

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIA E ENGENHARIA DE MATERIAIS**

**DESENVOLVIMENTO DE UM MODELO CONSTITUTIVO PARA ANÁLISE  
ELASTO-PLÁSTICA DE METAIS POROSOS SINTERIZADOS**

**TESE SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA PARA A  
OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIA E ENGENHARIA DE  
MATERIAIS**

**JÚNIOR GERVÁSIO JUSTINO**

**FLORIANÓPOLIS, NOVEMBRO DE 1999**

**DESENVOLVIMENTO DE UM MODELO CONSTITUTIVO PARA ANÁLISE  
ELASTO-PLÁSTICA DE METAIS POROSOS SINTERIZADOS**

**JÚNIOR GERVÁSIO JUSTINO**

**ESTA TESE FOI JULGADA PARA OBTENÇÃO DO TÍTULO DE  
MESTRE EM CIÊNCIA E ENGENHARIA DE MATERIAIS**

**ESPECIALIDADE CIÊNCIA E ENGENHARIA DE MATERIAIS E APROVADA EM  
SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM  
DOUTOR CIÊNCIA E ENGENHARIA DE MATERIAIS**



---

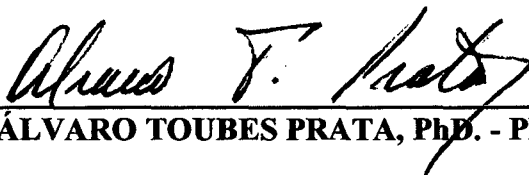
**PROF. ALOÍSIO NELMO KLEIN, Dr. Ing. – ORIENTADOR**



---

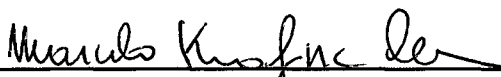
**PROF. CARLOS VIANA SPELLER – COORDENADOR DO CURSO**

**BANCA EXAMINADORA**



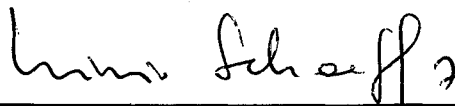
---

**PROF. ÁLVARO TOUBES PRATA, PhD. - PRESIDENTE**



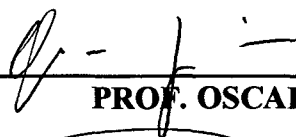
---

**PROF. MARCELO KRAJNC ALVES, PhD. – CO-ORIENTADOR**



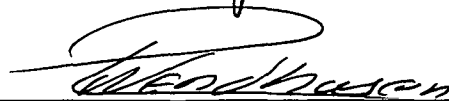
---

**PROF. LÍRIO SCHAEFFER, Dr. Ing.**



---

**PROF. OSCAR BALANCIN, Dr. Sc.**



---

**PROF. PAULO ANTÔNIO PEREIRA WENDHAUSEN, Dr. Ing.**

*"Se mais pessoas se entusiasmassem com o seu trabalho  
a ponto de precisarem ser lembradas de sair para o almoço,  
haveria mais felicidade no mundo e menos indigestão"*

Charles M. Schwab  
1862-1939

---

---

## Agradecimentos

Pois bem, este é o fim de uma caminhada de quatro anos e o início da longa caminhada do resto de uma vida. Como sempre, o encerramento de mais uma etapa é extremamente gratificante e o ato de olhar para o caminho trilhado traz satisfação e a sensação de dever cumprido.

O caminho que leva ao final de uma tese é, em geral, tortuoso, crivado de obstáculos e dificuldades que, com certeza, estão acima da capacidade de um indivíduo superar sozinho. Isto não poderia ser diferente comigo, e se consegui chegar até aqui, este é o maior sinal de que tive muita ajuda e incentivo. A todas estas pessoas que cruzaram o meu caminho e que muitas vezes me ajudaram a seguir em frente mesmo sem perceber o bem que estavam fazendo, o meu muito obrigado.

Existem aqueles que participaram de forma ativa durante todo ou parte do desenrolar deste trabalho. A estes eu gostaria de agradecer de forma mais direta:

A Deus, que inegavelmente mostrou sua presença nos momentos de maior dificuldade.

À Minha esposa e filha, Taiana e Ana Carolina, que têm estado ao meu lado me incentivando e me ajudaram a lembrar do máximo espaço que uma tese pode ocupar na vida de uma família.

A meus pais, Gervásio e Carmen, que antes de mais nada me inculcaram os primeiros valores da vida e, como excelentes pais que são, ainda hoje sabem segurar os próprios sentimentos em detrimento de uma lição que possa levar um filho ao amadurecimento.

À minha família, como um todo, por ser sempre o porto seguro...

A meu orientador, Prof. Klein, que acreditou mais em na minha capacidade do que eu próprio, me propôs desafios e me mostrou que eu teria condições de superá-los. A este que além de professor e orientador tem sido um grande amigo.

A meu co-orientador, Prof. Marcelo, que sabiamente soube manter meus pés no chão.

Ao Prof. James A. Nemes, que orientou meu trabalho enquanto estive na McGill University em Montreal, por ter sido muito mais do que poderia ser esperado de um orientador em uma terra distante.

Aos companheiros de doutorado, Rubens, Maurício e Collares, que além de grandes amigos tiveram um papel determinante no amadurecimento e desenrolar desta tese. Ainda, juntamente

com o Eduardo, o Cesarino, o Jairo e a Suzi tornaram cada minuto de trabalho uma experiência hilariante.

Ao Hugo, por toda a ajuda durante os trabalhos e principalmente na fase final, quando desempenhou papel determinante para o fechamento da tese.

Aos bolsistas do "LabFax I", Carlos, Marcelo, Jorge, Galiotto, Luiz Henrique, Victor e por incrível que pareça, Alfredo, que a cada tarefa executada com afinco mostraram o valor do trabalho em equipe e permitiram que o grupo alcançasse objetivos que nem sempre podem ser reportados em uma tese.

A todos o meu Muito Obrigado!

## *Histórico*

*A metalurgia do pó foi utilizada muito antes dos antigos artesãos terem aprendido a fundir o ferro. Egípcios fizeram ferramentas de ferro usando técnicas rudimentares semelhantes às da metalurgia do pó desde pelo menos 3000 AC. Antigos índios Incas fizeram jóias e artefatos de metais preciosos. O primeiro produto moderno feito por metalurgia do pó foi o filamento de tungstênio para lâmpadas incandescentes, desenvolvido no início do século 20. Depois surgiram os mancais autolubrificantes (1920), as ferramentas de metal duro para usinagem (1930), as peças automotivas, as partes de turbinas de avião e, mais recentemente, o forjamento de pré-formas sinterizadas e a injeção de pós tem ampliado os limites tecnológicos da metalurgia do pó.*

---

---

# SUMÁRIO

|     |  |     |
|-----|--|-----|
| 1   | INTRODUÇÃO .....   | 1   |
| 2   | - CONTEXTUALIZAÇÃO DO TRABALHO .....   | 6   |
| 3   | - INFLUÊNCIA DA MICROESTRUTURA DO MATERIAL NAS SUAS PROPRIEDADES MECÂNICAS .....   | 8   |
| 3.1 | - INFLUÊNCIA DA POROSIDADE DO MATERIAL NAS SUAS PROPRIEDADES MECÂNICAS .....   | 10  |
| 4   | - DEFORMAÇÃO PLÁSTICA DOS MATERIAIS : .....  | 21  |
| 4.1 | - CRITÉRIOS DE ESCOAMENTO PARA MATERIAIS SOB SOLICITAÇÕES NÃO UNIAXIAIS .....  | 25  |
| 4.2 | - CRITÉRIO DE ESCOAMENTO PARA MATERIAIS DEPENDENTES DA PRESSÃO .....   | 27  |
| 4.3 | - INÍCIO DO ESCOAMENTO PREVISTO PELOS CRITÉRIOS DA LITERATURA .....  | 30  |
| 4.4 | - RELAÇÃO TENSÃO DEFORMAÇÃO ELASTO-PLÁSTICA .....  | 32  |
| 4.5 | - COMENTÁRIOS FINAIS E OBJETIVOS DO TRABALHO .....   | 33  |
| 5   | - PROPOSTA DE CRITÉRIO DE ESCOAMENTO .....   | 35  |
| 5.1 | - COMPARAÇÃO ENTRE O INÍCIO DO ESCOAMENTO CALCULADO PELO CRITÉRIO PROPOSTO E PELOS CRITÉRIOS APRESENTADOS NA LITERATURA .....                            | 47  |
| 6   | - IMPLEMENTAÇÃO DO ALGORITMO IMPLÍCITO DE INTEGRAÇÃO .....   | 49  |
| 6.1 | DEFINIÇÃO DAS VARIÁVEIS DE ESTADO .....  | 57  |
| 7   | - IMPLEMENTAÇÃO DOS MODELOS .....  | 59  |
| 7.1 | - MODELOS COM UM ELEMENTO .....  | 61  |
| 7.2 | - MODELOS COM MAIS DE UM ELEMENTO .....  | 75  |
| 8   | CONCLUSÕES .....   | 87  |
| 9   | PROPOSTAS PARA CONTINUAÇÃO E NOVOS TRABALHOS .....   | 90  |
| 10  | REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....   | 91  |
| 11  | APÊNDICE I - OBTENÇÃO DOS COEFICIENTES $A_{ij}$ E $b_i$ .....  | 97  |
| 12  | APÊNDICE II - CÁLCULO DOS COEFICIENTES $\frac{\partial H^a}{\partial \Delta \varepsilon_p}$ , $\frac{\partial H^a}{\partial \Delta \varepsilon_q}$ ..... | 101 |

13 APÊNDICE III - CÁLCULO DO JACOBIANO.....103



# ÍNDICE DE FIGURAS

|   |    |
|---|----|
| FIGURA 1.1 - A MOLDAGEM POR INJEÇÃO DE PÓS METÁLICOS COMO COMPLEMENTO AO CAMPO DE APLICAÇÃO DE OUTRAS TECNOLOGIAS.  | 3  |
| FIGURA 1.2 - PEÇAS COMPLEXAS OBTIDAS POR MOLDAGEM POR INJEÇÃO DE PÓS  | 4  |
| FIGURA 3.1 - APLICAÇÕES DA METALURGIA DO PÓ EM FUNÇÃO DA DENSIDADE DO VOLUME E DA SUPERFÍCIE DA PEÇA.   | 11 |
| FIGURA 3.2 - TENSÃO NORMALIZADA VERSUS DENSIDADE RELATIVA PARA AÇOS SINTERIZADOS.   | 13 |
| FIGURA 3.3 - TENSÃO DE ESCOAMENTO VERSUS DENSIDADE RELATIVA PARA AÇOS SINTERIZADOS.   | 13 |
| FIGURA 3.4 - REPRESENTAÇÃO ESQUEMÁTICA DO CUSTO EM FUNÇÃO DA DENSIDADE OBTIDA PELOS DIFERENTES TÉCNICAS DA METALURGIA DO PÓ.  | 17 |
| FIGURA 3.5 - ASC 100.29 ATOMIZADO E NC 100.24 REDUZIDO; AMBOS COM 12% POROS.  | 18 |
| FIGURA 3.6 - (CONTINUAÇÃO) INFLUÊNCIA DA POROSIDADE NA TENSÃO DE ESCOAMENTO E NA RESISTÊNCIA À TRAÇÃO. $R_M$ =TENSÃO DE RESISTÊNCIA; $R_{0,2}$ =TENSÃO DE ESCOAMENTO.   | 18 |
| FIGURA 3.7 - EFEITO DA CURVATURA, SEPARAÇÃO E TAMANHO DOS POROS NA RESISTÊNCIA À FADIGA DE UM AÇO SINTERIZADO MPIC FC 0208.   | 20 |
| FIGURA 4.1 - COMPORTAMENTO IDEALIZADO DE CURVAS TENSÃO VERSUS DEFORMAÇÃO UNIAXIAL PARA MATERIAIS DÚCTEIS: A - MATERIAL RÍGIDO PLÁSTICO IDEAL; B - MATERIAL RÍGIDO COM ENCRUAMENTO LINEAR; C - MATERIAL ELASTO-PLÁSTICO IDEAL; D - MATERIAL ELASTO-PLÁSTICO COM ENCRUAMENTO LINEAR; E - MATERIAL ELASTO-PLÁSTICO COM ENCRUAMENTO POTENCIAL; F - MATERIAL SEGUNDO O MODELO DE RAMBERG-OSGOOD. | 22 |
| FIGURA 4.2 - ESTADO DE TENSÕES GENÉRICO PARA UM ELEMENTO DE VOLUME $dV$ EM COORDENADAS EULERIANAS.  | 23 |
| FIGURA 4.3 - SEPARAÇÃO DO TENSOR TENSÃO DE CAUCHY EM TENSOR DEVIATÓRICO E ESFÉRICO DE TENSÕES.  | 24 |
| FIGURA 4.4 - TENSOR TENSÃO DE CAUCHY (A) E TENSOR TENSÃO DEVIATÓRICO (B) ORIENTADOS SEGUNDO AS DIREÇÕES PRINCIPAIS.   | 24 |
| FIGURA 4.5 - CONDIÇÕES PARA ESCOAMENTO DE PREVISTAS POR QUATRO DIFERENTES TEORIAS PROPOSTAS NA LITERATURA.  | 31 |

|   |    |
|---|----|
| FIGURA 4.6 – COMPORTAMENTO ELÁSTO-PLÁSTICO COM ENCRUAMENTO LINEAR PARA O CASO UNIDIMENSIONAL.   | 32 |
| FIGURA 5.1 – SUPERFÍCIE DE ESCOAMENTO PARA $f(\rho) = 1,0$ ; $f(\rho) = 0,86$ ; $f(\rho) = 0,8$ .   | 38 |
| FIGURA 5.2 - LIMITES ASSUMIDOS PARA A VARIAÇÃO DA FUNÇÃO $f(\rho)$ CONSIDERANDO-A UM POLINÔMIO DE GRAU 2.   | 40 |
| FIGURA 5.3 - TENSÃO DE ESCOAMENTO EM FUNÇÃO DA DENSIDADE PARA $n = 0.35$ E $\rho_c = 0.5$ .   | 42 |
| FIGURA 5.4 - TENSÃO DE ESCOAMENTO EM FUNÇÃO DA DENSIDADE PARA $\rho_c = 0.5$ E DIFERENTES VALORES DE $n$  | 43 |
| FIGURA 5.5 - TENSÃO DE ESCOAMENTO EM FUNÇÃO DA DENSIDADE PARA $n = 0.35$ E DIFERENTES VALORES DE $\rho_c$ .   | 43 |
| FIGURA 5.6 - CONDIÇÕES PARA ESCOAMENTO NO ESPAÇO Q VERSUS P PARA DIFERENTES UMA DADA CONDIÇÃO DE PARÂMETROS PARA O MODELO PROPOSTO.                                     | 45 |
| FIGURA 5.7 - INFLUÊNCIA DA DENSIDADE CRÍTICA NA CONDIÇÃO PARA ESCOAMENTO SEGUNDO O MODELO PROPOSTO PARA DIFERENTES VALORES DE DENSIDADE CRÍTICA.                        | 46 |
| FIGURA 5.8 - INFLUÊNCIA DA DENSIDADE CRÍTICA NA CONDIÇÃO PARA ESCOAMENTO SEGUNDO O MODELO PROPOSTO PARA DIFERENTES VALORES DE $n$ .                                     | 46 |
| FIGURA 5.9 - INFLUÊNCIA DA DENSIDADE CRÍTICA NA CONDIÇÃO PARA ESCOAMENTO SEGUNDO O MODELO PROPOSTO PARA DIFERENTES CONJUNTOS DE $Q_1$ , $Q_2$ E $Q_3$ .                 | 47 |
| FIGURA 5.10 - COMPARAÇÃO ENTRE O INÍCIO DO ESCOAMENTO PREVISTO PELOS CRITÉRIOS DA LITERATURA E PELOS CRITÉRIOS PROPOSTOS  | 48 |
| FIGURA 7.1 - CURVA TENSÃO DEFORMAÇÃO CONFORME PREVISTA PELA EQUAÇÃO 7.1.  | 60 |
| FIGURA 7.2 - MODELO GEOMÉTRICO E CONDIÇÕES DE CONTORNO PARA O CUBO SUBMETIDO À DEFORMAÇÃO HIDROSTÁTICA  | 61 |
| FIGURA 7.3 - PRESSÃO E POROSIDADE EM FUNÇÃO DA VARIAÇÃO VOLUMÉTRICA PARA OS CRITÉRIOS DE GURSON, GREEN, DORAIVELU E KUHN & DOWNEY.                                      | 63 |
| FIGURA 7.4 - PRESSÃO E POROSIDADE EM FUNÇÃO DA DEFORMAÇÃO VOLUMÉTRICA PARA DIFERENTES CONJUNTOS DE $Q_1$ , $Q_2$ E $Q_3$ E PARA $\rho_c = 0.5$ , $K = 1$ E $n = 0.35$ . | 65 |
| FIGURA 7.5 - PRESSÃO E POROSIDADE EM FUNÇÃO DA DEFORMAÇÃO VOLUMÉTRICA PARA DIFERENTES CONDIÇÕES DE DENSIDADE CRÍTICA ( $\rho_c$ ) PARA $K$ E $n$ CONSTANTES.            | 67 |
| FIGURA 7.6 - INFLUÊNCIA DO EXPOENTE $n$ NA PRESSÃO E POROSIDADE EM FUNÇÃO DA DEFORMAÇÃO VOLUMÉTRICA.  | 68 |
| FIGURA 7.7 - INFLUÊNCIA DA VARIAÇÃO DO PARÂMETRO $K$ NA PRESSÃO E NA POROSIDADE EM FUNÇÃO DA DEFORMAÇÃO VOLUMÉTRICA.  | 69 |
| FIGURA 7.8 - MODELO SÓLIDO DO CUBO SUBMETIDO A DEFORMAÇÃO UNIAXIAL.   | 70 |
| FIGURA 7.9 - TENSÃO E POROSIDADE EM FUNÇÃO DA DEFORMAÇÃO PARA OS MODELOS DE GURSON, GREEN, KUHN & DOWNEY E DORAIVELU.   | 71 |

|   |    |
|---|----|
| FIGURA 7.10 - TENSÃO E POROSIDADE EM FUNÇÃO DA DEFORMAÇÃO APLICADA PARA DIFERENTES CONJUNTOS DE $Q_1$ , $Q_2$ E $Q_3$ PARA $K$ , $\rho_c$ E $n$ CONSTANTES.                           | 72 |
| FIGURA 7.11 - TENSÃO E POROSIDADE EM FUNÇÃO DA DEFORMAÇÃO APLICADA PARA DIFERENTES VALORES DE $\rho_c$ COM $K$ E $n$ CONSTANTES.  | 73 |
| FIGURA 7.12 - TENSÃO E POROSIDADE EM FUNÇÃO DA DEFORMAÇÃO APLICADA PARA DIFERENTES VALORES DE $K$ PARA $Q_1$ , $Q_2$ , $Q_3$ , $\rho_c$ E $n$ CONSTANTES.                             | 74 |
| FIGURA 7.13 - TENSÃO E POROSIDADE EM FUNÇÃO DA DEFORMAÇÃO APLICADA PARA DIFERENTES VALORES DE $n$ PARA $Q_1$ , $Q_2$ , $Q_3$ , $\rho_c$ E $K$ CONSTANTES.                             | 75 |
| FIGURA 7.14 - (CONTINUAÇÃO) MODELO DE CILINDRO SUBMETIDO À TRAÇÃO UNIAxIAL (ANTES (AZUL) E APÓS A DEFORMAÇÃO). (A); E FRAÇÃO DA BARRA SUBMETIDA À TRAÇÃO UNIAxIAL (B).                | 76 |
| FIGURA 7.15 - TENSÃO EQUIVALENTE DE MISES, PRESSÃO E POROSIDADE EM FUNÇÃO DA FRAÇÃO APLICADA DO DESLOCAMENTO PRESCRITO PARA OS CRITÉRIOS DE GURSON, GREEN, DORAIVELU E KUHN & DOWNEY. | 77 |
| FIGURA 7.16 - TENSÃO DE MISES EM FUNÇÃO DO DESLOCAMENTO APLICADO PARA DIFERENTES CONDIÇÕES DO MODELO PROPOSTO   | 78 |
| FIGURA 7.17 - PRESSÃO EM FUNÇÃO DO DESLOCAMENTO APLICADO PARA DIFERENTES CONDIÇÕES DO MODELO PROPOSTO   | 78 |
| FIGURA 7.18 - POROSIDADE EM FUNÇÃO DO DESLOCAMENTO APLICADO PARA DIFERENTES CONDIÇÕES DO MODELO PROPOSTO  | 79 |
| FIGURA 7.19 - DIMENSÕES DA BARRA COM FURO ; FRAÇÃO DO CORPO DE PROVA MODELADO.  | 80 |
| FIGURA 7.20 - DETALHE DO MODELO DE BARRA COM FURO MOSTRADO ANTES (AZUL) E DEPOIS DA DEFORMAÇÃO.   | 81 |
| FIGURA 7.21 - MAPA DA TENSÃO EQUIVALENTE DE MISES EM UM DETALHE DO MODELO DE BARRA COM FURO.  | 81 |
| FIGURA 7.22 - MAPA DA PRESSÃO EM UM DETALHE DO MODELO DE BARRA COM FURO.  | 82 |
| FIGURA 7.23 - MAPA DA POROSIDADE EM UM DETALHE DO MODELO DE BARRA COM FURO.   | 82 |
| FIGURA 7.24 - TENSÃO DE MISES EM FUNÇÃO DO DESLOCAMENTO PRESCRITO PARA OS CRITÉRIOS PROPOSTOS NA LITERATURA.  | 83 |
| FIGURA 7.25 - PRESSÃO EM FUNÇÃO DO DESLOCAMENTO PRESCRITO PARA OS CRITÉRIOS PROPOSTOS NA LITERATURA.  | 84 |
| FIGURA 7.26 - POROSIDADE EM FUNÇÃO DO DESLOCAMENTO PRESCRITO PARA OS CRITÉRIOS PROPOSTOS NA LITERATURA.   | 84 |
| FIGURA 7.27 - TENSÃO DE MISES EM FUNÇÃO DO DESLOCAMENTO PRESCRITO PARA O CRITÉRIO PROPOSTO.   | 85 |
| FIGURA 7.28 - PRESSÃO EM FUNÇÃO DO DESLOCAMENTO PRESCRITO PARA O CRITÉRIO PROPOSTO.   | 86 |

**FIGURA 7.29 - POROSIDADE EM FUNÇÃO DO DESLOCAMENTO PRESCRITO PARA O CRITÉRIO PROPOSTO.**

## Simbologia

|  |  |
|--|--|
| $A$  | Função normal que controla a nucleação de poros  |
| $C_{ijkl}^e$                                   | Matriz Rigidez Elástica  |
| $D_{ijkl}$                                     | Jacobiano  |
| $\Delta \varepsilon^p$                         | Incremento de deformação plástica total  |
| $\Delta \varepsilon_p$                         | Incremento de deformação plástica devido à pressão   |
| $\Delta \varepsilon_q$                         | Incremento de deformação plástica devido à tensão deviatórica  |
| $\varepsilon_N$                                | Valor médio de deformação da distribuição da função $A$  |
| $\bar{\varepsilon}^p$                          | Deformação plástica equivalente  |
| $d\varepsilon_{ij}$                            | Incremento de deformação total   |
| $(d\varepsilon_{ij})_e$                        | Incremento de deformação elástica  |
| $(d\varepsilon_{ij})_p$                        | Incremento de deformação plástica  |
| $f$  | Porosidade do material.  |
| $f_g$  | Fração de poros relacionada ao crescimento   |
| $f_n$  | Fração de poros relacionada com a nucleação dos poros  |
| $df$   | Incremento total de poros  |
| $df_g$   | Incremento de poros devido ao crescimento  |
| $df_n$   | Incremento de poros devido à nucleação   |
| $f_N$  | Fração volumétrica de partículas de segunda fase ou, no caso de materiais sinterizados, em pontos preferenciais de nucleação.  |
| $f(\rho)$                                      | Função que estabelece a relação entre densidade e grau de influência da pressão no início do escoamento previsto pelo critério |
| $g(\rho)$                                      | Função que pode levar em conta a quantidade, tamanho, forma e distribuição de tamanho de poros,                                |
| $g = g(p, q, H^a)$                             | Função potencial plástico genérica   |
| $G(\sigma_{ij}, k_1, k_2, \dots)$              | Critério de escoamento   |
| $H^1 = \bar{\varepsilon}^p$                    | Variável de estado: Deformação plástica equivalente  |
| $H^2 = f$                                      | Variável de estado: Porosidade do material   |
| $dH^a = h^a(\sigma_{ij}, d\varepsilon^p, H^b)$ | Incremento das variáveis de estado   |
| $I_1, I_2, I_3$                                | Primeiro, segundo e terceiro invariantes do tensor tensão de Cauchy  |

|                                   |   |
|-----------------------------------|---|
| $J_1, J_2, J_3$                   | Primeiro, segundo e terceiro invariantes do tensor tensão deviatórica   |
| $J'_1, J'_2, J'_3$                | Primeiro, segundo e terceiro invariantes do tensor tensão semi-deviatórica  |
| $m$                               | Expoente de encruamento da função de Ramberg-Osgood   |
| $p = \frac{1}{3}I_1$              | Pressão ou tensão hidrostática  |
| $q = \sqrt{3J_2}$                 | Tensão equivalente de von Mises ou simplesmente tensão equivalente de Mises   |
| $q_1, q_2$ e $q_3$                | Parâmetros de material ajustado por Vigo Tvergaard ao critério de Gurson  |
| $Q1, Q2$ e $Q3$                   | Variáveis de material do critério proposto  |
| $s_{ij}$                          | Tensor tensão deviatórica   |
| $s_N$                             | Desvio padrão da distribuição da função $A$   |
| $s_1, s_2$ e $s_3$                | Tensões principais do tensor tensão deviatórica   |
| $T = \sigma_{ij}$                 | Tensor tensão de Cauchy   |
| $\sigma_0(\rho)$                  | Tensão de escoamento (resistência) em função da densidade do material;  |
| $\sigma_0$                        | Tensão de escoamento (resistência) para o material 100% denso;  |
| $\sigma_y$                        | Tensão de escoamento instantânea  |
| $\sigma_1, \sigma_2$ e $\sigma_3$ | Tensões principais do tensor tensão de Cauchy   |
| $\rho_m$                          | Densidade do material incluindo os poros  |
| $\rho_t$                          | Densidade teórica da matriz material  |
| $\rho$                            | Densidade relativa do material  |
| $\rho_c$                          | Densidade onde o compactado perde a resistência mecânica.   |
| $n$                               | Expoente que indica maior ou menor influência da porosidade na tensão de escoamento do material   |
| $n_{ij}$                          | Tensor que determina a direção de escoamento devido às tensões deviatóricas   |
| $\lambda$                         | Autovalores do tensor   |
| $d\lambda$                        | Incremento do multiplicador plástico  |
| $K$                               | Constante que indica a influência das características dos poros (forma, tamanho médio e distribuição de tamanho) e de diferentes formas de processamento no comportamento plástico do material. |
| $Y_0$                             | Constante que se relaciona à tensão de escoamento inicial do material 100% denso  |

---

---

## O Autor

Nascido em 16 de março de 1970, mudou-se para Florianópolis em 1978. Desde cedo, inspirando-se em seu pai, nutriu o desejo de se tornar Engenheiro Mecânico, curso este ao qual ingressou em 1988, na Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), e terminou em 1992; após trabalhar por quase três anos em projetos relacionados à metalurgia do pó no Laboratório de Materiais do departamento de Engenharia Mecânica da referida universidade. Com o intuito de continuar os estudos e obter o grau de Mestre em Engenharia Mecânica pela mesma universidade, estudou enquanto trabalhava no desenvolvimento e implantação de uma fábrica de peças sinterizadas para a Metalúrgica Wetzel S.A. em Joinville, SC. Este projeto veio a se transformar na TecnoSinter Tecnologia em Sinterizados Ltda, empresa destinada à produção de buchas autolubrificantes e peças estruturais sinterizadas, em Curitiba, PR. Em outubro de 1995 ingressou no Programa de Doutorado em Ciência e Engenharia de Materiais da Universidade Federal de Santa Catarina, onde defendeu sua tese em novembro de 1999.

---

---

# RESUMO

---

---

O modelamento do comportamento de metais porosos submetidos à deformação plástica é de fundamental importância tanto para o desenvolvimento dos processos da metalurgia do pó (compactação, forjamento a quente e a frio de pré-formas sinterizadas) como para o projeto de peças e componentes metálicos com poros. As teorias da plasticidade e a sua implementação voltada a metais porosos se trata de um tópico ainda em desenvolvimento e desafiador em termos de progressos a serem obtidos. Os critérios de escoamento apresentados na literatura são usualmente de aplicação restrita, predominantemente testados para uma classe específica de materiais e não consideram o comportamento de encruamento destes. Como consequência, as teorias da plasticidade para metais porosos não são capazes de serem ajustadas a diferentes tipos de materiais com diferentes características. Além disso, normalmente os algoritmos de plasticidade de materiais porosos são de difícil implementação em programas computacionais comerciais e, desta forma, não há disponibilidade de variedade de relações constitutivas a serem aplicadas na simulação numérica estrutural de problemas considerando materiais porosos. Neste contexto, a proposta de um modelo flexível se mostra como uma boa solução para o uso em diferentes aplicações, já que somente um modelo necessita ser programado e pode ser aplicado à solução de problemas envolvendo diferentes tipos de materiais. Neste trabalho é proposto um novo critério flexível de plasticidade para metais porosos que é comparado a quatro critérios de escoamento propostos na literatura por Green, Gurson, Kuhn & Downey e Doraivelu. Estes critérios são implementados em um programa comercial de elementos finitos (ABAQUS) através de um algoritmo de integração adaptado a



partir de uma proposta da literatura que considera o encruamento da matriz do material e a evolução da porosidade. Desta forma foram estudadas as diferenças nas respostas para diferentes teorias da plasticidade de materiais porosos considerando os diferentes critérios de escoamento e o mesmo comportamento de pós-escoamento. Os resultados obtidos via simulação numérica mostram que: 1) todos os critérios de escoamento, da literatura e proposto, foram implementados com sucesso; 2) o critério de escoamento proposto é adequado no sentido de cobrir as situações modeladas pelos critérios apresentados na literatura, o que pode ser obtido pela variação dos parâmetros do modelo; 3) os critérios de escoamento apresentados na literatura (Green, Kuhn & Downey e, Doraivelu) e não previamente implementados via método dos elementos finitos considerando o comportamento após o início do escoamento apresentaram resultados qualitativamente similares mas diferentes em valores absolutos quando comparados entre si e com o vastamente testado critério de Gurson.

---

---

# ABSTRACT

---

---

The modelling of the plastic behaviour of powder metals is of great importance for improving the P/M process itself (compaction, cold and hot forging) as well as for component design. The plasticity theories and their implementation in porous materials applications is a topic still not completely set in terms of developments to be made. The yield criteria available in the literature are not usually applicable for all kinds of materials and are mainly tested for a closed set of conditions not considering the post-yielding behaviour. As a result of that, the plasticity theories are mainly "rigid" theories that are not capable to be adjusted to different sets of materials and materials characteristics. Besides, mainly the models for porous materials are usually of tough implementation in software for commercial use and, in this way, there are not a variety of models available to be used for different materials and models. In this context, the proposal of a flexible model turns up as a good solution for the implementation and the use in different applications, since only one model needs to be programmed and different materials responses can be accomplished and calibrated for use. In this work, we present this new flexible porous metal yield criterion and compare it with four porous metal plasticity theories presented in the literature by Green, Gurson, Kuhn and Downey and Doraivelu. These yield criteria are implemented in commercial general-purpose finite element software (ABAQUS) by means of an algorithm adapted from the literature that considers the hardening of matrix material and the porosity evolution. So the differences in the responses for different

plasticity theories were studied considering the different yield criteria and the same post-yielding behaviour on the simulation of the plastic deformation of a porous metal. The results obtained by numerical experimentation are showing that: 1) all the yield criteria were successfully implemented using the proposed algorithm; 2) the flexible criterion proposed is adequate to describe the situations covered by the yield criteria previously presented in the literature what can be obtained by the variation of the model parameters; 3) the criteria presented in the literature and not previously implemented via finite element (Green, Kuhn and Downey and, Doraivelu) method considering the post-yield behaviour showed results qualitatively similar but numerically different when compared to the widely tested criterion proposed by Gurson.

---

---

## Capítulo 1

# INTRODUÇÃO

---

---

A metalurgia do pó é um processo de fabricação que historicamente teve o seu uso consolidado através de duas situações (Whittaker, 1998):

- quando se tratava do único processo de fabricação viável para a obtenção de um dado produto (ex.: materiais porosos como filtros metálicos e buchas autolubrificantes, metalduro, metal-pesado, metais de alto ponto de fusão);
- quando era um processo de fabricação de maior viabilidade econômica (ex.: peças estruturais);

A viabilidade econômica se apresentava tanto maior quanto menor a resistência mecânica, quanto mais sua geometria exigisse usinagem mas permitisse uma direção de fácil extração da matriz, como é o caso de peças com simetria axial, e quanto maior fosse a escala de produção (Lenel, 1980).

Dadas as características da metalurgia do pó no sentido da obtenção de alta repetibilidade, tolerâncias estreitas e bom acabamento superficial, os esforços com o intuito de derrubar as barreiras impostas pelas suas limitações foram muito grandes. Assim, a busca pelo desenvolvimento de processos de fabricação que permitissem a obtenção, de maneira

economicamente viável, de componentes sinterizados com alta resistência mecânica e boas propriedades dinâmicas (resistência ao impacto, resistência à fadiga) tornou-se uma necessidade (Jones et al., 1997; Christian e German, 1995). Estes esforços levaram ao surgimento de diversos processos “híbridos”, assim chamados por combinarem diferentes tecnologias de processamento de materiais à rota da metalurgia do pó convencional. Dentre eles podem ser enumerados os seguintes:

- Laminação de pós;
- Extrusão de pós (Yang and Lippman, 1996);
- Forjamento de pré-formas sinterizadas (Kuhn and Ferguson, 1990):
  - Forjamento a quente;
  - Forjamento a frio;
- Moldagem por injeção de pós (German e Bose, 1997):
  - Moldagem de metais por injeção;
  - Moldagem de cerâmicos por injeção.

Entre esses processos alternativos, o forjamento e a moldagem por injeção foram os que mais se consagraram na obtenção de componentes mecânicos; o forjamento, em decorrência da acentuada melhoria obtida nas propriedades mecânicas estáticas e dinâmicas, e a moldagem por injeção, principalmente pela facilidade de obtenção de geometrias intrincadas onde, em geral, são demandadas muitas (e caras) operações de usinagem. De qualquer forma, ambas as alternativas de processamento propiciaram a ampliação do campo da metalurgia do pó para aplicações anteriormente consideradas inviáveis, tanto por questões de propriedades mecânicas como por dificuldades de obtenção das geometrias requeridas. A figura 1.1 mostra os limites usuais da tecnologia de moldagem de pós metálicos por injeção, quando concorrendo com processos de obtenção de peças estruturais (German, 1998).

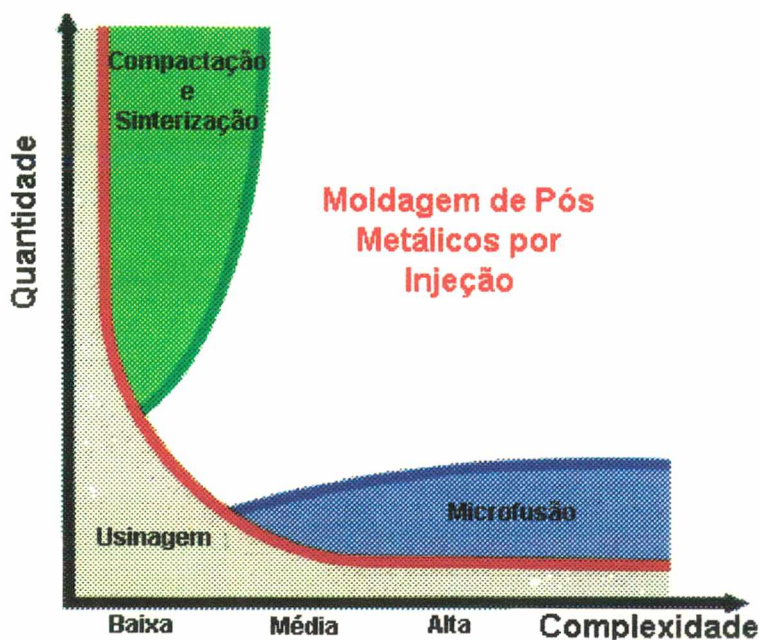


Figura 1.1 - A moldagem por injeção de pós metálicos como complemento ao campo de aplicação de outras tecnologias.

A extensão do campo de aplicações dos componentes sinterizados para áreas onde os requisitos de forma e de propriedades mecânicas são mais críticos gera a necessidade da utilização de técnicas (ferramentas) de projeto mais refinadas e complexas (Figura 1.2) (Johnson, 1999; Esper and Sonsino, 1994). Quando se fala de requisitos estruturais, nos casos de geometrias complexas, a solução de problemas com base em métodos analíticos, sem a ajuda de computadores, se torna inviável. Nesses casos são utilizados métodos numéricos de resolução, como é o caso dos métodos de elementos finitos (MEF) (Owen and Hinton, 1980).

Quando o processo de fabricação é conduzido de forma a obter componentes com densidade relativa muito próxima da teórica (porosidade aproximadamente 0%), pode-se assumir que o material se comporte como 100% denso, e, nestas situações, podem ser aplicados os métodos utilizados para tratar materiais obtidos pela metalurgia convencional. Contudo, à medida que a porosidade aumenta, o comportamento mecânico do material obtido via sinterização se distancia gradativamente daquele sem poros. Neste caso a forma de modelar o comportamento mecânico do material deve ser adaptada ou até mesmo reformulada.

