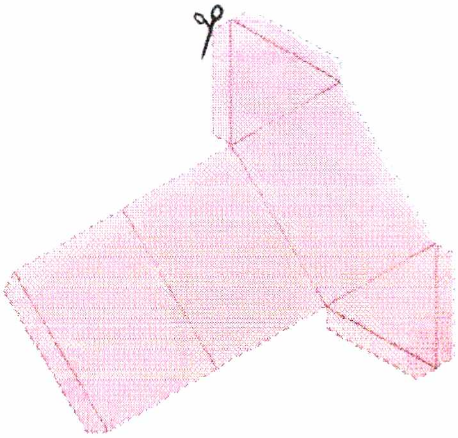
O grande problema da maioria dos profissionais do ensino é a resistência em aceitar as inovações. Principalmente em relação ao professor de Matemática, o que se percebe é que, quando se trabalha com um método tradicional, o professor escolhe o livro didático mais conveniente, expõe o assunto para seus alunos, muitas vezes de uma forma bastante clara, mas falta a parte prática que pode despertar no aluno um interesse maior, a autoconfiança, o senso crítico e principalmente a criatividade, pois, nesse momento ele sabe que é o autor da sua construção.

5.2.1 – Experiências realizadas

Como já foi colocado, existem várias formas de se trabalhar com os conteúdos da Matemática a nível de ensino fundamental e médio. Apresentar-se-á algumas experiências que foram realizadas em escolas na cidade de Divinópolis-MG, com alunos do ensino fundamental. São elas:

1) Na escola Coteom- Colégio Técnico do Oeste de Minas, em uma turma de sétima série com 33 alunos na aula de Matemática, foram distribuídas várias figuras planificadas para que os alunos pudessem construí-las e nomear seus elementos. Os alunos colaram as figuras em folhas de cartolina, alguns preferiram colorir, em seguida cortaram e colaram construindo assim os sólidos desejados como: pirâmides, cones, cilindros, e vários prismas regulares. Todos os alunos fizeram o trabalho com muito entusiasmo e com o mínimo de dificuldade possível. Após o término das construções foram feitas perguntas aos alunos sobre os elementos que deram origem àqueles sólidos. As respostas demonstraram que os alunos se referiam aos entes fundamentais da geometria na formação do sólido.

Figura 15



O mais importante do trabalho foi a participação de todos os alunos onde a ajuda foi mútua, e o interesse maior ainda. Mal acabavam de construir um sólido, queriam logo começar outro, e diziam sempre naquele momento que a aula estava interessante e que momentos como aquele deveriam sempre ocorrer dentro da sala de aula.

2) Uma segunda experiência foi realizada numa turma de sexta série, composta de 22 alunos também na escola Coteom acima citada. O assunto a ser tratado era sobre ângulos, cálculo de áreas e perímetros. Foram exibidos dois filmes em vídeo-TV, do Procap- Programa de Capacitação de Professores.

