

CLÁUDIA ANDRÉA DA SILVA

**UMA NOVA MODELAGEM PARA O CÁLCULO
DAS CORRENTES INTER-BARRAS EM MOTORES
DE INDUÇÃO DE GAIOLA**

**FLORIANÓPOLIS
2001**

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA
ELÉTRICA

UMA NOVA MODELAGEM PARA O CÁLCULO DAS
CORRENTES INTER-BARRAS EM MOTORES DE
INDUÇÃO DE GAIOLA

Tese submetida à
Universidade Federal de Santa Catarina
como parte dos requisitos para a
obtenção do grau de Doutor em Engenharia Elétrica.

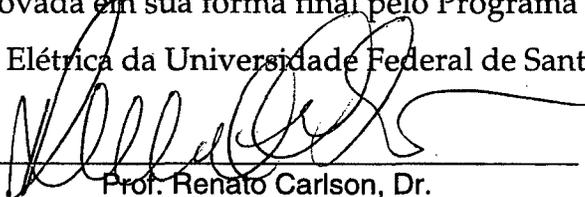
CLÁUDIA ANDRÉA DA SILVA

Florianópolis, Fevereiro de 2001

UMA NOVA MODELAGEM PARA O CÁLCULO DAS CORRENTES INTER-BARRAS EM MOTORES DE INDUÇÃO DE GAIOLA

Cláudia Andréa da Silva

'Esta Tese foi julgada adequada para obtenção do Título de Doutor em Engenharia Elétrica, Área de Concentração em *Concepção e Análise de Dispositivos Eletromagnéticos*, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Santa Catarina.'



Prof. Renato Carlson, Dr.

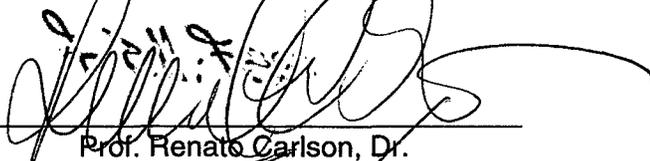
Orientador



Prof. Márcio Cherem Schneider, DSc.

Coordenador em Exercício do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

Banca Examinadora:



Prof. Renato Carlson, Dr.

Presidente



Prof. Nelson Sadowski, Dr.

Co-orientador



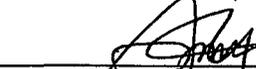
Prof. José Roberto Cardoso, Dr.



Prof. Yvan Christian Lefèvre, Dr.



Prof. Adel Razek, Dr.



Prof. Patrick Kuo-Peng, Dr.

À DIEU

**NOTRE PÈRE QUI ÊTES AUX CIEUX
QUE TON NOM SOIT SANTIFIÉ
QUE TON RÈGNE VIENNE
QUE TA VOLONTÉ SOIT FAITE
SUR LA TERRE COMME AU CIEL**

**DONNE NOUS AUJOURD'HUI NOTRE PAIN DE CE JOUR
PARDONNE NOUS NOS OFFENSES
COMME NOUS PARDONNONS
AUSSI À CEUX QUI NOUS ONT OFFENSÉ
ET NE NOUS SOUMET PAS À LA TENTATION
MAIS DELIVRES NOUS DU MAL**

AMÉM

AGRADECIMENTOS

- Ao Prof. Renato Carlson pelo esforço empregado para que esta tese pudesse se desenvolver da melhor maneira possível. Sua paciência, atenção e participação intensa foram fundamentais para o sucesso da mesma.

- Ao Prof. Yvan Lefèvre pela atenção e comprometimento com meu trabalho. Seu profissionalismo, sua inteligência e visão científica não só enriqueceram minha estadia na França como tornaram este trabalho possível.

- Ao Prof. Lajoie-Mazenc por sua amizade e sugestões inteligentes.

- Ao Prof. Nelson Sadowski por seu apoio, sugestões e amizade.

- Aos Profs. Adel Razek e José Roberto Cardoso pela honra de serem os relatores de minha tese.

- Ao Prof. Patrick Kuo-Peng por aceitar participar do júri de minha tese.

- À todo o grupo do LEEI em Toulouse pela acolhida e apoio.

- À Jean Hector por seu profissionalismo e pela paciência em resolver os inúmeros problemas computacionais.

- Aos queridos companheiros do GRUCAD, Maurício, Ana Margarida, Jean, Jhoe, Celly, Jorge, Hugo, Douglas, Paulo, Eduardo e Prof. Marcelo. Vocês estarão para sempre no meu coração.

- Aos meus amados pais, irmãos e amigos por terem permitido que tudo isto acontecesse.

- À Jad Salamé e J. M dos Santos por tudo que representam em minha vida.

- À Joseane Menezes, minha incansável e adorável melhor amiga. Sem palavras.

- Ao meu anjo guardião e espíritos amigos. Que Deus os abençoe.

Resumo da Tese apresentada à UFSC como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Engenharia Elétrica.

UMA NOVA MODELAGEM PARA O CÁLCULO DAS CORRENTES INTER-BARRAS EM MOTORES DE INDUÇÃO DE GAIOLA

Cláudia Andréa da Silva

Fevereiro/2001

Orientador: Renato Carlson / Yvan Lefèvre

Área de Concentração: Concepção e Análise de Dispositivos Eletromagnéticos

Palavras-chave: Correntes Inter-barras, Motores de Indução de Gaiola, Elementos Finitos

Número de Páginas: 86

RESUMO: O presente trabalho aborda o desenvolvimento e a implementação de uma metodologia original para o cálculo das correntes inter-barras em motores de indução de gaiola. A técnica apresentada é baseada no Método de Elementos Finitos em duas dimensões (Lógica EFCAD-com Movimento desenvolvida no GRUCAD/LEEI) e utiliza o Modelo Multi-Fatiado para representar a inclinação das ranhuras do rotor. Resistências transversais (inter-barras) são inseridas no circuito rotórico e a Teoria de Circuitos (Método das Correntes Independentes) é adotada para acoplar as equações de campo às equações do circuito rotórico. A metodologia é aplicada no estudo de dois motores de indução de gaiola comerciais de alta potência. Os resultados obtidos mostram que para motores com problemas de isolação das barras do rotor a inclinação é a causa principal para a circulação de correntes inter-barras. Com a inclinação e baixo valor de resistência transversal estas correntes tendem a valores elevados podendo danificar o rotor e gerar perdas Joule adicionais que comprometem o rendimento do motor. A técnica desenvolvida mostrou-se eficaz para o estudo das perdas inter-barras que representam uma importante componente das perdas adicionais em carga dos motores de indução de gaiola.

Abstract of Thesis presented to UFSC as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor in Electrical Engineering.

A NEW METHOD TO CALCULATE THE INTER-BAR CURRENTS IN CAGE INDUCTION MOTORS

Cláudia Andréa da Silva

February /2001

Advisor: Cláudia Andréa da Silva

Area of Concentration: Electromagnetics Devices

Keywords: Inter-bar Currents, Cage Induction Motors, Finite Elements

Number of Pages: 86

ABSTRACT: This work presents the development and implementation of a new method to calculate the inter-bar currents in cage-induction motors. This method is based on two dimensional Finite Element Method (Program EFCAD-with movement developed by GRUCAD-Brazil) / LEEI-France) and use the Multi-Sliced Method to represent the rotor bars skewing effect. Transversal resistance (inter-bars resistance) are inserted in the rotor circuit and the Circuits Theory (Independent Currents Method) is adopted to couple the field equations to rotor circuit equations. The method is used to study two commercial cage-induction motors of high power. The results obtained show that for motors with rotor bars insulation problems the skewing is responsible for the inter-bar currents. With skewing and low transversal resistance values these currents tend to high values and can damage the rotor. These high currents can also cause generate stray load losses that compromise the efficiency of the motor. The developed technique is efficient to study the inter-bars losses that represent one important component of the stray load losses in cage-induction motors.

SUMÁRIO

RESUMO.....	iii
ABSTRACT.....	iv
SUMÁRIO.....	v

INTRODUÇÃO.....	1
-----------------	---

CAPÍTULO 1 – AS CORRENTES INTER-BARRAS EM MOTORES DE INDUÇÃO DE GAIOLA

1.1 INTRODUÇÃO.....	4
1.2 DEFINIÇÃO DAS CORRENTES E RESISTÊNCIAS INTER-BARRAS.....	4
1.3 A FORMULAÇÃO ANALÍTICA DE ADNAN ODOK.....	11
1.4 INTERPRETAÇÃO DE ODOK DAS EQUAÇÕES ANALÍTICAS.....	22
1.4.1 Rotor não inclinado.....	23
1.4.2 Rotor inclinado.....	23
1.5 ESTUDO DE ISOLAÇÃO DAS BARRAS E MEDIÇÃO DAS CORRENTES INTER-BARRAS.....	25
1.6. CONCLUSÕES DESTE CAPÍTULO	26

CAPÍTULO 1 – METODOLOGIA

2.1 INTRODUÇÃO.....	27
2.2 O MODELO MULTI-FATIADO PARA SIMULAR A INCLINAÇÃO.....	27
2.3 AS EQUAÇÕES DE CAMPO PARA A ESTRUTURA ELETROMAGNÉTICA..	29
2.3.1 Equações locais para as fatias .da estrutura.....	29
2.3.2 Equações Globais.....	30

2.3.3 Discretização espacial	33
2.3.4 Contribuições elementares	34
2.4 EQUAÇÕES DO CIRCUITO ROTÓRICO COM RESISTÊNCIAS INTER- BARRAS.....	36
2.4.1 Noções de análise topológica de circuitos(Teoria do Grafos Lineares)	37
2.4.2 Construção da árvore e matrizes associadas aos ramos e elos	41
2.4.3 A matriz Malha Fundamental (B_1^T)	45
2.4.4 Acoplamento entre as Equações de Circuito e as Equações de Campo.....	49
2.4.5 Discretização das derivadas temporais e princípio de resolução.....	50
2.5 CONCLUSÕES DESTE CAPÍTULO.....	54
CAPÍTULO 3 – APLICAÇÃO E VALIDAÇÃO DA METODOLOGIA DESENVOLVIDA	
3.1 INTRODUÇÃO.....	55
3.2 EFEITOS DA INCLINAÇÃO	
3.2.1.Torques e correntes do estator.....	55
3.2.2 As correntes inter-barras.....	62
3.2.3 Efeito da variação de parâmetros sobre as correntes inter- barras.....	64
3.3 CONCLUSÕES DESTE CAPÍTULO.....	71
CONCLUSÃO FINAL.....	72
ANEXO A	74
ANEXO B	81
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	84

INTRODUÇÃO

O motor de indução de gaiola por ser robusto e de produção mais barata tornou-se a máquina mais amplamente usada em vários setores da economia em todo o mundo. Sua larga aplicação porém hoje representa um problema a ser resolvido, uma vez que em muitos países, principalmente nos industrializados, estes motores representam mais de 60% de toda a energia consumida. Os fabricantes de motores, deste modo, tem desenvolvido e comercializado motores mais eficientes. Estes motores são de alto rendimento e indicados para uso em regime de serviço contínuo.

A importância do maior rendimento dos motores elétricos é bem compreendida com a análise de Gray [8] em seu artigo publicado em setembro de 1996 no IEEE Transactions on Energy Conversion. Nesta análise, Gray avalia que em alguns processos industriais e outros com regime de serviço contínuo a economia é de \$1/hp para cada 0.1 % de aumento de eficiência. Uma vez que pequenas diferenças no valor da eficiência podem representar sensível economia de energia, a determinação precisa da mesma torna-se necessária.

Independente do método utilizado para medir o rendimento do motor é esperado que ele seja sempre o mesmo. Contudo, não é isto o que acontece na prática [5][9][10]. As diferenças nos valores de rendimento são devidas aos procedimentos de determinação das perdas adicionais em carga [4]. Na norma IEC-34-2 [3] é estipulado que as perdas adicionais em carga não devem ser superiores a 0,5% da potência nominal de entrada do motor. Inúmeras publicações tem sido feitas depois de 1972 onde são apresentados resultados obtidos com várias máquinas aplicando os diversos testes normalizados. Todos os resultados foram maiores que 0,5%.

Desde o início do século, muitos trabalhos tem sido publicados abordando a influência das perdas adicionais em carga no rendimento de máquinas elétricas [14][15][16][17][18]. O interesse sobre este tema teve um significativo aumento a partir da década de 70, como consequência da crise energética ocorrida no período 1972-74. Sabendo-se que as reservas mundiais de energia são finitas, os países em geral tem buscado desenvolver programas a fim de melhorar a eficiência da conversão de energia. Programas como o "SAVE&PACE" (Specific Actions for Vigourous Energy Efficiency e Programa de Ação Comunitária visando melhorar a Eficácia da utilização da eletricidade)

apresentados no Conselho da União Européia em julho de 1989 e novembro de 1991 mostram a preocupação dos países europeus em buscar soluções para o problema.

Em 1997, Glew [2] publicou um artigo intitulado **“Stray Load Losses in Induction Motors : A Challenge to Academia”** que alertou a comunidade científica para a necessidade de desenvolvimento de um método de medição e cálculo de perdas adicionais em cargas em motores de indução. O autor alerta também em seu artigo a importância do desenvolvimento de novas teorias uma vez que há divergências nas definições existentes.

Do exposto pode-se afirmar que na área de máquinas elétricas, a determinação das perdas adicionais em carga assumiram importância considerável na comunidade científica.

Estas perdas apesar de serem tratadas na literatura durante as últimas décadas só passaram a receber tratamento especial depois da crise energética ocorrida nos anos 70. As dificuldades encontradas no entendimento dos fenômenos físicos relacionados às mesmas assim como na discretização e formulação correta para seu cálculo e medição fizeram com que os trabalhos se desenvolvessem de forma lenta e cuidadosa.

De um modo geral, estas perdas adicionais em carga podem ser resumidas em perdas devido às correntes de Foucault induzidas pelos campos harmônicos (perdas de alta frequência), perdas devido aos fluxos de dispersão de frequência fundamental e perdas devido à má isolamento dos condutores do rotor [1][11][12][13].

As perdas de Foucault (no ferro e enrolamento) são as componentes que tem recebido mais atenção na comunidade científica. A grande quantidade de publicações importantes na área nos últimos 10 anos tem apresentado resultados bastante promissores.

As perdas de cabeça de bobina (associados aos fluxos de dispersão de frequência fundamental) e perdas inter-barras (associadas à má isolamento dos condutores do rotor) são as duas componentes que menos receberam contribuições. Isto se deve ao fato da modelização das mesmas passar inicialmente por uma representação tridimensional. As formulações analíticas de Alger [1] para o cálculo das perda de cabeça de bobina e de Odok [19] para as perdas inter-barras, apesar de todas as limitações , ainda representam o melhor meio de se obter um valor estimado destas perdas.

Por representar um desafio, foi escolhida para o desenvolvimento deste trabalho a determinação de um método de cálculo das correntes inter-barras , associadas às perdas inter-barras em motores com problemas de isolamento de barras do rotor.

Inicialmente foi feita uma seleção do material bibliográfico referente à área de estudo. No Capítulo 1 é colocada a dificuldade encontrada na modelagem das correntes

inter-barras em virtude das poucas publicações encontradas abordando as mesmas. As publicações disponíveis usam diferentes critérios de análise e normalmente são direcionadas para um determinado tipo de máquina [26][31][32]. De um modo geral, até o início da década de 90 todos os trabalhos baseavam-se no trabalho analítico de Adnan Odok que, apesar de matematicamente correto é ainda hoje , de difícil aplicação prática. Este trabalho contudo, fornece uma informação muito importante associada à inclinação dos condutores rotóricos. Conforme o autor, o efeito da corrente inter-barra e consequentemente da perda inter-barra será significativo somente em motores inclinados. Os efeitos benéficos conhecidos da inclinação nas perdas de alta frequência deixaram de ser o único parâmetro para a definição do uso ou não de um rotor inclinado em máquinas de grande porte.

O primeiro importante trabalho nesta área utilizando técnicas numéricas modernas foi o de Ho et al. [25]. Neste trabalho, os métodos de elementos finitos em duas e três dimensões são acoplados para determinar as perdas adicionais em carga do rotor inclinado de um motor de indução. As correntes inter-barras são inseridas no modelo impondo-se uma condutividade no ferro no sentido tangencial. Esta modelagem apesar de aproximativa não é a correta pois considera que as correntes inter-barras estão presentes em toda a estrutura do rotor. Na realidade, correntes inter-barras estão presentes somente em determinados pontos do rotor onde a isolação foi danificada.

Com as informações obtidas do material bibliográfico passou-se para a segunda etapa do trabalho , o desenvolvimento do modelo numérico mostrado no Capítulo 2. A mesma consistiu em buscar uma proposta que pudesse utilizar o programa EFCAD com movimento. Este programa, desenvolvido pelos grupos GRUCAD/LEEI e baseado no Método de Elementos Finitos, permite a análise do comportamento dinâmico de máquinas elétricas. O passo inicial consistiu em introduzir a inclinação na modelagem inicial. A técnica selecionada para modelar a inclinação, O Modelo Multi-Fatiado, permitiu que as resistências transversais pudessem ser inseridas no circuito do rotor. Com esta inserção foi obtido um modelo completo para analisar as perdas inter-barras com a inclinação.

No Capítulo 3 a validação da metodologia desenvolvida é feita através do estudo de um motor de indução de gaiola comercial. Deste estudo, importantes informações foram obtidas e que serviram para as conclusões mostradas no fim deste trabalho.

1. As Corrente Inter-Barras em Motores de Indução de Gaiola

1.1 Introdução

As perdas Joule nos condutores do rotor devido ao problema de isolamento dos mesmos é um tema que já vem sendo discutido na comunidade científica desde o fim dos anos 50. Tipos de tratamentos possíveis para a isolamento das barras do rotor e os resultados obtidos com os mesmos foram durante muito tempo o ponto central das discussões.

As publicações abordando o cálculo das perdas inter-barras são poucas. Os trabalhos analíticos de Adnan Odok [19] e Subba Rao [20] são referências mesmo nos dias atuais devido às suas significativas contribuições na definição e tratamento matemático destas perdas. Modernamente, os pesquisadores japoneses têm se mostrado os mais interessados pelo assunto apresentando trabalhos na área de processos e cálculo. Matsuse et al. [31][32] a partir do modelo analítico de [19], analisa um motor de indução alimentado por inversor. Ho et al. [25] acopla o Método de Elementos Finitos 2D e 3D para estimar as perdas adicionais em carga de um motor de indução com barras do rotor inclinadas. Nishizawa et al. [21] mostra em seu trabalho experimental uma nova técnica de isolamento das barras e confirma a dificuldade na medição das resistências inter-barras. Recentemente Williamson [26] utiliza o modelo de circuitos acoplados para verificar a influência das correntes inter-barras no desempenho de um motor sem escovas com dupla alimentação.

Neste capítulo, inicialmente são apresentadas as definições das correntes e resistências inter-barras. Na seqüência, por sua importância, o trabalho analítico de Odok para o tratamento destas perdas é também apresentado juntamente com as principais conclusões e observações contidas no mesmo. Finalmente, encerrando esta seção, são mostrados resultados obtidos por um grupo de pesquisadores japoneses com uma nova técnica de isolamento.

1.2 Definição das correntes e resistências inter-barras

No cálculo das perdas adicionais em carga, as perdas nos condutores do rotor devido às harmônicas de f.m.m foram calculadas até os anos 50 com o circuito equivalente

de Alger [1]. Sem modificações, este circuito é obtido admitindo-se que os condutores do rotor são não inclinados e perfeitamente isolados. Contudo, em máquinas com ranhuras inclinadas e barras não isoladas, a resistência equivalente do rotor não é tão óbvia como apresentada uma vez que o mecanismo de produção de perdas é uma combinação complexa de várias componentes. Alger mostra que quando as barras do rotor são inclinadas de aproximadamente um passo de ranhura do estator a tensão induzida em cada barra devido às harmônicas de f.m.m do estator é reduzida e com isso uma menor corrente axial flui na barra.

Para motores com condutores do rotor não isolados o trabalho analítico de Odok apresenta-se como referência. A distribuição da corrente nas barras e no caminho transversal segundo o autor é dependente da magnitude da impedância do anel de curto-circuito. No caso dos motores de indução de gaiola, que em geral possuem um anel de curto-circuito de baixa impedância, a amplitude da corrente inter-barra será dependente da inclinação.

A densidade de corrente no condutor do rotor está vinculada à variação da tensão induzida no mesmo, sendo portanto constante no caso do condutor não inclinado. A corrente inter-barra neste caso será nula pois está vinculada à variação da densidade de corrente no condutor .

Para os condutores inclinados a tensão induzida varia ao longo do comprimento do mesmo e conseqüentemente a densidade de corrente no condutor também varia. Se a resistência entre as barras (resistência inter-barra) for muito baixa correntes circularão pelas mesmas gerando perdas Joules adicionais que devem ser consideradas no cálculo das perdas adicionais em carga.

A resistência inter-barra depende basicamente do valor da resistência de contato barra-ferro pois a resistência da chapa na direção radial é desprezada.

Durante anos, vários processos tem sido utilizados pelos fabricantes de forma a aumentar a resistência de contato entre as barras e o núcleo nos motores inclinados. Porém, a incerteza dos resultados tem feito com que muitos destes fabricantes abandonem tais métodos.

No cálculo das perdas inter-barras, geradas pela correntes inter-barras, o problema físico mais importante é conhecer a distribuição das correntes nas laminações e o circuito equivalente associado. O circuito físico de um rotor de gaiola real tem considerável diferença do circuito físico do rotor de gaiola ideal. A figura 1.1 mostra o modelo elétrico

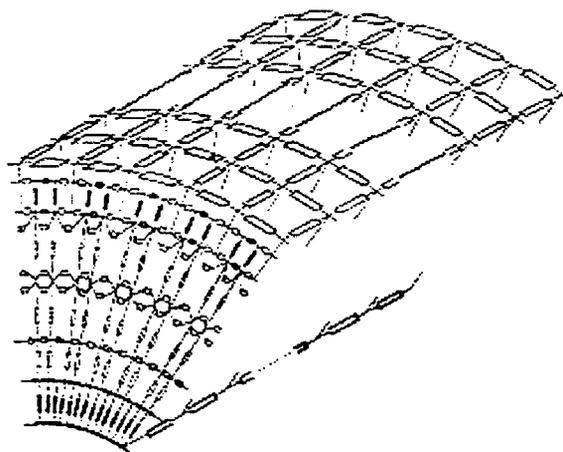


Fig.1.2. Segmento do rotor real simplificado (barras do rotor não isoladas).

Os rotores de gaiola são fabricados de duas maneiras: com gaiola soldada e com gaiola fundida (injetada). Eles se diferenciam segundo a maneira (tipo) de fabricação e segundo suas características [22][22].

Em gaiolas soldadas com barras introduzidas, a seção transversal e a condutividade das barras são praticamente constantes ao longo de todo o seu comprimento. Devido à inclinação, tem-se uma diminuição da seção transversal da ranhura e um aumento do comprimento da barra, o que tem por consequência um aumento da resistência da barra.

Em gaiolas fundidas as relações são bem mais complexas. Devido ao empacotamento impreciso (irregular), mostrado na Fig.1.3 (b) a seção transversal da barra varia ao longo do pacote e com isso também a resistência da barra. Ao mesmo tempo, a qualidade da fundição (injeção) também influencia a resistência da barra. Pode ocorrer diminuição da condutividade no interior da gaiola devido a fissuras de diferentes formas e tamanhos e devido à oclusões de diferentes origens

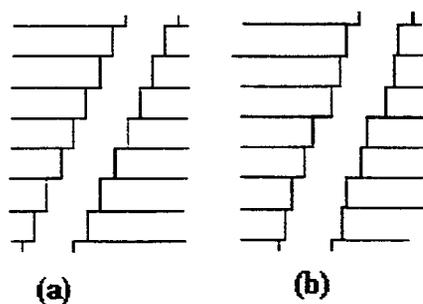


Fig. 1.3. Empacotamento das chapas do rotor

(a) ideal

(b) real

Um dos pontos importantes para o entendimento das perdas inter-barras é o conhecimento da forma física da resistência de contato. Sabe-se que ocorre uma maior queda de tensão assim como aquecimento localizado nos pontos de contato entre dois metais. Isto leva a uma resistência maior nestes pontos, chamada resistência de contato ou resistência de passagem R_c . Esta resistência é, portanto uma resistência que se opõe a passagem de corrente de um metal para o outro. A zona da resistência de contato entre a barra de alumínio fundido e o pacote de chapas é mostrada na Fig.1.4 (a). Na Fig.1.4 (b) é mostrada a zona da resistência de contato entre uma barra de cobre inserida (gaiola soldada) e o pacote de chapas. Observa-se que o contato metálico direto somente ocorre em algumas partes.

A resistência de contato entre a gaiola e o pacote é formada pela ligação paralela da *resistência pelicular* e da *resistência "de estreito"*.

A *resistência pelicular* ou *resistência intermediária* (R_h) é uma conseqüência da camada má condutora (isolante) entre alumínio e ferro. A espessura da camada depende, em primeiro lugar, da espessura do óxido na parede da ranhura e na superfície da barra, e, em menor escala, das medidas da barra. A camada é formada de um entreferro irregular com espessura média de 0,01 a 0,1 mm. Ela é preenchida, além dos óxidos, com restos de lubrificantes e outras impurezas. Óxidos surgem em superfícies metálicas limpas, formadas pela estampagem, sob influência da atmosfera ambiente. Sua espessura é muito variável, de 0,025 a 0,1 mm e depende da atmosfera na qual a chapa é colocada após a estampagem assim como da duração do intervalo de tempo entre a estampagem da chapa e a fundição (injeção) da gaiola de alumínio.