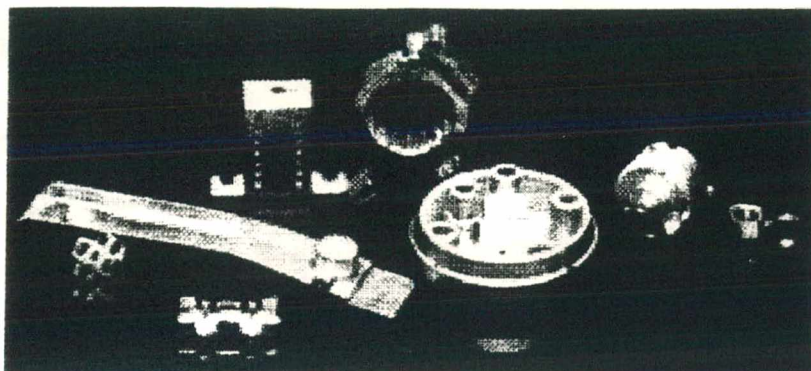


Figura 1.2 - Peças complexas obtidas por moldagem por injeção de pós

Para aqueles componentes solicitados dentro do regime elástico, pode-se, em geral, aproximar o comportamento do material conforme a mesma teoria aplicável para materiais 100% densos, ou seja, normalmente à lei de Hooke (Washizu, 1974). Porém, para solicitações que levem o material ao regime plástico, deve-se notar que a variação de volume do material pode atingir valores expressivos. Uma vez que a teoria para materiais 100% densos não considera a variação permanente de volume do material durante a deformação plástica, deve-se utilizar de uma abordagem que leve em conta este fator. Para suprir estes casos foram propostas diversas formulações, conforme Park (1995) e Doraivelu et al. (1984). Estas formulações se adequam de forma variável a casos específicos, conforme as considerações dos seus criadores, mas a exceção da teoria proposta por Green (1972) e a proposta por Gurson (1977, 1975), se baseiam em empirismos. Além disso, todas as abordagens são propostas para casos específicos ou de forma fechada, dificultando o ajuste ou calibração do modelo para materiais com diferentes tipos de comportamento. Neste sentido, procura-se propor uma formulação que, obtida matematicamente a partir da mecânica do contínuo, preveja o comportamento dos materiais porosos quando submetidos à deformação plástica. Esta formulação deve ser flexível, permitindo o seu ajuste a diferentes casos e materiais, de forma a permitir a sua aplicação ao maior espectro de condições possível.

Para fins de validação do modelo proposto, esta relação proposta é comparada a quatro critérios existentes na literatura, através de simulações numéricas executadas em software comercial de elementos finitos (ABAQUS). Tais simulações são tornadas possíveis através do desenvolvimento de um algoritmo de solução e da implementação de uma subrotina de material do usuário, que customizando o referido software permite a implementação das diversas teorias.

Além da implementação e comparações das diversas teorias utilizadas neste trabalho, deve-se ainda ressaltar que a subrotina considerou não só o início do escoamento, mas um encruamento isotrópico e a evolução da porosidade do material, que neste caso, foi considerada evoluindo em duas parcelas, a primeira, devido ao crescimento dos poros presentes no material e a segunda devido à nucleação de novos poros.



---

---

## Capítulo 2

# CONTEXTUALIZAÇÃO DO TRABALHO

---

---

A análise matemática da plasticidade e o modelamento da deformação

plástica de materiais com o objetivo de desenvolvimento de produtos (peças e processos) tem sido foco de diversos trabalhos, e vêm sendo impulsionadas principalmente com a viabilização de ferramentas computacionais passíveis de serem utilizadas em computadores pessoais a baixo custo. Por isto a plasticidade dos metais porosos vem cada vez mais se tornando o foco de maiores esforços de desenvolvimento (Doremus et al., 1999; Jinka and Bellet, 1996).

A solução de problemas envolvendo a deformação plástica, por métodos computacionais (método dos elementos finitos, volumes finitos, diferenças finitas, elementos de contorno, entre outros), se torna mais complicado à medida em que os modelos incorporam não linearidades, quais sejam, geométricas ou de material (Lee e Zhang, 1991, 1994, 1996; Aravas, 1987). Nestes casos, a descrição da plastificação dos materiais exige, normalmente, uma série de simplificações (Chen e Han, 1988; Hill, 1967). Com materiais sinterizados porosos deve-se ainda atentar para o fato de que os poros permitem a influência da componente hidrostática das tensões atuantes no material, levando, assim, à variação volumétrica do material durante a deformação plástica e, conseqüentemente, invalidando a teoria clássica da plasticidade (Chen e Han, 1988).

Diante da necessidade de uma teoria que descrevesse o comportamento plástico de materiais porosos surgiram, inicialmente, as desenvolvidas por Mohr-Coulomb, 1900, e,

posteriormente, a de Drucker-Prager em 1952, que se destinavam principalmente à classe de materiais não metálicos, tais como solos, rochas, areias e similares (Chen and Han, 1988; Owen and Hinton, 1980).

De fato, as primeiras teorias de plasticidade dedicadas a materiais metálicos porosos surgiram com Khun e Downey (1971), Green (1972) e Shima e Oyane (1976), que se restringiram a aplicar suas teorias à obtenção de componentes através do forjamento a quente ou a frio. Porém, somente o critério proposto por Gurson (1975) tem tido alguma aplicação relacionada ao projeto de componentes, já que este é o único critério que se verificou ter sido implementado em um certo número de programas comerciais. Diante disso, percebe-se que muito pouco tem sido feito no sentido de desenvolver uma teoria, ou até mesmo a aplicação das teorias existentes no projeto estrutural de peças e componentes metálicos sinterizados.

Em geral, a análise estrutural, com o uso de ferramentas computacionais, de tais componentes sinterizados (porosos) considera teorias lineares e materiais elásticos e pequenos deslocamentos. Estas considerações podem até ser feitas para materiais com densidades muito próximas da teórica; entretanto, para peças com geometria complexa e com a presença de poros, que segundo Kubicki (1995), podem levar a fatores de concentração de tensão da ordem de 10, com certeza a plastificação localizada deve ser, pelo menos, considerada como uma possibilidade através do uso de teorias próprias. Estes fatos reforçam a necessidade da implementação das teorias existentes, ou do desenvolvimento de outras que considerem o comportamento plástico de materiais sinterizados na análise estrutural de peças e componentes mecânicos.

---

---

## Capítulo 3

# INFLUÊNCIA DA MICROESTRUTURA DO MATERIAL NAS SUAS PROPRIEDADES MECÂNICAS

---

---

Quando se busca obter um componente sinterizado com a finalidade estrutural, este deve ser analisado em relação à geometria e ao material do qual será produzido (German, 1998). A análise conjunta destes dois fatores deve, então, permitir a definição do conjunto geometria/material que, diante das solicitações impostas quando do funcionamento do componente, não falhe, ou falhe de forma prevista e controlada (Esper and Sonsino, 1994; Berquist, 1997).

A geometria do componente deve então ser definida com base em uma análise funcional e estrutural que considere os modos de falha a que o componente possa estar sujeito, e neste sentido, o cálculo realista do estado de tensões a que o componente está sujeito durante a aplicação das solicitações determina um projeto mais ou menos confiável.

A escolha do material do componente acontece de forma concomitante a esta análise e deve levar em conta, além do desempenho estrutural desejado para o componente, também a sua viabilidade econômica.

O desempenho estrutural dos diferentes tipos de material é diretamente relacionado à sua microestrutura (Dieter, 1961), e como não poderia deixar de ser, os materiais obtidos por metalurgia do pó também seguem esta regra (Palma, 1997; Lindsedt et al., 1995; Ledoux e Prioul, 1988). A diferença marcante entre estes materiais e aqueles obtidos via metalurgia tradicional se situa no fato destes possuírem poros espalhados em sua microestrutura. Sendo assim, as propriedades, o comportamento mecânico e, por consequência, o desempenho do componente, são resultados diretos não somente do material da matriz destes, mas também da quantidade e das características (forma, tamanho, distribuição de tamanho, etc) dos poros. Neste sentido, a influência de variações microestruturais no comportamento mecânico de metais sinterizados deve ser detalhada para melhor entendimento.

O balanço das propriedades mecânicas de componentes sinterizados deve ser obtido através da otimização conjunta da porosidade e das propriedades da matriz.

Com o objetivo de controle das propriedades do material, a microestrutura da matriz de um metal sinterizado pode ser alterada através dos mecanismos usuais da metalurgia dos metais 100% densos, ou seja, através de:

- variações de composição química; por exemplo, adicionando-se elementos de liga. Esta ferramenta se mostra, como na metalurgia de lingote, extremamente útil no sentido de aumentar as propriedades mecânicas dos aços sinterizados. Os principais elementos de liga utilizados na metalurgia do pó ferrosa são o cobre, o níquel, o molibdênio, o fósforo e o carbono (Esper e Sonsino, 1994). Mais recentemente e em menor quantidade, o cromo, o manganês e o vanádio têm sido introduzidos em algumas ligas utilizadas na metalurgia do pó.
- tratamentos térmicos. Aproximadamente 60% dos componentes em aço sinterizado sofrem algum tipo de tratamento térmico (German, 1998). Estes materiais são em geral sujeitos a tratamentos que podem variar desde o recozimento e normalização, até tratamentos mais drásticos como têmpera (Skena et al., 1997).
- trabalho mecânico (encruamento); como nos materiais obtidos por metalurgia de lingote, o trabalho mecânico atua no sentido de aumentar a tensão de escoamento da matriz e diminuir a sua ductilidade. No caso de algumas ligas

onde, em função da porosidade, a ductilidade à tração é baixa, deve-se atentar para a aplicação de esforços compressivos durante o trabalho a frio evitando o surgimento de trincas e defeitos indesejáveis ao funcionamento do componente. (Kuhn e Ferguson, 1990; Sutradhar et al., 1994, 1995)

- refino de grão: novamente, o uso deste mecanismo se assemelha à metalurgia de lingote. Assim, à medida que o material tem os grãos mais refinados, mais se ganha em termos de resistência (Dieter, 1961).

A porosidade do material, de forma geral, atua no sentido de degradar as propriedades mecânicas deste (German, 1998). Apesar de usualmente ser considerado o efeito de degeneração das propriedades mecânicas decorrentes somente da quantidade de poros presentes no material, tem sido comprovado que a porosidade não influi no comportamento mecânico dos componentes de forma tão simplista (Palma, 1997; Ledoux e Prioul; 1988; Kaufman e Mocarski, 1973). Sabe-se que além deste fator, também o tamanho, a distribuição de tamanho, a forma dos poros e o livre caminho médio entre poros, têm forte influência tanto nas propriedades como no comportamento mecânico dos componentes (Christian e German, 1995; Eper e Sonsino; 1994, Höness, 1977; Stahlberg, 1991).

### **3.1 - Influência da porosidade do material nas suas propriedades mecânicas**

À medida que a densidade dos componentes sinterizados aumenta, ocorre um ganho na maioria das propriedades físicas e mecânicas. Para a aplicação de peças sinterizadas em regimes de solitação mais críticos e com maiores requisitos de confiabilidade, a resistência à fadiga se torna especialmente importante, e apesar da temperatura e do tempo de sinterização apresentarem influência na vida à fadiga e na tenacidade à fratura dos materiais sinterizados, a densidade é, certamente, o fator mais marcante para viabilizar tais aplicações (German, 1998; Jones et al., 1997). Diante disso a densificação dos componentes, ao longo de todo o volume ou de forma localizada (figura 3.1), tem sido o mecanismo mais utilizado com o objetivo de ampliar o mercado da metalurgia do pó (Jones, 1998).

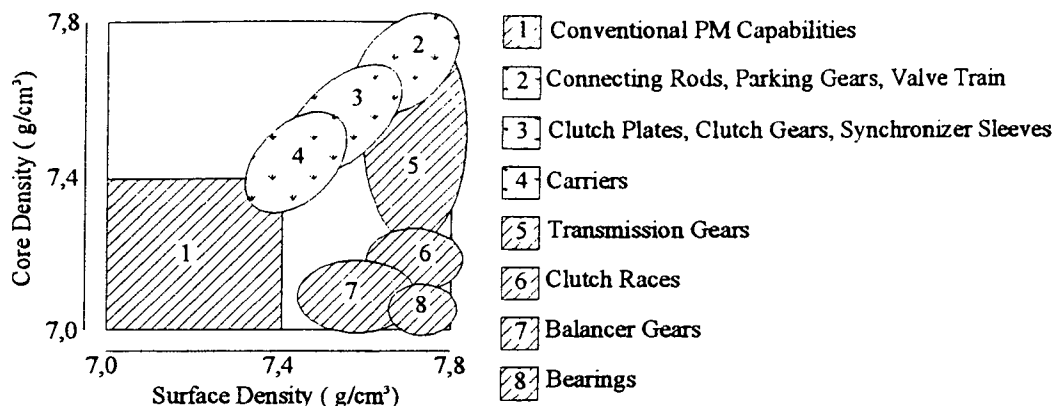


Figura 3.1 - Aplicações da metalurgia do pó em função da densidade do volume e da superfície da peça.

De acordo com Jones et al. (1997), a quantidade de poros é considerada como a principal variável no sentido de influenciar o comportamento mecânico, principalmente estático, de materiais sinterizados. Segundo German (1998) a resistência à tração de metais sinterizados é a primeira preocupação quando se lida com aplicações estruturais e justamente esta variável é fortemente influenciada por variações de densidade, conforme pode-se verificar na tabela 3.1.

Tabela 3.1 - Efeito da densidade nas propriedades a tração de aço inoxidável 316-L

| Porosidade (%) | Alongamento (%) | Tensão de Escoamento (MPa) | Tensão de Ruptura (MPa) | Módulo de Elasticidade (GPa) |
|----------------|-----------------|----------------------------|-------------------------|------------------------------|
| 20,6           | 11,1            | 176                        | 308                     | 103                          |
| 16,2           | 14,2            | 271                        | 417                     | 117                          |
| 14,2           | 15,9            | 280                        | 444                     | 128                          |
| 12,7           | 18,5            | 289                        | 468                     | 144                          |

A redução da resistência mecânica dos materiais sinterizados é devida, entre outros fatores, à redução da área resistente do material e à concentração de tensões em cada poro. Com o intuito de representar a variação da resistência à tração em função da densidade para aços

sinterizados, German (1998) propõe um modelo que estabelece a relação entre tensão de escoamento (ou de resistência, para níveis de porosidade em que a ductilidade se torna negligível) e densidade (figura 3.2):

$$\sigma_0(\rho) = K \left( \frac{\rho_m}{\rho_t} \right)^n \sigma_0 \quad (3.1)$$

onde:

$\sigma_0(\rho)$  = tensão de escoamento (resistência) em função da densidade do material;

$\sigma_0$  = tensão de escoamento (resistência) para o material 100% denso;

$K$  = parâmetro experimental que depende do processo;

$\rho_m$  = densidade do material;

$\rho_t$  = densidade teórica do material 100% denso;

$n$  = parâmetro experimental (usualmente em torno de 0,30);

Este modelo proposto por German é qualitativamente útil porque representa a tendência da influência da densidade na tensão de escoamento de materiais sinterizados submetidos à tração; entretanto, em casos reais, quando da sollicitação à tração, a resistência do material cai a zero mesmo antes da densidade chegar a este valor, de forma que o comportamento reportado por Doraivelu et al. (1984) (figura 3.3) se apresenta como mais próximo da realidade.

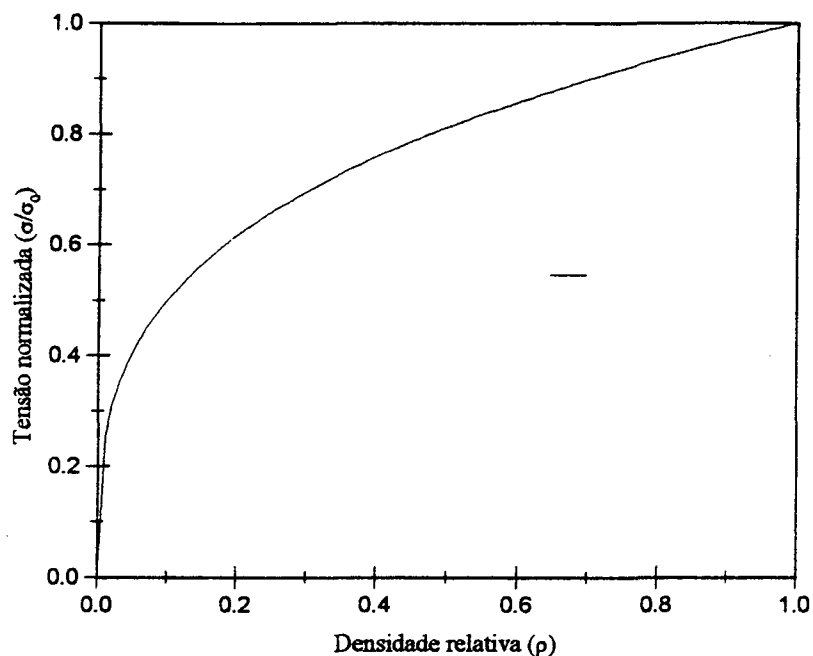


Figura 3.2 - Tensão normalizada versus Densidade Relativa para aços sinterizados.

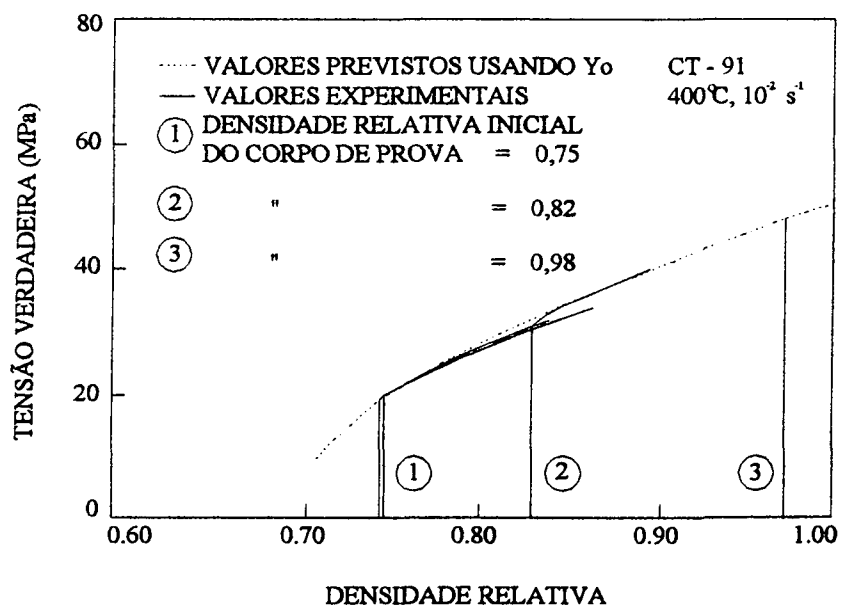


Figura 3.3 - Tensão de escoamento versus densidade relativa para aços sinterizados.



O controle da quantidade de poros presentes no material pode ser obtido de diversas formas, e o mecanismo de densificação escolhido deve estar baseado no tipo de aplicação do componente, no tipo de material e nos custos finais permitidos para o produto. Justamente para a minimização dos custos é que têm surgido novos processos que facilitam a obtenção de componentes mais densos e mais baratos.

A rota de fabricação de componentes via metalurgia do pó consiste de uma seqüência de processos que invariavelmente incluem uma etapa de moldagem e uma de sinterização. Estas duas etapas são os principais pontos do processo onde se atua para se obter maior densificação do material.

No que se refere à densificação na moldagem, o aumento da densidade do material se deve principalmente a níveis de densidade a verde mais altos alcançados após a etapa de compactação, que podem ser devidos a variações de forma, tamanho e distribuição de tamanho das partículas de pós (Bergquist, 1997; Christian e German, 1995; Lenel, 1980), mas principalmente, são resultado de maiores pressões de compactação aplicadas ao pó. Neste sentido, têm surgido tecnologias que permitem a obtenção de peças compactadas a níveis de densidade mais altos, como é o caso da compactação a morno (German, 1998). Este material mais denso após a compactação, em geral, terá a tendência de levar a produtos sinterizados mais densos. O segundo caso consiste em atuar no sentido de permitir que a sinterização do material evolua mais, permitindo um maior transporte de massa, o que é obtido, por exemplo, pelo aumento do tempo e da temperatura de sinterização (Thümler e Oberacker, 1983). Uma terceira alternativa utilizada para obtenção de níveis mais baixos de porosidade em componentes sinterizados é a utilização da fase líquida durante a sinterização que, estando presente de forma transiente ou permanente, leva a uma maior densificação do material (German, 1985).

A diminuição da porosidade de componentes sinterizados pode ser obtida também pela adição de etapas ao processo básico de produção. Neste sentido as etapas mais utilizadas são:

- **recompactação:** consiste de uma nova compactação aplicada ao material após a sinterização. Pode ser seguida de uma nova sinterização ou não. É uma etapa utilizada com o intuito de obter densificação do material e é tanto mais eficiente quanto mais se permite que o material escoe dentro da matriz (Collares, 1999).

- forjamento a quente ou a frio: é a deformação aplicada ao material acima ou abaixo da temperatura de recristalização com o objetivo de, além da densificação, atuar no sentido de obtenção da forma desejada (Kuhn e Ferguson, 1990; Kuhn & Downey, 1973).
- infiltração: é uma operação executada com o objetivo de infiltrar os poros com um líquido, o qual uma vez dentro destes se solidifica. A infiltração pode ser aplicada com o objetivo primário de selamento dos poros, e neste caso o material infiltrante pode ser uma resina que não atua estruturalmente. A infiltração também pode ser feita com objetivo estrutural e, neste caso, ela é conduzida durante a sinterização. Quando este é o caso, o material infiltrante, com temperatura de fusão inferior à temperatura de sinterização, é colocado sobre o material a ser infiltrado e com o aquecimento se funde e é "sugado" para dentro dos poros por capilaridade. Parte deste material pode entrar em solução sólida no material de base e endurecer a matriz, aumentando a resistência mecânica do componente na região infiltrada (Thümler e Oberacker, 1993, Lenel, 1980).
- Jateamento com granalha: Neste processo tensões residuais compressivas são introduzidas na superfície do componente através do seu jateamento com pequenas esferas de aço. Isto permite a obtenção de uma densificação superficial dos componentes, que se mostra particularmente benéfico em peças solicitadas à fadiga (Jones, 1998, 1997)
- calibração: é uma pequena deformação plástica aplicada ao componente, após a sinterização, com o objetivo de propiciar um ajuste das tolerâncias do componente. Usualmente apresenta pouco ou nenhum efeito sobre a densidade de forma global. Entretanto, esporadicamente pode ser obtida alguma densificação localizada ou na superfície dos componentes (Lenel, 1980).

Além de operações adicionais ao processo tradicional da metalurgia do pó, existem rotas alternativas que podem ser aplicadas à obtenção de componentes sinterizados que propiciam a fabricação de peças de maior densidade, tais como:

- compactação isostática a quente: processo que combina a aplicação de pressão isostática e temperaturas elevadas, de tal forma que durante a sinterização o material escoava viscoplasticamente e, com isso, os poros são fechados com maior eficiência (German, 1998).
- moldagem de pós por injeção (MPI): neste processo se associa a moldabilidade dos polímeros às vantagens da metalurgia do pó tradicional. Para que os materiais possam ser injetados a massa de injeção deve ser preparada misturando-se pós com tamanho de partícula na faixa de aproximadamente 2 a 15  $\mu\text{m}$  com um sistema de ligantes que deve atuar como veículo para a injeção. Em virtude do uso destes pós mais finos do que aqueles utilizados nas rotas tradicionais da metalurgia do pó, a densidade resultante dos sinterizados é maior. Esta maior densidade, no caso da MPI, decorre principalmente da maior taxa de aproximação relativa entre os centros de partículas, ocorrida em função da difusão volumétrica durante a sinterização, e da maior difusão em contorno de grão, resultado do menor tamanho de partículas para os pós utilizados (German e Bose, 1997).

De fato, os esforços com o objetivo de diminuir a porosidade dos materiais sinterizados são efetivos para o incremento das propriedades mecânicas; no entanto, deve-se observar que cada "ferramenta de densificação" tem aplicações, efeitos, vantagens e limitações específicas. Nota-se que cada alternativa de processo demanda diferentes tipos de componentes de custos que apresentarão resultados significativamente diferentes no preço final do produto, criando, desta forma, uma estratificação de mercado que, de forma simplificada, segundo German (1998), pode ser esquematicamente representada como na figura 3.4.

Conforme citado anteriormente, a presença de poros reduz efetivamente a seção resistente do material, afetando negativamente as suas propriedades mecânicas, quais sejam, dureza, resistência à ruptura transversal, tensão de escoamento, tensão de resistência, alongamento, ductilidade, redução de área, módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson. Além disso, a forma, o espaçamento, o tamanho e a localização dos poros influenciam fortemente o comportamento mecânico dos materiais sinterizados.

Com o crescimento do uso de materiais sinterizados em aplicações sujeitas a solicitações cíclicas e dinâmicas, tem havido grande preocupação, com o comportamento em fadiga destes materiais (Esper e Sonsino, 1994), bem como a outras propriedades (resistência ao impacto, tenacidade à fratura), que são muito influenciadas pela densidade e pelas características morfológico-dimensionais dos pós.

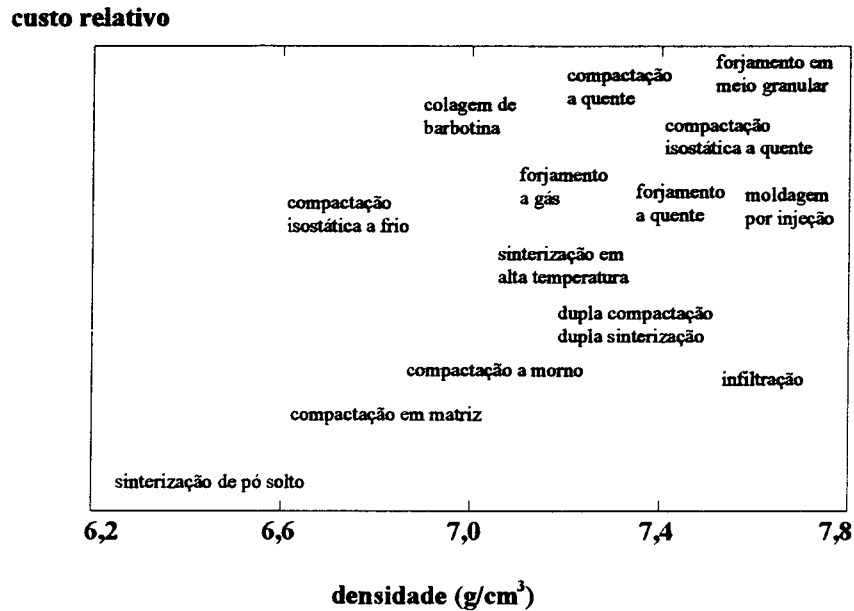


Figura 3.4 - Representação esquemática do custo em função da densidade obtida pelos diferentes técnicas da metalurgia do pó.

Em relação às propriedades estáticas, Ledoux e Prioul (1988), compararam dois tipos de pós de ferro fabricados pela Höganäs (figura 3.5), quanto às respostas em tensão de escoamento e de resistência em função da densidade. Costatou-se que a resistência mecânica do material é fortemente dependente, além da porosidade total (figura 3.6a), também da porosidade interconectada (figura 3.6b) e das variações das características dos poros oriundas dos tipos diferentes de pós.

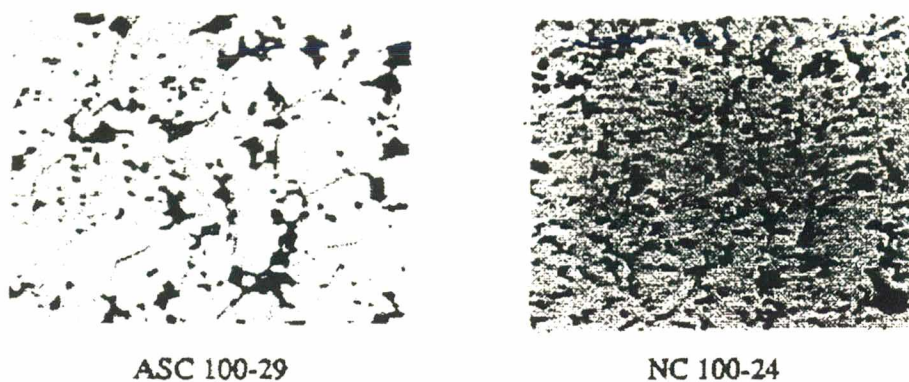
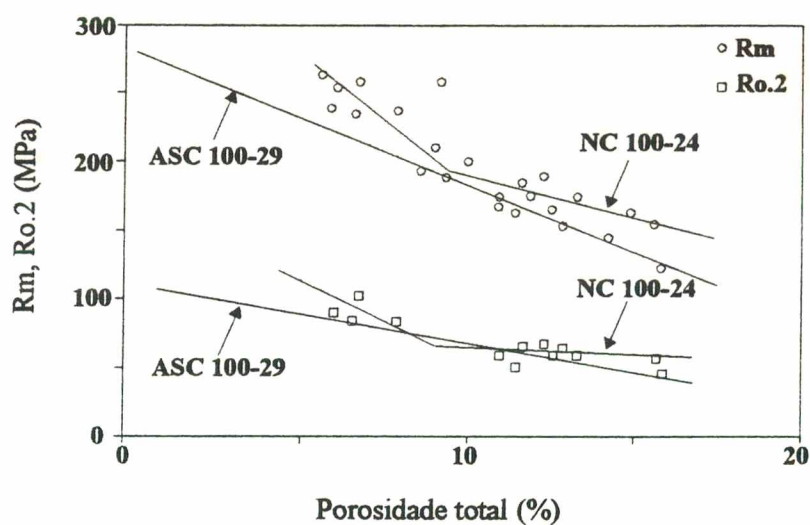


Figura 3.5 - ASC 100.29 atomizado e NC 100.24 reduzido; ambos com 12% poros.



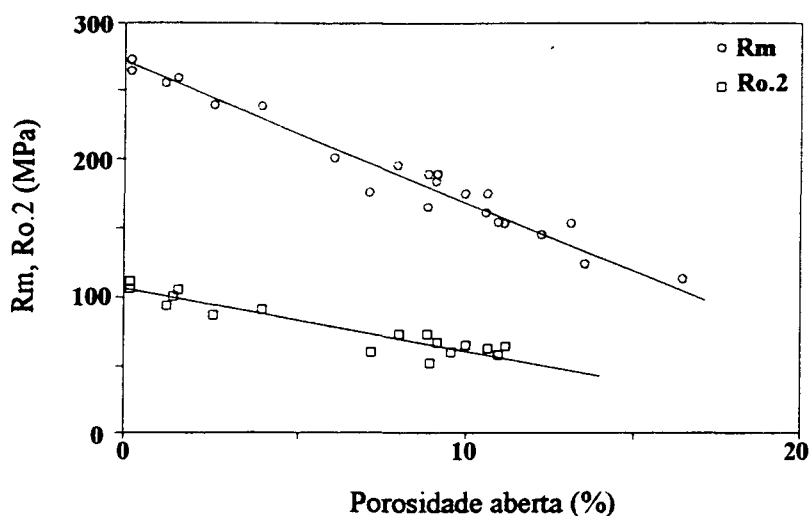
(a)

$$R_m^{NC} = 265(1 - 3.6P_0)$$

$$R_m^{ASC} = 276(1 - 3.8P_0)$$

$$R_{0.2}^{NC} = 103(1 - 4.1P_0)$$

$$R_{0.2}^{ASC} = 108(1 - 4.1P_0)$$



(b)

Figura 3.6 - Influência da porosidade na tensão de escoamento e na resistência à tração.  $R_m$  = Resistência máxima;  $R_{0,2}$  = Tensão de escoamento.

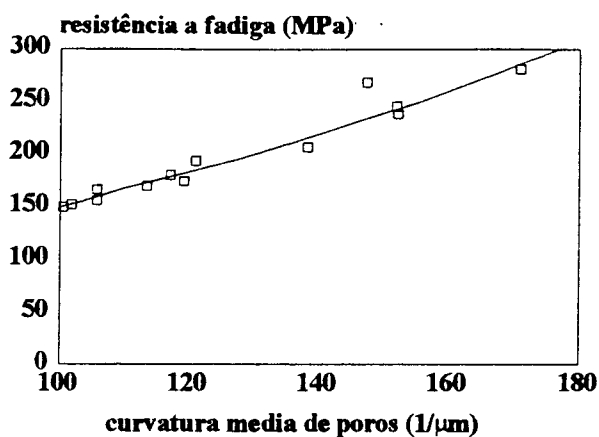
Além das propriedades estáticas, a forma, o tamanho, a distribuição de tamanho e o livre caminho médio entre poros são reportados como fortemente influentes nas propriedades dinâmicas de materiais sinterizados. Christian e German (1995) através de delineamento experimental isolaram os efeitos do comprimento característico, curvatura e distância média de separação dos poros, processando pós com diferentes distribuições de tamanho de partículas e medindo propriedades para as diferentes misturas. Estes efeitos refletiram o papel dos poros no sentido de serem concentradores de tensão. Neste trabalho os autores ajustaram um modelo relacionando a resistência à fadiga ( $\sigma_f$ ) de um aço sinterizado (MPIF FC-0208) com a fração volumétrica de poros ( $V_p$ ), distância média entre os poros ( $\beta$ ), curvatura dos poros ( $H$ ) e de uma constante ( $g$ ) (que para o material foi calculada como sendo 22,65 MPa quando  $H$  e  $\beta$  são dados em  $\mu m$ ) para valores de porosidade não menores que 8%, conforme segue:

$$\sigma_f = \left[ \frac{H^4}{V_p^2 \beta} \right]^{\frac{1}{6}} \quad (3.2)$$

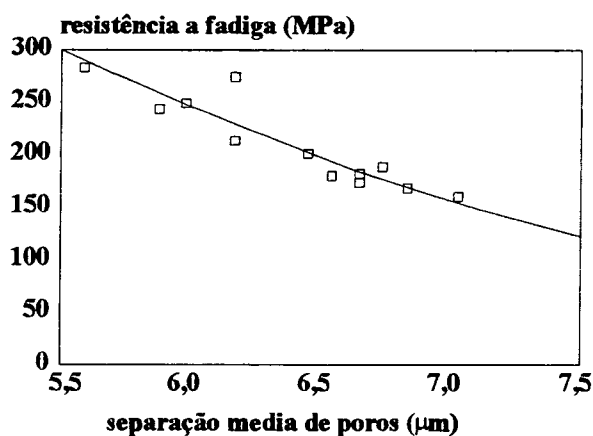
A partir do modelo proposto, e analisando-se as figuras 3.7, a, b e c, verifica-se que os autores obtiveram resultados de resistência à fadiga de aproximadamente 150 a 300 MPa para os valores de curvatura de poros variando entre 100  $\mu m$  e 180  $\mu m$ . Ao mesmo tempo, verificaram que a separação média dos poros provocou uma queda de 300 MPa para aproximadamente

160 MPa na resistência à fadiga à medida que a distância entre os poros aumentou de 5,5  $\mu\text{m}$  para aproximadamente 7,2  $\mu\text{m}$ . Verifica-se ainda que o aumento do tamanho médio dos poros de 13  $\mu\text{m}$  para 21  $\mu\text{m}$  provocou uma redução da resistência à fadiga de aproximadamente 300 MPa para 150 MPa. Do que se conclui que poros de maior curvatura e menores são menos prejudiciais ao comportamento mecânico dos materiais. Por outro lado, à medida que a distância entre os poros diminui, o efeito de redução das propriedades mecânicas se acentua.

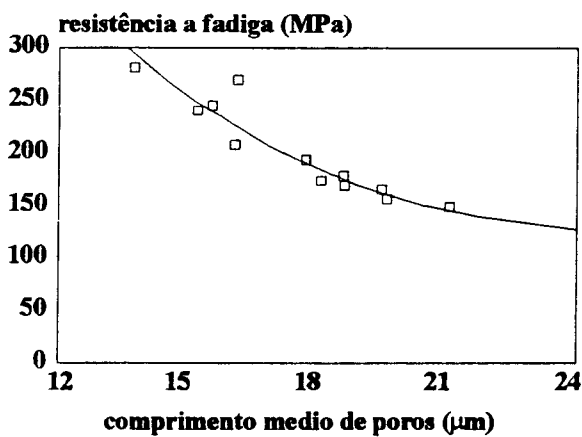
O controle da forma, distância e distribuição de tamanho dos poros pode ser feito de diversas maneiras. Nos processos da metalurgia do pó as características da porosidade podem ser controladas através da variação das características dos pós (forma, tamanho e distribuição de tamanho das partículas) (Smith e Midha, 1998), atuando-se nas variáveis da sinterização (tempo, temperatura) (German, 1998, Thümler e Oberacker, 1993) ou na rota de processamento, através da combinação de ciclos de compactação e sinterização (Collares, 1999; Lindstedt et al., 1995).



(a)



(b)



(c)

Figura 3.7 - Efeito da curvatura, separação e tamanho dos poros na resistência à fadiga de um aço sinterizado MPIC FC 0208.



---

---

## Capítulo 4

# DEFORMAÇÃO PLÁSTICA DOS MATERIAIS: O MODELAMENTO MATEMÁTICO

---

---

A necessidade de uso dos componentes sinterizados em aplicações onde geometria complexa e solicitações mais críticas são uma constante, tende a produzir uma situação propícia à deformação plástica dos componentes. Estas situações devem ser possíveis de serem previstas durante o projeto dos componentes, que, em regra, para peças com geometria complexa, é feito via método dos elementos finitos. Para que isto seja possível, deve-se dispor de modelos matemáticos que, implementados em programas de elementos finitos, descrevam o comportamento mecânico do material quando submetido a solicitações mecânicas.

Com o objetivo de descrever o comportamento da deformação de um material dúctil quando submetido a tração uniaxial, foram propostas curvas idealizadas que relacionam tensões e deformações (Figura 4.1) (Chen e Han, 1988; Hill, 1967; Owen e Hinton, 1980). Pode-se observar aí que todas as propostas, de uma forma mais ou menos próximas da realidade, cumprem três requisitos básicos:

1. a descrição do comportamento elástico do material;

2. a definição do ponto de início de escoamento;
3. a previsão do comportamento plástico do material.

A escolha de uma das formas propostas se baseia na maior ou menor relevância dos fenômenos em curso durante a deformação, da precisão necessária e dos recursos disponíveis à solução do problema.

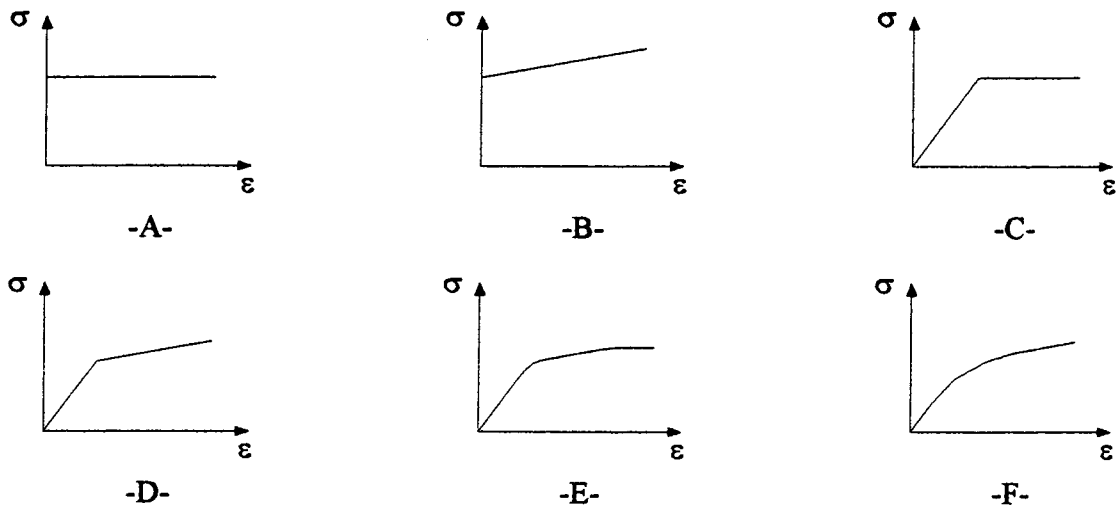
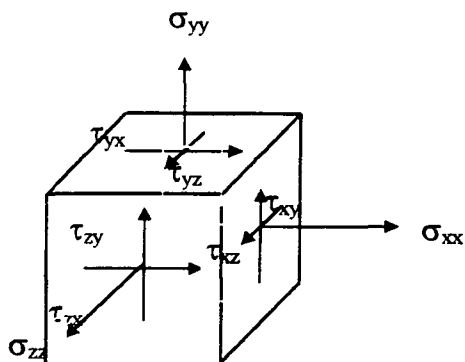


Figura 4.1 - Comportamento idealizado de curvas tensão versus deformação uniaxial para materiais dúcteis: A - Material rígido plástico ideal; B - Material rígido com encruamento linear; C - Material elasto-plástico ideal; D - Material elasto-plástico com encruamento linear; E - Material elasto-plástico com encruamento potencial; F - Material segundo o modelo de Ramberg-Osgood.

