Universidade Federal de Santa Catarina
Curso de Pós–Graduação em Matemática e
Computação Científica

Uma Generalização da Integral de Riemann

Dissertação apresentada ao curso de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica, do Centro de Ciências Exatas da Universidade Federal de Santa Catarina, para obtenção do grau de Mestre em Matemática, com Área de Concentração em Análise Real.

Maria Elita Pereira

Florianópolis – Santa Catarina
1999

Uma Generalização de Integral de Riemann

Maria Elita Pereira

Esta dissertação foi julgada adequada para obtenção do Título de "Mestre", Área de Concentração em Análise Real, e aprovada em sua forma final pelo curso de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica.

____

Celso Melchíades Dória
Coordenador

Comissão Examinadora:

____

Prof. Paul James Otterson, Ph.D. (Orient. UFSC)

____

Prof. João Barata, Ph.D. (USP)

____

Prof. Aldrovando Luís A . Araújo, Ph.D. (UFSC)

____

Prof. Ruy Exel, Ph.D. (UFSC)

31 de Março de 1999

Ao meu marido Jeferson e às
minhas filhas Natasha e
Waleska.

AGRADECIMENTOS:

- Ao meu orientador Paul James Otterson por ser um grande motivador.

- Aos meus pais (falecidos) que me criaram para ser uma mulher realizadora.

- Ao meu marido Jeferson pelo seu amor e pela sua cooperação na digitação desta dissertação.

- Às minhas filhas Natasha e Waleska por terem compreendido a minha necessidade de ser mais que mãe.

- Aos meus irmãos Rogério, Luís Carlos, Maria Eliane e Maria Ester, que acreditaram em mim.

- À minha amiga Ilca, por ter sido uma fonte de confiança e encorajamento.

- À CAPES, por ter tornado possível este mestrado através da estrutura financeira.

SUMÁRIO

LISTA DE NOTAÇÕES

R	Conjunto dos Números Reais
$\lim_{x \to a} f(x)$	Limite da função f quando x aproxima-se de a
f^{-1}	Função Inversa
C	Conjunto de Cantor
$\sum_{n=1}^{\infty}$	Somatório
$\boldsymbol{R}^*([a,b])$	Conjunto das funções que são integráveis no sentido Riemann Generalizada
$\int_a^b f(x)dx$	Integral da função f no intervalo (a,b)
sup **E**	Supremo do conjunto **E**
inf **E**	Ínfimo do conjunto **E**
fL(P)	A soma $\sum_{i=1}^{n} f(z_i)(x_i - x_{i-1})$ onde $P = \{z_i, [x_{i-1}, x_i]; 1 \le i \le n\}$
~A	Complementar do Conjunto **A**
m* (**E**)	Medida exterior do conjunto **E**
m (**E**)	Medida de Lebesgue do conjunto **E**

RESUMO

Neste trabalho, estudamos uma modificação da Integral de Riemann, a Integral Henstock-Kurzweil, ou Integral de Riemann Generalizada, ou ainda, Integral “Gauge”(denotamos Integral ***R****). Mostramos o Teorema de Hake e o Lema de Saks-Henstock, e estes servem como ferramentas na aplicação da Integral ***R****. Esta integral contrasta com outras integrais, em particular com respeito a formulação do Teorema Fundamental do Cálculo, e sua respectiva classe de funções integráveis.

Nós provamos que a Integral ***R**** permite um elegante Teorema Fundamental e concluímos que integra uma classe maior de funções que a integral de Lebesgue, a qual generaliza.

ABSTRACT

In this work, we study a modification of the Riemann integral, the Kurzweil-Henstock or Gauge or ***R**** Integral. We prove Hake's Theorem and the Saks-Henstock Lemma; which are important tools in applications of the ***R****-integral. This integral is compared it with other integrals, in particular with respect to formulation of The Fundamental Theorem of Calculus, and regarding their respective classes of integrable functions.

We show that the R*-integral permits a simple Fundamental Theorem and integrates a larger class of functions than the Lebesgue integral, which it generalizes.

INTRODUÇÃO

Bons livros de Análise (Lima, Royden, Rudin, Bartle) colocam a Integral de Lebesgue como essencial. Segundo Burkill "Há muito tempo é evidente que todo usuário do Cálculo Integral, seja da matemática pura ou aplicada, deve interpretar integração no sentido de Lebesgue. Alguns princípios simples então dirigem a manipulação de expressões contendo integrais".

Recentemente surgiu uma simples modificação da integral de Riemann, chamada então de Integral Henstock-Kurzweil, de Riemann Generalizada, ou ainda "gauge" (denotaremos integral ***R****), que faz com que a integral resultante seja mais geral que a integral de Lebesgue.

O objetivo desta dissertação é o de desenvolver propriedades desta integral, ***R****, encontrando princípios simples que a dirijam, e compará-la com outras integrais (Riemann, de Lebesgue, Denjoy, ...).

No primeiro capítulo, generalizamos a derivada ordinária através de uma parametrização adequada da variável, tornando a composta derivável. O objetivo de definir a Derivada Paramétrica é enunciar no Capítulo II um Teorema Fundamental do Cálculo mais abrangente. Também fizemos um estudo detalhado da Função de Cantor, que é um exemplo de uma função não derivável que permite derivada paramétrica.

No segundo capítulo, usando somas de Riemann, definimos Integral ***R****** através de uma ligeira modificação da Integral de Riemann. A relação entre a integral assim obtida com a Derivada Paramétrica fica estabelecida através de uma formulação do Teorema Fundamental do Cálculo. Veremos que os teoremas de convergência válidos para integral de Lebesgue são válidos também para integral ***R****, e o teorema de Hake, que diz que se a integral imprópria existe, então a integral existe no sentido ***R****.

O terceiro capítulo consta de um rápido estudo das definições e teoremas provenientes da Teoria de Integração no sentido Lebesgue e Denjoy no contexto da análise real. Esse capítulo é simplesmente um embasamento teórico para que posteriormente seja discutida a equivalência entre a Integral de Denjoy e a integral ***R****. São vistos também princípios simples da Integral de Lebesgue: os Três Princípios de Littlewood.

Finalmente, concluímos então este trabalho com comparações entre a integral ***R**** e as integrais de Lebesgue, Denjoy e Riemann. Para isto, nos valemos de exemplos que elucidam estas diferenças e posicionamento de alguns autores.

Capítulo I

DERIVADAS E FUNÇÃO DE CANTOR

Robert G.Bartle [2], relaciona a Integral de Riemann Generalizada com a Derivada Ordinária através do Teorema Fundamental do Cálculo, enquanto que Jack Lamoreaux e Gerald Armstrong [8], definem a Derivada Paramétrica (também chamada Derivada Generalizada), e a relacionam com a Integral de Riemann Generalizada. Este teorema será enunciado e demonstrado no Capítulo II. Como toda função que possuí derivada ordinária, possuí também derivada paramétrica, optamos pelos trabalhos de Armstrong no que diz respeito ao Teorema Fundamental do Cálculo. Temos assim um resultado mais forte e por isso mais elaborada sua demonstração.

Neste capítulo, inicialmente retornaremos a Teoria da Derivada Ordinária vista nos Cursos de Cálculo e Análise. Apoiados nas definições e principais resultados desta teoria passaremos então para o nosso objeto de estudo deste capítulo que é a Derivada Paramétrica. Veremos que algumas funções que não possuem derivadas, parametrizando a variável, suas compostas podem ser deriváveis.

Finalmente, fecharemos este capítulo com um estudo detalhado do Conjunto de Cantor e da Função de Cantor, tendo em vista que a função de Cantor, segundo Armstrong [8], é um exemplo de uma função que não possuí derivada, mas que através de uma parametrização adequada da variável, a composta é derivável, ou seja, a função de Cantor possuí derivada paramétrica.

1.1 Derivada Ordinária

Veremos a seguir, de acordo com Elon Lages Lima, algumas definições e teoremas a respeito de derivada ordinária, sendo que as demonstrações dos teoremas podem ser encontradas em [9].

Dizemos que um ponto $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}$ é um **ponto de acumulação** do conjunto $\mathbf{X} \subseteq \mathbf{R}$ quando toda vizinhança **V** do ponto ***a***, contém ao menos um ponto de **X** diferente de ***a***, ou seja, para todo $\varepsilon > 0$, o conjunto $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap (X - \{a\})$ não é vazio. Denotaremos por X' o conjunto dos pontos de acumulação de X.

Uma outra definição importante para derivada é a de função contínua. Uma função real ***f*** definida no conjunto $\mathbf{X} \subseteq \mathbf{R}$ é **contínua no ponto** $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}$ quando, para todo $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que se $x \in X$ e $0 < |x - a| < \delta$ então $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Dizemos ainda que ***f*** é contínua, se ***f*** é contínua em todo ponto do conjunto X.

Definição: Sejam $f: \mathrm{X} \to \mathbf{R}$ e $\boldsymbol{a}$ um ponto de X que é ponto de acumulação de X, isto é, $a \in \mathrm{X} \cap \mathrm{X}'$. A derivada ordinária, ou simplesmente derivada, da função $\boldsymbol{f}$ no ponto $\boldsymbol{a}$, quando existe, é o limite $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ e denotamos este limite por $f'(a)$. Dizemos então que $\boldsymbol{f}$ é derivável no ponto $\boldsymbol{a}$.

Quando $\boldsymbol{f}$ é derivável em todo ponto de X, dizemos que $\boldsymbol{f}$ é derivável.

Define-se, equivalentemente, $f'(a)$ como $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

Proposição: Se $f: \mathrm{X} \to \mathbf{R}$ é tal que $f'(x) = 0$ para todo $x \in \mathrm{X}$, então $\boldsymbol{f}$ é uma função constante, ou seja, $f(x) = k$ para todo $x \in \mathrm{X}$, onde k é uma constante real.

Teorema: Sejam $f, g: \mathrm{X} \to \mathbf{R}$ deriváveis no ponto $a \in \mathrm{X} \cap \mathrm{X}'$. As funções $f+g$, $f-g$, $f.g$ e f/g (caso $g(a) \neq 0$) são deriváveis no ponto $\boldsymbol{a}$ e as derivadas destas funções são dadas por:

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a);$$

$$(f-g)'(a) = f'(a) - g'(a);$$

$$(f.g)'(a) = f'(a)g(a) - f(a)g'(a) \quad \text{e}$$

$$\left(f/g\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{[g(a)]^2}.$$

Enunciaremos a seguir a **Regra da Cadeia,** sendo esta de grande importância para Derivada Paramétrica.

Teorema: Sejam f: $X \to \mathbf{R}$, g: $Y \to \mathbf{R}$, $a \in X \cap X'$, $f(a) = b \in Y \cap Y'$ e $f(X) \subseteq Y$. Se $\boldsymbol{f}$ é derivável no ponto $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{g}$ é derivável no ponto $\boldsymbol{b}$, então $g \circ f : X \to \mathbf{R}$ é derivável no ponto $\boldsymbol{a}$, e $(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a)$.

Corolário: Seja $f : X \to Y$ uma função bijetora, com inversa $g = f^{-1} : Y \to X$. Se $\boldsymbol{f}$ é derivável no ponto $a \in X \cap X'$ e $\boldsymbol{g}$ é contínua no ponto $b = f(a)$ então $\boldsymbol{g}$ é derivável no ponto b se, e somente se, $f'(a) \neq 0$. Caso afirmativo $g'(b) = 1/f'(a)$.

1.2 Derivada Paramétrica

Definição: Seja a função F: $[a,b] \to \mathbf{R}$. Dizemos que **F** tem uma derivada paramétrica $\boldsymbol{f}$ se, e somente se, existe uma função derivável, sobrejetora e estritamente crescente $\phi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ onde α, β são números reais e tal que $F \circ \phi$ tem uma derivada ordinária em $[\alpha,\beta]$ definida por $(F \circ \phi)'(t) = f(\phi(t))\phi'(t)$.

Segue da definição que toda função que tem derivada ordinária, admite derivada paramétrica. Basta tomar $\phi : [a,b] \to [a,b]$ dada por $\phi(t) = t$. Em outras palavras, a derivada paramétrica generaliza a derivada ordinária.

A derivada paramétrica não necessita ser única pois se $F : [a,b] \to \mathbf{R}$ é tal que admite derivada paramétrica $\boldsymbol{f}$, então existe uma função derivável, sobrejetora, estritamente crescente $\phi:[\alpha,\beta]\to[a,b]$ tal que $F\circ\phi$ tem derivada ordinária . Se existe $t_0\in[a,b]$ tal que $\phi'(t_0)=0$, como $(\mathrm{F}\circ\phi)'(\mathrm{t}_0)=\mathrm{f}(\phi(\mathrm{t}_0))\phi'(\mathrm{t}_0)$ isto implica que $(F\circ\phi)'(t_0)=0$, independente do valor que f assume em $\phi(t_0)$.

Por outro lado, a proposição seguinte nos aponta um resultado quando t_0 é tal que $\phi'(t_0)\neq 0$.

Quando uma função $F:[a,b]\to\mathbf{R}$ possuí derivada paramétrica e $\phi:[\alpha,\beta]\to[a,b]$ é uma função derivável e estritamente crescente tal que $F\circ\phi$ possuí derivada ordinária dizemos que **f** é uma **representação paramétrica** de *F*.

Proposição: Seja $F:[a,b]\to\mathbf{R}$ uma função que possuí derivada paramétrica e seja $\phi:[\alpha,\beta]\to[a,b]$ uma representação paramétrica de ***F***. Se $\phi'(t_0)\neq 0$ então a derivada paramétrica ***f*** no ponto $x=\phi(t_0)$ é a derivada ordinária de ***F*** .

Prova: Seja $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ uma derivada paramétrica da função $F:[a,b]\to\mathbf{R}$ e $\phi:[\alpha,\beta]\to[a,b]$ uma representação paramétrica de ***F***. Assim, $(F\circ\phi)'(t)=f(\phi(t))\phi'(t)$.

Seja t_0 tal que $\phi'(t_0)\neq 0$. Fazendo $x=\phi(t)$,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = \lim_{\phi(t)\to\phi(t_0)}\frac{F(\phi(t))-F(\phi(t_0))}{\phi(t)-\phi(t_0)}$$

$$= \lim_{t\to t_0}\frac{F(\phi(t))-F(\phi(t_0))}{\phi(t)-\phi(t_0)}.\frac{\phi'(t_0)}{\phi'(t_0)}$$

$$= \lim_{t\to t_0}\left[\frac{F(\phi(t))-F(\phi(t_0))}{[\phi(t)-\phi(t_0)]\phi'(t_0)}\cdot\lim_{t\to t_0}\frac{\phi(t)-\phi(t_0)}{t-t_0}\right]$$

$$= \frac{1}{\phi'(t_0)}\lim_{t\to t_0}\frac{F(\phi(t))-F(\phi(t_0))}{t-t_0}$$

$$= \frac{1}{\phi'(t_0)} \lim_{t \to t_0} \frac{(F \circ \phi)(t) - (F \circ \phi)(t_0)}{t - t_0}$$

$$= \frac{1}{\phi'(t_0)} (F \circ \phi)'(t_0) = \frac{1}{\phi'(t_0)} f(\phi(t_0)).\phi'(t_0)$$

$$= f(\phi(t_0)) = f(x_0).$$

Portanto $F'(x_0) = f(x_0)$, ou seja, $f(x_0)$ é a derivada ordinária de ***F*** no ponto x_0.

Veremos a seguir algumas propriedades da derivada ordinária que valem para derivada paramétrica. Para demonstrar tais propriedades aplicaremos definições e resultados vistos em 1.1.

Proposição: Se a derivada paramétrica de ***F*** é zero em cada ponto de $[a,b]$, então F é constante.