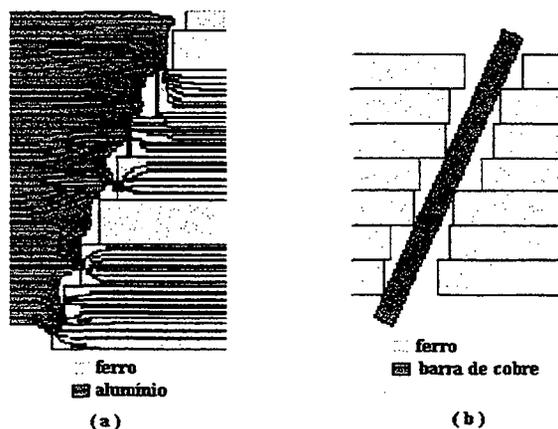


Fig.1.4. Zonas de contato entre os condutores e o ferro

Na fundição (injeção) sob pressão forma-se, em geral, um bom contato galvânico entre o alumínio e a chapa do rotor. Devido à alta temperatura do alumínio (em torno de 750 °C), à alta pressão e ao rápido preenchimento (cerca de 1s) ocorre quebra do óxido de alumínio e do óxido de ferro. Forma-se um grande número de contatos metálicos diretos distribuídos de forma irregular.

Devido ao coeficiente de dilatação do alumínio ser o dobro do coeficiente de dilatação térmica do ferro ($\beta_{Al} = 2,21 \times 10^{-5} /K$ e $\beta_{Fe} = 1,15 \times 10^{-5} /K$), cada choque térmico (aquecimento e repentino resfriamento) leva a um aumento da espessura da camada de isolamento entre o alumínio da barra e o pacote de chapas, com adensamento da barra. O valor da resistência da camada intermediária não é conhecido, e não pode ser determinado nem por cálculo nem por medição. Pode-se no entanto prever que esta resistência é uma grandeza descontínua e de relativamente alto valor, pois a camada é constituída de ar, impurezas e ligações químicas de reduzida condutividade elétrica. Por este motivo, pode-se desprezar sua influência no valor da resistência de contato nos métodos usuais de fundição.

A resistência “*de estreito*” R_E é, portanto, determinante para o valor da resistência de contato R_c . Ela consiste de um contato metálico direto local entre o alumínio da gaiola e o ferro do pacote.

Para obter-se um modelo matemático, deve-se representar um ponto de contato (contato elementar) idealizado. Como o contato é feito através de uma pequena esfera com diâmetro d_0 e resistência desprezível, as linhas de corrente desviam radialmente para a esfera. Os diâmetros das semi-esferas nas quais ocorre o contato metálico direto, dependem das condições antes citadas como do processo de estampagem das chapas. Sua grandeza pode ser estimada em $d_0 \cong 0,01$ a $1 \mu m$.

Na análise da resistência de contato também deve ser considerada a resistência da superfície do rotor. Ela pode ser desprezada em rotores grandes, assim como no caso de ranhuras fechadas e em gaiolas com barras afastadas do entreferro. Em rotores fundidos pequenos com ranhuras semi-fechadas, a resistência da superfície do rotor, formada no torneamento do rotor, tem influência significativa no valor da resistência transversal. Esta influência é tanto maior quanto menor for o rotor. A resistência da superfície do rotor não pode ser determinada por cálculo, pois a espessura do revestimento é muito irregular, tanto no sentido axial quanto no tangencial. Ela depende da largura da abertura da ranhura do rotor e do processo de torneamento. Na passagem da ferramenta de corte, da barra para o dente, o alumínio é engordurado e puxado na direção do movimento da ferramenta de

corte. Assim, forma-se um contato melhor entre o alumínio da barra e o ferro do pacote em um lado da ranhura do que no outro lado da ranhura.

Com o exposto até o momento pode-se notar que um rotor com barras não isoladas somente pode ser substituído por um circuito elétrico tridimensional assimétrico muito complicado. Devido ao grande número de elementos desconhecido/s e/ou parcialmente desconhecidos não é possível utilizar tal circuito equivalente no cálculo de motores assíncronos com rotor de gaiola não isolada nem na avaliação de resultados de medições da impedância transversal e da resistência de contato. Deste modo é necessário fazer uma série de considerações que influenciam mais ou menos na precisão dos resultados finais, porém simplificam o modelo matemático e possibilitam o cálculo.

Na significativa contribuição de [19] a teoria das perdas devido às correntes fluindo entre as barras é baseada em uma representação otimizada do circuito transversal observando as seguintes simplificações :

⇒ ***Simplificação do circuito elétrico radial-tangencial do rotor***

- a) o rotor é radialmente simétrico, isto é, todas as barras tem a mesma resistência assim como a mesma resistência de contato.
- b) a resistência das chapas na direção radial e tangencial pode ser parcial ou totalmente desprezada.

⇒ ***Simplificação do circuito elétrico axial do rotor***

- c) a resistência da barra é constante ao longo de todo o comprimento da barra
- d) a impedância transversal é constante ao longo de todo o comprimento da barra.

No presente trabalho as simplificações b e c dadas por [19] são totalmente assumidas. A impedância transversal, contudo, é tomada como puramente resistiva e poderá ser de diferentes valores ao longo do comprimento da barra

O posicionamento das resistências inter-barras no pacote do rotor é simétrico. Isto significa que as correntes inter-barras fluirão em posições específicas (chamadas cortes) ao longo do rotor.

1.3 A formulação analítica de Adnan Odok

O trabalho analítico de Adnan Odok, por sua contribuição conceitual e tratamento matemático têm sido referência para inúmeros trabalhos desenvolvidos nas últimas décadas sobre as perdas inter-barras. Segundo o autor, tomando-se as simplificações a,b,c e d do item anterior, cada par de barras do rotor representa um longo condutor elétrico e as relações entre as grandezas no início e fim da barra podem ser determinadas através de equações diferenciais conhecidas.

A Fig.1.5 mostra a seção de um rotor de gaiola com correntes produzidas pelos campos harmônicos do estator onde as correntes transversais (correntes inter-barras) são introduzidas. O ângulo de inclinação é dado por α_t .

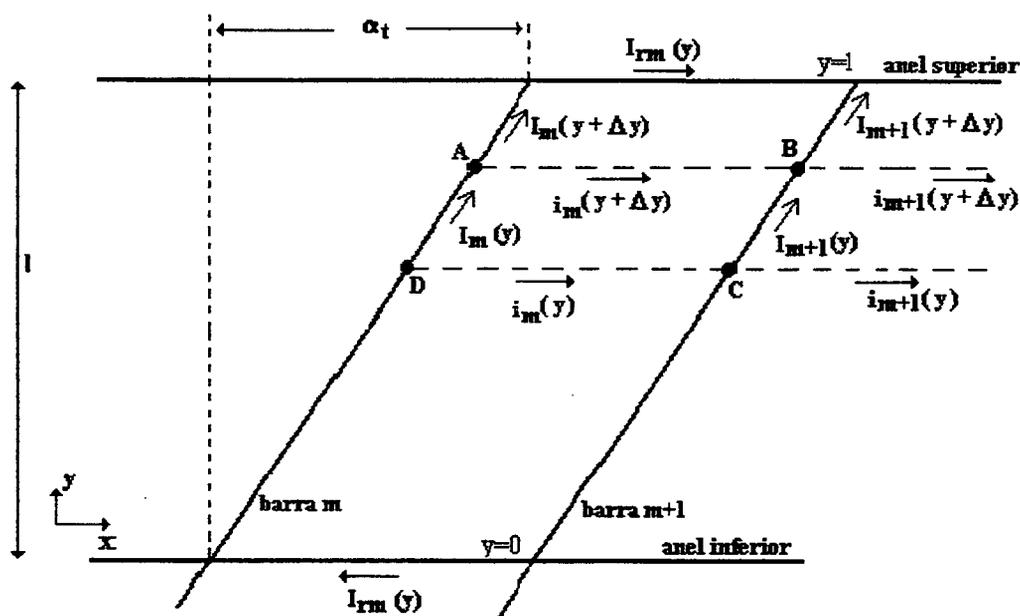


Fig.1.5. Correntes das barras e correntes inter-barras na seção do rotor.

Um campo girante do entreferro de p par de pólos induz tensões e correntes na gaiola de S_2 ranhuras. As equações de (1.1) relacionam correntes induzidas nas barras e anéis adjacentes da figura 1.5 levando-se em conta a simetria do motor [19][31][32][33].

$$\begin{aligned}
 i_{m+1}(y) &= i_m(y) e^{-j \frac{2hp\pi}{S_2}} \\
 I_{m+1}(y) &= I_m(y) e^{-j \frac{2hp\pi}{S_2}} \\
 I_{r(m+1)}(y) &= I_{rm}(y) e^{-j \frac{2hp\pi}{S_2}}
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

O termo $i_m(y)$ é a corrente transversal por unidade de comprimento no h-ésimo segmento do rotor a distância y do meio do rotor e h é a ordem da considerada harmônica I_{rm} é a corrente no anel de curto circuito e I_m a corrente na barra.

$$\text{Sendo } i_m(y) - i_{m+1}(y) = i_m(y) - i_m(y) e^{-j \frac{2hp\pi}{S_2}} = i_m(y) \left(1 - e^{-j \frac{2hp\pi}{S_2}} \right) \tag{1.2}$$

e com identidade de Euler ,

$$\text{sen } \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \tag{1.3}$$

$$\text{temos : } \text{sen} \frac{2hp\pi}{S_2} = \frac{e^{j \frac{2hp\pi}{S_2}} - e^{-j \frac{2hp\pi}{S_2}}}{2j} \tag{1.4}$$

$$2j \text{sen} \frac{2hp\pi}{S_2} = e^{j \frac{2hp\pi}{S_2}} - e^{-j \frac{2hp\pi}{S_2}} \tag{1.5}$$

Dividindo (1.5) por $e^{j \frac{2hp\pi}{S_2}}$:

$$2j \text{sen} \left(\frac{2hp\pi}{S_2} \right) e^{-j \frac{2hp\pi}{S_2}} = 1 - e^{-j \frac{4hp\pi}{S_2}} \tag{1.6}$$

Se $2a = 4hp\pi/S_2$ a equação (1.6) torna-se:

$$2j \operatorname{sen}\left(\frac{hp\pi}{S_2}\right) e^{-j\frac{hp\pi}{S_2}} = 1 - e^{-j\frac{2hp\pi}{S_2}} \quad (1.7)$$

Com (1.7) em (1.2) :

$$i_m(y) - i_{m+1}(y) = i_m(y) 2j \operatorname{sen}\left(\frac{hp\pi}{S_2}\right) e^{-j\frac{hp\pi}{S_2}} \quad (1.8)$$

do mesmo modo :

$$I_m(y) - I_{m+1}(y) = I_m(y) 2j \operatorname{sen}\left(\frac{hp\pi}{S_2}\right) e^{-j\frac{hp\pi}{S_2}} \quad (1.9)$$

$$I_{rm}(y) - I_{r(m+1)}(y) = I_{rm}(y) 2j \operatorname{sen}\left(\frac{hp\pi}{S_2}\right) e^{-j\frac{hp\pi}{S_2}} \quad (1.10)$$

Aplicando a primeira lei de Kirchhoff no ponto B da Fig.1.5 temos:

$$i_m(y+\Delta y) - i_{m+1}(y+\Delta y) = I_{m+1}(y+\Delta y) - i_{m+1}(y) \quad (1.11)$$

onde: $i_m(y+\Delta y) = \Delta y i_m(y)$

$$i_{m+1}(y+\Delta y) = \Delta y i_{m+1}(y) \quad (1.12)$$

$$\text{Assim : } \Delta y [i_m(y) - i_{m+1}(y)] = I_{m+1}(y + \Delta y) - I_{m+1}(y) \quad (1.13)$$

$$i_m(y) 2j e^{-j\frac{hp\pi}{S_2}} \operatorname{sen} \frac{hp\pi}{S_2} = \frac{I_{m+1}(y + \Delta y) - I_{m+1}(y)}{\Delta y} \quad (1.14)$$

$$i_m(y) 2j e^{-j\frac{hp\pi}{S_2}} \operatorname{sen} \frac{hp\pi}{S_2} = \frac{d}{dy} I_{m+1}(y) \quad (1.15)$$

$$\text{Como } I_{m+1}(y) = I_m(y) e^{-j\frac{2hp\pi}{S_2}} \quad (1.16)$$

a relação entre a corrente da barra e a corrente inter-barra será conforme equação (1.17).

$$i_m(y) = \frac{d}{dy} I_m(y) \frac{e^{-j \frac{hp\pi}{S_2}}}{2j \operatorname{sen} \frac{hp\pi}{S_2}} \quad (1.17)$$

Para obter a relação entre as correntes dos anéis e a corrente das barras tomemos a relação (1.18) obtida da Fig.1.5.

$$I_{rm}(y) - I_{r(m+1)}(y) + I_{m+1}(y) = 0 \quad (1.18)$$

Com (1.10) e (1.16) em (1.18) obtemos:

$$I_{rm}(y) = \frac{je^{-j \frac{hp\pi}{S_2}}}{2 \operatorname{sen} \frac{hp\pi}{S_2}} I_m(y) \quad (1.19)$$

A soma das quedas de tensão sobre o caminho fechado ABCD será:

$$\sum_{ABCD} V = I_m(y) \left[\frac{Z_l}{l} \Delta y \right] + i_m(y + \Delta y) \frac{Z_q}{\Delta y} \Delta y - I_{m+1}(y) \frac{Z_l}{l} \Delta y - \frac{Z_q}{\Delta y} \Delta y i_m(y) \quad (1.20)$$

onde V = queda de tensão no caminho ABCD.

Z_q = impedância transversal entre duas barras adjacentes (Ohms.m)

Z_l = impedância da barra (ohms)

l = comprimento da barra (m)

Utilizando a relação de (1.12) na equação (1.10) e após um rápido desenvolvimento matemático chega-se a equação (1.21) a seguir :

$$\sum_{ABCD} V = \frac{Z_l}{l} \Delta y \left[I_m(y) 2j \operatorname{sen} \left(\frac{hp\pi}{S_2} \right) e^{-j \frac{hp\pi}{S_2}} \right] + Z_q \Delta y \left[\frac{di_m(y)}{dy} \right] \quad (1.21)$$

Com (1.15) em (1.21) têm-se finalmente:

$$\sum_{ABCD} V = Z_L \Delta y \left[I_m(y) 2j \operatorname{sen}\left(\frac{hp\pi}{S_2}\right) e^{-j\frac{hp\pi}{S_2}} \right] + Z_q \Delta y \left[\frac{d^2}{dy^2} \frac{I_m(y) e^{-j\frac{hp\pi}{S_2}}}{2j \operatorname{sen}\frac{hp\pi}{S_2}} \right] \quad (1.22)$$

onde Z_L é a impedância da barra por unidade de comprimento (ohms/metro).

Na malha ABCD considerada, as tensões são induzidas pelos h -ésimos campos harmônicos do estator assim como pelo campo girante do rotor produzido pelas correntes das barras. Esta segunda parte da tensão induzida é tomada em consideração pela introdução de uma reatância magnetizante X_{2mh} e uma reatância diferencial X_{2dh} que são relacionadas entre si através de (1.23):

$$X_{2dh} = \tau_{dh} X_{2mh} \quad (1.23)$$

onde τ_{dh} = coeficiente de dispersão diferencial.

A reatância da barra por unidade de comprimento para um campo de hp par de pólos é designado por X_{2h} . Se os campos harmônicos induzidos do estator são de ordem suficientemente elevada de modo a garantir que o número de barras por par de pólo é menor que três, X_{2h} é aproximado por :

$$X_{2h} = X_{2mh}(1 + \tau_{dh})$$

ou

$$X_{2h} = X_{2mh} + X_{2dh}$$

Onde:

$$\tau_{dh} = \left(\frac{\frac{\pi hp}{S_2}}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi hp}{S_2}\right)} \right)^2 - 1 \quad (1.24)$$

Se o fluxo concatenando N condutores varia senoidalmente no tempo, a uma frequência de f ciclos por segundo temos,

$$\phi = \phi_M \text{ sen } 2\pi ft \quad (\text{Weber}) \quad (1.25)$$

e a tensão induzida nestes condutores será :

$$E = -N \frac{d\phi}{dt} = -2\pi f N \phi_M \cos 2\pi f(t) \quad (\text{Volts}) \quad (1.26)$$

ou ainda em valor eficaz,

$$E_{RMS} = \frac{1}{\sqrt{2}} 2\pi f N \phi_M \quad (\text{Volts}) \quad (1.27)$$

Lembrando que o fluxo máximo é a relação direta entre a indução máxima e a área do caminho magnético ($\phi_M = B_M A$), por analogia, o h-ésimo campo harmônico do estator B_{1h} induz no elemento CB da figura 1.5 a tensão E_{CB} conforme a equação (1.28).

$$E_{CB} = \frac{1}{\sqrt{2}} B_{1\text{máx.},h} \vartheta_h \Delta y \quad (\text{Volts}) \quad (1.28)$$

onde:

$$B_{1\text{máx.},h} = \sqrt{2} \left(\frac{\mu_0}{g} \right) \left(\frac{m}{\pi} \right) \left(\frac{I_{1\text{fase}} N_1}{P} \right) \left(\frac{K_{wh}}{h} \right) \quad (\text{Weber/m}^2) \quad (1.29)$$

$$\vartheta_h = \frac{2t_p}{h} f_{2h} \quad (1.30)$$

Assim:

$$E_{CB} = \left(\frac{\mu_0}{g} \right) \left(\frac{m}{\pi} \right) \left(\frac{I_{1\text{fase}} N_1}{P} \right) \left(\frac{K_{wh}}{h^2} \right) 2t_p f_{2h} \Delta y \quad (\text{Volts}) \quad (1.31)$$

sendo t_p = passo polar para o campo principal

g = entreferro

f_{2h} = frequência da tensão induzida no rotor

K_{wh} = fator de enrolamento ($K_{ph} K_{dh}$)

\mathcal{G}_h = velocidade relativa do h-ésimo campo harmônico em relação ao estator.

P = número de pólos do campo principal ($P=2p$)

m = número de fases do estator

Tomando-se as relações:

$$E_{DA} = -E_{CB} e^{j \frac{2\pi p h}{S_2}} \quad (1.32)$$

$$u_h = \frac{mZ_1 K_{wh}}{S_2} \quad (1.33) \quad \text{e} \quad X_{2mh} = \frac{2\mu_0 S_2 t_p f_{2h}}{\pi g p h^2} \quad (1.34)$$

a equação (1.31) é simplificada para:

$$E_{CB} = X_{2mh} u_h \Delta y \cdot I_{1\text{fase}} \quad (1.35)$$

onde u_h = coeficiente de conversão (razão de espiras).

X_{2mh} = reatância magnetizante por unidade de comprimento de uma barra.

Considerando que $\sum_{ABCD} E$ inclui somente as tensões induzidas pelos campos

harmônicos do estator :

$$\begin{aligned} E_{CB} &= -E_{BC} \\ E_{DA} &= E_{BC} = -E_{CB} \\ E_{BC} - E_{DA} &= E_{ABCD} \\ E_{ABCD} &= -E_{CB} - E_{DA} \end{aligned} \quad (1.36)$$

Com as equações (1.32) e (1.35) em (1.36) obtemos :

$$E_{ABCD} = -2jX_{2mh} \Delta y \cdot u_h \cdot I_{1\text{fase}} \operatorname{sen}\left(\frac{hp\pi}{S_2}\right) e^{-j \frac{hp\pi}{S_1}} \text{ (Volts)} \quad (1.37)$$

Para levar em conta o efeito da inclinação na tensão induzida, o termo $e^{j\beta y}$ é introduzido na equação (1.37). Assim:

$$E_{ABCD} = -2jX_{2mh}\Delta y.u_h.I_{1, fase} \operatorname{sen}\left(\frac{hp\pi}{S_2}\right)e^{-j\frac{hp\pi}{S_1}} e^{j\beta y} \quad (\text{Volts}) \quad (1.38)$$

O ângulo β é a inclinação por unidade de comprimento medida como um ângulo elétrico para a h-ésima harmônica.

$$\text{Com a relação } \sum_{ABCD} \dot{V} = \sum_{ABCD} \dot{E} \quad (1.39)$$

e tomando as equações (1.22) e (1.38) obtemos a seguinte expressão para corrente da barra [19] :

$$\frac{d^2}{dy^2} I_m(y) Zq^* - Z_L I_m(y) = E_1 e^{j\beta y} \quad (1.40)$$

onde :

$$Zq^* = \frac{Zq}{4 \operatorname{sen}^2\left(\frac{hp\pi}{S_2}\right)} \quad (1.41) \quad \text{e} \quad E_1 = jX_{2mh}u_h I_1 \quad (1.42)$$

sendo E_1 = tensão induzida por unidade de comprimento em $y = 0$.

A queda de tensão entre barras adjacentes a distância y é:

$$V(y) = i_m(y) Zq \quad (1.43)$$

$$i_m(y) = \frac{-je^{-jhp\pi/S_2}}{2 \operatorname{sen}\left(\frac{hp\pi}{S_2}\right)} \frac{d}{dy} I_m(y) \quad (1.44)$$

$$i_m(y) = \frac{1}{2j \operatorname{sen}\left(\frac{hp\pi}{S_2}\right) e^{\frac{jhp\pi}{S_2}}} \frac{d}{dy} I_m(y) \quad (1.45)$$

Com (1.45) em (1.43) temos:

$$V(y) = \frac{Z_q}{2j \operatorname{sen}\left(\frac{hp\pi}{S_2}\right) e^{\frac{jhp\pi}{S_2}}} \frac{d}{dy} I_m(y) \quad (1.46)$$

Se tomarmos X como :

$$X = \frac{1}{2j \operatorname{sen}\left(\frac{hp\pi}{S_2}\right) e^{\frac{jhp\pi}{S_2}}} \quad (1.47)$$

a queda de tensão no caminho transversal será :

$$V^*(y) = Z_q X \frac{d}{dy} I_m(y) \quad (1.48)$$

A solução da equação(1.40) , impondo-se condições de fronteira ao sistema resulta na expressão geral para a distribuição de corrente ao longo da barra dada por (1.49). Os valores de A e B dependerão das condições de fronteira impostas (relativas aos anéis de curto-circuito).

$$I_m(y) = A \cosh \gamma_h y + B \operatorname{senh} \gamma_h y + \frac{E_1 e^{j\beta y}}{Z_L + \beta^2 Z_q^*} \quad (1.49)$$

$$\text{onde } \gamma_h = \sqrt{\frac{Z_L}{Z_q^*}} \quad (1.50)$$

$$A = - \left[\frac{Z_{er}^* \cos \frac{hp\delta}{2} - hp\delta Z_q^* \sin \frac{hp\delta}{2}}{Z_{er}^* \cosh \frac{\gamma_h}{2} + Z_q^* \gamma_h \sinh \frac{\gamma_h}{2}} \right] \frac{E_1}{Z_L + \beta^2 Z_q^*} \quad (1.51)$$

$$B = -j \left[\frac{Z_{er}^* \sin \frac{hp\delta}{2} + hp\delta Z_q^* \cos \frac{hp\delta}{2}}{Z_{er}^* \sinh \frac{\gamma_h}{2} + Z_q^* \gamma_h \cosh \frac{\gamma_h}{2}} \right] \frac{E_1}{Z_L + \beta^2 Z_q^*} \quad (1.52)$$

$$Z_{er} = R_{er} + js X_{er} \quad (1.53)$$

$$Z_{er}^* = \frac{Z_{er}}{4 \sin^2 \frac{hp\pi}{S_2}} \quad (1.54)$$

$$\delta = \frac{2\pi}{S_2} c \quad (1.55)$$

R_{er} e X_{er} = resistência e reatância do anel de curto-circuito (entre barras adjacentes) respectivamente.

c = fator de inclinação como fração de um passo da ranhura do estator.

y = posição axial medida do centro do núcleo.

s = escorregamento

δ = ângulo de inclinação

É comum na teoria de linhas de transmissão substituir a linha por um circuito equivalente π ou T sem essencialmente alterar a relação entre as variáveis de entrada e saída (tensão e corrente). Na simplificação do circuito elétrico axial do rotor um par de barras com resistência inter-barra constitui um sistema análogo a uma linha de transmissão. A diferença entre o sistema da linha e o das barras do rotor inclinado é que a tensão induzida ao longo do comprimento da barra tem uma variação de fase uniforme dependente do ângulo de inclinação e isso tem efeito importante na perda inter-barra. Assim, qualquer substituição da resistência inter-barra distribuída por uma circuito equivalente deve avaliar corretamente a perda no rotor do mesmo modo que um circuito

equivalente para uma linha de transmissão deve correlacionar corretamente a entrada e a saída.

Um par de condutores com resistência inter-barra distribuída pode ser representado por um circuito equivalente derivado de (1.40) e (1.48) expressos na forma de diferenças finitas. O circuito representativo desta análise para a condição de fronteira $V(y=0)=V_1$ e $I_m(y=0)=I_m$ é mostrado na Fig.1.6.

As perdas Joule totais no rotor (perda da barra mais a perda inter-barra) são obtidas integrando-se o produto da corrente dada pela equação (1.49) e o conjugado da tensão da barra elementar E_1 ao longo do comprimento da barra.

Assim, para uma dada harmônica de ordem h a perda total é:

$$P_{2h} = S_2 \operatorname{Re} \left| \int_0^l I_m(y) (E_1)^* e^{-j\beta y} dy \right| \quad (\text{Watts}) \quad (1.56)$$

O termo $e^{-j\beta y}$ considera a variação na fase da tensão induzida ao longo da barra devida a inclinação.

