

Universidade Federal de Santa Catarina

Curso de Pós-Graduação em Física

**PROJEÇÃO DE CENTRO DE MASSA EM
NÚCLEOS DE CAMADA FECHADA
NO CONTEXTO DA HADRODINÂMICA
QUÂNTICA**

Dissertação

Submetida ao Curso de Pós-Graduação em Física

da Universidade Federal de Santa Catarina

para obtenção do grau de

MESTRE EM FÍSICA

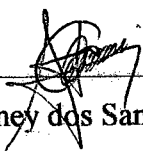
Luiz Vicente Tarragô

Florianópolis, junho 2001.

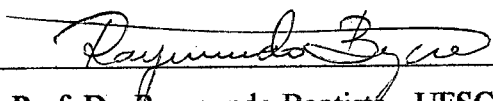
PROJEÇÃO DE CENTRO DE MASSA EM NÚCLEOS DE CAMADA FECHADA NO CONTEXTO DA HADRODINÂMICA QUÂNTICA

Luiz Vicente Tarragô

Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do grau de **MESTRE EM FÍSICA** com especialização em Física Nuclear e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação.

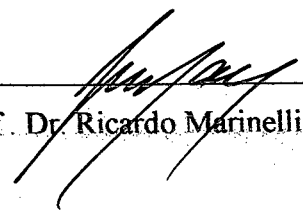


Prof. Dr. Sidney dos Santos Avancini - UFSC
(Orientador)



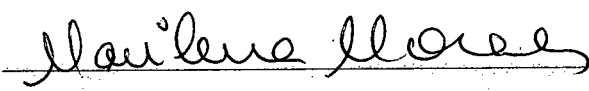
Prof. Dr. Raymundo Baptista - UFSC
(Coordenador)

Banca Examinadora



Prof. Dr. Ricardo Marinelli - UFSC

Prof. Dr. Gastão Krein - IFT/SP



Prof. Dr. Marilena Moraes - UFSC (suplente)

Índice

Agradecimentos	iv
Resumo	v
Abstract	vi
Introdução	1
1 Modelo de Walecka e Aproximação de Hartree	4
1.1 O Modelo de Walecka	4
1.1.1 Hamiltoniana para o modelo	8
1.1.2 Quantização dos campos	9
1.2 Aproximação de Hartree	10
1.3 Cálculo do Valor Esperado da Energia	11
2 Projeção de centro de massa	14
2.1 Obtenção do Operador de Projeção	15
2.2 Cálculo da Energia de um Estado com Projeção	16
2.2.1 Cálculo do Overlap	17
2.2.2 Cálculo do Termo de Massa e de Energia Cinética	20
2.2.3 Cálculo do Termo do Potencial Escalar (méson σ)	23
2.2.4 Termo do Potencial Vetor (méson ω)	24
3 Aplicações a Núcleos Leves	28
3.1 Núcleo de Hélio	28
3.1.1 Cálculo do Overlap	28

3.1.2	Termo de Energia Cinética e Termo de Massa	29
3.1.3	Termo do Potencial Escalar	30
3.1.4	Termo do Potencial Vetor	30
3.2	Núcleo de Oxigênio	31
3.2.1	Cálculo do Overlap, Massa e Energia Cinética	32
3.2.2	Cálculo do Potencial Escalar	34
3.2.3	Termo do Potencial Vetor	35
4	Conclusão	36
	Conclusão	36
A	Métrica e Definições	38
A.1	Propriedades dos Harmônicos Esféricos	41
B	Resultados	42
B.1	Resultados do overlap	42
B.2	Resultados do Potencial Escalar	45
B.2.1	Integrais Q_{qt}^i	50
	Bibliografia	52

Dedicatória

Ao meu pai

Agradecimentos

Agradeço ao Sidney pela oportunidade de trabalharmos juntos, pela paciência e pelo conhecimento.

Agradeço à CAPES pelo suporte financeiro.

Agradeço ao meu irmão e a minha mãe pela confiança que sempre depositam em mim.

Agradeço a minha esposa Patrícia, por nunca deixar de me apoiar e me ajudar a tomar as decisões corretas.

Agradeço aos membros do colegiado atual pela compreensão e oportunidade da conclusão deste trabalho.

Resumo

Neste trabalho obtemos expressões para o cálculo da energia do estado fundamental de um núcleo duplamente-mágico (esférico) qualquer, usando a aproximação de Hartree, no contexto do modelo de Walecka, e descrevendo os nucleons a partir de um referencial fixo no centro de massa do núcleo. A partir de funções de onda obtidas variacionalmente, projetamos estes estados em um subespaço de funções de onda com momento do centro de massa nulo, utilizando a técnica de projeção de Peierls-Yoccoz. Após obtidas as expressões gerais, particularizamos o cálculo para os dois núcleos duplamente-mágicos mais leves (hélio e oxigênio).

Abstract

In this work analytical expressions for the ground state energy calculation of doubly-magic (spherical) nucleus are obtained. We use the Walecka model in the Hartree approximation and, in our approach, the nucleons are described in a fixed center-of-mass frame. From the variationally calculated wave functions, we use the Peierls-Yoccoz technique to project out states in a subspace with null center-of-mass momentum. For the two lightest doubly-magic nuclei (helium and oxygen) specific expressions are shown.

Introdução

Devido ao grande sucesso prático na descrição de propriedades nucleares o Modelo de Walecka [1] tem sido exaustivamente estudado desde a sua idealização em 1974. Com este modelo diversos problemas puderam ser tratados e solucionados satisfatoriamente a partir de um ponto de vista ligado à teoria quântica de campos.

O modelo de Walecka descreve o núcleo como um sistema de nucleons de Dirac interagindo através de campos mesônicos. Neste trabalho vamos nos restringir ao caso onde apenas consideramos o méson escalar sigma (σ) e o méson vetorial ômega (ω). Esta escolha é conhecida na literatura como QHD-I. Na descrição da estrutura nuclear usando modelos relativísticos, a maior parte dos trabalhos consiste em utilizar ou estender o modelo QHD-I através de outros mésons (ρ, π), e utilização de interações não-lineares e, mais recentemente, através de cálculos que introduzem nas constantes de acoplamento uma dependência na densidade. Com o uso de modelos relativísticos explica-se de modo natural o surgimento da interação spin-órbita nuclear. Na aproximação de Hartree os modelos relativísticos dão resultados tão bons ou melhores que os cálculos tradicionais do tipo Skyrme-Hartree-Fock, na descrição da estrutura de níveis de partícula independente do núcleo.

O modelo de Walecka apresenta todas as vantagens de um modelo relativístico, tal como a incorporação do spin das partículas como um ingrediente natural da teoria.

Nos propomos neste trabalho a estudar um aspecto ainda pouco explorado na física nuclear de baixas energias em modelos relativísticos, que é a quebra de simetria translacional[2].

Apesar de a lagrangeana do modelo de Walecka ser invariante translacionalmente, em cálculos explícitos de muitos corpos necessitamos do auxílio de aproximações para obter resultados numéricos. As aproximações mais comuns (campo médio, Hartree e Hartree-

Fock) produzem funções de onda que não possuem invariância translacional.

Nos cálculos tradicionais [3], estes são executados utilizando um referencial fixo no espaço. Ao estudarmos a dinâmica de um sistema nuclear sob tal referencial, podemos estar sujeitos à incorporação de movimentos do centro de massa que vão se incorporar à energia e a outros observáveis calculados.

De fato, alguns níveis de energia calculados desta forma não encontram correspondentes nos dados obtidos experimentalmente, e são denominados **espúrios** [4].

Para a solução deste problema, devemos fazer uma mudança no referencial usado, transportando-o para a centro de massa do núcleo. Deste modo, fazemos, então, com que o novo referencial se mova juntamente com o centro de massa, fazendo assim com que as coordenadas dos nucleons sejam apenas relativas entre si. Escolhendo um autovalor nulo para o operador de momento do centro de massa, obtemos a energia devida ao movimento relativo.

Uma maneira rigorosa para realizar o que acabamos de discutir consiste em utilizar um método de projeção. A maneira ideal no caso das aproximações de campo médio, consiste em no que é chamado de projeção antes da variação. No entanto este procedimento é extremamente complexo, tanto do ponto de vista analítico quanto do ponto de vista numérico. Por isso vamos utilizar um procedimento mais simples, que é o método de projeção depois da variação, neste caso obtemos estados onde a simetria translacional é restaurada, no entanto o princípio variacional não é mais satisfeito. Este método é chamado de projeção de Peierls-Yoccoz [5]. Este método já é utilizado para calcular propriedades de nucleons e mésons [6] usando modelos de sacola para sólitons.

Este trabalho teve o objetivo de calcular somente as expressões analíticas que devem ser utilizadas para a obtenção de resultados numéricos da energia do **estado fundamental** dos núcleos duplamente-mágicos.

Foram escolhidos somente os núcleos duplamente-mágicos porque a construção das funções de onda é mais simples, visto que estes núcleos são esfericamente simétricos. Como seqüência deste trabalho, podemos efetuar os cálculos numéricos para núcleos específicos a partir das expressões já obtidas.

No Capítulo 1 calculamos o valor esperado da energia do estado fundamental sem projeção. No Capítulo 2 obtemos o operador de projeção e realizamos a projeção para um núcleo duplamente mágico qualquer. No Capítulo 3 usamos os resultados do Capítulo 2 para obter as expressões para o cálculo da energia do estado fundamental do hélio e do oxigênio.

Capítulo 1

Modelo de Walecka e Aproximação de Hartree

1.1 O Modelo de Walecka

Desde a sua descoberta o núcleo atômico chamou a atenção de pesquisadores de diversas áreas. A princípio se achava que o núcleo fosse um ente indivisível onde se acumulasse toda a carga positiva do átomo. Mais tarde evidenciou-se que o núcleo não era indivisível. Aos poucos os experimentos foram fornecendo mais resultados ficando mais clara a estrutura do núcleo.

Os físicos teóricos criaram um tratamento matemático consistente para descrever os resultados dos experimentos. Criou-se a necessidade da introdução de uma nova força até então desconhecida: a força forte.

Com o passar do tempo a teoria foi sendo desenvolvida à medida que novos resultados foram sendo obtidos experimentalmente. Foram detectadas novas partículas, sendo estas incorporadas à teoria (algumas delas foram previstas antes mesmo da sua detecção, como o pión).

Em 1974 J. D. Walecka propôs [7] um modelo baseado na teoria quântica de campos para a descrição de núcleos..O modelo original foi resolvido usando uma aproximação de campo médio para os campos dos mésons, onde os campos mesônicos foram substituídos pelos seus valores esperados. Este procedimento produz seus melhores resultados à medida

que as discrepâncias em torno destes valores esperados vão se tornando menos significativas, o que acontece com o aumento da densidade nuclear. Com isso os resultados do trabalho original de Walecka funcionam bem para densidades acima da normal[7] . Ainda assim, os valores de incompressibilidade nuclear obtidos não são satisfatórios na versão original do modelo. Este problema foi solucionado com a inclusão de auto-interação não-linear do campo sigma. Com isto tornou-se possível descrever um grande número de núcleos, quantitativamente, e com o ajuste de poucos parâmetros. Este modelo se apresenta como um dos mais bem sucedidos hoje em dia. Devido a esse sucesso, este modelo tem sido exaustivamente estudado e utilizado na resolução de problemas em física nuclear.

Este trabalho faz uso do modelo de Walecka com a ação dos mésons σ e ω na aproximação de Hartree.

O modelo de Walecka baseia-se em um formalismo lagrangeano onde são descritos todos os graus de liberdade hadrônicos em estudo do núcleo através de campos, com seus respectivos termos de propagação e interação. Nas definições abaixo (bem como em toda a dissertação) índices repetidos indicam uma soma implícita. A notação relativa aos quadri-vetores, quadri-divergências, o d'Alembertiano, etc, está definida no Apêndice A. Em nossa descrição levaremos em conta os seguintes graus de liberdade:

Nucleon: próton ou nêutron, representados pela função de onda ψ .

Assim os termos de propagação \mathcal{L}_N^{livre} dos nucleons são:

$$\mathcal{L}_N^{livre} = \bar{\psi}(x) (i\gamma^\mu \partial_\mu - M) \psi(x), \quad (1.1)$$

onde M é a massa do nucleon e as matrizes γ^μ são apresentadas no apêndice A.

Mésons: sigma (méson escalar) e ômega (méson vetorial) representados pelos campos σ e ω , respectivamente, com os seguintes termos de propagação:

$$\mathcal{L}_\sigma^{livre} = -\frac{1}{2} \left[m_\sigma^2 \sigma^2(x) - \partial^\mu \sigma(x) \partial_\mu \sigma(x) \right], \quad (1.2)$$

$$\mathcal{L}_\omega^{livre} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu}(x) F_{\mu\nu}(x) + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega^2(x), \quad (1.3)$$

onde

$$F^{\mu\nu}(x) \equiv \partial^\mu \omega^\nu(x) - \partial^\nu \omega^\mu(x)$$

e m_σ e m_ω são as massas dos mésons.

A densidade lagrangeana de interação está dividida em duas partes, a interação entre os nucleons através de um méson escalar e através de um méson vetorial:

$$\mathcal{L}_{NN\sigma}^{int} = g_\sigma \bar{\psi}(x) \sigma(x) \psi(x) . \quad (1.4)$$

$$\mathcal{L}_{NN\omega}^{int} = -g_\omega \bar{\psi}(x) \omega^\nu(x) \gamma_\nu \psi(x) , \quad (1.5)$$

onde g_σ e g_ω são as constantes de acoplamento dos mésons σ e ω , respectivamente. Estas equações estão conforme [3].

Com isso a densidade Lagrangeana total pode ser escrita como:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_N^{livre} + \mathcal{L}_\sigma^{livre} + \mathcal{L}_\omega^{livre} + \mathcal{L}_{NN\sigma}^{int} + \mathcal{L}_{NN\omega}^{int} . \quad (1.6)$$

Utilizando as equações de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \xi)} = 0 , \quad (1.7)$$

onde ξ são todos os graus de liberdade do sistema, podemos obter as equações de movimento para os graus de liberdade (campos) do nosso sistema:

$$(-i\gamma^\mu \partial_\mu + M) \psi(x) = g_\sigma \sigma(x) \psi(x) - g_\omega \omega^\nu(x) \gamma_\nu \psi(x) , \quad (1.8)$$

$$(\square + m_\sigma^2) \sigma(x) = g_\sigma \bar{\psi}(x) \psi(x) , \quad (1.9)$$

$$(\square + m_\omega^2) \omega_\nu(x) = g_\omega \bar{\psi}(x) \gamma_\nu \psi(x) , \quad (1.10)$$

onde já usamos o fato de f_w ser, experimentalmente, muito pequeno, podendo-se desprezar o segundo termo do lado direito da equação (1.5). Além disso algumas simplificações foram possíveis pela utilização do Teorema de Noether que fornece [8] a equação de continuidade:

$$\partial_\mu [\bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x)] = 0 .$$

As equações para os campos mesônicos (1.9) e (1.10) podem ser resolvidas usando um propagador adequado (função de Green):

$$\sigma(x_1) = g_\sigma \int D_\sigma(x_1 - x_2) \bar{\psi}(x_2) \psi(x_2) d^4x_2 + \sigma_0 , \quad (1.11)$$

$$\omega_\nu(x_1) = g_\omega \int D_\omega(x_1 - x_2) \bar{\psi}(x_2) \gamma_\nu \psi(x_2) d^4x_2 + \omega_0 , \quad (1.12)$$

onde $D_\sigma(x_1 - x_2)$ e $D_\omega(x_1 - x_2)$ são os propagadores para as equações de Klein-Gordon correspondentes aos mésons σ e ω [3] mostrados na equação 1.18 e σ_0 e ω_0 são soluções das equações de Klein-Gordon homogêneas.

Com isso reescrevemos a equação de Dirac para os nucleons:

$$\begin{aligned} (-i\gamma^\mu \partial_\mu + M) \psi(x_1) &= g_\sigma^2 \int d^4x_2 D_\sigma(x_1 - x_2) \bar{\psi}(x_2) \psi(x_2) \psi(x_1) \\ &\quad - g_\omega^2 \int d^4x_2 D_\omega(x_1 - x_2) \bar{\psi}(x_2) \gamma_\nu \psi(x_2) \gamma^\nu \psi(x_1) . \end{aligned} \quad (1.13)$$

O presente trabalho visa o estudo de núcleos duplamente-mágicos, de modo que o isospin total do núcleo é nulo. Devido a esta propriedade do sistema sob investigação, não há necessidade de incluir o méson pi na descrição do estado fundamental na aproximação de campo médio. O campo do pión é representado por um operador vetorial no espaço de isospin com isospin $\tau = 1$. Como estamos estudando as propriedades do estado fundamental, os elementos de matriz do operador do pión aparecerão entre estados de isospin zero, zerando todos os elementos de matriz (Teorema de Wigner-Eckart).

1.1.1 Hamiltoniana para o modelo

A partir da lagrangeana obtida calculamos as equações de movimento. Agora partimos para o cálculo da hamiltoniana do sistema, já que para calcular a energia de um estado qualquer de um núcleo usamos:

$$E = \langle \psi | H | \psi \rangle \quad (1.14)$$

Em [9] e [10] buscamos a definição de densidade hamiltoniana:

$$\mathcal{H} = \sum_{\xi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_0 \xi} - \mathcal{L} ,$$

e

$$H = \int d^3 x \mathcal{H}.$$

Com essa definição calculamos explicitamente a hamiltoniana:

$$H = \int d^3 x_1 \bar{\psi}(x_1) \left(-i\vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla}_1 + M \right) \psi(x_1) + \frac{1}{2} \sum_{i=\sigma, \omega} g_i^2 \int d^3 x_1 d^4 x_2 \bar{\psi}_\alpha(x_1) \bar{\psi}_\beta(x_2) \Gamma_i(1, 2) D_i(x_1 - x_2) \psi_\beta(x_2) \psi_\alpha(x_1) \quad (1.15)$$

onde[3]:

$$\Gamma_\sigma(1, 2) = -1$$

e

$$\Gamma_\omega(1, 2) = \gamma^\nu(1) \gamma_\nu(2)$$

1.1.2 Quantização dos campos

Para obter a solução da equação (1.15) precisamos propor uma forma para o campo dos nucleons. Para tanto utilizamos a quantização canônica. Podemos notar que o caminho escolhido até agora facilita os cálculos, já que os campos mesônicos não são quantizados diretamente.