Prova: Seja $f:[a,b] \to \mathbf{R}$ a derivada paramétrica de ***F*** tal que $f(x) = 0$ para todo $x \in [a,b]$ e seja $\phi:[\alpha,\beta] \to [a,b]$ sua representação paramétrica. Então, $(F \circ \phi)'(t) = 0$, pois $(F \circ \phi)'(t) = f(\phi(t))\phi'(t)$. Logo $F \circ \phi = k$ onde k é uma constante, isto é, $F(\phi(t)) = k$ para todo $t \in [\alpha,\beta]$. Fazendo $x = \phi(t)$, temos que $F(x) = k$ para todo $x \in [a,b]$.

Usaremos daqui para frente a notação $\boldsymbol{F'}$ para a derivada paramétrica da função ***F***, sem problemas de notação pois como vimos toda derivada ordinária é paramétrica.

Proposição: Se as funções F e G admitem derivadas paramétricas e k é um número real, então:

(a) $(kF)' = kF'$

(b) $(F+G)' = F' + G'$

(c) $(F \cdot G)' = F'G + FG'$

Prova:

(a) Seja $f:[a,b] \to \mathbf{R}$ a derivada paramétrica da função $F:[a,b] \to \mathbf{R}$. E seja a função $\phi:[\alpha,\beta] \to [a,b]$ sua representação paramétrica. Assim $F' = f$ e $(F \circ \phi)'(t) = f(\phi(t))\phi'(t)$. Logo,

$$[k(F \circ \phi)]'(t) = [k(F \circ \phi)'](t) = k[(F \circ \phi)'(t)] = k[f(\phi(t))\phi'(t)] = (kf)(\phi(t))\phi'(t)$$

Mas $[k(F \circ \phi)] = (kF) \circ \phi$. Então $(kF \circ \phi)'(t) = kf(\phi(t))\phi'(t)$ e $kf = kF'$ é uma derivada paramétrica de kF.

Armstrong[1] demonstra o seguinte teorema que será usado para demonstrar os itens (b) e (c) da proposição.

Teorema: Se F e G tem representações paramétricas diferenciáveis ϕ e φ, respectivamente, então existe uma função θ que é uma representação paramétrica diferenciável para F e G simultaneamente.

Sejam f, g as derivadas paramétricas de F, G respectivamente. Pelo teorema anterior, existe uma representação paramétrica diferenciável θ para F e G simultaneamente. Logo,

$(F \circ \theta)'(t) = f(\theta(t))\theta'(t)$ e

$(G \circ \theta)'(t) = g(\theta(t))\theta'(t)$.

(b) $\left[(F+G)\circ\theta\right]'(t)=\left[(F\circ\theta)+(G\circ\theta)\right]'(t)=$

$$= \left[(F\circ\theta)' + (G\circ\theta)'\right](t) =$$

$$= (F\circ\theta)'(t) + (G\circ\theta)'(t) \quad =$$

$$= f(\theta(t))\theta'(t) + g(\theta(t))\theta'(t) =$$

$$= \left[f(\theta(t)) + g(\theta(t))\right]\theta'(t) =$$

$$= \left[(f+g)(\theta(t))\right]\theta'(t).$$

Portanto, $(F+G)' = f+g = F'+G'$.

(c) $\left[(FG)\circ\theta\right]'(t)=\left[(F\circ\theta).(G\circ\theta)\right]'(t)=$

$$= \left[(F\circ\theta)'(G\circ\theta) + (F\circ\theta)(G\circ\theta)'\right](t)$$

$$= f(\theta(t))\theta'(t)\big(G(\theta(t))\big) + F(\theta(t))\, g(\theta(t))\theta'(t)$$

$$= \left[f(\theta(t))G(\theta(t)) + F(\theta(t))g(\theta(t))\right]\theta'(t)$$

$$= (fG+Fg)(\theta(t)).\theta'(t).$$

Portanto, $(FG)' = fG+Fg = F'G+FG'$

1.3 A Função de Cantor

O **Conjunto de Cantor C** é um subconjunto do intervalo $[0,1]$ que é obtido da seguinte forma: removemos do intervalo $[0,1]$, o terço médio $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$, depois removemos dos intervalos restantes $\left[0,\frac{1}{3}\right]$ e $\left[\frac{2}{3},1\right]$ os respectivos terços médios $\left(\frac{1}{9},\frac{2}{9}\right)$ e $\left(\frac{7}{9},\frac{8}{9}\right)$, e assim sucessivamente. O **Conjunto de Cantor C** é o conjunto que resta depois da remoção de todos os terços médios.

Proposição: O conjunto de Cantor **C** é fechado.

Prova: O complementar de **C** consiste de todos os intervalos que são retirados na construção do conjunto de Cantor **C** , então é uma união (enumerável) de intervalos abertos, que é aberto. Portanto o conjunto de Cantor **C** é um conjunto fechado.

O conjunto de Cantor **C** inclui todos os extremos dos intervalos removidos, e também, pelo fato de **C** ser fechado, os limites de seqüência de tais pontos. Um exemplo de um seqüência é a seguinte: Começamos de $\frac{1}{3}$ e pegamos o extremo mais próximo no segundo passo $\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{9}=\frac{2}{9}\right)$, e então pegamos o extremo mais próximo no terceiro passo $\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{9}+\frac{1}{27}=\frac{7}{27}\right)$ e assim sucessivamente. O limite deste conjunto de pontos é $\frac{1}{3}-\frac{1}{9}+\frac{1}{27}-\frac{1}{81}+\cdots=\frac{3}{8}-\frac{1}{8}=\frac{1}{4}$, que não é extremo, pois todos os extremos são da forma $\frac{a}{3^n}$. O ponto $\frac{1}{4}$ pertence ao conjunto **C**, pois **C** é fechado. E assim também todo ponto de $[0,1]$ que é limite de uma seqüência de extremos.

Proposição: O conjunto de Cantor **C** não contém intervalos.

Prova: O tamanho total dos intervalos removidos é $\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{4}{27}+\cdots=1$. Portanto, o conjunto **C** é um conjunto de medida nula, visto que a medida do intervalo $[0,1]$ é 1. Nenhum conjunto de medida nula contém intervalo não degenerado, pois caso contrário a medida deste conjunto seria maior que zero. Portanto, o conjunto **C** não contém intervalos.

Definição: Um conjunto E é **perfeito** se é fechado e não possuí nenhum ponto que não seja ponto de acumulação.

Proposição: O conjunto **C** é um conjunto perfeito.

Prova: Seja x um elemento do conjunto **C**.

Se x é um limite de uma seqüência não constante de extremos, então x é um ponto de acumulação de **C**. Se x é um extremo, temos que x pode ser escrito como $\frac{a}{3^{n_0}}$. Assim à esquerda existe o intervalo $\left[\frac{a-1}{3^{n_0}},\frac{a}{3^{n_0}}\right]$ do qual será retirado o intervalo $\left(\frac{3a-2}{3^{n_0+1}},\frac{3a-1}{3^{n_0+1}}\right)$, restando à esquerda de $\frac{a}{3^{n_0}}$ o intervalo $\left[\frac{3a-1}{3^{n_0+1}},\frac{a}{3^{n_0}}\right]$ do qual será retirado o intervalo $\left(\frac{9a-2}{3^{n_0+2}},\frac{9a-1}{3^{n_0+2}}\right)$, restando então á esquerda de $\frac{a}{3^{n_0}}$ o intervalo $\left[\frac{9a-1}{3^{n_0+2}},\frac{a}{3^{n_0}}\right]$ e assim sucessivamente restarão os intervalos cujos extremos esquerdos são da forma $\frac{3^n a-1}{3^{n_0+n}}$, $n=0,1,2,\cdots$. Mas $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^n a-1}{3^{n_0+n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^n a}{3^{n_0}.3^n}-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3^{n_0+n}}=\frac{a}{3^{n_0}}$.

Portanto $\frac{a}{3^{n_0}}$ é um ponto de acumulação de **C**.

Como **C** é fechado e todo ponto de **C** é ponto de acumulação de **C**, temos que **C** é perfeito.

Definição: Um conjunto E é **raro** se o seu fecho não contém pontos interiores.

Proposição: O conjunto de Cantor **C** é raro.

Prova: Como o conjunto de Cantor **C** não possuí intervalos, não existe ponto em **C** tal que esteja num intervalo aberto contido em **C**, ou seja, **C** não contém pontos interiores. Também **C** é o seu próprio fecho, pois **C** é fechado. Logo o conjunto de Cantor **C** é raro.

Proposição: Seja p um inteiro maior que 1, e x um número real, $0 < x < 1$. Então existe uma seqüência $\{a_n\}_{n\geq 1}$ de inteiros com $0 \leq a_n < p$ tal que $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{p^n}$ e esta seqüência é única exceto quando x é da forma $\frac{q}{p^{n_0}}$ (com q inteiro e $\frac{q}{p^{n_0}}$ irredutível), neste caso existem exatamente duas seqüências. Também se $\{a_n\}_{n\geq 1}$ é uma seqüência de inteiros com $0 \leq a_n < p$, a série converge para um número real x com $0 \leq x \leq 1$.

Se $p = 10$, a seqüência $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$ é chamada a ***expansão decimal*** de x. Para $p = 2$ é chamada de ***expansão binária***; e para $p = 3$, ***expansão ternária***.

Prova: Seja x um número real, $0 < x < 1$, e seja p um número inteiro maior que 1. Seja x escrito no sistema de base p, ou seja, $x = 0,a_1a_2a_3\cdots$, $0 \leq a_n < p$ para todo n.

Assim, $x = \frac{a_1}{p} + \frac{a_2}{p^2} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{p^n}$.

Se x é da forma $\frac{q}{p^{n_0}}$ onde q é um número inteiro e n_0 um número natural, podemos escrever

$$\frac{q}{p^{n_0}} = \frac{r_1}{p} + \frac{r_2}{p^2} + \cdots + \frac{r_{n_0}}{p^{n_0}}$$

com $r_i = q_{i+1} - q_i \cdot p$, onde $q_{n_0+1} = q$ e q_i é o quociente da divisão $q_{i+1} \div p$ com $i = n_0, n_0 - 1, \cdots, 2, 1$.

Assim x pode ser escrito de duas formas:

$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{p^n}$ onde $a_n = r_n$ para $n \le n_0$ e $a_n = 0$ para $n > n_0$, e

$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{p^n}$ onde $b_n = r_n$ para $n < n_0$, $b_{n_0} = r_{n_0} - 1$ e $b_n = p - 1$ para $n > n_0$,

pois,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{p^n} = \frac{r_1}{p} + \frac{r_2}{p^2} + \cdots + \frac{r_{n_0-1}}{p^{n_0-1}} + \frac{r_{n_0} - 1}{p^{n_0}} + \frac{p-1}{p^{n_0+1}} + \frac{p-1}{p^{n_0+2}} + \cdots$$

$$= \frac{r_1}{p} + \frac{r_2}{p^2} + \cdots + \frac{r_{n_0-1}}{p^{n_0-1}} + \frac{r_{n_0} - 1}{p^{n_0}} + \frac{\frac{(p-1)}{p^{n_0+1}}}{1 - \frac{1}{p}}$$

$$= \frac{r_1}{p} + \frac{r_2}{p^2} + \cdots + \frac{r_{n_0-1}}{p^{n_0-1}} + \frac{r_{n_0} - 1}{p^{n_0}} + \frac{(p-1)}{p^{n_0+1}} \cdot \frac{p}{p-1}$$

$$= \frac{q-1}{p^{n_0}} + \frac{p}{p^{n_0+1}} = \frac{q-1+1}{p^{n_0}} = \frac{q}{p^{n_0}} = x .$$

Unicidade: Seja x um elemento de $[0,1]$ e $x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{p^n}$, $x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{p^n}$ suas expansões na base p. Vamos supor que estas duas expansões são diferentes.

Seja $\mathrm{N}=\min\{n : a_n \neq b_n\}$. Vamos supor que $a_{\mathrm{N}} > b_{\mathrm{N}}$. Então $a_{\mathrm{N}} - b_{\mathrm{N}} = 1$, pois caso contrário $a_{\mathrm{N}} - b_{\mathrm{N}} > 1$ e consequentemente

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{p^n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{p^n}=\frac{a_{\mathrm{N}}-b_{\mathrm{N}}}{p^{\mathrm{N}}}+\sum_{n=\mathrm{N}+1}^{\infty}\frac{(a_n-b_n)}{p^n}$$

Mas, $-p+1 \le a_n - b_n \le p-1$ o que implica que $\frac{-1}{p^{\mathrm{N}}} \le \sum_{n=\mathrm{N}+1}^{\infty}\frac{(a_n-b_n)}{p^n} \le \frac{1}{p^{\mathrm{N}}}$.

Como $\frac{a_{\mathrm{N}}-b_{\mathrm{N}}}{p^{\mathrm{N}}} > \frac{1}{p^{\mathrm{N}}}$. Então, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{p^n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{p^n} > 0$, o que é uma contradição.

Assim, $\sum_{n=\mathrm{N}+1}^{\infty}\frac{(a_n-b_n)}{p^n}=\frac{-1}{p^{\mathrm{N}}}$, ou seja , $\dfrac{\frac{a_{\mathrm{N}+1}-b_{\mathrm{N}+1}}{p^{\mathrm{N}+1}}}{1-\frac{1}{p}}=\frac{-1}{p^{\mathrm{N}}}$, logo $b_{\mathrm{N}+1}-a_{\mathrm{N}+1}=p-1$.

Como, $0 \le a_{\mathrm{N}+1}, b_{\mathrm{N}+1} \le p-1$, temos que $b_{\mathrm{N}+1}=p-1$ e $a_{\mathrm{N}+1}=0$.

De $a_{\mathrm{N}}-b_{\mathrm{N}}=1$ e $b_{\mathrm{N}+1}-a_{\mathrm{N}+1}=p-1$, obtemos:

$$\frac{a_{\mathrm{N}}-b_{\mathrm{N}}}{p^{\mathrm{N}}}+\frac{a_{\mathrm{N}+1}-b_{\mathrm{N}+1}}{p^{\mathrm{N}+1}}=\frac{1}{p^{\mathrm{N}}}+\frac{1-p}{p^{\mathrm{N}+1}}=\frac{p+1-p}{p^{\mathrm{N}+1}}=\frac{1}{p^{\mathrm{N}+1}}.$$

Então,

$$\sum_{n=\mathrm{N}+2}^{\infty}\frac{(a_n-b_n)}{p^n}=\frac{-1}{p^{\mathrm{N}+1}}.$$

O que implica que $a_{\mathrm{N}+2}=0$ e $b_{\mathrm{N}+2}=p-1$ e assim sucessivamente, $a_n=0$ e $b_n=p-1$ para $n \ge \mathrm{N}+1$. Portanto, x é da forma $\frac{q}{p^{\mathrm{N}+1}}$.

Por outro lado, seja $\{a_n\}_{n\geq 1}$ uma seqüência de inteiros com $0 \leq a_n < p$. Assim, o maior valor que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{p^n}$ pode assumir é quando $a_n = p-1$ para todo $n \geq 1$. Neste caso, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{p^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p-1}{p^n} = \frac{p-1}{p} \cdot \frac{1}{1-1/p} = 1$. Portanto, a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{p^n}$ converge para um número real x tal que $0 \leq x \leq 1$.

Teorema : O conjunto de Cantor **C** consiste de todos aqueles números reais em $[0,1]$ que tem expansão ternária $\{a_n\}_{n\geq 1}$ tal que $a_n \neq 1$ para todo $n \geq 1$.