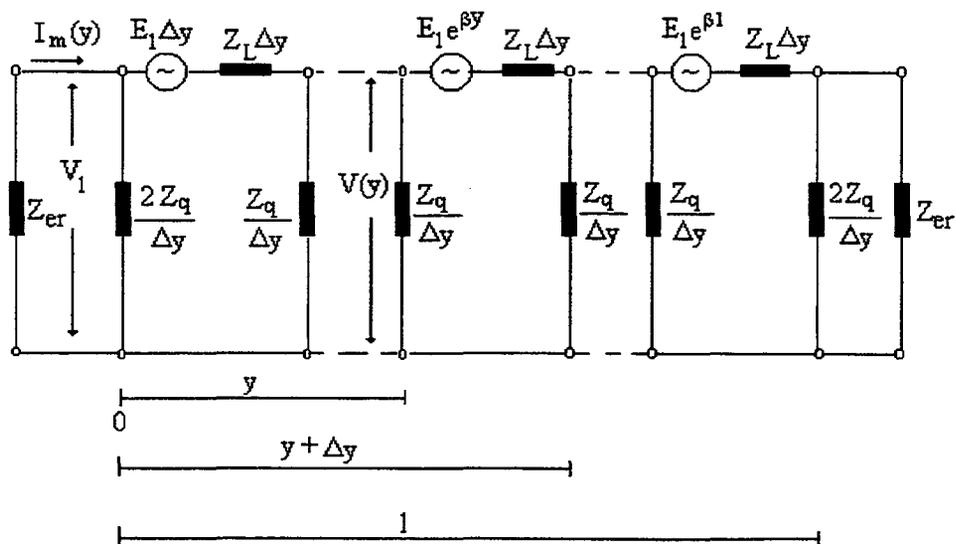


Fig.1.6. Circuito equivalente representativo de um par de condutores do rotor

Christofides[40] e Odok[19] consideram que a impedância do anel é desprezível em relação à impedância da barra ($Z_{er} \ll Z_q^*$). Deste modo, a integral da equação (1.56) resulta em :

$$P_{2h} = \frac{S_2 E_1^2}{Z_q^*} \operatorname{Re} \left\{ \frac{l}{\delta^2 + \gamma_h^2} + \frac{2\delta^2}{(\delta^2 + \gamma_h^2)^2} \left[\frac{\cosh \gamma_h l - \cos \delta l}{\gamma_h \sinh \gamma_h l} \right] \right\} \text{ (Watts)} \quad (1.57)$$

Rao e Butler [20] afirmam que em certos projetos com alta impedância de anel de curto circuito, as tensões terminais não podem ser assumidas iguais a zero. Assim, apresentam uma expressão geral para a perda no rotor que inclui o efeito destes anéis :

$$P_{2h} = S_2 E_1^2 R_e \left\{ \frac{l}{Z_L + \delta^2 Z_q^*} - (A+B) \frac{\sinh\left[\frac{1}{2}(\gamma_h + j\alpha\delta)l\right]}{(\gamma_h + j\delta)l} - \frac{(A-B) \sinh\left[\frac{1}{2}(\gamma_h - j\delta)l\right]}{(\gamma_h - j\delta)l} \right\} \quad (1.58)$$

As equações (1.57) e (1.58) para o cálculo das perdas totais, apesar de matematicamente corretas, não são de fácil interpretação e aplicação prática. Odok contudo, apresenta em seu trabalho algumas conclusões tomadas a partir da interpretação destas equações. Estas conclusões são apresentadas no próximo item e serão observadas na análise de resultados da metodologia desenvolvida neste trabalho.

1.4 Interpretação de Odok das equações analíticas

A interpretação das equações é feita para motores com rotor inclinado e não inclinado considerando-se que o valor da impedância do anel de curto circuito é desprezível ($Z_{er} \cong 0$).

1.4.1 rotor não inclinado

A expressão geral para a distribuição de corrente ao longo da barra dada por (1.49) dependerá , conforme citado anteriormente, da condição de fronteira imposta. Sendo a condição de fronteira dada por ($Z_{er} \cong 0$), a equação (1.49) pode ser simplificada para :

$$I_m(y) = \frac{E_1 e^{j\beta y}}{Z_L + \beta^2 Z_q^*} \quad (1.59)$$

Se as ranhuras do rotor não são inclinadas ($\beta=0$), a equação (1.59) pode ser dada como a seguir:

$$I_m(y) \cong \frac{E_1}{Z_L} = \text{constante} \quad (1.60)$$

A corrente inter-barra , dada por (1.45) é diretamente proporcional à variação da corrente da barra na direção axial do rotor e portanto, conforme (1.61) será nula.

$$i_m(y) \cong \frac{d}{dy} I_m(y) \cong 0 \quad (1.61)$$

Conclui-se assim que, para os motores não inclinados, o problema da isolação das barras não será significativo uma vez que as correntes transversais serão desprezíveis.

1.4.2 rotor inclinado

Segundo Odok, a variação da perda Joule total do rotor com a resistência inter-barra pode ser mostrada com a curva da Fig.1.7. O valor de r_q no pico da curva é tratado como um valor de resistência crítico dependente do ângulo de inclinação, comprimento da barra e outros parâmetros do motor.

◆ *resistência r_q alta :*

Conforme Fig.1.7, as perdas totais do rotor são inversamente proporcionais ao caminho transversal. A relação entre as perdas no caminho transversal e a resistência inter-barras é uma função hiperbólica. Com o aumento da resistência, as perdas Joules adicionais diminuem.

Enquanto a potência do motor é aproximadamente proporcional ao comprimento do eixo, as perdas inter-barras são proporcionais ao cubo. Para uma inclinação total de um passo de ranhura do estator as perdas adicionais aumentam com o quadrado do comprimento do pacote. Assim, em rotores com valores elevados de resistência transversal, o pacote do rotor deve ser o menor possível. Sem mexer no tamanho do pacote, as perdas Joule totais do rotor podem ser reduzidas aumentando-se o ângulo de inclinação total.

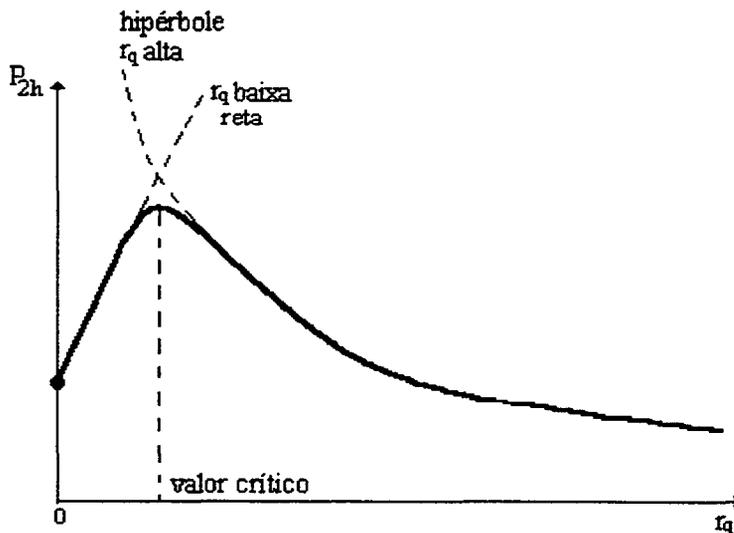


Fig.1.7. Dependência das perdas Joule do rotor com a resistência transversal.

◆ *resistência r_q baixa :*

No rotor com baixa resistência de isolamento entre barra e ferro, as perdas Joule totais do rotor são diretamente proporcionais à resistência do caminho transversal. A redução das perdas P_{2h} podem ser obtidas aumentando o pacote ou diminuindo a inclinação.

1.5 Estudo de isolamento das barras e medição das correntes inter-barras

Em 1987, quatro pesquisadores da Toshiba Corporation [21] publicaram um trabalho mostrando a importância da boa isolamento das barras para a redução das perdas adicionais. Neste trabalho uma nova estratégia para a medição das resistências inter-barras é proposta assim como o estudo com diferentes tipos de isolantes é realizado. São apresentados também resultados obtidos com tratamento térmico e usinagem do rotor (associado às perdas superficiais).

Dos resultados obtidos, os pesquisadores concluem que as perdas superficiais e de correntes inter-barras representam 2/3 das perdas adicionais totais.

Na tabela 1 são mostrados os resultados obtidos no estudo da usinagem do rotor associado ao choque térmico do mesmo e isolamento das barras.

<i>Métodos de redução de perdas</i>			
<i>Motor de 3.7 kW – 4 pólos</i>			
<i>Usinagem do rotor</i>	<i>Barra Isolada</i>	<i>Choque térmico</i>	<i>Rendimento (%)</i>
Sim	Não	Não	83.2
Sim	Sim	Não	84.2
Sim	Sim	Sim	84.7
Não	Não	Não	83.9
Não	Sim	Não	85.2
Não	Sim	Sim	85.5

Tabela 1.

As conclusões mais importantes obtidas por estes pesquisadores são :

- ⇒ Entre as amostras , os motores de rotor usinado apresentaram maiores perdas .
- ⇒ Rotor não usinado associado à ranhura isolada diminui consideravelmente as perdas por correntes interbarras e superficiais.
- ⇒ A boa isolamento das barras realmente reduz as perdas interbarras, independente se o rotor é usinado ou não , assim como se o choque de temperatura foi feito ou não.

1.6 Conclusões deste capítulo

Este capítulo mostrou os conceitos básicos necessários ao entendimento das perdas inter-barras. Foram definidas as correntes inter-barras, resistências inter-barras e resistência de contato assim como os problemas de processos relacionados à estas perdas.

A formulação matemática baseada em trabalho de Adnan Odok para cálculo analítico da correntes inter-barras é também apresentado neste capítulo assim como as principais conclusões e observações feitas pelo autor para o caso do motor com baixa impedância de anel de curto-circuito e rotor inclinado e não inclinado.

De modo a enriquecer a apresentação do problema das perdas inter-barras os resultados obtidos por um grupo de japoneses com a análise de métodos de isolamento e medição das correntes inter-barras é apresentado na parte final deste capítulo.

Dos conceitos fundamentais, modelo analítico e análise de resultados experimentais apresentados verificou-se que as perdas inter-barras representam um problema bastante particular pois sendo inerente a processos industriais calculá-la com precisão é difícil. As dificuldades começam na determinação prática da resistência inter-barra uma vez que não há um método padrão reconhecido para tal.

Com as informações obtidas neste capítulo inicial uma nova modelagem para o cálculo das correntes inter-barras foi desenvolvido. Esta modelagem utilizando técnicas numéricas modernas de cálculo é apresentada no capítulo 2 a seguir.

2. Metodologia

2.1 Introdução

Conforme visto no capítulo precedente o problema das perdas inter-barras está vinculado ao problema da inclinação. Em seus trabalhos analíticos Adan Odok [19] e Subba Rao [20] fazem um rigoroso estudo mostrando os efeitos da mesma sobre as correntes inter-barras e outras componentes das perdas adicionais em carga.

Modernamente Ho et al [25] e Williamson et al. [26] aplicam diferentes métodos para analisar as perdas inter-barras porém sem ater-se ao efeito da inclinação. Ho utiliza a Técnica de Elementos Finitos 3D e Williamson a Teoria de Circuitos Acoplados.

Neste capítulo é apresentado de forma sistemática o desenvolvimento de uma nova e original metodologia, baseada no Método de Elementos Finitos, para a inserção das resistências inter-barras no circuito rotórico levando em conta o efeito da inclinação dos condutores do rotor. O objetivo principal desta nova metodologia, estruturada sobre o Programa EFCAD em duas dimensões desenvolvido no GRUCAD/LEEI, é permitir o estudo qualitativo dos efeitos que a inclinação exerce sobre as correntes inter-barras e outros parâmetros do motor de indução.

2.2 O modelo multi-fatiado para simular a inclinação

O modelamento de um motor de indução pode ser feito empregando-se equações de campos eletromagnéticos em duas dimensões onde a geometria e características do material magnético são invariáveis no sentido axial do motor.

A inclinação das barras contudo é uma das dificuldades do cálculo bidimensional devido a variação axial do campo magnético que ocorre devido à mudança de orientação do rotor em relação ao estator. Um modelo aproximado de representa-la é o modelo multi-fatiado, uma

técnica frequentemente usada, e empregada inicialmente por Williamson et al. [27]. Estes autores em seu trabalho utilizam este modelo mas calculam separadamente as Equações de Campo e as Equações do Circuito admitindo que as correntes induzidas são calculadas passo a passo no tempo e as Equações de Campo não. Assim, as Equações de Campo e Equações de Circuito não são calculadas simultaneamente. Em 1990, Razek et al [42] usou o modelo multi-fatiado para analisar um motor a ímãs permanentes. Recentemente, Arkkio et al. [28] publicou o primeiro trabalho utilizando o modelo multi-fatiado onde as equações de campo e as equações de circuito são calculadas simultaneamente tendo como incógnitas os potenciais magnéticos, as correntes das barras e as correntes do estator. Neste modelo as barras estão perfeitamente isoladas.

O modelo multi-fatiado consiste, conforme Fig.2.1, em fazer cortes transversais no motor gerando n fatias. As fatias do rotor são inclinadas de um ângulo $\Delta\alpha$ entre elas de modo a simular o ângulo de inclinação total δ .

A continuidade da corrente do estator e rotor (caso sem resistência transversal) deve ser respeitada.

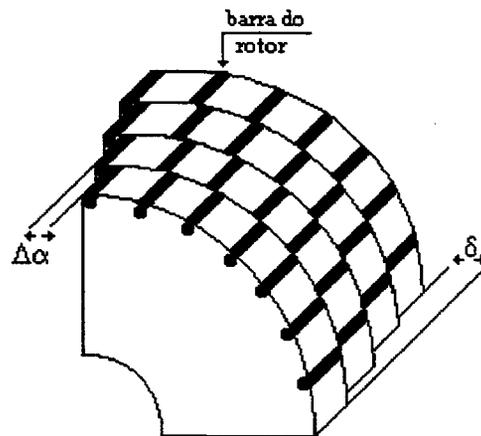


Fig.2.1. Modelo multi-fatiado do rotor

Quanto maior o número de cortes feitos, ou seja, quanto maior o número de fatias adotadas mais próximo chega-se ao comportamento da máquina real. Contudo, devido às limitações computacionais (tempo e memória), normalmente o número máximo de fatias adotado é cinco. O Modelo Multi-fatiado será implementado na lógica do programa EFCAD (com movimento) que utiliza a Técnica da Banda de Movimento para girar a estrutura [29].

2.3 As Equações de Campo para a estrutura eletromagnética

Com as equações de Maxwell, introduzindo a definição do potencial vetor e considerando-se que a frequência de operação da estrutura analisada é suficientemente baixa para desprezar a variação da indução elétrica no tempo, têm-se a equação (2.1) para o Campo Magnetodinâmico invariante por translação (caso cartesiano)[29][30].

$$\text{div}_{x,y} (\nabla \mathbf{A}) + \mathbf{J} = - \text{div}_{x,y} (\nabla \mathbf{P}_R) \quad (2.1)$$

onde \mathbf{P}_R , a contribuição dos ímãs, é dada por:

$$\mathbf{P}_R = B_{RY} \mathbf{i} - B_{RX} \mathbf{j} \quad (2.2)$$

\mathbf{A} , \mathbf{J} e \mathbf{B}_R são respectivamente o potencial vetor, a densidade de corrente e a indução magnética remanente.

2.3.1 Equações locais para as fatias da estrutura

Adotando-se o modelo multi-fatiado mostrado na Fig.2.1, pode-se com a equação (2.1) definir as equações locais para as bobinas finas(estator) e os condutores grossos (rotor) para cada fatia it .

◆ bobinas finas

$$\text{div}_{x,y} (\nabla \mathbf{A}^{it}) + \mathbf{J}_b^{it} = 0 \quad (2.3)$$

◆ condutores grossos

$$\text{div}_{x,y} (\nabla \mathbf{A}^{it}) + \mathbf{J}_c^{it} = 0 \quad (2.4)$$

2.3.2 Equações globais

Introduzindo a definição de potencial escalar obtêm-se as equações globais para as **nbf** bobinas finas e os **ncm** condutores grossos de cada fatia **it**.

◆ bobinas finas

$$U_b^{it} = R_b^{it} I_b^{it} + \frac{d}{dt} \phi_b^{it} \quad (2.5)$$

$$\phi_b^{it} = \frac{ncb}{S_b^{it}} I_b^{it} \iint_{S_b} K_b^{it} A^{it} dx dy \quad (2.6)$$

$$J_b^{it} = K_b^{it} \frac{ncb}{S_b^{it}} I_b^{it} \quad (2.7)$$

◆ condutores grossos

$$U_c^{it} = R_c^{it} I_c^{it} + \frac{d}{dt} \phi_c^{it} \quad (2.8)$$

$$\phi_c^{it} = \frac{I_c^{it}}{S_c^{it}} \iint_{S_c} K_c^{it} A^{it} dx dy \quad (2.9)$$

$$J_c^{it} = -\sigma_c \frac{\partial}{\partial t} A^{it} + \sigma_c \frac{K_c}{I_c^{it}} U_c^{it} \quad (2.10)$$

Nas equações anteriores U_b , R_b , I_b , ncb , S_b e K_b são respectivamente as tensões, resistências, correntes, número de condutores, seção e sentido de corrente de cada uma das bobinas finas da fatia **it** de comprimento l .

U_c , R_c , I_c , K_c , S_c e σ_c são respectivamente tensões, resistências, correntes, sentido de corrente, seção e condutividade de cada condutor grosso da fatia **it** de comprimento l .

O comprimento de cada fatia (l), é o comprimento total L da estrutura dividido pelo número total de fatias **nft**.

O sentido das correntes dos condutores é convencionado como a seguir:

$$\blacklozenge \text{Condutor ida} \quad K_c^{it} = K_b^{it} = -1 \quad (2.11)$$

$$\blacklozenge \text{Condutor retorno} \quad K_c^{it} = K_b^{it} = 1 \quad (2.12)$$

Com as relações entre as grandezas locais e grandezas globais têm-se o seguinte sistema de equações gerais para cada fatia it .

$$\text{div}_{x,y} (\mathbf{v} \text{ grad}_{x,y} A^{it}) + K_b^{it} \frac{ncb}{S_b^{it}} I_b^{it} - \sigma_c \frac{\partial}{\partial t} A^{it} + \sigma_c \frac{K_c^{it}}{l^{it}} U_c^{it} = - \text{div}_{x,y} (\mathbf{v} \mathbf{P}_R)^{it} \quad (2.13)$$

$$U_b^{it} = R_b^{it} I_b^{it} + \frac{ncb}{S_b^{it}} l^{it} \iint_{S_b} K_b^{it} \frac{\partial}{\partial t} A^{it} dx dy \quad (2.14)$$

$$U_c^{it} = R_c^{it} I_c^{it} + \frac{l^{it}}{S_c^{it}} \iint_{S_c} K_c^{it} \frac{\partial}{\partial t} A^{it} dx dy \quad (2.15)$$

Considerando-se que todas as bobinas finas, assim como todos os condutores grossos tem a mesma seção :

$$S_b^1 = S_b^2 = \dots = S_b^{nft} = S_b \quad (2.16)$$

$$S_c^1 = S_c^2 = \dots = S_c^{nft} = S_c \quad (2.17)$$

Para as bobinas finas, impõe-se a continuidade de corrente entre as fatias.

$$I_b^1 = I_b^2 = \dots = I_b^{nft} = I_b \quad (2.18)$$

Para os condutores grossos, duas possibilidades são possíveis:

→ *sem resistência inter-barra*

$$I_c^1 = I_c^2 = \dots = I_c^{nft} = I_c \quad (2.19)$$

→ *com resistência inter-barra*

$$I_c^1 \neq I_c^2 \neq \dots \neq I_c^{nft} \quad (2.20)$$

$$\text{Seja : } I^{it} = R_c^{it} \sigma_c S_c \quad (2.21)$$

Com a equação (2.21) em (2.15) têm-se:

$$U_c^{it} = R_c^{it} I_c^{it} + R_c^{it} \sigma_c \iint_{S_c} K_c^{it} \frac{\partial}{\partial t} A^{it} dx dy \quad (2.22)$$

Tomando-se as equações (2.13), (2.14), (2.22) com as considerações de (2.16), (2.17), (2.18) e (2.20), obtemos o sistema de equações a seguir:

$$\text{div}_{x,y} (v \mathbf{grad}_{x,y} A^{it}) + K_b^{it} \frac{ncb}{S_b} I_b - \sigma_c \frac{\partial}{\partial t} A^{it} + \sigma_c \frac{K_c^{it}}{I^{it}} U_c^{it} = - \text{div}_{x,y} (v \mathbf{P}_R)^{it} \quad (2.23)$$

$$U_b^{it} = R_b^{it} I_b + \frac{ncb}{S_b} I^{it} \iint_{S_b} K_b^{it} \frac{\partial}{\partial t} A^{it} dx dy \quad (2.24)$$

$$U_c^{it} = R_c^{it} I_c^{it} + R_c^{it} \sigma_c \iint_{S_c} K_c^{it} \frac{\partial}{\partial t} A^{it} dx dy \quad (2.25)$$

Para o caso de rotor inclinado, sem resistências inter-barras, a corrente I_c^{it} de (2.25) para cada fatia de cada condutor grosso será a mesma de modo a garantir a continuidade de corrente.

2.3.3 Discretização espacial

Para se resolver sistemas de equações a derivadas parciais através de métodos numéricos é necessário discretizar o domínio de estudo. Para tal discretização, existe uma certa quantidade de métodos : diferenças finitas, elementos finitos, volumes finitos, elementos de arestas, etc. Neste trabalho, o método de elementos finitos é usado.

Uma vez que os subsídios teóricos necessários para o entendimento da discretização das equações diferenciais de (2.23), (2.24) e (2.25) podem ser encontradas com facilidade na literatura [30] nos restringiremos à apresentação das equações finais para cada fatia após a discretização conforme a seguir.

$$M^{it}A^{it} - P_b^{it}I_b + N^{it} \frac{d}{dt}A^{it} - \frac{P_c^{it}}{l^{it}}U_c^{it} = D^{it} \quad (2.26)$$

$$R_b^{it}I_b + l^{it}Q_b^{it} \frac{d}{dt}A^{it} - U_b^{it} = 0 \quad (2.27)$$

$$R_c^{it}I_c^{it} + R_c^{it}Q_c^{it} \frac{d}{dt}A^{it} - U_c^{it} = 0 \quad (2.28)$$

As contribuições associadas às matrizes das equações acima são mostradas em 2.3.4.

Pode-se afirmar que, multiplicar uma matriz **S** qualquer por uma matriz diagonal **D** de elementos não nulos, iguais e de valor **x** é a mesma coisa que multiplicar esta matriz **S** por **x**. Assim, se os elementos da matriz R_c^{it} de (2.28) são iguais e de valor r_t , esta equação pode ser reescrita como a seguir :

$$R_c^{it}I_c^{it} + r_tQ_c^{it} \frac{d}{dt}A^{it} - U_c^{it} = 0 \quad (2.29)$$

Se afirmamos também que todas as fatias tem o mesmo comprimento l_x ($l^1 = l^2 = \dots = l^{nft}$), o sistema de equações para todas as fatias é dado por:

$$\mathbf{M} \mathbf{A} + \mathbf{N} \frac{d}{dt} \mathbf{A} - \frac{1}{l_x} \mathbf{P}_{CT} \mathbf{U}_{CF} - \mathbf{P}_B \mathbf{I}_B = \mathbf{D}_T \quad (2.30)$$

$$\mathbf{R}_B \mathbf{I}_B + \mathbf{L}_B \frac{d}{dt} \mathbf{I}_B + l_x \mathbf{Q}_B \frac{d}{dt} \mathbf{A} = \mathbf{U}_B \quad (2.31)$$

$$\mathbf{R}_{CF} \mathbf{I}_{CF} + r_l \mathbf{Q}_{CT} \frac{d}{dt} \mathbf{A} - \mathbf{U}_{CF} = \mathbf{0} \quad (2.32)$$

\mathbf{M} e \mathbf{N} são respectivamente as matrizes que levam em conta a permeabilidade e a condutividade dos elementos do domínio discretizado. \mathbf{A} é o vetor potencial vetor de todos os n nós da malha, \mathbf{P}_B é a matriz que relaciona as correntes \mathbf{I}_B das bobinas finas aos nós dos elementos que as contêm. \mathbf{P}_{CT} é a matriz que relaciona as tensões \mathbf{U}_{CF} dos condutores grossos aos nós dos elementos associados, \mathbf{D}_T é o vetor correspondente aos ímãs permanentes, \mathbf{R}_B e \mathbf{L}_B são respectivamente a matriz das resistências e a matriz das indutâncias de cabeça de bobina das bobinas finas. \mathbf{Q}_B e \mathbf{Q}_{CT} são as matrizes de enlace de fluxo nas bobinas finas e condutores grossos. \mathbf{U}_B é o vetor da tensão nos terminais das bobinas finas. \mathbf{R}_{CF} e \mathbf{I}_{CF} são respectivamente a matriz resistência e o vetor das correntes dos segmentos de barras de todas as fatias.

A forma e dimensão de cada uma das matrizes e vetores de (2.30), (2.31) e (2.32) será apresentada no fim deste capítulo após obtenção da formulação final.

2.3.4 Contribuições Elementares

As matrizes \mathbf{M} , \mathbf{N} , \mathbf{P}_b , \mathbf{P}_c , \mathbf{Q}_b , \mathbf{Q}_c , \mathbf{R}_c de cada fatia são construídas com o conjunto de contribuições elementares calculadas para cada elemento de área S_e do domínio discretizado.

Assim temos:

$$M_{ij} = \iint_{S_e} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \nu \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \nu \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) dx dy \quad (2.33)$$

$$N_{ij} = \iint_{S_e} \sigma_c N_i N_j dx dy \quad (2.34)$$

$$D_i = \iint_{S_e} \left(B_{RY} v \frac{\partial N_i}{\partial x} - B_{RX} v \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) dx dy \quad (2.35)$$

$$P_{bij} = \iint_{S_e} K_{bj} \frac{ncb_j}{S_{bj}} N_i dx dy \quad \begin{array}{l} \text{Se o n\u00f3 } i \text{ pertence ao elemento } S_e \text{ que} \\ \text{discretiza a bobina fina } j \end{array} \quad (2.36)$$

$$P_{bij} = 0 \quad \text{caso contr\u00e1rio} \quad (2.37)$$

$$Q_{bji} = \frac{1}{S_{bj}} ncb_j \iint_{S_e} K_{bj} N_i dx dy \quad \begin{array}{l} \text{Se o n\u00f3 } i \text{ pertence ao elemento } S_e \text{ que} \\ \text{discretiza a bobina fina } j \end{array} \quad (2.38)$$

$$Q_{bji} = 0 \quad \text{caso contr\u00e1rio} \quad (2.39)$$

$$P_{Cij} = \iint_{S_e} \sigma_{cj} K_{cj} N_i dx dy \quad \begin{array}{l} \text{Se o n\u00f3 } i \text{ pertence ao elemento } S_e \text{ que} \\ \text{discretiza o condutor grosso } j \end{array} \quad (2.40)$$

$$P_{Cij} = 0 \quad \text{caso contr\u00e1rio} \quad (2.41)$$

$$Q_{Cji} = \iint_{S_e} \sigma_{cj} K_{cj} N_i dx dy \quad \begin{array}{l} \text{Se o n\u00f3 } i \text{ pertence ao elemento } S_e \text{ que} \\ \text{discretiza o condutor grosso } j \end{array} \quad (2.42)$$

$$Q_{Cji} = 0 \quad \text{caso contr\u00e1rio} \quad (2.43)$$

$$R_{cj}^{-1} = \iint_{S_e} \frac{\sigma_{cj}}{l} dx dy \quad \begin{array}{l} \text{Se o elemento } S_e \text{ pertence ao} \\ \text{condutor grosso } j \end{array} \quad (2.44)$$

Das contribui\u00e7\u00f5es dadas acima tem-se que :

$$Q_b = P_b^T$$

$$Q_c = P_c^T \quad \text{onde } T \text{ \u00e9 transposto.}$$

2.4 Equações do circuito rotórico com resistências inter-barras

No rotor da Fig.2.1 são inseridas resistências entre cada par de barras formado pelos cortes transversais. Para n_{cm} barras serão inseridas $(n_{ft}-1) \times n_{cm}$ resistências inter-barras. O número total de segmentos de barras do rotor, n_{ct} , é obtido com o número de barras vezes o número de fatias ($n_{ft} \times n_{cm}$).