Em geral, os estados de tensão atuantes nos componentes estruturais são mais complexos que os uniaxiais, de forma que existem tensões em várias direções. Genericamente, um elemento de volume  $dV$ , representado em coordenadas eulerianas, apresenta um estado de tensões (Figura 4.2), que pode ser representado matricialmente (tensorialmente) da seguinte forma (Dym e Shames, 1973; Kachanov, 1971; Malvern, 1969):

$$T = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

Este tensor, definindo o estado de tensões em um ponto e tempo de referência onde o fenômeno ocorre, é conhecido como tensor tensão de Cauchy.



Tensor Tensão de  
Cauchy  
(coordenadas eulerianas)

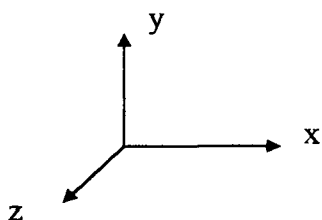


Figura 4.2 - Estado de tensões genérico para um elemento de volume  $dV$  em coordenadas eulerianas.

Este estado de tensões pode ser decomposto em duas componentes (deviatorica e esférica) (Figura 4.3), que visualizado na forma matricial nos leva a:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x - p & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - p & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

$$p = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}$$

A equação 4.2, pode ser representada na forma indicial, em um sistema de coordenadas ortonormal, da seguinte forma:

$$\sigma_{ij} = s_{ij} + p\delta_{ii} \quad \text{onde } s_{ij} = \sigma_{ij} - p\delta_{ii} \quad (4.3)$$

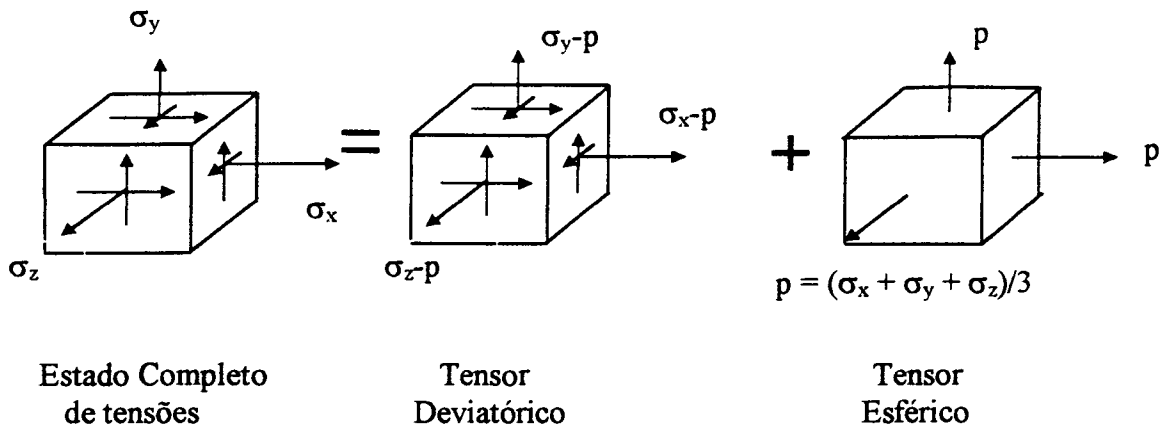


Figura 4.3 - Separação do tensor tensão de Cauchy em tensor deviatórico e esférico de tensões.

Um estado de tensões qualquer pode sempre ser representado em relação a um único conjunto de eixos coordenados sobre o qual as projeções das tensões cisalhantes é zero e somente as tensões normais são diferentes de zero. Neste caso, as tensões normais são chamadas de tensões principais e estão direcionadas segundo as direções principais (Malvern, 1969). Na figura 4.4 estão mostrados na forma matricial o tensor tensão de Cauchy e o tensor tensão deviatórico quando orientados segundo as direções principais. Por convenção as direções principais são numeradas de 1 a 3 e as tensões nas direções principais são em ordem decrescente de intensidade  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  e  $\sigma_3$  (tensões de Cauchy) e  $s_1$ ,  $s_2$  e  $s_3$  (tensões deviatóricas) nas direções 1, 2 e 3 respectivamente.

$$\begin{matrix}
 \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} & & \begin{bmatrix} s_1 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 \end{bmatrix} \\
 \text{- A -} & & \text{- B -}
 \end{matrix}$$

Figura 4.4 - Tensor tensão de Cauchy (A) e tensor tensão deviatórico (B) orientados segundo as direções principais.

A obtenção das tensões e direções principais é feita através da resolução do problema de autovalores e autovetores de um tensor conforme posto a seguir:

$$\begin{vmatrix} \sigma_{11} - \lambda & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \lambda & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (4.4)$$

A expansão do determinante anteriormente colocado nos leva a uma expressão da seguinte forma (Kachanov, 1971):

$$-\lambda^3 + I_1\lambda^2 - I_2\lambda + I_3 = 0; \quad (4.5)$$

onde,  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$  são os chamados primeiro, segundo e terceiro invariantes respectivamente; quando calculados em relação às direções principais são:

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

$$I_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3 \quad (4.6)$$

$$I_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3$$

O mesmo procedimento pode ser repetido para o tensor tensão deviatórico. Neste caso, os invariantes são chamados de  $J_1$ ,  $J_2$  e  $J_3$ , e são da forma (Chen e Han, 1988):

$$J_1 = 0$$

$$J_2 = s_1s_2 + s_1s_3 + s_2s_3 \quad (4.7)$$

$$J_3 = s_1s_2s_3$$

#### 4.1 - Critérios de escoamento para materiais sob solicitações não uniaxiais

As teorias que descrevem a deformação plástica começam a diferir a partir do modelo que descreve o início do escoamento, ou seja, do critério que define o limite elástico de um material sob um estado de tensões combinadas, já que, para um estado uniaxial de tensões, o limite elástico é definido pela tensão de início de escoamento do material à tração, cisalhamento ou flexão, conforme o tipo de esforço exercido. Conforme Chen e Han (1988), em um estado genérico, a tensão de início de escoamento é função do estado de tensões a que o material é submetido. Assim, a condição para o início de escoamento pode ser expressa como:

$$G(\sigma_{ij}, k_1, k_2, \dots) = 0 \quad (4.9)$$

onde:  $\sigma_{ij}$  representa o tensor tensão agindo sobre o elemento de volume em questão;  $k_1, k_2, \dots$  são variáveis internas ou de estado que descrevem a evolução da superfície de escoamento com a deformação plástica. Estas variáveis ou constantes estão, em geral, associadas a parâmetros experimentais.

Conforme visto anteriormente, pode-se obter funções tensoriais de valor escalar que sirvam como parâmetro para avaliar o estado de tensões que atua no elemento de volume em questão. Estas funções podem, por exemplo, ser os invariantes do tensor tensão e, neste caso, um critério de escoamento pode ser escrito em função dos invariantes do tensor tensão na seguinte forma:

$$G(I_1, I_2, I_3, J_2, J_3, k_1, k_2, \dots) = 0. \quad (4.10)$$

As teorias usuais da plasticidade geralmente consideram que o material modelado seja 100% denso. Nota-se experimentalmente que para estes materiais a variação da densidade, sob condições de carregamento hidrostático, é não relevante. Esta observação permite que o modelo matemático seja simplificado através da hipótese de deformação plástica isocórica. Esta possibilidade, conforme Hill (1967), permite que o critério de escoamento seja reduzido a:

$$G(J_2, J_3, k_1, k_2, \dots) = 0. \quad (4.11)$$

Historicamente, o primeiro critério de escoamento para um estado de tensões combinado em metais foi proposto por Tresca, em 1864 (Dieter, 1967), que segundo o qual o escoamento ocorreria quando o máxima tensão cisalhante em um dado ponto alcançasse o valor de uma constante  $k$ , ou seja:

$$\frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{2} = k; \quad (4.12)$$

onde  $\sigma_3$  e  $\sigma_1$  são a mínima e a máxima tensões principais, respectivamente, e  $k$  é uma constante do material e pode ser determinada experimentalmente como  $k = \frac{\sigma_{esc}}{2}$ .

Caracterizando que o início de escoamento ocorrerá quando a diferença entre a maior e a menor tensão principal alcançar a metade do valor da tensão de escoamento, e assumindo que o

escoamento ocorra por cisalhamento à tensão de escoamento do material sob este tipo de sollicitação. Este critério tem como desvantagem o fato de não levar em conta a influência da tensão principal intermediária à máxima e mínima e por não prever falha sob carregamento hidrostático.

Em 1913, von Mises propôs matematicamente um novo critério (Dieter, 1967) que posteriormente foi associado a grandezas físicas específicas. Este critério foi proposto em função do segundo invariante do tensor tensão deviatórico levando em conta a tensão anteriormente desprezada pelo critério de Tresca. Este critério é posto conforme segue:

$$G(J_2, k) = J_2 - k^2 = 0, \quad (4.13)$$

ou em termos das tensões principais:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 = 6k^2 \quad (4.14)$$

Fazendo-se a analogia com o ensaio de tração simples, chega-se à conclusão que o valor de  $k$  é  $\frac{\sigma_{esc}}{\sqrt{3}}$ . Este critério ainda se baseia na incompressibilidade do material, pois utiliza como função de escoamento o segundo invariante do tensor tensão deviatórico. Posteriormente ao seu postulado, comprovou-se que esta função correspondia a grandezas físicas, tais como máxima energia de distorção ou máxima tensão cisalhante octaédrica.

#### 4.2 - Critério de escoamento para materiais dependentes da pressão

De forma geral observa-se que as propriedades e o comportamento mecânico dos materiais independem das tensões hidrostáticas, e nestes casos, o critério de Tresca e de von Mises são perfeitamente aplicáveis. Por outro lado, existem materiais e situações para as quais esta consideração não pode ser feita; é o caso das rochas, dos solos e dos materiais sinterizados porosos, nos quais a deformação plástica é acompanhada por variação de volume, ou ainda, quando a deformação plástica é tal que gere a nucleação de poros em quantidade suficiente para que estes afetem a evolução da deformação ou até mesmo ocasionem uma falha. Estes são os casos de grandes deformações e de deformações cíclicas. Nestes, a influência das tensões hidrostáticas é de extrema importância e, conseqüentemente, a abordagem do problema deve

considerar a aplicação de critérios de escoamento (ou falha) dependentes das tensões hidrostáticas. De forma geral, estes critérios podem ser expressos como segue:

$$G(I_1, J_2, J_3, k_1, k_2, \dots) = 0. \quad (4.15)$$

Em torno de 1900, surgiu o critério conhecido como "critério de Mohr-Coulomb", que foi considerado uma generalização do critério de Tresca. O critério de Mohr-Coulomb assume que a máxima tensão cisalhante é a única a influenciar o início de escoamento. Entretanto, enquanto Tresca considera que a máxima tensão cisalhante é constante, o critério de Mohr considera que esta seja limitada por um plano que seja função das tensões normais,  $\sigma$ , atuantes no material.

Datado de 1952, o critério Drucker-Prager é uma simples modificação do critério de von Mises. Neste caso, é introduzida a influência das tensões hidrostáticas através da adição de um novo termo ao critério de von Mises, de tal forma que este se torna:

$$G(I_1, J_2, k) = \alpha I_1 + (J_2)^{1/2} - k = 0. \quad (4.16)$$

onde  $\alpha$  e  $k$  são constantes do material. Quando  $\alpha$  é zero, o critério se reduz ao critério de von Mises. Assumindo que o material seja isotrópico, deve-se esperar que a tensão de escoamento dos materiais sinterizados seja similar sob tração ou compressão hidrostática. Sendo assim, o critério de escoamento deve ser uma função par de  $I_1$ , o que não é satisfeito por este critério (Kuhn e Ferguson, 1990).

O critério de escoamento proposto por Green (1972), satisfaz esta condição. Este critério se baseia na análise elasto-plástica de um elemento de volume contendo um poro esférico e é posto da seguinte maneira:

$$G(J_2, I_1^2, \beta, \delta, \sigma_0) = J_2 + \beta I_1^2 - \delta \sigma_0^2 = 0. \quad (4.17)$$

onde  $\beta$  e  $\delta$  são funções da porosidade e  $\sigma_0$  é a tensão de escoamento do material 100% denso. O critério de Green, quando escrito em função da densidade relativa do material assume a seguinte forma:

$$3J_2 + \frac{1}{4\{\ln(1-\rho)\}^2} I_1^2 - \frac{3[1-(1-\rho)^{1/3}]^2}{3-2(1-\rho)^{1/4}} \sigma_0^2 = 0 \quad (4.18)$$



Segundo Sutradhar et al. (1994, 1995), Tabata e Masaki propuseram o seguinte critério de escoamento para materiais porosos:

$$G(J_2, I_1, \beta, \delta, \sigma_0) = \sqrt{3J_2} \pm \eta I_1 - \rho^k \sigma_0 = 0, \quad (4.19)$$

onde,  $\rho$  é a densidade relativa,  $\sigma_0$  é a tensão de escoamento do material sem poros,  $\eta$  e  $k$  são funções da densidade relativa do material ( $\rho$ ) determinadas experimentalmente por ensaios de compressão simples. Quando  $\rho \rightarrow 1$ , este critério se reduz ao de von Mises.

Outro critério de escoamento foi proposto por Shima e Oyane (1976), e pode ser escrito como segue:

$$G(J_2, I_1, \rho, \sigma_0) = 3J_2 + \frac{2.49(1-\rho)^{0.514}}{9\rho^5} I_1^2 - \rho^5 \sigma_0^2 = 0, \quad (4.20)$$

Khun e Downey (1990, 1971) propuseram um critério baseado em resultados experimentais:

$$G(J_2, I_1, \rho, \sigma_0) = (2 + \rho^2) J_2 + \frac{(1 - \rho^2)}{3} I_1^2 - \sigma_0^2 = 0 \quad (4.21).$$

A influência das tensões hidrostáticas está incluída no termo quadrático de  $I_1$ , satisfazendo o requisito do critério de escoamento ser uma função par das tensões hidrostáticas. Uma vez que o segundo termo deste critério de escoamento inclui o fator  $(1 - \rho^2)$ , o efeito de  $I_1$  desaparece quando  $\rho \rightarrow 1$ , ou seja, quando a porosidade tende a zero.

Dentre os critérios de escoamento para materiais considerando a presença de poros, o de Gurson é o que mais tem sido implementado em programas comerciais e, conseqüentemente, é o mais utilizado na simulação da deformação plástica de materiais porosos. Tal critério, conforme proposto pelo autor (Gurson, 1977, 1975), é expresso da seguinte forma:

$$G(p, q, \sigma_0, f) = \left( \frac{q}{\sigma_0} \right)^2 + 2f \cosh \left( -\frac{3p}{2\sigma_0} \right) - (1 + f^2) = 0, \quad (4.22)$$

onde  $p = \frac{1}{3}I_1$ ,  $q = \sqrt{3J_2}$ ,  $\sigma_0$  é a tensão de escoamento do material 100% denso e  $f$  é a porosidade do material.

Posteriormente ao postulado deste critério, Vigo Tvergaard (1981), em função da necessidade de um melhor ajuste do critério de Gurson a dados experimentais, introduziu a seguinte modificação:

$$G(p, q, \sigma_0, f) = \left(\frac{q}{\sigma_0}\right)^2 + 2q_1 f \cosh\left(-\frac{3q_2 p}{2\sigma_0}\right) - (1 + q_3 f^2) = 0, \quad (4.23)$$

onde  $q_1$ ,  $q_2$  e  $q_3$  são parâmetros de material, e conforme o mesmo autor, estes parâmetros devem ser:  $q_1 = 1,5$ ,  $q_2 = 1,0$  e  $q_3 = 2,25$ .

#### 4.3 - Início do escoamento previsto pelos critérios da literatura

A análise da evolução da superfície de escoamento em função da variação da densidade no espaço  $q$  versus  $p$  é uma importante ferramenta de visualização que permite avaliar, para diferentes estados de tensão, qual a tensão equivalente para início do escoamento do material quando submetido àquele estado particular de sollicitação. Na figura 4.5, as linhas representam o valor do par  $(q, p)$  para o qual o material esco a uma dada densidade para alguns dos critérios postos na literatura. Para isto foi considerada uma tensão de escoamento unitária. Verifica-se na figura 4.5 que a tensão equivalente de escoamento do material para todos os critérios apresentou nenhuma (a, b e c) ou pouca (d) sensibilidade ao aumento da pressão quando se considerou um material sem poros. Nota-se ainda, para todos os casos, que a diminuição da densidade provoca um aumento da sensibilidade da tensão de escoamento do material à pressão assim como de forma geral uma diminuição da tensão equivalente de escoamento, o que não é verificado somente no caso do critério de Kuhn & Downey para níveis de pressão relativamente baixos. Deve-se ressaltar que este comportamento se mostra como uma incoerência prática significando que um material com menor densidade, quando submetido a um estado de tensões com baixo nível de sollicitação hidrostática demandaria um maior nível de tensão para o início do escoamento.

Todas estas teorias são exploradas, na literatura, de forma mais ou menos abrangente. Cada uma delas é em algum caso defendida como mais efetiva no sentido de modelar a deformação plástica de metais porosos sinterizados, concordando em maior ou menor extensão com experimentos realizados (Doraivelu et al., 1984; Kuhn, e Downey, 1971; Duszczyk, 1991; Jha e Kumar, 1994; Lee e Kuhn, 1973; Park, 1995; Moritoki, 1993). Esta é a confirmação de que diferentes teorias da plasticidade de materiais porosos descrevem de forma diferente o comportamento dos materiais e tendem a se ajustar melhor a conjuntos específicos de dados experimentais obtidos para diferentes materiais e condições de processamento.

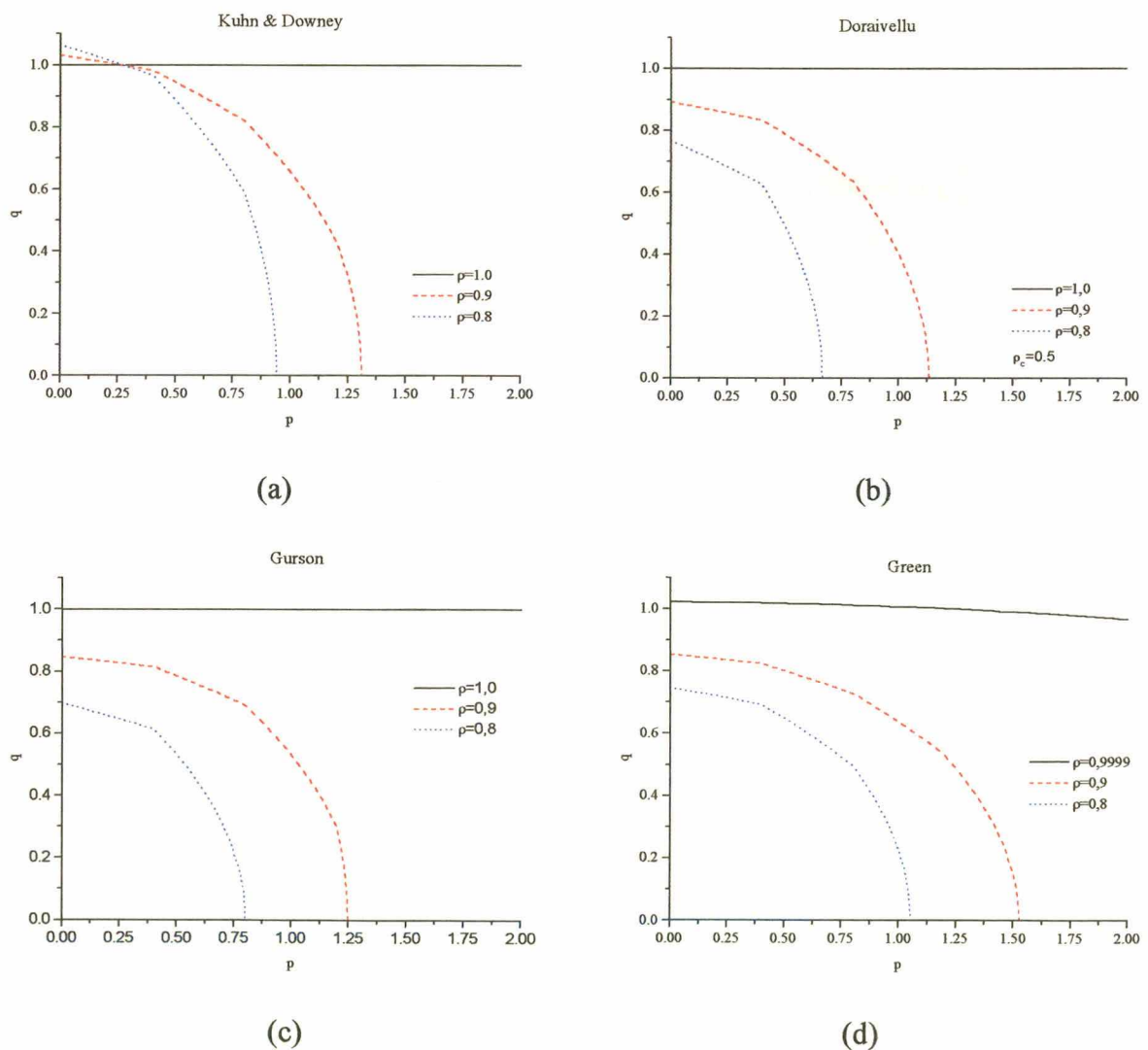


Figura 4.5 - Condições para escoamento previstas por quatro diferentes teorias propostas na literatura.

#### 4.4 - Relação tensão deformação elasto-plástica

Após o início do escoamento, o comportamento do material é parcialmente elástico e parcialmente plástico (Figura 4.6) de tal forma que, durante um incremento de tensão, as variações de deformação podem ser divididas em uma componente elástica, que pode ser obtida pela relação constitutiva elástica (ex. Lei de Hooke), e outra plástica:

$$d\varepsilon_{ij} = (d\varepsilon_{ij})_e + (d\varepsilon_{ij})_p. \quad (4.24)$$

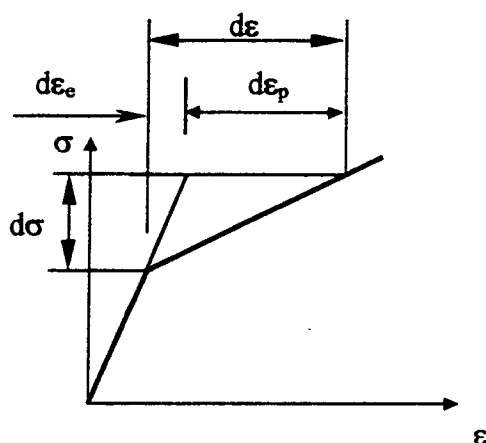


Figura 4.6 – Comportamento elásto-plástico com encruamento linear para o caso unidimensional.

Com o objetivo de obter uma relação entre a componente de deformação plástica e o incremento de tensão, uma consideração adicional sobre o comportamento do material deve ser feita. É assumido, então, que o incremento de tensão plástica é proporcional ao gradiente de uma quantidade chamada de potencial plástico  $G$ ; assim,

$$(d\varepsilon_{ij})_p = d\lambda \frac{\partial G}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (4.25)$$

onde  $d\lambda$  é um escalar chamado de multiplicador plástico. A equação anterior é chamada de lei de escoamento, uma vez que governa o fluxo do escoamento do material após o seu início (Chen e Han, 1988).

A função  $G$  pode ser qualquer função dos invariantes. Entretanto, quando o critério de escoamento,  $F$ , é utilizado como função de potencial plástico, temos o que se chama de teoria

associada de plasticidade (Lubarda et al., 1996). Desta forma, a equação anterior fica assim formulada:

$$(d\varepsilon_{ij})_p = d\lambda \frac{\partial G}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (4.26)$$

e é chamada de condição de normalidade, uma vez que representa um vetor dirigido normalmente à superfície de escoamento no ponto considerado.

Posta esta condição, é possível a obtenção de uma teoria da plasticidade completa, que considere o comportamento do material antes do início de escoamento (regime elástico), que preveja o estado de tensões que leva ao escoamento e que finalmente descreva o comportamento do material após o início do escoamento.

#### 4.5 - Comentários finais e objetivos do trabalho

A literatura pesquisada é vasta em termos de trabalhos referentes à plasticidade de materiais porosos, referindo-se desde o processamento até os modelos matemáticos. No que se refere a modelos, são propostos diversos critérios de escoamento oriundos de experimentação ou de derivação matemática que, quando possuem alguma possibilidade de ajuste a diferentes tipos de comportamento de materiais esta é um tanto restrita.

Quanto à implementação das teorias da plasticidade de metais porosos, muito pouco foi publicado. A maior parte dos trabalhos conhecidos, referem-se ao critério de Gurson e utilizam a sua implementação em programas comerciais, tais como ABAQUS e WARP. A literatura é abundante no que se refere à comparação de dados experimentais e o resultado previsto para o início do escoamento, entretanto, o comportamento após o início do escoamento, considerando o encruamento da matriz do material e a evolução da porosidade com a deformação plástica, em geral, não é abordado.

Diante das lacunas encontradas na literatura, o presente trabalho tem por objetivo:

- propor um novo critério de escoamento para materiais porosos que seja flexível e possa ser ajustado a materiais com diferentes comportamentos, levando em conta as variações das propriedades em função das variações das

características microestruturais, tais como forma, tamanho médio e distribuição de tamanho de poros.

- Obter um algoritmo para a implementação do critério proposto como um modelo de material do usuário que permita que este seja incorporado a um software comercial;
- Implementar o modelo proposto considerando o comportamento após o início do escoamento (encruamento da matriz e evolução da porosidade);
- Implementar modelos propostos na literatura utilizando o mesmo algoritmo considerando o comportamento após o início do escoamento;
- Comparar os resultados obtidos para o critério proposto e os critérios propostos pela literatura.

---

---

## Capítulo 5

# PROPOSTA DE CRITÉRIO DE ESCOAMENTO

---

---

Nesta seção será proposto um novo critério de escoamento para metais porosos.

Da mesma forma que o critério de von Mises, este se baseia no segundo invariante do tensor tensão, que, neste caso, é chamado de tensor tensão "semi-deviatórico". Este termo, semi-deviatórico, tem o objetivo de expressar a existência da influência da componente esférica do tensor tensão de Cauchy no escoamento do material. Esta influência é incluída na formulação pela introdução da função  $f(\rho)$ , onde  $\rho$  representa a densidade relativa do material.

Considere-se o tensor tensão de Cauchy como segue:

$$T = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}. \quad (5.1)$$

Sugere-se definir o tensor tensão semi-deviatórico como

$$T' = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} - f(\rho) \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix}, \quad (5.2)$$

onde  $p = \frac{1}{3}\sigma_{ii}$ , assumindo  $P = f(\rho)p$ , com  $f(\rho)$  sendo uma função da densidade relativa do material. Este tensor deve apresentar um comportamento tal que quando a densidade do material tende à densidade teórica, a influência da tensão hidrostática desaparece, o que significa que o tensor tensão semi-deviatórico deve tender para o tensor tensão deviatórico quando a densidade relativa do material tender a 1. Isto estabelece o limite superior para a função  $f(\rho)$ . O limite inferior deve representar a máxima influência da tensão hidrostática no início do escoamento do material e deve ocorrer quando o material não tiver mais capacidade de suportar carregamento, ou seja, o material estará apresentando variação de volume por menor que seja a pressão aplicada sobre ele. Para metais sinterizados, uma estimativa para esta grandeza poderia ser a densidade do pó batido. Esta "densidade limite", onde o material não mais apresenta a propriedade de suportar carregamento, define a densidade relativa crítica ( $\rho_c$ ) ou simplesmente densidade crítica, para maior simplicidade.

O problema de autovalores para o tensor  $T'$  pode ser expresso como

$$\begin{vmatrix} \sigma_{11} - P - \lambda & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - P - \lambda & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - P - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (5.3)$$

Que tem como invariantes:

$$\begin{aligned} J'_1 &= (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} - 3P) \\ J'_2 &= \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{11}\sigma_{33} + \sigma_{22}\sigma_{33} - \sigma_{12}^2 - \sigma_{13}^2 - \sigma_{23}^2 - 2P(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) + 3P^2 \\ J'_3 &= \sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33} - P(\sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{11}\sigma_{33} + \sigma_{22}\sigma_{33}) + P^2(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) + P(\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2) \\ &\quad - \sigma_{13}^2\sigma_{12} - \sigma_{12}^2\sigma_{33} - \sigma_{23}^2\sigma_{11} \end{aligned} \quad (5.4)$$

Estes invariantes são, por analogia, chamados de "invariantes do tensor tensão semi-deviatórico". Agora, se o segundo invariante do tensor tensão semi-deviatórico,  $J'_2$ , for rearranjado, pode ser escrito como:

$$J'_2 = I_2 - 2PI_1 + 3P^2 \quad (5.5)$$



Entretanto, conforme definido anteriormente,  $P = f(\rho)p$  e  $p = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3} = \frac{I_1}{3}$ , que quando substituídos em (5.5) nos fornecem:

$$J'_2 = I_2 - \frac{2}{3}f(\rho)I_1I_1 + \frac{3}{9}f^2(\rho)I_1^2 \quad (5.6)$$

que pode ser rearranjada para:

$$J'_2 = I_2 + \frac{I_1^2}{3}(f^2(\rho) - 2f(\rho)). \quad (5.7)$$

Para o caso em que  $f(\rho)$  tende a 1 (material 100% denso), a equação (5.7) tende ao segundo invariante do tensor tensão deviatórico, que é relacionado ao tensor tensão de Cauchy pela expressão que segue:

$$J_2 = I_2 - \frac{I_1^2}{3} \quad (5.8)$$

Isolando  $I_2$  em (5.8) e substituindo em (5.7), chega-se a:

$$J'_2 = J_2 + \frac{I_1^2}{3}(f^2(\rho) - 2f(\rho) + 1). \quad (5.9)$$

Desta forma, chega-se a uma expressão para o segundo invariante do tensor tensão semi-deviatórico que é, analogamente ao critério de von Mises, proposto como critério de escoamento para metais porosos na seguinte forma:

$$J'_2 = (g(\rho)Y_0)^2 \quad (5.10)$$

onde  $g(\rho)$  é uma função que pode levar em conta a quantidade, tamanho, forma e distribuição de tamanho de poros, enquanto  $Y_0$  se relaciona à tensão de escoamento do material 100% denso. Já que quando a densidade relativa do material tende a 1 a função de escoamento deve tender ao critério de von Mises, deve-se impor que  $f(\rho)$  e  $g(\rho)$  tendam a 1 quando a densidade tende a 1. Desta forma  $Y_0$  é obtido como  $\sigma_0/\sqrt{3}$ , onde  $\sigma_0$  é a tensão de escoamento medida no ensaio de tração do material 100% denso. Este valor é obtido da mesma forma que para o critério de von

Mises, conforme Dieter (1961). A figura 5.1 mostra a influência da variação da função  $f(\rho)$  entre 1 (material 100% denso) e 0.8 na forma da superfície de escoamento para  $g(\rho)=1$  e para uma tensão de escoamento unitária. Verifica-se aí que a premissa básica de convexidade da superfície de escoamento é mantida para o critério proposto e portanto pode-se, segundo Chen e Han (1988), garantir unicidade de solução para o problema envolvendo plasticidade de metais porosos.

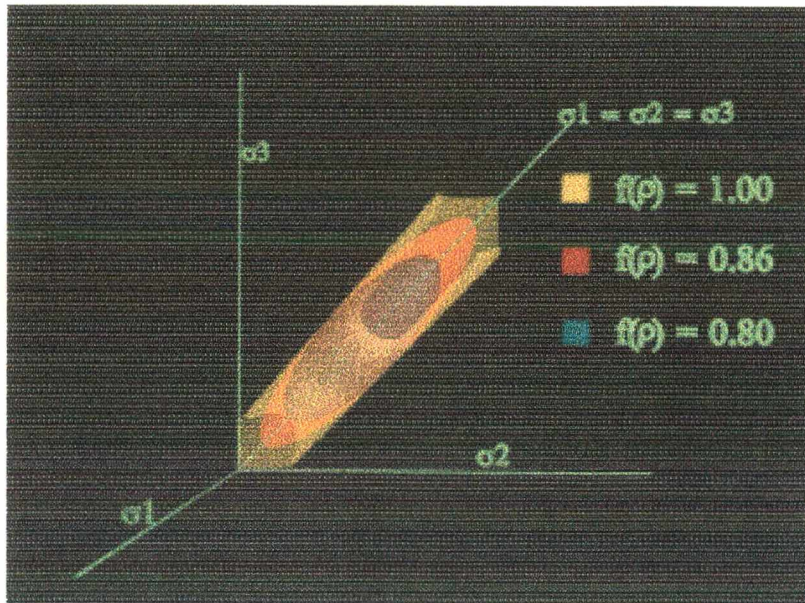


Figura 5.1 – Superfície de escoamento para  $f(\rho)=1,0$ ;  $f(\rho)=0,86$ ;  $f(\rho)=0,8$ .

Sabendo que  $I_1 = \sigma_{ii}$  e  $J_2 = \frac{1}{2}s_{ij}s_{ij}$  e definindo que  $p = \frac{1}{3}I_1$  e  $q = \sqrt{3J_2}$ , pode-se fazer uma mudança de variáveis no critério de escoamento proposto (5.10) de forma a obter:

$$\frac{q^2}{3} + 3p^2(1 + f^2(\rho) - 2f(\rho)) = (g(\rho)Y_0)^2. \tag{5.11}$$

Até este ponto foi possível a obtenção de um critério de escoamento genérico. Para que seja usado necessita ser particularizado para cada tipo de material. Neste sentido deve-se obter as funções  $f(\rho)$  e  $g(\rho)$ , que, até este momento, podem ser arbitrárias ou ajustadas para diferentes materiais.

Sabe-se que a função  $f(\rho)$  possui dois limites. O primeiro, quando a densidade relativa do material é 1; e o segundo, quando o material tende à densidade crítica. Para estes limites

assume-se que os valores  $f(\rho)$  devem ser 1 e zero, respectivamente. Entretanto, o comportamento da função  $f(\rho)$  entre os dois limites não está estabelecido. Para este fim, ressaltando que esta não é a única abordagem possível, vamos assumir que esta função deve apresentar uma derivada decrescente à medida que a densidade relativa tenda a 1. Diante disso, pode-se estabelecer que as possibilidades de escolha da função  $f(\rho)$  varie entre aquela com derivada constante no intervalo  $\rho_c$  a 1 e uma função com derivada zero no ponto em que a densidade relativa do material é igual a 1. Assumindo a função  $f(\rho)$  como sendo um polinômio de grau 2, esta será escrita da seguinte forma:

$$f(\rho) = Q1\rho^2 + Q2\rho + Q3. \quad (5.12)$$

Para o limite inferior da faixa, ou seja, para a função com densidade constante, a equação (5.12) pode ser particularizada como:

$$f(\rho) = Q2\rho + Q3. \quad (5.13)$$

Esta função deve ser zero para  $f(\rho) = \rho_c$  e 1 para  $f(\rho) = 1$ , o que nos conduz a:

$$\begin{aligned} Q1 &= 0 \\ Q2 &= \frac{1}{1 - \rho_c} \\ Q3 &= \frac{-\rho_c}{1 - \rho_c} \end{aligned} \quad (5.14)$$

Para o segundo limite, pode-se novamente impor as restrições para  $\rho_c$  e  $\rho = 1$  além de uma terceira condição que seria  $\frac{df(\rho)}{d\rho} = 0$  para  $\rho = 1$ , o que implica em uma perda suave e constante da influência do efeito da tensão hidrostática na condição de escoamento do material à medida que a densidade deste se aproxima da densidade teórica. Desta forma pode-se obter:

$$\begin{aligned}
 Q1 &= \frac{-1}{(\rho_c^2 - 2\rho_c + 1)} \\
 Q2 &= \frac{2}{(\rho_c^2 - 2\rho_c + 1)} \\
 Q3 &= \frac{\rho_c^2 - 2\rho_c}{(\rho_c^2 - 2\rho_c + 1)}
 \end{aligned} \tag{5.15}$$

Assumindo  $\rho_c = 0.5$  como sendo uma estimativa realista para os metais sinterizados usuais, as funções calculadas de acordo com o procedimento anteriormente proposto devem variar dentro dos limites mostrados na figura 5.2.

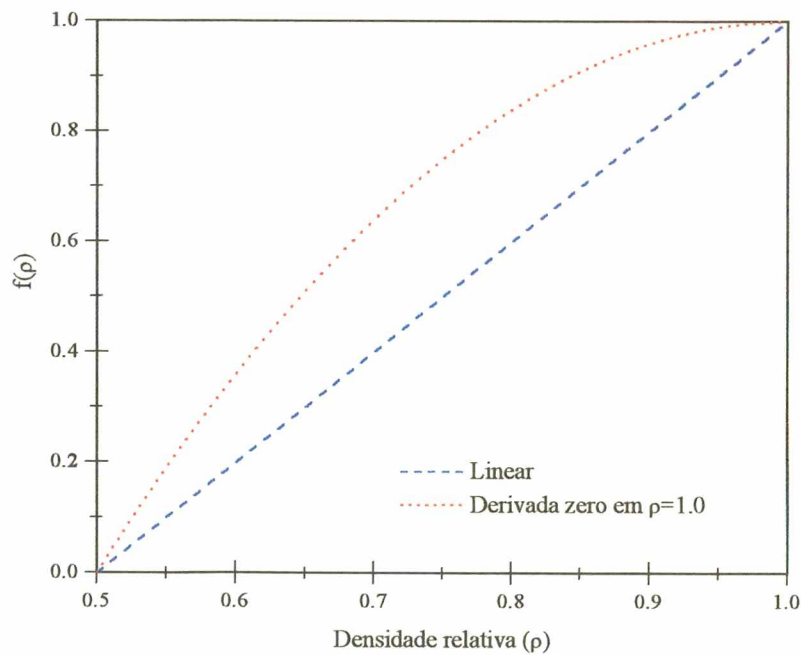


Figura 5.2 - Limites assumidos para a variação da função  $f(\rho)$  considerando-a um polinômio de grau 2.