A forma dos campos é dada pelas expressões:

$$\psi(x) = \sum_{\alpha} \left(f_{\alpha}(\vec{x}) e^{-iE_{\alpha}t} b_{\alpha} + g_{\alpha}(\vec{x}) e^{iE_{\alpha}t} d_{\alpha}^{\dagger} \right) \quad (1.16)$$

e

$$\psi^{\dagger}(x) = \sum_{\alpha} \left(f_{\alpha}^{\dagger}(\vec{x}) e^{iE_{\alpha}t} b_{\alpha}^{\dagger} + g_{\alpha}^{\dagger}(\vec{x}) e^{-iE_{\alpha}t} d_{\alpha} \right), \quad (1.17)$$

onde b_{α} e b_{α}^{\dagger} são, respectivamente, operadores de aniquilação e criação de nucleons no estado α , d_{α} e d_{α}^{\dagger} são, respectivamente, operadores de aniquilação e criação de anti-nucleons no estado α e f_{α} e g_{α} são conjuntos completos de espinores de Dirac. Substituindo essas expressões em (1.15) e, usando como propagador:

$$D_i(x_1 - x_2) = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \frac{e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x}_1 - \vec{x}_2)}}{(k^0 + i\varepsilon)^2 - |\vec{k}|^2 - m_i^2}, \quad (1.18)$$

obtemos a forma final para a hamiltoniana:

$$\begin{aligned} H = & \sum_{\alpha, \alpha'} \int f_{\alpha'}^{\dagger}(\vec{x}) \left(-i\gamma^0 \vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} + \gamma^0 M \right) f_{\alpha}(\vec{x}) d^3x b_{\alpha'}^{\dagger} b_{\alpha} \\ & + \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \alpha', \beta, \beta'} \int f_{\alpha'}^{\dagger}(\vec{x}_1) f_{\beta'}^{\dagger}(\vec{x}_2) V_{\alpha, \alpha'}(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|) \\ & \times f_{\beta}(\vec{x}_2) f_{\alpha}(\vec{x}_1) d^3x_1 d^3x_2 b_{\alpha'}^{\dagger} b_{\beta'}^{\dagger} b_{\beta} b_{\alpha}, \end{aligned} \quad (1.19)$$

onde

$$V_{\alpha, \alpha'}(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|) = V_{\alpha, \alpha'}(r) = \sum_{i=\sigma, \omega} \frac{g_i^2}{4\pi} \gamma^0(1) \gamma^0(2) \Gamma_i(1, 2)$$

$$\times \frac{\exp \left\{ -r \left[m_i^2 - (E_\alpha - E_{\alpha'}) \right]^{1/2} \right\}}{r}. \quad (1.20)$$

Neste cálculo foram desconsiderados os efeitos das anti-partículas, o que é conhecido na literatura como a aproximação onde desprezamos o mar de Dirac (no sea approximation). Isto se justifica pelo fato de que um reajuste de parâmetros da Lagrangeana, na aproximação de Hartree, absorve estes efeitos [11]. Na expressão acima notamos que $V_{\alpha,\alpha'}(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|)$ possui uma dependência explícita com a própria energia do estado, que, na aproximação de Hartree desaparecerá.

1.2 Aproximação de Hartree

Vamos considerar o núcleo sendo descrito por um determinante de Slater com A nucleons ocupando os estados α_i , tal que:

$$|\psi\rangle = \prod_{i=1}^A b_{\alpha_i}^\dagger |0\rangle, \quad (1.21)$$

onde $|0\rangle$ representa a ausência de partículas, as quais são criadas pelos operadores de criação b_α^\dagger . Passamos então ao cálculo do valor esperado da energia de um estado $|\psi\rangle$:

$$E = \langle \psi | H | \psi \rangle. \quad (1.22)$$

Substituindo (1.18) e (1.20) em (1.21) obtemos a expressão para a energia do núcleo.

$$E = \langle T \rangle + \langle V_D \rangle + \langle V_T \rangle,$$

onde

$$\langle T \rangle = \sum_{\alpha=1}^A \int d^3x f_\alpha^\dagger(\vec{x}) \left(-i\gamma^0 \vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} + \gamma^0 M \right) f_\alpha(\vec{x}_1), \quad (1.23)$$

$$\langle V_D \rangle = \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\alpha'}^A \int d^3x_1 d^3x_2 f_\alpha^\dagger(\vec{x}_1) f_{\alpha'}^\dagger(\vec{x}_2) V_{\alpha,\alpha'}(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|) f_\alpha(\vec{x}_1) f_{\alpha'}(\vec{x}_2) \quad (1.24)$$

e

$$\langle V_T \rangle = -\frac{1}{2} \sum_{\alpha, \alpha'}^A \int d^3 x_1 d^3 x_2 f_{\alpha'}^\dagger(\vec{x}_1) f_\alpha^\dagger(\vec{x}_2) V_{\alpha, \alpha'}(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|) f_{\alpha'}(\vec{x}_2) f_\alpha(\vec{x}_1) \quad (1.25)$$

e $\langle V_D \rangle$ é chamado potencial direto e $\langle V_T \rangle$ é chamado de potencial de troca. Quando levamos em conta somente o potencial direto temos a aproximação de Hartree. Quando o cálculo envolve também o termo de troca dizemos que esta é uma aproximação de Hartree-Fock. Neste trabalho estamos interessados somente no potencial direto, de modo que a energia se resume a

$$E = \langle T \rangle + \langle V_D \rangle. \quad (1.26)$$

1.3 Cálculo do Valor Esperado da Energia

Para prosseguir no cálculo da energia precisamos de uma forma explícita para o espinor $f(\vec{x})$. Para tanto vamos utilizar um princípio variacional de modo a minimizar a energia do estado fundamental, com o vínculo garantindo a normalização dos espinores $f(\vec{x})$ conforme detalhamos a seguir. Já que estamos interessados em descrever somente núcleos duplamente mágicos, que possuem simetria esférica, a função de onda adequada para o cálculo variacional é[3]:

$$f_\alpha(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \frac{i G_{nlj}(r)}{r} \\ \frac{F_{nlj}(r)}{r} \vec{\sigma} \cdot \hat{r} \end{pmatrix} \varphi_{ljm}(\hat{r}) \xi_{1/2, m_\tau}, \quad (1.27)$$

onde $\alpha = n, l, j, m, m_\tau$, e, também $\alpha = a_1, m, m_\tau$, com $a_1 = n, l, j$

$$\varphi_{ljm}(\hat{r}) = \sum_{m_l, \mu} C_{m_l \mu m}^{l 1/2 j} Y_{lm_l}(\hat{r}) \chi_{1/2, \mu}, \quad (1.28)$$

$\xi_{1/2, m_\tau}$ é a função de onda de isospin, $\chi_{1/2, \mu}$ é a função de onda no espaço de spin, $Y_{lm_l}(\hat{r})$ é o harmônico esférico, $C_{m_l \mu m}^{l 1/2 j}$ são coeficientes de Clebsch-Gordan e $G_{nlj}(r)$ e $F_{nlj}(r)$ são funções de onda radiais.

Escolhemos para a normalização de $G_{nlj}(r)$ e $F_{nlj}(r)$:

$$\langle f_\alpha | f_\alpha \rangle = \int [G_{nlj}^2(r) + F_{nlj}^2(r)] dr = 1 \quad (1.29)$$

A condição de que E seja estacionário com relação a variações α de $f_\alpha^*(\vec{r})$, sujeito ao vínculo $\langle f_\alpha | f_\alpha \rangle = 1$:

$$\frac{\partial}{\partial f_\alpha^*(\vec{r})} \left(\langle \Psi | H | \Psi \rangle - \sum_\alpha E_\alpha \int d^3x f_\alpha^*(\vec{r}) f_\alpha(\vec{r}) \right) = 0$$

resulta em uma equação auto consistente:

$$(-i\gamma^0 \vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} + \gamma^0 M) f_\alpha(\vec{r}) + \sum_{\alpha'=1}^A \int d^3x f_{\alpha'}^*(\vec{r}') V_{\alpha'\alpha'}(|\vec{r}-\vec{r}'|) f_{\alpha'}(\vec{r}') f_\alpha(\vec{r}) = E_\alpha f_\alpha(\vec{r}).$$

Impostas estas condições e realizando a operação da equação (1.29) obtemos equações diferenciais acopladas para $G_{nlj}(r)$ e $F_{nlj}(r)$, quais sejam:

$$\begin{aligned} \frac{dF_{a_1}(r_1)}{dr} &= [M - E_{a_1} + U_{a_1}^{(+)}(r_1)] G_{a_1} + \frac{\kappa_1}{r_1} F_{a_1}(r_1), \\ \frac{dG_{a_1}(r_1)}{dr_1} &= [M + E_{a_1} + U_{a_1}^{(-)}(r_1)] F_{a_1} - \frac{\kappa_1}{r_1} G_{a_1}(r_1), \end{aligned} \quad (1.30)$$

onde $\kappa_1 = \mp(j_1 + 1/2)$ para $j_1 = l \pm 1/2$. Além disso:

$$U_{a_1}^{(\pm)}(r_1) = W_{a_1}^\sigma(r_1) \pm W_{a_1}^\omega(r_1) \quad (1.31)$$

e

$$W_{a_1}^k(r_1) = \pm m_k \frac{g_k^2}{4\pi} \left[\sum_{a_2} 2(2j_{a_2} + 1) I_{a_2}^k(r_1) \right], \quad (1.32)$$

com $k = \sigma, \omega$. Com as funções $I_a^k(r_1)$ sendo:

$$I_{a_1}^k(r_1) = \int_0^\infty dr_2 j_0(im_k r_<) h_0^{(+)}(im_k r_>) [G_{a_1}^2(r_2) \pm F_{a_1}^2(r_2)], \quad (1.33)$$

com $a_1 = n_1, l_1, j_1$. Os sinais \pm nas equações (1.32) e (1.33) e o índice k referem-se aos

mésos σ e ω respectivamente. As funções $j_0(im_k r_<)$ e $h_0^{(+)}(im_k r_>)$ são funções de Bessel e Hankel esféricas usuais e $r_< (r_>)$ é o menor (maior) entre r_1 e r_2 .

Usando estas equações e definições, podemos calcular, numericamente as soluções para o valor esperado da energia na aproximação de Hartree [3]:

$$\begin{aligned}
E = & \sum_{a_1} 2(2j_1 + 1) \int dr \left\{ G_{a_1}(r_1) \left[MG_{a_1}(r_1) - \frac{dF_{a_1}(r)}{dr_1} + \frac{\kappa_1}{r_1} F_{a_1}(r_1) \right] \right. \\
& \left. + F_{a_1}(r_1) \left[\frac{dG_{a_1}(r_1)}{dr_1} + \frac{\kappa_1}{r_1} G_{a_1}(r_1) - MF_{a_1}(r_1) \right] \right\} + 2 \frac{g_\sigma^2}{4\pi} m_\sigma \sum_{a_1 a_2} (2j_1 + 1) (2j_1 + 1) \\
& \times \int dr_1 dr_2 U_0(im_\sigma, r_<, r_>) [G_{a_1}^2(r_1) - F_{a_1}^2(r_1)] [G_{a_2}^2(r_2) - F_{a_2}^2(r_2)] \\
& + 2 \frac{g_\omega^2}{4\pi} m_\omega \sum_{a_1 a_2} (2j_1 + 1) (2j_1 + 1) \int dr_1 dr_2 U_0(im_\omega, r_<, r_>) \\
& \times [G_{a_1}^2(r_1) + F_{a_1}^2(r_1)] [G_{a_2}^2(r_2) + F_{a_2}^2(r_2)].
\end{aligned}$$

onde a_2 foi definido de modo análogo a a_1 . Além disso, usamos a definição seguinte: $U_L(im_\omega, r_<, r_>) = j_L(im_k r_<) h_L^{(+)}(im_k r_>)$.

Neste trabalho o nosso ponto de partida para obter o estado fundamental dos núcleos duplamente mágicos com a simetria translacional restaurada, será utilizar as soluções das equações diferenciais acopladas (1.30). Em [12] é discutido em detalhes o procedimento que pode ser usado para resolver estas equações. O programa de computador denominado TIM-ORA que calcula numericamente tais equações é de domínio público e pode ser utilizado. No próximo capítulo vamos discutir a técnica de projeção que utilizamos.

Capítulo 2

Projeção de centro de massa

O método de aproximação descrito no capítulo anterior fornece bons resultados, entretanto, quando calculamos o espectro de um núcleo leve, notamos que existem algumas discrepâncias em relação aos resultados obtidos experimentalmente. O procedimento utilizado na literatura, em geral, para levar em conta o movimento do centro de massa se restringe a considerar a correção aproximada pelo seu valor no modelo de camadas do oscilador harmônico não-relativístico ($\Delta = -\frac{3}{4}41A^{-1/3}$ [13]). Neste modelo a separação do movimento do centro de massa pode ser feito analiticamente, o que não é possível no modelo de Walecka.

No tratamento já apresentado, notamos que o referencial é colocado em um certo ponto fixo no espaço, e, a partir dele, são medidas as posições dos nucleons. Desse modo, podemos observar que o nucleon se move não somente em decorrência de suas interações intranucleares, mas que também detectamos o movimento do centro de massa do núcleo. Isto causa uma contribuição espúria devida à vibração do centro de massa à energia e outros observáveis.

Para melhorarmos os resultados notamos que as autofunções não contêm invariância translacional. Sendo esta uma das simetrias mais básicas da física, põe-se a necessidade de achar soluções que contenham tal simetria. Para isto fazemos uma translação, colocando-se a origem do sistema de coordenadas exatamente sobre o centro de massa do núcleo.

Fazemos ainda com que o momento do centro de massa do núcleo seja nulo, para que este não tenha movimento em relação ao novo sistema de coordenadas. Desse modo esperamos

que as excitações fictícias sejam removidas do espectro e que haja um resultado melhor para os estados reais.

Para fazer a translação escolheremos as soluções somente entre aquelas que apresentem simetria translacional. Os estados de bom momento linear são obtidos a partir de um operador de projeção. Uma vez escolhido o operador de projeção, temos dois métodos básicos a serem seguidos [4]:

Projeção antes da variação (PAV): Neste método fazemos primeiro a projeção dos estados e, em seguida, usamos o princípio variacional. Este método é bastante preciso, pois na primeira parte ele seleciona todos os estados que possuem invariância translacional e entre estes os que satisfazem o princípio variacional. Garantimos, então, que as soluções encontradas satisfazem tanto a condição variacional quanto à necessidade da invariância translacional. Entretanto a complexidade do método faz com que ele seja pouco utilizado.

Projeção depois da variação (PDV): É o método usado neste trabalho, consiste em usar um princípio variacional para obtermos as funções de onda dos nucleons e em seguida fazer a projeção dos estados. A facilidade matemática implementada é compensada com o fato de que, em geral, os estados obtidos após a projeção não satisfazem mais o princípio variacional.

2.1 Obtenção do Operador de Projeção

O operador de projeção deve ser tal que sejam selecionados somente os valores de momento adequados

$$|\Psi_{\vec{k}}\rangle = P_{\vec{k}} |\Psi\rangle,$$

onde $|\Psi_{\vec{k}}\rangle$ representa uma função de onda do núcleo com momento \vec{k} . $P_{\vec{k}}$ é o operador de projeção que projeta da função $|\Psi\rangle$, somente a componente com momento \vec{k} .

Podemos então reescrever o operador de projeção em autoestados do operador de momento linear [4]:

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^A \widehat{p}(i),$$

$$P_{\vec{k}} |\Psi\rangle = \delta(\widehat{\vec{p}} - \vec{k}) |\Psi\rangle.$$

Usando a representação integral de $\delta(\vec{p} - \vec{k})$:

$$\delta(\vec{p} - \vec{k}) \phi(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 a e^{i\vec{k}\cdot\vec{a}} e^{-i\vec{p}\cdot\vec{a}} \phi(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 a e^{i\vec{k}\cdot\vec{a}} \phi(\vec{x} - \vec{a}).$$

Se calcularmos o caso onde o momento do centro de massa é nulo, então devemos fazer $\vec{k} = 0$, então

$$P_{\vec{k}=0} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 a e^{i\vec{p}\cdot\vec{a}},$$

onde $\vec{p} = -i \sum_{i=1}^A \nabla_i$ ($\hbar = 1$)

Desse modo podemos escrever

$$E = \frac{\langle \Psi | P_{\vec{k}=0} H P_{\vec{k}=0} | \Psi \rangle}{\langle \Psi | P_{\vec{k}=0} | \Psi \rangle}$$

Mas como o momento é uma constante de movimento, $[H, P_{\vec{k}=0}] = 0$

$$E = \frac{\langle \Psi | H P_{\vec{k}=0}^2 | \Psi \rangle}{\langle \Psi | P_{\vec{k}=0} | \Psi \rangle} = \frac{\langle \Psi | H P_{\vec{k}=0} | \Psi \rangle}{\langle \Psi | P_{\vec{k}=0} | \Psi \rangle},$$

já que $P_{\vec{k}=0}$ é operador de projeção e deve obedecer à propriedade $P_{\vec{k}=0}^2 = P_{\vec{k}=0}$

2.2 Cálculo da Energia de um Estado com Projeção

O calculo da energia de um estado para um núcleo qualquer se resume em calcular a quantidade $E = \langle \psi | H | \psi \rangle$ usando-se um princípio variacional para achar os melhores estados (como já foi apresentado no capítulo anterior). Para calcular esta energia com projeção

devemos calcular:

$$E = \frac{\langle \psi | HP_{\vec{k}=0} | \psi \rangle}{\langle \psi | P_{\vec{k}=0} | \psi \rangle}, \quad (2.1)$$

Note que se não fizermos a projeção ($P_{\vec{k}=0} = 1$) obtemos novamente a energia não projetada. O termo no denominador representa o overlap das funções de onda projetadas. Usando a Hamiltoniana eq. (1.15), o problema se resume a calcular as seguintes integrais referentes a cada termo da hamiltoniana e o overlap.

2.2.1 Cálculo do Overlap

Passamos agora ao cálculo explícito do overlap das funções de onda projetadas

$$\langle \psi | P_{\vec{k}=0} | \psi \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3a \langle \psi | e^{i\vec{p}\cdot\vec{a}} | \psi \rangle. \quad (2.2)$$

Estamos aqui integrando sobre todas as possibilidades de translação (integrando sobre o vetor \vec{a} de translação).