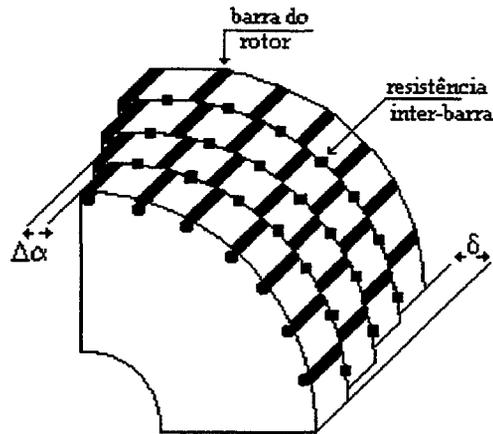


Fig.2.2. Modelo mult-fatiado com resistência inter-barra.

Nos motores de indução de gaiola o circuito do rotor é fechado nas extremidades através de anéis de curto-circuito. O circuito da gaiola com as resistências inter-barras e as impedâncias dos anéis é mostrada na Fig.2.3 onde :

Z_a : impedância composta de uma resistência R_a e uma indutância L_a relativa ao segmento do anel de curto-circuito compreendido entre a barra n e a barra $(n-1)$.

r_q : resistência inter-barra compreendida entre os segmentos de barras n e $(n-1)$.

r_t : resistência de cada segmento de barra.

$u_{n_{cm},n_{ft}}$ tensão induzida sobre cada segmento de barra.

Os prolongamentos das barras fora das ranhuras são desprezados.

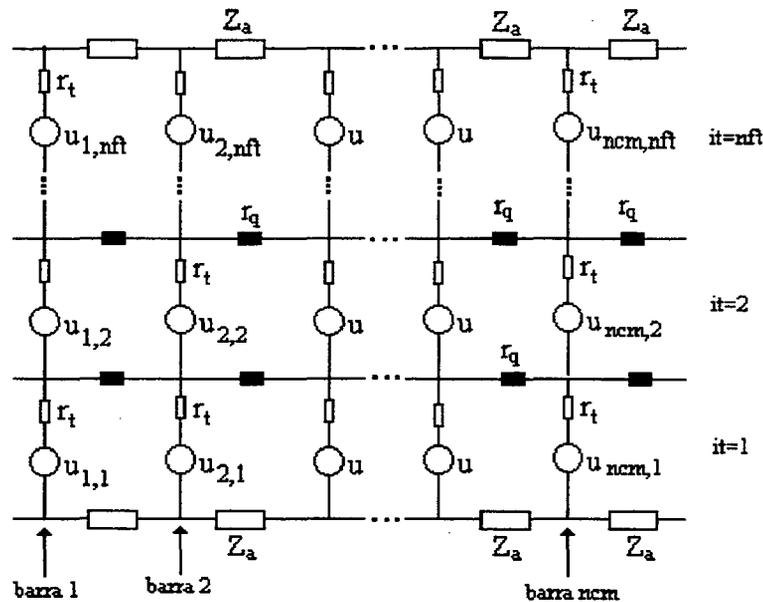


Fig.2.3.Circuito rotórico com resistência inter-barra

2.4.1 Noções de análise topológica de circuitos(teoria dos grafos lineares)

Um circuito é definido por sua topologia. Ele forma um grafo orientado G que é um conjunto de arestas orientadas unindo os nós do circuito dois a dois. A partir da definição deste grafo orientado é possível extrair uma árvore, que é um sub-grafo conexo contendo todos os nós de G mas não formando nenhuma malha. As arestas que pertencem à árvore são chamados **ramos** e as que não pertencem são chamadas **elos** (ver anexo A). A escolha da árvore é particular, adequando-se ao objetivo de quem a define.

Para se obter as saídas desejadas de um circuito de topologia qualquer três formulações são geralmente apresentadas na literatura [35].

⇨ *Método dos Potenciais Independentes*

Todas as variáveis do circuito são eliminadas tendo como incógnitas somente os potenciais vetores dos nós da malha obtida pelo Método de Elementos Finitos. Esta

formulação baseia-se na utilização de uma Matriz Admitância para exprimir as correntes em função dos potenciais dos nós. Apesar de inicialmente despertar bastante interesse, esta formulação é bastante difícil de ser colocada em prática pois a matriz principal do sistema não é simétrica para determinados tipos de circuitos.

⇨ *Método das Variáveis de Estado*

Esta formulação é especial e tem como incógnitas as variáveis de estado ou seja as tensões dos capacitores e as correntes das indutâncias do circuito.

⇨ *Método das Correntes Independentes*

Formulação onde as incógnitas do circuito são as correntes das malhas do circuito e as tensões nos capacitores. A vantagem desta formulação é a de fornecer uma expressão simples para as correntes nos enrolamentos. Aqui duas topologias são possíveis: ramos com fontes de tensão independentes e ramos com fontes de tensão e correntes independentes.

Devido à característica do circuito em análise e a simplicidade deste método aplicado a ramos com fontes de tensão independentes, o mesmo será adotado para dar continuidade ao desenvolvimento da formulação desejada.

Neste método as arestas do grafo podem conter resistências, indutâncias próprias e mútuas, capacitores e fontes de tensão independente.

Tomemos a estrutura de uma aresta k qualquer conforme Fig.2.4 onde a mesma não é acoplada à nenhuma outra aresta.

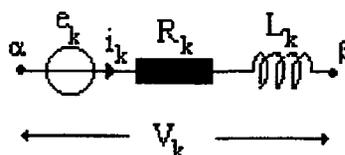


Fig.2.4. Estrutura de uma aresta qualquer

A tensão nos terminais da aresta é :

$$V_k = e_k + R_k i_k + L_k \frac{d}{dt} i_k \quad (2.45)$$

onde $k=1,2,\dots,nar$ (onde nar é o número de arestas).

Para todas as arestas do circuito têm-se a relação :

$$V = E + RI + L \frac{d}{dt} I \quad (2.46)$$

onde :

$$E = [e_1 \ e_2 \ \dots \ e_{nar}]^T \quad (2.47)$$

$$I = [i_1 \ i_2 \ \dots \ i_{nar}]^T \quad (2.48)$$

$$R = \text{diag}[R_1 \ R_2 \ \dots \ R_{nar}] \quad (2.49)$$

$$L = \text{diag}[L_1 \ L_2 \ \dots \ L_{nar}] \quad (2.50)$$

Se a aresta não contém nenhuma resistência ou indutância $R_k=0$ e $L_k=0$.

A partir de (2.46) podemos definir as tensões nos ramos (V_{br}) e as tensões elos (V_m) da árvore como a seguir:

$$V_{br} = E_{br} + R_{br} I_{br} + L_{br} \frac{d}{dt} I_{br} \quad (2.51)$$

$$V_m = E_m + R_m I_m + L_m \frac{d}{dt} I_m \quad (2.52)$$

onde:

E_{br} e E_m são os vetores das fontes de tensão independentes dos ramos e elos da árvore.

R_{br} e L_{br} são as matrizes resistência e indutância dos ramos.

R_m et L_m são as matrizes resistência e indutância dos elos.

A relação entre as tensões dos ramos e elos de uma árvore é dada por (2.53)(anexo A):

$$[\mathbf{V}_m] = - \mathbf{B}_1 \mathbf{V}_{br} \quad (2.53)$$

Com (2.51) e (2.52) em (2.53) temos :

$$- \mathbf{B}_1(\mathbf{E}_{br} + \mathbf{R}_{br} \mathbf{I}_{br} + \mathbf{L}_{br} \frac{d}{dt} \mathbf{I}_{br}) = \mathbf{E}_m + \mathbf{R}_m \mathbf{I}_m + \mathbf{L}_m \frac{d}{dt} \mathbf{I}_m \quad (2.54)$$

$$\mathbf{B}_1 \mathbf{E}_{br} + \mathbf{B}_1 \mathbf{R}_{br} \mathbf{I}_{br} + \mathbf{B}_1 \mathbf{L}_{br} \frac{d}{dt} \mathbf{I}_{br} = - \mathbf{E}_m - \mathbf{R}_m \mathbf{I}_m - \mathbf{L}_m \frac{d}{dt} \mathbf{I}_m \quad (2.55)$$

A relação entre as correntes dos ramos e elos de uma árvore é dada por :

$$\mathbf{I}_{br} = \mathbf{B}_1^T \mathbf{I}_m \quad (2.56)$$

Com (2.56) em (2.55) temos a equação a seguir:

$$\mathbf{B}_1 \mathbf{E}_{br} + (\mathbf{B}_1 \mathbf{R}_{br} \mathbf{B}_1^T + \mathbf{R}_m) \mathbf{I}_m + (\mathbf{B}_1 \mathbf{L}_{br} \mathbf{B}_1^T + \mathbf{L}_m) \frac{d}{dt} \mathbf{I}_m + \mathbf{E}_m = 0 \quad (2.57)$$

Seja :

$$\mathbf{R}_M = \mathbf{B}_1 \mathbf{R}_{br} \mathbf{B}_1^T + \mathbf{R}_m$$

$$\mathbf{L}_M = \mathbf{B}_1 \mathbf{L}_{br} \mathbf{B}_1^T + \mathbf{L}_m$$

Com as considerações anteriores , a equação (2.57) pode ser rescrita como abaixo:

$$\mathbf{B}_1 \mathbf{E}_{br} + \mathbf{R}_M \mathbf{I}_m + \mathbf{L}_M \frac{d}{dt} \mathbf{I}_m + \mathbf{E}_m = 0 \quad (2.58)$$

2.4.2 Construção da árvore e matrizes associadas aos ramos e elos

Neste momento, a partir do circuito de **nft** fatias e **ncm** barras da Fig.2.3 uma árvore é selecionada. Os **nbr** ramos desta árvore, mostrados na Fig.2.5 em traço grosso, são todos os **nct** segmentos de barras mais os **(ncm-1)** primeiros segmentos de anéis superiores. Os **nam** elos, em traço fino, são todos os segmentos de anéis inferiores, as resistências inter-barras e o último segmento de anel superior.

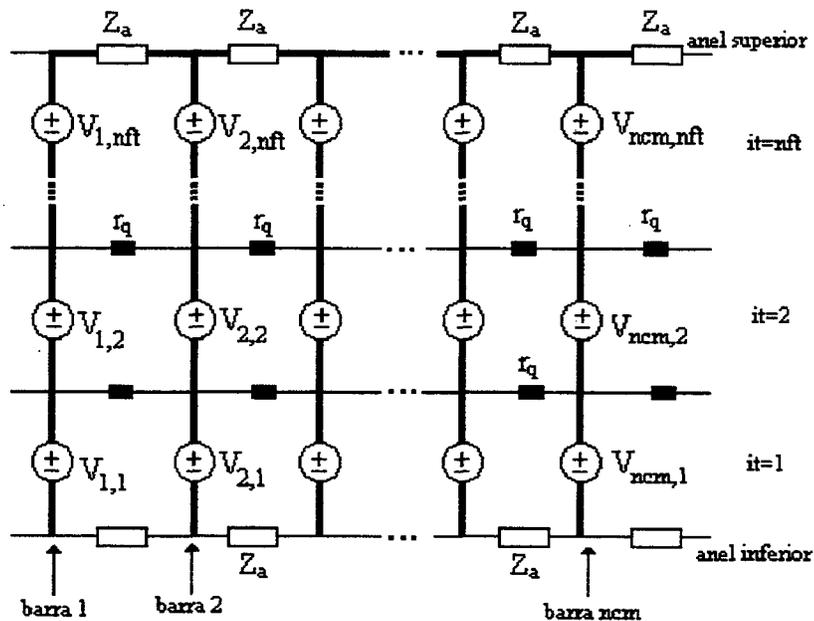


Fig.2.5. Árvore obtida a partir do circuito do rotor
(traços grossos : ramos traços finos: elos)

Mostraremos inicialmente como são construídas as matrizes associadas aos ramos desta árvore pois a mesmas são independentes das resistências inter-barras.

As matrizes R_{br} e L_{br} (matriz resistência e matriz indutância dos ramos) da árvore e definidas em (2.59) e (2.60) são quadradas, diagonais, de dimensão **(nbr x nbr)** onde os primeiros **nct** elementos (correspondentes aos segmentos de barras) são nulos.

$$\text{Diag}[R_{br}]_{n_{br} \times n_{br}}^T = \left[\overbrace{0,0,0,\dots,0}^{nct}, \overbrace{R_a, R_a, R_a, \dots, R_a}^{ncm-1} \right] \quad (2.59)$$

$$\text{Diag}[L_{br}]_{n_{br} \times n_{br}}^T = \left[\overbrace{0,0,0,\dots,0}^{nct}, \overbrace{L_a, L_a, L_a, \dots, L_a}^{ncm} \right] \quad (2.60)$$

Na formulação das equações do circuito da Fig.2.3 as barras do rotor (modeladas por Elementos Finitos) aparecerão como fontes de tensão e serão consideradas através das tensões V_{ij} da Fig.2.5 que são as tensões nos terminais de cada segmento de barra. Os últimos elementos de R_{br} e L_{br} são as **(ncm-1)** resistências R_a e indutâncias L_a dos anéis superiores respectivamente .

O vetor E_{br} , que compreende as fontes dos ramos será formado pelas **nct** tensões nos terminais dos segmentos de barras e mais as tensões nos terminais dos **(ncm-1)** segmentos de anéis superiores que são nulas. Assim:

$$[E_{br}]_{n_{br}}^T = \left[\overbrace{\overbrace{V_{1,1}, V_{2,1}, V_{3,1}, \dots, V_{ncm,1}, \dots, V_{1,nft}, V_{2,nft}, \dots, V_{ncm,nft}}^{nct}}^{nbr}, \overbrace{0,0,0,\dots,0}^{ncm-1} \right] \quad (2.61)$$

Podemos definir E_{br} com a equação (2.62)

$$E_{br} = X U_{cf} \quad (2.62)$$

O sistema matricial associado à equação (2.62) é mostrado na Fig.2.6.

Com (2.62) em (2.58) temos:

$$B_1 X U_{cf} + R_M I_m + L_M \frac{d}{dt} I_m + E_m = 0 \quad (2.63)$$

Se tomamos a igualdade $B_1 X = B_X$ a equação (2.63) é simplificada para :

$$B_X U_{cf} + R_M I_m + L_M \frac{d}{dt} I_m + E_m = 0 \quad (2.64)$$

$$\begin{bmatrix} V_{1,1} \\ V_{2,1} \\ \vdots \\ V_{ncm,1} \\ V_{1,2} \\ V_{2,2} \\ \vdots \\ V_{ncm,2} \\ \vdots \\ V_{1,nft} \\ V_{2,nft} \\ \vdots \\ V_{ncm,nft} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\ 0\ \dots\ 0 & 0\ 0\ \dots\ 0\ \dots & 0\ 0\ \dots\ 0 \\ 0\ 1\ \dots\ 0 & 0\ 0\ \dots\ 0\ \dots & 0\ 0\ \dots\ 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0\ 0\ \dots\ 1 & 0\ 0\ \dots\ 0\ \dots & 0\ 0\ \dots\ 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0\ 0\ \dots\ 0 & 1\ 0\ \dots\ 0\ \dots & 0\ 0\ \dots\ 0 \\ 0\ 0\ \dots\ 0 & 0\ 1\ \dots\ 0\ \dots & 0\ 0\ \dots\ 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0\ 0\ \dots\ 0 & 0\ 0\ \dots\ 1\ \dots & 0\ 0\ \dots\ 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0\ 0\ \dots\ 0 & 0\ 0\ \dots\ 0\ \dots & 1\ 0\ \dots\ 0 \\ 0\ 0\ \dots\ 0 & 0\ 0\ \dots\ 0\ \dots & 0\ 1\ \dots\ 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0\ 0\ \dots\ 0 & 0\ 0\ \dots\ 0\ \dots & 0\ 0\ \dots\ 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0\ 0\ \dots\ 0 & 0\ 0\ \dots\ 0\ \dots & 0\ 0\ \dots\ 0 \\ 0\ 0\ \dots\ 0 & 0\ 0\ \dots\ 0\ \dots & 0\ 0\ \dots\ 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0\ 0\ \dots\ 0 & 0\ 0\ \dots\ 0\ \dots & 0\ 0\ \dots\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{1,1} \\ V_{2,1} \\ \vdots \\ V_{ncm,1} \\ V_{1,2} \\ V_{2,2} \\ \vdots \\ V_{ncm,2} \\ \vdots \\ V_{1,nft} \\ V_{2,nft} \\ \vdots \\ V_{ncm,nft} \end{bmatrix}$$

Fig.2.6. Sistema matricial associado ao vetor E_{br} .

A metodologia adotada naturalmente permite o estudo de problemas com ou sem inclinação, como também, com ou sem resistências inter-barras. Para simular a não existência desta resistência no processo de cálculo pode-se por exemplo atribuir à mesma um valor bastante alto, configurando um circuito-aberto. Contudo, para otimizar o sistema matricial, este controle será feito durante a construção das matrizes associadas aos elos. Na construção destas, a existência ou não das resistências inter-barras será o fator determinante. Teremos então as matrizes R_m e L_m (matriz resistência e matriz indutância dos elos) conforme a seguir:

♦ *com resistência inter-barra*

Neste caso, a quantidade de elos(**nam**) é dada por:

$$nam = (nft \times ncm) + 1$$

e a forma geral de R_m e L_m é conforme abaixo :

$$\text{Diag}[R_m]_{\text{nam} \times \text{nam}}^T = \left[\overbrace{R_a, R_a, R_a, \dots, R_a}^{\text{ncm}}, \overbrace{r_q, r_q, r_q, \dots, r_q}^{(\text{nft}-1) \cdot \text{ncm}}, R_a \right] \quad (2.65)$$

$$\text{Diag}[L_m]_{\text{nam} \times \text{nam}}^T = \left[\overbrace{L_a, L_a, L_a, \dots, L_a}^{\text{ncm}}, \overbrace{0, 0, 0, \dots, 0}^{(\text{nft}-1) \cdot \text{ncm}}, L_a \right] \quad (2.66)$$

◆ *sem resistência inter-barra*

Neste caso, a quantidade de elos(**nam**) é dada por:

$$\text{nam} = \text{ncm} + 1 \quad (2.67)$$

e a forma geral de R_m e L_m é conforme abaixo :

$$\text{Diag}[R_m]_{\text{nam} \times \text{nam}}^T = \left[\overbrace{R_a, R_a, R_a, \dots, R_a}^{\text{ncm}}, R_a \right] \quad (2.68)$$

$$\text{Diag}[L_m]_{\text{nam} \times \text{nam}}^T = \left[\overbrace{L_a, L_a, L_a, \dots, L_a}^{\text{ncm}}, L_a \right] \quad (2.69)$$

Os elos da árvore, conforme Fig. 2.5 não possuem fontes independentes. Podemos afirmar deste modo que $E_m=0$. A equação (2.64) , passa com esta afirmação a ser como a seguir:

$$B_X U_{cf} + R_M I_m + L_M \frac{d}{dt} I_m = 0 \quad (2.70)$$

2.4.3 A Matriz Malha Fundamental (B_1^T)

A relação entre as correntes dos ramos e correntes dos elos de uma árvore é conforme equação (2.56) dada pela matriz B_1^T que é chamada Matriz Malha Fundamental. Para calcular esta matriz normalmente o Algoritmo de Welsh é empregado (ver anexo A). Neste trabalho a matriz B_1^T será obtida diretamente da árvore escolhida conhecendo-se o número de barras do rotor e o número de fatias determinadas para fazer o seccionamento.

Na Fig.2.7 é mostrada a árvore anteriormente escolhida com as correntes que percorrem os ramos e elos. O sentido da corrente, aqui previamente estabelecido, serve apenas para a construção de B_1^T . O sentido real da corrente nos elos e ramos é obtido no processo de cálculo.

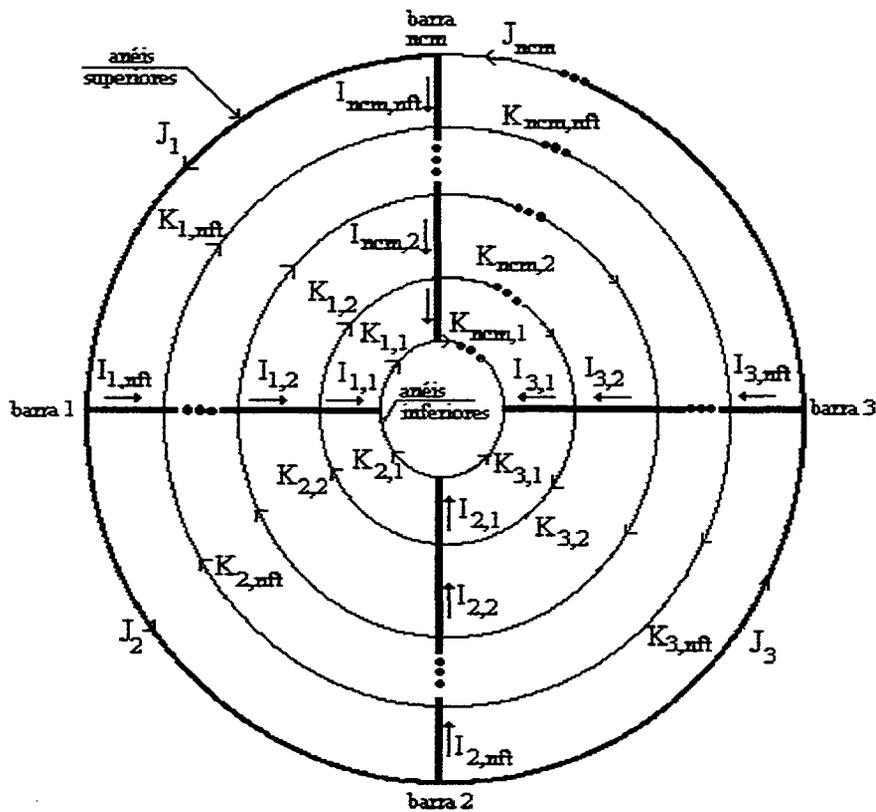


Fig.2.7. Correntes de ramos e elos da árvore

Da Fig.2.7 temos que as correntes dos ramos são as $I_{i,j}$ correntes dos segmentos de barras e J_{ncm} , a corrente do último segmento de anel superior. As correntes dos elos são as J_k primeiras correntes dos anéis superiores, as $K_{i,j}$ correntes inter-barras e as $K_{i,1}$ correntes dos anéis inferiores. As relações dadas são para casos periódicos.