Uma vez que a função  $f(\rho)$  está determinada, deve-se obter a função,  $g(\rho)$ . Sabe-se, até aqui, que o critério proposto é:

$$\frac{q^2}{3} + 3p^2 \left( 1 + (Q1\rho^2 + Q2\rho + Q3)^2 - 2(Q1\rho^2 + Q2\rho + Q3) \right) = \left( g(\rho) \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \right)^2 = Y_0(\rho)^2 \tag{5.16}$$

onde  $Y_0(\rho)$  é a função que rege o efeito da função  $g(\rho)$  na tensão de escoamento do material 100% denso ( $\sigma_0$ ) relacionando a tensão de escoamento do material com a porosidade. De acordo com German(1998), esta relação é da seguinte forma:

$$Y_0(\rho) = K \left( \frac{\rho}{\rho_t} \right)^n Y_0 \quad (5.17)$$

onde:

$K$  = fator experimental que depende do processo de fabricação do material;

$\rho$  = densidade do material;

$\rho_t$  = densidade teórica do material 100% denso;

$n$  = parâmetro experimental ( conforme German (1998), usualmente em torno de 0.30);

Para o caso em questão, a equação (5.17) deve ser escrita como:

$$Y_0(\rho) = K \rho^n \quad (5.18)$$

já que a densidade considerada no critério proposto é a densidade relativa do material,  $(\rho/\rho_t)$ . Verificou-se que a proposta de German, quando colocada em forma de gráfico em função da densidade relativa, apresenta-se conforme a figura 3.2 e que o comportamento sugerido indica que o material perde a capacidade de suportar carregamento à medida que a densidade se aproxima de zero. Entretanto, deve-se lembrar que mesmo a densidades superiores a zero, a resistência do material se torna desprezível. Assim sendo, embora a função proposta por German apresente uma tendência adequada para descrever a redução da tensão de escoamento do material com o aumento da porosidade, devem ser feitos alguns ajustes que tornem a descrição dos fenômenos mais próxima da realidade. Com este objetivo introduz-se a seguinte modificação:

$$Y(\rho) = K \left( \frac{\rho - \rho_c}{1 - \rho_c} \right)^n Y_0 \quad (5.19)$$

onde  $\rho_c$  é a mesma anteriormente definida. Esta modificação, introduzida na equação (5.18), apresenta um comportamento conforme mostrado na figura 5.3, concordam com os resultados obtidos por Doraivelu et al. (1984). Nesta figura, pode-se verificar que o valor da função cai rapidamente a zero quando a densidade do material se aproxima pela direita da densidade crítica. A influência da variação do expoente  $n$  no comportamento da função pode ser visto na figura 5.4, onde se verifica que, à medida que o valor de  $n$  decresce de 1 para 0.01, também ocorre uma queda na influência da densidade na diminuição da tensão de escoamento. Pode-se, ainda, verificar que à medida que o expoente  $n$  se aproxima de 1, a função se aproxima mais de um comportamento linear.

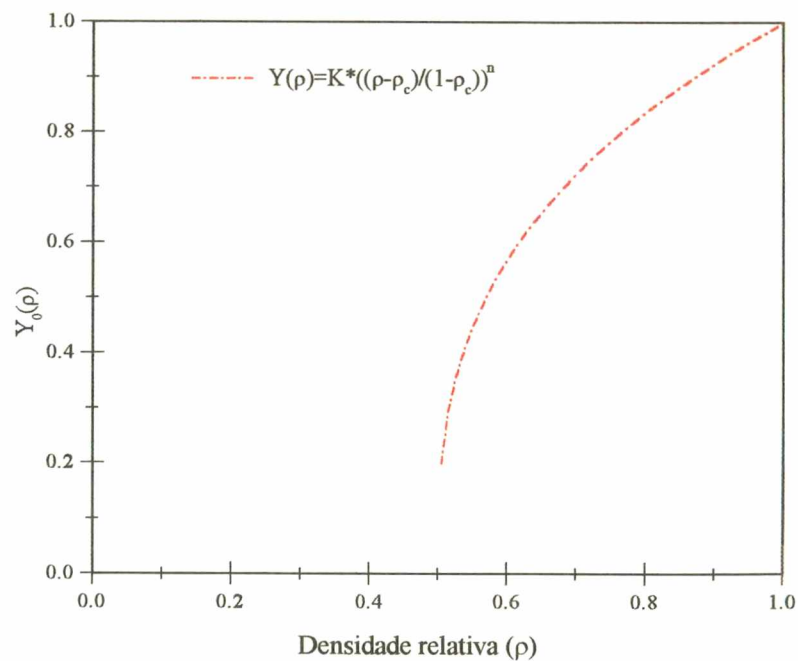


Figura 5.3 - Tensão de escoamento em função da densidade para  $n=0.35$  e  $\rho_c=0.5$ .

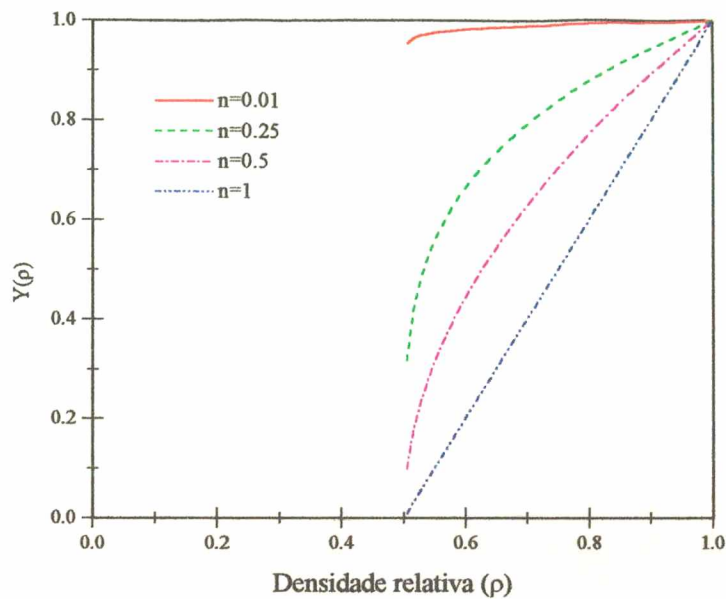


Figura 5.4 - Tensão de escoamento em função da densidade para  $\rho_c = 0.5$  e diferentes valores de  $n$

Na figura 5.5 é possível avaliar a influência do parâmetro densidade crítica no comportamento da equação 5.19; verifica-se, na referida figura, que, para um valor de  $n$  fixo em 0.35, à medida que a densidade crítica diminui, o mesmo ocorre com a influência da densidade na tensão de escoamento do material, indicando que para dois materiais com a mesma densidade, aquele com maior densidade crítica deverá iniciar o escoamento sob solicitações mais baixas. Isto deve, de certa forma, ser esperado já que uma densidade crítica mais alta indica que, à medida que a porosidade aumenta, o material perde a capacidade de suportar carregamento antes do que um material com densidade crítica mais baixa.

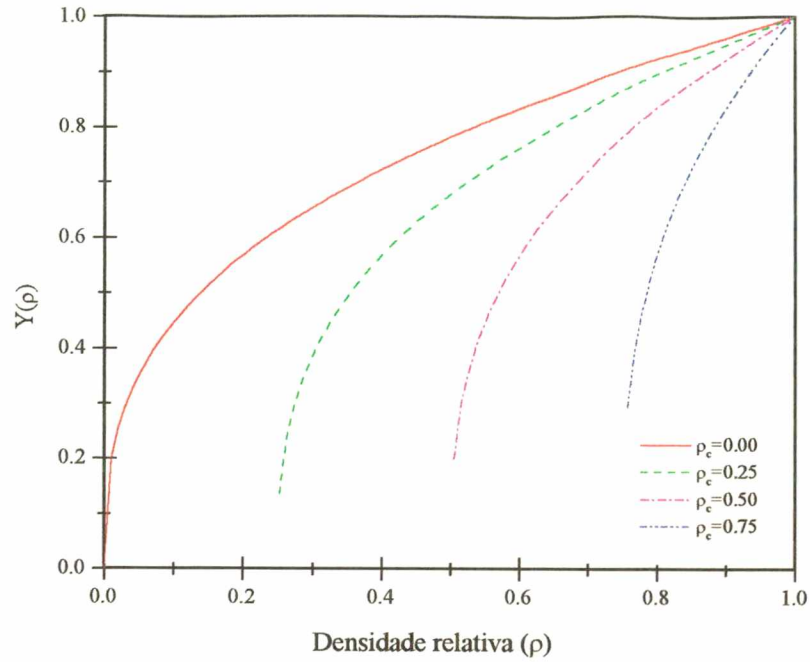


Figura 5.5 - Tensão de escoamento em função da densidade para  $n=0.35$  e diferentes valores de  $\rho_c$ .

Com a definição da função  $g(\rho)$  tem-se o critério de escoamento totalmente definido como:

$$\frac{q^2}{3} + 3p^2(1 + f^2(\rho) - 2f(\rho)) = \left( K \left( \frac{\rho - \rho_c}{1 - \rho_c} \right)^n \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \right)^2 \quad (5.20)$$

$$f(\rho) = Q_1 \rho^2 + Q_2 \rho + Q_3$$

Onde:

$\rho$  = Densidade relativa do material

$\rho_c$  = Densidade crítica do material

$\sigma_0$  = Tensão de escoamento do material 100% denso

$n$  = Expoente que indica maior ou menor influência da porosidade na tensão de escoamento do material



$f(\rho)$  = Função que estabelece a relação entre densidade e grau de influência da pressão no início do escoamento previsto pelo critério

$K$  = Constante que indica a influência das características dos poros (forma, tamanho médio e distribuição de tamanho) e de diferentes formas de processamento no comportamento plástico do material.

Para o melhor entendimento de como o critério proposto modela o início de escoamento de metais porosos, este é visualizado no espaço  $q$  em função de  $p$ . Para este fim, é considerada uma tensão de escoamento do material 100% denso normalizada igual a 1.

Verifica-se, na figura 5.6 que para um determinado conjunto de fatores  $Q_1$ ,  $Q_2$  e  $Q_3$ , com  $\rho_c$ ,  $n$  e  $K$  mantidos constantes, quando a porosidade é igual a zero, o escoamento ocorre a tensão constante e igual a 1, indicando a não influência da pressão hidrostática no início do escoamento bem como a concordância com o critério de von Mises. Com a diminuição da densidade do material, a tensão hidrostática começa a influir no início do escoamento do material, o que pode ser notado com a diminuição da tensão de escoamento com o aumento da pressão. Verifica-se ainda na referida figura que o aumento da influência da pressão no início do escoamento é crescente com a diminuição da densidade.

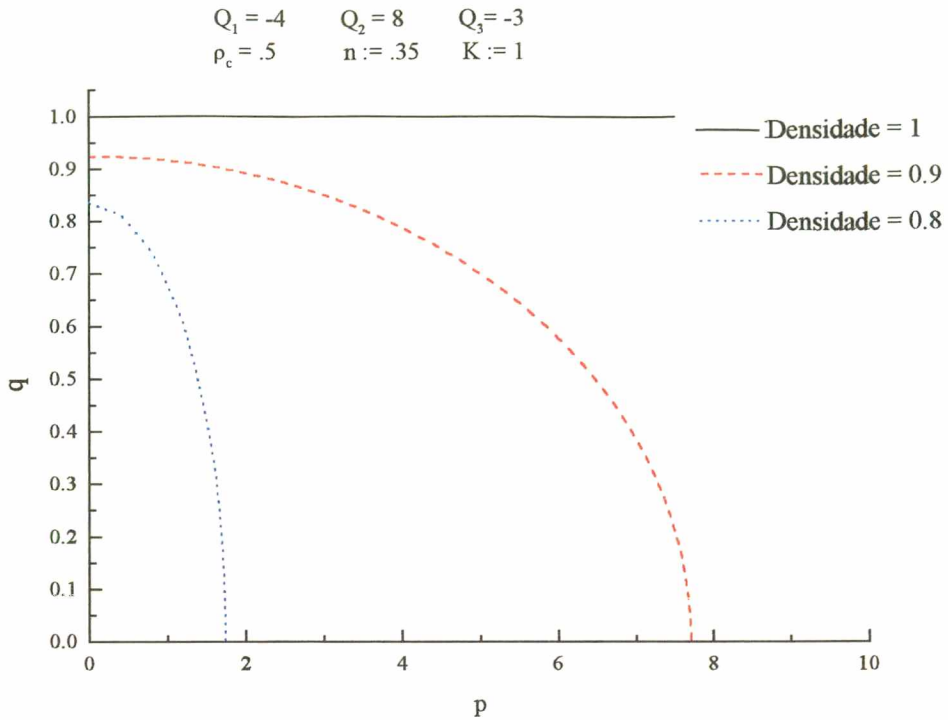


Figura 5.6 - Condições para escoamento no espaço q versus p para diferentes uma dada condição de parâmetros para o modelo proposto.

Se a densidade é mantida constante, por exemplo em 0,9, verifica-se, na figura 5.7, que à medida que a densidade crítica é aumentada de zero a 0.65 a influência da tensão hidrostática aumenta, provocando assim, o início do escoamento a tensões mais baixas.

Como foi visto anteriormente (figura 5.4), o aumento do expoente n provoca o aumento da influência da densidade no sentido de trazer o início do escoamento para tensões mais baixas. Esta tendência pode ser novamente verificada no critério do escoamento (figura 5.8), onde o aumento do expoente n provoca uma tendência de decréscimo da tensão de início de escoamento, caracterizando assim um material mais sujeito a variação de volume quando da deformação plástica.

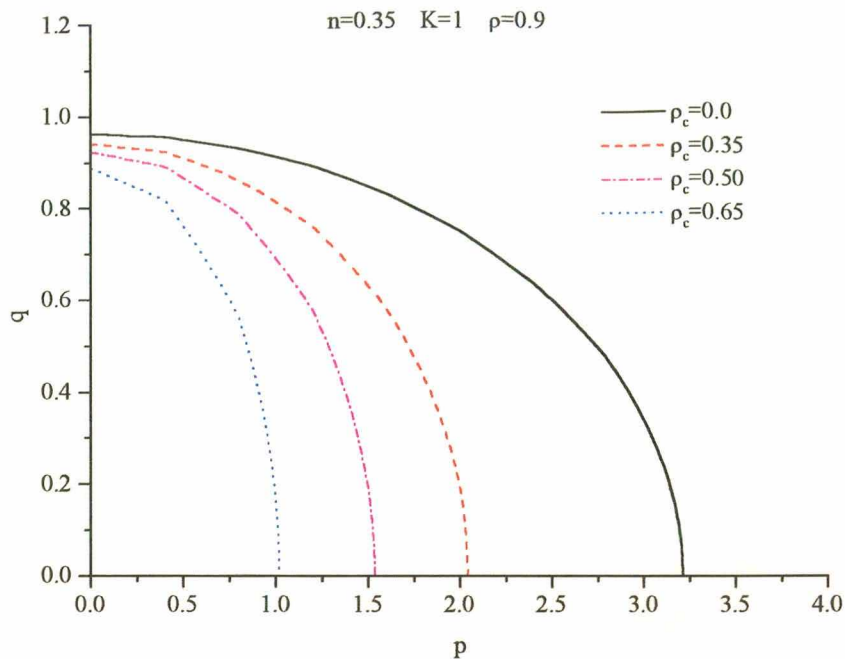


Figura 5.7 - Influência da densidade crítica na condição para escoamento segundo o modelo proposto para diferentes valores de densidade crítica.

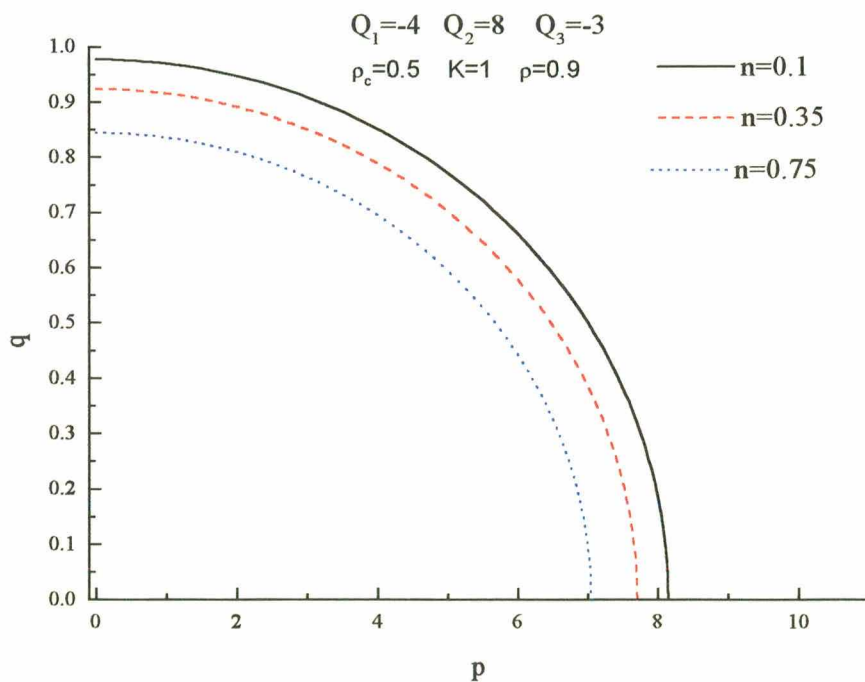


Figura 5.8 - Influência da densidade crítica na condição para escoamento segundo o modelo proposto para diferentes valores de  $n$ .

Os casos avaliados até aqui indicam que os parâmetros do modelo afetam o início do escoamento até mesmo para valores de pressão nula, o que não se constata com a variação dos parâmetros  $Q_1$ ,  $Q_2$  e  $Q_3$  (Figura 5.9). Além disso, verifica-se que a variação dos referidos parâmetros entre um comportamento linear e o limite para o qual a derivada de  $f(\rho)$  é zero, reflete um aumento gradativo da tensão equivalente para o início do escoamento, indicando, portanto, um aumento da susceptibilidade do material modelado à tensão hidrostática.

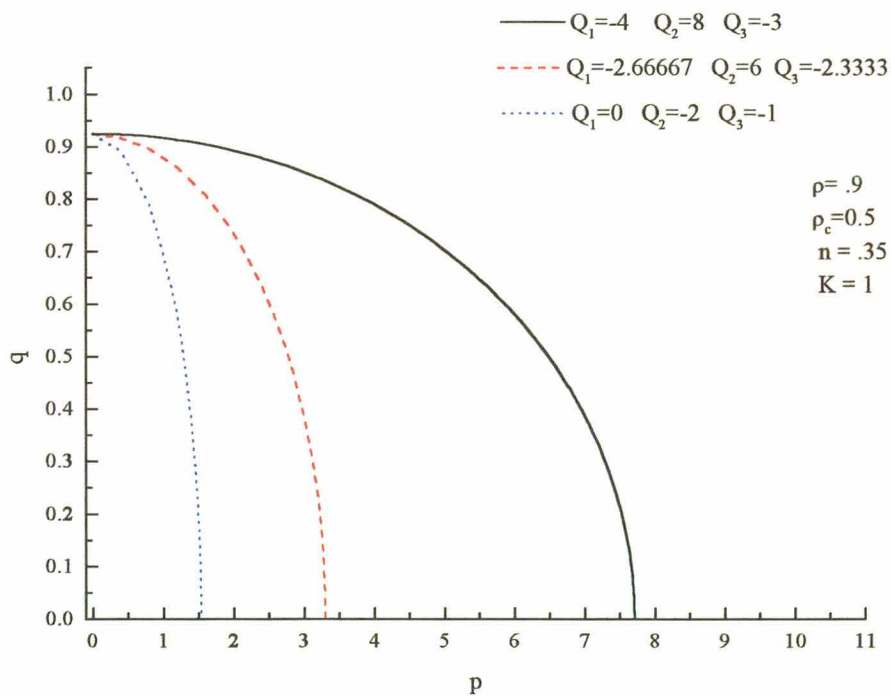


Figura 5.9 - Influência da densidade crítica na condição para escoamento segundo o modelo proposto para diferentes conjuntos de  $Q_1$ ,  $Q_2$  e  $Q_3$ .

**5.1 - Comparação entre o início do escoamento calculado pelo critério proposto e pelos critérios apresentados na literatura.**

Na figura 5.10 verifica-se, no espaço  $p \times q$ , as curvas para início do escoamento previsto por alguns critérios postos na literatura e pelo critério proposto para dois conjuntos de parâmetros do modelo a uma densidade fixa ( $\rho=0,9$ ). Nota-se que o critério proposto apresenta a tendência de diminuição da tensão cisalhante para escoamento à medida que a pressão aumenta, da mesma forma que ocorre para os critérios da literatura. Nota-se ainda que para os dois

conjuntos de parâmetros utilizados no modelo proposto levam a condições que englobam as situações previstas pelos modelos da literatura, exceto pelo comportamento previsto pelo critério de Kuhn & Downey, nas regiões de baixos níveis de pressão, onde justamente é notado o comportamento anômalo de um aumento do nível de tensão para que, a densidades menores, o material inicie o escoamento (figura 4.5).

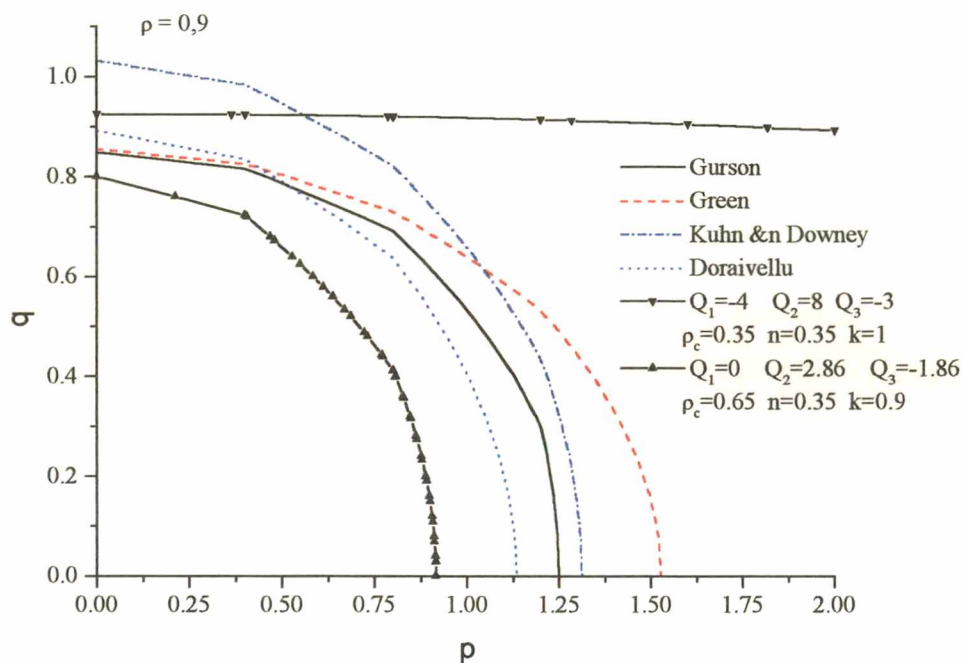


Figura 5.10 - Comparação entre o início do escoamento previsto pelos critérios da literatura e pelos critérios propostos

---

---

## Capítulo 6

# ALGORITMO IMPLÍCITO DE INTEGRAÇÃO

---

---

Neste capítulo é proposto o algoritmo de integração para a implementação das teorias da plasticidade de materiais porosos a serem utilizadas nas simulações apresentadas nos capítulos subsequentes.

Considerando uma teoria da plasticidade associada com a regra de escoamento escrita como segue:

$$d\varepsilon^p = d\lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \quad (6.1)$$

onde  $d\lambda$  é um escalar positivo, e  $g = g(p, q, H^\alpha)$  é uma função potencial plástico genérica. Para um material com propriedades independentes da taxa de deformação,  $d\lambda$  é determinado pela

solução cinemática no ponto considerado (Aravas, 1987; Lee e Zhang, 1991). Considerando

$p = -\frac{1}{3}\delta_{ij}\sigma_{ij}$  e  $q$ , conforme definido anteriormente, pode-se achar:

$$d\varepsilon^p = d\lambda \left( -\frac{1}{3} \frac{\partial g}{\partial p} \delta_{ij} + \frac{\partial g}{\partial q} n_{ij} \right) \quad (6.2)$$

com:  $n_{ij} = \frac{3}{2q} s_{ij}$ .

Usando esta notação, o tensor tensão de Cauchy pode ser escrito como:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \frac{2}{3}qn_{ij}. \quad (6.3)$$

O modelo de plasticidade é, então, completado com a introdução das equações incrementais associadas às variáveis internas responsáveis pela sua evolução em função da deformação plástica:

$$dH^\alpha = h^\alpha(\sigma_{ij}, d\varepsilon^p, H^\beta) \quad (6.4)$$

Considerando que o material modelado obedeça à lei de Hooke quando solicitado dentro do regime elástico, pode-se assumir que a equação constitutiva para este material seja:

$$C_{ijkl}^e = 2G\delta_{ik}\delta_{jl} + \left( K - \frac{2}{3}G \right) \delta_{ij}\delta_{kl} \quad (6.5)$$

com  $G$  e  $K$  sendo o módulo de elasticidade ao cisalhamento e volumétrico, respectivamente e  $\delta_{ij}$  é o delta de Kronecker.

Para a integração das equações elasto-plásticas é utilizado um algoritmo da classe "return mapping" que consiste na prescrição do incremento da deformação total e a conseqüente atualização da tensão, da deformação e das variáveis de estado. Considerando uma decomposição aditiva da deformação pode-se escrever:

$$\left( \sigma_{ij} \right)_{t+\Delta t} = C_{ijkl}^e \left( \varepsilon_{kl}^e \right)_{t+\Delta t} = \sigma_{ij}^e - C_{ijkl}^e \left( \Delta \varepsilon_{kl}^p \right)_{t+\Delta t} \quad (6.6)$$

com

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} (\varepsilon_{ij}^e + \Delta\varepsilon_{ij}) \quad (6.7)$$

Projetando a equação (6.6) sobre  $\delta_{ij}$  e  $n_{ij}$  usando a equação (6.3) chega-se a:

$$p = p^e + K\Delta\varepsilon_p \quad (6.8)$$

$$q = q^e - 3G\Delta\varepsilon_q \quad (6.9)$$

A função potencial plástico genérica e a regra de escoamento podem ser escritas como:

$$g(p_{t+\Delta t}, q_{t+\Delta t}, H^{\alpha}_{t+\Delta t}) = 0 \quad (6.10)$$

$$\Delta\varepsilon_p = \left( \frac{1}{3} \Delta\varepsilon_p \delta_{ij} + \Delta\varepsilon_q n_{ij} \right)_{t+\Delta t} \quad (6.11)$$

com:

$$\Delta\varepsilon_p = -\Delta\lambda \left( \frac{\partial g}{\partial p} \right)_{t+\Delta t} \quad (6.12)$$

e

$$\Delta\varepsilon_q = \Delta\lambda \left( \frac{\partial g}{\partial q} \right)_{t+\Delta t} \quad (6.13)$$

Usando as equações (6.12) e (6.13) eliminando  $\Delta\lambda$  chega-se a:

$$\Delta\varepsilon_p \left( \frac{\partial g}{\partial q} \right)_{t+\Delta t} + \Delta\varepsilon_q \left( \frac{\partial g}{\partial p} \right)_{t+\Delta t} = 0. \quad (6.14)$$

Postas as equações anteriores, o problema de integração das equações elasto-plásticas se reduz à integração do sistema de equações não lineares, onde as equações são rescritas para maior clareza, como segue:



$$\Delta\varepsilon_p \frac{\partial g}{\partial q} + \Delta\varepsilon_q \frac{\partial g}{\partial p} = 0 \quad (6.15)$$

$$g(p, q, H^\alpha) = 0 \quad (6.16)$$

$$p = p^e + K\Delta\varepsilon_p \quad (6.17)$$

$$q = q^e - 3G\Delta\varepsilon_q \quad (6.18)$$

$$\Delta H^\alpha = h^\alpha(p, q, \Delta\varepsilon_p, \Delta\varepsilon_q, H^\beta) \quad (6.19)$$

Usando o método de Newton (Press et al., 1995), escolhendo-se  $\Delta\varepsilon_p$  e  $\Delta\varepsilon_q$  como incógnitas e usando equações (6.15) e (6.16) como as equações básicas para o método com  $p$ ,  $q$  e  $\Delta H^\alpha$  conforme definido nas equações 6.17 a 6.19. O método de Newton é, então, destinado a resolver  $(\Delta\varepsilon_p)_{t+1}$  e  $(\Delta\varepsilon_q)_{t+1}$  da maneira que segue:

$$(\Delta\varepsilon_p)_{t+1} = (\Delta\varepsilon_p)_t + (c_p)_t \quad (6.20)$$

$$(\Delta\varepsilon_q)_{t+1} = (\Delta\varepsilon_q)_t + (c_q)_t \quad (6.21)$$

Os valores de  $(c_p)_t$  e  $(c_q)_t$  são calculados resolvendo-se o seguinte sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_p \\ c_q \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix} \quad (6.22)$$

O sistema de equações (6.22) é resolvido calculando-se os coeficientes  $A_{ij}$  e  $b_i$  obtidos conforme descrito no anexo I e listados a seguir:

$$A_{11} = \frac{\partial g}{\partial q} + \Delta\varepsilon_p \left( K \frac{\partial^2 g}{\partial p q} + \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial^2 g}{\partial q \partial H^\alpha} \frac{\partial H^\alpha}{\partial \Delta\varepsilon_p} \right) + \Delta\varepsilon_q \left( K \frac{\partial^2 g}{\partial p^2} + \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial^2 g}{\partial p \partial H^\alpha} \frac{\partial H^\alpha}{\partial \Delta\varepsilon_p} \right) \quad (6.23)$$

$$A_{12} = \frac{\partial g}{\partial p} + \Delta\varepsilon_p \left( -3G \frac{\partial^2 g}{\partial q^2} + \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial^2 g}{\partial q \partial H^\alpha} \frac{\partial H^\alpha}{\partial \Delta\varepsilon_q} \right) + \Delta\varepsilon_q \left( -3G \frac{\partial^2 g}{\partial p q} + \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial^2 g}{\partial p \partial H^\alpha} \frac{\partial H^\alpha}{\partial \Delta\varepsilon_q} \right) \quad (6.24)$$

$$A_{21} = K \frac{\partial g}{\partial p} + \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial g}{\partial H^{\alpha}} \frac{\partial H^{\alpha}}{\partial \Delta \varepsilon_p} \quad (6.25)$$

$$A_{22} = -3G \frac{\partial g}{\partial q} + \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial g}{\partial H^{\alpha}} \frac{\partial H^{\alpha}}{\partial \Delta \varepsilon_q} \quad (6.26)$$

$$b_1 = -\Delta \varepsilon_p \frac{\partial g}{\partial q} - \Delta \varepsilon_q \frac{\partial g}{\partial p} \quad (6.27)$$

$$b_2 = -g(p, q, H^{\alpha}) \quad (6.28)$$

Para a determinação dos coeficientes  $A_{ij}$  anteriores é necessário determinar  $\frac{\partial H^{\alpha}}{\partial \Delta \varepsilon_p}$  e  $\frac{\partial H^{\alpha}}{\partial \Delta \varepsilon_q}$ .

Considerando que o modelo proposto prevê duas variáveis de estado, as expressões em questão, obtidas conforme o apêndice II, são:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial H^1}{\partial \Delta \varepsilon_p} \\ \frac{\partial H^2}{\partial \Delta \varepsilon_p} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C_{11} \left( \frac{\partial h^1}{\partial \Delta \varepsilon_p} + K \frac{\partial h^1}{\partial p} \right) + C_{12} \left( \frac{\partial h^2}{\partial \Delta \varepsilon_p} + K \frac{\partial h^2}{\partial p} \right) \\ C_{21} \left( \frac{\partial h^1}{\partial \Delta \varepsilon_p} + K \frac{\partial h^1}{\partial p} \right) + C_{22} \left( \frac{\partial h^2}{\partial \Delta \varepsilon_p} + K \frac{\partial h^2}{\partial p} \right) \end{Bmatrix} \quad (6.29)$$

e

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial H^1}{\partial \Delta \varepsilon_q} \\ \frac{\partial H^2}{\partial \Delta \varepsilon_q} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C_{11} \left( \frac{\partial h^1}{\partial \Delta \varepsilon_q} - 3G \frac{\partial h^1}{\partial q} \right) + C_{12} \left( \frac{\partial h^2}{\partial \Delta \varepsilon_q} - 3G \frac{\partial h^2}{\partial q} \right) \\ C_{21} \left( \frac{\partial h^1}{\partial \Delta \varepsilon_q} - 3G \frac{\partial h^1}{\partial q} \right) + C_{22} \left( \frac{\partial h^2}{\partial \Delta \varepsilon_q} - 3G \frac{\partial h^2}{\partial q} \right) \end{Bmatrix} \quad (6.30)$$

com  $C_{ij}$  definidos como:

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{1 - \frac{\partial h^1}{\partial H^2} \frac{\partial h^2}{\partial H^1}} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\partial h^1}{\partial H^2} \\ \frac{\partial h^2}{\partial H^1} & 1 \end{bmatrix} \quad (6.31)$$

Para a implementação do procedimento anteriormente exposto no ABAQUS, a subrotina de material do usuário deve fornecer como resultado o Jacobiano na seguinte forma:

$$D_{ijkl} = \left( \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} \right)_{t+\Delta t} \quad (6.32)$$

O Jacobiano, resolvido conforme apresentado no apêndice III, é:

$$\underline{\underline{D}} = \left( \underline{\underline{M}} + \left( \underline{\underline{C}}^e \right)^{-1} \right)^{-1} \quad (6.33)$$

Onde  $\underline{\underline{C}}^e$  é o termo de rigidez na equação constitutiva elástica do material e  $\underline{\underline{M}}$  é definida como:

$$\underline{\underline{M}} = \frac{1}{3} m_{pi} \underline{\underline{II}} + \frac{1}{3} m_{pn} \underline{\underline{In}} + m_{qi} \underline{\underline{nI}} + m_{qn} \underline{\underline{nn}} + \Delta \varepsilon_q \frac{\partial \underline{\underline{n}}}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \quad (6.34)$$

com:

$$m_{pi} = \frac{1}{A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}} (A_{22}B_{11} - A_{12}B_{21}) \quad (6.35)$$

$$m_{pn} = \frac{1}{A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}} (A_{22}B_{12} - A_{12}B_{22}) \quad (6.36)$$

$$m_{qi} = \frac{1}{A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}} (A_{11}B_{21} - A_{21}B_{11}) \quad (6.37)$$

$$m_{qn} = \frac{1}{A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}} (A_{11}B_{22} - A_{21}B_{12}) \quad (6.38)$$

Com os coeficientes  $A_{ij}$  e  $B_{ij}$  definidos como:

$$A_{11} = \left( \frac{\partial g}{\partial q} + \Delta \varepsilon_p \left[ \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \frac{\partial^2 g}{\partial q \partial H^\alpha} c_{\alpha\beta} \frac{\partial h^\beta}{\partial \Delta \varepsilon_p} \right] + \Delta \varepsilon_q \left[ \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \frac{\partial^2 g}{\partial p \partial H^\alpha} c_{\alpha\beta} \frac{\partial h^\beta}{\partial \Delta \varepsilon_p} \right] \right) \quad (6.39)$$

$$A_{12} = \left( \frac{\partial g}{\partial p} + \Delta \varepsilon_p \left[ \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \frac{\partial^2 g}{\partial q \partial H^\alpha} c_{\alpha\beta} \frac{\partial h^\beta}{\partial \Delta \varepsilon_q} \right] + \Delta \varepsilon_q \left[ \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \frac{\partial^2 g}{\partial p \partial H^\alpha} c_{\alpha\beta} \frac{\partial h^\beta}{\partial \Delta \varepsilon_q} \right] \right) \quad (6.40)$$

$$A_{21} = \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \frac{\partial \Phi}{\partial H^\alpha} c_{\alpha\beta} \frac{\partial h^\beta}{\partial \Delta \varepsilon_p} \quad (6.41)$$

$$A_{22} = \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \frac{\partial \Phi}{\partial H^\alpha} c_{\alpha\beta} \frac{\partial h^\beta}{\partial \Delta \varepsilon_q} \quad (6.42)$$

$$B_{11} = \frac{1}{3} \left\{ \Delta \varepsilon_p \left[ \frac{\partial^2 g}{\partial p \partial q} + \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \frac{\partial^2 g}{\partial q \partial H^\alpha} c_{\alpha\beta} \frac{\partial h^\beta}{\partial p} \right] + \Delta \varepsilon_q \left[ \left( \frac{\partial^2 g}{\partial p^2} + \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \frac{\partial^2 g}{\partial p \partial H^\alpha} c_{\alpha\beta} \frac{\partial h^\beta}{\partial p} \right) \right] \right\} \quad (6.43)$$

$$B_{12} = - \left\{ \Delta \varepsilon_p \left[ \frac{\partial^2 g}{\partial q^2} + \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \frac{\partial^2 g}{\partial q \partial H^\alpha} c_{\alpha\beta} \frac{\partial h^\beta}{\partial q} \right] + \Delta \varepsilon_q \left[ \left( \frac{\partial^2 g}{\partial p \partial q} + \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \frac{\partial^2 g}{\partial p \partial H^\alpha} c_{\alpha\beta} \frac{\partial h^\beta}{\partial q} \right) \right] \right\} \quad (6.44)$$

$$B_{21} = \frac{1}{3} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial p} + \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \frac{\partial \Phi}{\partial H^\alpha} c_{\alpha\beta} \frac{\partial h^\beta}{\partial p} \right\} \quad (6.45)$$

$$B_{22} = - \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial q} + \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \frac{\partial \Phi}{\partial H^\alpha} c_{\alpha\beta} \frac{\partial h^\beta}{\partial q} \right\} \quad (6.46)$$