Precisamos então calcular [14]:

$$\langle \psi | e^{i\vec{p}\cdot\vec{a}} | \psi \rangle = \det \left(\langle \phi_\alpha | e^{i\vec{p}\cdot\vec{a}} | \phi_\beta \rangle \right) = \det (B_{\alpha\beta}). \quad (2.3)$$

As funções $|\phi_\alpha\rangle$ são aquelas da equação (1.27) que, quando substituídas na equação (2.3), produzem:

$$\begin{aligned} B_{\alpha\beta} &= B_{nljmm_\tau, n'l'j'm'_\tau} = \sum_{\substack{m_l, m_l' \\ m_s, m_s'}} \int d^3x C_{m_l m_s}^{l 1/2 j} C_{m_l' m_s'}^{l' 1/2 j'} Y_{lm_l}^* (\Omega_-) Y_{l'm_l'} (\Omega_+) \\ &\times \left[\frac{G_{nlj}(r_-) G_{n'l'j'}(r_+)}{r_- r_+} \delta_{m_s, m_s'} \right. \\ &\left. + \frac{F_{nlj}(r_-) F_{n'l'j'}(r_+)}{r_-^2 r_+^2} \left(\chi_{m_s}^\dagger (\vec{\sigma} \cdot \vec{r}_- \vec{\sigma} \cdot \vec{r}_+) \chi_{m_s'} \right) \right] \delta_{m_\tau, m'_\tau}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Aqui $\alpha = a_1, m, m_\tau$ e $\beta = a'_1, m', m'_\tau$ são rótulos genéricos e representam os números quânticos necessários para rotular cada elemento de matriz (conforme convenção adotada

após a equação (1.26)).

Por conveniência escrevemos

$$\langle \phi_\alpha | e^{i\vec{p}\cdot\vec{a}} | \phi_\beta \rangle = \int d^3x \phi_\alpha(\vec{x} - \vec{a}/2) \phi_\beta(\vec{x} + \vec{a}/2) = \int d^3x \phi_\alpha(\vec{r}_-) \phi_\beta(\vec{r}_+)$$

e definimos

$$\vec{r}_\pm = \vec{x} \pm \vec{a}/2.$$

Usando a propriedade

$$\vec{\sigma}\cdot\vec{a}\vec{\sigma}\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot\vec{b} + i\vec{\sigma}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$$

e resolvendo a parte de spin da equação (2.4) achamos

$$\begin{aligned} \chi_{m_s}^\dagger (\vec{\sigma}\cdot\vec{r}_- \vec{\sigma}\cdot\vec{r}_+) \chi_{m'_s} &= \left(r^2 - \frac{a^2}{4} \right) \delta_{m_s, m'_s} - \left(\frac{8\pi}{3} \right)^{1/2} ar \left[Y_{11}(\Omega) \delta_{m_s, -1/2} \delta_{m'_s, 1/2} \right. \\ &\quad \left. + Y_{1-1}(\Omega) \delta_{m_s, 1/2} \delta_{m'_s, -1/2} \right], \end{aligned} \quad (2.5)$$

onde vemos que a parte de spin se reduziu a uma contribuição angular e deltas nos spins possíveis.

Agora podemos partir para separar a parte radial projetada da parte angular da equação (2.4), já usando o resultado de (2.5). Para tanto definimos duas funções

$$\begin{aligned} \sum_L \eta_L^{(n, l, j, n', l', j')} (r, a) Y_{L0}(\Omega) &= \frac{r^2}{r_-^l r_+^{l'}} \left[\frac{G_{nlj}(r_-) G_{n'l'j'}(r_+)}{r_- r_+} \right. \\ &\quad \left. + \frac{F_{nlj}(r_-) F_{n'l'j'}(r_+)}{r_-^2 r_+^2} \left(r^2 - \frac{a^2}{4} \right) \right], \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\sum_L \xi_L^{(n, l, j, n', l', j')} (r, a) Y_{L0}(\Omega) = \frac{-ar^3}{r_-^l r_+^{l'}} \left(\frac{8\pi}{3} \right)^{1/2} \frac{F_{nlj}(r_-) F_{n'l'j'}(r_+)}{r_-^2 r_+^2}. \quad (2.7)$$

Onde lembramos que $a_1 = n, l, j$ e $a'_1 = n', l', j'$ e, a princípio a soma em L se estende de zero a infinito. Quando substituimos estas expressões na equação (2.4) obtemos

$$\begin{aligned}
B_{\alpha\beta} = & \left\{ \int_0^\infty dr \sum_L \eta_L^{(a_1, a'_1)}(r, a) \sum_{m_l, m_s} C_{m_l m_s}^{l 1/2 j} C_{m_l m_s}^{l' 1/2 j'} \right. \\
& \times \int d\Omega Y_{lm_l}^*(\Omega_-) Y_{l'm_l}(\Omega_+) Y_{L0}(\Omega) r_-^l r_+^{l'} \\
& + \int_0^\infty dr \sum_{L=0}^\infty \xi_L^{(a_1, a'_1)}(r, a) \sum_{m_l, m_{l'}} C_{m_l -1/2 m}^{l 1/2 j} C_{m_{l'} 1/2 m}^{l' 1/2 j'} \\
& \times \int d\Omega Y_{lm_l}^*(\Omega_-) Y_{l'm_{l'}}(\Omega_+) Y_{L0}(\Omega) Y_{11}(\Omega) r_-^l r_+^{l'} \\
& + \int_0^\infty dr \sum_L \xi_L^{(a_1, a'_1)}(r, a) \sum_{m_l, m_{l'}} C_{m_l 1/2 m}^{l 1/2 j} C_{m_{l'} -1/2 m}^{l' 1/2 j'} \\
& \left. \times \int d\Omega Y_{lm_l}^*(\Omega_-) Y_{l'm_{l'}}(\Omega_+) Y_{L0}(\Omega) Y_{1-1}(\Omega) r_-^l r_+^{l'} \right\} \delta_{m_\tau, m'_\tau} \delta_{m, m'} , \quad (2.8)
\end{aligned}$$

que é a expressão geral para o cálculo do overlap de um núcleo duplamente mágico qualquer na aproximação que estamos usando. A integral radial é calculada numericamente a partir da solução, também numérica, da equação (1.30), enquanto que a integral angular admite solução analítica, bastando saber qual o núcleo em questão. Assim, podemos ver qual será a forma para a matriz $B_{\alpha\beta}$ para os núcleos de camada fechada mais simples.

		$m_\tau=1/2$	
		$l'=0 \ j'=1/2$ $m'=1/2$	$l'=0 \ j'=1/2$ $m'=1/2$
$l=0 \ j=1/2$ $m=1/2$		*	0
$l=0 \ j=1/2$ $m=-1/2$		0	*

Tabela1: Elementos de matriz do Overlap para o núcleo de Hélio. Só está representado o subespaço de isospin com $m_\tau=1/2$, existindo uma matriz análoga para o subespaço com isospin $m_\tau=-1/2$.

Para o núcleo de Hélio, a matriz tem somente dois termos não-nulos para cada subespaço de isospin. Deste modo, o determinante da matriz de overlap é somente o produto dos termos das diagonais principais. Para o núcleo de oxigênio, a matriz se torna mais complexa.

$$m_\tau=1/2$$

	$l'=0$ $j'=1/2$ $m'=1/2$	$l'=1$ $j'=1/2$ $m'=1/2$	$l'=1$ $j'=3/2$ $m'=1/2$	$l'=0$ $j'=1/2$ $m'=-1/2$	$l'=1$ $j'=1/2$ $m'=-1/2$	$l'=1$ $j'=3/2$ $m'=-1/2$	$l'=1$ $j'=3/2$ $m'=3/2$	$l'=0$ $j'=3/2$ $m'=-3/2$
$l=0$ $j=1/2$ $m=1/2$	*	*	*	0	0	0	0	0
$l=1$ $j=1/2$ $m=1/2$	*	*	*	0	0	0	0	0
$l=1$ $j=3/2$ $m=1/2$	*	*	*	0	0	0	0	0
$l=0$ $j=1/2$ $m=-1/2$	0	0	0	*	*	*	0	0
$l=1$ $j=1/2$ $m=-1/2$	0	0	0	*	*	*	0	0
$l=1$ $j=3/2$ $m=-1/2$	0	0	0	*	*	*	0	0
$l=1$ $j=3/2$ $m=3/2$	0	0	0	0	0	0	*	0
$l=1$ $j=3/2$ $m=-3/2$	0	0	0	0	0	0	0	*

Tabela2: Elementos de matriz do Overlap para o núcleo de Oxigênio. Só está representado o subespaço de isospin com $m_\tau=1/2$, existindo uma matriz análoga para o subespaço com isospin $m_\tau=-1/2$.

Nas duas matrizes acima foram mostrados apenas os subespaços de isospin $1/2$. Para completar a matriz total, basta construir uma matriz análoga para os subespaços com isospin $-1/2$.

2.2.2 Cálculo do Termo de Massa e de Energia Cinética

Para obter o termo de energia cinética da hamiltoniana em questão devemos calcular

$$\langle \psi | TP_{\vec{k}=0} | \psi \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3a \langle \psi | Te^{i\vec{p}\cdot\vec{a}} | \psi \rangle, \quad (2.9)$$

com isso [14]:

$$\langle \psi | Te^{i\vec{p}\cdot\vec{a}} | \psi \rangle = \det \left(\langle \phi_\alpha | e^{i\vec{p}\cdot\vec{a}} | \phi_\beta \rangle \right) \sum_{\alpha\beta} \langle \phi_\alpha | te^{i\vec{p}\cdot\vec{a}} | \phi_\beta \rangle (B^{-1})_{\beta\alpha}. \quad (2.10)$$

Usamos agora a forma explícita do operador energia cinética $T = \sum_{i=1}^A t_i = \vec{\alpha}\cdot\vec{p}$ com

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{p} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & 0 \end{pmatrix},$$

e $\vec{\sigma}$ é o vetor das matrizes de Pauli.

Definimos

$$T_{\alpha\beta} = \langle \phi_\alpha | t e^{i\vec{p} \cdot \vec{a}} | \phi_\beta \rangle. \quad (2.11)$$

Substituindo estas expressões em (2.11) obtemos [15]

$$\begin{aligned} T_{\alpha\beta} = & \int_0^\infty dr \sum_L \zeta_L^{(a_1, a'_1)}(r, a) \sum_{m_l, m_s} C_{m_l m_s}^{l 1/2 j} C_{m_l m_s}^{l' 1/2 j'} \\ & \times \int d\Omega Y_{lm_l}^*(\Omega_-) Y_{l'm_l}(\Omega_+) Y_{L0}(\Omega) r_-^l r_+^{l'} \\ & + \int_0^\infty dr \sum_L \lambda_L^{(a_1, a'_1)}(r, a) \sum_{m_l, m_{l'}} C_{m_l -1/2 m}^{l 1/2 j} C_{m_{l'} 1/2 m'}^{l' 1/2 j'} \\ & \times \int d\Omega Y_{lm_l}^*(\Omega_-) Y_{l'm_{l'}}(\Omega_+) Y_{L0}(\Omega) Y_{11}(\Omega) r_-^l r_+^{l'} \\ & + \int_0^\infty dr \sum_{L=0}^\infty \lambda_L^{(a_1, a'_1)}(r, a) \sum_{m_l, m_{l'}} C_{m_l 1/2 m}^{l 1/2 j} C_{m_{l'} -1/2 m'}^{l' 1/2 j'} \\ & \times \int d\Omega Y_{lm_l}^*(\Omega_-) Y_{l'm_{l'}}(\Omega_+) Y_{L0}(\Omega) Y_{1-1}(\Omega) r_-^l r_+^{l'}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

onde

$$\begin{aligned} \sum_L \zeta_L^{(a_1, a'_1)}(r, a) Y_{L0}(\Omega) = & \frac{r^2}{r_-^l r_+^{l'}} \left[\frac{-G_{nlj}(r_-)}{r^2} \left(\frac{\partial F_{n'l'j'}(r_+)}{r_+ \partial r} + \kappa \frac{F_{n'l'j'}(r_+)}{r_+^2} \right) \right. \\ & + \frac{F_{nlj}(r_-)}{r_-^3 r_+} \left(\frac{\partial G_{n'l'j'}(r_+)}{r_+ \partial r} - \kappa \frac{G_{n'l'j'}(r_+)}{r_+^2} \right) \\ & \left. \times \left(r^2 - \frac{a^2}{4} \right) \right], \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\sum_L \lambda_L^{(a_1, a'_1)}(r, a) Y_{L0}(\Omega) = -\frac{ar^3}{r_-^l r_+^{l'}} \left(\frac{8\pi}{3}\right)^{1/2} \frac{F_{nlj}(r_-)}{r_-^3 r_+} \times \left(\frac{\partial G_{n'l'j'}(r_+)}{r_+ \partial r} - \kappa \frac{G_{n'l'j'}(r_+)}{r_+^2} \right), \quad (2.14)$$

$$\text{onde } \kappa = \begin{cases} -(j' + 1/2) & \text{para } j' = l' + 1/2 \\ j' + 1/2 & \text{para } j' = l' - 1/2 \end{cases}.$$

Para o termo de massa teremos um procedimento semelhante,

$$\begin{aligned} \langle \psi | MP_{\vec{k}=0} | \psi \rangle &= \frac{M}{(2\pi)^3} \int d^3a \langle \psi | \gamma_0 e^{i\vec{p} \cdot \vec{a}} | \psi \rangle, \\ \langle \psi | \gamma_0 e^{i\vec{p} \cdot \vec{a}} | \psi \rangle &= \det \left(\langle \phi_\alpha | e^{i\vec{p} \cdot \vec{a}} | \phi_\beta \rangle \right) \sum_{\alpha\beta} \langle \phi_\alpha | \gamma_0 e^{i\vec{p} \cdot \vec{a}} | \phi_\beta \rangle (B^{-1})_{\beta\alpha}, \end{aligned}$$

$$\langle \psi | \gamma_0 e^{i\vec{p} \cdot \vec{a}} | \psi \rangle = \det \left(\langle \phi_\alpha | \gamma_0 e^{i\vec{p} \cdot \vec{a}} | \phi_\beta \rangle \right) = \det(M_{\alpha\beta}),$$

$$\begin{aligned} M_{\alpha\beta} &= \int_0^\infty dr \sum_L \mu_L^{(a_1, a'_1)}(r, a) \sum_{m_i, m_s} C_{m_i m_s}^{l 1/2 j} C_{m_i m_s}^{l' 1/2 j'} \\ &\times \int d\Omega Y_{lm_i}^*(\Omega_-) Y_{l'm_i}(\Omega_+) Y_{L0}(\Omega) r_-^l r_+^{l'} \\ &- \int_0^\infty dr \sum_{L=0}^\infty \xi_L^{(a_1, a'_1)}(r, a) \sum_{m_i, m_{i'}} C_{m_i -1/2 m}^{l 1/2 j} C_{m_i' 1/2 m}^{l' 1/2 j'} \\ &\times \int d\Omega Y_{lm_i}^*(\Omega_-) Y_{l'm_i'}(\Omega_+) Y_{L0}(\Omega) Y_{11}(\Omega) r_-^l r_+^{l'} \\ &- \int_0^\infty dr \sum_L \xi_L^{(a_1, a'_1)}(r, a) \sum_{m_i, m_{i'}} C_{m_i 1/2 m}^{l 1/2 j} C_{m_i' -1/2 m}^{l' 1/2 j'} \\ &\times \int d\Omega Y_{lm_i}^*(\Omega_-) Y_{l'm_i'}(\Omega_+) Y_{L0}(\Omega) Y_{1-1}(\Omega) r_-^l r_+^{l'}, \quad (2.15) \end{aligned}$$

onde

$$\sum_{L=0}^\infty \mu_L^{(a_1, a'_1)}(r, a) Y_{L0}(\Omega) = \frac{r^2}{r_-^l r_+^{l'}} \left[\frac{G_{nlj}(r_-) G_{n'l'j'}(r_+)}{r_- r_+} \right]$$

$$- \frac{F_{n'l_j}(r_-) F_{n'l'_j}(r_+)}{r_-^2 r_+^2} \Big] \left(r^2 - \frac{a^2}{4} \right). \quad (2.16)$$

Podemos notar que as integrais angulares presentes nas equações são exatamente iguais às partes angulares das equações do overlap. Assim uma vez escolhido o núcleo, para calcular a parte angular do overlap, do termo de massa e da energia cinética, basta realizar o cálculo apenas uma vez. Os cálculos explícitos do overlap, termo de massa e energia cinética diferem apenas pela parte radial projetada .