As correntes nos ramos são então como a seguir :

$$\begin{aligned}
 I_{1,1} &= K_{1,1} - K_{2,1} \\
 I_{2,1} &= K_{2,1} - K_{3,1} \\
 &\vdots \\
 I_{ncm,1} &= K_{ncm,1} - K_{1,1}
 \end{aligned}
 \quad \left. \begin{array}{l} \longleftarrow \\ \longleftarrow \\ \longleftarrow \\ \longleftarrow \end{array} \right\} \text{it}=1$$

$$\begin{aligned}
 I_{1,2} &= I_{1,1} + K_{1,2} - K_{2,2} = K_{1,1} - K_{2,1} + K_{1,2} - K_{2,2} \\
 I_{2,2} &= I_{2,1} + K_{2,2} - K_{3,2} = K_{2,1} - K_{3,1} + K_{2,2} - K_{3,2} \\
 &\vdots \\
 I_{ncm,2} &= I_{ncm,1} + K_{ncm,2} - K_{1,2} = K_{ncm,1} - K_{1,1} + K_{ncm,2} - K_{1,2}
 \end{aligned}
 \quad \left. \begin{array}{l} \longleftarrow \\ \longleftarrow \\ \longleftarrow \\ \longleftarrow \end{array} \right\} \text{it}=2$$

$$\begin{aligned}
 &\vdots \\
 I_{1,nft} &= I_{1,nft-1} + K_{1,nft} - K_{2,nft} = K_{1,1} - K_{2,1} + K_{1,2} - K_{2,2} \dots + K_{1,nft} - K_{2,nft} \\
 I_{2,nft} &= I_{2,nft-1} + K_{2,nft} - K_{3,nft} = K_{2,1} - K_{3,1} + K_{2,2} - K_{3,2} \dots + K_{2,nft} - K_{3,nft} \\
 &\vdots \\
 I_{ncm,nft} &= I_{ncm,nft-1} + K_{ncm,nft} - K_{1,nft} = K_{ncm,1} - K_{1,1} + K_{ncm,2} - K_{1,2} \dots + K_{ncm,nft} - K_{1,nft}
 \end{aligned}
 \quad \left. \begin{array}{l} \longleftarrow \\ \longleftarrow \\ \longleftarrow \\ \longleftarrow \end{array} \right\} \text{it}=nft$$

(2.71)

Podemos definir as relações de (2.71) da seguinte forma geral:

$$I_{i,j} = \sum_{k=1}^j K_{i,k} - K_{i+1,k} \quad \text{se } i < ncm \quad (2.72a)$$

$$I_{ncm,j} = \sum_{k=1}^j K_{ncm,k} - K_{1,k} \quad \text{se } i = ncm \quad (2.72b)$$

$$J_i = \sum_{j=1}^{nft} (K_{i,j} - K_{ncm,j}) + J_{ncm} \quad \text{se } i \leq ncm \quad (2.72c)$$

A matriz \mathbf{B}_1^T obtida das relações de (2.72) é mostrada na Fig.2.8 .

$$\begin{bmatrix} I_{1,1} \\ I_{2,1} \\ \vdots \\ I_{ncm,1} \\ \\ I_{1,2} \\ I_{2,2} \\ \vdots \\ I_{ncm,2} \\ \vdots \\ I_{1,nft} \\ I_{2,nft} \\ \vdots \\ I_{ncm,nft} \\ J_1 \\ J_2 \\ \vdots \\ J_{ncm-1} \end{bmatrix}_{nbr} = \begin{bmatrix} 1-1 \dots 0 & 00 \dots 0 \dots & 00 \dots 0 & 0 \\ 01 \dots 0 & 00 \dots 0 \dots & 00 \dots 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -10 \dots 1 & 00 \dots 0 \dots & 00 \dots 0 & 0 \\ \\ 1-1 \dots 0 & 1-1 \dots 0 \dots & 00 \dots 0 & 0 \\ 01 \dots 0 & 01 \dots 0 \dots & 00 \dots 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -10 \dots 1 & -10 \dots 1 \dots & 00 \dots 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1-1 \dots 0 & 1-1 \dots 0 \dots & 1-1 \dots 0 & 0 \\ 01 \dots 0 & 01 \dots 0 \dots & 01 \dots 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -10 \dots 1 & -10 \dots 1 \dots & -10 \dots 1 & 0 \\ 10 \dots -1 & 10 \dots -1 \dots & 10 \dots -1 & 1 \\ 01 \dots -1 & 01 \dots -1 \dots & 01 \dots -1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 00 \dots -1 & 00 \dots -1 \dots & 00 \dots -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{1,1} \\ K_{2,1} \\ \vdots \\ K_{ncm,1} \\ \\ K_{1,2} \\ K_{2,2} \\ \vdots \\ K_{ncm,2} \\ \vdots \\ K_{1,nft} \\ K_{2,nft} \\ \vdots \\ K_{ncm,nft} \\ J_{ncm} \end{bmatrix}_{nam}$$

(nbr x nam)

Fig.2.8. Matriz \mathbf{B}_1^T

Se tomamos I_{CF} como o vetor das correntes dos segmentos de barra e J_{br} como o vetor das correntes dos (ncm-1) primeiros segmentos de anéis superiores temos:

$$[I_{CF}] = [I_{1,1}, I_{2,1}, I_{3,1}, \dots, I_{ncm,nft}] \quad (2.73)$$

$$[J_{br}] = [J_1, J_2, J_3, \dots, J_{ncm-1}] \quad (2.74)$$

Logo :

$$[I_{br}] = [I_{CF} \ J_{br}]^T \quad (2.75)$$

A matriz \mathbf{B}_1^T será decomposta em duas submatrizes. As primeiro nct linhas de \mathbf{B}_1^T formarão a matriz \mathbf{B}_{1a} e as outras (ncm-1) linhas a matriz \mathbf{B}_{1b} .

$$\mathbf{B}_1^T = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{1a} \\ \mathbf{B}_{1b} \end{bmatrix} \quad (2.76)$$

Com (2.75) e (2.76) em (2.56) temos:

$$[I_{CF} J_{br}]^T = [B_{1a} B_{1b}]^T I_m \quad (2.77)$$

Logo :

$$I_{CF} = B_{1a} I_m \quad (2.78)$$

$$J_{br} = B_{1b} I_m \quad (2.79)$$

A matriz B_1^T mostrada Fig.2.8 foi obtida considerando-se a presença de resistências inter-barras. A forma geral desta matriz pode ser dada por :

$$B_1^T = \begin{bmatrix} \beta & 0 & 0 \dots 0 & 0 \\ \beta & \beta & 0 \dots 0 & 0 \\ \beta & \beta & \beta \dots 0 & 0 \\ \vdots & & & \\ \beta & \beta & \beta \dots 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda \dots \lambda & \gamma \end{bmatrix}_{n_{br} \times n_{am}} \quad (2.80)$$

$$\text{onde: } \beta = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \dots 0 \\ 0 & 1 & -1 \dots 0 \\ \vdots & & \\ -1 & 0 & 0 \dots 1 \end{bmatrix}_{n_{cm} \times n_{cm}} \quad (2.81)$$

$$\lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \dots -1 \\ 0 & 1 & 0 \dots -1 \\ 0 & 0 & 0 \dots -1 \end{bmatrix}_{(n_{cm}-1) \times n_{cm}} \quad (2.82.a)$$

$$\gamma = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}_{n_{cm}-1} \quad (2.82.b)$$

Lembrando que para um problema sem resistência inter-barra somente o números de elos serão alterados , teremos então, para este caso, a matriz B_1^T com a seguinte forma:

$$B_1^T = \begin{bmatrix} \beta & 0 \\ \beta & 0 \\ : \\ \beta & 0 \\ \lambda & \gamma \end{bmatrix}_{n_{br} \times n_{am}} \quad (2.83)$$

2.4.4 Acoplamento entre as Equações de Circuito e as Equações de Campo

Com as equações de circuito desenvolvidas, faremos o acoplamento destas às equações de campo para obter o sistema de equações final.

Tomemos inicialmente a equação (2.64). A matriz B_X , usando a definição da Fig.2.6 pode ser dada por:

$$B_X = [B_{1a}^T \ B_{1b}^T]^* \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.84)$$

ou:

$$B_X = B_{1a}^T \quad (2.85)$$

O vetor U_{cf} da equação (2.64) é idêntico ao vetor U_{CF} das equações (2.30) e (2.32). Assim, com (2.85) em (2.64) esta última pode ser escrita como abaixo:

$$B_{1a}^T U_{CF} + R_M I_m + L_M \frac{d}{dt} I_m = 0 \quad (2.86)$$

Obtemos finalmente, com (2.30), (2.31), (2.32), (2.78) e (2.86) o sistema de equações final desejado em (2.87).

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{M} \mathbf{A} + \mathbf{N} \frac{d}{dt} \mathbf{A} - \frac{1}{l_X} \mathbf{P}_{CT} \mathbf{U}_{CF} - \mathbf{P}_B \mathbf{I}_B = \mathbf{D}_T \\
 & \mathbf{R}_B \mathbf{I}_B + \mathbf{L}_B \frac{d}{dt} \mathbf{I}_B + l_X \mathbf{Q}_B \frac{d}{dt} \mathbf{A} = \mathbf{U}_B \\
 & \mathbf{R}_{CF} \mathbf{I}_{CF} + r_t \mathbf{Q}_{CT} \frac{d}{dt} \mathbf{A} - \mathbf{U}_{CF} = \mathbf{0} \\
 & \mathbf{I}_{CF} - \mathbf{B}_{1a} \mathbf{I}_m = \mathbf{0} \\
 & \mathbf{B}_{1a}^T \mathbf{U}_{CF} + \mathbf{R}_M \mathbf{I}_m + \mathbf{L}_M \frac{d}{dt} \mathbf{I}_m = \mathbf{0}
 \end{aligned} \tag{2.87}$$

O sistema matricial associado às equações de (2.87) é conforme (2.88):

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} \mathbf{M} & -\mathbf{P}_B & \frac{-\mathbf{P}_{CT}}{l_X} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{R}_B & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \mathbf{R}_{CF} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\mathbf{B}_{1a} \\ 0 & 0 & \mathbf{B}_{1a}^T & 0 & \mathbf{R}_M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{I}_B \\ \mathbf{U}_{CF} \\ \mathbf{I}_{CF} \\ \mathbf{I}_m \end{bmatrix} + \\
 & \begin{bmatrix} \mathbf{N} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_X \mathbf{Q}_B & \mathbf{L}_B & 0 & 0 & 0 \\ r_t \mathbf{Q}_{CT} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{L}_M \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{I}_B \\ \mathbf{U}_{CF} \\ \mathbf{I}_{CF} \\ \mathbf{I}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_T \\ \mathbf{U}_B \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.88}
 \end{aligned}$$

2.4.5 Discretização das derivadas temporais e princípio de resolução

Em vista das equações de (2.87) serem solucionadas passo a passo no tempo utiliza-se para a discretização temporal o β -Algoritmo, que é uma técnica bem adaptada para tal e já utilizado com sucesso em trabalhos anteriores. Neste método a relação entre o valor $Y(t)$ de uma variável Y no instante t e o valor $Y(t - \Delta t)$ desta variável no instante $(t - \Delta t)$ é dado por :

$$Y(t) = Y(t - \Delta t) + \left[(1 - \beta) \frac{d}{dt} Y(t - \Delta t) + \beta \frac{d}{dt} Y(t) \right] \Delta t \quad (2.89)$$

Com $\beta=1$ temos o esquema de recorrência de Euler e com $\beta=0.5$ o conhecido Algoritmo de Cranck-Nicholson. Aplicando β -Algoritmo nas equações finais obtemos o sistema matricial final a seguir que constitui o algoritmo de solução geral para o estudo de uma máquina assíncrona com barras do rotor inclinadas e com resistências inter-barras.

$$\begin{bmatrix} M_1 & M_2 & M_3 & 0 & 0 \\ M_4 & M_5 & 0 & 0 & 0 \\ M_6 & 0 & M_7 & M_8 & 0 \\ 0 & 0 & M_9 & 0 & M_{10} \\ 0 & 0 & 0 & M_{11} & M_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A(t) \\ I_B(t) \\ U_{CF}(t) \\ I_{CF}(t) \\ I_m(t) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} M_{13} & M_{14} & M_{15} & 0 & 0 \\ M_{16} & M_{17} & 0 & 0 & 0 \\ M_{18} & 0 & M_{19} & M_{20} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_{21} & M_{22} \\ 0 & 0 & M_{23} & 0 & M_{24} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A(t - \Delta t) \\ I_B(t - \Delta t) \\ U_{CF}(t - \Delta t) \\ I_{CF}(t - \Delta t) \\ I_m(t - \Delta t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_{25} \\ M_{26} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.90)$$

Na implementação numérica será adotada a recorrência de Euler($\beta=1$) assim as componentes matriciais finais serão como abaixo:

$$M_1 = M(t) + N/\Delta t$$

$$M_2 = -P_B$$

$$M_3 = -P_{CT}/l_X$$

$$M_4 = -Q_B$$

$$M_5 = s R_B + s L_B / \Delta t$$

$$M_6 = -Q_{CT}/l_X$$

$$M_7 = -v \mathbf{1}$$

$$M_8 = v R_{CF}$$

$$M_9 = \mathbf{1}$$

$$M_{10} = -B_{1a}$$

$$M_{11} = B_{1a}^T$$

$$M_{12} = R_M + L_M / \Delta t$$

$$M_{13} = N/\Delta t$$

$$M_{14} = 0$$

$$M_{15} = 0$$

$$M_{16} = -Q_B$$

$$M_{17} = s L_B / \Delta t$$

$$M_{18} = -Q_{CT}/l_X$$

$$\begin{array}{lll}
M_{19} = 0 & M_{20} = 0 & M_{21} = 0 \\
M_{22} = 0 & M_{23} = 0 & M_{24} = L_M / \Delta t \\
M_{25} = D_T & M_{26} = U_B(t) & M_{27} = 0
\end{array} \tag{2.91}$$

onde :

$$s = \frac{-\Delta t}{nss \times lx} \tag{2.92}$$

$$v = \frac{-\Delta t}{rt \times lx} \tag{2.93}$$

A forma e dimensão de algumas das contribuições de (2.91) é mostrada a seguir. Convém lembrar que a dimensão das matrizes atribuídas às bobinas finas podem mudar de acordo com o tipo de ligação da fonte.

$$M_I = \begin{bmatrix} \left(M + \frac{N}{\Delta t}\right)^1 & 0 \\ \left(M + \frac{N}{\Delta t}\right)^2 & \\ 0 & \left(M + \frac{N}{\Delta t}\right)^{nft} \end{bmatrix} \tag{2.94}$$

Esta matriz terá **not** linhas (nno x nft) . Com a inclinação cada fatia poderá ter diferente largura de banda a cada passo de cálculo, assim o número de colunas será variável.

$$M_2 = \begin{bmatrix} P_b^1 \\ P_b^2 \\ \vdots \\ P_b^{nft} \end{bmatrix}_{not \times nbf} \tag{2.95}$$

$$M_3 = \frac{1}{lx} \begin{bmatrix} P_C^1 & 0 \\ & P_C^2 \\ 0 & P_C^{nft} \end{bmatrix}_{not \times nct} \tag{2.96}$$

$$M_4 = \left[Q_b^1 \quad Q_b^2 \quad \dots \quad Q_b^{nft} \right]_{nbf \times not} \quad (2.97)$$

$$M_5 = s^* \begin{bmatrix} (Rb_1 + \frac{Lb_1}{\Delta t}) & 0 \\ & (Rb_2 + \frac{Lb_2}{\Delta t}) \\ 0 & & (Rb_{nbf} + \frac{Lb_{nbf}}{\Delta t}) \end{bmatrix}_{nbf \times nbf} \quad (2.98)$$

$$M_6 = \frac{1}{Lx} \begin{bmatrix} Q_C^1 & 0 \\ & Q_C^2 \\ 0 & & Q_C^{nft} \end{bmatrix}_{nct \times not} \quad (2.99)$$

$$M_8 = v r_t \begin{bmatrix} [1]^1 & 0 \\ & [1]^2 \\ 0 & & [1]^{nft} \end{bmatrix}_{nct \times nct} \quad (2.100)$$

$$M_{25} = \begin{bmatrix} D^1 \\ D^2 \\ \vdots \\ D^{nft} \end{bmatrix}_{not} \quad (2.95)$$

$$M_{26} = \begin{bmatrix} U_{b1} \\ U_{b2} \\ \vdots \\ U_{b nbf} \end{bmatrix}_{nbf} \quad (2.96)$$

$$A = \begin{bmatrix} A^1 \\ A^2 \\ \vdots \\ A^{nft} \end{bmatrix}_{not} \quad (2.97)$$

$$I_B = \begin{bmatrix} Ib_1 \\ Ib_2 \\ \vdots \\ Ib_{nbf} \end{bmatrix}_{nbf} \quad (2.98)$$

$$U_{CF} = \begin{bmatrix} U_C^1 \\ U_C^2 \\ \vdots \\ U_C^{nft} \end{bmatrix}_{nct} \quad (2.99)$$

$$U_C^{it} = \begin{bmatrix} U_{C1}^{it} \\ U_{C2}^{it} \\ \vdots \\ U_{C ncm}^{it} \end{bmatrix}_{ncm} \quad (2.100)$$

$$\mathbf{I}_F = \begin{bmatrix} I_C^1 \\ I_C^2 \\ \vdots \\ I_C^{nft} \end{bmatrix}_{nft} \quad (2.101)$$

$$\mathbf{I}_C^{it} = \begin{bmatrix} I_{C1}^{it} \\ I_{C2}^{it} \\ \vdots \\ I_{Cnfm}^{it} \end{bmatrix}_{nfm} \quad (2.102)$$

2.5 Conclusões deste capítulo

Neste capítulo, a metodologia desenvolvida para o problema de máquinas com rotor inclinado e resistências inter-barras foi apresentada. Esta metodologia, baseada no Método de Elementos Finitos em duas dimensões usa o Modelo Multi-fatiado para considerar a inclinação das barras do rotor e a Teoria de Circuitos para introduzir as resistências inter-barras no circuito rotórico.

No modelo multi-fatiado o número de fatias adotadas é o fator determinante para se obter um comportamento próximo ao real da máquina. O tempo de cálculo contudo, cresce linearmente com o número de fatias adotadas e assim o número de fatias máximo dependerá do material computacional disponível.

Neste modelo é possível escolher o número de resistências transversais a serem inseridas, seus valores (podem ser iguais ou não) e suas posições dentro do pacote.

3. Aplicação e validação da metodologia desenvolvida

3.1 Introdução

De modo a validar a metodologia apresentada no Capítulo 2 para o cálculo das correntes inter-barras em motores de indução de gaiola, serão apresentados neste capítulo resultados experimentais e de simulação.

Inicialmente são observados os efeitos da inclinação nas curvas de torque e corrente de alimentação de um motor de indução de gaiola trifásico.

Na sequência, uma análise do comportamento das correntes inter-barras com a inclinação e variação de parâmetros é efetuada de modo a verificar algumas tendências apresentadas nos trabalhos analíticos de Odok e Subba Rao et al [19].

3.2 Efeitos da inclinação

3.2.1 Torque e correntes do estator

O efeito da inclinação nas curvas de torque dos motores de indução de gaiola tem sido bastante discutido na comunidade científica e industrial. Sabe-se que com a inclinação, as variações na densidade de fluxo e torque devidos às ranhuras abertas são deslocadas fasorialmente no tempo sobre a extensão do pacote, resultando em torque mais uniforme, menos ruído e melhor forma de onda de tensão e corrente.

Os fabricantes de motores optaram durante inúmeras décadas pelos rotores inclinados. Contudo, a partir dos anos 90, com a intensificação das pesquisas sobre as perdas adicionais em carga, a indústria iniciou o processo de reavaliação desta opção. Apesar do efeito benéfico da inclinação nas perdas componentes de alta frequência citado anteriormente, a mesma exerce efeito contrário nas perdas inter-barras de motores com problemas de isolamento dos condutores rotóricos. Nestes, conforme Capítulo 1, a perda inter-barra aumenta com a inclinação.

Na atualidade não há mais um consenso a respeito. Enquanto alguns fabricantes optam por motores de rotor inclinado, outros somente produzem estes motores em casos especiais.

Para verificar o comportamento das curvas do motor com a inclinação dois motores de indução de gaiola de 1000 kW, 8 pólos, 60 Hz foram analisados. Os motores possuem

as mesmas características eletromecânicas no estator porém os rotores são diferentes. Um é inclinado e o outro não. Os motores possuem 72 ranhuras no estator e 88 ranhuras no rotor. O ângulo de inclinação nominal é 1.22 graus. O motor com rotor não inclinado apresentou na prática as condições de funcionamento e desempenho dentro dos valores estabelecidos em projeto pelo fabricante. O motor de rotor inclinado mostrado na Fig.3.1 contudo, apresentou um sobreaquecimento e foram observadas regiões danificadas no rotor. Através de inspeção visual destas regiões, ampliadas na Fig.3.2, ficou evidente tratar-se de caminhos de correntes entre as barras.

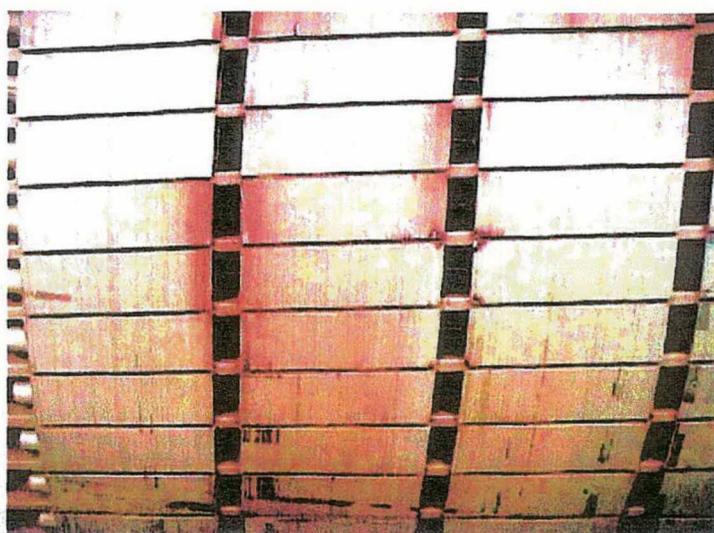


Fig.3.1. Rotor inclinado do motor de 1000kW.



Fig.3.2. Vista ampliada de uma região do rotor afetada.

Para uma análise mais precisa, o primeiro passo consistiria na medição das resistências transversais destes dois rotores. Esta opção contudo mostrou-se inviável. Foram então realizadas medições num rotor não inclinado de características similares (ainda na fase de produção) que serviu como amostragem.

A medição da resistência transversal é sem dúvida o maior desafio no estudo dos problemas associados às mesmas. Diferentes métodos são apresentados na literatura para tal, porém, nenhum é tomado como padrão. Por opção, o método escolhido neste trabalho foi o método direto que é realizado com as barras do rotor ainda sem o anel de curto circuito e uma corrente contínua injetada entre as mesmas. A corrente adotada na medição foi de 100 Acc e o processo de medição foi feito igualmente nos dois lados do rotor. Os valores de resistência obtidos permaneceram num valor médio de 40 μ Ohms. Percebe-se que com este valor de resistência o valor de tensão obtido é muito pequeno, ficando muitas vezes na faixa de erro do aparelho de medição. Assim, é impossível afirmar que este valor de resistência reflete exatamente a realidade do rotor independentemente de todos os cuidados observados pelo grupo técnico responsável pela medição. Os trabalhos encontrados na literatura abordando a resistência transversal mostram também que seu valor é bastante variável pois dependem de inúmeros fatores, desde o tamanho do rotor até o tipo de chapa usada.

O valor de resistência transversal obtido em ensaio será deste modo, usado para um estudo qualitativo das correntes inter-barras. A resistência transversal medida corresponde ao valor da resistência equivalente entre duas barras independente da quantidade de caminhos de corrente existentes. No presente trabalho, por opção de análise, este valor corresponderá ao valor de cada resistência transversal inserida.

Considerou-se inicialmente, que o número de resistências transversais presentes no circuito rotórico é o máximo permitido pelo modelo ou seja $ncm \times (nft - 1)$.

Para simular a inclinação das barras do rotor foram adotadas 4 fatias. Na Fig.3.3 é mostrada a carta de campo da primeira fatia obtida com o motor de rotor inclinado de 1.22° e em regime permanente operando sob carga nominal.

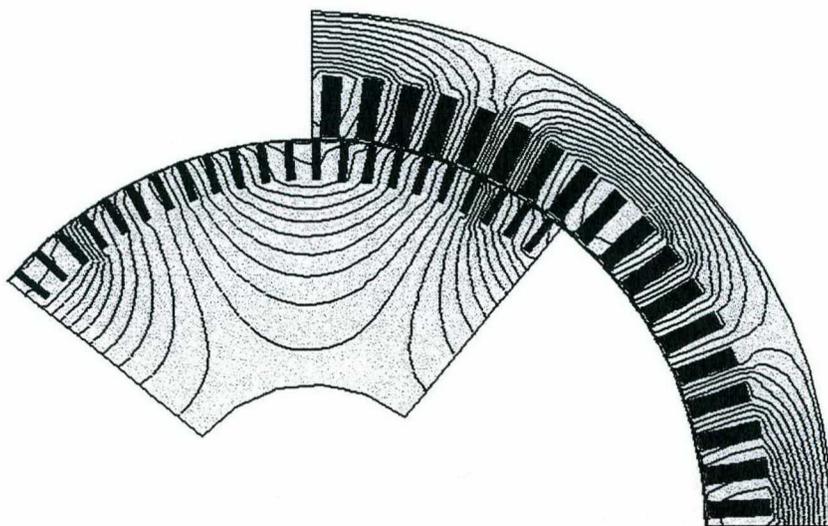


Fig.3.3. Carta de campo da seção do motor inclinado (1ª fatia)

Inicialmente, na Fig 3.4' vê-se as curvas de torque obtidas com o motor nas duas condições de inclinação citadas (inclinado e não inclinado). Conforme esperado, o amortecimento das harmônicas de alta frequência do estator e do rotor devido o ranhuramento é verificado. Estas harmônicas são de ordem $(2N_s \pm 1)$ e $(2N_r \pm 1)$ onde N_s é o número de ranhuras por pólo do estator e N_r o número de ranhuras por pólo do rotor.

O espectro harmônico com as principais componentes de alta frequência das curvas de torque da Fig.3.4 é mostrado na Fig.3.5. Nesta figura percebe-se que os campos harmônicos de alta frequência do rotor são os mais beneficiados. A 24ª harmônica, componente de alta frequência de maior amplitude na análise pode estar associada à uma regra de minimização de torques parasitas que não está sendo respeitada no motor analisado. Esta regra está vinculada à combinação de ranhuras do estator e rotor.

Segundo Veinott [38], sendo P definido como o número de pólos, num motor trifásico, a diferença entre o número de ranhuras do estator e o número de ranhuras do rotor não deve ser igual a $-2P$ ou $-5P$. Caso a diferença seja igual a estes valores, "cusps" aparecerão nas curvas de torque. No motor em estudo temos que a diferença é (-16) ou seja $-2P$ e portanto estes "cusps" podem estar presentes.