Prova: Seja $x \in [0,1]$. A expansão ternária de x, $x = 0, a_1 a_2 a_3 \cdots$ tem o primeiro dígito $a_1 = 1$ se, e somente se, $x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$, cujo interior é retirado no primeiro passo da formação do conjunto de Cantor **C**. Também, $a_1 = 0$ e $a_2 = 1$ se, e somente se, $x \in \left[\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right]$; $a_1 = 2$ e $a_2 = 1$ se, e somente se, $x \in \left[\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right]$, cujos interiores são retirados no segundo passo da formação de **C**. E assim, sucessivamente, temos que $a_1, a_2, \cdots, a_{n_0 - 1} \in \{0,2\}$ e $a_{n_0} = 1$ se, e somente se, x pertence a algum intervalo fechado cujo interior é retirado no n_0-ésimo passo na formação do conjunto de Cantor **C**. Restam portanto somente os extremos dos intervalos, mas estes são da forma $\frac{q}{p^n}$, que como já vimos , também possuem uma expansão ternária somente com os dígitos 0 e 2.

Obs.: O conjunto de Cantor também é chamado de **Conjunto ternário de Cantor.**

Proposição: O conjunto de Cantor **C** é não-enumerável.

Prova: Para todo $x \in$ **C** , seja $0, c_1 c_2 c_3 \cdots$ sua expansão ternária, onde $c_n \in \{0,2\}$ para todo $n = 1,2,3,\cdots$, e seja a função $\phi :$ **C** $\to [0,1]$ dada por $\phi(x) = 0, \frac{c_1}{2} \frac{c_2}{2} \frac{c_3}{2} \cdots$.

Vamos verificar que ϕ é sobrejetora. Seja $y \in [0,1]$, e seja $0, b_1 b_2 b_3 \cdots$ sua expansão binária. Então $x = 0, (2b_1)(2b_2)(2b_3) \cdots$ é um ponto de **C** tal que $\phi(x) = y$.

Portanto, o conjunto de Cantor **C** é não-enumerável.

Observação: Existe uma correspondência biunívoca entre o conjunto de Cantor **C** e o intervalo $[0,1]$.

Prova: A função ϕ não é injetora, pois para os pares de elementos x_1 e x_2 cujas expansões ternárias são da forma $x_1 = 0, a_1 a_2 \cdots a_i 0222 \cdots$ e $x_2 = 0, a_1 a_2 \cdots a_i 2$ com $a_n \in \{0,2\}$ para $n = 1,2,\cdots,i$ temos que,

$$\phi(x_1) = 0, \frac{a_1}{2} \frac{a_2}{2} \cdots \frac{a_i}{2} 0111 \cdots = 0, \frac{a_1}{2} \frac{a_2}{2} \cdots \frac{a_i}{2} 1 = \phi(x_2) \ .$$

Seja X o conjunto dos elementos de **C** que tem as expansões ternárias conforme x_1 e x_2. X é enumerável pois os elementos de X são os extremos dos intervalos, ou seja, os elementos da forma $\frac{q}{3^n}$. Porém, o conjunto Y=ϕ(X) consiste dos elementos de $[0,1]$ que são da forma $\frac{q}{2^n}$. Assim o conjunto Y também é um conjunto enumerável.

Sejam $\{\alpha_{1,} \alpha_{2,} \cdots\}$ e $\{\beta_{1,} \beta_{2,} \cdots\}$ as respectivas enumerações dos conjuntos X e Y. Definamos a função φ: **C** $\to [0,1]$ por $\varphi(x) = \phi(x)$ para $x \notin$ X e $\varphi(\alpha_i) = \beta_i$ para $i = 1,2,\cdots$.

A função φ assim definida é bijetora.

Teorema: Seja x um número real em $[0,1]$ com a expansão ternária $\{a_n\}_{n\geq 1}$, ou seja, $x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{3^n}$ onde $a_n\in\{0,1,2\}$. Seja $\mathrm{N}=\infty$ se nenhum dos a_n é igual a 1, e seja $\mathrm{N}=\min\{n: a_n=1\}$. Seja $b_n=\frac{1}{2}a_n$ para $n<\mathrm{N}$ e $b_{\mathrm{N}}=1$. Então $\sum_{n=1}^{\mathrm{N}}\frac{b_n}{2^n}$ é independente da expansão ternária de x (se x tem duas expansões) e a função f definida por $f(x)=\sum_{n=1}^{\mathrm{N}}\frac{b_n}{2^n}$ é uma função contínua, monótona no intervalo $[0,1]$. Além disto, ***f*** é constante em cada intervalo contido no complemento do conjunto Cantor **C**, e $f: C\rightarrow[0,1]$ é sobrejetora. (Esta função é chamada ***função ternária de Cantor***).

Prova: Mostremos que ***f*** está bem definida, ou seja, $\sum_{n=1}^{\mathrm{N}}\frac{b_n}{2^n}$ não depende da escolha da expansão ternária dos elementos de $[0,1]$**.**

Seja $x\in[0,1]$. Se x tem duas expansões ternárias, x é da forma $\frac{q}{3^{n_0}}$, que como vimos anteriormente, pode ser rescrito como $\frac{q}{3^{n_0}}=\frac{r_1}{3}+\frac{r_2}{3^2}+\cdots+\frac{r_{n_0}}{3^{n_0}}$, com $r_i\in\{0,1,2\}$ para $i=1,2,\cdots,n_0$. Sejam $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{3^n}$ e $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{3^n}$ as expansões ternárias de x.

Assim,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{3^n}=\frac{r_1}{3}+\frac{r_2}{3^2}+\cdots+\frac{r_{n_0}}{3^{n_0}} \quad \text{e} \qquad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{3^n}=\frac{r_1}{3}+\frac{r_2}{3^2}+\cdots+\frac{r_{n_0-1}}{3^{n_0-1}}+\frac{r_{n_0}-1}{3^{n_0}}+\frac{2}{3^{n_0+1}}+\frac{2}{3^{n_0+2}}+\cdots \qquad (2)$$

Se $\mathrm{N}=\infty$ em (1), $b_n = \frac{1}{2}a_n$ para todo n,

$$\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{b_n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^{n+1}} = \frac{r_1}{2^2} + \frac{r_2}{2^3} + \cdots + \frac{r_{n_0}}{2^{n_0+1}} = \frac{r_1}{2^2} + \frac{r_2}{2^3} + \cdots + \frac{r_{n_0-1}}{2^{n_0}} + \frac{2}{2^{n_0+1}}$$

$$= \frac{r_1}{2^2} + \frac{r_2}{2^3} + \cdots + \frac{r_{n_0-1}}{2^{n_0}} + \frac{1}{2^{n_0}},$$

então, $\mathrm{N}=n_0$ em (2), $b_n = \frac{1}{2}c_n$ para $n<n_0$ e $b_{n_0}=1$

$$\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{b_n}{2^n} = \sum_{n=1}^{n_0} \frac{b_n}{2^n} = \sum_{n=1}^{n_0-1} \frac{c_n}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n_0}} = \frac{r_1}{2^2} + \frac{r_2}{2^3} + \cdots + \frac{r_{n_0-1}}{2^{n_0}} + \frac{1}{2^{n_0}}.$$

Se $\mathrm{N}=i$, para algum $i=1,2,\cdots,n_0-1$ em (1), $b_n = \frac{1}{2}a_n$ para $n<i$ e $b_i=1$

$$\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{b_n}{2^n} = \sum_{n=1}^{i} \frac{b_n}{2^n} = \sum_{n=1}^{i-1} \frac{a_n}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^i} = \frac{r_1}{2^2} + \frac{r_2}{2^3} + \cdots + \frac{r_{i-1}}{2^i} + \frac{1}{2^i}$$

então, $\mathrm{N}=i$ em (2) e $b_n = \frac{1}{2}c_n$ para $n<i$ e $b_i=1$

$$\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{b_n}{2^n} = \sum_{n=1}^{i} \frac{b_n}{2^n} = \sum_{n=1}^{i-1} \frac{c_n}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^i} = \frac{r_1}{2^2} + \frac{r_2}{2^3} + \cdots + \frac{r_{i-1}}{2^i} + \frac{1}{2^i}.$$

Se $\mathrm{N}=n_0$ em (1), $b_n = \frac{1}{2}a_n$ para $n<n_0$ e $b_{n_0}=1$

$$\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{b_n}{2^n} = \sum_{n=1}^{n_0} \frac{b_n}{2^n} = \sum_{n=1}^{n_0-1} \frac{a_n}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n_0}} = \frac{r_1}{2^2} + \frac{r_2}{2^3} + \cdots + \frac{r_{n_0-1}}{2^{n_0}} + \frac{1}{2^{n_0}}$$

então, $\mathrm{N}=\infty$ em (2) , $b_n = \frac{1}{2}c_n$

$$\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{b_n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{2^{n+1}} = \frac{r_1}{2^2} + \frac{r_2}{2^3} + \cdots + \frac{r_{n_0-1}}{2^{n_0}} + \frac{0}{2^{n_0+1}} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n_0+1}}$$

$$= \frac{r_1}{2^2} + \frac{r_2}{2^3} + \cdots + \frac{r_{n_0-1}}{2^{n_0}} + \frac{1}{2^{n_0}}.$$

Mostremos que $\boldsymbol{f}$ é constante em cada intervalo contido no complemento do conjunto de Cantor **C**.

Seja $\left(\frac{a}{3^{n_0}}, \frac{a+1}{3^{n_0}}\right)$ um intervalo retirado de $[0,1]$ no n_0-ésimo passo na formação do conjunto de Cantor. Sejam $x, y \in \left[\frac{a}{3^{n_0}}, \frac{a+1}{3^{n_0}}\right]$. Sabemos que $\frac{a}{3^{n_0}}$ pode ser escrito como $\frac{r_1}{3}+\frac{r_2}{3^2}+\cdots+\frac{r_{n_0}}{3^{n_0}}$, com $r_i \in \{0,1,2\}$ para $i = 1,2,\cdots,n_0$.

Então, $\frac{a+1}{3^{n_0}} = \frac{r_1}{3}+\frac{r_2}{3^2}+\cdots+\frac{r_{n_0}+1}{3^{n_0}}$ e $r_{n_0} = 1$.

Assim, $x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{3^n}$ e $y = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{3^n}$ onde $a_n, c_n = r_n$ para $n = 1,2,\cdots,n_0-1$,

$$a_{n_0}, c_{n_0} = 1 \text{ e } a_n, c_n \in \{0,1,2\} \quad \text{para } n > n_0.$$

Portanto, $f(x) = \sum_{n=1}^{\mathrm{N}}\frac{b_n}{2^n} = \frac{r_1}{2^2}+\frac{r_2}{2^3}+\cdots+\frac{r_{n_0-1}}{2^{n_0}}+\frac{1}{2^{n_0}} = f(y)$.

Mostremos que $\boldsymbol{f}$ é monótona em $[0,1]$. Para isto basta mostrar que é crescente em **C**.

Sejam $x, y \in$ **C**, com $x < y$**.** Sabemos que x, y tem expansões ternárias $x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{3^n}$ e $y = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{3^n}$ com $a_n, c_n \in \{0,2\}$.

Seja n_0 tal que $c_{n_0} > a_{n_0}$. Então, $c_{n_0} = 2$ e $a_{n_0} = 0$. Assim, $\mathrm{N}_b, \mathrm{N}_c = \infty$ e,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{2^n} = \frac{a_1}{2^2}+\frac{a_2}{2^3}+\cdots+\frac{a_{n_0-1}}{2^{n_0}}+\frac{0}{2^{n_0+1}}+\frac{a_{n_0+1}}{2^{n_0+2}}+\cdots$$

$$< \frac{a_1}{2^2}+\frac{a_2}{2^3}+\cdots+\frac{a_{n_0-1}}{2^{n_0}}+\frac{2}{2^{n_0+1}}+\frac{c_{n_0+1}}{2^{n_0+2}}+\cdots$$

$$= \frac{c_1}{2^2}+\frac{c_2}{2^3}+\cdots+\frac{c_{n_0-1}}{2^{n_0}}+\frac{2}{2^{n_0+1}}+\frac{c_{n_0+1}}{2^{n_0+2}}+\cdots = f(y).$$

Portanto, $\boldsymbol{f}$ é crescente em **C**.

Mostremos que $\boldsymbol{f}(\mathbf{C}) = [0,1]$.

Seja $y \in [0,1]$. Então existe uma expansão binária de y, ou seja, $y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{2^n}$, onde

$b_n \in \{0,1\}$ para todo n.

Para $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2b_n}{3^n} \in \mathbf{C}$, $f(x) = y$.

Mostremos que $\boldsymbol{f}$ é contínua.

Nós precisamos provar a continuidade somente no conjunto de Cantor $\mathbf{C}$, pois $\boldsymbol{f}$ é constante em cada intervalo de $[0,1] \setminus \mathbf{C}$.

Seja $x \in \mathbf{C}$ e seja $\in > 0$. Existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que $\frac{1}{2^{n_0}} < \varepsilon$.

Tomemos $\delta = \frac{1}{3^{n_0}}$. Então para todo $y \in \mathbf{C}$ tal que $0 < |x - y| < \delta$ nós temos

$|x - y| < \frac{1}{3^{n_0}}$. Logo, se $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$ então, $y = \sum_{n=1}^{n_0-1} \frac{a_n}{3^n} + \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{c_n}{3^n}$, onde $a_n, c_n \in \{0,1,2\}$; e

$$|f(x) - f(y)| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^{n+1}} - \sum_{n=1}^{n_0-1} \frac{a_n}{2^{n+1}} - \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{c_n}{2^{n+1}} \right| = \left| \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{(a_n - c_n)}{2^{n+1}} \right| \le \frac{1}{2^{n_0}} < \varepsilon \ .$$

Portanto, $\boldsymbol{f}$ é contínua.

Capítulo II

INTEGRAL DE RIEMANN GENERALIZADA

Neste capítulo será definida a Integral de Riemann Generalizada, também chamada de Integral "Gauge" ou Integral de Henstock (denotaremos ***R****-Integral). Para isto, definiremos a Integral de Riemann vista nos cursos de Cálculo, pois toda função Riemann integrável é Riemann integrável Generalizada. Daqui para frente será usado o termo "gauge integrável" ou "***R**** **-**integrável" e a integral Riemann Generalizada da função $\boldsymbol{f}$ no intervalo $[a,b]$ será denotada por $\int_a^b f(x)dx$, sem problemas de notação pelo motivo visto acima. Também serão provados o Teorema da Unicidade e o Critério de Cauchy.

Num segundo momento, será enunciado e demonstrado o Teorema Fundamental do Cálculo, estabelecendo assim uma relação muito estreita entre Integral de Riemann Generalizada e Derivada Paramétrica.

Nos últimos subtítulos serão vistos teoremas de Mudança de Variável e os Teoremas de Convergência Monótona e Convergência Dominada, estes últimos muito importantes dentro da Integração de Lebesgue. Faremos ainda um estudo de

Integrais Impróprias e veremos que enquanto existem funções que não são Riemann Integráveis, mas possuem integrais impróprias; o mesmo não ocorre referindo-se a Integral de Riemann Generalizada.

2.1 Integral de Riemann

Seja $[a,b]$ um intervalo fechado em **R**. Uma partição de $[a,b]$ é uma coleção finita de intervalos fechados $[x_{k-1},x_k]$, $k=1,2,...n$; tais que $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$. Escolhemos um número z_k, em cada intervalo $[x_{k-1},x_k]$, que chamaremos "etiqueta". Resultando assim uma "partição etiquetada" $\{z_k,[x_{k-1},x_k];k=1,2,...,n\}$ do intervalo $[a,b]$.