Considerando novamente que o material depende de duas funções de estado, chega-se a:

$$A_{11} = \left( \frac{\partial g}{\partial q} + \Delta \varepsilon_p \left[ \frac{\partial^2 g}{\partial q \partial H^1} c_{11} \frac{\partial h^1}{\partial \Delta \varepsilon_p} + \frac{\partial^2 g}{\partial q \partial H^1} c_{12} \frac{\partial h^2}{\partial \Delta \varepsilon_p} + \frac{\partial^2 g}{\partial q \partial H^2} c_{21} \frac{\partial h^1}{\partial \Delta \varepsilon_p} + \frac{\partial^2 g}{\partial q \partial H^2} c_{22} \frac{\partial h^2}{\partial \Delta \varepsilon_p} \right] + \Delta \varepsilon_q \left[ \frac{\partial^2 g}{\partial p \partial H^1} c_{11} \frac{\partial h^1}{\partial \Delta \varepsilon_p} + \frac{\partial^2 g}{\partial p \partial H^1} c_{12} \frac{\partial h^2}{\partial \Delta \varepsilon_p} + \frac{\partial^2 g}{\partial p \partial H^2} c_{21} \frac{\partial h^1}{\partial \Delta \varepsilon_p} + \frac{\partial^2 g}{\partial p \partial H^2} c_{22} \frac{\partial h^2}{\partial \Delta \varepsilon_p} \right] \right) \quad (6.47)$$

$$A_{12} = \left( \frac{\partial g}{\partial p} + \Delta \varepsilon_p \left[ \frac{\partial^2 g}{\partial q \partial H^1} c_{11} \frac{\partial h^1}{\partial \Delta \varepsilon_q} + \frac{\partial^2 g}{\partial p \partial H^1} c_{12} \frac{\partial h^2}{\partial \Delta \varepsilon_q} + \frac{\partial^2 g}{\partial p \partial H^2} c_{21} \frac{\partial h^1}{\partial \Delta \varepsilon_q} + \frac{\partial^2 g}{\partial p \partial H^2} c_{22} \frac{\partial h^2}{\partial \Delta \varepsilon_q} \right] + \Delta \varepsilon_q \left[ \frac{\partial^2 g}{\partial p \partial H^1} c_{11} \frac{\partial h^1}{\partial \Delta \varepsilon_q} + \frac{\partial^2 g}{\partial p \partial H^1} c_{12} \frac{\partial h^2}{\partial \Delta \varepsilon_q} + \frac{\partial^2 g}{\partial p \partial H^2} c_{21} \frac{\partial h^1}{\partial \Delta \varepsilon_q} + \frac{\partial^2 g}{\partial p \partial H^2} c_{22} \frac{\partial h^2}{\partial \Delta \varepsilon_q} \right] \right) \quad (6.48)$$

$$A_{21} = \frac{\partial \Phi}{\partial H^1} c_{11} \frac{\partial h^1}{\partial \Delta \varepsilon_p} + \frac{\partial \Phi}{\partial H^1} c_{12} \frac{\partial h^2}{\partial \Delta \varepsilon_p} + \frac{\partial \Phi}{\partial H^2} c_{21} \frac{\partial h^1}{\partial \Delta \varepsilon_p} + \frac{\partial \Phi}{\partial H^2} c_{22} \frac{\partial h^2}{\partial \Delta \varepsilon_p} \quad (6.49)$$

$$A_{22} = \frac{\partial \Phi}{\partial H^1} c_{11} \frac{\partial h^1}{\partial \Delta \varepsilon_q} + \frac{\partial \Phi}{\partial H^1} c_{12} \frac{\partial h^2}{\partial \Delta \varepsilon_q} + \frac{\partial \Phi}{\partial H^2} c_{21} \frac{\partial h^1}{\partial \Delta \varepsilon_q} + \frac{\partial \Phi}{\partial H^2} c_{22} \frac{\partial h^2}{\partial \Delta \varepsilon_q} \quad (6.50)$$

$$B_{11} = \frac{\Delta \varepsilon_p}{3} \left[ \frac{\partial^2 g}{\partial p \partial q} + \frac{\partial g}{\partial q \partial H^1} c_{11} \frac{\partial h^1}{\partial p} + \frac{\partial^2 g}{\partial q \partial H^1} c_{12} \frac{\partial h^2}{\partial p} + \frac{\partial^2 g}{\partial q \partial H^2} c_{21} \frac{\partial h^1}{\partial p} + \frac{\partial^2 g}{\partial q \partial H^2} c_{22} \frac{\partial h^2}{\partial p} \right] + \frac{\Delta \varepsilon_q}{3} \left[ \left( \frac{\partial^2 g}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial p \partial H^1} c_{11} \frac{\partial h^1}{\partial p} + \frac{\partial^2 g}{\partial p \partial H^1} c_{12} \frac{\partial h^2}{\partial p} + \frac{\partial^2 g}{\partial p \partial H^2} c_{21} \frac{\partial h^1}{\partial p} + \frac{\partial^2 g}{\partial p \partial H^2} c_{22} \frac{\partial h^2}{\partial p} \right) \right] \quad (6.51)$$

$$B_{12} = -\Delta \varepsilon_p \left[ \frac{\partial^2 g}{\partial q^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial q \partial H^1} c_{11} \frac{\partial h^1}{\partial q} + \frac{\partial^2 g}{\partial q \partial H^1} c_{12} \frac{\partial h^2}{\partial q} + \frac{\partial^2 g}{\partial q \partial H^2} c_{21} \frac{\partial h^1}{\partial q} + \frac{\partial^2 g}{\partial q \partial H^2} c_{22} \frac{\partial h^2}{\partial q} \right] - \Delta \varepsilon_q \left[ \left( \frac{\partial^2 g}{\partial p \partial q} + \frac{\partial^2 g}{\partial p \partial H^1} c_{11} \frac{\partial h^1}{\partial q} + \frac{\partial^2 g}{\partial p \partial H^1} c_{12} \frac{\partial h^2}{\partial q} + \frac{\partial^2 g}{\partial p \partial H^2} c_{21} \frac{\partial h^1}{\partial q} + \frac{\partial^2 g}{\partial p \partial H^2} c_{22} \frac{\partial h^2}{\partial q} \right) \right] \quad (6.52)$$

$$B_{21} = \frac{1}{3} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial p} + \frac{\partial \Phi}{\partial H^1} c_{11} \frac{\partial h^1}{\partial p} + \frac{\partial \Phi}{\partial H^1} c_{12} \frac{\partial h^2}{\partial p} + \frac{\partial \Phi}{\partial H^2} c_{21} \frac{\partial h^1}{\partial p} + \frac{\partial \Phi}{\partial H^2} c_{22} \frac{\partial h^2}{\partial p} \right) \quad (6.53)$$

$$B_{22} = - \left( \frac{\partial \Phi}{\partial q} + \frac{\partial \Phi}{\partial H^1} c_{11} \frac{\partial h^1}{\partial q} + \frac{\partial \Phi}{\partial H^1} c_{12} \frac{\partial h^2}{\partial q} + \frac{\partial \Phi}{\partial H^2} c_{21} \frac{\partial h^1}{\partial q} + \frac{\partial \Phi}{\partial H^2} c_{22} \frac{\partial h^2}{\partial q} \right) \quad (6.54)$$

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{1 - \frac{\partial h^1}{\partial H^2} \frac{\partial h^2}{\partial H^1}} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\partial h^1}{\partial H^2} \\ \frac{\partial h^2}{\partial H^1} & 1 \end{bmatrix}$$

Convencionando então:

$H^1 = \bar{\varepsilon}^p =$  Deformação plástica equivalente

$H^2 = f =$  Porosidade do material

$g =$  Função potencial plástico

### 6.1 - Definição das variáveis de estado

A deformação plástica equivalente,  $\bar{\varepsilon}^p$ , representa o estado de deformação microscópico na matriz do material. Esta variável é relacionada com a tensão de escoamento instantânea,  $\sigma_y$ , por uma curva tensão deformação uniaxial. A deformação plástica equivalente,  $\bar{\varepsilon}^p$ , é assumida como variando de acordo com a expressão do trabalho plástico (Gurson, 1975, 1977):

$$(1 - f)\sigma_0 d\bar{\varepsilon}^p = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p \quad (6.55)$$

indicando que o trabalho plástico ocorre somente na matriz do material e não ocorre dissipação de trabalho plástico nos poros.

A variação da fração volumétrica de poros foi assumida como função de duas componentes. A primeira, relacionada com o crescimento dos poros ( $f_g$ ) (Worswick, 1991) e a segunda, relacionada com a nucleação dos poros ( $f_n$ ). Esta última componente é normalmente considerada como existindo devido à nucleação de novos poros por quebra ou descolamento das superfícies de inclusões de segunda fase (Le Roy, 1981; Argon, 1975). Desta forma, escreve-se:

$$df = df_g + df_n \quad (6.56)$$

Embora a matriz tenha sido assumida como satisfazendo a condição de incompressibilidade plástica, em função da existência dos poros, o material mostra, macroscopicamente, uma resposta compressível. A variação da fração volumétrica de poros em virtude do crescimento destes é relacionada à variação total de volume como:

$$df_g = (1 - f)d\varepsilon_{ij}^p \delta_{ij} \quad (6.57)$$

A nucleação de poros foi considerada como sendo controlada pela deformação plástica (Aravas 1987) e variando de acordo com a expressão:

$$df_n = A d\bar{\varepsilon}^p \quad (6.58)$$

Onde  $A$  é definida conforme sugerida por Chu e Needleman (1980):

$$A = \frac{f_N}{s_N \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon^p - \varepsilon_N}{s_N}\right)^2\right). \quad (6.59)$$

Segundo (6.59), a nucleação de novos poros ocorre segundo uma distribuição normal, com valor médio de deformação  $\varepsilon_N$  e desvio padrão  $s_N$ . A variável  $f_N$  representa a fração volumétrica de partículas de segunda fase ou, no caso de materiais sinterizados, em pontos preferenciais de nucleação.

---

---

## Capítulo 7

# IMPLEMENTAÇÃO DOS MODELOS

---

---

Conforme anteriormente citado, o algoritmo de integração baseado na proposta de Aravas (1987) foi implementado no ABAQUS na forma de subrotina de material do usuário. Esta subrotina deve ser responsável pela atualização das tensões, deformações e variáveis de estado, tais como deformação plástica equivalente, tensão de escoamento e porosidade para cada ponto de integração. Os aspectos cinemáticos (ex. rotações) são inicialmente integrados pelo ABAQUS utilizando o algoritmo proposto por Hughes e Winget (1980), para definir o tensor rotação que é aplicado a todas as funções de valor vetorial e tensorial nos pontos de integração. A interface fornece o estado do material no início do incremento de deformação com todos os vetores e tensores propriamente rotacionados assim como a solução cinemática para o incremento. A subrotina do usuário deve, então, atualizar as tensões, variáveis de estado e fornecer o Jacobiano para o incremento atual.



A deformação plástica equivalente,  $\bar{\varepsilon}^p$ , representando o estado de deformações microscópica na matriz do material, é assumida como se relacionando com a tensão de escoamento  $\sigma_y$  por uma curva tensão-deformação uniaxial na forma da equação de Ramberg-Osgood (Lee e Zhang, 1994), representada na figura 7.1, conforme a equação:

$$\frac{\sigma_y}{\sigma_0} = \left( \frac{\sigma_y}{\sigma_0} + \frac{3G\bar{\varepsilon}^p}{\sigma_0} \right)^m \quad (7.1)$$

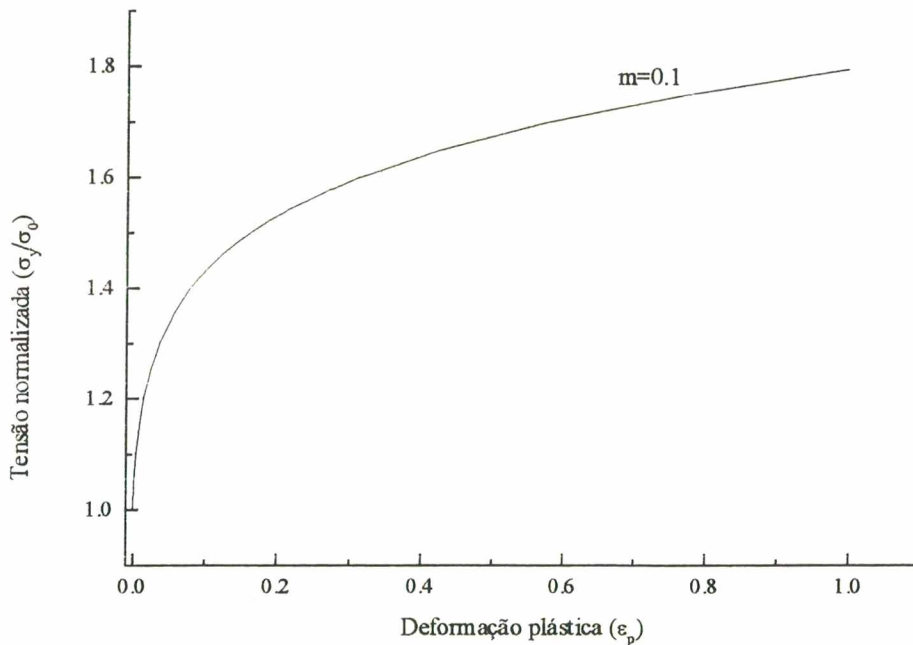


Figura 7.1 - Curva tensão deformação conforme prevista pela equação 7.1.

Para todos os modelos os parâmetros relacionados à curva tensão deformação do material e à nucleação de poros foram mantidos constantes em:  $\sigma_0/E = 1/300$ ,  $m = 0,1$ ,  $\varepsilon_n = 0,3$ ,  $s_N = 0,1$ ,  $f_N = 0,04$ . Para todos os casos a foi considerada uma porosidade inicial de 5%. Todos os modelos foram analisados utilizando-se os critérios de Gurson, Green, Kuhn & Downey, e o critério proposto neste trabalho. Para este último os parâmetros do modelo foram variados para de se avaliar a influência dos parâmetros nos resultados.

## 7.1 - Modelos com um elemento

### a) Cubo submetido a tração hidrostática

Para a simulação do comportamento de um cubo submetido a um carregamento de tração hidrostática, um cubo de 8 nós, com lados de dimensão 1,0, conforme figura 7.2, foi tracionado hidrostaticamente, prescrevendo-se um deslocamento igual a 0,1. O deslocamento foi aplicado em um só passo dividido em, no mínimo, 100 incrementos.

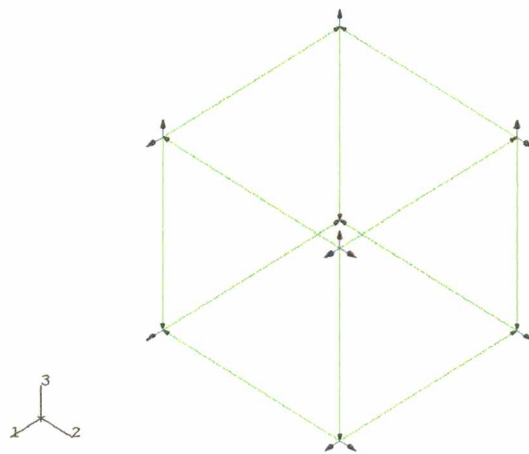


Figura 7.2 - Modelo geométrico e condições de contorno para o cubo submetido à tração hidrostática.

#### a.1) Diversos Critérios

Na figura 7.3 são mostrados os resultados de pressão em função da deformação volumétrica para os critérios da literatura testados. Verifica-se que à medida que a deformação hidrostática aumenta a pressão aumenta linearmente de acordo com uma resposta elástica do material que é igual para todos os critérios testados. Em função da influência da tensão hidrostática nos critérios de escoamento em questão, as tensões aumentam até o ponto em que a pressão é tal que o limite de escoamento do material é atingido, fato que não ocorreria para um critério de escoamento independente da pressão (ex. von Mises). O início do escoamento do material marca o fim do regime linear, dando início a uma diminuição da taxa de aumento da pressão com a deformação, que ocorre até que seja atingido um ponto de máximo. Este ponto indica o momento em que a tensão de escoamento começa a decrescer em função do aumento da

porosidade. Isto acontece porque a tensão de escoamento prevista pela teoria é influenciada por duas variáveis de estado, a tensão de escoamento da matriz, ligada à deformação plástica equivalente pela curva tensão-deformação uniaxial e a porosidade. No modelo em questão, o aumento da deformação plástica equivalente leva ao aumento da tensão de escoamento segundo a curva tensão-deformação fornecida, enquanto o aumento da porosidade leva à sua diminuição. Estes dois efeitos são sobrepostos, e o aparecimento do ponto de máximo indica o momento em que o aumento da porosidade se torna mais significativo no sentido de diminuir a tensão de escoamento do que o efeito da deformação plástica equivalente no sentido de aumentá-la. Este comportamento se repete para todos os critérios implementados, que diferem na intensidade do pico de máximo e no comportamento pós-escoamento. Esta característica pode ser associada à parcela de contribuição da pressão no início do escoamento do material, de forma que os picos mais baixos indicam um maior efeito da.

Com relação à porosidade, verifica-se na figura 7.3 que o aumento da deformação hidrostática até o início do escoamento gera um aumento de volume elástico no material, e, conseqüentemente, sem aumento irreversível de porosidade. Após o início do escoamento, a porosidade aumenta à medida que o material escoar e o cubo aumenta de volume. Nota-se que apesar dos valores de porosidade serem muito próximos, os modelos que levam a maiores valores de porosidade são aqueles que apresentam valores de pressão maiores e à medida que esta diminui, também diminui a porosidade final do material.

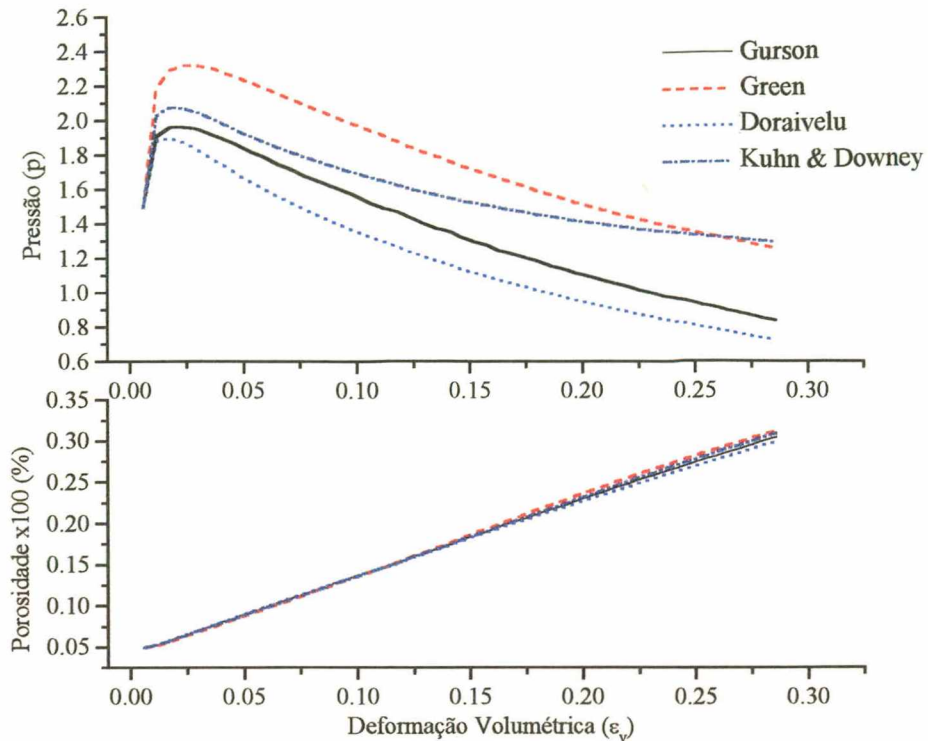


Figura 7.3 - Pressão e porosidade em função da variação volumétrica para os critérios de Gurson, Green, Doraivelu e Kuhn & Downey.

### a.2) Critério proposto

Conforme se verifica na figura 7.4, para um dado conjunto de variáveis do modelo o comportamento da pressão e da porosidade em função da deformação volumétrica concorda qualitativamente com os valores obtidos para os critérios postos na literatura e, da mesma forma que anteriormente, à medida que o escoamento inicia, a resposta deixa de ser linear e tende a um ponto de máximo pelas mesmas razões anteriormente colocadas. Percebe-se claramente que o início do aumento da porosidade é retardado em relação aos critérios reportados pela literatura em função de uma maior persistência do regime elástico. Após o início do escoamento a porosidade aumenta com a deformação seguindo a mesma tendência que os casos expostos.

**a.1.1) Efeito da variação dos parâmetros do modelo nos resultados.**

Na figura 7.4 verifica-se a influência dos parâmetros  $Q_1$ ,  $Q_2$  e  $Q_3$  nos resultados de pressão e porosidade em função da deformação volumétrica para  $\rho_c$ ,  $K$  e  $n$  fixos. Nota-se que à medida que se sai do conjunto de valores para os quais  $f(\rho)$  tem comportamento linear ( $Q_1=0$ ,  $Q_2=2$  e  $Q_3=-1$ ) e se vai em direção aos valores para os quais  $f(\rho)$  tem um comportamento parabólico com derivada igual a zero para  $\rho=1$  ( $Q_1=-4$ ,  $Q_2=8$  e  $Q_3=-3$ ), o pico de pressão se desloca para valores mais altos, indicando que o material apresenta maior tolerância ao aumento da pressão. O aumento da porosidade é afetado da mesma maneira, o que se verifica pelo aumento da região com porosidade constante em função do retardamento do início do escoamento. Com o início do escoamento a porosidade começa aumentando rapidamente e com a continuação da deformação a taxa de aumento da porosidade tende a se estabilizar, de modo que ao final da deformação prescrita verifica-se apenas uma pequena diferença entre os resultados.

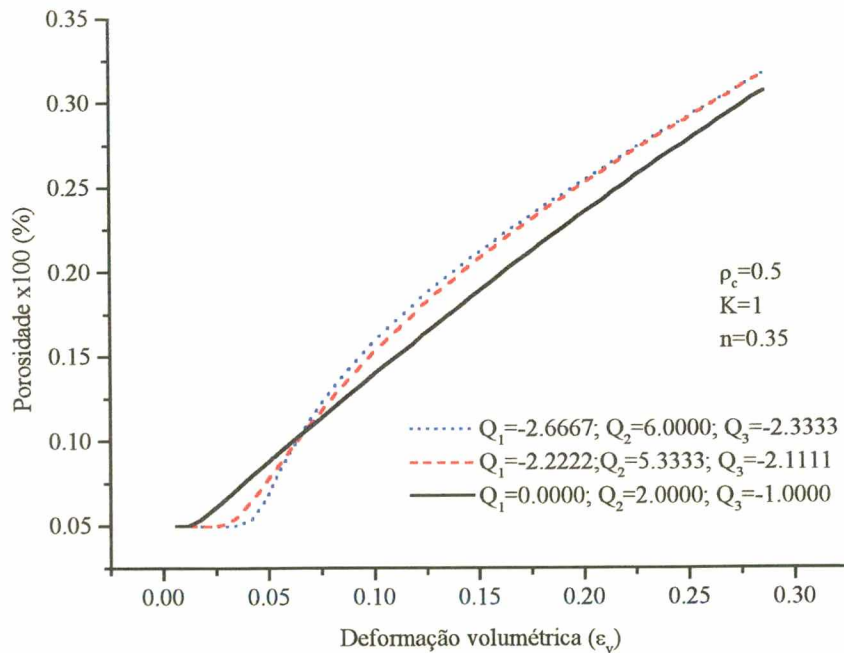
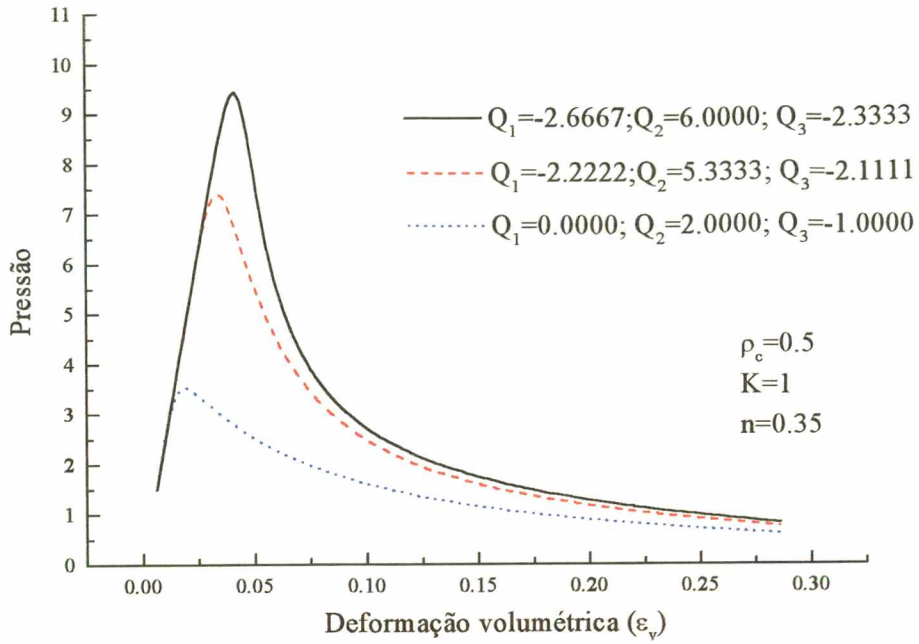


Figura 7.4 - Pressão e porosidade em função da deformação volumétrica para diferentes conjuntos de  $Q_1, Q_2$  e  $Q_3$  e para  $\rho_c = 0.5, K = 1$  e  $n = 0.35$ .

A figura 7.5 representa as respostas em pressão e porosidade em função da deformação volumétrica para diferentes densidades críticas ( $\rho_c$ ). Conforme visto, a variação do valor de  $\rho_c$  deve ser acompanhada por uma mudança nos valores de  $Q_1$ ,  $Q_2$  e  $Q_3$  de forma que estes acompanhem a nova definição da densidade crítica. Neste sentido, foi fixado que para a variação desta a função  $f(\rho)$  fosse linear ( $Q_1 = 0$ ), e com base nesta premissa os valores de  $Q_2$  e  $Q_3$  foram obtidos. Verifica-se, então, na referida figura, que o aumento de  $\rho_c$  provoca uma diminuição dos níveis de pressão previstos, confirmando que para maiores densidades críticas o material apresenta uma maior sensibilidade ao aumento da pressão. Em relação à porosidade, verifica-se que a menor influência da pressão leva a menores porosidades, já que, no modelo utilizado, a maior parcela da porosidade gerada é devida ao crescimento de poros. Esta parcela, por sua vez, é gerada pelas deformações hidrostáticas que são diretamente ligadas às tensões hidrostáticas. Desta forma, à medida que os níveis de pressão aumentam, deve-se esperar que a porosidade devida ao crescimento dos poros seja maior. Esta tendência é confirmada nas curvas de porosidade em função da deformação hidrostática.

As curvas de pressão e porosidade em função da deformação volumétrica para diferentes expoentes  $n$  são mostradas na figura 7.6. Verifica-se nesta figura que a tendência ao aparecimento do pico de pressão se mantém pelos mesmos motivos anteriormente expostos assim como a tendência ao aumento da porosidade. Observa-se porém, que para o caso em que os fatores  $Q_1$ ,  $Q_2$ ,  $Q_3$ ,  $\rho_c$  e  $K$  são mantidos constantes, a variação do expoente  $n$  não propicia um efeito marcante nas respostas, tanto em pressão como em porosidade, indicando um fraco efeito desta variável nos resultados fornecidos pelo modelo.

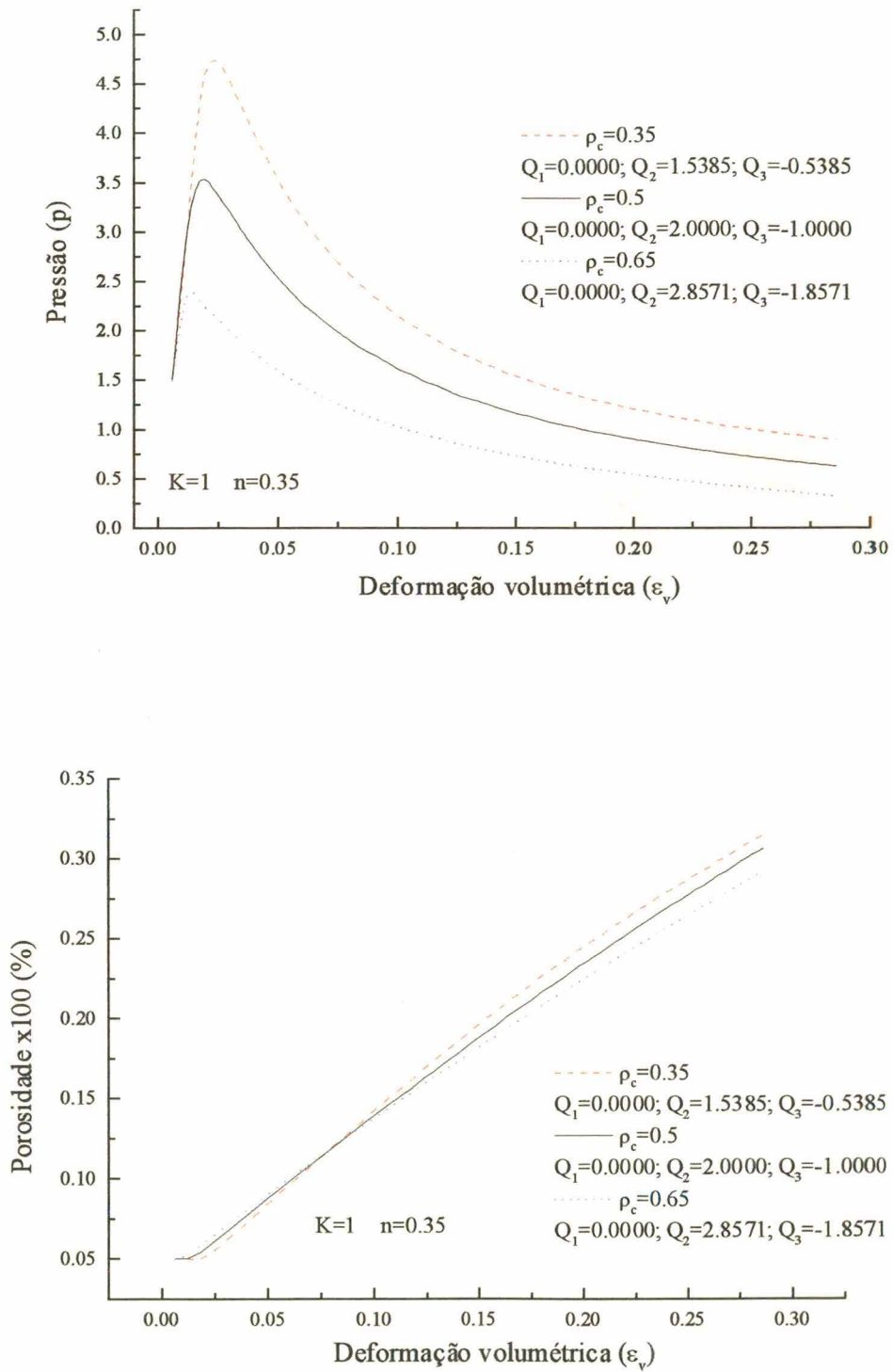


Figura 7.5 - Pressão e porosidade em função da deformação volumétrica para diferentes condições de densidade crítica ( $\rho_c$ ) para  $K$  e  $n$  constantes.



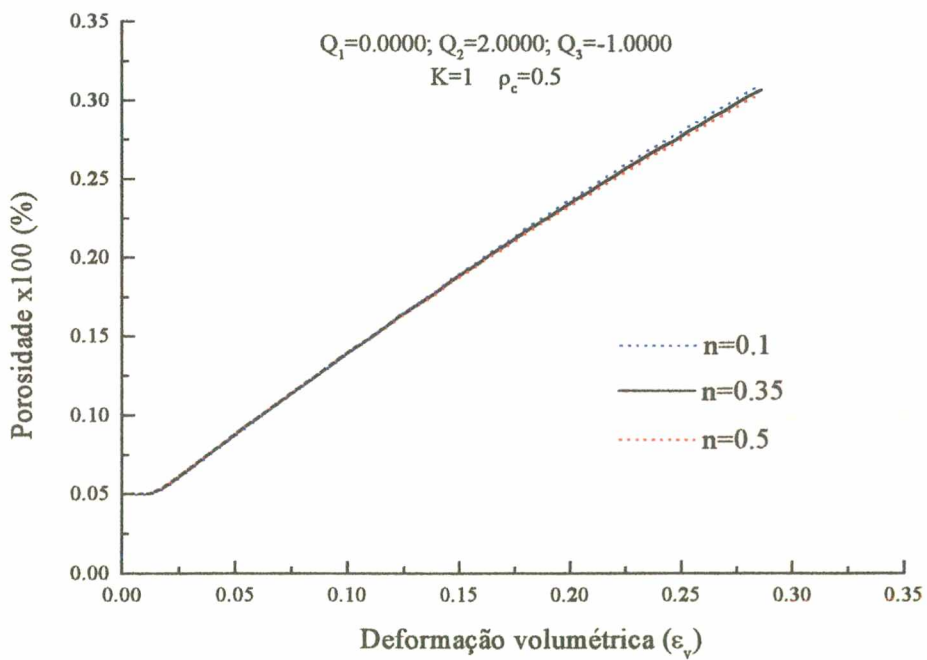
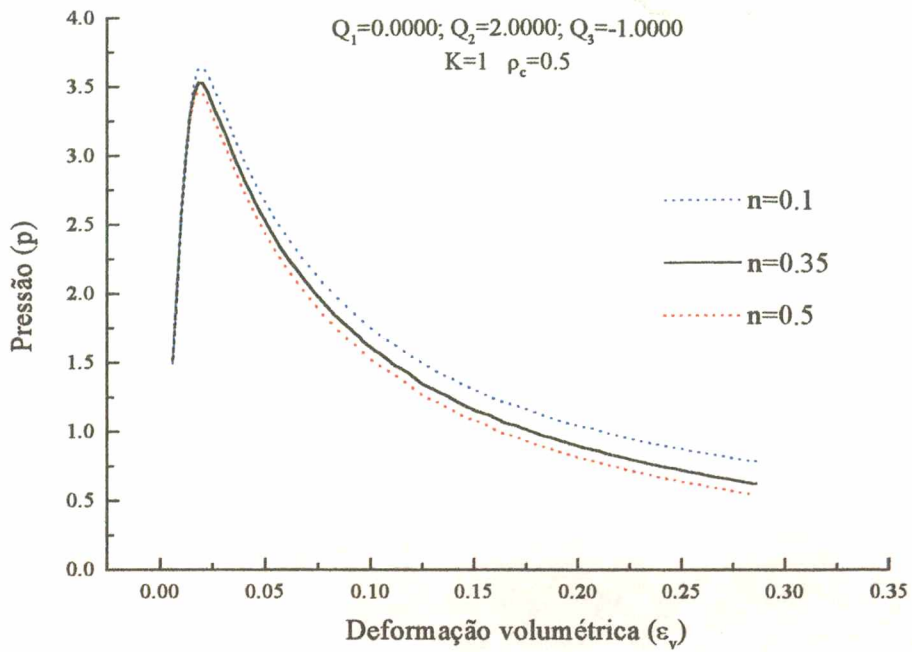


Figura 7.6 - Influência do expoente  $n$  na pressão e porosidade em função da deformação volumétrica.

O parâmetro  $K$ , no modelo em questão, tem por objetivo espelhar a influência das variáveis relacionadas ao tamanho médio, distribuição de tamanho e forma de poros. Esta influência ocorre no sentido destas variáveis atuarem como "concentradores de tensão" (German, 1998) abaixando a tensão de escoamento do material. Diante disso, propõe-se que este coeficiente tenha um valor máximo igual a 1 e, à medida que estas variáveis atuem no sentido de deteriorar as propriedades do material, este valor diminua. O efeito da variação de  $K$  para um determinado conjunto de valores  $Q_1$ ,  $Q_2$ ,  $Q_3$ ,  $\rho_c$  e  $n$  pode ser avaliado na figura 7.7, onde se verifica que a tendência de aparecimento do pico de pressão se mantém. Observa-se porém que à medida que o valor de  $K$  diminui, a curva de pressão em função da deformação volumétrica sofre uma "translação" para baixo, indicando que menores valores de  $K$  levam a uma maior influência da pressão no comportamento do material no início e após o escoamento. Novamente, quanto maior o nível da pressão no material, maior a quantidade de poros obtida no final da deformação. No entanto, os níveis de porosidade são muito próximos para os três casos simulados.

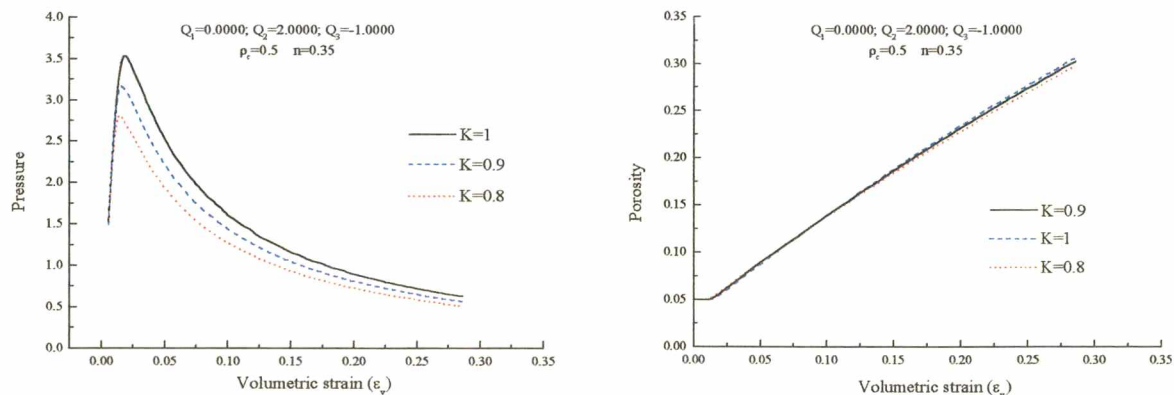


Figura 7.7 - Influência da variação do parâmetro  $K$  na pressão e na porosidade em função da deformação volumétrica.

### a.1.2) Comentários finais e conclusões sobre o modelo de um elemento submetido a deslocamento hidrostático prescrito

Para o modelo de um elemento submetido a tração hidrostática foi possível verificar uma diferença significativa nos resultados de pressão em função da deformação volumétrica para

todas as variáveis testadas, à exceção do expoente  $n$ . Por outro lado, os resultados de porosidade em função da deformação volumétrica, apesar de coerentes com os resultados de pressão, não apresentaram diferenças muito significativas quando da variação dos diferentes parâmetros do modelo. Pode-se dizer que este comportamento é resultado da prescrição do deslocamento em detrimento da tensão, o que leva a uma variação volumétrica igual para todos os modelos e, conseqüentemente, a porosidade assume valores muito próximos para os casos testados.

### ***b) Tensão uniaxial - Cubo***

Para o modelo de cubo tracionado uniaxialmente, modelado com um elemento de 8 nós, teve um deslocamento prescrito de 30% do comprimento da aresta. O deslocamento prescrito, como no caso do cubo submetido a deslocamento hidrostático, foi aplicado em um só passo e dividido em um mínimo de 100 incrementos (figura 7.8).

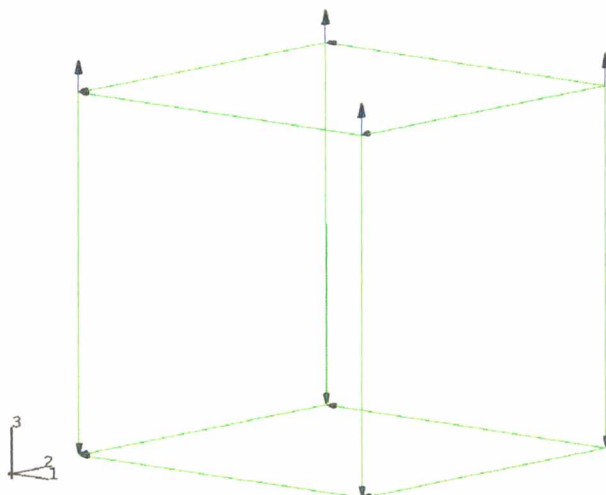


Figura 7.8 - Modelo sólido do cubo submetido a deformação uniaxial.