2.2.3 Cálculo do Termo do Potencial Escalar (méson σ)

Calculamos agora o valor esperado do potencial escalar:

$$\langle \psi | V_e e^{i\vec{p} \cdot \vec{a}} | \psi \rangle = \frac{1}{2} \det \left(\langle \phi_\alpha | e^{i\vec{p} \cdot \vec{a}} | \phi_\beta \rangle \right) \sum_{\alpha\beta, \alpha'\beta'} \langle \phi_\alpha \phi_\beta | V_e e^{i\vec{p} \cdot \vec{a}} | \phi_{\alpha'} \phi_{\beta'} \rangle B_{\alpha\alpha'}^{-1} B_{\beta\beta'}^{-1} \quad (2.17)$$

onde devemos calcular os elementos de matriz $E_{\alpha\beta}^{\alpha'\beta'} = \langle \phi_\alpha \phi_\beta | V_e e^{i\vec{p} \cdot \vec{a}} | \phi_{\alpha'} \phi_{\beta'} \rangle$.

$$\begin{aligned} E_{\alpha\beta}^{\alpha'\beta'} &= -\frac{g_\sigma^2}{4\pi} \prod_{p=1}^2 \sum_{\substack{k, m_{sp} \\ m_{lp}, m'_{lp}, m'_{sp}}} \int dr_p C_{m_{lp} m_{sp} m_p}^{l_p 1/2 j_p} C_{m'_{lp} m'_{sp} m_p}^{l'_p 1/2 j'_p} \left[\eta_{L_p}^{(a_1, a'_1)}(r_p, a) \right. \\ &\quad \times I_{(m_{lp}, m'_{lp})}^{(l_p, l'_p)}(1, p) \\ &\quad \left. + \xi_{L_p}^{(a_1, a'_1)}(r_p, a) \left(I_{(m_{lp}, m'_{lp})}^{(l_p, l'_p)}(2, p) + I_{(m_{lp}, m'_{lp})}^{(l_p, l'_p)}(3, p) \right) \right] \\ &\quad \times 4\pi m_\sigma i_k (m_\sigma r_<) K_k(m_\sigma r_>) , \end{aligned} \quad (2.18)$$

onde

$$I_{(m_{lp}, m'_{lp})}^{(l_p, l'_p)}(1, p) = \int d\Omega_p Y_{L_p 0}(\Omega_p) Y_{l_p m_{lp}}^*(\Omega_{p-}) Y_{l'_p m'_{lp}}(\Omega_{p+}) Y_{k0}(\Omega_p) r_-^{l_p} r_+^{l'_p} \delta_{m_{sp}, m'_{sp}} ,$$

$$I_{(m_{lp}, m'_{lp})}^{(l_p, l'_p)}(2, p) = \int d\Omega_p Y_{L_p 0}(\Omega_p) Y_{l_p m_{lp}}^*(\Omega_{p-}) Y_{l'_p m'_{lp}}(\Omega_{p+}) Y_{k0}(\Omega_p) Y_{11}(\Omega_p)$$

$$\times r_-^{l_p} r_+^{l'_p} \delta_{m_{sp}, 1/2} \delta_{m'_{sp}, -1/2},$$

$$I_{(m_{l_p}, m'_{l_p})}^{(l_p, l'_p)}(3, p) = \int d\Omega_p Y_{L_p 0}(\Omega_p) Y_{l_p m_{l_p}}^*(\Omega_{p-}) Y_{l'_p m'_{l_p}}(\Omega_{p+}) Y_{k_0}(\Omega_p) Y_{1-1}(\Omega_p) \times r_-^{l_p} r_+^{l'_p} \delta_{m_{sp}, -1/2} \delta_{m'_{sp}, 1/2}, \quad (2.19)$$

e as funções $\eta_{L_p}^{(a_1, a'_1)}(r_p, a)$ e $\xi_{L_p}^{(a_1, a'_1)}(r_p, a)$ estão definidas nas equações (2.11 e 2.12), sendo que $p = 1$ representa o primeiro nucleon do par interagente e $p = 2$ representa o segundo nucleon. Os rótulos α e β representam os números quânticos suficientes para a identificação dos estados interagentes. As funções i_n e K_n são as funções de Bessel modificadas definidas por

$$\begin{aligned} i_n(z) &= (i)^{-n} j_n(iz) \\ K_n(z) &= -i^n h_n^{(+)}(iz) \end{aligned}$$

Na obtenção destas expressões também foi usada a expansão em série :

$$\frac{e^{-mr}}{r} = 4\pi m \sum_{L, M} i_L(mr_{<}) K_L(mr_{>}) Y_{LM}^*(\Omega_1) Y_{LM}(\Omega_2),$$

onde $r = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$

Uma vez escolhido um núcleo duplamente mágico, basta usar os valores de l relevantes e calcular estas integrais angulares. As funções $i_k(m_\sigma r_{<}) K_k(m_\sigma r_{>})$ que aparecem em 2.18 são funções de Bessel esféricas usuais e provenientes da expansão em série de $\frac{e^{-m\sigma r}}{r}$.

2.2.4 Termo do Potencial Vetor (méson ω)

O cálculo do valor esperado do potencial vetor envolve a avaliação do termo

$$\langle \psi | V_v e^{i\vec{p} \cdot \vec{a}} | \psi \rangle = \frac{1}{2} \det \left(\langle \phi_\alpha | e^{i\vec{p} \cdot \vec{a}} | \phi_\beta \rangle \right) \sum_{\alpha\beta, \alpha', \beta'} \langle \phi_\alpha \phi_\beta | V_v e^{i\vec{p} \cdot \vec{a}} | \phi_{\alpha'} \phi_{\beta'} \rangle B_{\alpha\alpha'}^{-1} B_{\beta\beta'}^{-1} \quad (2.20)$$

onde devemos calcular $\langle \phi_\alpha \phi_\beta | V_v e^{i\vec{p}\cdot\vec{a}} | \phi_{\alpha'} \phi_{\beta'} \rangle$, onde V_v é dado pela equação 1.20 usando $i = \omega$.

Podemos agora separar a interação de forma a simplificar os cálculos notando que

$$\gamma_o(1) \gamma_\mu(1) \gamma_o(2) \gamma^\mu(2) = \mathbf{1}(1) \times \mathbf{1}(2) + \sum_{k=1}^3 \gamma_o(1) \gamma_k(1) \gamma_o(2) \gamma^k(2).$$

Trabalhando com o primeiro termo obtemos

$$\begin{aligned} \langle \phi_\alpha \phi_\beta | \bar{V}_v e^{i\vec{p}\cdot\vec{a}} | \phi_{\alpha'} \phi_{\beta'} \rangle &= \frac{g_\omega^2}{4\pi} \prod_{p=1}^2 \sum_{\substack{k, m_{sp}, L_p \\ m_{i_p}, m'_{i_p}, m'_{s_p}}} \int_0^\infty dr_p r_p^2 C_{m_{i_p} m_{s_p} m_p}^{l_p 1/2 j_p} C_{m'_{i_p} m'_{s_p} m'_p}^{l'_p 1/2 j'_p} \left[\mu_{L_p}^{(a_1, a'_1)}(r_p, a) \right. \\ &\quad \times I_{(m_{i_p}, m'_{i_p})}^{(l_p, l'_p)}(1, p) + \\ &\quad \left. \xi_{L_p}^{(a_1, a'_1)}(r_p, a) \left(I_{(m_{i_p}, m'_{i_p})}^{(l_p, l'_p)}(2, p) + I_{(m_{i_p}, m'_{i_p})}^{(l_p, l'_p)}(3, p) \right) \right] \\ &\quad \times 4\pi m_\omega i_k (m_\omega r_<) K_k(m_\omega r_>) , \end{aligned} \quad (2.21)$$

que é análoga à expressão para o potencial escalar, adequando-se a massas e a constante de acoplamento. Com isso as integrais angulares que aparecem em 2.21 são exatamente as mesmas que em 2.18, bem como as funções radiais projetadas.

Resta-nos, então, calcular o segundo termo $\langle \phi_\alpha \phi_\beta | \bar{V}_v e^{i\vec{p}\cdot\vec{a}} | \phi_{\alpha'} \phi_{\beta'} \rangle = \langle \bar{V}_v \rangle$:

$$\begin{aligned} \langle \bar{V}_v \rangle &= \frac{g_\omega^2}{4\pi} \sum_{\substack{m_{i_1}, m'_{i_1}, k, m'_{s_1}, m'_{s_2} \\ m_{i_2}, m'_{i_2}, m_{s_1}, m_{s_2}}} \int d^3 x_1 \int d^3 x_2 C_{m_{i_1} m_{s_1} m_1}^{l_{i_1} 1/2 j_1} C_{m'_{i_1} m'_{s_1} m'_1}^{l'_{i_1} 1/2 j'_1} C_{m_{i_2} m_{s_2} m_2}^{l_{i_2} 1/2 j_2} C_{m'_{i_2} m'_{s_2} m'_2}^{l'_{i_2} 1/2 j'_2} \\ &\quad \times \chi_{1/2, m_{s_1}}^\dagger(1) \chi_{1/2, m_{s_2}}^\dagger(2) Y_{l_{i_1} m_{i_1}}^*(\Omega_{1-}) Y_{l_{i_2} m_{i_2}}^*(\Omega_{2-}) \frac{e^{-m_\omega r}}{r} \\ &\quad \times \left[-i \frac{G_{nlj}(r_{1-}) F_{n'l'j'}(r_{1+})}{r_{1-} r_{1+}^2} \vec{\sigma}_1 (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{r}_{1+}) + i \frac{F_{nlj}(r_{1-}) G_{n'l'j'}(r_{1+})}{r_{1+} r_{1-}^2} (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{r}_{1-}) \vec{\sigma}_1 \right] \\ &\quad \cdot \left[-i \frac{G_{nlj}(r_{2-}) F_{n'l'j'}(r_{2+})}{r_{2-} r_{2+}^2} \vec{\sigma}_2 (\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{r}_{2+}) + i \frac{F_{nlj}(r_{2-}) G_{n'l'j'}(r_{2+})}{r_{2+} r_{2-}^2} (\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{r}_{2-}) \vec{\sigma}_2 \right] \\ &\quad \times \chi_{1/2, m'_{s_1}}(1) \chi_{1/2, m'_{s_2}}(2) Y_{l'_{i_1} m'_{i_1}}(\Omega_{1+}) Y_{l'_{i_2} m'_{i_2}}(\Omega_{2+}) , \end{aligned} \quad (2.22)$$

onde $r = |r_1 - r_2|$.

Resolvendo a parte de spin de 2.22 e com alguma manipulação algébrica obtemos

$$\begin{aligned}
\langle \bar{V}_v \rangle &= \frac{g_\omega^2}{4\pi} \sum_{\substack{m_{i_1}, m'_{i_1}, k, m'_{s_1}, m'_{s_2} \\ m_{i_2}, m'_{i_2}, m_{s_1}, m_{s_2}}} \int d^3x_1 \int d^3x_2 C_{m_{i_1} m_{s_1} m_1}^{l_1 1/2 j_1} C_{m'_{i_1} m'_{s_1} m'_1}^{l'_1 1/2 j'_1} C_{m_{i_2} m_{s_2} m_1}^{l_2 1/2 j_2} C_{m'_{i_2} m'_{s_2} m'_2}^{l'_2 1/2 j'_2} \times \\
&Y_{l_1 m_{i_1}}^* (\Omega_{1-}) Y_{l_2 m_{i_2}}^* (\Omega_{2-}) Y_{l'_1 m'_{i_1}} (\Omega_{1+}) Y_{l'_2 m'_{i_2}} (\Omega_{2+}) Y_{kM} (\Omega_1) Y_{kM} (\Omega_2) \times \\
&4\pi m_\omega i_k (m_\omega r_{<}) K_k (m_\omega r_{>}) \sum_{q=1}^2 \sum_{q'=1}^2 \sum_{t=1}^3 U_q^1 U_{q'}^2 H_{qt}^1 H_{q't}^2, \tag{2.23}
\end{aligned}$$

onde

$$U_1^b = \frac{G_{n_b l_b j_b} (r_{b-}) F_{n'_b l'_b j'_b} (r_{b+})}{r_b - r_{b+}^2} \text{ e } U_2^b = \frac{F_{n_b l_b j_b} (r_{b-}) G_{n'_b l'_b j'_b} (r_{b+})}{r_{b-}^2 - r_{b+}},$$

e

$$H_{11}^b = (-1)^{m'_{s_b} - 1/2} r_b Y_{1(-1)^{m'_{s_b} + 1/2}} (\Omega_b) \delta_{m_{s_b} m'_{s_b}} + 2m'_{s_b} \left(r_b Y_{10} (\Omega_b) + \frac{a\sqrt{4\pi}}{2} Y_{00} (\Omega_b) \right) \delta_{m_{s_b} - m'_{s_b}},$$

$$H_{12}^b = -r_b Y_{1(-1)^{m'_{s_b} + 1/2}} (\Omega_b) \delta_{m_{s_b} m'_{s_b}} - 2m'_{s_b} (-1)^{-m'_{s_b} - 1/2} \left(r_b Y_{10} (\Omega_b) + \frac{a\sqrt{4\pi}}{2} Y_{00} (\Omega_b) \right) \delta_{m_{s_b} - m'_{s_b}},$$

$$H_{13}^b = -2m'_{s_b} (-1)^{m'_{s_b} - 1/2} r_b Y_{1(-1)^{m'_{s_b} + 1/2}} (\Omega_b) \delta_{m_{s_b} - m'_{s_b}} - \left(r_b Y_{10} (\Omega_b) + \frac{a\sqrt{4\pi}}{2} Y_{00} (\Omega_b) \right) \delta_{m_{s_b} m'_{s_b}},$$

$$H_{21}^b = (-1)^{m'_{s_b} - 1/2} r_b Y_{1(-1)^{m'_{s_b} + 1/2}} (\Omega_b) \delta_{m_{s_b} m'_{s_b}} + 2m'_{s_b} \left(r_b Y_{10} (\Omega_b) - \frac{a\sqrt{4\pi}}{2} Y_{00} (\Omega_b) \right) \delta_{m_{s_b} - m'_{s_b}},$$

$$H_{12}^b = -r_b Y_{1(-1)^{m'_{s_b} + 1/2}} (\Omega_b) \delta_{m_{s_b} m'_{s_b}} - 2m'_{s_b} (-1)^{-m'_{s_b} - 1/2} \left(r_b Y_{10} (\Omega_b) - \frac{a\sqrt{4\pi}}{2} Y_{00} (\Omega_b) \right) \delta_{m_{s_b} - m'_{s_b}},$$

$$H_{13}^b = -2m'_{s_b} (-1)^{m'_{s_b} - 1/2} r_b Y_{1(-1)^{m'_{s_b} + 1/2}} (\Omega_b) \delta_{m_{s_b} - m'_{s_b}} - \left(r_b Y_{10} (\Omega_b) - \frac{a\sqrt{4\pi}}{2} Y_{00} (\Omega_b) \right) \delta_{m_{s_b} m'_{s_b}}.$$

Podemos ainda separar completamente a parte radial da parte angular de (2.23) expandindo U_1^b e U_2^b

$$U_q^1 = \sum_{L_1=0}^{\infty} A_{qL_1}^{(a_1, a'_1)}(r_1) Y_{L_1 0}(\Omega_1)$$

e

$$U_{q'}^2 = \sum_{L_2=0}^{\infty} A_{q'L_2}^{(a_1, a'_1)}(r_2) Y_{L_2 0}(\Omega_2).$$

obtendo, assim, a forma final para o termo do potencial vetorial projetado para um núcleo qualquer de camada fechada, que é a soma de $\langle \bar{V}_v \rangle$ com $\langle \bar{V}_v \rangle$

$$\begin{aligned} \langle \bar{V}_v \rangle = & m_\omega g_\omega^2 \sum_{\substack{m_{l_1}, m'_{l_1}, k, m'_{s_1}, m'_{s_2} \\ m_{l_2}, m'_{l_2}, m_{s_1}, m_{s_2}}} \sum_{L_1=0}^{\infty} \sum_{L_2=0}^{\infty} \int d^3 x_1 \int d^3 x_2 C_{m_{l_1} m_{s_1} m_1}^{l_1 1/2 j_1} C_{m'_{l_1} m'_{s_1} m'_1}^{l'_1 1/2 j'_1} C_{m_{l_2} m_{s_2} m_1}^{l_2 1/2 j_2} \\ & \times C_{m'_{l_2} m'_{s_2} m'_2}^{l'_2 1/2 j'_2} Y_{l_1 m_{l_1}}^*(\Omega_{1-}) Y_{l_2 m_{l_2}}^*(\Omega_{2-}) Y_{l'_1 m'_{l_1}}(\Omega_{1+}) Y_{l'_2 m'_{l_2}}(\Omega_{2+}) Y_{kM}(\Omega_1) Y_{kM}^*(\Omega_2) \\ & \times m_\omega i_k (m_\omega r <) K_k(m_\omega r >) \sum_{q=1}^2 \sum_{q'=1}^2 \sum_{t=1}^3 A_{qL_1}^{(a_1, a'_1)}(r_1) Y_{L_1 0}(\Omega_1) A_{q'L_2}^{(a_1, a'_1)}(r_2) \quad (2.24) \end{aligned}$$

$$\times Y_{L_2 0}(\Omega_2) H_{qt}^1 H_{q't}^2, \quad (2.25)$$

Apesar da aparente complexidade destas expressões, é fácil verificar, mediante uma análise superficial, que as integrais angulares a serem resolvidas são parecidas com aquelas obtidas na solução do potencial escalar. O restante dos elementos são apenas constantes que não nos trazem nenhuma dificuldade adicional na resolução.

Capítulo 3

Aplicações a Núcleos Leves

As expressões que foram calculadas no capítulo anterior precisam ser avaliadas para verificar a validade do método. Apresentamos a seguir duas aplicações do método para ilustrar o cálculo explícito bem como para verificar a sua validade.

3.1 Núcleo de Hélio

O núcleo de Hélio é o núcleo de camada fechada mais simples e devido a sua pequena massa deve sofrer mais os efeitos da quebra de simetria translacional.

Começamos particularizando as expressões do Capítulo 2 para o nosso caso. O núcleo de hélio dentro do modelo apresenta apenas nucleons na primeira camada, possuindo então somente estados com $l = 0$. Com isso podemos particularizar as funções e os elementos de matriz já calculados

$$Y_{lm}(\Omega) = Y_{lm}(\Omega_+) = Y_{lm}(\Omega_-) = Y_{00}(\Omega) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}. \quad (3.1)$$

3.1.1 Cálculo do Overlap

$$\begin{aligned} B_{l,j,m,l',j',m} &= B_{0,1/2,m,0,1/2,m} = \int_0^\infty dr \sum_{L=0}^\infty \eta_L^{(a_1,a'_1)}(r,a) C_{0\ m\ m}^{0\ 1/2\ 1/2} C_{0\ m\ m}^{0\ 1/2\ 1/2} \\ &\times \int d\Omega Y_{00}^*(\Omega_-) Y_{00}(\Omega_+) Y_{L0}(\Omega) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^\infty dr \sum_{L=0}^\infty \xi_L^{(a_1, a'_1)}(r, a) C_{0 -1/2 m}^{0 1/2 1/2} C_{0 1/2 m}^{0 1/2 1/2} \\
& \times \int d\Omega Y_{00}^*(\Omega_-) Y_{00}(\Omega_+) Y_{L0}(\Omega) Y_{11}(\Omega) \\
& + \int_0^\infty dr \sum_{L=0}^\infty \xi_L^{(a_1, a'_1)}(r, a) C_{0 1/2 m}^{0 1/2 j} C_{0 -1/2 m}^{0 1/2 j'} \\
& \times \int d\Omega Y_{00}^*(\Omega_-) Y_{00}(\Omega_+) Y_{L0}(\Omega) Y_{1-1}(\Omega) , \tag{3.2}
\end{aligned}$$

onde vemos que os coeficientes de Clebsch-Gordan que acompanham as duas últimas integrais angulares são nulos. Desse modo temos

$$B_{0,1/2,m,0,1/2,m} = B(a) = \int_0^\infty dr \sum_{L=0}^\infty \eta_L^{(\alpha)}(r, a) \sum_{m_s} C_{0 m_s m}^{0 1/2 1/2} C_{0 m_s m}^{0 1/2 1/2} \times \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \delta_{L0} \tag{3.3}$$

fazendo agora $m = \pm 1/2$ obtemos

$$B(a) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_0^\infty dr \eta_0^{(a_1, a'_1)}(r, a) , \tag{3.4}$$

fazendo com que

$$\langle \psi | e^{i\vec{p} \cdot \vec{a}} | \psi \rangle = \int_0^\infty da \frac{a^2}{2\pi^2} (B(a))^4 , \tag{3.5}$$

já que estamos trabalhando com uma matriz diagonal 4×4 (como apresentado no capítulo anterior), sendo o determinante o produto dos elementos da diagonal.