Assim, $\sum_{k=1}^{n} f(z_k)(x_k - x_{k-1})$ é uma soma de Riemann da função $\boldsymbol{f}$ no intervalo $[a,b]$. O número **A** $\in$ **R** é a Integral de Riemann de $\boldsymbol{f}:[a,b]\to \mathbf{R}$ se para todo $\varepsilon > 0$, existe um número $\delta > 0$ tal que, se $\{z_k,[x_{k-1},x_k];k=1,2,...,n\}$ é uma partição etiquetada do intervalo $[a,b]$ com $0 < x_k - x_{k-1} < \delta$ para $k=1,2,...,n$ então,

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(z_k)(x_k - x_{k-1}) - A\right| < \varepsilon.$$

2.2 Medidor

Para definirmos a “Integral de Riemann Generalizada”, precisamos de um medidor conforme definição abaixo; sendo que este medidor tanto pode ser uma coleção de intervalos abertos, como uma função estritamente positiva .

Vamos definir um **medidor g** do intervalo $[a,b]$ da seguinte forma: para cada $p \in [a,b]$ escolhemos um intervalo aberto $\gamma(p)$ que contém p no centro. Dizemos que uma partição etiquetada $\{z_k, [x_{k-1}, x_k]; k = 1,2,...,n\}$ de $[a,b]$ é γ-fina se para cada $k = 1,2,...,n$ o intervalo $[x_{k-1}, x_k]$ é um subconjunto do intervalo $\gamma(z_k)$.

Podemos também definir um medidor **d** em um intervalo $[a,b]$ como uma função estritamente positiva, cujo domínio é o intervalo $[a,b]$. Fazendo $\gamma(x) = (x - \delta(x), x + \delta(x))$ para cada x em $[a,b]$, verificamos a equivalência entre essas duas definições.

Vimos que existe uma relação muito estreita entre medidores em intervalos e partições etiquetadas de intervalos. Neste sentido formalizaremos o seguinte resultado:

Proposição: Dado um medidor qualquer **g** em $[a,b]$, existe uma partição etiquetada em $[a,b]$ que é γ-fina.

Prova: Seja γ um medidor em $[a,b]$ e seja o conjunto $\mathbf{E} = \{x \in (a,b] : existe\, uma$ *partição etiquetada de* $[a,x]$ *que é* γ- *fina*$\}$. $\mathbf{E}$ não é vazio pois pegando $x \in \gamma(a)$ com $a < x$, etiquetamos $[a,x]$ com a. O resultado é uma divisão etiquetada γ-fina de $[a,x]$.

Seja $y = \sup \mathbf{E}$. Existe $x \in \mathbf{E}$ tal que $x \in \gamma(y)$ e $x < y$. Pela definição do conjunto $\mathbf{E}$, existe uma divisão etiquetada γ-fina de $[a,y]$. Então $y \in \mathbf{E}$.

Vamos provar que $y = b$. Suponhamos que $y < b$. Assim o conjunto $\gamma(y) \cap (y,b) \neq \emptyset$. Seja $w \in \gamma(y) \cap (y,b)$. Adjacente a alguma divisão etiquetada de $[a,y]$ que é γ-fina tem-se o intervalo $[y,w]$ etiquetado com y. Então $w \in \mathbf{E}$, mas $w > y$ contrariando a suposição de que $y = \sup \mathbf{E}$. Como $b \geq y$, $y = b$.

2.3 Integral de Riemann Generalizada

Seja $\boldsymbol{f}$ uma função real definida no intervalo $[a,b]$. O número $\mathbf{I}$ é a integral $\boldsymbol{R}$* de $\boldsymbol{f}$ em $[a,b]$ se, dado $\varepsilon > 0$, existe um medidor γ tal que, se $\{z_k, [x_{k-1}, x_k]; 1 \leq k \leq n\}$ é uma partição etiquetada γ-fina de $[a,b]$, então

$$\left| \mathrm{I} - \sum_{k=1}^{n} f(z_k)(x_k - x_{k-1}) \right| < \varepsilon.$$

Denotaremos por $\boldsymbol{R}^*([a,b])$ o conjunto das funções que são $\boldsymbol{R}^*$-*i*ntegráveis no intervalo $[a,b]$ e $\mathbf{I} = \int_a^b f(x)dx$, não havendo problema com esta notação pois toda função que é Riemann integrável em $[a,b]$ é $\boldsymbol{R}^*$-integrável em $[a,b]$. De fato, seja $\boldsymbol{f}:\ [a,b] \to \mathbf{R}$ e **A** sua integral de Riemann. Assim, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $\{z_k, [x_{k-1}, x_k]; k = 1,2,\ldots,n\}$ é uma partição etiquetada de $[a,b]$ com $0 < x_k - x_{k-1} < \delta$ para $k = 1,2,\ldots,n$ então, $\left|\sum_{k=1}^{n} f(z_k)(x_k - x_{k-1}) - A\right| < \varepsilon$.

Logo existe um medidor δ, $\delta(x) = \delta$ constante.

Portanto, $\boldsymbol{f}$ é R^*-integrável.

A seguir trabalharemos com uma função que é $\boldsymbol{R}^*$-integrável, porém não é Riemann integrável. Com a afirmação provada anteriormente, e o referido exemplo, percebe-se que ampliamos nosso campo de trabalho, ou seja, o conjunto de funções integráveis, passando de Riemann para Riemann Generalizada, sem que fosse necessária uma grande teoria prévia.

Exemplo: Seja a função $\boldsymbol{f}$: $[0,1] \to \mathbf{R}$ dada por $f(x) = 1$ para x racional e $f(x) = 0$ para x irracional. Vamos mostrar que $\boldsymbol{f} \in R^*([0,1])$.

Seja $\varepsilon > 0$ e seja $\{r_k\}_{k \ge 1}$ uma enumeração dos racionais do intervalo $[0,1]$. Definamos o medidor **g** da seguinte maneira:

$$\gamma(r_i) = \left(r_i - \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}, r_i + \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} \right) \text{ para } i = 1,2,\ldots \quad \text{e}$$

$$\gamma(x) = (-1,2) \text{ para } x \text{ irracional.}$$

Seja $\{z_k, [x_{k-1}, x_k]; 1 \le k \le n\}$ uma partição etiquetada γ-fina. de $[0,1]$.

Se z_k for racional, $z_k = r_i$ para algum i natural e então

$$[x_{k-1}, x_k] \subset \gamma(z_k) = \quad \gamma(r_i) = \left(r_i - \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}, r_i + \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}\right).$$

Logo, $\quad f(z_k)(x_k - x_{k-1}) = 1(x_k - x_{k-1}) \le \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} - \frac{-\varepsilon}{2^{i+1}} = \frac{\varepsilon}{2^i}$.

Se z_k for irracional, $f(z_k)(x_k - x_{k-1}) = 0(x_k - x_{k-1}) = 0.$

Portanto, reordenando $\{r_k\}_{k\ge 1}$ de forma que os z_k's coincidentes sejam os primeiros termos da seqüência, temos

$$\sum_{k=1}^{n} f(z_k)(x_k - x_{k-1}) \ < \ \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon}{2^k} < \ \varepsilon.$$

Portanto, $\left|0 - \sum_{k=1}^{n} f(z_k)(x_k - x_{k-1})\right| < \varepsilon$ e $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

Esta função não é Riemann integrável porque é sempre descontínua, mas é Lebesgue integrável, tendo em vista que $f \ne 0$ somente num conjunto de medida nula. Veremos mais tarde, no capítulo III, Integral de Lebesgue e medida de conjuntos.

Teorema da Unicidade: Se $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ é ***R****-integrável então sua integral $\int_a^b f$ é única.

Prova: Sejam A = $\int_a^b f$ e B = $\int_a^b f$. Dado $\varepsilon > 0$, existem medidores α e β tais que se $\{z_k, [x_{k-1}, x_k]; 1 \le k \le n\}$ é uma partição etiquetada α-fina de $[a,b]$, então

$\left|\sum_{k=1}^{n} f(z_k)(x_k - x_{k-1}) - A\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ e se $\{z_k, [x_{k-1}, x_k]; 1 \le k \le n\}$ é uma partição β- fina de $[a,b]$, então $\left|\sum_{k=1}^{n} f(z_k)(x_k - x_{k-1}) - B\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Para cada $z \in [a,b]$, seja $\gamma(z) = \alpha(z) \cap \beta(z)$. γ é um medidor em $[a,b]$ pois $\gamma(z)$ é um intervalo aberto, visto que é a intersecção de dois intervalos abertos.

Sabemos também que existe uma partição etiquetada de $[a,b]$, $\{z_k, [x_{k-1}, x_k]; 1 \le k \le p\}$ que é γ-fina. Logo esta partição também é α-fina e β-fina, pois $[x_{k-1}, x_k] \subset \gamma(z_k) \subseteq \alpha(z_k)$ e $[x_{k-1}, x_k] \subset \gamma(z_k) \subseteq \beta(z_k)$.

Assim,

$$
\begin{aligned}
|A - B| &= \left|A - \sum_{k=1}^{p} f(z_k)(x_k - x_{k-1}) + \sum_{k=1}^{p} f(z_k)(x_k - x_{k-1}) - B\right| \\
&\le \left|A - \sum_{k=1}^{p} f(z_k)(x_k - x_{k-1})\right| + \left|B - \sum_{k=1}^{p} f(z_k)(x_k - x_{k-1})\right| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}
$$

Como ε é arbitrário, $A = B$.

Vimos acima um importante resultado válido para funções Riemann integráveis, que é válido também para funções ***R****-integráveis. O próximo resultado a ser demonstrado é o famoso Critério de Cauchy, visto nos cursos de Integral de Riemann. Este critério nos dá condições de decidir se uma função é ***R****-integrável, sem conhecer o valor de sua integral.

Critério de Cauchy: A função $f:[a,b]\to \mathbf{R}$ é ***R****-integrável se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$ existe um medidor γ tal que para quaisquer partições etiquetadas $\{z_k,[x_{k-1},x_k];1\le k\le n\}$ e $\{\hat{z}_k,[\hat{x}_{k-1},\hat{x}_k];1\le k\le m\}$ γ-finas de $[a,b]$ tem-se

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(z_k)(x_k - x_{k-1}) - \sum_{k=1}^{m} f(\hat{z}_k)(\hat{x}_k - \hat{x}_{k-1})\right| < \varepsilon .$$

Prova: Seja $\boldsymbol{f}:[a,b]\to \mathbf{R}$ uma função integrável em $[a,b]$ e $\mathbf{I} = \int_a^b f(x)dx$.

Dado $\varepsilon > 0$, existe um medidor γ em $[a,b]$ tal que se $\{z_k,[x_{k-1},x_k];1\le k\le n\}$ é uma partição etiquetada γ-fina de $[a,b]$ então $\left|\mathrm{I} - \sum_{k=1}^{p} f(z_k)(x_k - x_{k-1})\right| < \varepsilon$.

Sejam $\{z_k,[x_{k-1},x_k];1\le k\le n\}$ e $\{\hat{z}_k,[\hat{x}_{k-1},\hat{x}_k];1\le k\le m\}$ partições etiquetadas γ-finas de $[a,b]$. Assim,

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(z_k)(x_k - x_{k-1}) - \sum_{k=1}^{m} f(\hat{z}_k)(\hat{x}_k - \hat{x}_{k-1})\right| =$$

$$= \left|\mathrm{I} - \sum_{k=1}^{n} f(z_k)(x_k - x_{k-1}) + \sum_{k=1}^{m} f(\hat{z}_k)(\hat{x}_k - \hat{x}_{k-1}) - \mathrm{I}\right|$$

$$\le \left|\mathrm{I} - \sum_{k=1}^{n} f(z_k)(x_k - x_{k-1})\right| + \left|\sum_{k=1}^{m} f(\hat{z}_k)(\hat{x}_k - \hat{x}_{k-1}) - \mathrm{I}\right|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Por outro lado, dado $\varepsilon > 0$, existe um medidor γ tal que para quaisquer partições etiquetadas $\{z_k,[x_{k-1},x_k];1\le k\le n\}$ e $\{\hat{z}_k,[\hat{x}_{k-1},\hat{x}_k];1\le k\le m\}$ γ-finas de $[a,b]$ temos

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(z_k)(x_k - x_{k-1}) - \sum_{k=1}^{m} f(\hat{z}_k)(\hat{x}_k - \hat{x}_{k-1})\right| < \varepsilon$$

Assim, para cada n existe um medidor δ_n tal que se $\{z_k^n, [x_{k-1}^n, x_k^n]; 1 \le k \le p_n\}$ e $\{\hat{z}_k^n, [\hat{x}_{k-1}^n, \hat{x}_k^n]; 1 \le k \le q_n\}$ são partições etiquetadas d_n-finas de $[a,b]$ então,

$$\left| \sum_{k=1}^{p_n} f(z_k^n)(x_k^n - x_{k-1}^n) - \sum_{k=1}^{p_m} f(\hat{z}_k^n)(\hat{x}_k^n - \hat{x}_{k-1}^n) \right| < \frac{1}{n}.$$

Tomemos uma seqüência de medidores da seguinte forma:

$$\begin{aligned} &\gamma_1(z) = \delta_1(z) \\ &\gamma_2(z) = \gamma_1(z) \cap \delta_2(z) \\ &\vdots \\ &\gamma_i(z) = \gamma_{i-1}(z) \cap \delta_i(z) \\ &\vdots \end{aligned}$$

e assim sucessivamente para todo i natural e para todo $z \in [a,b]$.

Para cada n natural, seja $\{z_k^n, [x_{k-1}^n, x_k^n]; 1 \le k \le p_n\}$ uma partição etiquetada γ_n-fina de $[a,b]$. É claro que esta partição também é δ_n-fina pois $\gamma_n(z) \subseteq \delta_n(z)$ para todo $z \in [a,b]$.

A seqüência de somas $\left\{ \sum_{k=1}^{p_n} f(z_k^n)(x_k^n - x_{k-1}^n) \right\}_{n \ge 1}$ é de Cauchy pois dado $\varepsilon > 0$, tomemos $N > 0$ tal que $\frac{1}{N} < \varepsilon$. Sejam i, j números naturais com $i, j \ge N$. Vamos supor que $i < j$. Temos que $\gamma_j(z) \subseteq \gamma_i(z)$. Assim a partição $\{z_k^j, [x_{k-1}^j, x_k^j]; 1 \le k \le p_j\}$ que é γ_j-fina também é γ_i-fina. Portanto,

$$\left| \sum_{k=1}^{p_j} f(z_k^j)(x_k^j - x_{k-1}^j) - \sum_{k=1}^{p_i} f(z_k^i)(x_k^i - x_{k-1}^i) \right| < \frac{1}{i} \le \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

Logo, esta seqüência de somas é convergente pois é uma seqüência de números reais.

Seja $\mathbf{A} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{p_n} f(z_k^n)(x_k^n - x_{k-1}^n)$. Dado $\varepsilon > 0$, tomemos N tal que $\frac{1}{\mathrm{N}} < \frac{\varepsilon}{2}$ e se

$n \geq \mathrm{N}$ então $\left| A - \sum_{k=1}^{p_n} f(z_k^n)(x_k^n - x_{k-1}^n) \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$

Seja $\{z_k, [x_{k-1}, x_k]; 1 \leq k \leq n\}$ uma partição etiquetada γ_N-fina de $[a,b]$.