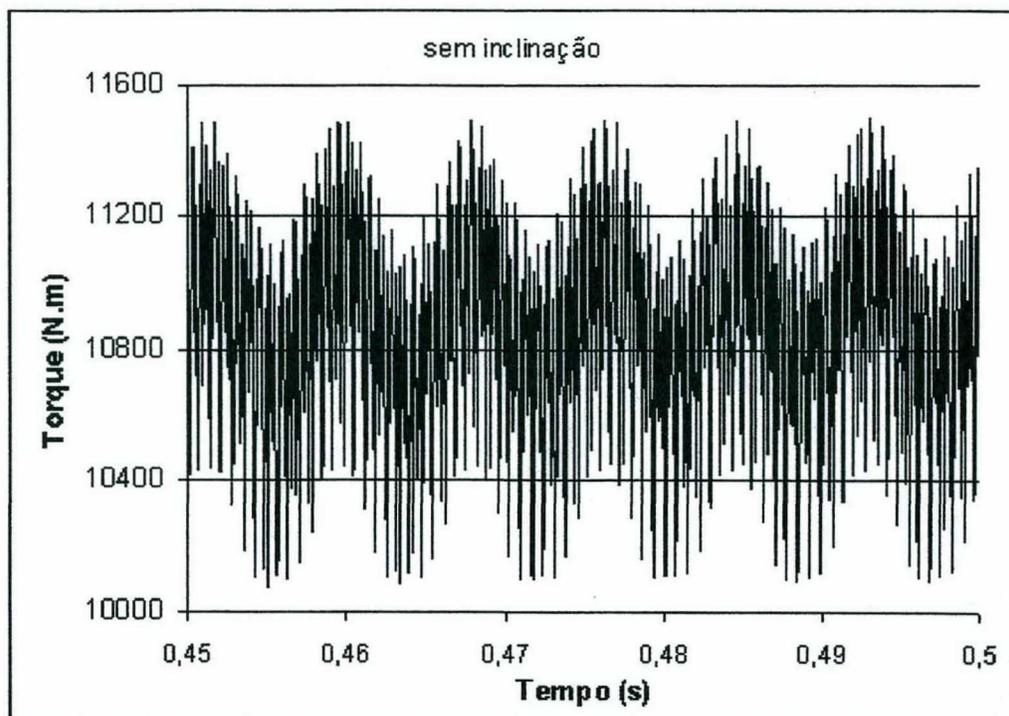


Fig.3.4a. Curva de torque do motor de rotor não inclinado

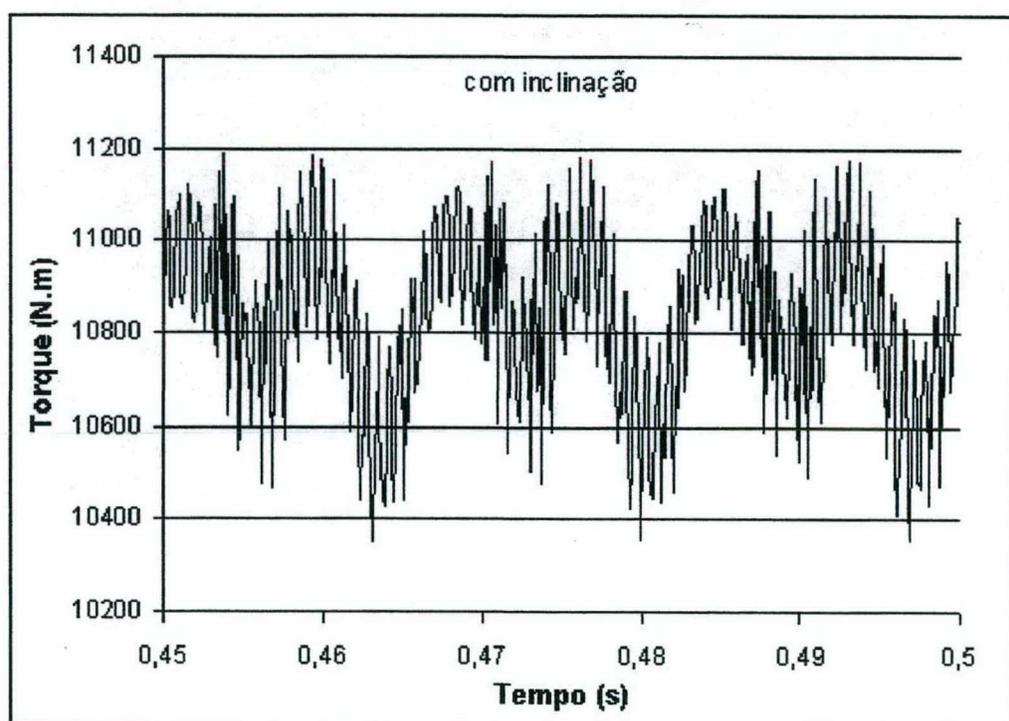


Fig.3.4b. Curva de torque do motor com rotor inclinado de 1,22°

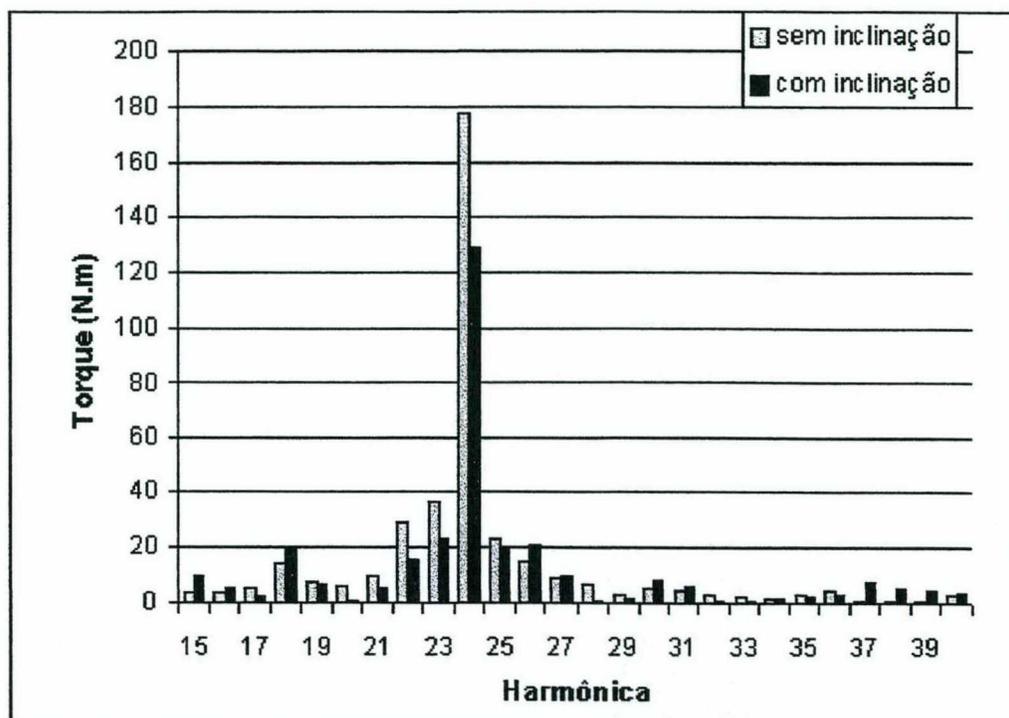


Figura 3.5. Componentes harmônicas de alta frequência do torque instantâneo

As curvas de corrente de estator dos motores analisados obtidas em simulação são mostradas nas Figs.3.6a e 3.6b . O valor eficaz da corrente do estator obtido de simulação com o motor de rotor não inclinado foi de 123,30 A. Este valor é 4,9% maior que o valor obtido experimentalmente. Para o motor de rotor inclinado, o valor eficaz de corrente do estator obtido de simulação foi de 123,7, sendo 3 % maior que o valor obtido experimentalmente.

Na Fig.3.7 são mostradas as componentes de alta frequência das correntes da Fig.3.6. Mais uma vez, o campo harmônico do rotor é o mais acentuado no rotor sem inclinação e o mais beneficiado quando o rotor é inclinado.

O efeito da elevada temperatura verificado no motor inclinado foi considerado na simulação do motor. No estator , foram adotadas as resistências “ a quente” obtidas experimentalmente. No rotor , o valor da resistência da barra (obtido no processo de cálculo) considerou o efeito da temperatura através da correção da condutividade do alumínio.

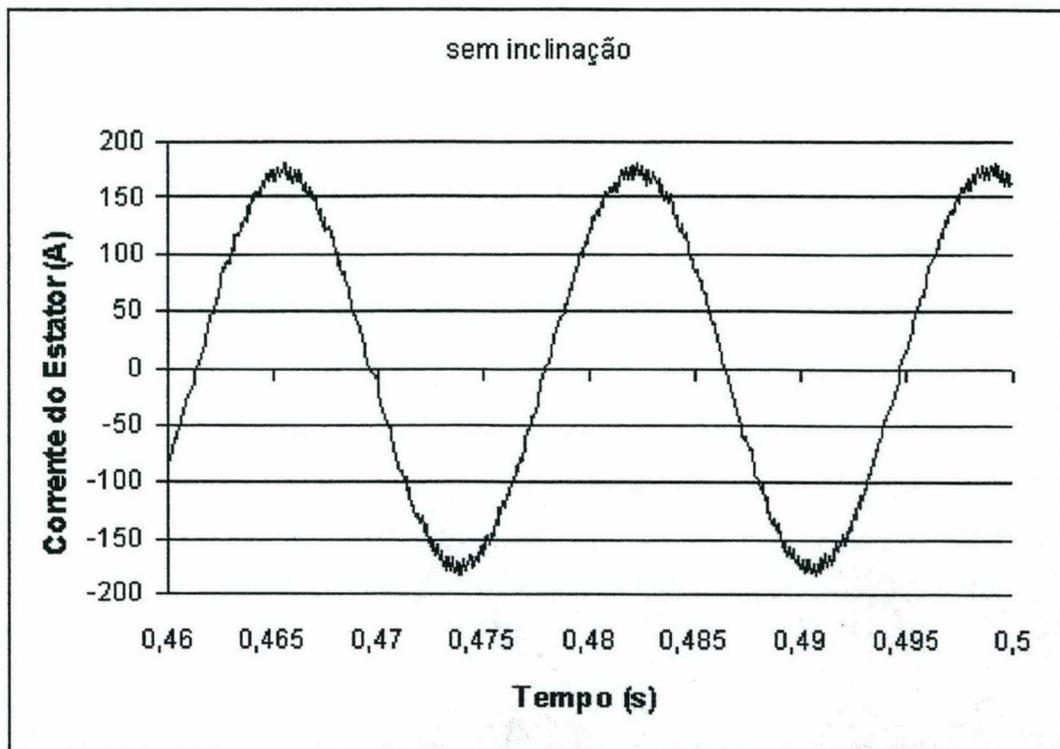


Fig.3.6a. Curva de corrente do motor de rotor não inclinado

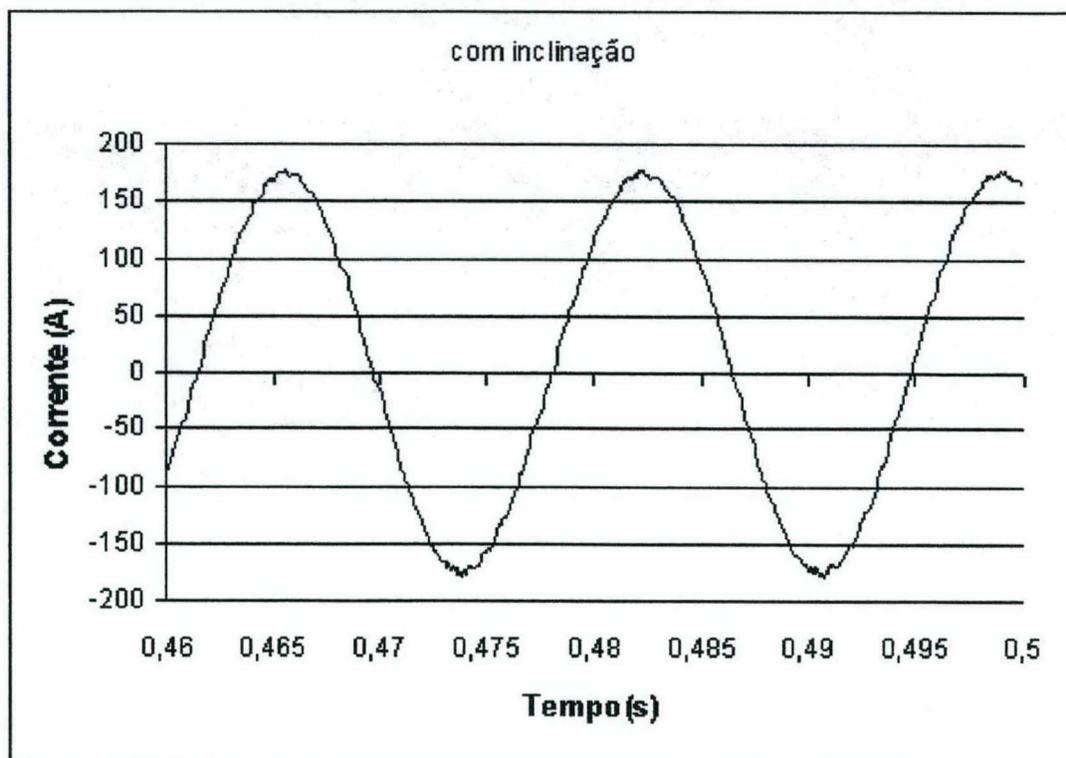


Fig.3.6a. Curva de corrente do motor de rotor inclinado

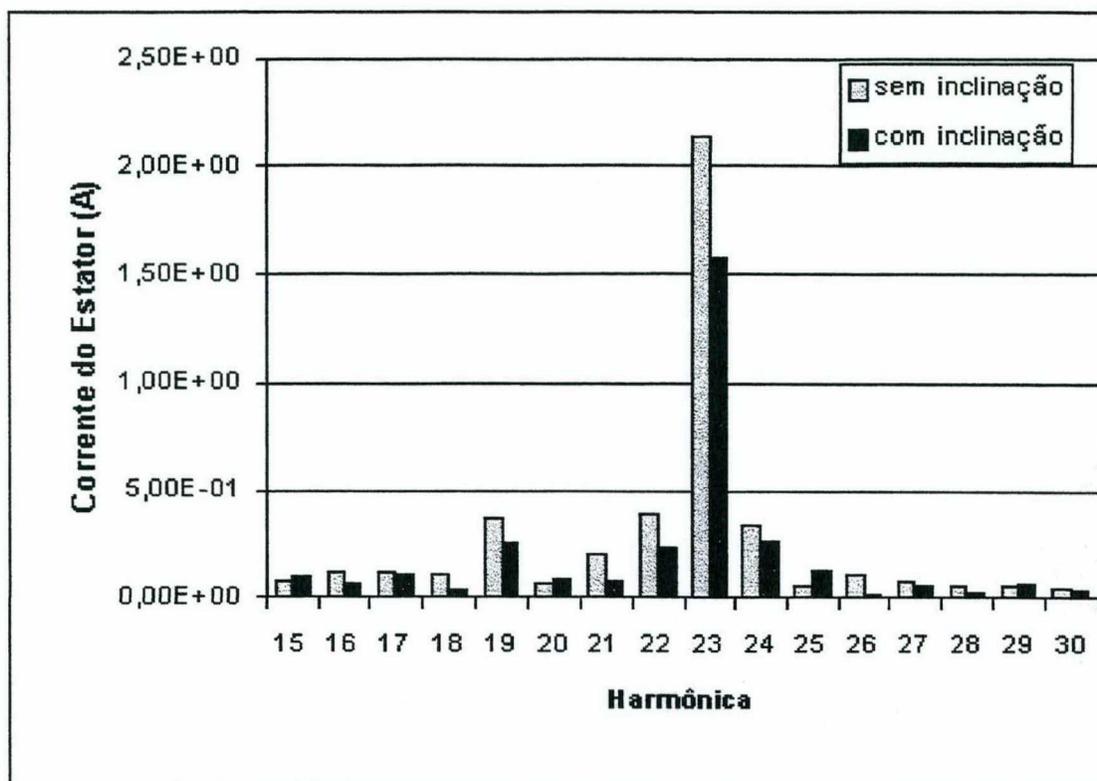


Figura 3.7. Componentes harmônicas de alta frequência das correntes do estator

3.2.2 As correntes inter-barras

Conforme apresentado no Capítulo 1, a inclinação tem grande influência no comportamento das correntes inter-barras. A amplitude destas correntes nos motores de indução de gaiola com valor de impedância de anel de curto-circuito próximo a zero é obtida pela variação da corrente no sentido axial do motor. Idealmente, de acordo com esta teoria, o motor não inclinado não tem correntes inter-barras mesmo que as barras não sejam isoladas. Não existe contudo na prática, um anel com curto-circuito ideal ou seja $Z_r = 0$ e assim uma corrente inter-barra de baixa amplitude deverá estar presente neste rotor.

De modo a verificar as tendências apresentadas por Odok, simulações foram realizadas com os motores de rotor inclinado e não inclinado. Porém, considerou-se nestas simulações que a velocidade de operação do motor é menor que a velocidade nominal do mesmo. Esta consideração se fez necessária em virtude do elevado tempo exigido para se

obter a curva equivalente de um ciclo da corrente inter-barra. A frequência destas correntes é a mesma das correntes das barras do rotor. Sendo a frequência das barras do rotor proporcionais ao escorregamento, no caso do motor operando na velocidade nominal de 893,3 rpm, esta frequência é de 0,444 Hz. Para se obter um ciclo da corrente inter-barra o tempo necessário de simulação é de 2,25 segundos. Com um computador de 750 MHz de velocidade de processamento e 128 MB de memória RAM tal resultado seria obtido em 10 dias. Considerou-se assim, um escorregamento de 10%. Com esta velocidade, o tempo de simulação necessário para se obter a curva de um ciclo da corrente inter-barra passa para aproximadamente 26 horas.

Inicialmente, o motor de rotor não inclinado foi simulado com 6 fatias e 3 resistências transversais de $40 \mu\text{Ohms}$ inseridas entre a 1ª e 2ª barra. A primeira resistência entre a primeira e segunda fatia, a segunda resistência entre a segunda e terceira fatia e finalmente a terceira resistência transversal entre a terceira e quarta fatia, estando deste modo esta última resistência localizada no meio do pacote. Na Fig. 3.8 é apresentada a curva da corrente inter-barra de valor eficaz de 225 Ampères obtida para a resistência transversal inserida entre a primeira e segunda fatia.

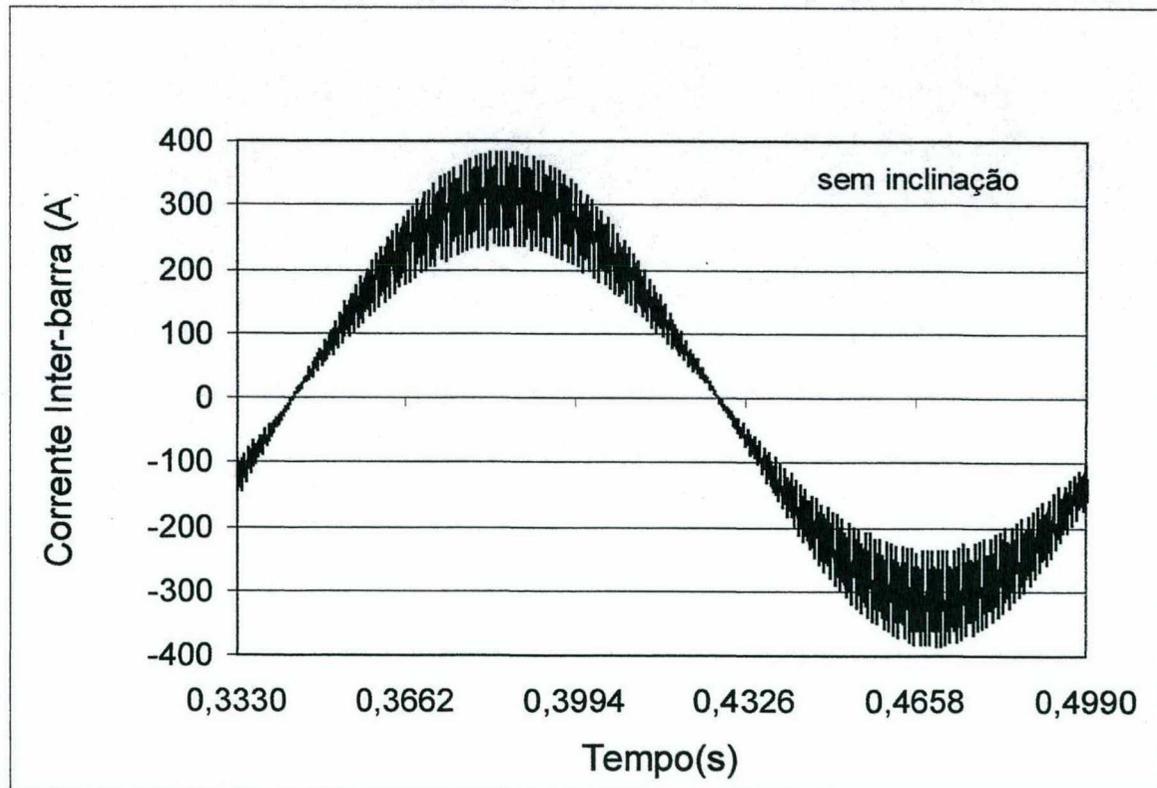


Fig.3.8. Corrente inter-barra para o rotor não inclinado.

Na seqüência , o rotor foi inclinado de 2,5 graus e simulado com o mesmo número de fatias e assumindo o valor das 3 resistências transversais inseridas como de 40 μ Ohms. Para a resistência transversal selecionada anteriormente entre a 1ª e 2ª fatia foi obtida a curva de corrente inter-barra de valor eficaz de 625 Ampères mostrada na Fig.3.9. As curvas das figuras 3.8 e 3.9 confirmam o trabalho analítico de Odok mostrado no Capítulo 1 pois mostram a forte influência da inclinação sobre estas correntes fazendo com que as mesmas atinjam valores elevados.

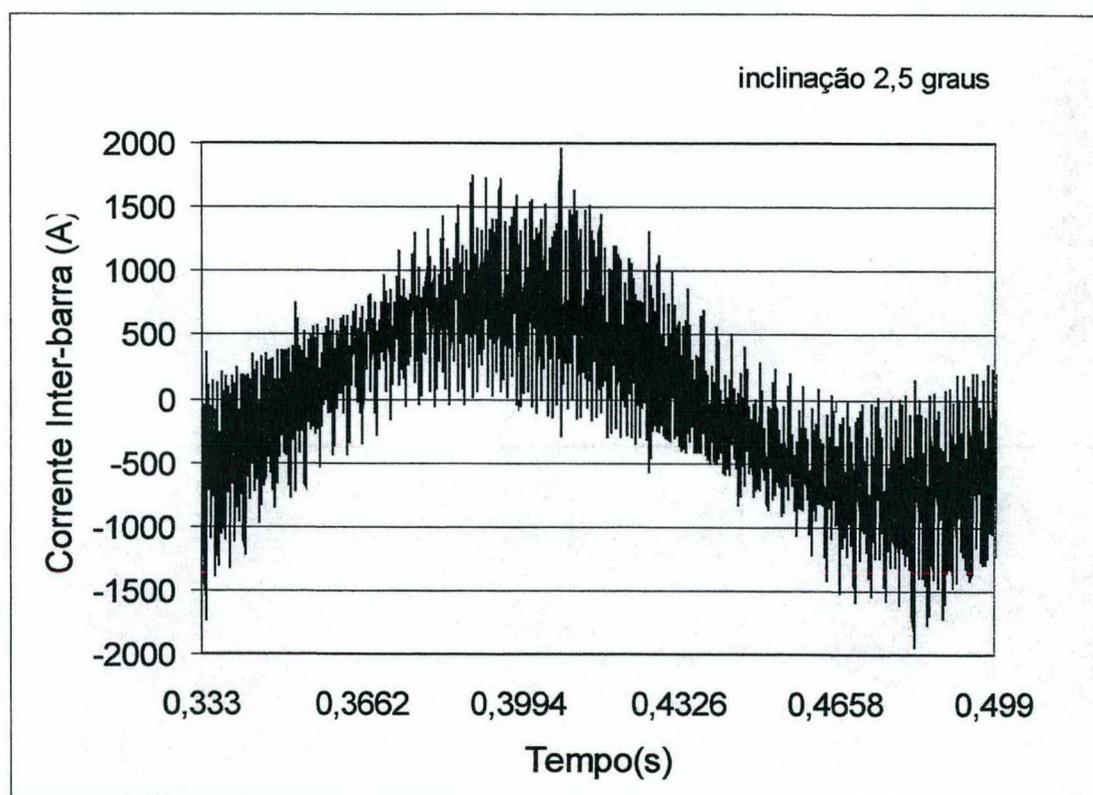


Fig.3.9. Corrente inter-barra para o rotor inclinado.
(inclinação de 2,5 graus)

3.2.3 Efeito da variação de parâmetros sobre as correntes inter-barras

Conforme Fig.1.7 , para um valor de resistência transversal baixo uma maneira de reduzir a perda Joule total do rotor é diminuir o ângulo de inclinação das barras. Assim , o ângulo de inclinação de 5 graus foi assumido para simular o motor. O número de fatias

adotado anteriormente foi mantido assim como o valor de $40 \mu\text{Ohms}$ para as resistências transversais inseridas.

Na Fig.3.10 têm-se a curva da corrente inter-barra para a resistência transversal selecionada entre a primeira e segunda fatia . O valor eficaz desta corrente é de 883 Ampères. A comparação desta curva com a mostrada na Figura 3.9, onde o ângulo de inclinação é menor, mostra que a tendência apresentada por Odok na Fig.1.7 se verifica. É importante observar contudo, que reduzindo o ângulo de inclinação pela metade , a redução da corrente inter-barra foi de apenas 26% . A corrente inter-barra mantém-se num valor elevado e ainda dentro dos limites de degradação da área atingida.