3.1.2 Termo de Energia Cinética e Termo de Massa

De modo similar podemos calcular o termo de massa e o termo de energia cinética.

$$\langle \psi | M \gamma^0 e^{i\vec{p} \cdot \vec{a}} | \psi \rangle = \int_0^\infty da \frac{a^2}{2\pi^2} M(a) (B(a))^3 , \tag{3.6}$$

sendo

$$M(a) = M_{0,1/2,m,0,1/2,m} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_0^\infty dr \mu_0^{(a_1, a'_1)}(r, a) . \tag{3.7}$$

O cálculo do termo cinético segue, em linhas gerais o cálculo do overlap.

$$\begin{aligned}
T_{0,1/2,m,0,1/2,m} &= \int_0^\infty dr \sum_{L=0}^\infty \zeta_L^{(\alpha)}(r,a) \sum_{m_s} C_{0 m_s m}^{0 1/2 1/2} C_{0 m_s m}^{0 1/2 1/2} \\
&\times \int d\Omega Y_{00}^*(\Omega_-) Y_{00}(\Omega_+) Y_{L0}(\Omega)
\end{aligned} \tag{3.8}$$

usando as propriedades dos harmônicos esféricos resolvemos a parte angular, obtendo

$$T_{0,1/2,m,0,1/2,m} = T(a) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_0^\infty dr \zeta_0^{(a_1, a'_1)}(r, a). \tag{3.9}$$

então

$$\langle \psi | T e^{i\vec{p}\cdot\vec{a}} | \psi \rangle = \int_0^\infty da \frac{a^2}{2\pi^2} T(a) (B(a))^3, \tag{3.10}$$

3.1.3 Termo do Potencial Escalar

O cálculo do potencial escalar produz integrais angulares mais complexas, mas que devido à pequena quantidade de nucleons envolvidos (somente camada s) torna-se trivial. Neste caso os números quânticos relevantes são $\alpha = \beta = \alpha' = \beta' = l, j, m = 0, 1/2, \pm 1/2$.

$$\begin{aligned}
\langle \phi_\alpha \phi_\beta | V_e e^{i\vec{p}\cdot\vec{a}} | \phi_{\alpha'} \phi_{\beta'} \rangle &= -\frac{1}{(4\pi)^2} m_\sigma g_\sigma^2 \sum_L \int r_1^2 dr_1 r_2^2 dr_2 \mu_L^{(a_1, a'_1)}(r_1, a) \mu_L^{(a_1, a'_1)}(r_2, a) \times \\
& i_L(m_\sigma r_<) K_L(m_\sigma r_>)
\end{aligned} \tag{3.11}$$

3.1.4 Termo do Potencial Vetor

Como em todos os outros termos, precisamos apenas particularizar uma expressão mais geral (2.22 e 3.13), fazendo $\alpha = \beta = \alpha' = \beta' = l, j, m = 0, 1/2, \pm 1/2$.

$$\langle \bar{V}_v \rangle = \frac{m_\omega g_\omega^2}{2\pi} \sum_{L_1, L_2} \frac{1}{(4\pi)^2} \int dr_1 dr \left[\mu_{L_1}^{(\alpha)}(r_1, a) \mu_{L_2}^{(\alpha)}(r_1, a) + \right.$$

$$\left. \frac{3}{(4\pi)^2} \sum_{\substack{L_1, L_2 \\ k_1, k_2}} \nu_{L_1}^{(\alpha)}(r, a) \nu_{L_2}^{(\alpha)}(r, a) \frac{2L+1}{(2k_1+1)(2k_2+1)} \right] \times \\ C_{1-1\ 0}^{k_1\ 1\ L} C_{0\ 0\ 0}^{k_1\ 1\ L} C_{1-1\ 0}^{k_2\ 1\ L} C_{0\ 0\ 0}^{k_2\ 1\ L} \times i_L(m_\omega r_<) K_L(m_\omega r_>). \quad (3.12)$$

$$\langle \overline{V}_v \rangle = \frac{g_\omega^2}{(4\pi)^2} \sum_{\substack{m_{s_1}, m'_{s_1} \\ m_{s_2}, m'_{s_2}}} \sum_{L_1=0}^{\infty} \sum_{L_2=0}^{\infty} \int d^3x_1 \int d^3x_2 C_{0\ m_{s_1}\ m_1}^{0\ 1/2\ 1/2} C_{0\ m'_{s_1}\ m'_1}^{0\ 1/2\ 1/2} C_{0\ m_{s_2}\ m_1}^{0\ 1/2\ 1/2} C_{0\ m'_{s_2}\ m'_2}^{0\ 1/2\ 1/2} \times \\ \sum_{q=1}^2 \sum_{q'=1}^2 \sum_{t=1}^3 Y_{kM}(\Omega_1) Y_{kM}^*(\Omega_2) Y_{L_1 0}(\Omega_1) Y_{L_2 0}(\Omega_2) H_{qt}^1 H_{q't}^2 \times \\ i_k(m_\omega r_<) K_k(m_\omega r_>) A_{qL_1}^{(\alpha)}(r_1) A_{q'L_2}^{(\alpha)}(r_2), \quad (3.13)$$

Os termos $H_{qt}^1 H_{q't}^2$ dependem explicitamente de $m_{s_1}, m'_{s_1}, m_{s_2}, m'_{s_2}$, de modo precisamos resolver as integrais angulares para todas as combinações possíveis destes números quânticos.

Com este fim definimos as integrais angulares

$$Q_{qt}^i(\Omega_1) = \int d\Omega_i Y_{L_i 0}(\Omega_i) Y_{kM}(\Omega_i) H_{qt}^i$$

Os resultados destas integrais aparecem no Apêndice B.

3.2 Núcleo de Oxigênio

O cálculo para o núcleo de oxigênio é semelhante ao cálculo do núcleo de hélio, agora incluindo os nucleons em estados com $l = 1$.

No cálculo com $l = 1$ há um significativo aumento na complexidade do cálculo, já que as funções de onda utilizadas possuem dependência explícita nos ângulos esféricos. Desse modo serão apresentados neste trabalho apenas alguns exemplos de como estes cálculos foram feitos, quais propriedades foram utilizadas e quais os tipos de análises que podem ser feitas.

Tal qual foi mostrado no cálculo do núcleo de hélio, vamos calcular os elementos de matriz correspondentes a cada um dos termos da hamiltoniana. Lembramos que os elementos

de matriz com $l = 0$ estão já calculados no núcleo de hélio.

As funções de onda angulares projetadas a serem usadas são:

$$Y_{lm}(\Omega_+) = Y_{lm}(\Omega_-) = Y_{00}(\Omega) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}},$$

$$Y_{10}(\Omega_{\pm}) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \frac{r \cos(\theta) \pm a/2}{r_{\pm}} = \frac{1}{r_{\pm}} \left(r Y_{10}(\Omega) \pm \frac{a\sqrt{3}}{2} Y_{00}(\Omega) \right),$$

$$Y_{1-1}(\Omega_{\pm}) = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin(\theta_{\pm}) e^{i\varphi_{\pm}} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \frac{r \sin(\theta) e^{-i\varphi}}{r_{\pm}} = \frac{r}{r_{\pm}} Y_{1-1}(\Omega),$$

e

$$Y_{11}(\Omega_{\pm}) = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin(\theta_{\pm}) e^{i\varphi_{\pm}} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \frac{r \sin(\theta) e^{i\varphi}}{r_{\pm}} = \frac{r}{r_{\pm}} Y_{11}(\Omega).$$

onde a translação do eixo de coordenadas foi alinhada com o eixo z. Desse modo $\varphi_{\pm} = \varphi$, esse procedimento não faz com que percamos a generalidade do procedimento, já que integramos posteriormente em todas as orientações possíveis do referencial, cobrindo, assim, todas as possibilidades de translação.

3.2.1 Cálculo do Overlap, Massa e Energia Cinética

Novamente o procedimento será de particularizar a expressão geral (2.15). Vamos inicialmente calcular

$$\begin{aligned} B_{l,j,m,l',j',m'} &= B_{1,1/2,1/2,1,1/2,1/2} = \int_0^{\infty} dr \left\{ \sum_L \eta_L^{(1,1/2,1,1/2)}(r, a) \sum_{m_l, m_{l'}} \left(C_{m_{l'} m_s 1/2}^{1 1/2 1/2} \right)^2 \times \right. \\ &\quad \int d\Omega Y_{1m_l}^*(\Omega_-) Y_{1m_{l'}}(\Omega_+) Y_{L0}(\Omega) r_- r_+ + \sum_{\bar{L}} \xi_{\bar{L}}^{(1,1/2,1,1/2)} \left[C_{1-1/2 1/2}^{1 1/2 1/2} C_{0 1/2 1/2}^{1 1/2 1/2} \right. \\ &\quad \int d\Omega Y_{11}^*(\Omega_-) Y_{10}(\Omega_+) Y_{\bar{L}0}(\Omega) Y_{11}(\Omega) r_- r_+ + C_{1-1/2 1/2}^{1 1/2 1/2} C_{0 1/2 1/2}^{1 1/2 1/2} \times \\ &\quad \left. \left. \int d\Omega Y_{10}^*(\Omega_-) Y_{11}(\Omega_+) Y_{\bar{L}0}(\Omega) Y_{1-1}(\Omega) r_- r_+ \right] \right\}. \end{aligned}$$

Usando as relações (??) e realizando o somatório em $m_l, m_{l'}$ obtemos

$$\begin{aligned}
 B_{1,1/2,1/2,1,1/2,1/2} &= \int_0^\infty dr \left\{ \sum_{\bar{L}} \eta_{\bar{L}}^{(1,1/2,1,1/2)}(r, a) \left[\left(C_{0 \ 1/2 \ 1/2}^{1 \ 1/2 \ 1/2} \right)^2 \int d\Omega Y_{10}^*(\Omega_-) Y_{10}(\Omega_+) Y_{L0}(\Omega) r_{-r_+} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left(C_{1 \ -1/2 \ 1/2}^{1 \ 1/2 \ 1/2} \right)^2 \int d\Omega Y_{11}^*(\Omega_-) Y_{11}(\Omega_+) Y_{L0}(\Omega) Y_{1-1}(\Omega) r_{-r_+} \right] - \sum_{\bar{L}} \xi_{\bar{L}}^{(1,1/2,1,1/2)} \times \\
 &\quad \left. \frac{a\sqrt{3}}{4\pi} \sqrt{\frac{2}{3}} \left(-\sqrt{\frac{1}{3}} \right) r \left[\frac{1}{4\pi\sqrt{5}} \delta_{\bar{L}2} - \frac{1}{(4\pi)^{3/2}} \delta_{\bar{L}0} \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

Resolvendo as integrais que restaram e simplificando os termos chegamos ao resultado final para este termo

$$\begin{aligned}
 B_{1,1/2,1/2,1,1/2,1/2} &= \int_0^\infty dr \eta_0^{(1,1/2,1,1/2)}(r, a) \frac{(12\pi + 2)r^2 - 9\pi a^2}{3(4\pi)^{3/2}} + \\
 &\quad \left. \sum_{\bar{L}} \xi_{\bar{L}}^{(1,1/2,1,1/2)}(r, a) \frac{a\sqrt{2}r}{(4\pi)^{3/2}} \left(\frac{\delta_{\bar{L}2}}{\sqrt{5}} - \frac{\delta_{\bar{L}0}}{(4\pi)^{1/2}} \right) \right\}.
 \end{aligned}$$

Para resolver estas integrais devemos usar a seguinte relação ([16])

$$\int d\Omega Y_{l_1 m_1}^*(\Omega) Y_{l_1 m_1}(\Omega) Y_{l_2 m_2}(\Omega) = \sqrt{\frac{(2l_1 + 1)(2l_2 + 1)}{4\pi(2l + 1)}} C_{0 \ 0 \ 0}^{l_1 \ l_2 \ l} C_{m_1 \ m_2 \ m}^{l_1 \ l_2 \ l} \quad (3.14)$$

e a propriedade dos harmônicos esféricos

$$Y_{l_1 m_1}(\Omega) Y_{l_2 m_2}(\Omega) = \frac{\sqrt{(2l_1 + 1)(2l_2 + 1)}}{4\pi} \sum_{l', m'} C_{0 \ 0 \ 0}^{l_1 \ l_2 \ l'} C_{m_1 \ m_2 \ m'}^{l_1 \ l_2 \ l'} \sqrt{\frac{4\pi}{(2l' + 1)}} Y_{l' m'}(\Omega). \quad (3.15)$$

Todos os outros termos do overlap terão uma estrutura de resolução semelhante. As integrais angulares do termo de energia cinética e do termo de massa são iguais aos do overlap. Os resultados dos termos com outros números quânticos são apresentados no Apêndice B.

3.2.2 Cálculo do Potencial Escalar

As integrais angulares do potencial escalar são um pouco mais complexas, mas não fogem da linha de resolução adotada na seção anterior. Demonstramos então, realizando o cálculo de $\langle \phi_\alpha \phi_\beta | V_e e^{i\vec{p}\cdot\vec{a}} | \phi_{\alpha'} \phi_{\beta'} \rangle$ com $\alpha = \beta = \alpha' = \beta' = l, j, m = 1, 1/2, 1/2$ termo que por simplicidade, neste momento, chamaremos de \bar{V}_e .

$$\begin{aligned}
\bar{V}_e = & \frac{-g_\sigma^2}{4\pi} \int_0^\infty dr_1 \int_0^\infty dr_2 \sum_{\bar{L}} \left\{ \sum_{\substack{L, m_{l_1} \\ m_{l'_1}}} \eta_L^{(1,1/2,1,1/2)}(r_1, a) \left(C_{m_{l'_1} m_{s_1} 1/2}^{1 1/2 1/2} \right)^2 \right. \\
& \times \int d\Omega_1 Y_{1m_{l_1}}^*(\Omega_{1-}) Y_{1m_{l'_1}}(\Omega_{1+}) Y_{L0}(\Omega_1) Y_{\bar{L}0}(\Omega_1) r_{1-r_{1+}} + \sum_{\bar{L}} \xi_L^{(1,1/2,1,1/2)}(r_1, a) \\
& \times \left[C_{1-1/2 1/2}^{1 1/2 1/2} C_{0 1/2 1/2}^{1 1/2 1/2} \int d\Omega_1 Y_{11}^*(\Omega_{1-}) Y_{10}(\Omega_{1+}) Y_{11}(\Omega_1) Y_{\bar{L}0}(\Omega_1) Y_{\bar{L}0}(\Omega_1) r_{1-r_{1+}} \right. \\
& \left. + C_{0 1/2 1/2}^{1 1/2 1/2} C_{1-1/2 1/2}^{1 1/2 1/2} \int d\Omega_1 Y_{10}^*(\Omega_{1-}) Y_{11}(\Omega_{1+}) Y_{1-1}(\Omega_1) Y_{\bar{L}0}(\Omega_1) Y_{\bar{L}0}(\Omega_1) r_{1-r_{1+}} \right] \left. \right\} \\
& \times \left\{ \sum_{\substack{L, m_{l_2} \\ m_{l'_2}}} \eta_L^{(1,1/2,1,1/2)}(r_2, a) \left(C_{m_{l'_2} m_{s_2} 1/2}^{1 1/2 1/2} \right)^2 \int d\Omega_2 Y_{1m_{l_2}}^*(\Omega_{2-}) Y_{1m_{l'_2}}(\Omega_{2+}) Y_{L0}(\Omega_2) Y_{\bar{L}0}(\Omega_2) r_{2-r_{2+}} \right. \\
& + \sum_{\bar{L}} \xi_L^{(a_1, a'_1)}(r_2, a) \left[C_{1-1/2 1/2}^{1 1/2 1/2} C_{0 1/2 1/2}^{1 1/2 1/2} \right. \\
& \times \int d\Omega_2 Y_{11}^*(\Omega_{2-}) Y_{10}(\Omega_{2+}) Y_{11}(\Omega_2) Y_{\bar{L}0}(\Omega_2) Y_{\bar{L}0}(\Omega_2) r_{2-r_{2+}} \\
& \left. + C_{0 1/2 1/2}^{1 1/2 1/2} C_{1-1/2 1/2}^{1 1/2 1/2} \int d\Omega_2 Y_{10}^*(\Omega_{2-}) Y_{11}(\Omega_{2+}) Y_{1-1}(\Omega_2) Y_{\bar{L}0}(\Omega_2) Y_{\bar{L}0}(\Omega_2) r_{2-r_{2+}} \right] \left. \right\} \\
& \times 4\pi m_\sigma i_{\bar{L}}(m_\sigma r_<) K_{\bar{L}}(m_\sigma r_>).
\end{aligned}$$

Analisando a expressão acima, notamos que o termo que corresponde à partícula 1 é análogo ao termo que envolve a partícula 2, portanto agora prosseguimos os cálculos somente com a parte da partícula 1. O termo da partícula 2 será apenas lembrado que existe, caso contrário, este cálculo se estenderia por muitas páginas sem um retorno considerável.

$$\begin{aligned}
\bar{V}_e = & \frac{-g_\sigma^2}{4\pi} \int_0^\infty dr_1 \int_0^\infty dr_2 \sum_{\bar{L}} \left\{ \sum_L \eta_L^{(1,1/2,1,1/2)}(r_1, a) \left[\left(C_{1-1/2 1/2}^{1 1/2 1/2} \right)^2 \right. \right. \\
& \left. \times \int d\Omega_1 Y_{11}^*(\Omega_{1-}) Y_{11}(\Omega_{1+}) Y_{L0}(\Omega_1) Y_{\bar{L}0}(\Omega_1) r_{1-r_{1+}} + \left(C_{0 1/2 1/2}^{1 1/2 1/2} \right)^2 \right. \\
& \left. \left. \times \int d\Omega_1 Y_{10}^*(\Omega_{1-}) Y_{10}(\Omega_{1+}) Y_{L0}(\Omega_1) Y_{\bar{L}0}(\Omega_1) r_{1-r_{1+}} \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \int d\Omega_1 Y_{10}^*(\Omega_{1-}) Y_{10}(\Omega_{1+}) Y_{L0}(\Omega_1) Y_{\bar{L}0}(\Omega_1) r_{1-} r_{1+} \Big] + \sum_{\bar{L}} \xi_{\bar{L}}^{(1,1/2,1,1/2)}(r_1, a) \times \left[\left(-\frac{\sqrt{2}}{3} \right) \right. \\
& \times \int d\Omega_1 r_1 Y_{11}^*(\Omega_1) \left(r_1 Y_{10}(\Omega_1) + \frac{a\sqrt{3}}{2} Y_{00}(\Omega_1) \right) Y_{1-1}(\Omega_1) Y_{\bar{L}0}(\Omega_1) Y_{\bar{L}0}(\Omega_1) r_{1-} r_{1+} \\
& + \int d\Omega_1 r_1 Y_{1-1}^*(\Omega_1) \left(r_1 Y_{10}(\Omega_1) - \frac{a\sqrt{3}}{2} Y_{00}(\Omega_1) \right) Y_{11}(\Omega_1) Y_{\bar{L}0}(\Omega_1) Y_{\bar{L}0}(\Omega_1) r_{1-} r_{1+} \\
& \left. \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{3} \right) \right] \times \text{termo análogo da partícula 2} \times 4\pi m_\sigma i_{\bar{L}}(m_\sigma r_<) K_{\bar{L}}(m_\sigma r_>).
\end{aligned}$$