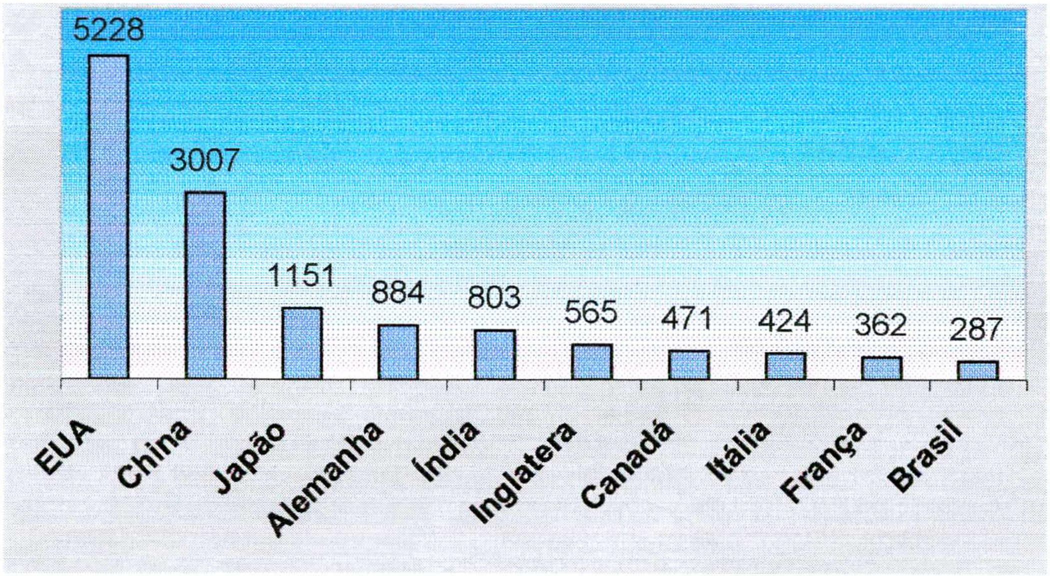
O conteúdo do filme foi considerado bastante interessante porque se tratava de uma sequência dos conteúdos estudados na quinta série, onde os alunos estudaram cálculos de áreas e perímetros de figuras planas e com a exibição deste filme os alunos tiveram a oportunidade de compreender que figuras planas de mesmo perímetros podem ter áreas diferentes e que figuras planas de mesma área podem ter perímetros diferentes.

Os filmes tiveram uma aceitação muito grande, principalmente porque eles relacionavam muito a Geometria com a vida prática, mostrando estruturas de prédios, pontes, construções em geral e relacionando-as com as figuras geométricas, como o triângulo por exemplo e sua rigidez, mostravam também como se calculavam áreas e perímetros de pisos, paredes, etc.

Pelo depoimento dos alunos observou-se que eles sentiram o desejo de estarem novamente participando daquele ambiente e que outros filmes fossem exibidos.

3) Na Escola Estadual Rosa Vaz Araújo em Divinópolis-MG, em uma turma de quinta série com 30 alunos, foram distribuidas cópias de um gráfico, conforme fig. 16, que se refere aos países "campeões da fumaça". O eixo horizontal destaca os países como: Estados Unidos, China, Japão, Alemanha, e entre outros países o Brasil. As barras verticais indicam o número de toneladas/ano de poluição daqueles países.

Figura 16



Em seguida foram feitos questionamentos, como: qual dos países poluía mais, quantas vezes os Estados Unidos poluía mais que o Brasil, qual o país poluía menos, quais dos países pertenciam ao Continente Americano.

O trabalho com gráfico é importante porque o aluno consegue fazer uma análise e tirar conclusões à respeito do assunto com bastante rapidez sem ter que efetuar muitos cálculos. Além do mais, os gráficos de um modo geral trazem dados estatísticos bastante familiares que despertam no aluno um interesse muito grande.

O trabalho obteve êxito, e os alunos sugeriram que outros trabalhos com gráficos fossem realizados durante o ano letivo.

4) Mais um trabalho foi realizado na escola Rosa Vaz Araújo, numa turma de quinta série com 30 alunos. Os alunos se reuniram em grupos e realizaram a seguinte prática: Com uma folha de papel e a partir de um objeto circular desenharam um círculo. Dobrando esse círculo ao meio obtiveram uma figura que representa um ângulo raso. Em seguida anotaram sua medida 180°. Continuando o trabalho, desdobraram o papel e recortaram o círculo na marca obtendo dois ângulos rasos. Pegaram um deles e dobraram ao meio e a nova figura representava um ângulo reto. Anotaram também sua medida 90°. Novamente desdobraram e cortaram na dobra do papel, obtendo dois ângulos retos. Da mesma forma, pegaram um deles e dobraram ao meio, obtendo um ângulo de 45°. A outra parte foi dividida em três ângulos congruentes onde foi solicitado aos alunos que recortassem uma parte e deixassem as outras duas. Finalmente anotaram as medidas dos ângulos de 30° e 60°.

Terminada essa prática, os alunos colaram esses ângulos num papel cartão. Em seguida desenharam os ângulos utilizando o material obtido como gabarito, conferindo suas medidas com o transferidor.