Então,

$$\left| A - \sum_{k=1}^{n} f(z_k)(x_k - x_{k-1}) \right| =$$

$$= \left| A - \sum_{k=1}^{p_\mathrm{N}} f(z_k^\mathrm{N})(x_k^\mathrm{N} - x_{k-1}^\mathrm{N}) - \sum_{k=1}^{p_\mathrm{N}} f(z_k^\mathrm{N})(x_k^\mathrm{N} - x_{k-1}^\mathrm{N}) + \sum_{k=1}^{n} f(z_k)(x_k - x_{k-1}) \right|$$

$$\leq \left| A - \sum_{k=1}^{p_\mathrm{N}} f(z_k^\mathrm{N})(x_k^\mathrm{N} - x_{k-1}^\mathrm{N}) \right| + \left| \sum_{k=1}^{p_\mathrm{N}} f(z_k^\mathrm{N})(x_k^\mathrm{N} - x_{k-1}^\mathrm{N}) - \sum_{k=1}^{n} f(z_k)(x_k - x_{k-1}) \right|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{\mathrm{N}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Portanto $\boldsymbol{f}$ é $\boldsymbol{R}$*-integrável e $\int_a^b f(x)dx = \mathbf{A}$.

Teorema: Sejam $\boldsymbol{f}$ e $\boldsymbol{g}$ funções R*-integráveis em $[a,b]$. Então,

(a) kf é R*-integrável em $[a,b]$ e $\int_a^b kf = k\int_a^b f$ para todo $k \in \mathrm{R}$;

(b) $f + g$ é R*-integrável em $[a,b]$ e $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$;

(c) se $f \leq g$ quase sempre em $[a,b]$, então $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

Prova: Gordon [7]

Teorema: Seja $f:[a,b]\to \mathrm{R}$. Se $f=0$ quase sempre em $[a,b]$, então f é *R**-integrável em $[a,b]$ e $\int_a^b f=0$.

Prova: Seja $E=\{x\in[a,b]: f(x)\neq 0\}$ e para cada inteiro positivo n, seja $E_n=\{x\in E: n-1\leq |f(x)|\leq n\}$. Estes conjuntos são disjuntos e todos tem medida nula. Para cada n escolhemos um conjunto aberto O_n tal que $E_n\subseteq O_n$ e $\mu(O_n)<\varepsilon/n2^n$.

Definamos um função positiva δ em $[a,b]$ por:

$$\delta(x)=\begin{cases} 1, & x\in[a,b]-E \\ \rho(x,\sim O_n), & x\in E_n \end{cases} .$$

$$\text{onde} \quad \rho(x,\sim O_n)=\inf\{|x-y|: y\in O_n\} .$$

De acordo com Royden[12], definiremos a seguir conjuntos de medida nula. Estes conjuntos serão citados com freqüência no capítulo III (Integral de Lebesgue) e na proposição abaixo.

Definição: Um conjunto **A**$\subset$**R** é um **conjunto de medida nula** se pode ser coberto por uma coleção enumerável de intervalos abertos, cujo tamanho total é arbitrariamente pequeno, isto é, dado $\varepsilon>0$, existe uma seqüência de intervalos abertos $\{\mathrm{I}_n\}_n$ tal que $\mathrm{A}\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathrm{I}_n$ e $\sum_{I=1}^{\infty} l(\mathrm{I}_n)<\varepsilon$.

Uma propriedade é dita acontecer **quase sempre** (abreviatura q.s.) se o conjunto de pontos onde esta propriedade falha acontecer é um conjunto de medida nula.

Dizemos que uma função $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ é **limitada** se existe um número M>0 tal que $|f(x)|<\mathrm{M}$ para todo $x\in[a,b]$.

Proposição: Sejam ***f***, ***g*** funções definidas no intervalo $[a,b]$ tais que ***f-g*** é limitada. Se ***f*** é ***R****-integrável e ***f = g*** quase sempre, então ***g*** é ***R****-integrável e $\int_a^b f = \int_a^b g$.

Prova: Sejam as funções ***f, g***: $[a,b]\to\mathbf{R}$ e M tal que $|f(x)-g(x)|<\mathrm{M}$, para todo $x\in[a,b]$.

Como f é ***R****-integrável, seja $\mathrm{I}=\int_a^b f(x)dx$.

Dado $\varepsilon>0$, existe um medidor γ tal que se $\{z_k,[x_{k-1},x_k];1\le k\le n\}$ é uma partição etiquetada γ-fina de $[a,b]$, então $\left|\mathrm{I}-\sum_{k=1}^{n} f(z_k)(x_k-x_{k-1})\right|<\frac{\varepsilon}{2}$.

O conjunto **D**=$\{x\in[a,b]: f(x)\ne g(x)\}$ é de medida nula. Logo, existe uma coleção enumerável de intervalos abertos $\{\mathrm{I}_n\}_n$ tal que $D\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathrm{I}_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} l(\mathrm{I}_n)<\frac{\varepsilon}{2\mathrm{M}}$.

Vamos definir um medidor β da seguinte maneira :

$\beta(x)=\gamma(x)$, se $x\notin D$ e

$\beta(x)=\mathrm{I}_i\cap\gamma(x)$, com i tal que $x\in\mathrm{I}_i$, se $x\in D$

Seja $\{\hat{z}_k,[\hat{x}_{k-1},\hat{x}_k]_i 1\le k\le m\}$ uma partição etiquetada β-fina de $[a,b]$. Como $\beta(x)\subseteq\gamma(x)$ para todo x, esta partição também é γ-fina.

Portanto,

$$
\begin{aligned}
\left| \mathrm{I} - \sum_{k=1}^{m} g(\hat{z}_k)(\hat{x}_k - \hat{x}_{k-1}) \right| &= \left| \mathrm{I} - \sum_{\substack{k \\ \hat{z}_k \notin D}} g(\hat{z}_k)(\hat{x}_k - \hat{x}_{k-1}) - \sum_{\substack{k \\ \hat{z}_k \in D}} g(\hat{z}_k)(\hat{x}_k - \hat{x}_{k-1}) \right| \\
&= \left| \mathrm{I} - \sum_{\substack{k \\ \hat{z}_k \notin D}} f(\hat{z}_k)(\hat{x}_k - \hat{x}_{k-1}) - \sum_{\substack{k \\ \hat{z}_k \in D}} f(\hat{z}_k)(\hat{x}_k - \hat{x}_{k-1}) + \right. \\
&\qquad \left. + \sum_{\hat{z}_k \in D} f(\hat{z}_k)(\hat{x}_k - \hat{x}_{k-1}) - \sum_{\hat{z}_k \in D} g(\hat{z}_k)(\hat{x}_k - \hat{x}_{k-1}) \right| \\
&\leq \left| \mathrm{I} - \sum_{k=1}^{m} f(\hat{z}_k)(\hat{x}_k - \hat{x}_{k-1}) \right| + \left| \sum_{\substack{k \\ \hat{z}_k \in D}} (f-g)(\hat{z}_k)(\hat{x}_k - \hat{x}_{k-1}) \right|
\end{aligned}
$$

O primeiro termo é menor que $\dfrac{\varepsilon}{2}$ pois a partição $\{\hat{z}_k, [\hat{x}_k, \hat{x}_{k-1}]_i 1 \leq k \leq m\}$ é γ-fina.

De $|f(x) - g(x)| < \mathrm{M}$ para todo $x \in [a,b]$, o segundo termo

$$
\left| \sum_{\substack{k \\ \hat{z} \in D}} (f-g)(\hat{z}_k)(\hat{x}_k - \hat{x}_{k-1}) \right| \leq \left| \sum_{\substack{k \\ \hat{z} \in D}} \mathrm{M}(\hat{x}_k - \hat{x}_{k-1}) \right| = \mathrm{M} \sum (\hat{x}_k - \hat{x}_{k-1})
$$

mas $[\hat{x}_{k-1}, \hat{x}_k] \subset \beta(x) \subseteq \mathrm{I}_i$ e $\sum l(\mathrm{I}_i) < \dfrac{\varepsilon}{2\mathrm{M}}$

Portanto,

$$
\left| \mathrm{I} - \sum_{k=1}^{m} g(\hat{z}_k)(\hat{x}_k - \hat{x}_{k-1}) \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \mathrm{M} \frac{\varepsilon}{2\mathrm{M}} = \varepsilon
$$

e $\displaystyle\int_a^b g(x)dx = \int_a^b f(x)dx$.

2.4 Teorema Fundamental do Cálculo

Existem vários enunciados do Teorema Fundamental do Cálculo com respeito a integral de Riemann. Seguem abaixo alguns destes enunciados.

De acordo com **Spivak** [14], temos:

O Primeiro Teorema Fundamental de Cálculo: Seja $\boldsymbol{f}$ integrável em $[a,b]$, e defina F em $[a,b]$ por $F(x)=\int_a^x f$. Se $\boldsymbol{f}$ é contínua em $c\in[a,b]$, então F é diferenciável em c, e $F'(c)=f(c)$.

O Segundo Teorema Fundamental de Cálculo: Se $\boldsymbol{f}$ é integrável em $[a,b]$ e $f=g'$ para alguma função g, então $\int_a^b f=g(b)-g(a)$.

De acordo com **Marsden** e **J.Hoffman** [10], temos:

Teorema Fundamental de Cálculo: Seja $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ contínua. Então f tem uma antiderivada F e $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$.

De acordo com **Elon Lages Lima** [9]:

Teorema Fundamental do Cálculo: Seja $f:\mathrm{I}\to\mathbf{R}$ contínua no intervalo I. As seguintes afirmações a respeito de uma função $F:\mathrm{I}\to\mathbf{R}$ são equivalentes:

(1) F é uma integral indefinida de f, isto é, existe $a\in\mathrm{I}$ tal que

$$F(x)=F(a)+\int_a^x f(t)dt,\ \text{para todo } x\in\mathrm{I}.$$

(2) F é uma primitiva de f, isto é, $F'(x)=f(x)$ para todo $x\in\mathrm{I}$.

Enunciaremos a seguir o **Teorema Principal** de acordo com **Jack Lamoreaux** e **Gerald Armstrong** [8] que estabelece uma conexão entre derivada paramétrica e Integral de Riemann Generalizada. Sendo que este teorema também é válido para derivada ordinária, visto que derivadas ordinárias são também derivadas paramétricas. **Robert G.Bartle** [2] enuncia este mesmo teorema, porém somente para derivada ordinária, sendo que o chama de **Teorema Fundamental do Cálculo**.

Para demonstrar tal teorema usaremos o seguinte resultado:

Lema: Seja F definida no intervalo $[a,b]$. Se F tem derivada paramétrica f com representação paramétrica ϕ em $[c,d]$ então, dado $p \in [c,d]$ e $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $p - \delta < s < t < p + \delta$, então

$$\left| F(\phi(t)) - F(\phi(s)) - f(\phi(p))(\phi(t) - \phi(s)) \right| < \varepsilon(t - s).$$

Prova: Seja $F : [a,b] \to \mathbf{R}$ e $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ sua derivada paramétrica com representação paramétrica $\phi : [c,d] \to [a,b]$.

Dado $p \in [c,d]$, pela definição de derivada paramétrica temos que $(F \circ \phi)'(p) = f(\phi(p))\phi'(p)$. Aplicando a definição de derivada ordinária nos dois lados desta igualdade obtemos,

$$\lim_{t \to p} \frac{(F \circ \phi)(t) - (F \circ \phi)(p)}{t - p} = f(\phi(p)) \lim_{t \to p} \frac{\phi(t) - \phi(p)}{t - p}$$

o que implica que,

$$\lim_{t \to p} \left[\frac{F(\phi(t)) - F(\phi(p))}{t - p} - f(\phi(p)) \frac{\phi(t) - \phi(p)}{t - p} \right] = 0$$

Dado $\varepsilon > 0$, pela definição de limite, existe $\delta = \delta(\varepsilon, p) > 0$ tal que se $0 < t - p < \delta$, então,

$$\left|\frac{F(\phi(t))-F(\phi(p))}{t-p}-f(\phi(p))\frac{\phi(t)-\phi(p)}{t-p}\right|<\varepsilon$$

ou seja,

$$\left|\ F(\phi(t))-F(\phi(p))-f(\phi(p))[\phi(t)-\phi(p)]\ \right|<\varepsilon(t-p).$$

Sejam t, s tais que $p-\delta<s<t<p+\delta$.

Assim,

$$\left|F(\phi(t))-F(\phi(s))-f(\phi(p))(\phi(t)-\phi(s))\right|=$$
$$=\left|F(\phi(t))-F(\phi(p))-f(\phi(p))(\phi(t)-\phi(p))-F(\phi(s))+F(\phi(p))+f(\phi(p))(\phi(s)-\phi(p))\right|$$

$$\leq\left|F(\phi(t))-F(\phi(p))-f(\phi(p))(\phi(t)-\phi(p))\right|+\left|F(\phi(p))-F(\phi(s))-f(\phi(p))(\phi(p)-\phi(s))\right|$$

$$<\varepsilon(t-p)+\varepsilon(t-s)=\varepsilon(t-p+p-s)=\varepsilon(t-s)$$

Observação: O Teorema Fundamental de Cálculo para Integral de Riemann Generalizada, pode ser enunciado e demonstrado através de uma equivalência entre duas afirmações matemáticas, pois a Derivada Paramétrica e a Integral ***R****** permitem eliminar a hipótese de continuidade do Teorema segundo Elon Lages Lima.

Teorema Fundamental do Cálculo: Seja f uma derivada paramétrica de F no intervalo $[a,b]$. Então f é ***R****-integrável em $[a,b]$ e $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$.

Prova: Seja F uma função definida no intervalo $[a,b]$ e f sua derivada paramétrica. Seja ϕ uma representação paramétrica em $[c,d]$, ou seja, $\phi:[c,d]\to[a,b]$ é uma função derivável, estritamente crescente e $F\circ\phi$ é derivável. ϕ é um homeomorfismo, logo ϕ^{-1} existe e é contínua.

Dado $\varepsilon > 0$ e $x \in [a,b]$. Seja $p = \phi^{-1}(x) \in [c,d]$. Conforme o lema acima, existe $\delta = \delta\left(p, \varepsilon\big/_{d-c}\right)$ tal que, se $p - \delta < s < t < p + \delta$ então,

$$\left|F(\phi(t)) - F(\phi(s)) - f(\phi(p))(\theta(t) - \phi(s))\right| < \frac{\varepsilon}{d-c}(t-s).$$

Como ϕ^{-1} é contínua, existe $\delta_1 = \delta_1(x) > 0$ tal que se $|x_1 - x| < \delta_1$ então, $\left|\phi^{-1}(x_1) - p\right| < \delta$.

Para cada x, obtemos um $\delta_1(x) > 0$. Definimos um medidor γ em $[a,b]$ dado por $\gamma(x) = (x - \delta_1(x), x + \delta_1(x))$.