Calculando todas estas integrais e simplificando os termos chegamos a

$$\begin{aligned}
\bar{V}_e = & \frac{-g_\sigma^2}{4\pi} \int_0^\infty dr_1 \int_0^\infty dr_2 \sum_{\bar{L}} \left\{ \sum_{\bar{L}} \eta_{\bar{L}}^{(1,1/2,1,1/2)}(r_1, a) \left[\frac{2}{15} \sqrt{\frac{(2\bar{L}+1)(2L+1)}{4\pi}} \times (C_{\bar{0} \ 0 \ 0}^{\bar{L} \ L \ 2})^2 \times \right. \right. \\
& \left. \left(\frac{r_1^2}{3} - \frac{r_1^2}{4\pi} \right) + \frac{1}{4\pi} \delta_{L\bar{L}} \left(r_1^2 + \frac{2r_1^2}{3} \right) \right] + \sum_{\bar{L}} \xi_{\bar{L}}^{(1,1/2,1,1/2)}(r_1, a) \frac{a\sqrt{6}}{3} \frac{1}{4\pi} \times \\
& \left. \left(\frac{1}{20\pi} \sqrt{\frac{(2\bar{L}+1)(2\tilde{L}+1)}{4\pi}} (C_{\bar{0} \ 0 \ 0}^{\bar{L} \ \bar{L} \ 2})^2 - \frac{1}{4\pi} \delta_{\bar{L}\bar{L}} \right) \right\} \times \\
& \text{termo análogo da partícula 2} \times 4\pi m_\sigma i_{\bar{L}}(m_\sigma r_<) K_{\bar{L}}(m_\sigma r_>).
\end{aligned}$$

3.2.3 Termo do Potencial Vetor

Nos resta agora calcular os elementos de matriz do potencial vetor. Para efetuar este cálculo, particularizando a equação (3.13) enfrentamos uma dificuldade matemática. Tal dificuldade matemática não se refere a uma impossibilidade ou extrema complexidade, sendo simplesmente um volume muito grande de termos a serem calculados. Com o somatório em m_{l_1} , m'_{l_1} , m_{l_2} , m'_{l_2} , teremos 30 termos a serem calculados. Em cada um destes termos se faz necessário o cálculo de seis funções dos somatórios em t , q e q' , totalizando 180 integrais entre 4 ou 5 harmônicos esféricos. Usando algumas simetrias conseguimos reduzir este número para noventa, mas mesmo assim todos os 180 resultados aparecem no cálculo final. Desse modo nos furtamos de apresentar tais elementos neste momento. A médio prazo, estes cálculos podem ser realizados e os resultados numéricos analisados, demonstrando a validade do método aqui empregado.

Capítulo 4

Conclusão

No presente trabalho estudamos alguns aspectos da restauração da simetria translacional em modelos nucleares relativísticos, e, em especial obtivemos expressões analíticas adequadas ao cálculo do valor da energia do estado fundamental para um núcleo duplamente mágico qualquer. Feito isso aplicamos as expressões obtidas para os núcleos de hélio e oxigênio, que são os mais leves. A nossa intenção foi a de dar ênfase aos casos onde a correção de centro de massa produz efeito mais relevantes. Como comentamos no texto, o procedimento que é freqüentemente usado na literatura para levar em conta o movimento do centro de massa, consiste em usar o modelo de camadas do oscilador harmônico não relativístico, pois neste caso temos a expressão analítica $\Delta E_{CM} = -\frac{3}{4}41A^{-1/3} (MeV)$ para tal correção. Como tal correção é uma constante para um dado núcleo, o cálculo variacional usado para obtermos os spinores de Dirac de partícula independente não se altera. Apenas para termos idéia da importância do efeito do movimento do centro de massa, mostramos na tabela abaixo o valor da correção no caso dos núcleos do ${}^4\text{He}$, ${}^{16}\text{O}$ e ${}^{208}\text{Pb}$:

	$\Delta E_{CM} (MeV)$	Energia de ligação experimental (MeV)
${}^4\text{He}$	-19.4	28.3
${}^{16}\text{O}$	-12.2	127.6
${}^{208}\text{Pb}$	-5.2	1634.9

Da tabela notamos a importância do efeito da correção de centro de massa para os núcleos leves. o caso de núcleos pesados, tal efeito é pouco relevante. Isto justifica porque no nosso trabalho nos detemos nos dois núcleos mais leves. Vemos que na literatura o estudo

do efeito translacional em núcleos leves, mesmo em cálculos relativísticos mais completos [11] ainda é feito através da correção não relativística do modelo de camadas do oscilador harmônico. Da tabela vemos que não podemos desprezar esta correção, visto que para o núcleo de hélio, a correção é da ordem de 40% da energia de ligação medida.

As expressões obtidas necessitam de algum trabalho computacional para produzir resultados numéricos. Apesar disto podemos concluir algumas coisas pertinentes ao próprio processo do cálculo.

Em primeiro lugar ressaltamos que para núcleos pequenos o cálculo é simples, e, se os resultados numéricos forem realmente satisfatórios, estaremos diante de uma ferramenta importante para calcular outras propriedades nucleares.

Tal simplicidade pode ser usada para uma generalização do procedimento para núcleos leves que não sejam de camada fechada (caso em que as funções de onda são mais complexas).

Como foi visto o cálculo torna-se bastante extenso para uma quantidade maior de nucleons, entretanto, vimos também que para núcleos mais pesados, a correção não é muito importante. Este tipo de dificuldade não aparece em cálculos de propriedades de nucleons e mésons, pois aparecem apenas três e dois quarks respectivamente nos cálculos.

Nosso próximo passo será utilizar as expressões obtidas para a realização de cálculos numéricos.

Apêndice A

Métrica e Definições

Tensor Métrico:

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Coordenadas contravariantes:

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, x, y, z) = (t, \mathbf{x}).$$

Coordenadas covariantes:

$$x_\mu = g_{\mu\nu}x^\nu = (t, -x, -y, -z) = (t, -\mathbf{x}).$$

Produto escalar:

$$A_\mu B^\mu = A_\mu g^{\mu\nu} B_\nu = A_0 B_0 - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}.$$

Derivadas:

$$\partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla} \right)$$

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla} \right)$$

onde

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

Quadri-divergência:

$$\partial^\mu A_\mu = \frac{\partial A_0}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \mathbf{A}.$$

Para as matrizes de Dirac

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} I,$$

$$\gamma_\mu = g_{\mu\nu} \gamma^\nu.$$

Onde I é a matriz identidade:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\gamma^\mu = (\gamma^0, \boldsymbol{\gamma})$$

$$\gamma_\mu = (\gamma^0, -\boldsymbol{\gamma}).$$

$$\alpha = \gamma^0 \boldsymbol{\gamma}$$

$$(\gamma^0)^2 = 1$$

$$(\gamma^k)^2 = -1$$

Representação de Dirac

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$$

Matrizes de Pauli

$$\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3).$$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Definições e relações úteis,

$$\not{k} = \gamma_\mu k^\mu = \gamma^0 k^0 - \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{k}$$

$$\hbar = c = 1$$

$$\square = \partial^\mu \partial_\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$$

A.1 Propriedades dos Harmônicos Esféricos

O produto de dois harmônicos esféricos pode ser escrito como um único harmônico esférico

$$Y_{l_1 m_1}(\Omega) Y_{l_2 m_2}(\Omega) = \sqrt{\frac{(2l_1 + 1)(2l_2 + 1)}{4\pi}} \sum_{l' m'} \sqrt{\frac{1}{2l' + 1}} Y_{l' m'}(\Omega) C_{m_1 m_2 m'}^{l_1 l_2 l'} C_{0 0 0}^{l_1 l_2 l'}$$

Uma integral entre três harmônicos esféricos é resolvida usando a seguinte propriedade

$$\int d\Omega Y_{l' m'}^*(\Omega) Y_{l_1 m_1}(\Omega) Y_{l_2 m_2}(\Omega) = \sqrt{\frac{(2l_1 + 1)(2l_2 + 1)}{(2l' + 1)4\pi}} C_{m_1 m_2 m'}^{l_1 l_2 l'} C_{0 0 0}^{l_1 l_2 l'}$$

Apêndice B

Resultados

B.1 Resultados do overlap

São apresentados agora os resultados calculados para $B_{l,j,m,l',j',m'}$ (os elementos de matriz que já apareceram no texto da dissertação não estão incluídos aqui). Quanto aos números quânticos $a_1 = n, l, j$, notamos que o rótulo n é redundante, então rotulamos as funções de onda radiais somente por $a_1 = l, j$ e $a'_1 = l', j'$.

$$B_{0,1/2,1/2,1,1/2,1/2} = \int_0^\infty dr \left[- \sum_L \eta^{(0,1/2,1,1/2)}(r, a) \frac{r}{\sqrt{12\pi}} \delta_{L1} + \sum_{\bar{L}} \xi_{\bar{L}}^{(0,1/2,1,1/2)}(r, a) \frac{r}{\sqrt{6\pi}} \left(\frac{1}{4\pi\sqrt{5}} \delta_{\bar{L}2} - \frac{1}{(4\pi)^{3/2}} \delta_{\bar{L}0} \right) \right]$$

$$B_{1,1/2,1/2,0,1/2,1/2} = \int_0^\infty dr \left[- \sum_L \eta^{(1,1/2,0,1/2)}(r, a) \frac{r}{\sqrt{12\pi}} \delta_{L1} + \sum_{\bar{L}} \xi_{\bar{L}}^{(1,1/2,0,1/2)}(r, a) \frac{r}{\sqrt{6\pi}} \left(\frac{1}{4\pi\sqrt{5}} \delta_{\bar{L}2} - \frac{1}{(4\pi)^{3/2}} \delta_{\bar{L}0} \right) \right]$$

$$B_{0,1/2,1/2,1,3/2,1/2} = \int_0^\infty dr \left[\sum_L \eta_L^{(0,1/2,1,3/2)}(r, a) \frac{r}{\sqrt{12\pi}} \delta_{L1} + \sum_{\bar{L}} \xi_{\bar{L}}^{(0,1/2,1,3/2)}(r, a) \frac{r}{\sqrt{12\pi}} \left(\frac{1}{4\pi\sqrt{5}} \delta_{\bar{L}2} - \frac{1}{(4\pi)^{3/2}} \delta_{\bar{L}0} \right) \right]$$

$$B_{1,3/2,1/2,0,1/2,1/2} = \int_0^\infty r^2 dr \left[\sum_L \eta_L^{(1,3/2,0,1/2)}(r, a) \frac{r}{\sqrt{12\pi}} \delta_{L1} + \sum_{\bar{L}} \xi_{\bar{L}}^{(1,3/2,0,1/2)}(r, a) \frac{r}{\sqrt{12\pi}} \left(\frac{1}{4\pi\sqrt{5}} \delta_{\bar{L}2} - \frac{1}{(4\pi)^{3/2}} \delta_{\bar{L}0} \right) \right]$$

$$B_{1,3/2,1/2,1,1/2,1/2} = \int_0^\infty dr \left\{ \sum_L \eta_L^{(1,3/2,1,1/2)}(r, a) \left[\frac{\sqrt{2}}{12(4\pi)^{3/2}} \delta_{L0} (12\pi a^2 - r^2 (48\pi + 4)) + \frac{r^2}{3\sqrt{10\pi}} \delta_{L2} (1 + 2\sqrt{4\pi}) \right] + \sum_{\bar{L}} \xi_{\bar{L}}^{(1,3/2,1,1/2)}(r, a) \left[\frac{\sqrt{3}ar}{96\pi^2} \delta_{\bar{L}0} - \frac{3r^2}{20\pi} \delta_{\bar{L}1} - \frac{\sqrt{3}ar}{24\pi\sqrt{5}} \delta_{\bar{L}2} + \frac{3\sqrt{3}r^2}{20\pi\sqrt{5}} \delta_{\bar{L}3} \right] \right\}$$

$$B_{1,3/2,1/2,1,1/2,1/2} = \int_0^\infty dr \left\{ \sum_L \eta_L^{(1,3/2,1,1/2)}(r, a) \left[\frac{\sqrt{2}}{12(4\pi)^{3/2}} \delta_{L0} (12\pi a^2 - r^2 (48\pi + 4)) + \frac{r^2}{3\sqrt{10\pi}} \delta_{L2} (1 + 2\sqrt{4\pi}) \right] + \sum_{\bar{L}} \xi_{\bar{L}}^{(1,3/2,1,1/2)}(r, a) \left[-\frac{\sqrt{3}ar}{96\pi} \delta_{\bar{L}0} - \frac{3r^2}{20\pi} \delta_{\bar{L}1} + \frac{\sqrt{3}ar}{24\pi\sqrt{5}} \delta_{\bar{L}2} + \frac{3\sqrt{3}r^2}{20\pi\sqrt{5}} \delta_{\bar{L}3} \right] \right\}$$

$$B_{1,3/2,1/2,1,3/2,1/2} = \int_0^\infty dr \left\{ \sum_L \eta_L^{(1,3/2,1,3/2)}(r, a) \left[\delta_{L0} \left(\frac{2r^2}{\sqrt{4\pi}} - \frac{a^2}{2\sqrt{4\pi}} - \frac{r^2}{3(4\pi)^{3/2}} \right) + \delta_{L2} r^2 \left(\frac{4}{3\sqrt{20\pi}} + \frac{r^2}{12\pi\sqrt{5}} \right) \right] + \sum_{\bar{L}} \xi_{\bar{L}}^{(1,3/2,1,3/2)}(r, a) \frac{ar\sqrt{6}}{3\sqrt{4\pi}} \left(\frac{1}{4\pi\sqrt{5}} \delta_{\bar{L}2} - \frac{1}{(4\pi)^{3/2}} \right) \right\}$$

$$B_{1,3/2,\pm 3/2,1,3/2,\pm 3/2} = \int_0^\infty dr \left\{ \sum_L \eta_L^{(1,3/2,1,3/2)}(r, a) \left[\frac{1}{6(4\pi)^{3/2}} \delta_{L0} (r^2(24\pi - 2) - 12\pi a^2) + r^2 \delta_{L2} \left(\frac{4}{3\sqrt{20\pi}} + \frac{1}{12\pi\sqrt{5}} \right) + \sum_{\bar{L}} \xi_{\bar{L}}^{(1,3/2,1,3/2)}(r, a) \frac{ar\sqrt{6}}{3(4\pi)^{3/2}} \left(\frac{\delta_{\bar{L}2}}{\sqrt{5}} - \frac{\delta_{\bar{L}0}}{\sqrt{4\pi}} \right) \right] \right\}$$

$$B_{1,1/2,-1/2,0,1/2,-1/2} = \int_0^\infty dr \sum_L \eta_L^{(1,1/2,0,1/2)}(r, a) \frac{r}{\sqrt{12\pi}} \delta_{L1} - \sum_{\bar{L}} \xi_{\bar{L}}^{(1,1/2,0,1/2)}(r, a) \frac{r}{\sqrt{6\pi}} \left(\frac{1}{4\pi\sqrt{5}} \delta_{\bar{L}2} - \frac{1}{(4\pi)^{3/2}} \delta_{\bar{L}0} \right)$$

$$B_{0,1/2,-1/2,1,1/2,-1/2} = \int_0^\infty dr \left[\sum_L \eta^{(0,1/2,1,1/2)}(r, a) \frac{r}{\sqrt{12\pi}} \delta_{L1} - \sum_{\bar{L}} \xi_{\bar{L}}^{(0,1/2,1,1/2)}(r, a) \frac{r}{\sqrt{6\pi}} \left(\frac{1}{4\pi\sqrt{5}} \delta_{\bar{L}2} - \frac{1}{(4\pi)^{3/2}} \delta_{\bar{L}0} \right) \right]$$

$$B_{1,1/2,-1/2,1,1/2,-1/2} = \int_0^\infty dr \left\{ \eta_0^{(1,1/2,1,1/2)}(r, a) \frac{(12\pi + 2)r^2 - 9\pi a^2}{3(4\pi)^{3/2}} + \sum_{\bar{L}} \xi_{\bar{L}}^{(1,1/2,1,1/2)}(r, a) \frac{a\sqrt{2}r}{(4\pi)^{3/2}} \left(\frac{\delta_{\bar{L}2}}{\sqrt{5}} - \frac{\delta_{\bar{L}0}}{(4\pi)^{1/2}} \right) \right\}$$

$$B_{1,3/2,-1/2,1,1/2,-1/2} = \int_0^\infty dr \left\{ \sum_L \eta_L^{(1,3/2,1,1/2)}(r, a) \left[\frac{\sqrt{2}}{12(4\pi)^{3/2}} \delta_{L0} (12\pi a^2 - r^2(48\pi + 4)) + \frac{r^2}{3\sqrt{10\pi}} \delta_{L2} (1 + 2\sqrt{4\pi}) \right] + \sum_{\bar{L}} \xi_{\bar{L}}^{(1,3/2,1,1/2)}(r, a) \left[-\frac{\sqrt{3}ar}{96\pi} \delta_{\bar{L}0} + \frac{3r^2}{20\pi} \delta_{\bar{L}1} + \frac{\sqrt{3}ar}{24\pi\sqrt{5}} \delta_{\bar{L}2} - \frac{3\sqrt{3}r^2}{20\pi\sqrt{5}} \delta_{\bar{L}3} \right] \right\}$$

$$\begin{aligned}
B_{1,1/2,-1/2,1,3/2,-1/2} &= \int_0^\infty dr \left\{ \sum_{\bar{L}} \eta_{\bar{L}}^{(1,1/2,1,3/2)}(r, a) \left[\frac{\sqrt{2}}{12(4\pi)^{3/2}} \delta_{\bar{L}0} (12\pi a^2 - r^2 (48\pi + 4)) + \right. \right. \\
&\quad \left. \frac{r^2}{3\sqrt{10}\pi} \delta_{\bar{L}2} (1 + 2\sqrt{4\pi}) \right] + \sum_{\bar{L}} \xi_{\bar{L}}^{(1,1/2,1,3/2)}(r, a) \times \\
&\quad \left. \left[\frac{\sqrt{3}ar}{96\pi} \delta_{\bar{L}0} + \frac{3r^2}{20\pi} \delta_{\bar{L}1} - \frac{\sqrt{3}ar}{24\pi\sqrt{5}} \delta_{\bar{L}2} - \frac{3\sqrt{3}r^2}{20\pi\sqrt{5}} \delta_{\bar{L}3} \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{1,3/2,-1/2,1,3/2,-1/2} &= \int_0^\infty dr \left\{ \sum_{\bar{L}} \eta_{\bar{L}}^{(1,3/2,1,3/2)}(r, a) \left[\delta_{\bar{L}0} \left(\frac{2r^2}{\sqrt{4\pi}} - \frac{a^2}{2\sqrt{4\pi}} - \frac{r^2}{3(4\pi)^{3/2}} \right) + \right. \right. \\
&\quad \left. \delta_{\bar{L}2} r^2 \left(\frac{4}{3\sqrt{20}\pi} + \frac{r^2}{12\pi\sqrt{5}} \right) \right] + \\
&\quad \left. \sum_{\bar{L}} \xi_{\bar{L}}^{(1,3/2,1,3/2)}(r, a) \frac{ar\sqrt{6}}{3\sqrt{4\pi}} \left(\frac{1}{4\pi\sqrt{5}} \delta_{\bar{L}2} - \frac{1}{(4\pi)^{3/2}} \delta_{\bar{L}0} \right) \right\}
\end{aligned}$$