Na figura 7.9 são apresentados os resultados de tensão e porosidade em função da deformação do material. Destaca-se nesta figura o fato de o modelo resolvido com o critério de Doraivelu não resolver o problema até 100% do deslocamento prescrito. A não convergência global do modelo ocorrida naquele ponto se deveu à não convergência das variáveis de estado no algoritmo de integração do modelo de material.

### b.1) Diversos Critérios

Ainda na figura 7.9 verifica-se que os resultados tensão seguem uma tendência semelhante à curva tensão deformação do material 100% denso, diferindo no entanto, nos níveis de tensão previstas pelos diferentes tipos de critério. Ressalta-se o fato de que as respostas fornecidas pelos critérios de Gurson, Green e Doraivelu, para este modelo, foram muito semelhantes entre si, diferindo sobremaneira dos resultados do critério de Kuhn & Downey. Para os resultados de porosidade em função da deformação, entretanto, verifica-se uma boa concordância dos modelos de Gurson e Green, diferindo dos resultados fornecidos pelos modelos de Kuhn & Downey e de Doraivelu, que concordam entre si.

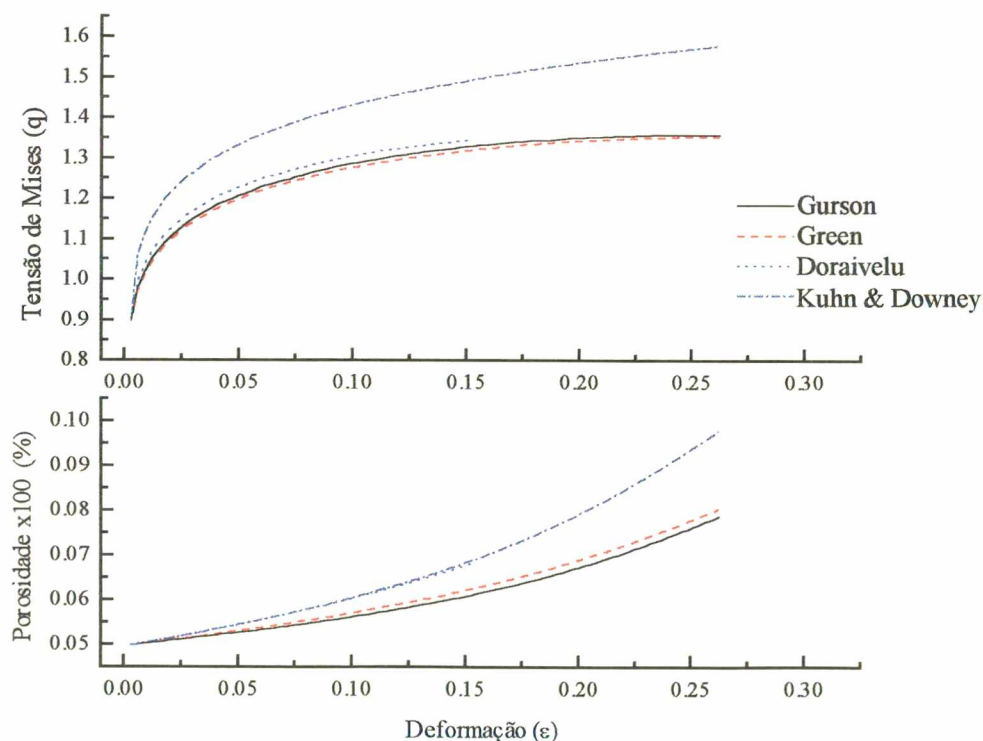


Figura 7.9 - Tensão e porosidade em função da deformação para os modelos de Gurson, Green, Kuhn & Downey e Doraivelu.

## b.2) Critério Proposto

Para o modelo proposto foram consideradas diferentes condições com variações dos conjuntos de parâmetros do modelo. Na figura 7.10, pode-se avaliar a influência da variação  $Q_1$ ,  $Q_2$ ,  $Q_3$  para  $K$ ,  $\rho_c$  e  $n$  mantidos constantes nos resultados de tensão e porosidade em função da deformação uniaxial do modelo de cubo de 8 nós. Verifica-se ali que à medida que se varia  $Q_1$ ,  $Q_2$  e  $Q_3$  dos valores para os quais  $f(\rho)$  tem um comportamento linear para aqueles com os quais  $f(\rho)$  tem comportamento de parábola com derivada igual a zero para  $\rho = 1$ , os níveis de tensão previstos pelo modelo aumentam, indicando o início do escoamento a tensões mais altas e uma evolução da deformação plástica a níveis de tensão superiores. Este comportamento indica que o modelo se torna menos suscetível à pressão quando se sai de  $f(\rho)$  linear para parabólica. Em relação à porosidade, verifica-se que o aumento da influência da pressão na resposta plástica do material levou a níveis de porosidade maiores, como foi o caso para  $f(\rho)$  linear.

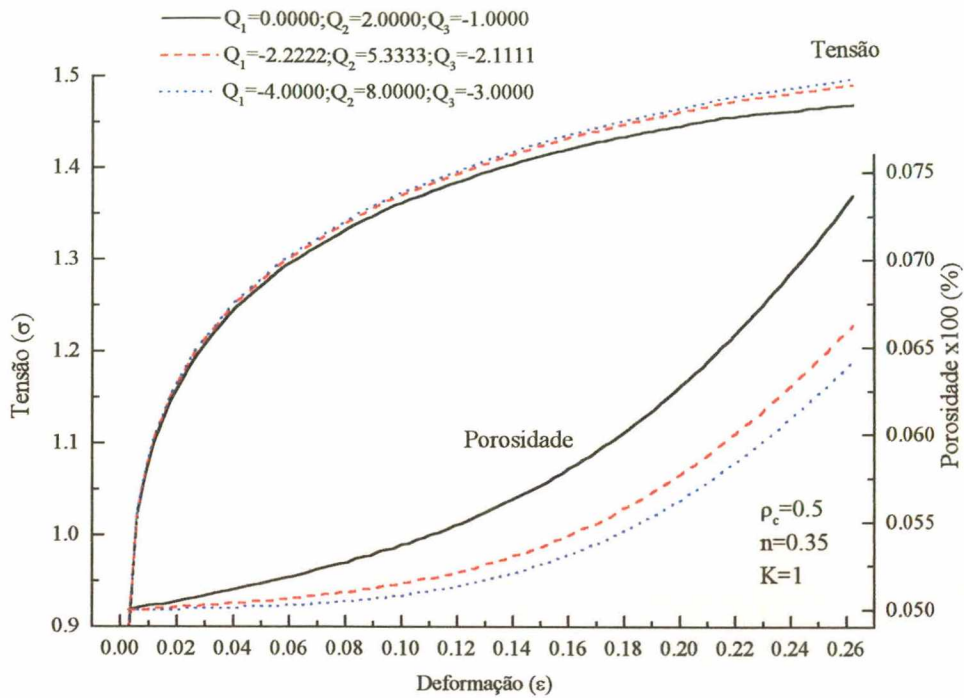


Figura 7.10 - Tensão e porosidade em função da deformação aplicada para diferentes conjuntos de  $Q_1$ ,  $Q_2$  e  $Q_3$  para  $K$ ,  $\rho_c$  e  $n$  constantes.

Na figura 7.11, pode-se avaliar as respostas de tensão e porosidade em função da deformação aplicada. Nosta-se neste caso que o aumento da sensibilidade à pressão provocado pelo aumento da densidade crítica, provoca, à medida que a deformação aumenta, um estado de tensões mais baixo e uma maior porosidade tanto em valor absoluto como em taxa de aumento. O estado de tensões mais baixo para os casos de maior influência da porosidade pode ser associado, neste caso, à contribuição da componente deviatórica para o início do escoamento do material, que se soma ao efeito da componente hidrostática, que no caso do modelo anterior era a única existente. Neste sentido, o material tem o início do escoamento a níveis de tensão mais baixos para situações onde o material é mais sensível à influência da pressão. Apesar disso, a ocorrência de maior porosidade à medida que o efeito da pressão aumenta se mantém da mesma forma que anteriormente.

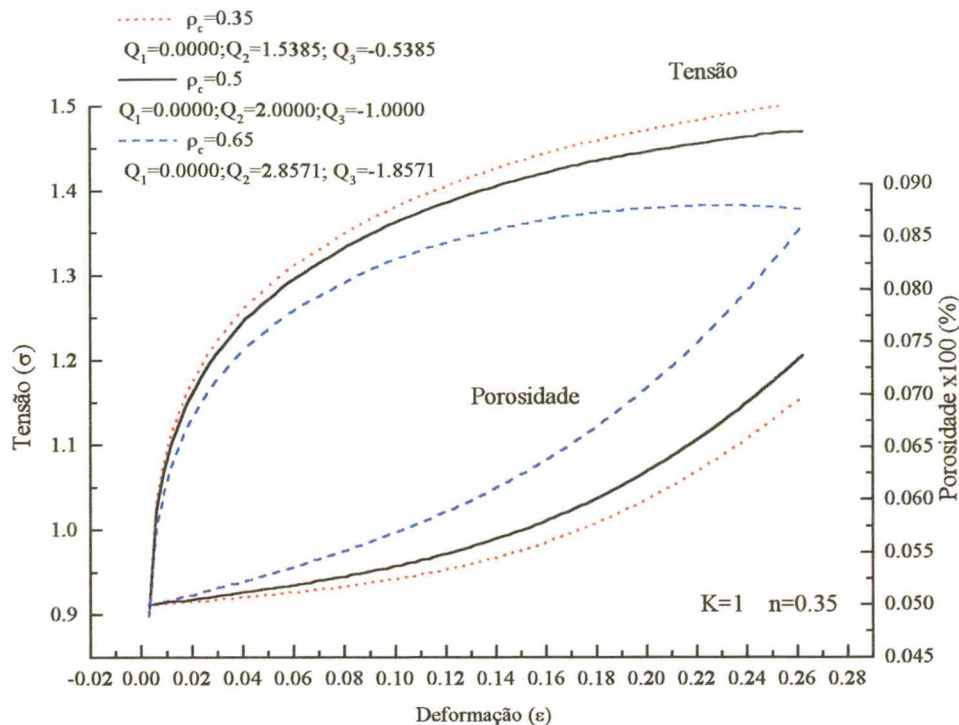


Figura 7.11 - Tensão e porosidade em função da deformação aplicada para diferentes valores de  $\rho_c$  com  $K$  e  $n$  constantes.

Na figura 7.12 são mostradas as curvas de tensão e porosidade em função da deformação para diferentes coeficientes  $K$  considerando  $Q_1, Q_2, Q_3, \rho_c$  e  $n$  constantes. Verifica-se que à medida que o coeficiente  $K$  diminui, indicando uma condição de maior "concentração de tensões" causada por uma configuração mais crítica de porosidade (por exemplo, poros grosseiros com forma irregular), o nível de tensões previsto pelo modelo cai acompanhado pela porosidade. Este resultado é coerente com o fato de que uma microestrutura mais desfavorável (com porosidade irregular) propiciará o início do escoamento a níveis de tensões mais baixos. As tensões mais baixas levarão a uma menor porosidade e, no caso de uma falha, é de se esperar que o material com microestrutura mais irregular apresente menor possibilidade de crescimento e nucleação de poros, de forma que em relação a um material com microestrutura mais favorável, o primeiro deverá apresentar uma porosidade mais baixa.

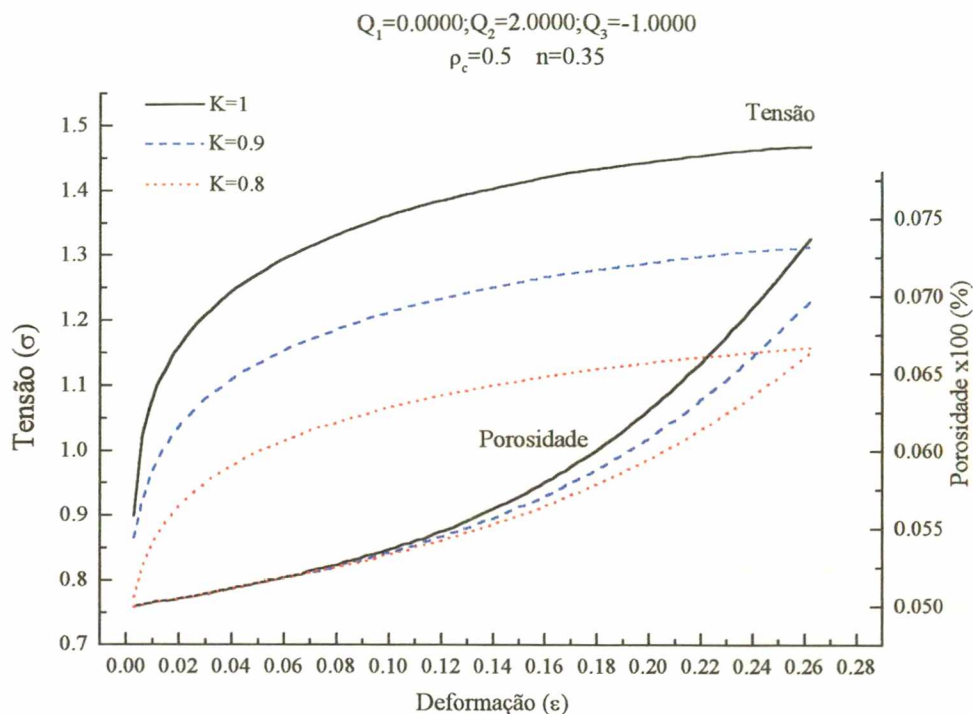


Figura 7.12 - Tensão e porosidade em função da deformação aplicada para diferentes valores de  $K$  para  $Q_1, Q_2, Q_3, \rho_c$  e  $n$  constantes.

Na figura 7.13 são mostrados os resultados de tensão e porosidade em função da deformação para diferentes valores de  $n$  para  $Q_1, Q_2, Q_3, \rho_c$  e  $K$  constantes. Verifica-se que o aumento da influência da pressão provocado pelo aumento de  $n$  leva a uma diminuição do nível de tensão e a uma diminuição da porosidade prevista. Pode-se verificar ainda que, da mesma forma que no caso de deslocamento hidrostático, a variação de  $n$  não acarretou mudanças muito relevantes em termos de porosidade.



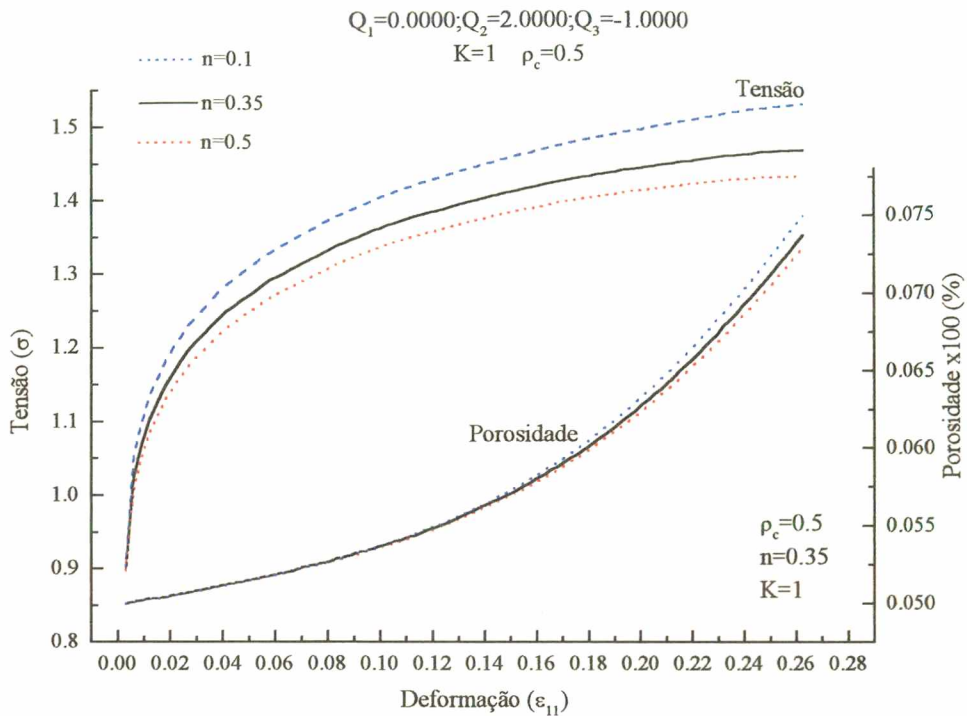


Figura 7.13 - Tensão e porosidade em função da deformação aplicada para diferentes valores de  $n$  para  $Q_1, Q_2, Q_3, \rho_c$  e  $K$  constantes.

## 7.2 - Modelos com mais de um elemento

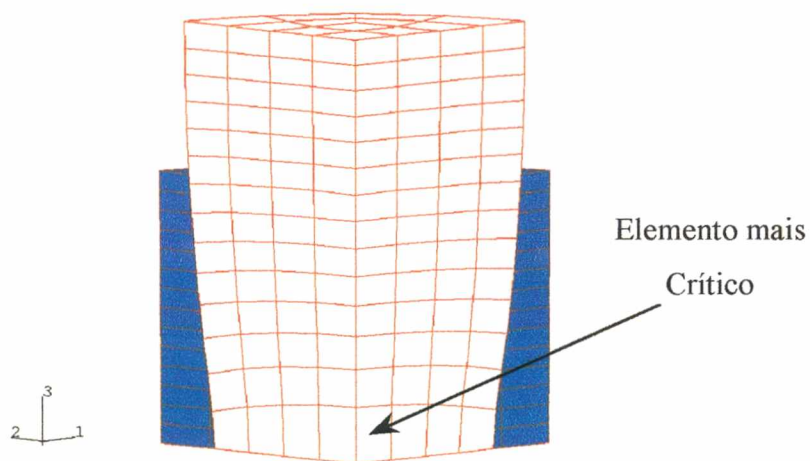
### a) Barra cilíndrica tracionada

A figura 7.14a ilustra o modelo de uma barra cilíndrica tracionada antes e após a deformação. Para este caso foi considerada axissimetria do corpo de prova cilíndrico que teve somente um oitavo modelado. Para fins de modelo considerou-se, um corpo de prova com 5 mm de diâmetro, de forma que o oitavo modelado foi considerado com 2,5 mm de raio e 2,5 mm de altura. A este modelo foi aplicado um deslocamento prescrito de 1,43 mm em um só passo, dividido em no mínimo de 100 incrementos. Deve-se atentar que todas as grandezas foram consideradas em valores absolutos, desconsiderando assim as suas unidades. A tabela 7.1 estabelece uma relação entre deslocamento e deformação verdadeira para o modelo simulado e deve ser considerada somente como uma referência em virtude deste tipo de relação não ser

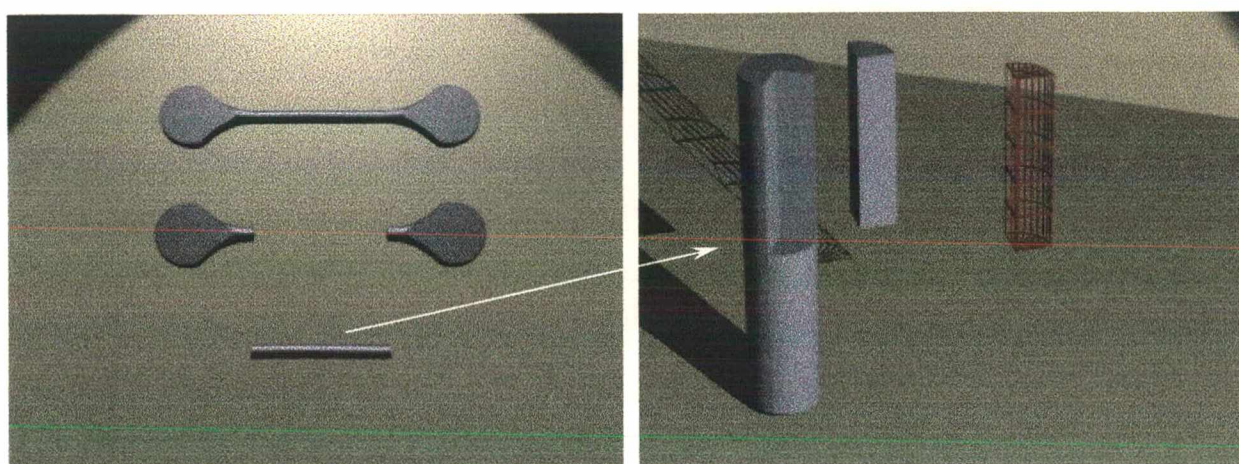
verdadeira após o início da estrição, e em função dos diferentes modelos simulados apresentarem o início da estrição em estágios diferentes da simulação.

Tabela 7.1 - Relação entre deslocamento e deformação verdadeira para o modelo do corpo de prova de tração uniaxial.

|   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|---|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Fração aplicada do deslocamento prescrito (%) | 0.00 | 0.10 | 0.20 | 0.30 | 0.40 | 0.50 | 0.60 | 0.70 | 0.80 | 0.90 | 1.00 |
| Deformação verdadeira                         | 0.00 | 0.06 | 0.11 | 0.16 | 0.21 | 0.25 | 0.30 | 0.34 | 0.38 | 0.42 | 0.45 |



(a)



(b)

Figura 7.14 - (Continuação) Modelo de cilindro submetido à tração uniaxial (antes (azul) e após a deformação). (a); e fração da barra submetida à tração uniaxial (b).

Na figura 7.15 são mostradas as curvas de evolução tensão equivalente de Mises, da pressão e da porosidade, em função da fração do deslocamento prescrito aplicado ao modelo. Verifica-se que para os modelos resolvidos com o critério de Gurson, Green e Doraivelu, ocorre uma tendência de aumento, estabilização e queda da tensão equivalente de Mises, com o aumento da deformação. Já para o critério de Kuhn, somente uma tendência de aumento é constatada. Para os primeiros, essa queda deve ser associada ao aumento da porosidade, que provoca uma diminuição da tensão equivalente para o escoamento. Em relação à pressão, observa-se o aparecimento de um comportamento não monotônico em relação ao aumento da fração aplicada do deslocamento prescrito, como pode ser notado pela tendência ao aparecimento de um pico. Esta tendência é explicada pelo aumento da influência da porosidade, de forma a propiciar que as tensões hidrostáticas tenham sua parcela de contribuição na deformação aumentada em relação à tensão equivalente de Mises (deviatórica). Este aumento de influência da porosidade tem como consequência direta uma maior compressibilidade do material.

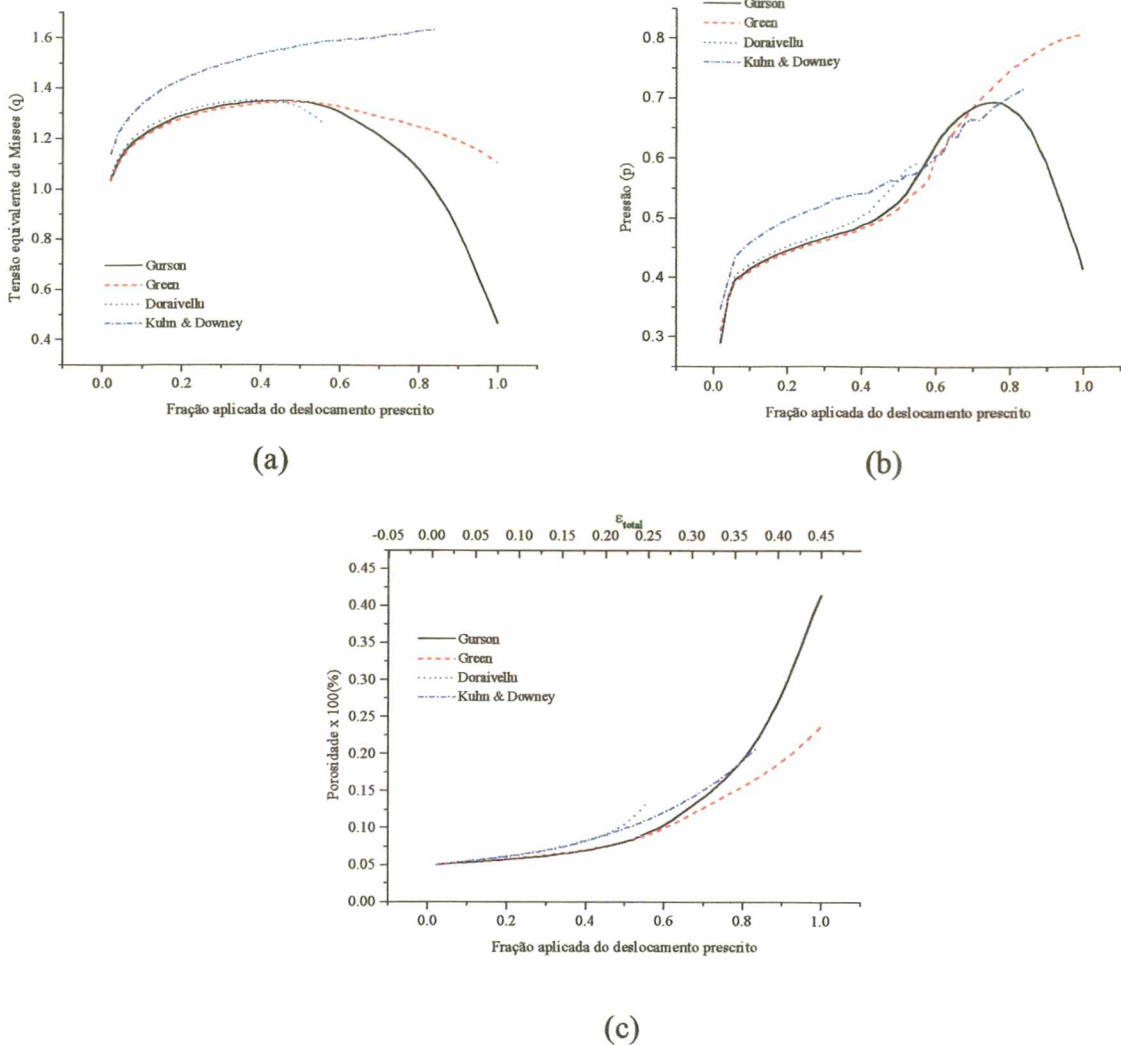


Figura 7.15 - Tensão equivalente de Mises (a), pressão (b) e porosidade (c) em função da fração aplicada do deslocamento prescrito para os critérios de Gurson, Green, Doraivelu e Kuhn & Downey.

Na seqüência de figuras 7.16, 7.17 e 7.18 é possível avaliar a evolução da tensão equivalente de Mises, pressão e porosidade, para diferentes condições do modelo proposto. Nota-se nas figura 7.16 e 7.17 que, para as variáveis em questão, o comportamento previsto pelo modelo proposto é qualitativamente comparável aos resultados obtidos para os modelos propostos na literatura os critérios apresentados na literatura. Verifica-se que à medida que os parâmetros do referido critério são variados no sentido de aumentar a influência da pressão no modelo, a quantidade de poros resultante, para o mesmo deslocamento aplicado, é maior (Figura

7.18) e, em função disso, ocorre um "amolecimento" do material levando a níveis de pressão e tensão deviatória menores.

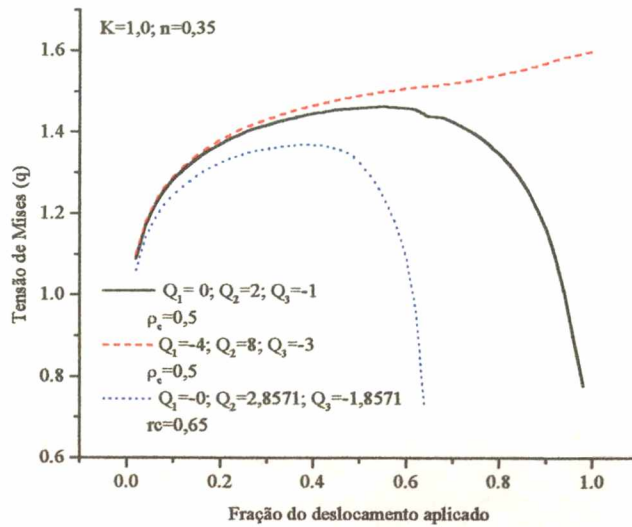


Figura 7.16 - Tensão equivalente de Mises em função do deslocamento aplicado para diferentes condições do modelo proposto

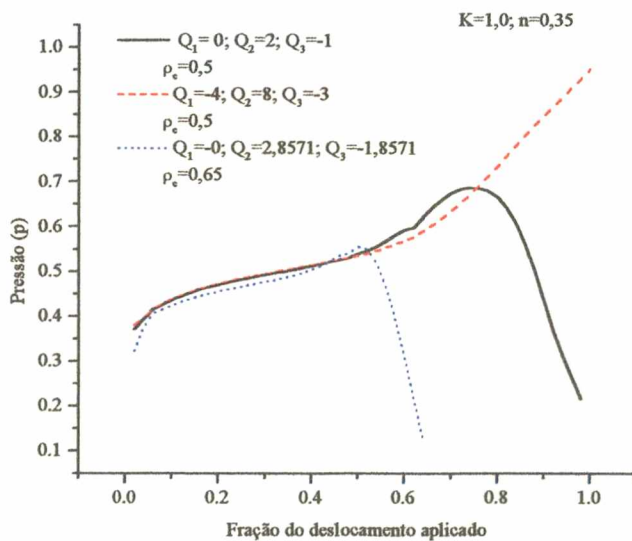


Figura 7.17 - Pressão em função do deslocamento aplicado para diferentes condições do modelo proposto

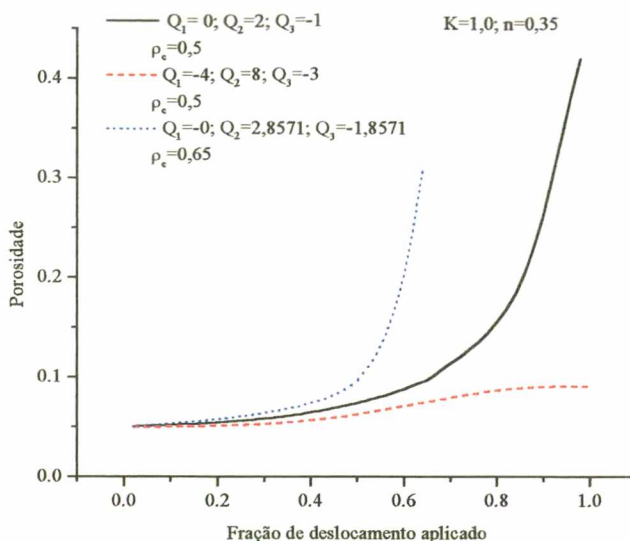


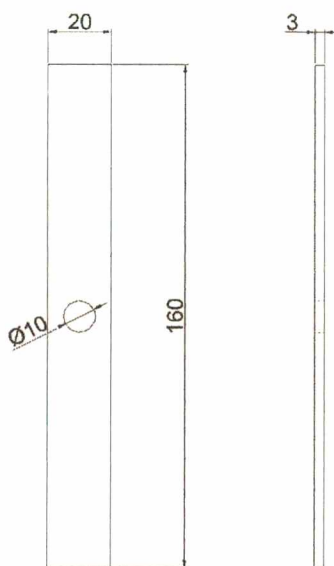
Figura 7.18 - Porosidade em função do deslocamento aplicado para diferentes condições do modelo proposto

### b) Barra com furo

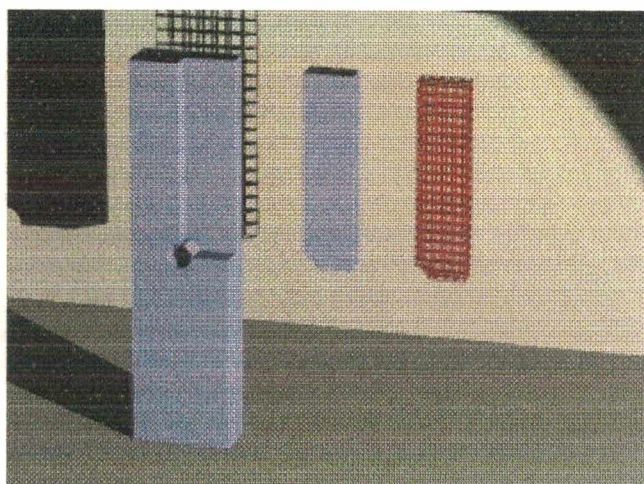
A forma e as dimensões do modelo de barra com furo considerado neste caso são mostradas na figura 7.19 que tem a área mais sujeita à solicitação apresentada antes e após a deformação na figura 7.20. Para este caso foi modelado 1/8 da barra que foi submetido a um deslocamento prescrito de 1 mm. Este deslocamento foi aplicado dividido em no mínimo de 100 incrementos.

Nas figuras 7.21, 7.22 e 7.23 observa-se a distribuição da tensão equivalente de Mises, pressão e porosidade para o critério de Gurson na região mais crítica do modelo simulado. Estas figuras ilustram o resultado típico obtido para os diferentes critérios, destacando as regiões de maiores valores de tensão deviatorica, as regiões onde os valores de pressão são compressivos e trativos e ainda os locais de maior porosidade no material. Além disso, é possível, interpretando-se as referidas figuras, concluir sobre a forma final esperada para um corpo de prova submetido a solicitações semelhantes às prescritas no modelo. Deve-se ressaltar que, para fins de interpretação, os valores de pressão apresentados pelo ABAQUS são reportados segundo um sistema de coordenadas que considera tensões hidrostáticas trativas aquelas com sinal negativo.

Considerando-se o elemento mais crítico (assinalado na figura 7.23) e avaliando-o em relação à evolução da tensão equivalente de Mises, pressão e porosidade, em função da evolução do deslocamento prescrito para os critérios de Gurson, Geen, Kuhn & Downey, Doraivelu, além do critério proposto. Os gráficos obtidos são mostrados nas figuras 7.24 a 7.29.



(a)



(b)

Figura 7.19 - Dimensões da barra com furo (a); fração do corpo de prova modelado (b).

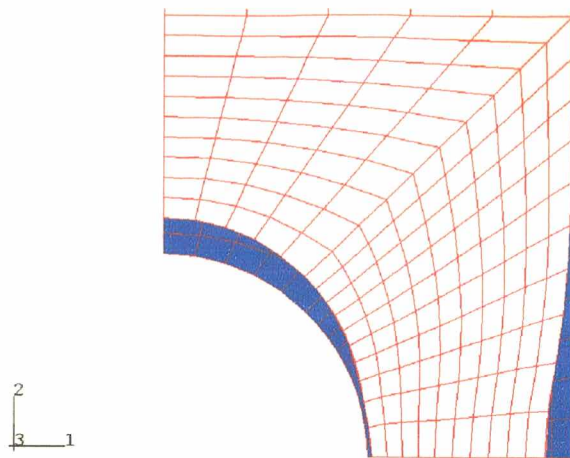


Figura 7.20 - Detalhe do modelo de barra com furo mostrado antes (azul) e depois da deformação.

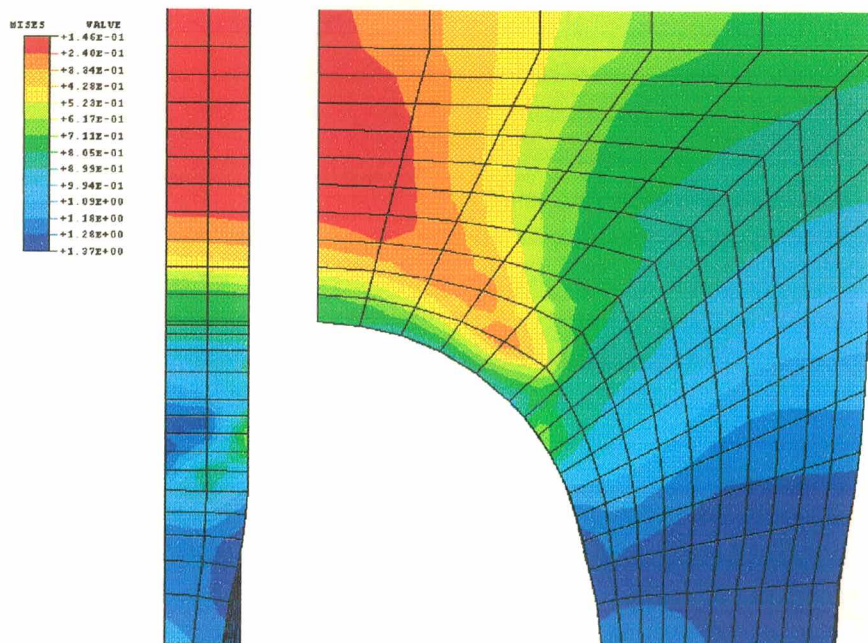


Figura 7.21 - Mapa da tensão equivalente de Mises em um detalhe do modelo de barra com furo.



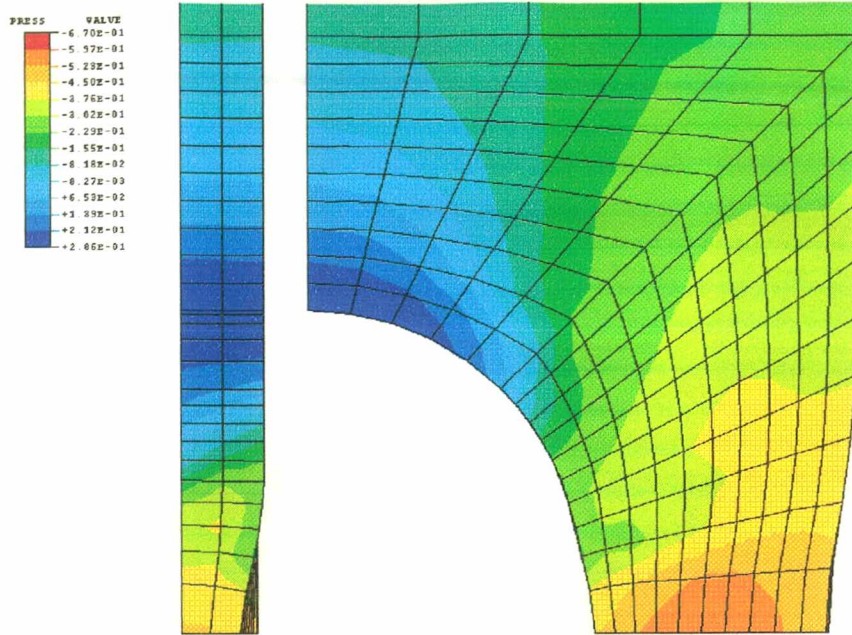


Figura 7.22 - Mapa da pressão em um detalhe do modelo de barra com furo.