Os alunos ficaram bastante entusiasmados com esse trabalho e assimilaram bem a idéia de ângulo. No dia seguinte, o professor procurou recordar todos os passos do trabalho realizado e em seguida conceituou-se "ângulo" e destacou-se seus elementos.

Na aula seguinte foi realizada uma prática com esses mesmos alunos, utilizando o transferidor. O que se pôde observar foi a facilidade com que os alunos manuseavam o instrumento e reconheciam os ângulos trabalhados. Eles comparavam os ângulos que estavam sendo medidos com os ângulos da aula anterior, deixando perceber que os conhecimentos foram assimilados.

5) Na escola Coteom, numa turma de sétima série com 33 alunos, iniciou-se o estudo sobre "os triângulos". Definiu-se a figura, relacionou-se seus elementos e a condição de existência dos triângulos, classificando-os quanto aos lados e os ângulos. Foi então aberto questionamento sobre o assunto exposto e aplicou-se alguns exercícios.

O resultado não foi muito bom. Apenas 30% dos alunos assimilaram o conteúdo. Concluiu-se que a estratégia para a compreensão deste conteúdo deveria ser alterada.

Na aula seguinte, iniciou-se tudo novamente, mas de outra forma. Os alunos se reuniram formando grupos de quatro elementos, foram distribuídos canudos de refrescos para que cortassem esses canudos em diversos tamanhos de modo a colarem os pedaços em uma folha em cartolina formando triângulos variados. Os alunos, por si próprios, perceberam que não eram todas as medidas que se podiam usar na construção dos triângulos. Assimilaram a condição de existência. Em seguida falou-se de sua rigidez, exemplificando praticamente e fazendo com que os alunos comparassem a rigidez do triângulo com a de outros polígonos. Os alunos perceberam que essa é uma propriedade que todos os triângulos possuem e alguns até citaram alguns exemplos de aplicação, como o caso de estruturas metálicas, barras de reforço e outros mais. A turma ficou bastante entusiasmada pedindo que outras aulas dessa natureza fossem realizadas.

No dia seguinte, foram aplicados novos testes sobre os conceitos aprendidos. O resultado foi bem melhor que o primeiro, em torno de 80%. Os alunos alegaram que ao fazerem os cálculos, iam-se lembrando da prática que foi realizada naquela oficina, mostrando a eficiência do trabalho concreto na minimização dos conceitos abstratos da Matemática.

Dando continuidade ao estudo dos triângulos, na mesma turma, ao falar de pontos notáveis do triângulo, foi feito mais um trabalho com cartolina e barbante para que os alunos entendessem o que vem a ser mediana de um triângulo.

Para o professor apresentar o conceito de mediana para os alunos sem uma prática, torna-se um pouco difícil seu entendimento, tendo em vista que o aluno precisa entender que a palavra "baricentro" vem do grego *bari,* que significa massa, então baricentro quer dizer: centro das massas. O aluno tem curiosidade em saber o que vem a ser isto. Por isso mesmo iniciou-se a aula explicando o significado da palavra "mediana" e o objetivo que se queria alcançar com aquele trabalho.

Inicialmente, formaram-se os grupos de quatro alunos, cada aluno recebeu um pedaço de folha de cartolina e um pedaço de barbante. Cada um desenhou um triângulo qualquer em uma folha de papel e recortou. Com orientação, juntaram-se os vértices dois a dois e encontraram-se os pontos médios de cada lado. Marcaram esses pontos e dobraram o triângulo de modo que a dobra coincidiu com a linha que une o vértice ao ponto médio do lado oposto. Nesse momento, deu-se uma pausa e foi dito aos alunos que aquele segmento chama-se "mediana". Repetiu-se o procedimento em relação aos outros vértices, onde determinou-se o ponto de encontro das medianas que é o "baricentro".

Depois que os alunos encontraram o baricentro do triângulo, fizeram passar o barbante pelo baricentro e depois deram um nó do outro lado do barbante. Segurando o fio pela outra ponta, observaram que o triângulo ficava em equilíbrio (posição horizontal). No final foi explicado aos alunos que o que havia ocorrido, era devido ao centro das massas do triângulo e que em outra posição eles perceberiam que não haveria equilíbrio. Veja as figuras da página seguinte.