Seja $\{z_i, [x_{i-1}, x_i] : 1 \le i \le n\}$ uma partição etiquetada γ-fina de $[a,b]$. Como $[x_{i-1}, x_i] \subseteq \gamma(z_i)$, $x_{i-1}, x_i \in (z_i - \delta_1(z_i), z_i + \delta_1(z_i))$, ou seja, $|x_i - z_i| < \delta_1(z_i)$ e $|x_{i-1} - z_i| < \delta_1(z_i)$. Definindo c_i e t_i por $c_i = \phi^{-1}(z_i)$ e $t_i = \phi^{-1}(x_i)$, para $1 \le i \le n$, temos que $\left|\phi^{-1}(x_i) - \phi^{-1}(z_i)\right| < \delta(c_i)$ e $\left|\phi^{-1}(x_{i-1}) - \phi^{-1}(z_i)\right| < \delta(c_i)$, ou seja, $|t_i - c_i| < \delta(c_i)$ e $|t_{i-1} - c_i| < \delta(c_i)$. Mas $x_{i-1} < x_i$, logo $t_{i-1} < t_i$ pois ϕ é estritamente crescente, e portanto $c_i - \delta(c_i) < t_{i-1} < t_i < c_i + \delta(c_i)$. Assim, pelo lema

$$\left|F(\phi(t_i)) - F(\phi(t_{i-1})) - f(\phi(c_i))(\theta(t_i) - \phi(t_{i-1}))\right| < \frac{\varepsilon}{d-c}(t_i - t_{i-1}).$$

Portanto,

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(z_i)(x_i - x_{i-1}) - (F(b) - F(a))\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} f(z_i)(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n}\left(F(x_i) - F(x_{i-1})\right)\right|$$

$$= \left|\sum_{i=1}^{n}\left\{F(x_i) - F(x_{i-1}) - f(z_i)(x_i - x_{i-1})\right\}\right|$$

$$= \left|\sum_{i=1}^{n}\left\{F(\phi(t_i)) - F(\phi(t_{i-1})) - f(\phi(c_i))(\phi(t_i) - \phi(t_{i-1}))\right\}\right|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \left| F(\phi(t_i)) - F(\phi(t_{i-1})) - f(\phi(c_i))(\phi(t_i) - \phi(t_{i-1})) \right|$$

$$< \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{d-c}(t_i - t_{i-1}) = \frac{\varepsilon}{d-c}(d-c) = \varepsilon .$$

2.5 Mudança de Variável

De acordo com Bartle [2], enunciaremos dois teoremas que tornam válida a "Fórmula da Substituição". O primeiro dos teoremas demonstra-se aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo, enquanto que o segundo necessita de uma demonstração mais elaborada.

Teorema: Seja $\varphi : [a,b] \to \mathbf{R}$ uma função diferenciável em $\mathrm{I} := [a,b]$ e seja F diferenciável em $\varphi(\mathrm{I})$. Se $f(x) = F'(x)$ para todo $x \in \varphi(\mathrm{I})$, então

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f = \int_a^b (f \circ \varphi)\varphi' .$$

Prova: Como $\varphi : [a,b] \to \mathbf{R}$ é diferenciável e F é diferenciável em $\varphi([a,b])$, pela regra de cadeia, $(F \circ \varphi)'(x) = F'(\varphi(x))\varphi'(x)$ para todo $x \in [a,b]$.

Seja $f(x) = F'(x)$ para todo $x \in \varphi([a,b])$.

Assim, aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo

$$\int_a^b (f \circ \varphi)(x)\varphi'(x)dx = \int_a^b (F'(\varphi(x)))\varphi'(x)dx$$

$$= \int_a^b (F\circ\varphi)'(x)dx = (F\circ\varphi)(b) - (F\circ\varphi)(a)$$

$$= F(\varphi(b)) - F(\varphi(a))$$

$$= \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} F'(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx$$

Teorema: Seja φ uma função diferenciável e estritamente crescente definida no intervalo $[a,b]$. Então ***f*** é ***R****-integrável em $\varphi([a,b]) = [\varphi(a),\varphi(b)]$ se, e somente se, $(f\circ\varphi)\varphi'$ é ***R****-integrável em $[\varphi(a),\varphi(b)]$

Neste caso, $\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f = \int_a^b (f\circ\varphi)\varphi'$.

2.6 Integrais Impróprias

Existem exemplos importantes de funções que não são Riemann integráveis num determinado intervalo $[a,b]$, mas possuem integral imprópria. É o caso da função $\boldsymbol{f} : [a,b] \to \mathbf{R}$ dada por $f(0) = 0$ e $f(x) = 1/\sqrt{x}$ para $0 < x \le 1$.

Esta função não é Riemann integrável, mas

$$\lim_{s\to 0} \int_s^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{s\to 0} 2\sqrt{x}\ \Big|_s^1 = \lim_{s\to 0} 2 - 2\sqrt{s} = 2.$$

Além disso, esta função é ***R****-integrável em $[0,1]$.

Provemos então este fato:

Dado $\varepsilon > 0$, seja o medidor γ de $[0,1]$ dado por

$$\gamma(0) = \left(\frac{-\varepsilon^2}{16}, \frac{\varepsilon^2}{16} \right) \quad \text{e}$$

$$\gamma(z) = \left(z - \frac{\varepsilon z \sqrt{z}}{4}, z + \frac{\varepsilon z \sqrt{z}}{4} \right) \text{para} \quad 0 < z \le 1.$$

A definição do medidor γ é proveniente da seguinte análise:

A área da faixa limitada entre $x = u$ e $x = v$ é $2\sqrt{v} - 2\sqrt{u}$. Vamos então analisar o erro quando aproximamos $2\sqrt{v} - 2\sqrt{u}$ por $f(z)(v-u)$ com $u \le z \le v$. Como $f(0)=0$ e $f(z) = 1/\sqrt{z}$ para $0 < z \le 1$, define-se $\gamma(z) \subseteq (0,\infty)$ quando $0 < z \le 1$. Assim o primeiro intervalo da partição $[0, x_1]$ tem etiqueta $z_1 = 0$. Logo o erro entre $x = 0$ e $x = x_1$ é de $2\sqrt{x_1}$. Fazemos com que este erro fique muito pequeno escolhendo $\gamma(0)$ adequado, pois $[0, x_1] \subseteq \gamma(0)$. Também o número de faixas não é previsível, por isso o erro em cada faixa deve ser estimado de maneira que a soma dos erros possa ser controlada. Assim,

$$\begin{aligned}
\left| 2\sqrt{v} - 2\sqrt{u} - \frac{1}{\sqrt{z}}(v-u) \right| &= \left| 2\left(\sqrt{v} - \sqrt{u}\right) - \frac{1}{\sqrt{z}}\left(\sqrt{v} - \sqrt{u}\right)\left(\sqrt{v} + \sqrt{u}\right) \right| \\
&= \left| \left(\frac{\sqrt{v} - \sqrt{u}}{\sqrt{z}} \right)\left(2\sqrt{z} - \sqrt{v} - \sqrt{u}\right) \right| \\
&= \left| \left(\frac{v-u}{\sqrt{z}\left(\sqrt{u} + \sqrt{v}\right)} \right)\left(2\sqrt{z} - \sqrt{v} - \sqrt{u}\right) \right|
\end{aligned}$$

Temos que $1 \le \dfrac{\sqrt{v} + \sqrt{z}}{\sqrt{z}}$ e $\left|\sqrt{z} - \sqrt{v}\right| = \sqrt{v} - \sqrt{z}$ então, $\left|\sqrt{z} - \sqrt{v}\right| \le \dfrac{(v-z)}{\sqrt{z}}$.

Também, $1 \le \dfrac{\sqrt{v} + \sqrt{z}}{\sqrt{z}}$ e $\left|\sqrt{z} - \sqrt{u}\right| = \sqrt{z} - \sqrt{u}$ então, $\left|\sqrt{z} - \sqrt{u}\right| \le \dfrac{(z-u)}{\sqrt{z}}$.

Assim,

$$\left|2\sqrt{v}-2\sqrt{u}-\frac{1}{\sqrt{z}}(v-u)\right| \le \frac{v-u}{z}\left(\left|\sqrt{z}-\sqrt{v}\right|+\left|\sqrt{z}-\sqrt{u}\right|\right)$$

$$\le \frac{v-u}{z}\left(\frac{v-z+z-u}{\sqrt{z}}\right)=\frac{(v-u)^2}{z\sqrt{z}}\,.$$

Voltando à demonstração:

Como ε é pequeno, podemos supor $\varepsilon < 1$. Assim, $0 \notin \gamma(z)$ quando $z > 0$ pois

$$z-\frac{\varepsilon z\sqrt{z}}{4} > z-\frac{z\sqrt{z}}{4} = z\left(1-\frac{\sqrt{z}}{4}\right) > 0\,.$$

Seja $\{z_k,[x_{k-1},x_k];1\le k\le n\}$ uma partição etiquetada γ-fina de $[0,1]$.

Temos $[0,x_1]\subseteq \gamma(z_1)$. Logo $z_1=0$. Portanto o erro para a primeira faixa é menor que $\frac{\varepsilon}{2}$ pois

$$\left|2\sqrt{x_1}-2\sqrt{x_0}-f(z_1)(v-u)\right| = \left|2\sqrt{x_1}\right| < 2\sqrt{\frac{\varepsilon^2}{16}}=\frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Nas faixas seguintes, entre $x=x_{k-1}$ e $x=x_k$, temos:

$$\left|2\sqrt{x_k}-2\sqrt{x_{k-1}}-f(z_k)(x_k-x_{k-1})\right| = \frac{(x_k-x_{k-1})^2}{z_k\sqrt{z_k}}$$

$$< \frac{(x_k-x_{k-1})}{z_k\sqrt{z_k}}\;\frac{\varepsilon}{2}z_k\sqrt{z_k}$$

$$= \frac{\varepsilon}{2}(x_k-x_{k-1})\,,$$

ou seja, a soma dos erros é menor que $\frac{\varepsilon}{2}$ pois,

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{\varepsilon}{2}(x_k - x_{k-1}) = \frac{\varepsilon}{2}(1 - x_1) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Portanto,

$$\left| 2 - \sum_{k=1}^{n} f(z_k)(x_k - x_{k-1}) \right| < \varepsilon.$$

O teorema seguinte nos diz que sempre que a integral imprópria de uma função ***f*** existe, sua integral também existe no sentido ***R****. Este resultado, observa Bartle em seu artigo, não é válido para integral de Riemann (como vimos no exemplo anterior), nem para Integral de Lebesgue.

Teorema: Seja $\boldsymbol{f}:[a,b]\to \mathbf{R}$ ***R****-integrável em $[s,b]$ para todo $s\in(a,b)$. Então $\int_a^b f$ existe se, e somente se, $\lim_{s\to a}\int_s^b f$ existe. Neste caso, $\int_a^b f = \lim_{s\to a}\int_s^b f$.

Prova: Seja ***f***: $[a,b]\to \mathbf{R}$ uma função ***R****-integrável em $[s,b]$ para todo $s\in[a,b)$.

Dado $\varepsilon>0$, como $\int_a^b f$ existe, seja **g** um medidor em $[a,b]$ tal que $\left|\int_a^b f - \sum_{i=1}^{n} f(z_i)(x_i - x_{i-1})\right| < \frac{\varepsilon}{3}$ sempre que $\{z_i,[x_{i-1},x_i];1\le i\le n\}$ é uma partição etiquetada γ-fina de $[a,b]$.

Tomemos λ tal que $a+\lambda\in\gamma(a)$ e $\lambda < \frac{\varepsilon}{3(|f(a)|+1)}$.

Seja $s\in(a,b)$ tal que $s-a<\lambda$. Então, existe um medidor δ_s tal que

$\left|\int_s^b f - \sum_{i=1}^{m} f(\hat z_i)(\hat x_i - \hat x_{i-1})\right| < \frac{\varepsilon}{3}$ sempre que $\{\hat z_i,[\hat x_{i-1},\hat x_i];1\le i\le m\}$ é uma partição etiquetada δ_s-fina de $[s,b]$.

Definamos γ_s por $\gamma_s(z) = \delta_s(z) \cap \gamma(z)$ para todo $z \in [s,b]$.

Seja $\{z_i, [x_{i-1}, x_i]; 1 \le i \le n\}$ uma partição etiquetada γ_s-fina de $[s,b]$. Então $\{a, [a,s], z_i, [x_{i-1}, x_i]; 1 \le i \le n\}$ é uma partição de $[a,b]$ que é γ-fina pois $\gamma_s(z) \subseteq \gamma(z)$ para $z \in [s,b]$ e $[a,s] \subseteq [a, a+\lambda] \subset \gamma(a)$.

Logo,

$$\left|\int_a^b f - \int_s^b f\right| \le \left|\int_a^b f - f(a)(s-a) - \sum_{i=1}^n f(z_i)(x_i - x_{i-1})\right| +$$

$$+\left|\sum_{i=1}^n f(z_i)(x_i - x_{i-1}) - \int_s^b f\right| + |f(a)(s-a)|$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + |f(a)|\lambda < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + (|f(a)|+1)\lambda$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Portanto, $\lim\limits_{s \to a} \int_s^b f = \int_a^b f$.

Para mostrar a outra parte do teorema, primeiro vamos enunciar e provar o seguinte resultado:

Lema de Saks-Henstock: Seja $\boldsymbol{f} : [a,b] \to \mathbf{R}$ e $\varepsilon > 0$. Se γ é um medidor em $[a,b]$ tal que $\left|\int_a^b f - \sum_{i=1}^n f(z_i)(x_i - x_{i-1})\right| < \varepsilon$ para toda partição etiqueta $\{z_i, [x_{i-1}, x_i]; 1 \le i \le n\}$ γ-fina de $[a,b]$ e se $\int_a^c f$ e $\int_d^b f$ existem para todo intervalo $[c,d] \subseteq [a,b]$. Então $\left|\int_c^d f - \sum_{i=1}^m f(\hat{z}_i)(\hat{x}_i - \hat{x}_{i-1})\right| < 2\varepsilon$ para toda partição etiquetada $\{\hat{z}_i, [\hat{x}_{i-1}, \hat{x}_i]; 1 \le i \le m\}$ γ-fina de $[c,d]$.

Observação: Se $P=\{z_i,[x_{i-1},x_i];1\le i\le n\}$ é uma partição etiquetada de um certo intervalo $[a,b]$ denotaremos por $fL(P)$ a soma $\sum_{i=1}^{n} f(z_i)(x_i - x_{i-1})$.

Prova do Lema: Dado $\varepsilon>0$, sejam γ_1 e γ_2 medidores em $[a,c]$ e $[d,b]$ tais que $\left|\int_a^c f - fL(P_1)\right| < \varepsilon/2$ e $\left|\int_d^b f - fL(P_2)\right| < \varepsilon/2$ para quaisquer partições etiquetadas P_1 e P_2 de $[a,c]$ e $[d,b]$, g_1-fina e g_2-fina, respectivamente. Podemos supor $\gamma_1(z)\subseteq\gamma(z)$ para $z\in[a,c]$ e $\gamma_2(z)\subseteq\gamma(z)$ para $z\in[d,b]$. Fixemos tais partições e seja D uma partição γ-fina de $[c,d]$. Assim $P=P_1\cup P_2\cup D$ é uma partição etiquetada γ-fina de $[a,b]$.

Logo ,

$$\left|\int_c^d f - fL(D)\right| \le \left|\int_a^b f - fL(P)\right| + \left|\int_a^c f - fL(P_1)\right| + \left|\int_d^b f - fL(P_2)\right|$$

$$< \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = 2\varepsilon.$$

Voltando a demonstração do teorema:

Seja $\boldsymbol{f}:[a,b]\to\mathbf{R}$ tal que $\boldsymbol{f}$ é $\boldsymbol{R}$*-integrável em $[s,b]$ para todo $s\in(a,b)$ e tal que $\lim_{s\to a}\int_s^b f$ existe. Dado $\varepsilon>0$, seja a seqüência decrescente de números $\{c_n\}_{n\ge1}$, com $c_0=b$ e $\lim_{n\to\infty} c_n = a$.

Seja γ_1 um medidor em $[c_1,c_0]$ tal que $\left|\int_{c_1}^{c_0} f - fL(D)\right| < \varepsilon/2^2$ quando D é uma γ_1-*fina* participação etiquetada de $[c_1,c_0]$.

Para $n\ge 2$, seja γ_n um medidor em $[c_n,c_{n-2}]$ tal que $\left|\int_{c_n}^{c_{n-2}} f - fL(D)\right| < \varepsilon/2^{n+1}$ quando D é uma participação γ_n-*fina* de $[c_n,c_{n-2}]$.