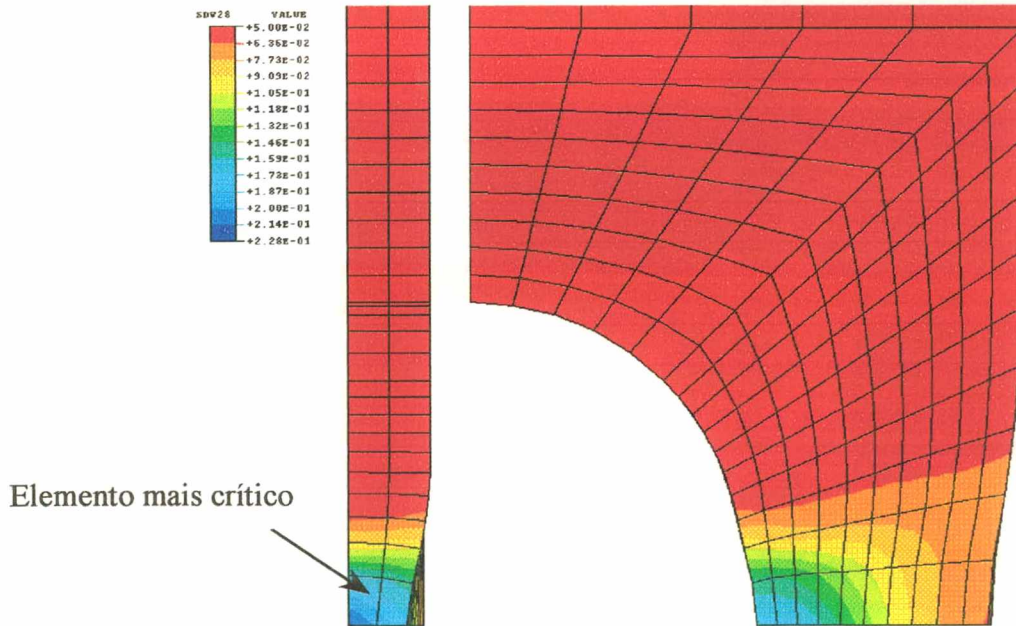


Figura 7.23 - Mapa da porosidade em um detalhe do modelo de barra com furo.

Na figura 7.24 são mostrados os resultados de tensão equivalente de Mises em função da fração de deslocamento prescrito aplicado para os critérios de Gurson, Green, Kuhn & Downey e de Doraivelu. Os resultados mostram um comportamento coerente com os modelos anteriores,

apresentando uma região de resposta linear seguida pelo início da plastificação, caracterizada por uma menor taxa de aumento da tensão em função da deformação. Este aumento ocorre até que seja atingido o pico de tensão deviatórica. Após este ponto, com o aumento da porosidade, que permite uma maior contribuição da pressão para o escoamento do material, e conseqüentemente o valor da tensão equivalente de Mises diminui. Verifica-se na mesma figura que os critérios de Gurson, Green e de Doraivelu apresentam uma boa concordância até aproximadamente 50% do deslocamento prescrito. O critério de Kuhn, porém, apresenta tensão equivalente de Mises e pressão (7.25) situando-se em um patamar superior aos outros critérios.

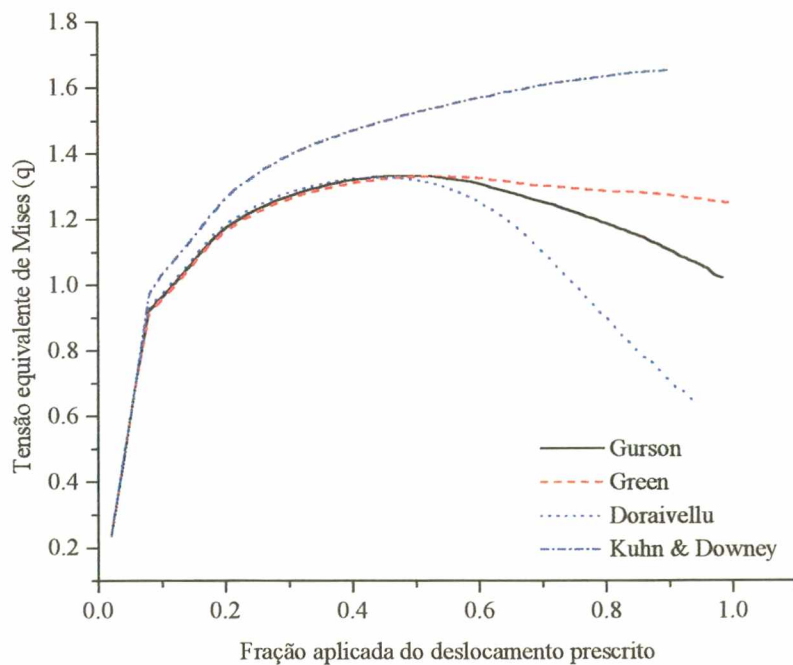


Figura 7.24 - Tensão de Mises em função do deslocamento prescrito para os critérios propostos na literatura.

Na figura 7.25 são apresentados os valores de pressão em função do deslocamento prescrito para os mesmos critérios da figura anterior. Novamente existe a semelhança de resultados entre os critérios de Gurson, Green e Doraivelu que ocorre desde o início do escoamento até aproximadamente 70% do deslocamento prescrito, valor a partir do qual o valor de pressão prevista pelo critério de Doraivelu começa a cair. Na figura 7.26, verifica-se os valores de porosidade são monotonicamente crescentes para os diferentes critérios, indicando

uma tendência de aumento à medida que a influência da pressão no início do escoamento aumenta para os diferentes critérios, o que é caracterizado por tensão equivalente de Mises e pressão mais baixas.

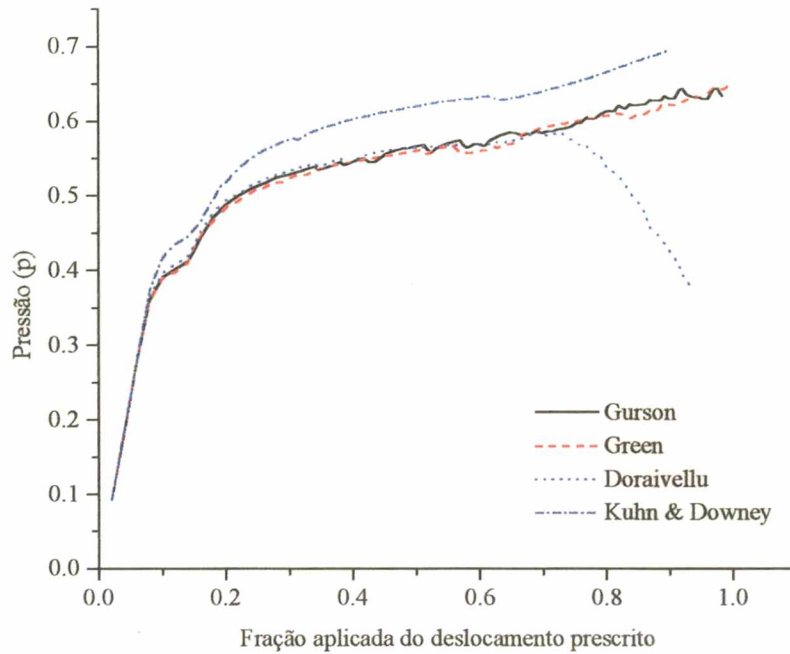


Figura 7.25 - Pressão em função do deslocamento prescrito para os critérios propostos na literatura.

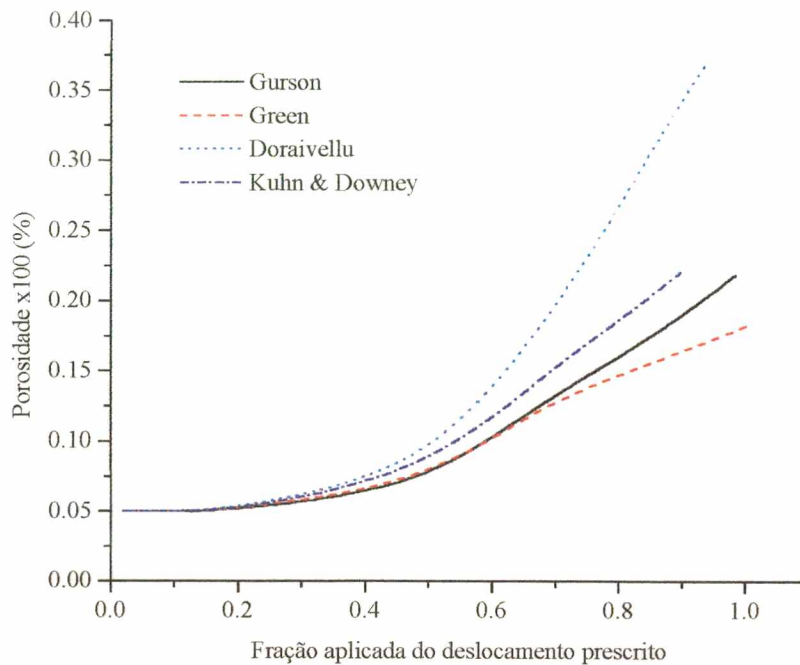


Figura 7.26 - Porosidade em função do deslocamento prescrito para os critérios propostos na literatura.

Nas figuras 7.27 a 7.29 são mostrados os resultados de tensão equivalente de Mises, pressão e porosidade em função da fração do deslocamento prescrito aplicado para diferentes condições do critério de escoamento proposto. Constata-se nas figuras em questão que o comportamento previsto para o modelo proposto considerando as diferentes condições simuladas apresentam as mesmas tendências que os casos propostos pela literatura. Nota-se de fato que, qualitativamente, o critério proposto reproduz as tendências resultantes da aplicação dos modelos apresentados nas figuras 7.24 a 7.27. Verifica-se que as variações nos resultados são decorrentes à mudança dos parâmetros no sentido de aumentar a influência da pressão no escoamento do material e que os resultados previstos pelos critérios apresentados na literatura, à exceção do critério de Kuhn & Downey são passíveis de serem englobados pelos resultados do modelo proposto.

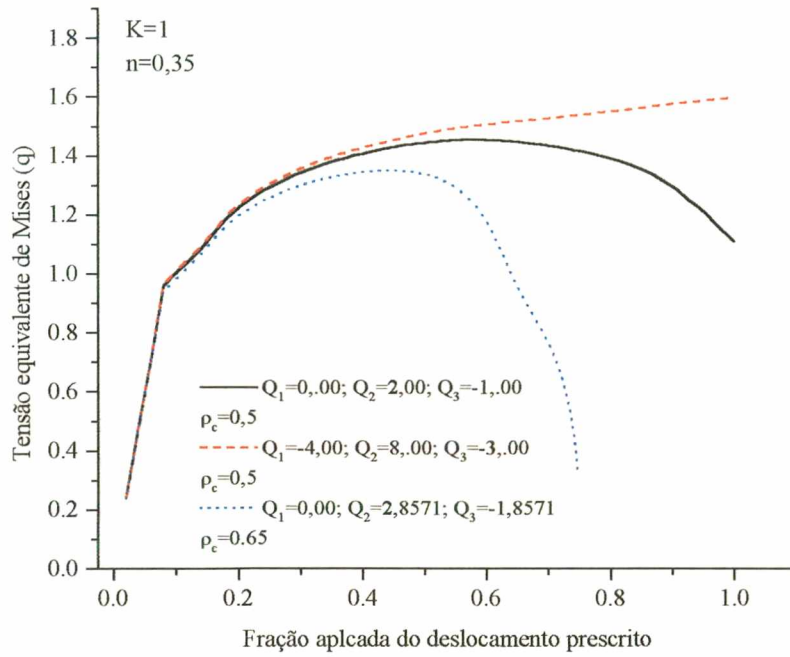


Figura 7.27 - Tensão de Mises em função do deslocamento prescrito para o critério proposto.

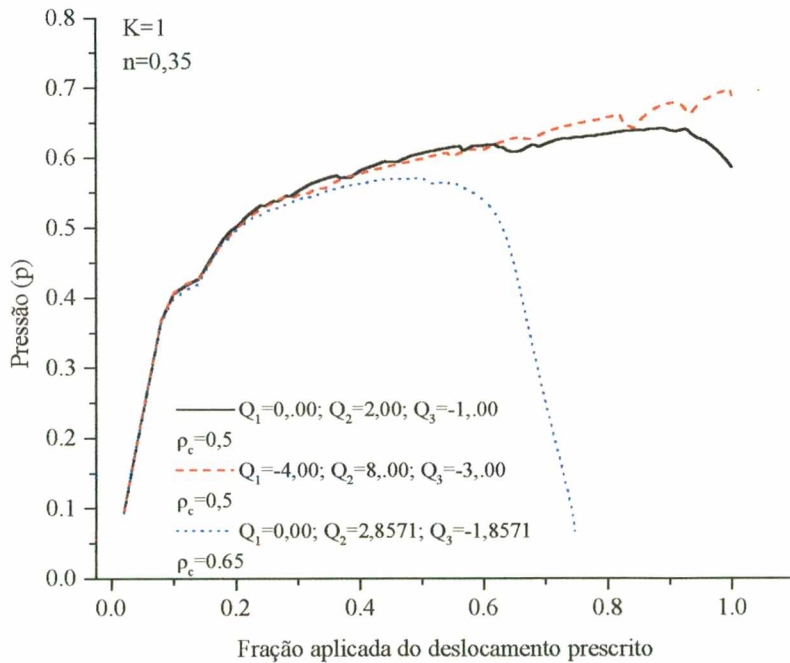


Figura 7.28 - Pressão em função do deslocamento prescrito para o critério proposto.

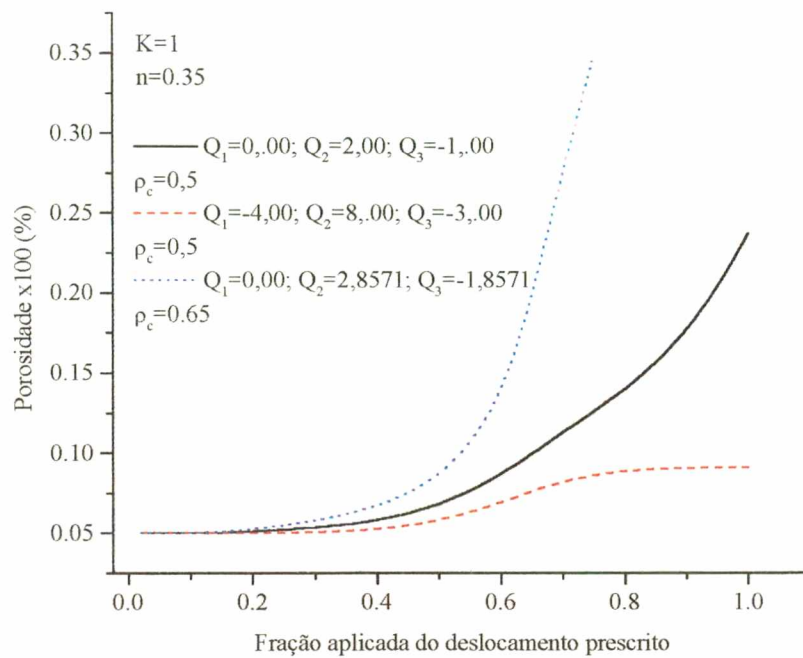


Figura 7.29 - Porosidade em função do deslocamento prescrito para o critério proposto.

---

---

# CONCLUSÕES

---

---

- O algoritmo de integração apresentado se mostrou adequado à solução dos problemas abordados neste trabalho e permitiu a implementação das teorias de plasticidade para materiais porosos proposta por Green, Guerson, Kuhn & Downey, Doraivelu e o critério proposto via método dos elementos finitos considerando a evolução de duas variáveis de estado, quais sejam, deformação equivalente e porosidade do material.
- O modelo proposto se apresentou flexível e adequado no sentido de ser implementado via método dos elementos finitos e de aplicação na simulação numérica de componentes mecânicos porosos submetidas a solicitações que os levem à plastificação.
- O modelo proposto, através da variação dos parâmetros de material incluídos na formulação mostrou a possibilidade de cobertura de uma ampla gama de resultados passíveis de serem obtidos pela utilização de diferentes teorias da plasticidade anteriormente propostas.
- Os modelos do cubo submetido à tração hidrostática apresentaram um pico de máxima pressão correspondente à máxima tensão de escoamento resultante da combinação do encruamento da matriz e do amolecimento do material devido ao aumento da porosidade. O decréscimo da pressão após o pico é decorrente do amolecimento devido ao aumento da porosidade.

- Nos modelos de cubo submetido à tração hidrostática quanto menor a influência da pressão no cálculo da tensão de início de escoamento, maior o pico de pressão obtido.
- Os modelos de cubo submetidos à tração hidrostática apresentaram um aumento linear da porosidade acompanhando a tendência linear ditada pela prescrição do deslocamento. Isto é decorrente do fato da incompressibilidade da matriz associada à conservação da massa, o que implica que o ganho de volume deve ser decorrente do aumento da quantidade dos poros. Os valores semelhantes obtidos nas simulações são devidos ao controle de deslocamento imposto nas simulações.
- Em relação ao modelo proposto, o aumento da influência da pressão no início do escoamento provocou a diminuição do pico de pressão e o adiantamento do início do aumento da porosidade em relação ao deslocamento imposto.
- Nos modelos de cubo tracionado uniaxialmente, os critérios propostos na literatura apresentaram resultados em tensão de escoamento semelhantes entre si, a exceção do critério de Kuhn & Downey.
- Em relação ao critério de escoamento proposto, à medida que os parâmetros foram variados no sentido de permitir uma maior influência da pressão no início do escoamento, o nível de tensão diminuiu e a porosidade aumentou.
- Os parâmetros  $K$  e  $n$  são indicadores da sensibilidade do material à presença de poros. Quando estes parâmetros são variados no sentido de indicar um material mais sensível à presença de poros, o nível de tensões tende a cair assim como a porosidade, indicando que microestruturas menos favoráveis (p. ex. porosidade irregular) tendem a suportar menores níveis de tensão e evoluem com menores quantidades de poros. Estes resultados são coerentes com a literatura consultada (CHRISTIAN e GERMAN, 1995).
- Nos modelos de barra de tração considerando os critérios propostos na literatura, verificou-se que as tendências se mantêm semelhantes àquelas observadas nos modelos de cubo submetido à tração uniaxial até o ponto em que a porosidade se aproxima da densidade crítica para o modelo de Doraivelu. Neste ponto, para o modelo de Doraivelu, os valores de tensão deviatória começam a cair e a porosidade aumenta a uma taxa maior que para os outros critérios testados até a não convergência das variáveis de estado (vide figura 7.15).
- As simulações da barra de tração relacionadas ao critério de escoamento proposto mostraram que a variação dos parâmetros do modelo permitiu obter resultados que cobrem aqueles obtidos a partir dos critérios da literatura testados.



- Para o modelo de barra com furo, a tensão de início de escoamento é fortemente influenciado pelas tensões cisalhantes, fazendo com que o início do escoamento aconteça a níveis de tensão muito próximos para os critérios testados.
- Para os critérios apresentados na literatura, o modelo de barra de tração indicou que novamente o critério de Kuhn & Downey apresenta comportamento discrepante dos outros critérios testados, o que ficou evidenciado principalmente por níveis de tensão mais elevados em relação aos outros critérios.
- O modelo de barra com furo, para o critério proposto, permitiu confirmar que mesmo para um modelo cujo escoamento é predominantemente regido pelas tensões cisalhantes, os resultados obtidos podem englobar aquelas condições previstas pelos critérios apresentados na literatura e testados neste trabalho.

---

---

# PROPOSTAS PARA CONTINUAÇÃO E NOVOS TRABALHOS

---

---

- Comparação dos resultados simulados via método dos elementos finitos com resultados experimentais obtidos via ensaios equivalentes aos modelos.
- Ajuste dos parâmetros do modelo proposto para diferentes tipos de metais sinterizados.
- Utilização de outras funções  $f(\rho)$  e  $g(\rho)$  para explorar possíveis configurações mais adequadas destas funções.
- Incluir no algoritmo de integração o encruamento cinemático da matriz do material.
- Avaliar formas diversas de evolução da porosidade quanto à nucleação e crescimento dos poros.
- Incluir no algoritmo de integração a possibilidade de coalescimento dos poros.
- Propor um modelo para o coalescimento dos poros.
- Estabelecer metodologia para a calibração do modelo proposto.
- Aplicação dos modelos para casos de solicitações cíclicas

---

---

# REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

---

---

ARAVAS, N., On The numerical integration of a class of pressure-dependent plasticity models, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 24, p. 1395-1416 (1987).

ARGON, A. S., Separation of second phase particles in spheroidized 1045 steel, Cu-0.6pct Cr Alloy, and maraging steel in plastic straining, *Metallurgical Transactions*, vol. 6a, pp. 839-851 (1975)

BERGQUIST, B., Property variation in sintered steel: Design of experiments, *Int. J. Powd. Met.*, 33, 2, p. 30-40 (1997).

BROWN, S., ABOU-CHEIDID, G., Yield Behavior of metal powder assemblages, *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 42, 3, pp. 383-399 (1994).

CHEN, W. F., HAN, D. J., *Plasticity For Structural Engineers*, Springer-Verlag New York Inc, (1988).

CHU, C. C., NEEDLEMAN, Void nucleation effects in biaxially stretched sheets, *J. Eng. Matl. Tech.*, 102, p. 249-256 (1980).

CHRISTIAN, K. D., GERMAN, R. M., Relation between pore structure and fatigue behavior in sintered iron-copper-carbon, *Int. J. Powd. Met.*, 31, 1, p. 51-61 (1995).

- COLLARES, C. E., Conformação a frio de pré-formas sinterizadas de ferro puro e da liga Fe-3,5%Ni, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Santa Catarina, Dissertação, Florianópolis, (1999).
- DIETER, G. E. Jr., Mechanical Metallurgy, Mc.Graw Hill Book Company, New York, (1961).
- DORAIVELU, S. M., GEGEL, S. J., GUNASEKERA, J. S., MALAS, J. C., MORGAN, J. T., A New Yield Function For Compressible P/M Materials, International J. Mech. Sci., vol.26, 9-10, p.527-535 (1984).
- DOREMUS, P., PAVIER, E., KERGADALLAN, J., PUENTE, G., Axisymmetric part compaction: Data base for numerical simulation, Int. J. Powd. Met., 35, 3, p. 63-69 (1999).
- DOWNEY JR., C. L., KUHN, H. A., Application of a forming limit concept to the design of powder preforms for forging, J. Eng. Mat. Tech, pp. 121-125 (1975)
- DUSZCZYK, J., Plasticity Theory for Working of Porous Metals, J. Mater. Shaping technology, 9, pp. 103 - 115 (1991).
- DYM, C. L., SHAMES, H. I., Solid Mechanics: A Variational Approach, Mc-Graw-Hill (1973).
- ESPER, F. J., SONSINO, C. M., Fatigue design for P/M components, European Powder Metallurgy Association, (1994).
- FLECK, N. A., On the cold compaction of powders, J. Mech. Phys. Solids, vol. 43, 9, pp. 1409-1431 (1995).
- GERMAN, R. M., Powder metallurgy of iron and steel, John Wiley & Sons Inc., (1998)
- GERMAN, R. M., Liquid Phase Sintering, Plenum Press, NY, (1985)
- GERMAN, R. M., BOSE, A., Injection molding of metals and ceramics, Metal Powder Industries Federation, Princeton, NJ, (1997).
- GREEN, R.J., A Plasticity Theory For Porous Solids, Int. J. Mech. Sci., 14, pp 215-224 (1972).

GURSON, A. L., Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth: Part I- Yield criteria and flow rules for porous ductile media, *J. Eng. Matl. Tech.*, 99, p. 2-15 (1977).

GURSON, A. L., Plastic flow and fracture behavior of ductile materials incorporating void nucleation, growth and interaction, Brown University, Ph.D., (1975).

HANCOCK, J. W., MACKENZIE, A. C., On the mechanisms of ductile failure in high-strength steels subjected to multi-axial stress-states, *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 24, pp. 147-169 (1976).

HILL, R., The mathematical theory of plasticity, 1ª edição, Oxford University Press, London, (1967).

HÖNESS, H., Investigation of plastic deformation characteristics of sintered iron at room temperature, *Powd. Met. Int.*, vol. 9, 4, pp. 170-173 (1977).

HUGHES, T. J. R. AND WINGET, J., Finite rotation effects in numerical integration of rate constitutive equations arising in large deformation analysis, *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 15, p. 1862-1867 (1980).

HWANG, B., KOBAYASHI, S., Deformation characterisation of powdered metals in compaction, *Int. J. Mach. Tools Manufact.*, vol. 30, 2, pp 309-323 (1990)

JHA, A. K., KUMAR, S., Dynamic effects during a high-speed sinter-forging process, *Int. J. Mach. Tools Manufact.*, vol. 36, 10, pp 1109-1122 (1996)

JHA, A. K., KUMAR, A. K., Compatibility of sintered materials during cold forging, *Int. J. of Mat. and Prod. Tech.*, vol. 9, 4/5/6, pp.281-299 (1994).

JINKA, A. G. K., BELLET, M. FOURMENT, L., A new three-dimensional finite element model for the simulation of powder forging process: application to hot forming of P/M connecting rod, *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, vol. 40., 3955-3978 (1997).

JINKA, A. G. K., BELLET, M., Hot forging of a P/M connecting rod: Three-dimensional computer model, *Int. J. Powd. Met.*, 32, 3, p. 255-258 (1996).

JOHNSON, P. J., P/M technology trends - 1999, *Int. J. Powd. Met.*, 35, 3, p. 23-35 (1999).

- JONES, P., K. BUCKLEY-GOLDER, R. LAWCOCK, R. SHIVANATH, *Densification Strategies for High Endurance P/M Components*, *Int. J. Powd. Met.*, vol. 33, 3, pp. 37-44 (1997).
- JONES, P. K., *Developing P/M Gear Tooth and Bearing Surfaces for High Stress Applications*, *Int. J. Powd. Met.*, vol. 34, 1, pp. 26-33 (1998).
- KACHANOV, L. M., *Foundations of the Theory of Plasticity*, 1971, North Holand Publishing Company - Amsterdam (1971).
- KAUFMAN, S. M., MOCARSKI, S., *The effect of small amounts of residual porosity on the mechanical properties of P/M forgings*, *Mod. Dev. in Powd. Metallurgy*, vol. 6, pp. 131-142 (1973).
- KUBICKI, B., *Stress Concentration at Pores in Sintered Materials*, *Powder Metallurgy*, vol 38 N. 4, pp 295-298 (1995).
- KUHN, H. A., DOWNEY, C. L., *Deformation Characteristics and plasticity Theory of Sintered Powder Materials*, *International Journal of Powder Metallurgy*, 7, 1, p. 15-25 (1971).
- KUHN, H. A., FERGUSON, B. L., *POWDER FORGING*, Metal Powder Industries Federation, (1990).
- KUHN, H. A., DOWNEY, C. L., *P/M Preform Design for Hot Forging*, *New Perspectives in Powder Metallurgy - Forging of Powder Metallurgy Preforms*, 6, pp. 45-56. (1973).
- LEDOUX. L., PRIOUL, C., *The influence of pore morphology on the monotonic and cyclic propertied of sintered iron*, *Mod. Dev. Powd. Met.*, 21, pp. 41-53 (1988).
- LEE, P. W., KUHN, H. A., *Fracture in Cold Upset Forging - A Criterion and Model*, *Metallurgical Transactions*, vol.4, pp.969-947 (1973).
- LEE, J. H., ZHANG, Y., *On the numerical integration of a class of pressure-dependent plasticity models with mixed hardening*, *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 32, pp. 419-438 (1991).
- LEE, J. H., ZHANG, Y., *A finite-element work-hardening plasticity model of the uniaxial compression and subsequent failure of porous cylinders including effects of void nucleation and growth - Part II: Localisation and Flow Criteria*, *J. of Eng. Mat. and Tech.*, vol. 118, pp. 169-178 (1996).

- LEE, J. H., ZHANG, Y., A finite-element work-hardening plasticity model of the uniaxial compression and subsequent failure of porous cylinders including effects of void nucleation and growth - Part I: Plastic Flow and Damage, *J. of Eng. Mat. and Tech.*, vol. 116, pp. 69-79 (1994).
- LENEL, F. V., *POWDER METALLURGY*, MPIF, (1980).
- LE ROY, G., EMBURY, J. D., EDWARDS, G., ASHBY, M. F., Model of Ductile Fracture Based on Nucleation and Growth of Voids, *Acta Metallurgica*, vol. 29, pp. 1509-1522 (1981).
- LINDSTEDT, U., KARLSSON, B., MASINI, R., Influence of porosity on deformation and fatigue behavior of P/M austenitic stainless steel, *Int. J. Powd. Met.*, 33, 8, p. 49-61 (1995).
- LUBARDA, V. A., MASTILOVIC, A., KNAP, J., Some comments on plasticity postulates and non-associative flow rules, *Int. J. Mech. Sci.*, vol. 38, 3, pp 247-258 (1996).
- MALVERN, L.E., *Introduction to the mechanics of a continuous medium*, Prentice-hall inc., (1969).
- MORITOKI, H., Free surface ductility in upsetting, *Int. J. of Plasticity*, vol. 9, pp. 507-523 (1993).
- OWEN, D. R. J., HINTON, E., *Finite Elements in Plasticity Theory: Theory and Practice*, Pineridge Press Limited (1980).
- PALMA, E. S., The Baushinger effect in sintered steels, *Int. J. Powd. Met.*, 33, 1, p. 61-68 (1997).
- PARK, J. J., Constitutive relations to predict deformations of porous metals in compaction, *Int. J. Mech. Sci.*, vol. 37, 7, pp. 709-719 (1995).
- PRESS, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., Flannery, B. P., *Numerical recipes in fortran - The art of scientific computing*, 2nd Edition, Cambridge university press (1995).
- QIU, Y. P., WENG, G. J., A theory of plasticity for porous materials and particle-reinforced composites, *J. of App. Mech.*, vol. 59, pp. 261-268 (1992).
- SHIMA, S., OYANE, M., *Plasticity Theory for Porous Materials*, *International Journal of Mechanical Science*, 18, pp. 285-291 (1976).

- SKENA, C., PRUCHER, T. CZARNECK, R., JO, J., Hardenability characteristics of P/M Alloy Steels, *Int. J. Powd. Met.*, 33, 7, p. 25-35 (1997).
- SMITH, L. N., MIDHA, P. S., On-line Control of apparent density: Computer simulation and analysis, *Int. J. Powd. Met.*, vol. 34, 3, pp. 47-55 (1998).
- STAHLBERG, U. P. A., KEIFE, H., Influence of Compression on the yielding of porous materials, *The Int. J. of Powder Metallurgy*, vol. 27, 3, pp. 217-225 (1991).
- SUQUET, P., Continuum micromechanics, International centre for mechanical sciences, courses and lectures no. 377, SpringerWienNewYork (1977).
- SUTRADHAR, G., JHA, A. K., KUMAR, S., Production of Sinter Forged Components, *Journal of Materials Processing Technology*, vol. 41, pg. 143-169 (1994).
- SUTRADHAR, G., JHA, A. K., KUMAR, S, Cold Forging of Sintered Iron-powder Preforms, *Journal of Materials Processing Technology*, 51, pp. 369- 386 (1995).
- THÜMLER, F., OBERACKER, R., An introduction to powder metallurgy, The university press, Cambridge, (1993).
- TVERGAARD, Influence of voids containing on shear band instabilities under plane strain conditions, *Int. J. Fract. Mech.*, 17, pp. 389-407 (1981).
- WASHIZU, K., Variational Methods in Elasticity na Plasticity, Pergamon Press, (1974).
- WATSON, T. J., WERT, J. A., On the development of constitutive relations for metallic powders, *Metallurgical Transactions A*, vol. 24A, pp. 2071-2081 (1993).
- WHITTAKER, D, Process economics and technological advances in P/M automotive parts, *Int. J. Powd. Met.*, 34, 4, pp. 53-62 (1998).
- WORSWICK, M. J., PICK, R. J., Void growth in plastically deformed free-cutting brass, *J. Appl. Mech.*, vol. 58, pp. 631-638 (1991).
- YANG, Z., LIPPMAN, H., A study of extrusion of sintered powder metals, *Int. J. Mech. Sci.*, vol. 38, 1, pp 79-96 (1996).



---

---

# Apêndice I-Obtenção dos coeficientes

$$A_{ij} \text{ e } b_i$$

O algoritmo para a resolução de um sistema de duas equações com duas incógnitas pelo método de Newton, conforme (Press, 1995) pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}_{t+1} &= \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}_t - \left\{ \frac{1}{D} \begin{bmatrix} \frac{\partial f_2}{\partial x^{(2)}} & -\frac{\partial f_1}{\partial x^{(2)}} \\ -\frac{\partial f_2}{\partial x^{(1)}} & \frac{\partial f_1}{\partial x^{(1)}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}_t \right\} \\ D &= \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x^{(1)}} & \frac{\partial f_1}{\partial x^{(2)}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x^{(1)}} & \frac{\partial f_2}{\partial x^{(2)}} \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (1)$$

Assumindo que:

$$f_1 = \Delta \varepsilon_p \frac{\partial g}{\partial q} + \Delta \varepsilon_q \frac{\partial g}{\partial p} = 0 \quad (2)$$

$$f_2 = g(p, q, H^\alpha) = 0 \quad (3)$$

$$p = p^e + K \Delta \varepsilon_p \quad (4)$$

$$q = q^e - 3G \Delta \varepsilon_q \quad (5)$$

$$\Delta H^\alpha = h^\alpha(p, q, \Delta \varepsilon_p, \Delta \varepsilon_q, H^\beta) \quad (6)$$

$$x_1 = \Delta \varepsilon_p \quad (7)$$

$$x_2 = \Delta \varepsilon_q \quad (8)$$

Rescrevendo o algoritmo (1) utilizando as definições de (2) a (8):

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_p \\ \Delta \varepsilon_q \end{Bmatrix}_{t+1} &= \begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_p \\ \Delta \varepsilon_q \end{Bmatrix}_t - \left\{ \frac{1}{D} \begin{bmatrix} \frac{\partial f_2}{\partial \Delta \varepsilon_q} & -\frac{\partial f_1}{\partial \Delta \varepsilon_q} \\ -\frac{\partial f_2}{\partial \Delta \varepsilon_p} & \frac{\partial f_1}{\partial \Delta \varepsilon_p} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}_t \right\} \\ D &= \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \Delta \varepsilon_p} & \frac{\partial f_1}{\partial \Delta \varepsilon_q} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \Delta \varepsilon_p} & \frac{\partial f_2}{\partial \Delta \varepsilon_q} \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_p \\ \Delta \varepsilon_q \end{Bmatrix}_{t+1} - \begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_p \\ \Delta \varepsilon_q \end{Bmatrix}_t = \left\{ \frac{1}{D} \begin{bmatrix} \frac{\partial f_2}{\partial \Delta \varepsilon_q} & -\frac{\partial f_1}{\partial \Delta \varepsilon_q} \\ -\frac{\partial f_2}{\partial \Delta \varepsilon_p} & \frac{\partial f_1}{\partial \Delta \varepsilon_p} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -f_1 \\ -f_2 \end{Bmatrix}_t \right\} \quad (10)$$

$$\begin{Bmatrix} c_p \\ c_q \end{Bmatrix}_{t+1} = \left\{ A^{-1} \begin{Bmatrix} -f_1 \\ -f_2 \end{Bmatrix}_t \right\} \quad (11)$$

Com a matriz  $A$  definida como:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \Delta \varepsilon_p} & \frac{\partial f_1}{\partial \Delta \varepsilon_q} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \Delta \varepsilon_p} & \frac{\partial f_2}{\partial \Delta \varepsilon_q} \end{bmatrix} \quad (12)$$

e o algoritmo para a solução do problema é:

$$\begin{aligned} A \begin{Bmatrix} c_p \\ c_q \end{Bmatrix}_{t+1} &= \begin{Bmatrix} -f_1 \\ -f_2 \end{Bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \Delta \varepsilon_p} & \frac{\partial f_1}{\partial \Delta \varepsilon_q} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \Delta \varepsilon_p} & \frac{\partial f_2}{\partial \Delta \varepsilon_q} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_p \\ c_q \end{Bmatrix}_{t+1} &= \begin{Bmatrix} -f_1 \\ -f_2 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (13)$$

e finalmente:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_p \\ c_q \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix}, \quad (14)$$

com os coeficientes  $A_{ij}$  sendo calculados como:

$$A_{11} = \frac{\partial f_1}{\partial \Delta \varepsilon_p} = \frac{\partial g}{\partial q} + \Delta \varepsilon_p \frac{\partial}{\partial \Delta \varepsilon_p} \frac{\partial g}{\partial q} + \Delta \varepsilon_q \frac{\partial}{\partial \Delta \varepsilon_p} \frac{\partial g}{\partial p} \quad (15)$$

$$A_{12} = \frac{\partial f_1}{\partial \Delta \varepsilon_q} = \frac{\partial g}{\partial p} + \Delta \varepsilon_p \frac{\partial}{\partial \Delta \varepsilon_q} \frac{\partial g}{\partial q} + \Delta \varepsilon_q \frac{\partial}{\partial \Delta \varepsilon_q} \frac{\partial g}{\partial p} \quad (16)$$

$$A_{21} = \frac{\partial f_2}{\partial \Delta \varepsilon_p} = \frac{\partial g}{\partial \Delta \varepsilon_p} = K \frac{\partial g}{\partial p} + \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial g}{\partial H^\alpha} \frac{\partial H^\alpha}{\partial \Delta \varepsilon_p} \quad (17)$$

$$A_{22} = \frac{\partial f_2}{\partial \Delta \varepsilon_q} = \frac{\partial g}{\partial \Delta \varepsilon_q} = -3G \frac{\partial g}{\partial q} + \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial g}{\partial H^\alpha} \frac{\partial H^\alpha}{\partial \Delta \varepsilon_q} \quad (18)$$

Substituindo a função potencial plástico nas expressões para  $A_{11}$  e  $A_{12}$  podem ser escritas como:

$$A_{11} = \frac{\partial g}{\partial q} + \Delta \varepsilon_p \frac{\partial}{\partial q} \left( K \frac{\partial g}{\partial p} + \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial g}{\partial H^\alpha} \frac{\partial H^\alpha}{\partial \Delta \varepsilon_p} \right) + \Delta \varepsilon_q \frac{\partial}{\partial p} \left( K \frac{\partial g}{\partial p} + \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial g}{\partial H^\alpha} \frac{\partial H^\alpha}{\partial \Delta \varepsilon_p} \right)$$

$$A_{12} = \frac{\partial g}{\partial p} + \Delta \varepsilon_p \frac{\partial}{\partial q} \left( -3G \frac{\partial g}{\partial q} + \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial g}{\partial H^\alpha} \frac{\partial H^\alpha}{\partial \Delta \varepsilon_q} \right) + \Delta \varepsilon_q \frac{\partial}{\partial p} \left( -3G \frac{\partial g}{\partial q} + \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial g}{\partial H^\alpha} \frac{\partial H^\alpha}{\partial \Delta \varepsilon_q} \right)$$

Que expandido fornece:

$$A_{11} = \frac{\partial g}{\partial q} + \Delta \varepsilon_p \left( K \frac{\partial^2 g}{\partial p q} + \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial^2 g}{\partial q \partial H^\alpha} \frac{\partial H^\alpha}{\partial \Delta \varepsilon_p} \right) + \Delta \varepsilon_q \left( K \frac{\partial^2 g}{\partial p^2} + \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial^2 g}{\partial p \partial H^\alpha} \frac{\partial H^\alpha}{\partial \Delta \varepsilon_p} \right) \quad (19)$$

$$A_{12} = \frac{\partial g}{\partial p} + \Delta \varepsilon_p \left( -3G \frac{\partial^2 g}{\partial q^2} + \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial^2 g}{\partial q \partial H^\alpha} \frac{\partial H^\alpha}{\partial \Delta \varepsilon_q} \right) + \Delta \varepsilon_q \left( -3G \frac{\partial^2 g}{\partial p q} + \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial^2 g}{\partial p \partial H^\alpha} \frac{\partial H^\alpha}{\partial \Delta \varepsilon_q} \right) \quad (20)$$