Figura 17

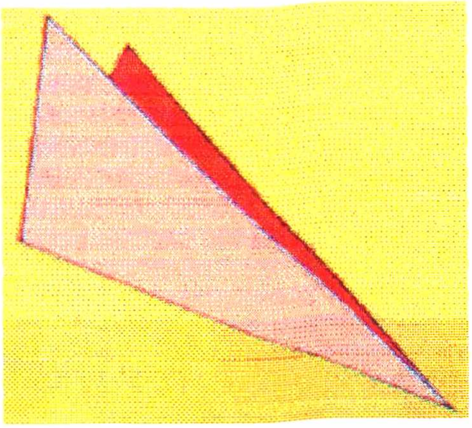


Figura 18

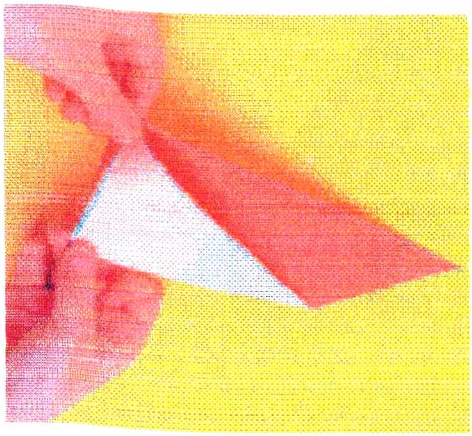


Figura 19

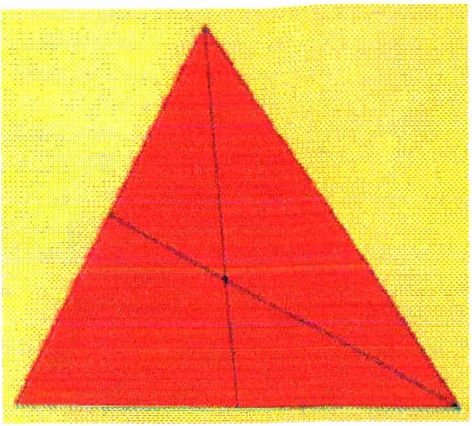
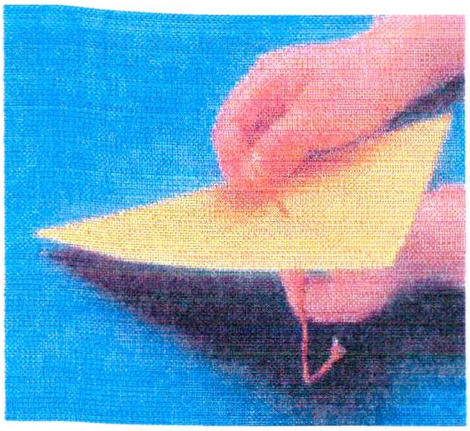


Figura 20



Como reforço, no dia seguinte, utilizando compasso e régua, realizou-se a construção de triângulos destacando novamente o baricentro, o incentro (encontro das bissetrizes) e o ortocentro (encontro das alturas). A determinação dessas "cevianas", devem partir do próprio aluno, pois, assim ele terá condições de reconhecê-las com mais facilidade.

O benefício desta prática veio na resolução de exercícios sobre o assunto. Os alunos tiveram poucas dúvidas e as dúvidas que surgiram não foram do significado geométrico, e sim algébrico.

5.2.2 – O laboratório

Como se pôde perceber o professor consegue fazer da sala de aula um verdadeiro "laboratório". Uma aula de Matemática pelo método tradicional, quase não demanda tempo em sua preparação. Normalmente o assunto é estudado, ao chegar diante dos alunos o assunto é exposto de forma teórica, demonstra-se teoremas, faz-se alguns exercícios explicativos e logo em seguida propõe-se exercícios em número suficiente, para que os alunos possam resolver e memorizar o conteúdo de forma automática.

O que se propõe aqui, demanda um pouco mais de trabalho, porque além da tarefa mencionada anteriormente, o professor ainda terá que preparar alguma prática para que o aluno faça construções com relação ao assunto , para em seguida chegarem aos conceitos e teoremas definidos e demonstrados em exposição teórica.