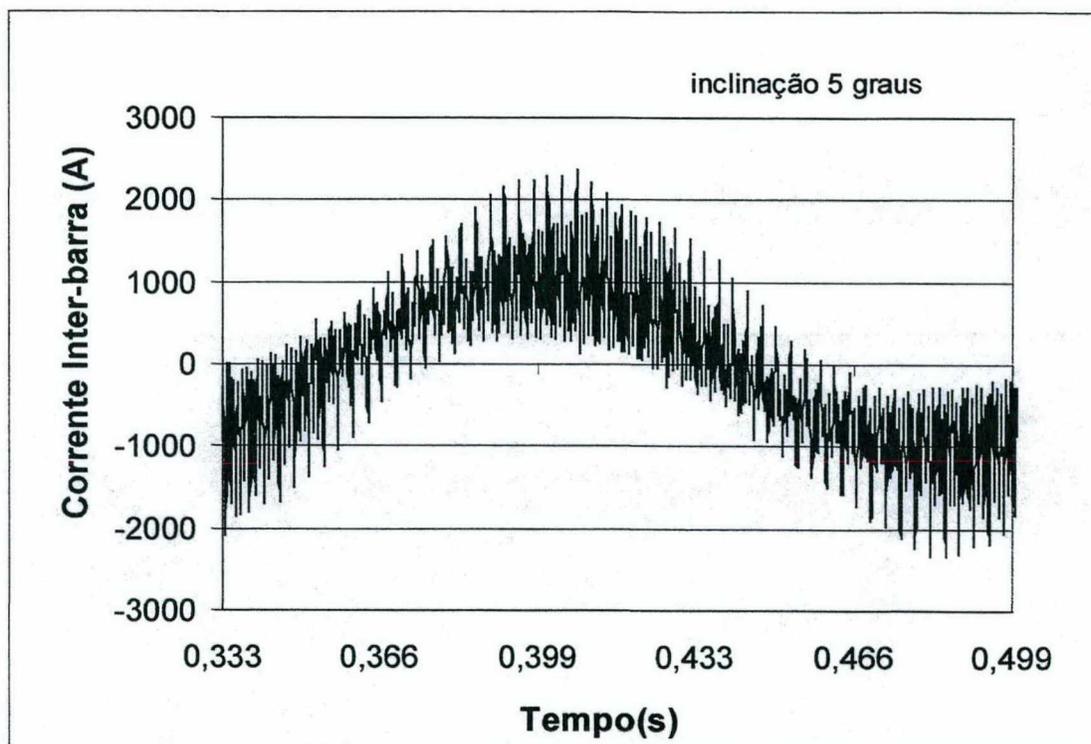


Fig.3.10. Corrente inter-barra para resistência selecionada entre 1^a e 2^a fatia.
(inclinação de 5 graus)

Naturalmente não é o objetivo deste trabalho estimar o valor de resistência inter-barra mínimo necessário para que a inclinação comece a ter o efeito citado por Odok. O valor de resistência crítico mostrado na Fig.1.7 é impossível de se obter matematicamente e também experimentalmente devido às já citadas dificuldades de medição e definição na modelagem. \

Diagnosticar a presença das correntes inter-barras durante a operação do motor é ainda um problema sem solução. A princípio, o controle precisa ser feito através das variáveis disponíveis na máquina ou seja corrente do estator, tensão e torque. A observação da corrente tem sido empregada para controle de falhas na estrutura do rotor como por exemplo barras quebradas. Todo o trabalho é baseado na análise do espectro harmônico das correntes do estator. O primeiro passo para verificar se este método poderia ser, a princípio, usado para detectar a presença de correntes inter-barras nos rotores é simular o motor de rotor inclinado com e sem resistências transversais inseridas. Nas Figuras 3.11.a e 3.11.b são mostradas as correntes do estator obtidas das simulações do motor de rotor inclinado de 5 graus com as 3 resistências transversais de $40 \mu\text{Ohms}$ inseridas e sem as resistências transversais. O espectro harmônico destas correntes (não incluindo a fundamental para melhor visualização) é mostrado na Fig. 3.12. Uma vez que foi observado no espectro uma pequena variação da amplitude dos componentes harmônicos, esta variação pode a princípio, ser considerada na detecção de falhas de isolamento. Contudo, isto só pode ser feito após uma síntese de vários resultados obtidos com diferentes parâmetros. Desta síntese poderia ser obtida uma relação de causa e efeito que seria usada para a detecção.

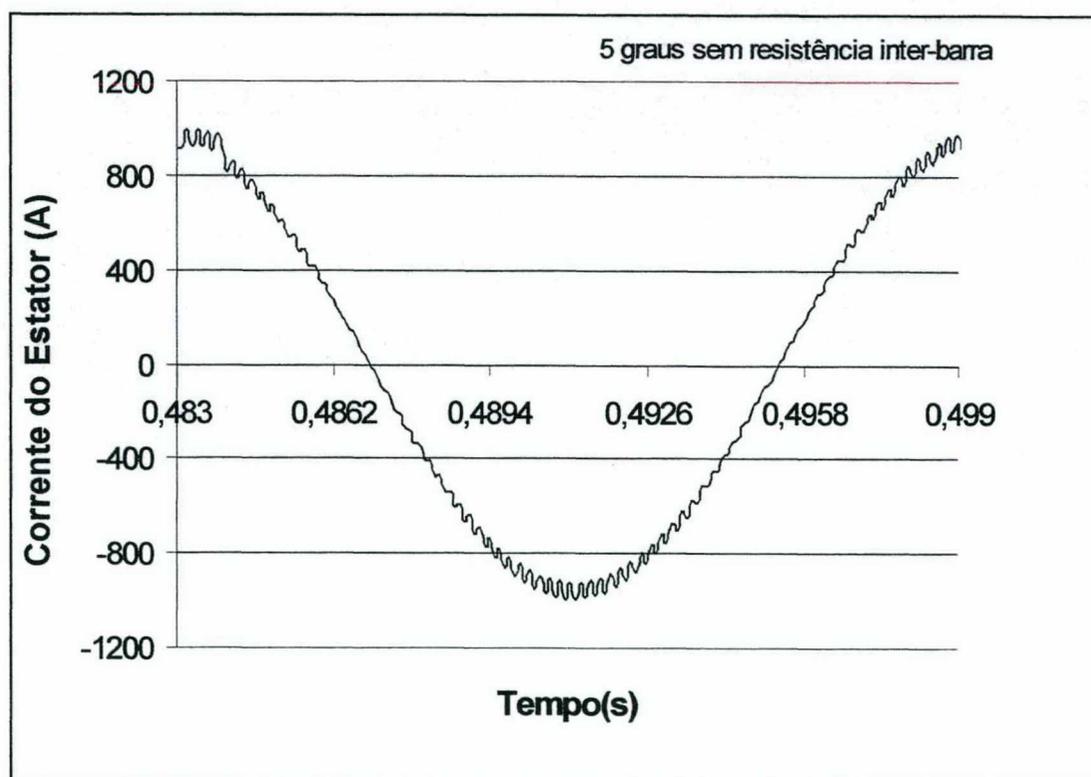


Fig.3.11.a. Corrente do estator (caso sem resistência transversal no rotor)

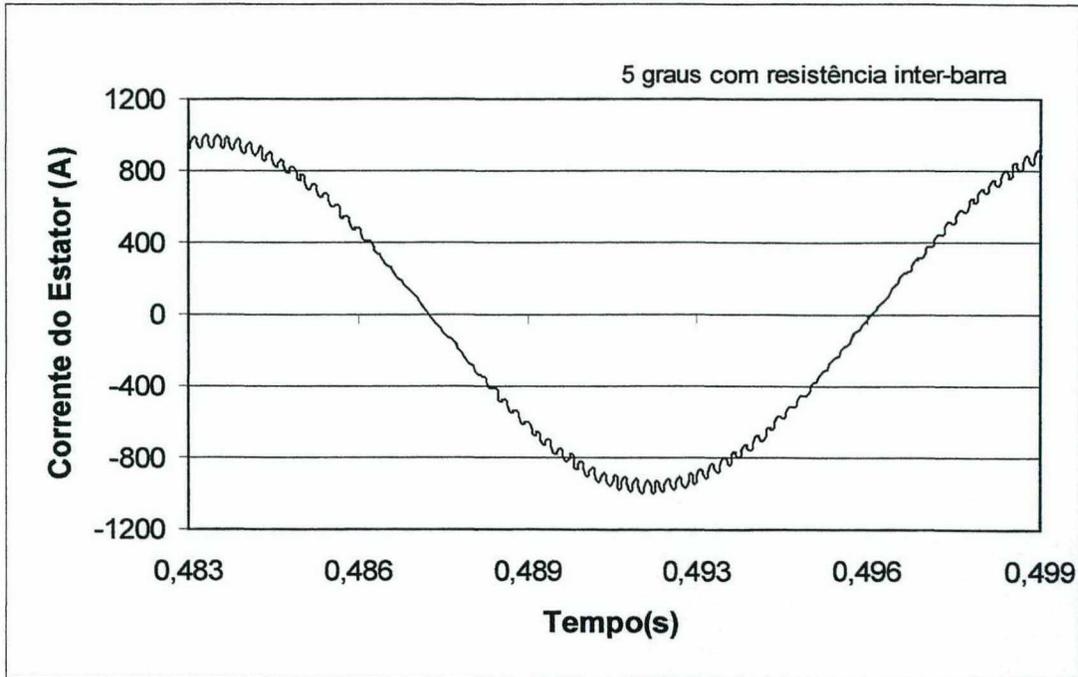


Fig.3.11.b. Corrente do estator (caso com resistência transversal no rotor)

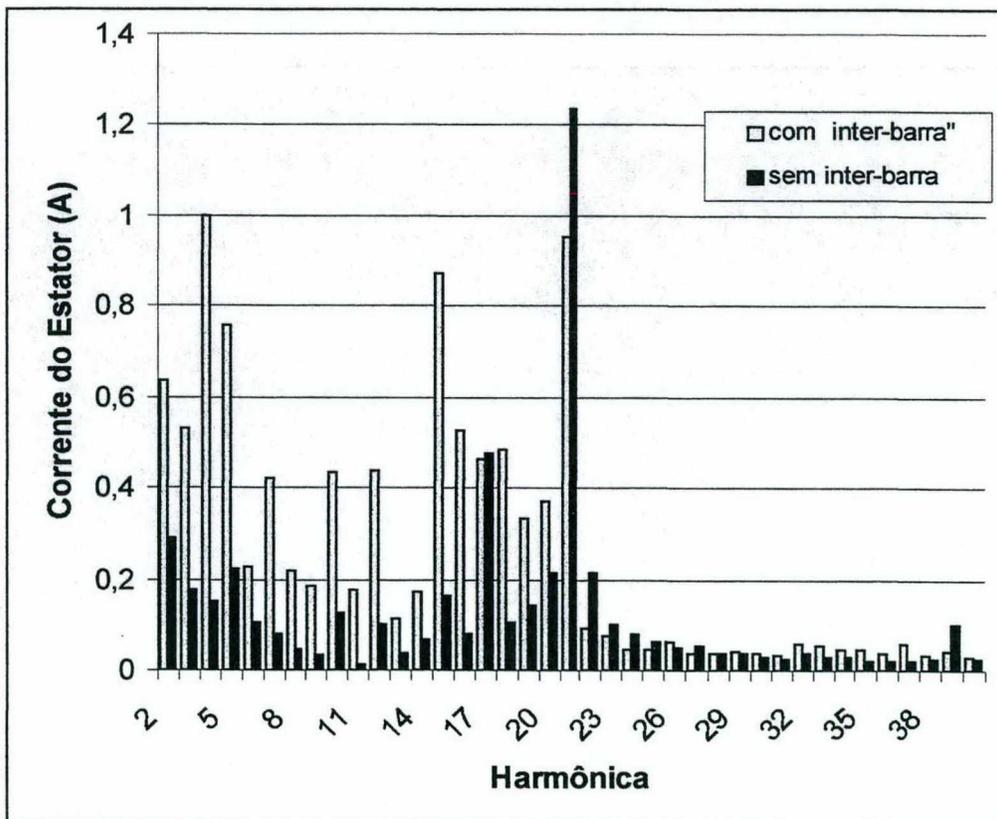


Fig. 3.12. Composição harmônica da corrente do estator
(com e sem resistência transversal)

Outra importante análise a ser feita com as correntes inter-barras é verificar seu comportamento em função da posição na região do rotor. Da simulação realizada com o rotor inclinado de 5 graus, 6 fatias e 3 resistências transversais inseridas de $40 \mu\text{Ohms}$ têm-se, conforme Fig. 3.13 a curva da corrente associada à resistência transversal inserida entre a 3ª e 4ª fatia (centro do pacote). O resultado obtido mostra que a amplitude desta corrente é sensível a posição da resistência transversal associada. Isto mais uma vez confirma a conclusão obtida anteriormente que somente uma isolamento efetiva evitará a presença de uma alta corrente transversal no rotor inclinado.

É importante lembrar também que uma quantidade reduzida de resistência inter-barras pode, a princípio, gerar uma menor quantidade de perda inter-barra mas, não garante que o rotor não será danificado. O valor da densidade de corrente na região afetada deve ser o critério de análise.

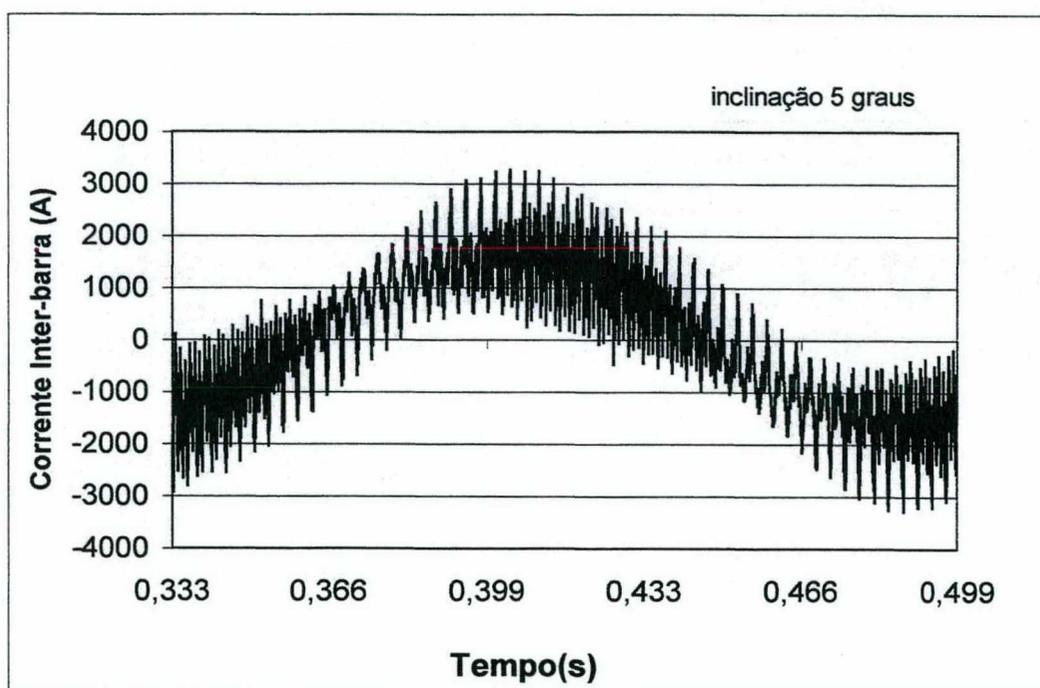


Fig.3.13. Corrente inter-barra para resistência selecionada entre 3ª e 4ª fatia.
(inclinação de 5 graus - corrente inter-barra no centro do pacote)

Entre os mais importantes controles estabelecidos para reduzir as perdas adicionais em carga é a relação entre o número de ranhuras do estator e rotor. Outro controle também

importante é o valor de abertura da ranhura do estator pois a mesma é responsável pela pulsação da densidade de fluxo radial ao redor do entreferro.

Para verificar o comportamento da corrente inter-barra com a variação da abertura da ranhura o estator do motor de indução foi substituído nas simulações por um estator com abertura de ranhura de $\frac{1}{2}$ do valor da abertura original.

A curva da Fig.3.14 mostra que cuidados devem ser tomados ao se utilizar esta regra de redução de perdas. O efeito benéfico obtido com a redução das perdas de alta frequência (principalmente as perdas superficiais) podem ser comprometidos com o aumento da corrente inter-barra.

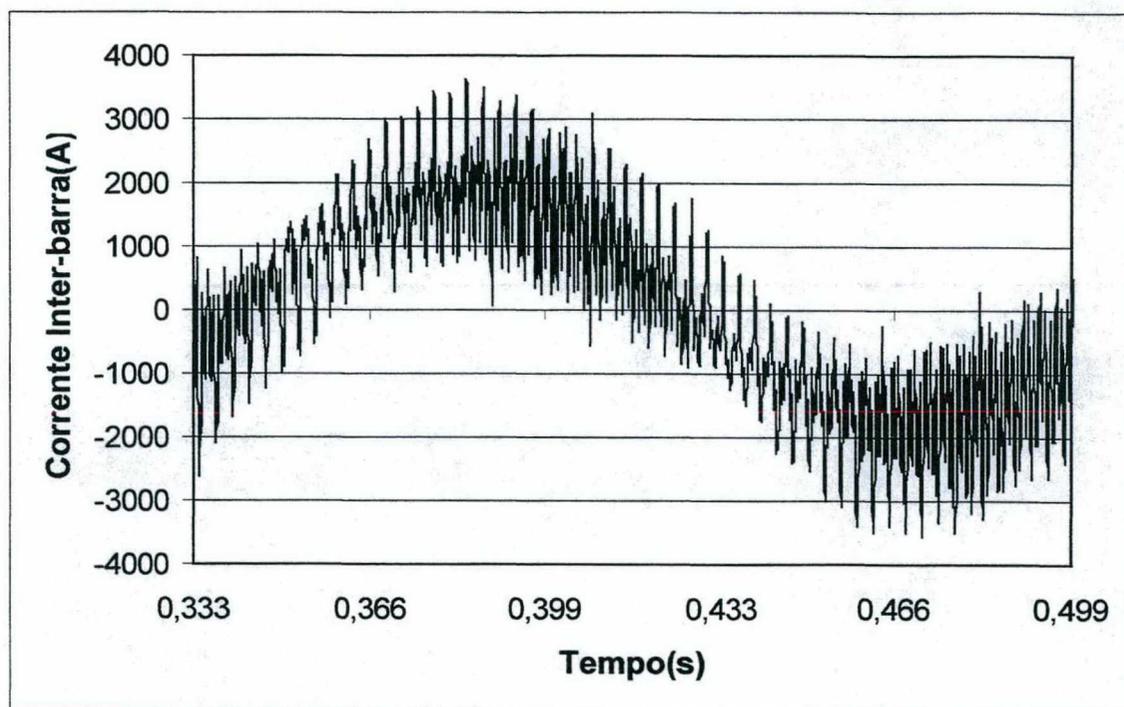


Fig.3.15. Corrente inter-barra para a resistência transversal selecionada (abertura da ranhura igual a $\frac{1}{2}$ da abertura nominal)

Naturalmente , o modelo desenvolvido permite a variação de inúmeros parâmetros da máquina. Os selecionados para a análise desenvolvida neste capítulo, foram os mais citados em trabalhos analíticos.

Entre os parâmetros que não foram variados nesta análise, o mais significativo é a variação das condições de saturação. O efeito da saturação sobre as correntes inter-barras só é citado na literatura de forma analítica no trabalho de Subba Rao[20]. O autor trata, assim como Odok, das perdas totais do rotor com a presença da corrente inter-barra. Uma vez que o modelo de circuito adotado por este autor para desenvolver seu trabalho não é simples , o entendimento do mesmo é bastante prejudicado. O autor contudo apresenta sua conclusão afirmando que para uma resistência transversal finita e uma velocidade definida, o fenômeno da saturação tem influência na redução das perdas totais do rotor.

3.3 Conclusões deste capítulo

Conforme apresentado neste trabalho, a modelagem desenvolvida apresenta-se como uma ferramenta importante para a análise das perdas inter-barras em motores de indução de gaiola. Em motores com problemas de isolamento das barras do rotor, conhecendo-se ou estimando-se o valor da resistência transversal é possível calcular a densidade de corrente que estará presente em determinadas região dos dentes do rotor.

Os resultados de simulação mostrados neste capítulo confirmaram o trabalho analítico de Adnam Odok que ressalta a influência da inclinação no comportamento desta correntes.

Na parte experimental foi constatada a dificuldade de medição das resistências transversais.

Dos resultados obtidos conclui-se que nos motores de indução de gaiola de rotor inclinado somente uma isolamento efetiva dos condutores do rotor poderá evitar a circulação de correntes inter-barras e conseqüentemente a presença de perdas inter-barras.

Conclui-se também que cuidados devem ser tomados quando da utilização de regras de minimização de harmônicos de alta frequência. Em determinados casos esta minimização pode aumentar a amplitude da corrente inter-barra presente no rotor.

CONCLUSÃO FINAL

Apresentou-se neste trabalho as etapas realizadas para o desenvolvimento de uma metodologia original para o cálculo das correntes inter-barras em motores de indução de gaiola, resultantes de falhas de isolamento das barras do rotor.

A primeira etapa consistiu de uma revisão bibliográfica onde foram buscados subsídios teóricos para o entendimento do problema em estudo. Nesta etapa ficou evidente a dificuldade encontrada pela comunidade científica em estabelecer métodos padronizados para a medição e redução das perdas inter-barras, geradas pelas correntes inter-barras. Entre os problemas encontrados no estudo destas correntes está a medição da resistência transversal, presente entre as barras não isoladas do rotor. Sendo inerentemente resultante de falhas de processo de fabricação do motor, a resistência transversal será muito variável. Na determinação experimental da resistência transversal (usando o método direto) as tensões ficaram na faixa de erro do aparelho de medição. Deste modo, garantir a exatidão dos valores medidos e estabelecer leis que estabeleçam o comportamento da resistência transversal é impossível.

Na etapa de determinação do modelo numérico optou-se por implementar o problema das correntes inter-barras no programa EFCAD (programa baseado no Método de Elementos Finitos e desenvolvido no GRUCAD-Grupo de Concepção e Análise de Dispositivos Eletromagnéticos). Uma vez que o programa EFCAD original não contemplava o efeito da inclinação, optou-se pelo Modelo Multi-Fatiado para representar a inclinação das barras do rotor. Com este modelo foi possível introduzir as resistências transversais no circuito do rotor. Utilizando a Teoria de Circuitos as equações de Campo e as Equações de Circuito foram acopladas gerando um conjunto de equações que são resolvidas simultaneamente. O vetor com as correntes inter-barras presentes no circuito do rotor é obtido diretamente do sistema resolvido.

Para a validação da metodologia desenvolvida foram realizadas inicialmente simulações com dois motores de indução comercial de 1000 kW (motor de rotor inclinado e rotor não inclinado). Os valores de torque e corrente do estator obtidos em simulação, quando comparados com os valores experimentais ficaram muito próximos a estes.

O conjunto de simulações realizadas a seguir, objetivou inicialmente verificar as tendências apresentadas em trabalhos analíticos encontrados na literatura. Estes trabalhos,

por sua importância continuam a ser ainda nos tempos atuais servindo de referência para inúmeros trabalhos.

A primeira importante tendência verificada através de simulações foi a influência da inclinação nos campos harmônicos do estator e rotor e também nas correntes inter-barras. Os resultados obtidos confirmaram o encontrado na literatura pois houve um amortecimento e conseqüentemente um alisamento dos ripples das curvas de torque. As curvas das correntes inter-barras confirmaram o trabalho de Adnan Odok que mostra que em motores com anéis de curto-circuito tendendo a zero, se houver problemas de isolamento, a corrente inter-barra será significativa somente se o rotor for inclinado.

Nos motores inclinados com baixo valor de resistência transversal, verificou-se que a redução do ângulo de inclinação contribui para a redução da amplitude das correntes inter-barras conforme anunciou Odok. A redução observada porém, não foi suficiente para que o motor saísse dos limites de degradação do rotor.

As simulações realizadas com variação de parâmetros mostraram que cuidados devem ser tomados na otimização de motor. Algumas regras estabelecidas na literatura para redução de perdas adicionais em carga acarretam uma maior amplitude das correntes inter-barras, como por exemplo a variação da abertura da ranhura.

A metodologia empregada mostrou-se eficaz para o estudo dos problemas associados às correntes inter-barras presentes em motores de barras de isoladas. Com este modelo é possível introduzir no circuito rotórico o número de resistências transversais desejadas e acompanhar o comportamento das principais curvas do motor.

O emprego deste modelo para estabelecer uma regra de causa e efeito para detecção destas correntes é a sugestão para a continuidade dos trabalhos.

ANEXO A

MÉTODO DE ANÁLISE DE CIRCUITOS

São apresentadas aqui as definições necessárias para o entendimento do Método de Circuitos (Método das Correntes Independentes) empregado no Capítulo 2 no desenvolvimento da metodologia para o cálculo das correntes inter-barra em motores de indução de gaiola [35][41].

⇒ Grafo

Conforme Fig.A.1, um circuito forma um grafo orientado ou seja, um conjunto de *arestas* orientadas ligando os vários nós deste circuito. As arestas são então os componentes do circuito. Temos neste grafo orientado 4 nós e 5 arestas onde os nós são definidos por n_{no} e as arestas por n_{ar} .

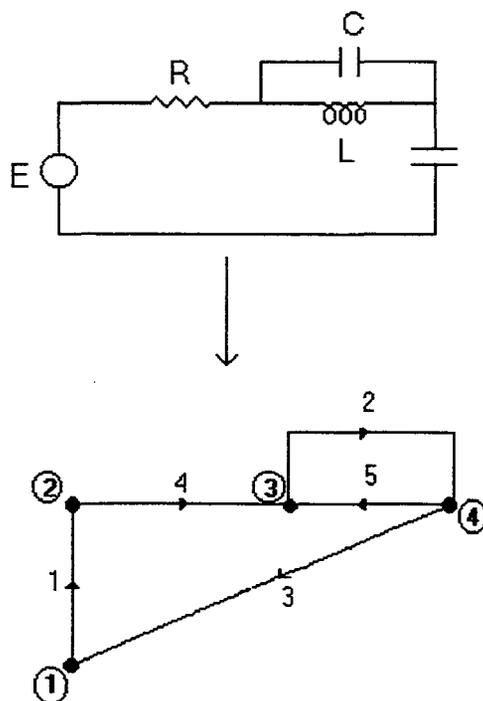


Fig.A.1. Exemplo do circuito e grafo orientado

⇒ Árvore

Uma árvore é um conjunto de arestas ligando todos os nós do grafo sem contido formar malhas. As arestas que pertencem à árvore são chamadas *ramos* e as que não pertencem são chamadas *elos*. A partir do grafo da Fig.A.1 podemos definir uma árvore qualquer conforme Fig. A.2 com n_{am} elos (linhas tracejadas) e n_{br} ramos (linhas cheias).

De um grafo podemos extrair um determinado número de árvores onde o número de ramos destas será o número de nós menos um ($n_{no}-1$).