B.2 Resultados do Potencial Escalar

Os resultados do cálculo de $\langle \phi_\alpha \phi_\beta | V_e e^{i\hat{p} \cdot \vec{a}} | \phi_{\alpha'} \phi_{\beta'} \rangle = \bar{V}_e$ são apresentados para valores de $\alpha = \beta$ e $\alpha' = \beta'$. Para simplificar a notação indicaremos quais os números quânticos que estão sendo utilizados e o respectivo valor de \bar{V}_e . Além disso, ao final de todos os termos, aparecerá um termo *part(2)*, que representa um termo similar envolvendo as quantidades da partícula 2.

$$\alpha = \beta = 0, 1/2, 1/2 \text{ e } \alpha' = \beta' = 1, 1/2, 1/2:$$

$$\begin{aligned}
V_e &= -g_\sigma^2 m_\sigma \int_0^\infty dr_1 \int_0^\infty dr_2 \sum_{\bar{L}} \left\{ \sum_{\bar{L}} \eta_{\bar{L}}^{(0,1/2,1,1/2)}(r_1, a) \right. \\
&\quad \times \left[-\frac{r_1}{12\pi} \sqrt{(2\bar{L}+1)(2\bar{L}+1)} (C_{000}^{\bar{L}\bar{L}1})^2 - \frac{a}{8\pi} \delta_{\bar{L}\bar{L}} \right] + \sum_{\bar{L}} \xi_{\bar{L}}^{(0,1/2,1,1/2)}(r_1, a) \sqrt{\frac{1}{6\pi}} r_1 \\
&\quad \times \left[\frac{1}{\sqrt{20}\pi} \sqrt{\frac{(2\tilde{\bar{L}}+1)(2\bar{L}+1)}{4\pi}} (C_{000}^{\tilde{\bar{L}}\bar{L}2})^2 - \frac{1}{4\pi} \delta_{\bar{L}\bar{L}} \right] \times \text{part}(2) \times i_{\bar{L}}(m_\sigma r_<) K_{\bar{L}}(m_\sigma r_>)
\end{aligned}$$

$$\alpha = \beta = 0, 1/2, 1/2 \text{ e } \alpha' = \beta' = 1, 3/2, 1/2:$$

$$\begin{aligned}
V_e = & -g_\sigma^2 m_\sigma \int_0^\infty dr_1 \int_0^\infty dr_2 \sum_{\bar{L}} \left\{ \sum_L \eta_L^{(0,1/2,1,3/2)}(r_1, a) \sqrt{\frac{2}{3}} \right. \\
& \times \left[\frac{r_1}{12\pi} \sqrt{(2L+1)(2\bar{L}+1)} (C_{0000}^{L\bar{L}1})^2 + \frac{a}{8\pi} \delta_{L\bar{L}} \right] + \sum_{\bar{L}} \xi_{\bar{L}}^{(0,1/2,1,3/2)}(r_1, a) \sqrt{\frac{1}{12\pi}} \\
& \times \left[\frac{r_1}{\sqrt{5}} \sqrt{\frac{(2\tilde{L}+1)(2\bar{L}+1)}{20\pi}} (C_{0000}^{L\bar{L}2})^2 + \frac{r_1}{\sqrt{4\pi}} \delta_{L\bar{L}} \right] \times part(2) \times i_{\bar{L}}(m_\sigma r_<) K_{\bar{L}}(m_\sigma r_>)
\end{aligned}$$

$$\alpha = \beta = 1, 1/2, 1/2 \text{ e } \alpha' = \beta' = 0, 1/2, 1/2:$$

$$\begin{aligned}
V_e = & -g_\sigma^2 m_\sigma \int_0^\infty dr_1 \int_0^\infty dr_2 \sum_{\bar{L}} \left\{ \sum_L \eta_L^{(1,1/2,0,1/2)}(r_1, a) \right. \\
& \times \left[-\frac{r_1}{12\pi} \sqrt{(2L+1)(2\bar{L}+1)} (C_{0000}^{L\bar{L}1})^2 + \frac{a}{8\pi} \delta_{L\bar{L}} \right] + \sum_{\bar{L}} \xi_{\bar{L}}^{(1,1/2,0,1/2)}(r_1, a) \sqrt{\frac{1}{6\pi}} r_1 \\
& \times \left[\frac{1}{20\pi} \sqrt{\frac{(2\tilde{L}+1)(2\bar{L}+1)}{4\pi}} (C_{0000}^{\bar{L}\bar{L}2})^2 - \frac{1}{4\pi} \delta_{L\bar{L}} \right] \times part(2) \times i_{\bar{L}}(m_\sigma r_<) K_{\bar{L}}(m_\sigma r_>)
\end{aligned}$$

$$\alpha = \beta = 0, 1/2, 1/2 \text{ e } \alpha' = \beta' = 1, 3/2, 1/2:$$

$$\begin{aligned}
V_e = & -g_\sigma^2 m_\sigma \int_0^\infty dr_1 \int_0^\infty dr_2 \sum_{\bar{L}} \left\{ \sum_L \eta_L^{(0,1/2,1,3/2)}(r_1, a) \sqrt{\frac{2}{3}} \right. \\
& \times \left[\frac{1}{4\pi} r_1 \sqrt{\frac{(2L+1)(2\bar{L}+1)}{3}} (C_{0000}^{L\bar{L}1})^2 - \frac{a\sqrt{3}}{8\pi} \delta_{L\bar{L}} \right] - \sum_{\bar{L}} \xi_{\bar{L}}^{(0,1/2,1,3/2)}(r_1, a) \sqrt{\frac{1}{12\pi}} \\
& \times \left[\frac{r_1}{\sqrt{5}} \sqrt{\frac{(2\tilde{L}+1)(2\bar{L}+1)}{20\pi}} (C_{0000}^{L\bar{L}2})^2 + \frac{r_1}{\sqrt{4\pi}} \delta_{L\bar{L}} \right] \times part(2) \times i_{\bar{L}}(m_\sigma r_<) K_{\bar{L}}(m_\sigma r_>)
\end{aligned}$$

$$\alpha = \beta = 1, 1/2, 1/2 \text{ e } \alpha' = \beta' = 1, 1/2, 1/2:$$

$$V_e = -g_\sigma^2 m_\sigma \int_0^\infty dr_1 \int_0^\infty dr_2 \sum_{\bar{L}} \left\{ \sum_L \eta_L^{(1,1/2,1,1/2)}(r_1, a) \left[\frac{2}{15} \sqrt{\frac{(2L+1)(2\bar{L}+1)}{4\pi}} (C_{0000}^{L\bar{L}2})^2 \right. \right.$$

$$\begin{aligned} & \times \left(\frac{r_1^2}{3} - \frac{r_1^2}{4\pi} \right) + \frac{1}{4\pi} \delta_{L\bar{L}} \left(r_1^2 + \frac{2r_1^2}{3} \right) \Big] + \sum_{\bar{L}} \xi_{\bar{L}}^{(1,1/2,1,1/2)}(r_1, a) \frac{a\sqrt{6}}{12\pi} \left(\sqrt{\frac{(2\tilde{L}+1)(2\bar{L}+1)}{20\pi}} \right. \\ & \left. \times (C_{000}^{\bar{L}\bar{L}2})^2 - \frac{1}{4\pi} \delta_{\bar{L}\bar{L}} \right) \Big\} \times \text{part}(2) \times i_{\bar{L}}(m_\sigma r_{<}) K_{\bar{L}}(m_\sigma r_{>}) \end{aligned}$$

$$\alpha = \beta = 1, 3/2, 1/2 \text{ e } \alpha' = \beta' = 1, 1/2, 1/2:$$

$$\begin{aligned} V_e &= -g_\sigma^2 m_\sigma \int_0^\infty dr_1 \int_0^\infty dr_2 \sum_{\bar{L}} \left\{ \sum_L \eta_L^{(1,3/2,1,1/2)}(r_1, a) \left[\delta_{L\bar{L}} \left(\frac{3a^2}{16\pi} + \sqrt{2} r_1 \left(\frac{1}{12\pi} - \frac{1}{(4\pi)^{3/2}} \right) \right) \right. \right. \\ & - \frac{\sqrt{2} r_1^2}{5(4\pi)^{3/2}} \sqrt{(2L+1)(2\bar{L}+1)} (C_{000}^{\bar{L}\bar{L}2})^2 \Big] + \sum_{\bar{L}} \xi_{\bar{L}}^{(1,3/2,1,1/2)}(r_1, a) \sqrt{(2\tilde{L}+1)(2\bar{L}+1)} \\ & \times \left[\frac{r_1^2}{\sqrt{3}(4\pi)^{3/2}} \left(\frac{2}{\sqrt{5}} - 1 \right) (C_{000}^{\bar{L}\bar{L}1})^2 + \frac{3r_1^2\sqrt{3}}{5\sqrt{7}(4\pi)^{3/2}} (C_{000}^{\bar{L}\bar{L}3})^2 - \frac{a\sqrt{3}r_1}{480\pi^2} (C_{000}^{\bar{L}\bar{L}2})^2 \right] \\ & \left. - \sum_{\bar{L}} \xi_{\bar{L}}^{(1,3/2,1,1/2)}(r_1, a) \frac{a\sqrt{3}r_1}{6(4\pi)^{3/2}} \delta_{\bar{L}\bar{L}} \right\} \times \text{part}(2) \times i_{\bar{L}}(m_\sigma r_{<}) K_{\bar{L}}(m_\sigma r_{>}) \end{aligned}$$

$$\alpha = \beta = 1, 1/2, 1/2 \text{ e } \alpha' = \beta' = 1, 3/2, 1/2:$$

$$\begin{aligned} V_e &= -g_\sigma^2 m_\sigma \int_0^\infty dr_1 \int_0^\infty dr_2 \sum_{\bar{L}} \left\{ \sum_L \eta_L^{(1,1/2,1,3/2)}(r_1, a) \left[\delta_{L\bar{L}} \left(\frac{3a^2}{16\pi} + \sqrt{2} r_1 \left(\frac{1}{12\pi} - \frac{1}{(4\pi)^{3/2}} \right) \right) \right. \right. \\ & - \frac{\sqrt{2} r_1^2}{5(4\pi)^{3/2}} \sqrt{(2L+1)(2\bar{L}+1)} (C_{000}^{\bar{L}\bar{L}2})^2 \Big] + \sum_{\bar{L}} \xi_{\bar{L}}^{(1,1/2,1,3/2)}(r_1, a) \sqrt{(2\tilde{L}+1)(2\bar{L}+1)} \\ & \times \left[\frac{r_1^2}{\sqrt{3}(4\pi)^{3/2}} \left(\frac{2}{\sqrt{5}} - 1 \right) (C_{000}^{\bar{L}\bar{L}1})^2 + \frac{3r_1^2\sqrt{3}}{5\sqrt{7}(4\pi)^{3/2}} (C_{000}^{\bar{L}\bar{L}3})^2 + \frac{a\sqrt{3}r_1}{480\pi^2} (C_{000}^{\bar{L}\bar{L}2})^2 \right] \\ & \left. + \sum_{\bar{L}} \xi_{\bar{L}}^{(1,1/2,1,3/2)}(r_1, a) \frac{a\sqrt{3}r_1}{6(4\pi)^{3/2}} \delta_{\bar{L}\bar{L}} \right\} \times \text{part}(2) \times i_{\bar{L}}(m_\sigma r_{<}) K_{\bar{L}}(m_\sigma r_{>}) \end{aligned}$$

$$\alpha = \beta = 1, 3/2, 1/2 \text{ e } \alpha' = \beta' = 1, 3/2, 1/2:$$

$$V_e = -g_\sigma^2 m_\sigma \int_0^\infty dr_1 \int_0^\infty dr_2 \sum_{\bar{L}} \left\{ \sum_L \eta_L^{(1,3/2,1,3/2)}(r_1, a) \left[\frac{r_1^2}{180\pi} \sqrt{\frac{(2\tilde{L}+1)(2\bar{L}+1)}{4\pi}} \right. \right.$$

$$\begin{aligned} & \times \left(C_{000}^{L\bar{L}2} \right)^2 (16\pi - 3) + \frac{7r_1^2}{12\pi} \delta_{L\bar{L}} \left] - \sum_{\bar{L}} \xi_{\bar{L}}^{(1,3/2,1,3/2)}(r_1, a) \frac{a\sqrt{6}r_1}{12\pi} \left(\frac{1}{20\pi} \sqrt{\frac{(2\tilde{L}+1)(2\bar{L}+1)}{4\pi}} \right. \right. \\ & \left. \left. \times \left(C_{000}^{\bar{L}L2} \right)^2 - \frac{1}{4\pi} \delta_{\bar{L}L} \right) \right\} \times \text{part}(2) \times i_{\bar{L}}(m_\sigma r_{<}) K_{\bar{L}}(m_\sigma r_{>}) \end{aligned}$$

$$\alpha = \beta = 1, 3/2, \pm 3/2 \text{ e } \alpha' = \beta' = 1, 3/2, \pm 3/2:$$

$$\begin{aligned} V_e = & -g_\sigma^2 m_\sigma \int_0^\infty dr_1 \int_0^\infty dr_2 \sum_{L, \bar{L}} \eta_L^{(1,3/2,1,3/2)}(r_1, a) r_1^2 \left[\frac{1}{4\pi} \delta_{L\bar{L}} - \frac{1}{20\pi} \sqrt{\frac{(2\tilde{L}+1)(2\bar{L}+1)}{4\pi}} \right. \\ & \left. \times \left(C_{000}^{\bar{L}L2} \right)^2 \right] \times \text{part}(2) \times i_{\bar{L}}(m_\sigma r_{<}) K_{\bar{L}}(m_\sigma r_{>}) \end{aligned}$$

$$\alpha = \beta = 0, 1/2, -1/2 \text{ e } \alpha' = \beta' = 1, 1/2, -1/2:$$

$$\begin{aligned} V_e = & -g_\sigma^2 m_\sigma \int_0^\infty dr_1 \int_0^\infty dr_2 \sum_{\bar{L}} \left\{ \sum_L \eta_L^{(0,1/2,1,1/2)}(r_1, a) \right. \\ & \times \left[\frac{r_1}{12\pi} \sqrt{(2L+1)(2\bar{L}+1)} \left(C_{000}^{L\bar{L}1} \right)^2 + \frac{a}{8\pi} \delta_{L\bar{L}} \right] + \sum_{\bar{L}} \xi_{\bar{L}}^{(0,1/2,1,1/2)}(r_1, a) \sqrt{\frac{1}{6\pi}} r_1 \\ & \left. \times \left[\frac{1}{\sqrt{20\pi}} \sqrt{\frac{(2\tilde{L}+1)(2\bar{L}+1)}{4\pi}} \left(C_{000}^{\bar{L}L2} \right)^2 - \frac{1}{4\pi} \delta_{\bar{L}L} \right] \right\} \times \text{part}(2) \times i_{\bar{L}}(m_\sigma r_{<}) K_{\bar{L}}(m_\sigma r_{>}) \end{aligned}$$

$$\alpha = \beta = 0, 1/2, -1/2 \text{ e } \alpha' = \beta' = 1, 3/2, -1/2:$$

$$\begin{aligned} V_e = & -g_\sigma^2 m_\sigma \int_0^\infty dr_1 \int_0^\infty dr_2 \sum_{\bar{L}} \left\{ \sum_L \eta_L^{(0,1/2,1,3/2)}(r_1, a) \sqrt{\frac{2}{3}} \right. \\ & \times \left[\frac{1}{4\pi} r_1 \sqrt{\frac{(2L+1)(2\bar{L}+1)}{3}} \left(C_{000}^{L\bar{L}1} \right)^2 + \frac{a\sqrt{3}}{8\pi} \delta_{L\bar{L}} \right] + \sum_{\bar{L}} \xi_{\bar{L}}^{(0,1/2,1,3/2)}(r_1, a) \sqrt{\frac{1}{12\pi}} \\ & \left. \times \left[\frac{r_1}{\sqrt{5}} \sqrt{\frac{(2\tilde{L}+1)(2\bar{L}+1)}{20\pi}} \left(C_{000}^{\bar{L}L2} \right)^2 + \frac{r_1}{\sqrt{4\pi}} \delta_{\bar{L}L} \right] \right\} \times \text{part}(2) \times i_{\bar{L}}(m_\sigma r_{<}) K_{\bar{L}}(m_\sigma r_{>}) \end{aligned}$$