Parece ser muito trabalhoso, mas de alguma forma é muito prazeroso, e o professor ganha tempo, porque não tem que ficar tirando dúvidas dos alunos a todo momento.

Uma proposta faz-se necessária nesse momento: as escolas de um modo geral não dão suporte suficiente ao professor que deseja realizar um trabalho dessa natureza. Por isso é necessário que as escolas de ensino fundamental e médio, públicas e particulares, possam estar investindo na construção de um "Laboratório de Matemática", onde professores e alunos possam realizar suas práticas com o objetivo de minimizar o nível de abstração do aluno, despertando nele o interesse pela matemática, e tornando as aulas mais interessantes e motivadoras.

O investimento nessa área não demanda muito custo, e pode vir de forma gradativa. O que necessita-se em princípio, seria uma sala de tamanho normal com boa iluminação, boa ventilação e de fácil acesso, uma bancada em madeira(para se fazer alguma exposição) carteiras, quadro e giz (para algumas anotações do professor durante as orientações nos trabalhos), uma TV com vídeo, um retroprojetor, um projetor de slides e outros materiais essenciais como tesouras, colas, réguas, compassos, esquadros, transferidores, materiais emborrachados, sólidos em acrílico, isopor ou madeira, lápis preto, lápis de cor, lápis de cera, canetas de cores diversas, papel quadriculado, folhas de cartolina, papel cartão, papel ofício, fitas de vídeo, etc. Outros materiais que se fizerem necessários poderiam ser solicitados posteriormente.

O computador é uma ferramenta que traz excelentes resultados na construção do conhecimento do aluno, principalmente quando se utiliza programas educativos que não sejam meros exercícios repetitivos. Como o seu custo é mais elevado, esse investimento poderá ser utilizado em um segundo momento, e de forma gradativa, apesar de muitas escolas já possuírem um laboratório montado para as aulas de Informática. Nesse caso este laboratório poderia ser utilizado também para as aulas de Matemática.

Os diretores das escolas públicas e particulares, precisam estar conscientes da necessidade de um laboratório para estudos de Matemática. Assim como existem os laboratórios de Química, Biologia, Informática, devem existir também os laboratórios de Matemática.

Além disso, os educadores, principalmente os profissionais da área de Matemática precisam conhecer as novas tendências, onde o aluno utiliza os conhecimentos que já possui, ainda que esses conhecimentos não estejam estruturados ou até sejam intuitivos, sendo esse processo favorecido pela interação com os colegas, durante os trabalhos e as discussões em grupo. Por meio de questionamentos o aluno é levado a organizar seus conhecimentos, chegando a percepção do conceito. Paralelamente, dá-se o registro dos eventos, o que contribui para a formalização e a generalização dos conceitos.

Considera-se fundamental que o educando atue e, com isso, tenha consciência de que ele é o sujeito da construção de seu conhecimento. Além disso, leva-o a perceber que, na maior parte dos assuntos abordados, já é possuidor de algum conhecimento. A utilização dessa bagagem também tem como aspecto positivo, pois reforça a autoconfiança e auto-estima do aluno, contribuindo, desse modo, para o abandono do papel de "receptor".

CAPÍTULO VI

CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

6.1 – Conclusões

Conclui-se, pelo presente trabalho, a necessidade de uma nova postura do professor ante ao ensino da Matemática.

Além de trabalhar no sentido de possibilitar à aquisição de conhecimentos teóricos, cabe também ao professor incentivar o aluno a melhorar a sua auto-estima, quebrando a resistência que muitos alunos têm em relação à Matemática. Desta forma, muitos problemas como por exemplo, os comportamentais, podem ser sanados.

Devido as dificuldades apresentadas pelos alunos do ensino fundamental e médio em compreender os conceitos matemáticos, quanto ao rigor com que são apresentados, faz-se necessário que o professor reveja sua postura, frente à modernidade em que os alunos encontram-se inseridos.

Tendo em vista os avanços tecnológicos e as informações que o aluno recebe no cotidiano, cabe ao professor diversificar sua linha de trabalho de modo a atender as necessidades do aluno e da sociedade como um todo.