Definamos γ em $(a,b]$ da seguinte forma:

$$\gamma(z)=\gamma_1(z)\cap(c_1,\infty) \text{ se } z\in(c_1,b]$$

$$\gamma(z)=\gamma_n(z)\cap(c_n,c_{n-2}) \quad \text{se } z\in(c_n,c_{n-1}] \text{ e } n>1.$$

Como $\lim_{n\to\infty} c_n = a$, o medidor γ está definido em $(a,b]$.

Seja $s\in(a,b)$ e seja E uma partição etiquetada γ-*fina de* $[s,b]$.

Para cada $\boldsymbol{n}$, seja E_n o subconjunto de E cujas etiquetas estão em $(c_n,c_{n-1}]$. Somente um número finito de conjuntos E_n são não–vazios, pois E tem um número finito de etiquetas e os E_n´s são disjuntos dois a dois, pois os $(c_n,c_{n-1}]$ são disjuntos dois a dois. Seja I_n a união dos intervalos pertencentes a E_n. Então I_n é um intervalo, pois os intervalos de E_n são adjacentes e fechados.

A partição E é γ-fina em $[s,b]$, logo para cada n, E_n é γ-fina em $(c_n,c_{n-1}]$. Mas pela definição de γ, E_n é γ_n-fina. Também , $\mathrm{I}_1\subseteq(c_1,c_0]$, e $\mathrm{I}_n\subseteq(c_n,c_{n-2})$ quando $n>1$.

Assim, pelo lema concluímos que

$$\left|\int_{\mathrm{I}_n} f - fL(E_n)\right| < 2\frac{\varepsilon}{2^{n+1}} = \frac{\varepsilon}{2^n}$$

Como $fL(E)=\sum_{n=1}^{\infty} fL(E_n)$, temos que

$$\left|\int_s^b f - fL(E)\right| < \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^n}$$

Para completar a definição de γ em $[a,b]$, isto é, definir $g(a)$, usaremos o limite da integral em $[s,b]$.

Seja $\mathrm{A}=\lim_{s\to a}\int_s^b f$.

Escolhemos $\gamma(a)$ tal que $|f(a)(s-a)|<\varepsilon$ e $\left|A-\int_s^b f\right|<\varepsilon$ quando $s\in\gamma(a)$.

Portanto, $|A-fL(D)|<3\varepsilon$ para toda participação etiquetada D de $[a,b]$ que é γ-fina visto que,

$$|A-fL(D)|\le\left|A-\int_s^b f\right|+\left|\int_s^b f-fL(D)\right|+|f(a)(s-a)|<\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon=3\varepsilon$$

Logo , $\int_a^b f=\lim\limits_{s\to a}\int_s^b f$.

A proposição seguinte nos mostra que poderíamos suprir do teorema e do lema acima a hipótese de existência da integral de uma função num subintervalo de um intervalo onde esta função é integrável.

Proposição: Seja $\boldsymbol{f}:[a,b]\to\mathbf{R}$ uma função $\boldsymbol{R}$*-integrável em $[a,b]$. Então $\boldsymbol{f}$ é $\boldsymbol{R}$*-integrável em qualquer intervalo $[c,d]\subseteq[a,b]$.

Prova: Seja $f\in\boldsymbol{R}^*([a,b])$. Dado $\varepsilon>0$, pelo Critério de Cauchy, existe um medidor γ em $[a,b]$ tal que, se P_1 e P_2 são partições γ-finas de $[a,b]$, então $|fL(P_1)-fL(P_2)|<\varepsilon$. Fixemos tais partições.

Seja o intervalo $[c,d]\subseteq[a,b]$ e sejam D_1 e D_2 partições γ-finas de $[c,d]$. Definamos as seguintes partições: S_1 que consiste dos intervalos P_1 à esquerda de c e do intervalo $[x,c]$com etiqueta c, onde x é o maior dos extremos dos intervalos de P_1 tal que $x\le c$. S_2 que consiste dos intervalos de P_1 à direita de d e do intervalo $[d,y]$ com etiqueta d , onde y é o menor dos extremos dos intervalos de P_1 tal que $y\ge d$. Assim, $D_1\cup S_1\cup S_2$ e $D_2\cup S_1\cup S_2$ são partições etiquetadas γ-finas de $[a,b]$.

Portanto,

$$\left| fL(D_1) - fL(D_2) \right| = \left| fL(D_1) + fL(S_1 \cup S_2) - fL(S_1 \cup S_2) - fL(D_2) \right|$$

$$= \left| fL(D_1 \cup S_1 \cup S_2) - fL(D_2 \cup S_1 \cup S_2) \right|$$

$$< \varepsilon.$$

De acordo com Bartle, temos o seguinte teorema:

Teorema de Hake: Uma função $f \in \boldsymbol{R}^*([a,b])$ se, e somente se, $f \in \boldsymbol{R}^*([a,c])$ para todo $c \in (a,b)$ e $\lim\limits_{c \to b} \int_a^c f$ existe em **R**. Neste caso, $\int_a^b f = \lim\limits_{c \to b} \int_a^c f$.

Prova: A demonstração deste teorema é uma aplicação direta do teorema e da proposição vistos anteriormente.

2.7 Teoremas de Convergência

Os teoremas de convergência que são válidos para integral de Lebesgue, também são válidos para Integral de Riemann Generalizada. Um resultado fácil de mostrar é a proposição abaixo, as demonstrações dos teoremas seguintes podem ser encontradas em Robert M.McLeod [11].

Proposição: Se $\{f_n\}_{n\geq 1}$ é uma seqüência de funções ***R****-integráveis em $[a,b]$ que converge uniformemente para a função f: $[a,b]\to\mathbf{R}$, então f é ***R****-integrável em $[a,b]$ e $\int_a^b f = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n$.

Prova: Seja ***f***: $[a,b]\to\mathbf{R}$ e $\{f_n\}_{n\geq 1}$ uma seqüência de funções de ***R****$([a,b])$ que converge uniformemente para ***f***.

Para cada número natural n, existe um medidor γ_n em $[a,b]$ tal que, se P_n é uma partição etiquetada γ_n-fina de $[a,b]$ então, $\left|fL(P_n)-\int_a^b f_n\right|<\frac{1}{n}$.

Dado $\varepsilon>0$, existe n_1 tal que $\frac{1}{n_1}<\frac{\varepsilon}{3}$.

Também, existe n_2 tal que para todo $n\geq n_2$, $|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{3(b-a)}$, para todo $x\in[a,b]$.

Tomemos $n_0 = máx\{n_1, n_2\}$.

Seja P uma partição etiquetada γ_{n_0}-fina de $[a,b]$.

Então,

$$\begin{aligned}
\left|fL(P)-\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n\right| &= \left|fL(P)-f_{n_0}L(P)+f_{n_0}L(P)-\int_a^b f_{n_0}+\int_a^b f_{n_0}-\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n\right| \\
&\leq \left|fL(P)-f_{n_0}L(P)\right|+\left|f_{n_0}L(P)-\int_a^b f_{n_0}\right|+\left|\int_a^b f_{n_0}-\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n\right| \\
&= \left|fL(P)-f_{n_0}L(P)\right|+\left|f_{n_0}L(P)-\int_a^b f_{n_0}\right|+\left|\lim_{n\to\infty}\left[\int_a^b f_{n_0}-\int_a^b f_n\right]\right| \\
&= \left|\left(f-f_{n_0}\right)L(P)\right|+\left|f_{n_0}L(P)-\int_a^b f_{n_0}\right|+\left|\lim_{n\to\infty}\int_a^b\left(f_{n_0}-f_n\right)\right| \\
&< \frac{\varepsilon}{3(b-a)}(b-a)+\frac{1}{n_0}+\lim_{n\to\infty}\int_a^b\frac{\varepsilon}{3(b-a)}
\end{aligned}$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3(b-a)}(b-a) = \varepsilon .$$

Logo, $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f$.

Teorema da Convergência Monótona: Seja $\{f_n\}_{n\geq 1}$ uma seqüência de funções em $\boldsymbol{R}^*([a,b])$ que é monótona crescente, isto é,

$$f_1(x) \leq f_2(x) \leq \cdots \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \leq \cdots \quad \text{para todo} \quad x \in [a,b],$$

e seja $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \in \mathbf{R}$ para todo $x \in [a,b]$.

Então $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{R}^*([a,b])$ se, e somente se, $\sup\limits_n \int_a^b f_n < \infty$.

Neste caso , $\int_a^b f = \lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n$.

Teorema da Convergência Dominada: Seja $\{f_n\}_{n\geq 1}$ uma seqüência de funções em $\boldsymbol{R}^*([a,b])$, sejam $g, h \in \boldsymbol{R}^*([a,b])$ tal que $g(x) \leq f_n(x) \leq h(x)$ para todo $x \in [a,b]$,

e seja $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \in \mathbf{R}$ para todo $x \in [a,b]$.

Então, $f \in \boldsymbol{R}^*([a,b])$ e $\int_a^b f = \lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n$.

Capítulo III

INTEGRAL DE LEBESGUE E INTEGRAL DE DENJOY

Este capítulo está em sua totalidade baseado nos livros: Royden [12] e Stanislaw Saks[13]. Os teoremas e proposições enunciados neste capítulo estão demonstrados nestes livros.

Primeiro, faremos um breve estudo das definições e principais resultados que envolvem Integral de Lebesgue no contexto de Análise Real: Álgebra de Conjuntos, Teoria da Medida e Medida de Lebesgue. Citaremos também os três princípios de Littlewood. Num segundo momento, veremos as relações entre Derivada e Integral de Lebesgue. Depois, as definições de função AC, AC*, ACG e ACG*; como também a definição de Integral Denjoy.

Este capítulo tem como objetivo dar sustentação para a conclusão do trabalho no Capítulo IV, tendo em vista que uma das propostas desta dissertação é mostrar que toda função que é Lebesgue Integrável, também é ***R****-integrável.

3.1 Álgebra de Conjuntos

Definição: Seja X um conjunto de números reais. Uma coleção **A** de subconjuntos de X é uma **Álgebra de Conjuntos** se para quaisquer A,B $\in$ **A** temos: $\mathrm{A} \bigcup \mathrm{B} \in$ **A,** $\sim \mathrm{A} \in$ **A** e $\mathrm{A} \bigcap \mathrm{B} \in$ **A**.

Sendo que uma Álgebra de Conjuntos **A** será chamada de **σ-álgebra** se para qualquer seqüência de conjuntos de **A,** $\{A_i\}_i$**,** tem-se que $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ está em **A**.

Dizemos que um conjunto é F_σ se é uma união enumerável de conjuntos fechados e é um G_δ se é uma intersecção enumerável de conjuntos abertos.

Definição: No conjunto de números reais, a **coleção B de conjuntos Borel** é a menor σ - álgebra que contém todos os conjuntos abertos.

3.2 Medida de Lebesgue

Seja A um conjunto de números reais. Consideremos as coleções enumeráveis $\{\mathrm{I}_n\}_{n\geq 1}$ de intervalos abertos tais que $\mathrm{A} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{I}_n$. Chamamos de medida exterior de A, $m^*\mathrm{A}$, o ínfimo das somas dos tamanhos dos intervalos na coleção.

Assim, $m^*A = \inf_{A \subset \bigcup I_n} \sum l(I_n)$.

Definição: Um conjunto E de números reais é chamado **mensurável** se para todo conjunto A nós temos $m^*A = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap \tilde{E})$.

Teorema: A coleção **M** de conjuntos mensuráveis é uma σ - álgebra .

Prova: Royden [12]

Definição: Se E é um conjunto mensurável, a **medida de Lebesgue,** mE, é a medida exterior de E.

Proposição: Seja $\{E_i\}_{i \geq 1}$ uma seqüência de conjuntos mensuráveis.

Então, $m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} mE_i$.

Se os conjuntos E_i são dois a dois disjuntos, então $m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} mE_i$.

Prova: Royden [12]

Proposição: Seja $\{E_n\}_{n \geq 1}$ uma seqüência decrescente de conjuntos mensuráveis, isto é, uma seqüência com $E_{n+1} \subset E_n$ para todo n . Se mE_1 é finita , então

Prova: Royden [12]

Definição: Uma função real estendida f é dita ser **mensurável Lebesgue** se o seu domínio é um conjunto mensurável e se para cada número real α o conjunto $\{x : f(x) > \alpha\}$ é mensurável.

Definição: A função **indicadora** χ_A do conjunto **A** é a função dada por

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & se \;\; x \in \mathrm{A} \\ 0 & se \;\; x \notin \mathrm{A} \end{cases}$$

É claro que χ_A é mensurável se, e somente se, A é mensurável.

Definição: Uma função real **j** é chamada **simples** se é mensurável e assume um número finito de valores. Se **j** é simples e tem valores $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ então,

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{\mathrm{A}_i} \quad \text{onde} \quad \mathrm{A}_i \equiv \{x : \varphi(x) = \alpha_i\}$$

Definição: Um conjunto de números reais é dito **denso** se todo intervalo contem um ponto de D.

As três próximas proposições são formalizações dos **Três Princípios de Littlewood** que podem ser expressados da seguinte forma: Todo conjunto mensurável é quase uma união finita de intervalos; toda função mensurável é quase uma função contínua; toda seqüência convergente de funções mensuráveis é quase uniformemente convergente. Segundo Royden [12], Littlewood afirma que os outros resultados da Análise Real que contém Medida e Integração são aplicações intuitivas destes princípios.

Definição: Dizemos que $g:[a,b]\to\mathbf{R}$ é uma **função escada** se existe uma partição etiquetada $\{\,[\xi_{i-1},\xi_i];i=1,2,\cdots,n\}$ e um conjunto $\{\,c_i;i=1,2,\cdots,n\}\subset\mathbf{R}$ tal que $g(x)=c_i$ para $\xi_{i-1}<x<\xi_i$ com $i=1,2,\cdots,n$.

Proposição: Dado um conjunto E, as seguintes cinco sentenças são equivalentes:

i. E é mensurável;

ii.dado $\varepsilon>0$, existe um conjunto aberto $O\supset E$ com m*(O ~ E)< ε;

iii.dado $\varepsilon>0$, existe um conjunto fechado $F\subset E$ com m*(E ~ F) < ε;

iv.existe um G em G_δ com $E\subset G$, m*(G ~E) = 0;

v.existe um F em F_σ com $F\subset E$, m*(E ~F) = 0;

Prova: Royden [12]

Proposição: Seja $\boldsymbol{f}$ uma função mensurável em $[a,b]$ tal que $\boldsymbol{f}$ é infinita somente num conjunto de medida nula. Então, dado $\varepsilon>0$, existe uma função escada $\boldsymbol{g}$ e uma função contínua $\boldsymbol{h}$ tal que

$$m\{x:|f(x)-g(x)|\geq\varepsilon\}<\varepsilon \quad \text{e} \quad m\{x:|f(x)-h(x)|\geq\varepsilon\}<\varepsilon\ .$$

Prova: Royden [12]

Proposição: Seja E um conjunto mensurável de medida finita, e $\{f_n\}_n$ uma seqüência de funções mensuráveis definidas em E. Seja $\boldsymbol{f}$ uma função real tal que para cada x em E nós temos $f_n(x)\to f(x)$. Então dado $\varepsilon>0$ e $\delta>0$, existe um conjunto mensurável A $\subset$ E com mA<δ e um inteiro N tal que para todo $x\notin$ A e todo $n\geq$ N, $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$.