E o sistema de equações (14) para  $c_p$  e  $c_q$  tem os coeficientes  $A_{ij}$ , onde (19) e (20) são repetidos para maior clareza, como segue:

$$A_{11} = \frac{\partial g}{\partial q} + \Delta \varepsilon_p \left( K \frac{\partial^2 g}{\partial p q} + \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial^2 g}{\partial q \partial H^\alpha} \frac{\partial H^\alpha}{\partial \Delta \varepsilon_p} \right) + \Delta \varepsilon_q \left( K \frac{\partial^2 g}{\partial p^2} + \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial^2 g}{\partial p \partial H^\alpha} \frac{\partial H^\alpha}{\partial \Delta \varepsilon_p} \right) \quad (21)$$

$$A_{12} = \frac{\partial g}{\partial p} + \Delta \varepsilon_p \left( -3G \frac{\partial^2 g}{\partial q^2} + \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial^2 g}{\partial q \partial H^\alpha} \frac{\partial H^\alpha}{\partial \Delta \varepsilon_q} \right) + \Delta \varepsilon_q \left( -3G \frac{\partial^2 g}{\partial p q} + \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial^2 g}{\partial p \partial H^\alpha} \frac{\partial H^\alpha}{\partial \Delta \varepsilon_q} \right) \quad (22)$$

$$A_{21} = \frac{\partial f_2}{\partial \Delta \varepsilon_p} = \frac{\partial g}{\partial \Delta \varepsilon_p} = K \frac{\partial g}{\partial p} + \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial g}{\partial H^\alpha} \frac{\partial H^\alpha}{\partial \Delta \varepsilon_p} \quad (23)$$

$$A_{22} = \frac{\partial f_2}{\partial \Delta \varepsilon_q} = \frac{\partial g}{\partial \Delta \varepsilon_q} = -3G \frac{\partial g}{\partial q} + \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial g}{\partial H^\alpha} \frac{\partial H^\alpha}{\partial \Delta \varepsilon_q} \quad (24)$$

$$b_1 = -f_1 = -\Delta \varepsilon_p \frac{\partial g}{\partial q} - \Delta \varepsilon_q \frac{\partial g}{\partial p} \quad (25)$$

$$b_2 = -f_2 = -g(p, q, H^\alpha) \quad (26)$$

---

---

## Apêndice II-Cálculo dos coeficientes

$$\frac{\partial H^\alpha}{\partial \Delta \varepsilon_p} \text{ e } \frac{\partial H^\alpha}{\partial \Delta \varepsilon_q}$$

Temos que:

$$\Delta H^\alpha = h^\alpha(p, q, \Delta \varepsilon_p, \Delta \varepsilon_q, H^\beta). \quad (1)$$

Observando-se que o mesmo procedimento deve ser repetido para a obtenção de  $\frac{\partial H^\alpha}{\partial \Delta \varepsilon_q}$  e

assumindo que  $\alpha = 2$ , chega-se a:

$$\frac{\partial H^1}{\partial \Delta \varepsilon_p} = \frac{\partial h^1}{\partial \Delta \varepsilon_p} + \frac{\partial h^1}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \Delta \varepsilon_p} + \frac{\partial h^1}{\partial H^2} \frac{\partial H^2}{\partial \Delta \varepsilon_p} \quad (2)$$

$$\frac{\partial H^2}{\partial \Delta \varepsilon_p} = \frac{\partial h^2}{\partial \Delta \varepsilon_p} + \frac{\partial h^2}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \Delta \varepsilon_p} + \frac{\partial h^2}{\partial H^1} \frac{\partial H^1}{\partial \Delta \varepsilon_p} \quad (3)$$

Que rearranjadas levam a:

$$-\frac{\partial H^1}{\partial \Delta \varepsilon_p} + \frac{\partial h^1}{\partial H^2} \frac{\partial H^2}{\partial \Delta \varepsilon_p} = -\left( \frac{\partial h^1}{\partial \Delta \varepsilon_p} + \frac{\partial h^1}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \Delta \varepsilon_p} \right) \quad (4)$$

$$+\frac{\partial h^2}{\partial H^1} \frac{\partial H^1}{\partial \Delta \varepsilon_p} - \frac{\partial H^2}{\partial \Delta \varepsilon_p} = -\left( \frac{\partial h^2}{\partial \Delta \varepsilon_p} + \frac{\partial h^2}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \Delta \varepsilon_p} \right) \quad (5)$$

Que na forma matricial podem ser escritas como:

Apêndice II-Cálculo dos coeficientes  $\frac{\partial H^\alpha}{\partial \Delta \varepsilon_p}$ ,  $\frac{\partial H^\alpha}{\partial \Delta \varepsilon_q}$

$$\begin{bmatrix} -1 & \frac{\partial h^1}{\partial H^2} \\ \frac{\partial h^2}{\partial H^1} & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial H^1}{\partial \Delta \varepsilon_p} \\ \frac{\partial H^2}{\partial \Delta \varepsilon_p} \end{Bmatrix} = (-1) \begin{Bmatrix} \frac{\partial h^1}{\partial \Delta \varepsilon_p} + \frac{\partial h^1}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \Delta \varepsilon_p} \\ \frac{\partial h^2}{\partial \Delta \varepsilon_p} + \frac{\partial h^2}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \Delta \varepsilon_p} \end{Bmatrix} \quad (6)$$

Cuja solução pode ser escrita como:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial H^1}{\partial \Delta \varepsilon_p} \\ \frac{\partial H^2}{\partial \Delta \varepsilon_p} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\partial h^1}{\partial H^2} \\ -\frac{\partial h^2}{\partial H^1} & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial h^1}{\partial \Delta \varepsilon_p} + K \frac{\partial h^1}{\partial p} \\ \frac{\partial h^2}{\partial \Delta \varepsilon_p} + K \frac{\partial h^2}{\partial p} \end{Bmatrix} \quad (7)$$

Da mesma forma pode-se obter:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial H^1}{\partial \Delta \varepsilon_q} \\ \frac{\partial H^2}{\partial \Delta \varepsilon_q} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\partial h^1}{\partial H^2} \\ -\frac{\partial h^2}{\partial H^1} & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial h^1}{\partial \Delta \varepsilon_q} - 3G \frac{\partial h^1}{\partial p} \\ \frac{\partial h^2}{\partial \Delta \varepsilon_q} - 3G \frac{\partial h^2}{\partial p} \end{Bmatrix} \quad (7)$$

## Apêndice III - Cálculo do Jacobiano

Das equações da elasticidade, sabe-se que:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}^e \left( \varepsilon_{kl} - (\varepsilon_{kl}^p)_t - \frac{1}{3} \Delta \varepsilon_p \delta_{kl} - \Delta \varepsilon_q n_{kl} \right) \quad (1)$$

já que:

$$(\varepsilon_{kl}^p)_{t+\Delta t} = (\varepsilon_{kl}^p)_t + (\Delta \varepsilon_{kl}^p)_t. \quad (2)$$

Sendo que:

$$n_{kl} = \frac{3}{2q} s_{kl}$$

$$\frac{\partial n_{ij}}{\partial \sigma_{kl}} = \frac{3}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial \underline{\sigma}} \left( \frac{s}{\sqrt{\frac{3}{2} s:s}} \right) \right] = \frac{3}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial \underline{\sigma}} \left( \frac{\underline{\sigma} - \frac{I}{3} \text{tr}(\underline{\sigma})}{\sqrt{\frac{3}{2} s:s}} \right) \right] = \frac{3}{2q^2} \left[ \left( \frac{\partial \underline{\sigma}}{\partial \underline{\sigma}} - \frac{I}{\partial \underline{\sigma}} \frac{\partial}{\partial \underline{\sigma}} \left( \frac{\text{tr}(\underline{\sigma})}{3} \right) \right) q - s \frac{\partial}{\partial \underline{\sigma}} \left( \sqrt{\frac{3}{2} s:s} \right) \right]$$

$$\frac{\partial n_{ij}}{\partial \sigma_{kl}} = \frac{3}{2q^2} \left[ \left( \frac{\partial \underline{\sigma}}{\partial \underline{\sigma}} - \frac{I}{\partial \underline{\sigma}} \frac{\partial}{\partial \underline{\sigma}} \left( \frac{\text{tr}(\underline{\sigma})}{3} \right) \right) q - s \frac{\partial}{\partial \underline{\sigma}} \left( \sqrt{\frac{3}{2} s:s} \right) \right] = \left[ \left( \frac{3}{2} \frac{\partial \underline{\sigma}}{\partial \underline{\sigma}} - \frac{1}{2} \frac{I}{\partial \underline{\sigma}} \frac{\partial \text{tr}(\underline{\sigma})}{\partial \underline{\sigma}} \right) \frac{1}{q} - \frac{1}{q} \frac{3}{2q} \frac{3}{2q} s \frac{\partial}{\partial \underline{\sigma}} \left( \frac{s:s}{2} \right) \right]$$

$$\frac{\partial n_{ij}}{\partial \sigma_{kl}} = \left[ \frac{3}{2} \frac{1}{q} \frac{\partial \underline{\sigma}}{\partial \underline{\sigma}} - \frac{1}{2} \frac{1}{q} \frac{I}{\partial \underline{\sigma}} \frac{\partial \text{tr}(\underline{\sigma})}{\partial \underline{\sigma}} - \frac{1}{q} \frac{3}{2q} \frac{3}{2q} s \frac{s}{2q} \right]$$

e finalmente:

$$\frac{\partial n_{ij}}{\partial \sigma_{kl}} = \frac{1}{q} \left( \frac{3}{2} J - \frac{1}{2} \delta_{ij} \delta_{kl} - n_{ij} n_{kl} \right) \quad (3)$$

Aonde  $\underline{\underline{J}} = \delta_{ik} \delta_{jl}$  é o tensor identidade de Quarta ordem.

Sabe-se que:

$$\Delta\varepsilon_p \frac{\partial g}{\partial q} + \Delta\varepsilon_q \frac{\partial g}{\partial p} = 0$$

e que:

$$\Phi(p(\underline{\sigma}), q(\underline{\sigma}), H^\alpha) = 0$$

Calculando-se as variações de  $\partial\Delta\varepsilon_p$  e  $\partial\Delta\varepsilon_q$  em termos de  $\partial\underline{\sigma}$  nestas duas equações chega-se a:

$$\begin{aligned} \partial\Delta\varepsilon_p \frac{\partial g}{\partial q} + \Delta\varepsilon_p \left[ \left( \frac{\partial^2 g}{\partial p \partial q} \frac{\partial p}{\partial \underline{\sigma}} + \frac{\partial^2 g}{\partial q^2} \frac{\partial q}{\partial \underline{\sigma}} \right) : \partial\underline{\sigma} + \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial^2 g}{\partial q \partial H^\alpha} \partial H^\alpha \right] + \\ \partial\Delta\varepsilon_q \frac{\partial g}{\partial p} + \Delta\varepsilon_q \left[ \left( \frac{\partial^2 g}{\partial p^2} \frac{\partial p}{\partial \underline{\sigma}} + \frac{\partial^2 g}{\partial p \partial q} \frac{\partial q}{\partial \underline{\sigma}} \right) : \partial\underline{\sigma} + \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial^2 g}{\partial p \partial H^\alpha} \partial H^\alpha \right] = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

e

$$\left( \frac{\partial \Phi}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \underline{\sigma}} + \frac{\partial \Phi}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \underline{\sigma}} \right) : \partial\underline{\sigma} + \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial \Phi}{\partial H^\alpha} \partial H^\alpha = 0 \quad (5)$$

com

$$\partial H^\alpha = \sum_{\beta=1}^n c_{\alpha\beta} \left[ \frac{\partial h^\beta}{\partial \Delta\varepsilon_p} \partial\Delta\varepsilon_p + \frac{\partial h^\beta}{\partial \Delta\varepsilon_q} \partial\Delta\varepsilon_q + \left( \frac{\partial h^\beta}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \underline{\sigma}} + \frac{\partial h^\beta}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \underline{\sigma}} \right) : \partial\underline{\sigma} \right] \quad (6)$$

Substituindo (6) em (4) e (5) obtém-se:



$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned}
 & \frac{\partial \Delta \varepsilon_p}{\partial q} \frac{\partial g}{\partial q} + \Delta \varepsilon_p \left[ \left( \frac{\partial^2 g}{\partial p \partial q} \frac{\partial p}{\partial \sigma} + \frac{\partial^2 g}{\partial q^2} \frac{\partial q}{\partial \sigma} \right) : \partial \underline{\sigma} + \right. \\
 & \left. \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \frac{\partial^2 g}{\partial q \partial H^\alpha} c_{\alpha\beta} \left[ \frac{\partial h^\beta}{\partial \Delta \varepsilon_p} \partial \Delta \varepsilon_p + \frac{\partial h^\beta}{\partial \Delta \varepsilon_q} \partial \Delta \varepsilon_q + \left( \frac{\partial h^\beta}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \sigma} + \frac{\partial h^\beta}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \sigma} \right) : \partial \underline{\sigma} \right] \right] + \\
 & \frac{\partial \Delta \varepsilon_q}{\partial p} \frac{\partial g}{\partial p} + \Delta \varepsilon_q \left[ \left( \frac{\partial^2 g}{\partial p^2} \frac{\partial p}{\partial \sigma} + \frac{\partial^2 g}{\partial p \partial q} \frac{\partial q}{\partial \sigma} \right) : \partial \underline{\sigma} + \right. \\
 & \left. \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \frac{\partial^2 g}{\partial p \partial H^\alpha} c_{\alpha\beta} \left[ \frac{\partial h^\beta}{\partial \Delta \varepsilon_p} \partial \Delta \varepsilon_p + \frac{\partial h^\beta}{\partial \Delta \varepsilon_q} \partial \Delta \varepsilon_q + \left( \frac{\partial h^\beta}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \sigma} + \frac{\partial h^\beta}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \sigma} \right) : \partial \underline{\sigma} \right] \right] = 0
 \end{aligned} \right\} = 0 \tag{7}
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 & \left( \frac{\partial \Phi}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \sigma} + \frac{\partial \Phi}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \sigma} \right) : \partial \underline{\sigma} + \\
 & \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \frac{\partial \Phi}{\partial H^\alpha} c_{\alpha\beta} \left[ \frac{\partial h^\beta}{\partial \Delta \varepsilon_p} \partial \Delta \varepsilon_p + \frac{\partial h^\beta}{\partial \Delta \varepsilon_q} \partial \Delta \varepsilon_q + \left( \frac{\partial h^\beta}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \sigma} + \frac{\partial h^\beta}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \sigma} \right) : \partial \underline{\sigma} \right] = 0 \tag{8}
 \end{aligned}$$

Rearranjando (7) chega-se a:

$$\begin{aligned}
 & \partial \Delta \varepsilon_p \left( \frac{\partial g}{\partial q} + \Delta \varepsilon_p \left[ \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \frac{\partial^2 g}{\partial q \partial H^\alpha} c_{\alpha\beta} \frac{\partial h^\beta}{\partial \Delta \varepsilon_p} \right] \right) + \Delta \varepsilon_q \left[ \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \frac{\partial^2 g}{\partial p \partial H^\alpha} c_{\alpha\beta} \frac{\partial h^\beta}{\partial \Delta \varepsilon_p} \right] + \\
 & \partial \Delta \varepsilon_q \left( \frac{\partial g}{\partial p} + \Delta \varepsilon_p \left[ \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \frac{\partial^2 g}{\partial q \partial H^\alpha} c_{\alpha\beta} \frac{\partial h^\beta}{\partial \Delta \varepsilon_q} \right] \right) + \Delta \varepsilon_q \left[ \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \frac{\partial^2 g}{\partial p \partial H^\alpha} c_{\alpha\beta} \frac{\partial h^\beta}{\partial \Delta \varepsilon_q} \right] = \\
 & - \left[ \begin{aligned}
 & \Delta \varepsilon_p \left[ \left( \frac{\partial^2 g}{\partial p \partial q} \frac{\partial p}{\partial \sigma} + \frac{\partial^2 g}{\partial q^2} \frac{\partial q}{\partial \sigma} \right) : \partial \underline{\sigma} + \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \frac{\partial g}{\partial q H^\alpha} c_{\alpha\beta} \left( \frac{\partial h^\beta}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \sigma} + \frac{\partial h^\beta}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \sigma} \right) : \partial \underline{\sigma} \right] + \\
 & \Delta \varepsilon_q \left[ \left( \frac{\partial^2 g}{\partial p^2} \frac{\partial p}{\partial \sigma} + \frac{\partial^2 g}{\partial p \partial q} \frac{\partial q}{\partial \sigma} \right) : \partial \underline{\sigma} + \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \frac{\partial g}{\partial p H^\alpha} c_{\alpha\beta} \left( \frac{\partial h^\beta}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \sigma} + \frac{\partial h^\beta}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \sigma} \right) : \partial \underline{\sigma} \right]
 \end{aligned} \right] \tag{9}
 \end{aligned}$$

Rearranjando (4.65) chega-se a:

$$\begin{aligned}
 & \left( \partial \Delta \varepsilon_p \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \frac{\partial \Phi}{\partial H^\alpha} c_{\alpha\beta} \frac{\partial h^\beta}{\partial \Delta \varepsilon_p} + \partial \Delta \varepsilon_q \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \frac{\partial \Phi}{\partial H^\alpha} c_{\alpha\beta} \frac{\partial h^\beta}{\partial \Delta \varepsilon_q} \right) = \\
 & - \left( \left( \frac{\partial \Phi}{\partial p} + \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \frac{\partial \Phi}{\partial H^\alpha} c_{\alpha\beta} \frac{\partial h^\beta}{\partial p} \right) \frac{\partial p}{\partial \sigma} + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial q} + \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \frac{\partial \Phi}{\partial H^\alpha} c_{\alpha\beta} \frac{\partial h^\beta}{\partial q} \right) \frac{\partial q}{\partial \sigma} \right) : \partial \underline{\sigma} \tag{10}
 \end{aligned}$$

Tratando (4.66) e (4.67) como um sistema de equações em termos de duas incógnitas  $\partial\Delta\varepsilon_p$  e  $\partial\Delta\varepsilon_q$ , pode-se escrever:

$$A_{11}\partial\Delta\varepsilon_p + A_{12}\partial\Delta\varepsilon_q = -\left(-\frac{1}{3}B_{11}\delta_{ij} + B_{12}n_{ij}\right)\partial\sigma_{ij} \quad (11)$$

$$A_{21}\partial\Delta\varepsilon_p + A_{22}\partial\Delta\varepsilon_q = -\left(-\frac{1}{3}B_{21}\delta_{ij} + B_{22}n_{ij}\right)\partial\sigma_{ij} \quad (12)$$

Já que:

$$\frac{\partial p}{\partial \sigma} = -\frac{1}{3}\delta_{ij}$$

e

$$\frac{\partial q}{\partial \sigma} = n_{ij}.$$

Os coeficientes  $A_{11}$ ,  $A_{12}$ ,  $A_{21}$ ,  $A_{22}$ ,  $B_{11}$ ,  $B_{12}$ ,  $B_{21}$  e  $B_{22}$  são definidos como:

$$A_{11} = \left( \frac{\partial g}{\partial q} + \Delta\varepsilon_p \left[ \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \frac{\partial^2 g}{\partial q \partial H^\alpha} c_{\alpha\beta} \frac{\partial h^\beta}{\partial \Delta\varepsilon_p} \right] + \Delta\varepsilon_q \left[ \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \frac{\partial^2 g}{\partial p \partial H^\alpha} c_{\alpha\beta} \frac{\partial h^\beta}{\partial \Delta\varepsilon_p} \right] \right) \quad (13)$$

$$A_{12} = \left( \frac{\partial g}{\partial p} + \Delta\varepsilon_p \left[ \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \frac{\partial^2 g}{\partial q \partial H^\alpha} c_{\alpha\beta} \frac{\partial h^\beta}{\partial \Delta\varepsilon_q} \right] + \Delta\varepsilon_q \left[ \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \frac{\partial^2 g}{\partial p \partial H^\alpha} c_{\alpha\beta} \frac{\partial h^\beta}{\partial \Delta\varepsilon_q} \right] \right) \quad (14)$$

$$A_{21} = \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \frac{\partial \Phi}{\partial H^\alpha} c_{\alpha\beta} \frac{\partial h^\beta}{\partial \Delta\varepsilon_p} \quad (15)$$

$$A_{22} = \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \frac{\partial \Phi}{\partial H^\alpha} c_{\alpha\beta} \frac{\partial h^\beta}{\partial \Delta\varepsilon_q} \quad (16)$$

$$B_{11} = \Delta\varepsilon_p \left[ \frac{\partial^2 g}{\partial p \partial q} + \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \frac{\partial^2 g}{\partial q \partial H^\alpha} c_{\alpha\beta} \frac{\partial h^\beta}{\partial p} \right] + \Delta\varepsilon_q \left[ \left( \frac{\partial^2 g}{\partial p^2} + \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \frac{\partial^2 g}{\partial p \partial H^\alpha} c_{\alpha\beta} \frac{\partial h^\beta}{\partial p} \right) \right] \quad (17)$$

$$B_{12} = \Delta \varepsilon_p \left[ \frac{\partial^2 g}{\partial q^2} + \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \frac{\partial^2 g}{\partial q \partial H^\alpha} c_{\alpha\beta} \frac{\partial h^\beta}{\partial q} \right] + \Delta \varepsilon_q \left[ \left( \frac{\partial^2 g}{\partial p \partial q} + \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \frac{\partial^2 g}{\partial p \partial H^\alpha} c_{\alpha\beta} \frac{\partial h^\beta}{\partial q} \right) \right] \quad (18)$$

$$B_{21} = \frac{\partial \Phi}{\partial p} + \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \frac{\partial \Phi}{\partial H^\alpha} c_{\alpha\beta} \frac{\partial h^\beta}{\partial p} \quad (19)$$

$$B_{22} = \frac{\partial \Phi}{\partial q} + \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \frac{\partial \Phi}{\partial H^\alpha} c_{\alpha\beta} \frac{\partial h^\beta}{\partial q} \quad (20)$$

Por conveniência (11) e (12) pode ser reescrito como:

$$A_{11} \partial \Delta \varepsilon_p + A_{12} \partial \Delta \varepsilon_q = (B_{11} \delta_{ij} + B_{12} n_{ij}) \partial \sigma_{ij} \quad (21)$$

$$A_{21} \partial \Delta \varepsilon_p + A_{22} \partial \Delta \varepsilon_q = (B_{21} \delta_{ij} + B_{22} n_{ij}) \partial \sigma_{ij} \quad (22)$$

E desta forma os termos de (11) e (12) devem ser corrigidos para:

$$B_{11} = \frac{1}{3} B_{11} , \quad (23)$$

$$B_{21} = \frac{1}{3} B_{21} , \quad (24)$$

$$B_{12} = -B_{12} , \quad (25)$$

$$B_{22} = -B_{22} . \quad (26)$$

Resolvendo (21) e (22) para  $\partial \Delta \varepsilon_p$  e  $\partial \Delta \varepsilon_q$ , chega-se a:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \partial \Delta \varepsilon_p \\ \partial \Delta \varepsilon_q \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (B_{11} \delta_{ij} + B_{12} n_{ij}) \partial \sigma_{ij} \\ (B_{21} \delta_{ij} + B_{22} n_{ij}) \partial \sigma_{ij} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \partial \Delta \varepsilon_p \\ \partial \Delta \varepsilon_q \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} (B_{11} \delta_{ij} + B_{12} n_{ij}) \partial \sigma_{ij} \\ (B_{21} \delta_{ij} + B_{22} n_{ij}) \partial \sigma_{ij} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \partial \Delta \varepsilon_p \\ \partial \Delta \varepsilon_q \end{Bmatrix} = \frac{1}{A_{11} A_{22} - A_{12} A_{21}} \begin{bmatrix} A_{22} & -A_{12} \\ -A_{21} & A_{11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} (B_{11} \delta_{ij} + B_{12} n_{ij}) \partial \sigma_{ij} \\ (B_{21} \delta_{ij} + B_{22} n_{ij}) \partial \sigma_{ij} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \partial \Delta \varepsilon_p \\ \partial \Delta \varepsilon_q \end{Bmatrix} = \frac{1}{A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}} \begin{Bmatrix} [A_{22}(B_{11}\delta_{ij} + B_{12}n_{ij}) - A_{12}(B_{21}\delta_{ij} + B_{22}n_{ij})] \partial \sigma_{ij} \\ [-A_{21}(B_{11}\delta_{ij} + B_{12}n_{ij}) + A_{11}(B_{21}\delta_{ij} + B_{22}n_{ij})] \partial \sigma_{ij} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \partial \Delta \varepsilon_p \\ \partial \Delta \varepsilon_q \end{Bmatrix} = \frac{1}{A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}} \begin{Bmatrix} [(A_{22}B_{11} - A_{12}B_{21})\delta_{ij} + (A_{22}B_{12} - A_{12}B_{22})n_{ij}] \partial \sigma_{ij} \\ [(A_{11}B_{21} - A_{21}B_{11})\delta_{ij} + (A_{11}B_{22} - A_{21}B_{12})n_{ij}] \partial \sigma_{ij} \end{Bmatrix}$$

$$\partial \Delta \varepsilon_p = \frac{1}{A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}} [(A_{22}B_{11} - A_{12}B_{21})\delta_{ij} + (A_{22}B_{12} - A_{12}B_{22})n_{ij}] \partial \sigma_{ij} \quad (27)$$

$$\partial \Delta \varepsilon_q = \frac{1}{A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}} [(A_{11}B_{21} - A_{21}B_{11})\delta_{ij} + (A_{11}B_{22} - A_{21}B_{12})n_{ij}] \partial \sigma_{ij}$$

Agora, definindo os coeficientes  $m_{pi}$ ,  $m_{pn}$ ,  $m_{qi}$  e  $m_{qn}$  como:

$$m_{pi} = \frac{1}{A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}} (A_{22}B_{11} - A_{12}B_{21}) \quad (28)$$

$$m_{pn} = \frac{1}{A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}} (A_{22}B_{12} - A_{12}B_{22}) \quad (29)$$

$$m_{qi} = \frac{1}{A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}} (A_{11}B_{21} - A_{21}B_{11}) \quad (30)$$

$$m_{qn} = \frac{1}{A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}} (A_{11}B_{22} - A_{21}B_{12}) \quad (31)$$

e a solução do sistema de equações (27) pode ser rescrita como:

$$\begin{aligned} \partial \Delta \varepsilon_p &= [m_{pi}\delta_{ij} + m_{pn}n_{ij}] \partial \sigma_{ij} \\ \partial \Delta \varepsilon_q &= [m_{qi}\delta_{ij} + m_{qn}n_{ij}] \partial \sigma_{ij} \end{aligned} \quad (32)$$

Substituindo (32) em:

$$\partial \sigma_{ij} = C_{ijkl}^e \left( \partial \varepsilon_{kl} - \frac{1}{3} \partial \Delta \varepsilon_p \delta_{kl} - \partial \Delta \varepsilon_q n_{kl} - \Delta \varepsilon_q \frac{\partial n_{kl}}{\partial \sigma_{ij}} \partial \sigma_{ij} \right) \quad (33)$$

Leva a:

$$\left( \underline{J} + \underline{C}^* : \underline{M} \right) : \partial \underline{\sigma} = \underline{C}^* : \partial \underline{\varepsilon} \quad (34)$$

aonde:

$$\underline{M} = \frac{1}{3} m_{pi} \underline{II} + \frac{1}{3} m_{pn} \underline{In} + m_{qi} \underline{nI} + m_{qn} \underline{nn} + \Delta \varepsilon_q \frac{\partial \underline{n}}{\partial \underline{\sigma}} \quad (35)$$

com:

$$\frac{\partial n_{ij}}{\partial \sigma_H} = \frac{1}{q} \left( \frac{3}{2} J - \frac{1}{2} \underline{II} - \underline{nn} \right). \quad (36)$$

Considerando a simetria do tensor tensão, chega-se a:

$$\begin{aligned} \underline{M} = & \frac{1}{3} m_{pi} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{3} m_{pn} \begin{bmatrix} n_1 & n_2 & n_3 & n_4 & n_5 & n_6 \\ n_1 & n_2 & n_3 & n_4 & n_5 & n_6 \\ n_1 & n_2 & n_3 & n_4 & n_5 & n_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ & + m_{qi} \begin{bmatrix} n_1 & n_2 & n_3 & 0 & 0 & 0 \\ n_1 & n_2 & n_3 & 0 & 0 & 0 \\ n_1 & n_2 & n_3 & 0 & 0 & 0 \\ n_1 & n_2 & n_3 & 0 & 0 & 0 \\ n_1 & n_2 & n_3 & 0 & 0 & 0 \\ n_1 & n_2 & n_3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + m_{qn} \begin{bmatrix} n_1 n_1 & n_1 n_2 & n_1 n_3 & n_1 n_4 & n_1 n_5 & n_1 n_6 \\ n_2 n_1 & n_2 n_2 & n_2 n_3 & n_2 n_4 & n_2 n_5 & n_2 n_6 \\ n_3 n_1 & n_3 n_2 & n_3 n_3 & n_3 n_4 & n_3 n_5 & n_3 n_6 \\ n_4 n_1 & n_4 n_2 & n_4 n_3 & n_4 n_4 & n_4 n_5 & n_4 n_6 \\ n_5 n_1 & n_5 n_2 & n_5 n_3 & n_5 n_4 & n_5 n_5 & n_5 n_6 \\ n_6 n_1 & n_6 n_2 & n_6 n_3 & n_6 n_4 & n_6 n_5 & n_6 n_6 \end{bmatrix} + \Delta \varepsilon_q \frac{\partial \underline{n}}{\partial \underline{\sigma}} \end{aligned} \quad (37)$$

e

$$\frac{\partial n_{ij}}{\partial \sigma_{kl}} = \frac{1}{q} \left\{ \begin{array}{l} \frac{3}{2} \left[ \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] - \frac{1}{2} \left[ \begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] - \\ \left[ \begin{array}{cccccc} n_1 n_1 & n_1 n_2 & n_1 n_3 & n_1 n_4 & n_1 n_5 & n_1 n_6 \\ n_2 n_1 & n_2 n_2 & n_2 n_3 & n_2 n_4 & n_2 n_5 & n_2 n_6 \\ n_3 n_1 & n_3 n_2 & n_3 n_3 & n_3 n_4 & n_3 n_5 & n_3 n_6 \\ n_4 n_1 & n_4 n_2 & n_4 n_3 & n_4 n_4 & n_4 n_5 & n_4 n_6 \\ n_5 n_1 & n_5 n_2 & n_5 n_3 & n_5 n_4 & n_5 n_5 & n_5 n_6 \\ n_6 n_1 & n_6 n_2 & n_6 n_3 & n_6 n_4 & n_6 n_5 & n_6 n_6 \end{array} \right] \end{array} \right\} \quad (38)$$

Assim, de  $(\underline{J} + \underline{C}^e : \underline{M}) : \partial \underline{\sigma} = \underline{C}^e : \partial \underline{\varepsilon}$  chega-se a:

$$\underline{D} = \left( \frac{\partial \underline{\sigma}}{\partial \underline{\varepsilon}} \right)_{t+\Delta t} = (\underline{J} + \underline{C}^e : \underline{M})^{-1} : \underline{C}^e \quad (39)$$

Que pode ser escrito como:

$$\underline{D} = (\underline{M} + (\underline{C}^e)^{-1})^{-1} \quad (40)$$

que é simétrico se:

$$\frac{1}{3} m_{pn} = m_{qi} \quad (41)$$

Novamente, se o encruamento depende de duas funções, chega-se a:

$$A_{11} = \left( \begin{array}{l} \frac{\partial g}{\partial q} + \Delta \varepsilon_p \left[ \frac{\partial^2 g}{\partial q \partial H^1} c_{11} \frac{\partial h^1}{\partial \Delta \varepsilon_p} + \frac{\partial^2 g}{\partial q \partial H^1} c_{12} \frac{\partial h^2}{\partial \Delta \varepsilon_p} + \frac{\partial^2 g}{\partial q \partial H^2} c_{21} \frac{\partial h^1}{\partial \Delta \varepsilon_p} + \frac{\partial^2 g}{\partial q \partial H^2} c_{22} \frac{\partial h^2}{\partial \Delta \varepsilon_p} \right] + \\ \Delta \varepsilon_q \left[ \frac{\partial^2 g}{\partial p \partial H^1} c_{11} \frac{\partial h^1}{\partial \Delta \varepsilon_p} + \frac{\partial^2 g}{\partial p \partial H^1} c_{12} \frac{\partial h^2}{\partial \Delta \varepsilon_p} + \frac{\partial^2 g}{\partial p \partial H^2} c_{21} \frac{\partial h^1}{\partial \Delta \varepsilon_p} + \frac{\partial^2 g}{\partial p \partial H^2} c_{22} \frac{\partial h^2}{\partial \Delta \varepsilon_p} \right] \end{array} \right) \quad (42)$$

$$A_{12} = \left( \begin{array}{l} \frac{\partial g}{\partial p} + \Delta \varepsilon_p \left[ \frac{\partial^2 g}{\partial q \partial H^1} c_{11} \frac{\partial h^1}{\partial \Delta \varepsilon_q} + \frac{\partial^2 g}{\partial p \partial H^1} c_{12} \frac{\partial h^2}{\partial \Delta \varepsilon_q} + \frac{\partial^2 g}{\partial p \partial H^2} c_{21} \frac{\partial h^1}{\partial \Delta \varepsilon_q} + \frac{\partial^2 g}{\partial p \partial H^2} c_{22} \frac{\partial h^2}{\partial \Delta \varepsilon_q} \right] + \\ \Delta \varepsilon_q \left[ \frac{\partial^2 g}{\partial p \partial H^1} c_{11} \frac{\partial h^1}{\partial \Delta \varepsilon_q} + \frac{\partial^2 g}{\partial p \partial H^1} c_{12} \frac{\partial h^2}{\partial \Delta \varepsilon_q} + \frac{\partial^2 g}{\partial p \partial H^2} c_{21} \frac{\partial h^1}{\partial \Delta \varepsilon_q} + \frac{\partial^2 g}{\partial p \partial H^2} c_{22} \frac{\partial h^2}{\partial \Delta \varepsilon_q} \right] \end{array} \right) \quad (43)$$

$$A_{21} = \frac{\partial \Phi}{\partial H^1} c_{11} \frac{\partial h^1}{\partial \Delta \varepsilon_p} + \frac{\partial \Phi}{\partial H^1} c_{12} \frac{\partial h^2}{\partial \Delta \varepsilon_p} + \frac{\partial \Phi}{\partial H^2} c_{21} \frac{\partial h^1}{\partial \Delta \varepsilon_p} + \frac{\partial \Phi}{\partial H^2} c_{22} \frac{\partial h^2}{\partial \Delta \varepsilon_p} \quad (44)$$

$$A_{22} = \frac{\partial \Phi}{\partial H^1} c_{11} \frac{\partial h^1}{\partial \Delta \varepsilon_q} + \frac{\partial \Phi}{\partial H^1} c_{12} \frac{\partial h^2}{\partial \Delta \varepsilon_q} + \frac{\partial \Phi}{\partial H^2} c_{21} \frac{\partial h^1}{\partial \Delta \varepsilon_q} + \frac{\partial \Phi}{\partial H^2} c_{22} \frac{\partial h^2}{\partial \Delta \varepsilon_q} \quad (45)$$

$$B_{11} = \frac{\Delta \varepsilon_p}{3} \left[ \frac{\partial^2 g}{\partial p \partial q} + \frac{\partial g}{\partial q \partial H^1} c_{11} \frac{\partial h^1}{\partial p} + \frac{\partial^2 g}{\partial q \partial H^1} c_{12} \frac{\partial h^2}{\partial p} + \frac{\partial^2 g}{\partial q \partial H^2} c_{21} \frac{\partial h^1}{\partial p} + \frac{\partial^2 g}{\partial q \partial H^2} c_{22} \frac{\partial h^2}{\partial p} \right] + \quad (46)$$

$$\frac{\Delta \varepsilon_q}{3} \left[ \left( \frac{\partial^2 g}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial p \partial H^1} c_{11} \frac{\partial h^1}{\partial p} + \frac{\partial^2 g}{\partial p \partial H^1} c_{12} \frac{\partial h^2}{\partial p} + \frac{\partial^2 g}{\partial p \partial H^2} c_{21} \frac{\partial h^1}{\partial p} + \frac{\partial^2 g}{\partial p \partial H^2} c_{22} \frac{\partial h^2}{\partial p} \right) \right]$$

$$B_{12} = -\Delta \varepsilon_p \left[ \frac{\partial^2 g}{\partial q^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial q \partial H^1} c_{11} \frac{\partial h^1}{\partial q} + \frac{\partial^2 g}{\partial q \partial H^1} c_{12} \frac{\partial h^2}{\partial q} + \frac{\partial^2 g}{\partial q \partial H^2} c_{21} \frac{\partial h^1}{\partial q} + \frac{\partial^2 g}{\partial q \partial H^2} c_{22} \frac{\partial h^2}{\partial q} \right] - \quad (47)$$

$$\Delta \varepsilon_q \left[ \left( \frac{\partial^2 g}{\partial p \partial q} + \frac{\partial^2 g}{\partial p \partial H^1} c_{11} \frac{\partial h^1}{\partial q} + \frac{\partial^2 g}{\partial p \partial H^1} c_{12} \frac{\partial h^2}{\partial q} + \frac{\partial^2 g}{\partial p \partial H^2} c_{21} \frac{\partial h^1}{\partial q} + \frac{\partial^2 g}{\partial p \partial H^2} c_{22} \frac{\partial h^2}{\partial q} \right) \right]$$

$$B_{21} = \frac{1}{3} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial p} + \frac{\partial \Phi}{\partial H^1} c_{11} \frac{\partial h^1}{\partial p} + \frac{\partial \Phi}{\partial H^1} c_{12} \frac{\partial h^2}{\partial p} + \frac{\partial \Phi}{\partial H^2} c_{21} \frac{\partial h^1}{\partial p} + \frac{\partial \Phi}{\partial H^2} c_{22} \frac{\partial h^2}{\partial p} \right) \quad (48)$$

$$B_{22} = - \left( \frac{\partial \Phi}{\partial q} + \frac{\partial \Phi}{\partial H^1} c_{11} \frac{\partial h^1}{\partial q} + \frac{\partial \Phi}{\partial H^1} c_{12} \frac{\partial h^2}{\partial q} + \frac{\partial \Phi}{\partial H^2} c_{21} \frac{\partial h^1}{\partial q} + \frac{\partial \Phi}{\partial H^2} c_{22} \frac{\partial h^2}{\partial q} \right) \quad (49)$$