Há de se destacar como forma alternativa de trabalho, o uso de material concreto e a utilização de outras ferramentas, porque, como ficou comprovado, através das experiências já mencionadas, estes são recursos que despertam o interesse, aumentam a motivação e o envolvimento dos alunos.

Constataram-se vantagens educacionais advindas com a manipulação de material concreto, nas quais os alunos, ao manusearem os objetos, descondicionam-se entre outras coisas, das posições estáticas em que se encontram, construindo a formalização dos conceitos de maneira agradável.

Foi pensando-se nisso, que surgiu a idéia da proposta da construção de um laboratório de Matemática dentro da escola, como meio facilitador da aprendizagem.

Deve-se ressaltar, a importância para os alunos, em compreender a relação entre os conceitos aprendidos e a sua aplicação prática, pois desta forma sentir-se-ão motivados e aptos a adquirir conhecimentos de novos conceitos.

Em relação a "avaliação", há de se concluir que ela deve ser contínua, levando em consideração todo o processo de construção do conhecimento do aluno do qual ele é sujeito, bem como a sua interação no contexto social em que ele se encontra.

6.2 – Sugestões para trabalhos futuros

O ensino-aprendizagem da Matemática será cada vez mais interessante à medida que os professores procurem novas alternativas que despertem o interesse do aluno fazendo com que ele seja o co-responsável pelo seu aprendizado.

Este trabalho tem como propósito contribuir para que trabalhos futuros possam ser elaborados no sentido da melhoria do ensino, incentivando a criatividade do aluno e a preparação do indivíduo para a convivência no meio social.

Como trabalho futuro, há de se destacar a importância da formação do professor de Matemática nas instituições de ensino. Sabe-se que, há um número muito grande de professores que atuam nessa área e que necessitam melhorar sua formação. Um dos caminhos para a melhoria da qualidade do ensino está em oferecer a essas pessoas, a oportunidade de ingressarem em uma instituição de ensino para que se concretize o desejo de realização profissional.

Um tema que desperta bastante interesse e que pode ser sugerido como trabalho futuro, é o emprego da Matemática em outras áreas do conhecimento como: Biologia, Geografia, Música, Medicina, Odontologia, Topografia, etc. É muito comum o aluno fazer questionamentos sobre o fato de estar estudando determinados conteúdos de Matemática e que na vida prática não tem aplicação. É importante ressaltar que a Matemática está presente em outras áreas do conhecimento.

Um outro trabalho futuro, poderá ser a importância do uso de recursos tecnológicos para o estudo da Geometria Analítica.

Finalizando este capítulo, sugere-se um trabalho que ressalte a importância da formação continuada do professor de matemática. Esse é um tema de bastante abrangência no qual, o autor, através de uma pesquisa de campo, poderá relatar toda a história do professor de matemática desde o uso da lousa manual até os tempos modernos nos quais ele conta com os melhores recursos tecnológicos e uma clientela bastante diferenciada dos anos anteriores. Esse trabalho poderá contribuir para a mudança de paradigmas de muitos profissionais do ensino da Matemática.

Outras pesquisas poderão ser realizadas de acordo com o tema em pauta.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMEIDA, Iolanda Andrade Campos, LOPES, Rozana Façanha P., SILVA, Elison Barbosa da. O Origami como material exploratório para o ensino e a aprendizagem da geometria. In: Congresso Graphica 2000, 2000, Ouro Preto, **Anais...** Ouro Preto: UFOP, 2000. p.1-9.

BARKER, Stephen F. **Filosofia da matemática.** Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 1969.

BIEMBENGUT, Maria Salett, HEIN, Nelson. **Modelagem matemática no ensino**, São Paulo: Contexto, 2000.

BORBA, Sérgio da Costa. **Espaços de formação.** Maceió: Catavento, 2000.

BOYER, Carl B. **História da matemática.** São Paulo: Edgard Blucher, 1996.

COLL, César. et. al. **Desenvolvimento psicológico da educação.** Porto Alegre: Artes Médicas, 1995.