$$\alpha = \beta = 1, 1/2, -1/2 \text{ e } \alpha' = \beta' = 0, 1/2, -1/2:$$

$$\begin{aligned}
V_e &= -g_\sigma^2 m_\sigma \int_0^\infty dr_1 \int_0^\infty dr_2 \sum_{\bar{L}} \left\{ \sum_L \eta_L^{(1,1/2,0,1/2)}(r_1, a) \right. \\
&\times \left[\frac{r_1}{12\pi} \sqrt{(2L+1)(2\bar{L}+1)} (C_{000}^{L\bar{L}1})^2 - \frac{a}{8\pi} \delta_{L\bar{L}} \right] + \sum_{\bar{L}} \xi_{\bar{L}}^{(1,1/2,0,1/2)}(r_1, a) \sqrt{\frac{1}{6\pi}} r_1 \\
&\times \left[\frac{1}{\sqrt{20\pi}} \sqrt{\frac{(2\tilde{L}+1)(2\bar{L}+1)}{4\pi}} (C_{000}^{\tilde{L}\bar{L}2})^2 - \frac{1}{4\pi} \delta_{\tilde{L}\bar{L}} \right] \times part(2) \times i_{\bar{L}}(m_\sigma r_<) K_{\bar{L}}(m_\sigma r_>)
\end{aligned}$$

$$\alpha = \beta = 1, 1/2, -1/2 \text{ e } \alpha' = \beta' = 0, 3/2, -1/2:$$

$$\begin{aligned}
V_e &= -g_\sigma^2 m_\sigma \int_0^\infty dr_1 \int_0^\infty dr_2 \sum_{\bar{L}} \left\{ \sum_L \eta_L^{(1,1/2,0,3/2)}(r_1, a) \sqrt{\frac{2}{3}} \right. \\
&\times \left[\frac{1}{4\pi} r_1 \sqrt{\frac{(2L+1)(2\bar{L}+1)}{3}} (C_{000}^{L\bar{L}1})^2 - \frac{a\sqrt{3}}{8\pi} \delta_{L\bar{L}} \right] - \sum_{\bar{L}} \xi_{\bar{L}}^{(1,1/2,0,3/2)}(r_1, a) \sqrt{\frac{1}{12\pi}} \\
&\times \left[\frac{r_1}{\sqrt{5}} \sqrt{\frac{(2\tilde{L}+1)(2\bar{L}+1)}{20\pi}} (C_{000}^{\tilde{L}\bar{L}2})^2 + \frac{r_1}{\sqrt{4\pi}} \delta_{\tilde{L}\bar{L}} \right] \times part(2) \times i_{\bar{L}}(m_\sigma r_<) K_{\bar{L}}(m_\sigma r_>)
\end{aligned}$$

$$\alpha = \beta = 1, 1/2, -1/2 \text{ e } \alpha' = \beta' = 1, 1/2, -1/2:$$

$$\begin{aligned}
V_e &= -g_\sigma^2 m_\sigma \int_0^\infty dr_1 \int_0^\infty dr_2 \sum_{\bar{L}} \left\{ \sum_L \eta_L^{(1,1/2,1,1/2)}(r_1, a) \left[\frac{2}{15} \sqrt{\frac{(2L+1)(2\bar{L}+1)}{4\pi}} (C_{000}^{L\bar{L}2})^2 \right. \right. \\
&\times \left. \left. \left(\frac{r_1^2}{3} - \frac{r_1^2}{4\pi} \right) + \frac{1}{4\pi} \delta_{L\bar{L}} \left(r_1^2 + \frac{2r_1^2}{3} \right) \right] + \sum_{\bar{L}} \xi_{\bar{L}}^{(1,1/2,1,1/2)}(r_1, a) \frac{a\sqrt{6}}{12\pi} \left(\sqrt{\frac{(2\tilde{L}+1)(2\bar{L}+1)}{20\pi}} \right. \right. \\
&\times \left. \left. (C_{000}^{\tilde{L}\bar{L}2})^2 - \frac{1}{4\pi} \delta_{\tilde{L}\bar{L}} \right) \right\} \times part(2) \times i_{\bar{L}}(m_\sigma r_<) K_{\bar{L}}(m_\sigma r_>)
\end{aligned}$$

$$\alpha = \beta = 1, 3/2, -1/2 \text{ e } \alpha' = \beta' = 1, 1/2, -1/2:$$

$$V_e = -g_\sigma^2 m_\sigma \int_0^\infty dr_1 \int_0^\infty dr_2 \sum_{\bar{L}} \left\{ \sum_L \eta_L^{(1,3/2,1,1/2)}(r_1, a) \left[-\delta_{L\bar{L}} \left(\frac{3a^2}{16\pi} + \sqrt{2} r_1 \left(\frac{1}{12\pi} - \frac{1}{(4\pi)^{3/2}} \right) \right) \right] \right\}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\sqrt{2}r_1^2}{5(4\pi)^{3/2}} \sqrt{(2L+1)(2\bar{L}+1)} (C_{000}^{L\bar{L}2})^2 \Big] - \sum_{\bar{L}} \xi_{\bar{L}}^{(1,3/2,1,1/2)}(r_1, a) \sqrt{(2\tilde{L}+1)(2\bar{L}+1)} \\
& \times \left[\frac{r_1^2}{\sqrt{3}(4\pi)^{3/2}} \left(\frac{2}{\sqrt{5}} - 1 \right) (C_{000}^{\bar{L}\bar{L}1})^2 + \frac{3r_1^2\sqrt{3}}{5\sqrt{7}(4\pi)^{3/2}} (C_{000}^{\bar{L}\bar{L}3})^2 - \frac{a\sqrt{3}r_1}{480\pi^2} (C_{000}^{\bar{L}\bar{L}2})^2 \right] \\
& + \sum_{\bar{L}} \xi_{\bar{L}}^{(1,3/2,1,1/2)}(r_1, a) \frac{a\sqrt{3}r_1}{6(4\pi)^{3/2}} \delta_{\bar{L}\bar{L}} \Big\} \times part(2) \times i_{\bar{L}}(m_{\sigma}r_{<}) K_{\bar{L}}(m_{\sigma}r_{>})
\end{aligned}$$

$$\alpha = \beta = 1, 1/2, -1/2 \text{ e } \alpha' = \beta' = 1, 3/2, -1/2:$$

$$\begin{aligned}
V_e = & -g_{\sigma}^2 m_{\sigma} \int_0^{\infty} dr_1 \int_0^{\infty} dr_2 \sum_{\bar{L}} \left\{ \sum_{\bar{L}} \eta_{\bar{L}}^{(1,1/2,1,3/2)}(r_1, a) \left[-\delta_{\bar{L}\bar{L}} \left(\frac{3a^2}{16\pi} + \sqrt{2}r_1 \left(\frac{1}{12\pi} - \frac{1}{(4\pi)^{3/2}} \right) \right) \right] \right. \\
& + \frac{\sqrt{2}r_1^2}{5(4\pi)^{3/2}} \sqrt{(2L+1)(2\bar{L}+1)} (C_{000}^{L\bar{L}2})^2 \Big] - \sum_{\bar{L}} \xi_{\bar{L}}^{(1,1/2,1,3/2)}(r_1, a) \sqrt{(2\tilde{L}+1)(2\bar{L}+1)} \\
& \times \left[\frac{r_1^2}{\sqrt{3}(4\pi)^{3/2}} \left(\frac{2}{\sqrt{5}} - 1 \right) (C_{000}^{\bar{L}\bar{L}1})^2 + \frac{3r_1^2\sqrt{3}}{5\sqrt{7}(4\pi)^{3/2}} (C_{000}^{\bar{L}\bar{L}3})^2 + \frac{a\sqrt{3}r_1}{480\pi^2} (C_{000}^{\bar{L}\bar{L}2})^2 \right] \\
& \left. - \sum_{\bar{L}} \xi_{\bar{L}}^{(1,1/2,1,3/2)}(r_1, a) \frac{a\sqrt{3}r_1}{6(4\pi)^{3/2}} \delta_{\bar{L}\bar{L}} \right\} \times part(2) \times i_{\bar{L}}(m_{\sigma}r_{<}) K_{\bar{L}}(m_{\sigma}r_{>})
\end{aligned}$$

$$\alpha = \beta = 1, 3/2, -1/2 \text{ e } \alpha' = \beta' = 1, 3/2, -1/2:$$

$$\begin{aligned}
V_e = & -g_{\sigma}^2 m_{\sigma} \int_0^{\infty} dr_1 \int_0^{\infty} dr_2 \sum_{\bar{L}} \left\{ \sum_{\bar{L}} \eta_{\bar{L}}^{(1,3/2,1,3/2)}(r_1, a) \left[\frac{r_1^2}{180\pi} \sqrt{\frac{(2\tilde{L}+1)(2\bar{L}+1)}{4\pi}} \right. \right. \\
& \times \left. \left. (C_{000}^{L\bar{L}2})^2 (16\pi - 3) + \frac{7r_1^2}{12\pi} \delta_{\bar{L}\bar{L}} \right] \right. \\
& \left. - \sum_{\bar{L}} \xi_{\bar{L}}^{(1,3/2,1,3/2)}(r_1, a) \frac{a\sqrt{6}r_1}{12\pi} \left(\frac{1}{20\pi} \sqrt{\frac{(2\tilde{L}+1)(2\bar{L}+1)}{4\pi}} \right. \right. \\
& \left. \left. \times (C_{000}^{\bar{L}\bar{L}2})^2 - \frac{1}{4\pi} \delta_{\bar{L}\bar{L}} \right) \right\} \times part(2) \times i_{\bar{L}}(m_{\sigma}r_{<}) K_{\bar{L}}(m_{\sigma}r_{>})
\end{aligned}$$

B.2.1 Integrais Q_{qt}^i

Estas integrais foram calculadas para todos os valores possíveis de m'_{s_i} , deixando-se a opção de valores de $m_{s_i} = \pm 1/2$ em aberto.

As integrais referentes as partículas 1 e 2 estão relacionadas segundo

$$Q_{qt}^2(-M) = (-1)^2 Q_{qt}^1(M)$$

Apresentamos então as integrais Q_{qt}^1 :

-Para $m'_{s_1} = 1/2$

$$Q_{11}^1 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} r_1 \sqrt{\frac{2k+1}{2L+1}} C_{1-1\ 0}^{k\ 1\ L} C_{0\ 0\ 0}^{k\ 1\ L} \delta_{M1} \delta_{m_{s_1} 1/2} + \left[\sqrt{\frac{3}{4\pi}} r_1 \sqrt{\frac{2k+1}{2L+1}} (C_{0\ 0\ 0}^{k\ 1\ L})^2 + \frac{a}{2} \delta_{k_1 L} \right] \delta_{M0} \delta_{m_{s_1} -1/2}$$

$$Q_{12}^1 = -\sqrt{\frac{3}{4\pi}} r_1 \sqrt{\frac{2k+1}{2L+1}} C_{1-1\ 0}^{k\ 1\ L} C_{0\ 0\ 0}^{k\ 1\ L} \delta_{M1} \delta_{m_{s_1} 1/2} + \left[\sqrt{\frac{3}{4\pi}} r_1 \sqrt{\frac{2k+1}{2L+1}} (C_{0\ 0\ 0}^{k\ 1\ L})^2 + \frac{a}{2} \delta_{k_1 L} \right] \delta_{M0} \delta_{m_{s_1} -1/2}$$

$$Q_{13}^1 = -\sqrt{\frac{3}{4\pi}} r_1 \sqrt{\frac{2k+1}{2L+1}} C_{1-1\ 0}^{k\ 1\ L} C_{0\ 0\ 0}^{k\ 1\ L} \delta_{M1} \delta_{m_{s_1} -1/2} - \left[\sqrt{\frac{3}{4\pi}} r_1 \sqrt{\frac{2k+1}{2L+1}} (C_{0\ 0\ 0}^{k\ 1\ L})^2 + \frac{a}{2} \delta_{k_1 L} \right] \delta_{M0} \delta_{m_{s_1} 1/2}$$

$$Q_{21}^1 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} r_1 \sqrt{\frac{2k+1}{2L+1}} C_{1-1\ 0}^{k\ 1\ L} C_{0\ 0\ 0}^{k\ 1\ L} \delta_{M1} \delta_{m_{s_1} 1/2} + \left[\sqrt{\frac{3}{4\pi}} r_1 \sqrt{\frac{2k+1}{2L+1}} (C_{0\ 0\ 0}^{k\ 1\ L})^2 - \frac{a}{2} \delta_{k_1 L} \right] \delta_{M0} \delta_{m_{s_1} -1/2}$$

$$Q_{22}^1 = -\sqrt{\frac{3}{4\pi}} r_1 \sqrt{\frac{2k+1}{2L+1}} C_{1-1\ 0}^{k\ 1\ L} C_{0\ 0\ 0}^{k\ 1\ L} \delta_{M1} \delta_{m_{s_1} 1/2} + \left[\sqrt{\frac{3}{4\pi}} r_1 \sqrt{\frac{2k+1}{2L+1}} (C_{0\ 0\ 0}^{k\ 1\ L})^2 - \frac{a}{2} \delta_{k_1 L} \right] \delta_{M0} \delta_{m_{s_1} -1/2}$$

$$Q_{23}^1 = -\sqrt{\frac{3}{4\pi}} r_1 \sqrt{\frac{2k+1}{2L+1}} C_{1-1\ 0}^{k\ 1\ L} C_{0\ 0\ 0}^{k\ 1\ L} \delta_{M1} \delta_{m_{s_1} -1/2} - \left[\sqrt{\frac{3}{4\pi}} r_1 \sqrt{\frac{2k+1}{2L+1}} (C_{0\ 0\ 0}^{k\ 1\ L})^2 + \frac{a}{2} \delta_{k_1 L} \right] \delta_{M0} \delta_{m_{s_1} 1/2}$$

$$- \frac{a}{2} \delta_{k_1 L} \Big] \delta_{M0} \delta_{m_{s_1} 1/2}$$

- Para $m'_{s_1} = -1/2$

$$Q_{11}^1 = -\sqrt{\frac{3}{4\pi}} r_1 \sqrt{\frac{2k+1}{2L+1}} C_{-110}^{k1L} C_{000}^{k1L} \delta_{M-1} \delta_{m_{s_1} -1/2} - \left[\sqrt{\frac{3}{4\pi}} r_1 \sqrt{\frac{2k+1}{2L+1}} (C_{000}^{k1L})^2 \right. \\ \left. + \frac{a}{2} \delta_{k_1 L} \right] \delta_{M0} \delta_{m_{s_1} 1/2}$$

$$Q_{12}^1 = -\sqrt{\frac{3}{4\pi}} r_1 \sqrt{\frac{2k+1}{2L+1}} C_{-110}^{k1L} C_{000}^{k1L} \delta_{M-1} \delta_{m_{s_1} -1/2} + \left[\sqrt{\frac{3}{4\pi}} r_1 \sqrt{\frac{2k+1}{2L+1}} (C_{000}^{k1L})^2 \right. \\ \left. + \frac{a}{2} \delta_{k_1 L} \right] \delta_{M0} \delta_{m_{s_1} 1/2}$$

$$Q_{13}^1 = -\sqrt{\frac{3}{4\pi}} r_1 \sqrt{\frac{2k+1}{2L+1}} C_{-110}^{k1L} C_{000}^{k1L} \delta_{M-1} \delta_{m_{s_1} 1/2} - \left[\sqrt{\frac{3}{4\pi}} r_1 \sqrt{\frac{2k+1}{2L+1}} (C_{000}^{k1L})^2 \right. \\ \left. + \frac{a}{2} \delta_{k_1 L} \right] \delta_{M0} \delta_{m_{s_1} 1/2}$$

$$Q_{21}^1 = -\sqrt{\frac{3}{4\pi}} r_1 \sqrt{\frac{2k+1}{2L+1}} C_{-110}^{k1L} C_{000}^{k1L} \delta_{M-1} \delta_{m_{s_1} -1/2} - \left[\sqrt{\frac{3}{4\pi}} r_1 \sqrt{\frac{2k+1}{2L+1}} (C_{000}^{k1L})^2 \right. \\ \left. - \frac{a}{2} \delta_{k_1 L} \right] \delta_{M0} \delta_{m_{s_1} 1/2}$$

$$Q_{22}^1 = -\sqrt{\frac{3}{4\pi}} r_1 \sqrt{\frac{2k+1}{2L+1}} C_{-110}^{k1L} C_{000}^{k1L} \delta_{M-1} \delta_{m_{s_1} -1/2} + \left[\sqrt{\frac{3}{4\pi}} r_1 \sqrt{\frac{2k+1}{2L+1}} (C_{000}^{k1L})^2 \right. \\ \left. - \frac{a}{2} \delta_{k_1 L} \right] \delta_{M0} \delta_{m_{s_1} 1/2}$$

$$Q_{23}^1 = -\sqrt{\frac{3}{4\pi}} r_1 \sqrt{\frac{2k+1}{2L+1}} C_{-110}^{k1L} C_{000}^{k1L} \delta_{M-1} \delta_{m_{s_1} 1/2} - \left[\sqrt{\frac{3}{4\pi}} r_1 \sqrt{\frac{2k+1}{2L+1}} (C_{000}^{k1L})^2 \right. \\ \left. - \frac{a}{2} \delta_{k_1 L} \right] \delta_{M0} \delta_{m_{s_1} 1/2}$$

Bibliografia

- [1] Walecka, J. D. , Serot,B., Int. J. Mod. Phys. **E 6** (1997) 515
- [2] Griffin, J. , Wheeler, J., Phys. Rev. **108-2** (1957).
- [3] Brockmann, R., Phys. Rev. **C. 18-3**, (1978) 1510.
- [4] Ring P., Schuck, P.. The Nuclear Many-Body Problem, 1980.Springer-Verlag
- [5] Peierls R. E., Yoccoz J., Proc. Phys. Soc. London **A70** (1957) 381.
- [6] Lübeck, E.M.,Henley,E. M., Wilets, L., Phys. Rev. **D 35**, (1987) 2809.
- [7] Walecka, J. D., Annals of Physics **83** (1974) 491.
- [8] Serot,B., Advances in Nuclear Physics **16**, 1986. Plenum Press .
- [9] Goldstein, H.. Classical Mechanics, 2^a ed., 1980. Addison-Wesley.
- [10] Gross,Franz. Relativistic Quantum mechanics and Field Theory, 1993.John wiley and Sons,
- [11] Ring, P., Part. Nucl. Phys. **37** (1996) 193.
- [12] Horowitz, C, Serot, B., Nucl. Phys. **A 368** (1981) 503.
- [13] Bender, M. et al., Eur. Phys. J. **A7** (2000) 467.
- [14] Brink, D. M.. Proceedings of the International School of Physics "Enrico Fermi". Corso XXXVI, Varena, 1966.
- [15] Bjorken, J., Drell, S.. Relativistic Quantum Mechanics, 1965. Mcgraw-Hill.

[16] Sakurai, J. J..Modern Quantum Mechanics. Rev. Ed., 1994. Addison-Wesley