Prova: Royden [12]

3.3 A Integral de Lebesgue

Seja a função escada $\psi : [a,b] \to \mathbf{R}$ dada por $\psi(x) = c_i$ para $\xi_{i-1} < x < \xi_i$ com $i = 1,2,\cdots,n$ onde os c_i's são constantes e $\{ [\xi_{i-1}, \xi_i]; i = 1,2,\cdots,n\}$ é uma partição de $[a,b]$. A integral de Riemann de ψ é

$$\int_a^b \psi(x)dx = \sum_{i=1}^{n} c_i(\xi_i - \xi_{i-1}).$$

Proposição: Seja f uma função definida e limitada em um conjunto E de medida finita. f é mensurável se, e somente se,

$$\inf_{f \le \psi} \int_E \psi(x)dx = \sup_{f \ge \varphi} \int_E \varphi(x)dx$$ para todas as funções simples φ e ψ .

Prova: Royden [12]

Definição: Seja f uma função limitada mensurável definida em um conjunto E com mE finita, definimos a integral de Lebesgue de f sobre E por

$$\int_E f(x)dx = \inf \int_E \psi(x)dx$$

para toda função simples $\psi \ge f$.

Se ***f*** é uma função não–negativa mensurável definida em um conjunto mensurável E, nós definimos a integral de ***f*** sobre E por

$$\int_E f = \sup_{h \le f} \int_E h$$

onde h é uma função mensurável limitada tal que $m\{x : h(x) \neq 0\}$ é finita.

Definição: Uma função ***f*** mensurável não negativa é chamada **integrável (Lebesgue)** sobre o conjunto mensurável E se $\int_E f < \infty$.

A parte positiva f^+ de uma função ***f*** é dada por $f^+(x) = máx\{f(x), 0\}$.

Similarmente, $f^-(x) = máx\{-f(x), 0\}$

Assim , $f = f^+ - f^-$ e $|f| = f^+ + f^-$.

Definição: Uma função ***f*** mensurável é dita ser **integrável** sobre E se f^+ e f^- são ambas integráveis sobre E . Além disto, $\int_E f = \int_E f^+ - \int_E f^-$.

Teorema de Convergência de Lebesgue: Seja ***g*** integrável sobre E e seja $\{f_n\}_{n \ge 1}$ uma seqüência de funções mensuráveis tal que $|f_n| \le g$ para todo n em E . Se $f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$ para quase todo x em E, então $\int_E f = \lim \int_E f_n$.

Prova: Royden [12]

Teorema: Seja $\{g_n\}_{n\geq 1}$ uma seqüência de funções integráveis que converge q.s. para uma função integrável $\boldsymbol{g}$. Seja $\{f_n\}$ uma seqüência de funções mensuráveis, tais que $|f_n| \leq g_n$ e $\{f_n\}_{n\geq 1}$ converge para $\boldsymbol{f}$ quase sempre.

Se $\int g = \lim_{n\to\infty} \int g_n$, então $\int f = \lim_{nn\to\infty} \int f_n$.

Prova: Royden [12]

3.4 Relação entre Derivada e Integral de Lebesgue

Dizemos que uma coleção de intervalos $\Im$ **cobre um conjunto E no sentido de Vitalli**, se para cada $\varepsilon > 0$ e qualquer x em E existe um intervalo $\mathrm{I} \in \Im$ tal que $x \in \mathrm{I}$ e $l(\mathrm{I}) < \varepsilon$.

Lema (Vitalli): Seja E um conjunto de medida exterior finita e $\Im$ uma coleção de intervalos que cobrem E no sentido de Vitalli. Então dado $\varepsilon > 0$, existe uma coleção disjunta finita $\{\mathrm{I}_1, ..., \mathrm{I}_\mathrm{N}\}$ de intervalos em $\Im$ tal que $m^*\left[\mathrm{E} \sim \bigcup_{n=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{I}_n\right] < \varepsilon$.

Prova: Royden [12]

Teorema: Seja f uma função real crescente no intervalo $[a,b]$. Então $\boldsymbol{f}$ é diferenciável quase sempre. A derivada f' é mensurável, e

$$\int_a^b f'(x)dx \leq f(b) - f(a) \; .$$

Prova: Royden [12]

Definição: Uma função ***f*** é **de variação limitada** em um intervalo I_0 se existe um número finito M tal que $\sum_i |f(b_i) - f(a_i)| < M$ para qualquer seqüência de intervalos não sobrepostos $\{[a_i, b_i]\}$ contida em I_0.

Teorema: Uma função ***f*** é de variação limitada em $[a,b]$ se, e somente se, é a diferença de duas funções reais monótonas em $[a,b]$.

Prova: Royden [12]

Corolário: Se ***f*** é de variação limitada em $[a,b]$, então $f'(x)$ existe para quase todo x em $[a,b]$.

Prova: Royden [12]

Lema: Se ***f*** é Lebesgue Integrável em $[a,b]$, então a função F definida por

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

é uma função contínua de variação limitada em $[a,b]$.

Prova: Royden [12]

Teorema: Seja ***f*** uma função integrável em $[a,b]$, e suponha $F(x) = \int_a^x f(t)dt + F(a)$. Então $F'(x) = f(x)$ para quase todo x em $[a,b]$.

Prova: Royden [12]

Definição: Uma função real $\boldsymbol{f}$ definida em $[a,b]$ é dita ser **absolutamente contínua** se, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para toda coleção finita de intervalos disjuntos $\{(x_i, x_i'), i = 1,2,\cdots n\}$ com $\sum_{i=1}^{n} |x_i' - x_i| < \delta$, tem-se $\sum_{i=1}^{n} |f(x_i') - f(x_i)| < \varepsilon$.

Teorema: Uma função F é uma Integral Indefinida se e somente se é absolutamente contínua.

Prova: Royden [12]

Corolário: Toda função absolutamente contínua é a integral indefinida de sua derivada.

Prova: Royden [12]

3.5 Funções AC, AC*, ACG, ACG*

Definição: Uma função finita $\boldsymbol{F}$ será dita **função absolutamente contínua no sentido amplo** em um conjunto E ou absolutamente contínua em E (**AC**), se dado $\varepsilon > 0$, existe um $\eta > 0$ tal que para toda seqüência de intervalos não sobrepostos $\{[a_k, b_k]\}_{k\geq 1}$ cujos pontos finais pertencem a E, a inequação $\sum_k (b_k - a_k) < \eta$ implica $\sum_k |F(b_k) - F(a_k)| < \varepsilon$.

Definição: Uma função finita $\boldsymbol{F}$ será chamada **função absolutamente contínua generalizada no sentido amplo** num conjunto E, ou simplesmente função absolutamente contínua generalizada em E (**ACG**), se $\boldsymbol{F}$ é contínua em E e se E é a união de uma seqüência finita ou enumerável de conjuntos E_n em cada dos quais $\boldsymbol{F}$ é AC.

Definição: Uma função finita $\boldsymbol{F}$ é dita ser **absolutamente contínua no sentido restrito** em um conjunto limitado E, ou **AC*** em **E**, se $\boldsymbol{F}$ é limitado em um intervalo contendo E e se para cada $\varepsilon > 0$ corresponde um $\eta > 0$ tal que, para toda seqüência finita de intervalos não sobrepostos $\{\mathrm{I}_r\}$ cujos pontos finais pertencem a E, a inequação $\sum_k |\mathrm{I}_k| < \eta$ implica $\sum_k \mathrm{O}(F : \mathrm{I}_k) < \varepsilon$, onde $\mathrm{O}(F : \mathrm{I}_k)$ é a oscilação da função F no intervalo I_k.

Definição: Uma função será dita **absolutamente contínua generalizada** em um conjunto E , ou **ACG*** em E, se a função é contínua em E , e se E pode ser expresso como uma união de uma seqüência de conjuntos limitados E_n em cada um dos quais a função é AC*.

Observação: Quando E é um intervalo, AC* em E coincide com AC e ACG* com ACG.

3.6 Integral de Denjoy

Uma função de uma variável $\boldsymbol{f}$ será chamada **D-integrável** (Denjoy integrável) em um intervalo $\mathrm{I}=[a,b]$ se existe uma função F que é ACG (contínua absolutamente generalizada) em I que tem $\boldsymbol{f}$ por sua derivada aproximada quase sempre. A função F é então chamada **D-integral indefinida** de $\boldsymbol{f}$ em I . Seu incremento $F(\mathrm{I})=F(b)-F(a)$ sobre o intervalo I é chamado **D-integral definida** de $\boldsymbol{f}$ sobre I e é denotado por

$$(D)\int_I f(x)dx \quad \text{ou} \quad (D)\int_a^b f(x)dx\,.$$

Similarmente, uma função $\boldsymbol{f}$ será denominada **D*-integrável** em um intervalo $\mathrm{I}=[a,b]$, se existe uma função F que é ACG* (contínua abasolutamente generalizada no sentido restrito) em E e F tem $\boldsymbol{f}$ por sua derivada ordinária quase sempre. A função F é então chamada **D*-integral indefinida** de $\boldsymbol{f}$ em I_i. A diferença $F(\mathrm{I})=F(b)-F(a)$ é dita **D*-integral definida** de $\boldsymbol{f}$ sobre I e é denotada por

$$(\mathrm{D}^*)\int_I f(x)dx \quad \text{ou por} \quad (\mathrm{D}^*)\int_a^b f(x)dx$$

Para uniformidade de notação, a integral Lebesgue será freqüentemente chamada **L-integral.**

Às integrais **D** e **D*** são freqüentemente dados os nomes de integrais Denjoy no sentido amplo, e no sentido restrito, respectivamente.

As relações fundamentais entre os processos Denjoy e Lebesgue são dados a seguir:

Teoremas

1º - Uma função ***f*** que é D-integrável em um intervalo I é necessariamente também D*-integrável em I e nós temos

$$(\text{D*})\int_I f(x)dx = (\text{D})\int_I f(x)dx$$

2º - Uma função ***f*** que é L-integrável em um intervalo I é necessariamente D*-integrável em I e nós temos

$$(\text{D*})\int_I f(x)dx = (\text{L})\int_I f(x)dx$$

3º - Uma função que é D-integrável e quase sempre não negativa em um intervalo I é necessariamente L–integrável em I .

Capítulo IV

CONCLUSÕES

Estudantes de graduação geralmente estudam Derivada Ordinária e Integral de Riemann. Sabemos porém que estas não são adequadas para matemática avançada pois existem muitas funções que não se enquadram em tais definições. Neste trabalho, vimos que através de simples modificações , podemos obter generalizações destes conceitos.

A função de Cantor $\boldsymbol{f}$ estudada no capítulo I é uma função contínua, não decrescente em $[0,1]$ que é constante em cada intervalo do complemento do conjunto de Cantor **C.** Temos que $\boldsymbol{f}: \mathbf{C} \rightarrow [0,1]$ é sobrejetora, mas não e injetora. Caso fosse injetora, como os conjuntos **C** e $[0,1]$ são compactos (**C** é um subconjunto fechado de um conjunto compacto), $\boldsymbol{f}$ seria um homeomorfismo . Mas **C** é totalmente desconexo e $[0,1]$ é conexo. A função de Cantor $\boldsymbol{f}$ é derivável quase sempre. De acordo com Armstrong [8], esta função pode ser derivável através de uma parametrização. Assim $\boldsymbol{f}$

possuí derivada paramétrica. Bruckner [4] faz uma discussão sobre "criar diferenciabilidade" que ele resume através de alguns teoremas, entre eles o seguinte:

Teorema: Seja F uma função definida em $[0,1]$. Uma condição necessária e suficiente para existir um homeomorfismo sobrejetor de $[0,1]$ nele mesmo tal que $F \circ h$ é derivável é que F seja contínua e de variação limitada.

Aplicando este teorema na função de Cantor, obtemos o seguinte resultado:

Corolário: A função de Cantor $\boldsymbol{f}$ pode ser transformada em uma função com uma derivada limitada.

O reverso do Teorema Fundamental do Cálculo para Integral ***R****, enunciado no Capítulo II, também é verdadeiro segundo Lamoreaux e Armstrong [8]. Para fazerem tal afirmação eles se utilizam do artigo "Parametric differentiation and the Denjoy integral" de G.P.Tolstov . Neste artigo Tolstov prova que uma função F em $[a,b]$ tem uma derivada paramétrica $\boldsymbol{f}$ se, e somente se, é integrável em $[a,b]$ no sentido Denjoy. Se valem também do fato que a Integral de Denjoy é equivalente a integral de Riemann Generalizada de acordo com R. A .Gordon [7]. Ficando então proposto o seguinte teorema:

Teorema Fundamental do Cálculo: Seja a função F: $[a,b] \rightarrow \mathbf{R}$. A função $\boldsymbol{f}$ é uma derivada paramétrica de **F** em $[a,b]$ se, e somente se, $\boldsymbol{f}$ é ***R****-integrável. Neste caso, $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

A função $\mathbf{F}:[0,1] \to \mathbf{R}$ dada por $F(x) = x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x^2}$ para $x \neq 0$ e $F(0)=0$ é derivável em todo o intervalo $[0,1]$. Assim $f = F'$ é ***R****-integrável em $[0,1]$ e aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo $\int_0^1 f(x)dx = F(1) - F(0) = \operatorname{sen}1$. Mas F não é absolutamente contínua em $[0,1]$, logo $f = F'$ não é Lebesgue integrável em $[0,1]$.(Para afirmar que f não é Lebesgue integrável, poderíamos também olhar para $\int_0^1 |f(x)|dx = \infty$). Portanto ***f*** é um exemplo de uma função integrável no sentido Riemann Generalizada, porém não Lebesgue integrável. Temos assim ampliado o nosso conjunto de funções integráveis. Por outro lado, toda função ***R****-integrável cujo valor absoluto tem ***R****-integral finita é Lebesgue integrável. Assim a integral ***R**** acrescenta a ***L*** algumas funções cujos módulo tem integral infinita.

Pode-se mostrar que toda função que é Lebesgue integrável, é *R**-integrável. Utilizando um definição descritiva da integral de Lebesgue dada por Sacks[13] mostra-se que toda função Lebesgue integrável é Denjoy integrável; e de acordo com Gordon [7] mostra-se que integral de Riemann Generalizada é equivalente a Integral de Denjoy.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] ARMSTRONG, G.M., A classical Approach to the Denjoy integral by Parametric Derivatives. London: Math. Soc. 2 (1971 }, 346-349

[2] BARTLE, Robert G., Return to the Riemann Integral. Michigan: Eastern Michigan University, (1996), 625-632.

[3] BOAS, Ralph P., A Primer of Real Functions. New Jersey: The Mathematical Association of America

[4] BRUCKNER, A. M., Creating differentiability and Destroying Derivatives, Amer. Math. Monthly 85 (1980) ,554-562.

[5] BURKILL, J.C. , The Lebesgue Integral. London: The Syndics of the Cambridge University Press, 1951.

[6] GERBAUM, Bernard R., OLMSTED, John M. H. , Counterexamples in Analysis. San Francisco: Holden-day,inc, 1966.

[7] GORDON, R. A . , The Integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron, and Henstock, Amer. Mth. Soc. Providence, RI, 1994.

[8] LAMOREAUX, Jack, ARMSTRONG, Gerald, The Fundamental Theorem of Calculus for Gauge Integrals. Mathematics Magazine (1998), 208-212.

[9] LIMA, Elon Lages, Análise Real. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1989.

[10] MARSDEN, Jerrold E.,HOFFMAN, Michael J., Elementary Classical Analysis. New York:W.H.Freeman and Company, 1993

[11] McLEOD, Robert M., The Generalized Riemann Integral. Ohio: The Mathematical Association of America, 1980.

[12] ROYDEN, H.L. , Real Analysis. New York: Macmillan publishing co., inc, 1968.

[13] SACKS, Stanislaw, Dr., Theory of the Integral. New York: Dover Publications, inc, 1964.

[14] SPIVAK, Michael, Calculus. Houston: Publish or Perish, Inc., 1967.