DANTE, Luiz Roberto. **Didática da resolução de problemas de Matemática,** São Paulo: Ática, 1998.

EVES, Howard. **Introdução a história da matemática.** 2.ed. Campinas: UNICAMP, 1997.

GARCIA, Edília Coelho. et. al. **Os novos caminhos da aprendizagem.** Rio de Janeiro: Bloch, 1977.

GERDES, Paulus. **Sobre o despertar do pensamento geométrico.** Curitiba: UFPR, 1992.

GIROUX, Henry A. **Por uma teoria da pedagogia: pesquisas contemporâneas sobre o saber docente.** São Paulo: Unijui, 1998.

GOMIDE, Paula Inez Cunha, DOBRLANSKYL, Lídia Natália. **Análise experimental do comportamento: manual de laboratório.** 5 ed. Curitiba: UFPR, 1998.

GRASSECHI, Maria Cecília C. **Promat: projeto oficina de matemática.** São Paulo: FTD, 1999.

GRAVINA, Maria Alice. Geometria Dinâmica: Uma nova abordagem para a aprendizagem da Geometria. In: Simpósio Brasileiro de Informática na Educação, 1996, Belo Horizonte, **Anais...** Belo Horizonte: UFMG, 1996, P1-19.

GUAUTHIER, Clermont. **Por uma teoria da pedagogia.** São Paulo: Unijui, 1998.

HERNÁNDEZ, Fernando. **Aprendendo com as inovações nas escolas.** Porto Alegre: Artes Médicas, 2000.

HEYMEYER, Ursula, GANEM, Loraine. **Obervação de desempenho.** São Paulo: Memnon, 1993.

HIRST, Ph. **A lógica da educação.** Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 1972.

HOFFMANN, Jussara. **Avaliação – Mito & Desafio.** Porto Alegre: Mediação, 1991.

IMENES, Luiz Márcio. **Geometria das dobraduras** – Coleção Vivendo a Matemática, São Paulo, Scipione, 1999.

IMENES, Luiz Márcio. **Geometria dos mosaicos** – Coleção Vivendo a Matemática, São Paulo: Scipione, 1987.

LINDGREN, Henry Clay. **Psicologia na sala de aula: o aluno e o processo de aprendizagem.** Rio de Janeiro: Livros Técnicos e científicos, 1977.

LUCKESI, Cipriano C. **Avaliação da aprendizagem escolar.** São Paulo: Cortez, 1997.

M.GERAIS. SECRETARIA DE ESTADO DA EDUCAÇÃO. **Guia curricular de matemática ensino fundamental** – BH , SEE/MG, 1997.

MACHADO, Nilson José. Epstemologia e didática: **As concepções de conhecimento e inteligência e a prática docente.** São Paulo: Cortez, 1996.

MILIES, Francisco César Polcino, BUSSAB, José Hugo de Oliveira. **A geometria na antiguidade clássica.** São Paulo: FTD, 1999.

OGBORN, Jon. **Sobre Modelagem.** Disponível em <http://www.cce.ufes.br/modelab/modelab/interest.htm> Acesso em 04/03/01.

OLIVEIRA, Antônio Marmo de, SILVA, Agostinho. **Biblioteca da matemática moderna**. São Paulo: Lisa, 1969.

PARRA, Cecília. et. al. **Didática da matemática: reflexões psicopedagógicas.** Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.

PIAGET, Jean. **A epistemologia genética.** Petrópolis: Vozes, 1982.

QUELUZ, Ana Gracinda, ALONSO, Myrtes. **O Trabalho docente – teoria e prática.** São Paulo: Pioneira, 1999.

RONCA, Paulo Afonso, TERZI, Cleide do Amaral. **A aula operatória e a construção do conhecimento.** Edesplan, 1995.

STRATHERN, Paul Helena. **Arquimedes e a alavanca em 90 minutos.** Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 1998.

TATON, René. et. al. **A ciência antiga e medieval.** São Paulo: Difusão, 1959.

VASCONCELLOS, Celso Dos Santos. Disciplina – **Construção da disciplina consciente e interativa em sala de aula e na escola.** São Paulo: Libertad 1998.