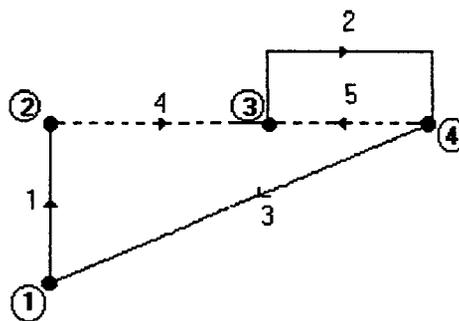


Fig.A.2. Árvore selecionada no grafo orientado

⇒ Malha

Uma malha é um conjunto de arestas que formam um caminho fechado onde a soma das tensões nos bornes das arestas é zero. Uma malha que contenha somente um elo é chamada **Malha Fundamental**. O número de malhas fundamentais é igual ao número de elos. A malha fundamental tendo o elo i é numerada e orientada segundo o senso deste elo.

Exemplo: Malha formada pelas arestas 1, 4, 2 e 3.

⇒ Corte

Um corte é um conjunto de arestas que uma vez retiradas do grafo, dividem o grafo em dois sub-grafos distintos conforme Fig. A.3. A soma das correntes das arestas dentro de

um corte fundamental é nula. Um corte que contém somente um ramo é chamado **Corte Fundamental**. O número de cortes fundamentais é igual ao número de ramos. O corte fundamental tendo o ramo i é numerado e orientado segundo o sentido deste ramo.

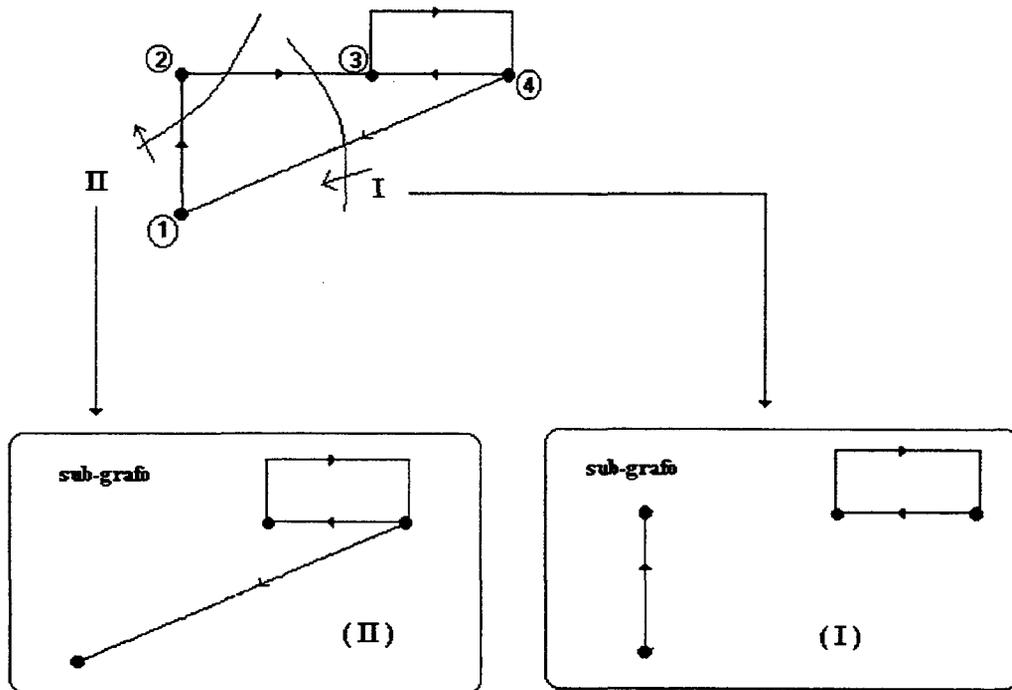


Fig.A.3. Exemplos de cortes

⇒ Matriz Incidência

A matriz incidência F de termos $[f_{ij}]$ tem dimensão $(n_{no} \times n_{ar})$ e é formada da seguinte maneira:

$$f_{ij} = 1 \text{ se a aresta } j \text{ parte do nó } i$$

$$f_{ij} = -1 \text{ se a aresta } j \text{ chega ao nó } i$$

$$f_{ij} = 0 \text{ nos outros casos}$$

A matriz incidência não tem mais que dois termos não nulos por coluna (termos correspondentes ao nó de chegada e saída da aresta correspondente).

Ex : Da Fig.A.1 temos que a matriz F tem a seguinte forma:

	<i>arestas</i>				
<i>nos</i>	1	2	3	4	5
1	1	0	-1	0	0
2	-1	0	0	1	0
3	0	1	0	-1	-1
4	0	-1	1	0	1

⇒ Matriz Corte Fundamental

A matriz corte fundamental $[k_{ij}]$ tem dimensão $(n_{no}-1) \times n_{ar}$ e é formada da seguinte maneira:

$k_{ij} = 1$ se a aresta j pertence ao corte i com a mesma orientação.

$k_{ij} = -1$ se a aresta j pertence ao corte i e orientação oposta.

$k_{ij} = 0$ se a aresta não pertence ao corte i .

Ex : Da Fig.A.3 temos que a matriz K tem a seguinte forma:

	<i>arestas</i>				
<i>nos - 1</i>	1	2	3	4	5
1	1	0	0	-1	0
2	0	1	0	0	-1
3	0	0	1	-1	0

A matriz corte fundamental pode ser dividida em duas sub-matrizes K_1 e K_2 de dimensões $[(n_{no}-1) \times (n_{no}-1)]$ e $[(n_{no}-1) \times (n_{ar} - n_{no} + 1)]$ respectivamente. Se separarmos as colunas em colunas correspondentes aos ramos e colunas correspondentes aos elos temos:

$$[K] = [K_{1(nno-1)(nno-1)} \mid K_{2(nno-1)(nar-nno-1)}] \quad (a.1)$$

A matriz K_I é uma matriz unitária e a soma das correntes dentro de um corte é nula.

Assim:

$$[K]\{I\} = [K_{1(nno-1)(nno-1)} \mid K_{2(nno-1)(nar-nno-1)}] \cdot \begin{Bmatrix} I_b \\ I_m \end{Bmatrix} = 0 \quad (a.2)$$

onde I_b e I_m são respectivamente as correntes dentro dos ramos e elos. A relação (a.2) pode ser escrita então na forma a seguir:

$$\{I_b\} = - [K_2] \{I_m\} \quad (a.3)$$

⇒ Matriz Malha Fundamental

A matriz malha fundamental $[b_{ij}]$ tem dimensão $(n_{ar} - n_{no} + 1) \times n_{ar}$ e é definida por :

$b_{ij} = 1$ se a aresta j pertence à malha fundamental i com a mesma orientação.

$b_{ij} = -1$ se a aresta j pertence à malha fundamental i e orientação oposta.

$b_{ij} = 0$ se a aresta não pertence à malha fundamental i .

Da Fig.A.1 temos:

	<i>arestas</i>				
<i>nos - 1</i>	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	0
2	0	1	0	0	1

Se decomposmos B em duas sub-matrizes B_1 e B_2 respectivamente de dimensões $(n_{ar} - n_{no} + 1) \times (n_{no} - 1)$ e $(n_{ar} - n_{no} + 1) \times (n_{ar} - n_{no} + 1)$ considerando inicialmente os ramos e depois os elos temos :

	<i>arestas</i>				
<i>nos - 1</i>	1-2-3 (ramos)			4-5 (elos)	
1	1	1	0	1	0
2	0	0	-1	0	1

$$[B] = [B_{1(nar-nno+1)(nno-1)} \mid B_{2(nar-nno+1)(nar-nno+1)}] \quad (a.4)$$

Pela definição de malhas fundamentais, a matriz B_2 é matriz unitária logo :

$$[B] = [B_{1(nar-nno+1)(nno-1)} \mid B_{2(nar-nno+1)(nar-nno+1)}] \cdot \begin{Bmatrix} V_b \\ V_m \end{Bmatrix} = 0 \quad (a.5)$$

A relação (a.5) pode ser então escrita como a seguir :

$$\{V_m\} = - [B_1] \{V_b\} \quad (a.6)$$

⇒ Relação entre B_1 e K_2

O termo b_{ij} de B_1 corresponde à malha fundamental i (ou seja o elo i) e ao ramo j . O termo k_{ij} de K_2 corresponde ao corte fundamental j (ou seja o ramo j) e ao elo i .

Se b_{ij} é nulo, a malha fundamental i não contém o ramo j . Se o corte fundamental j cortasse o elo i , o mesmo forçosamente cortaria um ramo pertencente à malha fundamental i e com isso cortaria outros ramos além do ramo j . Um corte fundamental não pode cortar mais que um ramo, logo o corte fundamental j não corta o elo i .

Assim, se $b_{ij} = 0$ temos $k_{jj} = 0$.

Se $b_{ij} = \pm 1$ então a malha fundamental i contém o ramo j . O corte fundamental j só pode cortar o elo i . De fato se o corte não cortasse o elo i então ele cortaria, além do ramo j , uma outra aresta da malha que seria então um ramo.

Os casos de orientação possíveis nos dão a seguinte relação ;

$$b_{ij} = 1 \Rightarrow k_{ji} = -1$$

$$b_{i,j} = -1 \Rightarrow k_{j,i} = 1$$

Temos então finalmente :

$$B_1 = -K_2^T \quad (a.7)$$

⇒ O algoritmo de Welsh

Para colocar de forma automática um circuito em forma de equação é necessário determinar a partir de sua topologia (a partir da matriz incidência F) a matriz B_1 ou a matriz K_2 . O algoritmo de Welsh permite a determinação de K_2 a partir de F que por sua vez é facilmente obtida a partir da definição topológica de um grafo orientado.

O algoritmo de Welsh pode ser anunciado da seguinte forma: Seja F a matriz incidência conhecida. Para cada coluna j de F considera-se o primeiro elemento não nulo f_{ij} tal que nenhum elemento da linha i tenha sido escolhido nas colunas precedentes (é a primeira vez que o nó i é considerado). Se este elemento não nulo existe atribuímos à coluna em questão o número i, senão, atribuímos zero. Substituímos então toda linha tendo um elemento não nulo na $j^{\text{enésima}}$ coluna pela soma ou diferença com a $j^{\text{enésima}}$ linha para que f_{ij} reste como o único elemento não nulo da $j^{\text{enésima}}$ coluna. Obtemos assim a árvore procurada tomando as arestas ou seja as colunas cujo valor atribuído é não nulo. Uma permuta é efetuada em seguida entre as colunas para coloca-las em ordem crescente. A seguir uma linha é eliminada e a matriz $[F']$ (matriz de corte) é obtida. Esta matriz tem a seguinte estrutura:

$$[F'] = [F'_{1(nno-1)(nno-1)} \mid F'_{2(nno-1)(nar-nno+1)}] \quad (a.8)$$

A matriz $[F'_1]$ é constituída das colunas cujos valores atribuídos são não nulos, ou seja, os ramos da árvore e $[F'_2]$ é constituída das matrizes cujo valor atribuído foi zero ou seja os elos. Os cortes definidos pela matriz $[F']$ diferem dos cortes fundamentais somente pela orientação e ordem de classificação.

A matriz $[K_2]$ é obtida então pelo produto a seguir :

$$[K_2] = [F'_1]^T [F'_2] \quad (a.9)$$

ANEXO B

MODELO NUMÉRICO

Neste trabalho foi apresentado o desenvolvimento e validação de uma nova metodologia para o cálculo das correntes inter-barras baseado no Método de Elementos Finitos em duas dimensões. O mesmo foi estruturado sobre o programa EFCAD-com Movimento desenvolvido no GRUCAD (UFSC-Brasil)/LEEI(INP'T-França). Os módulos envolvidos nas etapas de pré-processamento e pós-processamento do mesmo são :

⇒ Pré-processamento

Nesta etapa são fornecidas as características construtivas da estrutura analisada assim como as características dos materiais que a compõem. Para tal os módulos EFP, EFD e EFM do EFCAD são utilizados.

No módulo EFP são fornecidas as características dos materiais que compõem a estrutura . É gerado nesta etapa um arquivo do tipo EFMAT.dat.

No módulo EFD são fornecidas as informações construtivas da estrutura e um arquivo do tipo *.pre é gerado.

O módulo EFM possui as informações de bobinagem, condições de fronteira e materiais impostos dentro da estrutura. É um gerador de malha semi-automático tendo como arquivo de saída um arquivo do tipo *.elf.

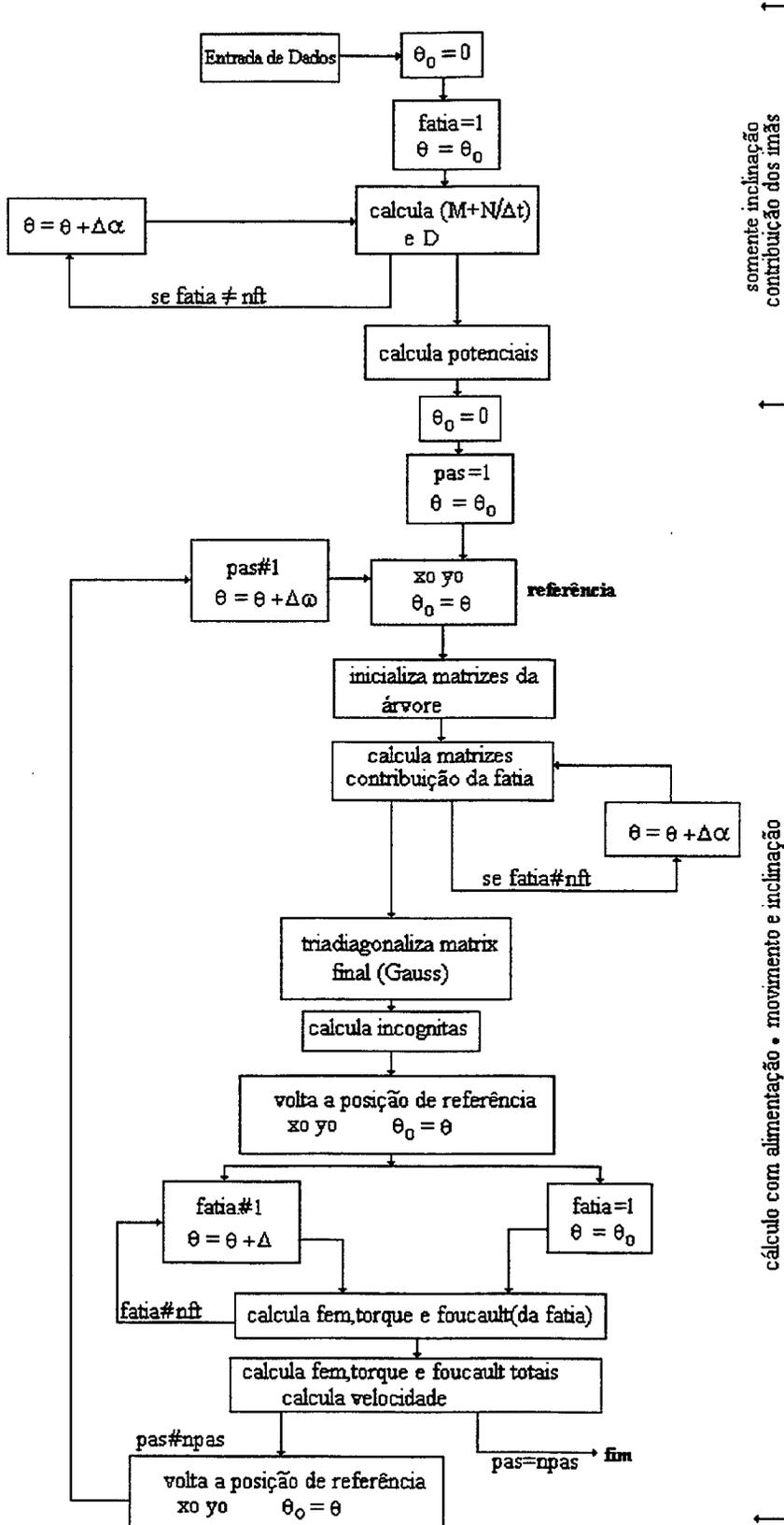
⇒ Pré-processamento

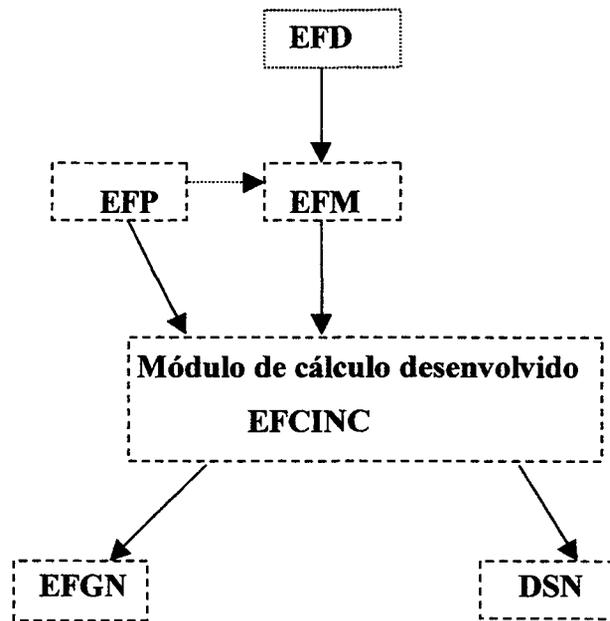
São utilizados nesta etapa os programas EFGN e DSN.

O módulo EFGN é utilizado para a visualização das cartas de campo, densidades de correntes induzidas e curvas eqüipotenciais.

Para a exploração das curvas de corrente , torque, correntes inter-barras e análise de torque o programa DSN é empregado.

DIAGRAMA DE FLUXO DO MÓDULO DE CÁLCULO (EFCINC)



ESQUEMA GERAL DOS MÓDULOS ENVOLVIDOS EM TODAS AS ETAPAS DE PROCESSAMENTO

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- 1) P.L. Alger; *The Nature of Induction Machines*, Gordon and Breach, New York, 1965.
- 2) Glew, C.N. ; “ *Stray Load Losses in Induction Motors : A Challenge to Academia* “, E.M.D, 1-3, Setembro de 1997.
- 3) IEC 34-2 *International Electrotechnical Commission Publication – Part 2 : Methods of Determining Losses and Efficiency of Rotating Electrical Machinery from Tests (International)*.
- 4) IEEE *Standard Test Procedure for Polyphase Induction Motors and Generators*, IEEE Std. 112-1991.
- 5) P. G. Cummings, W.D. Bowers, Walter J. Martiny; “*Induction Motor Efficiency Test Methods*“, IEEE Transactions on Industry Applications, vol. IA-17, no.3, Mai/Jun 1981. pp. 264.
- 6) T.A. Lipo, *Introduction to A.C. Machine Design*, vol. 1, 1996, University of Wisconsin.
- 7) E.Levi; *Polyphase Motors- A Direct Approach to Their Design*, , Jonh Wiley&Sons, New York
- 8) G. Gerald Gray, Walter J. Martiny; “*Efficiency Testing of Medium Induction Motors – A Comment on IEEE Std 112-1991*”, IEEE Transactions on Energy Conversion, vol. 11, no. 3, Sept. 1996, pp. 495-499.
- 9) A. H. Bonnet; “*Understanding Efficiency in Squirrel-Cage Induction Motors*”, IEEE Transactions on Industry Applications, vol. IA-16, no.4, July/August 1980.
- 10) R. Kytomaki, A. Arkkio; “ *Validity of Convencional and Modern Methods of No-Load Loss Calculations in Asynchronous Machines-Statistic Approach* “, E.M.D -97, 1-3, Set.1997.
- 11) M. V.F. da Luz ; “*Estudo e Desenvolvimento de um Método de Cálculo de Perdas Suplementares em Motores de Indução de Gaiola*”, Dissertação de Mestrado, UFSC, Brasil, Fev., 1999.

- 12) A.A. Jimoh; “ *Stray Losses in Induction Machines : Part I , Definition, Origin and Measurement* “, IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, vol.PAS-104, no. 6, Jun. 1985, pp. 1500-1505.
- 13) K.K. Schwarz; “*Survey of Basic Stray Losses in Squirrel-Cage Induction Motors*”, Proc. IEE 1964, 111. pp. 1695-1719.
- 14) B. Chalmers ; “*Electromagnetic Problems of A.C Machines*”, Chapman and Hall Ltd, London, 1965.
- 15) A E. Fitzgerald, C. K. Jr; *A Kusko- Máquinas Elébricas* - Mc Graw -Hill. 1975.
- 16) P.L. Alger; G.Angst, E. John Davies; “ *Stray-Load Losses in Polyphase Induction Machines* “, Trans.AIEE 79, pt III, p.349.
- 17) Binns and Lawrenson - *Analysis and Computation of Electric and Magnetic Field Problems*, Pergamon Press.- 1963.
- 18) B. Chalmers, A. Williamson; *A.C Machines Eletromagnetics and Design*, John Wiley&Sons Inc., New York, 1991.
- 19) A. M. Odok; “*Stray-Load Losses and Stray Torques in Induction Machines*” , Trans.AIEE, vol. 77, no. 4, pp. 43-53, 1958.
- 20) S. V. Rao; O.I. Butler; “ *Stray losses of polyphase cage-induction motors with particular reference to the condition of imperfect rotor-bar insulation*” , Proceedings IEE, vol. 116, no.5, Mai., 1969.
- 21) H. Nishizawa, K.Itomi, S.Ibinio, F.Ishibashi; “ *Study on Reliable Reduction of Stray Load Losses in Three-Phase Induction Motor for Mass Production*”, IEEE Transactions on Energy Conversion, vol.EC-2, No.3, Set. 1987.
- 22) S. Lie; Carlo di Pietro; “*Copper Die-Cast Rotor Efficiency Improvement and Economic Consideration*”, IEEE Transactions on Energy Conversion, vol.10, no.3, Set. 1995.
- 23) M. Poloujadoff, J.C. Mipo, M. Nurdin - “*Some Economical Comparasions Between Aluminium and Copper Squirrel Cages*“, IEEE Transactions on Energy Conversion, vol.10., no. 3, Set. 1995.

- 24) Relatório WEG – Dr. Neven SRB – Publicação : EMA, no. 3 a 8 , Mar/Ago , 1980.
- 25) S.L. Ho, W.N. Fu, H.C. Wong ; “*Estimations of Stray Load Losses of Skewed Rotor Induction Motors Using Coupled 2-D and 3-D Time Stepping Finite Element Methods- Part I*”, COMPUMAG, Nov., 1997.
- 26) S.Williamson, “*Impact of Inter-bar Currents on the Performance of the Brushless Doubly Fed Motor*”, IEEE Transactions on Industry Applications, vol. 35, no. 2, Mar/Abr, 1999, pp. 453-460.
- 27) S.Williamson, T.Flack, A. Volschenk; “*Representation of skew in time-stepped two-dimensional finite-element models of electrical machines*, IEEE Transactions on Industry Applications, vol. 31, no.5, 1995, pp. 1009-1015.
- 28) A. Tenhunen, Arkkio, A. Arkkio; “*Representation of Skew in Time-Stepped 2D FEM of Induction Machines Using Multi-Slice Technique*”, 2nd International Seminar on Vibrations and Acoustic Noise of Electric Machinery, 1-3 Jun, 2000, Lodz, Polonia.
- 29) N. Sadowski; “*Modélisation des Machines Électriques à partir de la résolution des Équations du Champ en tenant compte du Mouvement et du Circuit d’Alimentation* “, Lógica EFCAD, Tese de Doutorado, INPT, Toulouse, 1993(em francês).
- 30) J.P.A. Bastos; *Eletromagnetismo e Cálculo de Campos*- Editora da UFSC – 1992.
- 31) K. Matsuse, T. Hayashida, I. Miki; “*Effect of Crosspath Resistance Between Adjacent Rotor Bars on Performance of Inverter-Fed High-Speed Induction Motor*”, IEEE Transactions on Industry Applications, vol. 30, no.3, Mai/Jun, 1994, pp.621-627.
- 32) K. Matsuse, T. Hayashida, I. Miki; “*Analysis of Inverter-Fed High-Speed Induction Motor Considering Crosspath Resistance Between Adjacent Rotor Bars*”, IEEE Transactions on Industry Applications, vol. 30, no.3, Mai/Jun, 1994, pp.621-627.
- 33) B.Heller; “*Losses in Squirrel-Cage Motors due to Rotor Skew*”, IEEE. Transactions
- 34) O.I.Butler; “*Change of stray loss of a cage induction motor with axial variation of the inter-bar resistance*”, Proc.IEE, vol. 118, no.7, Jul, 1971.

- 35) Boite, René; Neiryneck, Jacques; *“Traité d’Electricité”*, vol. IV, Presses Polytechniques Romandes, Théorie des Réseaux de Kirchhoff.
- 36) C.A.da Silva, R.Carlson, N.Sadowski, Y.Lefèvre, M.L.Mazenc, *“A New Method to Calculate the Inter-bar Currents in Induction Motors-Part I: Methodology”*, IGTE 2000, Set.11-14,Graz, Austria, pp. 436-439.
- 37) C.A.da Silva, R.Carlson, N.Sadowski, Y.Lefèvre, M.L.Mazenc, *“A New Method to Calculate the Inter-bar Currents in Induction Motors-Part II: The Skewing Effect”*, IGTE 2000, Set.11-14,Graz, Austria, pp. 245-247.
- 38) C.G.Veinott; *“Theory and design of small induction motors”*, Mc Graw-Hill Company, Inc. – London, 1959.
- 39) C.A.da Silva, R.Carlson, N.Sadowski, Y.Lefèvre, M.L.Mazenc, *“Uma Nova Metodologia para o Cálculo das Correntes Inter-barras em Motores de Indução de Gaiola”*, CBMag 2000, 19-22 Dez, Natal, Brasil, pp. 13-16.
- 40) N. Christofides, *“Origins of Load Losses in Induction Motor with Cast Aluminium Rotors”*, Proc. IEEE (London), vol. 112, pp. 2317-2332, 1965.
- 41) H.Piquet, *“Simulation numérique des convertisseurs statiques, prise em compte des boucles de controle”*, Tese de Doutorado (em Francês), I.N.P.T, 1990.
- 42) F.Piriou, A.Razek, *“A Model for Coupled Magnetic-Electric Circuits in Electric Machines with Skewed Slots”*, IEEE Transactions on Magnetics, vol. 26, no. 2, Março 1990.